



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“OSCILACIONES DANSGAARD-OERSCHGER”

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO

P R E S E N T A:

ALBERTO NAVARRETE HERNÁNDEZ

DIRECTOR: Dr. Víctor Manuel Velasco Herrera



MÉXICO, D.F., 2008

Dedicatorias

A mis padres.

*Por todo el cariño y el apoyo moral, económico,
sentimental que me brindaron durante el
transcurso de mi formación profesional.*

*Gracias por haber me permitido conseguir algo
que también es parte de ustedes.*

A mis hermanos.

*Gracias por apoyarme en todas los pequeños
detalles y consejos que me proporcionaron.*

*Gracias Martha, Luis y Javier, les estoy
profundamente agradecido.*

A mis amigos.

*Iván (talivan), Sergio (large), Roberto (tesillo)
Guillermo, Isaac, Jorge, Rodolfo y demás
compañeros. A todos les agradezco los buenos
tiempos que pasamos, sus consejos y sugerencias.
Gracias a todos.*

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a su Facultad de Ingeniería

Por brindarme la oportunidad de obtener una buena educación en sus maravillosas instalaciones y poder cumplir mi meta de tener una carrera profesional. Gracias, estoy en deuda con ustedes.

Al Dr. Víctor Manuel Velasco Herrera.

Por su infinita paciencia y dedicación, así como por sus consejos, sugerencias y sus valiosas enseñanzas, por su entusiasmo y esfuerzo en la realización de este trabajo. Mi admiración y respeto hacia usted.



Índice general

Introducción	1
1. Datos paleoclimáticos	3
1.1. Introducción	3
1.2. Registros paleoclimáticos	5
1.3. Eventos Dansgaard-Oerschger	11
2. Relación Sol-Tierra	14
2.1. El Sol	14
2.2. Causas externas del cambio climático	15
2.3. Indicadores históricos de la actividad solar	16
2.4. Isótopos Cosmogénicos	18
3. Introducción a Wavelets	23
3.1. Revisión de bases	23
3.2. Espacios Hilbert y bases ortonormales	24
3.3. Transformada de Fourier	26
3.3.1. La serie de Fourier en intervalos generales	26
3.3.2. La transformada de Fourier	27
3.3.3. Muestreo Shannon-Nyquist	27
3.3.4. Soporte compacto	28
3.4. Transformada de Fourier con ventanas	29
3.5. Wavelet	31
3.5.1. Transformada Wavelet Continua	31
3.5.2. Transformada Wavelet Discreta	36
3.5.3. Función de escalamiento	39
3.5.4. Wavelet Daubechies	47
4. Análisis de datos	50
4.1. Detección de eventos Dansgaard-Oerschger	50
5. Conclusiones	67
Bibliografía	69
Apéndice	71

Introducción

Definición del problema:

Durante la última glaciación (100 000 años antes de nuestra era) ocurrieron aumentos de temperaturas en intervalos de tiempo muy cortos, de tan sólo una decena de años, a éstos se denominaron eventos Dansgaard-Oerschger (eventos DO). Estos eventos han quedado registrados en los isótopos de oxígeno del hielo de Groenlandia y también en los sedimentos lacustres de carbonatos de algunos lagos centroeuropeos. Los incrementos de temperatura en los eventos Dansgaard-Oerschger eran de 5°C a 10°C [17, 18, 15].

Se considera que posiblemente estos incrementos son debidos:

- 1) al efecto invernadero provocado por los escapes de metano a la atmósfera provenientes del subsuelo submarino y costero.
- 2) otros estudios isotópicos muestran que, posiblemente, las subidas bruscas de la concentración de metano no proceden del subsuelo sino que son consecuencia del aumento de humedad y biomasa en los continentes, consecuencia a su vez del calentamiento
- 3) una última posibilidad se deba a la actividad solar.

En este trabajo de tesis se analizan las oscilaciones solares como posible factor modulador de las oscilaciones Dansgaard-Oerschger.

Los objetivos que se tienen al realizar el presente trabajo son:

- Encontrar las periodicidades de las oscilaciones Dansgaard-Oerschger por medio de la transformada de Wavelet.
- Encontrar las periodicidades solares de largo periodo por medio de los isótopos cosmogénicos.
- Estudiar la actividad solar como posible forzamiento externo de los eventos Dansgaard-Oerschger

Metodología:

Por lo que en este trabajo de tesis seguimos la siguiente metodología para su realización.

- Análisis espectral tiempo-frecuencia Wavelet de los indicadores indirectos de la actividad solar (isótopos cosmogénicos ^{14}C y Be^{10}).
- Análisis espectral tiempo-frecuencia Wavelet de los datos paleoclimáticos.

A través del tiempo se han realizado diferentes estudios para poder conocer las periodicidades de las oscilaciones Dansgaard-Oerschger, en estos trabajos se utiliza la transformada de Fourier, la cual no es adecuada para las funciones en el tiempo del tipo no estacionarias debido a que las funciones elementales, para la representación de éstas,



son funciones del tipo estacionarias. En el procesamiento de señales se tienen diversos fenómenos localizados en tiempo y frecuencia, y para representar tales fenómenos se requiere de patrones elementales capaces de localizar conjuntamente la información en ambos dominios. La transformada Wavelet se utiliza para analizar señales estacionarias y no estacionarias, por lo que consideramos que es la apropiada para este estudio.

No se tiene referencia de un estudio de las oscilaciones Dansgaard-Oeschger mediante la transformada Wavelet.

Resultados.

El resultado obtenido en este trabajo muestra que mediante el método utilizado para determinar los eventos Dansgaard-Oeschger, se tiene la existencia de 40 posibles eventos en el periodo que abarca únicamente la última era glacial (100 000 años antes de nuestra era), por otra parte se tiene que los análisis realizados en el isótopo $\delta^{18}\text{O}$ y los isótopos cosmogénicos ^{14}C y Be^{10} muestran un ciclo cercano a los 1500 años, fortaleciendo la teoría de que los eventos Dansgaard-Oeschger tienen una relación directa con la actividad solar.

El presente trabajo se divide en cinco partes.

- En el primer capítulo se introducen los diferentes tipos de datos paleoclimáticos, los cuales son utilizados en el estudio de los diversos eventos que ocurrieron a través del tiempo.
- En el segundo capítulo se describe la relación que existe entre la Tierra y el Sol, y también se explican algunos detalles de los isótopos cosmogénicos que se originan debido a la actividad solar.
- En el tercer capítulo se explica con detalle algunos fundamentos de la transformada Wavelet para funciones de una sola variable.
- En el cuarto capítulo se muestran los análisis y resultados de esta investigación.
- En el quinto capítulo se dan las conclusiones del trabajo y trabajo a futuro.
- Existe una parte de bibliografía y un apéndice



CAPÍTULO 1

Datos paleoclimáticos

1.1 Introducción

El clima es la descripción estadística en términos de valores medios y de la variabilidad de las cantidades de interés durante un periodo que puede abarcar lapsos de tiempo que van desde algunos meses hasta miles o millones de años [3]. Hoy en día se tiene un mayor interés público sobre el cambio en el clima y sus efectos en la Tierra.

Aproximadamente 100,000 años comenzó la última glaciación, la cual terminó alrededor de los 10,000 años antes de nuestra era, iniciando el actual período cálido del Tierra, conocido como “El Holoceno”, que significa “Nuestra Era”. A lo largo de la glaciación, el enfriamiento no se produjo de forma uniforme, sino que existieron eventos fríos abruptos, denominados estadiales, algunas veces al final de los estadiales se producían en el mar del Atlántico Norte (entre los 40°N y 55°N) grandes derrumbes de material rocoso transportados por glaciares, llamados eventos Heinrich (ver barras en la Fig.1) [15]. La influencia de los eventos Heinrich en el clima del hemisferio norte, se hacía sentir, porque al derretirse los glaciares de agua dulce disminuía la salinidad de las aguas superficiales del Atlántico Norte así mismo la densidad del agua debilitando el movimiento convectivo de hundimiento en los Mares Nórdicos.

El frío de los estadiales era interrumpido por períodos calidos, llamados eventos Dansgaard-Oeschger (numerados del 1 al 25 en la Fig.1), durante los cuales aumentaba la temperatura en tiempos muy cortos. Estos eventos han quedado registrados en los isótopos del oxígeno del hielo de Groelandia y en sedimentos lacustres de carbonatos de algunos lagos centroeuropeos [16]. El aumento de temperatura en los eventos Dansgaard-Oeschger era entre 5°C y 16°C [9]. La periodicidad que se ha encontrado en diversos estudios muestra que la frecuencia de estos eventos es de alrededor de los 1470 años [9, 14], pero no se tiene actualmente la certeza del origen de la periodicidad de estos eventos, algunas de las teorías que se han planteado, consideran que posiblemente esta periodicidad puede estar relacionada con la actividad solar [8].

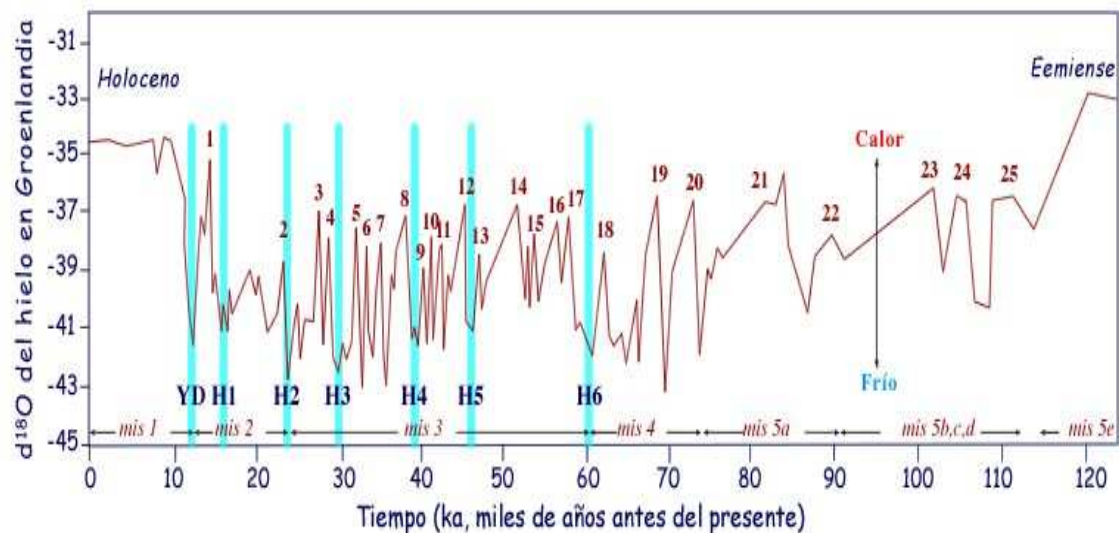


Fig.1
Oscilaciones Dansgaard-Oeschger

Las causas del cambio climático se deben a:

- procesos naturales (internos, externos)
- cambios resultantes de la actividad del ser humano o producidos por éste, de larga duración en la composición de la atmósfera o en el uso de la tierra.

Durante el último periodo glacial, la influencia antropogénica en el aumento de temperatura en los eventos Dansgaard-Oeschger por medio de gases de tipo invernadero es nula, por lo que el origen y las causas de la oscilación de 1470 años probablemente es debido a procesos naturales; en esta tesis se estudia la actividad solar como forzamiento externo de los eventos Dansgaard-Oeschger.

Entre las causas del cambio climático debido a los procesos naturales internos se encuentran:

- Erupciones volcánicas.

La actividad de los volcanes influye en el clima, a través de la proyección de grandes cantidades de materia particulada, estas emanaciones producen anomalías técnicas evaluadas en unas cuantas décimas de grado.

La mayoría de las erupciones inyectan partículas en la troposfera a altitudes entre los 5 y los 8 km, estas partículas rápidamente son eliminadas mediante la caída por gravedad o por lluvia, siendo el efecto climático resultante, mínimo. Las erupciones mas violentas lanzan las deyecciones volcánicas hacia la troposfera superior, o incluso, hacia la estratosfera inferior (15-25 km.), las erupciones de este tipo son mucho menos frecuentes, pero, probablemente, son las que tienen efectos climáticos más extensos.

Las partículas tienen un tiempo de permanencia largo en la estratosfera, de un año para los aerosoles que tienen un radio de 2-5 μm y de hasta 12 años para los aerosoles más pequeños, con un radio de 0.5-1.0 μm , los aerosoles no absorbentes incrementan el albedo (fracción de radiación solar reflejada por una superficie o un objeto, a menudo expresada como porcentaje) de la atmósfera y

reducen la cantidad de radiación solar que alcanza la superficie. Si el aerosol absorbe en la parte visible del espectro, la energía es transferida directamente a la atmósfera. Si el aerosol absorbe y emite en la zona infrarroja, aumenta el efecto invernadero [3].

- Ozono estratosférico y dióxido de carbono.

Se piensa que las emisiones de polución gaseosa alteran la capa de ozono de la estratosfera inferior, de estos gases los más importantes son los clorofluorocarbonatos, comúnmente denominados freones, que se utilizan como refrigerantes y propulsores en los sprays; no está claro de ningún modo si el resultado neto de la interacción entre ozono y los clorofluorocarbonos ocasiona un incremento o un descenso en el ozono estratosférico o si el cambio será significativo climáticamente.

Recientemente se ha demostrado que los clorofluorocarbonos que permanecen en la troposfera poseen características de absorción infrarroja lo cual significa que de forma creciente contribuirán al efecto invernadero a medida que vaya aumentando su concentración [3].

El efecto inmediato del incremento global del CO_2 atmosférico es el aumento de la temperatura de la superficie, debido al efecto invernadero. Aunque el CO_2 por sí mismo es un gas invernadero, la mayor parte del efecto invernadero inducido por el CO_2 es debido al incremento de las temperaturas que permiten una mayor concentración de vapor de agua atmosférico, el cual es un absorbente aun más eficiente del efecto invernadero. La magnitud del incremento de la temperatura dependerá de la naturaleza de la interacción entre todos los mecanismos de retroalimentación implicados.

- Cambios en la superficie.

La humanidad está provocando lo que puede considerarse como un cambio a escala regional, de las características de la tierra. La desertificación y la deforestación sobre el medio ambiente continúa [3].

1.2 Registros paleoclimáticos

La paleoclimatología es el estudio del clima antes del periodo de mediciones instrumentales, estos últimos solo abarcan una delgada fracción de la historia del clima de la Tierra y por lo tanto proveen una limitada información sobre la variación y la evolución del clima. Un rango mayor de la historia sobre la variabilidad climática puede ser obtenido mediante el estudio de los fenómenos naturales que son climático-dependientes y que incorporan en su estructura una medida de esta dependencia.

Algunos datos de indicadores indirectos paleoclimáticos son [3]:

- Los corales.

Los corales construyen sus duros esqueletos con carbonato de calcio, un mineral que extraen de las aguas del mar. El carbonato contiene isótopos del oxígeno, así

Capítulo 1. Datos Paleoclimáticos

como trazas de minerales, que pueden ser usados para determinar la temperatura del agua en que el coral creció. Estos registros de la temperatura pueden entonces ser usados para reconstruir el clima durante el período de tiempo en que el coral vivió.

- Polen fósil.

Todas las plantas que florecen producen granos de polen. Sus formas distintivas pueden ser usadas para identificar el tipo de planta del cual provinieron, como los granos de polen están bien preservados en las capas de sedimentos que se forman en el fondo de una laguna, lago u océano; un análisis de los granos de polen en cada capa nos dice que clase de plantas crecía en el tiempo en que el sedimento fue depositado, por lo tanto, se pueden hacer inferencias sobre el clima basándose en los tipos de plantas encontradas en cada capa.

- Anillos de los árboles.

Debido a que el crecimiento de los árboles se ve influenciado por condiciones climáticas, los patrones en los anchos de anillos de los árboles, densidad y composición isotópica reflejan las variaciones en el clima. En las regiones templadas donde existe una temporada de crecimiento distinguible, los árboles en general producen un anillo por año y de esta forma se registran las condiciones climáticas de cada año. Los árboles pueden crecer de cientos a miles de años y pueden contener registros anuales del clima durante siglos o milenios.

- Sedimentos lacustre y oceánicos

Cada año se acumulan billones de toneladas de sedimento en las cuencas de lagos y océanos, se perforan y extraen núcleos de sedimentos del suelo de las cuencas, los sedimentos lacustre y oceánicos incluyen fósiles y materias químicas que son usados para interpretar el clima pasado.

- Núcleos de hielo.

En lo alto de las montañas y en los glaciares, el hielo se ha ido acumulando por las nevadas durante muchos siglos. Se perfora el hielo para extraer núcleos de hielo, estos núcleos contienen polvo, burbujas de aire o isótopos de oxígeno que pueden ser usados para interpretar el clima pasado en esa área.

Todos estos fenómenos proveen un registro, conocido como registro indirecto (proxy) del clima y es el estudio de estos datos lo que fundamenta la paleoclimatología, dado que se construye un registro más detallado y fiable de fluctuaciones climáticas pasadas, la posibilidad de identificar las causas y mecanismos de la variación climática es incrementada, por lo tanto, los datos paleoclimáticos proveen la base para probar hipótesis acerca de las causas del cambio climático, sólo cuando las causas de las fluctuaciones climáticas del pasado sean entendidas, será posible anticipar totalmente las variaciones climáticas en el futuro [3].

Capítulo 1. Datos Paleoclimáticos

Muchos sistemas naturales son dependientes del clima donde la evidencia de tales sistemas en el pasado todavía existen y puede ser posible derivar información paleoclimática de ellos, tales registros indirectos del clima contienen una señal climática, sin embargo esa señal puede ser relativamente débil, embebido en una gran cantidad de “ruido”, que se origina de los efectos de otras influencias.

Para extraer la señal paleoclimática de los datos indirectos, el registro, primero debe ser calibrado, lo que involucra usar modernos registros climáticos y materiales indirectos para comprender como y para que extensión, son dependientes del clima, por lo que se debe tener cuidado de la posibilidad de que reconstrucciones paleoclimáticas erróneas, puedan resultar del uso de datos indirectos climáticos de condiciones pasadas que no tienen un análogo en el mundo actual.

La acumulación de pasadas nevadas en las capas de hielo polar y en láminas de hielo del mundo proveen un registro extraordinariamente valioso de condiciones paleoclimáticas y paleo-ambientales; tales condiciones son estudiadas mediante análisis físicos y químicos detallados del hielo y del “firn” (hielo que ha sobrevivido la estación de ablación de verano) en núcleos recuperados de elevaciones muy altas en la superficie del hielo.

En localizaciones conocidas como zonas de hielo seco, la nieve derretida y la sublimación son extremadamente bajas así que la acumulación de nieve ha sido continua incluso en algunas áreas por periodos de miles de años. Las nevadas proveen un registro único no sólo de cantidades de precipitación por sección, sino también de la temperatura del aire, composición atmosférica (incluyendo composición gaseosa y partículas solubles e insolubles), la ocurrencia de erupciones volcánicas explosivas y, más aún, variaciones pasadas de la actividad solar [3].

Hoy en día varias docenas de núcleos que abarcan más de 1000 años han sido recuperados de láminas de hielo, anaqueles de hielo y glaciares en ambos hemisferios. La información paleoclimática ha sido obtenida de los núcleos de hielo mediante cuatro aproximaciones principales, las cuales involucran el análisis de:

- Isótopos estables de agua y de O_2 atmosférico.
- Otros gases de las burbujas de aire en el hielo.
- Materia disuelta en el hielo y el “firn”.
- Características físicas del “firn” y del hielo.

El estudio de isótopos estables principalmente deuterio y ^{18}O es un enfoque mayor de la búsqueda paleoclimática; el agua es el componente más abundante sobre la Tierra, el principal componente en las formas de vida y tal vez el agente más importante en sequías, erosiones, y reciclaje geológico de materiales, así como desempeñar un papel en el balance de energía, en común con otros elementos que ocurren naturalmente, los constituyentes del agua, oxígeno e hidrógeno pueden existir en diferentes isótopos.

Los isótopos son resultado de variaciones en masas del átomo en cada elemento, cada núcleo atómico está hecho de protones y neutrones. El número de protones en el núcleo de un elemento (número atómico) es siempre el mismo, pero el número de neutrones puede variar, lo que resulta en diferentes isótopos del mismo elemento, por lo tanto, los

Capítulo 1. Datos Paleoclimáticos

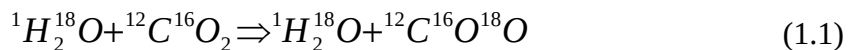
átomos de oxígeno (los cuales siempre tienen 8 protones) pueden llegar a tener 8, 9 o 10 neutrones, lo que origina tres isótopos con números de masas atómicas de 16, 17 y 18, ^{16}O , ^{17}O y ^{18}O , respectivamente.

En la naturaleza estos tres isótopos estables ocurren en porciones relativas de 99.76% ^{16}O , 0.04% ^{17}O , y 0.2% ^{18}O , respectivamente. El hidrógeno tiene dos isótopos estables, ^1H y ^2H (deuterio) con proporciones relativas de 99.84% y 0.016% respectivamente, consecuentemente, las moléculas de agua pueden existir como cualquiera de las nueve combinaciones isotópicas posibles con números de masas que oscilan desde los 18 ($^1\text{H}^{16}\text{O}$) hasta 22 ($^2\text{H}^{18}\text{O}$), de esta manera, como el agua con más de un isótopo “pesado” es muy raro, generalmente sólo cuatro de las posibles combinaciones son comunes, y de éstas dos son de mayor importancia en paleoclimatología $^1\text{H}^2\text{H}^{16}\text{O}$ (escrito como HDO y $^1\text{H}_2^{18}\text{O}$).

La base para interpretaciones paleoclimáticas de variaciones en el contenido de isótopos estables de moléculas de agua es que la presión de vapor de H_2^{16}O es más alta que la de HDO y H_2^{18}O (10% más alto que HDO y 1% más alto que H_2^{18}O).

La evaporación de un cuerpo de agua resulta en un vapor que es más pobre en deuterio y en ^{18}O que el agua inicial, contrariamente, el agua sobrante es enriquecida en deuterio y en ^{18}O . En equilibrio, por ejemplo, el vapor de agua atmosférico contiene 10‰ (partículas por millón) menos ^{18}O y 100‰ menos deuterio que el agua de océano promedio, cuando la condensación ocurre, la presión de vapor más baja de HDO y H_2^{18}O resulta en estos dos componentes que pasan de un estado de vapor a un estado líquido más fácilmente que el agua compuesta de isótopos más ligeros, por lo tanto, la condensación será enriquecida en los isótopos pesados, además la condensación del vapor continuará está eliminación de isótopos más pesados, dejando el vapor más y más vacío en HDO y H_2^{18}O . Como resultado, un enfriamiento continuo dará origen a condensaciones con concentraciones incrementalmente más bajas de HDO y H_2^{18}O que cuando el proceso de condensación comenzó; a un mayor descenso en la temperatura, más condensación ocurrirá y más baja será la concentración de isótopos pesados, en relación con la fuente de agua original. La concentración isotópica en la condensación puede entonces ser considerada como una función primaria de la temperatura en la cual la condensación ocurre.

En la mayoría de los estudios paleoclimáticos se utilizan isótopos estables, siendo el oxígeno el elemento de mayor interés. En el trabajo con isótopos de oxígeno, la muestra de agua es isotópicamente combinada con dióxido de carbono de composición conocida [3]:



Las porciones relativas de ^{16}O y ^{18}O en el dióxido de carbono de la muestra son entonces comparadas con la composición isotópica de agua estándar (“Standard Mean Ocean Water o SMOW” [3]) y los resultados son expresados como una desviación ($\delta^{18}\text{O}$) con respecto al estándar, por lo tanto

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{\left(^{18}\text{O}/^{16}\text{O}\right)_{\text{muestra}} - \left(^{18}\text{O}/^{16}\text{O}\right)_{\text{SMOW}}}{\left(^{18}\text{O}/^{16}\text{O}\right)_{\text{SMOW}}} \times 10^3 \text{‰} \quad (1.2)$$

La composición isotópica del agua en equilibrio con agua de vapor, no se puede considerar como un proceso que siempre este en esas condiciones, existen otros efectos que alteran el proceso, por lo tanto se tiene a consideración que el contenido de $\delta^{18}\text{O}$ en las precipitaciones depende de:

- el contenido de ^{18}O en el vapor de agua en el comienzo de la condensación,
- la cantidad de humedad en el aire comparado a su contenido de humedad inicial ,
- los grados a los cuales las gotas de agua sufren evaporación en ruta al suelo y si algo de este vapor reevaporado vuelve a entrar a la masa de aire de precipitación,
- la temperatura a la cual los procesos de evaporación y condensación toman lugar y
- la extensión a la cual las nubes llegan a estar supersaturadas, con respecto al hielo, en temperaturas muy bajas.

El mayor problema en el estudio de los núcleos de hielo es la determinación de la relación profundidad-edad. Existen diferentes aproximaciones que han sido usadas y se tiene claro que escalas de tiempo muy precisas pueden generalmente ser desarrolladas al menos entre los 10,000-12,000 años si la cantidad de acumulación es suficiente. Antes de este tiempo hay un incremento en la incertidumbre acerca de la edad del hielo, hay nuevos métodos que están mejorando constantemente las estimaciones, permitiendo comparaciones con otros registros indirectos para ser tratados con mayor confianza [3].

