ANALISIS ESTRUCTURAL - CURSO DECFI - UNAM 21-26 MAYO 1984

HORA	LUNES 21 Mayo	MARTES 22-Mayo	MIERCOLES 23-Mayo	JUEVES 24-Mayo	VIERNES 25-Mayo	SABADO 26-Mayo
10.-11:30	Fundamentos de Elasticidad N. Rodriguez	Método de Flexibilidades P. Ballesteros	Método de Rigideces P. Ballesteros	Método mixto Flexib-Rigid. J. Damy	Método de Elem. Finitos V.H. Muciño	Aplic. Elemen. Finitos E.M. del Campo
11:30-12.	café					
12-13:30	Fundamentos de Elasticidad N. Rodriguez	Método de Flexibilidades P. Ballesteros	Aplic. Rigid. Falla de tunel P. Ballesteros	Método mixto Flexib-Rigid. J. Damy	Método de Elem. Finitos V.H. Muciño	Aplicación Elem. Finitos P. Ballesteros
13.30-15.	comida					
15.-16:30	Algebra Matricial J. Angeles	Método de Rigideces P. Ballesteros	Edificios con muros de cortante L. Esteva	Método mixto Flexib-Rigid. J. Damy	Método de Elem. Finitos V.H. Muciño	
16:30-17.	café					
17.-18:30	Algebra Matricial J. Angeles	Método de Rigideces P. Ballesteros	Aplic. Método Flexibilidades M.A. Bravo	Sista. de rigidiz. de edif. altos ante sismo y viento O. de Buen	Método de Elem. Finitos V.H. Muciño	

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: ANALISIS ESTRUCTURAL (Con introducción al Método del Elemento Finito).

FECHA: Del 21 al 26 de mayo de 1984.

	CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
1.	ING. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS					
2.	DR. JORGE ANGELES ALVAREZ					
3.	DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO					
4.	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO					
5.	M. EN I. MIGUEL ANTONIO BRAVO DIAZ					
6.	ING. JULIO DAMY RIOS					
7.	ING. OSCAR DE BUEN LOPEZ DE HEREDIA					
8.	DR. VICTOR HUGO MUCIÑO QUINTERO					
9.	ING. ERNESTO MARTIN DEL CAMPO					

ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIERCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 a 18 H.	O T R O

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

10. Otras sugerencias:

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

ELEMENTOS DE ALGEBRA MATRICIAL

DR. JORGE ANGELES ALVAREZ

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

MAYO, 1984

cada arreglo de números dentro de los paréntesis angulares es llamado "matriz", los números o símbolos se llaman elementos, y en (a) se tienen m renglones y n columnas, la matriz se dice que es de orden $m \times n$. Cuando hay solamente una columna o un renglón de elementos en la matriz es llamada vector columna o vector renglón. Se entiende que la matriz $[a_{ij}]$, en (b), opera sobre el vector columna $\{x_j\}$ en tal forma que produce el sistema de ecuaciones (a).

Es conveniente mencionar que el uso de métodos matriciales no representa ninguna evolución en el analisis de sistemas estructurales elásticos lineales, es realmente ventajoso para el uso de las computadoras electronicas digitales.

2.2.2 Suma de matrices.

Para sumar dos matrices, simplemente se suman los elementos correspondientes para obtener la matriz suma. Es posible solamente si las dos matrices son del mismo orden $m \times n$. la regla de suma se establece simbólicamente como sigue

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}] \qquad (e)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \dots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \dots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix}$$

2.2.3 Resta de matrices.

Similarmente a (2.2.2) la regla de resta de matrices es

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [(a_{ij}-b_{ij})] \qquad (f)$$

de lo anterior se observa que dos matrices son iguales si son iguales sus elementos correspondientes, $a_{ij} = b_{ij}$.

De la regla de suma de matrices, para multiplicar una matriz dada por un número escalar λ, simplemente se multiplica cada elemento por λ, simbólicamente

$$\lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] \qquad (g)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (g)$$

4

2.2.3 Multiplicación de matrices.

Para obtener el producto AB de dos matrices A y B, se tiene lo siguiente el elemento C_{ij} del renglón i de A y la columna j de B, de la matriz producto es obtenido multiplicando el renglon i de A con la columna j de B, elemento por elemento, y sumando los productos obtenidos. Si A es de orden $m \times n$ y B del orden $n \times q$. En forma simbólica, el elemento C_{ij} de la matriz producto $C = AB$ será

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj} = (a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}) \qquad (1)$$

o sea:

$$\begin{array}{c|c} & \overbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 \cdots & j & \cdots & n \end{array}}^{\text{columnas}} \\ \text{renglones} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{array} & \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A = [a_{ij}]} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 \cdots & j & \cdots & q \end{array}}^{\text{columnas}} & \\ \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{iq} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}}_{B = [b_{ij}]} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} \text{renglones} \end{array} \qquad (2)$$

orden $m \times n$ orden $n \times q$

(renglones) $\times$ (columnas)
n q

$$\begin{bmatrix} (\overbrace{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{n1}}^{c_{11}}) & (\overbrace{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2}}^{c_{12}}) & \cdots & (\overbrace{a_{11}b_{1q}+a_{12}b_{2q}+\cdots+a_{1n}b_{nq}}^{c_{1q}}) \\ (\overbrace{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n1}}^{c_{21}}) & (\overbrace{a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2}}^{c_{22}}) & \cdots & (\overbrace{a_{21}b_{1q}+a_{22}b_{2q}+\cdots+a_{2n}b_{nq}}^{c_{2q}}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\overbrace{a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1}}^{c_{m1}}) & (\overbrace{a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\cdots+a_{mn}b_{n2}}^{c_{m2}}) & \cdots & (\overbrace{a_{m1}b_{1q}+a_{m2}b_{2q}\cdots a_{mn}b_{nq}}^{c_{nq}}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$C = [c_{ij}] = [(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})] \quad (2)$$

orden $n \times q$ n: renglones, q columnas

Debe observarse que la multiplicación $[a_{ij}][b_{ij}]$ es posible solamente si el número de columnas de $A=[a_{ij}]$ es igual al número de renglones de $B=[b_{ij}]$

Es necesario observar que la multiplicación matricial no es conmutativa, es decir, $AB \neq BA$.

Ejemplo sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A es de orden 2×3 y B de orden 3×2 el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, la multiplicación es posible

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{32}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

orden 2×2

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) & (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}) \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}) & (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}) \\ (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21}) & (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22}) & (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23}) \end{bmatrix}$$

orden 3×3

se verifica que $AB \neq BA$

No siempre ambos productos existen AB y BA.

Volviendo a la expresión matricial (b) del sistema de ecuaciones lineales algebraicas (a), al efectuar la multiplicación $[a_{ij}]\{x_j\}$ se obtiene el sistema de ecuaciones. Ello explica la razón por la cual se ha establecido la regla anterior de multiplicación matricial.

2.2.4 Transposición de matrices

La matriz transpuesta de A, representada por A^T, se obtiene reescribiendo la matriz A en tal forma que sus renglones llegan a ser columnas, tomadas en la misma secuencia y viceversa. Simbólicamente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ij}] \equiv A \qquad (l)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ji}] = [a_{ij}]^T = A^T \quad (m)$$

Considerando la regla de multiplicación junto con la de transposición se demuestra el producto matricial transpuesto $(AB)^T$ es igual al producto conmutado de las transpuestas individuales.

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (n)$$

2.2.5 Matriz de identidad

La matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (o)$$

es llamada matriz identidad de orden $n \times n$ tiene todos los elementos cero excepto los de la diagonal principal que son igual a la unidad. En algebra matricial la matriz de identidad I corresponde en todas las formas a la idea de unidad del algebra ordinaria.

Si una matriz identidad es multiplicada por un número escalar λ se obtiene

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \qquad (p)$$

la cual se llama matriz escalar.

2.2.6 Matriz diagonal.

Una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

es llamada matriz diagonal de orden n. La matriz identidad I y la matriz escalar λI, son por supuesto casos especiales de matriz diagonal.

Hay varios otros tipos especiales de matrices, pero las introducidas serán suficientes para nuestros propósitos. En resumen tenemos:

a) La matriz rectangular de orden $m \times n$
b) " " cuadrada " " $n \times n$
c) El vector renglón $\lfloor x_i \rfloor$, $\{x_i\}^T$, $\{x\}^T$
d) " " columna $\lfloor x_i \rfloor^T$, $\{x_i\}$, $\{x\}$
e) La matriz identidad de orden $n \times n$
f) " " escalar " " "
g) " " diagonal " " "

2.2.7 Inversion de matrices

Volviendo de nuevo al sistema de ecuaciones (a), (b), (c) ó (d) y escribiéndolo en la forma matricial $[A]\{X\}=\{C\}$, establecemos por definición que la solución puede ser expresada en la siguiente forma:

$$x = \frac{c}{A} = A^{-1}c = Rc$$

ó

$$x = \frac{\{c_i\}}{[a_{ij}]} = [a_{ij}]^{-1}\{c_i\} \qquad (\gamma)$$

esto nos da la idea de dividir una matriz por otra, o más apropiadamente, de encontrar la recíproca R de una matriz dada A. Este proceso es llamado inversión. Para efectuarlo, se busca una matriz R tal que $RA = I$, donde I es la matriz de identidad. Es importante observar que un sistema de ecuaciones simultáneas tendrá una solución única solamente si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, por lo tanto $A = [a_{ij}]$ será siempre una matriz cuadrada de orden $n \times n$ ó un determinante de orden n. De lo contrario, el concepto de inversión de matrices no tiene significado.

Existen varios procedimientos para la inversión de una matriz cuadrada. A continuación describiremos uno de los procedimientos. Primero es necesario introducir el concepto de adjunta de una matriz dada A la cual se escribe <u>Adj A. Se define como la transpuesta de otra matriz C formada por los cofactores de los elementos a_{ij} de la matriz dada A.</u>

La ilustración de lo anterior se puede observar mediante el siguiente ejemplo.

Sea la matriz dada

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Entonces la matriz C, formada por los cofactores de A, será

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

donde el determinante

$$|b_2 c_3| \equiv \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - c_2 b_3 \quad \text{es}$$

es llamado el cofactor del elemento a_1

$$-|b_1c_3| = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - c_1b_3)$$ es el cofactor del elemento a_2. La regla de signos para los cofactores es

$$\begin{bmatrix} (+) & (-) & (+) & \cdots \\ (-) & (+) & (-) & \cdots \\ (+) & (-) & (+) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

En general para determinar el cofactor de un elemento cualquiera a_{ij} de una matriz de orden $n \times n$, se tacha el renglón i y la columna j y se escribe el determinante de los términos remanentes de acuerdo con la regla de signos mencionada, por ejemplo en el caso anterior el cofactor del elemento a_2, con $i = 2$, $j = 1$.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} ; \quad \text{Cof. de } a_2 \equiv A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Habiendo obtenido la matriz C de los cofactores de la matriz (s), de acuerdo con la regla anterior la matriz adjunta de A, definida como la transpuesta de C, será:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} |b_2 c_3| & -|b_1 c_3| & |b_1 c_2| \\ -|a_2 c_3| & |a_1 c_3| & -|a_1 c_2| \\ |a_2 b_3| & -|a_1 b_3| & |a_1 b_2| \end{bmatrix} \qquad (u)$$

Cuando la adjunta de una matriz cuadrada A ha sido formada, se puede demostrar que

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = |A|\, I \qquad (v)$$

donde $|A|$ es el determinante de A y I es la matriz identidad. Dividiendo (v) por $|A| \neq 0$,

$$\frac{A(\operatorname{adj} A)}{|A|} = \frac{(\operatorname{adj} A)A}{|A|} = I = RA$$

Entonces,

$$R = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|} = |A|^{-1} \operatorname{adj} A \qquad (w)$$

es la requerida inversa de A

Siguiendo las reglas para invertir cualquier matriz cuadrada, puede fácilmente demostrarse que la inversa de cualquier matriz diagonal será obtenida simplemente invirtiendo cada uno de los elementos a lo largo de la diagonal principal. Entonces, si

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conociendo ahora el método de inversión de una matriz cuadrada, se puede ilustrar la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas algebraicas lineales de orden 3×3; considerando..

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 4 \\ x - y + 2z &= 5 \\ -2x + y - z &= -3 \end{aligned}$$

En notación matricial estas ecuaciones se escriben en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

la matriz C de los cofactores de A será

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

la adjunta de A será la transpuesta de C

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

Para determinar el valor del determinante de A, se desarrolla por cofactores de los elementos de la primer hilera, y se obtiene...

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 2(3) - 1(-1) = -3 - 6 + 1 = -8$$

Finalmente despejando el vector columna de ecuaciones (T) y (ω)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1\times4 + 1\times5 + 3\times(-3) \\ -3\times4 - 5\times5 - 7\times(-3) \\ -1\times4 - 7\times5 - 5\times(-3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{Bmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Esto es, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ representa la solución requerida. Este ejemplo simple involucra muchas de las operaciones de algebra matricial previamente discutidas, y es conveniente que todas las etapas sean claras antes de seguir posteriormente.

Es conveniente mencionar algunos ejemplos de escribir expresiones algebraicas en notación matricial. Por ejemplo,

$$c = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad (x)$$

multiplicando el vector renglón por el vector columna

$$[a_1\ a_2 \cdots a_n]\begin{Bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{Bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

De nuevo tomando

$$c = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n \qquad (y)$$

en corrección con (y), definimos las siguientes matrices:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{Bmatrix} \qquad y = \begin{Bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{Bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Transponiendo el vector columna x en el vector renglón x^T y efectuando la multiplicación $x^T A y$ se obtiene

$$[x_1\ x_2 \cdots x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{Bmatrix} = [a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n]$$

de lo anterior se ve que la ecuación (y) puede ser expresada matricialmente como

$$c = x^T A y = [x][a]\{y\}$$

2.2.8 Problemas de tarea

1- Determinar la matriz suma A+B si

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&1&4\\2&0&3\end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-3&5\\-2&1&-1\end{bmatrix}$$

2- De los valores de A y B en 1 determinar la matriz producto AB.

3- De los valores AB de del Prob 1 determinar la matriz producto BA

4- Escribir las transpuestas de cada una de las matrices dadas en el problema 1.

5- Dadas las matrices cuadradas

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}11&-9&1\\-7&9&-2\\2&-3&1\end{bmatrix}$$

demuestre que B es la adjunta de A y determine la matriz producto AB.

2.2.9 Referencias para algebra matricial.

a) Fuller, E.L. "Basic matrix theory", Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

b) Aitken A.C. "Determinants and Matrices," Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

1.2 GENERALIDADES SOBRE MATRICES

Una matriz es una tabla rectangular de números o de símbolos dispuestos en renglones y en columnas. Frecuentemente se le representa limitándola con corchetes. A continuación se representa una matriz de m renglones y n columnas :

$$\underset{(m \times n)}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mj} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es necesario señalar que siempre se menciona el número de renglones (m) primero. Por consiguiente, $\underset{\sim}{A}$ es una matriz (m x n).

En los siguientes párrafos se hará frecuente mención de matrices o vectores renglón o columna. Suponiendo que m = 1, se tiene

<u>una matriz renglón o un vector renglón</u>

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, si se supone que $n = 1$, se obtiene

una matriz columna o un vector columna

$$\underset{\sim}{A} = [a_{11} \quad a_{21} \quad \cdots \quad a_{j1} \quad \cdots \quad a_{m1}]^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Existen matrices especiales que es necesario mencionar.

Matriz diagonal

$$\underset{(4 \times 4)}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 \\ \text{simétrica} & & & a_{44} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Otra notación sería

$$\underset{\sim}{A} = \text{diag} \ (a_{11}, \ a_{22}, \ a_{33}, \ a_{44})$$

Matriz identidad

Dicha matriz es un caso especial del de arriba. En el caso de una matrix 3 x 3, por ejemplo, se tiene

$$\underset{\sim}{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sim} & & 1 \end{bmatrix} = \text{diag} \ (1, \ 1, \ 1)$$

Matriz bandeada

Se aplica la denominación "matriz bandeada" cuando todos elementos de una matriz que no son iguales a 0 están colocados alrededor de la diagonal principal. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n-1,\, n-1} & a_{n-1,\, n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n,\, n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

Se dice de una matriz que es triangular superior (S) o inferior (I) cuando la totalidad de sus elementos situados ya sea arriba o abajo de la diagonal principal es igual a cero.

$$\underset{(n \times n)}{\underset{\sim}{L}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

En una matriz simétrica, a_{ij} es siempre igual a a_{ji}. En mecánica estructural lineal por ejemplo, todas las matrices de rigidez son simétricas.

Matriz transpuesta

Se obtiene una matriz transpuesta cuando se cambian renglones por columnas, como por ejemplo

$$\underset{(2\times 3)}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Así, la matriz transpuesta de $\underset{\sim}{A}$, es

$$\underset{(3\times 2)}{\underset{\sim}{A}^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Además,

$$(\underset{\sim}{A}^T)^T = \underset{\sim}{A}$$

y, en el caso de matrices simétricas,

$$\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}$$

Subdivisión de matrices

Las matrices muy grandes de, por ejemplo, 5 000 x 5 000 que contienen 25 millones de elementos, tienen necesariamente que subdividirse en matrices más pequeñas, como

$$\left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\underset{(2\times 2)}{\underset{\sim}{A}_{11}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \underset{(2\times 1)}{\underset{\sim}{A}_{12}} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(1\times 2)}{\underset{\sim}{A}_{21}} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad \underset{(1\times 1)}{\underset{\sim}{A}_{22}} = \begin{bmatrix} a_{35} \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

En el cálculo, es posible procesar matrices de la misma manera en que se procesan normalmente los datos numéricos. Se indican más abajo las definiciones necesarias.

Igualdad de matrices

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$$

significa que, para toda i y toda j, $a_{ij} = b_{ij}$.

Adición y substracción

Si

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}$$

entonces

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Por consiguiente, en el caso de substracción, se obtiene

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Multiplicación de matrices

Si se debe multiplicar una matriz por un factor c, cada elemento debe multiplicarse por c, por ejemplo

$$\left[c\underset{\sim}{A} \right] = \left[ca_{ij} \right]$$

Cuando se multiplican dos matrices es condición sine qua non que sus dimensiones sean compatibles. Si, por ejemplo, la matriz $\underset{\sim}{A}$ de m x n debe multiplicarse por la matriz $\underset{\sim}{B}$ de p x q, es necesario que n = p, esto es, el número de renglones n contenido en $\underset{\sim}{A}$ debe ser igual al número de columnas p contenidas en $\underset{\sim}{B}$. Así,

$$\underset{(m \times n)}{\underset{\sim}{A}} \; \underset{(p \times q)}{\underset{\sim}{B}} = \underset{(m \times q)}{\underset{\sim}{C}}$$

y

$$c_{ij} = a_{ir} b_{rj} \qquad i = 1, 2 \ldots m \; ; \; j = 1, 2 \ldots q$$
$$r = 1, 2, \ldots, n = p$$

Otro ejemplo sería

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} \quad a_{22}b_{21} \quad a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

Valores característicos

Dada una matríz cuadrada $\underset{\sim}{A}$ de n x n y un vector $\underset{\sim}{u}$ de dimensión n sobre el que opera $\underset{\sim}{A}$, el producto

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}$$

es un vector también de dimensión n. En general, $\underset{\sim}{v}$ es muy diferente de $\underset{\sim}{u}$. Si, por ejemplo, $\underset{\sim}{v}$ resulta nulo para valores particulares de $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$, se dice que $\underset{\sim}{v}$ es un vector del espacio nulo de A. Por ejemplo, sea

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un vector del espacio nulo de A es, claramente,

$$\underset{\sim}{u} = [\,x,\ 0\,]^T = x\,[\,1,\ 0\,]^T$$

Se observa que si se multiplica el vector $\underset{\sim}{w} = [1,\ 0]^T$ por el escalar x, se obtiene una infinidad de vectores del espacio nulo de $\underset{\sim}{A}$, uno para cada valor que pueda adquirir x. Sin embargo, $\underset{\sim}{w}$ es el único vector de magnitud unitaria que pertenece al espacio nulo de $\underset{\sim}{A}$. Por esto se puede decir que $\underset{\sim}{w}$ es una base normal de este espacio. En general, el espacio nulo de una matriz de n x n tiene una base compuesta por $m \leq n$ vectores. Si estos vectores se seleccionan de magnitud unitaria y mutuamente ortogonales, se dice que la base es ortonormal. Las matrices no singulares tienen un espacio nulo de de dimensión cero, esto es, no existe ningún vector no nulo que sea transformado por ellas en $\underset{\sim}{0}$.

Por otra parte, puede darse el caso que el vector $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}$ sea linealmente dependiente con $\underset{\sim}{u}$, esto es, que uno resulte de multiplicar el otro por una constante. En esta discusión se deja fuera el vector $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$. En estas condiciones, se tiene

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \lambda\,\underset{\sim}{u} \qquad (*)$$

donde λ es un escalar, en general, complejo. Nótese que la ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$$

donde $\underset{\sim}{I}$ es la matriz identidad de n x n. Para que $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ satisfaga la ecuación anterior, debe pertenecer al espacio nulo de $\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}$. Ahora bien, para que $\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}$ tenga un espacio nulo no vacío, esto es, para que existan vectores $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ tales que $(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}$ debe ser singular. Para que sea singular, su determinante debe anularse, esto es, debe tenerse

$$\det\,(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}) = 0$$

Pero el determinante en cuestión, esto es, el miembro izquierdo de la ecuación anterior, es un polinomio de orden n en λ, si $\underset{\sim}{A}$ es de n x n. Llamando $P_n(\lambda)$ a este polinomio, la ecuación anterior es

$$P_n(\lambda) = 0$$

Si $\underset{\sim}{A}$ es una matriz de elementos reales, $P_n(\lambda)$ es un polinomio de coeficientes reales y, por el Teorema Fundamental del Algebra [4], posee n raíces complejas, de las cuales algunas pueden aparecer repetidas. Las n raíces del polinomio $P_n(\lambda)$, llamado <u>polinomio característico de $\underset{\sim}{A}$</u>, reciben el nombre de valores característicos de $\underset{\sim}{A}$. Si cada valor característico de $\underset{\sim}{A}$ se sustituye en la ec (*), se obtiene un conjunto de vectores $\underset{\sim}{u}_i$ correspondientes que se llaman <u>vectores característicos</u> de $\underset{\sim}{A}$. Nótese que si se conoce un vector característico $\underset{\sim}{e}_i$, esto es, si

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{e}_i = \lambda_i\,\underset{\sim}{e}_i$$

entonces el producto de éste por un escalar (en general, complejo) es otro vector característico de $\underset{\sim}{A}$, lo cual puede comprobarse por sustitución delnuevo vector en la ecuación anterior. Entonces, a cada valor característico λ_i de $\underset{\sim}{A}$ corresponde una infinidad de vectores característicos. Sin embargo, no todos éstos interesan, sino sólo aquéllos que son <u>linealmente independientes</u>. Un conjunto de vectores $\{ \underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \}$ es linealmente independiente si la combinación lineal

$$\underset{\sim}{l} = c_1 \underset{\sim}{v}_1 + c_2 \underset{\sim}{v}_2 + \ldots + c_m \underset{\sim}{v}_m$$

se anula si, y sólo si, todos y cada uno de los escalares c_i se anulan. De lo contrario, el conjunto es linealmente dependiente.

Ejemplo 1.2.1. Sea la matriz

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P_3(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \quad 1)$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$$

donde i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$.

El Ejemplo 1.2.1 mostró que la matriz en cuestión tiene dos valores característicos complejos que, como consecuencia del Teorema Fundamental del Algebra, son conjugados. Si la matriz aludid es simétrica, se puede demostrar [5] que sus valores característicos son reales y sus vectores característicos son mutuamente ortogonales. En consecuencia, una matriz simétrica de n x n siempre puede expresarse con respecto a una base (esto es, un conjunto de n vectores linealmente independientes), que resulta ser su conjunto de vectores característicos, en la que adquiere la forma diagonal.

Ejemplo 1.2.2. Sea la matriz

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica y por lo tanto tiene valores característicos reales y vectores característicos ortogonales. En efecto, su polinomio característico es

$$P_2(\lambda) = \det (A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

Denótense sus vectores característicos correspondientes por

$$\underset{\sim}{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix}$$

Estos se calculan de las relaciones

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda_i \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{0}$$

De ahí

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda_1 \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$e_{11} + 2e_{21} = 0$$

y

$$e_{21} = -\frac{1}{2} e_{11}$$

Imponiendo la condición

$$e_{11}^2 + e_{21}^2 = 1$$

se tiene

$$e_{11}^2 + \frac{1}{4} e_{11}^2 = 1 \Rightarrow e_{11} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow e_{21} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Análogamente se obtiene

$$e_{12} = \frac{\sqrt{5}}{5} , \quad e_{22} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

El problema de valores característicos reviste particular importancia en Mecánica. En efecto, la determinación de las frecuencias y los modos maturales de vibración de sistemas mecánicos (Ver, p. ej. [6]). La determinación de tales modos y frecuencias para sistemas mecánicos de parámetros distribuidos, mediante el MEF conduce a un problema de valores característicos, como se verá posteriormente en este curso.

Formas cuadráticas

El escalar definido por la expresión

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{u}$$

donde $\underset{\sim}{A}$ es una matriz de n x n y $\underset{\sim}{u}$, un vector de dimensión n, recibe el nombre de forma cuadrática. Esta forma es equivalente a la forma escalar au^2. De esta última expresión se puede concluir una propiedad interesante de la forma cuadrática f antes definida. Nótese que, si a y u son reales, au^2 es una expresión cuyo signo depende enteramente de a, y no de u. Análogamente, el signo de la forma cuadrática f depende enteramente de $\underset{\sim}{A}$ y no de $\underset{\sim}{u}$, si ambos tienen elementos reales (o bien, si, aunque $\underset{\sim}{A}$ tenga elementos complejos, es idéntica a la matriz obtenida de transponerla y luego tomar el conjugado de cada uno de sus elementos).

Se dice que $\underset{\sim}{A}$ es

- positiva definida, si $f > 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 1)
- positiva semidefinida, si $f \geqslant 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 2)
- negativa definida, si $f < 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 3)
- negativa semidefinida, si $f \leqslant 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 4)

De otra forma, $\underset{\sim}{A}$ es de signo indefinido. Las matrices positivas definidas y semidefinidas juegan un papel importante en la Mecánica, pues están asociadas o bien a cantidades intrínsecamente positivas, como la energía cinética de un vehículo en movimiento, o bien a cantidades intrínsecamente no negativas, como la energía potencial almacenada en la suspensión de un vehículo, medida desde su estado descargado.

Nótese que las definiciones (D 1) a (D 4) no proporcionan un medio práctico para determinar si una matriz es positiva definida, por ejemplo, pues según ellas, sería necesario probar el signo de f para todos y cada uno de los valores posibles de $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$. Sin embargo, la caracterización del signo de una matriz se puede conseguir a través de sus valores característicos, según lo siguiente :

Una matriz $\underset{\sim}{A}$ es

- positiva definida, si todos sus valores característicos son positivos,
- positiva semidefinida, si ninguno de sus valores característicos es negativo
- negativa definida, si todos sus valores característicos son negativos
- negativa semidefinida, si ninguno de sus valores característicos es positivo.

Derivadas de funciones de varias variables

Dada la función $g = g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, escrita en forma compacta como $g = g(\underset{\sim}{u})$, se dice que g es una función escalar de variable vectorial. El gradiente de g, representado por ∇g o por $\partial g/\partial \underset{\sim}{u}$, es el vector de dimensión n definido por

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{u}} = \begin{bmatrix} \partial g/\partial u_1 \\ \partial g/\partial u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial g/\partial u_n \end{bmatrix}$$

Sea el conjunto de funciones

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ h_2 &= h_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &\ \ \vdots \\ h_m &= h_m(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

Este se representa en forma compacta como $\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{u})$, donde, obviamente, $\underset{\sim}{h}$ y $\underset{\sim}{u}$ son vectores de dimensiones m y n, respectivamente. Se dice, entonces, que $\underset{\sim}{h}$ es una función vectorial de argumento vectorial. El gradiente de $\underset{\sim}{h}$, representado por $\nabla \underset{\sim}{h}$ o $\partial \underset{\sim}{h}/\partial \underset{\sim}{u}$, es la matriz de m x n definida por

$$\nabla \underset{\sim}{h} = \frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{u}} = \begin{bmatrix} h_1/\ u_1 & h_1/\ u_2 & \cdots & h_1/\ u_n \\ h_2/\ u_1 & h_2/\ u_2 & \cdots & h_2/\ u_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ h_m/\ u_1 & h_m/\ u_2 & \cdot & h_m/\ u_n \end{bmatrix}$$

Si resulta que

$$\underset{\sim}{h} = \nabla g$$

entonces $\underset{\sim}{h}$ es de dimensión $m = n$, donde n es la dimensión de $\underset{\sim}{u}$. Entonces, $\nabla \underset{\sim}{h} = \nabla\nabla g$, es la matriz Hessiana de g y es de $n \times n$.

Volviendo a la función $g = g(\underset{\sim}{u})$, ésta alcanza un valor estacionario en un "punto" $\underset{\sim}{u}_0$ en el que su gradiente se anula. Este valor puede ser un extremo local o un punto silla. Es un extremo local si la matriz Hessiana de g, $\nabla\nabla g$, es de signo semidefinido. De hecho, es un máximo local si $\nabla\nabla g$ es negativa semidefinida, mientras que es un mínimo local si $\nabla\nabla g$ es positiva semidefinida. Si esa matriz Hessiana es de signo indefinido, el punto estacionario en cuestión es un punto silla. El resultado anterior no es más que el resultado ampliamente conocido del cálculo elemental, que se ilustra en la Fig 1.2.1

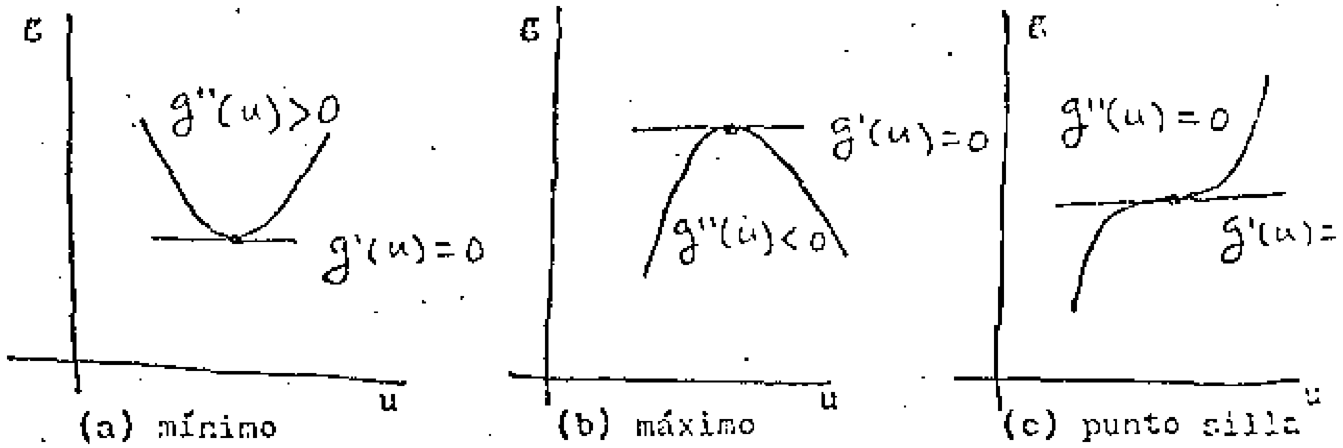


Fig 1.2.1 Puntos estacionarios de una función escalar de argumento escalar.

.3 METODOS NUMERICOS

A continuación se presenta un esbozo de los métodos numéricos aplicables al problema

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{b} \qquad (1.3.1)$$

donde $\underset{\sim}{A}$ es de n x n. Otro problema frecuente en cálculos de elemento finito es él de valores característicos

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \lambda\,\underset{\sim}{u} \qquad (1.3.2)$$

Sin embargo, dadas las limitaciones de tiempo de este curso, el segundo problema no será tratado.

Para resolver el problema (1.3.1) existen dos amplias clases de métodos :

- métodos directos
- métodos iterativos.

Estas dos clases de métodos resuelven el sistema (1.3.1), esto es, calculan el valor que deban tener todos los componentes de $\underset{\sim}{u}$, para valores <u>dados</u> de $\underset{\sim}{A}$ y de $\underset{\sim}{b}$, de manera tal que se satisfagan <u>todas</u> las ecuaciones del sistema (1.3.1). Los métodos directos resuelven el problema en cuestión mediante una secuencia de operaciones bien definidas que se aplican una sola vez. Los métodos iterativos resuelven este mismo problema aplicando un ciclo de operaciones reiteradamente, hasta aproximar la solución de manera satisfactoria. Cada ciclo recibe el nombre de <u>iteración</u>.

En este punto es necesario hacer la siguiente observación : en <u>teoría</u> es posible resolver el sistema 1.3.1 mediante un tercer método, llamado "regla de Cramer", en la forma

$$u_i = \frac{\det \underset{\sim}{A}_i}{\det \underset{\sim}{A}}, \; i = 1, \ldots, n \qquad (1.3.3)$$

En la expresión anterior, $\underset{\sim}{A}_i$ es la matriz que se obtiene sustituyendo la $i^{\underline{a}}$ columna de $\underset{\sim}{A}$ por el vector $\underset{\sim}{b}$. Este método requiere, entonces, el cálculo de $n + 1$ determinantes. En seguida se determina el número de multiplicaciones requerido para calcular un determinante de $n \times n$ y, de ahí, el tiempo de ejecución requerido por la "regla de Cramer". En una computadora digital de alta velocidad una multiplicación consume un tiempo del orden de 10^{-4} segundos, mientras que una suma o una resta, un tiempo de un orden mucho menor ; por esta razón, en lo que sigue se considera como "operación", una multiplicación, quedando las sumas y restas sin contabilizarse.

Existen varias formas de calcular un determinante. Aquí se empleará la conocida como <u>expansión por cofactores</u>. Dada una matriz $\underset{\sim}{A}$ de $n \times n$, cuyo elemento (i, j) se representa por a_{ij}, el <u>cofactor</u> de a_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$, obtenida al eliminar de $\underset{\sim}{A}^T$ el $i^{\underline{o}}$ renglón y la $j^{\underline{a}}$ columna. Llámese c_{ij} al cofactor de a_{ij}. Se tiene, entonces,

$$\det \underset{\sim}{A} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n} =$$
$$= a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{2n}c_{2n}$$

El cálculo del determinante de una matriz de 2×2 se realiza, desde luego, sencillamente como

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

que requiere 2 operaciones.

Ahora, para una matriz de 3×3, expandiendo su determinante por cofactores de su primer renglón, se tiene

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

que requiere 3 operaciones. Cada cofactor c_{1i}, que es un determinante de 2 x 2, requiere a su vez 2 operaciones, como se acaba de ver, por lo que el cálculo de este determinante requiere 3 x 2 operaciones. No es difícil demostrar, siguiendo este camino, que el cálculo de un determinante de n x n requiere $n!$ operaciones. En suma, la solución del sistema (1.3.1) mediante la "regla de Cramer" requiere $n!(n+1) = (n+1)!$ operaciones. Suponiendo que el sistema en cuestión contuviera 25 ecuaciones con 25 incógnitas, su solución mediante este método requeriría $26!$ operaciones, que es un número muy grande, del orden de 10^{27}. Si cada operación requiere 10^{-4} segundos, el total de operaciones requiere, entonces, un tiempo de ejecución de 10^{23} segundos. Para tener una idea de la magnitud de este tiempo, baste decir que, si se admite que el universo tiene una vida de 10^{17} segundos [7], el tiempo requerido para resolver el sistema (1.3.1) con 25 incógnitas utilizando una computadora rápida, es ¡un millón de veces la vida del universo! Sobra decir que, hasta el momento, ningún ser humano ha resuelto jamás un sistema lineal de 25 ecuaciones con 25 incógnitas utilizando la regla de Cramer. Sin embargo, tratándose de resolver problemas elásticos mediante el MEF, es común llegar a sistemas de ecuaciones de la forma (1.3.1) con mil incógnitas. En lo que sigue se presentan métodos numéricos prácticos utilizados en la solución de tales sistemas.

El método directo empleado actualmente para resolver sistemas como el (1.3.1) es el de <u>eliminación de Gauss</u>. Este método es equivalente al método llamado LU por los angloparlantes (L, de "lower", que quiere decir inferior ; U, de "upper", que quiere decir superior). Este método se ilustra con un ejemplo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 &= b_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (1.3.4)$$

Divídase ambos miembros de la segunda ecuación entre a_{21} y multiplíqueseles por a_{11}. Procédase, en seguida, con la 3a.ecuación en forma semejante, excepto que, en vez de dividírseles entre a_{21}, divídaseles entre a_{31}. Se tiene, entonces

$$
\begin{aligned}
a_{11}u_1 + a_{11}\frac{a_{22}}{a_{21}}u_2 + a_{11}\frac{a_{23}}{a_{21}}u_3 &= a_{11}\frac{b_2}{a_{21}} \\
a_{11}u_1 + a_{11}\frac{a_{32}}{a_{31}}u_2 + a_{11}\frac{a_{33}}{a_{31}}u_3 &= a_{11}\frac{b_3}{a_{31}}
\end{aligned}
\tag{1.3.5}
$$

A continuación, réstese la 1a ecuación de (1.3.4) de cada una de las ecs (1.3.5). Se tiene

$$
\begin{aligned}
(a_{11}\frac{a_{22}}{a_{21}} - a_{12})u_2 + (a_{11}\frac{a_{23}}{a_{21}} - a_{13})u_3 &= a_{11}\frac{b_2}{a_{21}} - b_1 \\
(a_{11}\frac{a_{32}}{a_{31}} - a_{12})u_2 + (a_{11}\frac{a_{33}}{a_{31}} - a_{13})u_3 &= a_{11}\frac{b_3}{a_{31}} - b_2
\end{aligned}
$$

Por sencillez, escríbase el sistema anterior en la forma

$$
\begin{aligned}
a'_{22}u_2 + a'_{23}u_3 &= b'_2 \\
a'_{32}u_2 + a'_{33}u_3 &= b'_3
\end{aligned}
\tag{1.3.6}
$$

Ahora procédase como con el sistema (1.3.4), esto es, divídase la 2a ecuación de (1.3.6) entre a'_{32} y multiplíquese por a'_{22}. Se tiene

$$
a'_{22}u_2 + a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}}u_3 = a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} \tag{1.3.7}
$$

Réstese a continuación la 1a. ecuación de (1.3.6) de la última ecuación, obteniéndose

$$
(a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}} - a'_{23})u_3 = a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} - b_2
$$

que se puede escribir en forma simplificada como

$$a''_{33}u_3 = b''_3$$

de donde

$$u_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

es el valor de la 3a. incógnita. La segunda se obtiene sustituyendo este valor en la ec (1.3.7), que contiene ahora una sola incógnita, u_2. Esta se obtiene despejándola en la forma

$$u_2 = \frac{1}{a'_{22}} \left(a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} - a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}} u_3\right)$$

Finalmente, sustitúyanse los valores obtenidos de u_2 y u_3 en la la ecuación de (1.3.4). Se obtiene u_1 como

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}u_2 - a_{13}u_3)$$

quedando así totalmente resuelto el problema.

El esquema anterior es básicamente el método de eliminación de Gauss. Sin embargo, aplicado tal y como se presentó, puede causar dificultades si alguno de los dividendos es cero, o un número muy pequeño. Para eliminar esta posibilidad, se escogen como dividendos los números más grandes de cada columna de la matriz $\underset{\sim}{A}$, lo cual equivale a reordenarlas. Este proceso es conocido como <u>pivoteo marginal</u>, para distinguirlo del <u>pivoteo total</u>, que consiste en buscar el número más grande no sólo en cada columna, sino también en cada renglón. Si en el proceso resulta que el número más grande es cero, o un número tan pequeño que la máquina lo tome como cero, el método no se puede aplicar, lo cual indica no otra cosa sino que el sistema es singular, esto es, que det $\underset{\sim}{A} = 0$. En este caso es imposible resolver el sistema, independientemente del método empleado.

Este método se realiza en computadora utilizando el concepto de descomposición LU, que se basa en el Teorema de Descomposición que establece que toda matriz $\underset{\sim}{A}$ de n x n se puede factorizar en el producto de una matriz triangular inferior $\underset{\sim}{L}$ y una triangular superior $\underset{\sim}{U}$. La matriz $\underset{\sim}{L}$ contiene unos en su diagonal y ceros arriba de ella, mientras que la $\underset{\sim}{U}$ contiene en su diagonal los <u>valores singulares</u> de $\underset{\sim}{A}$, que son las raíces positivas de los valores característicos (positivos todos ellos) de la matriz $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^T$ y ceros abajo de su diagonal. $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ son, entonces, matrices de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ & 2 & & & 2n \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & n \end{bmatrix}$$

El Teorema de Descomposición en cuestión establece, entonces, que

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U}$$

El sistema (1.3.1) de esta manera adopta la forma

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{b} \qquad (1.3.8)$$

Llámese

$$\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{v} \qquad (1.3.9)$$

Sustituyendo este valor en la ec (1.3.8) se tiene

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{b} \qquad (1.3.9)$$

que, en forma de componentes, adopta la forma

$$
\begin{aligned}
v_1 &= b_1 \\
l_{21}v_1 + v_2 &= b_2 \\
&\vdots \\
l_{n1}v_1 + l_{n2}v_2 + \dots + v_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{1.3.10}
$$

de donde la primera incógnita, v_1, ya está despejada en la primera ecuación. La segunda incógnita se despeja de la 2a.ecuación, en donde se ha sustituido previamente el valor calculado de v_1. Procediendo en forma semejante con el resto de las ecuaciones de (1.3.10) se obtienen todos los componentes del vector $\underset{\sim}{v}$ de (1.3.9). Sustituyendo ahora este vector, ya conocido, en la ec (1.3.9) se tiene el sistema

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 u_1 + u_{12}u_2 + \dots + u_{1n}u_n &= v_1 \\
\sigma_2 u_2 + \dots \sigma u_{2n}u_n &= v_2 \\
&\vdots \\
\sigma_{n-1}u_{n-1} + u_{n-1,n}u_n &= v_{n-1} \\
\sigma_n u_n &= v_n
\end{aligned}
\tag{1.3.11}
$$

De la última ecuación de (1.3.11) se tiene

$$u_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_n}$$

Sustituyendo este valor en la penúltima ecuación de (1.3.11) se tiene

$$u_{n-1} = \frac{1}{\sigma_{n-1}} (\sigma_{n-1} - u_{n-1,n}u_n)$$

Procediendo en este orden regresivo con las restantes n - 2 ecuaciones se calculan todos los componentes de $\underset{\sim}{u}$, con lo que queda resuelto el problema.

Este método ha sido realizado en diversos subprogramas de computadora. Los más eficientes son los llamados DECOMP y SOLVE [8]. DECOMP produce la descomposición LU de $\underset{\sim}{A}$, mientras que SOLVE, la solución regresiva de los sistemas triangulares (1.3.10) y (1.3.11).

Una ventaja de estos programas es que, una vez descompuesta la matriz $\underset{\sim}{A}$, se puede resolver una serie de sistemas de la forma

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}_1 = \underset{\sim}{b}_1,\ \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}_2 = \underset{\sim}{b}_2,\ \ldots,\ \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}_m = \underset{\sim}{b}_m \qquad (1.3.12)$$

sin tener que volver a descomponer $\underset{\sim}{A}$, cuya descomposición no depende del miembro derecho de las ecs (1.3.12). Todo lo que tiene que hacerse es aplicar m veces la subrutina SOLVE, la que consume la menor parte del tiempo total. La mayor parte del tiempo se utiliza en la descomposición de $\underset{\sim}{A}$. Este método requiere un número de operaciones del orden de n^3. Así, para resolver el sistema anteriormente presentado de 25 ecuaciones, con este método se requiere ejecutar $25^3 = 15\,625$ operaciones, lo cual consume en una computadora rápida algo así como 1.6 segundos, que es una cantidad sustancialmente por abajo de la anterior.

El problema de resolver m sistemas de ecuaciones de la forma (1.3.12) en relación con el MEF se presenta en aplicaciones de diseño se ingeniería cuando se desea conocer la distribución del esfuerzo en una misma estructura o en una misma máquina sujeta a diferentes condiciones de carga que se puedan presentar en operación.

Volviendo a las aplicaciones del MEF, la matriz $\underset{\sim}{A}$ viene a ser la matriz global de rigidez que, como ya se vio, tiene propiedades particulares como simetría y positividad definida. Para este tipo de matrices, el método de Gauss, o LU, se simplifica sustancialmente. La versión simplificada recibe el nombre de método de Cholesky. Ya que la matriz de rigidez es positiva definida, se puede descomponer en la forma

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{C}^T \underset{\sim}{C}$$

donde $\underset{\sim}{C}$ es una matriz triangular superior. Por otra parte, la estructura bandeada de esta matriz aporta ventajas adicionales que redundan en una solución más económica. En efecto, el tiempo de solución de una matriz bandeada de ancho de banda d, es del orden de n^2d. Como normalmente el ancho de banda de una matriz es algunos órdenes de magnitud inferior a su número de renglones y columnas, esto es, $d \ll n$, la economía de ejecución es evidente. Así, por ejemplo, una matriz de rigidez típica de 5 000 x 5 000 puede tener un ancho de banda de 100. Si se utilizara el método de descomposición LU directamente, se realizarían algo así como 6.25×10^{11} operaciones, muchas de ellas inútiles, pues involucrarían multiplicaciones por cero. Explotando la naturaleza bandeada de la matriz, el número de operaciones requerido sería del orden de 2.5×10^8, es decir, 3 órdenes de magnitud inferior al anterior. Más aún, el orden de numeración de los nodos de una malla de elemento finito afecta enormemente el ancho de banda, d, de la matriz de rigidez. Existe, entonces, un orden de numeración (que no es único) óptimo que proporciona un ancho de banda mínimo. En el mercado se pueden obtener diferentes preprocesadoras que se encargan de proporcionar el ancho de banda mínimo, como el programa BANIN, desarrollado en la Universidad de Manchester.

Por su parte, los métodos iterativos se basan en el esquema siguiente : descómpongase la matriz $\underset{\sim}{A}$ en la forma

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{F} \qquad (1.3.13)$$

donde $\underset{\sim}{D}$ es diagonal, mientras que $\underset{\sim}{E}$ y $\underset{\sim}{F}$ son matrices <u>estrictamente</u> triangular inferior y superior, respectivamente, esto es, tienen ceros en su diagonal. De esta manera, el sistema (1.3.1) se puede escribir como

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{u} = (\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})\underset{\sim}{u} + b \qquad (1.3.14)$$

Dado un valor inicial arbitrario $\underset{\sim}{u}^{o}$, genérese la secuencia

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{u}^{k+1} = (\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})\underset{\sim}{u}^{k} + \underset{\sim}{b} \qquad (1.3.15)$$

o bien

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{D}^{-1}(\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})\underset{\sim}{u}^{k} + \underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.16)$$

donde $\underset{\sim}{D}$ es invertible si $\underset{\sim}{A}$ lo es. El <u>esquema iterativo</u> (1.3.16) constituye el <u>método de Jacobi</u>, llamándose $\underset{\sim}{D}^{-1}(\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})$ matriz de Jacobi. Este esquema tiene la desventaja de que requiere almacenar el valor anterior de $\underset{\sim}{u}^{k}$ y el actual $\underset{\sim}{u}^{k+1}$. Lo lógico sería utilizar, para el cálculo de la iª componente de $\underset{\sim}{u}^{k+1}$, u_i^{k+1}, todos los valores actualizados de las componentes anteriores $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \ldots, u_{i-1}^{k+1}$, destruyendo las componentes viejas $u_1^{k}, u_2^{k}, \ldots, u_{i-1}^{k}$. De esta suerte, el esquema iterativo (1.3.16) se sustituye por

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = (\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\,\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{u}^{k} + (\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\,\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.17)$$

El esquema iterativo (1.3.17) recibe el nombre de <u>método de Gauss-Seidel</u>, mientras que la matriz $(\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\underset{\sim}{F}$, el de <u>matriz de Gauss-Seidel</u>. Este método posee, además, la ventaja de que con él se aproxima la solución más rapidamente, esto es, <u>converge</u> más rápidamente a la solución. Escríbase los esquemas (1.3.16) y (1.3.17) en la forma

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{u}^{k} + \underset{\sim}{D}^{-1}\,\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.18)$$

y

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{u}^{k} + (\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\,\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.19)$$

Ahora se determina la evolución del error para cada esquema. Para el de Jacobi, si $\underset{\sim}{u}^*$ es la solución, entonces satisface (1.3.18) con $\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{u}^{k} = \underset{\sim}{u}^*$, esto es

$$\underset{\sim}{u}^* = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{u}^* + \underset{\sim}{D}^{-1}\,\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.20)$$

Llámese $\underset{\sim}{e}^k$ al error $\underset{\sim}{u}^k - \underset{\sim}{u}^*$ en la k a. iteración. Restando (1.3.20) de (1.3.18) se tiene

$$\underset{\sim}{e}^{k+1} = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{e}^{k} \qquad (1.3.21)$$

Del hecho que

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{e}^{1} &= \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{e}^{0} \\ \underset{\sim}{e}^{2} &= \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{e}^{1} = \underset{\sim}{J}^{2}\,\underset{\sim}{e}^{0} \\ &\vdots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

se concluye que **

$$\underset{\sim}{e}^{k} = \underset{\sim}{J}^{k}\,\underset{\sim}{e}^{0} \qquad (1.3.22)$$

cuya evolución sólo depende de $\underset{\sim}{J}$. Se dice que $\underset{\sim}{J}$ es <u>convergente</u> si $\lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{J}^k = \underset{\sim}{0}$. Así, para $\underset{\sim}{J}$ convergente, $\lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{e}^k = \underset{\sim}{0}$. Se observa que $\underset{\sim}{J}$ es convergente cuando se va haciendo más y más pequeña a medida que se le eleva a potencias más altas. Así como un número real de valor absoluto menor que 1 se va haciendo cada vez más pequeño a medida que se le eleva a potencias más altas, una matriz es

---

** En e^k, k es superíndice, mientras que J^k, exponente convergente si los valores absolutos de todos sus valores característicos son estrictamente menores que 1. Al máximo valor absoluto de los valores característicos de una matriz A se le llama "radio espectral" y se representa por ρ. Así

$$\rho(\underset{\sim}{A}) = \max_i \{|\lambda_i|\} \tag{1.3.23}$$

Entonces, el esquema iterativo de Jacobi converge si

$$\rho(\underset{\sim}{J}) < 1 \tag{1.3.24}$$

Análogamente, el error del esquema iterativo de Gauss-Seidel (1.3.19) adopta la forma

$$\underset{\sim}{e}^{k+1} = \underset{\sim}{G}^{k} \underset{\sim}{e}^{o} \tag{1.3.25}$$

por lo que este esquema converge si

$$\rho(\underset{\sim}{G}) < 1 \tag{1.3.26}$$

Es claro que mientras menor sea el radio espectral de un esquema iterativo su rapidez de convergencia será mayor. Una forma de lograr un radio espectral menor es modificando el esquema iterativo de Gauss-Seidel, introduciendo un factor de <u>sobrerrelajación</u>, ω, mayor que 1. Se obtiene, entonces, el método iterativo de sobrerrelajación sucesiva, cuyo esquema es el siguiente :

$$(\underset{\sim}{D} - \omega \underset{\sim}{E})\underset{\sim}{u}^{k+1} = \left[(1-\omega)\underset{\sim}{D} + \omega \underset{\sim}{F}\right] u^k + \omega \underset{\sim}{b} \tag{1.3.27}$$

o bien

$$u^{k+1} = (\underset{\sim}{I} - \omega \underset{\sim}{L})^{-1} \left[(1-\omega)\underset{\sim}{I} + \omega \underset{\sim}{U}\right] u^k + \omega (\underset{\sim}{I} - \omega \underset{\sim}{L})^{-1} \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{b} \tag{1.3.28}$$

donde

$$\underset{\sim}{L} \equiv \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{E}, \quad \underset{\sim}{U} \equiv \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{F}$$

La rapidez de convergencia del esquema (1.3.28) depende, entonces, sólo del factor de sobrerrelajación ω. Para cada problema particular existe un valor óptimo de sobrerrelajación que maximiza esa rapidez. Sin embargo, no existe en general, un método para hallar ese factor y normalmente tiene que determinarse experimentando con varios valores.

En toda la discusión anterior se ha considerado que tanto $\underset{\sim}{A}$ como $\underset{\sim}{b}$ se conocen a la perfección. Sin embargo, en la práctica esto no sucede. En efecto, si $\underset{\sim}{A}$ o $\underset{\sim}{b}$ proceden de mediciones, éstas introducen siempre "ruido", esto es, imprecisiones debidas a la imposibilidad de calibrar perfectamente los instrumentos de medición, o bien a errores de apreciación de parte de quienes toman las lecturas. En cálculos relacionados con el MEF, tanto la matriz $\underset{\sim}{A}$ como el vector $\underset{\sim}{b}$ se calculan dentro de la máquina, lo cual introduce errores llamados "de redondeo", esto es, debidos a que cualquier computadora no dispone más que de un conjunto finito de números, que se llaman "de punto flotante". Operaciones entre números de punto flotante, en general, no producen otro número de punto flotante, por lo que el resultado deberá aproximarse a uno de los dos números de punto flotante más próximos al resultado real. Algunas máquinas aproximan por defecto y otras, por exceso ; pero no necesariamente al número de punto flotante más próximo. En seguida se presenta una discusión somera de los errores de redondeo presentes al resolver el problema (1.3.1).

Antes de continuar con la presente discusión se introduce el concepto de <u>norma</u> de vectores y de matrices.

La norma de un vector $\underset{\sim}{v}$ de dimensión n es una generalización del concepto de magnitud. En efecto, la magnitud de un vector da una idea sobre el tamaño de sus componentes considerados globalmente. Esta se define como

$$\| \underset{\sim}{v} \| = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^{1/2} \qquad (1.3.29)$$

Se observa que esta magnitud nunca es negativa y se anula si, y sólo si $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$, esto es, si todos y cada uno de los números v_i se anulan. Por otro lado, si cada componente v_i se multiplica por el mismo escalar c, se tiene

$$\| c \underset{\sim}{v} \| = |c| \, \| \underset{\sim}{v} \| \qquad (1.3.30)$$

y, finalmente, para todo par de vectores $\underset{\sim}{v}$ y $\underset{\sim}{w}$,

$$\| \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} \| \leq \| \underset{\sim}{v} \| + \| \underset{\sim}{w} \| \qquad (1.3.31)$$

que no es otra cosa que una condición de existencia del triángulo de lados $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{w}$ y $\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w}$. Por esto, la última relación, (1.3.31), se llama "desigualdad del triángulo". Generalizando el concepto anterior se tendrá : una norma para un espacio vectorial es un número real que, si $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{w}$ son vectores del espacio,

i) La norma es positiva definida, esto es

$$\| \underset{\sim}{v} \| > \underset{\sim}{0}$$

y se anula si y sólo si $\underset{\sim}{v}$ se anula igualmente.

ii) Es linealmente homogénea ; esto es

$$\| c \underset{\sim}{v} \| = |c| \, \| \underset{\sim}{v} \|$$

iii) Satisface la desigualdad del triángulo, esto es

$$\| \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} \| = \| \underset{\sim}{v} \| + \| \underset{\sim}{w} \|$$

Nótese que en la definición anterior no se ha impuesto forma alguna para calcular la norma, como es el caso en la definición (1.3.29). Así, cualquier número real asociado a cada vector del espacio en consideración, que satisfaga las propiedades i) a iii) anteriores es una norma. Ejemplos de normas son los siguientes :

$$\| \underset{\sim}{v} \| = \max_{i} \{ | v_i | \} \qquad (1.3.32\ a)$$

$$\| \underset{\sim}{v} \| = \sum_{i} | v_i | \qquad (1.3.32\ b)$$

De éstas dos, la primera es la más fácil y económica de calcular, y por eso se emplea mucho en análisis numérico para cálculo de errores.

Por otra parte, ya que la definición anterior de norma no se limita a vectores definidos como arreglos unidimensionales, se puede aplicar a matrices. Una norma de un espacio de matrices, entonces, es una medida del tamaño de las componentes de cada matriz del espacio, consideradas globalmente, de manera que mientras más pequeña sea la norma de una matriz, más próxima estará de la matriz nula. Ejemplos de normas de matrices son

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \sqrt{\mathrm{Tr}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{A}^T} \qquad (1.3.33\ a)$$

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \operatorname{Máx}_{j} \sum_{i} | a_{ij} | \qquad (1.3.33\ b)$$

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \operatorname{Máx}_{i,j} | a_{ij} | \qquad (1.3.33\ c)$$

Un concepto primordial en el análisis de error de redondeo en cálculos con matrices es el de <u>condición</u> de una matriz. Dada una matriz $\underset{\sim}{A}$ de n x n, invertible, su condición se define como

$$\text{cond}\, (\underset{\sim}{A}) = \| \underset{\sim}{A} \| \ \| \underset{\sim}{A}^{-1} \| \qquad (1.3.34)$$

Se observa de inmediato que la condición es un número adimensional, y se demostrará que es una medida de la amplificación del error de redondeo. Así, un número de condición bajo está próximo a 1, aunque nunca es inferior a la unidad, mientras que uno alto puede ser del orden de 1 000 o mayor aún. Mientras más alta sea la condición de una matriz, más imprecisos serán los resultados de las operaciones en que interviene esta matriz.

Supóngase que se conoce $\underset{\sim}{A}$ a la perfección ; pero que $\underset{\sim}{b}$ está contaminado con un error de redondeo $\delta\underset{\sim}{b}$. Así, la ec (1.3.1) es, en realidad

$$\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{u} + \delta\underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{b} + \delta\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.35)$$

donde $\delta\underset{\sim}{u}$ es el error de redondeo producido por $\delta\underset{\sim}{b}$. Interesará calcular el error de redondeo en el cálculo de u, en términos del de $\underset{\sim}{b}$, esto es, interesa calcular el cociente $\|\delta\underset{\sim}{u}\|/\|\underset{\sim}{u}\|$ en términos de $\|\delta\underset{\sim}{b}\|/\|\underset{\sim}{b}\|$. Ya que la ec (1.3.1) se satisface teóricamente, restándola de la ec (1.3.35) se tiene

$$\underset{\sim}{A}\ \delta u = \delta\underset{\sim}{b}$$

o bien

$$\delta u = \underset{\sim}{A}^{-1}\ \delta\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.36)$$

De una propiedad de las normas se tiene

$$\|\underset{\sim}{A}^{-1}\delta\underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{A}^{-1}\|\ \|\delta\underset{\sim}{b}\| \qquad (1.3.37)$$

que aquí no se demostrará. Baste con decir que esta desigualdad está asociada al producto interno de vectores. En efecto, si $\underset{\sim}{v}$ y $\underset{\sim}{w}$ son dos vectores del mismo espacio (para el cual previamente se ha definido un producto interno como $\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n$),

$$|\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w}| = \| \underset{\sim}{v} \| \, \| \underset{\sim}{w} \| \, |\cos(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w})|$$

donde $\cos(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w})$ es el coseno del ángulo que forman los vectores $\underset{\sim}{v}$ y $\underset{\sim}{w}$. Del hecho de que $|\cos(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w})| \leq 1$, la igualdad anterior se tranforma en la desigualdad

$$\| \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w} \| \leq \| \underset{\sim}{v} \| \, \| \underset{\sim}{w} \|$$

que es una desigualdad conocida como de Schwarz.

Volviendo al sistema (1.3.1), ya que

$$\underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{b}$$

se tiene

$$\| \underset{\sim}{b} \| \leq \| \underset{\sim}{A} \| \, \| \underset{\sim}{u} \| . \tag{1.3.38}$$

Aplicando la desigualdad (1.3.37) a la ec (1.3.36), se tiene

$$\| \delta \underset{\sim}{u} \| \leq \| \underset{\sim}{A}^{-1} \| \, \| \delta \underset{\sim}{b} \| \tag{1.3.39}$$

Multiplicando miembro a miembro las desigualdades (1.3.38) y (1.3.39), se tiene

$$\| \delta \underset{\sim}{u} \| \, \| \underset{\sim}{b} \| \leq \| \underset{\sim}{A} \| \, \| \underset{\sim}{A}^{-1} \| \, \| \underset{\sim}{u} \| \, \| \delta \underset{\sim}{b} \|$$

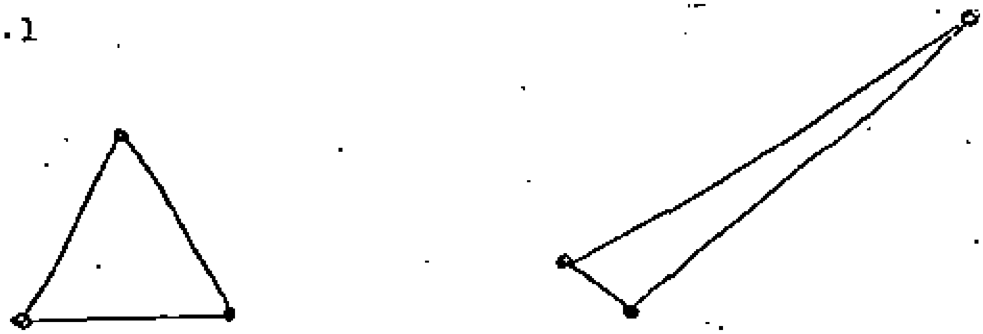
Si $\underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$, se pueden dividir ambos miembros de la última desigualdad entre $\| \underset{\sim}{u} \| \, \| \underset{\sim}{b} \|$, con lo que se obtiene

$$\frac{\| \delta \underset{\sim}{u} \|}{\| \underset{\sim}{u} \|} \leq \| \underset{\sim}{A} \| \, \| \underset{\sim}{A}^{-1} \| \frac{\| \delta \underset{\sim}{b} \|}{\| \delta \underset{\sim}{b} \|} = \operatorname{cond}(\underset{\sim}{A}) \frac{\| \delta \underset{\sim}{b} \|}{\| \underset{\sim}{b} \|} \tag{1.3.40}$$

con lo que se demuestra que la condición de una matriz es el factor de amplificación del error de redondeo.

Un resultado semejante se habría obtenido si se hubiera supuesto imprecisión en $\underset{\sim}{A}$, en lugar de $\underset{\sim}{b}$; pero en aras de la brevedad, este análisis ya no se continúa.

Por la importancia que tiene la condición de una matriz, la mayor parte de los programas de elemento finito proporcionan una estimación de este número, ya que un cálculo exacto sería demasiado costoso ; pero también, innecesario. En aplicaciones del MEF a problemas en medios elásticos planos se genera una malla de elementos. Si la malla es triangular, se tendrán elementos de las formas de la Fig 1.3.1



(a) (b)

Fig 1.3.1 Elementos finitos

El elemento de la Fig 1.3.1 (a) es casi equilátero, mientras que él de la Fig 1.3.1 (b) es "muy escaleno", esto es, sus lados son de longitudes muy desiguales. Una malla con elementos equiláteros produce una matriz de rigidez de condición baja, mientras que una con elementos muy desbalanceados, como él de la Fig 1.3.1 (b), produce una matriz de rigidez de condición muy alta. Existen preprocesadores que balancean una malla desbalanceada.

Referencias :

1. Byars E.F. y Snyder R.D., Mecánica de Cuerpos Deformables, Tercera Edición, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., C. de México, 1978, pp. 274-284

2. Timoshenko S. y Woinowsky-Krieger S., Teoría de Placas y Láminas, Ediciones Urmo, Bilbao, 1970, p. 310

3. Byars E.F. y Snyder R.D., op. cit., pp. 73 y 74

4. Herstein I.N., Algebra Moderna, Editorial Trillas, C. de México, 1974, pp. 210-218

5. Mostow G.D. y Sampson J.H., Algebra Lineal, Mc Graw-Hill de México, S A de C V, 1972

6. Angeles J., "Modelo dinámico de una suspensión para vehículos de transporte masivo", INGENIERIA, Vol. L, No. 2, 1980, pp. 48-51

7. Gamow G., One, Two, Three ... Infinity, Bantam Books, Inc., Nueva York, 1967, p. 14

8. Forsythe G.E., Malcom M.A. y Moler C.B., Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

MAYO, 1984

1.- Introducción.- La naturaleza de las fuerzas que actuan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto de las fuerzas de cuerpo y externas o de superficie, es una de las partes principales del estudio de la mecánica de sólidos. Se aplicará el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo.

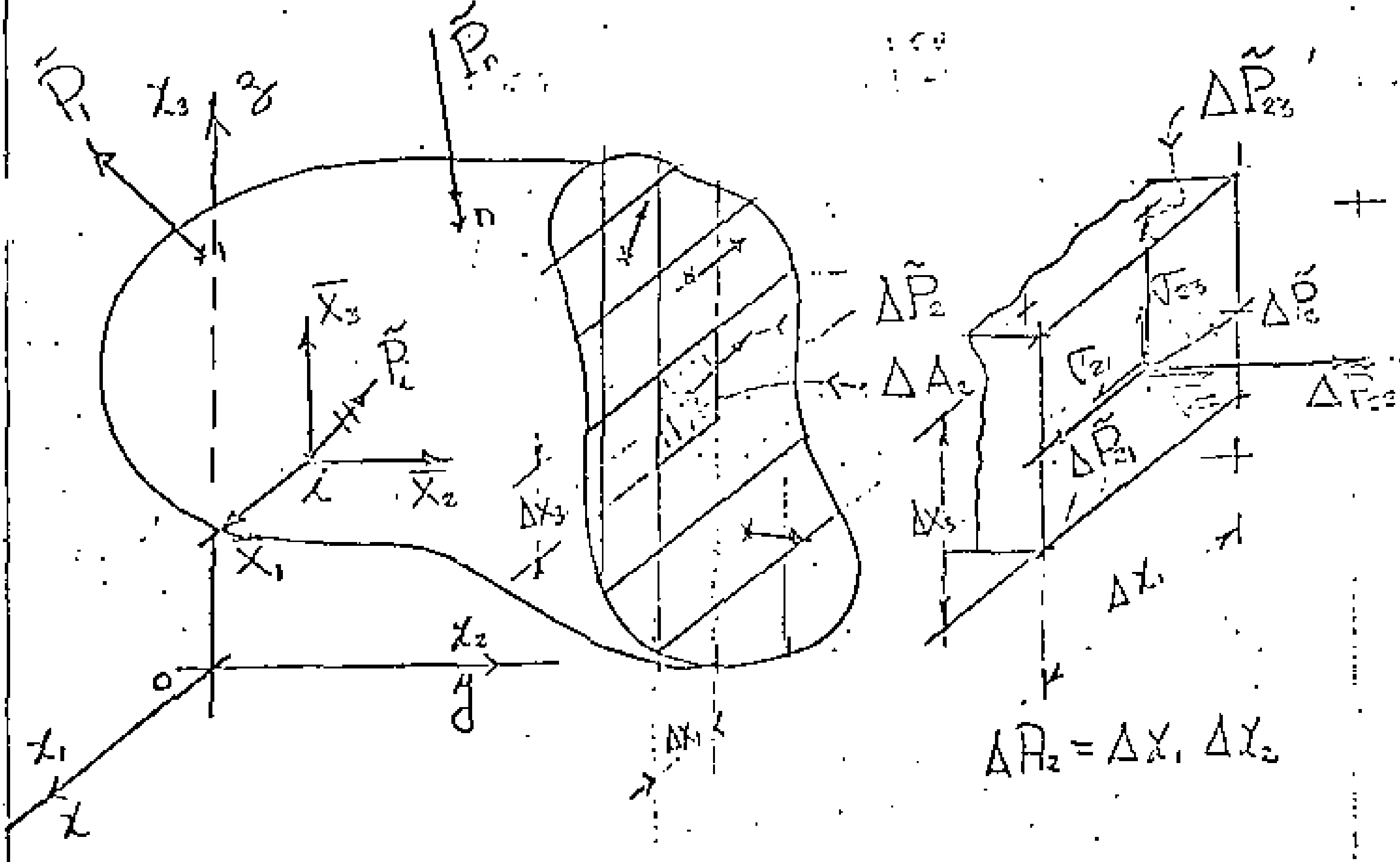


Fig. 1 Cuerpo seccionado paralelo al plano x_1, x_3

2.- Definición de esfuerzo.

En general, las fuerzas internas actuando sobre las areas infinitesimales $\Delta x_i \Delta x_j$ del corte, son de magnitudes y direcciones variables. Fuerzas de naturaleza vectorial y mantienen el equilibrio. En mecánica de sólidos es particularmente significante determinar la intensidad y dirección en distintos puntos a través del corte. En general varían de punto a punto en intensidad y dirección. Es usual resolver sus intensidades perpendicular y paralelas a la sección en consideración. En particular el corte de la Fig. 1 es perpendicular al eje X_1, $\Delta\vec{P}_2$ es la fuerza resultante que actua sobre $\Delta A_2 = \Delta X_1 \Delta X_2$, cuyas componentes son: $[\Delta \bar{P}_{21}\ \Delta \bar{P}_{22}\ \Delta \bar{P}_{23}]$, el primer subíndice significa que el plano en que actuan es perpedicular al eje X_2 y el segundo respecto al eje que son paralelos, Puesto que las componentes de fuerza por unidad de area, son correctas solo en el punto, la definición matemática de esfuerzo es*

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A_2 \to 0} \frac{\Delta \bar{P}_{21}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\Delta A_2 \to 0} \frac{\Delta \vec{P}_{22}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{23} = \lim_{\Delta A_2 \to 0} \frac{\Delta \bar{P}_{23}}{\Delta A_2}$$

similarmente los esfuerzos actuando en un plano perpendicular a X_1 son

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta A_1 \to 0} \frac{\Delta P_{11}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{12} = \lim_{\Delta A_1 \to 0} \frac{\Delta P_{12}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{13} = \lim_{\Delta A_1 \to 0} \frac{\Delta \bar{P}_{13}}{\Delta A_1},$$

y los esfuerzos actuando sobre un plano perpendicular a X_3 son

$$\sigma_{31} = \lim_{\Delta A_3 \to 0} \frac{\Delta \bar{P}_{31}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{32} = \lim_{\Delta A_3 \to 0} \frac{\Delta P_{32}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{33} = \lim_{\Delta A_3 \to 0} \frac{\Delta \bar{P}_{33}}{\Delta A_3}$$

---

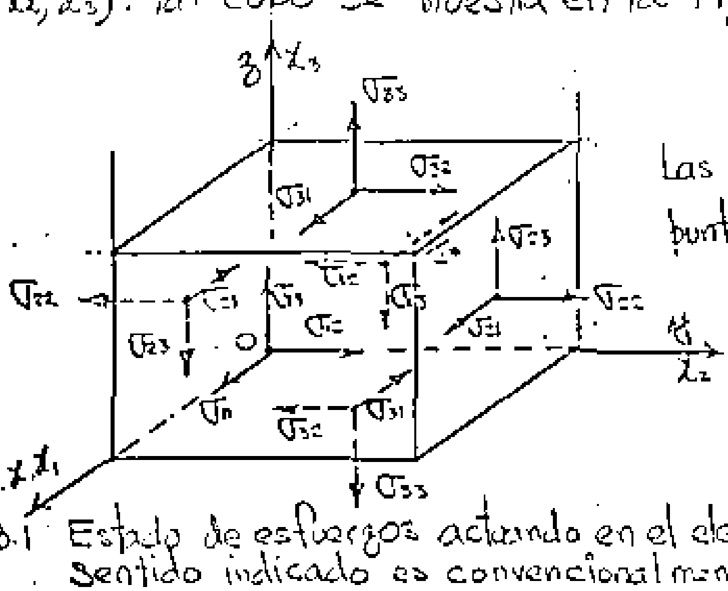
* Cuando $\Delta A_i \to 0$, existen preguntas desde el punto de vista atómico en definir esfuerzo en esta forma. Sin embargo, un modelo homogeneo para materia molecular no homogenea trabaja bien en problemas de Ingeniería

Se observa que las definiciones de esfuerzo normal y cortante representan la intencidad de una fuerza sobre una area, y sus unidades son de $\left[\frac{F}{L^2}\right]$; en el sistema métrico kg/cm^2, ton/cm^2 y en el Ingles lbs/pul^2 o $Kips/pul^2$.

Debe notarse que los esfuerzos multiplicados por las areas sobre las cuales actuan nos dan fuerzas, y es la suma de estas fuerzas, sobre cualquier corte imaginario lo que conserva el equilibrio de un cuerpo.

3. Tensor de esfuerzos.

Sí, además del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 1.1 se hacen pasar tres pares de planos paralelos y separados por distancias infinitesimales, un cubo de dimensiones infinitesimales sera aislado del cuerpo con el origen del sistema local coordenado en el punto de coordenadas $x_i (x_1, x_2, x_3)$. Tal cubo se muestra en la Fig. 3.1



Las coordenadas del punto O son (x_1, x_2, x_3)

Fig. 3.1 Estado de esfuerzos actuando en el elemento dx_i. El sentido indicado es convencionalmente el positivo.

Examinando la Fig. 3.1, se observa que hay tres esfuerzos normales $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, y seis esfuerzos cortantes $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$. El arreglo matricial

$$\underline{\sigma} \equiv [\sigma_{ij}] \equiv [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

es la representación del tensor de esfuerzos. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclidiano tridimensional. Un vector es un tensor de primer orden y un escalar es un tensor de cero orden.

4.- Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie.

En el mismo elemento diferencial consideremos el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen $\{X_i\}^T = \lfloor X_1 \; X_2 \; X_3 \rfloor$, y en consideraciones no polares el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen $\{m_i\}^T = \lfloor m_1 \; m_2 \; m_3 \rfloor$ actuando en el centroide del elemento diferencial como se indica en la Fig. 4.1

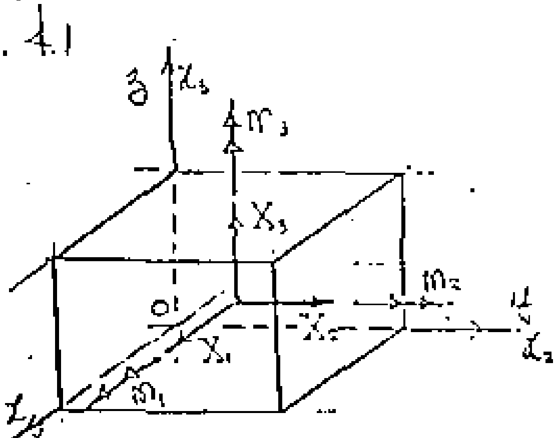


Fig. 4.1 Fuerzas y momentos de cuerpo por unidad de volumen $\{X_i\}$ y $\{m_i\}$ actuando en el centro de gravedad de dx_i.

en donde $X_i = \rho(f_i - a_i)$ (4.1)

donde ρ es la densidad o masa especifica, f_i es la fuerza por unidad de masa en la dirección x_i y a_i es la aceleración del elemento dx_i en la dirección de x_i

-Las fuerzas de superficie actuan en la frontera del cuerpo y las tres componentes de P_i Fig 1.1 las designaremos por $\{\bar{X}_i\}^T = \lfloor \bar{X}_1\ \bar{X}_2\ \bar{X}_3 \rfloor_i$; sus unidades son fuerza por unidad de area $\left[\frac{F}{L^2}\right]$, Kg/cm^2 en el sistema métrico, lbs/pul^2 en el ingles, y en el internacional Newton/cm^2. Las unidades de las fuerzas de cuerpo serán $\left[\frac{F}{L^3}\right]$. Las fuerzas de superficie deben satisfacer las condiciones en la frontera [Fig. 5.1] que para el punto i [Fig. 1.1] son

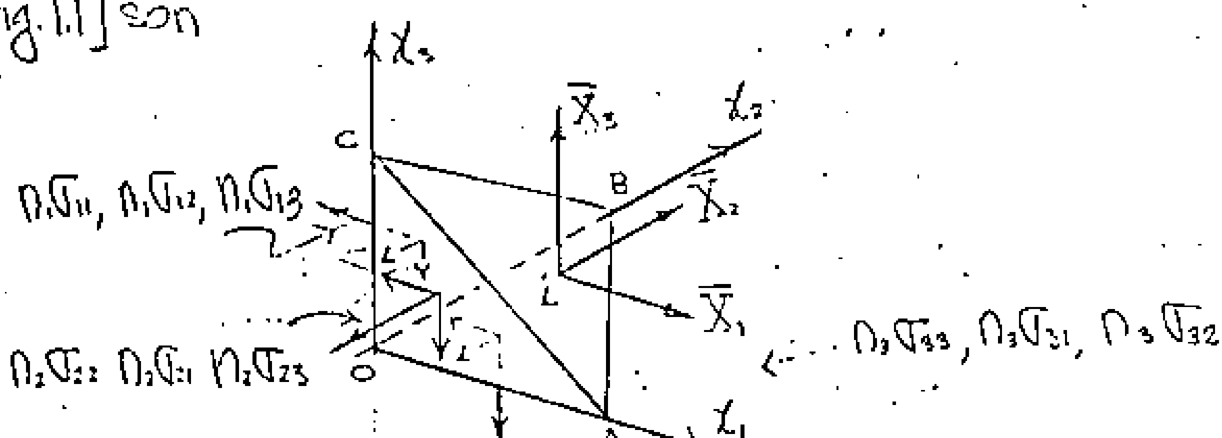


Fig. 5.1 Equilibrio del punto i [Fig.1.1] en la superficie.

Si ABC = unidad, OBC = $\cos\alpha = n_1$, OAC = $\cos\beta = n_2$, y OAB = $\cos\gamma = n_3$, donde $\{n_i\}^T = \lfloor n_1\ n_2\ n_3 \rfloor$ son los cosenos directores de la normal al plano ABC; y del equilibrio de OABC se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} \quad ó \quad [\sigma_{ij}]^T\{n_i\} = \{\bar{X}_i\} \quad (4.1)$$

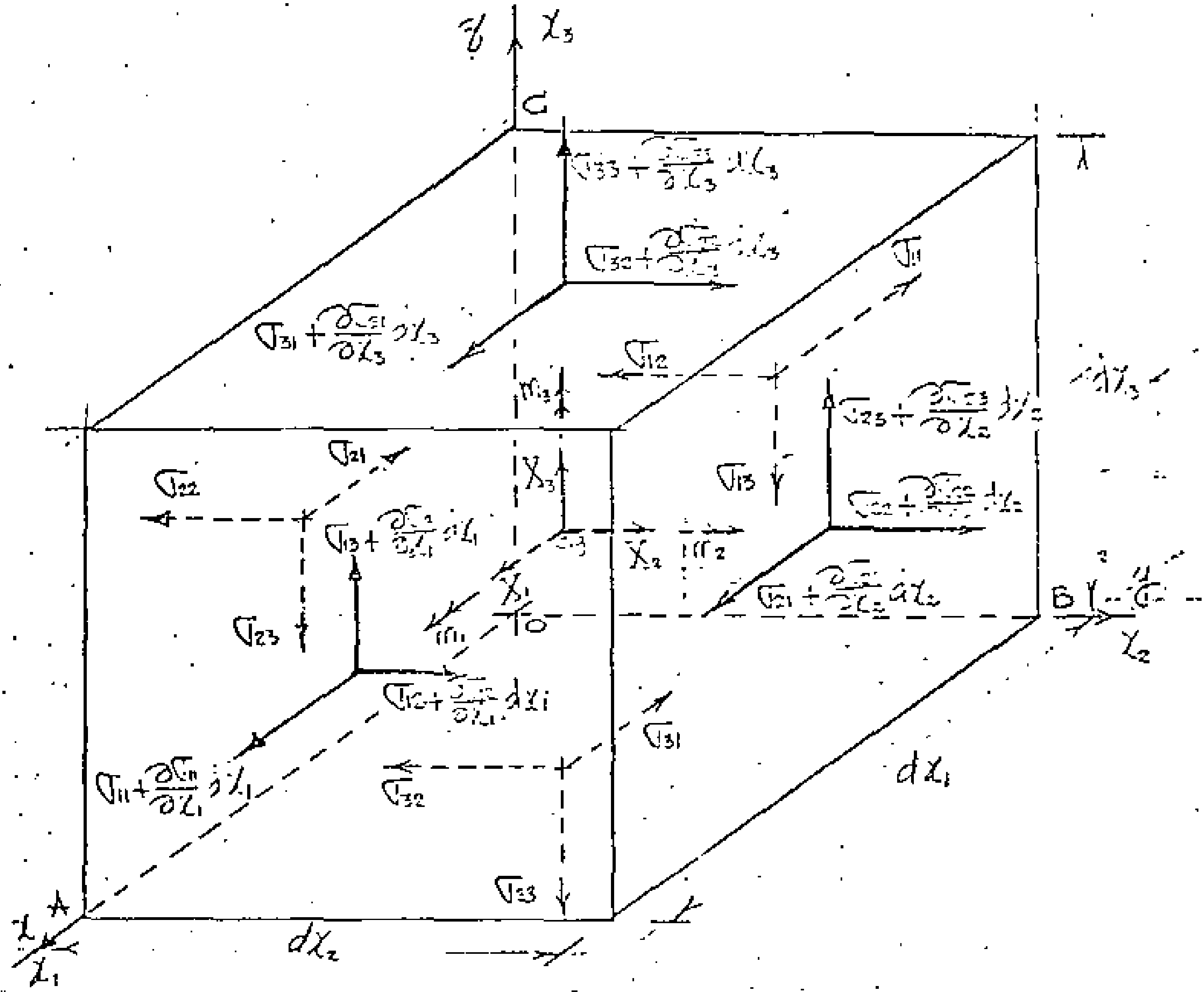


Fig. 5.1. Equilibrio de esfuerzos $[\sigma]$, fuerzas de cuerpo $\{X\}$ y momentos de cuerpo $\{m\}$, en el elemento dx_i

(2.i) es la representación matricial de las condiciones de equilibrio del punto i en la frontera x_i.

5.- Equilibrio del elemento dx_i.

Las seis ecuaciones de equilibrio del elemento de la Fig. 5.1 son

$$\sum F_{x_1} = \sum F_{x_2} = \sum F_{x_3} = \sum M_{x_1} = \sum M_{x_2} = \sum M_{x_3} = 0 \quad (5.1)$$

de $\sum F_{x_1}=0$, en el límite cuando $dx_i \to 0$ se obtiene

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3$$
$$-\sigma_{21}dx_1dx_3+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2-\sigma_{31}dx_1dx_2+X_1dx_1dx_2dx_3=0$$

efectuando operaciones algebráicas se obtiene

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+X_1=0$$

Similarmente de $\sum F_{x_2}=0$, $\quad \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+X_2=0 \qquad (5.2)$

de $\sum F_{x_3}=0$, $\quad \dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+X_3=0$

De $\sum M_{x_1}=0$, en el límite cuando $dx_i \to 0$, y considerando el eje de momentos paralelo a ox_1 y a traves del centroide del elemento dx_i, y despreciando los diferenciales de segundo orden dx_i^2, se obtiene bajo la convención de signos de la Fig. 5.1 lo siguiente

$$\left(\sigma_{23}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3\frac{dx_2}{2}+\sigma_{23}dx_1dx_3\frac{dx_2}{2}$$
$$-\left(\sigma_{32}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2\frac{dx_3}{2}-\sigma_{32}dx_1dx_2\frac{dx_3}{2}+m_1dx_1dx_2dx_3=0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\sigma_{23}-\sigma_{32}+m_1=0$$

Similarmente de $\sum M_{x_2}=0$, $\quad \sigma_{31}-\sigma_{13}+m_2=0 \qquad (5.3)$

y de $\sum M_{x_3}=0$, $\quad \sigma_{12}-\sigma_{21}+m_3=0$

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) son las seis ecuaciones de equilibrio en coordenadas rectangulares y en su forma polar, generalmente los momentos de cuerpo $m_i=0$

Expresando (5.2) matricialmente se tiene

$$\left\lfloor \frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rfloor \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (5.4)$$

o

$$\left\lfloor \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rfloor \left[\sigma_{ij}\right] + \{X_i\} = 0 \qquad (5.5)$$

Con notación índice (5.2) se representa

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 \qquad (5.6)$$

en donde $\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$. Y las ecuaciones (5.3)

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} + m_k = 0 \qquad (5.7)$$

6. Diferentes notaciones del tensor de esfuerzos.

A continuación gráficamente mostraremos las diferentes notaciones que han sido utilizadas para representar las componentes del tensor de esfuerzos.

6.1 Cauchy inicialmente.

$$\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix} \qquad (m_k = 0)$$

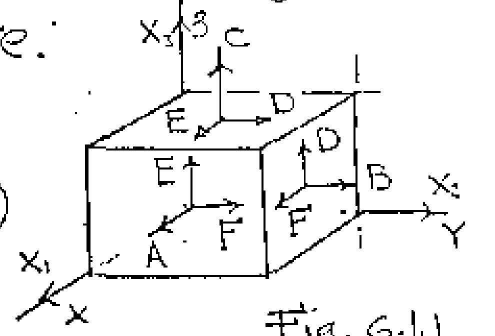


Fig. 6.1.1

6.2 Kelvin.

$$\begin{bmatrix} P & V & T \\ V & Q & S \\ T & S & R \end{bmatrix} \qquad (m_k = 0)$$

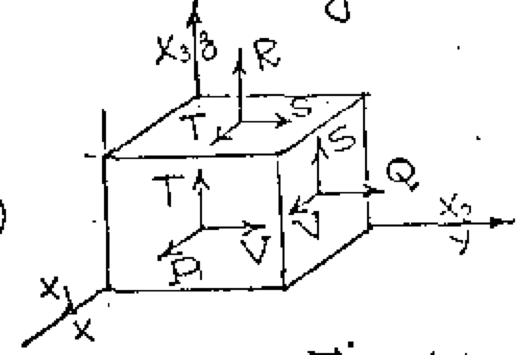
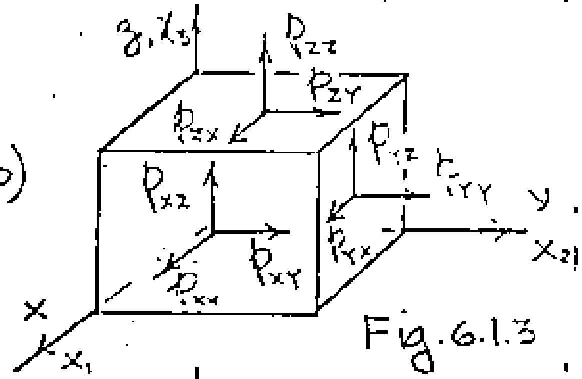


Fig. 6.1.2

6.2 Cauchy posteriormente, Saint-Venant ó Maxwel, introducen por primera vez la notación cartesiana; y

$$\begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$



condiciones polares.

Fig.6.1.3

6.3 Newman, Kirchhof y Love.

$$\begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$

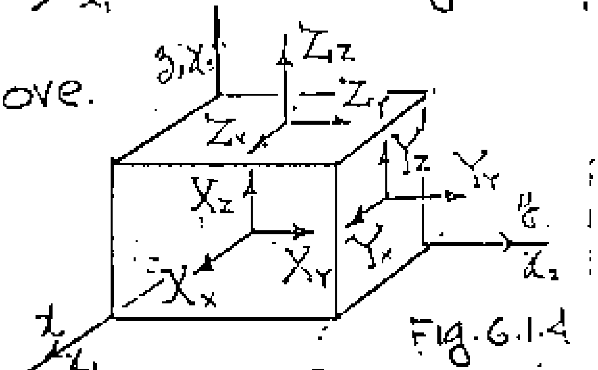


Fig.6.1.4

6.4 K. Pearson.

$$\begin{bmatrix} \widehat{xx} & \widehat{xy} & \widehat{xz} \\ \widehat{yx} & \widehat{yy} & \widehat{yz} \\ \widehat{zx} & \widehat{zy} & \widehat{zz} \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$

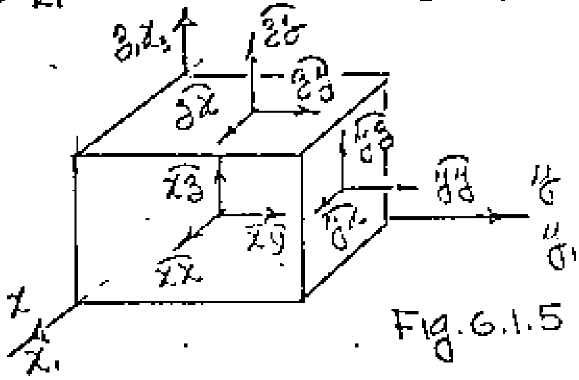


Fig.6.1.5

6.5 S. Timoshenko y T. Von Karmán introducen la notación de Ingeniería, simplificando la notación cartesiana utilizando solo un subíndice en los esfuerzos normales denominándolos por σ, y los tangenciales por τ:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$

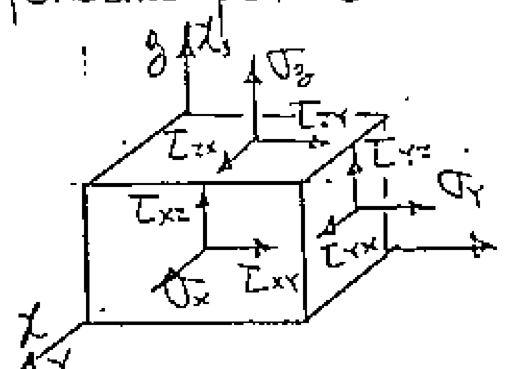


Fig.6.1.6

6.6 Green, Zerna y autores Rusos introducen la notación indice similar a la utilizada previamente

$$[\sigma_{ij}] \equiv [\tau_{ij}]$$

6.7 Clebsch, C. Truesdell y A.C. Eringen, también utilizan la notación indice representando el tensor de esfuerzos

$$[t_{ij}]$$

6.8 D.C. Leigh, y L. Malvern, también utilizan notación indice representando el tensor de esfuerzos como

$$[T_{ij}]$$

Es importante observar que en la derivación de las ecuaciones de equilibrio (5.6) y (5.7) las propiedades mecánicas del material no han sido usadas. Lo cual significa que son aplicables a materiales elásticos, plásticos, o viscoelasticos. También es muy importante observar que no hay suficientes ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas esfuerzo, el problema es estáticamente indeterminado.

7. Desplazamiento, deformación.

El analisis de la deformación de un sólido es de importancia paralela al analisis de esfuerzos. Requiere la definición precisa de deformación, la cual significa la intensidad del desplazamiento. Un cuerpo sólido sujeto a un cambio de temperatura o a cargas externas.

Por ejemplo, si una muestra es sujeta a una fuerza P como se muestra en la Fig. 7.1. Un cambio de longitud ocurre entre los dos puntos de calibración A y B. Si l_0 es la longitud inicial y l la longitud observada bajo la carga P, y el alargamiento, $\Delta l = l - l_0$. El

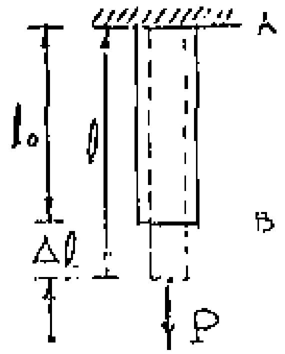


Fig. 7.1 Muestra a tensión.

alargamiento por unidad de longitud ε (epsilon) es

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{7.1}$$

el cual es llamado deformación lineal. Es una cantidad adimensional, pero generalmente se mide o se refiere en $\frac{cm}{cm}$ ó $\frac{pulg}{pulg}$. Algunas veces se expresa en porciento. La cantidad ε es generalmente muy pequeña. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería tiene un orden máximo de magnitud de 0.001. Cuando las deformaciones son grandes, por ejemplo, en formado de metales, se introduce el la deformación natural que implica una lo variable, dado por

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1+\varepsilon) \tag{7.2}$$

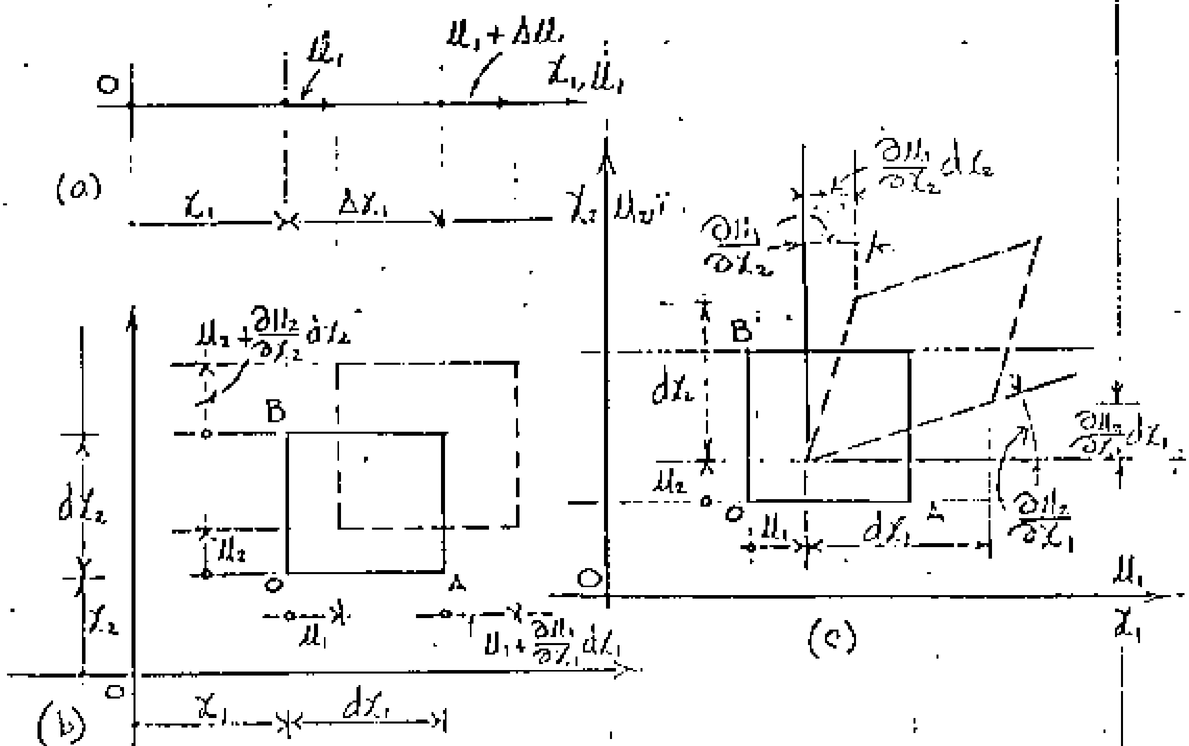


Fig. 7.2 Elementos deformados en posisiones inicial y final

Sea el vector de desplazamientos $\{u_i\}^T = [u_1\ u_2\ u_3]$ en las direcciones x_1, x_2 y x_3 respectivamente, en base a los desplazamientos mostrados en la Fig. 7.2a, la definición de deformación lineal es

$$\varepsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u_1 + \Delta u_1 - u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1} \qquad (7.2)$$

Similarmente

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2}\,, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv u_{3,3} \qquad (7.3)$$

el signo positivo significa alargamientos. El elemento también experimenta deformaciones de cortante como se muestra en la Fig. 7.2c el ángulo recto AOB es reducido por la cantidad $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Por lo tanto, para pequeños cambios del ángulo, la definición de deformación de cortante asociada con el plano $x_1 x_2$ es

$$\gamma_{12}=\gamma_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\equiv u_{1,2}+u_{2,1}$$, análogamente con

los otros planos,
$$\gamma_{23}=\gamma_{32}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\equiv u_{2,3}+u_{3,2} \qquad (7.4)$$

$$\gamma_{31}=\gamma_{13}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\equiv u_{3,1}+u_{1,3}$$

en el caso que las deformaciones no sean pequeñas, se demuestra fácilmente que

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] \qquad (7.5)$$

$$\gamma_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{23}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{31}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

En las ecuaciones (7.5) aplicables a deformaciones grandes ya se observa la no linealidad en geometría. (7.4) es un caso particular de (7.5) cuando los términos de segundo grado son despreciables respecto a los de primer grado. o sea pequeñas deformaciones. (7.5) en notación compacta queda

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{1,1} + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2\right)\\
\varepsilon_{22} &= u_{2,2} + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2\right)\\
\varepsilon_{33} &= u_{3,3} + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2\right)
\end{aligned} \qquad (7.6)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} = \gamma_{21} &= u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}\\
\gamma_{23} = \gamma_{32} &= u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}\\
\gamma_{31} = \gamma_{13} &= u_{3,1} + u_{1,3} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}
\end{aligned}$$

Examinando las ecuaciones deformación-desplazamiento para pequeñas deformaciones (7.2), (7.3) y (7.4), se observa que son seis ecuaciones que dependen solamente de tres desplazamientos u_1, u_2 y u_3. Por lo tanto las ecuaciones no pueden ser independientes. Por lo tanto seis ecuaciones independientes pueden desarrollarse relacionando a ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, γ_{12}, γ_{23} y γ_{31}, ecuaciones conocidas como ecuaciones de compatibilidad.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\gamma_{12}}{\partial x_1\partial x_2} \; ; \quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\gamma_{13}}{\partial x_1\partial x_3} \; ; \quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}\right) \qquad (7.7)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\gamma_{23}}{\partial x_2\partial x_3} \; ; \quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}\right)
\end{aligned}$$

substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (7.7) se verifican las ecuaciones de compatibilidad de pequeñas deformaciones.

Similarmente a las componentes del Tensor de esfuerzos en las notaciones índice, cartesiana y de ingeniería, se representan las componentes del tensor de deformaciones como

$$[e_{ij}] \equiv \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

(indice) (cartesiana) (ingeniería)

en (7.8) fué necesario modificar las relaciones de deformación por cortante con el objeto de someter al tensor $\underline{e}$ enteramente obedecer ciertas leyes de transformación, por lo que $e_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ para toda $i \neq j$. Analogamente al tensor de esfuerzos $[e_{ij}]$ puede diagonalizarse quedando

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

8. Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos,

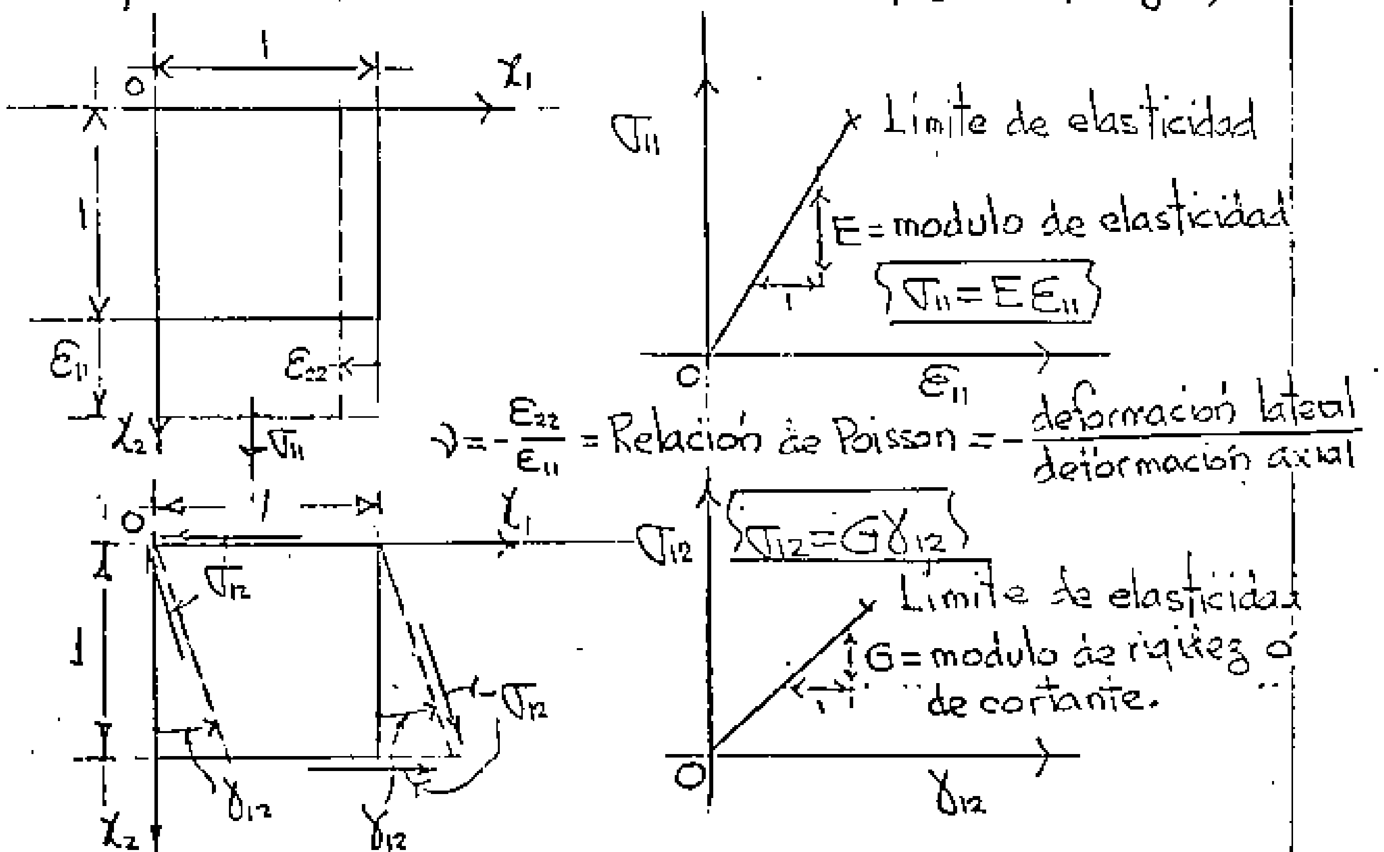


Fig. 8.1 Ley de Hooke en tensión uniaxial σ_{11} y corte puro σ_{12}.

puesto que el sistema es elástico lineal rige el principio de superposición de causas y efectos, por lo tanto en la Fig. 8.2 se considera un estado triaxial llegando a él en tres etapas de carga, etapa 1: actuando σ_{11}, etapa 2: actuando σ_{11} y σ_{22} y etapa 3: actuando σ_{11}, σ_{22} y σ_{33}. Se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas

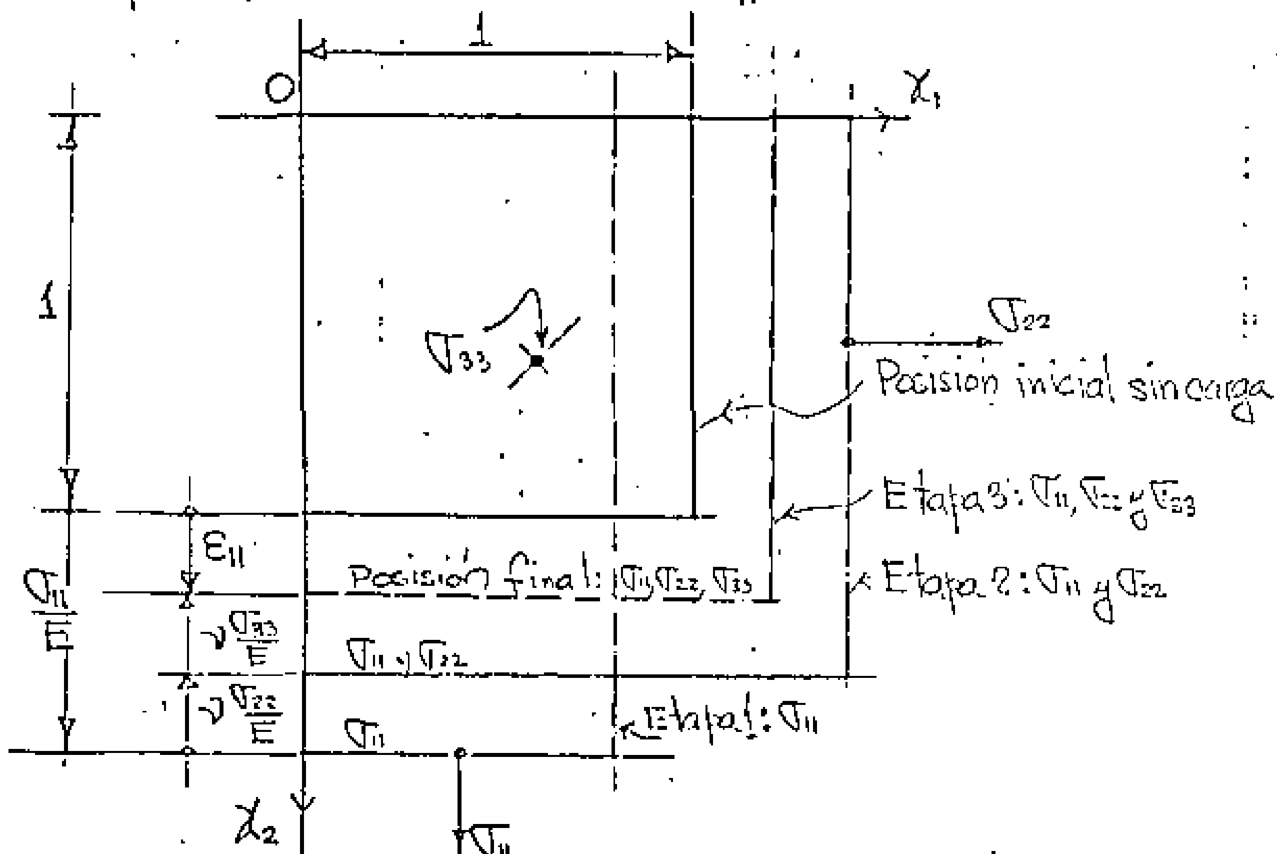


Fig. 8.2 Ley de Hooke en condiciones triaxiales

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33} \\
\gamma_{12} &= \frac{1}{G}\sigma_{12} \\
\gamma_{23} &= \frac{1}{G}\sigma_{23} \\
\gamma_{31} &= \frac{1}{G}\sigma_{31}
\end{aligned}
\qquad (8.1)
$$

(8.1) representa la ley de Hooke en condiciones triaxiales ó más correctamente las ecuaciones constitutivas para un sólido elástico homogeneo e isotrópico. Las constantes E, G y ν son experimentales y estan relacionadas por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{8.2}$$

substituyendo (8.2) en (8.1) y expresando el resultado matricialmente se obtiene (considerando $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ para $i \neq j$)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \tag{8.3}$$

o

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \tag{8.4}$$

despejando $\{\sigma\}$ de (8.4) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \tag{8.5}$$

o sea

$$\{\sigma\} = [C]^{-1}\{\varepsilon\} \tag{8.6}$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que solo interviene E y ν.

En un medio elastico lineal anisotrópico en las ecuaciones (8.3), aceptando el principio de superposisión se expresan

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \tag{8.7}$$

Las ecuaciones constitutivas (8.7) tienen 36 constantes. Sin embargo a traves de consideraciones energéticas* se demuestra que el numero de constantes es 21 y que $C_{ij} = C_{ji}$ para $i \neq j$, son simétricas respecto a la diagonal principal de (8.7). Todas las constantes C_{ij} deben determinarse experimentalmente. Se supone el material homogéneo, Ejemplos de estos materiales son: concreto, concreto reforzado, madera, plástico reforzado con filamentos, fierro fundido, etc.. Cuando se tienen tres direcciones ortogonales anisotrópicas el material se dice que es ortotrópico, y para estos materiales el número de constantes se reduce solo a nueve constantes independientes.

Haciendo $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ y considerando (8.2) las

* Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1956, p. 61.

ecuaciones constitutivas (8.3) con notación índice se escriben*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{8.8}$$

donde, $\delta_{ij} = 1$ para $i=j$, y $\delta_{ij}=0$ para $i \neq j$, y $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \equiv e$. Desarrollando (8.8) se tiene

$$\begin{aligned}
&\text{para } i=1, j=1, && \sigma_{11} = \lambda e + 2G\varepsilon_{11} \equiv \lambda e + 2G\varepsilon_x = \sigma_x \\
&i=2, j=2, && \sigma_{22} = \lambda e + 2G\varepsilon_{22} \equiv \lambda e + 2G\varepsilon_y = \sigma_y \\
&i=3, j=3, && \sigma_{33} = \lambda e + 2G\varepsilon_{33} \equiv \lambda e + 2G\varepsilon_z = \sigma_z \\
&i=1, j=2, && \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \equiv 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \\
&i=2, j=3, && \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} \equiv 2G\varepsilon_{yz} = G\gamma_{yz} = \tau_{yz} \\
&i=3, j=1, && \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31} \equiv 2G\varepsilon_{zx} = G\gamma_{zx} = \tau_{zx}
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Si en el sólido existe un incremento de temperatura ΔT, siendo α el coeficiente de expansión térmica las ecuaciones (8.3) quedan

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.10}$$

---

*Green, A.E., and W. Zerna: "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, Fair Lawn, N.J. 1970.

9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Karmán ó la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento $dx\,dy$ se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad (9.1)$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

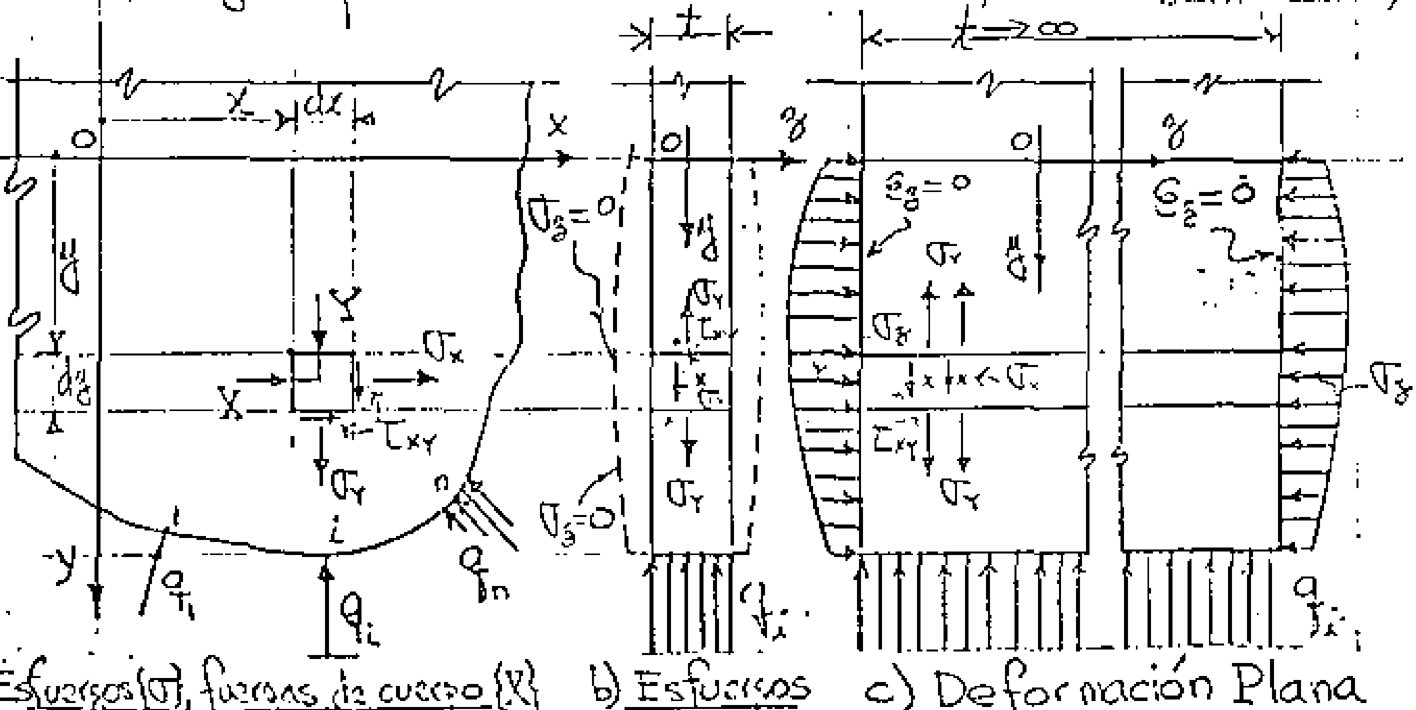
(9.1) matricialmente queda

$$\left\lfloor \frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y} \right\rfloor \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \qquad (9.2)$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.7) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (9.3)$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen,



a) Esfuerzos $\{\sigma\}$, fuerzas de cuerpo $\{X\}$ y de superficie $\{q_i\}$ b) Esfuerzos Planos $\boxed{\sigma_z = 0,\ \varepsilon_z \neq 0}$ c) Deformación Plana $\boxed{\sigma_z \neq 0,\ \varepsilon_z = 0}$

Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.

caso de una placa de espesor finito t, sin problemas de pandeo que se deforma bajo la acción de $\{X\}$ y $\{P\}$ según la línea punteada indicada en la Fig. 6.1 b, las ecuaciones (8.3), bajo la condición de $\sigma_{zz} \equiv \sigma_z = 0$ se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (9.4)$$

σ_x, σ_y y τ_{xy} son el promedio sobre el espesor pequeño t y son independientes de z. Las componentes γ_{yz} y γ_{zx} se anulan en las superficies, mientras que la componente ε_z es dada por

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \qquad (9.5)$$

Problemas de cuerpos largos en la dirección longitudinal z cuya geometría y cargas no varían en z se consideran problemas de <u>deformación plana</u> en la Fig. 6.2 se muestran como ejemplos un muro de presa, y una zapata corrida larga,

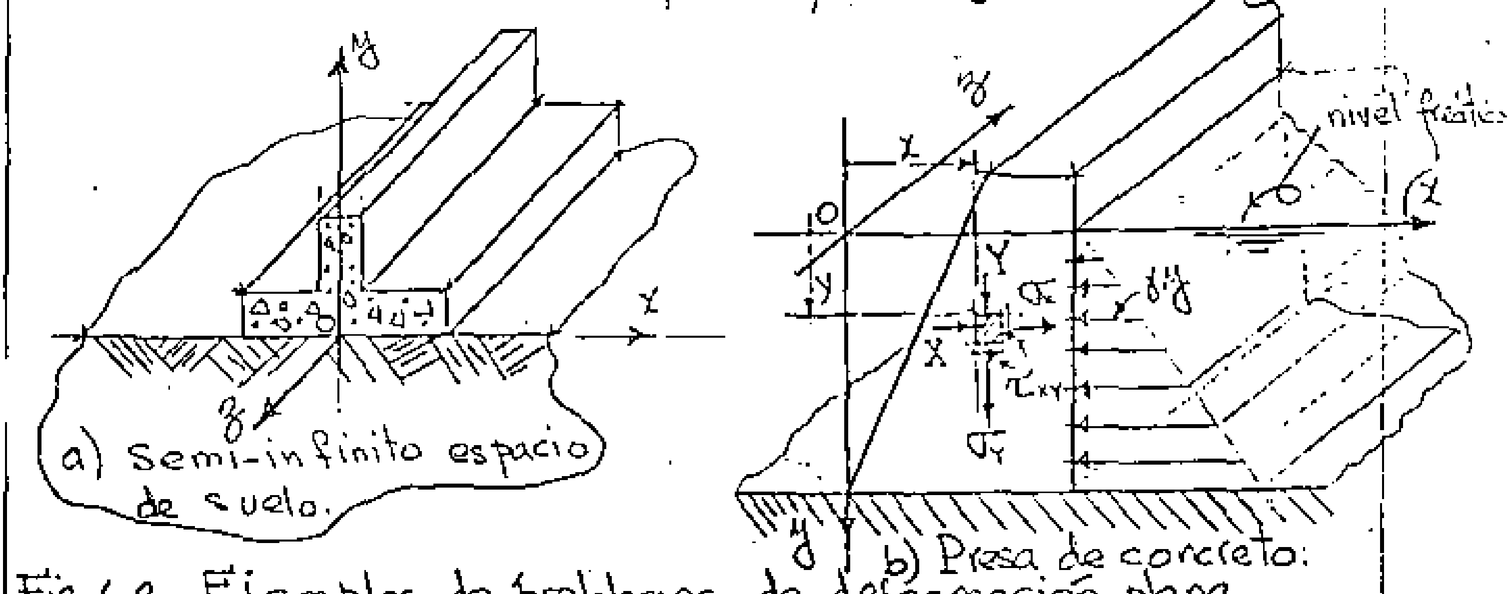


Fig. 6.2. Ejemplos de problemas de deformación plana.

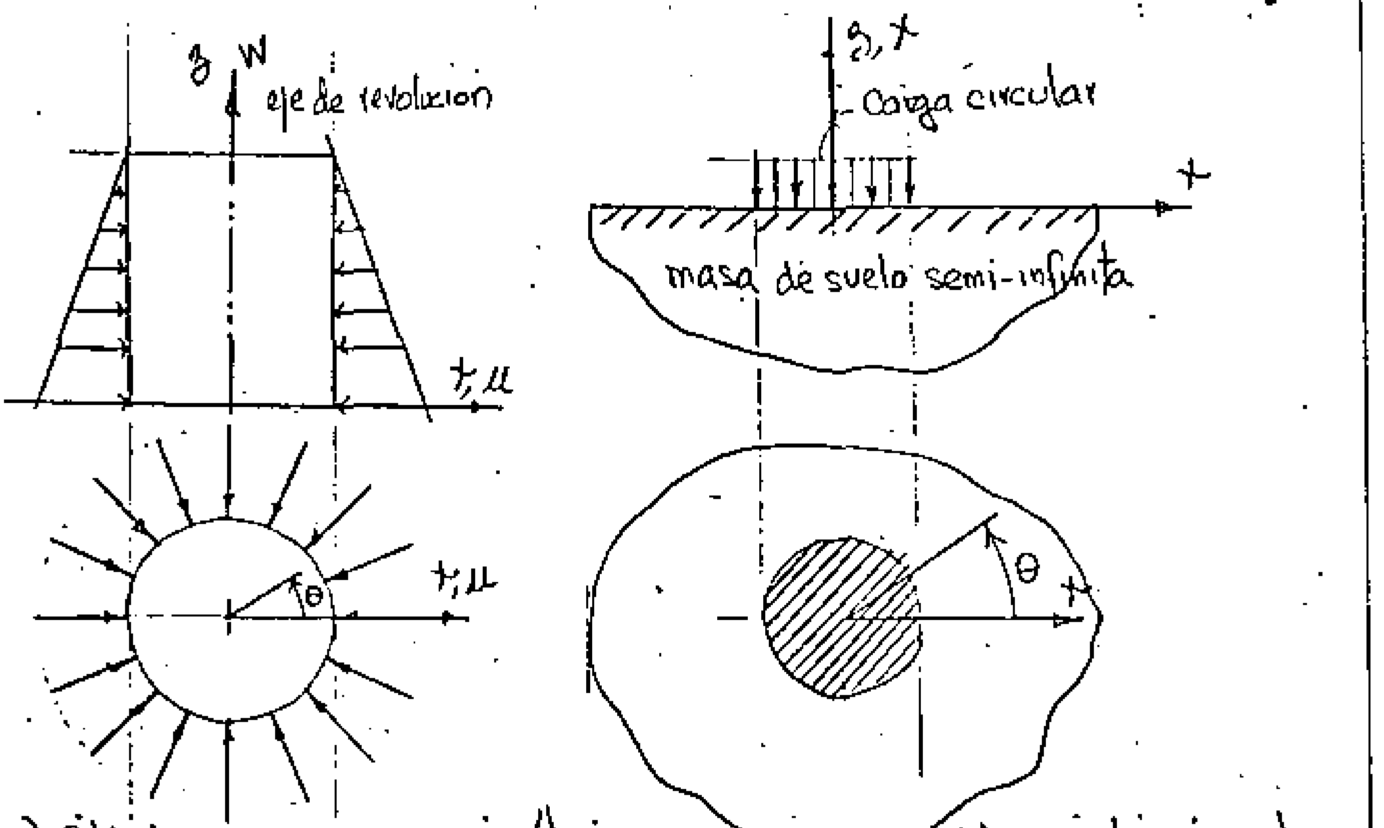
en estos casos el desplazamiento $u_3 \equiv W = 0$ por lo tanto $\varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23} = 0$, y $\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{31} = 0$. Las ecuaciones (8.3) se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (9.6)$$

y el esfuerzo σ_z se expresa en términos de σ_x y σ_y como

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (9.7)$$

Muchos problemas de ingeniería involucran sólidos de revolución (sólidos axisimétricos) sujetos a carga de revolución ó axialmente simétrica, por ejemplo un cilindro circular bajo presión externa uniforme, zapata circular en una masa de suelo semi-infinita como se muestran en la Fig. 6.3



a) Cilindro con carga axisimétrica

b) Zapata circular

Fig. 6.3 Problemas axisimétricos.

Debido al eje axisimetrico respecto a geometría y cargas, las componentes del esfuerzo son independiente del ángulo θ; por lo tanto todas las derivadas respecto a θ se anulan y las componentes v, $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$, y $\tau_{\theta z}$ son cero. Las componentes de esfuerzo diferente de cero son $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ y τ_{rz}. Las relaciones deformación desplazamiento son, para las deformaciones diferente de cero

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \qquad (9.8)$$

y la relación constitutiva es

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ \text{(simétrica)} & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \qquad (9.9)$$

despejando de (9.4) $\{\varepsilon\}$, substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de (9.1) a $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad (9.10)$$

La ecuación (9.10) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del <u>problema de esfuerzos planos $\sigma_z = 0$</u>, de ellas se obtiene $\{\sigma\}^T = \lfloor \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \rfloor$.

Similarmente despejando $\{\varepsilon\}$ de (9.6) y substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de las ecuaciones de equilibrio (9.1) a $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad (9.11)$$

La ecuación (9.11) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de deformación plana ($e_z=0$), con fuerzas de cuerpo diferente de cero, de ellas se obtiene $\{\sigma\}^T=\lfloor \sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}\rfloor$.

Cuando las fuerzas de cuerpo X es solo función de y, constante ó cero, y cuando la fuerza de cuerpo Y es solo función de x, constante ó cero, las ecuaciones (9.10) y (9.11) para esfuerzos y deformación plana respectivamente, se reducen a una sola que es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (9.12)$$

Es importante observar que en este caso, en las ecuaciones de equilibrio (9.1), y la de compatibilidad (9.12), modificada por las ecuaciones constitutivas, no intervienen las constantes elásticas del sólido E y ν. Conclusión de fundamental importancia para el uso de modelos transparentes en Fotoelasticidad. También se concluye en este caso que en ambos estados; de efuerzo y deformación plano los esfuerzos $\{\sigma\}$ son iguales, solamente las deformaciones $\{e\}$ y los desplazamientos $\{u\}$ son diferentes. I

Para la solución del problema anterior cuando $\{X\}=0$ Airy, G.B. (Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept., 1862) introduce una función $\phi(x,y)$, llamada función de esfuerzos, en forma tal que

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\ ,\ \sigma_Y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ ,\ \tau_{XY}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \qquad (9.13)$$

(9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1) cuando las fuerzas de cuerpo $\{X\}$ son cero, y substituyéndolas en (9.12) se obtiene

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (9.14)$$

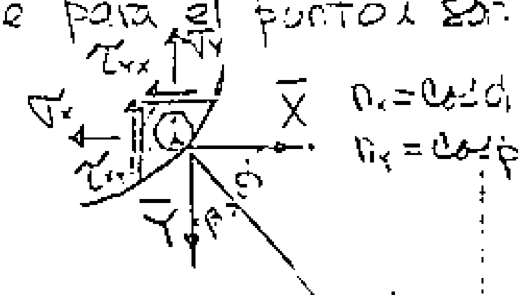
desarrollando el operador bi-laplaciano se obtiene

$$\nabla^4\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=0 \qquad (9.15)$$

La ecuación (9.14) se llama bi-armónica o bi-laplaciana y la forma (9.15) gradiente cuarto de ϕ.

Por lo demostado anteriormente el problema de solución de esfuerzos en medios elásticos lineales homogeneos e isotrópicos bidimensionales se reduce a una solución de (9.15) que satisfaga las condiciones en la frontera bidimensionales que para el punto i son:

$$\overline{X}_i=\sigma_x n_x+\tau_{XY}n_Y$$
$$\overline{Y}_i=\tau_{XY}n_x+\sigma_Y n_Y$$



matricialmente:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{XY}\\ \tau_{YX} & \sigma_Y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_x\\ n_Y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\end{Bmatrix} \qquad (9.10)$$

Del Teorema de la unicidad* la solución mencionada es única.

* Timoshenko, S. and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw Hill, 1966.

Si las fuerzas de cuerpo existen, generalmente es posible relacionarlas mediante una función potencial $V(x,y)$ en forma tal que

$$X=\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad Y=\frac{\partial V}{\partial y} \tag{9.11}$$

substituyendo (9.11) en las ecuaciones de equilibrio (9.1) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{9.12}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

en este caso la función de esfuerzos es

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \tag{9.13}$$

por supuesto (9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1), y substituitoyéndola en la ecuación (9.10) la reduce a

$$\nabla^4 \phi = -(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \equiv -(1+\nu)\nabla^2 V \tag{9.14}$$

(9.14) nos resuelve el problema de esfuerzos planos con fuerzas de cuerpo relacionadas por (9.11).

Substituyéndo (9.13) en (9.11) se obtiene *

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \equiv -\frac{1}{1+\nu}\nabla^2 V \tag{9.15}$$

10. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos $\{u\}^T = \lfloor u_1 \; u_2 \; u_3 \rfloor \equiv \lfloor u \; v \; w \rfloor$.

Uno de los métodos de solución en problemas de elasticidad lineal, homogenea e isotrópica consiste

* Solución del problema de deformación plana.

en eliminar las componentes de esfuerzos $\{\sigma\}$ de las ecuaciones de equilibrio (5.2) expresando las ecuaciones constitutivas (8.5) en términos de los desplazamientos (7.2), (7.3) y (7.4). Por lo tanto substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (8.9) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &\equiv \sigma_{11} = \lambda e + 2G\frac{\partial u}{\partial x}\\
\sigma_y &\equiv \sigma_{22} = \lambda e + 2G\frac{\partial v}{\partial y}\\
\sigma_z &\equiv \sigma_{33} = \lambda e + 2G\frac{\partial w}{\partial z}\\
\tau_{xy} &\equiv \sigma_{12} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
\tau_{yz} &\equiv \sigma_{23} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
\tau_{zx} &= \sigma_{31} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

donde $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ (10.2)

Substituyendo (10.1) en las ecuaciones de equilibrio (5.2) se obtiene

$$
(\lambda + G)\begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G\nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = 0 \tag{10.3}
$$

donde en este caso el operador diferencial $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

En (10.3) cuando las fuerzas de cuerpo $\{X\}$ son cero (10.3) queda

$$
(\lambda + G)\begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G\nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \tag{10.4}
$$

En las ecuaciones (10.4), diferenciando la primera respecto a x, la segunda respecto a y, y la tercera respecto a z, y después sumándolos se obtiene

$$(\lambda+2G)\nabla^2 e = 0 \qquad (10.5)$$

(10.5) significa que la expansión volumétrica unitaria $e=\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z$ satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 e = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e}{\partial z^2}=0 \qquad (10.6)$$

En la ecuación (10.3) las fuerzas de cuerpo son

$$\begin{aligned} X &= \rho(f_x-a_x)\\ Y &= \rho(f_y-a_y)\\ Z &= \rho(f_z-a_z) \end{aligned} \qquad (10.7)$$

donde f_x, f_y y f_z son las fuerzas por unidad de masa, a_x, a_y y a_z las componentes de la aceleración, y ρ es la densidad ó masa específica. Si en las ecuaciones (10.3) la primera la multiplicamos por el vector unitario $\bar{i}$, la segunda por el vector unitario $\bar{j}$, y la tercera por el vector unitario $\bar{k}$, y las sumamos entre sí se obtiene la expresión vectorial de las ecuaciones (10.5) como

$$(\lambda+G)\,\text{grad div}\,\bar{s} + G\nabla^2\bar{s} + \rho(\bar{f}-\bar{a}) = 0 \qquad (10.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z\\ \bar{f} &= \bar{i}f_x+\bar{j}f_y+\bar{k}f_z\\ \bar{s} &= \bar{i}u+\bar{j}v+\bar{k}w\\ \text{div}\,s &= e = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\\ \text{grad div}\,\bar{s} &= \bar{i}\frac{\partial e}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial e}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial e}{\partial z} \end{aligned} \qquad (10.9)$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

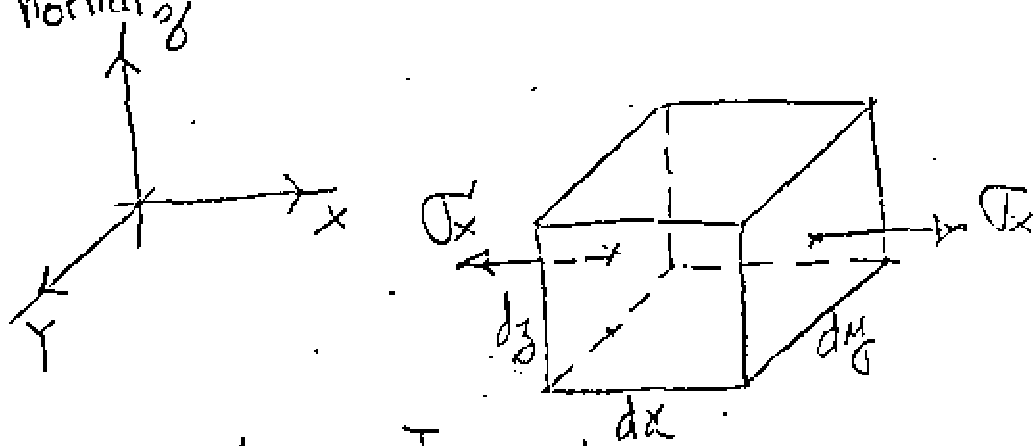
METODO DE FLEXIBILIDAD

(Método de las Fuerzas)

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

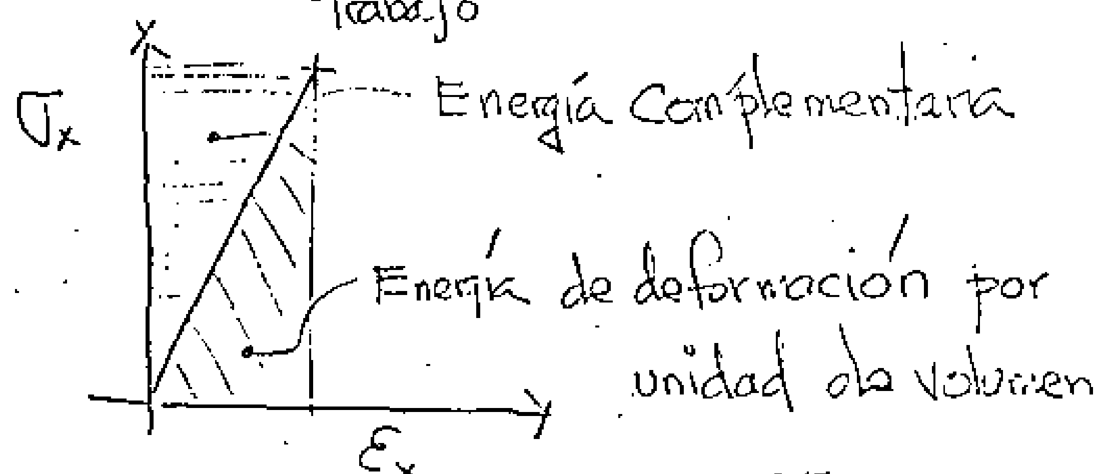
MAYO, 1984

Energía Elástica de Deformación por esf. normal σ



U energía elástica interna

$$dU = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}\sigma_x\,dy\,dz}_{\text{Fuerza promedio}} \times \underbrace{\epsilon_x\,dx}_{\text{distancia}}}_{\text{Trabajo}} = \tfrac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x\,dx\,dy\,dz \quad (1)$$

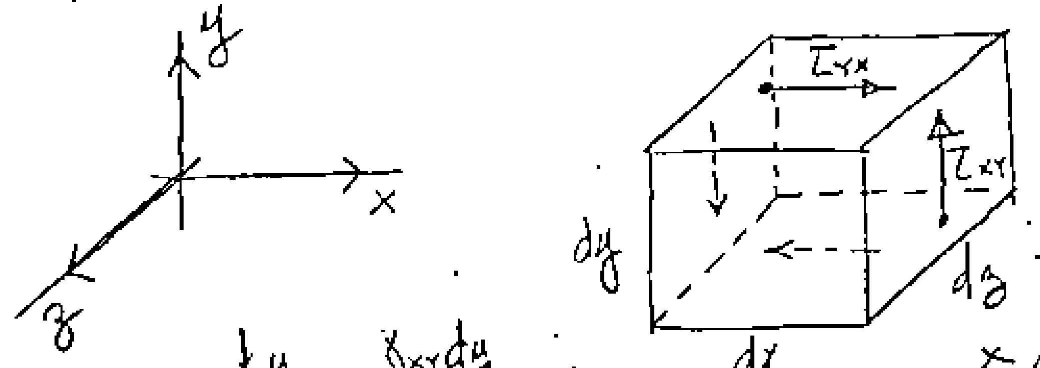


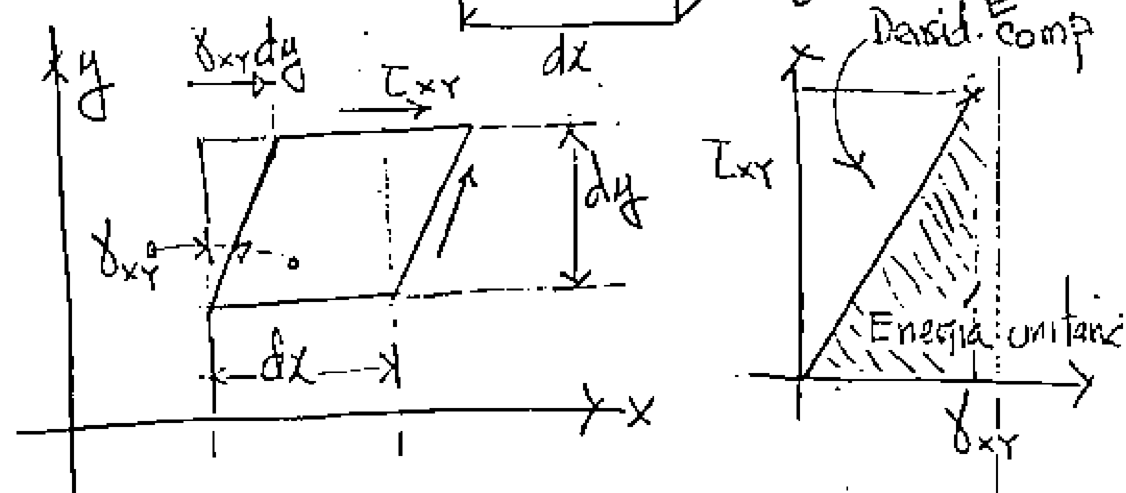
Para un cuerpo elástico perfecto no hay disipación de energía, y el trabajo hecho por un elemento es almacenado como energía de deformación interna recuperable

De (1) la densidad de energía

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x\epsilon_x}{2} \quad (2)$$

Energía elástica de deformación por esfuerzo cortante





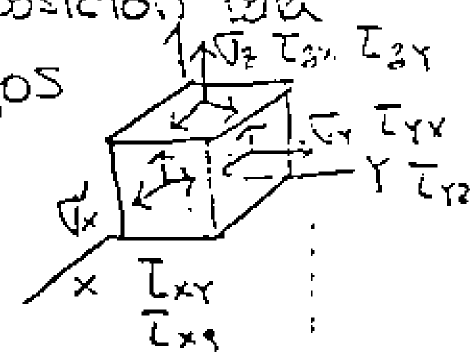
$$dU_{corte} = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}\tau_{XY}\,dx\,dz}_{\text{Fuerza promedio}} \times \underbrace{\gamma_{XY}\,dy}_{\text{distancia}}}_{\text{Trabajo}} = \tfrac{1}{2}\tau_{XY}\gamma_{XY}\,dx\,dy\,dz \quad (3)$$

la densidad de energía por esfuerzo de corte es

$$\left(\frac{dU}{dV}\right)_{corte} = \tfrac{1}{2}\tau_{XY}\gamma_{XY} \qquad (4)$$

Aceptando el principio de superposición para un estado multiaxial de esfuerzos

la densidad de energía de deformación es $[\sigma_{ij}]$



$$\frac{dU}{dV} = U_o = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} \quad (5)$$

Expresando (5) matricialmente se obtiene

$$U_o = \frac{1}{2}\left[\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\lfloor\sigma\rfloor\{\varepsilon\} \quad (6)$$

Substituyendo en (5) la ley generalizada de Hooke (7)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (7)$$

se obtiene

$$U_o = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) \quad (8)$$

Para materiales elásticos lineales homogeneos e isotrópicos se puede obtener una expresión similar a 8) en términos de las deformaciones en lugar de los esfuerzos, la energía total se obtiene de

$$U = \iiint_V U_o\, dx\, dy\, dz \quad (9)$$

la ecuación (5) es importante al establecer las leyes de Plasticidad y (8) es importante en análisis de esfuerzos por métodos energéticos

Substituyendo (6) en (9) se obtiene

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})\,dV \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \lfloor \sigma \rfloor \{\varepsilon\}\,dx\,dy\,dz$$

Para barras axialmente cargadas, con flexión y cortante (10) queda

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy\,dz \tag{11}$$

Para materiales elásticos lineales

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad y \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{12}$$

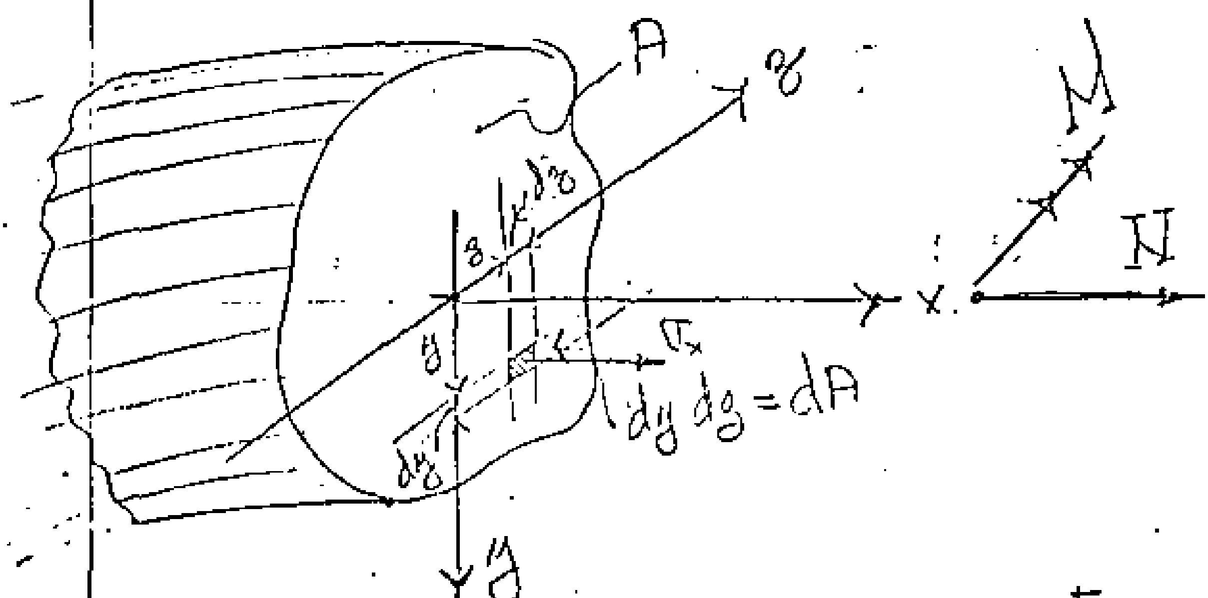
De (12) y (11) se obtiene

$$U = \underbrace{\iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dx\,dy\,dz}_{\text{Para carga axial y Flexión de vigas}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dx\,dy\,dz}_{\text{Para Corte en Vigas}} \tag{13}$$

Energía de deformación para barras cargadas axialmente

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{\text{carga axial}}{\text{sección transversal}}, \quad A = \iint_A dy\,dz \quad (14)$$

N y A son funciones de x solamente



Por lo tanto (13) se reduce a [de (14) y (13)]

$$U_N = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV = \iiint \frac{N^2}{2A^2E}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_L \frac{N^2}{2A^2E}\underbrace{\left[\iint_A dy\,dz\right]}_{A} dx = \int_L \frac{N^2}{2EA}\,dx$$

$$\boxed{U_N = \int_L \frac{N^2}{2EA}\,dx} \quad (15)$$

Energía de deformación en Flexión. en este caso

$$\sigma_x = \frac{M}{I}\, y \qquad (16)$$

De (16) y (13) se obtiene

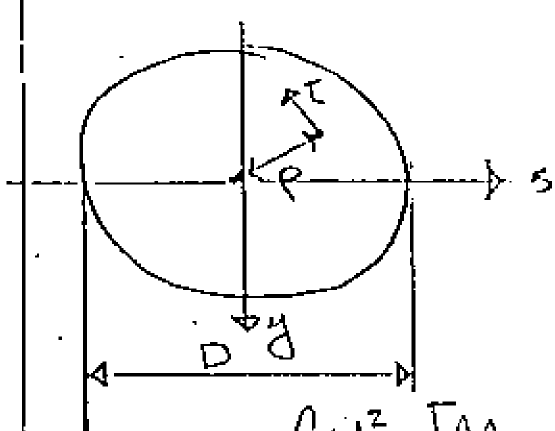
$$U_M = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dV = \iiint \frac{1}{2E}\left(\frac{M y}{I}\right)^2 dx\, dy\, dz$$

$$= \int_L \frac{M^2}{2EI^2}\left[\iint_A y^2\, dy\, dz\right] dx = \int_L \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

$$\boxed{U_M = \int_L \frac{M^2}{2EI}\, dx} \qquad (17)$$

Energía de Deformación para secciones circulares en Torsión

en este caso $\tau = \frac{M_T}{J}\rho$ (18)



Subst. (18) en (13)

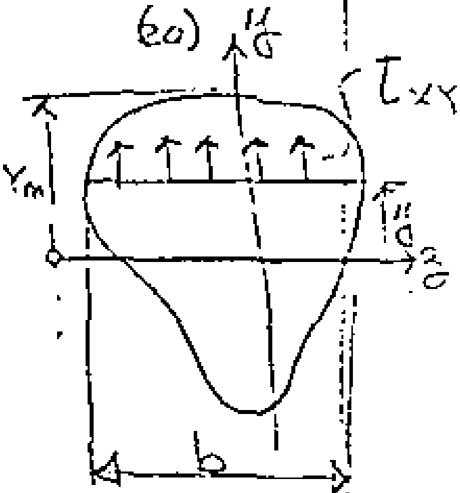
$$U_T = \iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{M_T}{J}\rho\right)^2 dx\, dy\, dz$$

$$U_T = \int_L \frac{M_T^2}{2GJ^2}\left[\iint \rho^2\, dy\, dz\right] dx = \boxed{\int_L \frac{M_T^2}{2GJ}\, dx} \qquad (19)$$

Energía de Deformación por Cortante

En este caso $\tau_{xy} = \dfrac{V Q_Y^{Y_m}}{b\, I}$ (20)



V = Cortante en la sección

$Q_Y^{Y_m} = \int_y^{Y_m} y\, dA$ = momento estático de y a y_m.

b = ancho a la altura y de los ejes centroidales $z\, y$ ...

I = Momento de Inercia de la sección

Subst. (20) en (13)

$$U_V = \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{V Q_Y^{Y_m}}{b\, I}\right) dx\, dy\, dz = \int_L \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint_A \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right] dx$$

$$\boxed{U_V = \int_L \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint_A \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right] dx} \quad (21)$$

La expresión total de la energía de deformación sea: $U = U_N + U_M + U_T + U_V$ o sea

$$\boxed{U = \int_L \left\{\frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_T^2}{2GJ} + \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right]\right\} dx} \quad (22)$$

Desplazamientos

El principio de conservación de energía (La energía no puede ser creada o destruida), puede adoptarse para calcular deformaciones en sistemas elásticos debidos a las cargas aplicadas. La primera Ley de la Termodinámica expresa este principio como

TRABAJO REALIZADO = Cambio en Energía

Para un proceso adiabático (No se agrega o substrae calor al sistema) y cuando no se genera calor en el sistema, y cuando las fuerzas aplicadas se aplican en forma estática (Las fuerzas se aplican tan lentamente que se desprecia la energía cinética $\frac{1}{2} m v^2$), el caso especial de esta ley para sistemas conservativos se reduce a

$$W_e = U \qquad (23)$$

Donde W_e = Trabajo hecho por las fuerzas externas durante el proceso de carga.

U = Energía total de deformación almacenada en el Sistema.

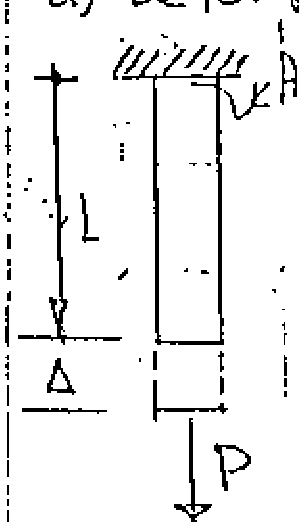
Similar a decir que la suma del Trabajo externo W_e y el interno W_i deben ser cero

$$We + Wi = 0 \qquad (24)$$

$U = -Wi$ las deformaciones siempre se oponen a las fuerzas internas. Es importante considerar la aplicación gradual de las cargas de cero a su valor total por lo tanto We será ½ Fuerza Total por el desplazamiento.

