Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Series de ejercicios resueltos de Dinámica

Juan Ocáriz Castelazo

División de Ciencias Básicas
Departamento de Cinemática y Dinámica

OCÁRIZ CASTELAZO, Juan. *Series de ejercicios resueltos de Dinámica.* México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2010, 177p.

Primera edición, 2010

Impreso y hecho en México.

Prefacio

Las series de ejercicios que hemos elaborado para los alumnos de la materia de Cinemática y Dinámica, pretenden ofrecer una buena variedad de ejercicios completamente resueltos. Los textos de Dinámica que recomiendan los profesores de la asignatura, y que los alumnos conocen, contienen una magnífica selección de problemas modelo, que los autores suelen presentar eficazmente resueltos. El presente trabajo aspira a acrecentar el repertorio y a ser mucho más detallado en los procedimientos.

Los problemas se han reunido conforme a los temas del programa vigente en la Facultad, es decir, en cinco capítulos. En cada capítulo se han ordenado según su grado de dificultad. No hemos querido proponer problemas para que el alumno los resuelva por su cuenta, puesto que los textos a que tiene acceso, ya en la biblioteca, ya en el mercado, contienen abundancia de ellos.

En la elaboración de las resoluciones hemos adoptado algunos criterios que conviene conocer. Se ha procurado no omitir ningún paso, salvo los que puedan ser claramente comprendidos por un estudiante de matemáticas de bachillerato; todos los demás se asientan, a pesar de que puedan alargarse demasiado. Sin embargo, para no hacer farragosa su lectura, hemos suprimido las unidades en el proceso: sólo se asientan en las respuestas. Esto, por otra parte, no debe considerarse una mala costumbre cuando un alumno resuelva problemas por su cuenta.

En muchos de los pasos se da una explicación escrita. A veces, para aclararlo; otras, para recordar un concepto, teorema, ley o principio que pueda no ser fácilmente identificado. El objeto de presentar la resolución es que el alumno entienda lo mejor posible cómo se pasa de los conocimientos conceptuales a la aplicación concreta.

Los diagramas de cuerpo libre, que constituyen un medio imprescindible para la resolución de los problemas cinéticos, se presentan siempre al lado izquierdo de los desarrollos matemáticos. En ellos se muestran sistemáticamente los datos numéricos conocidos, sin unidades. Dibujar un diagrama claro y completo es ya estar en el camino de la solución de los problemas y la mejor herramienta con que se puede contar para llegar a buen fin.

Los sistemas de referencia se muestran siempre con líneas punteadas, de manera que se distingan fácilmente de los vectores, ya sean fuerzas, posiciones, velocidades o aceleraciones.

En los problemas cinéticos se emplean diferentes unidades de fuerza. Se usan sobre todo newton (N), kilogramos (kg) o libras (lb, # en los dibujos); pero también la tonelada métrica (1000 kg), la tonelada corta (2000 lb), la onza (1 oz = 1 lb/16) y el kilopound (1 kip = 1000 lb). Conviene tener en cuenta que el kilogramo (kg) puede ser también unidad de masa, y con frecuencia se utiliza así; aunque algunos textos distinguen mediante un subíndice si se trata de un kilogramo-fuerza o un kilogramo-masa, nosotros no, pues consideramos que el estudiante debe ser capaz de identificar de qué tipo de unidad se trata, o bien, decidir por sí mismo qué desea entender por un kilogramo en los problemas que se le presenten.

Las respuestas se expresan siempre en sistema decimal. Los números se han redondeado a la tercera cifra significativa o, si comienzan con 1, a la cuarta. Con ello se pretende que las respuestas sean lo más breve posible y su precisión sea mayor al 0.2%. Los ángulos se dan en grados sexagesimales con una cifra decimal. Con las respuestas parciales no seguimos este criterio.

Se recomienda al estudiante que, para el aprovechamiento de este material, intente resolver los problemas por su cuenta y luego compare su resolución con la de este libro.

30 de septiembre de 2010

Agradecimientos

Deseo agradecer al Ing. Yukihiro Minami Koyama la revisión del contenido y la resolución de los problemas, así como sus acertadas observaciones al respecto. Y a los señores Omar Salgado Terrones y Abraham González Guillén, alumnos de esta Facultad, la transcripción y los dibujos del texto, pero, sobre todo, su paciencia en la infinidad de correcciones que tuvieron que realizar.

Asimismo, agradezco también la colaboración en el proceso de edición de esta obra a la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad, a la maestra María Cuairán Ruidíaz, jefa de la Unidad, y muy en particular a Elvia Angélica Torres Rojas por la revisión de estilo y cuidado de la edición, sin cuya perspicacia en la corrección de los borradores hubiera sido muy difícil coronar estas series.

El autor

Lista de símbolos

$\overline{a}$	Aceleración (vector aceleración)
a	Aceleración (o magnitud de la aceleración)
a_t	Componente tangencial de la aceleración
a_n	Componente normal de la aceleración
a_x	Componente de la aceleración en dirección del eje de las equis
a_y	Componente de la aceleración en dirección del eje de las yes
a_m	Aceleración media
cm	Centímetro
ft	Pies
h	Horas
i	Vector unitario en dirección del eje de las equis
in	Pulgada
j	Vector unitario en dirección del eje de las yes
k	Vector unitario en dirección del eje de las zetas
k	Radio de giro
$\overline{k}$	Radio de giro centroidal
km	Kilómetro
I	Momento de inercia de la masa de un cuerpo
$\overline{I}$	Momento de inercia de la masa de un cuerpo, respecto de un eje centroidal
L	Logaritmo natural
m	Metro
mm	Milímetro
N	Componente normal o perpendicular de una fuerza
P	Peso de un cuerpo o fuerza de gravedad
$\overline{r}$	Posición (vector)
r	Radio
s	Segundos
s	Posición o distancia
t	Tiempo
ton	Tonelada

$\overline{v}$ Velocidad (vector)
v Velocidad (magnitud) o rapidez
v_m Velocidad media
x Posición o distancia. Eje de referencia
y Posición o distancia. Eje de referencia
z Posición o distancia. Eje de referencia

α (Alfa) Aceleración angular
Δ (Delta) Incremento
Δs Distancia recorrida
$\Delta \overline{r}$ Desplazamiento
μ (My) Coeficiente de fricción
μ_s Coeficiente de fricción estática
μ_k Coeficiente de fricción cinética
π (Pi) Número pi. Razón de la circunferencia al radio
ρ (Ro) Radio de curvatura
ω (Omega) Velocidad angular
\# Libras
′ Pies
′′ Pulgadas

Contenido

3. Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento para la partícula

4. Cinemática del cuerpo rígido

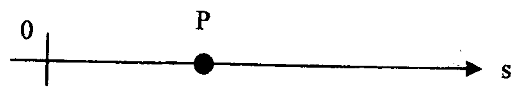
5. Cinética del cuerpo rígido

1. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

1.1 Movimiento rectilíneo

1.1.1 Posición en función del tiempo

1. La posición de una partícula que describe una línea recta queda definida mediante la expresión $s = t^3/3 - 9t + 2$, donde si t está en s, s resulta en m. Determine: *a)* la aceleración de la partícula cuando su velocidad es de 7 m/s; *b)* su velocidad media desde $t = 3$ hasta $t = 6$ s. *c)* Dibuje las gráficas *tiempo-posición*, *tiempo-velocidad* y *tiempo-aceleración* del movimiento de la partícula, durante los primeros seis segundos.



Resolución

Ecuaciones del movimiento

$$s = \frac{1}{3}t^3 - 9t + 2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 9$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t$$

a) Tiempo en que la velocidad es 7 m/s

$$7 = t^2 - 9$$

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

La raíz negativa no tiene significación física en este caso.

Para t = 4

$$a = 2(4)\ ;\ \boxed{a = 8\ \mathrm{m/s^2} \rightarrow}$$

b)

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_6 - s_3}{3}$$

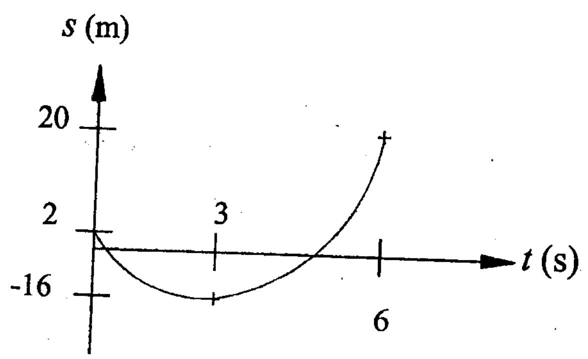
$$s_6 = \frac{1}{3}(6)^3 - 9(6) + 2 = 20$$

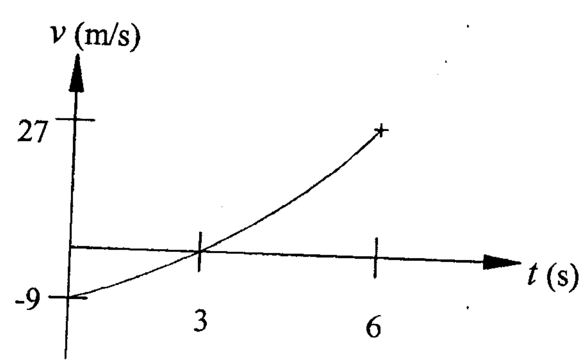
$$s_3 = \frac{1}{3}(3)^3 - 9(3) + 2 = -16$$

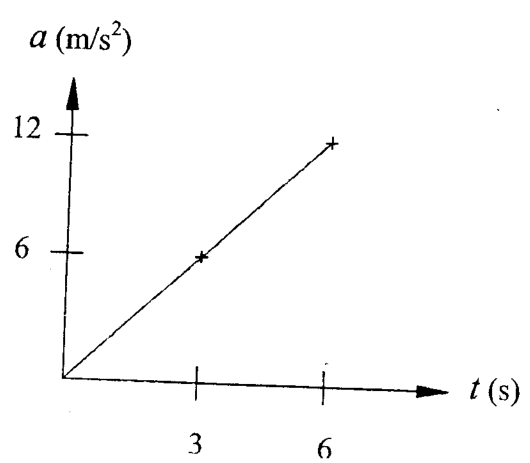
$$v_m = \frac{20-(-16)}{3}\ ;\ \boxed{v_m = 12\ \mathrm{m/s} \rightarrow}$$

c) Tabulación para dibujar las gráficas

t	0	3	6
s	2	-16	20
v	-9	0	27
a	0	6	12

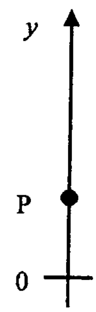






1.1.2 Velocidad en función del tiempo

2. La velocidad de un punto P que se mueve sobre el eje de las ordenadas, que es un eje vertical dirigido hacia arriba, se puede expresar como $v = 6t^2 - 24$, en donde v se da en ft/s y t en s; además, cuando $t = 0$, entonces $y = 6$ ft. Calcule: *a)* la magnitud y la dirección de la aceleración del punto cuando t = 3 s; *b)* el desplazamiento del punto P durante los primeros cuatro segundos; *c)* la longitud que recorre durante ese mismo lapso. *d)* Dibuje esquemáticamente las gráficas del movimiento del punto P.



Resolución

Ecuaciones del movimiento

Como $v = \dfrac{dy}{dt}$

entonces:

$$dy = vdt$$
$$\int dy = \int vdt$$
$$y = \int (6t^2 - 24)dt$$
$$y = \int (6t^2 - 24)dt$$
$$y = 2t^3 - 24t + C$$

Si $t = 0,\ y = 6$

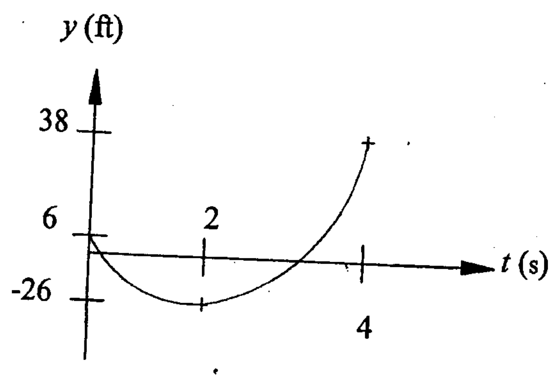
$$6 = C$$

Por tanto:

$$y = 2t^3 - 24t + 6$$
$$v = 6t^2 - 24$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 12t$$

a) Para $t = 3$

$$a = 12(3)\,; \quad \boxed{a = 36\ \mathrm{ft/s^2} \uparrow}$$



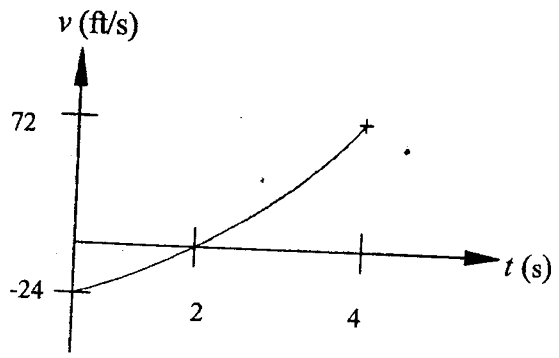
b)

$$\Delta y = y_4 - y_0$$

En donde:

$$y_4 = 2(4)^3 - 24(4) + 6 = 38$$
$$y_0 = 6$$
$$\Delta y = 38 - 6$$

$$\boxed{\Delta y = 32 \text{ ft} \uparrow}$$



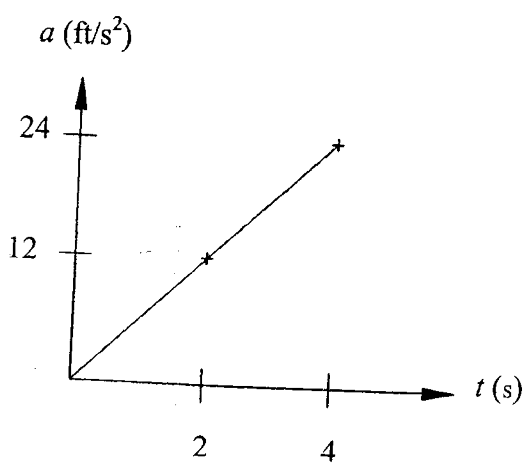
c) Para conocer la distancia que recorre, investigaremos cuando $v = 0$

$$0 = 6t^2 - 24$$
$$t^2 = 4$$
$$t = \pm 2$$

Sólo la raíz positiva tiene significado físico

$$y_2 = 2(2)^3 - 24(2) + 6 = -26$$

Por tanto, la partícula se movió de $y_0 = 6$ a $y_2 = -26$ y luego a $y_4 = 38$

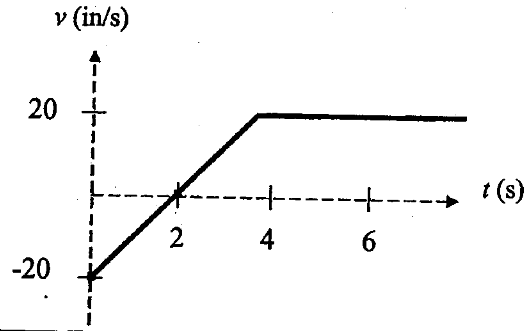


$$D = |\Delta y(0-2)| + |\Delta y(2-4)|$$
$$D = |-26-6| + |38-(-26)| = 32 + 64$$
$$D = 96 \text{ ft}$$

d) Tabulación para dibujar las gráficas

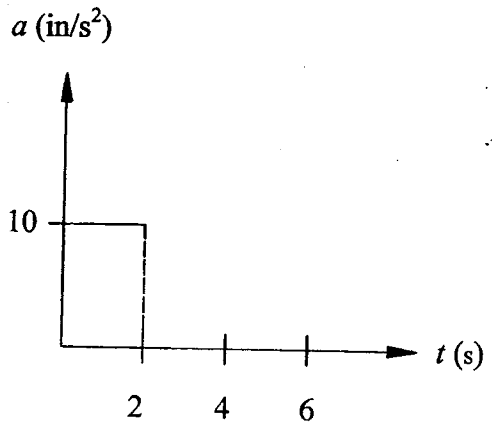
t	0	2	4
y	6	-26	38
v	-24	0	72
a	0	24	48

3. En la figura aparece la gráfica de la magnitud de la velocidad de una partícula en función del tiempo. Se sabe que cuando $t = 0$, la posición de la partícula es $s = +8$ in. Dibuje las gráficas *tiempo-aceleración* y *tiempo-posición* del movimiento de la partícula.

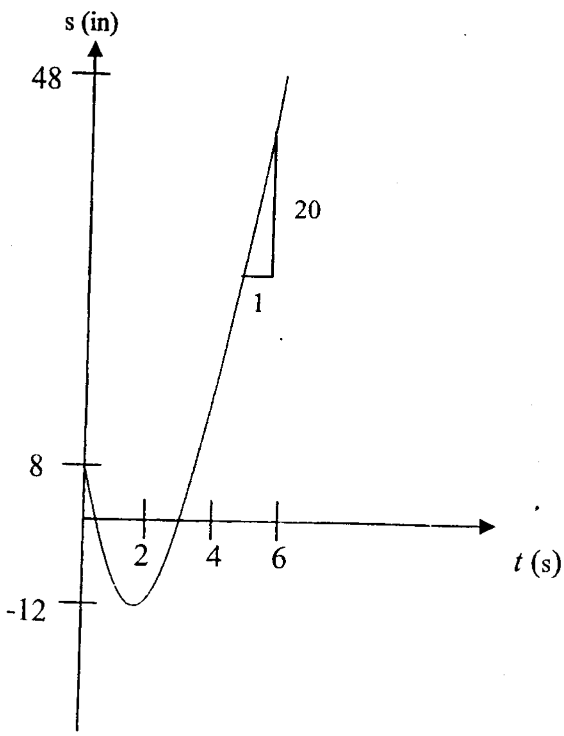


Resolución

La magnitud de la aceleración es igual a la pendiente de la gráfica *tiempo-velocidad*; durante los primeros cuatro segundos es positiva de 40/4 = 10 y después es nula.



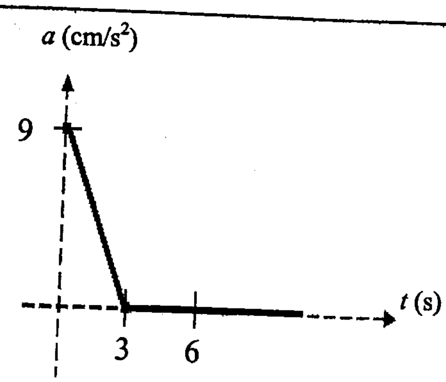
(La gráfica *tiempo-aceleración* puede ser discontinua como en este caso, pero nunca las gráficas *tiempo-velocidad* y *tiempo-posición*).



La gráfica *tiempo-posición* comienza, según los datos, en s = + 8. Desde $t = 0$ hasta $t = 2$, la pendiente de la curva que comienza siendo negativa, va disminuyendo en magnitud hasta hacerse nula: el desplazamiento en ese lapso es igual al área bajo la gráfica *tiempo-velocidad*, es decir 20. De 2 a 4 s el comportamiento de la gráfica es inverso al anterior y cuando $t = 4$, la partícula vuelve a su posición inicial, pues el área acumulada bajo la gráfica *tiempo-velocidad* es cero. De 4 a 6 s, la pendiente es constante, positiva y de 20, por tanto, se trata de una recta.

1.1.3 Aceleración en función del tiempo

4. La gráfica de la figura muestra la magnitud de la aceleración de una partícula que se mueve sobre un eje horizontal dirigido hacia la derecha, que llamaremos $x'x$. Sabiendo que cuando $t = 1$ s, $x = 3$ cm y $v = -4.5$ cm/s, calcule: *a)* la posición de la partícula cuando su velocidad es nula; *b)* su velocidad cuando $t = 3$ s y su posición cuando $t = 5$ s.



Resolución

La partícula se mueve conforme a dos leyes distintas: una de 0 a 3 s y otra de 3 a 6 s.

Ecuaciones del movimiento de 0 a 3 s

$$a = 9 - 3t$$

Pues la ordenada al origen es 9 y la pendiente de la recta es -3.

Como $a = \dfrac{dv}{dt}$, entonces $dv = a\,dt$

$$dv = (9 - 3t)dt$$

$$\int dv = \int (9 - 3t)dt$$

$$v = 9t - 1.5t^2 + C_1$$

Si $t = 1$, $v = -4.5$, conforme a los datos

$$-4.5 = 9(1) - 1.5(1)^2 + C_1 \;; \quad C_1 = -12$$

Por tanto

$$v = 9t - 1.5t^2 - 12$$

Como $v = \dfrac{dx}{dt}$, entonces $dx = v\,dt$

$$dx = (9t - 1.5t^2 - 12)dt$$
$$\int dx = \int (9t - 1.5t^2 - 12)dt$$
$$x = 4.5t^2 - 0.5t^3 - 12t + C_2$$

Si $t = 1, x = 3$

$$3 = 4.5(1)^2 - 0.5(1)^3 - 12(1) + C_2$$
$$C_2 = +11$$
$$x = 4.5t^2 - 0.5t^3 - 12t + 11$$

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento durante los primeros tres segundos son:

$$x = -0.5t^3 + 4.5t^2 - 12t + 11$$
$$v = -1.5t^2 + 9t - 12$$
$$a = -3t + 9$$

a) Investigamos si en algún instante la velocidad es nula

$$-1.5t^2 + 9t - 12 = 0$$

Dividiendo entre -1.5:

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

Factorizando

$$(t - 4)(t - 2) = 0$$
$$t_1 = 4$$
$$t_2 = 2$$

$t_1 = 4$ está fuera del intervalo: en $t_2 = 2$ s, $v = 0$ y en ese instante su posición es:

$$x = -0.5(2)^3 + 4.5(2)^2 - 12(2) + 11$$

$$\boxed{x = 1 \text{ cm}}$$

b) Para t = 3

$$v = -1.5(3)^2 + 9(3) - 12$$

$$\boxed{v = 1.5 \ \mathrm{cm/s}}$$

c) Para investigar la posición en $t = 5$, se necesita la ecuación del movimiento de 3 a 6 s.

$$a = 0$$

$v = 1.5$ (la velocidad que alcanzó a los 3 s)

Si $t = 3$,

$$x = -0.5(3)^3 + 4.5(3)^2 - 12(3) + 11 = 2$$

$$2 = 1.5(3) + C_4$$

$$C_4 = -2.5$$

Por tanto:

$$x = 1.5t - 2.5$$

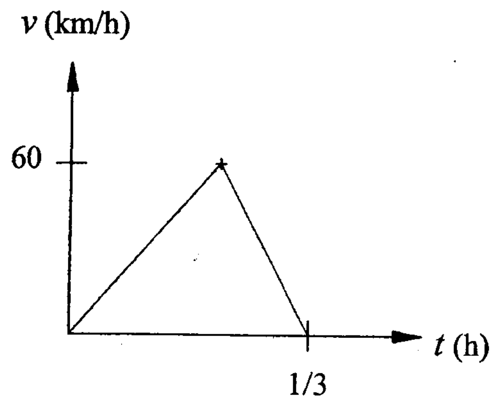
Para $t = 5$

$$x = 1.5(5) - 2.5;$$

$$\boxed{x = 5 \ \mathrm{cm}}$$

1.1.4 Soluciones gráficas

5. Un tren que parte de la estación A aumenta su velocidad uniformemente hasta alcanzar los 60 km/h. A partir de ese instante comienza a frenar, también uniformemente, hasta detenerse en la estación B. Si el viaje dura veinte minutos, ¿cuánto distan las estaciones A y B?



Resolución

Dibujamos la gráfica *tiempo-velocidad*. Como 20 min es igual a 1/3 de hora, 1/3 es el valor de la abscisa.

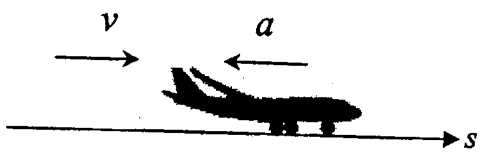
Puesto que $\Delta s = \int v dt$, entonces Δs es igual al área bajo la gráfica.

$$\Delta s = \frac{bh}{2} = \frac{1}{3}(60)\frac{1}{2} \;;$$

$$\boxed{\Delta s = 10 \text{ km}}$$

1.1.5 Aceleración en función de la velocidad

6. La aceleración de un avión que aterriza en una pista a 50 m/s se puede expresar, para un cierto lapso, como $a = -4\ (10)^{-3} v^2$, donde si v está en m/s, a resulta en m/s^2. Determine el tiempo requerido para que el avión reduzca su velocidad a 20 m/s.



Resolución

Como la aceleración está en función de la velocidad y queremos conocer un tiempo, igualamos:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{-4}{1000} v^2 = \frac{dv}{dt}$$

Separando variables

$$\frac{-4}{1000} dt = \frac{dv}{v^2}$$

$$\frac{-1}{250} \int dt = \int \frac{dv}{v^2}$$

$$-\frac{t}{250} = -\frac{1}{v} + C$$

Condiciones iniciales: si $t = 0, v = 50$

$$0 = -\frac{1}{50} + C$$

$$C = \frac{1}{50}$$

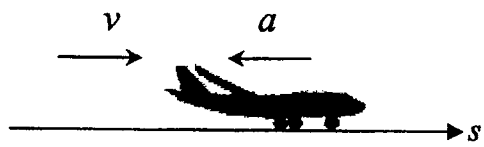
$$-\frac{t}{250} = -\frac{1}{v} + \frac{1}{50}$$

$$t = \frac{250}{v} - 5$$

Para $v = 20$

$$t = \frac{250}{20} - 5 \; ; \quad \boxed{t = 7.5 \text{ s}}$$

7. Calcule la distancia que requiere el avión del problema anterior para reducir su velocidad de 50 a 20 m/s.



Resolución

<u>Primer método</u>

Partiendo de la solución de la ecuación diferencial del problema 6:

$$t = \frac{250}{v} - 5$$

Despejando v e igualando a ds/dt

$$t + 5 = \frac{250}{v}$$

$$v = \frac{250}{t+5}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{250}{t+5}$$

$$\int ds = 250 \int \frac{dt}{t+5}$$

$$s = 250\mathrm{L}(t+5) + C$$

Hacemos s = 0 cuando t = 0

$$0 = 250\mathrm{L}5 + C$$

$$C = -250\mathrm{L}5$$

Por tanto:

$$s = 250\mathrm{L}(t+5) - 250\mathrm{L}5$$

$$s = 250\left[\mathrm{L}(t+5) - \mathrm{L}5\right]$$

Por las propiedades de los logaritmos

$$s = 250\mathrm{L}\frac{t+5}{5}$$

Para t = 7.5 ; $s = 250\,\mathrm{L}\frac{12.5}{5} = 250\,\mathrm{L}2.5$

$$\boxed{s = 229 \ \ \mathrm{m}}$$

Segundo método

Como la aceleración es función de la velocidad y deseamos conocer un desplazamiento, igualamos:

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

$$-\frac{4}{1000}v^2 = v\frac{dv}{ds}$$

$$-\frac{1}{250}v = \frac{dv}{ds}$$

Separando variables

$$-\frac{1}{250}ds = \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{1}{250}\int ds = \int\frac{dv}{v}$$

$$-\frac{s}{250} = \mathrm{L}v + C$$

Si $s = 0$, $v = 50$

$$0 = 50\mathrm{L} + C$$

$$C = -50\mathrm{L}$$

$$-\frac{s}{250} = \mathrm{L}v - \mathrm{L}50$$

$$\frac{s}{250} = -\mathrm{L}v + \mathrm{L}50$$

$$\frac{s}{250} = \mathrm{L}\frac{50}{v}$$

$$s = 250\mathrm{L}\frac{50}{v}$$

Para $v = 20$

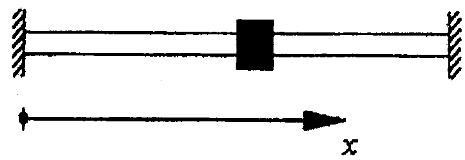
$$s = 250\mathrm{L}\frac{50}{v}$$

$$s = 250\mathrm{L}2.5$$

$$\boxed{s = 229 \text{ m}}$$

1.1.6 Aceleración en función de la posición

8. La magnitud de la aceleración de un collarín que se desliza sobre una barra horizontal se expresa, en función de su posición, como $a = 12\sqrt{x}$, donde a se da en in/s^2 y x en in. Cuando $t = 2$ s, entonces $v = 32$ in/s y $x = 16$ in. Determine la posición, la velocidad y la aceleración del collarín cuando $t = 3$s.



Resolución

Como la aceleración está expresada en función de la posición, se sustituye por $v\dfrac{dv}{dx}$

$$v\frac{dv}{dx} = 12\sqrt{x}$$

Separando variables

$$vdv = 12\sqrt{x}dx$$

$$\frac{v^2}{2} = 12\left(\frac{2}{3}\right)x^{3/2} + C_1 = 8x^{3/2} + C_1$$

Si $x = 16$, $v = 32$ de los datos,

$$\frac{32^2}{2} = 8(16)^{3/2} + C_1$$

$$512 = 512 + C_1 \; ; \; C_1 = 0$$

$$\frac{v^2}{2} = 8x^{3/2}$$

$$v = 4x^{3/4}$$

Sustituimos v por $\dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = 4x^{3/4}$$

Separando variables

$$x^{-3/4}dx = 4dt$$

$$\int x^{-3/4}dx = 4\int dt$$

$$4x^{1/4} = 4t + C_2$$

Si $t = 2, x = 16$, de los datos

$$8 = 8 + C_2 \ ; \ C_2 = 0$$

$$4x^{1/4} = 4t$$

$$x^{1/4} = t$$

$x = t^4$ La ecuación queda resuelta.

Derivando respecto al tiempo

$$v = 4t^3$$

$$a = 12t^2$$

Satisface la ecuación original, ya que si:

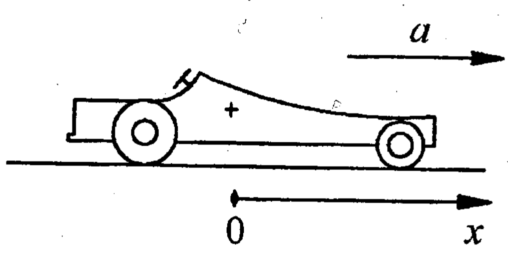
$$x = t^4, \sqrt{x} = t^2, \text{ o sea, } a = 12\sqrt{x}$$

Para $t = 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 81 \text{ in} \rightarrow \\ v = 108 \text{ in/s} \rightarrow \\ a = 108 \text{ in/s}^2 \rightarrow \end{array}}$$

1.2 Movimientos rectilíneos uniforme y uniformemente acelerado

9. El motor de un automóvil de carreras es capaz de imprimirle, durante cierto lapso, una aceleración constante de 5.2 m/s². Si el automóvil está inicialmente en reposo, diga: a) cuánto tiempo le lleva alcanzar una velocidad de 300 km/h; b) qué distancia requiere para ello.



Resolución

Ecuaciones del movimiento

$$a = 5.2$$

$$v = 5.2\int dt = 5.2t$$

$$x = 5.2\int t\,dt = 2.6t^2$$

Las constantes de integración son nulas, pues cuando $t = 0$ tanto v como x son nulas.

a)

$$300\,\mathrm{km/h} = \frac{300}{3.6}\,\mathrm{m/s} = v$$

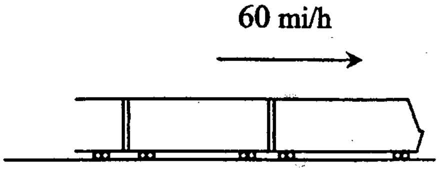
$$\frac{300}{3.6} = 5.2t$$

$$t = \frac{300}{3.6(5.2)} \quad ; \quad \boxed{t = 16.03\ \mathrm{s}}$$

b)

$$x = 2.6(16.03)^2; \quad \boxed{x = 669\ \mathrm{m}}$$

10. Un tren del metro, que viaja a 60 mi/h, emplea 250 ft para detenerse, frenando uniformemente. ¿Cuál es la aceleración del tren mientras frena?



Resolución

$$60\ \mathrm{mi/h} = 88\ \mathrm{ft/s}$$

Como se desea conocer la aceleración a partir de la velocidad y el desplazamiento, empleamos:

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

$$ads = vdv$$

$$a\int ds = \int vdv$$

Puesto que a es constante, queda fuera de la integral.

$$as = \frac{v^2}{2} + C$$

Elegimos como origen el punto en el que comienza a frenar el tren.

Si $s = 0$, $v = 88$

$$0 = \frac{88^2}{2} + C \ ; \ C = -\frac{88^2}{2}$$

$$as = \frac{v^2 - 88^2}{2} \ ; \ a = \frac{v^2 - 88^2}{2s}$$

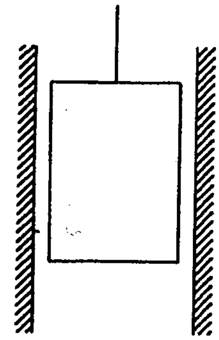
Para $s = 250$ y $v = 0$

$$a = -\frac{88^2}{500} = -15.49$$

El signo indica que tiene sentido contrario al de la velocidad:

$$\boxed{a = 15.49\ \mathrm{ft/s} \leftarrow}$$

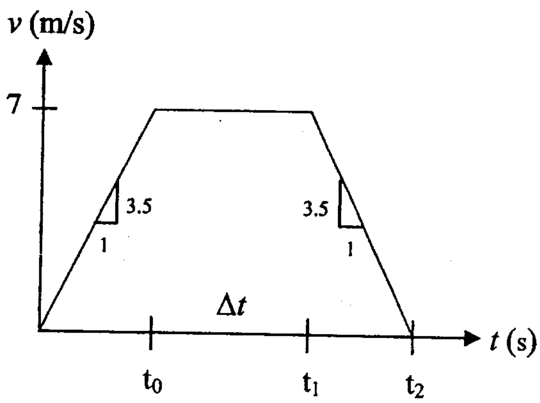
11. Un elevador comercial puede, a lo más, tanto aumentar como disminuir su velocidad a razón de 3.5 m/s². Y la máxima velocidad que puede alcanzar es de 420 m/min. Calcule el tiempo mínimo que necesita para subir quince pisos, partiendo del reposo, si cada piso tiene 5.1 m de altura.



Resolución

Supongamos que el elevador alcanza una velocidad máxima y la mantiene cierto tiempo Δt, como se muestra en la gráfica

$$420\,\text{m/min} = \frac{420}{60}\,\text{m/s} = 7\,\text{m/s}$$



La pendiente de la recta inclinada es 3.5, que es la razón de cambio de la velocidad. Por lo tanto de la gráfica y por semejanza de triángulos:

$$\frac{1}{t_0} = \frac{3.5}{7}\ ; \quad t_0 = 2 = t_2 - t_1$$

El elevador debe desplazarse

$$\Delta y = 15(5.1) = 76.5$$

Tal desplazamiento es igual al área del trapecio en la gráfica

$$\frac{(b+B)h}{2} = \frac{(\Delta t + \Delta t + 4)7}{2} = 76.5$$

$$\frac{14\Delta t + 28}{2} = 76.5$$

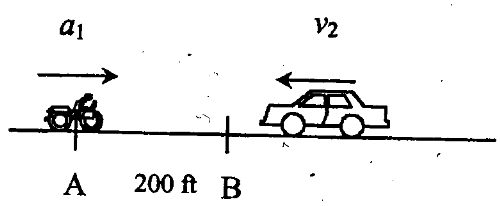
$$7\Delta t = 62.5\ ; \quad \Delta t = 8.93$$

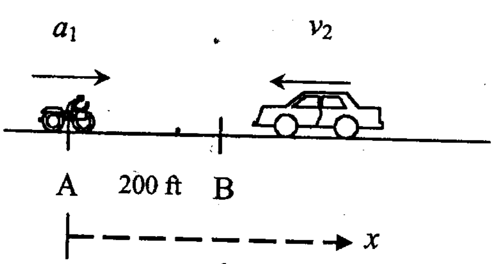
El tiempo total es

$$\boxed{t_2 = 12.93\ \text{s}}$$

1.2.1 Movimiento de varias partículas independientes

12. Un motociclista arranca del punto A con una aceleración constante $a_1 = 2.4$ ft/s^2 hacia la derecha. Cuatro segundos después, un automóvil pasa por el punto B, situado a 200 ft de A, viajando hacia la izquierda. Sabiendo que la velocidad del automóvil es $v_2 = 30$ ft/s y constante, diga en dónde el motociclista encuentra el automóvil. Desprecie el tamaño de los vehículos.





Resolución

Tomando como origen el punto A, eligiendo un eje $x'x$ hacia la derecha y tomando como $t = 0$ el instante en que arranca el motociclista, las ecuaciones del movimiento son:

Motociclista

$$a_1 = 2.4$$

$$v_1 = \int a_1 dt = 2.4t$$

$$x_1 = \int v_1 dt = 1.2t^2$$

Las constantes de integración son nulas.

Automóvil

$$a_2 = 0$$

$$v_2 = -30$$

Negativa, porque el sentido es contrario al del eje elegido.

$$x_2 = \int v_2 dt = -30t + C$$

Cuando $t = 4$, $x_2 = 200$ de los datos, sustituyendo

$$200 = -30(4) + C;\ C = 320$$

$$x_2 = -30t + 320$$

El motociclista encuentra el automóvil si:

$$x_1 = x_2.$$

$$1.2t^2 = -30t + 320$$

$$1.2t^2 + 30t - 320 = 0$$

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 + 4(1.2)320}}{2.4}$$

$$t_1 = 8.06$$

$$t_2 = -33.1$$

Sustituyendo t_1 en x_1

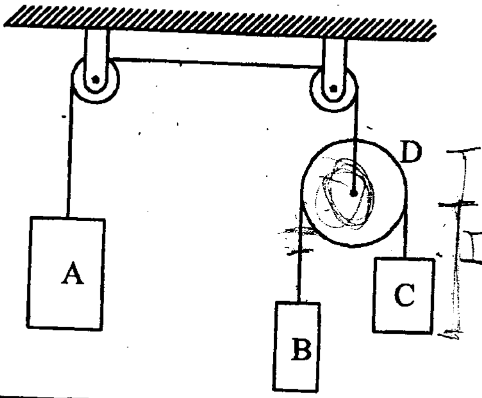
$$x_1 = 1.2(8.06)^2 = 78.1$$

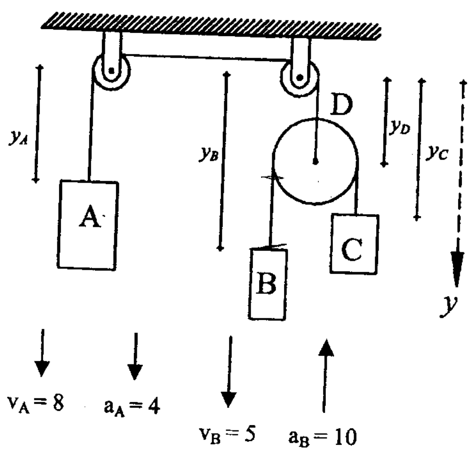
El motociclista encuentra al automóvil a 78.1 ft a la derecha de A.

$$\boxed{x_A = 78.1\ \text{ft} \rightarrow}$$

1.2.2 Movimiento de varias partículas conectadas

13. El cuerpo *A* se desplaza hacia abajo con una velocidad de 8 m/s, la cual aumenta a razón de 4 m/s^2, mientras *B* baja a 5 m/s, que disminuye a razón de 10 m/s^2. Calcule la magnitud y la dirección tanto de la velocidad como de la aceleración del cuerpo *C*.





Resolución

Velocidad

Cuerda que une los cuerpos A y D

$$l_1 = y_A + y_D$$

Derivando respecto al tiempo

$$0 = v_A + v_D \;;\; v_D = -v_A \quad (1)$$

Cuerda que une B con C

$$l_2 = (y_B - y_D) + (y_C - y_D)$$

$$l_2 = y_B + y_C - 2y_D$$

Derivando respecto al tiempo

$$0 = v_B + v_C - 2v_D$$

De (1)

$$0 = v_B + v_C + 2v_A$$

$$v_C = -v_B - 2v_A \qquad (2)$$

sustituyendo

$$v_C = -5 - 2(8) = -21$$

El signo negativo indica que el sentido es contrario al del eje $y'y$

$$\boxed{v_C = 21 \ \mathrm{m/s} \uparrow}$$

Aceleración

Derivando la ecuación (2) respecto al tiempo:

$$a_C = -a_B - 2a_A$$

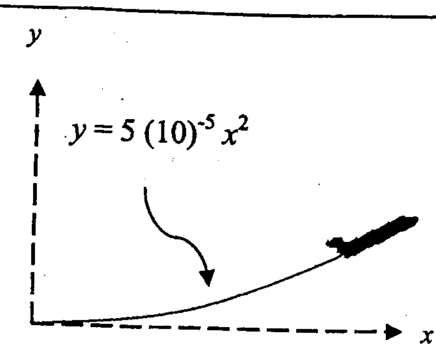
$$a_C = -(-10) - 2(4) = 2$$

$$\boxed{a_C = 2 \ \mathrm{m/s^2} \downarrow}$$

1.3 Movimiento curvilíneo

1.3.1 Componentes cartesianas

14. Un avión de pruebas describe, inmediatamente después de despegar, una trayectoria cuya ecuación cartesiana es $y = 5\ (10)^{-5}\ x^2$. Se mueve con-forme la expresión $x = 150t + 5t^2$, donde t está en s, x resulta en m. Determine la posición, velocidad y aceleración del avión cuando $t = 10$ s.



