



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Termografía superficial: un enfoque
nuevo en la implementación de
técnicas de visualización en
aplicaciones médicas**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero en Sistemas Biomédicos

P R E S E N T A

Jesús Ramón Ávila Trigueros

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Salvador Enrique Sánchez Minero



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023

Agradecimientos

A mis padres por apoyarme desde siempre.

A mis amigos que hicieron la carrera más amena y divertida, Daniela Orozco, Pablo, Isaac, Fabio, Stephanie, Santiago, Mateo, Naomi, Ana, Alfonso, Daniela Sánchez, Citlali, Joaquín, Daniel y Rodrigo.

A la DGECI por permitirme conocer cómo se hace investigación fuera de México y poder ampliar mi visión no sólo académica sino de la vida.

A la UNAM por todos los servicios que puso a mi disposición durante toda mi estadía.

Al ICAT por permitirme formarme académica y personalmente dentro de sus instalaciones como lo son: el laboratorio de micro fabricación, el laboratorio de metrología dimensional y el LUCE.

Al grupo de ingeniería de Proceso y la Dr. Gabriel Ascanio por otorgarme una beca y las facilidades para llevar a cabo mi proyecto de tesis.

A los Doctores Federico, Amado y Salvador por ser mis mentores y enseñarme muchas cosas además de las académicas.

A la Dra. Selene Rubí Islas Sánchez, y a los Maestros Gerardo Ruz Botello, Sergio Padilla Olvera y Benjamín Valera Orozco por ayudarme en varias fases de mi trabajo, auxiliarme en los diferentes trabajos de laboratorio.

Tabla de contenido

1	Introducción.....	16
1.1	Motivación del trabajo de tesis.....	16
1.2	Objetivos del trabajo de tesis.....	17
1.3	Antecedentes.....	18
1.3.1	Condiciones de salud actuales, su atención, y perspectivas de futuro. .	18
1.3.2	La actividad metabólica, una variable de interés en la detección de problemas de salud.....	20
1.3.3	La importancia de la termografía en la evaluación de la actividad metabólica.....	21
1.3.4	¿Qué es la firma térmica?, ¿qué representa?, y ¿qué relación guarda con las formulaciones teóricas existentes?.....	23
1.4	Fundamentos de la transferencia de calor en tejidos biológicos.....	25
1.4.1	Ley de Fourier.....	27
1.4.2	Relación entre la energía interna y la temperatura de un sistema.....	28
1.4.3	Modelos de transferencia de calor en tejidos biológicos.....	29
1.4.4	Ventajas y desventajas de la implementación de formulaciones teóricas. 31	
1.5	Propuesta de trabajo de tesis.....	33
1.5.1	Estructura de la tesis.....	33
2	Planteamiento del modelo de estudio.....	37
2.1	Modelo de estudio.....	38
2.2	Condiciones de frontera y de interfase.....	40
2.3	Análisis de escala y de órdenes de magnitud.....	42
3	Evaluación teórico-analítica.....	50
3.1	Adimensionalización del modelo de estudio simplificado.....	51
3.2	Solución analítica de estado estacionario ($\tau \rightarrow \infty$).....	53
3.3	Solución analítica del fenómeno térmico transitorio.....	55
3.3.1	Evaluación de los términos de estado estacionario.....	57
3.3.2	Evaluación de los términos transitorios.....	58
4	Metodología numérica de evaluación.....	63
4.1	Adimensionalización del modelo de estudio.....	65

4.2	Discretización del modelo numérico	68
4.2.1	Método Implícito de Dirección Alternante (ADI).....	68
5	Metodología de estudio experimental.	79
5.1	Construcción del arreglo experimental.	79
5.1.1	Componentes que integran los dispositivos de prueba (tejidos artificiales). 79	
5.1.2	Procedimiento de construcción de los dispositivos de prueba.....	84
5.1.3	Construcción del entorno experimental.	85
5.2	Adquisición y pos-procesamiento de datos experimentales.....	86
5.2.1	Adquisición mediante cámara termográfica (Flir E5-WiFi).....	87
5.2.2	Adquisición a través de tarjeta de adquisición y sensores.	91
6	Análisis y discusión de resultados	96
6.1	Resultados experimentales	96
6.2	Resultados numéricos.....	102
6.3	Comparación entre los resultados experimentales y teóricos.	107
	Conclusiones.....	110
	Trabajo futuro	111
	Referencias.....	113

Índice de figuras

Figura 1.1: Tomografía por emisión de positrones, imágenes tomadas de [12].	19
Figura 1.2: Sistemas de análisis termográficos, imágenes tomadas de [14] [15].	21
Figura 1.3: Ejemplo de fotografía infrarroja (firma térmica).	23
Figura 1.4: Evaluaciones experimentales de técnicas termográficas en laboratorio, imágenes tomadas de [5] [31].	24
Figura 1.5: Esquema de los procesos de transferencia de calor en tejidos biológicos (difusión y advección de calor).	26
Figura 1.6: Ley de Fourier, relación entre el flujo de calor y la diferencia de temperatura en un sistema en estudio.	28
Figura 1.7: Esquema simplificado de la transferencia de calor en un sistema capilar de un tejido biológico, modelo teórico de Pennes [54].	30
Figura 2.1: Esquema del modelo de estudio.	39
Figura 2.2: Representación esquemática de los flujos de calor en las interfases de los dos elementos que integran el modelo de estudio (resistencia eléctrica-PDMS).	41
Figura 2.3: Proceso de calentamiento de una de las resistencias eléctricas de prueba. El dispositivo alcanza el estado estacionario alrededor de los 1×10^4 segundos.	43
Figura 3.1: Esquema simplificado del modelo de estudio (modelo de flujo de calor unidireccional), sistema conjugado resistencia eléctrica-PDMS.	50
Figura 3.2: Valores de la temperatura de las dos regiones (Resistencia eléctrica y PDMS) para los valores de las variables que se ilustran. Lado izquierdo solución adimensional y lado derecho resultados en datos físicos.	54

Figura 4.1: Representación esquemática del modelo numérico de estudio. Aquí, se ilustra el procedimiento de fragmentación del dominio y los límites de este. Además, se indican las condiciones de frontera requeridas para el cálculo numérico..... 63

Figura 4.2: Esquema que ilustra la interacción de los elementos (volúmenes fragmentados) que integran el dominio de estudio numérico..... 64

Figura 4.3: Normalización del dominio de estudio. Cada elemento se escala de tal forma que toman una geometría cubica de una unidad adimensional. 67

Figura 4.4: Representación esquemática de la construcción del algoritmo numérico ADI para el primer paso de cálculo. Aquí, se privilegia una discretización y barrido implícito en la coordenada adimensional χ (tiempo futuro $n + 13$). Por lo tanto, las derivadas espaciales en las otras dos coordenadas son evaluadas de forma explícita (tiempo n).
..... 71

Figura 4.5: Representación esquemática de las condiciones de frontera para un elemento fragmentado por el algoritmo. Aquí, se ilustra el elemento (2,2,2) que corresponde a la resistencia eléctrica, no obstante, cada elemento debe ser evaluado con sus correspondientes condiciones de frontera. 76

Figura 5.1: Componentes eléctricos-electrónicos y materiales con los cuales se fabrican los dispositivos de prueba (tejidos artificiales), así como también, fases del proceso de construcción de dichos dispositivos. 80

Figura 5.2: Circuito de acondicionamiento utilizado para controlar la sensibilidad del termistor. 82

Figura 5.3: Circuito de acondicionamiento utilizado para controlar la sensibilidad de los termopares. 84

Figura 5.4: Proceso de preparación de PDMS, y pasos a seguir en la construcción de los dispositivos de prueba (tejidos artificiales). 85

Figura 5.5: Construcción del entorno experimental, con descripción gráfica del procedimiento empleado en la adquisición de datos. 86

Figura 5.6: Diagrama representativo del procedimiento empleado en la adquisición de imágenes infrarrojas. 88

Figura 5.7: Diagrama donde se ilustra el proceso de recorte de las imágenes obtenidas previamente. Aquí, se desprecian los datos (píxeles) afectados por programación base de la cámara. En este contexto, la zona de interés (ROI) es la que será empleada en las evaluaciones experimentales. 89

Figura 5.8: Diagrama que ilustra el procedimiento donde se define la temperatura máxima promedio en la imagen (recuadro rojo), así como también, la temperatura en una sección transversal de interés. 89

Figura 5.9: Evaluación de la escala de temperatura en función de la intensidad de píxel. Aquí, se muestra el procedimiento empleado para definir la razón de cambio o pendiente (m) del modelo ilustrado en la ecuación (5.9). 90

Figura 5.10: Resultados experimentales (preliminares) obtenidos mediante las evaluaciones con el sensor termográfica. Aquí, la figura de la derecha muestra el comportamiento de la temperatura con respecto a la posición (eje x) y el tiempo; por otra parte, la figura de la izquierda ilustra la firma térmica en la superficie (ejes x y y) de estudio para la condición de estado estacionario (equilibrio térmico). 92

Figura 5.11: Resultados experimentales (preliminares) obtenidos mediante la cámara termográfica y los sensores (termistor y termopares). Aquí, se muestra la evolución de

la temperatura en el tiempo para los diferentes puntos de interés: superficie de estudio, resistencia eléctrica, puntos de amortiguamiento térmico, etc..... 93

Figura 6.1: Resultados experimentales que ilustran la estela térmica en estado estacionario para los cuatro modelos de prueba (tejidos artificiales), en todas las evaluaciones se utilizó el mismo voltaje aplicado $v_{ap} = 1.9V$. A) $h = 1.0mm$, B) $h = 3.2mm$, C) $h = 10.0mm$, y D) $h = 25.0mm$ 97

Figura 6.2: Evolución en el tiempo del fenómeno térmico para los cuatro modelos de prueba: A) $h = 1.0mm$, B) $h = 3.2mm$, C) $h = 10.0mm$ y D) $h = 25.0mm$, para una misma condición de energía suministrada, $v_{ap} = 1.9V$. Aquí, se ilustran las temperaturas la zona donde se localiza la fuente térmica (resistencia eléctrica) y de la superficie de estudio, ambas como funciones del tiempo t 99

Figura 6.3: Cambio en la temperatura de los termopares como función del tiempo t . Aquí, se evalúan dos modelos de prueba ($h = 3.2mm$ y $h = 25.0mm$) para dos condiciones de suministro de energía ($v_{ap} = 1.4V$ y $v_{ap} = 3.3V$)..... 100

Figura 6.4: Gradiente de temperatura como función del tiempo t , el cual es evaluado con ayuda de la temperatura en el punto céntrico de la superficie (T_{sup}), y la temperatura registrada por el termopar ubicado en la vecindad de la superficie de estudio (T_{∞}). Aquí, se presentan los resultados de los dos experimentos bajo las condiciones limites; el primero con la firma térmicas más débil ($v_{ap} = 1.4V$ y $h = 25.0mm$), y el segundo con la firma térmica más intensa ($v_{ap} = 3.3V$ y $h = 1.0mm$). 101

Figura 6.5: Resultados numéricos del campo de temperatura (adimensional) considerando el modelo de prueba de $h = 3.2\text{mm}$, y un voltaje aplicado de $v_{ap} = 1.9\text{V}$ 102

Figura 6.6: Diseño de las mallas de cálculo. A la izquierda el campo físico definido por el algoritmo de fragmentación, y a la derecha el campo computacional (malla uniforme) en el cual los parámetros adimensionales absorben las transformaciones del campo físico. 103

Figura 6.7: Resultados numéricos del campo de temperatura (dimensional) considerando el modelo de prueba de $h = 3.2\text{mm}$, y un voltaje aplicado de $v_{ap} = 1.9\text{V}$ 104

Figura 6.8: Campo de temperatura en el plano (x,y) al centro del modelo de prueba. Aquí, se analizan dos tiempos del fenómeno térmico, el corto que representa el inicio del suministro de energía, y el largo donde se logra la condición de estado estacionario. 105

Figura 6.9: Evaluación de la dinámica del fenómeno térmico con resultados normalizados (adimensionales). Aquí, se ilustran cuatro campos de temperatura definidos en el plano (χ, η) y en el centro del dispositivo ($\xi = 1.5$). Cada uno representa un tiempo de evolución de la estela térmica diferente, donde el primero es cuando se inicia el calentamiento, y el ultimo es cuando se logra la condición de estado estacionario..... 106

Figura 6.10: Evaluación del gradiente de temperatura $(T_{sup} - T_{\infty})$ como función del tiempo t . Aquí, se comparan los resultados experimentales y numéricos considerando uno de los casos de estudio, $h = 10.0\text{mm}$ y $v_{ap} = 2.8\text{V}$ 107

Figura 6.11: Firma térmica de la superficie obtenida mediante procesamiento de imágenes infrarrojas (izquierda), y mediante simulación numérica, considerando el caso de estudio donde $h = 10.0\text{mm}$ y $v_{ap} = 2.8\text{V}$ 108

Índice de Tablas

Tabla 2.1: Ecuaciones para conducción de calor en diferentes medios.....	37
Tabla 2.2: Dimensiones, variables y propiedades características.....	42
Tabla 2.3: Tiempos característicos del fenómeno de calentamiento.....	44
Tabla 2.4: Calor transferido entre la superficie de estudio y su entorno.	47
Tabla 3.1: Condiciones de frontera e iniciales del modelo simplificado de transferencia de calor unidireccional (sistema conjugado).....	51
Tabla 3.2: Condiciones de frontera e iniciales adimensionales del modelo simplificado de transferencia de calor unidireccional (sistema conjugado).....	52
Tabla 4.1: Variables adimensionales propuestas para la adimensionalización de los modelos tridimensionales de transferencia de calor (esquema numérico).....	65
Tabla 4.2: Dimensiones que definen cada uno de los elementos que integran el dominio de estudio, y las distancias de estos con respecto al origen.	66
Tabla 4.3: Parámetros adimensionales obtenidos en el modelo numérico.	68
Tabla 4.4: Discretización de las condiciones de frontera para el cálculo del elemento (2,2,2) que representa a la resistencia eléctrica.	77
Tabla 5.1: Ejemplo de la distribución de la información recabada por el termistor y termopares situados en diferentes puntos del modelo de prueba.....	91
Tabla 5.2: Argumentos de salida de los dos programas de procesamiento de imágenes y datos (AICam y AISen).	92
Tabla 6.1: Tiempo de evolución del fenómeno térmico para cada uno de los modelos de prueba.....	98

Nomenclatura

Símbolos

A_{transf}	área de transferencia de calor, [m ²]
A_c	área de cruce de flujo (perpendicular), [m ²]
c_p	calor específico, [J/kg · K]
c_b	calor específico de la sangre, [J/kg · K]
e	espesor de la resistencia eléctrica, [m]
\dot{e}_{gen}	energía generada por unidad de tiempo en un volumen, [W/m ³]
h	espesor superior de PDMS (profundidad de encapsulamiento), [m]
h_c	coeficiente convectivo, [W/m ² · K]
H	espesor inferior de PDMS, [m]
k	conductividad térmica, [W/m · K]
l	dimensión transversal de la resistencia eléctrica, [m]
L	dimensión transversal del modelo de estudio, [m]
m	masa del sistema de estudio, [kg]
\dot{m}	flujo masico, [kg/s]
\tilde{N}_u	numero de Nusselt modificado (calculo numérico) definido en la Ec. (2.24)
\bar{N}_u	numero de Nusselt modificado (calculo analítico) definido en la Ec. (3.7)
Q	calor transferido por una coordenada, [W]
Q_{in}	calor por unidad de tiempo que entra en el sistema, [W]
Q_{out}	calor por unidad de tiempo que sale en el sistema, [W]
Q_{gen}	calor por unidad de tiempo que se genera en el sistema, [W]
Q_m	calor metabólico generado por unidad de tiempo en un volumen, [W/m ³]
Q'''	calor generado por unidad de tiempo en un volumen, [W/m ³]
q''	flujo de calor, [W/m ²]
q''_{conv}	flujo de calor convectivo, [W/m ²]
Q_T	calor total transferido en el sistema, [W]
R_e	resistencia eléctrica, [Ω]
t	tiempo, [s]
t_c	tiempo característico del estudio definido en la Ec. 2.21, [s]
t_{gc}	tiempo característico difusivo en el PDMS definido en la Ec. 2.15, [s]
t_{rc}	tiempo característico difusivo en la resistencia eléctrica definido en la Ec. 2.13, [s]
T	temperatura, [K] o [°C]
T_a	temperatura del fluido de enfriamiento, [K] o [°C]
T_{ar}	temperatura arterial, [K] o [°C]

T_c	temperatura capilar, [K] o [°C]
T_{in}	temperatura de entrada, [K] o [°C]
T_{out}	temperatura de salida, [K] o [°C]
T_{sup}	temperatura de la superficie de estudio, [K] o [°C]
T_∞	temperatura ambiente, [K] o [°C]
U	energía interna en el sistema, [J/kg]
u, v, w	velocidades de flujo en el modelo convectivo, [m/s]
v_{ap}	voltaje aplicado en la resistencia eléctrica, [V]
x, y, z	coordenadas cartesianas dimensionales, [m]

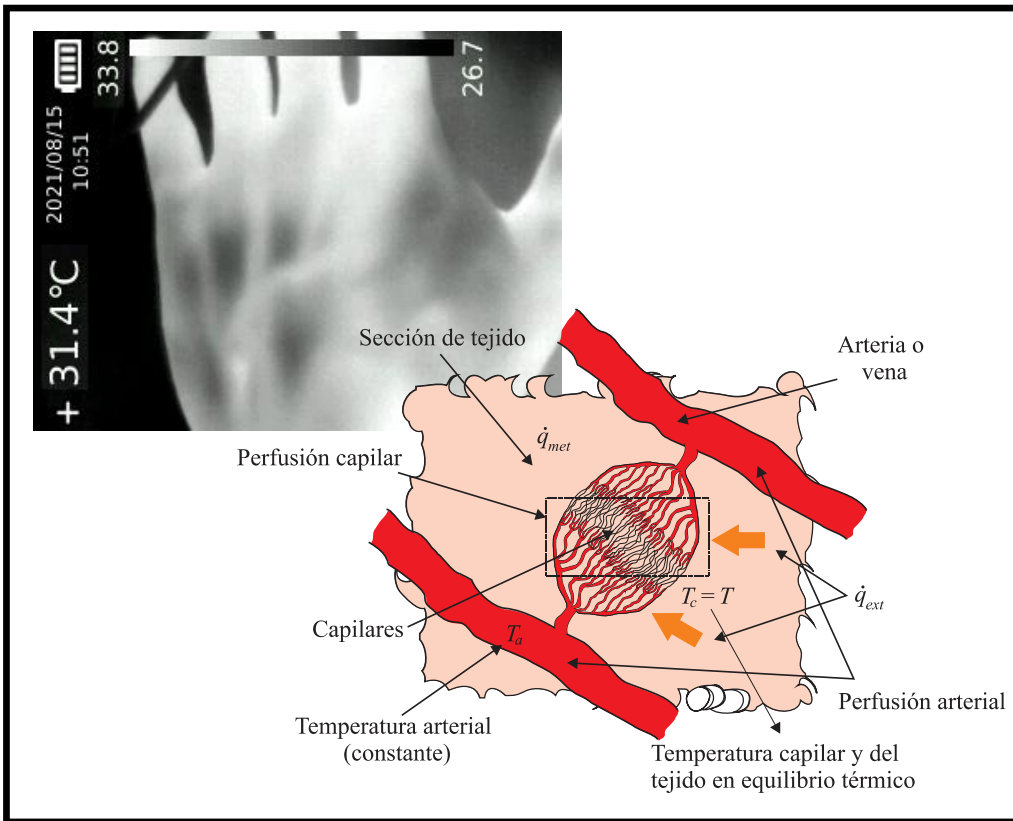
Letras griegas

α_g	difusividad térmica del tejido artificial (PDMS), [m ² /s]
α_r	difusividad térmica de la fuente térmica (resistencia eléctrica), [m ² /s]
$\beta_{\eta\pi}$	parámetros geométricos adimensionales en la coordenada η , definidos en la tabla 4.3,
$\beta_{\xi\pi}$	parámetros geométricos adimensionales en la coordenada ξ , definidos en la tabla 4.3,
ε_ω	parámetros adimensionales de tiempos característicos difusivos,
θ	temperatura adimensional,
λ	parámetro adimensional de conjugación definido como $\lambda = k_g e / k_r h$,
ρ	densidad, [kg/m ³]
ρ_b	Densidad de la sangre, [kg/m ³]
Δx	Distancia entre dos puntos de evaluación, [m]
ΔT	incremento de temperatura, [K] o [°C]
ΔT_c	incremento de temperatura característico del estudio, [K] o [°C]
ΔT_{rc}	incremento de temperatura característico en la resistencia eléctrica, [K] o [°C]
ΔT_{gc}	incremento de temperatura característico en el espesor de PDMS, [K] o [°C]
τ	tiempo adimensional,
ω_b	perfusión sanguínea en un sistema capilar, [s ⁻¹]
χ, η, ξ	coordenadas cartesianas adimensionales,

Subíndices

a	relacionado con un fluido de enfriamiento,
g	relacionado con el tejido artificial (PDMS),
gc	valores característicos relacionados con del tejido artificial (PDMS),

i, j, k contadores del nodo en la evaluación numérica,
 n contador de tiempo presente en la evaluación numérica,
 r relacionado con la fuente térmica (resistencia eléctrica),
 rc valores característicos relacionados con la fuente térmica (resistencia eléctrica),
 x relacionado con la coordenada x
 y relacionado con la coordenada y
 z relacionado con la coordenada z
1,2,.. número que define términos de igual características que requieren ser diferenciados en los modelos y cálculos.



CAPITULO 1

Introducción

1 Introducción.

1.1 Motivación del trabajo de tesis.

La motivación del presente trabajo se deriva del enorme aumento en la incidencia de enfermedades con pronósticos desfavorables, día con día pacientes y/o decesos asociados a diferentes tipos de cáncer proliferan. Principalmente, la detección temprana de células cancerígenas tan agresivas como el melanoma, u otras que se asocian al cáncer de mama, es de vital importancia para poder mejorar los pronósticos. Hoy en día, el desarrollo de sistemas y técnicas que ayuden a tal fin es imperativo, existen muchas alternativas para realizar un diagnóstico; no obstante, cada alternativa tiene sus inconvenientes, los cuales pueden ser desde su poca fiabilidad, costos e infraestructura especializada, hasta la complejidad para ejecutar el procedimiento, lo invasivo y/o el tiempo de evolución de la enfermedad. En este contexto, un aspecto básico en el diagnóstico es poder contar con más de un procedimiento, ponderando los más fiables, rápidos y de fácil uso, permitiendo así poder canalizar a los casos sospechosos a estudios más especializados. Claramente, debido al número de caso que se registran, el desarrollo de nuevas técnicas de diagnóstico debe cumplir aspectos tales como: rapidez, fiabilidad, ser mínimamente invasivas, económicas, y ser de uso masivo.

Para el caso del cáncer, la implementación de sistemas termográficos parece ser prometedora, esto debido a que dicho ente (células cancerígenas) cuenta con una alta capacidad metabólica y de perfusión (más de un orden de magnitud en comparación con células sanas), condición que se traduce en distorsiones de las imágenes térmicas en pacientes. Es indudable que lo antes mencionado tiene lógica, sin embargo, el uso de imágenes térmicas para el diagnóstico médico también tiene sus inconvenientes. Como ejemplo, dada su naturaleza (en el espectro infrarrojo), las imágenes termográficas sólo detectan la temperatura en la superficie, en consecuencia, las distorsiones en las imágenes antes citadas no pueden ser atribuidas a un problema de salud en específico. Es claro, la implementación de sistemas termográficos en temas de medicina todavía requiere más desarrollo, y sobre todo, fijar condiciones de estudio para así descartar una mala interpretación de los resultados.

1.2 Objetivos del trabajo de tesis.

1. Desarrollar metodologías teórico-experimentales que permitan una adecuada evaluación de equipos termográficos. Principalmente, definir condiciones de calibración, puesta en operación, y procedimientos de uso de equipos termográficos en aplicaciones médicas.
 - Construir un procedimiento de evaluación y/o comparación entre técnicas de termografía experimental y los modelos teóricos propuestos en la literatura.

2. Desarrollar técnicas de análisis novedosas en el espectro infrarrojo. En particular, el procesamiento de imágenes térmicas superficiales con el fin de determinar la intensidad de la fuente de calor a diferentes profundidades de objetos (termografía de seguimiento del calor).
 - Definir el flujo de calor en las superficies de los objetos mediante técnicas de termografía convencionales (estado estacionario) y no convencionales, por ejemplo, la técnica de termografía dinámica de uso potencial en aplicaciones médicas.

1.3 Antecedentes

1.3.1 Condiciones de salud actuales, su atención, y perspectivas de futuro.

El melanoma es uno de los tipos de cáncer de piel con mayor incidencia a nivel mundial, teniendo tasas de incremento anual que superan a otros tipos de cáncer, afectando principalmente a personas entre 25 y 50 años [1]. Esta variante de cáncer se caracteriza por tener una rápida y agresiva tasa de metástasis hacia otros tejidos, tales como pulmones e hígado; su diagnóstico en etapas tempranas juega un papel crucial en la supervivencia de las personas, ya que su mortalidad aumenta en función de la profundidad, tamaño y evolución del tumor [2] [3]. Actualmente, la técnica de diagnóstico aceptada y con mayor uso en la clínica es la inspección visual (ABCDE por sus siglas en inglés, *Asymmetry, Border, Color, Diameter and Evolution*) para clasificar el melanoma según su simetría, bordes, color, diámetro y evolución [3]. Desafortunadamente, la posibilidad de que exista un diagnóstico erróneo es bastante alta debido a que el estudio se basa en el ojo clínico del médico, un rasgo muy variable.

Otro de los tipos de cáncer más comunes y mortales alrededor del mundo es el cáncer de mama, cuya incidencia en 2012 fue de aproximadamente 1.7 millones de casos nuevos, con 521 900 muertes reportadas [4]. Al igual que en el caso del melanoma, entre más temprano se detecte, más probabilidades tienen las personas de sobrevivir; el diagnóstico en este caso corre principalmente por técnicas estandarizadas como la ultrasonografía, la resonancia magnética, y sobre todo, la mastografía [2] [5]. En esta última, se presenta un riesgo al poder incluso desarrollar algún tipo de daño secundario, esto debido a la radiación ionizante empleada para el funcionamiento del equipo. Razón por la cual otro tipo de técnicas se han estado desarrollado en los últimos años, buscando reducir los riesgos de inducir daños secundarios, y a la vez, cubrir el aumento en la demanda de atención médica especializada.

Los datos existentes en estos temas de salud pública son muy preocupantes, se está generando una gran coyuntura en la atención médica. En términos simples, cada día se requiere una mayor capacidad en la atención especializada, y no es posible cubrir dicha demanda mediante los procedimientos médicos convencionales [6] [7] [8]. Por tal motivo, tanto en el contexto de la investigación científica como en el caso de la atención médica, el interés se ha centrado en la prevención y la atención temprana de las enfermedades, con lo cual se espera reducir las cifras tan alarmantes de decesos [6]. En la actualidad, ya se implementan y se están desarrollando múltiples técnicas de diagnóstico para diferentes tipos de cáncer y padecimientos médicos,

certificadas o en investigación, los cuales pueden ayudar a cumplir tal cometido [9]. Para el caso particular del cáncer, se ha implementado una gran variedad de técnicas de diagnósticos, como ejemplo se pueden mencionar la de imágenes de perfusión por láser Doppler, la dermatoscopia, el ultrasonido, la resonancia magnética, *Deep learning* (por su expresión en inglés) [2], rayos X (mamografía) [5], microscopía superficial de la piel, el uso de inteligencia artificial en conjunto con imágenes digitales [10], y la tomografía por emisión de positrones (PET) [11]. La última técnica que se indica es más moderna y muestra un avance tecnológico en el campo de la medicina; sin embargo, su manejo y uso es limitado derivado de varios factores: la infraestructura necesaria para su implementación (equipo-humano), el costo que conlleva realizarla, y en general, su utilidad para el diagnóstico de un caso médico (ventajas y desventajas).

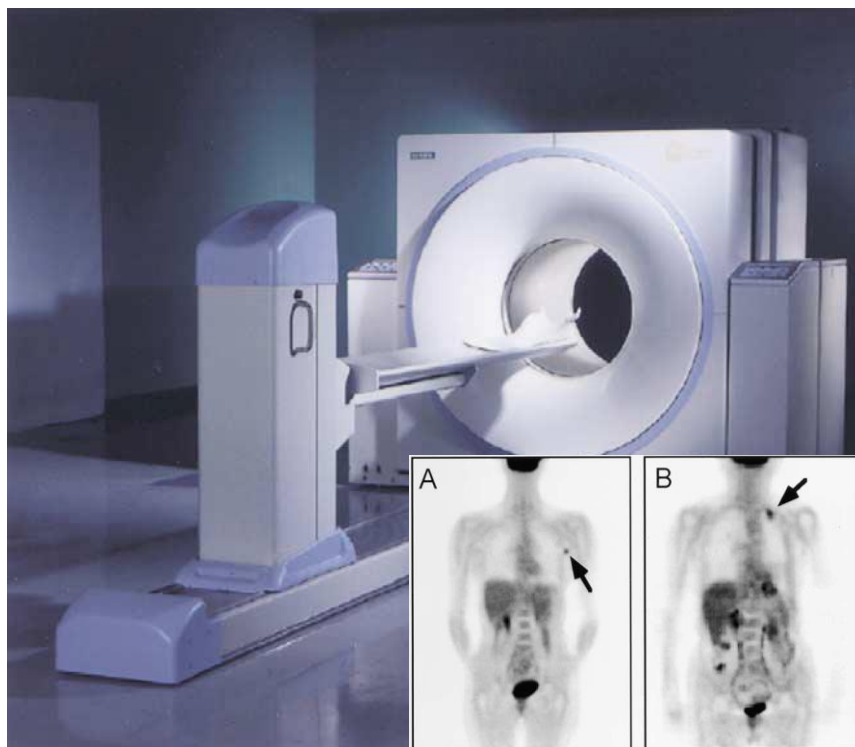


Figura 1.1: Tomografía por emisión de positrones, imágenes tomadas de Nutt [12] (2002).

La tomografía por emisión de positrones (PET) sin duda es un gran apoyo en el diagnóstico médico, por lo tanto, es imperativo conocer los fundamentos científicos que hacen posible su implementación. Esta técnica se basa en la detección específica de enfermedades (como el cáncer) mediante el uso de radio-marcadores, los cuales son capaces de interactuar con células que presentan trastornos metabólicos, señal inequívoca de un problema de salud (ver Fig. 1.1) [12]. Es simple, sin requerir de ningún procedimiento invasivo más que la inyección de un líquido de contraste, el

equipo puede localizar y resaltar los tejidos que están teniendo un comportamiento metabólico anormal, y por consiguiente, con ayuda de otras pruebas y una evaluación médica (criterio medico) se puede suponer la existencia de un tipo específico de enfermedad.

1.3.2 La actividad metabólica, una variable de interés en la detección de problemas de salud.

Como ya se indicó en el párrafo anterior, un aspecto básico en la detección de una enfermedad es el tipo de trastorno metabólico que genera. En términos médicos, la relación entre la enfermedad y los síntomas es la clave para el desarrollo de nuevas técnicas de diagnóstico. En el caso del cáncer, es importante entender que esta enfermedad proviene del mismo organismo. Los tumores cancerígenos son agrupaciones de un tipo de células que ya no responden a un proceso natural de desarrollo, se reproducen de forma indiscriminada y sin control, así como también, presentan una demanda metabólica muy superior a células sanas. Otro aspecto importante para resaltar de los tumores cancerígenos es su peculiar interconexión con el organismo, la cual le permite a dichos tejidos maximizar su consumo de nutrientes y una alta liberación de energía hacia su entorno (sistema de perfusión sanguínea anormal) [13]. Estas condiciones tan peculiares son la base bajo la cual trabaja la PET, haciéndola muy conveniente para la detección de tumores cancerígenos. No obstante, una alteración metabólica puede ser originada por otro tipo de enfermedad. En consecuencia, es indispensable la interpretación de los resultados de un médico.

En la misma dirección a los fundamentos que permiten la implementación de la PET, existen otras técnicas de diagnóstico (en desarrollo y evaluación) que pueden ser empleados para la detección de enfermedades. Ejemplo de lo que se menciona es el estudio de la firma térmica como herramienta para definir si un tejido se encuentra enfermo, o sano. Un tejido enfermo no solo presenta un comportamiento metabólico anormal, también presenta un comportamiento térmico anormal, condición que se deriva de las emisiones de energía (calor) que no corresponden a un estado saludable (ver Fig. 1.2) [14] [15]. En general, todas las enfermedades que alteran el metabolismo también alteran el comportamiento térmico de los tejidos. Desafortunadamente, poder percibir dichos cambios es muy difícil ya que el sistema circulatorio es muy eficiente para regular la temperatura del organismo [16]. Por consiguiente, el uso de dispositivos de sensado térmico en medicina ha sido y será objeto de controversia, y la vez, su uso requiere de un análisis profundo para poder ser implementado en algún futuro.



Figura 1.2: Sistemas de análisis termográficos diferentes (izquierda y derecha), imágenes tomadas de [14] [15].

1.3.3 La importancia de la termografía en la evaluación de la actividad metabólica.

La actividad metabólica de un organismo y el comportamiento térmico de sus tejidos (firma térmica) guardan una estrecha relación. Se ha podido constatar que afectaciones tales como: la ruptura y/o desvío de un tabique nasal, problemas de circulación en venas principales, el deterioro de la circulación capilar en extremidades (causado por la diabetes), una mala evolución en cirugías, hematomas o derrames, y por supuesto, tejidos anómalos que emiten mucha energía, pueden ser percibidos mediante la implementación de sensado térmico en el espectro infrarrojo [17]. Indudablemente, llegar a las conclusiones antes mencionadas requirió de análisis y evaluación médica, y así, se pudo descartar malas interpretaciones.

En el caso de la detección de tumores cancerígenos, la implementación de técnicas de termografía es muy controversial, en particular, cuando se desea analizar tejidos que no están expuestos o cerca de la superficie de la piel. Tal incertidumbre se debe a que estas técnicas se sustentan en la detección de la radiación del cuerpo humano, donde la piel es el medio a través del cual se emite casi la totalidad de la energía [18] [19] [20]. Es común, para tejidos que se encuentran al interior de un organismo que el sistema de termorregulación enmascare la actividad tumoral, generando un pobre contraste al momento de evaluar la firma térmica en la superficie de la piel. El tema en cuestión es muy controversial también porque el uso de técnicas termográficas en el área médica presenta serios inconvenientes. A pesar de esto, existen ventajas que de este tipo de técnicas se emanan haciendo del estudio y

desarrollo de la termografía un asunto de enorme interés [21] [22]. Entre las ventajas más notables se pueden mencionar que esta técnica no es invasiva, los dispositivos de medición son fácilmente manipulables, no produce dolor o afección alguna en los pacientes, tiene el potencial de uso masivo, y sobre todo, bajo el criterio médico se espera que los resultados puedan ser asociados a algún tipo de neoplasia [23] [24]. Adicionalmente y de la misma forma que para el caso de otras técnicas de diagnóstico, existen más aplicaciones en el área médica donde la termografía puede ser útil. Por ejemplo, en la medición indirecta de la actividad metabólica, en el diagnóstico de enfermedades autoinmunes, en la evaluación del flujo sanguíneo, en la evaluación del efecto de ciertos medicamentos, etc. [25].

En resumen, la literatura sobre aplicaciones médicas de termografía se ha orientado en mayor parte a estudios validados mediante protocolos con pacientes [2] [25] [26] [14] [11] [27]. Además, otros trabajos han sido llevados a cabo mediante datos clínicos previamente recolectados [18] [23] [28], o bien, simulaciones numéricas [3] [29] [30] y uso de arreglos experimentales [5] [31]. Para el último caso, dichos arreglos consisten en la fabricación de tejidos artificiales con propiedades homogéneas donde se implantan fuentes generadoras de calor en su interior (tumor). En este sentido, las temperaturas obtenidas mediante los sensores termográficos son de superficies bien definidas, las cuales se evalúan previamente. Este procedimiento simula las condiciones básicas que se presentan en los casos clínicos, y en paralelo, se conocen y/o controlan las variables de estudio, tales como: energía generada, área de estudio, homogeneidad de la muestra, etc. Por lo tanto, estos esquemas experimentales son de gran utilidad tanto en la generación de conocimiento fundamental, como para el desarrollo de protocolos de calibración y/o evaluación de sistemas termográficos para aplicaciones médicas.