Ciertos componentes de los núcleos de hielo muestran variaciones temporales muy distintas, lo cual permite descubrir capas anuales, que pueden ser contadas para proveer una escala de tiempo muy precisa, tan atrás en el tiempo como estas capas puedan ser detectadas, donde existen incertidumbres en una cronología temporal, una comparación con otros parámetros permite realizar un chequeo-cruzado y, por lo tanto, reforzar la escala de tiempo producida.

La estratigrafía visual por ejemplo, permite identificar incrementos anuales en un núcleo de hielo, estos son examinados sobre una base de luz para identificar cambios en la estructura cristalina y determinar la presencia de capas de polvo, debido al gran enfriamiento que ocurre en los meses de invierno, se encuentran concentraciones de $\delta^{18}\text{O}$ mucho bajas en la nieve del invierno que en la de verano, esto resulta una señal temporal muy alta que puede ser usada como herramienta cronológica, las variaciones de acumulación que se producen son muy grandes (mayor de 25 cm. de agua equivalente por año). Al aumentar la profundidad de las láminas de hielo la amplitud de la señal temporal es reducida hasta que eventualmente es borrada.

Otro tipo de estudio detallado es el de las micropartículas en los núcleos de hielo, sin embargo una dificultad en el estudio de rastreo de elementos y de micropartículas es asegurar que el tamaño de la muestra es lo suficiente pequeña para detectar cambios intra-anuales; cerca de la superficie no hay gran problema, pero en los núcleos de hielo muy profundos una intensa presión lateral y vertical puede dar como resultado capas de polvo, que emergen junto con los núcleos las cuales no pueden ser detectadas [3]. Esto

puede llevar a una subestimación de la edad del hielo en la profundidad, si las variaciones de micropartículas observadas representan varios años más que variaciones temporales.

Las medidas de conductividad eléctrica (ECM) proveen un registro continuo de la acidez del hielo al registrar la habilidad del hielo para conducir una corriente eléctrica. Una corriente con una gran diferencia de potencial es pasada entre dos electrodos en contacto con la superficie del núcleo de hielo, si hay presencia de ácidos fuertes de erupciones volcánicas, el ECM es alto, las capas que contienen polvo alcalino continental o amoníaco tienen un bajo ECM.

Los cambios en la deposición de polvo CaCO_3 están asociados con grandes cambios en el ECM, lo que refleja cambios en la región y procesos de deposición o transporte. Los cambios pronunciados en el ECM caracterizan las transiciones de periodos fríos glaciales a estadales cálidos en los núcleos de hielo del GISP2 (Greenland Ice Sheet Project) [3].

Se sabe que el registro del isótopo del oxígeno GISP2, con su detalle de alta resolución, produce información crucial sobre el cambio del clima pasado. Las oscilaciones glaciales de $\delta^{18}\text{O}$ del núcleo de GISP2, con sus inicios muy rápidos, son la base de una oscilación prototipo de duración variable (con un valor de 3.9‰ del isótopo $\delta^{18}\text{O}$), en los estudios realizados se tiene que la marca intermedia de la transición frío-caliente se alcanza en 2 años y que la cima se alcanza en 50 años. El gradiente de tiempo- $\delta^{18}\text{O}$ del frente principal es cerca de 7.8‰ del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ por cada 100 años, después de alcanzar la cima, el $\delta^{18}\text{O}$ declina lentamente en un -0.14‰ por 100 años [6].

La duración de la declinación de $\delta^{18}\text{O}$ varía de un par de siglos para las oscilaciones rápidas hasta un valor cerca de 4000 años para las más lentas. El descenso subsecuente del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ durante la transición caliente-fría tiene un gradiente de tiempo- $\delta^{18}\text{O}$ de -3.2 ‰ por 100 años y dura cerca de 80 años [6]. Aunque la variable primaria de la base del hielo es profunda debajo de la superficie, la información de la edad es necesaria para las comparaciones con otros registros. La edad, en años calibrados antes de nuestra era, se basa en la escala de tiempo GISP-2 [3]. El error estimado en la escala de tiempo, es cerca del 1% para el último milenio y que aumenta cerca del 10% en una profundidad de 2500 m, y es más grande (el 20%) para el intervalo de 2500-2800 m. La información del tiempo debajo de la profundidad de 2800 m es menos precisa, el comportamiento de los datos del $\delta^{18}\text{O}$ del pozo GISP2 se muestran en la fig. 2.

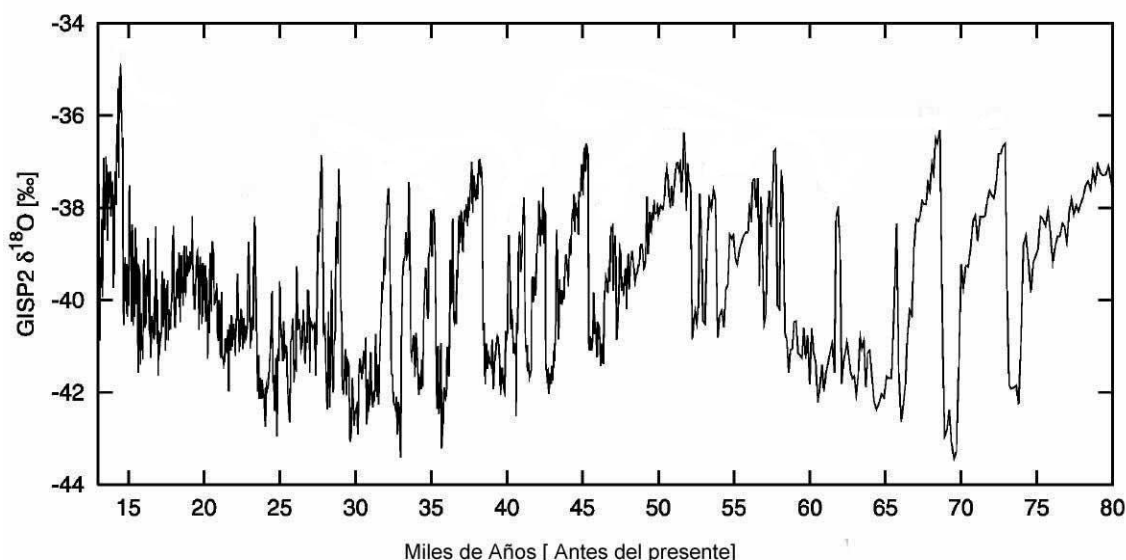


Figura 2
Variaciones del isótopo $\delta^{18}\text{O}$

La reconstrucción de la temperatura a partir del $\delta^{18}\text{O}$ en los núcleos del hielo es difícil, al parecer las temperaturas glaciales (t), derivadas de las temperaturas de la perforación, están sobre 20°C debajo de los valores actuales, estas temperaturas representan una gran extensión de las temperaturas radiativas de la noche polar, mientras que los cocientes del isótopo del oxígeno son más indicativos de la temperatura e historia del vapor de agua sobre la capa de inversión durante los períodos “cálidos” [6].

1.3 Eventos Dansgaard-Oerschger

Una de las contribuciones más recientes para la comprensión del paleoclima durante el último glacial se ha dado en el estudio de la variabilidad climática en un rango de escala milenial. En los núcleos de hielo del centro de Groenlandia, se tienen registrados cambios acerca del clima de la Tierra sin precedentes, al analizar los registros en escalas de tiempo de subdécadas a escalas milenarias.

Mediante una comparación de conductividad eléctrica y las series del isótopo de oxígeno $\delta^{18}\text{O}$ tanto el núcleo del proyecto GISP2 (*Greenland Ice Sheet Project 2*) como en su parte paralelo denominada GRIP (*Greenlad Ice Core Project*), ambos en el hemisferio norte, muestran que al menos un 90% de estos núcleos tienen un registro muy similar.

La relación entre los núcleos de hielo del GRIP y del GISP2 (que se encuentran separados por 30 km.) sobre el registro del periodo de los últimos 100 000 años provee un gran soporte para el origen de los eventos climáticos, incluso en los rasgos menores de estos archivos y esto implica que investigaciones de signos ambientales sutiles pueden seguirse rigurosamente. Estos registros representan las grandes variaciones climáticas (reorganizaciones masivas del sistema océano-atmósfera) que ocurrieron

durante décadas o menos y en donde las temperaturas del hielo en Groenlandia central pudieron haber sido ligeramente más de 20°C más frío que hoy.

Los datos del isótopo de oxígeno ($\delta^{18}\text{O}$) de los núcleos de hielo de Groenlandia revelan que grandes y rápidas fluctuaciones dominaron el clima en Groenlandia entre aproximadamente 11 y 74 mil años antes de nuestra era [17]. Los datos de isótopos del nitrógeno y argón de los núcleos de hielo del Greenland Ice Sheet Project 2 (GISP2) indican que transiciones entre estadiales fríos e interestadiales cálidos, los cuales son llamados eventos Dansgaard-Oeschger. El inicio de los sucesivos eventos denominados Dansgaard-Oeschger, cuyo espaciamiento parece ser de alrededor de 1470 años o múltiplos de este valor, se tiene desviaciones pequeñas de este ciclo (100-200 años). Un forzamiento externo solar u orbital fue sugerido para activar estos eventos, sin embargo hasta el momento no se ha encontrado en la actividad solar u orbital una frecuencia de 1470-años. Los análisis espectrales manejados sobre datos indirectos de nucleídeos cosmogénicos, los cuales son utilizados para analizar la variabilidad solar, indican la posible existencia de ciclos solares de escala centenaria prolongados y estables.

Al realizarse simulaciones sobre un modelo acoplado del sistema climático (*CLIMBER-2*) [8] se mostró que cuando era forzado por variaciones estocásticas y/o periódicas en el flujo del agua dulce en el Atlántico del Norte, eventos bruscos glaciales cálidos son activados y que reproducen muchas características que en los observados en los eventos Dansgaard-Oeschger, en simulaciones posteriores se demostró que el modelo acoplado océano-atmósfera del clima puede reproducir los eventos Dansgaard-Oeschger con un robusto espaciamiento de 1470 años. La frecuencia de 1470 años sólo es encontrada en la respuesta del modelo y no en el forzamiento [8].

Hay tres rasgos clave de las oscilaciones de Dansgaard-Oeschger:

Primeramente, hay transiciones climáticas abruptas y grandes en las oscilaciones, durante un ciclo de las oscilaciones, hay un calentamiento súbito durante varias décadas o menos, una fase de enfriamiento gradual, seguida de fase de enfriamiento rápido, y finalmente una fase de calentamiento gradual que lleva al próximo calentamiento súbito, se observaron cambios de 9 a 16 °C encima de Groenlandia durante un ciclo.

Segundo, las oscilaciones milenarias son cuasi-periódicas, con un período, que pareciera ser modulado por la naturaleza del clima del fondo glacial, los largos interestadiales (estados calurosos) ocurrieron durante la última fase 5 del isótopo de oxígeno (ver mis 5 en fig. 2b) y a principios de la fase 3 (ver mis 3 en fig. 2b) cuando el fondo los climas glaciales eran relativamente calurosos, mientras estadiales largos (estados fríos) y los cortos interestadiales ocurrieron durante las fases 4 y 2 (ver mis 4 y mis 2 en fig. 2b), cuando el fondo de los climas glaciales eran relativamente fríos.

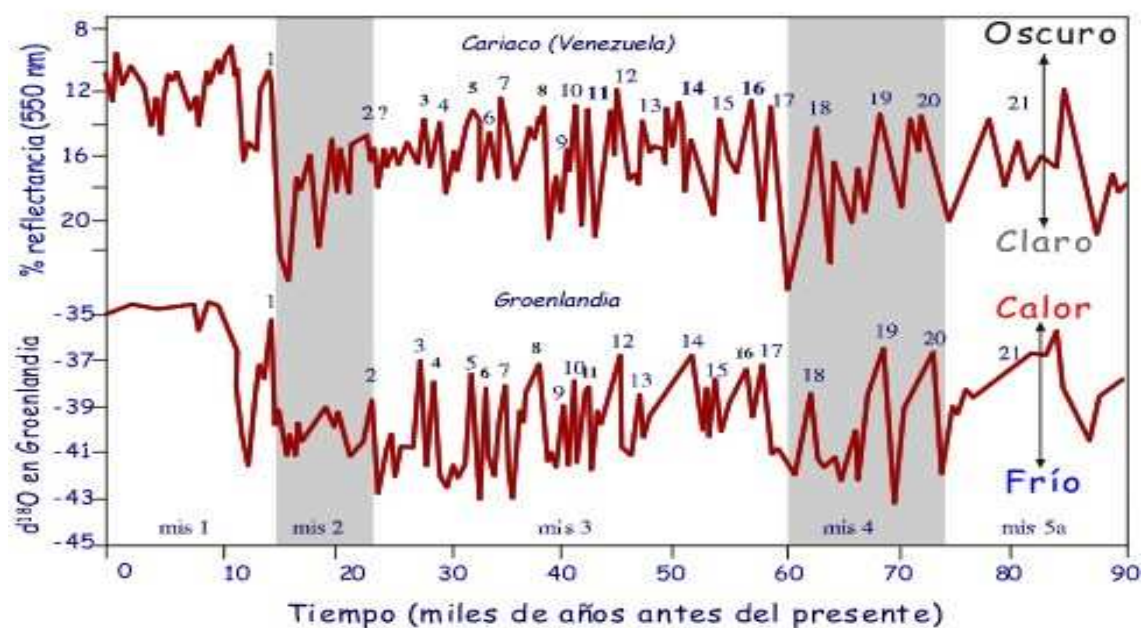


Figura 2b.

Inestabilidad climática durante la Última Glaciación. Arriba, interestadales señalados con números en la cuenca tropical de Cariaco (Venezuela). Abajo, interestadales en el sondeo del hielo GISP II de Groenlandia, según los isótopos del oxígeno. Se señalan también los estadios isotópicos marinos (mis).

Los períodos de Dansgaard-Oeschger eran relativamente largos cuando el clima del fondo se encontraba ya sea caluroso o frío y cuando el estado del fondo climático estaba en una fase intermedia, los períodos eran relativamente cortos.

En tercer lugar, el extenso registro del sedimento del Norte del Océano Atlántico revela que las oscilaciones milenarias fueron suprimidas significativamente cuando el clima del fondo era muy cálida (el interglacial y la fase temprana de un glacial) o muy frío (cresta o máximo glacial).

La significancia de estos eventos cálidos es corroborada por variaciones climáticas similares en una escala global, los cuales pueden estar correlacionados a los eventos Dansgaard-Oeschger. El tiempo de ocurrencia entre los eventos cálidos Dansgaard, como está documentado en la serie de tiempo del ($\delta^{18}\text{O}$) en el GISP2, varió considerablemente, perdurando desde 1 hasta 12 miles de años durante los 90 mil años pasados. La variabilidad del “paso” fue reducido grandemente entre los 25 y 60 mil años antes del presente, cuando el espaciamiento entre los eventos cálidos fue de aproximadamente de 1-5 mil años, en el intervalo de 12-50 mil años antes del presente, el espectro de potencia de la serie de tiempo de ($\delta^{18}\text{O}$) revela un pico estadísticamente significativo en una periodicidad de 1470 años, el cual se piensa que refleja el “paso” de los eventos Dansgaard-Oeschger.

Algunos eventos Dansgaard-Oeschger abarcan dos o tres medios ciclos del “paso” de 1470 años, por lo cual el tiempo entre eventos cálidos subsecuentes puede diferir del “paso”, en contraste Wunsch [17] argumentó la forma del pico espectral de 1470 años encontrada en los núcleos de hielo documentados es causado por una varianza de solapamiento espectral de los ciclos “anuales” para frecuencias en la banda milenial. Además, dado que los eventos prominentes Dansgaard-Oeschger no desaparecen después de sustraer una componente de señal de 1500 de la serie de tiempo, Wunsch [17] refutó la idea de un “paso” regular de estos eventos.



CAPÍTULO 2

Relación Sol -Tierra

2.1 El Sol

El Sol es una esfera de gas caliente, que tiene una estructura diferenciada en capas concéntricas de diferentes propiedades. La superficie más visible del Sol es la fotosfera, cuyo nombre quiere decir “esfera de luz”, y es una capa muy delgada de aproximadamente 300 km de espesor que representa el 0.05% del radio del Sol [23], se encuentra por debajo de dos capas de brillo tenue, las cuales se pueden observar cuando la luz brillante de la fotosfera es cubierta por el disco de la Luna durante un eclipse total de Sol. La primera de ellas es una capa de luz rojiza llamada cromosfera, de aproximadamente 8000 km de espesor, por encima de ella se encuentra la corona, de luz tenue aperlada que se extiende hasta más allá de la Tierra.

El Sol no tiene una “superficie” definida, ya que su densidad disminuye continuamente desde su centro hacia afuera a través de todo el sistema planetario y se mezcla, más allá de él, con el material interestelar. Lo que se denomina “el radio del Sol”, es la distancia del centro al borde superior de la fotosfera; sin embargo, el Sol se extiende en realidad por muchísimos millones de kilómetros [22].

En el núcleo del Sol, la energía liberada en las reacciones nucleares es en forma de rayos X de alta energía, debido a la interacción de la radiación con la materia, aquella va perdiendo energía mientras se abre paso hacia el exterior y va interaccionando con los componentes del medio.

El transporte de energía hacia el exterior se lleva a cabo mediante dos tipos de procesos: a) por transferencia de radiación, es decir, al absorberse, dispersarse y reemitirse la misma en la parte interior solar (de ahí el nombre de zona radiativa); b) por convección en la parte externa, por debajo de la superficie del Sol, donde la convección es más efectiva que la transferencia radiativa. La energía es llevada hacia arriba por el gas caliente ascendente. La energía se difunde a medida que el gas ascendente se expande y entonces el gas se enfría y desciende. A esta capa del Sol se le conoce como zona convectiva y se extiende desde unos 8 décimos del radio solar hasta la superficie, debido a la rotación del Sol, en el gas ionizado o plasma, tanto del núcleo como de la zona convectiva, se generan corrientes eléctricas, éstas a su vez, dan lugar a un campo magnético general de forma bipolar, éste, en la superficie del Sol, alrededor de las regiones polares, tiene una intensidad de alrededor de 2 gauss (alrededor de seis veces más intenso que el de la Tierra en el ecuador, es decir 0.3 gauss).

En la zona convectiva, donde los movimientos del material son complicados por el movimiento vertical, las líneas de campo magnético se tuercen y enredan, esto da lugar a burbujas en las que el campo magnético es más intenso, estos campos intensos inhiben el movimiento del material en el interior de la burbuja provocando dentro de ella una disminución en la presión del gas, como consecuencia, las burbujas suben a la superficie y penetran en la atmósfera del Sol [22, 23].



2.2 Causas externas del cambio climático

La teoría astronómica de las variaciones climáticas, denominada teoría de Milankovitch, es un intento por relacionar las variaciones climáticas con los parámetros cambiantes de la órbita de la tierra alrededor del sol [24]. Las formas mediante las cuales la configuración de la órbita puede afectar a la radiación recibida y de este modo afecta también, posiblemente, al clima son (véase figura 3):

- Cambios en la excentricidad.

La órbita de la tierra se vuelve más circular y luego más elíptica de un modo pseudocíclico completando el período en 110 000 años aproximadamente.

- Cambios en la oblicuidad.

La oblicuidad, inclinación del eje de la tierra, es el ángulo entre dicho eje y el plano de la eclíptica (el plano donde están situados los cuerpos del sistema solar). Esta inclinación varía de 22° a 24.5° , con un período de 40000 años aproximadamente. El valor actual es de 23.5° . Las variaciones estacionales dependen de la oblicuidad: si la oblicuidad es grande, también lo será el contraste estacional, sin embargo, la radiación total recibida no se altera aunque una variación estacional más grande en el flujo recibido se acompaña de un menor gradiente meridional en la radiación anual.

- Precesión orbital.

La órbita de la tierra es una elipse alrededor del sol, que está situado en uno de los focos, debido a la interacción gravitacional con los otros planetas, principalmente Júpiter, el perihelio (el punto de la órbita de la tierra más próximo al sol) se mueve en el espacio de tal forma que la elipse también va dando vueltas en el espacio, esta precesión provoca un cambio progresivo en el tiempo de los equinoccios. Este cambio, al igual que el de la oblicuidad, éste no altera la radiación total recibida, pero afecta su distribución temporal y espacial.

- También se han propuesto como causas de las fluctuaciones climáticas las colisiones de cometas con la tierra y los impactos de grandes meteoritos.

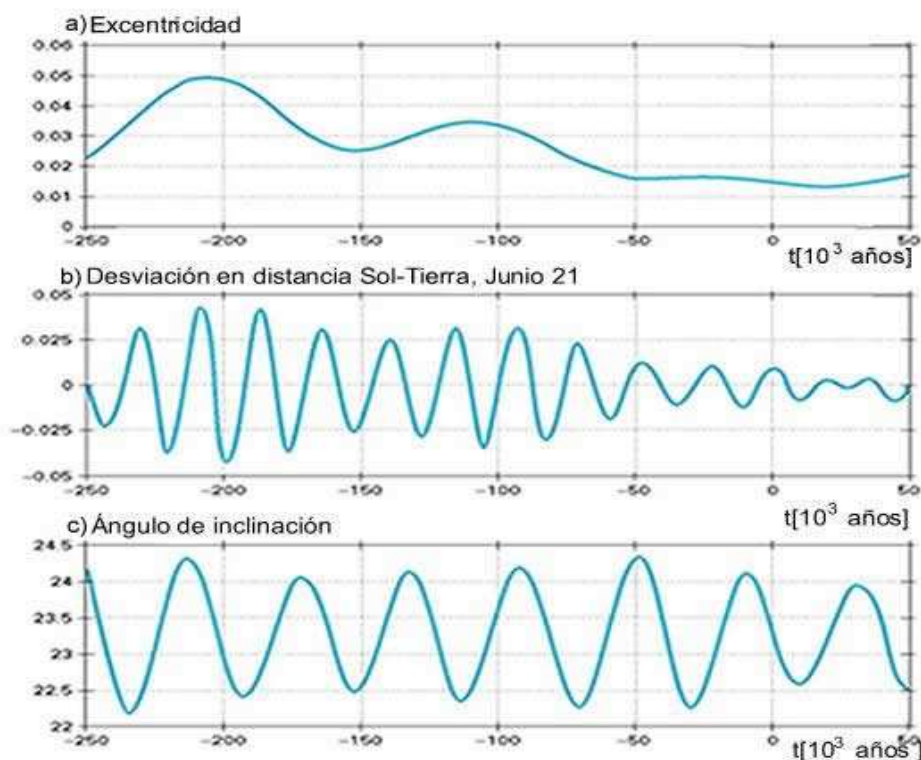


Figura 3

Variaciones a largo plazo de los tres parámetros orbitales de Milankovitch:
a) excentricidad, b) desviación en distancia Sol-Tierra, Junio 21 y c) ángulo de inclinación

2.3 Indicadores históricos de la actividad solar

Los registros escritos que nos indican la variabilidad del Sol, son principalmente de tres tipos:

- La descripción de la forma de la corona solar durante los eclipses totales de Sol.

La última y más extensa capa del Sol, es la corona. La luz de la corona cerca del Sol es apenas tan intensa como la de la Luna llena por lo que sólo es posible observarla sobre el limbo durante un eclipse total. La forma de la corona varía con la actividad del Sol. Cuando el Sol está más activo la corona presenta una serie de rayos y se observa muy brillante. En el mínimo de actividad se observa que la corona es opaca y sin mucha estructura. Las observaciones sistemáticas de la corona durante los eclipses totales de Sol se han llevado a cabo desde 1706.

- Las observaciones de las manchas solares.

La manifestación más evidente que se tiene de la actividad del Sol son sus manchas, que se pueden observar a simple vista, son la fuente más antigua de los registros directos de la historia de la actividad solar.

En el mundo occidental, los griegos dan noticias de ellas desde el año 28 antes de nuestra era Galileo, en 1610, al construir un telescopio y

enfocarlo al Sol las redescubrió. Las observaciones que hizo provocaron que el estudio de las manchas en los países europeos cobrara auge, sin embargo su comportamiento cíclico no fue notado hasta el año 1843. El que realizó tal descubrimiento fue el boticario alemán, Heinrich Schwabe, quien se basó en el estudio de 17 años de sus observaciones, poco después de este descubrimiento, los astrónomos se dedicaron investigar si éste era un ciclo real, mediante una serie de observaciones diarias del número de manchas desde varios lugares de la Tierra.

Rudolf Wolf del observatorio suizo de Zurich se dedicó a observar si el ciclo se presentó en el pasado, después de recopilar cuidadosamente los datos existentes entre 1610 y 1843, concluyó que el ciclo de aproximadamente once años estaba presente al menos desde 1700, además de este ciclo de once años existen otros de período más largo (figura 4).

Entre 1887 y 1890 los astrónomos Gustav Spörer de Alemania y Walter Maunder de Inglaterra se dieron cuenta de que casi no se informó sobre la presencia de manchas entre 1645 y 1715, a esta aparente ausencia de manchas se le ha denominado mínimo de Maunder, otro mínimo de 1795 a 1825, es el llamado mínimo de Dalton.