Ejemplos

a) Determine la deflexión de la viga mostrada



$W_e = \frac{1}{2} P \Delta$ y de (22)

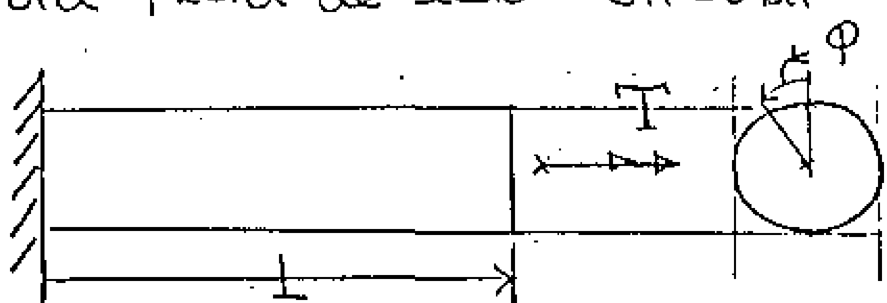
$$U = \frac{1}{2EA}\int_0^L N^2 dx$$

$$= \frac{P^2}{2EA}\int_0^L dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$

De (23) $\frac{1}{2} P\Delta = \frac{P^2 L}{2EA}$

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{Ley de Hooke}$$

b) Determine la rotación en el extremo de una flecha de sección circular



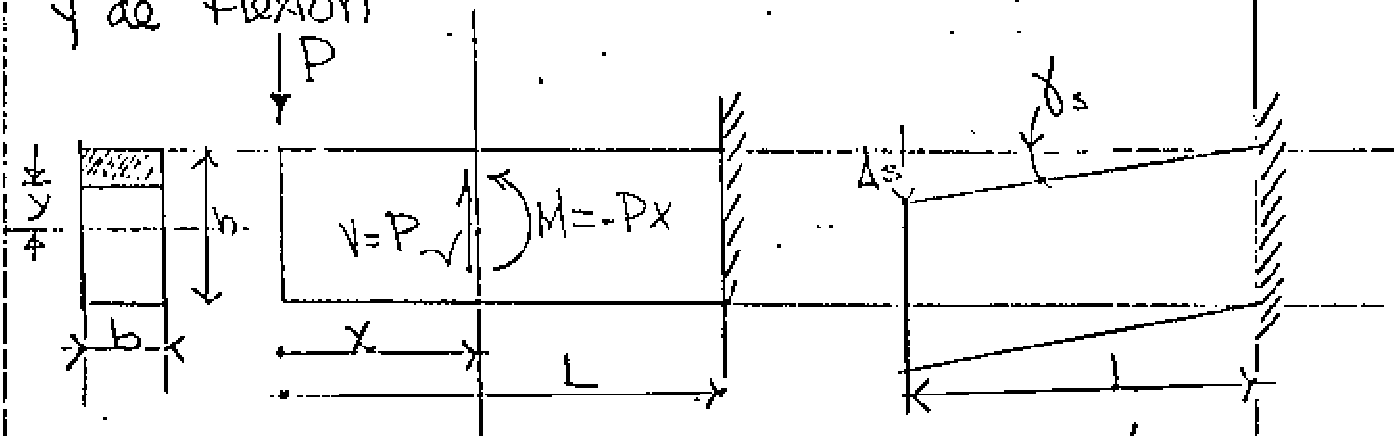
El trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} T \varphi$ y el interno de (22)

$$U = \frac{T^2}{2GJ} \int_0^L dx = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad \text{de (23)}$$

$$\frac{1}{2} T \varphi = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad \text{de donde} \quad \varphi = \frac{TL}{GJ} \quad \text{que}$$

coincide con los valores de los texto de Mecánica de Materiales.

c) Determinar la deflexión máxima en la viga mostrada considerando el efecto del cortante y de Flexión



Trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} P \Delta$, la energía interna consta de dos partes una debida a los esfuerzos de flexión y otra a los esfuerzos de corte de (17) y (13)

$$U_{Flexion} = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

El esfuerzo de corte: $\tau = \frac{V Q_y^{y_m}}{bI} = \frac{P}{2I} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right]$

que substituido en la segunda parte de (13) se obtiene

$$U_{corte} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2G}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}^2 L\,b\,dy$$

$$= \frac{P^2Lb}{8GI^2}\times\frac{h^5}{30} = \frac{P^2Lbh^5}{240G}\left(\frac{12}{bh^3}\right)^2 = \frac{3P^2L}{5AG}$$

donde $A = bh$ sección transversal. Entonces

$$W_e = U = U_{FLEXION} + U_{CORTE}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5AG} \quad \text{de donde}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{Flexión}} + \underbrace{\frac{6PL}{5AG}}_{\text{Corte}} \qquad (24)$$

El Termino debido al cortante se puede interpretar

$$\tau_{av} = \frac{P}{A} = \frac{V}{A} \quad \text{corte promedio}$$

puesto que τ varía parabólicamente $\frac{6}{5}$ representa un factor de corrección numérico por lo tanto

$$\Delta_{corte} = \gamma_s L = \alpha\frac{\tau_{av}}{G}L = \alpha\frac{VL}{AG} = \frac{6}{5}\frac{PL}{AG}$$

el valor α depende de la forma de la sección en general V puede variar con x. De (24)

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\frac{h^2}{L^2}\right) \qquad (25)$$

suponiendo acero estructural

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \doteq 2.5 \quad \text{Y (25) queda}$$

1.2

$$\Delta = \left(1 + 0.75\,\frac{h^2}{L^2}\right)\Delta_{FLEXIÓN} \quad (26)$$

De (26) se observa que para una viga corta sea $h = L$ La deflexión total es $\Delta = 1.75\,\Delta_{FLEXION}$ por lo cual la deformación de corte es muy importante para una viga flexible se $L = 10\,h$

$$\Delta = \left(1 + 0.75\,\frac{h^2}{(10h)^2}\right)\Delta_{FLEXION}$$

$$\Delta = 1.0075\;\Delta_{FLEXIÓN}$$

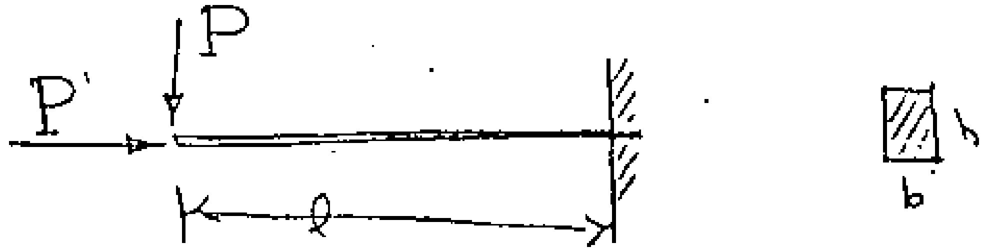
La deflexión debida al corte se puede despreciar no siempre es posible considerar lo anterior

Comparando las expresiones (1.1.6.1c) (1.1.6.2c) y (1.1.6.2c) para un claro $l = 5.00$ m y un peralte $h = 30$ cm se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} U_V &= 0.00286\, U_M \\ U_N &= 0.0009\, U_M \end{aligned}} \quad (a)$$

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales la energía de deformación debida a la carga normal N y cortante V es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante M.

Cuando existe momento torsionante M_T (vigas en balcón, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor.



1.2 Principio de Superposición

1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

1.2.2.- Casos en que no rige el principio.

Considerando el ejemplo mostrado en la figura 1.2.2a, la viga AB está sujeta a la

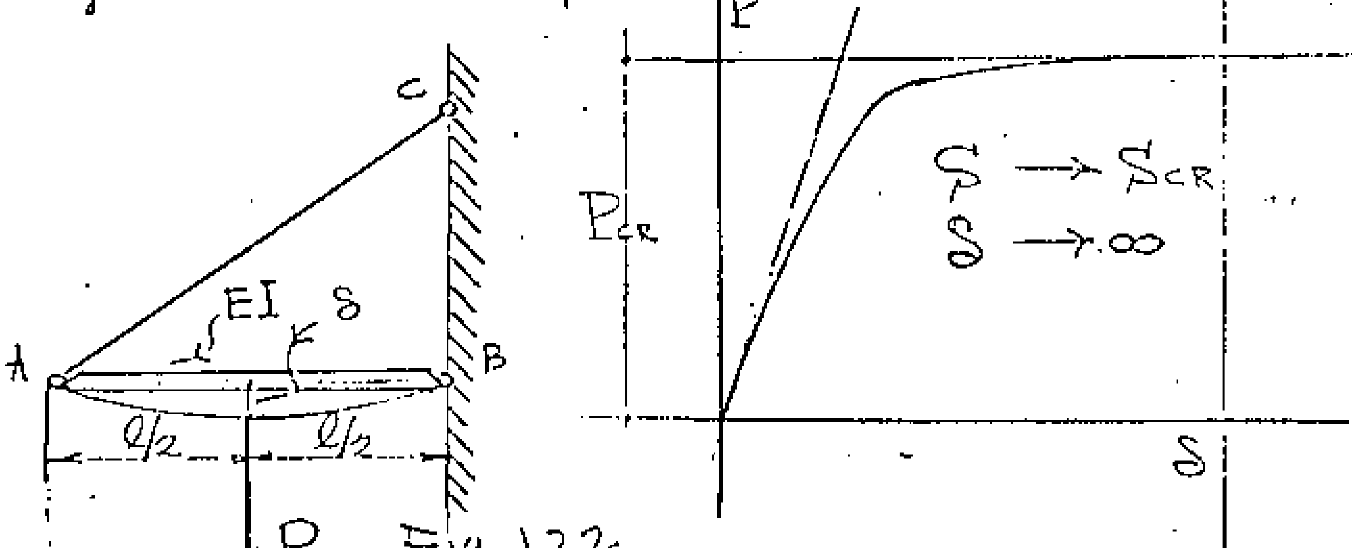


Fig. 1.2.2a

acción simultánea de fuerzas axiales y laterales, se concluye que δ no es función lineal de P y puede ser representada por la fórmula

$$\delta \doteq \frac{Pl^3}{48EI}\,\frac{1}{1 - S/S_{CR}} \qquad (1.22.a)$$

donde, $S_{CR} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$; S carga axial en AB debida a P.

Otro ejemplo en el cual el principio de superposición no rige, sería el sistema mostrado en la figura 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ($\tan\alpha \doteq \alpha$).

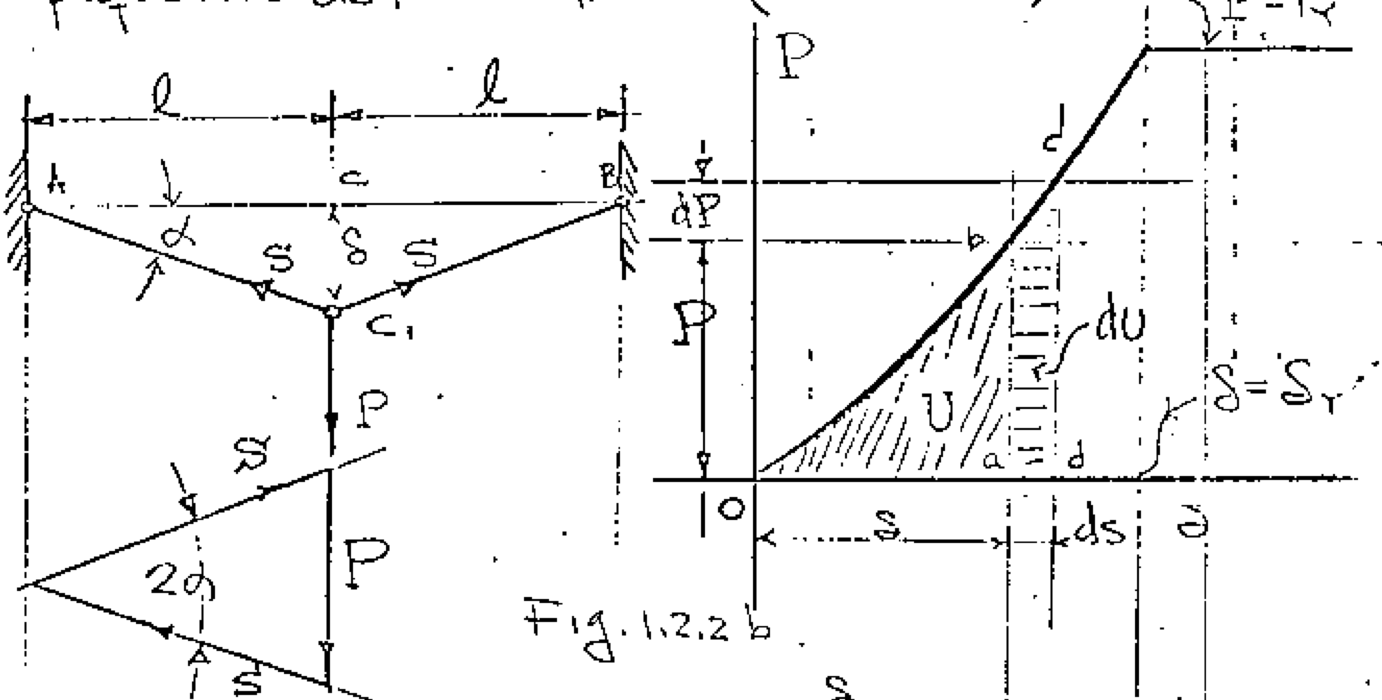


Fig. 1.2.2 b

pequeñas deformaciones: $\alpha \doteq \dfrac{\delta}{\ell}$ 1.2.2b

Equilibrio: $$S = \frac{P}{2\alpha}$$ 1.2.2c

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\ell^2+\delta^2}-\ell}{\ell} \doteq \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\ell^2}$$ 1.2.2d

Ley de Hooke: $$\varepsilon = \frac{S}{AE}$$ 1.2.2e

de 1.2.2 c, d y e se obtiene

$$\left\{ \delta = \ell\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \ , \ P = \frac{\delta^3 AE}{\ell^3} \right\}$$ 1.2.2 f

De nuevo se observa que la deflexión δ no es función lineal de P aunque el material cumple interramente con la ley de Hooke y la relación entre δ y P es representada por la curva de la figura 1.2.2 b. El area Oab representa el trabajo efectuado por P durante la deflexión δ y es igual a la energía de deformación almacenada en las barras AC y CB., la cual es igual a:

$$U = \int_0^{\delta} P\,d\delta = \frac{AE}{l^3}\int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} \qquad 1.2.2\,g$$

ó

$$U = \frac{lP^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}} \qquad 1.2.2\,h$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores U no es función de segundo grado de δ ó P, como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuerzas externas es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexion adicional $S\delta$ a la compresión S y la barra trabaja en flexo compresión.

1.2.3 Ecuaciones generales de superposición*

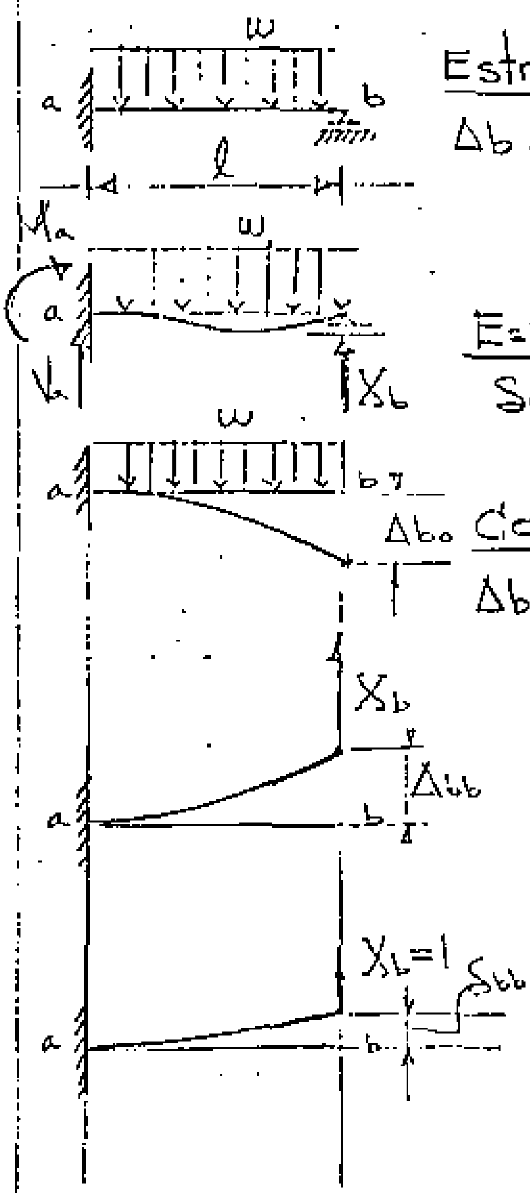
1.2.3.1. Introducción

En el analisis de esfuerzos en estructuras estáticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometría y estática, si no también las propiedades elásticas tales como modulo de elasticidad momento de inercia, etc., Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectua su analisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestáticas son debidos no solo a las cargas, si no también a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricación, etc.-

Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el propósito de ilustar el uso de las ecuaciones generales de superposición de causas y efectos, consideraremos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme w

* En ambos métodos de rigidez y flexibilidad debe regir el principio de superposición.

empotrada en a y libremente apoyada en b.



Estructura actual.

Δ_b = Deflexión de el punto b en la estructura debida a todas las causas.

Estructura primaria.

Selección de redundante, X_b

Condición de equilibrio $X_b = 0$

Δ_{bo} = Deflexión en dirección de la redundante con $X_b = 0$

Δ_{bb} = Deflexión en dirección de la redundante debida a X_b con $w = 0$

δ_{bb} = Deflexión en dirección de la redundante debido a una fuerza unitaria $X_b = 1$

La ecuación de superposición, si el principio es válido:

$$\Delta_b = \Delta_{bo} + \Delta_{bb} = \Delta_{bo} + X_b \delta_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde:

$$X_b = -\frac{\Delta_{bo}}{\delta_{bb}} \quad (b)$$

(δ_{ii} o d_{ii} es llamado coeficiente de flexibilidad)

1.2.3.2 Ecuaciones generales de superposición en analisis de estructuras estáticamente indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado n, se seleccionan las redundantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio $X_i = 0$ sea estable e isostática, aceptando la siguiente notación:

Δ_i = Deflexión total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

Δ_{io} = Deflexión del punto i en dirección de la redondante X_i en condiciones de equilibrio estable isostático $X_i = 0$,

Δ_{iT} = Deflexión del punto i debida a un cambio de temperatura ΔT.

Δ_{iA} = Deflexión del punto i debida a asentamientos de apoyo.

Δ_{iE} = Deflexion en el punto i debida a errores de fabricación.

δ_{i1} = Deflexión en el punto i debida a la condición $X_1 = 1$

δ_{i2} = " " " " " " " " " $X_2 = 1$

$\vdots$

δ_{in} " " " " " " " " " $X_n = 1$

Cualquier redundante puede suponerse que actua arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexión del punto de aplicación de la redundante deberá ser medida a lo largo de su linea de acción y será positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notación y convención de signos mencionada, las ecuaciones generales de superposición en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \cdots + X_n\delta_{1n}\\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \cdots + X_n\delta_{2n}\\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\ \Delta_n &= \Delta_{n0} + \Delta_{nT} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \cdots + X_n\delta_{nn}\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} \cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} \cdots & \delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix}}_{[\delta_{ij}]} \underbrace{\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}}_{\{X\}} = \underbrace{\begin{bmatrix}(\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E})\\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E})\\ \vdots\\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nT} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE})\end{bmatrix}}_{\{\delta\}} \quad (b)$$

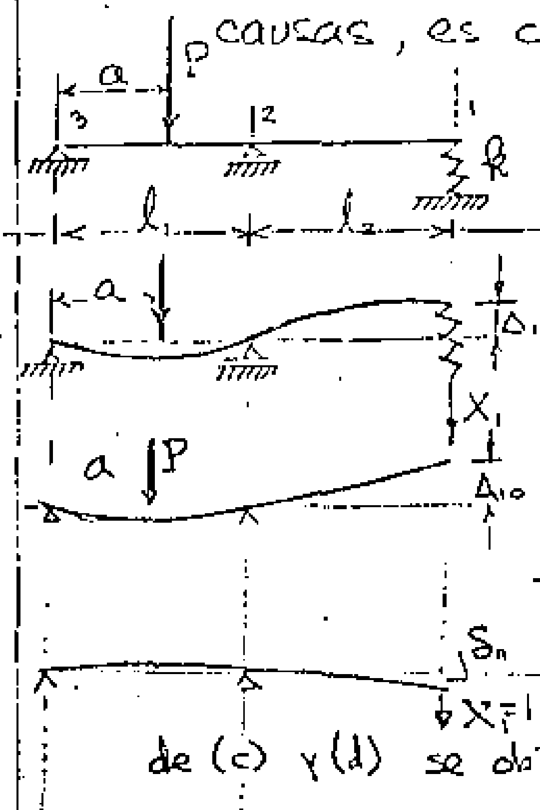
1.2.3.3.- Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de superposición.

Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

1- Nunca seleccionar como redundante una reacción estáticamente determinada, ello conducirá a una estructura primaria en equilibrio inestable en condición $X_i = 0$

2- El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexión será positiva si tiene el mismo sentido.

3- Debe observarse que Δ_i, deflexión Total del punto de aplicación de la redundante X_i debido a todas las causas, es casi siempre cero.



Estructura actual

k^{-1} constante elástica resorte $\left[\frac{L}{F}\right]$

Estructura primaria

$$\Delta_1 = X_1 k^{-1} \qquad (c)$$

Condición $X_1 = 0$

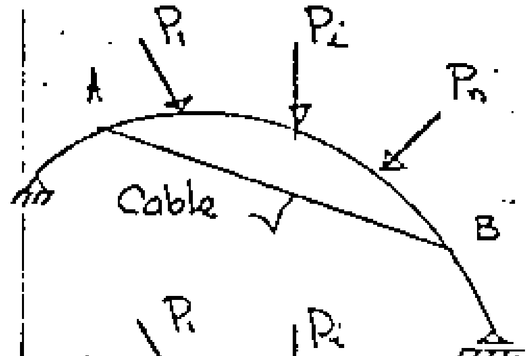
Condición $X_1 = 1$

De Ec.(a) se tiene

$$\Delta_1 = \Delta_{10} - X_1 \delta_{11} \qquad (d)$$

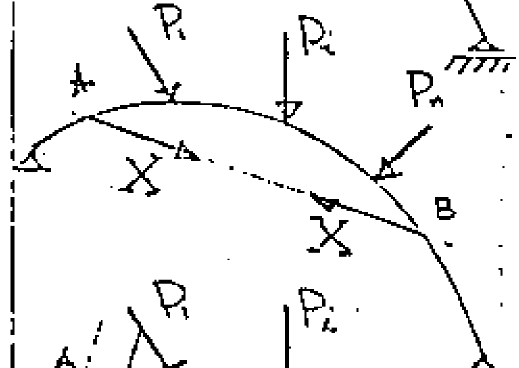
de (c) y (d) se obtiene

$$\boxed{X_1 = \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11} + k^{-1}}} \qquad (e)$$



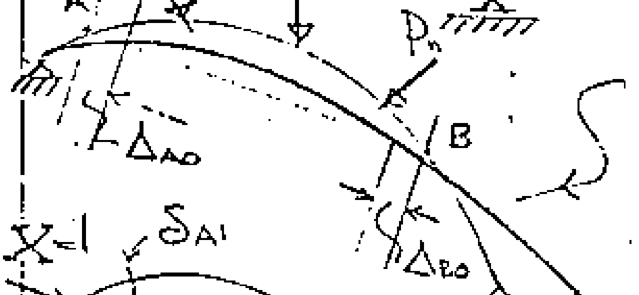
Estructura actual:

Arco coplanar con un tirante AB bajo un sistema de cargas P_n

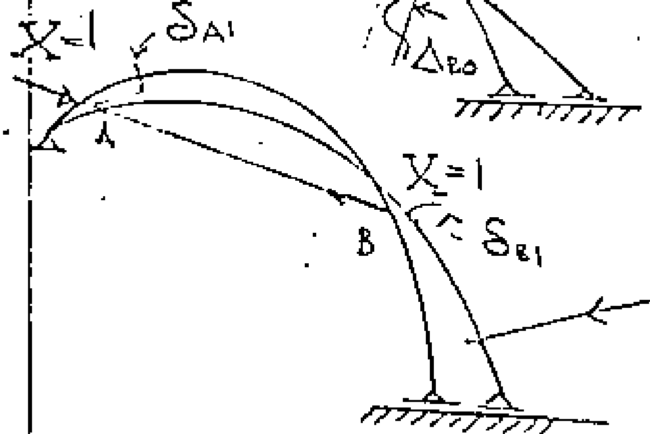


Estructura primaria

Selección como redundante la tensión en el cable, X.



Condición $X=0$



Condición $X=1$

$$\Delta_{AB} = \Delta_{AO} + \Delta_{BO} \quad (f)$$

$$\Delta_{A} = \Delta_{AO} + X\delta_{A1} \quad (g)$$

$$\Delta_{B} = \Delta_{BO} + X\delta_{B1} \quad (h)$$

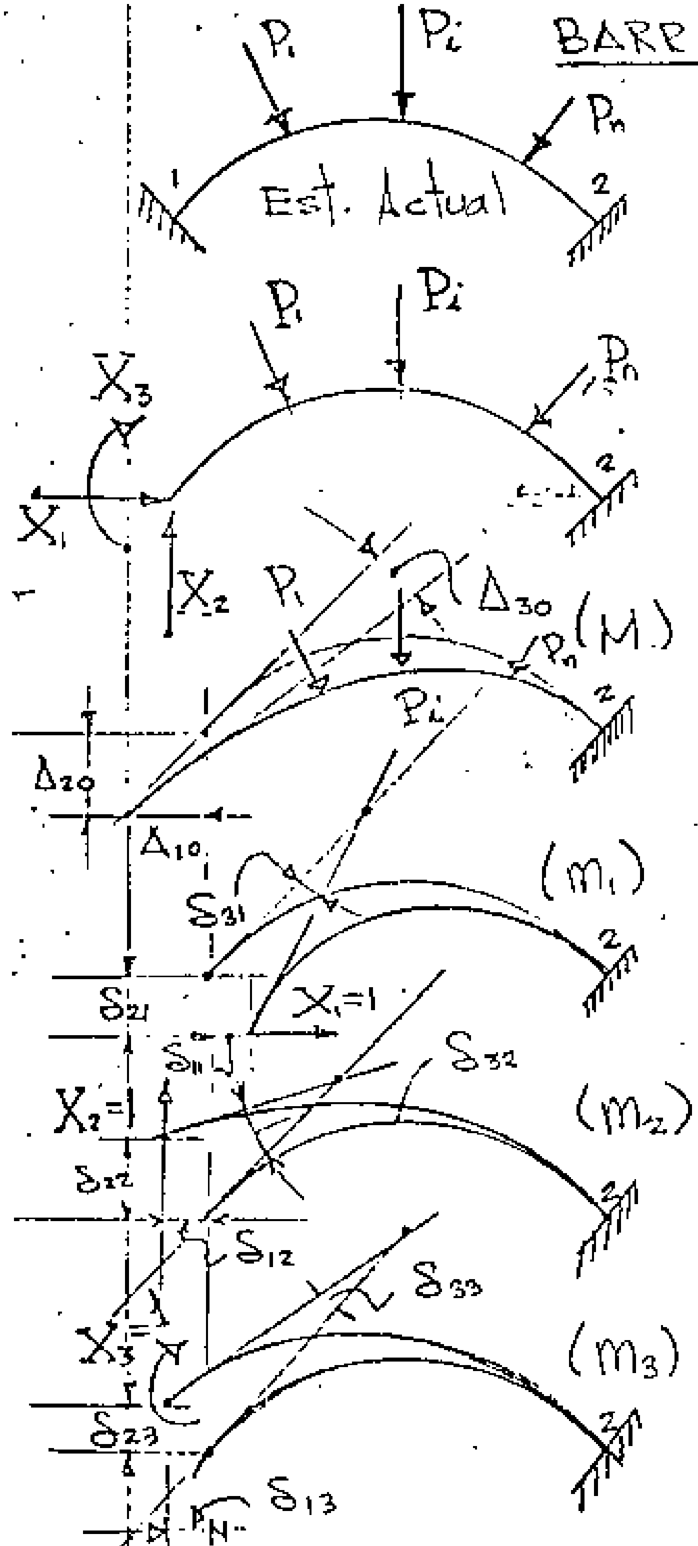
Sumando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{AO} + \Delta_{BO} + X(\delta_{A1} + \delta_{A2}) = 0$$

de donde despejando la redundante X se tiene

$$\boxed{X = -\frac{\Delta_{AO} + \Delta_{BO}}{\delta_{A1} + \delta_{B1}}} \quad (i)$$

BARRA PLANA EMPOTRADA



Problema hiperestático de orden 3

Estructura Primaria.

Selección de redundantes X_1, X_2, X_3 y condición de empotramiento $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ ...

Condición $X = 0$

Condición $X_1 = 1$

Condición $X_2 = 1$

Condición $X_3 = 1$

Las ecuaciones aplicando el principio de superposición son

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}$$
$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} \qquad (\delta)$$
$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}$$

expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{21} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \qquad (k)$$

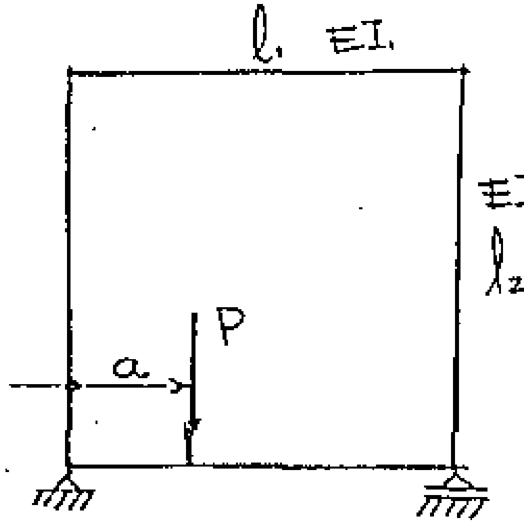
Aplicando el Teorema de Castigliano y la expresión de la energía de deformación por flexión, los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} son igual a

$$\Delta_{10} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{20} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{30} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

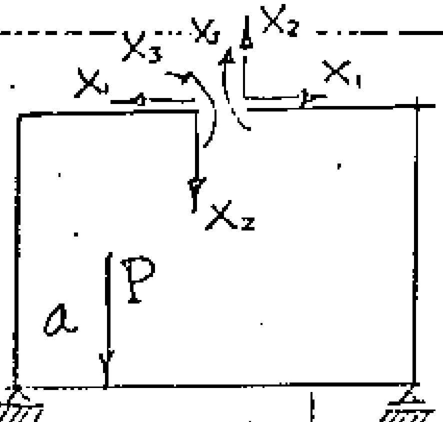
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI} \qquad (l)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

MARCO CONTINUO RECTANGULAR BAJO LA ACCION DE UNA CARGA P



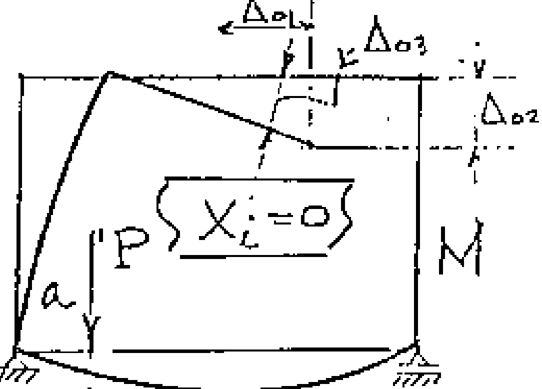
Estructura actual



Estructura primaria:

Selección de redundantes

En este caso las ecuaciones de superposición son:



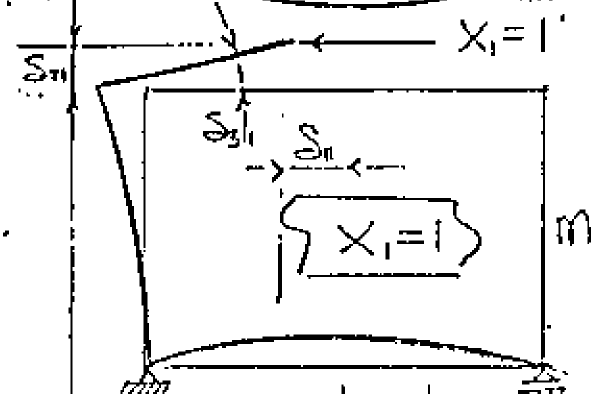
$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0 \quad (m)$$

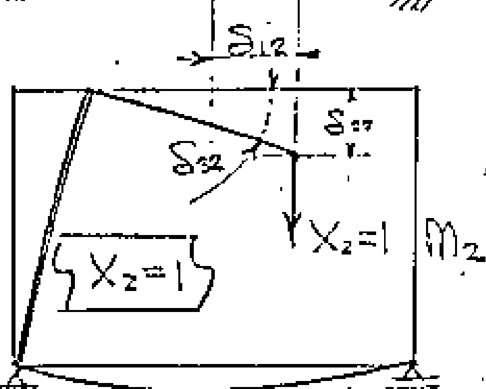
$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0$$

ó

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (n)$$

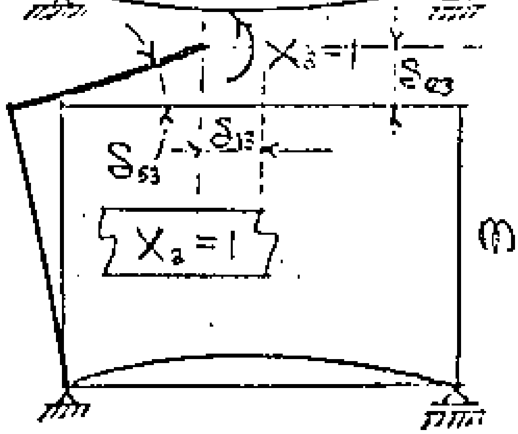


Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de deformación se obtienen los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} y Δ_{0i}.



$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

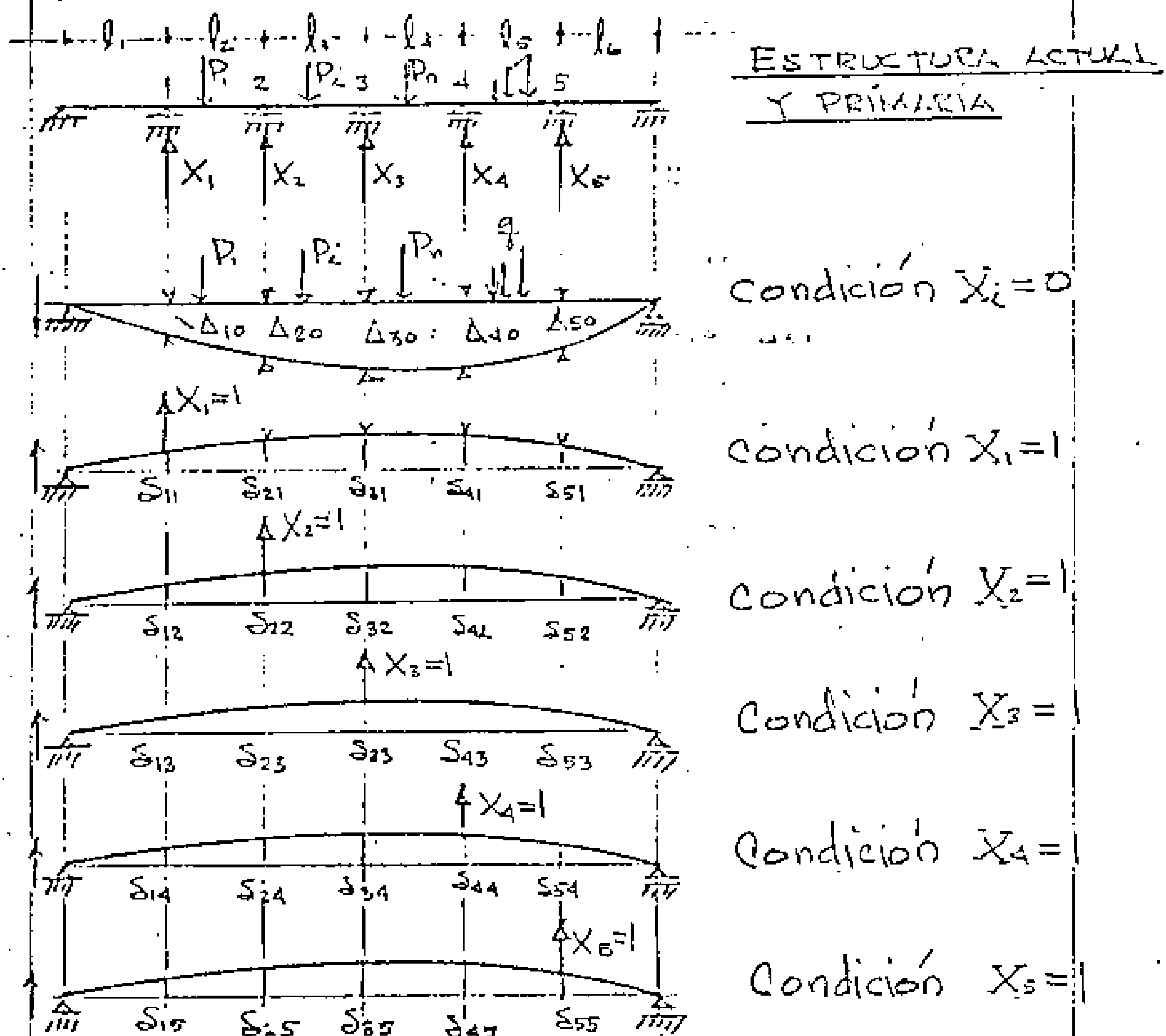
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$



$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad \delta_{13} = \delta_{31}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}$$

Viga continua de 7 apoyos



$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} = 0$$ 1ª Ec.

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} = 0$$ 2ª "

$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} = 0$$ 3ª "

$$\Delta_4 = \Delta_{40} + X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} = 0$$ 4ª "

$$\Delta_5 = \Delta_{50} + X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} = 0$$ 5ª "

$$[\delta_{ij}]\{X_j\} + \{\Delta_{j0}\} = 0$$

1.3 Generalización de la energía de deformación

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación. La misma conclusión es válida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposición pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultaneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final. Si

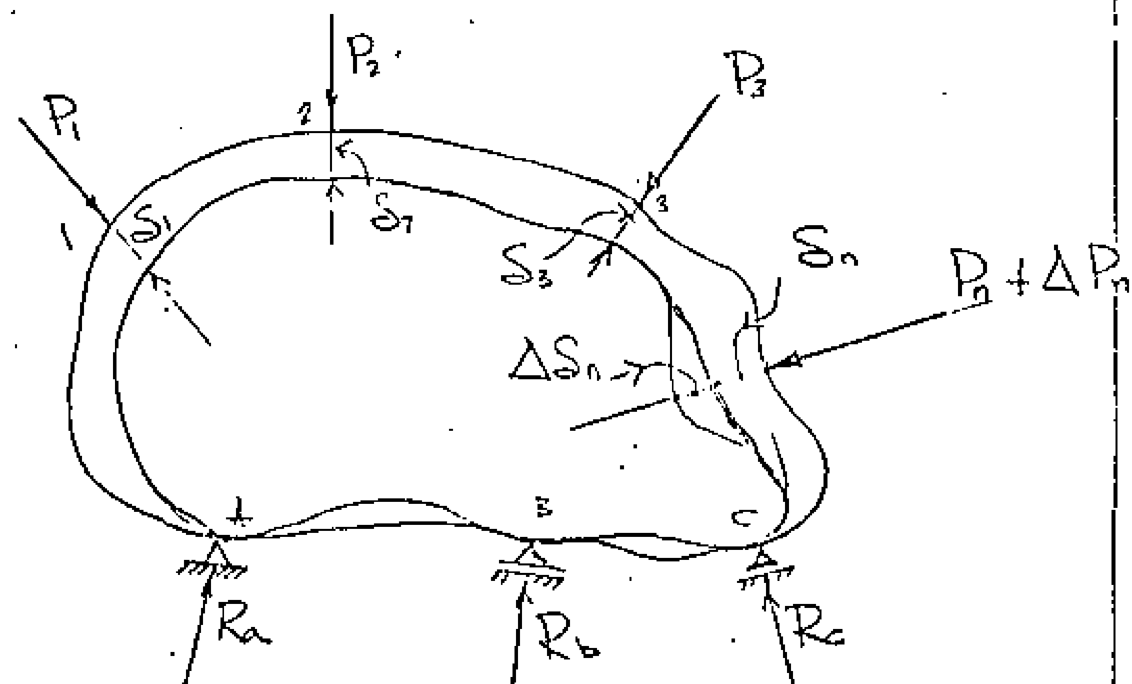


Fig. 1.3.1.

el principio de superposición rige, los desplazamientos serán funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i = \frac{1}{2}(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \cdots + P_n\delta_n) \quad (1.3.1)$$

1.3.1.- Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la Fig. 1.3.1a

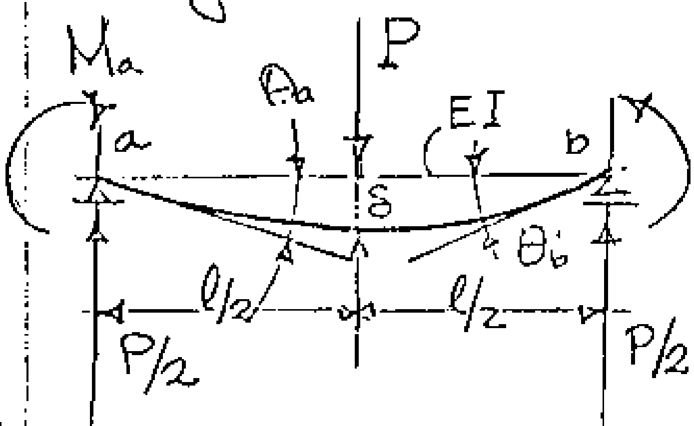


Fig. 1.3.1a

La energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2}(P\delta + M_a\theta_a + M_b\theta_b) \quad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que:

$$\left.\begin{aligned}
\delta &= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{M_a l^2}{16EI} + \frac{M_b l^2}{16EI} \\
\theta_a &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_a l}{3EI} + \frac{M_b l}{6EI} \\
\theta_b &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_a l}{6EI} + \frac{M_b l}{3EI}
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Substituyendo (b) en (a) se obtiene

$$U=\frac{\ell^3}{96EI}\left(P^2+\frac{6}{\ell}PM_a+\frac{6}{\ell}PM_b+\frac{16}{\ell^2}M_a^2+\frac{16}{\ell^2}M_b^2+\frac{16}{\ell^2}M_aM_b\right) \quad (c)$$

en (c) se observa que U es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos P, M_a y M_b.

Tarea

En el ejemplo de la viga de la Fig 1.3.1a

Demostrar:

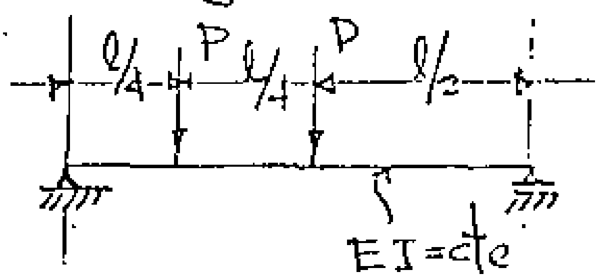
a) $\frac{\partial U}{\partial P}=\delta$, $\frac{\partial U}{\partial M_a}=\theta_a$, $\frac{\partial U}{\partial M_b}=\theta_b$

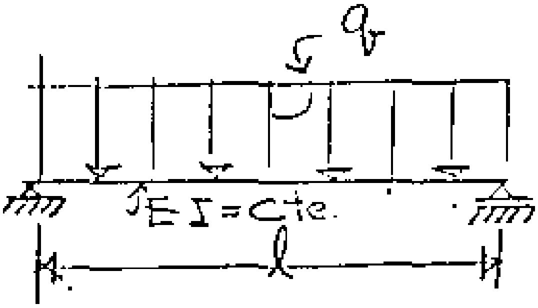
b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos δ, θ_a, θ_b.

c) Demostrar que.

$$\frac{\partial U}{\partial \delta}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta_a}=M_a,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b}=M_b$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal bh





1.4 Teorema de Castigliano.

Suponiendo que el principio de superposición rige, y que U se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGÍA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS NOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA FUERZA O MOMENTO CORRESPONDIENTE.

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \qquad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Durante la aplicación de P_i se producen deformaciones δ_i y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1). Si subsecuentemente a P_n se aplica un incremento ΔP_n, la energía U incrementará

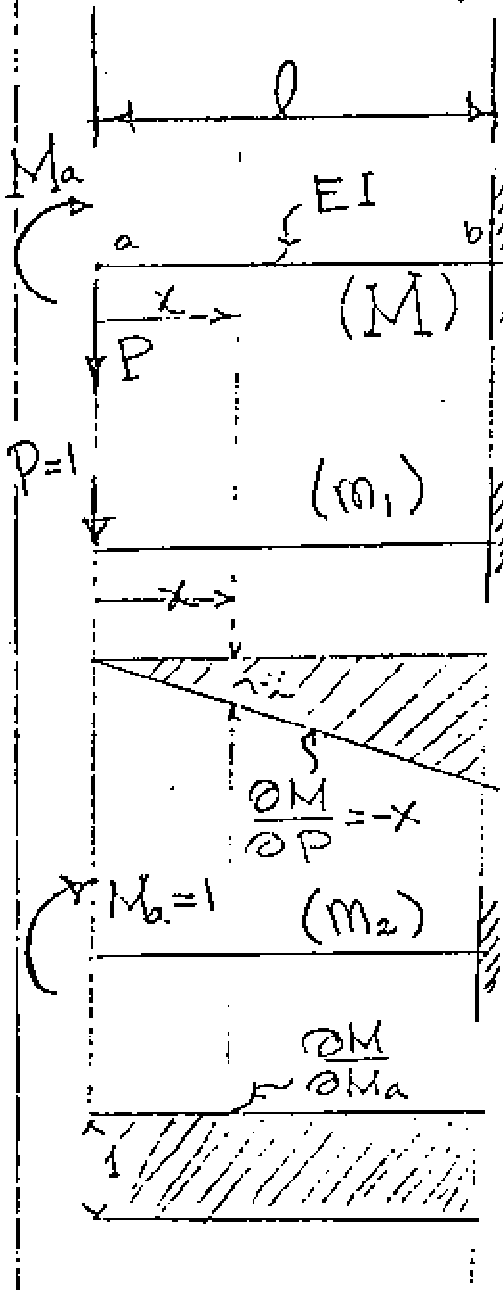
$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n \qquad (1.4.2)$$

Si en vez de aplicar ΔP_n después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n(\delta_n + \Delta\delta_n) = U + \Delta P_n \delta_n \qquad (1.4.3)$$

igualando (1.4.2) con (1.4.3) se demuestra (1.4.1)

1.4.1 Ejemplos de aplicación



La variación de $M(x)$ es

$$M = M_a - P \cdot x \qquad (a)$$

La energía de deformación por flexión.

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (b)$$

Del Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\delta_a = \int_0^l \frac{M\, m_1}{EI} ds \qquad (c)$$

Substituyendo (a) en (c)

$$\delta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(-x) dx$$

$$\delta_a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{M_a l^2}{2EI} \qquad (d)$$

De nuevo del Teorema de Castigliano

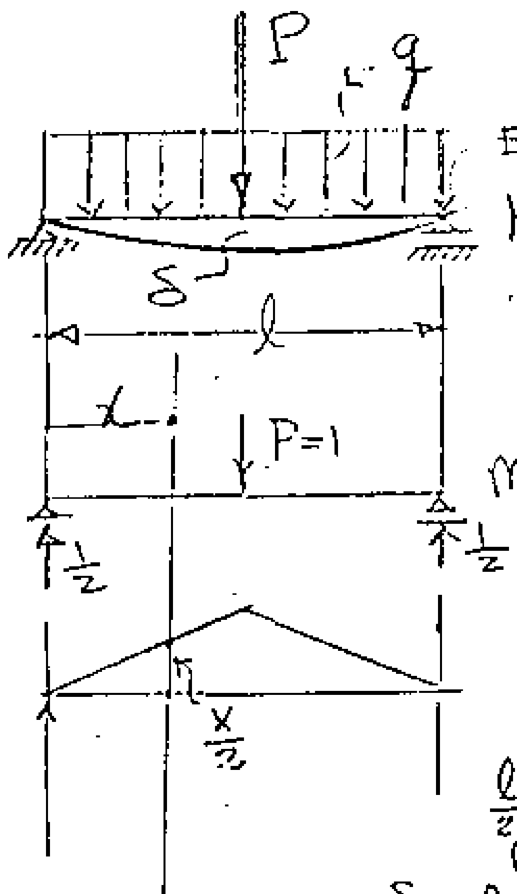
$$\frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_a}}{EI} dx = \int_0^l \frac{M\, m_2}{EI} dx \qquad (e)$$

Substituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\theta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(1) dx = \frac{M_a l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

En el ejemplo anterior no se calculó U en función de las fuerzas externas, sino se utilizó la energía de deformación por flexión y se derivó bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variación de momento flector debido a causas unitarias P y M_A.



$$M = \frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \qquad (f)$$

$$m = \frac{x}{2} \qquad (g)$$

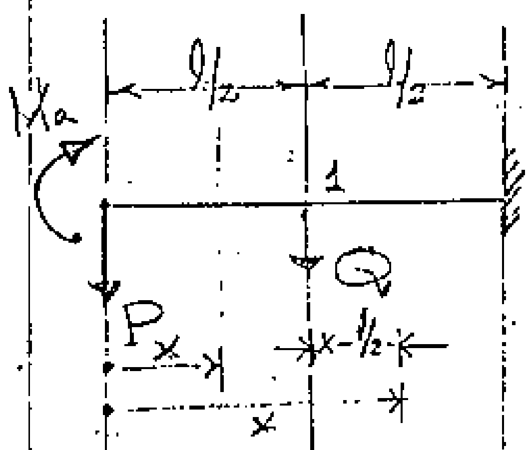
De la energía de deformación por flexión y el Teorema de Castigliano.

$$\delta = 2\int_0^{l/2} \frac{M m}{EI}\,dx \qquad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$\delta = 2/EI \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \qquad (h)$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivando con respecto a ella.



$$M = M_a - Px \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} \qquad (i)$$

$$M = M_a - Px - Q\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (j)$$

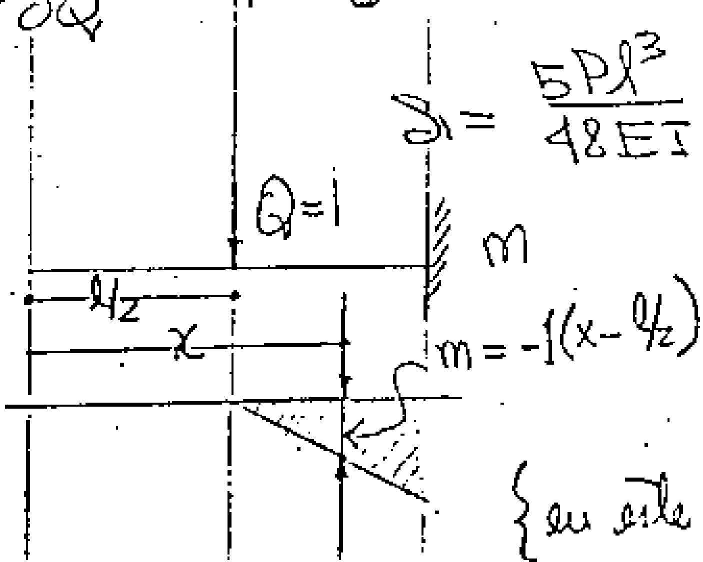
para $\frac{l}{2} \le x \le l$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (k)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = (\text{energía de def. por flexión})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial Q}}{EI} dx = -\int_{l/2}^{l} \frac{1}{EI}(M_a - Px)\left(x - \frac{l}{2}\right) dx$$

$$\delta_1 = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{M_a l^2}{8EI} \qquad (l)$$



$$\delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx \qquad (m)$$

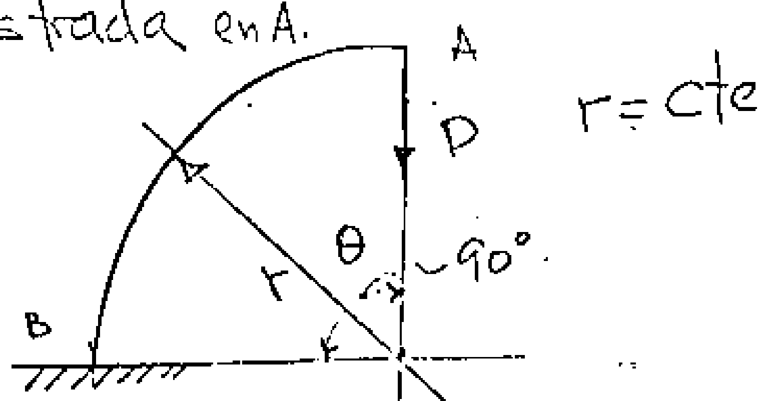
$$\left\{ \text{en este caso } \frac{\partial U}{\partial Q} = 0 \quad 0 \le x \le l/2 \right\}$$

En conclusión se observa que la derivación del Teorema de Castigliano, fué basada en el principio de superposición. De allí que la energía de deformación U debe ser una función de segundo grado de las fuerzas actuantes. Si el principio de superposición no rige y U no es función de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustró mediante ejemplos.

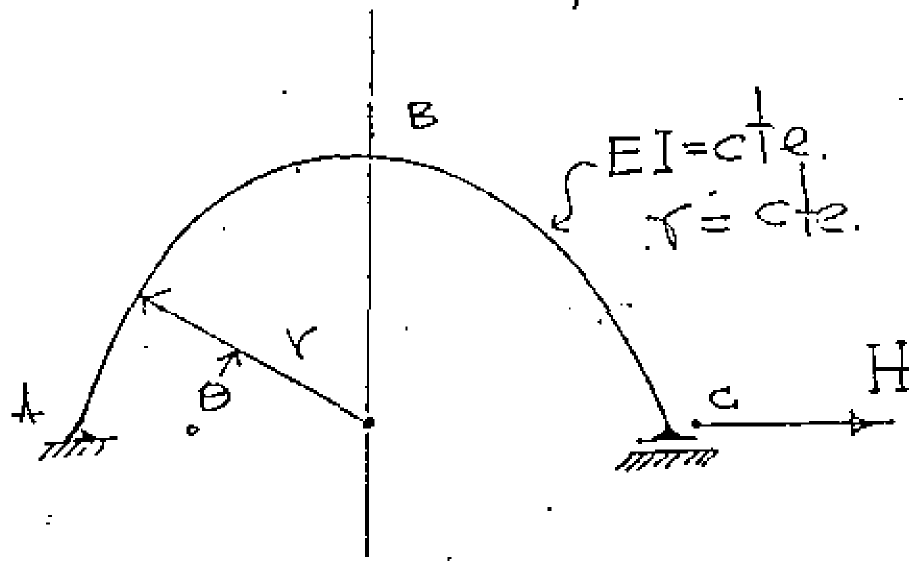
Ejemplos de Tarea

a) Utilizando el teorema de Castigliano determinar los ángulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme q, claro l, y rigidez flexionante EI = constante.

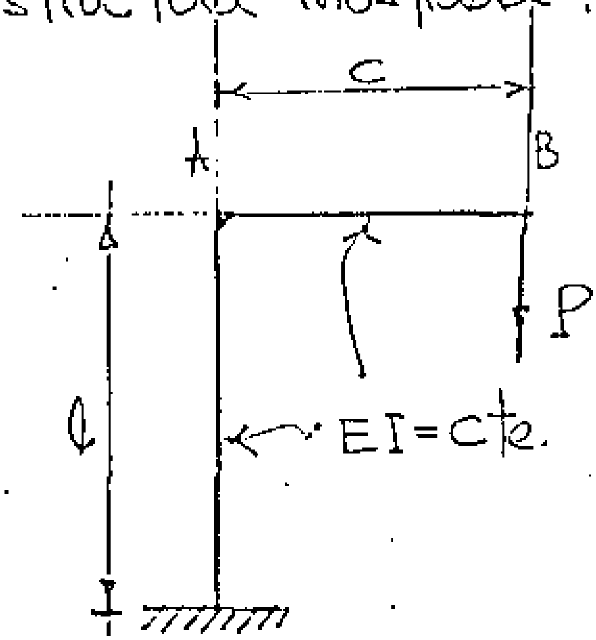
b) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de la viga curva mostrada en A.



c) Determinar el desplazamiento horizontal en c y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



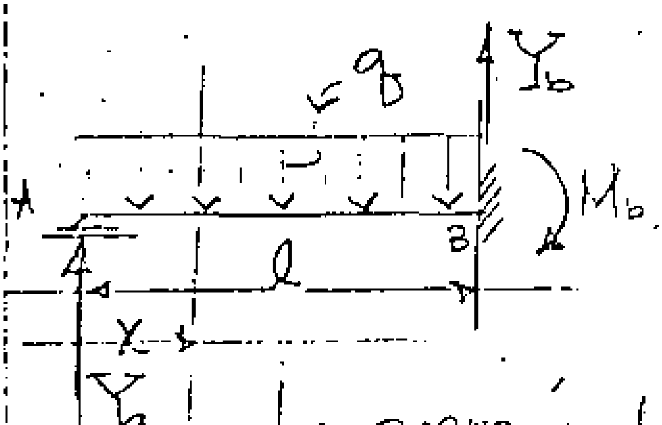
1.5 Teorema del Trabajo mínimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castigliano a sistemas de fuerzas estáticamente determinados. Aplicándolo a sistemas estáticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energía de deformación con respecto a cualquier redundante deberá ser cero si su acción es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicación, de allí que las magnitudes de las reacciones redundantes en sistemas hiperestáticos serán tal que la energía de deformación del sistema en dicho punto sea máxima o mínima, lo anterior es el método del Trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestática de grado "n" se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0,\ \frac{\partial U}{\partial X_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial U}{\partial X_n}=0 \qquad (1.5.1)$$

1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme. (grado $n=1$).



La energía de deformación del sistema por flexión es

$$U=\int \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (a)$$

Del teorema del trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a}=0=\frac{\partial}{\partial Y_a}\left[\int\frac{M^2dx}{2EI}\right]=\frac{1}{EI}\int_0^{\ell} M\frac{\partial M}{\partial Y_a}dx \qquad (b)$$

$$M=Y_a x-\frac{q x^2}{2} \qquad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a}=x \qquad (d)$$

Substituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^{\ell}\left(Y_a x-\frac{q x^2}{2}\right)x\,dx=\frac{\ell^3}{3}Y_a-\frac{q\ell^4}{8}=0$$

de donde $\quad Y_a = 3/8\, q\ell \qquad (e)$

En el sistema se tienen 3 reacciones Y_a, Y_b, M_b y 3 ecuaciones dos de estática y una del Teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior,
si se considera como redundante M_b
se tiene.

$$\frac{\partial U}{\partial M_b}=\frac{\partial}{\partial M_b}\left[\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}\right]=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial M_b}dx=0 \qquad (f)$$

el momento flector es

$$M=\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2} \qquad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b}=-\frac{x}{l} \qquad (h)$$

substituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

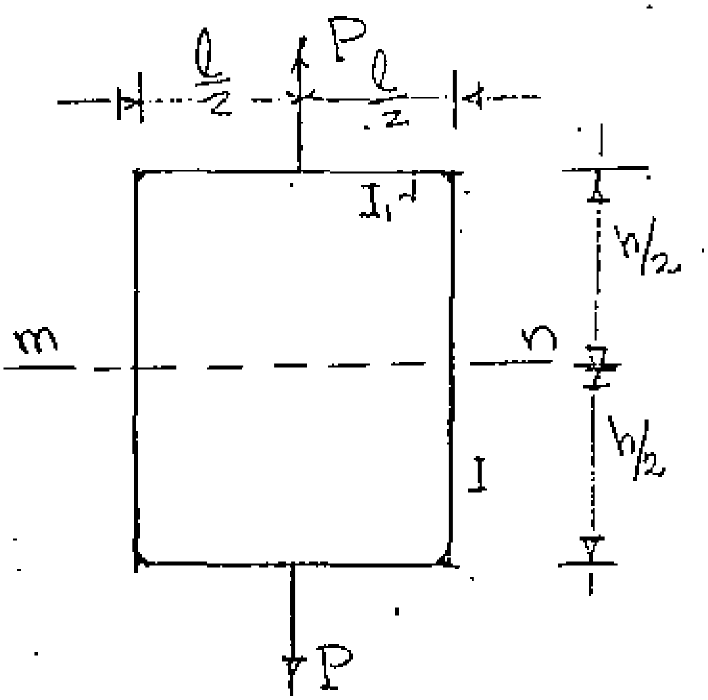
$$\int_0^l\left[\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2}\right]\frac{x}{l}dx=0 \qquad (i)$$

integrando (i) y despejando M_b se obtiene

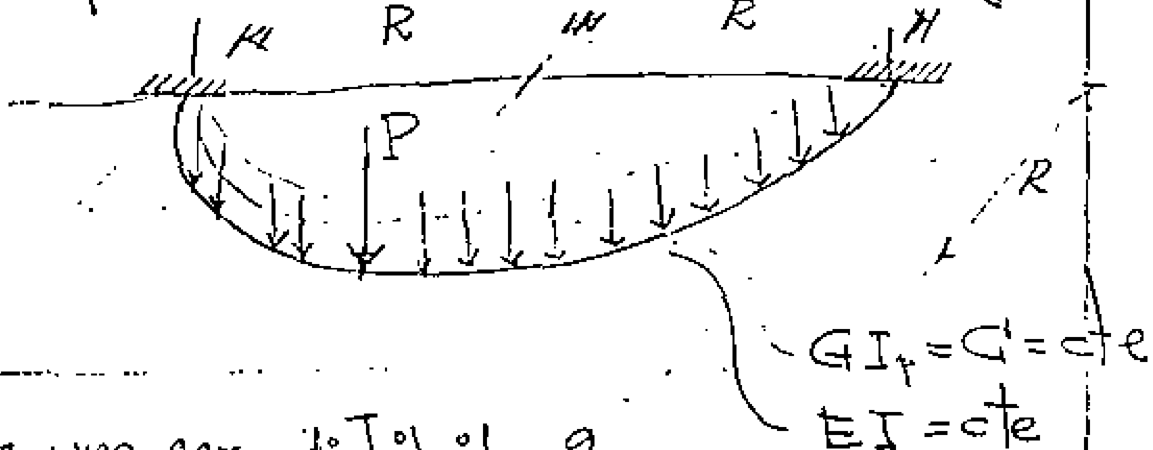
$$M_b=\frac{ql^2}{8} \qquad (j)$$

Ejemplos de tarea

1- Determinar los momentos en la sección m-n en la estructura mostrada



2- En la viga en balcón mostrada, determinar las reacciones en los apoyos, considere el trabajo elástico por flexión y torsión, para una carga P



y para una carga distribuida q

2.- METODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

2.1 Métodos de Fuerzas y Deformación

En los métodos de análisis de sistemas estáticamente indeterminados, primero se seleccionaban las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el Teorema del Trabajo mínimo, considerando la energía de deformación del sistema. Este procedimiento general es llamado el método de las fuerzas.

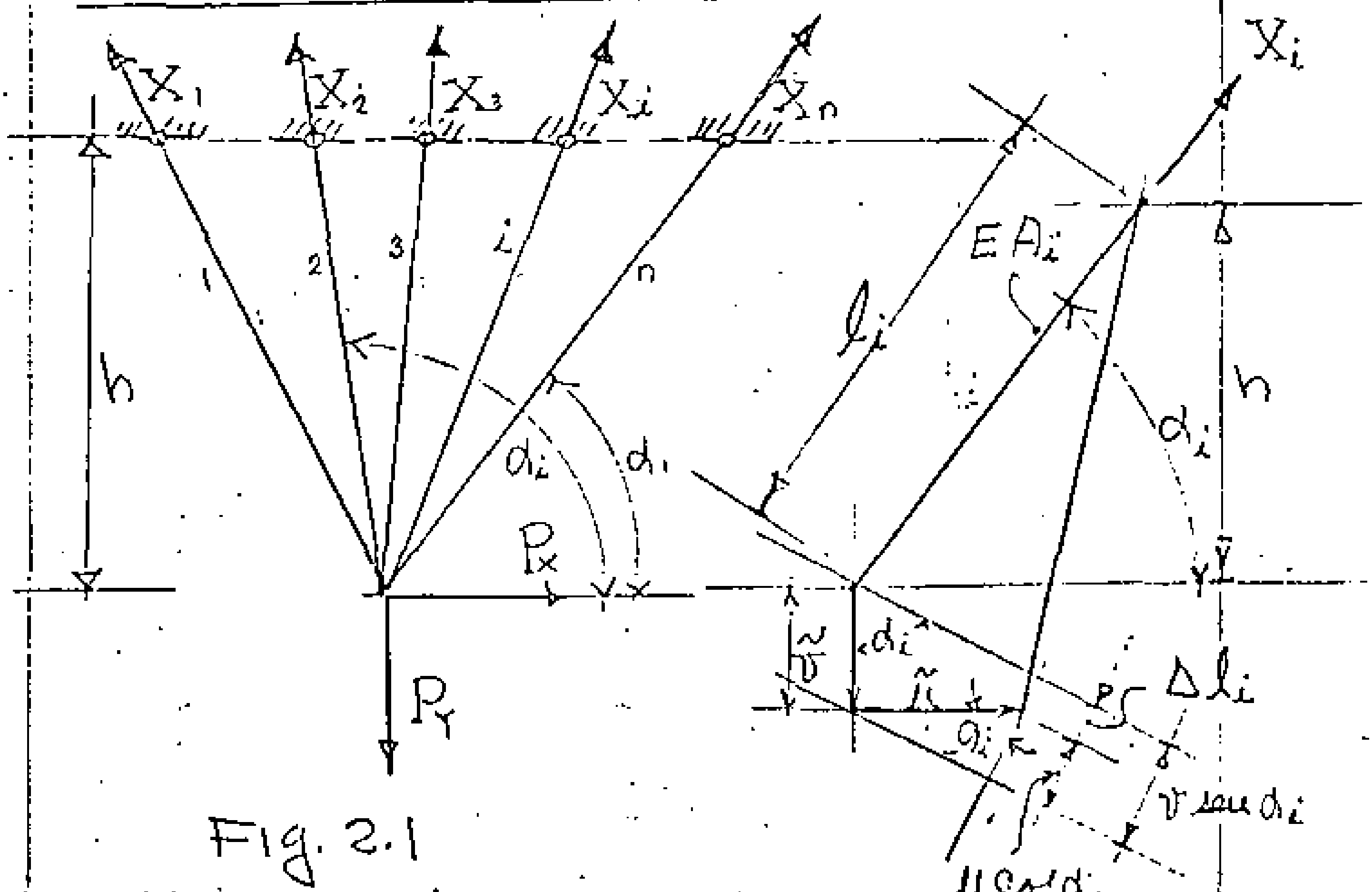


Fig. 2.1

Para ilustrar en un mismo ejemplo

la distinción entre los dos métodos consideremos la estructura estáticamente indeterminada coplanar mostrada en la figura 2.1 bajo la acción de dos fuerzas aplicadas P_x y P_y con n barras, el número de redundantes sea n-2. Entonces para determinar las redundantes $X_1, X_2, \ldots X_{n-2}$, se determina la energía de deformación del sistema en función de las fuerzas y usando el Teorema del trabajo mínimo se obtienen las ecuaciones necesarias

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0, \frac{\partial U}{\partial X_2}=0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}}=0 \qquad (a)$$

lo anterior es el método de las fuerzas. Para resolver el mismo problema, Navier[1] sugirió el método de desplazamientos. La deformación del sistema de la figura 2.1 estará completamente determinado si conocemos las componentes horizontal y vertical u y v respectivamente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños

[1] Navier, "Résumé des leçons", 2 ed., p. 345, Paris, 1833.

la deformación axial de cualquier barra i será

$$\Delta l_i = v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i \qquad (b)$$

y de la ley de Hooke su fuerza axial correspondiente será

$$X_i = \frac{E A_i}{l_i}(v \operatorname{sen}\alpha_i - u \cos \alpha_i) \qquad (c)$$

de la figura 2.1

$$l_i = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha_i} \qquad (d)$$

substituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{E A_i}{h}(v \operatorname{sen}\alpha_i - u \cos\alpha_i)\operatorname{sen}\alpha_i \qquad (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \cos\alpha_i = P_x \qquad (f)$$

$$\sum_{1}^{n} X_i \operatorname{sen}\alpha_i = P_Y \qquad (g)$$

substituyendo (e) en (f) y (g) se obtiene

$$v \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2\alpha_i \cos\alpha_i - u \sum_{i=1}^{n} A_i \cos^2\alpha_i \operatorname{sen}\alpha_i = \frac{P_x h}{E} \qquad (i)$$

$$v \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^3\alpha_i - u \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2\alpha_i \cos\alpha_i = \frac{P_Y h}{E} \qquad (j)$$

de (i) y (j) se determinan u y v los

cuales substituidas en (e) obtenemos la fuerza X_i en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideración de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificación substancial, especialmente si el número de barras n es grande, puesto que solo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incógnitas que son las deformaciones u y v. En el caso del método de las fuerzas tendremos que resolver n-2 ecuaciones con n-2 incógnitas. Es conveniente observar que el método de las deformaciones involucró 3 etapas básicas que son

ecuación (b): Compatibilidad geométrica de deformaciones, u, v y Δl.

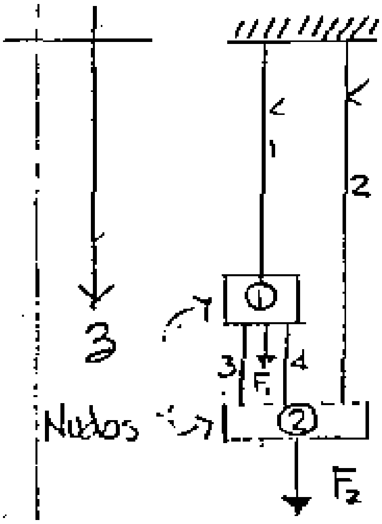
ecuación (e): Ley de Hooke.

ecuaciones (f) y (g): Equilibrio

DESFI - UNAM P. Ballesteros (Fenves-1965)

Notacion: Livsley

S.J. Fenves 1965



barras

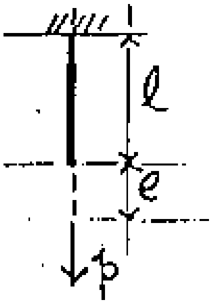
n_B = número de barras = 4

n_N = " " nudos = 2

p = fuerzas axiales (P)

e = alargamiento (δ)

Rigidez de barra $k_i = \frac{p}{e} = \frac{\text{fuerza axial}}{\text{alargamiento}} \equiv \frac{EA_i}{l_i}$



A) Continuidad:

$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \equiv$ Def. o alarg. de las cuatro barras $\begin{Bmatrix} + \text{ Alarg.} \\ - \text{ Acort.} \end{Bmatrix}$

$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv$ desplazamientos nodales $\begin{Bmatrix} + \downarrow \\ - \uparrow \end{Bmatrix}$

De la figura

$e_1 = d_1$

$e_2 = \quad + d_2$

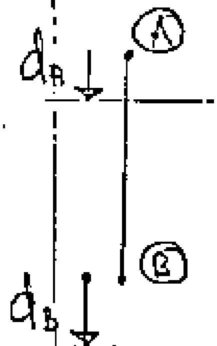
$e_3 = -d_1 + d_2$

$e_4 = -d_1 + d_2$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}}_{\{e\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[a]} \underbrace{\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}}_{\{d\}} \quad ; \text{ ó } \boxed{\{e\} = [a]\{d\}} \quad (1)$$

donde $[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; matriz de continuidad

observar que para una barra i cualquiera



$e_i = d_B - d_A$

d_A = desplazamiento del nudo superior

d_B = " " " inferior

B) Ley de Hooke

Sea $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$ fuerzas axiales en las barras

+ Tensión, − compresión

$p_1 = k_1 e_1$ $\qquad k_i = \dfrac{EA_i}{l_i}$ rigidez de barra i

$p_2 = k_2 e_2$

$p_3 = k_3 e_3$

$p_4 = k_4 e_4$

ó

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}}_{\{p\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}}_{\{e\}}$$

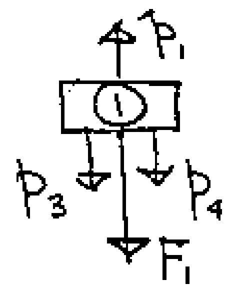
; ó $\{p\} = [k]\{e\}$ (2)

$[k]$ matriz de rigidez de las barras

c) Equilibrio; $\Sigma F_z = 0$ en cada nudo

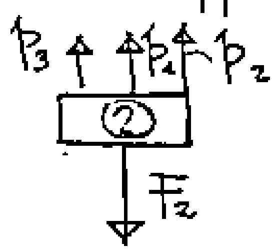
Sea: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Nudo ①



$F_1 = p_1 + 0 - p_3 - p_4$

Nudo ②



$F_2 = 0 + p_2 + p_3 + p_4$

ó $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$ ó $\boxed{\{F\} = [a]^T \{p\}}$ (3)

donde: $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de equilibrio

observar: matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad

Solución del problema anterior por el método de desplazamientos (rigideces).

Incógnitas: $\{e\}$, $\{d\}$, $\{p\}$

Datos: $[a]$, $[a]^T$, $[k]$, $\{F\}$

Subst. (1) en (2)

$$\{p\} = [k][a]\{d\} \qquad (4)$$

Subst. (4) en (3)

$$\{F\} = [a]^T[k][a]\{d\} \qquad (5)$$

$$ó \quad \{F\} = [K]\{d\} \qquad (5a)$$

la matriz $[a]^T[k][a]$ es cuadrada

Ejemplo; Suponiendo

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1 \ \text{Ton/cm}$, $F_1 = 10 \ \text{Ton}$
$F_2 = 5 \ \text{Ton}$.

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones:

$$[K] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

observar que $[K]$ es simétrica

de (5_a)

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

despejando $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ cm} \end{Bmatrix}$ subst. en (1)

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \ '' \\ -1 \ '' \\ -1 \ '' \end{Bmatrix}$$ Subst. en (2)

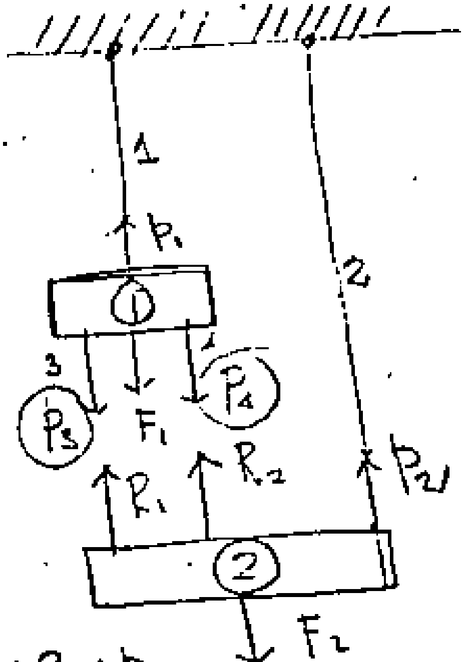
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ Ton} \\ 7 \ '' \\ -1 \ '' \\ -1 \ '' \end{Bmatrix}$$

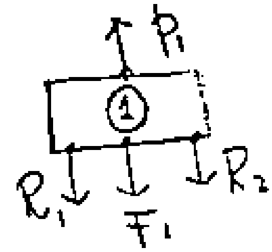
comprobación de equilibrio: de (3)

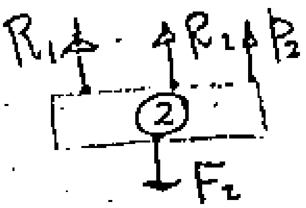
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ Ton} \\ 5 \ '' \end{Bmatrix}$$ ///

Metodo de las fuerzas (Flexibilidad)

Usando los tres principios fundamentales en el orden inverso Equilibrio, Ley de Hooke, Continuidad.







a) Equilibrio

$$F_1 = P_1 - R_1 - R_2$$

$$F_2 = P_2 + R_1 + R_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \Bigg[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{a_0^T} \;\; \underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{a_R^T}\Bigg] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} [\vec{P}_0] \\ \\ [R] \end{matrix}$$

$$\{F\} = [a_0^T \; a_R^T] \begin{Bmatrix} P_0 \\ R \end{Bmatrix}$$

$$= a_0^T P_0 + a_R^T R$$

despejando a P_0

$$\{P_0\} = [a_0^T]^{-1}\{F\} - [a_0^T]^{-1}[a_R^T][R]$$

en nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [a_0^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{P_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[R]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} R$$

P. Ballesteros

o bien

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

además se tiene

$$P_3 = R_1$$

$$P_4 = R_2$$

Por consiguiente

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{b_0} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{b_R} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{cases} P_1 = F_1 + R_1 + R_2 \\ P_2 = F_2 - R_1 - R_2 \\ P_3 = R_1 \\ P_4 = R_2 \end{cases}$$

(a) se puede escribir

$$\{P\} = [b_0]\{F\} + [b_R]\{R\} \quad (b)$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_R = \begin{bmatrix} (-a_0^T)^{-1} a_R^T \\ I \end{bmatrix}.$$

Ley de Hooke

$$\{p\} = [k]\{e\}$$

$$\boxed{\{e\} = [k]^{-1}\{p\}} \quad (c) \qquad [f] = [k]^{-1} \text{ Flex.}$$

subst (b) en (c)

$$\{e\} = [f][b_0]\{F\} + [f][b_R]\{R\} \quad (d)$$

CONTINUIDAD.- Considerando los desplazamientos relativos de R_1 y R_2 llamados u_1, u_2 $\quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

$$d_1 = e_1$$
$$d_2 = e_2$$
$$u_1 = e_1 - e_2 + e_3$$
$$u_2 = e_1 - e_2 + e_4$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}$$

pero $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_0]^T$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T$

Por lo tanto P. Ballesteros

$$\{p\} = [b_o^T]\{e\} \quad (e)$$

$$\{u\} = [b_R^T]\{e\} \quad (d) \quad (e)$$

{los valores de {u} deberán anularse}

subst (d) en (e)

$$\{u\} = [b_R^T][f][b_o]\{F\} + [b_R^T][f][b_R]\{R\} \quad (g)$$

como $\{u\}=0$ se despeja $\{R\}$

$$\{R\} = -[b_R^T f b_R]^{-1}[b_R^T f b_o]\{F\} \qquad (h)$$

(h) nos da las redundantes $\{R\}$

subst (h) en (b) se obtiene $\{p\}$

$$\{p\} = b_o F - b_R (b_R^T f b_R)^{-1}(b_R^T f b_o) F$$

$$= \underbrace{[b_o - b_R(b_R^T f b_R)^{-1} b_R^T f b_o]}\{F\}$$

$$= \qquad [b]\{F\} \qquad (i)$$

subst (i) en (c) se obtiene $\{e\}$

$$\{e\} = [f][b]\{F\} \qquad (j)$$

subst (j) en (e) se obtiene

$$\boxed{\{d\} = [b_0^T][f][b]\{F\}} \quad (k)$$

Demostrar que

$$[b_0^T f b] = [k]^{-1} = [f]$$

$$b_0^T f b = b^T f b$$

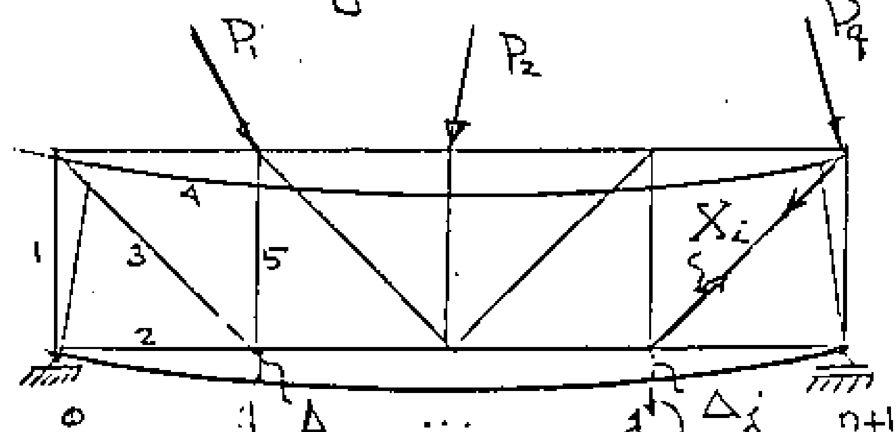
En nuestro ejemplo calc. valores numéricos

para $k_1 = k_2 = k_2 = k_3 = 1 \text{ ton/cm}$ f_i

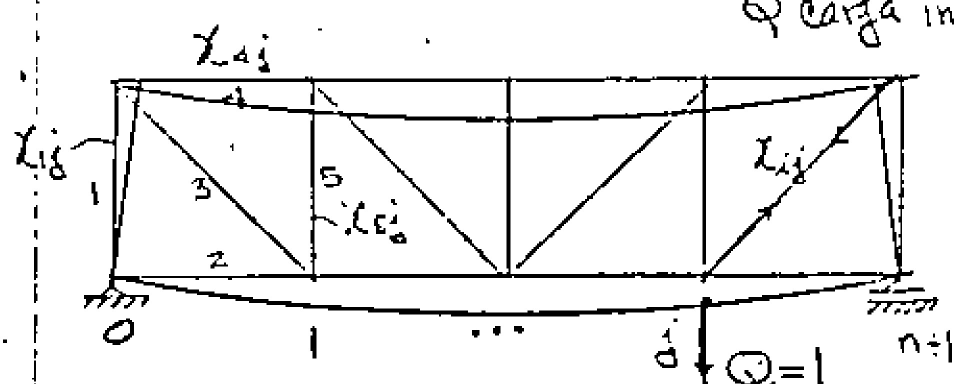
$A_1 = \cdots = 1 cm^2$

2.3 Aplicaciones de métodos matriciales a armaduras planas.

Para ilustrar el uso de métodos matriciales en el analisis de armaduras articuladas en los nudos, comensaremos considerando un problema de deflexiones. En la Fig. 2.3.1 se tiene una armadura con m miembros sujeta de un sistema externo de cargas P_i, y se requiere determinar la deflexión vertical del nudo j debida al sistema de cargas P_i. Si X_i representa las fuerzas axiales en la estructura real y x_{ij} las fuerzas axiales en la extructura bajo la condición de carga unitaria en j



Estructura real ó actual



condición Q=1

$$\frac{\partial U}{\partial Q}=1$$

Fig. 2.3.1

Del teorema de Castigliano y la energía de deformación por carga normal se tiene

$$U = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i^2 l_i}{2AE} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i x_{ij} l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^{m} X_i x_{ij} f_i \qquad (b)$$

donde $f_i = \frac{l_i}{EA_i}$ es el factor de flexibilidad de la barra i.

Si se desean calcular las n deflexiones verticales de nudos seleccionados debemos calcular los valores x_{ij} para una fuerza vertical unitaria aplicada en cada uno de los nudos. Supongamos que han sido calculados y que acomodamos los numeros de influencia en la forma de una matris de orden $m \times n$ como sigue:

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad (c)$$

(c) se denomina matris de geometría de la armadura.

Acomodando los factores de flexibilidad f_i en forma de una matris diagonal de orden $m \times m$

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix} \qquad (d)$$

la cual es llamada matris de flexibilidad de la armadura.

Finalmente, suponiendo que las fuerzas axiales X_i producidas por el sistema de cargas P_i han sido calculadas, y son arregladas en la forma de una matris vector columna

$$[X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad (e)$$

la cual es llamada matris de carga. Ahora de acuerdo con las reglas de multiplicación de matrices las m ecuaciones (b) pueden expresarse matricialmente

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad (f)$$

o sea con notación indicial

$$[\Delta_j] = [x_{ij}]\,[P_i]\,[X_i] \qquad (g)$$

Como un ejemplo numérico, se considera la armadura mostrada en la Fig. 2.3.2 la cual tiene $m=9$ miembros. Supongase que se requiere determinar la deflexión vertical de los nudos superiores a y b, bajo la acción de dos condiciones separadas de carga como se indica. La numeración de los miembros se muestra en la figura, así como sus dimensiones. Cada barra tiene una sección transversal $A_i = 1 \text{ pulg}^2$ y un modulo de elasticidad $E = 30 \times 10^3 \text{ Kips/pulg}^2$

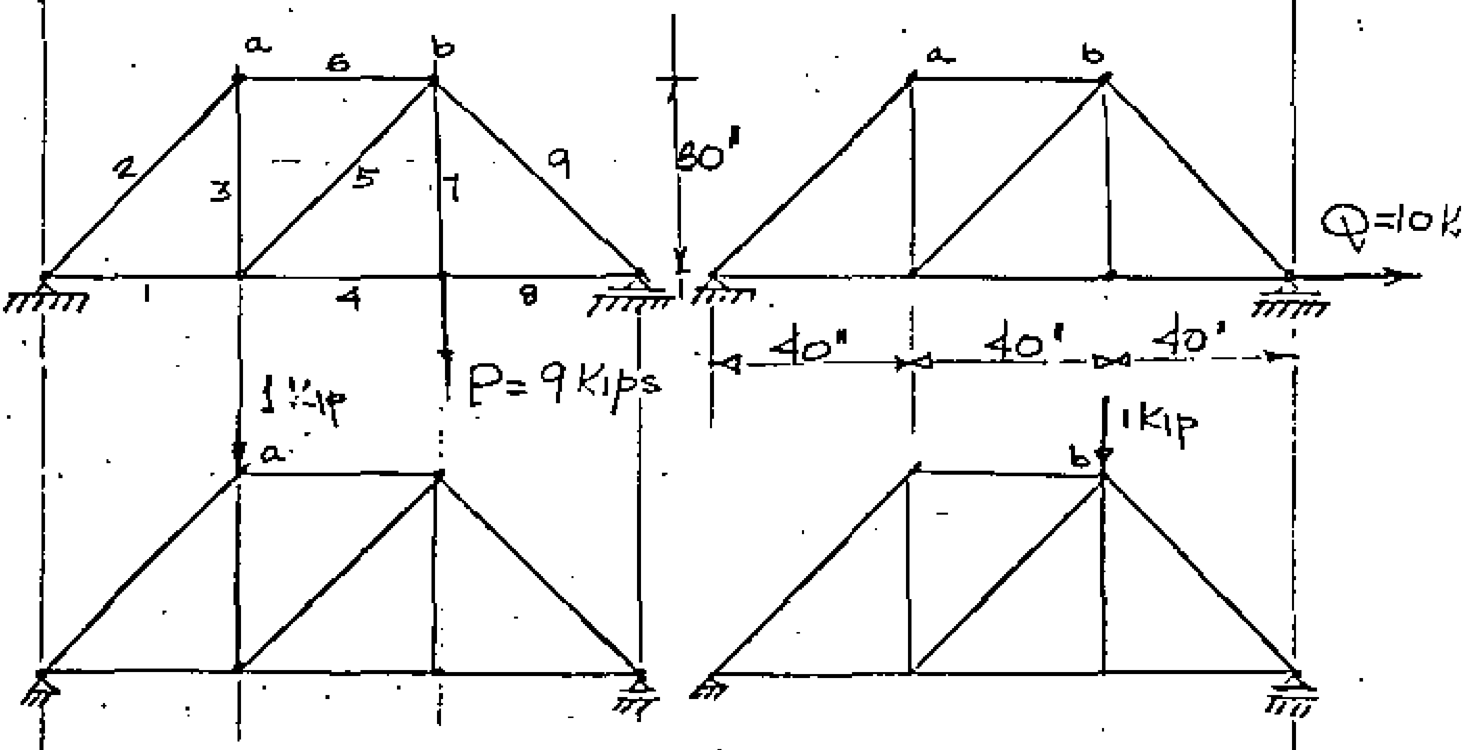


Fig. 2.3.2

El procedimiento a seguir es el siguiente:

a) Se calculan las fuerzas axiales en los nueve miembros bajo las dos condiciones de carga obteniendo la matris de fuerzas

$$[X_i] = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (h)$$

b) Similarmente se calculan las fuerzas axiales debido a las condiciones de fuerzas unitarias verticales en los puntos a y b respectivamente obteniendo la matris

$$[x_{ij}] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -5 \\ -3 & 3 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ -8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 8 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \qquad (i)$$

c) Se calculan los coeficientes de flexibilidad $f_i = \frac{l_i}{A_i E}$ obteniendo la matris de flexibilidad escrita diagonalmente

$$[f_i] = \frac{10}{E} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad (j)$$

Substituyendo (h);(i) y (j) en (g) se obtiene

$$[\Delta_i] = [X_{ij}]'[P_i][X_i] \qquad (g)$$

$$[\Delta_i] = \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & \\ & & & & 5 & & & & \\ & & & & & 4 & & & \\ & & & & & & 3 & & \\ & & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (k)$$

$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 32 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25 \\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (l)$$

$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 860 & 640 \\ 1417 & 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318'' & 0.0525'' \\ 0.0237'' & 0.0296'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{ap} & \Delta_{bp} \\ \Delta_{aq} & \Delta_{bq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix} \qquad (m)$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

METODO DE RIGIDECES

(Método de los desplazamientos)

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

MAYO, 1984

1 METODO DE LAS RIGIDECES PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES PLANAS

1.1 Convención de signos.

La siguiente convención de signos será utilizada en el desarrollo del método de las rigideces y sus aplicaciones en marcos ortogonales planos.

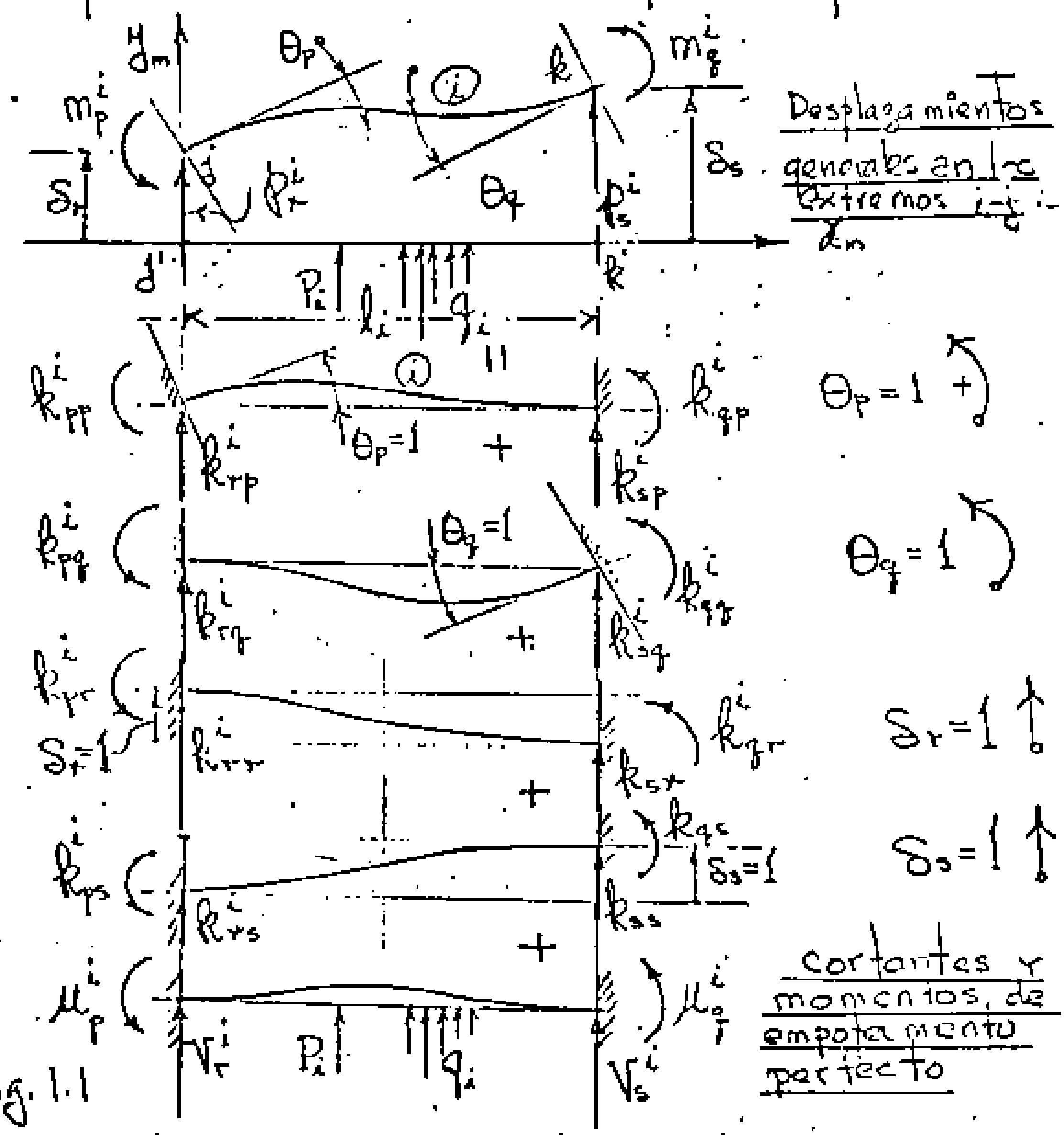


Fig. 1.1

De la Fig. H aceptando el principio de superposición se tiene:

$$
\begin{aligned}
m_p^i &= k_{pp}^i \theta_p + k_{pq}^i \theta_q + k_{pr}^i \delta_r + k_{ps}^i \delta_s + \mu_p^i \\
m_q^i &= k_{qp}^i \theta_p + k_{qq}^i \theta_q + k_{qr}^i \delta_r + k_{qs}^i \delta_s + \mu_q^i \\
p_r^i &= k_{rp}^i \theta_p + k_{rq}^i \theta_q + k_{rr}^i \delta_r + k_{rs}^i \delta_s + V_r^i \\
p_s^i &= k_{sp}^i \theta_p + k_{sq}^i \theta_q + k_{sr}^i \delta_r + k_{ss}^i \delta_s + V_s^i
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

en (1.1) se desprecia el efecto de la carga normal expresando (1.1) matricialmente se tiene

$$\{m\}_i = [k]_i \{\delta\}_i + \{\mu\}_i \tag{1.2}$$

donde:

$$\{m\}_i = \begin{Bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \end{Bmatrix}_i ; \quad \{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix}_i , \quad \{\mu\}_i = \begin{Bmatrix} \mu_p \\ \mu_q \\ V_r \\ V_s \end{Bmatrix}_i \tag{1.3}$$

$\{m\}_i$; componentes de acciones sobre barra para mantener equil.

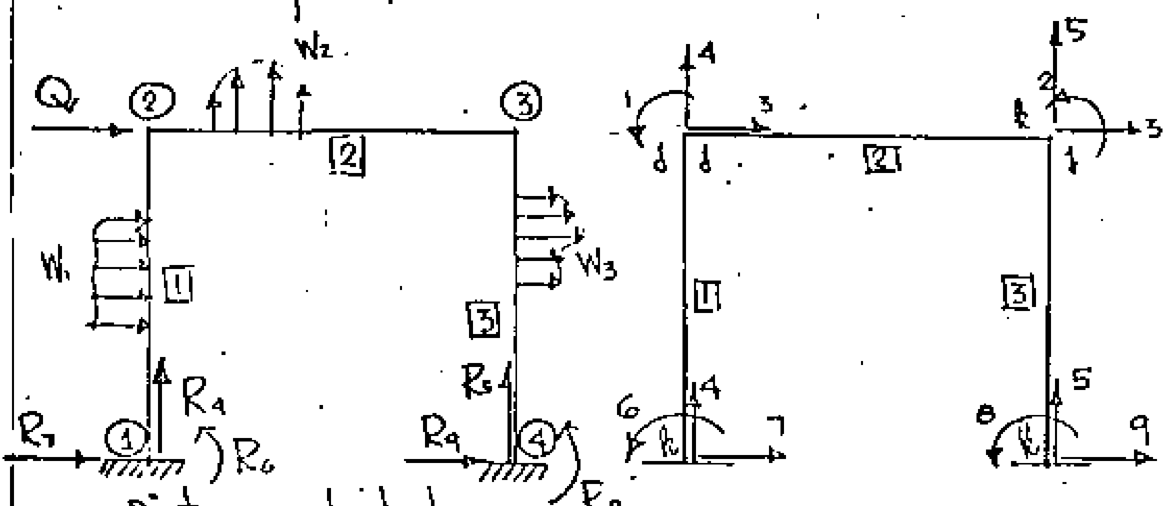
$\{\delta\}_i$; Desplazamientos en los extremos del miembro (i)

$\{\mu\}_i$; Momentos y cortantes de empotramiento perfecto en (i)

$[k]_i$; Matriz de rigidez del miembro (i), la cual despreciando el efecto de cortante y carga normal, para un miembro de sección constante es:

$$
\begin{array}{c}
[k]_i = \left[\begin{array}{cccc}
\frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\
\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\
\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \\
-\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3}
\end{array}\right]
\begin{array}{c} j \\ k \\ r \\ s \end{array}
\\
\quad\quad j \quad\quad k \quad\quad r \quad\quad s
\end{array}
\qquad (1.4)
$$

La filosofía básica del método de las rigideces ha sido presentada; antes de aplicarlo a diversos sistemas estructurales su procedimiento conviene organizarlo en un programa sistemático y las ecuaciones básicas del análisis presentarlas en términos generales. Como ejemplo consideraremos el marco siguiente.



Sistema estructural Indeterminado

Posibles desplazamientos de los extremos j y k.

Fig. 1.2

El pórtico de la Fig. 1.2 es indeterminado de tercer grado con θ_1, θ_2 y δ_3, porque las condiciones de apoyo anulan a δ_4, δ_5, θ_6, δ_7, θ_8, δ_9. Como primera etapa consideramos la estructura con los nudos fijos determinando la suma de momentos y cortantes correspondientes S_{mo}:

Aplicando las ecuaciones (1.1) al marco de la Fig. 1.2

Miembro 1

$$\begin{cases} m_1^1 = k_{11}^1\theta_1 + k_{16}^1(0) + k_{13}^1\delta_3 + k_{17}^1(0) + \mu_1^1 \\ m_6^1 = k_{61}^1\theta_1 + k_{66}^1(0) + k_{63}^1\delta_3 + k_{67}^1(0) + \mu_6^1 \\ p_3^1 = k_{31}^1\theta_1 + k_{36}^1(0) + k_{33}^1\delta_3 + k_{37}^1(0) + V_3^1 \\ p_7^1 = k_{71}^1\theta_1 + k_{76}^1(0) + k_{73}^1\delta_3 + k_{77}^1(0) + V_7^1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Miembro 2

$$\begin{cases} m_1^2 = k_{11}^2\theta_1 + k_{12}^2\theta_2 + k_{14}^2(0) + k_{15}^2(0) + \mu_1^2 \\ m_2^2 = k_{21}^2\theta_1 + k_{22}^2\theta_2 + k_{24}^2(0) + k_{25}^2(0) + \mu_2^2 \\ p_4^2 = k_{41}^2\theta_1 + k_{42}^2\theta_2 + k_{44}^2(0) + k_{45}^2(0) + V_4^2 \\ p_5^2 = k_{51}^2\theta_1 + k_{52}^2\theta_2 + k_{54}^2(0) + k_{55}^2(0) + V_5^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

Miembro 3

$$\begin{cases} m_2^3 = k_{22}^3\theta_2 + k_{28}^3(0) + k_{23}^3\delta_3 + k_{29}^3(0) + \mu_2^3 \\ m_8^3 = k_{82}^3\theta_2 + k_{88}^3(0) + k_{83}^3\delta_3 + k_{8}^3(0) + \mu_8^3 \\ p_3^3 = k_{32}^3\theta_2 + k_{38}^3(0) + k_{33}^3\delta_3 + k_{39}^3(0) + V_3^3 \\ p_9^3 = k_{92}^3\theta_2 + k_{98}^3(0) + k_{93}^3\delta_3 + k_{99}^3(0) + V_9^3 \end{cases} \quad (1.7)$$

Como se demostró previamente el análisis de la estructura indeterminada de la Fig. 1.2 puede ser evaluado de

$$[S_{ij}]\{\delta_i\} = \{Q_i\} \qquad (1.8)$$

en el caso de la Fig 1.2, (1.8) es igual a

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{41} & S_{51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{21}^1 + M_{23}^2 \\ M_{32}^2 + M_{34}^3 \\ V_{11}^1 + V_{24}^3 - Q \end{Bmatrix} \qquad (1.9)$$

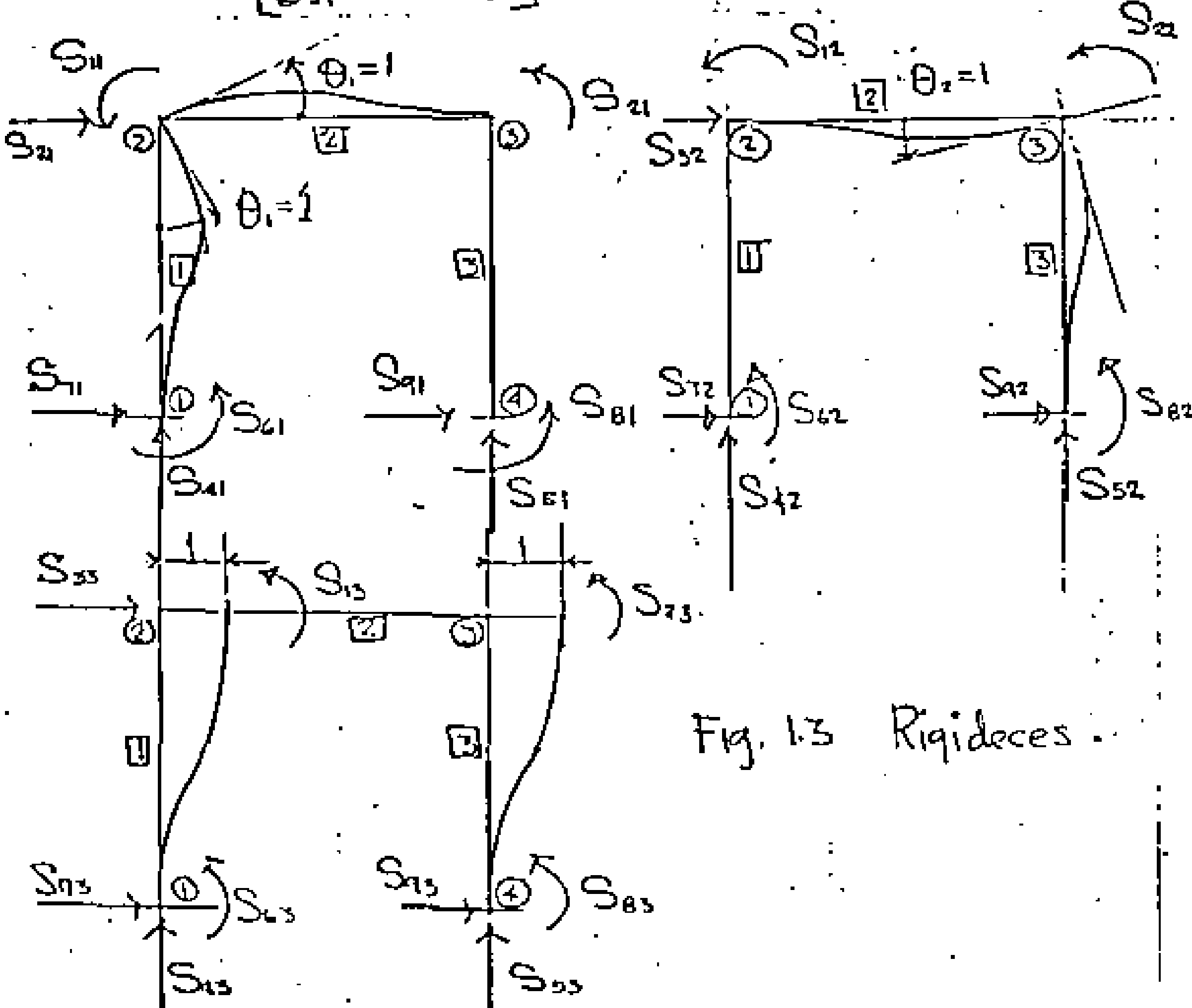


Fig. 1.3 Rigideces

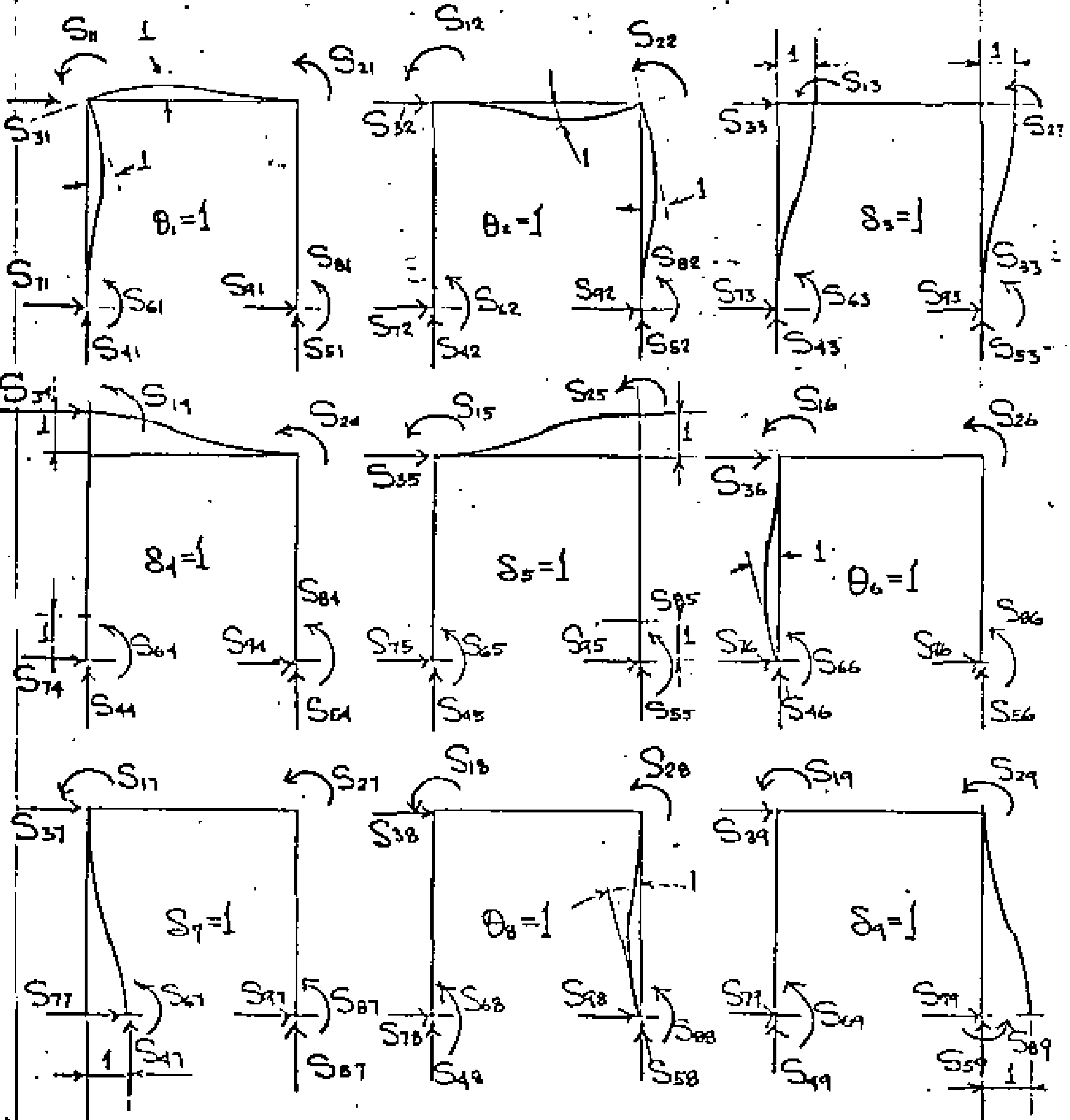


Fig. 1.4 Rigideces considerando todos los posibles grados de libertad despreciando deformaciones axiales (se suponen direcciones positivas)

De la Fig. 1.4 el desarrollo completo de las ecuaciones de superposición incluyendo reacciones es

$$
\begin{aligned}
&S_{11}\theta_1 + S_{12}\theta_2 + S_{13}\delta_3 + S_{14}\delta_4 + S_{15}\delta_5 + S_{16}\theta_6 + S_{17}\delta_7 + S_{18}\theta_8 \\
&\qquad + S_{19}\delta_9 + \mu^{1}_{21} + \mu^{2}_{23} = 0 \\
&S_{21}\theta_1 + S_{22}\theta_2 + S_{23}\delta_3 + S_{24}\delta_4 + S_{25}\delta_5 + S_{26}\theta_6 + S_{27}\delta_7 + S_{28}\theta_8 \\
&\qquad + S_{29}\delta_9 + \mu^{2}_{32} + \mu^{3}_{34} = 0 \\
&S_{31}\theta_1 + S_{32}\theta_2 + S_{33}\delta_3 + S_{34}\delta_4 + S_{35}\delta_5 + S_{36}\theta_6 + S_{37}\delta_7 + S_{38}\theta_8 \\
&\qquad + S_{39}\delta_9 + V^{1}_{21} + V^{3}_{21} = Q \\
&S_{41}\theta_1 + S_{42}\theta_2 + S_{43}\delta_3 + S_{44}\delta_4 + S_{45}\delta_5 + S_{46}\theta_6 + S_{47}\delta_7 + S_{48}\theta_8 \\
&\qquad + S_{49}\delta_9 + V^{2}_{23} = R_4 \qquad (1.10) \\
&S_{51}\theta_1 + S_{52}\theta_2 + S_{53}\delta_3 + S_{54}\delta_4 + S_{55}\delta_5 + S_{56}\theta_6 + S_{57}\delta_7 + S_{58}\theta_8 \\
&\qquad + S_{59}\delta_9 + V^{2}_{32} = R_5 \\
&S_{61}\theta_1 + S_{62}\theta_2 + S_{63}\delta_3 + S_{64}\delta_4 + S_{65}\delta_5 + S_{66}\theta_6 + S_{67}\delta_7 + S_{68}\theta_8 \\
&\qquad + S_{69}\delta_9 + \mu^{1}_{12} = R_6 \\
&S_{71}\theta_1 + S_{72}\theta_2 + S_{73}\delta_3 + S_{74}\delta_4 + S_{75}\delta_5 + S_{76}\theta_6 + S_{77}\delta_7 + S_{78}\theta_8 \\
&\qquad + S_{79}\delta_9 + V^{1}_{12} = R_7 \\
&S_{81}\theta_1 + S_{82}\theta_2 + S_{83}\delta_3 + S_{84}\delta_4 + S_{85}\delta_5 + S_{86}\theta_6 + S_{87}\delta_7 + S_{88}\theta_8 \\
&\qquad + S_{89}\delta_9 + \mu^{3}_{43} = R_8 \\
&S_{91}\theta_1 + S_{92}\theta_2 + S_{93}\delta_3 + S_{94}\delta_4 + S_{95}\delta_5 + S_{96}\theta_6 + S_{97}\delta_7 + S_{98}\theta_8 \\
&\qquad + S_{99}\delta_9 + V^{3}_{43} = R_9
\end{aligned}
$$

expresando (1.10) matricialmente se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} \\ S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} \\ S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} \\ S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99} \end{bmatrix}}_{[S_{kl}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \theta_8 \\ \delta_9 \end{Bmatrix}}_{\{\delta\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \mu_{21}^1 + \mu_{23}^2 \\ \mu_{32}^2 + \mu_{34}^3 \\ V_{21}^1 + V_{21}^3 \\ V_{23}^2 \\ V_{32}^2 \\ \mu_{12}^1 \\ V_{12}^1 \\ \mu_{43}^3 \\ V_{43}^3 \end{Bmatrix}}_{\{\mu\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix}}_{\{R\}} \quad (1.11)$$

Expresando (1.11) matricialmente con la notación indicada

$$[S_{kl}]\{\delta_i\} + \{\mu\}_k = \{R\} \qquad (1.12)$$

El analisis por el método de las rigideces se reduce a evaluar de (1.8) $\{\delta_i\}$ o sea

$$\{\delta_i\} = [S_{ij}]^{-1}\{Q_i\} \qquad (1.13)$$

y substituyendo (1.13) en (1.2) se obtiene para cada barra

$$\{m_i\} = [k]_i [S_{ij}]^{-1}\{Q_i\} + \{\mu\}_i \qquad (1.14)$$

y las reacciones se obtienen substituyendo (1.13) en (1.12)

$$\{R\} = [S_{kl}][S_{ij}]^{-1}\{Q_i\} + \{\mu\}_k \qquad (1.15)$$

2 METODO DE LAS RIGIDECES DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS TRIDIMENCIONALES

2.1 ELEMENTO VIGA

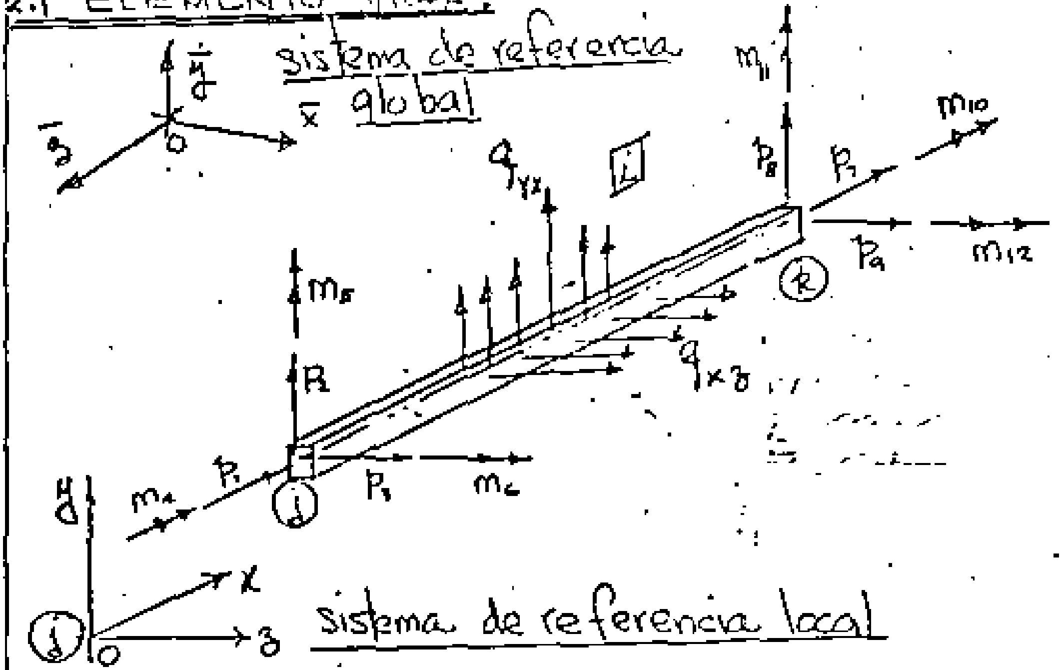


Fig. 2.1 Elemento viga; ejes y, z son centroidales y principales ($Q_Y = Q_z = I_{YZ} = 0$)

El elemento estructural $j \cdot k$, se supone una barra capaz de resistir fuerzas axiales, momentos flectores respecto a dos ejes principales en el plano de la sección transversal, y momentos de torsión respecto a su eje centroidal. Las siguientes fuerzas actuan en la viga $j\,k$: Fuerzas axiales p_1 y p_7; Fuerzas cortantes p_2, p_3, p_8 y p_9; Momentos flectores m_5, m_6, m_{11} y m_{12}; y Momentos de torsión m_4 y m_{10}. la localización y dirección positiva se muestra en Fig. 2.1

Los desplazamientos correspondientes serán $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{12}$ serán positivos en la dirección positiva de las fuerzas. La posición del elemento viga jk será especificado por las coordenadas del extremo j y los cosenos directores del eje x (dirección j-k) y del eje y con respecto al sistema global $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

La matriz de rigidez del elemento viga será de 12×12 pero siempre es posible integrarla con submatrices de 2×2 y 4×4. De la teoría de flexión y torsión de vigas las fuerzas p_1 y p_7 dependen solo de sus desplazamientos correspondientes; lo mismo es cierto para los momentos torsionantes m_4 y m_{10}. Sinembargo, para una selección arbitraria de los planos de flexión, los nomentos flectores y fuerzaz de corte en el plano xy dependerán no solo de sus dezplazamientos correspondientes pero también en los desplazamientos correspondientes a las fuerzas en los planos xy. Solamente si los xy y xz coinciden con los ejes principales de la sección transversal puede considerarse la flexión y corte sobre dichos planos independiente una de la otra.

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{Bmatrix}}_{\{p\}_i}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{2,10} & k_{2,11} & k_{2,12} \\
k_{31} & \cdot & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{3,12} \\
k_{41} & \cdot & \cdot & k_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{4,12} \\
k_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{55} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{5,12} \\
k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{6,12} \\
k_{71} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{77} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{7,12} \\
k_{81} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{88} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{8,12} \\
k_{91} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{99} & \cdot & \cdot & k_{9,12} \\
k_{10,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{10,10} & \cdot & k_{10,12} \\
k_{11,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{11,11} & k_{11,12} \\
k_{12,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{12,12}
\end{bmatrix}}_{[k_{ij}]}
\underbrace{\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\delta\}_i}
+
\underbrace{\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\mu\}_r}
\qquad (2.1)
$$

(simétrica)

Donde:

$\{p\}$; vector de cargas actuando sobre jk

$[k_{ij}]$; matriz de rigidez de la barra jk

$\{\delta\}$; vector de desplazamientos nodales

$\{\mu\}$; vector de reacciones de empotramiento perfecto.

2.2 Elementos de la matriz de rigidez $[k_{ij}]$.

En el cálculo de las rigideces k_{ij} se utilizan los principios energéticos expuestos considerándose la energía elástica de deformación por flexión corte y carga normal.

2.2.1 Fuerzas axiales P_1 y P_7.

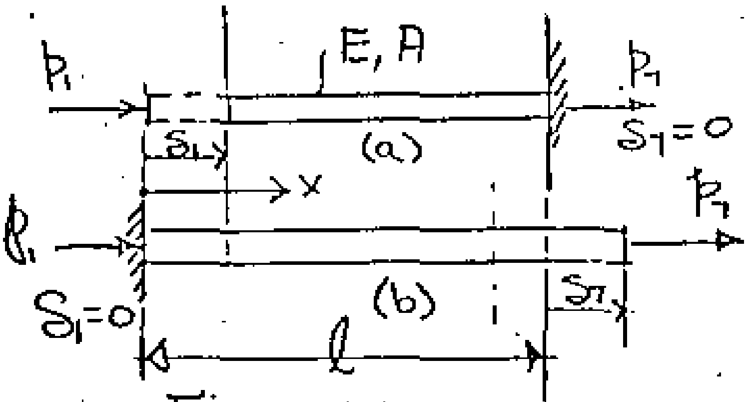


Fig. 2.2.1.1

De la ley de Hooke y la Fig. 2.2.1.2 se obtiene

$$k_{11}=\frac{P_1}{\delta_1}=\frac{EA}{\ell} \quad ; \quad k_{71}=-\frac{EA}{\ell} \qquad (a)$$

$$k_{77}=\frac{P_7}{\delta_7}=\frac{EA}{\ell} \quad ; \quad k_{17}=-\frac{EA}{\ell} \qquad (b)$$

2.2.2 Momentos de torsión m_4 y m_{10}.

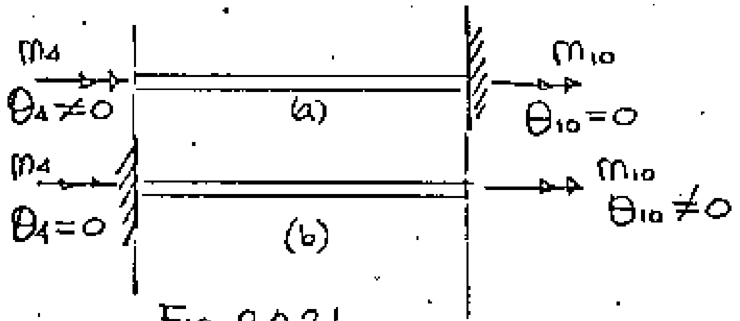


Fig. 2.2.2.1

De la teoría de torsión de barras y la fig. 2.2.2.1 se obtiene

$$k_{44} = \frac{m_4}{\theta_4} = \frac{GJ}{\ell} \quad ; \quad k_{10,4} = -\frac{GJ}{\ell} \qquad (a)$$

$$k_{10,10} = \frac{m_{10}}{\theta_{10}} = \frac{GJ}{\ell} \quad ; \quad k_{4,10} = -\frac{GJ}{\ell} \qquad (b)$$

2.2.3 Fuerzas de corte p_2 y p_8.

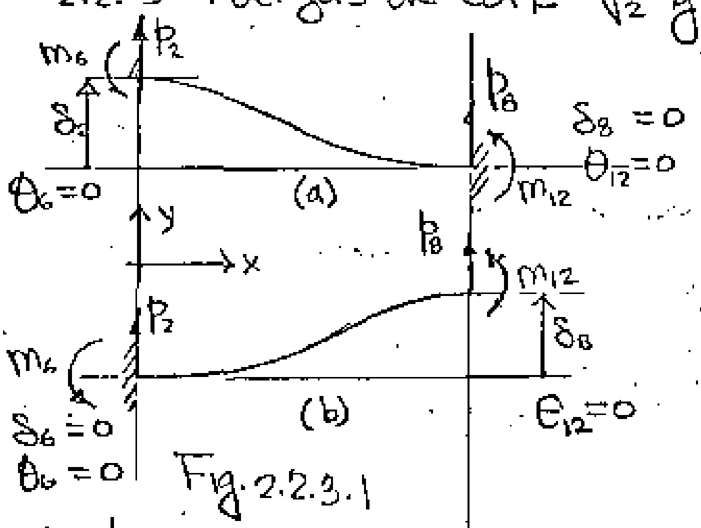


Fig. 2.2.3.1

De la Fig. 2.2.3.1 y los principios energéticos previamente expuestos, conidεrando la energía de deformación por flexión y cortante se obtiene

$$k_{22} = \frac{p_2}{\delta_2} = \frac{12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \qquad a$$

$$k_{62} = \frac{m_6}{\delta_2} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \; ; \; k_{26} = \frac{p_2}{\theta_6} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \qquad b$$

$$k_{82} = \frac{p_8}{\delta_2} = \frac{-12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \; ; \; k_{28} = \frac{p_2}{\delta_8} = \frac{-12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \qquad c$$

$$k_{12,2} = \frac{m_{12}}{\delta_2} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \; ; \; k_{2,12} = \frac{p_2}{\theta_{12}} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \qquad d$$

$$k_{88} = \frac{p_8}{\delta_8} = \frac{p_2}{\delta_2} = \frac{-12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \quad (\text{si } EI \text{ es constante}) \qquad e$$

$$k_{12,8} = \frac{m_{12}}{\delta_8} = \frac{-6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} = -\frac{p_2}{\theta_6} = -k_{62} \qquad (f)$$

$$k_{8,12} = \frac{p_8}{\theta_{12}} = \frac{-6EI}{(1+\phi_Y)l^2} \qquad (g)$$

2.2.4 Momentos Factores

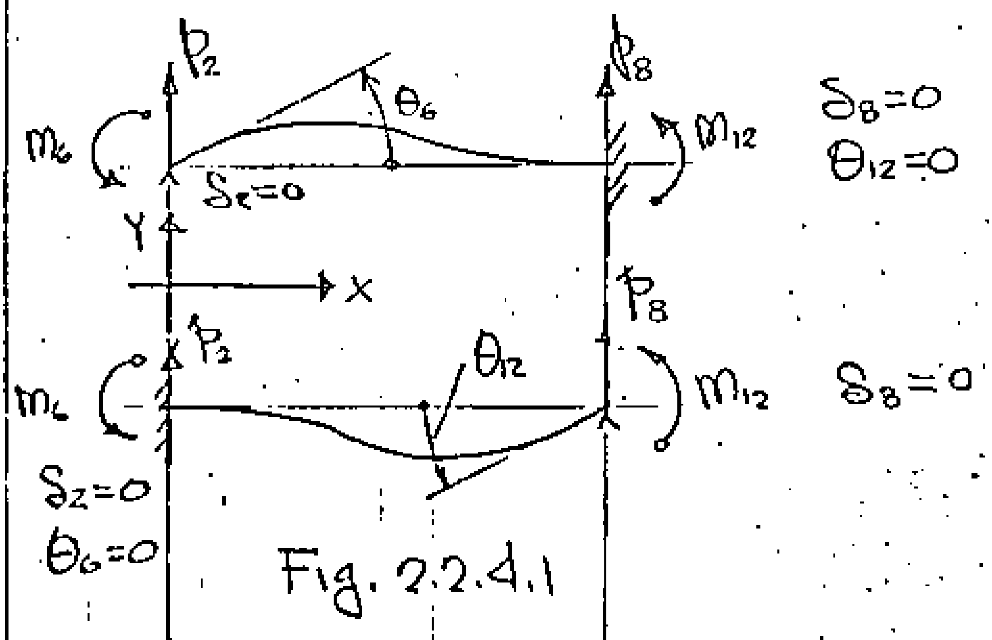


Fig. 2.2.4.1

De la Fig. 2.2.4.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y corte se obtiene

$$k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)l} \qquad a$$

$$k_{86} = \frac{p_8}{\theta_6} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)l^2} \;;\; k_{68} = \frac{m_6}{\delta_8} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)l^2} \qquad b$$

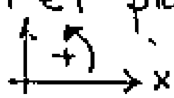
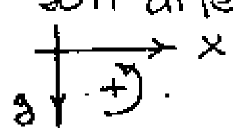
$$k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)l} \;;\; k_{6,12} = \frac{m_6}{\theta_{12}} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)l} \qquad c$$

$$k_{12,12} = \frac{m_{12}}{\theta_{12}} = \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)\,l} \qquad d$$

$$k_{8,12} = \frac{p_8}{\theta_{12}} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)l^2} \;;\; k_{12,8} = \frac{m_{12}}{\delta_8} = k_{8,12} \qquad e$$

$$k_{6,12} = \frac{m_6}{\theta_{12}} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)\,l} \;;\; k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = k_{6,12} \qquad f$$

2.2.5 Fuerzas de corte p_3 y p_9

Los coeficientes de rigidez relacionados con los desplazamientos δ_3 y δ_9 se obtienen de los resultados previos. Debe observarse, que con la convención de signos adoptada en la Fig 2.1 las direcciones de los momentos flectores positivos en el plano xy son diferentes al plano xz:   , la convención

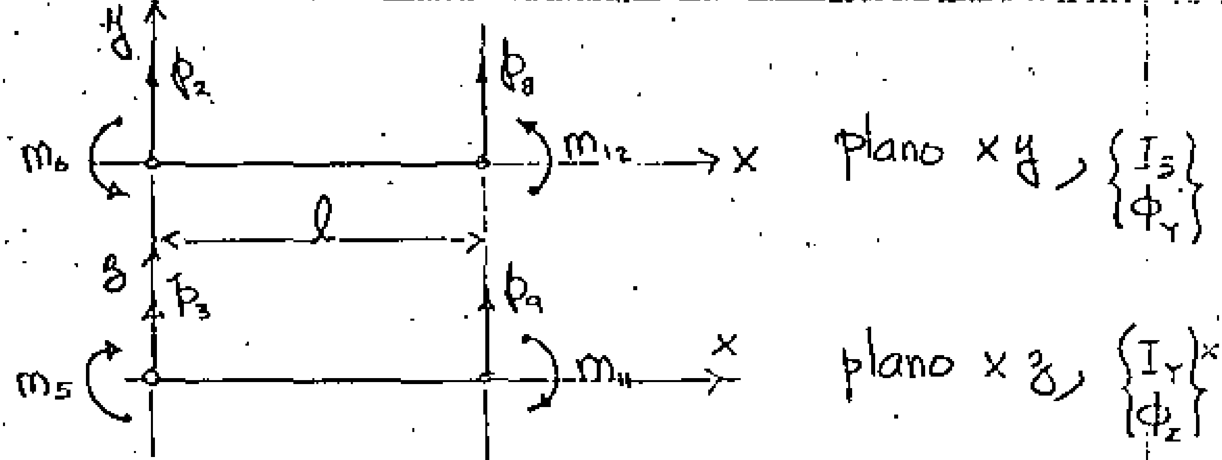


Fig. 2.2.5 Convención de signos para fuerzas de corte y momentos flectores;

de signos se muestra en la Fig. 2.2.5, basado en lo anterior es evidente que

$$k_{33} = \frac{p_3}{\delta_3} \equiv -k_{22} = -\frac{p_2}{\delta_2} \qquad a$$

$$k_{53} = \frac{m_5}{\delta_3} \equiv -k_{62} = -\frac{m_6}{\delta_2} \qquad b$$

$$k_{93} = \frac{p_9}{\delta_3} \equiv -k_{82} = -\frac{p_8}{\delta_2} \qquad c$$

$$k_{11,3} = \frac{m_{11}}{\delta_3} \equiv -k_{12,2} = -\frac{m_{12}}{\delta_2} \qquad d$$

$$k_{99} = \frac{p_9}{\delta_9} \equiv -k_{88} = -\frac{p_8}{\delta_8} \qquad e$$

$$k_{11,9} = \frac{m_{11}}{\delta_9} \equiv -k_{12,8} = -\frac{m_{12}}{\delta_8} \qquad f$$

Debe considerarse en el plano xz a I_y y ϕ_z como momento de inercia y parámetro de cortante.

2.2.6 Momentos Flectores m_5 y m_{11}

Aplicando las mismas observaciones de la sección anterior, se obtiene

$$k_{55} = \frac{m_5}{\theta_5} = k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4+\phi_3)}{1+\phi_3}\frac{EI_Y}{l} \qquad a$$

$$k_{95} = \frac{P_9}{\theta_5} = -k_{86} = -\frac{P_8}{\theta_6} = +\frac{6EI_Y}{(1+\phi_3)l} = k_{59} \qquad b$$

$$k_{11,5} = \frac{m_{11}}{\theta_5} = k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2-\phi_3)EI_Y}{(1+\phi_3)l} = k_{5,11} \qquad c$$

substituyendo los valores k_{ij} obtenidos en las subsecciones anteriores se obtiene la matriz de rigidez de la barra jk de la Fig. 2.1 ecuación 2.5. en donde

$$\phi_Y = \frac{12EI_3}{GA_{sY}l^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_{sY}}\left(\frac{r_3}{l}\right)^2 = \frac{12f_YEI_3}{GAl^2} \qquad (2.3)$$

$$\phi_Z = \frac{12EI_Y}{GA_{sZ}l^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_{sZ}}\left(\frac{r_Y}{l}\right)^2 = \frac{12f_ZEI_Y}{GAl^2}$$

ν = relación de Poisson, A = área total de la sección, A_{sY} y A_{sZ} = areas efectivas en cortante en direcciones y y z resp. r_Y y r_3 = radios de giro respecto a y y resp. a x. ϕ_Y y ϕ_3 = Parámetros de deformación de corte. Si r_3/l y r_Y/l son pequeños comparados con la unidad como son en elementos flexibles, ambos ϕ_Y y ϕ_3 se pueden considerar cero. Los factores de forma son.

$$f_Y = \frac{A}{I_3^2}\int_A\left(\frac{Q_3}{b_3}\right)^2 dA \;,\quad f_3 = \frac{A}{I_Y^2}\int_A\left(\frac{Q_Y}{b_Y}\right)^2 dA \qquad (2.4)$$

(Simétrica)

$$
[k_{ij}] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \theta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\Phi_y)} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3(1+\Phi_z)} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_y}{l(1+\Phi_z)} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{l(1+\Phi_y)} & & & & & & \\
\frac{-EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & & & & & \\
0 & \frac{-12EI_z}{l^3(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\Phi_y)} & & & & \\
0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3(1+\Phi_z)} & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(2-\Phi_z)EI_y}{l(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_y}{l(1+\Phi_z)} & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{l(1+\Phi_y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{1+\Phi_y}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12}
\end{array}
$$

Para problemas Bi-dimensionales, el elemento viga jk se reduce a seis fuerzas y momentos nodales y seis desplazamientos y rotaciones nodales. Utilizando

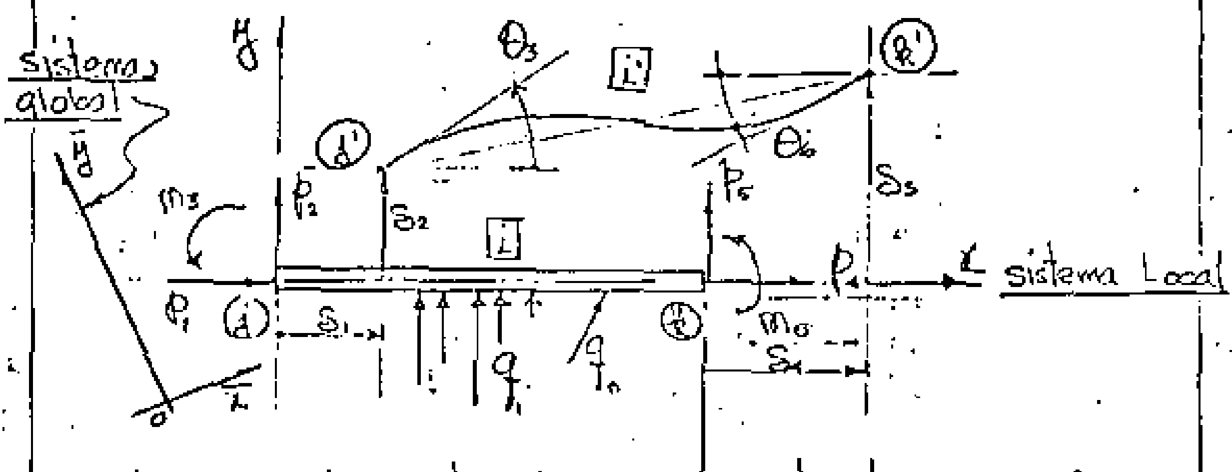


Fig. 2.2 Elemento viga para estructuras bidimensionales

la nomenclatura de la Fig. 2.2 (2.1) queda en

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ m_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ m_6 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{26} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ k_{61} & & & & & k_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \mu_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_i \quad (2.6)$$

o sea:

$$\{p\}_i = [k_{ij}]_i \{\delta\}_i + \{\mu\}_i \quad (2.7)$$

De los resultados discutidos previamente la matriz de rigidez de la barra i figura 2.2 queda

$$
[k_{ij}]_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \delta_1 & \delta_2 & \theta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \theta_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
\frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\Phi_y)} & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{l(1+\Phi_y)} & & & \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\
0 & \frac{-12EI_z}{l^3(1+\Phi_y)} & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\Phi_y)} & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{l(1+\Phi_y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{l(1+\Phi_y)}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{array}
\qquad (2.8)
$$

Si las deformaciones por cortante son despreciables esto es, $\Phi_y = 0$, la matriz de rigidez (2.8) se simplifica a

$$
[k_{ij}] = \frac{EI_z}{l^3}\left[\begin{array}{cccccc}
\frac{Al^2}{I_z} & & & & & \\
0 & 12 & & & & \\
0 & 6l & 4l^2 & & & \\
-\frac{Al^2}{I_z} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I_z} & & \\
0 & -12 & -6l & 0 & 12 & \\
0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2
\end{array}\right] \qquad (2.9)
$$

La ecuación matricial relacionando los desplazamientos entre el sistema coordenado local y el global. Puede fácilmente demostrarse para el elemento viga mostrado en Fig. 2.1 es de la forma

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\delta\}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \bar{\lambda}_{ox} & & & \\ \bar{\lambda}_{oy} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_{oz} & & & \\ \hline & \bar{\lambda}_{ox} & & \\ 0 & \bar{\lambda}_{oy} & 0 & 0 \\ & \bar{\lambda}_{oz} & & \\ \hline & & \bar{\lambda}_{ox} & \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_{oy} & 0 \\ & & \bar{\lambda}_{oz} & \\ \hline & & & \bar{\lambda}_{ox} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_{oy} \\ & & & \bar{\lambda}_{oz} \end{array}\right]}_{[\lambda]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\bar{\delta}\}} \qquad (2.10)
$$

o sea $\{\delta\} = [\lambda]\{\bar{\delta}\}$ (2.11)

donde

$$
\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{ox} &= [\, l_{ox} \;\; m_{ox} \;\; n_{ox} \,] \\
\bar{\lambda}_{oy} &= [\, l_{oy} \;\; m_{oy} \;\; n_{oy} \,] \\
\bar{\lambda}_{oz} &= [\, l_{oz} \;\; m_{oz} \;\; n_{oz} \,]
\end{aligned}
\qquad (2.12)
$$

representa las matrices de los cosenos directores para las direcciones $0x$, $0y$ y $0z$, respectivamente, referidas al sistema global $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$, y $\{\bar{\delta}\}$ representa los desplazamientos de la barra $\boxed{i}$ respecto al sistema global.

Para problemas bidimensionales la matriz de transformación $[\lambda]$ se reduce a

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

El analisis de marcos tridimensionales se puede describir por las mismas ecuaciones básicas usadas en la descripción del analisis de estructuras planas. Considerando el sistema total, el equilibrio estático nodal es definido por la ecuación matricial

$$[S_c]\{\delta_c\} + \{\mu_c\} = \{R_c\} \qquad (2.14)$$

donde:

$[S_c]$ = Matriz de rigidez completa de la estructura.

$[\delta_c]$ = Vector de desplazamientos nodales completo.

$\{\mu_c\}$ = Vector de cargas nodales completo.

$\{R\}$ vector de reacciones de la estructura

y de (2.14) se obtiene la ecuación

$$[S_{uu}]\{\delta_u\}+\{\mu_u\}=0 \qquad (2.15)$$

de donde se obtiene $\{\delta_i\}$ y $\{\delta_c\}$, el que substituyéndolo en (2.14) y (2.1) se obtiene $\{R_c\}$ y $\{P\}_i$ como

$$\{R_c\}=-[S_c][S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} \qquad (2.16)$$

$$\{P\}_i=[k_{ij}]_i[S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\}+\{\mu\}_i \quad (i=1,2,\dots,n) \qquad (2.17)$$

Ejemplo: En el sistema estructural de la Fig. 2.3, determine las reacciones nodales $\{P\}_i$ en los extremos de cada miembro y las reacciones originadas por las cargas indicadas.

La estructura tiene miembros prismáticos con las siguientes propiedades:

$$EI_y = EI_z = EI$$
$$GI_x = \frac{EI}{4} \qquad (2.18)$$
$$EA_x = \frac{EI}{4}$$

la estructura es flexible y se puede considerar la ($\phi_y=\phi_z$) deformación por cortante despreciable

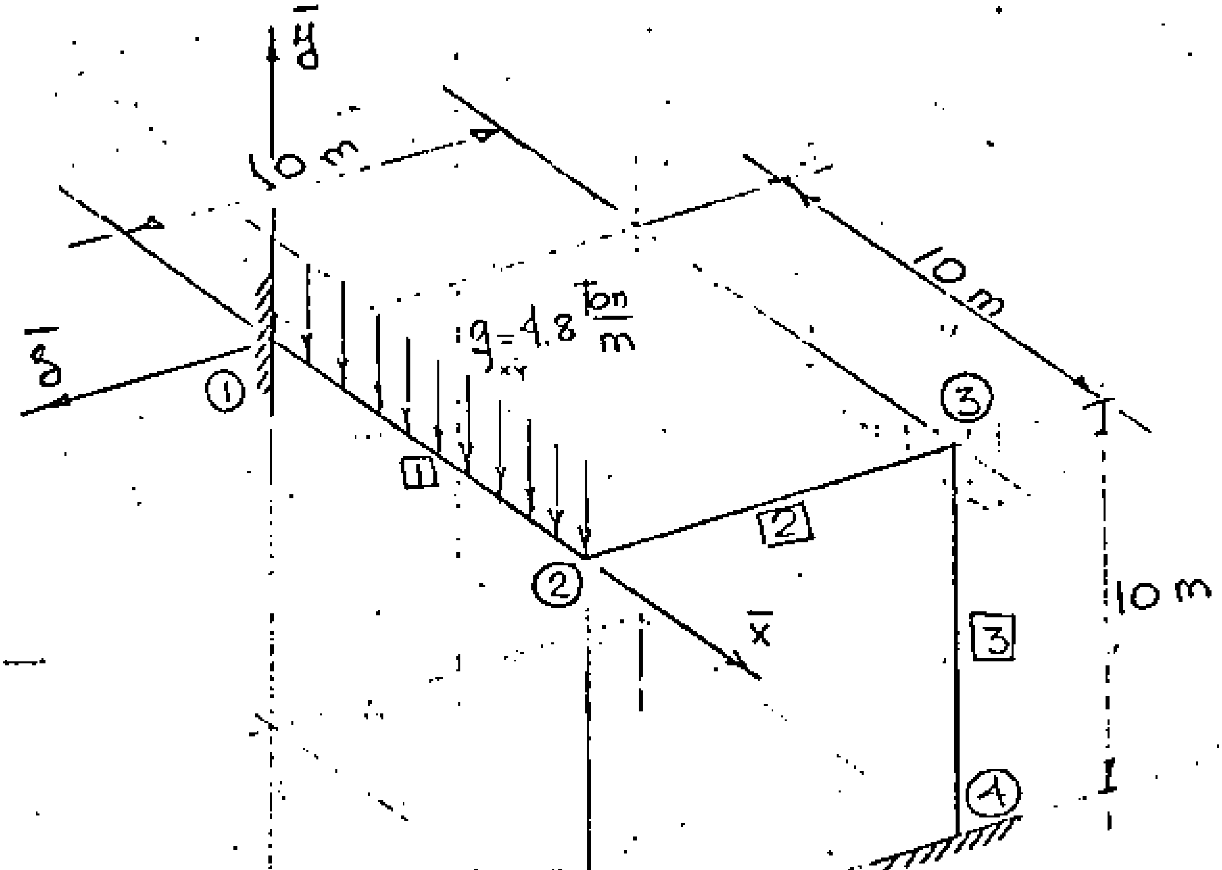


Fig. 2.3 Estructura espacial rígida

Las tablas 2.1 y 2.2 dan la información requerida para cada nodo y miembro

Nodo	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0	-10.00
4	10.0	-10.00	-10.00

Tabla 2.1 coordenadas nodales en metros.

Barra	Longitud (m)	Nodo j	Nodo k	Cosenos directores $\ell_{\bar{o}\ell}$	$m_{\bar{o}\ell}$	$n_{\bar{o}\ell}$	TIPO DE TRANSFORMACION	Angulo ψ
1	10.0	1	2	+1	0	0	y - z - x	0
2	10.0	2	3	0	0	-1	y - z - x	0
3	10.0	4	3	0	+1	0	z - y - x	90°

Tabla 2.2 longitudes, cosenos directores y tipos de transformación.