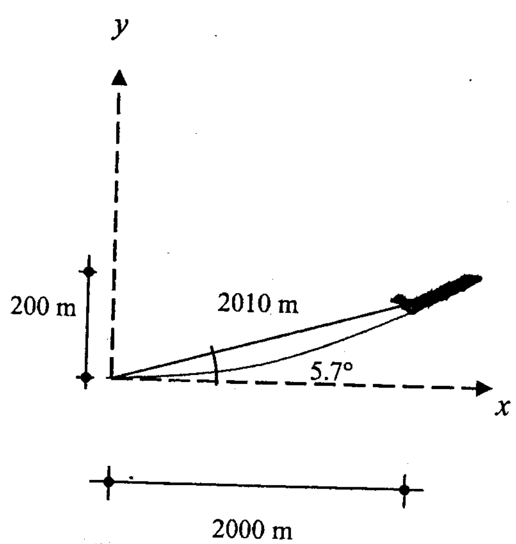
Resolución

Las ecuaciones de las componentes horizontales del movimiento son:

$$x = 150t + 5t^2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 150 + 10t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 10$$



Sustituyendo x en la ecuación de la trayectoria, se obtienen las ecuaciones de las componentes verticales

$$y = 5\times10^{-5}(150t + 5t^2)^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 10\times10^{-5}(150 + 10t)(150t + 5t^2)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 10^{-4}\left[(150 + 10t)^2 + 10(150t + 5t^2)\right]$$

Para $t = 10$ s

$$x = 1500 + 500 = 2000$$

$$y = 5\times10^{-5}(2000)^2 = 200$$

En forma vectorial:

$$\bar{r} = 2000i + 200j \quad [\mathrm{m}]$$

Escalarmente:

$$r=\sqrt{2000^2+200^2}$$

$$\tan\theta_1=\frac{200}{2000};\ \theta_1=5.7°.$$

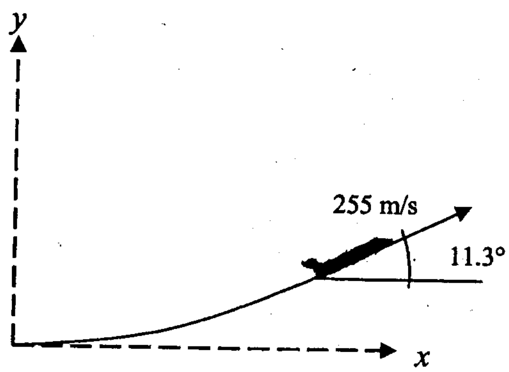
$$\boxed{r=2010\,\text{m}\ \measuredangle\ 5.7°}$$ Es la posición del avión

$$v_x=150+10(10)=250$$

$$v_y=1\times10^{-4}(250)(2000)=50$$

Vectorialmente:

$$\bar{\bar{v}}=250i+50j\ [\text{m}]$$



Escalarmente:

$$v=\sqrt{250^2+50^2}$$

$$\tan\theta_2=\frac{50}{250};\ \theta_2=11.3°$$

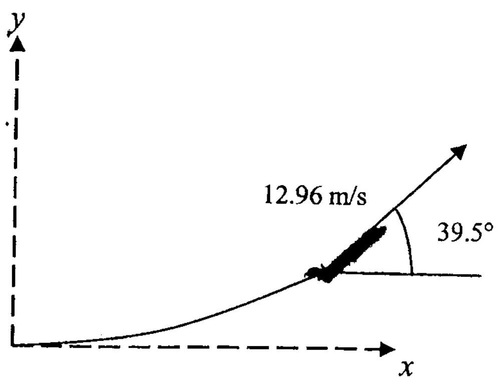
$$\boxed{v=255\ \text{m}/\text{s}\ \measuredangle 11.3°}$$ Es la velocidad del avión

$$a_x=10$$

$$a_y=1\times10^{-4}\left[250^2+10(2000)\right]=8.25$$

Vectorialmente:

$$\bar{\bar{a}}=10i+8.25j\ \left[\text{m}/\text{s}^2\right]$$



Escalarmente:

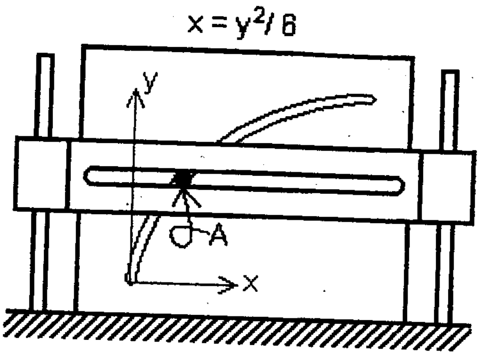
$$a=\sqrt{10^2+8.25^2}$$

$$\tan\theta_3=\frac{8.25}{10};\ \theta_3=39.5°$$

$$\boxed{a=12.96\ \text{m}/\text{s}^2\ \measuredangle\ 39.5°}$$

Es la aceleración del avión cuando $t=10$ s

15. La corredera A se mueve dentro de la ranura conforme se eleva el brazo horizontal, que tiene una velocidad constante de 3 in/s. Calcule la velocidad y la aceleración de la corredera cuando $x = 6$ in.



Resolución

Como el brazo se mueve hacia arriba con velocidad constante:

$$a_y = 0$$

$$v_y = 3$$

Y, por tanto:

$$y = \int v_y dt = 3t$$

La relación entre las coordenadas de la posición está establecida por la ecuación de la trayectoria:

$$x = \frac{1}{6} y^2$$

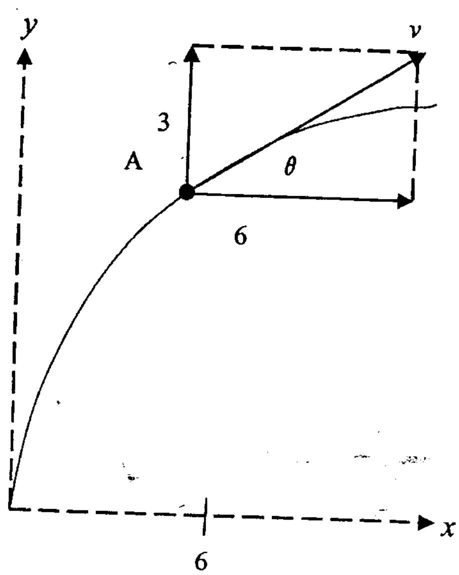
Sustituimos y por el valor en función de t

$$x = \frac{1}{6}(3t)^2$$

$$x = 1.5t^2$$

$v_x = 3t$ Derivando respecto al tiempo

$$a_x = 3$$



Con las ecuaciones del movimiento a la vista, podemos responder a la pregunta.

Si $x = 6$

$$6 = 1.5t^2$$

$$t = \sqrt{4} = \pm 2$$

La raíz negativa no tiene significado físico.

Para $t = 2$

$$v_x = 3(2) = 6$$

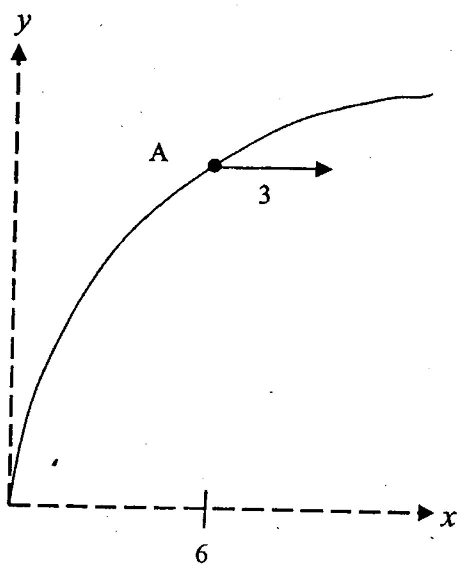
$$v_y = 3$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6.71$$

$$\tan\theta = \frac{3}{6}$$

$$\theta = 26.6°$$

$$\boxed{v = 6.71 \ \text{in}/\text{s} \measuredangle 26.6°}$$



Para el mismo instante

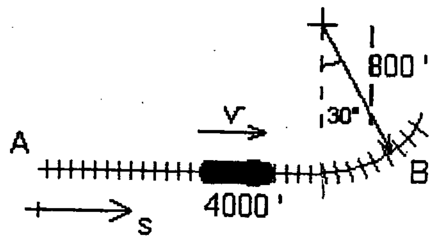
$$a_x = 3$$

$$a_y = 0$$

$$\boxed{a = 3 \ \text{in}/\text{s}^2 \rightarrow}$$

1.3.2 Componentes intrínsecas

16. Una locomotora comienza a moverse desde el punto A conforme a la expresión $s = 4t^2$, donde t está en s y s es la longitud en ft medida sobre la vía a partir de A. El punto B se halla a 4000 ft de A y su radio de curvatura es de 800 ft. Diga: *a)* cuál es la velocidad de la locomotora en B; *b)* cuál es su aceleración en A; *c)* cuál, en B.



Resolución

Derivando la expresión de la longitud recorrida respecto al tiempo, obtenemos:

$$s = 4t^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 8t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 8$$

a) El tiempo que tarda en llegar a B es:

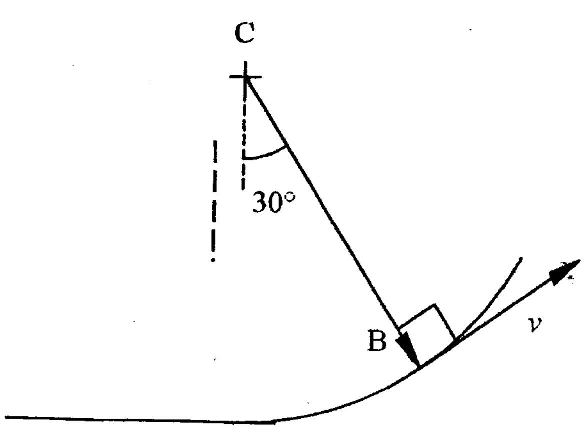
$$4000 = 4t^2$$

$$t = \sqrt{1000}$$

Su velocidad por tanto, tiene una magnitud de:

$$v = 8\sqrt{1000} = 253$$

$$\boxed{v = 253 \ \text{ft/s} \ \measuredangle \ 30°}$$



La dirección es perpendicular al radio de la curva, pues debe ser tangente a la trayectoria.

b) Como el punto A está en un tramo recto

$$a = a_t$$

$$\boxed{a = 8 \ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}} \ \rightarrow}$$

Su dirección es la de la trayectoria.

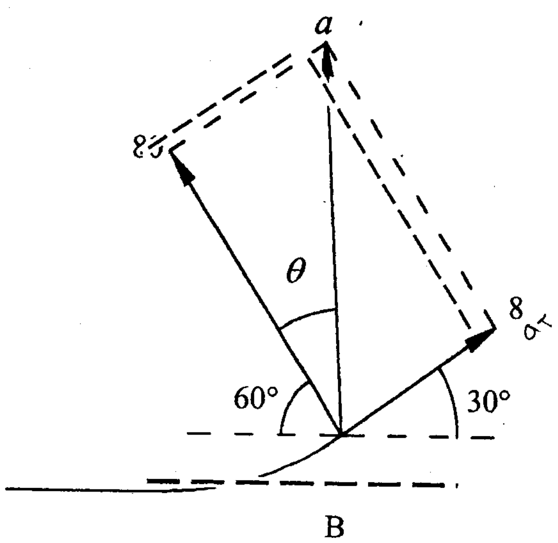
c) En el punto B la aceleración de la locomotora tiene tanto componente tangencial como normal, porque pertenece a una curva:

$a_t = 8 \quad \angle 30°$ En dirección de la velocidad

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(253)^2}{800} = 80 \measuredangle \ 60°$$

Dirigida hacia el centro de curvatura

$$a = \sqrt{8^2 + 80^2} = 80.4$$



Sea θ el ángulo que forma con la velocidad

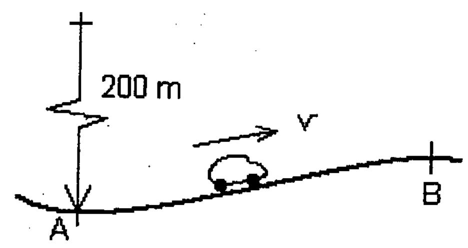
$$\tan\theta = \frac{8}{80} = 0.1 \ ; \quad \theta = 5.7°$$

Respecto a la horizontal, por tanto, forma un ángulo de:

$$60° + 5.7° = 65.7°$$

$$\boxed{a = 80.4 \ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}^2} \ \measuredangle \ 65.7°}$$

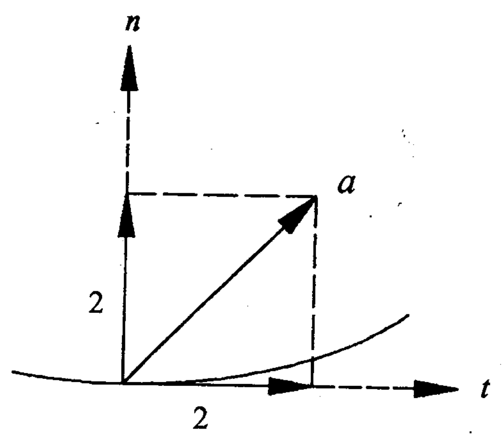
17. Un automóvil viaja por la carretera de la figura aumentando uniformemente su velocidad. Pasa por A con una rapidez de 72 km/h y llega a B a 108 km/h, cinco segundos después. Determine: *a)* la aceleración del automóvil al pasar por A; *b)* el radio de curvatura de la carretera en la cima B, sabiendo que allí la aceleración del vehículo es de 4 m/s^2.



Resolución

$$72\ \text{km/h} = \frac{72}{3.6}\ \text{m/s} = 20\ \text{m/s}$$

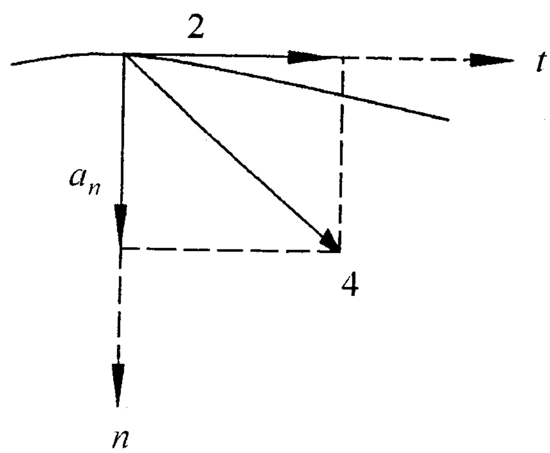
$$108\ \text{km/h} = \frac{108}{3.6}\ \text{m/s} = 30\ \text{m/s}$$



Como la rapidez aumenta uniformemente, i.e., la componente tangencial de la aceleración es constante, tanto en A como en B:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{\Delta t}$$

$$a_t = \frac{30-20}{5} = 2$$



a) Al pasar por A

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{20^2}{200} = 2$$

$$a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_t^{\,2}} = \sqrt{2(2^2)} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{a = 2.83\ \text{m/s}^2 \measuredangle 45°}$$

b) Al pasar por B

$$a=\sqrt{a_n^{\,2}+a_t^{\,2}}\ ;\ a^2=a_n^{\,2}+a_t^{\,2}$$

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^{\,2}}=\sqrt{4^2-2^2}=3.46$$

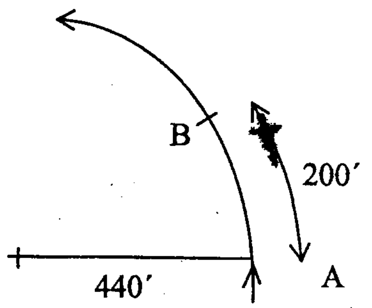
Como $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}$$

$$\rho=\frac{30^2}{3.46}$$

$$\boxed{\rho=260\text{ m}}$$

18. Un motociclista que corre en una pista circular de 440 ft de radio pasa por A a 60 mi/h; en B, 200 ft adelante, su velocidad es de 30 mi/h. Sabiendo que el motociclista reduce uniformemente su velocidad, calcule su aceleración cuando se encuentra en A.



Resolución

$$60\ \text{mi}/\text{h} = 88\ \text{ft}/\text{s}$$

$$30\ \text{mi}/\text{h} = 44\ \text{ft}/\text{s}$$

Como la reducción de la rapidez es uniforme, la componente tangencial de la aceleración es la misma en cualquier instante. Como se conoce la función de la distancia recorrida:

$$a_t = v\frac{dv}{ds}$$

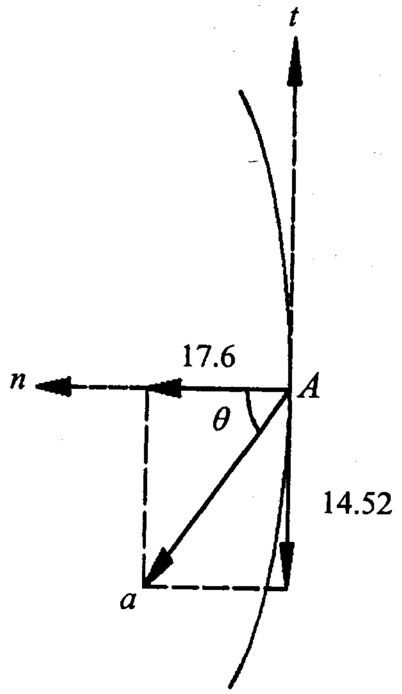
$$a_t ds = v dv$$

$$a_t \int ds = \int v dv$$

Por ser constante, a_t queda fuera de la integral.

$$a_t s = \frac{v^2}{2} + C$$

Si $s = 0,\ v = 88$



Tomaremos como origen el punto A

$$0=\frac{88^2}{2}+C$$

$$C=-\frac{88^2}{2}$$

$$a_t s=\frac{v^2-88^2}{2}=\frac{44^2-88^2}{2}$$

$$a_t=\frac{v^2-88^2}{2(200)}=-14.52$$

En el punto A la componente normal es

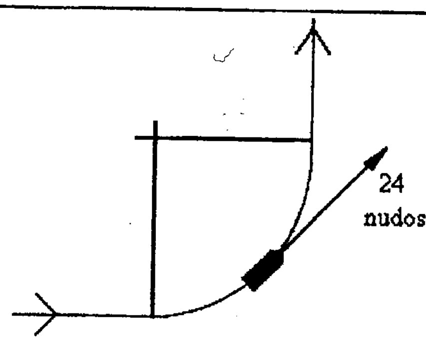
$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{88^2}{440}=17.6$$

$$a=\sqrt{a_t{}^2+a_n{}^2}=\sqrt{14.52^2+17.6^2}=22.8$$

$$\tan\theta=\frac{14.52}{17.6}\;;\quad \theta=39.5^\circ$$

$$\boxed{a=22.8\ \text{ft/s}^2 \qquad 39.5^\circ}$$

19. Un buque navega con rapidez constante de 24 nudos. Para dirigirse al puerto vira 90° en un minuto. Determine la magnitud de la aceleración del buque durante la maniobra.



Resolución

Puesto que la magnitud de la velocidad no varía durante la maniobra:

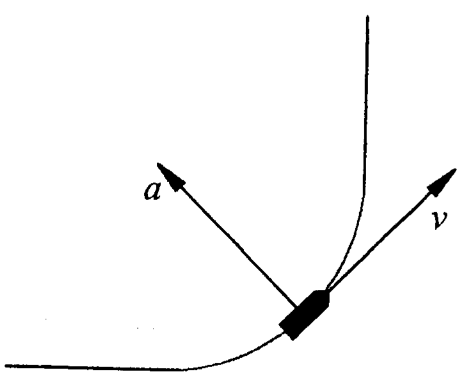
$$a_t = 0$$

Por tanto

$$a = a_n = \dot{\theta} v$$

Donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular.

$$\dot{\theta} = 90 \text{ grados}/\text{min} = \frac{\pi/2}{60} \text{ rad}/\text{s}$$



Además:

$$24 \text{ nudos} = 24 \ \frac{\text{millas marítimas}}{\text{hora}} = 24\frac{1852}{3600} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por tanto:

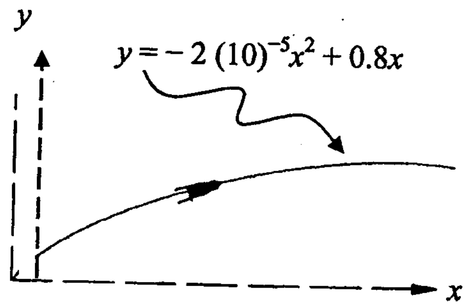
$$a = \frac{\pi}{120}(24)\frac{1852}{3600} = 0.323$$

$$\boxed{a = 0.323 \ \text{m}/\text{s}^2}$$

Y es perpendicular a la velocidad en cualquier instante.

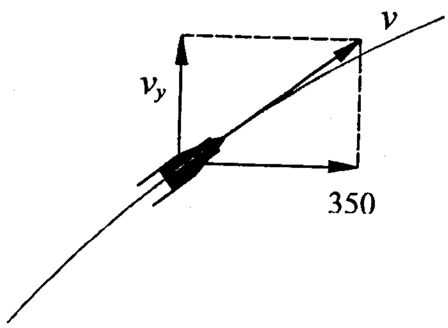
1.3.3 Componentes cartesianas e intrínsecas relacionadas

20. La trayectoria de un cohete interplanetario tiene la ecuación $y = -2\,(10)^{-5}x^2 + 0.8x$. La componente horizontal de su velocidad es constante y de 350 m/s. Calcule la razón del cambio de la magnitud de su velocidad con respecto al tiempo, cuando $x = 9000$ m.



Resolución

<u>Primer método</u>



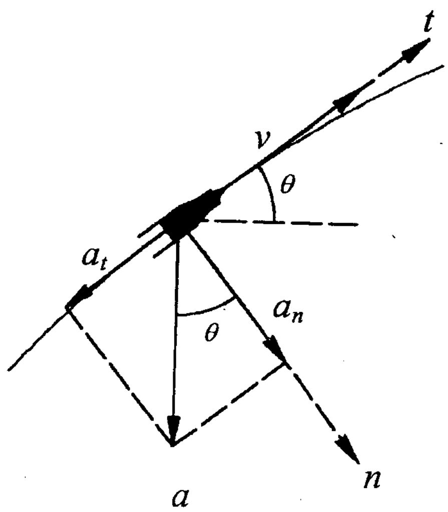
$$y = -2(10)^{-5}x^2 + 0.8x$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dy}{dx}$$

Como la componente horizontal de la velocidad es

$$v_x = 350$$

$$v_y = 350\left[-4(10)^{-5}x + 0.8\right] = -0.014x + 280$$



$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_y}{dx}$$

$$a_y = 350^2\left[-4(10)^{-5}\right] = -4.9 \ \text{m/s}^2$$

La razón del cambio de magnitud de la velocidad con respecto al tiempo la mide la componente tangencial de la aceleración.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Como dicha componente tiene la dirección de la velocidad, investigamos ésta.

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

Para $x = 900$: $v_y = 154$, $v_x = 350$

$$\tan\theta = \frac{154}{350}$$

$$\theta = 23.7°$$

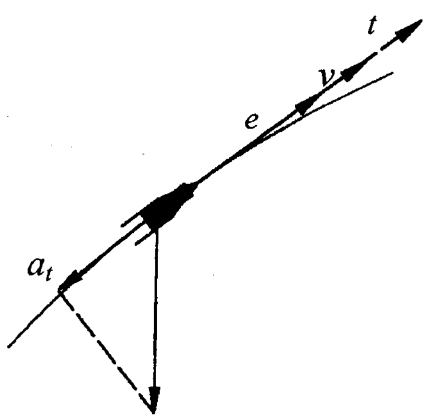
θ es el ángulo que forma la velocidad con la horizontal, y es el mismo que forma la aceleración con su componente normal. Proyectamos la aceleración en el eje tangencial.

$$a_t = -4.9\ \text{sen}\theta = -1.973$$

La magnitud de la velocidad disminuye a razón de 1.973 m/s^2

<u>Segundo método</u>

Escribiendo en lenguaje vectorial



$$\bar{v} = v_x i + v_y j = 350i + 154j$$

$$\bar{a} = a_x i + a_y j = -4.9j$$

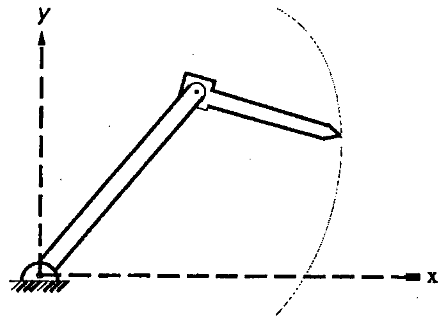
Para proyectar la aceleración en el eje tangencial, investigamos el producto escalar (o producto punto) de dos vectores.

$$\bar{a_t} = \bar{a} \cdot e_t$$

En donde e_t es un vector unitario en dirección de la velocidad

$$a_t = \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{v} = \frac{154(-4.9)}{\sqrt{350^2 + 154^2}} = -1.973$$

21. Las ecuaciones paramétricas de las coordenadas de la punta de un brazo mecánico son $x = 25t - 4t^2$ y $y = 50 - 2t^2$; ambas resultan en ft, si el tiempo está en s. Diga qué longitud tiene el radio de curvatura de la trayectoria de la punta cuando $y = 0$.



Resolución

<u>Primer método</u>

Para hallar el radio de curvatura, se requiere conocer la magnitud de la componente normal de la aceleración y la magnitud de la velocidad.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$x = 25t - 4t^2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 25 - 8t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -8$$

$$y = 50 - 2t^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -4t$$

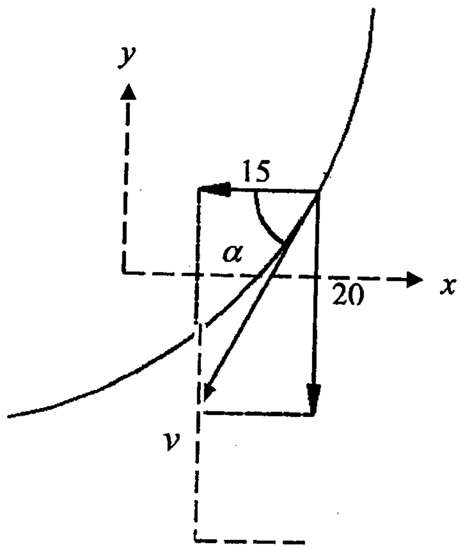
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -4$$

Investigamos en qué instante $y = 0$

$$0 = 50 - 2t^2$$

$$t = \pm 5$$

La raíz negativa no tiene significado físico en este caso.



Para $t = 5$

$$v_x = 25 - 8(5) = -15$$

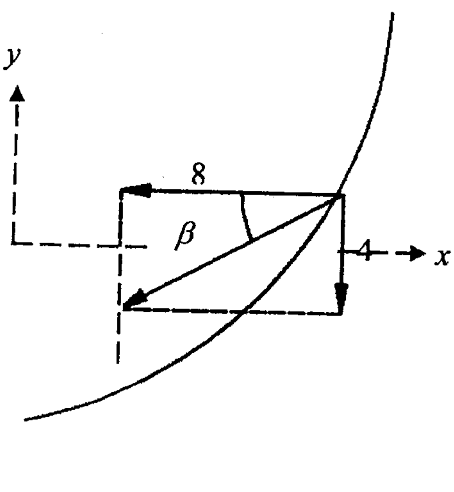
$$v_y = -4(5) = -20$$

$$v = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2} = \sqrt{625} = 25$$

El ángulo α que la velocidad forma con la horizontal es

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-20}{-15}$$

$$\boxed{\alpha = 53.1°}$$



La aceleración en ese mismo instante es

$$a_x = -8$$

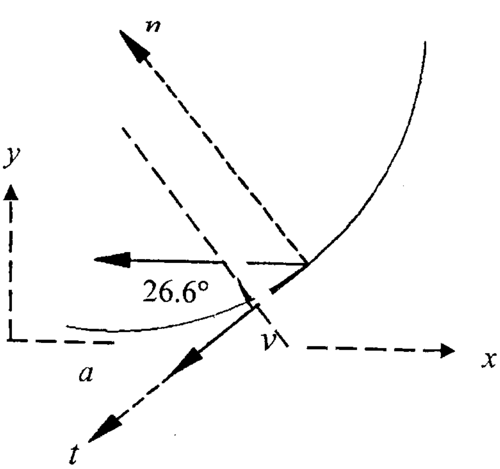
$$a_y = -4$$

$$a = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4^2\left[(-2)^2 + (-1)^2\right]}$$

$$a = 4\sqrt{5}$$

Y su dirección β respecto a la horizontal

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-4}{-8}; \quad \beta = 26.6°$$



El ángulo que forman entre sí la velocidad y la aceleración es

$$\alpha - \beta = 26.5°$$

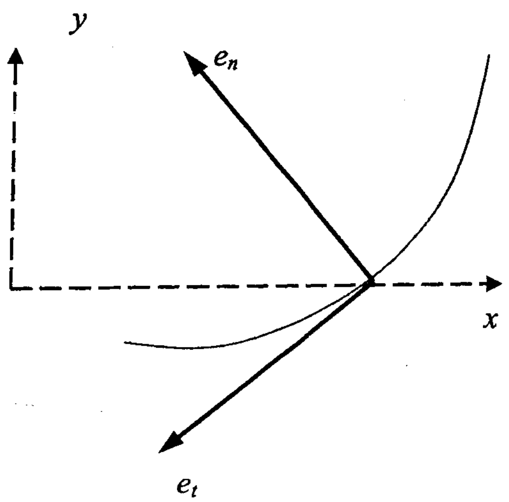
La proyección de la aceleración sobre el eje normal es

$$a_n = a\cos 26.5° = 4\sqrt{5}\cos 26.5° = 4$$

Por tanto:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{625}{4}$$

$$\boxed{\rho = 156.3 \text{ ft}}$$



Segundo método

Utilizando álgebra vectorial

La componente normal de la aceleración se puede obtener proyectando el vector aceleración sobre un vector unitario e_n en dirección del eje normal, el cual es perpendicular a la velocidad.

Sea e_t un vector unitario en dirección de la velocidad

$$e_t = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{1}{25}(-15i - 20j) = -0.6i - 0.8j$$

$$e_n = -0.8i + 0.6j$$

$$a_n = \bar{a} \cdot e_n = (-8i - 4j) \cdot (-0.8i + 0.6j)$$

$$a_n = 6.4 - 2.4 = 4$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{625}{4}$$

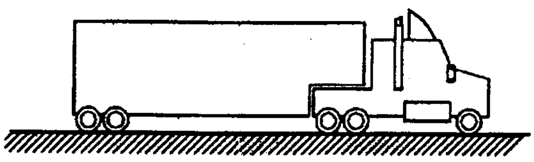
$$\boxed{\rho = 156.3 \text{ ft}}$$

2. CINÉTICA DE LA PARTÍCULA

2.1 Movimiento rectilíneo

2.1.1 Aceleración constante

1. Un tractor y su remolque aumentan uniformemente su rapidez de 36 a 72 km/h en 4 s. Sabiendo que sus pesos son, respectivamente, 2 y 20 ton, calcule la fuerza de tracción que el pavimento ejerce sobre el tractor y la componente horizontal de la fuerza que se ejerce en el enganche entre los vehículos durante ese movimiento.



Resolución

A partir de la información del movimiento, investigamos la aceleración del vehículo.

Comenzaremos convirtiendo las velocidades a m/s:

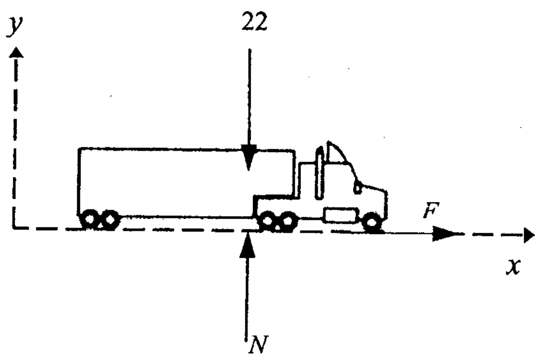
$$36\ \mathrm{km/h} = \frac{36}{3.6}\ \mathrm{m/s} = 10\ \mathrm{m/s}$$

$$72\ \mathrm{km/h} = \frac{72}{3.6}\ \mathrm{m/s} = 20\ \mathrm{m/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Como el aumento de velocidad es uniforme:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20-10}{4} = 2.5$$



Para conocer las fuerzas -problema cinético- comenzaremos: 1) dibujando el diagrama de cuerpo libre del conjunto; 2) eligiendo un sistema de referencia.

Empleamos a continuación las ecuaciones cinéticas:

$$\sum Fy = 0$$

$$N - 22 = 0$$

$$N = 22$$

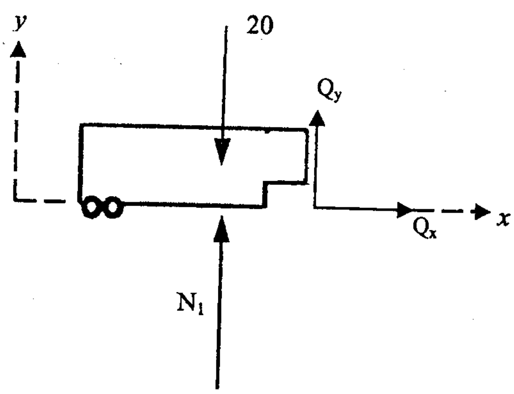
Puesto que la aceleración del vehículo es horizontal, este resultado no es útil para la resolución del problema.

$$\sum Fx = ma$$

$$F = \frac{22}{9.81}(2.5)$$

Como $P=mg$; entonces $m=P/g$

$$\boxed{F = 5.61 \text{ ton} \rightarrow}$$

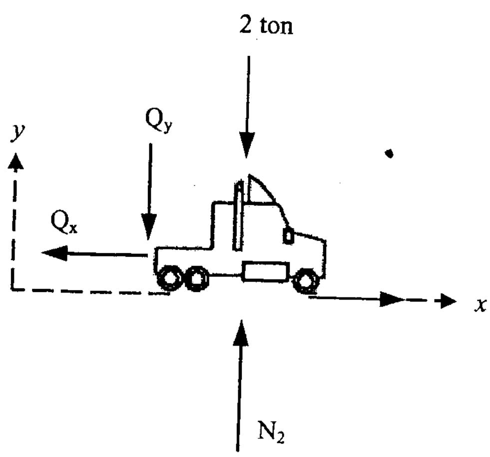


Para conocer la fuerza en el enganche, se puede estudiar cualquiera de los dos cuerpos que la ejercen. Elegiremos el remolque.

$$\sum Fx = ma$$

$$Q_x = \frac{20}{9.81}(2.5)$$

$\boxed{Q_x = 5.10 \text{ ton}}$ Se trata de una tensión



Podemos comprobar los resultados analizando el tractor:

Por la tercera ley de Newton, las reacciones del remolque sobre el tractor son iguales a las reacciones del tractor sobre el remolque, pero de sentido contrario.

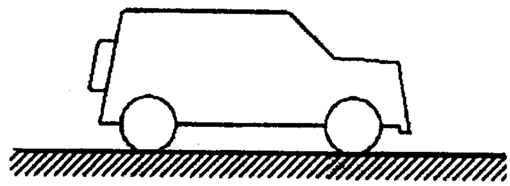
$$\sum Fx = ma$$

$$5.61 - Q_x = \frac{2}{9.81}(2.5)$$

$$Q_x = 5.61 - \frac{2}{9.81}(2.5)$$

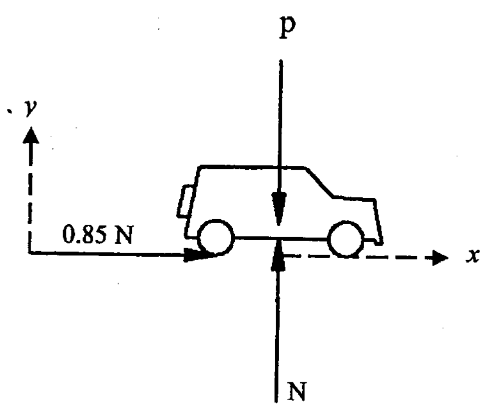
$$\boxed{Q_x = 5.10 \text{ ton}}$$

2. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre las llantas de una camioneta de doble tracción y la pista son 0.85 y 0.65, respectivamente. Diga cuál será la velocidad teórica máxima que alcanzará la camioneta en una distancia de 300 ft, suponiendo suficiente la potencia de su motor.



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre y elegimos el sistema de referencia.



Como deseamos conocer la velocidad máxima después de recorrer cierta longitud, se requiere que el automóvil adquiera la máxima aceleración, por tanto, que ejerza la máxima fuerza de tracción, que es de fricción en este caso.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$P - N = 0$$

$$N = P$$

$$\Sigma F_x = ma$$

$$0.85N = \frac{P}{32.2}a$$

$$0.85P = \frac{P}{32.2}a$$

$$0.85 = \frac{a}{32.2}$$

$$a = 0.85(32.2) = 27.4$$

Se trata de una aceleración constante, por tanto:

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

$$a\int dx = \int_{v1}^{v2} v dv$$

$$a(\Delta x) = \frac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2}$$

En este caso, $v_1 = 0$ y $\Delta x = 300$

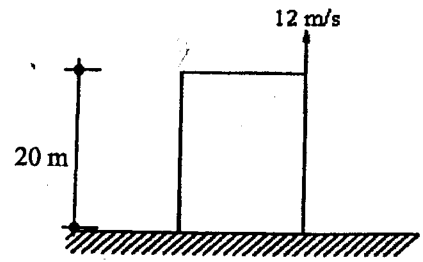
$$v_2^{\,2} = 2a(\Delta x) = 2(27.4)300$$

$$\boxed{v_2 = 128.1 \ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}}}$$

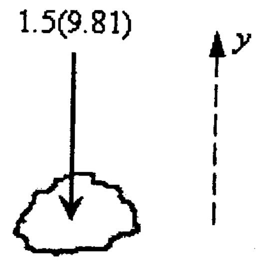
Se puede convertir a ${}^{\text{mi}}\!/_{\text{h}}$:

$$128.1 \ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}} = 128.1\left(\frac{30}{44}\right) \ {}^{\text{mi}}\!/_{\text{h}} = 87.4 \ {}^{\text{mi}}\!/_{\text{h}}$$

3. Un niño arroja una piedra de 1.5 kg de masa hacia arriba, verticalmente, con una velocidad inicial de 12 m/s desde la orilla de un edificio de 20 m de altura. Determine: *a)* la altura máxima, sobre el suelo, que alcanza la piedra; *b)* la velocidad con que llega al suelo.



Resolución



Dibujamos la piedra en un diagrama de cuerpo libre que represente cualquier instante del movimiento, y elegimos un sistema de referencia.

Disponemos de una ecuación cinética:

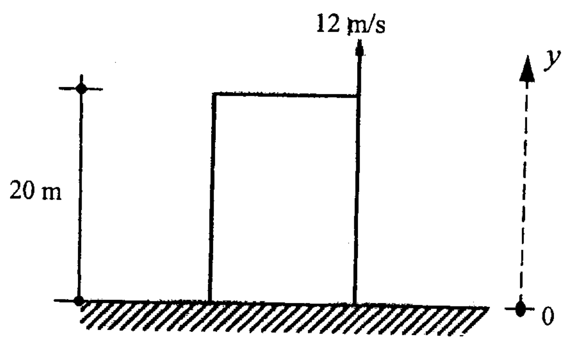
$$\sum Fy = ma$$

$$-1.5(9.81) = 1.5a$$

$$a = -9.81$$

Es decir, en cualquier instante, suba o baje la piedra, su aceleración es la de la gravedad y se dirige hacia el centro de la Tierra.

A partir de la aceleración, escribimos las ecuaciones del movimiento de la piedra, refiriéndolas al sistema de referencia que se muestra en la figura.



$$a = -9.81$$

$$v = v_0 + \int a dt = 12 - 9.81 \int dt = 12 - 9.81t$$

$$y = y_0 + \int v dt = 20 + \int (12 - 9.81t) dt$$

$$= 20 + 12t - \frac{9.81}{2} t^2$$

Ahora podemos contestar las preguntas.

a) Cuando alcance la altura máxima su velocidad será nula.

$$0=12-9.81t$$

$$t=\frac{12}{9.81}$$

Y en ese instante:

$$y=20+12\left(\frac{12}{9.81}\right)-\frac{9.81}{2}\left(\frac{12}{9.81}\right)^2$$

$$y=20+\frac{144}{9.81}-\frac{72}{9.81}=20+\frac{72}{9.81}$$

$$\boxed{y=27.3\ \text{m}}$$

que es la altura máxima sobre el suelo.

b) Llega al suelo cuando $y = 0$

$$0=20+12t-\frac{9.81}{2}t^2$$

$$9.81t^2-24t-40=0$$

Las raíces son:

$$t_1=3.58$$

$$t_2=-1.138$$

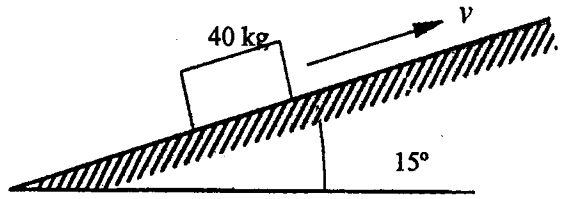
El tiempo en que llega al suelo es la raíz positiva y la velocidad es:

$$v=12-9.81(3.58)=-23.2$$

El signo negativo indica que su sentido es contrario al sentido del eje de las yes, elegido arbitrariamente.

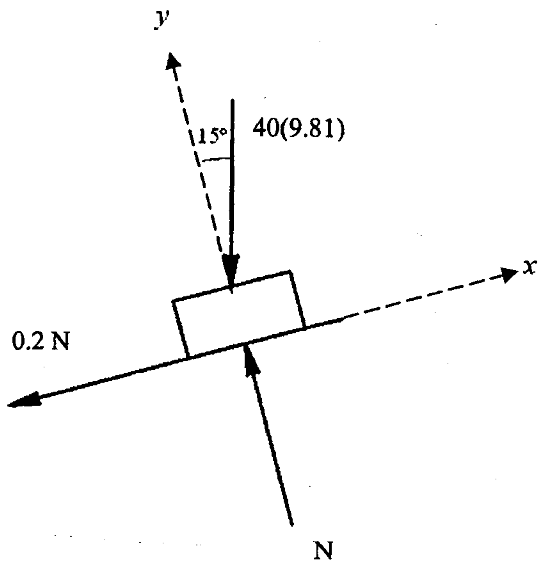
$$\boxed{v=23.2\ {}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}}\ \downarrow}$$

4. Se lanza un cuerpo de 40 kg hacia arriba de un plano inclinado con un ángulo de 15°, con una velocidad inicial de 20 m/s. Si los coeficientes de fricción estática y cinética son 0.25 y 0.20, respectivamente, entre el cuerpo y el plano, ¿cuánto tiempo emplea en volver al punto del que fue lanzado?, ¿con qué velocidad pasa por él?



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre mientras el cuerpo sube, elegimos el sistema de referencia. Empleamos a continuación las ecuaciones cinéticas:



$$\sum Fy = 0$$

$$N - (40)(9.81)\cos 15° = 0$$

$$N = 379 \text{ newtons}$$

$$\sum Fx = ma$$

$$-0.2N - 40(9.81)\text{sen}15° = ma$$

$$-177.4 = ma$$

$$a = -4.43$$

El signo negativo indica que la aceleración tiene sentido contrario al eje de las equis y que el cuerpo se está deteniendo.