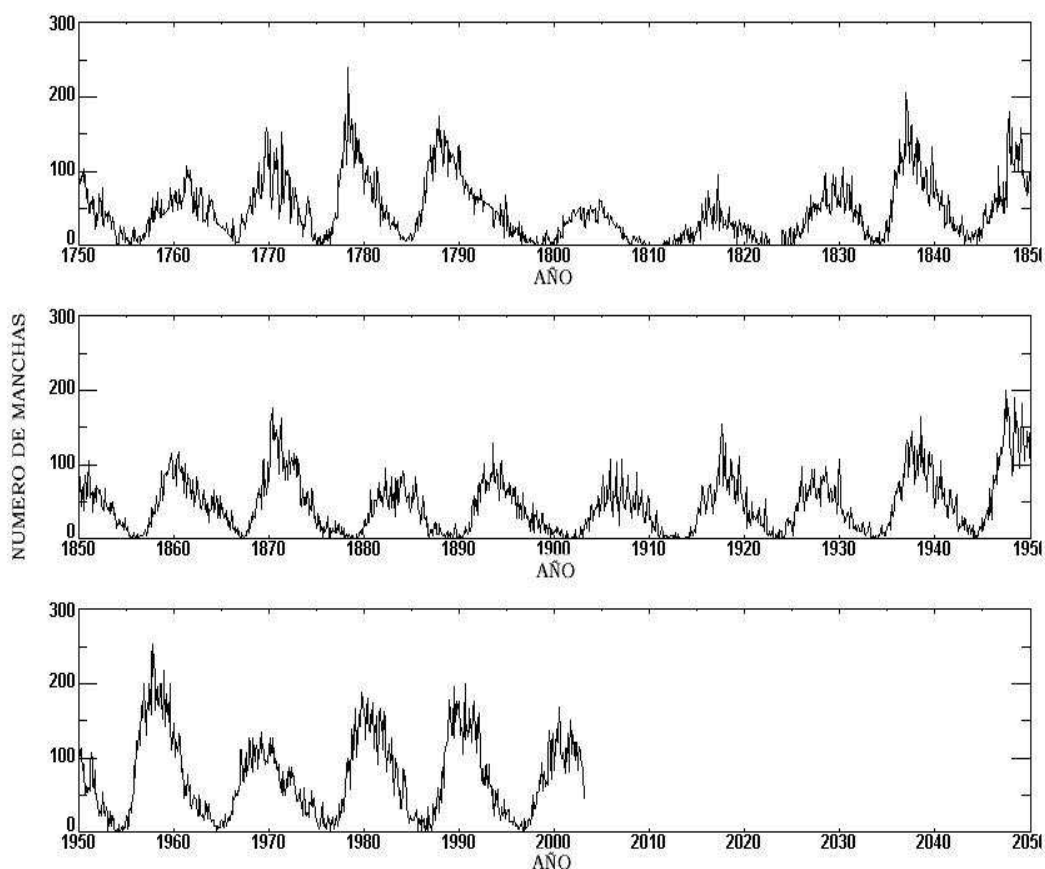


Figura 4

Promedios anuales del número de manchas solares desde el año 1750 hasta nuestra era

- Las auroras.

Los electrones generados en ráfagas y las EMC, así como el viento solar, ingresan en la alta atmósfera a través de las líneas de campo abiertas en las altas latitudes magnetosféricas, provenientes tanto de la cola magnetosférica como de los conos polares. La descarga eléctrica interacciona con los átomos atmosféricos produciendo ionización y excitación. Los fenómenos de desexcitación y recombinación de estos átomos producen luz de colores, el verde y rojo son los más intensos, que da lugar a las auroras, principalmente en un disco oval comprendido entre los 60° a 70° de latitud en ambos hemisferios. Estos colores se deben a la emisión del oxígeno a longitudes de onda de 5577 y 6300nm., respectivamente, y se forma a alturas mayores a los 100m sobre la superficie, por lo tanto, las auroras nos proporcionan información sobre la heliosfera [24].

Otra forma de investigar la actividad pasada del Sol, es mediante unas rocas de lodo rojo y arena muy fina, conocidas con el nombre de formaciones de Elatina, las cuales están constituidas por capas cuyo grosor nos puede indicar variaciones en los valores promedio anuales de la temperatura. La información que nos proporciona comprende 680 millones de años.

La época en que estas rocas se formaron en la Tierra, era una etapa fría, a tal grado que en las regiones ecuatoriales, el suelo estaba cubierto de hielo durante todo el año. El volumen de las aguas provenientes de los icebergs variaba según la temperatura, y esto hizo que el grosor de los estratos lodosos depositados variara, fue así como se constituyó la formación de Elatina. Al terminar esta era glacial la temperatura ascendió, y el hielo derretido formó mares que cubrieron estas formaciones de Elatina, debido a movimientos subsecuentes de tierra y a la erosión se volvieron a exponer los depósitos de Elatina, lo cual ha permitido su estudio.

En 1982 en el sur de Australia se extrajo del subsuelo un cilindro de 10m de largo, se compararon los resultados de la distribución de las capas de Elatina con los del registro de manchas solares, se encontró que ambos registros presentan períodos de alrededor de 10 y 100 años. Adicionalmente, el registro de Elatina presenta una periodicidad de 22 años, que es la misma que la del llamado ciclo magnético del Sol. Estas similitudes con los ciclos de variación de la actividad solar nos indican que posiblemente existe una conexión directa entre la variabilidad climática y la actividad del Sol.

2.4 Isótopos Cosmogénicos

El carbono tiene tres isótopos; los cuales siempre tienen seis protones, pero pueden tener seis, siete u ocho neutrones, donde resultan el ^{12}C , ^{13}C y ^{14}C . De estos tres isótopos, los más estables son el ^{12}C y el ^{13}C , y el más abundante es el isótopo ^{12}C . Los átomos inestables tienden a un deterioro por la pérdida espontánea de partículas nucleares ya sean α o β y por lo tanto se pueden convertir en un nuevo elemento, además, la variación del deterioro es invariante, de tal forma que una cantidad dada del isótopo radiactivo se deteriorará a su producto en un conocido intervalo de tiempo, lo cual es la base de los métodos de registro radioisotópicos. La cantidad de tiempo que le



Capítulo 2. Relación Sol – Tierra

toma a un material radioactivo para deteriorarse a la mitad de su cantidad original se denomina vida media, que en el caso del isótopo ^{14}C es de 5730 ± 30 años.

El radiocarbono $^{14}_6\text{C}$ es producido en la parte alta de la atmósfera mediante el bombardeo de átomos de nitrógeno atmosférico:



Los neutrones son producidos por la radiación cósmica que entra en la parte alta de la atmósfera. Aunque los rayos cósmicos son influenciados por el campo magnético de la Tierra y tienden a estar más concentrados cerca de los polos geomagnéticos, la rápida difusión de los átomos de ^{14}C en la parte baja de la atmósfera borra cualquier influencia de esta variación geográfica en la producción. Los átomos de ^{14}C son rápidamente oxidados a $^{14}\text{CO}_2$, el cual se esparce hacia abajo y se mezcla con el resto del dióxido de carbono atmosférico y entrando en todas las vías de la biosfera. La cantidad de ^{14}C que es producido en la parte superior de la atmósfera es igual a la cantidad de deterioro de éste en la reserva global de carbón, dicho deterioro se da por la descarga de una partícula β :



Las variaciones en los isótopos cosmogénicos ^{14}C y ^{10}Be son mundialmente usados como indicadores que nos permiten reconstruir las variaciones solares en el pasado.

La producción del ^{10}Be ocurre principalmente en la parte más baja de la estratosfera y en la parte superior de la troposfera, en latitudes altas, como resultado de las reacciones nucleares inducidas por los rayos cósmicos. La deposición del ^{10}Be en la superficie de la Tierra se da a través de la precipitación.

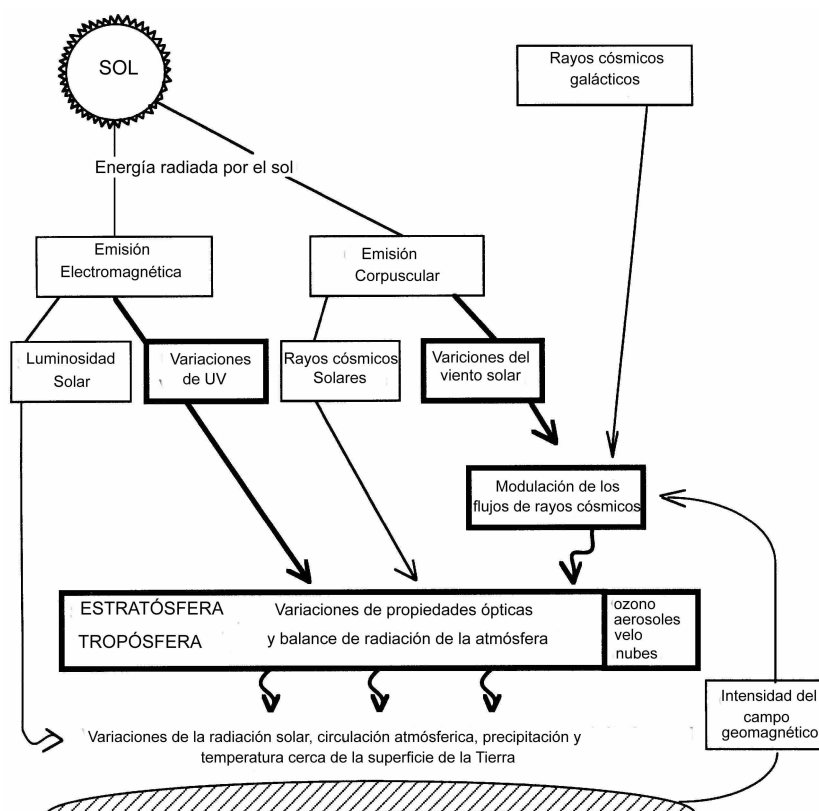


Figura 5

Esquema que muestra los factores solares y cósmicos relevantes para el clima de la Tierra

Ya que ambos isótopos son producidos en la atmósfera superior, bajo la influencia de los rayos cósmicos, tanto de origen solar como galáctico, la producción de estos isótopos cosmogénicos está sujeta a cambios debido a las fluctuaciones de los rayos cósmicos que chocan con la Tierra. Estas fluctuaciones son causadas principalmente por los cambios en el viento solar, el cual es un gas de baja densidad, ionizado, expulsado del Sol, influenciando fuertemente la fuerza del campo magnético alrededor de la Tierra.

Cuando la actividad solar es alta, el campo magnético extendido se desliza a través del espacio interplanetario, por lo tanto es más efectiva la protección de la Tierra contra los rayos cósmicos y así se reduce la producción del ^{14}C . La baja actividad solar permite que mas rayos cósmicos entren a la atmósfera de la Tierra, lo que produce más ^{14}C . Así el registro del ^{14}C es un indicador indirecto apropiado para la salida radiante solar.

Los cambios climáticos pueden causar cambios en el ciclo global del carbono. En los océanos profundos grandes cantidades de carbón “viejo” están almacenados con menos ^{14}C que en la atmósfera, por lo tanto un decremento en esta concentración de ^{14}C puede ser explicado ya sea por una baja producción, o por un incremento de la corriente ascendente del agua del océano profundo, que lanza grandes cantidades de carbón “viejo” con una baja concentración de ^{14}C en la atmósfera [2].

Al comparar los registros del ^{14}C y del ^{10}Be se concluyó que durante el último milenio las variaciones en estos isótopos podrían estar bien explicados mediante la modulación solar, lo cual implica que al menos durante el último milenio, las variaciones en el ^{10}Be son indicativos para los cambios en la actividad solar y están relacionados a la intensidad de los rayos cósmicos.

Capítulo 2. Relación Sol – Tierra

Otra característica importante relacionada con estos registros, son las fluctuaciones que se observan en estos registros y que muestran un paralelismo con los registros del $\delta^{18}\text{O}$, en el mismo núcleo de hielo.

Se han presentado registros detallados de ^{10}Be en el proyecto GISP2, en donde durante fases relativamente cálidas se registran valores bajos de ^{10}Be y durante las fases frías se muestra una serie de picos.

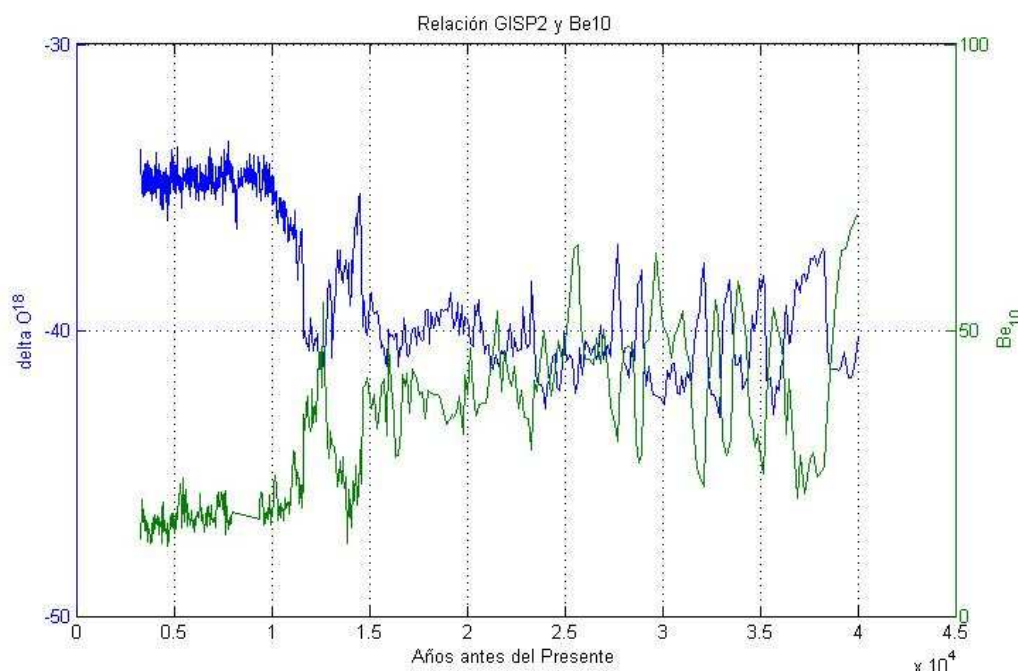


Figura 6
Variaciones del ^{10}Be y del isótopo $\delta^{18}\text{O}$.

La coincidencia que frecuentemente se tiene del cambio climático con respecto a los períodos de decrecimiento de la actividad solar, parece ser que están bien documentados en los isótopos de ^{14}C y del ^{10}Be . Ejemplos de estas coincidencias son el Mínimo de Maunder, evento solar que coincide con una de las etapas más frías de la Pequeña Era de Hielo y el cual está caracterizado por un mínimo de manchas solares registradas por los observadores de la época. Otro ejemplo es el que se observa durante el período alrededor del año 850 antes de nuestra era., debido al análisis realizado en los depósitos de la turba del Noroeste de Europa, en los cuales se encontraron evidencias de una fase de enfriamiento simultáneamente con una subida aguda y considerable del nivel atmosférico de ^{14}C . Se observa también en los núcleos de hielo un incremento en el ^{10}Be alrededor de este período.

Los mecanismos propuestos en relación al forzamiento de los rayos cósmicos y de la actividad solar son dos. El primero de ellos involucra las variaciones en la radiación UV que acompaña los cambios en la actividad solar y que pueden estar relacionados a los cambios significantes en la circulación atmosférica y el clima a través de la producción estratosférica de ozono.

El segundo mecanismo propone que las variaciones en el flujo de rayos cósmicos, en relación con los cambios de viento solar, es causa del cambio climático a través de la amplificación de las variaciones de la radiación solar. La principal idea consiste en que

Capítulo 2. Relación Sol – Tierra

una variación en el flujo de rayos cósmicos puede cambiar los parámetros ópticos y el balance de radiación de la atmósfera (figura 5). Ya que los rayos cósmicos solares y galácticos penetran en la estratosfera y troposfera y causan reacciones químico-físicas. Estos flujos son modulados por la actividad solar, durante el ciclo solar de 11 años el cambio del flujo de rayos cósmicos galácticos podría ser alrededor del 10% sobre la superficie de la Tierra y cerca del 50% en la estratosfera. Cambios más grandes en la intensidad de rayos cósmicos podrían esperarse durante ciclos seculares de la actividad solar, como el mínimo de Maunder.

Existen datos de experimentos recientes que soportan este mecanismo propuesto, estos datos demostraron el cambio de la densidad de la capa de ozono, el desarrollo de nebulosidad, la formación de una capa de aerosol en la estratosfera y un velo atmosférico durante períodos de flujo de rayos cósmicos incrementados en la estratosfera.



CAPÍTULO 3

Introducción a Wavelets

La Transformada wavelet, así como sus extensiones y desarrollos conexos, proporcionan poderosas herramientas analíticas para resolver muy diversos problemas, tanto en el campo de las ciencias aplicadas como en la matemática pura y aplicada.

Esta teoría nace del enlace de la respuesta empírica a un problema específico de la ingeniería, más precisamente al procesamiento de señales, en base a ideas preexistentes en el contexto de la matemática pura, ejemplos de ello son la Transformada de Fourier con ventanas o Transformada de Gabor, los filtros-espejo en cuadratura, los algoritmos piramidales de Burt y Adelson, entre otros.

3.1 Bases de espacios Vectoriales

Dado un espacio vectorial V sobre un campo K , una base para V es un subconjunto linealmente independiente $B \subset V$ tal que cada vector $\bar{v} \in V$ puede ser expresado como una suma finita de vectores, la cual es diferente de cero

$$\bar{v} = \sum_{b \in B} \bar{v}_b ; \quad \bar{v}_b \in K, \text{ tal que } \bar{v}_b \neq 0 \quad (3.1)$$

Cada espacio vectorial tiene una base, la cual se puede denominar como una base algebraica. Elegir una base B para un espacio vectorial V de dimensión n y ordenándola tal que $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n\}$ sea la base, es equivalente a elegir un isomorfismo lineal:

$$K^n \rightarrow B \quad (3.2)$$

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \text{ se obtiene mediante } \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \bar{b}_j \quad (3.3)$$

Un espacio vectorial podrá tener bases diferentes (a menos que este sea $\{0\}$), permitiendo elegir una base, que se adapte al problema que se presente. Dado un espacio vectorial, V , de dimensión finita sobre un campo K con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $V \times V \rightarrow K$ tendrá una base ortonormal $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ satisfaciendo $\langle \bar{e}_j, \bar{e}_k \rangle = 0$ para $j \neq k$ y $\langle \bar{e}_j, \bar{e}_k \rangle = 1$ para toda j tal que $j \geq 1$ y $k \leq n$ donde $j = k$.

Entonces cada vector puede ser expresado en términos de la base de la forma siguiente

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^n \langle \bar{v}, \bar{e}_j \rangle \bar{e}_j \quad (v \in V) \quad (3.4)$$

Un espacio Banach consiste de un espacio vectorial X sobre un campo K con una norma $\|\cdot\|_X$ tal que X es completo en esa norma, es decir, cada secuencia Cauchy en X converge a un límite en X . La convergencia en X es tomada con respecto a la métrica (o distancia)

asociada con la norma $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_X$. Con una norma se puede contemplar combinaciones lineales, cuando se definen sumas infinitas vía límites, como en:

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \quad (3.5)$$

Definición. Una base Schauder para un espacio Banach X es una secuencia $(\bar{e}_n)_{n=1}^{\infty}$ de vectores en X tal que cada $\bar{x} \in X$ puede ser expresado únicamente como una combinación lineal infinita

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n \bar{e}_n; \quad \text{con } \bar{x}_n \in K, \forall n \quad (3.6)$$

Los espacios de secuencias ℓ^p y c_0 , donde ℓ^p ($1 \leq p \leq \infty, p \in \mathbb{N}$) es el espacio de todas las secuencias $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ ($\alpha_j \in K \forall j$) tal que

$$\left\| (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p \right)^{1/p} < \infty \quad (3.7)$$

Y c_0 consiste de todas las secuencias $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = 0$ con la norma suprema

$$\left\| (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p = \sup_{1 \leq j \leq \infty} |\alpha_j| \quad (3.8)$$

tienen como bases la ‘base estándar’ $(\bar{e}_n)_{n=1}^{\infty}$ donde

$$\bar{e}_n = (\delta_{nj})_{n=1}^{\infty}; \quad \delta_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq j \\ 1 & \text{si } n = j \end{cases} \quad \forall n \quad (3.9)$$

Los espacios de funciones $L^p[0,1]$ y $L^p(\mathbb{R}^n)$ están definidos igualmente que ℓ^p excepto que estos son funciones f medibles en el dominio el cual tiene $|f|^p$ integrable con respecto a la medida Lebesgue.

3.1 Espacios Hilbert y bases ortonormales

Un espacio Hilbert es un espacio con producto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ el cual es completo, es decir, un espacio Banach y tiene la norma asociada dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$.

Ejemplos comunes son los espacios con funciones de $L^2[0,1]$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ con el producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\xi \quad (3.10)$$

integrables con respecto a la medida de Lebesgue, donde $\bar{g}$ es el complejo conjugado de g .

Cada espacio Hilbert tiene una base ortonormal en un sentido que involucra convergencia. En el caso de espacios Hilbert cada base ortonormal puede ser definida como un subconjunto ortonormal máximo $B \subset H$, un conjunto que consiste de elementos ortogonales y norma unitaria de H , con la propiedad de que este no es subconjunto propio de cualquier otro conjunto.

Dada cualquier base ortonormal B para H , se puede escribir para cada $x \in H$ como

$$\bar{x} = \sum_{b \in B} \langle \bar{x}, \bar{b} \rangle \bar{b} \quad (3.11)$$

en el sentido de que al menos existe un número contable de términos diferente de cero en la sumatoria y para cualquier enumeración

$$\{\bar{b} \in B \text{ tal que } \langle \bar{x}, \bar{b} \rangle_H \neq 0\} \Rightarrow B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots\} \quad (3.12)$$

de los términos diferente de cero, se tiene

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle \bar{x}, \bar{b}_j \rangle_H \bar{b}_j \quad (3.13)$$

(El límite no es necesario si existen sólo un número finito de términos diferentes de cero).

Además, se tiene una representación conveniente de la norma en H en términos de los coeficientes base

$$\|\bar{x}\|_H = \sqrt{\sum_{b \in B} |\langle \bar{x}, \bar{b} \rangle_H|^2} \quad (3.14)$$

Para el espacio $H \in L^2[0,1]$ existe una base ortonormal muy simple que es frecuentemente usada y es casi la base estándar, esta es $\{b_n \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\}$ donde

$$b_n(t) = e^{2\pi i n t} \quad (3.15)$$

Por lo tanto para cada función $f \in L^2[0,1]$ puede ser expresada como una suma

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, b_n \rangle b_n \quad (3.16)$$

con convergencia de la suma en la norma L^2 .

Esto es normalmente conocido como la serie de Fourier de la función f y donde se tiene la representación de

$$\hat{f}(n) = \langle f, b_n \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt \quad (3.17)$$

La serie de Fourier también se puede expresar como

$$S_n f(n) = \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{2\pi i j t} \quad (3.18)$$

para ciertas sumas parciales de la serie y el espacio Hilbert general, la teoría indica que para toda $f \in L^2[0,1]$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|_2 = 0 \quad (3.19)$$

Para $f \in L^p[0,1]$ y $1 < p < \infty$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|_p = 0 \quad (3.20)$$

por lo tanto las exponenciales e_n también forman una base Schauder para $f \in L^p[0,1]$, pero no forman una base para $L^1[0,1]$ o para $C[0,1]$ (funciones continuas $f: [0,1] \rightarrow K$). Por lo tanto lo que se puede decir es que para $f \in L^1[0,1]$, existe información suficiente en los coeficientes de Fourier $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ para determinar completamente f , pero es difícil determinar si dada una secuencia $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es la secuencia de los coeficientes de Fourier de alguna (desconocida) función $f \in L^1[0,1]$

Se justifica la elección de la serie de Fourier como el ejemplo con una base ortonormal para $f \in L^2[0,1]$ debido a que ha demostrado su valor al pasar el tiempo, aunque también se tiene el argumento de que las exponenciales complejas $b_n(t) = e^{2\pi i n t}$ son “eigenvectores” del operador de diferenciación $\frac{d}{dt}$.

3.2 Transformada de Fourier

3.2.1 La serie de Fourier en intervalos generales

Se puede transferir la teoría de la serie de Fourier sobre el intervalo unitario $[0,1]$ a cualquier otro intervalo $[a, b]$, $a < b \in \mathbf{R}$, obteniendo un mapeo isométrico que preserva el producto interno, es decir, $L^2[0,1] \rightarrow L^2[a, b]$.

Si f es una función f sobre un intervalo $[-L, L]$ para algún valor $L > 0$, entonces f puede ser representada por la serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) e^{2\pi i n(x/2L)} \quad (3.21)$$

donde

$$c(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{2\pi i n t/(2L)} dt \quad (3.22)$$



3.2.2 La transformada de Fourier

Combinando las ecuaciones 3.21 y 3.22

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L f(t) e^{-2\pi i t(n/2L)} dt \right) e^{-2\pi i n(x/2L)} \quad (3.23)$$

para $f \in L^2[-L, L]$.

