

ÁLGEBRA VECTORIAL

Francisco Barrera García

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$



Para una correcta visualización
del libro te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

BARRERA GARCÍA , Francisco

Álgebra Vectorial

Universidad Nacional Autónoma de México,

Facultad de Ingeniería, 2026, 286 p.

ISBN: 978-607-642-977-8

Álgebra Vectorial

Primera edición electrónica

de un ejemplar (18 MB) Formato PDF

Publicado en línea en junio de 2026

D.R. © 2026, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciu-
dad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA

<http://www.ingenieria.unam.mx/>

ISBN: 978-607-642-977-8

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional
Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total
o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita
del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuidado de la edición: Elvia Angélica Torres Rojas

Diseño y formación editorial: Nismet Díaz Ferro

Captura de la obra: María Guadalupe Martínez Dávalos

ÍNDICE

Introducción	III	Producto vectorial de vectores.....	84
Antecedentes históricos	1	Propiedades algebraicas del producto vectorial	89
ÁLGEBRA VECTORIAL	3	Propiedades geométricas del producto vectorial	93
Cantidades escalares y vectoriales	4	Producto mixto de vectores.....	106
Segmento dirigido.....	5	Volumen de un paralelepípedo.....	109
Componentes escalares de un vector	6	CÓNICAS.....	120
Igualdad de vectores.....	8	Curvas cónicas.....	121
Vector de posición.....	8	Definición general de las cónicas.....	125
Vector como segmento dirigido.....	9	Ecuaciones cartesianas de las cónicas.....	127
Vector como terna de números reales.....	9	Circunferencia	127
Vector cero o vector nulo	10	Parábola.....	128
Módulo de un vector.....	10	Parábola con vértice en el origen	129
Vector unitario	15	Parábola con vértice fuera del origen ..	131
Operaciones con vectores.....	19	Elipse.....	132
Adición de vectores.....	20	Elipse con centro en el origen.....	134
Propiedades de la adición.....	20	Elipse con centro fuera del origen	135
Ley del triángulo.....	21	Hipérbola.....	136
Ley del paralelogramo	22	Hipérbola con centro en el origen.....	137
Ley del polígono	23	Hipérbola con centro fuera del origen ..	139
Sustracción de vectores.....	23	Ecuación general de segundo grado.....	141
Multiplicación de un escalar por un vector.....	25	Discriminante	143
Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector	25	Identificación de las cónicas cuando la ecuación general de segundo grado carece del término Bxy	145
Desigualdad del triángulo	30	Ecuaciones paramétricas y vectoriales de las cónicas.....	153
Desigualdad triangular inversa	31	Circunferencia	155
Vectores unitarios i, j, k	36	Elipse.....	160
Producto escalar de dos vectores	37	Hipérbola.....	162
Propiedades del producto escalar de dos vectores	38	Parábola.....	164
Ángulo entre dos vectores	43	EJERCICIOS ADICIONALES	174
Perpendicularidad entre vectores	48	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	252
Ángulos y cosenos directores de un vector	58	RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.....	272
Componente escalar y componente vectorial de un vector en la dirección de otro	72	Bibliografía.....	285
Componente vectorial y componente escalar.....	73		

INTRODUCCIÓN

La presente obra fue elaborada con el propósito de ofrecer a los estudiantes un material didáctico que facilite el estudio y la comprensión de los conceptos fundamentales del Álgebra Vectorial, así como un repaso de las curvas cónicas, con especial énfasis en sus representaciones paramétricas y vectoriales.

El libro está organizado en cinco partes. En la primera se desarrollan los conceptos esenciales del Álgebra Vectorial, incluyendo diversas demostraciones y la deducción de algunas de sus fórmulas fundamentales. La segunda parte ofrece un repaso breve, pero integral, de las curvas cónicas desde tres perspectivas: la geométrica, la algebraica —a través de la ecuación general de segundo grado— y la paramétrica-vectorial.

En el desarrollo de estas dos primeras partes, los conceptos teóricos se exponen de la manera más clara y accesible posible, procurando facilitar su comprensión sin sacrificar la formalidad ni el rigor matemático. Asimismo, se incluye una amplia colección de ejercicios resueltos en los que se explican detalladamente cada uno de los pasos del procedimiento, con el objetivo de favorecer la asimilación de los conceptos teóricos por parte del estudiante.

La tercera parte reúne una serie de ejercicios resueltos cuidadosamente seleccionados y organizados con distintos niveles de dificultad. Algunos de ellos representan un mayor reto que los presentados en el desarrollo teórico, con la finalidad de fortalecer el dominio conceptual del lector y poner a prueba sus habilidades analíticas. En la cuarta parte se propone una extensa colección de ejercicios propuestos destinados a que el estudiante refuerce los conocimientos adquiridos, consolide su aprendizaje del Álgebra Vectorial y de las cónicas, y evalúe su propio nivel de comprensión. Finalmente, la quinta parte contiene las respuestas correspondientes a los ejercicios propuestos.

Es importante señalar que buena parte de los ejercicios resueltos y propuestos incluidos en la obra, han sido tomados o rediseñados de exámenes colegiados departamentales que fueron aplicados en nuestra facultad desde 1980, el resto han sido creados por su servidor. Es necesario entonces reconocer el trabajo de muchos profesores que participaron en el diseño de tales ejercicios y que en la actualidad algunos de ellos ya no laboran en la facultad, o bien, ya no se encuentran entre nosotros.

Aunque esta obra fue concebida principalmente como apoyo para los estudiantes que cursarán la asignatura de Geometría Analítica del Espacio en los planes de estudio actualizados, también se pensó en los profesores que la impartirán, ofreciéndoles un material que puede servir como fuente de consulta, apoyo didáctico y generador de actividades académicas.

Deseo expresar mi sincero agradecimiento a la *M.I. Abigail Serralde Ruiz*, secretaria general, y a la *Lic. Patricia Eugenia García Naranjo*, jefa de la Unidad de Apoyo Editorial de nuestra facultad, por el apoyo institucional y las facilidades otorgadas que hicieron posible la realización de esta obra. Asimismo, agradezco al *Dr. Fernando Sánchez Rodríguez*, jefe de la División de Ciencias Básicas, y a la *M.F. Alicia Pineda Ramírez*, coordinadora de Matemáticas, por el respaldo brindado para el desarrollo de este proyecto académico.

Expreso también mi profundo reconocimiento a la *Lic. Elvia Angélica Torres Rojas* por su invaluable labor en la revisión de la captura, corrección de estilo y cuidado editorial, cuyo profesionalismo, compromiso y disposición fueron fundamentales para la conclusión de este libro.

Agradezco igualmente a la *Srta. María Guadalupe Martínez Dávalos* por el empeño, dedicación y esmero demostrados en la captura del material, labor que hizo posible la culminación de esta obra. Son ya muchos años de trabajo conjunto en los que, gracias a su entusiasmo y compromiso, hemos logrado alcanzar importantes objetivos académicos.

Extiendo también mi agradecimiento a la *LDG Nismet Díaz Ferro* por el diseño editorial del libro, cuyo trabajo ha contribuido significativamente a modernizar y mejorar la calidad y presentación de las publicaciones de nuestra facultad.

Consciente de que toda obra es perfectible, agradeceré profundamente las observaciones y comentarios que los lectores tengan a bien hacerme llegar, con el propósito de enriquecer y mejorar futuras ediciones.

FRANCISCO BARRERA GARCÍA

Ciudad Universitaria, Ciudad de México

20 de febrero de 2026

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Los vectores en matemáticas y en la física son un concepto fundamental que ha sido desarrollado y utilizado por diversos matemáticos y científicos a lo largo de la historia. No hay una única persona que se pueda atribuir como la creadora de los vectores, ya que su desarrollo fue el resultado de la evolución de ideas y conceptos matemáticos y físicos a lo largo del tiempo.

La historia de los vectores puede rastrearse hasta los antiguos matemáticos griegos, especialmente Euclides (325-265 a. C.), quién sentó las bases de la geometría con su obra *Los elementos* alrededor del año 300 a. C. Euclides trabajó con magnitudes direccionales y distancias, sentando las bases para el pensamiento geométrico que más tarde se relacionaría con los conceptos vectoriales.

En el siglo XVII, René Descartes (1596-1650) introdujo el sistema de coordenadas cartesianas, que permitía describir puntos en un espacio bidimensional mediante pares de números (coordenadas). Aunque esta no era una representación vectorial en sí misma, sentó las bases para la noción de dirección y magnitud en una geometría numérica.

El siglo XIX fue una época crucial para el desarrollo del concepto de vector. El matemático alemán Hermann Grassmann (1809-1877), en 1844 publicó un artículo llamado “Teoría de la extensión lineal, una nueva rama de las matemáticas”, que contenía el primer testimonio escrito de lo que hoy se conoce como Álgebra Lineal y la noción de Espacio Vectorial.

El matemático, físico y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), a mediados del siglo XIX, dio un paso importante en el desarrollo del concepto de vector con la introducción de los cuaterniones, una extensión de los números complejos. Los cuaterniones tienen componentes vectoriales, lo que permite representar rotaciones y otras propiedades direccionales de manera más efectiva en tres dimensiones.

El matemático británico Oliver Heaviside (1850-1925), a finales del siglo XIX, reformuló las ecuaciones del electromagnetismo utilizando notaciones vectoriales, lo que dio como resultado un marco matemático más elegante y compacto para describir

fenómenos físicos. Su trabajo allanó el camino para el uso moderno de los vectores en física y otras disciplinas.

Sin embargo, fue el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903) quien formalizó y popularizó el concepto moderno de vector en la primera mitad del siglo XX. Gibbs desarrolló un sistema de notación vectorial que permitió realizar operaciones como el producto escalar y el producto vectorial, amplió las reglas y propiedades que aún utilizamos hoy en día.

El siglo XX vio la aplicación expansiva de los vectores en diversas áreas, desde la física hasta la ingeniería, la informática, la geometría diferencial, la biología y más. La teoría de la relatividad de Albert Einstein (1879-1955) y la mecánica cuántica también hicieron uso de los conceptos vectoriales para describir fenómenos físicos en el mundo macro y microscópico.

La historia del concepto de vector es un testimonio de poder y de versatilidad de las ideas matemáticas, las que han evolucionado y prosperado a lo largo del tiempo para enriquecer nuestra comprensión del mundo que nos rodea.

En el vasto universo de las matemáticas, el álgebra vectorial emerge como una poderosa herramienta para describir y comprender una amplia gama de fenómenos físicos y abstractos. Dentro de esta rama de las matemáticas, existe un concepto que ha demostrado ser esencial en la representación y análisis de una amplia gama de fenómenos: los vectores. Estos pueden representarse gráficamente por un segmento de recta entre dos puntos, que posee tres características que lo definen: magnitud, dirección y, si lo consideramos como un segmento de recta, se agrega un sentido de recorrido. En general, para definir completamente un vector, será suficiente con dar su magnitud y su dirección.

A lo largo de este trabajo, iremos definiendo desde los conceptos más básicos del álgebra vectorial, sus operaciones y las propiedades que rigen su manipulación, incluyendo, desde luego, el producto escalar y el producto vectorial, hasta algunas aplicaciones de estas operaciones.

ÁLGEBRA VECTORIAL

Cantidades escalares y vectoriales

En el estudio de las magnitudes y propiedades en matemáticas y física, se distingue entre dos tipos fundamentales de cantidades: las cantidades escalares y las cantidades vectoriales. Estos dos conceptos juegan roles cruciales en la descripción y análisis de diversos fenómenos, ya que cada uno aporta información específica sobre las características de las magnitudes que representan.

Cantidades escalares

Las cantidades escalares son aquellas que están completamente determinadas por su magnitud numérica. En otras palabras, son representadas únicamente por un número real y la unidad de medida.

Algunos ejemplos de cantidades escalares son la masa, la temperatura, la densidad, el tiempo y la energía. Cuando se opera con cantidades escalares, se siguen las leyes algebraicas convencionales de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división.

Por ejemplo, si hablamos de una temperatura de 33 grados Celsius, simplemente estamos describiendo una magnitud numérica sin considerar ninguna dirección en particular. No importa en qué dirección se encuentre esa temperatura, siguen siendo 33 grados Celsius.

Cantidades vectoriales

Las cantidades vectoriales son aquellas que no solo tienen magnitud, sino también dirección en un espacio tridimensional. Para representar completamente una cantidad vectorial, es necesario especificar tanto su magnitud como su dirección.

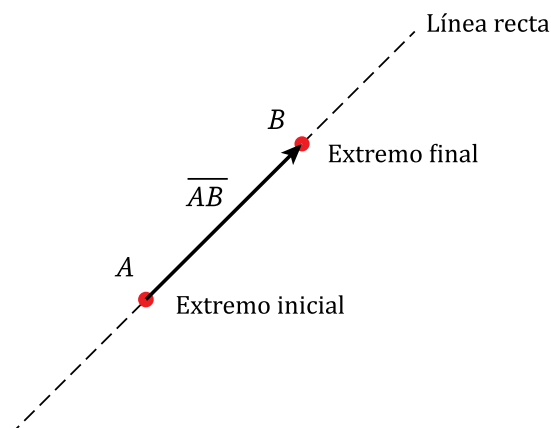
Algunos ejemplos de cantidades vectoriales son la velocidad, la fuerza, la aceleración y el desplazamiento. Cuando se opera con cantidades vectoriales, se involucra tanto la magnitud como la dirección y se deben seguir las reglas algebraicas de las operaciones con vectores.

Por ejemplo, si hablamos de una velocidad de 57 kilómetros por hora al noreste, estamos describiendo no solo la magnitud de la velocidad (57 km/h), sino también su dirección (noreste). Las cantidades vectoriales se representan con vectores, los cuales definiremos a continuación.

Segmento dirigido

Como se mencionó renglones arriba, los vectores los podemos representar gráficamente mediante un segmento de recta entre dos puntos al que se le asigna un sentido de recorrido.

Para definir un segmento dirigido, generalmente se utilizan dos puntos, donde el primero representa el extremo inicial y el segundo, el extremo final del segmento. El orden de los puntos es muy importante, ya que establece el sentido del recorrido. Por ejemplo, si tenemos dos puntos A y B , el segmento dirigido lo representamos como \overrightarrow{AB} , indicando que el recorrido va desde A hacia B . Gráficamente, el segmento dirigido \overrightarrow{AB} lo representamos de la siguiente manera:



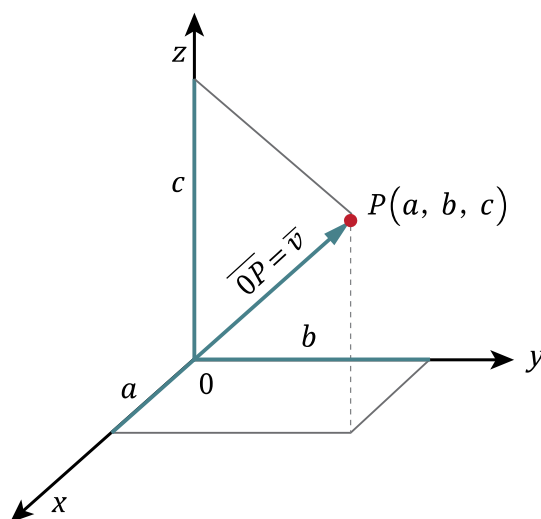
Resulta evidente que los segmentos dirigidos tienen las características propias de un vector, esto es, tiene una dirección, la cual queda definida por la recta, una magnitud o tamaño que está dado por la longitud del segmento y se tiene también un sentido de recorrido, de A hacia B , representado por la flecha.

Componentes escalares de un vector

Las componentes escalares de un vector son las cantidades numéricas que describen la magnitud y la dirección del vector en las diferentes direcciones de un sistema de coordenadas. Cuando descomponemos un vector en sus componentes escalares, estamos expresando su magnitud en las direcciones de los ejes coordenados.

En un sistema de coordenadas en el espacio de tres dimensiones (x, y, z) , un vector en el espacio puede descomponerse en tres componentes escalares: una componente en la dirección del eje x , otra en la dirección del eje y y una tercera en la dirección del eje z .

Para ilustrar gráficamente este concepto, consideremos un punto P de coordenadas (a, b, c) y un vector \vec{v} definido por el segmento dirigido que va del origen del sistema de referencia al punto P , como se ilustra en la siguiente figura:



El vector que queda definido por el segmento dirigido \overline{OP} es el vector de posición del punto P y a los números reales a , b y c se les llama componentes del vector \vec{v} , esto es:

$$\overline{OP} = \vec{v} = (a, b, c)$$

Obsérvese que el vector de posición \vec{v} del punto P tiene por componentes las mismas coordenadas del punto.

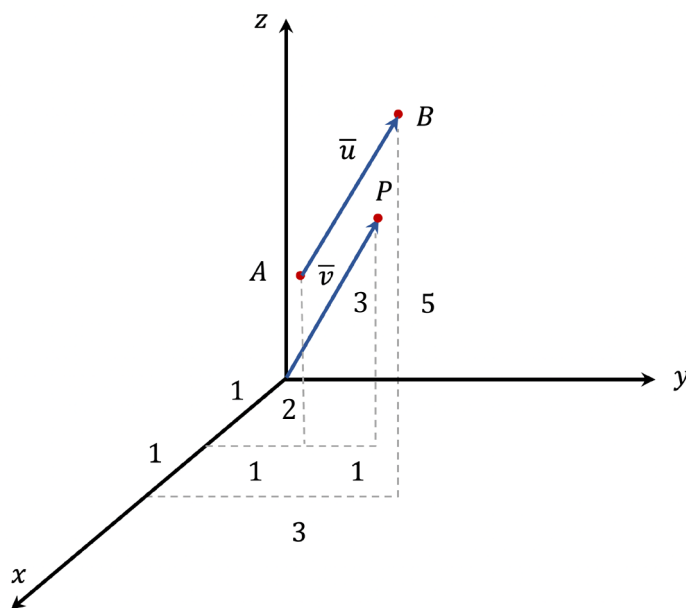
Consideremos ahora dos segmentos dirigidos particulares: el primero \overline{OP} que va del origen al punto $P(1, 2, 3)$ que llamaremos vector \vec{v} y uno segundo que va del punto $A(1, 1, 2)$ al punto $B(2, 3, 5)$. El segmento dirigido \overline{AB} que llamaremos vector \vec{u} , queda determinado de la siguiente forma:

$$\overline{AB} = (2 - 1, 3 - 1, 5 - 2) = (1, 2, 3) = \vec{u}$$

y el vector \vec{v} que es el vector de posición del punto P tiene por componentes:

$$\overline{OP} = \vec{v} = (1, 2, 3)$$

Estos segmentos dirigidos \overline{OP} y \overline{AB} se muestran gráficamente en la siguiente figura:



Como se puede apreciar en la figura, los vectores \vec{u} y \vec{v} tienen la misma longitud, la misma dirección pues son paralelos y el mismo sentido; además, las componentes de ambos vectores son $(1, 2, 3)$, por lo tanto, podemos concluir que $\vec{u} = \vec{v}$. De acuerdo con esto, la igualdad de vectores se puede definir de la siguiente forma.

Igualdad de vectores

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en el espacio de tres dimensiones. Se tiene que:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

Podemos decir entonces que dos vectores son iguales si sus componentes correspondientes son a su vez iguales o, también, cuando tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Una definición similar a la anterior puede darse para vectores en el plano o, también, a vectores en el espacio de n dimensiones.

De lo antes expuesto, podemos dar las siguientes definiciones.

Vector de posición

Si \vec{v} es un vector en el espacio cuyo punto inicial es el origen y su punto final es un punto P de coordenadas (a, b, c) , entonces decimos que el vector \vec{v} es el vector de posición del punto P , si sus componentes son:

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

Es decir, las componentes del vector de posición siempre son iguales a las coordenadas del punto P .

Vector como segmento dirigido

Sean $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ dos puntos en el espacio de tres dimensiones. El vector \overline{AB} se define como:

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Vector como terna de números reales

Un vector en el espacio de tres dimensiones queda completamente definido, si se dan, en forma ordenada, los tres números reales que corresponden a sus componentes. Esto es:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ donde } v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$$

Es conveniente hacer notar que en el espacio de tres dimensiones, los vectores y los puntos quedan definidos por una terna ordenada de números reales; sin embargo, la terna de números reales que representa a un vector son sus componentes escalares, es decir, son las magnitudes de las proyecciones del vector en las direcciones de los ejes coordenados, en tanto que, la terna de números reales que representa a un punto en el espacio son sus coordenadas, las cuales permiten ubicar al punto en el sistema de referencia.

Vector cero o vector nulo

El vector cero o vector nulo es aquel vector que tiene longitud igual a cero y que no tiene dirección definida. Todas sus componentes son iguales a cero y se denota como $\vec{0}$. En el espacio de tres dimensiones, el vector cero se define como:

$$\vec{0} = (0, 0, 0)$$

La definición del vector cero puede extenderse a vectores en el espacio de n dimensiones, en este contexto, el vector cero quedaría definido como:

$$\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

Donde el número de ceros dependerá de la dimensión del espacio en que se encuentre dicho vector.

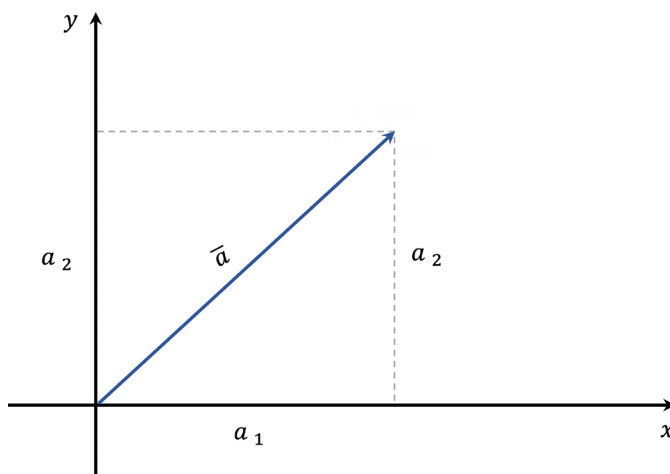
El vector cero es necesario definirlo, pues es de suma importancia en el álgebra de vectores.

Módulo de un vector

A la longitud o tamaño de un vector \vec{a} se le llama módulo y se representa con $|\vec{a}|$. En un contexto más general, al módulo se le suele llamar norma de un vector.

Para un vector en el plano, su módulo se calcula empleando el teorema de Pitágoras, como se ilustra a continuación.

Sea el vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ cuya gráfica es:



se tiene que:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Para el caso de un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en el espacio de tres dimensiones, su módulo se calcula en forma análoga de la siguiente manera:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

En general, para un vector definido en un espacio de n dimensiones, su módulo se define como:

Definición

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ un vector definido en el espacio de n dimensiones. El módulo del vector \vec{a} , que representamos con $|\vec{a}|$, se define como:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}$$

Se han definido vectores en el plano, vectores en el espacio de tres dimensiones e incluso en espacios de dimensión n con $n > 3$; sin embargo, es conveniente aclarar que, en espacios de dimensiones mayores a tres, los vectores carecen de una interpretación geométrica. El manejo que se da a este tipo de vectores es únicamente en términos algebraicos, lo cual es completamente válido a pesar de no tener sentido geométrico.

Reforzaremos los conceptos antes definidos con el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1. Sean los puntos:

$$P_1(2, 4, -1), \quad P_2(1, 3, -2), \quad P_3(1, 1, 1) \quad \text{y} \quad P_4(3, 7, -3)$$

y los vectores

$$\vec{a} = (1, 3, -2), \quad \vec{b} = (-1, -3, 2) \quad \text{y} \quad \vec{c} = (2, 2, 2)$$

- Obtenga los segmentos dirigidos $\overline{P_1P_4}$, $\overline{P_2P_3}$ y $\overline{P_4P_3}$
- Calcule los módulos de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .
- Calcule el módulo del segmento $\overline{P_2P_1}$ y compárelo con el módulo del vector \vec{c} .
- ¿El vector \vec{b} resulta ser igual al vector $\overline{P_1P_3}$?
- Obtenga el vector de posición del punto $\overline{P_1}$ y determine si resulta ser igual al vector $\overline{P_2P_4}$.

Solución:

- Obteniendo los segmentos dirigidos solicitados, tenemos:

$$\overline{P_1P_4} = (3 - 2, \quad 7 - 4, \quad -3 + 1) = (1, \quad 3, \quad -2)$$

$$\overline{P_2 P_3} = (1 - 1, 1 - 3, 1 + 2) = (0, -2, 3)$$

$$\overline{P_4 P_3} = (1 - 3, 1 - 7, 1 + 3) = (-2, -6, 4)$$

b) Los módulos de los vectores \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} son:

Como $\bar{a} = (1, 3, -2)$, entonces:

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

dado que $\bar{b} = (-1, -3, 2)$, entonces:

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

y como $\bar{c} = (2, 2, 2)$, entonces:

$$|\bar{c}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$$

Como podemos observar, los vectores \bar{a} y \bar{b} son vectores diferentes; sin embargo, tienen el mismo módulo, es decir, tienen el mismo tamaño. Además, si observamos las componentes de ambos vectores, podemos ver que tienen las mismas componentes, pero con signos cambiados, lo cual implica que los vectores \bar{a} y \bar{b} resultan ser paralelos, del mismo tamaño, pero con direcciones diferentes.

c) Calculando primero el segmento $\overline{P_2 P_1}$ y después su módulo, tenemos:

$$\overline{P_2 P_1} = (2 - 1, 4 - 3, -1 + 2) = (1, 1, 1)$$

de donde:

$$|\overline{P_2 P_1}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

El módulo del vector \vec{c} lo calculamos en el inciso anterior, cuyo valor fue:

$$|\vec{c}| = \sqrt{12}$$

simplificando, tenemos:

$$|\vec{c}| = \sqrt{12} = \sqrt{4(3)} = 2\sqrt{3}$$

Al comparar el $|\overline{P_2 P_1}|$ con el $|\vec{c}|$, observamos que el módulo del vector \vec{c} es el doble del módulo de $\overline{P_2 P_1}$, es decir, el vector \vec{c} tiene el doble del tamaño del vector $\overline{P_2 P_1}$, además, podemos decir que ambos vectores son paralelos y tienen la misma dirección, solo difieren en su tamaño.

- d)** Debemos determinar si los vectores \vec{b} y $\overline{P_1 P_3}$ son iguales. Obteniendo el vector $\overline{P_1 P_3}$, tenemos:

$$\overline{P_1 P_3} = (1 - 2, 1 - 4, 1 + 1) = (-1, -3, 2)$$

como el vector \vec{b} es:

$$\vec{b} = (-1, -3, 2)$$

entonces podemos concluir que:

$$\overline{P_1 P_3} = \vec{b}$$

- e)** Como el punto $P_1(2, 4, -1)$, entonces el vector de posición P_1 es:

$$\overline{OP_1} = \overline{P_1} = (2, 4, -1)$$

Recordemos que el vector de posición de un punto tiene como extremo inicial el origen y como extremo final el punto.

Obteniendo el segmento dirigido $\overline{P_2 P_4}$ tenemos:

$$\overline{P_2 P_4} = (3 - 1, 7 - 3, -3 + 2) = (2, 4, -1)$$

Al comparar ambos vectores, nos damos cuenta de que se trata del mismo vector, es decir, $\overline{OP_1} = \overline{P_2 P_4}$. Por tratarse de segmentos dirigidos, podemos decir que ambos vectores tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido de recorrido.

En muchas ocasiones resulta útil obtener un vector de módulo igual a uno con la misma dirección de un vector determinado. A este vector se le conoce como vector unitario y se puede obtener de la siguiente forma:

Vector unitario

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector no nulo en el espacio de tres dimensiones. El vector unitario de \vec{v} se define como:

$$\vec{v}_u = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \frac{v_3}{|\vec{v}|} \right) = \frac{1}{|\vec{v}|} (v_1, v_2, v_3)$$

Ejercicio 2. Sean los puntos:

$$P_1(3, 2, -4) \quad \text{y} \quad P_2(1, -1, 2)$$

y el vector: $\vec{v} = (5, -1, 3)$

- Calcule el vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $\overline{P_1 P_2}$ y verifique que el módulo de dicho vector unitario es igual a uno.
- Obtenga el vector unitario en dirección del vector $\overline{P_2 P_1}$ y compare este resultado con el obtenido en el inciso a).

- c) Obtenga un vector \bar{a} que tenga la misma dirección que el vector \bar{v} , pero que su módulo sea igual a 3.
- d) Calcule el vector unitario que tiene la misma dirección del vector de posición del punto P_2 .

Solución:

- a) Obteniendo el vector $\overline{P_1 P_2}$, tenemos:

$$\overline{P_1 P_2} = (1 - 3, -1 - 2, 2 + 4) = (-2, -3, 6)$$

calculando su módulo:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

con lo cual, el vector unitario en dirección del vector $\overline{P_1 P_2}$ es:

$$(\overline{P_1 P_2})_u = \frac{1}{7} (-2, -3, 6) = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

comprobando que $|(\overline{P_1 P_2})_u| = 1$, tenemos:

$$|(\overline{P_1 P_2})_u| = \sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49}}$$

$$|(\overline{P_1 P_2})_u| = \sqrt{\frac{49}{49}} = \sqrt{1} = 1$$

con lo cual, podemos afirmar que el módulo de todo vector unitario es igual a uno.

b) Obteniendo el vector $\overline{P_2 P_1}$, tenemos:

$$\overline{P_2 P_1} = (3 - 1, 2 + 1, -4 - 2) = (2, 3, -6)$$

calculando su módulo:

$$|\overline{P_2 P_1}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

con lo cual, el vector unitario en dirección del vector $\overline{P_2 P_1}$ es:

$$(\overline{P_2 P_1})_u = \frac{1}{7} (2, 3, -6) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right)$$

El vector unitario del vector $\overline{P_1 P_2}$ obtenido en el inciso a) fue:

$$(\overline{P_1 P_2})_u = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

Al comparar ambos vectores unitarios, podemos darnos cuenta de que las componentes son iguales, pero con signos cambiados, lo cual implica que los dos vectores son paralelos, tienen igual longitud, pero tienen diferente sentido de recorrido.

c) Lo que haremos para obtener el vector \bar{a} que nos piden con longitud igual a 3 y en la misma dirección del vector \bar{v} , será obtener el vector unitario \bar{v} y posteriormente multiplicar dicho vector por 3.

Antes de realizar lo que acabamos de describir, es conveniente hacer la siguiente aclaración: hasta este momento, no hemos definido formalmente la multiplicación de un vector por un escalar; sin embargo, implícitamente, en la definición que se dio de vector unitario, se está aplicando dicha operación, en términos de la multiplicación del escalar por todas y cada una de las componentes del vector. Al concluir este ejercicio, se procederá a definir las operaciones con vectores y, poco a poco, iremos construyendo el álgebra vectorial.

Hecha la aclaración anterior, procedamos a obtener el vector unitario de \vec{v} .
Dado que $\vec{v} = (5, -1, 3)$, entonces:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{25 + 1 + 9} = \sqrt{35}$$

con lo cual, el vector unitario de \vec{v} es:

$$(\vec{v})_u = \frac{1}{\sqrt{35}} (5, -1, 3) = \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}} \right)$$

Entonces, el vector \vec{a} que nos piden será:

$$\vec{a} = 3 \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}} \right)$$

$$\therefore \vec{a} = \left(\frac{15}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{9}{\sqrt{35}} \right)$$

este vector \vec{a} tiene la misma dirección del vector \vec{v} y su longitud es igual a 3.

Si factorizamos $\frac{3}{\sqrt{35}}$ en el vector \vec{a} , quedaría como:

$$\vec{a} = \frac{3}{\sqrt{35}} (5, -1, 3)$$

esto es:

$$\vec{a} = \frac{3}{\sqrt{35}} \vec{v}$$

Comprobemos que, efectivamente $|\vec{a}| = 3$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{15}{\sqrt{35}}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{35}}\right)^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{35}}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{35} + \frac{9}{35} + \frac{81}{35}}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\frac{315}{35}} = \sqrt{9} \quad \therefore \quad |\bar{a}| = 3$$

- d) Nos piden obtener un vector unitario en la misma dirección del vector de posición del punto P_2 . Como $P_2 (1, -1, 2)$, entonces el vector de posición de P_2 será:

$$\overline{P_2} = (1, -1, 2)$$

Calculando el $|\overline{P_2}|$, tenemos:

$$|\overline{P_2}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

entonces, el vector unitario solicitado es:

$$(\overline{P_2})_u = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -1, 2)$$

Operaciones con vectores

Las operaciones entre vectores resultan ser un concepto fundamental en el ámbito de las matemáticas y la física. Desempeñan un papel muy importante para poder comprender, plantear y resolver problemas en áreas tan diversas como la mecánica, la geometría, la ingeniería, entre otras.

Definiremos las diversas operaciones que se pueden realizar entre vectores y también hablaremos de las propiedades y reglas que rigen estas operaciones.

Adición de vectores

Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ dos vectores en el espacio de n dimensiones. La adición $\bar{u} + \bar{v}$ se define como:

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)$$

donde las componentes del vector suma, se obtienen al sumar las componentes correspondientes de los vectores originales.

La adición de vectores conserva o tiene en común muchas de las propiedades algebraicas de los números reales.

Propiedades de adición

Sean \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} tres vectores en el espacio de n dimensiones.

1) Cerradura:

La adición de $\bar{u} + \bar{v}$ da por resultado otro vector del espacio de n dimensiones llamado suma.

2) Asociatividad:

$$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$$

3) Conmutatividad:

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$$

4) Elemento idéntico:

Para todo vector \bar{u} , existe un vector $\bar{0}$, llamado el elemento idéntico aditivo, tal que se cumple que:

$$\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$$

5) Elementos inversos:

Para todo vector \bar{u} , existe un vector $-\bar{u}$, llamado el inverso aditivo de \bar{u} , para el cual cumple que:

$$\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$$

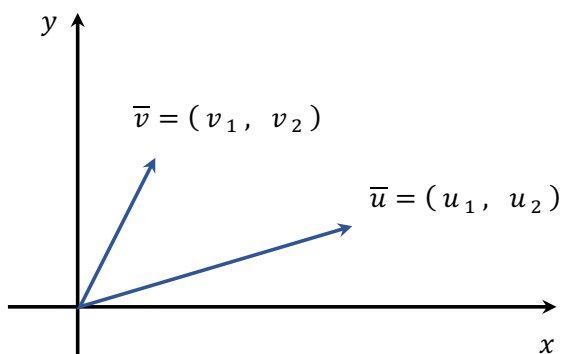
6) Cancelación:

Si $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{w}$, entonces $\bar{u} = \bar{w}$

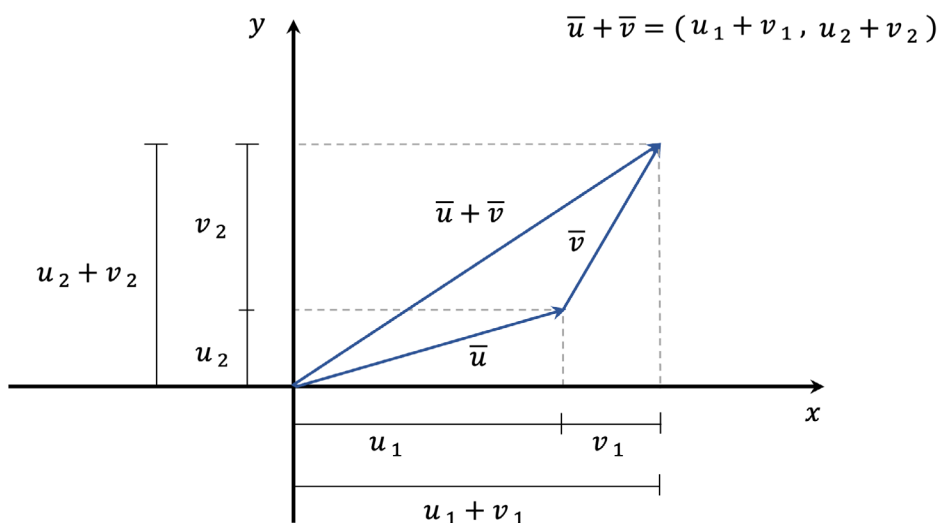
La adición de vectores en el espacio de dos y tres dimensiones puede interpretarse geoméricamente por medio de la ley del triángulo, la ley del paralelogramo y también mediante la ley del polígono.

Ley del triángulo

Sean \bar{u} y \bar{v} dos vectores en el espacio de dos dimensiones, como se muestran en la figura.



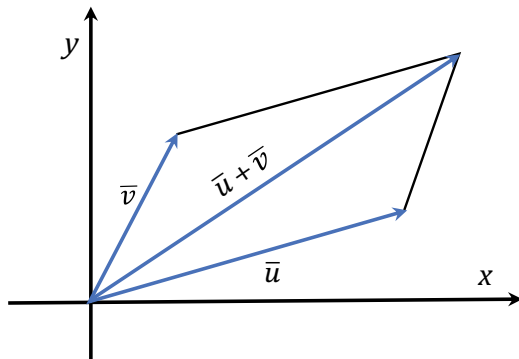
Si desplazamos al vector \bar{v} paralelamente a sí mismo hasta colocar el origen de \bar{v} en el extremo de \bar{u} , se llega a la figura:



con esto se justifica geoméricamente la adición de dos vectores en el espacio de dos dimensiones. En forma similar se puede hacer la interpretación geométrica para vectores en el espacio de tres dimensiones; sin embargo, se omitirá dicha interpretación por resultar un tanto complicado el trazo de la gráfica.

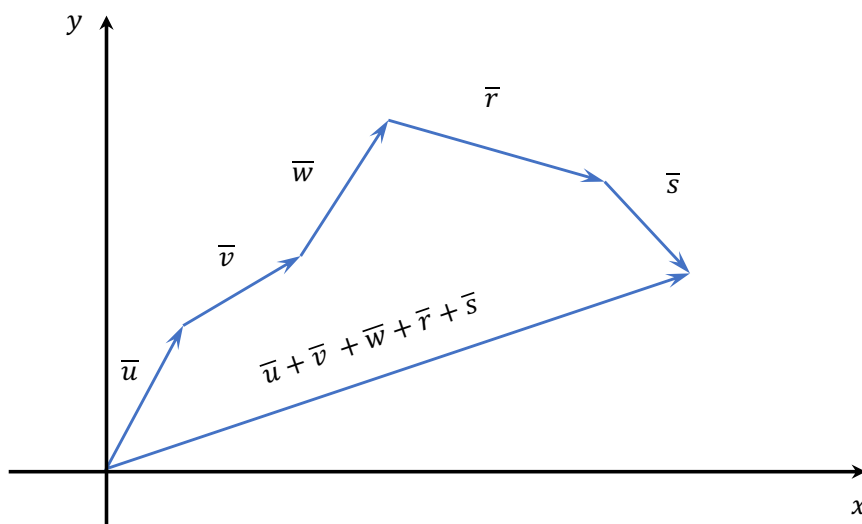
Ley del paralelogramo

Es un método gráfico para realizar la adición de dos vectores en el plano o en el espacio de tres dimensiones. Se trata de un método completamente equivalente a la ley del triángulo, la diferencia consiste en que en lugar de definir un triángulo con los vectores que se suman y la resultante, en esta ley se define un paralelogramo trazando líneas paralelas a los vectores que se suman que pasen por los extremos de dichos vectores, definiendo con ello un paralelogramo y, el vector resultante, es decir, el vector suma, queda determinado por la diagonal de dicho paralelogramo. Véase la siguiente figura:



Ley del polígono

Se trata también de un método gráfico para realizar la adición de dos o más vectores en el plano o en el espacio de tres dimensiones. El método consiste en ir colocando de manera consecutiva los vectores a sumar, de tal forma que el extremo final del primer vector coincida con el extremo inicial del segundo vector, el extremo inicial del tercer vector coincida con el extremo final del segundo vector y así sucesivamente se van colocando todos los vectores que deseamos sumar. El vector resultante o vector suma, se obtiene al unir el extremo inicial del primer vector con el extremo final del último vector. De esta manera se forma un polígono donde los vectores son los lados adyacentes y el vector resultante es la diagonal del polígono. Véase figura.



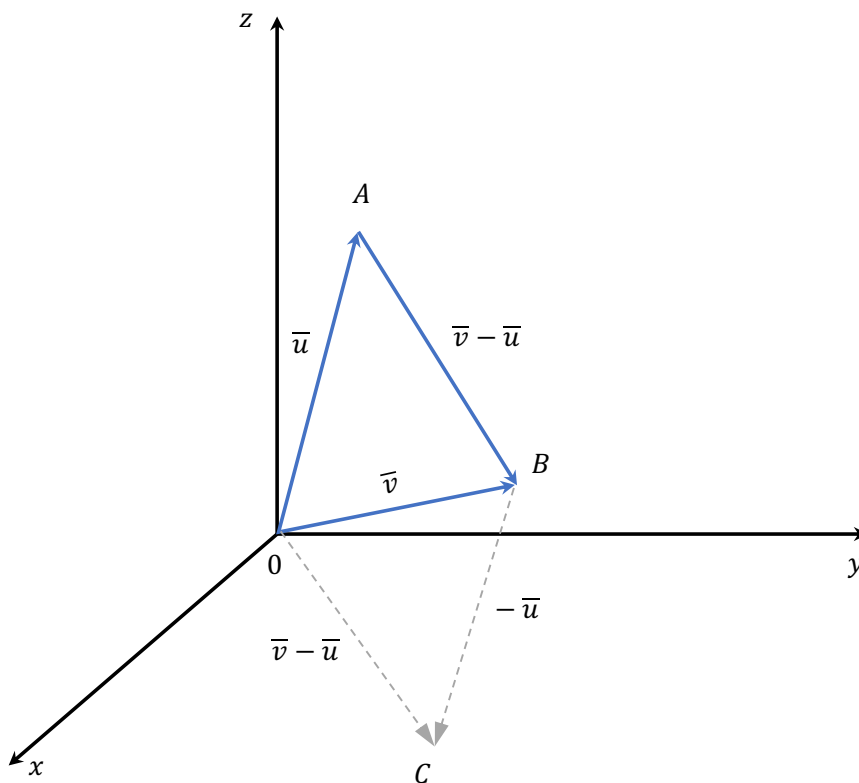
Sustracción de vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ dos vectores en el espacio de n dimensiones. La sustracción $\vec{u} - \vec{v}$ se define como:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \dots, u_n - v_n)$$

donde las componentes del vector diferencia se obtienen al restar las componentes correspondientes de los vectores originales.

La sustracción de vectores en el espacio de dos y tres dimensiones puede interpretarse geoméricamente. A continuación, se mostrará la interpretación geométrica de la sustracción para vectores en el espacio de tres dimensiones.



El vector diferencia $\vec{v} - \vec{u}$ se obtiene gráficamente mediante el siguiente procedimiento:

- 1) Se traza una línea paralela al vector \vec{u} que pase por el extremo final del vector \vec{v} .
- 2) Sobre la paralela trazada anteriormente, se dibuja el vector $-\vec{u}$ teniendo como punto inicial el extremo final del vector \vec{v} (a partir del punto B). Este vector

$-\bar{u}$ tiene la misma magnitud que el vector \bar{u} , pero con un sentido de recorrido opuesto al de \bar{u} .

- 3) Se aplica la ley del triángulo a los vectores \bar{v} y $-\bar{u}$, definiendo con ello el vector \overline{OC} , que resulta ser el vector diferencia $\bar{v} - \bar{u}$.
- 4) Este vector \overline{OC} es exactamente el mismo que el vector \overline{AB} que representa gráficamente al vector diferencia $\bar{v} - \bar{u}$.

Multiplicación de un escalar por un vector

Sea $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ un vector en el espacio de n dimensiones y sea k un número real. La multiplicación del escalar k por el vector \bar{u} se representa como $k\bar{u}$ y se define como:

$$k\bar{u} = (k u_1, k u_2, k u_3, \dots, k u_n)$$

La multiplicación de un escalar por un vector se obtiene multiplicando el escalar por todas las componentes del vector.

La multiplicación de un escalar por un vector cumple las siguientes propiedades.

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector

Sea \bar{u} y \bar{v} dos vectores definidos en el mismo espacio y sean k_1 y k_2 dos escalares. Se tiene que:

$$1) \quad k_1(k_2\bar{u}) = (k_1 k_2)\bar{u}$$

$$2) \quad k_1(\bar{u} + \bar{v}) = k_1\bar{u} + k_1\bar{v}$$

$$3) (k_1 + k_2) \bar{u} = k_1 \bar{u} + k_2 \bar{u}$$

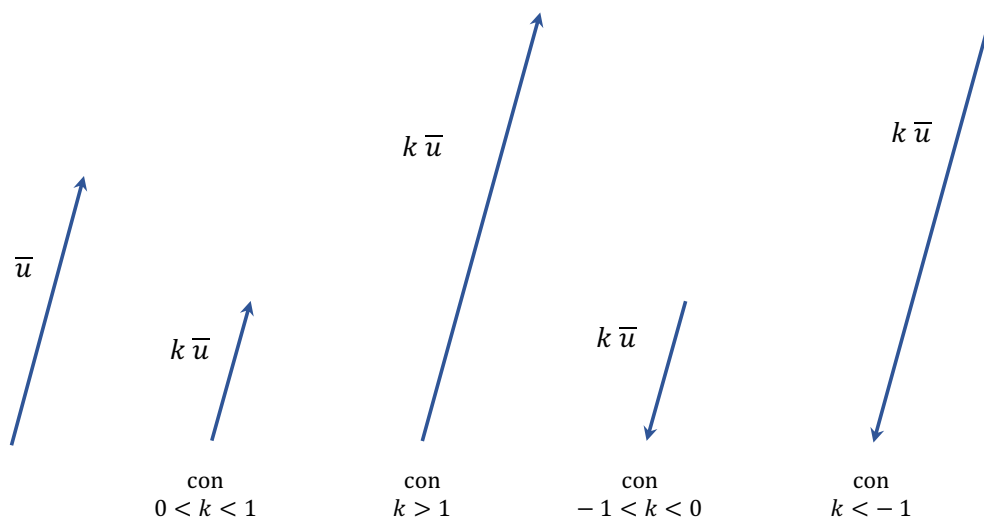
$$4) |k_1 \bar{u}| = |k_1| |\bar{u}| \text{ donde } |k_1| \text{ es el valor absoluto de } k_1$$

$$5) 1 \bar{u} = \bar{u}$$

$$6) 0 \bar{u} = \bar{0}$$

$$7) -1 \bar{u} = -\bar{u}$$

Esta operación tiene también una interpretación geométrica que está directamente relacionada con el valor y el signo del escalar k . El vector $k \bar{u}$ puede ser de mayor o menor tamaño que el vector \bar{u} . Será mayor si $k > 1$, o bien, si $k < -1$ y, será de menor tamaño si $-1 < k < 1$. Además, el vector $k \bar{u}$ conserva la misma dirección que \bar{u} , si $k > 0$ y, $k \bar{u}$ tendrá la dirección opuesta al vector \bar{u} , si $k < 0$. Véase la figura.



Ejercicio 3. Para los vectores:

$$\bar{a} = (1, 1, -1), \quad \bar{b} = (2, 0, 2) \quad \text{y} \quad \bar{c} = (3, -1, 1)$$

Obtenga:

a) $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$

b) $-\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c}$

c) $|2\bar{a} + \bar{c}|$ y $|2\bar{a}| + |\bar{c}|$

d) $|\bar{a}| - |2\bar{b}| + |\bar{c}|$

e) $|\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}|$ y compare el resultado con el obtenido en el inciso anterior.

Solución:

a) Se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} &= (1, 1, -1) + (2, 0, 2) - (3, -1, 1) \\ &= (3, 1, 1) - (3, -1, 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = (0, 2, 0)$$

b) Debemos calcular:

$$\begin{aligned} -\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c} &= -(1, 1, -1) - 2(2, 0, 2) + 3(3, -1, 1) \\ &= (-1, -1, 1) + (-4, 0, -4) + (9, -3, 3) \end{aligned}$$

$$\therefore -\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c} = (4, -4, 0)$$

c) Se nos pide obtener $|2\bar{a} + \bar{c}|$ y $|2\bar{a}| + |\bar{c}|$, entonces:

$$2\bar{a} + \bar{c} = 2(1, 1, -1) + (3, -1, 1) = (2, 2, -2) + (3, -1, 1)$$

$$\therefore 2\bar{a} + \bar{c} = (5, 1, -1)$$

con lo cual:

$$|2\bar{a} + \bar{c}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27} \approx 5.2 \quad \dots\dots (1)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$2\bar{a} = 2(1, 1, -1) = (2, 2, -2)$$

$$|2\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

como $\bar{c} = (3, -1, 1)$, entonces:

$$|\bar{c}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

entonces:

$$|2\bar{a}| + |\bar{c}| = 2\sqrt{3} + \sqrt{11} \approx 6.8 \quad \dots\dots\dots (2)$$

si comparamos (1) y (2), llegamos a la conclusión que:

$$|2\bar{a} + \bar{c}| < |2\bar{a}| + |\bar{c}|$$

d) Debemos obtener $|\bar{a}| - |2\bar{b}| + |\bar{c}|$. Calcularemos por separado cada uno de los módulos y después efectuaremos su suma.