Escribimos las ecuaciones del movimiento:

$$a = -4.43$$

$$v = v_0 + \int a_1 dt = 20 - \int 4.43 dt = 20 - 4.43t$$

$$x = x_0 + \int v_1 dt = \int (20 - 4.43t)\ dt = 20t - \frac{4.43}{2}t^2$$

El tiempo que tarda en subir lo encontramos haciendo $v = 0$.

$$0 = -4.43t + 20$$

$$4.43t = 20$$

$$t = \frac{20}{4.43} = 4.51$$

$$t = 4.51\ s$$

Para encontrar la distancia que recorre el cuerpo en el ascenso hasta detenerse sustituimos el tiempo hallado.

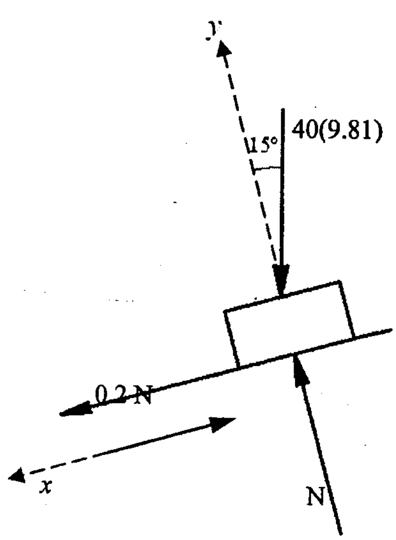
$$x = 20(4.51) - \frac{4.43}{2}(4.51)^2$$

$$x = 45.1\ \text{m}$$

Habrá recorrido esta distancia antes de detenerse.

Ahora analizaremos al cuerpo a partir de que comienza a bajar.

Utilizando un nuevo sistema de referencia, tenemos:



$$\sum Fy = 0$$

$$N - (40)(9.81)\cos 15° = 0$$

$$N = 379$$

La fuerza de fricción tiene ahora otro sentido.

$$\sum Fx = ma$$

$$40(9.81)\text{sen}15° - 0.2N = 40a$$

$$a = \frac{40(9.81)\text{sen}15° - 0.2N}{40}$$

$$a = 0.644$$

Las ecuaciones del movimiento, en el nuevo sistema de referencia y tomando como origen el punto en el que el cuerpo se detuvo, son:

$$a = 0.644$$

$$v = v_0 + \int a\,dt = 0.644 \int dt = 0.644t$$

$$x = x_0 + \int v\,dt = \int (0.644t)\,dt = \frac{0.644}{2}t^2$$

Vuelve al punto de partida en $x = 45.1$ m

$$45.1 = \frac{0.644}{2}t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{(45.1)2}{0.644}}$$

$$t = 11.83 \text{ s}$$

Por tanto, el tiempo que tarda en volver al punto de donde fue lanzado es la suma de este tiempo más el empleado en subir.

$$t_T = 11.83 + 4.51$$

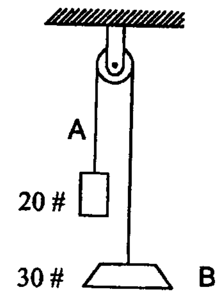
$$\boxed{t_T = 16.34 \text{ s}}$$

La velocidad con la que pasa por dicho punto la hallamos sustituyendo el tiempo de descenso en la ecuación de la velocidad.

$$v = 0.644(11.83)$$

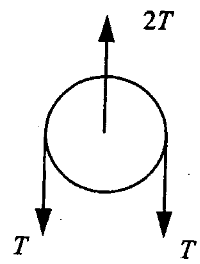
$$\boxed{v = 7.62 \ \mathrm{m/s} \ \swarrow \ 15^\circ}$$

5. Los pesos de los cuerpos A y B de la figura son, respectivamente, 20 y 30 lb, y los de la polea y de la cuerda, despreciables. Sabiendo que la cuerda es flexible e inextensible y que no hay ninguna fricción en la polea, calcule la aceleración del cuerpo B y la tensión de la cuerda.



Resolución

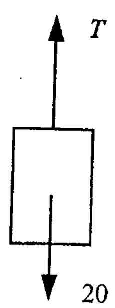
Polea



Los cuerpos están conectados con una sola cuerda, de manera que su aceleración tiene la misma magnitud. La cuerda sufre la misma tensión en toda su longitud, pues la polea es de peso despreciable (y la suma de momentos de las fuerzas respecto a su eje de rotación tiene que ser nula).

Una vez dibujado el diagrama de cuerpo libre de A, elegimos un sistema de referencia dirigido hacia arriba, pues el cuerpo, más ligero que B, acelerará aumentando su rapidez hacia arriba.

Cuerpo A



$$\Sigma Fy = ma$$

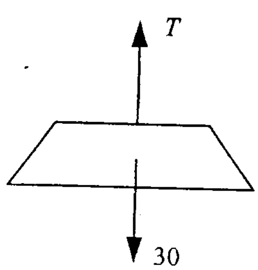
$+\uparrow$

$$T - 20 = \frac{20}{32.2}a$$

$$T = 20\left(1 + \frac{a}{32.2}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \qquad (1)$$

El sistema de referencia para el diagrama de cuerpo libre de B lo elegimos hacia abajo para ser consistentes con el diagrama anterior.

Cuerpo B



$$\Sigma Fy = ma$$

$+\downarrow$

$$30 - T = \frac{30}{32.2}a$$

$$T = 30\left(1 - \frac{a}{32.2}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$20\left(1+\frac{a}{32.2}\right)=30\left(1-\frac{a}{32.2}\right)$$

$$20+\frac{20a}{32.2}=30-\frac{30a}{32.2}$$

$$\frac{50a}{32.2}=10$$

$$a=\frac{322}{50}=6.44$$

La aceleración de B es, por tanto

$$\boxed{a=6.44\,\mathrm{ft}/\mathrm{s}^2\downarrow}$$

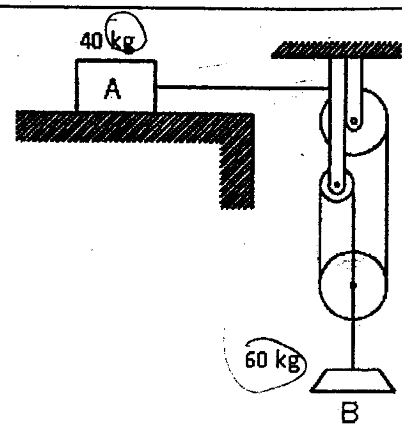
Y la tensión de la cuerda

$$T=20\left(1+\frac{6.44}{32.2}\right)=20(1.2)$$

$$\boxed{T=24\ \mathrm{lb}}$$

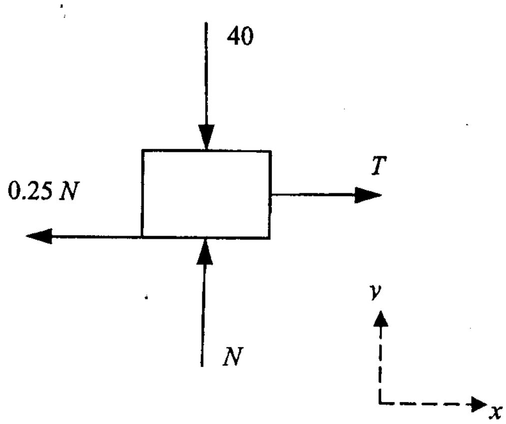
es [N]

6. Los cuerpos A y B pesan 40 y 60 kg, respectivamente. El coeficiente de fricción estática entre el cuerpo A y el plano horizontal es 0.35, y el de fricción cinética, de 0.25. Suponiendo despreciable la masa de las poleas y cualquier resistencia suya al movimiento, calcule tanto la tensión de la cuerda que une las poleas, como la aceleración de los cuerpos A y B.



Resolución

Cuerpo A



$$\sum F_y = 0$$

$$N - 40 = 0$$

$$N = 40$$

$$\sum F_x = ma$$

$$T - 0.25N = \frac{40}{9.81} a_A$$

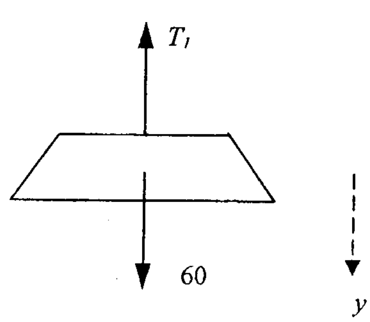
$$T - 0.25(40) = \frac{40}{9.81} a_A$$

$$T - 10 = \frac{40}{9.81} a_A$$

$$T = 10 + \frac{40}{9.81} a_A \qquad \text{————— (1)}$$

Analizando el cuerpo B

Cuerpo B



$$60 - T_1 = \frac{60}{9.81} a_B$$

$$T_1 = 60 - \frac{60}{9.81} a_B \qquad \text{————— (2)}$$

Tenemos las ecuaciones 1 y 2 con cuatro incógnitas.

Estudiemos la polea móvil.

Como su masa es despreciable

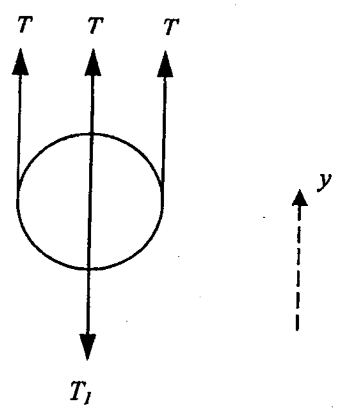
$$ma = 0$$

Por tanto

$$\Sigma Fy = 0$$

$$3T - T_1 = 0$$

$$T_1 = 3T \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)$$



Y la cuarta ecuación la obtenemos relacionando las aceleraciones de A y B, mediante la cuerda que conecta las poleas, cuya longitud es constante.

$$l = -x_A + 3y_B$$

Derivando respecto al tiempo

$$0 = -v_A + 3v_B$$

$$0 = -a_A + 3a_B$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, multiplicamos (1) por (3) e igualamos con (2)

$$3\left(10 + \frac{40}{9.81}a_A\right) = 60 - \frac{60}{9.81}a_B$$

Ahora, sustituimos (4):

$$3\left(10 + \frac{40}{9.81}[3a_B]\right) = 60 - \frac{60}{9.81}a_B$$

$$10 + \frac{120}{9.81}a_B = 20 - \frac{20}{9.81}a_B$$

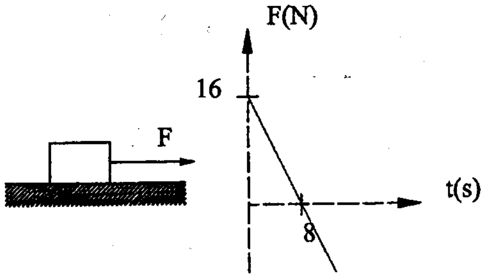
$$a_B = \frac{9.81}{140}(10)$$

$$\boxed{a_B = 0.701 \ \mathrm{m/s^2} \downarrow} \; ; \; \boxed{a_A = 2.10 \ \mathrm{m/s^2} \rightarrow}$$

$$\boxed{T = 18.57 \ \mathrm{kg}}$$

2.1.2 Aceleración variable

7. A un cuerpo que reposa en una superficie lisa se le aplica una fuerza F cuya magnitud varía con el tiempo, según se muestra en la gráfica de la figura. Determine el tiempo que se requiere para que el cuerpo regrese a su posición original.



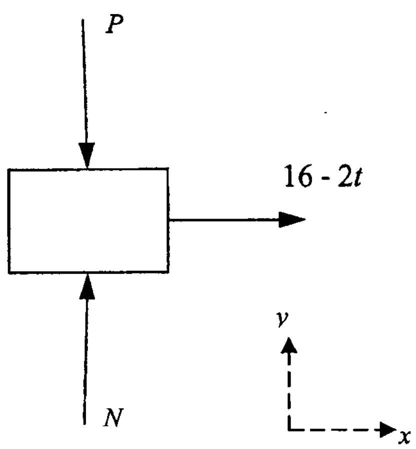
Resolución

De acuerdo con la gráfica, la expresión que define la fuerza horizontal es:

$$F = 16 - 2t$$

Pues 16 N es la ordenada al origen y la pendiente es negativa y de 2 N/s.

Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre para cualquier instante del movimiento y elegir el sistema de referencia, escribiremos la ecuación cinética.



$$\sum Fx = ma$$

$$16 - 2t = \frac{P}{9.81}\frac{dv}{dt}$$

Hemos sustituido a por dv/dt porque la fuerza está en función del tiempo.

Para resolver la ecuación diferencial, separamos variables e integramos.

$$(16 - 2t)dt = \frac{P}{9.81}dv$$

$$\int(16 - 2t)dt = \frac{P}{9.81}\int dv$$

$$16t - t^2 = \frac{P}{9.81}v + C$$

Para $t = 0, v = 0$, de donde $C = 0$

$$16t-t^2=\frac{P}{9.81}v$$

$$v=\frac{9.81}{P}(16t-t^2)$$

Sustituimos v por dx/dt

$$\frac{dx}{dt}=\frac{9.81}{P}(16t-t^2)$$

Separando variables e integrando:

$$dx=\frac{9.81}{P}(16t-t^2)dt$$

$$\int dx=\frac{9.81}{P}\int(16t-t^2)dt$$

$$x=\frac{9.81}{P}(8t^2-\frac{1}{3}t^3)+C_1$$

Escogiendo el origen en el punto de partida. Si $x=0$, $t=0$ y $C_1=0$.

$$x=\frac{9.81}{P}\left(8t^2-\frac{1}{3}t^3\right)$$

Esta es la ecuación que define la posición en función del tiempo.

Si vuelve al punto de partida, $x=0$

$$\frac{9.81}{P}\left(8t^2-\frac{1}{3}t^3\right)=0$$

$$8t^2-\frac{1}{3}t^3=0$$

Dividiendo entre t^2, pues dos raíces son nulas:

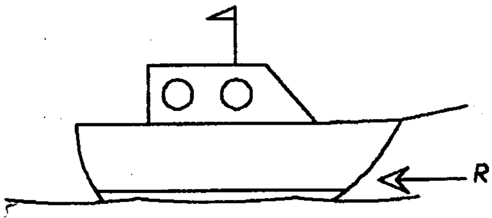
$$8-\frac{1}{3}t=0$$

$$t=8(3)$$

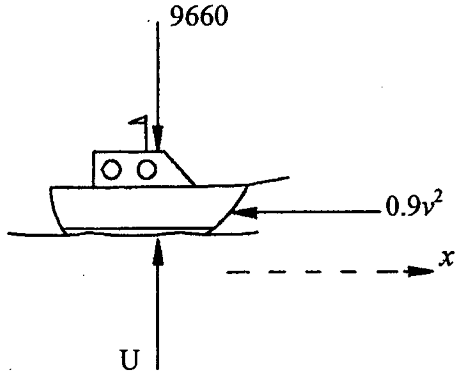
$$\boxed{t=24\ \text{s}}$$

Que es el tiempo en que vuelve al punto de partida.

8. Una embarcación de 9660 lb de desplazamiento navega en aguas tranquilas a 24 nudos cuando su motor sufre una avería. Queda entonces sujeta a la resistencia del agua que, en lb, se puede expresar como $0.9v^2$, donde v está en ft/s. Diga en cuánto tiempo la rapidez de la embarcación se reducirá a 6 nudos.



Resolución



$$\sum Fx = ma$$

$$-0.9v^2 = ma$$

$$-0.9v^2 = \frac{9660}{32.2}\frac{dv}{dt}$$

$$-0.9v^2 = 300\frac{dv}{dt}$$

$$-0.9dt = 300\frac{dv}{v^2}$$

$$-0.9\int dt = 300\int\frac{dv}{v^2}$$

$$-0.9t = -300\frac{1}{v} + C$$

Cuando $t = 0$, $v = 24$ nudos

Dado que la resistencia está expresada en el sistema inglés, realizamos la conversión de nudos a ft/s

$$24\ \frac{\text{mi}\cdot\text{mar.}}{\text{h}} = x\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$x = 24\frac{\text{mi.mar.}}{\text{ft}}\frac{\text{s}}{\text{h}}$$

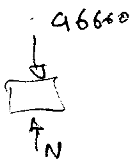
$$x = 24\left(\frac{1852\text{m}}{0.3048\text{m}}\right)\frac{1\text{s}}{3600\text{s}} = 40.53$$

$$0 = -300\frac{1}{(40.53)} + C$$

$$C = \frac{300}{(40.53)}$$

$$C = 7.401$$

Entonces:



$$-0.9t = -\frac{300}{v} + 7.401$$

Cuando la velocidad de la embarcación es

$$v = 6 \text{ nudos}$$

Nuevamente realizamos la conversión, utilizando una regla de tres con el resultado anterior.

$$\frac{v}{40.53} = \frac{6}{24}$$

$$v = 10.13 \ \text{ft}/\text{s}$$

Entonces:

$$-0.9t = -\frac{300}{10.13} + 7.401$$

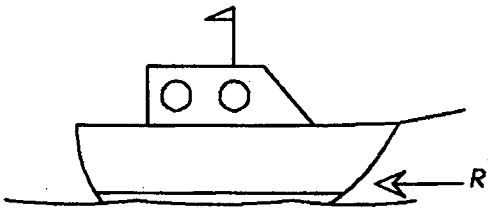
$$-0.9t = -29.6 + 7.401$$

$$-0.9t = -22.2$$

$$t = \frac{-22.2}{-0.9}$$

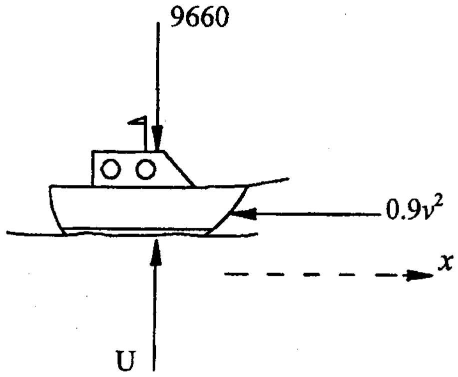
$$\boxed{t = 24.7 \ \text{s}}$$

9. Una embarcación de 9660 lb de desplazamiento navega en aguas tranquilas a 24 nudos cuando su motor sufre una avería. Queda entonces sujeta a la resistencia del agua que, en lb, se puede expresar como $0.9v^2$, donde v está en ft/s. ¿Qué distancia navegará hasta que su velocidad se reduzca a 6 nudos?



Resolución

Dibujamos un diagrama de cuerpo libre, que represente cualquier instante del movimiento, y elegimos un eje de referencia en dirección de la velocidad.



$$\sum Fx = ma$$

$$-0.9v^2 = \frac{9660}{32.2}\, v\frac{dv}{dx}$$

Hemos sustituido a por $v\ dv/dx$ porque la fuerza está en función de la velocidad y queremos conocer un desplazamiento.

Simplificando la ecuación, tenemos:

$$-0.9v = 300\frac{dv}{dx}$$

Separamos variables

$$-0.9dx = 300\frac{dv}{v}$$

$$-0.9\int dx = 300\int\frac{dv}{v}$$

$$-0.9x = 300\ \mathrm{L}\ v + C$$

Elegimos el origen en la posición en que la embarcación sufre la avería, de modo que

Si $x = 0$, $v = 24$ nudos

$$0 = 300 \ \mathrm{L}\ 24 \ \text{nudos} + C$$

$$C = -300 \ \mathrm{L}\ 24 \ \text{nudos}$$

La ecuación queda así:

$$-0.9x = 300 \ \mathrm{L}\ v - 300 \ \mathrm{L}\ 24 \ \text{nudos}$$

$$-0.9x = 300\left(\mathrm{L}v - \mathrm{L}\ 24 \ \text{nudos}\right)$$

Por las propiedades de los logaritmos

$$-0.9x = 300 \ \mathrm{L}\frac{v}{24 \ \text{nudos}}$$

$$x = -\frac{1}{0.003} \ \mathrm{L}\frac{v}{24 \ \text{nudos}}$$

Volviendo a utilizar las propiedades de los logaritmos

$$x = \frac{1}{0.003} \ \mathrm{L}\frac{24 \ \text{nudos}}{v}$$

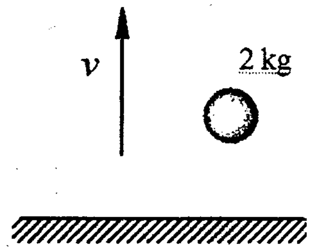
La posición de la embarcación cuando su rapidez es de 6 nudos es:

$$x = \frac{1}{0.003} \ \mathrm{L} \ \frac{24 \ \cancel{\text{nudos}}}{6 \ \cancel{\text{nudos}}} = \frac{1}{0.003}\mathrm{L} \ 4$$

$$\boxed{x = 462 \ \text{ft}}$$

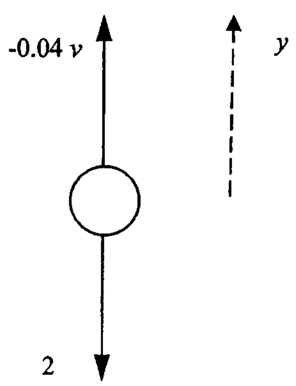
Que es también la distancia que navega hasta dicha posición.

10. Se arroja una pequeña esfera de 2 kg de peso hacia arriba, verticalmente, con una velocidad inicial de 15 m/s. En su movimiento experimenta una resistencia del aire que, en kg, se puede considerar de $0.04v$, donde v se dé en m/s. Determine: *a)* el tiempo en que alcanza su altura máxima; *b)* la velocidad con que vuelve al punto de partida.



Resolución

En el diagrama de cuerpo libre, dibujaremos la resistencia del aire en sentido positivo, pero asignamos a la magnitud un signo negativo, de modo que si v es positiva, la fuerza resulta negativa y viceversa.



$$\sum Fy = ma$$

$$-2-0.04v=\frac{2}{g}\frac{dv}{dt}$$

$$dt=\frac{2}{g}\left(\frac{dv}{-0.04v-2}\right)$$

$$\int dt=\frac{2}{g}\int\left(\frac{dv}{-0.04v-2}\right)$$

$$t=-\frac{2}{0.04g}\mathrm{L}(-0.04v-2)+C$$

Si $t=0,\ v=15$

$$0=\frac{1}{0.02g}\mathrm{L}-2.6+C$$

$$t=\frac{1}{0.02g}\mathrm{L}\left(\frac{-2.6}{-0.04v-2}\right)$$

$$t=\frac{1}{0.02g}\mathrm{L}\left(\frac{2.6}{0.04v+2}\right) \qquad \text{—————— (1)}$$

Nombramos (1) a la ecuación anterior ya que será utilizada más adelante.

Para $v = 0$

$$t = \frac{1}{0.02g} \mathrm{L}\ 1.3$$

$$\boxed{t = 1.337\ \mathrm{s}}$$

De la ecuación (1)

$$0.02gt = \mathrm{L}\left(\frac{2.6}{0.04v+2}\right)$$

$$e^{0.02gt} = \frac{2.6}{0.04v+2}$$

$$0.04v + 2 = 2.6\ e^{-0.02gt}$$

$$0.04v = -2 + 2.6\ e^{-0.02gt}$$

$$v = -50 + 65\ e^{-0.02gt} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -50 + 65\ e^{-0.02gt}$$

$$\int dy = \int\left(-50 + 65\ e^{-0.02gt}\right)dt$$

$$y = -50t - \frac{65}{0.02g}\ e^{-0.02gt} + C_1$$

Si $y = 0$, $t = 0$

$$0 = -\frac{65}{0.02g} + C_1$$

$$y = -50t + \frac{65}{0.02g}\left(1 - e^{-0.02gt}\right)$$

Se encuentra el valor de t para $y = 0$

$$t = 2.801\ \mathrm{s}$$

Sustituyendo el tiempo encontrado en la ecuación (2)

$$\boxed{v = 12.47\ \mathrm{m/s}\ \downarrow}$$

O bien:

$$\sum Fy = ma$$

$$-0.04v-2=\frac{2}{g}v\frac{dv}{dy}$$

$$v+50=-\frac{50}{g}v\frac{dv}{dy}$$

$$-\frac{g}{50}dy=\frac{vdv}{v+50}$$

$$-\frac{g}{50}\int dy=\int\frac{v+50-50}{v+50}dv$$

$$-\frac{g}{50}\int dy=\int dv-50\int\frac{dv}{v+50}$$

$$-\frac{g}{50}y=v-50\text{L}(v+50)+C_1$$

Si $y=0$, $v=15$

$$0=15-50\ \text{L}65+C_1$$

$$C_1=-15+50\ \text{L}65$$

$$-\frac{g}{50}y=v-15+50\text{L}\left(\frac{65}{v+50}\right)$$

Para $y=0$:

$$0=v-15+50\text{L}\left(\frac{65}{v+50}\right)$$

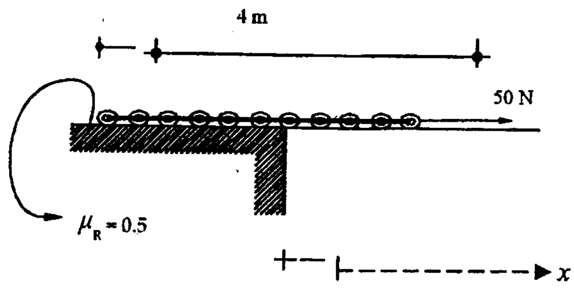
Resolviendo mediante aproximaciones o con ayuda de una calculadora programable, obtenemos:

$v_1=15$ (Cuando comienza el movimiento)

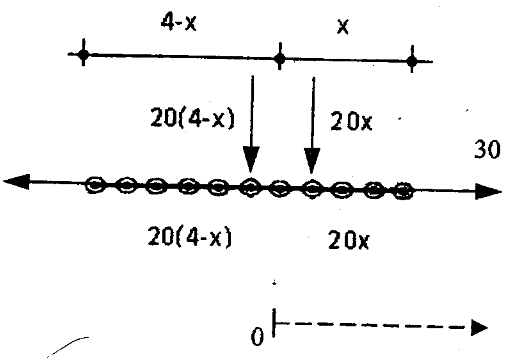
$v_2=-12.48$

$$\boxed{v=12.48\ \text{m/s}\ \downarrow}$$

11. Una cadena de 4 m de longitud y 80 N de peso reposa en el borde de una superficie rugosa, cuyo coeficiente de fricción cinética es 0.5. Mediante una fuerza constante de 50 N se jala a otra superficie contigua, lisa. Calcule la velocidad con que la cadena termina de pasar completamente a la superficie lisa.



Resolución



Dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la cadena, que representa un instante cualquiera de su movimiento. Un tramo de ella se encuentra sobre la superficie rugosa y otro en la lisa.

Colocamos el origen del sistema de referencia en la unión de las dos superficies, de modo que el tramo sobre la superficie lisa tiene una longitud x.

Como el peso de la cadena es de 80 N y mide 4 m, su peso por unidad de longitud es:

$$w = \frac{80}{4} = 20\,\mathrm{N/m}$$

Las componentes normales de las superficies sobre la cadena tienen la misma magnitud que los pesos de sus tramos respectivos.

$$\sum Fx = ma$$

$$50 - 0.5[20(4-x)] = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$50 - 10(4-x) = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$50 - 40 + 10x = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$10 + 10x = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$1+x=\frac{8}{9.81}v\frac{dv}{dx}$$

Hemos sustituido *a* por $v\frac{dv}{dx}$ ya que la fuerza está en función de la posición x, y hemos dividido ambos miembros entre 10.

Separamos variables e integramos.

$$(1+x)dx=\frac{8}{9.81}vdv$$

$$\int(1+x)dx=\frac{8}{9.81}\int vdv$$

$$x+\frac{x^2}{2}=\frac{8}{9.81}\left(\frac{v}{2}\right)^2+C$$

Si $x=0, v=0$ puesto que cuando el extremo derecho de la cadena se halla en el punto de unión de las superficies comienza a moverse.

$$C=0$$

$$x+\frac{x^2}{2}=\frac{4}{9.81}v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{9.81}{4}}\sqrt{x+\frac{x^2}{2}}$$

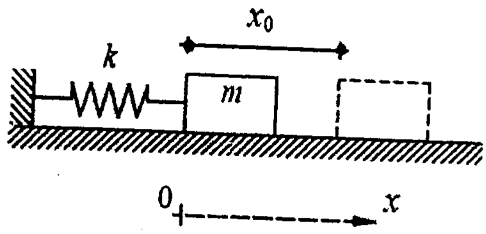
La cadena termina de pasar a la superficie lisa cuando $x=4$, y su velocidad entonces es:

$$v=\sqrt{\frac{9.81}{4}}\sqrt{x+\frac{x^2}{2}}$$

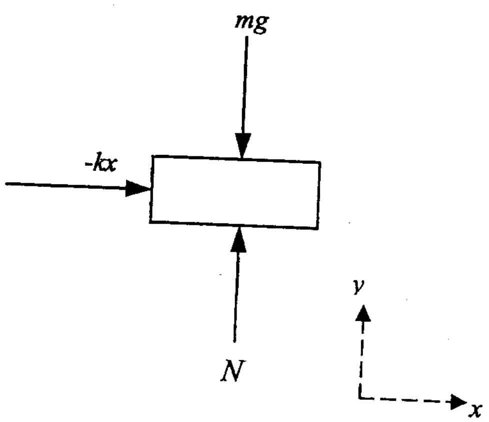
$$v=\sqrt{\frac{9.81}{4}}\sqrt{4+8}$$

$$\boxed{v=5.42\ \mathrm{m/s}\rightarrow}$$

12. Un cuerpo de masa m unido a un resorte, cuya constante de rigidez es k, se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Se aleja el cuerpo una distancia x_o de su posición de equilibrio y se suelta. Escriba las ecuaciones del movimiento del cuerpo en función del tiempo y dibuje las gráficas correspondientes.



Resolución



En el diagrama de cuerpo libre, dibujaremos la fuerza del resorte en sentido positivo, pero asignamos a su magnitud un signo negativo, de forma que si x es positiva la fuerza resulte negativa y viceversa.

$$\sum Fx = ma$$

$$-kx = m\frac{dv}{dx}v$$

El signo negativo sirve para cambiar el sentido de la fuerza. Pues si x es positiva, es decir, si el cuerpo está a la derecha del origen, la fuerza se dirige hacia la izquierda; y viceversa.

$$-k\frac{x^2}{2} + C = m\frac{v^2}{2}$$

Cuando $x = x_0$; $v = 0$

$$-k\frac{x_0^{\,2}}{2} + C = 0$$

$$C = k\frac{x_0^{\,2}}{2}$$

Entonces:

$$-k\frac{x^2}{2} = m\frac{v^2}{2} - k\frac{x_0^{\,2}}{2}$$

$$-k\frac{x^2}{2} + k\frac{x_0^{\,2}}{2} = m\frac{v^2}{2}$$

$$\frac{k}{2}(x_0{}^2 - x^2) = \frac{m}{2}v^2$$

$$k(x_0{}^2 - x^2) = mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0{}^2 - x^2\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{x_0{}^2 - x^2}$$

Sea $p = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $v = \dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = p\sqrt{x_0{}^2 - x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x_0{}^2 - x^2}} = pdt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x_0{}^2 - x^2}} = p\int dt$$

$$\text{angsen}\frac{x}{x_0} = pt + C_2$$

Si $t = 0$, $x = x_0$

$$\text{angsen}(1) = C_2$$

$$C_2 = 90°$$

$$\text{angsen}\frac{x}{x_0} = pt + 90°$$

Aplicando la función seno de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{x}{x_0} = \text{sen}(pt + 90°)$$

$$\frac{x}{x_0} = \cos pt \qquad \boxed{x = x_0 \cos pt}$$

Derivando con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = x_0\left(-p \text{ sen } pt\right) = -px_0 \text{sen } pt$$

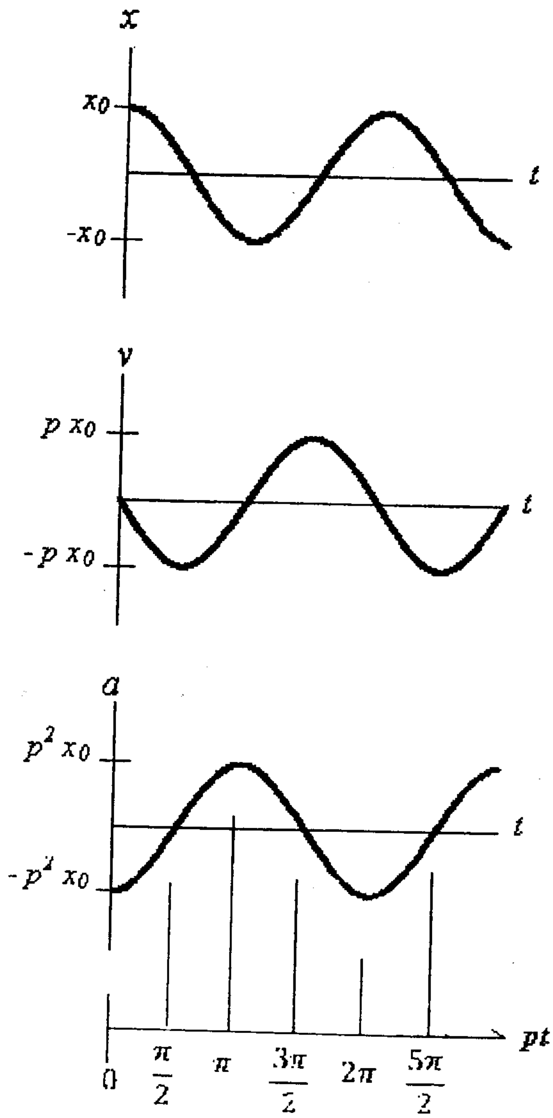
$$\boxed{v = -px_0 \text{sen } pt}$$

Derivando nuevamente con respecto del tiempo encontraremos la aceleración.

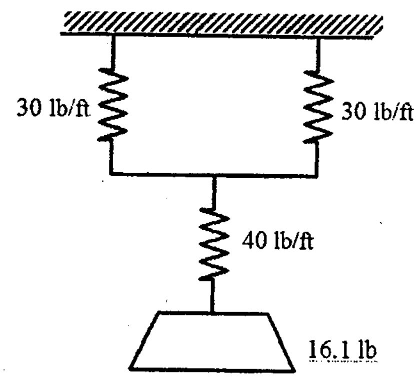
$$\frac{dv}{dt} = -px_0\left(p \cos pt\right) = -p^2 x_0 \cos pt$$

$$\boxed{a = -p^2 x_0 \cos pt} \qquad \boxed{a = -p^2 x}$$

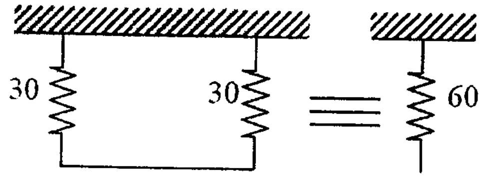
Las gráficas para la posición, velocidad y aceleración son, respectivamente:



13. Un cuerpo de 16.1 lb de peso pende de los tres resortes mostrados en la figura. Se jala el cuerpo hacia abajo tres pulgadas de su posición de equilibrio y se suelta. Se pide: *a)* Hallar la constante de rigidez de un resorte equivalente a los tres de la figura. *b)* Determinar si el movimiento que adquiere el cuerpo es armónico simple o no. *c)* Dar la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento. *d)* Calcular la velocidad y aceleración máximas del cuerpo.

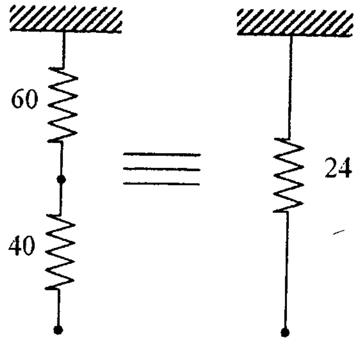


Resolución



a) La constante de rigidez equivalente a la de los dos resortes en paralelo es $k_1 = 30 + 30 = 60\ \text{lb}/\text{ft}$

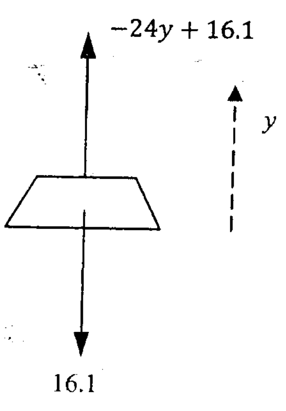
La constante equivalente a los dos resortes en serie es:



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{2+3}{120} = \frac{5}{120}$$

$$\boxed{k = 24\ \text{lb}/\text{ft}}$$



b) Dibujamos el diagrama de cuerpo libre para cualquier instante del movimiento y elegimos como origen la posición de equilibrio del cuerpo. En dicha posición la fuerza del resorte es igual al peso, de 16.1 lb, de modo que en cualquier posición la acción del resorte tiene una magnitud de $-24y + 16.1$

$$\sum Fy = ma$$

$$-24y + 16.1 - 16.1 = \frac{16.1}{32.2} a$$

$$-24y = 0.5a$$

$$a = -48y$$

Esta ecuación es de la forma $a = -\rho^2 x$ que corresponde al movimiento armónico simple, es decir, rectilíneo, cuya aceleración es proporcional a la posición con respecto al punto de equilibrio y se dirige hacia él.

Por lo tanto, el cuerpo adquiere movimiento armónico simple.

c) Como la amplitud es la distancia máxima que la partícula se aleja del origen, $y_0 = 3\ \text{in}$, que es la longitud señalada en el enunciado.
Como $1\ \text{ft} = 12\ \text{in}$

$$\boxed{y_0 = 0.25\ \text{ft}}$$

El periodo T es el tiempo en que el cuerpo da una oscilación completa:

$$pT = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

En donde $p = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$k = 24$$

$$m = \frac{16.1}{32.2} = 0.5$$

$$p = \sqrt{\frac{24}{0.5}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Entonces:

$$T = \frac{2\pi}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{T = 0.907\ \text{s}}$$

Y la frecuencia, que es el número de ciclos completos por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi}$$

$$\boxed{f = 1.103 \text{ Hz}}$$

d) Como se trata de movimiento armónico simple, las ecuaciones del movimiento son:

$$y = y_0 \cos pt$$

$$v = -py_0 \text{sen } pt$$

$$a = -p^2 y_0 \cos pt = -p^2 y$$

que, para este caso particular, son:

$$y = 0.25 \cos 4t\sqrt{3}$$

$$v = -\sqrt{3} \text{sen } 4t\sqrt{3}$$

$$a = -12 \cos 4t\sqrt{3}$$

El valor de la velocidad máxima se alcanza cuando

$|\text{sen } pt| = 1$, por tanto:

$$v_{\max} = |-py_0| = \sqrt{3}$$

$$\boxed{v_{\max} = 1.732 \ \text{ft}/\text{s}}$$

La aceleración máxima corresponde a la posición extrema, $y = 0.25$

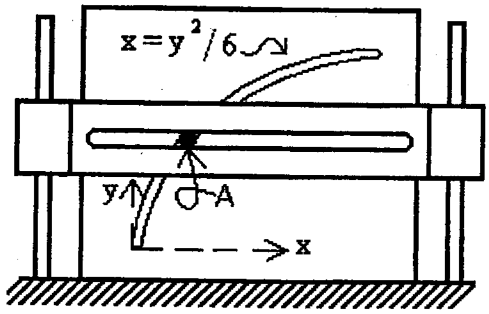
$$a_{\max} = |-p^2 y_0| = 48(0.25)$$

$$\boxed{a_{\max} = 12 \ \text{ft}/\text{s}^2}$$

2.2 Movimiento curvilíneo

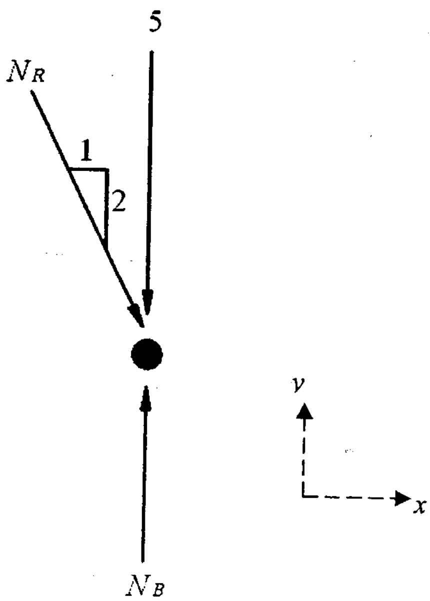
2.2.1 Componentes cartesianas

14. La corredera A, de 5 lb de peso, se mueve dentro de la ranura conforme se eleva el brazo horizontal, que tiene una velocidad constante de 3 in/s. Sabiendo que cuando $x = 6$ in, su velocidad tiene una pendiente positiva de 1/2 y su aceleración es horizontal y de 3 in/s^2 dirigida hacia la derecha, determine todas la fuerzas externas que actúan sobre ella en esa posición.



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la corredera. Las reacciones normales del brazo y de la ranura serán llamadas N_B y N_R respectivamente, en donde N_B tendrá la dirección del eje y, mientras que N_R será normal a la velocidad en el punto.



$$\sum Fx = ma$$

$$N_R\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{5}{32.2}\left(\frac{3}{12}\right)$$

$$N_R=\frac{5}{32.2}\left(\frac{3}{12}\right)\sqrt{5}$$

$$\boxed{N_R = 0.0868 \text{ lb}}$$

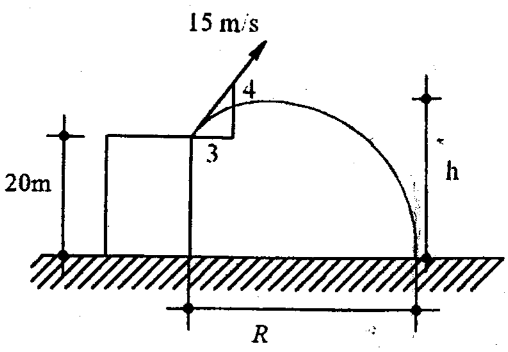
$$\sum Fy = 0$$

$$N_B - 5 - N_R\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=0$$

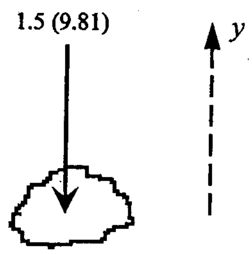
$$N_B = 5 + N_R\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\boxed{N_B = 5.08 \text{ lb}}$$

15. Desde la orilla de un edificio de 20 m de altura, un niño arroja una piedra con una velocidad de 15 m/s, cuya pendiente es de 4/3. Sabiendo que la piedra tiene una masa de 1.5 kg y la resistencia del aire es despreciable, determine la altura máxima h sobre el suelo que alcanza la piedra, la distancia horizontal R que se aleja del edificio y la velocidad con que llega al suelo.