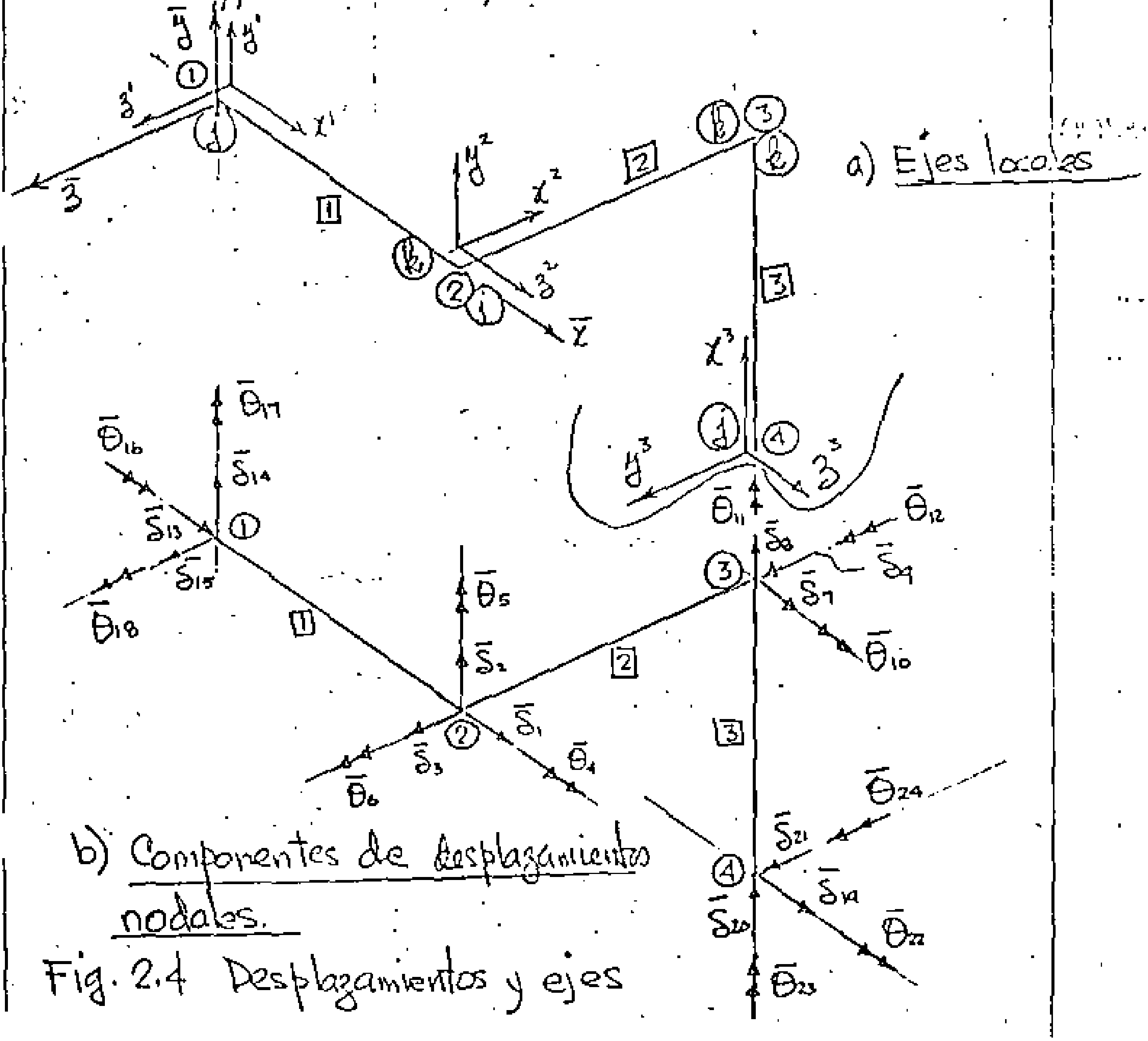


Fig. 2.4 Desplazamientos y ejes

vector columna de desplazamientos nodales $\{\delta_c\}$

$$\{\delta_c\} = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \\ \hline \bar{\delta}_{13} \\ \bar{\delta}_{14} \\ \bar{\delta}_{15} \\ \bar{\theta}_{16} \\ \bar{\theta}_{17} \\ \bar{\theta}_{18} \\ \bar{\delta}_{19} \\ \bar{\delta}_{20} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\theta}_{22} \\ \bar{\theta}_{23} \\ \bar{\theta}_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_u\} \\ \hline \{\delta_r\} \end{Bmatrix} \qquad (2.19)$$

Matriz de rigidez de cada miembro

Para cada elemento viga la matriz de rigidez se establece por medio de (2.1) con respecto a los ejes locales; la matriz de transformación se puede establecer por medio de la expresión (2.10); y la matriz de rigidez de miembro transformada, $[\bar{k}_{ij}]_i$ respecto al sistema global se obtiene de

$$[\bar{k}_{ij}]_i = [\lambda]_i^T \, [k_{ij}]_i [\lambda]_i \qquad (2.20)$$

Miembro $\boxed{1}$

$$[\lambda]_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = [I] \quad ; \quad [\bar{k}_{ij}]_1 = [I]^T [k_{ij}]_1 [I]$$

$$= [k_{ij}]_1 \qquad (2.21)$$

$$[\bar{k}_{ij}]_1 = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .060 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .060 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.060 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.060 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad (2.22)$$

Miembro $\boxed{2}$ De (2.5) se obtiene:

$$[k_{ij}]_2 = EI \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

De (2.12); $\bar{\lambda}_{ox_2} = [0\ 0\ -1]_2$, $\bar{\lambda}_{oy_2} = [0\ 1\ 0]_2$, $\bar{\lambda}_{oz_2} = [1\ 0\ 0]_2$ $\qquad (2.12)_a$

Subst. $(2.12)_a$ en (2.10) se obtiene

$$[\lambda]_2 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ 0 & & & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

Subst (2.24) y (2.23) en (2.20) se obtiene

$$[\bar{k}_{ij}]_2 = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .4 & 0 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \qquad (2.25)$$

Miembro [3], De (2.5) se obtiene la matriz de rigidez la cual resulta igual a la de los miembro [1] y [2]

$$[k_{ij}]_3 = [k_{ij}]_2 = [k_{ij}]_1 \qquad (2.26)$$

De (2.12) se obtiene

$$\bar{\lambda}_{ox_3} = [0\ 1\ 0]_3,\quad \bar{\lambda}_{oy_3} = [0\ 0\ 1]_3,\quad \bar{\lambda}_{oz_3} = [1\ 0\ 0]_3 \qquad (2.27)$$

De (2.27) y (2.10) se obtiene

$$[\lambda]_3 = \begin{bmatrix} \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix} & \\ 0 & & & \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix} \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

De (2.20) (2.26) y (2.28) se obtiene

$$[k_{ij}]_3 = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .012 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 \\ 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.012 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .012 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \qquad (2.29)$$

Matriz de rigidez de la estructura.

La matriz completa de la estructura $[S_c]$ se obtiene sumando los coeficientes de rigidez de miembro dados en las expresiones (2.22), (2.25) y (2.29) con respecto a la identificación de subíndices de los elementos se obtiene

$$
[S_c] = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc}
.037 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 \\
0 & .024 & 0 & .06 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .037 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .06 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\
-.06 & 0 & .06 & 0 & 0.8 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 \\
-.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .024 & 0 & 0 & 0 & .06 & .06 \\
0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .037 & 0 & -.06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .037 & -.06 & 0 & 0 \\
0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.06 & .8 & 0 & 0 \\
-.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .425 \\
\hdashline
-.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2
\end{array} \right] \end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{array}
= \left[\begin{array}{c} [S_{uu}] \\ \hdashline [S_{ru}] \end{array} \right] \quad (2.30)
$$

De (2.30) se obtiene $[S_{uu}]^{-1}$

$$
[S_{\mu\mu}]^{-1} = \frac{1}{EI}
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
38.396 & 1.266 & -6.236 & 0.001 & 1.750 & 0.085 & 11.279 & -0.403 & -5.028 & -0.503 & 3.005 & -1.578 \\
1.266 & 210.745 & -43.160 & -21.908 & 5.487 & 30.182 & -39.151 & 11.279 & -50.707 & -13.286 & 3.124 & 7.303 \\
-6.236 & -43.160 & 102.028 & 2.421 & -11.235 & -6.537 & 50.707 & 5.028 & 84.038 & 9.312 & -2.752 & -7.543 \\
0.001 & -21.908 & 2.421 & 5.546 & -0.346 & -3.130 & 3.124 & 3.005 & 2.752 & 0.688 & -0.278 & -0.625 \\
1.750 & 5.487 & -11.235 & -0.346 & 3.048 & 0.888 & -13.286 & -0.503 & -9.312 & -1.061 & 0.688 & 1.928 \\
0.085 & 30.182 & -6.537 & -3.130 & 0.888 & 6.698 & -7.303 & 1.587 & -7.543 & -1.928 & 0.625 & 1.425 \\
11.279 & -39.151 & 50.707 & 3.124 & -13.286 & -7.303 & 210.745 & 1.266 & 43.160 & 5.487 & -21.908 & -30.182 \\
-0.403 & 11.279 & 5.028 & 3.005 & -0.503 & 1.587 & 1.266 & 38.396 & 6.236 & 1.757 & 0.001 & -0.085 \\
-5.028 & -50.707 & 84.038 & 2.752 & -9.312 & -7.543 & 43.160 & 6.236 & 102.028 & 11.235 & -2.421 & -6.537 \\
-0.503 & -13.286 & 9.312 & 0.688 & -1.061 & -1.928 & 5.487 & 1.750 & 11.235 & 3.048 & -0.346 & -0.888 \\
3.005 & 3.124 & -2.752 & -0.278 & 0.688 & 0.625 & -21.908 & 0.001 & -2.421 & -0.346 & 5.546 & 3.130 \\
-1.587 & 7.303 & -7.543 & -0.625 & 1.928 & 1.425 & -30.182 & -0.085 & -6.537 & -0.888 & 3.130 & 6.698
\end{bmatrix}
$$

D. Ballesteros

DESFI-UNAM

Vector de momentos y reacciones fijas miembro $\boxed{1}$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ \mu_{16} \\ \mu_{17} \\ \mu_{18} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \end{Bmatrix}_1 = \{\bar{\mu}\}_1 \tag{2.32}$$

$$\{\bar{\mu}\}_1 = [\lambda]_1^T \{\mu\}_1 \tag{2.33}$$

$$\{\mu\}_2 = 0 \quad ; \{\bar{\mu}\}_2 = 0$$

$$\{\mu\}_3 = 0 \quad ; \{\bar{\mu}\}_3 = 0$$

Habiendo definido las cargas nodales en terminos de las acciones fijas en los extremos con respecto a los ejes de referencia, se deduce el vector de cargas nodales completo $\{\mu_c\}$, como.

$$\{\mu_c\} = \left\{\begin{array}{c}\{\mu_u\}\\ \hline \{\mu_r\}\end{array}\right\} = \left(\begin{array}{c} 0\\ -24\\ 0\\ 0\\ 0\\ 40.0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ -24\\ 0\\ 0\\ 0\\ -40.0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9\\ 10\\ 11\\ 12\\ 13\\ 14\\ 15\\ 16\\ 17\\ 18\\ 19\\ 20\\ 21\\ 22\\ 23\\ 24 \end{array} \qquad (2.34)$$

Etiqueta de grados de libertad

Substituyendo (2.21) y (2.34) en (2.15) se obtiene

$$\{\delta_u\} = [S_{uu}]^{-1}\{\mathcal{U}_u\} \qquad (2.35)$$

$$\{\bar{\delta}_u\} = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix} \qquad (2.36)$$

Los valores de los desplazamientos dados por (2.36) con respecto al sistema global son valores relativos, para obtener los valores se substituye E en ton/m² e I en m⁴ en (2.36) y se obtiene δ_i en metros y θ en radianes.

Acciones Finales en los extremos.

Habiendo evaluado las componentes de los desplazamiento nodales con respecto al sistema global de referencia por medio de (2.10) se evaluan con respecto a las coordenadas locales de cada barra y las acciones finales para cada miembro de la estructura se calculan de (2.1)

$$\{p\}_i = [k_{ij}][\lambda]_i\{\bar{S}\}_i + \{\mu\}_i \tag{2.37}$$

De la Fig. 2.4 se tiene para el miembro $\boxed{1}$

$$\{\bar{S}\}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{13} \\ \bar{\delta}_{14} \\ \bar{\delta}_{15} \\ \bar{\theta}_{16} \\ \bar{\theta}_{17} \\ \bar{\theta}_{18} \\ \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \end{Bmatrix}_1 \tag{2.38}$$

De (2.21), (2.38), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{p\}_1 = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ Ton-m} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ Ton} \\ 10.0 \text{ Ton-m} \\ 8.0 \text{ Ton-m} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \end{Bmatrix} \qquad (2.39)$$

(indices según convención Fig. 2.4)

Miembro $\boxed{2}$. $\{\bar{\delta}\}_2 = \{\delta_u\} = [\lambda]_2 \{\bar{\delta}_u\}$ y $\{\mu\}_2 = \{0\}$.
De , (2.24) (2.25), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{p\}_2 = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.5 \text{ Ton} \\ -5.2 \text{ ''} \\ 0.7 \text{ ''} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \\ -8.0 \text{ ''} \\ -10.0 \text{ ''} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ ''} \\ -8.5 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ ''} \\ -41.8 \text{ ''} \end{Bmatrix} \qquad (2.40)$$

(indices según convención Fig. 2.4)

Miembro $\boxed{3}$

$$\{\bar{S}\}_3 = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{19} \\ \bar{\delta}_{20} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\theta}_{22} \\ \bar{\theta}_{23} \\ \bar{\theta}_{24} \\ \bar{\delta}_{7} \\ \bar{\delta}_{8} \\ \bar{\delta}_{9} \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix}_3 \qquad (2.41)$$

en $\boxed{3}$ También $\{\mu\}_3 = 0$, De (2.28) (2.29), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ -} \\ 1.2 \text{ Ton-m} \\ 15.2 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ ''} \\ -5.2 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ ''} \\ 0.7 \text{ ''} \\ -1.2 \text{ Ton-m} \\ -8.5 \text{ ''} \\ 41.8 \text{ ''} \end{Bmatrix}_3 \qquad (2.42)$$

Reacciones.

Substituyendo las matrices apropiadas en

$$\{R\} = [S_{ru}]\{\delta_u\} - \{\mu_r\}$$

se obtiene

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{14} \\ R_{15} \\ R_{16} \\ R_{17} \\ R_{18} \\ R_{19} \\ R_{20} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \\ R_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ "} \\ -3.5 \text{ "} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ "} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ "} \\ 3.5 \text{ "} \\ -6.6 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ "} \\ 15.2 \text{ "} \end{Bmatrix} \qquad 2.43$$

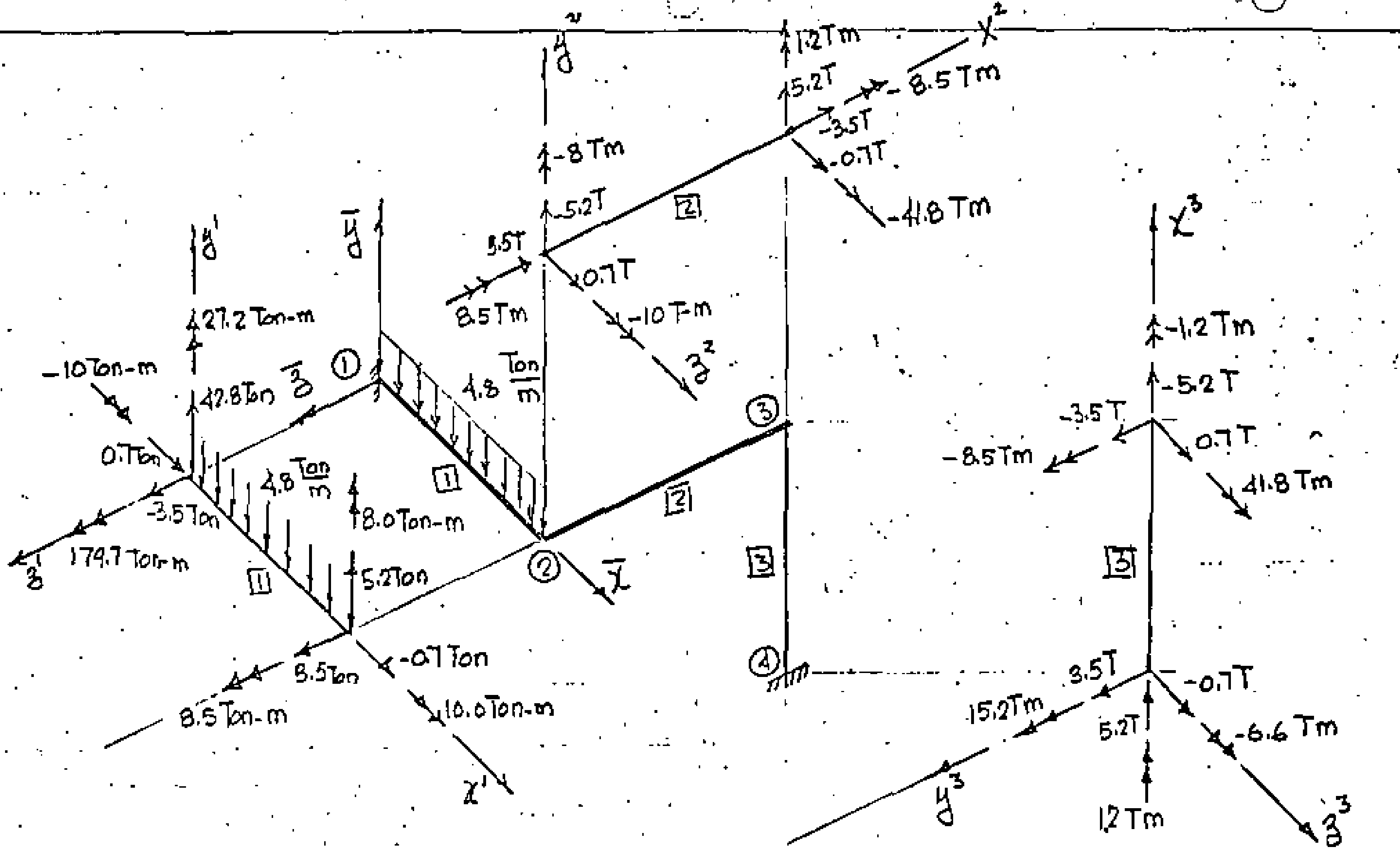


Fig. 2.5 Componentes de acciones finales $\{P_i\}$ en los extremos j k

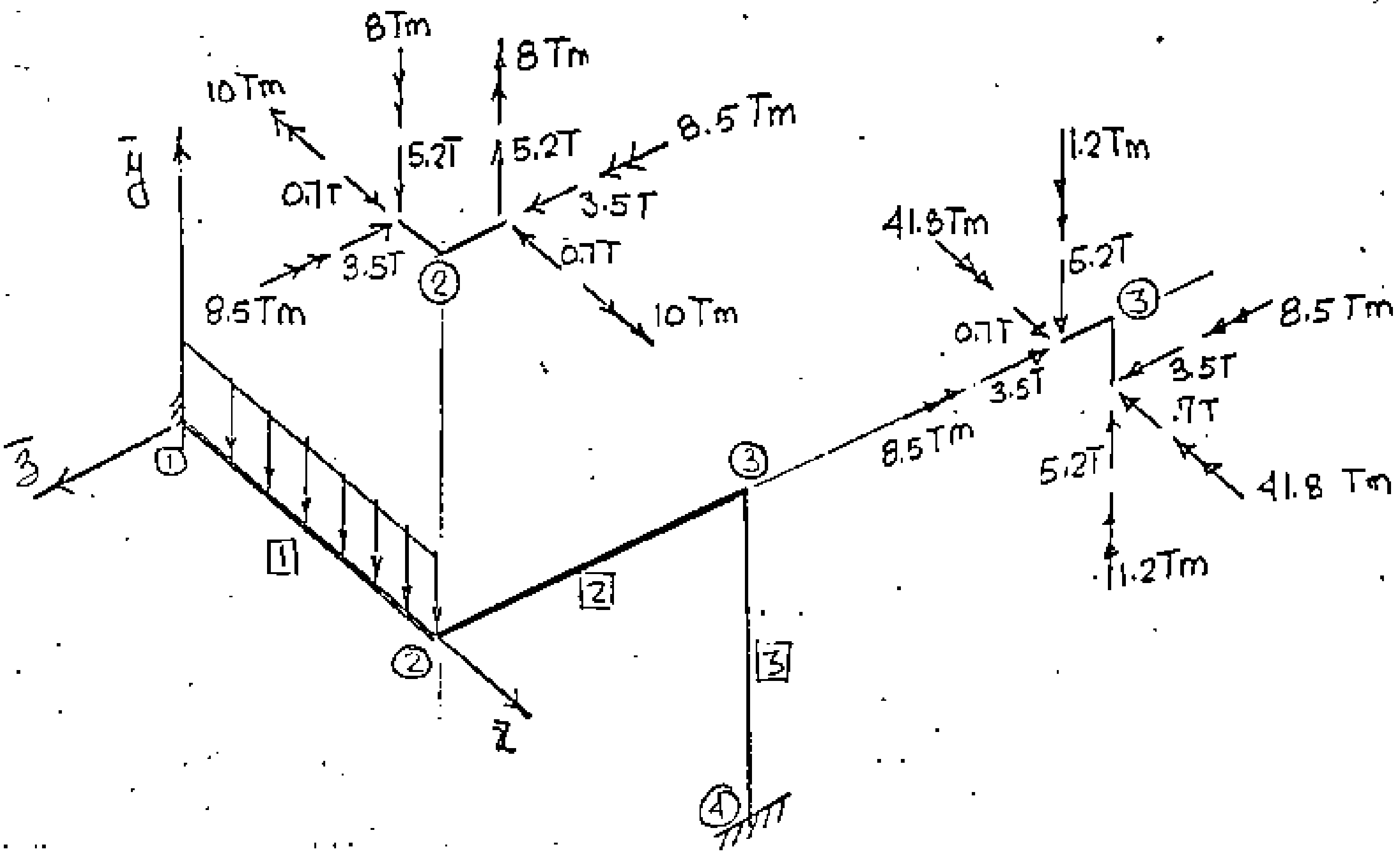


Fig.2.6 Diagrama de cuerpo libre de los nodos ② y ③

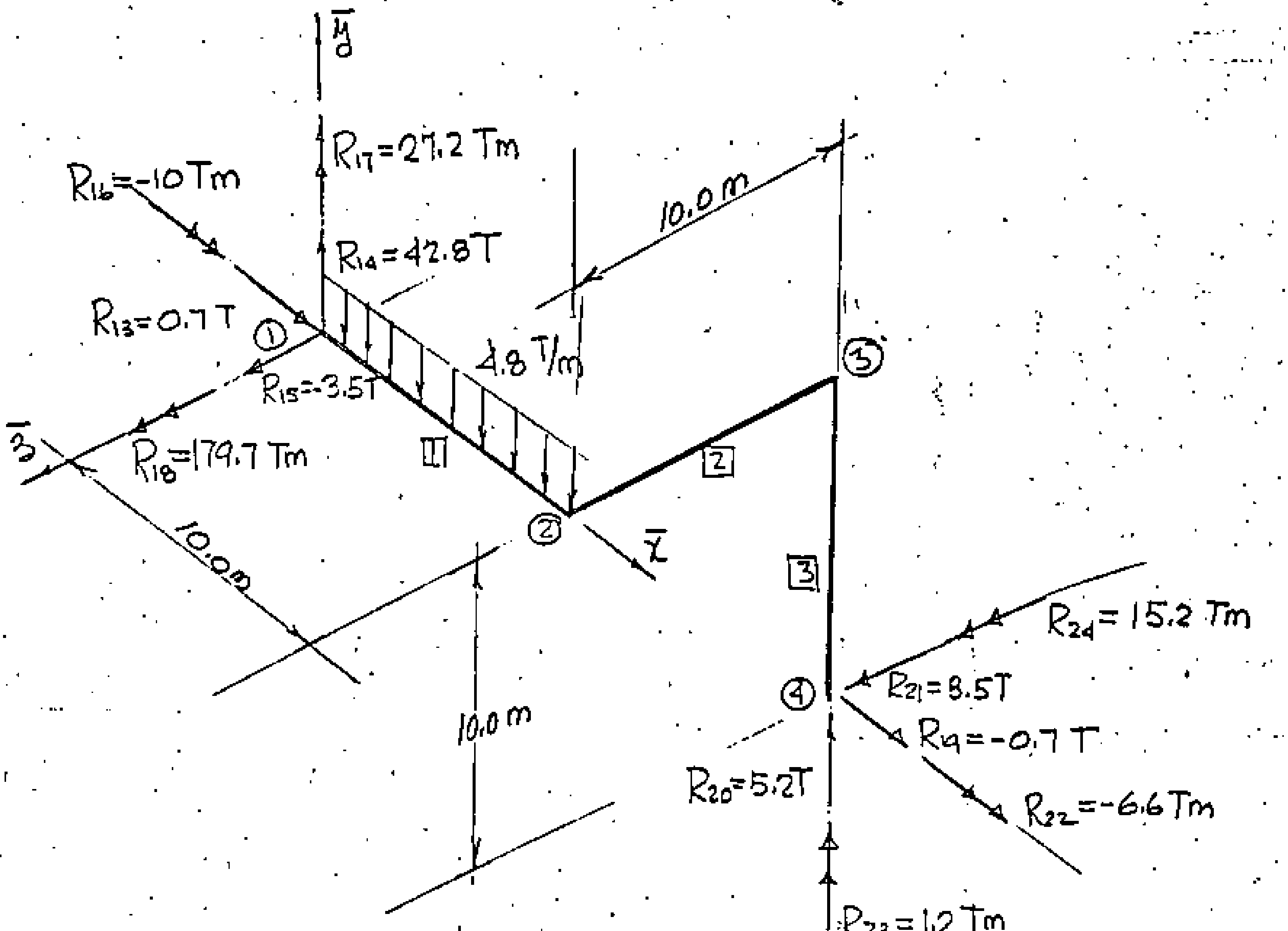


Fig. 2.7 Componentes de las reacciones en los apoyos 1 y 4

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

METODO DE LAS RIGIDECES

APLICACION EN LA PRACTICA

ESTUDIO DE LA FALLA DE UN TUNEL DE FERROCARRIL

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

M. EN I. M. A. BRAVO

MAYO, 1984

BALLESTEROS, S. A.
ingenieros consultores
NEVADO 125 MEXICO 13, D. F. TEL. 593-41-25

ESTUDIO DE LA FALLA DE LOS TUNELES 1 Y 2 UBICADOS EN "EL SALTO" ESTADO DE HIDALGO

A N T E C E D E N T E S

B A L L E S T E R O S, S. A.
ingenieros consultores
NEVADO 125 MEXICO 13, D. F. TEL. 595-11-25

I. ANTECEDENTES

El grupo Constructora General del Norte, S.A. solicitó a Balles - teros, S.A., un estudio sobre la causa de la Falla de la sección Transversal de los Túneles 1, y 2 ubicados en "El Salto" estado - de Hidalgo. Para ello proporcionó la siguiente información :

(1) Plano estructural No. V.F. 049, de la Dirección General de -- Construcción de Vías Férreas, Departamento de Estructuras de la - oficina de Estudios y Proyectos, De fecha Enero de 1980.

(2) Estudio Geotécnico en el Sitio de los Túneles 1, y 2 de la -- línea México - Querétaro, ubicados cerca de "El Salto", Hidalgo , efectuado por Proyectos de Ingeniería y Diseño, S.A., de fecha No viembre 5 de 1979.

(3) Reporte fotográfico de las fallas, efectuado por Constructora General del Norte, S.A.

II. TRABAJOS DE CAMPO

Se presentó un análisis preliminar de la causa de la falla. Esta sucedió cuando el relleno que se estaba colocando alcanzó un espesor de 27.8 metros respecto a la cúspide de la sección del túnel (Fig. 1). Las características de la falla se pueden ver en el reporte fotográfico (3).

III. CARACTERISTICAS MECANICAS DE LOS MATERIALES.

a) Sección del túnel.- Tiene un concreto de una resistencia a la a la compresión simple $f'_c = 150\,{}^{kg}/cm^2$ a los 28 días de colado, - su módulo tangente de elasticidad se puede considerar $Ec = 1.5 \times 10^6 \frac{ton}{cm^2}$, y la relación de Poisson $\gamma_c = 0.15$. El acero de la refuerzo en el límite elástico tiene un esfuerzo $f_Y = 4000\,{}^{kg}/cm^2$ con una deformación uniaxial
$\varepsilon_Y = 0.001$ y su módulo de elasticidad es
$Es = 2.1 \times 10^6\ {}^{kg}/cm^2$ (Ref (1)).

b) Relleno sobre el túnel.- Su procedimiento de construcción fué de corte con taludes de 1/4 a 1 y bermas de 5.0 m de plantilla cada 10.00 m de altura (Fig. 1). Los parámetros de resistencia del relleno los consideraremos similares a los de su estado natural del subsuelo: una cohesión $C = 15\,{}^{ton}/cm^2$, un ángulo de fricción - interna $\phi = 15°$ y un peso volumétrico $\gamma = 1.7 \frac{ton}{cm^3}$ (Ref. (2)).

IV. TRABAJOS DE GABINETE

a) *COMPRESION POR METRO DE TUNEL DEL MURO (1) Fig. 1.*

Peso relleno : $1.7 \frac{ton}{m^3} \times 27.8\ m \times 5.5\ m =$ 259.93 t

Peso arco (2) : $\frac{\pi}{2}$ Rad $\times 5.5\ m \times 1.0\ m \times 0.6\ m \times 2.4 \frac{ton}{m^3} =$ 12.44

Peso muro (1) : $1.0\ m \times 0.6\ m \times 4.4\ m \times 2.4 \frac{ton}{m^3} =$ 6.34

P_{1x} = Carga normal del muro (1) en 1 278.71 t

b) *PRESIONES SOBRE EL TUNEL*

$$q_v = \text{Presión Vertical} = 1.7 \frac{ton}{m^3} \times 27.8\ m + \frac{12.44\ ton/m}{5.5\ m}$$

$$= 47.26 \frac{ton}{m^2} + 2.26 \frac{ton}{m^2}$$

$$= 49.52 \frac{ton}{m^2}$$

La presión horizontal sobre el túnel se calcula del estado Activo de Rankine que se muestra en la Fig 2.

c) *ANALISIS DEL SISTEMA ESTRUCTURAL.-*

Analizando el sistema estructural mostrado en la Fig. 3, se obtiene para el punto 1 de la barra (1) los siguientes valores :

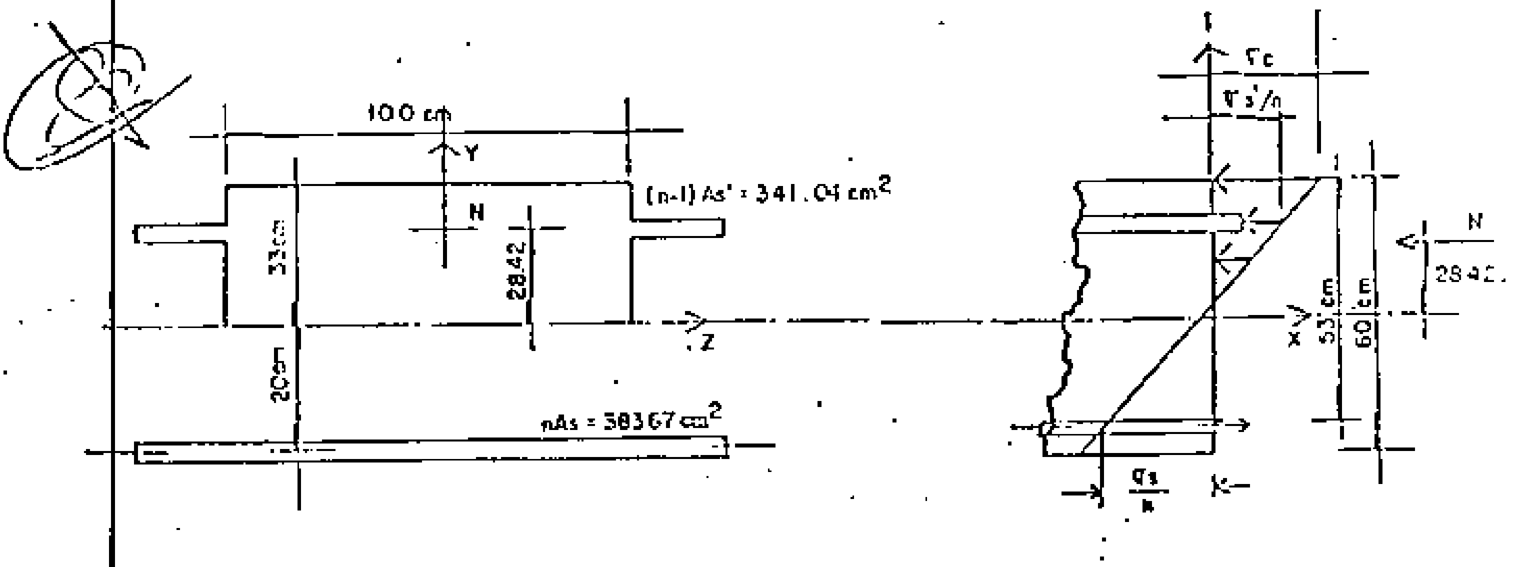
O

P'_{1x} = Carga normal = 278.71 ton

P'_{1_Y} = Corte = 131.8 "

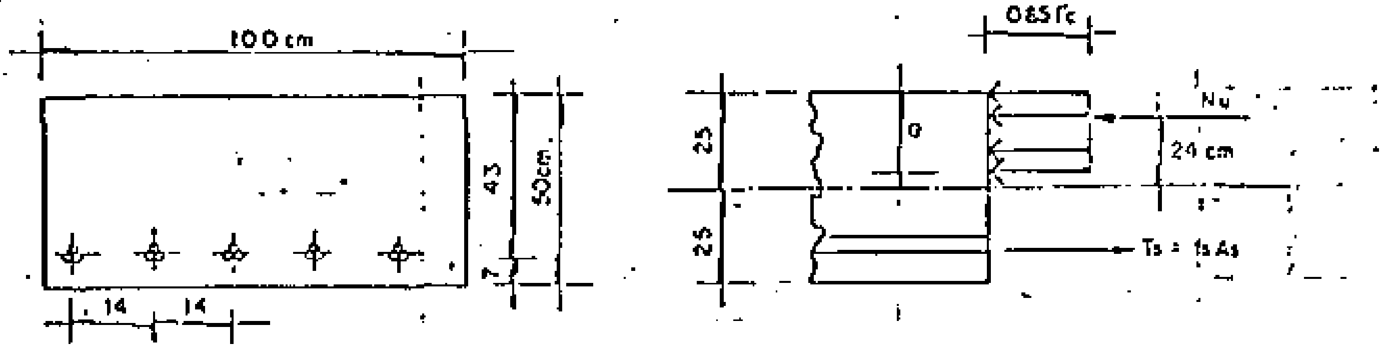
M'_{13} = Momento = $\pm$ 66.8 ton - m

d) ESFUERZOS EN 1 ANTES DE LA FALLA.



X,
Y

f) CARGA ULTIMA DEL MURO (1) DESPUES DE LA FALLA.



La carga de falla por compresión aceptando el rectángulo equivalente de esfuerzos de Ch. Withney es :

$$Nu = \frac{100 \times 50 \times 150}{\frac{3 \times 50 \times 24}{43^2} + 1.18} = 239\ 846.62 \text{ kg}$$

Comparándola con la compresión en 1 .

$$\frac{p'Nu}{1x} = \frac{239.9}{278.71} = 0.86 < 1.00$$

Significa que en 1 ya se formó una articulación plástica de falla, cuyo mecanismo se muestra en la Fig. 4

g). CARGA DE PANDEO DE LAS VARILLAS DE 5/8" (1 x 5875 cm) PARA $L = 150$ cm.

$$E = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2, \quad I = \frac{\pi \times 1.5875^4}{64} = 0.3118 \ cm^4$$

$$P_1 = \frac{\pi^2 \times 21 \times 10^6 \times .3118}{150^2} = 287.22 \ kg$$

$$\sigma_1 = \frac{287.22}{1.99} = 144.33 \ \frac{kg}{cm^2}$$

Para un paquete de 3 varillas

$$A = 3A_1 = 3 \times 1.99 = 5.97 \ cm^2$$

diámetro equivalente :

$$d_e = \sqrt{\frac{4 \times 5.97}{\pi}} = 2.75 \ cm$$

$$I_e = \frac{\pi d_e^4}{64} = \frac{3.14 \times 2.75^4}{64} = 2.81 \ cm^4$$

$$P_3 = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times 2.81}{150^2} = 2.588.47 \ kg$$

$$\sigma_3 = \frac{2588.47}{5.97} = 433.58 \ kg/cm^2$$

O

$$I_z = \frac{1}{3}\ 100 \times 33^3 + 341.04 \times 26^2 + 383.67 \times 20^2 = 1\ 581\ 511.04\ cm^4$$

$$Q_z = 100 \times 33 \times \frac{33}{2} + 341.04 \times 26 - 383.67 \times 20 = 55\ 643.64\ cm^3$$

$$e_y = \frac{Iz}{Qz}\ y = \frac{1\ 581\ 511.04}{55\ 643.64} = 28.42\ cm$$

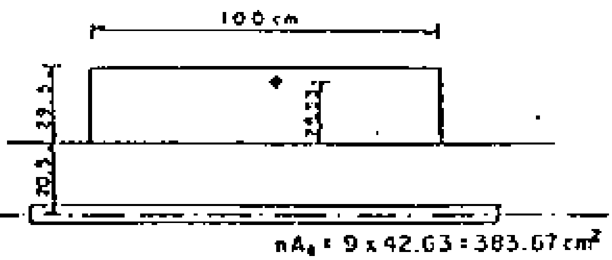
$(T_x = \frac{M}{Q_3}\ y = \frac{Ne_y}{Iz}\ y$, Esfuerzo)

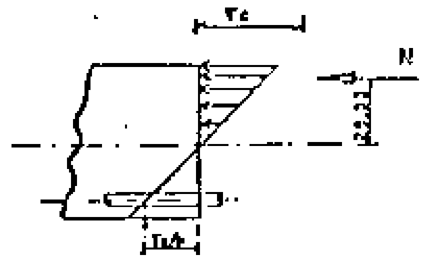
Esfuerzo en el concreto : $\sigma_c = \frac{278\ 710}{55\ 643.64} \times 33 = 165.29\ \frac{kg}{cm^2}$

Esfuerzo en acero comp : $\sigma_s' = \frac{278\ 710}{55\ 643.64} \times 26 \times 9 = 1172.34\ \frac{kg}{cm^2}$

Esfuerzo en acero tensión: $\sigma_s = \frac{278\ 710}{55\ 643\ 64} \times 20 \times 9 = 901.80\ \frac{kg}{cm^2}$

ESFUERZOS EN 1 DESPUES DE LA FALLA.





$$I_z = \frac{1}{3}\ 100 \times 29.5^3 + 383.67 \times 20.5^2 = 1\ 016\ 983.15\ cm^4$$

$$Q_z = 100 \times 29.5 \times \frac{29.5}{2} - 383.67 \times 20.5 = 35{,}647.27\ cm^3,\ = \frac{I_3}{Q_3} = 28.$$

Concreto : $\sigma_c = \frac{278\ 710}{356\ 47.27} \times 29.5 = 230.65\ kg/cm^2 > 150\ kg/cm^2$

Acero : $\sigma_s = \frac{278\ 710}{35647.27} \times 20.5 \times 9 = 1442.52\ kg/cm^2$

X,

Y

V .CONCLUSIONES.

1. En el punto 1 el concreto en el manto interior alcanzó un valor de 165 $\frac{kg}{cm^2}$, que es mayor que el de proyecto de 150 kg/cm² simultáneamente el acero tomó una compresión de 1172 kg/cm² mayor que 433.6 kg/cm² que es la de pandeo de un paquete de 3 varillas de 5/8", originando las fallas que se observan en el reporte fotográfico (3).

2. Los mantos interior y exterior de refuerzo no están conectados entre sí, lo que origina que el refuerzo a compresión prácticamente no trabaje y se pandee como se observa en (3).

3. Para el nivel de cargas a que se llegó la geometría de la secci del túnel no es la adecuada. Esta debe seleccionarse siguiendo la línea de presiones.

4. La estructura se encuentra en el mecanismo inicial que se presenta en la Fig. 4, con articulaciones plásticas.

5. La redistribución de momentos ayudó a que no se formaran rotula plásticas en los puntos 4 y 3.00 m arriba de 2 .

6. Consideramos que la estructura no fue proyectada para las cargas que se muestran en la figura Num. 3.

VI . RECOMENDACIONES

1. Descargar la estructura de inmediato.

2. Observar si hay fallas en el manto exterior

3. Reparar la sección aumentando su espesor de acercarse a la línea de presiones.

4. No demoler.

Octubre 16, 1981.

Atentamente,

Dr. Porfirio Ballesteros Barocio.

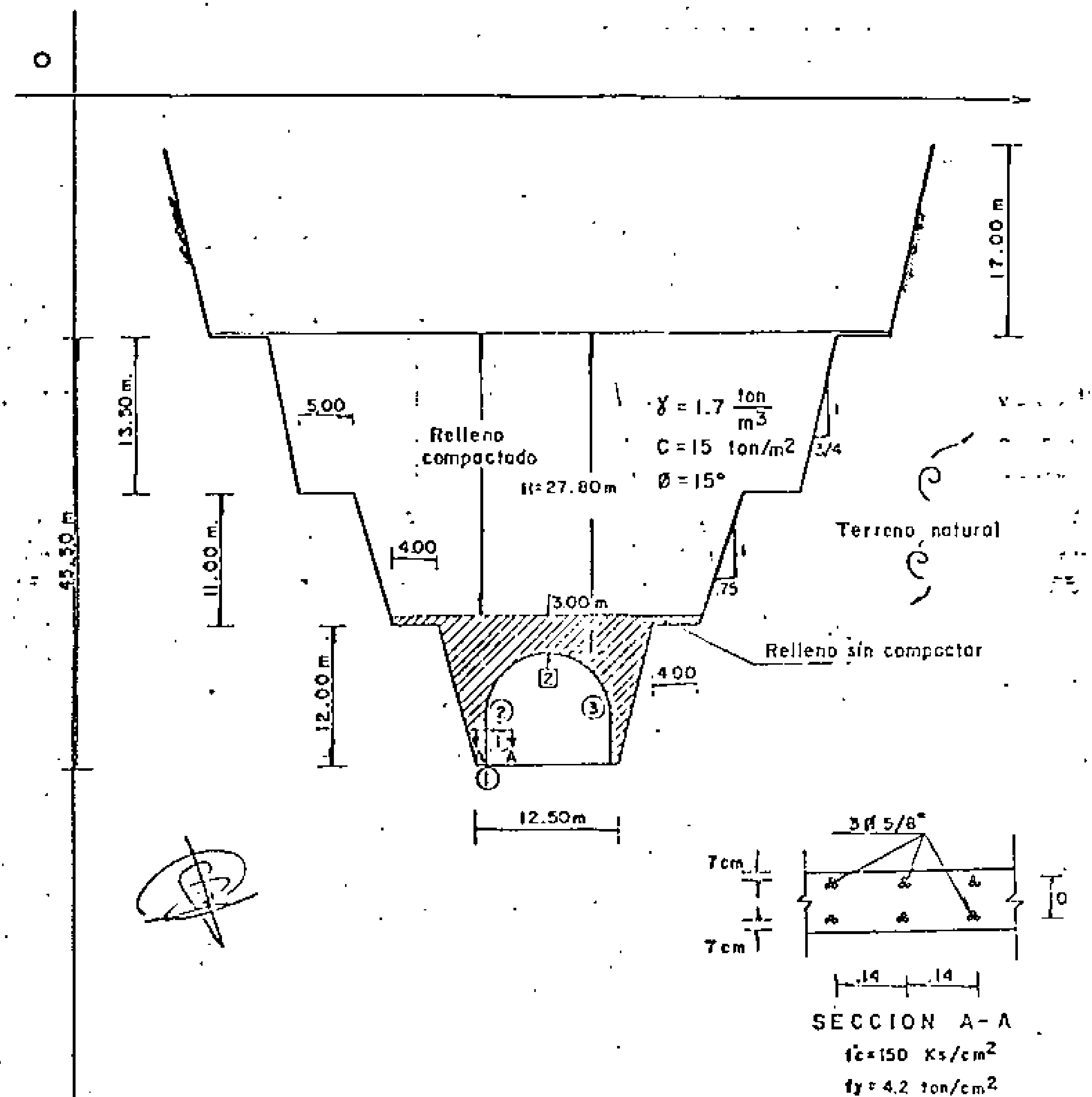


FIG. I GEOMETRIA Y CARGAS AL INICIARSE LA FALLA DE LA BARRA $\boxed{1}$

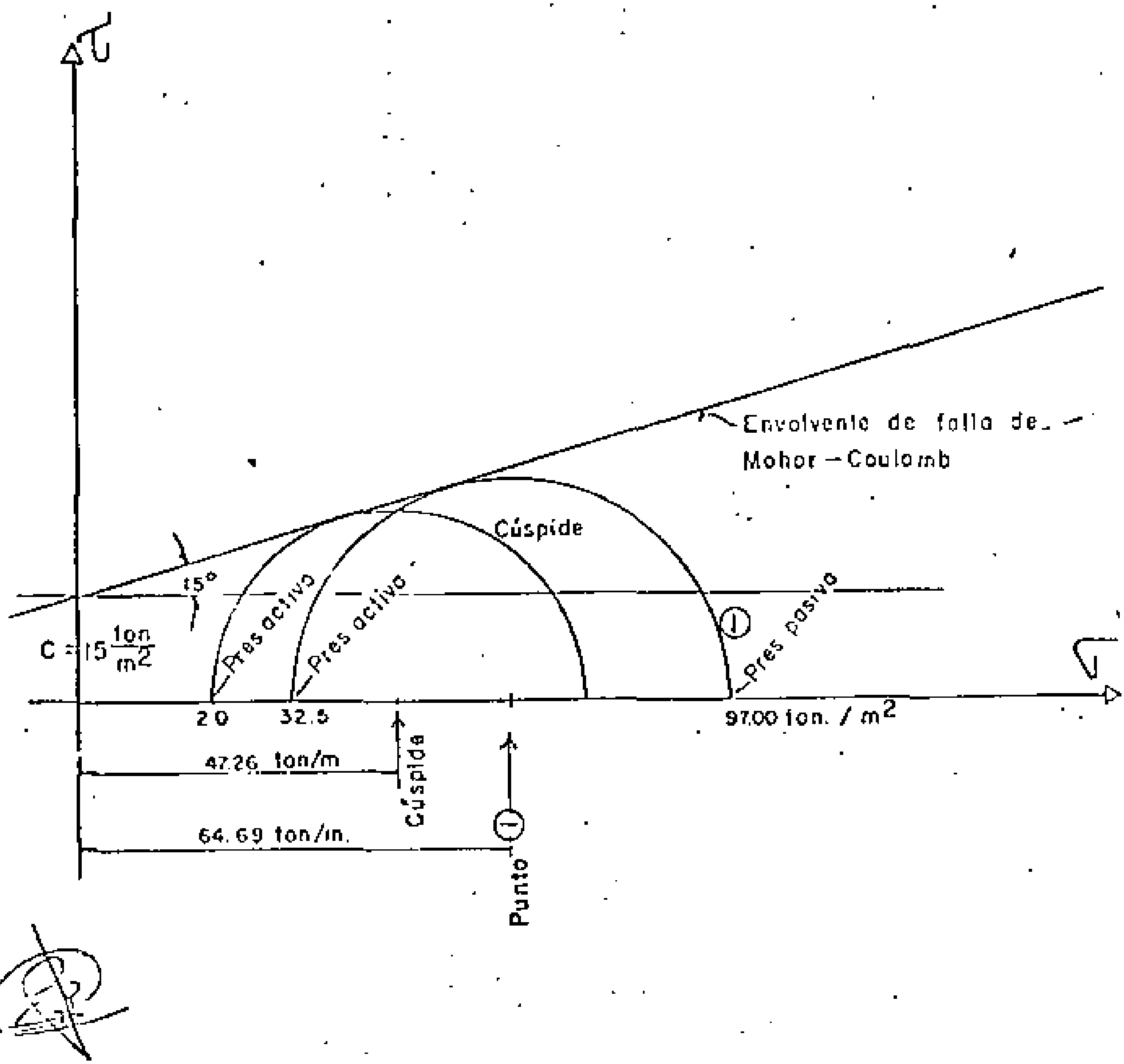


FIG. 2 CALCULO PRESIONES ACTIVAS Y PASIVAS DE RANKINE

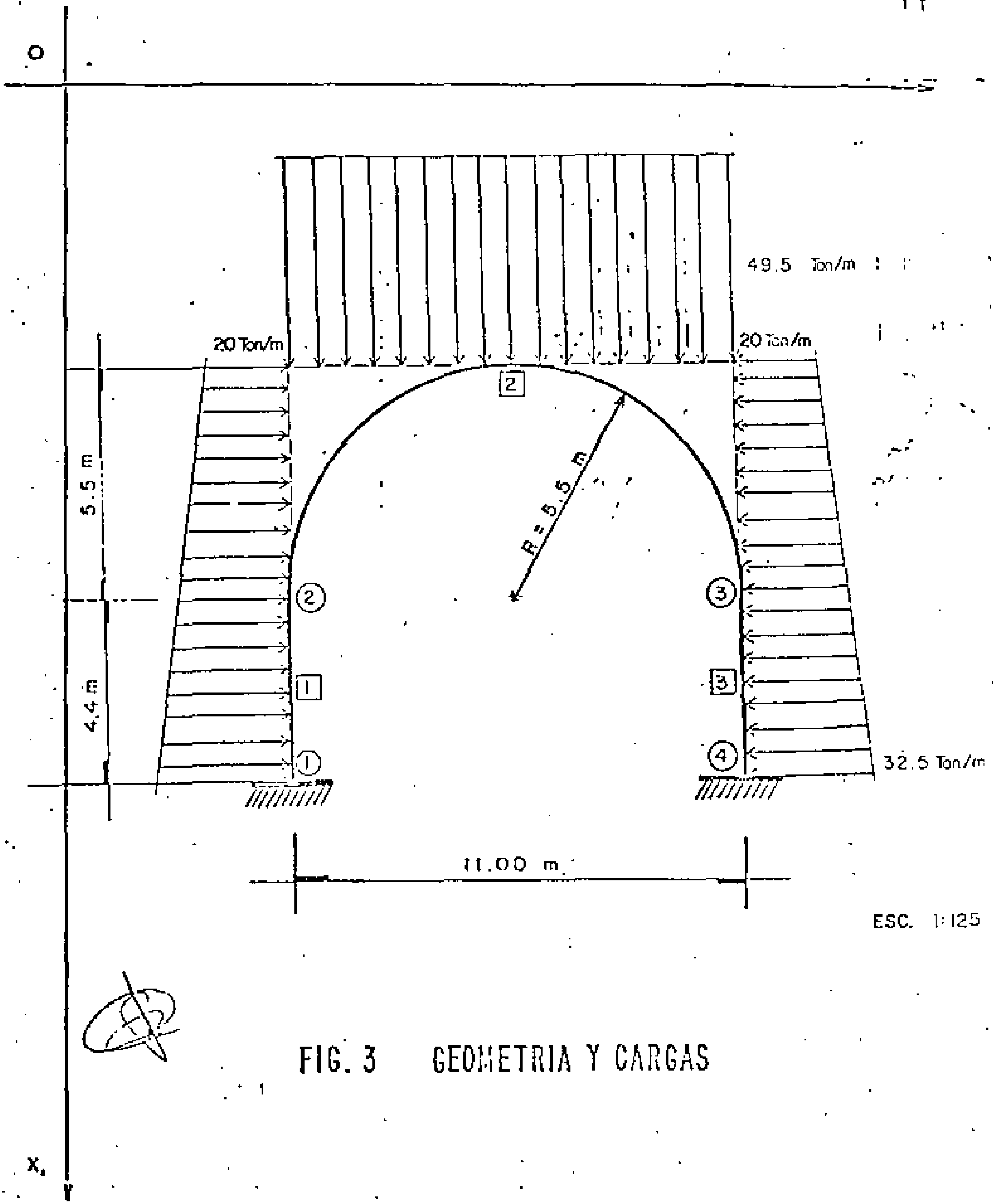


FIG. 3 GEOMETRIA Y CARGAS

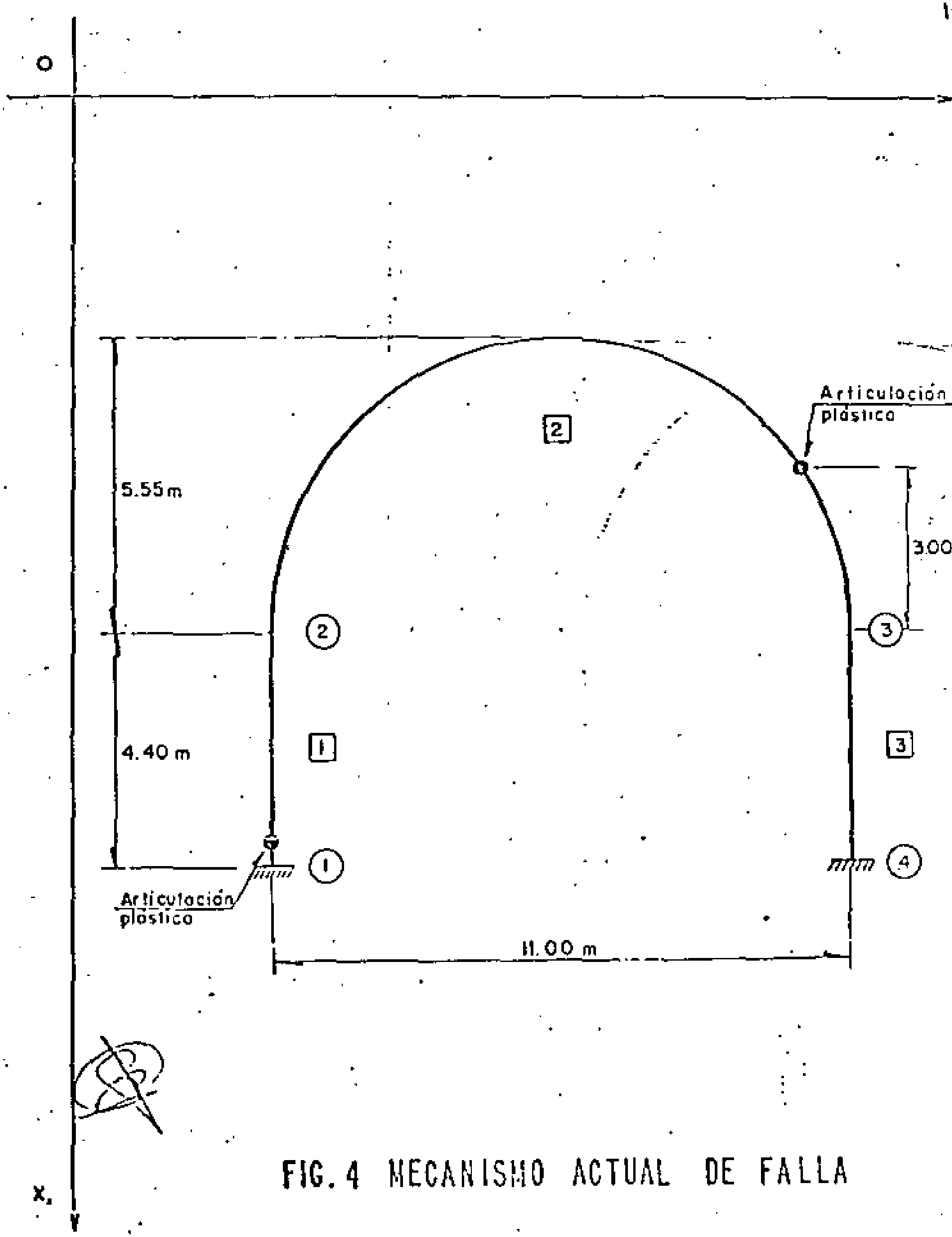
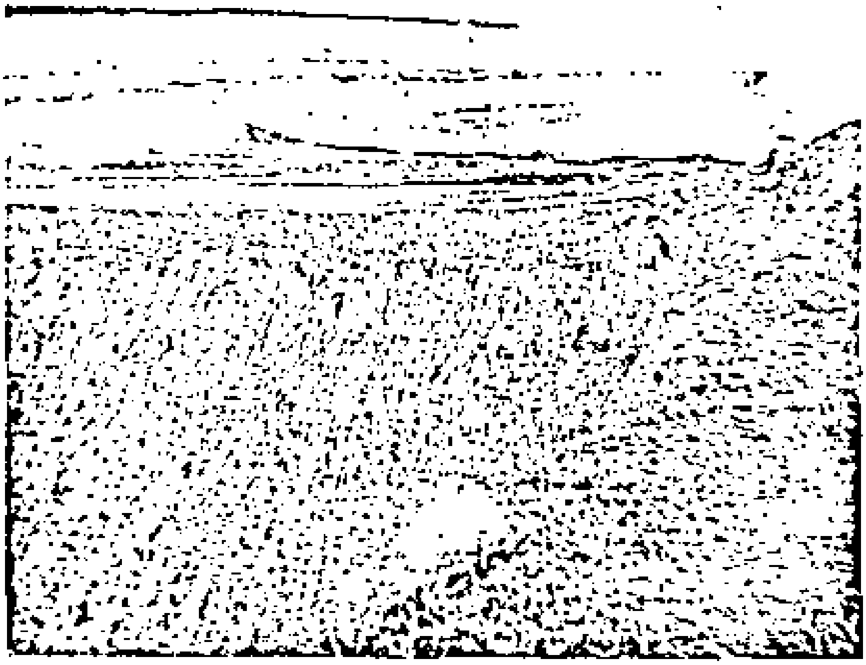
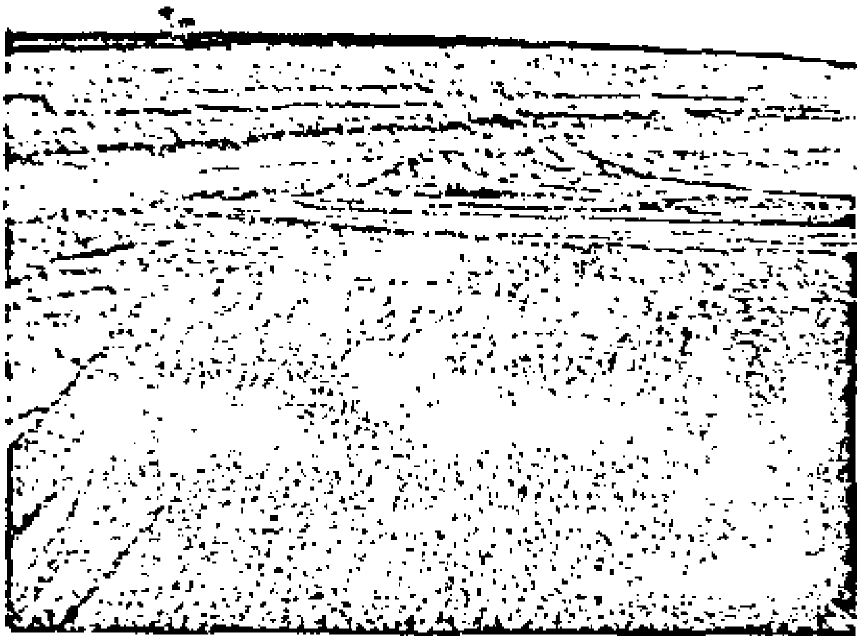
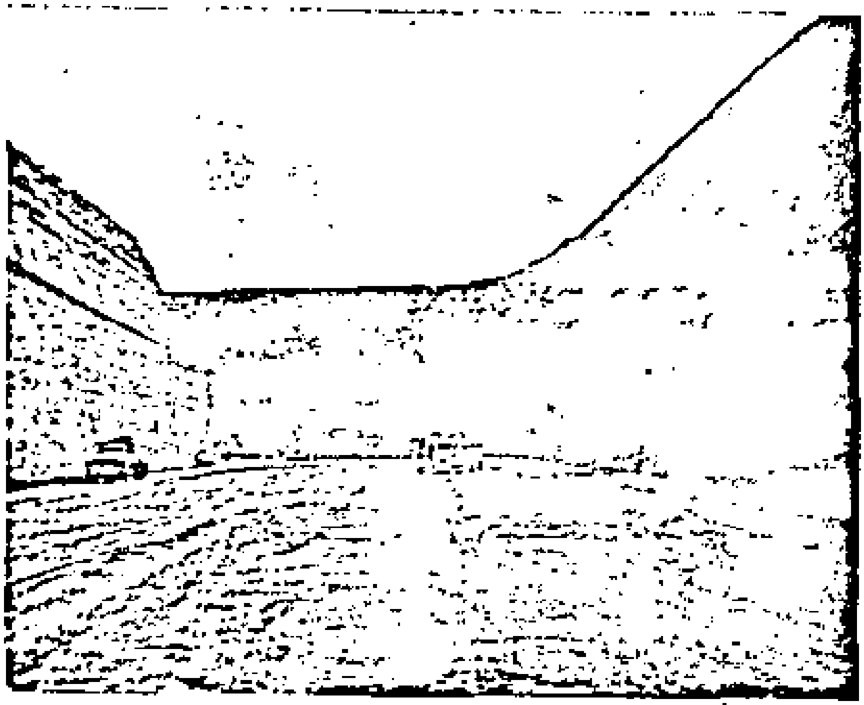
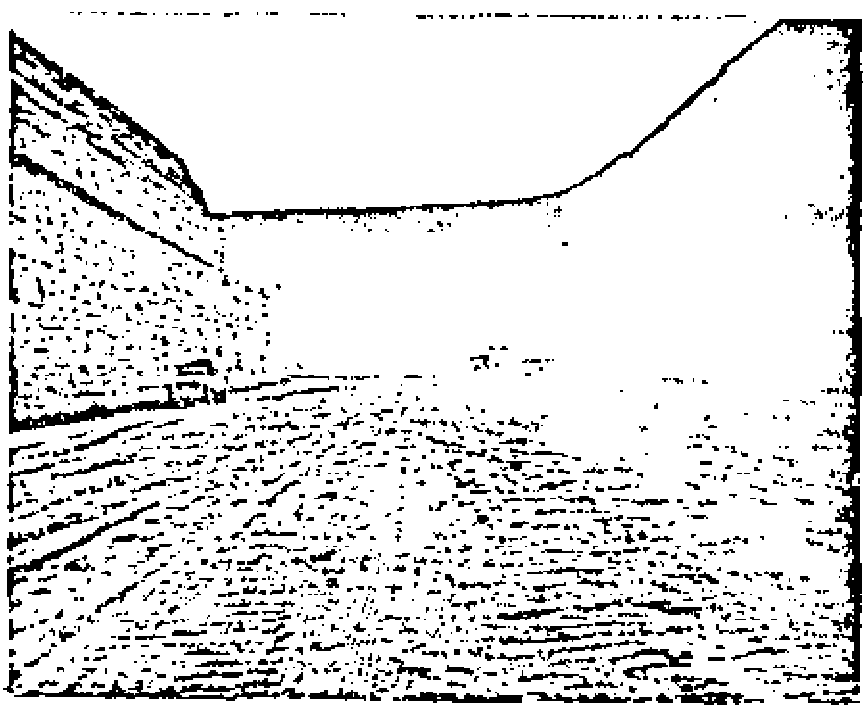


FIG. 4 MECANISMO ACTUAL DE FALLA



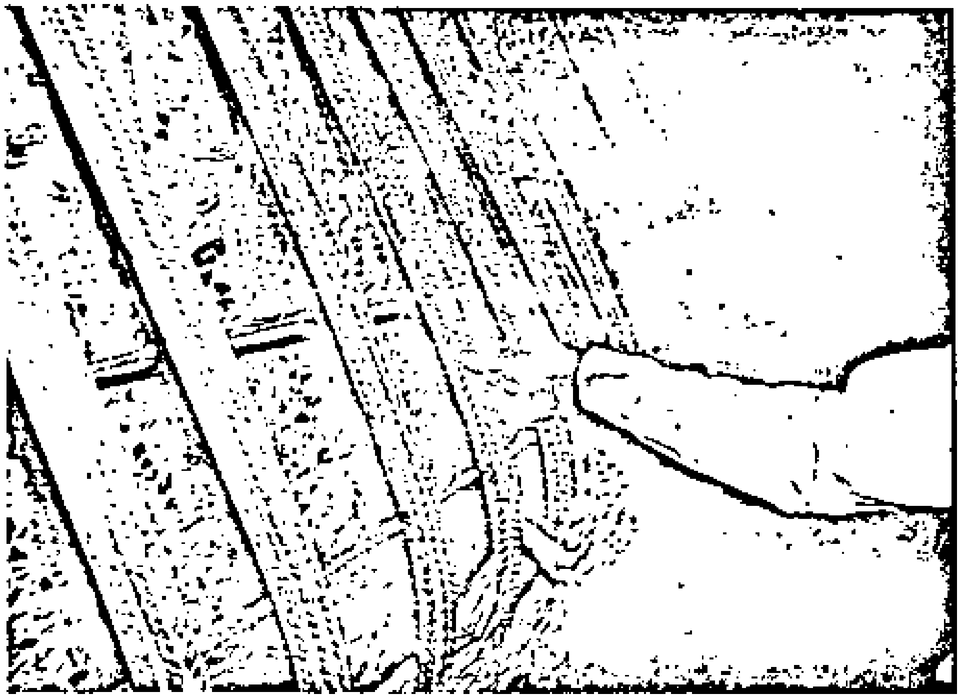


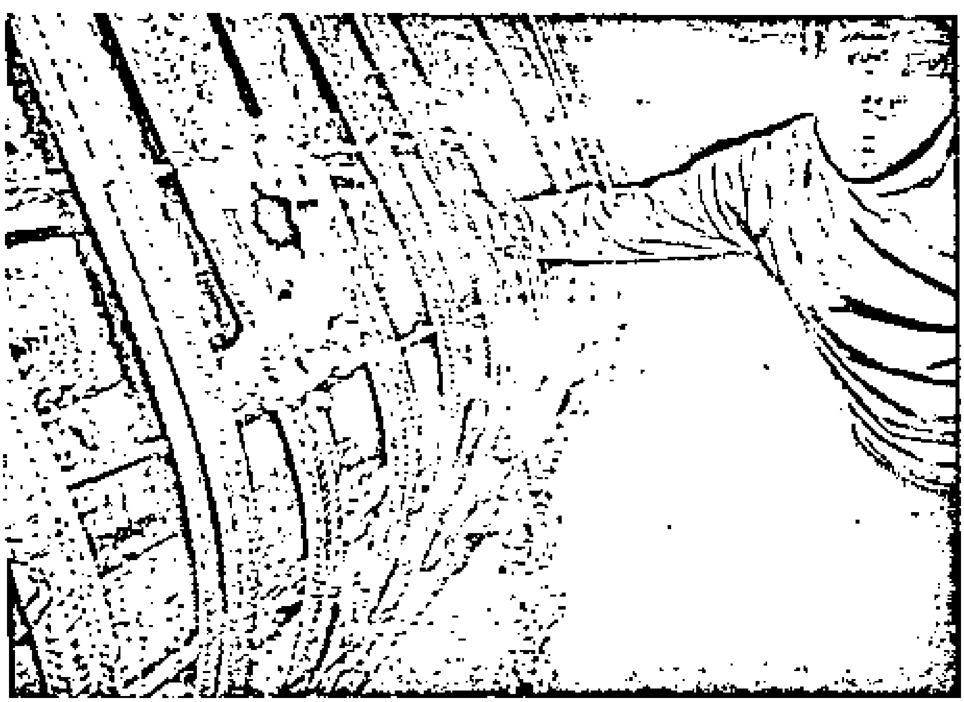


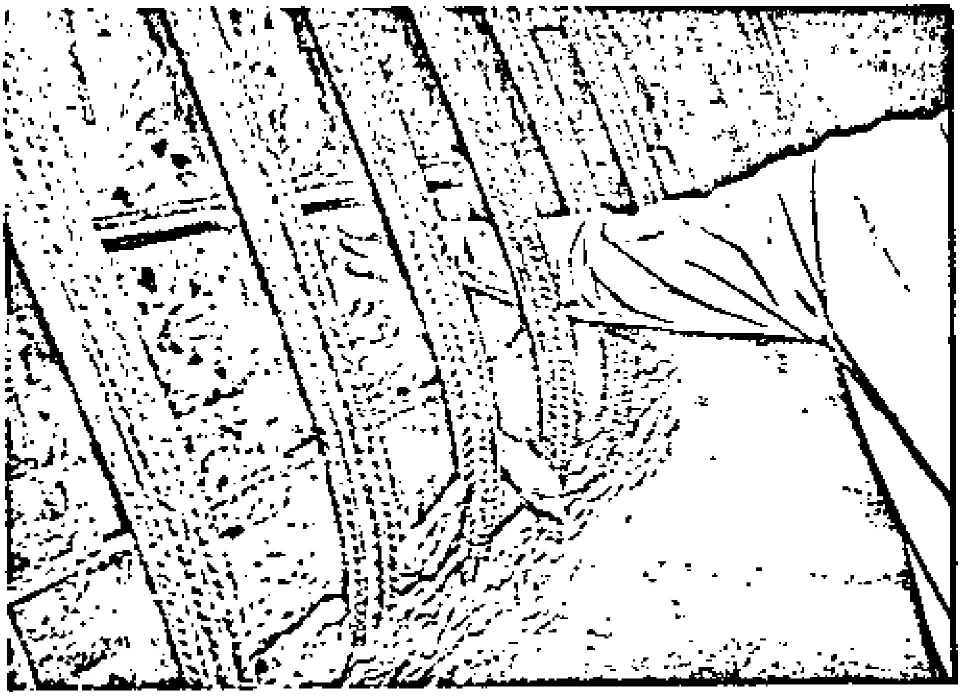


E

20

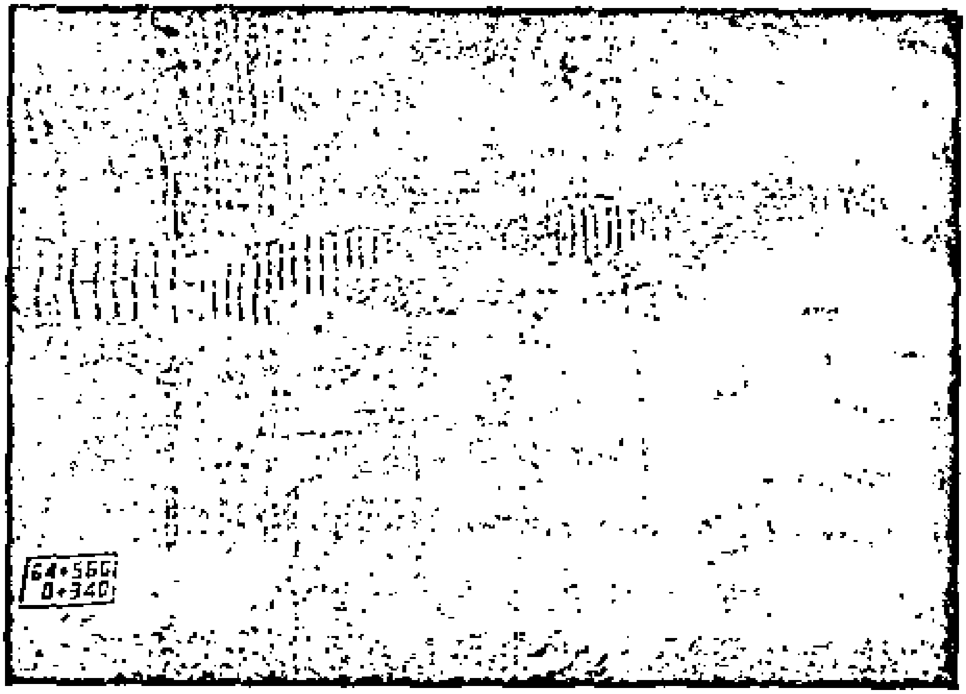


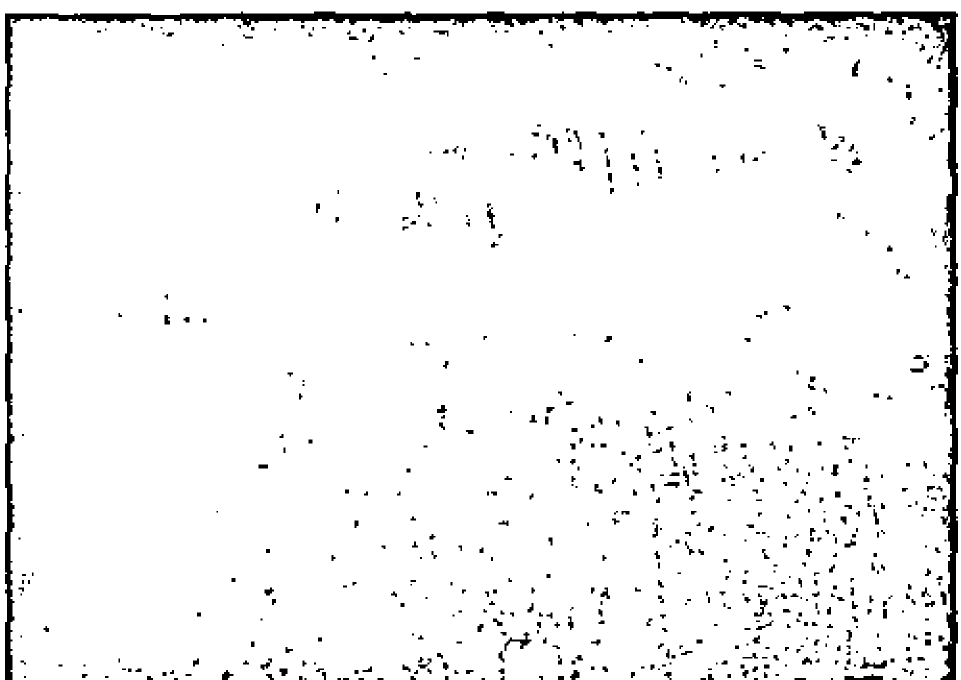


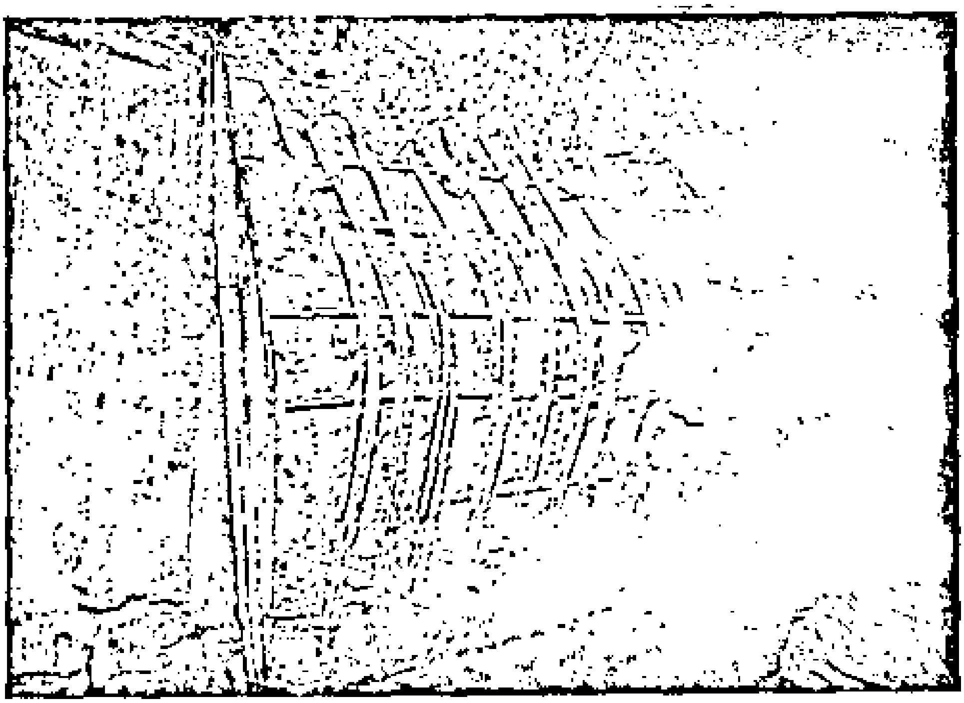


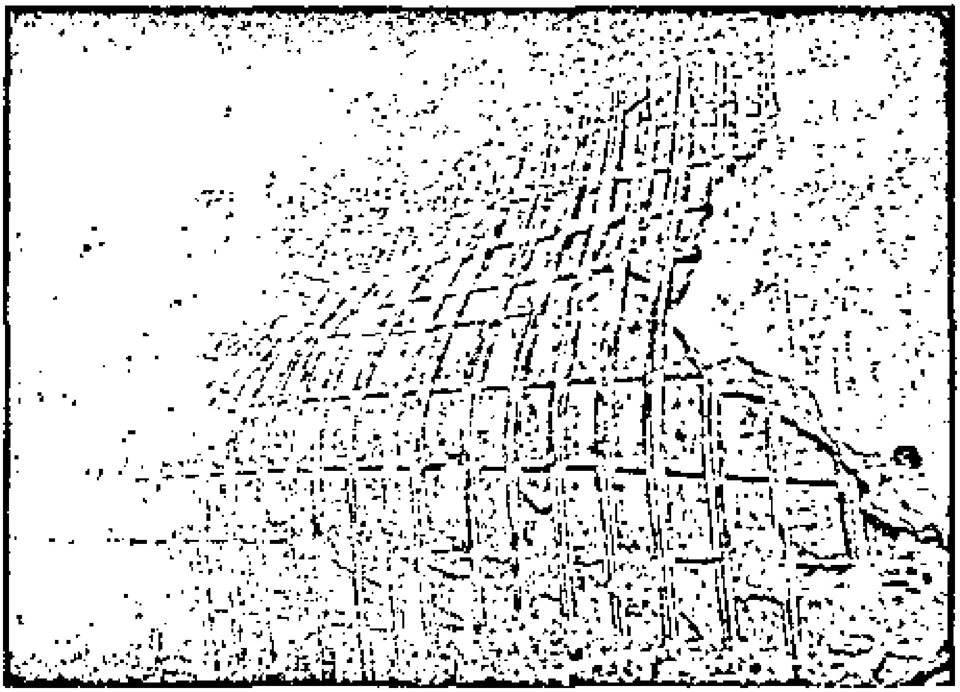
A
T-H

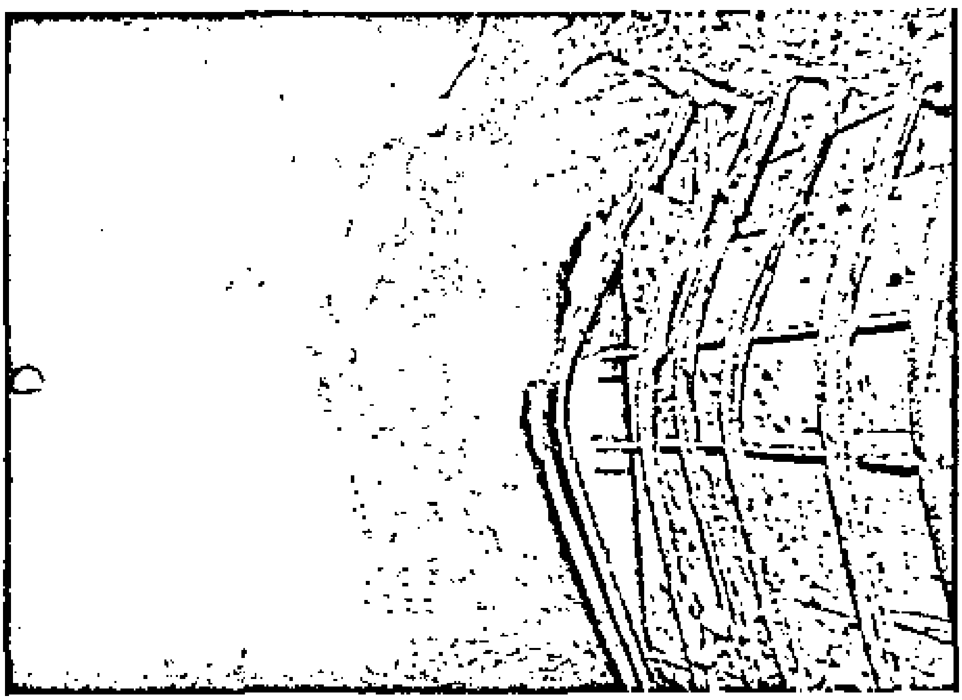
G

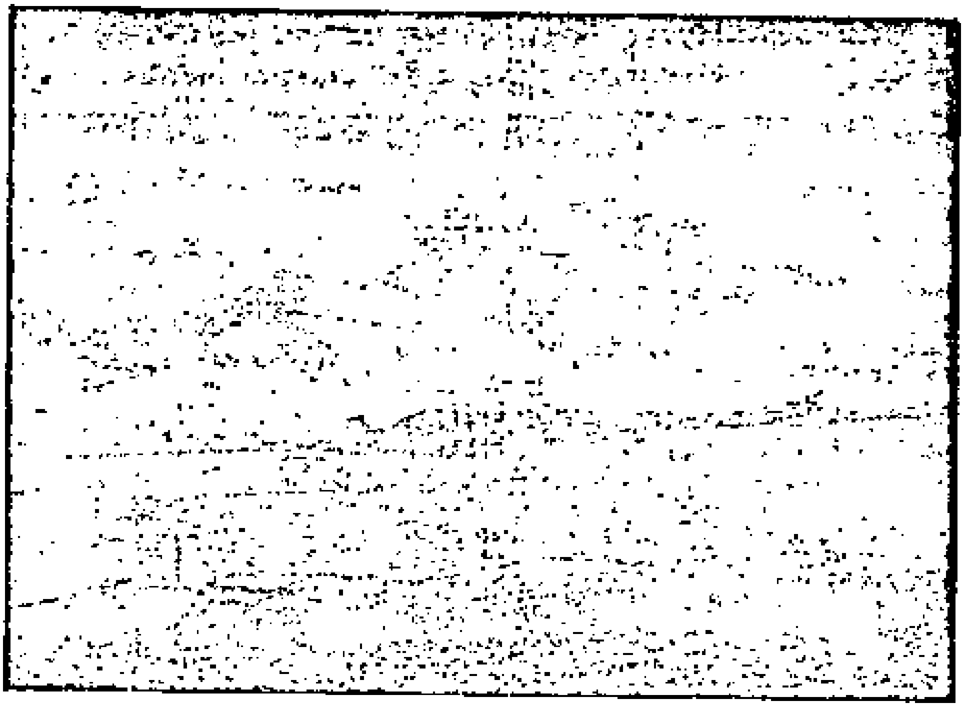




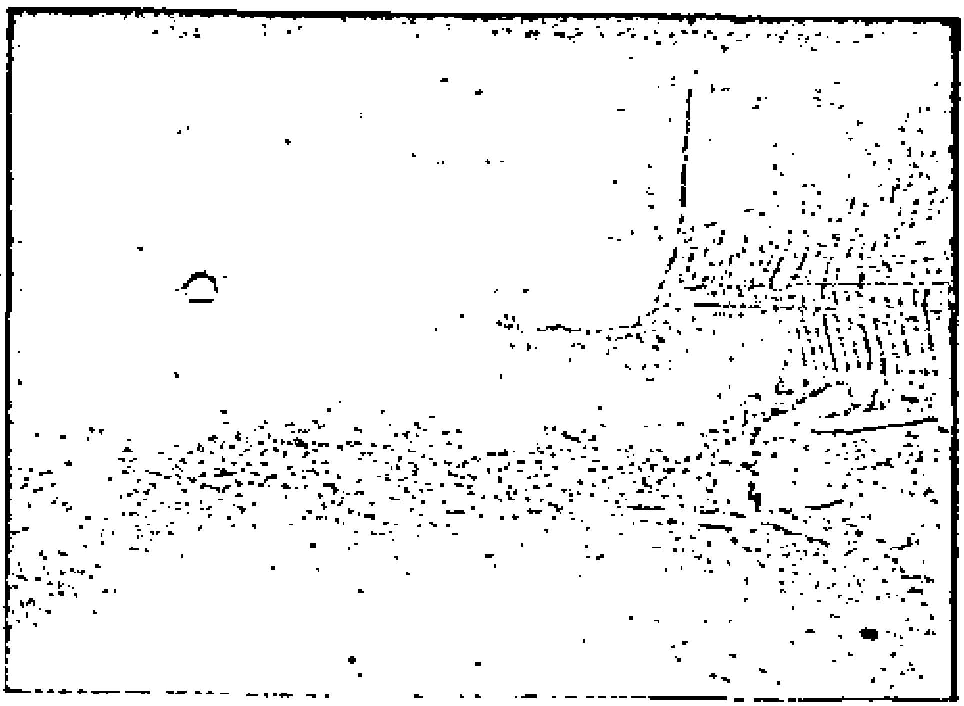






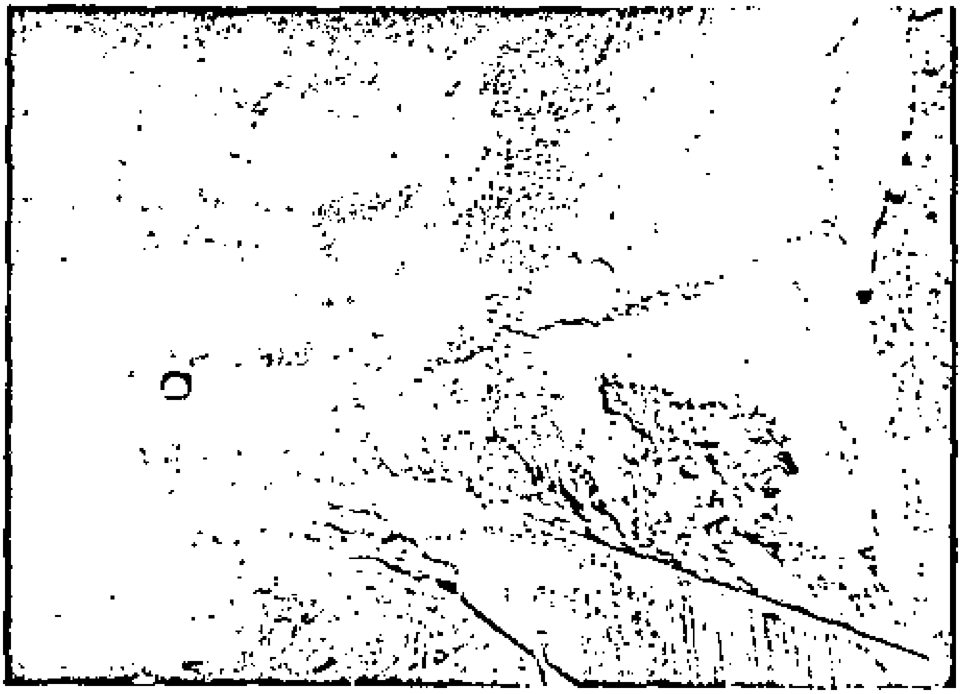


K 26

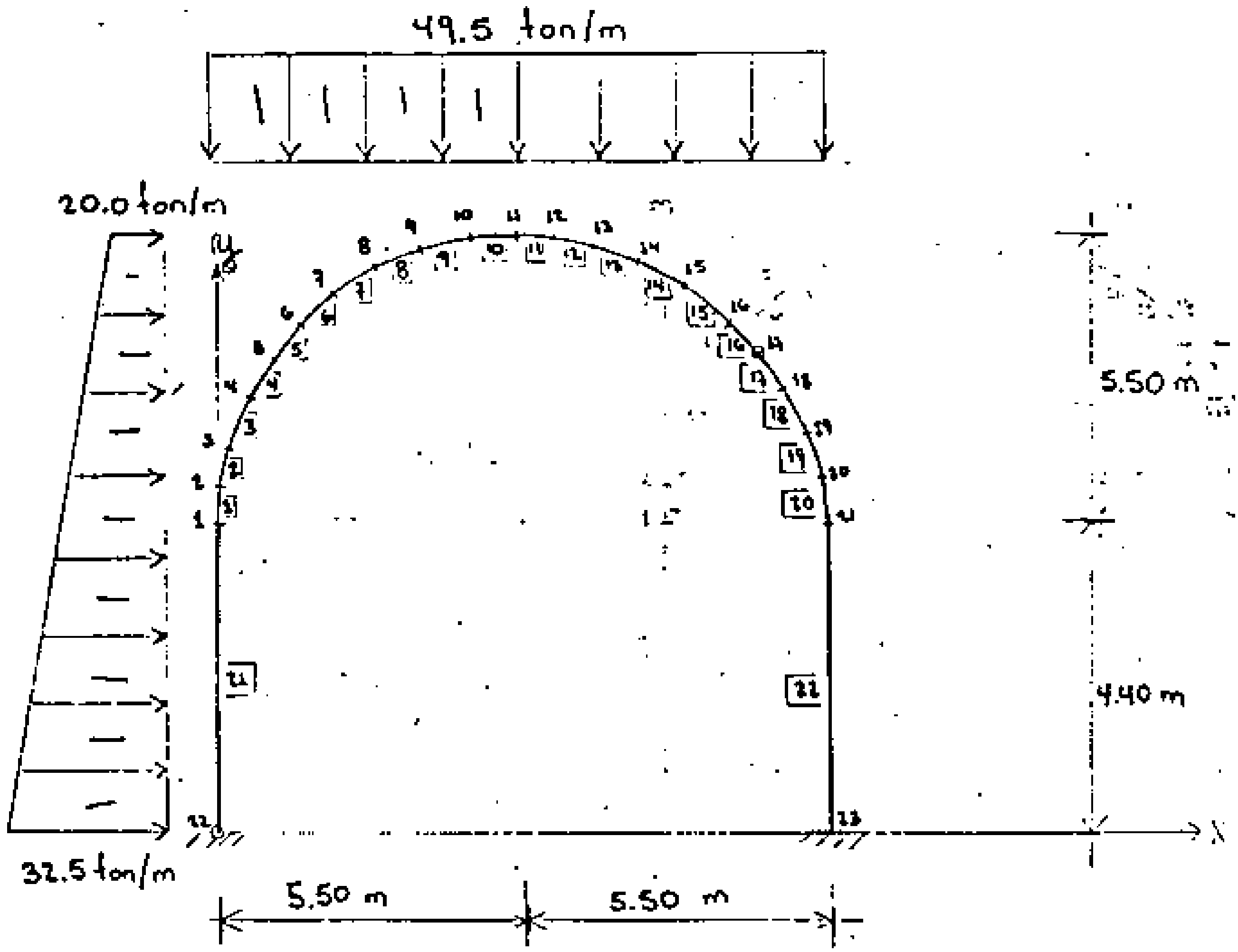


L

27


D


D



Discretización del medio y condición de carga normal. Total y REDUCIDA

DISCRETIZACION

forma de ificación

CSC
unam

PROYECTO Estructura esqueletal ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA 1 DE 4

```
*   TITULO DEL PROBLEMA GENERAL
ANALISIS DE UNA ESTRUCTURA TIPO ESQUELETAL
*   NUMERO DE ESTRUCTURAS POR ANALIZAR
    1
*   TITULO DEL PROBLEMA PARTICULAR
ANALISIS DE UN TUNEL
*   NUMERO DE BARRAS, ELEMENTOS FINITOS, MATERIALES, NUDOS, TIPOS DE SECCIONES,
*          NUDOS RESTRINGIDOS, CONDICIONES DE CARGA Y RIGIDEZ REQUERIDA
   22    0    1   22    1   22    0    2    1    1   (22 Primer punto frontera).
*   PROPIEDADES MECANICAS DE LOS MATERIALES   (Número de material, E, v, r)
    1 2000000.0   0.15    2.4
*   CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LAS SECCIONES   (Número de sección, tipo 1 rectangular, b, h)
    1    1     100.0     60.0
*   COORDENADAS DE LOS PUNTOS NODALES
                                 (Número de nudo, coordenada x, coordenada y)
    1    0.000     4.400
    2    0.067     5.260
    3    0.269     6.100
    4    0.600     6.897
    5    1.050     7.633
    6    1.631     8.289
    7    2.267     8.850
    8    3.002     9.300
    9    3.800     9.631
   10    4.640     9.830
```

forma de . .ficación

CSC unam

PROYECTO Estructura esqueletal   ARCHIVO ______   FECHA Mayo 1982

PROGRAMA ______   CODIFICO ______   HOJA 2 DE 4

11	5.500	9.900			
12	6.360	9.830			
13	7.200	9.634			
14	7.997	9.300			
15	8.732	8.850			
16	9.383	8.239			
17	9.950	7.633			
18	10.400	6.897			
19	10.733	6.100			
20	10.933	5.260			
21	11.000	4.400			
22	0.000	0.000			
23	11.000	0.000			

* LOCALIZACION DE LAS BARRAS, TIPO DE SECCIÓN Y TIPO DE APOYO

(Número de barra; nudo i; nudo j; número de sección; tipo de apoyo en i y en j respect.)

(tipo de apoyo: 0 apoyo continuo; 1 apoyo articulado)

1	1	2	1	0	0
2	2	3	1	0	0
3	3	4	1	0	0
4	4	5	1	0	0
5	5	6	1	0	0
6	6	7	1	0	0
7	7	8	1	0	0
8	8	9	1	0	0
9	9	10	1	0	0
10	10	11	1	0	0

forma de ficación

CSC
unam

PROYECTO Estructura esqueletal ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA (3) DE 4

11	11	12	1	0	0
12	12	13	1	0	0
13	13	14	1	0	0
14	14	15	1	0	0
15	15	16	1	0	0
16	16	17	1	0	1
17	17	18	1	1	0
18	18	19	1	0	0
19	19	20	1	0	0
20	20	21	1	0	0
21	22	1	1	1	0
22	21	23	1	0	0

* TIPO DE RESTRICCIÓN DE NUDOS CON DESPLAZAMIENTOS PRESCRITOS NULOS

* (Nudo restringido, restricciones en X, en Y y angular; 1 indica movimiento restringido en esa dirección)

22111 23111

* INDICACIÓN DEL TIPO DE CONDICIÓN DE CARGA

CARGA MUERTA

* KANTIDAD DE BARRAS Y NUDOS CARGADOS

2 2

* INDICADORES DE GRAFICACIÓN DE ELEMENTOS MECÁNICOS DE LAS BARRAS

(Número de barra; 1 indicador de graficación)

231 221

* KARGAS INTERMEDIAS EN LAS BARRAS

1 (1 indica número de cargas intermedias en la barra)

3 -22.500 -26.972 (3 indica tipo de carga intermedia: trapecial; W_1, W_2)

forma de codificación

CSC unam

PROYECTO Estructura esqueletal ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA 4 DE 4

1		
3	-26.972	-32.509
* CARGAS EN LOS NUDOS		
1	11.508	-0.840 (Número del nudo; valores de las fuerzas paralelas a los ejes globales x e y, respectivamente)
2	22.018	-6.683
3	20.340	-13.202
4	18.288	-19.394
5	15.961	-25.114
6	13.450	-30.210
7	10.824	-34.661
8	8.128	-38.069
9	5.429	-40.629
10	2.714	-42.199
11	0.000	-50.363
12	-2.714	-42.199
13	-5.429	-40.629
14	-8.138	-32.069
15	-10.824	-31.661
16	-13.450	-30.210
17	-15.961	-25.114
18	-18.288	-19.394
19	-29.340	-13.202
20	-22.018	-6.683
21	-11.508	-0.840

34

CARGA NORMAL O DE FALLA 5.


```
        MEXICO D.F., FEBRERO 1982
     1
        ANALISIS DE UN TUNEL
    22     0     1    23     1    22     0     2     1     1
     1 2030000.0        0.15            2.4
     1     1       100.0        60.0
     1       [illegible]    [illegible]
     2       [illegible]    [illegible]
     3       [illegible]    [illegible]
     4       [illegible]    [illegible]
     5       [illegible]    [illegible]
     6       [illegible]    [illegible]
     7       [illegible]    [illegible]
     8       [illegible]    [illegible]
     9       [illegible]    [illegible]
    10       [illegible]    [illegible]
    11       [illegible]    [illegible]
    12       [illegible]    [illegible]
    13       [illegible]    [illegible]
    14       [illegible]    [illegible]
    15       [illegible]    [illegible]
    16       [illegible]    [illegible]
    17       [illegible]    [illegible]
    18       10.[illegible]   [illegible]
    19       10.[illegible]   6.100
    20       10.[illegible]   5.[illegible]
    21       11.000         [illegible]
    22       0.000          0.000
    23       11.000         0.000
     1     1     2     1     0     0
     2     2     3     1     0     0
     3     3     4     1     0     0
     4     4     5     1     0     0
     5     5     6     1     0     0
     6     6     7     1     0     0
     7     7     8     1     0     0
     8     8     9     1     0     0
     9     9    11     1     0     0
    10    10    11     1     0     0
    11    11    12     1     0     0
    12    12    13     1     0     0
    13    13    14     1     0     0
    14    14    15     1     0     0
    15    15    16     1     0     0
    16    16    17     1     0     1
    17    17    18     1     1     0
    18    18    19     1     0     0
    19    19    20     1     0     0
    20    20    21     1     0     0
    21    22     1     1     1     0
    22    21    23     1     0     0
  2211        23111
        CARGA MUERTA
     2    21
   211   221
     1
     1     -32.500     -26.972
     1
```

5950	0	-25.072	-32.500
6050	1	11.508	-4.880
6150	2	22.018	-6.603
6250	3	20.340	-13.202
6350	4	18.288	-19.394
6450	5	15.961	-25.110
6550	6	13.450	-30.210
6650	7	10.924	-34.561
6750	8	8.138	-38.065
6850	9	5.429	-40.629
6950	10	2.710	-42.199
7050	11	0.000	-50.363
7150	12	-2.710	-42.199
7250	13	-5.429	-40.629
7350	14	-8.138	-38.065
7450	15	-10.924	-34.561
7550	16	-13.450	-30.210
7650	17	-15.961	-25.110
7750	18	-18.288	-19.394
7850	19	-20.340	-13.202
7950	20	-22.018	-6.603
8050	21	-11.508	-4.880

MEXICO D.F. FEBRERO 1982

INDICES DE LOS ARCHIVOS DE ELEMENTOS Y ESTRUCTURA
10 NO. DE ARCHIVO PARA ELEMENTOS
15 NO. DE ARCHIVO PARA LOS CORTANTES Y MOMENTOS
20 NO. DE ARCHIVO PARA LAS CARGAS INTERNAS
25 NO. DE ARCHIVOS PARA CUADRADOS

1 NO. DE ESTRUCTURAS POR ANALIZAR

ANALISIS DE UN TUNEL

22 NO. DE ELEMENTOS
63 NO. DE ECUACIONES
1 NO. DE TIPOS DE MATERIAL
23 NO. DE PUNTOS DE LA ESTRUCTURA
0 NO. DE CUADRILATEROS
1 NO. DE TIPOS DE SECCION
22 NO. DEL PRIMER PUNTO FRONTERA
0 NO. DE NUDOS CON DESPL PRESCRITO .NE.0
2 NO. DE NUDOS FRONTERA
1 NO. DE CONDICIONES DE CARGA
1 INDICADOR DE RIGIDECES DE ENTREPISO

CONSTANTES ELASTICAS DE LOS MATERIALES

MAT.NO.	MODULO DE ELASTICIDAD (TON/M**2)	COEFICIENTE DE POISSON	PESO VOLUMETRICO (TON/M**3)
1	2000000.00	0.15	2.400

P A R A M E T R O S Q U E D E F I N E N L A S S E C C I O N E S

TIPO	*SECCION*	*PARAMETROS**
0	ESPECIAL	(A,IZ,FY)
1	RECTANGULAR	(B,H)
2	I	(B,H,V,T)
3	I	(B,H,V,T)
4	CANAL	(B,H,V,T)
5	ANGULO	(B,H,V,T)
6	CIRCULAR	(D)
7	CAJON	(B,H,V,T)
8	CIRCULAR HUECA	(D,TC)
9	CRUZ	(B,H,V,T,C)

10 ZETA (.I,H,V,II,C,P)
11 C (?,V,I)

NOMENCLATURA (VER FIGURAS DEL CATALOGO DE SECCIONES)

B	ANCHO DE LA SECCION TIPO 1,2,3,4,5,7,9,10 Y 11
BI	ANCHO INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
D	DIAMETRO DE LAS SECCIONES TIPO 6 Y 8
H	ALTURA DE LAS SECCIONES TIPO 1,2,3,4,5,7,9,10 Y 11
TC	ESPESOR DE LA SECCION CIRCULAR HUECA Y ANCHO DEL ALMA DE LAS SECCIONES TIPO 2,3,4,7,9,10 Y 1
T	ESPESOR DEL PATIN DE LAS SECCIONES TIPO 2,3,4,5,7,9 Y 11
TI	ESPESOR DEL PATIN INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
P	ESPESOR DEL PATIN SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
BS	ANCHO SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
C	DISTANCIA ENTRE LAS FIBRAS SUPERIORES DEL ALMA Y PATIN RESPECTIVAMENTE DE LAS SECCIONES 9 Y 10

(CM)	CENTIMETROS
(M**2)	METROS A LA SEGUNDA POTENCIA
(M**4)	METROS A LA CUARTA POTENCIA
A	AREA
IZ	MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE Z
FY	FACTOR DE FORMA PARA LA DIRECCION Y

SECCION NO.	TIPO	B-D-BI-BS (CM)	H-IZ-TC (CM)	V-FY (CM)	T-TI (CM)	C-HS (CM)	P (CM)
1	1	100.000	50.000	0.000	0.000	0.000	0.000

SECCION NO	TIPO	A (M**2)	IZ (M**4)	FY
1	1	0.500000000	0.010416667	1.200000000

NUDO NO.	ABSCISA (M)	ORDENADA (M)
1	0.559	4.900
2	0.167	5.260
3	0.269	6.170
4	0.640	6.897
5	1.050	7.633
6	1.611	8.209
7	2.267	8.850
8	3.003	9.300
9	3.800	9.631
0	4.600	9.830
1	5.400	9.900
2	6.360	9.830
3	7.200	9.631
4	7.997	9.300
5	8.733	8.850
6	9.383	8.209
7	9.559	7.633
8	10.000	6.897

19	10.731	6.100
20	10.951	5.260
21	11.600	4.300
22	[illegible]	0.000
23	11.500	0.000

BARRA NO.-----NUDO I-----NUDO J-----MAT.NO.----SEC.NO ---APOY I-----APOY J----LONGITUD

1	1	2	1	1	0	0	0.865
2	2	3	1	1	0	0	0.860
3	3	4	1	1	0	0	0.865
4	4	5	1	1	0	0	0.865
5	5	6	1	1	0	0	0.865
6	6	7	1	1	0	0	0.865
7	7	8	1	1	0	0	0.865
8	8	9	1	1	0	0	0.865
9	9	10	1	1	0	0	0.865
10	10	11	1	1	0	0	0.865
11	11	12	1	1	0	0	0.865
12	12	13	1	1	0	0	0.865
13	13	14	1	1	0	0	0.865
14	14	15	1	1	0	0	0.865
15	15	16	1	1	0	0	0.860
16	16	17	1	1	0	1	0.867
17	17	18	1	1	1	0	0.865
18	18	19	1	1	0	0	0.865
19	19	20	1	1	0	0	0.848
20	20	21	1	1	0	0	0.865
21	22	1	1	1	1	0	0.600
22	21	23	1	1	0	0	0.400

6 ANCHO DE SEMIBANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

DESPLAZAMIENTOS PRESCRITOS NULOS

NUDO RESTRINGIDO	RESTRICCION TIPO		
22	1	1	0
23	1	1	1

NO. DE RESTRICCIONES NULAS DE LA ESTRUCTURA 5

NO. RESTRICCION	G.L.RESTRINGIDO	NO. RESTRICCION	G.L.RESTRINGIDO	NO. RESTRICCION	G.L.RESTRINGIDO
1	64	2	65	3	67
4	68	5	69		

CARGA MUERTA

1 NO. DE CONDICION DE CARGA
2 NO. DE BARRAS CARGADAS
21 NO. DE NUDOS CARGADOS
SIGNIFICADOS DE FUERZAS DE [illegible],POSITIVO

DATOS PARA EL CASO DE BARRAS CON CARGAS INTERMEDIAS DISTINTAS A PESO PROPIO

BARRA NO.	TIPO,GRAF.
21	1
22	1

BARRA 21 CARGA DIST LINEAL CONTIN(T/M)= -32.5000 QJ= -26.9720

BARRA 22 CARGA DIST LINEAL CONTIN(T/M)= -26.9720 QJ= -32.5000

ACCIONES CONCENTRADAS EN LOS NUDOS (EN TON Y TON-M)

NUDO NO.	FZA.HORIZONTAL	FZA. VERTICAL	MOMENTO
1	11.500	-0.[illegible]	0.00000
2	22.010	-6.483	0.00000
3	20.300	-13.202	0.00000
4	18.290	-19.300	0.00000
5	15.961	-25.119	0.00000
6	13.450	-30.219	0.00000
7	10.820	-34.561	0.00000
8	8.130	-38.065	0.00000
9	5.425	-40.720	0.00000
10	2.719	-42.189	0.00000
11	0.000	-42.[illegible]	0.00000
12	-2.710	-42.189	0.00000
13	-5.425	-40.720	0.00000
14	-8.130	-38.065	0.00000
15	-10.820	-34.561	0.00000
16	-13.450	-30.219	0.00000
17	-15.961	-25.119	0.00000
18	-18.290	-19.300	0.00000
19	-20.300	-13.202	0.00000
20	-22.010	-6.483	0.00000
21	-11.500	-0.[illegible]	0.00000

DESPLAZAMIENTOS NODALES DE LA ESTRUCTURA (M)

NO.NOD.	H O R I Z O N T A L	V E R T I C A L	G I R O S (RAD)
1	2.7789[illegible]E-02	-1.0269[illegible]E-03	-2.5307772E-03
2	2.9700235E-02	-1.3905[illegible]E-03	-2.5402924E-03
3	3.2130[illegible]E-02	-2.1455[illegible]E-03	-3.3091012E-03
4	3.5119[illegible]E-02	-3.6235[illegible]E-03	-4.3017760E-03
5	3.8619797E-02	-6.0[illegible]E-03	-5.3796[illegible]E-03
6	4.2[illegible]83277E-02	-9.3733[illegible]E-03	-5.9378[illegible]E-03
7	4.5515[illegible]E-02	-1.3924115E-02	-5.8507[illegible]E-03
8	4.7857192E-02	-1.7555[illegible]E-02	-4.9908760E-03
9	4.9120052E-02	-2.0002[illegible]E-02	-3.3055522E-03
10	4.9939651E-02	-2.2011515E-02	-1.0246900E-03

11	4.0275323E-02	-2.2151349E-02	1.6740726E-03
12	4.0356458E-02	-2.0111259E-02	4.4609466E-03
13	5.3571516E-02	-1.5127051E-02	6.4721068E-03
14	5.2971915E-02	-8.6167132E-03	9.0521471E-03
15	5.7210491E-02	-1.2665161E-03	1.0461260E-02
16	6.3260711E-02	5.0021707E-03	1.1261152E-02
17	7.0825588E-02	1.2580959E-02	0.
18	6.0519516E-02	6.6111193E-03	-1.1650529E-02
19	9.0503003E-02	2.2604331E-03	-1.3775988E-02
20	3.7015099E-02	-3.1384152E-03	-1.3526529E-02
21	2.6558098E-02	-4.0763113E-04	-1.2466637E-02

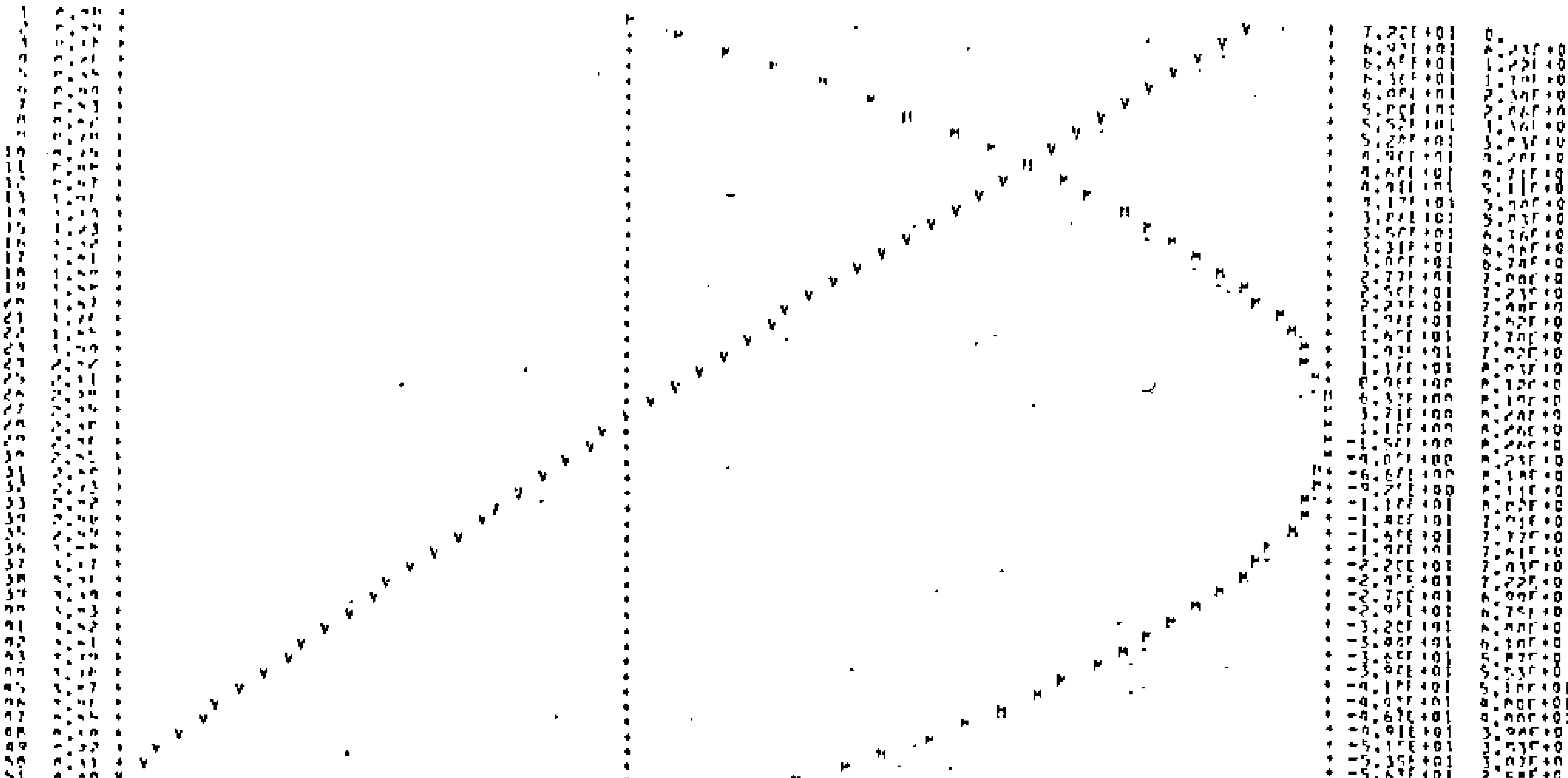
BARRA No. L	N U D O INICIAL	N U D O FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) N O R M A L	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) C O R T A N T E	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) FLEXIONANTE	**** EXTREMO FINAL (TON Y TON-M)		
1	1	2	-283.80182	-38.27411	28.74105	-283.80182	-48.27091	-20.85075
2	2	3	-288.55295	-25.51211	-20.85075	-288.55295	-25.91211	-43.23745
3	3	4	-282.67676	-8.45328	-43.23745	-282.67676	-8.45028	-67.00108
4	4	5	-272.96356	13.55719	-67.00108	-272.96356	13.55719	-35.38565
5	5	6	-255.67648	28.01913	-35.38565	-255.67648	28.01963	-11.10862
6	6	7	-231.77320	36.17873	-11.10862	-231.77320	36.17873	24.01986
7	7	8	-220.22195	38.80622	24.01986	-220.22195	38.80622	53.55674
8	8	9	-208.10894	35.73670	53.55674	-208.10894	35.73670	83.51213
9	9	10	-190.19057	26.84030	83.51213	-190.19057	26.84030	106.72869
10	10	11	-185.08863	13.84351	106.72869	-185.08863	13.84351	118.70798
11	11	12	-181.03822	-5.41729	118.70798	-181.03822	-5.41729	113.80225
12	12	13	-190.26294	-19.11701	113.80225	-190.26294	-19.11701	97.04949
13	13	14	-205.38392	-27.32403	97.04949	-205.38392	-27.32483	73.51918
14	14	15	-220.85272	-31.98723	73.51918	-220.85272	-31.98723	45.91982
15	15	16	-236.71258	-25.02456	45.91982	-236.71258	-29.02556	20.94950
16	16	17	-252.47831	-29.21252	20.94950	-252.47831	-29.21252	0.00000
17	17	18	-266.18057	-9.38852	0.00000	-266.18057	-9.38852	-0.09917
18	18	19	-275.29545	7.51919	-0.09917	-275.29545	-7.51919	-1.60959
19	19	20	-276.78192	27.78086	-1.60959	-276.78192	27.78086	22.34159
20	20	21	-275.97310	48.84521	22.34159	-275.97310	48.84521	68.56089
21	22	1	-280.07876	72.17157	0.00000	-280.07876	-58.66703	20.79105

I

41

ESCALA DE LA GRAFICA= [illegible] UNIDADES/PULGADA
ORDENADA MENOR = [illegible]
ORDENADA MAYOR = [illegible]

MARCO NO. 21, NUDO INICIAL= 22, NUDO FINAL= 1

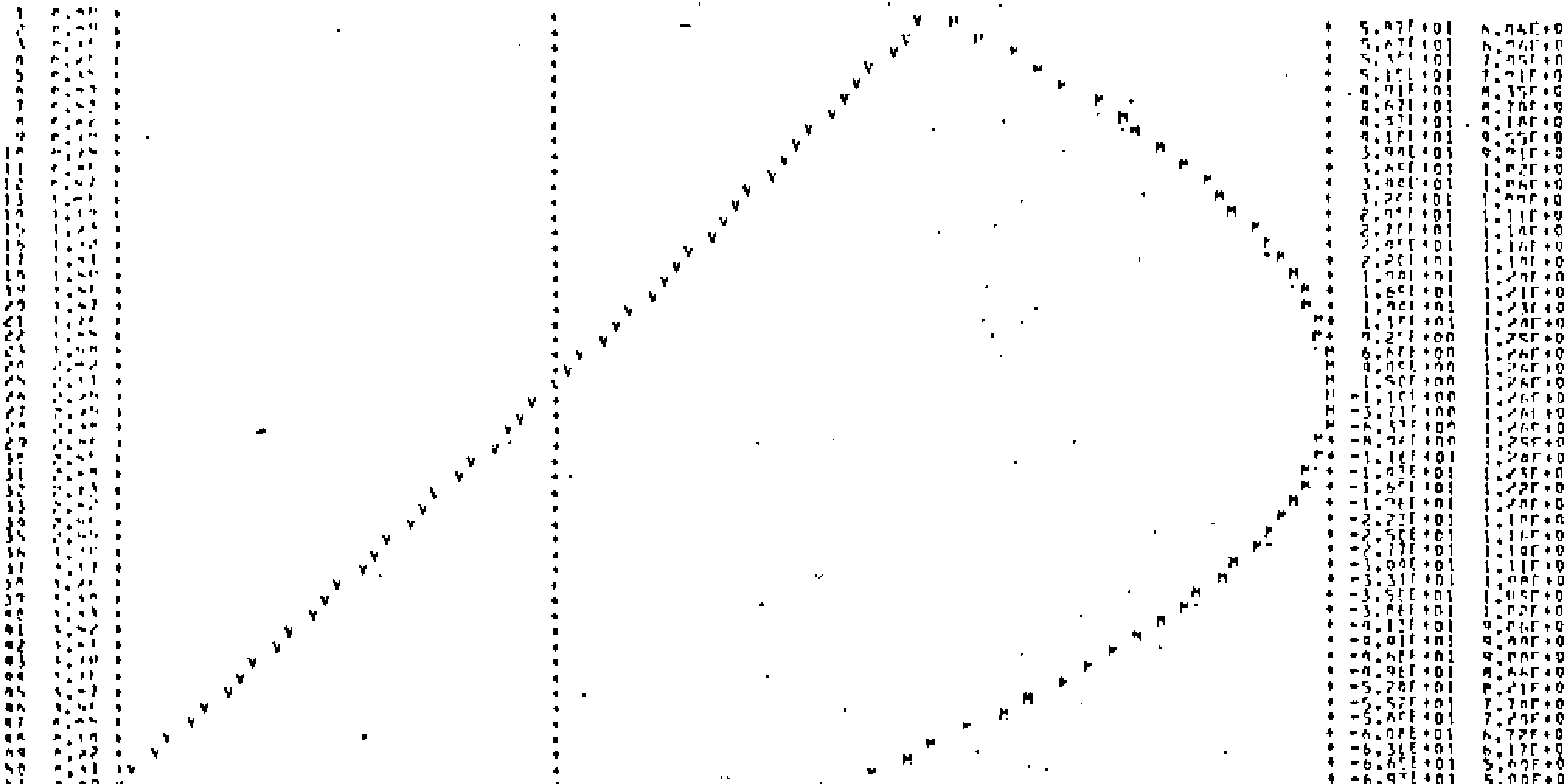


CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

BARRA NO. E	EXTREMO INICIAL	FINAL FLEXIONANTE	MOMENTO NORMAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) CORTANTE	NORMAL	FLEXIONANTE	****	EXTREMO
22	21	23	-272.0[illegible]	50.66703	64.5[illegible]		-272.[illegible]	-72.17

ESCALA DE LAS GRAFICAS= 1.0?E+01 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -7.22?E+01
ORDENADA MAYOR = 1.26?E+02

MATRIZ ?, 22, NUDO INICIAL= 21, NUDO FINAL= 23



CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

44

```
BARRA   E X T R E M O              F U E R Z A      EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M)      ****      EXTREMO FINAL (TON Y
 NO.  INICIAL FINAL                                 C O R T A N T E
 E.     FLEXIONANTE                N O R M A L      C O R T A N T E      FLEXIONANTE

        TIEMPO DE EJECUCION        =    1.6833     SEG
        TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA =    1.0833     SEG

        TIEMPO DE EJECUCION        =    5.1667     SEG
        TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA =    1.3167     SEG
```

45

(76)

CARGA REDUCIDA

[illegible] 1972

[illegible] ESTRUCTURA
[illegible]
[illegible] MOMENTOS
[illegible] INTERNAS
[illegible]

1 NO. DE ESTRUCTURAS POR ANALIZAR

ANALISIS DE UN TUNEL

[illegible] NO. DE ELEMENTOS
[illegible] NO. DE CONDICIONES
1 NO. DE TIPOS DE MATERIAL
[illegible] NO. DE NUDOS DE LA ESTRUCTURA
[illegible]
1 NO. DE TIPOS DE SECCION
[illegible] FRONTERA
[illegible] TRAPECIO [illegible]
[illegible]
1 [illegible]
1 [illegible] ENTREPISO

CONSTANTES ELASTICAS DE LOS MATERIALES
MATERIAL--MODULO DE ELASTICIDAD--COEFICIENTE DE POISSON--PESO VOLUMETRICO
(TON/M**2) (TON/M**3)

1 [illegible] 0.15 2.400

P A R A M E T R O S Q U E D E F I N E N L A S S E C C I O N E S

TIPO	*SECCION*	*PARAMETROS*
0	ESPECIAL	[illegible]
1	RECTANGULAR	[illegible]
2	I	[illegible]
3	I	[illegible]
4	CANAL	[illegible]
5	ANGULO	[illegible]
6	CIRCULAR	[illegible]
7	CAJON	[illegible]
8	CIRCULAR HUECA	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]

17

[illegible]

NOMENCLATURA (PARA ENTRADA DE DATOS DE SECCIONES)

B	ANCHO DE LAS SECCIONES TIPO [illegible] Y 11
BT	[illegible]
D	[illegible]
H	ALTURA DE LAS SECCIONES TIPO [illegible] Y 11
TC	ESPESOR [illegible] DEL ALMA DE LAS SECCIONES TIPO 2,3,4,5,9,10 Y 11
T	ESPESOR [illegible] Y 11
TT	ESPESOR DEL PATIN [illegible] DE LA SECCION TIPO 10
B	ESPESOR DEL PATIN [illegible] DE LA SECCION TIPO 10
BS	ANCHO [illegible] DE LA SECCION TIPO 10
C	DISTANCIA ENTRE LAS CARAS SUPERIORES DEL ALMA Y PATIN RESPECTIVAMENTE DE LAS SECCIONES 9 Y 10

(CM)	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
A	AREA
IZ	[illegible]
FY	[illegible]

SECCION NO.	TIPO	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)
1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

SECCION NO	TIPO	A (CM**2)	IZ (CM**4)	FY
1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]

NUDO NO.	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

1 21 5 65 67

[illegible]

78

[illegible]

[illegible]

DATOS [illegible]

CARGA NO. [illegible]

CARGA 21 CARGA DIST LINEAL [illegible] -1,07[illegible] [illegible] -3,[illegible]010

CARGA 22 CARGA DIST LINEAL [illegible] -1,0210 [illegible] -0,6760

ACCIONES [illegible]

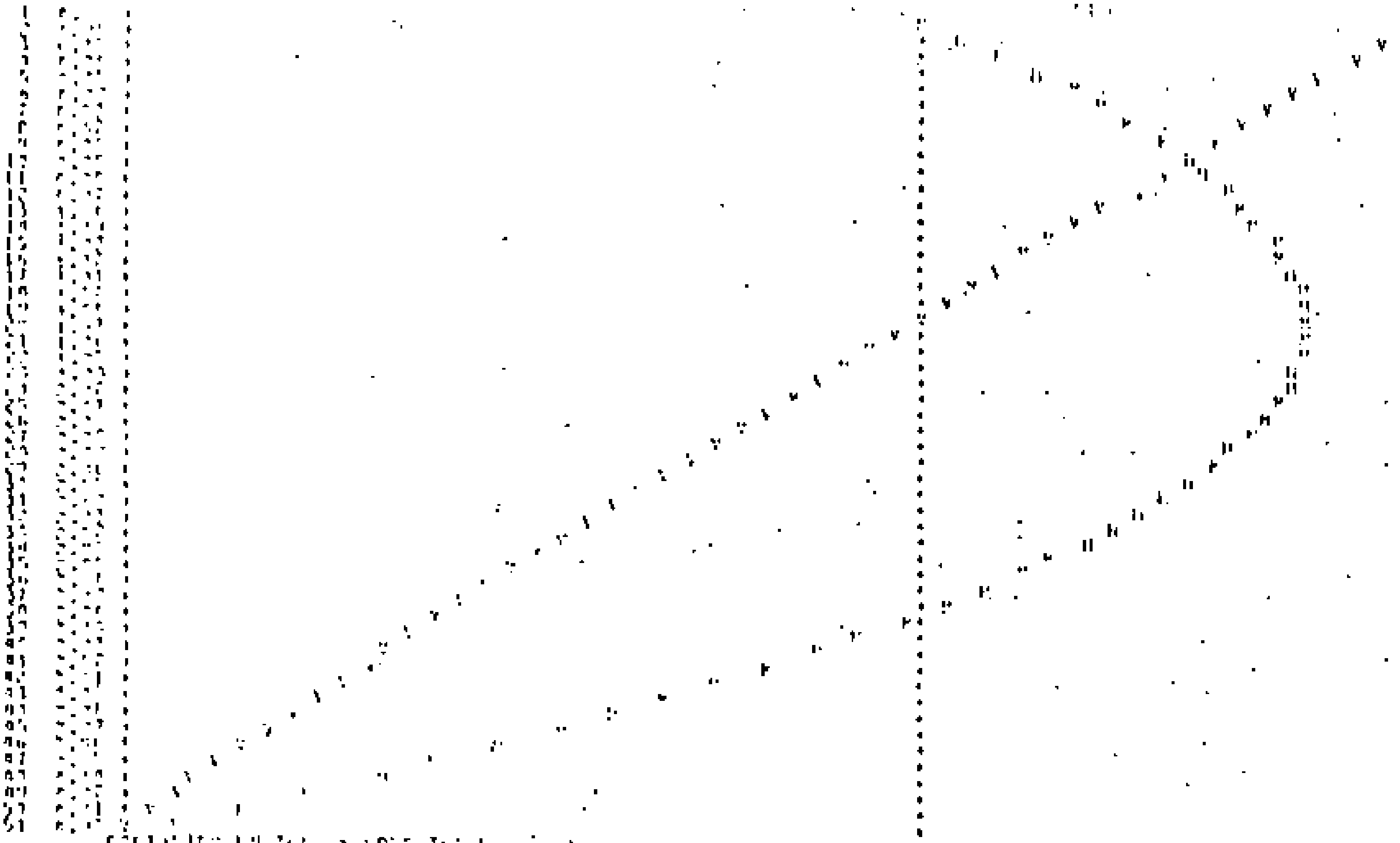
NUDO NO.	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	[illegible]	[illegible]	[illegible]

DESPLAZAMIENTOS [illegible]

PISO	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]

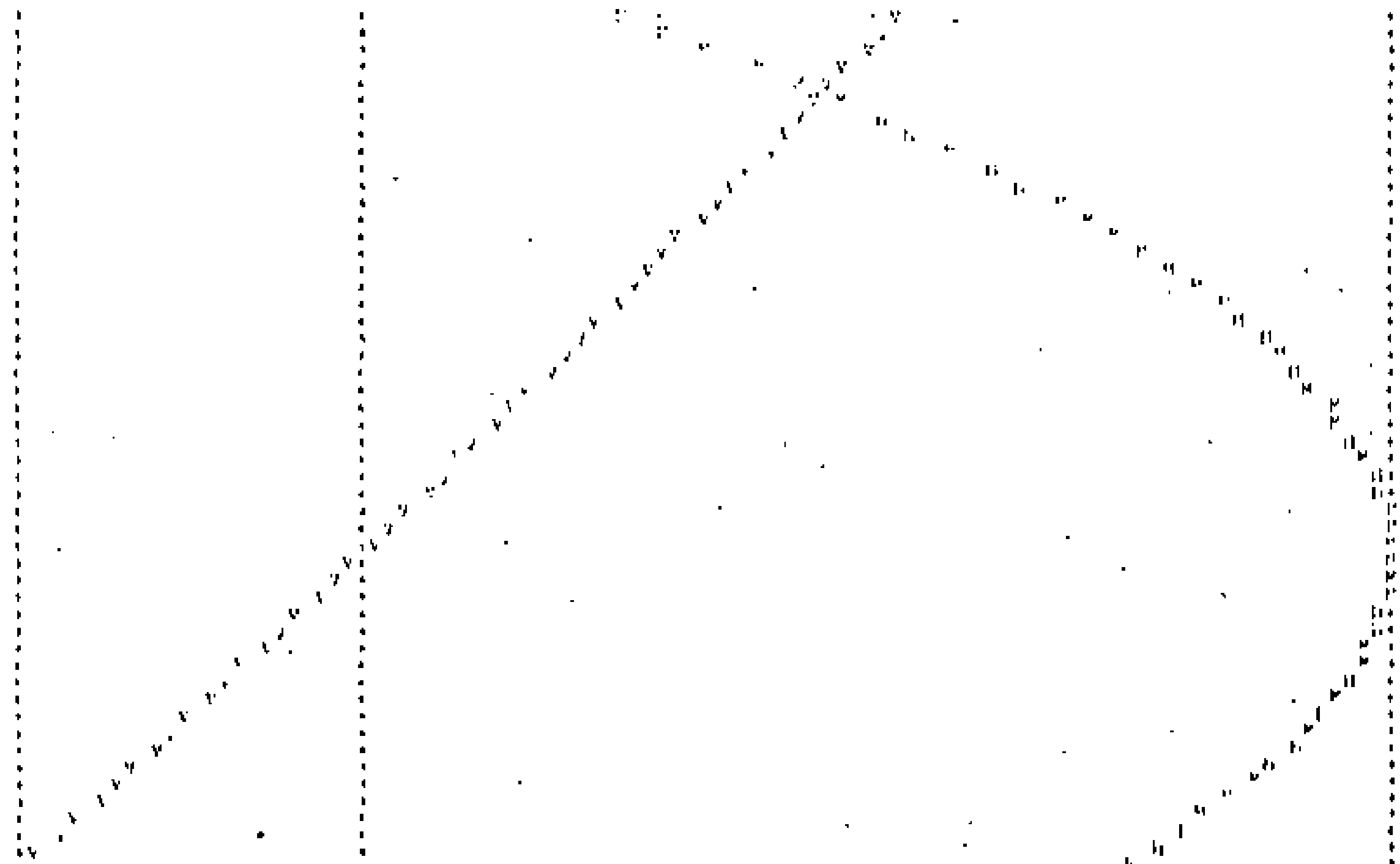
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	[illegible]	[illegible]	[illegible]

BARRA NO.	[illegible]		[illegible]	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M)		****	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M)	
1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-0.90462	-18.62012
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-2.09140	-21.05020
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1.36040	-19.06607
4	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.66023	-13.72000
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.04371	-0.73732
6	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	11.51068	5.25925
7	7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	11.76052	15.36607
8	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	10.24227	20.20715
9	9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7.7[illegible]	30.67653
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.07861	30.39176
11	11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1.16281	33.05701
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-0.70769	22.30769
13	13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-7.37032	22.06789
14	14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-5.16779	18.95000
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-5.09760	7.14325
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-0.23020	0.00000
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-5.09068	-0.39998
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1.15719	-5.39160
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.70068	-2.15626
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.01955	5.63966
21	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-11.56369	-10.83230



7.28E+00	0.
6.87E+00	6.19E-01
6.42E+00	1.22E+00
6.01E+00	1.77E+00
5.51E+00	2.26E+00
5.02E+00	2.71E+00
4.88E+00	3.19E+00
4.47E+00	3.59E+00
4.07E+00	3.97E+00
3.60E+00	4.27E+00
3.27E+00	4.59E+00
2.87E+00	4.87E+00
2.41E+00	5.07E+00
2.01E+00	5.27E+00
1.62E+00	5.43E+00
1.27E+00	5.58E+00
8.37E-01	5.67E+00
4.85E-01	5.71E+00
6.02E-02	5.77E+00
-3.27E-01	5.71E+00
-7.48E-01	5.67E+00
-1.05E+00	5.57E+00
-1.47E+00	5.48E+00
-1.87E+00	5.33E+00
-2.27E+00	5.15E+00
-2.61E+00	4.97E+00
-2.97E+00	4.67E+00
-3.36E+00	4.31E+00
-3.77E+00	4.17E+00
-4.17E+00	3.74E+00
-4.47E+00	3.37E+00
-4.86E+00	2.97E+00
-5.27E+00	2.53E+00
-5.57E+00	2.05E+00
-5.92E+00	1.59E+00
-6.31E+00	1.01E+00
-6.61E+00	4.36E-01
-7.02E+00	-1.06E-01
-7.37E+00	-8.06E-01
-7.78E+00	-1.47E+00
-8.17E+00	-2.14E+00
-8.47E+00	-2.67E+00
-8.81E+00	-3.65E+00
-9.15E+00	-4.47E+00
-9.51E+00	-5.24E+00
-9.87E+00	-6.11E+00
-1.07E+01	-7.00E+00
-1.08E+01	-7.91E+00
-1.05E+01	-8.83E+00
-1.12E+01	-9.53E+00
-1.16E+01	-1.07E+01

22 21 2? -53.71577 7.43766 -53.71577 -7.24221



1	1.12E+01	5.06E+00
2	1.12E+01	6.06E+00
3	1.08E+01	7.62E+00
4	1.06E+01	8.54E+00
5	1.02E+01	9.40E+00
6	9.88E+00	1.04E+01
7	9.51E+00	1.12E+01
8	9.17E+00	1.20E+01
9	8.81E+00	1.28E+01
10	8.46E+00	1.34E+01
11	8.10E+00	1.43E+01
12	7.76E+00	1.50E+01
13	7.38E+00	1.57E+01
14	7.02E+00	1.63E+01
15	6.61E+00	1.69E+01
16	6.35E+00	1.75E+01
17	5.90E+00	1.80E+01
18	5.57E+00	1.85E+01
19	5.21E+00	1.90E+01
20	4.88E+00	1.94E+01
21	4.47E+00	1.99E+01
22	4.10E+00	2.03E+01
23	3.77E+00	2.06E+01
24	3.34E+00	2.09E+01
25	2.97E+00	2.13E+01
26	2.61E+00	2.16E+01
27	2.27E+00	2.16E+01
28	1.88E+00	2.19E+01
29	1.47E+00	2.19E+01
30	1.08E+00	2.21E+01
31	7.07E-01	2.21E+01
32	3.27E-01	2.22E+01
33	-6.27E-02	2.22E+01
34	-4.47E-01	2.22E+01
35	-8.31E-01	2.21E+01
36	-1.27E+00	2.20E+01
37	-1.68E+00	2.19E+01
38	-2.03E+00	2.17E+01
39	-2.41E+00	2.15E+01
40	-2.88E+00	2.13E+01
41	-3.28E+00	2.11E+01
42	-3.68E+00	2.09E+01
43	-4.08E+00	2.06E+01
44	-4.48E+00	2.03E+01
45	-4.88E+00	1.98E+01
46	-5.22E+00	1.97E+01
47	-5.61E+00	1.87E+01
48	-6.01E+00	1.82E+01
49	-6.02E+00	1.77E+01
50	-6.83E+00	1.71E+01
51	-7.24E+00	1.65E+01

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

ANTECEDENTES DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO

DR. PORIFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

MAYO, 1984

METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

INTRODUCCION.

El ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de --- flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogeneo e isotrópico es

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \qquad (1)$$

donde W es la deflexión en el punto (x, y), q es la intensidad de la carga en el punto (x, y), y $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ es la rigidez flexionante de la placa la cual depende del modulo de elasticidad E, el espesor de la placa h y la relación de Poisson ν. En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando la flexión simple - en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:

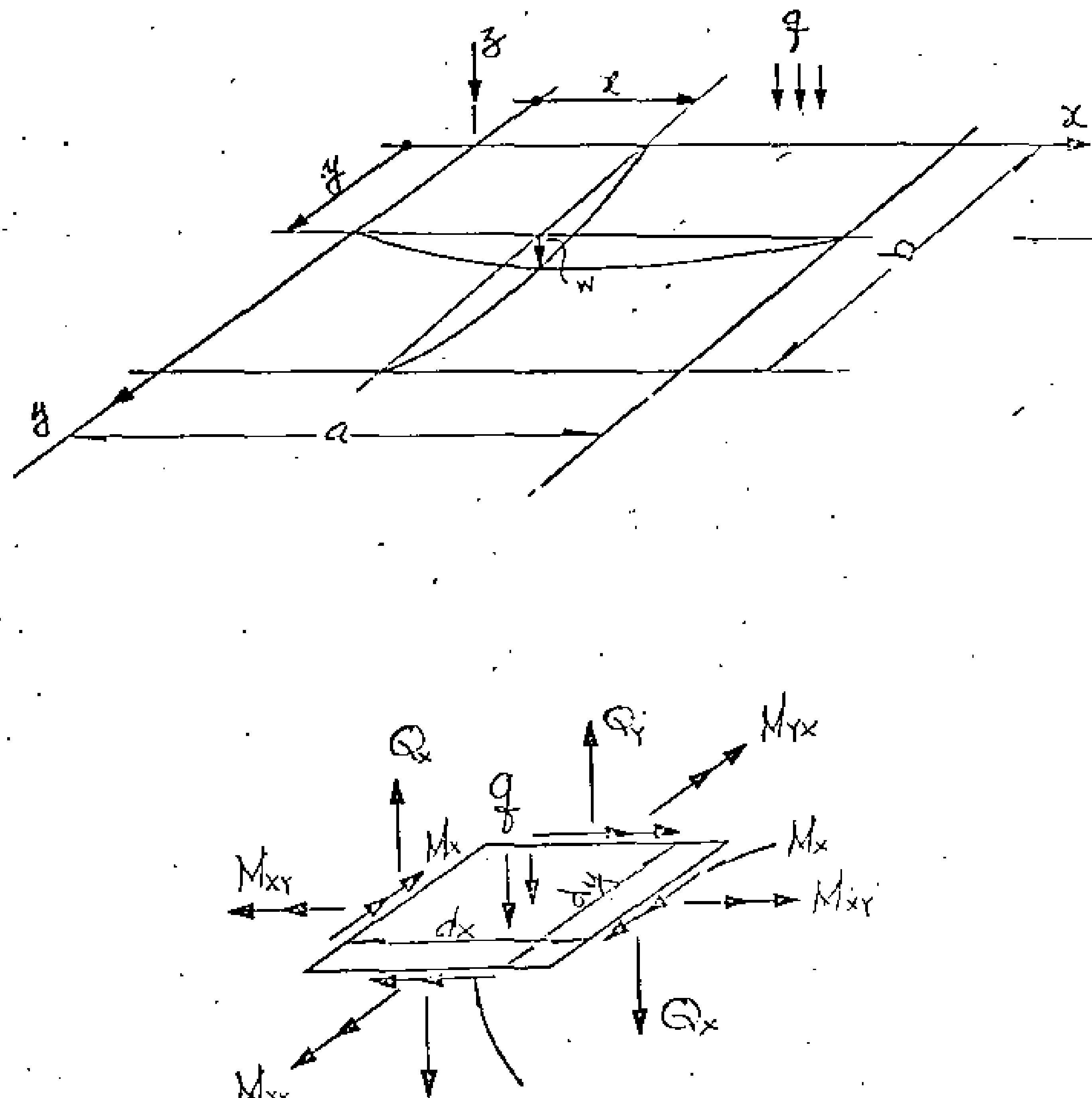


Fig. 1 Superficie media, y elemento dxdy de placa.

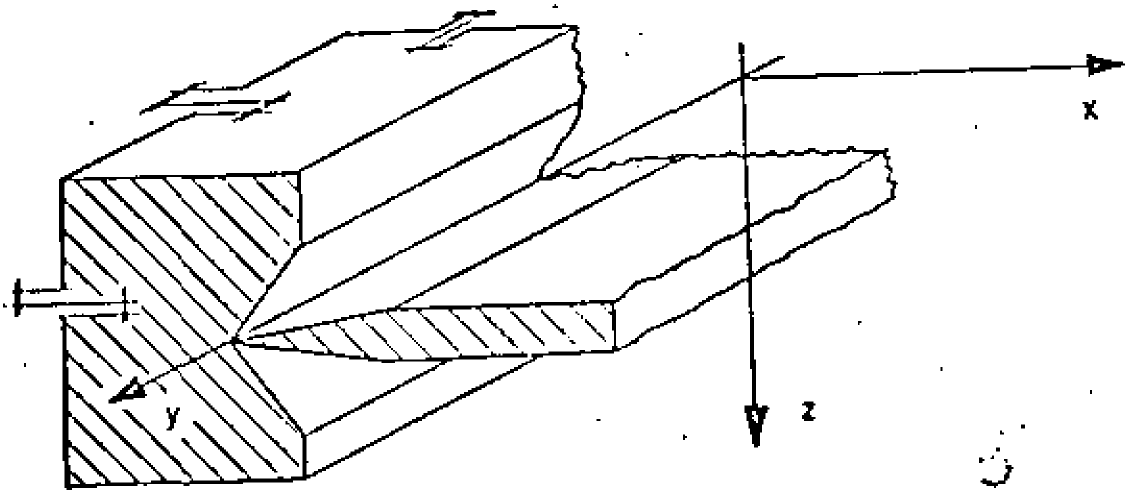
$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$
$$M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \qquad (2)$$
$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

donde

Para el caso particular de la placa libremente apoyada, y rectangular, - cuyas condiciones en la frontera (Fig. 2) son:

$$(w)_{\substack{x=0\\y}} = w(0,y) = 0 \qquad (3)$$
$$w_{xx}(0,y) + \nu w_{yy}(0,y) = 0$$



Navier en 1820 presentó a la Academia Francesa de Ciencias, la solución representando la carga q (x, y), por medio de una serie trigonométrica doble

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \tag{4}$$

substituye (4) en (1) y considerando las propiedades de ortogonalidad de las series trigonométricas obtiene la solución de la ecuación diferencial bi-armónica (1) como

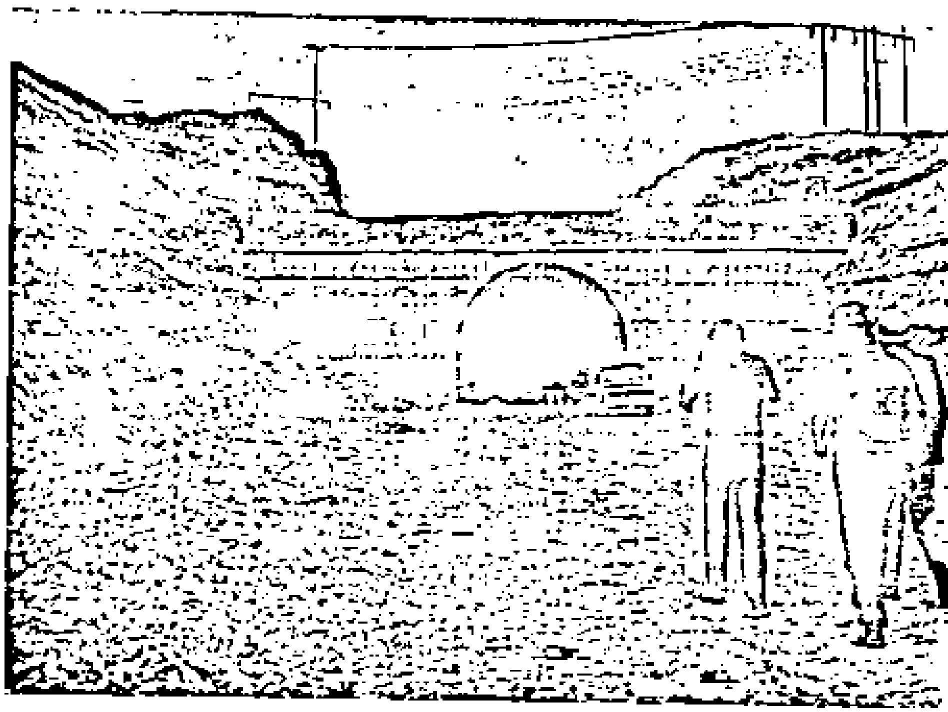
$$W = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \tag{5}$$

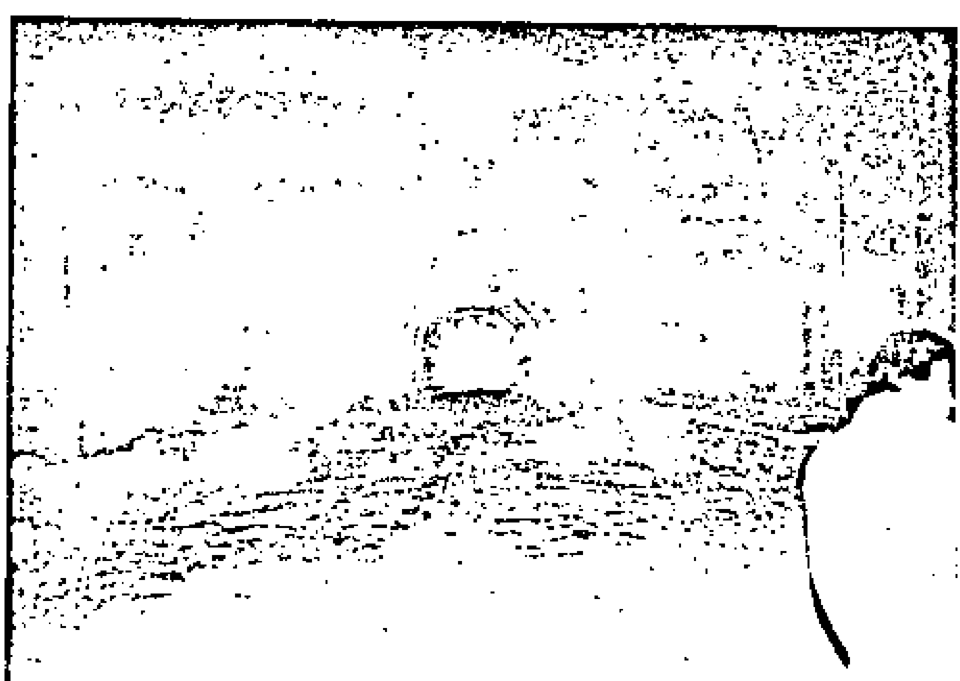
en donde el coeficiente Amn viene expresado por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx\, dy \tag{6}$$

El procedimiento de Navier consiste en lo siguiente: Conocida la función de carga q (x,y), se substituye en (6) y se obtiene el coeficiente Amn el cual nuevamente se substituye en (5) y se obtiene la deflexión W (x,y), y por medio las ecuaciones (2) se obtienen los momentos y cortantes $\{M\}$ y $\{Q\}$.
Es importante observar que las limitaciones de Navier se refieren a una placa rectangular libremente apoyada y con una función de carga q (x,y) impar con respecto a x, y con respecto a Y, es decir, $f(x) = -f(-x)$ y

Si la función fuese par, la representación de q (x,y) sería mediante una serie de cosenos, y si q (x, m) fuese una función cual





quiera, se representaría mediante una serie trigonométrica doble completa de senos y cosenos, y se tendrían problemas en satisfacer las condiciones en la frontera. Generalmente la convergencia de la serie (5) es lenta, y en algunos casos es necesario considerar más de 500 términos para asegurar la solución correcta.

Posteriormente en 1900 M. Levy cambia de posición los ejes coordenados (Fig. 3) e utiliza una serie trigonométrica simple

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \qquad (7)$$

El procedimiento de Levy consiste en substituir (7) en (1) obteniendo una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en fm(y) con coeficientes constantes no homogenea con la cual ya es posible satisfacer diferentes condiciones en la frontera $y = \pm \frac{b}{2}$, pero continua limitado a una placa rectangular libremente apoyada en las fronteras x = o y x = a.

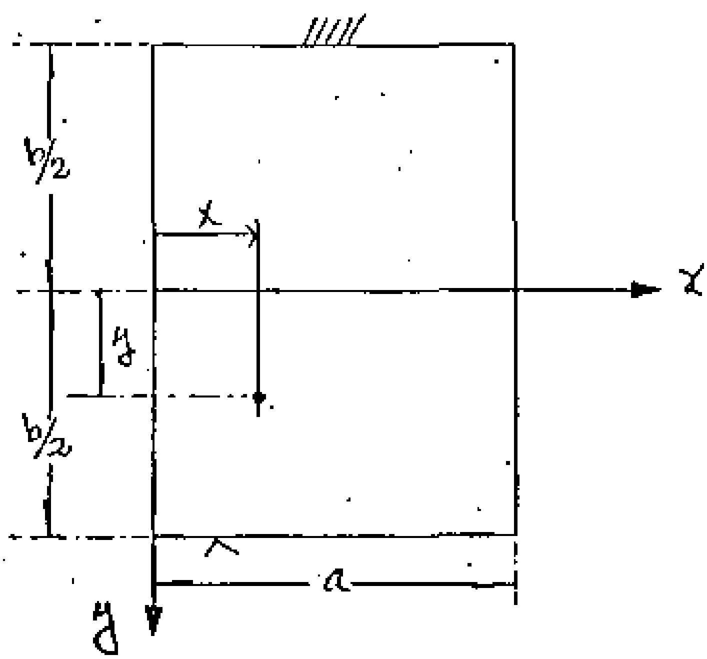


Fig. 3 Posición de ejes en solución de M. Levy.

Las limitaciones de análisis tan restringidas, como los ejemplos anteriores, aparecían en innumerables problemas de ingeniería, lo cual originó el principio de los métodos numéricos, el cual presenta dos etapas de desarrollo. Antes de la época de las computadoras, donde representa un importante papel el Prof. Southwell del Colegio Imperial de Inglaterra, desarrollando y aplicando los métodos numéricos de relajación y diferencias finitas, superando las limitaciones restringidas de los métodos analíticos de solución.