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

como $2\bar{b} = 2(2, 0, 2) = (4, 0, 4)$, entonces:

$$|2\bar{b}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

además:

$$|\bar{c}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

finalmente, tenemos que:

$$|\bar{a}| - |2\bar{b}| + |\bar{c}| = \sqrt{3} - 4\sqrt{2} + \sqrt{11} \approx -0.61 \dots\dots\dots (3)$$

- e) Se nos pide calcular $|\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}|$ y comparar el resultado con el obtenido en el inciso anterior.

Calculemos el vector:

$$\begin{aligned} \bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c} &= (1, 1, -1) - 2(2, 0, 2) + (3, -1, 1) \\ &= (1, 1, -1) + (-4, 0, -4) + (3, -1, 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c} = (0, 0, -4)$$

entonces:

$$|\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \dots\dots\dots (4)$$

comparando (3) y (4), se tiene que:

$$|\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}| > |\bar{a}| - |2\bar{b}| + |\bar{c}|$$

De los resultados que se obtuvieron en los incisos c) y e), se podría llegar a dos conclusiones importantes. La primera de ellas es conocida como desigualdad del triángulo, la cual se enuncia a continuación.

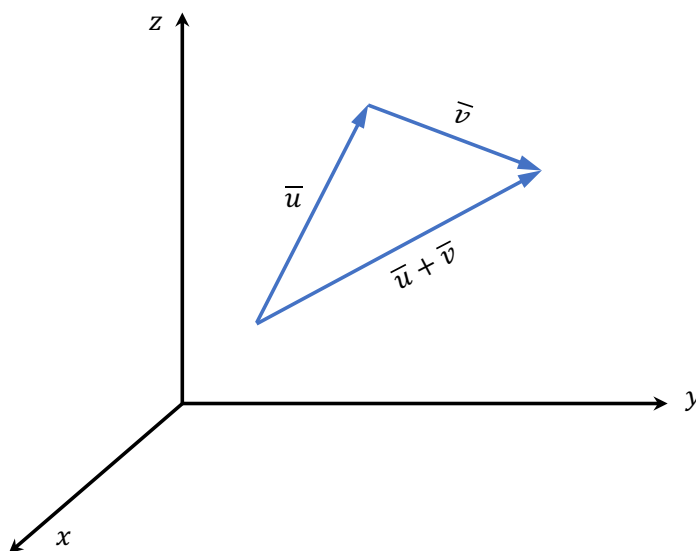
Desigualdad del triángulo

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en el espacio de tres dimensiones. Se tiene que:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Esta desigualdad del triángulo puede generalizarse en un contexto mucho más amplio dentro del Álgebra Lineal.

La interpretación geométrica de esta desigualdad se muestra a continuación:



De esta figura, resulta evidente que la longitud del vector $\vec{u} + \vec{v}$ es menor que la suma de las longitudes de los vectores \vec{u} y \vec{v} , esto es:

$$|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

La desigualdad del triángulo también puede cumplirse como igualdad, esto es:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Esto es posible únicamente cuando los vectores \vec{u} y \vec{v} tienen la misma dirección.

La segunda conclusión importante, que puede inferirse del resultado obtenido del inciso e) del ejercicio anterior, es otra desigualdad conocida como desigualdad triangular inversa, que enunciamos a continuación.

Desigualdad triangular inversa

Sean \bar{u} y \bar{v} dos vectores en el espacio de tres dimensiones. Se tiene que:

$$|\bar{u} - \bar{v}| \geq |\bar{u}| - |\bar{v}|$$

Ejercicio 4. Sean los vectores:

$$\bar{a} = (4, -2, 1), \quad \bar{b} = (-1, 3, 2) \quad \text{y} \quad \bar{c} = (1, 1, -3)$$

Obtenga los valores de α_1 , α_2 y α_3 con los cuales se cumple la siguiente igualdad:

$$\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c} = (3, 3, 14)$$

Solución:

Sustituyendo los vectores \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} en la ecuación dada, tenemos:

$$\alpha_1 (4, -2, 1) + \alpha_2 (-1, 3, 2) + \alpha_3 (1, 1, -3) = (3, 3, 14)$$

$$(4\alpha_1, -2\alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 3\alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, -3\alpha_3) = (3, 3, 14)$$

sumando los vectores en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$$(4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = (3, 3, 14)$$

por igualdad de vectores surge el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 14 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema por el método de Gauss, intercambiaremos la primera y la tercera ecuación como se indica en el sistema.

$$(-4)(2) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 14 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ 4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \end{cases} \sim (9) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 14 \\ 7\alpha_2 - 5\alpha_3 = 31 \\ -9\alpha_2 + 13\alpha_3 = -53 \end{cases} \quad (7)$$

$$(1) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 14 \\ 63\alpha_2 - 45\alpha_3 = 279 \\ -63\alpha_2 + 91\alpha_3 = -371 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 14 \quad \dots(1) \\ 63\alpha_2 - 45\alpha_3 = 279 \quad \dots(2) \\ 46\alpha_3 = -92 \quad \dots(3) \end{cases}$$

de la ecuación (3), se tiene que:

$$\alpha_3 = -\frac{92}{46} \quad \therefore \alpha_3 = -2$$

sustituyendo $\alpha_3 = -2$ en la ecuación (2), tenemos:

$$63\alpha_2 - 45(-2) = 279 \Rightarrow 63\alpha_2 + 90 = 279$$

$$63\alpha_2 = 279 - 90 \Rightarrow 63\alpha_2 = 189 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{189}{63}$$

$$\therefore \alpha_2 = 3$$

sustituyendo $\alpha_2 = 3$ y $\alpha_3 = -2$ en la ecuación (1), tenemos:

$$\alpha_1 + 2(3) - 3(-2) = 14 \Rightarrow \alpha_1 + 12 = 14$$

$$\therefore \alpha_1 = 2$$

por lo tanto, los valores de α_1 , α_2 y α_3 buscados son:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

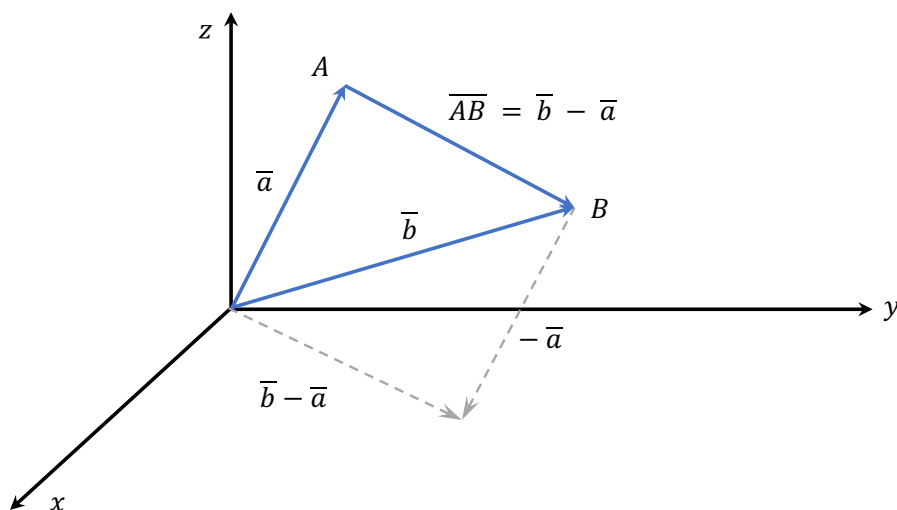
Ejercicio 5. Sean los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 5, 2)$.

Obtenga:

- El vector de posición del punto Q que divide en dos partes iguales al segmento \overline{AB} .
- Las coordenadas del punto H que se encuentra ubicado a tres cuartas partes del segmento \overline{AB} .

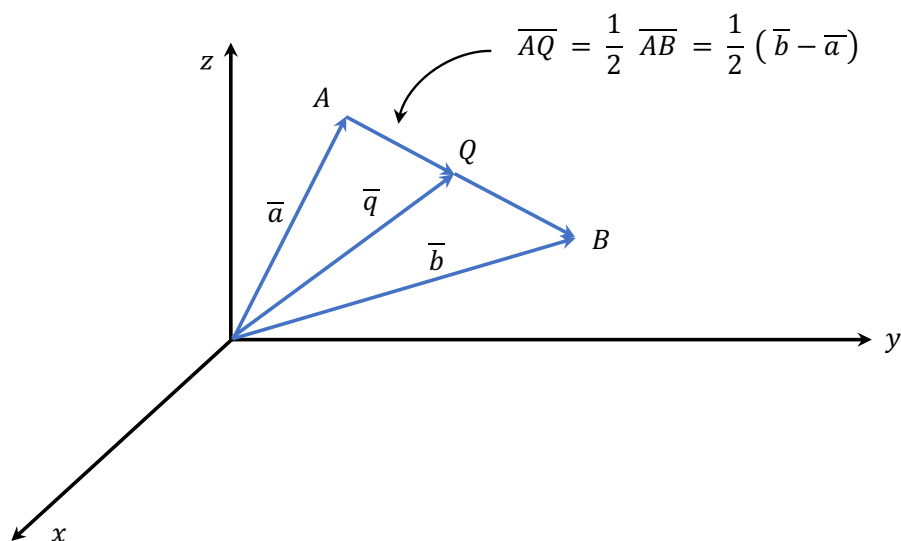
Solución:

- Hagamos una representación gráfica de los puntos A , B y del segmento \overline{AB} .



De la figura, obsérvese que el segmento \overline{AB} es igual al vector $\vec{b} - \vec{a}$.

Hagamos ahora otra figura que represente gráficamente la posición del punto Q solicitado y su vector de posición.



de la figura, se puede apreciar que el vector de posición \vec{q} del punto Q que nos piden obtener, viene dado por:

$$\vec{q} = \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a})$$

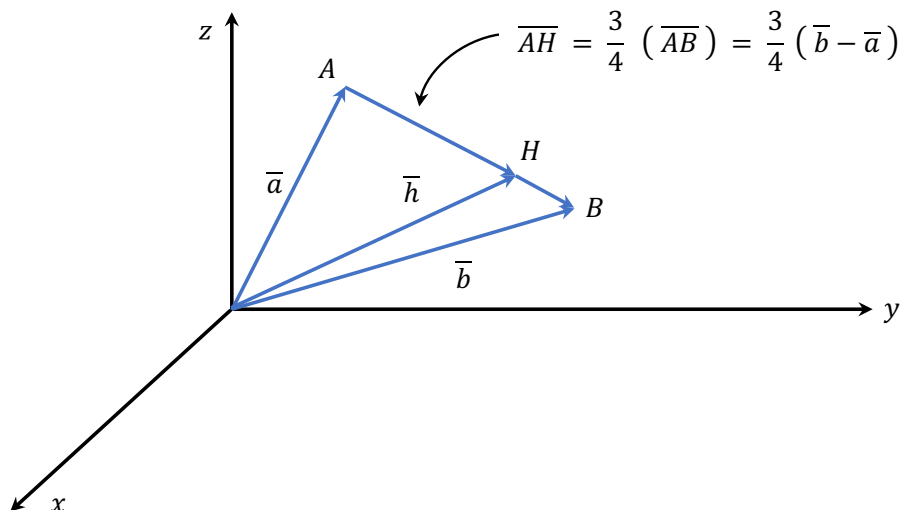
sustituyendo:

$$\vec{q} = (1, 2, 3) + \frac{1}{2} [(2, 5, 2) - (1, 2, 3)]$$

$$\vec{q} = (1, 2, 3) + \frac{1}{2} (1, 3, -1)$$

$$\therefore \vec{q} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

b) Se nos pide obtener las coordenadas del punto H que se encuentra ubicado a tres cuartas partes del segmento \overline{AB} . Hagamos una figura que represente gráficamente la posición del punto H .



De la figura, el vector de posición \vec{h} del punto H que nos piden obtener sus coordenadas, viene dado entonces por:

$$\vec{h} = \vec{a} + \frac{3}{4} (\vec{b} - \vec{a})$$

sustituyendo:

$$\vec{h} = (1, 2, 3) + \frac{3}{4} [(2, 5, 2) - (1, 2, 3)]$$

$$\vec{h} = (1, 2, 3) + \frac{3}{4} (1, 3, -1)$$

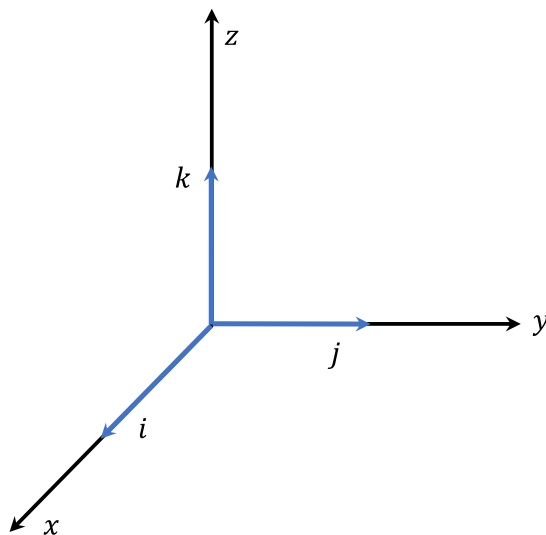
$$\therefore \vec{h} = \left(\frac{7}{4}, \frac{17}{4}, \frac{9}{4} \right)$$

por lo que, las coordenadas del punto H son:

$$H \left(\frac{7}{4}, \frac{17}{4}, \frac{9}{4} \right)$$

Vectores unitarios i , j , k

Los vectores unitarios i , j , k son fundamentales en el álgebra vectorial y en general en la geometría. Estos vectores tienen módulo igual a uno y sus direcciones definen la dirección positiva de los ejes x , y , z de un sistema de referencia en el espacio de tres dimensiones. Véase la figura.



Las componentes de los vectores unitarios i , j , k son:

$$i = (1, 0, 0) \quad j = (0, 1, 0) \quad k = (0, 0, 1)$$

Estos vectores unitarios son mutuamente perpendiculares y tienen múltiples aplicaciones, una de ellas es la de poder representar un vector cualquiera como la suma de sus proyecciones en los ejes coordenados, como se muestra a continuación.

Sea el vector $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Este vector se puede descomponer como la suma de los siguientes tres vectores:

$$\bar{v} = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3)$$

factorizando, tenemos

$$\bar{v} = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1)$$

de donde:

$$\bar{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

A esta forma de representar al vector \bar{v} se le llama forma trinómica.

Ejercicio 6. Expresar los vectores dados en su forma trinómica.

a) $\bar{a} = (1, -2, 3)$

b) $\bar{b} = (4, 0, -5)$

c) $\bar{c} = (0, 7, 0)$

Solución:

a) Si $\bar{a} = (1, -2, 3)$, su forma trinómica es $\bar{a} = i - 2j + 3k$

b) Si $\bar{b} = (4, 0, -5)$, su forma trinómica es $\bar{b} = 4i - 5k$

c) Si $\bar{c} = (0, 7, 0)$, su forma trinómica es $\bar{c} = 7j$

Producto escalar de dos vectores

Hasta este momento, hemos definido la adición y la sustracción entre dos vectores, además de la multiplicación de un escalar por un vector; en estas tres operaciones el resultado es un nuevo vector. A continuación, definiremos una nueva operación llamada producto escalar de dos vectores, conocida también como producto punto, o bien, producto interno.

El resultado de esta operación es un escalar y no un vector, razón por la cual, la operación lleva precisamente ese nombre.

Definición

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ dos vectores en el espacio de n dimensiones. El producto escalar o producto punto de dos vectores que representamos con $\vec{u} \cdot \vec{v}$, se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n$$

El producto escalar de vectores es utilizado para definir otras operaciones con vectores, para obtener la proyección de un vector sobre otro, calcular el ángulo entre dos vectores, entre otros múltiples usos que iremos presentando.

Propiedades del producto escalar de dos vectores

Sea \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tres vectores en el espacio de n dimensiones y sea k un escalar. Se tiene que:

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- 3) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- 4) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- 5) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
- 6) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$

Ejercicio 7. Con los vectores:

$$\bar{a} = (1, 3, -1), \quad \bar{b} = (2, -2, -4) \quad \text{y} \quad \bar{c} = (3, -2, 1)$$

Obtenga:

a) $\bar{a} \cdot \bar{c}$

b) $-2\bar{b} \cdot \bar{c}$

c) $\bar{a} \cdot \bar{b}$

d) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c})$

e) $\bar{b} \cdot (2\bar{c} - 3\bar{a})$

Solución:

a) $\bar{a} \cdot \bar{c} = (1, 3, -1) \cdot (3, -2, 1) = 3 - 6 - 1 = -4$

b) $-2\bar{b} \cdot \bar{c} = -2(2, -2, -4) \cdot (3, -2, 1) = (-4, 4, 8) \cdot (3, -2, 1)$

$$\therefore -2\bar{b} \cdot \bar{c} = -12 - 8 + 8 = -12$$

c) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (1, 3, -1) \cdot (2, -2, -4) = 2 - 6 + 4 = 0$

Cuando el producto escalar de dos vectores da como resultado cero, implica que dichos vectores son perpendiculares. Esta característica geométrica entre vectores se definirá un poco más adelante.

d) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (1, 3, -1) \cdot ((2, -2, -4) + (3, -2, 1))$

$$= (1, 3, -1) \cdot (5, -4, -3)$$

$$\therefore \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = 5 - 12 + 3 = -4$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \bar{b} \cdot (2\bar{c} - 3\bar{a}) &= (2, -2, -4) \cdot (2(3, -2, 1) - 3(1, 3, -1)) \\
 &= (2, -2, -4) \cdot ((6, -4, 2) - (3, 9, -3)) \\
 &= (2, -2, -4) \cdot (3, -13, 5) \\
 \therefore \bar{b} \cdot (2\bar{c} - 3\bar{a}) &= 6 + 26 - 20 = 12
 \end{aligned}$$

Ejercicio 8. Con los vectores

$$\bar{u} = (1, 1, -1), \quad \bar{v} = (2, -1, 3) \quad \text{y} \quad \bar{w} = (4, 0, -3)$$

verifique el cumplimiento de las siguientes propiedades:

$$\text{a) } \bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$$

$$\text{b) } \bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$$

$$\text{c) } \text{Si } k = 3, \text{ entonces } k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (k\bar{v})$$

$$\text{d) } \bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$$

Solución:

$$\text{a) } \bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$$

$$(1, 1, -1) \cdot (2, -1, 3) = (2, -1, 3) \cdot (1, 1, -1)$$

$$2 - 1 - 3 = 2 - 1 - 3$$

$$-2 = -2$$

\therefore se cumple

$$\mathbf{b)} \quad \bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$$

Desarrollando por separado ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) &= (1, 1, -1) \cdot ((2, -1, 3) + (4, 0, -3)) \\ &= (1, 1, -1) \cdot (6, -1, 0) \end{aligned}$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = 6 - 1 = 5 \quad \dots\dots\dots (1)$$

por otro lado:

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w} &= (1, 1, -1) \cdot (2, -1, 3) + (1, 1, -1) \cdot (4, 0, -3) \\ &= (2 - 1 - 3) + (4 + 3) \end{aligned}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w} = 5 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Como la expresión (1) resultó igual a la (2), entonces la propiedad se cumple.

$$\mathbf{c)} \quad k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (k\bar{v})$$

desarrollando por partes con $k = 3$, tenemos:

$$k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = 3((1, 1, -1) \cdot (2, -1, 3)) = 3(2 - 1 - 3) = -6 \dots\dots (4)$$

calculando ahora:

$$(k\bar{u}) \cdot \bar{v} = 3(1, 1, -1) \cdot (2, -1, 3) = (3, 3, -3) \cdot (2, -1, 3)$$

$$(k\bar{u}) \cdot \bar{v} = 6 - 3 - 9 = -6 \quad \dots\dots\dots (5)$$

finalmente:

$$\bar{u} \cdot (k \bar{v}) = (1, 1, -1) \cdot 3(2, -1, 3) = (1, 1, -1) \cdot (6, -3, 9)$$

$$\bar{u} \cdot (k \bar{v}) = 6 - 3 - 9 = -6 \dots\dots\dots (6)$$

como las expresiones (4), (5) y (6) resultaron iguales, podemos concluir que la propiedad se cumple.

d) $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$

En este inciso lo que haremos primero, es demostrar la propiedad y posteriormente se verificará su cumplimiento con el vector \bar{u} dado en el enunciado.

Demostración:

Si $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$, entonces de la definición que se dio de módulo de un vector, tenemos que:

$$|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2}$$

elevando al cuadrado en ambos lados:

$$|\bar{u}|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2} \right)^2$$

$$|\bar{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 \dots\dots\dots (7)$$

Por otro lado, desarrollando el producto escalar $\bar{u} \cdot \bar{u}$, tenemos:

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \cdot (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 \dots\dots\dots (8)$$

de las expresiones (7) y (8) podemos concluir que:

$$|\bar{u}|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}$$

con lo cual queda demostrada la propiedad.

Una conclusión que podemos sacar de esta propiedad es que:

$$|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}} = (\bar{u} \cdot \bar{u})^{\frac{1}{2}}$$

Comprobemos ahora que la propiedad se cumple con el vector $\bar{u} = (1, 1, -1)$

$$|\bar{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

entonces:

$$|\bar{u}|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 \dots\dots\dots (9)$$

además, se tiene que:

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = (1, 1, -1) \cdot (1, 1, -1) = 1 + 1 + 1 = 3 \dots\dots\dots (10)$$

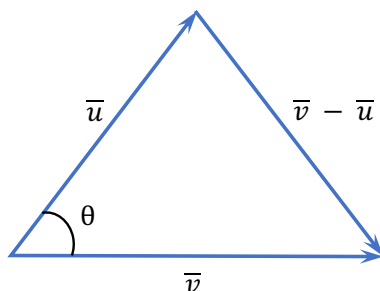
como la expresión (9) resultó igual a la (10), entonces la propiedad:

$$|\bar{u}|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u} \text{ se cumple}$$

Ángulo entre dos vectores

El concepto de ángulo entre dos vectores es fundamental en la teoría de vectores. Este concepto nos permite establecer cómo están dispuestos dos vectores, uno con respecto al otro.

Cuando dos vectores distintos de cero se colocan de manera tal que comparten un origen común, entonces forman un ángulo entre ellos, el cual se mide en grados y varía desde 0° hasta 180° . Desde luego, este ángulo también puede medirse en radianes y, en tal caso, varía desde 0 hasta π . El ángulo entre dos vectores se puede calcular a través del producto escalar, o bien, mediante el producto vectorial. Dado que esta última operación aún no la hemos definido, entonces a continuación se hará la deducción de la fórmula que nos permite calcular dicho ángulo mediante el uso del producto escalar. Para ello, nos apoyaremos en la siguiente figura:



Tenemos un triángulo formado por los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{v} - \vec{u}$, además del ángulo θ que definen los vectores \vec{u} y \vec{v} . Considerando las magnitudes de estos tres vectores, es decir, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $|\vec{v} - \vec{u}|$ y aplicando la ley de los cosenos para el ángulo θ , tenemos que:

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \dots\dots\dots(1)$$

Por otro lado, haciendo uso de la propiedad 4 del producto escalar de vectores, la cual establece que:

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

entonces, tomando el primer miembro de la expresión (1), se tiene que:

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$$

desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{u}|^2 &= (\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{u}) \end{aligned}$$

como el producto escalar es conmutativo, entonces:

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{u}|^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo (2) en (1), se tiene que:

$$|\vec{v}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{u}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

simplificando los módulos elevados al cuadrado, tenemos:

$$-2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ en ambos lados, se llega a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

con esta expresión (3), tenemos una forma alternativa para calcular el producto escalar de dos vectores, si se conoce el valor del ángulo entre ellos.

De la expresión (3) se llega a:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

De lo anterior, podemos dar la siguiente definición.

Definición

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores no nulos con un origen común. Si θ es el ángulo entre los vectores \vec{u} y \vec{v} , entonces se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

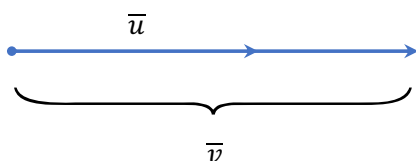
Si despejamos θ de la expresión anterior, llegamos a que:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Fórmula que nos permite calcular el ángulo entre dos vectores en forma directa.

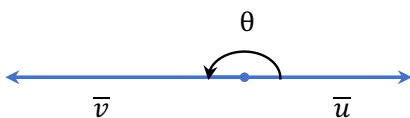
Al calcular el ángulo entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} , se presentan las siguientes cinco posibilidades:

- 1) Que los vectores \vec{u} y \vec{v} tengan la misma dirección. Gráficamente:



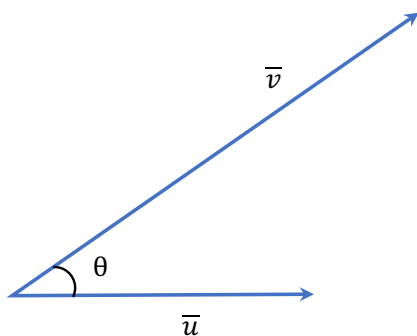
En este caso, el ángulo $\theta = 0^\circ$, lo cual implica que $\cos \theta = 1$.

- 2) Que los vectores \vec{u} y \vec{v} tengan direcciones opuestas. Gráficamente:



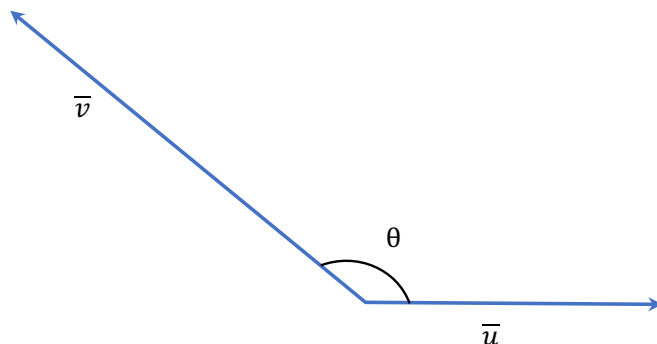
En este caso, el ángulo $\theta = 180^\circ$, lo cual implica que $\cos \theta = -1$.

- 3) Que los vectores \bar{u} y \bar{v} formen un ángulo agudo. Gráficamente:



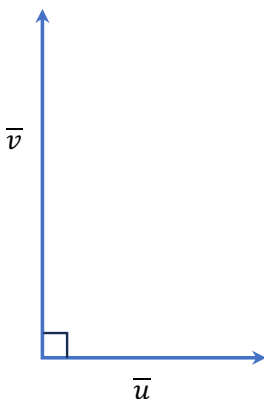
En este caso, el ángulo θ debe estar en el intervalo $0^\circ < \theta < 90^\circ$, lo cual implica que $\cos \theta > 0$.

- 4) Que los vectores \bar{u} y \bar{v} formen un ángulo obtuso. Gráficamente:



En este caso, el ángulo θ debe estar en el intervalo $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Lo cual implica que $\cos \theta < 0$.

- 5) Que los vectores \bar{u} y \bar{v} sean perpendiculares. Gráficamente:



En este caso, el ángulo $\theta = 90^\circ$, lo cual implica que $\cos \theta = 0$.

Como se llegó a que:

$$\cos \theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|}$$

para que $\cos \theta = 0$, esto solo es posible cuando $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$.

De este caso 5, se desprende la siguiente definición.

Perpendicularidad entre vectores

Dos vectores \bar{u} y \bar{v} diferentes de cero, son perpendiculares, si y solo si:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

Algunos autores, en lugar de hablar del concepto de “perpendicularidad de vectores”, utilizan el término “ortogonalidad de vectores”. La ortogonalidad resulta ser un concepto más amplio que el concepto de perpendicularidad; sin embargo, con frecuencia los manejan como sinónimos.

Es importante hacer notar que, en la definición que se dio para el cálculo del ángulo entre dos vectores, se especifica que los vectores \bar{u} y \bar{v} deben ser diferentes de cero, lo cual resulta evidente pues si uno de ellos es el vector nulo, entonces se llegaría a la indeterminación cero entre cero; sin embargo, se acepta que el vector cero es ortogonal a todo vector, pues cumple con la condición de que $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$.

Ejercicio 9. Los puntos

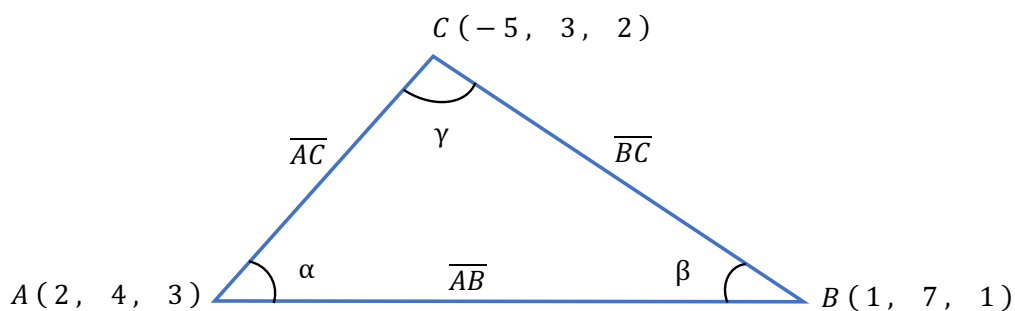
$$A(2, 4, 3), B(1, 7, 1) \text{ y } C(-5, 3, 2)$$

son los vértices de un triángulo.

- a) Calcule los ángulos interiores del triángulo que definen los puntos A , B y C .
- b) Compruebe que la suma de los ángulos calculados en inciso anterior es 180° .

Solución:

- a) Únicamente para efectos de claridad en el desarrollo, supongamos que el triángulo que definen los puntos A , B y C es el siguiente:



Calculando los ángulos α , β y γ con los segmentos dirigidos que los definen, tenemos:

La fórmula que nos permite calcular el ángulo entre dos vectores es:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \dots\dots\dots (1)$$

Realizando los cálculos necesarios, tenemos:

Ángulo α (segmentos \overline{AB} y \overline{AC})

$$\overline{AB} = (1 - 2, 7 - 4, 1 - 3) = (-1, 3, -2)$$

$$\overline{AC} = (-5 - 2, 3 - 4, 2 - 3) = (-7, -1, -1)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{51}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-1, 3, -2) \cdot (-7, -1, -1) = 7 - 3 + 2 = 6$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{14} \sqrt{51}}$$

de donde:

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{6}{\sqrt{14} \sqrt{51}} \quad \therefore \quad \alpha \approx 77^\circ$$

Ángulo β (segmentos \overline{BA} y \overline{BC})

$$\overline{BA} = (2 - 1, 4 - 7, 3 - 1) = (1, -3, 2)$$

$$\overline{BC} = (-5 - 1, 3 - 7, 2 - 1) = (-6, -4, 1)$$

$$|\overline{BA}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{53}$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (1, -3, 2) \cdot (-6, -4, 1) = -6 + 12 + 2 = 8$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$\cos \beta = \frac{8}{\sqrt{14} \sqrt{53}}$$

de donde:

$$\beta = \cos^{-1} \frac{8}{\sqrt{14} \sqrt{53}} \quad \therefore \beta \approx 72.9^\circ$$

Ángulo γ (segmentos \overline{CA} y \overline{CB})

$$\overline{CA} = (2 + 5, 4 - 3, 3 - 2) = (7, 1, 1)$$

$$\overline{CB} = (1 + 5, 7 - 3, 1 - 2) = (6, 4, -1)$$

$$|\overline{CA}| = \sqrt{7^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{51}$$

$$|\overline{CB}| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{53}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = (7, 1, 1) \cdot (6, 4, -1) = 42 + 4 - 1 = 45$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$\cos \gamma = \frac{45}{\sqrt{51} \sqrt{53}}$$

de donde:

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{45}{\sqrt{51} \sqrt{53}} \quad \therefore \gamma \approx 30.1^\circ$$

b) Sumando los ángulos α , β y γ , tenemos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 77^\circ + 72.9^\circ + 30.1^\circ = 180^\circ$$

Se cumple la condición de que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180° , esto implica que los ángulos calculados son correctos.

Ejercicio 10. Sean los vectores $\vec{a} = i + j + k$ y $\vec{b} = 2i + j - k$. Compruebe que se cumple que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

donde θ es el ángulo que definen los vectores \vec{a} y \vec{b} .

Solución:

Haciendo los cálculos necesarios, tenemos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 1, 1) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 1 - 1 = 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

calculando el ángulo θ , tenemos:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

sustituyendo:

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{6}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{6}}$$

$$\therefore \theta \approx 61.87^\circ$$

de donde se tiene que:

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \sqrt{3} \sqrt{6} \cos 61.87^\circ = 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

al comparar (1) y (2), podemos concluir que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Ejercicio 11. Determine el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{a} = (1, k, -2)$ y $\vec{b} = (k, 3, 1)$ sean perpendiculares.

Solución:

Sabemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es igual a cero, esto es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

sustituyendo, tenemos:

$$(1, k, -2) \cdot (k, 3, 1) = 0$$

$$k + 3k - 2 = 0$$

$$4k - 2 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 12. Sean los vectores:

$$\vec{u} = i + 2j - k \quad \text{y} \quad \vec{v} = 3i - j + 2k$$

Determine:

- a) El valor de α tal que el vector $\vec{u} + \alpha \vec{v}$ sea perpendicular al vector \vec{u} .
- b) El valor de β tal que el vector $\beta \vec{u} - \vec{v}$ sea perpendicular al vector \vec{v} .

Solución:

- a) Para que el vector $\vec{u} + \alpha \vec{v}$ sea perpendicular al vector \vec{u} , se debe cumplir que:

$$(\vec{u} + \alpha \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$

sustituyendo los vectores \bar{u} y \bar{v} , tenemos:

$$((1, 2, -1) + \alpha(3, -1, 2)) \cdot (1, 2, -1) = 0$$

$$((1, 2, -1) + (3\alpha, -\alpha, 2\alpha)) \cdot (1, 2, -1) = 0$$

$$(1 + 3\alpha, 2 - \alpha, -1 + 2\alpha) \cdot (1, 2, -1) = 0$$

desarrollando el producto punto:

$$(1 + 3\alpha) + 2(2 - \alpha) + (-1)(-1 + 2\alpha) = 0$$

$$1 + 3\alpha + 4 - 2\alpha + 1 - 2\alpha = 0$$

$$6 - \alpha = 0$$

$$\therefore \alpha = 6$$

- b)** Para que el vector $\beta\bar{u} - \bar{v}$ sea perpendicular al vector \bar{v} , se debe cumplir que:

$$(\beta\bar{u} - \bar{v}) \cdot \bar{v} = 0$$

sustituyendo los vectores \bar{u} y \bar{v} , tenemos:

$$(\beta(1, 2, -1) - (3, -1, 2)) \cdot (3, -1, 2) = 0$$

$$((\beta, 2\beta, -\beta) - (3, -1, 2)) \cdot (3, -1, 2) = 0$$

$$(\beta - 3, 2\beta + 1, -\beta - 2) \cdot (3, -1, 2) = 0$$

desarrollando el producto punto:

$$3(\beta - 3) + (-1)(2\beta + 1) + 2(-\beta - 2) = 0$$

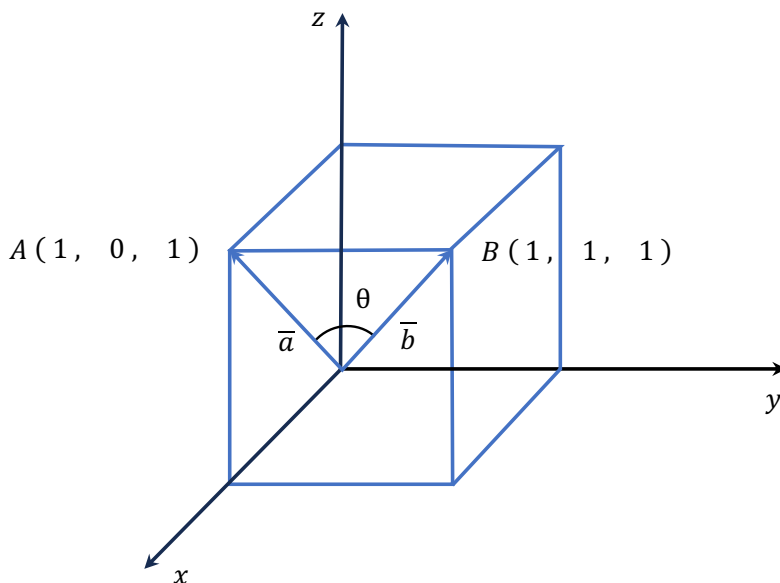
$$3\beta - 9 - 2\beta - 1 - 2\beta - 4 = 0$$

$$-\beta - 14 = 0$$

$$\therefore \beta = -14$$

Ejercicio 13. De un cubo de una unidad por lado, calcule el ángulo que forman una de las diagonales del cubo con una de las diagonales de una de sus caras, considerando que ambas diagonales comparten un mismo vértice.

Solución:



De acuerdo con la figura, el ángulo que nos piden calcular es el ángulo θ que definen los vectores \vec{a} y \vec{b} , siendo estos vectores, los vectores de posición de los puntos A y B . Tenemos entonces que:

$$\vec{a} = (1, 0, 1) \text{ donde } |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{b} = (1, 1, 1) \text{ donde } |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

sabemos que:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

sustituyendo, tenemos:

$$\cos \theta = \frac{(1,0,1) \cdot (1,1,1)}{\sqrt{2} \sqrt{3}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2} \sqrt{3}}$$

de donde:

$$\theta = \cos^{-1} = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \therefore \quad \theta \approx 35.26^\circ$$

Es importante hacer notar que el ángulo θ siempre tendrá el mismo valor, sin importar la diagonal del cubo que se tome y la diagonal de cualquier de sus caras, incluyendo desde luego, la base o la tapa del cubo, considerando la condicionante de que ambas diagonales compartan un mismo vértice.

Ejercicio 14. Sea el vector $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$. Calcule los ángulos que forma el vector \vec{a} con cada uno de los ejes coordenados.

Solución:

Los ángulos que nos piden obtener se calcularán considerando el vector \vec{a} y los vectores unitarios i , j , k . De esta forma, el ángulo que define el vector \vec{a} con el eje x será el ángulo formado por \vec{a} y el vector i ; el ángulo formado por \vec{a} con el eje y será el ángulo formado por \vec{a} y el vector j y, finalmente, el ángulo formado por \vec{a} y el eje z será el ángulo formado \vec{a} y el vector k . A estos ángulos se les conoce como ángulos directores del vector \vec{a} y se les representa con α , β y γ , respectivamente. Calculando dichos ángulos, tenemos:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

Calculando el ángulo α , se tiene:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\bar{a} \cdot i}{|\bar{a}| |i|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{(2, 3, 4) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{29} (1)} \\ &\Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

de donde:

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \therefore \quad \alpha \approx 68.20^\circ$$

Calculando el ángulo β , tenemos:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\bar{a} \cdot j}{|\bar{a}| |j|} \Rightarrow \cos \beta = \frac{(2, 3, 4) \cdot (0, 1, 0)}{\sqrt{29} (1)} \\ &\Rightarrow \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

de donde:

$$\beta = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{29}} \quad \therefore \quad \beta \approx 56.15^\circ$$

Calculando el ángulo γ , tenemos:

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{\bar{a} \cdot k}{|\bar{a}| |k|} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{(2, 3, 4) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{29} (1)} \\ &\Rightarrow \cos \gamma = \frac{4}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

de donde:

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{29}} \quad \therefore \quad \gamma \approx 42.03^\circ$$

Este ejercicio nos da pie para definir los siguientes conceptos.

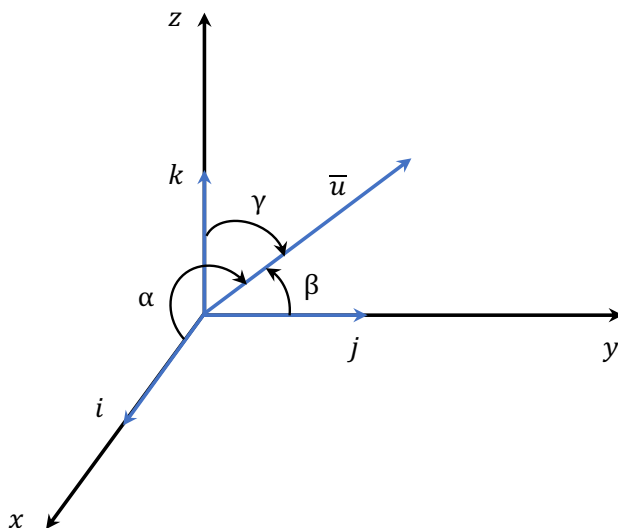
Ángulos y cosenos directores de un vector

Los ángulos directores de un vector en el espacio de tres dimensiones son medidas angulares que determinan la dirección de un vector con respecto a los ejes coordenados x , y , z del sistema de referencia. Como las direcciones de los ejes coordenados quedan definidas por los vectores unitarios i , j , k , entonces los ángulos directores de un vector son los ángulos α , β , γ que forma el vector con dichos vectores unitarios, respectivamente.

Definición

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector cualquiera diferente del vector cero en el espacio de tres dimensiones. Los ángulos directores del vector \vec{u} , son los ángulos α , β , y γ que forma \vec{u} con los vectores unitarios i , j y k , respectivamente.

Estos ángulos directores se muestran gráficamente en la siguiente figura.



Para calcular estos ángulos directores, se emplea la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|}$$

De esta forma, se tiene que:

$$\cos \alpha = \frac{\bar{u} \cdot i}{|\bar{u}| |i|} = \frac{(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 0, 0)}{|\bar{u}| (1)} = \frac{u_1}{|\bar{u}|} \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1} \frac{u_1}{|\bar{u}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\bar{u} \cdot j}{|\bar{u}| |j|} = \frac{(u_1, u_2, u_3) \cdot (0, 1, 0)}{|\bar{u}| (1)} = \frac{u_2}{|\bar{u}|} \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore \beta = \cos^{-1} \frac{u_2}{|\bar{u}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\bar{u} \cdot k}{|\bar{u}| |k|} = \frac{(u_1, u_2, u_3) \cdot (0, 0, 1)}{|\bar{u}| (1)} = \frac{u_3}{|\bar{u}|} \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore \gamma = \cos^{-1} \frac{u_3}{|\bar{u}|}$$

A las expresiones (1), (2) y (3) se les llama cosenos directores del vector \bar{u} , esto es:

$$\cos \alpha = \frac{u_1}{|\bar{u}|}$$

$$\cos \beta = \frac{u_2}{|\bar{u}|} \quad \text{Cosenos directores del vector } \bar{u}$$

$$\cos \gamma = \frac{u_3}{|\bar{u}|}$$

Obsérvese que estos cosenos directores se obtienen al dividir las componentes del vector \bar{u} entre su módulo.

Los ángulos directores de un vector no son independientes entre sí, guardan cierta relación a través de sus cosenos directores, como se mostrará a continuación.

Elevando al cuadrado en ambos lados de las expresiones de los cosenos directores, tenemos que:

$$\cos^2 \alpha = \frac{u_1^2}{|\bar{u}|^2}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{u_2^2}{|\bar{u}|^2}$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{u_3^2}{|\bar{u}|^2}$$

al sumar estas expresiones, se llega a:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{u_1^2}{|\bar{u}|^2} + \frac{u_2^2}{|\bar{u}|^2} + \frac{u_3^2}{|\bar{u}|^2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{|\bar{u}|^2}$$

como:

$$|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\Rightarrow |\bar{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

de donde:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{|\bar{u}|^2}{|\bar{u}|^2}$$

finalmente:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Se resalta esta expresión enmarcándola en un rectángulo, dada su importancia y el uso que haremos de ella en ejercicios posteriores.

Ejercicio 15. Obtenga las componentes del vector \vec{v} , si se sabe que su módulo es igual a 3 y dos de sus ángulos directores son $\alpha = 60^\circ$ y $\gamma = 45^\circ$.

Solución:

Calculemos el ángulo director β que hace falta para definir la dirección del vector \vec{v} . Para ello haremos uso de la expresión:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

sustituyendo α y γ , tenemos:

$$\cos^2 60^\circ + \cos^2 \beta + \cos^2 45^\circ = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \beta + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \beta + \frac{2}{4} = 1$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 \beta = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\cos^2 \beta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\pm \frac{1}{2} \right)$$

$$\beta_1 = 60^\circ$$

$$\beta_2 = 120^\circ$$

Se obtienen dos ángulos β con los cuales se satisface la expresión (1) , lo cual quiere decir, que el problema tiene dos respuestas correctas.

Respuesta 1: Considerando los ángulos directores:

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 60^\circ \quad \text{y} \quad \gamma = 45^\circ$$

Si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y considerando los cosenos directores, tenemos que:

$$\cos 60^\circ = \frac{v_1}{|\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad v_1 = |\vec{v}| \cos 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{v_2}{|\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad v_2 = |\vec{v}| \cos 60^\circ$$

$$\cos 45^\circ = \frac{v_3}{|\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad v_3 = |\vec{v}| \cos 45^\circ$$

del enunciado, sabemos que $|\vec{v}| = 3$, con lo cual se tiene que:

$$v_1 = 3 \cos 60^\circ = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$v_2 = 3 \cos 60^\circ = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$v_3 = 3 \cos 45^\circ = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

de donde:

$$\bar{v}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

Respuesta 2: Considerando los ángulos directores:

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 120^\circ \quad \text{y} \quad \gamma = 45^\circ$$

se tiene que:

$$v_1 = 3 \cos 60^\circ = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$v_2 = 3 \cos 120^\circ = 3 \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$v_3 = 3 \cos 45^\circ = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

de donde:

$$\bar{v}_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

Ejercicio 16. Obtenga un vector \bar{u} , cuyas componentes sean todas positivas, su magnitud sea $\sqrt{3}$ y cuyos ángulos directores sean todos iguales. Especifique el valor de dichos ángulos.

Solución:

Sabemos que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Como $\alpha = \beta = \gamma$, entonces:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$3 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como se nos pide que las componentes del vector \bar{u} sean todas positivas, entonces tomaremos solo el signo positivo, con lo cual:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \alpha \approx 54.74^\circ$$

con lo cual:

$$\alpha = \beta = \gamma \approx 54.74^\circ$$

Si consideramos que $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y que $|\bar{u}| = \sqrt{3}$, entonces tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{u_1}{|\bar{u}|} \Rightarrow u_1 = |\bar{u}| \cos \alpha$$

como:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

entonces:

$$u_1 = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\therefore u_1 = 1$$

dado que los ángulos directores son todos iguales, entonces:

$$u_1 = u_2 = u_3$$

con lo cual:

$$\bar{u} = (1, 1, 1)$$

Ejercicio 17. Sea el vector \bar{u} que tiene como cosenos directores a:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos \gamma_1$$

y sea el vector \bar{v} que tiene como cosenos directores a:

$$\cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos \beta_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos \gamma_2$$

Obtenga el ángulo θ entre los vectores \bar{u} y \bar{v} .

Solución:

Calculando el $\cos \gamma_1$, del vector \bar{u} , tenemos:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

$$\cos^2 \gamma_1 = 0$$

$$\therefore \cos \gamma_1 = 0$$

de los tres cosenos directores se concluye que el vector \bar{u} es igual a:

$$\bar{u} = (1, \sqrt{3}, 0) \text{ con } |\bar{u}| = 2$$

Calculando el $\cos \gamma_2$ del vector \bar{v} , tenemos:

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8} + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}{8} + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

desarrollando los binomios, tenemos:

$$\frac{(3 + 2\sqrt{3} + 1) + (3 - 2\sqrt{3} + 1)}{8} + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

$$\frac{8}{8} + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

$$\cos^2 \gamma_2 = 0$$

$$\therefore \cos \gamma_2 = 0$$

de los tres cosenos directores del vector \bar{v} , se llega a:

$$\bar{v} = (\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1, 0) \quad \text{con} \quad |\bar{v}| = 2\sqrt{2}$$

Finalmente, calculando el ángulo θ que definen los vectores \bar{u} y \bar{v} tenemos que:

$$\cos \theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|}$$

sustituyendo:

$$\cos \theta = \frac{(1, \sqrt{3}, 0) \cdot (\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1, 0)}{2(2\sqrt{2})}$$

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{3} + 1) + (3 - \sqrt{3})}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad \theta = 45^\circ$$

Ejercicio 18. El vector cuyo segmento dirigido es $\overline{P_1 P_2}$, tiene como cosenos directores a:

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

Si la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es igual a 3 y las coordenadas de P_1 son $P_1(3, -3, 1)$:

- a) Determine las coordenadas del punto P_2 .
- b) Mediante el álgebra vectorial, calcule la distancia que hay entre el origen del sistema de referencia y la línea que definen los puntos P_1 y P_2 .