Como aspecto fundamental, las técnicas termográficas se basan en la evaluación de imágenes infrarrojas de la superficie de los tejidos. Aquí, al presentarse algún tipo de isquemia, o en su defecto, al existir algún tipo de tejido maligno, se espera la generación de alteraciones y/o distorsiones en la firma térmica [32]. Esta condición se asocia a una sobre generación de energía (metabolismo descontrolado en tejidos cancerígenos) acompañado de una mala difusión del calor en las zonas circundantes al tejido afectado [33] [34]. Por lo tanto, es fácil suponer que la forma de la estela térmica depende en gran medida de la interacción irregular entre las secciones de tejido afectado y su entorno.



Figura 1.3: Ejemplo de fotografía infrarroja de una mano. Las zonas brillantes son regiones de mayor temperatura que las zonas oscuras (firma térmica).

1.3.4 ¿Qué es la firma térmica?, ¿qué representa?, y ¿qué relación guarda con las formulaciones teóricas existentes?

Los sistemas termográficos han evolucionado rápidamente, como se puede constatar en la literatura [13] [35]. Sin embargo la adquisición de imágenes térmicas no puede trascender más allá de la superficie (o sea, sensar el interior del tejido). Por eso el uso y desarrollo de modelos teórico-numéricos ha sido indispensable en el contexto de la evolución de tales sistemas, complementándolos y validándolos [23] [26] [36] [37] [38] [39] [40]. Actualmente, la utilización de modelos teóricos para el desarrollo de técnicas termográficas se ha generalizado, incorporándose múltiples modelos matemáticos [41] [42]. Además, se han realizado evaluaciones donde se analizan las características particulares de los tejidos, ejemplo de esto es el caso del calor metabólico o de la perfusión sanguínea [43] [2]. En el caso particular de la existencia de tumores cancerígenos dentro de tejidos sanos, también se han analizado sus propiedades, tamaño, localización, profundidad, etc. [44] [45] [46] [47] [48].

En el ámbito teórico-numérico, los esquemas de estudio de los sistemas termográficos se pueden catalogar en dos grandes grupos. En el primero se engloban las técnicas convencionales o de termografía de estado estacionario [23]. Aquí, la evaluación del contraste de la firma térmica del tejido (campo de temperatura de la superficie) es el dato más importante; por consiguiente, tanto más grande son las variaciones de la temperatura de la superficie, más efectiva resulta ser la técnica (ver Fig. 1.3). Sin embargo, este tipo de técnicas adolece de buena interpretación cuando las lesiones y/o tejidos malignos se encuentran muy profundos, ya que como se

mencionó líneas antes sus efectos quedan enmascarados por el transporte de calor del sistema circulatorio que actúa como un sistema de termorregulación [43].

Por otra parte, existe otro grupo de técnicas termográficas que presentan una mayor sensibilidad, estas son conocidas como técnicas dinámicas o activas, las cuales se basan en procesos de estimulación térmica, y se evalúan las transiciones de la temperatura en la superficie de los tejidos [49]. Es claro, derivado de condición tan particular que se presenta cuando existen isquemias y/o tejidos malignos (perfusión y generación de energía térmica), se puede inferir que la propagación del fenómeno térmico es más rápida, hasta en varios órdenes de diferencia. Por lo tanto, es de interés el desarrollo de estándares de calibración y modelos teóricos-numéricos, los cuales puedan ser útiles para una correcta evaluación de sistemas termográficos de este tipo, más aún, si se supone que dichos estándares no son concluyentes para el caso de los procedimientos convencionales (termografía de estado estacionario).

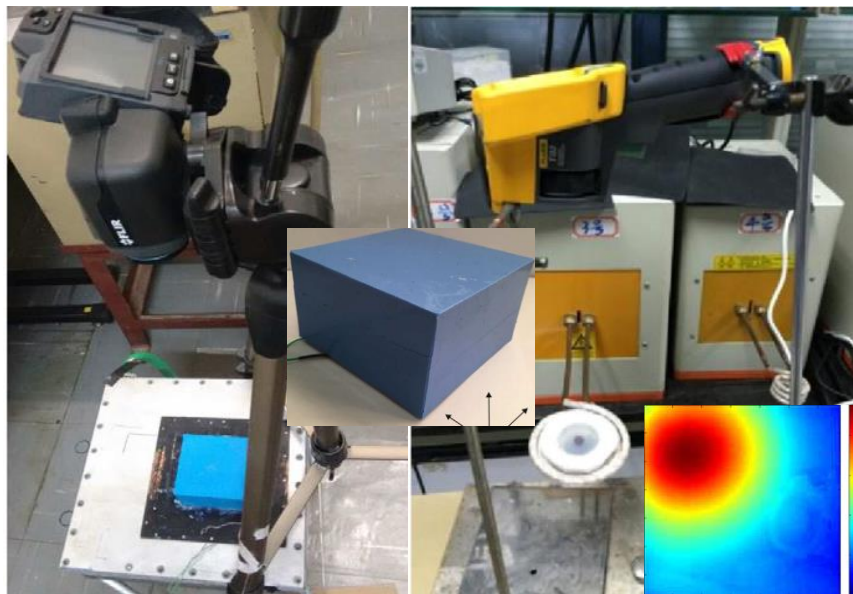


Figura 1.4: Evaluaciones experimentales de técnicas termográficas en laboratorio, imágenes tomadas de [5] [31].

1.3.4.1 Esquemas de evaluación de laboratorio (análisis termográfico con tejidos artificiales).

En el caso particular de evaluaciones de sistemas termográficos en laboratorio, la información existente en la literatura científica es muy limitada [5] [31]. Poder contar con patrones de referencia y/o calibración de estos sistemas es prácticamente imposible. Por consiguiente, existe una gran separación entre el conocimiento

fundamental que gobierna el funcionamiento de la termografía, con las aplicaciones que se quieren desarrollar para el área médica. Hoy en día, solo se han podido documentar dos trabajos experimentales donde se busca evaluar el funcionamiento de sistemas termográficos bajo un contexto de médico [5] [31] (ver Fig. 1.4). Aquí se utilizaron dispositivos artificiales que simulan la condición de un tejido maligno dentro de un tejido sano con el fin de poder determinar si el sensor infrarrojo es capaz de detectar el tamaño y localización de la fuente anómala de energía (fuente artificial de calor). El trabajo de Azevedo et al (208) y Ma et al. (2014) documentan una propuesta de estudio teórico de la transferencia de calor dentro de los dispositivos, incorporando modelos no tan desarrollados para predecir dicho fenómeno. En general, los resultados de estos trabajos ilustran que para una cierta energía emitida por la fuente, la posición del objeto está determinada por la máxima temperatura registrada en la superficie de estudio, lo cual no necesariamente cuantifica la energía que el objeto emite, ni se toma en cuenta la transición del fenómeno en el tiempo (evaluación rigurosa de la técnica dinámica). Por consiguiente, aunque las imágenes son muy ilustrativas, estas no permiten estandarizar el proceso de evaluación, condición básica para poder atender las potenciales limitaciones e inconvenientes de los sistemas termográficos.

1.4 Fundamentos de la transferencia de calor en tejidos biológicos.

Poder plantear una evaluación rigurosa de sistemas termográficos requiere la definición de múltiples factores. En primera instancia se deben fijar los alcances del estudio al momento de implementar la técnica, ya sea considerando solo la condición de estado estacionario, o bien, instrumentando otro tipo de evaluación como la transitoria (técnica dinámica) [50] [51] [52]. De igual manera, también se tiene que considerar el entorno de estudio donde se utilizará, el cual en el contexto médico implica sistemas biológicos [53]. Claramente, trasladar una técnica térmica al ámbito médico no es tan simple, ya que hay muchos factores y condiciones imperantes en dichos sistemas, tales como: la heterogeneidad de los tejidos biológicos, la actividad biológica o más conocida como metabolismo, los sistemas de termorregulación, etc. En la misma dirección, derivado de la naturaleza de los fenómenos térmicos, construir un esquema de evaluación de estas técnicas implica de antemano conocer los fundamentos científicos que las gobiernan. En este caso, poder conceptualizar el fenómeno de transferencia de calor en sistemas biológicos es muy complejo, puesto que, cada elemento que integra a dichos sistemas responde al fenómeno térmico de diferente manera.

Actualmente, existe un sin número de propuestas teóricas en el tema de la transferencia de calor en tejidos biológicos, desde una conceptualización simplificada de la heterogeneidad de los tejidos (modelos de medio continuo), pasando por una consideración de estos como un medio poroso, hasta el punto donde se busca replicar las estructuras y funcionalidad de los diferentes elementos que integran a dichos tejidos (ver Fig. 1.5).

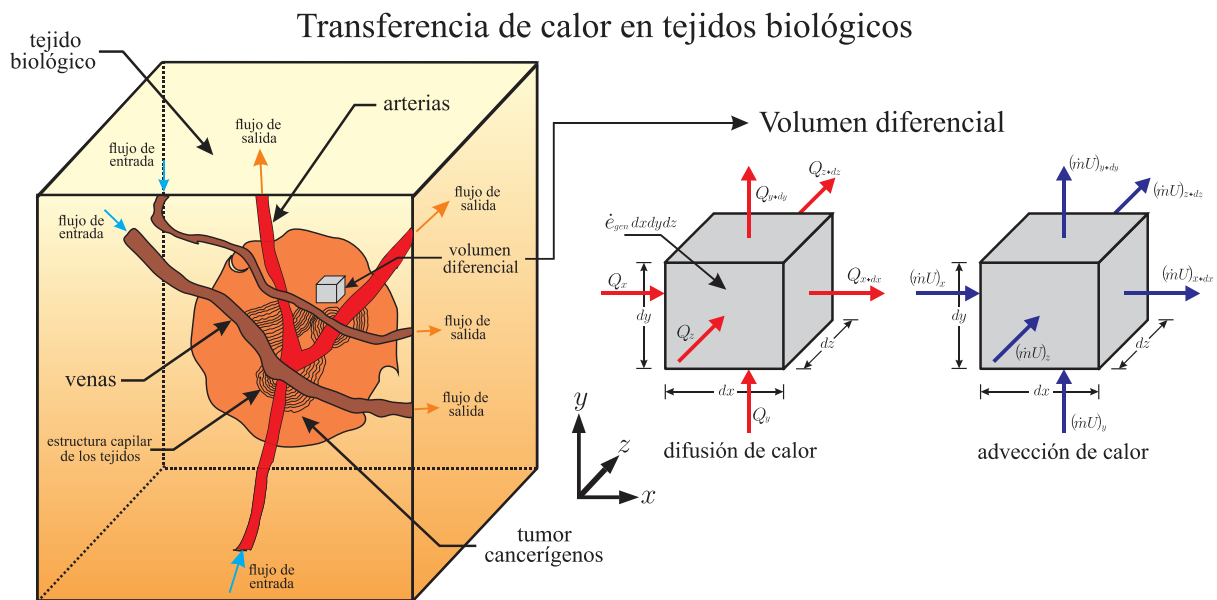


Figura 1.5: Esquema de los procesos de transferencia de calor en tejidos biológicos (difusión y advección de calor).

Quando se asume la estructura característica de los tejidos biológicos, donde existen venas, arterias, conexiones capilares, diferentes tipos de tejido (sano o tumor cancerígeno), etc., es fácil pensar que el entorno de estudio representa la interacción de elementos solidos con fluidos transitando a través de estos. Por lo tanto, se puede inferir que la transferencia de calor en sistemas biológicos está gobernada por la convección de calor, donde parte de la energía térmica se transporta mediante la difusión de calor (contacto) entre los tejidos, y otra parte se transfiere por advección, la cual se deriva del movimiento de los fluidos a través de los diferentes tejidos que integran al sistema biológico. Tomando en cuenta el modelo de conservación de la energía que indica que:

$$\sum Q_{in} - \sum Q_{out} + \sum Q_{gen} = \frac{\partial}{\partial t}(mU) \quad (1.1)$$

la suma de la energía que entra en un sistema, menos la suma de la energía que sale, más la suma de la energía que se genera (convertida de otro tipo de energía), es igual al cambio de la energía interna del sistema en función del tiempo. Después de sustituir y simplificar cada término de la ecuación (1.1), esto siguiendo los esquemas de volúmenes diferenciales ilustrados en la figura 1.5, se obtiene la siguiente ecuación.

$$\frac{\partial}{\partial t}(mU) = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_x)dx + \frac{\partial}{\partial y}(Q_y)dy + \frac{\partial}{\partial z}(Q_z)dz \right] + \dot{e}_{gen}dxdydz - \left[\frac{\partial}{\partial x}((\dot{m}U)_x)dx + \frac{\partial}{\partial y}((\dot{m}U)_y)dy + \frac{\partial}{\partial z}((\dot{m}U)_z)dz \right] \quad (1.2)$$

Aquí, se pueden apreciar dos variables que son en el mejor de los casos difíciles de cuantificar, una de estas es el flujo de calor ($Q = q''A_{transf}$), y la otra, es un término que define la cantidad de energía transferida debido al movimiento del fluido de un punto a otro ($\dot{m}U$). Para poder evaluar ambas variables es necesario definir las en términos de la temperatura del sistema, la cual es una variable de sentido directo. Con ayuda de la Ley de Fourier, así como también, utilizando la relación que guardan la energía interna (U) y la temperatura del sistema, se puede obtener una ecuación de conservación de energía en términos de la temperatura, procedimiento que se describe a continuación.

1.4.1 Ley de Fourier.

En el primer caso, la ley de Fourier es una expresión empírica que define la relación entre los flujos de calor que se transfieren por difusión, y los gradientes de temperatura que los generan. Explícitamente, la ley dice que “el flujo de calor que se genera de un punto a otro es directamente proporcional a la diferencia de temperatura existente entre ambos puntos, e inversamente proporcional a la separación que se tiene” (ver Fig. 1.6) [54]. Por lo tanto, la ley de Fourier enmarca una proporcionalidad, condición que cambia a igualdad al agregar una propiedad de transporte, que para el caso del fenómeno de transferencia de calor, esta propiedad es conocida como conductividad térmica (k). Dicha propiedad depende de las características del medio por donde transita el calor. Por ejemplo, para el caso de los metales que son buenos conductores del calor, estos cuentan con una alta conductividad térmica; caso contrario, materiales tales como el poliuretano y/o poliestireno tienen una baja conductividad térmica, ya que son considerados muy buenos aislantes térmicos.

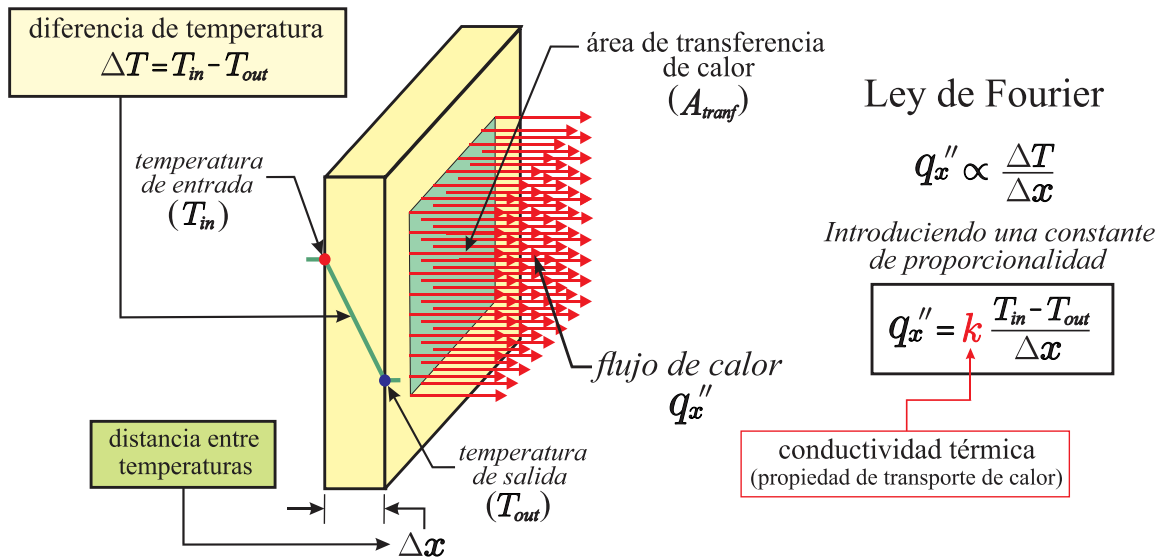


Figura 1.6: Ley de Fourier, relación entre el flujo de calor y la diferencia de temperatura en un sistema en estudio.

En el contexto de completar la definición del calor transferido a través de una superficie, los flujos de calor expresados mediante la ley de Fourier,

$$q_x'' \propto \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad q_x'' = k \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (1.3)$$

tiene que ser multiplicada por la correspondiente área de evaluación. Por consiguiente, el flujo de calor asociado a un eje coordenado (cartesianas), depende del área que forma los otros dos ejes coordenados, esto al considerar el volumen diferencial que se ilustra en la figura 1.5.

$$Q_x = k \frac{\Delta T}{\Delta x} A_{tranf} \quad \rightarrow \quad Q_x = k \frac{\Delta T}{\Delta x} dydz. \quad (1.4)$$

1.4.2 Relación entre la energía interna y la temperatura de un sistema.

Por otra parte, para definir la energía interna de un sistema en términos de su temperatura, se requiere de introducir otra propiedad que los pueda relacionar. En este caso, a la propiedad que mide la cantidad de energía térmica necesaria para que una unidad de masa cambie un grado de temperatura se le conoce como calor específico (c_p) [54] [55].

$$\dot{m}U \propto \rho u A_c T \quad \rightarrow \quad \dot{m}U = \rho u A_c c_p T \quad (1.5)$$

Esta propiedad es muy particular de cada elemento, sustancia, etc. Es simple, siguiendo la expresión de la ecuación (1.5), valores altos de calor específico indican que los elementos y/o sustancias son buenos portadores de energía (acumulan mucha energía), caso contrario, para valores pequeños de esta propiedad, las sustancia no pueden almacenar mucha energía y son muy sensibles al cambio en su temperatura.

Al implementar la ley de Fourier y la relación antes citada, la ecuación de convección de calor cambia a la siguiente expresión (ver ecuación (1.6)). Aquí, tanto el calor transferido por difusión, como el que se transporta por advección, están definidos en términos de la temperatura del sistema.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(c_p T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} - \rho \left(u \frac{\partial}{\partial x}(c_p T) + v \frac{\partial}{\partial y}(c_p T) + w \frac{\partial}{\partial z}(c_p T) \right). \quad (1.6)$$

La ecuación anterior se obtiene después de varios procedimientos algebraicos, en donde se introdujeron previamente las áreas de transferencia para cada uno de los ejes coordenados (definidas en el elemento diferencial de la figura 1.5), y también, se consideró la correspondiente ecuación de conservación de masa [55].

1.4.3 Modelos de transferencia de calor en tejidos biológicos.

Al considerar la estructura heterogénea de los sistemas biológicos en la construcción de modelos teóricos, es evidente que estudiar la transferencia de calor en estos sistemas mediante la ecuación de convección es muy complejo. Cada elemento que integra a los tejidos responde de manera diferente al proceso térmico, aspectos tales como la actividad metabólica, o la perfusión sanguínea, hacen de cada sección de tejido un ente térmico diferentes, y por tanto, un elemento que requiere ser evaluado de forma independiente. Para reducir la complejidad en este tipo de estudio teórico, se han propuesto una gran variedad de modelos teóricos simplificados. Dichos modelos guardan un enfoque similar, tratan de interpretar la heterogeneidad de los sistemas biológicos en un contexto general, con lo cual, se ha intentado promediar las características que definen a los entes biológicos. Por ejemplo, se han propuesto modelos donde se asume que las temperaturas de los tejidos y el fluido que transita en estos son la misma; en consecuencia, se puede inferir que la perfusión sanguínea no interviene en el proceso de transferencia de calor. Esta condición no necesariamente es correcta, y solo prevalece cuando la perfusión en el tejido es casi

nula o despreciable (sección externa de la piel) [56]. Para el caso contrario, también existen otros modelos donde la temperatura arterial (T_{ar}) se asume diferente a la del tejido (T_c), y además, se considera que no se ve afectada durante la interacción con este. Por consiguiente, se infiere en este caso que el sistema de termorregulación es un sumidero de calor (modelo de Pennes, ecuación (1.7)) [54] [57] [58]. Cabe mencionar, la hipótesis anterior es la más utilizada al momento de modelar la transferencia de calor en tejidos biológicos, y está representada por las condiciones que se ilustran en la siguiente figura.

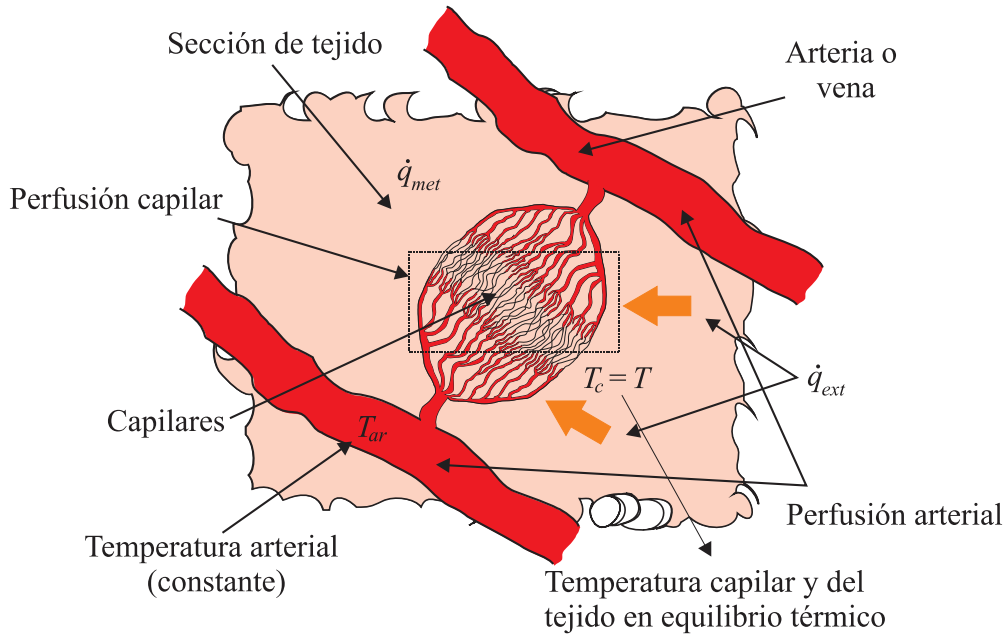


Figura 1.7: Esquema simplificado de la transferencia de calor en un sistema capilar de un tejido biológico, modelo teórico de Pennes [54].

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(c_p T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \omega_b \rho_b c_b (T_{ar} - T) + Q_m \quad (1.7)$$

Como se detalla en la figura 1.7, ciertas condiciones hacen que el modelo de Pennes sea congruente para el estudio de transferencia de calor en tejidos biológicos. Primeramente, se requiere que el sistema de termorregulación sea muy fuerte, capaz de retirar toda la energía generada por el metabolismo sin que existan cambios apreciables en la temperatura arterial (T_{ar}). También, es necesario que el sistema sea lo suficientemente homogéneo (estructuras capilares en un orden o más pequeñas que el tamaño del tejido) para poder promediar los efectos de perfusión y metabólicos. Al reflexionar los supuestos en ambos ejemplos teóricos, es fácil comprender que los modelos propuestos hasta este punto conllevan notables simplificaciones, las cuales

permiten emprender los estudios teóricos. Bajo esta lógica, cada criterio empleado en la construcción de dichos modelos implica limitaciones en su utilidad. Lo anterior es recurrente en todos los modelos propuestos, esto debido a que la información de las propiedades de tejidos biológicos es muy limitada, y en algunos casos, procede de promedios obtenidos mediante secciones de tejidos altamente heterogéneos.

1.4.4 Ventajas y desventajas de la implementación de formulaciones teóricas.

Como ya se puntualizó en el párrafo anterior, la implementación de modelos teóricos para el estudio de la transferencia de calor en tejidos biológicos es muy incipiente. Aunque ya existe una vasta literatura sobre el tema, los modelos teóricos que se tienen y usan hoy en día son resultado de la simplificación de otros más complejos. En este sentido, su utilidad y/o ventajas se encuentran limitadas a entender los fundamentos que gobiernan la transferencia de calor en tejidos biológicos. Sobre todo, que diferencia existen entre la transferencia de calor en sistemas vivos (generan calor, se enfrían por si solos, son heterogéneos, etc.), en comparación con el caso tradicional de la transferencia de calor en sistemas convencionales (generación de calor homogénea, sin enfriamiento, sistema homogéneo, etc.). Claramente, los sistemas biológicos implican diferencias considerables al momento de ser modelados. Por consiguiente, se esperaría que el proceso de transferencia de calor muestre resultados con cambios notables, ya sea una mayor propagación de calor debido al sistema de termorregulación, o bien, una alteración muy característica de la temperatura cuando los tejidos presentan algún tipo de enfermedad. En el caso de las desventajas, es lógico pensar que la mayor de estas se debe a todas las simplificaciones que se asumen cuando se construyen los modelos teóricos, en particular, las que reducen un sistema biológico en algo muy semejante a un sistema convencional.

Por otra parte, también existe una gran desventaja cuando se desea realizar una comparación entre formulaciones teóricas y evaluaciones experimentales. Dadas las simplificadoras teóricas, poder interpretar y comparar evaluaciones experimentales con proyecciones teóricas es imposible. Esta condición es la responsable de que haya generado una gran separación entre los estudios y evaluaciones experimentales, los cuales se enfocan en la utilidad de la termografía como herramienta de sensado, con las diferentes propuestas teóricas que han tratado de explicar cómo se lleva a cabo la transferencia de calor en sistemas biológicos. Adicionalmente, es importante comentar que el uso de modelos teóricos presenta otra ventaja, o en contraparte, la implementación de evaluaciones experimentales implica una cierta limitación. Como ya se indicó, los sistemas termográficos no pueden trascender más allá de las

superficies, algo que el modelado teórico sí puede; en este sentido, los estudios teóricos permiten conocer que sucede dentro de los tejidos cuando se lleva a cabo la transferencia de calor (considerando que un mayor detalle se obtiene con modelos más completos). Esta característica del enfoque teórico es de gran importancia, en un futuro los modelos teóricos podrían ser útiles como una vertiente complementaria a los experimentos, condición que requiere sin duda muchas mejoras, tanto en el caso de los sistemas de sensado experimental, como en el desarrollo de nuevos y mejores modelos teóricos, o bien, la implementación de simulaciones de bajo modelos convectivos completos (super cómputo).

1.4.4.1 Modelos computacionales, alcances y/o limitaciones, su futuro en la implementación de nuevas técnicas termográficas.

Poder realizar evaluaciones teórico-numéricas de sistemas altamente complejos se ha vuelto una realidad. Hoy en día, las capacidades de procesamiento de datos crecen exponencialmente, y dan paso a estudios y/o evaluaciones que años atrás parecerían imposibles. Como ya se ha mostrado, las limitantes en la implementación de sistemas termográficos en el área médica se derivan de la complejidad de los sistemas biológicos. Sin duda, uno de los retos importantes en un futuro es la construcción de mejores instrumentos (sensores termográficos), con mayor sensibilidad y capacidad de adquisición de datos. Tal cometido tiene una lógica irrefutable, dispositivos más competentes permiten una mejoría en la ejecución de los procedimientos; no obstante, los antecedentes también muestran otras vertientes de mejora. En la actualidad, se sabe que el uso directo de sensores termográficos en pacientes no necesariamente es una práctica adecuada, esto porque no se puede predecir de forma clara que está pasando al interior de las personas. En consecuencia, la comprensión de los fenómenos térmicos en sistemas biológicos es esencial, más aún, al tener que enfrentar la mayor limitante de la termografía, la cual como se dijo está ligada a su naturaleza física (el sensado no trasciende las superficies).

Parece evidente el camino a seguir, un avance en las técnicas termográficas depende de dos factores primordiales: 1) mejores y más competentes instrumentos de evaluación, y 2) una mejor comprensión y desarrollo de los fundamentos teóricos que gobiernan la transferencia de calor en tejidos biológicos. Para el segundo caso, los avances en las capacidades de cómputo hacen y/o harán posibles avances sustanciales en el uso de nuevas técnicas termográficas. Se piensa que el uso conjunto de sensores infrarrojos y sistemas computacionales de alta capacidad, permitirá poder estudiar el comportamiento térmico de tejidos biológicos, tanto de

forma externa caracterizando la firma térmica, como interna evaluado el calor generado por los elementos que integran los tejidos biológicos.

1.5 Propuesta de trabajo de tesis.

Bajo este camino dual y novedoso, se presenta en el siguiente trabajo de tesis, el cual busca fincar las bases en la implementación conjunta de técnicas termográficas experimentales (convencional y dinámica), y de modelos teóricos que pueden brindar mayor información dadas sus características. Aquí, se parte de la condición más fundamental de la transferencia de calor, esto con el fin de poder empatar ambos esquemas de estudio, experimental y teórico [5][31][54]. Bajo esta condición, se espera evitar la separación recurrente entre la propuesta experimental y la teórica, algo que se observa en la literatura y no permite una comparación adecuada (crear un estándar de calibración y evaluación) [14][31].

La tesis sigue los dos principales objetivos que se han enumerado, por consiguiente, aparte del riguroso análisis y comparación entre evaluaciones experimentales y teóricas, de igual manera se precisa una evaluación de las técnicas termográficas mediante post-procesamiento de imágenes en tiempo y espacio, con lo cual, se espera poder construir un criterio de evaluación de la firmas térmicas de superficies, esto en función de los proceso de transferencia de calor presentes al interior de los objetos (tejidos artificiales). Aquí, no solo se busca poder caracterizar la temperatura de las superficies, además se busca poder evaluar la energía que fluye a través estas en tiempo y espacio. Para lograr lo anterior, se ha desarrollado un procedimiento que permite la caracterización de la temperatura superficial de dispositivos (tejido artificial) y su entorno, información que se obtiene mediante una cámara termográfica y termistores ubicados en puntos específicos. Por lo tanto, el arreglo experimental hace posible estimar la cantidad de calor emitida por la fuente generadora (resistencia eléctrica), sin importar que dicha fuente se encuentre bajo capas de otros materiales (PDMS). En este contexto, el presente trabajo es un primer acercamiento para obtener un mecanismo de evaluación de la componente de profundidad en sistemas termográficos.

1.5.1 Estructura de la tesis.

La estructura del trabajo de tesis consta de seis capítulos y las correspondientes conclusiones. En el **primero** de estos se integran la motivación y objetivos de la tesis,

así como también, los antecedentes que preceden al presente trabajo de investigación y desarrollo.

En el **segundo** capítulo se lleva a cabo el planteamiento del estudio, aquí, se conceptualiza el esquema de evaluación desde los fundamentos más básicos del conocimiento. Primeramente, se ilustra el modelo de estudio (dispositivo de análisis) con todas sus características y modelos teóricos que lo gobiernan, y posteriormente, se lleva a cabo un análisis de escala para poder determinar las variables de estudio y su importancia, esto con el fin de poder implementar y/o delimitar las metodologías de estudio, tanto teóricas como experimentales.

En el **tercer** capítulo se presenta una evaluación teórico-analítica del modelo de estudio planteado en el capítulo anterior. Para este caso, se toman en consideración los resultados del análisis de escala, los cuales permiten obtener ecuaciones simplificadas que gobiernan el estudio propuesto. Después de adimensionalizar y resolver dichas ecuaciones, al final del capítulo se presenta las soluciones analíticas del comportamiento de la temperatura para dos casos de estudio, la condición de estado estacionario (termografía convencional) y transitoria (termografía dinámica) del fenómeno térmico, respectivamente.

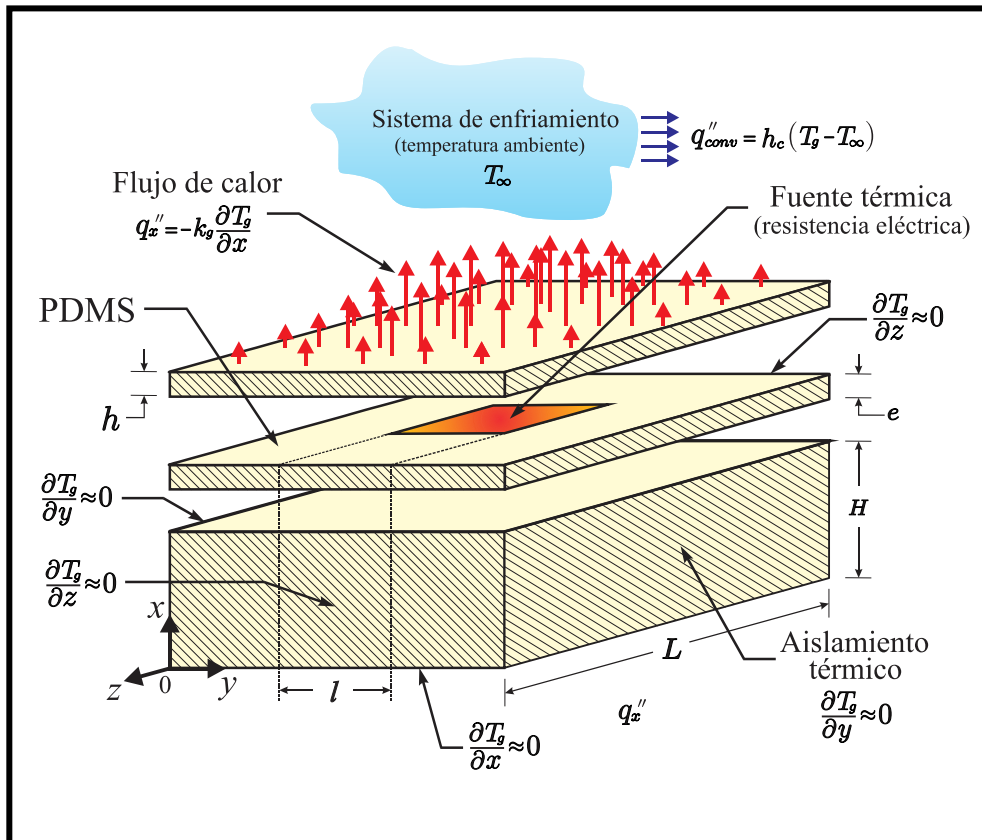
En el **cuarto** capítulo se ilustra la metodología de estudio teórico-numérica para la evaluación del modelo de estudio. Aquí, se detallan los procedimientos de discretización empleados para construir el algoritmo de fragmentación de la malla. Este algoritmo utiliza tanto volumen como diferencias finitas, el primer esquema se utiliza para fragmentar el modelo de estudio, esto con el objetivo de poder diferenciar cada elemento que integra dicho modelo (PDMS o resistencia eléctrica). Por otra parte, el segundo esquema se emplea para refinar en cálculo de cada elemento fragmentado, con lo cual, en vez de tener una evaluación de cada volumen diferencial, se tiene un número igual de evaluaciones al mallado empleado por el enfoque de diferencias finitas.

En el **quinto** capítulo se muestra el procedimiento de construcción de arreglo experimental, y además se explica la metodología experimental empleada para poder evaluar los modelos de estudio (tejidos artificiales). Para el primer caso, se detalla cómo y de que materiales fueron construidos los diferentes especímenes para el estudio. Con el fin de evaluar los efectos de profundidad, se decidió la construcción de cuatro tejidos artificiales con diferentes espesores de encapsulamiento de las resistencias eléctrica. De igual manera, se construyó un entorno de evaluación controlado, donde se implementaron barreras para evitar reflejos, control de

temperatura, censado en diferentes puntos (datos para el estudio y de control), suministro de energía, etc. En el caso de la metodología de estudio, en este capítulo se detalla cómo se realiza la adquisición de datos experimentales, y sobre todo, el post-procesamiento de estos para poder obtener los resultados experimentales.

En el **sexto** capítulo se presentan los resultados más relevantes, y se realiza la correspondiente discusión de estos, se hacen las comparaciones pertinentes entre ambas metodologías de estudio, experimental y teórica. Aquí, se muestran como los procedimientos teóricos pueden ser útiles para complementar técnicas experimentales. Además, se ilustran las características particulares que definen la formación de la firma térmica en superficies de estudio, tanto en el contexto de estado estacionario, como su correspondiente versión dinámica.

Finalmente, el trabajo se complementa con las conclusiones obtenida a través del presente trabajo de tesis, así como también, la visión de trabajos futuros que podrían ser emprendidos.