Durante la era de las computadoras digitales, el método de análisis por elementos finitos ha obtenido gran popularidad, puesto que en este procedimiento como resultado de la discretización del medio por analizar, se obtienen sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, lo cual actualmente su solución no representa ningún problema. Por ejemplo, en el caso de análisis elástico lineal de placas, podemos tener cualquier condición de apoyo, de geometría y de cargas, prácticamente se eliminan la mayoría de las restricciones de las soluciones analíticas mencionadas, el problema más importante es verifiar adecuadamente su convergencia.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff Ref. 1 publicado en 1941, y el segundo a McHenry publicado en 1943 en ambos trabajos (Fig. 4) se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidemensional en estado plano de esfuerzos, discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

Posteriormente en 1949 Newmark, en su libro de Métodos Numéricos Ref. 3 , presenta los métodos de Hrenikoff y McHenry. Sin embargo, el

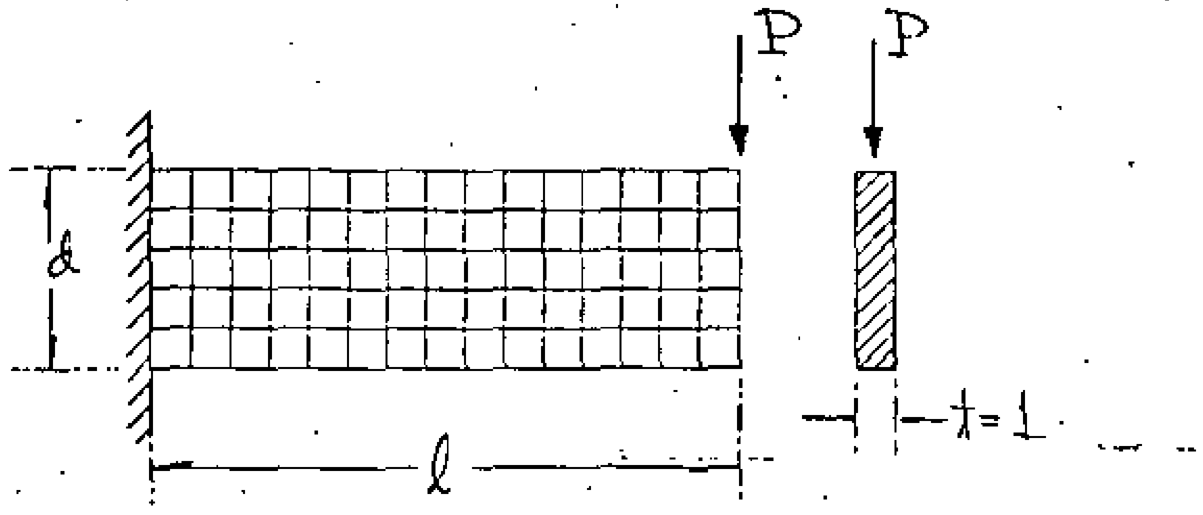


Fig. 4 Primera solución presentada por Hrenikoff en 1941.

crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp Ref. 5 , y no es, sino hasta 1960 con Clough, Ref. 6 nace por primera vez el nombre mágico de "Elemento Finito" , derivando más correctamente las propiedades básicas del elemento triangular y el rectangular, y el hecho de que en el mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva, conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico lineales complejos, en los cuales una solución analítica no era posible.

Se inician la derivación de las propiedades de rigidez de los elementos finitos, el campo de desplazamientos en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual, la identidad de este proceso con el de minimizar la energía potencial total, o sea, el proceso de Rayleigh-Ritz Ref. 7 es obvia. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la Mecánica de Sólidos y posteriormente Zienkiewicz Ref. 13 y Wilson Ref. 14 lo aplican en Mecánica de fluídos y en problemas de análisis de conducción de calor.

Se presenta al final una lista de referencias de importancia del método del elemento finito.

Al iniciar la determinación de esfuerzos y desplazamientos en cierto problema de diseño, las ecuaciones que gobiernan el problema en cualquier forma deben satisfacer equilibrio y continuidad.

El Método del Elemento Finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones (los elementos finitos) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región, las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga la condición de continuidad a través de todo el medio, por lo tanto, el método del elemento finito en común con las soluciones por series y diferencias finitas representa una aproximación a la solución del problema

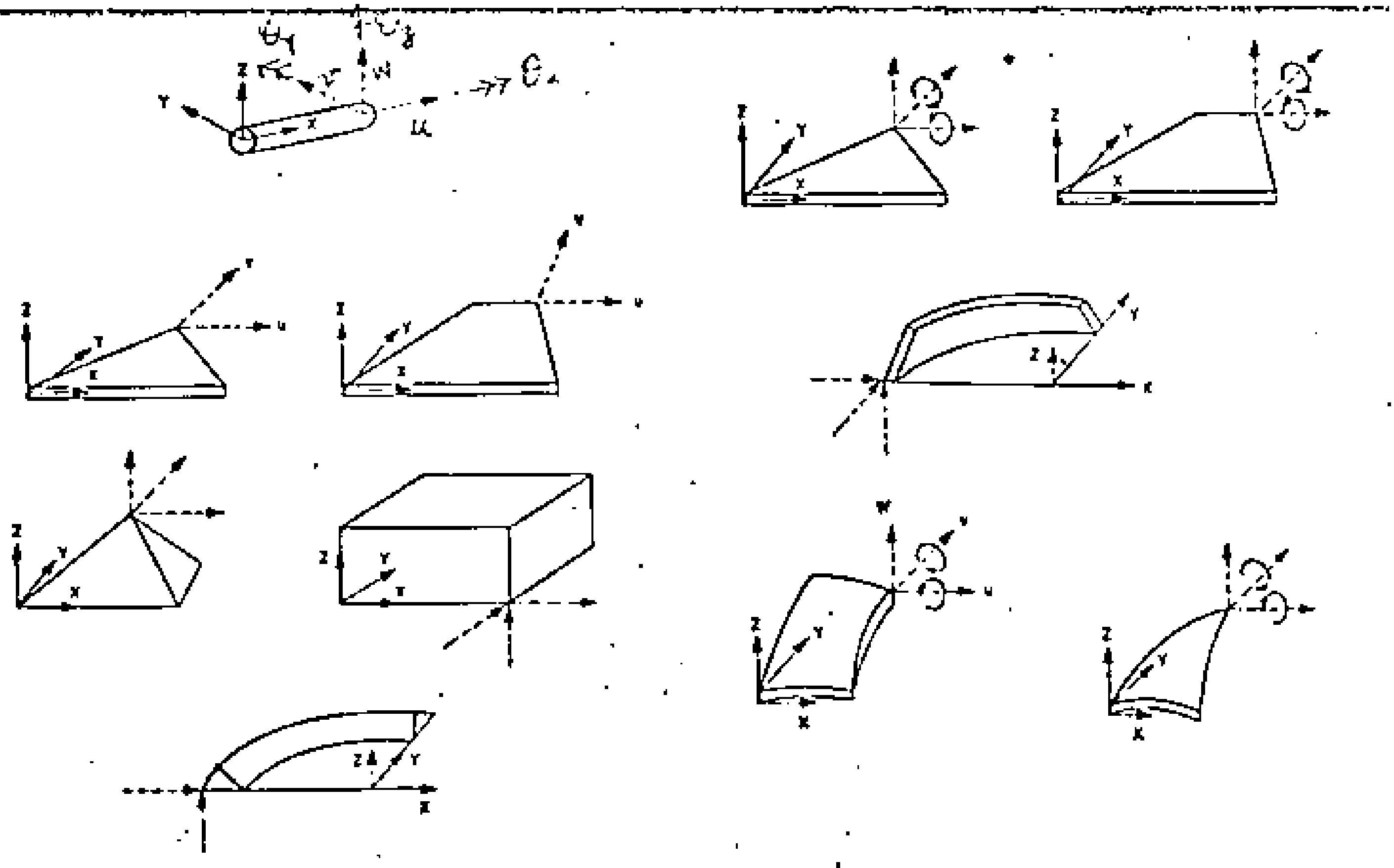


Fig. 5 Tipos de elementos

TIPOS DE ELEMENTOS.

Elementos que son usados comunmente en la práctica son ilustrados en la Fig. 5.

El elemento estructural simple, Fig. 5 (a), es un miembro de la familia total de elementos finitos. Cuando se usa con elementos del mismo tipo describe armaduras y estructuras espaciales. Cuando se combina con elementos de tipo diferente, especialmente con elementos de placa generalmente se describen miembros de rigidez.

Los elementos básicos en análisis por elementos finitos son placas delgadas con cargas contenidas en su plano (condición de esfuerzos planos), triangulares y cuadriláteros se ilustran en la Fib 5b. Se denominan básicos porque los primeros desarrollos concernientes con el método se refieren a ellos.

Los elementos sólidos, Fig. 5 (c), son la generalización tridimensional de los elementos de esfuerzos planos. El tetrahedro y el hexaedro son las formas más comunes y son esenciales para modelar analíticamente problemas de mecánica de suelos, rocas y estructuras nucleares. Es conveniente mencionar que la única forma práctica de resolver problemas tridimensionales prácticos, es el método de elementos finitos.

Uno de los campos más importantes de aplicación del método de elementos finitos es en el análisis de "sólidos axisimétricos", Fig. 5 (d). Una gran variedad de problemas de ingeniería caen en esta categoría, incluyendo concreto, tanques, recipientes nucleares, rotores, pistones, flechas de motores, y la cabeza de los roquets. Generalmente son medios de carga y geometría axisimétrica.

En la Fig. 5 (d). se muestra el elemento triangular, también se usan secciones cuadriláteras.

Elemento de placa plana en flexión es empleado no solo en conección con el comportamiento de placas planas, sino también en cascarones y miembros de pared delgada. Fig. 5 (e).

Estructuras de cascarón delgado axisimétricas, Fig. 5 (f), tienen el mismo rango de significado en la aplicación práctica que los sólidos axisimétricos. Sin embargo, las relaciones gobernantes se derivan de la teoría de cascarones delgados.

Cuando una estructura de cascarón delgado que de hecho es curva, es preferible emplear elementos de cascarón curvos delgados para el modelo analítico, tienen la ventaja de describir más aproximadamente la superficie curva del cascarón, y la apropiada representación del acoplamiento de deformación y equilibrio entre cada elemento. Elementos típicos de cascarones de doble curvatura se muestran en Fig. 5 (g). Gran número de formulaciones para este elemento existen.

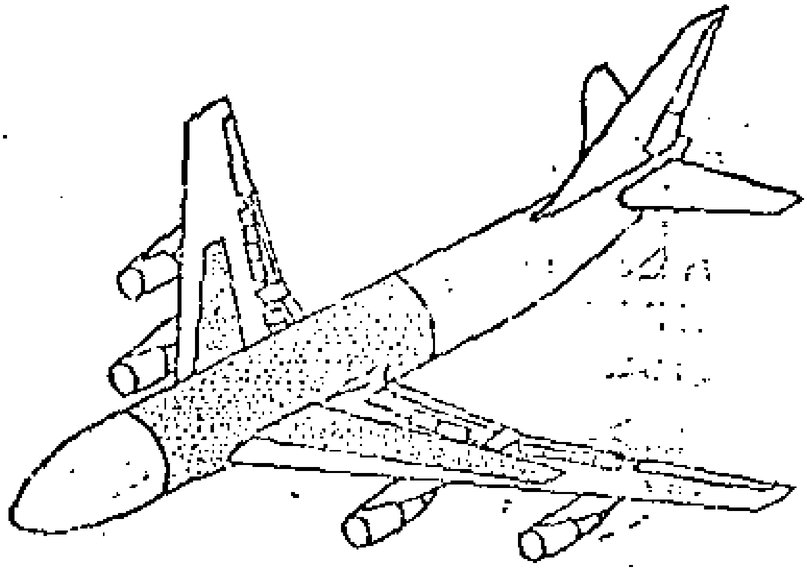
ALGUNAS APLICACIONES DE ELEMENTOS FINITOS.

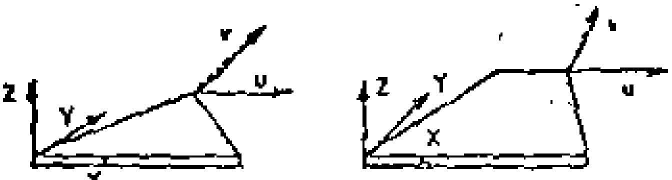
Examinaremos algunas aplicaciones delmétodo de elementos finitos en diseño estructural con el objeto de ilustrar la forma en la cual se usan los elementos de la Fig. 5, y la escala y complejidad de los problemas.

El desarrollo del método del elemento finito se debe a los investigadores relacionados con la industria aeronáutica. La Figura 6 muestra la forma en que se aplicó el análisis por elementos finitos de una porción del avión Boeing 747. La estructura del fuselaje de un avión consiste de laminas de aluminio ligadas a una estructura interna formada por armaduras y atiezadores. La experiencia ha mostrado que los efectos locales de flexión en el cascarón son despreciables, por lo tanto, se supone que consiste de elementos en condición plana de esfuerzos Fig. 5(b). El análisis de elementos finitos del Boeing 747, de la parte achurada, región que conecta el cuerpo o Cascarón Monocoque con las alas, área achurada en Fig. 6, consiste de 7000 incógnitas. Por lo tanto, es común en la práctica dividir la estructura en regiones, o subestructuras, y analizar cada una por elementos finitos con el objeto de producir un superelemento. Los superelementos se ligan entre sí por medio de un procedimiento convencional que determina la fase final del análisis.

El esquema de subestructuración del Boeing 747 es mostrado en la Fig. 6 y los detalles son listados en la Tabla 1.

Sub-Estructura	Descripción	Nodos	Condición Carga	Elemento Viga	Elemento Placa	Grados libertad interacción elementos.	Grado de libertad total.
1	Ala	262	14	355	363	104	796
2	Centro ala	267	8	414	295	198	880
3	Cascarón Monocoque	291	7	502	223	91	1,026
4	Cascarón M.	213	5	377	185	145	820
5	Cascarón M	292	7	415	241	200	936
6	Caja Tren Aterrizaje	170	10	221	103	126	686
7	Cascarón M	285	6	392	249	233	909
8	Caja Tren Aterrizaje	129	10	201	93	148	503
9	Cascarón M	286	7	497	227	92	1,038
TOTAL		2,195	63	3,374	1,970	555	7,594





$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

Esfuerzos planos

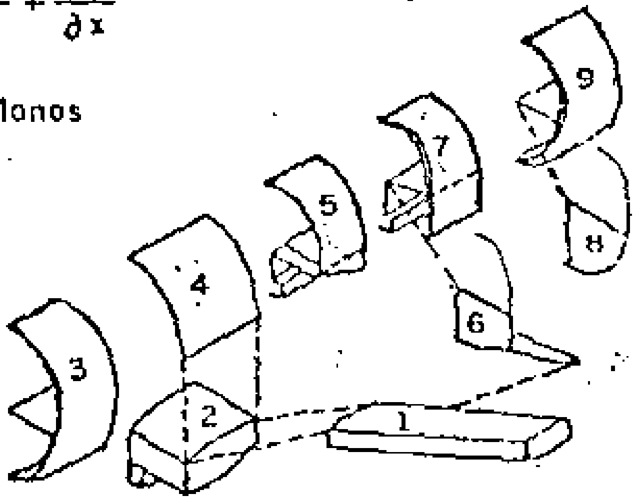


Fig 6 Boeing 747

Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

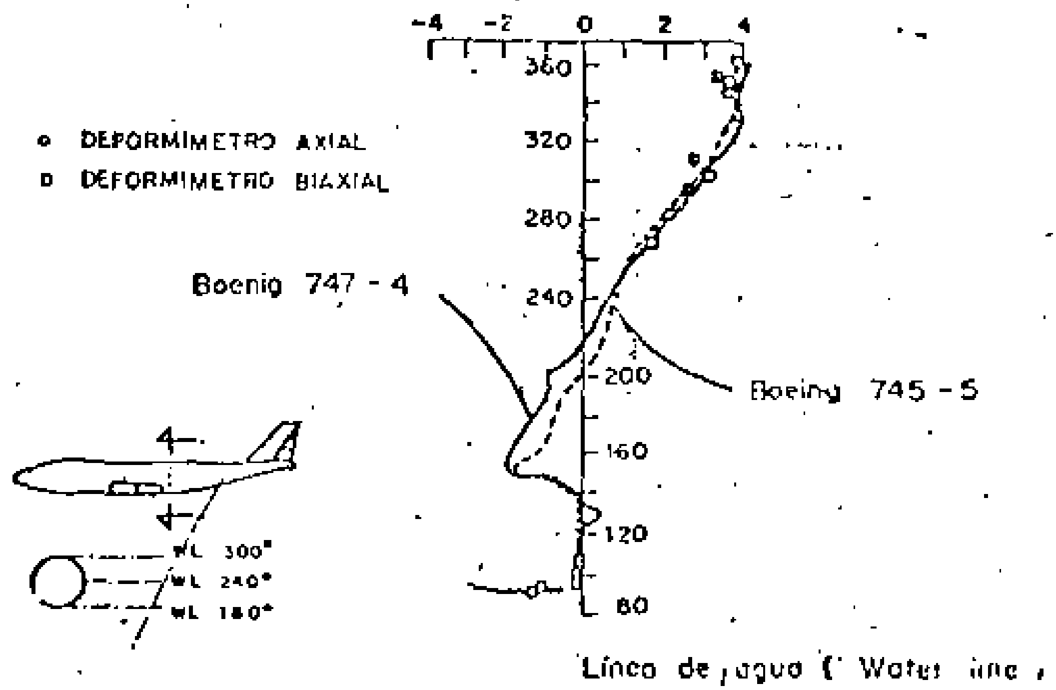


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación del Boing 747

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 5 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig. 5 (b). Elementos estructurales, Fig. 5 (a), son empleados en la representación de la estructura interna.

(14)

El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.

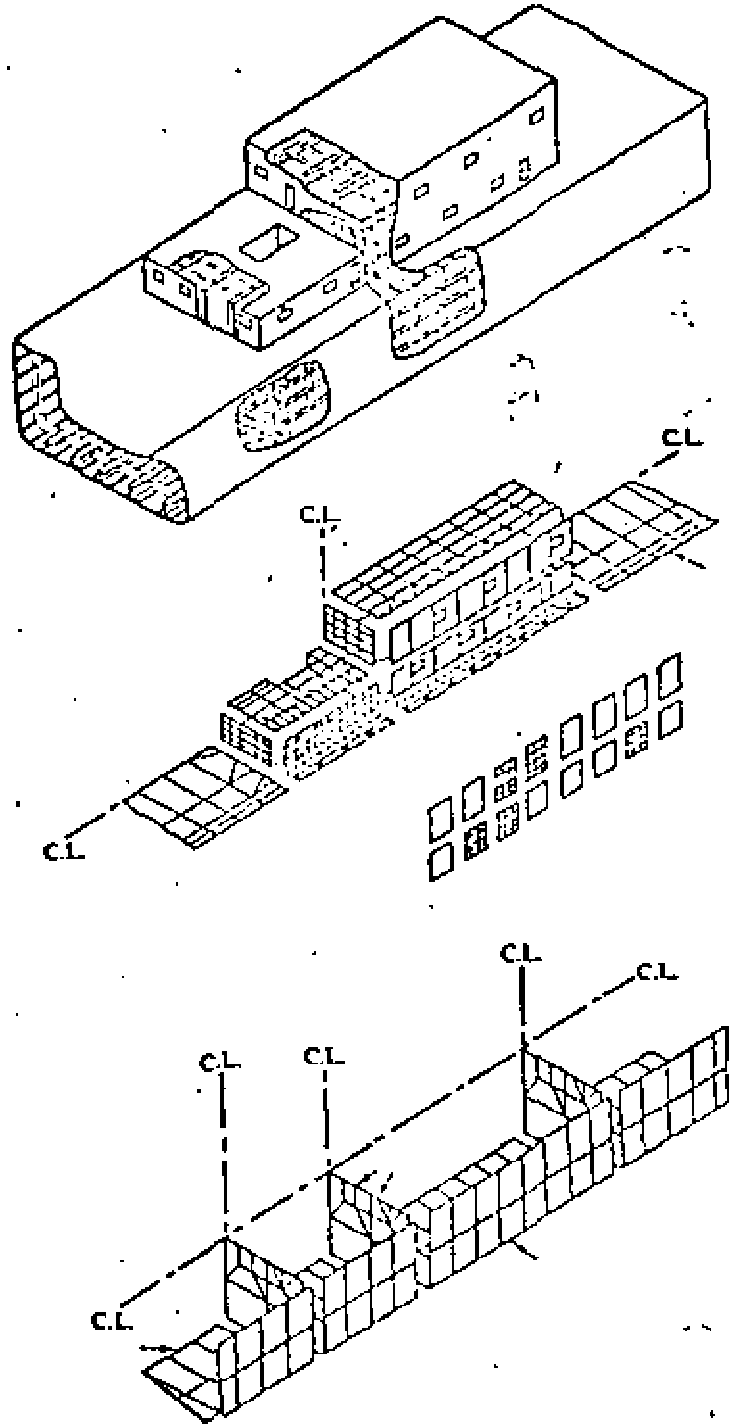


Fig. 8 Análisis por elemento finito de estructura de barco.

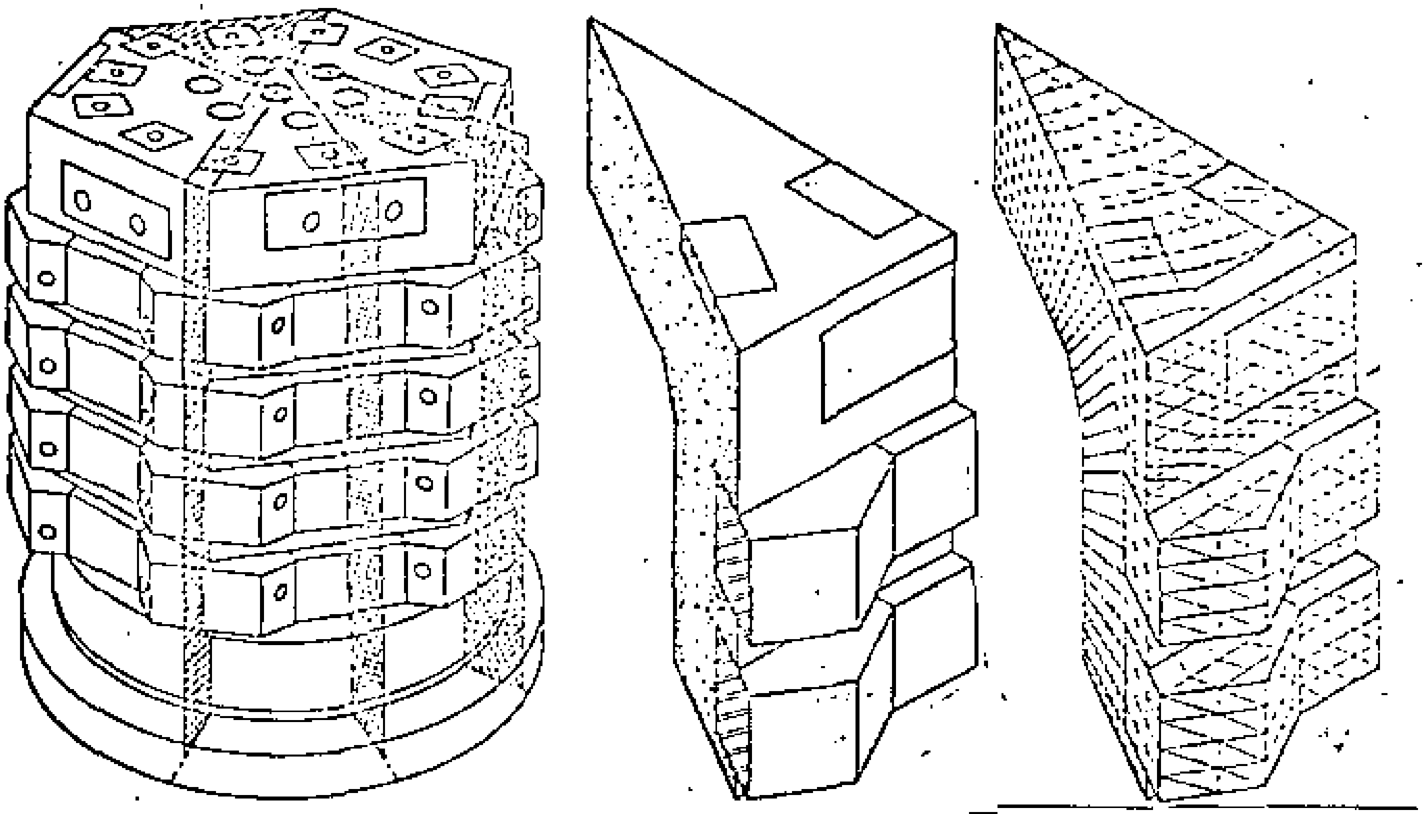


Fig. 9 Análisis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado.

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9 (a) un recipiente reactor de concreto presforzado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, - - Fig. 9 (b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetaedrales y hexaedrales, Fig. 5 (c). En problemas de este tipo, el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las figuras 10 y 11 muestran aplicaciones básicas a ciertos problemas de ingeniería civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones roladas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10 (a), colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10 (b). Y se obtiene una viga más aperaltada reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño, no es necesario el uso del método de elementos finitos.

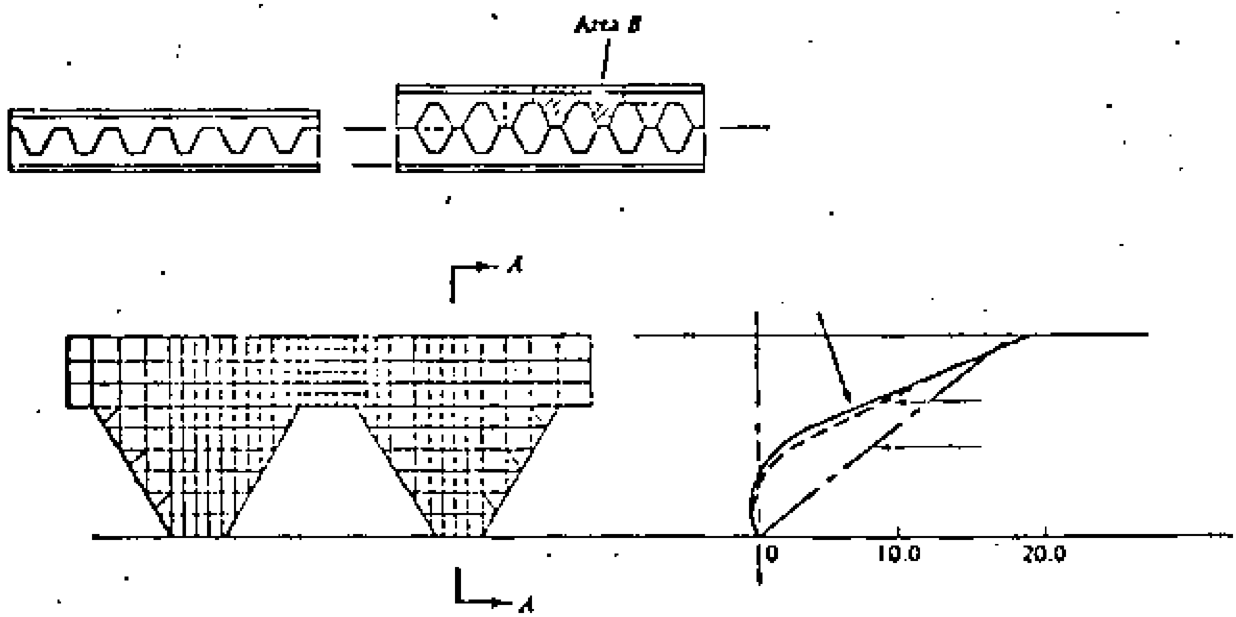


Fig. 10 Análisis de elementos finitos de una viga aperaltada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11 (a) muestra el modelo analítico de elementos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11 (b).

Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidad elástica, mecánica de fluídos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas. Ejem., Ingeniería Civil, Mecánica, Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volumenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de congresos y publicaciones periódicas correspondientes.

PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medio Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es sólo su capacidad, sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12, son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales, fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o materal, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar esterográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse antes de efectuar los cálculos.

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interés primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el trián-

1. Entrada de datos

Definición del material, geometría; cargas y condiciones en la frontera del modelo físico del medio.

↓

2. Elementos de bilbioteca.

Generación de los modelos matemáticos para los elementos estructurales y las cargas aplicadas.

↓

3. Solución

Construcción y solución del modelo matemático para el sistema estructural

↓

4. Salida de resultados

Obtención de esfuerzos y desplazamientos.

Fig. 12 Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural.

20

gulo en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de biblioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebráicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebráicas para interconectar los elementos vecinos y la conección del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebráicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebráicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construídas originalmente. Incluídas en esta fase están las operaciones necesarias de substitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comunmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos, tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT, Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tridimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro. ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J. H. Argyris, H. A. Kamel y otros en la Universidad de Stuttgar. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes. Puede ser costoso para un usuario especializado. SAP, A General Structural Analysis Program, elaborado por E. L. Wilson de la Universidad de California. Incluye análisis lineal estático y dinámico de estructuras elásticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewcz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, - Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de Fluídos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U. S. National - Aeronautical and Space Administration para análisis elástico de varias estructuras incluye, análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias - y exitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, estabilidad dinámica. Ofrece capacidad limitada para análisis no lineal.

SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretarive System. Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory, y Manned Spacecraft Center. Contiene un elemento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures. Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimensionales, triangulares, cuadriláteros, tetaedros, hexaedros, cónicos, sólidos axisimétricos de secciones cuadriláteros y triangulares.

MARC, elaborado por P. V. Marcal, incluye análisis lineal y no lineal de problemas de Mecánica de Medios Continuos.

LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

(1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method," J. Appl. Mech. 8, A 169-175, 1941.

(2) McHenry, D., " A lattice analogy for the solution of plane stress problems," J. Inst. Civ. Eng 21, 59-82, 1943.

(3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).

(4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., Stiffness and deflection analysis of complex structures," J. Aero Sci. 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.

(5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.

(6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from Aircraft Eng. 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.

(7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.

(8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," Bull. Am. Math. Soc. 49, 1-23, 1943.

(9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," Quart. Appl. Math. 5, 241-69, 1947.

(10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.

(11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).

(12) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," Engineer, 200, 507-510, Sept. 1965.

(13) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," Nuclear Eng. and Design 3, 1-11, 1966.

(24)

(14) Herrman, L., "Elastic and torsional analysis of irregular shapes," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 91, EM6, 11-19, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3444.

(15) Zienkiewicz, O. C., Arlett, P. L., and Bahram, A. K., "Solution of three-dimensional field problems by the finite element method," Engineer, 224, 547-550, Oct. 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7898.

(16) Winslow, A. M., "Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh," J. Comp. Physics 1, 149-172, 1967.

(17) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices," J. AIAA 2, 576-577, 1964; AMR 17 (1964), Rev. 5128.

(18) Fraeijs de Veubeke, B., "Displacement and equilibrium models in the finite element method, " (Ch. 9 "Stress analysis"), O. C. Zienkiewicz and G. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); Chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.

(19) Fraeijs de Veubeke, B., "Bending and stretching of plates," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(20) Fraeijs de Veubeke, B., and Zienkiewicz, O. C., "Strain energy bounds in finite element analysis by slab analogy," J. Strain Analysis 2, 265-271, 1967.

(21) Herrmann, L. R., "A bending analysis of plates," Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(22) Pian, T. H. H. and Tong, P., "Basis of finite element methods for solid continua," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1, 3-28, 1969.

(23) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution," J. AIAA 2, 1232-1336, 1964.

(24) Severn, R. T., and Taylor, D. R., "The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed," Proc. Inst. Civ. Eng. 34, 153, 170, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 3213.

(25) Zienkiewicz, O. C., " The finite element method," McGraw-Hill (1967).

(26) Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Triangular elements in bending-conforming and non-comforming solutions," Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(27) Mikhlin, S. G., "The problem of the minimum of a quadratic functional," Holden Day, San Francisco (1966).

(28) Pian, T. H. H., and Tong, Ping, "The convergence of finite element method in solving linear elastic problems," Int. J. Solids Struct. 3, 865-880, 1967.

(29) Key, S. W., "A convergence investigation of the direct stiffness method," Ph. D. thesis, Univ. of Washington, Seattle, 1966.

(30) de Arrantes e Oliveira, E. R., "Theoretical foundation of the finite element method," Int. J. Solids Struct. 4, 929-952, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 7609.

(31) Adini, A., and Clough, R. W., "Analysis of plate bending by the finite element method," Nat. Sci. Found Rep. G. 7337, Univ. of Calif., Berkeley, 1961.

(32) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs," Proc. Inst. Civ. Eng. 28, 471-488, 1964.

(33) Walz, J. E., Fulton, R. E., and Cyrus, N. J., Accuracy and convergence of finite element approximation," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(34) Melosh, R. J., "Astiffness matrix for the analysis of thin plates in bending," J. Aero Sci. 28, 34-42, 1961; AMR 14 (1961), Rev. 3489.

(35) Crandall, S. H., "Engineering analysis," McGraw-Hill, NY (1956); AMR 12 (1959), Rev. 1122.

(36) Szabo, B. A., and Lee, G. C., "Derivation of stiffness matrices for problems on plane elasticity by Galerkin method," Int. J. Num. Meth. Eng. 1, 301-310, 1969.

(37) Zienkiewicz, O. C., and Parekh C. J., "Transient field problems--two- and three-dimensional analysis by iso-parametric finite elements," Int. J. Num. Meth. in Engr. 2-61-71, 1970.

(38) Oden, J. T., "A general theory of finite elements: I-Topological considerations II-Application," Int. J. Num. Meth. Eng. 1, 205-221; 247-260, 1969.

(39) Gallagher, R. H., "A correlation study of methods of matrix structural analysis," AGARDograph 69, pergamon Press (1962).

(40) Argyris, J. H., "Matrix methods of structural analysis," Proc. 14th meeting of AGARD, AGARDograph 72, 1962.

(41) Martin, H. C., "Introduction to matrix methods of structural analysis," McGraw-Hill, NY (1966).

(42) Southwell, R. V., "Relaxation methods in theoretical physics," Clarendon Press, Oxford (1946).

(43) Varga, R. S., "Matrix iterative analysis" Prentice-Hall, (1962).

(44) Griffin, D. S., and Kellog, R. B., "A numerical solution of axially symmetrical and plane elasticity problems," In. J. Solids and structures 3, 781-794, 1967; AMR 21, (1968), Rev. 3185.

(45) Gallagher, R. H., Padlog, J., and Bijlard, P. P., "Stress analysis in heated, complex shapes." J. Aero-Space Science 29, 700-707, 1962.

(46) Argyris, J. H., "Matrix analysis of three-dimensional elastic media. Small and large displacements, " J. AIAA 3, 45-51, 1965; AMR 18 (1965), Rev. 3951.

(47) Zienkiewicz, O. C., Irons, B. M., Ergatoudis, J., Ahmad, S. and Scott, F. C., "Iso-parametric and associated element families for two- and three-dimensional analysis, " (Ch. 13 of "Finite element method in stress analysis"), I. Holand and K. Bell, edited by, Tapir, Trondheim, Norway (1969).

(48) Irons, B. M., "Engineering application of numerical integration in stiffness method," J. AIAA 4, 2035-2037, 1966.

(49) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved, isoparametric quadrilateral elements in finite element analysis," Int. J. Solids & Struct. 4, 31-42, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 6347.

(50) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Three-dimensional analysis of arch dams and their foundations, "Proc. Sym. on Arch Dams, Inst. Civ. Eng. London, 1968.

(51) Atkinson, B., Brocklebank, M. P., Card, C. C. M., and Smith, J. M., "Low Reynolds number developing flows," A. I. Chem. Eng. Journ. 15-548-553, 1969.

(52) Clough, R. W., and Tocher, J. L., "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, " Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(53) Clough R. W., and Fellipa, C. A., "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(54) Bogner, F. K., Fox, R. L., and Schmit, A. L., "The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulas," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(55) Bell, K., "A refined triangular plate bending element," Int. J. Num. Method. in Eng. 1, 101-122, 1969.

(56) Irons, B. M., "A conforming quartic triangular element for plate bending," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1, 29-46, 1969.

(57) Argyris, J. H., Fried, I., and Scharpf, D. W., "The TUBA family of plate elements for matrix displacement method," Aeronautical Journal R. Ae. Soc. 72, 701-709, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 5921.

(58) Bosshard, W., "Ein neues volltraglicher endliches Element for Plattenbiegung," Int. Ass. Bridge Struct. Eng. Bull, 28, 27-40, 1968.

(59) Cowper, G. R., Kosko, E., Lindberg, G. M., and Olson, M. D., "Formulation of a new triangular plate bending element," Trans. Canadian Aero Space Inst. 1, 86-90, 1968; AMR 22 (1969) Rev. 4068.

(60) Grafton, P. E., and Strome, D. R., "Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method," J. AIAA 1, 2342-2347, 1963.

(61) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite element method of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures," Proc. Symp. on Theory of Arch Dams Pergamon Press (1965).

(62) Connor, J. I., and Brebbia, C., "Stiffness matrix for shallow rectangular shell element," J. of Engnr. Mech. Div. Proc. ASCE 93, 43-63, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7391.

(63) Stricklin, J. A., Navaratna, D. R., and Pian, T. H. H., "Improvements in the analysis of shells of revolution by matrix displacement method (curved elements)." J. AIAA 4, 2069-2072, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 9219.

(64) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems," Proc. 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright -Patterson AFB, Ohio, 1968.

(65) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of thick and thin shell structures by general curved elements," to be published in Int. J. Num. Meth. in Engr.

(66) Argyris, J. H., "Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua," J. Roy Aero Soc. 69, 633-635, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3470.

(67) Marcal, P. V., and King, I. P., "Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method," Int. J. Mech. Sci. 9, 143-155, 1967; AMR 20 (1967), Rev. 7686.

(68) Popov, E. P., Khojasteh-Bakht, M., and Yaghmai, S., "Bending of circular plates of hardening material," Int. J. Solids and Struct. 3, 975-988, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 3240.

(69) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Elasto-plastic solutions of engineering problems, initial stress, finite element approach," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1, 75-100, 1969.

(70) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Stress analysis of rock as a no-tension material," Geotechnique 18, 56-66, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 3296.

(71) Yamada, Y., Yashimura, N., and Sakurai, T., "Stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method," In. J. Mech. Sci, 10, 343, 354, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 2330.

(72) Reyes, S. F., and Deere, D. U., "Elasto-plastic analysis of underground openings by the finite element method," Proc. 1st Int. Congr. Rock Mech II, 477-486, 1966.

(73) Zienkiewicz O. C., Watson, M., and King, I. P., "A numerical method of visco-elastic stress analysis," Int. Journ. Mech. Sci. 10, 807-827, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 8419.

(74) Greenbaum, G. A., and Rubinstein, M. F., "Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements," Nucl. Eng. and Design 7, 379-397, 1968,

(75) Goodman, R. E., Taylor, R. L., and Brekke, T., "A model for the mechanics of jointed rock," J. of Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE 94, 637-659, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 8177.

(76) Zienkiewicz, O. C., and Valliappan, S., "Analysis of real structures for creep, plasticity and other complex constitutive laws," Conf. on Materials in Civ. Eng. Univ. of Southampton, 1969, J. Wiley (1970).

(77) Martin, H. C., "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(78) Gallagher, R. H., and Padlog, J., "Discrete element approach to structural instability analysis" J. AIAA 1, 1437 1439, 1963.

(79) Kapur, K. K., and Hartz, B. J., "Stability of thin plates using the finite element method," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 92, 177-195, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 4676.

(80) Anderson, R. G., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Vibration and stability of plates using finite elements," Int. J. Solids and Struct. 4, 1031-1055, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 6815.

(29)

(81) Gallagher, R. H., and Yang, H. T. Y., "Elastic instability predictions for doubly curved shells," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struc. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(82) Carson, W. G., and Newton, R. E., "Plate bucking analysis using a fully compatible finite element," J. AIAA 8, 527-529k 1969.

(83) Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J., " Large deflection of structures subject to heating and external loads, " J. Aero. Sci. 27, 97-106, 1960.

(84) Marcal, P. V., "Finite element analysis of combined problems of material and geometric behavior," Techn. Rep. 1 ONY, Brown University, March 1969.

(85) Brebbia, C., and Connor, J., "Geometrically non-linear finite element analysis," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 463-483, 1969.

(86) Marcal, P. V., "Effect of initial displacement on problem of large deflection and stability," Techn Report ARPA E54, Brown University, Nov. 1967.

(87) Oden, J. T., "Finite element large deflection analysis of plates," J. Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 143, 1969.

(88) Murray, D. W., and Wilson, E. L., "Finite element postbuckling analysis of thin elastic plates," J. AIAA 7, 1915, 1969.

(89) Schmit, L. A., Boyner, F. K., and Fox, R. L., "Finite deflection structural analysis, using place and cylindrical shell discrete elements," J. AIAA 5, 1525-7, 1965.

(90) Oden, J. T., and Sato, T., "Finite strains and deformations of elastic membranes by the finite element method," Int. J. Solids and Struct. 3, 471-478, 1967 AMR 22 (1969), Rev. 7672.

(91) Oden, J. T., "Finite plane strain of incompressible elastic solids by the finite element method," The Aeronautical Quarterly, 18, 254-264, 1967.

(92) Zienkiewicz, O. C., Mayer, P., and Cheung, Y. K., "Solution of anisotropic seepage problems by finite elements," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 92, 111-120, 1966.

(93) Taylor, R. L, and Brown, C. B., "Darcy flow solution with a free surface," J. of the Hydr. Div., Proc. ASCE 92, 25-33, 1967; AMR 32 (1969), Rev. 702.

(94) Martin, H. g., "Finite element analysis of fluid flows," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(95) Arlett, P. L., Bahrani, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides)," Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.

(96) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid," Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.

(97) Taylor, C., Patil, B. S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undamped modes," Proc. Inst. Civ. Eng. 43, 1941-155, 1969.

(98) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis," Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(99) Zienkiewicz, O. C., Irons, B., and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method," Symp. on Vibration in Civ. Eng., Inst. Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.

(100) Sandhu, R. S., and Wilson, E. L., "Finite element analysis of seepage in elastic media," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.

(101) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids," Int. J. Solids Struct., " Part I: Analysis procedure," 5, 1311-33, 1969; Part II: " The computational problem," 6, 195-207, 1970.

(102) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis," Int. J. Num. Meth. in Eng. 2,5-32,1970.

(103) Johnson, W. M., and Mclay, R. W., "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity," J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.

(104) Przemieniecki, J. S., "Theory of matrix structural analysis," McGraw-Hill, 1968.

(105) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural analysis," McGraw-Hill, 1969.

(106) Pope, G. G., " The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(107) Miller, R. E. and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft," On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N. Y., 1970.

(108) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, June, 1969.

(109) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn., May, 1970.

(110) Cheng, W. K., M. U. Hosain, and V. V. Neis, "Analysis of Castellated Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.

(111) Gallagher, R. H., "Large-Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.

(112) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.

(113) Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1973.

FINITE ELEMENT METHOD
THEORY AND APPLICATION

1. INTRODUCTION

1.1 HISTORICAL BACKGROUND

The finite element method (FEM) has become a powerful numerical technique for solving complex problems in science and engineering, mainly due to the advances made eariler in the numerical methods particularly in matrix methods as well as due to the rapid introduction of high speed computers in the market. However, the introduction of concepts and applications of FEM dates back to the era of mathematicians who tried to calculate the perimeter and area of a circle by idealizing it as a regular polygon. It is also interesting to note that the bound solutions which are often discussed in FEM can be traced back to the solution of the area of a circle. If the circle is modelled with an inscribed polygon, a lower bound solution is obtained whereas an upper bound solution is obtained by replacing the circle by a circums cribed polygon. Even though the basic concepts of FEM existed for over two thousand years, for all practical purposes, one can only say that these concepts were actually used for solving physical problems in 1950s by the aeronautical engineers.

In 1956, Turner et al (Ref 1) presented the stiffness analysis for the complex structures, which is the starting point in the rediscovery of FEM. Nevertheless, Clough (Ref 2) was the one who actually used the term FEM in 1960. Since then, a tremendous amount of research has been done in this field and quite a large number of papers have been published in almost all the journals related to all fields of engineering as well as some in the fields of mathematics and science. In addition, several conferences have been held all over the world and hundreds of papers have been presented in each. The theory and application of FEM have also been presented in numerous text books (Ref 3-22). In order to help the research workers in tracing the references required for their particular work several bibliographics have either been published or under preparation, among them notably Ref (23) is a good source of information.

1.2 APPLICATIONS OF FEM

The FEM is applicable to a variety of boundary value and initial value problems in engineering as well as applied science. Some of these applications are:

1. Stress Analysis of Structures, Stability of Structures, Dynamic response of structures, Thermal Stress Analysis, Torsion of prismatic members
2. Stress Analysis of Geomechanics problems, Soil-Structure Interaction, Slope Stability problems, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Seepage in soils and rocks, Consolidation settlement
3. Solutions in Fluid Mechanics, Harbour oscillations, Pollution Studies, Sedimentation
4. Analysis of Nuclear Reactor Structures
5. Stress Analysis and Flow Problems in Biomechanics
6. Characteristic Study of Composites in Fibre Technology
7. Wave Propagation in Geophysics
8. Field Problems in Electrical Engineering

Apart from the above mentioned areas, the FEM is also applicable to any other problem as long as the analyst makes certain that the problem is amenable to solution based on the assumptions introduced in the formulation of FEM and appropriate material properties can be provided in a realistic manner.

1.3 METHODS OF ANALYSIS

In general, there are four basic methods of analysis in FEM-displacement method, equilibrium method, mixed method and hybrid method. The field variables or unknown quantities in each of these methods are as follows.

- Displacement method - displacements and their derivatives
- Equilibrium method - stress components
- Mixed method - some displacements and some stress components
- Hybrid method - displacements or boundary forces

In the displacement method, smooth displacement distribution is assumed within an element, interelement compatibility of displacement is generally assured and minimum potential energy criterion is used in the formulation.

In the equilibrium method, the interior stress distribution is assumed to be smooth, the equilibrium of boundary tractions is maintained and the minimum complimentary energy is the basis for the formulation.

In the mixed method which is generally used for plate and shell problems, both displacements and stresses are assumed smooth in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the inter-element boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as *elements*. These elements are interconnected at joints known as *nodes*. The principal unknown is termed as the *field variable*. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed to develop the finite element equations which relate the field variables at the nodes to the corresponding action vector at the nodes of the element. This relationship is provided by the so called property matrix which is based on the material and the geometric properties of the element. Finally these finite element equations are assembled to form a system of algebraic equations for the entire domain. The unknown field variable is obtained by solving this system of algebraic equations.

1.5 BASIC STEPS IN FE ANALYSIS

The basic steps in the finite element analysis of general problems are as follows.

1. The continuum is divided into finite elements of any arbitrary shape.

2. A suitable polynomial is chosen to represent the distribution of the field variable within an element in terms of its nodal values. Thus, the field variables at the nodes become the primary unknowns.

3. Using variational methods or residual methods, the finite element equations are formulated.

4. The individual finite element equations obtained in step 3 are assembled to form a set of algebraic equations for the overall continuum.

5. The solution of the algebraic equations obtained in step 4 yields the values of the field variables at the nodes.

6. From the field variables at the nodes, the secondary variables such as stress, strain for an element can be obtained.

REFERENCES

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero, Sci., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823

2. CLOUGH, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378

3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967

4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971

5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971

6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972

7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York,1972

8. URAL OKTAY, Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973

9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973

10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973

11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973

12. NORRIC, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method-Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973

13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974

14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975

15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975

16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975

17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers, John Wiley, New York, 1975

18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975

19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976

20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976

21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976

22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976

23. NORRIE, D. H. and de VRIES, G., "A Finite Element Bibliography (3 Parts), Report No. 57, Mechanical Engineering Department, The University of Calgary, Canada, 1974

VI-2 Programas de Proposito General y Opciones de Análisis

ELEMENTS AND SOME POPULAR (?) COMPUTER CODES

PROGRAM	AUTHORS
SUPERB	STRUCTURAL DYNAMICS RESEARCH CORPORATION (SDRC)
EASE2	ENGINEERING ANALYSIS CORPORATION (EAC)
STARDYNE	MECHANICS RESEARCH INC. (MRI)
NASTRAN	MCNEAL-SCHWENDLER CORP. (MSC)
ANSYS	SWANSON ANALYSIS SYSTEMS (SAS)
MARC-CDC	MARC ANALYSIS CORP.

40 p. 2 of 10

1978

38

TYPES OF ANALYSIS

ANALYTICAL CAPABILITY		PROGRAM: EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
LINEAR STATICS	MECHANICAL LOADS	•	•	•	•	•	•
	TEMPERATURE LOADS	•	•	•	•	•	•
	EULER BUCKLING			•		•	
	INERTIA RELIEF			•			
DYNAMICS	MODE/FREQUENCY	•	•	•	•	•	
	FREQUENCY RESPONSE		•	•	•		
	TRANSIENT RESPONSE	•	•	•	•	•	
	SHOCK SPECTRA	•	•		•		
	RANDOM RESPONSE		•	•			
	NONLINEAR TRANSIENT			•	•	•	
NONLINEAR STATICS	NONLINEAR BUCKLING					•	
	LARGE DISPLACEMENT				•	•	
	PLASTICITY			•	•	•	
	CREEP				•	•	
	VISCOELASTICITY			•		•	
	LARGE STRAINS					•	
HEAT TRANSFER	STEADY STATE			•	•	•	•
	TRANSIENT			•	•	•	
SUBSTRUCTURES (SUPER-ELEMENTS)	STATIC		•	•	•		
	DYNAMIC		•	•	•		
	CYCLIC SYMMETRY			•			
MISCELLANEOUS	FRACTURE MECHANICS			•	•	•	
	FLUIDS			•	•	•	
	ELECTRIC CIRCUITS				•		
	OPTIMIZATION			•			
	ACOUSTIC CAVITIES			•			
	FATIGUE DAMAGE				•		

G (41) p. 3/10

STRUCTURAL ANALYSIS ELEMENT/MATRIX LIBRARY

ELEMENT		EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
		PROGRAM					
LINE ELEMENTS	ROD			•	•	•	
	BEAM	•	•	•	•	•	•
	TAPERED BEAM				•	•	
	OFFSET BEAM		•	•	[illegible] BEAM OFFSET		•
	PINNED END BEAM	•	•	•			•
	CURVED BEAM					•	
FLAT MEMBRANES AND PLATES	3 NODE TRIANGLE	•	•	•	•	M	
	6 NODE TRIANGLE			M		M	C
	SHEAR PANEL			•			
	4 NODE QUAD	•	•	•	•	M	•
	8 NODE QUAD				S	M	S,
CURVED SHELLS	3 NODE TRIANGLE					•	
	6 NODE TRIANGLE						C
	4 NODE QUAD					•	•
	8 NODE QUAD					•	S,
	REDUCED THICK SHELL					•	

NOTES:

- **M** Membrane and/or plane strain only (no plate bending)
- **S** Includes sub parametric forms with fewer nodes
- **C** Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes

(42) p. 4 of 10

STRUCTURAL ANALYSIS
ELEMENT/MATRIX LIBRARY [continued]

ELEMENT				PROGRAM: EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
AXI-SYMMETRIC ELEMENTS	SHELLS	CONICAL				•	•	D	
		CURVED				•		•	
	TRIANGULAR RINGS	3 NODE				•	•	•	C
		6 NODE				•		D	C
	QUAD RINGS	4 NODE				•	•	•	•
		8 NODE					S	•	S,
SOLID ELEMENTS	TETRA-HEDRON	4 NODE			•	•	•	D	
	WEDGES	6 NODE		•	•	•	•	D	C
		15 NODE						•	C
	HEXA-HEDRONS	8 NODE		•	•	•	•	•	•
		20 NODE				S		•	S,
PIPE ELEMENTS		STRAIGHT		•	•	•	•	•	
		ELBOW		•	•		•	•	
		TEE			•				

NOTES:

- S Includes subparametric forms with fewer nodes
- C Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes
- D - Degenerate case

STRUCTURAL ANALYSIS ELEMENT/MATRIX LIBRARY (continued)

ELEMENT				SASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
GENERAL STIFFNESS ELEMENTS		SPRING	K	1	•		•	•	•
		SCALAR SPRING				•			
		6 x 6 or 12 x 12 MATRIX			•	•	•		•
		GENERAL MATRIX				•			
MASSES	ELEMENT	LUMPED (DIAGONAL)		2	2	2	2		
		CONSISTENT				2	2	2	
	NON-STRUCTURAL	SCALAR (DOF)				•		•	
		NODAL		•	•	•	•		
		DISTRIBUTED				•			
		GUYAN REDUCTION			•	•	•		
		GENERAL MATRIX				•	•		
DAMPING		SCALAR				•			
		DASHPOT				•	•		
		DISCRETE VISCOUS $[C] = \alpha[K] + \beta[M]$		•		•	•	•	
		STRUCTURAL $(1 + ig)[K]$				•			
		MODAL VISCOUS		•	•	•		•	
		GENERAL MATRIX				•	•		
OTHER ELEMENTS		GAP					•	•	
		FRICTION					•	•	
		RIGID		3	•	•			
		REBAR SOLID						•	
		ELASTIC FOUNDATION						•	
		CRACK TIP					•	•	
		LAMINATED SHELL					•	•	
		PLOT ONLY				•		•	

NOTES:
1 See restraints
2 Generated from density
3 See constraints

HEAT TRANSFER–CONDUCTING ELEMENTS

ELEMENT			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	
LINEAR					•	•	•	
PLANAR	3 NODE TRIANGLE				•	•	•	P
	4 NODE QUAD				•	•	•	
	8 NODE QUAD					S	•	[illegible]
	TRANSVERSE CONDUCTING SHELL					•		
AXISYMMETRIC	TRIANGULAR RING				•	•	•	[illegible]
	4 NODE QUAD RING				•	•	•	
	8 NODE QUAD RING					S	•	[illegible]
SOLID	TETRAHEDRON				•	•		
	WEDGE				•	•	D	
	8 NODE BRICK				•	•	•	
	15 NODE WEDGE						D	
	20 NODE BRICK						•	
GENERAL MATRIX INPUT					•			

NOTES:

- S Contains subparametric forms with fewer number of nodes
- P Also contains parabolic isoparametric element with one midside node
- C Also contains cubic isoparametric element with two midside nodes
- D Degenerate case

a: 45 p. 7 of 10

COORDINATE SYSTEMS AND MATERIAL PROPERTIES

FEATURE			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC
COORDINATE SYSTEMS	BASIC (GLOBAL)	CARTESIAN	•	•	•	•	•
		CYLINDRICAL	•	•	•	•	
		SPHERICAL			•	•	
		GENERAL					1
	SKEWED (LOCAL)	CARTESIAN	•	•	•	•	•
		CYLINDRICAL	•	•	•	•	
		SPHERICAL			•	•	
		GENERAL					1
		MIXED	•	•	•	•	•
MATERIAL PROPERTIES		ISOTROPIC	•	•	•	•	•
		2-D ORTHOTROPIC		•	•	•	1
		3-D ORTHOTROPIC				•	1
		TEMPERATURE DEPENDENT	•		•	•	•
		STRESS DEPENDENT			•	•	•
		TIME DEPENDENT				•	•
		NONLINEAR ELASTIC					•
	WORK HARDENING	ISOTROPIC				•	•
		KINEMATIC				•	•
		COMBINED					•
		ORNL 10 CYCLE					•
		GENERAL					1

(Column group heading: PROGRAM)

NOTES:

1 Performed by user subroutine

BOUNDARY CONDITIONS

FEATURE				EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC
LOADING	STATIC	CONCENTRATED		•	•	•	•	•
		DISTRIBUTED (BEAM)		•	•	•	•	•
		PRESSURE	PLATES/SHELLS	•	•	•	•	•
			AXISYMMETRIC ELEMENTS			•	•	•
			SOLIDS	•	•	•	•	•
		TEMPERATURE		•	•	•	•	•
		ACCELERATION		•	•	•	•	•
		ROTATIONAL VELOCITY		•	•	•	•	1
		COMBINATION		•	•	•	•	
		AXI-SYMMETRIC	AXISYMMETRIC SHELLS			•	•	
			AXISYMMETRIC RINGS				•	
	DYNAMIC 1	TIME DEPENDENT		•	•	•	•	•
		FREQUENCY DEPENDENT			•	•		
		PSD RANDOM			•	•		
		SHOCK SPECTRUM		•	•		•	
DISPLACEMENT CONSTRAINTS		SINGLE POINT*		•	•	•	•	•
		MULTI POINT*		2		•	•	•
		SPECIFIED NONZERO DISPLACEMENT		•	•	•	•	•
HEAT TRANSFER		HEAT SOURCE/SINK				•	•	•
		CONVENTION				•	•	•
		RADIATION				•	•	•
		SPECIFIED TEMPERATURE				•	•	•

NOTES: *Single point constraint = enforced zero translation(s) and/or rotation(s) in coordinate(s) associated with a node point
Multi-point constraint = enforced linear constraint relationships between translation(s) and/or rotation(s) which may be associated with different node points

1 Applies to some elements
2 Specialized forms of rigid and interface coupling
3 Displacement components set equal on different nodes
\+ Stand alone program

47

p. 9 6, 10

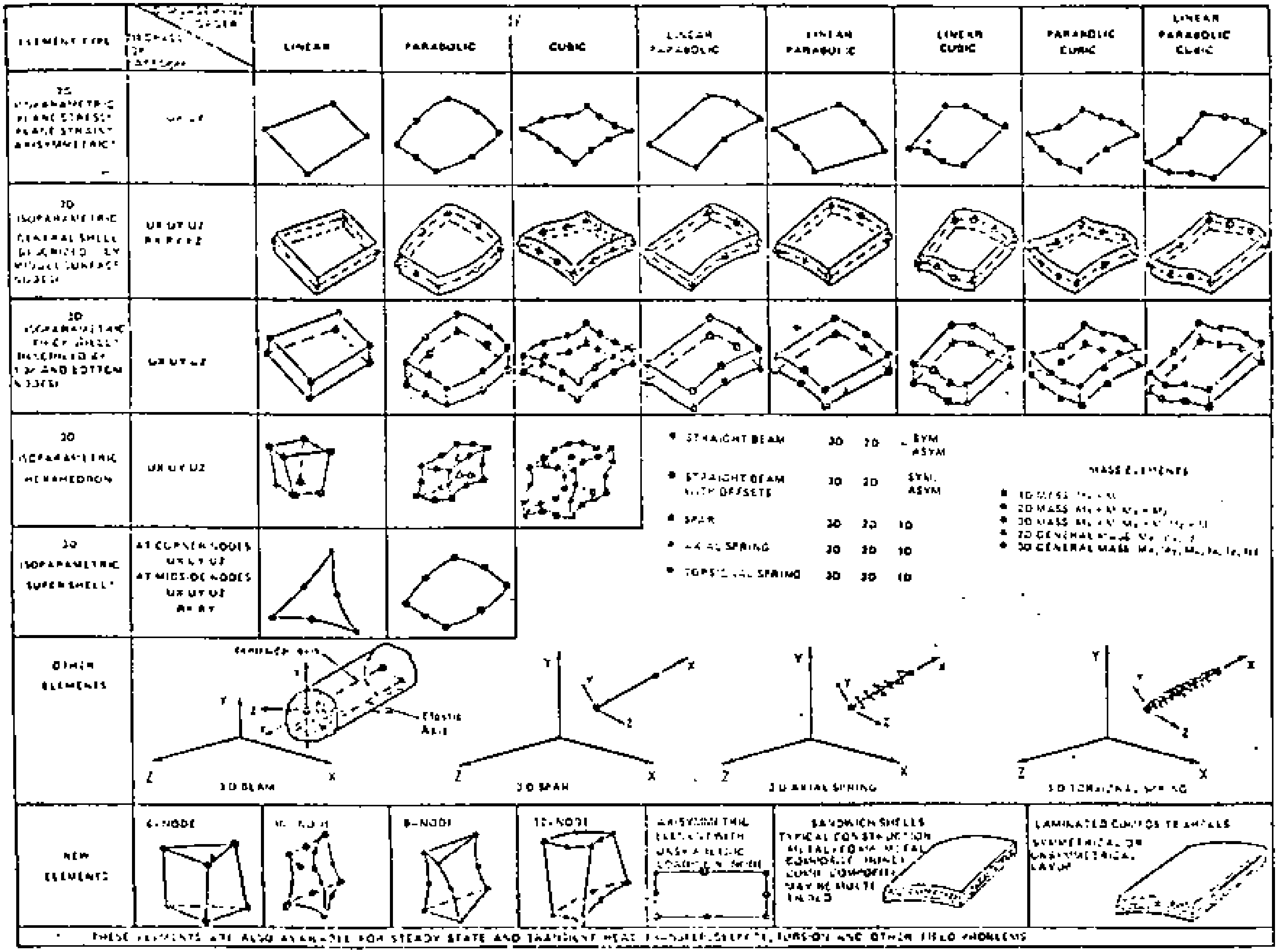
PRE- AND POST-PROCESSING

FEATURE			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	[illegible]
			PROGRAM					
PLOTTING	INPUT	UNDEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		NODE LABELS	+	+	•	•	•	•
		ELEMENT LABELS	+		•	•	•	[illegible]
		PROPERTY LABELS			•	•		[illegible]
		2-D SECTIONS				•	•	
		BOUNDARY CONDITION LABELS	+		•			
		HIDDEN LINES REMOVED					+	
	OUTPUT	DEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		CONTOURS 2D STRUCTURE		+	•	•	+	•
		CONTOURS SOLID STRUCTURE				•	•	•
		TIME HISTORY	4	•	•	•	+	
		FREQUENCY RESPONSE		•	•,4			
		POWER SPECTRAL DENSITY		•	•,4			
		ARBITRARY X VS. Y				•	+	
DATA GENERATION		NODES	1	1,2	1,2,3	1,2	2,3	1,[illegible]
		ELEMENTS	1	1	1,2,3	1,2	2,3	1,[illegible]
		RESTRAINTS	1	1	1,2	1	2,3	[illegible]
		LOADS	1	1	2	1	2,3	[illegible]
OUTPUT SORTING		BY LOAD CASES		•	•	•	•	•
		BY ELEMENT	•		•			
		MAX/MIN SUMMARY	•	•	•			•
		SELECTED NODES AND/OR ELEMENTS		•	•	•	•	
BANDWIDTH MINIMIZATION			•	•	•	W	•,W	[illegible]

NOTES:

1 Generates data in 1 "dimension"
2 Generates data in 2 "dimensions"
3 Generates data in 3 "dimensions"
4 Printer plots
+ Stand alone program
W Wavefront solution

NISA ELEMENT LIBRARY



48

INTERACTIVE SYSTEMS (49) p.1 of 6

Applications Software

The user (designer, draftsman, engineer or technician) interacts with a CAD system through applications software. The programs "talk" the user's language as opposed to the computer implementation language which is, hopefully, isolated from the user in lower levels of utilities and system software. The usefulness of applications software is related to the human engineering of its interface with the user (command language, user I/O hardware devices, software design, etc.) as much as the technical content and features of the program.

Applications software can be divided into two categories: standalone and turnkey. The standalone software is available from a software vendor and frequently runs on several different manufacturer's computers. The turnkey software is available as part of a packaged hardware/software system from a turnkey vendor. The turnkey vendor typically buys computer equipment from a computer manufacturer and combines this with his own software, hardware packaging, and workstation design. A few turnkey vendors offer modified software from another software vendor. A few also produce their own hardware components, particularly microprocessors for speeding up interactive graphics response.

Standalone applications software has the primary advantage of flexibility. It often can be implemented on computers over a broad size/speed range in organizations having diverse computing machinery. Standalone software dominates engineering analysis, where turnkey systems either don't offer capabilities or are very weak. Turnkey systems, on the other hand, have the primary advantage of being available from one source, avoiding the potential problems of multi-vendor scenarios. They have achieved a dominance in the area of geometric modeling and drafting (particularly 2D).

This section reviews the standalone applications software used in CAD. Turnkey systems are discussed in Section VII. The big news in standalone CAD software is the migration to smaller computers.

50 p.2 of 6

CAD Software Vendors/Distributors

1. Professor K. J. Bathe
   Massachusetts Institute of Technology
   Room 3-365
   Cambridge, MA 02139

2. Swanson Analysis Systems, Inc.
   Box 65
   Houston, PA 15342

3. Merlin Technologies, Inc.
   977 Town and Country Village
   San Jose, CA 95128

4. Atkins Research and Development
   Woodcoge Grove, Ashley Road
   Epson, Surrey, U.K.

5. IKOSS GmbH
   Vaihinger Str. 49
   D-7000 Stuttgart 80
   West Germany

6. C.E.G.B.
   Berkeley Nuclear Labs.
   Gloucestershire, England

7. Engineering Information Systems, Inc.
   5120 Campbell Ave.
   Suite 240
   San Jose, CA 95130

8. COSMIC
   112 Barrow Hall
   University of Georgia
   Athens, GA 30602

9. MacNeal-Schwendler Corp.
   7442 North Figueroa Street
   Los Angeles, CA 90041

10. Marc Analysis Research Corp.
    260 Sheridan, Suite 200
    Palo Alto, CA 94036

11. Universal Analytics, Inc.
    7740 W. Manchester Bldg.
    Playa del Ray, CA 90291

12. Engineering Mechanics Res. Corp.
    P.O. Box 696
    Troy, MI 48099

13. PAFEC, Ltd.
    Strelley Hall
    Main Street, Strelley
    Nottingham, NG8 6PE
    England

14. SAP Users Group
    Denney Research Bldg., USC
    University Park
    Los Angeles, CA

15. A. S. Computas
    Veritasveien 1
    P.O. Box 310
    N-1322 Hovik, Norway

16. GTICES Systems Laboratory
    School of Civil Engineering
    Georgia Institute of Tech.
    Atlanta, GA 30332

17. Structural Dynamics Research Corporation
    2000 Eastman Drive
    Milford, OH 45150

18. T-Programm GMBH
    Gustav-Werner-Str. 3
    D-7410 Reutlingen
    West Germany

19. MCAUTO
    Dept. K161/270A
    P.O. Box 515
    St. Louis, MO 63166

20. SIA Ltd.
    23 Lower Belgrave Street
    London, SW 1
    England

21. Jordan, Apostal, Ritter Assoc. Inc.
    Administration Bldg. 7
    Davisville, RI 02854

51 p.376 (3)

22. Interactive Graphics
Engineering Lab
University of Arizona
College of Engineering
AME Bldg. 16, Room 210A
Tucson, AZ 85721
(602) 626-1650

23. PDA Engineering
1740 Garry Ave., Suite 201
Santa Ana, CA 92705
USA

24. Manufacturing & Consulting
Services
3195A Airport Loop Drive
Costa Mesa, CA 92626

25. Lockheed, Burbank
Building 67, Plant A-1
Department 8034
Burbank, CA 91501

26. Evans and Sutherland
Computer Corp.
580 Arapeen Drive
Salt Lake City, Utah 84108

27. Production Automation
Project
College of Engineering and
Applied Science
University of Rochester
Rochester, NY 14627

28. MAGI
3 Westchester Plaza
Elmsford, NY 10523

29. MATRA-Datavision-UK, Ltd.
Systems Engineering
Laboratories
Rafferty House
2-4 Sutton Court Road
Sutton, Surrey SM1 4SY
England

30. MCAUTO
Dept. K507
P.O. Box 516
St. Louis, MO 63166

31. Technische Datenverarbeitung
A-8010, Graz
Luthergasse 4, Austria

32. Washington University
Technology Associates
8049 Litzinger Road
St. Louis, MO 63144

33. SCIA
Attenrodestraat 6
3395 Meensel-Kiezegam
Belgium

34. Advanced Engineering
Consultants AB
Box 3044
S-580 03 Linköping
Sweden

35. Engineering Computer
Services, Ltd.
Piccadilly, Tamworth, Staffs
B78 2ER, England

36. Computational Mechanics
125 High Street
Southhampton, Hampshire
S01 0AA, England

37. SOCOTEC
"Les Quadrants"
3 Avenue du Centre
78182 St Quentin en Yuelines
Cedex, France

38. Dr. Edward L. Wilson
1050 Leneve Place
El Cerrito, CA 94530

39. IMSL, Inc.
5th Floor NBC Building
7500 Bellaire Blvd.
Houston, TX 77036

40. A. D. Little, Inc.
20 Acorn Park
Cambridge, MA 02140

41. Quadrex Corporation
1700 Dell Avenue
Campbell, CA 95008

52

p 5 of 6

42. Structural Software Development
1930 Shattuck Avenue
Berkeley, CA 94704

43. MCAUTO
Dept. K246
P.O. Box 516
St. Louis, MO 63166

44. AAA Technology and Specialities Co., Inc.
P.O. Box 37189
Houston, TX 77036

45. Fitech, Ltd.
Mississippi State Univ.
Drawer KJ
Mississippi State, MS 39762

46. Mr. Ronald T. Bradshaw
85 Central Street
Waltham, MA 02154

47. Gulley Computer Associates
2300 E. 14th
Tulsa, OK 74104

48. Structural Members Users Group, Ltd.
P.O. Box 3958
Univ. of Virginia Station
Charlottesville, VA 22903

49. Genesys Limited
Lisle Street
Loughborough, LE11OAY
England

50. ECOM Associates
5678 W. Brown Deer
Milwaukee, WI 53223

51. Synercom Technology
P.O. Box 27
Sugerland, TX 77478

52. CONCAP Computing Systems
7700 Edgewater Drive
Suite 700
Oakland, CA 94621

53. Structural Programming, Inc.
83 Boston Post Road
Subury, MA 01776

54. Shamler Associates
1959 Chalice Way
Toledo, OH 43613

55. SysComp Corporation
2042 Broadway
Santa Monica, CA 90404

56. Holguin and Associates, Inc.
5822 Cromo Drive
P.O. Box 12990
El Paso, TX 79912

57. Zeiler-Pennock, Inc.
2727 Bryant Street
Denver, CO 80211

58. Stress Analysis Associates
4529 Angeles Crest Highway
Suite 104
La Canada, CA 91011

59. Computer Mart
560 West 14 Mile Road
Clawson, MI 48017

60. Northern Research and Engineering Corp.
39 Olympia Avenue
Woburn, MA 01801

53

p. 6 of 6 (6)

Software Referral Catalogs

1. HP 1000 Guide to OEMs and Software Suppliers
   OEM Market Development
   Hewlett-Packard Data Systems Division
   11000 Wolfe Road
   Cupertino, CA 95014

2. Engineering System Software Referral Catalog
   Digital Equipment Corp.
   Engineering Systems Group
   200 Forest Street
   Marlboro, MA 01752

Distribution Agencies for Software

1. ASIAC (Aerospace Structures Information and Analysis Center)
   AFFDL/FBR
   Wright Patterson Air Force Base
   Dayton, OH 45433

2. CEPA (Society for Computer Applications in Engineering, Planning and Architecture, Inc.)
   358 Hungerford Drive
   Rockville, MD 20850

3. COSMIC
   Suite 112, Barrow Hall
   The University of Georgia
   Athens, GA 30602

4. National Information Service-Earthquake Engineering Computer Applications
   519 Davis Hall
   The University of California, Berkeley
   Berkeley, CA 94720

5. National Technical Information Center
   5285 Port Royal Road
   Springfield, VA 22161

6. NESC (National Energy Software Center)
   9700 South Cass Avenue
   Argonne, IL 60439

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

DR. VICTOR HUGO MUCIÑO QUINTERO

MAYO, 1984.

cio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

4. MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS

4.1. Introducción al Cálculo de Variaciones

Existe una gran variedad de sistemas físicos que pueden ser descritos desde un punto de vista variacional y en este contexto, el manejo de cálculo de variaciones se considera como una herramienta matemática que permite la formulación de un sistema mediante conceptos matemáticos que pueden relacionarse directamente con aspectos físicos del mismo.

El problema clásico de cálculo de variaciones consiste en encontrar los valores estacionarios de un funcional el cual se define como una integral definida cuyo valor numérico depende de la función integrada y para encontrar los valores estacionarios de dicha integral es necesario encontrar la función que sustituida en el integrando correspondiente ceda un valor extremo, es decir mínimo o máximo.

Sea el funcional I definido por:

$$I = \int_a^b F(x)\,dX \tag{4.1.1}$$

Cada función F(x) que sea sustituida en esta ecuación resulta en un valor numérico de I diferente y aquella función F*(x) que resulte en un valor mínimo o máximo, hace el funcional I estacionario.

Es conveniente pensar en el paralelismo que existe entre el concepto de encontrar los valores estacionarios de un funcional y de una función algebráica. Cuando se busca el mínimo o máximo de una función definida como

$$y = f(x) \tag{4.1.2}$$

Ciertas condiciones deben ser satisfechas, como lo son que la función sea continua en el rango de interés, que sea deribable dos veces en dicho rango y que además la primera derivada de la función con respecto a la variable sea cero es decir

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (4.1.3)$$

El resultado es un valor de la variable independiente para el cual la función f(x) es estacionario.

Entonces, cuando se extremiza una función se encuentra un valor de la variable independeinte, más cuando se extremiza un funcional se encuentra uan función. La condición suficiente y necesaria para extremizar dicho funcional consiste en que su primera variación sea cero; es decir:

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x)\,dx \qquad (4.1.4)$$

Esta condición es análoga a la condición de la ecuación (4.1.3). Un ejemplo de aplicación del concepto variacional es el problema de encontrar la trayectoria que debe seguir una partícula de masa m para moverse desde el punto A al punto B en un plano, bajo la acción de la gravedad de tal forma que el tiempo de recorrido sea mínimo. Figura (4.1.1).

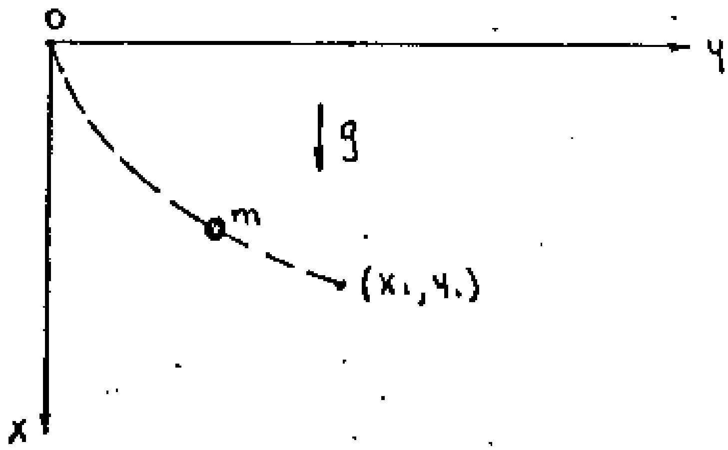


Figura 4.1.1 Problema de brachistochrone

2

El funcional que se puede proponer para este problema es:

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{v} \tag{4.1.5}$$

en donde:

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{4.1.6}$$

y de consideraciones energéticas

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \tag{4.1.7}$$

entonces combinando las tres últimas ecuaciones se tiene que

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\,dx \tag{4.1.8}$$

El problema consiste en encontrar una función $y=f(x)$ tal que el funcional t sea mínimo.

Antes de proceder a formular la solución es necesario describir la forma general del problema clásico de cálculo de variaciones.

Sea el funcional π definido por

$$\pi = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \tag{4.1.9}$$

en dondo $y' \equiv \frac{dy}{dx}$. El problema consiste en encontrar funciones $y=y(x)$ para las cuales pequeñas variaciones arbitrarias $\delta y(x)$, no cambien el valor de π.

La condición suficiente y necesaria para encontrar un valor estacionario de π es de acuerdo con la ecuación (4.1.4)

$$\delta\pi = \int_a^b \delta F(x,y,y')\,dx = 0 \tag{4.1.10}$$

Tomando la variación de F resulta

$$\delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right) dx = 0 \qquad (4.1.11)$$

en donde $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$ (4.1.12)

Sustituyendo (4.1.12) en (4.1.11) e integrando por partes el resultado es:

$$\delta\Pi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y \, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_a^b = 0 \qquad (4.1.13)$$

Entonces para que $\delta\pi$ sea cero es necesario que:

$$y(a) = y(b) = \text{constante} \qquad (4.1.14)$$

y por lo tanto

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \qquad (4.1.15)$$

o en su defecto que los dos términos de la integral en la ecuación (4.1.12) sean cero, es decir

$$\frac{\partial F(a)}{\partial y'} = \frac{\partial F(b)}{\partial y'} = 0 \qquad (4.1.16)$$

y

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y \, dx = 0 \qquad (4.1.17)$$

dado que δY es arbitraria entre los límites a y b y no necesariamente cero entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (4.1.18)$$

Esta es la ecuación conocida como la ecuación Euler-Lagrange y aquella función Y(x) que satisfaga la ecuación (4.18) hace el funcional π estacionario.

Regresando al problema de brachistochrone podemos identificar el integrando de las ecuaciones (4.1.8) y (4.1.9) es decir

$$F(X,Y,Y') = \sqrt{\frac{1+Y'^2}{2gX}} \tag{4.1.19}$$

y dado que y no aparece explícitamente en (4.1.19) entonces

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\right) = 0 \tag{4.1.20}$$

que implica que el paréntesis es igual a una constante

$$\frac{\partial F}{\partial Y'} = \frac{Y'}{\sqrt{2gX(1+Y'^2)}} = C \tag{4.1.21}$$

despejando Y' de (4.1.21) queda

$$\frac{dY}{dX} = \sqrt{\frac{2gc^2X}{1-2gc^2X}} \tag{4.1.22}$$

de donde

$$Y = \int\left(\frac{2gc^2X}{1-2gc^2X}\right)^{1/2} dX \tag{4.1.23}$$

La solución de esta integral a través de tablas de integración y algunas manipulaciones cede la siguiente solción.

$$Y = \frac{1}{4gc^2}(\theta - \sin\theta) \tag{4.1.24}$$

en donde

$$\theta = \cos^{-1}(1-4gc^2X) \tag{4.1.25}$$

Entonces sustituyendo la ecuación (4.1.22) es (4.1.8) se puede comprobar que el tiempo de recorrido es mínimo en comparación con cualquier otra trayectoría que pase por los puntos extremos de la curva.

Otro problema clásico que el lector puede realizar como ejercicio consiste en encontrar la trayectoria que debe seguir la partícula que haga la distancia de recorrido mínima. El resultado es obviamente una línea recta que une los puntos extremos. El funcional correspondiente para este otro problema es:

$$S = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (4.1.26)$$

Un funcional en general puede tener varias variables independientes, por ejemplo:

$$\Pi = \int_V F(x, y, z, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\, dV \qquad (4.1.27)$$

en donde ψx, ψy, ψz son las parciales de ψ con respecto a las tres variables independientes. Una variación de π ocasionada por un pequeño cambio en F es:

$$\delta\Pi = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi_x + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\delta\varphi_y + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\delta\varphi_z \right) dV \qquad (4.1.28)$$

y aplicando la ecuación (4.1.11) resulta

$$\delta\Pi = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi) \right] dV \qquad (4.1.29)$$

en esta ecuación los últimos términos satisfacen por el teorema de divergencia de Gauss lo siguiente:

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi)\, dV = \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi\, ds - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right)\delta\varphi\, dV \qquad (4.1.30)$$

en donde lx es el coseno direccional de la normal a la superficie con respecto al eje x. La ecuación (4.1.29) queda como sigue:

6

$$\delta\Pi=\int_V\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right)\right]\delta\varphi\,dv$$

$$+\int_S\left[l_x\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}+l_y\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}+l_z\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right]\delta\varphi\,ds \qquad (4.1.31)$$

Ahora, un valor estacionaro de π ocurre solamente cuando los términos de los paréntesis son cero. Esto da como resultado la ecuación diferencial que gobierna el sistema y sus condiciones de frontera.

El funcional de la ecuación (4.1.31) es aplicable a problemas de campo y un ejemplo es el siguiente: sea el funcional

$$\Pi=\int_V\frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+K_{yy}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+K_{zz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-2Q\varphi\right]dv \qquad (4.1.32)$$

aplicando la forma de la ecuación (4.1.31) el resultado es el siguiente

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right)=0 \qquad (4.1.33)$$

y considerando los términos individuales resulta

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=-2Q$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2K_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=2K_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2K_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=2K_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (4.1.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(2K_{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=2K_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

Las ecuaciones combinadas ceden la ecuación diferencial que aplica para problemas de campo;

7

$$Q + K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{4.1.35}$$

y como conclusión tenemos que el funcional π de la ecuación (4.1.32) es estacionario cuando la ecuación diferencial (4.1.35) se satisface.

4.2 Formulación Variacional del Elemento Finito

4.2.1 Introducción

El concepto fundamental del método del elemento finito (MEF) consiste en que cualquier función continua en un dominio dado, puede aproximarse mediante una sucesión de funciones que se definen en una serie de subdominios dentro de los cuales estas funciones son continuas y las cuales se interconectan para aproximar así la función dada. (Fig.4.2.1)

Desde un punto de vista físico, el concepto fundamental del método del elemento finito consiste en que para resolver un sistema que representa una estructura física sujeta a ciertas condiciones físicas, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de elementos que se interconectan en una serie de puntos llamados nodos (Fig.4.2.2)y cuyo comportamiento es conocido a través de ciertas ecuaciones preestablecidas y que corresponden a los tipos de elementos usados y al número de nodos en cada uno de ellos.

La solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero el modelo en si es una aproximación discreta al sistema físico y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real. Los antecedentes del método del elemento finito datan de los años 50's cuando surgió del análisis de estructuras aeronáuticas, y ha evolucionado rápidamente hasta expander sus aplicaciones a varios campos de la ingeniería como son la transmisión de calor, la elasticidad, mecánica de fluidos, estructuras, lubricación y otros muchos.

4.2.2 Formulación de un Problema de Ingeniería

La formulación matemática en problemas de ingeniería generalmente se puede efectuar en dos formas diferentes,

9

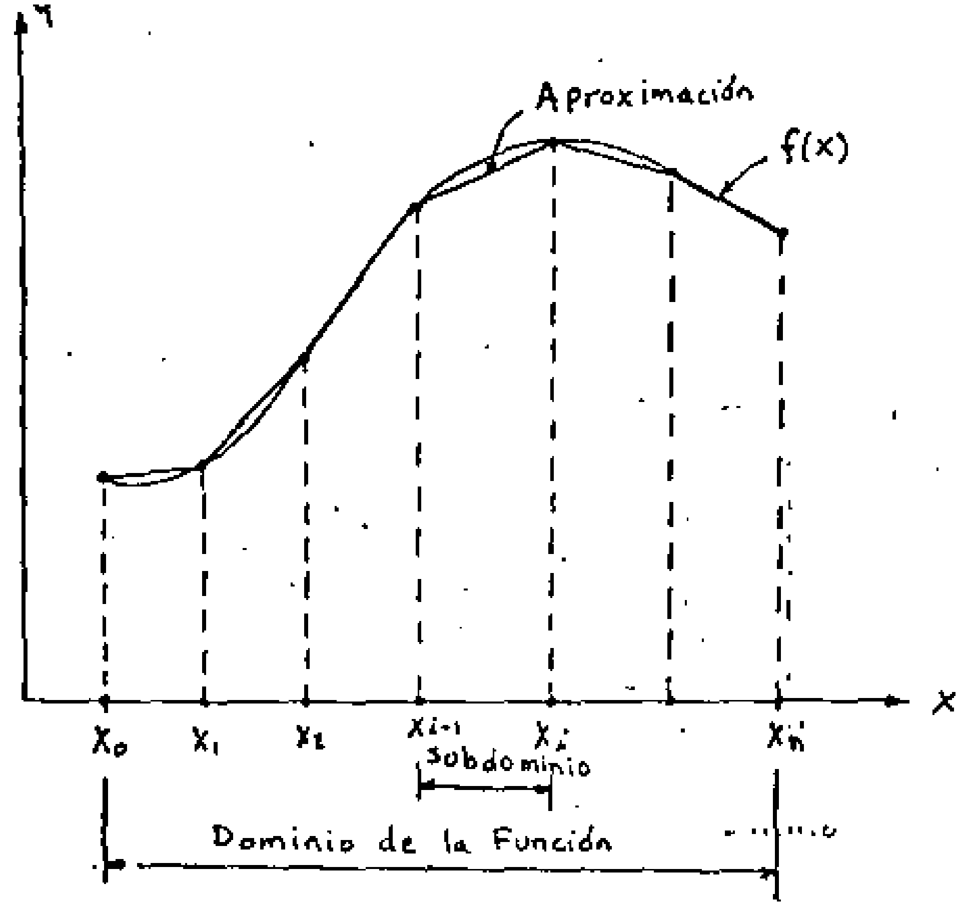


Fig 4.2.1 Aproximación de una función continua a traves de una serie de funciones lineales conectadas

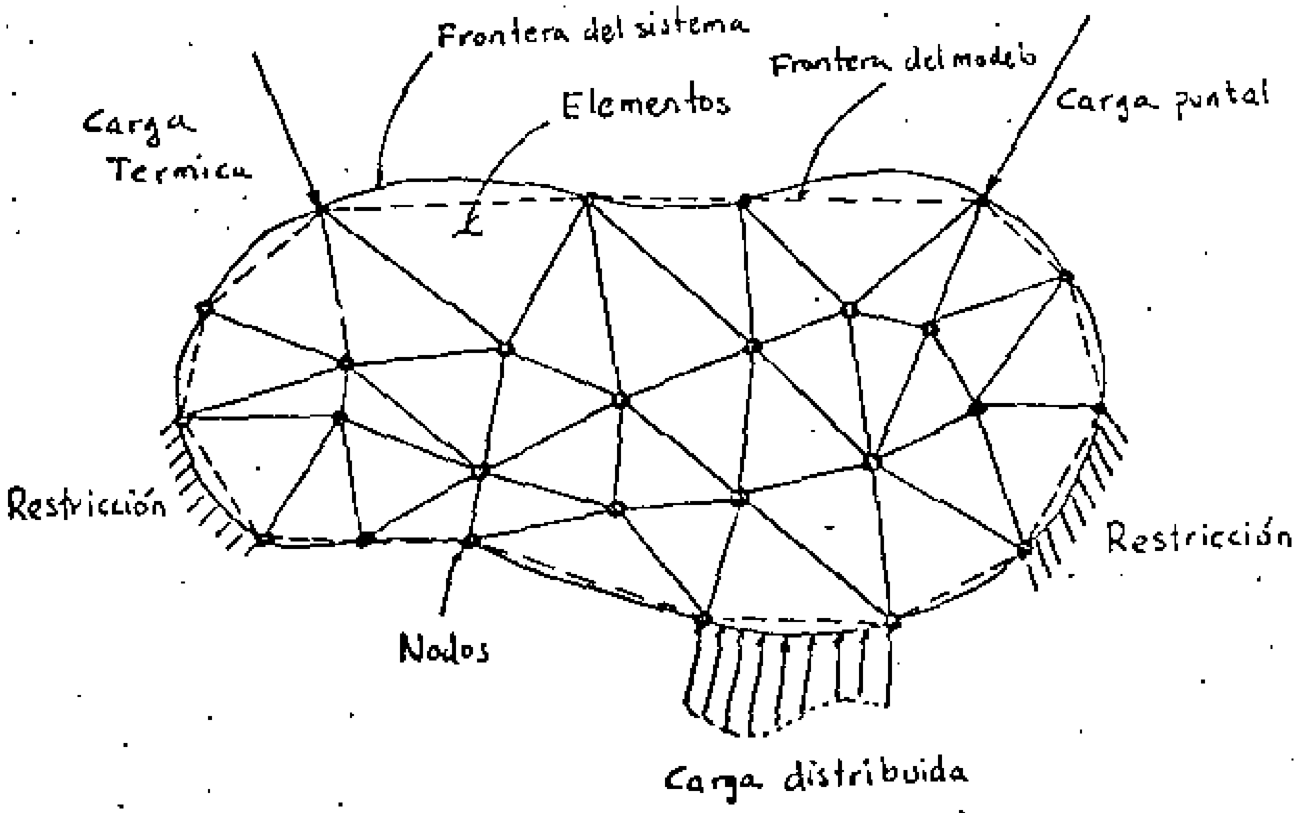


Fig. 4.2.2 Sistema de un cuerpo deformable sujeto a cargas y restricciones y discretizado con elementos finitos

la primera considera el comportamiento de una área o volumen infinitecimal del sistema y las ecuaciones correspondientes se formulan en forma diferenical, y como el área o volumen considerado es representativo de toda la región, las mismas ecuaciones son válidas para todo el dominio de esa región. Como ejemplo tenemos la ecuación de Reynolds en la lubricación hidrodinámica de cojinetes Fig 4.2.3 la cual es una ecuación diferenical en dos dimensiones que se deriva a partir de un elemento infinetesimal y es de la forma:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[h^3\frac{\partial P}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial P}{\partial z}\right]=6\mu\omega\frac{\partial h}{\partial\theta} \qquad (4.2.1)$$

en donde h es el espesor de la capa lubricante, θ es la coordenada polar angular, z es la perpendicular al plano (x,y), μ es la viscocidad del lubricante, ω es la velocidad angular de rotación de la flecha y P es la distribución de la presión al rededor y a lo largo del eje z.

En la segunda alternativa se postula un principio que englobe la región entera o dominio dado y consecuentemente es una formulación en forma Integral y la solución es generalmente dada por valores extremos de dicha integral. Este método es conocido como el Método Variacional y como ejemplo se tiene el caso de la energia potencial de cuerpos elasticos, en el cual se establece que la configuración del equilibrio estático de una estructura deformable requiere de una energía potencial mínima. Esta energía se refiere al total de la energía de toda la estructura y se obtiene mediante la suma de energías de las partes de la estructura.

De todas las posibles configuraciones que la estructura pueda adoptar, aquella que ceda un valor mínimo a la energía potencial nos da la configuración de equilibrio. Esto se conoce como el Principio de la Energía Potencial Mínima.

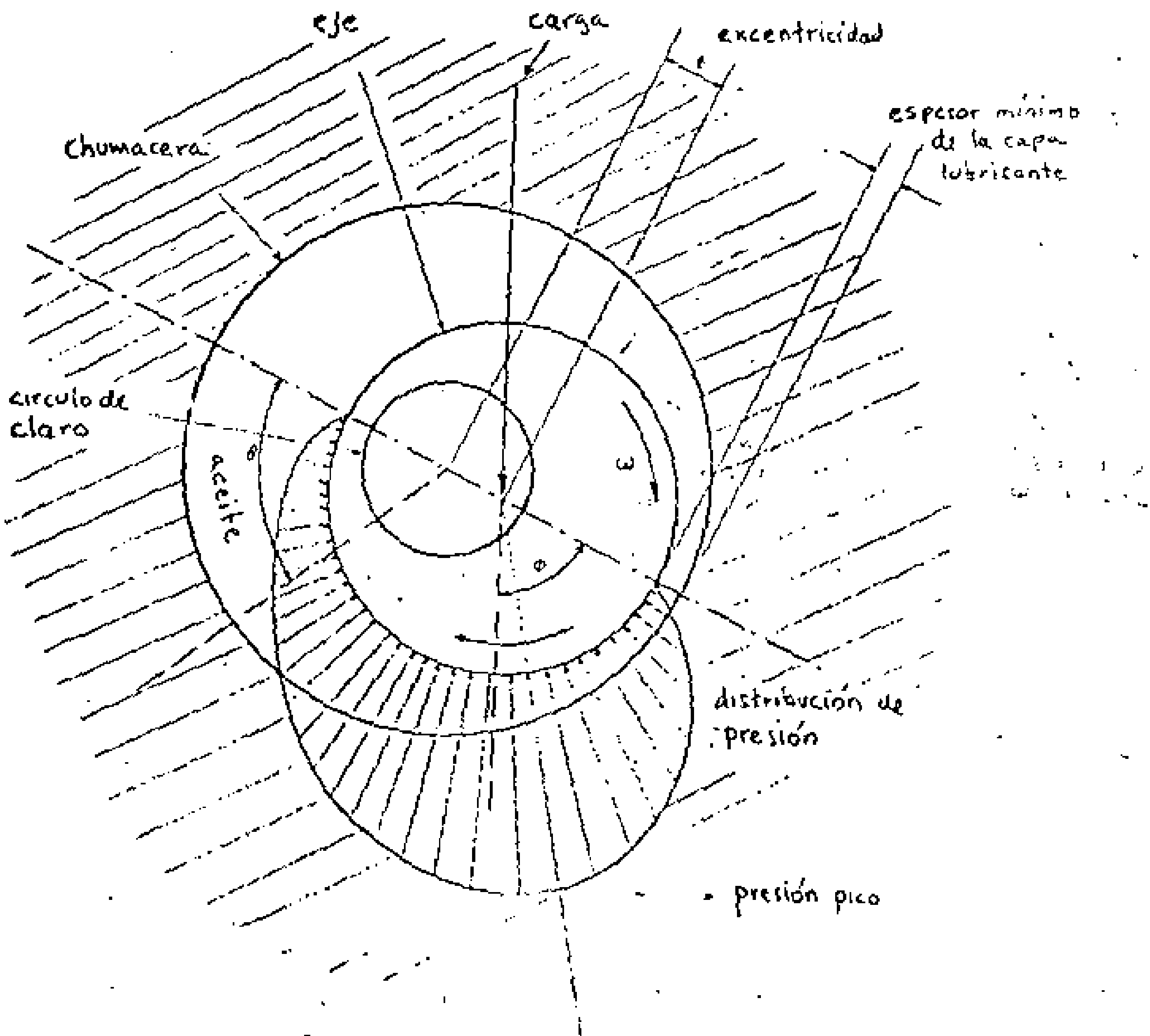


Fig. 4.2.3 Sistema Chumacera - Eje lubricado hidrodinámicamente

Resumiendo lo anterior, el procedimiento para desarrollar el análisis de una estructura deformable consiste en establecer un funcional, el cual es el valor de una integral y que tiene la forma

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y')\, dx \qquad (4.2.2)$$

en donde

$$y = y(x) \quad , \quad y' = \frac{dy(x)}{dx} \qquad (4.2.3)$$

Una vez establecido este funcional se procede a encontrar sus valores extremos, lo cual requiere que su primera variación sea igual a cero, es decir que cumpla con la condición de estacionaridad de una integral mediante:

$$\delta \Pi = 0 \qquad (4.2.4)$$

Cabe mencionar que encontrar el valor estacionario de una integral es similar a encontrar los valores mínimos o máximos de una función en cálculo diferenical, excepto que al minimizar una función se obtiene un valor de la variable independiente que nos da un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace el valor de dicha integral mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x,y,y')dx = \int_{x_a}^{x_1} F(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx + \cdots + \int_{x_n}^{x_b} F(x,y,y')dx \qquad (4.2.5)$$

O bien:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \cdots + \Pi_n \qquad (4.2.6)$$

La integral total π ahora consiste en varias integrales parciales π_i, cada una extendiéndose en los subdominios (x_i-1, x_i).

El concepto de discretizar la integral de la ecuación puede tener una interpretación física al dividir el dominio de la función en una serie de elementos a los cuales se asigna cada una de las integrales. La ventaja es que ahora es posible usar alguna aproximación polinomial (lineal, parabólica etc.) para la función Y(x) en cada integral, es decir en cada elemento. Esto permite que el valor de cada función integral sea una función de los coeficientes utilizados en el polinomio de dicho elemento. Entonces la integral total π es también una función de los coeficientes polinomiales usados en cada uno de los elementos y la condición de la ecuación se satisface si

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (4.2.7)$$

donde las a_i's son el juego completo de coeficientes polinomiales usados en cada elemento.

Al substituir la función Y(x) por una aproximación polinomial $y(x) = a_1 x + a_2 x^2 \ldots$ el problema se reduce a encontrar los coeficientes de los polinomios usados en la aproximación.

Es decir, la solución directa de la ecuación (4.2.2) sujeta a las condiciones (4.2.3) puede ser bastante complicada y es necesario aplicar los conceptos de cálculo variacional, sin embargo el problema se puede formular mediante la ecuación (4.2.5) y al substituir la aproximación polinomial el problema se puede resolver algebráicamente

4.2.3 Energía Potencial

En la introducción de conceptos fundamentales del método del elemento finito se derivaron unas ecuaciones algebráicas de equilibrio que en forma matricial se pueden expresar como:

$$[K]\{D\} = \{P\} \qquad (4.2.8)$$

Este sistema de ecuaciones representa un modelo matemático cuya interpretación física está directamente relacionada con la definición de un sistema físico el cual consiste de un cuerpo deformable caracterizado por la matriz de propiedades elásticas $[k]$, y por las cargas que actuan sobre el sistema $\{P\}$ que ocasionan ciertos desplazamientos en dicho cuerpo $\{D\}$.

En general, un cuerpo elástico es la composición de una infinidad de partículas las cuales interactuan entre si y producen ciertas respuestas a ciertos perturbaciones y dado a que existe un número infinito de partículas en cada cuerpo no es conveniente describir la respuesta de un sistema elástico en términos de los desplazamientos de cada partícula, más bien se toma un número finito de puntos que puedan caracterizar el comportamiento del sistema.

En ciertos casos es posible formular las ecuaciones de equilibrio en base a relaciones directas de carga y desplazamiento, como es en el caso de resortes lineales, o vigas, pero en otros casos no es tan evidente la relación de carga y deformación y por lo tanto es conveniente usar métodos alternativos para la formulación de las ecuaciones de equilibrio. Uno de estos métodos se basa en la expresión de la energía potencial la cual se define como sigue:

La energía potencial de un cuerpo deformable sujeto a cargas estáticas es igual a la energía interna o de deformación almacenada en el cuerpo deformado menos el trabajo realizado por las cargas que actuan en el a lo largo de los desplazamientos de los puntos de aplicación de dichas cargas. Esto se puede expresar como sigue

$$V = U - W \tag{4.2.9}$$

en donde V=Energía potencial
U=Energía de deformación o interna
W=Trabajo de las cargas aplicadas

Como ejemplo podemos considerar el caso simple de un resorte lineal mostrado en la Fig. 4.2.4 .El desplazamiento D del extremo libre del resorte es ocasionado por la carga P aplicada en ese extremo en tonces la energía potencial se puede expresar como:

$$V = \int_0^D Kx\,dx - \int_0^D P\,dx \tag{4.2.10}$$

En esta expresión, la primera integral representa la energía de deformación y la segunda el trabajo realizado por la carga sobre el resorte de constante K. Al integrar se obtiene:

$$V = \frac{1}{2}(Kx^2)\Big|_0^D - Px\Big|_0^D = \frac{1}{2}KD^2 - PD \tag{4.2.11}$$

Es decir la expresión de la energía potencial es el valor de una integral y por lo tanto V es un funcional el cual puede ser minimizado, de acuerdo al principio de la energía potencial mínima. Entonces de la ecuación(4.2.4) se tiene que:

$$\delta V = (KD - P)\,\delta D \tag{4.2.12}$$

La cual es consistente con el principio de trabajo virtual y dado que δD es diferente de cero entonces

$$KD - P = 0 \tag{4.2.12a}$$

Es decir que el desplazamiento D que resulte en el equilibrio del sistema es tal que:

$$D_e = \frac{P}{K} \tag{4.2.12b}$$

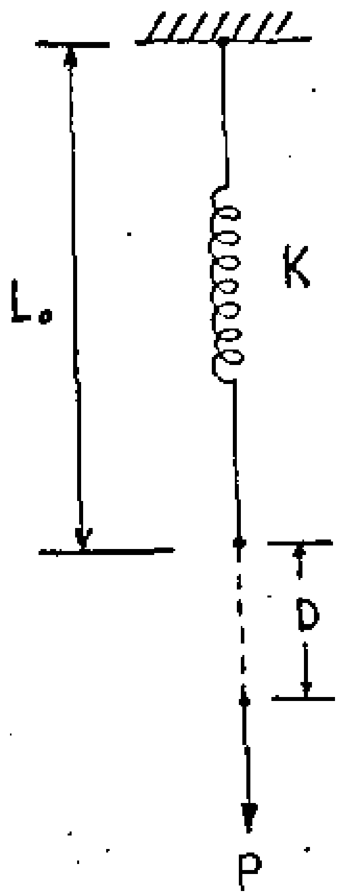
Gráficamente la ecuación(4.2.11) se puede representar por medio de la suma de dos funciones tal como se muestra en la Fig(4.2.5) de tal forma para un potencial mínimo se tiene que el desplazamiento D es aquel que produce el equilibrio.

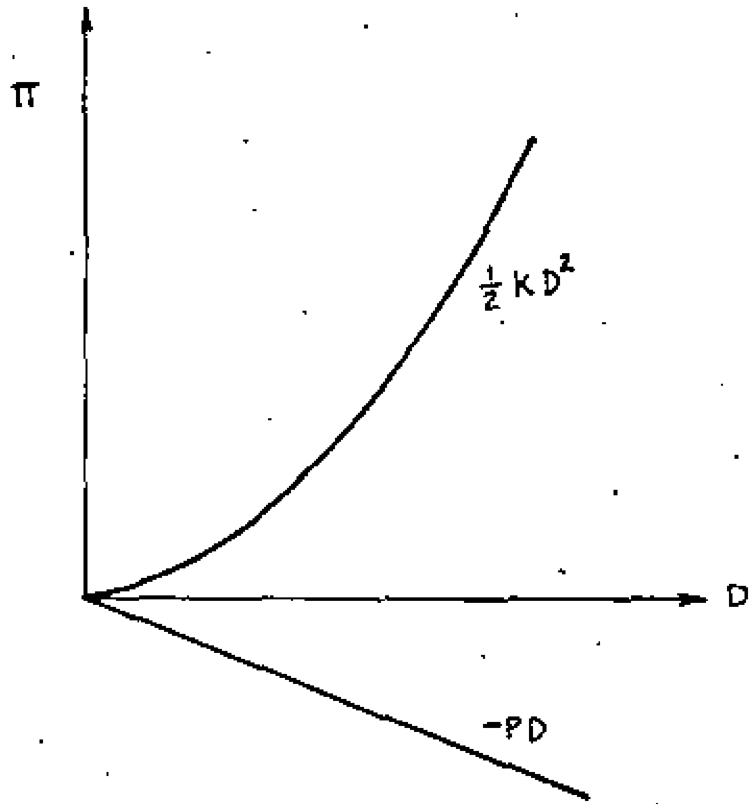
4.2.4. Sistemas con Varios Grados de Libertad

Por definición los grados de libertad son aquellas variables que definen completamente y en forma única el estado o configuración de un sistema dado, por ejemplo, el sistema de resorte lineal que se acaba de ver es un sistema con un solo grado de libertad ya que una sola cantidad define el estado del sistema, esa variable es el desplazamiento lineal del extremo del resorte. Si en ese extremo se anexa otro resorte entonces existen dos grados de libertad y así sucesivamente. Sin embargo la naturaleza de los grados de libertad no es necesariamente la misma, ya que éstos se pueden referir a desplazamientos, rotaciones, temperaturas o también coeficientes de un polinomio que aproximan una función.

Si consideramos un sistema elástico con n grados de libertad el cual está sujeto a ciertas perturbaciones. Entonces la energía potencial total se puede expresar como un función de estos n grados de libertad o sea

$$\Pi_T = \Pi_T(D_1, D_2, D_3 \ldots D_n) \tag{4.2.13}$$





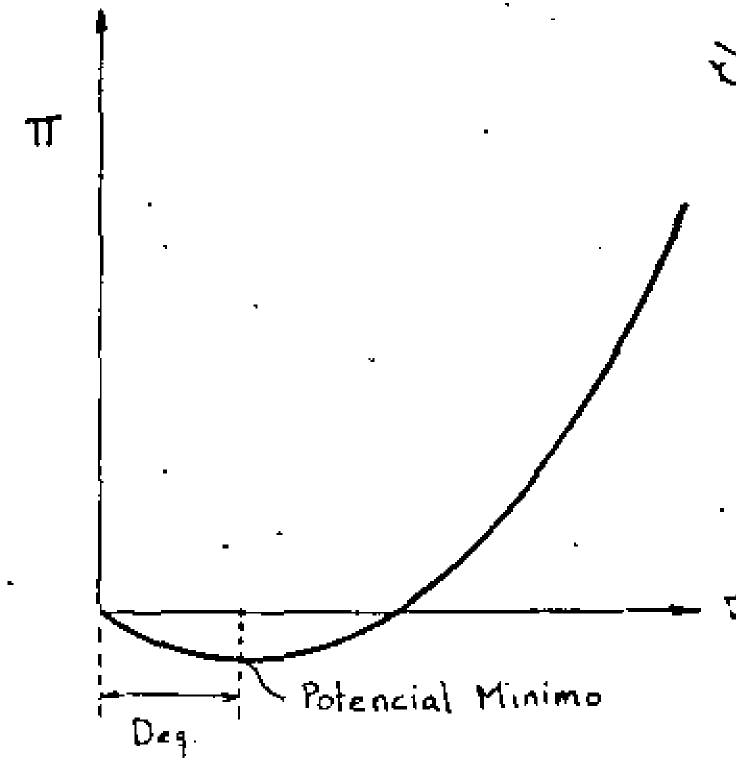


Fig. 4.2.5 Energía potencial como función del desplazamiento en el extremo libre de un resorte con constante k y carga P dadas

Fig 4.2.4
Sistema de resorte lineal con un extremo fijo y otro extremo libre y cargado (1 grado de libertad)

entonces la primera variación del potencial con respecto a los grados de libertad se expresa como

$$\delta \Pi_T = \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_1}\delta D_1 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_2}\delta D_2 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_3}\delta D_3 \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial D_n}\delta D_n \qquad (4.2.14)$$

la cual debe cumplir con la condición de estacionaridad de la ecuación (4.2.4), es decir $\delta\pi=0$ y por lo tanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial D_n} = 0 \qquad (4.2.15)$$

De acuerdo con el principio de energía potencial mínima. la ecuación (4.2.15) define la configuración de equilibrio del sistema.

Un ejmplo de un sistema con dos grado de libertad es el que se muestra en la Fig. 4.2.6 el cual consta de dos resortes lineales empotrados, y una barra rígida ligada los dos resortes con una carga puntal como se muestra. La expresión para la energía, potencial se puede escribir ya integrada como:

$$V = \frac{1}{2} K_1 D^2 + \frac{1}{2} K_2 (D + \theta L)^2 - P(D + \theta a) \qquad (4.2.16)$$

Al substituir v por π en la ecuación (4.2.5) el resultado es:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = K_1 D + K_2 D + K_2 \theta L - P = 0 \qquad (4.2.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_2 L D + K_2 L^2 \theta - a P = 0 \qquad (4.2.18)$$

que en forma matricial adquiere la siguiente fomra

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2 L \\ k_2 L & k_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ aP \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.19)$$

que se puede reducir a la forma común de las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix} \qquad (4.2.20)$$

En la ecuación 4.2.19, (P) y (aP) son llamadas las fuerzas generalizadas correspondientes a las coordenadas generalizadas (D) y (θ).

De este ejemplo se puede concluir entonces que la matriz de rigidez $[k]$ es una matriz simétrica es decir $k_{ij}=k_{ji}$ y también que el producto de una fuerza generalizada por su correspondiente coordenada siempre tiene unidades de trabajo.

Si un tercer resorte es anexado al sistema digamos en el punto intermedio de la barra, el sistema se convierte en un sistema estaticamente inditerminado. Sin embargo las coordenadas D y θ son aun suficientes para determinar la configuración del sistema y dos ecuaciones de equlibrio son generadas, es decir la indeterminación estática no afecta el procedimiento general basado en la minimización del potencial.

4.2.5 Formulación General Usando Campos de Desplazamiento

Antes de desarrollar una expresión general para la energía potencial de cuerpos elásticos es conveniente describir el concepto de campo de desplazamiento y aproximaciones.

En muchos sistemas mecánicos la configuración del mismo en un instante dado puede ser expresada en términos de los desplazamientos de ciertos puntos de referencia, los cuales represen-

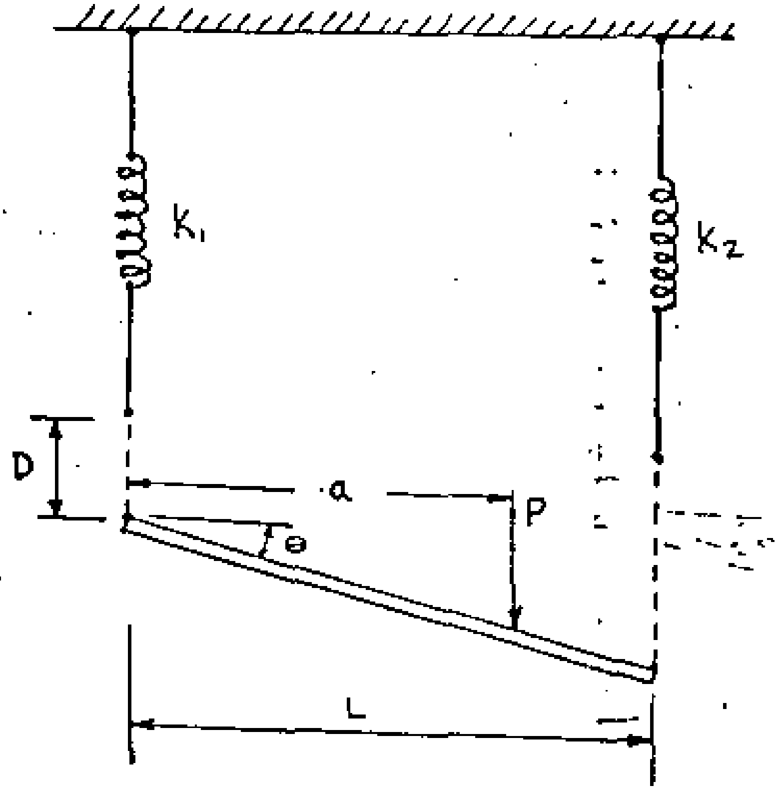


Fig 4.2.6 Sistema de dos resortes y una barra rígida con carga intermedia (dos grados de libertad)

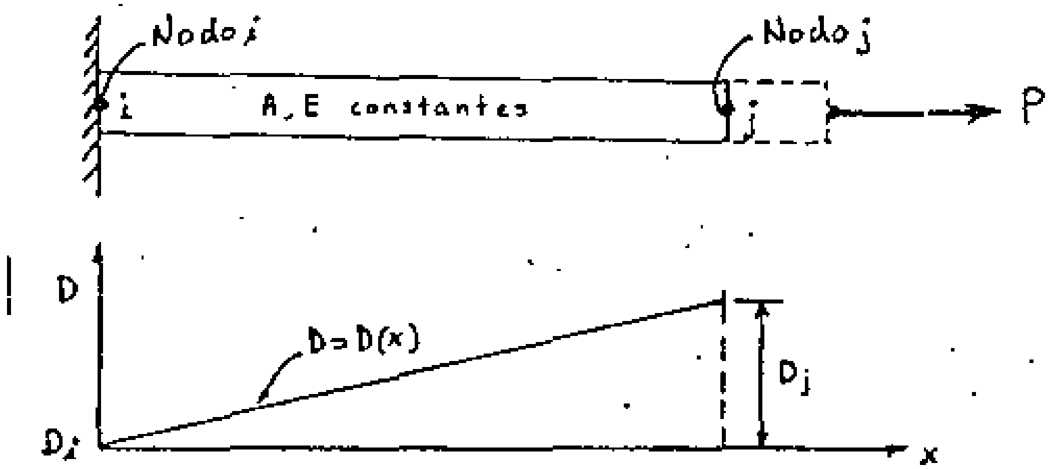


Fig. 4.2.7 Campo de desplazamientos en una barra de sección uniforme en terminos de los desplazamientos nodales.

tan un campo de desplazamientos con respecto a un marco de referencia. Por ejemplo el campo de desplazamiento de una barra elastica de sección uniforme con una carga axial Fig.4.2.7 se puede describir en términos de los desplazamientos en los extremos de la misma en una forma lineal. Es decir el desplazamiento en cualquier punto intermedio de una barra se puede expresar como una función del desplazamiento de los puntos extremos de la misma con una relación de la forma

$$D_x = D_i + \frac{x}{L}\left(D_j - D_i\right) \tag{4.2.21}$$

Donde Dx es el desplazamienot de un punto en la coordenada x de la barra, L es la longitud original de la barra y D(i,j) es el desplazamiento del extremo (i,j) de la barra.

La ecuación (4.2.21) puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$D_x = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right] \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} \tag{4.2.22}$$

Si consideramos que la barra representa un elemento con el nodo i en el extremo i y el nodo j en el extremo j y que f es el desplazamiento de un punto cualquiera del elemento entonces la ecuación(4.2.22) se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\{f\} = [N]\{d\} \tag{4.2.23}$$

En el caso de un elemento en dos dimensiones como el mostrado en la Fig. 4.2.8 el vector {d} los desplazamientos en dos dimensiones de los nodos del elemento, entonces la ecuación (4.2.23) tendría la forma:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.24)$$

en donde:

$$N_1 = \frac{(b-x)(c-y)}{4bc} \quad , \qquad N_2 = \frac{(b+x)(c+y)}{4bc}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(c-y)}{4bc} \quad , \qquad N_4 = \frac{(b-x)(c+y)}{4bc} \qquad (4.2.25)$$

$N_{1,2,3,4}$ son llamadas las funciones de "forma" o de interpolación. La descripción del campo de desplazamiento para otros elementos también es posible en base de los desplazamientos nodales, es decir que es posible conocer el desplazamiento obsoluto de cualquier punto en un elemento o estructura conociendo el vector de desplazamientos nodales. Por lo tanto la formulación general usando elementos finitos está orientada a obtener la solución de un sistema con un número finito de grados de libertad, en donde los grados de libertad son los desplazamientos independientes de cada nodo y donde dichos desplazamientos pueden ser de traslación o de rotación.

La aproximación a un campo de desplazamiento también se puede hacer en base a un polinomio cuyo grado de libertad sea el mismo que el correspondiente al elemento en cuestión, por ejmplo en el caso de la barra uniforme se puede utilizar un polinomio del tipo:

$$\{f\} = \{u\} = \{a_1 + a_2 x\} \qquad (4.2.26)$$

o

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.27)$$

63

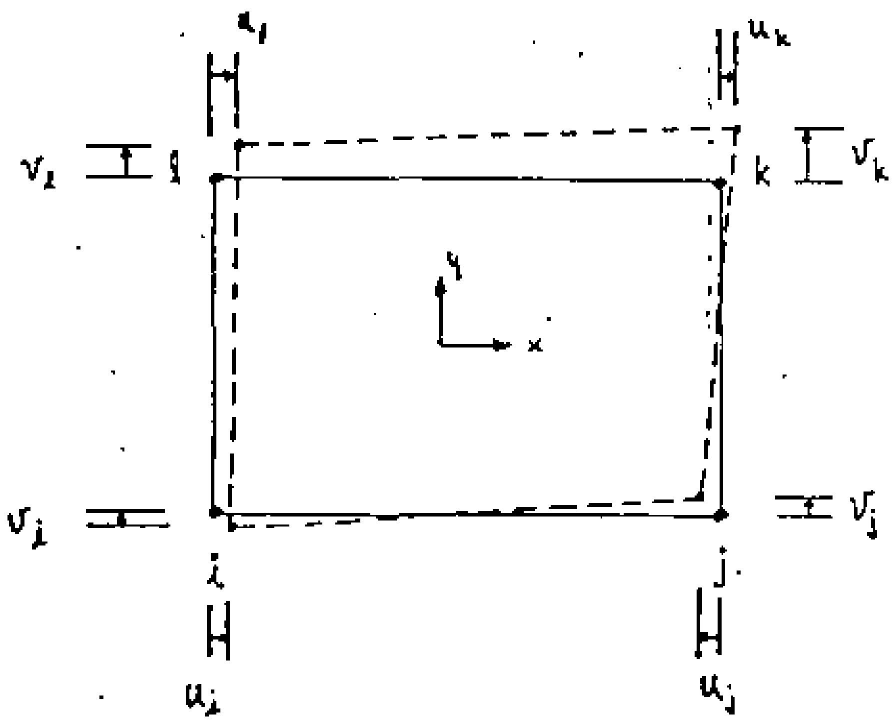


Fig. 4.2.8 Elemento cuadrilatero bidimensional, 2 grados de libertad por nodo, 4 nodos osea 8 g.d.l.

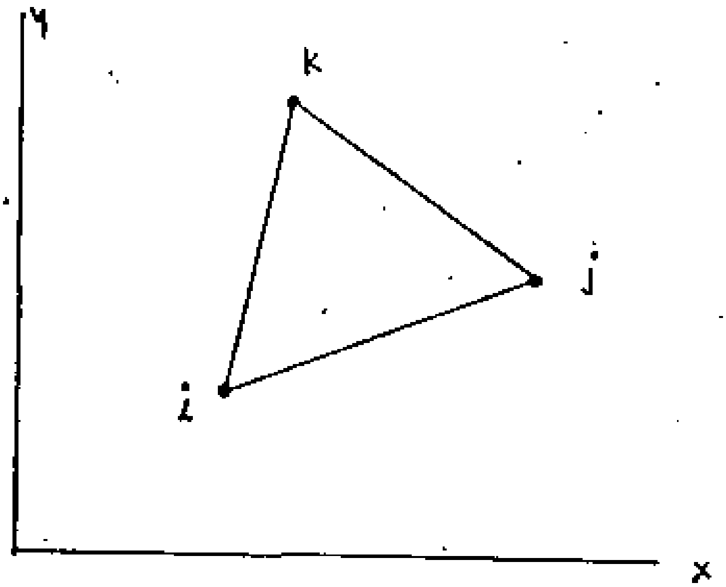


Fig 4.2.9 Elemento triangular plano, 2 grados de libertad por nodo, 3 nodos, 6 g.d.l.

en donde a_1 y a_2 son los coeficientes del polinomio de grado 1, entonces hay dos coeficientes para un elemento que tiene dos grados de libertad.

Los desplazamientos nodales $\{d\}$ se pueden expresar en función de estos coeficientes substituyendo las condiciones de frontera

$$u_{x=0} = u_i \qquad u_{x=L} = u_j \tag{4.2.28}$$

Entonces substituyendo en (4.2.26) resulta el siguiente sistema:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [A]\{a\} \tag{4.2.29}$$

Despejando $\{a\}$ de (4.2.29) y substituyendo en (4.2.27) se tiene

$$\{f\} = [1 \quad x][A]^{-1}\{d\} \tag{4.2.30}$$

Invirtiendo la matriz $[A]$ y desarrollando el producto en la ecuación 4.2.30 se obtiene la ecuación 4.2.22 o sea:

$$\{f\} = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \tag{4.2.31}$$

En el caso de un elemento plano triangular como el mostrado en la fig. 4.2.9, la aproximación se puede hacer en base a los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Que en forma matricial quedan expresados como

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{4.2.33}$$

Tomando las condiciones de frontera se obtiene que para la dirección x

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.34}$$

y para la dirección y

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{4.2.35}$$

de donde

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.36}$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.37}$$

Substituyendo (4.2.36) y (4.2.37) en la ecuación (4.2.33) se obtiene

$$u = [1 \;\; x \;\; y][\Lambda]^{-1}\{u_1 \;\; u_2 \;\; u_3\}^T \tag{4.2.38}$$

$$v = [1 \;\; x \;\; y][\Lambda]^{-1}\{v_1 \;\; v_2 \;\; v_3\}^T \tag{4.2.39}$$

y donde

$$[\Lambda]^{-1} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{4.2.40}$$

Substituyendo (4.2.40) en (4.2.38) y(4.2.39) y reduciendo el sistema resultante es

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{Triangulo} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.41)$$

en donde

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right] \qquad (4.2.42)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \qquad (4.2.43)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] \qquad (4.2.44)$$

De la misma manera se puede aproximar el campo de desplazamiento para un elemento cuadrilatero plano de la Fig.4.2.8 usando polinomios del tipo:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \qquad (4.2.45)$$

$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \qquad (4.2.46)$$

Los cuales conducen a un sistema equivalente al dado en las ecuaciónes(4.2.24) y (4.2.25).

4.2.6 Exprsión General de la Energía Potencial

Podemos considerar ahora el caso general de un cuerpo elástico en el espacio el cual está sujeto a cargas que producen un campo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos tal que en un punto dado de dicho cuerpo y con respecto a un marco de referencia, los vectores de esfuerzos y de deformaciones son:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T \qquad (4.2.47)$$

27

y $$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \ldots \qquad (4.2.48)$$

La realción esfuerzo-deformación puede escribirse como:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} + \{\sigma_o\} \qquad (4.2.49)$$

en donde $[E]$ es la matriz de propiedades elásticas del material y el vecotor $\{\sigma_o\}$es el vector de esfuerzos iniciales (dichos esfuerzos iniciales pueden referirse a los esfuerzos presentes sin la aplicación de las cargas externas, como podrían ser esfuerzos residuales, esfuerzos de ensamble etc.).

La definición de energía interna o de deformación se puede escribir como

$$U_o = \tfrac{1}{2}\{\epsilon\}^T[E]\{\epsilon\} - \tfrac{1}{2}\{\epsilon_o\}^T[E]\{\epsilon_o\} \qquad (4.2.50)$$

Esta energía de deformación es originada por ciertas cargas que actuan en el cuerpo las cuales desarrolan un cierto trabajo. Estas fuerzas se pueden clasificar en fuerzas internas o de cuerpo, que en un punto cualquiera tiene la forma:

$$\{\phi\} = \{\varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z\}^T \qquad (4.2.51)$$

y el vector de fuerzas de superficie expresado por:

$$\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T \qquad (4.2.52)$$

Entonces usando las expresiones (4.2-41) a la (4.2.52) y la expresión general de la energía potencial de la siguiente forma

$$\Pi = \int_{Vol}\left(\tfrac{1}{2}\{\epsilon\}^T[E]\{\epsilon\} + \{\epsilon\}^T\{\sigma_o\}\right)dV \ldots$$
$$- \int_{Vol}\{f\}^T\{F\}\,dV - \int_{Sup}\{f\}^T\{\phi\}\,dS \qquad (4.2.53)$$

en donde la primera integral representa la energía interna o de deformación, la segunda integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de cuerpo sobre la estructura y la tercera integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de superficie sobre el cuerpo. La ecuación (4.2.53) es una forma más general de la ecuación (4.2.9).

4.2.6 Formulación Elemental en Base a la Energía Potnecial

El objetivo ahora es formular las ecuaciones que caracterizan un elemento en base a la minimización de la energía potencial usando la expresión general (4.2.53) y la expresión del campo de desplazamiento $\{f\}=\{u\ v\ w\}$.

Primeramente las deformaciones en un elemento se pueden expresar en terminos de los desplazamientos nodales a través de la siguiente expresión

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \qquad (4.2.54)$$

en donde $[B]$ es la matriz esfuerzo-deformación que en el caso general de un material clástico isotropico es de la forma

$$[B] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (4.2.55)$$

Substituyendo las ecuaciones (4.2.23) y (4.2.54) en (4.2.53) la energía potencial puede expresarse como:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{d\}^T\left(\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{d\} + \{d\}^T\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV$$

$$-\{d\}^T\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \{d\}^T\int_{Sup}[N]^T\{\bar{\Phi}\}\,dS \qquad (4.2.56)$$

En esta ecuación el subíndice en πe indica que la energía potencial es de un elemento y por lo tanto el vector $\{d\}$ es el vector de desplazamientos nodales de un elemento solamente, y para una estructura compuesta de varios elementos se tiene que la energía potencial total se expresa como la sumatoria de las energías potenciales de cada uno de los elementos y la energía potencial total queda expresada como:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\{D\}^T\left(\sum_{1}^{m}\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{D\} + \{D\}^T\sum_{1}^{m}\left(\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV\right.$$

$$\left.-\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \int_{Sup}[N]^T\{\bar{\Phi}\}\,dS\right) - \{D\}^T\{P\} \qquad (4.2.57)$$

Una vez encontrada la expresión general de la energía potencial se procede a encontrar el valor extremo del funcional π_T substituyendo en la ecuación (4.2.4) lo cual resulta en el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (4.2.7) o

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \qquad (4.2.58)$$

Entonces al substituir π_p dada por la ecuación (4.2.57) en la ecuación (4.2.58) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio.

$$\left(\sum_{1}^{m} \int_{Vol} [B]^T [E] [B] \, dV\right) \{D\} = \sum_{1}^{m} \left(- \int_{Vol} [B]^T \{\sigma_0\} \, dV + \int_{Vol} [N]^T \{F\} \, dV + \int_{Sup} [N]^T \{\Phi\} \, ds \right) + \{P\} \tag{4.2.59}$$

La ecuación (4.2.59) se puede abreviar en tal forma que la sumatoria de las integrales del lado izquierdo de la misma sea identificada como la "Matriz de Rigidez" y la sumatoria de integrales del lado derecho de la ecuación como vector de cargas generalizadas, entonces la ecuación (4.2.59) queda

$$[K]\{D\} = \{R\} \tag{4.2.60}$$

Ejemplo. Podemos considerar un caso simple en forma general mediante el cual podremos establecer la siguiente secuencia de operaciones

$$\{f\} = \{u\} = [1 \quad x]\{a\} \tag{4.2.61}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [A]\{a\} \tag{4.2.62}$$

$$\{f\} = [1 \quad x][A]^{-1}\{d\} = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \tag{4.2.63}$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E \, \varepsilon_x^2 A \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon_x^T E \, \varepsilon_x A \, dx \tag{4.2.64}$$

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T \int_0^L [B]^T E \, [B] A \, dx \, \{d\} \tag{4.2.65}$$

$$k_e = \int_0^L [B]^T E [B] A\,dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] A\,dx \tag{4.2.66}$$

$$k_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \text{Matriz elemental de rigidez} \tag{4.2.67}$$

4.2.8 El Método Rayleigh-Ritz

Podemos considerar un ejemplo unidimensional para describir el método Rayleigh-Rith como el mostrado en la Fig.4.2.10 en donde el área (S) y el módulo elástico (E) son constantes y la carga distribuida (q) son tales que

$$A = E = L = 1 \quad y \quad q = X \tag{4.2.68}$$

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad @ \; x = 0 \\ u_{,x} &= 0 \quad @ \; x = L \end{aligned} \tag{4.2.69}$$

La energía potencial se puede expresar como:

$$\Pi = \int_0^L \frac{AE}{2} u_x^2 \, dx - \int_0^L u (q\,dx) \tag{4.2.70}$$

Substituyendo los valores dados en(4.2.68) y asumiendo que los desplazamientos u son de la forma $u=a_1x$ entonces

$$\Pi = \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{a_1}{3} \tag{4.2.71}$$

y

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 = a_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \tag{4.2.72}$$

Si se asume ahora que $u=a_1x+a_2x^2$, entonces la energía potencial queda como sigue:

$$\Pi = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(a_1+2a_2x)^2dx - \int_0^1 (a_1x+a_2x^2)x\,dx \qquad (4.2.73)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} = \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.74)$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7/12 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.75)$$

Sumarizando Resultados:

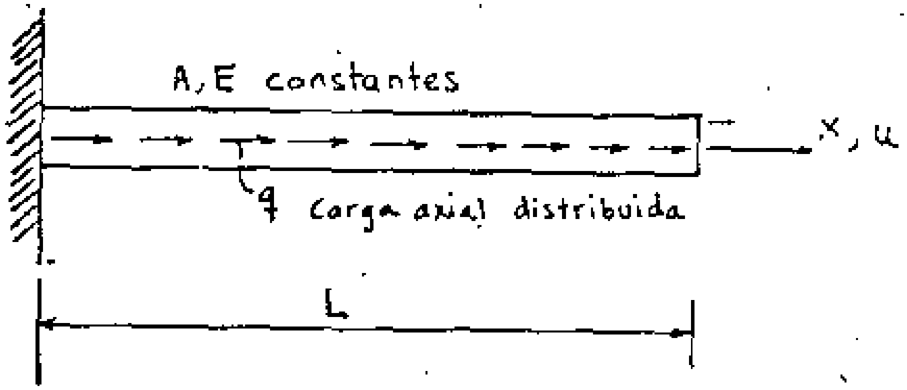
	$u(x=1/4)$	$u(x=1/2)$	$u(x=3/4)$	$u(x=1)$	$\sigma(x=0)$	$\sigma(x=1)$
1 Termino	.0833	.1667	.2500	.333	.333	.333
2 Terminos	.1302	.2292	.2969	.333	.5233	.0833
Exacto	.1224	.2292	.3047	.333	.5000	.0

Si asumimos un polinomio de 3er grado para u(tres términos) obtendríamos la solución exacta porque la solución exacta es cúbica de la forma $u=(3x-x^3)/6$ o sea que el método Rayleigh-Ritz basada en

$$u = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad (4.2.76)$$

daría como resultado

$$a_1 = 1/2 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = -1/6 \qquad (4.2.77)$$



Condiciones de frontera:

Forzada $u=0$ @ $x=0$

Natural. $u_{,x}=0$ @ $x=L$

Fig. 4.2.10 Barra con carga axial distribuida y sección constante

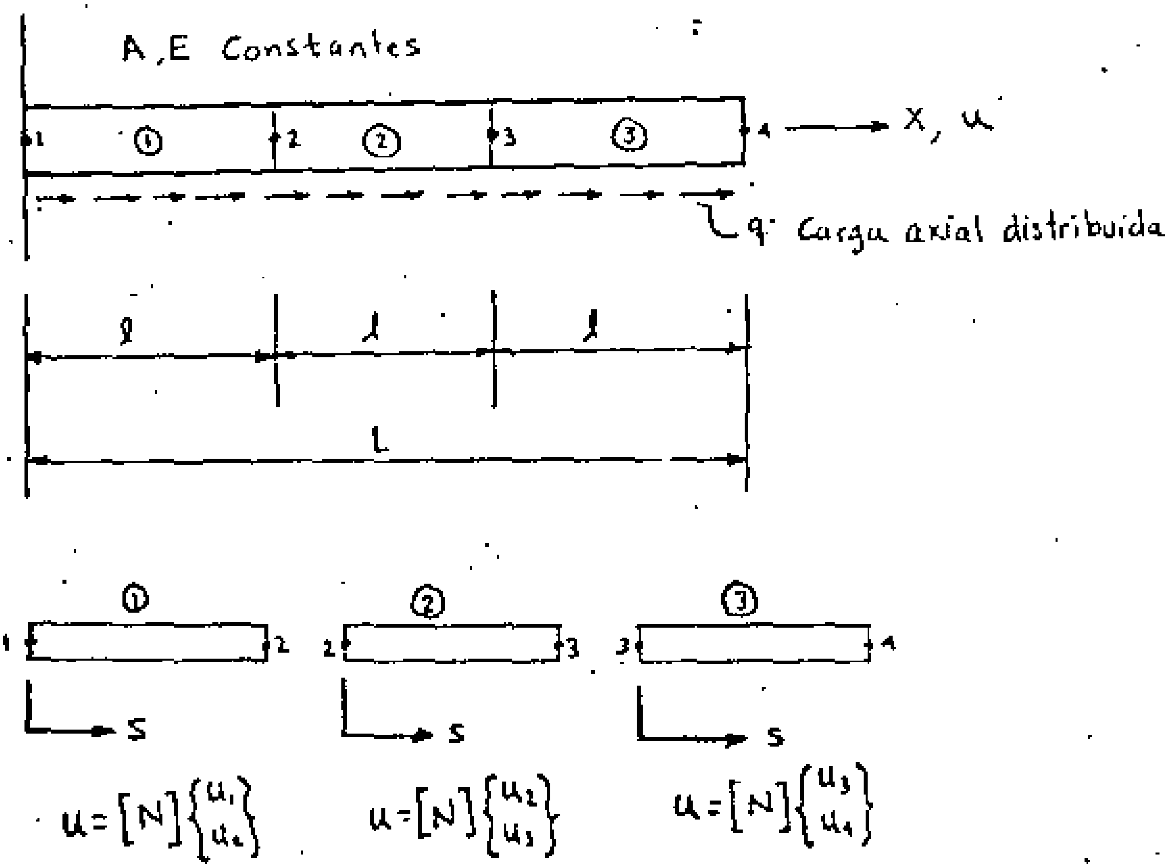


Fig 4.2.11 Barra con carga axial distribuida dividida en tres elementos.

y si se incluyeran más términos como por ejemplo

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n \tag{4.2.78}$$

la solución sería:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -1/6 \\ a_4 &= a_5 = \cdots = a_n = 0 \end{aligned} \tag{4.2.79}$$

<u>El Método del Elemento Finito y su relación con R.R</u>

Podemos considerar ahora la barra del ejemplo anterior pero dividida en tres elementos como se muestra en la Fig 4.2.11 Para cada elemento existe una matriz de forma tal que el campo de desplazamientos en cada elemento se puede expresar como:

$$u_i = [N]_i \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_i \tag{4.2.80}$$

y donde $$[N]_i = \left[\frac{l_i - S}{l_i} \quad \frac{S}{l_i} \right] \tag{4.2.81}$$

Las deformaciones son dadas por:

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial S} \tag{4.2.82}$$

Usando la ecuación(4.2.82) en la ecuación(4.2.80)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial S}[N]\{d\} = [B]\{d\} \tag{4.2.83}$$

en donde $$[B] = \frac{\partial}{\partial S}[N] \quad y \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{4.2.84}$$

y donde que εx es escalar entonces;

$$\varepsilon_x^2 = \varepsilon_x^T \varepsilon_x = \{d\}^T [B]^T [B] \{d\} \qquad (4.2.85)$$

Substituyendo la ecuación (4.2.85) en la expresión para la energía de un elemento se obtiene que

$$U_i = \int_0^l \frac{AE}{2} \varepsilon_x^2 dx = \frac{1}{2} \{d\}_i^T \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] ds \{d\} \qquad (4.2.86)$$

lo cual se puede expresar en forma compacta como:

$$U_i = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i \qquad (4.2.87)$$

en donde

$$[K]_i = \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] ds = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.2.88)$$

Por otra parte el trabajo realizado por la carga es

$$W = \int_0^l q\, u\, ds = \{d\}_i^T \int_0^L [N]^T q\, ds \qquad (4.2.89)$$

y el potencial total de la estructura es

$$\Pi_T = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \qquad (4.2.90)$$

Suponiendo que para cada elemento las propiedades cumplen con las propiedades de las ecuaciones (4.2.68) y además

$$l = 1/3$$

$$q = x \quad \text{para el elemento 1} \qquad (4.2.91)$$

$$q = \frac{1}{3} + s \quad \text{para el elemento 2}$$

$$q = \frac{2}{3} + s \quad \text{para el elemento 3}$$

Expandiendo los vectores al rango de la estructura se tiene que el vector global es

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.92}$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.90) y expandiendo al rango de la estructura, la energía potencial es:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\{D\}^T\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right)\{D\}$$

$$-\{D\}^T\left(\frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}\right) \tag{4.2.93}$$

Minimizando la energía potencial se obtiene que

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \tag{4.2.94}$$

la cual resulta en el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/54 \\ 6/54 \\ 12/54 \\ 8/54 \end{Bmatrix} \tag{4.2.95}$$

La Matriz cuadrada del lado izquierdo de esta ecuación es singular debido a que no se han impuesto las condiciones de frontera de la estructura, ésta condición es

$$u_1 = 0 \qquad (4.2.96)$$

Al imponer la condición (3.96) en la ecuación (4.2.95) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.97)$$

de donde se obtiene que $u_2 = .1605$, $u_3 = .2840$ y $u_4 = .333$ los cuales son exactos sin embargo son aproximados en cualquier otro punto, por ejemplo en $x=L/2$ se tiene

$$u = [N]\{d\}_2 = \left[\frac{1-\frac{1}{2}}{1} \quad \frac{1/2}{1} \right] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.98)$$

$$u = \left[\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \right] \begin{Bmatrix} .1605 \\ .2840 \end{Bmatrix} = .222 \qquad (4.2.99)$$

El valor exacto de u en $x=L/2$ es de 0.2292. El esfuerzo en el elemento i es $\sigma_i = (E\, u_{,x})_i$ o también

$$\sigma_i = E\,[B] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \qquad (4.2.100)$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.100) se obtienen los siguientes resultados:

$\sigma_1 = .4815$ exacto en $x = \frac{L}{6}$

$\sigma_2 = .3704$ exacto en $x = \frac{L}{2}$

$\sigma_3 = .1481$ exacto en $x = \frac{5L}{6}$

Es decir los esfuerzos no son continuos en el modelo y los desplazamientos son más exactos que los esfuerzos como se puede apreciar en la Fig. 4.2.12

De estos dos ejemplos se puede concluir que el método clásico de Rayleigh-Ritz (R-R) es aproximado pero más exacto si se utilizan más términos en el polinomio. En el caso de cargas destribuidas el método de R-R puede ser exacto si se usan suficientes términos en el polinomio y la inclusión de más términos no cambia la solución.

Por otra lado usando elementos finitos se llega a resultados exactos si las cargas se localizan en los nodos y es aproximado para el caso de cargas distribuidas pero puede ser bastante cercano al exacto si se usan más elementos.

El método clásico de R-R utiliza un polinomio que se aplica a todo el dominio de la estructura, mientras que el método del elemento finito utiliza un polinomio apra cada elemento.

4.2.10 Modelación de Sistemas con Elementos Finitos

Existe una variedad muy grande de sistemas mecánicos y estructurales los cuales requieren de una solución la cual no es siempre trivial ni simple de obtener, en tales casos es práctica común hacer una clasificación de efectos significantes y otros que por su naturaleza pueden considerarse insignificantes o ignorables, de tal manera que en general siempre se habla en términos de una solución aproximada a la solución real del sistema o de una solución exacta o aproximada de un modelo aproxi-

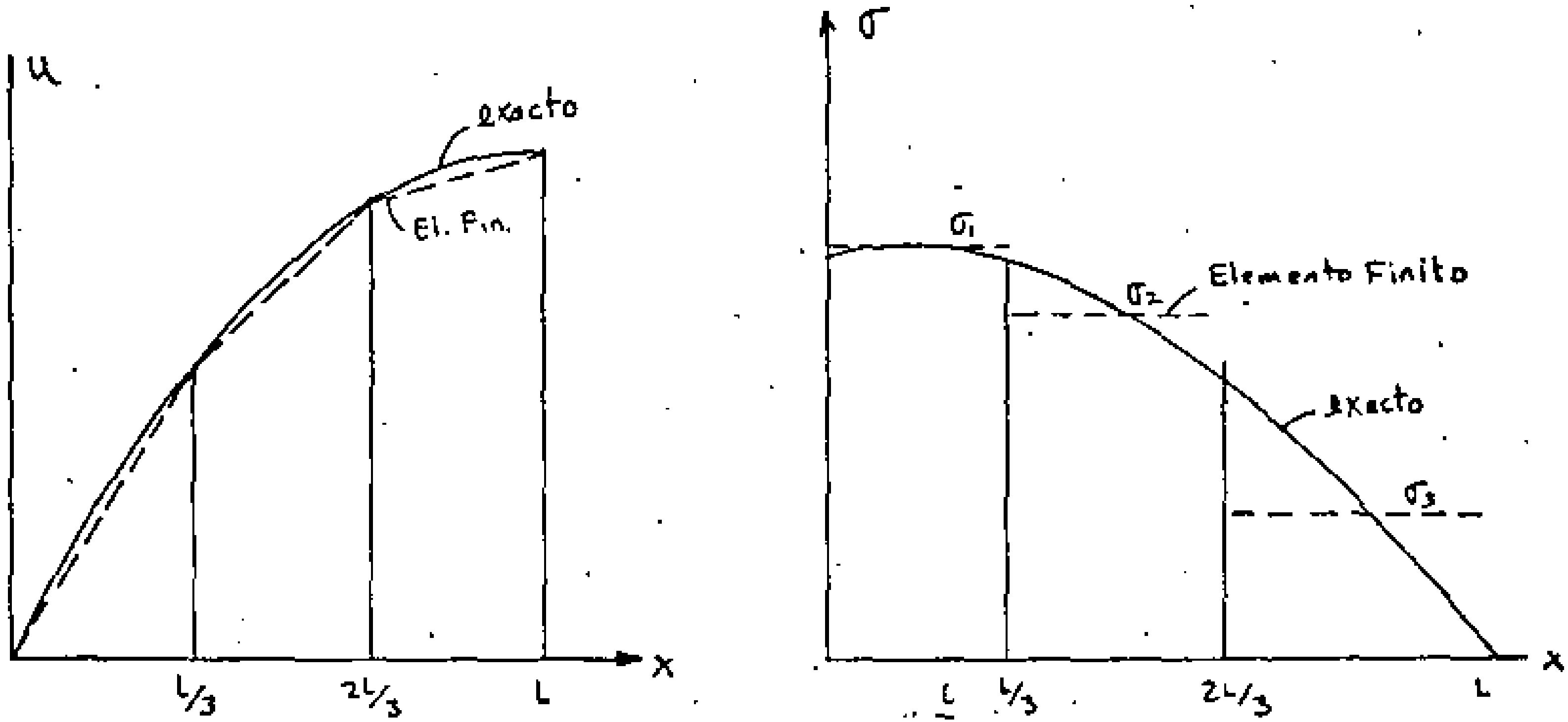


Fig 4.2.12 Comparación del método del elemento finito y la solución exacta para el problema de la barra con carga distribuida

mado al sistema real.

En la formulación analítica de un sistema, las suposiciones de que algunos efectos son ignorables tienen como objetivo simplificar los procedimientos de cálculo, sin embargo a través del desarrollo de técnicas digitales se han podido mejorar dichos procedimientos, aunque en general siempre es necesario hacer algunas suposiciones respecto a aquellos efectos que pueden ser ignorables o simplemente no dominantes.

La formulación con elementos finitos también requiere de suposiciones lógicas en base a la naturaleza del sistema en cuestión y para tal efecto se han desarrollado una variedad de elemntos cuyas propiedades son represntativas de algunos casos específicos de sistemas y así se tienen por ejemplo elementos planos para la simulación de problemas bidimensionales de esfuerzo plano o deformación plana, elementos viga en dos y tres dimensiones, elementos sólidos o de volumen, elementos cascaron y otros varios que tienen propósitos específicos.

En general, el análisis y modelación de un sistema es un proceso que se desarrolla en varias etapas que son:

1. Definición del sistema físico
2. Definición de condiciones de frontera
3. Definición de agentes de perturbación
4. Definición de variables de respuesta
5. Definición de efectos despreciables
6. Desarrollo del modelo analítico o modelo matemático
7. Aplicación sistemática de procedimientos de Cálculo
8. Interpretación de Resultados

Cabe mencionar que un entendimiento general del sistema en cuestión es siempre básico e importante pues la definición

11

del sistema físico, de las condiciones iniciales y de frontera y la definición de agentes perturbadores puede depender de un entendimiento bastante completo del problema que se está analizando ya que una formulación erronea conceptualmente genera resultados que no corresponden al verdadero problema.

En el área de aplicaciones del método del elemento finito se parte de la suposición que el análisis conoce y entiende el problema en cuestión, de tal forma que los puntos del 1 al 5 del porceso de análisis queden satisfactoriamente establecidos.

En el punto 6, referente al desarrollo del modelo matemático es necesario que las características de los elementos empleados sean compatibles con el comportamiento general del sistema y por compatibilidad se entiende que el conjunto de elementos que componen el sistema sean capaces de reproducir en forma aproximada la respuesta del sistema a las perturbaciones y condiciones a que está sujeto.

Son varios los aspectos que se deben tomar en cuenta para la selección de los elementos apropiados para cada caso, por ejemplo:

- -El número de nodos del elemento
- -El número de grados de libertad
- -Condiciones naturales de frontera del elemento
- -Tipo de cargas admisibles por el elemento
- -Tipo de geometría permitido por el elemento
- -Sistemas de coordenadas permisibles del elemento
- -Limitaciones del tipo de elemento

En la Fig. 4.2.13 se muestran algunos elementos que en general pueden ser aplicados a la modelación de varios tipos de sistemas y a continuación se presentan algunos casos específicos de aplicaciones a sistemas reales.

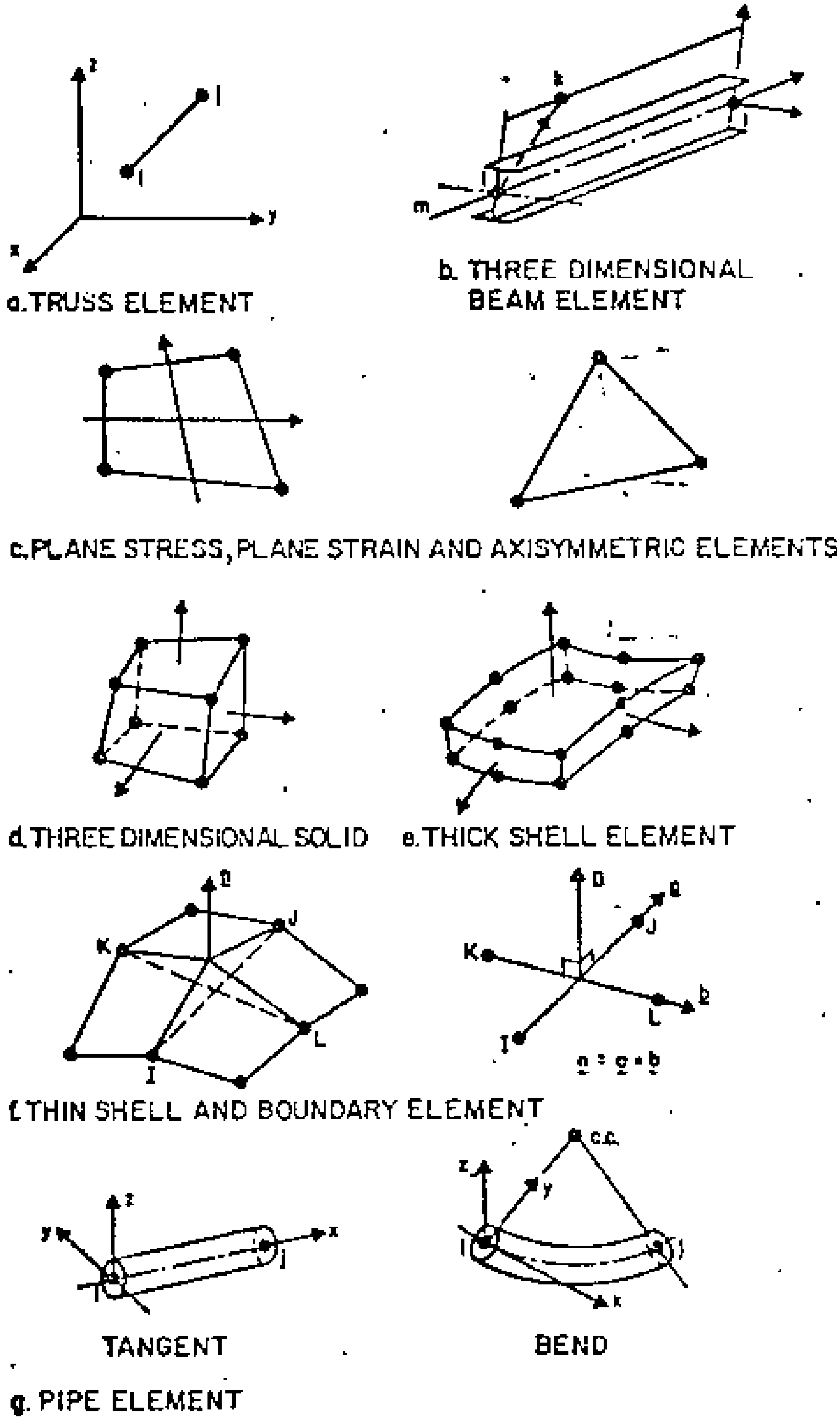


Fig 4.2.13 Biblioteca de elementos del programa SAP

4.3. Formulación de Residuos Pesados (Método de Galerkin)

Una formulación alternativa a la variacional es la denominada de residuos pesados. Esta formulación no requiere de un postulado variacional que aplique al sistema de interés y parte de una manipulación directa sobre la ecuación diferencial que gobierna la física del mismo.