Solución:

- a) De los cosenos directores se obtiene que:

$$\overline{P_1P_2} = (-2, 2, -1) \quad \text{y que} \quad |\overline{P_1P_2}| = 3$$

como:

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2} - \overline{P_1} = (-2, 2, -1)$$

entonces:

$$\overline{P_2} = (-2, 2, -1) + \overline{P_1}$$

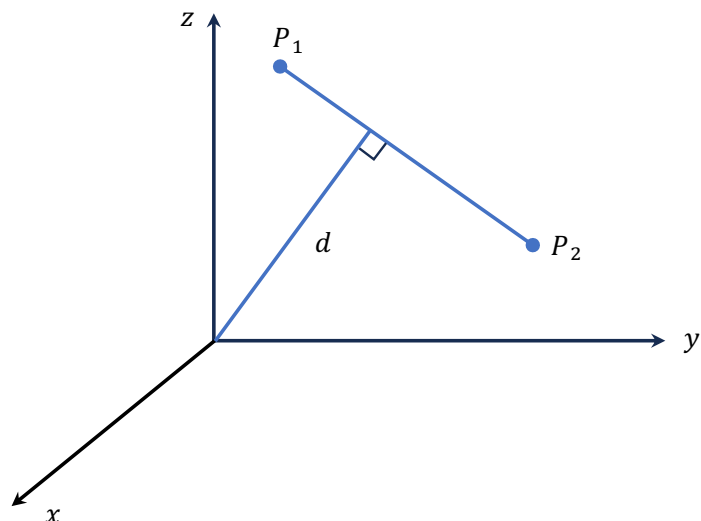
$$\overline{P_2} = (-2, 2, -1) + (3, -3, 1)$$

$$\overline{P_2} = (1, -1, 0)$$

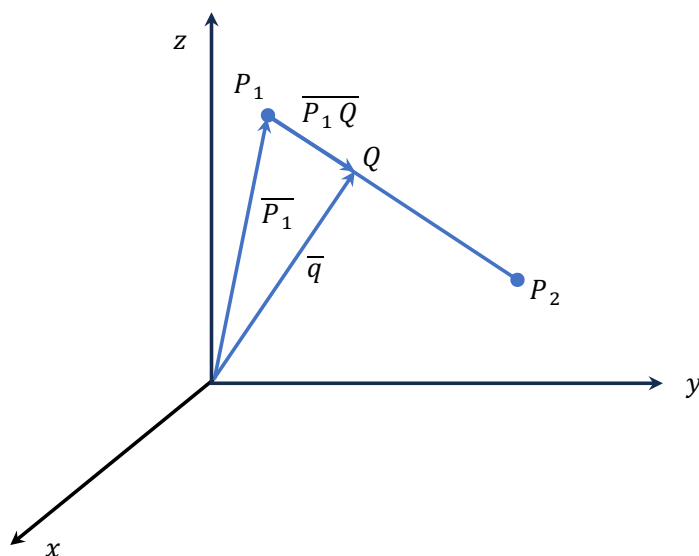
que es el vector de posición del punto P_2 .

$$\therefore P_2(1, -1, 0)$$

- b) Se nos pide calcular la distancia que hay entre el origen y el segmento $\overline{P_1P_2}$. Evidentemente, la distancia solicitada es la mínima entre el origen y el segmento $\overline{P_1P_2}$, es decir, es aquella que se mide en forma perpendicular a dicho segmento. Véase la figura. Esta figura, que se muestra a continuación, es meramente ilustrativa y no representa la ubicación exacta de los puntos P_1 y P_2 .



A continuación, se ilustra, mediante una figura, la forma en que se calculará la distancia solicitada empleando el álgebra vectorial. De nueva cuenta, la figura es meramente ilustrativa.



De la figura tenemos que:

P_1 : Punto conocido

$\overline{P_1}$: Vector de posición del punto P_1

Q : Es un punto ubicado a lo largo de la línea que definen los puntos P_1 y P_2 y determina la distancia mínima entre el origen y dicha línea.

\bar{q} : Vector de posición del punto Q , el cual es perpendicular a la línea que definen los puntos P_1 y P_2 .

En dicha figura se puede apreciar que la distancia solicitada corresponde a la magnitud del vector \bar{q} , esto es, $d = |\bar{q}|$.

Además, se puede apreciar que:

$$\bar{q} = \overline{P_1} + \overline{P_1 Q} \dots\dots\dots (1)$$

Si consideramos que:

$$\overline{P_1 Q} = \alpha \overline{P_1 P_2}$$

y como $\overline{P_1 P_2} = (-2, 2, -1)$, entonces:

$$\overline{P_1 Q} = \alpha (-2, 2, -1) \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo P_1 y (2) en (1), tenemos:

$$\bar{q} = (3, -3, 1) + \alpha (-2, 2, -1)$$

$$\bar{q} = (3 - 2\alpha, -3 + 2\alpha, 1 - \alpha) \dots\dots\dots (3)$$

Por otro lado, sabemos que \bar{q} es perpendicular al segmento $\overline{P_1 P_2}$, con lo cual, se debe cumplir que:

$$\bar{q}_1 \cdot \overline{P_1 P_2} = 0$$

esto es:

$$(3 - 2\alpha, -3 + 2\alpha, 1 - \alpha) \cdot (-2, 2, -1) = 0$$

$$(-6 + 4\alpha) + (-6 + 4\alpha) + (-1 + \alpha) = 0$$

$$9\alpha - 13 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{13}{9}$$

sustituyendo α en (3), tenemos:

$$\bar{q} = \left(3 - 2\left(\frac{13}{9}\right), -3 + 2\left(\frac{13}{9}\right), 1 - \frac{13}{9} \right)$$

$$\bar{q} = \left(3 - \frac{26}{9}, -3 + \frac{26}{9}, -\frac{4}{9} \right)$$

$$\therefore \bar{q} = \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{4}{9} \right)$$

Sabemos que la distancia solicitada viene dada por:

$$d = |\bar{q}|$$

entonces:

$$|\bar{q}| = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2}$$

$$|\bar{q}| = \sqrt{\frac{1}{81} + \frac{1}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{18}{81}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{81}} = \frac{3\sqrt{2}}{9}$$

$$\therefore d = \frac{\sqrt{2}}{3} u$$

Componente escalar y componente vectorial de un vector en la dirección de otro

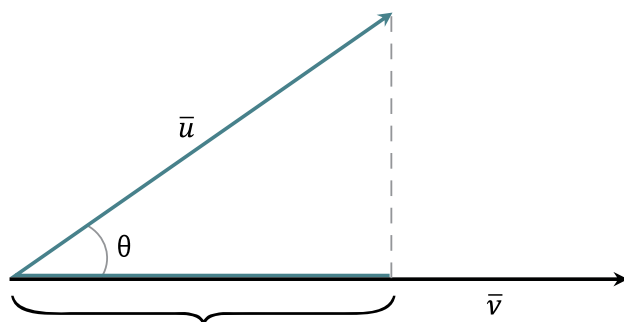
En la adición de dos vectores, se nos dan dos vectores y el objetivo es obtener el vector resultante, es decir, el vector suma; sin embargo, en ocasiones se nos puede presentar el problema inverso, esto es, dado un vector, podría interesarnos obtener los vectores que al sumarlos dan por resultado el vector dado. Hay muchos problemas en física e ingeniería donde la descomposición de un vector en sus componentes vertical y horizontal resultan fundamentales para resolver, por ejemplo, problemas de equilibrio.

En un contexto más general, la proyección de un vector sobre otro es un concepto relevante en el estudio de la geometría y el álgebra lineal, que nos permite comprender cómo interactúan los vectores en el espacio tridimensional.

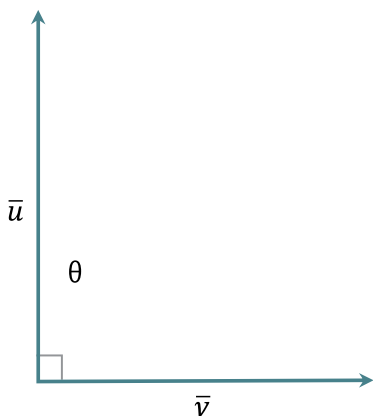
Cuando proyectamos un vector sobre otro, se obtienen dos resultados importantes: la componente escalar y la componente vectorial.

La componente escalar representa la longitud o magnitud de la proyección, en tanto que, la componente vectorial geoméricamente representa el vector que se obtiene al proyectar un vector en la dirección de otro.

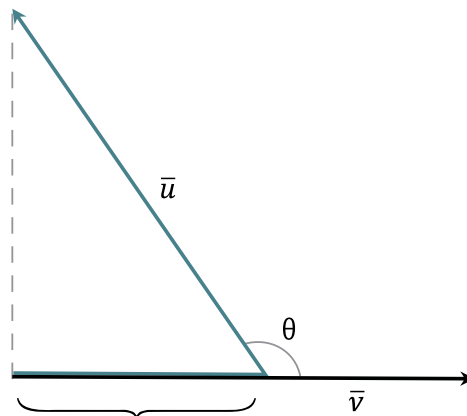
Es importante hacer hincapié en que la componente escalar de un vector sobre otro puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del ángulo que forman los dos vectores. Cuando el ángulo es agudo, menor a 90° , la componente escalar es positiva, cuando es obtuso, mayor a 90° , la componente es negativa y, será igual a cero, cuando el ángulo es de 90° , es decir, cuando los vectores son perpendiculares. Véanse las siguientes figuras:



$$\text{Comp. Esc. } \vec{v} \vec{u} > 0 \\ \text{si } \theta < 90^\circ$$



Comp. Esc. \bar{v} $\bar{u} = 0$
si $\theta = 90^\circ$



Comp. Esc. \bar{v} $\bar{u} < 0$
si $\theta > 90^\circ$

Para obtener la componente vectorial y la componente escalar de un vector sobre otro, se hace uso del producto escalar, como se muestra a continuación.

Componente vectorial y componente escalar

Sean \bar{u} y \bar{v} dos vectores no nulos. La componente vectorial de \bar{u} sobre \bar{v} , que representamos como $Comp. Vec. \bar{v} \bar{u}$, viene dada por la expresión:

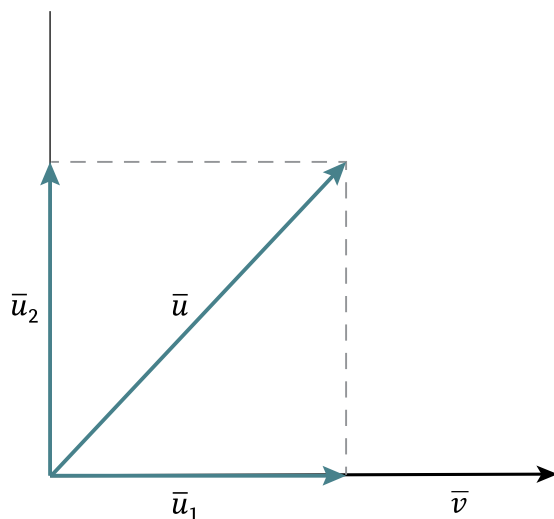
$$Comp. Vec. \bar{v} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

La componente escalar de \bar{u} sobre \bar{v} , que representamos como $Comp. Esc. \bar{v} \bar{u}$, se calcula con la expresión:

$$Comp. Esc. \bar{v} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|}$$

Demostración:

Consideremos la siguiente figura:



De la figura, se tiene que:

\bar{u}_1 : Es la proyección del vector \bar{u} sobre \bar{v} .

\bar{u}_2 : Es la proyección del vector \bar{u} sobre una dirección perpendicular a \bar{v} .

Además, tenemos que:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \dots\dots\dots (1)$$

Dado que en la figura se puede apreciar que \bar{u}_1 y \bar{v} son paralelos, entonces podemos establecer la siguiente relación:

$$\bar{u}_1 = k \bar{v} \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$\bar{u} = k \bar{v} + \bar{u}_2 \dots\dots\dots (3)$$

efectuando el producto escalar en ambos lados de la expresión (3) con el vector \bar{v} , se tiene:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (k \bar{v} + \bar{u}_2) \cdot \bar{v}$$

aplicando propiedades del producto escalar, se llega a:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (k \bar{v} \cdot \bar{v}) + (\bar{u}_2 \cdot \bar{v})$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = k (\bar{v} \cdot \bar{v}) + (\bar{u}_2 \cdot \bar{v}) \dots\dots\dots (4)$$

dado que \bar{u}_2 y \bar{v} son perpendiculares, entonces:

$$\bar{u}_2 \cdot \bar{v} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

y sabemos que:

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{v}|^2 \dots\dots\dots (6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (4), tenemos que:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = k |\bar{v}|^2$$

de donde:

$$k = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2} \dots\dots\dots (7)$$

sustituyendo (7) en (2), tenemos:

$$\bar{u}_1 = \left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2} \right) \bar{v}$$

la expresión anterior la podemos escribir como:

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

Como \bar{u}_1 representa la proyección del vector \bar{u} sobre \bar{v} , finalmente llegamos a que:

$$\text{Comp. Vec. } \bar{v} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

lo cual completa la demostración.

Ejercicio 19. Para los vectores dados, obtenga lo que se pide en cada uno de los siguientes incisos.

a) Si $\bar{u} = (1, -1, 2)$ y $\bar{v} = (-1, 0, 3)$, obtenga:

$$\text{Comp. Esc. } \bar{v} \bar{u} \quad \text{y} \quad \text{Comp. Vec. } \bar{v} \bar{u}$$

b) Si $\bar{a} = (-2, 1, 2)$ y $\bar{b} = (1, -1, 1)$, obtenga:

$$\text{Comp. Esc. } \bar{b} \bar{a} \quad \text{y} \quad \text{Comp. Vec. } \bar{b} \bar{a}$$

$$\text{Comp. Esc. } \bar{a} \bar{b} \quad \text{y} \quad \text{Comp. Vec. } \bar{a} \bar{b}$$

Solución:

a) Los vectores dados son:

$$\bar{u} = (1, -1, 2) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (-1, 0, 3)$$

Sabemos que:

$$\text{Comp. Esc. }_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

como:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

entonces:

$$\text{Comp. Esc. }_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{(1, -1, 2) \cdot (-1, 0, 3)}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

Por otro lado, se tiene que:

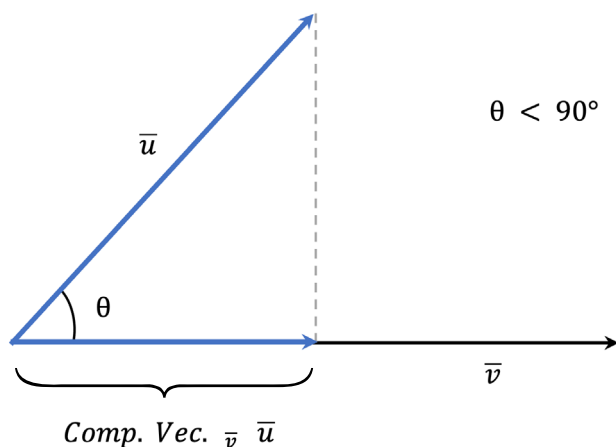
$$\text{Comp. Vec. }_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\text{Comp. Esc. }_{\vec{v}} \vec{u}) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

sustituyendo, tenemos:

$$\text{Comp. Vec. }_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{5}{\sqrt{10}} \frac{(-1, 0, 3)}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \text{Comp. Vec. }_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{1}{2} (-1, 0, 3)$$

Un aspecto que resulta interesante resaltar en este inciso es que la $\text{Comp. Esc. }_{\vec{v}} \vec{u}$ resultó un valor positivo, lo que implica que el ángulo entre los vectores \vec{u} y \vec{v} es menor a 90° y, en consecuencia, la proyección del vector \vec{u} sobre \vec{v} es un vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido del vector \vec{v} . Véase la siguiente figura:



b) Los vectores dados son:

$$\bar{a} = (-2, 1, 2) \quad \text{y} \quad \bar{b} = (1, -1, 1)$$

Calculemos primero la

$$\text{Comp. Esc. } \bar{b} \bar{a} \quad \text{y} \quad \text{Comp. Vec. } \bar{b} \bar{a}$$

Se tiene que:

$$|\bar{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

entonces:

$$\text{Comp. Esc. } \bar{b} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{(-2, 1, 2) \cdot (1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

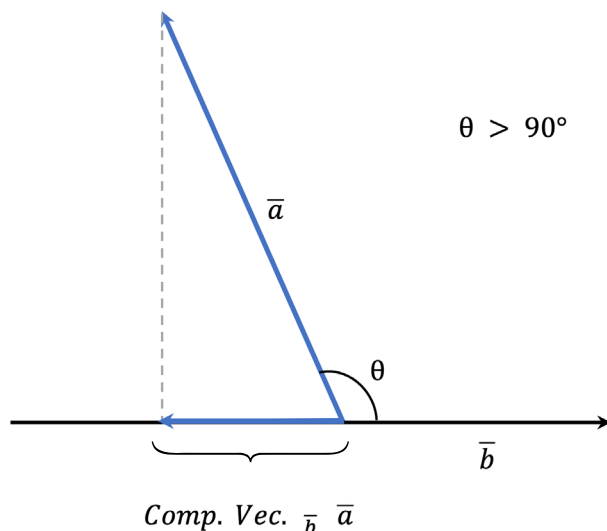
Dado que la *Comp. Esc. $\bar{b} \bar{a}$* resultó negativa, entonces el ángulo θ , entre los vectores \bar{a} y \bar{b} , es mayor a 90° , lo que implica que la proyección del vector \bar{a} sobre \bar{b} resulta un vector con sentido opuesto a \bar{b} .

Además:

$$\text{Comp. Vec. } \bar{b} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{Comp. Vec. } \bar{b} \bar{a} = -\frac{1}{3} (1, -1, 1)$$

Gráficamente:



Calculemos ahora la

$$\text{Comp. Esc. } \bar{a} \bar{b} \quad \text{y la} \quad \text{Comp. Vec. } \bar{a} \bar{b}$$

Tenemos que:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

entonces:

$$\text{Comp. Esc. } \bar{a} \bar{b} = \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{(1, -1, 1) \cdot (-2, 1, 2)}{3} = -\frac{1}{3}$$

además:

$$\text{Comp. Vec. } \bar{a} \bar{b} = \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = -\frac{1}{3} \frac{(-2, 1, 2)}{3} = -\frac{1}{9} (-2, 1, 2)$$

En este caso, la *Comp. Esc.* $\bar{a} \bar{b}$ también resultó un valor negativo, en consecuencia, se presenta la misma característica geométrica de la proyección de los vectores de la primera parte de este inciso, es decir, la proyección con sentido opuesto al vector sobre el cual se proyecta.

Ejercicio 20. Sean los vectores:

$$\bar{u} = (0, b, c), \bar{v} = (-2, 1, -3) \text{ y } \bar{w} = 4i + j - 2k$$

Obtenga los valores de b y c del vector \bar{u} , tales que la componente escalar de \bar{u} sobre \bar{v} sea igual a $\sqrt{14}$ y la de \bar{u} sobre \bar{w} sea igual a $\sqrt{21}$.

Solución:

Se nos dice que:

$$\text{Comp. Esc. } \bar{v} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} = \sqrt{14} \dots\dots\dots (1)$$

como:

$$|\bar{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

sustituyendo \bar{u} , \bar{v} y $|\bar{v}|$ en (1), tenemos:

$$\text{Comp. Esc. } \bar{v} \bar{u} = \frac{(0, b, c) \cdot (-2, 1, -3)}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

de donde se obtiene que:

$$b - 3c = 14 \dots\dots\dots (2)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\text{Comp. Esc. } \vec{w} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} = \sqrt{21} \dots\dots\dots (3)$$

como:

$$|\vec{w}| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

sustituyendo \vec{u} , \vec{w} y $|\vec{w}|$ en (3), tenemos:

$$\text{Comp. Esc. } \vec{w} \vec{u} = \frac{(0, b, c) \cdot (4, 1, -2)}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}$$

de donde se llega a:

$$b - 2c = 21 \dots\dots\dots (4)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones que definen (2) y (4), tenemos:

$$\begin{matrix} (-1) \\ \downarrow + \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} b - 3c = 14 \\ b - 2c = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - 3c = 14 \Rightarrow b = 35 \\ c = 7 \end{cases}$$

con lo cual, el vector \vec{u} es igual a:

$$\vec{u} = (0, 35, 7)$$

Ejercicio 21. Sean los vectores:

$$\bar{a} = i + 2j + 3k \quad \text{y} \quad \bar{b} = -i + 2j + 2k$$

Obtenga:

- a) El valor de α para que la componente escalar del vector $\alpha \bar{a}$ sobre el vector \bar{b} sea igual a 6.
- b) El valor de α para que la componente vectorial del vector $\alpha \bar{a}$ sobre el vector \bar{b} sea igual al mismo vector \bar{b} .

Solución:

- a) Se tiene que cumplir que:

$$\text{Comp. Esc. } \bar{b} \alpha \bar{a} = \frac{\alpha \bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = 6 \quad \dots\dots\dots (1)$$

como:

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\alpha \bar{a} = \alpha (1, 2, 3) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$\frac{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \cdot (-1, 2, 2)}{3} = 6$$

de donde:

$$-\alpha + 4\alpha + 6\alpha = 18$$

$$9\alpha = 18 \quad \therefore \quad \alpha = 2$$

b) En este inciso se debe cumplir que:

$$\text{Comp. Vec. } \bar{b} \alpha \bar{a} = \frac{\alpha \bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \bar{b} \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo $\alpha \bar{a}$, \bar{b} y $|\bar{b}|$ en (2), tenemos:

$$\frac{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \cdot (-1, 2, 2)}{3} \frac{(-1, 2, 2)}{3} = (-1, 2, 2)$$

desarrollando el producto escalar, se tiene:

$$\frac{9\alpha}{3} \frac{(-1, 2, 2)}{3} = (-1, 2, 2)$$

de donde:

$$\alpha (-1, 2, 2) = (-1, 2, 2)$$

entonces el valor de α buscado es:

$$\alpha = 1$$

Producto vectorial de vectores

Anteriormente definimos el producto escalar o producto punto entre vectores, donde el resultado es un escalar. Ahora definiremos un producto entre vectores cuyo resultado será un vector. A esta nueva operación se le conoce como producto vectorial o producto cruz. Es conveniente resaltar que esta operación solo se define para vectores en el espacio de tres dimensiones. Al efectuar el producto vectorial de dos vectores, el resultado es un nuevo vector que es perpendicular a los dos vectores originales. La definición de esta operación se da en los siguientes términos.

Definición

Sean $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ y $\vec{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ dos vectores del espacio de tres dimensiones. El producto vectorial o producto cruz de los vectores \vec{u} y \vec{v} , que notamos con $\vec{u} \times \vec{v}$, se define como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) i - (u_1 v_3 - u_3 v_1) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$

Como se puede apreciar, la definición del producto vectorial resultaría un tanto complicado aprendérsela para poder realizar esta operación, por tal motivo, esta definición se vincula con el desarrollo de un determinante de 3×3 , donde se coloca como primer renglón los vectores unitarios i, j, k y, como segundo y tercer renglones, los vectores \vec{u} y \vec{v} , esto es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Si calculamos este determinante aplicando el método de cofactores con el primer renglón, se tendría:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

Al calcular los tres determinantes de 2×2 , se obtiene que:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) i - (u_1 v_3 - u_3 v_1) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$

que es, precisamente, la definición que se dio del producto vectorial o producto cruz de dos vectores.

Es conveniente hacer la siguiente aclaración: el término “determinante” utilizado para recordar fácilmente la definición del producto vectorial, técnicamente no es un determinante en el sentido tradicional, pues su primer renglón lo integran tres vectores y el resto de los elementos son números reales. Aunque tiene una forma similar, sería más preciso referirse a él como un “determinante simbólico”, o bien, como una notación conveniente para describir el producto vectorial.

Ejercicio 22. Con los vectores $\bar{u} = (2, -1, 3)$ y $\bar{v} = (1, 4, -1)$ obtenga:

- a) $\bar{u} \times \bar{v}$
- b) $\bar{v} \times \bar{u}$
- c) $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$
- d) $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$

Solución:**a)**

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} k$$

de donde:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (1 - 12)i - (-2 - 3)j + (8 + 1)k$$

$$\therefore \bar{u} \times \bar{v} = -11i + 5j + 9k$$

b)

$$\bar{v} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} k$$

de donde:

$$\bar{v} \times \bar{u} = (12 - 1)i - (3 + 2)j + (-1 - 8)k$$

$$\therefore \bar{v} \times \bar{u} = 11i - 5j - 9k$$

Obsérvese que al efectuar $\bar{v} \times \bar{u}$, el resultado que se obtuvo es el mismo que el obtenido en el inciso a) pero con signos cambiados, es decir, podríamos asegurar que $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$, puesto que, al intercambiar dos filas en un determinante, el resultado cambia de signo.

- c) En este inciso nos piden calcular $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$. Veamos a qué resultado llegamos:

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = (2, -1, 3) \cdot (-11, 5, 9) = -22 - 5 + 27$$

$$\therefore \bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$$

Dado que el producto punto entre \bar{u} y $(\bar{u} \times \bar{v})$ resultó igual a cero, esto implica que dichos vectores son perpendiculares, esto es:

$$\bar{u} \perp \bar{u} \times \bar{v}$$

- d) Ahora se nos pide calcular $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$.

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = (1, 4, -1) \cdot (-11, 5, 9) = -11 + 20 - 9$$

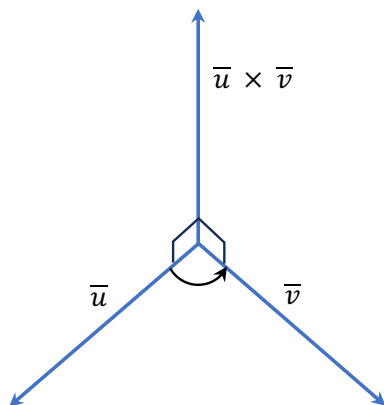
$$\therefore \bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$$

entonces, el vector \bar{v} también resultó perpendicular al vector $(\bar{u} \times \bar{v})$, esto es:

$$\bar{v} \perp \bar{u} \times \bar{v}$$

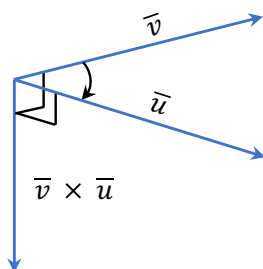
Los resultados obtenidos en los incisos c) y d), muestran que al efectuar el producto vectorial $\bar{u} \times \bar{v}$, el resultado es un nuevo vector que es perpendicular tanto a \bar{u} como \bar{v} . Además, los resultados obtenidos en los incisos a) y b), muestran que los vectores $\bar{u} \times \bar{v}$ y $\bar{v} \times \bar{u}$ tienen la misma longitud, pero con direcciones opuestas.

La dirección del vector $\bar{u} \times \bar{v}$ queda definida siguiendo la regla de la mano derecha. Véase la siguiente figura:



Imaginemos que el vector \vec{u} queda representado por la posición de nuestro dedo índice apuntando en su dirección, mientras que el vector \vec{v} se representa con nuestro dedo medio, también apuntando en su dirección correspondiente. Si extendemos el dedo pulgar de manera que forme un ángulo de 90° con respecto a los otros dos dedos, entonces, al girar el dedo índice en dirección al dedo medio, el dedo pulgar indicará la dirección del nuevo vector resultante.

Si lo que hacemos es girar el dedo medio en dirección del dedo índice, entonces el vector resultante tendrá la dirección opuesta al vector resultante anterior. Véase la siguiente figura:



Otra alternativa para determinar la dirección del vector $\vec{u} \times \vec{v}$, es observar la dirección en la que se desplaza un tornillo de rosca derecha. Si se gira el tornillo en sentido contrario a las manecillas del reloj, se desplazará hacia arriba; mientras que si lo giramos en el mismo sentido de las manecillas del reloj, se apretará y, por ende, se desplazará hacia abajo.

El producto vectorial de vectores tiene propiedades algebraicas y también propiedades geométricas. Enunciaremos primero las propiedades algebraicas.

Propiedades algebraicas del producto vectorial

Sean \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} tres vectores en el espacio de tres dimensiones y sea k un escalar. Se tiene que:

$$1) \quad \bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$$

$$2) \quad \bar{u} \times \bar{0} = \bar{0} \times \bar{u} = \bar{0}$$

$$3) \quad k(\bar{u} \times \bar{v}) = (k\bar{u}) \times \bar{v} = \bar{u} \times (k\bar{v})$$

$$4) \quad \bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$$

$$5) \quad \bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w})$$

$$6) \quad \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$$

$$7) \quad \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$$

La primera propiedad se justificó con los resultados obtenidos en los incisos a) y b) del ejercicio 22.

Las propiedades 2, 3 y 4 se pueden demostrar muy fácilmente aplicando directamente la definición del producto vectorial.

Haremos entonces la demostración de las propiedades 5 y 6 que no son tan evidentes.

Demostración de la propiedad 5.

$$\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

Sean los vectores:

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

Desarrollando el primer miembro de (1):

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

con lo cual, tenemos que:

$$\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) &= [u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2)]i - [u_1(v_3 + w_3) - u_3(v_1 + w_1)]j \\ &+ [u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1)]k \end{aligned}$$

desarrollando los productos indicados:

$$\begin{aligned} \bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) &= (u_2v_3 + u_2w_3 - u_3v_2 - u_3w_2)i - (u_1v_3 + u_1w_3 - u_3v_1 - u_3w_1)j \\ &+ (u_1v_2 + u_1w_2 - u_2v_1 - u_2w_1)k \end{aligned}$$

agrupando los términos de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) &= [(u_2v_3 - u_3v_2) + (u_2w_3 - u_3w_2)]i - [(u_1v_3 - u_3v_1) + (u_1w_3 - u_3w_1)]j \\ &+ [(u_1v_2 - u_2v_1) + (u_1w_2 - u_2w_1)]k \end{aligned}$$

separando los términos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)i - (u_1 v_3 - u_3 v_1)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k \\ &+ (u_2 w_3 - u_3 w_2)i - (u_1 w_3 - u_3 w_1)j + (u_1 w_2 - u_2 w_1)k\end{aligned}$$

expresando en términos de determinantes, tenemos:

$$\begin{aligned}\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k + \\ &\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} k\end{aligned}$$

Los tres primeros términos del lado derecho de la igualdad representan el resultado del desarrollo del producto vectorial $\bar{u} \times \bar{v}$, según la definición. Los siguientes tres términos, corresponden al desarrollo del producto $\bar{u} \times \bar{w}$, con lo cual se llega a:

$$\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w})$$

Hemos llegado a la expresión (1), lo cual completa la demostración.

Demostremos ahora la propiedad 6:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} \dots\dots\dots (2)$$

Sean los vectores:

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

desarrollando el miembro izquierdo de (2), tenemos:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) i - (v_1 w_3 - v_3 w_1) j + (v_1 w_2 - v_2 w_1) k$$

efectuando el producto punto con el vector \vec{u} , se llega a:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_2 v_1 w_3 \\ &+ u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

desarrollando ahora el miembro derecho de (2), tenemos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) i - (u_1 v_3 - u_3 v_1) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$

efectuando el producto punto con el vector \vec{w} , se llega a:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

de donde:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= u_2 v_3 w_1 - u_3 v_2 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_1 v_3 w_2 \\ &+ u_1 v_2 w_3 - u_2 v_1 w_3 \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

como los lados derechos de (3) y (4) resultan iguales, entonces se puede concluir que:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$$

lo cual completa la demostración.

De esta propiedad 6, podemos darnos cuenta de que si mantenemos el orden en que aparecen los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} , el orden de las operaciones \cdot y \times las podemos intercambiar.

Cuando tres vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} se operan con los productos \cdot y \times simultáneamente, como se hace en la propiedad 6, a esta doble operación se le llama producto mixto de vectores, de la cual hablaremos un poco más adelante.

Se deja al lector como ejercicio la demostración de la propiedad 7, siguiendo como ejemplo las demostraciones de las propiedades 5 y 6.

Propiedades geométricas del producto vectorial

Sean \bar{u} y \bar{v} dos vectores en el espacio de tres dimensiones y sea θ el ángulo entre \bar{u} y \bar{v} . Se tiene que:

- 1) $\bar{u} \times \bar{v}$ es un vector perpendicular tanto a \bar{u} como a \bar{v} .
- 2) $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}| |\bar{v}| \sin \theta$
- 3) $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$, si y solo si, \bar{u} y \bar{v} son paralelos con $\bar{u} \neq \bar{0}$ y $\bar{v} \neq \bar{0}$.
- 4) $|\bar{u} \times \bar{v}|$ es igual al área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados concurrentes a los vectores \bar{u} y \bar{v} .

Demostración propiedad 1.

Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Se tiene que:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) i - (u_1 v_3 - u_3 v_1) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$

de donde:

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

desarrollando el producto escalar:

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 - u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 - u_2 u_3 v_1$$

con lo cual:

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0 \quad \therefore \quad \bar{u} \perp \bar{u} \times \bar{v}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

desarrollando el producto escalar:

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = u_2 v_1 v_3 - u_3 v_1 v_2 + u_3 v_1 v_2 - u_1 v_2 v_3 + u_1 v_2 v_3 - u_2 v_1 v_3$$

con lo cual:

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0 \quad \therefore \quad \bar{v} \perp \bar{u} \times \bar{v}$$

lo cual completa la demostración.

Demostración de la propiedad 2.

Propiedad por demostrar:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

como:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

entonces:

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \theta}$$

desarrollando el lado derecho de (1), tenemos:

$$|\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta = |\vec{u}| |\vec{v}| \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (2)$$

además, sabemos que:

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

con lo cual:

$$\operatorname{cos}^2 \theta = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

sustituyendo (3) en (2), tenemos:

$$|\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta = |\vec{u}| |\vec{v}| \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2}}$$

metiendo $|\bar{u}| |\bar{v}|$ dentro del radical, tenemos:

$$|\bar{u}| |\bar{v}| \operatorname{sen} \theta = \sqrt{|\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \left(1 - \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})^2}{|\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2} \right)}$$

desarrollando el producto dentro del radical, se llega a:

$$|\bar{u}| |\bar{v}| \operatorname{sen} \theta = \sqrt{|\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 - (\bar{u} \cdot \bar{v})^2} \dots\dots\dots (4)$$

si consideramos que:

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

entonces:

$$|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \Rightarrow |\bar{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \dots\dots\dots (5)$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \Rightarrow |\bar{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \dots\dots\dots (7)$$

sustituyendo (5), (6) y (7) en (4), se tiene:

$$|\bar{u}| |\bar{v}| \operatorname{sen} \theta = \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2} \dots (8)$$

si desarrollamos el producto y el cuadrado que están dentro del radical de la expresión (8) y se hace un manejo adecuado de los términos, se llega a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 \\ &+ (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

sustituyendo (9) en (8), tenemos:

$$|\bar{u}| |\bar{v}| \operatorname{sen} \theta = \sqrt{(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} \dots (10)$$

se sabe que:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

con lo cual:

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} \dots\dots\dots (11)$$

sustituyendo (11) en (10), se llega a:

$$|\bar{u}| |\bar{v}| \operatorname{sen} \theta = |\bar{u} \times \bar{v}|$$

lo cual completa la demostración.

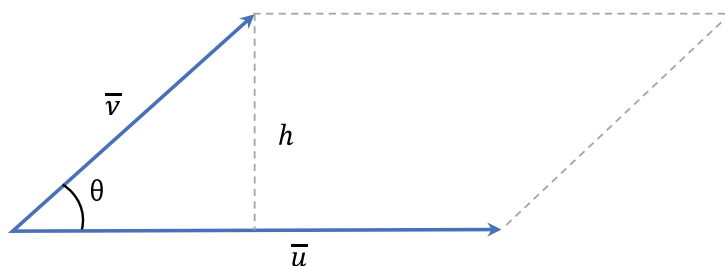
De la propiedad 3, se hará únicamente la siguiente reflexión.

Si los vectores \bar{u} y \bar{v} son paralelos, siendo ambos diferentes del vector nulo, entonces se cumple que su producto cruz es igual al vector cero, lo que implica que su módulo también es cero, esto es, $|\bar{u} \times \bar{v}| = 0$. Al aplicar la propiedad 2, que establece que $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}| |\bar{v}| \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre dichos vectores, entonces para que $|\bar{u} \times \bar{v}| = 0$ y sabiendo que $|\bar{u}|$ y $|\bar{v}|$ son distintos de cero, es necesario que $\operatorname{sen} \theta = 0$. Esto solo ocurre cuando $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$, lo que implica que los vectores \bar{u} y \bar{v} sean paralelos. Si $\theta = 0^\circ$, entonces \bar{u} y \bar{v} comparten la misma dirección; mientras que si $\theta = 180^\circ$, \bar{u} y \bar{v} tienen direcciones opuestas.

Demostración de la propiedad 4.

La propiedad 4 establece que $|\bar{u} \times \bar{v}|$ resulta ser igual al área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados concurrentes a los vectores \bar{u} y \bar{v} .

Para hacer la demostración de esta propiedad, nos apoyaremos en la siguiente figura:



De este paralelogramo, tenemos que dos de sus lados tienen por longitud $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. La altura h del paralelogramo será igual a:

como:

$$\text{sen } \theta = \frac{h}{|\vec{v}|}$$

entonces:

$$h = |\vec{v}| \text{ sen } \theta$$

dado que el área del paralelogramo es igual a:

$$A = (\text{Base}) (\text{Altura})$$

entonces:

$$A = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{ sen } \theta$$

de la propiedad 2, se llega a que:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

lo cual completa la demostración.

Ejercicio 23. Sean los puntos:

$$A(2, -1, 1), \quad B(5, 1, 4), \quad C(0, 1, 1) \quad \text{y} \quad D(3, 3, 4)$$

- a) Demuestre que el cuadrilátero que definen los puntos A , B , C y D es un paralelogramo.
- b) Calcule el área de dicho paralelogramo.

Solución:

- a) Para demostrar que el cuadrilátero definido por los puntos A , B , C y D es un paralelogramo, se calcularán los cuatro segmentos dirigidos que lo delimitan y debemos comprobar si son vectores paralelos al tomarlos de dos en dos.

Tomaremos a los puntos A y D como dos de los vértices opuestos del cuadrilátero y calcularemos entonces los siguientes segmentos dirigidos:

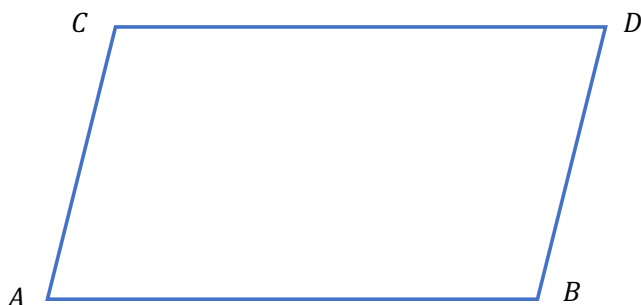
$$\overline{AB} = (5 - 2, \quad 1 + 1, \quad 4 - 1) = (3, \quad 2, \quad 3)$$

$$\overline{AC} = (0 - 2, \quad 1 + 1, \quad 1 - 1) = (-2, \quad 2, \quad 0)$$

$$\overline{DB} = (5 - 3, \quad 1 - 3, \quad 4 - 4) = (2, \quad -2, \quad 0)$$

$$\overline{DC} = (0 - 3, \quad 1 - 3, \quad 1 - 4) = (-3, \quad -2, \quad -3)$$

Véase la siguiente figura:



Obsérvese que:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} &= -\overline{DC} \\ \overline{AC} &= -\overline{DB} \end{aligned} \right\} \text{ vectores paralelos con sentidos opuestos}$$

entonces, podemos afirmar que el segmento \overline{AB} es paralelo al segmento \overline{DC} y que los segmentos \overline{AC} y \overline{DB} también lo son, por lo tanto, podemos concluir que el cuadrilátero es un paralelogramo.

- b) De las propiedades geométricas del producto vectorial, la cuarta de ellas establece que, el área de un paralelogramo es igual al módulo del producto cruz de dos de los vectores alojados en lados concurrentes. Tomaremos entonces los vectores \overline{AB} y \overline{AC} para calcular el área solicitada.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6i - 6j + 10k$$

de donde:

$$A = |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (10)^2} = \sqrt{36 + 36 + 100}$$

$$\therefore A = \sqrt{172} \approx 13.11 u^2$$

Ejercicio 24. Calcule el área del paralelogramo cuyas aristas son los vectores \overline{a} y \overline{b} , si se sabe que \overline{a} y \overline{b} son perpendiculares, que el $|\overline{b}| = 4$ y que el vector $\overline{a} = 3\overline{c} - 2\overline{d}$, donde $\overline{c} = (1, 2, -1)$ y $\overline{d} = i - j$.

Solución:

La segunda de las propiedades geométricas del producto vectorial establece que:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| |\overline{b}| \text{ sen } \theta \dots\dots\dots (1)$$

donde θ es el ángulo que definen los vectores \vec{a} y \vec{b} .

Como se dice que los vectores \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares, entonces:

$$\theta = 90^\circ$$

De la expresión (1), conocemos que $|\vec{b}| = 4$ y que $\theta = 90^\circ$, solo nos haría falta obtener al vector \vec{a} y calcular su módulo para obtener el área paralelogramo solicitada. Tenemos entonces que:

$$\vec{a} = 3\vec{c} - 2\vec{d}$$

sustituyendo los vectores \vec{c} y \vec{d} :

$$\vec{a} = 3(1, 2, -1) - 2(1, -1, 0) = (1, 8, -3)$$

de donde:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 64 + 9} = \sqrt{74}$$

sustituyendo en la expresión (1), se tiene que:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta = \sqrt{74} (4) \operatorname{sen} 90^\circ$$

de donde:

$$A = 4\sqrt{74} \approx 34.4 \text{ u}^2$$

Ejercicio 25. Calcule el área del paralelogramo que se forma con los vectores \vec{u} y \vec{v} , si estos vectores se definen de la siguiente manera:

Vector \vec{u} : $|\vec{u}| = 3$ y con la misma dirección del vector $\vec{a} = 2i - j + 2k$

Vector \vec{v} : $|\vec{v}| = 2$ y ángulos directores $\alpha = \gamma = 60^\circ$ con $\beta < 90^\circ$

Solución:

A partir de los datos proporcionados de los vectores \bar{u} y \bar{v} , obtendremos sus componentes.

Vector \bar{u} :

Se dice que su módulo es igual a 3 y con la misma dirección del vector \bar{a} ; sin embargo, se puede apreciar fácilmente que $|\bar{a}| = 3$, por lo tanto, podemos concluir que:

$$\bar{u} = \bar{a} \Rightarrow \bar{u} = (2, -1, 2)$$

Vector \bar{v} :

Nos dan dos de los ángulos directores de \bar{v} , por lo que calcularemos el ángulo β con la expresión:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Sustituyendo α y γ , tenemos:

$$\cos^2 60^\circ + \cos^2 \beta + \cos^2 60^\circ = 1$$

de donde:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \beta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \beta + \frac{1}{4} = 1$$

$$\cos^2 \beta + \frac{1}{2} = 1$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \beta = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

con lo cual, se tienen los siguientes valores de β :

$$\begin{cases} \beta_1 = 45^\circ \\ \beta_2 = 135^\circ \end{cases}$$

como se dice que $\beta < 90^\circ$, entonces el ángulo a considerar es el de $\beta = 45^\circ$, con lo cual, los ángulos directores del vector \vec{v} son:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\gamma = 60^\circ$$

con los cosenos directores podemos obtener las componentes del vector \vec{v} .

Si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, se tiene que:

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|} \Rightarrow v_1 = |\vec{v}| \cos \alpha = 2 \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|} \Rightarrow v_2 = |\vec{v}| \cos \beta = 2 \cos 45^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|} \Rightarrow v_3 = |\vec{v}| \cos \gamma = 2 \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

con lo cual, el vector \vec{v} es:

$$\vec{v} = (1, \sqrt{2}, 1)$$

con los vectores \bar{u} y \bar{v} ya definidos, calcularemos el área del paralelogramo solicitada.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 2\sqrt{2})i + (2\sqrt{2} + 1)k$$

de donde:

$$\begin{aligned} A &= |\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{(-1 - 2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + 1)^2} \\ &= \sqrt{(1 + 4\sqrt{2} + 8) + (8 + 4\sqrt{2} + 1)} \\ &= \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore A \approx 5.41 u^2$$

Ejercicio 26. Sean los vectores:

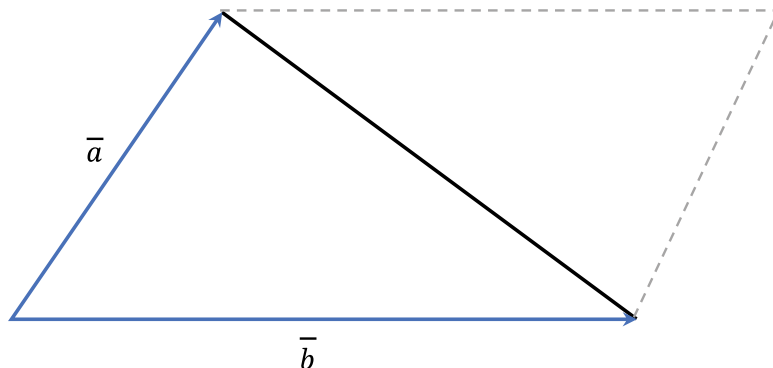
$$\bar{a} = 2i - j + k, \quad \bar{b} = 3i + j - k \quad \text{y} \quad \bar{c} = -4i + 2j - 2k$$

Determine:

- El área del triángulo en dos de cuyos lados se encuentran alojados los vectores \bar{a} y \bar{b} .
- Si los vectores \bar{a} y \bar{c} son paralelos.

Solución:

a) Ilustremos gráficamente el área del triángulo que se nos pide calcular.



En la gráfica se puede apreciar que el área del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo que se puede formar con los vectores \vec{a} y \vec{b} , de esta forma, se tiene que:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$$

entonces, tenemos que:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5j + 5k$$

con lo cual:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

por lo que, el área del triángulo es:

$$A = \frac{5\sqrt{2}}{2} u^2$$

- b)** Como se establece en la propiedad 3 de las propiedades geométricas del producto vectorial, dos vectores son paralelos, si y solo si, su producto vectorial es igual a cero, esto es:

$$\vec{a} \parallel \vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

calculemos entonces, $\vec{a} \times \vec{c}$:

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 0k = \vec{0}$$

con lo cual, podemos afirmar que los vectores \vec{a} y \vec{c} son paralelos.

Producto mixto de vectores

El producto mixto entre vectores, también conocido como triple producto escalar, es una operación donde intervienen tres vectores del espacio tridimensional y los dos productos entre vectores hasta ahora tratados, el producto escalar y el producto vectorial.

Al efectuar el producto mixto entre tres vectores, lo que se obtiene como resultado es un escalar.

Consideremos los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{y} \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

Si se quiere realizar el producto mixto de los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} , entonces lo que debemos realizar es la operación:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$$

Esto es, tenemos que realizar el producto punto del vector \bar{u} con el vector que resulta de efectuar el producto cruz de \bar{v} y \bar{w} . Efectuemos entonces, en primera instancia, el producto $\bar{v} \times \bar{w}$.

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)i - (v_1 w_3 - v_3 w_1)j + (v_1 w_2 - v_2 w_1)k$$

de donde:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2(v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

la anterior igualdad la podemos expresar en términos de determinantes de la siguiente manera:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Lo que corresponde al desarrollo por cofactores, con el primer renglón, del siguiente determinante:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

lo cual nos lleva a la siguiente definición.

Definición

Dados tres vectores del espacio de tres dimensiones cualesquiera:

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{y} \quad \bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

el producto mixto de los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} , viene dado por:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Dado que la definición del producto mixto de tres vectores se expresa en términos de un determinante, entonces por propiedades de los determinantes, sabemos que el valor de este cambia de signo, si se intercambian dos de sus filas; sin embargo, si el intercambio de filas se hace en dos ocasiones, entonces el valor del determinante no cambia. De acuerdo con esto, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{v} \cdot (\bar{w} \times \bar{u}) = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$$

Por otro lado, dentro de las propiedades algebraicas del producto vectorial, la número 6, establece que, en el producto mixto de vectores, las operaciones \cdot y \times se pueden intercambiar y el resultado de la operación no se altera, esto es:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$$

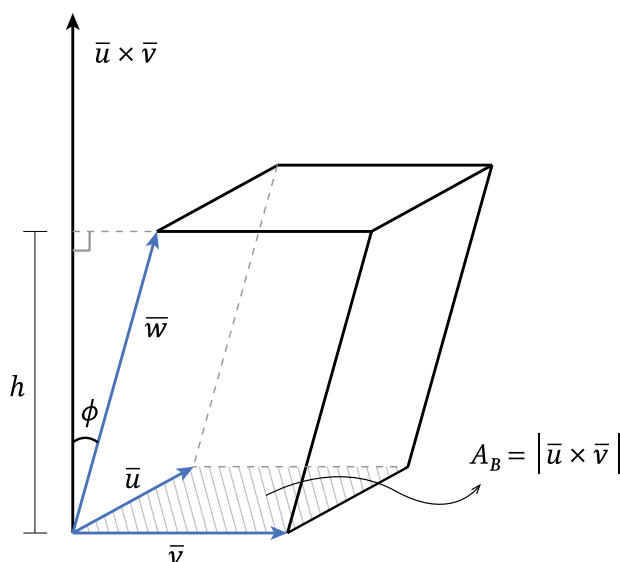
por tal razón, una notación alterna para el producto mixto de vectores es la siguiente:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}] = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$$

Al ser indistinto el orden de las operaciones \cdot y \times , entonces se omiten y se colocan los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} dentro de corchetes separados por comas o sin ellas.