Resolución



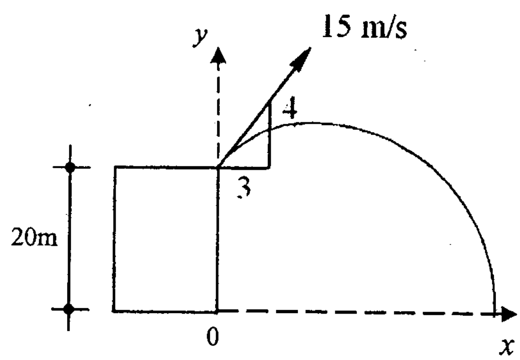
El diagrama de cuerpo libre de la piedra en cualquier instante del movimiento es el que se muestra. Elegimos un eje de referencia unilateral hacia arriba.

$$\sum Fy = ma$$

$$-1.5(9.81) = 1.5a$$

$$a = 9.81$$

$$a = 9.81 \ \mathrm{m/s^2} \downarrow$$



Partiendo de este dato, elegimos un sistema de referencia completo para plantear las ecuaciones del movimiento de la piedra.

Componentes horizontales

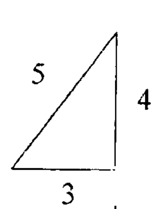
$$a_x = 0$$

$$v_x = v_{0x} + \int a_x dt = v_{0x} = 15\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$v_x = 9$$

$$x = x_0 + \int v_x dt = 9\int dt$$

$$x = 9t$$



Componentes verticales

$$a_y = -9.81$$

$$v_y = v_{0y} + \int(-9.81)dt = 15\left(\frac{4}{5}\right) - 9.81\int dt$$

$$v_y = 12 - 9.81t$$

$$y = y_0 + \int (12 - 9.81t)\,dt$$

$$y = 20 + 12t - \frac{9.81}{2}t^2$$

Alcanza la altura máxima h cuando la componente vertical de la velocidad es nula.

$$v_y = 0$$

$$0 = 12 - 9.81t$$

$$t = \frac{12}{9.81}$$

Y esa altura es $y = h$

$$h = 20 + 12\left(\frac{12}{9.81}\right) - \frac{9.81}{2}\left(\frac{12}{9.81}\right)^2$$

$$= 20 + \frac{144}{9.81} - \frac{72}{9.81} = 20 + \frac{72}{9.81}$$

$$\boxed{h = 27.3 \text{ m}}$$

La piedra llega al suelo en un punto situado a una distancia R del edificio. Es decir, cuando

$$y = 0$$

$$0 = 20 + 12t - \frac{9.81}{2}t^2$$

Las raíces de esta ecuación son

$$t_1 = 3.58 \quad ; \quad t_2 = -1.138$$

En $t = 3.58$ s, $x = R$

$$R = 9(3.58)$$

$$\boxed{R = 32.3 \text{ m}}$$

$a = 0$

$V = V_0 + a t$

$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$V_0 = 15 \frac{3}{5}$

$x = 0 + 15 \frac{3}{5} t$

$a = 9.81$

$V = 15 \frac{4}{5} + a t$

$V = 12 - 9.81 t$

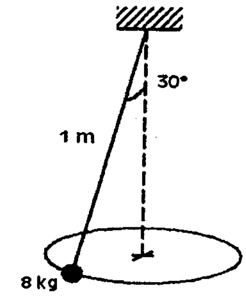
$y = 20 + 12t + \frac{9.81}{2} t^2$

$y = 2 + 12 t - 4{,}905 t^2$

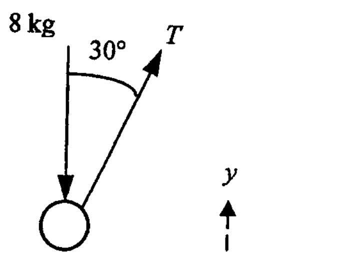
si $V = 0$

2.2.2 Componentes intrínsecas

16. Un péndulo cónico de 8 kg de peso tiene una cuerda de 1 m de longitud, que forma un ángulo de 30° con la vertical. ¿Cuál es la tensión de la cuerda? ¿Cuál es la rapidez lineal del péndulo?



Resolución



$$\Sigma Fy = 0$$

$$T\cos 30° - 8 = 0$$

$$T = \frac{8}{\cos 30°}$$

$$\boxed{T = 9.24 \text{ kg}}$$

$$\Sigma Fn = ma_n$$

$$T\text{sen}30° = \frac{8}{9.81}\frac{v^2}{\rho}$$

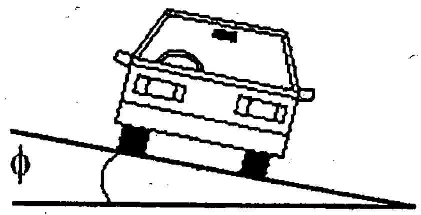
$$T\text{sen}30° = \frac{8}{9.81}\;\frac{v^2}{(1)\text{sen}30°}$$

$$v^2 = \frac{(9.81)T\ \text{sen}^2 30°}{8}$$

$$v = \sqrt{\frac{(9.81)T\ \text{sen}^2 30°}{8}}$$

$$\boxed{v = 1.683\ \text{m/s}}$$

17. Calcule el ángulo de peralte ϕ que debe tener la curva horizontal de una carretera para que los vehículos al transitar por ella no produzcan fuerzas de fricción sobre el pavimento. El radio de la curva es de 1000 ft y de 60 mi/h la velocidad de diseño.

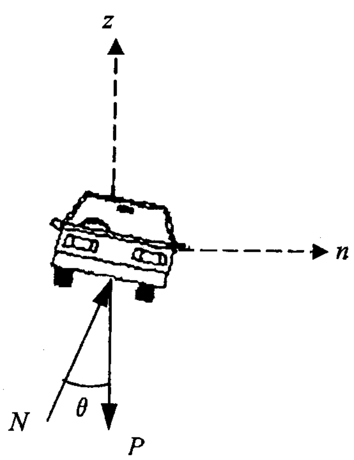


Resolución

Convertimos las $60 \, ^{mi}/_{h}$ a $^{ft}/_{s}$

$$60\frac{\text{mi}}{\text{h}} = 60\left(\frac{44}{30}\right)\frac{\text{ft}}{\text{s}} = 88\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de un vehículo en el que el pavimento sólo ejerce una fuerza normal.



El sistema de referencia requiere que el eje normal se dirija hacia el centro de la curva; y elegimos otro eje perpendicular a él (el eje tangencial es perpendicular al plano del dibujo).

$$\sum F_z = 0$$

$$N\cos\theta - P = 0$$

$$N = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$N\operatorname{sen}\theta = \frac{P}{32.2}\frac{v^2}{\rho}$$

Sustituyendo:

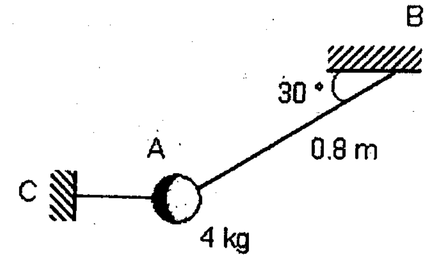
$$\frac{P}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = \frac{P}{32.2}\frac{(88)^2}{1000}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{(88)^2}{32200}$$

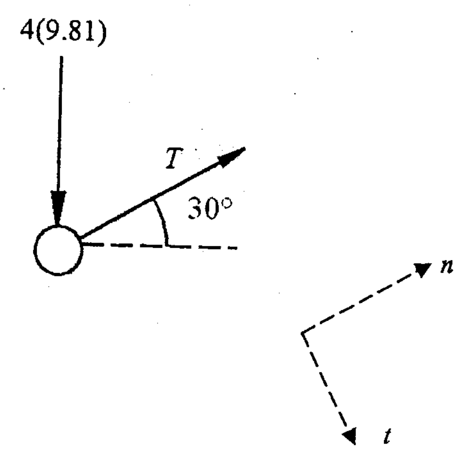
$$\tan\theta = \frac{(88)^2}{32200}$$

$$\boxed{\theta = 13.5^\circ}$$

18. Un cuerpo de 4 kg de masa se encuentra sujeto por dos cuerdas, una horizontal (AC) y otra (AB) de 0.8 m de largo, que forma un ángulo de 30° abajo de la horizontal. Determine la tensión que soportará la cuerda *AB* en el instante en que se corte la cuerda *AC*. Diga también cuál será la aceleración del cuerpo.



Resolución



$$\sum Fn = ma_n$$

$$T - 4(9.81)\operatorname{sen}\theta = 4a_n$$

$$T - 4(9.81)\operatorname{sen}\theta = 4\frac{v^2}{\rho}$$

$$T - 4(9.81)\operatorname{sen}\theta = 4\frac{v^2}{0.8}$$

$$T - 4(9.81)\operatorname{sen}\theta = 5v^2$$

Cuando $\theta = 30°$; $v = 0$

$$T - 4(9.81)\operatorname{sen}30° = 0$$

$$T = 4(9.81)\operatorname{sen}30°$$

$$\boxed{T = 19.62 \text{ N}}$$

$$\sum Ft = ma_t$$

$$4(9.81)\cos\theta = 4a_t$$

Si $\theta = 30°$:

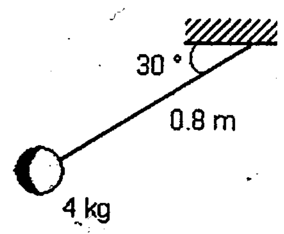
$$4(9.81)\cos 30° = 4a_t$$

$$a_t = \frac{4(9.81)\cos 30°}{4}$$

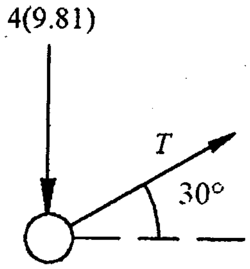
$$a_t = 8.49 \ \mathrm{m/s^2}$$

$$\boxed{a = 33.9 \ \mathrm{m/s^2} \quad 60°}$$

19. Un péndulo de 4 kg de masa comienza a oscilar cuando su cuerda, de 0.8 m de longitud, forma un ángulo de 30° abajo de la horizontal, como se muestra en la figura. ¿Cuál será la máxima rapidez que alcance? ¿Cuál, la tensión correspondiente de la cuerda?

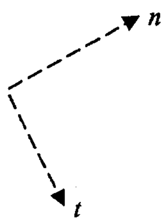


Resolución



Puesto que la rapidez del péndulo es variable, dibujaremos un diagrama de cuerpo libre que represente un instante arbitrario de su movimiento.

Utilizaremos un sistema de referencia intrínseco: el eje normal se dirige hacia el centro de la trayectoria circular del péndulo; y el tangencial tiene la dirección de la velocidad de éste.



$$\sum F_t = ma_t$$

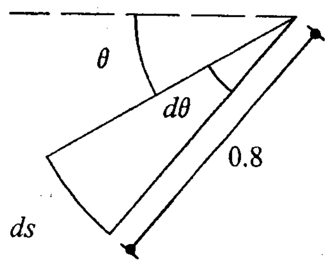
$$4(9.81)\cos\ \theta = 4a_t$$

La máxima rapidez la alcanza cuando $a_t = 0$, o sea,

$$4\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = 90°$$



Y para hallar esa rapidez, sustituimos

$$4(9.81)\cos\theta = 4v\frac{dv}{ds}$$

Simplificando

$$\cos\theta = \frac{1}{9.81}v\frac{dv}{ds}$$

Se puede relacionar el ángulo θ y el arco diferencial ds: el ángulo $d\theta$ es, como todo ángulo, la razón del arco al radio.

$$d\theta = \frac{ds}{0.8} \quad ; \quad ds = 0.8d\theta$$

De donde

$$\cos\theta = \frac{1}{9.81} v \frac{dv}{0.8d\theta}$$

Separando variables:

$$0.8\cos\theta \ d\theta = \frac{1}{9.81} vdv$$

$$0.8\int\cos\theta \ d\theta = \frac{1}{9.81}\int vdv$$

$$0.8\text{sen}\theta = \frac{1}{2\ (9.81)} v^2 + C$$

Si $\theta = 30°, v = 0$

$$0.8\left(\frac{1}{2}\right) = C$$

De donde

$$0.8\text{sen}\theta = \frac{1}{2\ (9.81)} v^2 + 0.4$$

$$\frac{1}{2(9.81)} v^2 = 0.4\ (2\text{sen}\theta - 1)$$

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{0.8(9.81)(1)}$$

$$\boxed{v_{\text{máx}} = 2.80 \ \text{m/s}}$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$T - 4(9.81)\ \text{sen}\theta = 4\frac{v^2}{r}$$

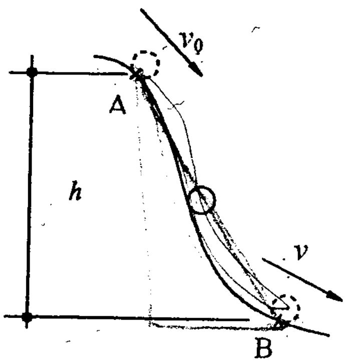
Para $\theta = 90°$ ($\text{sen}\theta = 1$), $v = v_{\text{máx}}$ y $r = 0.8$

$$T = 4(9.81) + 4\left(\frac{0.8(9.81)}{0.8}\right)$$

$$T = 8(9.81)$$

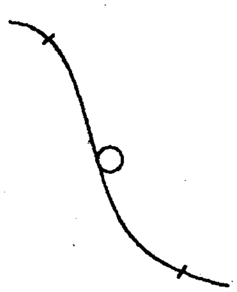
$$\boxed{T = 78.5\ \text{N}}$$

20. Por el punto A de la superficie lisa mostrada en la figura, pasa una partícula de masa m con una rapidez v_0. Diga con qué rapidez v llegará al punto B, si la diferencia de nivel entre A y B es h.

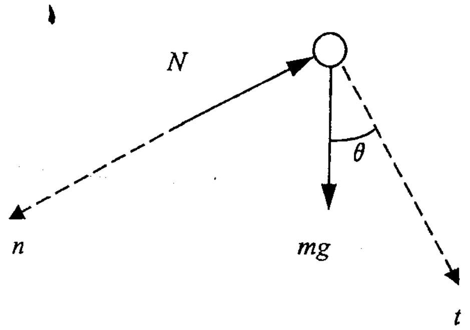


Resolución

Elegimos una posición arbitraria de la partícula, como la que se muestra en la figura, y dibujamos el diagrama de cuerpo libre.



Utilizamos un sistema de referencia intrínseco: el eje normal dirigido hacia el centro de la curva y el tangencial en dirección de la velocidad.



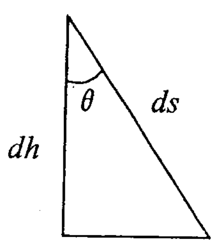
Como nos interesa conocer la rapidez, empleamos la ecuación:

$$\sum F_t = ma_t$$

$$\cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}v\frac{dv}{ds}$$

$$g\cos\theta\ ds = vdv$$

Para poder integrar, relacionamos la longitud ds con el ángulo θ, como se ve en la figura:



$$\cos\theta = \frac{dh}{ds}$$

$$ds = \frac{dh}{\cos\theta}$$

Por tanto

$$g\ dh = v\ dv$$

$$g\int_A^B dh = v\int_{v_0}^{v} dv$$

$$gh = \left.\frac{v^2}{2}\right|_{v_0}^{v}$$

$$gh = \frac{v^2 - v_0^{\,2}}{2}$$

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2gh$$

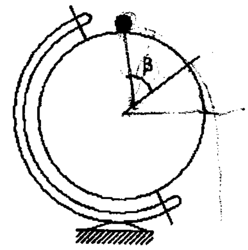
$$\boxed{v = \sqrt{v_0^{\,2} + 2gh}}$$

Si $v_0 = 0$, se tiene

$$v = \sqrt{2gh}$$

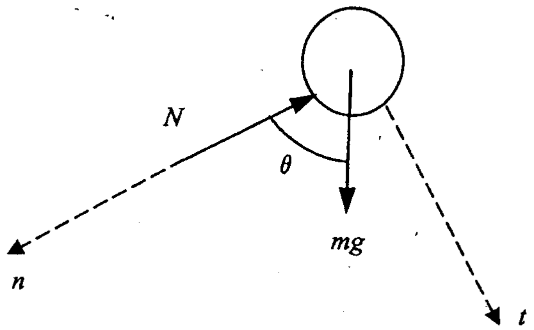
Siempre que no haya fuerza de fricción.

21. Un niño coloca una canica en la parte alta de un globo terráqueo. Diga en qué ángulo β la canica abandona el globo y se convierte en proyectil. Despreciè toda fricción.



Resolución

Aunque la canica está originalmente en equilibrio, éste es tan inestable que el movimiento es inminente.



Dibujaremos un diagrama de cuerpo libre que represente cualquier instante del movimiento de la canica sobre la superficie del globo terráqueo.

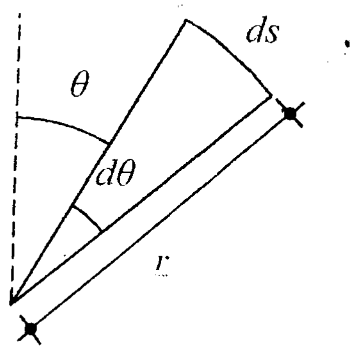
Elegimos un sistema de referencia intrínseco, con el eje normal hacia el centro del globo y el eje tangencial en dirección de la velocidad.

Puesto que la componente tangencial de la aceleración mide el cambio de magnitud de la velocidad, que es variable en este caso, comenzaremos con la siguiente ecuación.

$$\sum F_t = ma_t$$

$$mg\ \operatorname{sen}\theta = m\ v\frac{dv}{ds}$$

Se puede relacionar el ángulo θ y el arco diferencial ds, ya que todo ángulo se mide con la razón del arco al radio.



$$d\theta = \frac{ds}{r}$$

$$ds = r d\theta$$

De donde:

$$g\ \operatorname{sen}\theta = \frac{v}{r}\frac{dv}{d\theta}$$

$$gr\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta = vdv$$

$$gr\int \operatorname{sen}\theta \; d\theta = \int v dv$$

$$-gr \;\; \cos\theta = \frac{v^2}{2} + C$$

Como $v = 0$ cuando $\theta = 0°$ $(\cos\theta = 1)$

$$-gr \;\; (1) = C$$

$$-gr \;\; \cos\theta = \frac{v^2}{2} - gr$$

$$\frac{v^2}{2} = gr - gr \;\; \cos\theta$$

$$v^2 = 2gr(1 - \cos\theta)$$

Utilizando la otra ecuación cinética:

$$\sum F_n = ma_n$$

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{r}$$

Cuando la canica está a punto de separarse del globo,

$$N = 0 \text{ y } \theta = \beta$$

$$\cancel{m}g\cos\beta = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

Del resultado anterior:

$$g\cos\beta = \frac{2gr(1-\cos\beta)}{r}$$

$$\cos\beta = \frac{2gr(1-\cos\beta)}{gr}$$

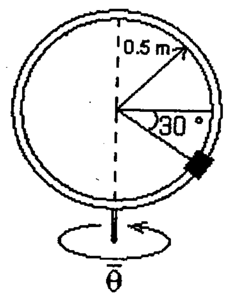
$$\cos\beta = 2 - 2\cos\beta$$

$$3\cos\beta = 2$$

$$\cos\beta = \frac{2}{3}$$

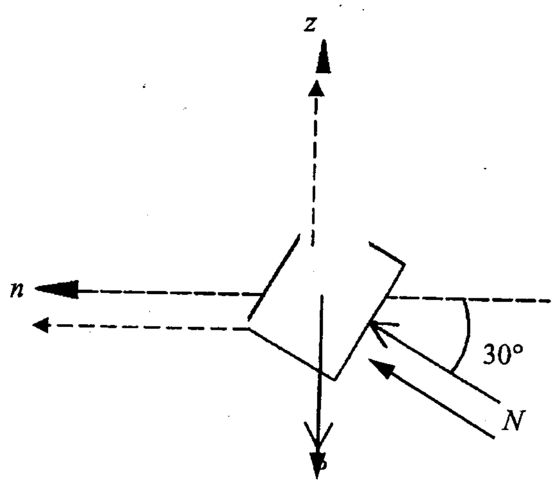
$$\boxed{\beta = 48.2°}$$

22. El aro liso de la figura, cuyo radio es de 0.5 m, gira con rapidez angular constante alrededor de un eje vertical. Calcule dicha rapidez angular, sabiendo que el collarín, aunque puede deslizarse libremente sobre el aro, mantiene fija su posición relativa a él.



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del collarín.



Como la trayectoria que describe es una circunferencia en el plano horizontal, el eje normal, que se dirige hacia el centro de la trayectoria, es también horizontal.

El eje tangencial es perpendicular al plano del dibujo y no aparece en el diagrama.

$$\sum F_Z = 0$$

$$N \operatorname{sen} 30° - P = 0$$

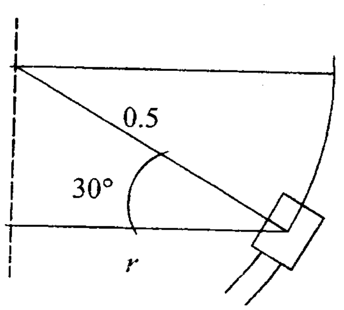
$$\frac{1}{2} N = P$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$N \cos 30° = \frac{P}{9.81} \dot{\theta}^2 r$$

$$2P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{P}{9.81} \dot{\theta}^2 r$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{9.81} \dot{\theta}^2 r$$



El radio de la trayectoria es

$$r = 0.5\cos 30° = \frac{0.5\sqrt{3}}{2} = 0.25\sqrt{3}$$

De donde

$$\sqrt{3} = \frac{1}{9.81}\dot{\theta}^2(0.25\sqrt{3})$$

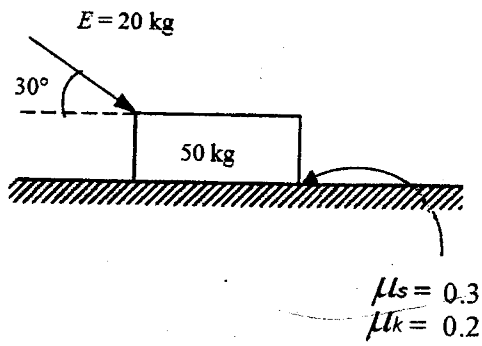
$$\dot{\theta}^2 = \frac{9.81}{0.25}$$

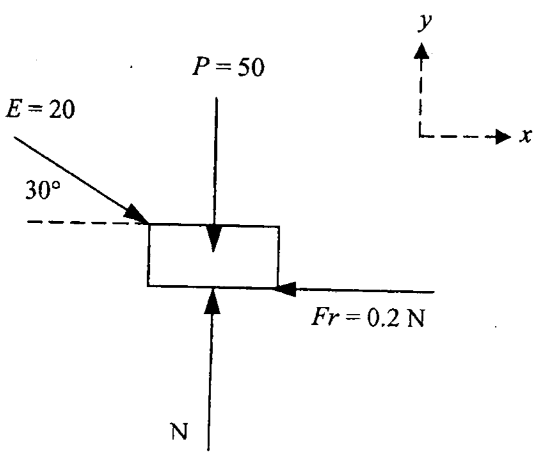
$$\boxed{\dot{\theta} = 6.26 \ \mathrm{rad/s}}$$

3. TRABAJO Y ENERGÍA E IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA LA PARTÍCULA

3.1 Trabajo y energía cinética

1. Con una fuerza E de 20 kg, inclinada 30°, se empuja un cuerpo de 50 kg sobre una superficie horizontal, en línea recta, a lo largo de 10 m. Los coeficientes de fricción estática y cinética son 0.3 y 0.2, respectivamente. Calcule el trabajo que realizan la fuerza E, el peso, la componente normal de la reacción de la superficie y la fricción durante el movimiento descrito.





Resolución

Mediante el diagrama de cuerpo libre investigaremos las magnitudes de las fuerzas cuyos trabajos deseamos conocer.

$$\sum Fy = 0$$

$$N - 50 - 20\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad N = 60$$

Por tanto $Fr = 0.2N = 12$

Como las cuatro fuerzas son constantes, el trabajo se puede calcular mediante la expresión:

$$U = (F\cos\theta)\ \Delta s$$

en donde θ es el ángulo que la fuerza forma con el desplazamiento, que, en este caso, es horizontal y hacia la derecha.

$$U_E = (20\cos 30°)10 = 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10$$

$$\boxed{U_E = 173.2 \text{ kg}\cdot\text{m}}$$

$$U_P = (50\cos 270°)10$$

$$\boxed{U_P = 0}$$

$$U_N = (50\cos 90°)10$$

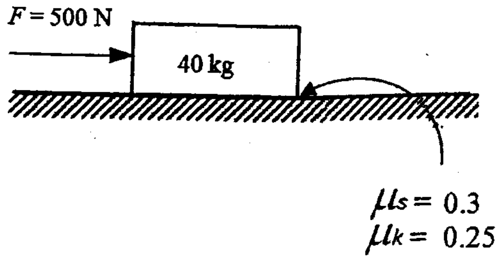
$$\boxed{U_N = 0}$$

$$U_{Fr} = (12\cos 180°)10 = 12(-1)10$$

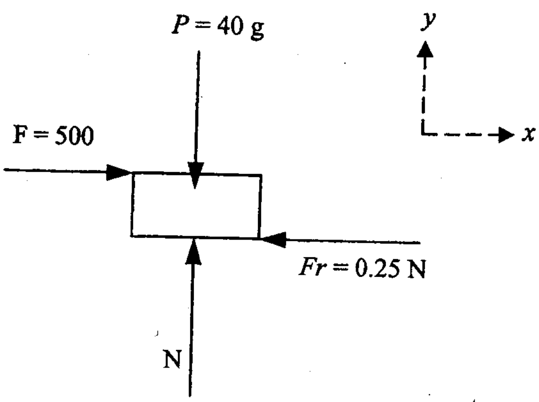
$$\boxed{U_{Fr} = -120 \text{ kg}\cdot\text{m}}$$

El trabajo es un escalar que puede ser positivo, negativo o nulo.

2. Una fuerza F de 500 N empuja un cuerpo de 40 kg de masa que reposa en una superficie horizontal. Sabiendo que el cuerpo se desplaza en línea recta y que los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cuerpo y la superficie son 0.30 y 0.25, respectivamente, calcule la velocidad del cuerpo cuando se haya desplazado 8 m.



Resolución



Investigaremos las magnitudes de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo de 40 kg.

$$\Sigma Fy = 0$$

$$N - 40g = 0; \quad N = 40(9.81)$$

Por tanto:

$$Fr = \mu k \; N = 0.25(40)9.81$$

$$Fr = 98.1$$

Los trabajos que realizan las fuerzas son:

$$U_P = U_N = 0$$

(pues son perpendiculares al desplazamiento)

$$U_F = 500(8) = 4000$$

$$U_{Fr} = -98.1(8) = -784.8$$

La fórmula del trabajo y la energía cinética establece que:

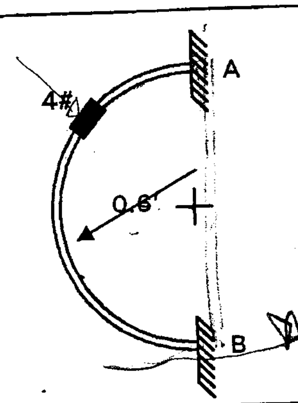
$$U = \Delta T$$

$$4000 - 784.8 = \frac{1}{2} m\left(v_2^{\,2} - v_1^{\,2}\right)$$

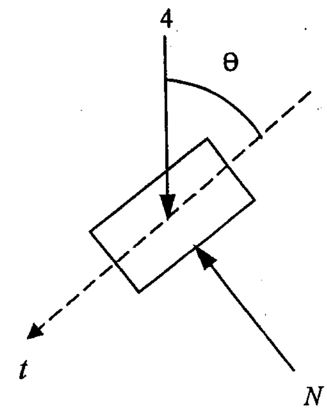
$$3215 = \frac{1}{2}(40)\left(v^2 - 0\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{3215}{20}} \qquad \boxed{v = 12.68 \ {}^{m}\!/_{s} \ \rightarrow}$$

3. El collarín de la figura, de 4 lb de peso, se suelta desde el punto A de la guía lisa de la figura y llega al punto B. Determine el trabajo que realiza su peso durante ese movimiento y diga con qué rapidez llega el collarín a B.



Resolución

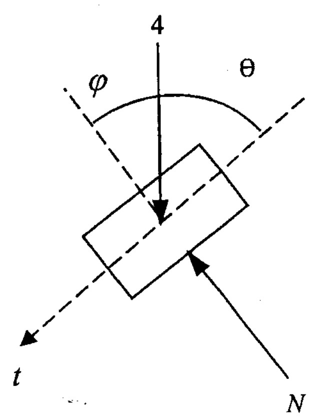


Primer procedimiento

Dibujaremos el diagrama de cuerpo libre del collarín en una posición cualquiera de su trayectoria.

El desplazamiento tiene la dirección del eje tangencial.

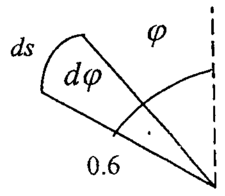
$$U = \int_1^2 P\cos\vartheta \cdot ds$$



$$U = 4\int_A^B \cos\vartheta \; ds$$

Como el ángulo ϑ, durante el movimiento, va de $-90° \leq \theta \leq 90°$, integraremos sustituyéndolo por el ángulo φ, que es el complemento de ϑ y siempre crece.

$$U = 4\int_{0°}^{180°} \operatorname{sen}\phi \; ds$$



Tomaremos un desplazamiento diferencial y lo relacionaremos con φ.

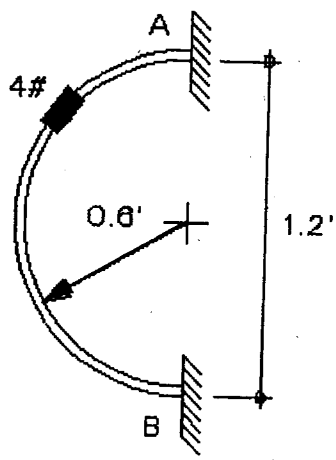
$$d\phi = \frac{ds}{0.6}; \quad ds = 0.6 \; d\phi$$

$$U = 4(0.6)\int_{0°}^{180°} \operatorname{sen}\phi \; d\phi$$

$$U = 2.4(-\cos 180° + \cos 0°)$$

$$U = 2.4[-(-1)+1]$$

$$\boxed{U = 4.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}}$$



Segundo procedimiento

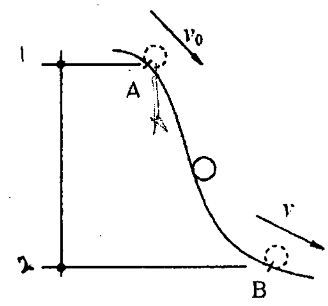
Como el trabajo es una fuerza conservativa, es decir, el trabajo que realiza es independiente de la trayectoria que siga el cuerpo, se puede calcular multiplicando su magnitud por el cambio de nivel de la partícula (*vid.* Prob. 4)

$$U = P(\Delta h)$$

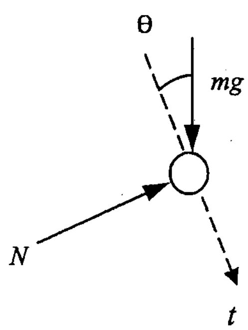
$$U = 4(1.2)$$

$$\boxed{U = 4.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}}$$

4. Una partícula de masa m pasa por A con una rapidez v_0. Sabiendo que la superficie es lisa, determine, en función de la altura h, el trabajo del peso y la rapidez v con que pasa por el punto B.



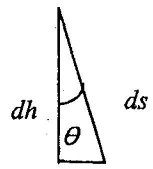
Resolución



En cualquier posición, las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso y una reacción normal. Esta última no trabaja precisamente por ser normal al desplazamiento. ϑ es el ángulo que el peso forma con el desplazamiento.

$$U = \int_A^B mg\cos\vartheta \; ds = mg\int_A^B \cos\vartheta \; ds$$

En la figura relacionaremos ϑ con un desplazamiento diferencial.



$$\cos\vartheta = \frac{dh}{ds}$$

$$U = mg\int_A^B \left(\frac{dh}{ds}\right) ds = mg\int_A^B dh$$

$$\boxed{U = mgh}$$

Utilizando la fórmula del trabajo y la energía cinética tenemos, tenemos:

$$U = \Delta T$$

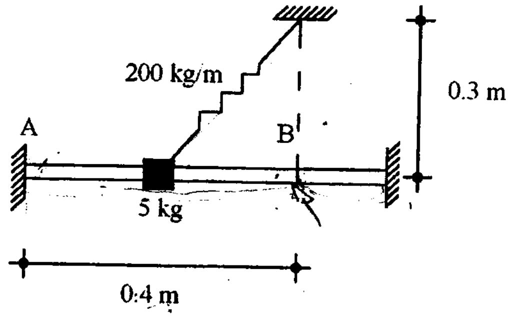
$$mgh = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^{\,2}\right)$$

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2gh$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^{\,2} + 2gh}}$$

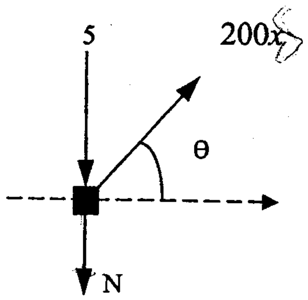
Si $v_0 = 0$, entonces: $v = \sqrt{2gh}$

5. El collarín de 5 kg de peso, se encuentra originalmente en reposo en el punto A. El resorte al que está unido tiene una longitud natural de 0.2 m y una constante de rigidez $k =$ 200 kg/m. Calcule el trabajo que realiza la tensión del resorte para llevar al collarín desde A hasta B, y la rapidez con que el collarín llega a este punto.



Resolución

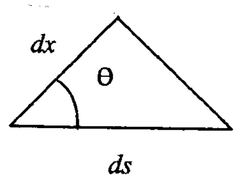
Primer procedimiento



En la figura se muestra el diagrama de cuerpo libre del collarín en una posición cualquiera. x es la deformación del resorte y es variable, como es variable la dirección ϑ.

El trabajo de la tensión del resorte es

$$U = \int_A^B (200x)\cos\vartheta \; ds = 200\int_A^B x\cos\vartheta \; ds$$

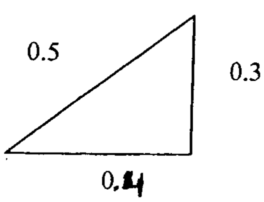


En la figura se establece la relación entre dx, ds y ϑ

$$\cos\vartheta = \frac{dx}{ds}$$

por tanto

$$U = 200\int_1^2 x dx$$



Como las longitudes inicial y final del resorte son 0.5 y 0.3 m, y su longitud natural es 0.2 m, las deformaciones son $x_1 = 0.3$ m y $x_2 = 0.1$ m.

$$U = 200\int_{0.1}^{0.3} x dx = 200\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0.1}^{0.3}$$

$$U = 100\left(0.3^2 - 0.1^2\right) = 100(0.08)$$

$$\boxed{U = 8\ \text{kg}\cdot\text{m}}$$

Como la tensión del resorte es la única fuerza que trabaja, empleando la fórmula del trabajo y la energía cinética se tiene:

$$U = \Delta T$$

$$U = \frac{1}{2}m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right)$$

$$8 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9.81}\right)\left(v_B{}^2 - 0\right)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{16(9.81)}{5}}$$

$$\boxed{v_B = 5.60\ \text{m/s}}$$

<u>Segundo procedimiento</u>

Si sabemos que el trabajo que realiza un resorte es

$$U = -\frac{1}{2}k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)$$

entonces

$$-\frac{1}{2}k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right)$$

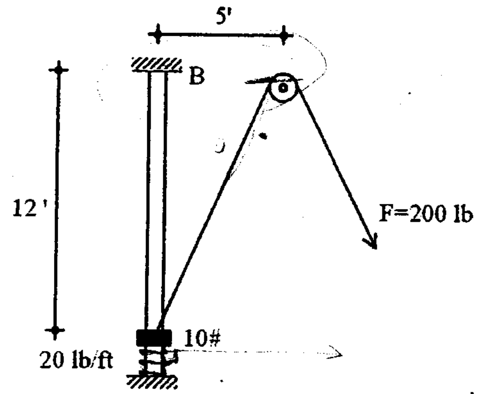
$$-200\left(0.1^2 - 0.3^2\right) = \frac{5}{9.81}v_B{}^2$$

$$8 = \frac{5}{9.81}v_B{}^2$$

$\frac{1}{2}K\varepsilon^2\Big|_{x_1}^{x_2}$

$$\boxed{v_B = 5.60\ \text{m/s}}$$

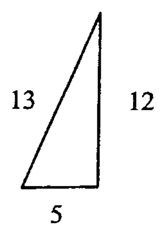
6. El collarín de la figura tiene un peso de 10 lb y reposa sobre el resorte al que está unido. La constante de rigidez del resorte es k = 20 lb/ft. La clavija por la que pasa la cuerda es lisa. A dicha cuerda se le aplica una fuerza constante de 200 lb para levantar a collarín a la posición B de la barra lisa. Determine la rapidez con que el collarín llega a B.



Resolución

Considerando el conjunto de los cuerpos como un sistema, las fuerzas externas que trabajan son la fuerza F, el peso del collarín y la fuerza del resorte. Calcularemos el trabajo que realiza cada una de ellas.

Fuerza constante F de 200 lb



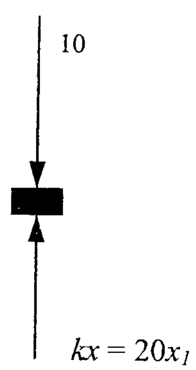
El tramo de cuerda que se halla originalmente entre la polea y el collarín mide 13 ft. Al final, el tramo se reduce a 5 ft. Por tanto, el desplazamiento de la fuerza es de 8 ft.

$$U_F = F(\Delta s) = 200(8) = 1600 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Peso del collarín

Como el desplazamiento del collarín tiene el sentido contrario del peso, el trabajo que realiza es negativo.

$$U_P = -P(\Delta h) = -10(12) = -120 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$



Fuerza del resorte

Como el collarín reposa inicialmente sobre el resorte, lo deforma una longitud tal que

$20x_1 = 10$; o sea $x_1 = 0.5\,\text{ft}$. Al final, el resorte estará estirado una longitud

$$x_2 = 12 - 0.5 = 11.5\,\text{ft}$$

$$U_K = -\frac{1}{2}k\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) = -\frac{1}{2}(20)\left(11.5^2 - 0.5^2\right)$$

$$U_K = -1320\,\text{lb}\cdot\text{ft}$$

Empleando la fórmula del trabajo y la energía cinética:

$$U = \Delta T$$

$$1600 - 120 - 1320 = \frac{1}{2}m\left(v_B^{\,2} - v_A^{\,2}\right)$$

$$160 = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(v_B^{\,2} - 0\right)$$

$$v_B^{\,2} = \frac{320(32.2)}{10}$$

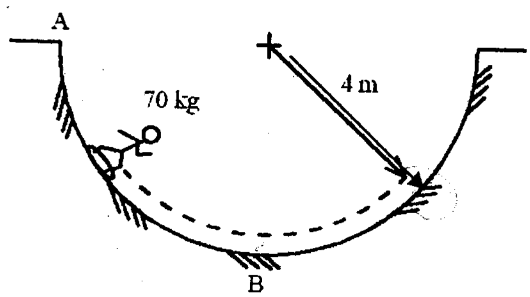
$$\boxed{v_B = 32.1\,\text{ft}/\text{s}}$$

Puta madre !!!

~~es la masa~~ !!

3.2 Trabajo, energía cinética y energía potencial

7. Un competidor de *snowboard* de 70 kg de peso. se deja caer desde el punto A de la superficie semicilíndrica que se muestra en la figura. Despreciando el tamaño del competidor y toda fricción, diga cuál es la energía potencial gravitacional que pierde el competidor al llegar al fondo B y con qué rapidez llega a esa posición.



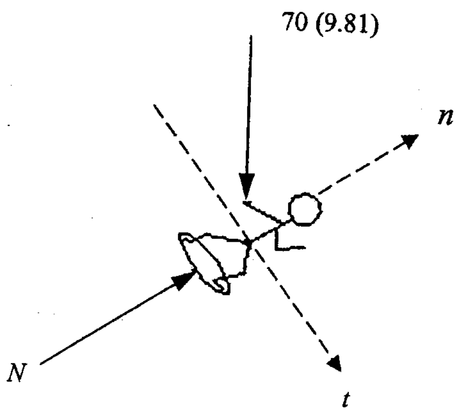
Resolución

El competidor pierde energía potencial gravitacional, puesto que el punto B está más bajo que A.

$$\Delta Vg = P(\Delta h)$$

$$\Delta Vg = 70(9.81)(-4) = -2747$$

$$\boxed{\Delta Vg = -2750 \text{ N} \cdot \text{m}}$$



Las únicas fuerzas que actúan durante el movimiento son el peso y la reacción normal.

Se produce un intercambio entre la energía cinética y la potencial gravitacional.

$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$

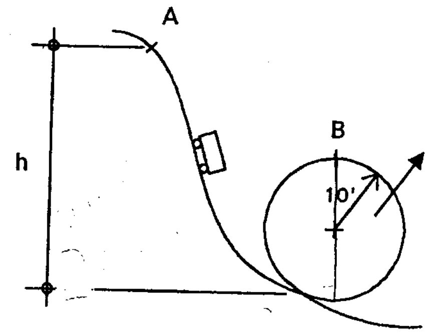
$$\frac{1}{2}m\left(v_B^{\,2} - v_A^{\,2}\right) + P(\Delta h) = 0$$

$$\frac{1}{2}(70)\left(v_B^{\,2} - 0\right) - 2747 = 0$$

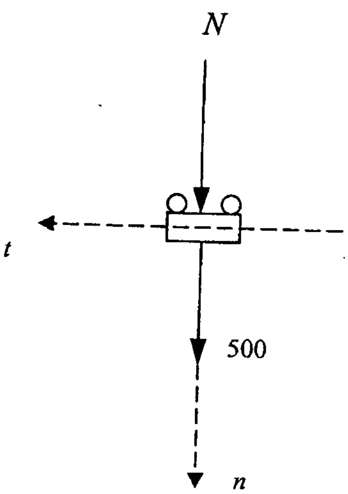
$$v_B^{\,2} = \frac{2747(2)}{70}$$

$$\boxed{v_B = 8.86 \text{ m/s}}$$

8. El carrito de 500 lb de un juego de feria pasa por el punto A con una rapidez de 20 ft/s. Sabiendo que la altura h es de 30 ft y el radio del bucle es de 10 ft, calcule la rapidez con que el carrito pasa por la cima B del bucle circular de la vía, y la fuerza que ésta ejerce sobre aquél en dicha posición. Calcule también cuál debe ser la mínima altura h a la que debe soltarse para que el carrito alcance la mencionada cima.