Si se toma $f \in L^2(\mathbb{R})$ con un soporte compacto entonces se tiene

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t(n/2L)} dt \right) e^{-2\pi i n(x/2L)} \quad (3.24)$$

cuando $T \rightarrow \infty$ y dado que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| < \infty$, se define como la Transformada de Fourier de la función f

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \gamma t} dt = \hat{f}(\gamma) \quad (3.25)$$

En adición se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) e^{2\pi i n(x/2L)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n/2L) e^{2\pi i x(n/2L)} (1/2L) \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i x \gamma} d\gamma \end{aligned} \quad (3.26)$$

Donde

$$\hat{f}(n/2L) = \int_{-L}^L f(t) e^{2\pi i t(n/2L)} dt \quad (3.27)$$

La fórmula (3.26) corresponde a la *Transformada inversa de Fourier*, lo cual exhibe que la transformada inversa es de la misma forma como la *Transformada de Fourier*.

3.3.3 Muestreo Shannon-Nyquist

Definición. Una función $f(x)$, L^2 sobre $\mathbb{R}$, está limitada en banda si existe un número $\Omega > 0$, tal que $\hat{f}(\gamma)$ esta soportado en el intervalo $[-\Omega/2, \Omega/2]$. En este caso, se dice que la función $f(x)$ tiene una frecuencia límite $\Omega > 0$. La función $f(x)$ tiene un ancho de banda $B > 0$ si existe un intervalo I tal que $|I| = B$ y $\hat{f}(\gamma)$ está soportada en I .

Teorema. Sea $f(x)$ una función limitada en banda con una frecuencia límite Ω . Entonces la fórmula de la Transformada de Fourier inversa se conserva para la función $f(x)$, es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$,



$$f(x) = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \quad (3.28)$$

y $f(x)$ es una función del tipo C^∞ en R .

Uno de los resultados fundamentales en el análisis de Fourier es el teorema de muestreo de Shannon. El teorema asegura que una función limitada en banda puede ser recuperada a partir de sus muestras de un conjunto de puntos regularmente espaciados en R , previendo que la distancia entre los puntos es lo suficientemente pequeña. Este resultado es muy importante en aplicaciones de procesamiento digital de señales.

Teorema. Si $f(x)$ es una función limitada en banda con un ancho de banda Ω , entonces $f(x)$ puede ser escrito como

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{\Omega}\right) \frac{\sin(\pi \Omega (x - n/\Omega))}{\pi \Omega (x - n/\Omega)} \quad (3.29)$$

donde la suma converge en L^2 y L^∞ sobre R .

3.3.4 Soporte compacto

Se dice que una función tiene soporte compacto si el conjunto donde no es nula forma un conjunto cerrado y acotado, por ejemplo dada una función $f(x)$ cualquiera, se define el soporte compacto de $f(x)$ $\text{supp } f = \{x \in R, \text{ tal que } f(x) \neq 0\}$. Si el supp de f es un conjunto cerrado y acotado entonces es compacto.

Al tener ciertos requerimientos sobre una distribución f , se puede intentar trasladar el término de soporte compacto en el dominio de la Transformada de Fourier.

Teorema de Paley-Wiener. Sea $f(z)$ una función entera tal que

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.30)$$

para constantes positivas A, B y todos los valores de z, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (3.31)$$

Entonces existe una función ϕ en L^2 en el intervalo $[-A, A]$ tal que

$$f(z) = \int_{-A}^A \phi(t) e^{izt} dt \quad (3.32)$$

Además, las funciones enteras del tipo exponencial son exactamente transformadas de Fourier de funciones con soporte compacto en $L^2(\mathbf{R})$.

Como una función entera no puede ser cero sobre cualquier intervalo de longitud positiva, a menos que esta sea directamente cero, se tiene que f y $\hat{f}(n)$ no pueden estar

ambos compactamente soportados. Una forma cuantitativa de este hecho puede ser establecida para funciones las cuales están definidas en el tiempo y su transformada de Fourier que también esta definida en el dominio de frecuencia, para $f \in L^2(\mathbf{R})$ normalizadas con norma unitaria $\|f\|_2$ o $\int_{\mathbf{R}} |f|^2 dt = 1$ se puede escribir $|f|^2$ como una función de densidad de probabilidad sobre $\mathbf{R}$, por lo tanto se puede calcular la media μ y la varianza σ^2 de esta distribución de probabilidad.

$$\mu = \int_{\mathbf{R}} t |f(t)|^2 dt \quad (3.33)$$

$$\sigma^2 = \int_{\mathbf{R}} (t - \mu)^2 |f(t)|^2 dt \quad (3.34)$$

Si las funciones $f \in L^2(\mathbf{R})$ tienen un soporte compacto, también se define para las funciones $f \in L^2(\mathbf{R})$ normalizada en forma más general. Como $\|\hat{f}(n)\|^2 = \|f\|^2 = 1$, también se puede contemplar la media $\hat{\mu}$ y la varianza $\hat{\sigma}^2$ de $|F(f)|^2$.

Teorema . (Principio de incertidumbre de Heisenberg) [21]

Si $f \in L^2(\mathbf{R})$ y están definidas $f'(t), f''(t), tf(t), t^2 f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ de donde $\|f\|_2 = 1$ entonces

$$\sigma \hat{\sigma} \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.35)$$

3.4 Transformada de Fourier con ventanas

La transformada de Fourier y la serie de Fourier tienen una desventaja, que ambas pierden información local, aunque ambas permiten la reconstrucción de funciones en L^2 y L^p , $p \in \mathbf{N}$, la reconstrucción es mediante métodos matemáticos diferentes. Parte de la naturaleza de la Transformada de Fourier es la necesidad de llevar a cabo el proceso completo de la reconstrucción para recuperar la función. Un ejemplo acerca de esto se da en las funciones en los intervalos $[0, a]$. Mediante un cálculo la transformada de Fourier para la función $\chi_{[0,a]}(x)$ es

$$F(\chi_{[0,a]}(x)) = \frac{1 - e^{-2\pi i a n}}{2\pi i n} \quad (3.36)$$

donde

$$\chi_{[0,a]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.37)$$

y se observa que un pequeño cambio en a afecta la transformada de Fourier en cada n , en particular un cambio relativamente pequeño localizado en la función, requiere, calcular nuevamente la transformada/serie de Fourier siendo esta completa, es probable que se altere por tal cambio; similarmente un cambio en el lado de la frecuencia, es decir, un pequeño cambio en la transformada de Fourier, normalmente afectará toda la función.

Al procesar señales se encuentran fenómenos oscilantes localizados en el tiempo y también ondas perdurables, que con amplitudes casi estacionarias, exhiben patrones de frecuencia variables en el tiempo, por lo tanto, existe la noción de los fenómenos localizados en tiempo y frecuencia, los cuales requieren información conjunta para una descripción adecuada. El análisis de Fourier no es adecuada para poder expresar este tipo de información conjunta, dado que las funciones elementales de su representación son funciones estacionarias de tipo exponencial $e^{i\omega t}$. Tratándose de fenómenos aislados en el tiempo se puede realizar el análisis de forma separada sobre sus respectivos dominios temporales y extraer la información en el dominio de la frecuencia que nos proporciona la Transformada de Fourier.

Una clase de representaciones en tiempo-frecuencia en el ámbito del procesamiento de señales se basa en el empleo de ventanas temporales, esto es de funciones suaves y bien localizadas en un intervalo. La ventana $g(t)$ enmarca una porción de la señal y permite aplicar localmente la Transformada de Fourier, de este modo, se obtiene información en frecuencia localizada temporalmente en el intervalo que abarca la ventana $g(t)$. Desplazando temporalmente la ventana se cubre el dominio de la señal obteniéndose la completa información tiempo-frecuencia de la misma:

$$\hat{f}_g(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-2\pi i \xi t} dt \quad (3.38)$$

Asumiendo que la función ventana $g(t)$ está bien localizada en un intervalo centrado en $t = 0$, de longitud Δ_t y que su transformada $\hat{g}(\xi)$ está también localizada en una banda centrada en $\omega = 0$, de ancho Δ_ω , las ventanas desplazadas y moduladas $g(t - \tau)e^{2\pi i \xi t}$ son funciones elementales localizadas en el dominio conjunto tiempo-frecuencia. Cada función elemental se localiza en el rectángulo centrado en el punto (τ, ω) de dimensión $\Delta_t \Delta_\omega$.

La definición de $\hat{f}_g$ depende en la elección de g , sin embargo, se pueden obtener algunos efectos causados por las discontinuidades o la falta de suavidad de g y por lo tanto elegir una función ventana suave soportada compactamente es muy conveniente para el problema que se este analizando.

Los valores de $\hat{f}_g$ que resultan proporcionan información local acerca de la función f a expensas de introducir un parámetro de ‘posición’ τ . Para una τ fija se debe ser capaz de encontrar a partir de $\hat{f}_g(\tau)$ toda la información acerca de f en el soporte de $g(t - \tau)$ (el cual es el soporte de g trasladado por τ), sin embargo, la información aún no es muy fácil para descifrar. Se puede decir que $\hat{f}_g(\tau, \xi)$ representa la cantidad de frecuencia ξ presente en la gráfica de f intersección la ventana alrededor de τ .

Los valores de $\hat{f}_g(\tau, \omega)$ proporcionan un plano completo en el dominio tiempo-frecuencia que despliega la información de la señal, más aún, ésta puede recuperarse con la fórmula de inversión :



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_g(\tau, \xi) e^{2\pi i \xi t} d\omega d\tau \quad (3.39)$$

El mapeo sobre el dominio tiempo-frecuencia, bajo las condiciones referidas, se conoce también como la Transformada de Gabor y representa una generalización de la Transformada de Fourier.

Al realizar la Transformada de Gabor sobre una función f , se tiene que los rectángulos de localización próxima se superponen, esto implica la redundancia de la información en el mapeo, la redundancia y la superposición dependen de la dimensión de los rectángulos $\Delta_t \Delta_\omega$. Se puede argumentar que la *Transformada de Gabor* esta limitada en su habilidad para precisar información debido al principio de incertidumbre de Heisenberg. Al aplicar una ventana para obtener $f(t)g(t-a)$ ciertamente se puede obtener una señal ventaneada con una desviación estándar σ relativamente pequeña, sin embargo no siempre se obtiene un buen control sobre la desviación estándar en la versión transformada, $\hat{\sigma}$. En el mejor de los casos, se podrían generar funciones ventana donde $\hat{\sigma}$ fuera proporcional al recíproco del ancho de la ventana.

Se debe de argumentar que para una frecuencia σ relativamente alta donde el correspondiente periodo $1/\sigma$ es mucho más pequeño que la ventana, se esta en una posición razonable para determinar si existe un componente de frecuencia σ dentro de la ventana. Para una frecuencia σ relativamente pequeña, y un periodo grande, posiblemente no se tiene una ventana suficientemente amplia sobre la gráfica de f para indicar que se está detectando alguna variación en la gráfica correspondiente a esa frecuencia.

Al llevar a cabo la Transformada de Fourier de la función ventaneada se observan ciertas características en todas las frecuencias, incluyendo frecuencias pequeñas, además se detectan características causadas por la extensión de ceros de la gráfica de $f(t)g(t-a)$ más allá de la ventana. En altas frecuencias, pequeños periodos, se tiene un espacio para diversas variaciones dentro de la ventana y por lo tanto se tiene una posición similar a la que se tenía con la transformada de Fourier $\hat{f}(\gamma)$ donde no se puede indicar en que lugar dentro de la ventana los cambios en altas frecuencias suceden en f .

3.5 Wavelet

3.5.1 Transformada Wavelet Continua

Una función debe satisfacer ciertos criterios matemáticos al clasificarla como una función *wavelet*., Las cuales son:

- La función wavelet $\psi(t)$ debe tener energía finita:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (3.40)$$

- Si $\hat{\psi}(\gamma)$ es la transformada de Fourier de la función wavelet $\psi(t)$ es decir



$$\hat{\psi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (3.41)$$

entonces la siguiente condición se debe de mantener:

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < \infty \quad (3.42)$$

Lo que implica que la función wavelet $\psi(t)$ no tiene componente en la frecuencia cero, $\hat{\psi}(0) = 0$, otra forma de interpretar la ecuación es que la función wavelet debe tener media cero, la ecuación 3.42 es conocida como la condición de admisibilidad y C_g es denominada como la constante de admisibilidad, cuyo valor depende de la función wavelet elegida.

Las funciones wavelet que satisfacen la condición de admisibilidad son considerados como filtros pasabanda, lo cual significa que solo se permiten aquellas señales cuyos componentes estén dentro de un rango finito de frecuencias.

El centro del pasabanda f_c , es definido mediante el segundo momento de área del espectro de energía

$$f_c = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} f^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df}{\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(f)|^2 df}} \quad (3.43)$$

donde f_c , es la desviación del espectro de energía cerca del eje vertical.

Una vez que se ha elegido una función wavelet se requiere que ésta tenga una mayor flexibilidad para un mejor análisis de la señal, lo cual se logra al realizar dos manipulaciones: la primera es el poder estrecharla y expandirla (dilatación) y la segunda el poder moverla (traslación); al incluir el parámetro de escalamiento, a , y el parámetro de traslación, b , en una función wavelet a la cual se le denomina como madre, se obtendrán versiones escaladas y trasladadas las cuales serán denotadas como $\psi[(t-b)/a]$.

Definición.

La Transformada Wavelet Continua de $f \in L^2(\mathbf{R})$ correspondiente a una elección de la función wavelet ψ es

$$T(a, b) = w(a) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (a > 0, b \in \mathbf{R}) \quad (3.44)$$

donde el símbolo $*$ indica que el conjugado complejo de la función wavelet es utilizada, y $w(a)$ es una función ponderada, normalmente establecida a un valor $1/\sqrt{a}$, lo cual asegura que las funciones wavelet en cada escala tienen la misma energía, es decir, preservar la norma en L^2 , $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$.



En la ecuación (3.44), el producto de la función wavelet y la señal son integrados sobre el rango de la señal, lo que se denomina como una *convolución*. La función wavelet normalizada frecuentemente se escribe de forma compacta como

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.45)$$

donde la normalización es en el sentido de energía de la función wavelet, por lo tanto la integral de la transformada puede ser escrita como

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (3.46)$$

es posible expresar la transformada en una forma todavía más compacta, como un producto interno, es decir $T(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \langle f, \psi \rangle$.

La clave para la transformada continua wavelet es el poder elegir ψ tal que $T(a,b)$ contiene la suficiente información para reconstruir la función f , un ejemplo donde esto es posible es la denominada función wavelet *Haar*

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & t \geq 1 \text{ o } t < 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Teorema. Transformada Wavelet Inversa

Si $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ es de valor real y satisface la condición de admisibilidad, entonces para $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$\|f\|_2 = \sqrt{C_g} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |T(a,b)|^2 \frac{da}{a^2} db \right)^{1/2} \quad (3.48)$$

para $f \in L^p(\mathbf{R})$ ($1 < p < \infty, p \in \mathbf{N}$)

$$f(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db \quad (3.49)$$

si la integral es interpretada en un sentido distribucional.

La ecuación 3.49 permite recuperar a la señal original de su *Transformada wavelet* al integrar sobre todas las escalas y localizaciones, a y b . Si el límite de integración se realiza sobre un determinado rango de escalas a en lugar de todas las escalas a , se puede entonces realizar un filtrado básico de la señal original. Lo cual se puede representar de la siguiente forma



$$f(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a^*}^{\infty} T(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db \quad (3.50)$$

El límite inferior de la integral, a^* , es la escala de corte, por lo tanto la reducción en los componentes de ruido de alta frecuencia será evidente conforme el valor de la escala de corte, a , se incrementa. Este método simple de reducción de ruido es conocido como el umbral dependiente de escala.

La contribución relativa de la energía de la señal contenida en una localidad b y una escala a específica esta dada por la función de densidad de energía *wavelet* bidimensional:

$$E(a,b) = |T(a,b)|^2 \quad (3.51).$$

La gráfica de $E(a,b)$ es conocida como escalograma (análogo al espectograma, es decir, la superficie de densidad de energía de la transformada de Fourier de tiempo corto). El escalograma puede ser integrado a través de a y b para recuperar la energía total en la señal usando la constante de admisibilidad, C_g , como sigue:

$$E = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |T(a,b)|^2 \frac{da}{a^2} db \quad (3.52)$$

Al utilizar funciones *wavelet* reales se tendrá que su escalograma correspondiente será muy parecido en forma a la gráfica de la *Transformada wavelet*, sin embargo, para funciones *wavelet* complejas se podrán obtener ya sea magnitud y fase o en su caso parte real e imaginaria. La superficie del escalograma permitirá resaltar la ubicación y la escala de las características energéticas dominantes dentro de la señal.

Por otra parte la contribución relativa a la energía total contenida dentro de la señal en una escala específica a esta dada por la distribución de energía dependiente de escala:

$$E(a) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} |T(a,b)|^2 db \quad (3.53)$$

Para poder comparar el espectro de energía de Fourier de la señal, $E_F(f)$, se puede convertir el espectro de energía dependiente de escala de la señal, $E(a)$, a un espectro de energía dependiente de la frecuencia $E_W(f)$. Para poder realizar esto se utiliza una de las frecuencias características de la función *wavelet*, la más comúnmente usada es el centro pasobanda del espectro de potencia de la función *wavelet*. Por lo tanto usando la frecuencia pasobanda y tomando en cuenta que los componentes espectrales son inversamente proporcionales a la dilatación, es decir, $f \propto 1/a$, la frecuencia característica, ecuación 3.43, asociada con una función *wavelet* de escala arbitraria a esta dada por

$$f = \frac{f_c}{a} \quad (3.54)$$



Dado que la energía total de la señal está proporcionada por

$$E = \int_0^{\infty} E(a) \frac{da}{a^2} \quad (3.55)$$

Al hacer el cambio de variable $f = f_c/a$ y considerando la relación de diferenciales tal que $da/a^2 = -df/f_c$ se obtiene

$$E = \int_0^{\infty} E_w(f) df \quad (3.56)$$

se obtiene que la energía total de la señal en términos de frecuencia está dado por

$$E = \frac{1}{C_g f_c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |T(f, b)|^2 df db \quad (3.57)$$

El espectro de potencia es simplemente el espectro de energía dividido por un período de tiempo de la señal analizada, por lo tanto el área bajo el espectro de potencia proporciona la energía promedio por unidad de tiempo.

$$P_w(f) = \frac{1}{\tau} E_w(f) = \frac{1}{\tau f_c C_g} \int_{-\infty}^{\infty} |T(f, b)|^2 db \quad (3.58)$$

Algo que se debe de tomar en cuenta es que al utilizar alguna otra frecuencia característica de la función wavelet el resultado del espectro de potencia de la función wavelet se afectaría en tamaño y forma (y por ende las gráficas del espectro de energía), pero conservando la misma potencia.

Una característica útil para poder detectar escalas dominantes en la señal es la denominada varianza de la función wavelet, definida a partir de la *Transformada wavelet continua* de la siguiente manera

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |T(a, b)|^2 db \quad (3.59)$$

Dado que la *Transformada wavelet* es la convolución de la señal con la función wavelet, se puede entonces emplear el teorema de convolución para expresar la transformada wavelet en términos de los productos de las transformadas de Fourier de la señal, $\hat{\psi}_{a,b}(f)$,

$$T(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}_{a,b}^*(f) df \quad (3.60)$$

donde la conjugada de la *Transformada de Fourier* de la función wavelet es utilizada.

La transformada de Fourier de la wavelet traslada y dilatada es:



$$\hat{\psi}_{a,b}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-2\pi i f t} dt \quad (3.61)$$

Al realizar primero un cambio de variables tal que $t'=(t-b)/a$ (por lo tanto $dt=adt'$), separando luego la parte constante de la exponencial y por último cambiando la variable t' se obtiene

$$\hat{\psi}_{a,b}(f) = \sqrt{a} e^{-2\pi i f b} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-2\pi i f t a} dt \quad (3.62)$$

de la expresión de la integral anterior se puede notar que ésta es la transformada de Fourier de la función wavelet en frecuencia reescalada af . Por lo tanto se tiene que

$$\hat{\psi}_{a,b}(f) = \sqrt{a} \hat{\psi}(af) e^{-2\pi i f b} \quad (3.63)$$

y de esta forma se puede expresar la *Transformada wavelet* como:

$$T(a,b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(af) e^{2\pi i f b} df \quad (3.64)$$

se observa que tiene la forma de una transformada inversa de Fourier, lo que es particularmente útil cuando se utilizan aproximaciones discretizadas de la *Transformada continua wavelet* con conjuntos de datos de señales largas.

3.5.2 Transformada Wavelet Discreta

La ecuación 3.45 define la función wavelet en una escala a y en la localidad b , una manera para muestrear estos dos parámetros es usar una discretización logarítmica de la escala a y ligar esto, al tamaño de pasos tomados entre las localidades b . Este tipo de discretización de la función wavelet produce la forma

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (3.65)$$

donde los enteros m y n controlan la dilatación y traslación de la función wavelet respectivamente; a_0 es un parámetro de paso de dilatación fijo, especificado y establecido a un valor más grande que 1. b_0 es el parámetro de localización, el cual debe de ser más grande que cero.

Por lo tanto la transformada wavelet de una señal continua, $x(t)$, utilizando funciones wavelet discretas es



$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{a_0^{m/2}} \psi_{m,n}^* (a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (3.66)$$

y puede ser expresado como el producto interno

$$T_{m,n} = \langle x, \psi_{m,n} \rangle \quad (3.67)$$

donde $T_{m,n}$ son los valores de la *Transformada wavelet discreta* dados sobre una malla escala-localización de índices, m,n . Los valores $T_{m,n}$ son conocidos como *coeficientes wavelet* o *coeficientes detalle*. Para poder determinar que tan ‘buena’ es la representación de la señal en el espacio de funciones wavelet usando esta descomposición, se puede recurrir a la teoría de “marcos” la cual provee un fondo general para el estudio de las funciones wavelet discretas. Los “marcos” para funciones wavelet son construidos al muestrear los parámetros de escala y tiempo de la transformada wavelet continua.

Definición.

Una secuencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de un espacio Hilbert $\mathbf{H}$ es denominado un marco para $\mathbf{H}$ si existen constantes $A, B > 0$ tal que

$$A \|x_n\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B \|x_n\|_H^2 \quad (3.68)$$

se mantiene para toda $x \in \mathbf{H}$

En su trabajo original Haar mostró que

$$\psi_{2^n, 2^n m} : n, m \in \mathbb{Z} \quad (3.69)$$

Pueden formar una base ortonormal para las funciones en $L^2(\mathbf{R})$, por lo tanto para cada $f \in L^2(\mathbf{R})$ se puede expresar de la siguiente forma

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{2^n, 2^n m} \rangle \psi_{2^n, 2^n m} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} T_{m,n} \psi_{2^n, 2^n m} \quad (3.70)$$

de la teoría general de bases ortonormales en espacios Hilbert [21].

En el contexto de la Transformada wavelet una característica relevante es que se pueden utilizar distintas ψ admisibles las cuales tienen un buen comportamiento en diversas formas. Más aún, se pueden encontrar ψ muchas más regulares (por ejemplo que sean continuas y diferenciables continuas) tal que

$$\{\psi_{2^n, 2^n m} : n, m \in \mathbb{Z}\} \quad (3.71)$$

forman una base ortonormal para $L^2(\mathbf{R})$.



Por lo tanto la familia de funciones *wavelet* que constituyen un *marco* son tales que la energía de los coeficientes wavelet que resultan, residen dentro un cierto rango limitado de energía de la señal original, es decir

$$AE \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |T_{m,n}|^2 \leq BE \quad (3.72)$$

donde A y B son los “marcos” límites y E es la energía de la señal $E = \|x\|^2$, la cual es finita.

Los valores de los “marcos” límites A y B dependen de ambos parámetros a_0^m y b_0 elegidos para el análisis y la función wavelet utilizada. Si $A=B$ el *marco* utilizado es conocido como *compacto*. Tales “marcos” *compactos* tienen una fórmula de reconstrucción, dada por la serie infinita:

$$x(t) = \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (3.73)$$

Cuando $A=B=1$ la familia *wavelet* definida por el *marco* forman una base ortonormal. Si $A \neq B$ una fórmula de reconstrucción todavía puede ser escrita como:

$$x'(t) = \frac{2}{A+B} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (3.74)$$

Donde la señal $x'(t)$ difiere de la señal original $x(t)$ por un cierto error el cual depende de los límites de los marcos.

Una selección común para los parámetros de la *wavelet* discreta a_0 y b_0 son 2 y 1 respectivamente. Esta escala logarítmica de potencia dos tanto para los pasos de traslación como para la dilatación es conocido como arreglo de malla *diádica*, por lo tanto sustituyendo estos dos valores en la ecuación (3.65) se tiene que la función wavelet en malla *diádica* puede ser escrita como

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t - n2^m}{2^m}\right) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n) \quad (3.75)$$

Las funciones wavelet de *malla diádica discreta* son elegidas de tal forma que sean ortonormales, lo cual se puede expresar como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \psi_{m',n'}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m' \text{ y } n = n' \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.76)$$

Esto significa que la información almacenada en un coeficiente wavelet $T_{m,n}$ no es repetido en ningún otro lugar, lo cual permite una regeneración completa de la señal

original sin redundancia alguna. Utilizando la ecuación de *wavelet* en malla diádica discreta, la *Transformada wavelets discreta* puede ser entonces escrita como:

$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{m,n}^*(t) dt \quad (3.77)$$

y la *Transformada wavelet discreta inversa* como

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (3.78)$$

lo cual puede ser escrito en términos del producto interno:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (3.79)$$

donde la descomposición combinada y el proceso de reconstrucción son claramente observadas, al ir de $x(t)$ a $T_{m,n}$ mediante el producto interno $\langle x, \psi_{m,n} \rangle$ y volviendo a $x(t)$ vía las sumatorias infinitas.