Volumen de un paralelepípedo

Al calcular el producto mixto entre tres vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} , se obtiene un escalar que representa el volumen de un paralelepípedo definido por estos tres vectores. Estos vectores parten del mismo punto inicial, formando las tres aristas concurrentes en un vértice del paralelepípedo. Véase la siguiente figura:



Teorema

El volumen V de un paralelepípedo con vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} como aristas concurrentes, viene dado por:

$$V = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Demostración:

El volumen de un paralelepípedo viene dado por:

$$V = A_B h \quad \dots\dots\dots (1)$$

donde:

A_B : Área de la base

h : Altura del paralelepípedo

el área de la base es igual a:

$$A_B = |\vec{u} \times \vec{v}| \quad \dots\dots\dots (2)$$

la altura h del paralelepípedo, de la figura, la podemos calcular de la siguiente manera:

$$\cos \phi = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}} \quad \Rightarrow \quad \cos \phi = \frac{h}{|\vec{w}|}$$

$$\therefore h = |\vec{w}| \cos \phi \quad \dots\dots\dots (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos que:

$$V = |\vec{u} \times \vec{v}| |\vec{w}| \cos \phi \quad \dots\dots\dots (4)$$

de la fórmula del ángulo entre vectores:

$$\cos \theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|}$$

de donde se tiene que:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \cos \theta$$

Es decir, el producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman dichos vectores. Aplicando esto a la expresión (4), se llega a que:

$$V = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$$

Lo cual completa la demostración.

Al calcular el producto mixto entre tres vectores, se obtiene un escalar que puede ser positivo, negativo o cero, lo cual dependerá de la orientación relativa de los vectores en el espacio, por lo tanto, el producto mixto no únicamente proporciona información sobre la magnitud del volumen del paralelepípedo, sino también sobre su dirección en relación con el sistema de coordenadas utilizado.

Muchos autores definen al volumen de un paralelepípedo como el valor absoluto del producto mixto, es decir, el volumen siempre deberá ser una cantidad positiva.

Ejercicio 27. Sean los vectores:

$$\bar{u} = 3i - j + 2k, \quad \bar{v} = (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad \bar{w} = -2i + j + 3k$$

Obtenga:

- El producto mixto de los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} .
- Los productos $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ y $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$, desarrollando primero los productos vectoriales y después los productos escalares.

Solución:

- a) Se pide calcular el producto mixto de los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} , entonces tenemos que:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 + 2 + 4 + 3 - 3 = 17$$

Como sabemos, el resultado del producto mixto de tres vectores es un escalar, cuyo significado geométrico es el volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} como tres de sus aristas concurrentes.

- b) En este inciso, se nos pide comprobar que el producto mixto se puede obtener mediante el cálculo de un determinante o, también, desarrollando las dos operaciones que intervienen por separado, el producto cruz primero y después el producto punto.

Desarrollando $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$.

Calculemos primero el producto cruz entre \bar{v} y \bar{w} :

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2i - 5j + 3k$$

con lo cual, se tiene que:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (3, -1, 2) \cdot (2, -5, 3) = 6 + 5 + 6 = 17$$

que es igual al resultado obtenido en el inciso anterior.

Desarrollando ahora $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

Tenemos entonces que:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3i - j + 4k$$

con lo cual, se tiene que:

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = (-3, -1, 4) \cdot (-2, 1, 3) = 6 - 1 + 12 = 17$$

con este resultado se comprueba que:

$$[\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}] = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$$

Ejercicio 28. Sean los puntos:

$$A(1, -2, -1), \quad B(4, 2, -1), \quad C(1, 3, 1) \quad \text{y} \quad D(2, 0, -3)$$

Si tres de las aristas concurrentes de un paralelepípedo son los vectores \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} , calcule:

- El volumen del paralelepípedo.
- El volumen del prisma triangular que tiene las mismas aristas concurrentes que el paralelepípedo del inciso anterior.

Solución:

a) Obteniendo los vectores, tenemos:

$$\overline{AB} = (4 - 1, 2 + 2, -1 + 1) = (3, 4, 0)$$

$$\overline{AC} = (1 - 1, 3 + 2, 1 + 1) = (0, 5, 2)$$

$$\overline{AD} = (2 - 1, 0 + 2, -3 + 1) = (1, 2, -2)$$

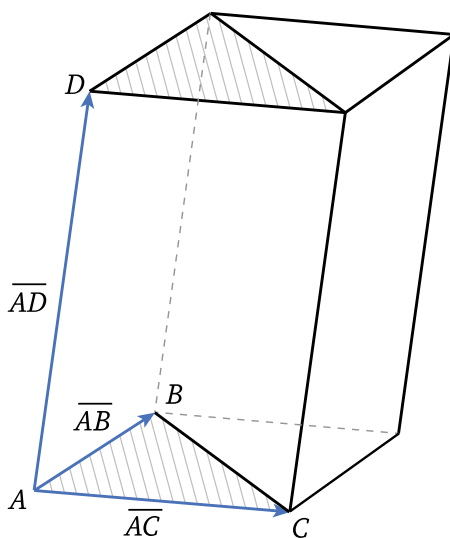
de donde:

$$V = \overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 8 + 0 + 0 + 0 - 12 = -34$$

Como se mencionó anteriormente, en caso de resultar negativo el producto mixto, entonces el volumen del paralelepípedo será igual al valor absoluto de dicho valor, esto es:

$$V = 34 u^3$$

b) El volumen del prisma triangular que se pide calcular, se ilustra en la siguiente figura:



Como se puede apreciar en la figura, el volumen del prisma triangular es igual a la mitad del volumen del paralelepípedo.

$$\therefore V = 17 u^3$$

Ejercicio 29. Sean los puntos:

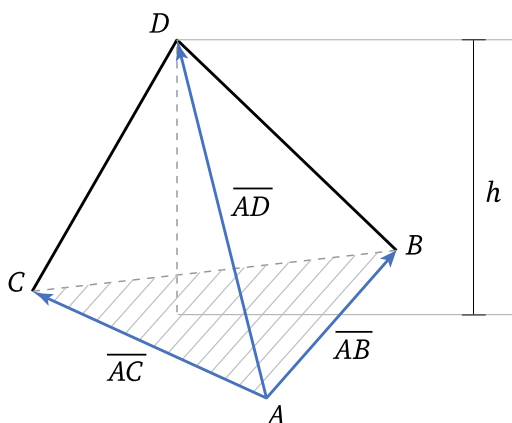
$$A(2, 0, 1), \quad B(4, 3, 2), \quad C(1, 4, -1) \quad \text{y} \quad D(1, 2, 5)$$

Calcule:

- El volumen del tetraedro que tiene a tres de sus aristas concurrentes a los vectores \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} .
- La altura del tetraedro, si en su base están alojados los vectores \overline{AB} y \overline{AC} .
- El volumen de la pirámide rectangular que tiene a tres de sus aristas concurrentes a los vectores \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} .
- La altura de la pirámide, si en su base están alojados los vectores \overline{AB} y \overline{AC} .

Solución:

- En la siguiente figura se hace un bosquejo gráfico del tetraedro, del cual nos piden calcular su volumen y, en el inciso b), su altura.



Se sabe que el volumen de un tetraedro es igual a la sexta parte del volumen del paralelepípedo que tiene las mismas aristas concurrentes, esto es:

$$V = \frac{1}{6} [\overline{AB} \quad \overline{AC} \quad \overline{AD}]$$

calculando los vectores:

$$\overline{AB} = (4 - 2, 3 - 0, 2 - 1) = (2, 3, 1)$$

$$\overline{AC} = (1 - 2, 4 - 0, -1 - 1) = (-1, 4, -2)$$

$$\overline{AD} = (1 - 2, 2 - 0, 5 - 1) = (-1, 2, 4)$$

con lo cual, tenemos que:

$$V = \frac{1}{6} (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (32 + 6 - 2 + 4 + 12 + 8) = \frac{60}{6}$$

$$\therefore V = 10 \text{ u}^3$$

- b)** Para obtener la altura del tetraedro, debemos calcular el área de su base y, como ya conocemos el volumen del tetraedro, entonces con un simple despeje podremos calcular su altura.

Dado que la base del tetraedro es triangular, entonces tenemos que:

$$A_B = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

realizando el producto cruz, tenemos:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10i + 3j + 11k$$

entonces:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-10)^2 + (3)^2 + (11)^2} = \sqrt{230}$$

$$\therefore A = \frac{\sqrt{230}}{2} \approx 7.58 \text{ u}^2$$

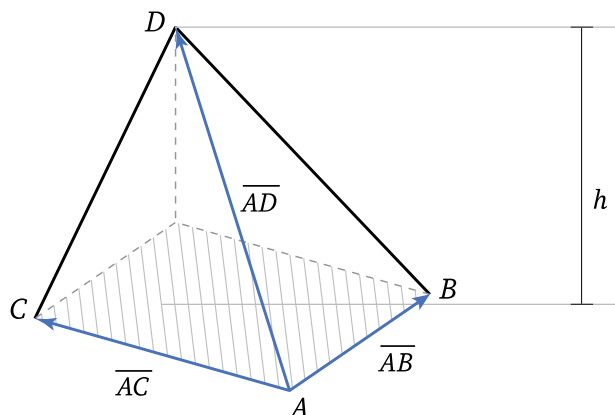
como la fórmula para calcular el volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{3} A_B h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{A_B}$$

entonces se tiene que:

$$h = \frac{3(10)}{7.58} \quad \therefore \quad h \approx 3.96 \text{ u}$$

- c) La pirámide de la cual nos piden calcular su volumen se muestra en la siguiente figura:



Se conoce que el volumen de una pirámide con base rectangular es igual a un tercio del volumen del paralelepípedo que tiene las mismas aristas concurrentes, esto es:

$$V = \frac{1}{3} (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}$$

como:

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = 60$$

entonces el volumen de la pirámide será:

$$V = \frac{60}{3} = 20 u^3$$

- d)** Se nos pide calcular la altura de la pirámide; sin embargo, como el tetraedro y la pirámide tienen las mismas aristas concurrentes, es evidente que la altura de la pirámide es igual a la altura del tetraedro, esto es:

$$\text{Altura de la pirámide} \approx 3.96 u$$

Sin embargo, con los resultados de las operaciones realizadas haremos el cálculo de la altura de la pirámide para corroborar la respuesta dada.

Sabemos que:

$$V_p = \frac{1}{3} A_B h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 V_p}{A_B}$$

como:

$$V_p = 20 u^3$$

$$A_B = | \overline{AB} \times \overline{AC} | = \sqrt{230}$$

entonces:

$$h = \frac{3(20)}{\sqrt{230}} \quad \therefore \quad h \approx 3.96 \text{ u}$$

lo cual corrobora la respuesta dada.

Ejercicio 30. Mediante el producto mixto de vectores, demuestre que los puntos:

$$A(-2, 3, 1), \quad B(1, 2, 3), \quad C(-3, 5, 2) \quad \text{y} \quad D(0, -1, -1)$$

son coplanares.

Solución:

Se tiene que los puntos A , B , C y D son coplanares, esto es, que están contenidos en el mismo plano, si el producto mixto de los vectores \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} es igual al cero, es decir, que el volumen del paralelepípedo que tiene a tres de sus aristas concurrentes a los vectores \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} es igual a cero, esto implica que dichos vectores están contenidos también en el mismo plano.

Obteniendo los vectores:

$$\overline{AB} = (1+2, 2-3, 3-1) = (3, -1, 2)$$

$$\overline{AC} = (-3+2, 5-3, 2-1) = (-1, 2, 1)$$

$$\overline{AD} = (0+2, -1-3, -1-1) = (2, -4, -2)$$

con lo cual:

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 2 + 8 - 8 + 2 + 12 = 0$$

por lo tanto, los puntos A , B , C y D son coplanares.

CÓNICAS

CURVAS CÓNICAS

Los antecedentes históricos de las cónicas se remontan al siglo IV a. C. en la antigua Grecia. Se atribuye al matemático y filósofo griego Menecmo (380-320 a. C.) como el pionero en el estudio sistemático de las cónicas. Sus esfuerzos orientados a resolver uno de los tres problemas clásicos de la geometría, la duplicación del cubo, esto es, cómo construir un cubo con el doble del volumen de un cubo dado, pero empleando únicamente una regla sin graduar y un compás. Sus esfuerzos por resolver este problema lo llevaron al estudio de estas curvas. Su trabajo sentó las bases para futuros estudios geométricos de las cónicas.

Posteriormente, Euclides (323-283 a. C.) y Arquímedes (287-212 a. C.) también contribuyeron al estudio de las cónicas; sin embargo, fue Apolonio de Perge (262-190 a. C.) quien realizó la contribución más importante con su monumental obra *Conics* que constaba de ocho libros, de los cuales han sobrevivido siete. Sistematizó el conocimiento de las cónicas y les otorgó los nombres que usamos hoy: parábola, elipse e hipérbola. Apolonio no solo clasificó estas curvas, sino que también demostró numerosas propiedades geométricas fundamentales, siendo su trabajo muy importante para el desarrollo de las matemáticas griegas.

Durante la edad media, el conocimiento de las cónicas fue preservado y expandido en el mundo islámico, el matemático y físico árabe musulmán Ibn Al-Haytham (965-1040), conocido en occidente como Alhazen, estudió las cónicas en el contexto de la óptica, investigando la reflexión y refracción de la luz. Además, el matemático, astrónomo y poeta persa Khayyam (1048-1131), utilizó las cónicas para resolver ecuaciones cúbicas.

El renacimiento trajo consigo un resurgimiento del interés en las matemáticas y las cónicas. El matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), empleó las cónicas para describir las órbitas de los planetas. Sus leyes del movimiento planetario, basado en elipses, revolucionaron la astronomía. Kepler demostró que los planetas orbitan siguiendo una trayectoria elíptica, teniendo al sol en uno de sus focos.

Otro matemático, físico y filósofo francés que contribuyó de manera importante al estudio de las cónicas fue René Descartes (1596-1650), quien, al desarrollar la

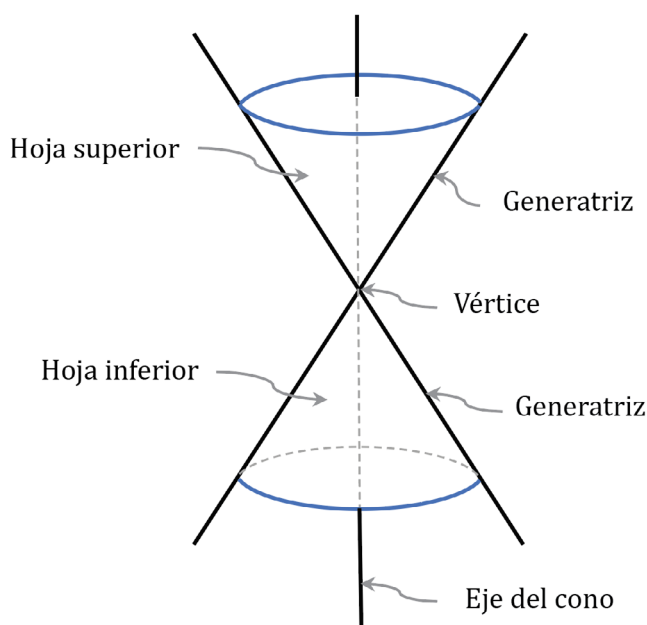
geometría analítica, permitió representar estas curvas mediante ecuaciones algebraicas, facilitando con ello el análisis matemático de las cónicas.

En el siglo XVIII, el matemático, físico, teólogo y alquimista inglés Isaac Newton (1642-1727), utilizó las cónicas en su obra *Principia Matemática* para describir las órbitas de los cuerpos celestes, bajo la influencia de la gravedad.

Las cónicas han recorrido un largo camino desde su descubrimiento en la antigua Grecia, hasta hoy día, que son utilizadas en múltiples aplicaciones científicas y tecnológicas.

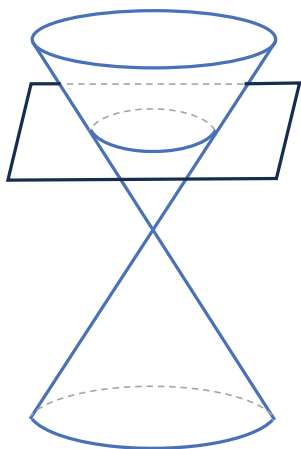
Las cónicas son un conjunto de curvas planas con propiedades geométricas únicas, que surgen de la intersección de un plano con un cono circular recto de dos hojas y, dependiendo de la inclinación del plano, se forman: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Si el plano corta al cono perpendicularmente a su eje, se obtiene la circunferencia. Si el plano está ligeramente inclinado, pero no lo suficiente como para intersecar ambas hojas del cono, se forma una elipse. En el caso en que el plano no sea paralelo a una generatriz del cono, la intersección define una parábola. Finalmente, si el plano es paralelo al eje del cono, se obtiene una hipérbola, una curva que consta de dos ramas separadas. Véanse las siguientes figuras:

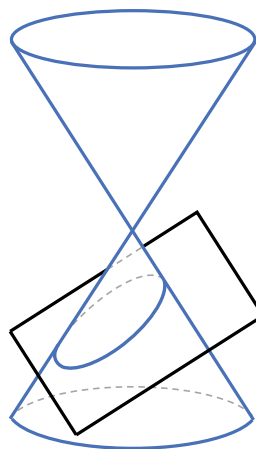


Es importante señalar que el cono se extiende indefinidamente tanto en la parte inferior como en la superior.

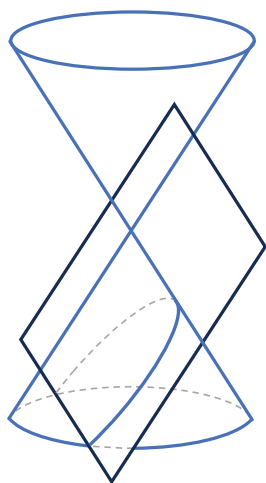
A continuación, se mostrará gráficamente cómo es que se forman dichas curvas cónicas.



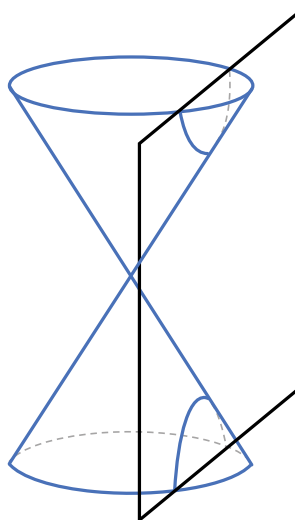
Circunferencia



Elipse



Parábola

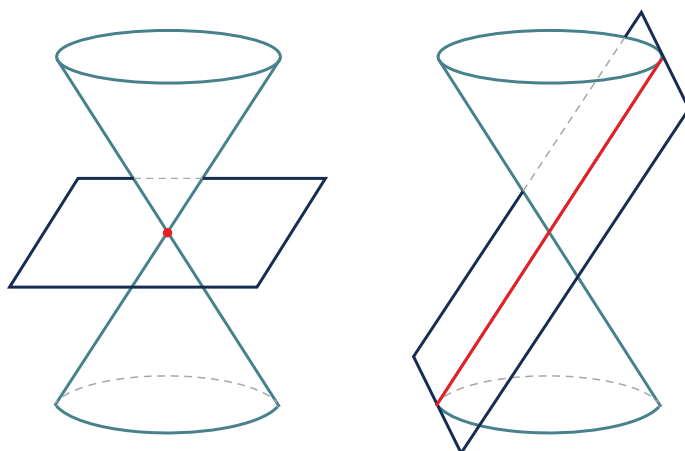


Hipérbola

En el estudio de las cónicas se presentan casos especiales conocidos como degeneraciones de las cónicas. Estas degeneraciones ocurren bajo ciertas condiciones específicas y resultan figuras geométricas que, aunque más simples, son igualmente interesantes y significativas.

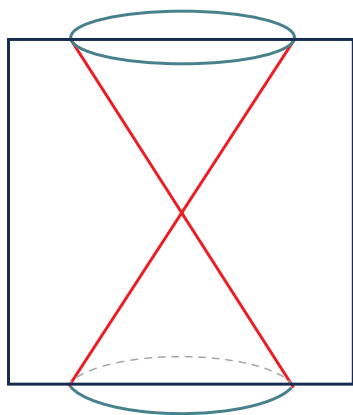
Por ejemplo, una circunferencia degenera en un punto cuando el plano horizontal que corta al cono contiene al vértice. Una elipse puede degenerar en una circunferencia cuando sus ejes mayor y menor son iguales, o bien, podría degenerar en una línea cuando uno de sus ejes se reduce a cero. Una parábola puede degenerar en una línea recta cuando el plano que la define contiene al vértice del cono y a la generatriz.

Finalmente, una hipérbola puede degenerar en dos rectas que se cruzan cuando el plano que la define contiene al vértice y al eje del cono. Véanse las siguientes figuras:



Un punto

Recta



Dos rectas que se cruzan

Existen varias formas de definir a las cónicas, una de ellas ya la hemos utilizado, mediante la intersección de un plano con un cono de dos hojas; otra sería considerando sus características geométricas fundamentales, tales como su excentricidad, foco y directriz; una más sería, desde el punto de vista algebraico, mediante la ecuación general de segundo grado y, podríamos agregar dos alternativas más, mediante sus ecuaciones paramétricas y vectoriales.

A continuación, hablaremos de cada una de estas definiciones en forma breve y nos detendremos un poco más en las ecuaciones paramétricas y vectoriales de las cónicas, que es uno de los puntos que nos interesa detallar un poco más, por ser este un texto que trata el tema de álgebra vectorial.

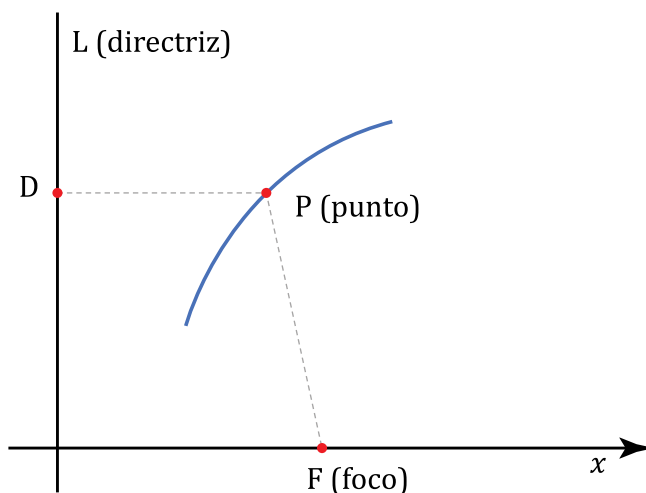
Definición general de las cónicas

A pesar de sus diferencias, todas las cónicas comparten una definición general basada en conceptos geométricos fundamentales que comparten, como ya se comentó renglones arriba, la excentricidad, el foco y la directriz.

La definición que se presentará a continuación abarca la parábola, la elipse y la hipérbola; sin embargo, no incluye a la circunferencia, ya que esta es un caso particular de la elipse y no se define en términos de un foco y una directriz.

Definición

Dada una recta fija L y un punto fijo F no contenido en L , se llama cónica al lugar geométrico de todos los puntos P de un plano, cuya razón de las distancias no dirigidas de P al punto fijo F y de P a la recta L es siempre igual a una constante positiva e . A la recta fija L se le llama directriz, al punto fijo F , foco, y a la constante positiva e , excentricidad de la cónica. Véase la siguiente figura.



La definición anterior establece que el punto P es tal que:

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, L)}$$

donde:

$d(P, F)$ es la distancia del punto P al foco F .

$d(P, L)$ es la distancia perpendicular desde el punto P a la directriz L .

La excentricidad e determina la naturaleza específica de la cónica.

- Si $e < 1$, la cónica es una elipse.
- Si $e = 1$, la cónica es una parábola.
- Si $e > 1$, la cónica es una hipérbola.

La excentricidad de una elipse puede verse como una medida de cuánto se desvía la elipse de ser una circunferencia. Cuando los dos semiejes de la elipse tienden a ser iguales, entonces el valor de la excentricidad tiende a ser cero, por lo que, para el caso particular de la circunferencia, su excentricidad $e = 0$. Imaginemos que los dos focos

de una elipse se aproximan entre sí cada vez más, entonces la elipse se hace cada vez más redonda y, cuando los focos se unen, entonces la elipse se convierte en una circunferencia y sus focos se transforman en su centro.

Para el caso de la hipérbola, cuando el valor de la excentricidad es muy grande, las ramas de la hipérbola se vuelven más abiertas. Visualmente, la hipérbola se aplana y se asemeja cada vez más a sus asíntotas. Por el contrario, cuando la excentricidad de una hipérbola se acerca cada vez más a uno, las ramas de la hipérbola se vuelven menos abiertas y la curva se asemeja más a una parábola. El caso límite es cuando $e = 1$ que corresponde a una parábola.

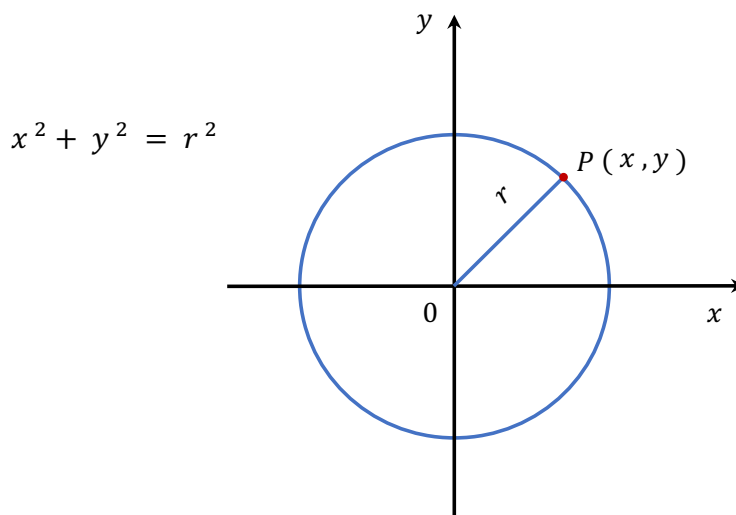
Ecuaciones cartesianas de las cónicas

Siguiendo con el estudio de las cónicas, a continuación, presentaremos un resumen completo pero breve de sus ecuaciones cartesianas. Detallaremos las principales características de cada cónica en función de sus respectivas ecuaciones.

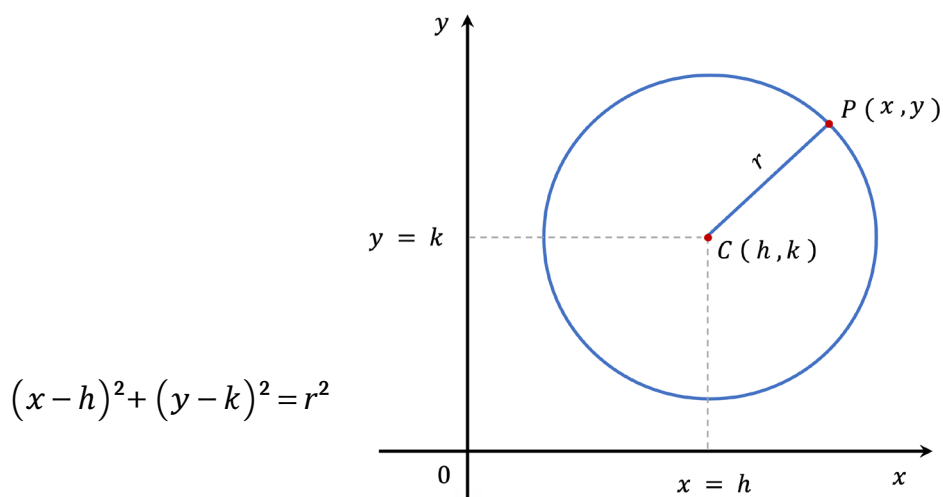
CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r .



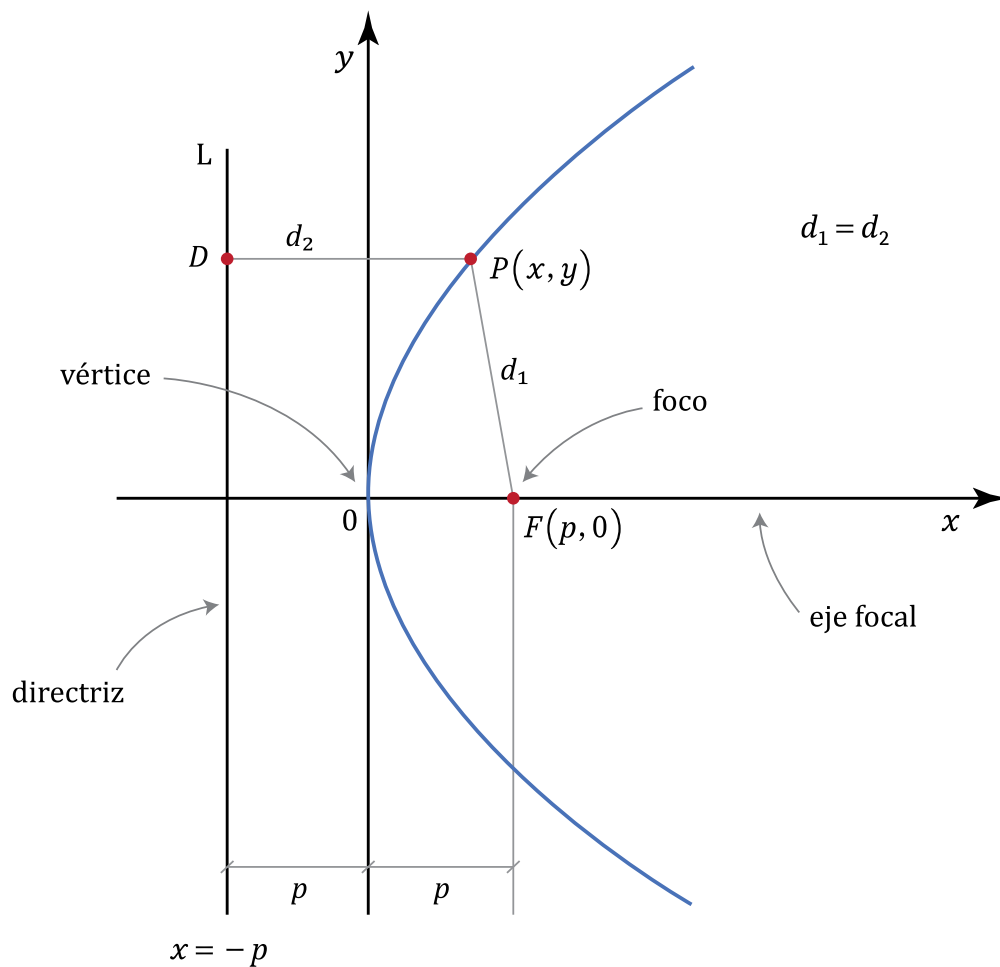
Ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio r .



PARÁBOLA

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija del mismo plano. El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz.

• **Parábola con vértice en el origen**



El eje focal es la recta que se define con el vértice y el foco. Esta recta es también el eje de simetría de la parábola.

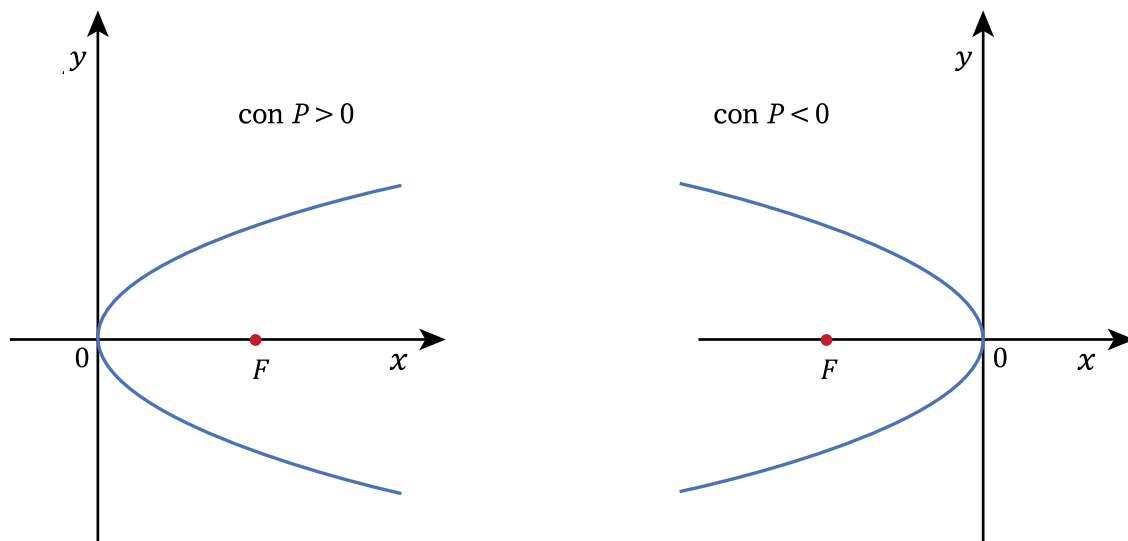
Si el eje de la parábola coincide con el eje x y su vértice está en el origen, su ecuación es:

$$y^2 = 4 P x$$

Si $P > 0$, la parábola abre hacia la derecha.

Si $P < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

Obsérvese que el signo del coeficiente de x nos indica hacia dónde abre la parábola.

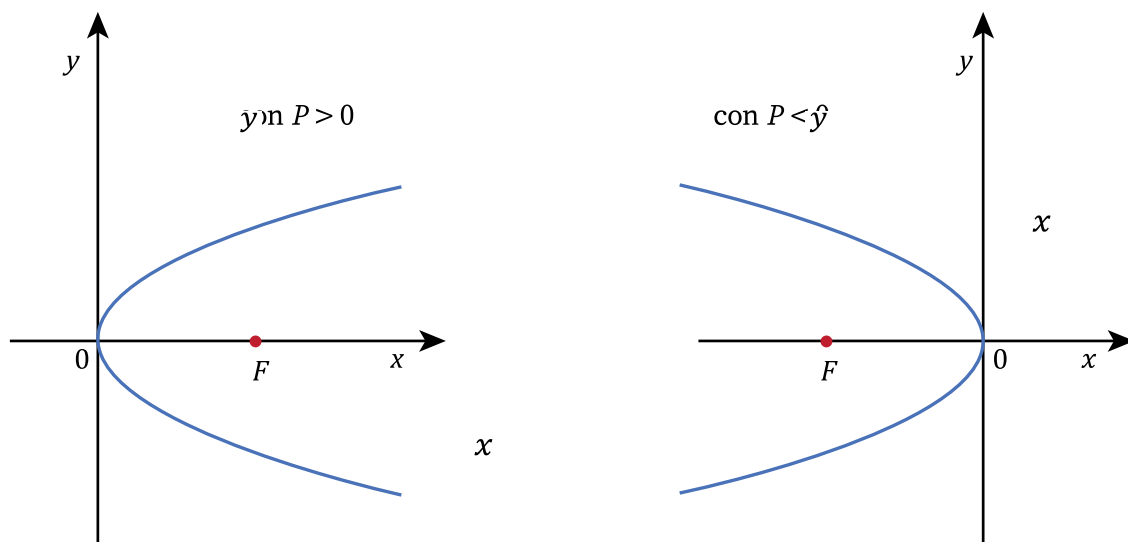


Si el eje de la parábola coincide con el eje y y su vértice está en el origen, su ecuación es:

$$x^2 = 4P y$$

Si $P > 0$, la parábola abre hacia arriba.

Si $P < 0$, la parábola abre hacia abajo



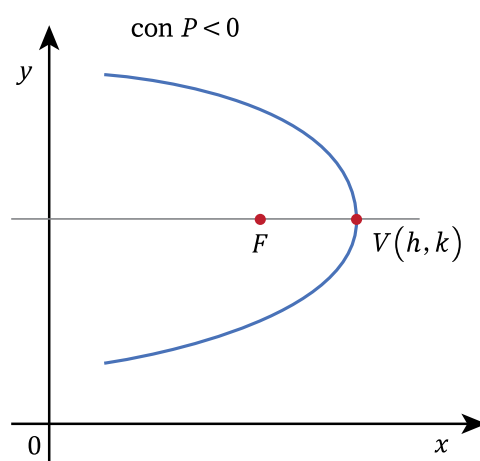
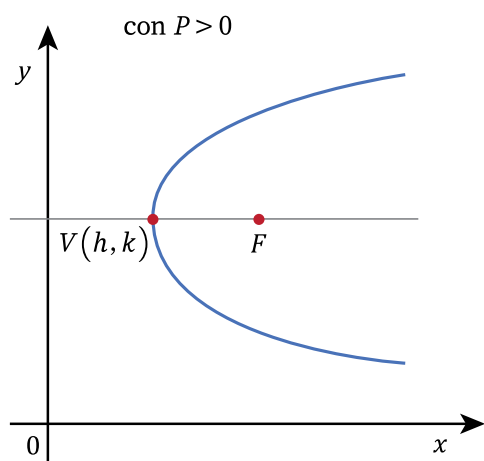
• Parábola con vértice fuera del origen

Si el eje de la parábola es paralelo al eje x y su vértice está en el punto $V(h, k)$, su ecuación es:

$$(y - k)^2 = 4P(x - h)$$

Si $P > 0$, la parábola abre hacia la derecha.

Si $P < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.



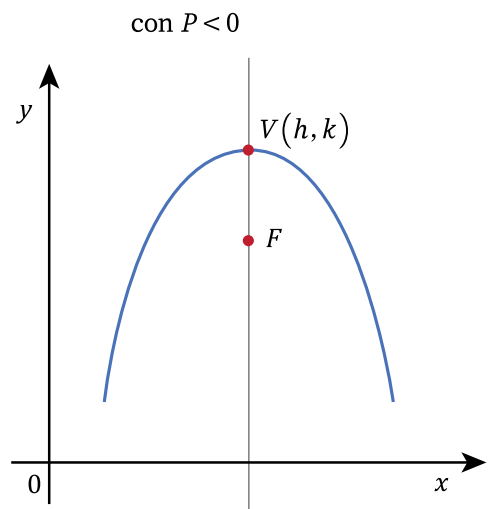
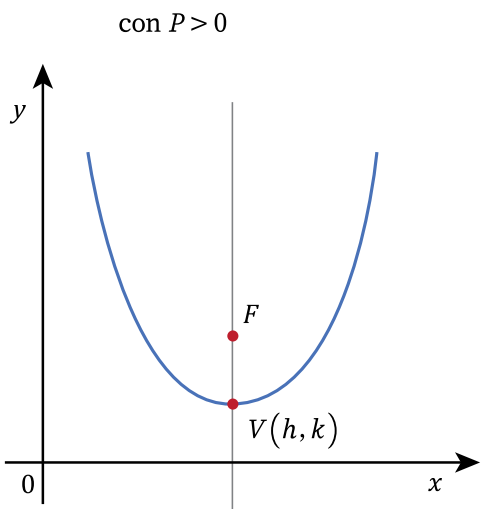
La ubicación del vértice puede estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes.

Si el eje de la parábola es paralelo al eje y y su vértice está en el punto $V(h, k)$, su ecuación es:

$$(x - h)^2 = 4P(y - k)$$

Si $P > 0$, la parábola abre hacia arriba.

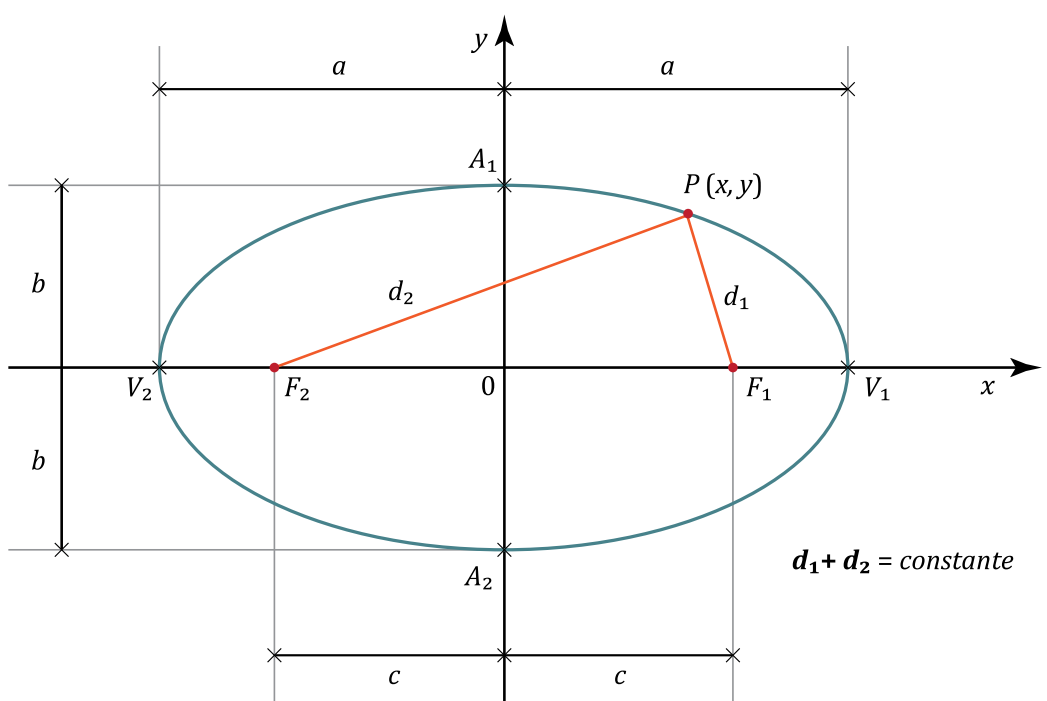
Si $P < 0$, la parábola abre hacia abajo.



ELIPSE

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a dos puntos fijos tiene una suma constante.

Los puntos fijos son los focos de la elipse y el punto medio del segmento que une a los focos se llama centro de la elipse.



De la figura se tiene que:

Los puntos V_1 y V_2 son los vértices de la elipse y tienen por coordenadas:

$$V_1(a, 0) \text{ y } V_2(-a, 0)$$

Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la elipse y tienen por coordenadas:

$$F_1(c, 0) \text{ y } F_2(-c, 0)$$

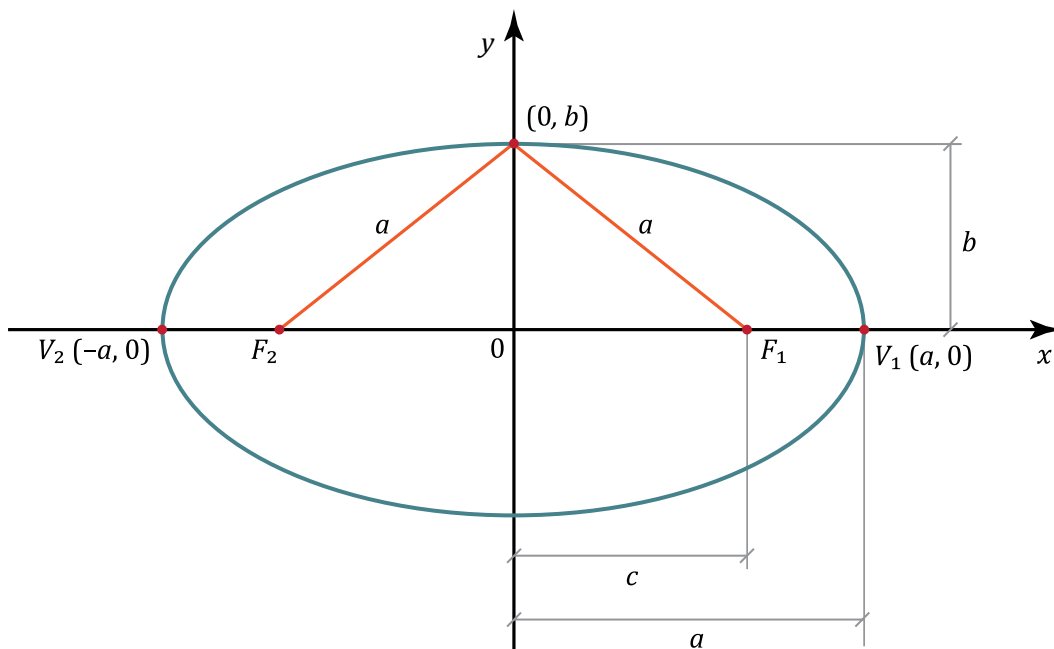
Las intersecciones de la elipse con el eje y son los puntos A_1 y A_2 y tienen por coordenadas:

$$A_1(0, b) \text{ y } A_2(0, -b)$$

Al segmento de recta que definen los vértices V_1 y V_2 , se le llama eje mayor y su longitud es igual a $2a$. Al segmento de rectas que va del origen a V_1 , o bien, del origen a V_2 , se le llama semieje mayor y su longitud es a .

Al segmento de recta que definen los puntos A_1 y A_2 , se le llama eje menor y su longitud es igual a $2b$. Al segmento de recta que va el origen a A_1 , o bien, del origen a A_2 , se le llama semieje menor y su longitud es b .

La distancia que hay de F_1 o F_2 al punto $(0, b)$ es igual a la longitud del semieje mayor, esto es, igual a a . Véase la siguiente figura:



De la figura anterior, se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

de donde:

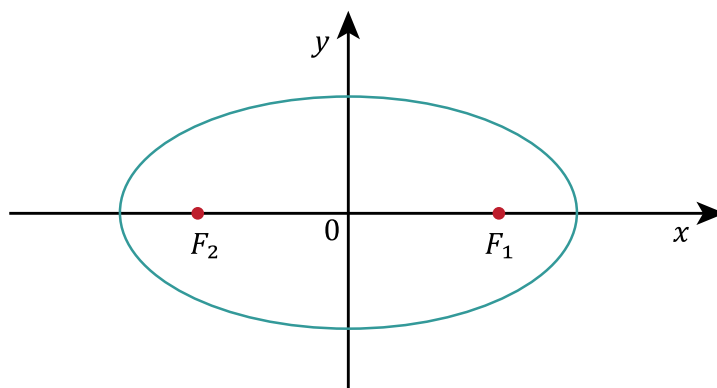
$$b^2 = a^2 - c^2$$

Relación muy importante, pues con ella se logra deducir la ecuación de la elipse.