Una formulación diferencial resulta en una ecuación del tipo

$$L(\varphi) = 0 \qquad (4.3.1)$$

en donde L es un operador diferencial, con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi'(0) &= b \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

Una función de campo que puede satisfacer las condiciones anteriores se puede definir como:

$$\{\varphi\}_a = [N]\{\varphi_i\} \qquad (4.3.3)$$

en donde $[N]$ es una función de las coordenadas

$\{\varphi_i\}$ es el vector de valores nodales de

$\{\varphi\}_a$ es una función a "preuba."

entonces, si $\{\varphi\}_a$ es la verdadera función, al sustituirla en la ecuación (4.3.1) el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = 0 \qquad (4.3.4)$$

la verdadera función pero es una buena aproximación de la misam, entonces al sustituir en 4.3.1. el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = R \approx 0 \qquad (4.3.5)$$

en donde R es un residuo de error dado por a es solamente una buena aproximación de la verdadera función . Por lo tanto R se puede evaluar en puntos discretos (nodos) e igualar la suma a cero para minimizar el error, o sea

$$\int_V R\,dV = 0 \tag{4.3.6}$$

Pero una mejor solución sería la de distribuir R sobre una región de acuerdo a alguna función de peso w de las coordenadas (nodales) antes de la integración, es decir

$$\int_V W R\,dV = 0 \tag{4.3.7}$$

o sustituyendo la ecuación (4.3.3.) en (4.3.5) y esta en (4.3.7) se tiene:

$$\int_V W L([N]\{\varphi_i\})\,dV = 0 \tag{4.3.8}$$

La función de peso w puede ser de cualquier forma en general pero cuando se selecciona igual a las funciones de forma o de interpolación se tiene que w es igual a N y por lo tanto

$$\int_V [N] L([N]\{\varphi_i\})\,dV = 0 \tag{4.3.9}$$

La ecuación (4.3.9) es la formulación de "Galerkin" de elemento finito y si se aplica a cada elemento en la región, se obtienen n ecuaciones simultáneas para n parámetros nodales en .

La solución del sistema de ecuaciones que resulta se desarrolla de igual manera que para otros casos, aunque una desvetaja es que la ecuación (4.3.9) contiene derivadas de orden más alto que las de formulación variacional.

Considerar la ecuación diferencial:

$$Lu - f = 0 \qquad (4.3.10)$$

en donde L es un operador diferencial, y la aproximación

$$\bar{u} = \sum N_i u_i \qquad (4.3.11)$$

entonces

$$L\bar{u} - f = \varepsilon \qquad (4.3.12)$$

en donde ε=error residual. La condición es entonces:

$$\int_R N_i \, \varepsilon \, dR = 0 \qquad (4.3.13)$$

Es decir que el error ε entre la solución aproximada y la solución real es ortogonal a las funciones usadas en la aproximación Ni. Este es el método de Galerkin cuya ecuación establece:

$$\int_R N_\beta L(\varphi) \, dR = 0 \qquad \beta = i, j, k \ldots \qquad (4.3.14)$$

donde

$$\varphi \doteq [N_i, N_j, N_k \ldots] \{\Phi\} \qquad (4.3.15)$$

Un ejemplo es el siguiente, sea la ecuación

$$L(\varphi) = \frac{d^2\varphi}{\partial x^2} + 3\frac{d\varphi}{dx} + 4 = 0 \qquad (4.3.16)$$

con condiciones iniciales

$$\varphi(0) = 1 \qquad (4.3.17)$$
$$\varphi'(0) = 0$$

Usando la ecución (4.3.14) resulta

$$\int_0^l N_\beta \left(\frac{d^2\varphi}{\partial x^2} + 3\frac{d\varphi}{dx} + 4 \right) dx = 0 \qquad (4.3.18)$$

l es el límite de x

Aplicación del Método de Galerkin a Vigas.

La ecuación fundamental

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (4.3.19)$$

Usando la ecuación (4.3.14)

$$\int_0^l [N]^T \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \qquad (4.3.20)$$

La función de forma óde interplación se define sobre cada elemento, entonces para todo el sistema se tiene:

$$\sum_{e=1}^{R} \int_{l(e)} [N^{(e)}]^T \left(\frac{d^2y^{(e)}}{dx^2} - \frac{M^{(e)}}{EI} \right) dx = 0 \qquad (4.3.21)$$

Las funciones de interpolación son tales que:

$$y = N_i Y_i + N_j Y_j = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right), \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} = [N^{(e)}]\{Y\} \qquad (4.3.22)$$

Entonces el Momento M se puede aproximar:

$$\frac{M}{EI} = [N^{(e)}] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} \qquad (4.3.23)$$

Para reducir el orden de la integral en la ecuación(4.3.21) se puede integrar por partes entonces:

$$\int_{l^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2y}{dx^2} = [N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big]_{x_i}^{x_j} - \int_{l^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} dx \qquad (4.3.24)$$

Substituyendo en (4.3.21) se tiene:

$$[N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big]_{x_i}^{x_j} - \int_{l^{(e)}} \left(\frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} + [N^{(e)}]^T \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \qquad (4.3.25)$$

La primera integral nos da la matriz elemental de coeficientes $[k^{(e)}]$ en la ecuación

$$[K^{(e)}]\{Y\} = \{f^{(e)}\} \tag{4.3.26}$$

A través de la suma sobre todos los elementos, la segunda integral produce el vector $\{F\}$.

El primer término de la ecuación (4.3.25) contribuye al vector $\{F\}$ si dy/dx se define en cualquier extremo del elemento, si no se desprecia.

Las integrales de la ecuación (4.3.25) se evaluan como sigue:

$$\frac{d}{dx}[N]^T = \frac{d}{dx}\begin{Bmatrix}(1-\frac{x}{l})\\ \frac{x}{l}\end{Bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix}-1\\ 1\end{Bmatrix} \tag{4.3.27}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[N]\{Y\} = \frac{1}{l}[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix}y_i\\ y_j\end{Bmatrix} \tag{4.3.28}$$

Entonces:

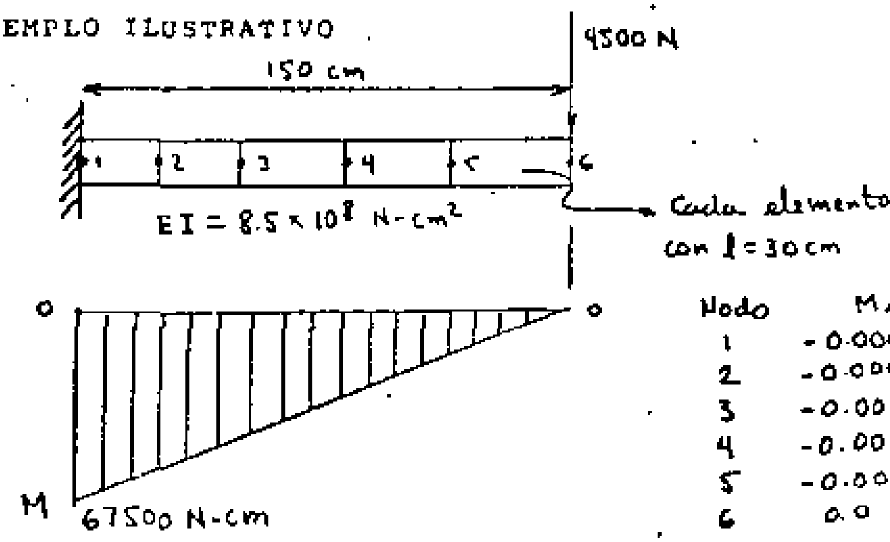
$$\int_0^l \frac{d}{dx}[N]^T \frac{dy}{dx}\,dx = \int_0^l \frac{1}{l^2}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix}y_i\\ y_j\end{Bmatrix}dx = \frac{1}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\ y_j\end{Bmatrix} \tag{4.3.29}$$

y para la segunda integral:

$$\int_0^l [N]^T \frac{M}{EI}\,dx = \int_0^l [N]^T[N]\begin{Bmatrix}M_i/EI\\ M_j/EI\end{Bmatrix}dx =$$

$$\frac{l}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_i/EI\\ M_j/EI\end{Bmatrix} \tag{4.3.30}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO



Nodo	M/EI
1	-0.000794
2	-0.000635
3	-0.000476
4	-0.000318
5	-0.000159
6	0.0

Las ecuaciones para el primer elemento son:

$$-\frac{1}{30}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\y_j\end{Bmatrix}-\frac{30}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_i/EI\\M_j/EI\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1-\frac{x}{L}\\\frac{x}{L}\end{Bmatrix}\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \qquad (4.3.31)$$

$\therefore \frac{dy}{dx}=0\Big|_{x=0}$, el último término desaparece. Entonces, una vez ensamblado el sistema queda:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\-1&2&-1&&0&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\&0&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}+150\begin{bmatrix}2&1&&&&\\1&4&1&&0&\\&1&4&1&&\\&&1&4&1&\\&0&&1&4&1\\&&&&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.000794\\-0.000655\\-0.000476\\-0.000318\\-0.000159\\-0.0\end{bmatrix}=\{0\} \qquad (4.3.32)$$

que se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\-1&2&-1&&&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\&&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.333\\.571\\.428\\.286\\.143\\.023\end{bmatrix} \quad \therefore y_1=0 \qquad (4.3.33)$$

Resultados

Nodo	E.F.	Teoría
1	0	0.
2	-.3334	-.3335
3	-1.2385	-1.2388
4	-1.5719	-2.5729
5	-4.1929	-4.1929
6	-5.9559	-5.9559

Conclusión: Sin comentarios.

Ecuación de campo en dos dimensiones:

$$L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q = 0 \qquad (4.3.34)$$

Aplicable a problemas de:

-Torsión

-Transmisión de Calor

-Mecánica de Fluidos

La integral de Galerkin para el caso de la ecuación (4.3.34)es:

$$\int_V [N]^T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q \right) dV = 0 \qquad (4.3.35)$$

5. BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

5.1 Desarrollo de Matrices Elementales

Cada elemento está asociado a un número determinado de nodos y estos a su vez a un número específico de grados de libertad (g d l). En general, dependiendo de la variable de campo (desplazamiento, temperatura, etc) se puede definir el tipo de grados de libertad que se requieren para la representación física del comportamiento del sistema; por ejemplo, si se trata del desplazamiento de una partícula en una linea, se tiene entonces un (gdl), si se trata de desplazamientos en un plano de la misma entonces se tienen dos (g d l) y se tienen tres (g d l) para el caso de desplazamientos en el espacio.

Los elementos comunmente usados en la práctica de elementos finitos pueden clasificarse de varias formas y en varias categorías, algunas de estas pueden ser las que se indican en la tabla 5.1.1. Algunas de las características indicadas en esta tabla pueden ser físicamente interpretadas, por ejemplo el número de nodos necesarios para describir la topología del elemento, forma relativa (rectangular, trapezoidal etc), pero otras no son tan obvias como por ejemplo el orden de la integración explicita, el tipo de las fun-

Característica Categórica	Tipos de Elementos	Ejemplos
Espacial Geometrica	Lineales (unidimensionales)	barra, viga
	Planos (bidimensionales) < Triangulares / cuadriláteros	esfuerzo plano, deformación plana, axisimetricos
	Espaciales (Tridimensionales)	solidos, placas gruesas
Forma Relativa	Naturales (regulares)	Triangulares, rectangulares
	Isoparametricas (irregulares) 1, 2 y 3 puntos de integración	de geometría irregular
Orden de los polinómios de interpolación	Lineales (nodos esquinales)	lados rectos
	Cuadraticos (nodos esq. y 1 intermedio)	lados parabolicos
	Cubicos (nodos esq. y 2 intermedios)	lados cubicos
Tipo de grados de libertad	Traslacionales	barra, planos, solidos
	Rotacionales	vigas, cascarones, placas.

TABLA 5·1·1 Algunas clasificaciones de Elementos Finitos

ciones de interpolación de la variable de campo etc. 52
En un programa general de elementos finitos, cada elemento está debidamente formulado a través de ciertas ecuaciones que toman en cuenta las siguientes características:

- Número de nodos
- Numero de grados de libertad por nodo
- coordenadas nodales
- conectividad del elemento
- Numero de puntos de integración (isoparamétricas)
- propiedades del material

y para cada elemento en un sistema, se formulan las matrices elementales que caracterizan sus propiedades y que se ensamblan en matrices globales que caracterizan la estructura total del sistema. Por ejemplo la estructura mostrada en la figura 5.1.1 tiene 8 elementos cuyos nodos tienen un solo grado de libertad (temperatura por ejemplo). El resultado de ensamblar las matrices elementales en la matriz global es una matriz cuyos terminos diferentes de cero se indican con una "X" como se muestra en las siguientes ecuaciones indicadas.

Sea $[K_i]$ la matriz del elemento i cuyo orden <u>n</u> es igual al numero de nodos (dado que cada nodo tiene un solo gdl) entonces se obtienen las siguientes matrices elementales

$$[K_1]_{3\times3},\ [K_2]_{4\times4},\ [K_3]_{3\times3},\ [K_4]_{4\times4},\ [K_5]_{3\times3}$$

$$[K_6]_{2\times2},\ [K_7]_{2\times2},\ [K_8]_{2\times2} \qquad (5\cdot1\cdot1)$$

El vector global de grados de libertad se oriena de acuerdo al esquema de numeración nodal tal que

$$\{D\}^T = \{d_1, d_2 \ldots\ldots\ldots d_9\} \qquad (5\cdot1\cdot2)$$

y los vectores elementales se ordenan de acuerdo a los nodos que definen el elemento, entonces se tienen los siguientes vectores elementales:

$$\{D_1\}^T = \{d_1\ d_4\ d_5\}$$

$$\{D_2\}^T = \{d_1\ d_2\ d_5\ d_6\}$$

$$\{D_3\}^T = \{d_4\ d_5\ d_8\}$$

$$\{D_4\}^T = \{d_5\ d_6\ d_8\ d_9\} \qquad (5\cdot1\cdot3)$$

$$\{D_5\}^T = \{d_2\ d_3\ d_6\}$$

$$\{D_6\}^T = \{d_3\ d_7\}$$

$$\{D_7\}^T = \{d_6\ d_7\}$$

$$\{D_8\}^T = \{d_7\ d_9\}$$

Al expander las matrices (5.1.1) al tamaño de la matriz global se pueden sumar término a termino y el resultado sería una matriz $[K]$ cuyos términos diferentes de cero se indican en la siguiente ecuación:

$$
[K] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
X & X & O & X & X & X & O & O & O \\
X & X & X & O & X & X & O & O & O \\
O & X & X & O & O & X & X & O & O \\
X & O & O & X & X & O & O & X & O \\
X & X & O & X & X & X & O & X & X \\
X & X & X & O & X & X & X & X & X \\
O & O & X & O & O & X & X & O & X \\
O & O & O & X & X & X & O & X & X \\
O & O & O & O & X & X & X & X & X
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (5\cdot1\cdot4)
$$

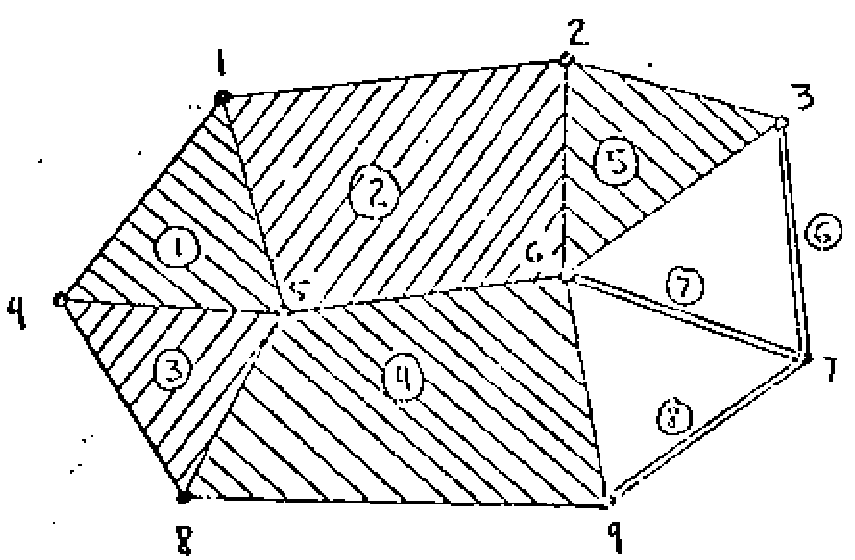
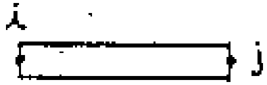
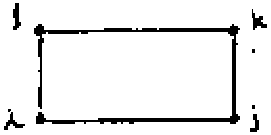
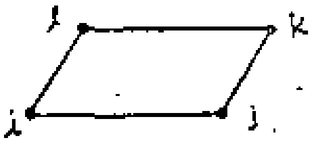
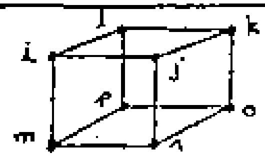
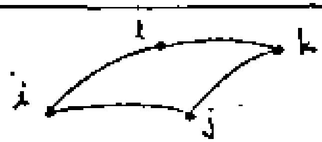
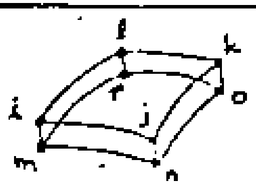
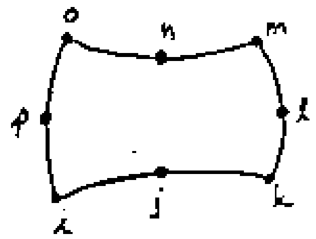
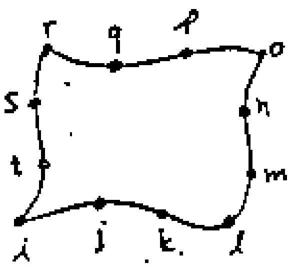
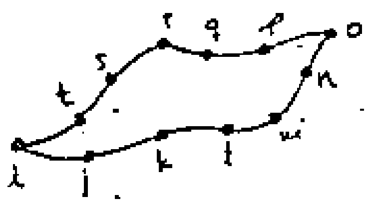


Figura 5·1·1 Sistema con 5 elementos planos (tres triangulares y dos cuadriláteros) y tres elementos barra, con un grado de libertad por nodo

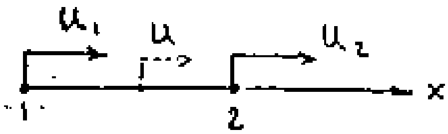
ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	BARRA	2	1 linea 2 plano 3 espacio	axiales
	VIGA	2	2, 3 } plano 6 espacio	Concentradas, distribuidas cortantes, momentos, axiales
	TRIANGULAR PLANO	3	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLANO	4	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLACA	4	3	concentradas en el plano y fuera del plano y distribuidas en la cara
	SOLIDO	8	3	Concentradas en los nodos en cualquier dirección y en las caras distribuida
	CASCARON	4	6	concentradas y distribuidas en cualquier dirección
	PLACA GRUESA	8	6	Concentradas y distribuidas en cualquier dirección

ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	PLANO ISOPARAMETRICO PARABOLICO	8	2	concentradas en el plano
	PLANO ISOPARAMETRICO CUBICO	12	2	mismas
	CASCARON ISOPARAMETRICO CUBICO	12	6	concontradas, cortantes y momentos y de superficie
	SOLIDO ISOPARAMETRICO CUBICO	32	3	Concentradas, sin momentos, de superficie.

A continuación se presenta el desarrollo de las matrices elementales para algunos elementos basados en una formulación variacional que resulta en matrices del tipo

$$[K_e] = \int_{Vol.} [B]^T [E] [B] \, dV \qquad (5\cdot1\cdot5)$$

Caso 1: Elemento tipo barra:



sea la función de campo $\{u\}$ expresada en términos de un campo

$$\{u\} = [1 \quad x]\{a\} \qquad (5\cdot1\cdot6)$$

∴ $\{u\}$ es el desplazamiento de cualquier punto del elemento
$\{a\}$ es el vector de coeficientes de un polinomio que aproxima el desplazamiento en el elemento
x es la coordenada dentro del elemento para la cual se calcula el desplazamiento $\{u\}$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (5\cdot1\cdot7)$$

combinando $(5\cdot1\cdot7)$ y $(5\cdot1\cdot6)$

$$\{u\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} = \left[\left(1-\tfrac{x}{L}\right) \quad \tfrac{x}{L}\right]\{d\} \qquad (5\cdot1\cdot8)$$

$$\{u\} = [N]\{d\} \qquad (5\cdot1\cdot9)$$

por otro lado se tiene que

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} = \left(-\tfrac{1}{L} \quad \tfrac{1}{L}\right)\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \frac{d_2 - d_1}{L} \qquad (5\cdot1\cdot10)$$

De las ecuaciones (5.1.9) y (5.1.10) se tiene que

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x}[N] \qquad (5.1.11)$$

De la expresión de la energía de deformación se tiene:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} \, A\, dx \qquad (5.1.12)$$

Sustituyendo (5.1.10) en (5.1.12) se tiene

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T \left[\int_0^L [B]^T E\, [B]\, A\, dx\right] \{d\} \qquad (5.1.13)$$

la cual se puede escribir como

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T [K_e] \{d\} \qquad (5.1.14)$$

Entonces para obtener $[Ke]$ se tiene

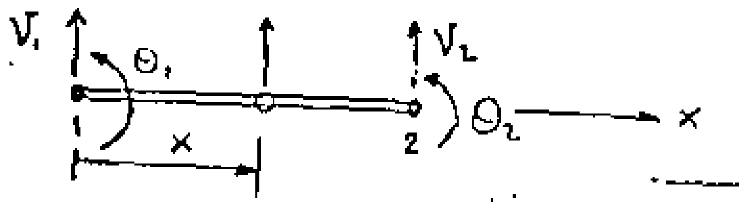
$$[Ke] = \int_0^L [B]^T E\, [B]\, A\, dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \left\{-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right\} A\, dx \qquad (5.1.15)$$

y el resultado es

$$[Ke] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.1.16)$$

que es la matriz que caracteriza a un elemento barra en coordenadas naturales, es decir cuando el eje x coincide con el eje longitudinal del elemento.

Caso 2 Elemento Viga



Un desplazamiento cortante v en cualquier punto del elemento localizado en una coordenada x del mismo se puede aproximar mediante:

$$v_x = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.17)$$

Segun la teoría de vigas, el desplazamiento angular θ de un punto en la viga es igual a la derivada del desplazamiento cortante con respecto a la coordenada longitudinal, entonces:

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.18)$$

$$\theta_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.19)$$

tomando las condiciones de frontera para el elemento se tiene que:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 \quad @ \quad x = 0 \\ v_x &= v_2 \quad @ \quad x = L \\ \theta_x &= \theta_1 \quad @ \quad x = 0 \\ \theta_x &= \theta_2 \quad @ \quad x = L \end{aligned} \qquad (5.1.20)$$

entonces

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (5\cdot1\cdot21)$$

esta ecuación tiene la forma de la ecuación (5·1·7), de (5·1·17) y (5·1·18) se tiene lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot22)$$

entonces despejando el vector $\{a\}$ de (5·1·21) y sustituyendolo en la última ecuación se obtiene

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot23)$$

en donde el producto de las matrices en (5·1·23) se define como:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \qquad (5\cdot1\cdot23)$$

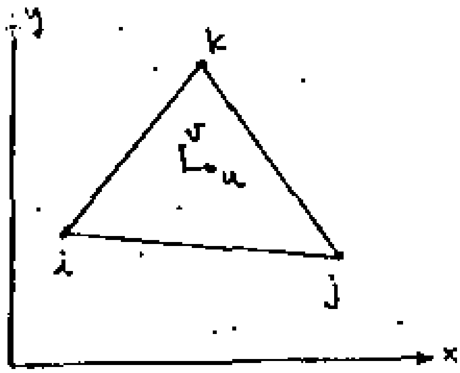
tomando de la ecuación (5·1·23) la derivada con respecto a x se obtiene la matriz [B]

$$[B] = \frac{d}{dx}[N] \qquad (5\cdot1\cdot24)$$

sustituyendo la matriz [B] en la ecuación (5-1-5) con la matriz $[E]=[EI]=EI$, el resultado es el siguiente después de desarrollar la integración: 61

$$[K_e]=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix} \qquad (5.1.25)$$

Caso 3 Elemento Triangular Plano



$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y$$
$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y \qquad (5.1.26)$$

expresando la aproximación de campo (5.1.26) en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\\ a_6\end{Bmatrix} \qquad (5.1.27)$$

Tomando las condiciones de frontera para $i=1$, $j=2$ y $k=3$ se tiene que:

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix} \;;\; \begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_4\\ a_5\\ a_6\end{Bmatrix} \qquad (5.1.28)$$

despejando los vectores $\{a_1\ a_2\ a_3\}^T$ y $\{a_4\ a_5\ a_6\}^T$ se tiene

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{u\} \qquad (5.1.29)$$

y
$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{v\} \qquad (5.1.30)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (5.1.27) debidamente ordenadas se obtiene

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.31)$$

en donde:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2-y_3)x + (x_3-x_2)y\right]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3-y_1)x + (x_1-x_3)y\right] \qquad (5.1.32)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y\right]$$

la matriz [B] se obtiene tomando las parciales de [N] es decir

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \qquad (5.1.33)$$

Para obtener la matriz de rigidez del elemento, solamente es necesario sustituir la expresión de [B] de la ecuación (5.1.33) en la ecuación (5.1.5), pero la matriz de propiedades de material depende del caso que se trate, en el caso de esfuerzo plano se tiene:

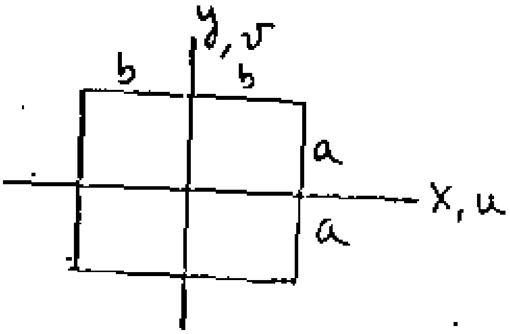
$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (5.1.34)$$

en el caso de deformación plana se tiene:

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \qquad (5.1.35)$$

La matriz final se puede obtener de las ecuaciones (5.1.5), (5.1.33) y segun sea el caso de ecuaciones (5.1.34) y/o (5.1.35).

Caso 4 Elemento cuadrilátero plano



$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$
$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \qquad (5.1.36)$$

Las ecuaciones (5.1.36) representan la aproximación de desplazamiento a traves de un polinomio. Desarrollando los mismos pasos que en el caso anterior se obtienen las siguientes matrices:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.37)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(b-x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(a+y)}{4ba} \qquad (5.1.38)$$

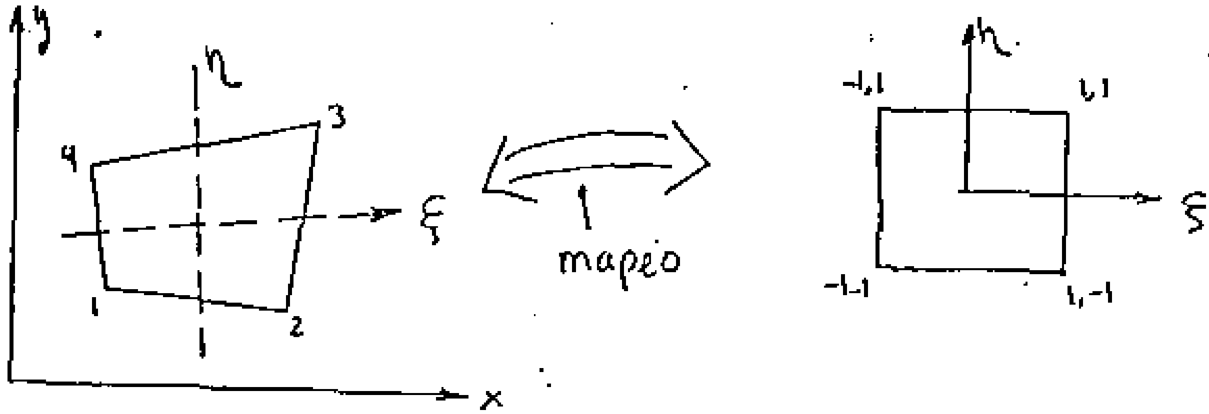
$$N_4 = \frac{(b-x)(a+y)}{4ba}$$

La matriz [B] se obtiene mediante:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.39)$$

la matriz elemental de rigidez se obtiene sustituyendo la matriz [B] de la ecuación (5.1.39) en la ecuación (5.1.5) y donde la matriz [E] tiene la misma forma que para el caso del elemento triangular.-

Caso 5 Elemento rectangular isoparamétrico



Para este caso, podemos considerar la función de mapeo

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.40)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \qquad (5.1.41)$$

$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

Este "mapeo" relaciona un punto de coordenadas (x, y) en el elemento irregular con un punto de coordenadas (ξ, η) del elemento regular. El polinomio correspondiente es:

$$x = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta$$

$$y = a_5 + a_6 \xi + a_7 \eta + a_8 \xi \eta \qquad (5.1.42)$$

las condiciones de frontera nodales son:

$$\left.\begin{array}{llll} y=y_1 & , & x=x_1 & @ \quad \xi=\eta=-1 \\ y=y_2 & , & x=x_2 & @ \quad \xi=1,\ \eta=-1 \\ y=y_3 & , & x=x_3 & @ \quad \xi=\eta=1 \\ y=y_4 & , & x=x_4 & @ \quad \xi=-1,\ \eta=1 \end{array}\right. \qquad (5.1.43)$$

El campo de desplazamientos queda:

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=[N]\{d\} \qquad (5.1.44)$$

y las funciones de interpolación son tales que:

$$x=\sum_1^4 N_i x_i \qquad y=\sum_1^4 N_i y_i \qquad (5.1.45)$$

y por lo tanto los desplazamientos son:

$$u=\sum_1^4 N_i u_i \qquad v_i=\sum_1^4 N_i v_i \qquad (5.1.46)$$

Usando la regla de la cadena para la derivación en dos sistemas de coordenadas se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} (\ )_{,\xi} \\ (\ )_{,\eta} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5.1.47)$$

entonces para este caso se tiene que el jacobiano queda

$$[J]=\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.48)$$

definimos $[J^*]=[J]^{-1}$ entonces usando la ecuación (5.1.47)

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \qquad (5.1.49)$$

de la definición de deformaciones en el plano se tiene que

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5.1.50)$$

de las expresiones (5.1.45) y (5.1.46)

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \left[\underset{i=1}{\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}} \; \underset{i=2}{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}} \; \underset{i=3}{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}} \; \underset{i=4}{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.51)$$

combinando las últimas tres ecuaciones y de la ecuación

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \qquad (5.1.52)$$

se obtiene que

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \left[\underset{i=1}{\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}} \; \underset{i=2}{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}} \; \underset{i=3}{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}} \; \underset{i=4}{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}} \right] \qquad (5.1.52)$$

El siguiente paso es integrar el producto $[B]^T[E][B]$ en donde $[E]$ tiene la misma forma que en casos anteriores al integrar se tiene que.

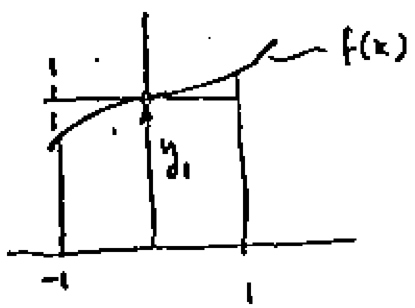
$$I = \int_x \int_y (\quad) \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (\quad) \det[J] \, d\xi \, d\eta \qquad (5.1.53)$$

pero debido a la complejidad del integrando se requiere de una aaproximación mediante una integración numérica la cual se describe brevemente a continuación

sea la integral

$$I = \int_{-1}^{1} y \, dx \qquad (5.1.54)$$

se puede aproximar deacuerdo a las siguientes aproximaciones

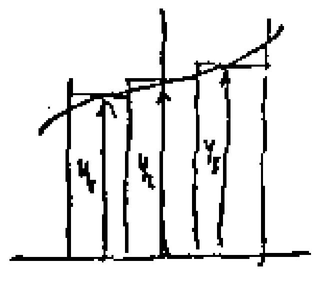


$I = 2y_1$

(a)

$I = W_1 y_1 + W_2 y_2$

(b)



$I = W_1 y_1 + W_2 y_2 + W_3 y_3$

(c)

Entonces la integral se puede expresar como

$$I = \int_{-1}^{1} y \, dx \approx \sum_i W_i y_i \qquad (5.1.54)$$

La integral de la ecuación (5.1.53) se puede aproximar mediante:

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \simeq \int_{-1}^{+1}\left[\sum_i W_i f(\xi_i,\eta)\right] d\eta \qquad (5.1.55)$$

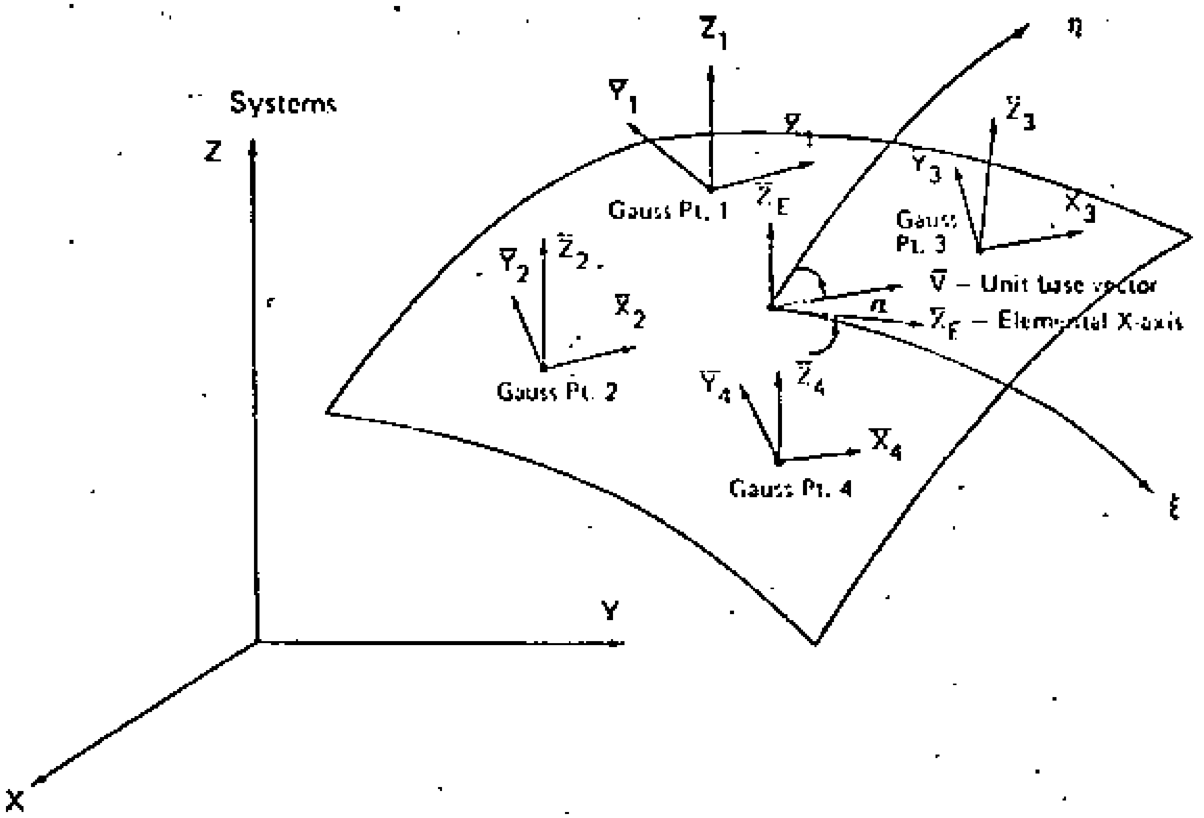
y finalmente

$$I = \sum_i W_i \left[\sum_j W_j f(\xi_i,\eta_j)\right] = \sum_i \sum_j W_i W_j f(\xi_i,\eta_j) \quad (5.1.56)$$

la localización de los puntos i, j de integración y sus pesos asociados se dan a través de la cuadratura de Gauss dada en la siguiente tabla para 1, 2 y 3 puntos.

Nº de Puntos	Localización	Peso asociado
1	$x = 0.0$	2
2	$x_1, x_2 = \pm 0.57735$	1
3	$x_1, x_3 = \pm 0.77459$ $x_2 = 0.0$	5/9 8/9

Tabla 5.1.3 Cuadratura de Gauss para integración con 1, 2 y 3 puntos.

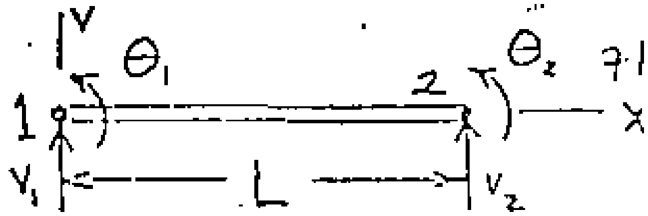


III.38

1. $\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i$ = unit vectors defining directions of local coordinate axes at Gauss point (i).
2. $\overline{X}_E$ = elemental X-axis tangent to middle surface at $\xi = \eta = \zeta = 0.0$ and parallel to local ξ direction.
3. $\overline{V}$ = unit base vector defined by rotation angle α with respect to vector $\overline{X}_E$.
4. $\overline{Z}_i$ is normal to middle surface at Gauss point (i)
5. $\overline{Y}_i = \overline{V} \times \overline{Z}_i$
6. $\overline{X}_i = \overline{Y}_i \times \overline{Z}_i$

Figure III.5.3
Definition of Elemental Gauss Point Coordinate Axes for Shell Elements

Elemento Viga



$$v = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \text{donde}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

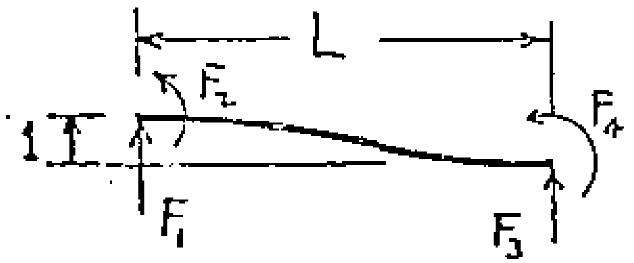
$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

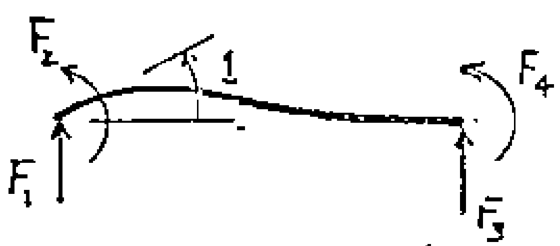
$$v_{,xx} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \text{donde}$$

$$B_1 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \qquad B_2 = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$B_3 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \qquad B_4 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$[k] = \int_0^L [B]^T EI [B]\, dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$





$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \\ -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6EI/L^2 \\ 4EI/L \\ -6EI/L^2 \\ 2EI/L \end{Bmatrix}$$

Matriz de Rigidez de un elemento cuadrilatero

Ref. Fig. 8

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N]$$

$$\underset{3\times 8}{[B]} = \frac{1}{4bc} \begin{bmatrix} -(c-y) & 0 & (c-y) & 0 & - - - - \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) & - - - \\ -(b-x) & -(c-y) & -(b+x) & (c-y) & - - - \end{bmatrix}$$

$$\underset{8\times 8}{[k]} = \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \underset{8\times 3}{[B]^T} \underset{3\times 3}{[E]} \underset{3\times 8}{[B]} \, t \, dx\, dy \qquad (a)$$

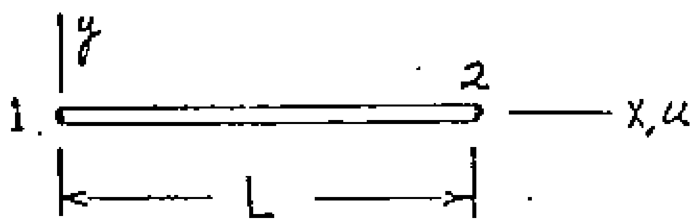
En donde:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

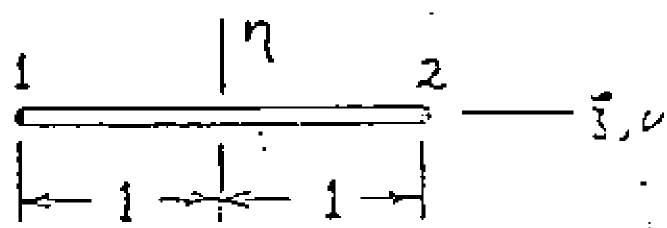
5.2 FAMILIAS DE ELEMENTOS

ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS

Barra en coordenadas rectangulares



Barra en coordenadas Isoparam.



Relaciones: $x = \frac{L}{2}(1+\xi)$ $\quad dx = \frac{L}{2} d\xi = J\, d\xi$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

Coordenadas rectangulares:

$$u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_0^L AE\, [B]^T [B]\, dx$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} L$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas isoparamétricas:

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_{-1}^{1} AE\, [B]^T [B]\, J\, d\xi$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \frac{L}{2}\, 2$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos continuar con este ejemplo un paso mas, esto es aumentar un nodo en la barra a la mitad del segmento, entonces:

$$u = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{3x}{L} + 1 \;,\; \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \;,\; -\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$ (Rectangular)

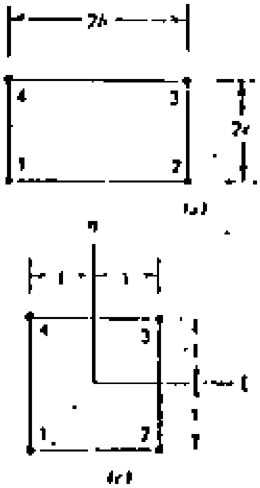
$$u = \left[\frac{-\xi + \xi^2}{2} \quad \frac{\xi + \xi^2}{2} \quad 1 - \xi^2 \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

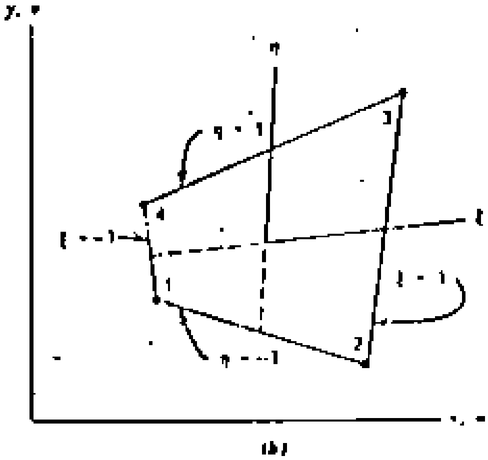
$$\epsilon_x = \underbrace{\frac{2}{L} \left[\frac{-1 + 2\xi}{2} \quad \frac{1 + 2\xi}{2} \quad -2\xi \right]}_{[B]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Entonces en general [B] es una función de las coordenadas naturales, De la misma manera --J dependería de ξ si el nodo 3 no estuviera colocado en el centro.

75

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_4 \end{Bmatrix}$$





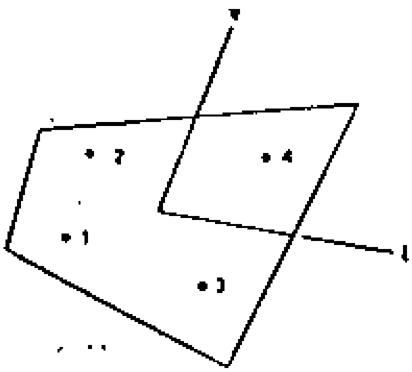
$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \qquad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \qquad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$x = \sum_{1}^{4} N_i x_i \qquad y = \sum_{1}^{4} N_i y_i$$

$$u = \sum_{1}^{4} N_i u_i \qquad v = \sum_{1}^{4} N_i v_i$$

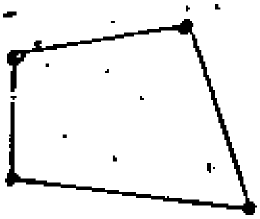


$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \quad (5.3.5)$$

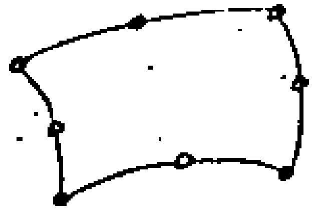
Gauss Quadrature Coefficients

No. of Points	Locations	Associated Weights W_i
1	$x_1 = 0.00000000000000000000000000$	2.
2	$x_1, x_2 = \pm 0.57735026918962576450914788$	1.
3	$x_1, x_3 = \pm 0.77459666924148337703585311$	$\frac{5}{9}$ (= 0.555 . . .)
	$x_2 = 0.00000000000000000000000000$	$\frac{8}{9}$ (= 0.888 . . .)

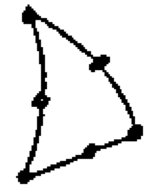
SOME ELEMENT TYPES



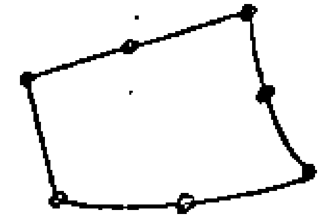
linear



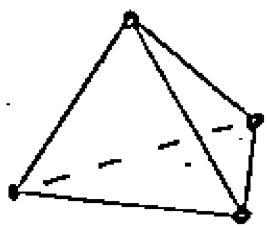
quadratic



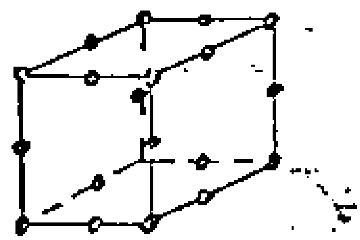
quadratic



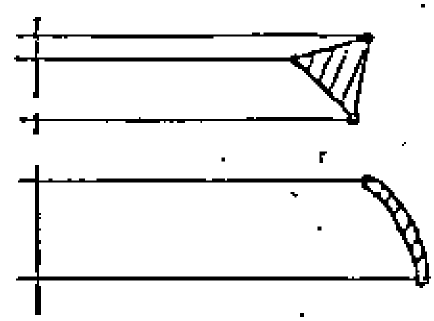
linear - quadratic



linear



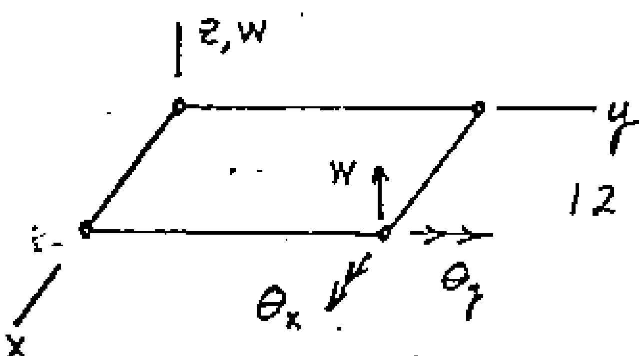
quadratic



6 d.o.

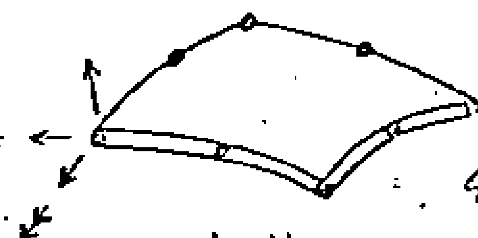
4 d.

elements for axisymmetri
solids & thin shells



12 d.o.f.

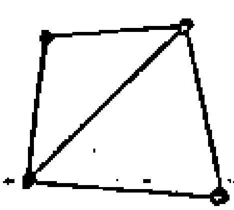
plate bending

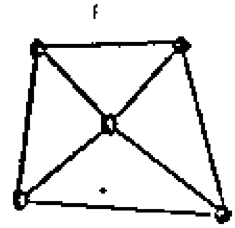


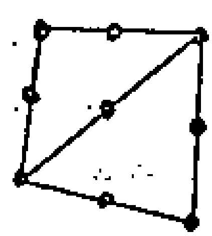
40 d.o.

shell

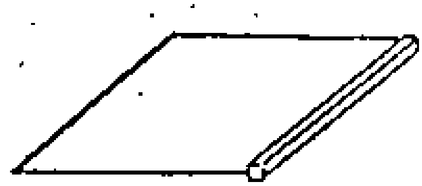
SOME ASSEMBLAGES



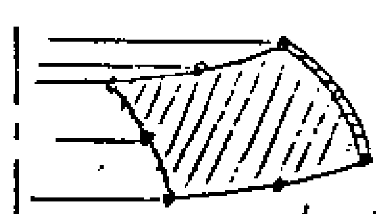




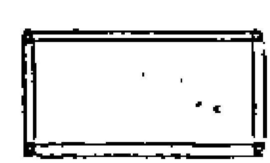
5 tetrahedra
combine into
a hexahedron



edge beam on
a plate



solid propellant
in rocket case



four stringers
on shear pan

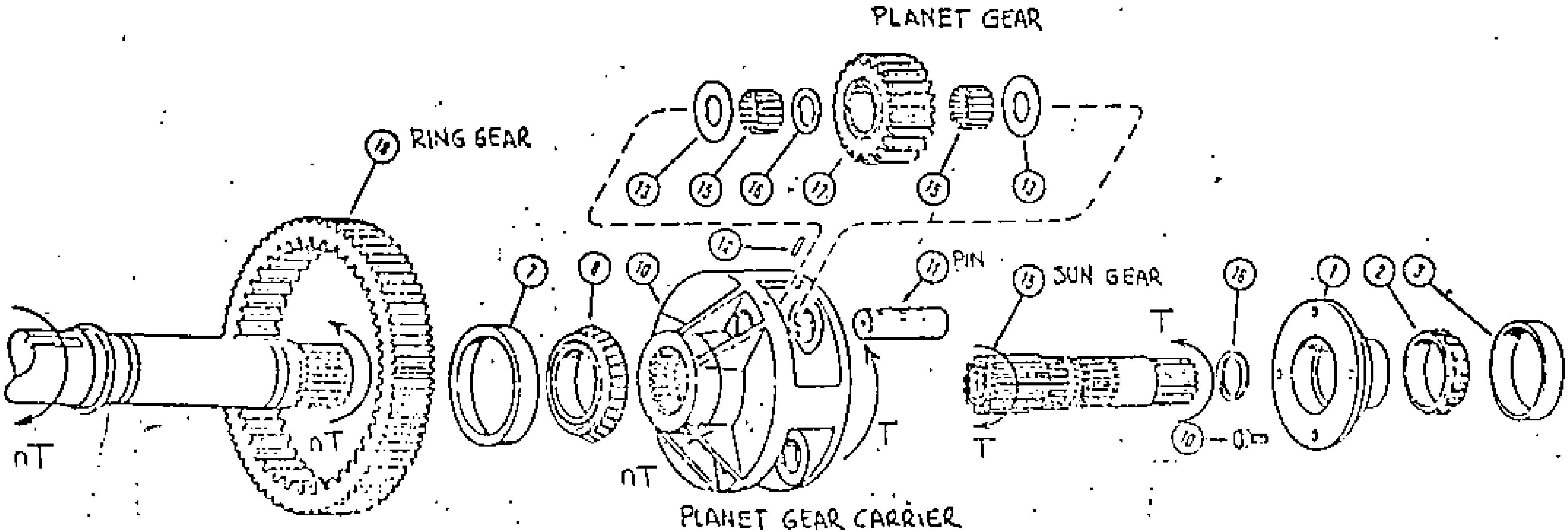
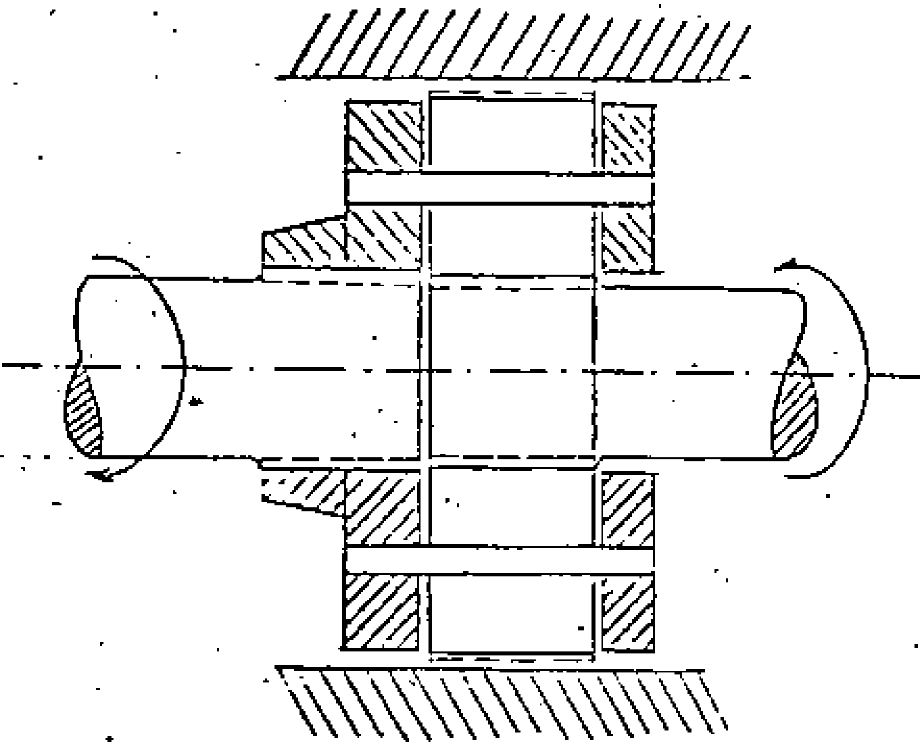


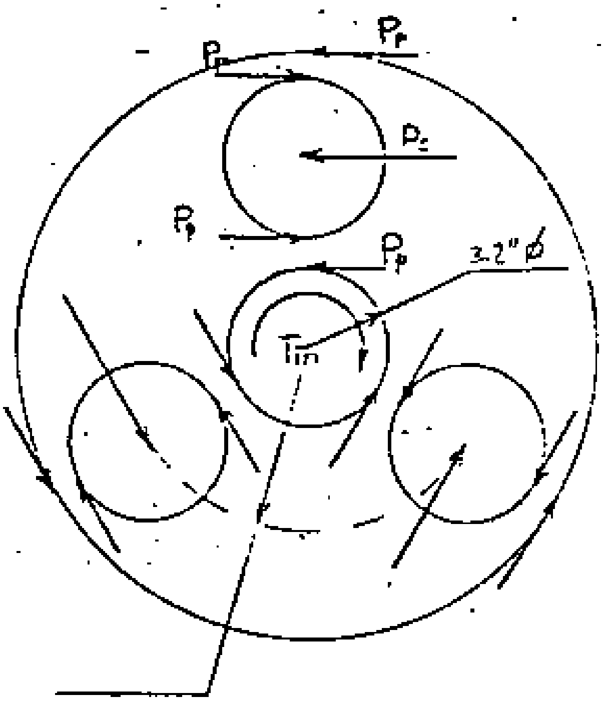
FIG 2

PLANETARY GEAR TRAIN
SYSTEM



$T_{in} = 41\,022$ lb-in

$F_p = 41022/3 \times 1.6 = 8546.25$ lb



P_p – Reaction @ planet

P_c – Load @ Carrier

$F_c = 2F_p = 17\,092.5$ lb

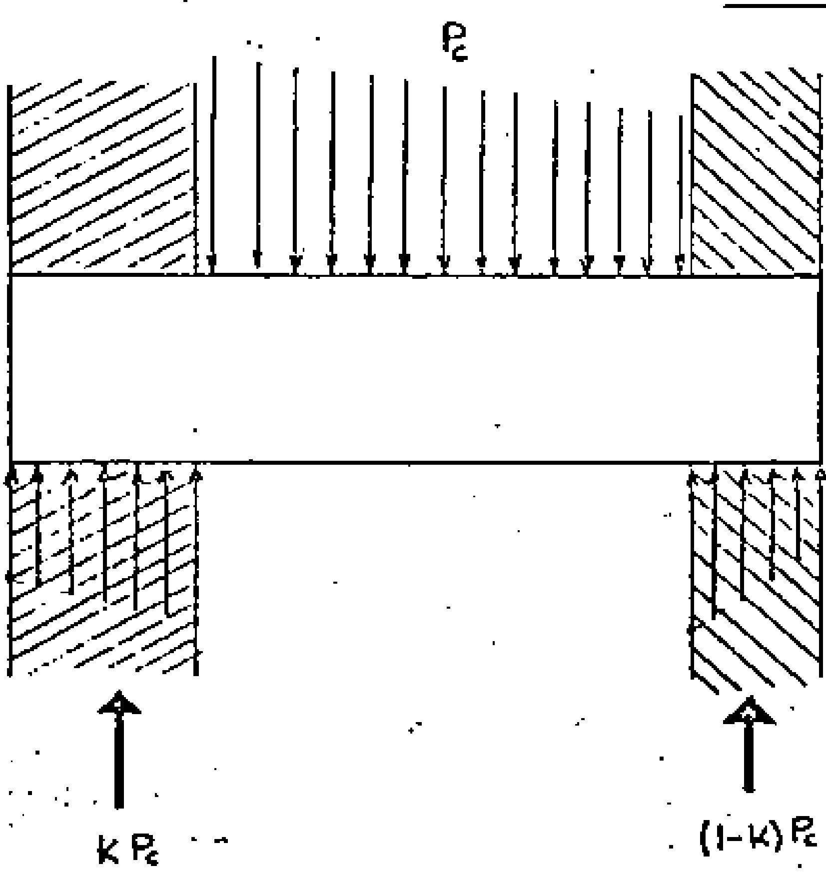
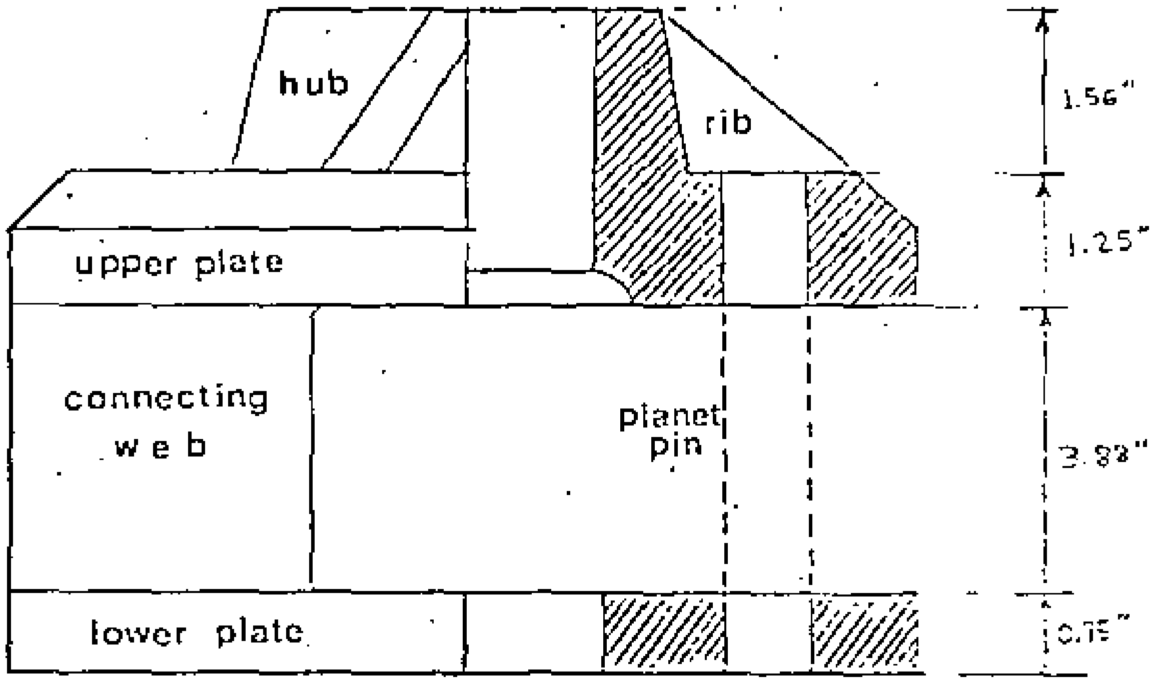
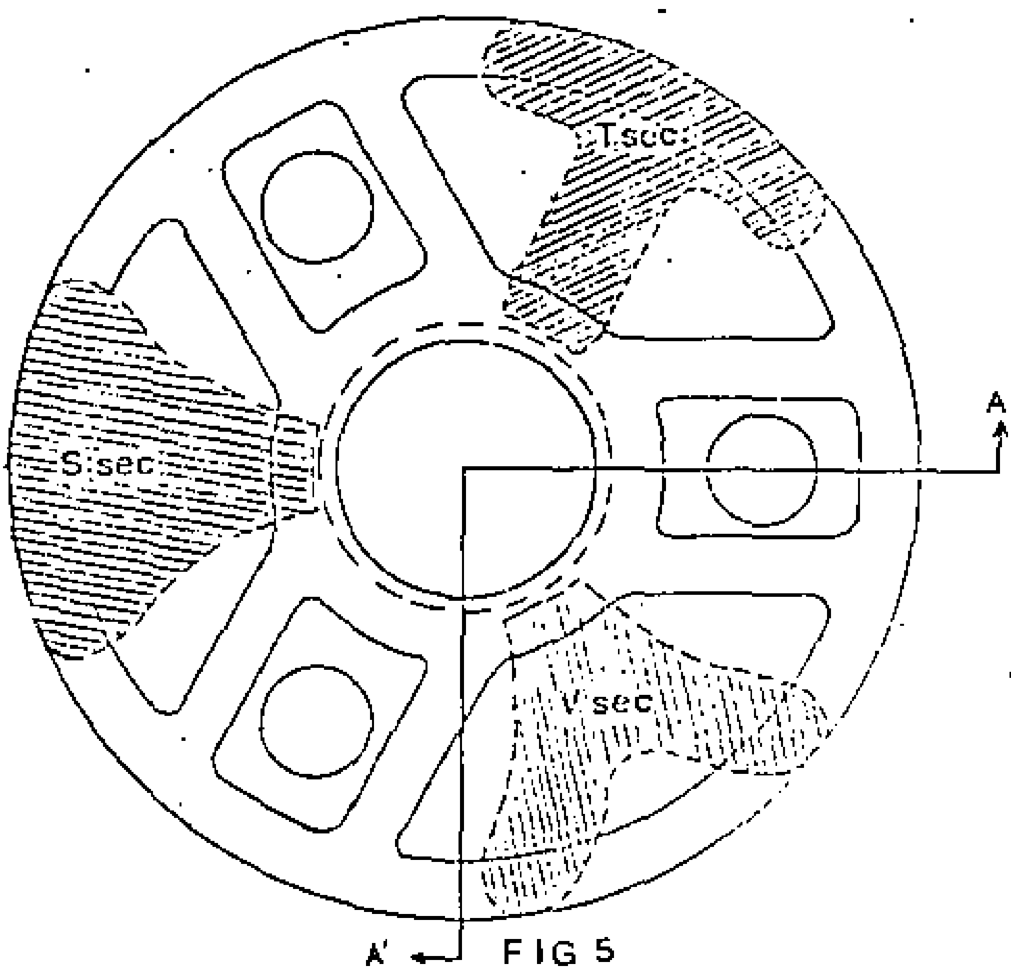


FIG 3

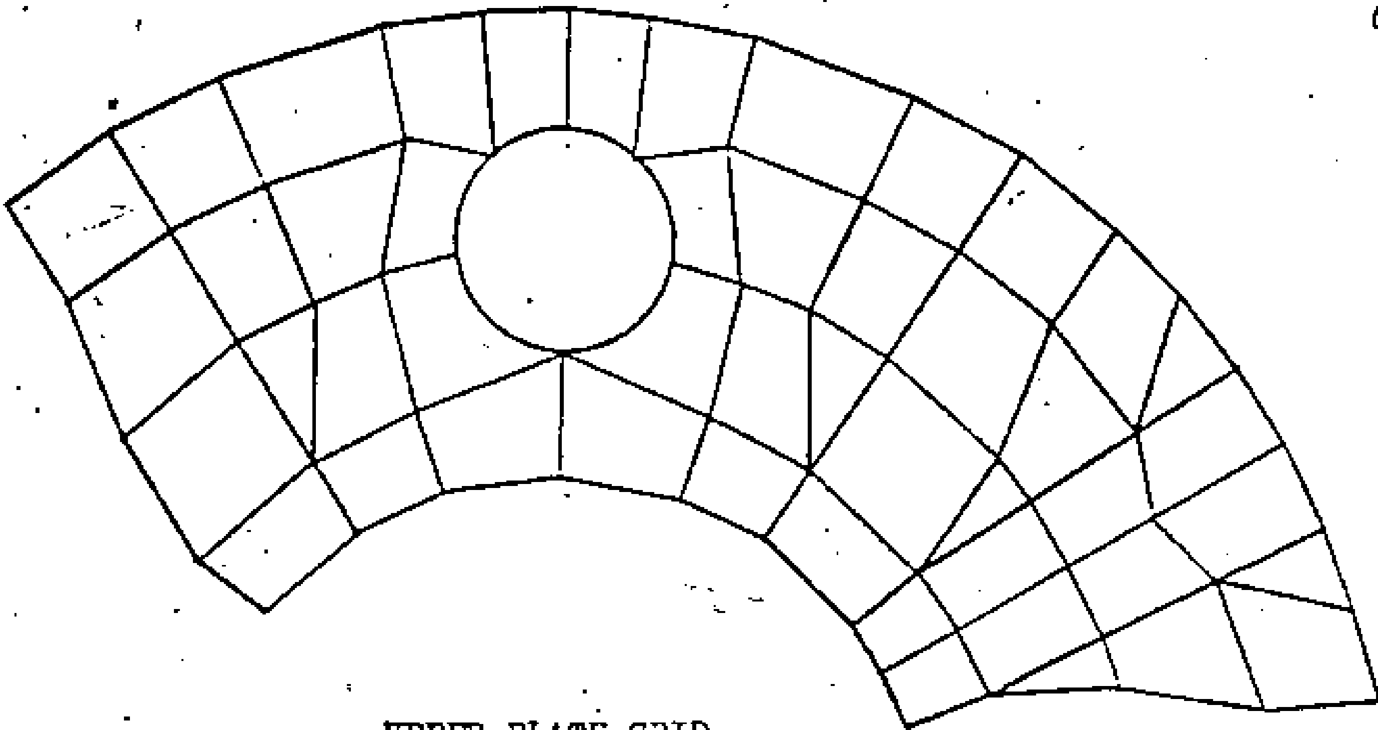
FREE-BODY-DIAGRAM AND REACTIONS


hub
rib
upper plate
connecting web
planet pin
lower plate
1.56"
1.25"
3.83"
0.75"

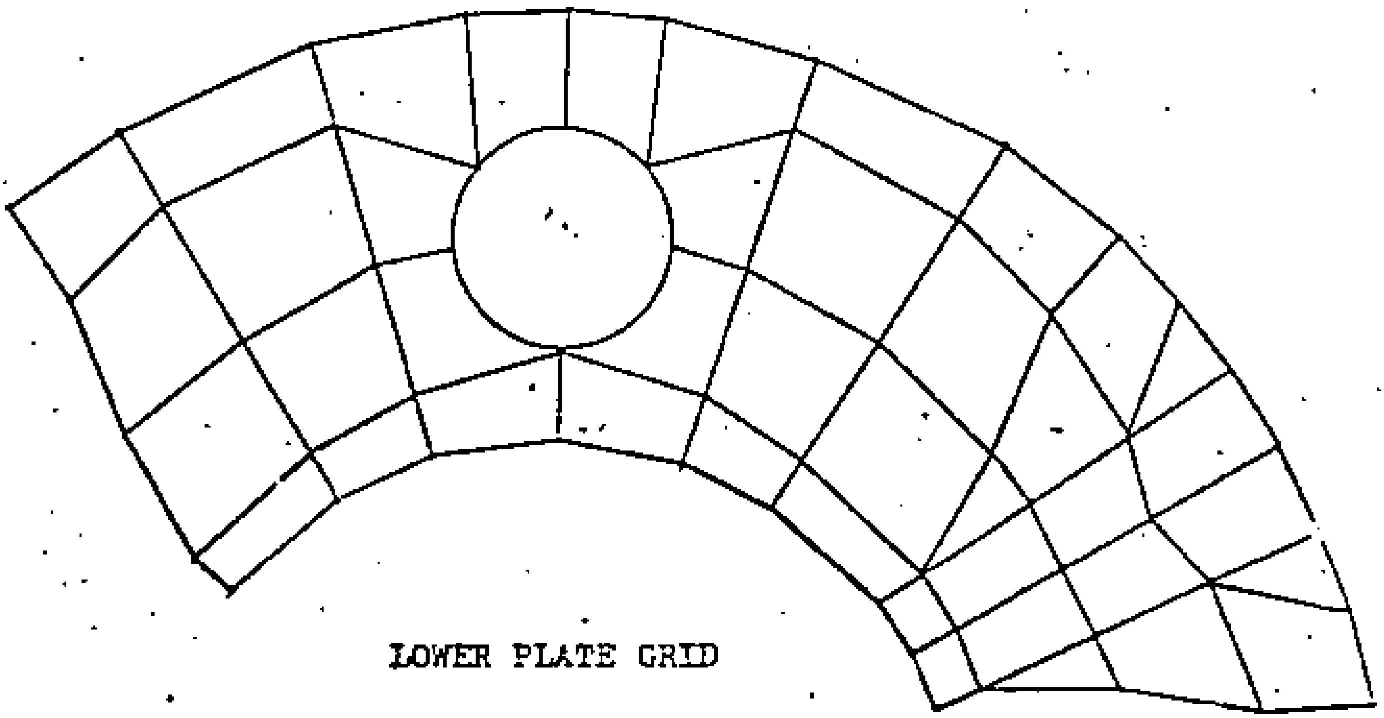
F IG 4


T sec
S sec
V sec
A
A'

F I G 5

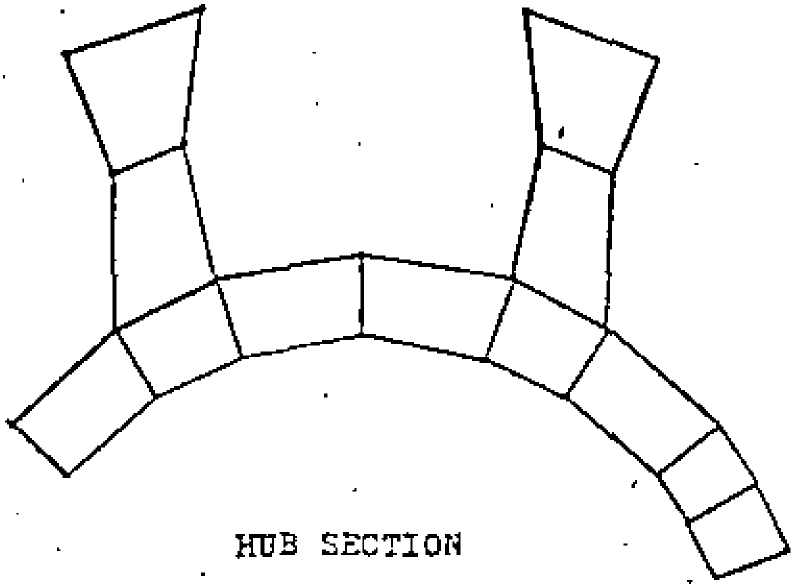


UPPER PLATE GRID

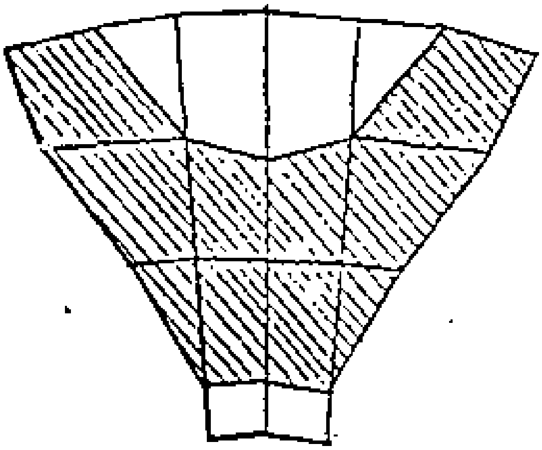


LOWER PLATE GRID

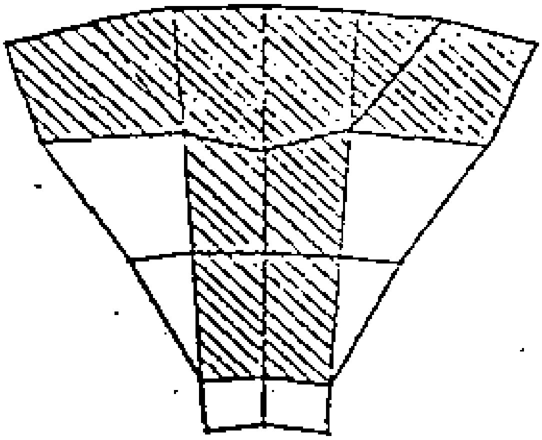
FIG 7 .- GEAR CARRIER FEM MODEL



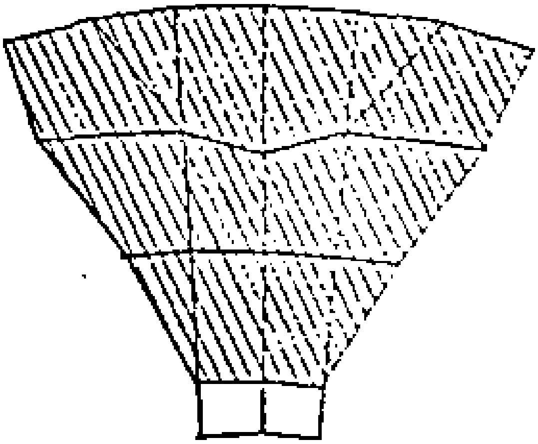
HUB SECTION



"V"-SECTION
CONNECTING WEB



"T"- SECTION
CONNECTING WEB



"S"-SOLID SECTION
CONNECTING WEB

FIG. 8

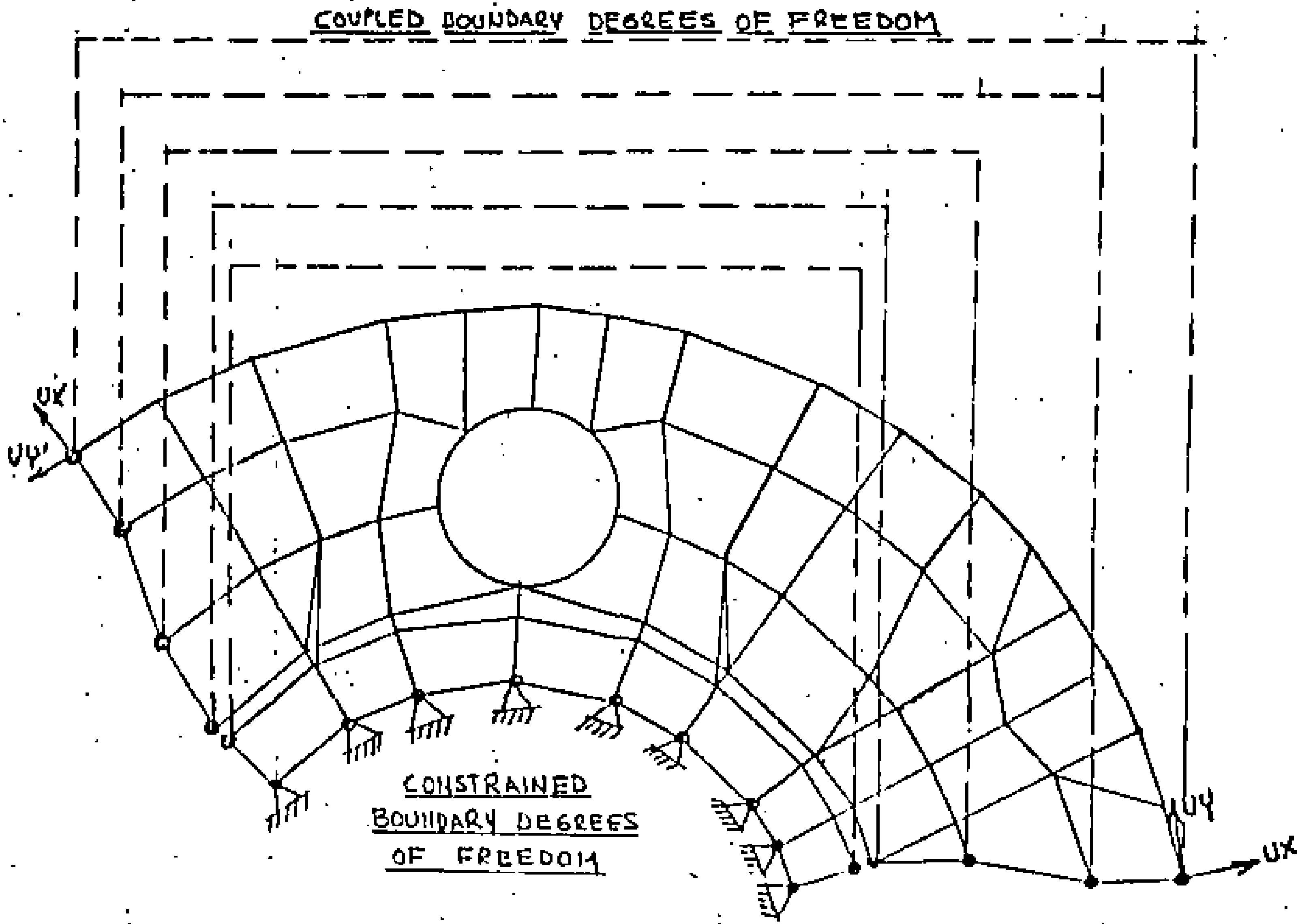
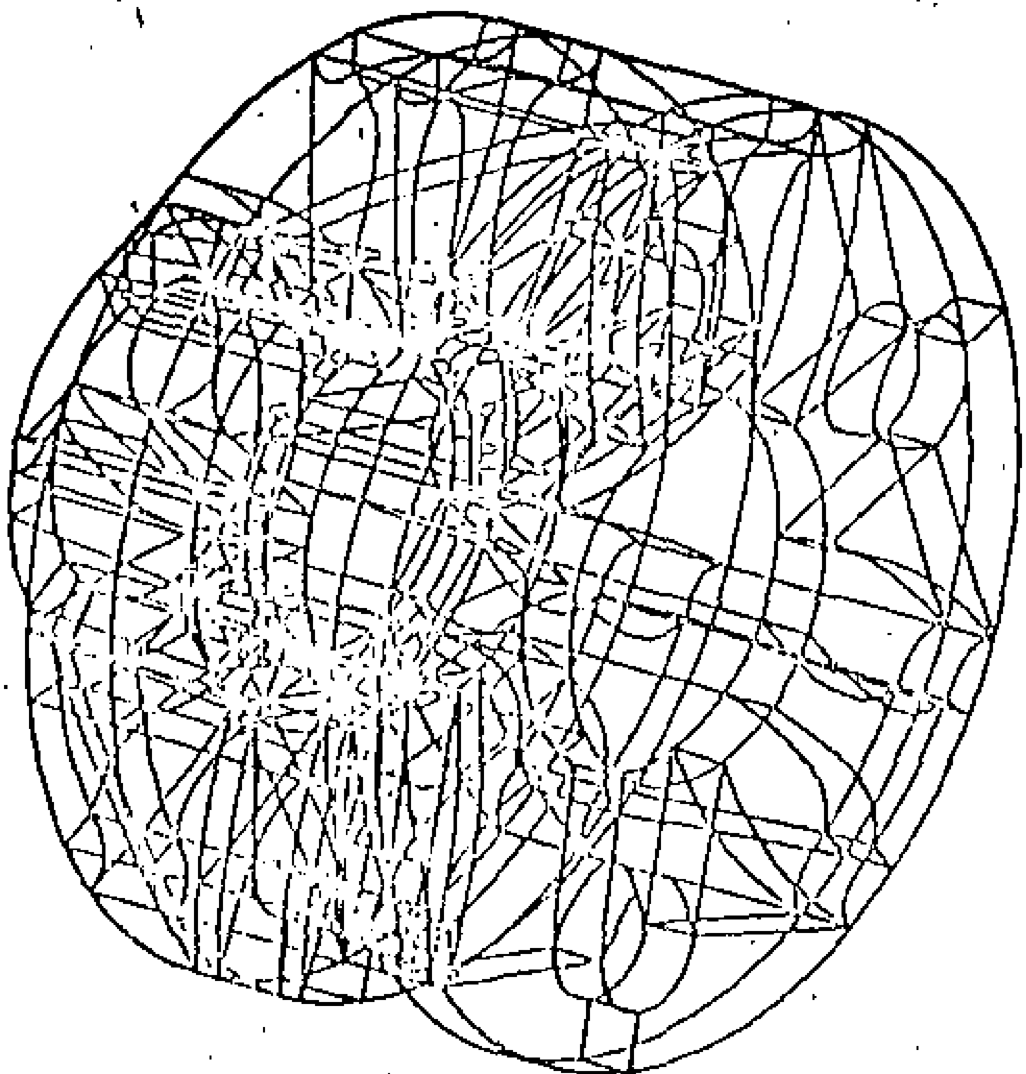

COUPLED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM
UX'
UY'
CONSTRAINED
BOUNDARY DEGREES
OF FREEDOM
UY
UX

FIG 9

Table 1 - Coupled Node Displacements

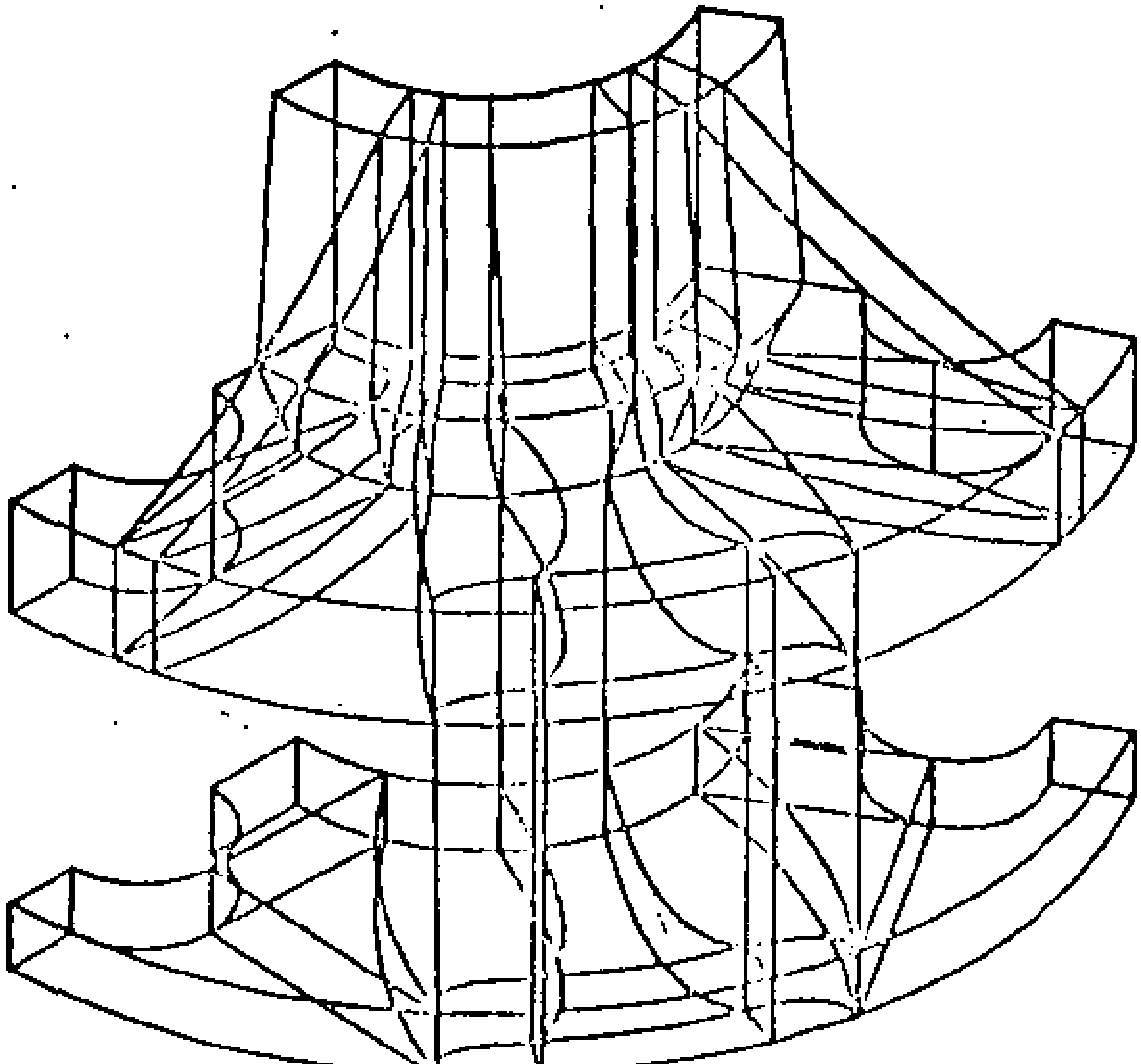
Node 1	Node 2	Directions
1	1001	UX, UY, UZ
27	1027	UX, UY, UZ
40	1040	UX, UY, UZ
55	1055	UX, UY, UZ
70	1070	UX, UY, UZ
85	1085	UX, UY, UZ
102	1002	UX, UY, UZ
119	1119	UX, UY, UZ
215	1215	UX, UY, UZ
651	1651	UX, UY, UZ
664	1664	UX, UY, UZ
667	1667	UX, UY, UZ
709	1709	UX, UY, UZ
728	1728	UX, UY, UZ
747	1747	UX, UY, UZ
764	1764	UX, UY, UZ
781	1781	UX, UY, UZ



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

FIG 10



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

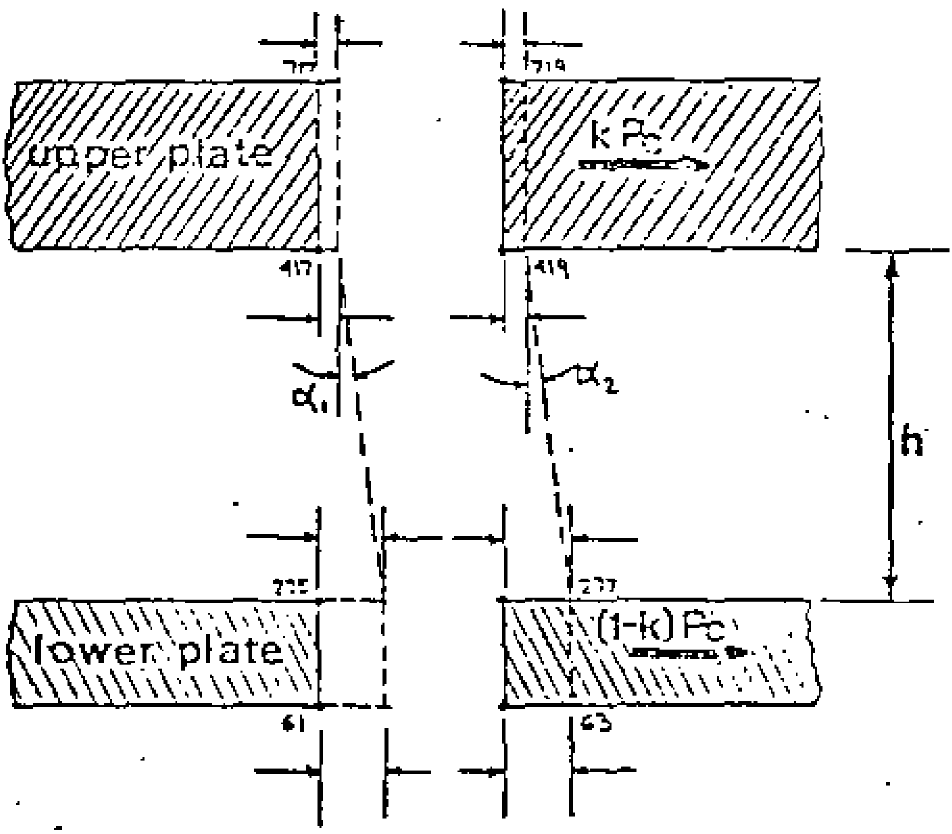
FIG 11

	V section	Tsection	S section	Ssec/pin
U_{61}^{*}	0.005308	0.004900	0.004031	0.00372
U_{63}	0.005324	0.004914	0.004049	0.00375
U_{275}	0.005630	0.005221	0.004260	0.004175
U_{277}	0.006351	0.005945	0.004967	0.004149
U_{417}	0.001577	0.001614	0.001645	0.002155
U_{419}	0.002169	0.002208	0.002235	0.002148
U_{717}	0.001788	0.001817	0.001798	0.001773
U_{719}	0.002117	0.002145	0.002127	0.001766
α_1^{**}	0.001044	0.000929	0.000674	0.000520
α_2	0.001077	0.000963	0.000704	0.000515

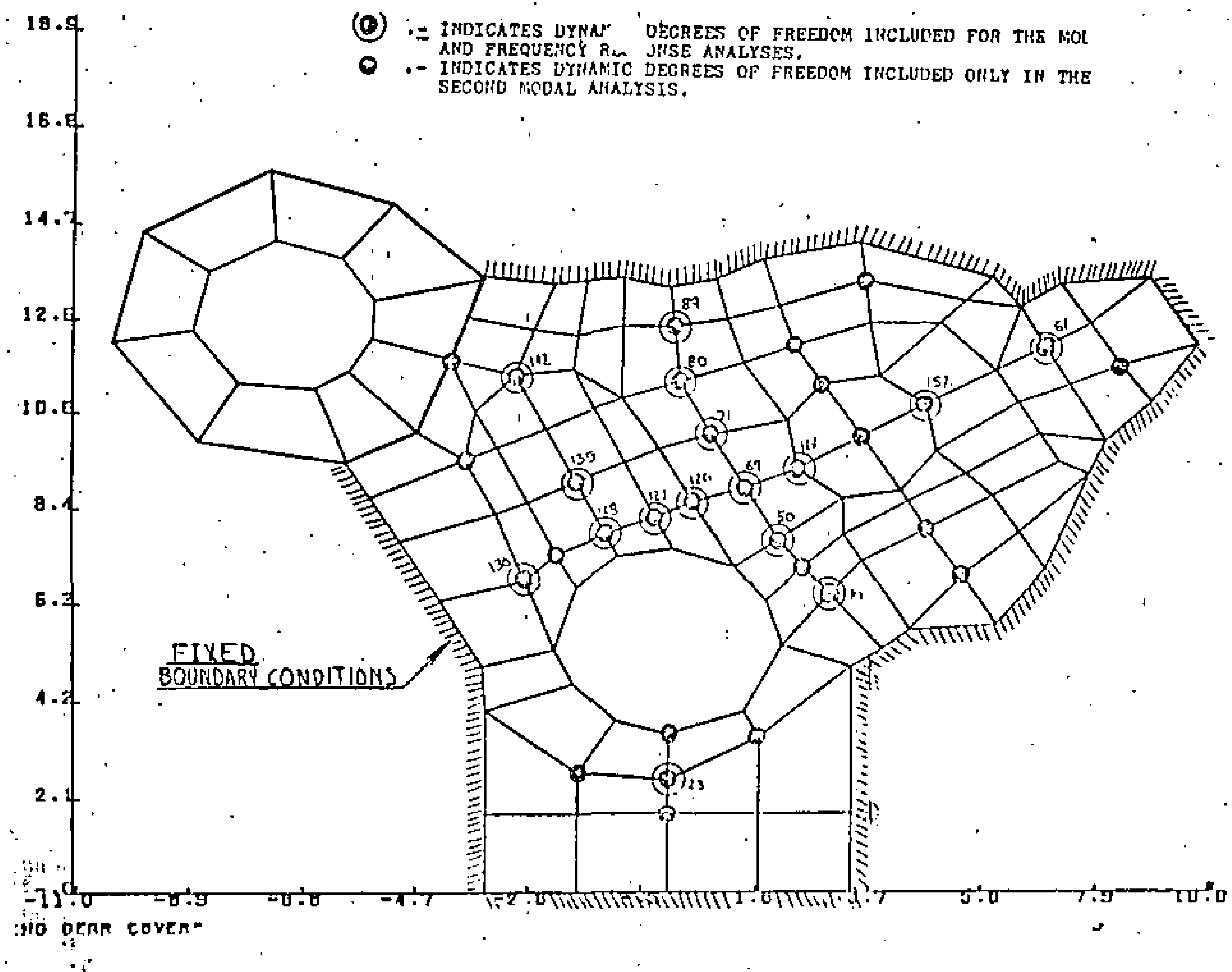
TABLE 3

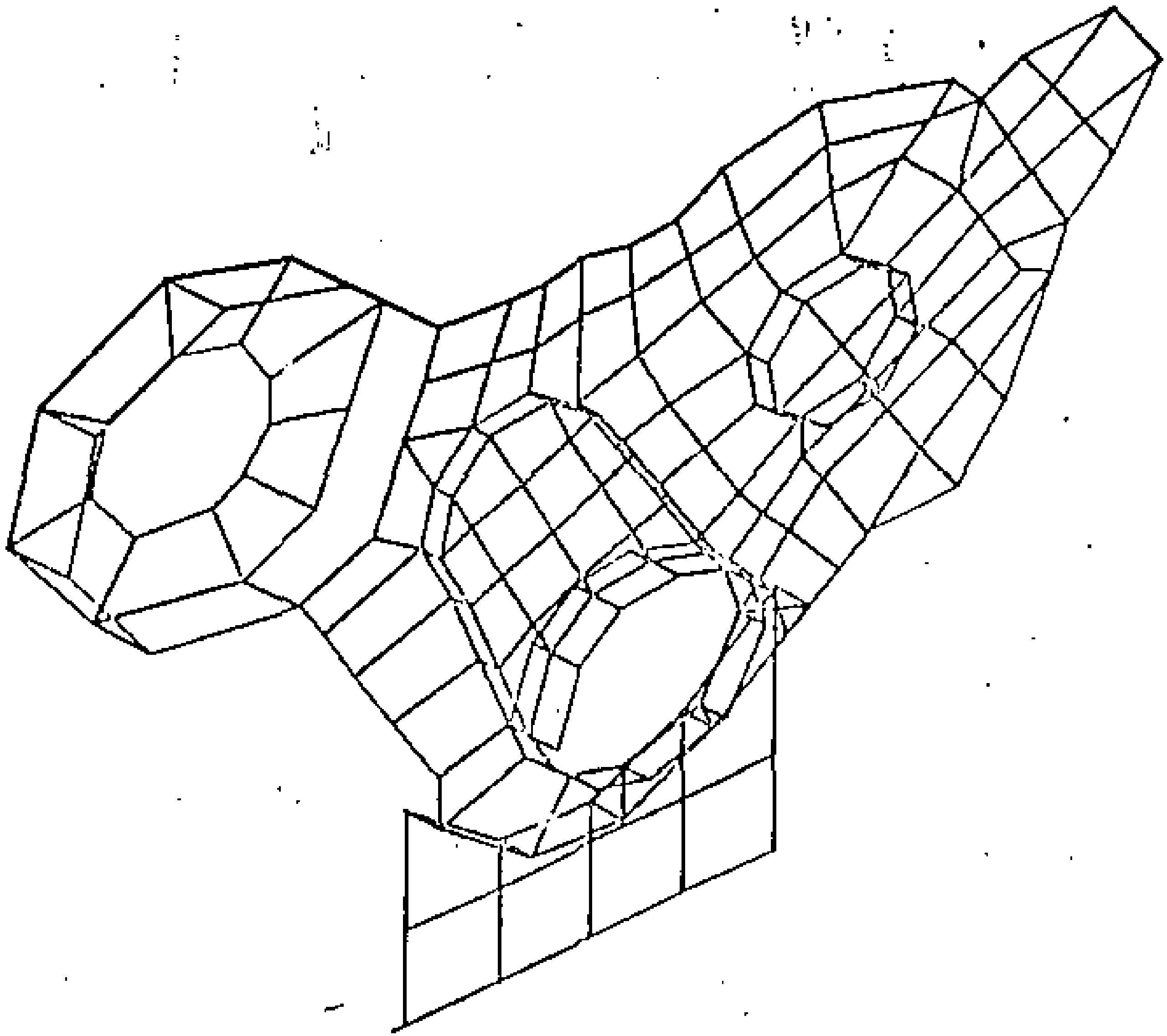
$U^{*}_{(i)}$ - Tangential displacement node i

$\alpha^{**}_{(j)}$ - Slope of pin side j

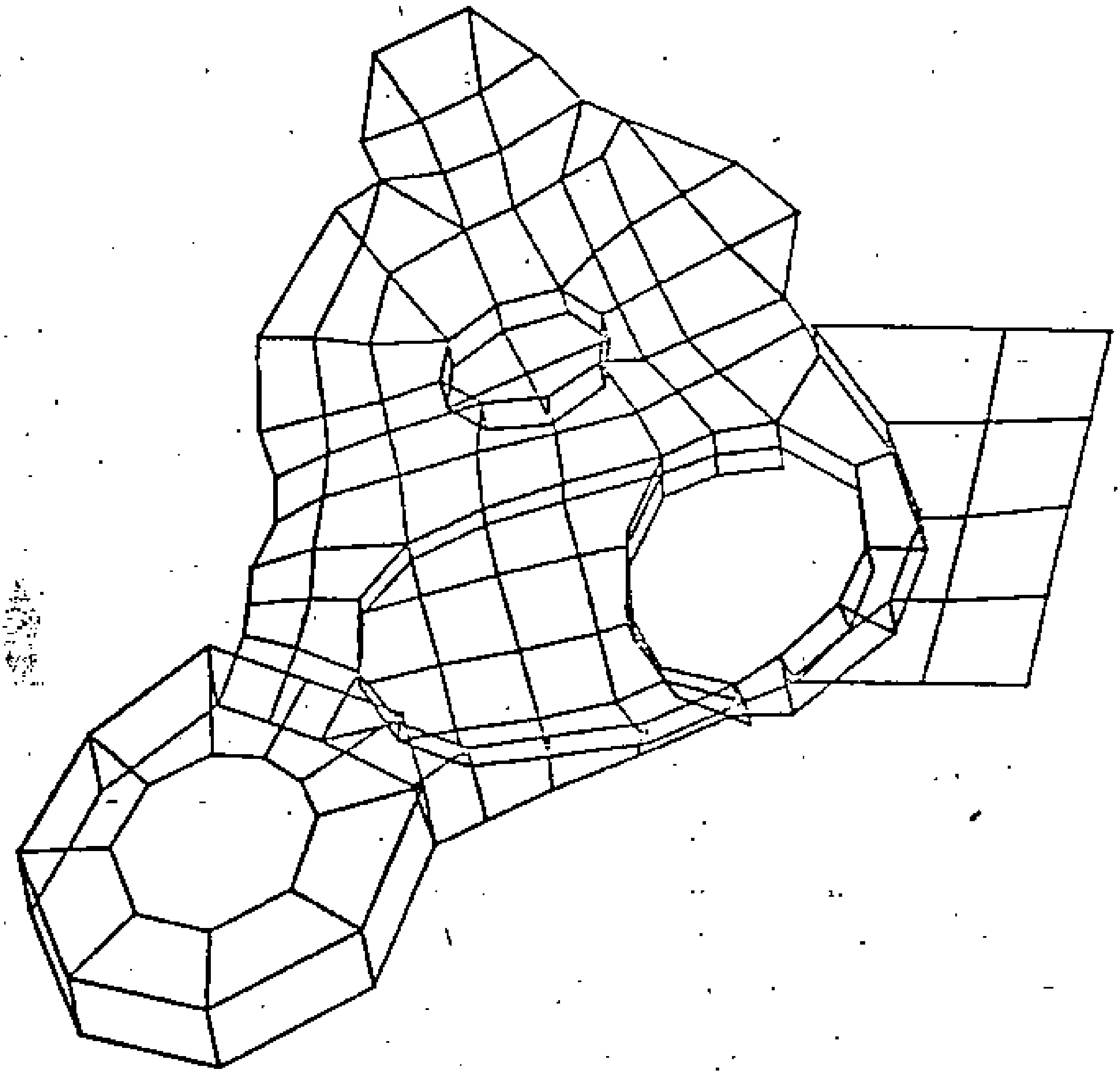


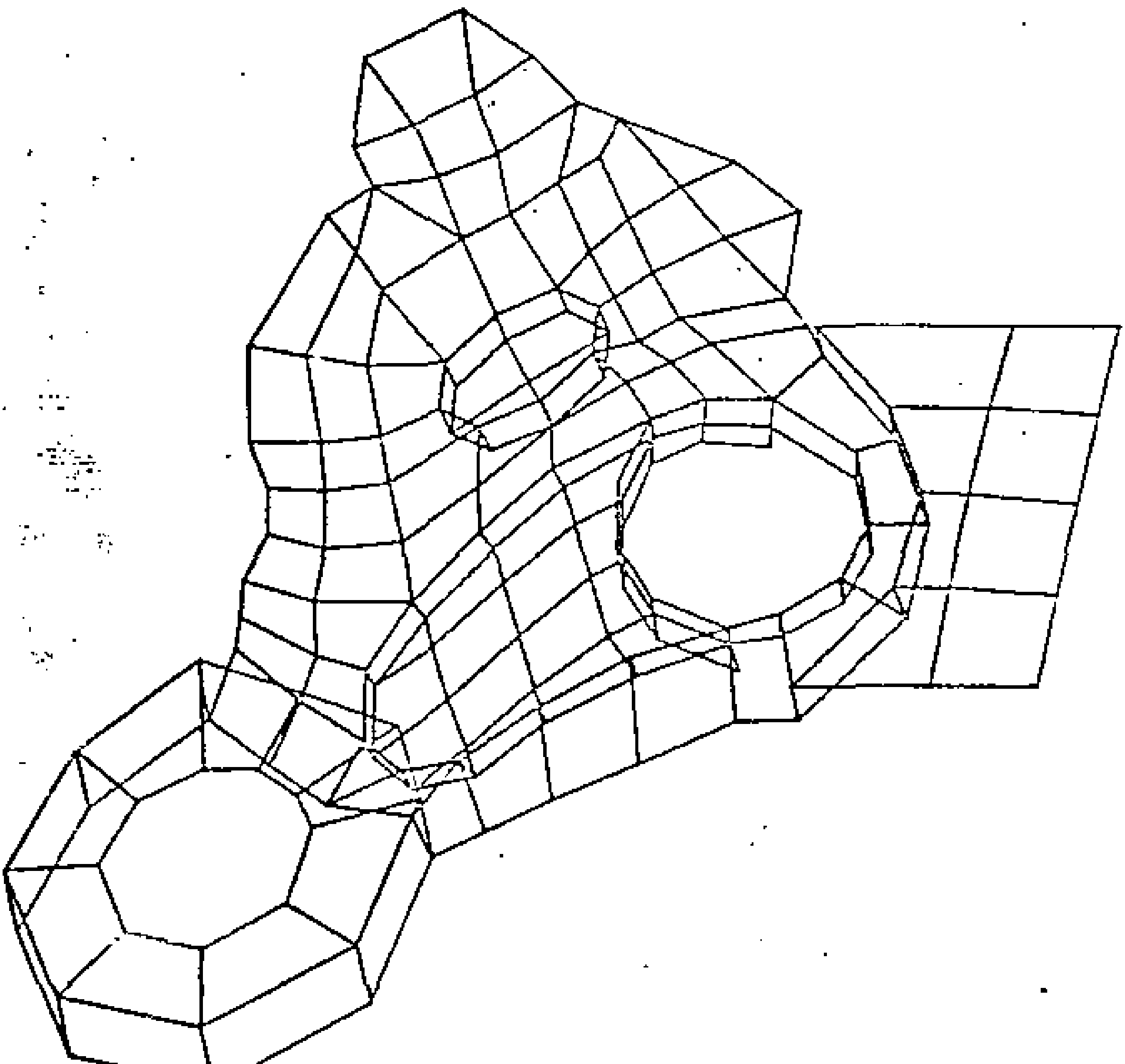
F I G 14

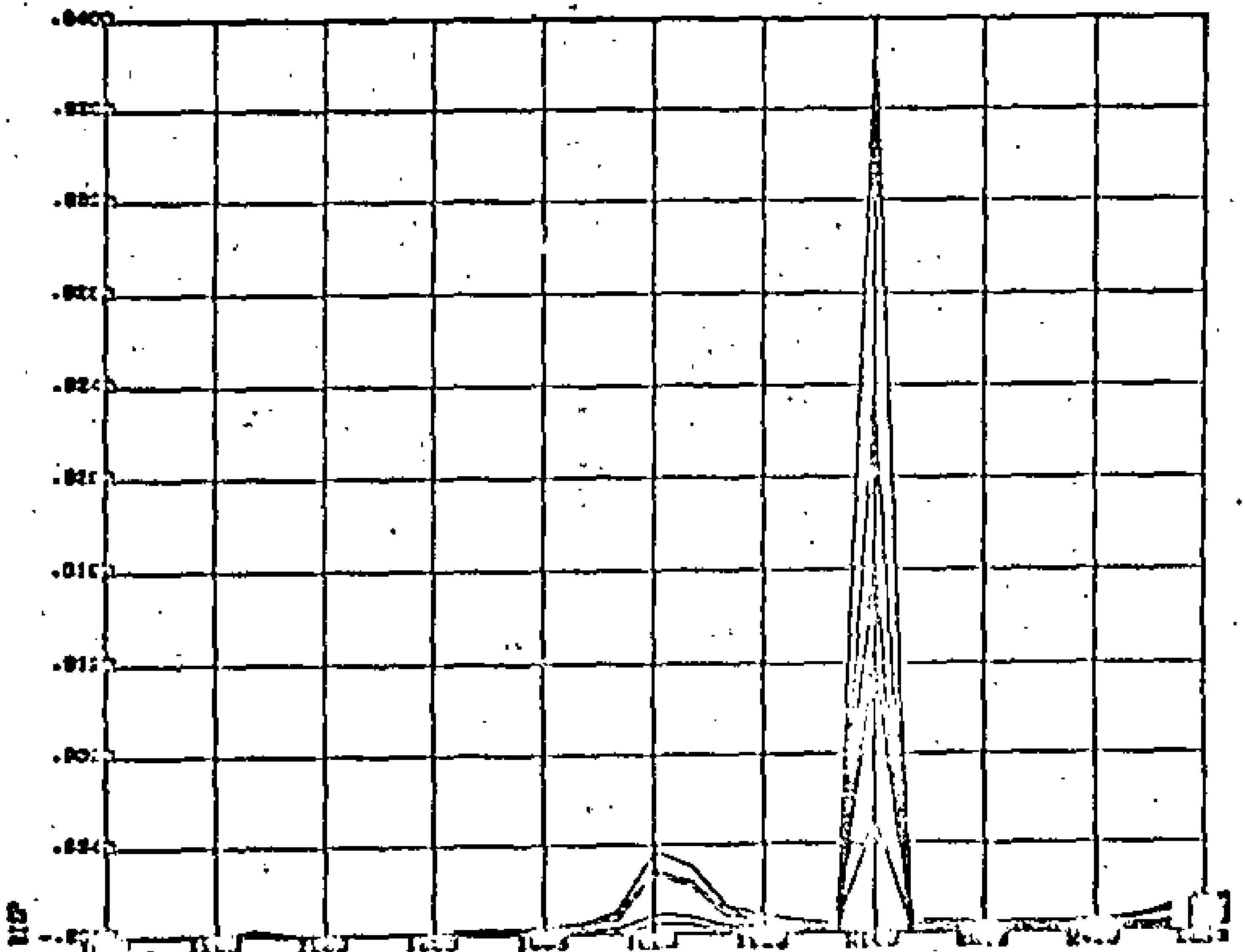

- INDICATES DYNAM DEGREES OF FREEDOM INCLUDED FOR THE MOI
AND FREQUENCY R JNSE ANALYSES.
- INDICATES DYNAMIC DEGREES OF FREEDOM INCLUDED ONLY IN THE
SECOND MODAL ANALYSIS.
FIXED
BOUNDARY CONDITIONS
18.9
16.8
14.7
12.6
10.5
8.4
6.3
4.2
2.1
0
-11.0
-4.7
5.0
7.5
10.0



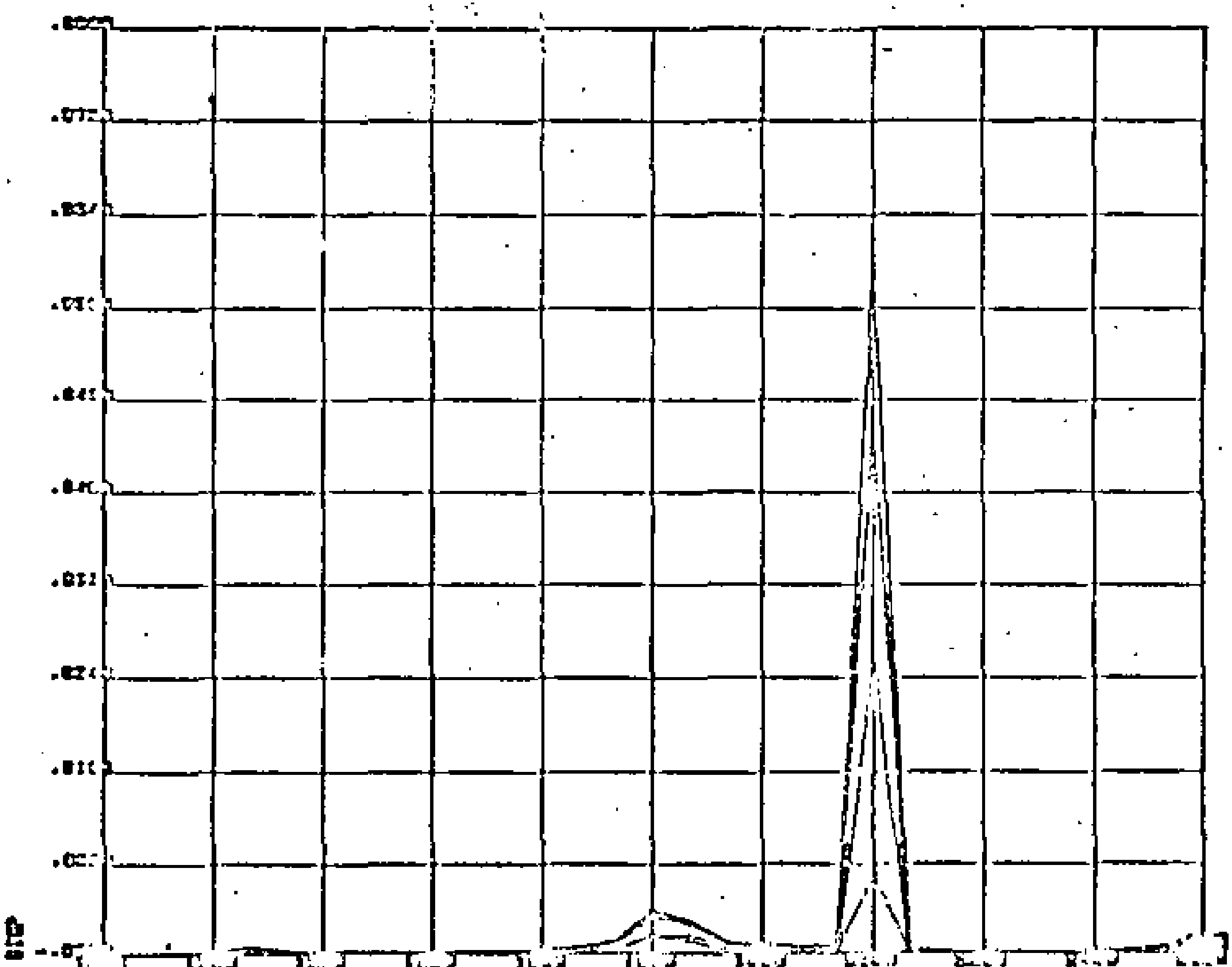
"TIMING GEAR COVER"

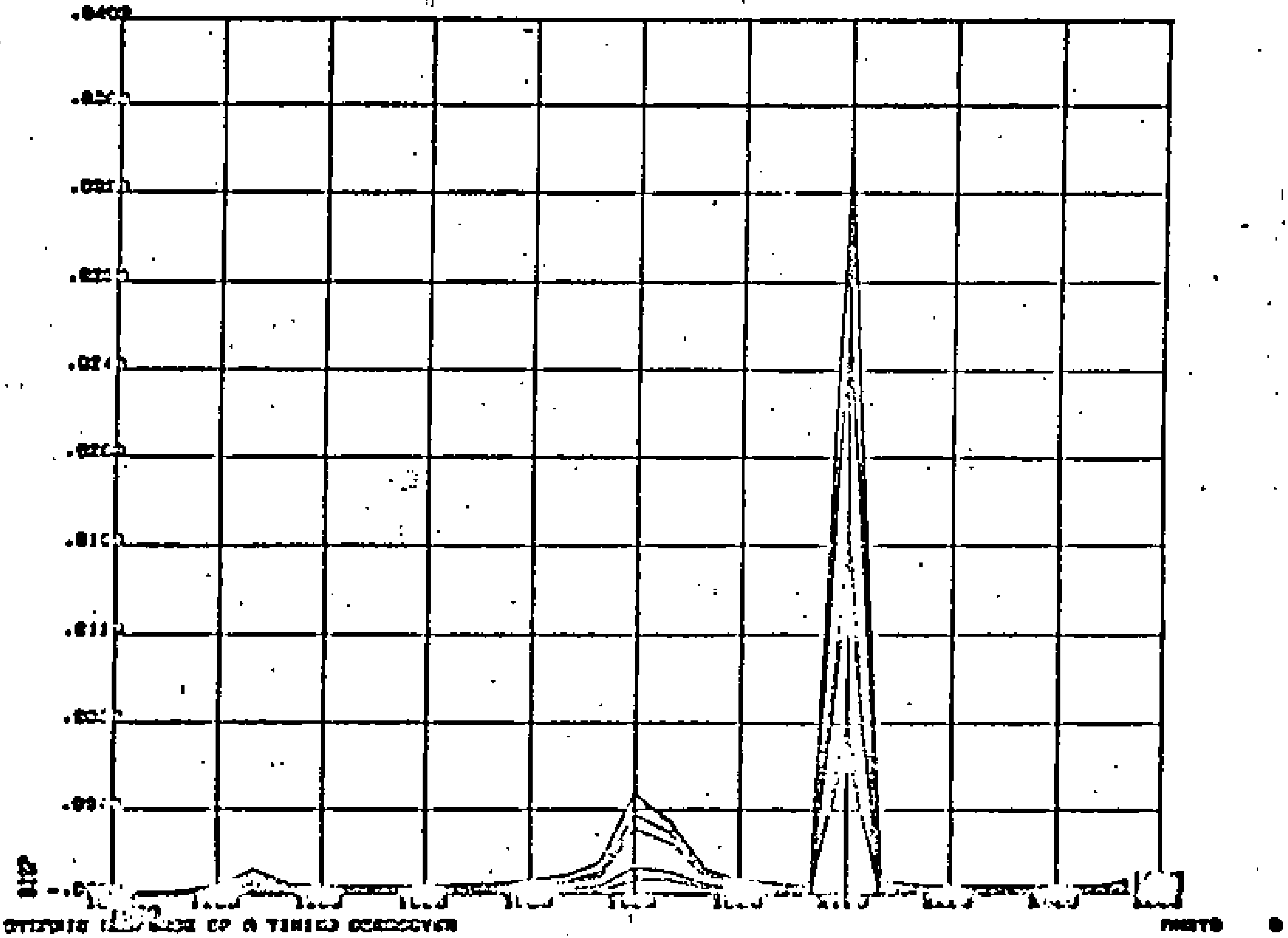






[illegible] OF A [illegible]





DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

INSTRUCTIVO PARA EL USO DEL PROGRAMA SAP
DESARROLLADO POR EL PROF. WILSON DE LA UNIVERSIDAD DE CALIFORNIA

DR. VICTOR HUGO MUCIÑO QUINTERO

MAYO, 1984.

I. HEADING CARD (12A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 72	HED(12)	Enter the heading information to be printed with the output

NOTES/

(1) Begin each new data case with a new heading card.

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NUMNP	Total number of nodal points (joints) in the model
(2)	6 - 10	NELTYP	Number of element groups
(3)	11 - 15	LL	Number of structure load cases: GE.1; static analysis EQ.0; dynamic analysis
(4)	16 - 20	NF	Number of frequencies to be found in the eigenvalue solution; EQ.0; static analysis GE.1; dynamic analysis
(5)	21 - 25	NDYN	Analysis type code: EQ.0; static analysis EQ.1; eigenvalue/vector solution EQ.2; forced dynamic response by mode superposition EQ.3; response spectrum analysis EQ.4; direct step-by-step integration
(6)	26 - 30	MODEX	Program execution mode: EQ.0; problem solution EQ.1; data check only
(7)	31 - 35	NAD	Total number of vectors to be used in a SUBSPACE INTERATION solution for eigenvalues/vectors: EQ.0; default set to: MIN(2*NF,NF+8)
(8)	36 - 40	KEQB	Number of degrees of freedom (equations) per block of storage: EQ.0; calculated automatically by the program

NOTES

(1) Nodes are labeled with integers ranging from "1" to the total number of nodes in the system, "NUMNP". The program exits with no diagnostic message if NUMNP is zero (0). Thus, two blank cards are used to end the last data case in a run; i.e., one blank heading card (Section I) and one blank card for this section.

(2) For each different element type (TRUSS, BEAM, etc.) a new element group need be defined. Elements within groups are assigned integer labels ranging from "1" to the total number of elements in the group. Element groups are input in Section IV, below.

Element numbering must begin with one (1) in each different group. It is possible to use more than one group for an element type. For example, all columns (vertical beams) of a building may be considered one group and the girders (horizontal beams) may be considered another group.

(3) At least one (1) load condition must be specified for a static (NDYN.EQ.0) analysis. If the data case calls for one of the dynamic analysis options (NDYN.EQ.1, 2, 3, or 4), no load cases can be requested (i.e., LL is input as "0"). The program always processes Sections V (Concentrated Load/Mass Data) and VI (Element Load Multipliers) and expects to read some data. For the case of a dynamic analysis (NDYN.GE.1) only mass coefficients can be input in Section V, and one (1) blank element load multiplier card is expected in Section VI.

(4) For a static analysis; NF.EQ.0. If NDYN.EQ.1, 2 or 3, the lowest NF eigenvalues are determined by the program. Note that a dynamic solution may be re-started after eigenvalue extraction (providing a previous eigenvalue solution for the model was saved on tape as described in Appendix A). NF for the original and re-start runs must be the same.

(5) If NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.3 the program first solves for NF eigenvalues/vectors and then performs the forced response solution (or the response spectrum analysis). Thus, the program expects to read the control card governing the eigensolution (Section VII.A) before reading data in either Sections VII.B or VII.C. For the case NDYN.EQ.1, the program solves for NF eigenvalues/vectors, prints the results and proceeds to the next data case. The results for the eigenvalue solution phase (NDYN.EQ.1) may be saved for later use in automatic re-start (Appendix A lists the control cards that are required to affect this save operation), i.e. a dynamic solution may be restarted without repeating the solution for modes and frequencies. If this data case is a re-start job, set NDYN.EQ.-2 for a forced response solution, or set NDYN.EQ.-3 for a response spectrum analysis. Note that the solution may be re-started a multiple of times (to run different ground spectra or different time-dependent forcing functions) because the program does not destroy the contents of the re-start tape.

If NDYN.EQ.4 the program performs the response solution by direct step-by-step integration and no eigenvalue solution control card should be provided.

II. MASTER CONTROL CARD (continued)

(6) In the data-check-only mode (MODEX.EQ.1), the program writes only one file, "TAPE8", and this file may be saved for use as input to special purpose programs such as mesh plotters, etc. TAPE8 contains all data input in its completely generated form. If MODEX.EQ.1, most of the expensive calculations required during normal (MODEX.EQ.0) execution are passed. TAPE8, however, is not written during normal problem solution.

Note that a negative value for NDYN ("-2" or "-3"), when executing in the data-check-only mode, does not cause the program to read the re-start tape which contains the eigensolution information; instead, the program jumps directly from this card to Section VII.B (or Section VII.C) and continues reading and checking data cards without performing the solution.

(7) If the program is to solve for eigenvalues using the SUBSPACE ITERATION algorithm, the entry in cc 31-35 can be used to change the total number of iteration vectors to be used from the default minimum of 2*NF or NF+8 (whichever is smaller) to the value "NAD". The effect of increasing NAD over the default value is to accelerate convergence in the calculations for the lowest NF eigenvalues. NAD is principally a program testing parameter and should normally be left blank.

(8) KEQB is a program testing parameter which allows the user to test multiple equation block solutions using small data cases which would otherwise be one block problems. KEQB is normally left blank.

III. NODAL POINT DATA (A1,I4,6I5,3F10.0,I5,F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1	CT	Symbol describing coordinate system for this node; EQ. ; (blank) cartesian (X,Y,Z) EQ.C; cylindrical (R,Y,θ)
(2)	2 - 5	N	Node number
(3)	6 - 10	IX(N,1)	X-translation boundary condition code
	11 - 15	IX(N,2)	Y-translation boundary condition code
	16 - 20	IX(N,3)	Z-translation boundary condition code
	21 - 25	IX(N,4)	X-rotation boundary condition code
	26 - 30	IX(N,5)	Y-rotation boundary condition code
	31 - 35	IX(N,6)	Z-rotation boundary condition code EQ.0; free (loads allowed) EQ.1; fixed (no load allowed) GT.1; master node number (beam nodes only)
(4)	36 - 45	X(N)	X (or R) -ordinate
	46 - 55	Y(N)	Y -ordinate
	56 - 65	Z(N)	Z (or θ) -ordinate (degrees)
(5)	66 - 70	KN	Node number increment
(6)	71 - 80	T(N)	Nodal temperature

NOTES/

(1) A special cylindrical coordinate system is allowed for the global description of nodal point locations. If a "C" is entered in card column one (1), then the entries given in cc 36-65 are taken to be references to a global (R,Y,θ) system rather than to the standard (X,Y,Z) system. The program converts cylindrical coordinate references to cartesian coordinates using the formulae:

$$X = R \sin\theta$$
$$Y = Y$$
$$Z = R \cos\theta$$

Cylindrical coordinate input is merely a user convenience for locating nodes in the standard (X,Y,Z) system, and no other references to the cylindrical system are implied; i.e., boundary condition specifications, output displacement components, etc. are referenced to the (X,Y,Z) system.

(2) Nodal point data must be defined for all (NUMNP) nodes. Node data may be input directly (i.e., each node on its own individual card) or the generation option may be used if applicable (see note 5, below).

Admissible nodal point numbers range from "1" to the total number of nodes "NUMNP". Illegal references are: N.LE.0 or N.GT.NUMNP.

(3) Boundary condition codes can only be assigned the following values (M = 1,2,...,6):

IX(N,M) = 0; unspecified (free) displacement (or rotation) component
IX(N,M) = 1; deleted (fixed) displacement (or rotation) component
IX(N,M) = K; node number "K" (1 ≤ K ≤ NUMNP and K ≠ N) is the "master" node to which the Mth degree of freedom at node "N" is a "slave"

An unspecified (IX(N,M) = 0) degree of freedom is free to translate or rotate as the solution dictates. Concentrated forces (or moments) may be applied (Section V, below) in this degree of freedom. One (1) system equilibrium equation is required for each unspecified degree of freedom in the model. The maximum number of equilibrium equations is always less than six (6) times the total number of nodes in the model.

Deleted (IX(N,M) = 1) degrees of freedom are removed from the final set of equilibrium equations. Deleted degrees of freedom are fixed (points of reaction), and any loads applied in these degrees of freedom are ignored by the program. Nodes that are used for geometric reference only (i.e., nodes not assigned to any element) must have all six (6) degrees of freedom deleted. Nodal degrees of freedom having undefined stiffness (such as rotations in an all TRUSS model, out-of-plane components in a two-dimensional planar model, etc.) should be deleted. Deletions have the beneficial effect of reducing the size of the set of equations that must be solved. The table below lists the types of degrees of freedom that are defined by each different element type. The table was prepared assuming that the element has general orientation in (X,Y,Z) space.

DEGREES OF FREEDOM WITH DEFINED STIFFNESS

ELEMENT TYPE	δX	δY	δZ	$\delta\theta_X$	$\delta\theta_Y$	$\delta\theta_Z$
1. TRUSS	x	x	x			
2. BEAM	x	x	x	x	x	x
3. MEMBRANE	x	x	x			
4. 2D/QUADRILATERAL		x	x			
5. 3D/BRICK	x	x	x			
6. PLATE/SHELL	x	x	x	x	x	x
7. BOUNDARY	x	x	x	x	x	x

7

	DEGREES OF FREEDOM WITH DEFINED STIFFNESS					
ELEMENT TYPE	δX	δY	δZ	$\delta\theta_X$	$\delta\theta_Y$	$\delta\theta_Z$
8. THICK SHELL	x	x	x			
9. 3D/PIPE	x	x	x	x	x	x

Hence, for an all 3D/BRICK model, only the X,Y,Z translations are defined at the node, and the number of equations can be cut in half by deleting the three (3) rotational components at every node. If a node is common to two or more different element types, then the non-trivial degrees of freedom are found by combination. For example, all six (6) components are possible at a node common to both BEAM and TRUSS elements; i.e., the BEAM governs.

A "master/slave" option is allowed to model rigid links in the system. For this case, IX(N,M) = K means that the Mth degree of freedom at node "N" is "slave" to (dependent on) the same (Mth) degree of freedom at node "K"; node "K" is said to be the master node to which node N is slave. Note that no actual beam need to run from node K to node N, however the following restrictions hold:

(a) Node one (1) cannot be a master node; i.e., K ≠ 1.
(b) Nodes "N" and "K" must be beam-only nodes; i.e., no other element type may be connected to either node N or K.
(c) A node "N" can be slave to only one master node, "K"; multiple nodes, however, can be slave to the same master.
(d) If the beam from "N" to "K" is to be a rigid link arbitrarily oriented in the X,Y,Z space, then all six (6) degrees of freedom at node "N" must be made slaves to node "K"

Displacement/rotation components for slave degrees of freedom at node "N" are not recovered for printing; i.e., zeroes appear as output for slave degrees of freedom.

(4) When CT (Col. 1) is equal to the character "C", the values input in CC 36-65 are interpreted as the cylindrical (R,Y,θ) coordinates of node "N". Y is the axis of symmetry. R is the distance of a point from the Y-axis. The angle θ is measured clockwise from the positive Z-axis when looking in the positive Y direction. The cylindrical coordinate values are printed as entered on the card, but immediately after printing the

global cartesian values are computed from the input entries. Note that boundary condition codes always refer to the the (X,Y,Z) system even if the node happens to be located with cylindrical coordinates.

(5) Nodal point cards need not be input in node-order sequence; eventually, however, all nodes in the integer set {1, NUMNP} must be defined. Joint data for a series of nodes

$$\{N_1,\ N_1+1\ \times KN_2,\ N_1+2\ \times KN_2, \ldots, N_2\}$$

may be generated from information given on two (2) cards in sequence:

CARD 1 / N_1, IX(N_1,1), . . ., IX(N_1,6), X(N_1), . . ., KN_1, T(N_1)/

CARD 2 / N_2, IX(N_2,1), . . ., IX(N_2,6), X(N_2), . . ., KN_2, T(N_2)/

KN_2 is the mesh generation parameter given on the second card of a sequence. The first generated node is $N_1+1 \times KN_2$; the second generated node is $N_1+2 \times KN_2$, etc. Generation continues until node number $N_2 - KN_2$ is established. Note that the node difference $N_2 - N_1$ must be evenly divisible by KN_2. Intermediate nodes between N_1 and N_2 are located at equal intervals along the straight line between the two points. Boundary condition codes for the generated data are set equal to the values given on the first card. Node temperatures are found by linear interpolation between T(N_1) and T(N_2). Coordinate generation is always performed in the (X,Y,Z) system, and no generation is performed if KN_2 is zero (blank).

(6) Nodal temperatures describe the actual (physical) temperature distribution in the structure. Average element temperatures established from the nodal values are used to select material properties and to compute thermal strains in the model (static analysis only).

IV. ELEMENT DATA

TYPE 1 - THREE-DIMENSIONAL TRUSS ELEMENTS

Truss elements are identified by the number 1. Axial forces and stresses are calculated for each member. A uniform temperature change and inertia loads in three directions can be considered as the basic element load conditions. The truss elements are described by the following sequence of cards:

A. Control Card (3I5)

Columns	1 - 5	The number 1
	6 - 10	Total number of truss elements
	11 - 15	Number of material property cards

B. Material Property Cards (I5,5F10.0)

There need be as many of the following cards as are necessary to define the properties listed below for each element in the structure.

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 15	Modulus of elasticity
	16 - 25	Coefficient of thermal expansion
	26 - 35	Mass density (used to calculate mass matrix)
	36 - 45	Cross-sectional area
	46 - 55	Weight density (used to calculate gravity loads)

C. Element Load Factors (4F10.0) Four cards

Three cards specifying the fraction of gravity (in each of the three global coordinate directions) to be added to each element load case.

Card 1: Multiplier of gravity load in the +X direction

Columns	1 - 10	Element load case A
	11 - 20	Element load case B
	21 - 30	Element load case C
	31 - 40	Element load case D

Card 2: As above for gravity in the +Y direction

Card 3: As above for gravity in the +Z direction

Card 4: This indicates the fraction of the thermal load to be added to each of the element load cases.

D. Element Data Cards (4I5,F10.0,I5)

One card per element in increasing numerical order starting with one.

Columns	1 - 5	Element number

Columns 6 - 10 Node number I
11 - 15 Node number J
16 - 20 Material property number
21 - 30 Reference temperature for zero stress
31 - 35 Optional parameter k used for automatic generation of element data.

NOTES/

(1) If a series of elements exist such that the element number, N_i, is one greater than the previous element number (i.e. $N_i = N_{i-1} + 1$) and the nodal point number can be given by

$$I_i = I_{i-1} + k$$

$$J_i = J_{i-1} + k$$

then only the first element in the series need be provided. The element identification number and the temperature for the generated elements are set equal to the values on the first card. If k (given on the first card) is input as zero it is set to 1 by the program.

(2) The element temperature increase ΔT used to calculate thermal loads is given by

$$\Delta T = (T_i + T_j)/2.0 - T_r$$

where $(T_i + T_j)/2.0$ is the average of the nodal temperatures specified on the nodal point data cards for nodes i and j; and T_r is the zero stress reference temperature specified on the element card. For truss elements it is generally more convenient to set $T_i = T_j = 0.0$ such that $\Delta T = -T_r$ (note the minus sign). Other types of member loadings can be specified using an equivalent ΔT. If a truss member has an initial lack of fit by an amount d (positive if too long) then $\Delta T = d/(\alpha L)$. If an initial prestress force P (positive if tensile) is applied to the member ends that is released after the member is connected to the rest of the structure then $\Delta T = - P/(\alpha A E)$. In the above formulas A = cross section area, L = member length and α = coefficient of thermal expansion.

T2

TYPE 2 - THREE-DIMENSIONAL BEAM ELEMENTS

Beam elements are identified by the number 2. Forces (axial and shear) and moments (bending and torsion) are calculated (in the beam local coordinate system) for each beam. Gravity loadings in each coordinate direction and specified fixed end forces form the basic element load conditions.

The beam elements are described by the following sequence of cards:

A. Control Card (5I5)

Columns	1 - 5	The number 2
	6 - 10	Total number of beam elements
	11 - 15	Number of element property cards
	16 - 20	Number of fixed end force sets
	21 - 25	Number of material property cards

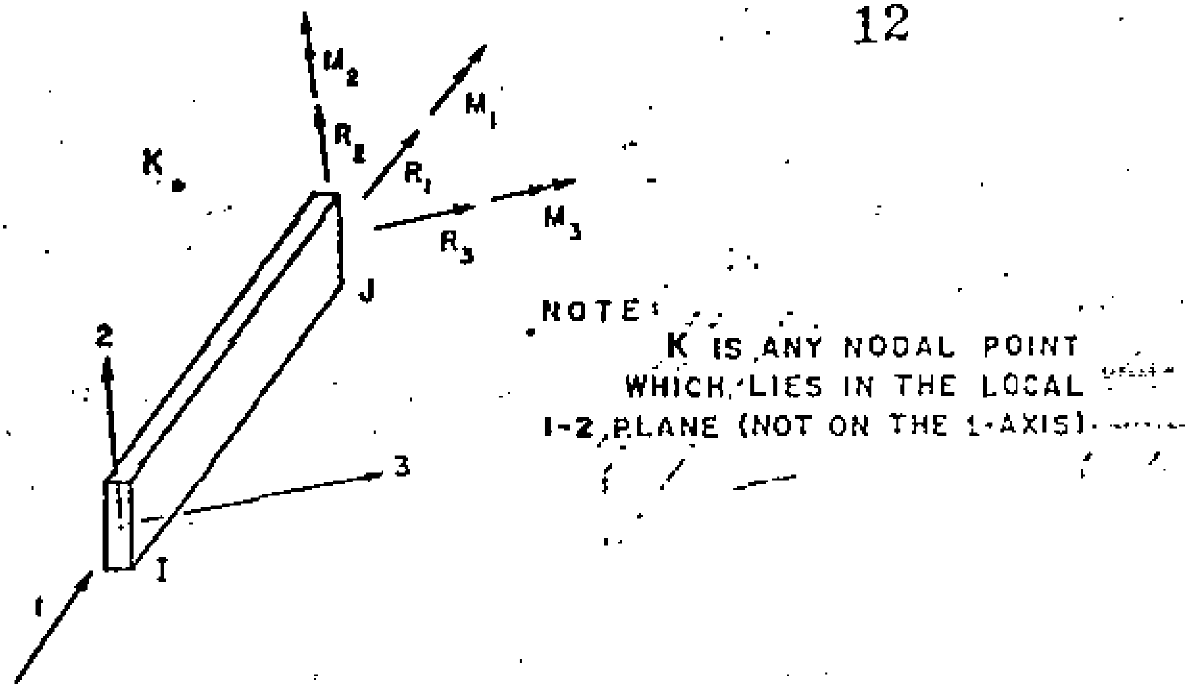
B. Material Property Cards (I5,3F10.0)

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 15	Young's modulus
	16 - 25	Poisson's ratio
	26 - 35	Mass density (used to calculate mass matrix)
	36 - 45	Weight density (used to calculate gravity loads)

C. Element Property Cards (I5,6F10.0)

Columns	1 - 5	Geometric property number
	6 - 15	Axial area
	16 - 25	Shear area associated with shear forces in local 2-direction
	26 - 35	Shear area associated with shear forces in local 3-direction
	36 - 45	Torsional inertia
	46 - 55	Flexural inertia about local 2-axis
	56 - 65	Flexural inertia about local 3-axis

One card is required for each unique set of properties. Shear areas need be specified only if shear deformations are to be included in the analysis.



LOCAL COORDINATE SYSTEM FOR BEAM ELEMENT

D. Element Load Factors (4F10.0)

Nodal point loads (no moments) due to gravity are computed. Three cards need be supplied which specify the fraction of these loads (in each of the three global coordinate directions) to be added to each element load case.

Card 1: Multiplier of gravity load in the +X direction

Columns	1 - 10	Element load case A
	11 - 20	Element load case B
	21 - 30	Element load case C
	31 - 40	Element load case D

Card 2: As above for gravity in the +Y direction

Card 3: As above for gravity in the +Z direction

E. Fixed-End Forces (I5,6F10.0/I5,6F10.0)

Two cards are required for each unique set of fixed-end forces occurring in the analysis. Distributed loads and thermal loads can be specified using the fixed-end forces.

Card 1:

Columns	1 - 5	Fixed-end force number
	6 - 15	Fixed-end force in local 1-direction at Node I
	16 - 25	Fixed-end force in local 2-direction at Node I
	26 - 35	Fixed-end force in local 3-direction at Node I
	36 - 45	Fixed-end moment about local 1-direction at Node I
	46 - 55	Fixed-end moment about local 2-direction at Node I
	56 - 65	Fixed-end moment about local 3-direction at Node I

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2:

Columns	1 - 5	Blank
	6 - 15	Fixed-end force in local 1-direction at Node J
	16 - 25	Fixed-end force in local 2-direction at Node J
	26 - 35	Fixed-end force in local 3-direction at Node J
	36 - 45	Fixed-end moment about local 1-direction at Node J
	46 - 55	Fixed-end moment about local 2-direction at Node J
	56 - 65	Fixed-end moment about local 3-direction at Node J

Note that values input are literally fixed-end values. Corrections due to hinges and rollers are performed within the program. Directions 1, 2 and 3 indicate principal directions in the local beam coordinates

F. Beam Data Cards (10I5,2I6,I8)

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node number I
	11 - 15	Node number J
	16 - 20	Node number K - see accompanying figure
	21 - 25	Material property number
	26 - 30	Element property number
	31 - 35	A
	36 - 40	B
	41 - 45	C
	46 - 50	D
		(A–D) Fixed-end force identification for element load cases A, B, C, and D respectively
	51 - 56	End release code at node I
	57 - 62	End release code at node J
	63 - 70	Optional parameter k used for automatic generation of element data. This option is described below under a separate heading. If the option is not used, the field is left blank.

The end release code at each node is a six digit number of ones and/or zeros. The 1st, 2nd, ... 6th digits respectively correspond to the force components R1, R2, R3, M1, M2, M3 at each node.

If any one of the above element end forces is known to be zero (hinge or roller), the digit corresponding to that component is a one.

NOTES/

(1) If a series of elements occurs in which each element number NE_i is one greater than the previous number NE_{i-1}

i.e., $$NE_i = NE_{i-1} + 1$$

only the element data card for the first element in the series need be given as input, provided

(1) The end nodal point numbers are $NI_i = NI_{i-1} + k$

$$NJ_i = NJ_{i-1} + k$$

and the

(2) material property number
(3) element property number
(4) fixed-end force identification numbers for each element load case
(5) element release code
(6) orientation of local 2-axis

are the same for each element in the series.

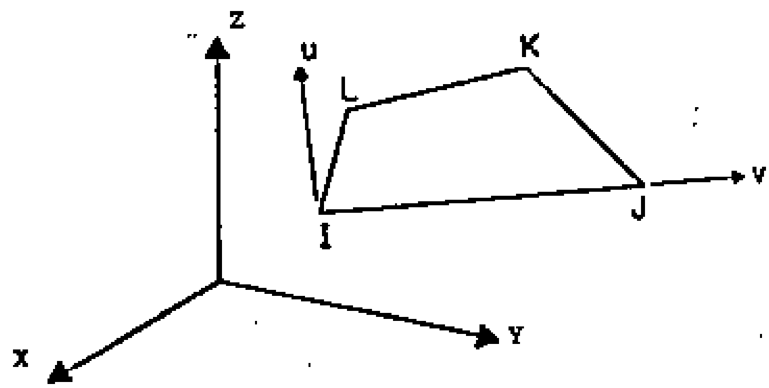
The value of k, if left blank, is taken to be one. The element data card for the last beam element must always be given.

(2) When successive beam elements have the same stiffness, orientation and element loading, the program automatically skips recomputation of the stiffness. Note this when numbering the beams to obtain maximum efficiency.

TYPE 3 - PLANE STRESS MEMBRANE ELEMENTS

Quadrilateral (and triangular) elements can be used for plane stress membrane elements of specified thickness which are oriented in an arbitrary plane. All elements have temperature-dependent orthotropic material properties. Incompatible displacement modes can be included at the element level in order to improve the bending properties of the elements.

A general quadrilateral element is shown below:



A local element coordinate system is defined by a u-v system. The v-axis coincides with the I-J side of the element. The u axis is normal to the v-axis and is in the plane defined by nodal points I, J and L. Node K must be in the same plane if the element stiffness calculations are to be correct. The following sequence of cards define the input data for a set of TYPE 3 elements.

A. Control Card (6I5)

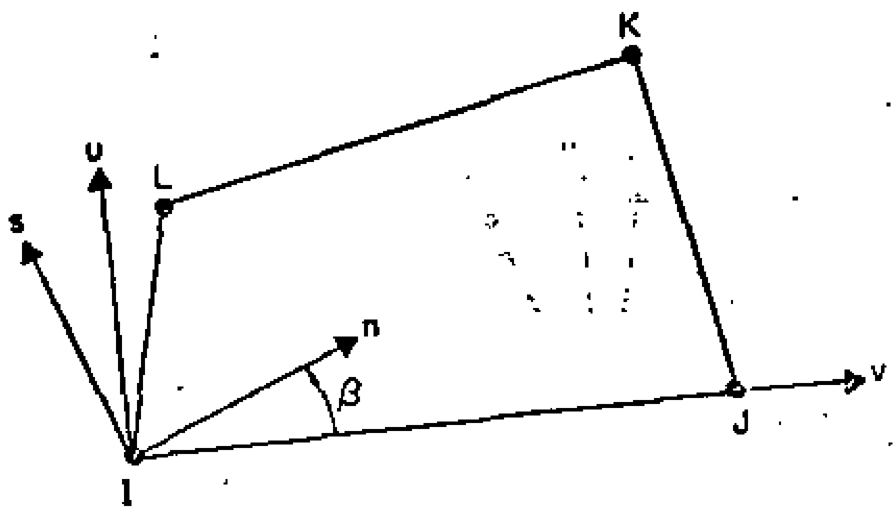
Columns	1 - 5	The number 3
	6 - 10	Total number of plane stress elements
	11 - 15	Number of material property cards
	16 - 20	Maximum number of temperature points for any one material; see Section B below.
	30	Non-zero numerical punch will suppress the introduction of incompatible displacement modes.

B. Material Property Information

Orthotropic, temperature-dependent material properties are possible. For each different material, the following group of cards must be supplied.

1. Material Property Card (2I5,3F10.0)

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 10	Number of different temperatures for which properties are given. If this field is left blank, the number is taken as one.
	11 - 20	Weight density of material (used to calculate gravity loads)
	21 - 30	Mass density (used to calculate mass matrix)
	31 - 40	Angle β in degrees, measured counter-clockwise from the v-axis to the n-axis.



The n-s axes are the principal axes for the orthotropic material. Weight and mass densities need be listed only if gravity and inertia loads are to be considered.

2. Two cards for each temperature:

Card 1: (8F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature
	11 - 20	Modulus of Elasticity - E_n
	21 - 30	Modulus of Elasticity - E_s
	31 - 40	Modulus of Elasticity E_t
	41 - 50	Strain Ratio - ν_{ns}
	51 - 60	Strain Ratio - ν_{nt}
	61 - 70	Strain Ratio - ν_{st}
	71 - 80	Shear Modulus - G_{ns}

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2: (3F10.0)

Columns	1 - 10	Coefficient of thermal expansion - α_r
	11 - 20	Coefficient of thermal expansion - α_s
	21 - 30	Coefficient of thermal expansion - α_t

All material constants must always be specified. For plane stress, the program modifies the constitutive relations to satisfy the condition that the normal stress σ_t equals zero.

C. Element Load Factors (5F10.0)

Four cards are used to define the element load cases A, B, C and D as fraction of the basic thermal, pressure and acceleration loads.

First card, load case A: Second card, load case B, etc.

Columns	1 - 10	Fraction of thermal load
	11 - 20	Fraction of pressure load
	21 - 30	Fraction of gravity in X-direction
	31 - 40	Fraction of gravity in Y-direction
	41 - 50	Fraction of gravity in Z-direction

D. Element Cards (6I5,2F10.0,2I5,F10.0)

One card per element must be supplied (or generated) with the following information:

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node I
	11 - 15	Node J
	16 - 20	Node K
	21 - 25	Node L (Node L must equal Node K for triangular elements)
	26 - 30	Material identification number
	31 - 40	Reference temperature for zero stresses within element
	41 - 50	Normal pressure on I-J side of element
	51 - 55	Stress evaluation option "n"
	56 - 60	Element data generator "k"
	61 - 70	Element thickness

NOTES/

(1) Element Data Generation - Element cards must be in element number sequence. If cards are omitted, data for the omitted elements will be generated. The nodal numbers will be generated with respect to the first card in the series as follows:

$$I_n = I_{n-1} + k$$

$$J_n = J_{n-1} + k$$

$$K_n = K_{n-1} + k$$

$$L_n = L_{n-1} + k$$

All other element information will be set equal to the information on the last card read. The data generation parameter "k" is specified on that card.