3.5.3 Función de escalamiento

Las funciones de escalamiento y sus ecuaciones de dilatación se encuentran asociadas a las funciones wavelet discretas diádicas ortonormales. La función de escalamiento está asociada con el allanamiento de la señal y tiene la misma forma que la función wavelet, dada por

$$\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n) \quad (3.80)$$

Las cuales tienen la propiedad de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{0,0}(t) dt = 1 \quad (3.81)$$

donde $\varphi_{0,0}(t) = \varphi(t)$ es a veces referido como la *función de escalamiento padre* o *wavelet padre*.

La función de escalamiento es ortogonal a traslaciones de si misma, pero no a dilataciones de si misma. Al realizar la convolución de una función de escalamiento con la señal se produce lo que se le denomina *coeficientes de aproximación*, expresado como

$$S_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_{m,n}(t) dt \quad (3.82)$$

Capítulo 3. Introducción a Wavelets

Los coeficientes de aproximación en una escala específica m son conocidas colectivamente como *aproximación discreta* de la señal en esa escala, y una aproximación continua de la señal en escala m es generada mediante una sumatoria de una secuencia de funciones de escalamiento en esta escala, factorizada por los coeficientes de aproximación, como sigue:

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m,n} \phi_{m,n}(t) \quad (3.83)$$

Esta representación continua se aproxima más a $x(t)$ en escalas pequeñas, cuando $m \rightarrow \infty$.

Se puede representar una señal $x(t)$ usando una expansión de series combinadas utilizando tanto los coeficientes de aproximación y los coeficientes de detalle (*wavelet*) en la forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m_0,n} \phi_{m_0,n}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (3.84)$$

Por lo tanto la señal original es expresada como una combinación de una aproximación de si misma, en un índice de escala arbitraria m_0 , sumado a una sucesión de detalles de señal de escalas desde menos infinito hasta la escala m_0 . Reescribiendo la ecuación (3.84)

$$x(t) = x_{m_0}(t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m(t) \quad (3.85)$$

A partir de esta última ecuación se tiene que

$$x_{m-1}(t) = x_m(t) + d_m(t) \quad (3.86)$$

lo cual indica que si se suma un detalle de la señal en una escala arbitraria a una aproximación en esa escala se obtiene la aproximación de la señal en una resolución incrementada. Esto es denominado una representación multiresolución.

La *ecuación de escalamiento* (o *ecuación de dilatación*), que describe la función de escalamiento $\phi(t)$ en términos de versiones contraídas y trasladadas de si misma, es:

$$\phi(t) = \sum_k c_k \phi(2t - k) \quad (3.87)$$

donde c_k es un coeficiente de escalonamiento asociado.

La ecuación (3.87) indica que se puede construir una función de escalamiento en una escala a partir de un número de ecuaciones de escalamiento en la escala previa. La solución de esta ecuación en diferencia de escala dos produce la función de escalamiento $\phi(t)$.

Existen algunas restricciones con respecto a los coeficientes de escalamiento, las cuales son:



$$\sum_k c_k = 2 \quad (3.88)$$

y para crear un sistema ortogonal se requiere que

$$\sum_k c_k c_{k+2k'} = \begin{cases} 2, & \text{si } k'=0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.89)$$

lo cual nos indica que la suma del cuadrado de los coeficientes de escalamiento es igual a 2.

Los mismos coeficientes son utilizados en forma inversa con signos alternantes para producir la *ecuación de wavelet asociada* diferente, es decir

$$\psi(t) = \sum_k (-1)^k c_{1-k} \phi(2t - k) \quad (3.90)$$

esta construcción asegura que las funciones wavelet y sus correspondientes funciones de escalamiento son ortogonales, además si se utilizan solamente funciones wavelet de soporte compacto, es decir, que tienen un número finito de funciones de escalamiento N_k se define la función wavelet como

$$\psi(t) = \sum_k (-1)^k c_{N_k-1-k} \phi(2t - k) \quad (3.91)$$

Frecuentemente los coeficientes reconfigurados usados para la función wavelet son escritos más compactamente como

$$b_k = (-1)^k c_{N_k-1-k} \quad (3.92)$$

donde la suma de todos los coeficientes b_k es cero. Usando este reordenamiento de coeficientes, la ecuación (3.91) puede ser escrita como

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N_k-1} b_k \phi(2t - k) \quad (3.93)$$

De las ecuaciones (3.80) y (3.87) y al examinar la función wavelet en el índice de escala, se tiene que para valores enteros arbitrarios de m que

$$2^{-(m-1)/2} \phi\left(\frac{t}{2^{m+1}} - n\right) = 2^{-m/2} 2^{-1/2} \sum_k c_k \phi\left(\frac{2t}{2 \times 2^m} - 2n - k\right) \quad (3.94)$$

lo cual puede ser escrito en forma compacta como

$$\varphi_{m+1,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \varphi_{m,2n+k}(t) \quad (3.95)$$

Similarmente se puede obtener para la función *wavelet*

$$\psi_{m+1,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k \varphi_{m,2n+k}(t) \quad (3.96)$$

La función wavelet Haar es un ejemplo de una función wavelet ortonormal. Su ecuación de escalamiento contiene únicamente dos coeficientes de escalamiento diferentes de cero y está dado por

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \quad (3.97)$$

esto es, sus coeficientes de escalamiento son $c_0=c_1=1$.

Para obtener estos valores como coeficientes se resuelven las ecuaciones (3.88) y (3.89) simultáneamente. La solución de la ecuación de escalamiento Haar es un pulso y esta definido como

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.98)$$

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) \quad (3.99)$$

Y la función wavelet Haar es definida como

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.100)$$

A partir de la ecuación (3.82) se puede observar que los coeficientes de aproximación en el índice de escala $m+1$ están dados por

$$S_{m+1,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_{m+1,n}(t) dt \quad (3.101)$$

Haciendo uso de la ecuación (3.95) se puede escribir

$$S_{m+1,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \varphi_{m,2n+k}(t) \right] dt \quad (3.102)$$

reacomodando los términos se tiene

$$S_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_{m,2n+k}(t) dt \right] \quad (3.103)$$



La integral proporciona los coeficientes de aproximación $S_{m,2n+k}$ para cada k . Al escribir la ecuación como

$$S_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{k-2n} S_{m,k} \quad (3.104)$$

De esta manera, usando esta ecuación se pueden generar los coeficientes de aproximación en el índice de escala $m+1$ a partir de los coeficientes de escalamiento de la escala previa. Similarmente los coeficientes *wavelet* pueden ser encontrados mediante los coeficientes de aproximación en la escala previa utilizando los coeficientes de escalamiento reordenados b_k y así se tiene

$$T_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{k-2n} S_{m,k} \quad (3.105)$$

Las ecuaciones (3.104) y (3.105) representan el *algoritmo de descomposición* de multiresolución. El vector que contienen la secuencia $(1/\sqrt{2})c_k$ se denomina como el filtro pasobajas, permitiendo pasar frecuencias bajas de la señal y por lo tanto una versión suavizada de la señal, y el vector que contiene la secuencia $(1/\sqrt{2})b_k$ se denomina como filtro pasoaltas, permitiendo pasar las altas frecuencias que corresponden a los detalles de la señal.

De acuerdo a la ecuación (3.87), esta puede ser expandida como

$$x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \varphi_{m,n}(t) + \sum_n T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (3.106)$$

Usando las ecuaciones (3.95) y (3.96) junto con las ecuaciones (3.104) y (3.105) se obtiene

$$x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{k-2n} \varphi_{m-1,k} + \sum_n T_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{k-2n} \varphi_{m-1,k} \quad (3.107)$$

Además se tiene que x_{m-1} se puede expandir en términos de los coeficientes de aproximación en la escala $m-1$, es decir, $x_{m-1} = \sum_n S_{m-1,n} \varphi_{m-1,n}(t)$. El algoritmo de reconstrucción para generar los coeficientes de aproximación en la escala $m-1$ es

$$S_{m-1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{2n-k} S_{m,k} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{n-2k} T_{m,k} \quad (3.108)$$

Para ajustarse a un marco de multiresolución *wavelet*, la entrada de señal discreta en el algoritmo del multiresolution debe ser los coeficientes de la aproximación de la señal en el índice de la escala $m=0$, definida por

$$S_{0,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi(t-n) dt \quad (3.109)$$

lo cual permite generar los coeficientes subsecuentes de aproximación y detalle. La señal discreta de entrada $S_{0,n}$ es de longitud finita N , la cual es en práctica $2^M=N$, por lo que el rango de escalas es $0 < m < M$. Sustituyendo tanto $m=0$ y $m=M$ en la ecuación (3.84), y notando que se tiene una gama finita de n el cual divide en dos en cada escala, se observa que la señal de aproximación de escala $m=0$ puede ser escrita como una señal suave en la escala M más una combinación de los detalles de la señal como :

$$\sum_{n=0}^{2^{M-m}-1} S_{0,n} \varphi_{0,n}(t) = S_{M,n} \varphi_{M,n}(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=-\infty}^{2^{M-m}-1} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (3.110)$$

esta ecuación se puede describir en la siguiente forma

$$x_0(t) = x_M(t) + \sum_{m=1}^M d_m(t) \quad (3.111)$$

Lo cual es una de las formas de describir la señal discreta finita en términos de su expansión de funciones *wavelet* discretas [1].

Una vez que se tiene $S_{0,n}$ se puede calcular $S_{m,n}$ y $T_{m,n}$, utilizando el algoritmo de descomposición, para índices de escala $m > 0$ hasta una escala máxima determinada por la longitud de la señal de entrada.

Para realizar esto mediante un proceso iterativo, primero se calculan $S_{1,n}$ y $T_{1,n}$ de los coeficientes de entrada $S_{0,n}$

$$S_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k S_{0,2n+k} \quad (3.112)$$

y

$$T_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k S_{0,2n+k} \quad (3.113)$$

De la misma forma se determinan $S_{2,n}$ y $T_{2,n}$, y así sucesivamente continuando hasta aquellos coeficientes en el índice de escala M , donde se habrá manejado una descomposición completa de la señal de entrada discreta de longitud finita, calculando sólo un coeficiente de aproximación y uno de detalle $S_{M,0}$ y $T_{M,0}$. Quedando entonces un arreglo de coeficientes: un valor de coeficientes de aproximación simple, $S_{0,n}$, más los coeficientes de detalle, $T_{m,n}$, que corresponden a las funciones wavelet discretas en la escala $a=2^m$ y la localidad $b=2^m n$.

A partir de la longitud de la señal de entrada, se tienen los rangos de m y n para los coeficientes de detalle tal que $1 < m < M$ y $0 < n < 2^{M-m}-1$.

Se observa que en el rango de n sucesivamente divide en dos en cada iteración pues es una función del índice de escala m para señal de longitud finita.

En la escala de la función wavelet más pequeña, índice $m=1$, $2^M/2^1=N/2$ coeficientes son calculados, en la siguiente escala $2^M/2^2=N/4$ son calculados y así se continua, hasta llegar a la escala más grande ($m=M$) donde $2^M/2^M$ coeficientes son calculados.

Capítulo 3. Introducción a Wavelets

El número de coeficientes de detalle para una serie de tiempo discreto de longitud finita $N=2^M$ es entonces $\sum_{m=1}^{M-1} 2^m = 2^{M-1} = N-1$. Además de los coeficientes de detalle, permanece el coeficiente de aproximación $S_{M,0}$, la cual esta relacionada con el promedio de la señal.

Por lo tanto una señal de entrada discreta de longitud finita N puede ser dividido en exactamente N componentes sin pérdidas de información, utilizando wavelets ortonormales discretos, denominando a este tipo de proceso como *cero redundancia*.

El vector de transformadas wavelets después de la descomposición total tiene la forma $W^{(M)} = (S_M, T_M, T_{M-1}, \dots, T_m, \dots, T_2, T_1)$ donde T_M representa el subvector que contiene los coeficientes $T_{m,n}$ en el índice de escala m . Se puede realizar el proceso de descomposición en un determinado nivel m_0 , donde el vector es entonces $W^{m_0} = (S_{m_0}, T_{m_0}, T_{m_0-1}, \dots, T_2, T_1)$ donde $0 < m_0 < M-1$. En este caso el vector de transformadas no contiene un simple coeficiente de aproximación, ya que se tiene una secuencia de coeficientes de aproximación $S_{m_0,n}$; sin embargo el vector de transformadas siempre contendrá $N=2^m$ coeficientes.

Si se considera una señal discreta, denotada como x_i , la cual es de longitud finita N , y así mismo ha sido adquirida en intervalos de tiempo discreto Δt (intervalo de muestro) para proporcionar la señal discreta $x(t_i)$; $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Este muestreo provee una resolución finita para la señal adquirida, y cuando el intervalo de muestreo de la señal es normalizada a 1, la señal continua es mapeada para ser una señal discreta x_i . En la práctica se introduce la señal experimental muestreada directamente, x_i , como los coeficientes de aproximación en la escala $m=0$, y comenzar el análisis de multiresolución. Sin embargo, no es correcto realizar tal uso, ya que realmente se debe de utilizar los coeficientes de aproximación $S_{0,n}$ obtenidos directamente de la definición ecuación 3.112, dado que $S_{0,n}$ es un promedio ponderado de $x(t)$ en la vecindad de n y dado que $x(t)$ es usualmente desconocida, entonces es usualmente razonable insertar x_i como $S_{0,n}$, si la señal esta variando lentamente entre muestras en esta escala. Entonces

$$S_{0,n} = x_n \quad (3.114)$$

con $m=0$, tanto el coeficiente de localización n como el índice de discretización i tienen el mismo rango (0 a $N-1$) y son iguales el uno al otro.

Es común que aproximaciones continuas, $x_m(t)$, y los detalles de la señal, $d_m(t)$, no se obtienen del análisis de multiresolución, especialmente cuando se introduce x_i como los coeficientes de detalle en el índice de escala $m=0$. Entonces $S_{m,n}$ y $T_{m,n}$ son desplegados en sus respectivas escalas o son utilizados para construir representaciones de la señal en la escala de la señal de entrada ($m=0$).

Dado que los coeficientes $S_{m,n}$ proveen una aproximación discreta de la señal en el índice de escala m . Al pasar estos coeficientes a través de un filtro de reconstrucción se pueden expresar las contribuciones de estas aproximaciones discretas en la escala de la señal original (escala de índice $m=0$).

Capítulo 3. Introducción a Wavelets

Las contribuciones de los detalles y aproximaciones, $x_{m,i}$ y $d_{m,i}$, respectivamente están relacionados a sus contrapartes continuos $x_m(t)$ y $d_m(t)$ a través de la ecuación de escalamiento en la escala $m=0$ por

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^{N-1} x_{m,i} \varphi_{0,i}(t) \quad \left[= \sum_{n=0}^{2^{M-m}-1} S_{m,n} \varphi_{m,n}(t) \right] \quad (3.115)$$

$$d_m(t) = \sum_{i=1}^{N-1} d_{m,i} \varphi_{0,i}(t) \quad \left[= \sum_{n=0}^{2^{M-m}-1} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \right] \quad (3.116)$$

En el proceso de reconstrucción, al ir removiendo los valores de los coeficientes más pequeños en valor absoluto del vector de transformada, se obtiene que la señal reconstruida tiene las partes que fluctúan mas significativamente, y los componentes menos significantes han sido suavizado casi al valor de cero.

Por lo tanto en el proceso de reconstrucción, lo primero que se realiza es colocar un umbral con respecto a los coeficientes wavelets.

Se tienen dos tipos de colocación de umbral: allanamiento dependiente de la escala y por magnitud. Se puede definir el allanamiento dependiente de escala de los coeficientes como

$$T_m^{escala} = \begin{cases} 0 & m \geq m^* \\ T_{m,n} & m < m^* \end{cases} \quad (3.117)$$

donde m^* es el umbral de escala o el vector de transformadas. El criterio para colocar el umbral puede ser definido como

$$W_i^{escala} = \begin{cases} 0 & i \geq 2^{M-m^*} \\ W_i & i < 2^{M-m^*} \end{cases} \quad (3.118)$$

donde $i = 2^{M-m^*}$ es el primer índice de localidad dentro del vector de transformadas donde los coeficientes son colocados a cero. La señal reconstruida utilizando el vector de coeficientes de escala definidos mediante el umbral de escala m^* es simplemente una aproximación suave de la señal en la escala m^* (con respecto a la señal de entrada en la escala $m=0$)

El umbral por magnitud es normalmente realizada para remover ruido de una señal, para dividir señales en dos o más componentes o simplemente para suavizar los datos. Dos procesos populares de este método son el umbral ligero y el umbral ríspido.

Los cuales reducen o remueven los coeficientes con la amplitud más pequeña sin tomar en cuenta la escala. Para someter los coeficientes al *umbral ríspido*, un *umbral λ* , es establecido el cual esta relacionado a algún valor medio de los coeficientes *wavelet* en cada escala, por ejemplo, desviación estándar, desviación absoluta promedio, etc. Esto se puede expresar de la forma



$$W_i^h = \begin{cases} 0 & |W_i| < \lambda \\ W_i & |W_i| \geq \lambda \end{cases} \quad (3.119)$$

El *umbral suave* reconoce que los coeficientes contienen tanto ruido y la señal por lo que intenta remover la señal al quitar la parte ruidosa de todos los coeficientes. El umbral es de la forma:

$$W_i^h = \begin{cases} 0 & |W_i| < \lambda \\ \text{sign}(W_i)(|W_i| - \lambda) & |W_i| \geq \lambda \end{cases} \quad (3.120)$$

Los valores cuya magnitud es mayor a λ son reducidos casi a cero por una cantidad λ . Frecuentemente no se conoce ni la señal de fondo o la secuencia de ruido que disturba a la señal, por lo que la elección del *umbral* no es trivial y por lo tanto se puede aplicar un criterio de relación señal a ruido pertinente para producir un valor para el problema en consideración. Uno de los valores que se mejor se tiene es el conocido como *umbral universal* el cual está definido como $\lambda_U = (2 \ln N)^{1/2} \sigma$. Para muestras muy largas λ_U remueve con una alta probabilidad, todo el ruido en la reconstrucción, sin embargo parte de la señal de fondo también podría ser removida y se tendrá entonces un efecto de sobresuavizado. Aunque también en práctica es usual dejar los coeficientes en las mayores escalas sin que sean afectadas a pesar de no pasar λ_U . Al utilizar λ_U produce una reconstrucción de la señal con menos energía en comparación con el *umbral ríspido* utilizando el mismo valor. Si σ no es conocida, como es en la mayoría de los casos, una estimación robusta de $\hat{\sigma}$ puede ser utilizada, la cual tiene típicamente el valor de la media de la desviación absoluta (MAD) de los coeficientes *wavelet* en la escala más pequeña dividida por 0.6745 para calibrarla con la desviación estándar de una distribución Gaussiana quedando entonces

$$\lambda_U = \frac{(2 \ln N)^{1/2} \text{MAD}}{0.6745} = (2 \ln N)^{1/2} \sigma \quad (3.121)$$

Además existen otros métodos para poder elegir el *umbral* [1].

3.5.4 Wavelet Daubechies

La función wavelet Haar es muy simple ya que solo cuenta con dos funciones de escalamiento y ambas son iguales a uno, la función wavelet Haar es el miembro más simple de la familia denominada funciones wavelet Daubechies.

Las funciones wavelet Daubechies cumplen con las condiciones mencionadas para todas las funciones wavelets ortogonales, además de que se requiere que estas tengan un soporte compacto (N_k finito, número de coeficientes de escalamiento) y sean suaves en algún grado. La suavidad de la función wavelet está asociado con una condición de momento la cual puede ser expresada en términos de los coeficientes de escalamiento como

$$\sum_{k=0}^{N_k-1} (-1)^k c_k k^m = 0 \quad (3.122)$$

para enteros $m=0,1,2,\dots,N_k/2-1$. Estas funciones wavelet tienen $N_k/2$ momentos nulos, es decir, se puede suprimir partes de la señal las cuales son polinomiales hasta grado $N_k/2-1$.

Por ejemplo para la función wavelet Daubechies D4 ('D' representa Daubechies y '4' el número de coeficientes de escalamiento diferentes de cero) se tiene a partir de la ecuación (3.87)

$$\varphi(t) = c_0\varphi(2t) + c_1\varphi(2t-1) + c_2\varphi(2t-2) + c_3\varphi(2t-3) \quad (3.123)$$

$$\psi(t) = c_3\varphi(2t) - c_2\varphi(2t-1) + c_1\varphi(2t-2) - c_0\varphi(2t-3) \quad (3.124)$$

dadas las condiciones de las ecuaciones (3.88), (3.89) y (3.122) y con variar el valor de la escala m , se pueden obtener cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y resolviendo este sistema se tiene

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} \quad c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \quad (3.125)$$

A partir de la función de escalamiento se pueden calcular los coeficientes tal que

$$\varphi_j(t) = c_0\varphi_{j-1}(2t) - c_1\varphi_{j-1}(2t-1) + c_2\varphi_{j-1}(2t-2) - c_3\varphi_{j-1}(2t-3) \quad (3.126)$$

Se comienza con una $\varphi_0(t)$ con la que se calcula $\varphi_1(t)$, y con esta a su vez se calcula $\varphi_2(t)$, se continua con el proceso hasta que $\varphi_j(t) = \varphi_{j-1}(t)$ o $\varphi_j(t) \approx \varphi_{j-1}(t)$. Una vez que se ha calculado $\varphi(t)$ se procede al cálculo de $\psi(t)$. Sin embargo se utilizan más los coeficientes de escalamiento en el algoritmo de multiresolución, es decir,

$$S_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N_n-1} c_k S_{m,2n+k}.$$

Así mismo se pueden calcular los correspondientes coeficientes para la función wavelet

$$T_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N_n-1} b_k S_{m,2n+k}.$$

Dependiendo del número de coeficientes de escalamiento que tenga la función wavelet, esta actuará de tal forma que entre más coeficientes sean, entonces más alto es el número de momentos nulos, y por tal razón polinomios de mayor grado pueden ser suprimidos. Por lo tanto entre más coeficientes de escalamiento tenga la función wavelet, más grande es la longitud del soporte y llega a ser menos compacto.

En el procesamiento de la señal, los coeficientes de aproximación en resolución m , $S_{m,n}$ son convolucionados con un filtro pasobajas, es decir, los coeficientes de aproximación son submuestreados, donde cada segundo valor es elegido para dar el valor del coeficiente de aproximación en la escala $m+1$. Los coeficientes de aproximación en la resolución m son también convolucionados con un filtro pasoaltas y submuestreados de la misma manera para proporcionar los coeficientes de detalle en la escala $m+1$, $T_{m+1,n}$ lo cuales son almacenados y los coeficientes $S_{m+1,n}$ son nuevamente pasados por los filtros para generar los componentes $S_{m+2,n}$ y $T_{m+2,n}$. El proceso es repetido en todas las escalas para producir la descomposición total de la señal.

Capítulo 3. Introducción a Wavelets

Para el proceso de reconstrucción de la señal el proceso de filtrado es en proceso inverso, sin embargo, los coeficientes de aproximación y detalle que se generan, son ahora sobremuestrados (se insertan ceros entre los valores).

Se puede producir una aproximación discreta de la función de escalamiento en escalas sucesivas si se establecen todos los valores del vector de transformadas a cero con excepción del primer término, e introducir el vector en sentido inverso a través del filtro pasobajas. Al utilizar “periodicidad” al final de la reconstrucción se obtiene un valor medio de la señal.

Una propiedad que se tiene con los coeficientes asociados es

$$\sum_{k \text{ pares}} c_k = \sum_{k \text{ impares}} c_k = 1 \quad (3.127)$$

Por lo tanto se puede aproximar a una función de escalamiento si se comienza con un coeficiente de aproximación con un solo término igual a uno, y se aproximará a una función wavelet si el proceso de reconstrucción se inicia con un coeficiente de detalle. Las funciones wavelet con soporte compacto no tienen una verdadera simetría (o antisimetría), con excepción de la función wavelet Haar. Una forma de obtener una función wavelet simétrica es “jugar con la fase”, estas funciones wavelet se denominan *Symmlets*. Otra forma sería tener momentos nulos tanto en la función de escalamiento como en la función wavelet. Un tipo de funciones wavelet perfectamente simétricas y antisimétricas son las denominadas funciones wavelet *biortogonales* las cuales satisfacen la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \tilde{\psi}_{m',n'}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m' \text{ y } n = n' \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.128)$$

donde $\tilde{\psi}_{m',n'}(t)$ es el dual de $\psi_{m,n}(t)$.



CAPÍTULO 4

Análisis de datos

4.1 Detección de eventos Dansgaard-Oerschger

En la comunidad científica, algunos de sus miembros piensan que una de las posibles causas de los eventos Dansgaard-Oerschger es, la actividad solar, trabajos relacionados con este tema son Velasco H. V. [27], Mendoza B., Velasco, V., Valdés-Galicia J. [18, 27], entre otros; también existen trabajos que difieren en este tema, como los de Musshcheler R. y Beer J. [26]. Las evidencias convincentes o no persuasivas son temas de debate y análisis que permiten razonar sobre una nueva argumentación en esta materia. En este trabajo de tesis, se desarrolla un análisis sobre los eventos Dansgaard-Oerschger, que permiten tener argumentos sobre la actividad solar como forzador externo de los eventos Dansgaard-Oerschger.