- **Elipse con centro en el origen**

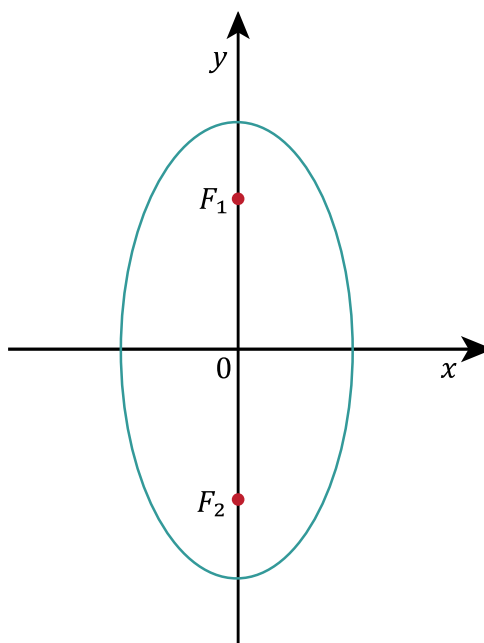
Si el eje focal coincide con el eje x , esto es, eje mayor horizontal, su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Si el eje focal coincide con el eje y , esto es, eje mayor vertical, su ecuación es:

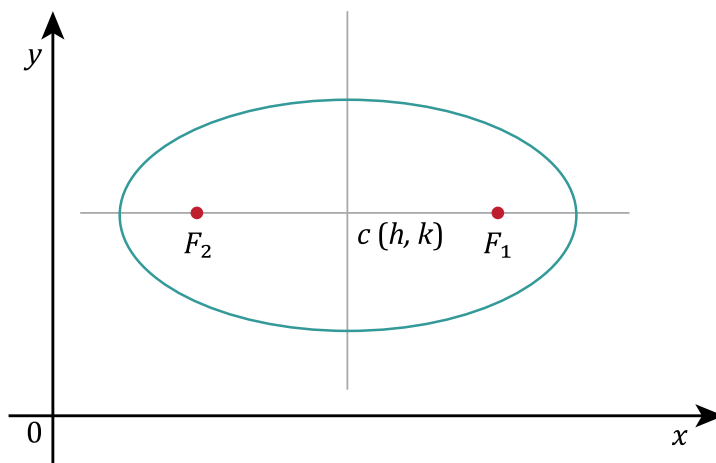
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



- **Elipse con centro fuera del origen**

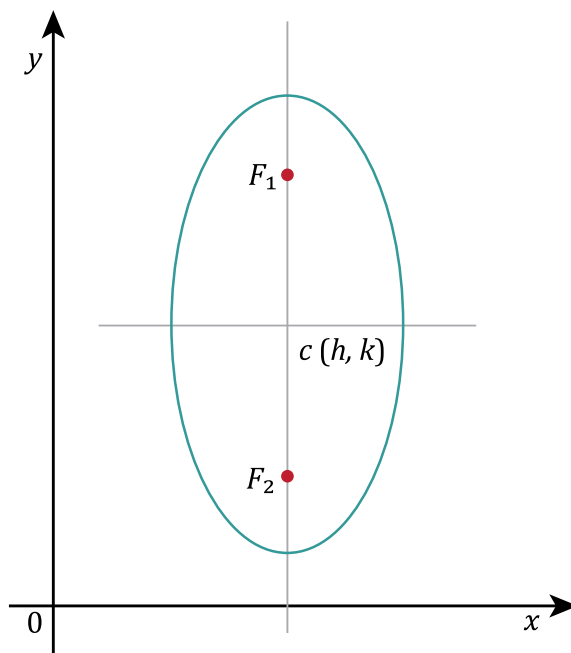
Si el eje focal es paralelo al eje x , esto es, eje mayor horizontal y con centro en el punto $c(h, k)$, su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Si el eje focal es paralelo al eje y , esto es, eje mayor vertical y con centro en el punto $c(h, k)$, su ecuación es:

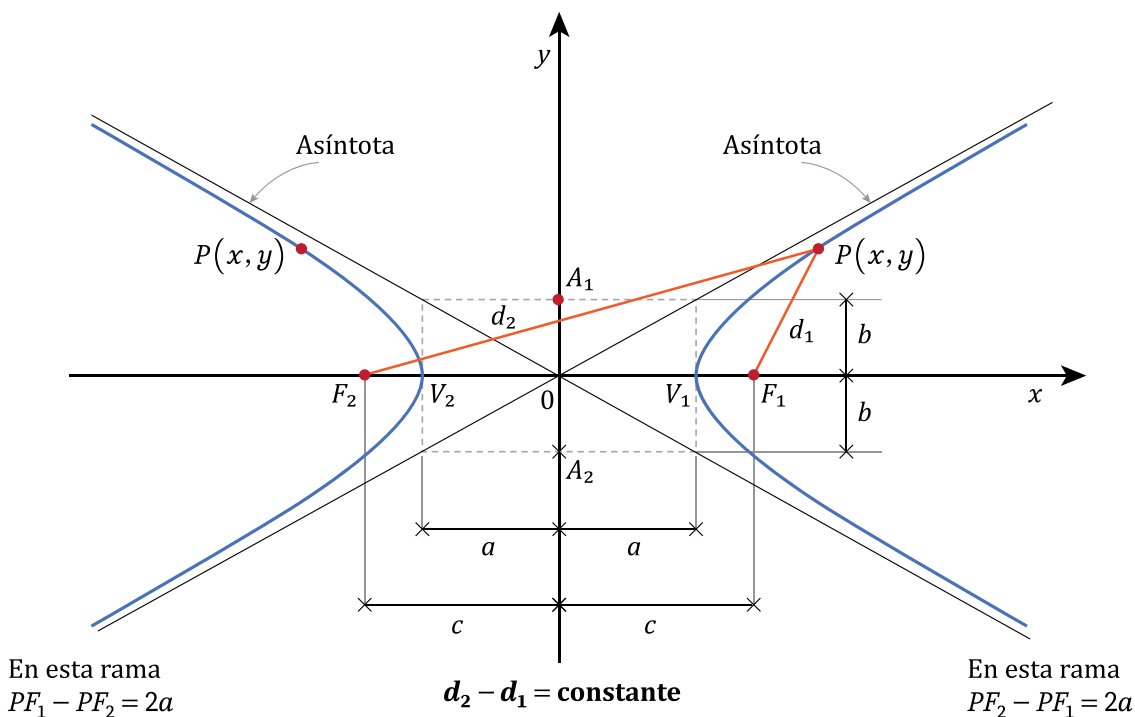
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



HIPÉRBOLA

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a dos puntos fijos tiene una diferencia constante.

Los puntos fijos son los focos de la hipérbola y el punto medio del segmento que une a los focos se llama centro de la hipérbola.



De la figura se tiene que:

Los puntos V_1 y V_2 son los vértices de la hipérbola y tienen por coordenadas:

$$V_1(a, 0) \quad \text{y} \quad V_2(-a, 0)$$

Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola y tienen por coordenadas:

$$F_1(c, 0) \quad \text{y} \quad F_2(-c, 0)$$

A pesar de que no hay intersecciones de la hipérbola con el eje y , se identifican dos puntos A_1 y A_2 que tienen por coordenadas:

$$A_1(0, b) \text{ y } A_2(0, -b).$$

Al segmento de recta que definen los vértices V_1 y V_2 , se le llama eje transverso y su longitud es igual a $2a$. Al segmento de recta que va del origen a V_1 , o bien, del origen a V_2 , se le llama semieje transverso y su longitud es a .

Al segmento de recta que definen los puntos A_1 y A_2 , se le llama eje conjugado y su longitud es igual a $2b$. Al segmento de recta que va del origen a A_1 , o bien, del origen a A_2 , se le llama semieje conjugado y su longitud es b .

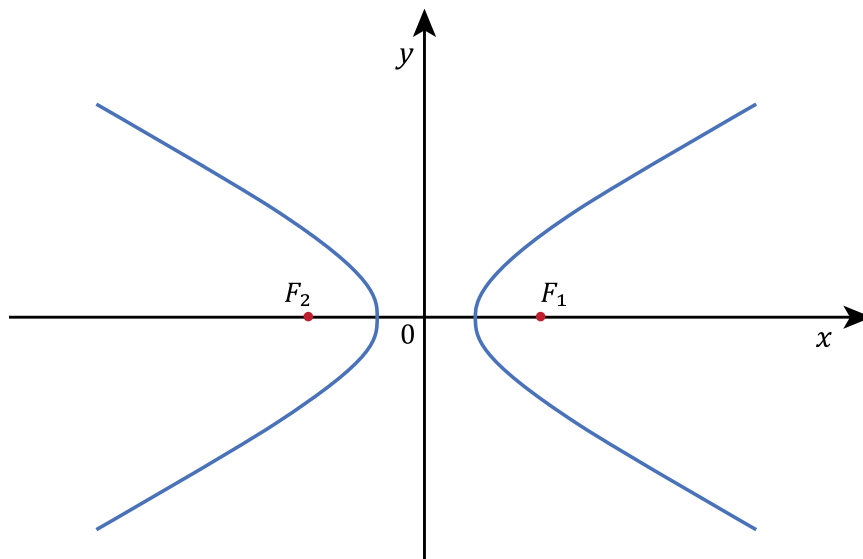
La distancia que hay del centro de la hipérbola a cada foco es c y los valores de a , b y c están relacionados mediante la expresión:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

• Hipérbola con centro en el origen

Si el eje focal coincide con el eje x , su ecuación es:

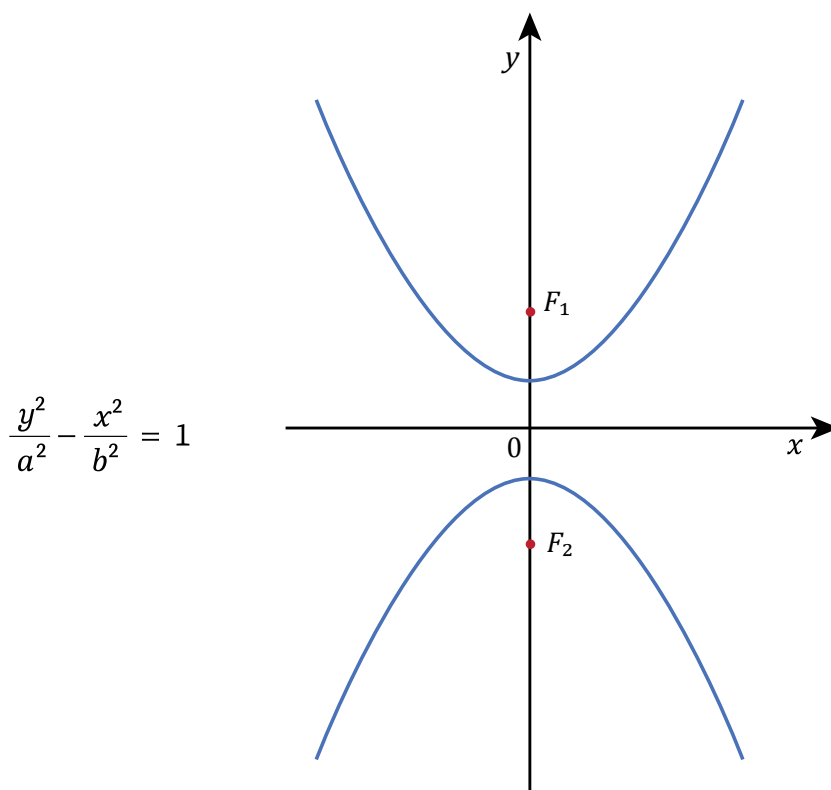
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



En este caso, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a} x \quad y = -\frac{b}{a} x$$

Si su eje focal coincide con el eje y , su ecuación es:

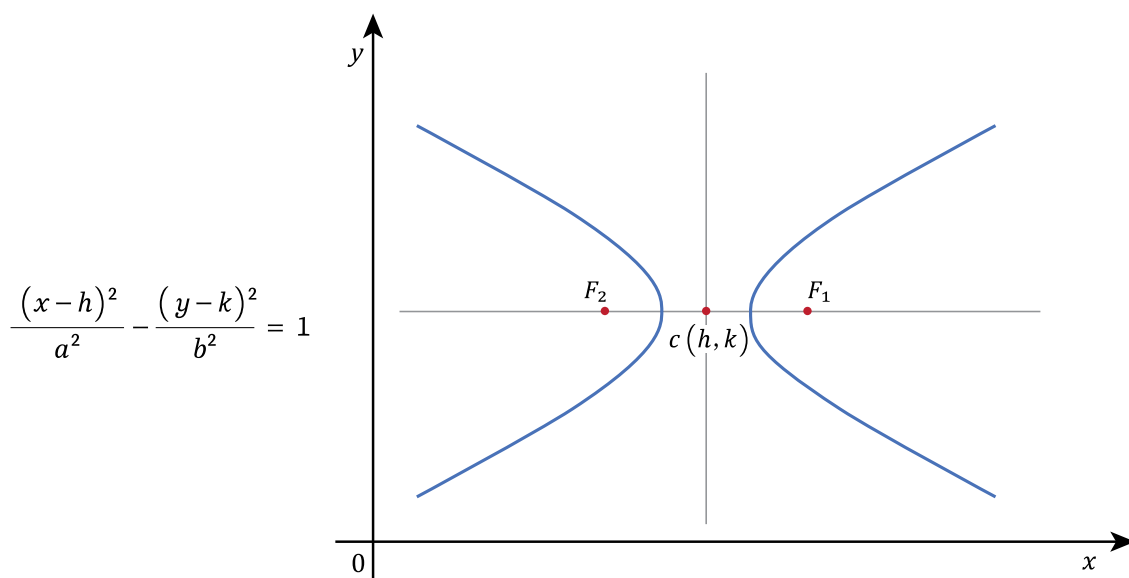


En este caso, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{a}{b} x \quad y = -\frac{a}{b} x$$

- **Hipérbola con centro fuera del origen**

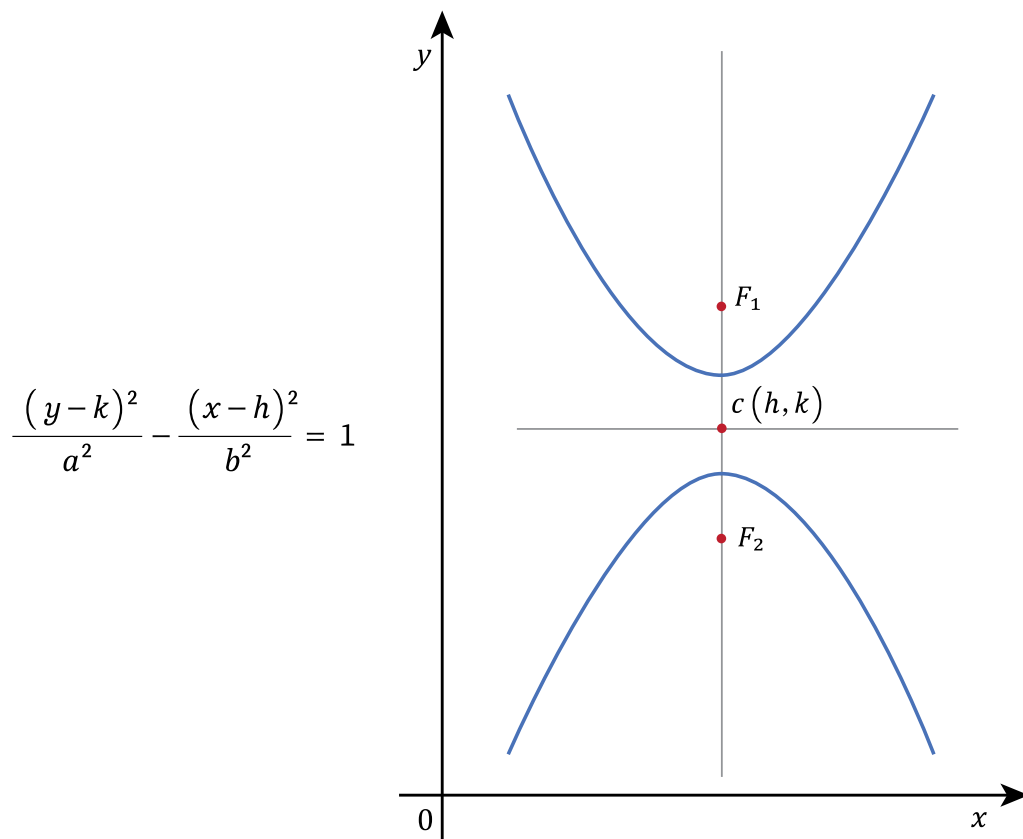
Si el eje focal es paralelo al eje x , esto es, eje transverso horizontal y con centro en el punto $c(h, k)$, su ecuación es:



En este caso, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = k + \frac{b}{a} (x - h) \quad y = k - \frac{b}{a} (x - h)$$

Si el eje focal es paralelo al eje y , esto es, eje transverso vertical y con centro en el punto $c(h, k)$, su ecuación es:



En este caso, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = k + \frac{a}{b} (x - h) \qquad y = k - \frac{a}{b} (x - h)$$

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

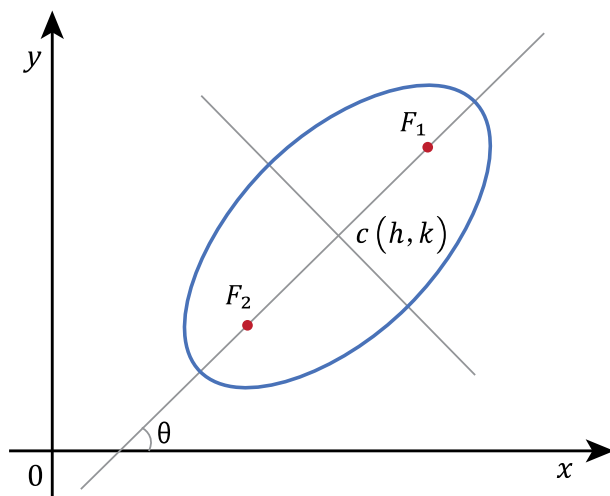
Llevaremos nuestro estudio de las cónicas un paso más allá. Ahora, hablaremos de la ecuación general de segundo grado con dos variables x, y .

La ecuación general de segundo grado es:

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

En la sección anterior estudiamos las ecuaciones cartesianas de las cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola con ejes coincidentes o paralelos a los ejes coordenados. Todas las ecuaciones cartesianas a las que se llegó son casos particulares de la ecuación general de segundo grado. Una característica común a estas ecuaciones es que todas ellas carecen del término $B x y$.

La presencia del término $B x y$ en la ecuación de una cónica indica que sus ejes están inclinados con respecto a los ejes del sistema de referencia, esto es, los ejes de la cónica son oblicuos a los ejes cartesianos. La cónica está girada un ángulo θ . Véase la siguiente figura:



La ecuación general de segundo grado puede representar a una cónica, alguno de sus casos degenerados o, incluso, a ningún lugar geométrico. Si algunos de los coeficientes de la ecuación toman el valor de cero, se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1: Si $A > 0$, $B = 0$, $C > 0$, $D = 0$, $E = 0$ y $F = 0$, por ejemplo, si $A = 1$ y $C = 1$, se llega a la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 0$$

En este caso, la ecuación representa al origen de coordenadas, esto es, al punto $(0,0)$.

Caso 2: Si $A > 0$, $B = 0$, $C < 0$, $D = 0$, $E = 0$ y $F = 0$, por ejemplo, si $A = 1$ y $C = -1$, se llega a la ecuación:

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$$

En este caso, la ecuación representa dos rectas que se cruzan en el origen de coordenadas.

Caso 3: Si $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ con D , E y $F \neq 0$, por ejemplo, si $D = 1$, $E = 1$ y $F = 1$, se llega a la ecuación:

$$x + y + 1 = 0$$

En este caso, la ecuación representa una recta.

Caso 4: Si $A > 0$, $B = 0$, $C > 0$, $D = 0$, $E = 0$ y $F > 0$, por ejemplo, si

$A = 1$, $C = 1$ y $F = 1$, se llega a la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = -1$$

En este caso, la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

Discriminante

Para el caso en que la ecuación general de segundo grado represente a una cónica, se puede identificar qué tipo de cónica es, mediante el signo de la expresión $B^2 - 4AC$. A esta expresión se le llama *Discriminante* de la ecuación. El teorema que se enuncia a continuación establece el siguiente criterio.

Teorema

La ecuación general de segundo grado es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Representa una:

- 1) Parábola si $B^2 - 4AC = 0$
- 2) Elipse si $B^2 - 4AC < 0$
- 3) Circunferencia si $B^2 - 4AC < 0$, con $B = 0$ y $A = C$
- 4) Hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$

Ejercicio 31. Determine qué tipo de cónica representa cada una de las ecuaciones dadas.

- a) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$
- b) $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x + 36y + 45 = 0$
- c) $-x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 14y + 39 = 0$
- d) $2x^2 + 2y^2 - 20x + 12y + 36 = 0$

Solución:

a) La ecuación es:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$$

en este caso, tenemos que:

$$A = 4, \quad B = -4 \quad \text{y} \quad C = 1$$

entonces, el valor del discriminante es:

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

como el discriminante es igual a cero, entonces se trata de una parábola.

b) La ecuación es:

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x + 36y + 45 = 0$$

en este caso, tenemos que:

$$A = 8, \quad B = 4 \quad \text{y} \quad C = 5$$

entonces, el valor del discriminante es:

$$B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(8)(5) = 16 - 160 = -144 < 0$$

como el discriminante resultó negativo, entonces se trata de una elipse.

c) La ecuación es:

$$-x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 14y + 39 = 0$$

en este caso, tenemos que:

$$A = -1, \quad B = 2 \quad \text{y} \quad C = 1$$

entonces, el valor del discriminante es:

$$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(-1)(1) = 4 + 4 = 8 > 0$$

como el discriminante resultó positivo, entonces se trata de una hipérbola.

d) La ecuación es:

$$2x^2 + 2y^2 - 20x + 12y + 36 = 0$$

en este caso, tenemos que:

$$A = 2, \quad B = 0 \quad y \quad C = 2$$

entonces, el valor del discriminante es:

$$B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(2)(2) = -16 < 0$$

Al ser el discriminante negativo, podría tratarse de una elipse, o bien, de una circunferencia; sin embargo, se cumple que $B = 0$ y $A = C$, por lo tanto, se trata de una circunferencia.

Identificación de las cónicas cuando la ecuación general de segundo grado carece del término Bxy

Como se mencionó anteriormente, cuando en la ecuación general de segundo grado se tiene el término Bxy y dicha ecuación representa una cónica, esto implica que los ejes de la cónica son oblicuos al sistema de referencia y la identificación de la curva se hace mediante el signo del discriminante; sin embargo, es posible eliminar el término Bxy de la ecuación de la cónica e identificarla más fácilmente, en forma directa, mediante los coeficientes de su ecuación.

La eliminación del término Bxy de la ecuación general de segundo grado, se consigue mediante una rotación de ejes, haciendo que los ejes de la cónica coincidan o sean

paralelos a los nuevos ejes x' , y' del sistema de referencia ya girado. No detallaremos el procedimiento específico para realizar esta rotación, ya que no es el objetivo principal de esta obra. Nuestro propósito es mostrar cómo identificar el tipo de cónica a través de los coeficientes de su ecuación, una vez realizada la rotación de ejes.

Con el giro adecuado de los ejes, la ecuación general de segundo grado en el nuevo sistema de referencia x' , y' toma la forma:

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Si esta nueva ecuación representa una cónica y no los casos degenerados de ellas, entonces la identificación de la cónica se hace mediante el siguiente criterio.

Teorema

1. Si $A' = 0$ o $C' = 0$ pero no ambos, esto es, si $A'C' = 0$, entonces se trata de una parábola.
2. Si A' y C' tienen el mismo signo siendo $A' \neq C'$, esto es, $A'C' > 0$, entonces se trata de una elipse.
3. Si $A' = C'$, entonces se trata de una circunferencia.
4. Si A' y C' tienen signo distinto, esto es, si $A'C' < 0$, entonces se trata de una hipérbola.

Ejercicio 32. Analice los coeficientes de cada una de las ecuaciones proporcionadas y determine qué tipo de cónica representa.

a) $(3x + 1)^2 + (2y - 1)^2 + 19 = 5x^2 - 10x + 3y^2 - 10y$

b) $2(2 - x)^2 - 4y^2 - 4y - 5 = (3 + y)^2 + x^2 - 24x + 3$

$$\text{c) } x^2 - 12x + (y - 1)^2 + 6y = y^2 - 11$$

$$\text{d) } 3(x + 2)^2 - 5(y - 3)^2 - 6x - 28y = x^2 - 7y^2 - 36$$

Solución:

Antes de proceder a la solución del ejercicio, es importante aclarar que, en el teorema anteriormente enunciado, se utilizan los coeficientes A' , B' y C' . Esto se debe a que el teorema hace referencia a la ecuación general de segundo grado con $B = 0$ y un sistema de referencia con ejes girados x' , y' . Sin embargo, dado que las ecuaciones proporcionadas en cada inciso no incluyen el término $Bx y$, aplicaremos el criterio establecido en el teorema usando los coeficientes A , B y C en lugar de A' , B' y C' .

En cuanto al procedimiento a seguir en la solución de cada uno de los incisos, se desarrollarán los binomios al cuadrado, se agruparán los términos en el primer miembro de la ecuación haciendo las simplificaciones correspondientes, se identificará la cónica en función de sus coeficientes y, finalmente, se darán algunos de los elementos básicos de dichas cónicas.

a) La ecuación es:

$$(3x + 1)^2 + (2y - 1)^2 + 19 = 5x^2 - 10x + 3y^2 - 10y$$

desarrollando los binomios al cuadrado, tenemos:

$$(9x^2 + 6x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) + 19 = 5x^2 - 10x + 3y^2 - 10y$$

agrupando y simplificando términos semejantes, se llega a:

$$4x^2 + y^2 + 16x + 6y + 21 = 0$$

entonces:

$$A = 4 \quad \text{y} \quad C = 1$$

como A y C tienen el mismo signo, siendo $A \neq C$, entonces se trata de una elipse.

Para determinar algunas características de la elipse, completaremos trinomios cuadrados perfectos con la finalidad de llevar la ecuación a su forma estándar u ordinaria.

Reordenando la ecuación:

$$4x^2 + 16x + y^2 + 6y = -21$$

de donde:

$$4(x^2 + 4x) + (y^2 + 6y) = -21$$

completando trinomios cuadrados perfectos:

$$4(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = -21 + 16 + 9$$

entonces:

$$4(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

con lo cual, la ecuación de la elipse en su forma estándar es:

$$\frac{(x + 2)^2}{1} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$$

como el eje mayor es paralelo al eje y , entonces se trata de una elipse con eje focal vertical y con centro en el punto:

$$C(-2, -3)$$

Las longitudes de sus semiejes son:

$$\text{semieje mayor } a = 2$$

$$\text{semieje menor } b = 1$$

b) La ecuación es:

$$2(2-x)^2 - 4y^2 - 4y - 5 = (3+y)^2 + x^2 - 24x + 3$$

desarrollando los binomios al cuadrado, tenemos:

$$(8 - 8x + 2x^2) - 4y^2 - 4y - 5 = (9 + 6y + y^2) + x^2 - 24x + 3$$

agrupando y simplificando términos semejantes, se llega a:

$$x^2 - 5y^2 + 16x - 10y - 9 = 0$$

en este caso:

$$A = 1 \quad \text{y} \quad C = -5$$

como A y C tienen signos distintos, entonces se trata de una hipérbola.

Reordenando la ecuación y completando trinomios cuadrados perfectos, tenemos:

$$x^2 + 16x - 5y^2 - 10y = 9$$

$$(x^2 + 16x + 64) - 5(y^2 + 2y + 1) = 9 + 64 - 5$$

entonces:

$$(x+8)^2 - 5(y+1)^2 = 68$$

con lo cual, la ecuación de la hipérbola en su forma estándar es:

$$\frac{(x + 8)^2}{68} - \frac{(y + 1)^2}{\frac{68}{5}} = 1$$

como el eje transversal es paralelo al eje x , entonces se trata de una hipérbola con eje focal horizontal y con centro en el punto:

$$C (-8, -1)$$

Las longitudes de sus ejes son:

$$\text{eje transversal} \quad 2a = 2\sqrt{68}$$

$$\text{eje conjugado} \quad 2b = 2\sqrt{\frac{68}{5}}$$

c) La ecuación es:

$$x^2 - 12x + (y - 1)^2 + 6y = y^2 - 11$$

desarrollando el binomio al cuadrado, tenemos:

$$x^2 - 12x + (y^2 - 2y + 1) + 6y = y^2 - 11$$

agrupando y simplificando términos semejantes, se llega a:

$$x^2 - 12x + 4y + 12 = 0$$

como $A = 1$ y $C = 0$, entonces se trata de una parábola.

completando el trinomio cuadrado perfecto, tenemos:

$$(x^2 - 12x + 36) + 4y + 12 = 36$$

simplificando se llega a:

$$(x - 6)^2 = 36 - 12 - 4y$$

$$(x - 6)^2 = -4y + 24$$

entonces, la ecuación de la parábola en su forma estándar es:

$$(x - 6)^2 = -4(y - 6)$$

Se trata de una parábola con eje paralelo a eje y , con $P < 0$, por lo que abre hacia abajo. Su vértice está en el punto:

$$V(6, 6)$$

d) La ecuación es:

$$3(x + 2)^2 - 5(y - 3)^2 - 6x - 28y = x^2 - 7y^2 - 36$$

desarrollando los binomios al cuadrado, tenemos:

$$(3x^2 + 12x + 12) + (-5y^2 + 30y - 45) - 6x - 28y = x^2 - 7y^2 - 36$$

agrupando y simplificando términos semejantes, se llega a:

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$$

entonces:

$$A = 2 \quad y \quad C = 2$$

como $A = C$, entonces se trata de una circunferencia.

Reordenando la ecuación y completando trinomios cuadrados perfectos, tenemos:

$$2x^2 + 6x + 2y^2 + 2y = -3$$

$$2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 2\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = -3 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2}$$

$$2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

con lo cual, la ecuación de la circunferencia en su forma estándar es:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Se trata de una circunferencia con radio igual a uno y centro en el punto:

$$C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Se deja al lector el trazo de las gráficas de las cuatro cónicas analizadas.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y VECTORIALES DE LAS CÓNICAS

Hemos hecho un pequeño resumen de las ecuaciones cartesianas de las cónicas. A continuación, presentaremos otra forma de representarlas a través de sus ecuaciones paramétricas y vectoriales.

Este nuevo enfoque, utilizando ecuaciones paramétricas y vectoriales, no solo nos permite profundizar en el conocimiento de las cónicas, sino que también abre la puerta para entender aspectos más complejos de las mismas matemáticas. Esto nos da la posibilidad de poder comprender y manejar aplicaciones más sofisticadas de las cónicas en campos como la física, la ingeniería y las ciencias en general. Nos permite estudiar fenómenos que involucren movimientos y trayectorias, por ejemplo, órbitas planetarias, la dinámica en el espacio, trayectorias de proyectiles, ingeniería aeroespacial, entre otras. Las ecuaciones que hasta ahora hemos estudiado de las cónicas quedan definidas en término de dos variables, pero ahora lo que haremos es representar a estas dos variables en función de una tercera variable que llamaremos parámetro.

Si la ecuación de una cónica C la expresamos como:

$$C : \left\{ \begin{array}{l} F(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

y hacemos que las variables x , y estén en función de una tercera variable t , entonces se tendría que:

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right.$$

A este par de ecuaciones se les llama ecuaciones paramétricas de la cónica C . Con estas ecuaciones se pueden obtener todos los puntos de la gráfica de la cónica, para cada valor del parámetro t se obtienen las coordenadas de un punto (x, y) de la gráfica.

Las ecuaciones paramétricas de una cónica no son únicas. Existen muchas formas de parametrizar la ecuación de una cónica y, por lo tanto, se pueden obtener una infinidad de ecuaciones paramétricas para representar a una misma cónica.

No existe un método general que podemos seguir para obtener las ecuaciones paramétricas de las cónicas; sin embargo, existen parametrizaciones que resultan más convenientes o sencillas que otras. Debemos optar por aquella parametrización que más nos facilite las cosas, o bien, aquella que mejor se adapte al problema que estamos resolviendo.

Si lo que tenemos son las ecuaciones paramétricas de una cónica y lo que queremos es obtener su ecuación cartesiana, lo que debemos hacer es eliminar el parámetro combinando, de la manera que resulte más conveniente, ambas ecuaciones paramétricas. Tampoco, en este caso, existe un procedimiento único que nos permita eliminar el parámetro; todo dependerá de la forma que tengan dichas ecuaciones paramétricas. A continuación, citaremos algunos de los casos más comunes:

- 1)** Si en las ecuaciones paramétricas intervienen funciones trigonométricas, entonces es muy probable que podamos utilizar una identidad trigonométrica para eliminar el parámetro.
- 2)** Si ambas ecuaciones paramétricas son algebraicas, entonces una posibilidad sería modificar algebraicamente una o ambas ecuaciones, de tal manera que por sumas y restas se logre eliminar el parámetro. Se debe cuidar que las modificaciones hechas a las ecuaciones paramétricas no las alteren.
- 3)** Si ambas ecuaciones paramétricas son algebraicas, pero una de ellas es mucho más sencilla que la otra, entonces lo que se recomienda hacer, es despejar el parámetro de la ecuación más sencilla y sustituirlo en la otra ecuación.

Dependiendo del procedimiento que se siga para llegar a la ecuación cartesiana de la cónica, es posible que se llegue a ecuaciones cartesianas aparentemente diferentes; sin embargo, en realidad se trata de la misma ecuación en presentaciones distintas. Con un manejo algebraico adecuado, se podrá pasar de una forma a la otra sin dificultad.

A continuación, mostraremos cómo se puede llegar a ciertas parametrizaciones de las cónicas y daremos también sus correspondientes ecuaciones vectoriales.

CIRCUNFERENCIA

1) Circunferencia con centro en el origen y radio a .

La ecuación cartesiana es:

$$x^2 + y^2 = a^2 \dots\dots\dots (1)$$

dividiendo ambos lados de la ecuación entre a^2 , tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

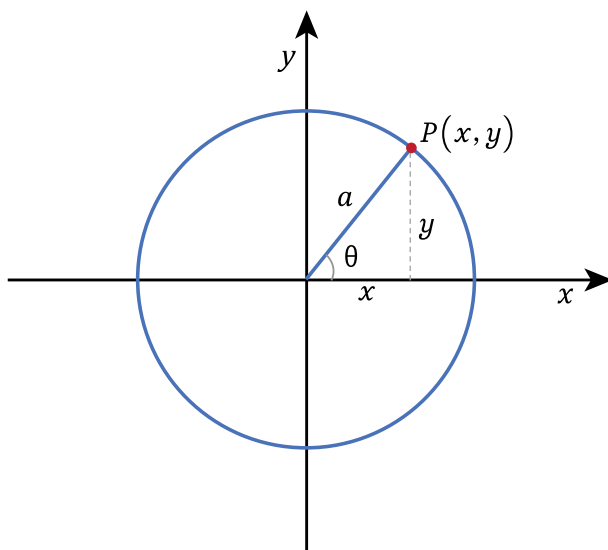
de donde:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

como llegamos a una ecuación que es la suma de dos cuadrados e igual a uno, esto nos lleva a pensar en la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

La gráfica de la circunferencia es:



Si elegimos un punto cualquiera $P(x, y)$ de la circunferencia y escogemos como parámetro el ángulo θ , entonces del triángulo de la figura y aplicando las definiciones del *seno* y el *coseno*, tenemos que:

$$\cos \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a \operatorname{sen} \theta$$

con lo cual, se llega a que un par de ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en el origen y radio a son:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

si consideramos al vector \vec{p} como vector de posición del punto P , entonces una ecuación vectorial de dicha circunferencia es:

$$\vec{p} = (a \cos \theta) \mathbf{i} + (a \operatorname{sen} \theta) \mathbf{j}$$

si retomamos la ecuación (1) con el propósito de llegar a otro par de ecuaciones paramétricas de la circunferencia, se tendría:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

si hacemos $x = t$ y sustituimos en la ecuación, se tiene:

$$t^2 + y^2 = a^2$$

despejando y :

$$y^2 = a^2 - t^2$$

$$y = \pm \sqrt{a^2 - t^2}$$

con lo cual, otro par de ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en el origen y radio a , serían:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \pm \sqrt{a^2 - t^2} \end{cases}$$

De la segunda ecuación se puede apreciar que los valores que puede tomar el parámetro t , están comprendidos en el intervalo $-a \leq t \leq a$, esto es, el valor mayor que puede tomar x es el valor del radio, es decir, $x = a$ y el menor será $x = -a$. Por otro lado, el signo positivo de la raíz define la parte superior de la circunferencia y el signo negativo la parte inferior.

Con estas nuevas ecuaciones paramétricas de la circunferencia se tendría la siguiente ecuación vectorial:

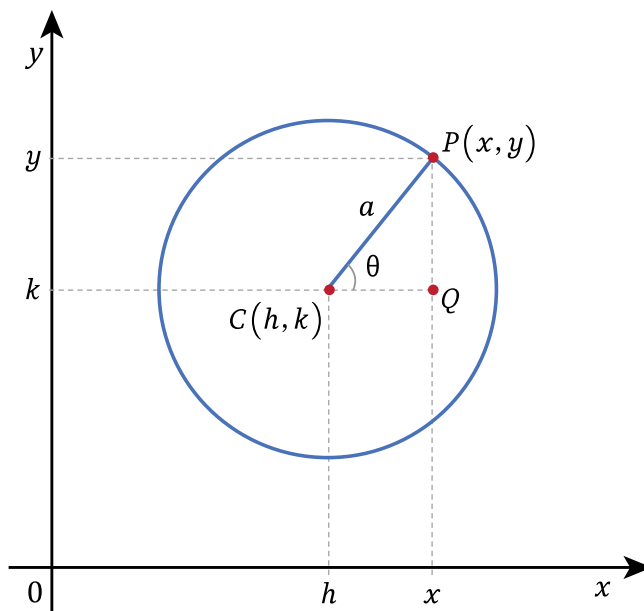
$$\vec{p} = t \mathbf{i} \pm \sqrt{a^2 - t^2} \mathbf{j}$$

2) Circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio a .

La ecuación cartesiana es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 \dots\dots\dots (2)$$

y su gráfica es:



del triángulo de la figura, se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{\overline{CQ}}{a} \Rightarrow \overline{CQ} = a \cos \theta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{QP}}{a} \Rightarrow \overline{QP} = a \text{ sen } \theta$$

con esto, las coordenadas del punto $P(x, y)$ resultan igual a:

$$\begin{cases} x = h + a \cos \theta \\ y = k + a \text{ sen } \theta \end{cases}$$

que son un par de ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$, radio a y parámetro θ .

Entonces, una ecuación vectorial de dicha circunferencia es:

$$\bar{p} = (h + a \cos \theta) \mathbf{i} + (k + a \sin \theta) \mathbf{j}$$

A manera de comprobación, tomemos las ecuaciones paramétricas y, a partir de ellas, obtengamos la ecuación cartesiana de la circunferencia. Si despejamos $\cos \theta$ y $\sin \theta$, se llega a:

$$\frac{x - h}{a} = \cos \theta$$

$$\frac{y - k}{a} = \sin \theta$$

elevando al cuadrado en ambas ecuaciones, tenemos:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} = \cos^2 \theta$$

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} = \sin^2 \theta$$

sumando las dos ecuaciones, se tiene:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

de donde:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

finalmente:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

que resulta igual a la ecuación (2).

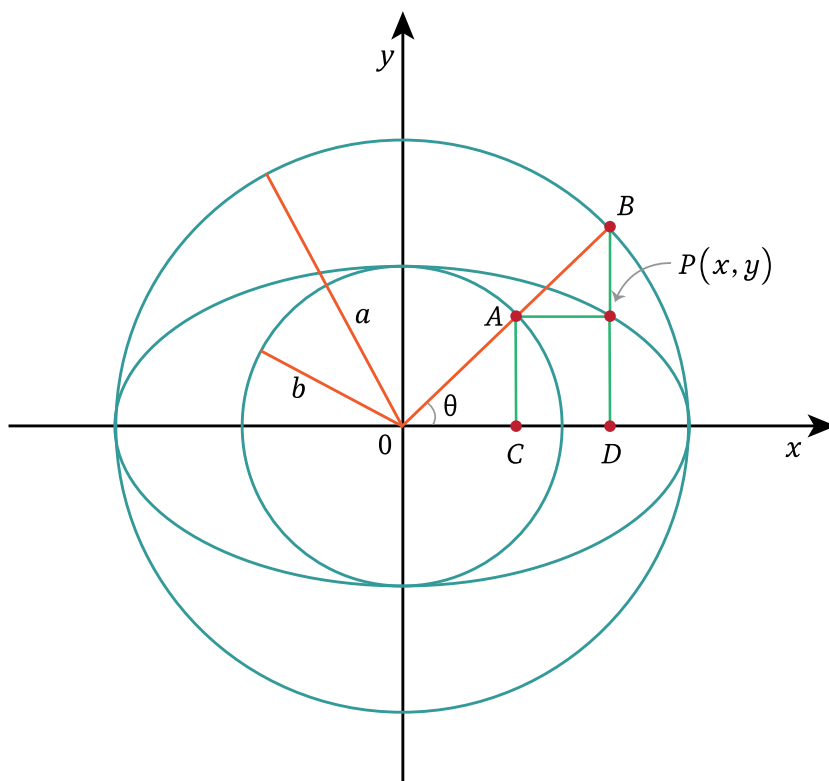
ELIPSE

- 1) Elipse con centro en el origen y semieje mayor "a" paralelo al eje x .

La ecuación cartesiana es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para obtener un par de ecuaciones paramétricas de la elipse, partamos de la siguiente figura:



En la figura se tienen dos circunferencias concéntricas de radios a y b , con centro en el origen, donde $a > b$. El punto $p(x, y)$ queda definido por la intersección de la recta horizontal que pasa por el punto A y corta al segmento \overline{BD} .

Con los elementos que se muestran en la figura, obtengamos las coordenadas (x, y) del punto P . Se tiene que:

$$x = \overline{OD} = \overline{OB} \cos \theta = a \cos \theta$$

$$y = \overline{DP} = \overline{CA} = \overline{OA} \operatorname{sen} \theta = b \operatorname{sen} \theta$$

con lo cual, un par de ecuaciones paramétricas de la elipse con centro en el origen, semieje mayor horizontal a y semieje menor b , son:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Si consideramos al vector \vec{p} como vector de posición del punto P , entonces una ecuación vectorial de la elipse es:

$$\vec{p} = (a \cos \theta) \mathbf{i} + (b \operatorname{sen} \theta) \mathbf{j}$$

El punto $p(x, y)$ es un punto de la elipse. Si se cambia el ángulo θ y se repite el procedimiento descrito, entonces iremos obteniendo diferentes puntos de ella. Conforme θ varía, el punto P se desliza a lo largo de la elipse.

- 2)** Elipse con centro en el punto $c(h, k)$ y semieje mayor paralelo al eje x .
La ecuación cartesiana es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Con un procedimiento similar al que se hizo para el caso de la circunferencia con centro en el punto $c (h , k)$, se llega a que un par de ecuaciones paramétricas de la elipse con centro en el punto $c (h , k)$ y semieje mayor a horizontal, son:

$$\begin{cases} x = h + a \cos \theta \\ y = k + b \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

y su correspondiente ecuación vectorial es:

$$\bar{p} = (h + a \cos \theta) \mathbf{i} + (k + b \operatorname{sen} \theta) \mathbf{j}$$

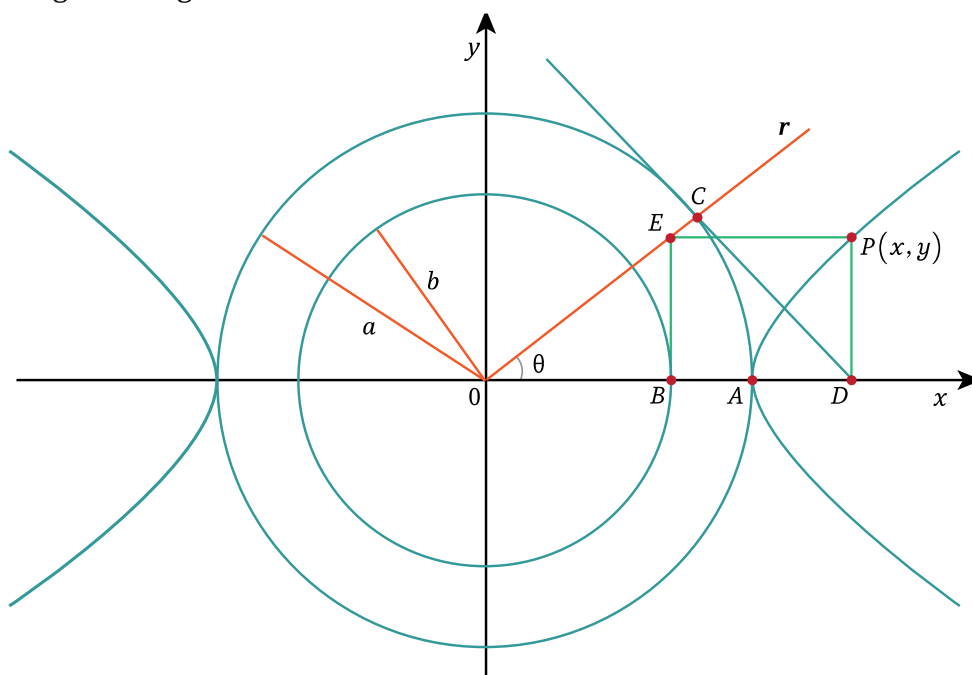
HIPÉRBOLA

- 1) Hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje x .

La ecuación cartesiana es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para obtener un par de ecuaciones paramétricas de la hipérbola, partiremos de la siguiente figura:



En la figura se tienen dos circunferencias concéntricas de radios a y b , con centro en el origen, donde $a > b$. El punto $p(x, y)$ queda definido por la intersección de la recta horizontal que pasa por el punto E y la recta vertical que pasa por el punto D . El punto E queda definido por la intersección de la recta vertical que pasa por el punto B y la recta ℓ que define un ángulo θ con el eje x .

El punto D queda definido por la intersección de la recta tangente a la circunferencia en el punto C y el eje x .

Con los elementos mostrados en la figura, obtengamos las coordenadas (x, y) del punto P . De los triángulos OCD y OBE , se tiene que:

$$\sec \theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} \Rightarrow x = \overline{OD} = \overline{OC} \sec \theta = a \sec \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{BE}}{\overline{OB}} \Rightarrow y = \overline{DP} = \overline{BE} = \overline{OB} \tan \theta = b \tan \theta$$

con lo cual, un par de ecuaciones paramétricas de la hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje x , son:

$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad \text{con } \cos \theta \neq 0$$

y su correspondiente ecuación vectorial es:

$$\vec{p} = (a \sec \theta) \mathbf{i} + (b \tan \theta) \mathbf{j}$$

De igual forma a lo descrito con la elipse, si se cambia el ángulo θ y se repite el procedimiento descrito, entonces se obtendrían diferentes puntos de la hipérbola. Conforme θ varía, el punto P se desliza a lo largo de toda la hipérbola. En este caso, θ no puede tomar los valores de 90 y 270 grados.

- 2) Hipérbola con centro en el punto $C (h , k)$ y eje focal paralelo al eje x .
La ecuación cartesiana es:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Un par de ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = h + a \sec \theta \\ y = k + b \tan \theta \end{cases} \quad \text{con } \cos \theta \neq 0$$

y su correspondiente ecuación vectorial es:

$$\vec{p} = (h + a \sec \theta) \mathbf{i} + (k + b \tan \theta) \mathbf{j}$$

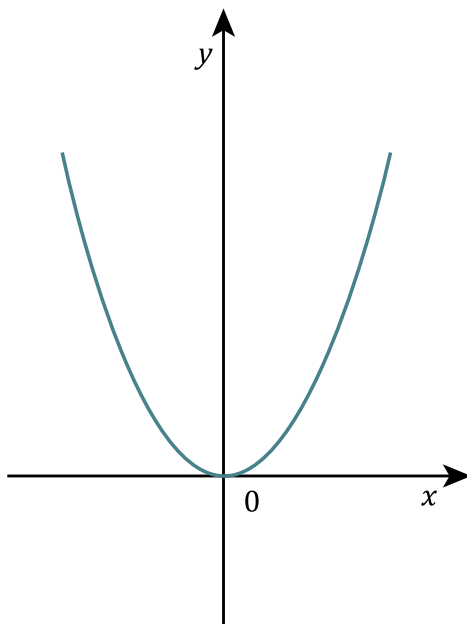
PARÁBOLA

Para el caso de la parábola, se pueden generar ecuaciones paramétricas utilizando funciones trigonométricas; sin embargo, optaremos por una parametrización de tipo algebraico. Esto implica igualar la variable con exponente de segundo grado al parámetro t . Luego, se sustituirá esta expresión en la ecuación original de la parábola, obteniendo así un par de ecuaciones paramétricas.

- 1) Parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente con el eje y .
La ecuación cartesiana es:

$$x^2 = 4 p y$$

y su gráfica es:



si hacemos que:

$$x = t$$

entonces, sustituyendo en la ecuación, se tiene:

$$t^2 = 4Py \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4P} t^2$$

con lo cual, un par de ecuaciones paramétricas de la parábola, son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{4P} t^2 \end{cases}$$

y su correspondiente ecuación vectorial es:

$$\vec{p} = t\mathbf{i} + \frac{1}{4P} t^2 \mathbf{j}$$

- 2) Parábola con vértice en el punto $V(h, k)$ y eje focal paralelo al eje y .

La ecuación cartesiana es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

si hacemos que:

$$x = t$$

sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$(t - h)^2 = 4p(y - k)$$

despejando y , se tiene:

$$y - k = \frac{1}{4p}(t - h)^2$$

de donde:

$$y = \frac{1}{4p}(t - h)^2 + k$$

con lo cual, un par de ecuaciones paramétricas de la parábola es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{4p}(t - h)^2 + k \end{cases}$$

y su correspondiente ecuación vectorial es:

$$\vec{p} = t\mathbf{i} + \left[\frac{1}{4p}(t - h)^2 + k \right]\mathbf{j}$$

En el caso de las ecuaciones paramétricas, es recomendable desarrollar el binomio al cuadrado en la ecuación de "y" y realizar las simplificaciones procedentes. Esto dará lugar a ecuaciones paramétricas más simples.

Ejercicio 33. Para la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C: \begin{cases} x = 3 + 2 \operatorname{sen} t \\ y = 4 \cos^2 t \end{cases}$$

- Obtenga una ecuación vectorial de la curva C .
- Dé una ecuación cartesiana de C .
- Identifique de qué curva se trata.
- Trace, en forma aproximada, la gráfica de la curva.