CAPITULO 2

Planteamiento del modelo de estudio

2 Planteamiento del modelo de estudio.

Aunque la mayoría de la literatura científica relacionada con la transferencia de calor en tejidos biológicos emplea el modelo de Pennes, el cual considera las aportaciones de calor asociadas a la perfusión sanguínea, y de la generación de calor mediante el metabolismo [2] [26] [14] [29]. Para el presente trabajo de tesis se decidió emplear un modelo de estudio más sencillo de evaluar y analizar (utilizando tejidos artificiales), tanto en su forma experimental como teórica (ver Tabla 2.1). Esta decisión tiene como finalidad poder validar con un mayor rigor el empleo de sistemas termográficos, y así, lograr una estandarización de este tipo de técnicas para futuros trabajos, esto bajo condiciones más elaboradas de estudio. De igual manera, el procedimiento aquí propuesto busca un mayor acercamiento al uso clínico de la termografía, la cual se cree puede ser un método de detección temprana para el caso de ciertas enfermedades, siendo el cáncer de piel (melanoma) uno de los objetivos más prometedores.

Tabla 2.1: Ecuaciones para conducción de calor en diferentes medios.

Ecuación de Pennes para conducción de calor en tejidos biológicos [23]	Conducción de calor en sólidos considerando con término de generación de energía [31]
$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \omega_b \rho_b c_b (T_{ar} - T) + Q_m$	$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + Q'''$

Para el caso del estudio de los fenómenos térmicos, la presencia de un tumor maligno en un tejido se puede entender como un problema de transferencia de calor, donde se tiene una fuente de generación de energía (térmica) interna, y a la vez, se presenta un flujo de calor que se propaga hacia los alrededores de esta. Además, si se considera que la fuente se encuentra cerca o sobre la superficie (melanoma) [20], es factible pensar en un flujo de calor de dicha superficie hacia el entorno que lo rodea, y por tanto, una firma térmica en la superficie del tejido muy ligada con la actividad térmica de la fuente ya mencionada. Lo anterior es la razón del porque la termografía es considerada una potencial herramienta de detección, no obstante, dentro del cuerpo humano existen diversos procesos de equilibrio llamados homeóstasis, uno de ellos es el equilibrio térmico, el cual se logra a través de mecanismos como la sudoración, sumado a la apertura y cierre de vasos sanguíneos (vasodilatación y vasoconstricción) [59]. Estas condiciones enmascaran y complican la interpretación

del fenómeno térmico en los tejidos, haciendo muy complicado su análisis cuando no se tiene un patrón de referencia.

Con el objetivo de concretar un patrón de referencia para el uso de sistemas termográficos en el contexto médico (como sistema de detección), se plantea un modelo de estudio teórico-experimental asumiendo ciertas características de los tejidos biológicos (tejido artificial), y omitiendo otras que complican este primer esfuerzo de comparación entre técnicas experimentales y proyecciones teóricas. Por ejemplo, se evitan las alteraciones debido a la aportación de la perfusión sanguínea, en este caso, el modelo de prueba es un sólido inerte que no cuenta con un sistema de termorregulación, solo tiene la interacción con el entorno a través de una de sus superficies (ley de enfriamiento de Newton) [55]. Además, el calor generado dentro del tejido no proviene del metabolismo (Q_m), lo cual se indica en el modelo de Pennes; para este caso, el calor (Q''') se introduce de forma artificial mediante una resistencia eléctrica que simula la existencia de un tumor maligno. Bajo tal condición, es importante mencionar que tanto las dimensiones como las propiedades eléctricas del dispositivo son bien conocidas, condición que es indispensable para tener un buen control en la generación de calor dentro del tejido artificial. Por otro parte, el dicho tejido ha sido concebido como un cuerpo homogéneo y con propiedades muy estable, para lo cual, se dispuso de un material como el polidimetilsiloxano (PDMS) que cumple tales características, y por tanto, brinda las mejores condiciones para el análisis. Además de las propiedades ya conocidas proporcionadas por las hojas de datos, se obtuvieron las propiedades térmicas del calor específico y conductividad térmica de la resistencia térmica mediante experimentación (ver sección 5.1.1.1), datos fundamentales para poder llevar a cabo el estudio.

2.1 Modelo de estudio

El modelo propuesto para el estudio es una estructura tridimensional compuesta por dos elementos (ver Fig. 2.1). El primero, una resistencia eléctrica (simula un tumor) la cual se encuentra posicionada en la parte central de la estructura, y además, está definida por una ecuación teórica que asume la generación de energía térmica por efecto Joule. Por otra parte, la otra sección de la estructura está representada por el tejido artificial (PDMS), que envuelve y/o encapsula a la fuente térmica. En este caso, el modelo teórico solo representa la transferencia de calor, dado que no existe generación de calor en esta sección. Por simplicidad, el modelo de estudio se ha segmentado en veintisiete bloques, ordenados en tres capas, todos ellos de un mismo material y de diferentes dimensiones a excepción del bloque central, el cual no comparte las mismas propiedades térmicas y físicas a los otros elementos. Cada una

de las tres capas tiene un espesor diferente, para el caso particular del presente trabajo, la última capa es de interés ya que representa la profundidad a la cual se encuentra encapsulada la fuente de térmica.

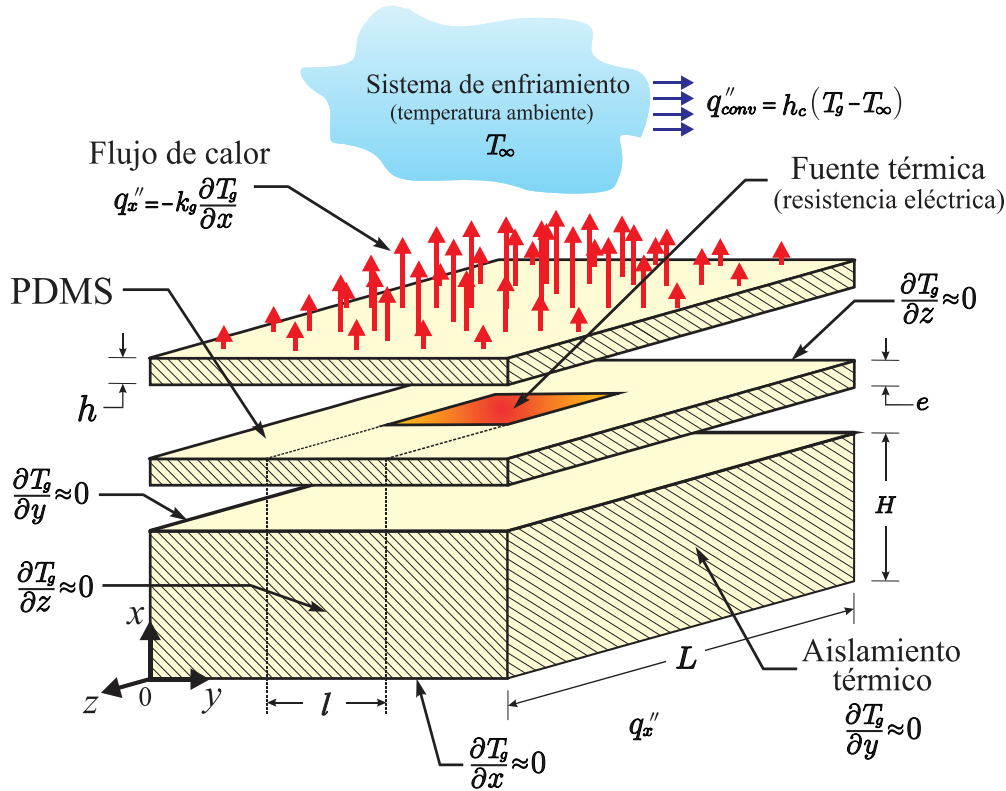


Figura 2.1: Esquema del modelo de estudio.

Para construir de forma apropiada el dominio de estudio, las dimensiones de cada uno de los elementos del modelo se encuentran definidos por las longitudes L y l , y por los espesores H , e , y h , respectivamente. Además, debido a que el fenómeno en estudio es de tipo térmico, la variable fundamental a evaluar es la temperatura, esta se tiene que definir tanto en la región que comprende la resistencia eléctrica (T_r), como en las diferentes zonas que se asocian al PDMS (T_g). En este sentido, el estudio teórico requiere de la utilización de dos modelos de conservación de energía (térmica), uno que represente a la resistencia eléctrica (con generación de calor), y el otro que defina las diferentes zonas de PDMS, donde solo se lleva a cabo la difusión de calor. Bajo estos términos, los modelos matemáticos que gobiernan ambas regiones (el modelo de estudio) se encuentran definidos por las siguientes expresiones:

$$\nabla \cdot (k_r \nabla T_r) + Q''' = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_r c_{p,r} T_r), \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot (k_g \nabla T_g) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g c_p T_r). \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) es el modelo para la transferencia de calor en la resistencia eléctrica, y la ecuación (2.3) el modelo para el PDMS. El calor específico, la conductividad térmica, y la densidad de ambos componentes se encuentran definidos por c_p , k , y ρ , respectivamente. Aquí, el subíndice r define las propiedades de la resistencia eléctrica, y g las propiedades del PDMS. Por último, t es el tiempo de estudio y Q''' representa el término de generación de energía por efectos eléctricos, en lo cual, v_{ap} y R_e son el voltaje aplicado y la resistencia eléctrica, respectivamente (ver ecuación (2.3)).

$$Q''' = \frac{v_{ap}^2}{R_e l^2 e}. \quad (2.3)$$

Al desarrollar la ecuación (2.1) y sustituyendo la definición del término de generación de energía, se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_r \frac{\partial T_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_r \frac{\partial T_r}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_r \frac{\partial T_r}{\partial z} \right) + \frac{v_{ap}^2}{R_e l^2 e} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_r c_{p,r} T_r). \quad (2.4)$$

De igual forma, si se desarrolla la ecuación (2.3), la cual gobierna la transferencia de calor en el PDMS, se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_g \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_g \frac{\partial T_g}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_g \frac{\partial T_g}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g c_{p,g} T_g), \quad (2.5)$$

hasta este punto, ambas ecuaciones sumado a las condiciones de frontera que se ilustran en la figura 2.1, permiten evaluar de forma teórica la de transferencia de calor en el modelo de estudio propuesto.

2.2 Condiciones de frontera y de interfase.

Para definir las condiciones de estudio más apropiadas, el dominio de estudio (modelo) se encuentra aislado térmicamente en todas direcciones exceptuando la cara superior, por la cual, la energía generada por la resistencia se puede transferir hacia

el entorno siguiendo la ley de enfriamiento de Newton [23] [41] [54]. Por lo tanto, las condiciones de frontera que delimitan al dominio se encuentran representadas por:

$$\frac{\partial T_g}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T_g}{\partial x}\bigg|_{x=H+e+h} = -\frac{h_c}{k_g}(T_g - T_\infty), \quad \frac{\partial T_g}{\partial y}\bigg|_{y=0,L} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial z}\bigg|_{z=0,L} = 0.$$

De manera adicional, se puede asumir las condiciones de conservación de la energía y de continuidad del medio para el caso de las interfaces que comparten la resistencia eléctrica y el PDMS [42]. Dichas condiciones se ilustran mejor en la siguiente figura.

flujos de calor en la interfase (resistencia eléctrica-PDMS)

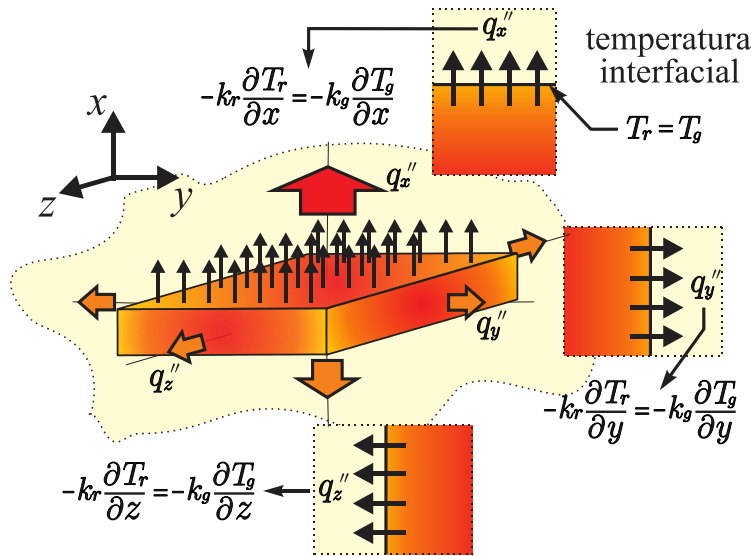


Figura 2.2: Representación esquemática de los flujos de calor en las interfaces de los dos elementos que integran el modelo de estudio (resistencia eléctrica-PDMS).

Siguiendo los esquemas de las figuras 2.1 y 2.2, las condiciones de interfase para cada una de las superficies donde se ponen en contacto la resistencia eléctrica y el PDMS, se encuentran definidas por las siguientes expresiones:

$$-k_g \frac{\partial T_g}{\partial x}\bigg|_{x=H,H+e} = -k_r \frac{\partial T_r}{\partial x}\bigg|_{x=H,h+e}, \quad T_g\big|_{x=H,H+e} = T_r\big|_{x=H,H+e} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
-k_g \frac{\partial T_g}{\partial y} \Big|_{y=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}} &= -k_r \frac{\partial T_r}{\partial y} \Big|_{y=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}}, & T_g \Big|_{y=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}} &= T_r \Big|_{y=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}} \\
-k_g \frac{\partial T_g}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}} &= -k_r \frac{\partial T_r}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}}, & T_g \Big|_{z=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}} &= T_r \Big|_{z=\frac{L-l}{2}, \frac{L+l}{2}}
\end{aligned}$$

2.3 Análisis de escala y de órdenes de magnitud.

Para poder construir un procedimiento de estudio adecuado al modelo propuesto, es imperativo llevar a cabo un análisis de escala y de órdenes de magnitud de las ecuaciones gobernantes mencionadas en el apartado anterior. Dicho estudio también implica evaluar las principales características geométricas del modelo de estudio, en conjunto con sus variables y/o propiedades características, las cuales se ilustran en la siguiente tabla.

Tabla 2.2: Dimensiones, variables y propiedades características.

Geométricas y de tiempo	Variables de cálculo	Propiedades
$x \rightarrow H, e, h$ $y \rightarrow L, l$ $z \rightarrow L, l$ $t \rightarrow t_{rc}$ $t \rightarrow t_{gc}$	$T_r \rightarrow \Delta T_{rc}$ $T_g \rightarrow \Delta T_{gc}$	$\rho_r \rightarrow \rho_{rc}$ $c_{p,r} \rightarrow c_{p,rc}$ $k_r \rightarrow k_{rc}$ $\rho_g \rightarrow \rho_{gc}$ $c_{p,g} \rightarrow c_{p,gc}$ $k_g \rightarrow k_{gc}$

En el caso particular de la resistencia eléctrica, sustituyendo los valores característicos de cada término en la ecuación (2.4), se obtiene la siguiente expresión que representa el orden de magnitud de los procesos de transferencia de calor en dicho dispositivo:

$$k_{rc} \Delta T_{rc} \left[\frac{1}{e^2} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l^2} \right] + \frac{v_{ap}^2}{Re l^2 e} \sim \frac{\rho_{rc} c_{p,rc} \Delta T_{rc}}{t_{rc}}. \quad (2.8)$$

En esta ecuación, dado que el espesor de la resistencia eléctrica (e) es mucho menor que su largo y ancho (ver capítulo 5), es simple asumir que la difusión de calor se desarrolla a lo largo del eje x , por consiguiente, el modelo de órdenes de magnitud se reduce a:

$$\frac{k_{rc}\Delta T_{rc}}{e^2} + \frac{v_{ap}^2}{R_e l^2 e} \sim \frac{\rho_{rc} c_{p,rc} \Delta T_{rc}}{t_{rc}}. \quad (2.9)$$

Aquí, el primer término de la ecuación representa la difusión de calor, el segundo la energía generada por efecto Joule, y el tercero la energía que almacena el dispositivo debido al incremento de su temperatura. Comparando los términos de difusión de calor y calentamiento de la ecuación (2.9), se obtiene la siguiente relación la cual permite definir el tiempo característico del fenómeno térmico en la resistencia eléctrica.

$$\frac{k_{rc}\Delta T_{rc}}{e^2} \left[\frac{\rho_{rc} c_{p,rc} e^2}{t_{rc} k_{rc}} - 1 \right] \sim \frac{v_{ap}^2}{R_e l^2 e}. \quad (2.10)$$

Como puede observarse en la figura 2.3 y en la tabla 2.3, el fenómeno térmico en la resistencia eléctrica presenta tres tiempos característicos. El primero o tiempo corto, es el lapso durante el cual la resistencia utiliza la energía generada por efecto Joule para elevar su temperatura, el segundo o tiempo intermedio, es el periodo de tiempo cuando parte de la energía generada se utiliza como medio de calentamiento, y otra parte el dispositivo la difunde hacia su entorno. Por último, el tercer tiempo o tiempo largo es tiempo requerido para que el dispositivo llegue a estado estacionario, o en términos simples, que toda la energía que se genera por efecto Joule sea disipada hacia el entorno.

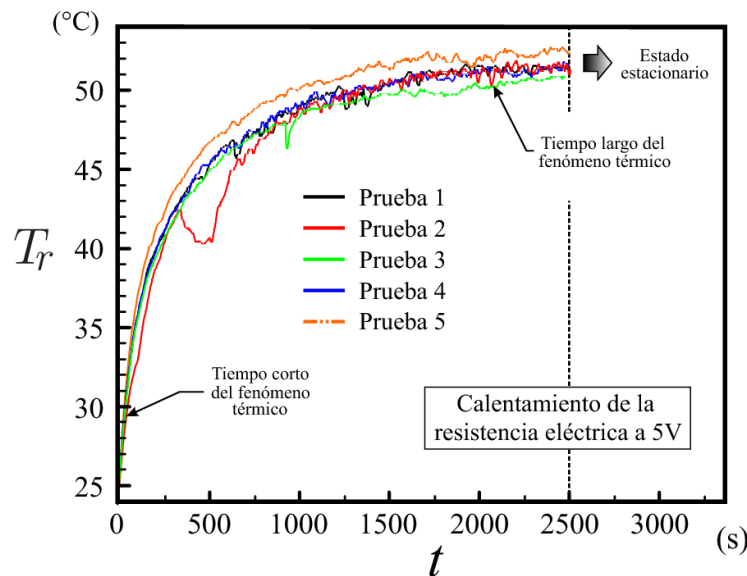


Figura 2.3: Proceso de calentamiento experimental de una de las resistencias eléctricas de prueba. El dispositivo alcanza el estado estacionario alrededor de los 1×10^4 segundos.

Tabla 2.3: Tiempos característicos del fenómeno de calentamiento.

Tiempo característico	Relación de orden de magnitud	Proceso que domina el fenómeno térmico
Tiempo corto	$\frac{\rho_{rc}c_{p,rc}e^2}{t_{rc}k_{rc}} \gg 1$	Domina el proceso de calentamiento
Tiempo intermedio	$\frac{\rho_{rc}c_{p,rc}e^2}{t_{rc}k_{rc}} \sim 1$	Compiten tanto el proceso de calentamiento como de disipación de calor
Tiempo largo	$\frac{\rho_{rc}c_{p,rc}e^2}{t_{rc}k_{rc}} \ll 1$	Domina el proceso de disipación de calor

Al analizar estos tiempos, se puede destacar que para el primer caso (tiempo corto), el incremento de temperatura característico depende en gran medida de la energía eléctrica suministrada y el tiempo, además de las dimensiones y las propiedades de acumulación de energía de la resistencia eléctrica. Por lo tanto, dicho incremento se encuentra definido por la siguiente expresión,

$$\Delta T_{rc} \sim \frac{v_{ap}^2 t_{rc}}{\rho_{rc} c_{p,rc} R_e l^2 e}; \quad (2.11)$$

caso contrario, al evaluar el tiempo largo del fenómeno térmico, el incremento de temperatura característico cambia y depende de la energía eléctrica suministrada, en conjunto con las dimensiones y la conductividad térmica de la resistencia eléctrica. En consecuencia, se obtiene una nueva definición de este incremento el cual se ilustra a continuación.

$$\Delta T_{rc} \sim \frac{v_{ap}^2 e}{k_{rc} R_e l^2}. \quad (2.12)$$

Para el caso del tiempo intermedio, donde ambos el calentamiento y la difusión del calor en la resistencia “compiten”, es decir, que son del mismo orden de magnitud. Se tiene que (2.11) y (2.12) son válidas, y al comparar sus órdenes sustituyendo el incremento de temperatura característico, se obtiene el tiempo característico del fenómeno térmico, el cual depende tanto del espesor de la resistencia eléctrica, como la difusividad térmica de la misma. Lo anterior al considerar que esta propiedad es el cociente de la conductividad térmica entre el producto de la densidad por el calor específico de un cierto material (ver ecuación (2.13)).

$$t_{rc} \sim \frac{e^2}{\alpha_{rc}}. \quad (2.13)$$

Los datos que se ilustran en la figura 2.3 son muy consistentes con el análisis de órdenes de magnitud. Para un tiempo determinado (t_{rc}), el incremento de temperatura característico (ΔT_{rc}) solo depende de la energía generada y la capacidad difusiva del dispositivo.

Para evaluar el otro elemento (PDMS) que integra el modelo de estudio, se dispone de la ecuación (2.5). Después de sustituir el orden de magnitud de cada término que integra dicha ecuación se obtiene la siguiente expresión,

$$k_{gc}\Delta T_{gc} \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{L^2} \right] \sim \frac{\rho_{gc}c_{p,gc}\Delta T_{gc}}{t_{gc}}; \quad (2.14)$$

donde, debido a que se tiene una relación $h \ll L$ (ver Capítulo 5), la ecuación anterior se puede simplificar a:

$$t_{gc} \sim \frac{h^2}{\alpha_{gc}}, \quad (2.15)$$

con lo cual, se obtiene el tiempo característico de difusión de calor, esto para el caso de la sección de PDMS que encapsula a la resistencia eléctrica. Claramente, si se comparan ambos tiempos característicos (t_{rc} y t_{gc}), se puede predecir que el tiempo asociado a la difusión de calor en el PDMS es mucho mayor, esta condición se presenta ya que la difusividad térmica de este material (α_{gc}) es mucho menor.

Por otra parte, al analizar las ecuaciones asociadas a las condiciones de interfase entre la resistencia eléctrica y el PDMS (flujo de calor), se puede predecir que el calor transferido entre ellos sigue prácticamente una sola dirección y sentido. Al asumir las relaciones geométricas propuestas para el modelo de estudio (ver Capítulo 5), el calor neto transferido de la resistencia eléctrica al PDMS se puede estimar de la siguiente forma,

$$Q_T = -l^2 k_g \left[\frac{\partial T_g}{\partial x} \Big|_{x=H} + \frac{\partial T_g}{\partial x} \Big|_{x=H+e} \right] - elk_g \left[\frac{\partial T_g}{\partial y} \Big|_{y=\frac{L-l}{2}} + \frac{\partial T_g}{\partial y} \Big|_{y=\frac{L-l}{2}+l} + \frac{\partial T_g}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L-l}{2}} + \frac{\partial T_g}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L-l}{2}+l} \right]; \quad (2.16)$$

aquí, sustituyendo las variables características para cada uno de los términos, se obtiene el siguiente orden de magnitud del calor transferido entre la resistencia eléctrica y el PDMS.

$$Q_T \sim l^2 k_{gc} \left[\frac{\Delta T_{gc}}{H} + \frac{\Delta T_{gc}}{h} \right] - e l k_{gc} \left[\frac{2\Delta T_{gc}}{L-l} + \frac{2\Delta T_{gc}}{L-l} + \frac{2\Delta T_{gc}}{L-l} + \frac{2\Delta T_{gc}}{L-l} \right]; \quad (2.17)$$

Al comparar las dimensiones del modelo de estudio, donde $h \ll H \sim (L-l)/2$, la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión,

$$Q_T \sim l^2 k_{gc} \frac{\Delta T_{gc}}{h}. \quad (2.18)$$

Como se observa, esta ecuación nos demuestra que la transferencia de calor entre ambos elementos es unidireccional, y además, se dará con una mayor intensidad en la cara superior del modelo (área de estudio). En este sentido, el siguiente paso del análisis es determinar cuál de los dos incrementos de temperatura (ΔT_{rc} y ΔT_{gc}) es el que controla el fenómeno térmico. Para este caso, se hace uso de la condición de interfase por donde se efectúa el mayor flujo de calor, después de sustituir las variables características en dicha condición, se obtiene el siguiente parámetro que interrelaciona ambos incrementos de temperatura.

$$\frac{k_{gc}\Delta T_{gc}}{h} \sim \frac{k_{rc}\Delta T_{rc}}{e} \rightarrow \Delta T_{rc} \sim \frac{k_{gc}e}{k_{rc}h} \Delta T_{gc} \rightarrow \Delta T_{rc} \sim \lambda \Delta T_{gc}. \quad (2.19)$$

De la ecuación (2.19), el parámetro $\lambda = k_{gc}e/k_{rc}h$ ayuda a definir el incremento de temperatura en el PDMS, esto en términos de otro incremento de temperatura característico, o en términos prácticos, en términos de la energía suministrada por la resistencia eléctrica, lo cual se demuestra a continuación,

$$\Delta T_{gc} \sim \frac{\Delta T_{rc}}{\lambda} \sim \frac{v_{ap}^2 h}{k_{gc} R_e l^2}. \quad (2.20)$$

Claramente, el incremento de temperatura en el PDMS es el más representativo, esto porque dicho material presenta una muy baja conductividad térmica, caso que se contrapone a la resistencia eléctrica, la cual presenta una mayor conductividad. Por consiguiente, se puede inferir que, tanto el tiempo como el incremento de temperatura característico de la difusión de calor en el PDMS son los que controlan el fenómeno

térmico, lo cual permite seleccionarlos como las variables características para el estudio.

$$\Delta T_c = \frac{v_{ap}^2 h}{k_{gc} Re l^2}, \quad t_c = \frac{h^2}{\alpha_{gc}}. \quad (2.21)$$

Adicionalmente, como ya se constató mediante el análisis de escala, el estudio requiere de una evaluación del flujo de calor en la cara superior del modelo propuesto. Para este caso, el esquema de la figura 2.1 muestra que dicha superficie se encuentra expuesta al ambiente, y se enfría siguiendo la ley de enfriamiento de Newton (capa limite térmica) [54]. Por consiguiente, el calor transferido en la superficie de evaluación se puede calcular mediante las siguientes expresiones:

Tabla 2.4: Calor transferido entre la superficie de estudio y su entorno.

Condición de interfase	Ecuación
Considerando la interfase del modelo (pared PDMS)	$Q_x = -k_g L^2 \left. \frac{\partial T_g}{\partial x} \right _{x=H+e+h}$
Considerando la interfase del modelo (aire)	$Q_x = -k_a L^2 \left. \frac{\partial T_a}{\partial x} \right _{x=H+e+h}$
Considerando la capa limite térmica del fluido (aire)	$Q_x = -h_c L^2 (T_g - T_\infty)$

Al sustituir las variables características en cada una de las ecuaciones de la tabla 2.4, se obtiene el siguiente orden de magnitud,

$$q_x'' \sim \frac{Q_T}{L^2} \sim \frac{k_{gc} \Delta T_{gc}}{h} \sim \frac{k_a \Delta T_a}{l_c} \sim h_c (T_{sup} - T_\infty); \quad (2.22)$$

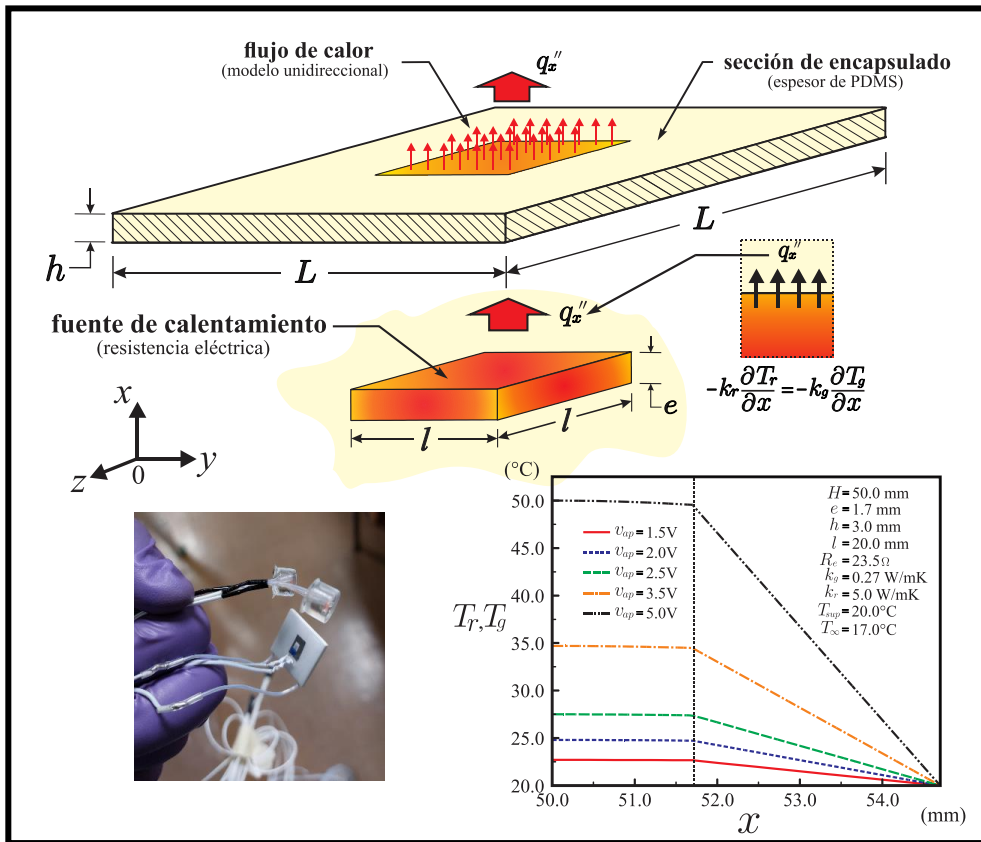
aquí, cuando se comparan el flujo de calor (q_x''), el incremento de temperatura característico en la sección de PDMS (ΔT_{gc}), y la relación entre las temperaturas de la superficie de estudio y su entorno, se determina el parámetro (Nusselt modificado) que representa el calor transferido en el sistema [60].

$$\tilde{N}_u \sim \frac{hh_c}{k_{gc}} \sim \frac{q''_x h}{k_{gc}(T_{sup} - T_\infty)} \sim \frac{\Delta T_{gc}}{(T_{sup} - T_\infty)}. \quad (2.23)$$

Después de realizar varios procedimientos algebraicos, donde se sustituyen tanto el incremento de temperatura característico ΔT_{gc} , como el flujo de calor q''_x asociado al calor generado en del dispositivo (resistencia eléctrica), se obtiene que:

$$q''_x \sim \frac{v_{ap}^2}{R_{ec}L^2} \rightarrow \tilde{N}_u \sim \frac{hv_{ap}^2}{k_{gc}R_eL^2(T_{sup} - T_\infty)}. \quad (2.24)$$

Como se observa en las expresiones de la ecuación (2.24), para definir el valor de número de Nusselt modificado se requiere conocer tanto el voltaje aplicado a la resistencia (con ayuda de una fuente eléctrica), como el valor de la temperatura en la superficie de estudio, la cual será censada mediante el sistema termográfico de post-procesamiento de imágenes. Cabe aclarar, esta medición corresponde a la condición de estado estacionario, dado que el orden de magnitud del flujo de calor (q''_x) ésta definido en términos del calor generado en la resistencia y del área de transferencia en la superficie de estudio ($q''_x \sim Q_T/L^2$).



CAPITULO 3

Evaluación teórico-analítica

3 Evaluación teórico-analítica.

A partir de los datos obtenidos del análisis de escala y órdenes de magnitud, es posible pasar de un modelo tridimensional y transitorio, a considerar solo una dimensión espacial donde la transferencia de calor transitoria es predominante unidireccional. Por consiguiente, las ecuaciones (2.4) y (2.5) se pueden simplificar a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 T_r}{\partial x^2} + \frac{v_{ap}^2}{k_r R_e l^2 e} = \frac{1}{\alpha_r} \frac{\partial T_r}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial T_g}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Estas ecuaciones son válidas si se cumplen ciertos límites geométricos, donde $h \sim e \ll H$ (espesores de capas), $h \ll l \sim (L - l)/2$ (blindaje térmico lateral), y $\lambda \leq 1$ (espesor de encapsulado finito). Además, estos límites permiten simplificar el modelo de estudio a solo dos elementos, una fuente de calentamiento (resistencia eléctrica) y la pared que la encapsula (espesor de PDMS); por lo tanto, el dominio de estudio se puede reducir a un sistema conjugado (ver Fig. 3.1).

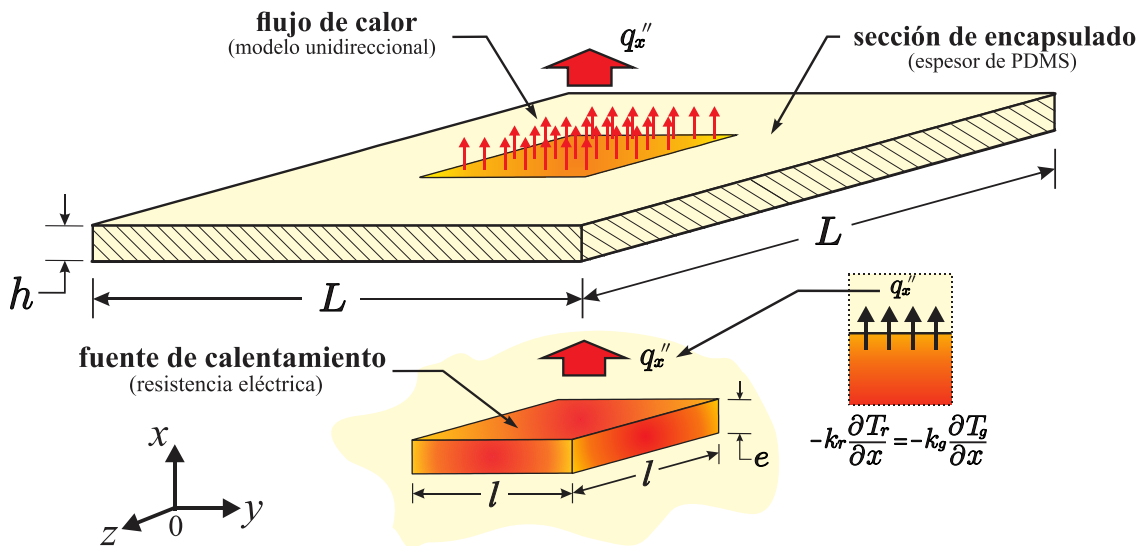


Figura 3.1: Esquema simplificado del modelo de estudio (modelo de flujo de calor unidireccional), sistema conjugado resistencia eléctrica-PDMS.

De igual forma que con las ecuaciones gobernantes, las condiciones de frontera para completar el estudio teórico también se simplifican notablemente. Al considerar los límites ya citados, se obtiene el siguiente grupo de condiciones de frontera e iniciales, las cuales son necesarias para resolver de forma analítica las ecuaciones (3.1) y (3.2).

Tabla 3.1: Condiciones de frontera e iniciales del modelo simplificado de transferencia de calor unidireccional (sistema conjugado).