Resolución



Utilizaremos la fórmula de la conservación de la energía para calcular la rapidez con que el carrito pasa por B.

$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) + P(\Delta h) = 0$$

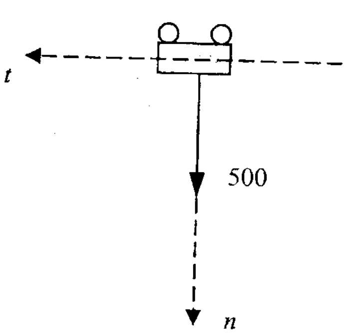
observamos que Δh es negativa y de 30-2(10) = 10

$$\frac{1}{2}\left(\frac{500}{32.2}\right)\left(v_2^2 - 20^2\right) + 500(-10) = 0$$

$$v_2^2 - 400 = 644$$

$$v_2^2 = 1044$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del carrito al pasar por B y elegimos un sistema de referencia intrínseco.



$$\Sigma F_n = ma_n$$

$$500 + N = \frac{500}{32.2}\frac{v^2}{\rho}$$

$$N = -500 + \frac{500}{32.2}\left(\frac{1044}{10}\right)$$

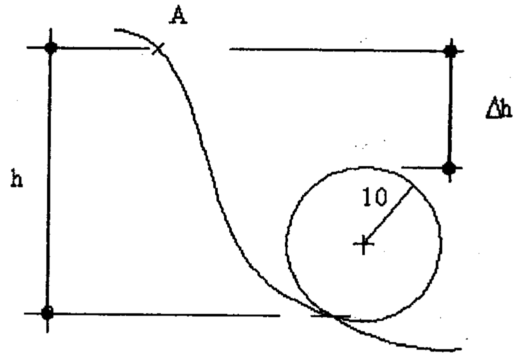
$$\boxed{N = 1121\,\text{lb}\downarrow}$$

Para calcular la altura h mínima de la que debe soltarse el carrito para que recorra el bucle completo, dibujaremos el diagrama de cuerpo libre y calcularemos la rapidez con que debe pasar por B.

$$\Sigma F_n = ma_n$$

$$500 = \frac{500}{32.2}\frac{v^2}{10}$$

$$v^2 = 322$$



Con la fórmula de la conservación de la energía, tomando en cuenta que $h = 20 + \Delta h$

$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_2^{\,2} - v_1^{\,2}\right) + P(\Delta h) = 0$$

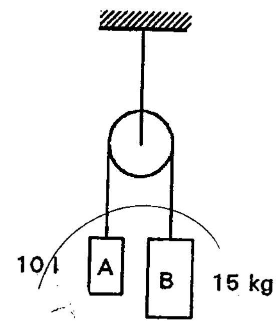
$$\frac{1}{2}\left(\frac{500}{32.2}\right)(322 - 0) + 500(-\Delta h) = 0$$

$$5 - (h - 20) = 0$$

$$h - 20 = 5$$

$$\boxed{h = 25 \text{ ft}}$$

9. Los cuerpos de la figura están inicialmente en reposo. Las masas de A y B son 10 y 15 kg, respectivamente, mientras que la de la polea es despreciable. Calcule la rapidez de los cuerpos cuando se hayan desplazado 0.5 m y la tensión de la cuerda.

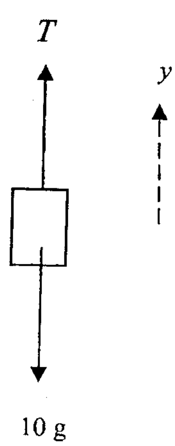


Resolución

Entre la posición inicial y la final hay cambio tanto de la energía cinética como de la energía potencial del sistema, en el cual se incluyen los dos cuerpos, la polea y la cuerda. Las rapideces de A y B son iguales.

$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$

$$\Delta T_A = \frac{1}{2} m_A \left(v^2 - 0\right) = \frac{1}{2}(10)v^2 = 5v^2$$



$$\Delta T_B = \frac{1}{2} m_B \left(v^2 - 0\right) = \frac{1}{2}(15)v^2 = 7.5v^2$$

$$\Delta Vg_A = mg(\Delta h) = 10(9.81)0.5 = 49.05$$

$$\Delta Vg_B = -mg(\Delta h) = -15(9.81)0.5 = -73.58$$

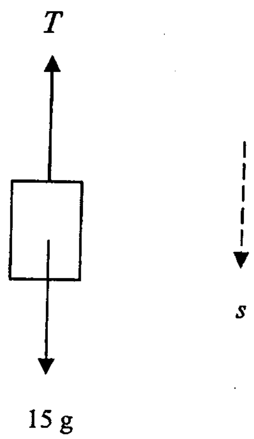
$$5v^2 + 7.5v^2 + 49.05 - 73.58 = 0$$

$$12.5v^2 = 24.53$$

$$v = \sqrt{\frac{24.53}{12.5}}$$

$$\boxed{v = 1.401 \ \mathrm{m/s}}$$

Para determinar la tensión de la cuerda, podemos aislar cualquiera de los cuerpos. Elegimos el cuerpo A. dibujamos su diagrama de cuerpo libre.



$$U = \Delta T + \Delta Vg$$

$$T(\Delta s) = \frac{1}{2}m\left(v^2 - 0\right) + mg(\Delta h)$$

$$T(0.5) = \frac{1}{2}(10)1.401^2 + 10(9.81)0.5$$

$$T = 10\left(1.401^2\right) + 98.1$$

$$\boxed{T = 117.7\ \text{N}}$$

Podemos comprobar llevando los resultados al cuerpo B.

$$U = \Delta T + \Delta Vg$$

$$T(\Delta s) = \frac{1}{2}m\left(v^2 - 0\right) + mg(\Delta h)$$

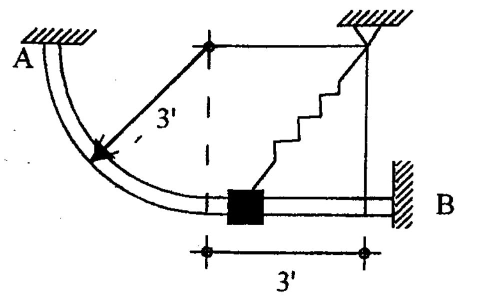
$$-117.7(0.5) = \frac{1}{2}(15)\left(1.401^2\right) - 15(9.81)0.5$$

$$-58.86 = 14.72 - 73.58$$

$$-58.86 = -58.86$$

Lo cual confirma que el resultado es correcto.

10. La guía lisa de la figura está contenida en un plano vertical. El collarín de 12 lb está originalmente en reposo en A y se mueve a B. El resorte tiene una longitud natural de 2 ft y una constante de rigidez k = 50 lb/ft. Calcule el cambio de energía potencial elástica que sufre el resorte y la rapidez con que el collarín llega al punto B.



Resolución

Para calcular el cambio de energía potencial del resorte, necesitamos conocer sus deformaciones inicial y final.

$$x_1 = 6 - 2 = 4$$

$$x_2 = 3 - 2 = 1$$

Por tanto:

$$\Delta Ve = \frac{1}{2} k \left(x_2{}^2 - x_1{}^2 \right)$$

$$\Delta Ve = \frac{1}{2}(50)\left(1^2 - 4^2\right) = 25(-15)$$

$$\boxed{\Delta Ve = -375 \text{ lb} \cdot \text{ft}}$$

El signo negativo indica que hubo una pérdida de energía potencial elástica entre la primera posición y la segunda.

Para investigar la rapidez con que el collarín llega a B, emplearemos la fórmula de la conservación de la energía, pues ninguna fuerza no conservativa actúa en el sistema.

$$\Delta T + \Delta Vg + \Delta Ve = 0$$

$$\frac{1}{2}m\left(v^2 - 0\right) + P(\Delta h) + (-375) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{12}{32.2}\right)v^2 + 12(-3) - 375 = 0\}$$

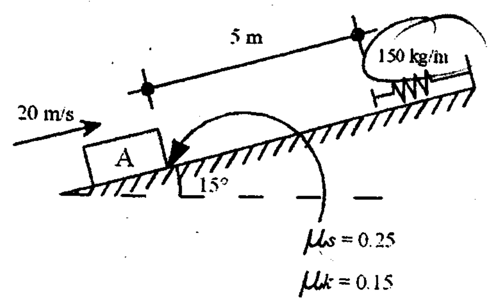
$$\frac{3}{16.1}v^2 = 375 + 36$$

$$v^2 = \frac{411(16.1)}{3}$$

$$\boxed{v = 47.0\ \mathrm{ft/s}}$$

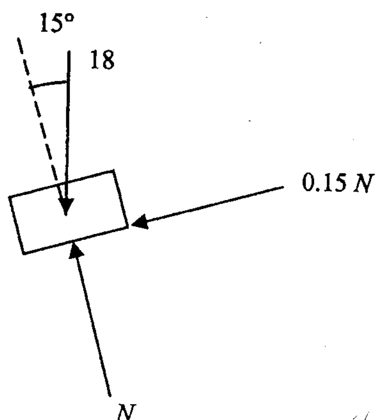
Pinche libro mal hecho!!!
es [N]

11. El cuerpo A de 18 kg de peso se lanza hacia arriba del plano inclinado 15° con una rapidez inicial de 20 m/s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cuerpo y el plano son, respectivamente, 0.25 y 0.15, Determine la deformación máxima que sufrirá el resorte por la acción del cuerpo, sabiendo que su constante de rigidez es de ~~1500~~ kg/m.



Resolución

Para la resolución del problema, que exige relacionar posiciones y rapideces, se puede emplear la fórmula del trabajo y la energía.



En el sistema que se forma por el cuerpo A, el resorte y el plano, durante el movimiento del primero, la única fuerza no conservativa que actúa es la de fricción. La magnitud de ésta la calcularemos mediante el diagrama de cuerpo libre de A.

$$\sum Fy = 0$$

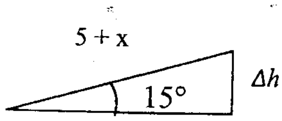
$$N - 18\cos 15° = 0$$

$$N = 17.39$$

Por tanto, la fuerza de fricción es

$$Fr = 0.15N = 2.608$$

Empleando la fórmula del trabajo y la energía y teniendo en cuenta que el cuerpo A se detiene cuando el resorte alcanza su máxima deformación x_1, tenemos:



$$U = \Delta T + \Delta Vg + \Delta Ve$$

$$U = -Fr(\Delta s) = -2.608(5+x) = -13.04 - 2.608x$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m\left(v_2^{\,2} - v_1^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{9.81}\right)\left(0 - 20^2\right) = -367$$

$$\Delta Vg = P(\Delta h) = 18\left[(5 + x)\text{sen}15°\right] = 4.66x + 23.3$$

$$\Delta Ve = \frac{1}{2} h\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) = \frac{1}{2}(1500)\left(x^2 - 0\right) = 750x^2$$

Sustituyendo

$$-13.04 - 2.608x = -367 + 4.66x + 23.3 + 750x^2$$

$$750x^2 + 7.27x - 356.7 = 0$$

$$x_1 = 0.685$$

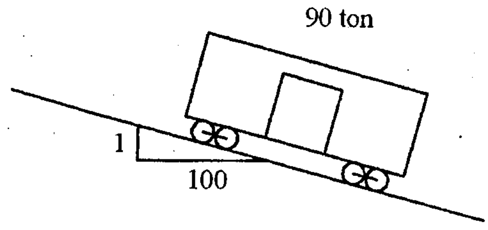
$$x_2 = -0.695$$

La raíz negativa no tiene significado físico y la máxima deformación del resorte es

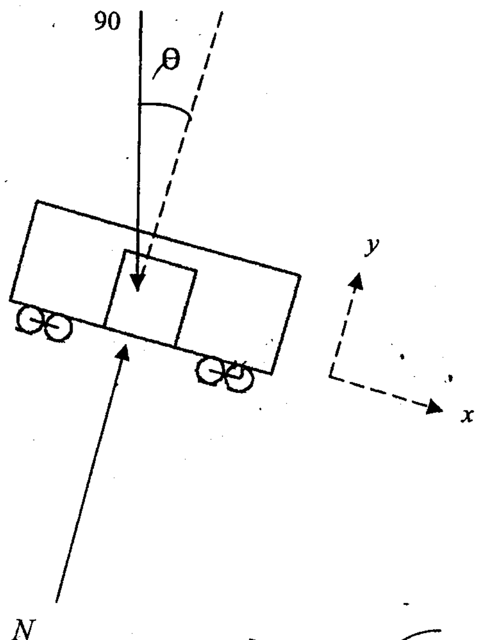
$$\boxed{x = 0.685 \text{ m}}$$

3.3 Impulso y cantidad de movimiento

12. Un carro de ferrocarril de 90 ton queda sin frenos sobre una vía recta cuya pendiente es del 1%. Si en cierto instante desciende a razón de 0.5 m/s, ¿cuál es su cantidad de movimiento? ¿Cuál será su velocidad cuatro segundos después?



Resolución



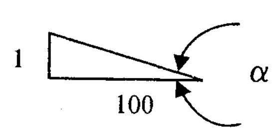
Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del carro, para conocer las fuerzas que actúan sobre él y elegimos un eje de referencia en la dirección de la velocidad.

Cuando su velocidad es de $0.5\ ^{m}/_{s}$ la cantidad de movimiento del carro es:

$$\overline{L} = m\overline{v}$$

$$L = 90(0.5)$$

$$\boxed{L = 45\ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}}{\text{s}}\ \searrow\ 0.573°}$$



$\alpha = 0.573°$

Podemos calcular su velocidad cuatro segundos después mediante la fórmula del impulso y la cantidad de movimiento.

$$\int_1^2 \sum \overline{F} dt = \overline{L_2} - \overline{L_1}$$

$$\int_1^2 \sum F_x dt = L_{2x} - L_{1x}$$

Como las fuerzas son constantes:

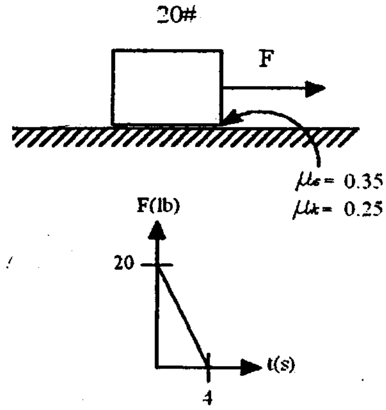
$$\sum F_x (\Delta t) = m v_4 - 45$$

$$90\left(\frac{1}{100}\right)4 = 90 v_4 - 45$$

$$0.04 = v_4 - 0.5$$

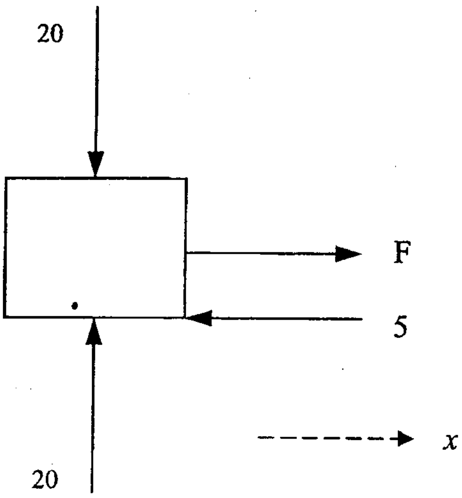
$$\boxed{v_4 = 0.54\ ^{m}/_{s}\ \searrow\ 0.573°}$$

13. Un cuerpo de 20 lb reposa sobre una superficie horizontal, cuando se le aplica una fuerza F cuya magnitud varía conforme se muestra en la gráfica. Cuando t = 4s, ¿cuál es la velocidad máxima que adquiere el cuerpo? ¿Cuánto tiempo después de que terminó la aplicación de la fuerza se detendrá? Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cuerpo y la superficie son 0.35 y 0.25, respectivamente.



Resolución

Dado que la fuerza está en función del tiempo, emplearemos el método del impulso y cantidad de movimiento.



De la gráfica, cuya ordenada al origen es 20 y su pendiente negativa de $20/4 = 5$, obtenemos:

$$F = 20 - 5t$$

Calcularemos la velocidad del cuerpo cuando

$$t = 4$$

$$\int_0^4 \sum F_x dt = L_{2x} - L_{1x}$$

$$\int_0^4 (F - 5)\ dt = L_{2x} - 0$$

$$\int_0^4 (15 - 5t)\ dt = \frac{20}{32.2} v_4$$

$$15t - 2.5t^2 \Big|_0^4 = \frac{20}{32.2} v_4$$

$$60 - 40 = \frac{20}{32.2} v_4$$

$$v_4 = \frac{20(32.2)}{20}$$

$$\boxed{v_4 = 32.2 \ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}} \rightarrow}$$

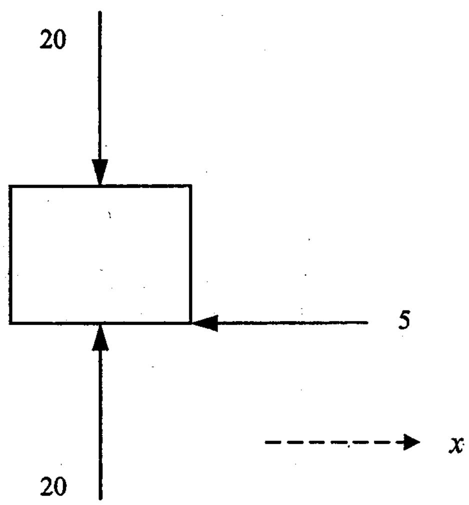
La rapidez máxima la alcanzará el cuerpo cuando la resultante del sistema de fuerzas sea nula.

$$\sum F_x = 0$$

$$20 - 5t - 5 = 0$$

$$5t = 15$$

$$t = 3$$



Por tanto

$$\int_0^3 (15 - 5t)\, dt = \frac{20}{32.2} v_{máx}$$

$$45 - 22.5 = \frac{20}{32.2} v_{máx}$$

$$v_{máx} = \frac{22.5(32.2)}{20}$$

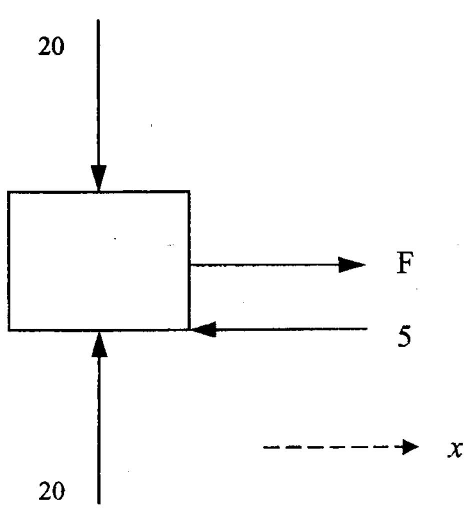
$$\boxed{v_{máx} = 36.2 \ \text{ft}/\text{s} \rightarrow}$$

Después de $t = 4$, el cuerpo queda sujeto a las fuerzas mostradas.

$$\int \sum F_x dt = 0 - L_{4x}$$

$$-5(\Delta t) = -20$$

$$\boxed{\Delta t = 4 \ \text{s}}$$



Otro procedimiento

Puesto que la fórmula del impulso es:

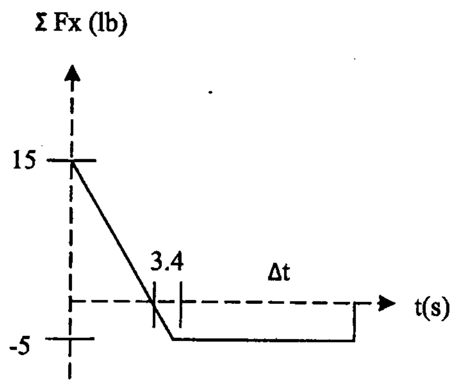
$$L_x = \int \sum F_x dt$$

Dicha cantidad queda representada por el área contenida bajo la gráfica de la componente horizontal de la resultante del sistema de fuerzas, la cual es:

$$\sum F_x = F - 5 = 20 - 5t - 5$$

$$\sum F_x = 15 - 5t$$

Cuya gráfica se muestra en la figura.



El área positiva máxima que se acumula, a los 3.6 s es

$$A=\frac{1}{2}(15)3.2=22.5$$

que igualada con el incremento de la cantidad de movimiento nos permite hallar la velocidad máxima

$$22.5=m\left(v_{\text{máx}}-0\right)$$

$$22.5=\frac{20}{32.2}v_{\text{máx}}$$

$$v_{\text{máx}}=\frac{22.5(32.2)}{20}$$

$$\boxed{v_{\text{máx}}=36.2\ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}}\rightarrow}$$

Para encontrar la velocidad cuando $t=4$ s, al área anterior hay que restarle la del pequeño triángulo que le sigue.

$$22.5-\frac{1}{2}(1)5=\frac{20}{32.2}v_4$$

$$20=\frac{20}{32.2}v_4$$

$$v_4=\frac{20(32.2)}{20}$$

$$\boxed{v_4=32.2\ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}}\rightarrow}$$

Para calcular el tiempo Δt, en que el cuerpo se seguirá moviendo, igualamos el área positiva con la negativa.

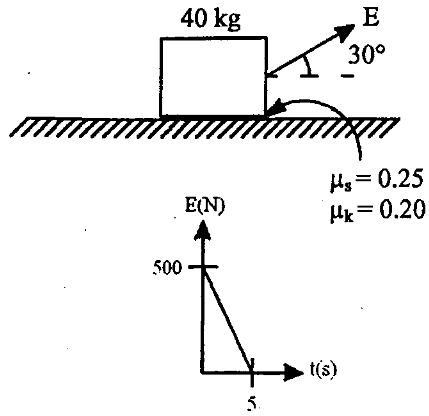
$$\frac{1}{2}(15)3=\frac{1}{2}(1)5+5(\Delta t)$$

$$22.5=2.5+5(\Delta t)$$

$$\Delta t=\frac{20}{5}$$

$$\boxed{\Delta t=4\ \text{s}}$$

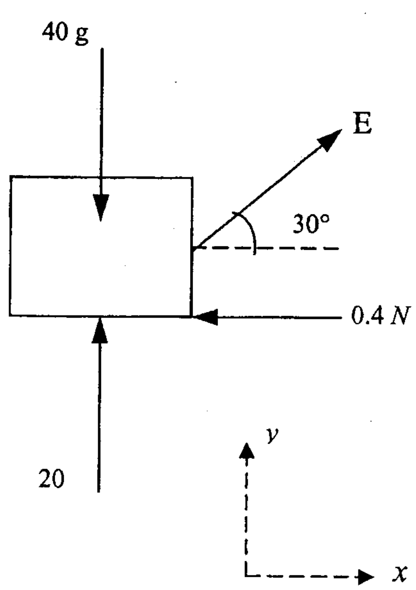
14. El cuerpo de 40 kg de la figura está inicialmente en reposo. Se le aplica la fuerza E de magnitud variable, que se comporta según se muestra en la gráfica. Calcule la velocidad máxima que alcanza el cuerpo y el tiempo que se sigue moviendo, una vez que se retire la fuerza E. Los coeficientes de fricción estática y cinética son 0.25 y 0.20, respectivamente.



Resolución

El cuerpo comenzará a moverse en el instante en que la componente horizontal de la fuerza E exceda la fuerza máxima de fricción estática, que es

$$F' = \mu_s N = 0.4N$$



La magnitud de E se puede expresar de acuerdo con la gráfica, como:

$$E = 100t$$

Cuando el cuerpo está a punto de moverse, tenemos:

$$\sum F_y = 0$$

$$N - 40(9.81) + 0.5E = 0$$

$$N = 392.4 - 50t \qquad (1)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}E}{2} - 0.4N = 0$$

$$0.4N = 86.6t$$

$$N = 216.5t \qquad (2)$$

Igualando

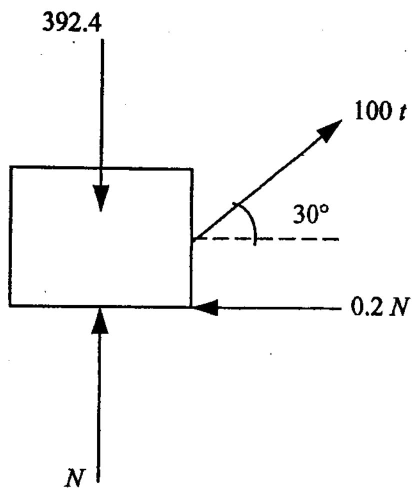
$$216.5t = 392.4 - 50t$$

$$t = 1.472$$

Además $N = 318.8$

A partir de este instante comienza el movimiento. La fricción se convierte en cinética y su valor es

$$F_k = \mu_k N = 0.2N$$



Dibujamos el diagrama de cuerpo libre y utilizamos la ecuación del impulso.

$$\sum F_y = 0$$

$$N - 392.4 + 50t = 0 \quad ; \quad N = 392.4 - 50t$$

$$\sum F_x = 100t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0.2N$$

$$\sum F_x = 50t\left(\sqrt{3}\right) - 0.2(392.4 - 50t)$$

$$\sum F_x = 86.6t - 78.48 + 10t$$

$$\sum F_x = 96.6t - 78.48$$

Como la rapidez máxima la alcanza cuando $t = 5\,\mathrm{s}$

$$\int_{1.472}^{5} \sum F_x dt = m\left(v_{\text{máx}} - 0\right)$$

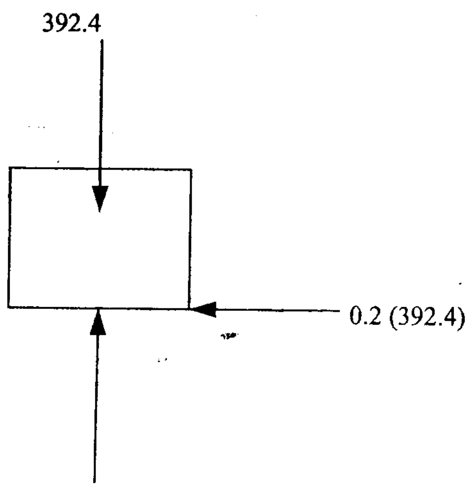
$$\int_{1.472}^{5} \left(96.6t - 78.48\right) dt = 40\, v_{\text{máx}}$$

$$48.3t^2 - 78.48t \Big|_{1.472}^{5} = 40\, v_{\text{máx}}$$

$$48.3\left(5^2\right) - 78.48(5) - 48.3\left(1.472^2\right) + 78.48(1.472) = 40\, v_{\text{máx}}$$

$$826 = 40\, v_{\text{máx}} \quad ; \quad v_{\text{máx}} = \frac{826}{40}$$

$$\boxed{v_{máx} = 20.6 \ \mathrm{m/s} \rightarrow}$$



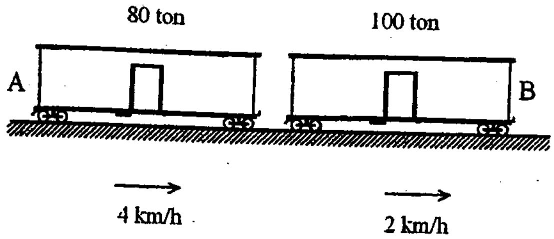
Una vez que se retira la fuerza E, el diagrama de cuerpo libre es el que se muestra. El impulso ulterior es:

$$\sum F_x = (\Delta t) = m\left(0 - v_{\text{máx}}\right)$$

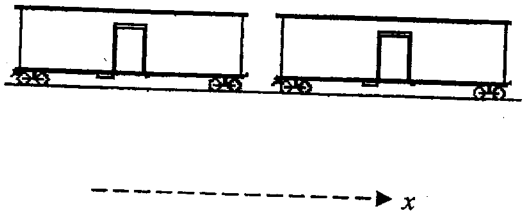
$$-0.2(392.4)(\Delta t) = 40(-20.6)$$

$$\boxed{\Delta t = 10.52 \ \mathrm{s}}$$

15. El carro A es de 80 ton y viaja a 4 km/h, mientras que B es de 100 ton y se mueve a 2 km/h. Cuando A alcanza a B los carros quedan acoplados. ¿Con qué velocidad se mueven entonces?



Resolución



Utilizamos la fórmula de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$$m_A \overline{v_{A1}} + m_B \overline{v_{B1}} = m_A \overline{v_{A2}} + m_B \overline{v_{B2}}$$

Como las velocidades tienen la misma dirección y son iguales las velocidades finales de A y B, podemos escribir:

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v + m_B v$$

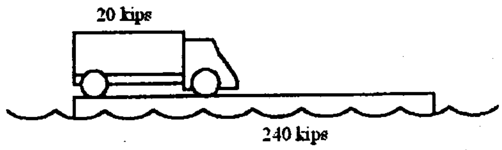
$$80(4) + 100(2) = 80v + 100v$$

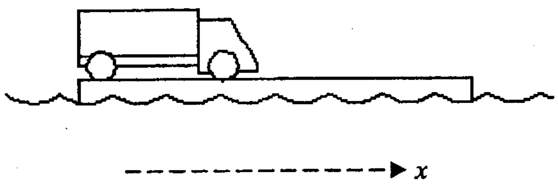
$$520 = 180v$$

$$v = \frac{520}{180}$$

$$\boxed{v = 2.89 \ \mathrm{km/h} \rightarrow}$$

16. Un camión de 20 kips reposa sobre un transbordador de 240 kips. Debido al movimiento del transbordador, el camión se empieza a mover hacia la derecha hasta alcanzar una velocidad de 10 mi/h. Determine la velocidad correspondiente del transbordador, sabiendo que la resistencia del agua a su movimiento es despreciable.





Resolución

Empleamos la fórmula de la conservación de la cantidad de movimiento.

$$m_C \overline{v_{C1}} + m_T \overline{v_{T1}} = m_C \overline{v_{C2}} + m_T \overline{v_{T2}}$$

Como las velocidades son horizontales

$$m_C v_{C1} + m_T v_{T1} = m_C v_{C2} + m_T v_{T2}$$

$$20(0) + 240(0) = 20 v_C + 240 v_T$$

Sabemos que la velocidad relativa del camión respecto al transbordador es de 10 mi/h.

$$v_C = v_{C/T} + v_T$$

$$v_C = 10 + v_T$$

Sustituyendo

$$0 = 20(10 + v_T) + 240 v_T$$

$$0 = 200 + 20 v_T + 240 v_T$$

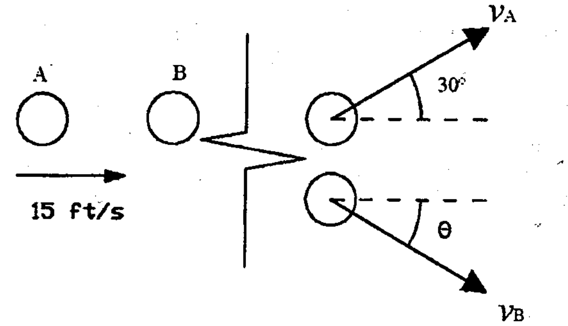
$$260 v_T = -200$$

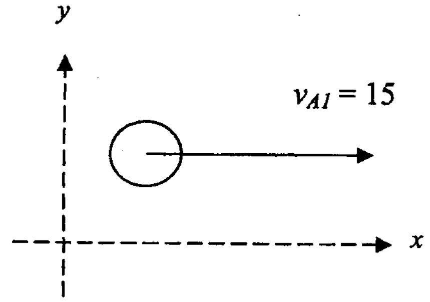
$$v_T = -\frac{200}{260} = -0.769$$

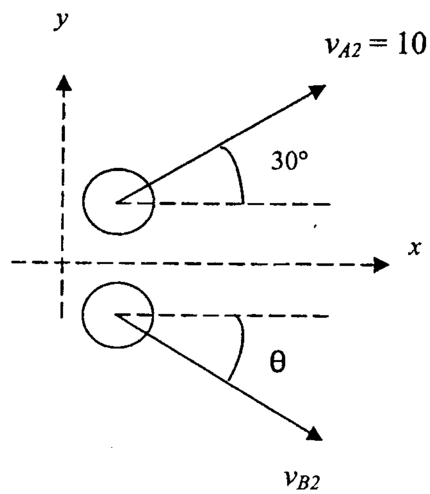
El signo indica que el transbordador se mueve hacia la izquierda.

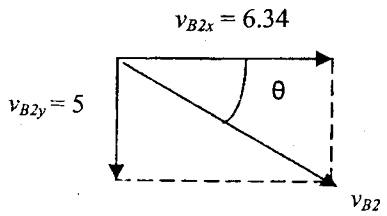
$$\boxed{v_T = 0.769 \ \mathrm{mi/h} \ \leftarrow}$$

17. Una bola de billar A que se mueve a 15 ft/s golpea a otra, B, en reposo. Después del impacto, la bola A se desvía 30° y tiene una rapidez de 10 ft/s. Sabiendo que las bolas tienen masas iguales y son perfectamente elásticas, calcule la velocidad de B después del impacto.









Resolución

Resolveremos el problema utilizando la fórmula de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, eligiendo el sistema de referencia que se muestra en la figura.

$$m_A \overline{v_{A1}} + m_B \overline{v_{B1}} = m_A \overline{v_{A2}} + m_B \overline{v_{B2}}$$

Como las masas de A y B son iguales:

$$\overline{v_{A1}} + \overline{v_{B1}} = \overline{v_{A2}} + \overline{v_{B2}}$$

en donde:

$$\overline{v_{A2}} = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + 10\left(\frac{1}{2}\right)j$$

$$\overline{v_{B2}} = v_{B2x}i + v_{B2y}j$$

es decir,

$$15i = 8.66i + 5j + v_{B2x}i - v_{B2y}j$$

Igualando las componentes en x

$$15 = 8.66 + v_{B2x}$$

$$v_{B2x} = 6.34$$

Igualando las componentes en y

$$0 = 5 - v_{B2y}$$

$$v_{B2y} = 5$$

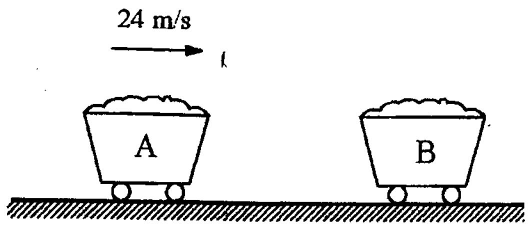
Por tanto

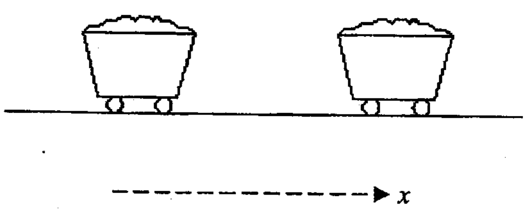
$$v_{B2} = \sqrt{{v_{B2x}}^2 + {v_{B2y}}^2} = \sqrt{6.34^2 + 5^2}$$

$$\tan\vartheta = \frac{v_{B2y}}{v_{B2x}} = \frac{5}{6.34}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{B2} &= 8.07 \ \text{ft/s} \\ \vartheta &= 38.3^\circ \end{aligned}}$$

18. En una vía horizontal recta se encuentran dos carros de mina iguales. El carro *A*, que se mueve a 24 m/s, alcanza al carro *B*, que está en reposo. Suponiendo que se pierde el 20% de la energía cinética original a causa del impacto, calcule la velocidad de cada uno de los carros después del impacto.





Resolución

De la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento se tiene:

$$m_A \overline{v_{A1}} + m_B \overline{v_{B1}} = m_A \overline{v_{A2}} + m_B \overline{v_{B2}}$$

pero como las masas de los carros son iguales y todas las velocidades tienen la misma dirección

$$v_{A1} + v_{B1} = v_{A2} + v_{B2}$$

$$24 + 0 = v_{A2} + v_{B2}$$

$$v_{A2} + v_{B2} = 24$$

$$v_{B2} = 24 - v_{A2} \qquad (1)$$

Puesto que se pierde el 20% de la energía cinética:

$$\left(\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2\right) 0.8 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$$

Simplificando

$$\left(v_{A1}^2 + v_{B1}^2\right) 0.8 = v_{A2}^2 + v_{B2}^2$$

$$\left(24^2 + 0\right) 0.8 = v_{A2}^2 + v_{B2}^2$$

Sustituyendo el valor de (1)

$$(24^2)0.8 = v_{A2}^{\;2} + (24 - v_{A2})^2$$

$$(24^2)0.8 = v_{A2}^{\;2} + 24^2 - 48v_{A2} + v_{A2}^{\;2}$$

$$(24^2)(-0.2) = 2v_{A2}^{\;2} - 48v_{A2}$$

$$v_{A2}^{\;2} - 24v_{A2} + 57.6 = 0$$

Resolviendo:

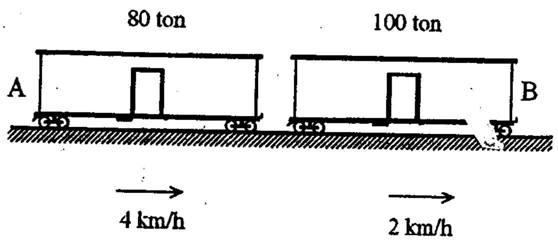
$$(v_{A2})_1 = 21.3$$

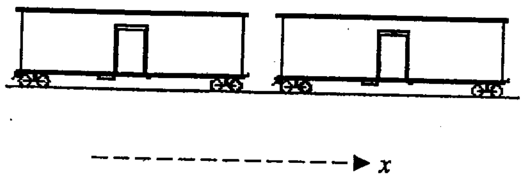
$$(v_{A2})_2 = 2.70$$

Las raíces son las velocidades de los cuerpos, pues suman 24. La mayor corresponde al carro *B*, que va delante de *A*.

$$\boxed{\begin{array}{l} v_{A2} = 2.70 \ \mathrm{m/s} \rightarrow \\ v_{B2} = 21.3 \ \mathrm{m/s} \rightarrow \end{array}}$$

19. El carro A es de 80 ton y viaja a 4 km/h, mientras que B es de 100 ton y se mueve a 2 km/h. Si el coeficiente de restitución entre los carros es 0.6, ¿cuál será la velocidad de cada uno de ellos después del impacto?





Resolución

De la conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$m_A \overline{v_{A1}} + m_B \overline{v_{B1}} = m_A \overline{v_{A2}} + m_B \overline{v_{B2}}$$

$$80(4)+100(2)=80v_{A2}+100v_{B2}$$

$$80v_{A2}+100v_{B2}=520$$

dividiendo entre 20

$$4v_{A2}+5v_{B2}=26 \qquad \text{(1)}$$

Puesto que se trata de un impacto central entre cuerpos que no son perfectamente elásticos

$$(v_{A1}-v_{B1})e=v_{B2}-v_{A2}$$

$$(4-2)0.6=v_{B2}-v_{A2}$$

$$-v_{A2}+v_{B2}=1.2 \qquad \text{(2)}$$

multiplicando por 4 y resolviendo el sistema por suma y resta

$$-4v_{A2}+4v_{B2}=4.8$$

$$4v_{A2}+5v_{B2}=26$$

$$9\,v_{B2}=30.8$$

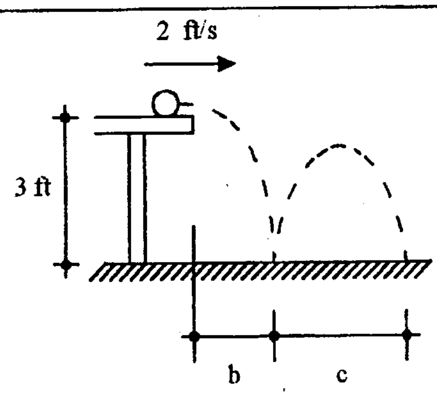
$$\boxed{v_{B2}=3.42\ \mathrm{km/h}\ \rightarrow}$$

De (2)

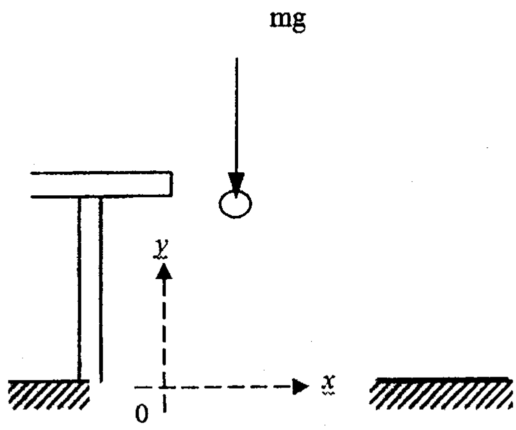
$$v_{A2}=v_{B2}-1.2=3.42-1.2$$

$$\boxed{v_{A2}=2.22\ \mathrm{km/h}\ \rightarrow}$$

20. Sobre una mesa de 3 ft de altura rueda una pelota a 2 ft/s y cae al piso. Sabiendo que el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso es 0.9, calcule la distancia b de la mesa al punto en que la pelota cae, y la distancia c en la que da el segundo rebote.