(2) Stress Print Option - See element type 4

(3) Thermal Data - See element type 4

(4) Use of Triangles - See element type 4

(5) Use of Incompatible Modes - See element type 4

IV. ELEMENT DATA (continued)

TYPE 4 - TWO-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

Quadrilateral (and triangular) elements can be used as:

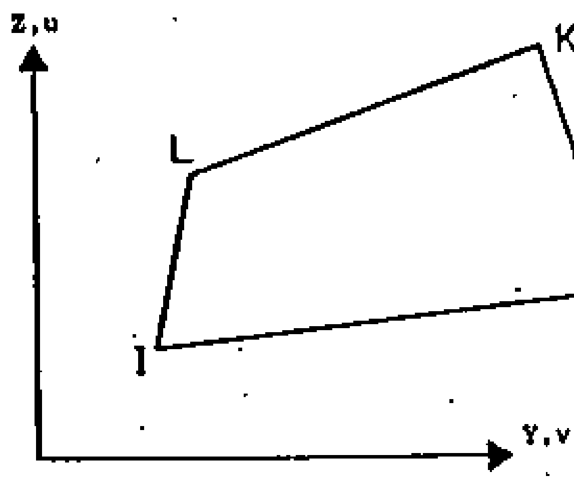
(i) Axisymmetric solid elements symmetrical about the Z-axis. The radial direction is specified as the Y-axis. Care must be exercised in combining this element with other types of elements.

(ii) Plane strain elements of unit thickness in the Y-Z plane.

(iii) Plane stress elements of specified thickness in the Y-Z plane.

All elements have temperature-dependent orthotropic material properties. Incompatible displacement modes can be included at the element level in order to improve the bending properties of the element.

A general quadrilateral element is shown below:



A. Control Card (6I5)

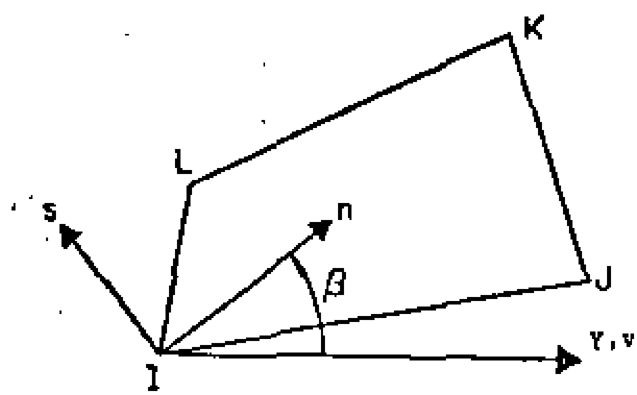
Columns	1 - 5	The number 4
	6 - 10	Total number of elements
	11 - 15	Number of different materials
	16 - 20	Maximum number of temperature cards for any one material - see Section B below.
	25	0 for axisymmetric analysis 1 for plane strain analysis 2 for plane stress analysis
	30	Non-zero numerical punch will suppress the introduction of incompatible displacement modes. Incompatible modes cannot be used for triangular elements and are automatically suppressed.

B. Material Property Information

Orthotropic, temperature-dependent material properties are possible. For each different material the following group of cards must be supplied.

1. Material Property Card (2I5,3F10.0)

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 10	Number of different temperature for which properties are given. If this field is left blank, the number is taken as one.
	11 - 20	Weight density of material (used to calculate gravity loads)
	21 - 30	Mass density (used to calculate mass matrix)
	31 - 40	Angle β in degrees, measured counterclockwise from the y-axis to the n-axis.



PRINCIPAL MATERIAL AXES

The n-s axes are the principal axes for the orthotropic material. Weight density is needed only if gravity and inertia loads are to be considered.

2. Two cards for each temperature:

Card 1: (8F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature	
	11 - 20	Modulus of elasticity	- E_n
	21 - 30	Modulus of elasticity	- E_s
	31 - 40	Modulus of elasticity	- E_t
	41 - 50	Strain ratio	- ν_{ns}
	51 - 60	Strain ratio	- ν_{nt}
	61 - 70	Strain ratio	- ν_{st}
	71 - 80	Shear modulus	- G_{ns}

Card 2: (3F10.0)

Columns 1 - 10 Coefficient of thermal expansion - α_n
11 - 20 Coefficient of thermal expansion - α_s
21 - 30 Coefficient of thermal expansion - α_t

All material constants must always be specified. In plane stress, the program modifies the constitutive relations to satisfy the condition that the normal stress σ_t equals zero.

C. Element Load Factors

Four cards are used to define the element load cases A, B, C and D as fraction of the basic thermal, pressure and acceleration loads.

First card, load case A; Second card, load case B; etc.

Columns 1 - 10 Fraction of thermal load
11 - 20 Fraction of pressure load
21 - 30 Fraction of gravity in X-direction
31 - 40 Fraction of gravity in Y-direction
41 - 50 Fraction of gravity in Z-direction

D. Element Cards (6I5,2F10.0,2I5,F10.0)

One card per element must be supplied (or generated) with the following information:

Columns 1 - 5 Element number
6 - 10 Node I
11 - 15 Node J
16 - 20 Node K
21 - 25 Node L (Node L must equal Node K for triangular elements)
26 - 30 Material identification number
31 - 40 Reference temperature for zero stresses within element
41 - 50 Normal pressure on I-J side of element
51 - 55 Stress evaluation option "n"
56 - 60 Element data generator "k"
61 - 70 Element thickness (For plane strain set equal to 1.0 by program)

NOTES/

(1) Element Data Generation - Element cards must be in element number sequence. If cards are omitted the omitted element data will be generated. The nodal numbers will be generated with respect to the first card in the series as follows:

$$I_n = I_{n-1} + k$$

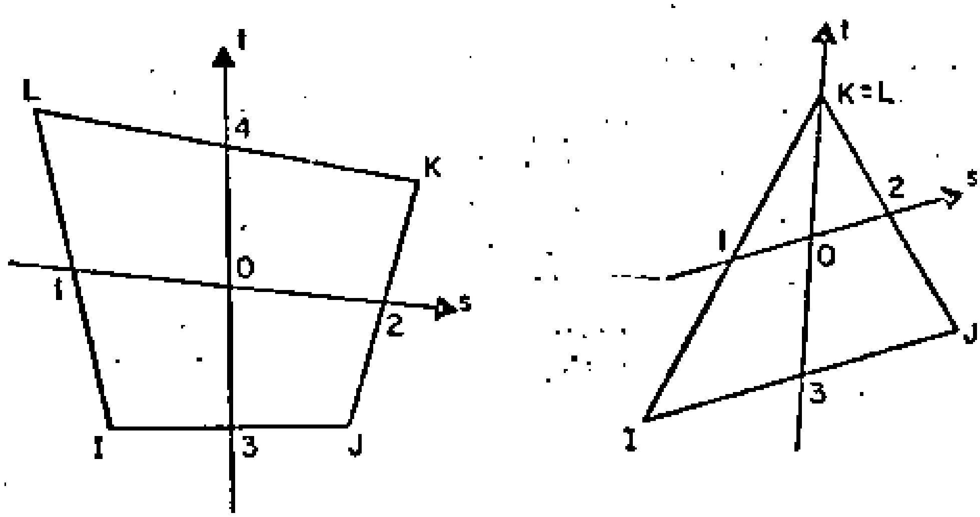
$$J_n = J_{n-1} + k$$

$$K_n = K_{n-1} + k$$

$$L_n = L_{n-1} + k$$

All other element information will be set equal to the information on the last card read. The data generation parameter k is given on that card.

(2) Stress Print Option - The following description of the stress print option applies to both element types 3 and 4. The value of the stress print option "n" can be given as 1, 0, 8, 16 or 20.

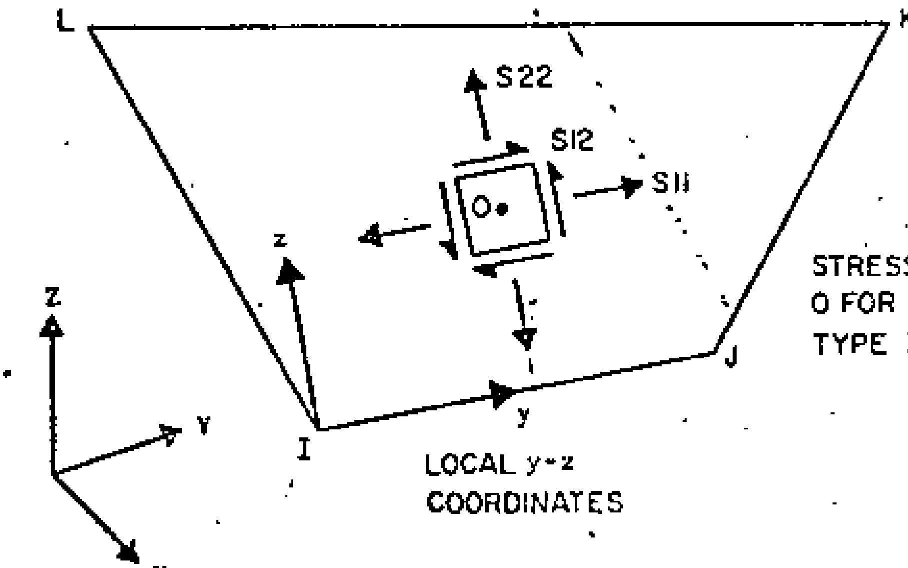


0 = origin of natural s-t coordinates (Fig. 5-2). Points 1, 2, 3 and 4 are midpoints of sides. The points at which stresses are output depend on the value of n as described in the following table.

n	Stresses output at
1	None
0	0
8	0, 1
16	0, 1, 2, 3
20	0, 1, 2, 3, 4

IV. ELEMENT DATA (continued)

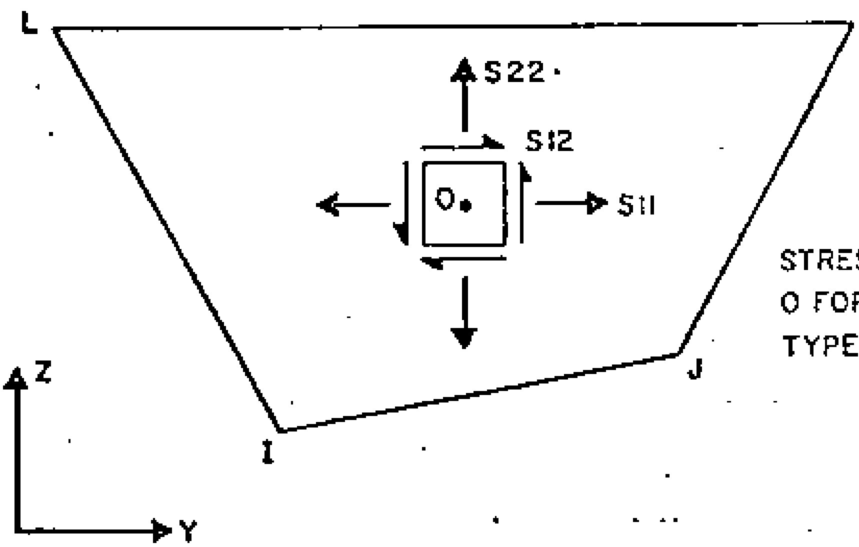
The stresses at O are printed in a local y-z coordinate system. For element type 3, side I-J defines the local y-z axes in the plane of the element. For element type 4 the local y-z axes are parallel to the global Y-Z axes.



STRESSES AT O FOR ELEMENT TYPE 3

LOCAL y-z COORDINATES

GLOBAL COORDINATES

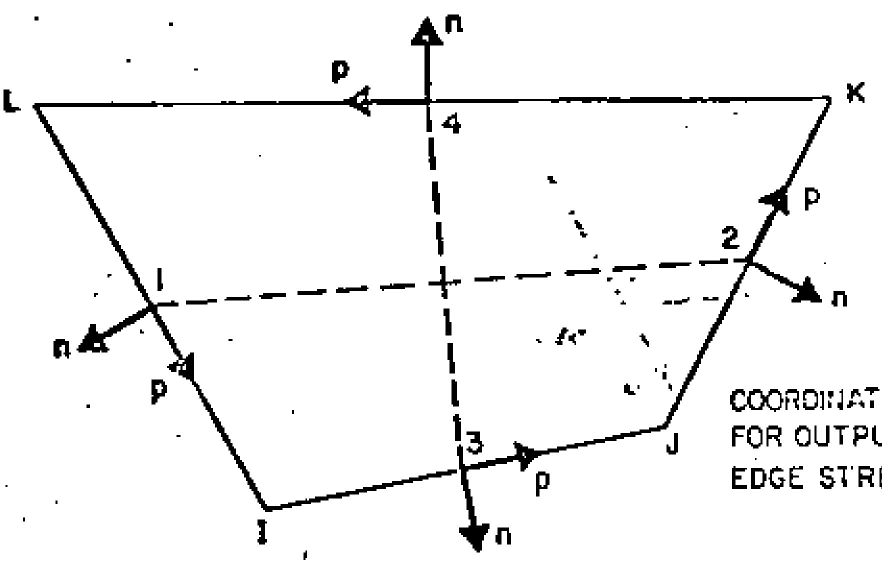


STRESSES AT O FOR ELEMENT TYPE 4

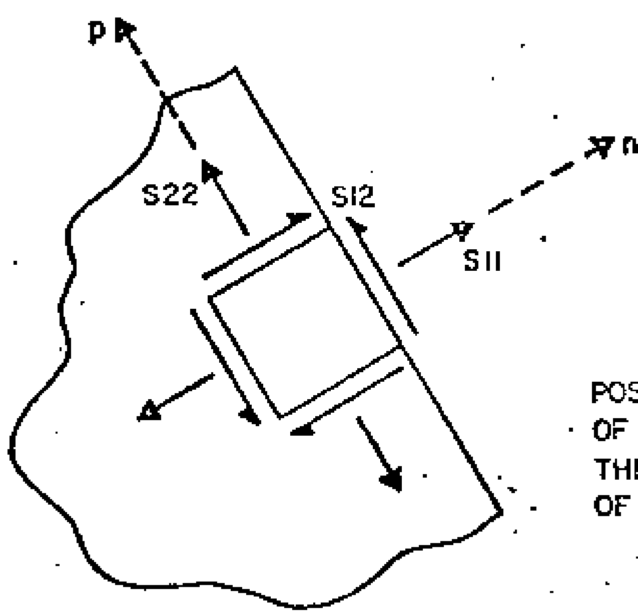
LOCAL AND GLOBAL Y-Z

IV. ELEMENT DATA (continued)

For both element types 3 and 4 the stresses at each edge midpoint are output in a rectangular n-p coordinate system defined by the outward normal to the edge (n axis) and the edge (p axis). The positive p axis for points 1, 2, 3 and 4 is from L to I, J to K, I to J and K to L respectively (positive direction is counterclockwise about element).



COORDINATE SYSTEMS FOR OUTPUT OF EDGE STRESSES



POSITIVE STATE OF STRESS AT THE MIDPOINT OF A SIDE

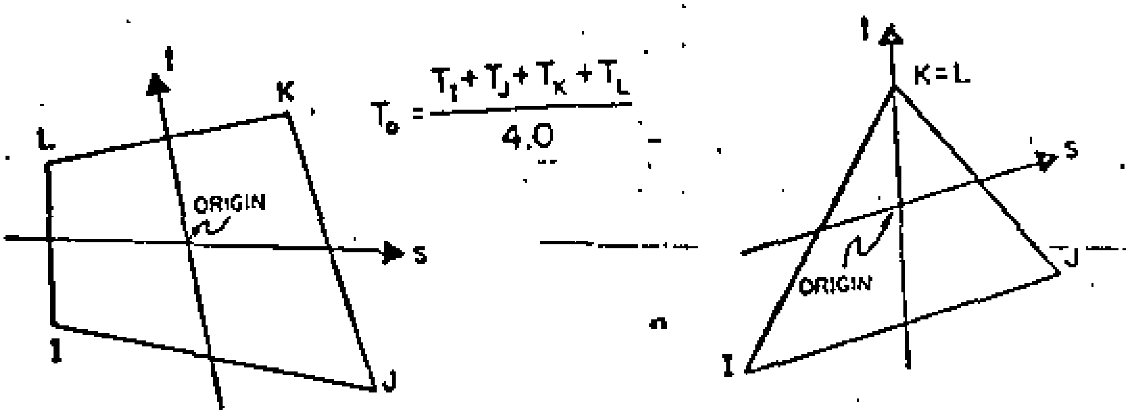
IV. ELEMENT DATA (continued)

The stresses for an element are output under the following headings: S11, S22, S12, S33, S-MAX, S-MIN, ANGLE. The normal stresses S11 and S22 and the shear stress S12 are as described above. S-MAX and S-MIN are the principal stresses in the plane of the element and S33 is the third principal stress acting on the plane of the element. ANGLE is the angle in degrees from (1) the local y axis at point 0, or (2) the n axis at the midpoints, to the axis of the algebraically largest principal stress.

For triangular elements the stress print option is as described above except that n = 20 is not valid. If n = 20 is input, n will be set to 16 by the program.

(3) Thermal Data - Nodal temperatures as specified on the nodal point data cards are used by element types 3 and 4 in the following two ways:

(1) Temperature-dependent material properties are approximated by interpolating (or extrapolating) the input material properties at the temperature T_o corresponding to the origin of the local s-t coordinate system (see Fig. 5.2 for description of local element coordinates). The material properties throughout the element are assumed constant corresponding to this temperature.



(2) For computation of nodal loads due to thermal strains in the element a bilinear interpolation expansion for the temperature change ΔT (s,t) is used.

$$\Delta T\,(s,t) = \sum_{i=1}^{4} h_i(s,t)\; T_i - T_r$$

where T_i are the nodal temperatures specified on the joint data cards, T_r is the reference stress free temperature and h_i (s,t) are the interpolation functions given by Eq. 5.7.

(4) Use of Triangles - In general, the elements are most effective when they are rectangular, i.e. the elements are not distorted. Therefore, regular and rectangular element mesh layouts should be used as much as possible. In particular, the triangle used is the constant strain triangle; and it should be avoided, since its accuracy is not satisfactory.

(5) Use of Incompatible Modes - Incompatible displacement modes have been found to be effective only when used in rectangular elements. They should always be employed with care. Since incompatible modes are used for all elements of a group it is recommended to use separate element groups for elements with incompatible modes and elements without incompatible modes, respectively. (See Section II, note (2)).

TYPE 5 - THREE-DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS (EIGHT NODE BRICK)

General three-dimensional, eight-node, isoparametric elements with three translational degrees of freedom per node are identified by the number 5. Isotropic material properties are assumed. The element load cases (A, B, C and D) are defined as a combination of surface pressure, hydrostatic loads, inertia loads in three directions and thermal loads. The six components of stress and three principal stresses are computed at the center of each element. Also, surface stresses are evaluated. Nine incompatible displacement modes are assumed in the formation of element stiffness matrices. For 8-node elements without incompatible modes use element type 8.

A. Control Card (4I5)

Columns	1 - 5	The number 5
	6 - 10	Number of 8-node solid elements
	11 - 15	Number of different materials
	16 - 20	Number of element distributed load sets

B. Material Property Cards (I5,4F10.0). One card for each different material

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 15	Modulus of elasticity (only elastic, isotropic materials are considered)
	16 - 25	Poisson's ratio
	26 - 35	Weight density of material (for calculation of gravity loads or mass matrix)
	36 - 45	Coefficient of thermal expansion

C. Distributed Surface Loads (2I5,2F10.2,I5) One card is required for each unique set of uniformly distributed surface loads and for each reference fluid level for hydrostatically varying pressure loads. See notes (4) and (5) for sign convention.

Columns	1 - 5	Load set identification number
	6 - 10	LT (load type) LT = 1 if this card specifies a uniformly distributed load. LT = 2 if this card specifies a hydrostatically varying pressure.
	11 - 20	P If LT = 1, P is the magnitude of the uniformly distributed load If LT = 2, P is the weight density of the fluid causing the hydrostatic pressure
	21 - 30	Y If LT = 1, leave blank If LT = 2, Y is the global Y coordinate of the surface of fluid causing hydrostatic pressure loading
	31 - 35	Element face number on which surface load acts. Face numbers are from 1 to 6 as

described in note (5) for uniformly distributed loads and can be only faces 2, 4 or 6 for hydrostatically varying pressures.

D. Acceleration due to gravity (F10.2)

Columns 1 - 10 Acceleration due to gravity (for calculation of mass matrix)

E. Element Load Case Multipliers (5 cards of 4F10.2)

Multipliers on the element load cases are scaling factors in order to provide flexibility in modifying applied loads.

Card 1: Columns 1 - 10 PA, 11 - 20 PB, 21 - 30 PC, 31 - 40 PD — Pressure load multipliers

PA is a factor used to scale the complete set of distributed surface loads. This scaled set of loads is assigned to element load case A. Note that zero is a valid multiplier. PB, PC and PD are similar to PA except that scaled loads are assigned to element load cases B, C and D respectively. For the majority of applications these factors should be 1.0

Card 2: Columns 1 - 10 TA, 11 - 20 TB, 21 - 30 TC, 31 - 40 TD — Thermal load multipliers

TA is a factor used to scale the complete set of thermal loads. The scaled set of loads are then assigned to element load case A. TB, TC and TD are similar and refer to element load cases B, C and D respectively.

Card 3: Columns 1 - 10 GXA, 11 - 20 GXB, 21 - 30 GXC, 31 - 40 GXD — Gravity load multipliers for + X global direction

Card 4: Columns 1 - 10 GYA, 11 - 20 GYB, 21 - 30 GYC, 31 - 40 GYD — Gravity load multipliers for + Y global direction

Card 5: Columns 1 - 10 GZA, 11 - 20 GZB, 21 - 30 GZC, 31 - 40 GZD — Gravity load multipliers for + Z global direction

Gravity loads are computed from the weight density of the material and from the geometry of the element. GXA is a multiplier which reflects the location of the gravity axis and any load factors used. The program computes the weight of the element, multiplies it by GXA and assigns the resulting loads to the + X direction of element load case A. Consequently GXA is the product of the component of gravity along the + X global axis (from - 1.0 to 1.0) and any desired load factor. GXB, GXC and GXD are similar to GXA and refer to element load cases B, C and D respectively. GYA and GZA refer to the global Y and Z directions respectively.

F. Element Cards (12I5,4I2,2I1,F10.2)

Columns			
1 - 5	Element number		
6 - 10	Global node point numbers corresponding to element nodes (See note (3))	1	
11 - 15		2	
16 - 20		3	
21 - 25		4	
26 - 30		5	
31 - 25		6	
36 - 40		7	
41 - 45		8	
46 - 50	Integration Order		
51 - 55	Material Number		
56 - 60	Generation Parameter (INC)		
61 - 62	LSA	LSA is the distributed surface load set identification number of the distributed load acting on this element to be assigned to element load case A. LSB, LSC and LSD refer to element load cases B, C and D respectively	
63 - 64	LSB		
65 - 66	LSC		
67 - 68	LSD		
69 - 70	Face numbers for stress output		
71 - 80	Stress-free element temperature		

NOTES/

(1) Element Generation

1. Element cards must be in ascending order
2. Generation is possible as follows:

   If a series of element cards are omitted,

   a. Nodal point numbers are generated by adding INC to those of the preceding element. (If omitted, INC is set equal to 1.)
   b. Same material properties are used as for the preceding element.
   c. Same temperature is used for succeeding elements.

d. If on first card for the series the integration order is:
   >0 Same value is used for succeeding elements.
   = 0 A new element stiffness is not formed. Element stiffness is assumed to be identical to that of the preceding element.
   <0 Absolute value is used for the first element of the series, and the same element stiffness is used for succeeding elements.

e. If on first card for the series, the distributed load number (for any load case) is:
   >0 Same load is applied to succeeding elements.
   <0 The load case is applied to this element but not to succeeding elements in the series.

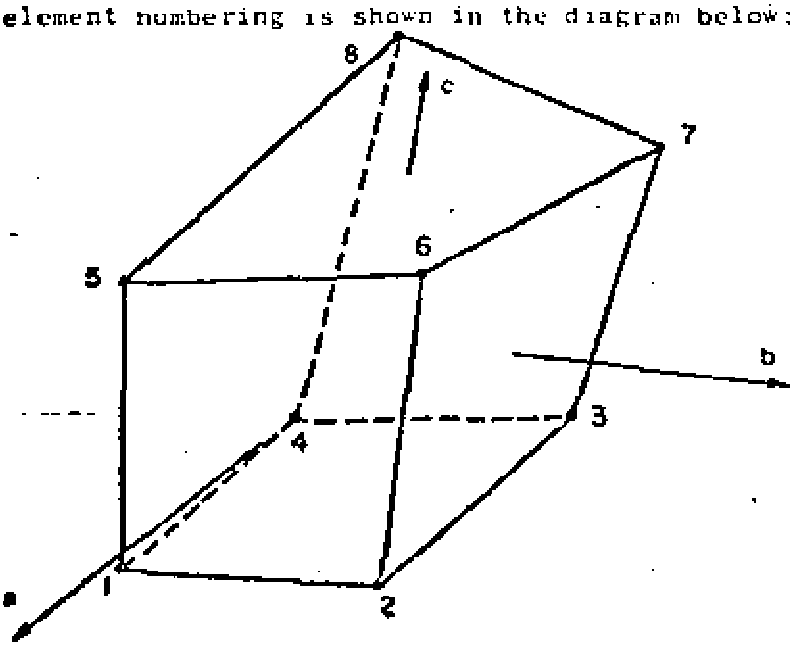
3. Element card for the last element must be supplied.

(2) Integration Order

Computation time (for element stiffness) increases with the third power of the integration order. Therefore, the smallest satisfactory order should be used. This is found to be:
  2 for rectangular element
  3 for skewed element
  4 may be used if element is extremely distorted in shape, but not recommended.
Mesh should be selected to give "rectangular" elements as far as possible.

(3) Element Coordinate System

Local element coordinate system is a natural system for this element in which the element maps onto a cube. Local element numbering is shown in the diagram below:



(4) Identification of Element Faces

Element faces are numbered as follows:

Face 1 corresponds to + a direction
2 corresponds to - a direction
3 corresponds to + b direction
4 corresponds to - b direction
5 corresponds to + c direction
6 corresponds to - c direction
0 corresponds to the center of the element

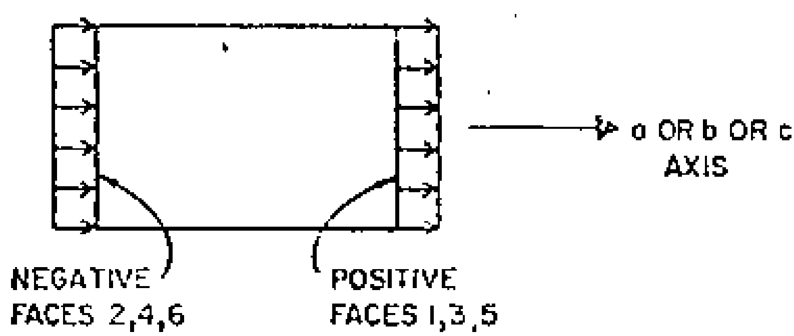
Faces 1,3,5 are positive faces

Faces 2,4,6 are negative faces

(5) Distributed Surface Loads

Two types of surface loadings may be specified; load type 1 (LT = 1), uniformly distributed surface load and load type 2 (LT = 2), hydrostatically-varying surface pressure (but not surface tension). Both loading types are for loads normal to the surface and do not include surface shears. Surface loadings that do not fall into these categories must be input as nodal loads on the concentrated load data cards (see Section V).

(1) LT = 1: A positive surface load acts in the direction of the outward normal of a positive element face and along the inward normal of a negative element face as shown in the following diagram:



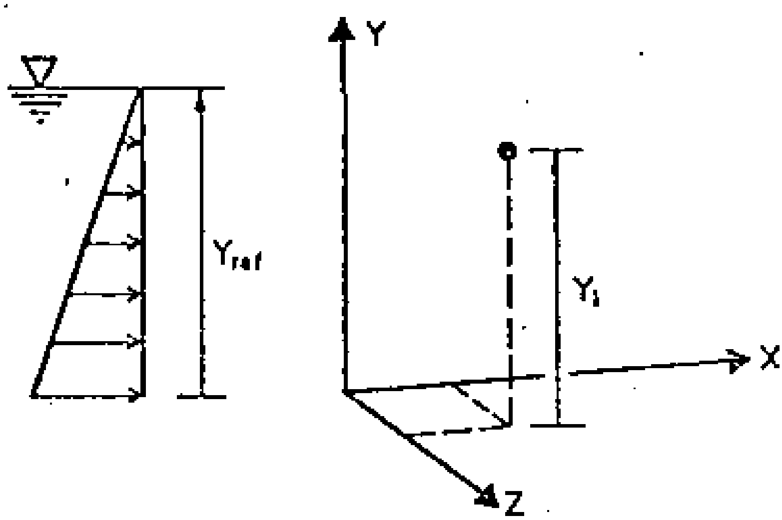
POSITIVE SURFACE LOADING P

If the uniformly distributed surface loading P is input as a positive quantity then it describes pressure loading on faces 2, 4 or 6 and tensile loading on faces 1, 3 or 5. If P is input as a negative quantity then it describes tensile loading on faces 2, 4 or 6 and pressure on faces 1, 3 or 5.

(2) LT = 2: A hydrostatically varying surface pressure on element faces 2, 4 or 6 can be specified by a reference fluid surface and a fluid weight density γ as input. Only one hydrostatic surface pressure card need be input in order to specify a hydrostatic loading on the complete structure. The consistent nodal loads are calculated by the program as follows. At each numerical integration point "i" on an element surface the pressure P_i is calculated from

$$P_i = \gamma\ (Y_i - Y_{ref})$$

where Y_i is the global Y coordinate of the point in question and Y_{ref} specifies the fluid surface assuming gravity acts along the -Y axis



If $P_i > 0$, corresponding to surface tension, the contribution is ignored. If an element face is such that $Y_i > Y_{ref}$ for all i (16 integration points are used by program) then no nodal loads will be applied to the element. If some $P_i > 0$ and some $P_i < 0$ for a particular face, then approximate nodal loads are obtained for the partially loaded surface.

(6). Thermal Loads

Thermal loads are computed assuming a constant temperature increase ΔT throughout the element.

$\Delta T = T_{avg} - T_o$

T_{avg} = the average of the 8 nodal point temperatures specified on nodal point data cards

T_o = stress free element temperature specified on the element card.

(7). Element Load Cases

Element load case A consists of all the contributions from distributed loadings, thermal loadings and gravity loading for all the elements taken collectively.

$$\begin{aligned} \text{Load case A} = \Sigma\ (&\text{PA} \times \text{pressure loading} \\ &+ \text{TA} \times \text{thermal loading} \\ &+ \text{GXA} \times \text{gravity X loading} \\ &+ \text{GYA} \times \text{gravity Y loading} \\ &+ \text{GZA} \times \text{gravity Z loading}) \end{aligned}$$

Element load case A for the set of three dimensional solid elements is added to element load case A for the other element types in the analysis. The treatment of element load cases B, C and D is analogous to that of element load case A. The loading cases for the structure are obtained by adding linear combinations of element load cases A, B, C and D to the nodal loads specified on the joint data cards.

(8) Output of Element Stresses

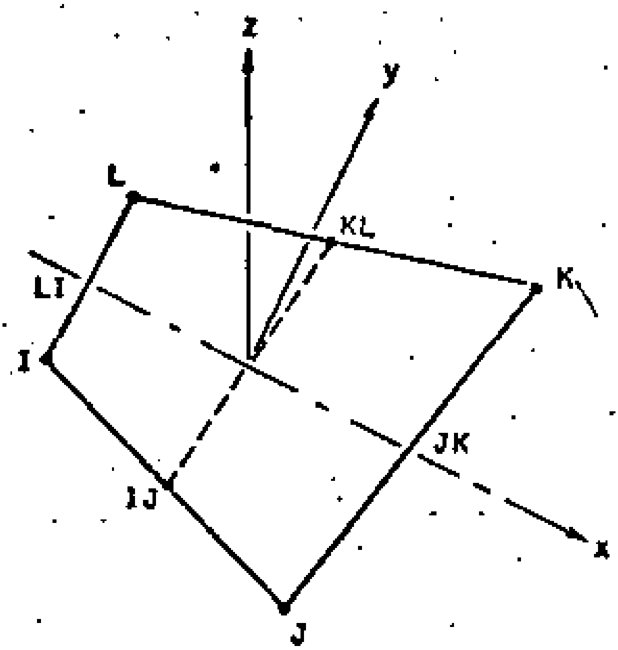
1. At the centroid of the element, stresses are referred to the global axes. Three principal stresses are also presented.

2. At the center of an element face, stresses are referred to a set of local axes (x,y,z). These local axes are individually defined for each face as follows: Let nodal points I, J, K and L be the four corners of the element face. Then

   x is specified by LI - JK, where LI and JK are midpoints of sides L-I and J-K,

   z is normal to x and to the line joining midpoints IJ and KL.

   y is normal to x and z, to complete the right-handed system.



The corresponding nodal points I, J, K and L in each face are given in the table.

FACE	NODAL POINTS			
	I	J	K	L
1	1	2	6	5
2	4	3	7	8
3	3	7	6	2
4	4	8	5	1
5	8	5	6	7
6	4	1	2	3

Two surface principal stresses and the angle between the algebraically largest principal stress and the local x axis are printed with the output. It is optional to choose one or two locations of an element where stresses are to be computed. In the output, "face zero" designates the centroid of the element.

IV. ELEMENT DATA (continued)

TYPE 6 - PLATE AND SHELL ELEMENTS (QUADRILATERAL)

A. Control Card (3I5)

Columns	1 - 5	The number 6
	6 - 10	Number of shell elements
	11 - 15	Number of different materials

B. Material Property Information

Anisotropic material properties are possible. For each different material, two cards must be supplied.

Card 1: (I10,20X,4F10.0)

Columns	1 - 10	Material identification number
	31 - 40	Mass density
	41 - 50	Thermal expansion coefficient α_x
	51 - 60	Thermal expansion coefficient α_y
	61 - 70	Thermal expansion coefficient α_{xy}

Card 2: (6F10.0)

Columns	1 - 10	Elasticity element C_{xx}
	11 - 20	Elasticity element C_{xy}
	21 - 30	Elasticity element C_{xs}
	31 - 40	Elasticity element C_{yy}
	41 - 50	Elasticity element C_{ys}
	51 - 60	Elasticity element C_{xy}

Elements in plane stress material matrix [C]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xs} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{ys} \\ C_{xs} & C_{ys} & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

C. Element Load Multipliers (5 cards)

Card 1: (4F10.0)

Columns	1 - 10	Distributed lateral load multiplier for load case A
	11 - 20	Distributed lateral load multiplier for load case B
	21 - 30	Distributed lateral load multiplier for load case C
	31 - 40	Distributed lateral load multiplier for load case D

Card 2: (4F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature multiplier for load case A
	11 - 20	Temperature multiplier for load case B
	21 - 30	Temperature multiplier for load case C
	31 - 40	Temperature multiplier for load case D

Card 3: (4F10.0)

Columns	1 - 10	X-direction acceleration for load case A
	11 - 20	X-direction acceleration for load case B
	21 - 30	X-direction acceleration for load case C
	31 - 40	X-direction acceleration for load case D

Card 4: (4F10.0) Same as Card 3 for Y-direction

Card 5: (4F10.0) Same as Card 3 for Z-direction

D. Element Cards (8I5,F10.0)

One card for each element

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node I
	11 - 15	Node J
	16 - 20	Node K
	21 - 25	Node L
	26 - 30	Node 0
	31 - 35	Material identification (if left blank, taken as one)
	36 - 40	Element data generator K_n
	41 - 50	Element thickness
	51 - 60	Distributed lateral load (pressure)
	61 - 70	Mean temperature variation T from the reference level in undeformed position
	71 - 80	Mean temperature gradient $\partial T/\partial z$ across the shell thickness (a positive temperature gradient produces a negative curvature).

NOTES/

(1) Nodal Points and Coordinate Systems

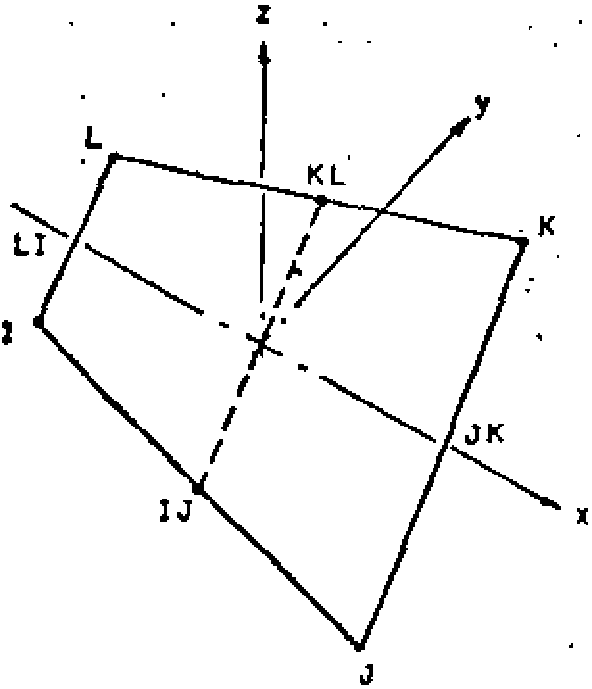
The nodal point numbers I, J, K and L are in sequence in a counter-clockwise direction around the element. The local element coordinate system (x, y, z) is defined as follows:

x Specified by LI - JK, where LI and JK are midpoints of sides L-I and J-K.

z Normal to x and to the line joining midpoints IJ and KL.

y Normal to x and z to complete the right-handed system.

This system is used to express all physical and kinematic shell properties (stresses, strains, material law, etc.), except that the body force density is referred to the global coordinate system (X, Y, Z).



For the analyses of shallow shells, rotational constraints normal to the surface may be imposed by the addition of boundary elements at the nodes (element type #7).

(2) Node 0

When columns 26 - 30 are left blank, mid-node properties are computed by averaging the four nodes.

(3) Element Data Generation

Element cards must be in element number sequence. If element cards are omitted, the program automatically generates the omitted information as follows:

The increment for element number is one

i.e. $NE_{i+1} = NE_i + 1$

The corresponding increment for nodal number is K_n

i.e. $NI_{i+1} = NI_i + K_n$

$NJ_{i+1} = NJ_i + K_n$

$NK_{i+1} = NK_i + K_n$

$NL_{i+1} = NL_i + K_n$

Material identification, element thickness, distributed lateral load, temperature and temperature gradient for generated elements are the same. Always include the complete last element card.

(4) Element Stress Calculations

Output are moments per unit length and membrane stresses.

IV. ELEMENT DATA (continued)

TYPE 7 - BOUNDARY ELEMENTS

This element is used to constrain nodal displacements to specified values, to compute support reactions and to provide linear elastic supports to nodes. If the boundary condition code for a particular degree of freedom is specified as 1 on the structure nodal point data cards, the displacement corresponding to that degree of freedom is zero and no support reactions are obtained with the printout. Alternatively, a boundary element can be used to accomplish the same effect except that support reactions are obtained since they are equal to the member end forces of the boundary elements which are printed. In addition the boundary element can be used to specify non-zero nodal displacements in any direction which is not possible using the nodal point data cards.

The boundary element is defined by a single directed axis through a specified nodal point, by a linear extensional stiffness along the axis or by a linear rotational stiffness about the axis. The boundary element is essentially a spring which can have axial displacement stiffness and axial rotational stiffness. There is no limit to the number of boundary elements which can be applied to any point to produce the desired effects. Boundary elements have no effect on the size of the stiffness matrix.

INPUT DATA

A. Control Card (2I5)

Columns	1 - 5	The number 7.
	6 - 10	Total number of boundary elements.

B. Element Load Multipliers (4F10.0)

Columns	1 - 10	Multiplier for load case A
	11 - 20	Multiplier for load case B
	21 - 30	Multiplier for load case C
	31 - 40	Multiplier for load case D

C. Element Cards (8I5,3F10.0)

One card per element (in ascending nodal point order) except where automatic element generation is used.

Columns	1 - 5	Node N, at which the element is placed	
	6 - 10	Node I	Leave columns 11 - 25 blank if only node I is needed.
	11 - 15	Node J	
	16 - 20	Node K	
	21 - 25	Node L	
	26 - 30	Code for displacement	
	31 - 35	Code for rotation	
	36 - 40	Data generator K_n	
	41 - 50	Specified displacement along element axis	
	51 - 60	Specified rotation about element axis	
	61 - 70	Spring stiffness (set to 10^{10} if left blank) for both extension and rotation.	

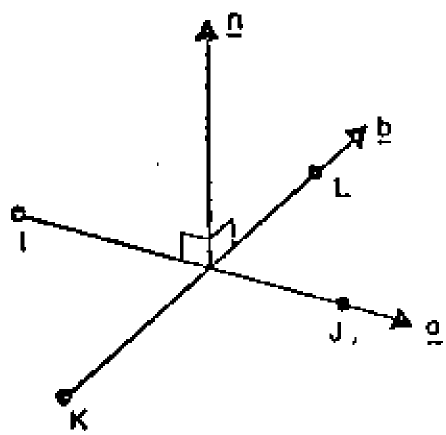
NOTES/

(1) Direction of boundary element

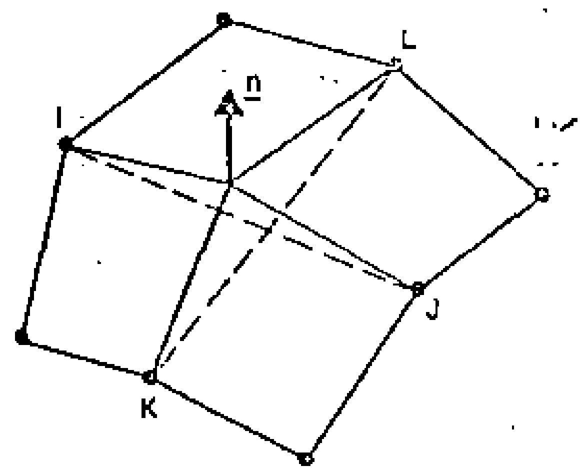
The direction of the boundary element at node N is specified in one of two ways.

(i) A second nodal point I defines the direction of the element from node N to node I.

(ii) Four nodal points I, J, K and L specify the direction of the element as the normal to the plane defined by two intersecting straight lines (vectors $\underline{a}$ and $\underline{b}$, see Fig. below).



$\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$



ROTATIONAL CONSTRAINT
IN THIN SHELL ANALYSIS

The four points I, J, K and L need not be unique. A useful application for the analysis of shallow thin shells employs the boundary element to approximate rotational constraint about the surface normal as shown above.

$\underline{n}$ is given by the vector cross product $\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$ and defines the direction of the boundary element.

Note that node I in case (i) and nodes I, J, K and L in case (ii) are used only to define the direction of the element and if convenient may be any nodes used to define other elements. However 'artificial nodes' may be created to define directions of boundary elements. These 'artificial nodes' are input on the nodal point data cards with their coordinates and with all the boundary condition codes specified as 1 (one).

IV. ELEMENT DATA (continued)

It should be noted that node N is the structure node to which the boundary element is attached. In case (i), a positive displacement moves node N towards node I. Correspondingly, a positive force in the element means compression in the element. In case (ii), a positive displacement moves node N into the direction n (see Fig.).

(2) Displacement and rotation codes

Displacement code = 1: When this code is used, the displacement δ, specified in columns 41-50, and the spring stiffness k, specified in columns 61-70, are used by the program in the following way. The load P, evaluated from $P = k\delta$, is applied to node N in the direction node N to node I in case (i) and into direction n in case (ii), if δ is positive. If k is much greater than the stiffness of the structure at node N without the boundary element, then the net effect is to produce a displacement very nearly equal to δ at node N. If $\delta = 0$, then $P = 0$ and the stiff spring approximates a rigid support. Note that the load P will contribute to the support reaction for nonzero δ. The boundary condition codes specified on the structure nodal-point data cards must be consistent with the fact that a load P is being applied to node N to effect the desired displacement (even when this displacement is zero).

Rotation code = 1: This case is analogous to the situation described above. A torque T, evaluated from $T = k\,\theta$, is applied to node N about the axis (direction) of the element. The rotation θ is specified in columns 51-60.

(3) Data generator K_n

When a series of nodes are such that:

(i) All have identical boundary elements attached
(ii) All boundary elements have same direction
(iii) All specified displacements and rotations are identical
(iv) The nodal sequence forms an arithmetic sequence, i.e., N, $N + K_n$, $N + 2K_n$ etc.,

then only the first and last node in the sequence need be input. The increment K_n is input in columns 36-40 of the first card.

(4) Element load multipliers

Each of the four possible element load cases A, B, C and D associated with the boundary elements consists of the complete set of displacements as specified on the boundary element cards multiplied by the element load multiplier for the corresponding load case. As an example, suppose that displacement of node N is specified as 1.0, spring stiffness as 10^{10} and no other boundary element displacements are specified. Let case A multiplier be 0.0 and case B multiplier be 2.0. For element load case A the specified displacement is 0.0 × 1.0 = 0.0 while that for B is 2.0 x 1.0 = 2.0. Linear combinations of element load cases A, B, C and D for all types of elements collectively for a particular problem are specified on the structure element load multiplier cards. As far as the boundary element is concerned, this device is useful when a particular node has a support displacement in one load case but is fixed in others.

(5) Recommendations for use of boundary elements

If a boundary element is aligned with a global displacement direction, only the corresponding diagonal element in the stiffness matrix is modified. Therefore, no stiffness matrix ill-conditioning results. However, when the boundary element couples degrees of freedom, large off-diagonal elements introduce ill-conditioning into the stiffness matrix which can cause solution difficulties.

In the analysis of shallow shells boundary elements with stiffness a fraction of the element bending stiffness should be used (say less than or about 10%).

In dynamic analysis "artificially stiff" boundary elements should not be used. (See note (8) in Section VII.A).

TYPE 8 - VARIABLE-NUMBER-NODES THICK SHELL AND THREE-DIMENSIONAL ELEMENTS

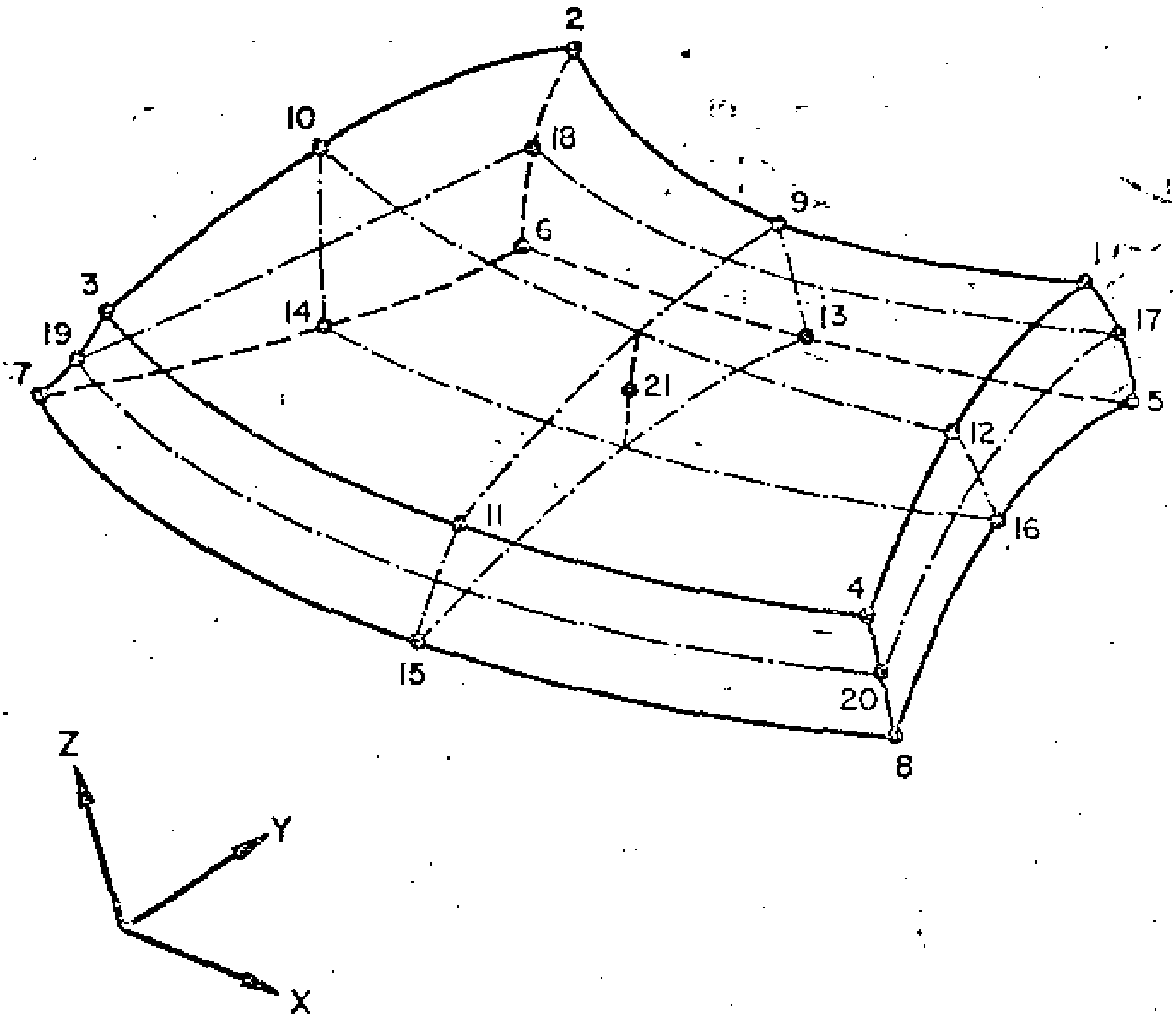
A minimum of 8 and a maximum of 21 nodes are used to describe a general three dimensional isoparametric element; the element is used to represent orthotropic, elastic media. The element type is identified by the number eight (8). Three translational degrees of freedom are assigned to each node, and at least the eight corner nodes must be input to define a hexahedron. Input of nodes 9 to 21 is optional; the figures below illustrate some of the most commonly used node combinations.

Element load cases (A,B,C,...) are formed from combinations of applied surface pressure, hydrostatic loads, inertia loads in the three directions X,Y,Z and thermal loads. Six global stresses are output at up to seven (7) locations within the element; these output locations are selected by means of appropriate data entries.

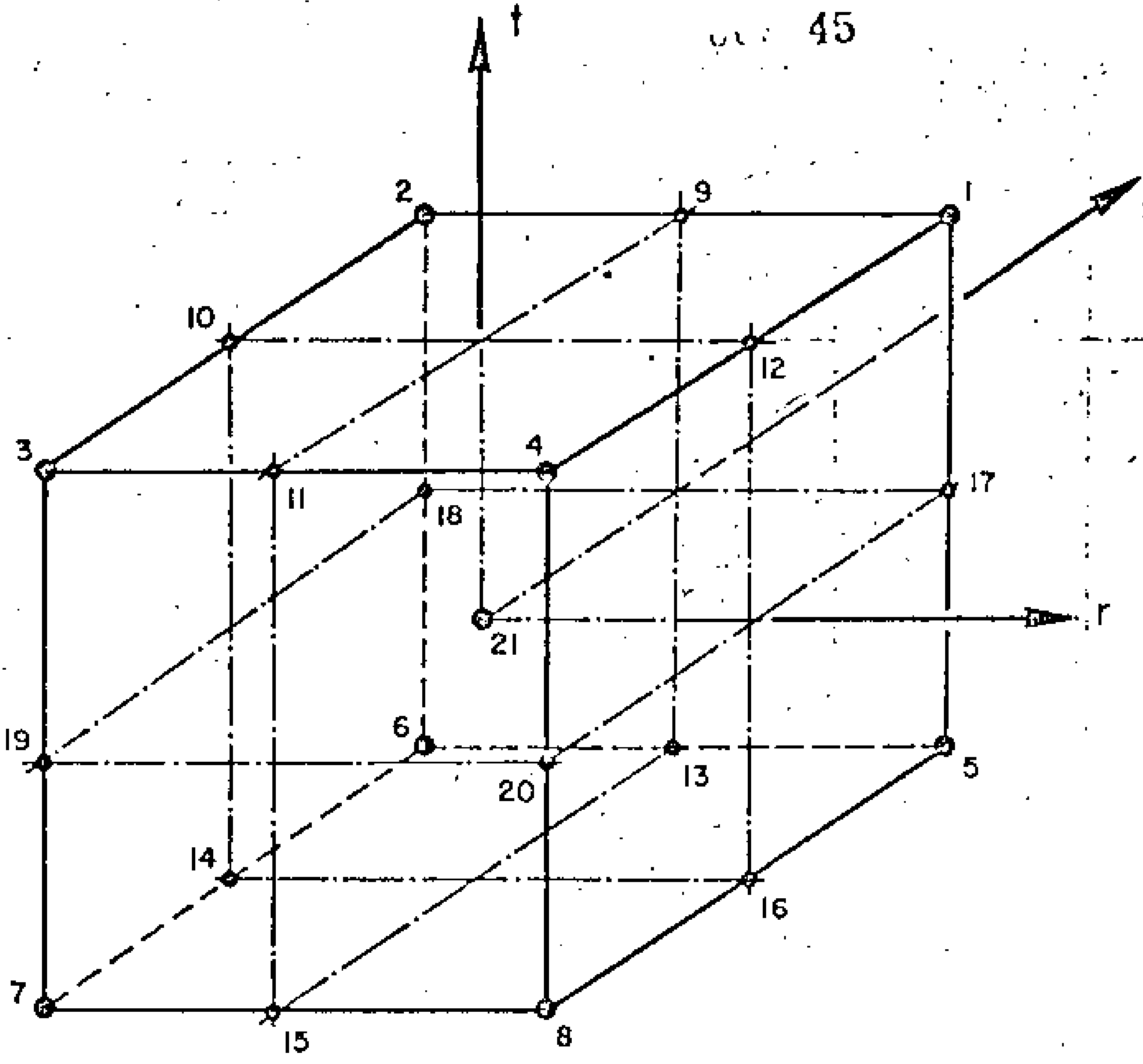
Node temperatures input in Section III are used to form an average element temperature which is the basis of material property selection for the element. If thermal loads are applied, node temperatures are used to establish the temperature field within the element, and the temperature interpolation functions are the same as those assumed to represent element displacements.

1. Control Card (10I5)

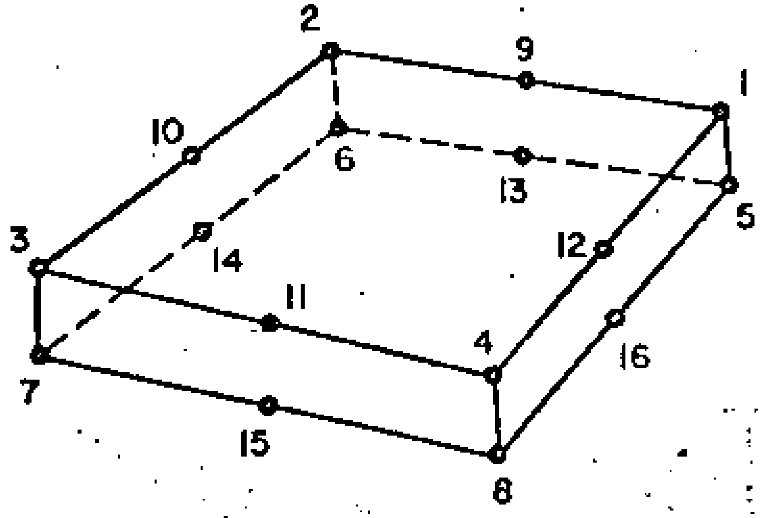
notes	columns	variable	entry
	5		Enter the number "8"
	6 - 10	NSOL21	Number of solid elements; GE.1
	11 - 15	NUMMAT	Number of different materials; GE.1
(1)	16 - 20	MAXTP	Maximum number of temperature points used in the table for any material; EQ.0; default set to "1"
(2)	21 - 25	NORTHO	Number of different sets of material axis orientation data; EQ.0; all properties are defined in the X,Y,Z, system
(3)	26 - 30	NDLS	Number of different distributed load (i.e., pressure) sets
(4)	31 - 35	MAXNOD	Maximum number of nodes used to describe any one element; GE.8 and LE.21 EQ.0; default set to "21"
(5)	36 - 40	NOPSET	Number of sets of data requesting stress output at various element locations; EQ.0; centroid output only



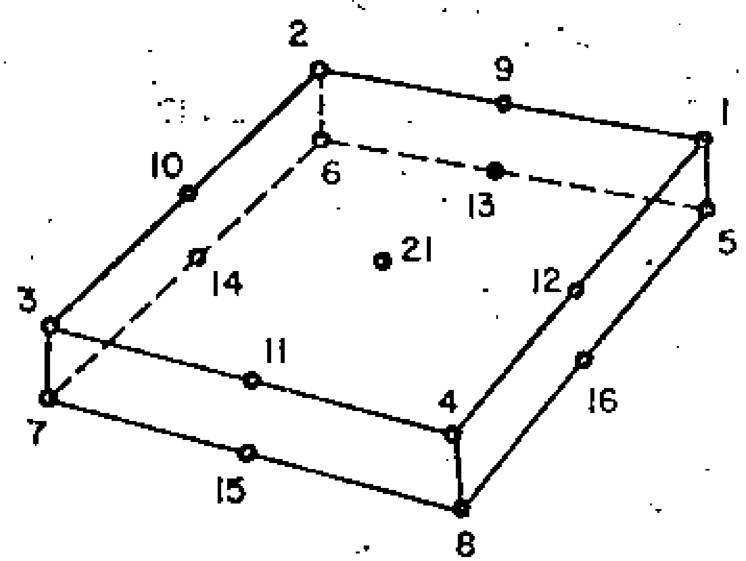
THREE DIMENSIONAL ISOPARAMETRIC ELEMENT



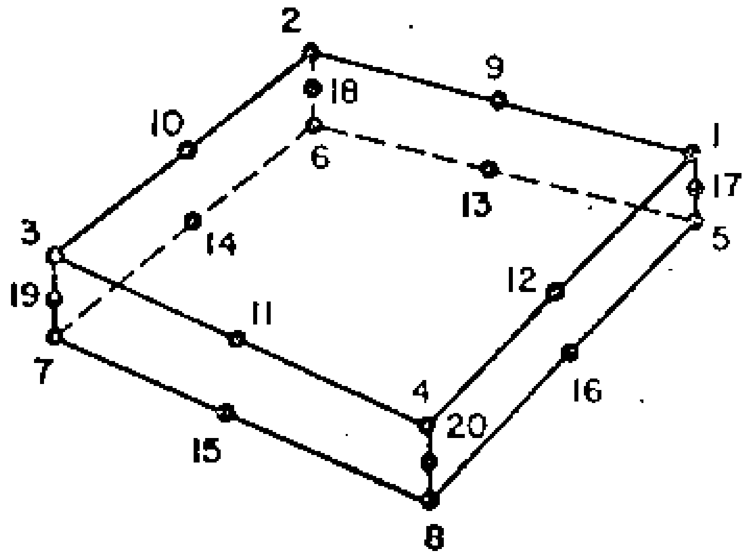
HEXAHEDRAL ELEMENT IN NATURAL COORDINATES



a. 16 – NODE ELEMENT



b. 17 – NODE ELEMENT



c. 20 – NODE ELEMENT

COMMONLY USED ELEMENT GEOMETRIES

IV. ELEMENT DATA (continued)

1. Control Card (10I5) (continued)

notes	columns	variable	entry
(6)	41 - 45	INTRS	Standard integration order for the natural (r,s) directions; GE.2 and LE.4 EQ.0; default set to "2"
	46 - 50	INTT	Standard integration order for the natural (t)-direction; GE.2 and LE.4 EQ.0; default set to "2"

NOTES/

(1) The variable MAXTP limits the number of temperature points that can be input for any one of the NUMMAT material sets; i.e., the variable NTP in Section 2 cannot exceed the value of MAXTP.

(2) NORTHO specifies the number of cards to be read in Section 3, and if omitted, all orthotropic material axes are assumed to coincide with the global cartesian axes X,Y,Z.

(3) NDLS specifies the number of card pairs to be read in Section 4. NDLS must be a positive integer if any pressure loads are to be applied to solid element faces.

(4) MAXNOD specifies the maximum number of non-zero node numbers assigned to any one of the NSOL21 elements input in Section 7. Locations of the element's 21 possible nodes are shown in the figure below in which the element is shown mapped into its natural r,s,t coordinate system. The eight corner nodes must be input for every element, and nodes 9 to 21 are input optionally. If MAXNOD is 9 or greater, all 21 node entries are read for each element (Cards 2 and 3, Section 7), but only the first MAXNOD non-zero entries encountered when reading in sequence from 1 to 21 will be used for element description. As an example, for the 16-17- and 20-node elements MAXNOD has values of 16, 17, 20, respectively.

(5) As a means of controlling the amount of solution output, stress output location sets are defined in Section 5, and the total number of these output requests is specified by the variable NOPSET. For the case of NOPSET.EQ.0, no data is input in Section 5, and the only stress output produced by the program is at the element centroid. Otherwise, stress output can be requested at up to seven (7) locations (selected from a table of 27 possible locations) by means of the data entries given in Section 5.

IV. ELEMENT DATA (continued)

NOTES (continued)

(6) The entries INTRS and INTT control the number of integration points to be used in numerical evaluation of integrals over volumes in the (r,s) and (t)-coordinate directions, respectively. When solid elements are used to represent shell structures, the through-the-thickness integrations (i.e., in the natural t-axis direction) can be evaluated less accurately than those in-plane (i.e., in the r,s plane). For this case INTRS might be 3 and INTT would be chosen typically as 2. The entries INTRS and INTT are standard or reference values and are used if the integration order entries on the element cards (Card 1, Section 7) are omitted. Non-zero entries for integration order(s) given on the element cards over-ride the standard values posted on this card.

2. Material Property Cards

Orthotropic, temperature dependent material properties are allowed. For each different material that is requested on the Control Card, the following set of data must be supplied (i.e., NUMMAT sets total):

a. Material identification card (2I5,2F10.0,6A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
	6 - 10	NTP	Number of different temperatures at which properties are given; LE.MAXTP EQ.0; default set to "1"
(2)	11 - 20	WTDEN	Weight density of the material used to computed static gravity loads
	21 - 30	MASSDN	Mass density of the material used to compute the mass matrix in a dynamic analysis; EQ.0; default set to "WTDEN/386.4"
	31 - 66		Material description used to label the output.

NOTES

(1) Material numbers (M) must be input in ascending sequence beginning with "1" and ending with "NUMMAT"; omissions or repetitions are illegal.

(2) Weight density is used to compute static node forces due to applied gravity loads; mass density is used to calculate element mass matrices for use in connection with a dynamic analysis.

IV. ELEMENT DATA (continued)

b. Material cards (7F10.0,6F10.0)

NTP pairs of cards are input in order of algebraically increasing value of temperature.

First Card

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10		Temperature, T_n
(2)	11 - 20		E_{11} at T_n
	21 - 30		E_{22} at T_n
	31 - 40		E_{33} at T_n
	41 - 50		ν_{12} at T_n
	51 - 60		ν_{13} at T_n
	61 - 70		ν_{23} at T_n

Second Card

notes	columns	variable	entry
	1 - 10		G_{12} a[illegible] T_n
	11 - 20		G_{13} a[illegible] T_n
	21 - 30		G_{23} a[illegible] T_n
	31 - 40		α_1 a[illegible] T_n
	41 - 50		α_2 a[illegible] T_n
	51 - 60		[illegible]3 a[illegible] T_n

NOTES/

(1) The 12 entrie[illegible] follo[illegible]ing [illegible] temperature value T_n are physical properties kn[illegible]wn at [illegible]$_n$. [illegible]n two or more temperature points describe a ma[illegible]erial, inte[illegible]olation based on average element temperature i[illegible] perfo[illegible]med [illegible] establish a property set for the element. Hen[illegible]e, the rang[illegible] of temperature points for a material table must sp[illegible]n the expec[illegible]d range of average element temperatures for all elements associated with the material.

(2) The 12 constants (E_1[illegible], E_{22}, ..., α_3) are defined with respect to a set of axes (X_1, X_2, X[illegible] which are the principal material directions for an o[illegible] hotr[illegible]ic, elastic med[illegible]um. The stress-strain relati[illegible]ns wi[illegible] res[illegible]t to the (X_1, X_2, X_3) system is written as fo[illegible]lows :

IV. ELEMENT DATA (continued)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{12}/E_{22} & -\nu_{13}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{23}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_{11} & -\nu_{32}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}$$

$$- [\Delta T\alpha_1 \quad \Delta T\alpha_2 \quad \Delta T\alpha_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

where ϵ_{ii} and σ_{ii} are normal strains and stresses in the X_i directions; γ_{ij} and τ_{ij} are shear strains and stresses on the principal material planes; α_i are the coefficients of thermal expansion, and ΔT is the increase in temperature from stress free distributed over the element volume.

3. Material Axes Orientation Sets (4I5)

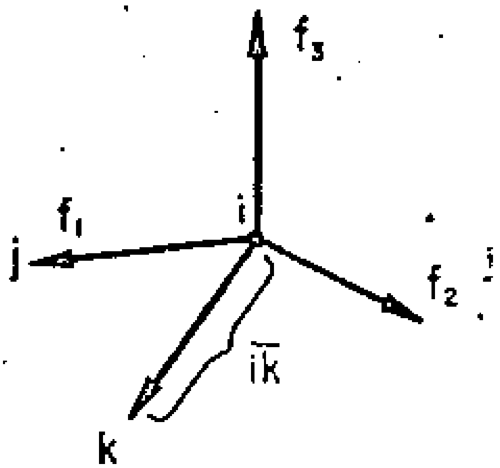
If NORTHO is zero on the Control Card, skip this data section, and all material axes (X_1, X_2, X_3) will be assumed to coincide with the global cartesian system X,Y,Z. Otherwise, NORTHO cards must be input as follows:

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Identification number; GE.1 and LE.NORTHO
(2)	6 - 10	NI	Node number for point "i"
	11 - 15	NJ	Node number for point "j"
	16 - 20	NK	Node number for point "k"

NOTES/

(1) Identification numbers (M) must be input in increasing sequence beginning with "1" and ending with "NORTHO".

(2) Orthotropic material axes orientations are specified by means of the three node numbers NI,NJ,NK. For the special case where orthotropic material axes coincide with the global axes (X,Y,Z), it is not necessary to input data in this section; see Section 7, note (4). Let $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ be the three orthogonal vectors which define the axes of material orthotropy, then their directions are as shown below:



$\underline{f}_1 = \overleftrightarrow{ij}$

$\underline{f}_3 = \overleftrightarrow{ij} \times \overleftrightarrow{ik}$

$\underline{f}_2 = \underline{f}_3 \times \underline{f}_1$

Node numbers NI,NJ,NK are only used to locate points i,j,k, respectively, and any convenient nodes may be used.

4. Distributed Surface Load Data

NDLS pairs of cards are to be input in this section in order of increasing set number (N). These data describe surface loads acting on element faces and may be prescribed directly in terms of face corner node pressures or indirectly by means of a hydrostatic pressure field.

a. Control Card (3I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Load set identification number; GE.1 and LE.NDLS
(2)	6 - 10	NFACE	Element face number on which this distributed load is acting; GE.1 and LE.6
(3)	11 - 15	LT	Load type code; EQ.1; prescribed normal pressure intensities EQ.2; hydrostatically varying pressure field EQ.0; default set to "1"

NOTES/

(1) The surface load data sets established in this section are assigned to the elements in Section 7.

(2) Hexahedra have six quadrilateral faces each uniquely described by four node numbers at the corners of the face. The face number convention established for elements is given in the Table below.

(3) Two types of surface pressure loads may be applied to faces of the elements. If LT.EQ.0 (or 1), a normal pressure distribution is prescribed directly by means of pressure intensities at the face corner nodes. If LT.EQ.2, the face is exposed to hydrostatic pressure due to fluid head.

FACE NUMBER	NATURAL COORDINATES	CORNER NODE NUMBERS N_1	N_2	N_3	N_4
1	(+1, s, t)	1	4	8	5
2	(-1, s, t)	2	3	7	6
3	(r, +1, t)	1	5	6	2
4	(r, -1, t)	4	8	7	3
5	(r, s, +1)	1	2	3	4
6	(r, s, -1)	5	6	7	8

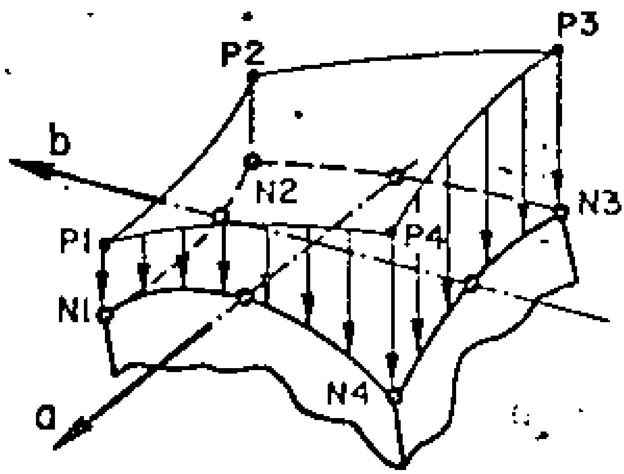
TABLE Corner Node Numbers for the Solid Element Faces

b. Normal Pressure Data (4F10.0) (LT.EQ.1, only)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	P1	Pressure at face node N_1
(2)	11 - 20	P2	Pressure at face node N_2; EQ.0; default set to "P1"
	21 - 30	P3	Pressure at face node N_3; EQ.0; default set to "P1"
	31 - 40	P4	Pressure at face node N_4; EQ.0; default set to "P1"

NOTES/

(1) The pressure distribution acting on an element face is defined by specifying intensities P1,P2,P3,P4 at the face corner nodes as shown below:



The face corner node numbers are given in the Table and positive pressure tends to compress the volume of the element.

The variation of pressure over the element face, p(a,b), is given as:

$$p(a,b) = P1 \times h_1 + P2 \times h_2 + P3 \times h_3 + P4 \times h_4$$

where

$$h_1 = (1/4)\ (1+a)\ (1+b)$$
$$h_2 = (1/4)\ (1-a)\ (1+b)$$
$$h_3 = (1/4)\ (1-a)\ (1-b)$$
$$h_4 = (1/4)\ (1+a)\ (1-b)$$

in quadrilateral natural face coordinates (a,b).

(2) If any of the entries P2,P3,P4 are omitted, these values are re-set to the value of P1; i.e., for a uniformly distributed pressure (p), we have P1.EQ.p and cc 11-40 blank. If P2 is zero specify a small number.

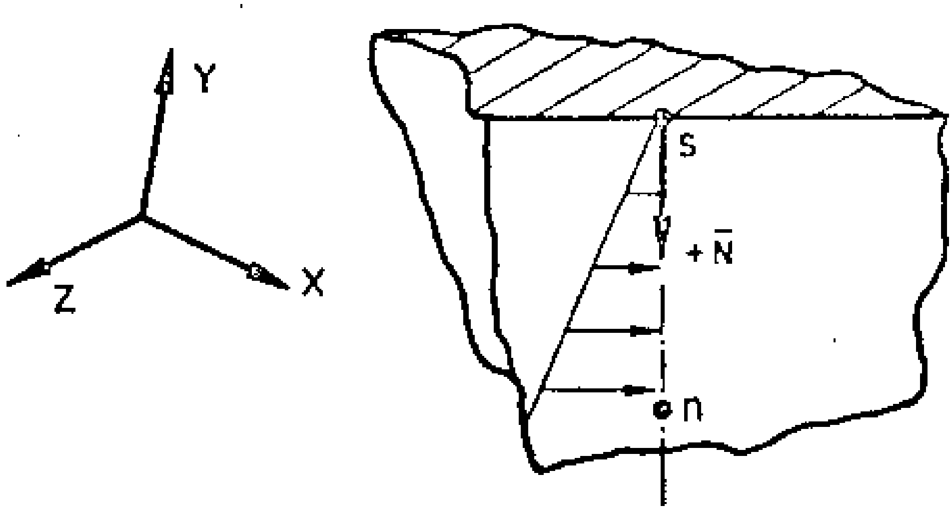
c. <u>Hydrostatic Pressure Data</u> (7F10.0) (LT.EQ.2, only)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	GAMMA	Weight density of the fluid, γ; GT.0
(2)	11 - 20	XS	X-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	21 - 30	YS	Y-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	31 - 40	ZS	Z-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	41 - 50	XN	X-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface
	51 - 60	YN	Y-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface
	61 - 70	ZN	Z-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface

NOTES/

(1) GAMMA is the weight density (i.e., units of force per unit of fluid volume) of the fluid in contact with element face number NFACE.

(2) Point "s" is any point in the free surface of the fluid, and point "n" is located such that the direction from s to n is normal to the free surface and is positive with increasing depth.



Hydrostatic pressure in contact with an element face causes element compression; i.e., pressure resultant acts toward the element centroid. Nodes located above the fluid surface are automatically assigned zero pressure intensities if an element face is not (or only partially) submerged in the fluid.

5. Stress Output Request Location Sets (7I5)

If NOPSET is zero on the Control Card, skip this section, and global stresses will be computed and output at the element centroid only. Otherwise, NOPSET cards must be input as follows:

notes	column	variable	entry
(1)	1 - 5	LOC1	Location number of output point 1
	6 - 10	LOC2	Location number of output point 2
	11 - 15	LOC3	Location number of output point 3
	16 - 20	LOC4	Location number of output point 4
	21 - 25	LOC5	Location number of output point 5
	26 - 30	LOC6	Location number of output point 6
	31 - 35	LOC7	Location number of output point 7 LE. 27

NOTES/

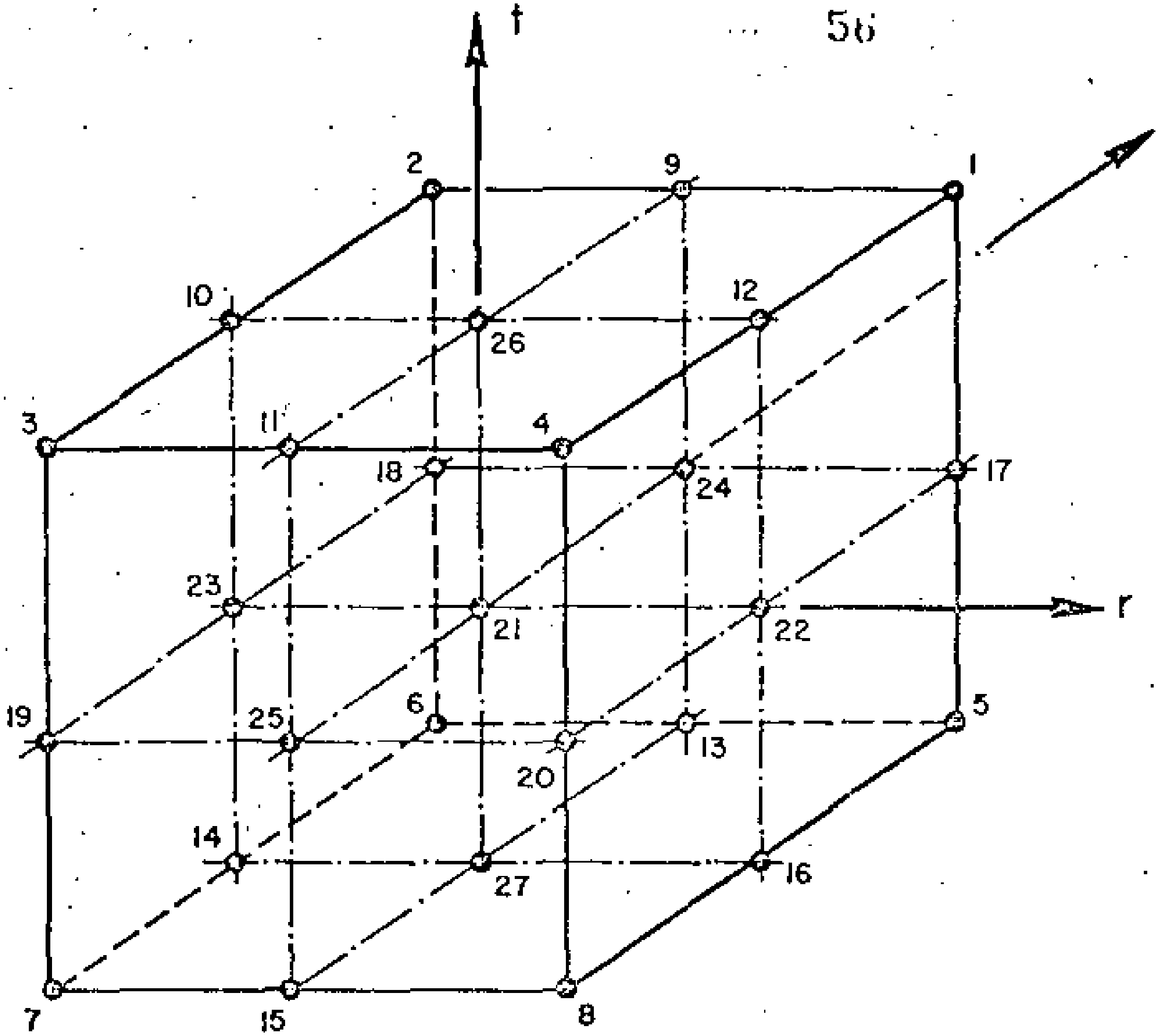
(1) 27 element locations are assigned numbers as shown in the Figure below. Locations 1 to 21 correspond to node numbers 1 to 21, respectively. Locations 22 to 27 are element face centroids. The first zero (or blank) entry on a location card terminates reading of location numbers for the output set; hence, fewer than seven locations can be requested in an output set. Location numbers must be input in order of increasing magnitude; i.e., LOC2 is greater than LOC1, LOC3 is greater than LOC2, etc. In dynamic analysis, FACE 1, FACE 2,..., FACE 6 correspond to output locations 22,23,...,27 respectively. (See Table VII.1).

6. Element Load Case Multipliers

Five (5) cards must be input in this section specifying the fraction of gravity (X,Y,Z), the fraction of thermal loads and the fraction of pressure loads to be added to each of the element loading combinations (A,B,...). Load case multiplier data affect static analysis calculations only.

Card 1 X-direction gravity (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	GXA	Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case A
			. . .
	31 - 40	GXD	Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case D



ELEMENT STRESS OUTPUT LOCATION NUMBERS

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2 Y-direction gravity (4F10.0)

57

Card 3 Z-direction gravity (4F10.0)

Card 4 Thermal loads (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(2)	1 - 10	TA	Fraction of thermal loads to be applied in element load case A
			. . .
	31 - 40	TD	Fraction of thermal loads to be applied in element load case D

Card 5 Pressure loads (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(3)	1 - 10	PA	Fraction of pressure loads to be applied in element load case A
			. . .
	31 - 40	PD	Fraction of pressure loads to be applied in element load case D

NOTES/

(1) Gravity loads on the structure due to static body forces are computed from the weight density of element materials and the element geometry. These loads are assigned to the element load combinations by means of the entries on Cards 1,2 and 3 for forces in the X,Y,Z directions, respectively.

(2) Thermal loads are computed knowing the node temperatures input in Section III, the stress free reference temperature (T_0) input in Section 7 and the element's material properties and node coordinates. The temperature distribution within the element is described using the same interpolation functions which describe the variation of displacements within the element.

(3) Pressure loads are first assigned to element load cases (A,B,...) by means of the entries (scale factors) on Card 5, and the distributed load sets which were input in Section 4 are then applied to the elements individually for cases (A,B,...) by means of load set references given in Section 7.

7. Element Cards

Two cards (if MAXNOD.EQ.8) or three cards (if MAXNOD.GT.8) must be prepared for each element that appears in the input, and the format for these cards is as follows:

Card 1 (6I5,F10.,4I5,4I2)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Element number; GE.1 and LE.NSOL21
(2)	6 - 10	NDIS	Number of nodes to be used in describing the element's displacement field; EQ.0: default set to "MAXNOD"
(3)	11 - 15	NXYZ	Number of nodes to be used in the description of element geometry; EQ.0; default set to "NDIS" EQ.NDIS → isoparametric element LT.NDIS → subparametric element
	16 - 20	NMAT	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
(4)	21 - 25	MAXES	Identification number of the material axis orientation set; GE.1 and LE.NORTHO EQ.0; material axes default to the global X,Y,Z system
(5)	26 - 30	IOP	Identification number of the stress output location set; GE.1 and LE.NOPSET EQ.0; centroid output only
	31 - 40	TZ	Stress free reference temperature, T_o
(6)	41 - 45	KG	Node number increment for element data generation; EQ.0; default set to "1"
	46 - 50	NRSINT	Integration order for natural coordinate (r,s) directions; EQ.0; default set to "INTRS"
	51 - 55	NTINT	Integration order for natural coordinate (t) direction; EQ.0; default set to "INTT"
(7)	56 - 60	IREUSE	Flag indicating that the stiffness and mass matrices for this element are the same as those for the preceding element; EQ.0; no EQ.1; yes
(8)	61 - 62	LSA	Pressure set for element load case A
	63 - 64	LSB	Pressure set for element load case B
	65 - 66	LSC	Pressure set for element load case C
	67 - 68	LSD	Pressure set for element load case D; LE.NDLS

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2 (16I5)

59

notes	columns	variable	entry
(9)	1 - 5		Node 1 number
	6 - 10		Node 2 number
	11 - 15		Node 3 number
	16 - 20		Node 4 number
	21 - 25		Node 5 number
	26 - 30		Node 6 number
	31 - 35		Node 7 number
	36 - 40		Node 8 number
(10)	41 - 45		Node 9 number
	46 - 50		Node 10 number
	51 - 55		Node 11 number
	56 - 60		Node 12 number
	61 - 65		Node 13 number
	66 - 70		Node 14 number
	71 - 75		Node 15 number
	76 - 80		Node 16 number

Card 3 (5I5) (required if MAXNOD.GT.8)

note	columns	variable	entry
	1 - 5		Node 17 number
	6 - 10		Node 18 number
	11 - 15		Node 19 number
	16 - 20		Node 20 number
	21 - 25		Node 21 number

NOTES/

(1) Element cards must be input in ascending element number order beginning with "1" and ending with "NSOL21". Repetition of element numbers is illegal, but element cards may be omitted, and missing element data are generated according to the procedure described in note (7).

(2) NDIS is a count of the node numbers actually posted on Cards 2 and 3 which must immediately follow Card 1. NDIS must be at least eight (8), but must be less than or equal to the limit (MAXNOD) which was given on the Control Card, Section 1. Element displacements are assigned at the NDIS non-zero nodes, and thus, the order of the element matrices is three (i.e., translations X,Y,Z) times NDIS. The eight corner nodes of the hexahedron must be input, but nodes 9 to 21 are optional, and any or all of these optional nodes may be used to describe the element's displacement field.

(3) When element edges are straight it is unnecessary computationally to include side nodes in the numerical evaluation of coordinate derivatives, the Jacobian matrix, etc., and since regular element shapes are common, an option has been included to use fewer nodes in these geometric calculations than are used to describe element displacements. The first NXYZ non-zero nodes posted on Cards 2 and 3 are used to evaluate those parameters which pertain to element geometry only. NXYZ must be at least eight (8), and if omitted is re-set to NDIS. A common application might be a 20 node element (i.e., NDIS.EQ.20) with straight edges in which case NXYZ would be entered as "8".

(4) MAXES (unless omitted) refers to one of the material axes set defined in Section 3. If omitted, the material (NMAT) orientation is such that the (X_1,X_2,X_3) axes coincide with the (X,Y,Z) axes, respectively.

(5) IOP (unless omitted) refers to one of the output location sets given in Section 5. If IOP.EQ.0, stress output is quoted at the element centroid only. Stress output at a point consists of three normal and three shear components referenced to the global (X,Y,Z) axes.

(6) When element cards are omitted, element data are generated automatically as follows:

(a) all data on Card 1 for generated elements is taken to be the same as that given on the first element card in the sequence;

(b) non-zero node numbers (given on Cards 2 and 3 for the first element) are incremented by the value "KG" (which is given on Card 1 of the first element) as element generation progresses; zero (or blank) node number entries are generated as zeroes.

The last element cannot be generated.

(7) The flag IREUSE allows the program to bypass stiffness and mass matrix calculations providing the current element is identical to the preceding element; i.e., the preceding and current elements are identical except for a rigid body translation. If IREUSE.EQ.0, new matrices are computed for the current element. If IREUSE.EQ.1 it is also assumed that the node temperatures of the element (for calculation of thermal loads) are the same as those of the preceding element.

(8) Pressure loads are assigned (i.e., applied) to the element by means of load set references in cc 61-62 for combination A, cc 63-64 for B, etc. A zero entry means that no pressure acts on the element for that particular element load combination.

(9) The first eight node numbers establish the corners or vertices of a general hexahedron and must be all non-zero, (see Figure in Section 1 on control cards). Node numbers must be input in the sequence indicated otherwise volume and surface area integrations will be indefinite.

(10) The number of cards required as input for each element depends on the variable MAXNOD. For the case of MAXNOD.EQ.8, only Card 2 is required. If MAXNOD.GT.8, Cards 2 and 3 are required for all elements.

Nodes 9 to 21 are optional, and only those nodes actually used to describe the element are input. The program will read all 21 entries if MAXNOD was given as 9 or greater, but only NDIS non-zero values are expected to be read on Cards 2 and 3. If for example one element is described by 10 nodes, then cc 1-40 on Card 2 would be the eight corner node numbers, and the remaining two node numbers would be posted somewhere on Cards 2 and 3.

TYPE 9 - THREE-DIMENSIONAL STRAIGHT OR CURVED PIPE ELEMENTS

Pipe elements are identified by the number twelve (12). Axial and shear forces, torque and bending moments are calculated for each member. Gravity loadings in the global (X,Y,Z) directions, uniform temperature changes (computed from input nodal temperatures), and extensional effects due to internal pressure form the basic member loading conditions. Pipe element input is described by the following sequence of cards:

1. Control Card (14I5)

notes	columns	variable	entry
	4 - 5		Enter the number "12"
(1)	6 - 10	NPIPE	Number of pipe elements
	11 - 15	NUMMAT	Number of material sets
	16 - 20	MAXTP	Maximum number of temperature points used in the table for any material GE.1; at least one point
	21 - 25	NSECT	Number of section property sets; GE.1
(2)	26 - 30	NBRP	Number of branch point nodes at which output is required; EQ.0; no branch point output is produced
	31 - 35	MAXTAN	Maximum number of tangent elements common to any one branch point node; EQ.0; default set to "4"
	36 - 40	NPAR(8)	Blank
	41 - 45	NPAR(9)	Tangent stiffness load matrix dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing
	46 - 50	NPAR(10)	Bend stiffness load matrix dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing
	51 - 55	NPAR(11)	Element parameters dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing

NOTES:

(1) The number of pipe elements ("NPIPE") counts both tangent and bend geometries, and both the material and section property tables can reference either the bend or tangent element types.

(2) A branch point is defined as a nodal location where at least three (3) tangent pipe elements connect. The two input parameters "NBRP" and "MAXTAN" reserve storage for an index array created during the processing of pipe element data; posting a larger number of maximum common tangents than actually exist is not considered a fatal error condition. Branch point data is read if requested, but not currently used; i.e. to be used in future program versions.

2. Material Property Cards

Temperature-dependent Young's modulus (E), Poisson's ratio (ν) and thermal expansion coefficient (α) are allowed. If more than one (1) temperature point is input for a material table, then the program selects properties using linear interpolation between input temperature values. The temperature used for property selection is the average element temperature which is denoted as T_a:

$$T_a = (T_i + T_j)/2$$

where T_i and T_j are the input nodal temperatures for ends "i" and "j" of the pipe. For each different material, the following set of cards must be input:

a. material identification card (2I5,6A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
	6 - 10	NT	Number of different temperatures at which properties are given; EQ.0; one temperature point is assumed to be input
	11 - 46		Material description used to label the output for this material

NOTES/

(1) Material identification number must be input between one ("1") and the total number of materials specified ("NUMMAT").

b. material cards (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	T(N)	Temperature, T_n
	11 - 20	E(N)	Young's modulus, E_n
	21 - 30	XNU(N)	Poisson's ratio, ν_n
	31 - 40	ALP(N)	Thermal expansion coefficient, α_n

NOTES/

(1) Supply one card for each temperature point in the material table; at least one card is required. Temperatures must be input in increasing (algebraic) order. If two or more points are used, care must be taken to insure that the table covers the expected range of average temperatures existing in the elements to which the material table is assigned.

3. Section Property Cards (I5,5F10.0,3A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Section property identification number; GE.1 and LE.NSECT
(2)	6 - 15		Outside diameter of the pipe, d_o
	16 - 25		Pipe wall thickness, t
	26 - 35		Shape factor for shear distortion, α_v
(3)	36 - 45		Weight per unit length of section, γ_1
(4)	46 - 55		Mass per unit length of section, ρ_1
	56 - 73		Section description (used to label the output)

NOTES/

(1) Section property identification numbers must be input in an ascending sequence beginning with one ("1") and ending with the total number of section specified ("NSECT").

(2) Assuming that (y,z) are the section axes and that the x-axis is normal to the section, the properties for the section are computed from the input parameters [d_o, t and α_v] as follows:

(a) inner and outer pipe radii;

$$r_o = d_o/2$$

$$r_i = r_o - t$$

(b) cross-sectional area (axial deformations);

$$A_x = \pi(r_o^2 - r_i^2)$$

(c) principal moments of inertia (bending);

$$I_y = (\pi/4)\ (r_o^4 - r_i^4)$$

$$I_z = I_y$$

(d) polar moment of inertia (torsion);

$$J_x = 2I_y$$

(e) effective shear areas (shear distortions);

$$A_y = A_x/\alpha_v$$

$$A_z = A_y$$

Note that the shape factor for shear distortion (α_v) may be input directly. If the entry is omitted, the shape factor is computed using the equation:

$$\alpha_v = (4/3)\ (r_o^3 - r_i^3)/[(r_o^2 + r_i^2)\ (r_o - r_i)]$$

$$\approx 2.0$$

IV. ELEMENT DATA (continued)

An input value for α_v greater than one hundred (100.) causes the program to neglect shear distortions entirely. If used, the same shape factor is applied to both in and out-of-plane shear distortions.

(3) The weight per unit length of section (γ_1) is used to compute gravity loadings on the elements. Fixed end shears, moments, torques, etc. are computed automatically and applied as equivalent nodal loads. These forces will not act on the structure unless first assigned to one of the element load cases (A,B,C,D) in Section IV.L.5. below.

(4) The mass per unit length is only used to form the lumped mass matrix for a dynamic analysis case. If no entry is input, then the program will re-define the mass density from the weight density using:

$$\rho_1 = \gamma_1/386.4$$

Either a non-zero weight density or mass density will cause the program to assign masses to all pipe element nodes.

4. Branch Point Node Numbers

If the number of output branch point nodes has been omitted from the control card (i.e., cc 26-30 blank), skip this section of input, and no branch point data will be read. Otherwise, supply node numbers for a total number of branch points requested on the control card, ten (10) nodes per card:

first card (10I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5		Node number at branch point 1
	6 - 10		Node number at branch point 2
	. . .		. . .
	45 - 50		Node number at branch point 10

second card (10I5) -- if required

notes	columns	variable	entry
	1 - 5		Node number at branch point 11
	. . .		. . .

NOTES/

(1) A node does not define a branch point unless at least three (3) tangent elements are common to the node. Branch point output is only produced for static analysis cases.

5. Element Load Case Multipliers

Five (5) cards must be input in this section specifying the fraction of gravity (in each of the X,Y,Z coordinate directions), the fraction of thermal loading and the fraction of internal pipe pressure loading to be added to each of four (4) possible element loading combinations (A,B,C,D).

Card 1 X-direction gravity (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case D

Card 2 Y-direction gravity (4F10.0)

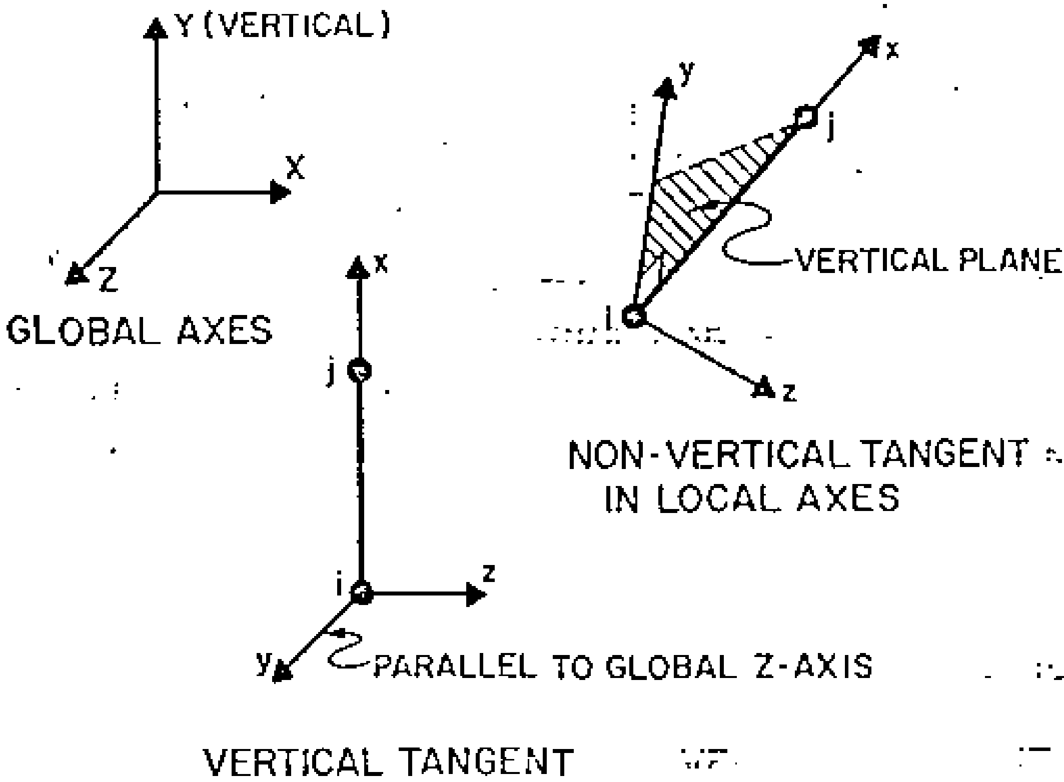
Card 3 Z-direction gravity (4F10.0)

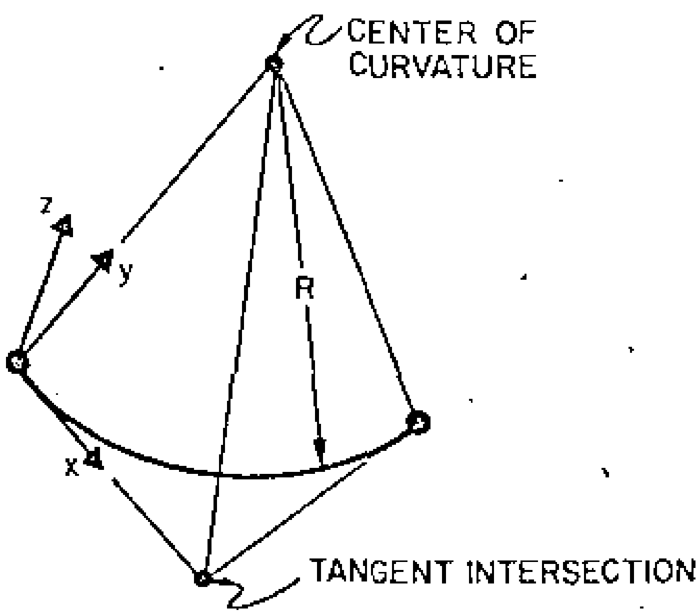
Card 4 Thermal loads (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(2)	1 - 10		Fraction of thermal loading to be applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of thermal loading to be applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of thermal loading to be applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of thermal loading to be applied in element load case D

Card 5 Internal pressure (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(3)	1 - 10		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case D





LOCAL COORDINATE SYSTEMS FOR
PIPE ELEMENTS

5. Element Load Case Multipliers (continued)

NOTES/

(1) No gravity loads will be produced if the weight per unit length was input as zero on all section property cards. Otherwise, a multiplier of 1.0 input for an element load case means that 100% of deadweight will be assigned to that load combination.

(2) No thermal loading will result if the coefficient of thermal expansion has been omitted from all the material cards. Otherwise, thermal loads are computed for each element using the ΔT between the average element temperature (T_a) and the stress-free temperature (T_o) given with each pipe element card (Section IV.L.6, below).

(3) Element distortions are computed for each element due to internal pressure, and these loads are combined into element load cases by means of appropriate non-zero entries in Card 5.

Gravity, thermal or pressure-induced loads cannot act on the structure unless first combined in one or more of the element load sets (A,B,C,D). Once defined, element load cases are assigned (via scale factors) to the structure load cases by means of Element Load Multipliers given in Section VI. An element load case combination may be used a multiple number of times when defining the various structure loading conditions.

6. Pipe Element Cards

a. card type 1

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 4	N	Pipe element number; GE.1 and LE.NPIPE
	5		Geometric type code: "T" (or blank); tangent section "B" ; bend (circular) section
	6 - 10	I	Node I number
	11 - 15	J	Node J number
	16 - 20	MAT	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
	21 - 25	ISECT	Section property identification number; GE.1 and LE.NSECT
(2)	26 - 35		Stress-free temperature, T_o
(3)	36 - 45		Internal pressure, p
(4)	46 - 55		Positive projection of a local y-vector on the global X-axis; A(yX)

IV. ELEMENT DATA (continued)

6. Pipe Element Cards (continued)

notes	columns	variable	entry
	56 - 65		Positive projection of a local y-vector on the global Y-axis; A(y,Y)
	66 - 75		Positive projection of a local y-vector on the global Z-axis A (y,Z)
(5)	76 - 80	KG	Node number increment for tangent element generation; EQ.0; default set to "1"

NOTES/

(1) Card type 1 is used for both tangent and bend elements; a second card (card type 2, below) must be input immediately following card type 1 if the pipe element is a bend (i.e., "B" in cc 5). Note that element cards must be input in ascending sequence beginning with one ("1") and ending with the total number of pipe elements. If tangent elements are omitted, generation of the intermediate elements will occur; the generation algorithm is described below. An attempt to generate bend type elements is considered to be an error.

(2) The stress-free temperature, T_o, is subtracted from the average element temperature, T_a, to compute the uniform temperature difference acting on the element:

$$\Delta T = T_a - T_o$$

The entire element is assumed to be at this uniform value of temperature difference.

(3) The value of pressure is used to compute a set of self-equilibrating joint forces arising from member distortions due to pressurization; i.e., the mechanical equivalent of thermal loads. For bend elements, the pressure is also used to compute the bend flexibility factor, k_p. The curved pipe subjected to bending is more flexible than elementary beam theory would predict. The ratio of "actual" flexibility to that predicted by beam theory is denoted by k_p; where

$$k_p = (1.65/h)/[1 + (6p/Eh)(R/t)^{4/3}] \geq 1$$

in which

$$h = tR/r^2$$

$$r = (d_o - t)/2$$

6. Pipe Element Cards (continued)

and

t = pipe wall thickness
R = radius of the circular bend
r = mean radius of the pipe cross-section
d_o = outside diameter of the pipe
E = Young's modulus
p = internal pressure

The flexibility factor is computed and applied to all bend elements; pressure stiffening is neglected if the entry for internal pressure ("p") is omitted.

(4) The global projections of the local y-axis for a tangent member may be omitted (cc 46–75 blank); for this case, the following convention for the local system is assumed:

(a) tangents parallel to the global Y-axis (vertical axis) have their local y-axes directed parallel to and in the same direction as the global Z-axis;

(b) tangents not parallel to the global Y-axis have their local y-axes contained in a vertical (global) plane such that local y projects positively on the positive global Y-axis.

For bend elements, the global projections of the local y-axis are not used; instead, the local axis convention is defined as follows:

(a) the local y-axis is directed positively toward and intersects the center of curvature of the bend (i.e., radius vector);

(b) the local x-axis is tangent to the arc of the bend and is directed positively from node I to node J.

Note that for all elements, the local x, y, z system is a right-handed set (see figure).

(5) If a tangent element sequence exists such that each element number (NE_i) is one (1) greater than the previous number (NE_{i-1}); i.e.,

$$NE_i = NE_{i-1} + 1$$

only the element card for the first tangent in the

6. Pipe Element Cards (continued)

series need be input. The node numbers for the missing tangents are computed using the formulae:

$$NI_i = NI_{i-1} + KG$$

$$NJ_i = NJ_{i-1} + KG$$

where "KG" is the node number increment input in cc 76-80 for the first element in the series, and the

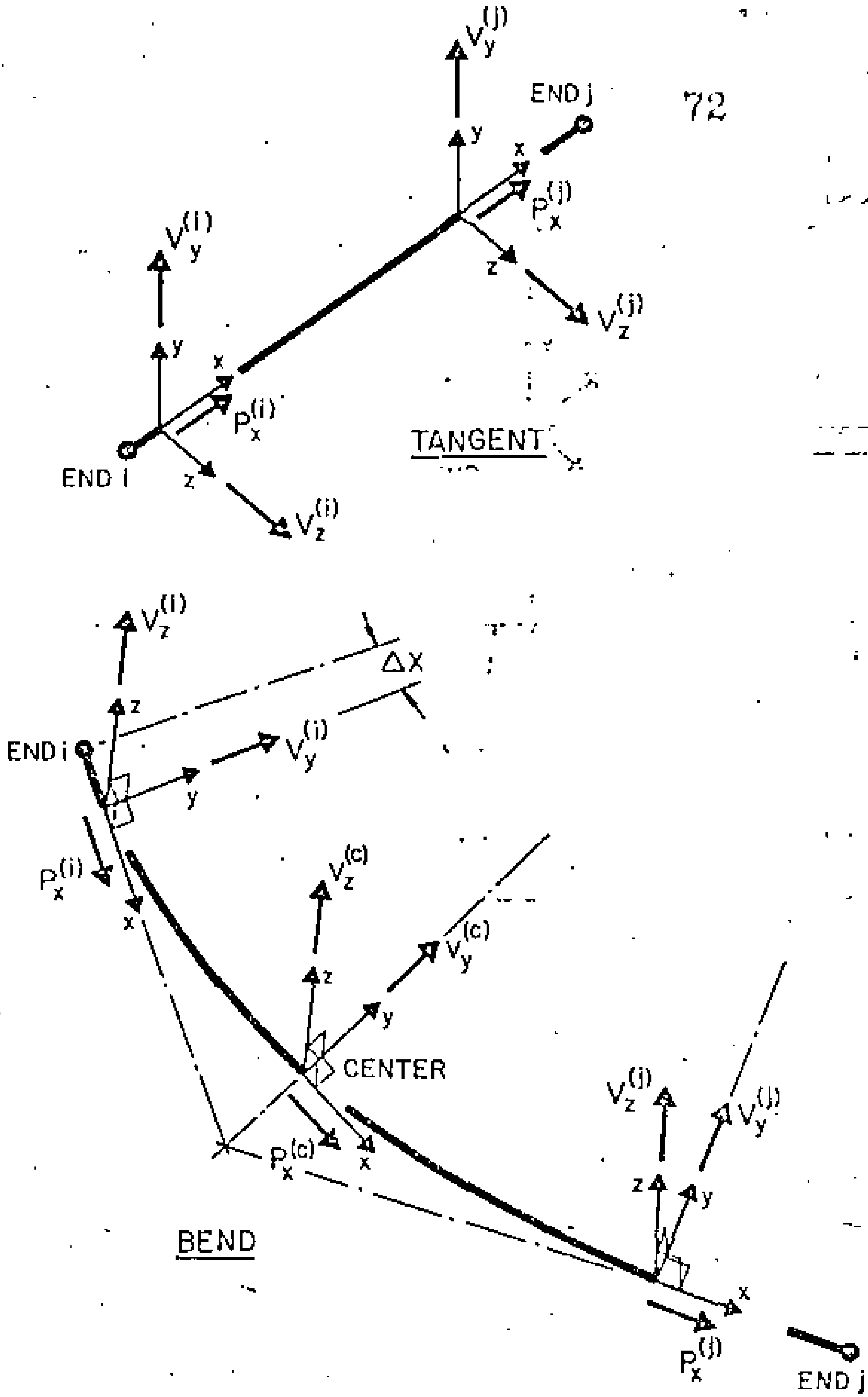
(a) material identification number
(b) section property identification number
(c) stress-free temperature
(d) internal pressure
(e) y-axis global projections

for each tangent in the generation sequence are taken to be the same as those input on the first card in the series. The node number increment ("KG") is reset to one (1) if left blank on the first card in the series. The last (highest) element cannot be generated; i.e., it must be input.

Bend element data cannot be generated because two input cards are required for each bend. Also, the element just prior to a bend element must appear on an input card. Several bends may be input in a sequence, but each bend must appear (on two cards) in the input stream.

b. card type 2 (F10.0,3X,A2,4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	R	Radius of the bend element, R
(2)	14 - 15		Third point type code: "TI" (or blank); third point is the tangent intersection point "CC" ; third point is the center of curvature
	16 - 25		X-ordinate of the third point, X_3
	26 - 35		Y-ordinate of the third point, Y_3
	36 - 45		Z-ordinate of the third point, Z_3
	46 - 55		Fraction of wall thickness to be used for dimensional tolerance tests; EQ.0; default set to "0.1"



FORCE SIGN CONVENTION FOR PIPE ELEMENT OUTPUT

6. Pipe Element Cards (continued)

NOTES/

(1) The radius of the bend ("R") must be input regardless of the method ("TI" or "CC") used to define the third point for the bend.

(2) If the tangent intersection point is used, the program computes a radius for the bend and compares the computed value with the input radius. An error condition is declared if the two radii are different by more than the specified fraction (or multiple) of the section wall thickness. The lengths of the two tangent lines (I to TI and J to TI) are compared for equality, and an error will be flagged if the two values are discrepant by more than the dimensional tolerance.

If the center of curvature is input, the distances from the third point to nodes I and J are compared to the input radius; discrepancies larger than the user defined tolerance are noted as errors.

This second element card is only to be input for the bend type element.

Element Stress Output

Stress output for pipe elements consists of forces and moments acting in the member cross sections at the ends of each member and at the midpoints of the arcs in bend elements. Output quantitites act on the element segment connecting the particular output station and end i; i.e., j to i, center to i, or ΔX to i (where $\Delta X \to 0$). Positive force/moment vectors are directed into the positive local (x,y,z) directions, as shown in the accompanying figure.

V. CONCENTRATED LOAD/MASS DATA (2I5,6F10.4).

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Nodal point number
(2)	6 - 10	L	Structure load case number; GE.1; static analysis EQ.0; dynamic analysis
	11 - 20	FX(N,L)	X-direction force (or translational mass coefficient)
	21 - 30	FY(N,L)	Y-direction force (or translational mass coefficient)
	31 - 40	FZ(N,L)	Z-direction force (or translational mass coefficient)
	41 - 50	MX(N,L)	X-axis moment (or rotational inertia)
	51 - 60	MY(N,L)	Y-axis moment (or rotational inertia)
	61 - 70	MZ(N,L)	Z-axis moment (or rotational inertia)

NOTES/

(1) For a static analysis case (NDYN.EQ.0), one card is required for each nodal point ("N") having applied (non-zero) concentrated forces or moments. All structure load cases must be grouped together for the node ("N") before data is entered for the next (higher) node at which loads are applied. Only the structure load cases for which node N is loaded need be given, but the structure load case numbers ("L") which are referenced must be supplied in ascending order. Node loadings must be defined (input) in increasing node number order, but again, only those nodes actually loaded are required as input. The static loads defined in this section act on the structure exactly as input and are not scaled, factored, etc. by the element load case (A,B,C,D) multipliers (Section VI, below). Nodal forces arising from element loadings are combined (additively) with any concentrated loads given in this section. Applied force/moment vectors act on the structure, positive in the positive global directions. Only one card is allowed per node per load case.

For a dynamic analysis case (NDYN.EQ.1,2, 3 or 4), structure load cases have no meaning, but the program expects to read data in this section nonetheless. In place of concentrated loads, lumped mass coefficients for the nodal degrees of freedom may be input for any (or all) nodes. The mass matrix is automatically constructed by the program from element geometry and associated material densities; the mass coefficients read in this section are combined (additively) with the existing element-based lumped mass matrix. For mass input, a node may only be specified once, and the load case number ("L") must be zero (or blank).

V. CONCENTRATED LOAD/MASS DATA (2I5,6F10.4) (continued)

The program terminates reading loads (or mass) data when a zero (or blank) node number ("N") is encountered; i.e., terminate this section of input with a blank card. For the special case of a static analysis with no concentrated loads applied, input only one (1) blank card in this section. Similarly, a dynamic analysis in which the mass matrix is not to be augmented by any entries in this section requires only one (1) blank card as input.

(2) For a static analysis, structure load case numbers range from "1" to the total number of load cases requested on the Master Control Card ("LL"); thus, $1 \le L \le LL$, NDYN.EQ.0. For a dynamic analysis, only zero (0) references are allowed; thus, L = 0, NDYN.EQ.1,2 3, or 4.

VI. ELEMENT LOAD MULTIPLIERS (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1,2)	1 - 10	EM(1)	Multiplier for element load case A
	11 - 20	EM(2)	Multiplier for element load case B
	21 - 30	EM(3)	Multiplier for element load case C
	31 - 40	EM(4)	Multiplier for element load case D

NOTES:

(1) One card must be given for each static (NDYN.EQ.0) structure load case requested on the Master Control Card ("LL"). The cards must reference load case numbers in ascending order. The four (4) element load sets (A,B,C,D), if created during the processing of element data (Section IV, above), are combined with any concentrated loads specified in Section V for the structure load cases. For example, suppose an analysis case calls for seven (7) static structure loading conditions (i.e., LL = 7), then the program expects to read seven (7) cards in this section. Further, suppose card number three (3) in this section contains the entries:

[EM(1),EM(2),EM(3),EM(4)] = [-3.0,0.0,2.0,0.0]

Structure load case three (3) will then be constructed using 100% of any concentrated loads specified in Section V minus (-) 300% of the loads in element set A plus (+) 200% of the loads in element set C. Load sets B and D will not be applied in structure load case 3. Element load sets may be referenced any number of times in order to construct different structure loading conditions. Element-based loads (gravity, thermal, etc.) can only be applied to the structure by means of the data entries in this section.

(2) If this case calls for one of the dynamic analysis options, supply only one blank card in this section. If the job is a dynamic re-start case (NDYN.EQ.-2 or -3), skip this section.

Static analysis input is complete with this section. Begin a new data case with a new Heading Card (see Section I).

Four (4) types of dynamic analysis can be performed by the program. The type of analysis is indicated by the number "NDYN" specified in card columns 21-25 of the Master Control Card (Section II). If

NDYN.EQ.1; Determination of system mode shapes and frequencies only (complete input Section VII.A, only)

NDYN.EQ.2; Dynamic Response Analysis for arbitrary time dependent loads using mode superposition (complete both Sections VII.A and B below)

NDYN.EQ.3; Response Spectrum Analysis (complete both Sections VII.A and C, below)

NDYN.EQ.4; Dynamic Response Analysis for arbitrary time dependent loads using step-by-step direct integration (complete Section VII.B below)

In any given dynamic analysis case only one (1) value of NDYN will be considered. However, if NDYN.EQ.2 or 3, the program must first solve the eigenvalue problem for structure modes and frequencies.. These eigenvalues/vectors are then used as input to either the Forced Response Analysis (NDYN.EQ.2) or to the Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.3). Hence, options 1, 2 or 3 all require that the control parameters for eigenvalue extraction be supplied in Section VII.A, below.

In case of a direct step-by-step integration analysis (NDYN.EQ.4) do not provide the eigenvalue solution control card of Section VII.A.

For the special case of dynamic analysis re-start (NDYN.EQ.-2 or -3), data input consists of the Heading Card (Section I), the Master Control Card (Section II), and either of Sections VII.B (-2) or VII.C (-3), below. Re-starting is possible only if a previous solution using the same model was performed with NDYN.EQ.1, and the results from this eigenvalue solution were saved on the re-start file. (See Appendix A.)

Up to this section the program processes (i.e., expects to read) essentially the same blocks of data for either the static or dynamic analysis cases; certain of these preceding data cards, however, are read by the program but are not used in the dynamic analysis phase. In general, the purpose of the preceding data sections is to provide information leading to the formation of the system stiffness and mass matrices (appropriately modified for displacement boundary conditions). For example, element load sets (A,B,C,D) may be constructed as though a static case were to be considered, but these data are not used in a dynamic analysis; i.e., the same data deck through Section IV can be used for either type of analysis. The concept of structure loading conditions is not defined for the dynamic case, and input for Sections V and VI must be prepared specially.

A diagonal (lumped) mass matrix is formed automatically using element geometry and assigned material density or densities. The mass matrix so defined contains only translational mass coefficients calculated from tributary element volumes common to each node. Known rotational inertias must be input for the individual nodal degrees of freedom in Section V, above.

Non-zero impressed displacements (or rotations) input by means of the BOUNDARY element (type "7") are ignored; instead the component is restrained against motion during dynamic motion of the structure.

The program does not change the order of the system by performing a condensation of those nodal degrees of freedom having no (zero) mass coefficients; i.e., a zero mass reduction is not performed. No distinction is made between static and dynamic degrees of freedom; i.e., they are identical in sequence, type and total number.

VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (NDYN.EQ.1, 2 or 3) (3I5,2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	IFPR	Flag for printing intermediate matrices, norms, etc. calculated during the eigenvalue solution; EQ.0; do not print EQ.1; print
(2)	6 - 10	IFSS	Flag for performing the STURM SEQUENCE check; EQ.0; check to see if eigenvalues were missed EQ.1; pass on the check
(3)	11 - 15	NITEM	Maximum number of iterations allowed to reach the convergence tolerance; EQ.0; default set to "16"
(4)	16 - 25	RTOL	Convergence tolerance (accuracy) for the highest ("NF") requested eigenvalue; EQ.0; default set to "1.0E-5"
(5)	26 - 35	COFQ	Cut-off frequency (cycles/unit time) EQ.0; NF eigenvalues will be extracted GT.0; extract only those values below COFQ
(6)	36 - 40	NFO	Number of starting iteration vectors to be read from TAPE10

NOTES/

(1) Extra output produced by the eigenvalue solutions can be requested; output produced by this option can be quite voluminous. Normal output produced by the program consists of an ordered list of eigenvalues followed by the eigenvectors for each mode. The number of modes found and printed is specified by the variable "NF" given in card columns 16-20 of the Master Control Card.

(2) The program performs the solution for eigenvalues/vectors using either of two (2) distinct algorithms:

(a) the DETERMINANT SEARCH algorithm requires that the upper triangular band of the system stiffness matrix fit into high speed memory (core); i.e., one equation "block".

(b) the SUBSPACE ITERATION algorithm is used if only portions (fractions) of the system matrix can be retained in core; i.e., the matrix (even though in band form) must be manipulated in blocks.

A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

The program will automatically select the SUBSPACE ITERATION procedure for eigenvalue solution if the model is too large for the in-core algorithm.

The entries "IFSS", "NITEM" and "RTOL" are ignored if the program can use the DETERMINANT SEARCH to find eigenvalues. Whether or not a model is too large for the DETERMINANT SEARCH depends on the amount of core allocated (by the programmer and not the user) for array storage. The program variable "MTOT" equals the amount of working storage available.

Define:

MBAND = maximum equation bandwidth (coefficients)
≈ (maximum element node number difference) X (average number of degrees of freedom per node)

NEQ = total number of degrees of freedom in the model
= (6) X (total number of nodes) - [number of fixed (deleted) degrees of freedom]

NEQB = number of equations per block of storage
= MTOT/ MBAND/ 2 (for large systems)

If NEQB is less than NEQ, the model is too large for the DETERMINANT SEARCH algorithm, and the SUBSPACE ITERATION procedure will be used.

If the SUBSPACE ITERATION algorithm is used the user may request that the STURM SEQUENCE check be performed. By experience the algorithm has always produced the lowest NF eigenvalues, but there is no formal mathematical proof that the calculated NF eigenvalues will always be the lowest ones. The STURM SEQUENCE check can be used to verify that the lowest NF eigenvalues have been obtained. It should be noted that the computational effort expended in performing the STURM SEQUENCE check is not trivial. A factorization of the complete system matrix is performed at a shift just to the right of the NFth eigenvalue.

If during the SUBSPACE ITERATION the NFth eigenvalue fails to converge to a tolerance of "RTOL" (normally 1.0E-5, or 5 significant figures) within "NITEM" (normally "16") iterations, then the STURM SEQUENCE flag ("IFSS") is ignored.

A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

(3) The maximum number of iterations to reach convergence ("NITEM") applies only to the SUBSPACE ITERATION algorithm. If cc 11-15 are left blank, a default value of "16" for NITEM is assumed.

(4) The convergence tolerance ("RTOL") is applicable only if the SUBSPACE ITERATION algorithm is used. This tolerance test applies to the NFth eigenvalue, and all eigenvalues lower than the NFth one will be more accurate than RTOL. The lowest mode is found most accurately with precision decreasing with increasing mode number until the highest requested mode ("NF") is accurate to a tolerance of RTOL. Iteration is terminated after cycle number (k+1) if the NFth eigenvalue (λ, say) satisfies the inequality:

$$[\,|\lambda(k+1) - \lambda(k)|/\lambda(k)] < \text{RTOL}$$

If the determinant search algorithm is used, the eigenpairs are obtained to a high precision, which is indicated by the "physical error bounds"

$$\epsilon_i = \|r_i\|_2 \,/\, \|K\phi_i\|_2$$

where

$$r_i = (K - \omega_i^2 M)\,\phi_i \;,$$

and (ω_i^2 ϕ_i) are the i'th eigenvalue and eigenvector obtained in the solution.

(5) The cut-off frequency ("COFQ") is used by both eigenvalue algorithms to terminate computations if all eigenvalues below the specified frequency have been found.

The DETERMINANT SEARCH algorithm computes eigenvalues in order from "1" to "NF". If the Nth eigenvalue ($1 \le N < NF$) has a frequency greater than "COFQ", the remaining (NF-N) eigenvalues are not computed.

A: MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

The SUBSPACE ITERATION algorithm terminates calculation when the Nth eigenvalue is accurate (i.e., does not change with iteration) to a tolerance of RTOL. As before, the Nth eigenvalue is the nearest eigenvalue higher than COFQ. If the SUBSPACE ITERATION solution determines N eigenvalues less than COFQ (where, N < NF), the STURM SEQUENCE check (if requested) is performed using the Nth (rather than the NFth) eigenvalue as a shift.

Only those modes whose frequencies are less than COFQ will be used in the TIME HISTORY or RESPONSE SPECTRUM analyses (Sections VII.B and C, below).

(6) The starting iteration vectors, together with control information, must be written onto TAPE10 before the program execution is started. Appendix B describes the creation of TAPE10 and gives the required control cards.

(7) The program does not calculate rigid body modes, i.e. the system must have been restraint so that no rigid body modes are present. In exact arithmetic the element d_{nn} of the matrix D in the triangular factorization of the stiffness matrix, i.e. $K = LDL^T$, is zero if a rigid body mode is present. In computer arithmetic the element d_{nn} is small when compared with the other elements of the matrix D. If this condition occurs the program stops with a message.

Note: If many "artificially" stiff boundary elements are used, the average of the elements of D will be artificially large. Consequently, d_{nn} may be small in comparison, and although no rigid body modes may be present, the program will stop. In a dynamic analysis it is recommended not to use very stiff boundary elements.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.1)

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.4)

The NDYN.EQ.2 option uses the ("NF") mode shapes and frequencies computed in the preceeding Section (VII.A) to perform a mode superposition solution for forced response. The NDYN.EQ.4 option initiates a direct step-by-step integration of the coupled system equations, i.e. no eigenvalue solution has been performed and no transformation to the eigenvector basis is now carried out. The data input is identical to the case NDYN.EQ.2 except for the definition of damping. Dynamic response can be produced by two (2) general types of forcing function:

(1) ground acceleration input in any (or all) of the three (3) global (X,Y,Z) directions;

and/or

(2) time varying loads (forces/moments) applied in any (or all) nodal degrees of freedom (except - "slave" - degrees of freedom)

Time dependent forcing functions (whether loads or ground acceleration components) are described in two steps. First, a number (1 or more are possible) of non-dimensional time functions are specified tabularly by a set of descrete points: $\{f(t_i),t_i\}$, where $i = 1,2,\ldots,k$. Each different time function may have a different number of definition points (k). A particular forcing function applied at some point on the structure is then defined by a scalar multiplier ("β", say) and reference to one of the input time functions ("$f(t)$", say). The actual force (or acceleration) at any time ("τ", say) equals $\beta \times f(\tau)$; $f(\tau)$ is found by linear interpolation between two of the input time points $[t_i,t_{i+1}]$, where $t_i \le \tau \le t_{i+1}$.

Assuming that the solution begins at time zero (0), an independent arrival time (t_a, where $t_a \ge 0$) may be assigned to each forcing function. The forcing function is not applied to the system until the solution time ("τ", say) equals the arrival time, t_a. Interpolation for function values is based on relative time within the function table; i.e., $g(\tau) = f(\tau - t_a)$.

The structure is assumed to be at rest at time zero; i.e., zero initial displacements and velocities are assumed at time of solution start.

The following data are required for a Forced Dynamic Response Analysis:

1. Control Card (5I5,2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NFN	Number of different time functions; GE.1

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

notes	columns	variable	entry
(2)	6 - 10	NGM	Ground motion indicator; EQ.0; no ground motion is input EQ.1; read ground motion control card (Section VII.B.3)
(3)	11 - 15	NAT	Number of different arrival times for the forcing functions; EQ.0; all arrival times are zero
(4)	16 - 20	NT	Total number of solution time steps; GE.1
(5)	21 - 25	NOT	Output print interval for stresses, displacements, etc. GE.1 and LE.NT
(4)	26 - 35	DT	Solution time step, Δt; GT.0
(6)	36 - 45	DAMP	Damping factor to be applied to all NF modes (fraction of critical); GE.0

In case of NDYN.EQ.4 use

notes	columns	variable	entry
(6)	36 - 45	ALPHA	Damping factor α
(7)	46 - 55	BETA	Damping factor β

NOTES/

(1) At least one (1) time function must be input.

(2) If no ground acceleration acts on the structure, set "NGM" to zero and skip Section VII.B.3, below. Both ground acceleration and nodal force input are allowed.

(3) If no arrival time values are input, all forcing functions begin acting on the structure at time zero. The same arrival time value may be referenced by different forcing functions. "NAT" determines the number of non-zero entries that the program expects to read in Section VII.B.4, below.

(4) The program performs a step-by-step integration of the equations of motion using a scheme which is unconditionally stable with respect to time step size, Δt. In case NDYN.EQ.2 the modal uncoupled equations of motion are integrated. In case NDYN.EQ.4 the coupled system equations are integrated. If "T" is the period of the highest numbered mode (normally the NFth mode) that is to be included in the response calculation, Δt should be chosen such that $\Delta t/T < 0.1$. A

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

larger time step (i.e., $\Delta t > 0.1T$) will not cause failure (instability), but participation of the higher modes is "filtered" from the predicted response. In general, with increasing time step size the solution is capable of capturing less of the higher frequency participation.

(5) The program computes system displacements at every solution time step, but printing of displacements and recovery of element stresses is only performed at solution step intervals of "NOT". NOT must be at least "1" and is normally selected in the range of 10 to 100.

(6) The damping factor ("DAMP") is applied to all NF modes. The admissible range for DAMP is between 0.0 (no damping) and 1.0 (100% of critical viscous damping).

(7) In case NDYN.EQ.4 the damping matrix used is $C = \alpha M + \beta K$, where α and β are defined in columns 36 to 55.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

2. Time-Varying Load Cards (4I5,F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NP	Nodal point number where the load component (force or moment) is applied; GE.1 and LE.NUMNP EQ.0 last card only
(2)	10	IC	Degree of freedom number; GE.1 and LE.6 (δX=1, δY=2, δZ=3, ϕX=4, ϕY=5, ϕZ=6)
(3)	11 - 15	IFN	Time function number; GE.1 and LE.NTFN
(4)	16 - 20	IAT	Arrival time number; EQ.0; load applied at solution start GE.1; non-zero arrival time
(5)	21 - 30	P	Scalar multiplier for the time function; EQ.0; no load applied

NOTES/

(1) One card is required for each nodal degree of freedom having applied time varying loads. Cards must be input in ascending node point order. This sequence of cards must be terminated with a blank card. A blank card must be supplied even if no loads are applied to the system.

(2) The same node may have more than one degree of freedom loaded; arrange degrees of freedom references ("IC") in ascending sequence at any given node.

(3) A non-zero time function number ("IFN") must be given for each forcing function. IFN must be between 1 and NFN. The time functions are input tabularly in Section VII.B.5, below. Function values at times between input time points are computed with linear interpolation.

(4) If "IAT" is zero (or blank), the forcing function is assumed to act on the system beginning at time zero. If IAT is input as a positive integer between 1 and NAT, the IATth arrival time (defined in Section VII.B.4, below) is used to delay the application of the forcing function; i.e., the forcing function begins acting on the structure when the solution reaches the IATth arrival time value.

(5) The actual magnitude of force (or moment) acting on the model at time, t, equals the product: ("P") x (value of function number "IFN" at time, t).

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

3. Ground Motion Control Card (6I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NFNX	Time function number describing the ground acceleration in the X-direction
	6 - 10	NFNY	Time function number describing the ground acceleration in the Y-direction
	11 - 15	NFNZ	Time function number describing the ground acceleration in the Z-direction
(2)	16 - 20	NATX	Arrival time number, X-direction
	21 - 25	NATY	Arrival time number, Y-direction
	26 - 30	NATZ	Arrival time number, Z-direction

NOTES/

(1) This card must be input only if the ground motion indicator ("NGM") was set equal to one (1) on the Control Card (Section, VII.B.1, above). A zero time function number indicates that no ground motion is applied for that particular direction.

(2) Zero arrival time references mean that the ground acceleration (if applied) begins acting on the structure at time zero (0). Non-zero references must be integers in the range 1 to NAT.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

4. Arrival Time Cards

a. card one (8F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	AT(1)	Arrival time number 1
	11 - 20	AT(2)	Arrival time number 2
		. . .	. . .
	71 - 80	AT(8)	Arrival time number 8

b. card two (8F10.0) - (required if NAT.GT.8)

notes	columns	variable	entry
	1 - 10	AT(9)	Arrival time number 9
		etc.	etc.

NOTES:

(1) The entry ("NAT") given in cc 11-15 on the Control Card (Section VII.B.1, above) specifies the total number of arrival time entries to be read in this section. Input as many cards as are required to define "NAT" different arrival times, eight (8) entries per card. If no arrival times were requested (NAT.EQ.0), supply one (1) blank card in this section.

5. Time Function Definition Cards

Supply one set (card 1 and card(s) 2) of input for each of the "NFN" time functions requested in cc 1-5 of the Control Card (Section VII.B.1, above). At least one set of time function cards is expected in this section. The card sets are input in ascending function number order.

a. card 1 (I5,F10.0,12A5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NLP	Number of function definition points; GE.2
(2)	6 - 15	SFTR	Scale factor to be applied to f(t) values; EQ.0; default set to "1.0"
	16 - 75	HED(12)	Label information (to be printed with output) describing this function table

NOTES/

(1) At least two points (i.e., 2 pairs: $f(t_1),t_1$) must be specified for each time function. Less than two points would preclude linear interpolation in the table for f(t).

(2) The scale factor "SFTR" is used to multiply function values only; i.e., input time values are not changed. If the scale factor is omitted, SFTR is re-set by the program to "1.0" thereby leaving input function values unchanged.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

5. Time Function Definition Cards (continued)

b. card(s) 2 (12F6.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 6	T(1)	Time values at point 1, t_1
	7 - 12	F(1)	Function value at point 1, $f(t_1)$
	13 - 18	T(2)	Time value at point 2, t_2
	19 - 24	F(2)	Function value at point 2, $f(t_2)$
		etc.	etc.

NOTES/

(1) Input as many card(s) 2 as are required to define "NLP" pairs of $t_i, f(t_i)$, six (6) pairs per card. Pairs must be input in order of ascending time value. Time at point one must be zero, and care must be taken to ensure that the highest (last) input time value (t_{NLP}) is at least equal to the value of time at the end of solution; i.e., the time span for all functions must cover the solution time period otherwise the interpolation for function values will fail. For the case of non-zero arrival times associated with a particular function, the shortest arrival time reference ("t_A", say) plus (+) the last function time ("t_{NLP}") must at least equal the time at the end of the solution period (t_{END}, say); i.e., $t_A + t_{NLP} \geq t_{END}$.

6. Output Definition Cards

To minimize the amount of output which would be produced by the program if all displacements, stresses, etc. were printed, output requests for specific components must be given in this section. Time histories for selected components appear in tables; the solution step output printing interval is specified as "NOT" which is given in cc 21-25 of the Control Card (Section VII.B.1, above).

a. displacement output requests

(1) control card (2I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	KKK	Output type indicator; EQ.1; print histories and maxima EQ.2; printer plot histories and recovery of maxima EQ.3; recover maxima only
(2)	6 - 10	ISP	Printer plot spacing indicator

NOTES/

(1) The type of output to be produced by the program applies to all displacement requests. KKK.EQ.0 is illegal.

(2) "ISP" controls the vertical (down the page) spacing for printer plots. Output points are printed on every (ISP+1)th line. The horizontal (across the page) width of printer plots is a constant ten (10) inches (100 print positions). ISP is used only if KKK.EQ.2.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

6. Output Definition Cards

a. displacement output requests (continued)

(2) node displacement request cards (7I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NP	Node number GE.1 and LE.NUMNP EQ.0 last card only
(2)	6 - 10	IC(1)	Displacement component, request 1
	11 - 15	IC(2)	Displacement component, request 2
	16 - 20	IC(3)	Displacement component, request 3
	21 - 25	IC(4)	Displacement component, request 4
	26 - 30	IC(5)	Displacement component, request 5
	31 - 36	IC(6)	Displacement component, request 6 GE.1 and LE.6 EQ.0 terminates requests for the node

NOTES/

(1) Only those nodes at which output is to be produced (or at which maxima are to be determined) are entered in this section. Cards must be input in ascending node number order. Node numbers may not be repeated. This section must be terminated with a blank card..

(2) Displacement component requests ("IC") range from 1 to 6, where $1=\delta X, 2=\delta Y, 3=\delta Z, 4=\phi X, 5=\phi Y, 6=\phi Z$. The first zero (or blank) encountered while reading IC(1),IC(2),...,IC(6) terminates information for the card. Displacement components at a node may be requested in any order. As an example, suppose that δY, ϕX and ϕZ are to be output at node 34; the card could be written as /34,2,4,6,0/, or /34,6,4,2,0/, etc. but only four (4) fields would have non-zero entries.

D. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

6. Output Definition Cards

b. element stress component output requests

(1) control card (2I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	EKK	Output type indicator; EQ.1; print histories and maxima EQ.2; printer plot of histories and recovery of maxima EQ.3; recover maxima only
	6 - 10	ISP	Plot spacing indicator

NOTES/

(1) See Section VII.B.6.a.(1), above.

(2) element stress component request cards (13I5)

Requests are grouped by element type; "NELTYP" groups must be input. A group consists of a series of element stress component request cards terminated by a blank card. Element number references within an element type (TRUSS, say) grouping must be in ascending order. Element number references may be omitted but not repeated. The program processes element groups in the same order as originally input in the Element Data (Section IV, above). If no output is to be produced for an element type, then input one blank card for its group.

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NEL	Element number GE.1 EQ.0; last card in the group only
(2)	6 - 10	IS(1)	Stress component number for output, request 1
	11 - 15	IS(2)	Stress component number for output, request 2
	. . . . .	. . .	. . .
	61 - 65	IS(12)	Stress component number for output, request 12

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

6. Output Definition Cards

b. element stress component output requests

(2) request cards (continued)

NOTES/

(1) Terminate each different element output group (type) with a blank card. Elements within a group must be in element number order (ascending); element number repetitions are illegal.

(2) The first zero (or blank) request encountered while reading IS(1), IS(2),...., IS(12) terminates information for the card. No more than twelve (12) different components may be output for any one of the elements. Table VII.1 lists the stress component numbers and corresponding descriptions for the various element types. Some element types (TRUSS, for example) have fewer than 12 components defined; only the stress component numbers listed in Table VII.1 are legal references.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.4)

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
1. TRUSS	(2)	(1)	(P/A)	AXIAL STRESS
		(2)	(P)	AXIAL FORCE
* * * * * * *	* * *	* * *	* * * *	* * * * * * * * *
2. BEAM	(12)	(1)	(P1(I))	1-FORCE AT END I
		(2)	(V2(I))	2-SHEAR AT END I
		(3)	(V3(I))	3-SHEAR AT END I
		(4)	(T1(I))	1-TORQUE AT END I
		(5)	(M2(I))	2-MOMENT AT END I
		(6)	(M3(I))	3-MOMENT AT END I
		(7)	(P1(J))	1-FORCE AT END J
		(8)	(V2(J))	2-SHEAR AT END J
		(9)	(V3(J))	3-SHEAR AT END J
		(10)	(T1(J))	1-TORQUE AT END J
		(11)	(M2(J))	2-MOMENT AT END J
		(12)	(M3(J))	3-MOMENT AT END J
* * * * * * *	* * *	* * *	* * * *	* * * * * * * * *
3. PLANE-STRESS/ PLANE-STRAIN				
4. AXISYM-METRIC	(20)	(1)	(11-S0)	V- STRESS AT POINT 0
		(2)	(22-S0)	U- STRESS AT POINT 0
		(3)	(33-S0)	T- STRESS AT POINT 0
		(4)	(12-S0)	UV-STRESS AT POINT 0
		(5)	(11-S1)	V- STRESS AT POINT 1
		(6)	(22-S1)	U- STRESS AT POINT 1
		(7)	(33-S1)	T- STRESS AT POINT 1
		(8)	(12-S1)	UV-STRESS AT POINT 1
		(9)	(11-S2)	V- STRESS AT POINT 2
		(10)	(22-S2)	U- STRESS AT POINT 2
		(11)	(33-S2)	T- STRESS AT POINT 2
		(12)	(12-S2)	UV-STRESS AT POINT 2
		(13)	(11-S3)	V- STRESS AT POINT 3
		(14)	(22-S3)	U- STRESS AT POINT 3
		(15)	(33-S3)	T- STRESS AT POINT 3
		(16)	(12-S3)	UV-STRESS AT POINT 3

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
		(17)	(V -S4)	V- STRESS AT POINT 4
		(18)	(U -S4)	U- STRESS AT POINT 4
		(19)	(T -S4)	T- STRESS AT POINT 4
		(20)	(UV-S4)	UV-STRESS AT POINT 4

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
5. EIGHT NODE BRICK	(12)	(1)	(XX-SL1)	XX-STRESS AT LOCATION 1
		(2)	(YY-SL1)	YY-STRESS AT LOCATION 1
		(3)	(ZZ-SL1)	ZZ-STRESS AT LOCATION 1
		(4)	(XY-SL1)	XY-STRESS AT LOCATION 1
		(5)	(YZ-SL1)	YZ-STRESS AT LOCATION 1
		(6)	(ZX-SL1)	ZX-STRESS AT LOCATION 1
		(7)	(XX-SL2)	XX-STRESS AT LOCATION 2
		(8)	(YY-SL2)	YY-STRESS AT LOCATION 2
		(9)	(ZZ-SL2)	ZZ-STRESS AT LOCATION 2
		(10)	(XY-SL2)	XY-STRESS AT LOCATION 2
		(11)	(YZ-SL2)	YZ-STRESS AT LOCATION 2
		(12)	(ZX-SL2)	ZX-STRESS AT LOCATION 2

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
6. PLATE/ SHELL	(6)	(1)	(XX-S/R)	XX-STRESS RESULTANT
		(2)	(YY-S/R)	YY-STRESS RESULTANT
		(3)	(XY-S/R)	XY-STRESS RESULTANT
		(4)	(XX-M/R)	XX-MOMENT RESULTANT
		(5)	(YY-M/R)	YY-MOMENT RESULTANT
		(6)	(XY-M/R)	XY-MOMENT RESULTANT

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
7. BOUN- DARY	(2)	(1)	(BDRY-F)	BOUNDARY FORCE
		(2)	(BDRY-M)	BOUNDARY MOMENT

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
8. THICK SHELL AND 3-DIM.	(42)	(1)	(SXX(0))	XX-STRESS AT CENTROID (0)
		(2)	(SYY(0))	YY-STRESS AT CENTROID (0)
		(3)	(SZZ(0))	ZZ-STRESS AT CENTROID (0)
		(4)	(SXY(0))	XY-STRESS AT CENTROID (0)
		(5)	(SYZ(0))	YZ-STRESS AT CENTROID (0)
		(6)	(SZX(0))	ZX-STRESS AT CENTROID (0)
		(7)	(SXX(1))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 1

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
		(8)	(SYY(1))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(9)	(SZZ(1))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(10)	(SXY(1))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(11)	(SYZ(1))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(12)	(SZX(1))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(13)	(SXX(2))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(14)	(SYY(2))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(15)	(SZZ(2))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(16)	(SXY(2))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(17)	(SYZ(2))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(18)	(SZX(2))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(19)	(SXX(3))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(20)	(SYY(3))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(21)	(SZZ(3))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(22)	(SXY(3))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(23)	(SYZ(3))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(24)	(SZX(3))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(25)	(SXX(4))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(26)	(SYY(4))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(27)	(SZZ(4))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(28)	(SXY(4))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(29)	(SYZ(4))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(30)	(SZX(4))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(31)	(SXX(5))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(32)	(SYY(5))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(33)	(SZZ(5))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(34)	(SXY(5))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(35)	(SYZ(5))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(36)	(SZX(5))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(37)	(SXX(6))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(38)	(SYY(6))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(39)	(SZZ(6))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(40)	(SXY(6))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(41)	(SYZ(6))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(42)	(SZX(6))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 6

* *

9. PIPE

A. TANGENT (12)

(1)	(PX(I))	X-FORCE AT END I
(2)	(VY(I))	Y-SHEAR AT END I
(3)	(VZ(I))	Z-SHEAR AT END I
(4)	(TX(I))	X-TORQUE AT END I
(5)	(MY(I))	Y-MOMENT AT END I
(6)	(MZ(I))	Z-MOMENT AT END I
(7)	(PX(J))	X-FORCE AT END J
(8)	(VY(J))	Y-SHEAR AT END J
(9)	(VZ(J))	Z-SHEAR AT END J
(10)	(TX(J))	X-TORQUE AT END J
(11)	(MY(J))	Y-MOMENT AT END J
(12)	(MZ(J))	Z-MOMENT AT END J

B. BEND (18)

(1)	(PX(I))	X-FORCE AT END I
(2)	(VY(I))	Y-SHEAR AT END I
(3)	(VZ(I))	Z-SHEAR AT END I
(4)	(TX(I))	X-TORQUE AT END I
(5)	(MY(I))	Y-MOMENT AT END I
(6)	(MZ(I))	Z-MOMENT AT END I
(7)	(PX(C))	X-FORCE AT CENTER OF ARC
(8)	(VY(C))	Y-SHEAR AT CENTER OF ARC
(9)	(VZ(C))	Z-SHEAR AT CENTER OF ARC
(10)	(TX(C))	X-TORQUE AT CENTER OF ARC
(11)	(MY(C))	Y-MOMENT AT CENTER OF ARC
(12)	(MZ(C))	Z-MOMENT AT CENTER OF ARC
(13)	(PX(J))	X-FORCE AT END J
(14)	(VY(J))	Y-SHEAR AT END J
(15)	(VZ(J))	Z-SHEAR AT END J
(16)	(TX(J))	X-TORQUE AT END J
(17)	(MY(J))	Y-MOMENT AT END J
(18)	(MZ(J))	Z-MOMENT AT END J

* *
* *

C. RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (NDYN.EQ.3)

This option combines all (NF) mode shapes and frequencies computed during the eigenvalue solution (Section VII.A) to calculate R.M.S. stresses/deflections due to an input displacement (or acceleration) spectrum. The input spectrum is applied in varying proportions in the global X,Y,Z directions. For the case of a non-zero cut-off frequency "COFQ" (Section VII.A), only those modes whose frequencies are less than COFQ will be combined in the R.M.S. analysis.

1. Control Card (3F10.0,I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	FX	Factor for X-direction input
	11 - 20	FY	Factor for Y-direction input
	21 - 30	FZ	Factor for Z-direction input EQ.0; not acting
(2)	31 - 35	IST	Input spectrum type; EQ.0; displacement vs. period EQ.1; acceleration vs. period

NOTES/

(1) All three (3) direction factors may be non-zero in which case the entries represent the X,Y,Z components of the input direction vector.

(2) "IST" defines the type of spectrum table to be input immediately following. The spectral displacements ("S_d") and accelerations ("S_a") are assumed to be related as follows: $S_a = (4\pi^2 f^2)(S_d)$.

C. RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (continued)

2. Spectrum Cards

a. heading card (12A6)

notes	columns	variable	entry
	1 - 72	HED(12)	Heading information used to label the spectrum table

b. control card (I5,F10.0)

notes	columns	variable	entry
	1 - 5	NPTS	Number of definition points in the spectrum table; GE.2
	6 - 15	SFTR	Scale factor used to adjust the displacement (or acceleration) ordinates in the spectrum table EQ.1.0; no adjustment

c. spectrum data (2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	T	Period (reciprocal of frequency)
(2)	11 - 20	S	Value of displacement (or acceleration if IST.EQ.1)

NOTES/

(1) Input one definition point per card; "NPTS" cards are required in this section. Cards must be arranged in ascending value of period.

(2) "S" is interpreted to be a displacement quantity if "IST" was input as zero. For IST.EQ.1, "S" is an acceleration value.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.3)

APPENDIX A - CONTROL CARDS AND DECK SET-UP FOR DYNAMIC ANALYSIS RE-START

The purpose of this appendix is to describe the procedure (including control cards and deck set-up) required for program re-start following an eigenvalue/eigenvector extraction analysis. The re-start option has been included in the program in order to make a repeated forced response or spectrum analysis possible without solving each time for the required eigensystem. For medium-to-large size models, eigenvalue solution is quite costly when compared to the forced response calculations; hence, excessive costs may be incurred if the entire job has to be re-run due to improper specification of forcing functions or input spectra, inadequate requests, etc. For small models (less than 100 nodes, say) the extra effort required for re-start is normally not justified.

A complete dynamic analysis utilizing the re-start feature requires that the job be run in two (2) steps:

JOB(1): Eigenvalue extraction solution only, after which program files TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8, and TAPE9 are saved on the re-start tape.

JOBS(2): Re-instatement of program files TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8, and TAPE9 from the re-start tape followed by a Dynamic Response Analysis (NDYN.EQ.-2) or a Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.-3).

For a given model, the first job [JOB(1)] creating the re-start tape is run only once. The re-start tape then contains all the initial information required by the program at the beginning of a forced response analysis. More than one second job [JOBS(2)] may be run using the re-start tape as initial input; i.e., the re-start tape is not destroyed.

Control cards and deck set-up for execution on the CDC 6400 computer at the University of California, Berkeley are given below:

JOB(1) - EIGENVALUE SOLUTION/RE-START TAPE CREATION

Notes Card Deck

(1) Job number, 1, 200, 120000,300. User Name
(2) REQUEST, TP1,I. Reel No., Tape User Name
(3) COPYBF, TP1,SAP4
UNLOAD,TP1
(4) LGO,SAP4
REWIND,TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8,TAPE9
(5) REQUEST,RESTART,I. Reel No., Tape User Name, OUTPUT
(6) COPYBF,TAPE1,RESTART
COPYBF,TAPE2,RESTART
COPYBF,TAPE7,RESTART
COPYBF,TAPE8,RESTART
COPYBF,TAPE9,RESTART
(7) 7-8-9

PROBLEM DATA DECK:
I. HEADING CARD
II. MASTER CONTROL CARD with
(LL.EQ.0)
(NF.GE.1)
(NDYN.EQ.1)
(MODEX.EQ.0)
III. JOINT DATA
IV. ELEMENT DATA
V. CONCENTRATED MASS DATA
VI. ELEMENT LOAD MULTIPLIERS
VII. DYNAMIC ANALYSIS
A. Mode Shapes and Frequencies
blank card
blank card

(8) 6-7-8-9

NOTES:

(1) The job control card parameters are defined as follows:
"1" = Number of tape drives required for the job.
"200" = CPU time limit (in octal seconds).
"120000" = Central memory field length (in octal).
"300" = Page limit for printing.
(2) Tape containing binary version of program (TP1) is requested.
(3) Binary version of the program is copied onto a disk file (SAP4).
(4) Program is loaded and execution is initiated.
(5) A blank tape (RESTART) is requested.
(6) The contents of disk files TAPE1,TAPE2, etc. are copied onto tape RESTART.
(7) End-of-record card: 7,8,9 punched in column 1.
(8) End-of-file card: 6,7,8,9 punched in column 1.

JOB (2) - RE-START FOR RESPONSE HISTORY ANALYSIS (NDYN.EQ.-2)
or RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (NDYN.EQ.-3)

```
Notes     Card Deck

          Job number, 1,200,120000,300.   User Name
          REQUEST, RESTART, I.   Reel No., User Name
          COPYBF,RESTART,TAPE1
          COPYBF,RESTART,TAPE2
 (1)      COPYBF,RESTART,TAPE7
          COPYBF,RESTART,TAPE8
          COPYBF,RESTART,TAPE9
          REWIND,TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8,TAPE9
          UNLOAD,RESTART
          REQUEST,TP1,I.   Reel No., User Name
 (2)      COPYBF,TP1,SAP4
          LGO,SAP4
          7-8-9

          PROBLEM DATA DECK
                 I.     HEADING CARD
                 II.    MASTER CONTROL CARD with
                        (LL.EQ.0)
                        (NF.GE.1)
                        (NDYN.EQ.-2 or -3)
 (3)                    (MODEX.EQ.0)
                 VII.   DYNAMIC ANALYSIS
                        B.    Dynamic Response Anlysis (NDYN.EQ.-2)
                 or
                        C.    Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.-3)
          blank card
          blank card

          6-7-8-9
```

NOTES/

(1) The disk files TAPE1,TAPE2, etc. are re-created using the information saved on tape RESTORE.