Ubicación	Condiciones de frontera	Tiempo	Condición inicial
$x = H$	$\frac{\partial T_r}{\partial x} \approx 0$	$t = 0$	$T_r \approx T_\infty$
$x = H + e$	$T_g = T_r$ $k_g \frac{\partial T_g}{\partial x} = k_r \frac{\partial T_r}{\partial x}$	$t = 0$	$T_g \approx T_\infty$
$x = H + e + h$	$k_g \frac{\partial T_g}{\partial x} = -h_c(T_g - T_\infty)$		

3.1 Adimensionalización del modelo de estudio simplificado.

Con ayuda de los resultados obtenidos (variables características) mediante el análisis de escala, se proponen las siguientes variables adimensionales:

$$\chi_2 = \frac{x - H}{e}, \chi_3 = \frac{x - (H + e)}{h}, \tau = \frac{t}{t_c}, \theta_g = \frac{T_g - T_\infty}{\Delta T_c}, \theta_r = \frac{T_r - T_\infty}{\Delta T_c}. \quad (3.3)$$

Estas nuevas expresiones permiten el escalamiento y/o adimensionalización de las ecuaciones gobernantes. Dicho procedimiento tiene la finalidad de normalizar los resultados, simplificando así en una solución un gran número de evaluaciones. Aquí, las escalas características ΔT_c y t_c se encuentran definidas de la siguiente manera,

$$\Delta T_c = \frac{v_{ap}^2 h}{k_g R_e l^2}, \quad t_c = \frac{h^2}{\alpha_g}. \quad (3.4)$$

Después de realizar la correspondiente sustitución de las variables propuestas en las ecuaciones (3.1) y (3.2), así como también, de realizar todos los procedimientos algebraicos, se obtienen las ecuaciones adimensionales que corresponden al modelo simplificado del estudio, donde la primera que se ilustra a continuación representa la región de la resistencia eléctrica, y la segunda define al espesor de PDMS que encapsula a dicha resistencia.

$$\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \chi_2^2} + \lambda = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \theta_r}{\partial \tau}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_g}{\partial \chi_3^2} = \frac{\partial \theta_g}{\partial \tau}. \quad (3.6)$$

Análogamente, las condiciones de frontera e iniciales que se ilustran en la tabla 3.1 se adimensionalizan utilizando las variables de la ecuación (3.3). Al realizar las sustituciones y simplificaciones algebraicas que corresponden, se obtienen las siguientes expresiones adimensionales (ver tabla 3.2).

Tabla 3.2: Condiciones de frontera e iniciales adimensionales del modelo simplificado de transferencia de calor unidireccional (sistema conjugado).

Ubicación	Condiciones de frontera	Tiempo	Condición inicial
$\chi_2 = 0$	$\frac{\partial \theta_r}{\partial \chi_2} \approx 0$	$\tau = 0$	$\theta_r \approx 0$
$\chi_2 = 1$ $\chi_3 = 0$	$\theta_g = \theta_r$ $\lambda \frac{\partial \theta_g}{\partial \chi_3} = \frac{\partial \theta_r}{\partial \chi_2}$	$\tau = 0$	$\theta_g \approx 0$
$\chi_3 = 1$	$\frac{\partial \theta_g}{\partial \chi_3} = -\bar{N}_u \theta_g$		

Para este caso, el número de Nusselt modificado se encuentra definido por

$$\bar{N}_u = \frac{h_c h}{k_g} \cong \frac{h v_{ap}^2}{k_g Re l^2 (T_{sup} - T_{\infty})}; \quad (3.7)$$

donde la temperatura T_{sup} es la misma que la temperatura del PDMS en la superficie exterior ($T_{sup} = T_g|_{x=H+e+h}$), así como también, esta se encuentra definida para el caso de estado estacionario, condición que requiere que la totalidad de la energía generada por la resistencia eléctrica se disipe por la frontera de estudio ($q_x'' \cong Q_T/l^2 \cong v_{ap}^2/R_e l^2$).

3.2 Solución analítica de estado estacionario ($\tau \rightarrow \infty$).

Cuando se infiere un tiempo de evolución del fenómeno térmico muy largo ($\tau \rightarrow \infty$), es coherente asumir que el sistema en estudio ha llegado a la condición de estado estacionario. En este punto se tiene que la totalidad de la energía generada por la resistencia eléctrica es disipada a través de la superficie de estudio; por consiguiente, en dicha superficie ya no existe cambio alguno de temperatura. Teóricamente, este límite implica que los modelos antes mencionados (ecuaciones (3.5) y (3.6)) se reduce aún más, obteniéndose así un sistema de ecuaciones diferenciales ordinario que puede ser integrado de forma directa (ver ecuaciones (3.8) y (3.9)).

$$\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \chi_2^2} + \lambda = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_g}{\partial \chi_3^2} = 0. \quad (3.9)$$

Al resolver las ecuaciones (3.8) y (3.9) mediante doble integración, da como resultado las expresiones que se muestran a continuación,

$$\theta_r = -\frac{\lambda}{2} \chi_2^2 + C_1 \chi_2 + C_2, \quad (3.10)$$

$$\theta_g = C_3 \chi_3 + C_4; \quad (3.11)$$

aquí, las constantes $C_1, C_2, C_3,$ y $C_4,$ se determinan utilizando las condiciones de frontera de la tabla 3.2. Después de sustituir cada una de dichas condiciones, la temperatura adimensional para cada una de las regiones del modelo simplificado de estudio está definida por:

$$\theta_r = \frac{\lambda}{2} (1 - \chi_2^2) + \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u}, \quad (3.12)$$

$$\theta_g = \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} - \chi_3. \quad (3.13)$$

Estas soluciones reflejan el comportamiento de la temperatura adimensional (normalizada) para el sistema conjugado (resistencia eléctrica-PDMS). Claramente, es indispensable recuperar ambas soluciones en términos físicos, esto para poder analizar y discutir cada caso de estudio. Lo anterior se consigue al sustituir todas las variables adimensionales por sus correspondientes igualdades, las cuales ya han sido definidas en las ecuaciones (3.3), (3.4), y (3.7), respectivamente. Después de hacer los cambios apropiados, se obtiene las siguientes expresiones que representa el comportamiento de la temperatura de los elementos que integra el sistema conjugado.

$$T_r = \frac{v_{ap}^2 h}{R_e l^2} \left\{ \frac{e}{2hk_r} \left[1 - \left(\frac{x-H}{e} \right)^2 \right] + \frac{1}{k_g} \left(1 + \frac{k_g R_e l^2 (-T_\infty)}{v_{ap}^2 h} \right) \right\} + T_\infty, \quad (3.14)$$

$$T_g = \frac{v_{ap}^2 h}{R_e l^2} \left\{ \frac{1}{k_g} \left(1 + \frac{k_g R_e l^2 (T_{sup} - T_\infty)}{v_{ap}^2 h} \right) - \frac{x - (H + e)}{k_g h} \right\} + T_\infty. \quad (3.15)$$

Al Graficar ambas soluciones de la temperatura (adimensional y valor físico) considerando los valores de las variables propuestos en el Capítulo 5 (resistencia eléctrica, voltaje aplicado dimensiones, etc.), se obtienen las ilustraciones que se muestran a continuación.

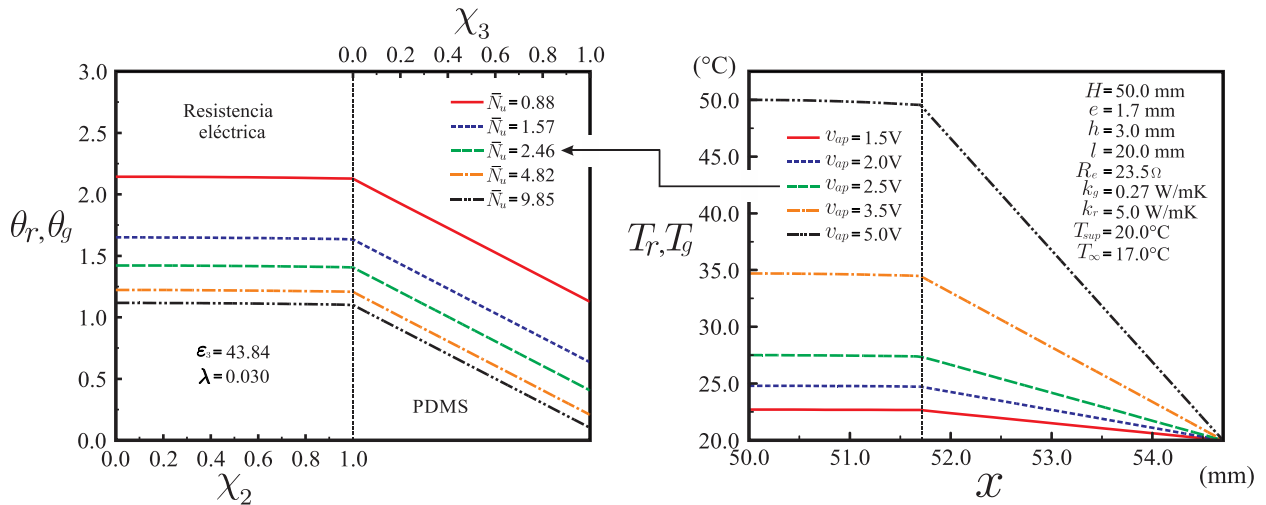


Figura 3.2: Valores de la temperatura de las dos regiones (Resistencia eléctrica y PDMS) para los valores de las variables que se ilustran. Lado izquierdo solución adimensional y lado derecho resultados en datos físicos.

En estas graficas se puede observar que ambas conductividades térmicas, la de la resistencia eléctrica y el PDMS, definen el comportamiento de la temperatura en el sistema conjugado. Aquí, derivado de que la conductividad térmica del PDMS es muy pequeña en comparación con la otra, el gradiente de temperatura es mayor en esta región. Adicionalmente, cuando se aumenta del voltaje en la resistencia eléctrica (más energía), esto se traduce en un mayor calentamiento al interior del sistema; sin embargo, la temperatura en la región de dicho elemento es casi constante. Por consiguiente, es factible asumir que el valor de la temperatura superficial (T_{sup}) del sistema dependen de la conductividad y el espesor de PDMS que recubre la fuente de energía, la energía suministrada, y la temperatura del entorno, todo esto resumido en el número de Nusselt modificado.

3.3 Solución analítica del fenómeno térmico transitorio.

Por otra parte, para la resolución del modelo unidireccional transitorio (ecuaciones (3.5) y (3.6)), se propone el método de solución a través de la separación de variables. En este caso, cada temperatura se encuentra definida en términos de variables que únicamente dependen de una sola variable independiente, por lo tanto, se asumen dos soluciones de la forma:

$$\theta_r(\chi_2, \tau) = \psi_r(\chi_2, \tau) + \phi_r(\chi_2), \quad (3.16)$$

$$\theta_g(\chi_3, \tau) = \psi_g(\chi_3, \tau) + \phi_g(\chi_3). \quad (3.17)$$

Al desarrollar estas expresiones, se puede proponer que los términos ligados a ambas variables independientes se definen por una expresión del tipo

$$\psi_e(\chi_e, \tau) = X_e(\chi_e)Y_e(\tau), \quad (3.18)$$

donde el subíndice "e" hace referencia al elemento (resistencia eléctrica o PDMS). En este contexto, las ecuaciones (3.16) y (3.17) cambian y quedan de la siguiente forma,

$$\theta_r(\chi_2, \tau) = X_r(\chi_2)Y_r(\tau) + \phi_r(\chi_2), \quad (3.19)$$

$$\theta_g(\chi_3, \tau) = X_g(\chi_3)Y_g(\tau) + \phi_g(\chi_3). \quad (3.20)$$

Sustituyendo las variables que definen las temperaturas de la resistencia eléctrica y el PDMS en las ecuaciones (3.5) y (3.6), estas cambian a las siguientes expresiones,

$$\frac{\partial^2(\psi_r(\chi_2, \tau))}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2(\phi_r(\chi_2))}{\partial \chi_2^2} + \lambda = \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial(\psi_r(\chi_2, \tau))}{\partial \tau}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2(\psi_g(\chi_3, \tau))}{\partial \chi_3^2} + \frac{\partial^2(\phi_g(\chi_3))}{\partial \chi_3^2} = \frac{\partial(\psi_g(\chi_3, \tau))}{\partial \tau}. \quad (3.22)$$

En este punto se realiza la primera separación de las ecuaciones, agrupando los términos que solo dependen de la variable espacial (χ_π), y las que dependen de ambas variables independientes, tiempo y espacio (χ_π, τ). Después de hacer el reacomodo de términos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2 \phi_r}{d\chi_2^2} + \lambda = 0, \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial^2(\psi_r(\chi_2, \tau))}{\partial \chi_2^2} = \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial(\psi_r(\chi_2, \tau))}{\partial \tau}, \quad (3.23b)$$

$$\frac{d^2 \phi_r(\chi_3)}{d\chi_3^2} = 0, \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial^2(\psi_g(\chi_3, \tau))}{\partial \chi_3^2} = \frac{\partial(\psi_g(\chi_3, \tau))}{\partial \tau}. \quad (3.24b)$$

Al sustituir las expresiones propuestas para ψ_r y ψ_g en las ecuaciones (3.23b) y (3.24b), estas cambian y se definen otras expresiones las cuales permiten realizar otra fragmentación del modelo, esto a través del método de separación de variables (ver ecuaciones (3.25a) y (3.25b)) [54].

$$\frac{1}{X_r} \frac{d^2 X_r}{d\chi_2^2} = \frac{1}{\varepsilon_3 Y_r} \frac{dY_r}{d\tau} = \pm \zeta^2, \quad (3.25a)$$

$$\frac{1}{X_g} \frac{d^2 X_g}{d\chi_3^2} = \frac{1}{\varepsilon_3 Y_g} \frac{dY_g}{d\tau} = \pm \omega^2; \quad (3.25b)$$

En las ecuaciones anteriores, se tiene que ζ y ω representan las raíces de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo y/o primer orden. Al implementar el método de separación de variables, dichas ecuaciones se separan y se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones.

Para la resistencia eléctrica:

$$\frac{d^2 X_r}{d\chi_2^2} \mp \zeta^2 X_r = 0, \quad (3.26a)$$

$$\frac{dY_r}{d\tau} \mp \zeta^2 \varepsilon_3 Y_r = 0, \quad (3.26b)$$

y para la región de PDMS:

$$\frac{d^2 X_g}{d\chi_3^2} \mp \omega^2 X_g = 0, \quad (3.27a)$$

$$\frac{dY_g}{d\tau} \mp \omega^2 Y_g = 0. \quad (3.27a)$$

3.3.1 Evaluación de los términos de estado estacionario.

El primer paso en la resolución analítica del modelo transitorio consiste en evaluar las ecuaciones asociadas al estado estacionario, (3.23a) y (3.24a). Este procedimiento previo permite evaluar las no-homogeneidades incluidas en el modelo transitorio (completo). Como ya se hizo anteriormente, ambas ecuaciones se resuelven mediante una doble integración, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\frac{d\phi_r}{d\chi_2} = -\lambda\chi_2, \quad (3.28)$$

$$\phi_r = \frac{\lambda}{2}(1 - \chi_2^2) + \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u}, \quad (3.29)$$

$$\frac{d\phi_g}{d\chi_3} = -1, \quad (3.30)$$

$$\phi_g = \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} - \chi_3. \quad (3.31)$$

3.3.2 Evaluación de los términos transitorios.

Posteriormente, se procede a resolver las ecuaciones (3.23b) y (3.24b), las cuales están asociadas a términos que dependen tanto del tiempo como del espacio. Aquí, después de realizar las fragmentaciones de los modelos y resolver cada una de las ecuaciones resultantes, se obtienen las siguientes expresiones analíticas:

$$X_r = C_5 \sin(\zeta \chi_2) + C_6 \cos(\zeta \chi_2), \quad (3.32a)$$

$$Y_r = C_7' \exp(-\zeta^2 \varepsilon_3 \tau), \quad (3.32b)$$

$$X_g = C_8 \sin(\omega \chi_3) + C_9 \cos(\omega \chi_3), \quad (3.32c)$$

$$Y_g = C_{10}' \exp(-\omega^2 \tau). \quad (3.32d)$$

De estas soluciones, todas las constantes ($C_5, C_6, C_7', C_8, C_9,$ y C_{10}') se calculan mediante las condiciones de frontera e iniciales ilustradas en la tabla 3.2. En este punto, es importante aclarar que al igual que con las ecuaciones (3.5) y (3.6), las condiciones de frontera también son fragmentadas siguiendo las funciones matemáticas propuestas (ecuaciones (3.16) - (3.20)). Por lo tanto, después de realizar todos los procedimientos algebraicos, se tiene que:

$$\chi_2 = 0 \rightarrow \frac{dX_r}{d\chi_2} = 0, \quad (3.33a)$$

$$\chi_2 = 1 \text{ y } \chi_3 = 0 \rightarrow \frac{dX_r}{d\chi_2} = \frac{dX_g}{d\chi_3} = 0, \quad (3.33b)$$

$$\chi_2 = 1 \text{ y } \chi_3 = 0 \rightarrow X_r Y_r = X_g Y_g, \quad (3.33c)$$

$$\chi_3 = 1 \rightarrow \frac{dX_g}{d\chi_2} = -\bar{N}_u X_g. \quad (3.33d)$$

Adicionalmente, estas expresiones se complementan con las condiciones iniciales para ambas regiones (resistencia eléctrica y PDMS), las cuales tienen que ser definidas en términos de la función solución como se muestra a continuación,

$$\theta_r(\chi_2, 0) = 0 = C_7' X_r + \frac{\lambda}{2} (1 - \chi_2^2) + \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u}, \quad (3.33e)$$

$$\theta_g(\chi_3, 0) = 0 = C_{10}' X_g + \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} - \chi_3. \quad (3.33f)$$

Después de evaluar las condiciones de frontera anteriormente citadas, así como también, realizar los reacomodos algebraicos correspondientes, se determinan las siguientes expresiones las cuales definen las constantes del modelo transitorio.

$$C_5 = C_8 = 0, \quad (3.34a)$$

$$\zeta = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.34b)$$

$$\omega \tan(\omega) = \bar{N}_u, \quad (3.34c)$$

$$A'_n = C_7' C_6, \quad (3.34d)$$

$$B'_n = C_{10}' C_9. \quad (3.34e)$$

Al sustituir estas en las soluciones propuestas, se obtiene las ecuaciones que definen el comportamiento de la temperatura para el sistema en estudio, esto considerando el caso transitorio.

$$\theta_r(\chi_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \exp(-\zeta_n^2 \varepsilon_3 \tau) \cos(\zeta_n \chi_2) + \frac{\lambda}{2} (1 - \chi_2^2) + \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u}, \quad (3.35)$$

$$\theta_g(\chi_3, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \exp(-\omega_n^2 \tau) \cos(\omega_n \chi_3) + \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} - \chi_3, \quad (3.36)$$

Hasta este punto solo hace falta determinar dos constantes, A'_n y B'_n . Para determinar estas constantes se utiliza el teorema de la ortogonalidad y las condiciones

iniciales (ecuaciones (3.33e) y (3.33f)). Después de realizar las sustituciones pertinentes siguiendo la ortogonalidad, ambas constantes están definidas por las integrales que se ilustran a continuación,

$$A'_n = \frac{\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{2} (1 - \chi_2^2) + \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} \right] \cos(\zeta_n \chi_2) d\chi}{\int_0^1 \cos^2(\zeta_n \chi_2) d\chi}, \quad (3.37)$$

$$B'_n = \frac{\int_0^1 \left[\frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} - \chi_3 \right] \cos(\omega_n \chi_3) d\chi}{\int_0^1 \cos^2(\omega_n \chi_3) d\chi}. \quad (3.38)$$

Donde, resolviendo las integrales de forma analítica se determina el valor para cada una de las constantes que resta (ecuaciones (3.39) y (3.40)).

$$A'_n = \frac{4 \left[\left(\lambda + \zeta_n^2 \frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} \right) \sin(\zeta_n) - \zeta_n \lambda \cos(\zeta_n) \right]}{\zeta_n^2 [\sin(2\zeta_n) + 2\zeta_n]}, \quad (3.39)$$

$$B'_n = \frac{4\omega_n}{\sin(2\omega_n) + 2\omega_n} \left[\frac{\cos(\omega_n) - 1}{\omega_n^2} + \left(\frac{\bar{N}_u + 1}{\bar{N}_u} - 1 \right) \frac{\sin(\omega_n)}{\omega_n} \right]. \quad (3.40)$$

Finalmente, al sustituir todos los parámetros y variables adimensionales por sus correspondientes valores físicos, se obtienen las siguientes ecuaciones que describen ambas constantes en variables físicas,

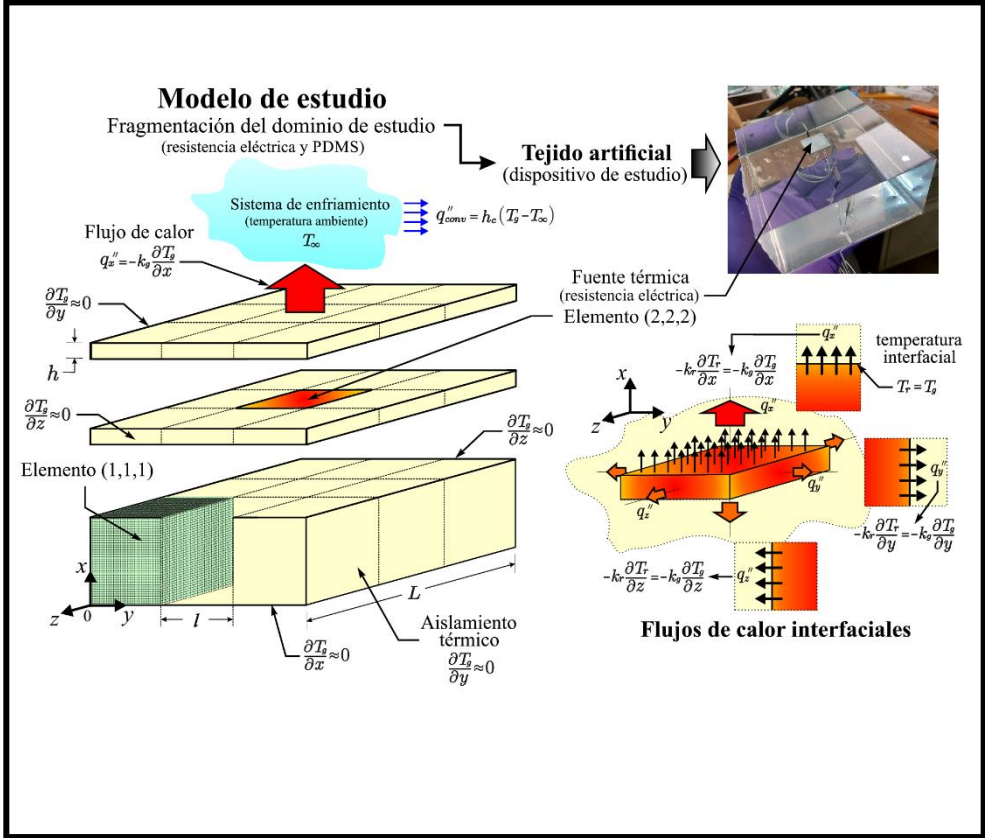
$$A'_n = \frac{4 \left[\left(\frac{ek_g}{hk_r} + \zeta_n^2 \left\{ 1 + \frac{k_g R_e l^2 (T_{sup} - T_\infty)}{v_{ap}^2 h} \right\} \right) \sin(\zeta_n) - \zeta_n \frac{ek_g}{hk_r} \cos(\zeta_n) \right]}{\zeta_n^2 [\sin(2\zeta_n) + 2\zeta_n]}, \quad (3.41)$$

$$B'_n = \frac{4\omega_n}{\sin(2\omega_n) + 2\omega_n} \left[\frac{\cos(\omega_n) - 1}{\omega_n^2} + \left(\frac{k_g R_e l^2 (T_{sup} - T_\infty)}{v_{ap}^2 h} \right) \frac{\sin(\omega_n)}{\omega_n} \right]; \quad (3.42)$$

además de poder definir ambas temperaturas bajo la misma condición (ver ecuaciones (3.43) y (3.44)).

$$T_r = \frac{v_{ap}^2 h}{k_{gc} R_{ec} l^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \exp\left(-\zeta_n^2 \frac{t\alpha_r}{e^2}\right) \cos\left(\zeta_n \left(\frac{x-H}{e}\right)\right) + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \left(\frac{x-H}{e}\right)^2\right) \right. \\ \left. + 1 + \frac{k_g R_e l^2 (T_{sup} - T_{\infty})}{v_{ap}^2 h} \right\} + T_{\infty}, \quad (3.43)$$

$$T_g = \frac{v_{ap}^2 h}{k_{gc} R_{ec} l^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \exp\left(-\omega_n^2 \frac{t\alpha_g}{h^2}\right) \cos\left(\omega_n \frac{x - (H+e)}{h}\right) + 1 \right. \\ \left. + \frac{k_g R_e l^2 (T_{sup} - T_{\infty})}{v_{ap}^2 h} - \frac{x - (H+e)}{h} \right\} + T_{\infty}. \quad (3.44)$$



CAPITULO 4

Metodología numérica de evaluación

4 Metodología numérica de evaluación.

En este capítulo se presenta la formulación teórico-numérica que fue diseñada para el análisis del modelo de estudio. Contrario a lo realizado en el capítulo anterior, en este caso se busca una evaluación más rigurosa del modelo propuesto. Por consiguiente, las ecuaciones a resolver de forma numérica son la versión completa del esquema tridimensional (se ilustra en las ecuaciones (2.4) y (2.5)). Aunque ya se cuenta con el análisis de escala que permite proponer un modelo simplificado (cálculo analítico), para el caso del planteamiento numérico esta información solo se emplea como base para el escalamiento de las ecuaciones (adimensionalización). Este procedimiento matemático se realiza previamente con la finalidad de que el algoritmo tenga un mejor desempeño, concretándose así una solución más rápida con menor demanda en la capacidad de cómputo.

Para dar inicio con la metodología numérica, primero se tienen que definir las características básicas que representan al dominio de estudio (modelo propuesto), y además, se tienen de puntualizar los límites y/o fronteras de dicho dominio (ver figura 4.1). Ambos requisitos son esenciales para poder plantear de forma correcta un esquema numérico de evaluación.

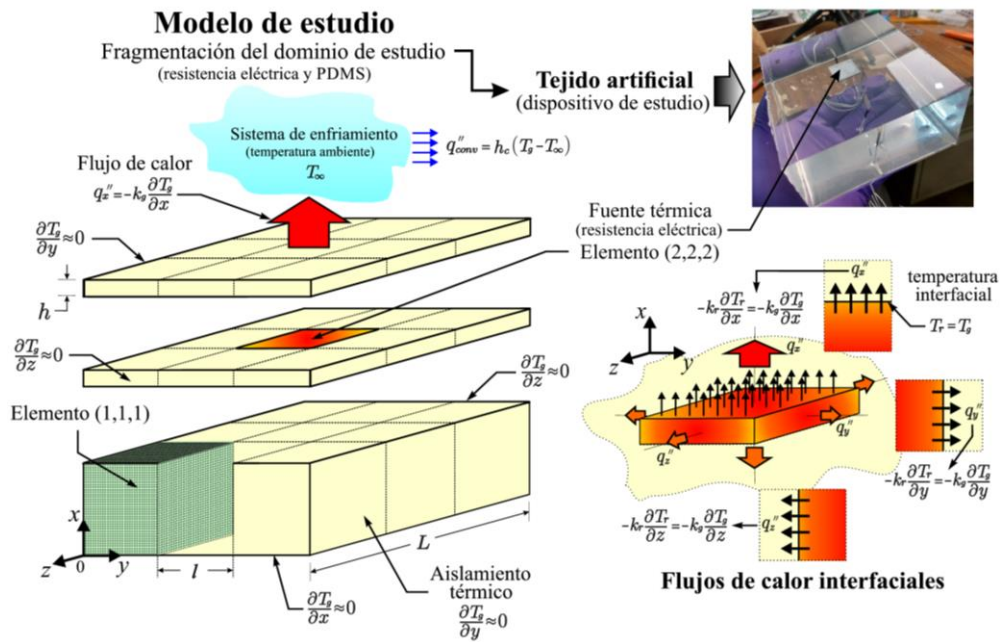


Figura 4.1: Representación esquemática del modelo numérico de estudio. Aquí, se ilustra el procedimiento de fragmentación del dominio y los límites de este. Además, se indican las condiciones de frontera requeridas para el cálculo numérico.

Como se ilustra en la figura 4.1, el dominio de estudio está definido en función de la geometría del dispositivo experimental (tejido artificial). En consecuencia, para facilitar el análisis se ha propuesto una fragmentación del dominio en veintisiete elementos, de los cuales, uno representa a la resistencia eléctrica y los demás a secciones de PDMS. Claramente, la interconexión entre elementos contiguos obedece a dos criterios básicos de la transferencia de calor; el primero de estos es la continuidad del medio físico, condición que indica que en la superficie de contacto (interfaz) ambos elementos tienen la misma temperatura. Por otra parte, el segundo criterio es la conservación de la energía, la cual dice que la energía que sale por la interfaz de un elemento entra íntegramente al otro elemento que comparte dicha superficie.

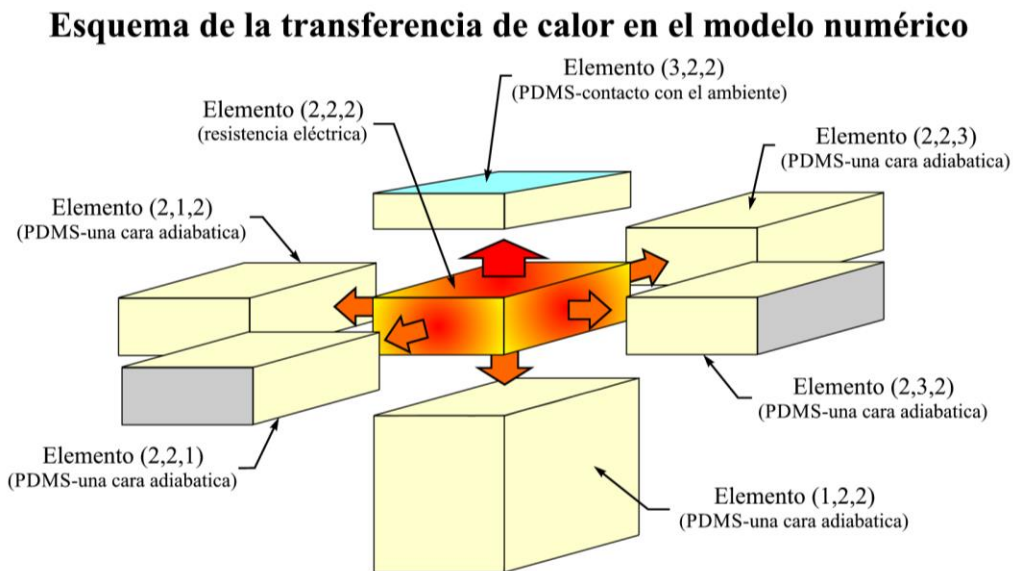


Figura 4.2: Esquema que ilustra la interacción de los elementos (volúmenes fragmentados) que integran el dominio de estudio numérico.

Bajo las condiciones antes mencionadas, es factible asumir que la energía parte del elemento que representa la resistencia eléctrica (donde se genera la energía), y posteriormente, pasa a los elementos que tienen contacto directo con esta, siguiendo así hasta el punto donde la energía puede ser disipada hacia el exterior (ver figura 4.2). En este sentido, siguiendo las condiciones de frontera ilustradas en el esquema de la figura 4.1, se infiere que la condición de aislamiento térmico (cercana a la adiabática) está presente en cinco de las seis caras del modelo de estudio, por lo tanto, solo resta una superficie por donde la energía puede ser disipada (superficie de análisis). Para dicha superficie se tiene una condición de enfriamiento definida por la

ley de enfriamiento de Newton [54], dato que ya se puntualizó y explico en el capítulo 2 (planteamiento del modelo de estudio).

4.1 Adimensionalización del modelo de estudio.

Como ya se indicó, el siguiente paso en la formulación del esquema numérico de solución es la adimensionalización y/o normalización de los modelos matemáticos. Este paso es esencial para dotar al algoritmo de las mejores condiciones de estabilidad de cálculo y convergencia, es bien sabido que esto se logran cuando todas las variables se evalúan bajo una misma escala (orden unidad). Para proceder con la adimensionalización de las ecuaciones del modelo tridimensional ((2.4) y (2.5)), en conjunto con sus condiciones de frontera, interfase, e iniciales, se introducen las variables adimensionales que se ilustran en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Variables adimensionales propuestas para la adimensionalización de los modelos tridimensionales de transferencia de calor (esquema numérico).

Geométricas y de tiempo	Variables de estudio
$\chi_{\pi} = \frac{x - x_{\pi,0}}{x_{\pi}}$ $\eta_{\pi} = \frac{y - y_{\pi,0}}{y_{\pi}}$ $\xi_{\pi} = \frac{z - z_{\pi,0}}{z_{\pi}}$ $\tau = \frac{t}{t_c}$	$\theta_r = \frac{T_r - T_{\infty}}{\Delta T_c}$ $\theta_g = \frac{T_g - T_{\infty}}{\Delta T_c}$

Para las expresiones que se ilustran en la tabla anterior, las variables $\chi, \eta, y \xi$ representan las tres coordenadas adimensionales del modelo normalizado, y π define el número de fragmentaciones hechas en cada coordenada. Para el caso en estudio, es claro que se tienen solo tres fragmentaciones en cada eje, y por tanto, se tiene la numeración desde el elemento (1,1,1) hasta el elemento (3,3,3). Con el fin de completar la normalización geométrica, las variables $x_{\pi}, y_{\pi}, z_{\pi}$, y $x_{\pi,0}, y_{\pi,0}, z_{\pi,0}$, representan tanto las longitudes características de cada una de las fragmentaciones, como el punto de partida de estas con respecto a origen del sistema coordenado, lo anterior considerando los tres ejes coordenados y el número de fragmentación, respectivamente. Por otra parte, para el caso del tiempo adimensional (τ) y las temperaturas adimensionales (θ_r y θ_g), estos siguen las mismas relaciones ya

utilizadas en el procedimiento analítico. Aquí, se introducen el tiempo característico (t_c) y el incremento de temperatura característico previamente obtenido en el análisis de escala (ver ecuación (4.1)).

$$\Delta T_c = \frac{v_{ap}^2 h}{k_g Re l^2} \quad y \quad t_c = \frac{h^2}{\alpha_g}, \quad (4.1)$$

Tomando en cuenta lo anterior y siguiendo el esquema de la figura 4.1 (fragmentación de elementos), las dimensiones que definen cada uno de los elementos que integran el dominio de estudio, y a la vez, las distancias de estos con respecto al origen son:

Tabla 4.2: Dimensiones que definen cada uno de los elementos que integran el dominio de estudio, y las distancias de estos con respecto al origen.

Coordenada	Dimensión de la sección	Distancia al origen
x	$x_1 = H$ $x_2 = e$ $x_3 = h$	$x_{1,0} = 0$ $x_{2,0} = H$ $x_{3,0} = h + e$
y	$y_1 = \frac{L-l}{2}$ $y_2 = l$ $y_3 = \frac{L-l}{2}$	$y_{1,0} = 0$ $y_{2,0} = \frac{L-l}{2}$ $y_{3,0} = \frac{L+l}{2}$
z	$z_1 = \frac{L-l}{2}$ $z_2 = l$ $z_3 = \frac{L-l}{2}$	$z_{1,0} = 0$ $z_{2,0} = \frac{L-l}{2}$ $z_{3,0} = \frac{L+l}{2}$

Introduciendo todas las variables adimensionales antes mencionada en las ecuaciones (2.4) y (2.5), haciendo el reacomodo algebraico correspondiente, y conceptualizado los parámetros geométricos y de tiempo que representan a cada elemento que integra el dominio de estudio, se obtiene las siguientes ecuaciones adimensionales útiles para llevar a cabo es estudio numérico (tridimensional (3D)-transitorio mediante un algoritmo fragmentado).

$$\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \chi_\pi^2} + \beta_{\eta_\pi}^2 \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \eta_\pi^2} + \beta_{\xi_\pi}^2 \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \xi_\pi^2} + \lambda = \frac{1}{\varepsilon_\omega} \frac{\partial \theta_r}{\partial \tau}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_g}{\partial \chi_\pi^2} + \beta_{\eta_\pi}^2 \frac{\partial^2 \theta_g}{\partial \eta_\pi^2} + \beta_{\xi_\pi}^2 \frac{\partial^2 \theta_g}{\partial \xi_\pi^2} = \frac{1}{\varepsilon_\omega} \frac{\partial \theta_g}{\partial \tau}. \quad (4.3)$$

Lo anterior da como resultado un modelo matemático normalizado, donde todos los elementos quedan escalados geoméricamente a una unidad de dimensión (ver figura 4.3), y sus características físicas se transfieren a los valores de los parámetros geométricos, $\beta_{\eta_\pi} = x_\pi/y_\pi$ y $\beta_{\xi_\pi} = x_\pi/z_\pi$, así como también, se obtienen otros parámetros que relacionan el tiempo de transferencia de calor y el característico ($\varepsilon_\omega = t_c/t_\omega \rightarrow t_\omega = x_\pi^2/\alpha_\pi$), esto para cada espesor y tipo de elemento que se trate (resistencia eléctrica o PDMS).