Resolución



En cuanto la pelota abandona la mesa queda sujeta a la sola acción de su peso.

$$\sum F_y = ma_y$$

$$-mg = ma_y$$

$$a_y = -32.2$$

$$v_y = -32.2t$$

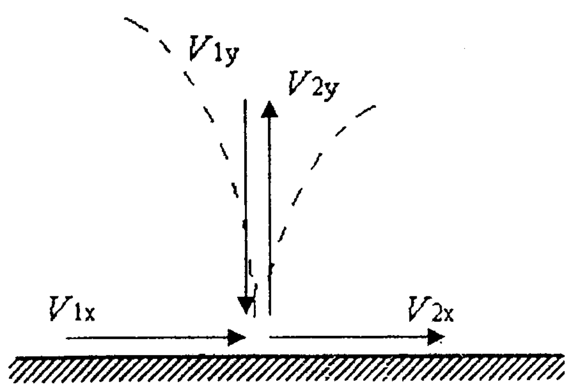
$$y = 3 - 16.1t^2$$

$$a_x = 0$$

$$v_x = 2$$

$$x = 2t$$

Cuando llega al suelo, $y = 0$, $x = b$



$$0 = 3 - 16.1t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{16.1}}$$

$$b = 2\left(\sqrt{\frac{3}{16.1}}\right)$$

$$\boxed{b = 0.863 \text{ ft}}$$

Al rebotar, la componente horizontal de la velocidad no sufre alteración. Las verticales cambian a causa del impacto.

$$(v_{1y} - v_S)e = v_S - v_{2y}$$

en donde v_S es la velocidad del suelo, que es nula.

$$v_{1y}(0.9) = -v_{2y}$$

en donde

$$v_{1y} = -32.2\left(\sqrt{\frac{3}{16.1}}\right) = -13.90$$

$$-13.90(0.9) = -v_{2y}$$

$$v_{2y} = 12.51$$

La pelota vuelve a quedar sujeta a la sola acción de su peso, y las ecuaciones del nuevo movimiento son:

$$a_y = -32.2$$

$$v_y = 12.51 - 32.2t$$

$$y = 12.51t - 16.1t^2$$

$$a_x = 0$$

$$v_x = 2$$

$x = 2t$ (tomando como $x = 0$ el punto del rebote)

La pelota vuelve a llegar al suelo si $y = 0$, $x = c$

$$0 = 12.51t - 16.1t^2$$

$$0 = 12.51 - 16.1t$$

$$t = \frac{12.51}{16.1}$$

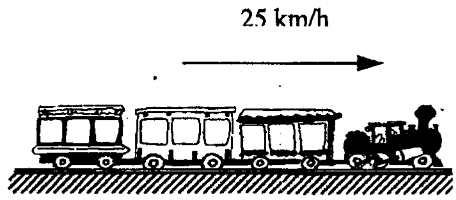
$$c = 2\left(\frac{12.51}{16.1}\right)$$

$$\boxed{c = 1.554 \text{ ft}}$$

4. CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

4.1 Movimiento relativo de partículas

1. Un ferrocarril se mueve con velocidad constante de 25 km/h hacia el este. Uno de sus pasajeros, que originalmente está sentado en una ventanilla que mira al norte, se levanta y camina hacia la ventanilla del lado opuesto con un velocidad, relativa al ferrocarril, de 8 km/h. ¿Cuál es la velocidad absoluta del pasajero?



Resolución

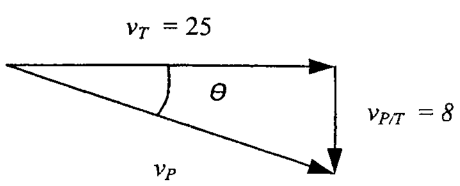
$\overline{v_P}$ – Velocidad absoluta del pasajero

$\overline{v_T}$ – Velocidad absoluta del tren

$\overline{v_{P/T}}$ – Velocidad relativa del pasajero respecto al tren

$$\overline{v_P} = \overline{v_{P/T}} + \overline{v_T}$$

Dibujaremos un diagrama de vectores que represente la ecuación anterior.



La magnitud de la velocidad del pasajero es

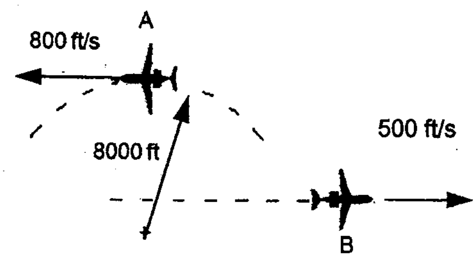
$$v_P = \sqrt{25^2 + 8^2}$$

Y su dirección

$$\tan\theta = \frac{8}{25}$$

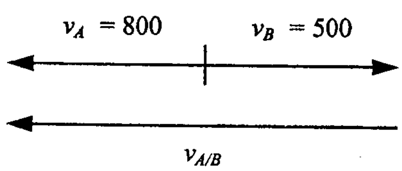
$$\boxed{v_P = 26.2 \ ^{km}\!/_{h} \quad \searrow \quad 17.7°}$$

2. Un avión A vuela con rapidez constante de 800 ft/s describiendo un arco de circunferencia de 8000 ft de radio. Otro avión, B, viaja en línea recta con una velocidad de 500 ft/s, que aumenta a razón de 30 ft/s². Determine la velocidad y aceleración relativas del avión A respecto al B.



Resolución

La velocidad absoluta de A es igual a la velocidad relativa de A respecto a B más la velocidad absoluta de B.



$$\overline{v_A} = \overline{v_{A/B}} + \overline{v_B}$$

Con el diagrama de vectores que representa la ecuación anterior se muestra que:

$$\boxed{\overline{v_{A/B}} = 1300 \ \mathrm{ft}/\mathrm{s} \leftarrow}$$

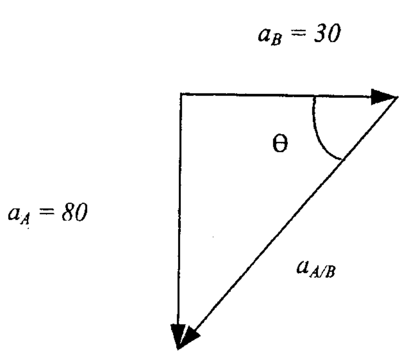
La aceleración de A es normal a la velocidad y su magnitud es

$$a_A = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_A = \frac{800^2}{8000}; \quad a_A = 80 \downarrow$$

y la de B es

$$a_B = 30 \rightarrow$$



Entonces

$$\overline{a_A} = \overline{a_{A/B}} + \overline{a_B}$$

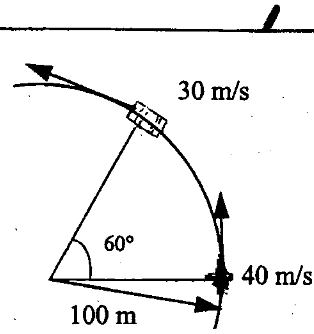
De la figura que representa la ecuación

$$a_{A/B} = \sqrt{30^2 + 80^2}$$

$$\tan\theta = \frac{80}{30}$$

$$\boxed{a_{A/B} = 85.4 \ \mathrm{ft}/\mathrm{s}^2 \quad 69.4^\circ}$$

3. Un motociclista persigue a un automóvil en una pista circular de 100 m de radio. En el instante mostrado en la figura, el primero corre a 40 m/s y el segundo, a 30. ¿Cuál es la velocidad relativa del automóvil respecto al motociclista?



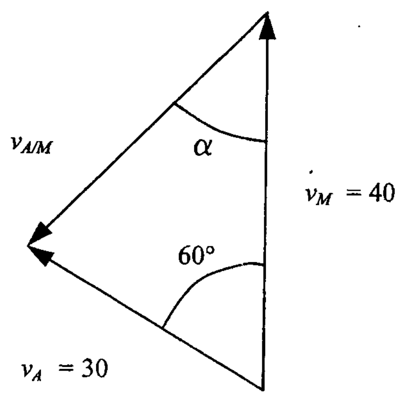
Resolución

$\overline{v_A}$ – Velocidad absoluta del automóvil

$\overline{v_M}$ – Velocidad absoluta del motociclista

$\overline{v_{A/M}}$ – Velocidad relativa del automóvil respecto al motociclista

$$\overline{v_A} = \overline{v_{A/M}} + \overline{v_M}$$



Como se trata de sólo tres vectores, dibujamos un diagrama que represente la ecuación anterior.

Por la ley de cosenos

$$v_{A/M}^2 = 30^2 + 40^2 - 2(30)40\cos 60°$$

$$v_{A/M} = 36.1$$

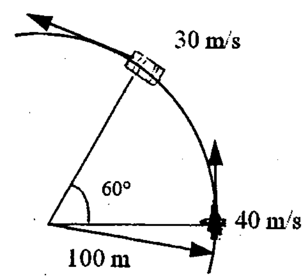
Por la ley de senos

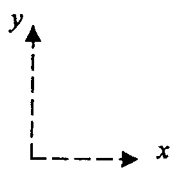
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{30} = \frac{\operatorname{sen}60}{v_{A/M}}$$

$$\alpha = 46.0° \quad ; \quad 90° - 46.0° = 44.0°$$

$$\boxed{v_{A/M} = 36.1 \ \mathrm{m/s} \ \swarrow \ 44°}$$

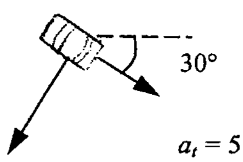
4. Un motociclista persigue a un automóvil en una pista circular de 100 m de radio. En el instante mostrado en la figura, el primero corre a 40 m/s y el segundo, a 30; el motociclista aumenta su rapidez a razón de 8 ft/s², mientras que el automóvil la reduce 5 m/s cada s. Calcule la aceleración relativa del automóvil respecto al motociclista.





Resolución

Para determinar la aceleración relativa del automóvil respecto al motociclista, elegiremos un sistema de referencia como el de la figura; entonces:

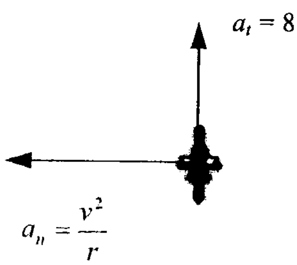


$$\overline{a_A} = (\overline{a_A})_n + (\overline{a_A})_t$$

$$= \frac{30^2}{100}(-i\operatorname{sen}30° - j\cos 30°) + 5(i\cos 30° - j\operatorname{sen}30°)$$

$$= -4.5i - 4.5\sqrt{3}j + 2.5\sqrt{3}i - 2.5j$$

$$\overline{a_A} = -0.1699i - 10.29j$$

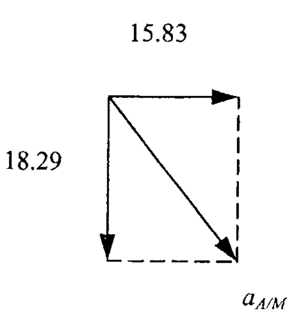


$$\overline{a_M} = (\overline{a_M})_n + (\overline{a_M})_t$$

$$= -\frac{40^2}{100}i + 8j$$

$$\overline{a_M} = -16i + 8j$$

Aceleración relativa



$$\overline{a_A} = \overline{a_{A/M}} + \overline{a_A}$$

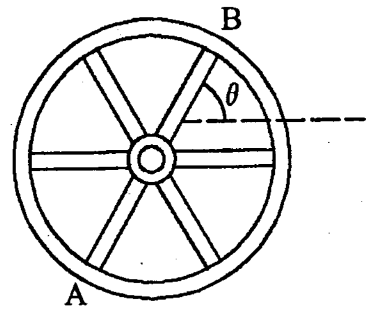
$$-0.1699i - 10.29j = \overline{a_{A/M}} - 16i + 8j$$

$$\overline{a_{A/M}} = 15.83i - 18.29j$$

$$\boxed{\overline{a_{A/M}} = 24.2\ \mathrm{m/s^2} \searrow 49.1°}$$

4.2 Rotación pura

5. El diámetro *AB* del volante de la figura se mueve según la expresión $\theta = 2t^3$, donde si t está en s, θ resulta en rad. ¿Cuál es la aceleración angular del volante cuando $t = 5$ s? ¿Cuántas revoluciones gira el volante hasta alcanzar una rapidez de 2400 rpm?



Resolución

$$\theta = 2t^3$$

$$\dot{\theta} = 6t^2$$

Es la velocidad angular del diámetro AB

$$\ddot{\theta} = 12t$$

que es la aceleración angular del volante.

Para $t = 5$

$$\boxed{\ddot{\theta} = 60 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

2400 rpm en rad/s son

$$2400\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 80\pi$$

El tiempo que tarda en alcanzar esa rapidez es

$$80\pi = 6t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{80\pi}{6}}$$

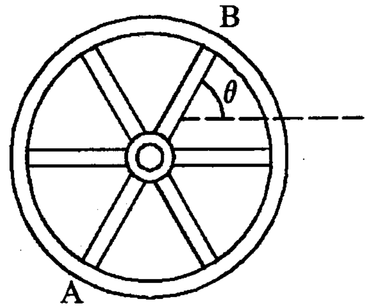
y la desviación angular correspondiente es

$$\theta = 2\left(\sqrt{\frac{80\pi}{6}}\right)^3 \text{ rad}$$

que en revoluciones son

$$\frac{2\left(\sqrt{\frac{80\pi}{6}}\right)^3}{2\pi} = \boxed{86.3 \text{ rev}}$$

6. El diámetro AB del volante de la figura se desvía según la expresión $\theta = 2t^3$, donde si t está en s, θ resulta en rad. El volante tiene un radio de 20 cm en el instante mostrado, $\theta = 60°$, determine: *a)* el valor de t, *b)* la velocidad y aceleración lineales del punto B.



Resolución

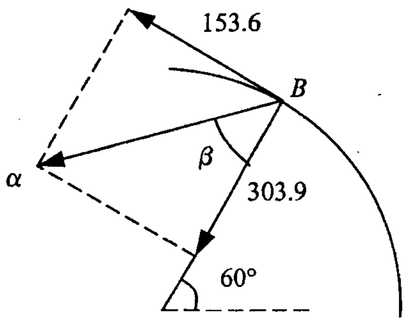
a)

$$60° = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{3} = 2t^3$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{t = 0.806\ \text{s}}$$



b)

$$\omega = \dot{\theta} = 6t^2$$

$$\omega = 6(0.806)^2 = 3.898$$

Como $v = \omega r$

$$v = 3.898(20)$$

$$\boxed{v = 78.0\ \text{cm/s} \quad 30°}$$

La aceleración normal del punto B es

$$a_n = \omega^2 r = (0.898)^2 20 = 303.9$$

Y la tangencial

$$a_t = \alpha r$$

En donde $\alpha = \ddot{\theta} = 12t = 12(0.806) = 9.672$

$$a_t = 9.672(20) = 193.44$$

La magnitud de la aceleración de B es:

$$a = \sqrt{303.9^2 + 193.44^2} = 360.2$$

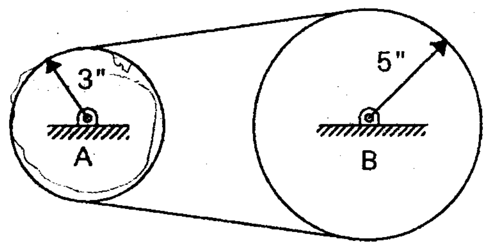
Y el ángulo β

$$\tan\beta = \frac{193.44}{360.2}; \quad \beta = 32.5^\circ$$

Por tanto, como $60^\circ - 32.5^\circ = 27.5^\circ$

$$\boxed{a = 360 \ \mathrm{cm/s^2} \ \swarrow \ 27.5^\circ}$$

7. La banda de la figura es flexible, inextensible y no se desliza sobre ninguna de la poleas. La polea A, de 3 in de radio, gira a 120 rpm. Calcule la rapidez de una partícula cualquiera de la banda y la velocidad angular de la polea B, de 5 in de radio.



Resolución

$$v = \omega r$$

Donde $\omega = 120\left(\frac{2\pi}{60}\right) \text{rad}/\text{s} = 4\pi \ \text{rad}/\text{s}$

$$v = 4\pi(3)$$

$$\boxed{v = 37.7 \ \text{in}/\text{s}}$$

7.54

rev = θ/2π

Como la expresión $v = \omega r$ puede emplearse con cualquiera de las poleas:

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B$$

$$\omega_B = \frac{\omega_A r_A}{r_B} = \frac{120(3)}{5}$$

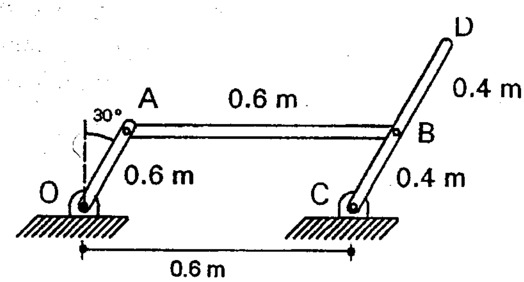
$$\boxed{\omega_B = 72 \ \text{rpm}}$$

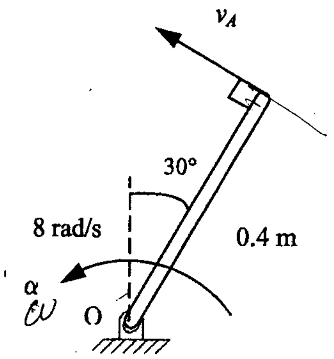
7.54 rad/s

37.7 = ω5

4.3 Traslación pura

8. La barra *OA* del mecanismo mostrado tiene una rapidez angular de 8 rad/s en sentido antihorario. Determine la velocidad y aceleración lineales de las articulaciones *A* y *B* así como del extremo *D* de la barra *CD*.



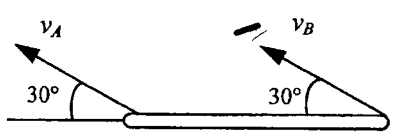


Resolución

Como la barra OA se mueve con rotación pura

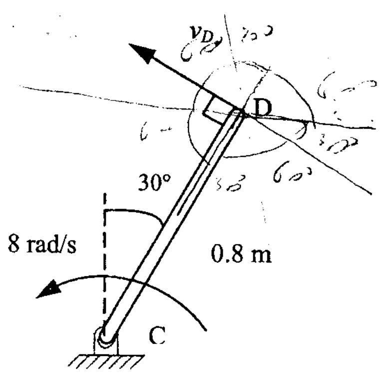
$$v_A = 8(0.4) = 3.2\ \mathrm{m/s} \quad \nwarrow 30°$$

Puesto que la barra AB se mueve con traslación pura, todas sus partículas tienen la misma velocidad.



$$\overline{v_B} = \overline{v_A}$$

$$\boxed{v_B = 3.2\ \mathrm{m/s} \quad \nwarrow 30°}$$



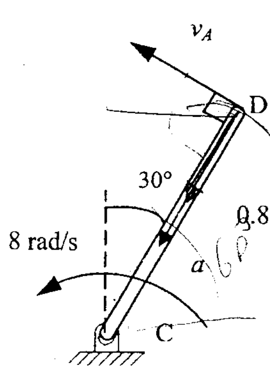
La velocidad angular de la barra CD es

$$\omega_{CD} = \frac{v}{r} = \frac{3.2}{0.4} = 8\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \circlearrowleft$$

Igual a la de la barra OA. Por tanto, la velocidad lineal del extremo D es

$$v_D = \omega\, r = 8(0.8)$$

$$\boxed{v_D = 6.4\ \mathrm{m/s} \quad \nwarrow 30°}$$



Como la velocidad angular es constante, la aceleración de D no tiene componente tangencial

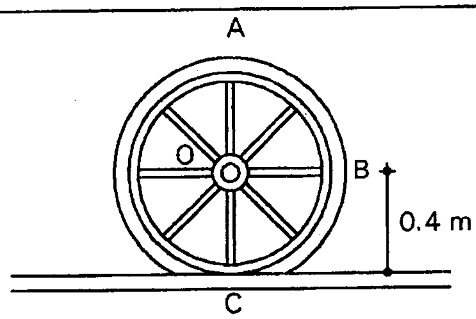
$$a = a_n = \omega^2 r = 8^2(0.8)$$

$$\boxed{a = 51.2\ \mathrm{m/s^2} \quad \searrow 60°}$$

4.4 Movimiento plano general

4.4.1 Velocidades

9. La rueda de la figura pertenece a una locomotora que viaja hacia la derecha a 72 km/h. Sabiendo que la rueda no patina sobre los rieles, determine su velocidad angular y las velocidades lineales de los puntos *O*, *A*, *B* y *C*.



Resolución

Convertimos la velocidad a $\mathrm{m/s}$

$$72\,\mathrm{km/h} = \frac{7.2}{3.6}\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$$

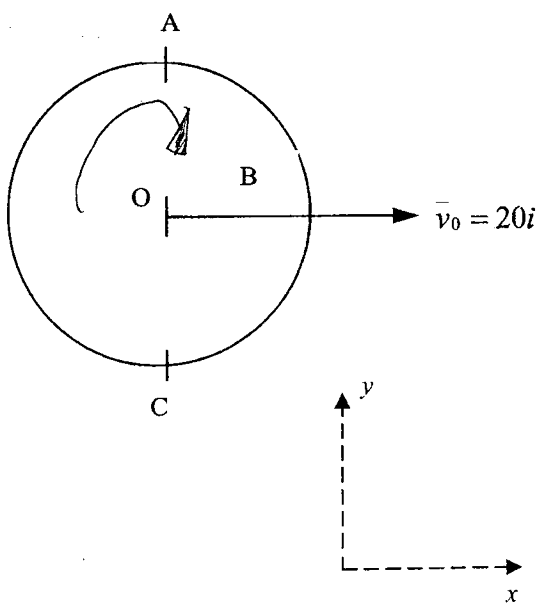
Como el punto O se mueve junto con la locomotora.

$$\boxed{v_O = 20\ \mathrm{m/s}}$$

Y la velocidad angular de la rueda es

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{20}{0.4}$$

$$\boxed{\omega = 50\ \mathrm{rad/s}}$$



Utilizamos la ecuación de la velocidad relativa para determinar las velocidades de A, B y C, tomando O como punto base. Emplearemos el sistema de referencia de la figura:

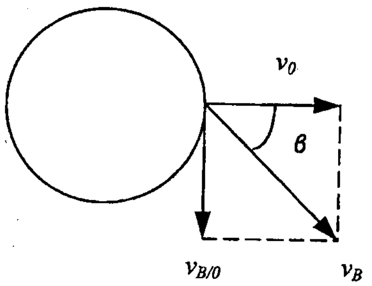
$$\overline{v_A} = \overline{v_{A/O}} + \overline{v_O}$$

$$\overline{v_A} = \overline{\omega} \times \overline{r_{A/O}} + \overline{v_O}$$

$$\overline{v_A} = -50k \times 0.4j + 20i$$

$$\overline{v_A} = 20i + 20i = 40i$$

$$\boxed{v_A = 40 \, \text{m/s} \rightarrow}$$



$$\overline{v_B} = \overline{\omega} \times \overline{r_{B/O}} + \overline{v_O}$$

$$\overline{v_B} = -50k \times 0.4i + 20i$$

$$\overline{v_B} = -20j + 20i$$

$$v_B = \sqrt{20^2(2)} = 20\sqrt{2} = 28.3$$

$$\tan \beta = \frac{20}{20} = 1 \;\therefore\; \beta = 45°$$

$$\boxed{v_B = 28.3 \, \text{m/s} \;\searrow\; 45°}$$

$$\overline{v_C} = \overline{\omega} \times \overline{r_{C/O}} + \overline{v_O}$$

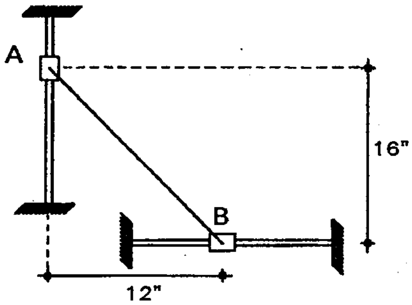
$$\overline{v_C} = -50k \times (-0.4j) + 20i$$

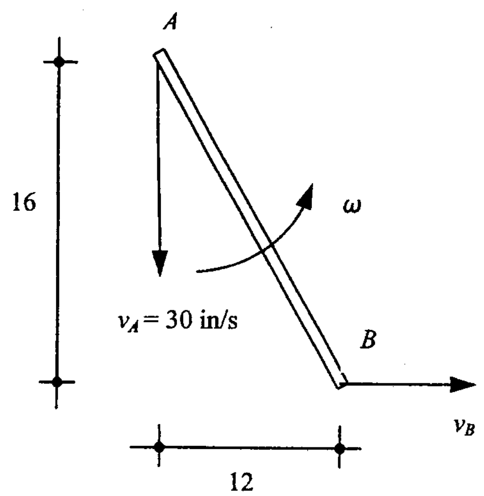
$$\overline{v_C} = -20i + 20i$$

$$\boxed{v_C = 0}$$

Lo cual es evidente porque C tiene la misma velocidad del punto del riel con el que está en contacto y dicho punto no se mueve.

10. El collarín A se desliza hacia abajo con una rapidez de 30 in/s en el instante mostrado en la figura. Diga cuáles son, en ese mismo instante, la velocidad angular de la barra AB y la velocidad lineal del collarín B.





Resolución

Como:

$$\overline{v_B} = \overline{v_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$\overline{v_B} = \overline{\omega} \times \overline{r_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$v_B i = \omega k \times (12i - 16j) - 30j$$

$$v_B i = 16\omega i + 12\omega j - 30j$$

Reduciendo términos semejantes

$$v_B i = 16\omega i + (12\omega - 30)j$$

Que es una igualdad de vectores. Igualando las componentes verticales tenemos:

$$0 = 12\omega - 30$$

$$\omega = \frac{30}{12}$$

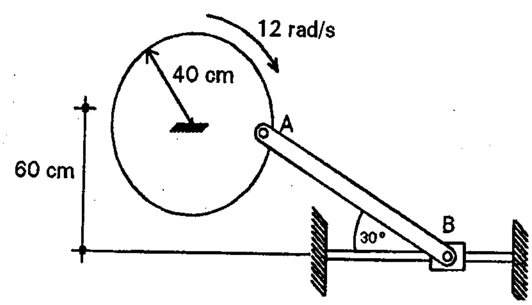
$$\boxed{\omega = 2.5 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s} \ \circlearrowleft}$$

E igualando las componentes horizontales:

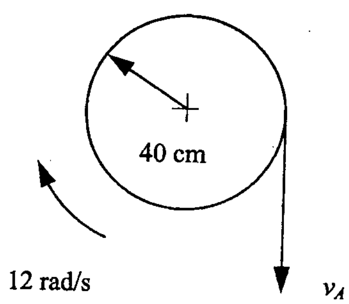
$$v_B = 16(2.5)$$

$$\boxed{v_B = 40 \ \mathrm{in}/\mathrm{s} \ \rightarrow}$$

11. El disco de la figura gira con rapidez angular constante de 12 rad/s en sentido horario. Calcule, para la posición mostrada en la figura, la velocidad angular de la barra AB y la velocidad lineal del collarín B.



Resolución

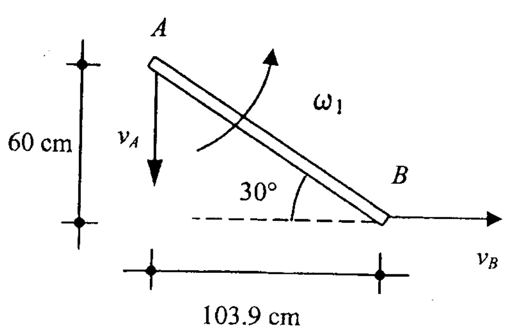


Como el disco se mueve con rotación pura:

$$v_A = \omega r$$

$$v_A = 12(40) = 480 \ \text{cm}/\text{s} \ \downarrow$$

La barra AB tiene movimiento plano general y su geometría se muestra en la figura.



$$\overline{v_B} = \overline{v_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$\overline{v_B} = \overline{\omega_1} \times \overline{r_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$\overline{v_B} = \omega_1 k \times (103.9i - 60j) - 480j$$

$$v_B i = 60\omega_1 i + 103.9\omega_1 j - 480j$$

Reduciendo términos semejantes

$$v_B i = 60\omega_1 i + (103.9\omega_1 - 480)j$$

Que es una igualdad de dos vectores. Igualando las componentes verticales se tiene:

$$0 = 103.9\omega_1 - 480$$

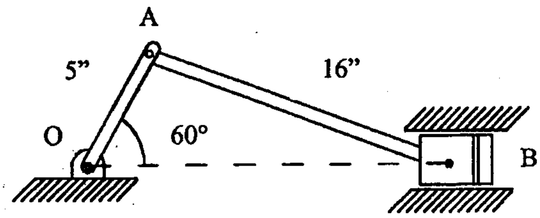
$$\boxed{\omega_1 = 4.62 \ \text{rad}/\text{s} \ \circlearrowleft}$$

Igualando las componentes horizontales:

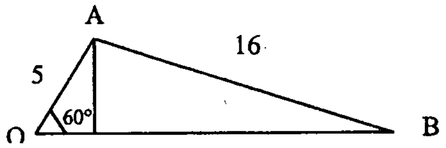
$$v_B = 60(4.66)$$

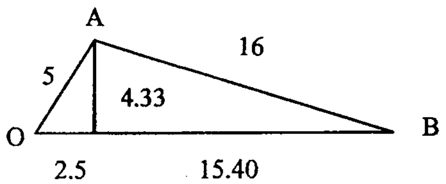
$$\boxed{v_B = 277 \ \text{cm}/\text{s} \ \rightarrow}$$

12. En la posición mostrada, la manivela *OA* tiene una rapidez angular de 10 rad/s en sentido antihorario. Calcule la rapidez angular de la biela *AB* y la velocidad lineal del émbolo *B*.



Resolución





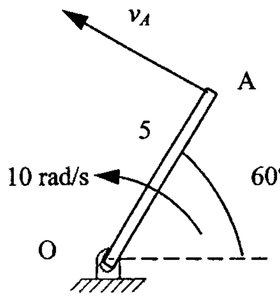
Comenzamos investigando la geometría del mecanismo mediante la resolución de los triángulos rectángulos de la figura.

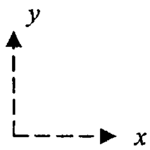
La manivela OA gira con rotación pura.

$$\overline{v_A} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

$$\overline{v_A} = 10k \times (2.5i + 4.33j)$$

$$\overline{v_A} = -43.3i + 25j$$





La biela AB tiene movimiento plano general.

$$\overline{v_B} = \overline{v_{B/A}} + \overline{v_A}$$

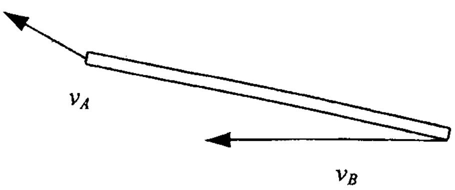
$$\overline{v_B} = \overline{\omega_1} \times \overline{r_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$\overline{v_B} = \omega_1 k \times (15.40i - 4.33j) - 43.3i + 25j$$

$$v_B i = 4.33\omega_1 i + 15.40\omega_1 j - 43.3i + 25j$$

Asociando las componentes respectivas:

$$v_B i = (4.33\omega_1 - 43.3)i + (15.40\omega_1 + 25)j$$



Igualando las componentes verticales:

$$0 = 15.40\omega_1 + 25; \quad \omega_1 = -1.623$$

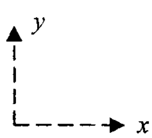
Y las horizontales:

$$v_B = 4.33(-1.623) - 43.3 = -50.3$$

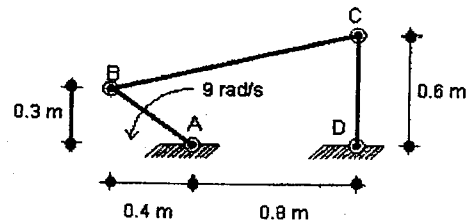
Por tanto:

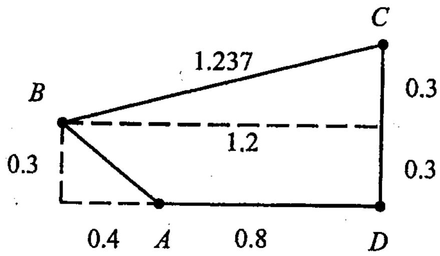
$$\boxed{\omega_1 = 1.623 \,\mathrm{rad/s} \ \circlearrowright}$$

$$\boxed{v_B = 50.3 \,\mathrm{in/s} \ \leftarrow}$$



13. La barra *AB* del mecanismo de cuatro articulaciones de la figura gira con una velocidad angular ω_1 de 9 rad/s en sentido antihorario. Determine las velocidades angulares ω_2 y ω_3 de las barras *BC* y *CD*.

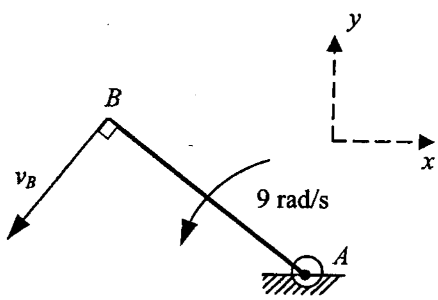




Resolución

Comenzaremos determinando la geometría del mecanismo en el instante de interés.

Tanto la barra AB como la barra CD se mueven con rotación pura. Observamos que C se mueve a la izquierda y que:



$$\overline{v_B} = \overline{\omega_1} \times \overline{r}$$

$$\overline{v_B} = 9k \times (-0.4i + 0.3j)$$

$$\overline{v_B} = -2.7i - 3.6j$$

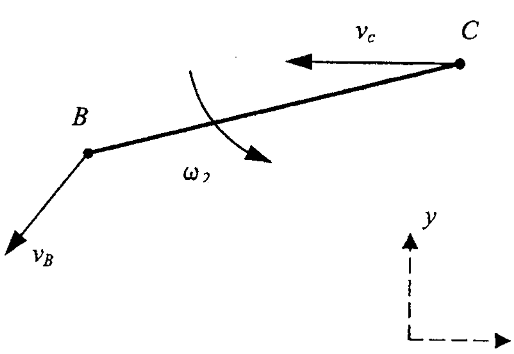
La barra BC tiene movimiento plano general.

$$\overline{v_C} = \overline{v_{C/B}} + \overline{v_B}$$

$$\overline{v_C} = \overline{\omega_2} \times \overline{r_{C/B}} + \overline{v_B}$$

$$-v_C i = \omega_2 k \times (1.2i + 0.3j) - 2.7i - 3.6j$$

$$-v_C i = -0.3\omega_2 i + 1.2\omega_2 j - 2.7i - 3.6j$$



Asociando términos

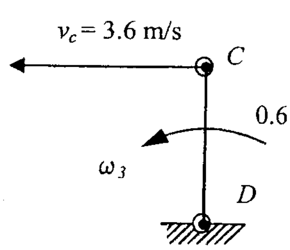
$$-v_C i = (-0.3\omega_2 - 2.7)i + (1.2\omega_2 - 3.6)j$$

Igualando las componentes en dirección de y:

$$0 = 1.2\omega_2 - 3.6; \quad \boxed{\omega_2 = 3 \text{ rad/s} \circlearrowleft}$$

Haciendo lo mismo en dirección de x:

$$-v_C = -0.3(3) - 2.7; \quad v_C = 3.6 \leftarrow$$



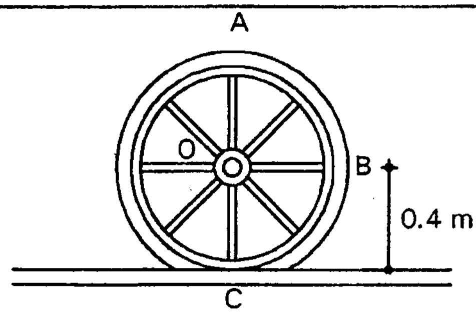
De la barra CD obtenemos:

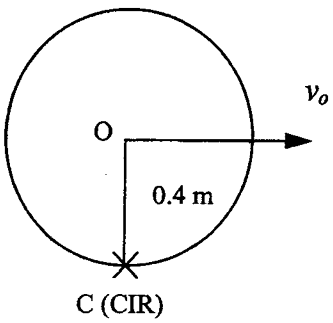
$$-v_C = \omega_3 r_{C/D}; \qquad \omega_3 = \frac{3.6}{0.6}$$

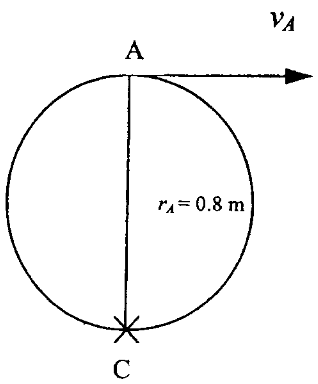
$$\boxed{\omega_3 = 6 \text{ rad/s} \circlearrowleft}$$

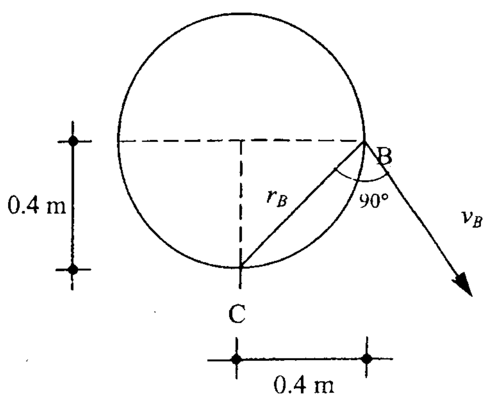
4.4.2 Centro instantáneo de rotación

14. La rueda de la figura pertenece a una locomotora que viaja hacia la derecha a 72 km/h. Sabiendo que la rueda no patina sobre los rieles, determine su velocidad angular y las velocidades lineales de los puntos *0, A, B* y *C.*









Resolución

El centro instantáneo de rotación de la rueda es el punto de contacto con el riel, el punto C, puesto que su velocidad es nula.

El punto O, que une el eje de la rueda con la locomotora, tiene una velocidad de 72 km/h.

$$v_O = 72 \ \mathrm{km/h} = \frac{72}{3.6} \mathrm{m/s} = 20 \mathrm{m/s} \ \rightarrow$$

La velocidad angular de la rueda es por tanto:

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{20}{0.4}$$

$$\boxed{\omega = 50 \ \mathrm{rad/s} \ \circlearrowright}$$

Conociendo la posición del centro de instantáneo de rotación (CIR) y la velocidad angular de la rueda, se puede calcular fácilmente la velocidad de cualquier punto de la rueda.

$$v_A = \omega r_A$$

$$v_A = 50(0.8)$$

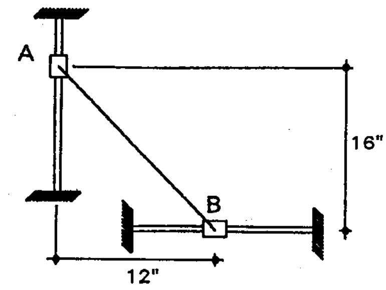
$$\boxed{v_A = 40 \mathrm{m/s} \rightarrow}$$

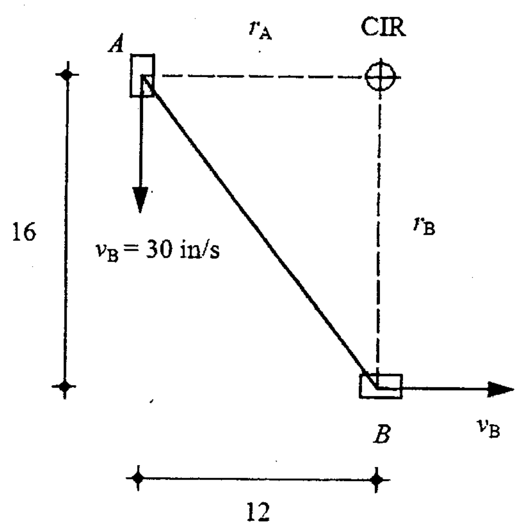
$$v_B = \omega r_B$$

$$v_B = 50\left(0.4\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{v_B = 28.3 \ \mathrm{m/s} \ \searrow 45°}$$

15. El collarín A se desliza hacia abajo con una rapidez de 30 in/s en el instante mostrado en la figura. Diga cuáles son, en ese mismo instante, la velocidad angular de la barra AB y la velocidad lineal del collarín B.





Resolución

Para encontrar la posición del centro instantáneo de rotación, hacemos tanto en A como en B rectas perpendiculares a las velocidades de esos puntos; su intersección es el centro buscado.

La velocidad angular de la barra es

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{30}{12}$$

$$\boxed{\omega = 2.5 \ \text{rad}/\text{s} \ \circlearrowleft}$$

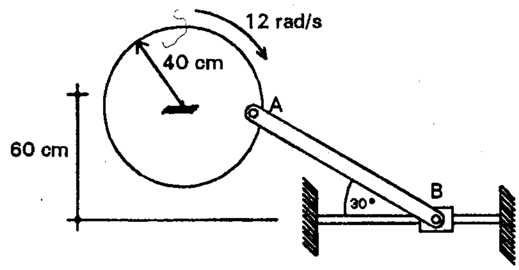
Y la velocidad de B

$$v_B = \omega \ r_B$$

$$v_B = 2.5(16)$$

$$\boxed{v_B = 40 \ \text{in}/\text{s} \ \rightarrow}$$

16. El disco de la figura gira con rapidez angular constante de 12 rad/s en sentido horario. Calcule, para la posición mostrada en la figura, la velocidad angular de la barra *AB* y la velocidad lineal del collarín *B*.



Resolución

La velocidad de A es vertical y se dirige hacia abajo, la de B, horizontal y hacia la derecha. El centro instantáneo de rotación se encuentra en la intersección de las perpendiculares levantadas en A y B.

Calculamos la magnitud de la velocidad de A.

$$v_A = \omega\ r$$

$$v_A = 12(60) = 720$$

Por tanto, la velocidad angular de la barra AB es

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{r_A} = \frac{720}{60\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\omega_{AB} = 6.93\ \text{rad}/\text{s}\ \circlearrowleft}$$

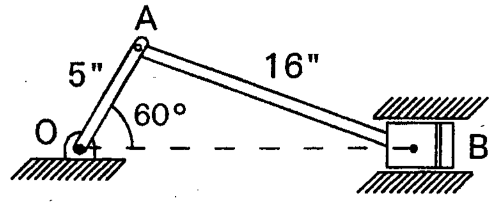
Y la velocidad de B será

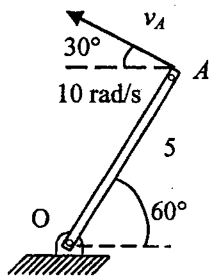
$$v_B = \omega_{AB}\ r_B$$

$$v_B = 6.93(60)$$

$$\boxed{v_B = 416\ \text{cm}/\text{s}\ \rightarrow}$$

17. En la posición mostrada, la manivela *OA* tiene una rapidez angular de 10 rad/s en sentido antihorario. Calcule la rapidez angular de la biela *AB* y la velocidad lineal del émbolo *B*.



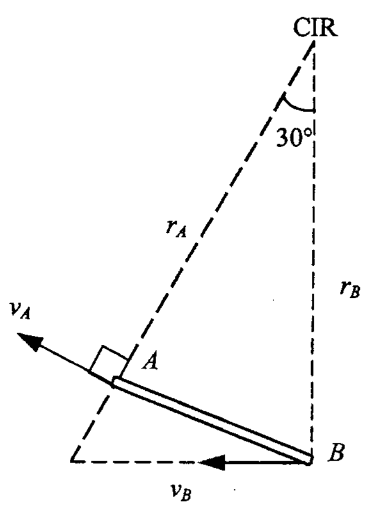


Resolución

La velocidad de la articulación A es perpendicular a la manivela OA y su magnitud es

$$v_A = \omega_{OA}\, r_{OA}$$

$$v_A = 10(5) = 50$$



La velocidad de B es horizontal y se dirige hacia la izquierda.