Solución:

- a)** Una ecuación vectorial es:

$$\vec{p} = (3 + 2 \operatorname{sen} t) \mathbf{i} + (4 \cos^2 t) \mathbf{j}$$

- b)** De las ecuaciones paramétricas, al despejar las dos funciones trigonométricas, se llega a:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \operatorname{sen} t \\ \frac{y}{4} = \cos^2 t \end{cases}$$

elevando al cuadrado ambos lados de la primera ecuación paramétrica, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{4} = \operatorname{sen}^2 t \\ \frac{y}{4} = \operatorname{cos}^2 t \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y}{4} = \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t$$

de donde:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

$$(x-3)^2 + y = 4$$

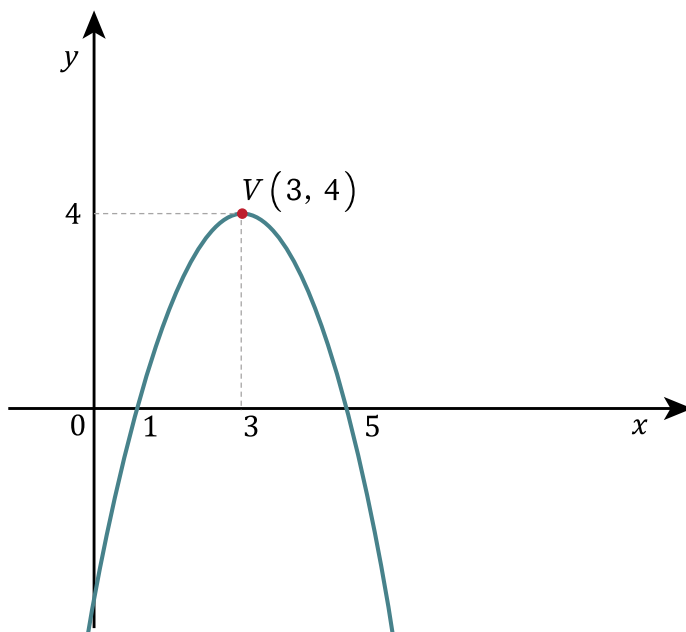
finalmente:

$$y - 4 = - (x - 3)^2$$

es la ecuación cartesiana de la curva en forma ordinaria o estándar.

- c)** Se trata de una parábola cóncava hacia abajo con vértice en el punto $V(3, 4)$.

d) Su gráfica es:



Ejercicio 34. Sea $\vec{p} = (1 + \cos t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$ la ecuación vectorial de una curva C .

- Dé unas ecuaciones paramétricas de la curva C .
- Determine unas ecuaciones cartesianas de C .
- Identifique de qué curva se trata.
- Trace, en forma aproximada, la gráfica de la curva.

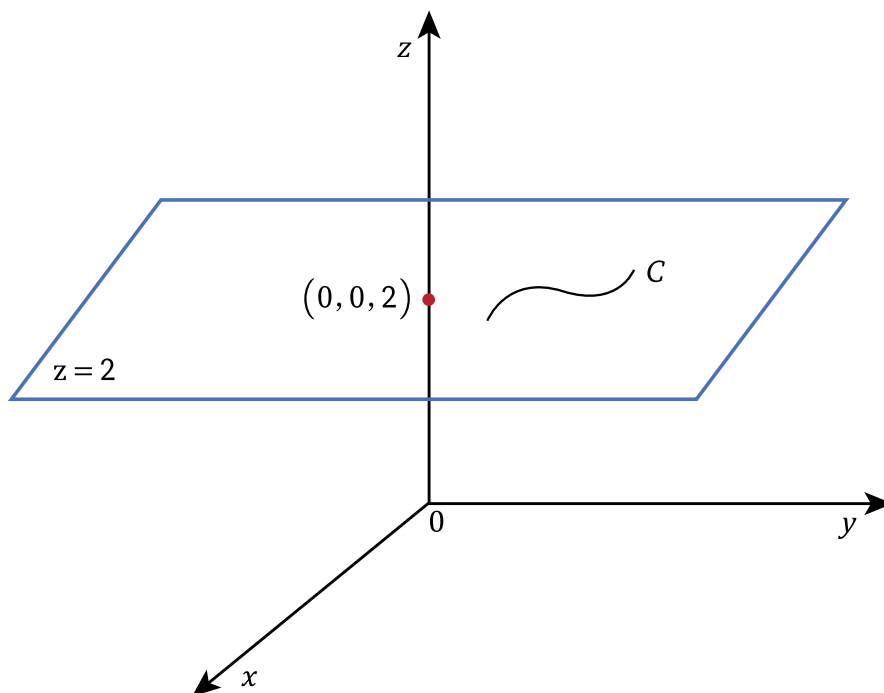
Solución:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 \end{cases}$$

A diferencia del ejercicio anterior, en este caso las ecuaciones paramétricas de la curva incluyen tres expresiones, involucrando las variables x , y y z . Esto implica que la curva no se encuentra en el plano cartesiano $x y$, sino en el espacio de tres dimensiones.

La ecuación $z = 2$ define un plano paralelo al plano $x y$, que interseca al eje z en el punto $(0, 0, 2)$, donde se encuentra contenida la curva definida por las dos primeras ecuaciones paramétricas, como se muestra en la siguiente figura:



La gráfica de la curva C que se muestra en la figura es meramente ilustrativa, no representa la curva que definen las ecuaciones paramétricas dadas.

- b)** Antes de proceder a la solución de este inciso, es conveniente hacer la siguiente aclaración: cuando una curva plana se encuentra definida en el espacio de tres dimensiones, entonces su ecuación cartesiana requiere de dos ecuaciones para que quede completamente definida. Para el caso de nuestro ejercicio, una de ellas es la ecuación $z = 2$, la otra se obtendrá a partir de las dos primeras ecuaciones paramétricas.

Tomando las dos primeras ecuaciones paramétricas, tenemos:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

despejando la función $\cos t$ de la primera ecuación paramétrica, se llega a:

$$\begin{cases} x - 1 = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

elevando al cuadrado en ambos lados de las dos ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 = \cos^2 t \\ y^2 = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones:

$$(x - 1)^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$$

de donde:

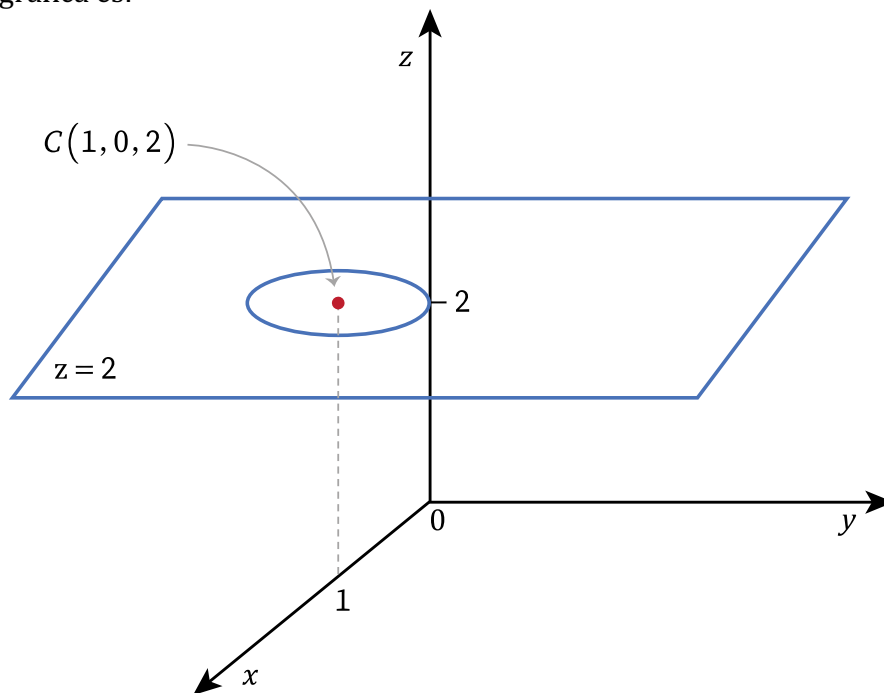
$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

con lo cual, unas ecuaciones cartesianas de la curva C son:

$$C: \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

- c)** Con la primera ecuación cartesiana, identificamos que se trata de una circunferencia con radio igual a uno, centro en el punto $C(1, 0, 2)$ y contenida en el plano de ecuación $z = 2$

d) Su gráfica es:



Ejercicio 35. Sea la curva C de ecuaciones:

$$C: \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{36} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Obtenga:

- Unas ecuaciones paramétricas de la curva C .
- Una ecuación vectorial de C .

Solución:

- Como sabemos, existe una infinidad de formas de parametrizar la ecuación cartesiana de una curva; sin embargo, unas resultan más convenientes que otras. Al observar las ecuaciones cartesianas de la curva, nos damos cuenta de que se

trata de una hipérbola con centro en el punto $(2, -1, 3)$, con eje focal paralelo al eje x y que se encuentra contenida en el plano de ecuación $z = 3$.

Por tratarse de una hipérbola, la forma más conveniente de parametrizar su ecuación es haciendo:

$$\begin{cases} x - 2 = 6 \sec t \\ y + 1 = 5 \tan t \end{cases}$$

donde el 6 es la longitud del semieje transversal y el 5 es la longitud del semieje conjugado.

Al despejar x y y se llega a:

$$\begin{cases} x = 2 + 6 \sec t \\ y = -1 + 5 \tan t \end{cases}$$

por lo tanto, unas ecuaciones paramétricas de la curva C , son:

$$C: \begin{cases} x = 2 + 6 \sec t \\ y = -1 + 5 \tan t \\ z = 3 \end{cases}$$

b) Una ecuación vectorial de la hipérbola es:

$$\bar{p} = (2 + 6 \sec t) \mathbf{i} + (-1 + 5 \tan t) \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$$

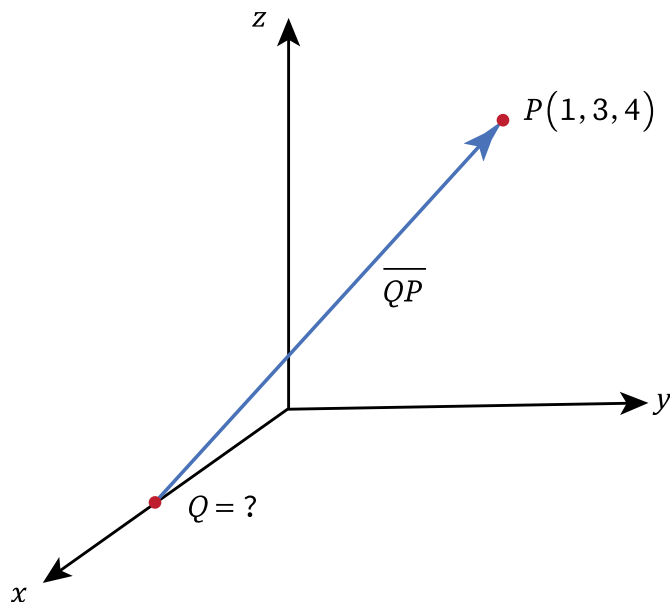
EJERCICIOS ADICIONALES

Una vez expuestos los conceptos teóricos fundamentales del álgebra vectorial, en la siguiente sección se presentará una serie de ejercicios resueltos cuidadosamente seleccionados. Estos no solo ilustrarán la aplicación práctica de los principios analizados, sino que también abarcarán distintos niveles de dificultad. Algunos problemas serán más básicos, ideales para afianzar la comprensión inicial, mientras que otros ofrecerán un mayor desafío, permitiendo a los lectores profundizar y reforzar su dominio de los conceptos, además de elevar el nivel de exigencia respecto a los ejercicios resueltos durante la exposición de cada tema.

Ejercicio 36. Determine las coordenadas de un punto Q , contenido en el eje x , cuya distancia al punto $P(1, 3, 4)$ sea igual a $\sqrt{29}$.

Solución:

Ilustremos gráficamente el problema:



El punto Q , por estar contenido en el eje x , las coordenadas y , z son iguales a cero, por lo tanto, la única coordenada a determinar en Q será la de x , con lo cual, el punto Q tiene la forma:

$$Q(x, 0, 0)$$

El segmento \overline{QP} es igual a:

$$\overline{QP} = (1 - x, 3 - 0, 4 - 0) = (1 - x, 3, 4)$$

dado que $|\overline{QP}| = \sqrt{29}$, entonces se tiene que:

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(1 - x)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad, se tiene que:

$$(1 - x)^2 + 9 + 16 = 29$$

$$(1 - x)^2 + 25 = 29$$

$$(1 - x)^2 = 4$$

$$1 - x = \pm \sqrt{4}$$

$$1 - x = \pm 2$$

$$x = 1 \pm 2$$

con lo cual, se tienen dos soluciones:

con el signo positivo:

$$Q_1 (3, 0, 0)$$

con el signo negativo:

$$Q_2 (-1, 0, 0)$$

Ejercicio 37. Sean los vectores:

$$\bar{u} = (3, -5, -1), \quad \bar{v} = i + 2j - 3k \quad \text{y} \quad \bar{w} = (-4, 0, 1)$$

Calcule:

- Los ángulos y los cosenos directores de un vector \bar{a} , el cual es simultáneamente perpendicular a los vectores \bar{v} y \bar{w} .
- El producto mixto $[\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]$.

c) El valor del escalar k , para que el vector \vec{v} sea perpendicular al vector $\vec{b} = (4k, 2k, 4)$.

d) El módulo de un vector \vec{c} , que forma un ángulo de 30° con el vector \vec{w} y tal que $|\vec{w} \times \vec{c}| = \sqrt{17}$.

Solución:

a) Como $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{w}$, entonces:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 11j + 8k \quad \therefore \vec{a} = (2, 11, 8)$$

El módulo del vector \vec{a} es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (11)^2 + (8)^2} = \sqrt{4 + 121 + 64} = \sqrt{189}$$

con lo cual, se tiene que sus cosenos y los ángulos directores son:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{189}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{189}} \quad \therefore \alpha = 81.63^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{11}{\sqrt{189}} \Rightarrow \beta = \cos^{-1} \frac{11}{\sqrt{189}} \quad \therefore \beta = 36.86^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{8}{\sqrt{189}} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1} \frac{8}{\sqrt{189}} \quad \therefore \gamma = 54.41^\circ$$

b) El producto mixto de los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , es:

$$[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6 - 60) - (8 - 5) = -57$$

c) Si el vector \vec{v} debe ser perpendicular al vector \vec{b} , entonces se debe cumplir que:

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$$

sustituyendo, tenemos:

$$(1, 2, -3) \cdot (4k, 2k, 4) = 0$$

$$4k + 4k - 12 = 0$$

$$8k = 12$$

$$k = \frac{12}{8} \quad \therefore \quad k = \frac{3}{2}$$

d) Se sabe que:

$$|\vec{w} \times \vec{c}| = |\vec{w}| |\vec{c}| \operatorname{sen} \theta \dots\dots\dots (1)$$

tenemos que:

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{w} \times \vec{c}| = \sqrt{17}$$

de (1), se tiene:

$$|\bar{c}| = \frac{|\bar{w} \times \bar{c}|}{|\bar{w}| \operatorname{sen} \theta} \quad \text{con} \quad \theta = 30^\circ$$

sustituyendo:

$$|\bar{c}| = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17} \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad \therefore |\bar{c}| = 2$$

Ejercicio 38.

Dados los vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, demuestre que:

$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

Solución:

La demostración solicitada se hará por dos métodos distintos.

Método 1:

Se tiene que:

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3)$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

calculando el módulo:

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{(a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2)}$$

Agrupando términos de la siguiente manera, tenemos:

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{\underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}_{|\bar{a}|^2} + \underbrace{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}_{|\bar{b}|^2} - 2 \underbrace{(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)}_{\bar{a} \cdot \bar{b}}}$$

de donde:

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2(\bar{a} \cdot \bar{b})}$$

elevando al cuadrado en ambos lados, se tiene que:

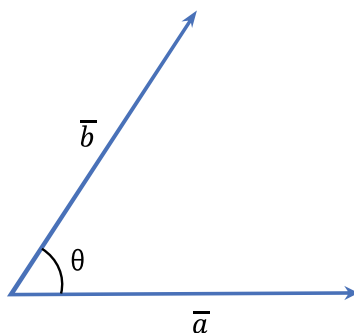
$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

que es lo que se quería demostrar.

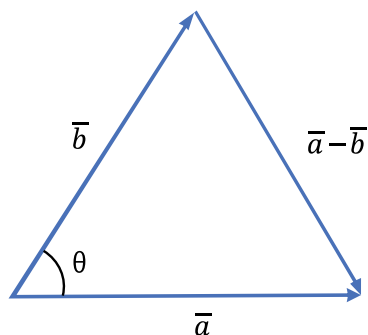
Método 2:

Esta segunda demostración se hará mediante trigonometría.

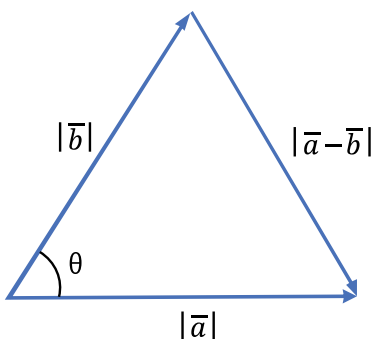
Considerando que la representación gráfica de los vectores \bar{a} y \bar{b} es la siguiente:



el vector que une el extremo de \bar{b} con el extremo de \bar{a} es el vector $\bar{a} - \bar{b}$, como se muestra en la figura:



si consideramos los módulos de estos vectores, tenemos:



aplicando la ley de los cosenos, se tiene:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \dots\dots\dots(1)$$

como:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \dots\dots\dots(2)$$

sustituyendo (2) en (1):

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

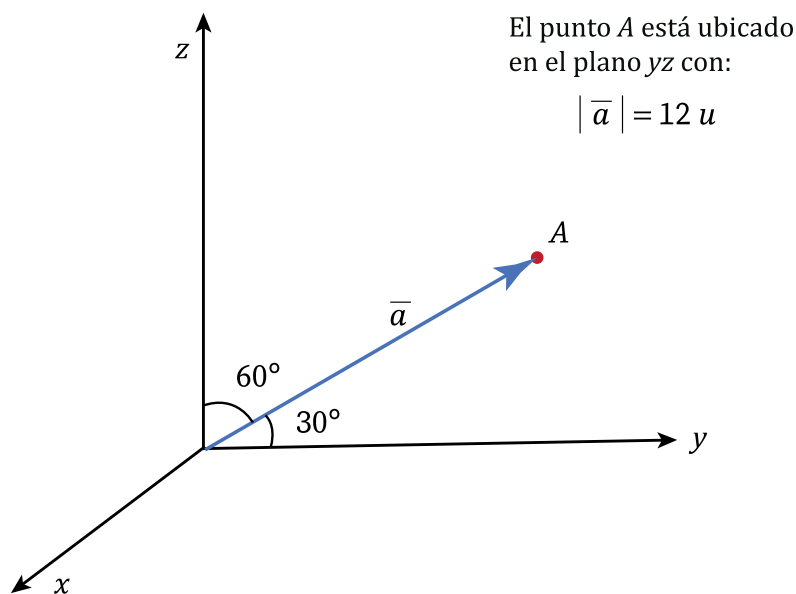
con lo cual queda esto demostrado.

Ejercicio 39. Sea el punto A contenido en el plano yz , que está a 12 unidades de distancia del origen de coordenadas, que tiene ordenada positiva y cuyo vector de posición forma un ángulo de 60° con el eje z ; y sea el punto $B(4, 8\sqrt{3}, -2)$. Calcule la distancia entre los puntos A y B empleando álgebra vectorial.

Solución:

Para poder calcular la distancia entre los puntos A y B , es necesario poder determinar las coordenadas del punto A . Una vez que lo logremos, se calcula el segmento \overline{AB} y, finalmente, el $|\overline{AB}|$ es la distancia entre los puntos A y B solicitada.

Ubiquemos gráficamente al punto A con los datos proporcionados:



De la figura, podemos deducir los ángulos directores del vector \vec{a} , estos son:

$$\alpha = 90^\circ, \text{ dado que el vector } \vec{a} \text{ está contenido en el plano } yz.$$

$$\beta = 30^\circ, \text{ puesto que el ángulo con el eje } z \text{ es de } 60^\circ.$$

$$\gamma = 60^\circ$$

Del vector \vec{a} sabemos que su módulo es igual a $12u$ y sus cosenos directores vienen dados por:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \Rightarrow a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \Rightarrow a_2 = |\vec{a}| \cos \beta \dots\dots\dots (2)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \Rightarrow a_3 = |\vec{a}| \cos \gamma \dots\dots\dots (3)$$

considerando que el vector \vec{a} tiene por componentes:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

sustituyendo $|\vec{a}| = 12$ y los ángulos directores en las expresiones (1), (2) y (3), tenemos:

$$a_1 = 12 \cos 90^\circ = 12 (0) = 0$$

$$a_2 = 12 \cos 30^\circ = 12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6\sqrt{3}$$

$$a_3 = 12 \cos 60^\circ = 12 \left(\frac{1}{2} \right) = 6$$

$$\therefore \vec{a} = (0, 6\sqrt{3}, 6)$$

Como el vector de posición del punto A tiene por componentes las mismas coordenadas del punto A , entonces:

$$A (0, 6\sqrt{3}, 6)$$

obsérvese que la ordenada del punto A es positiva como se indica en el enunciado.

Calculando el segmento \overline{AB} , tenemos:

$$\overline{AB} = (4 - 0, 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3}, -2 - 6)$$

$$\therefore \overline{AB} = (4, 2\sqrt{3}, -8)$$

de donde:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(4)^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 12 + 64} = \sqrt{92}$$

por lo tanto, la distancia del punto A al punto B es:

$$d(A, B) = \sqrt{92}$$

Ejercicio 40. Sea $C(6, 7, 8)$ el punto medio del segmento dirigido \overline{AB} . Empleando álgebra vectorial, determine las coordenadas de los puntos A y B , si los ángulos directores de \overline{AB} son $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 150^\circ$ y el $|\overline{AB}| = 4$.

Solución:

Con los ángulos directores y el módulo del segmento \overline{AB} , calculemos sus componentes.

Si consideramos que el segmento $\overline{AB} = (x, y, z)$, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overline{AB}|} \Rightarrow x = |\overline{AB}| \cos \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\overline{AB}|} \Rightarrow y = |\overline{AB}| \cos \beta \dots\dots\dots (2)$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\overline{AB}|} \Rightarrow z = |\overline{AB}| \cos \gamma \dots\dots\dots (3)$$

sustituyendo los valores conocidos en las expresiones (1), (2) y (3), tenemos:

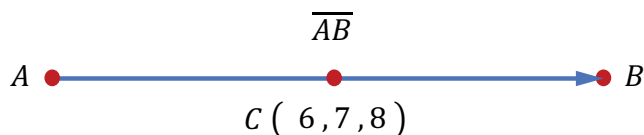
$$x = 4 \cos 60^\circ = 4 \left(\frac{1}{2} \right) = 2$$

$$y = 4 \cos 90^\circ = 4 (0) = 0$$

$$z = 4 \cos 150^\circ = 4 \left(- \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = - 2 \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = (2, 0, - 2 \sqrt{3})$$

Se nos dice que $C (6, 7, 8)$ es el punto medio del segmento \overline{AB} , esto es:



con lo cual, se tiene que:

$$\overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{1}{2} (2, 0, - 2 \sqrt{3})$$

$$\therefore \overline{AC} = (1, 0, - \sqrt{3})$$

sabemos que:

$$\overline{AC} = \overline{c} - \overline{a} \quad \dots\dots\dots (4)$$

donde \overline{c} y \overline{a} son los vectores de posición de los puntos C y A . Si el punto A tiene por coordenadas:

$$A (a_1, a_2, a_3)$$

sustituyendo en (4), tenemos:

$$(1, 0, -\sqrt{3}) = (6, 7, 8) - (a_1, a_2, a_3)$$

de donde:

$$(a_1, a_2, a_3) = (6, 7, 8) - (1, 0, -\sqrt{3}) = (5, 7, 8 + \sqrt{3})$$

$$\therefore A(5, 7, 8 + \sqrt{3})$$

supongamos ahora que el punto B tiene por coordenadas:

$$B(b_1, b_2, b_3)$$

tenemos que:

$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a} \dots\dots\dots (5)$$

donde \overline{b} y \overline{a} son los vectores de posición de los puntos B y A . Sustituyendo \overline{AB} , \overline{b} y \overline{a} en (5), tenemos:

$$(2, 0, -2\sqrt{3}) = (b_1, b_2, b_3) - (5, 7, 8 + \sqrt{3})$$

de donde:

$$(b_1, b_2, b_3) = (2, 0, -2\sqrt{3}) + (5, 7, 8 + \sqrt{3})$$

$$(b_1, b_2, b_3) = (7, 7, 8 - \sqrt{3})$$

$$\therefore B(7, 7, 8 - \sqrt{3})$$

Ejercicio 41. Sean los puntos:

$$A(-2, 0, -5), B(2, 4, -3) \text{ y } C(-4, 4, -3)$$

tres de los vértices de un paralelogramo $ABCD$, donde \overline{AC} es una diagonal.

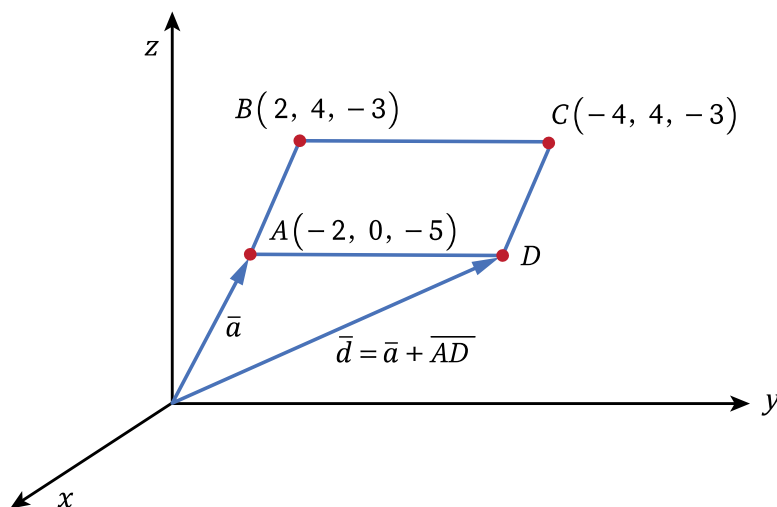
Determine:

- Las coordenadas del punto D .
- El coseno del ángulo interior en el vértice B .
- El perímetro del paralelogramo.

Solución:

Realizaremos una representación gráfica del paralelogramo. Esta gráfica no muestra una ubicación exacta de los puntos en el sistema de referencia, sino que es una ilustración que nos ayudará a entender con mayor claridad los procedimientos utilizados para resolver cada uno de los incisos.

a)



El vector de posición del punto D es el vector \vec{d} , el cual se obtiene al sumar los vectores:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{AD}$$

como:

$$\vec{a} \text{ es el vector de posición del punto } A \text{ y } \vec{AD} = \vec{BC}$$

entonces:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{BC}$$

dado que:

$$\vec{a} = (-2, 0, -5)$$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (-4, 4, -3) - (2, 4, -3) = (-6, 0, 0)$$

sustituyendo:

$$\vec{d} = (-2, 0, -5) + (-6, 0, 0) = (-8, 0, -5)$$

por lo tanto, las coordenadas del punto D son:

$$D(-8, 0, -5)$$

b) Si θ es el ángulo en el vértice B , entonces el $\cos \theta$ viene dada por:

$$\cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} \dots \dots \dots (1)$$

obteniendo los segmentos dirigidos y sus módulos, tenemos:

$$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = (-2, 0, -5) - (2, 4, -3) = (-4, -4, -2)$$

$$\vec{BC} = (-6, 0, 0) \text{ se obtuvo en el inciso a)}$$

$$|\overline{BA}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6 \quad \dots (2)$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (-4, -4, -2) \cdot (-6, 0, 0) = 24 \quad \dots \dots \dots (4)$$

sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{24}{(6)(6)} = \frac{24}{36} \quad \therefore \quad \cos \theta = \frac{2}{3}$$

c) Se tiene que el perímetro viene dado por:

$$P = |\overline{AB}| + |\overline{AD}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}|$$

de la figura, se puede apreciar que:

$$|\overline{AB}| = |\overline{BA}| = |\overline{CD}| = 6$$

valores calculados en el inciso anterior.

$$|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 6$$

con lo cual:

$$P = 2|\overline{AB}| + 2|\overline{AD}|$$

sustituyendo:

$$P = 2(6) + 2(6) = 12 + 12$$

$$\therefore \quad P = 24u$$

Ejercicio 42. Sean los vectores:

$$\bar{u} = (0, b, c), \quad \bar{v} = (-2, 1, -3) \quad \text{y} \quad \bar{w} = 4i + j - 2k$$

Determine los valores de b y c , tales que la componente escalar de \bar{u} sobre \bar{v} sea igual a $\sqrt{14}$ y la de \bar{u} sobre \bar{w} sea igual a $\sqrt{21}$.

Solución:

Se tiene que:

$$\text{Comp. Esc.}_{\bar{v}} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} = \sqrt{14} \quad \dots\dots\dots (1)$$

realizando los cálculos, tenemos:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (0, b, c) \cdot (-2, 1, -3) = b - 3c$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$\frac{b - 3c}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

de donde:

$$b - 3c = 14 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\text{Comp. Esc.}_{\bar{w}} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{w}}{|\bar{w}|} = \sqrt{21} \quad \dots\dots\dots (3)$$

haciendo operaciones:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (0, b, c) \cdot (4, 1, -2) = b - 2c$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

sustituyendo en (3), tenemos:

$$\frac{b - 2c}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}$$

de donde:

$$b - 2c = 21 \quad \dots\dots\dots (4)$$

con las ecuaciones (2) y (4) se forma el sistema:

$$\begin{cases} b - 3c = 14 \\ b - 2c = 21 \end{cases}$$

multiplicando por -1 la segunda ecuación:

$$\begin{cases} b - 3c = 14 \\ -b + 2c = -21 \end{cases}$$

$$-c = -7 \quad \therefore c = 7$$

sustituyendo $c = 7$ en la primera ecuación, se tiene que:

$$b - 3(7) = 14$$

$$b - 21 = 14$$

$$\therefore b = 35$$

con lo cual, el vector \bar{u} es igual a:

$$\bar{u} = (0, 35, 7)$$

Ejercicio 43. Sean los vectores \bar{u} y \bar{v} , tales que:

El vector \bar{u} forma ángulos de 60° y 45° con los ejes x y y , respectivamente.

El vector \bar{v} forma ángulos de 30° y 60° con los ejes y y z , respectivamente.

Calcule el ángulo que forman los vectores \bar{u} y \bar{v} .

Solución:

Calculemos las componentes del vector \bar{u} .

Dos de los ángulos directores de \bar{u} son:

$$\alpha = 60^\circ \quad \text{y} \quad \beta = 45^\circ$$

obteniendo el ángulo γ , tenemos:

$$\cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{3}{4} + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{1}{4}$$

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$$

con lo cual, se tienen dos posibles valores del ángulo γ :

$$\gamma_1 = 60^\circ \quad \text{y} \quad \gamma_2 = 120^\circ$$

entonces, los ángulos directores del vector \bar{u} podrían ser:

$$A : \begin{cases} \alpha_1 = 60^\circ \\ \beta_1 = 45^\circ \\ \gamma_1 = 60^\circ \end{cases} \quad B : \begin{cases} \alpha_2 = 60^\circ \\ \beta_2 = 45^\circ \\ \gamma_2 = 120^\circ \end{cases}$$

con los ángulos directores de la opción A , tenemos:

$$\cos \alpha_1 = \frac{u_1}{|\bar{u}|} \Rightarrow u_1 = |\bar{u}| \cos \alpha_1 \dots\dots\dots (1)$$

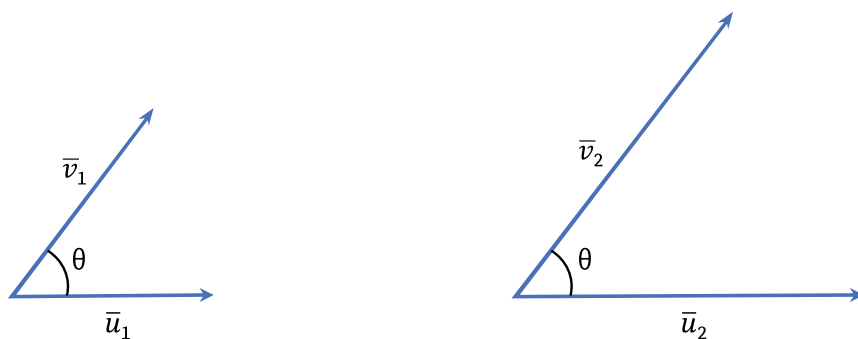
$$\cos \beta_1 = \frac{u_2}{|\bar{u}|} \Rightarrow u_2 = |\bar{u}| \cos \beta_1 \dots\dots\dots (2)$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{u_3}{|\bar{u}|} \Rightarrow u_3 = |\bar{u}| \cos \gamma_1 \dots\dots\dots (3)$$

considerando que $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Antes de continuar con la solución del ejercicio, es importante destacar que en el enunciado del problema no se menciona nada acerca de los módulos de los vectores \bar{u} y \bar{v} ; únicamente se proporcionan dos de los ángulos directores de cada vector. A

partir de los ángulos directores, es posible determinar la dirección de un vector, y para calcular el ángulo entre dos vectores, el tamaño de estos no es relevante. En otras palabras, los vectores pueden tener cualquier magnitud sin que ello afecte el valor del ángulo que forman. Véase la siguiente figura:



De acuerdo con lo anterior, a los vectores \bar{u} y \bar{v} les daremos los siguientes módulos:

$$|\bar{u}| = 2 \quad \text{y} \quad |\bar{v}| = 2$$

les estamos dando estos módulos, dado que con ellos los productos de las expresiones (1), (2) y (3) resultan más simples.

Sustituyendo los ángulos α_1 , β_1 y γ_1 de la opción A y el $|\bar{u}| = 2$ en (1), (2) y (3), tenemos:

$$u_1 = 2 \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

$$u_2 = 2 \cos 45^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

$$u_3 = 2 \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

por lo tanto, un vector \bar{u}_1 , sería:

$$\bar{u}_1 = (1, \sqrt{2}, 1)$$

Calculando ahora un segundo vector \bar{u}_2 , pero ahora considerando los ángulos directores de la opción B, tenemos que:

$$u_1 = 2 \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

$$u_2 = 2 \cos 45^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

$$u_3 = 2 \cos 120^\circ = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

por lo tanto, en el segundo vector \bar{u}_2 es:

$$\bar{u}_2 = (1, \sqrt{2}, -1)$$

Haremos ahora cálculos similares para obtener primero los ángulos directores del vector \bar{v} y posteriormente sus componentes. Veamos qué pasa ahora con el vector \bar{v} , considerando que:

$$\beta = 30^\circ \quad \text{y} \quad \gamma = 60^\circ \quad \text{datos tomados del enunciado.}$$

El ángulo α lo calculamos con:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\cos^2 \alpha + 1 = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 0$$

$$\therefore \cos \alpha = 0$$

con lo cual, solo se tiene un ángulo α :

$$\alpha = 90^\circ$$

Recuérdese que los ángulos directores deben variar de 0° a 180° .

Entonces, los ángulos directores del vector \bar{v} son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 90^\circ \\ \beta = 30^\circ \\ \gamma = 60^\circ \end{array} \right.$$

Calculando las componentes de \bar{v} , tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\bar{v}|} \Rightarrow v_1 = |\bar{v}| \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{|\bar{v}|} \Rightarrow v_2 = |\bar{v}| \cos \beta \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{|\bar{v}|} \Rightarrow v_3 = |\bar{v}| \cos \gamma \quad \dots\dots\dots (6)$$

sustituyendo los ángulos directores de \bar{v} y su módulo en las expresiones (4), (5) y (6), tenemos:

$$v_1 = 2 \cos 90^\circ = 2(0) = 0$$

$$v_2 = 2 \cos 30^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$v_3 = 2 \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

por lo tanto, el vector \bar{v} es:

$$\bar{v} = (0, \sqrt{3}, 1)$$

Como se obtuvieron dos vectores \bar{u} y un solo vector \bar{v} , entonces el ejercicio tendrá dos respuestas.

Calculando el ángulo entre \bar{u}_1 y \bar{v} , tenemos:

$$\cos \theta_1 = \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{v}}{|\bar{u}_1| |\bar{v}|} = \frac{(1, \sqrt{2}, 1) \cdot (0, \sqrt{3}, 1)}{(2)(2)}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{6} + 1}{4}$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{\sqrt{6} + 1}{4}$$

$$\therefore \theta_1 = 30.4^\circ$$

Ahora, calculando el ángulo entre \bar{u}_2 y \bar{v} , tenemos:

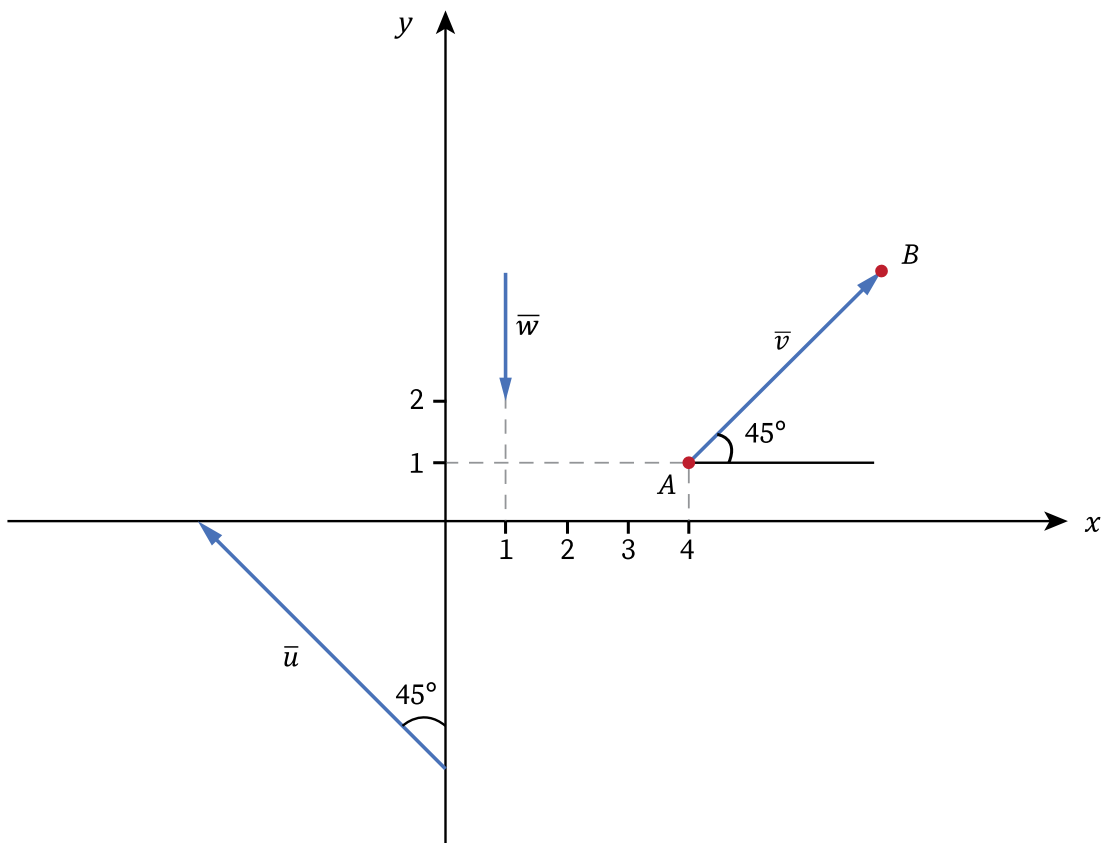
$$\cos \theta_2 = \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}}{|\bar{u}_2| |\bar{v}|} = \frac{(1, \sqrt{2}, -1) \cdot (0, \sqrt{3}, 1)}{(2)(2)}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{6} - 1}{4}$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \frac{\sqrt{6} - 1}{4}$$

$$\therefore \theta_2 = 68.7^\circ$$

Ejercicio 44. Sean los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} , que se muestran en la figura:



Calcule:

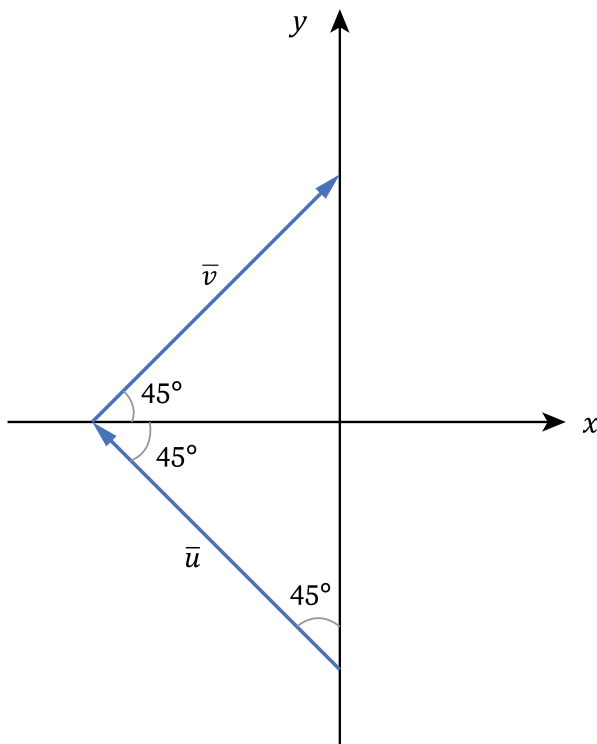
- La componente escalar de \bar{u} sobre \bar{v} .
- La componente vectorial de \bar{v} sobre \bar{u} .

Si el módulo de la componente vectorial de \bar{v} sobre \bar{w} es 3, determine:

- Las componentes del vector \bar{v} .
- La componente escalar de \bar{v} sobre \bar{w} .
- Las coordenadas del punto B .

Solución:

- a) Los vectores \bar{u} y \bar{v} son perpendiculares, lo cual se puede apreciar fácilmente si desplazamos el origen del vector \bar{v} y lo colocamos en el extremo del vector \bar{u} . Como ambos vectores forman un ángulo de 45° con el eje x , es claro que el ángulo entre ellos es de 90° . Véase la siguiente figura:



Al ser \bar{u} y \bar{v} vectores perpendiculares, entonces:

$$\text{Comp. Esc.}_{\bar{v}} \bar{u} = 0$$

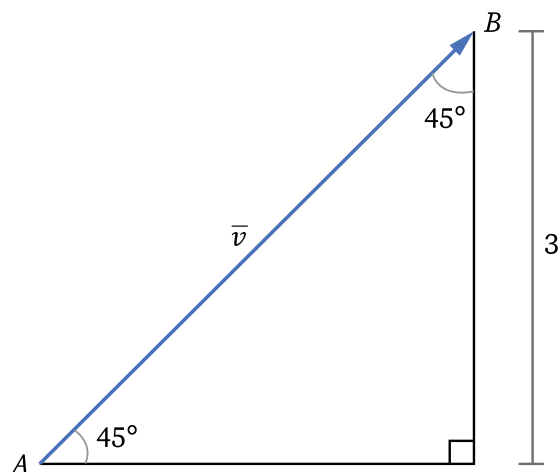
- b) Recordemos que la componente escalar de un vector sobre otro representa la longitud o magnitud de la proyección, en tanto que, la componente vectorial representa el vector que se obtiene al proyectar un vector en la dirección de otro, por lo tanto, al ser \bar{u} y \bar{v} vectores perpendiculares, entonces:

$$\text{Comp. Vec.}_{\bar{u}} \bar{v} = \bar{0}$$

- c) Se nos pide obtener las componentes del vector \vec{v} , si se sabe que:

$$\left| \text{Comp. Vec.}_{\vec{w}} \vec{v} \right| = 3$$

esto es, si se sabe que el módulo de la componente vectorial de \vec{v} sobre \vec{w} es igual a 3. El módulo de esta proyección nos representa la longitud del cateto vertical del triángulo que se forma teniendo como hipotenusa al vector \vec{v} . Véase la figura:



Como el triángulo tiene ángulos de 45° , entonces las magnitudes de los dos catetos deben ser iguales, por lo tanto, el otro cateto también es igual a 3; con lo cual, las componentes del vector \vec{v} son:

$$\vec{v} = (3, 3)$$

- d) La componente escalar de un vector sobre otro es la magnitud dirigida de la proyección de un vector sobre otro. La magnitud de la proyección de \vec{v} sobre \vec{w} ya sabemos que es igual a 3, lo único que hace falta determinar es su signo. Como la proyección de \vec{v} sobre \vec{w} y el mismo vector \vec{w} tienen sentidos opuestos, entonces podemos concluir que:

$$\text{Comp. Esc.}_{\vec{w}} \vec{v} = -3$$

- e) Las coordenadas del punto B se pueden determinar fácilmente, si observamos la figura del enunciado y tomamos en cuenta que las coordenadas del punto A son $A(4, 1)$, los catetos del triángulo miden 3 y el punto B se encuentra en el extremo del vector \vec{v} . Por lo que las coordenadas del punto B son:

$$B(7, 4)$$

Ejercicio 45. Dados los puntos:

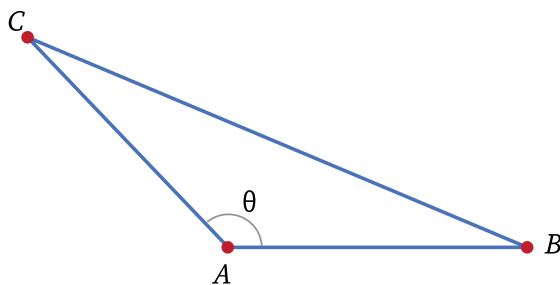
$$A(7, 3, -1), \quad B(5, 4, -3) \quad \text{y} \quad C(8, 2, -1)$$

Obtenga:

- El ángulo interior del triángulo ABC , con vértice en A .
- La componente escalar de \overline{AC} sobre \overline{AB} .
- El vector unitario en la dirección de \overline{AB} .
- La componente vectorial de \overline{AC} sobre \overline{AB} .

Solución:

- a) Se nos pide calcular el ángulo interior del triángulo ABC en el vértice A . Véase la siguiente figura:



Calculando los segmentos \overline{AB} y \overline{AC} , tenemos:

$$\overline{AB} = (5 - 7, 4 - 3, -3 + 1) = (-2, 1, -2)$$

$$\overline{AC} = (8 - 7, 2 - 3, -1 + 1) = (1, -1, 0)$$

sabemos que el ángulo solicitado viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} \dots\dots\dots (1)$$

realizando los cálculos necesarios:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-2, 1, -2) \cdot (1, -1, 0) = -2 - 1 = -3$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

sustituyendo en (1), se tiene:

$$\cos \theta = \frac{-3}{(3)(\sqrt{2})} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde:

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \theta = 135^\circ$$

b) La componente escalar de \overline{AC} sobre \overline{AB} , viene dada por:

$$\text{Comp. Esc.}_{\overline{AB}} \overline{AC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AB}|} \dots\dots\dots (2)$$

del inciso anterior, se tiene que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -3$$

$$|\overline{AB}| = 3$$

sustituyendo en (2):

$$\text{Comp. Esc.}_{\overline{AB}} \overline{AC} = \frac{-3}{3} = -1$$

c) El vector unitario solicitado viene dado por:

$$(\overline{AB})_u = \frac{1}{|\overline{AB}|} (\overline{AB})$$

sustituyendo tenemos:

$$(\overline{AB})_u = \frac{1}{3} (-2, 1, -2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

d) La componente vectorial de \overline{AC} sobre \overline{AB} viene dada por la expresión:

$$\text{Comp. Vec.}_{\overline{AB}} \overline{AC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AB}|} \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$$

que resulta igual a:

$$\text{Comp. Vec.}_{\overline{AB}} \overline{AC} = (\text{Comp. Esc.}_{\overline{AB}} \overline{AC}) (\overline{AB})_u \dots\dots\dots (3)$$

como los dos factores de la expresión (3) fueron calculados en los incisos b) y c), sustituyendo tenemos:

$$\text{Comp. Vec.}_{\overline{AB}} \overline{AC} = (-1) \left[\frac{1}{3} (-2, 1, -2) \right]$$

$$\therefore \text{Comp. Vec.}_{\overline{AB}} \overline{AC} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Ejercicio 46. Sean los vectores:

$$\overline{a} = 3i - k, \quad \overline{b} = 2i - 3j + 4k \quad \text{y} \quad \overline{c} = -2i - 2j - 2k$$

Obtenga la suma de los vectores \overline{u} y \overline{v} , tales que $\overline{u} = \overline{a} \times \overline{b}$ y \overline{v} es la componente vectorial del vector \overline{b} sobre el vector \overline{c} .

Solución:

Obteniendo los vectores \overline{u} y \overline{v} , tenemos:

$$\overline{u} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -3i - 14j - 9k$$

$$\overline{v} = \text{Comp. Vec.}_{\overline{c}} \overline{b} = \frac{\overline{b} \cdot \overline{c}}{|\overline{c}|} \frac{\overline{c}}{|\overline{c}|}$$

como

$$|\overline{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

tenemos que:

$$\bar{v} = \frac{(2, -3, 4) \cdot (-2, -2, -2)}{\sqrt{12}} \frac{(-2, -2, -2)}{\sqrt{12}}$$

$$\bar{v} = \frac{-4 + 6 - 8}{\sqrt{12}} \frac{(-2, -2, -2)}{\sqrt{12}}$$

$$\bar{v} = \frac{-6}{12} (-2, -2, -2)$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{2} (-2, -2, -2)$$

$$\therefore \bar{v} = (1, 1, 1)$$

entonces el vector suma solicitado es:

$$\bar{u} + \bar{v} = (-3, -14, -9) + (1, 1, 1)$$

$$\therefore \bar{u} + \bar{v} = (-2, -13, -8)$$

Ejercicio 47. Sean los vectores $\bar{a} = (1, -1, 0)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, 4)$ con b_1 y $b_2 \in \mathbb{N}$. Si $\text{Comp. Vec.}_{\bar{b}} \bar{a} = (0, 0, 0)$ y $|\bar{b}|^2 = 24$, obtenga al vector \bar{b} .