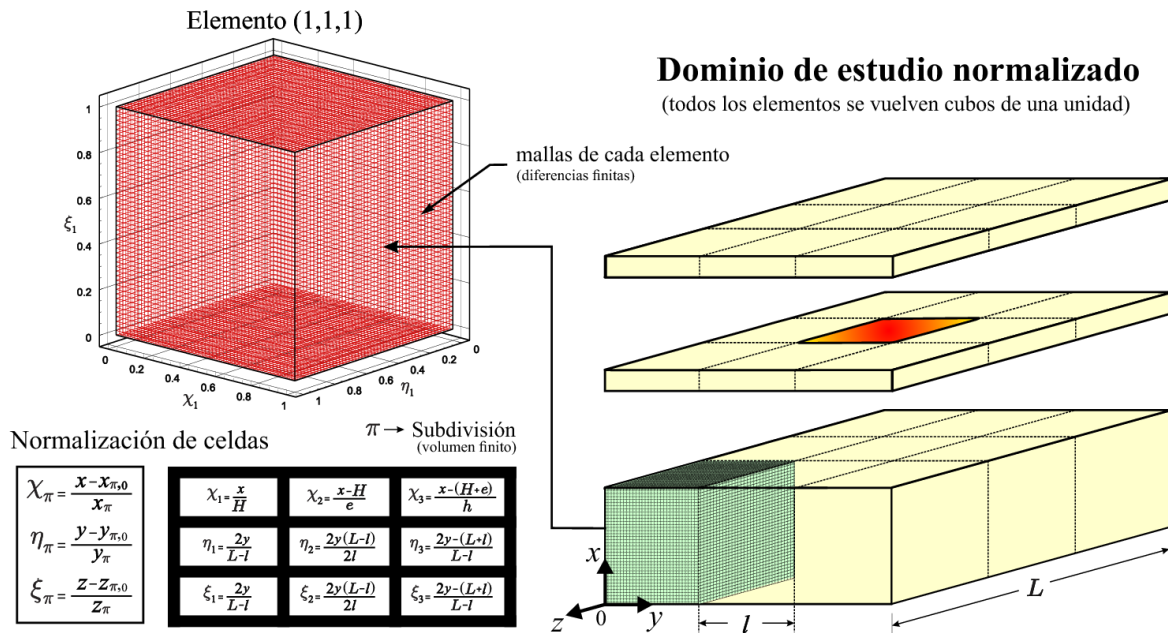


Figura 4.3: Normalización del dominio de estudio. Cada elemento se escala de tal forma que toman una geometría cubica de una unidad adimensional.

Al asumir las dimensiones geométricas que se proponen en la construcción del dispositivo experimental, el cual presenta condiciones de simetría en dos ejes coordenados (y, z), la cantidad de parámetros geométricos (β_{η_π} y β_{ξ_π}) y de relación de tiempos (ε_ω) se reduce considerablemente. Después de realizar todos los procedimientos de escalamiento para cada uno de los elementos, se obtuvieron los siguientes parámetros siendo numerados en función de su aparición.

Tabla 4.3: Parámetros adimensionales obtenidos en el modelo numérico.

Parámetros geométricos	Relación de tiempos característicos
$\beta_1 = \frac{2H}{L-l}, \quad \beta_2 = \frac{H}{l}$	$\varepsilon_1 = \left[\frac{h}{H} \right]^2$
$\beta_3 = \frac{2e}{L-l}, \quad \beta_4 = \frac{e}{l}$	$\varepsilon_2 = \left[\frac{h}{e} \right]^2$
$\beta_5 = \frac{2h}{L-l}, \quad \beta_6 = \frac{h}{l}$	$\varepsilon_3 = \frac{\alpha_r h^2}{\alpha_g e^2}$

4.2 Discretización del modelo numérico

El siguiente paso en la implementación del esquema numérico de solución es la discretización de las ecuaciones ya adimensionalizadas (normalizadas). Lo anterior a la par de la construcción de un algoritmo computacional donde se evalúen todos los elementos que integran el modelo de estudio. En este contexto, primero se selecciona un método numérico capaz de resolver las ecuaciones (4.2) y (4.3); para lo cual, dada las características de las ecuaciones anteriormente citadas, se ha elegido como la mejor opción de cálculo el método Implícito de Dirección Alternante (ADI por sus siglas en inglés) [61]. Dos aspectos básicos para tal selección son: uno que el esquema de solución permite la evaluación de las ecuaciones en su forma completa (3D en estado transitorio), además de implementarse bajo el concepto implícito el cual brinda mejores condiciones en la estabilidad de los cálculos. Por otra parte, es importante puntualizar que no todo implica ventajas, el uso de método ADI requiere de un mayor esfuerzo y trabajo, situación que se deriva de los procedimientos en la construcción de un algoritmo más complejo. A continuación, se detallan las principales características en la discretización de las ecuaciones, así como también, la forma en la que llevan a cabo los cálculos mediante el método ADI.

4.2.1 Método Implícito de Dirección Alternante (ADI).

El método ADI plantea un procedimiento secuencial al momento de discretizar las ecuaciones. Por un lado, se solicita una discretización hacia adelante en el caso de la derivada temporal, y por el otro, se demanda una diferenciación centrada para los casos de las derivadas espaciales. Además, se infiere una fragmentación en las evaluaciones (pasos de cálculo) dependiendo del número de coordenadas espaciales

que se tengan (2D y/o 3D). Por ejemplo, si se asume el modelo de estudio que se ha propuesto, es lógico pensar que el cálculo se tiene que realizar en tres pasos, uno por cada coordenada ya que el modelo de estudio es tridimensional (3D). El método ADI indica que en cada paso una de las coordenadas tiene que ser evaluada de forma implícita (en el tiempo futuro, $n + \frac{1}{3}$), y las restantes tienen que ser consideradas y/o evaluadas de forma explícitas (en el tiempo presente, n). Es claro, al realizar la fragmentación del cálculo se infiere que el tiempo de cada paso solo representa una tercera parte; por consiguiente, un paso de evaluación solo se completa cuando se realizan los tres barridos implícitos, uno para cada coordenada.

Después de hacer las sustituciones correspondientes en las ecuaciones (4.2) y (4.3), se obtienen las siguientes expresiones de las derivadas en su forma discreta, esto para el primer paso de cálculo donde la coordenada χ es implícita, y las otras dos son explícitas (η y ξ).

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - \theta_{i,j,k}^n}{\frac{1}{3} \Delta \tau}, \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2}, \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j+1,k}^n - 2\theta_{i,j,k}^n + \theta_{i,j-1,k}^n}{\Delta \eta_\pi^2}, \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j,k+1}^n - 2\theta_{i,j,k}^n + \theta_{i,j,k-1}^n}{\Delta \xi_\pi^2}. \quad (4.7)$$

Con estas relaciones, las ecuaciones (4.2) y (4.3) se transforman a su versión discreta (primer paso de cálculo), las cuales están definidas por las ecuaciones (4.8) y (4.9) según es el caso, resistencia eléctrica o PDMS.

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{r_{i+1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{r_{i-1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\chi_\pi^2} + \beta_{\eta\pi}^2 \frac{\theta_{r_{i,j+1,k}}^n - 2\theta_{r_{i,j,k}}^n + \theta_{r_{i,j-1,k}}^n}{\Delta\eta_\pi^2} \\ & + \beta_{\xi\pi}^2 \frac{\theta_{r_{i,j,k+1}}^n - 2\theta_{r_{i,j,k}}^n + \theta_{r_{i,j,k-1}}^n}{\Delta\xi_\pi^2} + \lambda = \frac{\theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} - \theta_{r_{i,j,k}}^n}{\frac{\varepsilon_n}{3}\Delta\tau}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{g_{i+1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{g_{i-1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\chi_\pi^2} + \beta_{\eta\pi}^2 \frac{\theta_{g_{i,j+1,k}}^n - 2\theta_{g_{i,j,k}}^n + \theta_{g_{i,j-1,k}}^n}{\Delta\eta_\pi^2} \\ & + \beta_{\xi\pi}^2 \frac{\theta_{g_{i,j,k+1}}^n - 2\theta_{g_{i,j,k}}^n + \theta_{g_{i,j,k-1}}^n}{\Delta\xi_\pi^2} = \frac{\theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} - \theta_{g_{i,j,k}}^n}{\frac{\varepsilon_n}{3}\Delta\tau}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En estas expresiones los términos futuros ($n + \frac{1}{3}$) no se conocen, caso contrario a los términos del presente (n) que si son conocidos y/o se tienen; por lo tanto, ambos se pueden separar en términos conocidos y no-conocidos, con lo cual se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$C_i \theta_{r_{i+1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + B_i \theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + A_i \theta_{r_{i-1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} = R_{r_i}, \quad (4.10)$$

$$C_i \theta_{g_{i+1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + B_i \theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + A_i \theta_{g_{i-1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} = R_{g_i}. \quad (4.11)$$

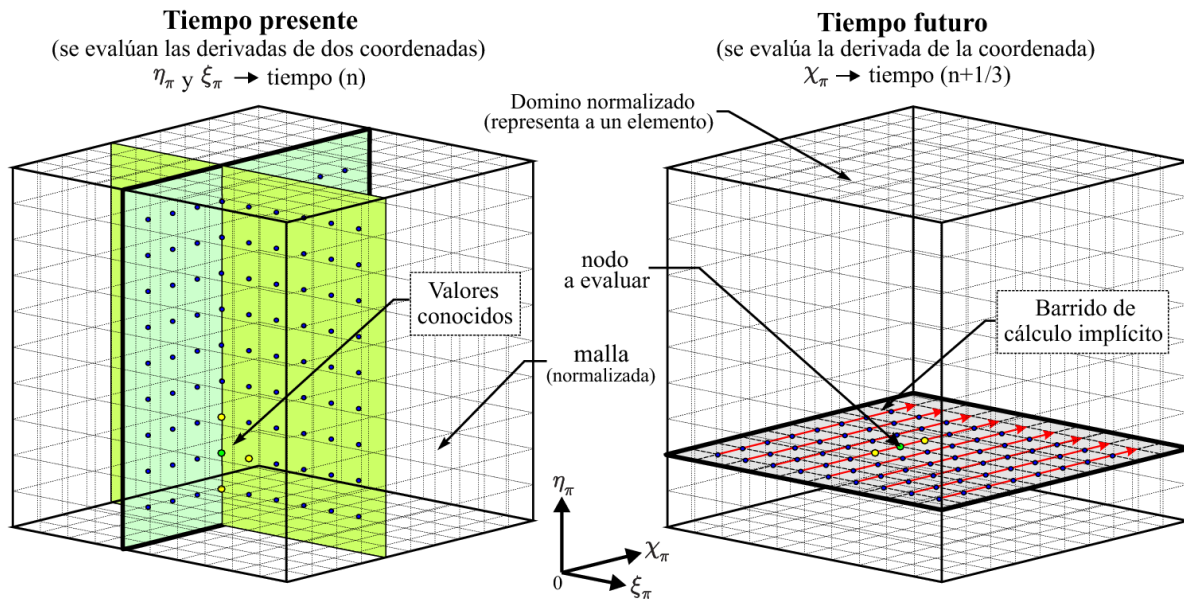
Aquí, las constantes (C_i, B_i, A_i) y los residuos (R_{r_i}, R_{g_i}) se encuentran definidos por las expresiones que se ilustran a continuación.

$$A_i = -\frac{\varepsilon_n \Delta\tau}{3\Delta\chi_\pi^2}, \quad B_i = 1 + \frac{2\varepsilon_n \Delta\tau}{3\Delta\chi_\pi^2}, \quad C_i = -\frac{\varepsilon_n \Delta\tau}{3\Delta\chi_\pi^2}, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} R_{r_i} = \frac{\varepsilon_n \Delta\tau}{3} & \left[\beta_{\eta\pi}^2 \frac{\theta_{r_{i,j+1,k}}^n - 2\theta_{r_{i,j,k}}^n + \theta_{r_{i,j-1,k}}^n}{\Delta\eta_\pi^2} \right. \\ & \left. + \beta_{\xi\pi}^2 \frac{\theta_{r_{i,j,k+1}}^n - 2\theta_{r_{i,j,k}}^n + \theta_{r_{i,j,k-1}}^n}{\Delta\xi_\pi^2} + \lambda \right] + \theta_{r_{i,j,k}}^n, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$R_{g_i} = \frac{\varepsilon_n \Delta \tau}{3} \left[\beta_{\eta_\pi}^2 \frac{\theta_{g_{i,j+1,k}}^n - 2\theta_{g_{i,j,k}}^n + \theta_{g_{i,j-1,k}}^n}{\Delta \eta_\pi^2} + \beta_{\xi_\pi}^2 \frac{\theta_{g_{i,j,k+1}}^n - 2\theta_{g_{i,j,k}}^n + \theta_{g_{i,j,k-1}}^n}{\Delta \xi_\pi^2} \right] + \theta_{g_{i,j,k}}^n \quad (4.14)$$

Al obtenerse las soluciones numéricas de las ecuaciones (4.10) y (1,11) mediante el algoritmo de Thomas [62], es fácil observar que estos resultados solo representan el primer paso de evaluación, puesto que, hasta este punto solo se ha realizado el barrido implícito en la coordenada χ (ver figura 4.4). Por lo tanto, con los resultados ya obtenidos para tiempo $n + \frac{1}{3}$ (se convierte en el tiempo presente), se procede con la evaluación del siguiente paso de cálculo, para lo cual, la coordenada η pasa a ser implícita ($n + \frac{2}{3}$) y las otras dos se conservan como explícitas ($n + \frac{1}{3}$).



Esquema de construcción de algoritmo de cómputo 3D-transitorio (primer paso de cálculo)

Figura 4.4: Representación esquemática de la construcción del algoritmo numérico ADI para el primer paso de cálculo. Aquí, se privilegia una discretización y barrido implícito en la coordenada adimensional χ (tiempo futuro $n + \frac{1}{3}$). Por lo tanto, las derivadas espaciales en las otras dos coordenadas son evaluadas de forma explícita (tiempo n).

Después de realizar las sustituciones correspondientes, se obtienen las siguientes expresiones, esto para el segundo paso de cálculo.

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - \theta_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} \Delta \tau}, \quad (4.15)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2}, \quad (4.16)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2}, \quad (4.17)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \xi_\pi^2}. \quad (4.18)$$

De igual manera que en el primer paso de cálculo, se sustituyen las expresiones discretas en las ecuaciones adimensionales (4.2) y (4.3), obteniéndose así los modelos discretos solo que ahora para el segundo paso de cálculo.

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{r,i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{r,i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2} + \beta_{\eta_\pi}^2 \frac{\theta_{r,i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{r,i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2} \\ & + \beta_{\xi_\pi}^2 \frac{\theta_{r,i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{r,i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \xi_\pi^2} + \lambda = \frac{\theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - \theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\frac{\varepsilon_n}{3} \Delta \tau}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{g,i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{g,i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2} + \beta_{\eta_\pi}^2 \frac{\theta_{g,i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{g,i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2} \\ & + \beta_{\xi_\pi}^2 \frac{\theta_{g,i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{g,i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \xi_\pi^2} = \frac{\theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - \theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\frac{\varepsilon_n}{3} \Delta \tau}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aquí, el tiempo $n + \frac{1}{3}$ ya es conocido debido a los resultados obtenidos en los cálculos anteriores. Por lo tanto, se procede a la separación de términos entre los conocidos y no-conocidos, esto para integrar de nueva cuenta las ecuaciones simplificadas constantes, y residuos correspondientes. A continuación, se ilustran las ecuaciones que definen cada variable y/o constante del cálculo numérico (para el segundo barrido).

Modelos por resolver en el segundo paso de cálculo son:

$$C_j \theta_{r_{i,j+1,k}}^{n+\frac{2}{3}} + B_j \theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} + A_j \theta_{r_{i,j-1,k}}^{n+\frac{2}{3}} = R_{r_j}, \quad (4.21)$$

$$C_j \theta_{g_{i,j+1,k}}^{n+\frac{2}{3}} + B_j \theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} + A_j \theta_{g_{i,j-1,k}}^{n+\frac{2}{3}} = R_{g_j}; \quad (4.22)$$

donde las constantes y los residuos esta definidos por las siguientes expresiones,

$$A_j = -\frac{\varepsilon_n \Delta \tau \beta_{\eta\pi}^2}{3 \Delta \eta_{\pi}^2}, \quad B_j = 1 + \frac{2 \varepsilon_n \Delta \tau \beta_{\eta\pi}^2}{3 \Delta \eta_{\pi}^2}, \quad C_j = -\frac{\varepsilon_n \Delta \tau \beta_{\eta\pi}^2}{3 \Delta \eta_{\pi}^2}, \quad (4.23)$$

$$R_{r_j} = \frac{\varepsilon_n \Delta \tau}{3} \left[\frac{\theta_{r_{i+1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{r_{i-1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \chi_{\pi}^2} \right. \quad (4.24)$$

$$\left. + \beta_{\xi\pi}^2 \frac{\theta_{r_{i,j,k+1}}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{r_{i,j,k-1}}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \xi_{\pi}^2} + \lambda \right] + \theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}},$$

$$R_{g_i} = \frac{\varepsilon_n \Delta \tau}{3} \left[\frac{\theta_{g_{i+1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{g_{i-1,j,k}}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \chi_{\pi}^2} \right. \quad (4.25)$$

$$\left. + \beta_{\xi\pi}^2 \frac{\theta_{g_{i,j,k+1}}^{n+\frac{1}{3}} - 2\theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}} + \theta_{g_{i,j,k-1}}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \xi_{\pi}^2} \right] + \theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{3}}.$$

Para completar el esquema numérico de evaluación se procede con el tercer paso del cálculo. Este último cálculo nos permite llevar las evaluaciones a un tiempo completo en el futuro ($n + 1$), en consecuencia, la siguiente iteración ya corresponde al siguiente tiempo futuro, para lo cual, los resultados obtenidos por el último paso de evaluación (como la indica el método ADI) se asumen como el tiempo presente en la siguiente iteración transitoria. Para implementar el último paso de cálculo, el método de ADI demanda una discretización en el futuro ($n + 1$) para la derivada que resta ser evaluada de forma implícita. Caso contrario, las otras dos derivadas (coordenadas) se evalúan de forma explícita, estos cálculos que se realizan utilizando los resultados de la evaluación anterior.

Sustituyendo las discretizaciones antes mencionadas en las derivadas de los modelos, se definen las siguientes expresiones, esto con el fin de realizar la evaluación del tercer paso de cálculo.

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j,k}^{n+1} - \theta_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} \Delta \tau} \quad (4.26)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2} \quad (4.27)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2}, \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_\pi^2} \right|_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,j,k+1}^{n+1} - 2\theta_{i,j,k}^{n+1} + \theta_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta \xi_\pi^2}. \quad (4.29)$$

Después de realizar las modificaciones pertinentes en los modelos (4.2) y (4.3), se determinan sus versiones discretas las cuales son útiles para la evaluación del tercer paso de cálculo. Dichos modelos discretos se ilustran a continuación,

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{r,i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{r,i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2} + \beta_{\eta_\pi}^2 \frac{\theta_{r,i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{r,i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2} \\ & + \beta_{\xi_\pi}^2 \frac{\theta_{r,i,j,k+1}^{n+1} - 2\theta_{r,i,j,k}^{n+1} + \theta_{r,i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta \xi_\pi^2} + \lambda = \frac{\theta_{r,i,j,k}^{n+1} - \theta_{r,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\frac{\varepsilon_n}{3} \Delta \tau}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{g,i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{g,i-1,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2} + \beta_{\eta_\pi}^2 \frac{\theta_{g,i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{g,i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2} \\ & + \beta_{\xi_\pi}^2 \frac{\theta_{g,i,j,k+1}^{n+1} - 2\theta_{g,i,j,k}^{n+1} + \theta_{g,i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta \xi_\pi^2} = \frac{\theta_{g,i,j,k}^{n+1} - \theta_{g,i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\frac{\varepsilon_n}{3} \Delta \tau}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

En estas ecuaciones, se realiza el mismo procedimiento como en el primer y segundo paso, primero se separan los términos desconocidos o futuros ($n+1$) de los ya conocidos ($n + \frac{1}{3}$), y posteriormente, se simplifican las ecuaciones obteniéndose así las correspondientes constante y residuos para el tercer paso de cálculo. Al realizar todos los reacomodos que se indican, las ecuaciones resultantes son las siguiente:

$$C_k \theta_{r_{i,j,k+1}}^{n+1} + B_k \theta_{r_{i,j,k}}^{n+1} + A_k \theta_{r_{i,j,k-1}}^{n+1} = R_{r_k}, \quad (4.32)$$

$$C_k \theta_{g_{i,j,k+1}}^{n+1} + B_k \theta_{g_{i,j,k}}^{n+1} + A_k \theta_{g_{i,j,k-1}}^{n+1} = R_{g_k}. \quad (4.33)$$

Adicionalmente, las constantes y residuos de las ecuaciones (4.32) y (4.33) están definidas de la siguiente manera,

$$A_k = -\frac{\varepsilon_n \Delta \tau \beta_{\xi\pi}^2}{3 \Delta \xi_\pi^2}, \quad B_k = 1 + \frac{2 \varepsilon_n \Delta \tau \beta_{\xi\pi}^2}{3 \Delta \xi_\pi^2}, \quad C_k = -\frac{\varepsilon_n \Delta \tau \beta_{\xi\pi}^2}{3 \Delta \xi_\pi^2}, \quad (4.23)$$

$$R_{r_k} = \frac{\varepsilon_n \Delta \tau}{3} \left[\frac{\theta_{r_{i+1,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{r_{i-1,j,k}}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2} \right. \quad (4.24)$$

$$\left. + \beta_{\xi\pi}^2 \frac{\theta_{r_{i,j+1,k}}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{r_{i,j-1,k}}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2} + \lambda \right] + \theta_{r_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}},$$

$$R_{g_k} = \frac{\varepsilon_n \Delta \tau}{3} \left[\frac{\theta_{g_{i+1,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{g_{i-1,j,k}}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \chi_\pi^2} \right. \quad (4.25)$$

$$\left. + \beta_{\eta\pi}^2 \frac{\theta_{g_{i,j+1,k}}^{n+\frac{2}{3}} - 2\theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}} + \theta_{g_{i,j-1,k}}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta \eta_\pi^2} \right] + \theta_{g_{i,j,k}}^{n+\frac{2}{3}}.$$

Hasta aquí, se puede inferir que ya se cuenta con el esquema numérico de evaluación, al especificar el elemento a evaluar mediante los subíndices, se puede verificar que estos esquemas permiten evaluar los 27 elementos que integran el modelo de estudio. No obstante, todavía se requiere definir las condiciones de interfase y de frontera, las cuales gobiernan tanto las interacciones entre los diferentes elementos, como estas mismas entre los elementos y su entorno (según sea el caso). Siguiendo las características del esquema de la figura 4.1, se puede indicar que las condiciones de interfase están determinadas por la continuidad del medio, y por la conservación de la energía. Además, las condiciones de frontera en el modelo de estudio son de dos tipos: el primero y más común es del tipo adiabática, en este caso el calor que fluye a través de la frontera es despreciable. Por otro lado, el segundo tipo

es cuando la condición de frontera está gobernada por la ley de enfriamiento de Newton; en este caso, el calor transferido al ambiente está sujeto a las condiciones del entorno, siendo el ambiente el que define cuanto calor se puede disipar. Claramente, lo que se menciona es un resumen, para el caso de la construcción del esquema de solución numérico, a cada elemento se le tiene que definir sus seis condiciones de frontera. Tal condición se debe a que la evaluación implica un modelo tridimensional, y por tanto, cada elemento a evaluar representa un cubo de un volumen unitario (ver figura 4.5).

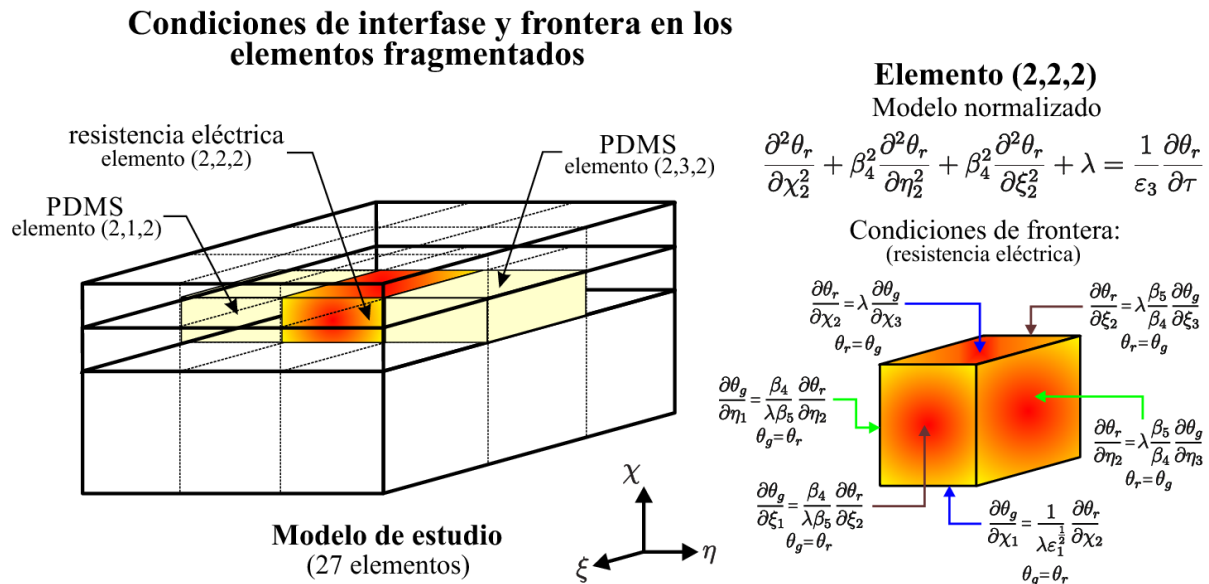
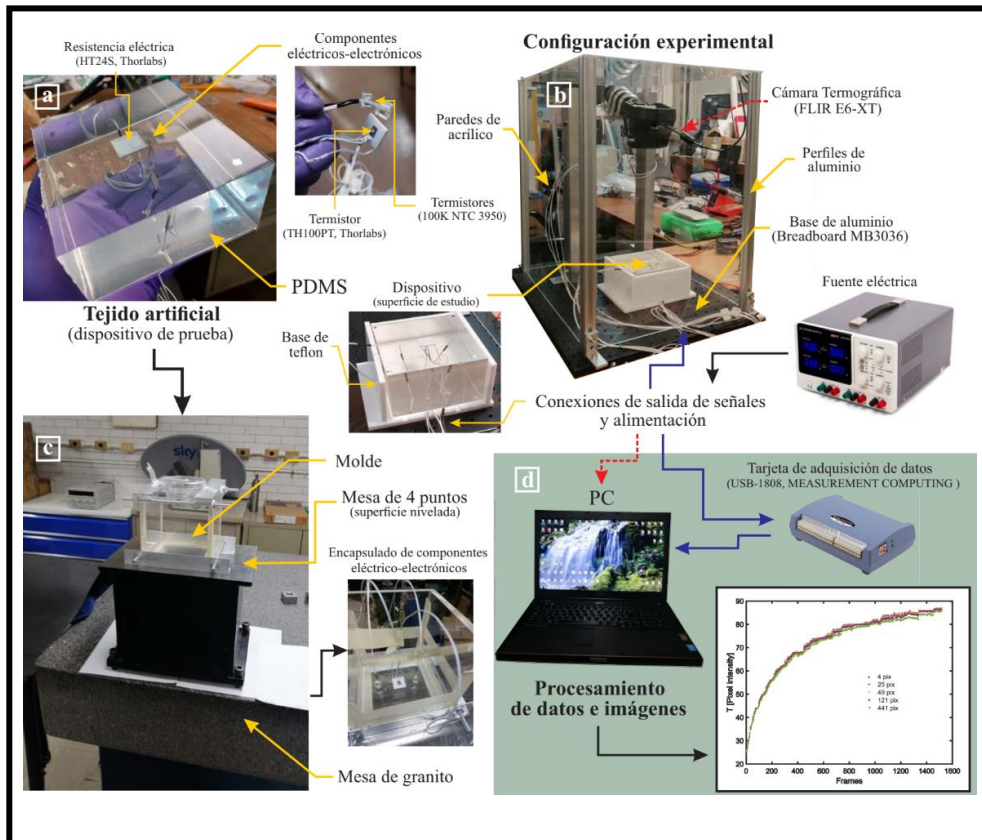


Figura 4.5: Representación esquemática de las condiciones de frontera para un elemento fragmentado por el algoritmo. Aquí, se ilustra el elemento (2,2,2) que corresponde a la resistencia eléctrica, no obstante, cada elemento debe ser evaluado con sus correspondientes condiciones de frontera.

Como puede observarse en la figura 4.5, esta detalla las condiciones de frontera bajo las cuales se evalúa la resistencia eléctrica (elemento (2,2,2)). En este caso, se emplean las condiciones asociadas a la conservación de la energía, esto porque el elemento (2,2,2) es el que cede calor. Caso contrario, para la evaluación de los elementos que se ponen en contacto con la resistencia eléctrica, ya sea el elemento (2,1,2) o (2,3,2), se hace uso de la otra condición de interfase (continuidad del medio); y por tanto, ambas condiciones se usan alternadamente con el fin de evaluar la interfase entre dos elementos en contacto. Por último, la siguiente tabla ilustra el procedimiento empleado para la discretización de las condiciones de frontera. Cabe mencionar, las expresiones que se muestran a continuación solo representan a las que corresponden al cálculo del elemento (2,2,2). Por consiguiente, este procedimiento debe realizarse para cada uno de los elementos que integran el modelo de estudio.

Tabla 4.4: Discretización de las condiciones de frontera para el cálculo del elemento (2,2,2) que representa a la resistencia eléctrica.

Eje coordinado adimensional	Condición de frontera	Modelo discreto
Eje χ	$\frac{\partial \theta_g}{\partial \chi_1} = \frac{1}{\lambda \varepsilon_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta_r}{\partial \chi_2}$ $\frac{\partial \theta_r}{\partial \chi_2} = \lambda \frac{\partial \theta_g}{\partial \chi_3}$	<p>Elemento (2,2,2) – Elemento (1,2,2)</p> $\theta_{r_{1,j,k}} = \theta_{r_{2,j,k}} - \lambda \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \left(\theta_{g_{m,j,k}} - \theta_{g_{m-1,j,k}} \right)$ <p>Elemento (2,2,2) – Elemento (3,2,2)</p> $\theta_{r_{m,j,k}} = \theta_{r_{m-1,j,k}} + \lambda \left(\theta_{g_{2,j,k}} - \theta_{g_{1,j,k}} \right)$
Eje η	$\frac{\partial \theta_g}{\partial \eta_1} = \frac{\beta_4}{\lambda \beta_5} \frac{\partial \theta_r}{\partial \eta_2}$ $\frac{\partial \theta_r}{\partial \eta_2} = \lambda \frac{\beta_5}{\beta_4} \frac{\partial \theta_g}{\partial \eta_3}$	<p>Elemento (2,2,2) – Elemento (2,1,2)</p> $\theta_{r_{i,1,k}} = \theta_{r_{i,2,k}} - \lambda \frac{\beta_5}{\beta_4} \left(\theta_{g_{i,n,k}} - \theta_{g_{i,n-1,k}} \right)$ <p>Elemento (2,2,2) – Elemento (2,3,2)</p> $\theta_{r_{i,n,k}} = \theta_{r_{i,n-1,k}} + \lambda \frac{\beta_5}{\beta_4} \left(\theta_{g_{i,2,k}} - \theta_{g_{i,1,k}} \right)$
Eje ξ	$\frac{\partial \theta_g}{\partial \xi_1} = \frac{\beta_4}{\lambda \beta_5} \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_2}$ $\frac{\partial \theta_r}{\partial \xi_2} = \lambda \frac{\beta_5}{\beta_4} \frac{\partial \theta_g}{\partial \xi_3}$	<p>Elemento (2,2,2) – Elemento (2,1,2)</p> $\theta_{r_{i,j,1}} = \theta_{r_{i,j,2}} - \lambda \frac{\beta_5}{\beta_4} \left(\theta_{g_{i,j,p}} - \theta_{g_{i,j,p-1}} \right)$ <p>Elemento (2,2,2) – Elemento (2,3,2)</p> $\theta_{r_{i,j,p}} = \theta_{r_{i,j,p-1}} + \lambda \frac{\beta_5}{\beta_4} \left(\theta_{g_{i,j,2}} - \theta_{g_{i,j,1}} \right)$



CAPITULO 5

Metodología de estudio experimental

5 Metodología de estudio experimental.

En este capítulo se describe la metodología de estudio experimental que fue creada para el presente trabajo de tesis. Dicha metodología ha sido desarrollada con la finalidad de evaluar experimentalmente el modelo que se ha planteado en el capítulo 2; en este contexto, este procedimiento tiene como objetivo base validar de forma directa los fundamentos científicos ya plasmados. El capítulo se divide en dos secciones principales, la primera sección detalla el procedimiento empleado para la construcción del arreglo experimental, tanto para los dispositivos de prueba o también llamados tejidos artificiales (modelo de estudio), como para el entorno de evaluación experimental. Aquí, se enlistan todos los materiales, componentes eléctricos-electrónicos, y dispositivos necesarios para poder llevar a cabo las evaluaciones experimentales. Por otro lado, en la segunda sección se explican los procedimientos empleados para la adquisición, el post-procesamiento, y sobre todo, la evaluación de los datos experimentales. En este caso, se enumeran los diferentes esquemas y algoritmos de procesamiento requeridos para el manejo de los datos experimentales.

5.1 Construcción del arreglo experimental.

Con el fin de concretar el arreglo experimental, la metodología propuesta requiere del diseño y/o construcción de varios dispositivos de prueba (tejidos artificiales), esto en conjunto con un entorno experimental donde se puedan realizar las evaluaciones en ambiente controlado. Para el caso de los dispositivos de prueba, el modelo de estudio del capítulo 2 nos ayuda a definir las principales características: geometría, elementos que lo integran, puntos y superficies importantes para el estudio (datos a recabar), etc. Por lo tanto, hasta este punto solo falta definir las dimensiones, los materiales, y por supuesto, los dispositivos que los integrarán (resistencia eléctrica, termopares y/o termistores, etc.).

5.1.1 Componentes que integran los dispositivos de prueba (tejidos artificiales).

En la construcción de los tejidos artificiales se emplean varios componentes eléctricos y materiales (ver figura 5.1). En general, los componentes más importantes de cada uno de los dispositivos son los termopares y el termistor, esto en conjunto con la resistencia de calefacción. Además, se utiliza un polímero especial de silicón (PDMS, Sylgard 184) para la construcción del cuerpo de los dispositivos de prueba, en

particular, este material fue seleccionado ya que permite encapsular con suma facilidad todos los componentes antes citados, es transparente y se puede distinguir cada una de las regiones, y por supuesto, es muy estable y homogéneo en su composición a diferentes temperaturas (propiedades físicas bien conocidas). El único cambio en los dispositivos de prueba es el espesor de encapsulamiento (h). Dicha dimensión marca la profundidad en que se encuentra cada una de las fuentes térmicas (resistencia eléctrica), estando definida para el presente trabajo por valores de 1, 3.2, 10 y 25mm. Los espesores que se mencionan fueron seleccionados con el objetivo de evaluar íntegramente el comportamiento del fenómeno físico (flujo de calor), y a la vez, tener un rango amplio de profundidad de la fuente de calor evitando hacer una gran cantidad de experimentos con cambios mínimamente apreciables. Por otro lado, las demás secciones o dimensiones en los dispositivos no fueron modificadas, manteniendo espesores de encapsulado de 50mm, esto con respecto a las superficies adyacentes de la resistencia eléctrica. En consecuencia, se espera que la condición de flujo de calor unidireccional impere en todo momento, esto en dirección a la superficie de estudio (ver figura 2.1). A continuación se describen las características relevantes de los componentes que integran el experimento.