El estudio en el dominio de la frecuencia de los isótopos Carbono ^{14}C o del Berilio ^{10}Be pueden indicar si la actividad solar cuenta con una frecuencia de 1500 años y esto nos proporcionaría más información sobre las relaciones Sol-Tierra, referente a escalas de tiempo de miles de años; el que dos series de tiempo tengan una misma periodicidad, no necesariamente implica una relación lineal o compleja o si dos series de tiempo no tienen una misma periodicidad tampoco implica que no haya relación. Como primer análisis se realizará un estudio de la Transformada wavelet de los eventos Dansgaard-Oerschger. Este trabajo de tesis, presenta resultados que hasta donde se tiene conocimiento no se han publicado.

Actualmente no se han reportado periodicidades solares del orden de los 1500 años [17]. Los isótopos cosmogénicos son producidos principalmente por flujos de rayos cósmicos galácticos, modulados por el cambio en el campo magnético interplanetario y el campo geomagnético terrestre.

El análisis de isótopos cosmogénicos como ^{10}Be en núcleos de hielo polar y ^{14}C en anillos de árboles, proporciona un medio para ampliar nuestro conocimiento de variabilidad solar durante períodos mucho más largos. El análisis de los isótopos cosmogénicos es complicado comparado con otros índices de la actividad solar. Este se debe al hecho de que el ^{14}C y ^{10}Be no sólo nos informan de la modulación de la actividad solar, sino también del transporte atmosférico y procesos de deposición.

En este trabajo se utilizó el método de multianálisis Wavelet Daubechies aplicado en el trabajo de Mendoza B., Velasco V. Y Valdés-Galicia J. [18, 27] para separar la modulación del campo magnético interplanetario y el campo geomagnético terrestre en los isótopos cosmogénicos ^{14}C .

En la figura 7 se muestran el multianálisis Wavelet Daubechies del isótopo cosmogénico ^{14}C . En la parte superior de la figura 7, se muestra la serie de tiempo del isótopo cosmogénico ^{14}C (INTCAL98), de la University of Washington Quaternary Isotope Lab, en la parte central se muestra la serie de tiempo del ^{14}C modulado por el

Capítulo 4. Análisis de datos

campo geomagnético terrestre y en la parte inferior se encuentran la serie de tiempo del ^{14}C modulado por la actividad solar.

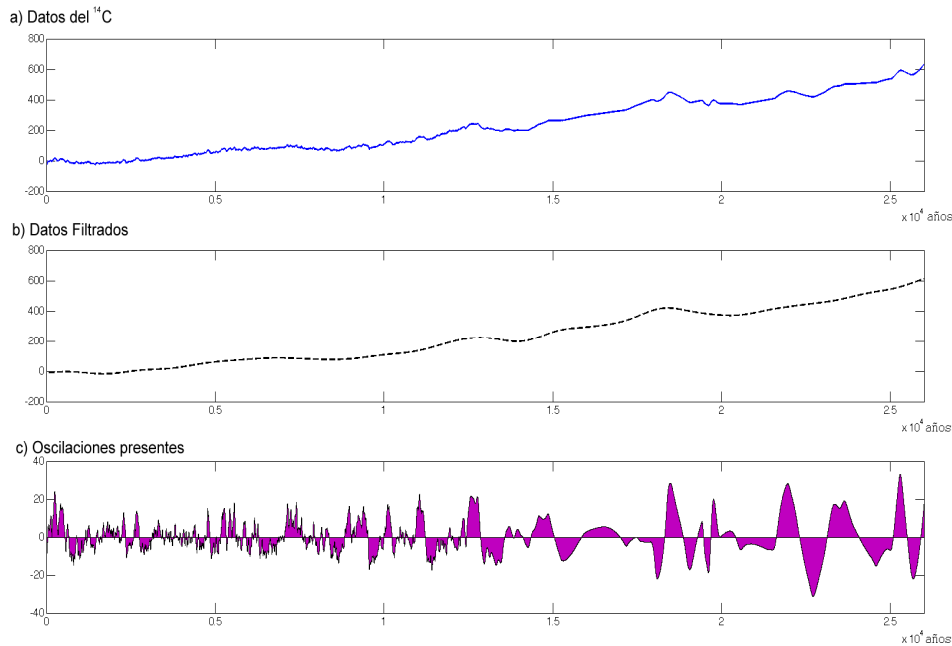


Figura 7
Serie de datos del ^{14}C (gráfica superior), datos filtrados (parte central) y oscilaciones (parte inferior)

En la figura 8 se observa el espectro de los datos del isótopo ^{14}C mediante la Transformada de Fourier, como se puede apreciar, este espectro es un ejemplo de la utilización de la *Transformada de Fourier* a señales que no están en el espacio de Hilbert L^2 .

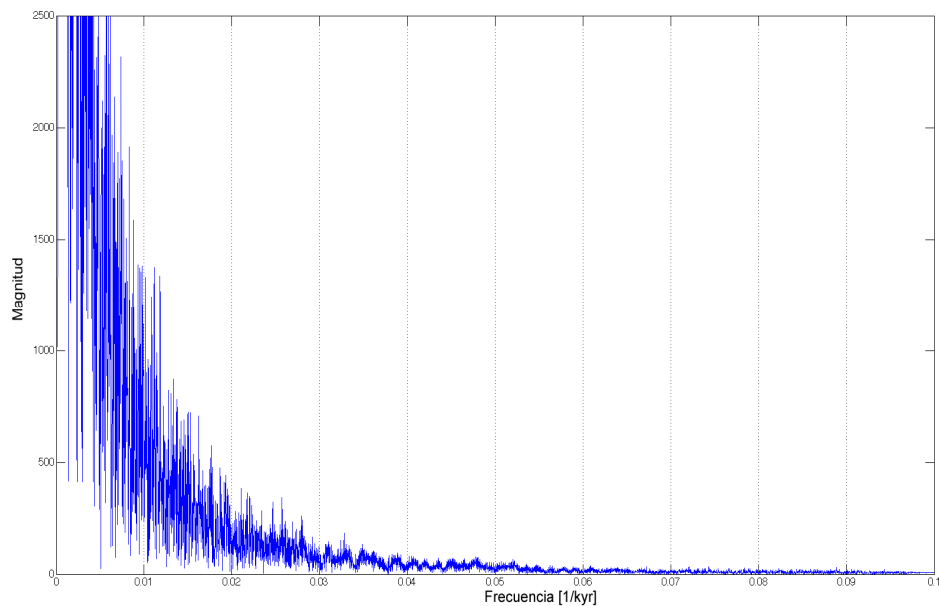


Figura 8
Transformada de Fourier de la serie de datos del ^{14}C

Capítulo 4. Análisis de datos

El análisis sobre los datos del ^{10}Be mediante la Transformada de Fourier con las ventanas de Hamming y Gauss, se muestra en las figuras 9 y 10 respectivamente, donde no aprecia una gran variación en lo que se refiere a los diferentes periodos mínimos hasta los 2000 años.

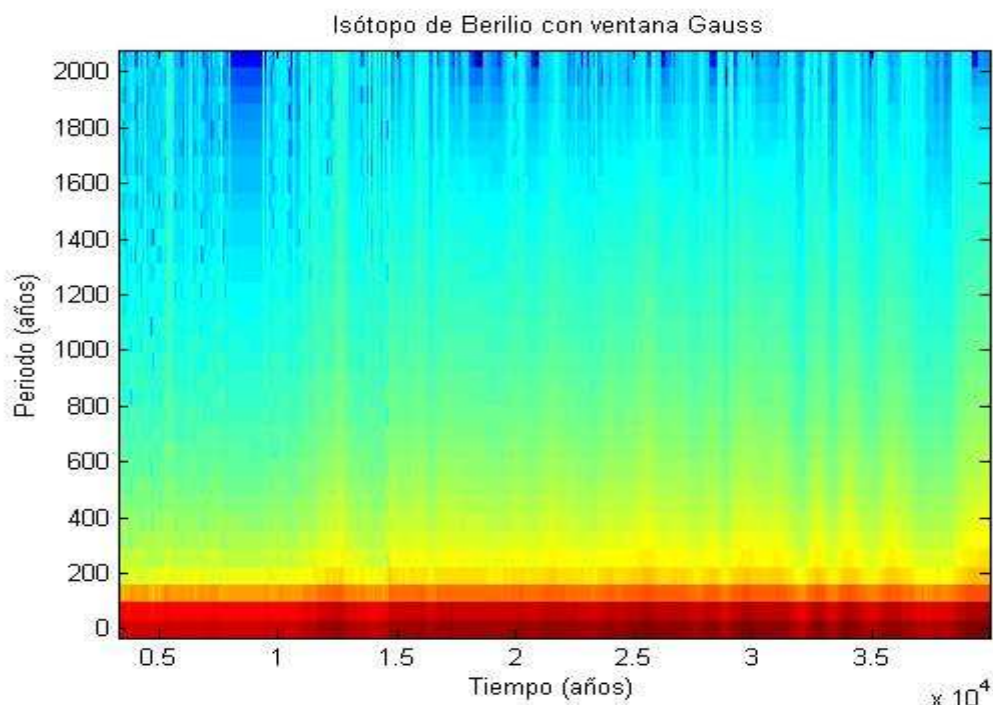


Figura 9.
Fourier con ventana Gauss en la serie de datos del ^{10}Be

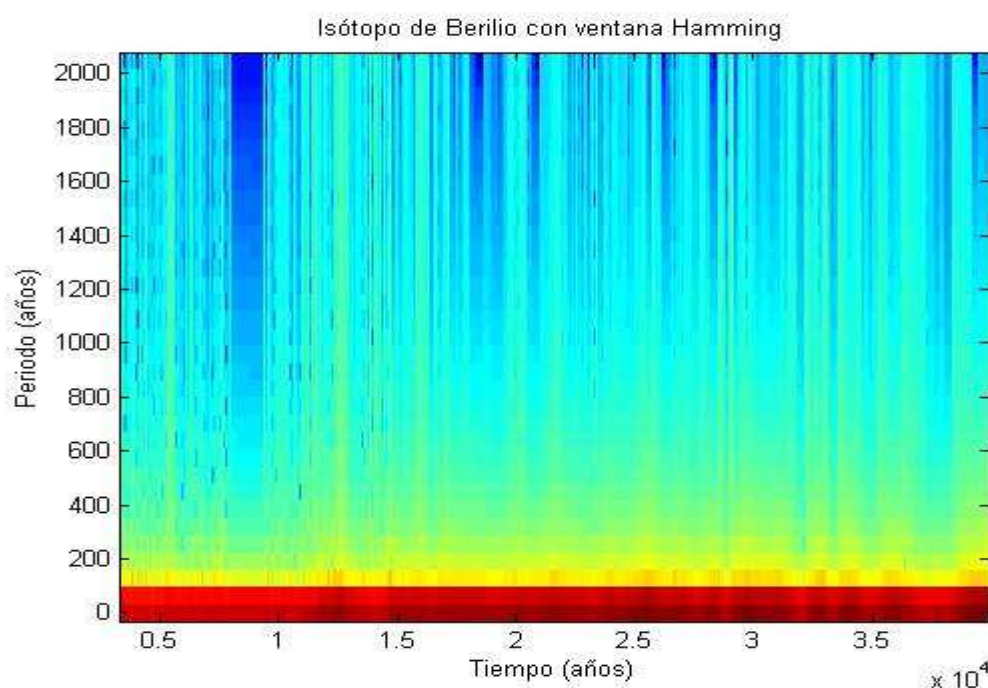


Figura 10
Fourier con ventana Hamming en la serie de datos del ^{10}Be

Capítulo 4. Análisis de datos

En el análisis espectral de la Transformada wavelet se presentan las figuras 11 y 12 las cuales tienen las características siguientes, en la parte superior del panel de cada una de las figuras se muestra el registro de la serie del isótopo ^{14}C hasta los 26 000 años aproximadamente, este periodo abarca parte del último glacial en donde se presentan los eventos Dansgaard-Oerschger y el periodo hasta los 10 000 años denominado el periodo del Holoceno, en la parte derecha se muestra el espectro global del wavelet, y en la parte central el espectro wavelet de Morlet.

En la figura 11 se presenta: a) la serie completa de datos del isótopo ^{14}C , b) el espectro global donde se obtiene solo una frecuencia máxima de aproximadamente 1500 años, y además supera el nivel de confiabilidad que corresponde a un 95%, y c) el espectro de la Transformada wavelet con la función de Morlet donde el resultado que se puede observar es la presencia y continuidad de la frecuencia que se tiene en el espectro global, debido a que el tono rojo representa un mayor nivel de energía con respecto a los colores más tenues, el cual está presente a lo largo de toda la serie de datos.

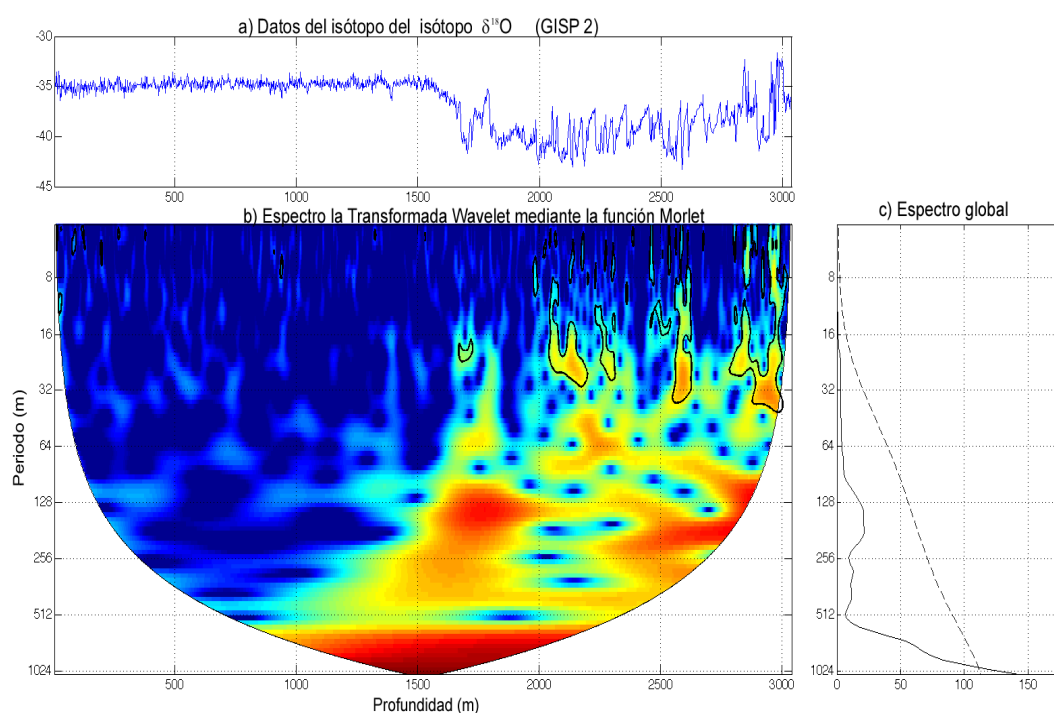


Figura 11
Transformada wavelet de los datos del isótopo ^{14}C

En la figura 12 se presenta la gráfica del análisis de datos del isótopo ^{14}C hasta los 10,000 años antes de nuestra era, que corresponde a la época del Holoceno. Los resultados obtenidos muestran, al igual que en las gráfica anterior, el máximo de 1500 años aproximadamente y además se obtuvieron otros dos máximos de menor magnitud, que también superan el nivel de confiabilidad, estos dos máximos corresponden a los valores de 512 y 1000 años aproximadamente.

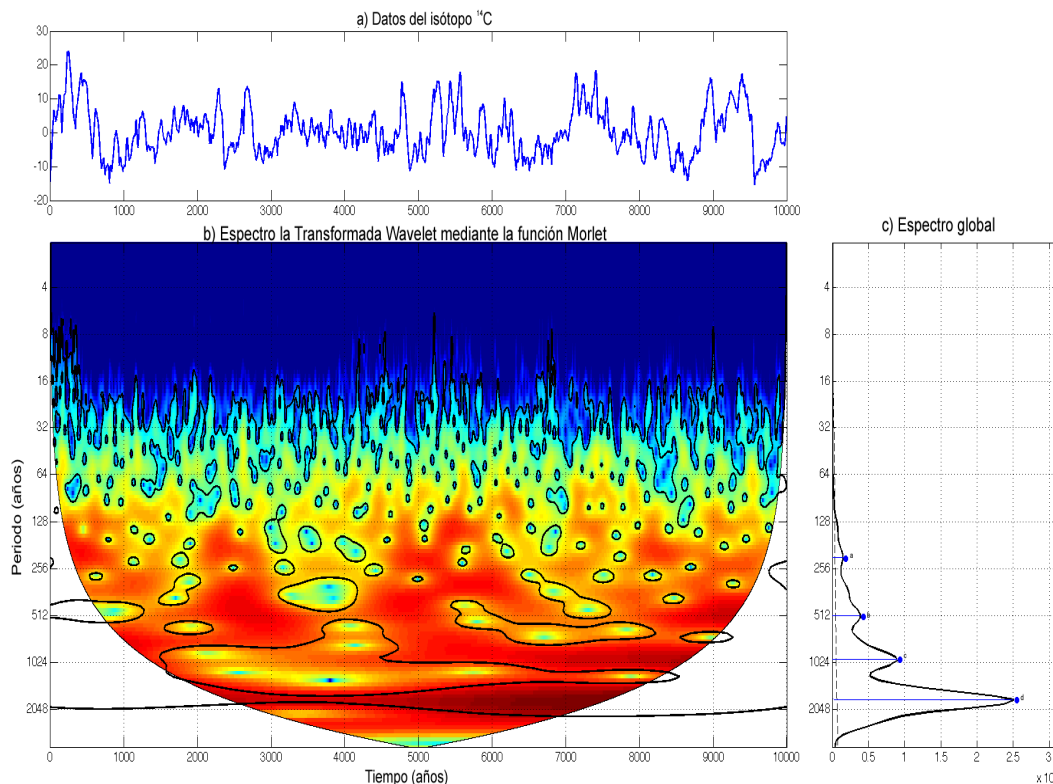


Figura 12

Transformada wavelet de los datos del isótopo ^{14}C hasta los 10 000 años antes de nuestra era

El método para caracterizar cada uno de los eventos Dansgaard-Oerschger, consiste en separar las altas frecuencias y las bajas frecuencias de los datos, mediante el uso de la Transformada wavelet mediante la función de Daubechies utilizado en los trabajos de Valdés- Galicia J. y Velasco V. [18, 27].

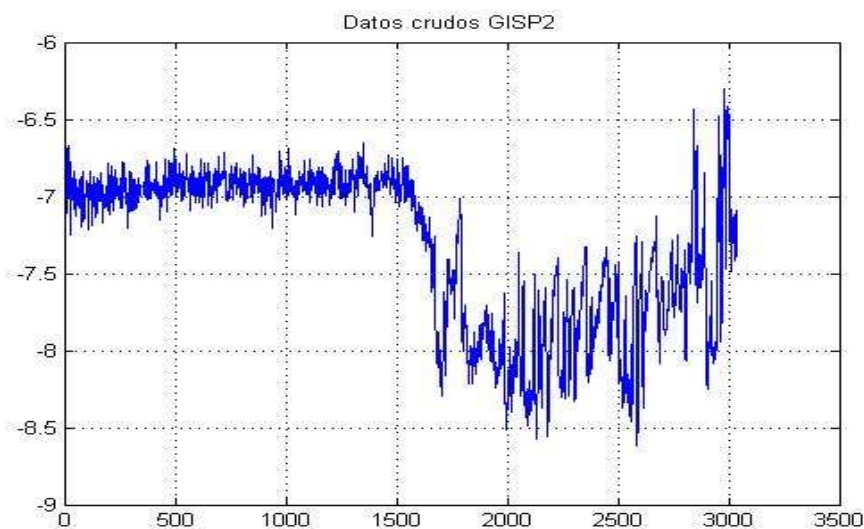


Figura 13

Serie de datos del isótopo δO^{18}

En la Figura 13 se muestran los datos del GISP2 los cuales abarcan una profundidad de 3000 metros aproximadamente. Estos datos son introducidos en un programa en

Capítulo 4. Análisis de datos

MatLab, en donde son filtrados, y se obtienen ciertos coeficientes de aproximación y también los coeficientes de detalle, en base a estos coeficientes obtenidos se reconstruye la señal como se observa en la Figura 14, con una línea continua. La suavidad de la señal reconstruida depende de la función Daubechies elegida.

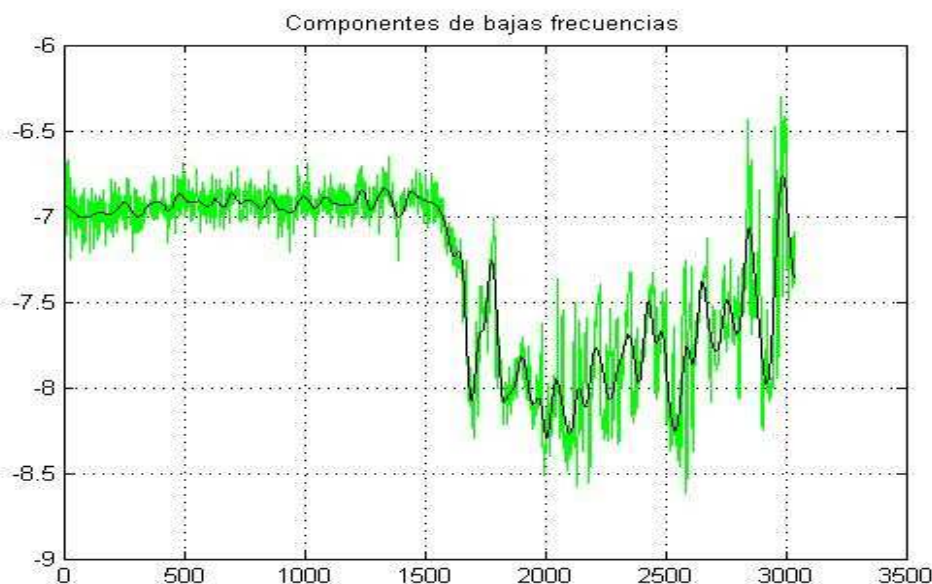


Figura 14
Datos del isótopo δO^{18} filtrados

Lo siguiente a realizar es obtener las altas frecuencias, al restar la señal reconstruida de la señal original, para determinar los eventos Dansgaard-Oerschger.

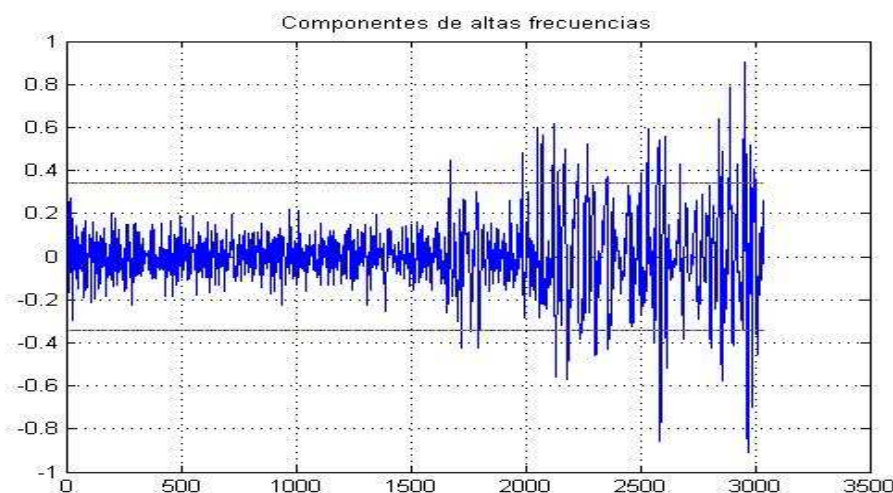


Figura 15
Componentes de alta frecuencia en los datos del isótopo δO^{18}

De acuerdo a las descripciones de los eventos Dansgaard-Oerschger se presentaron de forma más consistente durante los 15 y 46 miles de años antes de nuestra era, por esta razón el análisis de datos se centro en este periodo.

Capítulo 4. Análisis de datos

La parte principal para poder detectar los eventos Dansgaard-Oerschger consiste en elegir aquellos valores que superan un umbral con valor igual a dos veces la desviación estándar, de esta forma se tiene una mayor posibilidad de certeza.