(2) The binary version of the program is again obtained from tape TP1.

(3) Normally, the number of frequencies ("NF") entered on the MASTER CONTROL CARD for a re-start case has the same value as was specified earlier when the eigenvalue problem was solved in JOB(1). If a value for the cut-off frequency ("COFQ") was entered on the "Mode Shapes and Frequencies" control card [in JOB(1)] and the program extracted fewer than "NF" frequencies (eigenvalues), then only the actual number of eigenvalues computed by the program in JOB(1) is specified for "NF" in this re-start run.

APPENDIX B: CONTROL CARDS AND DECK SET-UP FOR USE OF STARTING ITERATION VECTORS

In the dynamic analysis of large-order systems, the solution of the required eigensystem is normally the most expensive phase. The option described in this appendix demonstrates how it is possible to use NFØ previously calculated eigenvalues and vectors when the solution for NF ≥ NFØ eigenvalues and eigenvectors is required.

Assume that in Job(1), the solution for NFØ eigenvalues and eigenvectors was performed. At the end of this job, TAPE2 and TAPE7 must have been saved on a physical tape, say "RESTART". Assuming that in JOB(2) the solution of NF eigenvalues and eigenvectors is required, then prior to the execution of this job, tape RESTART needs to be copied onto TAPE10.

This procedure was performed with the following control cards on the CDC 6400 of the University of California at Berkeley:

JOB(1) - SOLUTION FOR NFØ EIGENVALUES/RESTART TAPE CREATION

Notes	Card Deck
(1)	Job No., 1,200,120000,500. User Name REQUEST,TP1,I. Reel No., Tape User Name COPYBF,TP1,SAP4 UNLOAD,TP1
(2)	REQUEST,TAPE2,NB REQUEST,TAPE7,NB
	LGO,SAP4 REWIND,TAPE2,TAPE7
(3)	REQUEST,RESTART,I. Reel No.,Tape User Name, OUTPUT
(4)	COPYBR,TAPE2,RESTART,1 COPYBF,TAPE7,TP3
	7-8-9 PROBLEM DATA DECK 6-7-8-9

Notes/

(1) See Notes (1) - (4) in Appendix A.

(2) The computer is directed to write on disk files TAPE2 and TAPE7 in an unblocked format.

(3) A blank tape (RESTART) is requested onto which the contents of files TAPE2 and TAPE7 are to be written.

(4) The contents of files TAPE2 and TAPE7 are written as <u>one file</u> onto tape RESTART.

JOB(2) - SOLUTION FOR ADDITIONAL EIGENVALUES USING THE INFORMATION STORED ON TAPE "RESTART"

Notes	Card Deck
	Job No.,1,200,120000,500. User Name
(1)	REQUEST,RESTART,I. Reel No., Tape User Name
	REQUEST,TAPE10,NB
	REQUEST,TAPE2,NB
	REQUEST,TAPE7,NB
(2)	COPYBF,RESTART,TAPE10
	UNLOAD,RESTART
(3)	REWIND,TAPE10
	REQUEST,TP1,I. Reel No., Tape User Name
	COPYBF,TP1,SAP4
	LGO,SAP4
	7-8-9
	PROGRAM DATA DECK
	6-7-8-9

Notes/

(1) TAPE10 (as TAPE2 and TAPE7 if they are to be used for further restarts,) is requested to be an unblocked file.

(2) The contents of tape RESTART are copied into TAPE10 as one file.

(3) Program execution.

EERC 67-1 "Feasibility Study Large-Scale Earthquake Simulator Facility", by J. Penzien, J. G. Bouwkamp, R. W. Clough and D. Rea - 1967 (PB 187 905)

EERC 68-1 Unassigned

EERC 68-2 "Inelastic Behavior of Beam-to-Column Subassemblages Under Repeated Loading", by V. V. Bertero - 1968 (PB 184 888)

EERC 68-3 "A Graphical Method for Solving the Wave Reflection-Refraction Problem", by H. D. McNiven and Y. Mengi - 1968 (PB 187 943)

EERC 68-4 "Dynamic Properties of McKinley School Buildings", by D. Rea, J. G. Bouwkamp and R. W. Clough - 1968 (PB 187 902)

EERC 68-5 "Characteristics of Rock Motions During Earthquakes", by H. B. Seed, I. M. Idriss and F. W. Kiefer - 1968 (PB 188 338)

EERC 69-1 "Earthquake Engineering Research at Berkeley" - 1969 (PB 187 906)

EERC 69-2 "Nonlinear Seismic Response of Earth Structures", by M. Dibaj and J. Penzien - 1969 (PB 187 904)

EERC 69-3 "Probabilistic Study of the Behavior of Structures During Earthquakes", by P. Ruiz and J. Penzien - 1969 (PB 187 886)

EERC 69-4 "Numerical Solution of Boundary Value Problems in Structural Mechanics by Reduction to an Initial Value Formulation", by N. Distefano and J. Schujman - 1969 (PB 187 942)

EERC 69-5 "Dynamic Programming and the Solution of the Biharmonic Equation", by N. Distefano - 1969 (PB 187 941)

EERC 69-6 "Stochastic Analysis of Offshore Tower Structures", by A. K. Malhotra and J. Penzien - 1969 (PB 187 903)

EERC 69-7 "Rock Motion Accelerograms for High Magnitude Earthquakes", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1969 (PB 187 940)

EERC 69-8 "Structural Dynamics Testing Facilities at the University of California, Berkeley", by R. M. Stephen, J. G. Bouwkamp, R. W. Clough and J. Penzien - 1969 (PB 189 111)

Note: Numbers in parentheses are Accession Numbers assigned by the National Technical Information Service. Copies of these reports may be ordered from the National Technical Information Service, Springfield, Virginia, 22151. Either the accession number or a complete citation should be quoted on orders for the reports.

Revised 4/23/73

EERC 69-9 "Seismic Response of Soil Deposits Underlain by Sloping Rock Boundaries", by H. Dezfulian and H. B. Seed - 1969 (PB 189 114)

EERC 69-10 "Dynamic Stress Analysis of Axisymmetric Structures Under Arbitrary Loading", by S. Ghosh and E. L. Wilson - 1969 (PB 189 026)

EERC 69-11 "Seismic Behavior of Multistory Frames Designed by Different Philosophies", by J. C. Anderson and V. V. Bertero - 1969 (PB 190 662)

EERC 69-12 "Stiffness Degradation of Reinforcing Concrete Structures Subjected to Reversed Actions", by V. V. Bertero, B. Bresler and H. Ming Liao - 1969 (PB 202 942)

EERC 69-13 "Response of Non-Uniform Soil Deposits to Travel Seismic Waves", by H. Dezfulian and H. B. Seed - 1969 (PB 191 023)

EERC 69-14 "Damping Capacity of a Model Steel Structure", by D. Rea, R. W. Clough and J. G. Bouwkamp - 1969 (PB 190 663)

EERC 69-15 "Influence of Local Soil Conditions on Building Damage Potential During Earthquakes", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1969 (PB 191 036)

EERC 69-16 "The Behavior of Sands Under Seismic Loading Conditions", by M. L. Silver and H. B. Seed - 1969 (AD 714 982)

EERC 70-1 "Earthquake Response of Concrete Gravity Dams", by A. K. Chopra - 1970 (AD 709 640)

EERC 70-2 "Relationships Between Soil Conditions and Building Damage in the Caracas Earthquake of July 29, 1967", by H. B. Seed, I. M. Idriss and H. Dezfulian - 1970 (PB 195 762)

EERC 70-3 "Cyclic Loading of Full Size Steel Connections", by E. P. Popov and R. M. Stephen - 1970 (PB 213 545)

EERC 70-4 "Seismic Analysis of the Charaima Building, Caraballeda, Venezuela", by Subcommittee of the SEAONC Research Committee, V. V. Bertero, P. F. Fratessa, S. A. Mahin, J. H. Sexton, A. C. Scordelis, E. L. Wilson L. A. Wyllie, H. B. Seed, and J. Penzien, Chairman - 1970 (PB 201 455)

EERC 70-5 "A Computer Program for Earthquake Analysis of Dams", by A. K. Chopra and P. Chakrabarti - 1970 (AD 723 994)

EERC 70-6 "The Propagation of Love Waves Across Non-Horizontally Layered Structures", by J. Lysmer and L. A. Drake - 1970 (PB 197 896)

EERC 70-7 "Influence of Base Rock Characteristics on Ground Response", by J. Lysmer, H. B. Seed and P. B. Schnabel - 1970 (PB 197 897)

EERC 70-8 "Applicability of Laboratory Test Procedures for Measuring Soil Liquefaction Characteristics Under Cyclic Loading", by H. B. Seed and W. H. Peacock - 1970 (B 198 016)

EERC 70-9 "A Simplified Procedure for Evaluating Soil Liquefaction Potential", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1970 (PB 198 009)

EERC 70-10 "Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1970 (PB 197 869)

EERC 71-1 "Koyna Earthquake and the Performance of Koyna Dam", by A. K. Chopra and P. Chakrabarti - 1971 (AD 731 496)

EERC 71-2 "Preliminary In-Situ Measurements of Anelastic Absorption in Soils Using a Prototype Earthquake Simulator", by R. D. Borcherdt and P. W. Rodgers - 1971 (PB 201 454)

EERC 71-3 "Static and Dynamic Analysis of Inelastic Frame Structures", by F. L. Porter and G. H. Powell - 1971 (PB 210 135)

EERC 71-4 "Research Needs in Limit Design of Reinforced Concrete Structures", by V. V. Bertero - 1971 (PB 202 943)

EERC 71-5 "Dynamic Behavior of a High-Rise Diagonally Braced Steel Building", by D. Rea, A. A. Shah and J. G. Bouwkamp - 1971 (PB 203 584)

EERC 71-6 "Dynamic Stress Analysis of Porous Elastic Solids Saturated With Compressible Fluids", by J. Ghaboussi and E. L. Wilson - 1971 (PB 211 396)

EERC 71-7 "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblages", by H. Krawinkler, V. V. Bertero and E. P. Popov - 1971 (PB 211 335)

EERC 71-8 "Modification of Seismograph Records for Effects of Local Soil Conditions" by P. Schnabel, H. B. Seed and J. Lysmer - 1971 (PB 214 450)

EERC 72-1 "Static and Earthquake Analysis of Three Dimensional Frame and Shear Wall Buildings" by E. L. Wilson and H. H. Dovey - 1972 (PB 212 589)

EERC 72-2 "Accelerations in Rock For Earthquakes in the Western United States", by P. B. Schnabel and H. B. Seed - 1972 (PB 213 100)

EERC 72-3 "Elastic-Plastic Earthquake Response of Soil-Building Systems" by T. Minami and J. Penzien - 1972 (PB 214 868)

EERC 72-4 "Stochastic Inelastic Response of Offshore Towers to Strong Motion Earthquakes", by M. K. Kaul and J. Penzien - 1972 (PB 215 713)

EERC 72-5 Cyclic Behavior of Three Reinforced Concrete Flexural Members With High Shear" by E. P. Popov, V. V. Bertero and H. Krawinkler - 1972 (PB 214 555)

EERC 72-6 "Earthquake Response of Gravity Dams Including Reservoir Interaction Effects" by P. Chakrabarti and A. K. Chopra - 1972.

EERC 72-7 "Dynamic Properties of Pine Flat Dam", by D. Rea, C. Y. Liau and A. K. Chopra - 1972.

EERC 72-8	"Three Dimensional Analysis of Building Systems", by E.L. Wilson and H.H. Dovey - 1972.
EERC 72-9	"Rate of Loading Effects on Uncracked and Repaired Reinforced Concrete Members", by V.V. Bertero, D. Rea, S. Mahin and M. Atalay - 1973
EERC 72-10	"Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Linear Structural Systems", by E.L. Wilson, K.J. Bathe, J.E. Peterson and H.H. Dovey - 1972.
EERC 72-11	"Literature Survey - Seismic Effects on Highway Bridges" by T. Iwasaki, J. Penzien and R. Clough - 1972 (PB 215 613)
EERC 72-12	"SHAKE, a Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites", by P.B. Schnabel and J. Lysmer - 1972.
EERC 73-1	"Optimal Seismic Design of Multistory Frames", by V.V. Bertero and H. Kamil - 1973.
EERC 73-2	"Analysis of the Slides in the San Fernando Dams During the Earthquake of February 9, 1971", by H.B. Seed, K.L. Lee, I.M. Idriss and F. Makdisi - 1973.
EERC 73-3	"Computer Aided Ultimate Load Design of Unbraced Multistory Steel Frames", by M.B. El-Hafez and G.J. Powell - 1973.
EERC 73-4	"Experimental Investigation into the Seismic Behavior of Critical Regions of Reinforced Concrete Components as Influenced by Moment and Shear", by M. Celebi and J. Penzien - 1973 (PB 215 884)
EERC 73-5	"Hysteretic Behavior of Epoxy-Repaired Reinforced Concrete Beams", by M. Celebi and J. Penzien - 1973.
EERC 73-6	"General Purpose Computer Program for Inelastic Dynamic Response of Plane Structures", by A. Kanaan and G.H. Powell - 1973.
EERC 73-7	"A Computer Program for Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Reservoir Interaction", by P. Chakrabarti and A.K. Chopra - 1973.
EERC 73-8	"Seismic Behavior of Spandrel Frames — A Review and Outline for Future Research", by R. Razani and J.G. Bouwkamp - 1973.
EERC 73-9	"Earthquake Analysis of Structure-Foundation Systems", by A. K. Vaish and A. K. Chopra - 1973.
EERC 73-10	"Deconvolution of Seismic Response for Linear Systems", by R. B. Reimer - 1973.
EERC 73-11	"SAP IV Structure Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems", by K. -J. Bathe, E. L. Wilson, and F. E. Peterson - 1973 (revised).

EERC 73-12 "Analytical Investigations of the Seismic Response of Tall Flexible Highway Bridges", by W. S. Tseng and J. Penzien - 1973.

EERC 73-13 "Earthquake Analysis of Multi-Story Buildings Including Foundation Interaction", by A. K. Chopra and J. A. Gutierrez - 1973 (PB 222 970).

EERC 73-14 "ADAP A Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Arch Dams", by R. W. Clough, J. M. Raphael and S. Mojtahedi - 1973 (PB 223 763/AS).

EERC 73-15 "Cyclic Plastic Analysis of Structural Steel Joints", by R. B. Pinkney and R. W. Clough - 1973.

EERC 73-16 "QUAD-4 A Computer Program for Evaluating the Seismic Response of Soil Structures by Variable Damping Finite Element Procedures" by I. M. Idriss, J. Lysmer, R. Hwang and H. G. Seed - 1973.

EERC 73-17 "Dynamic Behavior of a Multi-Story Pyramid Shaped Building", by R. M. Stephen and J. G. Bouwkamp - 1973.

EERC 73-18 "Effect of Different Types of Reinforcing on Seismic Behavior of Short Concrete Columns", by V. V. Bertero, J. Hollings, O. Kustu, R. M. Stephen and J. G. Bouwkamp - 1973.

EERC 73-19 "Olive View Medical Center Material Studies, Phase I", by B. Bresler and V. Bertero - 1973.

EERC 73-20 "Linear and Nonlinear Seismic Analysis Computer Programs for Long Multiple-Span Highway Bridges", by W. S. Tseng and J. Penzien - 1973.

EERC 73-21 "Constitutive Models for Cyclic Plastic Deformation of Engineering Materials", by J. M. Kelly and P. P. Gillis - 1973.

EERC 73-22 "DRAIN-2D Users' Guide" by G. H. Powell - 1973.

EERC 73-23 "Earthquake Engineering at Berkeley - 1973" by D. Rea - 1973.

EERC 73-24 "Seismic Input and Structural Response During the 1971 San Fernando Earthquake" by R. B. Reimer, R. W. Clough, and J. M. Raphael - 1973.

EERC 73-25 "Earthquake Response of Axisymmetric Tower Structures Surrounded by Water", by C. Y. Liaw and A. K. Chopra - 1973.

EERC 73-26 "Investigation of the Failures of the Olive View Stairtowers During the San Fernando Earthquake and Their Implications on Seismic Design", by V. V. Bertero and Robert G. Collins - 1973.

EERC 73-27 "Further Studies on Seismic Behavior of Steel Beam-Column Subassemblages" by V. V. Bertero, H. Krawinkler and E. P. Popov - 1973.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

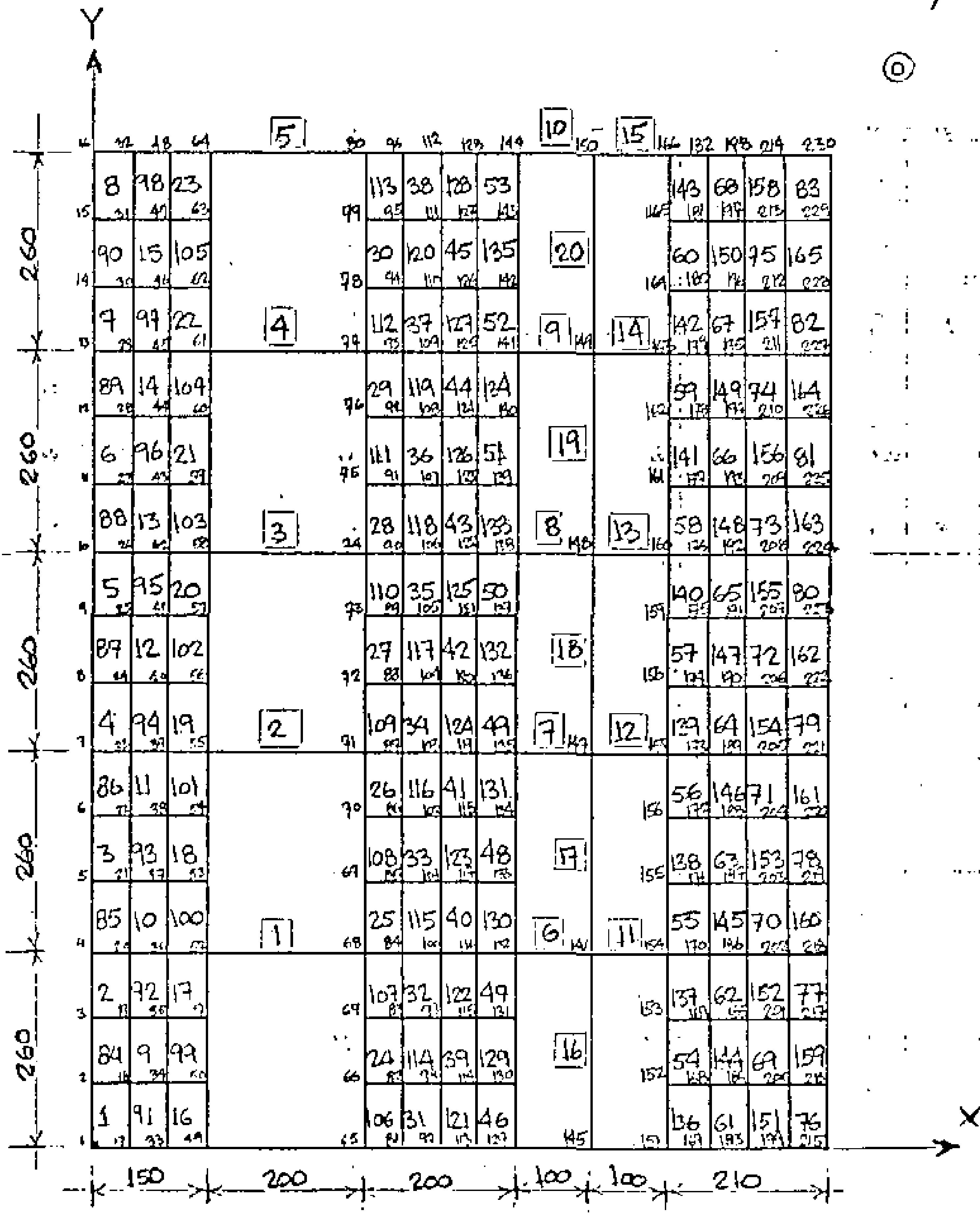
METODO DE ELEMENTOS FINITOS

ANALISIS DE UN EDIFICIO CON MUROS DE CORTANTE

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO
M. EN I. M. A. BRAVO

MAYO, 1984

acio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285



Estructura tipo muro - marco.

forma de codificación

CSC unam

PROYECTO: Estructura muro-marco | ARCHIVO: | FECHA: Mayo 1982

PROGRAMA: | CODIFICO: | HOJA (1) DE 10

```
*   TITULO DEL PROBLEMA GENERAL
ANALISIS DE UNA ESTRUCTURA TIPO MURO-MARCO
*   NUMERO DE ESTRUCTURAS POR ANALIZAR
    1
*   TITULO DEL PROBLEMA PARTICULAR
ANALISIS DEL MURO-MARCO A
*   NUMERO DE BARRAS, ELEMENTOS FINITOS, MATERIALES, NUDOS, TIPOS DE SECCIONES
*          NUDOS RESTRINGIDOS, CONDICIONES DE CARGA Y RIGIDEZ REQUERIDA
   20  165     1  230     2              15     1     0
*   PROPIEDADES MECANICAS DE LOS MATERIALES   (Número de material, E, ν, γ)
    1 1500000.0       0.15        2.4
*   CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LAS SECCIONES (Número de sección, tipo 1 rectangular; b,h)
    1    1     70.0         15.0
    2    1    100.0         20.0
*   COORDENADAS DE LOS PUNTOS NODALES
    1     0.000       0.000        (Número de nudo, coordenada x, coordenada y)
   16     0.000     113.000    1   (Número de nudo, coordenada x, coordenada y; generador de coordenadas)
   17     0.500       0.000
   32     0.500     113.000    1
   33     1.000       0.000
   48     1.000     113.000    1
   49     1.500       0.000
   64     1.500     113.000    1
   65     3.500       0.000
```

forma de ificación

CSC unam

PROYECTO Estructura muro-marco ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA (2) DE 10

80	3.500	13.000	1
81	4.000	0.000	
96	4.000	13.000	1
97	4.500	0.000	
112	4.500	13.000	1
113	5.000	0.000	
128	5.000	13.000	1
129	5.500	0.000	
144	5.500	13.000	1
145	6.500	0.000	
150	6.500	13.000	1
151	7.500	0.000	
166	7.500	13.000	1
167	8.075	0.000	
182	8.075	13.000	1
183	8.650	0.000	
198	8.660	13.000	1
199	9.075	0.000	
214	9.075	13.000	1
215	9.600	0.000	
230	9.600	13.000	1

* LOCALIZACIÓN DE LAS BARRAS Y TIPO DE SECCIÓN

1	52	68	1		(Número de barra, nodo i, nodo j, número de sección)
5	64	80	1	1	(Número de barra, nodo L, nodo J, número de sección, indicador de generación)

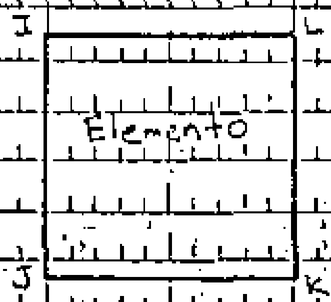
forma de c... icación

CSC unam

PROYECTO Estructura muro-marco ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA 3 DE 10

```
    6  132  146         1
   10  144  150         1               1
   11  146  154         1
   13  150  166         1               1
   16  145  146         2
   20  149  150         2               1
*   ANGULO DE LA FUERZA DE GRAVEDAD Y ESPESOR DEL MURO
    270.0     0.20
*   TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS (0 indica elemento tipo 1 ; 1 indica elemento tipo 2)
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000
*   PUNTOS NODALES DE LOS ELEMENTOS FINITOS RECTANGULARES
    3    2    1   17   18                   1 (Número de elemento, puntos nodales I,J,K,L, índice de gen. equilib.)
    8   16   15   31   32              1      (1 indicador de generación del elemento 1 al 8)
    9   19   18   34   35
   15   31   30   46   47              1
   16   34   33   49   50                   1 (1 indicador de fuerzas equilibrantes)
   23   48   47   63   64              1
   24   67   66   82   83
   30   79   78   94   95              1
   31   82   81   97   98                   1
   38   96   95  111  112              1
   39   99   98  114  115
```



forma de ficación

CSC
unam

PROYECTO Estructura muro-marco ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA (4) DE 10

1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	45	50
45	111	110	126	127	1	
46	114	113	129	130		1
53	128	127	143	144	1	
54	153	152	168	169		
60	165	164	180	181	1	
61	168	167	183	184		1
68	182	181	197	198	1	
69	186	184	200	201		
75	197	196	212	213	1	
76	200	199	215	216		1
83	214	213	229	230	1	
84	3	2	18	19		
90	16	14	30	31	1	
91	18	17	33	34		1
98	32	31	47	48	1	
99	35	34	50	51		
105	47	46	62	63	1	
106	66	65	81	82		1
113	80	79	95	96	1	
114	83	82	98	99		
120	95	94	110	111	1	
121	98	97	113	114		1
128	112	111	127	128	1	
129	115	114	130	131		

2	1	2
1	2	1
2	1	2

9

orma de ι ficación

CSC
unam

PROYECTO Estructura muro-marco ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA (5) DE 10

```
   135  127  126  142  143
   136  152  154  167  168
   143  166  165  181  182
   144  169  168  184  185
   150  181  180  196  197
   151  184  183  199  200
   158  198  197  213  214
   159  201  200  216  217
   165  213  212  228  229
$    TIPO DE RESTRICCIÓN DE NUDOS CON DESPLAZAMIENTOS PRESCRITOS NULOS
C    (Nudo restringido; restricciones en X; en Y; angular.  1 indica movimiento restringido en esa dirección)
$
   1111   17111   33111   49111   65111   81111   97111   113111   129111   145111
   151111   167111   183111   199111   215111
$    INDICADOR DEL CÁLCULO DE RIGIDECES DE ENTREPISO
    KÁLCULO DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO
$    NÚMERO DE NIVELES, NÚMERO MÁXIMO DE NUDOS POR NIVEL
    5   15
$    NÚMERO DE NUDOS POR NIVEL
   15   15   15   15   15
$    NUMERACIÓN DE LOS NUDOS POR NIVEL
    4   20   36   52   68   84  100  116  132  146  154  170  186  202  218
    7   23   39   55   71   87  103  119  135  147  157  173  189  205  221
   10   26   42   58   74   90  106  122  138  148  160  176  192  208  224
   13   29   45   61   77   93  109  125  141  149  163  179  195  211  227
```

orma de ... ficación

CSC
unam

PROYECTO Estructura muro-marco ARCHIVO FECHA Mayo 1982
PROGRAMA CODIFICO HOJA (7) DE 10

33	0.000	-2.982
49	0.000	-2.982
65	0.000	-2.982
81	0.000	-2.982
97	0.000	-2.982
113	0.000	-2.982
129	0.000	-2.982
145	0.000	-2.982
151	0.000	-2.982
167	0.000	-2.982
183	0.000	-2.982
199	0.000	-2.982
245	0.000	-1.491
4	0.056	-1.431
20	0.056	-2.982
36	0.056	-2.982
52	0.056	-2.982
68	0.056	-2.982
84	0.056	-2.982
100	0.056	-2.982
116	0.056	-2.982
132	0.056	-2.982
148	0.056	-2.982
164	0.056	-2.982

Forma de codificación

CSC unam

PROYECTO Estructura muro-marco ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA 18 DE 10

170	0.056	-2.982
186	0.056	-2.982
202	0.056	-2.982
218	0.056	-1.491
7	0.112	-1.491
23	0.112	-2.982
39	0.112	-2.982
55	0.112	-2.982
71	0.112	-2.982
87	0.112	-2.982
103	0.112	-2.982
119	0.112	-2.982
135	0.112	-2.982
147	0.112	-2.982
157	0.112	-2.982
173	0.112	-2.982
189	0.112	-2.982
205	0.112	-2.982
221	0.112	-1.491
10	0.168	-1.491
26	0.168	-2.982
42	0.168	-2.982
58	0.168	-2.982
74	0.168	-2.982

forma de ficación **CSC unam**

PROYECTO: Estructura muro-marco — ARCHIVO: — FECHA: Mayo 1992

PROGRAMA: — CODIFICO: — HOJA: 9 — DE: 10

90	0.168	-2.984
106	0.168	-2.984
122	0.168	-2.984
138	0.168	-2.984
148	0.168	-2.984
160	0.168	-2.984
176	0.168	-2.984
192	0.168	-2.984
208	0.168	-2.984
224	0.168	-1.491
13	0.220	-1.491
29	0.220	-2.984
45	0.220	-2.984
61	0.220	-2.984
77	0.220	-2.984
93	0.220	-2.984
109	0.220	-2.984
125	0.220	-2.984
141	0.220	-2.984
149	0.220	-2.984
163	0.220	-2.984
179	0.220	-2.984
195	0.220	-2.984
211	0.220	-2.984

Forma de ficación

CSC unam

PROYECTO Estructura muro-marco ARCHIVO FECHA Mayo 1982

PROGRAMA CODIFICO HOJA 10 DE 10

227	0.220	-1.491
16	0.280	-1.491
32	0.280	-2.982
48	0.280	-2.982
64	0.280	-2.982
80	0.280	-2.982
96	0.280	-2.982
112	0.280	-2.982
128	0.280	-2.982
144	0.280	-2.982
150	0.280	-2.982
166	0.280	-2.982
182	0.280	-2.982
198	0.260	-2.982
214	0.280	-2.982
230	0.280	-2.982

ANALISIS DE UNA ESTRUCTURA TIPO MURO MARCO

INDICES DE LOS ARCHIVOS DE ELEMENTOS Y ESTRUCTURA

10	NO. DE ARCHIVO PARA ELEMENTOS
15	NO. DE ARCHIVO PARA LOS CORTANTES Y MOMENTOS
20	NO. DE ARCHIVO PARA LAS CARGAS INTERNAS
25	NO.DE ARCHIVOS PARA CUADRADOS

1 NO. DE ESTRUCTURAS POR ANALIZAR

ANALISIS DEL MURO MARCO A

20	NO. DE ELEMENTOS
590	NO. DE ECUACIONES
1	NO. DE TIPOS DE MATERIAL
230	NO. DE PUNTOS DE LA ESTRUCTURA
165	NO. DE CUADRILATEROS
2	NO. DE TIPOS DE SECCION
0	NO. DEL PRIMER PUNTO FRONTERA
0	NO. DE NUDOS CON DESP. PRESCRITO .NE.0
15	NO. DE NUDOS FRONTERA
1	NO. DE CONDICIONES DE CARGA
0	INDICADOR DE RIGIDECES DE ENTREPISO

CONSTANTES ELASTICAS DE LOS MATERIALES

MAT.NO.	MODULO DE ELASTICIDAD (TON/M**2)	COEFICIENTE DE POISSON	PESO VOLUMETRICO (TON/M**3)
1	1500000.00	0.15	2.400

P A R A M E T R O S Q U E D E F I N E N L A S S E C I O N E S

TIPO	*SECCION*	*PARAMETROS**
0	ESPECIAL	(A,IZ,FY)
1	RECTANGULAR	(B,H)
2	T	(B,H,V,T)
3	I	(B,H,V,T)
4	CANAL	(B,H,V,T)
5	ANGULO	(B,H,V,T)
6	CIRCULAR	(D)
7	CAJON	(B,H,V,T)
8	CIRCULAR HUECA	(D,TC)
9	CRUZ	(B,H,V,T,C)

(12) II

```
10        ZETA                       (BI,H,V,TI,C,P)
11        H                          (B,H,V,T)

**NOMENCLATURA**     (VER FIGURAS DEL CATALOGO DE SECCIONES)

B         ANCHO DE LA SECCION TIPO 1,2,3,4,5,7,9,10 Y 11
BI        ANCHO INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
D         DIAMETRO DE LAS SECCIONES TIPO 6 Y 8
H         ALTURA DE LAS SECCIONES TIPO 1,2,3,4,5,7,9,10 Y 11
TC        ESPESOR DE LA SECCION CIRCULAR HUECA
V         ANCHO DEL ALMA DE LAS SECCIONES TIPO 2,3,4,7,9,10 Y 11
T         ESPESOR DEL PATIN DE LAS SECCIONES TIPO 2,3,4,5,7,9 Y 11
TI        ESPESOR DEL PATIN INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
P         ESPESOR DEL PATIN SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
BS        ANCHO SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
C         DISTANCIA ENTRE LAS FIBRAS SUPERIORES DEL ALMA Y PATIN RESPECTIVAMENTE DE LAS SECCIONES 9 Y 10

(CM)      CENTIMETROS
(M**2)    METROS A LA SEGUNDA POTENCIA
(M**4)    METROS A LA CUARTA POTENCIA
A         AREA
IZ        MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE Z
FY        FACTOR DE FORMA PARA LA DIRECCION Y
```

SECCION NO.	TIPO	B-BI-D-A (CM)	H-IZ-TC (CM)	V-FY (CM)	T-TI (CM)	C-BS (CM)	P (CM)
1	1	70.000	15.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1	100.000	20.000	0.000	0.000	0.000	0.000

SECCION NO	TIPO	A (M**2)	IZ (M**4)	FY
1	1	0.10500000	0.000196875	1.20000000
2	1	0.20000000	0.00066667	1.20000000

NUDO NO.	ABSCISA (M)	ORDENADA (M)
1	0.000	0.000
2	0.000	0.867
3	0.000	1.733
4	0.000	2.600
5	0.000	3.467
6	0.000	4.333
7	0.000	5.200
8	0.000	6.067
9	0.000	6.933
10	0.000	7.800
11	0.000	8.667
12	0.000	9.533
13	0.000	10.400
14	0.000	11.267
15	0.000	12.133
16	0.000	13.000

17

13 14 15

17	0.500	0.000
18	0.500	0.867
19	0.500	1.733
20	0.500	2.600
21	0.500	3.467
22	0.500	4.333
23	0.500	5.200
24	0.500	6.067
25	0.500	6.933
26	0.500	7.800
27	0.500	8.667
28	0.500	9.533
29	0.500	10.400
30	0.500	11.267
31	0.500	12.133
32	0.500	13.000
33	1.000	0.000
34	1.000	0.867
35	1.000	1.733
36	1.000	2.600
37	1.000	3.467
38	1.000	4.333
39	1.000	5.200
40	1.000	6.067
41	1.000	6.933
42	1.000	7.800
43	1.000	8.667
44	1.000	9.533
45	1.000	10.400
46	1.000	11.267
47	1.000	12.133
48	1.000	13.000
49	1.500	0.000
50	1.500	0.867
51	1.500	1.733
52	1.500	2.600
53	1.500	3.467
54	1.500	4.333
55	1.500	5.200
56	1.500	6.067
57	1.500	6.933
58	1.500	7.800
59	1.500	8.667
60	1.500	9.533
61	1.500	10.400
62	1.500	11.267
63	1.500	12.133
64	1.500	13.000
65	3.500	0.000
66	3.500	0.867
67	3.500	1.733
68	3.500	2.600
69	3.500	3.467
70	3.500	4.333
71	3.500	5.200
72	3.500	6.067
73	3.500	6.933
74	3.500	7.800
75	3.500	8.667
76	3.500	9.533
77	3.500	10.400
78	3.500	11.267
79	3.500	12.133
80	3.500	13.000
81	4.000	0.000
82	4.000	0.867
83	4.000	1.733
84	4.000	2.600
85	4.000	3.467
86	4.000	4.333
87	4.000	5.200
88	4.000	6.067
89	4.000	6.933
90	4.000	7.800
91	4.000	8.667
92	4.000	9.533
93	4.000	10.400
94	4.000	11.267
95	4.000	12.133
96	4.000	13.000
97	4.500	0.000
98	4.500	0.867
99	4.500	1.733
100	4.500	2.600
101	4.500	3.467
102	4.500	4.333
103	4.500	5.200
104	4.500	6.067
105	4.500	6.933
106	4.500	7.800
107	4.500	8.667
108	4.500	9.533
109	4.500	10.400
110	4.500	11.267
111	4.500	12.133
112	4.500	13.000
113	5.000	0.000
114	5.000	0.867
115	5.000	1.733
116	5.000	2.600
117	5.000	3.467
118	5.000	4.333
119	5.000	5.200
120	5.000	6.067
121	5.000	6.933
122	5.000	7.800
123	5.000	8.667
124	5.000	9.533
125	5.000	10.400
126	5.000	11.267
127	5.000	12.133
128	5.000	13.000
129	5.500	0.000
130	5.500	0.867
131	5.500	1.733
132	5.500	2.600
133	5.500	3.467
134	5.500	4.333
135	5.500	5.200
136	5.500	6.067
137	5.500	6.933
138	5.500	7.800
139	5.500	8.667
140	5.500	9.533
141	5.500	10.400
142	5.500	11.267
143	5.500	12.133
144	5.500	13.000
145	6.500	0.000
146	6.500	2.600
147	6.500	5.200
148	6.500	7.800
149	6.500	10.400
150	6.500	13.000
151	7.500	0.000
152	7.500	0.867
153	7.500	1.733
154	7.500	2.600
155	7.500	3.467
156	7.500	4.333
157	7.500	5.200
158	7.500	6.067
159	7.500	6.933
160	7.500	7.800
161	7.500	8.667
162	7.500	9.533
163	7.500	10.400
164	7.500	11.267
165	7.500	12.133
166	7.500	13.000
167	8.025	0.000
168	8.025	0.867
169	8.025	1.733
170	8.025	2.600
171	8.025	3.467
172	8.025	4.333
173	8.025	5.200
174	8.025	6.067
175	8.025	6.933
176	8.025	7.800
177	8.025	8.667
178	8.025	9.533
179	8.025	10.400
180	8.025	11.267
181	8.025	12.133
182	8.025	13.000
183	8.550	0.000
184	8.550	0.867
185	8.550	1.733
186	8.550	2.600
187	8.550	3.467
188	8.550	4.333
189	8.550	5.200
190	8.550	6.067
191	8.550	6.933
192	8.550	7.800
193	8.550	8.667
194	8.550	9.533
195	8.550	10.400
196	8.550	11.267
197	8.550	12.133
198	8.550	13.000
199	9.075	0.000

III (16)

200	[illegible].075	0.867
201	9.075	1.733
202	9.075	2.600
203	9.075	3.467
204	9.075	4.333
205	9.075	5.200
206	9.075	6.067
207	9.075	6.933
208	9.075	7.800
209	9.075	8.667
210	9.075	9.533
211	9.075	10.400
212	9.075	11.267
213	9.075	12.133
214	9.075	13.000
215	9.500	0.000
216	9.500	0.867
217	9.500	1.733
218	9.600	2.600
219	9.500	3.467
220	9.500	4.333
221	9.500	5.200
222	9.500	6.067
223	9.500	6.933
224	9.500	7.800
225	9.500	8.667
226	9.500	9.533
227	9.500	10.400
228	9.500	11.267
229	9.500	12.133
230	9.600	13.000

BARRA NO.-----NUDO I----NUDO J----MAT.NO----SEC.NO
---APOY I----APOY J----LONGITUD

1	52	68	1	1	0	0	2.000
2	55	71	1	1	0	0	2.000
3	58	74	1	1	0	0	2.000
4	61	77	1	1	0	0	2.000
5	64	80	1	1	0	0	2.000
6	132	146	1	1	0	0	1.000
7	135	147	1	1	0	0	1.000
8	138	148	1	1	0	0	1.000
9	141	149	1	1	0	0	1.000
10	144	150	1	1	0	0	1.000
11	136	154	1	1	0	0	1.000
12	137	157	1	1	0	0	1.000
13	138	160	1	1	0	0	1.000
14	139	158	1	1	0	0	9.555
15	150	156	1	1	0	0	1.000
16	135	145	1	2	0	0	2.500
17	136	147	1	2	0	0	2.500
18	147	148	1	2	0	0	2.600
19	148	149	1	2	0	0	2.600
20	149	150	1	2	0	0	2.500

270.00 GRADOS, ANGULO ENTRE GRAVEDAD Y EJE X GLOBAL
0.20 METROS, ESPESOR DOMINANTE EN EL MURO

14

17 18 19

ELEMENTO NO.	TIPO DE ELEMENTO
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2
12	2
13	2
14	2
15	2
16	2
17	2
18	2
19	2
20	2
21	2
22	2
23	2
24	2
25	2
26	2
27	2
28	2
29	2
30	2
31	2
32	2
33	2
34	2
35	2
36	2
37	2
38	2
39	2
40	2
41	2
42	2
43	2
44	2
45	2
46	2
47	2
48	2
49	2
50	2
51	2
52	2
53	2
54	2
55	2
56	2
57	2
58	2
59	2
60	2
61	2
62	2
63	2
64	2
65	2
66	2
67	2
68	2
69	2
70	2
71	2
72	2
73	2
74	2
75	2
76	2
77	2
78	2
79	2
80	2
81	2
82	2
83	2
84	1
85	1
86	1
87	1
88	1
89	1
90	1
91	1
92	1
93	1
94	1
95	1
96	1
97	1
98	1
99	1
100	1
101	1
102	1
103	1
104	1
105	1
106	1
107	1
108	1
109	1
110	1
111	1
112	1
113	1
114	1
115	1
116	1
117	1
118	1
119	1
120	1
121	1
122	1
123	1
124	1
125	1
126	1
127	1
128	1
129	1
130	1
131	1
132	1
133	1
134	1
135	1
136	1
137	1
138	1
139	1
140	1
141	1
142	1
143	1
144	1
145	1
146	1
147	1
148	1
149	1
150	1
151	1
152	1
153	1
154	1
155	1

ELEM NO	NODO I	NODO J	NODO K	NODO L	MAT. NO.	ESPESOR(M)	INGEN
1	3	1	17	19	1	0.20	0
2	4	3	19	20	1	0.20	1
3	6	5	21	22	1	0.20	1
4	9	7	23	24	1	0.20	1
5	10	9	25	26	1	0.20	1
6	12	11	27	29	1	0.20	1
7	14	13	29	30	1	0.20	1
8	15	15	31	32	1	0.20	1
9	19	18	34	35	1	0.20	0
10	21	20	35	37	1	0.20	1
11	24	22	39	39	1	0.20	1
12	25	24	40	41	1	0.20	1

15

20

13	37	[illegible]	33	45	1	0.20	1
14	29	[illegible]	39	35	1	0.20	1
15	31	43	45	37	1	0.20	1
16	33	43	47	50	1	0.20	0
17	35	42	51	52	1	0.20	1
18	39	47	35	54	1	0.20	1
19	40	54	33	55	1	0.20	1
20	42	41	37	58	1	0.20	1
21	44	43	37	60	1	0.20	1
22	45	43	51	62	1	0.20	1
23	43	47	55	64	1	0.20	1
24	57	45	32	63	1	0.20	0
25	57	43	34	65	1	0.20	1
26	71	70	35	67	1	0.20	1
27	73	72	33	69	1	0.20	1
28	75	74	70	71	1	0.20	1
29	77	76	72	73	1	0.20	1
30	79	75	74	93	1	0.20	1
31	89	81	77	74	1	0.20	0
32	93	83	99	100	1	0.20	1
33	95	93	101	102	1	0.20	1
34	99	97	103	104	1	0.20	1
35	70	57	105	105	1	0.20	1
36	92	71	107	108	1	0.20	1
37	93	73	109	110	1	0.20	1
38	95	75	111	112	1	0.20	1
39	97	13	113	115	1	0.20	0
40	101	102	115	117	1	0.20	1
41	103	102	118	119	1	0.20	1
42	105	104	120	121	1	0.20	1
43	107	105	122	123	1	0.20	1
44	109	113	124	125	1	0.20	1
45	111	113	125	127	1	0.20	1
46	114	115	129	130	1	0.20	0
47	115	113	131	132	1	0.20	1
48	119	117	135	134	1	0.20	1
49	120	119	135	135	1	0.20	1
50	122	121	137	138	1	0.20	1
51	124	123	139	140	1	0.20	1
52	125	123	141	142	1	0.20	1
53	129	127	145	143	1	0.20	1
54	133	132	154	157	1	0.20	0
55	135	154	170	171	1	0.20	1
56	157	155	172	173	1	0.20	1
57	157	133	174	175	1	0.20	1
58	151	143	176	177	1	0.20	1
59	153	142	179	179	1	0.20	1
60	155	141	130	181	1	0.20	1
61	169	157	133	184	1	0.20	0
62	170	157	135	185	1	0.20	1
63	172	171	137	189	1	0.20	1
64	174	173	139	190	1	0.20	1
65	175	175	141	192	1	0.20	1
66	173	177	143	194	1	0.20	1
67	190	179	145	195	1	0.20	1
68	193	181	197	193	1	0.20	1
69	195	191	200	201	1	0.20	0
70	197	193	202	203	1	0.20	1
71	199	194	204	205	1	0.20	1
72	191	190	205	207	1	0.20	1
73	199	192	209	209	1	0.20	1

21

74	135	193	210	211	1	0.20	1
75	137	195	212	213	1	0.20	1
76	200	199	215	215	1	0.20	0
77	202	201	217	219	1	0.20	1
78	204	203	219	220	1	0.20	1
79	206	205	221	222	1	0.20	1
80	208	207	223	224	1	0.20	1
81	210	209	225	226	1	0.20	1
82	212	211	227	228	1	0.20	1
83	214	213	229	230	1	0.20	1
84	3	2	19	17	1	0.20	0
85	5	4	20	21	1	0.20	1
86	7	6	22	23	1	0.20	1
87	9	8	23	25	1	0.20	1
88	11	10	25	27	1	0.20	1
89	13	12	24	29	1	0.20	1
90	15	14	30	31	1	0.20	1
91	19	17	33	34	1	0.20	0
92	20	19	35	35	1	0.20	1
93	22	21	37	35	1	0.20	1
94	23	23	39	40	1	0.20	1
95	25	25	41	42	1	0.20	1
96	29	27	43	44	1	0.20	1
97	30	24	45	45	1	0.20	1
98	33	31	47	49	1	0.20	1
99	35	34	50	51	1	0.20	0
100	37	36	52	53	1	0.20	1
101	39	38	54	55	1	0.20	1
102	41	40	55	57	1	0.20	1
103	43	42	59	59	1	0.20	1
104	45	44	50	61	1	0.20	1
105	47	45	52	49	1	0.20	1
106	55	55	31	42	1	0.20	0
107	63	57	33	43	1	0.20	1
108	70	59	35	85	1	0.20	1
109	72	71	37	89	1	0.20	1
110	74	73	59	90	1	0.20	1
111	75	75	71	92	1	0.20	1
112	79	77	75	93	1	0.20	1
113	80	79	95	95	1	0.20	1
114	83	82	74	97	1	0.20	0
115	95	84	100	101	1	0.20	1
116	97	86	102	103	1	0.20	1
117	99	88	104	105	1	0.20	1
118	91	90	105	107	1	0.20	1
119	93	92	107	109	1	0.20	1
120	95	94	110	111	1	0.20	1
121	97	97	113	114	1	0.20	0
122	100	99	115	116	1	0.20	1
123	102	101	117	118	1	0.20	1
124	104	103	119	120	1	0.20	1
125	106	105	121	122	1	0.20	1
126	108	107	123	124	1	0.20	1
127	110	109	125	125	1	0.20	1
128	112	111	127	129	1	0.20	1
129	115	114	130	131	1	0.20	0
130	117	116	132	133	1	0.20	1
131	119	118	134	135	1	0.20	1
132	121	120	135	137	1	0.20	1
133	123	122	138	139	1	0.20	1
134	125	124	140	141	1	0.20	1

9/

135	137	135	143	145	1	0.20	1
136	152	151	167	169	1	0.20	0
137	153	155	168	170	1	0.20	1
138	156	155	171	172	1	0.20	1
139	159	157	175	174	1	0.20	1
140	153	159	175	176	1	0.20	1
141	162	161	177	174	1	0.20	1
142	164	163	179	180	1	0.20	1
143	165	165	181	182	1	0.20	1
144	167	169	183	185	1	0.20	0
145	171	170	185	187	1	0.20	1
146	173	172	189	189	1	0.20	1
147	175	174	190	191	1	0.20	1
148	177	175	192	193	1	0.20	1
149	179	179	194	195	1	0.20	1
150	181	180	195	197	1	0.20	1
151	183	185	199	200	1	0.20	0
152	185	185	201	202	1	0.20	1
153	188	187	203	203	1	0.20	1
154	190	189	205	205	1	0.20	1
155	192	191	207	209	1	0.20	1
156	193	193	209	210	1	0.20	1
157	195	195	211	212	1	0.20	1
158	199	197	213	214	1	0.20	1
159	201	200	216	217	1	0.20	0
150	203	202	218	219	1	0.20	1
151	205	204	220	221	1	0.20	1
152	207	206	222	223	1	0.20	1
153	209	208	224	225	1	0.20	1
154	211	210	225	227	1	0.20	1
155	213	212	224	229	1	0.20	1

67 ANCHO DE SEMIBANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

DESPLAZAMIENTOS PRESCRITOS NULO

NUDO RESTRINGIDO	RESTRICCION TIPO		
1	1	1	1
17	1	1	1
33	1	1	1
49	1	1	1
65	1	1	1
81	1	1	1
97	1	1	1
115	1	1	1
129	1	1	1
145	1	1	1
161	1	1	1
167	1	1	1
183	1	1	1
199	1	1	1
215	1	1	1

NO. DE RESTRICCIONES NULOS DE LA ESTRUCTURA 45

NO. RESTRICCION	G.L.RESTRINGIDO	NO. RESTRICCION	G.L.RESTRINGIDO	NO. RESTRICCION	G.L.RESTRINGIDO
1	1	2	2	3	3
4	49	5	50	6	51

III (23)

7	97	8	98	9	99
10	145	11	146	12	147
13	193	14	194	15	195
16	241	17	242	18	243
19	289	20	290	21	291
22	337	23	338	24	339
25	385	26	386	27	387
28	433	29	434	30	435
31	451	32	452	33	453
34	499	35	500	36	501
37	547	38	548	39	549
40	595	41	596	42	597
43	643	44	644	45	645

CALCULO DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO.

PUNTOS NODALES EN CADA NIVEL

NIVEL	NO. DE NUDOS
1	15
2	15
3	15
4	15
5	15

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 1

4 20 36 52 68 84 100 116 132 146 154 170 186 202 218

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 2

7 23 39 55 71 87 103 119 135 147 157 173 189 205 221

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 3

10 26 42 58 74 90 106 122 138 148 160 176 192 208 224

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 4

13 29 45 61 77 93 109 125 141 149 163 179 195 211 227

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 5

16 32 48 64 80 96 112 128 144 150 166 182 198 214 230

ALTURAS DE LOS NIVELES

NIVEL NO.	ALTURA (M)
1	2.60
2	2.60
3	2.60
4	2.60
5	2.60

PESOS DE LOS NIVELES

NIVEL NO.	PESO (TON)
1	31.230

18

VIII (29)

```
2          35.230
3          35.230
4          35.230
5          35.230

      COEFICIENTE SISMICO=    0.080

NIVEL*ALTURA(M)*FZA.RIGIDEZ(TON)
   1      2.50              2.659
   2      2.50              2.658
   3      2.50              2.658
   4      2.50              2.658
   5      2.50              2.658
     RIGIDECES DE ENTREPISO EN TON/M
     1.7911E+053.0553E+049.1080E+04*********************
```

ANALISIS DEL MURO MARCO A CONSIDERANDO CARGA ESTATICA Y EFECTO SISMICO

```
  1  NO. DE CONDICION DE CARGA
 20  NO. DE BARRAS CARGADAS
 20  NO. DE NUDOS CARGADOS
  0 INDICADOR DE FUERZAS DE CUERPO.0=SI;1=NO
```

DATOS PARA EL CASO DE BARRAS CON CARGAS INTERMEDIAS DISTINTAS A PESO PROPIO

BARRA NO	IND.GRAFI
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1

```
BARRA    1 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=    -0.5000
BARRA    2 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA    3 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA    4 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA    5 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA    6 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=    -0.5000
BARRA    7 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA    8 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA    9 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA   10 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA   11 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA   12 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA   13 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
```

BARRA 14 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA 15 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA 16 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)= 0.0000
BARRA 17 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA 18 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA 19 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
BARRA 20 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

ACCIONES CONCENTRADAS EN LOS NUDOS (EN TON Y TON-M)

NUDO NO.	FZA. HORIZONTAL	FZA. VERTICAL	MOMENTO
1	0.000	-1.491	0.00000
17	0.000	-2.982	0.00000
33	0.000	-2.982	0.00000
49	0.000	-2.982	0.00000
65	0.000	-2.982	0.00000
81	0.000	-2.982	0.00000
97	0.000	-2.982	0.00000
113	0.000	-2.982	0.00000
129	0.000	-2.982	0.00000
145	0.000	-2.982	0.00000
161	0.000	-2.982	0.00000
177	0.000	-2.982	0.00000
183	0.000	-2.982	0.00000
199	0.000	-2.982	0.00000
215	0.000	-1.491	0.00000
4	0.056	-1.491	0.00000
20	0.056	-2.982	0.00000
36	0.056	-2.982	0.00000
52	0.056	-2.982	0.00000
68	0.056	-2.982	0.00000
84	0.056	-2.982	0.00000
100	0.056	-2.982	0.00000
116	0.056	-2.982	0.00000
132	0.056	-2.982	0.00000
148	0.056	-2.982	0.00000
154	0.056	-2.982	0.00000
170	0.056	-2.982	0.00000
186	0.056	-2.982	0.00000
202	0.056	-2.982	0.00000
218	0.056	-1.491	0.00000
7	0.112	-1.491	0.00000
23	0.112	-2.982	0.00000
39	0.112	-2.982	0.00000
55	0.112	-2.982	0.00000
71	0.112	-2.982	0.00000
87	0.112	-2.982	0.00000
103	0.112	-2.982	0.00000
119	0.112	-2.982	0.00000
135	0.112	-2.982	0.00000
141	0.112	-2.982	0.00000
157	0.112	-2.982	0.00000
173	0.112	-2.982	0.00000

XI (251)

16	0.112	-2.982	0.00000
26	0.112	-2.982	0.00000
221	0.112	-1.491	0.00000
10	0.168	-1.491	0.00000
25	0.168	-2.982	0.00000
42	0.168	-2.982	0.00000
58	0.168	-2.982	0.00000
74	0.168	-2.982	0.00000
90	0.168	-2.982	0.00000
106	0.168	-2.982	0.00000
122	0.168	-2.982	0.00000
138	0.168	-2.982	0.00000
149	0.168	-2.982	0.00000
160	0.168	-2.982	0.00000
175	0.168	-2.982	0.00000
192	0.168	-2.982	0.00000
208	0.168	-2.982	0.00000
221	0.168	-1.491	0.00000
15	0.220	-1.491	0.00000
27	0.220	-2.982	0.00000
45	0.220	-2.982	0.00000
61	0.220	-2.982	0.00000
77	0.220	-2.982	0.00000
93	0.220	-2.982	0.00000
109	0.220	-2.982	0.00000
125	0.220	-2.982	0.00000
141	0.220	-2.982	0.00000
143	0.220	-2.982	0.00000
158	0.220	-2.982	0.00000
177	0.220	-2.982	0.00000
195	0.220	-2.982	0.00000
211	0.220	-2.982	0.00000
227	0.220	-1.491	0.00000
15	0.280	-1.491	0.00000
32	0.280	-2.982	0.00000
43	0.280	-2.982	0.00000
63	0.280	-2.982	0.00000
67	0.280	-2.982	0.00000
95	0.280	-2.982	0.00000
112	0.280	-2.982	0.00000
129	0.280	-2.982	0.00000
143	0.280	-2.982	0.00000
150	0.280	-2.982	0.00000
165	0.280	-2.982	0.00000
162	0.280	-2.982	0.00000
193	0.280	-2.982	0.00000
213	0.280	-2.982	0.00000
230	0.280	-1.491	0.00000

DESPLAZAMIENTOS NODALES DE LA ESTRUCTURA (M)

PTO.NOD.	H O R I Z O N T A L--	V E R T I C A L	G I R O S (RAD)
1	0.	0.	0.
2	-2.2445977E-05	-1.0330312E-04	2.5046805E-05
3	-3.9354720E-05	-1.8912319E-04	1.1943585E-05
4	-4.6238731E-05	-2.6793051E-04	6.6953192E-07
5	-4.2670247E-05	-3.2571338E-04	-9.6925334E-06
6	-2.0538150E-05	-3.7307040E-04	-2.4120159E-05
7	2.0546215E-06	-4.2899973E-04	-3.0391527E-05
8	4.0139830E-05	-4.5177360E-04	-5.6795931E-05
9	7.7201559E-05	-4.9851743E-04	-6.2497460E-05

(26)

10	1.5035367E-04	-5.4035010E-04	-6.0153395E-05
11	1.9313197E-04	-5.7112140E-04	-3.7492014E-05
12	2.1499402E-04	-5.0758952E-04	-1.1531027E-05
13	2.0773590E-04	-5.5347760E-04	4.5567757E-05
14	1.5162544E-04	-5.5576161E-04	9.6565161E-05
15	7.6076515E-05	-5.9530154E-04	6.7067087E-05
16	2.3611003E-05	-5.9173749E-04	6.1602146E-05
17	0.	0.	0.
18	-1.5359455E-05	-7.2131277E-05	1.4726791E-05
19	-5.2515252E-05	-1.8235555E-04	1.7281751E-05
20	-1.0292414E-05	-2.5534961E-04	1.6341604E-05
21	-3.7155902E-05	-3.3109990E-04	-7.5957041E-05
22	-2.4121155E-05	-3.9227592E-04	-2.6932197E-05
23	5.4571477E-06	-4.5070246E-04	-4.6031535E-05
24	4.9793391E-05	-4.8341900E-04	-5.2532256E-05
25	1.9721835E-04	-5.2873897E-04	-6.0525457E-05
26	1.5598550E-04	-5.6594070E-04	-5.2140031E-05
27	1.9597345E-04	-5.3935151E-04	-3.6733217E-05
28	2.1715600E-04	-5.1245902E-04	-5.5487714E-05
29	2.0379764E-04	-5.3516294E-04	2.8567556E-05
30	1.5571415E-04	-5.4335415E-04	7.4314819E-05
31	7.4558993E-05	-5.5017714E-04	6.7909902E-05
32	5.1594751E-05	-5.5579101E-04	6.7327414E-05
33	0.	0.	0.
34	-7.9823507E-06	-8.3718315E-05	1.7547706E-05
35	-2.5934535E-05	-1.7749935E-04	5.2929075E-06
36	-5.4117735E-05	-2.6932711E-04	-3.1814033E-05
37	-5.0292345E-05	-3.3702036E-04	-1.4201924E-05
38	-2.0079107E-05	-4.0550559E-04	-1.6035206E-05
39	9.7526955E-06	-4.7037679E-04	-4.4544716E-05
40	5.5918217E-05	-5.1597732E-04	-5.5351000E-05
41	1.0235457E-04	-5.5744401E-04	-5.8749240E-05
42	1.5958935E-04	-5.7493165E-04	-6.3180925E-05
43	1.9920107E-04	-5.0573573E-04	-3.6139757E-05
44	2.1727607E-04	-5.1476396E-04	-6.4950095E-05
45	2.0774382E-04	-5.1748117E-04	2.1741923E-05
46	1.6238873E-04	-5.9576173E-04	9.6311292E-05
47	4.5511612E-05	-6.1170429E-04	6.7298629E-05
48	5.6051194E-05	-5.4521012E-04	-1.6234958E-05
49	0.	0.	0.
50	2.0793500E-07	-9.1822219E-05	4.9374052E-06
51	-1.8465210E-05	-1.5594310E-04	2.9025578E-05
52	-3.0530440E-05	-2.7870538E-04	-6.8068991E-05
53	-2.2526743E-05	-3.3750057E-04	3.1921707E-07
54	-1.1155821E-05	-4.1452549E-04	-1.1370155E-05
55	1.1504701E-05	-5.0059271E-04	-5.2353279E-05
56	5.8555959E-05	-5.4290328E-04	-5.2501894E-05
57	1.0517296E-04	-5.8359114E-04	-5.3524196E-05
58	1.5458265E-04	-5.3030755E-04	-1.0850958E-04
59	1.9957102E-04	-5.2955523E-04	-3.1939410E-05
60	2.1570779E-04	-5.1556555E-04	-4.5990044E-06
61	2.0516341E-04	-5.0740702E-04	2.9453007E-05
62	1.7415995E-04	-5.5532554E-04	-2.2069714E-05
63	5.1504573E-05	-5.2907652E-04	-1.4990490E-05
64	1.1269643E-04	-5.6830372E-04	-2.1108492E-04
65	0.	0.	0.
66	4.9291776E-06	-7.2118752E-05	1.1922435E-05
67	7.1974765E-07	-1.5732467E-04	-2.0771496E-06
68	-4.3483301E-05	-3.7797155E-04	4.6513484E-04
69	-1.0305375E-04	-3.2465071E-04	-6.0757452E-05
70	-5.0194435E-05	-3.8941755E-04	-4.7194460E-05

23

71	-1.0311737E-05	-0.7510304E-0	-8.0319751E-05
72	3.7909709E-05	-5.3364310E-04	-6.3992698E-05
73	9.2710742E-05	-5.0520021E-04	-6.4956521E-05
74	1.4051237E-04	-5.9727697E-04	1.1394622E-05
75	1.6652127E-04	-7.4430593E-04	-3.7576835E-05
76	1.9319572E-04	-9.0091540E-04	-2.8921249E-05
77	2.0712319E-04	-8.6421241E-04	-3.7840404E-06
78	2.1298114E-04	-9.3724387E-04	-7.4547935E-06
79	2.1318105E-04	-9.1917372E-04	-1.9975472E-05
80	1.5909995E-04	-9.8750631E-04	2.1950324E-04
81	0.	0.	0.
82	1.3915702E-05	-5.2701599E-05	-1.3279555E-05
83	2.2575151E-06	-1.5935450E-04	9.4130163E-05
84	-5.4559969E-05	-2.5936831E-04	1.0177676E-04
85	-8.9930025E-05	-3.3975125E-04	3.6982116E-05
86	-5.4431484E-05	-4.1028112E-04	-5.6148092E-05
87	-6.0587018E-06	-4.9235012E-04	-4.2300875E-05
88	4.4336115E-05	-5.6233301E-04	-6.3169895E-05
89	9.0363192E-05	-5.3531251E-04	-4.7943305E-05
90	1.4230719E-04	-7.0943300E-04	-3.7985391E-05
91	1.7232465E-04	-7.6150880E-04	-2.7689812E-05
92	1.9720166E-04	-8.1301576E-04	-2.4014892E-05
93	2.1055570E-04	-9.5170174E-04	-7.3907919E-06
94	2.1530177E-04	-9.8936109E-04	-7.2007071E-06
95	2.1756239E-04	-9.1562941E-04	2.3788202E-05
96	1.9172643E-04	-9.3555659E-04	4.5109477E-05
97	0.	0.	0.
98	2.3179374E-05	-4.7936395E-05	2.2950735E-05
99	4.0932910E-07	-9.3953922E-05	6.1950696E-05
100	-5.1109898E-05	-2.1431107E-04	5.1609479E-05
101	-7.3106385E-05	-3.2640261E-04	-1.9106719E-06
102	-4.0042000E-05	-4.2324261E-04	-1.0060615E-05
103	-2.0595921E-07	-5.1527469E-04	-5.0230314E-05
104	5.1271769E-05	-5.3974747E-04	-5.0046096E-05
105	1.0139970E-04	-6.5769411E-04	-5.0321230E-05
106	1.4597939E-04	-7.2593352E-04	-3.9547625E-05
107	1.7749053E-04	-7.7555732E-04	-3.1349195E-05
108	2.0059334E-04	-8.2900021E-04	-1.8701635E-05
109	2.1500421E-04	-9.5790850E-04	-7.2504186E-06
110	2.1717655E-04	-9.9059625E-04	-2.3798676E-07
111	2.1712810E-04	-9.0779275E-04	6.5130837E-06
112	2.1230594E-04	-9.2509407E-04	2.3962301E-05
113	5.3542129E-06	-2.5779834E-05	7.7529744E-06
114	1.1077072E-05	-3.3119443E-05	-8.5153914E-05
115	0.	0.	0.
116	-3.3796319E-05	-1.9079316E-04	5.7750183E-05
117	-5.0217929E-05	-3.1733270E-04	1.2746007E-05
118	-3.9077709E-05	-4.3919196E-04	-5.0569257E-05
119	8.5054344E-06	-5.3771140E-04	-4.0519795E-05
120	5.0313433E-05	-6.1959806E-04	-5.9262531E-05
121	1.0929192E-04	-6.5321354E-04	-4.5749298E-05
122	1.5150322E-04	-7.4705270E-04	-3.9031890E-05
123	1.8125702E-04	-7.9077074E-04	-2.7056325E-05
124	2.0394737E-04	-9.3249659E-04	-2.0982673E-05
125	2.1517076E-04	-9.7159923E-04	-1.0519743E-05
126	2.1906291E-04	-9.9180947E-04	-3.4498323E-06
127	2.1975824E-04	-9.0941153E-04	-4.3287968E-07
128	2.2579830E-04	-9.3046649E-04	-1.4154332E-05
129	0.	0.	0.
130	3.9952921E-06	-2.3202685E-05	5.3425361E-06
131	6.9905134E-06	-3.4556764E-05	-3.0377043E-05

132	-1.5043943E-05	-1.5716551E-04	5.1961305E-05
133	-4.6153009E-05	-3.1229340E-04	2.5323519E-06
134	-3.0015187E-05	-4.5255920E-04	-5.0601338E-05
135	1.9225274E-05	-5.5412160E-04	-4.5579730E-05
136	6.4934227E-05	-6.1976235E-04	-5.2107037E-05
137	1.1546577E-04	-7.1157493E-04	-6.1972962E-05
138	1.5714567E-04	-7.5703057E-04	-2.4577134E-05
139	1.8407350E-04	-8.0715158E-04	-3.5549235E-05
140	2.0561970E-04	-8.4710243E-04	-1.9075765E-05
141	2.1523298E-04	-8.7531001E-04	1.0204854E-05
142	2.2017658E-04	-8.7532140E-04	-1.6509197E-06
143	2.2232203E-04	-9.1972726E-04	-7.1147559E-05
144	2.3565935E-04	-9.2728351E-04	4.0711893E-05
145	0.	0.	0.
146	-1.2728372E-05	-1.7139281E-04	-6.1501471E-05
147	3.1922779E-05	-3.1718912E-04	2.6113496E-06
148	1.5359657E-04	-4.0359554E-04	-3.1371042E-05
149	2.1079398E-04	-4.6570159E-04	1.6097597E-04
150	2.4935963E-04	-5.0114222E-04	-3.8255663E-05
151	0.	0.	0.
152	-1.5541704E-05	-1.1235682E-04	2.0190833E-05
153	-1.5877621E-05	-2.1707924E-04	-3.9595980E-06
154	-1.1031049E-05	-3.1533895E-04	5.1783644E-05
155	1.9218437E-06	-3.5110305E-04	-1.9285356E-05
156	2.1150817E-05	-4.3313456E-04	-2.1367869E-05
157	4.3394087E-05	-5.1155570E-04	-4.2155554E-05
158	3.0779573E-05	-5.9374157E-04	-4.9963577E-05
159	1.1910549E-04	-6.5356437E-04	-4.1963197E-05
160	1.5937361E-04	-7.1559920E-04	-3.5854491E-05
161	1.9151201E-04	-7.5637740E-04	-3.1152763E-05
162	2.1974401E-04	-8.1237670E-04	-3.5554101E-05
163	2.3375239E-04	-8.5791707E-04	-1.2049015E-05
164	2.5135552E-04	-8.9535007E-04	-2.2356073E-05
165	2.5997178E-04	-9.1124005E-04	-1.5944764E-06
166	2.6124699E-04	-9.2239597E-04	-5.5947926E-05
167	0.	0.	0.
168	-5.0028815E-06	-1.1335653E-04	9.5786093E-06
169	-7.2743835E-06	-2.1535501E-04	1.1027999E-06
170	-2.2072435E-06	-3.1335267E-04	-7.6537529E-06
171	9.1790022E-06	-3.7125935E-04	-1.5399273E-05
172	2.7197001E-05	-4.7707994E-04	-2.2920330E-05
173	5.2202076E-05	-5.5533176E-04	-3.0112779E-05
174	8.6533353E-05	-6.1563592E-04	-4.4219634E-05
175	1.2495260E-04	-6.7518797E-04	-4.1536239E-05
176	1.6271377E-04	-7.4029138E-04	-4.1844515E-05
177	1.9547002E-04	-7.5344690E-04	-3.4209001E-05
178	2.2567432E-04	-8.2137692E-04	-2.6680091E-05
179	2.4193351E-04	-8.7035213E-04	-1.6557366E-05
180	2.5355318E-04	-8.7592213E-04	-1.3460873E-05
181	2.6266101E-04	-9.1235217E-04	-1.3951626E-05
182	2.6964142E-04	-9.3537637E-04	-6.0175177E-06
183	0.	0.	0.
184	1.0579142E-06	-1.0750436E-04	5.4201052E-06
185	1.5735977E-06	-2.1729692E-04	-3.9964116E-06
186	5.6945291E-06	-3.2032701E-04	-6.4920510E-06
187	1.7109100E-05	-4.0551290E-04	-1.6304158E-05
188	3.4422119E-05	-4.5712684E-04	-2.3964467E-05
189	5.0179177E-05	-5.7234722E-04	-3.3934429E-05
190	7.3001457E-05	-6.3573787E-04	-3.5559569E-05
191	1.3031600E-04	-6.7757710E-04	-4.4192071E-05
192	1.6752419E-04	-7.5737416E-04	-3.6003382E-05

XII

(21)

193	1.99446612E-04	-3.40331096E-04	-5.90119365E-05
194	2.25679335E-04	-3.11126735E-04	-2.99305557E-05
195	2.43382106E-04	-3.30176908E-04	-1.59349977E-05
196	2.35747746E-04	-3.20525948E-04	-1.40753105E-05
197	2.63700708E-04	-3.19713148E-04	-1.00197315E-05
198	2.75282255E-04	-3.33213695E-04	-1.21614545E-05
199	0.	0.	0.
200	7.01599472E-05	-1.39351915E-04	-1.01681655E-05
201	1.11369972E-04	-2.13360095E-04	-6.15201545E-05
202	1.55249172E-04	-3.25311675E-04	-7.35943145E-05
203	2.53537156E-04	-4.13395465E-04	-1.63422795E-05
204	4.25700372E-05	-5.32371505E-04	-2.45291505E-05
205	5.77053405E-05	-5.37128975E-04	-3.07301025E-05
206	3.93915976E-05	-6.30523925E-04	-4.02435255E-05
207	1.35633726E-04	-7.17522635E-04	-3.52750325E-05
208	1.71199311E-04	-7.77133931E-04	-3.98120375E-05
209	2.03244556E-04	-4.14777755E-04	-3.29447315E-05
210	2.23707735E-04	-4.35787592E-04	-2.54372015E-05
211	2.47224735E-04	-3.39531525E-04	-1.77647055E-05
212	2.57773465E-04	-3.07355535E-04	-9.49622505E-05
213	2.65477055E-04	-3.25342065E-04	-1.70172195E-05
214	2.80145555E-04	-3.13278165E-04	-1.90294245E-05
215	0.	0.	0.
216	1.76173365E-05	-1.15571935E-04	-2.38697195E-05
217	2.15493575E-05	-2.19311695E-04	1.06856375E-05
218	2.43264375E-05	-3.30307655E-04	-2.27494285E-05
219	3.57006415E-05	-4.22357755E-04	-1.40533875E-05
220	5.03183055E-05	-5.14409335E-04	-2.33520375E-05
221	7.50190345E-05	-5.05111795E-04	-3.21676265E-05
222	1.05377294E-04	-5.74023905E-04	-3.79497695E-05
223	1.40744822E-04	-7.38419596E-04	-3.20532235E-05
224	1.74378435E-04	-7.77349779E-04	-3.39235115E-05
225	2.04994416E-04	-4.32377584E-04	-3.14671345E-05
226	2.31502715E-04	-4.35594365E-04	-2.47456275E-05
227	2.47707315E-04	-3.99350325E-04	-1.51999395E-05
228	2.53578665E-04	-3.13107435E-04	-9.27049535E-05
229	2.67210925E-04	-3.31335975E-04	-5.63035195E-05
230	2.85678555E-04	-3.59350645E-04	-6.95971395E-05

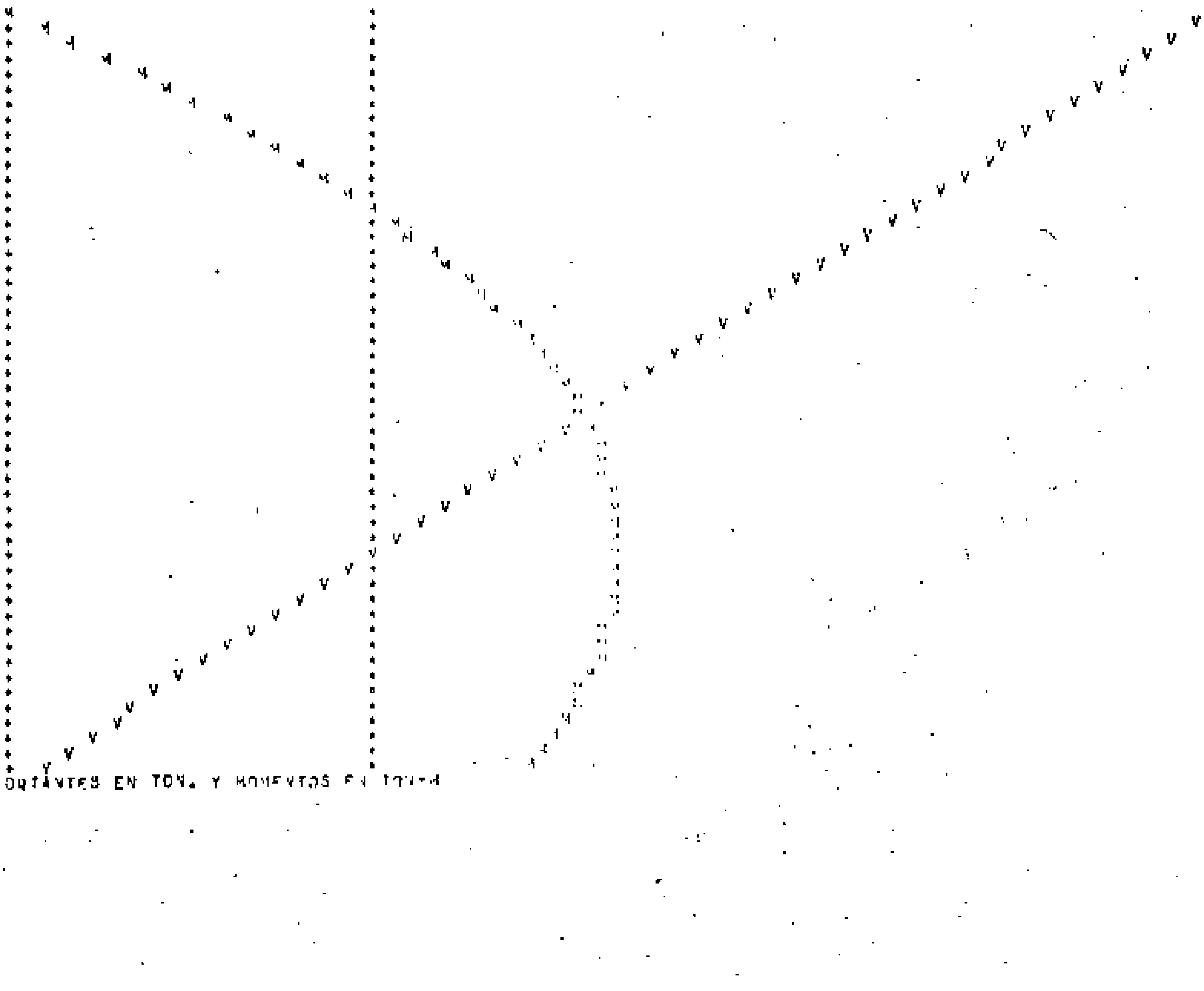
BARRA NO. E	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	**** EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
1	52	53	-1.02004	0.71936	-0.30779	-1.02004	-0.28004	0.13218

26

XIII

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.0276[illegible] UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -3.07736E-01
ORDENADA MAYOR = 7.19956E-01

BARRA NO. 1,NUDO INICIAL= 52,NUDO FINAL= 68



		V	M
1	0.00	7.20E-01	-3.08E-01
2	0.04	7.00E-01	-2.79E-01
3	0.08	6.80E-01	-2.57E-01
4	0.12	6.60E-01	-2.25E-01
5	0.16	6.40E-01	-1.99E-01
6	0.20	6.20E-01	-1.74E-01
7	0.24	6.00E-01	-1.49E-01
8	0.28	5.80E-01	-1.24E-01
9	0.32	5.60E-01	-1.03E-01
10	0.36	5.40E-01	-8.10E-02
11	0.40	5.20E-01	-5.98E-02
12	0.44	5.00E-01	-3.99E-02
13	0.48	4.80E-01	-1.98E-02
14	0.52	4.60E-01	-9.58E-04
15	0.56	4.40E-01	1.72E-02
16	0.60	4.20E-01	3.42E-02
17	0.64	4.00E-01	5.06E-02
18	0.68	3.80E-01	6.62E-02
19	0.72	3.60E-01	8.10E-02
20	0.76	3.40E-01	9.50E-02
21	0.80	3.20E-01	1.09E-01
22	0.84	3.00E-01	1.22E-01
23	0.88	2.80E-01	1.37E-01
24	0.92	2.60E-01	1.43E-01
25	0.96	2.40E-01	1.53E-01
26	1.00	2.20E-01	1.62E-01
27	1.04	2.00E-01	1.71E-01
28	1.08	1.80E-01	1.79E-01
29	1.12	1.60E-01	1.85E-01
30	1.16	1.40E-01	1.91E-01
31	1.20	1.20E-01	1.94E-01
32	1.24	1.00E-01	2.01E-01
33	1.28	8.00E-02	2.0[illegible]E-01
34	1.32	6.00E-02	2.07E-01
35	1.36	4.00E-02	2.09E-01
36	1.40	2.00E-02	2.10E-01
37	1.44	-4.19E-05	2.11E-01
38	1.48	-2.00E-02	2.10E-01
39	1.52	-4.00E-02	2.09E-01
40	1.56	-6.00E-02	2.07E-01
41	1.60	-8.00E-02	2.04E-01
42	1.64	-1.00E-01	2.01E-01
43	1.68	-1.20E-01	1.96E-01
44	1.72	-1.40E-01	1.91E-01
45	1.76	-1.60E-01	1.85E-01
46	1.80	-1.80E-01	1.78E-01
47	1.84	-2.00E-01	1.71E-01
48	1.88	-2.20E-01	1.62E-01
49	1.92	-2.40E-01	1.53E-01
50	1.96	-2.60E-01	1.43E-01
51	2.00	-2.80E-01	1.32E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

47

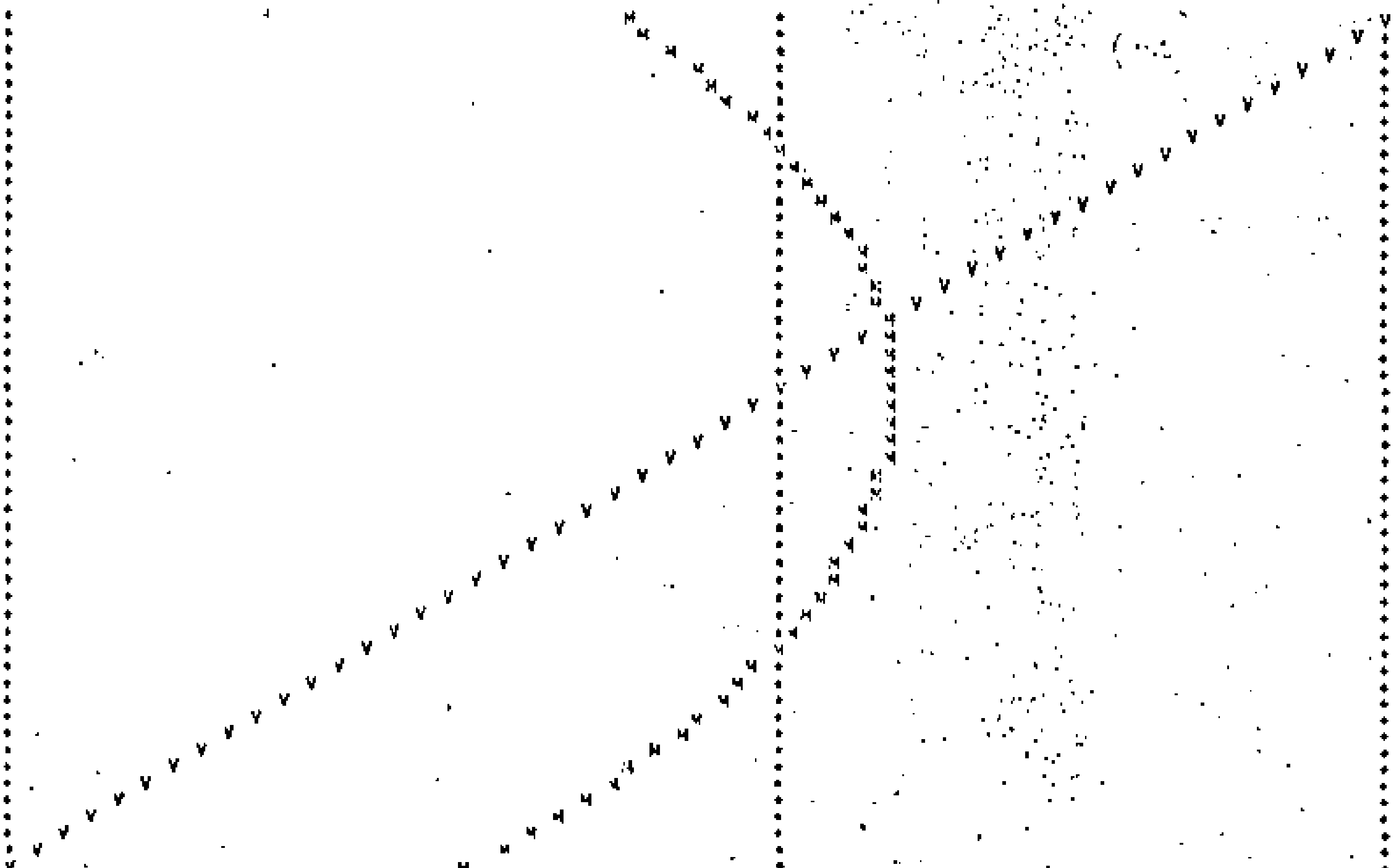
(33)

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
2	55	71	-1.72592	0.44420	-0.11028	-1.72592	-0.55580	-0.22187

(34)

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.0000E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -5.5579E-01
ORDENADA MAYOR = 4.4420E-01

BARRA NO. 2, NUDO INICIAL= 55, NUDO FINAL= 71



		V	M
1	0.00	4.44E-01	-1.10E-01
2	0.04	4.24E-01	-9.39E-02
3	0.08	4.04E-01	-7.67E-02
4	0.12	3.84E-01	-6.04E-02
5	0.16	3.64E-01	-4.56E-02
6	0.20	3.44E-01	-3.19E-02
7	0.24	3.24E-01	-1.81E-02
8	0.28	3.04E-01	-5.50E-03
9	0.32	2.84E-01	6.72E-03
10	0.36	2.64E-01	1.72E-02
11	0.40	2.44E-01	2.74E-02
12	0.44	2.24E-01	3.64E-02
13	0.48	2.04E-01	4.51E-02
14	0.52	1.84E-01	5.31E-02
15	0.56	1.64E-01	6.01E-02
16	0.60	1.44E-01	6.62E-02
17	0.64	1.24E-01	7.14E-02
18	0.68	1.04E-01	7.57E-02
19	0.72	8.43E-02	8.00E-02
20	0.76	6.42E-02	8.29E-02
21	0.80	4.42E-02	8.51E-02
22	0.84	2.42E-02	8.65E-02
23	0.88	4.22E-03	8.72E-02
24	0.92	-1.58E-02	8.68E-02
25	0.96	-3.58E-02	8.58E-02
26	1.00	-5.58E-02	8.39E-02
27	1.04	-7.58E-02	8.13E-02
28	1.08	-9.58E-02	7.79E-02
29	1.12	-1.16E-01	7.34E-02
30	1.16	-1.36E-01	6.84E-02
31	1.20	-1.56E-01	6.28E-02
32	1.24	-1.76E-01	5.61E-02
33	1.28	-1.96E-01	4.87E-02
34	1.32	-2.16E-01	4.05E-02
35	1.36	-2.36E-01	3.14E-02
36	1.40	-2.56E-01	2.16E-02
37	1.44	-2.76E-01	1.10E-02
38	1.48	-2.96E-01	-4.53E-04
39	1.52	-3.16E-01	-1.27E-02
40	1.56	-3.36E-01	-2.57E-02
41	1.60	-3.56E-01	-3.95E-02
42	1.64	-3.76E-01	-5.42E-02
43	1.68	-3.96E-01	-6.94E-02
44	1.72	-4.16E-01	-8.58E-02
45	1.76	-4.36E-01	-1.03E-01
46	1.80	-4.56E-01	-1.21E-01
47	1.84	-4.76E-01	-1.39E-01
48	1.88	-4.96E-01	-1.59E-01
49	1.92	-5.16E-01	-1.79E-01
50	1.96	-5.36E-01	-2.00E-01
51	2.00	-5.56E-01	-2.22E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

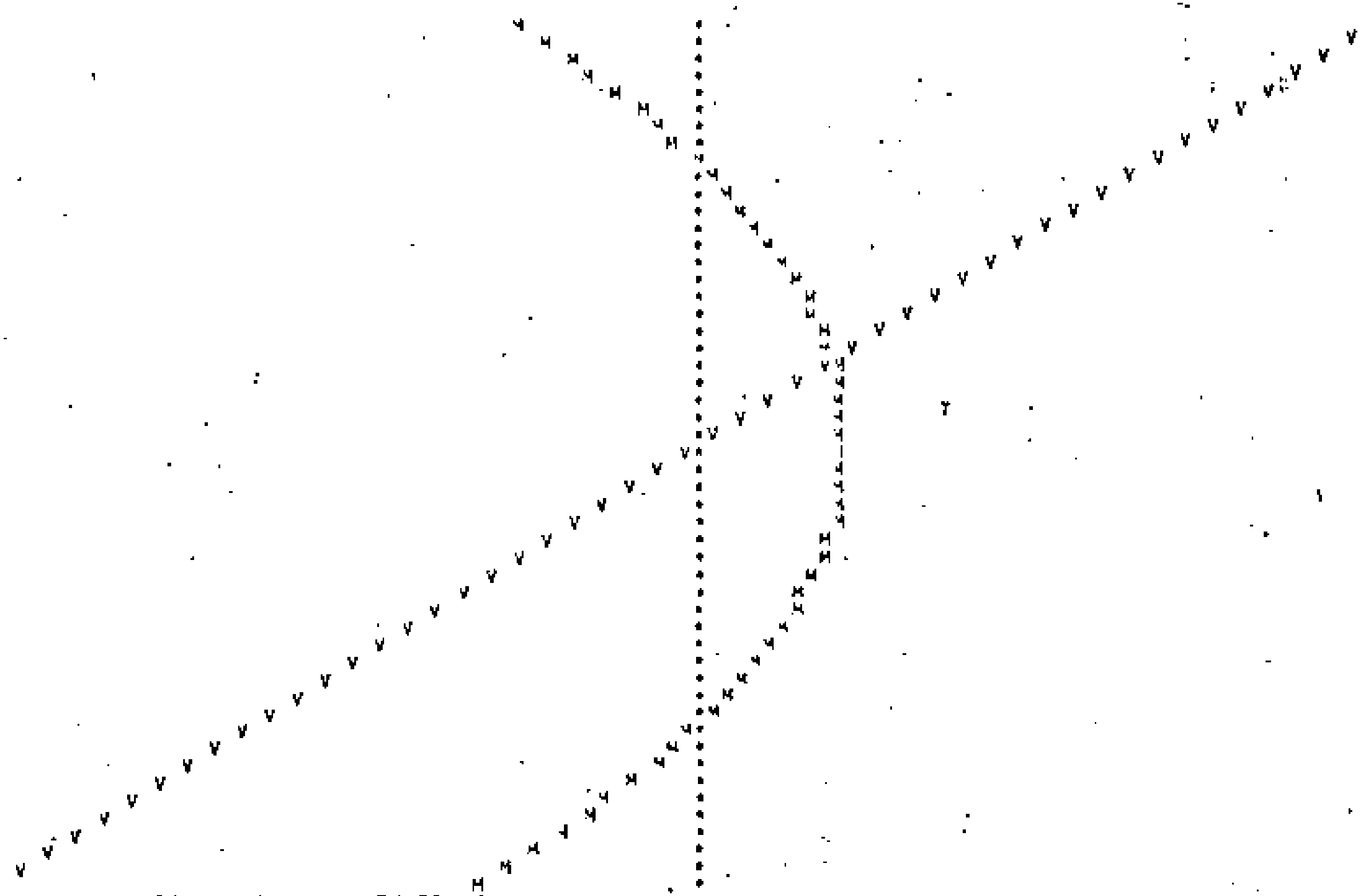
(25)

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
			EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M)			EXTREMO FINAL (TON Y TON-M)		
3	58	74	-1.02141	0.40662	-0.13559	-1.02141	-0.51338	-0.16234

(36)

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.00000E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -5.13376E-01
ORDENADA MAYOR = 4.86624E-01

BARRA NO. 3,NUDO INICIAL= 58,NUDO FINAL= 74



		V	M
1	0.00	4.87E-01	-1.34E-01
2	0.04	4.67E-01	-1.17E-01
3	0.08	4.47E-01	-9.83E-02
4	0.12	4.27E-01	-8.05E-02
5	0.16	4.07E-01	-6.41E-02
6	0.20	3.87E-01	-4.93E-02
7	0.24	3.67E-01	-3.32E-02
8	0.28	3.47E-01	-1.89E-02
9	0.32	3.27E-01	-5.57E-03
10	0.36	3.07E-01	7.20E-03
11	0.40	2.87E-01	1.91E-02
12	0.44	2.67E-01	3.01E-02
13	0.48	2.47E-01	4.00E-02
14	0.52	2.27E-01	4.89E-02
15	0.56	2.07E-01	5.85E-02
16	0.60	1.87E-01	6.55E-02
17	0.64	1.67E-01	7.35E-02
18	0.68	1.47E-01	7.97E-02
19	0.72	1.27E-01	8.52E-02
20	0.76	1.07E-01	8.95E-02
21	0.80	8.66E-02	9.37E-02
22	0.84	6.66E-02	9.68E-02
23	0.88	4.66E-02	9.90E-02
24	0.92	2.66E-02	1.01E-01
25	0.96	6.62E-03	1.01E-01
26	1.00	-1.34E-02	1.01E-01
27	1.04	-3.34E-02	1.00E-01
28	1.08	-5.34E-02	9.85E-02
29	1.12	-7.34E-02	9.58E-02
30	1.16	-9.34E-02	9.25E-02
31	1.20	-1.13E-01	8.84E-02
32	1.24	-1.33E-01	8.30E-02
33	1.28	-1.53E-01	7.77E-02
34	1.32	-1.73E-01	7.12E-02
35	1.36	-1.93E-01	6.37E-02
36	1.40	-2.13E-01	5.57E-02
37	1.44	-2.33E-01	4.68E-02
38	1.48	-2.53E-01	3.70E-02
39	1.52	-2.73E-01	2.65E-02
40	1.56	-2.93E-01	1.51E-02
41	1.60	-3.13E-01	3.01E-03
42	1.64	-3.33E-01	-9.62E-03
43	1.68	-3.53E-01	-2.37E-02
44	1.72	-3.73E-01	-3.87E-02
45	1.76	-3.93E-01	-5.35E-02
46	1.80	-4.13E-01	-6.97E-02
47	1.84	-4.33E-01	-8.64E-02
48	1.88	-4.53E-01	-1.04E-01
49	1.92	-4.73E-01	-1.23E-01
50	1.96	-4.93E-01	-1.42E-01
51	2.00	-5.13E-01	-1.62E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

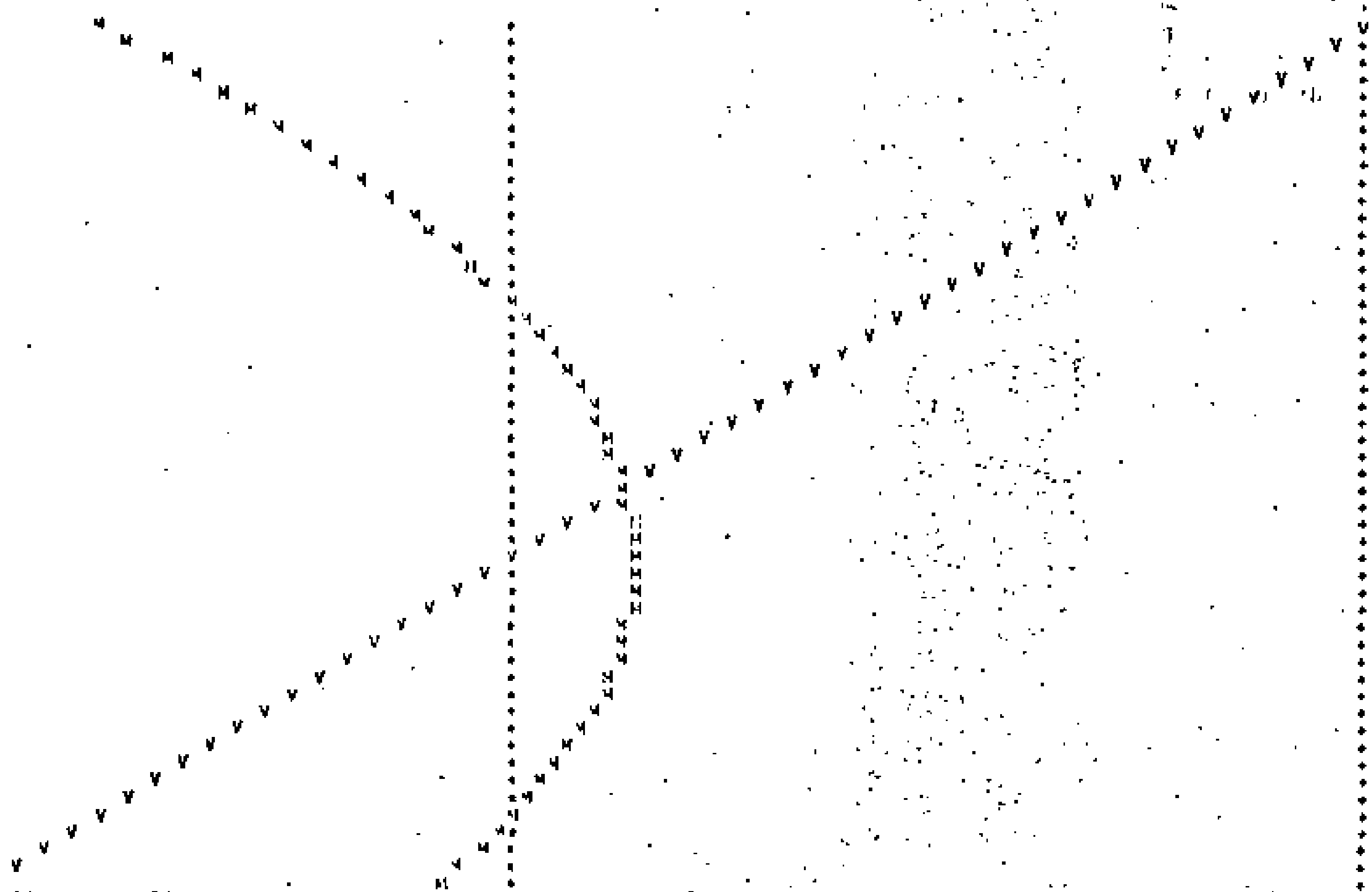
37

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	NORMAL (EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M))	CORTANTE	FLEXIONANTE	NORMAL (EXTREMO FINAL (TON Y TON-M))	CORTANTE	FLEXIONANTE
4	61	77	0.07558	0.62478	-0.29638	0.07558	-0.37522	-0.09682

38

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.00000E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -3.75220E-01
ORDENADA MAYOR = 6.24780E-01

BARRA NO. 4, NUDO INICIAL= 61, NUDO FINAL= 77



		V	M
1	0.00	6.25E-01	-2.96E-01
2	0.04	6.05E-01	-2.72E-01
3	0.08	5.85E-01	-2.49E-01
4	0.12	5.65E-01	-2.25E-01
5	0.16	5.45E-01	-2.03E-01
6	0.20	5.25E-01	-1.81E-01
7	0.24	5.05E-01	-1.61E-01
8	0.28	4.85E-01	-1.41E-01
9	0.32	4.65E-01	-1.22E-01
10	0.36	4.45E-01	-1.04E-01
11	0.40	4.25E-01	-8.65E-02
12	0.44	4.05E-01	-6.93E-02
13	0.48	3.85E-01	-5.41E-02
14	0.52	3.65E-01	-3.91E-02
15	0.56	3.45E-01	-2.49E-02
16	0.60	3.25E-01	-1.15E-02
17	0.64	3.05E-01	1.06E-03
18	0.68	2.85E-01	1.27E-02
19	0.72	2.65E-01	2.37E-02
20	0.76	2.45E-01	3.41E-02
21	0.80	2.25E-01	4.38E-02
22	0.84	2.05E-01	5.28E-02
23	0.88	1.85E-01	5.98E-02
24	0.92	1.65E-01	6.72E-02
25	0.96	1.45E-01	7.30E-02
26	1.00	1.25E-01	7.84E-02
27	1.04	1.05E-01	8.30E-02
28	1.08	8.48E-02	8.69E-02
29	1.12	6.48E-02	8.98E-02
30	1.16	4.48E-02	9.20E-02
31	1.20	2.48E-02	9.34E-02
32	1.24	4.78E-03	9.39E-02
33	1.28	-1.52E-02	9.37E-02
34	1.32	-3.52E-02	9.27E-02
35	1.36	-5.52E-02	9.09E-02
36	1.40	-7.52E-02	8.81E-02
37	1.44	-9.52E-02	8.49E-02
38	1.48	-1.15E-01	8.07E-02
39	1.52	-1.35E-01	7.57E-02
40	1.56	-1.55E-01	6.99E-02
41	1.60	-1.75E-01	6.33E-02
42	1.64	-1.95E-01	5.59E-02
43	1.68	-2.15E-01	4.74E-02
44	1.72	-2.35E-01	3.84E-02
45	1.76	-2.55E-01	2.88E-02
46	1.80	-2.75E-01	1.87E-02
47	1.84	-2.95E-01	6.81E-03
48	1.88	-3.15E-01	-5.39E-03
49	1.92	-3.35E-01	-1.84E-02
50	1.96	-3.55E-01	-3.27E-02
51	2.00	-3.75E-01	-4.68E-02

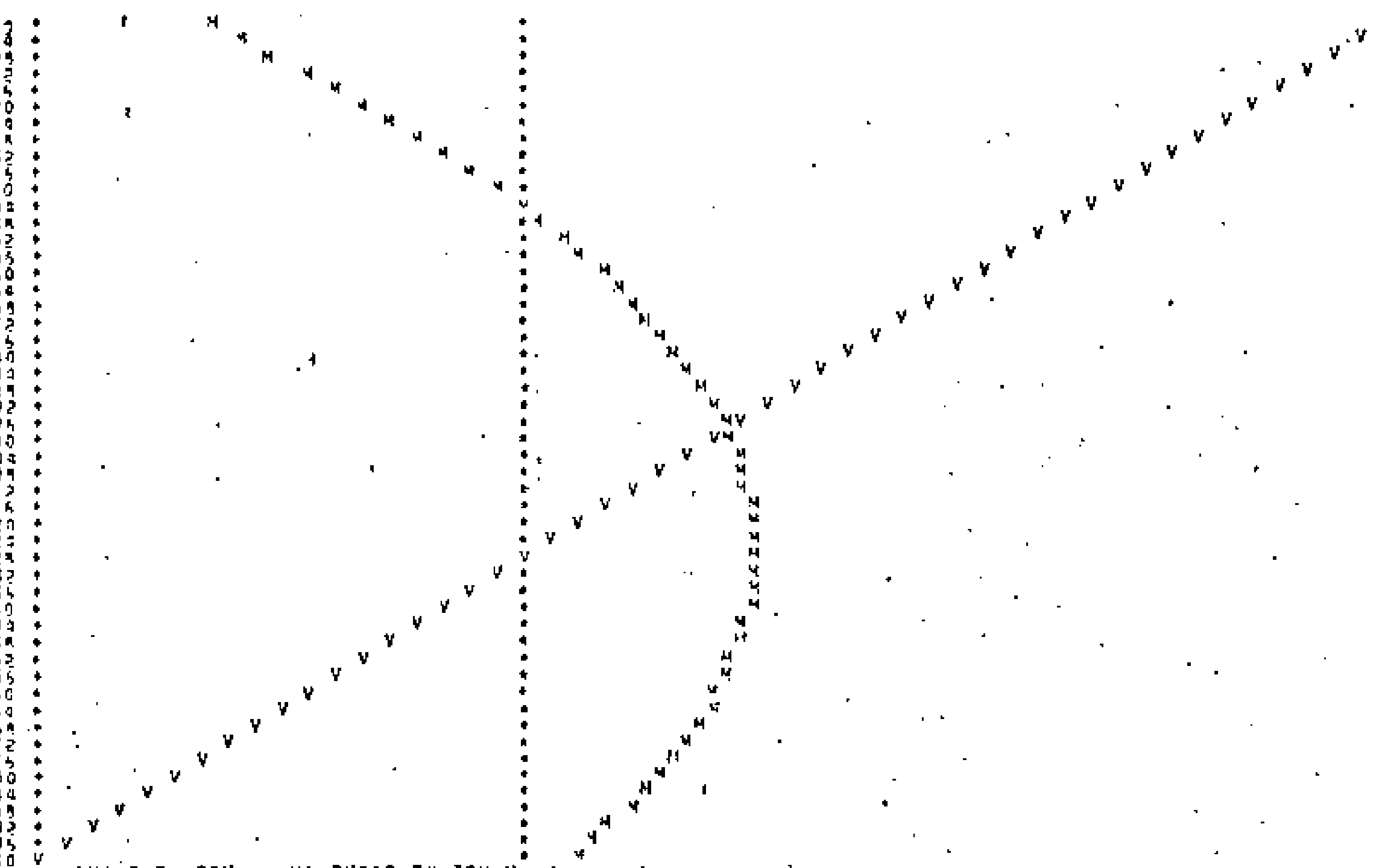
39

BARRA NO.	E X T R E M O INICIAL	FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) N O R M A L	C O R T A N T E	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) N O R M A L	C O R T A N T E	FLEXIONANTE
5	64	80	2.94552	0.63575	-0.23898	2.94552	-0.36425	0.03252

40

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.00000E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -3.64249E-01
ORDENADA MAYOR = 6.35751E-01

BARRA NO. 5,NUDO INICIAL= 64,NUDO FINAL= 80



CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

		V	M
1	0.00	6.35E-01	-2.39E-01
2	0.04	6.11E-01	-2.14E-01
3	0.08	5.94E-01	-1.89E-01
4	0.12	5.74E-01	-1.64E-01
5	0.16	5.56E-01	-1.44E-01
6	0.20	5.34E-01	-1.22E-01
7	0.24	5.14E-01	-1.01E-01
8	0.28	4.94E-01	-8.04E-02
9	0.32	4.74E-01	-6.12E-02
10	0.36	4.56E-01	-4.24E-02
11	0.40	4.36E-01	-2.47E-02
12	0.44	4.16E-01	-7.45E-03
13	0.48	3.96E-01	8.54E-03
14	0.52	3.74E-01	2.40E-02
15	0.56	3.56E-01	3.84E-02
16	0.60	3.36E-01	5.25E-02
17	0.64	3.16E-01	6.55E-02
18	0.68	2.94E-01	7.77E-02
19	0.72	2.74E-01	8.92E-02
20	0.76	2.56E-01	9.98E-02
21	0.80	2.36E-01	1.10E-01
22	0.84	2.16E-01	1.19E-01
23	0.88	1.94E-01	1.27E-01
24	0.92	1.74E-01	1.34E-01
25	0.96	1.56E-01	1.40E-01
26	1.00	1.36E-01	1.47E-01
27	1.04	1.16E-01	1.52E-01
28	1.08	9.56E-02	1.56E-01
29	1.12	7.58E-02	1.59E-01
30	1.16	5.58E-02	1.62E-01
31	1.20	3.58E-02	1.64E-01
32	1.24	1.58E-02	1.65E-01
33	1.28	-4.25E-03	1.65E-01
34	1.32	-2.42E-02	1.65E-01
35	1.36	-4.42E-02	1.63E-01
36	1.40	-6.42E-02	1.61E-01
37	1.44	-8.42E-02	1.58E-01
38	1.48	-1.04E-01	1.56E-01
39	1.52	-1.24E-01	1.52E-01
40	1.56	-1.44E-01	1.48E-01
41	1.60	-1.64E-01	1.39E-01
42	1.64	-1.84E-01	1.31E-01
43	1.68	-2.04E-01	1.23E-01
44	1.72	-2.24E-01	1.15E-01
45	1.76	-2.44E-01	1.04E-01
46	1.80	-2.64E-01	9.50E-02
47	1.84	-2.84E-01	8.44E-02
48	1.88	-3.04E-01	7.24E-02
49	1.92	-3.24E-01	6.01E-02
50	1.96	-3.44E-01	4.67E-02
51	2.00	-3.64E-01	3.25E-02

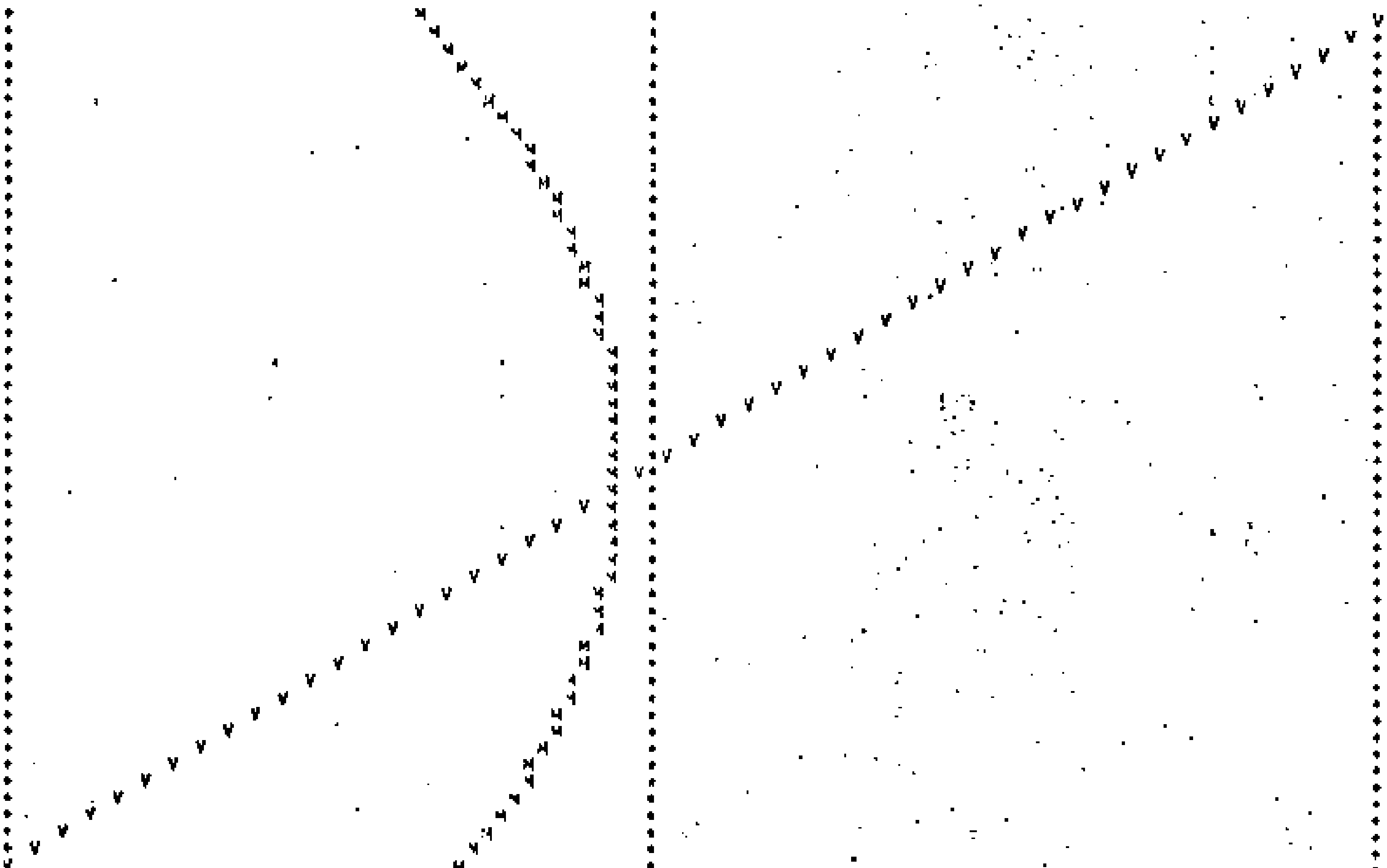
(41)

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
6	132	145	0.36967	0.25598	-0.08277	0.36969	-0.23452	-0.06729

(42)

ESCALA DE LA GRAFICA= 5.00000E-03 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -2.39322E-01
ORDENADA MAYOR = 2.65976E-01

BARRA NO. 6, NUDO INICIAL= 132, NUDO FINAL= 146



		V	M
1	0.00	2.65E-01	-8.28E-02
2	0.02	2.55E-01	-7.76E-02
3	0.04	2.45E-01	-7.25E-02
4	0.06	2.35E-01	-6.77E-02
5	0.08	2.25E-01	-6.31E-02
6	0.10	2.15E-01	-5.87E-02
7	0.12	2.05E-01	-5.45E-02
8	0.14	1.95E-01	-5.05E-02
9	0.16	1.85E-01	-4.67E-02
10	0.18	1.75E-01	-4.31E-02
11	0.20	1.65E-01	-3.97E-02
12	0.22	1.55E-01	-3.65E-02
13	0.24	1.45E-01	-3.35E-02
14	0.26	1.35E-01	-3.06E-02
15	0.28	1.25E-01	-2.80E-02
16	0.30	1.15E-01	-2.56E-02
17	0.32	1.05E-01	-2.30E-02
18	0.34	9.55E-02	-2.10E-02
19	0.36	8.55E-02	-1.94E-02
20	0.38	7.55E-02	-1.80E-02
21	0.40	6.55E-02	-1.66E-02
22	0.42	5.55E-02	-1.50E-02
23	0.44	4.55E-02	-1.40E-02
24	0.46	3.55E-02	-1.35E-02
25	0.48	2.55E-02	-1.29E-02
26	0.50	1.55E-02	-1.25E-02
27	0.52	5.49E-03	-1.21E-02
28	0.54	-4.57E-03	-1.21E-02
29	0.56	-1.45E-02	-1.25E-02
30	0.58	-2.45E-02	-1.29E-02
31	0.60	-3.45E-02	-1.35E-02
32	0.62	-4.45E-02	-1.41E-02
33	0.64	-5.45E-02	-1.53E-02
34	0.66	-6.45E-02	-1.60E-02
35	0.68	-7.45E-02	-1.78E-02
36	0.70	-8.45E-02	-1.90E-02
37	0.72	-9.45E-02	-2.12E-02
38	0.74	-1.05E-01	-2.32E-02
39	0.76	-1.15E-01	-2.50E-02
40	0.78	-1.25E-01	-2.78E-02
41	0.80	-1.35E-01	-3.06E-02
42	0.82	-1.45E-01	-3.32E-02
43	0.84	-1.55E-01	-3.62E-02
44	0.86	-1.65E-01	-3.90E-02
45	0.88	-1.75E-01	-4.27E-02
46	0.90	-1.85E-01	-4.63E-02
47	0.92	-1.95E-01	-5.01E-02
48	0.94	-2.05E-01	-5.41E-02
49	0.96	-2.15E-01	-5.83E-02
50	0.98	-2.25E-01	-6.27E-02
51	1.00	-2.35E-01	-6.73E-02

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

32

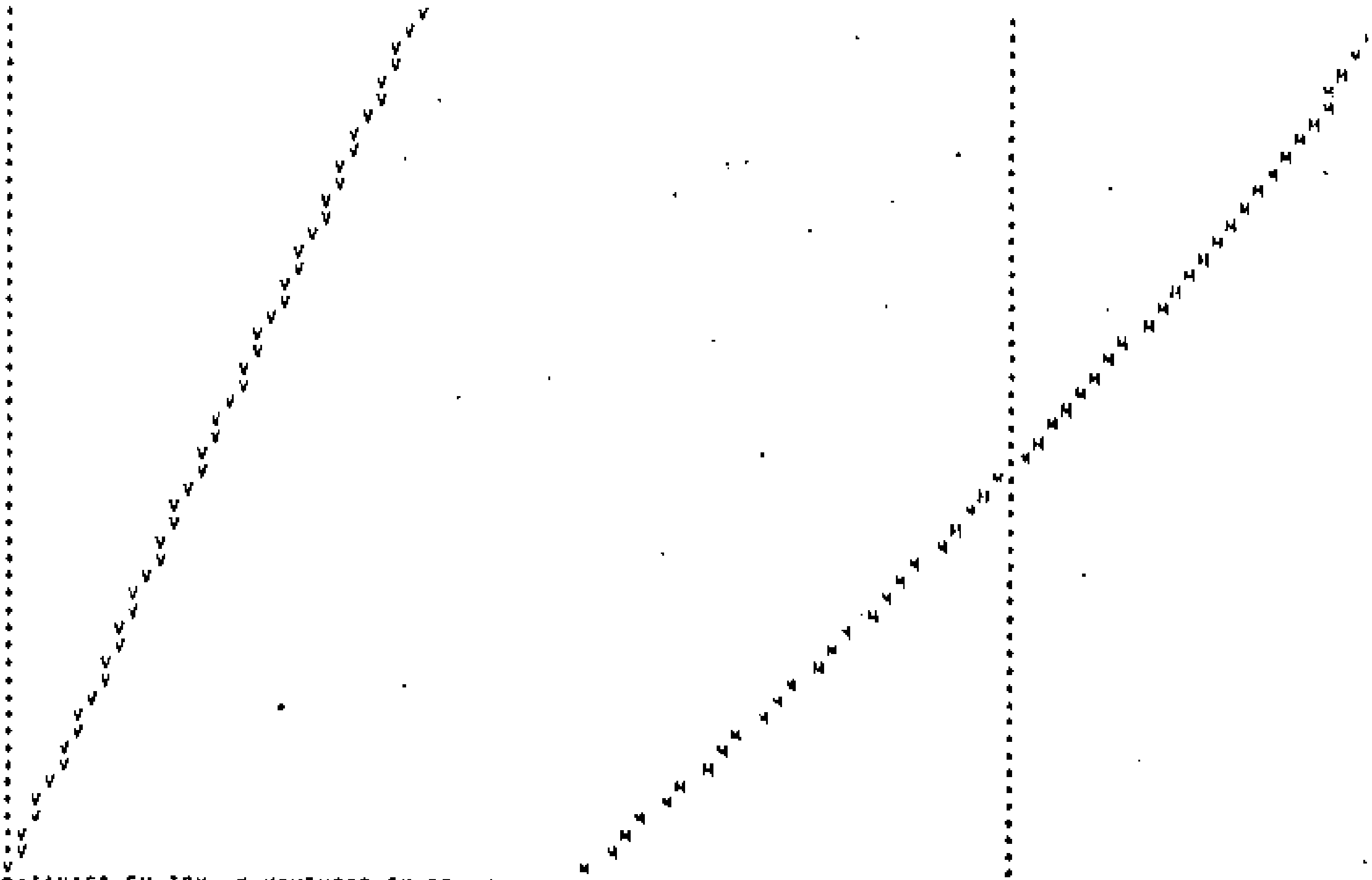
(13)

BARRA NO. E	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	NORMAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) CORTANTE	FLEXIONANTE	NORMAL	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) CORTANTE	FLEXIONANTE
7	135	147	1.99986	-0.72672	0.45092	1.99986	-1.22672	-0.51580

(14)

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.68764E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -1.22672E+00
ORDENADA MAYOR = 4.60922E-01

BARRA NO. 7, NUDO INICIAL= 135, NUDO FINAL= 147



CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

		V	M
1	0.00	-7.27E-01	4.61E-01
2	0.02	-7.37E-01	4.46E-01
3	0.04	-7.47E-01	4.31E-01
4	0.06	-7.57E-01	4.16E-01
5	0.08	-7.67E-01	4.01E-01
6	0.10	-7.77E-01	3.86E-01
7	0.12	-7.87E-01	3.70E-01
8	0.14	-7.97E-01	3.54E-01
9	0.16	-8.07E-01	3.38E-01
10	0.18	-8.17E-01	3.22E-01
11	0.20	-8.27E-01	3.06E-01
12	0.22	-8.37E-01	2.89E-01
13	0.24	-8.47E-01	2.72E-01
14	0.26	-8.57E-01	2.55E-01
15	0.28	-8.67E-01	2.38E-01
16	0.30	-8.77E-01	2.20E-01
17	0.32	-8.87E-01	2.03E-01
18	0.34	-8.97E-01	1.85E-01
19	0.36	-9.07E-01	1.67E-01
20	0.38	-9.17E-01	1.49E-01
21	0.40	-9.27E-01	1.30E-01
22	0.42	-9.37E-01	1.12E-01
23	0.44	-9.47E-01	9.28E-02
24	0.46	-9.57E-01	7.37E-02
25	0.48	-9.67E-01	5.45E-02
26	0.50	-9.77E-01	3.51E-02
27	0.52	-9.87E-01	1.56E-02
28	0.54	-9.97E-01	-4.01E-03
29	0.56	-1.01E+00	-2.44E-02
30	0.58	-1.02E+00	-4.47E-02
31	0.60	-1.03E+00	-6.51E-02
32	0.62	-1.04E+00	-8.57E-02
33	0.64	-1.05E+00	-1.07E-01
34	0.66	-1.06E+00	-1.28E-01
35	0.68	-1.07E+00	-1.49E-01
36	0.70	-1.08E+00	-1.70E-01
37	0.72	-1.09E+00	-1.92E-01
38	0.74	-1.10E+00	-2.14E-01
39	0.76	-1.11E+00	-2.36E-01
40	0.78	-1.12E+00	-2.58E-01
41	0.80	-1.13E+00	-2.80E-01
42	0.82	-1.14E+00	-3.03E-01
43	0.84	-1.15E+00	-3.26E-01
44	0.86	-1.16E+00	-3.49E-01
45	0.88	-1.17E+00	-3.72E-01
46	0.90	-1.18E+00	-3.96E-01
47	0.92	-1.19E+00	-4.19E-01
48	0.94	-1.20E+00	-4.43E-01
49	0.96	-1.21E+00	-4.67E-01
50	0.98	-1.22E+00	-4.91E-01
51	1.00	-1.23E+00	-5.16E-01

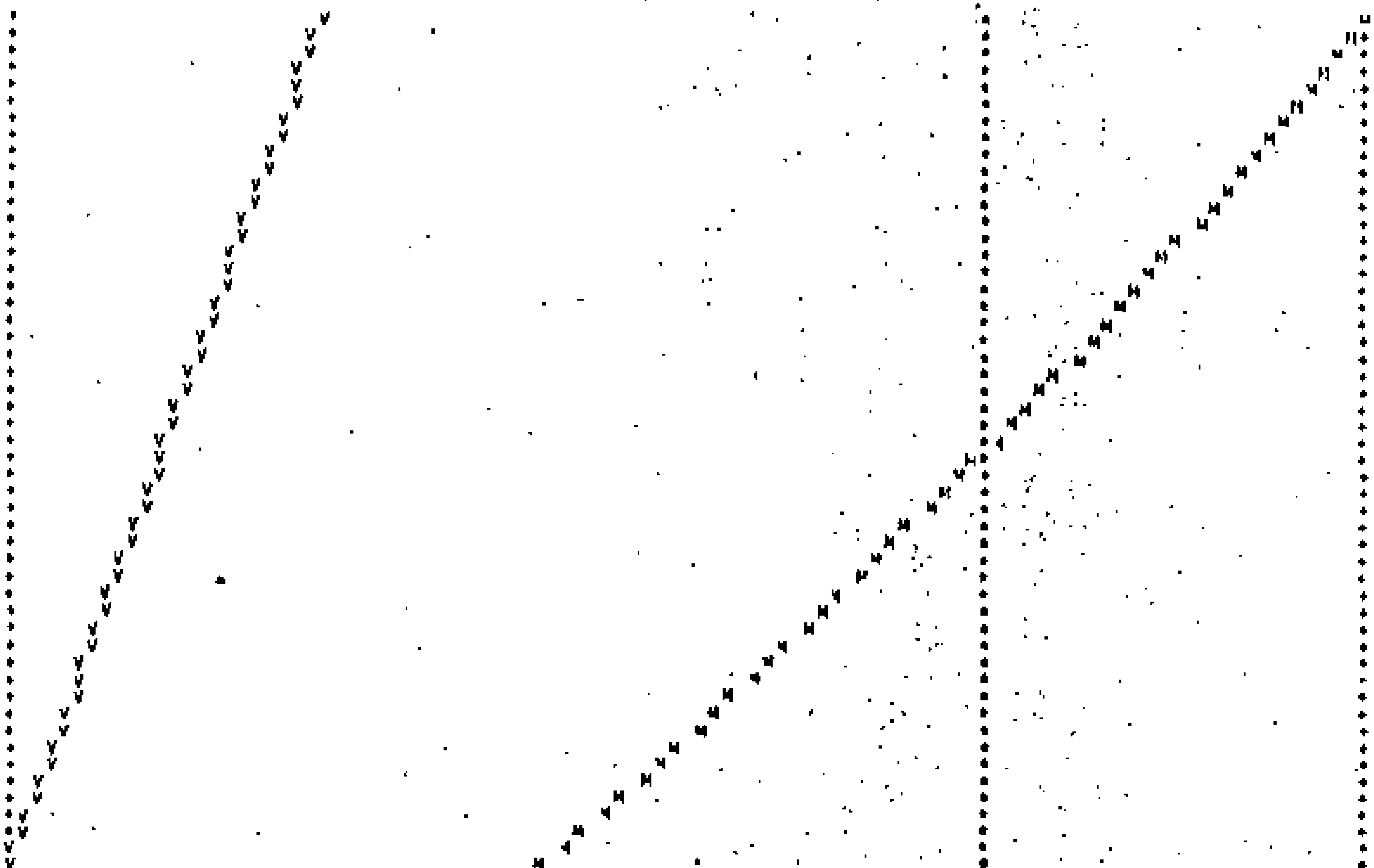
BARRA NO.	E X T R E M O INICIAL	E X T R E M O FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) N O R M A L	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) C O R T A N T E	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) N O R M A L	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) C O R T A N T E	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) FLEXIONANTE
8	138	149	0.22452	-1.07594	0.61274	0.22452	-1.57594	-0.71320

45

46

ESCALA DE LA GRAFICA: 2.18968E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -1.57594E+00
ORDENADA MAYOR = 6.12739E-01

BARRA NO. 8, NUDO INICIAL= 138, NUDO FINAL= 149



		V	M
1	0.00	-1.08E+00	6.13E-01
2	0.02	-1.09E+00	5.91E-01
3	0.04	-1.10E+00	5.69E-01
4	0.06	-1.11E+00	5.47E-01
5	0.08	-1.12E+00	5.25E-01
6	0.10	-1.13E+00	5.03E-01
7	0.12	-1.14E+00	4.80E-01
8	0.14	-1.15E+00	4.57E-01
9	0.16	-1.16E+00	4.34E-01
10	0.18	-1.17E+00	4.11E-01
11	0.20	-1.18E+00	3.88E-01
12	0.22	-1.19E+00	3.64E-01
13	0.24	-1.20E+00	3.40E-01
14	0.26	-1.21E+00	3.16E-01
15	0.28	-1.22E+00	2.92E-01
16	0.30	-1.23E+00	2.67E-01
17	0.32	-1.24E+00	2.43E-01
18	0.34	-1.25E+00	2.18E-01
19	0.36	-1.26E+00	1.93E-01
20	0.38	-1.27E+00	1.68E-01
21	0.40	-1.28E+00	1.42E-01
22	0.42	-1.29E+00	1.17E-01
23	0.44	-1.30E+00	9.09E-02
24	0.46	-1.31E+00	6.49E-02
25	0.48	-1.32E+00	3.87E-02
26	0.50	-1.33E+00	1.23E-02
27	0.52	-1.34E+00	-1.44E-02
28	0.54	-1.35E+00	-4.12E-02
29	0.56	-1.36E+00	-6.82E-02
30	0.58	-1.37E+00	-9.50E-02
31	0.60	-1.38E+00	-1.23E-01
32	0.62	-1.39E+00	-1.50E-01
33	0.64	-1.40E+00	-1.78E-01
34	0.66	-1.41E+00	-2.06E-01
35	0.68	-1.42E+00	-2.35E-01
36	0.70	-1.43E+00	-2.63E-01
37	0.72	-1.44E+00	-2.92E-01
38	0.74	-1.45E+00	-3.20E-01
39	0.76	-1.46E+00	-3.49E-01
40	0.78	-1.47E+00	-3.79E-01
41	0.80	-1.48E+00	-4.08E-01
42	0.82	-1.49E+00	-4.38E-01
43	0.84	-1.50E+00	-4.67E-01
44	0.86	-1.51E+00	-4.97E-01
45	0.88	-1.52E+00	-5.28E-01
46	0.90	-1.53E+00	-5.58E-01
47	0.92	-1.54E+00	-5.89E-01
48	0.94	-1.55E+00	-6.20E-01
49	0.96	-1.56E+00	-6.51E-01
50	0.98	-1.57E+00	-6.82E-01
51	1.00	-1.58E+00	-7.13E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

37

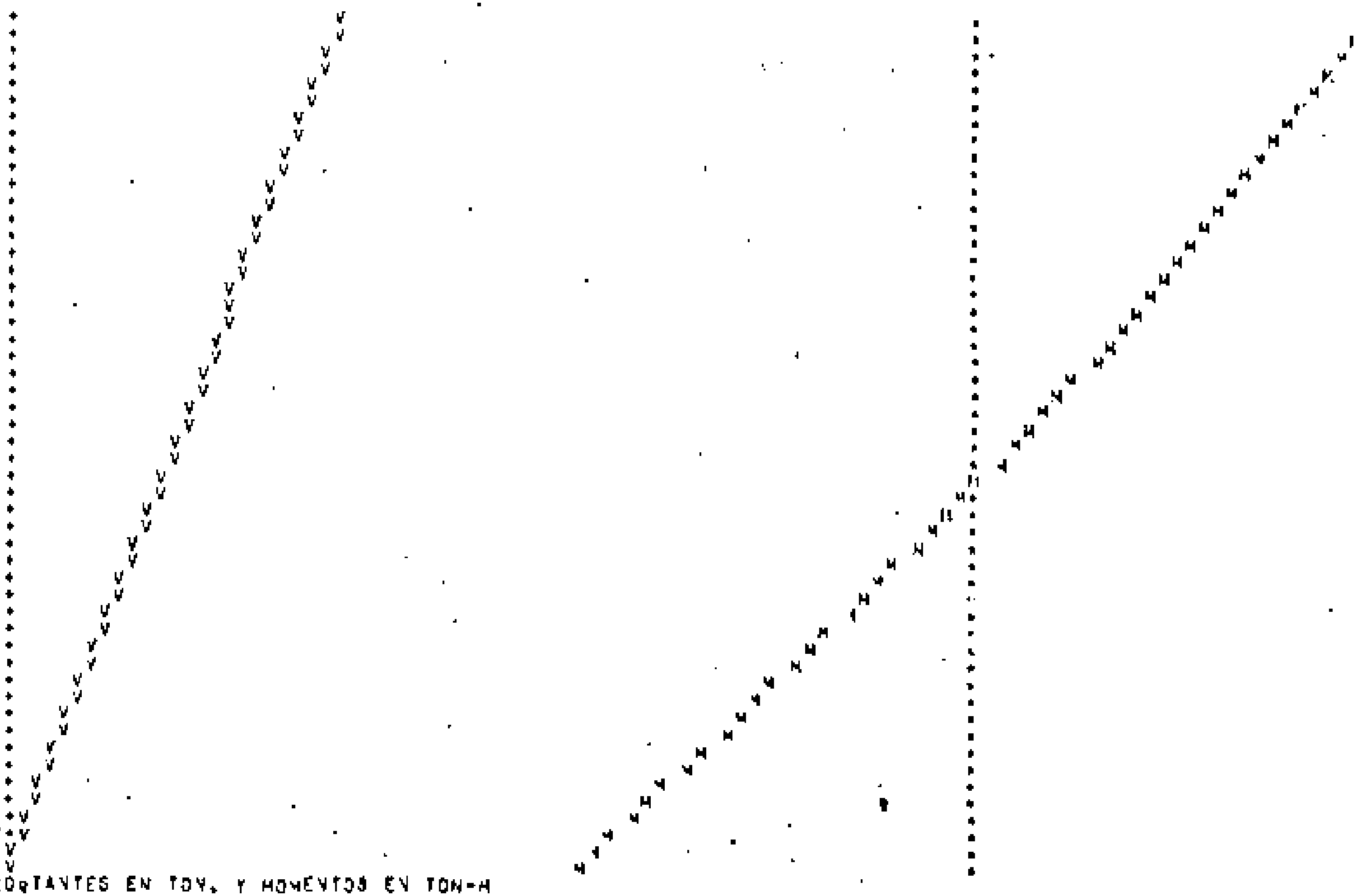
(47)

BARRA NO. EL	EXTREMO INICIAL	FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
9	141	189	-0.96689	-0.95551	0.60672	-0.96689	-1.45551	-0.59879

(48)

ESCALA DE LA GRAFICA= 2.06224E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -1.45551E+00
ORDENADA MAYOR = 6.06724E-01

BARRA NO. 9,NUDO INICIAL= 141,NUDO FINAL= 189



1	0.00	-9.56E-01	6.07E-01
2	0.02	-9.66E-01	5.87E-01
3	0.04	-9.76E-01	5.68E-01
4	0.06	-9.86E-01	5.48E-01
5	0.08	-9.96E-01	5.29E-01
6	0.10	-1.01E+00	5.09E-01
7	0.12	-1.02E+00	4.88E-01
8	0.14	-1.03E+00	4.68E-01
9	0.16	-1.04E+00	4.47E-01
10	0.18	-1.05E+00	4.27E-01
11	0.20	-1.06E+00	4.06E-01
12	0.22	-1.07E+00	3.84E-01
13	0.24	-1.08E+00	3.63E-01
14	0.26	-1.09E+00	3.41E-01
15	0.28	-1.10E+00	3.20E-01
16	0.30	-1.11E+00	2.98E-01
17	0.32	-1.12E+00	2.75E-01
18	0.34	-1.13E+00	2.53E-01
19	0.36	-1.14E+00	2.30E-01
20	0.38	-1.15E+00	2.08E-01
21	0.40	-1.16E+00	1.85E-01
22	0.42	-1.17E+00	1.61E-01
23	0.44	-1.18E+00	1.38E-01
24	0.46	-1.19E+00	1.14E-01
25	0.48	-1.20E+00	9.05E-02
26	0.50	-1.21E+00	6.65E-02
27	0.52	-1.22E+00	4.23E-02
28	0.54	-1.23E+00	1.78E-02
29	0.56	-1.24E+00	-6.76E-03
30	0.58	-1.25E+00	-3.14E-02
31	0.60	-1.26E+00	-5.64E-02
32	0.62	-1.27E+00	-8.17E-02
33	0.64	-1.28E+00	-1.07E-01
34	0.66	-1.29E+00	-1.33E-01
35	0.68	-1.30E+00	-1.59E-01
36	0.70	-1.31E+00	-1.85E-01
37	0.72	-1.32E+00	-2.11E-01
38	0.74	-1.33E+00	-2.37E-01
39	0.76	-1.34E+00	-2.64E-01
40	0.78	-1.35E+00	-2.91E-01
41	0.80	-1.36E+00	-3.18E-01
42	0.82	-1.37E+00	-3.45E-01
43	0.84	-1.38E+00	-3.72E-01
44	0.86	-1.39E+00	-4.00E-01
45	0.88	-1.40E+00	-4.28E-01
46	0.90	-1.41E+00	-4.56E-01
47	0.92	-1.42E+00	-4.85E-01
48	0.94	-1.43E+00	-5.12E-01
49	0.96	-1.44E+00	-5.41E-01
50	0.98	-1.45E+00	-5.70E-01
51	1.00	-1.46E+00	-5.99E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

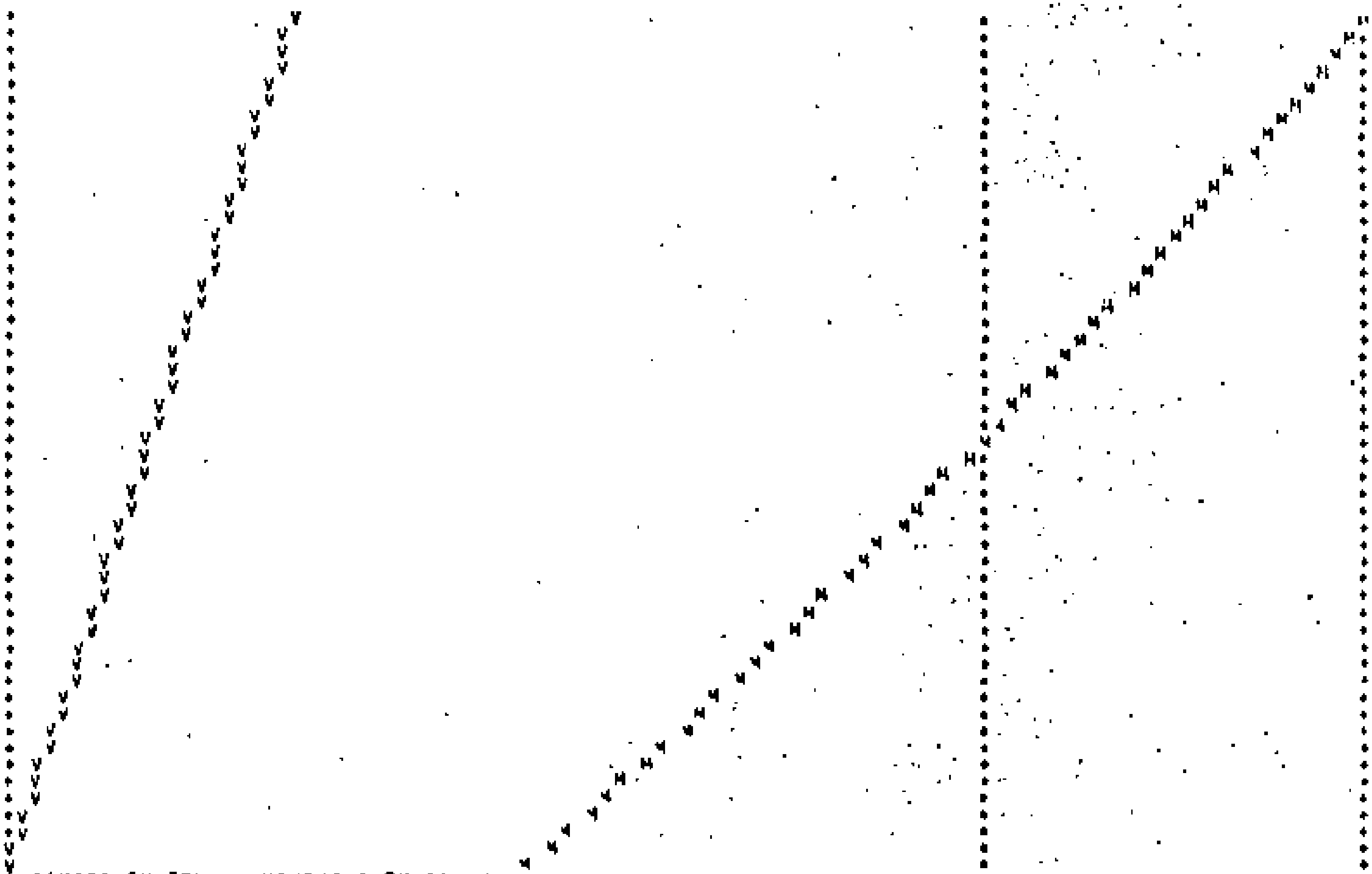
49

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
10	144	150	2.01022	-1.23160	0.67339	2.01022	-1.73160	-0.80821

50

ESCALA DE LA GRAFICA= 2.40999E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -1.73160E+00
ORDENADA MAYOR = 6.73390E-01

BARRA NO. 10, NUDO INICIAL= 144, NUDO FINAL= 150



		V	M
1	0.00	-1.23E+00	6.73E-01
2	0.02	-1.24E+00	6.49E-01
3	0.04	-1.25E+00	6.24E-01
4	0.06	-1.26E+00	5.99E-01
5	0.08	-1.27E+00	5.73E-01
6	0.10	-1.28E+00	5.48E-01
7	0.12	-1.29E+00	5.22E-01
8	0.14	-1.30E+00	4.96E-01
9	0.16	-1.31E+00	4.70E-01
10	0.18	-1.32E+00	4.44E-01
11	0.20	-1.33E+00	4.17E-01
12	0.22	-1.34E+00	3.90E-01
13	0.24	-1.35E+00	3.63E-01
14	0.26	-1.36E+00	3.36E-01
15	0.28	-1.37E+00	3.09E-01
16	0.30	-1.38E+00	2.81E-01
17	0.32	-1.39E+00	2.54E-01
18	0.34	-1.40E+00	2.26E-01
19	0.36	-1.41E+00	1.98E-01
20	0.38	-1.42E+00	1.69E-01
21	0.40	-1.43E+00	1.41E-01
22	0.42	-1.44E+00	1.12E-01
23	0.44	-1.45E+00	8.31E-02
24	0.46	-1.46E+00	5.40E-02
25	0.48	-1.47E+00	2.46E-02
26	0.50	-1.48E+00	-4.91E-03
27	0.52	-1.49E+00	-3.46E-02
28	0.54	-1.50E+00	-6.45E-02
29	0.56	-1.51E+00	-9.47E-02
30	0.58	-1.52E+00	-1.25E-01
31	0.60	-1.53E+00	-1.56E-01
32	0.62	-1.54E+00	-1.86E-01
33	0.64	-1.55E+00	-2.17E-01
34	0.66	-1.56E+00	-2.48E-01
35	0.68	-1.57E+00	-2.80E-01
36	0.70	-1.58E+00	-3.11E-01
37	0.72	-1.59E+00	-3.43E-01
38	0.74	-1.60E+00	-3.75E-01
39	0.76	-1.61E+00	-4.07E-01
40	0.78	-1.62E+00	-4.39E-01
41	0.80	-1.63E+00	-4.72E-01
42	0.82	-1.64E+00	-5.05E-01
43	0.84	-1.65E+00	-5.38E-01
44	0.86	-1.66E+00	-5.71E-01
45	0.88	-1.67E+00	-6.04E-01
46	0.90	-1.68E+00	-6.38E-01
47	0.92	-1.69E+00	-6.71E-01
48	0.94	-1.70E+00	-7.05E-01
49	0.96	-1.71E+00	-7.39E-01
50	0.98	-1.72E+00	-7.74E-01
51	1.00	-1.73E+00	-8.08E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

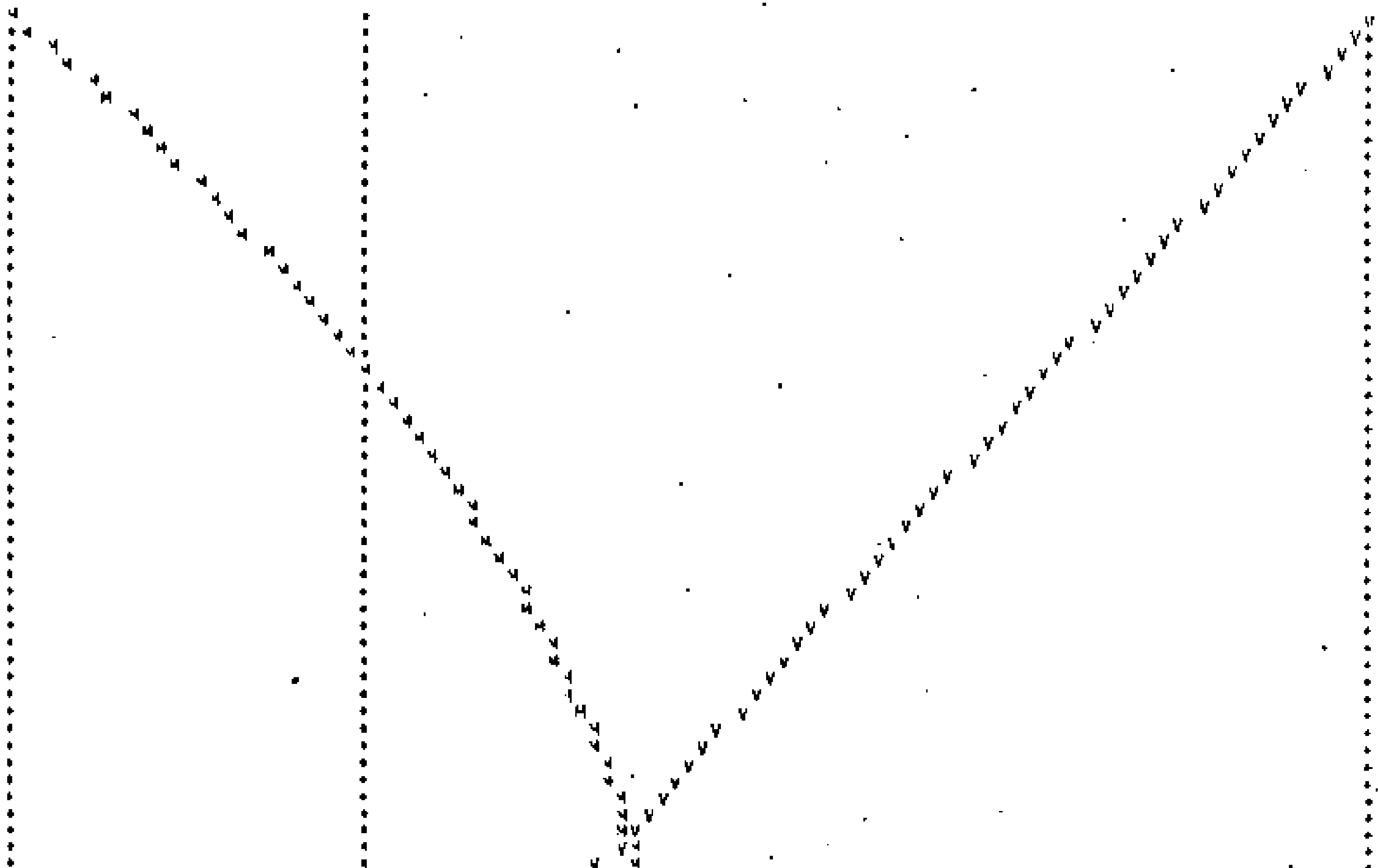
51

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
11	146	154	0.26733	0.65765	-0.22582	0.26733	0.15769	0.18187

52

ESCALA DE LA GRAFICA= 8.83508E-03 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -2.25820E-01
ORDENADA MAYOR = 6.57689E-01

BARRA NO. 11, NUDO INICIAL= 146, NUDO FINAL= 154



		V	M
1	0.00	6.58E-01	-2.26E-01
2	0.02	6.48E-01	-2.13E-01
3	0.04	6.38E-01	-2.00E-01
4	0.06	6.28E-01	-1.87E-01
5	0.08	6.18E-01	-1.75E-01
6	0.10	6.08E-01	-1.63E-01
7	0.12	5.98E-01	-1.50E-01
8	0.14	5.88E-01	-1.39E-01
9	0.16	5.78E-01	-1.27E-01
10	0.18	5.68E-01	-1.16E-01
11	0.20	5.58E-01	-1.04E-01
12	0.22	5.48E-01	-9.32E-02
13	0.24	5.38E-01	-8.24E-02
14	0.26	5.28E-01	-7.17E-02
15	0.28	5.18E-01	-6.13E-02
16	0.30	5.08E-01	-5.10E-02
17	0.32	4.98E-01	-4.10E-02
18	0.34	4.88E-01	-3.11E-02
19	0.36	4.78E-01	-2.15E-02
20	0.38	4.68E-01	-1.20E-02
21	0.40	4.58E-01	-2.74E-03
22	0.42	4.48E-01	6.31E-03
23	0.44	4.38E-01	1.52E-02
24	0.46	4.28E-01	2.38E-02
25	0.48	4.18E-01	3.23E-02
26	0.50	4.08E-01	4.05E-02
27	0.52	3.98E-01	4.85E-02
28	0.54	3.88E-01	5.64E-02
29	0.56	3.78E-01	6.41E-02
30	0.58	3.68E-01	7.15E-02
31	0.60	3.58E-01	7.88E-02
32	0.62	3.48E-01	8.58E-02
33	0.64	3.38E-01	9.27E-02
34	0.66	3.28E-01	9.94E-02
35	0.68	3.18E-01	1.06E-01
36	0.70	3.08E-01	1.12E-01
37	0.72	2.98E-01	1.18E-01
38	0.74	2.88E-01	1.24E-01
39	0.76	2.78E-01	1.30E-01
40	0.78	2.68E-01	1.35E-01
41	0.80	2.58E-01	1.40E-01
42	0.82	2.48E-01	1.45E-01
43	0.84	2.38E-01	1.50E-01
44	0.86	2.28E-01	1.55E-01
45	0.88	2.18E-01	1.59E-01
46	0.90	2.08E-01	1.64E-01
47	0.92	1.98E-01	1.68E-01
48	0.94	1.88E-01	1.72E-01
49	0.96	1.78E-01	1.75E-01
50	0.98	1.68E-01	1.79E-01
51	1.00	1.58E-01	1.82E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