Construcción y elementos que integran los dispositivos de prueba

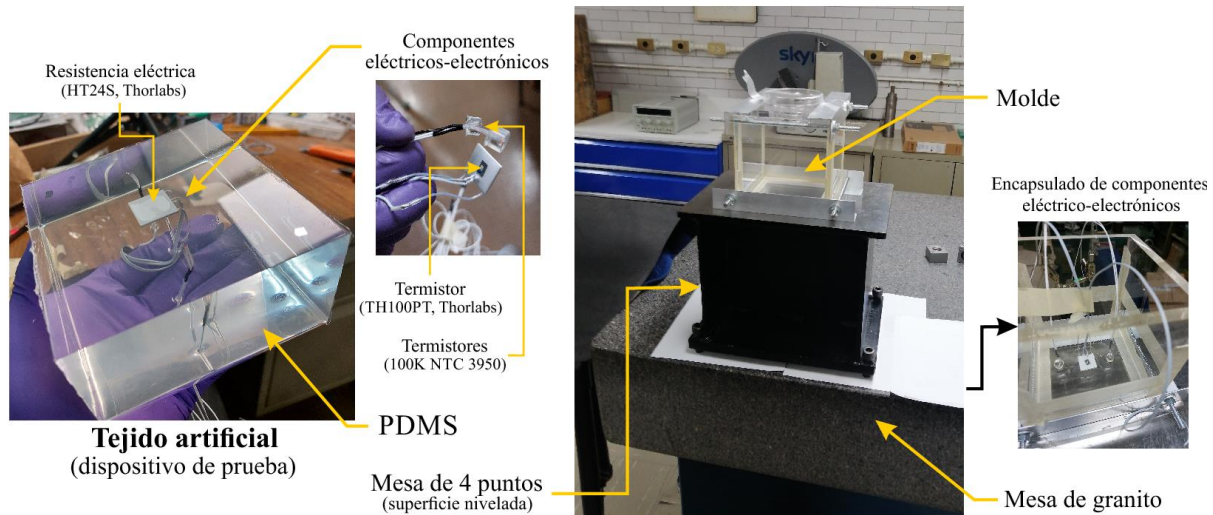


Figura 5.1: Componentes eléctricos-electrónicos y materiales con los cuales se fabrican los dispositivos de prueba (tejidos artificiales), así como también, fases del proceso de construcción de dichos dispositivos.

5.1.1.1 Resistencia eléctrica

En el caso de las resistencias eléctricas, modelo HT24S (Thorlabs), todas cuentan con las mismas dimensiones, un ancho-largo de 20mm y un espesor de 1.7mm (ver figura 5.1). De igual manera, todas comparten los mismos valores de resistencia eléctrica, 23.5 Ohm, capacidad y conductividad térmica. Estos últimos fueron caracterizados mediante los siguientes procedimientos:

- Capacidad térmica específica: Se midió la temperatura de equilibrio entre una resistencia caliente inmersa en agua y la temperatura inicial del agua para calcular la constante en función de una constante conocida (agua).
- Conductividad térmica: Se calentó una resistencia en un ambiente aislado y colocando otra resistencia (a temperatura ambiente) sobre la primera, se midió la diferencia de temperaturas entre estas dos y se usó la relación entre las ecuaciones 1.3 y 2.4 para obtener la constante en función de la diferencia de temperaturas y la energía suministrada.

Por lo tanto, se puede esperar en todo momento que la energía generada por cada dispositivo es igual si la variable de control (voltaje aplicado) tiene el mismo valor, para este caso, se emplean cinco diferentes voltajes 1.4, 1.9, 2.4, 2.8 y 3.3V, valores que representan diferentes energías según la relación dada por la ecuación 2.4, considerando además que el voltaje aplicado reflejará una potencia eléctrica ideal para cada caso.

5.1.1.2 Termistor

Al ser necesario un sensor capaz de medir la temperatura interna del dispositivo, se optó por usar un termistor tipo TH100PT (Thorlabs) cuya cara plana pudiese presentar una mayor área de contacto con la resistencia. Para su utilización, al inicio se planteó usar un simple divisor de voltaje para su posterior medición con la tarjeta de adquisición de datos; no obstante, dado que el sensor resultó tener demasiadas variaciones en esta configuración, se necesitó de otro circuito de acondicionamiento, dicho elemento consta de un amplificador de instrumentación cuyas entradas están referidas a un puente de Wheatstone el cual puede en la figura 5.2.

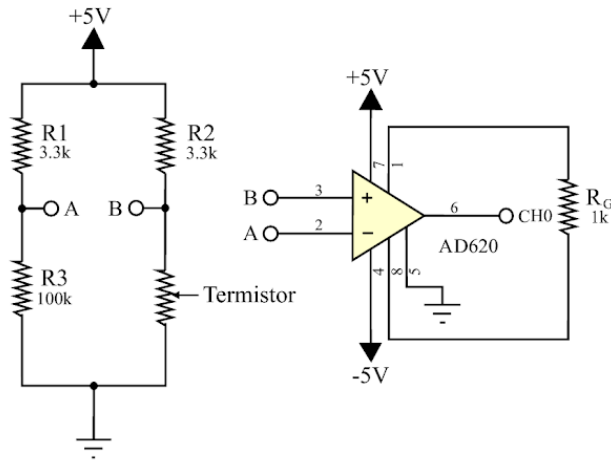


Figura 5.2: Circuito de acondicionamiento utilizado para controlar la sensibilidad del termistor, en la izquierda el puente de Wheatstone con las resistencias fijas (R1-R3) y la resistencia variable (termistor), a la derecha el amplificador de instrumentación con una resistencia de ganancia R_G y la salida a la tarjeta de adquisición CH0.

En la figura anterior, se ilustran las características que definen al puente de Wheatstone utilizado para medir los cambios de voltaje de una resistencia fija en comparación con una resistencia variable (termistor). Dado que el termistor tiene la capacidad de cambiar su resistencia eléctrica en función de la temperatura a la que esté sometido, con ayuda de los datos proporcionados por el fabricante es posible transformar las lecturas de voltaje en temperatura, esto mediante una relación voltaje-temperatura descrita por la función de segundo grado mostrada a continuación [63].

$$R_T = R_0(BT^2 + AT + 1), \quad (5.1)$$

donde $A = 3.9083 \times 10^{-3} [^{\circ}C^{-1}]$, $B = -5.775 \times 10^{-7} [^{\circ}C^{-2}]$, y $R_0 = 100\Omega$.

A su vez, el amplificador de instrumentación empleado (AD620, Texas Instruments) cuenta con una ecuación para calcular la ganancia que se tendrá a la salida, la cual se describe por la siguiente expresión,

$$G = \frac{49.4k\Omega}{R_G} + 1. \quad (5.2)$$

Al contar con una resistencia de ganancia (R_G) de 1000 ohm, sustituyendo se obtiene una ganancia de

$$G = \frac{49.4k\Omega}{1k\Omega} + 1 = 50.4. \quad (5.3)$$

Esta ganancia nos indica que el valor medido de voltaje por la tarjeta de adquisición será aproximadamente 50.4 veces la diferencia entre los voltajes del puente de Wheatstone. Al necesitar saber los cambios de resistencia y no de voltaje, tendremos que inferirla, obteniendo así la siguiente ecuación:

$$V_{termistor} = \frac{V_{out}}{50.4} + V_{cc} * \frac{100}{(3300 + 100)}. \quad (5.4)$$

Aquí, con el voltaje ya calculado, la resistencia se deduce a partir de la siguiente relación,

$$R_{termistor} = 3300 * \frac{V_{termistor}}{V_{cc} - V_{termistor}}. \quad (5.5)$$

Finalmente, después de haber obtenido el valor de la resistencia del termistor, el dato se puede traducir a temperatura mediante la raíz positiva de la ecuación de segundo grado la cual describe su comportamiento. Realizado los acomodados algebraicos necesarios en la ecuación, la temperatura que registra el termistor se encuentra definida de la siguiente manera,

$$T_{termistor} = -A + \frac{\sqrt{A^2 + 4B \left(1 - \frac{R_{termistor}}{R_0}\right)}}{-2B}. \quad (5.6)$$

5.1.1.3 Termopares

Por otra parte, para el caso de los siete termopares, tipo 100K NTC 3950, que son utilizados en el arreglo experimental, el circuito de acondicionamiento requiere solamente de un divisor de voltaje para cada uno de ellos; no obstante, la ecuación que gobierna a estos sensores es logarítmica y se debe de tener en cuenta al momento de adquirir la medición. Además, las mediciones obtenidas por estos sensores mostraron menos perturbaciones en comparación al termistor antes mencionado, en este sentido, la implementación de solo un circuito para todos los termopares resulta ser en arreglo más sencillo (ver figura 5.3).

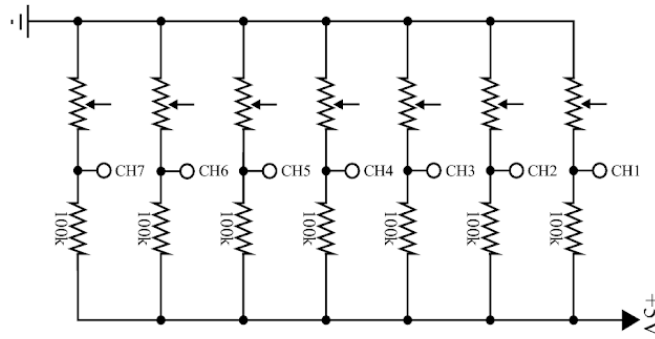


Figura 5.3: Circuito de acondicionamiento utilizado para controlar la sensibilidad de los termopares, consta de una resistencia fija de 100k y resistencias variables (termopares).

En este circuito, al obtener el voltaje de cada uno de los termopares a través de la siguiente ecuación,

$$V_{termopar} = \frac{100k\Omega}{\frac{V_{cc}}{V_{out}} - 1}, \quad (5.7)$$

Se procede a determinar la temperatura de estos utilizando la siguiente expresión,

$$T_{termopar} = \frac{\beta}{\log\left(\frac{V_{termopar}}{100k\Omega}\right) + \frac{\beta}{T_0}} - 273. \quad (5.8)$$

5.1.2 Procedimiento de construcción de los dispositivos de prueba.

Tomando en cuenta todo lo anterior, se diseñó un proceso de construcción de los dispositivos utilizando un molde de acrílico. Este procedimiento consta de varios pasos donde se van fabricando las diferentes secciones de los tejidos artificiales, y a la par, se van encapsulando los componentes eléctricos-electrónicos. Como se observa en las imágenes de la figura 5.1, la construcción se realiza de forma invertida, primero se construye la capa de espesor “h” de estudio de emisión de calor, y luego se introducen los componentes: fuente de calentamiento (resistencia eléctrica) y sensores de temperatura (termopares y termistores). Para lograr una buena exactitud en los espesores de los dispositivos, el proceso de curado de las secciones se lleva a cabo sobre una mesa de 4 puntos nivelada mediante equipos de alta precisión (niveles y mesas de granito con sistemas antivibración).

La fabricación de cada tejido artificial se inicia mezclando los componentes del PDMS, gel y curante, en una relación de 10:1, respectivamente. Estos son mezclados

durante un tiempo de 2 minutos y posteriormente las burbujas generadas por este proceso son removidas en una atmósfera de vacío durante 40 minutos. El polímero es vaciado en el molde de acrílico previamente ensamblado y colocado en la superficie nivelada, dejando curar el polímero ya vertido a temperatura ambiente durante un periodo de 48 horas. Pasado este tiempo, se colocaron en puntos específicos los diferentes sensores de temperatura y la resistencia eléctrica que fueron encapsulados previamente en PDMS, fijándolos a la primera sección de PDMS con ayuda del vertido de una pequeña cantidad de este mismo. Pasado un periodo de curado igual al ya descrito, y con todos los componentes ya adheridos en su lugar, se procedió a agregar una sección mayor de PDMS (aproximadamente 50mm de espesor), con lo cual, después de otro periodo de curado, se obtiene cada dispositivo de prueba. Es claro, en cada paso de fabricación se realizan varios procesos de limpieza y adecuación de los instrumentos que se mencionan. El proceso de fabricación de cada uno de los dispositivos se muestra en el siguiente diagrama:

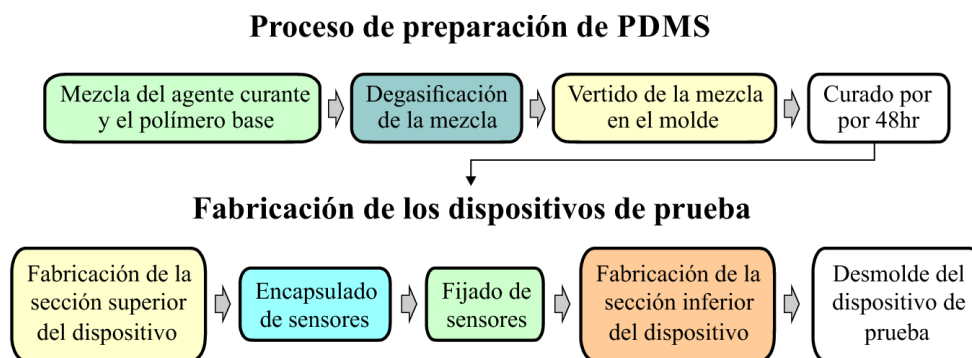


Figura 5.4: Proceso de preparación de PDMS, y pasos a seguir en la construcción de los dispositivos de prueba (tejidos artificiales).

En el caso los sensores de temperatura se decidió realizar un encapsulamiento previo en una pequeña porción del mismo PDMS para evitar posibles deslizamientos respecto a sus posiciones deseadas al momento de verter la última porción de PDMS y lograr una mejor precisión acorde al modelo matemático. Una vez encapsulados su adhesión resultó ser más sencilla. El procedimiento antes mencionado ayuda a obtener un buen control en los espesores de las secciones de encapsulamiento, condición que es indispensable para llevar a cabo el estudio propuesto.

5.1.3 Construcción del entorno experimental.

En el caso del entorno experimental (ver figura 5.5), este se encuentra construido sobre una placa perforada (Breadboard MB3036), y delimitado por perfiles de aluminio

que sostienen paredes de acrílico que evitan el registro de ruido a causa de reflejos térmicos del exterior hacia la región de medición. Adicionalmente, en la zona de mayor interés para el estudio se construyó una estructura de teflón que rodea los dispositivos de prueba a manera de limitar los efectos térmicos bajo estudio dentro del volumen de los mismos dispositivos de prueba. Por esta misma estructura se manejan todas las conexiones de los componentes eléctricos, los cuales se encuentran inmersos en los dispositivos (tejidos artificiales), o bien, se ubican en la periferia de estos. También, el arreglo experimental cuenta con una cámara infrarroja (FLIR E5-WiFi) para las mediciones de temperatura en la superficie del dispositivo, dicha cámara brinda imágenes de 320x240 pixeles con una profundidad de 8 bits, esto en conjunto con termistores tipo 100K NTC 3950 utilizados para la adquisición de datos de temperatura en diferentes puntos. Por último, el control térmico se lleva a cabo mediante la utilización de ventilación forzada, la cual lleva un sensado de la temperatura del aire a la entrada y salida del sistema. Aunque dicho arreglo permite realizar mediciones con y sin control térmico, se consideró sólo la experimentación sin el uso de ventilación forzada al no observar cambios en los datos obtenidos usando esta última.

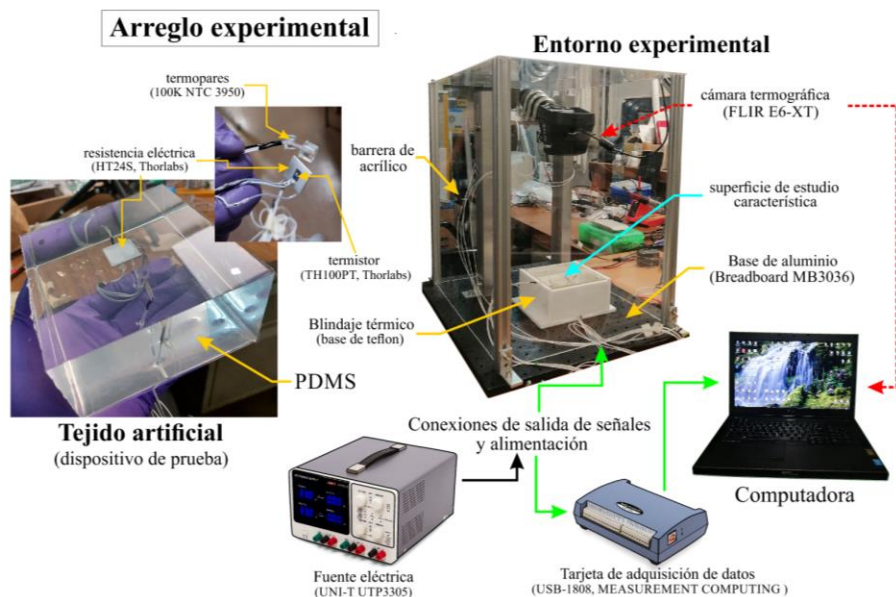


Figura 5.5: Construcción del entorno experimental, con descripción gráfica del procedimiento empleado en la adquisición de datos.

5.2 Adquisición y post-procesamiento de datos experimentales

El arreglo experimental construido permite la adquisición de datos experimentales a través de dos configuraciones diferentes. La primera de estas se basa en la evaluación de la temperatura en puntos específicos de los modelos de

prueba, esto mediante el uso de termistores y/o termopares (contacto directo). Lo anterior posibilita el registro de temperaturas a lo largo del tiempo, ya sea al interior o exterior de los modelos. Adicionalmente, con la ayuda de tarjetas de adquisición de datos (ver figura 5.5), y la elaboración de programas de procesamiento, esta información puede ser empleada para calcular tanto el flujo de calor al interior de los dispositivos, como la correspondiente interacción (número de Nusselt) de dichos dispositivos con su entorno.

Por otro lado, la segunda configuración y de mayor interés en este trabajo, está diseñada para adquirir datos a través de la implementación de técnicas sin contacto (imágenes infrarrojas). Esta configuración hace uso de sensores infrarrojos (cámara) para analizar superficies completas; en este sentido, se hacen tantas evaluaciones como pixeles se tiene en dichos sensores. Claramente, dado que se hace un mayor número de evaluaciones, se puede pensar que este tipo de configuración mejora por mucho la comprensión del proceso de transferencia de calor (evaluar el flujo de energía). No obstante, dicho sistema también presenta inconvenientes, en este caso solo se pueden evaluar superficie externas y no internas, en consecuencia, lo que sucede al interior de los modelos no se puede analizar, o al menos, no de forma directa.

Como se indicó en el párrafo anterior y se puede ver en la figura 5.5, para la adquisición de campos de temperatura mediante técnicas sin contacto se requiere del uso de cámaras termográficas (sensores infrarrojos). En el caso particular del presente trabajo, la cámara que se tiene cuenta con las siguientes especificaciones, y las imágenes que se obtengan de esta serán post-procesadas como se indica a continuación.

5.2.1 Adquisición mediante cámara termográfica (Flir E5-WiFi)

Después de verificar las características del sensor y software especializado disponible para la cámara (Flir E5-WiFi), se pudo constatar que este último no cumple con los requerimientos para el análisis planteado, razón por la cual se tomó la decisión de construir un nuevo algoritmo usando MATLAB. Bajo este nuevo programa se automatizó la toma y/o adquisición de imágenes, controlando así la frecuencia de adquisición de imágenes a lo largo del tiempo. De igual manera, el nuevo programa permite controlar y/o fijar los rangos de evaluación de la temperatura, el formato de imagen, y la ruta de almacenamiento que así se prefiera, todo de manera automatizada. En paralelo, también se construyó un soporte especial para la cámara, este dispositivo permite ajustar el campo visual al cambiar la altura y ángulo para la toma de imágenes. Por otra parte, la comunicación entre el sensor infrarrojo y la

computadora (interfaz) se realizó mediante conexión USB, en este caso, a pesar de que la cámara cuenta con una resolución de 12bits, sólo fue posible acceder a 8 bits en la adquisición de las imágenes, esto debido a una restricción inherente a la paquetería de adquisición de imágenes mediante MATLAB (“Image acquisition Toolbox”, WinVideo adaptor); por consiguiente, dicha condición representa un punto de mejora para el futuro. En resumen, el procedimiento de adquisición de imágenes se explica a continuación mediante un diagrama de flujo.

Procedimiento empleado en la adquisición de imágenes infrarrojas

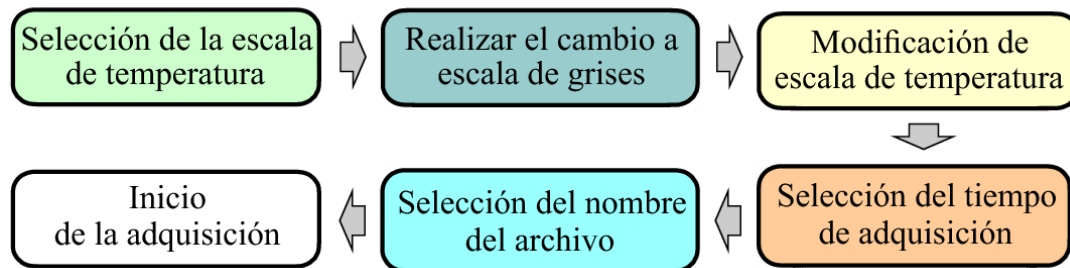


Figura 5.6: Diagrama representativo del procedimiento empleado en la adquisición de imágenes infrarrojas.

Una vez adquiridas las imágenes, se requirió la construcción de otros dos algoritmos para el procesamiento de imágenes y señales, ambos en MATLAB. El primero de estos algoritmos consiste en segmentar la imagen en una región de interés (ROI), para así poder apreciar los valores de píxeles que contienen elementos tales como la escala de temperatura, el símbolo de conexión USB, la marca de la cámara, etc. Pasando de una imagen original de 320x240 píxeles a una de 198x176 (ver figura 5.7).

Primer algoritmo de evaluación de las imágenes

(recorte de las secciones que generan interferencia)

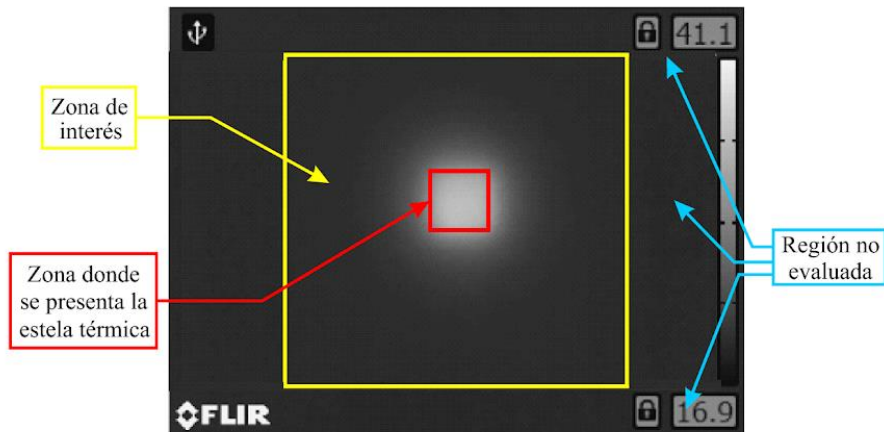


Figura 5.7: Diagrama donde se ilustra el proceso de recorte de las imágenes obtenidas previamente. Aquí, se desprecian los datos (píxeles) afectados por programación base de la cámara. En este contexto, la zona de interés (ROI) es la que será empleada en las evaluaciones experimentales.

El segundo paso es obtener otras dos ROI, la primera corresponde al área de la placa que se está calentando en el interior de la probeta, comprendida por una región de 20x20 píxeles (dominio cuadrado). En esta región los píxeles se promedian para obtener un vector para después obtener el valor máximo de temperatura superficial en dicha área. Por otro parte, la segunda ROI es una región rectangular de 198x15 píxeles que brinda información sobre la temperatura a lo largo de la superficie de interés durante el tiempo cuando esta información se almacena en un vector de tamaño igual a la duración del experimento (ver figura 5.8).

Segundo algoritmo de evaluación de las imágenes

(definición de la temperatura máxima y en una sección específica)

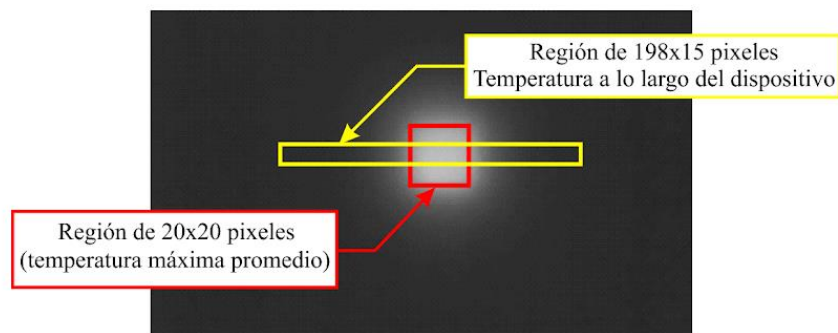


Figura 5.8: Diagrama que ilustra el procedimiento donde se define la temperatura máxima promedio en la imagen (recuadro rojo), así como también, la temperatura en una sección transversal de interés.

Después de definir la información y/o datos más relevantes en las imágenes (en términos de intensidad de píxeles), se procede a interpretar en términos de temperatura la información que cada uno de los píxeles contiene en las imágenes. Para lograr lo anterior, primero se tiene que asumir que las imágenes adquiridas solo representan valores de intensidad de cada píxel, y estos están definidos para una escala de grises con valores entre 0 y 255 (al contar sólo con 8 bits). Ya considerado lo anterior, el cambio a valores de temperatura se logra analizando la escala de temperatura que se muestra la cámara (ver figura 5.9). Aquí, se puede constatar que la temperatura sigue un comportamiento línea con respecto a la intensidad de píxel (ver ecuación (5.9)).

$$y = mx + b. \tag{5.9}$$

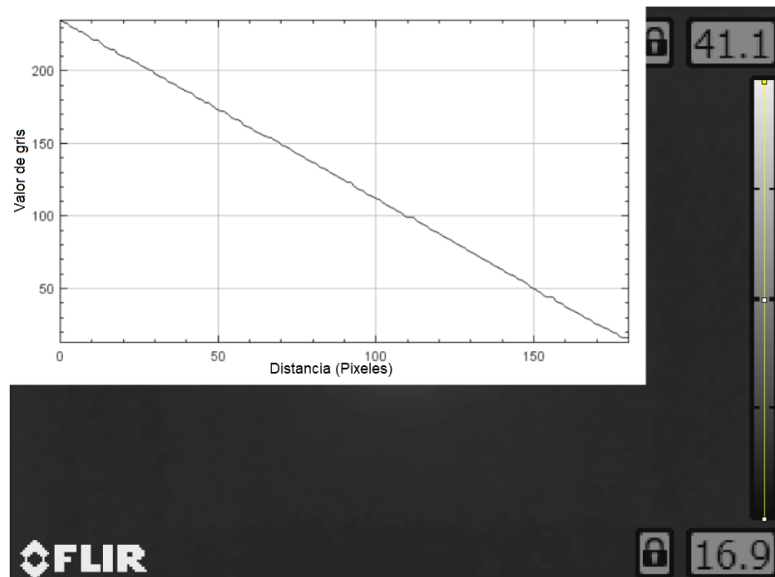


Figura 5.9: Evaluación de la escala de temperatura en función de la intensidad de píxel. Aquí, se muestra el procedimiento empleado para definir la razón de cambio o pendiente (m) del modelo ilustrado en la ecuación (5.9).

Por consiguiente, al definir y sustituir la pendiente (m) del modelo lineal utilizando los datos de la figura 5.9, e incorpora el contexto de la variable dependiente (temperatura) e independiente (intensidad de píxel), esto en conjunto con la temperatura de referencia, se obtiene la siguiente expresión,

$$Temperatura(P) = \frac{maxT - minT}{maxP - minP} (P - maxP) + maxT. \tag{5.10}$$

En la ecuación anterior, $maxT$ y $minT$ definen la temperatura máxima y mínima, al igual que $maxP$ y $minP$ representan las intensidades de píxel máxima y mínima, respectivamente. Por lo tanto, $Temperatura(P)$ y P resultan ser la temperatura e intensidad de píxel en un punto específico de la imagen, respectivamente.

5.2.2 Adquisición a través de tarjeta de adquisición y sensores.

Para el caso de la otra configuración, los datos se adquieren cada segundo y el procesamiento de los datos provenientes de los sensores (termopares y termistor), se obtienen en forma de tabla a partir de los archivos separados por comas (.csv). Esta tabla contiene nueve columnas organizadas de la siguiente manera:

Tabla 5.1: Ejemplo de la distribución de la información recabada por el termistor y termopares situados en diferentes puntos del modelo de prueba.

Tiempo [s]	Termistor [°C]	Cámara [°C]	Ventilador [°C]	TP3 [°C]	TP4 [°C]	TP5 [°C]	Termopar izquierdo [°C]	Termopar derecho [°C]
0	21	21	21	21	21	21	20	20
1	21.4	21	21	21	21	21	20	20
2	22.1	21	21	21	21	21	20	20

Al no contar con un filtrado previo ni físico ni digital para la adquisición de los datos, se decidió procesar estos una vez adquiridos, por lo cual, se puede trabajar con un circuito eléctrico simple sin filtros analógicos, y a la vez, evitar un posible retraso durante la adquisición asociado a un filtrado en tiempo real. Ya en el procesamiento de los datos se decidió aplicar un filtro de media móvil con una ventana de tamaño 20 para lograr un suavizado de la señal.

Para realizar la comparación entre todos los resultados experimentales (ambas configuraciones), los algoritmos y/o programas procesamientos descritos anteriormente fueron programados como dos funciones con nombres “AlCam” y “AlSen”, el primero para el procesamiento de imágenes infrarrojas, y el segundo para la evaluación de los datos de los sensores, respectivamente. Estas funciones están

diseñadas para generar diferentes archivos de salida (según son requeridos para el análisis), los cuales se muestran como resumen en la siguiente tabla.

Tabla 5.2: Argumentos de salida de los dos programas de procesamiento de imágenes y datos (AICam y AISen).

Función	Argumentos de salida (Vectores)	Argumentos de salida (figuras)
AICam	Temperatura superficial. Dirección de la carpeta analizada.	-Superficie del perfil de temperaturas longitudinales a través del tiempo. -Superficie para el estado estacionario de temperatura.
AISen	Vector de tiempo. Temperatura del termistor. Temperatura de los demás sensores.	-Temperatura interna vs superficial. -Temperatura de sensores internos.

Ambos algoritmos fueron añadidos dentro de dos ciclos FOR anidados (para la automatización del procesamiento), de tal manera que se pudiera hacer el análisis para todos los modelos de prueba, obteniendo de igual manera las temperaturas superficiales para todas las corridas experimentales, con los diferentes voltajes. Como ejemplo, se ilustran los siguientes resultados que se han obtenido de forma preliminar.

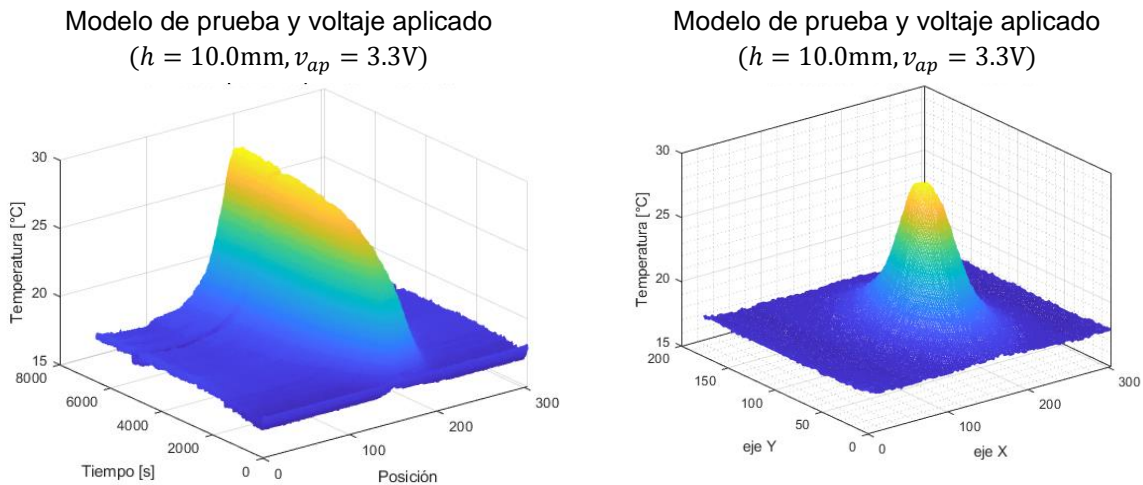


Figura 5.10: Resultados experimentales (preliminares) obtenidos mediante las evaluaciones con el sensor termográfica. Aquí, la figura de la derecha muestra el comportamiento de la temperatura con

respecto a la posición (eje x) y el tiempo; por otra parte, la figura de la derecha ilustra la firma térmica en la superficie (ejes x y y) de estudio para la condición de estado estacionario (equilibrio térmico).

En la figura 5.10, se muestra resultados preliminares del procesamiento de las imágenes termográficas. Aquí, se describe tanto la evolución de la firma térmica en el tiempo (figura del lado izquierdo), como el punto y/o tiempo en el que esta se consolida en la superficie de estudio (figura del lado derecho). Como se observa en los resultados, la firma térmica se concentra en la zona donde se localiza la fuente de calentamiento, lo cual se debe a que la profundidad a la que se localiza ($h=10\text{mm}$) es menor en comparación con otros espesores, y por consiguiente, se puede inferir que la totalidad de la energía emitida por la fuente fluye a través de la superficie de estudio, condición base para poder realizar una evaluación experimental adecuada.