Solución:

Si la componente vectorial de \bar{a} sobre \bar{b} es igual al vector cero, esto implica que los vectores \bar{a} y \bar{b} son perpendiculares, por lo que se debe cumplir que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

esto es:

$$(1, -1, 0) \cdot (b_1, b_2, 4) = 0$$

$$b_1 - b_2 = 0$$

$$\therefore b_1 = b_2 \dots\dots\dots (1)$$

por otro lado, se tiene que:

$$|\bar{b}|^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad |\bar{b}| = \sqrt{24}$$

al calcular el módulo del vector \bar{b} , tenemos que:

$$|\bar{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + (4)^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 16}$$

entonces:

$$|\bar{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 16} = \sqrt{24}$$

elevando al cuadrado en ambos lados:

$$b_1^2 + b_2^2 + 16 = 24$$

$$b_1^2 + b_2^2 = 8 \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo (1) en (2), tenemos:

$$b_1^2 + b_1^2 = 8$$

$$2b_1^2 = 8$$

$$b_1^2 = 4$$

$$\therefore b_1 = \pm 2$$

pero en el enunciado se nos dice que b_1 y $b_2 \in \mathbb{N}$, entonces:

$$b_1 = 2$$

y como $b_1 = b_2$, entonces:

$$b_2 = 2$$

por lo tanto, el vector \bar{b} es:

$$\bar{b} = (2, 2, 4)$$

Ejercicio 48. El vector cuyo segmento dirigido es $\overline{P_1 P_2}$, tiene como cosenos directores a:

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

Si la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es 3 y las coordenadas de P_1 son $P_1(3, -3, 1)$:

- Determine las coordenadas del punto P_2 .
- Calcule el área del triángulo cuyos vértices son el origen y los puntos P_1 y P_2 .

Solución:

- De los cosenos directores del segmento dirigido $\overline{P_1 P_2}$, se tiene que:

$$\overline{P_1 P_2} = (-2, 2, -1)$$

por otro lado, en términos de vectores de posición, se tiene que:

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{P_2} - \overline{P_1} \dots\dots\dots (1)$$

como $\overline{P_1} = (3, -3, 1)$, sustituyendo en (1), tenemos:

$$(-2, 2, -1) = \overline{P_2} - (3, -3, 1)$$

de donde:

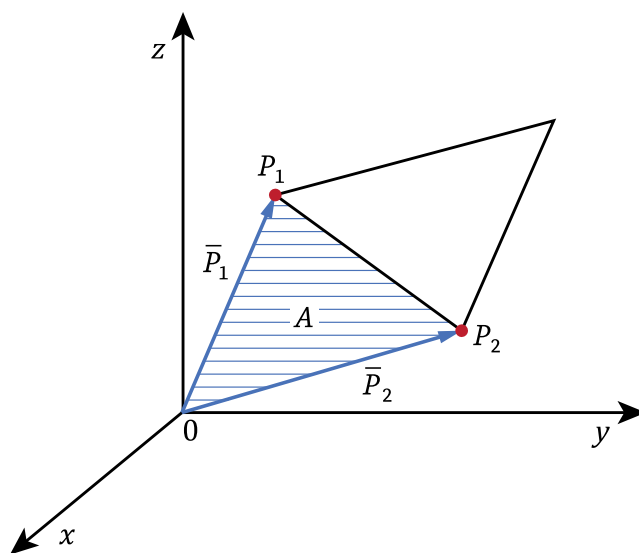
$$\overline{P_2} = (-2, 2, -1) + (3, -3, 1)$$

$$\therefore \overline{P_2} = (1, -1, 0)$$

por lo que, las coordenadas del punto P_2 son:

$$P_2(1, -1, 0)$$

b) Esquemáticamente, el área del triángulo que se nos pide calcular es:



Es claro que:

$$A = \frac{|\overline{P_1} \times \overline{P_2}|}{2}$$

de donde:

$$\overline{P}_1 \times \overline{P}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i + j$$

entonces:

$$|\overline{P}_1 \times \overline{P}_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

por lo tanto, el área del triángulo es:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} u^2$$

Ejercicio 49. Obtenga el resultado de la operación $\overline{a} \cdot \overline{b}$, donde $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3$; si se sabe que $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$ y $|\overline{a} \times \overline{b}| = 3$.

Solución:

Se tienen dos expresiones que relacionan los datos proporcionados en el ejercicio:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| |\overline{b}| \text{ sen } \theta \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| |\overline{b}|} \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo los datos en la expresión (1), tenemos:

$$3 = (3)(2) \text{ sen } \theta$$

$$3 = 6 \text{ sen } \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

de la expresión (2), se tiene que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \theta \dots\dots\dots (3)$$

sustituyendo $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$ y θ en (3), tenemos:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (3)(2) \cos 30^\circ$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\therefore \bar{a} \cdot \bar{b} = 3\sqrt{3}$$

Ejercicio 50. Sean los vectores:

$$\bar{a} = 2i + 3j - k$$

$$\bar{c} = 2i - 2k$$

$$\bar{b} = i + j + 4k$$

$$\bar{d} = i + 4j - 3k$$

Obtenga un vector unitario \bar{w} que sea perpendicular simultáneamente a los vectores \bar{u} y \bar{v} , si:

$$\bar{u} = 2(\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} \quad \text{y} \quad \bar{v} = \bar{c} - \bar{d}$$

Solución:

Calculando los vectores \bar{u} y \bar{v} , tenemos:

$$\bar{u} = 2(\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$$

sustituyendo:

$$\bar{u} = 2 \left[(2, 3, -1) \cdot (1, 1, 4) \right] (2, 0, -2)$$

$$\bar{u} = 2(2 + 3 - 4)(2, 0, -2)$$

$$\bar{u} = 2(1)(2, 0, -2)$$

$$\therefore \bar{u} = (4, 0, -4)$$

por otro lado:

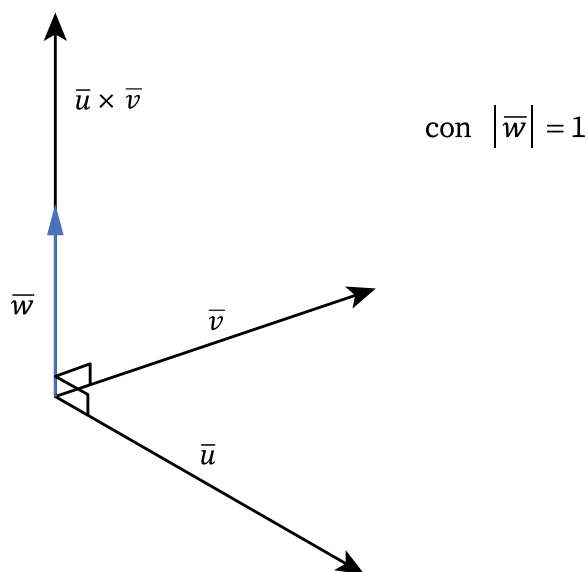
$$\bar{v} = \bar{c} - \bar{d}$$

sustituyendo:

$$\bar{v} = (2, 0, -2) - (1, 4, -3)$$

$$\therefore \bar{v} = (1, -4, 1)$$

como el vector \bar{w} que nos piden obtener debe ser perpendicular simultáneamente a los vectores \bar{u} y \bar{v} , entonces \bar{w} debe tener la misma dirección del vector $\bar{u} \times \bar{v}$, pero con módulo igual a 1, pues nos piden que sea unitario. Véase la siguiente figura:



con lo cual:

$$\bar{w} = \frac{\bar{u} \times \bar{v}}{|\bar{u} \times \bar{v}|} \dots\dots\dots (1)$$

realizando operaciones, tenemos:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -16i - 8j - 16k \dots\dots\dots (2)$$

con lo cual:

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2 + (-16)^2} = \sqrt{256 + 64 + 256} = \sqrt{576}$$

$$\therefore |\bar{u} \times \bar{v}| = 24 \dots\dots\dots (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\bar{w} = \frac{(-16, -8, -16)}{24}$$

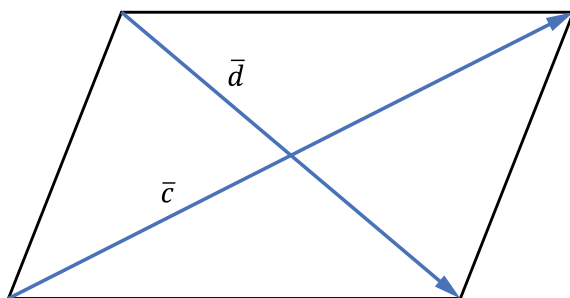
$$\therefore \bar{w} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Ejercicio 51. Determine el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores:

$$\bar{c} = 3i + j - 2k \quad \text{y} \quad \bar{d} = i - 3j + 4k$$

Solución:

Ilustremos gráficamente el problema:

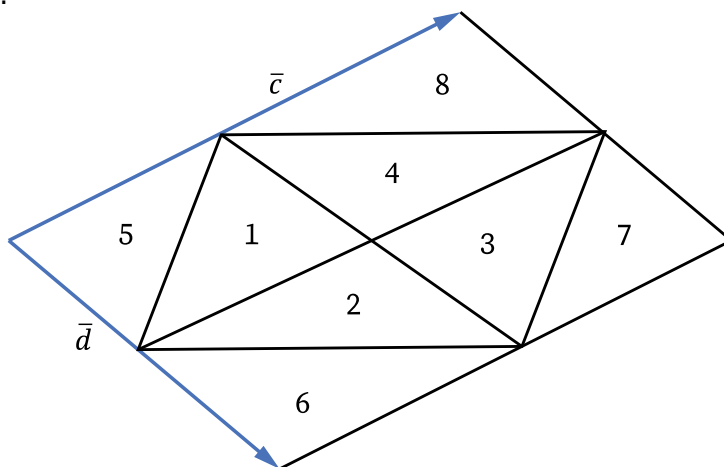


Se pide calcular el área del paralelogramo mostrado.

Para efectos de claridad en la explicación de la solución del ejercicio, se hará el siguiente manejo en la gráfica del paralelogramo:

- 1) Se desplazará el vector \vec{c} paralelamente a él, hasta colocarlo en el vértice donde inicia el trazo del vector \vec{d} .
- 2) Se desplazará el vector \vec{d} paralelamente a él, hasta colocarlo en el vértice donde inicia el trazo del vector \vec{c} .

Después de estos dos desplazamientos, la figura del paralelogramo queda de la siguiente forma:



El área del paralelogramo que nos piden calcular está compuesta por la suma de las áreas de los triángulos 1, 2, 3 y 4.

Por otro lado, el área del paralelogramo más grande está formada por la suma de las áreas de los 8 triángulos que se muestran.

Sin embargo, en la figura resulta evidente que los triángulos con número impar y los de número par son iguales entre sí, por lo que el área del paralelogramo que nos piden calcular resulta igual a la mitad del área del paralelogramo mayor, esto es:

$$A = \frac{|\bar{c} \times \bar{d}|}{2}$$

haciendo cálculos, tenemos:

$$\bar{c} \times \bar{d} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2i - 14j - 10k$$

de donde:

$$|\bar{c} \times \bar{d}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2} = \sqrt{4 + 196 + 100}$$

$$|\bar{c} \times \bar{d}| = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

con lo cual:

$$A = \frac{10\sqrt{3}}{2} \quad \therefore A = 5\sqrt{3} \text{ u}^2$$

Ejercicio 52. Sea el vector $\bar{u} = (8, -15, 3)$ y sea el vector \bar{v} , que es simultáneamente perpendicular al eje z y al vector \bar{u} , donde $|\bar{v}| = 51$.

Determine las componentes del vector \bar{v} (hay dos soluciones).

Solución:

El vector \bar{v} que buscamos resulta ser paralelo al vector $\bar{u} \times k$, donde k es el vector unitario que define la dirección del eje z .

Efectuando el producto $\bar{u} \times k$, tenemos:

$$\bar{u} \times \bar{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -15i - 8j$$

de donde:

$$|\bar{u} \times k| = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

el vector unitario en dirección del vector $\bar{u} \times k$ es:

$$(\bar{u} \times k)_u = \frac{1}{17} (-15, -8, 0)$$

como $|\bar{v}| = 51$, entonces el vector \bar{v} solicitado es:

$$\bar{v} = |\bar{v}| (\bar{u} \times k)_u = 51 \left(\frac{1}{17} \right) (-15, -8, 0) = 3(-15, -8, 0)$$

$$\therefore \bar{v} = (-45, -24, 0)$$

En el enunciado se nos dice que hay dos soluciones. Efectivamente, el otro vector \bar{v} será el paralelo al vector $k \times \bar{u}$. De las propiedades algebraicas del producto cruz, se tiene que:

$$k \times \bar{u} = - (\bar{u} \times k)$$

de donde:

$$k \times \bar{u} = - (-15, -8, 0)$$

$$\therefore k \times \bar{u} = (15, 8, 0)$$

como:

$$|k \times \bar{u}| = |\bar{u} \times k| = 17$$

entonces el vector unitario en dirección del vector $k \times \bar{u}$ es:

$$(k \times \bar{u})_u = \frac{1}{17} (15, 8, 0)$$

finalmente, como el $|\bar{v}| = 51$, entonces:

$$\bar{v}_2 = 51 \left(\frac{1}{17} \right) (15, 8, 0) = 3 (15, 8, 0)$$

$$\therefore \bar{v}_2 = (45, 24, 0)$$

Ejercicio 53. Sean los vectores:

$$\bar{a} = (2, -3, 2) \quad \text{y} \quad \bar{b} = (6, 3, 6)$$

Obtenga el o los valores de:

a) $x \in \mathbb{R}$, para que el vector $\bar{u} = (x^2, x, -1)$ sea perpendicular al vector \bar{a}

b) $y \in \mathbb{R}$, para que el vector $\bar{w} = (2y, y, -6)$ sea paralelo al vector \bar{b}

Solución:

a) El vector \bar{u} será perpendicular al vector \bar{a} , si se cumple que:

$$\bar{u} \cdot \bar{a} = 0$$

sustituyendo:

$$(x^2, x, -1) \cdot (2, -3, 2) = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

al factorizar, tenemos:

$$(2x + 1)(x - 2) = 0$$

de donde, se tiene que:

$$\text{si } 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{si } x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

con lo cual, se tienen dos vectores \bar{u} :

$$\text{con } x_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1 \right)$$

$$\text{con } x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_2 = (4, 2, -1)$$

comprobando que se cumple la condición de perpendicularidad, tenemos:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{a} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1 \right) \cdot (2, -3, 2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 0$$

$$\bar{u}_2 \cdot \bar{a} = (4, 2, -1) \cdot (2, -3, 2) = 8 - 6 - 2 = 0$$

b) Los vectores \bar{b} y \bar{w} serán paralelos, si se cumple que:

$$\bar{b} \times \bar{w} = \bar{0}$$

realizando el producto cruz, tenemos:

$$\bar{b} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & 6 \\ 2y & y & -6 \end{vmatrix} = (-18 - 6y)i - (-36 - 12y)j + (6y - 6y)k$$

de donde se tiene que:

$$(-18 - 6y, 36 + 12y, 0) = (0, 0, 0)$$

por igualdad de vectores, tenemos:

$$\begin{cases} -18 - 6y = 0 & \Rightarrow & 6y = -18 & \therefore y = -3 \\ 36 + 12y = 0 & \Rightarrow & 12y = -36 & \therefore y = -3 \end{cases}$$

como $\bar{w} = (2y, y, -6)$, entonces el vector \bar{w} es:

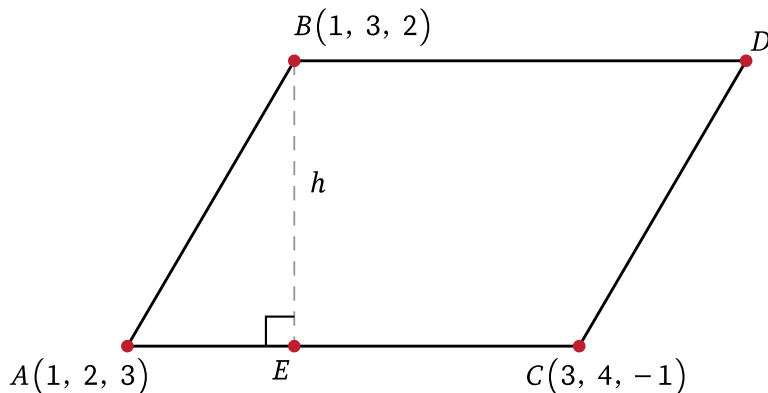
$$\bar{w} = (-6, -3, -6)$$

Del resultado obtenido, se aprecia que:

$$\bar{w} = -\bar{b}$$

entonces, \bar{b} y \bar{w} son vectores paralelos, pero con sentidos opuestos.

Ejercicio 54. Sea el paralelogramo que se muestra en la figura:



Determine:

- La altura h .
- La distancia entre los puntos A y E .
- El área del paralelogramo.
- Las coordenadas del vértice D .

Solución:

- Para poder calcular la altura h del paralelogramo, debemos calcular primero el ángulo θ que definen los segmentos dirigidos \overline{AB} y \overline{AC} . Haciendo los cálculos, tenemos:

$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a} = (1, 3, 2) - (1, 2, 3) = (0, 1, -1)$$

$$\overline{AC} = \overline{c} - \overline{a} = (3, 4, -1) - (1, 2, 3) = (2, 2, -4)$$

calculando los módulos:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

con lo cual, se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{(0, 1, -1) \cdot (2, 2, -4)}{\sqrt{2} (2\sqrt{6})}$$

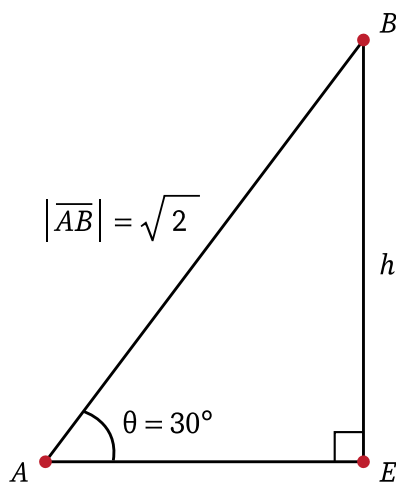
$$\cos \theta = \frac{2 + 4}{2\sqrt{12}} = \frac{6}{2\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

entonces:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

Para calcular la altura h , nos apoyaremos en la siguiente figura:



del triángulo, tenemos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \theta = \frac{h}{|\overline{AB}|}$$

de donde:

$$h = | \overline{AB} | \operatorname{sen} \theta$$

sustituyendo:

$$h = \sqrt{2} \operatorname{sen} 30^\circ = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \right) \quad \therefore \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

- b)** Para calcular la distancia entre los puntos A y E , nos apoyaremos en el mismo triángulo del inciso anterior. Se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{\text{Cat ady}}{\text{Hip}} = \frac{| \overline{AE} |}{| \overline{AB} |}$$

de donde:

$$| \overline{AE} | = | \overline{AB} | \cos \theta$$

sustituyendo:

$$| \overline{AE} | = \sqrt{2} \cos 30^\circ = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

por lo tanto, la distancia entre los puntos A y E es:

$$d(A, E) = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

La distancia del punto A al punto E también puede calcularse vectorialmente de la siguiente forma:

$$d(A, E) = \operatorname{Comp. Esc.}_{\overline{AC}} \overline{AB}$$

Hagamos los cálculos:

$$\text{Comp. Esc.}_{\overline{AC}} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AC}|}$$

sustituyendo:

$$\text{Comp. Esc.}_{\overline{AC}} \overline{AB} = \frac{(0, 1, -1) \cdot (2, 2, -4)}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{Comp. Esc.}_{\overline{AC}} \overline{AB} = \frac{6}{2\sqrt{6}}$$

racionalizando la fracción, tenemos:

$$\text{Comp. Esc.}_{\overline{AC}} \overline{AB} = \frac{6}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Comp. Esc.}_{\overline{AC}} \overline{AB} = \frac{6\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore d(A, E) = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

- c) El cálculo del área del paralelogramo lo haremos por dos métodos distintos.

Método 1:

Sabemos que el área de un paralelogramo es igual al módulo del producto cruz de dos de los vectores alojados en lados concurrentes de dicho paralelogramo; en nuestro caso serían los vectores \overline{AB} y \overline{AC} . Efectuando el producto cruz, tenemos:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -2i - 2j - 2k$$

con lo cual:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore A = 2\sqrt{3} u^2$$

Método 2:

Se tiene que:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = |\overline{AB}| |\overline{AC}| \operatorname{sen} \theta$$

sustituyendo:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{2} (2\sqrt{6}) \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = 2\sqrt{12} \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore A = 2\sqrt{3} u^2$$

- d)** Al igual que en el inciso anterior, daremos respuesta a este inciso por dos métodos distintos.

Método 1:

De la figura del paralelogramo, se tiene que:

$$\overline{AC} = \overline{BD} = (2, 2, -4)$$

si suponemos que el punto D tiene por coordenadas:

$$D(x, y, z)$$

y como $B(1, 3, 2)$, entonces se tiene que:

$$\overline{BD} = \overline{d} - \overline{b}$$

sustituyendo:

$$(2, 2, -4) = (x, y, z) - (1, 3, 2)$$

$$(2, 2, -4) = (x - 1, y - 3, z - 2)$$

por igualdad de vectores, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \\ y - 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 5 \\ z - 2 = -4 \quad \Rightarrow \quad z = -2 \end{array} \right.$$

por lo tanto:

$$D(3, 5, -2)$$

Método 2:

En la figura, se puede apreciar que el vector de posición del punto D , viene dado por:

$$\overline{d} = \overline{a} + \overline{AB} + \overline{BD}$$

como $\overline{BD} = \overline{AC}$, entonces:

$$\overline{d} = \overline{a} + \overline{AB} + \overline{AC}$$

sustituyendo:

$$\overline{d} = (1, 2, 3) + (0, 1, -1) + (2, 2, -4)$$

$$\overline{d} = (3, 5, -2)$$

por lo tanto:

$$D(3, 5, -2)$$

Ejercicio 55. Sean los vectores $\overline{u} = (1, a, 1)$ y $\overline{w} = (-1, 0, b)$. Si \overline{u} y \overline{w} son perpendiculares, obtenga el o los valores de a y b para que los vectores \overline{u} y \overline{w} sean dos de los lados de un paralelogramo de área igual a 6.

Solución:

Como los vectores \overline{u} y \overline{w} son perpendiculares, entonces su producto punto debe ser igual a cero, esto es:

$$(1, a, 1) \cdot (-1, 0, b) = 0$$

$$-1 + b = 0$$

$$\therefore b = 1$$

Con el valor de $b = 1$, obtengamos el producto vectorial $\overline{u} \times \overline{w}$:

$$\overline{u} \times \overline{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ai - 2j + ak$$

calculando el módulo:

$$|\bar{u} \times \bar{w}| = \sqrt{a^2 + (-2)^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + 4}$$

como el área del paralelogramo debe ser igual a 6, entonces:

$$\sqrt{2a^2 + 4} = 6$$

elevando al cuadrado:

$$2a^2 + 4 = 36$$

$$2a^2 = 32$$

$$a^2 = 16$$

$$a = \pm \sqrt{16}$$

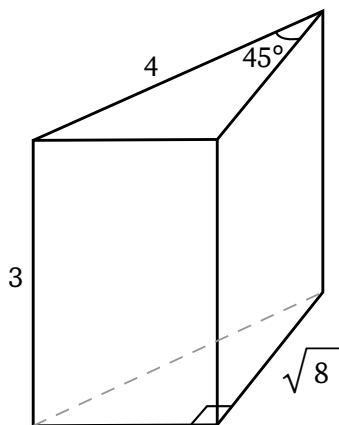
$$\therefore a = \pm 4$$

con lo cual, los valores de a y b son:

$$a_1 = 4 \quad \text{y} \quad a_2 = -4$$

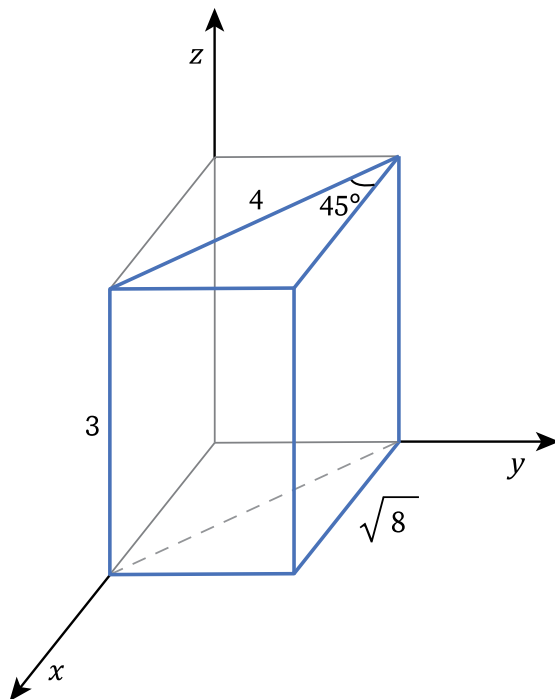
$$b = 1$$

Ejercicio 56. Obtenga, empleando álgebra vectorial, el volumen del prisma triangular recto mostrado en la siguiente figura:

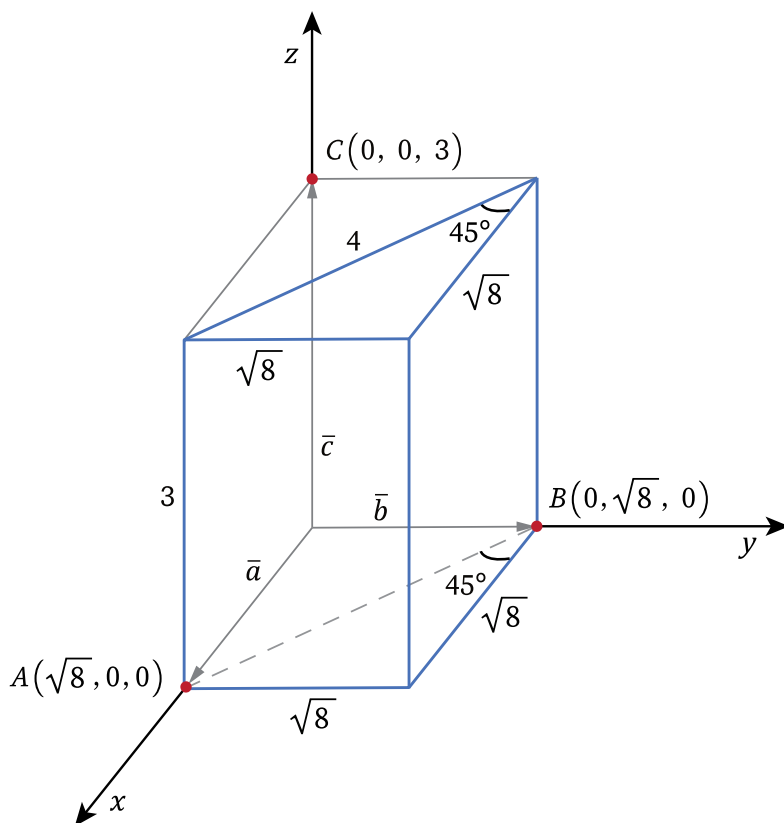


Solución:

Ubiquemos el prisma en un sistema de referencia de tres dimensiones de la siguiente manera:



Como se trata de un prisma triangular recto, el triángulo de la parte de arriba es igual al triángulo de la base. Como el ángulo que nos dan de dato es de 45° , entonces los dos catetos del triángulo de la tapa tienen de longitud $\sqrt{8}$. Con esta información podemos trazar un prisma recto de base cuadrada cuyo volumen es el doble del prisma triangular. Véase la figura:



El volumen del prisma triangular recto resulta ser igual A :

$$V = \frac{1}{2} [\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (24)$$

$$\therefore V = 12 u^3$$

Ejercicio 57. Tres aristas concurrentes de un paralelepípedo de volumen igual a $5 u^3$ son los vectores $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 2, 1)$ y \vec{c} . Del vector \vec{c} se sabe que se encuentra contenido en el plano xz y que uno de sus ángulos directores es $\alpha = 45^\circ$. Determine las componentes del vector \vec{c} .

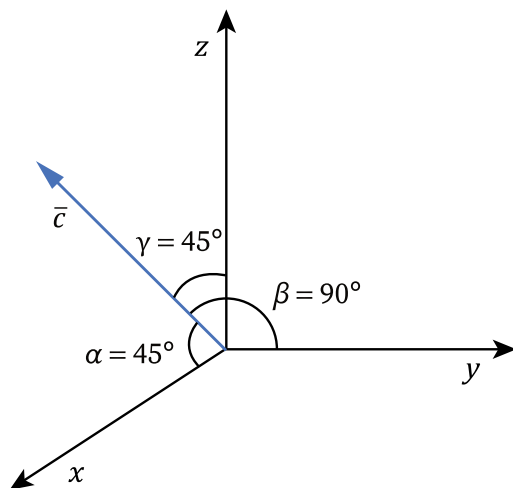
Solución:

Dado que el vector \vec{c} está contenido en el plano xz y $\alpha = 45^\circ$, entonces sus ángulos directores son:

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 90^\circ \quad \text{Véase la figura}$$

$$\gamma = 45^\circ$$



Si suponemos que $\vec{c} = (C_1, C_2, C_3)$ y que $|\vec{c}| = k$, entonces sus cosenos directores son:

$$\cos \alpha = \frac{C_1}{|\vec{c}|} \quad \Rightarrow \quad C_1 = |\vec{c}| \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{C_2}{|\vec{c}|} \Rightarrow C_2 = |\vec{c}| \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{C_3}{|\vec{c}|} \Rightarrow C_3 = |\vec{c}| \cos \gamma$$

sustituyendo, tenemos que:

$$C_1 = k \cos 45^\circ = k \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

$$C_2 = k \cos 90^\circ = k (0) = 0$$

$$C_3 = k \cos 45^\circ = k \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

con lo cual, el vector \vec{c} tendría por componentes:

$$\vec{c} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} k, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} k \right) \dots\dots\dots (1)$$

El valor de k lo obtendremos con el dato del volumen del paralelepípedo que es igual a $5 u^3$. Tenemos entonces que:

$$V = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} k & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} k \end{vmatrix} = \sqrt{2} k + \frac{\sqrt{2}}{2} k - \sqrt{2} k = 5$$

de donde:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} k = 5 \quad \therefore k = \frac{10}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$\bar{c} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{10}{\sqrt{2}} \right), 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{10}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$\therefore \bar{c} = (5, 0, 5)$$

Ejercicio 58. El volumen de un paralelepípedo cuyas aristas son los vectores \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} es de $30 u^3$. Los vectores \bar{b} y \bar{c} son dos lados concurrentes de su base y se sabe que:

$$|\bar{a}| = 20$$

$$\bar{b} = i + k$$

$$\bar{c} = 2i + 2j + k$$

Determine:

- La altura del paralelepípedo.
- El ángulo que forma el vector \bar{a} con un vector perpendicular a su base.

Solución:

- Con los vectores \bar{b} y \bar{c} calculemos el área de la base del paralelepípedo:

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2i + j + 2k$$

entonces:

$$|\bar{b} \times \bar{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

como se sabe, el volumen de un paralelepípedo es igual al área de su base por la altura, esto es:

$$V = A_B h$$

de donde:

$$h = \frac{V}{A_B}$$

como $V = 30$ y $A_B = 3$, sustituyendo:

$$h = \frac{30}{3} \quad \therefore \quad h = 10 u$$

- b)** Se nos pide calcular el ángulo que forma el vector \vec{a} con un vector perpendicular a la base del paralelepípedo. Dicho vector perpendicular es $\vec{b} \times \vec{c}$, con lo cual, el ángulo pedido lo calcularemos con la expresión:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}|} \dots\dots\dots (1)$$

El numerador en la expresión (1) es el volumen del paralelepípedo, el $|\vec{a}|$ es dato y el $|\vec{b} \times \vec{c}|$ ya lo calculamos. Sustituyendo, tenemos:

$$\cos \theta = \frac{30}{20 (3)} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \quad \therefore \quad \theta = 60^\circ$$

Ejercicio 59. Obtenga el vector \vec{h} correspondiente a la altura de la pirámide triangular cuya base está definida por los puntos $A (1, -1, 1)$, $B (2, -1, 1)$ y $C (3, 1, 2)$, y cuyo volumen es $5 u^3$.

Solución:

Calculemos el área de la base de la pirámide triangular.

$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a} = (2, -1, 1) - (1, -1, 1) = (1, 0, 0)$$

$$\overline{AC} = \overline{c} - \overline{a} = (3, 1, 2) - (1, -1, 1) = (2, 2, 1)$$

de donde:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -j + 2k = (0, -1, 2)$$

con lo cual:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

como la base es triangular, entonces:

$$A_B = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2} \quad \therefore \quad A_B = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

sabemos que el volumen de la pirámide triangular es igual a:

$$V = \frac{1}{3} A_B h \quad \text{donde:} \quad \begin{array}{l} A_B : \text{área de la base} \\ h : \text{altura de la pirámide} \end{array}$$

de donde:

$$h = \frac{3V}{A_B}$$

sustituyendo valores:

$$h = \frac{3(5)}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{15}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\therefore h = \frac{30}{\sqrt{5}}$$

El vector \bar{h} que nos piden obtener debe ser perpendicular a la base y de magnitud igual a la altura h calculada. El vector \bar{h} es paralelo al vector $\overline{AB} \times \overline{AC}$, por lo que \bar{h} viene dado por la expresión:

$$\bar{h} = |\bar{h}| (\overline{AB} \times \overline{AC})_u$$

donde $(\overline{AB} \times \overline{AC})_u$ es el vector unitario de $(\overline{AB} \times \overline{AC})$.

como:

$$h = \frac{30}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad (\overline{AB} \times \overline{AC})_u = \frac{1}{\sqrt{5}} (0, -1, 2)$$

sustituyendo, tenemos:

$$\bar{h} = \left(\frac{30}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) (0, -1, 2) = 6(0, -1, 2)$$

$$\therefore \bar{h} = (0, -6, 12)$$

Ejercicio 60. Sea la curva:

$$C : \begin{cases} x = 1 - 2 \cos^2 t \\ y = \operatorname{sen} 2t \\ z = -2 \end{cases}$$

- a) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de la curva C .
- b) Identifique de qué curva se trata.

Solución:

a) Numeremos las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$C : \begin{cases} x = 1 - 2 \cos^2 t & \dots\dots\dots (1) \\ y = \operatorname{sen} 2t & \dots\dots\dots (2) \\ z = -2 & \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

Se tiene la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t$$

sustituyendo en (2):

$$y = 2 \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t$$

elevando al cuadrado:

$$y^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t \operatorname{cos}^2 t \dots\dots\dots (4)$$

despejando $\cos^2 t$ de (1), tenemos:

$$x = 1 - 2 \cos^2 t$$

$$2 \cos^2 t = 1 - x$$

$$\cos^2 t = \frac{1 - x}{2} \dots\dots\dots (5)$$

Por otro lado, de la identidad:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

se tiene que:

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t \dots\dots\dots (6)$$

sustituyendo (5) en (6):

$$\sin^2 t = 1 - \left(\frac{1 - x}{2} \right)$$

simplificando:

$$\sin^2 t = 1 + \frac{x - 1}{2}$$

$$\sin^2 t = \frac{2 + (x - 1)}{2}$$

$$\sin^2 t = \frac{x + 1}{2} \dots\dots\dots (7)$$

con la finalidad de eliminar el parámetro y con ello llegar a la ecuación cartesiana de la curva, sustituiremos (5) y (7) en (4):

$$y^2 = 4 \left(\frac{x+1}{2} \right) \left(\frac{1-x}{2} \right)$$

simplificando:

$$y^2 = 4 \left(\frac{(x+1)(1-x)}{4} \right)$$

$$y^2 = (x+1)(1-x)$$

$$y^2 = x - x^2 + 1 - x$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

de donde:

$$x^2 + y^2 = 1$$

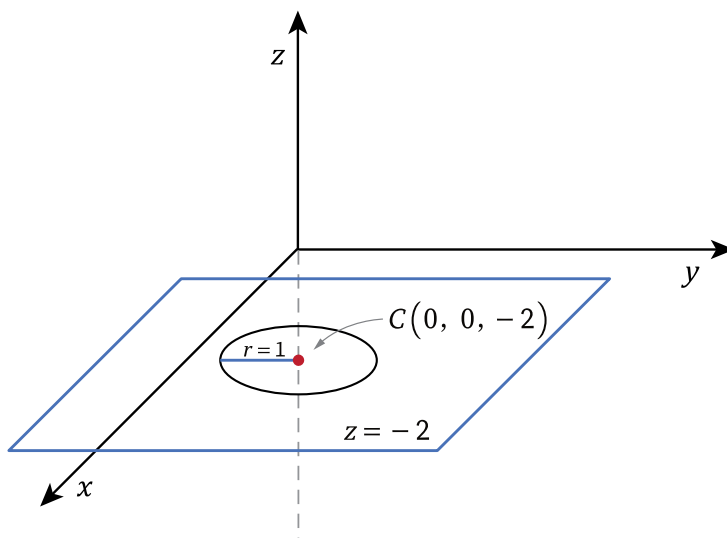
como en las ecuaciones paramétricas de la curva, la ecuación (3) es:

$$z = -2$$

entonces, unas ecuaciones cartesianas de la curva C , son:

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

- b)** Se trata de una circunferencia de radio 1, con centro en el punto $C(0, 0, -2)$ ubicada en el plano $z = -2$, el cual es paralelo al plano xy . Véase la figura:



Ejercicio 61. Sea la ecuación vectorial de la curva C :

$$\vec{p} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} a \operatorname{sen} t \right) i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} a \operatorname{sen} t \right) j + 3 k$$

- a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de la curva C .
- b) Identifique de qué curva se trata.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la curva C son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} a \operatorname{sen} t \dots\dots\dots (1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} a \operatorname{sen} t \dots\dots\dots (2) \\ z = 3 \dots\dots\dots (3) \end{array} \right.$$

Utilizaremos las ecuaciones (1) y (2) para establecer una relación entre las variables x y y , eliminar el parámetro t y obtener de este modo las ecuaciones cartesianas solicitadas.

Sumando las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$x + y = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \cos t \right)$$

$$x + y = \sqrt{2} a \cos t \quad \dots\dots\dots (4)$$

restando ahora (1) menos (2), se tiene:

$$x - y = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin t \right)$$

$$x - y = \sqrt{2} a \sin t \quad \dots\dots\dots (5)$$

elevando al cuadrado las expresiones (4) y (5):

$$\begin{cases} (x + y)^2 = (\sqrt{2} a \cos t)^2 \\ (x - y)^2 = (\sqrt{2} a \sin t)^2 \end{cases}$$

con lo cual:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 2 a^2 \cos^2 t \\ (x - y)^2 = 2 a^2 \sin^2 t \end{cases}$$

despejando las funciones $\text{sen}^2 t$ y $\text{cos}^2 t$, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{(x+y)^2}{2a^2} = \text{cos}^2 t \\ \frac{(x-y)^2}{2a^2} = \text{sen}^2 t \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2a^2} = \text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t$$

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2a^2} = 1$$

multiplicando por $2a^2$:

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2a^2$$

desarrollando los binomios al cuadrado:

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) = 2a^2$$

simplificando:

$$2x^2 + 2y^2 = 2a^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Finalmente, con las ecuaciones (3) y (6) se tiene que las ecuaciones cartesianas de la curva C son:

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 3 \end{cases}$$

- b) Se trata de una circunferencia de radio a , con centro en el punto $C(0, 0, 3)$ ubicada en el plano $z = 3$, el cual es paralelo al plano xy .

Ejercicio 62. Sean las ecuaciones cartesianas de la curva:

$$C : \begin{cases} 16z^2 - 25y^2 - 32z + 100y - 484 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

- a) Obtenga una ecuación vectorial que represente analíticamente a la curva C .
b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características.

Solución:

- a) Completando trinomios cuadrados perfectos en la ecuación:

$$16z^2 - 25y^2 - 32z + 100y - 484 = 0$$

tenemos:

$$16z^2 - 32z - 25y^2 + 100y = 484$$

$$16(z^2 - 2z) - 25(y^2 - 4y) = 484$$

$$16(z^2 - 2z + 1) - 25(y^2 - 4y + 4) = 484 + 16 - 100$$

de donde:

$$16(z - 1)^2 - 25(y - 2)^2 = 400$$

dividiendo entre 400, tenemos:

$$\frac{16(z - 1)^2}{400} - \frac{25(y - 2)^2}{400} = 1$$

$$\frac{(z - 1)^2}{25} - \frac{(y - 2)^2}{16} = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Observando la ecuación, nos damos cuenta de que se trata de una hipérbola. Como se señaló anteriormente, existen una infinidad de formas de parametrizar una ecuación cartesiana; sin embargo, por tratarse de una hipérbola, la forma más conveniente es haciendo:

$$\begin{cases} y = h + b \sec \theta \\ z = k + a \tan \theta \end{cases}$$

en este caso:

$$\begin{aligned} h = 2 & \quad y \quad b = 4 \\ k = 1 & \quad y \quad a = 5 \end{aligned}$$

sustituyendo, tenemos:

$$\begin{cases} y = 2 + 4 \sec \theta \\ z = 1 + 5 \tan \theta \end{cases}$$

con lo cual, si consideramos que en el enunciado se dice que $x = -1$, entonces unas ecuaciones paramétricas de la curva C son:

$$C: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + 4 \sec \theta \\ z = 1 + 5 \tan \theta \end{cases}$$

por lo tanto, una ecuación vectorial de la curva C es:

$$\bar{p} = -i + (2 + 4 \sec \theta)j + (1 + 5 \tan \theta)k$$

- b)** De la ecuación (1) y tomando en cuenta la ecuación cartesiana de la curva, se tiene que se trata de una hipérbola con centro en el punto $C(-1, 2, 1)$, con eje focal paralelo al eje z y que se encuentra contenida en el plano de ecuación $x = -1$ que es paralelo al plano yz .

Ejercicio 63. Sea la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C: \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{\sec t} \\ y = 3 - \cos^2 t \\ z = 0 \end{cases}$$

- a)** Obtenga unas ecuaciones cartesianas de C .
b) Determine las coordenadas de los puntos de intersección de C con los ejes x , y .
c) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.
d) Trace su gráfica.

Solución:

- a)** Como

$$\cos t = \frac{1}{\sec t}$$

entonces las ecuaciones paramétricas de C quedan como:

$$C: \begin{cases} x = 2 + \cos t & \dots\dots\dots (1) \\ y = 3 - \cos^2 t & \dots\dots\dots (2) \\ z = 0 & \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

De las ecuaciones (1) y (2), se tiene que:

$$x - 2 = \cos t \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t = (x - 2)^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$y - 3 = -\cos^2 t \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t = 3 - y \quad \dots\dots\dots (5)$$

igualando (4) y (5), tenemos:

$$3 - y = (x - 2)^2$$

multiplicando por -1 , se tiene:

$$y - 3 = -(x - 2)^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

considerando las ecuaciones (6) y (3), se tiene que unas ecuaciones cartesianas de la curva C son:

$$C : \begin{cases} y - 3 = -(x - 2)^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

En las ecuaciones cartesianas de C , solo una variable está elevada al cuadrado, por lo que podemos afirmar que se trata de una parábola.

- b)** Para obtener el o los puntos de intersección de la curva C con el eje y , sustituiremos $x = 0$ en (6):

$$y - 3 = -(-2)^2$$

$$y - 3 = -4$$

$$\therefore y = -1$$

por lo tanto, el punto de intersección de C con el eje y es:

$$P_1 (0, -1, 0)$$

para obtener el o los puntos de intersección de C con el eje x , sustituiremos $y = 0$ en (6):

$$-3 = -(x - 2)^2$$

$$(x - 2)^2 = 3$$

$$x - 2 = \pm \sqrt{3}$$

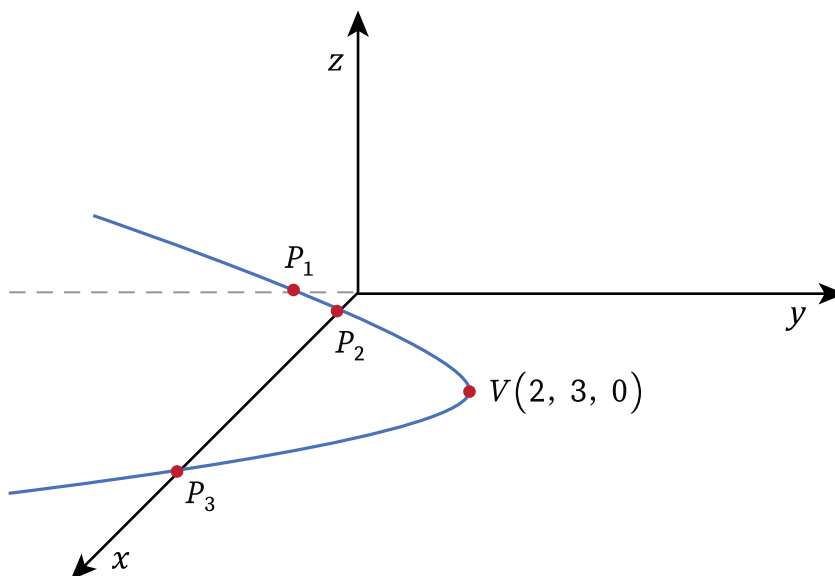
$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

con lo cual, los puntos de intersección con el eje x son:

$$P_2 (2 - \sqrt{3}, 0, 0) \quad y \quad P_3 (2 + \sqrt{3}, 0, 0)$$

c) Se trata de una parábola con eje focal paralelo al eje y , con vértice en el punto $V(2, 3, 0)$, contenida en el plano xy y que abre hacia el lado negativo del eje y .

d) La gráfica es:



Ejercicio 64. Determine la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $x + 2y = 3$ en el punto $P(-1, 2)$ y cuyo centro está sobre el eje y .

Solución:

Analicemos la ecuación de la recta tangente a la circunferencia:

$$x + 2y = 3$$

$$2y = -x + 3$$

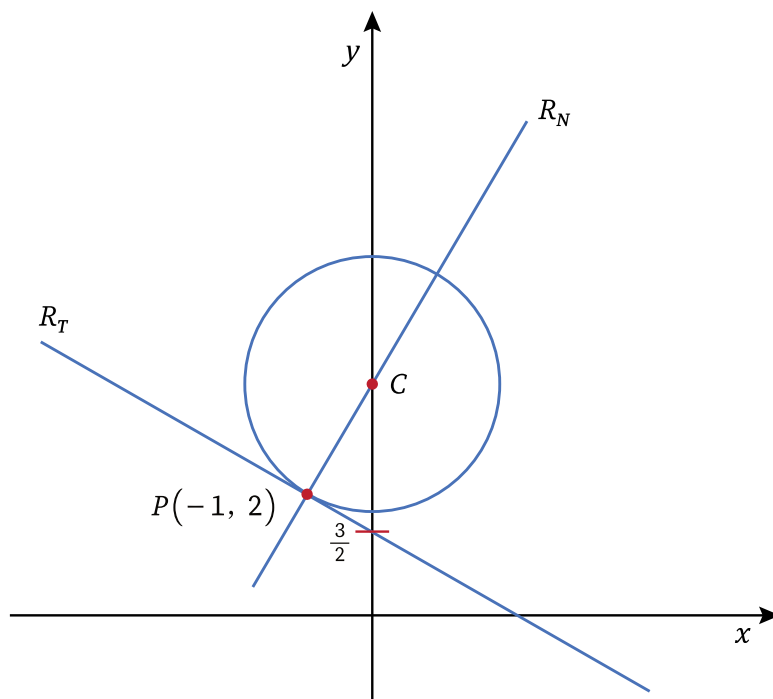
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

se trata de una recta con las siguientes características:

$$m_{R_T} = -\frac{1}{2} \quad \text{pendiente}$$

$$b = \frac{3}{2} \quad \text{ordenada al origen}$$

Ilustremos gráficamente el problema. Circunferencia con centro sobre el eje y y tangente a la recta dada.



La ecuación de la recta normal a la recta tangente, que pasa por el punto $P(-1, 2)$ y por el centro de la circunferencia, es de la forma:

$$y - 2 = m_{RN} (x + 1)$$

como:

$$m_{RN} = -\frac{1}{m_{RT}} \quad y \quad m_{RT} = -\frac{1}{2}$$

entonces:

$$m_{RN} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

por lo que, la ecuación de la recta normal es:

$$y - 2 = 2(x + 1)$$

simplificando:

$$y - 2 = 2x + 2$$

$$y - 2x = 4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Para obtener las coordenadas del centro de la circunferencia, sustituiremos $x = 0$ en (1):

$$y - 2(0) = 4$$

$$y = 4$$

$$\therefore C(0, 4)$$

Para determinar el radio de la circunferencia, debemos calcular la distancia entre el punto $P(-1, 2)$ y el centro $C(0, 4)$. Sabemos que:

$$d(P, C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

entonces:

$$d(P, C) = \sqrt{(0 + 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\therefore r = \sqrt{5}$$

finalmente, la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + (y - 4)^2 = 5$$

Ejercicio 65. Determine la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje x y que pasa por los puntos:

$$A(3, 3), \quad B(6, 5), \quad \text{y} \quad C(6, -3)$$

Trace su gráfica.