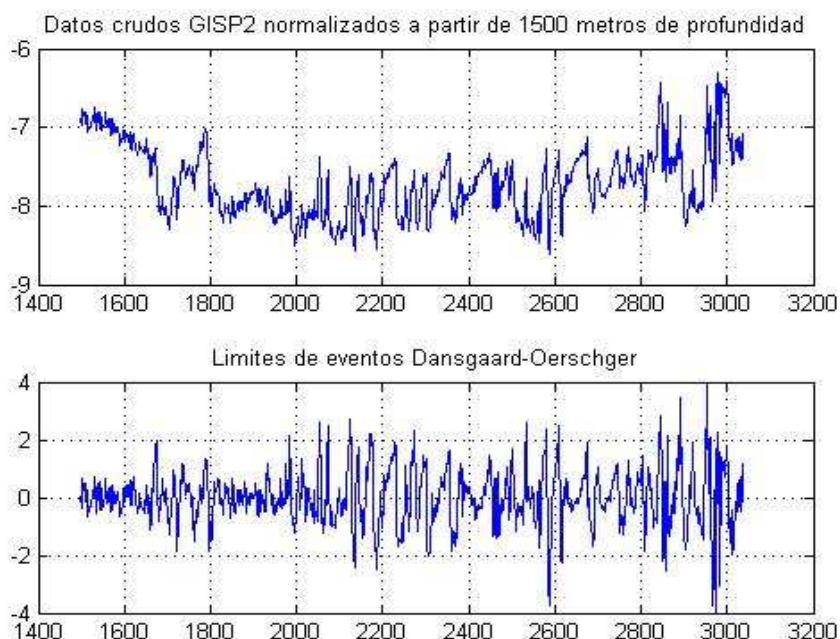


Figura 16
Esparcimiento de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$

A partir de este procedimiento se obtiene que la cantidad de valores que sobrepasan el umbral en este caso son 40, el método nos indica que en los núcleos de hielo del proyecto GISP2 se tienen registrados al parecer 40 eventos del tipo Dansgaard-Oerschger. Los datos de los eventos se muestran en la siguiente tabla I, donde se indica la profundidad, el valor del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ y la edad correspondiente.

Tabla I

Evento	Profundidad [m]	Isótopo de O^{18}	Edad del isótopo
1	1984	-38.31	23303
2	2054	-36.99	27736
3	2072	-38.18	28843
4	2074	-37.88	28941
5	2122	-38.35	32003
6	2124	-37.66	32123
7	2136	-43.05	32913
8	2170	-38.18	34972
9	2174	-38.1	35147
10	2184	-42.96	35706
11	2274	-37.87	41091
12	2306	-41.81	42713
13	2534	-38.39	61869.8
14	2580	-36.86	68183
15	2582	-36.45	68437
16	2584	-41.72	68747.2

Capítulo 4. Análisis de datos

17	2586	-42.58	69057.4
18	2588	-43.26	69367.6
19	2590	-42.37	69677.8
20	2608	-36.83	72478
21	2610	-36.64	72750.7
22	2614	-41.91	73296
23	2616	-42.05	73623.3
24	2840	-33.41	999999
25	2844	-32.58	999999
26	2846	-32.3	999999
27	2850	-38.01	999999
28	2856	-38.61	999999
29	2860	-33.51	999999
30	2890	-34.39	999999
31	2948	-35.2	999999
32	2952	-34.61	999999
33	2954	-32.53	999999
34	2960	-33.79	999999
35	2964	-39.88	999999
36	2966	-39.49	999999
37	2970	-37.63	999999
38	2972	-39.25	999999
39	2978	-31.63	999999
40	2984	-37.49	999999

Los datos con 999999 corresponden a valores que aun no se ha calibrado su valor. En la figura 17 se muestran en las gráficas: a) parte superior los datos del isótopo $\delta^{18}O$, b) parte central se tiene la serie de datos filtrados mediante la Transformada wavelet y, c) parte inferior se tienen las fluctuaciones que se presentan con respecto a las gráficas anteriores.

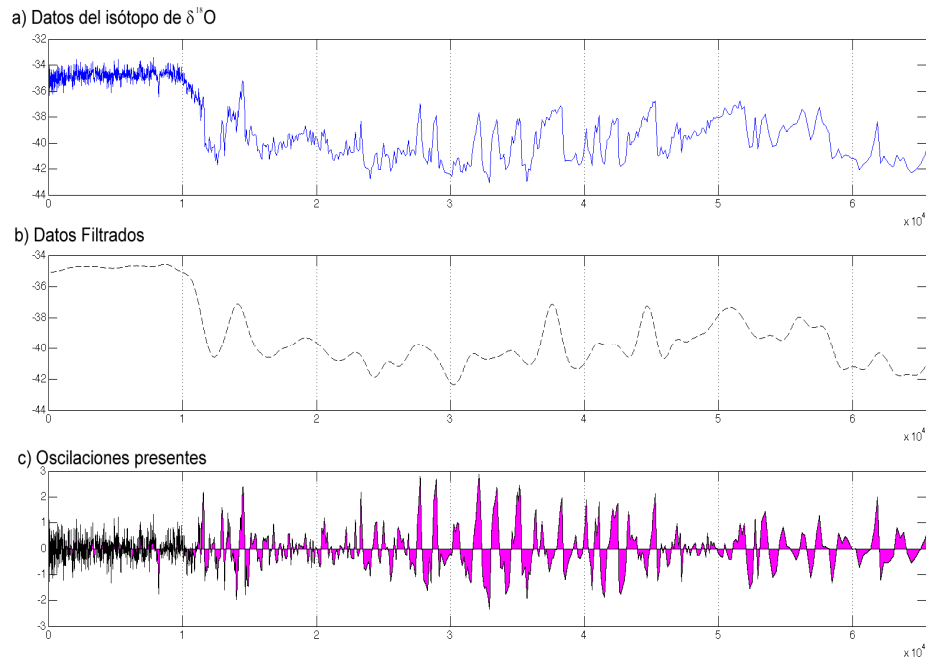


Figura 17
Serie de datos del δO^{18} (gráfica superior), datos filtrados (parte central) y oscilaciones (parte inferior)

Al igual que la serie de datos del isótopo ^{14}C , en la figura 18 se muestra el espectro de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ utilizando la Transformada de Fourier, en donde también se aprecia la complejidad de poder analizar las frecuencias presentes en el registro de datos.

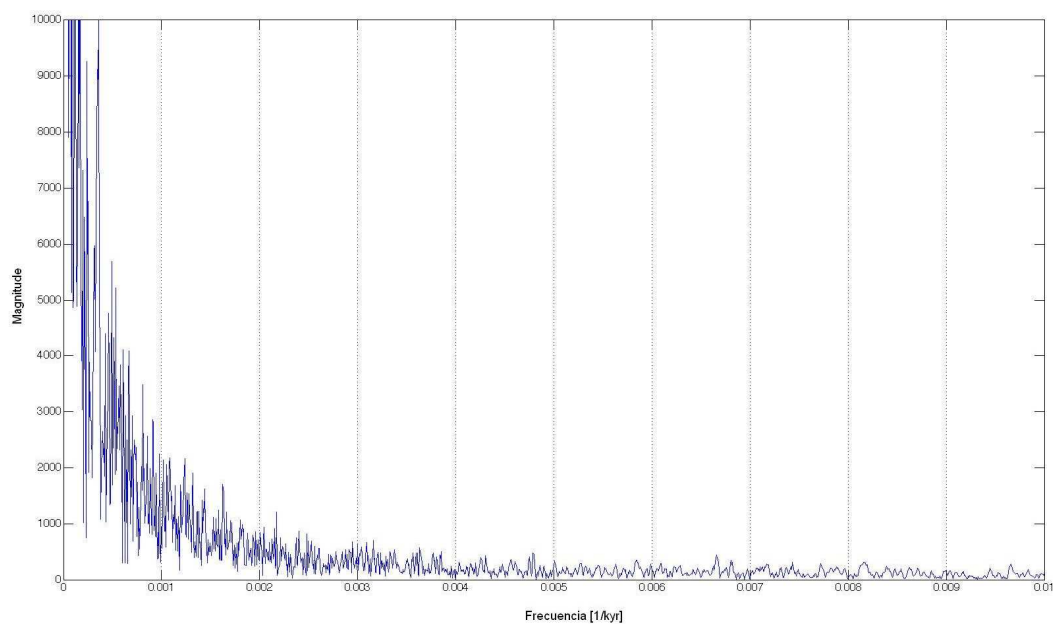


Figura 18
Transformada de Fourier de la serie de datos del δO^{18}

El análisis de los datos del isótopo $\delta^{18}O$ se realizó con la Transformada de Fourier con ventanas (STFT), donde se pueden apreciar en las figuras 19 y 20 que aparentemente no existe una cierta frecuencia predominante en la serie de datos del isótopo de oxígeno, como se menciona en el capítulo 3 sección 3.4, las desventajas de la Transformada de Fourier con ventana tiene una ventana de tamaño fijo, así como diferentes tipos de ventana, además la Transformada de Fourier con ventanas es una mejor opción en el estudio de análisis de señales con variaciones de alta frecuencia por periodos largos o variaciones de corta duración de frecuencias bajas .

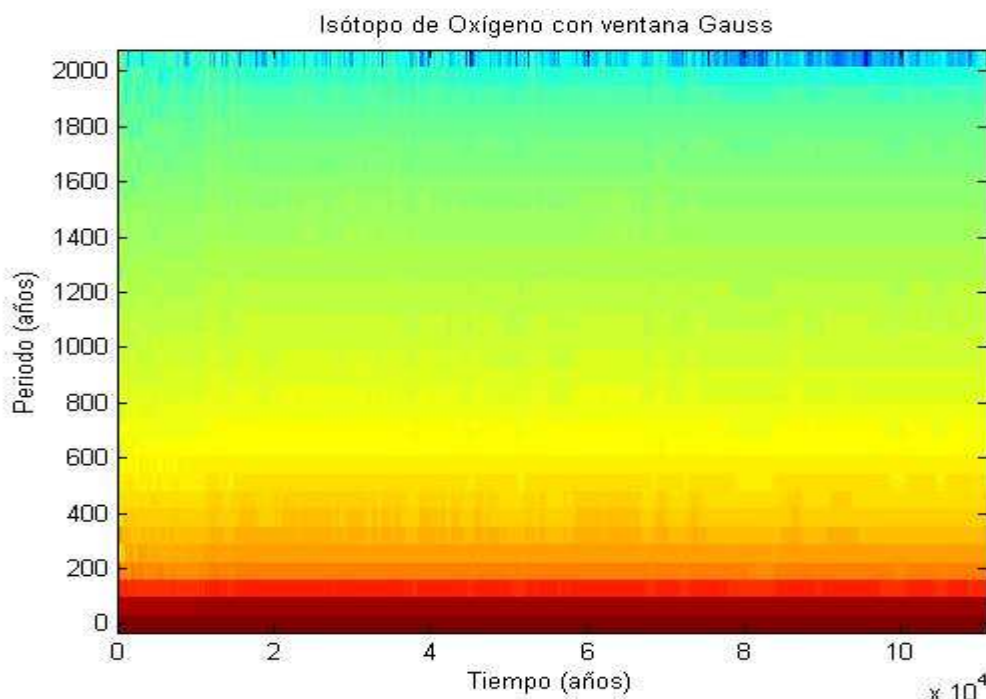


Figura 19
Fourier con ventana Gauss en la serie de datos del δO^{18}

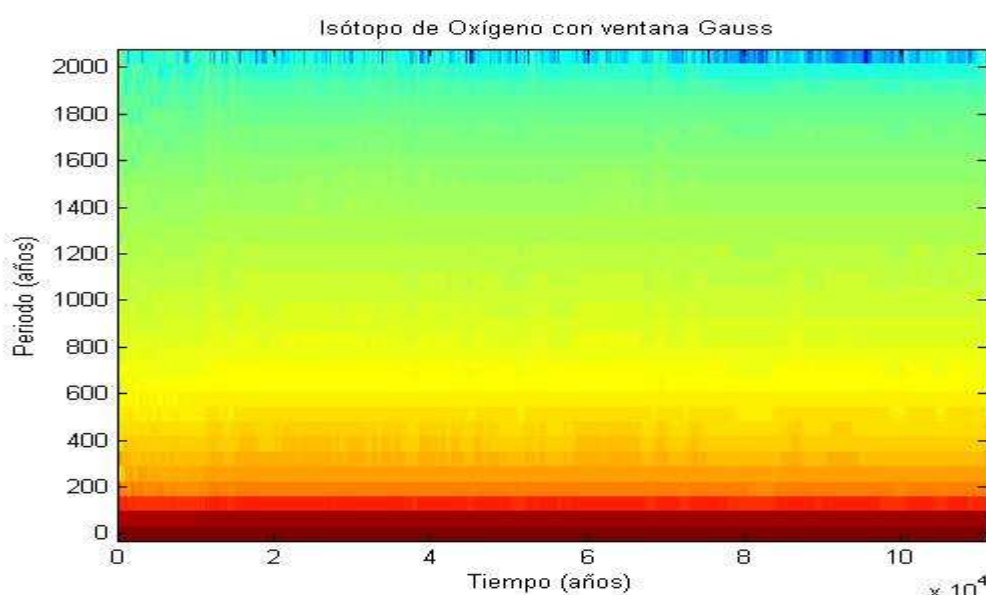


Figura 20
Fourier con ventana Gauss en la serie de datos del δO^{18} (diferente tamaño de la ventana)

Los resultados obtenidos mediante el análisis espectral a través de la Transformada wavelet, con respecto a la relación profundidad contra el porcentaje del isótopo $\delta^{18}\text{O}$, son las siguientes, en la figuras 21, 22 y 23 se muestra: a) parte superior, el registro de la serie del isótopo $\delta^{18}\text{O}$, b) la parte derecha muestra el espectro global de la Transformada wavelet, c) en la parte central el espectro de la Transformada wavelet con la función de Morlet, dentro de esta gráfica se tiene el cono de influencia (COI), esto se debe al análisis de series de longitud de tiempo finita, donde habrá errores al principio y final del espectro de potencia la Transformada wavelet, por lo tanto, una solución es rellenar el final de la serie de tiempo con ceros para llevar la longitud total N a la siguiente potencia mas alta de dos, limitando los efectos de borde Meyers , para una serie cíclica, no hay necesidad de llenar con ceros y no hay cono de influencia (COI), así todo lo que se encuentra dentro del COI tiene el 95% de confiabilidad.

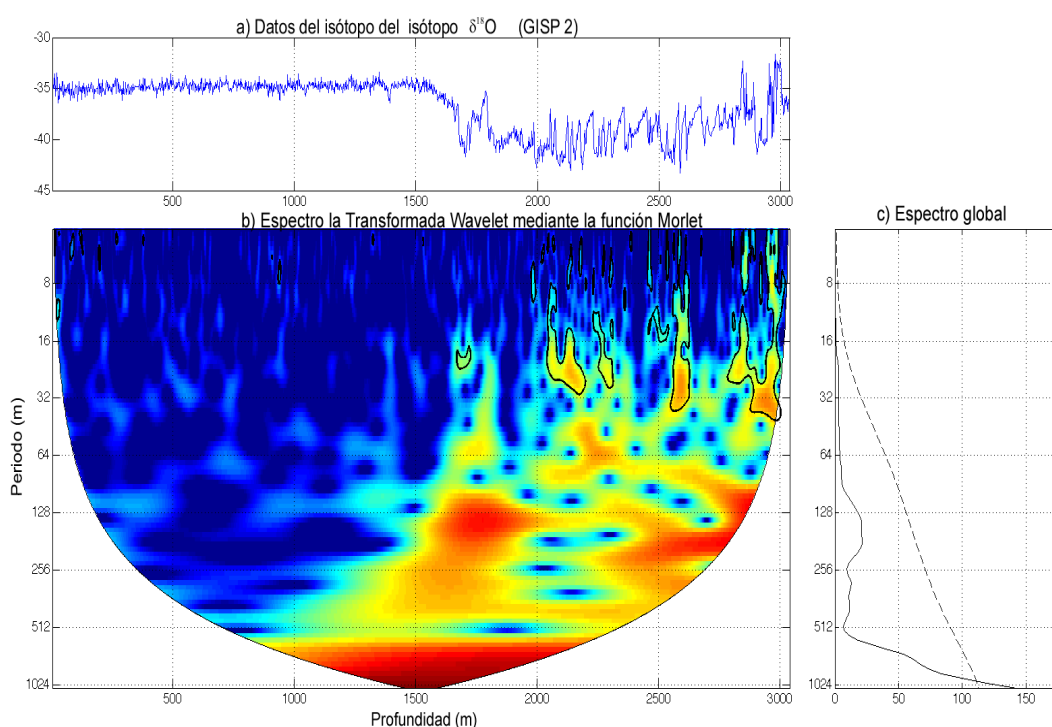


Figura 21
Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ (proyecto GISP)

Como se puede observar en la figura 21, se presenta el espectro de la Transformada wavelet de toda la serie de datos del proyecto GISP2, es decir, desde el nivel de suelo hasta aproximadamente 3000 metros de profundidad, del espectro global se obtienen solo algunas valores máximos entre los 128 y 256 metros, sin embargo estos resultados no superan el nivel de confiabilidad que corresponde a un 95%. Por otra parte al parecer el valor de profundidad que está por encima de este nivel de confiabilidad, corresponde a una profundidad de más de 1024 metros.

Los mismos resultados se pueden observar en el espectro de la Transformada wavelet, ya que el tono rojo representa un mayor nivel de energía con respecto a los colores más

tenues; además en esta gráfica se puede apreciar un mejor resultado de como existen mayores variaciones después de los 1500 metros de profundidad.

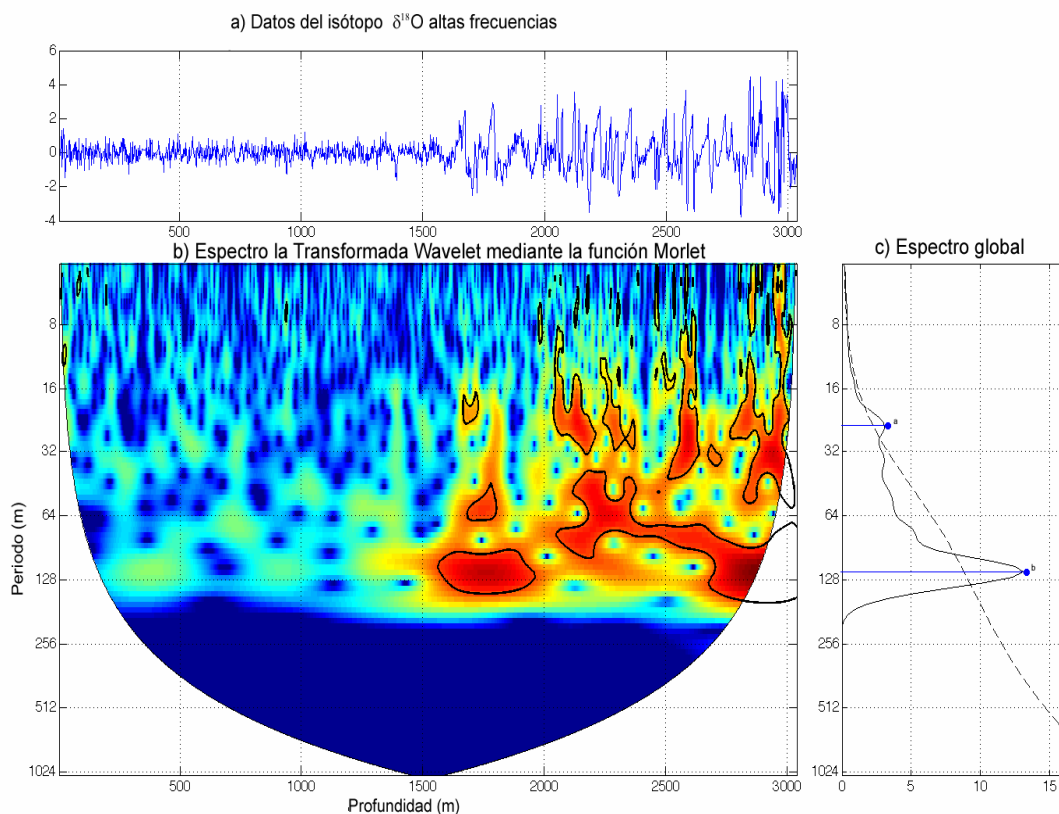


Figura 22
Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}O$ (altas frecuencias)

En la figura 22 se observa el análisis de las altas frecuencias presentes en la serie de datos del isótopo $\delta^{18}O$ obtenidos mediante el primer análisis descrito para detectar los posibles eventos Dansgaard-Oerschger, del espectro global se puede observar que existen dos valores máximos que están por encima del nivel de confiabilidad del 95%, y que corresponden aproximadamente a 25 y 120 metros de profundidad. Estos mismos resultados se verifican en la gráfica del espectro de la Transformada wavelet, y así como en la gráfica anterior estas variaciones se presentan después de los 1500 metros de profundidad con respecto al registro total de datos.

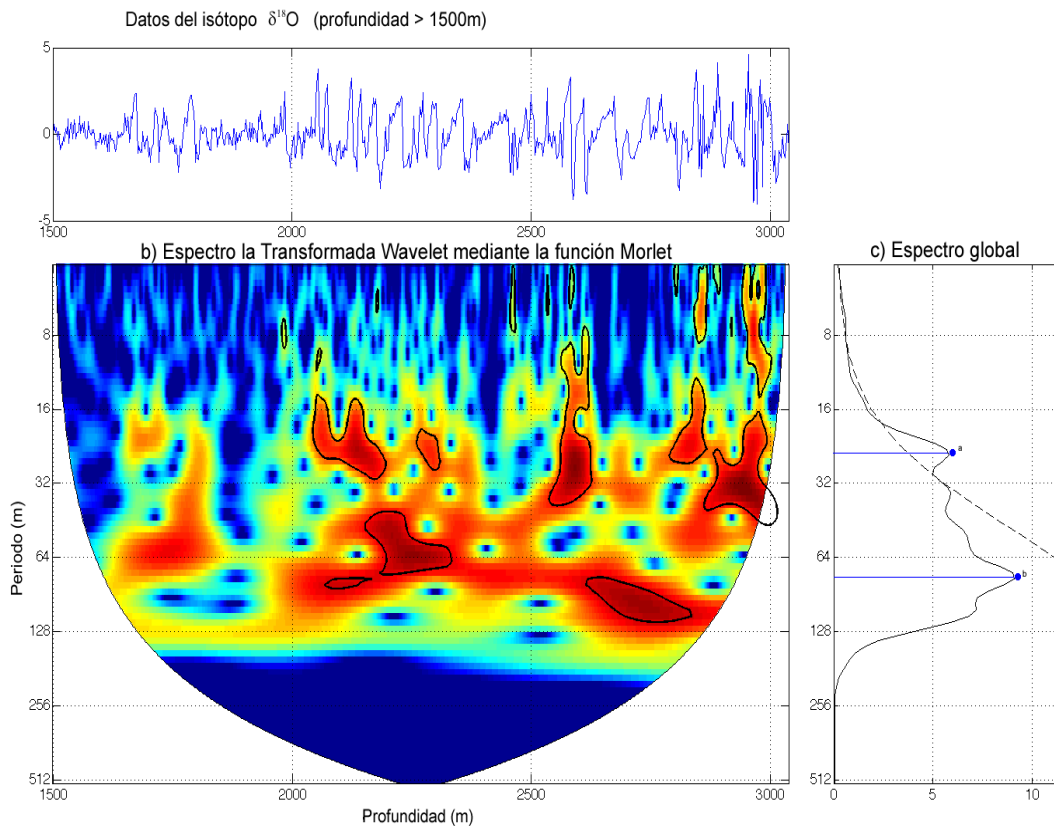


Figura 23
Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ (profundidad > 1500 metros)

Los resultados que se observan en las figuras 21 y 22, son las variaciones de la serie que se presentan con mayor proporción en los datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ a partir de los 1500 metros de profundidad. En la figura 23 se presenta el análisis espectral de la serie de datos de la figura 22, pero solamente los datos que corresponden a valores de profundidad mayores a los 1500 metros, en esta gráfica se observa que la profundidad que supera el nivel de confiabilidad, corresponde al valor de 25 metros y el valor de 120 metros no está presente. El valor máximo de 75 metros aproximadamente este no supera el nivel de confiabilidad; al observar el espectro de la Transformada wavelet con la función Morlet se observa que los máximos mencionados se encuentran con mayor claridad.

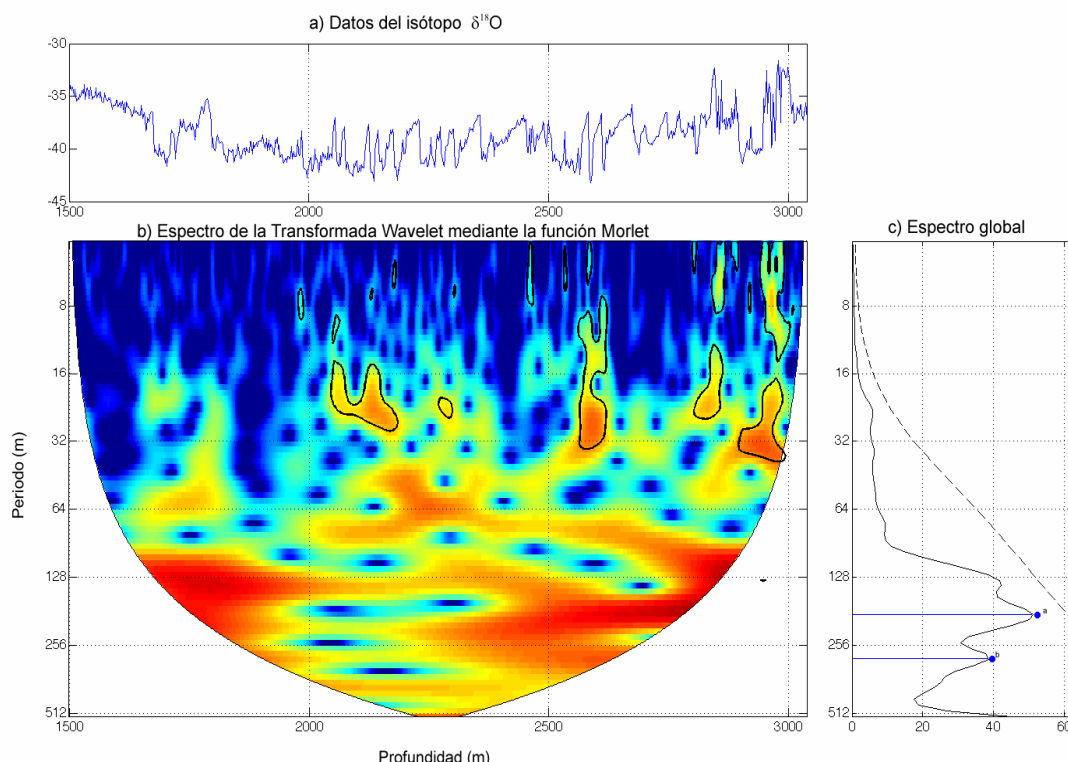


Figura 24

Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}O$ con profundidad mayor a 1500 metros

En la figura 24 se muestran los resultados obtenidos sobre el análisis de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}O$, cuyos valores son mayores a los 1500 metros de profundidad. En el espectro global se obtienen sólo dos valores, los cuales corresponden a 192 y 280 metros aproximadamente; ninguno de estos valores supera el nivel de confiabilidad, por otra parte en el espectro de la Transformada wavelet con la función Morlet es más notable la presencia de estas variaciones con respecto a un primer análisis realizado en la serie de datos completa.