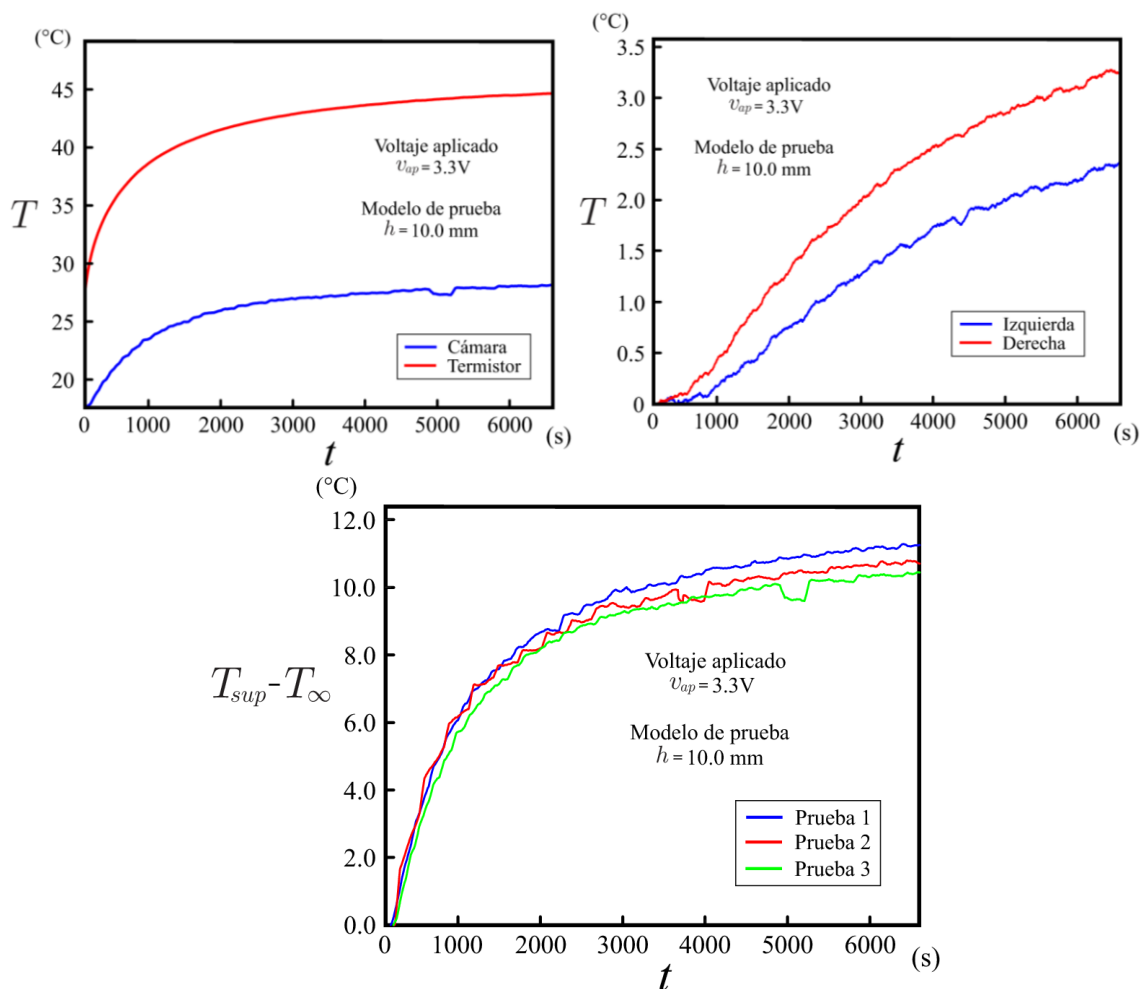
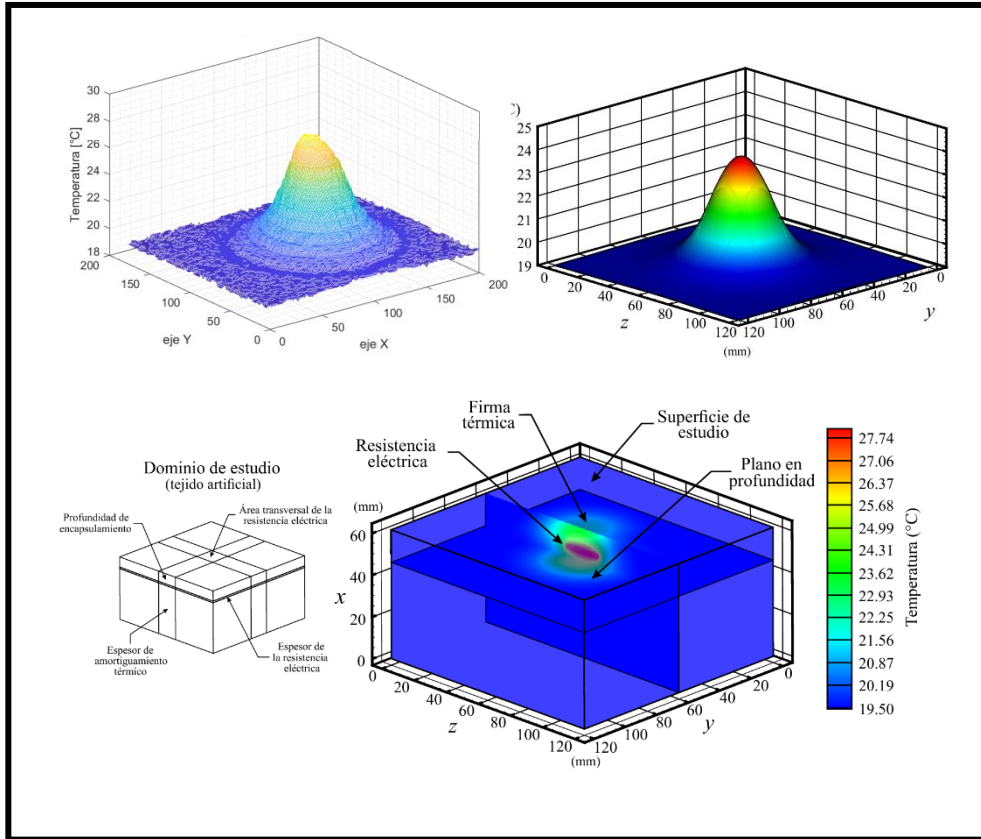


Figura 5.11: Resultados experimentales (preliminares) obtenidos mediante la cámara termográfica y los sensores (termistor y termopares). Aquí, se muestra la evolución de la temperatura en el tiempo para los diferentes puntos de interés: superficie de estudio, resistencia eléctrica, puntos de amortiguamiento térmico, etc.

La figura 5.11 complementan y validan los resultados ya obtenidos mediante la adquisición y procesamiento de las imágenes infrarrojas. En esta figura, se ilustra la evolución de la temperatura con respecto al tiempo para los diferentes puntos de interés. Claramente, se espera que los resultados indiquen una temperatura máxima al interior del modelo de prueba ($h=10\text{mm}$), y más precisamente, en la zona de la resistencia eléctrica, dato que como se ve lo registra el termistor. Además, las hipótesis indican que la temperatura de la superficie tiene que ser inferior a la anterior, no obstante, tiene que seguir un comportamiento semejante en el tiempo (ver primera grafica de la figura 5.11). Por otra parte, los incrementos de temperatura registrados por los termopares en la zona de amortiguamiento térmico son mucho menor que los antes citados (ver segunda grafica de la figura 5.11), esto indica que la mayoría de la energía fluye a través de la superficie de estudio, lo cual como ya se indico es básico para un buen análisis de resultados. Por último, es importante mencionar que la metodología experimental fue examinada mediante un mecanismo de repetición de experimentos (repitiendo cada prueba tres veces y descartando aquellas que eran muy diferentes de las demás). Este procedimiento asegura una buena repetitividad de los datos obtenidos, o bien, que los resultados por analizar y discutir representan un promedio de estos.



CAPITULO 6

Análisis y discusión de resultados

6 Análisis y discusión de resultados

Como ya se ha constatado en los capítulos anteriores, el uso de sistemas termográficos para la evaluación de campos de temperatura (en superficies) es muy favorable. Sin embargo, también es bien sabido que su utilización en múltiples aplicaciones es cuestionable. Esta controversia se debe básicamente a la poca conexión que existe entre la operación de los sistemas termográficos (aplicaciones) y los fundamentos que los gobiernan. Es claro, tanto la interpretación equivocada en el manejo de los sistemas, como un mal planteamiento en las condiciones de evaluación del proceso térmico, pueden generar resultados contradictorios. Bajo este dilema, en el presente capítulo se ilustran los resultados obtenidos a través de las metodologías de estudio propuestas, esquemas que permiten una correcta interrelación entre las evaluaciones experimentales y los resultados teóricos. Adicionalmente, en este capítulo se lleva a cabo la discusión de los resultados ya mencionados, la cual culmina con una comparación entre ambas metodologías de análisis, la que se desarrolló para la implementación de una nueva técnica termográfica, y la implementada para la correspondiente validación teórica.

6.1 Resultados experimentales

Como se muestra en la figura 6.1, el sensor termográfico de la cámara si permite detectar las diferencias en la emisión de energía de una superficie en estudio, la estela térmica inducida en cada uno de los modelos de prueba (tejidos artificiales) es diferente. En estas gráficas, se ilustran los resultados experimentales de los cuatro modelos, los cuales fueron obtenidos bajo la condición de estado estacionario y el mismo voltaje aplicado (energía suministrada). Para el caso del modelo que presenta la menor profundidad de encapsulado ($h = 1.0\text{mm}$ y $v_{ap} = 1.9\text{V}$), la estela de temperatura es más intensa y se concentra en la región donde se localiza la fuente térmica, obteniéndose valores de temperatura mayores ($T = 24^\circ\text{C}$). Caso contrario, cuando la profundidad de encapsulado es mucho mayor ($h = 25.0\text{mm}$ y $v_{ap} = 1.9\text{V}$), la temperatura en la superficie no supera el valor de 21°C . Lo anterior se debe principalmente a que la hipótesis indica que, la estela térmica se expande conforme la fuente térmica (resistencia eléctrica) se encuentra a una mayor profundidad; no obstante, la interacción de la superficie con el entorno tiene que ser misma, esto porque la energía suministrada en cada caso es la misma. Cuando se evalúa el área bajo la curva de cada una de las estelas térmicas, tal aseveración puede ser

corroborada. De la misma forma, se puede inferir que a mayor profundidad de la fuente térmica implica, se requiere una mayor área de análisis, esto para garantizar una evaluación adecuada de la estela térmica.

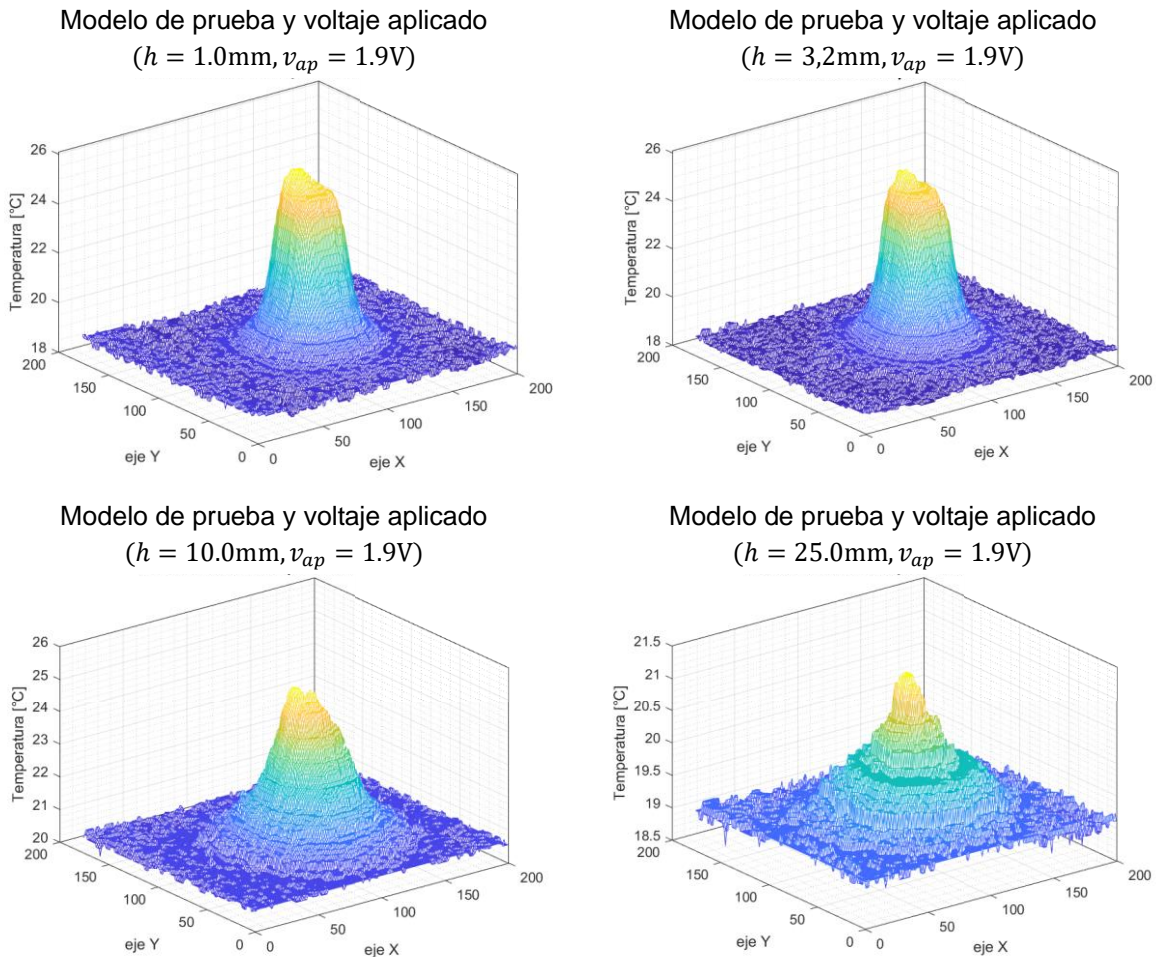


Figura 6.1: Resultados experimentales que ilustran la estela térmica en estado estacionario para los cuatro modelos de prueba (tejidos artificiales), en todas las evaluaciones se utilizó el mismo voltaje aplicado $v_{ap} = 1.9\text{V}$. A) $h = 1.0\text{mm}$, B) $h = 3.2\text{mm}$, C) $h = 10.0\text{mm}$, y D) $h = 25.0\text{mm}$.

De igual forma que en el caso de las peculiaridades espaciales, el tiempo de formación de cada una de las estelas térmicas es diferente, aquí, se confirman las proyecciones obtenidas mediante el análisis de escala, el cual indica que el tiempo característico del fenómeno térmico aumenta a razón del cuadrado de la profundidad de encapsulado entre la difusividad térmica del PDMS ($t_c \sim h^2/\alpha_g$). Conforme aumenta el valor de h , el tiempo requerido para poder consolidar la estructura de la estela térmica aumenta. Este punto es muy importante para algunas aplicaciones

tecnológicas (médicas) [50], cuando no se logra una evaluación en condiciones controladas, dichos resultados pueden generar una mala interpretación, y a la vez, una mal diagnóstico del problema que se está analizando (de cualquier índole).

Después de analizar de manera experimental los cuatro modelos de prueba (con diferentes valores de h), se pudo definir de manera aproximada los rangos de tiempo bajo los cuales cada uno de los dispositivos llega a estado estacionario (ver tabla 6.1).

Tabla 6.1: Tiempo de evolución del fenómeno térmico para cada uno de los modelos de prueba.

Modelo	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
Profundidad (valor de h) [mm]	1.00	3.2	10	25
Tiempo [s]	2400	3600	6600	8700

La evolución del fenómeno térmico para los casos ya mencionados, así como también, la diferencia de temperatura existente entre la superficie de estudio (evaluada con la cámara termográfica) y la fuente térmica (obtenida mediante el termistor), pueden ser analizadas mediante las gráficas de la figura 6.2. Aquí, se ilustra el comportamiento de la temperatura de ambos puntos como función del tiempo t , considerando los cuatro modelos de prueba ($h = 1.0, 3.2, 10.0, 25.0\text{mm}$) a un mismo voltaje aplicado ($v_{ap} = 1.9\text{V}$). Para el caso donde se tiene la menor profundidad de encapsulado ($h = 1.0\text{mm}$), se puede observar la diferencia de temperaturas entre el punto donde se encuentra la fuente y la superficie de estudio; aquí, solo se tiene una diferencia de alrededor de 5°C . Caso contrario, cuando se tiene la mayor profundidad (valor de $h = 25\text{mm}$), se obtiene una mayor diferencia entre las dos temperaturas sensadas, la cual puede exceder los 10°C . En general, los resultados son consistentes con la formulación planteada, conforme se aumenta el espesor de encapsulado la diferencia de temperatura también aumenta, esto se debe a que un mayor espesor de PDMS representa una barrera térmica más efectiva, ocasionando con esto que el calor tienda a difundirse hacia otras partes de la superficie (ver figura 6.1 y 6.3).

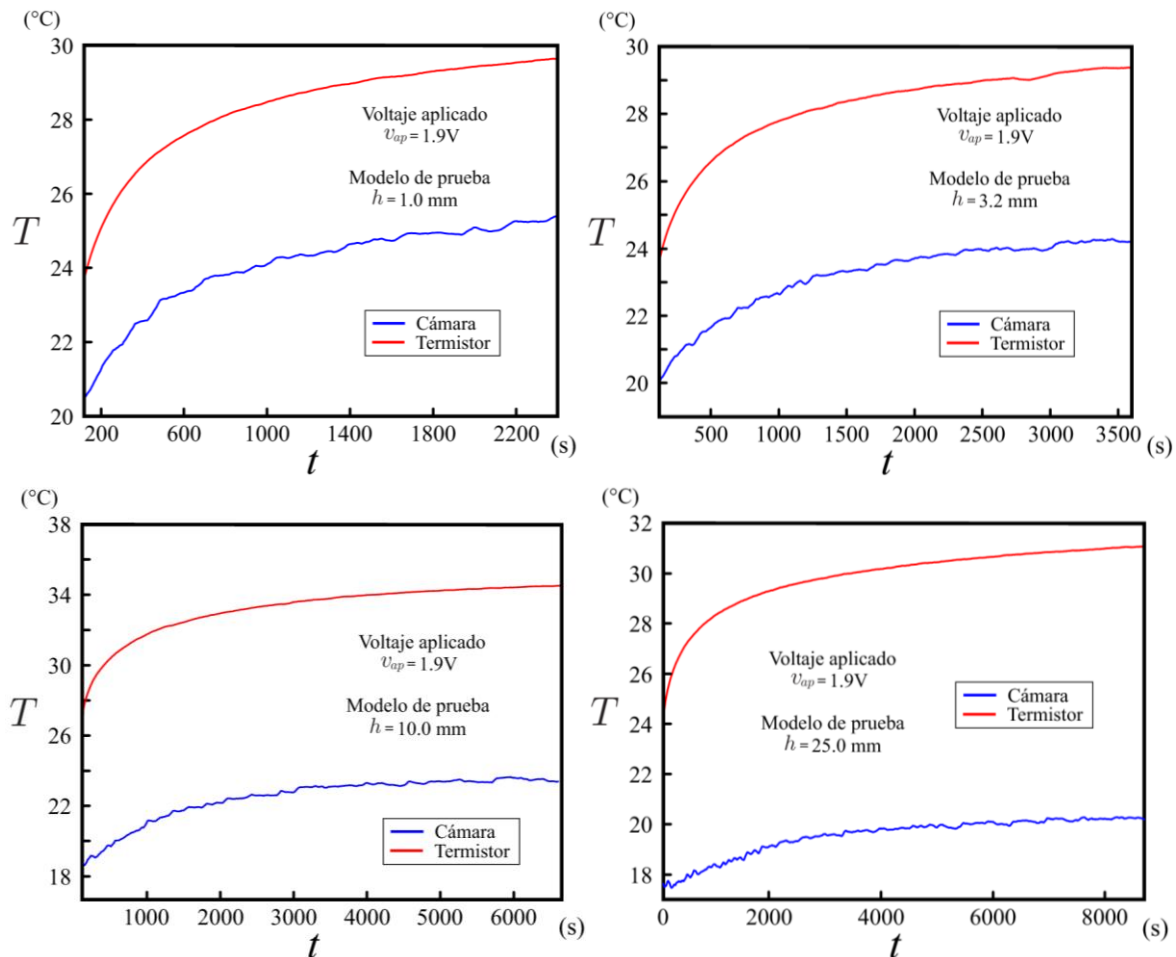


Figura 6.2: Evolución en el tiempo del fenómeno térmico para los cuatro modelos de prueba: A) $h = 1.0\text{mm}$, B) $h = 3.2\text{mm}$, C) $h = 10.0\text{mm}$ y D) $h = 25.0\text{mm}$, para una misma condición de energía suministrada, $v_{ap} = 1.9\text{V}$. Aquí, se ilustran las temperaturas la zona donde se localiza la fuente térmica (resistencia eléctrica) y de la superficie de estudio, ambas como funciones del tiempo t .

La explicación anterior puede constatarse en las gráficas que se muestran en la figura 6.3. Aquí, se ilustran los datos recabados por los termopares embebidos al lado de la fuente térmica, esto para dos diferentes casos de suministro de energía y/o voltajes aplicados de los cinco que hay ($v_{ap} = 1.4, 3.3\text{V}$), y dos de los cuatro modelos de prueba ($h = 3.2, 25.0\text{mm}$). Como puede observarse en los resultados recabados, para el caso de un menor voltaje y profundidad de encapsulado, $v_{ap} = 1.4\text{V}$ y $h = 3.2\text{mm}$, el cambio de la temperatura con respecto al tiempo es prácticamente nulo; por consiguiente, se puede inferir que se tiene una condición donde la energía que se suministra fluye de forma unidireccional hacia la superficie de estudio, generando un fenómeno térmico muy focalizado (ver figura 6.1B). Por otra parte, cuando aumenta la energía suministrada ($v_{ap} = 3.3\text{V}$), los sensores térmicos registran un aumento proporcional al aumento el voltaje. En consecuencia, se puede asumir que la forma de

la estela térmica no cambia, solo se registra una firma de mayor intensidad derivado del aumento en el suministro de energía. Por otra parte, el resultado anterior no se reproduce cuando además del aumento en el voltaje también se incrementa la profundidad ($v_{ap} = 3.3V$ y $h = 25.0mm$), para este caso los sensores ya registran un aumento considerable en la temperatura, lo que indica que la firma térmica ya se desplazó hasta esos puntos. En conclusión, se tiene que el fenómeno térmico ya no está concentrado en una región de la superficie de estudio, por el contrario, ya cubre una gran parte de dicha área (ver figuras 6.1D).

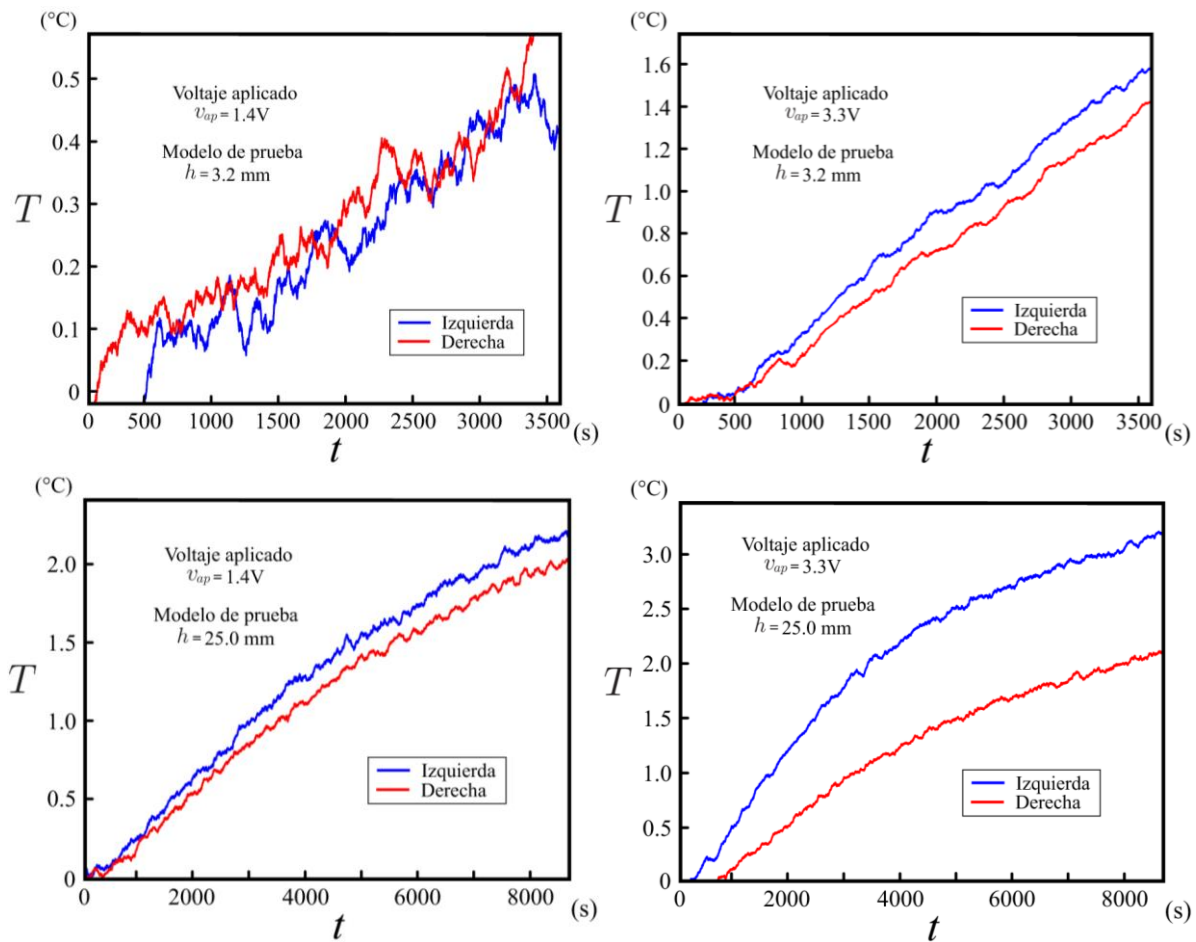


Figura 6.3: Cambio en la temperatura de los termopares como función del tiempo t . Aquí, se evalúan dos modelos de prueba ($h = 3.2mm$ y $h = 25.0mm$) para dos condiciones de suministro de energía ($v_{ap} = 1.4V$ y $v_{ap} = 3.3V$).

Para el caso de la evaluación de la interacción superficie-entorno ($T_{sup} - T_{\infty}$), los gradientes de temperatura que se obtuvieron van desde los $1.2^{\circ}C$, registrado en el experimento con el voltaje mas bajo ($v_{ap} = 1.4V$) y la mayor profundidad ($h = 25.0mm$),

hasta valores de incremento de temperatura de 16°C , el cual se obtuvo para el caso donde se presenta el voltaje mayor ($v_{ap} = 3.3\text{V}$) y la menor profundidad ($h = 1.0\text{mm}$). De los resultados de la figura 6.4, cuando el experimento se evalúa bajo una actividad térmica apenas perceptible en la superficie, los resultados que se obtienen comienzan a presentar ruido y/o inestabilidad, condición que se presenta debido a la sensibilidad del sensor infrarrojo (cámara). Caso contrario, cuando se realizan las evaluaciones en presencia de una alta actividad térmica ($v_{ap} = 3.3\text{V}$ y $h = 1.0\text{mm}$), los resultados son muy estables y reproducibles para n cantidad de pruebas.

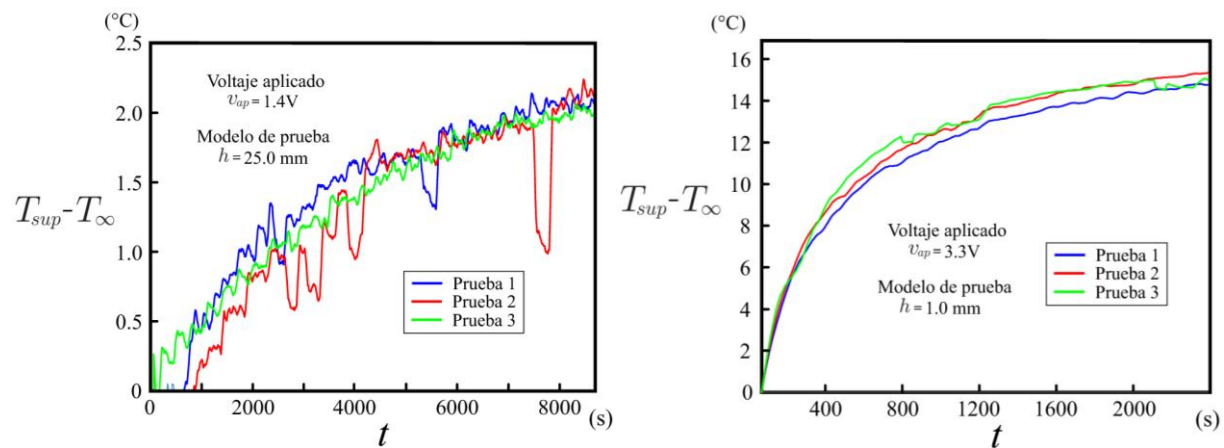


Figura 6.4: Gradiente de temperatura como función del tiempo t , el cual es evaluado con ayuda de la temperatura en el punto céntrico de la superficie (T_{sup}), y la temperatura registrada por el termopar ubicado en la vecindad de la superficie de estudio (T_{∞}). Aquí, se presentan los resultados de los dos experimentos bajo las condiciones límites; el primero con la firma térmica más débil ($v_{ap} = 1.4\text{V}$ y $h = 25.0\text{mm}$), y el segundo con la firma térmica más intensa ($v_{ap} = 3.3\text{V}$ y $h = 1.0\text{mm}$).

Como conclusión, se puede inferir que la profundidad y la energía emitida por la fuente son dos variables de importancia al momento de interpretar los resultados experimentales. En especial, tener bien definida el área de análisis es un aspecto indispensable para poder caracterizar correctamente la firma térmica, y así, también poder estimar cuanta energía realmente emite la fuente de energía, esto sin importar la profundidad en que se encuentra.

De los resultados que se han comentan hasta este punto, cabe mencionar que se realizó un estudio experimental completo, donde se evaluaron todos los modelos de prueba bajo una gran variedad de voltajes aplicados (energía suministrada). Igualmente, se evaluó la temperatura en otros puntos del dispositivo, así como también, de otras zonas del arreglo experimental. Después de analizar todos los resultados, se pudo observar congruencia entre estos, por ejemplo, se puede

mencionar que las temperaturas registradas por los termopares en la cámara, el ventilador (sistema de enfriamiento), y de mayor importancia, el ubicado a un lado del modelo de prueba (T_{∞}), no mostraron cambios notables a los valores ya esperados, solo se registró el ruido característico que distingue a este tipo de sensores.

6.2 Resultados numéricos

Para el caso de las evaluaciones a través de la metodología teórica, los resultados que se han obtenido son mucho más abundantes. Aquí, se planteó un modelo de estudio en 3D-transitorio, por tanto, no solo se cuenta con la evaluación de la superficie de estudio (dato experimental), también se cuenta con la información completa de los campos de temperatura al interior del dispositivo, gradientes de temperatura, flujo de calor, etc. Como se puede constar en el capítulo 4, la formulación teórica que se ha propuesto precisa la construcción de un modelo normalizado (adimensional), el cual simplifica sustancialmente el número de parámetros que intervienen en los cálculos, así como también, brinda mejores condiciones en el desempeño del algoritmo de cómputo. En la figura 6.5, se ilustran los resultados numéricos obtenidos mediante una de las simulaciones realizadas, esto para el caso de estado estacionario.

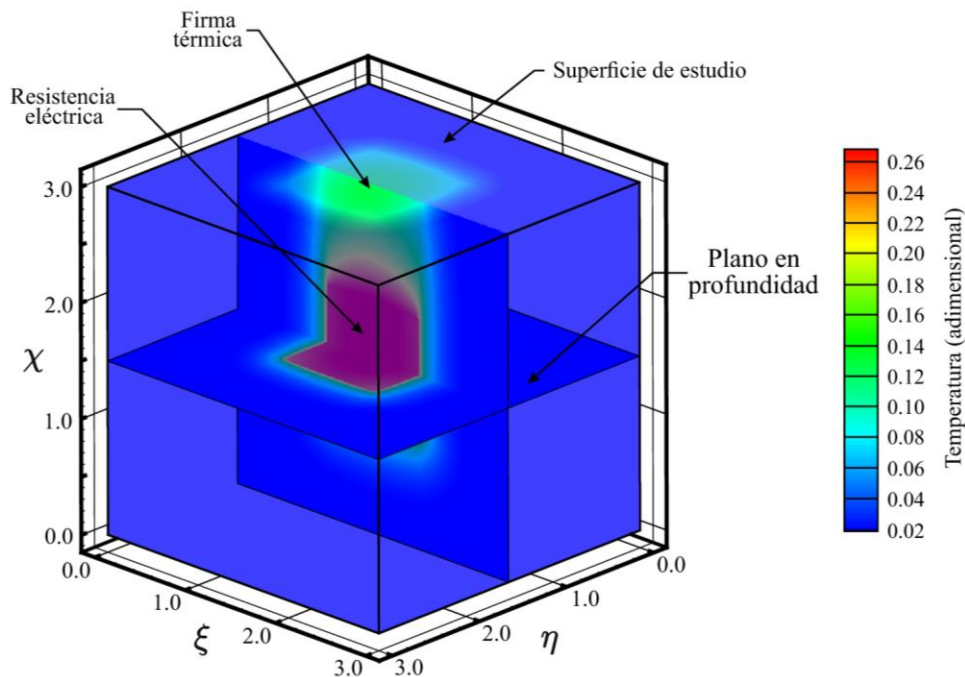


Figura 6.5: Resultados numéricos del campo de temperatura (adimensional) considerando el modelo de prueba de $h = 3.2mm$, y un voltaje aplicado de $v_{ap} = 1.9V$.

En esta figura, se ha tomado en consideración la información de uno de los experimentos realizados con los modelos de prueba, $h = 3.2\text{mm}$ y $v_{ap} = 1.9\text{V}$. Estos datos, en conjunto con los datos que se ilustra la figura 3.2 y la evaluación de la temperatura de la superficie del experimento en cuestión, permiten evaluar el número de Nusselt modificado, el cual para este caso se encuentra definido por $\tilde{N}_u = 0.75428$. Por otro lado, el resto de los parámetros que intervienen en el modelo numérico (β , ε , y λ), también fueron calculados mediante la información presentada en la figura 3.2, así como también, los datos que definen la geometría de los modelos de prueba.

Los resultados que se observan en la figura 6.5 son muy concluyentes, el fenómeno de difusión de calor se promueve prácticamente en forma unidireccional, más aún, el flujo de calor se concentra en una de las superficies (la de estudio). Por consiguiente, la firma térmica resultante tiene que ser semejante a la obtenida de forma experimental, dicha comparación se realiza en la última sección. Además, el mapa de calor también muestra que al interior del dispositivo (zona de la resistencia eléctrica) se presenta una mayor temperatura, la cual desciende en función del espesor de encapsulamiento (en este caso valor de los parámetros). En consecuencia, al revisar los resultados antes comentados (experimentales), se puede constatar que los resultados obtenidos mediante los modelos teóricos siguen el mismo comportamiento.

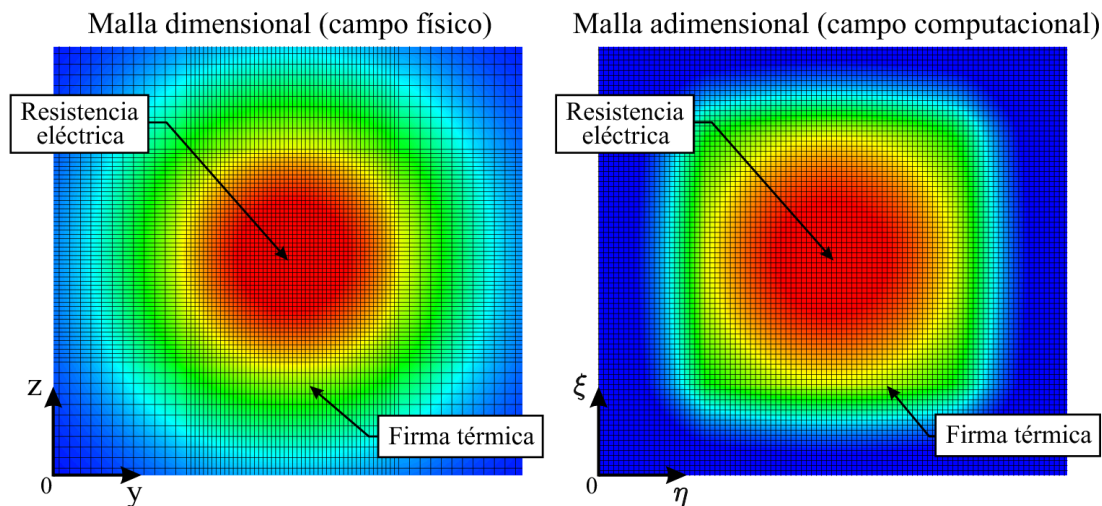


Figura 6.6: Diseño de las mallas de cálculo. A la izquierda el campo físico definido por el algoritmo de fragmentación, y a la derecha el campo computacional (malla uniforme) en el cual los parámetros adimensionales absorben las transformaciones del campo físico.

Es evidente, llevar los resultados numéricos a variables físicas permite visualizar y comprender de mejor forma el comportamiento del fenómeno térmico. En este caso, haciendo uso de las variables adimensionales propuestas (ecuación 4.1 y tabla 4.1), se puede invertir tanto la normalización, como la transformación geométrica generada por el algoritmo de fragmentación numérico, dando como resultado que la malla uniforme (campo computacional) recobre sus características definidas por el modelo de estudio (campo físico). Como ya se indicó, el algoritmo de fragmentación obedece en gran medida al estudio de escala (variables características), por consiguiente, al recobrase las escalas físicas se revela que el cálculo numérico promueve un mayor refinamiento de resultados en las regiones de interés (ver figura 6.6). Después realizar todos los cambios que se mencionan, la siguiente figura ilustra los resultados de la evaluación numérica en variables físicas.

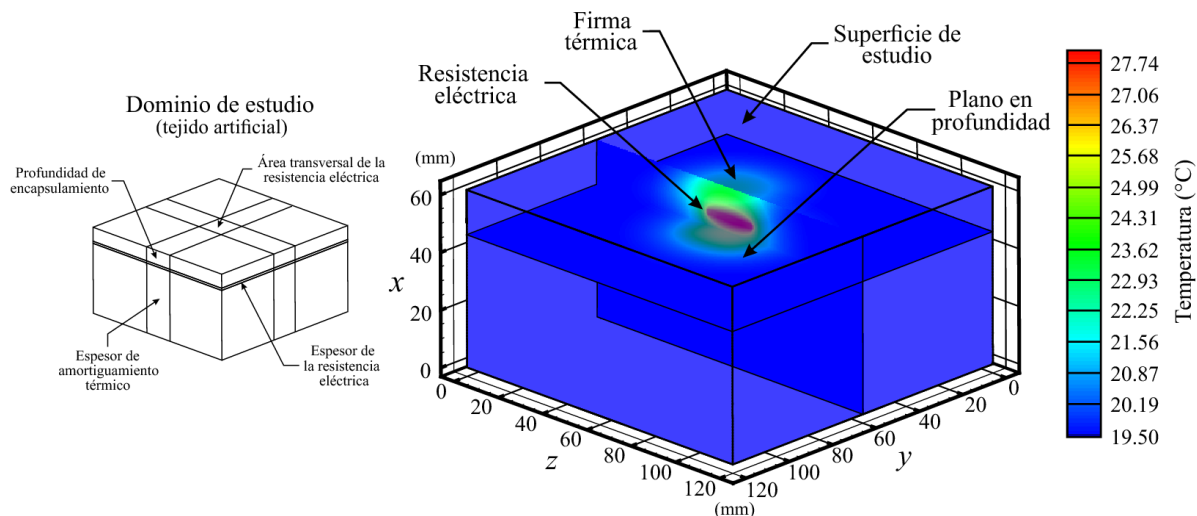


Figura 6.7: Resultados numéricos del campo de temperatura (dimensional) considerando el modelo de prueba de $h = 3.2\text{mm}$, y un voltaje aplicado de $v_{ap} = 1.9\text{V}$.