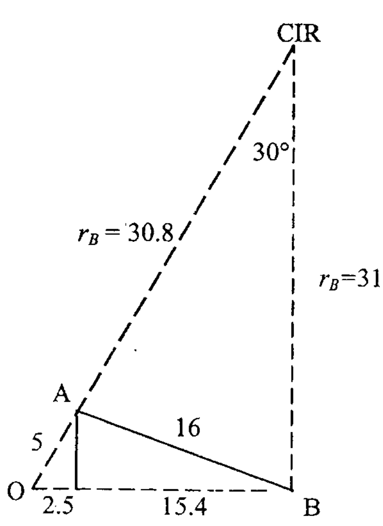
La posición del centro instantáneo de rotación (CIR) de la biela AB es la intersección de las perpendiculares a las velocidades de A y B trazadas desde dichos puntos.

En la figura resolvemos la geometría del mecanismo.

De ahí:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{r_A} = \frac{50}{30.8}$$

$$\boxed{\omega_{AB} = 1.623 \ \text{rad}/\text{s}}$$



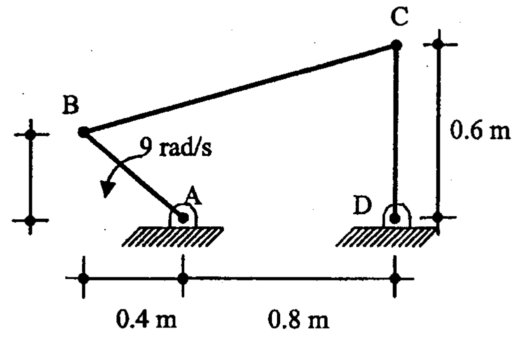
Por tanto:

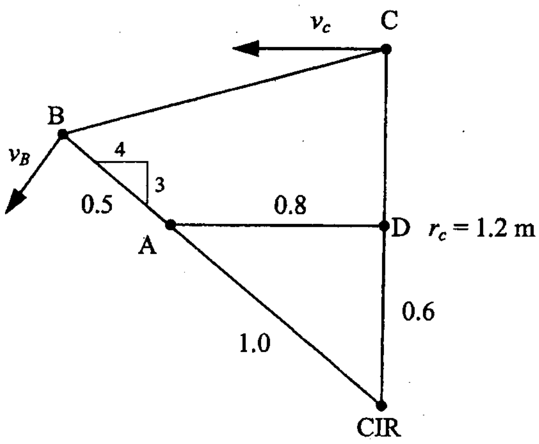
$$v_B = \omega_{AB}\, r_B$$

$$v_B = 1.697(31.1)$$

$$\boxed{v_B = 50.3 \ \text{in}/\text{s} \ \leftarrow}$$

18. La barra *AB* del mecanismo de cuatro articulaciones de la figura gira con una velocidad angular ω_1 de 9 rad/s en sentido antihorario. Determine las velocidades angulares ω_2 y ω_3 de las barras *BC* y *CD*, en la posición mostrada.





Resolución

Las articulaciones B y C tienen velocidades perpendiculares a las barras AB y CD, respectivamente, que se mueven con rotación pura. Además, la velocidad de B es:

$$v_B = \omega_{AB}\ r_{AB}$$

$$v_B = 9(0.5) = 4.5$$

Para hallar el centro instantáneo de rotación de la barra BC prolongamos las barras AB y CD y encontramos su intersección.

Puesto que la distancia de dicho centro al punto B es de 1.5 m, entonces:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r_B} = \frac{4.5}{1.5}$$

$$\boxed{\omega_2 = 3\ \text{rad/s}\ ↺}$$

Cuyo sentido se deduce de la observación de la figura

$$v_C = \omega_2 r_c$$

$$v_C = 3(1.2)$$

$$v_C = 3.6\ \text{m/s}\ \leftarrow$$

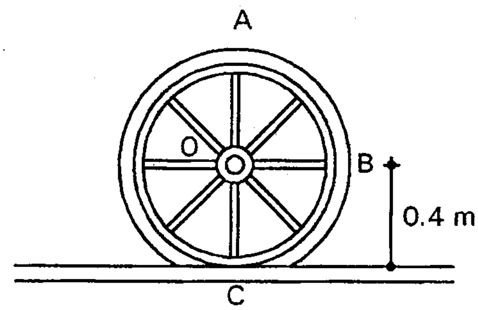
Por tanto,

$$\omega_3 = \frac{v_C}{r_C} = \frac{3.6}{0.6}$$

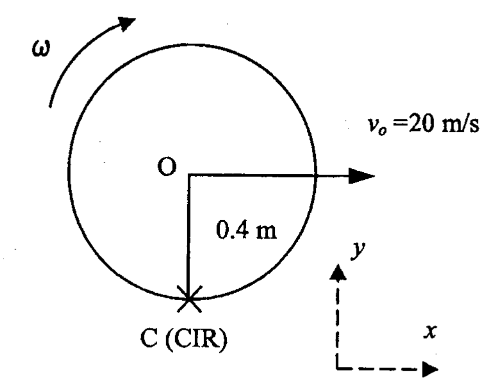
$$\boxed{\omega_3 = 6\ \text{rad/s}\ ↺}$$

4.4.3 Aceleraciones

19. La rueda de la figura pertenece a una locomotora que viaja hacia la derecha a 72 km/h, aumentando su rapidez a razón de 4 m/s^2. Sabiendo que la rueda no patina sobre los rieles, determine su aceleración angular y las aceleraciones lineales de los puntos O, A, B y C.



Resolución



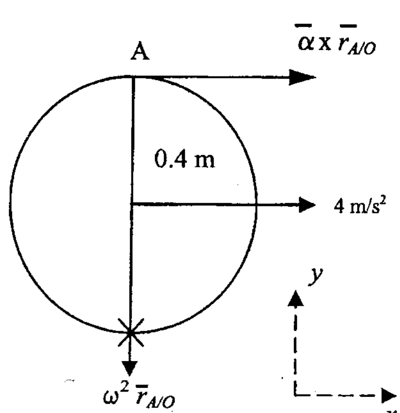
Para obtener las aceleraciones lineales de los puntos de la rueda, se necesita conocer su velocidad angular. Sabiendo que la velocidad de O es de:

$$72\ {}^{\text{km}}\!/_{\text{h}} = 20\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}\ :$$

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{20}{0.4} = 50$$

Como su sentido es horario, el vector velocidad angular en el sistema de referencia mostrado es:

$$\overline{\omega} = -50k$$



La aceleración lineal del punto O es igual a la de la locomotora.

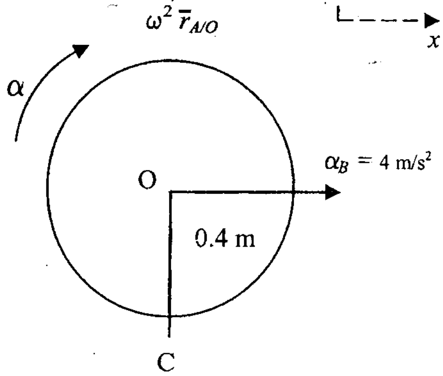
$$a_O = 4\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}^2} \rightarrow$$

$$\overline{a_O} = 4i$$

La aceleración angular de la rueda es:

$$\alpha = \frac{a_O}{r} = \frac{4}{0.4}$$

$$\boxed{\alpha = 10\ {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}^2}\ \curvearrowright}$$



El vector aceleración angular es $\overline{\alpha} = -10k$

Para calcular las aceleraciones lineales de los puntos, emplearemos las ecuaciones de movimiento relativo.

$$\overline{a_A} = \overline{a_{A/O}} + \overline{a_O}$$

Es decir:

$$\overline{a_A} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{A/O}} - \omega^2 \overline{r_{A/O}} + \overline{a_O}$$

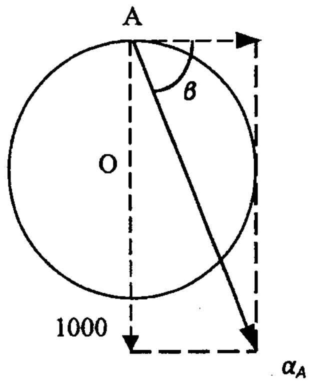
$$\overline{a_A} = -10k \times 0.4j - (-50)^2\, 0.4j + 4i$$

$$\overline{a_A} = 4i - 1000j + 4i$$

$$\overline{a_A} = 8i - 1000j$$

$$a_A = \sqrt{8^2 + 1000^2} \qquad ; \qquad \tan\beta = \frac{1000}{8}$$

$$\boxed{a_A = 1000\ \mathrm{m/s^2}\quad 89.5°}$$



De modo semejante, determinaremos las aceleraciones de los puntos B y C.

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/O}} - \omega^2 \overline{r_{B/O}} + \overline{a_O}$$

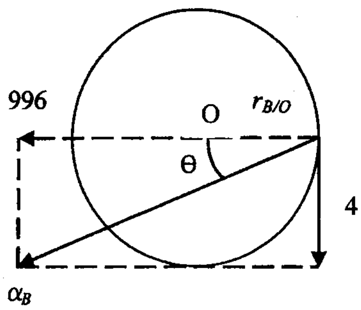
$$\overline{a_B} = -10k \times 0.4i - (-50)^2\, 0.4i + 4i$$

$$\overline{a_B} = -4j - 1000i + 4i$$

$$\overline{a_B} = -996i - 4j$$

$$a_B = \sqrt{996^2 + 4^2} \qquad ; \qquad \tan\gamma = \frac{4}{996}$$

$$\boxed{a_B = 996\ \mathrm{m/s^2}\quad 0.23°}$$



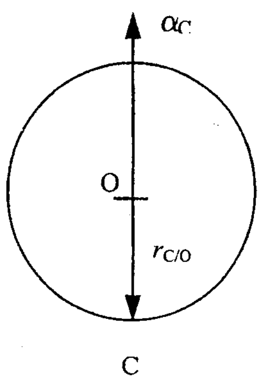
$$\overline{a_C} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{C/O}} - \omega^2 \overline{r_{C/O}} + \overline{a_O}$$

$$\overline{a_C} = -10k \times (-0.4j) - (50)^2 (-0.4j) + 4i$$

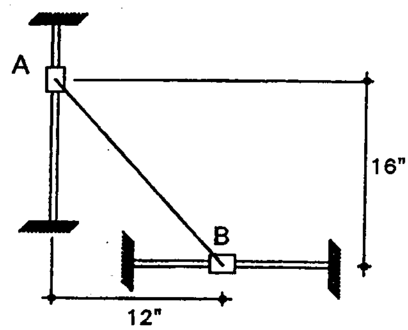
$$\overline{a_C} = -4i + 1000j + 4i$$

$$\overline{a_C} = 1000j$$

$$\boxed{\overline{a_C} = 1000\ \mathrm{m/s^2}\ \uparrow}$$

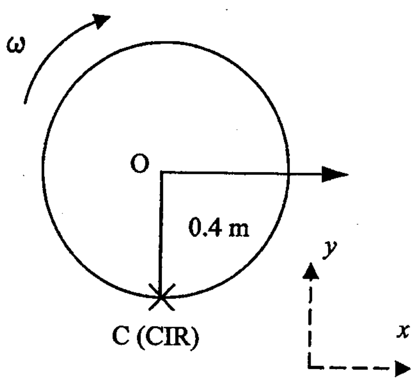


20. El collarín A se desliza, en el instante mostrado en la figura, hacia abajo con una rapidez de 30 in/s, que aumenta a razón de 140 in/s². Diga cuáles son, en ese mismo instante, la aceleración angular de la barra AB y la aceleración lineal del collarín B.



Resolución

Para obtener las aceleraciones, tanto de la barra como del collarín B, emplearemos la ecuación de movimiento relativo.



$$\overline{a_B} = \overline{a_{B/A}} + \overline{a_A}$$

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} - \omega^2 \overline{r_{B/A}} + \overline{a_A}$$

En el sistema de referencia mostrado y sabiendo que la velocidad angular de la barra es

$$\omega = 2.5 \ \mathrm{rad/s} \ \circlearrowleft \quad \text{(ver problemas 10 y 15)}$$

$$a_B i = \alpha k \times (12i - 16j) - 2.5^2 (12i - 16j) - 140j$$

$$a_B i = 16\alpha i + 12\alpha j - 75i + 100j - 140j$$

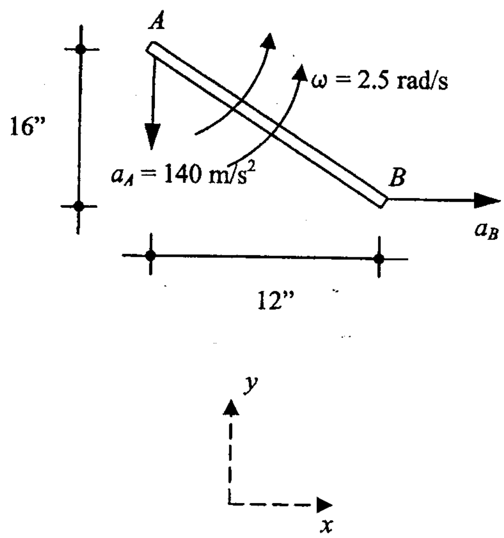
$$a_B i = (16\alpha - 75)i + (12\alpha - 40)j$$

Igualando las componentes verticales:

$$0 = 12\alpha - 40$$

$$\alpha = \frac{40}{12}$$

$$\boxed{\alpha = 3.33 \ \mathrm{rad/s^2} \ \circlearrowleft}$$



Igualando las componentes horizontales:

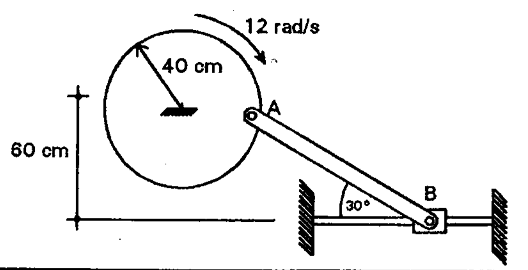
$$a_B = 16(3.33) - 75$$

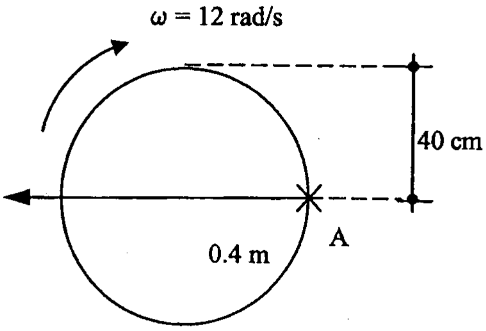
$$a_B = -21.7$$

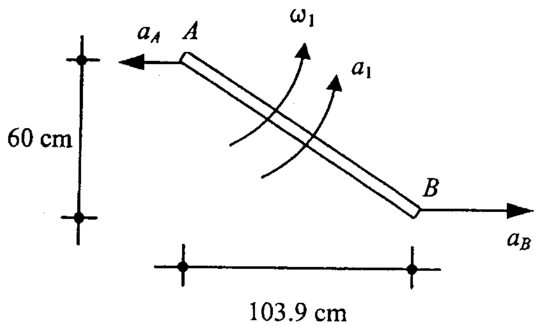
$$\boxed{a_B = 21.7 \ \mathrm{in/s^2} \ \leftarrow}$$

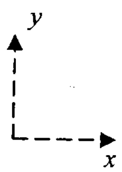
El signo negativo quiere decir que su sentido es contrario al que se supuso.

21. El disco de la figura gira con rapidez angular constante de 12 rad/s en sentido horario. Calcule, para la posición mostrada en la figura, la aceleración angular de la barra *AB* y la aceleración lineal del collarín *B*.









Resolución

Como la rapidez del disco es constante, la partícula A tiene una aceleración igual a su componente normal.

$$a_A = \omega^2 r = 12^2(40)$$

$$a_A = 5760\ \mathrm{cm/s^2}\ \leftarrow$$

Para calcular la aceleración angular de la barra, que tiene movimiento plano general, y la aceleración lineal del collarín, utilizamos la ecuación del movimiento relativo.

$$\overline{a_B} = \overline{a_{B/A}} + \overline{a_A}$$

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} - \omega_1{}^2 \overline{r_{B/A}} + \overline{a_A}$$

Sabiendo que ω_1, la velocidad angular de la barra, es de 4.62 $\mathrm{rad/s}$ ↺ y refiriéndonos al sistema cartesiano mostrado.

$$a_B i = \alpha k \times (103.9i - 60j) - 4.62^2(103.9i - 60j) - 5760i$$

$$a_B i = 60\alpha i + 103.9\alpha j - 2218i + 1281j - 5760i$$

Reduciendo términos semejantes

$$a_B i = (60\alpha - 7978)i + (103.9\alpha + 1281)j$$

Igualando las componentes en dirección del eje de las yes.

$$0 = 103.9\alpha + 1281$$

$$\alpha = \frac{-1281}{103.9} = -12.33$$

$$\boxed{\alpha = 12.33 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowright}$$

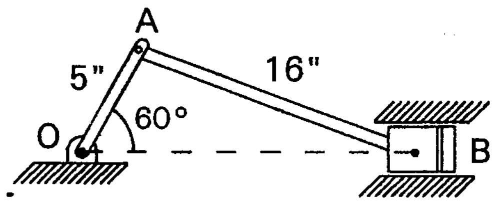
E igualando las componentes en dirección x'x

$$a_B = 60(-12.33) - 7978 = -8720$$

$$\boxed{a_B = 8720 \ \mathrm{cm}/\mathrm{s}^2 \ \leftarrow}$$

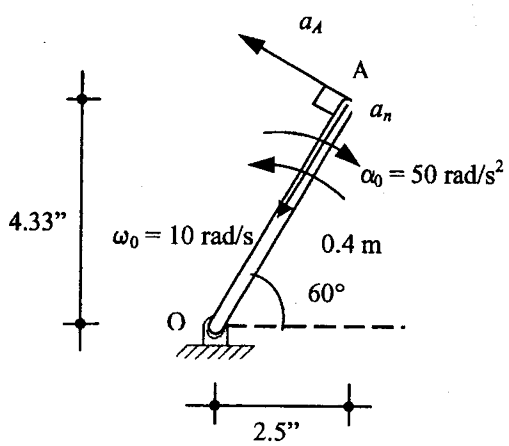
Los signos negativos indican que los sentidos son opuestos a los que se supusieron.

22. En la posición mostrada, la manivela *OA* tiene una rapidez angular de 10 rad/s en sentido antihorario y una aceleración angular de 50 rad/s^2 en sentido horario. Calcule la aceleración angular de la biela *AB* y la aceleración lineal del émbolo *B*.



Resolución

Para calcular la aceleración angular de la biela AB, que tiene movimiento plano general, y la aceleración lineal del émbolo B, usaremos la ecuación del movimiento relativo.

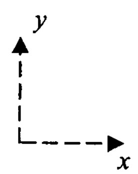


$$\overline{a_B} = \overline{a_{B/A}} + \overline{a_A}$$

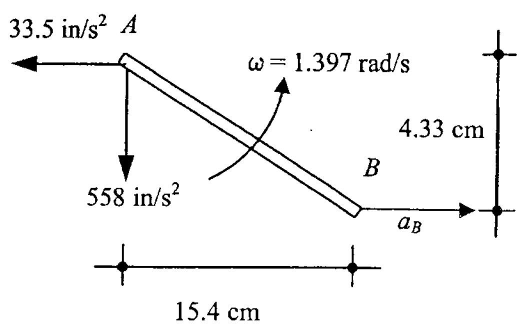
O sea:

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} - \omega^2 \overline{r_{B/A}} + \overline{a_A}$$

Por tanto, necesitamos conocer previamente la velocidad angular ω de la biela, la cual es de 1.623 rad/s en sentido horario. (véanse los problemas 12 y 17).



A partir del estudio de la manivela OA, que gira con rotación pura, determinaremos la aceleración lineal del punto A, utilizando el sistema de referencia mostrado.



$$\overline{a_A} = \left(\overline{a_A}\right)_t + \left(\overline{a_A}\right)_n$$

$$\overline{a_A} = \overline{\alpha_O} \times \overline{r} - \omega_O{}^2 \overline{r}$$

$$\overline{a_A} = -50k \times (2.5i + 4.33j) - 10^2 (2.5i + 4.33j)$$

$$\overline{a_A} = 216.5i - 125j - 250i - 433j$$

$$\overline{a_A} = -33.5i - 558j$$

Y la ecuación del movimiento relativo queda así:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B/A} + \bar{a}_A$$

$$\bar{a}_B = \bar{\alpha} \times \bar{r}_B - \omega^2 \bar{r} + (-33.5i - 558j)$$

$$a_B i = \alpha k \times (15.4i - 4.33j) - 1.623^2 (15.4i - 4.33j)$$

$$-33.5i - 558j$$

$$a_B i = 4.33\alpha\, i + 15.4\alpha\, j - 40.5i + 8.45j$$

$$+11.406i - 33.5i - 558j$$

$$a_B i = (4.33\alpha - 74.07)i + (15.4\alpha - 546.6)j$$

Igualando las componentes verticales:

$$0 = 15.4\alpha - 546.6$$

$$\alpha = \frac{546.6}{15.4}$$

$$\boxed{\alpha = 35.5 \ {}^{\text{rad}}\!/\!_{\text{s}^2} \ \circlearrowleft}$$

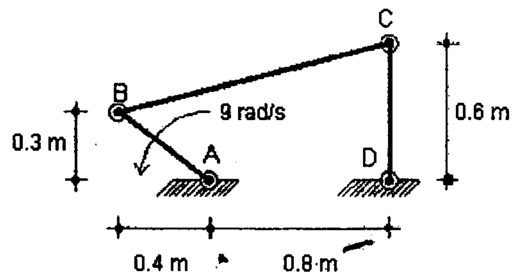
e igualando las componentes horizontales:

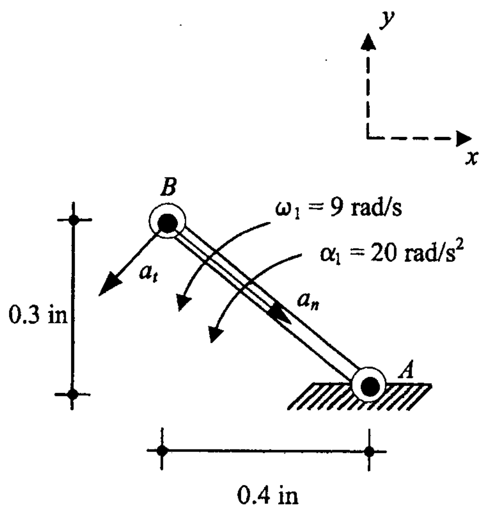
$$a_B = 4.33(35.5) - 74.07$$

El signo negativo indica que el sentido de la aceleración es contrario al supuesto.

$$\boxed{a_B = 79.6 \ {}^{\text{in}}\!/\!_{\text{s}^2} \ \leftarrow}$$

23. La barra *AB* del mecanismo de cuatro articulaciones de la figura gira con una velocidad angular ω_1 de 9 rad/s en sentido antihorario y una aceleración angular α_1 de 20 rad/s^2 también en sentido antihorario. Determine las aceleraciones angulares α_2 y α_3 de las barras *BC* y *CD*.





Resolución

Las barras AB y CD tienen rotación pura y la BC, movimiento plano general.

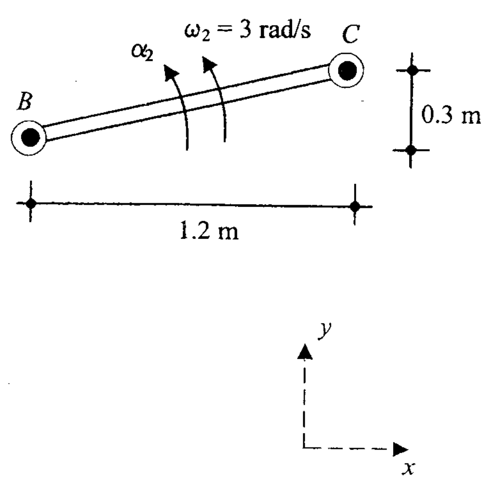
Para poder determinar las aceleraciones angulares de las barras es necesario conocer primero sus velocidades angulares.

La velocidad angular de la barra BC es

$\omega_2 = 3$ rad/s ↺ y de la barra CD,

$\omega_3 = 6$ rad/s ↺ (véanse los problemas 13 y 18).

Empleamos la ecuación del movimiento relativo para el estudio de la barra BC, tomando B como punto base; pues podemos conocer la aceleración de dicho punto.



$$\overline{a_C} = \overline{a_{C/B}} + \overline{a_B}$$

O sea:

$$\overline{a_C} = \overline{\alpha_2} \times \overline{r_{C/B}} - \omega^2\, \overline{r_{C/B}} + \overline{a_B}$$

La aceleración de B la obtendremos estudiando la barra AB y utilizando el sistema de referencia mostrado.

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha_1} \times \overline{r_1} - \omega_1^2 \overline{r_1}$$

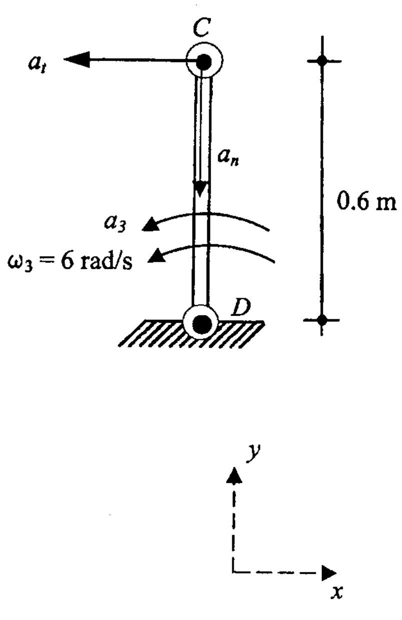
$$\overline{a_B} = 20k \times (-0.4i + 0.3j) - 9^2(-0.4i + 0.3j)$$

$$\overline{a_B} = -6i - 8j + 32.4i - 24.3j$$

$$\overline{a_B} = 26.4i - 32.3j$$

Sustituyendo en la ecuación que escribimos arriba:

$$\overline{a_C} = \alpha_2 k \times (1.2i + 0.3j) - 3^2(1.2i + 0.3j) + 26.4i - 32.3j$$



Como puede verse, en la ecuación anterior hay tres incógnitas: las dos componentes de a_C y α_2. Como en esa ecuación vectorial puede haber hasta un máximo de dos incógnitas, es imprescindible investigar alguna componente de a_C. Para ello analizaremos la barra CD.

$$\overline{a_C} = \overline{\alpha_3} \times \overline{r_3} - \omega_3^2 \overline{r_3}$$

$$\overline{a_C} = \alpha_3 k \times 0.6j - 6^2(0.6j)$$

$$\overline{a_C} = -0.6\alpha_3 i - 21.6j$$

Conocida la componente vertical, volvemos a la ecuación que dejamos pendiente, en la que sólo quedan dos incógnitas: α_2 y α_3.

$$-0.6\alpha_3 i - 21.6j = \alpha_2 k \times (1.2i + 0.3j) - 3^2(1.2i + 0.3j) + 26.4i - 32.3j$$

Desarrollando y reduciendo términos

$$-0.6\alpha_3 i - 21.6j = -0.3\alpha_2 i + 1.2\alpha_2 j - 10.8i - 2.7j$$
$$+26.4i - 32.3j$$

$$-0.6\alpha_3 i - 21.6j = (-0.3\alpha_2 i + 15.6)i + (1.2\alpha_2 - 35)j$$

Igualando las componentes verticales:

$$-21.6 = 1.2\alpha_2 - 35$$
$$1.2\alpha_2 = 13.4$$
$$\alpha_2 = \frac{13.4}{1.2}$$

$$\boxed{\alpha_2 = 11.17 \ \text{rad}/\text{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

Ahora, igualando las componentes horizontales:

$$-0.6\alpha_3 = -0.3(11.17) + 15.6$$
$$\alpha_3 = -\frac{12.25}{0.6}$$

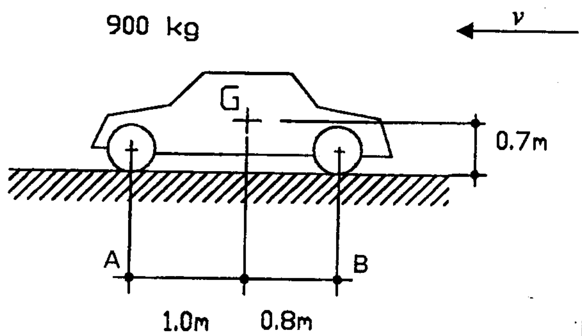
$$\boxed{\alpha_3 = 20.42 \ \text{rad}/\text{s}^2 \ \circlearrowright}$$

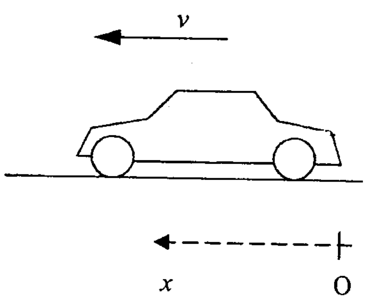
La aceleración α_3 de la barra CD tiene sentido horario, pues el signo negativo indica que es contrario al que se supuso.

5. CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO

5.1 Traslación pura

1. El automóvil representado en la figura viaja hacia la izquierda a 72 km/h cuando comienza a frenar, uniformemente, hasta detenerse por completo en una longitud de 40 m. Sabiendo que la masa del automóvil es de 900 kg, determine la magnitud de las componentes normales de la reacción del pavimento sobre cada una de las llantas del automóvil.





Resolución

Investigamos, para comenzar, la aceleración del centro de masa del automóvil, que es igual a la de cualquier partícula suya.

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

Como frena uniformemente, la aceleración es constante.

$$\int a dx = \int v dv$$

$$ax = \frac{v^2}{2} + C$$

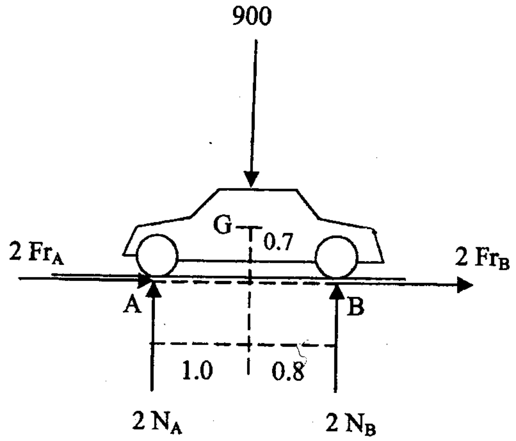
Eligiendo como origen la posición en que comienza a frenar.

Si $x = 0$, $v = 72\ {}^{\text{km}}\!/_{\text{h}} = 20\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}} \leftarrow$

$$0 = \frac{20^2}{2} + C; \quad C = -200$$

$$ax = \frac{v^2}{2} - 200 = \frac{v^2 - 400}{2}$$

$$a = \frac{v^2 - 400}{2x}$$



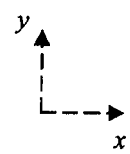
Para $x = 40 \leftarrow$ y $v = 0$

$$a = \frac{0 - 400}{2(40)}; \quad a = -5 \, {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}^2}$$

El signo negativo indica que su sentido es hacia la derecha.

Ahora pasamos a la parte cinética del problema. Dibujamos un diagrama de cuerpo libre que represente cualquier instante del movimiento en estudio y elegimos un sistema de referencia.

Las normales son $2N_A$ y $2N_B$ puesto que atrás de las llantas dibujadas hay otras dos que no se ven.



Nos auxiliamos de un diagrama que represente al sistema resultante de las fuerzas que actúan sobre el automóvil.

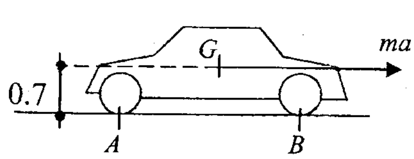
Elegimos B como centro de momentos:

$$\sum M_B F = ma\overline{d}$$

El primer miembro corresponde al diagrama de cuerpo libre; el segundo, al diagrama auxiliar.

$$2N_A(1.8) - 900(0.8) = 0.7\left(\frac{900}{9.81}\right)5$$

$$3.6N_A = 900\left(0.8 + \frac{3.5}{9.81}\right)$$



$$N_A = \frac{900}{3.6}\left(0.8 + \frac{3.5}{9.81}\right)$$

$$\boxed{N_A = 289 \text{ kg} \uparrow}$$

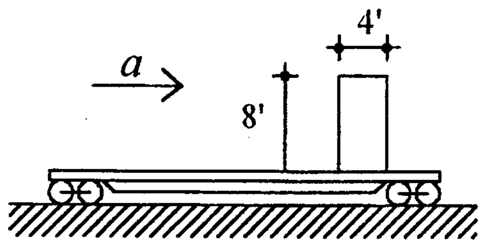
$$\sum Fy = 0$$

$$2(289) - 900 + 2N_B = 0$$

$$N_B = 450 - 289$$

$$\boxed{N_B = 160.8 \text{ kg} \uparrow}$$

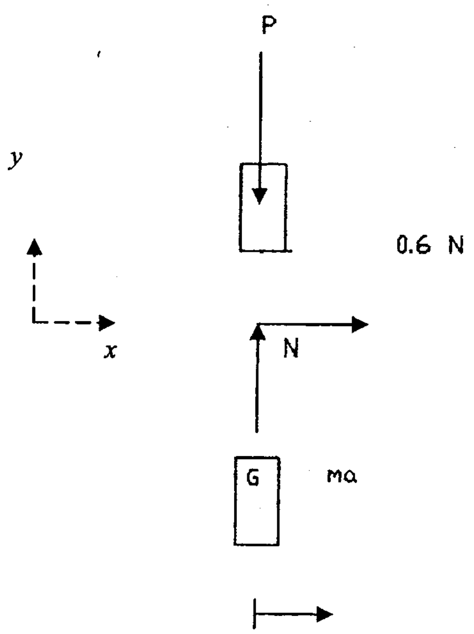
2. Sobre el carro-plataforma de un tren, se transporta un ropero de las dimensiones indicadas en la figura. Se desea investigar cuál es el tiempo mínimo que requiere el tren para alcanzar una rapidez de 60 mi/h, partiendo del reposo, sin que el ropero se deslice ni se vuelque. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el ropero y el carro son 0.6 y 0.5, respectivamente.



Resolución

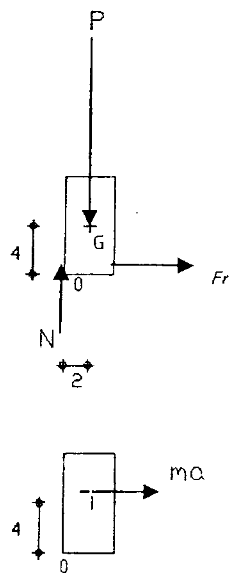
Para determinar el tiempo mínimo, obtendremos la máxima aceleración que puede soportar el ropero.

Supondremos, en primer lugar, que dicho ropero está a punto de deslizarse. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura; la fuerza de fricción es la estática máxima. Abajo se presenta un diagrama auxiliar que muestra la fuerza resultante.



$$\sum Fy = 0$$
$$N - P = 0$$
$$N = P$$
$$\sum Fx = ma$$
$$0.6N = \frac{P}{g}a$$
$$0.6P = \frac{P}{g}a$$
$$a = 0.6g$$
$$a = 0.6(32.2) = 19.32$$

Ahora supondremos que el ropero está a punto de volcarse. El diagrama de cuerpo libre y el auxiliar se muestran al lado.



La componente normal de la reacción del carro se encuentra en el extremo izquierdo de la base de sustentación. La fricción estática no alcanza necesariamente su valor máximo.

Elegimos el punto O de intersección de la normal y la fricción, que son desconocidas, como centro de momentos.

$$\sum M_O F = ma\overline{d}$$

$$-2P = -\frac{P}{g}a(4)$$

$$a = \frac{2g}{4} = \frac{2(32.3)}{4}$$

$$a = 16.1$$

Puesto que con una aceleración superior a $16.1\ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}^2}$ el ropero se volcaría, es ésta la máxima admisible. El tiempo mínimo será, por tanto,

$$a = 16.1$$

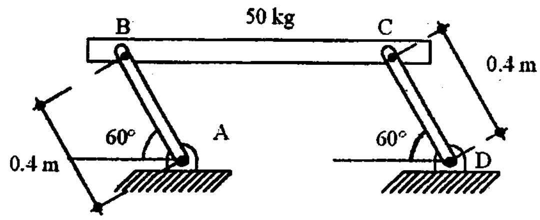
$$v = 16.1\,t$$

Para alcanzar $60\ {}^{\text{mi}}\!/_{\text{h}} = 88\ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}}$

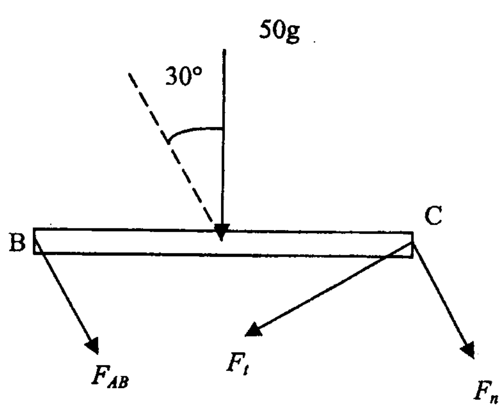
$$88 = 16.1\,t$$

$$\boxed{t = 5.47\ \text{s}}$$

3. Las barras *AB* y *CD* tienen 0.4 m de largo. La barra *CD* está conectada en *D* con un motor que la mueve con una velocidad angular constante de 300 rpm en sentido antihorario. La barra homogénea *BC* tiene 50 kg de masa. Determine cuál es, en el instante mostrado en la figura, la fuerza y tipo de esfuerzo a que está sujeta la barra *AB*, sabiendo que su masa es despreciable.



Resolución



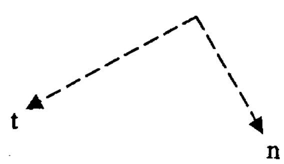
La barra BC se mueve con traslación pura curvilínea. La aceleración de cualquiera de sus partículas sólo tiene componente normal.

$$a = a_n = \omega^2 r$$

y la velocidad angular, en rad /s, es

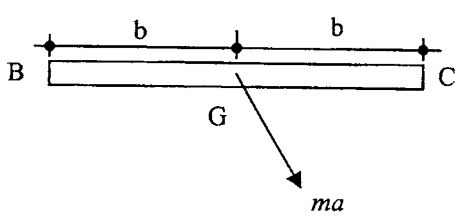
$$\omega = 300\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 10\pi$$

$$a = (10\pi)^2\, 0.4 = 40\pi^2$$



Una vez dibujados el diagrama de cuerpo libre y un auxiliar que muestre el sistema resultante, elegimos un sistema de referencia intrínseco. Supongamos que F_{AB} es tensión.

Elegiremos C, punto de concurrencia de dos incógnitas, como centro de momentos.



$$\sum M_C F = m a \bar{d}$$

$$F_{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2b + 50gb = 50\left(40\pi^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}(b)$$

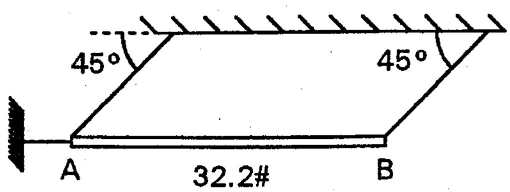
$$F_{AB}\sqrt{3} + 50g = 1000\pi^2\sqrt{3}$$

$$F_{AB} = \frac{1000\pi^2\sqrt{3} - 50(9.81)}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{F_{AB} = 9590 \text{ N } (\text{tensión})}$$

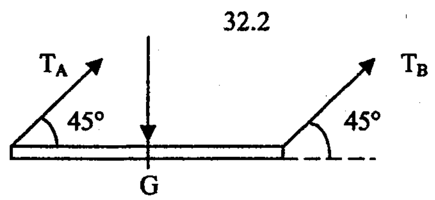
Se trata de una tensión pues, al tener signo positivo, satisface la hipótesis.

4. La barra AB de la figura es homogénea y pesa 32.2 lb. Calcule la tensión que soportará cada una de la cuerdas inclinadas 45°, en el instante en que se corte la cuerda horizontal. Calcule también la aceleración lineal de cualquier partícula de la barra en ese mismo instante.



Resolución

La barra se moverá con traslación pura curvilínea. Dibujamos el diagrama de cuerpo libre en el instante en que empieza el movimiento. También un dibujo auxiliar que muestre la fuerza resultante. Elegimos un sistema de referencia intrínseco.



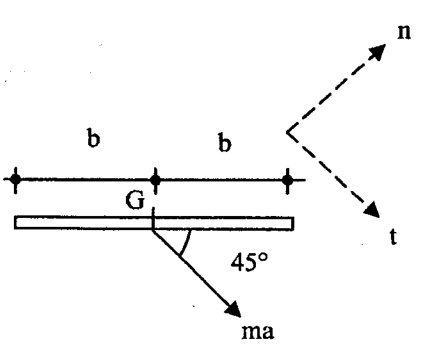
$$\sum M_G F = 0$$

$$-T_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)b + T_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)b = 0$$

$$T_A = T_B \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n$$

Como la velocidad es nula, $a_n = 0$



$$T_A + T_B - 32.2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$2T_A = 32.2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$T_A = \frac{32.2\ \sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{T_A = T_B = 11.38\ \text{lb}}$$

$$\sum F_t = ma_t$$

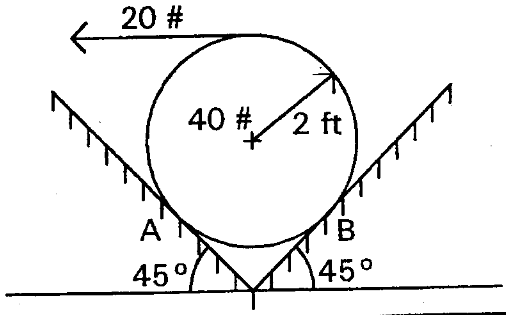
en donde $a_t = a$

$$32.2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{32.2}{32.2}a$$

$$\boxed{a = 22.8\ \text{ft}/\text{s}^2\ 45°\ \searrow}$$

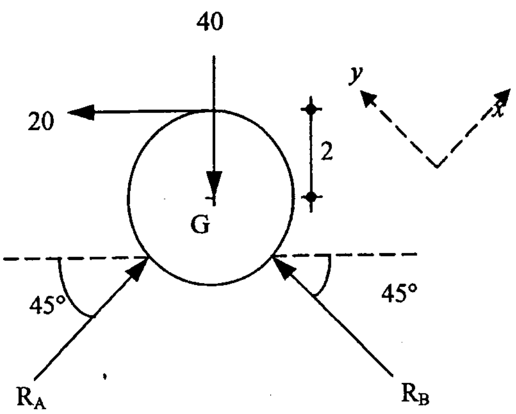
5.2 Rotación pura baricéntrica

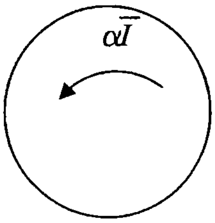
5. Un tambor de 40 lb de peso y 2 ft de radio está colocado sobre dos planos lisos inclinados 45°, como se muestra en la figura. Por medio de una cuerda ideal enrollada en él, se le aplica una fuerza constante de 20 lb. El tambor tiene un radio de giro centroidal de 1.5 ft. Calcule la aceleración angular del tambor y las reacciones de los planos sobre él.