Solución:

Dado que la parábola tiene su eje focal paralelo al eje x , entonces su ecuación es de la forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

realizando las operaciones indicadas:

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

de donde:

$$y^2 - 2ky - 4px + (4ph + k^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

si hacemos que:

$$b = -2k$$

$$c = -4p$$

$$d = 4ph + k^2$$

entonces la ecuación (1) queda como:

$$y^2 + by + cx + d = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

sustituyendo las coordenadas de los puntos dados en la ecuación (2), tenemos:

con $A(3, 3)$:

$$(3)^2 + b(3) + c(3) + d = 0$$

$$9 + 3b + 3c + d = 0$$

$$3b + 3c + d = -9 \quad \dots\dots\dots (3)$$

con $B(6, 5)$:

$$(5)^2 + b(5) + c(6) + d = 0$$

$$25 + 5b + 6c + d = 0$$

$$5b + 6c + d = -25 \quad \dots\dots\dots (4)$$

con $C(6, -3)$:

$$(-3)^2 + b(-3) + c(6) + d = 0$$

$$9 - 3b + 6c + d = 0$$

$$-3b + 6c + d = -9 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Con las ecuaciones (3), (4) y (5) se forma el sistema:

$$\begin{cases} 3b + 3c + d = -9 \\ 5b + 6c + d = -25 \\ -3b + 6c + d = -9 \end{cases}$$

al resolver el sistema, se obtiene que:

$$b = -2$$

$$c = -4$$

$$d = 9$$

sustituyendo estos valores en (2), tenemos:

$$y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$$

$$y^2 - 2y = 4x - 9$$

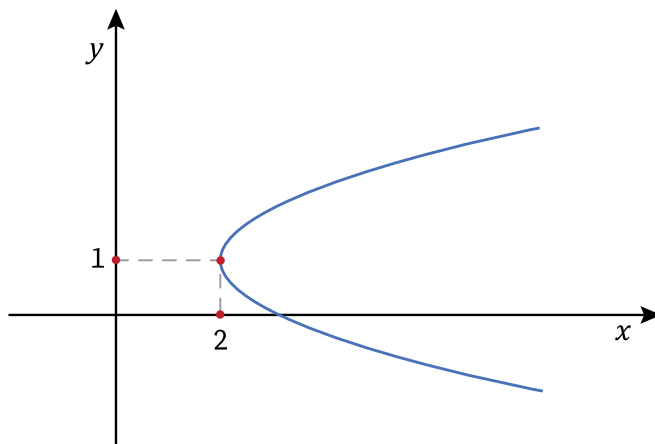
Completando el trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro de la ecuación, se tiene:

$$y^2 - 2y + 1 = 4x - 9 + 1$$

$$(y - 1)^2 = 4x - 8$$

$$(y - 1)^2 = 4(x - 2)$$

que es la ecuación de la parábola buscada. Dicha parábola tiene su vértice en el punto $V(2, 1)$, su eje focal paralelo al eje x y abre hacia la derecha. Su gráfica es:



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea el punto Q que está contenido en el eje "y" y cuya distancia al origen es igual a 5, y sea el punto P cuyo vector de posición tiene como cosenos directores:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = 0 \quad \text{y} \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si el módulo del vector de posición del punto P es igual a 10, calcule la distancia entre los puntos P y Q .

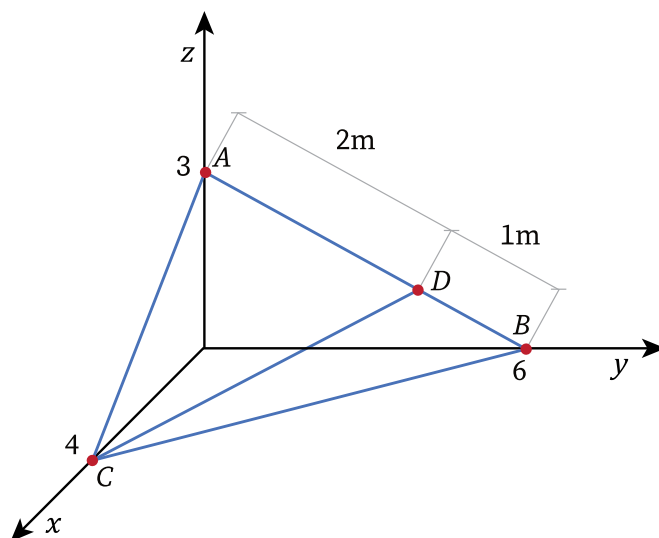
2. Dados los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, calcule el valor $|\vec{a} - \vec{b}|$ si se sabe que: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$ y que el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} es de 60° .
3. Sean los vectores \vec{u} y \vec{v} , tales que: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ y forman un ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$

a) Calcule el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Haciendo uso de las propiedades del producto escalar, calcule:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2$$

4. Para los puntos A , B , C y D de la siguiente figura:



Obtenga el vector $\vec{v} = 2 \overline{CD} + 3 \overline{BC}$

5. El vector cuyo segmento dirigido es $\overline{P_1 P_2}$, tiene como cosenos directores a:

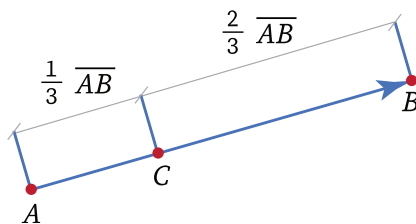
$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

Si la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es 3 y las coordenadas de P_1 son $P_1(3, -3, 1)$, determine las coordenadas del punto P_2 .

6. Sean el punto:

$$C\left(\frac{11}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

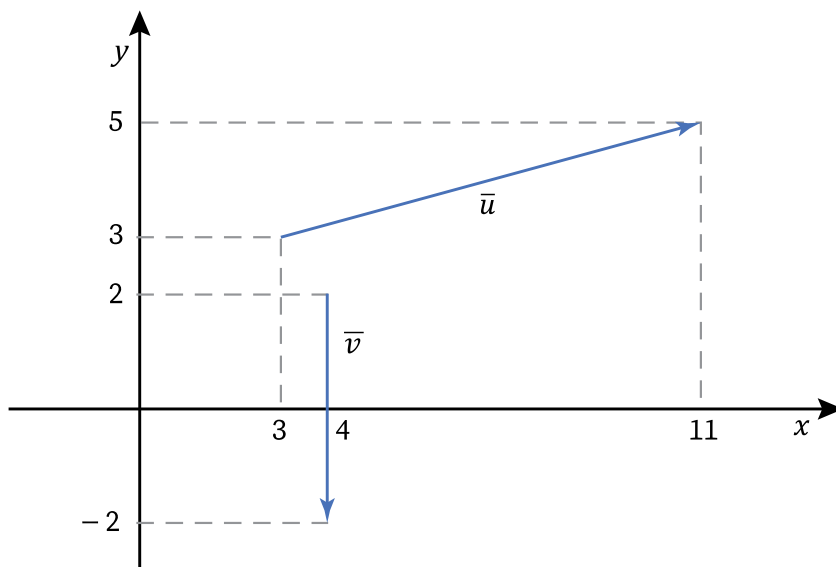
y el segmento dirigido $\overline{AB} = (-7, 0, 4)$ que se muestra en la figura:



Obtenga:

- Las coordenadas de los puntos extremos del segmento \overline{AB} .
- La componente vectorial del vector de posición del punto C en la dirección del eje x .
- La componente escalar del vector de posición del punto C sobre el vector \overline{AB} .
- El ángulo que forma el vector de posición del punto C con el vector \overline{AB} .

7. Con los datos mostrados en la figura:



- Obtenga un vector de módulo igual a tres en la dirección $\bar{u} - \bar{v}$.
 - Obtenga la componente vectorial de \bar{u} sobre \bar{v} .
 - Determine si el vector $\bar{w} = (-4, -3)$ forma un ángulo de 0° con el vector $\bar{u} - \bar{v}$.
8. Sean los vectores: $\bar{u} = 2i - 3j + 4k$, $\bar{v} = (-3, 1, 1)$ y $\bar{w} = (5, -1, 1)$

Determine:

- Un vector \bar{a} , tal que $2\bar{u} - 3\bar{v} + 4\bar{a} = \bar{w}$.
- Un vector \bar{b} que sea perpendicular tanto a \bar{v} como a \bar{w} , y cuyo módulo sea igual a $3\sqrt{8}$.
- El producto mixto $[\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]$.

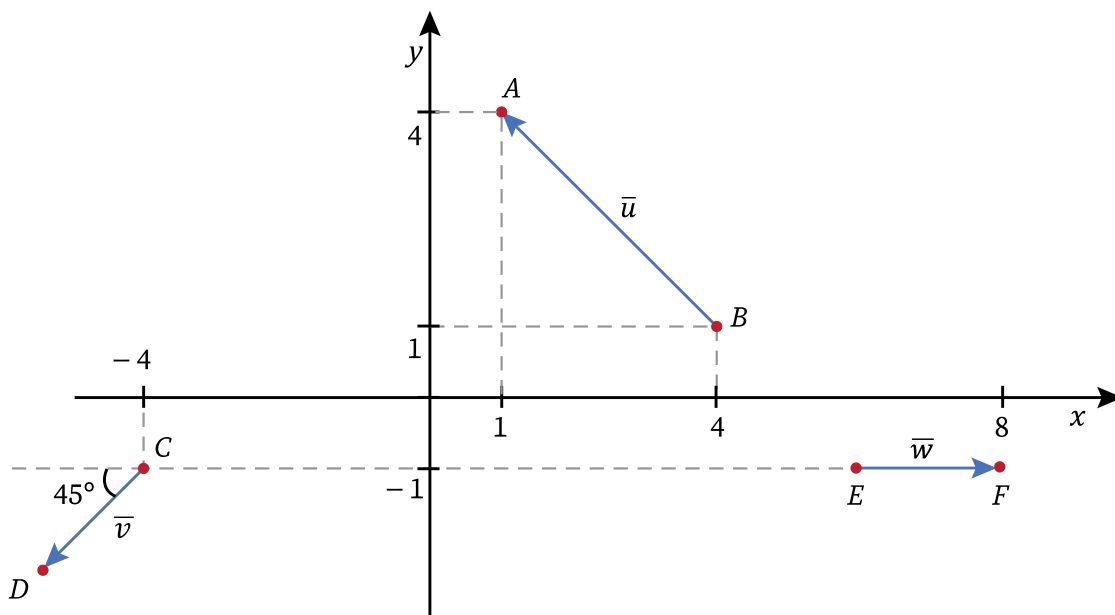
9. Sean los vectores \bar{u} y \bar{v} , tales que $|\bar{u}| = 10$ y $|\bar{v}| = 5$. Si el vector \bar{u} tiene la misma dirección que el vector $\bar{a} = 3i + 4j$ y si el vector \bar{v} tiene la misma dirección que el vector $\bar{c} = (-8, 0, 6)$, utilizando álgebra vectorial:

a) Calcule el ángulo que forman los vectores \bar{u} y \bar{v} .

b) Obtenga el módulo del vector $\bar{u} + \bar{v}$.

c) Determine las componentes del vector $\bar{u} + \bar{v}$.

10. Sean los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} que se muestran en la siguiente figura:



Determine:

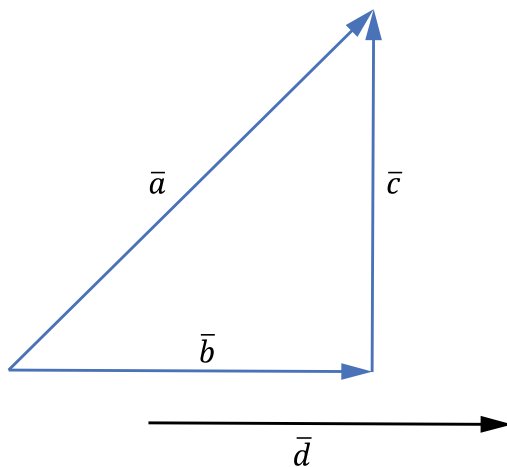
- a) La componente escalar de \bar{u} sobre \bar{w} .
- b) La componente vectorial de \bar{u} sobre \bar{w} .
- c) La componente escalar de \bar{u} sobre \bar{v} .
- d) La componente vectorial de \bar{v} sobre \bar{u} .

Si $| \text{componente escalar de } \bar{w} \text{ sobre } \bar{u} | = \sqrt{2}$

Determine:

- e) Las componentes del vector \bar{w} .
- f) Las coordenadas del punto E .

11. Sean \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} y \bar{d} vectores del espacio de tres dimensiones. Los vectores \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} se encuentran alojados en los lados de un triángulo rectángulo, tal como se muestra en la figura:



Si $\bar{a} = (1, 1, m)$, $\text{Comp. Esc.}_{\bar{a}} \bar{a} = 2$ y \bar{b} es paralelo al vector $\bar{d} = (2, 2, 1)$, determine:

- a) El valor de m .
- b) El vector de \bar{b} .
- c) $\text{Comp. Vec.}_{\bar{b}} \bar{a}$.
- d) El vector \bar{c} .

12. Mediante álgebra vectorial, determine el ángulo agudo que forman dos diagonales interiores cualesquiera de un cubo.
13. Determine las componentes de un vector \bar{a} que define un ángulo de 60° con el eje x , un ángulo de 45° con el eje y y su componente escalar sobre el vector $\bar{w} = 7i + \sqrt{2}j + 7k$ es igual a $\frac{16}{5}$.
14. Sean los puntos $A(0, 4\sqrt{2}, 4)$ y $B(4\sqrt{2}, 0, 4)$ y sea C el punto medio del segmento \overline{AB} .

Determine:

- a) La componente vectorial del vector de posición del punto A sobre el vector j .
- b) La componente escalar del vector de posición del punto B sobre el vector de posición del punto C .

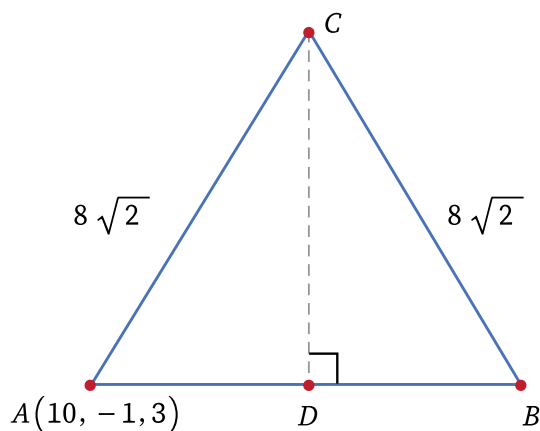
15. Sean los vectores:

$$\bar{a} = (a_1, 12, 12) \quad \text{y} \quad \bar{b} = i - 2j + 2k$$

Determine:

- a) El valor de a_1 para que los vectores \bar{a} y \bar{b} sean perpendiculares.
- b) La componente escalar del vector \bar{a} en la dirección del vector j .
- c) La componente vectorial del vector \bar{b} en la dirección del vector \bar{a} .
16. Sea el vector \bar{u} que forma 45° con el vector i y 60° con el vector k . Si la componente vectorial de \bar{u} sobre el vector j es igual a $(0, \sqrt{3}, 0)$, determine las componentes del vector \bar{u} .

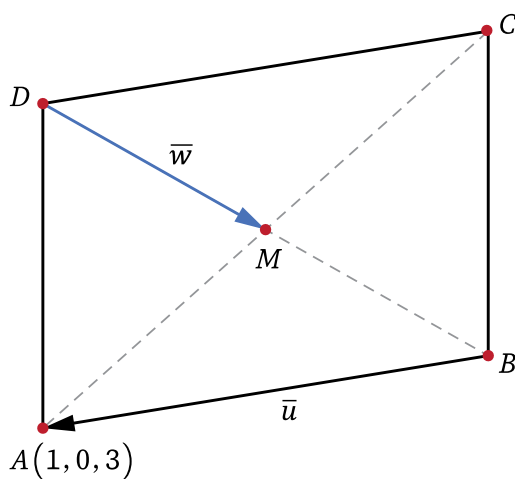
17. Sean los puntos A , B y C los vértices de un triángulo equilátero, tal que la longitud de cada uno de sus lados es $8\sqrt{2}$. Véase la siguiente figura:



Si el segmento \overline{AB} tiene la misma dirección del vector $\vec{u} = -i + j$ y el segmento \overline{DC} tiene la dirección del vector $\vec{v} = -i - j + 2k$:

- Determine las coordenadas de los vértices B y C .
- Compruebe, mediante álgebra vectorial, que el ángulo en el vértice C es de 60° .

18. Sea el paralelogramo $ABCD$ que se muestra en la siguiente figura:



donde:

$$\bar{u} = (-4, -3, -1)$$

$$\bar{w} = (1, 1, -2)$$

a) Determine las coordenadas de los puntos B , C , D y M .

b) Calcule el área del triángulo BCM .

19. Demuestre que:

$$|\bar{a} \times \bar{b}|^2 + |\bar{a} \cdot \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2$$

utilizando las definiciones de producto escalar y del módulo del producto vectorial entre vectores.

20. Determine el área del paralelogramo que tiene como aristas los vectores \bar{a} y \bar{b} pertenecientes al espacio de tres dimensiones, si se sabe que el ángulo entre dichos vectores es de 30° y que $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sqrt{3}$.

21. Demuestre que si \bar{u} y \bar{v} son vectores perpendiculares del espacio de tres dimensiones, entonces:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

22. Determine el área del paralelogramo cuyas aristas son los vectores \bar{a} y \bar{b} , siendo que:

$$\bar{a} \perp \bar{b}, \quad |\bar{a}| = 3, \quad \bar{b} = 2\bar{c} - 3\bar{d}, \quad \bar{c} = j - k \quad \text{y} \quad \bar{d} = (2, -1, 2)$$

23. Sean los puntos:

$$A(10, 2, 6), \quad B(4, 0, 6) \quad \text{y} \quad C(2, 6, 8)$$

- a) Demuestre que los puntos A , B y C son los vértices de un triángulo rectángulo.
 b) Calcule el área de dicho triángulo rectángulo.
 c) Obtenga sus ángulos interiores.

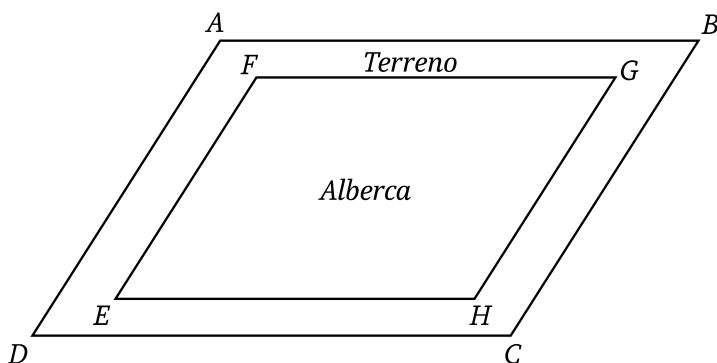
24. Sean los vectores $\bar{u} = 3i - 2j + 2k$ y $\bar{v} = (2, 1, -2)$ las diagonales de un rombo.

Calcule:

- a) El área del rombo.
 b) Sus ángulos interiores.
25. Se desea construir una alberca cuya área sea de 160 m^2 . Si los lados de la alberca deben ser paralelos a los lados del terreno, determine vectorialmente las coordenadas de los puntos E y F , si se sabe que:

$$A(0, 0, 3), B(0, 22, 3), C(30, 22, 3), D(30, 0, 3)$$

$$G(3, 17, 3) \quad \text{y} \quad H(19, 17, 3)$$



Nota: Las coordenadas están en metros.

26. Sean los vectores:

$$\bar{a} = (\sqrt{2}, -1, 2), \quad \bar{c} = 2i + 3j - k \quad \text{y} \quad \bar{u} = (1, 0, -2)$$

Determine:

- a) El área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados concurrentes a los vectores \bar{a} y \bar{w} . Del vector \bar{w} se sabe que dos de sus ángulos directores son:

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{y} \quad \beta = 120^\circ \quad \text{con} \quad \gamma < 90^\circ \quad \text{y} \quad |\bar{w}| = 2$$

- b) El producto mixto de los vectores \bar{u}, \bar{a} y \bar{c} .

27. Sean los vectores:

$$\bar{a} = (1, 2, 1) \quad \text{y} \quad \bar{b} = (-1, -2, -3)$$

Determine:

- a) Un vector \bar{w} que sea perpendicular al vector \bar{a} , tal que su primer coseno director sea $\frac{2}{\sqrt{5}}$, su tercer ángulo director sea 90° y además:

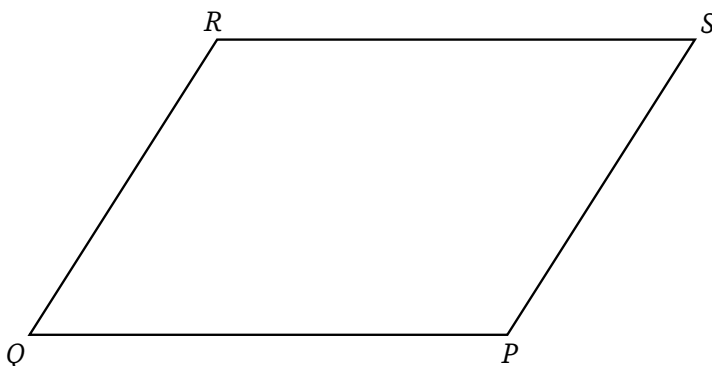
$$|\bar{w} \times \bar{a}| = 2\sqrt{30}$$

- b) El valor de $x \in \mathbb{R}$, tal que el vector $\bar{v} = (x, 2x, 8)$ sea paralelo al vector \bar{b} .

28. Sean los vectores \bar{a} y \bar{c} que forman un ángulo de 60° . Si el módulo del vector \bar{a} es igual a $6\sqrt{3}$ y si $\bar{c} = (-1, 2, -2)$, calcule el área del triángulo del cual dos de sus lados son los vectores \bar{a} y \bar{c} .

29. Sean los puntos $P(1, 2, -1)$, $Q(3, -1, 4)$ y $R(2, 6, 4)$ tres de los vértices de un paralelogramo $PQRS$.

- a) Determine las coordenadas del punto S .
 b) Calcule el área de dicho paralelogramo.



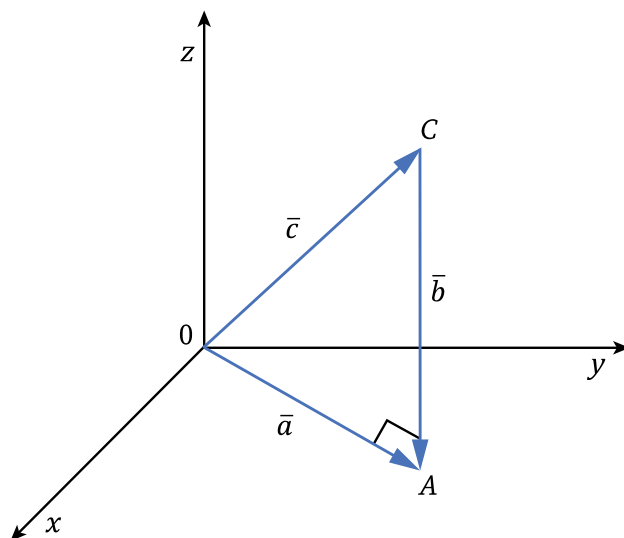
30. Los puntos $A(1, -2, 2)$ y $B(1, -1, 1)$ son los vértices de un triángulo ABC . Determine el o los valores de z del punto $C(1, -4, z)$, tercer vértice del triángulo, para que se cumpla cada una de las siguientes condiciones:
- a) Que el ángulo interior en el vértice A sea de 60° .
 b) Que el triángulo tenga 3 unidades de área.
31. Sean los puntos:

$$A(4, 2, -1), \quad B(2, 0, -2), \quad C(4, 2, z) \quad \text{y} \quad D(x, 0, 2)$$

Determine los valores de x y z para que los segmentos dirigidos \overline{AB} y \overline{DC} sean paralelos.

32. Sean los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} representados en la figura. Se sabe que:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$



Determine:

- La componente vectorial de \vec{c} sobre \vec{a} .
- El coseno del ángulo entre \vec{a} y \vec{c} .
- El área del triángulo ACO .

33. Los vértices de un triángulo son los puntos:

$$A(2, -2, -1), \quad B(2, 2, 2) \quad \text{y} \quad C\left(-2, y, \frac{1}{2}\right)$$

donde se tiene que $|\overline{CA}| = |\overline{CB}|$.

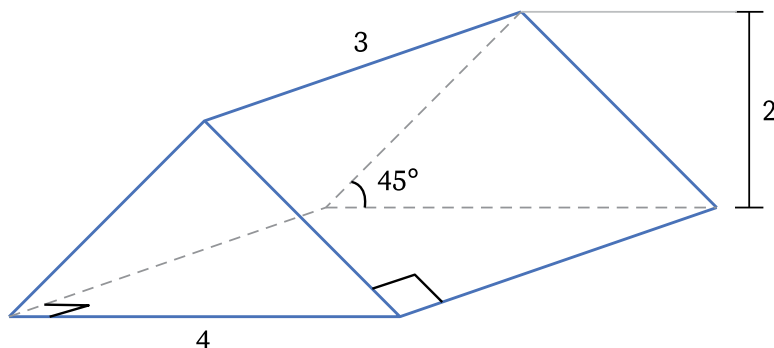
- Determine el valor de y .
- Calcule el área del triángulo.

34. Sean los puntos:

$$A(0, 0, 0), \quad B(1, 1, 1), \quad C(1, 2, 2) \quad \text{y} \quad D(2, 1, d_3)$$

Determine el valor de la constante d_3 para que el volumen del paralelepípedo formado por las aristas \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} sea igual a uno.

35. Obtenga, mediante álgebra vectorial, el volumen del prisma triangular recto mostrado en la siguiente figura:



36. Sean los puntos:

$$A(1, 2, -3), \quad B(2, 3, 5), \quad C(3, 5, 6) \quad \text{y} \quad D(0, 1, -11)$$

- Demuestre vectorialmente que tales puntos son coplanares.
- Obtenga el ángulo que forman los segmentos \overline{AB} y \overline{AD} .

37. Sean los vectores:

$$\vec{a} = (m, 2, -1) \quad \text{y} \quad \vec{b} = (-1, 8, m)$$

- Determine el valor de m de tal manera que la componente vectorial de \vec{a} sobre \vec{b} sea igual al vector $(0, 0, 0)$.
- Si $\vec{c} = (0, -1, 0)$, determine los valores m para que los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} sean coplanares.

38. Sean los puntos:

$$A(3, 0, 1), \quad B(2, 1, -1) \quad \text{y} \quad C(2, -1, 3)$$

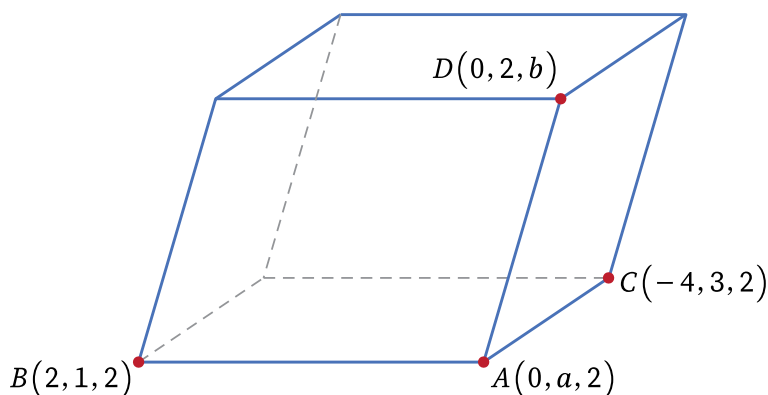
Obtenga las coordenadas del punto D , si el volumen del paralelepípedo formado por los vectores \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} es de 30 unidades cúbicas y D se encuentra en la parte positiva del eje de las ordenadas.

39. Sean los vectores \bar{u} y \bar{v} que son perpendiculares al vector \bar{w} . Si se sabe que $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 2$, $|\bar{w}| = 3$ y que el ángulo entre los vectores \bar{u} y \bar{v} es de 30° , calcule:

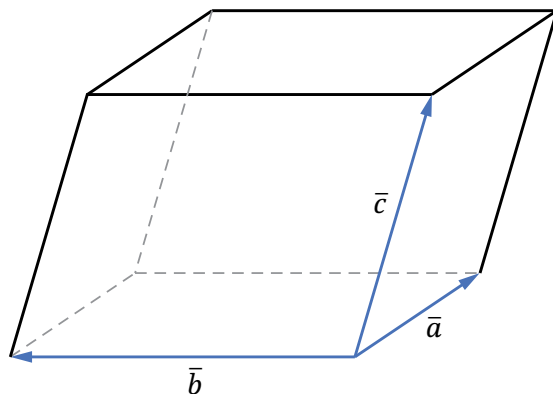
$$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$$

Nota: Existen dos respuestas.

40. El paralelepípedo que se muestra en la figura tiene un volumen de $12 u^3$ y el área de su base es igual a $4 u^2$. Haciendo uso de estos datos, determine las coordenadas a y b de los vértices A y D del paralelepípedo.



41. Determine el volumen del paralelepípedo que se muestra en la figura, el cual tiene alojados en tres de sus aristas concurrentes a los vectores \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} .



Se sabe que $|\bar{a} \times \bar{b}| = 10$, $|\bar{c}| = 10$ y que el ángulo entre los vectores $(\bar{a} \times \bar{b})$ y \bar{c} es de 30° .

42. Sean los vectores:

$$\bar{u} = (-2, 1, -3), \quad \bar{v} = (4, 1, -2) \quad \text{y} \quad \bar{w} = (0, w_2, w_3)$$

- a) Determine los valores de w_2 y w_3 , de manera que la componente escalar de \bar{w} sobre \bar{u} sea igual a $\sqrt{14}$ y que la componente escalar de \bar{w} sobre \bar{v} sea $\sqrt{21}$.
- b) Obtenga el volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} como tres de sus aristas concurrentes.

43. Mediante el cálculo del discriminante, determine qué tipo de cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4xy + y^2 - 8x + 10y + 12 = 0$

b) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x + 18y - 27 = 0$

c) $8x^2 + 10xy + 5y^2 - 40x - 25y + 50 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$

e) $x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 24y - 36 = 0$

f) $4x^2 + 10xy + 9y^2 - 20x + 30y - 120 = 0$

g) $5x^2 - 12xy + 7y^2 - 20x + 35y - 100 = 0$

44. Analice los coeficientes de las ecuaciones dadas, identifique el tipo de cónica que representan, exprese sus ecuaciones en su forma estándar u ordinaria y describa algunas de sus principales características.

- a) $7x^2 - 24x + 4y^2 + 5y - 8 = 23 - 2(x+2)^2 + 2x - 3y$
- b) $3(y+1)^2 + 3x^2 - 12x = 2(x-1)^2 + 3y^2 + 30y + 33$
- c) $3(x+1)^2 + x^2 + 9x + 4 + (y-1)^2 = 3x^2 + 11x + 4 + 4y$
- d) $2(x+1)^2 + 9x^2 - 54x - 17y^2 - 66y + 16 = 146 - (y+1)^2 + 2x^2 + 4x$

45. Si $y = -1 + \operatorname{sen} t$ es una ecuación paramétrica de la curva cuya ecuación cartesiana es:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

Determine la otra ecuación paramétrica.

46. Determine las ecuaciones cartesianas de la curva C , cuya ecuación vectorial es:

$$\vec{p} = \left(\frac{2}{\cos \beta} + 3 \right) i + (3 \tan \beta + 5) j + 4 k$$

e identifique de qué curva se trata.

47. Sea la curva C , cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C : \begin{cases} x = 2 \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \right) \\ y = 3 \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \\ z = 5 \end{cases}$$

- a) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de la curva C .

- b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.

48. Sea la curva C , cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C : \begin{cases} 4(x+3)^2 + 25(y-1)^2 - 100 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

- a) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la curva C .
b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.

49. Sea la curva C de ecuación vectorial:

$$\vec{p} = \left(-1 + 2 \cos t, \quad 5, \quad 3 + \frac{4}{\csc t} \right)$$

- a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C .
b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.

50. Sea la curva:

$$C : \begin{cases} x = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ y = \cos^2 \theta \\ z = 2 \end{cases}$$

- a) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de C .
b) Trace su gráfica.

51. Sea la curva C de ecuación vectorial:

$$\vec{p} = (4 \operatorname{sen} \theta) i + (2 \cos 2 \theta) j + 3 k$$

- a) Obtenga las ecuaciones cartesianas de C .
- b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.
- c) Trace su gráfica.

52. Sea la curva C de ecuaciones:

$$C : \begin{cases} x = 5 \\ y^2 - 2y - 4z + 9 = 0 \end{cases}$$

- a) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de C .
- b) Determine una ecuación vectorial de C .
- c) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.

53. Sea la curva C de ecuación vectorial:

$$\bar{p} = -i + \left(-3 + \frac{1}{\operatorname{sen} t}\right)j + (-3 + 3 \cot t)k$$

- a) Obtenga unas ecuaciones paramétricas de C .
- b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.

54. Sea la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C : \begin{cases} x = -2 + \frac{5}{\sec \theta} \\ y = 2 + \frac{3}{\csc \theta} \\ z = 3 \end{cases}$$

- a) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de C .

- b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.
- c) Trace su gráfica.

55. Sea la curva C de ecuación vectorial:

$$\bar{p} = \left(1 - \frac{2}{\csc t} \right) i + 4j + (2 + 2 \cos t) k$$

- a) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de C .
- b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.

56. Sea la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C : \begin{cases} x = 1 + 2 \cos 2\theta \\ y = 1 + \frac{2}{\csc \theta} \\ z = 0 \end{cases}$$

- a) Obtenga unas ecuaciones cartesianas de C .
- b) Identifique de qué curva se trata y dé algunas de sus características principales.
- c) Trace su gráfica.

RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $d(P, Q) = \sqrt{125}$
2. $|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{13}$
3. a) $\bar{u} \cdot \bar{v} = -6$
b) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = 13$
4. $\bar{v} = (4, -10, 2)$
5. $P_2(1, -1, 0)$
6. a) $A(6, 0, -1)$ y $B(-1, 0, 3)$
b) *Comp. Vec. $_i$* $\bar{c} = \left(\frac{11}{3}, 0, 0\right)$
c) *Comp. Esc. $_{\overline{AB}}$* $\bar{c} = -\frac{73}{3\sqrt{65}}$
d) $\theta = 145.06^\circ$
7. a) $\bar{a} = \left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$
b) *Comp. Vec. $_{\bar{v}}$* $\bar{u} = (0, 2)$
c) No, el ángulo que forma \bar{w} con $\bar{u} - \bar{v}$ es de 180°
8. a) $\bar{a} = (-2, 2, -1)$
b) $\bar{b} = (2, 8, -2)$

$$\text{c) } [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}] = -28$$

$$9. \text{ a) } \theta = 118.68^\circ$$

$$\text{b) } |\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{77} \ u$$

$$\text{c) } \bar{u} + \bar{v} = (2, 8, 3)$$

$$10. \text{ a) } \textit{Comp. Esc.}_{\bar{w}} \bar{u} = -3$$

$$\text{b) } \textit{Comp. Vec.}_{\bar{w}} \bar{u} = -3i$$

$\text{c) } \textit{Comp. Esc.}_{\bar{v}} \bar{u} = 0$, \bar{u} y \bar{v} son vectores perpendiculares.

$$\text{d) } \textit{Comp. Vec.}_{\bar{u}} \bar{v} = \bar{0}$$

$$\text{e) } \bar{w} = 2i$$

$$\text{f) } E(6, -1)$$

$$11. \text{ a) } m = 2$$

$$\text{b) } \bar{b} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{c) } \textit{Comp. Vec.}_{\bar{b}} \bar{a} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{d) } \bar{c} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$12. \theta = 70.53^\circ$$

13. Dos respuestas:

$$\bar{a}_1 = (2, 2\sqrt{2}, 2) \quad \text{y} \quad \bar{a}_2 = (16, 16\sqrt{2}, -16)$$

14. a) *Comp. Vec.*_j $\bar{a} = (0, 4\sqrt{2}, 0)$

b) *Comp. Esc.*_c $\bar{b} = 4\sqrt{2}$

15. a) $a_1 = 0$

b) *Comp. Esc.*_j $\bar{a} = 12$

c) *Comp. Vec.*_a $\bar{b} = \bar{0}$

16. $\bar{u} = (\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$

17. a) $B(2, 7, 3)$ y $C(2, -1, 11)$

b) $\theta = 60^\circ$

18. a) $B(5, 3, 4)$

$C(7, 4, 9)$

$D(3, 1, 8)$

$M(4, 2, 6)$

b) $A_{BCM} = \frac{\sqrt{131}}{2} u^2$

19. Se deja a criterio del lector.

20. $A = 1 u^2$

21. Se deja a criterio del lector.

22. $A = 3\sqrt{125} = 15\sqrt{5} u^2$

23. a) Se deja a criterio del lector.

b) $A = 20.98 u^2$

c) Ángulo en el vértice A : 46.36°

Ángulo en el vértice B : 90°

Ángulo en el vértice C : 43.64°

24. a) $A = \frac{\sqrt{153}}{2} u^2$

b) Dos de los ángulos interiores son de 72.08° y los otros dos de 107.92°

25. $E(19, 7, 3)$

$F(3, 7, 3)$

26. a) $A = \sqrt{3} u^2$

b) $[\bar{u} \ \bar{a} \ \bar{c}] = -9 - 6\sqrt{2}$

27. a) $\bar{w} = (4, -2, 0)$

b) $x = \frac{8}{3}$

28. $A = \frac{27}{2} u^2$

29. a) $S(0, 9, -1)$

b) $A = 37.02 u^2$

30. a) $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}$

$$z_2 = -2 - 2\sqrt{3}$$

$$z_1 = -2$$

b)

$$z_2 = 10$$

31. $x = 2$

$$z = 3$$

32. a) *Comp. Vec.* $\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{a}$

b) $\cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{|\bar{a}| |\bar{c}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $A = \frac{1}{2} u^2$

33. a) $y = 0$

b) $A = 10 u^2$

34. $d_3 = 2$

35. $V = 12 u^3$

36. a) Sí son coplanares

b) $\theta = 180^\circ$

37. a) $m = 8$

b) $m_1 = 1$ y $m_2 = -1$

38. $D(0, 8, 0)$

39. $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = 3$ o $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = -3$

40. $a_1 = 1$ $b_1 = 5$
 $a_2 = 7/3$ $b_2 = -1$

41. $V = 50\sqrt{3} u^3$

42. a) $w_2 = 35$ y $w_3 = 7$

b) $V = 602 u^3$

43. a) Hipérbola

b) Parábola

c) Elipse

d) Circunferencia

e) Parábola

f) Elipse

g) Hipérbola

44. a) $A = 9$ y $C = 4$, mismo signo con $A \neq C$.

Se trata de una elipse con centro en el punto $C(1, -1)$.

Eje focal paralelo al eje y .

Longitudes de sus semiejes:

Semieje mayor: $a = 3$

Semieje menor: $b = 2$

b) $A = 1$ y $C = 0$

Se trata de una parábola con vértice en el punto $V(4, -2)$.

Eje focal paralelo al eje y .

Con $P = 6$, $P > 0$ por lo que la parábola abre hacia arriba.

c) $A = 1$ y $C = 1$ con $A = C$

Se trata de una circunferencia con radio igual a 3 y centro en el punto $C(-2, 3)$.

d) $A = 9$ y $C = -16$, A y C signos distintos.

Se trata de una hipérbola con centro en el punto $C(3, -2)$

Eje focal paralelo al eje x .

Longitudes de sus ejes:

Eje transverso: $2a = 8$

Eje conjugado: $2b = 6$

45. $x = 1 + \cos t$

46. Ecuaciones cartesianas:

$$C : \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Hipérbola con eje focal paralelo al eje x , con centro en el punto $C(3, 5, 4)$ y contenida en el plano de ecuación $z = 4$.

Longitudes de los ejes:

Eje transverso: $2a = 4$

Eje conjugado: $2b = 6$

47. a)

$$C : \begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

- b) Se trata de una hipérbola con eje focal paralelo al eje y , con centro en el punto $C(0, 0, 5)$ y contenida en el plano de ecuación $z = 5$.

Longitudes de los ejes:

Eje transverso: $2a = 6$

Eje conjugado: $2b = 4$

48. a)

$$C : \begin{cases} x = -3 + 5 \cos \theta \\ y = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta \\ z = 2 \end{cases}$$

- b) Se trata de una elipse con eje focal paralelo al eje x , con centro en el punto $C(-3, 1, 2)$ y contenida en el plano de ecuación $z = 2$.

Longitudes de los ejes:

Eje mayor: $2a = 10$

Eje menor: $2b = 4$

49. a)

$$C : \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{16} = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

- b) Se trata de una elipse con eje focal paralelo al eje z , con centro en el punto $C(-1, 5, 3)$ y contenida en el plano de ecuación $y = 5$.

Longitudes de los ejes:

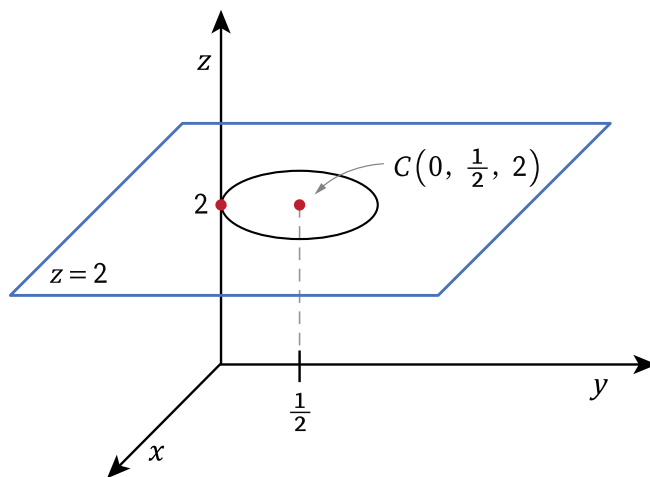
Eje mayor: $2a = 8$

Eje menor: $2b = 4$

50. a)

$$C : \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \\ z = 2 \end{cases}$$

b)

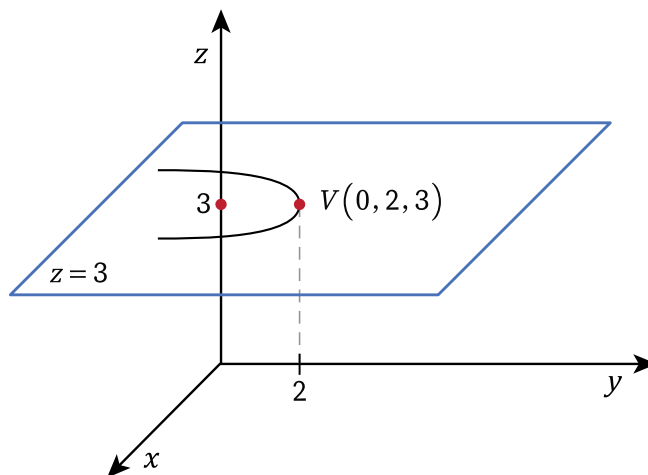


51. a)

$$C : \begin{cases} x^2 = -4(y - 2) \\ z = 3 \end{cases}$$

- b) Se trata de una parábola con eje focal paralelo al eje y , que abre hacia el lado negativo del mismo eje y , con vértice en el punto $V(0, 2, 3)$ y contenida en el plano de ecuación $z = 3$.

c)



52. a)

$$C : \begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} (t-1)^2 + 2 \end{cases}$$

b) $\vec{p} = 5i + tj + \left(\frac{1}{4} (t-1)^2 + 2 \right)k$

c) Se trata de una parábola con eje focal paralelo al eje z , que abre hacia el lado positivo del mismo eje z , con vértice en el punto $V(5, 1, 2)$ y contenida en el plano de ecuación $x = 5$.

53. a)

$$C : \begin{cases} x = -1 \\ (y+3)^2 - \frac{(z+3)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

- b) Se trata de una hipérbola con eje focal paralelo al eje y , con centro en el punto $C(-1, -3, -3)$ y contenida en el plano de ecuación $x = -1$.

Longitudes de los ejes:

Eje transverso: $2a = 2$

Eje conjugado: $2b = 6$

54. a)

$$C : \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

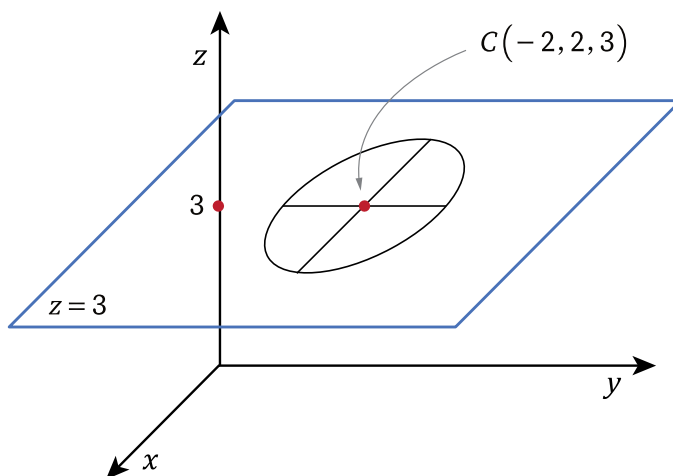
- b) Se trata de una elipse con eje focal paralelo al eje x , con centro en el punto $C(-2, 2, 3)$ y contenida en el plano de ecuación $z = 3$.

Longitudes de los ejes:

Eje mayor: $2a = 10$

Eje menor: $2b = 6$

c)



55. a)

$$C : \begin{cases} (x - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

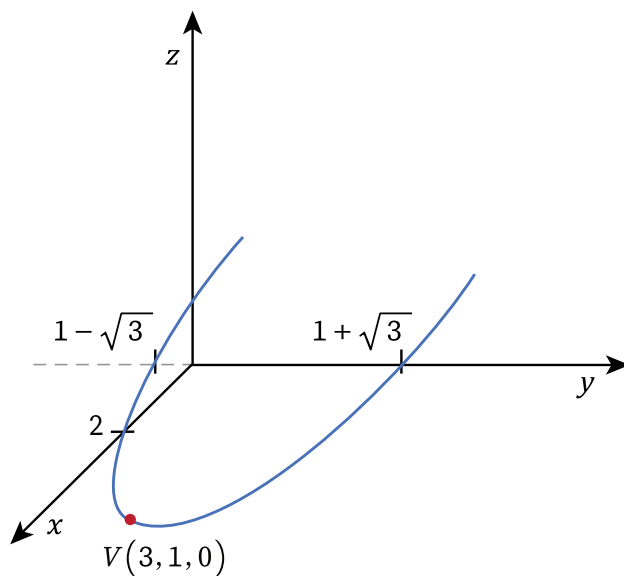
- b) Se trata de una circunferencia con centro en el punto $C(1, 4, 2)$ de radio igual a dos y contenida en el plano de ecuación $y = 4$ que es paralelo al plano xz

56. a)

$$C : \begin{cases} (y - 1)^2 = -(x - 3) \\ z = 0 \end{cases}$$

- b) Se trata de una parábola con eje focal paralelo al eje x , que abre hacia el lado negativo del mismo eje x , con vértice en el punto $V(3, 1, 0)$ y contenida en el plano xy .

c)



 BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T.M. (1982), *Calculus*, México: Reverté, S.A.

CASTAÑEDA, E. (2006), *Geometría analítica en el espacio*, México: Facultad de Ingeniería, UNAM.

EFIMOV, N. (1969), *Curso breve de geometría analítica*, 7^a. ed., México: Paz.

FULLER, G., Tarwater, D. (1988), *Geometría analítica*, México: Addison-Wesley Iberoamericana.

LARSON, R., Hostetler, R. (1986), *Cálculo y geometría analítica*, 3^a. ed., México: McGraw-Hill.

LEHMANN, C. (2005), *Geometría analítica*, 12^a. ed., México: Limusa.

MENNA, Z. (1981), *Geometría analítica plana enfoque vectorial*, México: Limusa.

STEIN, S. (1984), *Cálculo y geometría analítica*, 3^a. ed., México: McGraw-Hill.

SOLIS, R., et al. (1988), *Geometría analítica*, México: Limusa.

SWOKOWSKI, E. (1989), *Cálculo con geometría analítica*, 2^a. ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica.



UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Álgebra Vectorial

Se publicó la primera edición electrónica de un ejemplar (18 MB) en formato PDF en junio de 2026, en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Cambria para texto y Rubik para titulares.