Los máximos que se observan en las gráficas de las figuras 21, 22, 23 y 24 se compararon con los datos acerca de la relación de profundidad y cantidad de isótopo $\delta^{18}O$, no se puede encontrar alguna frecuencia que se acerque los 1500 años.

En las figuras 25 y 26 se presentan los resultados obtenidos para los datos del isótopo $\delta^{18}O$, el análisis que se realizó fue con respecto al tiempo que se tiene registrado en el isótopo $\delta^{18}O$ a una cierta profundidad.

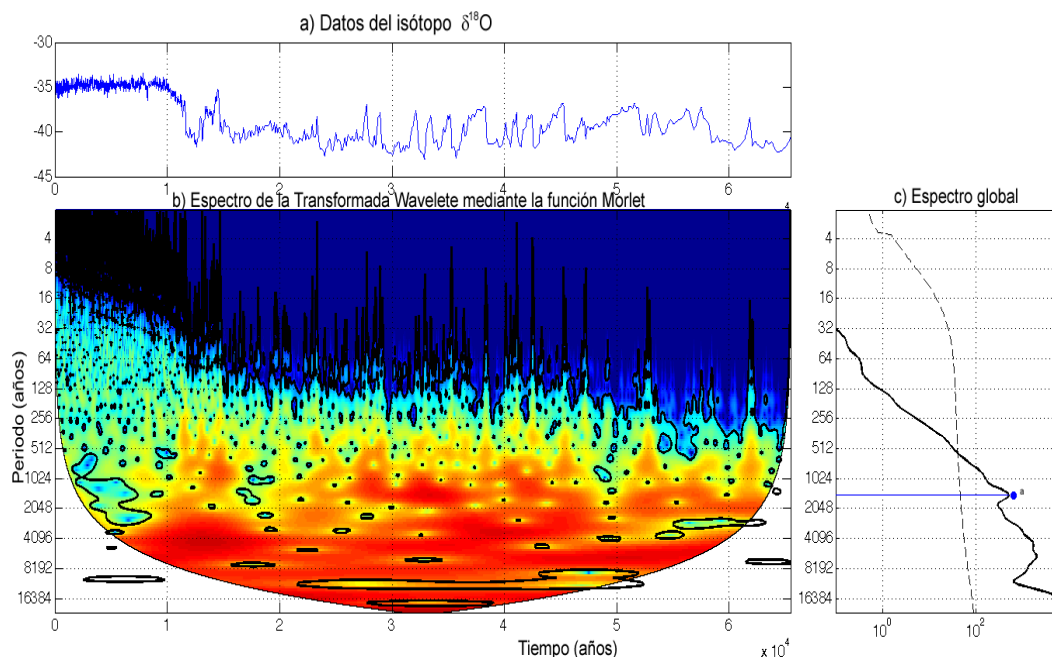


Figura 25

Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ (análisis en tiempo, escala logarítmica)

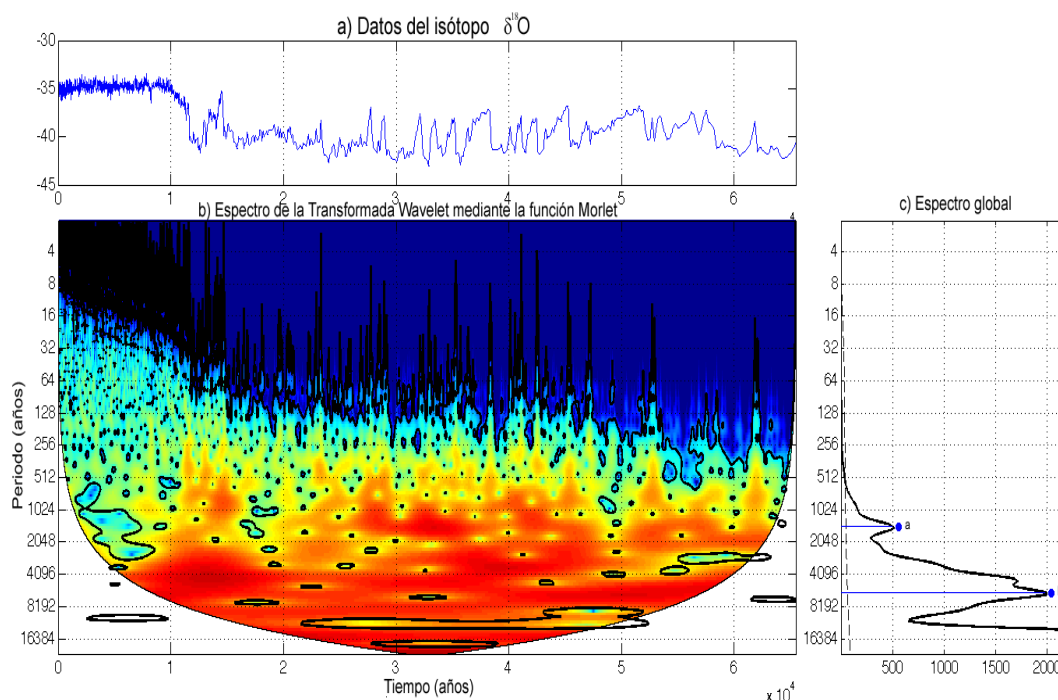


Figura 26

Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ (análisis en tiempo, escala lineal)

Como se puede observar en ambas gráficas se obtienen algunos máximos notables cuyos valores son de 1500, 5000 y 7500 años aproximadamente, que se encuentran por encima del valor de confiabilidad, debido a que los espectros globales son la única diferencia de ambas gráficas, debido al tipo de escala lineal en una y logarítmica en la otra gráfica; se tiene que en esta última parece ser que existe un máximo que

correspondería al valor de 16000 años, la cual también se encuentra por encima del nivel de confiabilidad.

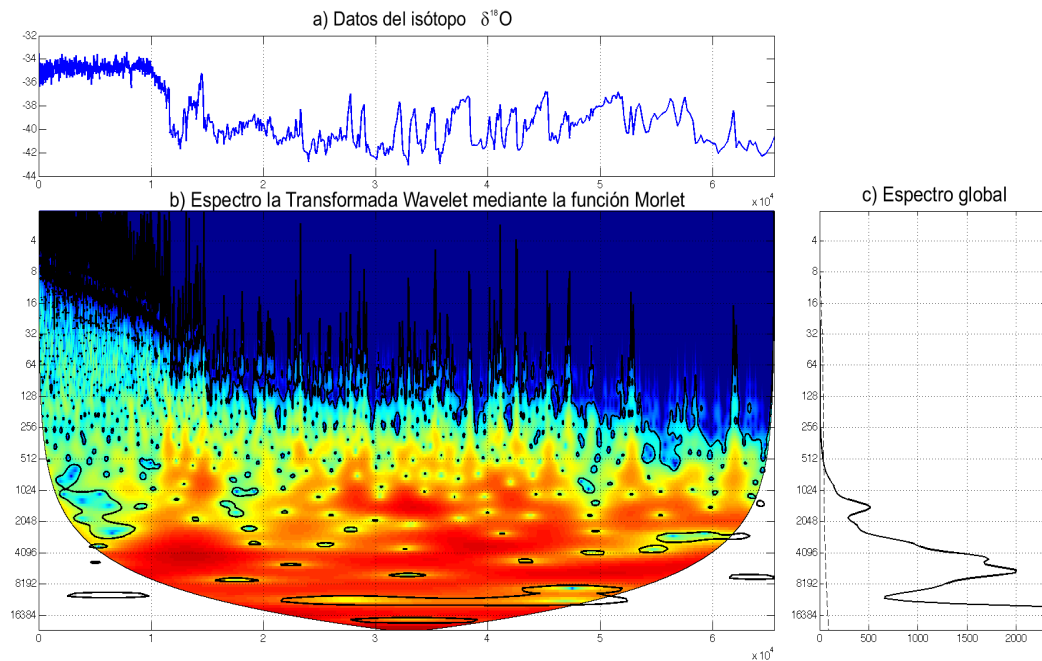


Figura 27
Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ (bajas frecuencias)

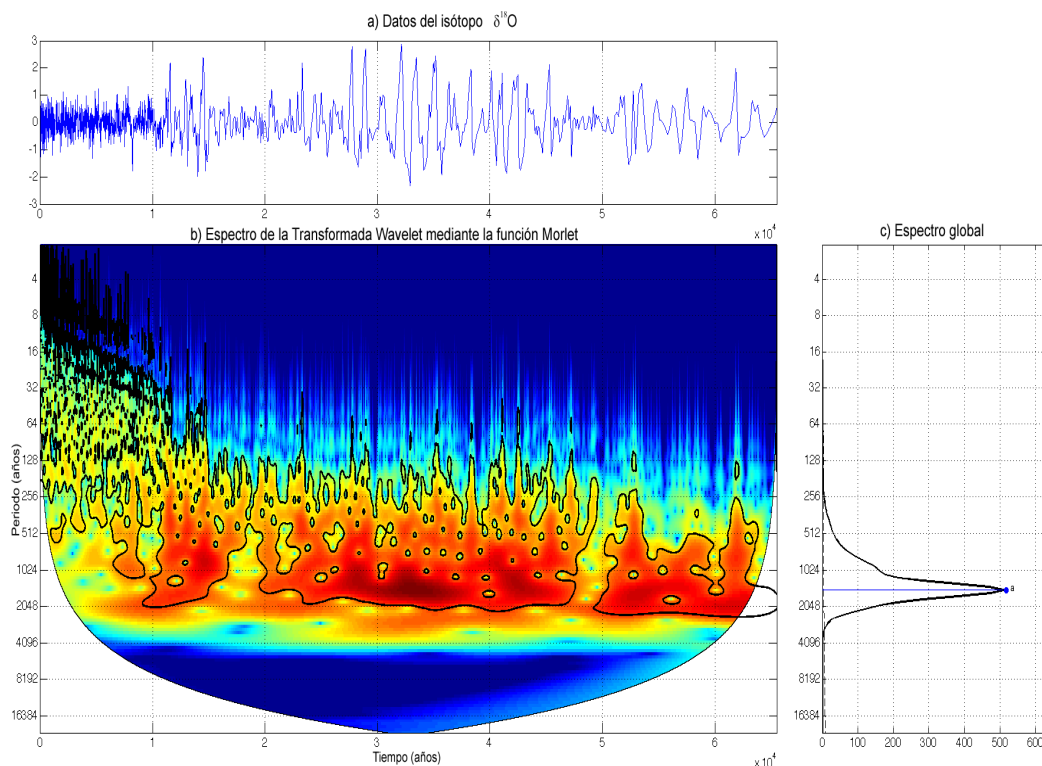


Figura 28
Transformada wavelet de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$ (frecuencias altas)

En las figuras 27 y 28 se muestra el análisis realizado a las particularidades de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}O$, bajas y altas frecuencias, mediante la Transformada wavelet.

En la figura 27 se tienen las bajas frecuencias de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}O$ y nuevamente se obtienen los máximos al igual que en las observadas en las figuras 25 y 26, en el espectro global y en el espectro de Morlet se puede observar esta característica y que es muy continuo durante todo el periodo de tiempo.

En la figura 28 se muestra solamente el análisis de las altas frecuencias presentes en la serie de datos del isótopo $\delta^{18}O$, de estas gráficas se tiene que en el espectro global sólo se cuenta con un máximo cercano a los 1500 años y en el espectro de Morlet se observa que esta periodicidad no está presente siempre a lo largo de todo el periodo de tiempo de los datos del isótopo $\delta^{18}O$.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos en el análisis del isótopo del ^{14}C , se obtuvieron varias conclusiones muy importantes acerca de la actividad solar y su posible efecto en la Tierra:

- por una parte se observa que existe una periodicidad alrededor de los 1500 años en fenómenos solares,
- es una periodicidad prominente,
- está presente durante todo el periodo de tiempo que abarcan los registros.

Los datos registrados del isótopo ^{14}C abarcan parte del ultimo periodo glacial y lo que es el Holoceno; los eventos Dansgaard-Oerschger parece ser que no sólo están presentes en el último periodo glacial, por el contrario los resultados obtenidos nos indican que éstos continuaron y que tal vez hoy en día aún se sigan presentado estos eventos, los cuales estarían posiblemente reflejados en el derretimiento que sufren actualmente los polos.

La periodicidad solar de alrededor de 1500 años es posiblemente uno de los forzadores externos de los eventos Dansgaard-Oerschger.

Las oscilaciones Dansgaard-Oerschger presentan una periodicidad de alrededor de 1500 años.

Los resultados obtenidos a partir del primer análisis de la serie de datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$, muestran que mediante el método de la desviación estándar, es posible detectar la cantidad de 40 eventos Dansgaard-Oerschger, valor que resulta mayor, que el que se obtiene mediante otros métodos de detección, como los obtenidos por Schulz [17].

En la figura 24 se obtuvieron dos valores significativos que no sobrepasaron el nivel de confiabilidad y cuya relación profundidad-tiempo, es tal, que a la frecuencia de 128 metros le correspondería un valor de 386 años aproximadamente y para el valor de 256 metros le correspondería un valor de 940 años. En la figura 24 se obtuvo un valor que superó el nivel de confiabilidad, cuyo valor es de 1024 metros aproximadamente y la relación con la escala del tiempo le corresponde un valor de 5224 años aproximadamente. En la figura 25 resultaron dos máximos, uno de ellos superó el nivel de confiabilidad y es aproximadamente igual a 120 metros, resultando muy cercano al obtenido en la figura 9. En las figuras 26 y 27 se obtuvieron resultados muy semejantes. Además estos resultados podrían ser de utilidad en lo que se refiere a la composición química de los núcleos de hielo al tratar otros elementos además del isótopo $\delta^{18}\text{O}$.

El análisis en las gráficas 27 y 28 se obtuvo el máximo cuyo valor es el que se encuentra asociado con los eventos Dansgaard-Oerschger, determinando de esta manera que al analizar la relación de isótopo $\delta^{18}\text{O}$ con la escala del tiempo, existe una frecuencia que se presenta en la mayor parte del periodo que abarca desde los 10 mil años hasta los 60 mil años antes del presente, para confirmar dichos resultados se



Conclusiones

realizó el análisis en las características de los datos del isótopo $\delta^{18}\text{O}$, en bajas y altas frecuencias, en los cuales también se encontró la frecuencia cercana a los 1500 años. Los resultados obtenidos en los análisis presentados en esta tesis, muestran que, posiblemente la actividad solar es uno de los factores externos más importantes en fenómenos climáticos terrestres y que se debería de tomar más en cuenta en los modelos climáticos y en los escenarios del cambio climático.

Bibliografía

- [1] Addison. S. P.; The Illustrated Wavelet Transform Handbook. Institute of Physics Publishing, 2002.
- [2] H. Renssen, J. van der Plicht, V.A. Dergachev, H.J.A Meijer, B. van Geel, O.M. Rasnov.; The role of solar forcing upon climate change. *Quaternary Science Reviews*, 18, Pág. 331-338, 1999.
- [3] Bradley. S. R.; Paleoclimatology: Reconstructing Climates of Quaternary. HARCOURT, 1999.
- [4] Graps. A.; An introduction to wavelets. *IEEE Computational Science and Engeneering*, 35, Pág. 50-61, 1995.
- [5] Mallat. G. S. ;A theory for multiresolution signal descompisition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, Pág. 674-693, 1989.
- [6] Stuvier M. and Grootes. M. P.; Gisp2 oxygen isotope ratios. *Quaternary Research*, 53, Pág. 277-284, 2000.
- [7] Walnut. F. D.; An Introduction to Wavelets Analysis. Birkhouser Boston, 2002.
- [8] Braun H., Christl M., Rahmstorf S., Ganopolski A., Mangini A., Kubatzki C., Roth K., Kromer B.; Possible Solar Origin of the 1470-year Glacial Climate Cycle Demonstrated in a Couple Model. *Nature*, 438, Pág. 208-211, 2005.
- [9] Schwander J., Johnsen S., Lang C., Leuenberger M.; 16°C rapid temperature variation in central Greenland 70,000 years ago. *Science*, 286; Pág. 934-937, 1999.
- [10] Mallat. G. S.; A theory for multiresolution signal descompisition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, Pág. 674-693, 1989.
- [11] Rahmstorf S.; Timing of abrupt climate change. *Geophysical Research Letters*, 30, Pág. 10-17, 2003.
- [12] Dittersen P. D., Andersen K. K., and Svensson A.; The DO-climate events are probably noise induce: statistical investigation of the claimed 1470 year cycle. *Climate of Past*, 3, Pág. 129-134, 2007
- [13] Torrence C. and Gilbert P. Ocampo.; A practical guide to Wavelet Analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79, Pág. 61-78, 1998.
- [14] Schulz M.; The tempo of climate change during Dansgaard-Oerschger interstadials and its potential to affect the manifestation of the 1470-year climate cycle. *Geophysical Research Letters*, 29, Pág. 2,1-2,7; 2002.

- [15] Schulz, M., W. H. Berger, M. Sarnthein, and P.M. Grootes.; Amplitude variations of 1470-year climate oscillations during the last 100,000 years linked fluctuations of continental ice mass. *Geophysical Research Letters*, 26, Pág. 3385-3388, 1999.
- [16] Schulz M. On the 1470-year pacing of Dansgaard-Oeschger warm events. *Paleoceanography*, 17, Pág. 4-1 – 4-9, 2002
- [17] Wunsch C., On sharp spectral lines in the climate record and the millennial peak, *Paleoceanography*, 15, Pág. 417– 424, 2000.
- [18] Mendoza B., Velasco, V., Valdés-Galicia J.; Mid-Term Periodicities in the Solar Magnetic Flux. *Solar Physics*, Volume 233, Number 2, February 2006 , Pág. 319-330
- [19] Cordero G., Lara A., Maravilla D., Mendoza B., Valdés-Galicia J. F. y Velasco V.; “Introducción a la física espacial” UNAM 2006 Capítulo 7
- [20] Cambio Climático 2001: La base científica — Contribución del Grupo de trabajo I al Tercer informe de evaluación del IPCC 2001. Pág. 23
- [21] Pierre B.; Mathematical principles of signal processing: Fourier and wavelets analysis. *Springer* , 2002.
- [22] Bravo S.; “Encuentro con una estrella” La ciencia / 114 para todos, Capítulo V
- [23] Otaola A. J., Mendoza B., Pérez R.; “El sol y la tierra una relación tormentosa”, La ciencia / 114 para todos Pág. 38,39
- [24] Henderson-Sellers A., McGuffie K.; “Introducción a los modelos climáticos” Omega, Pág. 23, Glosario IPCC
- [25] Uriarte C. A., Historia del Clima de la Tierra, Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco, 2003
- [26] Muscheler R. and Beer J., Solar forced Dansgaard/Oeschger events, *Geophysical Research Letters*, Vol. 33; L20706, 2006.
- [27] Valdés-Galicia J. F., Velasco V. M., Variations of mid-term periodicities in solar activity physical phenomena, *Advances in Space Research* 41, Pág. 297–305, 2008.

APÉNDICE

A continuación indico de donde obtuve los datos utilizados en la presente tesis.

Isótopo cosmogénico Berilio (Be^{10}):

<http://www.ncdc.noaa.gov/paleo/icgate.html>

Isótopo cosmogénico Carbono (^{14}C) :

<http://www.radiocarbon.org>,

http://depts.washington.edu/qil/datasets/intcal98_14c.txt

Datos del isótopo de oxígeno del proyecto GISP2:

http://depts.washington.edu/qil/datasets/gisp2_main.html

El programa MATLAB



MATLAB es el nombre abreviado de “MATrix LABoratory”. MATLAB es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. Como caso particular puede también trabajar con números escalares –tanto reales como complejos–, con cadenas de caracteres y con otras estructuras de información más complejas. Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones. MATLAB tiene también un lenguaje de programación propio MATLAB es un gran programa de cálculo técnico y científico. Para ciertas operaciones es muy rápido, cuando puede ejecutar sus funciones en código nativo con los tamaños más adecuados para aprovechar sus capacidades de vectorización. En otras aplicaciones resulta bastante más lento que el código equivalente desarrollado en C/C++ o Fortran. En cualquier caso, el lenguaje de programación de MATLAB siempre es una magnífica herramienta de alto nivel para desarrollar aplicaciones técnicas, fácil de utilizar y que, como ya se ha dicho, aumenta significativamente la productividad de los programadores respecto a otros entornos de desarrollo. MATLAB dispone de un código básico y de varias librerías especializadas (*toolboxes*).



FILTRO ÓPTIMO VARIABLE DE TIEMPO Y FILTRO WAVELET

```
clear;
clc;

load 'gsp2p.mat' % Serie de datos
a= gsp2p; %Desviación estándar
b = std(a);
sst1 = a/(2*b);
dt = 2;
ti=4;
tf=3038;

% Intervalo entre datos
time = [0:length(sst1)-1]*dt +ti; % intervalo de tiempo que en este
caso es profundidad
xlim = [ti,tf];
n=length(sst1); %número de datos

%%%%%%%%%%%% Filtro Wavelet Daubeshi

S=sst1;
grid;
%Filtro Daubeshi
[C2,L2]=wavedec(S,10,'db10');
a5d=wrcoef('a',C2,L2,'db10',4);

% Diferencia entre los datos crudos y del filtro wavelet de orden 5
dfwd=sst1-a5d;

sigma2=std(dfwd); %Desviación estándar
vmfwd=mean(dfwd); %Valor medio

%Gráficos de datos crudos (sst)
figure(1);
title('Filtro Wavelet 1');
plot (time,sst1);
title('Datos crudos GISP2');
grid;

figure(2)
%Gráfico del filtro wavelet (a5d)
plot(time,sst1,'g',time,a5d,'k');
grid;
title('Componentes de bajas frecuencias');

figure(3)
% Gráfico de la diferencia entre los datos crudos y del filtro wavelet
(dfvd)
plot(time,dfwd)
grid;
title('Componentes de altas frecuencias');
hold on
plot(time,vmfwd+2*sigma2,time,vmfwd-2*sigma2)
```



hold off

%%
Método para identificar los eventos Dansgaard-Oerschger

```
timep = time(748:1518);
sst1p = sst1(748:1518);
err = dfwd(748:1518);
errs = std(err);
sg1 = err/(errs);
figure (4)
subplot(2,1,1)
plot(timep,sst1p)
title('Datos crudos GISP2 normalizados a partir de 1500 metros de
profundidad');
grid on
subplot(2,1,2)
plot(timep,sg1)
title('Limites de eventos Dansgaard-Oerschger');
grid on

load 'gsp2time.mat'
sst2 = gsp2time;
tim = gsp2time(748:1518);
load 'gsp2p.mat'
sst3 = gsp2p;
isot = gsp2p(748:1518);
g = [];
h = [];
t1 = [];
t2 = [];
tor1 = [];
tor2 = [];
iso1 = [];
iso2 = [];
for x = 1 :length(sg1)
    if sg1(x)>2 % Calcular los valores mayores a 2 veces la desviación
estándar
        a = sg1(x);
        g = [g a];
        b1 = timep(x); % Obtenemos la profundidad que corresponde a
cada evento
        t1 = [t1 b1];
        c1 = tim(x); % Obtenemos el tiempo que corresponde al evento
        tor1 = [tor1 c1];
        ss = isot(x); % Obtenemos el valor correspondiente del
isótopo
        iso1 = [iso1 ss];
    end
    if sg1(x)<(-2) % Calcular los valores mayores a -2 veces la
desviación estándar
        b = sg1(x);
        h = [h b];
        c2 = timep(x); % Obtenemos la profundidad que corresponde a
cada evento
        t2 = [t2 c2];
        d = tim (x);
        tor2 = [tor2 d]; % Obtenemos el tiempo que corresponde al
evento
        cc = isot(x);
```

```
        iso2 = [iso2 cc]; % Obtenemos el valor correspondiente del
isotopo
    end
end

figure (5)
subplot (2,1,1)
plot (t1,g,'o')
xlabel ('Time')
ylabel('Valores superiores a sigma')
grid on
title ('Posibles eventos')
subplot(2,1,2)
plot(t2,h,'o')
xlabel('Time')
ylabel('Valores inferiores a sigma')
grid on
title('Posibles eventos')
```