Resolución

Como el tambor gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, el sistema resultante de las fuerzas que actúan sobre él es un par. Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del tambor y otro auxiliar que muestre el par resultante.





Elegimos un sistema de referencia cuyos ejes tienen las direcciones de la reacciones.

$$\sum Fx = 0$$

$$R_A - 40\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$R_A = 60\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30\sqrt{2}$$

$$\boxed{R_A = 42.4\ \text{lb}\ \measuredangle\ 45^\circ}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_B - 40\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$R_B = 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10\sqrt{2}$$

$$\boxed{R_B = 14.14 \text{ lb} \quad 45°}$$

$$\sum M_G F = \alpha \overline{I_G}$$

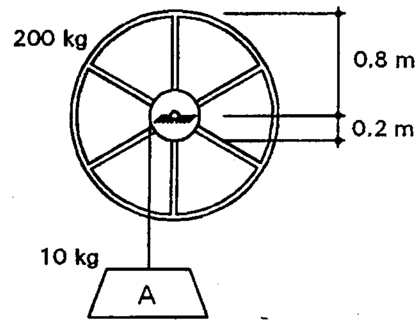
$$20(2) = \alpha\left[\bar{k}^2 m\right]$$

$$40 = \alpha\left(1.5^2\right)\frac{40}{32.2}$$

$$\alpha = \frac{32.2}{1.5^2}$$

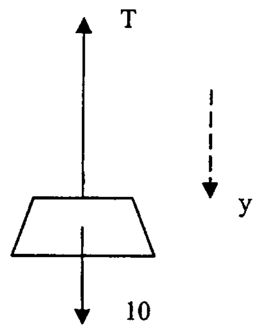
$$\boxed{\alpha = 14.31 \ \text{rad}/\text{s}^2}$$

6. El volante de la figura pesa 200 kg. El conjunto gira por la acción del cuerpo *A* de 10 kg que desciende verticalmente. Determine la tensión de la cuerda, la aceleración lineal del cuerpo *A* y la aceleración angular del volante.



Resolución

Como se trata de un problema de cuerpos conectados, comenzaremos estableciendo la relación cinemática entre la aceleración lineal de A y la angular del volante.



$$a_A = \alpha r$$

En este caso, *r* es el radio de la polea

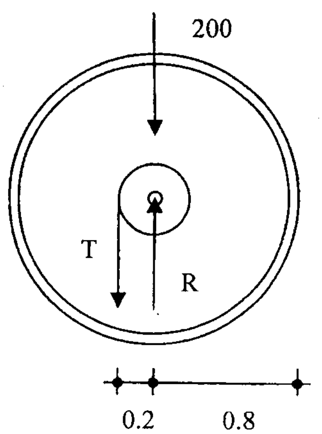
$$a_A = 0.2\alpha \qquad \text{(1)}$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de A y elegimos un eje de referencia en dirección de la aceleración del cuerpo.

$$\sum Fy = ma$$

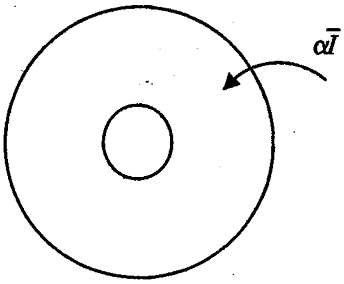
$$10 - T = \frac{10}{g} a_A$$

$$T = 10 - \frac{10}{g} a_A \qquad \text{(2)}$$



Ahora continuamos con el diagrama de cuerpo libre del volante. La reacción R del apoyo tiene que ser vertical, pues sobre el volante no actúa ninguna fuerza horizontal. Dibujamos también un diagrama que muestre el sistema resultante.

Como la masa del volante está concentrada a 0.8 m del eje de rotación, su momento de inercia se calcula multiplicando el cuadrado de esa distancia por la masa.



$$\bar{I} = 0.8^2\left(\frac{200}{g}\right) = \frac{128}{g}$$

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$0.2T = \frac{128}{g}\alpha$$

$$T = \frac{640}{g}\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

Igualamos (2) y (3), sustituyendo (1) en (2)

$$10 - \frac{10}{g}(0.2\alpha) = \frac{640}{g}\alpha$$

$$10 = \left(\frac{640}{g} + \frac{2}{g}\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{9.81\ (10)}{642}$$

$$\boxed{\alpha = 0.1528\ \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

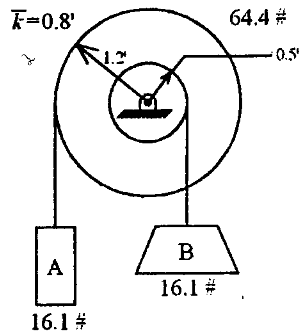
En (3)

$$\boxed{T = 9.97\ \ \mathrm{kg}}$$

y en (2)

$$\boxed{a = 0.0306\ \ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2 \downarrow}$$

7. Las dos poleas de la figura están rígidamente unidas, formando un cuerpo de 64.4 lb de peso. El radio de giro de su masa es de 0.8 ft, respecto al eje de rotación. Los cuerpos *A* y *B* pesan 16.1 lb cada uno y están unidos a las poleas mediante cuerdas de peso despreciable. Calcule la aceleración angular de la polea doble y la tensión en cada una de las cuerdas.



Resolución

Comenzaremos estableciendo las relaciones cinemáticas entre los movimientos de los tres cuerpos.

Para un punto cualquiera de la polea

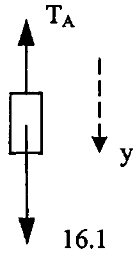
$$a_t = \alpha r$$

por tanto,

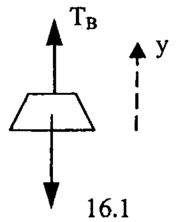
$$a_A = 1.2\alpha \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

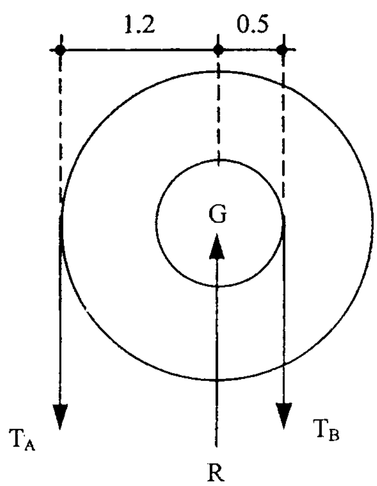
$$a_B = 0.5\alpha \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

Cuerpo A



Cuerpo B





Como el cuerpo A desciende, elegimos un sistema de referencia dirigido hacia abajo:

$$\sum Fy = ma$$

$$16.1 - T_A = \frac{16.1}{32.2} a_A$$

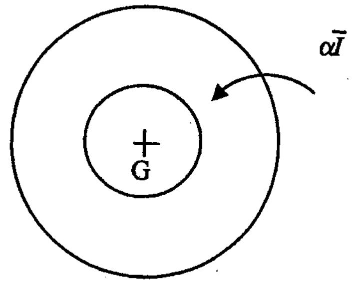
$$T_A = 16.1 - 0.5a_A \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(3)}$$

Del cuerpo B

$$\sum Fy = ma$$

$$T_B - 16.1 = \frac{16.1}{32.2} a_B$$

$$T_B = 16.1 + 0.5\ a_B \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(4)}$$



La polea doble gira con rotación pura baricéntrica y, por tanto, el sistema resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es un par.

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$1.2T_A - 0.5T_B = \alpha\left[0.8^2\left(\frac{64.4}{32.2}\right)\right]$$

$$1.2T_A - 0.5T_B = 1.28\ \alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (5)}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (5)

$$1.2(16.1 - 0.5a_A) - 0.5(16.1 + 0.5a_B) = 1.28\ \alpha$$

$$19.32 - 0.6a_A - 8.05 - 0.25a_B = 1.28\ \alpha$$

Sustituyendo (1) y (2) en esta ecuación

$$19.32 - 0.6(1.2\alpha) - 8.05 - 0.25(0.5\alpha) = 1.28\alpha$$

$$11.27 - 0.845\alpha = 1.28\alpha$$

$$2.125\alpha = 11.27$$

$$\boxed{\alpha = 5.304\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

En (1) y (2)

$$a_A = 6.364$$

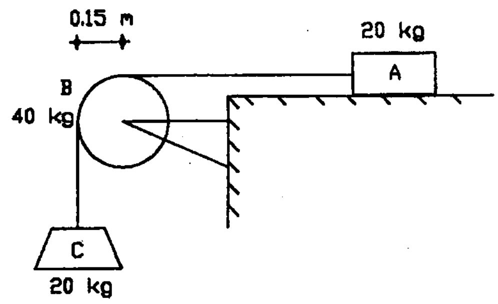
$$a_B = 2.652$$

En (3) y (4)

$$\boxed{T_A = 12.92\ \mathrm{lb}}$$

$$\boxed{T_B = 17.43\ \mathrm{lb}}$$

8. Los cuerpos de la figura están inicialmente en reposo. Tanto *A* como *C* pesan 20 kg. La polea *B* es un cilindro macizo de 0.15 m de radio que pesa 40 kg. Determine la tensión en cada uno de los tramos de la cuerda y el tiempo que se requiere para que *A* y *C* alcancen una rapidez de 5 m/s. La superficie horizontal es lisa.



Resolución

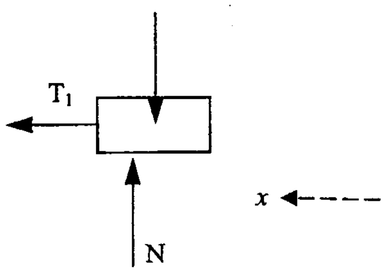
Las relaciones cinemáticas entre los cuerpos son:

$$a_A = a_C = \alpha r$$

en donde α es la aceleración angular de la polea y r su radio. O sea

$$a_A = a_C = 0.15\alpha$$

Cuerpo A

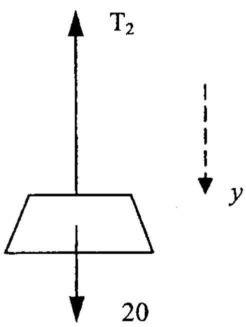


Como A se mueve hacia la izquierda, elegimos un eje de referencia en esa dirección

$$\sum F_x = ma$$

$$T_1 = \frac{20}{9.81} a_A \qquad (1)$$

Cuerpo B



Del cuerpo B

$$\sum F_y = ma$$

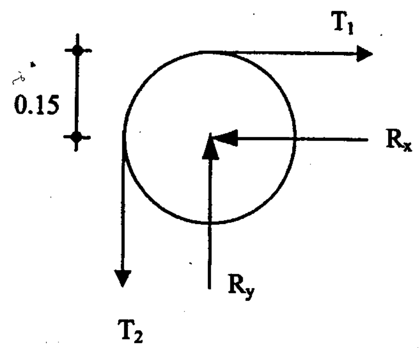
$$20 - T_2 = \frac{20}{9.81} a_B$$

$$T_2 = 20 - \frac{20}{9.81} a_B \qquad (2)$$

La polea gira con rotación pura alrededor de su centro de masa. Tiene un momento de inercia de

$$\bar{I} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{40}{9.81}\right) 0.15^2 = 0.0459 \ \text{kg.m}^2$$



Dibujaremos un diagrama de cuerpo libre y un diagrama auxiliar en que aparezca el sistema resultante de las fuerzas, que es un par.

$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

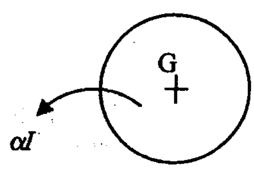
$$0.15T_2 - 0.15T_1 = 0.0459\alpha$$

$$0.15(T_2 - T_1) = 0.0459\alpha$$

$$T_2 - T_1 = 0.306\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

Sustituimos (1) y (2) en (3)

$$20 - \frac{20}{9.81}a_B - \frac{20}{9.81}a_A = 0.306\alpha$$



De las relaciones cinemáticas

$$20 - \frac{20}{9.81}(0.15\alpha) - \frac{20}{9.81}(0.15\alpha) = 0.306\alpha$$

$$20 - \frac{40}{9.81}(0.15\alpha) = 0.306\alpha$$

$$\left(0.306 + \frac{6}{9.81}\right)\alpha = 20$$

$$0.917\alpha = 20$$

$$\boxed{\alpha = 21.8 \ \text{rad}/\text{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

De donde $a_A = a_B = 3.27$ y

$$\boxed{T_1 = 6.67 \text{ kg}}$$

que es la tensión en el tramo de cuerda que une A con la polea.

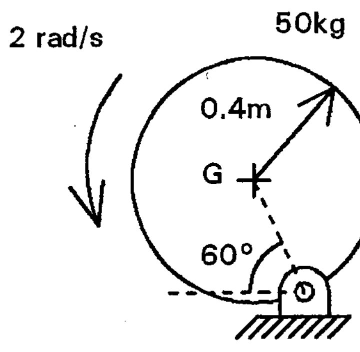
En el otro tramo la tensión es (de (3))

$$T_2 - 6.67 = 0.306(21.1)$$

$$\boxed{T_2 = 13.33 \text{ kg}}$$

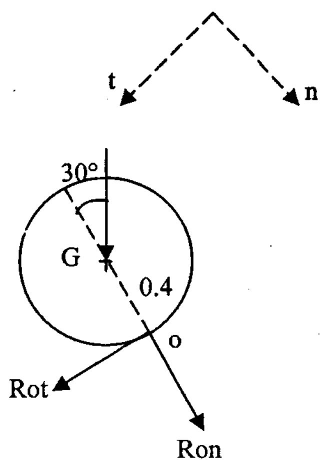
5.3 Rotación pura no baricéntrica

9. El disco homogéneo de 0.4 m de radio gira alrededor de un eje horizontal, perpendicular al plano que lo contiene, que pasa por *O*. En el instante mostrado en la figura, su velocidad angular es de 2 rad/s, en sentido antihorario. Sabiendo que el disco tiene una masa de 50 kg, diga cuál es su aceleración angular, así como la magnitud y dirección de la reacción de la articulación *O*.



Resolución

Dibujaremos el diagrama de cuerpo libre del disco y un diagrama auxiliar que muestre el sistema equivalente de las fuerzas. Elegimos un sistema de referencia intrínseco, en relación a G.



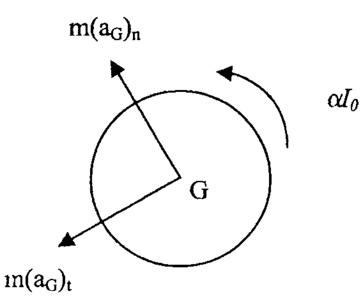
$$\sum M_O F = \alpha I_O$$

$$50(\text{sen } 30°)0.4 = \alpha I_O$$

Por el teorema de los ejes paralelos

$$I_O = \bar{I} + mr^2$$

$$I_O = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$



Entonces:

$$50(0.5)0.4 = \alpha\left(\frac{3}{2}\right)\frac{50}{9.81}(0.4)^2$$

$$0.5 = \frac{3}{2}\left(\frac{0.4}{9.81}\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{9.81}{1.2}$$

$$\boxed{\alpha = 8.175 \ \text{rad}/\text{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

$$\sum F_n = m\omega^2 \bar{r}$$

$$Ron + 50\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{50}{9.81}\left(2^2\right)0.4$$

$$Ron = 50\left(\frac{1.6}{9.81} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -35$$

$$\sum F_t = m\alpha \bar{r}$$

$$Rot + 50\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{50}{9.81}(8.18)0.4$$

$$Rot = 50\left(\frac{(8.18)(0.4)}{9.81} - \frac{1}{2}\right) = -8.33$$

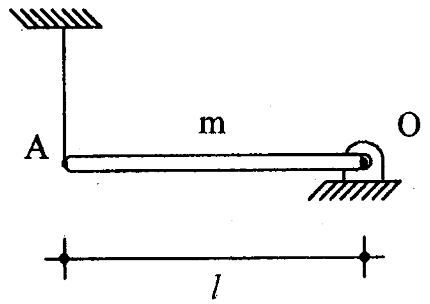
Como los signos indican que sus sentidos son contrarios al de los ejes, las componentes de *Ro* son:

$$Ro = \sqrt{35.1^2 + 8.33^2} = 36.1$$

$$\tan\beta = \frac{8.33}{35.1}; \quad \beta = 13.3^\circ$$

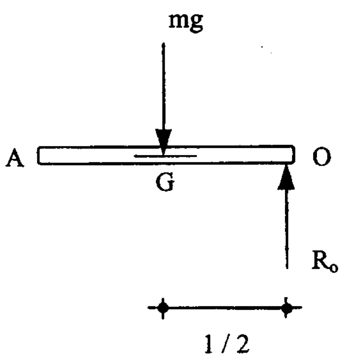
$$\boxed{Ro = 36.1 \text{ kg} \quad 73.3^\circ}$$

10. La barra homogénea AO está articulada en O y soportada por una cuerda en A. Tiene una masa m y una longitud l. Determine tanto la aceleración angular de la barra como la magnitud y dirección de la reacción de la articulación en el instante que se corte la cuerda.

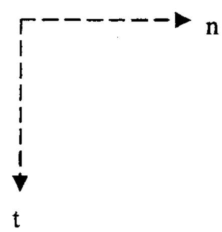


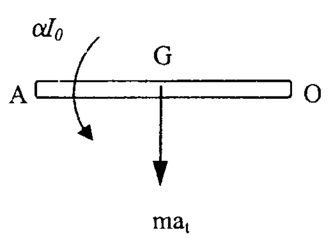
Resolución

La barra se moverá con rotación pura alrededor de un eje que pasa por O. Su diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura. En el otro diagrama se muestra el sistema de fuerzas equivalente de las fuerzas que actúan sobre la barra en el instante en que se corta la cuerda.



Emplearemos un sistema de referencia intrínseco para el centro de masa, cuya aceleración normal es nula, ya que no tiene velocidad lineal.





$$\sum M_O F = \alpha I_O$$

$$mg\left(\frac{l}{2}\right) = \alpha\left[\frac{1}{3}ml^2\right]$$

$$\frac{g}{2} = \frac{\alpha l}{3}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3g}{2l} \circlearrowleft}$$

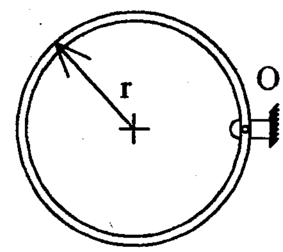
$$\sum F_t = m\alpha \bar{r}$$

$$mg - Ro = m\left(\frac{3g}{2l}\right)\frac{l}{2}$$

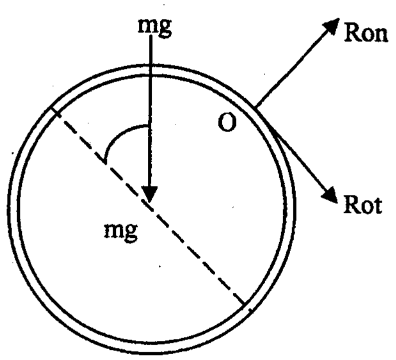
$$Ro = m\left(g - \frac{3}{4}g\right)$$

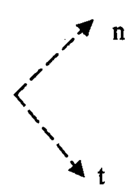
$$\boxed{Ro = \frac{1}{4}mg \uparrow}$$

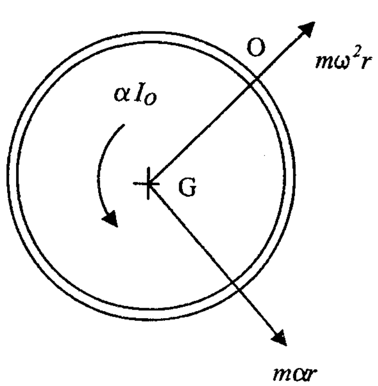
11. El arillo de la figura tiene un radio r y se encuentra en reposo en la posición mostrada. Diga cuál será la rapidez angular máxima que alcanzará, si se suelta desde dicha posición.



Resolución







Dibujaremos un diagrama de cuerpo libre que represente un instante cualquiera de la rotación del arillo. También un diagrama que muestre un sistema equivalente de las fuerzas. Elegimos un sistema de referencia intrínseco.

Calculamos el momento de inercia de la masa respecto al eje de rotación, mediante el teorema de los ejes paralelos.

$$I_O = \bar{I} + mr^2$$

$$I_O = mr^2 + mr^2$$

$$I_O = 2mr^2$$

La ecuación que empleamos es

$$\sum M_O F = \alpha I_O$$

$$mg\bar{r}\cos\theta = \alpha\left(2mr^2\right)$$

$$\alpha = \frac{g\cos\theta}{2r}$$

Como $\alpha = \omega \dfrac{d\omega}{d\theta}$

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{g\cos\theta}{2r}$$

Separando variables

$$\omega\, d\omega = \frac{g}{2r}\cos\theta\ d\theta$$

Integrando

$$\int \omega\, d\omega = \frac{g}{2r}\int \cos\theta\ d\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{2r}\operatorname{sen}\theta + C$$

Las condiciones iniciales son $\omega = 0$ y $\theta = 0$; por tanto, la constante de integración es nula.

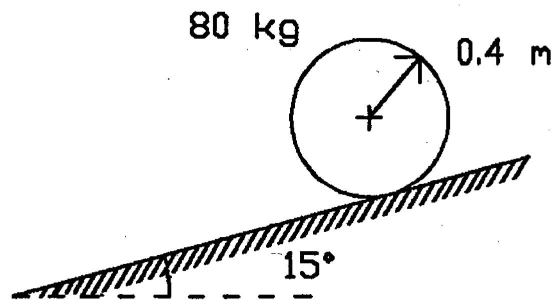
$$\omega^2 = \frac{g}{r}\operatorname{sen}\theta$$

Como la velocidad angular máxima ocurre cuando $\theta = 90°$ y $\operatorname{sen}\theta = 1$

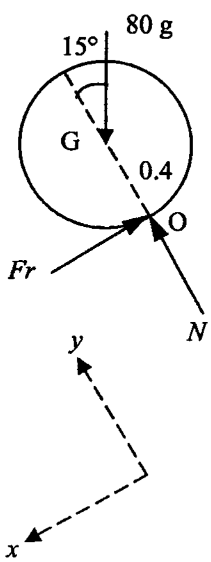
$$\boxed{\omega_{máx} = \sqrt{\frac{g}{r}}}$$

5.4 Movimiento plano general

12. Una esfera homogénea de 80 kg de masa y 0.4 m de radio, se suelta del reposo sobre un plano inclinado 15°. La esfera desciende rodando sin deslizarse sobre el plano. Calcule, para cualquier instante del movimiento, la aceleración angular de la esfera; la aceleración lineal de su centro de masa; la fuerza de fricción que el plano ejerce sobre ella, y la magnitud de la componente normal de la reacción del plano.

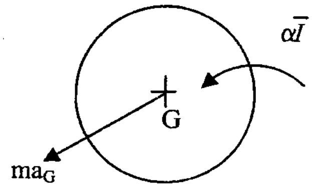


Resolución



Dibujaremos el diagrama de cuerpo libre de la esfera, representando cualquier instante de su movimiento. Suponemos arbitrariamente el sentido de la fuerza de fricción. Elegimos un sistema de referencia cuyo eje equis tiene la dirección de la aceleración del centro de masa.

En un diagrama auxiliar dibujaremos una fuerza aplicad en G y un par de magnitud $\alpha\bar{I}$ que forman un sistema equivalente al que actúa sobre la esfera.



$$\sum M_G F = \alpha\bar{I}$$

$$0.4F_r = \alpha\left[\frac{2}{5}mr^2\right]$$

$$0.4F_r = \alpha\left[\frac{2}{5}(80)(0.4)^2\right]$$

$$F_r = 12.8\alpha \qquad (1)$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$80(9.81)\text{sen}15° - F_r = 80a_G$$

$$203 - F_r = 80a_G$$

Del valor obtenido en (1)

$$203-12.8\alpha = 80a_G$$

Como la esfera rueda sin deslizar:

$$a_G = \alpha r$$

$$a_G = 0.4\alpha$$

Por tanto

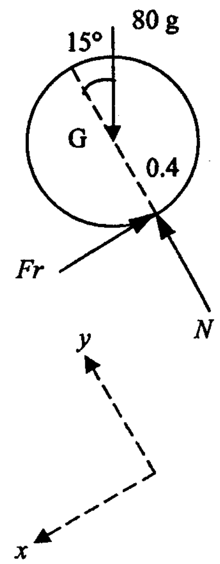
$$203-12.8\alpha = 80(0.4\alpha)$$

$$44.8\alpha = 203$$

$$\boxed{\alpha = 4.53\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2}$$

$$\boxed{a_G = 1.814\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2 \quad 15^\circ}$$

$$\boxed{F_r = 58\ \mathrm{N} \quad 15^\circ}$$

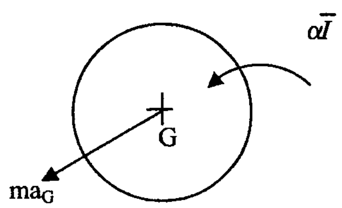


El sentido verdadero de la fuerza de fricción es el que se supuso.

$$\sum F_y = 0$$

$$N - 80(9.81)\cos 15^\circ = 0$$

$$\boxed{N = 758\ \mathrm{N} \quad 75^\circ}$$



<u>Otro método</u>

Sabiendo que el punto de contacto de la esfera con el plano inclinado es el centro instantáneo de rotación:

$$\sum M_{CIR} F = \alpha I_{CIR}$$

El momento de inercia de la masa de la esfera respecto a ese punto es:

$$I_{CIR} = \bar{I} + mr^2 \quad \text{(teorema de los ejes paralelos)}$$

$$I_{CIR} = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2$$

$$I_{CIR} = \frac{7}{5}mr^2$$

Por tanto

$$80(9.81)0.4\,\text{sen}15° = \alpha\left(\frac{7}{5}\right)80\left(0.4^2\right)$$

$$9.81\,\text{sen}15° = \alpha\left(\frac{7}{5}\right)0.4$$

$$\alpha = \frac{5(9.81)\text{sen}15°}{2.8}$$

$$\boxed{\alpha = 4.53\ \text{rad}/\text{s}^2}$$

$$a_G = \alpha r$$

$$a_G = 4.53(0.4)$$

$$\boxed{a_G = 1.814\ \text{m}/\text{s}^2 \quad 15°}$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$80(9.81)\text{sen}15° - F_r = 80(1.814)$$

$$F_r = 80\left(9.81\ \text{sen}15° - 1.814\right)$$

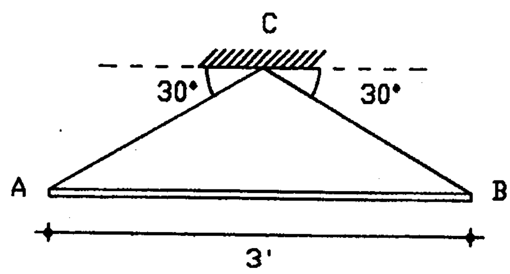
$$\boxed{F_r = 58\ \text{N} \quad 75°}$$

$$\sum F_y = 0$$

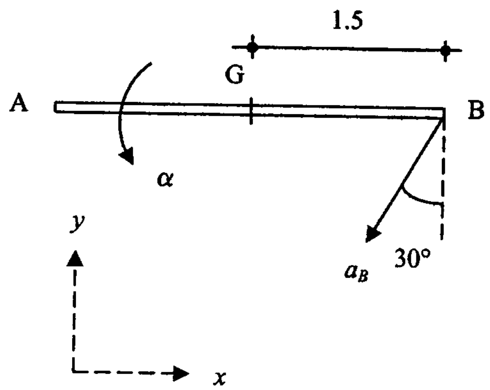
$$N - 80(9.81)\cos 15° = 0$$

$$\boxed{N = 758\ \text{N} \quad 75°}$$

13. La barra delgada de la figura es homogénea, pesa 16.1 lb y mide 3 ft de largo. Pende del punto C por medio de dos cuerdas atadas a sus extremos, como se muestra. En el instante en que se corte la cuerda AC, ¿cuál será la tensión en la cuerda BC? ¿Cuál, la aceleración angular de la barra? ¿Qué magnitud y dirección tendrá la aceleración lineal de su centro de masa?



Resolución



Establecemos la relación entre la aceleración angular de la barra y la aceleración inicial de su centro de masa, tomando B como punto base y sabiendo que todas las velocidades son nulas.

$$\overline{a_G} = \overline{a_{G/B}} + \overline{a_B}$$

$$\overline{a_G} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{G/B}} + \overline{a_B}$$

$$\overline{a_G} = \alpha k \times (-1.5i) - 0.5a_B i - 0.5\sqrt{3}\, a_B j$$

$$\overline{a_G} = 1.5\alpha j - 0.5a_B i - 0.5\sqrt{3}\, a_B j$$

Escalarmente:

$$(a_G)_x = -0.5\, a_B \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

$$(a_G)_y = -1.5\alpha - 0.5\sqrt{3}\, a_B \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

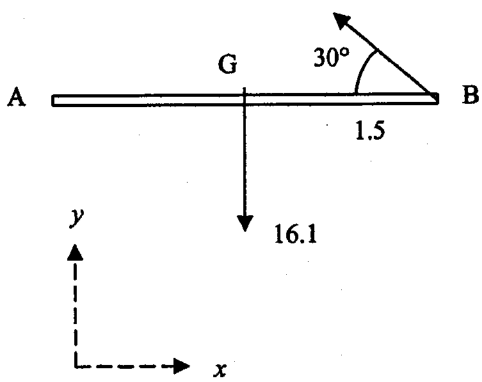
De (1)

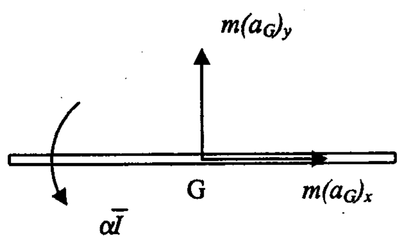
$$a_B = -2(a_G)_x$$

En (2)

$$(a_G)_y = -1.5\alpha + (a_G)_x \sqrt{3} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (3)$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la barra y su diagrama auxiliar que muestre un sistema de fuerzas equivalente conforme al sistema cartesiano que elegimos.





$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$1.5T\,\text{sen}30° = \alpha\left[\frac{1}{12}(0.5)3^2\right]$$

$$1.5(0.5)T = \alpha(0.375)$$

$$T = 0.5\,\alpha \qquad (4)$$

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$-T\cos 30° = 0.5(a_G)_x$$

$$4(a_G)_x = -\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (5)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

$$T\,\text{sen}\,30° - 16.1 = 0.5(a_G)_y$$

$$0.5T - 16.1 = 0.5(a_G)_y$$

De (4)

$$0.25\alpha - 16.1 = 0.5(a_G)_y$$

$$(a_G)_y = 0.5\alpha - 32.2 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (3)

$$0.5\alpha - 32.2 = -1.5\alpha + \left(-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3}$$

$$0.5\alpha - 32.2 = -3\alpha$$

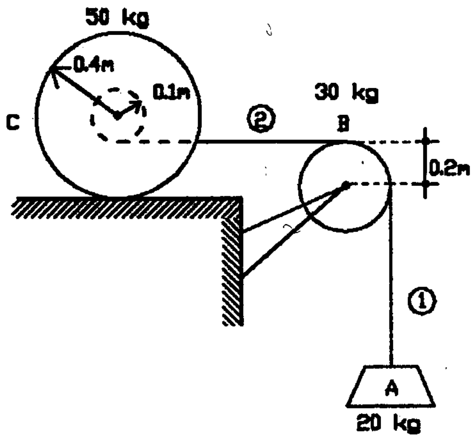
$$3.5\alpha = 32.2$$

$$\boxed{\alpha = 9.2\ \text{rad}/\text{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

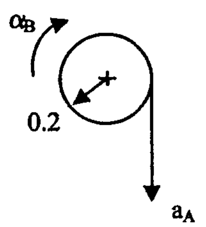
De (4)

$$\boxed{T = 4.6\ \text{lb}}$$

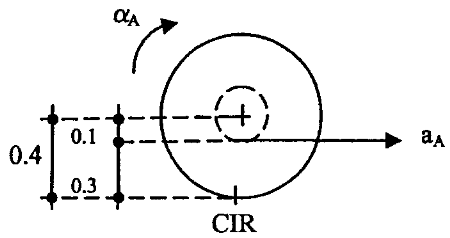
14. Los tres cuerpos de la figura están conectados mediante una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable. *A* pesa 20 kg. La polea *B* es un cilindro macizo de 0.2 m de radio que pesa 30 kg. Y *C* es un carrete de 50 kg cuyo radio exterior es de 0.4 m y cuyo núcleo es de 0.1 m. Sabiendo que el carrete rueda sin deslizar y que el radio de giro de su masa respecto al eje de figura es de 0.25 m, determine la tensión en cada uno de los tramos de la cuerda (1 y 2) y la aceleración angular del carrete.



Resolución



Comenzaremos estableciendo las relaciones cinemáticas entre los movimientos de los cuerpos, teniendo en cuenta que A se mueve con traslación pura; B, con rotación pura baricéntrica, y C con movimiento plano general. La aceleración de la cuerda es igual a la de A.



$$a_A = \alpha_B r_B = 0.2\alpha_B$$

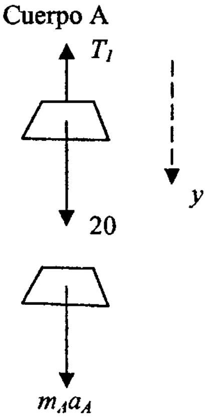
$$a_A = \alpha_C r = 0.3\alpha_C \qquad (1)$$

Por tanto

$$0.2\alpha_B = 0.3\alpha_C$$

$$\alpha_B = 1.5\alpha_C \qquad (2)$$

Cuerpo A



Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de cada cuerpo y un diagrama auxiliar que muestre el sistema resultante.

Cuerpo A

$$\sum F_y = ma$$

$$20 - T_1 = \frac{20}{g} a_A$$

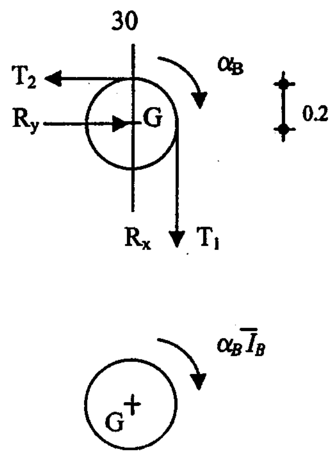
$$T_1 = 20 - \frac{20}{g} a_A$$

De (1)

$$T_1 = 20 - \frac{20}{g}(0.3\alpha_C)$$

$$T_1 = 20 - \frac{6}{g}\alpha_C \qquad (3)$$

Polea B



$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$0.2T_1 - 0.2T_2 = \alpha_B\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{g}\right)0.2^2\right]$$

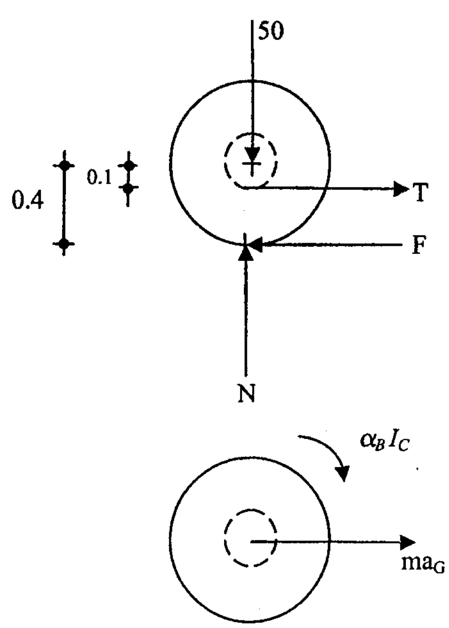
$$T_1 - T_2 = \frac{3}{g}\alpha_B$$

De (2)

$$T_1 - T_2 = \frac{4.5}{g}\alpha_C \qquad (4)$$

Carrete C

Cuerpo C



Como el punto de contacto entre el carrete y la superficie es el centro instantáneo de rotación

$$\sum M_{CIR} F = \alpha \; I_{CIR}$$

$$0.3T_2 = \alpha_C(\bar{I} + m\bar{r}^2)$$

$$0.3T_2 = \alpha_C\left[0.25^2\left(\frac{50}{g}\right) + \left(\frac{50}{g}\right)0.4^2\right]$$

$$0.3T_2 = \frac{11.125}{g}\alpha_C$$

$$T_2 = \frac{37.08}{g}\alpha_C \qquad (5)$$

Sustituyendo (3) y (5) en (4)

$$20 - \frac{6}{g}\alpha_C - \frac{37.08}{g}\alpha_C = \frac{4.5}{g}\alpha_C$$

$$\frac{47.58}{g}\alpha_C = 20$$

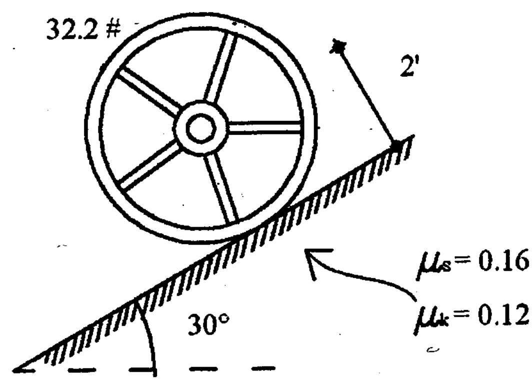
$$\alpha_C = \frac{20(9.81)}{47.58}$$

$$\boxed{\alpha_C = 4.124 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowright}$$

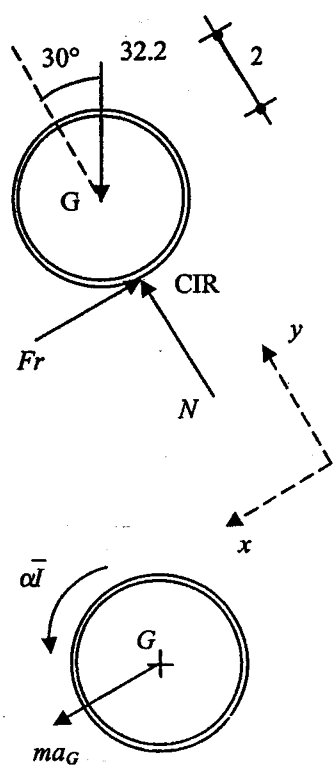
En (3) y (5)

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1 = 17.48 \ \mathrm{kg} \\ T_2 = 15.59 \ \mathrm{kg} \end{array}}$$

15. Una rueda de 2 ft de radio y 32.2 lb de peso, cuyo masa tiene una radio de giro centroidal de 1.5 ft, se suelta sobre un plano inclinado con un ángulo de 30° con la horizontal, como se muestra en la figura. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el plano son 0.16 y 0.12, respectivamente. Diga si la rueda se desliza o no sobre el plano y calcule la fuerza de fricción que éste ejerce sobre ella, la aceleración angular de la rueda y la aceleración lineal de su centro de masa.



Resolución



Supondremos, primero, que la rueda no se desliza sobre el plano. En este caso, el punto de contacto entre ellos es el centro instantáneo de rotación.

$$\sum M_{CIR}F = \alpha I_{CIR}$$

$$32.2 = \alpha\left[\bar{I} + mr^2\right]$$

$$32.2 = \alpha\left[1.5^2\left(\frac{32.2}{32.2}\right) + \left(\frac{32.2}{32.2}\right)2^2\right]$$

$$\alpha = \frac{32.2}{6.25}$$

$$\alpha = 5.15$$

Por tanto

$$a_G = \alpha r = 5.15(2) = 10.30$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$32.2\left(\frac{1}{2}\right) - F_r = (1)\ 10.30$$

$$F_r = 16.1 - 10.30 = 5.80$$

$$\sum F_y = 0$$

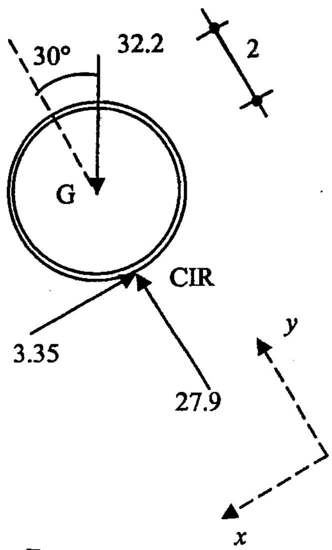
$$N - 32.2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$N = 27.9$$

La fuerza de fricción estática máxima es

$$F' = M_k N = 0.16(27.9) = 4.46$$

Como 4.46 lb es menor que 5.80 lb, la rueda se desliza sobre el plano.

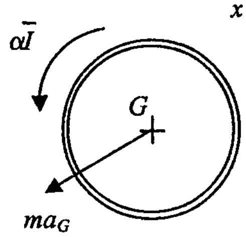


Puesto que la rueda desliza, la fricción es cinética

$$F_k = M_k N = 0.12(27.9)$$

$$\boxed{F_k = 3.35 \text{ lb} \quad 30°}$$

El diagrama de cuerpo libre es el que se muestra:



$$\sum M_G F = \alpha \bar{I}$$

$$3.35(2) = \alpha\left[1.5^2(1)\right]$$

$$\boxed{\alpha = 2.97 \text{ rad/s}^2}$$

$$\sum F_x = ma_G$$

$$32.2\left(\frac{1}{2}\right) - 3.35 = (1)a_G$$

$$\boxed{a_G = 12.75 \text{ ft/s}^2 \quad 30°}$$