En la figura 6.7, se presenta los resultados dimensionales de la simulación numérica previamente analizada de forma adimensional ($h = 3.2\text{mm}$ y $v_{ap} = 1.9\text{V}$). Aquí, se puede constatar de mejor manera que la región circundante a la resistencia eléctrica es donde se forma la estela térmica, la cual trasciende y sale por la superficie de estudio. Además, los resultados numéricos de la imagen muestran que la estela se encuentra concentrada y es intensa en la zona centro del dispositivo, condición que replica el experimento que se tiene, por lo tanto, se puede asumir que las conclusiones antes descritas son correctas. Por otra parte, las evaluaciones numéricas pueden entregar más información, tal es el caso de los campos de temperatura al interior de los dispositivos. Dichos resultados pueden ayudar a complementar el análisis

integrando otro tipo de evaluaciones, punto que es de interés y se ha comentado en la literatura científica [36] [39]. Como un ejemplo de lo que se indica, se pueden obtener planos de los campos de temperatura al interior de los dispositivos (ver figura 6.8).

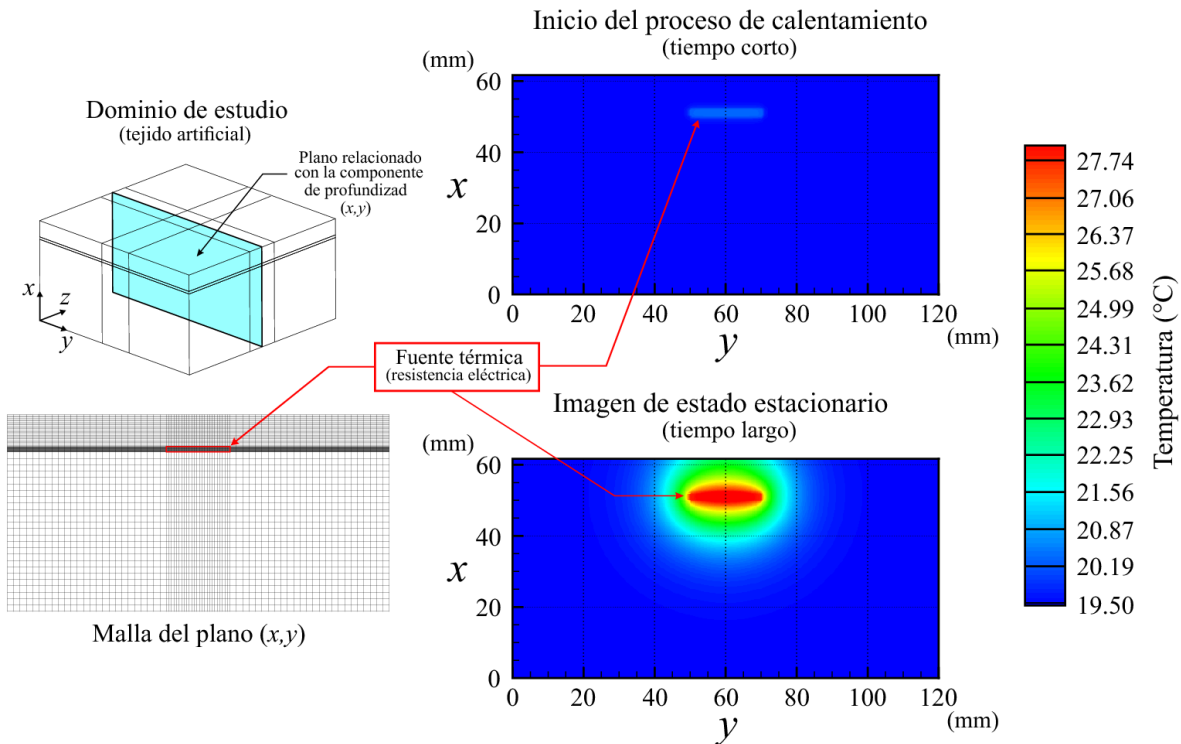


Figura 6.8: Campo de temperatura en el plano (x, y) al centro del modelo de prueba. Aquí, se analizan dos tiempos del fenómeno térmico, el corto que representa el inicio del suministro de energía, y el largo donde se logra la condición de estado estacionario.

En la figura 6.8, se ilustra el comportamiento del campo de temperatura del dispositivo en el plano (x, y) y al centro de la coordenada z . Además, se consideran dos instantes de tiempo del fenómeno térmico; el primero que describe el inicio del suministro de energía (tiempo corto del fenómeno), y el segundo, cuando el dispositivo llega a la condición de estado estacionario (tiempo largo del fenómeno). Los resultados en ambos casos son congruentes con la formulación ya expuesta, en el caso del tiempo corto se corrobora que la totalidad de la energía se consume en el calentamiento del dispositivo; caso contrario, cuando se logra el estado estacionario, la totalidad de la energía se difunde a través de la superficie de estudio (región donde se forma la estela térmica). Adicionalmente, al evaluar el plano en cuestión, se pudo corroborar el buen desempeño del algoritmo de fragmentación, el cual refina el cálculo en la zona donde se localiza la resistencia eléctrica, región que indudablemente es del mayor interés para el análisis.

Dinámica de la transferencia de calor al interior del modelo de prueba

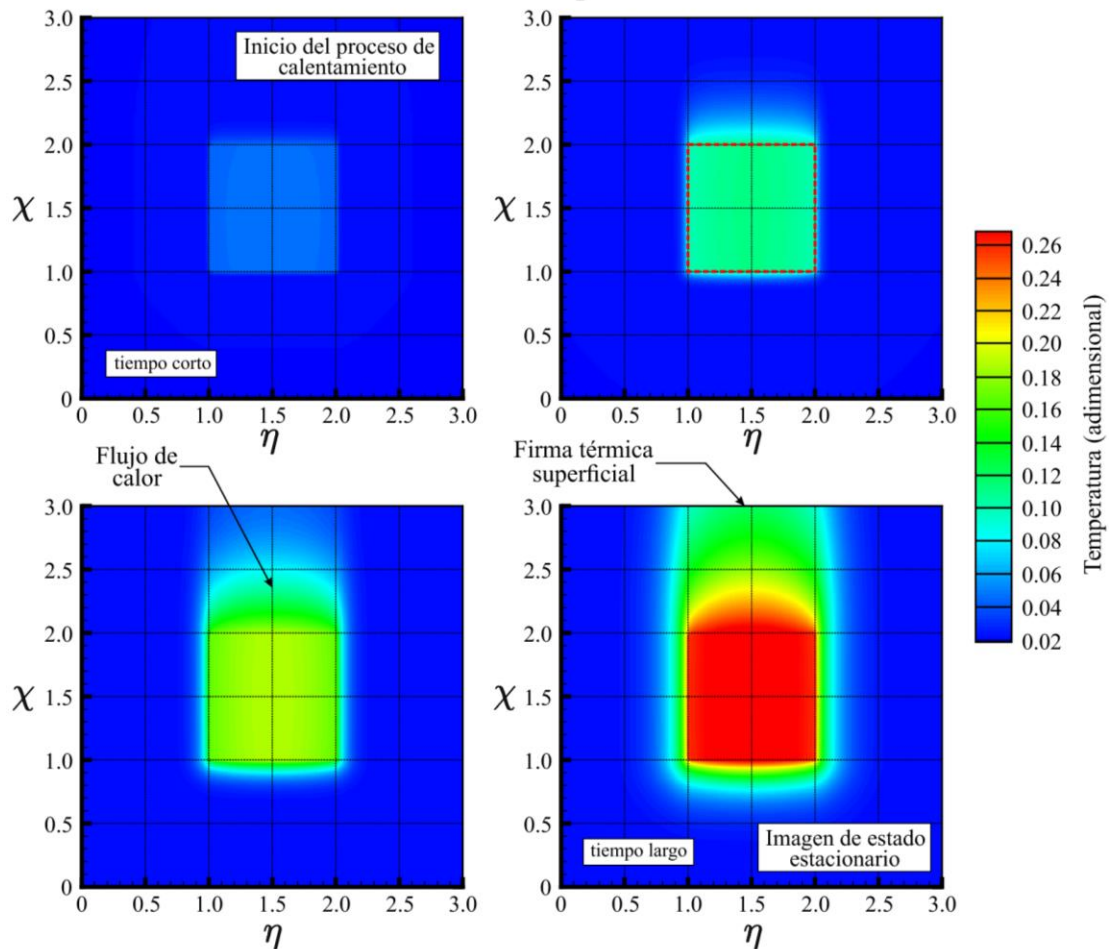


Figura 6.9: Evaluación de la dinámica del fenómeno térmico con resultados normalizados (adimensionales). Aquí, se ilustran cuatro campos de temperatura definidos en el plano (χ, η) y en el centro del dispositivo ($\xi = 1.5$). Cada uno representa un tiempo de evolución de la estela térmica diferente, donde el primero es cuando se inicia el calentamiento, y el último es cuando se logra la condición de estado estacionario.

Por otra parte, la evaluación de la dinámica de la transferencia de calor se percibe de mejor forma mediante planos y datos normalizado (adimensionales), esto porque las regiones de interés para el estudio pasan a ser del mismo tamaño que las demás. Como se ilustra en la figura 6.9, cuando se da inicio el proceso de calentamiento, el aumento de temperatura solo se presenta en la región que comprende la resistencia eléctrica ($\chi = 1.0$ a 2.0 y $\eta = 1.0$ a 2.0). De igual manera, la transición en el tiempo del campo de temperatura confirma que la región del espesor de encapsulamiento es la más importante para el estudio ($\chi = 3.0$ a 3.0 y $\eta = 1.0$ a 2.0).

En conclusión, es indudable que tanto los resultados en variables físicas como normalizados ayudan a comprender como se forma la firma térmica en la superficie de estudio. Sirviendo estos como punto de conexión entre las predicciones teóricas y los datos experimentales recabados a través del sensor infrarrojo (cámara).

6.3 Comparación entre los resultados experimentales y teóricos.

Al comparar los datos recabados experimentalmente con las predicciones numéricas (ver figura 6.10), se puede apreciar un comportamiento similar y una misma tendencia. Las diferencias que existen entre ambos casos se deben a que los resultados graficados no corresponden a un mismo número de Nusselt modificado, por consiguiente, es de asumir que el área de estudio propuesta para el experimento y los cálculos numéricos son diferentes.

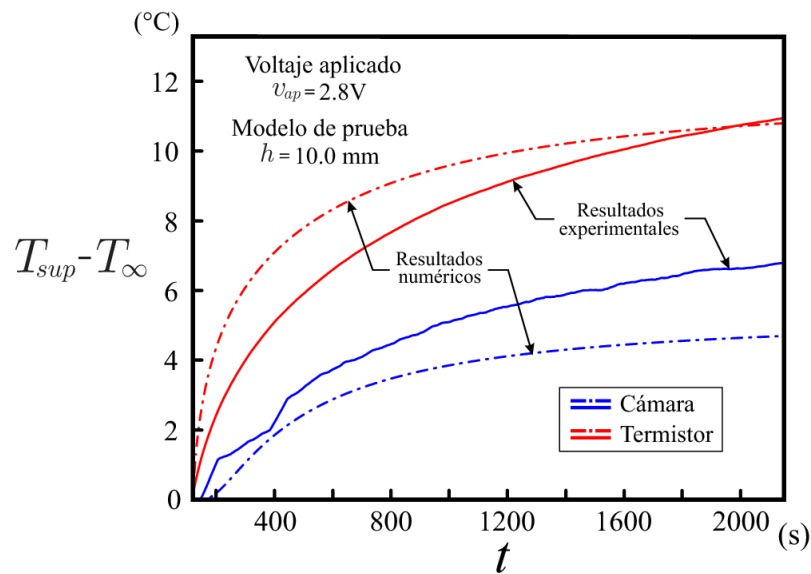


Figura 6.10: Evaluación del gradiente de temperatura ($T_{sup} - T_{\infty}$) como función del tiempo t . Aquí, se comparan los resultados experimentales y numéricos considerando uno de los casos de estudio, $h = 10.0 \text{ mm}$ y $v_{ap} = 2.8 \text{ V}$.

La aseveración anterior se puede corroborar al comparar las imágenes térmicas en la superficie de estudio para ambos casos, datos experimentales y predicciones numéricas (ver figura 6.11). Como ya se mencionó, esta comparación es fundamental para poder trazar un procedimiento de evaluación apropiada los sistemas termográficos, y por tanto, contar con una interrelación rigurosa entre la técnica experimental y sus fundamentos que la gobiernan.

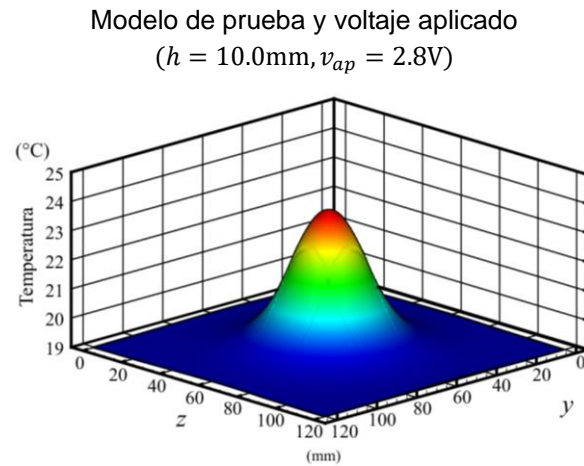
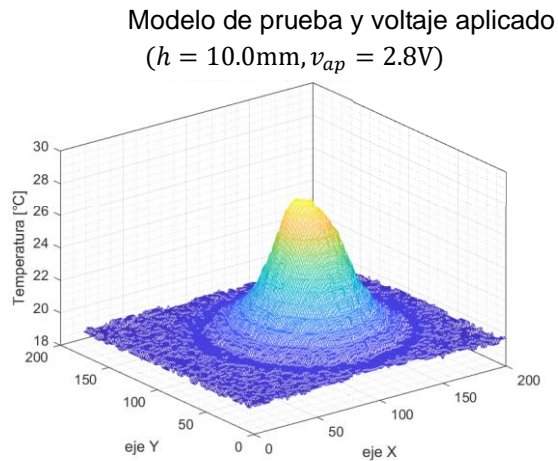


Figura 6.11: Firma térmica de la superficie obtenida mediante procesamiento de imágenes infrarrojas (izquierda), y mediante simulación numérica, considerando el caso de estudio donde $h = 10.0\text{mm}$ y $v_{ap} = 2.8\text{V}$.

En la figura 6.11, se muestra el campo de temperatura generado en la superficie de estudio (experimental y teórico), esto para uno de los casos de estudio previsto en el trabajo ($h = 10.0\text{mm}$ y $v_{ap} = 2.8\text{V}$). Como puede observarse en ambas gráficas, la forma de la firma térmica es prácticamente la misma, con lo cual, se puede constatar que el comportamiento de la estela es prácticamente igual en ambos casos. En consecuencia, la divergencia en los resultados antes citada (ver figura 6.10) indica que el valor del número de Nusselt modificado se está subestimando y/o sobrestimando. Condición que se solventa al momento de definir el área efectiva de estudio, que para este caso, tiene que cubrir al menos la totalidad de la firma térmica que se genera, y ser correctamente especificada ($A_{sup} = L^2$).

Conclusiones

Conclusiones

En el presente trabajo se realizó un estudio sobre la transferencia del calor en modelos de prueba (tejidos artificiales), esto con el objetivo de validar el uso de sistemas termográficos para el análisis y detección de la actividad térmica en una superficie de estudio. Lo anterior se llevó a cabo mediante evaluaciones analíticas (estado estacionario y transitorio) del problema de transferencia de calor, el diseño de un arreglo experimental de prueba, y la construcción algoritmos de simulaciones numéricas donde se privilegia el modelo de estudio propuesto.

Los resultados experimentales, así como las simulaciones dejan varios puntos notables sobre la dinámica observada:

1. La estela de temperatura presente en la superficie de los modelos de prueba depende de la profundidad, a mayor profundidad para un mismo voltaje (energía) la estela se verá más difuminada, obteniéndose variaciones de temperaturas mucho menores y proporcionales a la profundidad de la fuente térmica.
2. La estela de temperatura igualmente depende de la energía suministrada, para una misma profundidad, los incrementos en la temperatura, así como las variaciones serán mayores a medida que se le suministra más energía al sistema.
3. El tiempo que se necesita para alcanzar el estado estacionario es directamente proporcional a la profundidad, además de que está más influenciado por esta que por la energía suministrada.

De esta manera, se puede inferir que alteraciones energéticas débiles, como pueden ser las etapas iniciales de una neoplasia, son susceptibles de ser encubiertas y/o enmascaradas por la profundidad a la que se encuentra la fuente térmica, esto porque para la evaluación del estado estacionario (termografía convencional) el contraste de la temperatura en la superficie es indispensable. Caso contrario, la implementación de la transición de fenómeno térmico con respecto al tiempo (termografía dinámica) representa una mejor opción, esto se debe a que las técnicas dinámicas se centran en la propagación del calor, y por tanto, detectan flujos excesivos de energía en los sistemas (condición metabólica descontrolada).

Adicionalmente, el tiempo que necesita una alteración térmica para alcanzar el estado estacionario y ser detectado en la superficie puede ser bastante, lo cual contradice el supuesto de un estudio que pretendiese ser “rápido”, otra razón por la cual métodos ligados a técnicas de termografía dinámica pueden representar una mejor opción.

En el contexto del presente trabajo, los resultados de las simulaciones numéricas muestran una gran semejanza con los datos en estado estacionario alcanzado durante la fase experimental, por lo que se puede decir que el planteamiento del problema fue el adecuado, y de igual manera, el diseño experimental tuvo un comportamiento bastante controlado para obtener las condiciones de aislamiento térmico y dirección de flujo de energía esperados teóricamente. Adicionalmente, se pudo constatar que el procedimiento numérico pudo escalar (adimensionalizar) y controlar las evaluaciones en términos de volúmenes de control dentro del rango entre el 0 y el 1, conservando todas las características geométricas y sin pérdida de información al momento de trasladar los resultados adimensionales de vuelta al dominio original. De esta manera, se pudo verificar que cuando se construye un esquema numérico que responde a las escalas características de estudio, dichos algoritmos son más rápidos y eficientes.

Finalmente, los resultados de este trabajo nos muestran que la termografía puede ser usada para la detección de alteraciones metabólicas, sin embargo, el uso de técnicas de detección auxiliares es indispensable para la adecuada atención de los pacientes. De igual manera, el trabajo realizado puede trasladarse a otros usos no médicos que tengan involucrados parámetros similares a detectar.

Trabajo futuro

Para el caso de trabajos futuros, se puede considerar la implementación de modelos teóricos más apegados a la definición de los tejidos biológicos (modelo de Pennes), o bien, se pueden diseñar modelos de prueba experimentales (tejidos artificiales) con formas de tejidos biológicos, donde se repliquen las condiciones de temperatura existente (36°C), o igual se agreguen capas de diferentes materiales las cuales simulen la heterogeneidad del tejido, etc.

En el caso del arreglo experimental, también se puede mejorar el sensor de adquisición de imágenes infrarrojas (cámara), lo cual puede permitir tener imágenes

con una mayor cantidad de bits de profundidad, y así, poder trabajar con más información relacionada a los cambios de temperatura. Esta mejora no se pudo realizar dadas las limitaciones de la cámara empleada en el proyecto.

Finalmente, para el modelado numérico se puede implementar el uso de nuevas tecnologías como son el *Machine Learning* o la inteligencia artificial, esto para incrementar la exactitud de los resultados ya obtenidos, e incluso, poder obtener información adicional que probablemente se ignoró debido a la capacidad de cómputo empleada. En este contexto, también sería interesante poder programar el algoritmo de solución numérica en la unidad de procesamiento gráfica (GPU), con lo cual, se podría incrementar considerablemente el procesamiento de datos, y por ende, reducir el tiempo de espera para la obtención de los resultados numéricos.

Referencias

- [1] G. C. Leonardi, L. Falzone, R. Salemi, A. Zanghi, D. A. Spandidos, J. A. McCubrey, S. Candido y M. Libra, «Cutaneous melanoma: From pathogenesis to therapy (Review),» *Int J Oncol*, vol. 52, nº 4, pp. 1071-1080, 2018.
- [2] C. Haolong, W. Kaijie, D. Zhibo, L. Weiming y L. Zhanli, «Predicting the thermophysical properties of skin tumor based on the surface temperature and deep learning,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 180, nº 121804, 2021.
- [3] J. Iljaž, L. Wrobel, J. Marn y M. Hriberšek, «The use of Design of Experiments for steady-state and transient inverse melanoma detection problems,» *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 135, pp. 256-275, 2019.
- [4] S. Sharmila, . K. Gokul y B. G. Dil, «Transient Bioheat Equation in Breast Tissue: Effect of Tumor Size and Location,» *Journal of Advances in Applied Mathematics*, vol. 5, nº 1, 2020.
- [5] A. A. Azevedo Figueiredo, H. Coelho Fernandes y G. Guimaraes, «Experimental approach for breast cancer center estimation using infrared thermography,» *Infrared Physics & Technology*, vol. 95, pp. 100-112, 2018.
- [6] X. Chen, J. Gole, A. Gore, Q. He, M. Lu, J. Min, Z. Yuan, X. Yang, Y. Jiang, T. Zhang, C. Suo, X. Li, L. Cheng, Z. Zhang, H. Niu, Z. Li, Z. Xie, H. Shi, X. Zhang, M. Fan, X. Wang, Y. Yang, J. Dang, C. McConnell, J. Zhang, J. Wang, S. Yu, W. Ye, Y. Gao, K. Zhang, R. Liu y L. Jin, «Non-invasive early detection of cancer four years before conventional diagnosis using a blood test,» *Nat. Commun.*, vol. 11, nº 3475, 2020.
- [7] M. Morgensen y G. B. E. Jemec, «Diagnosis of Nonmelanoma Skin Cancer/ Keratinocyte Carcinoma: A Review of Diagnostic Accuracy of Nonmelanoma Skin Cancer Diagnostic Tests and Technologies.,» *Dermatol. Surg.*, vol. 33, pp. 1158-1174, 2007.
- [8] S. Fotohui, S. Asadi y M. W. Kattan, «A comprehensive data level analysis for cancer diagnosis on imbalanced data.,» *J. Biomed. Inform.*, vol. 90, nº 103089, 2019.

- [9] H.-Y. Hsieh, R. Chang, Y.-Y. Huang, P.-H. Juan, H. Tahara, K.-Y. Lee, D. N. K. Vo, M.-H. Tsai, P.-K. Wei, H.-J. Sheen y Y.-J. Fan, «Continuous polymerase chain reaction microfluidics integrated with a gold-capped nanoslit sensing chip for Epstein-Barr virus detection.,» *Biosens. Bioelectron.*, vol. 195, nº 113672, 2022.
- [10] C. H. O'Neill y C. R. Scoggins, «Melanoma,» *Journal of surgical oncology*, vol. 120, nº 5, pp. 873-881, 2019.
- [11] I. Korczak, A. Romowicz, B. Gambin, T. Palko, E. Kruglenko y K. Dobruch-Sobczak, «Numerical prediction of breast skin temperature based on thermographic and ultrasonographic data in healthy and cancerous breasts,» *Biocybernetics and Biomedical Engineering*, vol. 40, pp. 1680-1692, 2020.
- [12] R. Nutt, «The History of Positron Emission Tomography.,» *Mol. Imaging. Biol.*, vol. 4, pp. 11-26, 2002.
- [13] A. Ill, J. C. Hayes, L. M. Compton, J. Azarnoosh y F. Hassanipour, «, Determining the thermal characteristics of breast cancer based on highresolution infrared imaging, 3d breast scans, and magnetic resonance imaging,» *Sci Rep*, vol. 10, 2020.
- [14] L. A. Bezerra, M. M. Oliveira, T. L. Rolim, A. Conci, F. S. Santos, P. R. M. Lyra y R. F. Lima, «Estimation of breast tumor thermal properties using infrared images,» *Signal Processing*, vol. 93, pp. 2851-2863, 2013.
- [15] B. Mi, J. Song, W. Zhang, C. Yu, C. Zheng, E. Yu y W. Hong, «Preliminary attempt of infrared thermography for the screening of male myocardial ischemia.,» *Infrared Phys. Technol.*, vol. 110, nº 103442, 2020.
- [16] A. Saxena, E. Ng y V. Raman, «Thermographic venous blood flow characterization with external cooling stimulation.,» *Infrared Phys. Technol.*, vol. 90, pp. 8-19, 2019.
- [17] E. Y. Ng y M. Etehadtavakol, *Application of Infrared to Biomedical Sciences.*, Springer, 2017.
- [18] U. Kashyap, S. Sarkar y S. K. Saha, «Study of hot stress dynamic IR thermography for detecting surface cancerous tissue,» *JOURNAL OF MEDICAL ENGINEERING & TECHNOLOGY*, vol. 44, nº 6, pp. 284-298, 2020.

- [19] J. Verstockt, S. Verspeek, F. Thiessen, W. A. Tjalma, L. Brochez y G. Steenackers, «Skin cancer detection using infrared thermography: Measurement setup, procedure and equipment.,» *Sensors*, vol. 22, nº 3327, 2022.
- [20] M. P. Centigül y C. Herman, «Quantification of the thermal signature of a melanoma lesion.,» *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 50, pp. 421-431, 2011.
- [21] S. G. Kandlikar, I. Perez-Raya, P. A. Raghupathi, J. L. Gonzalez-Hernandez, D. Dabydeen, L. Medeiros y P. Phatak, «Infrared imaging technology for breast cancer detection - Current status, protocols and new directions,» *Int. J. Heat and Mass Transf.*, vol. 108, pp. 2303-2320, 2017.
- [22] J. L. Gonzalez-Hernandez, A. N. Recinella, S. G. Kandlikar, D. Dabydeen, L. Medeiros y Phatak P., «Technology, application and potential of dynamic breast thermography for the detection of breast cancer,» *Int. J. Heat and Mass Transf.*, vol. 131, pp. 558-573, 2019.
- [23] Y. Zhou y C. Hernan, «Optimization of skin cooling by computational modeling for early thermographic detection of breast cancer,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 126, pp. 864-876, 2018.
- [24] T.-Y. Cheng y C. Herman, «Analysis of skin cooling for quantitative dynamic infrared imaging of near-surface lesions.,» *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 86, pp. 175-188, 2014.
- [25] B. Marchetti, M. Leporini, F. Corvaro, A. Olivieri, M. Ighani y M. Chiarucci, «Application of infrared thermography to determine the correlation between skin temperature and onset of graft versus host disease in patients after bone marrow transplantation: A preliminary study,» *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 156, nº 106350, 2020.
- [26] L. A. Bezerra, R. R. Ribeiro, P. M. Lyra y R. C. F. Lima, «An empirical correlation to estimate thermal properties of the breast and of the breast nodule using thermographic images and optimization techniques,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 149, pp. 119-215, 2020.
- [27] K. Venkataramani, L. K. Mestha, L. Ramachandra, S. S. Prasad, V. Kumar y P. J. Raja, «Semi-automated Breast Cancer Tumor Detection with Thermographic video imaging,» de *Conference: 2015 37th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, 2015.

- [28] S. Hossain y F. A. Mohammadi, «Tumor parameter estimation considering the body geometry by thermography,» *Computers in Biology and Medicine*, vol. 76, pp. 80-93, 2016.
- [29] K. Das y S. C. Mishra, «Estimation of tumor characteristics in a breast tissue with known skin surface temperature,» *Journal of Thermal Biology*, vol. 38, pp. 311-317, 2013.
- [30] A. Bousselham, O. Bouttane, M. Youssfi y A. Raihani, «3D brain tumor localization and parameter estimation using thermographic approach on GPU,» *Journal of Thermal Biology*, vol. 71, pp. 52-61, 2018.
- [31] M. Ma, Y. Zhang y N. Gu, «Estimation the tumor temperature in magnetic nanoparticle hyperthermia by infrared thermography: Phantom and numerical studies,» *Journal of Thermal Biology*, vol. 76, pp. 89-94, 2018.
- [32] G. L. Shi, F. Han, C. W. Liang, L. Wang y K. Y. Li, «A novel method of thermal tomography tumor diagnosis and its clinical practice,» *Appl. Therm. Eng.*, vol. 73, pp. 408-415, 2014.
- [33] I. Fernández-Cuevas, J. C. B. Marins, J. A. Lastras, P. M. G. Carmona, S. P.-. Cano, M. A. García-Concepción y M. Sillero-Quintana, «Classification of factors influencing the use of infrared thermography in humans: A review,» *Infrared Phys. Technol.*, vol. 71, pp. 28-55, 2015.
- [34] J. C. Hayes, A. Lozano, L. M. Compton, J. Azarnoosh y F. Hassanipour, «Determining the thermal characteristics of breast cancer based on high-resolution infrared imaging, 3D breast scans, and magnetic resonance imaging,» *Scientific Reports*, vol. 10, nº 10105, 2020.
- [35] G. M., «Thermopathology of breast cancer: measurement and analysis of in vivo temperature and blood Flow.,» *Ann. NY Acad. Sci.*, vol. 335, pp. 383-415, 1980.
- [36] K. Das, R. Singh y S. C. Mishra, «Numerical analysis for determination of the presence of a tumor and estimation of its size and location in a tissue.,» *J. Therm. Biol.*, vol. 38, pp. 32-40, 2013.
- [37] A. A. A. Figueiredo, J. G. do Nascimento, F. C. Malheiros, L. H. da Silva Ignacio, H. C. Fernandes y G. Guimaraes, «Breast tumor localization using skin surface

- temperatures from a 2D anatomic model without knowledge of the thermophysical properties.,» *Comput. Meth. Programs Biomed.*, vol. 172, pp. 65-77, 2019.
- [38] L. Cao, Q.-H. Qin y N. Zhao, «An RBF-MFS model for analysing thermal behaviour of skin tissues.,» *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 53, pp. 1298-1307, 2010.
- [39] A. Amri, A. Saidane y S. Pulko, «Thermal analysis of a three-dimensional breast model with embedded tumour using the transmission line matrix (TLM) method.,» *Comput. Biol. Med.*, vol. 41, pp. 76-86, 2011.
- [40] M. Sadeghi-Goughari y A. Mojra, «Finite element modeling of haptic thermography: A novel approach for brain tumor detection during minimally invasive neurosurgery.,» *J. Therm. Biol.*, vol. 53, pp. 53-65, 2015.
- [41] Z.-S. Deng y J. Liu, «Mathematical modeling of temperature mapping over skin surface and its implementation in thermal disease diagnostics.,» *Comput. Biol. Med.*, vol. 34, pp. 495-521, 2004.
- [42] D. Sarkar, A. Haji-Sheikh y A. Jain, «Temperature distribution in multi-layer skin tissue in presence of a tumor.,» *Int. J. Heat and Mass Transf.*, vol. 91, pp. 602-610, 2015.
- [43] A. A. A. Figueiredo, H. C. Fernandes, F. C. Malheiros y G. Guimaraes, «Influence analysis of thermophysical properties on temperature profiles on the breast skin surface.,» *Int. Commun. Heat and Mass Transf.*, vol. 104453, nº 111, 2020.
- [44] Z. Wu, H. H. Liu, L. Lebanowski, Z. Liu y P. H. Hor, «A basic step toward understanding skin surface temperature distributions caused by internal heat sources.,» *Phys. Med. Biol.*, vol. 52, pp. 5379-5392, 2007.
- [45] K. Das y S. C. Mishra, «Simultaneous estimation of size, radial and angular locations of a malignant tumor in a 3-D human breast – A numerical study.,» *J. Therma. Sci.*, vol. 52, pp. 53-65, 2015.
- [46] K. Das y C. Mishra, «Non-invasive estimation of size and location of a tumor in a human breast using a curve fitting technique.,» *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, vol. 56, pp. 63-70, 2014.
- [47] J.-L. Gonzalez-Hernandez, A. N. Recinella, S. G. Kandlikar, D. Dabydeen, L. Medeiros y P. Phatak, «An inverse heat transfer approach for patient-specific

breast cancer detection and tumor localization using surface thermal images in the prone position.,» *Infrared Phys. Technol.*, vol. 105, n° 103202, 2020.

- [48] J. Agnelli, A. Barrea y C. Turner, «Tumor location and parameter estimation by thermography.,» *Math. Comput. Model.*, vol. 53, pp. 1527-1534, 2011.
- [49] J. Lijaž, L. C. Wrobel, M. Hriberšek y J. Marn, «Numerical modelling of skin tumor tissue with temperature-dependent properties for dynamic thermography.,» *Comput. Biol. Med.*, vol. 112, n° 103367, 2019.
- [50] T. Sarigoz y T. Ertan, «Role of dynamic thermography in diagnosis of nodal involvement in patients with breast cancer: A pilot study.,» *Infrared Phys. Technol.*, vol. 108, n° 103336, 2020.
- [51] T. Gomboc, J. Iljaz, L. Wrobel, M. Hribersek y J. Marn, «Design of constant temperature cooling device for melanoma screening by dynamic thermography.,» *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 125, pp. 66-79, 2021.
- [52] A. Amri, S. H. Pulkoc y A. J. Wilkinson, «Potentialities of steady-state and transient thermography in breast tumour depth detection: A numerical study.,» *Comput. Meth. Programs Biomed.*, vol. 123, pp. 68-80, 2016.
- [53] S. Chatterjee, S. Biswas, A. Majee, Sen S., D. Oliva y R. Sarkar, «Breast cancer detection from thermal images using a grunwald-letnikov-aided dragonfly algorithm-based deep feature selection method.,» *Comput. Biol. Med.*, vol. 141, n° 105027, 2022.
- [54] L. M. Jiji, Heat Conduction, Springer, 2009.
- [55] W. Kays, M. Crawford y B. Weigand, Convective heat and mass transfer, Mc Graw Hill, 2005.
- [56] H. Ahmadikia, R. Fazlali y A. Moradi, «Analytical solution of the parabolic and hyperbolic heat transfer equations with constant and transient heat flux conditions on skin tissue.,» *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, vol. 39, pp. 121-130, 2012.
- [57] T.-C. Shih, P. Yuan, W.-L. Lin y H.-S. Kou, «Analytical analysis of the pennes bioheat transfer equation with sinusoidal heat flux condition on skin Surface.,» *Med. Eng. Phys.*, vol. 29, pp. 946-953, 2007.

- [58] O. Mukhmetov, D. Igali, A. Mashekova, Y. Zhao, E. Ng, S. Fok y S. Teh, «Thermal modeling for breast tumor detection using thermography.,» *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 161, nº 106712, 2021.
- [59] H. Nose, Y. Kamijo y S. Masuki, «Interactions between body fluid homeostasis and thermoregulation in humans,» *Handb Clin Neurol.*, vol. 156, pp. 417-429, 2018.
- [60] S. Sánchez, G. Ascanio, S. Sánchez-Minero, F. Méndez, J. P. Aguayo, E. Ramírez-Jiménez y G. Alonso-Ramírez, «Conjugate thermal-hydrodynamic model for the study of heavy oil transport.,» *J. Pet. Sci. Eng.*, vol. 179, pp. 997-1011, 2019.
- [61] S. Ahmed, P. Singh y S. V. Ekkad, «Three-dimensional transient heat conduction equation solution for accurate determination of heat transfer coefficient.,» *J. Heat Transfer*, vol. 142(5), nº 051302, 2020.
- [62] J. Tannehill, D. Anderson y R. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor & Francis, 1997.
- [63] THORLABS, «100 Ohm Resistive Temperature Sensor,» 6 Agosto 2018. [En línea]. Available: <https://www.thorlabs.com/drawings/74761cfcb2a50979-400A056B-F5AE-7A28-79FC810C5E34E887/TH100PT-SpecSheet.pdf>. [Último acceso: 2020].