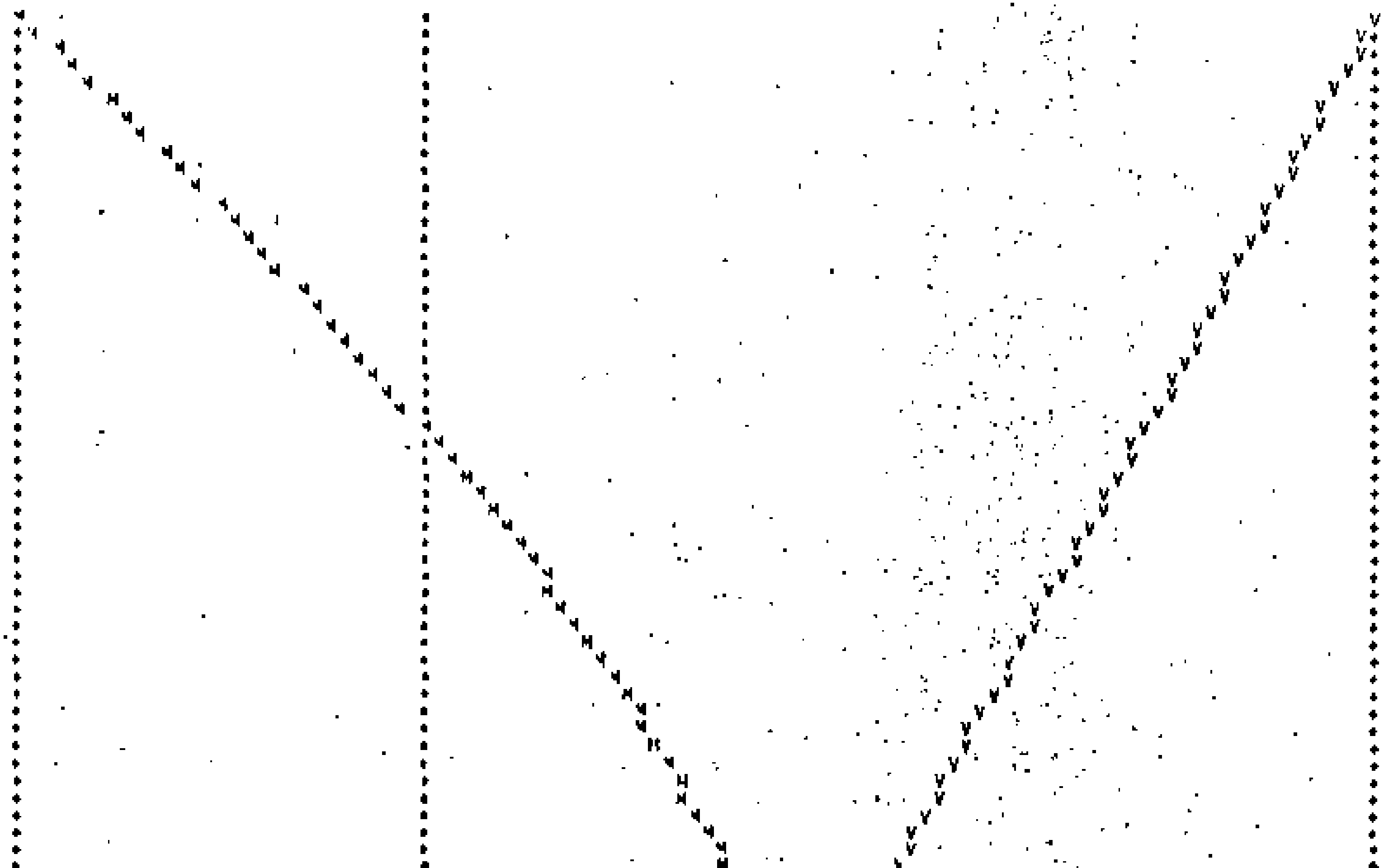
53

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
12	147	157	1.80587	0.99499	-0.42738	1.80587	0.49499	0.31761

54

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.42237E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -4.27380E-01
ORDENADA MAYOR = 9.94984E-01

BARRA NO. 12, NUDO INICIAL= 147, NUDO FINAL= 157



		V	M
1	0.00	9.95E-01	-4.27E-01
2	0.02	9.85E-01	-4.08E-01
3	0.04	9.75E-01	-3.88E-01
4	0.06	9.65E-01	-3.69E-01
5	0.08	9.55E-01	-3.49E-01
6	0.10	9.45E-01	-3.30E-01
7	0.12	9.35E-01	-3.12E-01
8	0.14	9.25E-01	-2.93E-01
9	0.16	9.15E-01	-2.75E-01
10	0.18	9.05E-01	-2.56E-01
11	0.20	8.95E-01	-2.38E-01
12	0.22	8.85E-01	-2.21E-01
13	0.24	8.75E-01	-2.03E-01
14	0.26	8.65E-01	-1.86E-01
15	0.28	8.55E-01	-1.68E-01
16	0.30	8.45E-01	-1.51E-01
17	0.32	8.35E-01	-1.35E-01
18	0.34	8.25E-01	-1.18E-01
19	0.36	8.15E-01	-1.02E-01
20	0.38	8.05E-01	-8.54E-02
21	0.40	7.95E-01	-6.94E-02
22	0.42	7.85E-01	-5.36E-02
23	0.44	7.75E-01	-3.80E-02
24	0.46	7.65E-01	-2.26E-02
25	0.48	7.55E-01	-7.39E-03
26	0.50	7.45E-01	7.61E-03
27	0.52	7.35E-01	2.24E-02
28	0.54	7.25E-01	3.70E-02
29	0.56	7.15E-01	5.10E-02
30	0.58	7.05E-01	6.56E-02
31	0.60	6.95E-01	7.94E-02
32	0.62	6.85E-01	9.30E-02
33	0.64	6.75E-01	1.07E-01
34	0.66	6.65E-01	1.20E-01
35	0.68	6.55E-01	1.34E-01
36	0.70	6.45E-01	1.47E-01
37	0.72	6.35E-01	1.59E-01
38	0.74	6.25E-01	1.72E-01
39	0.76	6.15E-01	1.84E-01
40	0.78	6.05E-01	1.97E-01
41	0.80	5.95E-01	2.09E-01
42	0.82	5.85E-01	2.20E-01
43	0.84	5.75E-01	2.32E-01
44	0.86	5.65E-01	2.43E-01
45	0.88	5.55E-01	2.55E-01
46	0.90	5.45E-01	2.66E-01
47	0.92	5.35E-01	2.74E-01
48	0.94	5.25E-01	2.87E-01
49	0.96	5.15E-01	2.97E-01
50	0.98	5.05E-01	3.08E-01
51	1.00	4.95E-01	3.16E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

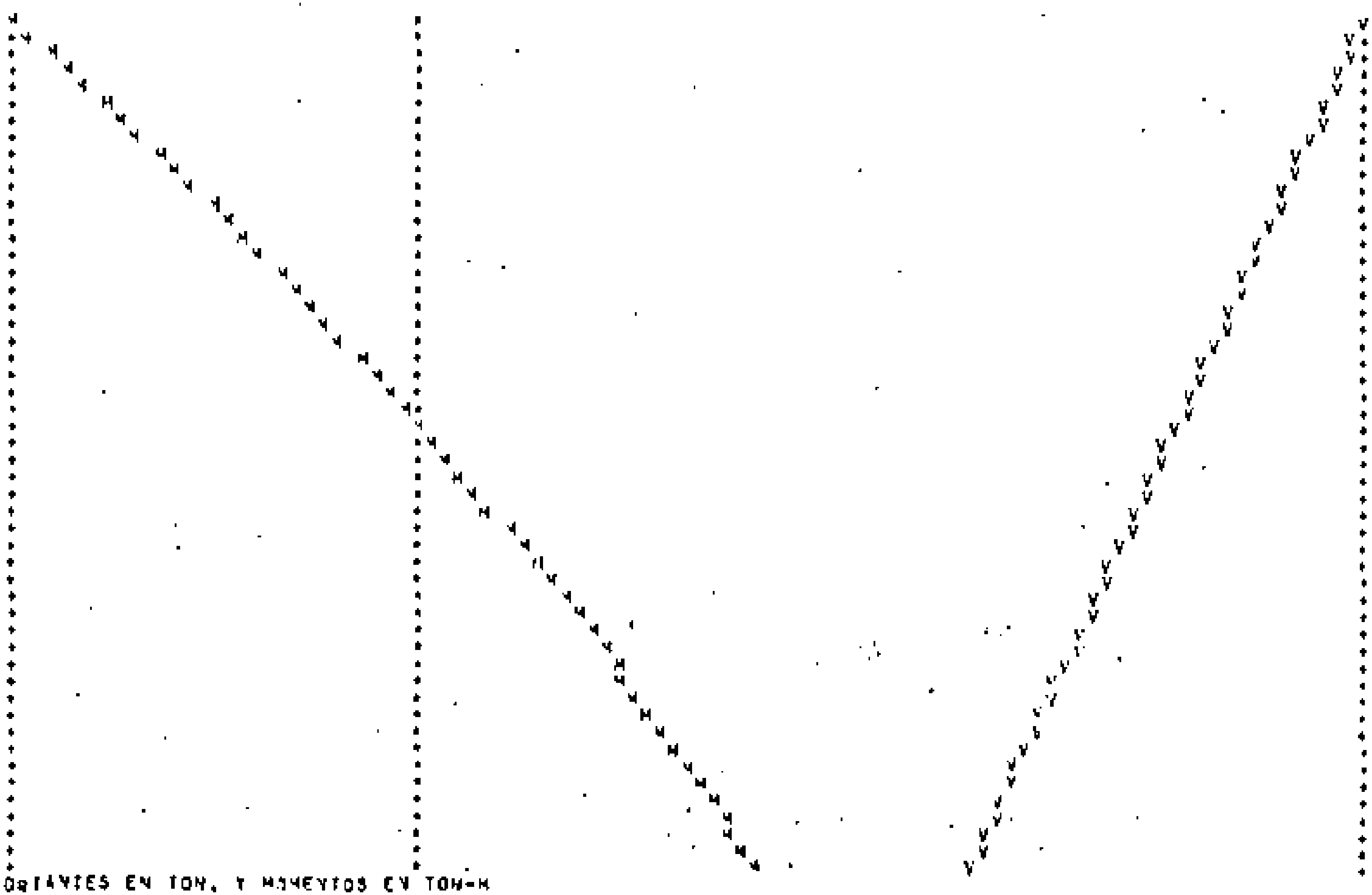
55

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
13	148	160	-0.03197	1.20005	-0.52389	-0.03197	0.?2005	0.42616

56

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.72398E-02 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -5.23891E-01
ORDENADA MAYOR = 1.20005E+00

BARRA NO. 13,NUDO INICIAL= 148,NUDO FINAL= 160



	X	V	M
1	0.00	1.20E+00	-5.24E-01
2	0.02	1.19E+00	-5.00E-01
3	0.04	1.18E+00	-4.76E-01
4	0.06	1.17E+00	-4.53E-01
5	0.08	1.16E+00	-4.29E-01
6	0.10	1.15E+00	-4.04E-01
7	0.12	1.14E+00	-3.85E-01
8	0.14	1.13E+00	-3.61E-01
9	0.16	1.12E+00	-3.36E-01
10	0.18	1.11E+00	-3.18E-01
11	0.20	1.10E+00	-2.98E-01
12	0.22	1.09E+00	-2.72E-01
13	0.24	1.08E+00	-2.50E-01
14	0.26	1.07E+00	-2.29E-01
15	0.28	1.06E+00	-2.07E-01
16	0.30	1.05E+00	-1.84E-01
17	0.32	1.04E+00	-1.65E-01
18	0.34	1.03E+00	-1.45E-01
19	0.36	1.02E+00	-1.24E-01
20	0.38	1.01E+00	-1.04E-01
21	0.40	1.00E+00	-8.39E-02
22	0.42	9.90E-01	-6.40E-02
23	0.44	9.80E-01	-4.43E-02
24	0.46	9.70E-01	-2.45E-02
25	0.48	9.60E-01	-5.47E-03
26	0.50	9.50E-01	1.16E-02
27	0.52	9.40E-01	3.25E-02
28	0.54	9.30E-01	5.12E-02
29	0.56	9.20E-01	6.97E-02
30	0.58	9.10E-01	8.80E-02
31	0.60	9.00E-01	1.06E-01
32	0.62	8.90E-01	1.24E-01
33	0.64	8.80E-01	1.42E-01
34	0.66	8.70E-01	1.59E-01
35	0.68	8.60E-01	1.77E-01
36	0.70	8.50E-01	1.94E-01
37	0.72	8.40E-01	2.11E-01
38	0.74	8.30E-01	2.27E-01
39	0.76	8.20E-01	2.44E-01
40	0.78	8.10E-01	2.60E-01
41	0.80	8.00E-01	2.76E-01
42	0.82	7.90E-01	2.92E-01
43	0.84	7.80E-01	3.07E-01
44	0.86	7.70E-01	3.23E-01
45	0.88	7.60E-01	3.39E-01
46	0.90	7.50E-01	3.54E-01
47	0.92	7.40E-01	3.69E-01
48	0.94	7.30E-01	3.83E-01
49	0.96	7.20E-01	3.98E-01
50	0.98	7.10E-01	4.12E-01
51	1.00	7.00E-01	4.26E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

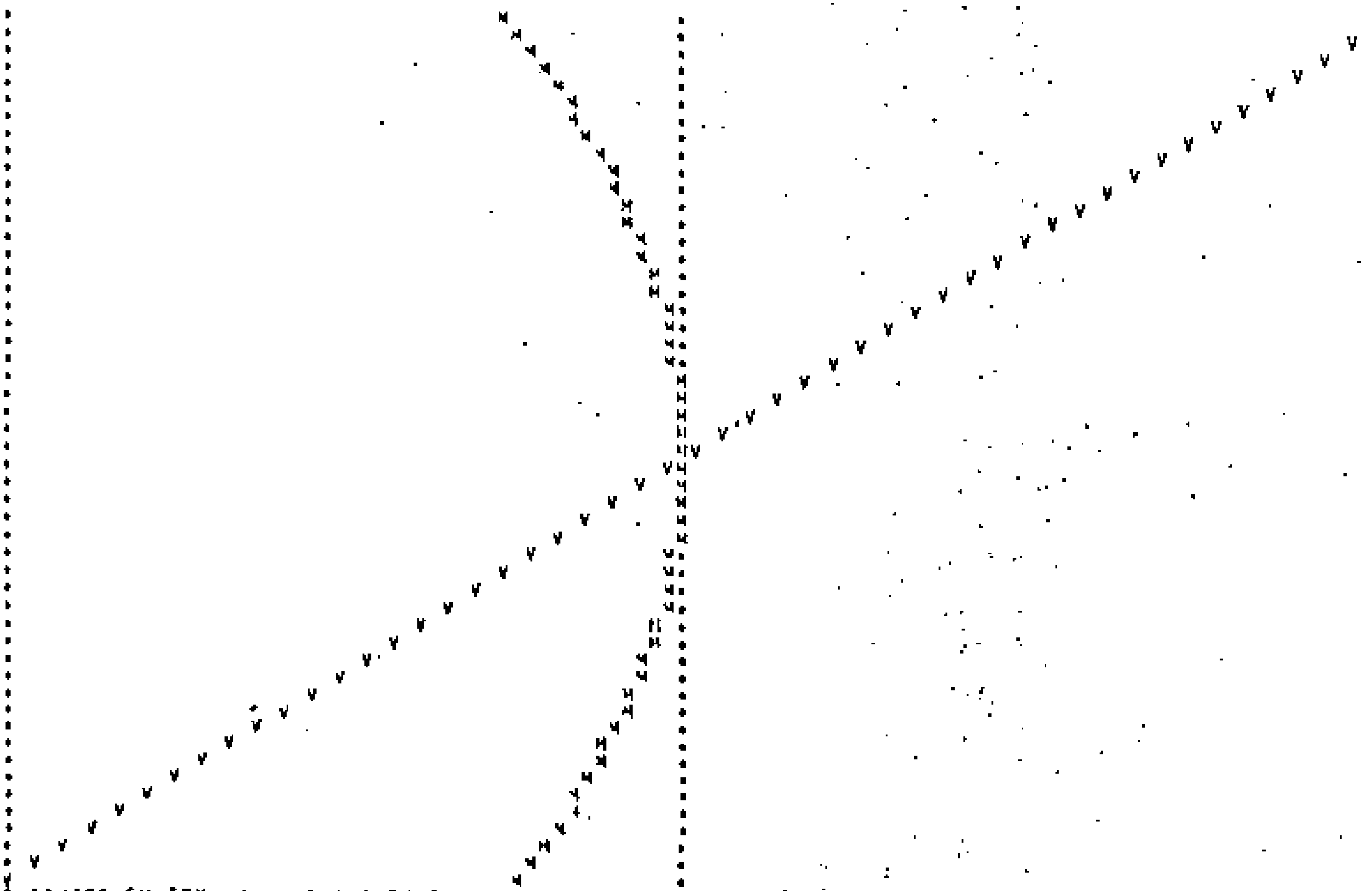
(57)

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
14	149	155	-5.43577	0.25335	-0.06569	-5.83577	-0.29605	-0.02735

(58)

ESCALA DE LA GRAFICA= 5.00000E-03 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -2.46000E-01
ORDENADA MAYOR = 2.53351E-01

BARRA NO. 14,NUDO INICIAL= 149,NUDO FINAL= 155



CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

		V	M
1	0.00	2.54E-01	-6.55E-02
2	0.02	2.44E-01	-6.03E-02
3	0.04	2.34E-01	-5.57E-02
4	0.06	2.24E-01	-5.12E-02
5	0.08	2.14E-01	-4.69E-02
6	0.10	2.04E-01	-4.26E-02
7	0.12	1.94E-01	-3.85E-02
8	0.14	1.84E-01	-3.47E-02
9	0.16	1.74E-01	-3.13E-02
10	0.18	1.64E-01	-2.79E-02
11	0.20	1.54E-01	-2.47E-02
12	0.22	1.44E-01	-2.17E-02
13	0.24	1.34E-01	-1.89E-02
14	0.26	1.24E-01	-1.64E-02
15	0.28	1.14E-01	-1.40E-02
16	0.30	1.04E-01	-1.19E-02
17	0.32	9.40E-02	-9.83E-03
18	0.34	8.40E-02	-8.05E-03
19	0.36	7.40E-02	-6.47E-03
20	0.38	6.40E-02	-5.09E-03
21	0.40	5.40E-02	-3.91E-03
22	0.42	4.40E-02	-2.95E-03
23	0.44	3.40E-02	-2.15E-03
24	0.46	2.40E-02	-1.57E-03
25	0.48	1.40E-02	-1.19E-03
26	0.50	3.75E-03	-1.02E-03
27	0.52	-6.05E-03	-1.08E-03
28	0.54	-1.60E-02	-1.26E-03
29	0.56	-2.60E-02	-1.64E-03
30	0.58	-3.60E-02	-2.30E-03
31	0.60	-4.60E-02	-3.12E-03
32	0.62	-5.60E-02	-4.18E-03
33	0.64	-6.60E-02	-5.35E-03
34	0.66	-7.60E-02	-6.74E-03
35	0.68	-8.60E-02	-8.40E-03
36	0.70	-9.60E-02	-1.02E-02
37	0.72	-1.06E-01	-1.22E-02
38	0.74	-1.16E-01	-1.45E-02
39	0.76	-1.26E-01	-1.69E-02
40	0.78	-1.36E-01	-1.95E-02
41	0.80	-1.46E-01	-2.23E-02
42	0.82	-1.56E-01	-2.54E-02
43	0.84	-1.66E-01	-2.84E-02
44	0.86	-1.76E-01	-3.20E-02
45	0.88	-1.86E-01	-3.55E-02
46	0.90	-1.96E-01	-3.98E-02
47	0.92	-2.06E-01	-4.35E-02
48	0.94	-2.16E-01	-4.77E-02
49	0.96	-2.26E-01	-5.21E-02
50	0.98	-2.36E-01	-5.67E-02
51	1.00	-2.46E-01	-6.15E-02

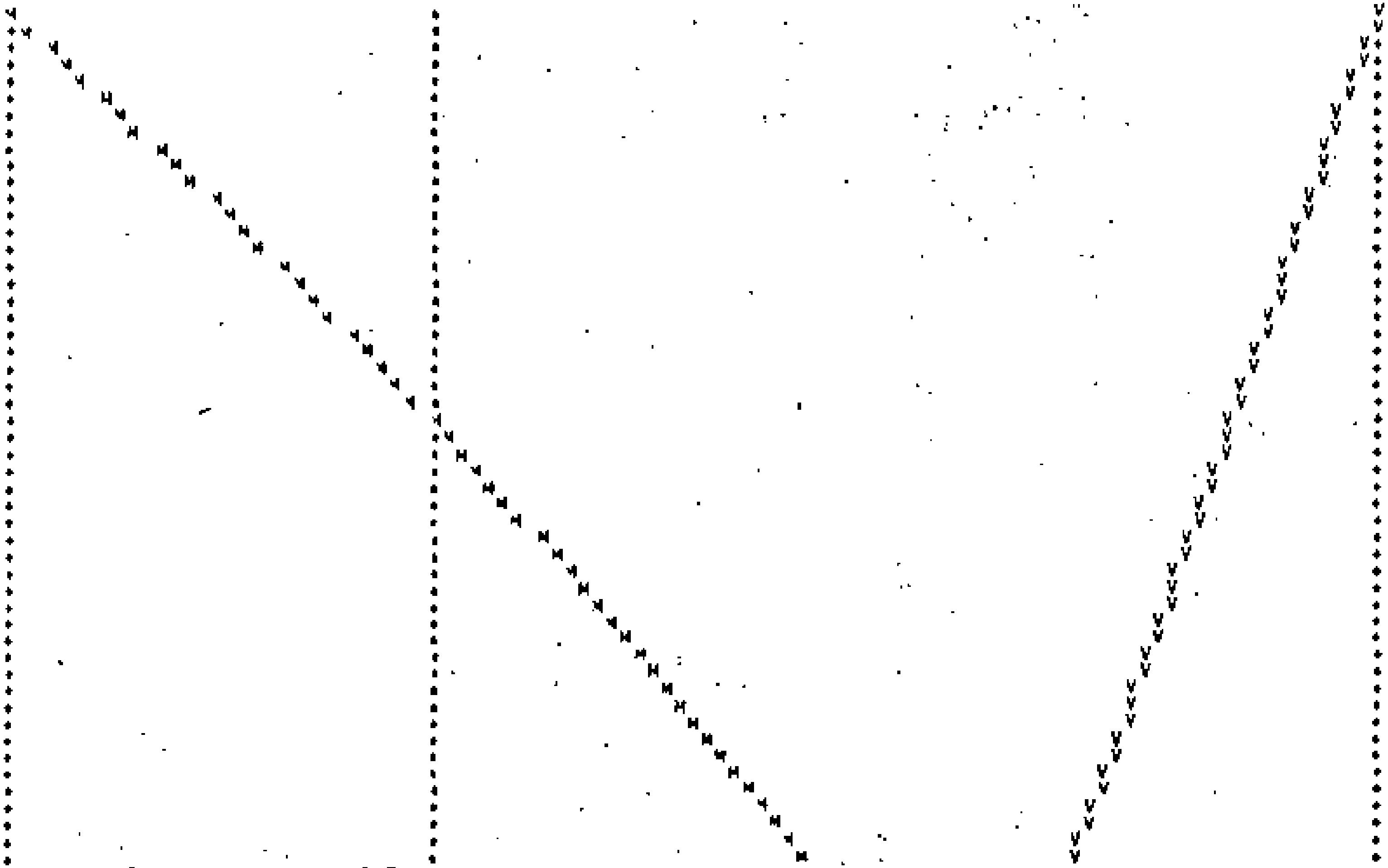
BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
15	150	166	1.47305	1.56802	-0.70590	1.47305	1.06802	0.61212

(51)

(60)

ESCALA DE LA GRAFICA= 2.27391E-02 UNIDADES/COLUMA
ORDENADA MENOR = -7.05899E-01
ORDENADA MAYOR = 1.56802E+00

BARRA NO. 15,NUDO INICIAL= 150,NUDO FINAL= 166



		V	M
1	0.00	1.57E+00	-7.06E-01
2	0.02	1.56E+00	-6.75E-01
3	0.04	1.55E+00	-6.44E-01
4	0.06	1.54E+00	-6.13E-01
5	0.08	1.53E+00	-5.82E-01
6	0.10	1.52E+00	-5.52E-01
7	0.12	1.51E+00	-5.21E-01
8	0.14	1.50E+00	-4.91E-01
9	0.16	1.49E+00	-4.61E-01
10	0.18	1.48E+00	-4.32E-01
11	0.20	1.47E+00	-4.02E-01
12	0.22	1.46E+00	-3.73E-01
13	0.24	1.45E+00	-3.44E-01
14	0.26	1.44E+00	-3.15E-01
15	0.28	1.43E+00	-2.86E-01
16	0.30	1.42E+00	-2.58E-01
17	0.32	1.41E+00	-2.30E-01
18	0.34	1.40E+00	-2.02E-01
19	0.36	1.39E+00	-1.74E-01
20	0.38	1.38E+00	-1.46E-01
21	0.40	1.37E+00	-1.19E-01
22	0.42	1.36E+00	-9.14E-02
23	0.44	1.35E+00	-6.44E-02
24	0.46	1.34E+00	-3.75E-02
25	0.48	1.33E+00	-1.09E-02
26	0.50	1.32E+00	1.56E-02
27	0.52	1.31E+00	4.19E-02
28	0.54	1.30E+00	6.79E-02
29	0.56	1.29E+00	9.38E-02
30	0.58	1.28E+00	1.19E-01
31	0.60	1.27E+00	1.45E-01
32	0.62	1.26E+00	1.70E-01
33	0.64	1.25E+00	1.95E-01
34	0.66	1.24E+00	2.20E-01
35	0.68	1.23E+00	2.45E-01
36	0.70	1.22E+00	2.69E-01
37	0.72	1.21E+00	2.93E-01
38	0.74	1.20E+00	3.18E-01
39	0.76	1.19E+00	3.41E-01
40	0.78	1.18E+00	3.65E-01
41	0.80	1.17E+00	3.89E-01
42	0.82	1.16E+00	4.12E-01
43	0.84	1.15E+00	4.35E-01
44	0.86	1.14E+00	4.58E-01
45	0.88	1.13E+00	4.80E-01
46	0.90	1.12E+00	5.03E-01
47	0.92	1.11E+00	5.25E-01
48	0.94	1.10E+00	5.47E-01
49	0.96	1.09E+00	5.69E-01
50	0.98	1.08E+00	5.91E-01
51	1.00	1.07E+00	6.12E-01

CORTANTES EN TON, Y MOMENTOS EN TON-M

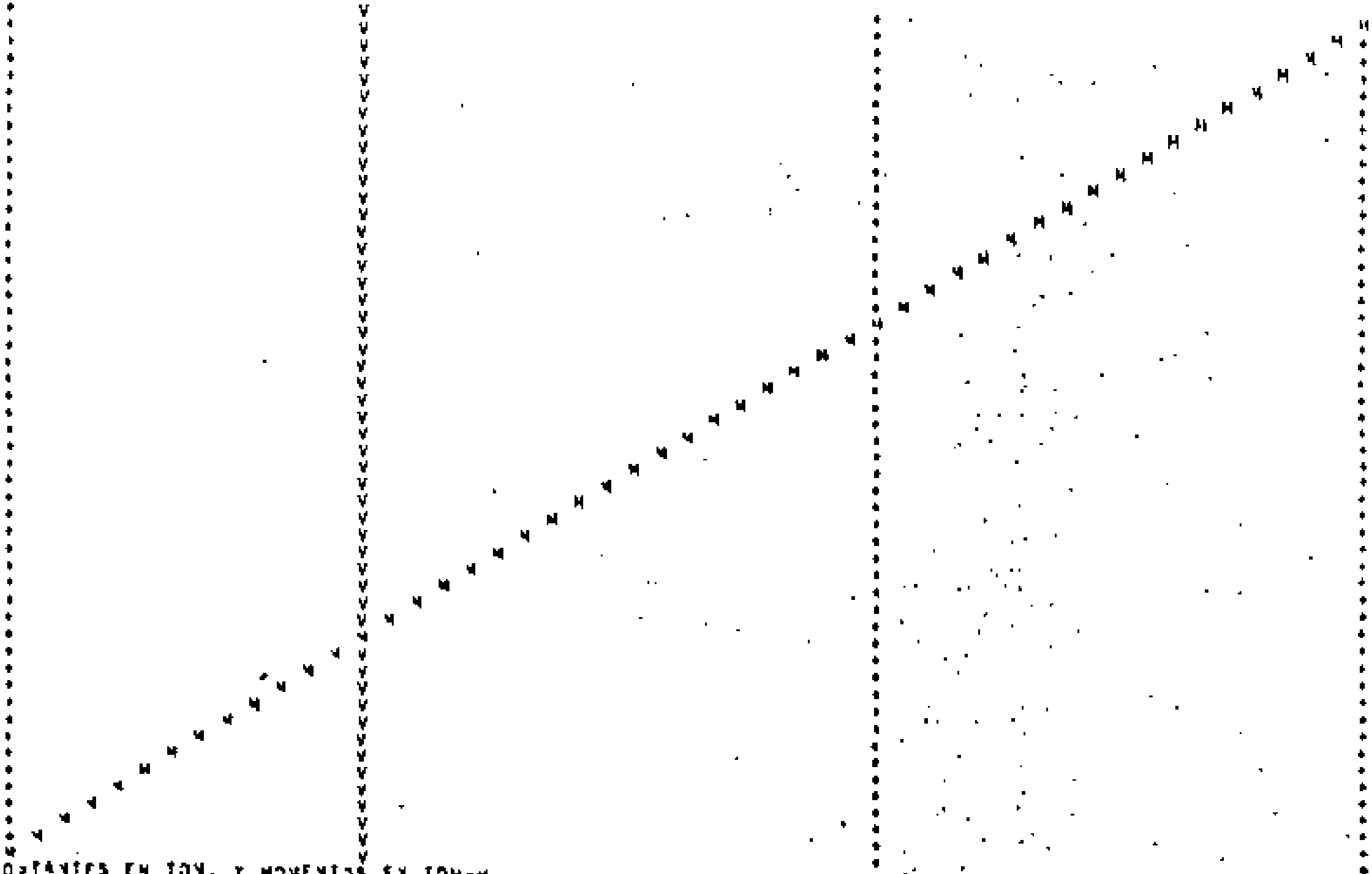
61

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	NORMAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) CORTANTE	FLEXIONANTE	NORMAL	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) CORTANTE	FLEXIONANTE
16	145	146	-19.83263	-0.06307	0.05838	+19.83263	+0.06307	+0.10565

62

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.63956E-03 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -1.05647E-01
ORDENADA MAYOR = 5.83389E-02

BARRA NO. 16, NUDO INICIAL= 145, NUDO FINAL= 146



CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

	X	V	M
1	0.00	-6.31E-02	5.83E-02
2	0.05	-6.31E-02	5.51E-02
3	0.10	-6.31E-02	5.18E-02
4	0.16	-6.31E-02	4.85E-02
5	0.21	-6.31E-02	4.52E-02
6	0.26	-6.31E-02	4.19E-02
7	0.31	-6.31E-02	3.87E-02
8	0.36	-6.31E-02	3.54E-02
9	0.42	-6.31E-02	3.21E-02
10	0.47	-6.31E-02	2.88E-02
11	0.52	-6.31E-02	2.55E-02
12	0.57	-6.31E-02	2.23E-02
13	0.62	-6.31E-02	1.90E-02
14	0.68	-6.31E-02	1.57E-02
15	0.73	-6.31E-02	1.24E-02
16	0.78	-6.31E-02	9.16E-03
17	0.83	-6.31E-02	5.88E-03
18	0.88	-6.31E-02	2.59E-03
19	0.94	-6.31E-02	-6.94E-04
20	0.99	-6.31E-02	-3.98E-03
21	1.04	-6.31E-02	-7.26E-03
22	1.09	-6.31E-02	-1.05E-02
23	1.14	-6.31E-02	-1.38E-02
24	1.20	-6.31E-02	-1.71E-02
25	1.25	-6.31E-02	-2.04E-02
26	1.30	-6.31E-02	-2.37E-02
27	1.35	-6.31E-02	-2.69E-02
28	1.40	-6.31E-02	-3.02E-02
29	1.46	-6.31E-02	-3.35E-02
30	1.51	-6.31E-02	-3.68E-02
31	1.56	-6.31E-02	-4.01E-02
32	1.61	-6.31E-02	-4.33E-02
33	1.66	-6.31E-02	-4.66E-02
34	1.72	-6.31E-02	-4.99E-02
35	1.77	-6.31E-02	-5.32E-02
36	1.82	-6.31E-02	-5.65E-02
37	1.87	-6.31E-02	-5.97E-02
38	1.92	-6.31E-02	-6.30E-02
39	1.98	-6.31E-02	-6.63E-02
40	2.03	-6.31E-02	-6.96E-02
41	2.08	-6.31E-02	-7.29E-02
42	2.13	-6.31E-02	-7.61E-02
43	2.18	-6.31E-02	-7.94E-02
44	2.24	-6.31E-02	-8.27E-02
45	2.29	-6.31E-02	-8.60E-02
46	2.34	-6.31E-02	-8.92E-02
47	2.39	-6.31E-02	-9.25E-02
48	2.44	-6.31E-02	-9.58E-02
49	2.50	-6.31E-02	-9.91E-02
50	2.55	-6.31E-02	-1.02E-01
51	2.60	-6.31E-02	-1.06E-01

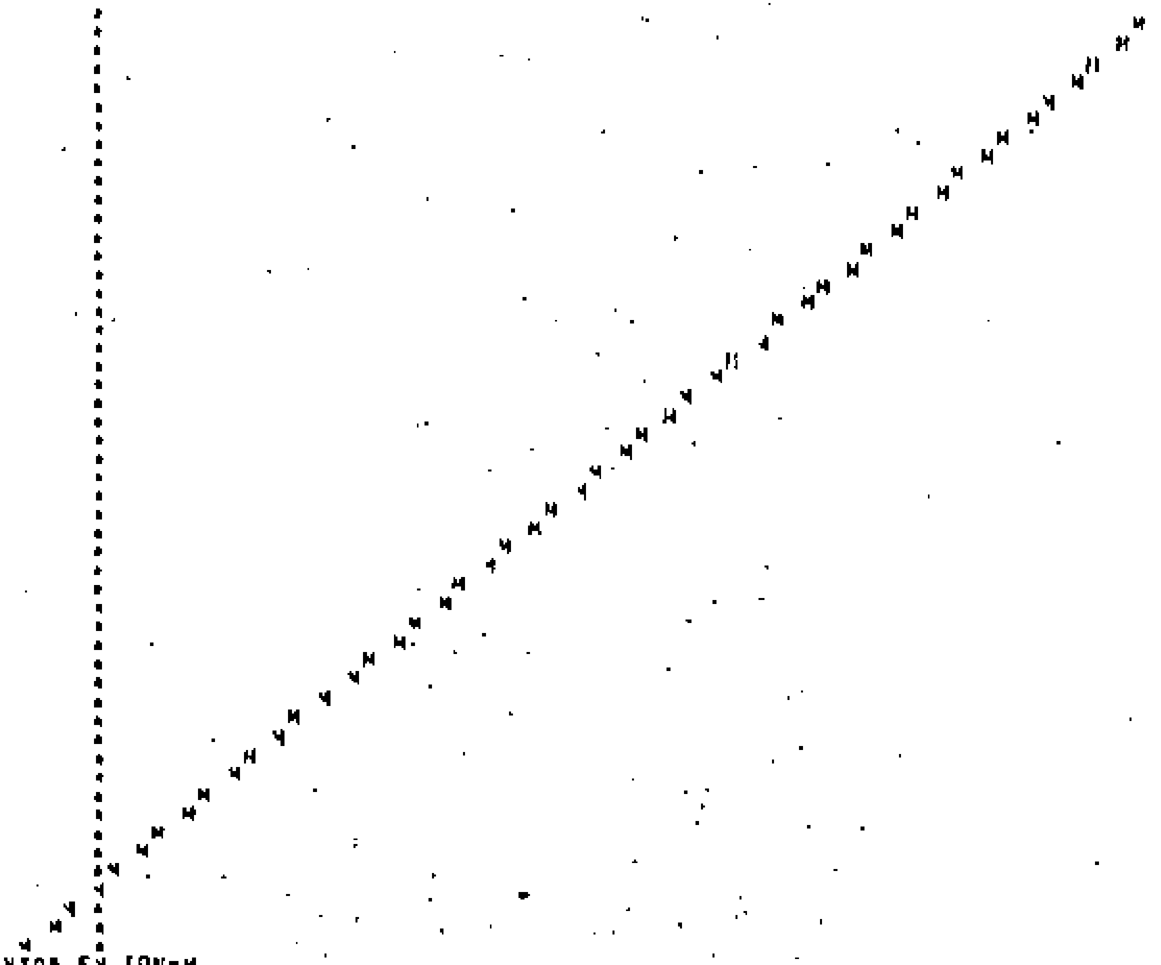
63

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
17	146	147	-15.95842	-0.02171	0.05289	-15.95842	-0.02171	-0.00357

69

ESCALA DE LA GRAFICA= 7.45984E-04 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -2.17124E-02
ORDENADA MAYOR = 5.28855E-02

BARRA NO. 17, NUDO INICIAL= 146, NUDO FINAL= 147



			V	M
1	0.00	V	-2.17E-02	5.29E-02
2	0.05	V	-2.17E-02	5.18E-02
3	0.10	V	-2.17E-02	5.06E-02
4	0.15	V	-2.17E-02	4.95E-02
5	0.21	V	-2.17E-02	4.84E-02
6	0.26	V	-2.17E-02	4.72E-02
7	0.31	V	-2.17E-02	4.61E-02
8	0.36	V	-2.17E-02	4.50E-02
9	0.42	V	-2.17E-02	4.39E-02
10	0.47	V	-2.17E-02	4.27E-02
11	0.52	V	-2.17E-02	4.16E-02
12	0.57	V	-2.17E-02	4.05E-02
13	0.62	V	-2.17E-02	3.93E-02
14	0.68	V	-2.17E-02	3.82E-02
15	0.73	V	-2.17E-02	3.71E-02
16	0.78	V	-2.17E-02	3.59E-02
17	0.83	V	-2.17E-02	3.48E-02
18	0.88	V	-2.17E-02	3.37E-02
19	0.94	V	-2.17E-02	3.26E-02
20	0.99	V	-2.17E-02	3.14E-02
21	1.04	V	-2.17E-02	3.03E-02
22	1.09	V	-2.17E-02	2.92E-02
23	1.14	V	-2.17E-02	2.80E-02
24	1.20	V	-2.17E-02	2.69E-02
25	1.25	V	-2.17E-02	2.58E-02
26	1.30	V	-2.17E-02	2.47E-02
27	1.35	V	-2.17E-02	2.35E-02
28	1.40	V	-2.17E-02	2.24E-02
29	1.46	V	-2.17E-02	2.13E-02
30	1.51	V	-2.17E-02	2.01E-02
31	1.56	V	-2.17E-02	1.90E-02
32	1.61	V	-2.17E-02	1.79E-02
33	1.66	V	-2.17E-02	1.68E-02
34	1.72	V	-2.17E-02	1.56E-02
35	1.77	V	-2.17E-02	1.45E-02
36	1.82	V	-2.17E-02	1.34E-02
37	1.87	V	-2.17E-02	1.22E-02
38	1.92	V	-2.17E-02	1.11E-02
39	1.98	V	-2.17E-02	9.98E-03
40	2.03	V	-2.17E-02	8.85E-03
41	2.08	V	-2.17E-02	7.72E-03
42	2.13	V	-2.17E-02	6.59E-03
43	2.18	V	-2.17E-02	5.46E-03
44	2.24	V	-2.17E-02	4.34E-03
45	2.29	V	-2.17E-02	3.21E-03
46	2.34	V	-2.17E-02	2.08E-03
47	2.39	V	-2.17E-02	9.48E-04
48	2.44	V	-2.17E-02	-1.81E-04
49	2.50	V	-2.17E-02	-1.31E-03
50	2.55	V	-2.17E-02	-2.44E-03
51	2.60	V	-2.17E-02	-3.57E-03

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

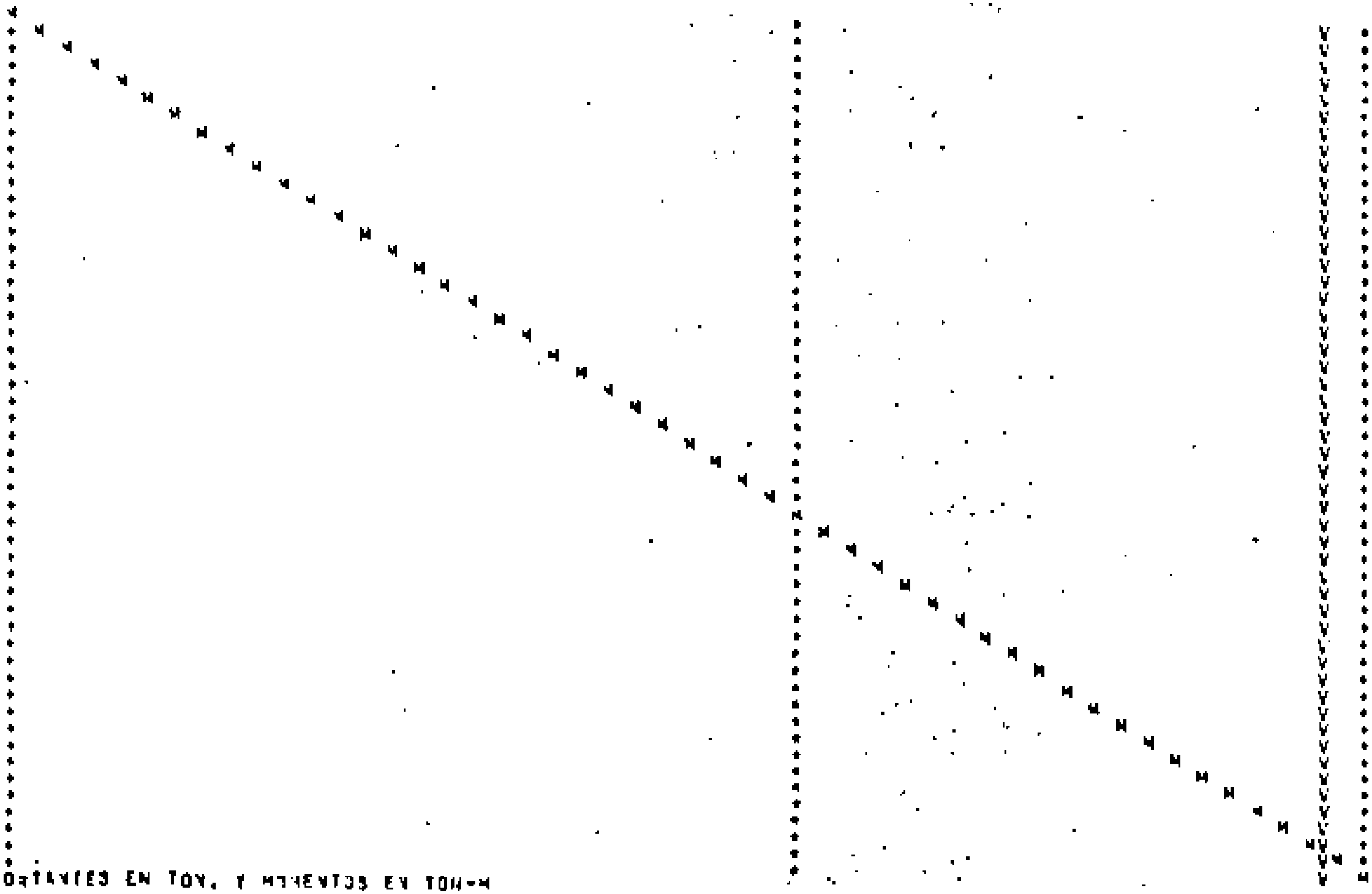
65

BARRA NO.	E X T R E M O INICIAL	FINAL	N O R M A L	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) C O R T A N T E	FLEXIONANTE	**** EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) N O R M A L	C O R T A N T E	FLEXIONANTE
18	147	145	-10.75971	0.06067	-0.09198	-10.75971	0.06067	0.06577

66

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.57750E-03 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -9.19837E-02
ORDENADA MAYOR = 6.57665E-02

BARRA NO. 18,NUDO INICIAL= 147,NUDO FINAL= 145



		V	M
1	0.00	6.07E-02	-9.20E-02
2	0.05	6.07E-02	-8.88E-02
3	0.10	6.07E-02	-8.57E-02
4	0.16	6.07E-02	-8.25E-02
5	0.21	6.07E-02	-7.94E-02
6	0.26	6.07E-02	-7.62E-02
7	0.31	6.07E-02	-7.31E-02
8	0.36	6.07E-02	-6.99E-02
9	0.42	6.07E-02	-6.67E-02
10	0.47	6.07E-02	-6.36E-02
11	0.52	6.07E-02	-6.04E-02
12	0.57	6.07E-02	-5.73E-02
13	0.62	6.07E-02	-5.41E-02
14	0.68	6.07E-02	-5.10E-02
15	0.73	6.07E-02	-4.78E-02
16	0.78	6.07E-02	-4.47E-02
17	0.83	6.07E-02	-4.15E-02
18	0.88	6.07E-02	-3.83E-02
19	0.94	6.07E-02	-3.52E-02
20	0.99	6.07E-02	-3.20E-02
21	1.04	6.07E-02	-2.89E-02
22	1.09	6.07E-02	-2.57E-02
23	1.14	6.07E-02	-2.26E-02
24	1.20	6.07E-02	-1.94E-02
25	1.25	6.07E-02	-1.63E-02
26	1.30	6.07E-02	-1.31E-02
27	1.35	6.07E-02	-9.95E-03
28	1.40	6.07E-02	-6.80E-03
29	1.46	6.07E-02	-3.64E-03
30	1.51	6.07E-02	-4.89E-04
31	1.56	6.07E-02	2.67E-03
32	1.61	6.07E-02	5.82E-03
33	1.66	6.07E-02	8.98E-03
34	1.72	6.07E-02	1.21E-02
35	1.77	6.07E-02	1.53E-02
36	1.82	6.07E-02	1.84E-02
37	1.87	6.07E-02	2.16E-02
38	1.92	6.07E-02	2.48E-02
39	1.98	6.07E-02	2.79E-02
40	2.03	6.07E-02	3.11E-02
41	2.08	6.07E-02	3.42E-02
42	2.13	6.07E-02	3.74E-02
43	2.18	6.07E-02	4.05E-02
44	2.24	6.07E-02	4.37E-02
45	2.29	6.07E-02	4.68E-02
46	2.34	6.07E-02	5.00E-02
47	2.39	6.07E-02	5.31E-02
48	2.44	6.07E-02	5.63E-02
49	2.50	6.07E-02	5.95E-02
50	2.55	6.07E-02	6.26E-02
51	2.60	6.07E-02	6.58E-02

CORTANTES EN TON, Y MOMENTOS EN TON-M

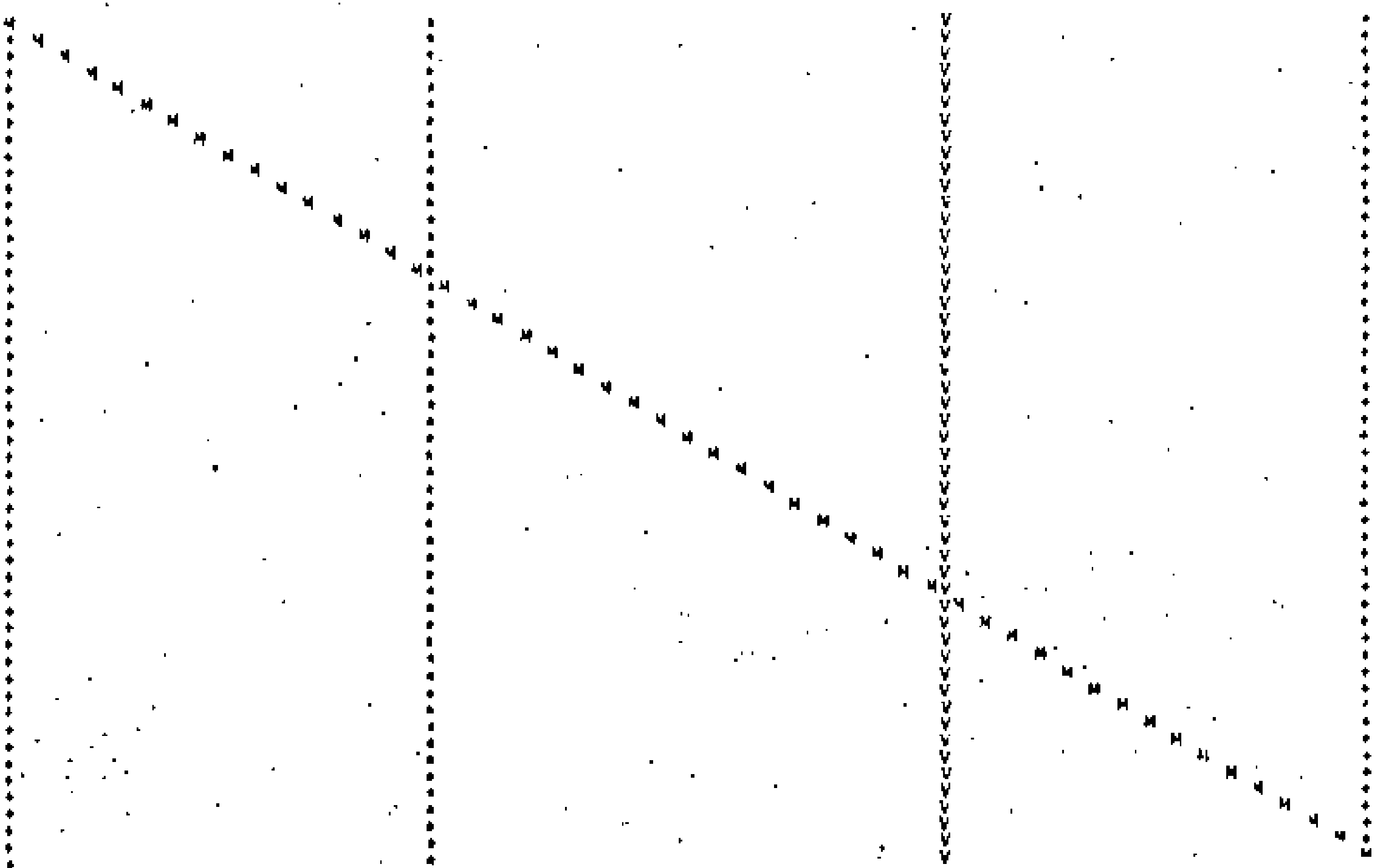
(67)

BARRA NO.	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
19	148	149	-4.99672	0.15316	-0.12359	-4.99672	0.15316	0.27466

(68)

ESCALA DE LA GRAFICA= 3.98203E-03 UNIDADES/COLUMA
ORDENADA MENOR = -1.23595E-01
ORDENADA MAYOR = 2.74658E-01

BARRA NO. 19,NUDO INICIAL= 148/NUDO FINAL= 149



		V	M
1	0.00	1.53E-01	-1.24E-01
2	0.05	1.53E-01	-1.16E-01
3	0.10	1.53E-01	-1.08E-01
4	0.16	1.53E-01	-9.97E-02
5	0.21	1.53E-01	-9.17E-02
6	0.26	1.53E-01	-8.37E-02
7	0.31	1.53E-01	-7.58E-02
8	0.36	1.53E-01	-6.78E-02
9	0.42	1.53E-01	-5.98E-02
10	0.47	1.53E-01	-5.19E-02
11	0.52	1.53E-01	-4.39E-02
12	0.57	1.53E-01	-3.59E-02
13	0.62	1.53E-01	-2.80E-02
14	0.68	1.53E-01	-2.00E-02
15	0.73	1.53E-01	-1.20E-02
16	0.78	1.53E-01	-4.04E-03
17	0.83	1.53E-01	3.88E-03
18	0.88	1.53E-01	1.18E-02
19	0.94	1.53E-01	1.98E-02
20	0.99	1.53E-01	2.78E-02
21	1.04	1.53E-01	3.57E-02
22	1.09	1.53E-01	4.37E-02
23	1.14	1.53E-01	5.17E-02
24	1.20	1.53E-01	5.96E-02
25	1.25	1.53E-01	6.76E-02
26	1.30	1.53E-01	7.56E-02
27	1.35	1.53E-01	8.35E-02
28	1.40	1.53E-01	9.15E-02
29	1.46	1.53E-01	9.95E-02
30	1.51	1.53E-01	1.07E-01
31	1.56	1.53E-01	1.15E-01
32	1.61	1.53E-01	1.23E-01
33	1.66	1.53E-01	1.31E-01
34	1.72	1.53E-01	1.39E-01
35	1.77	1.53E-01	1.47E-01
36	1.82	1.53E-01	1.55E-01
37	1.87	1.53E-01	1.63E-01
38	1.92	1.53E-01	1.71E-01
39	1.98	1.53E-01	1.79E-01
40	2.03	1.53E-01	1.87E-01
41	2.08	1.53E-01	1.95E-01
42	2.13	1.53E-01	2.03E-01
43	2.18	1.53E-01	2.11E-01
44	2.24	1.53E-01	2.19E-01
45	2.29	1.53E-01	2.27E-01
46	2.34	1.53E-01	2.35E-01
47	2.39	1.53E-01	2.43E-01
48	2.44	1.53E-01	2.51E-01
49	2.50	1.53E-01	2.59E-01
50	2.55	1.53E-01	2.67E-01
51	2.60	1.53E-01	2.75E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

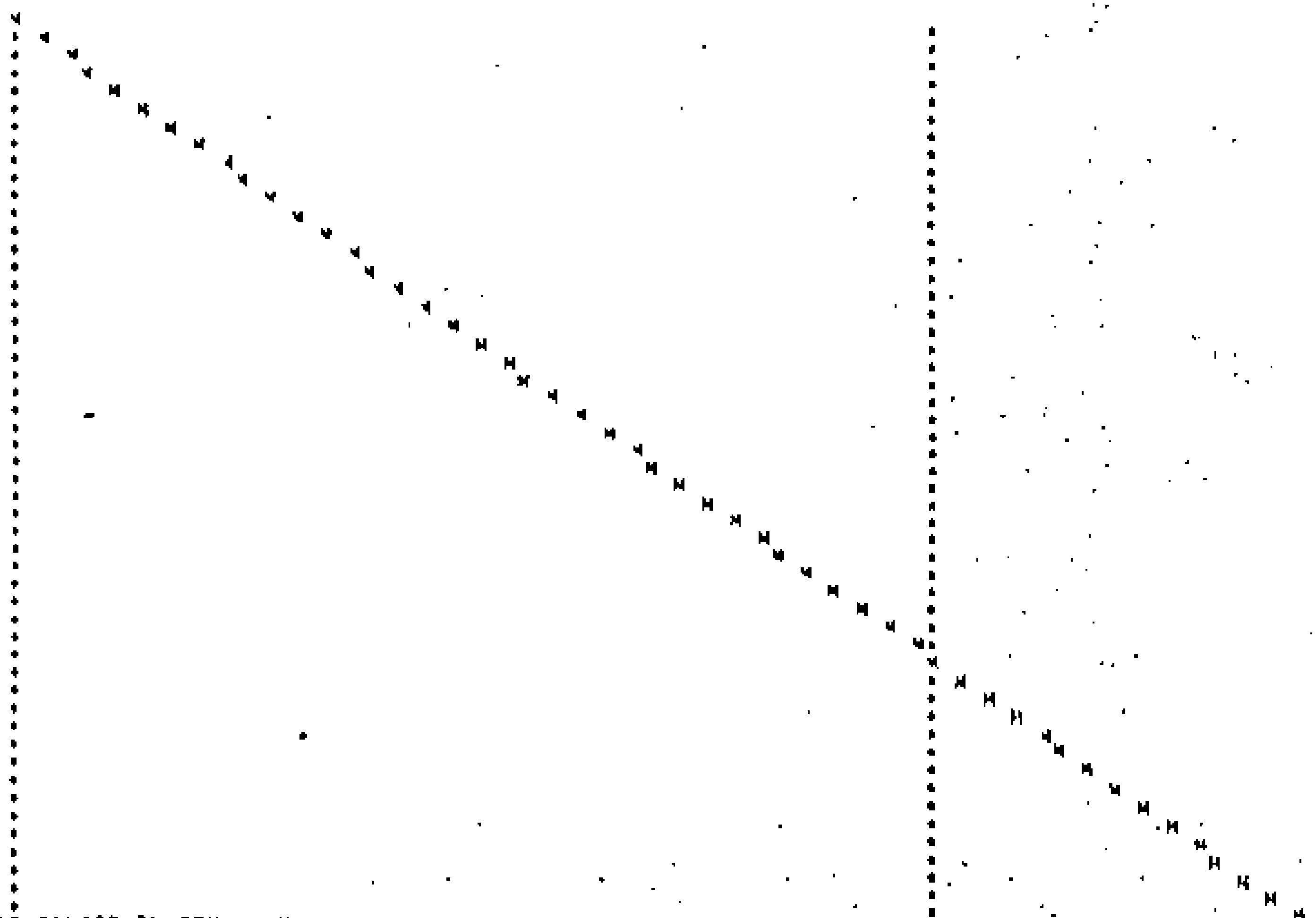
(69)

BARRA NO. E	EXTREMO INICIAL	EXTREMO FINAL	EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE	EXTREMO FINAL (TON Y TON-M) NORMAL	CORTANTE	FLEXIONANTE
20	149	150	-6.25161	0.13853	-0.25864	+6.28161	0.13883	0.10231

(70)

ESCALA DE LA GRAFICA= 3.97455E-03 UNIDADES/COLUMNA
ORDENADA MENOR = -2.58639E-01
ORDENADA MAYOR = 1.38825E-01

BARRA NO. 20, NUDO INICIAL= 149, NUDO FINAL= 150



	X	V	M
1	0.00	1.39E-01	-2.59E-01
2	0.05	1.39E-01	-2.51E-01
3	0.10	1.39E-01	-2.44E-01
4	0.16	1.39E-01	-2.37E-01
5	0.21	1.39E-01	-2.30E-01
6	0.26	1.39E-01	-2.23E-01
7	0.31	1.39E-01	-2.15E-01
8	0.36	1.39E-01	-2.08E-01
9	0.42	1.39E-01	-2.01E-01
10	0.47	1.39E-01	-1.94E-01
11	0.52	1.39E-01	-1.86E-01
12	0.57	1.39E-01	-1.79E-01
13	0.62	1.39E-01	-1.72E-01
14	0.68	1.39E-01	-1.65E-01
15	0.73	1.39E-01	-1.58E-01
16	0.78	1.39E-01	-1.50E-01
17	0.83	1.39E-01	-1.43E-01
18	0.88	1.39E-01	-1.36E-01
19	0.94	1.39E-01	-1.29E-01
20	0.99	1.39E-01	-1.21E-01
21	1.04	1.39E-01	-1.14E-01
22	1.09	1.39E-01	-1.07E-01
23	1.14	1.39E-01	-9.98E-02
24	1.20	1.39E-01	-9.26E-02
25	1.25	1.39E-01	-8.54E-02
26	1.30	1.39E-01	-7.82E-02
27	1.35	1.39E-01	-7.09E-02
28	1.40	1.39E-01	-6.37E-02
29	1.46	1.39E-01	-5.65E-02
30	1.51	1.39E-01	-4.93E-02
31	1.56	1.39E-01	-4.21E-02
32	1.61	1.39E-01	-3.49E-02
33	1.66	1.39E-01	-2.76E-02
34	1.72	1.39E-01	-2.04E-02
35	1.77	1.39E-01	-1.32E-02
36	1.82	1.39E-01	-5.98E-03
37	1.87	1.39E-01	1.24E-03
38	1.92	1.39E-01	8.46E-03
39	1.98	1.39E-01	1.57E-02
40	2.03	1.39E-01	2.29E-02
41	2.08	1.39E-01	3.01E-02
42	2.13	1.39E-01	3.73E-02
43	2.18	1.39E-01	4.46E-02
44	2.24	1.39E-01	5.18E-02
45	2.29	1.39E-01	5.90E-02
46	2.34	1.39E-01	6.62E-02
47	2.39	1.39E-01	7.34E-02
48	2.44	1.39E-01	8.07E-02
49	2.50	1.39E-01	8.79E-02
50	2.55	1.39E-01	9.51E-02
51	2.60	1.39E-01	1.02E-01

CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

XIV

BARRA EXTREMO NO. INICIAL FINAL — NORMAL — EXTREMO INICIAL (TON Y TON*M) CORTANTE — FLEXIONANTE **** EXTREMO FINAL (TON Y TON*M) NORMAL CORTANTE FLEXIONANTE

ELEM***COORDENADAS (M)******ESFUERZOS REFERIDOS A XY GL (TON/M**2)****ESFUERZOS PRINCIPALES REF XY (TON/M**2)***DIR. PPAL

ELEM NO.	X	Y	TXX O TSS	TYY O TTT	TXY O TST	T11	T22	TAUMAX	(GRADOS)
1	0.250	0.033	-2.4900E+00	-1.4792E+02	-9.4115E+00	-1.9096E+00	-1.6805E+02	8.3272E+01	-32.525
2	0.250	2.167	-2.4957E+00	-1.3093E+02	-4.6006E-01	-2.4572E+00	-1.4095E+02	6.9214E+01	-1.904
3	0.250	3.900	2.9200E+01	-9.9245E+01	-2.7707E+00	3.4995E-01	-9.9342E+01	4.9856E+01	-15.929
4	0.250	5.433	1.7396E+00	-6.5093E+01	1.8715E+00	1.4253E+00	-6.5118E+01	3.3231E+01	12.711
5	0.250	7.367	-2.7095E+00	-6.4684E+01	4.9034E+00	-2.4126E+00	-6.8476E+01	3.3242E+01	34.610
6	0.250	9.100	2.3379E-01	-5.1825E+01	1.4276E+00	2.9963E-01	-5.1874E+01	2.6079E+01	17.891
7	0.250	10.833	4.4215E+00	-3.0173E+01	-3.0078E+00	4.5551E+00	-3.4407E+01	1.9931E+01	-40.410
8	0.250	12.567	-6.1315E+00	-1.9113E+01	1.3820E+01	5.5912E+00	-2.2278E+01	1.3945E+01	005.949
9	0.750	1.300	1.1345E+00	-1.5745E+02	-5.1372E+00	1.7126E+00	-1.5798E+02	7.9096E+01	-29.205
10	0.750	3.033	5.2755E+00	-1.1585E+02	-3.5399E+00	3.9656E+00	-1.1594E+02	5.9043E+01	-17.082
11	0.750	4.767	-7.0239E+00	-1.0735E+02	5.7045E-01	-7.0550E+00	-1.0714E+02	5.0135E+01	1.202
12	0.750	6.500	3.2203E-01	-6.4719E+01	1.4206E+00	4.2736E-01	-6.4754E+01	3.5033E+01	11.304
13	0.750	8.233	2.6090E+00	-5.0949E+01	3.7082E+00	3.0174E+00	-5.0895E+01	1.6957E+01	63.157
14	0.750	9.967	-9.9150E+00	-1.9049E+01	6.2569E+00	-1.5354E+00	-2.2209E+01	9.7549E+00	209.431
15	0.750	11.700	5.3047E+00	-1.9947E+01	-2.5597E+01	2.2500E+01	-3.1643E+01	2.7352E+01	-360.116
16	1.250	0.433	-1.5302E+01	-1.0675E+02	-3.0233E-01	-1.5302E+01	-1.0675E+02	4.5725E+01	-1.075
17	1.250	2.167	-9.0147E+00	-1.5247E+02	-9.4554E+00	-8.7451E+00	-1.5307E+02	7.2215E+01	-35.777
18	1.250	3.900	-5.0595E-01	-1.2346E+02	-7.1540E-01	-6.9256E-01	-1.2397E+02	6.1912E+01	-3.721
19	1.250	5.633	2.4237E-01	-7.4495E+01	-2.5275E+00	2.4354E-01	-7.0324E+01	3.9935E+01	-18.580
20	1.250	7.367	-4.7373E+00	-5.3345E+01	-3.2375E+00	-4.6595E+00	-5.4547E+01	2.4715E+01	-32.080
21	1.250	9.100	-1.1013E+00	-4.2135E-01	2.7103E+00	1.7523E+00	-1.5756E+00	2.7159E+00	-435.186
22	1.250	10.433	9.3775E-01	7.1173E+01	-5.0074E+00	1.5524E+01	5.6029E-01	7.4405E+01	40.001
23	1.250	12.567	1.2376E+00	-7.5291E+01	-8.4748E+00	1.5577E+00	-7.3952E+01	3.7555E+01	-33.355
24	3.750	1.300	1.0178E+01	-1.7852E+02	9.1349E+00	1.1627E+01	-1.7847E+02	9.5034E+01	20.552
25	3.750	3.035	3.7794E+01	-4.0247E+01	9.5502E+01	5.2256E+01	-9.9504E+01	7.3400E+01	181.727
26	3.750	4.767	-1.2293E+01	-1.1454E+02	1.5815E+01	-1.0617E+01	-1.4607E+02	6.8025E+01	67.410
27	3.750	6.500	7.0377E-01	-1.7522E+02	3.2048E+00	7.3354E-01	-1.2630E+02	6.3592E+01	18.473
28	3.750	8.235	4.1740E+00	-9.4533E+01	2.4511E+00	4.2492E+00	-9.4604E+01	4.9427E+01	19.374
29	3.750	9.947	-5.1451E+00	-9.4117E+01	5.3472E+00	-4.9137E+00	-9.4402E+01	4.0012E+01	30.562
30	3.750	11.700	5.0914E+00	-5.1849E+01	4.1451E+00	5.3422E+00	-5.2149E+01	2.8733E+01	41.441
31	4.250	0.433	-1.3941E+01	-9.7223E+01	3.1909E+01	-8.1934E+00	-1.0874E+02	5.0171E+01	197.769
32	4.250	2.167	-5.3597E+01	-1.5534E+02	8.1726E+01	-5.4034E+01	-1.9814E+02	7.3447E+01	171.990
33	4.250	3.900	4.5299E+00	-1.3715E+02	5.0318E+01	1.6296E+01	-1.3311E+02	8.2637E+01	101.535
34	4.250	5.533	3.5727E+00	-1.2408E+02	8.0572E+00	5.9111E+00	-1.2454E+02	6.0217E+01	37.803
35	4.250	7.347	-5.4739E+00	-1.2211E+02	7.4625E+00	-4.1555E+00	-1.2242E+02	5.8517E+01	37.849
36	4.250	9.100	-4.0077E-02	-4.5263E+01	2.7977E+00	4.1674E-02	-4.3355E+01	4.2701E+01	19.703
37	4.250	10.833	1.9307E+00	-4.5186E+01	-1.4357E+00	2.0374E+00	-4.5243E+01	2.3600E+01	-10.858
38	4.250	12.567	1.5441E+01	-2.5790E+01	-1.1104E+00	1.5676E+01	-2.6319E+01	2.1239E+01	-14.901
39	4.750	1.300	-3.7524E+01	3.5244E+01	7.4705E+01	7.4795E+01	-9.4745E+01	8.0755E+01	-301.633
40	4.750	3.035	1.0345E+01	-2.0435E+02	3.8734E+00	1.5039E+01	-2.0403E+02	1.0913E+02	10.112
41	4.750	4.767	9.2215E-01	-1.5345E+02	1.9958E+01	3.1272E+00	-1.7194E+02	8.7355E+01	65.401
42	4.750	6.500	-1.0700E-01	-1.2104E+02	9.0602E+00	5.2613E-01	-1.2209E+02	6.1356E+01	42.895
43	4.750	8.233	9.7500E-01	-8.7030E+01	-1.5127E+00	1.0062E+00	-8.0046E+01	4.0535E+01	-10.693
44	4.750	9.967	-1.4116E+00	-7.2730E+01	1.5948E-01	-1.4115E+00	-7.2730E+01	3.5459E+01	1.208
45	4.750	11.700	-2.4015E+00	-3.2560E+01	1.7495E-01	-2.4653E+00	-3.2341E+01	1.4717E+01	1.391
46	5.250	0.433	-2.2907E+01	-1.5904E+01	3.7316E+01	1.4692E+01	-5.4451E+01	3.7973E+01	-021.143
47	5.250	2.167	1.3580E+01	-2.9668E+02	-3.3510E+01	1.1245E+01	-2.4014E+02	1.5694E+02	-67.831
48	5.250	3.900	4.4448E-01	-2.1980E+02	4.2817E+00	7.7594E-01	-2.2019E+02	1.1037E+02	21.511
49	5.250	5.633	2.4008E+00	-1.1275E+02	2.8516E-01	2.4555E+00	-1.1275E+02	6.7074E+01	1.249
50	5.250	7.357	4.0744E+00	-1.9082E+02	5.5207E+00	4.3451E+00	-1.9909E+02	5.4730E+01	27.948
51	5.250	9.100	7.1511E-01	-6.7485E+01	1.0698E-01	7.1626E-01	-6.7455E+01	3.4102E+01	0.899
52	5.250	10.833	-9.9095E+00	-3.3354E+01	-2.3117E+00	-9.4836E+00	-3.3560E+01	1.1938E+01	-54.626

42.

53	5.750	12.567	1.5309E+01	-3.3498E+01	5.1143E+00	1.8695E+01	-3.9700E+01	2.1240E+01	88.884
54	7.750	1.300	-4.9547E-01	-1.7419E+02	-3.0596E+00	-5.0936E-01	-1.7410E+02	8.6922E+01	-10.769
55	7.750	3.033	2.1335E+00	-1.5462E+02	2.0113E+00	2.2296E+00	-1.3945E+02	6.0457E+01	8.021
56	7.750	4.767	7.2565E+00	-1.3209E+02	2.0335E+00	7.7951E+00	-1.3214E+02	7.0457E+01	9.951
57	7.750	6.500	-7.0363E-01	-1.0421E+02	1.0651E+00	-6.6100E-01	-1.0425E+02	5.1790E+01	10.873
58	7.750	8.233	-1.4397E+00	-7.7643E+01	-8.7522E-02	-1.5697E+00	-7.7693E+01	3.7497E+01	-0.359
59	7.750	9.967	-1.5172E+00	-4.0974E+01	8.8071E+00	-8.7376E+00	-5.0776E+01	3.8219E+01	35.128
60	7.750	11.700	-1.5579E+00	-3.1456E+01	8.1837E-01	-1.5176E+00	-3.4657E+01	1.4549E+01	19.157
61	8.250	0.433	-2.8225E+01	-1.3905E+02	5.8391E+00	-2.1625E+01	-1.4842E+02	8.7299E+01	13.175
62	8.250	2.167	-1.2350E+00	-1.7722E+02	2.6936E+00	-1.1335E+00	-1.7726E+02	8.8055E+01	8.767
63	8.250	3.900	-1.5935E+02	-1.4012E+02	7.7672E-01	-3.1531E-02	-1.4013E+02	7.0075E+01	3.177
64	8.250	5.633	8.4713E+00	-1.3744E+02	5.3708E+00	8.7730E+00	-1.0770E+02	5.8253E+01	17.176
65	8.250	7.367	-1.0315E+00	-1.7508E+02	5.0729E+00	-1.0670E+00	-1.0580E+02	5.2359E+01	35.511
66	8.250	9.100	-9.9210E-01	-7.1694E+01	2.1740E+00	-3.3710E+01	-7.3759E+01	3.6111E+01	17.006
67	8.250	10.833	2.7194E+00	-3.7507E+01	-2.8109E+00	2.9635E+00	-3.7702E+01	2.0303E+01	-39.705
68	8.250	12.567	5.7571E+00	-2.7637E+01	2.4471E+00	6.9253E+00	-2.7810E+01	1.7356E+01	40.098
69	8.750	1.300	-4.2010E-01	-1.5865E+02	1.5454E+00	-4.3674E+01	-1.8887E+02	9.4235E+01	4.815
70	8.750	3.033	2.2245E+00	-1.5074E+02	-1.5642E+00	2.7425E+00	-1.5075E+02	7.6495E+01	-5.866
71	8.750	4.767	1.4551E-01	-1.3449E+02	3.2105E+00	2.3052E+01	-1.9905E+02	7.2317E+01	12.872
72	8.750	6.500	2.9172E-01	-1.0789E+02	4.8102E+00	5.0545E+01	-1.0908E+02	5.4232E+01	25.835
73	8.750	8.233	1.4775E+00	-7.1123E+01	1.1115E+00	1.5971E+00	-7.1140E+01	3.5419E+01	8.002
74	8.750	9.967	-3.0922E+00	-4.9095E+01	1.7295E+00	-2.0216E+00	-6.4154E+01	3.1035E+01	15.261
75	8.750	11.700	-5.3345E-02	-1.7193E+01	-7.5540E+00	1.7935E-01	-3.4426E+01	1.5339E+01	-09.035
76	9.250	0.433	-7.5371E+01	-1.1571E+02	6.9099E+00	-2.5236E+01	-1.9399E+02	8.5335E+01	23.717
77	9.250	2.167	-1.4014E+03	-1.9515E+02	-2.1056E-01	-1.5414E+00	-1.8516E+02	9.1772E+01	-0.657
78	9.250	3.900	-7.3509E-02	-1.5519E+02	5.0751E-01	-7.7756E-02	-1.5519E+02	7.7537E+01	2.222
79	9.250	5.633	1.3357E+00	-1.1822E+02	1.9950E-02	1.3557E+00	-1.1422E+02	6.6100E+01	2.095
80	9.250	7.367	-1.5795E+00	-1.0023E+02	2.5789E+00	-1.3125E+00	-1.0035E+02	4.9303E+01	10.708
81	9.250	9.100	-2.4324E-01	-5.1245E+01	1.1535E+00	-2.5621E-01	-5.1207E+01	3.0319E+01	10.889
82	9.250	10.833	1.9503E+00	-3.3472E+01	-5.0759E+00	2.2256E+00	-2.9770E+01	1.6030E+01	-55.368
83	9.250	12.567	-1.3171E+00	-3.5187E+01	1.5719E+00	-1.1113E+00	-2.8209E+01	1.3559E+01	35.336
84	0.250	1.300	8.4334E-02	-1.5305E+02	-2.9279E+00	1.0207E-01	-1.5311E+02	7.6635E+01	-10.952
85	0.250	3.033	1.5795E+00	-1.0676E+02	8.4902E-01	1.7016E+00	-1.0676E+02	5.6213E+01	2.452
86	0.250	4.767	-2.0302E+00	-9.1327E+01	5.0097E-02	-2.0452E+00	-9.1327E+01	4.6449E+01	8.219
87	0.250	6.500	-9.1307E-02	-5.3801E+01	7.2250E-01	-7.3655E-02	-5.5609E+01	3.2048E+01	5.298
88	0.250	8.233	1.4776E+00	-3.7023E+01	8.3144E+00	1.3526E+00	-4.7410E+01	2.8436E+01	50.895
89	0.250	9.967	-2.3093E+00	-5.4634E+01	8.0334E+00	-1.9262E+00	-5.7195E+01	2.7622E+01	46.245
90	0.250	11.700	-5.9155E+00	-9.7473E+00	-1.1125E+01	3.5135E+00	-1.4077E+01	1.1275E+01	-390.985
91	0.750	0.433	-1.4393E+01	+1.5642E+02	-6.3554E+00	-1.9205E+01	-1.5677E+02	6.9255E+01	-26.331
92	0.750	2.167	-5.0940E+00	-1.3092E+02	-6.9140E+00	-6.2119E+00	-1.3124E+02	7.2519E+01	-25.381
93	0.750	3.900	4.2715E-01	-1.1257E+02	-5.0677E+00	6.5917E-01	-1.1279E+02	5.6734E+01	-25.628
94	0.750	5.633	1.3597E+00	-7.5104E+01	8.2978E+00	1.7057E+00	-7.3390E+01	3.7578E+01	32.409
95	0.750	7.367	-5.7294E+00	-5.5117E+01	2.7935E+00	-5.5915E+00	-5.3249E+01	2.9455E+01	25.021
96	0.750	9.100	1.7145E-01	-3.7350E+01	3.5144E+00	5.5613E-01	-2.7784E+01	1.9135E+01	67.799
97	0.750	10.833	1.5372E+01	5.5171E+00	6.5405E+00	1.9139E+01	3.2000E+00	1.9133E+00	269.861
98	0.750	12.567	5.1347E+00	-3.5182E+01	2.8459E+01	2.1629E+01	-4.4455E+01	3.3007E+01	19.289
99	1.250	1.300	2.5123E+00	-1.5541E+02	-4.7051E+00	2.5517E+00	-1.3694E+02	7.0735E+01	-15.001
100	1.250	3.033	5.3944E+00	-1.2375E+02	-5.0526E+00	6.1035E+00	-1.2351E+02	6.6047E+01	-27.300
101	1.250	4.767	-1.1050E+01	-1.2307E+02	-6.5715E+00	-1.0671E+01	-1.2047E+02	5.8701E+01	-32.518
102	1.250	6.500	4.5377E-01	-7.2784E+01	3.1755E+00	7.3506E-01	-7.2094E+01	3.6774E+01	15.042
103	1.250	8.233	4.1247E+00	-1.1935E+01	2.4235E-01	4.1275E+00	-1.1494E+01	8.0391E+00	6.339
104	1.250	9.967	-1.3390E+00	5.3170E+00	-2.3247E+00	5.5317E+00	-8.3924E+00	5.1122E+00	101.490
105	1.250	9.517	7.1523E+00	6.3054E+01	6.1955E+01	9.2634E+01	-3.3577E+01	6.9152E+01	-364.078
106	3.750	0.433	1.2955E+00	-1.1797E+02	1.7992E+01	3.9156E+00	-1.2480E+02	6.2259E+01	23.555
107	3.750	2.167	-5.7551E+01	-2.1251E+02	6.0642E+01	-3.5477E+01	-2.3342E+02	9.6459E+01	190.191
108	3.750	3.900	-7.4654E+00	-1.7522E+02	9.0754E+00	-6.5396E+00	-1.0708E+02	5.6221E+01	52.655
109	3.750	5.633	1.0235E+00	-1.1091E+02	4.0897E+00	1.5521E+00	-1.1459E+02	5.8022E+01	02.017
110	3.750	7.367	-1.2155E+00	-1.3425E+02	4.2679E+00	-6.5711E+00	-1.3492E+02	6.4172E+01	01.517
111	3.750	9.130	-6.4509E-01	-9.2695E+01	3.2642E-01	-6.9691E-01	-4.2086E+01	4.6130E+01	2.043
112	3.750	10.833	2.3137E+00	-4.7024E+01	5.3577E+00	3.4626E+00	-4.7592E+01	2.5537E+01	60.554
113	3.750	12.567	-2.2153E+00	-4.9165E+01	-6.6859E-02	-2.2166E+00	-4.9165E+01	2.3475E+01	-0.816

XV (113)

114	4.250	1.300	1.0407E+01	-1.5003E+02	5.2316E+01	2.7790E+01	-1.4737E+02	8.7591E+01	103.400
115	4.250	3.033	2.7201E+01	-1.5710E+02	7.1929E+01	2.9555E+01	-1.6955E+02	9.9616E+01	63.566
116	4.250	4.767	-7.9235E+00	-1.3049E+02	1.4429E+01	-5.0612E+00	-1.3239E+02	7.3634E+01	65.041
117	4.250	6.500	9.7177E-01	-1.2370E+02	1.0020E+01	1.2776E+00	-1.2456E+02	6.6071E+01	95.476
118	4.250	8.233	1.5364E+00	-5.9217E+01	2.3620E+00	1.7547E+00	-8.0274E+01	8.5014E+01	14.407
119	4.250	9.967	-4.1955E+00	-9.0599E+01	-9.3183E-01	-4.1971E+00	-9.0555E+01	3.8092E+01	-7.006
120	4.250	11.700	-2.5192E+00	-3.5241E+01	5.9550E+00	-1.5507E+00	-3.7100E+01	1.7710E+01	69.501
121	4.750	0.433	7.7170E-01	-3.4946E+01	4.1248E+00	1.3613E+00	-3.5455E+01	1.8392E+01	60.957
122	4.750	2.167	6.0300E+00	-4.0794E+02	6.0204E+01	1.7257E+01	-3.1917E+02	1.6022E+02	105.019
123	4.750	3.900	5.9209E+00	-1.9411E+02	2.1740E+01	8.3621E+00	-1.6054E+02	9.7934E+01	64.524
124	4.750	5.633	5.5229E+00	-1.2904E+02	9.4679E+00	4.3504E+00	-1.3022E+02	6.7219E+01	82.197
125	4.750	7.367	-9.5727E-01	-1.1413E+02	3.3550E+00	-7.5336E-01	-1.1023E+02	5.6751E+01	16.957
126	4.750	9.100	-7.4591E-02	-7.3757E+01	2.1459E+00	-1.5705E-02	-7.7914E+01	3.7901E+01	16.215
127	4.750	10.833	-2.8415E+00	-3.7741E+01	-7.3541E-01	-2.9251E+00	-3.7196E+01	1.7955E+01	-12.025
128	4.750	12.567	1.5097E+01	-7.5364E+01	-3.4272E+00	1.5371E+01	-2.6806E+01	2.1339E+01	-51.060
129	5.250	1.300	-2.7509E+01	2.5122E+01	-2.5850E+01	3.5904E+01	-3.7090E+01	3.7397E+01	[illegible]
130	5.250	3.033	9.4314E+00	-3.5927E+02	-7.2748E-01	4.5446E+00	-2.3427E+02	1.2198E+02	-1.709
131	5.250	4.767	1.1700E+01	-1.3727E+02	7.9400E+00	1.2057E+01	-1.8758E+02	9.9017E+01	22.412
132	5.250	6.500	-1.1235E+00	-1.1812E+02	3.5039E+00	-1.0197E+00	-1.1027E+02	5.8932E+01	17.139
133	5.250	8.233	-3.5595E+00	-5.4073E+01	2.0578E+00	-3.3646E+00	-6.0114E+01	3.2325E+01	14.250
134	5.250	9.967	9.6115E+00	-4.5247E+01	-2.5107E+00	9.7191E+00	-6.3374E+01	3.4042E+01	-21.107
135	5.250	11.700	-1.2520E+00	-3.1357E+01	-3.4843E+00	-7.4101E-01	-3.2084E+01	1.5034E+01	-71.961
136	7.753	0.433	-2.4373E+01	-2.3593E+02	-1.0952E-01	-2.3604E+01	-2.9452E+02	9.0508E+01	-39.783
137	7.753	2.167	-1.1572E+00	-1.7231E+02	1.7193E+00	-1.1701E+00	-1.7235E+02	8.5574E+01	5.727
138	7.753	3.900	-5.5123E-01	-1.3354E+02	5.5722E-01	-5.5174E-01	-1.3354E+02	6.6312E+01	2.430
139	7.753	5.633	3.7910E+00	-8.3942E+01	6.0092E+00	4.1584E+00	-1.9033E+02	5.2224E+01	33.030
140	7.753	7.367	1.1542E+00	-1.1034E+02	1.4135E+00	1.3794E+00	-1.1001E+02	5.5495E+01	4.205
141	7.753	9.100	9.7584E-01	-4.0918E+01	8.4372E-01	9.9235E-01	-4.0626E+01	4.0757E+01	6.072
142	7.753	10.833	5.0545E+00	-3.3370E+01	3.1553E+00	3.2906E+00	-3.4600E+01	-2.1449E+01	42.275
143	7.753	12.567	9.1370E+00	-3.5390E+01	-4.9851E+00	1.0216E+01	-3.7041E+01	2.4030E+01	-79.219
144	8.243	1.300	-5.5340E+00	-1.5057E+02	4.5010E+00	-5.3115E+00	-1.9041E+02	8.0790E+01	20.363
145	8.243	3.033	3.0241E+00	-1.3400E+02	2.3433E+00	3.0655E+00	-1.4403E+02	7.3509E+01	9.128
146	8.243	4.767	2.3512E+00	-1.3877E+02	4.6777E-01	2.3527E+00	-1.3873E+02	7.8541E+01	1.479
147	8.243	6.500	1.9156E-01	-1.3016E+02	4.9286E+00	9.3732E-01	-1.0630E+02	5.3438E+01	26.070
148	8.243	8.233	9.7025E-01	-7.5796E+01	4.2895E+00	7.1626E-01	-7.5496E+01	3.8355E+01	52.062
149	8.243	9.967	-3.3190E+00	-7.0335E+01	-3.2525E-01	-3.3976E+00	-7.0304E+01	3.3625E+01	-2.771
150	8.243	11.700	-2.5065E-02	-3.3454E+01	-1.9557E+00	9.7006E-02	-3.2499E+01	1.4270E+01	-25.631
151	8.813	0.433	-3.0324E+01	-1.3113E+02	4.5952E+00	-2.3506E+01	-1.9127E+02	8.5374E+01	15.425
152	8.813	2.167	-7.9005E-01	-1.9256E+02	-1.7619E+00	-7.7296E-01	-1.8257E+02	9.6400E+01	-5.553
153	8.813	3.900	3.7571E-01	-1.3764E+02	4.4157E-01	3.7603E-01	-1.4749E+02	7.4034E+01	1.709
154	8.813	5.633	3.0130E+00	-1.1310E+02	4.7103E+00	3.1601E+00	-1.1331E+02	5.2303E+01	29.156
155	8.813	7.367	-1.0047E+00	-1.0359E+02	3.3545E+00	-5.7102E-01	-1.0370E+02	5.1903E+01	18.720
156	8.813	9.100	-4.1377E-01	-5.7567E+01	1.7451E+00	-3.4751E-01	-6.7710E+01	3.3053E+01	15.161
157	8.813	10.833	1.7136E+00	-3.3045E+01	-1.1797E+00	1.7926E+00	-3.4105E+01	1.7499E+01	-14.443
158	8.813	12.567	4.5795E+00	-2.9153E+01	-1.9078E+00	4.7103E+00	-2.8203E+01	1.6477E+01	-33.295
159	9.333	1.300	1.6117E+00	-1.3005E+02	-1.7572E+00	1.5676E+00	-1.8047E+02	9.5057E+01	-5.201
160	9.333	3.033	1.7105E+00	-1.5377E+02	-2.4435E-01	1.7114E+00	-1.5677E+02	8.6230E+01	-0.049
161	9.333	4.767	-6.9113E-01	-1.5150E+02	-3.7297E-01	-6.9021E-01	-1.5150E+02	7.5405E+01	-1.417
162	9.333	6.500	1.4853E-01	-1.1038E+02	2.5746E+00	2.3655E-01	-1.1004E+02	5.5335E+01	13.364
163	9.333	8.233	1.5053E+00	-5.7618E+01	9.5617E-01	1.5535E+00	-6.7631E+01	3.4535E+01	7.619
164	9.333	9.967	-5.0100E-01	-5.7514E+01	-9.7596E-01	-5.8427E-01	-5.7531E+01	2.8473E+01	-9.821
165	9.333	11.700	1.1301E+00	-3.1925E+01	-1.2920E+00	1.1695E+00	-3.1973E+01	1.6591E+01	-22.384

FUERZAS EN PUNTOS NODALES DE LOS SIGUIENTES ELEMENTOS

ELEMENTO	NUDO	FX	FY	M
1	2	-0.16921	-5.15754	0.00000
1	1	1.32782	12.19959	1.00000
1	17	-0.59783	9.70923	0.00000
1	18	-0.61079	-11.75119	1.00000
16	34	1.16129	-4.62221	0.00000

XVI (94)

15	53	1.16745	9.81384	1.00000
15	49	-1.97996	0.95477	0.00000
15	50	-0.54314	-9.99947	1.00000
31	82	2.94954	-5.75050	0.00000
31	81	-0.11997	0.52557	0.00000
31	47	-4.11109	5.05020	0.00000
31	99	1.75904	-2.92524	0.00000
45	114	4.93591	-5.21525	0.00000
45	113	-0.97122	-5.12344	0.00000
45	129	-4.51367	5.15024	0.00000
45	137	0.94749	1.18564	0.00000
61	165	2.55021	-7.92294	0.00000
61	157	1.57925	19.50854	1.00000
61	153	-3.52955	7.11041	0.00000
61	189	-0.71195	-12.99563	1.00000
75	200	2.02159	-7.03599	0.00000
75	199	1.55314	13.14937	1.00000
75	215	-3.47319	7.03021	0.00000
75	216	-0.30735	-15.14159	1.00000
91	19	0.11759	-9.59717	-1.00000
91	17	2.71343	5.73391	0.00000
91	33	-1.73304	9.99547	-1.00000
91	34	-1.73552	-5.73924	0.00000
105	64	0.53974	-10.03037	-1.00000
105	65	-0.91548	3.01264	0.00000
105	81	-1.31596	5.76169	0.00000
105	82	1.22575	-1.74014	0.00000
121	99	2.01769	-5.29328	0.00000
121	97	-1.07257	5.96179	0.00000
121	115	0.17122	0.00500	0.00000
121	110	-1.33549	1.31059	0.00000
135	152	0.10224	-12.95079	-1.00000
135	151	5.51156	7.75960	0.00000
135	167	-1.20416	15.78495	-1.00000
135	169	-2.52949	-5.59100	0.00000
151	150	1.11969	-15.97911	-1.00000
151	183	2.35023	5.91439	0.00000
151	149	-1.67210	15.50730	-1.00000
151	200	-1.49301	-5.22658	0.00000

TIEMPO DE EJECUCION = 135.8500 SEG
TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA = 23.3333 SEG

TIEMPO DE EJECUCION = 136.4333 SEG
TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA = 24.5000 SEG

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

INSTRUCTIVO PARA EL USO DEL PROGRAMA DE ANALISIS DE EDIFICIOS CON MUROS DE CORTE

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

MAYO, 1984

INSTRUCTIVO DEL PROGRAMA PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS MURO-MARCO

Se describe cómo se preparan los datos que servirán para el análisis de estructuras muro-marco mediante el programa de computadora mostrado en el apéndice A. La alimentación del programa se hará por tarjetas perforadas.

A. Datos generales del paquete de problemas

1. Tarjeta título (13A6). De la columna 1 a la 78 se perfora cualquier información alfanumérica que identifique al paquete de problemas que se van a procesar en una corrida.

2. Tarjeta de problemas (I5). Se perfora en las columnas 1 a 5, el número de estructuras que se desea analizar en una corrida

31 - 35	No. de nudos restringidos con desplazamientos prescritos no nulos.
36 - 40	No. de nudos restringidos con desplazamientos prescritos nulos.
41 - 45	No. de condiciones de carga
46 - 50	Indicador de rigideces de entrepiso. Se perforan los valores siguientes según el caso. -1 se requiere únicamente el cálculo de rigideces de entrepiso 0 se requiere el cálculo de rigideces de entrepiso y el análisis ante cargas externas. 1 no se requiere el cálculo de rigideces de entrepiso.

5. Tarjetas de materiales (I5,3F10.0)

Habrá tantas tarjetas como tipos de material se especificaron en la instrucción 4. En cada tarjeta se perforará la siguiente información.

Columnas

1 - 5	identificador del material
6 - 15	módulo de Young (ton/m^2)
16 - 25	coeficiente de Poisson
16 - 35	peso volumétrico (ton/m^3)

6. Tarjetas de secciones transversales (2I5,6F10.0)

Para identificar la sección utilizada en cada barra, se asigna a ésta un número entero empezando por uno, el que se denomina identificador de la sección y habrá tantas tarjetas como tipos

2. Tarjeta de problemas (I5). Se perfora en las columnas 1 a 5, el número de estructuras que se desea analizar en una corrida del programa.

B. Tarjetas que definen a una estructura

El paquete de tarjetas para cada problema queda determinado por las instrucciones 3 a 30. Se repetirán tantas veces como el número de problemas especificado en la instrucción 2.

B.1 Tarjetas de Geometría y materiales

3. Tarjeta título (13A6). De las columnas 1 a 78 se perfora cualquier información alfanumérica que identifique a la estructura que se esté analizando.

4. Tarjeta de control (10I5)

Contiene la siguiente información del muro-marco.

Columnas	
1 - 5	No. de barras
6 - 10	No. de elementos finitos rectangulares
11 - 15	No. de materiales diferentes
16 - 20	No. de nudos, incluyendo los apoyos
21 - 25	No. de tipos de secciones transversales
26 - 30	No. asignado al primer punto frontera. Cuando los nudos con desplazamientos prescritos nulos no intervienen en las ecuaciones de equilibrio, se deben de numerar al final y habrá que indicar cual es el primero. Cuando no se presenta este caso, se deja en blanco.

de sección se especifiquen en la instrucción 4.

En cada tarjeta se perforará la siguiente información

Columnas

1 - 5	identificador de la sección
6 - 10	indicador del tipo de sección. El valor perforado dependerá del siguiente catálogo de secciones transversales.

0 especial
1 rectangular
2 T
3 I
4 Canal
5 ángulo
6 circular
7 cajón
8 circular hueca
9 cruz
10 zeta
11 H

La información que se debe continuar perforando en la tarjeta dependerá del tipo de sección según se indica a continuación:

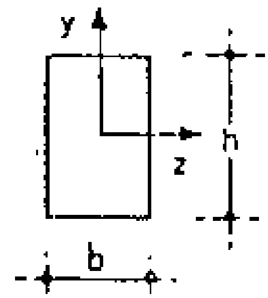
a) Sección especial. Inicador del tipo de sección = 0

Columnas

11 - 20	A área transversal (cm^2)
21 - 30	IZ momento de inercia respecto al eje z (cm^4)

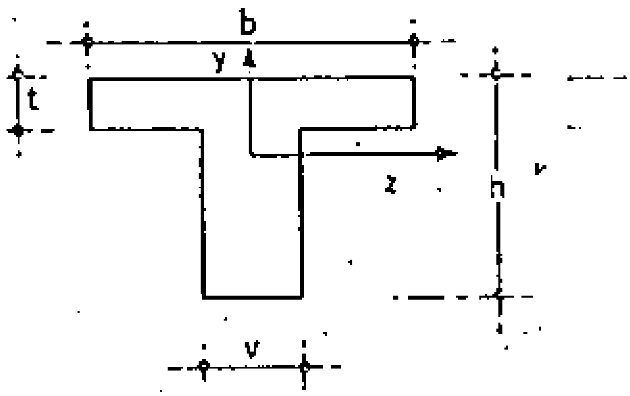
31 - 40	FY Factor de forma para la dirección y

b) Sección rectangular. Indicador del sección = 1



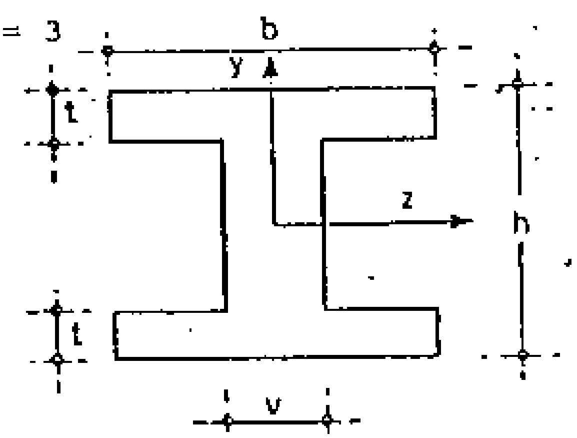
Columnas	
11 - 20	b(cm)
21 - 30	h(cm)

c) Sección T. Indicador del tipo de sección = 2



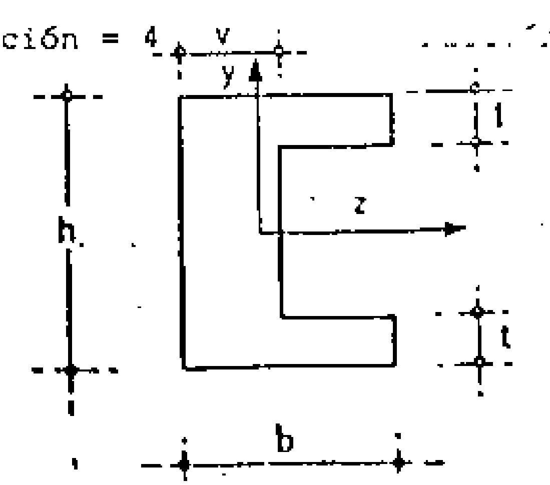
Columnas	
11 - 20	b(cm)
21 - 40	h(cm)
31 - 40	v(cm)
41 - 50	t(cm)

d) Sección I. Indicador del tipo de sección = 3



Columnas	
11 - 20	b(cm)
21 - 30	h(cm)
31 - 40	v(cm)
41 - 50	t(cm)

e) Sección Canal. Indicador del tipo de sección = 4



Columnas

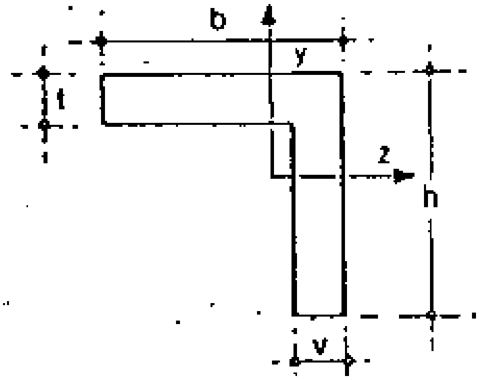
11 - 20 b(cm)

21 - 30 h(cm)

31 - 40 v(cm)

41 - 50 t(cm)

f) Sección ángulo. Indicador del tipo de sección = 5



Columnas

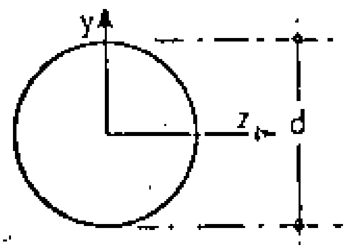
11 - 20 b(cm)

21 - 40 h(cm)

31 - 40 v(cm)

41 - 50 t(cm)

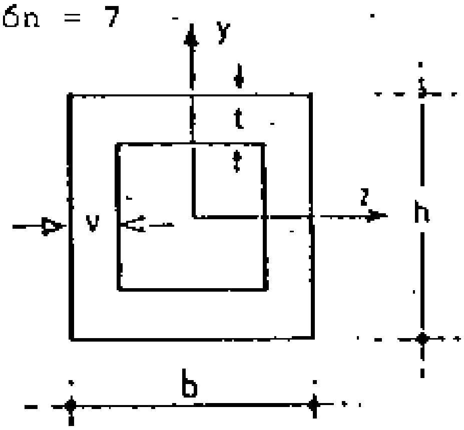
g) Sección circular. Indicador del tipo de sección = 6



Columnas

11 - 20 d(Cm)

h) Sección cajón. Indicador del tipo de sección = 7



Columnas

11 - 20 b(cm)

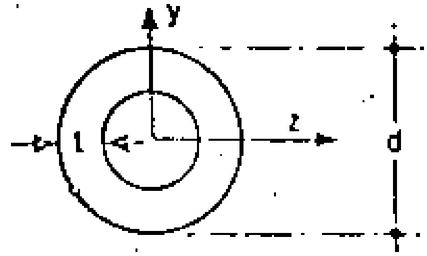
21 - 30 h(cm)

31 - 40 v(cm)

41 - 50 t(cm)

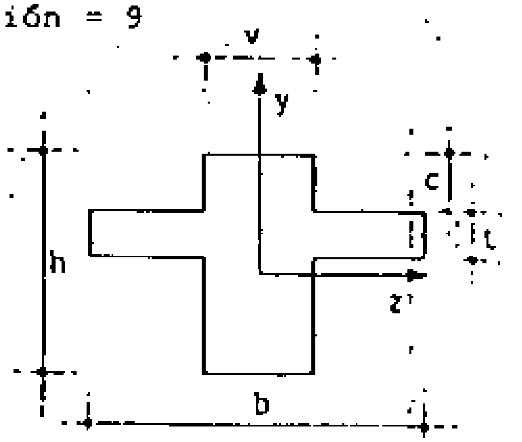
i) Sección circular hueca. Indicador del tipo de sección = 8

Columnas	
11 - 20	d (cm)
21 - 30	t (cm)



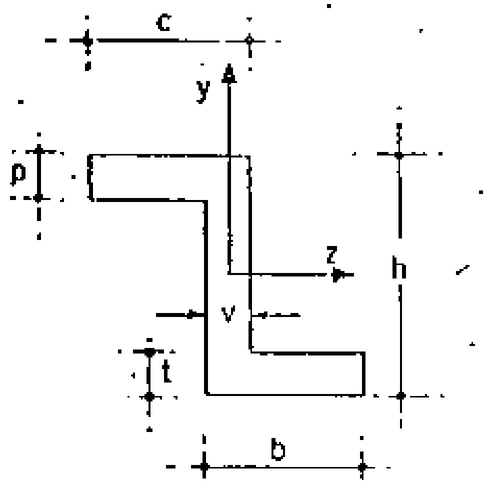
j) Sección cruz. Indicador del tipo de sección = 9

Columnas	
11 - 20	b (cm)
21 - 30	h (cm)
31 - 40	v (cm)
41 - 50	t (cm)
51 - 60	c (cm)

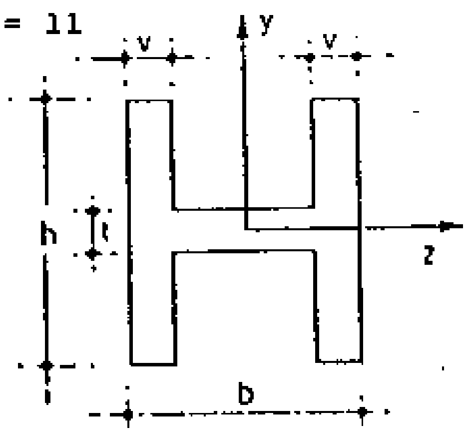


k) Sección Zeta. Indicador del tipo de sección = 10

Columnas	
11 - 20	b (cm)
21 - 30	h (cm)
31 - 40	v (cm)
41 - 50	t (cm)
51 - 60	c (cm)
61 - 70	p (cm)



l) Sección H. Indicador del tipo de sección = 11



Columnas

11 - 20	b(cm)
21 - 30	h(cm)
31 - 40	v(cm)
41 - 50	t(cm)

7. Tarjetas de coordenadas para los puntos nodales (I5,2F10.0,2I5)
Contienen las coordenadas de cada punto nodal referidas a un sistema cartesiano global. Las unidades son metros, y en general se requiere una tarjeta para cada punto nodal. El orden debe ser secuencial

Columnas

1 - 5	No. del punto nodal.
6 - 15	abscisa (m)
16 - 25	ordenada (m)

Existe la alternativa de generar ciertas coordenadas, a partir de los datos del primero y último punto de un grupo que cumpla con las condiciones siguientes:

i) Los puntos de este grupo son equidistantes y están sobre una recta.

ii) La numeración de los puntos nodales debe ser secuencial, o bien que la diferencia entre nudos sucesivos sea constante.

En caso de utilizarse la opción de generación con numeración secuencial, se deberá perforar un uno en la tarjeta de coordenadas del último punto, en el campo comprendido entre 26 - 30.

En caso de utilizarse la opción de generación con numeración no secuencial se deberá indicar la diferencia constante en las tarjetas de los dos puntos nodales extremos, como sigue:

i) En la tarjeta del nudo inicial, entre las columnas 31 - 35

ii) En la tarjeta del nudo final, entre las columnas 26 - 30.

N o t a : La tarjeta de cualquier punto nodal que no se genere y que no sea secuencial al de la tarjeta anterior, se le deberá perforar un uno entre las columnas 31 - 35

8. Tarjetas de barras (I5)

Este grupo de tarjetas está condicionado a que el número de barras que forman el muro-marco, especificado en la instrucción 4, sea distinto de cero. En caso de ser nulo, se deberá continuar con la instrucción 9.

Se requiere una tarjeta para cada barra y deberán darse en riguroso orden secuencial. Se perfora la información siguiente:

Columnas	
1 - 5	No. de la barra
6 - 10	No. del nudo I
11 - 15	No. del nudo J I es el nudo inicial y J es el nudo final de la barra; ambos tomarán los valores asignados en la numeración de los nudos de la estructura.
16 - 20	Indicador del tipo de material. Tomará el valor correspondiente entre los identificadores utilizados en la instrucción 5. En el caso del material No. 1, el espacio se deja en blanco.
21 - 25	Indice del identificador del tipo de

sección. Tomará el valor correspondiente entre los identificadores descritos en la instrucción 6.

26 - 30 indicador del tipo de apoyo en el nudo I

31 - 35 indicador del tipo de apoyo en el nudo J

El valor de los indicadores del tipo de apoyo toma los valores siguientes:

0 tipo de apoyo continuo

1 tipo de apoyo articulado

36 - 40 Indice de generación. Este dato está condicionado al empleo de la opción de generación descrita a continuación. En caso contrario se deja en blanco.

La opción de generación se puede utilizar si un grupo de barras numeradas secuencialmente cumple las condiciones siguientes

i) La numeración de los puntos nodales I y J de cada barra debe ser tal que, para dos secesivas cualesquiera n y n+1, se satisfaga lo siguiente:

$I_{n+1}-I_n$ = Constante, igual para todas las barras

$J_{n+1}-J_n$ = Constante, igual para todas las barras

ii) Estan construídas con el mismo material..

iii) Tener la misma geometría y referencia local.

iv) Los tipos de apoyo correspondientes deben ser iguales.

Los datos de grupos de barras que satisfagan las cuatro condiciones anteriores queda definido por dos tarjetas que corresponderán a las barras inicial y final del grupo.

N O T A : El índice de generación también vale la unidad cuando no se utiliza la opción de generación, si la barra en cuestión satisface las condiciones ii, iii y iv, respecto a la barra que le antecede.

B.2 Tarjetas de los elementos finitos rectangulares.

El paquete de tarjetas queforman las instrucciones 9 a 11 están condicionadas a que el número de cuadrados de la instrucción 4, sea distinto de cero. En caso de ser igual a cero se pasa a la instrucción 12.

9. Tarjeta de ángulo de la fuerza de gravedad y espesor (2F10.0)

Columnas

1 - 10	Angulo ertre la fuerza de gravedad y el eje X global, en grados.
11 - 20	Espesor dominante de los cuadrados que forman el muro, en metros

10. Tarjetas de tipos de elementos finitos (80I1)

En cada tarjeta se perforan hasta ochenta valores de los índices de los tipos de elementos (Tipo 1, y Tipo 2; fig 2.3.3) y el ordenamiento deberá ser secuencial. Estos índices toman los valores siguientes:

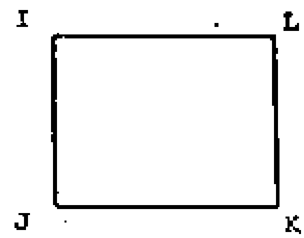
0 Elemento tipo 1

1 Elemento tipo 2

11. Tarjetas de elementos finitos rectangulares

Se requiere una tarjeta por cada cuadrado y deberán darse en riguroso orden secuencial. Se perfora la información siguiente;

Columnas	
1 - 5	No. del elemento finito
6 - 10	Punto nodal I
11 - 15	Punto nodal J
16 - 20	Punto nodal K
21 - 25	Punto nodal L
	La numeración I, J, K, L asignada a los nudos del elemento finito se debe proporcionar en sentido contrario a las manecillas del reloj, para un sistema derecho y empezando siempre por I.
26 - 30	Indicador del tipo de material. Tomará el valor correspondiente entre los identificadores utilizados en la instrucción 5. En el caso del material Nº 1, el espacio se deja en blanco.
31 - 40	Espesor del elemento (m) Este valor se puede omitir cuando el elemento tenga el espesor dominante proporcionado en la instrucción 9.
41 - 45	Indice de generación. Este dato está condicionado al empleo de la opción de generación descrita a continuación. En caso contrario se deja en blanco.



La opción de generación se puede utilizar si un grupo de cuadrados numerados secuencialmente cumple las condicioens siguientes

i) La numeración de los puntos nodales I, J, K y L de cada cuadrado debe ser tal que, para dos sucesivos cualesquiera n y n+1, se satisfaga lo siguiente:

$I_{n+1}-I_n$ = Constante, igual para todos los elementos

$J_{n+1}-J_n$ = Constante, igual para todos los elementos

$K_{n+1}-K_n$ = Constante, igual para todos los elementos

$L_{n+1}-L_n$ = Constante, igual para todos los elementos

ii) Estan construidas con el mismo material.

iii) Tener la misma geometría y referencia local.

iv) Ser del mismo tipo de elemento finito.

Los datos de grupos de elementos que satisfagan las cuatro condiciones anteriores queda definido por dos tarjetas que corresponderán a los elementos inicial y final del grupo.

El índice de generación vale la unidad y se perfora únicamente en la segunda tarjeta del grupo.

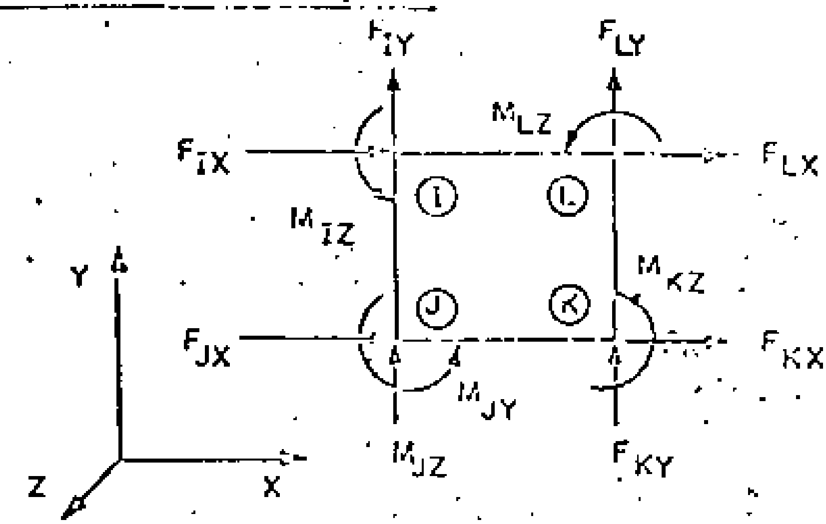
N O T A : El índice de generación también vale la unidad cuando no se utiliza la opción de generación, si el elemento en cuestión satisface las condiciones ii, iii y iv, respecto al elemento que le antecede.

La información que se debe continuar perforando en la tarjeta se indica a continuación:

Columnas	
46 - 50	Indicador de fuerzas equilibrantes 0 no se requiere las fuerzas equilibrantes 1 se requiere calcular las fuerzas equilibrantes, que estarían actuando sobre el elemento según se in-

dica en la figura.

Sistema de referencia global



B3. Tarjetas de condiciones de frontera

Las condiciones de frontera consideradas son las de desplazamientos prescritos para puntos nodales. Estos desplazamientos pueden ser nulos o no, y para un punto nodal, pueden restringirse todos ó alguno de los tres componentes.

La presencia del grupo de tarjetas de las instrucciones 12 y 13, está condicionado a que el número de nudos restringidos con desplazamientos prescritos no nulos, especificado en la instrucción 4, sea distinto de cero. En caso de ser nulo, se deberá continuar con la instrucción 14.

12. Tarjetas de nudos con desplazamientos prescritos no nulos (10(I5,3I1))

Se perforan hasta diez grupos de valores que definen al punto nodal y el tipo de restricción. Cada grupo esta formado de cuatro valores descritos a continuación:

i) El primero correspond e al número del punto nodal restringido.

ii) El segundo corresponde al indicador de restricción del com ponente de desplazamiento lineal, paralelo al eje x global.

iii) El tercero corresponde al indicador de restricción del componente de desplazamiento lineal, paralelo al eje y global.

iv) El cuarto corresponde al indicador de restricción del componente de desplazamiento angular, respecto al eje z global

El valor del indicador de restricción será la unidad si el grado de libertad está restringido. En caso contrario no se perfora.

13. Tarjetas con desplazamientos prescritos (I5,3F10.0,2I5)

En este grupo de tarjetas se perforan los valores de los componentes de desplazamientos prescritos no nulos de los puntos nodales indicados en la instrucción 12. Cada tarjeta debe contener los datos correspondientes a un punto nodal. El número de tarjetas será igual al número de desplazamientos prescritos no nulso indicado en la instrucción 4; salvo que se utilice la opción de generación que se describirá después. El orden de este grupo de tarjetas debe coincidir con el orden utilizado en la instrucción 12.

Columnas

1 - 5	No. del nudo restringido
6 - 15	Valor del componente de desplazamiento lineal, paralelo al eje x global, en metros.
16 - 25	Valor del componente de desplazamiento lineal, paralelo al eje y global, en metros.
26 - 35	Valor del componente de desplazamiento angular, respecto al eje z global, en radianes.

El signo de los valores de lso componentes de desplazamiento lineales, serán positivos si coinciden con la dirección positiva de lso ejes x y y globales. El signo del componente de desplazamiento angular será positivo, si un tornillo de rosca derecha que siga a tal desplazamiento, avanza en la dirección positiva del eje z global. El sistema de referencia global es ortogonal derecho.

La opción de generación se aplica a un grupo de puntos nodales con desplazamientos prescritos que satisfagan las condiciones siguientes:

i) Los componentes de desplazamientos prescritos correspondientes son iguales.

ii) La numeración entre dos puntos nodales sucesivos cualesquiera deberá ser tal, que su diferencia sea la misma.

El grupo de puntos nodales con desplazamientos prescritos que satisfagan las dos condiciones anteriores, se puede especificar con una sola tarjeta, al adicionar las perforaciones siguientes:

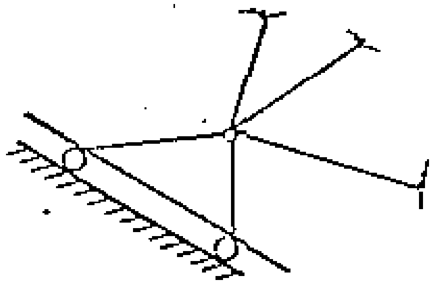
Columnas	
36 - 40	No. de nudos adicionales que poseen los mismos componentes de desplazamiento
41 - 45	Diferencia entre dos puntos nodales sucesivos.

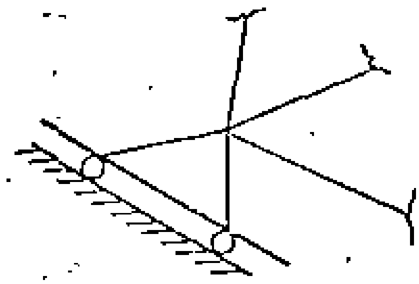
14. Turjetas de nudos con desplazamientos prescritos nulos (10(I5,3I1))

Este grupo de tarjetas está condicionado a que el número de nudos restringidos con desplazamientos prescritos nulos, especificado en la instrucción 4, sea distinto de cero. En caso de ser nulo, se deberá continuar con la instrucción 15.

Los datos de perforan exactamente igual a como se hacen en la instrucción 12.

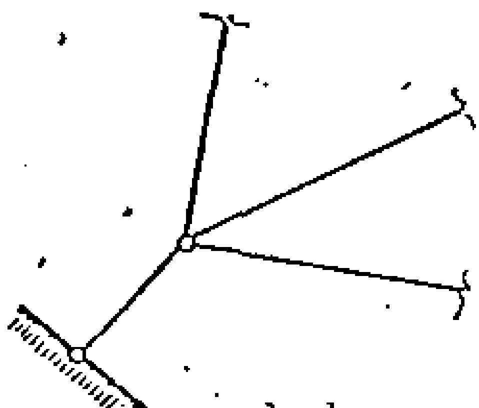
En ocasiones se presentan puntos nodales con condiciones de desplazamientos como las mostradas en las figuras a y b.





a) Extremos articulados b) Extremos continuos

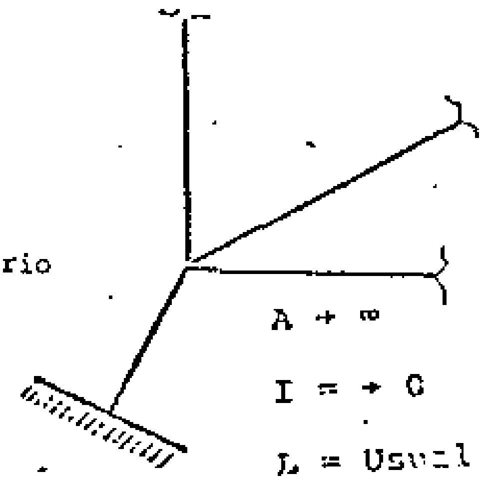
Es costumbre reemplazar estos casos por una barra orientada en la misma dirección en que se restringe el movimiento, de longitud usual y una área de la sección transversal muy grande ($A \to \infty$). Las condiciones de frontera y el momento de inercia de la sección transversal se especifican en las figs c y d:



$A \to \infty$

I = Arbitrario

L = Usual



donde

A área de la sección tranversal

I momento de inercia de la sección transversal

L longitud de la barra

c) Apoyo idealizado para la fig a

d) Apoyo idealizado para la fig b

E4. Tarjetas para el cálculo de rigideces de entrepiso.

El paquete de tarjetas que forman las instrucciones 15 a 21 están condicionadas a que el indicador de rigideces de entrepiso, de la instrucción 4, sea distinto de +1. En caso de ser igual a +1, se pasa a la instrucción 22.

15. Tarjeta título (13A6)

De las columnas 1 a 78 se perforan caracteres alfanuméricos para indicar el cálculo de rigideces de entrepiso.

16. Tarejtas de control (2I5)

Contiene:

Columnas	
1 - 5	No. de niveles de la estructura
6 - 10	No. máximo de puntos nodales por nivel
11 - 15	No. total de rigideces de entrepiso de la estructura, cuando la estructura es uniforme, coincide con el número de niveles y se deberá dejar en blanco
16 - 20	No. máximo de barras que forman parte de alguna de las rigideces de entrepiso, cuando la estructura es uniforme, se deja en blanco

17 Tarjetas de puntos nodales por nivel (16I5)

En cada tarjeta se perforan hasta 16 elementos del arreglo formado por el número de puntos nodales por nivel. El número de elementos de este arreglo será igual al número de niveles de la estructura definido en la instrucción 16. El primer elemento corresponderá al número de puntos nodales del primer nivel.

18. Tarjetas con la numeración de los nudos por nivel (16I5)

El número de grupos que definen a este paquete de tarejtas es igual al número de niveles de la estructura definido en la instrucción 16.

El ordenamiento y el número de elementos de cada grupo es el indicado en la instrucción 17.

En cada tarjeta se perforan hasta 16 elementos y habrá tantas tarjetas por grupo como elementos posea.

19. Tarjetas de alturas de entrepiso (8F10.0)

En cada tarjeta se perforan hasta ocho valores del arreglo formado con las alturas de los niveles, en metros. El ordenamiento de este grupo deberá corresponder al indicado en la instrucción 17.

20. Tarjetas de pesos por nivel (8F10.0)

En cada tarjeta se perforan hasta ocho valores del arreglo formado con los pesos de los niveles de la estructura. Los pesos se especifican en toneladas y el ordenamiento de este grupo deberá corresponder al indicado en la instrucción 17.

21. Tarjeta de coeficiente sísmico (F10.0)

El valor perforado en esta tarjeta deberá corresponder al utilizado en el análisis sísmico estático de la estructura de la que forma parte el marco.

Columnas

1 - 10	coeficiente sísmico

B3.1 Datos para muro marcos irregulares únicamente

Los datos de las instrucciones 22 a 23 están condicionados al caso en que el número de rigideces de entrepiso de la estructura sea mayor que el número de niveles, de no cumplirse esta condición se pasa a la instrucción 24

22 Tarjetas para especificar el número de rigideces de entrepiso que salen de cada nivel (16I5)

En cada tarjeta se pueden perforar hasta 16 valores para indicar el número de rigideces que salen de cada nivel se especificarán a partir del primer nivel y el sentido de salida corresponderá hacia niveles inferiores.

23 Tarjetas de barras por rigidez de entrepiso y niveles de llegada (16I5)

En cada tarjeta se pueden perforar hasta 8 parejas de valores correspondientes a los conceptos siguientes

a) El primer valor corresponde al número de barras que forman la rigidez en cuestión

b) El segundo valor corresponde al nivel de llegada de la rigidez en cuestión

El orden deberá ser secuencial, empezando por el primer entrepiso, se entenderá por nivel de llegada al número del nivel donde terminan las barras que forman la rigidez en cuestión

24 Tarjetas de identificación de barras y sus niveles extremos que definen las rigideces de entrepiso (5(3I5))

En cada tarjeta se pueden perforar hasta 5 tercias de valores, a cada barra le corresponde una tercia y a cada rigidez de entrepiso le corresponde un grupo de tarjetas definido por el número de barras especificado en la instrucción 23. El número de grupos de tarjetas está definido por el número de rigideces de entrepiso de la estructura, la tercia de valores corresponderá a los conceptos siguientes

a) El primero corresponde al número de la barra

b) El segundo corresponde al número del punto nodal localizado en el nivel de salida de la rigidez.

c) El tercero corresponde al número del punto nodal localizado en el nivel de llegada de la rigidez.

El orden deberá ser secuencial empezando por la primer rigidez de entrepiso

B5. Tarjetas para cada condición de carga

El paquete de tarjetas formado con las instrucciones 25 a 30, está condicionado a que el valor del indicador de rigideces de entrepiso de la instrucción 4, sea distinto de -1. En caso de ser igual a -1, se pasa a la instrucción 31.

Este paquete de tarjetas se deberá repetir tantas veces como se indica en el número de condiciones de carga de la instrucción 4.

25. Tarjeta título (13A6)

De las columnas 1 a 78 se perfora un encabezado para indicar la condición de carga considerada.

26. Tarjeta de control (3I5)

Columnas

1 - 5	No. de barras cargadas
6 - 10	No. de nudos cargados
11 - 15	indicador de fuerzas de cuerpo
	0 si se consideran
	1 no se consideran

B6. Tarjetas de cargas en barras

El paquete de tarjetas formado con las instrucciones 27 a 29 está condicionado a que el número de barras cargadas de la instrucción 26, sea diferente de cero. En caso de ser igual a cero, se pasa a la instrucción 30.

27. Tarjetas de barras cargadas (16(I4,I1) .

En cada tarjeta se perforan hasta 16 elementos del arreglo con las características siguientes:

i) El primer término del elemtno lo forma el número de la barra cargada.

ii) El segundo término del elemento lo constituye un indicador de graficación de los elementos mecánicos de la barra. Este indicador vale la unidad si se requiere la graficación, y se dejará en blanco, en caso contrario. El número de elementos de este grupo, quedó definido por el número de barras cargadas de la instrucción 26.

El ordenamiento de los elementos de este grupo deberá ser monotónico creciente.

El paquete formado por las instrucciones 28 y 29 se deberá repetir tantas veces como lo indica el número de barras cargadas de la instrucción 26, excepto que se desee utilizar la opción de generación descrita más adelante. El ordenamiento de este paquete está controlado por la instrucción 27.

28. Tarjeta de control de cargas intermedias (2I5)

Contiene la siguiente información:

Columnas

1 - 5	No. de cargas intermedias que actúan sobre la barra
6 - 10	Indicador de generación de cargas. El indicador de generación de cargas representa la opción de generación de cargas y adquiere valor cuando un grupo de barras cargadas posee las características siguientes.

i) Las cargas actuantes son iguales

ii) La geometría y la referencia local son las mismas

iii) Las condiciones de frontera de los puntos nodales correspondientes son iguales

iv) La numeración de las barras debe ser monotónica creciente.

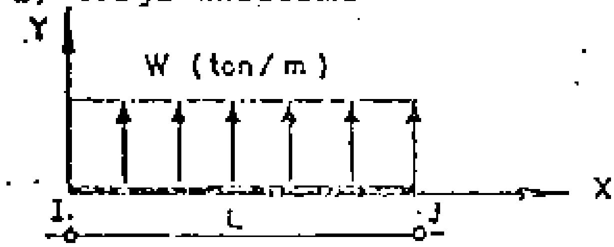
Cuando un grupo de barras posee las cuatro características anteriores, sus condiciones de carga se podrán establecer con los datos para una sola barra, al asignarle al indicador de generación de cargas, el número de barras restantes con dicha carga.

29. Tarjetas de tipos de cargas intermedias (I5,3F10.2)

El número de tarjetas de este grupo, es igual al número de cargas intermedias que actúan en la barra de la instrucción 28. La información perforada en cada tarjeta depende del tipo de carga actuante y corresponderá al catálogo siguiente:

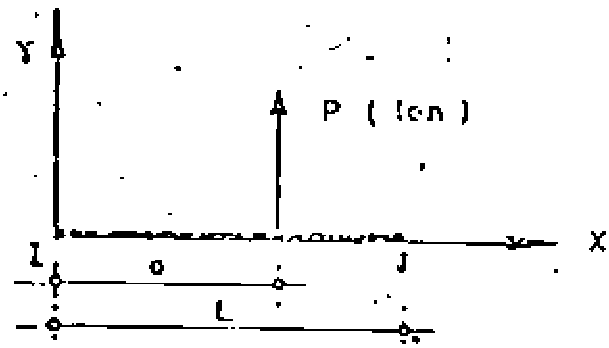
i) Carga uniforme

Columnas	
1 - 5	1
6 - 15	W(ton/m)



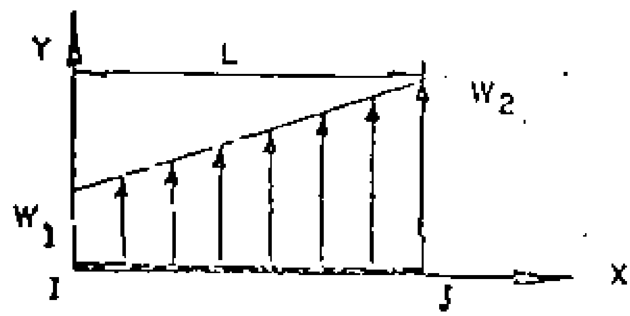
ii) Fuerza concentrada

Columnas	
1 - 5	2
6 - 15	P(ton)
16 - 25	a(m)



iii) Carga distribuída lineal

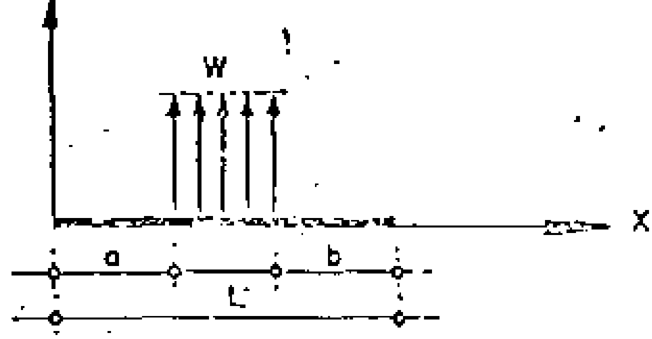
Columnas	
1 - 5	3
6 - 15	W_1(ton/m)
16 - 25	W_2(ton/m)



iv) Carga uniforme dis-
continua

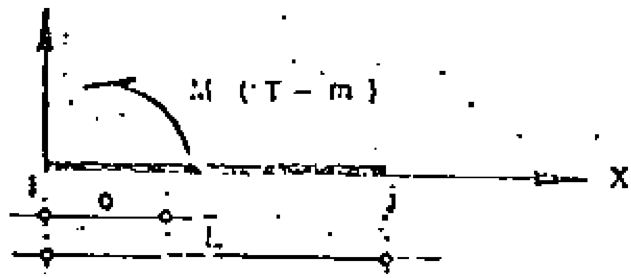
Columnas	
1 - 5	4
6 - 15	W(ton/m)
16 - 25	a(m)
26 - 35	b(m)

iv) Carga uniforme discontinua



v) Par concentrado

Columnas	
1 - 5	5
6 - 15	M(ton-m)
16 - 25	a(m)



Las cargas intermedias del catálogo anterior están referidas al sistema de referencia local de la barra; y la convención de signos es la indicada en las figuras.

37. Tarjetas de cargas en nudos

El paquete de tarjetas de la instrucción 30 está condiconado a que el número de nudos cargados de la instrucción 26, sea diferente de cero. En caso de ser igual a cero, se pasa a la instrucción 31.

30. Tarjetas de carga en nudos (I5,3F10.0,2I5)

En este grupo de tarjetas se perforan los valores de los componentes de las cargas concentradas en los puntos nodales de la estructura.

Cada tarjeta debe contener los datos correspondientes a un punto nodal. El número de tarjetas será igual al número de nudos cargados indicado en la instrucción 26; salvo que se utilice la opción de generación que se describirá después.

Columnas

1 - 5	No. del nudo cargado
6 - 15	Valor de la fuerza paralela al eje x global, en ton.
16 - 25	Valor de la fuerza paralela al eje y global, en ton.
26 - 35	Valor del par respecto al eje z global, en ton-m.

El signo de los valores de las fuerzas serán positivas, si coinciden con la dirección positiva de los ejes X y Y globales. El signo del par será positivo, si al hacer girar un tornillo de rosca derecha, avanza en la dirección positiva del eje z global.

La opción de generación se aplica a un grupo de punto nodales cargados, que satisfagan las condiciones siguientes:

i) Las cargas correspondientes son iguales

ii) La numeración entre dos puntos nodales sucesivos cualesquiera, deberá ser tal que su diferencia sea la misma.

El grupo de puntos nodales cargados que satisfagan las dos condiciones anteriores, se puede especificar con una sola tarjeta, al adicionar las perforaciones siguientes:

Columnas

36 - 40	No. de nudos adicionales que posean igual carga
41 - 45	Diferencia entre dos puntos nodales sucesivos.

C. Determinación del número de tarjetas por corrida.

31. Terminación de tarjetas.

El paquete total de tarjetas para una corrida quedará completo cuando se hayan especificado las tarjetas correspondientes a las instrucciones 3 a 30, tantas veces como se haya prescrito en la instrucción 2.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

METODO DE FLEXIBILIDADES

CALCULO DE UN SISTEMA HIPERESTATICO DE ORDEN

CINCO POR EL METODO DE ELIMINACION DE GAUSS

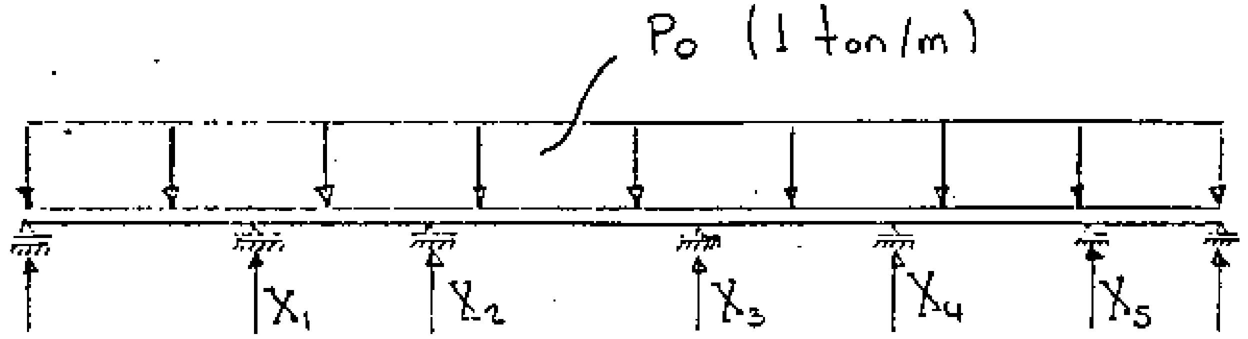
M. EN I. M.A. BRAVO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

MAYO, 1984.

APLICACION DEL METODO DE FLEXIBILIDADES

Considérese la viga continua de 7 apoyos y con carga lineal uniformemente distribuida mostrada en la figura



La estructura es hiperestática de orden cinco, por lo que se seleccionan las redundantes $X_1, X_2, \ldots, X_5$.

La deflexión total del punto i debida a todas las cargas y efectos puede escribirse como

$$\Delta_i = \Delta_{io} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j \qquad ; i, j = 1, \ldots, 5$$

donde Δ_i = deflexión total del punto i ; Δ_{io} = deflexión del punto i en dirección de la redundante X_i en condiciones de equilibrio estable isostático $X_i = 0$; δ_{ij} = deflexión en el punto i debida a la condición $X_j = 1$.

Expandiendo la fórmula anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \bar{X}_1 \delta_{11} + \bar{X}_2 \delta_{12} + \bar{X}_3 \delta_{13} + \bar{X}_4 \delta_{14} + \bar{X}_5 \delta_{15}$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + \bar{X}_1 \delta_{21} + \bar{X}_2 \delta_{22} + \bar{X}_3 \delta_{23} + \bar{X}_4 \delta_{24} + \bar{X}_5 \delta_{25}$$

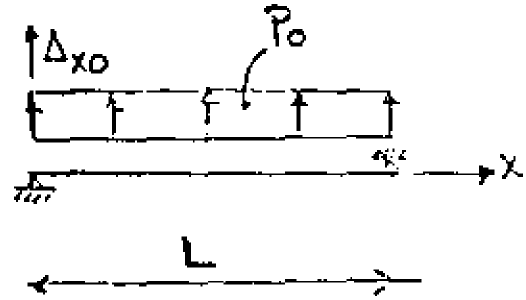
$$\Delta_3 = \Delta_{30} + \bar{X}_1 \delta_{31} + \bar{X}_2 \delta_{32} + \bar{X}_3 \delta_{33} + \bar{X}_4 \delta_{34} + \bar{X}_5 \delta_{35}$$

$$\Delta_4 = \Delta_{40} + \bar{X}_1 \delta_{41} + \bar{X}_2 \delta_{42} + \bar{X}_3 \delta_{43} + \bar{X}_4 \delta_{44} + \bar{X}_5 \delta_{45}$$

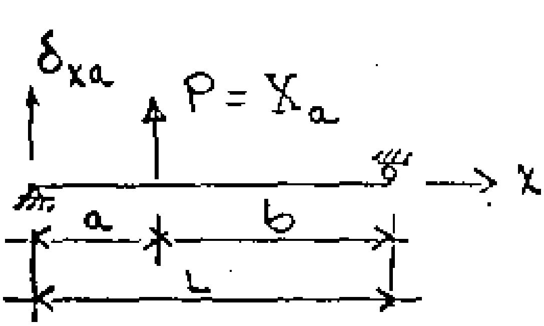
$$\Delta_5 = \Delta_{50} + \bar{X}_1 \delta_{51} + \bar{X}_2 \delta_{52} + \bar{X}_3 \delta_{53} + \bar{X}_4 \delta_{54} + \bar{X}_5 \delta_{55}$$

Se sabe además, del teorema de Castigliano y la energía elástica de deformación que $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Recordando, por otra parte, de resistencia de materiales



$$\Delta_{xo} = \frac{P_o x}{24EI}\left[L^3 - 2Lx^2 + x^3\right], \quad 0 \le x \le L$$



$$\delta_{xa} = \frac{Pb}{6EIL}\left[(L^2 - b^2)x - x^3\right], \quad 0 \le x \le a$$

$$\delta_{xa} = \frac{Pa}{6EIL}\left[(L^2 - a^2)(L - x) - (L - x)^3\right], \quad a \le x \le L$$

Se obtienen así los valores del vector de fuerzas de la condicion $X_i = 0$ y de los coeficientes de flexibilidad δ_{ij}

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \\ \Delta_{40} \\ \Delta_{50} \end{Bmatrix} = \frac{-1}{24EI} \begin{Bmatrix} 360\ 427. \\ 574\ 925. \\ 642\ 957. \\ 482\ 720. \\ 214\ 880. \end{Bmatrix}$$

$\delta_{11} = \dfrac{2478.37}{6EI}$, $\delta_{12} = \dfrac{3546.05}{6EI}$, $\delta_{13} = \dfrac{3463.53}{6EI}$

$\delta_{14} = \dfrac{2385.53}{6EI}$, $\delta_{15} = \dfrac{1016.11}{6EI}$, $\delta_{22} = \dfrac{5559.21}{6EI}$

$\delta_{23} = \dfrac{5734.37}{6EI}$, $\delta_{24} = \dfrac{4019.74}{6EI}$, $\delta_{25} = \dfrac{1722.84}{6EI}$

$\delta_{33} = \dfrac{6707.94}{6EI}$, $\delta_{34} = \dfrac{4990.26}{6EI}$, $\delta_{35} = \dfrac{2181.79}{6EI}$

$\delta_{44} = \dfrac{4126.32}{6EI}$, $\delta_{45} = \dfrac{1898.11}{6EI}$, $\delta_{55} = \dfrac{973.47}{6EI}$

El sistema de ecuaciones lineales simultáneas que resulta

$$\left[\delta_{ij} \right] \left\{ X_j \right\} = - \left\{ \Delta_{i0} \right\}$$

se resolverá utilizando el método de eliminación de Gauss.

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES SIMULTANEAS

En forma general, existen dos tipos de técnicas numéricas para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas: técnicas directas e iterativas.

La principal diferencia entre ambas es que las técnicas directas requieren de un número finito de operaciones aritméticas para producir una solución exacta (sin considerar los errores por redondeo), mientras que las técnicas iterativas requieren teóricamente de un número infinito de operaciones, lo que conduce a un error por truncamiento en la solución práctica.

La técnica directa más sencilla es el método de eliminación de Gauss que consiste en que un conjunto de n ecuaciones con n incógnitas se reduce a un sistema triangular equivalente, que a su vez se resuelve por sustitución hacia atrás.

METODO DE ELIMINACION DE GAUSS

Con objeto de ilustrar el método, se considerará primeramente el caso de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = b_1 \qquad (1)$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = b_2 \qquad (2)$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = b_3 \qquad (3)$$

Defínase ahora

$$m_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Multiplicando la ec 1 por m_2 y restándola de la ec 2, se tiene

$$(a_{21} - m_2 a_{11}) X_1 + (a_{22} - m_2 a_{12}) X_2 + (a_{23} - m_2 a_{13}) X_3 = b_2 - m_2 b_1$$

y como

$$a_{21} - m_2 a_{11} = 0$$

se ha eliminado X_1 de la ec 2; así, el sistema queda

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = b_1 \qquad (4)$$

$$a'_{22} X_2 + a'_{23} X_3 = b'_2 \qquad (5)$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{23} X_3 = b_3 \qquad (6)$$

donde

$$a'_{22} = a_{22} - m_2\, a_{12}$$

$$a'_{23} = a_{23} - m_2\, a_{13}$$

$$b'_2 = b_2 - m_2\, b_1$$

Definase ahora, análogamente, el multiplicador

$$m_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

Se multiplica asimismo la ec 4 por m_3 y se resta de la ec 6; el sistema resultante es

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = b_1 \qquad (7)$$

$$a'_{22} X_2 + a'_{23} X_3 = b'_2 \qquad (8)$$

$$a'_{32} X_2 + a'_{33} X_3 = b'_3 \qquad (9)$$

donde

$$a'_{32} = a_{32} - m_3\, a_{12}$$

$$a'_{33} = a_{33} - m_3\, a_{13}$$

$$b'_3 = b_3 - m_3\, b_1$$

Definiendo nuevamente el multiplicador

$$m'_3 = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

se multiplica la ec 8 y se resta de la ec 9; queda así

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad (10)$$

$$a'_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b'_2 \qquad (11)$$

$$a''_{33}x_3 = b''_3 \qquad (12)$$

donde

$$a''_{33} = a'_{33} - m'_3 a'_{23}$$

$$b''_3 = b'_3 - m'_3 b'_2$$

Por su forma, el sistema de ecuaciones 10-12 se denomina triangular. Triangularización es el proceso de obtener el sistema de ecs 10-12 a partir del sistema de ecs 1-3.

El procedimiento para encontrar las incógnitas es ahora directo, puesto que de la ec 12 se despeja x_3, su valor se sustituye en la 11 para obtener x_2 y finalmente ambos valores se sustituyen en la ec 10 para encontrar x_1. Este proceso, llamado sustitución hacia atrás viene dado por

$$X_3 = \frac{b''_{33}}{a''_{33}}$$

$$X_2 = \frac{b'_2 - a'_{23} X_3}{a'_{22}}$$

$$X_1 = \frac{b_1 - a_{13} X_3 - a_{12} X_2}{a_{11}}$$

Generalizando ahora el procedimiento para el caso de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Sea el sistema

$$\begin{array}{c}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1j} X_j + \dots + a_{1n} X_n = b_1 \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \dots + a_{2j} X_j + \dots + a_{2n} X_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + a_{i3} X_3 + \dots + a_{ij} X_j + \dots + a_{in} X_n = b_i \\
\vdots \\
a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + a_{n3} X_3 + \dots + a_{nj} X_j + \dots + a_{nn} X_n = b_n
\end{array}$$

Defínanse n-1 multiplicadores

$$m_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad , i = 2, 3, \dots, n$$

y restando de la i-ésima ecuación el producto del multiplicador correspondiente m_i por la primera ecuación se tiene el sistema

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2j}x_j + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a'_{i2}x_2 + a'_{i3}x_3 + \dots + a'_{ij}x_j + \dots + a'_{in}x_n &= b'_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a'_{n1}x_1 + a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nj}x_j + \dots + a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
a'_{ij} &= a_{ij} - m_i a_{1j} \qquad i = 2,\dots,n\ ;\ j = 2,\dots,n \\
b'_i &= b_i - m_i
\end{aligned}
$$

de aquí que $a_{i1} = 0$, $i = 2,\dots,n$

Se continúa el proceso similarmente, de tal forma que en el k-ésimo paso del proceso de triangularización, se elimina x_k de $n-k$ ecuaciones. Definiendo los $n-k$ multiplicadores

$$m_i^{k-1} = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} \quad , \ i = k+1, k+2, \dots, n$$

donde $a_{kk}^{k-1} \neq 0$.

Se definen asimismo en este k-ésimo paso de la triangularización.

$$a_{ij}^{k} = a_{ij}^{k-1} - m_i^{k-1} a_{kj}^{k-1}$$

$$b_i^{k} = b_i^{k-1} - m_i^{k-1} b_k^{k-1}$$

Durante el proceso de triangularización, la ecuación utilizada para eliminar las incógnitas de las ecuaciones que la siguen, se denomina ecuación pivote ó renglón pivote; asimismo en dicha ecuación, el coeficiente de la incógnita que se va a eliminar se denomina coeficiente pivote ó elemento pivote.

Terminada la triangularización, el sistema resultante es

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
a_{jj}^{j-1}x_j + \dots + a_{jn}^{j-1}x_n &= b_j^{j-1} \\
&\vdots \\
a_{nn}^{n-1}x_n &= b_n^{n-1}
\end{aligned}$$

Continuando el método de eliminación gausiana, sigue el proceso de sustitución hacia atrás, el cual puede describirse en la siguiente forma

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}$$

$$x_j = \frac{b_j^{j-1} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}^{j-1} x_k}{a_{jj}^{j-1}} \quad ; \quad j = n-1, n-2, \dots, 1$$

Hasta ahora se ha supuesto que cada elemento pivote que se encuentra en el proceso de reducción ha sido un elemento no nulo. Si éste no es el caso, el procedimiento anteriormente descrito se deberá modificar. Si el renglón pivote tiene su elemento pivote nulo se debe intercambiar a dicho renglón con cualquiera de los que lo siguen y el cual una vez convertido en renglón pivote no deberá tener su elemento pivote nulo.

Si un elemento pivote debiera tener teóricamente un valor cero, pero debido a errores de redondeo tuviera un pequeño valor no nulo, sería deseable aún así, utilizar el intercambio de renglones. Esto conduce a un punto muy importante, que es el efecto de la magnitud de los elementos pivote en la precisión de la solución. Se ha demostrado que si la magnitud del elemento pivote es apreciablemente menor que la magnitud general de otros elementos de la matriz, la utilización de dicho elemento pivote causará una disminución en la precisión de la solución. Por lo tanto, para mayor precisión deberá hacerse cada reducción utilizando como renglón pivote, aquel que tenga el elemento pivote de mayor magnitud; a dicho procedimiento se le denomina condensación pivotal.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

EJEMPLOS DE APLICACION ESTATICO Y DINAMICO

DR. VICTOR HUGO MUCIÑO QUINTERO

MAYO, 1984

79-DE-18

an ASME publication

$3.00 PER COPY
50 TO ASME MEMBERS

52

Design Improvement of a Friction Brake Plate Through Finite Element Analysis

V. H. MUCINO

V. PAVELIC

R. G. TASCHNER

The University of Wisconsin-Milwaukee,
Milwaukee, Wisc.

The finite element method is applied to conduct the stress analysis of the friction brake plate used in the rear axle system of agricultural tractors. External loads on the plate are considered to be applied to the spline and fixed boundary conditions at the friction material area. The original design of the friction plate is analyzed and shown to have an uneven distribution of load on the teeth of the spline, causing high stresses at some critical areas of the plate. Design changes are made on the analysis model, having as a primary interest the reduction of peak stresses to an acceptable level, without severe modifications to the original design. With a minimum of computer manipulations, the finite element model used yielded the best configuration of the brake plate for the given loads.

Contributed by the Design Engineering Division of The American Society of Mechanical Engineers for presentation at the Design Engineering Conference & Show, Chicago, Illinois, May 7-10, 1979. Manuscript received at ASME Headquarters February 22, 1979.

Copies will be available until February 1, 1980.

Design Improvement of a Friction Brake Plate Through Finite Element Analysis

V. H. MUCINO V. PAVELIC R. G. TASCHNER

NOMENCLATURE

A_f = flank area of the teeth
d_{ri} = radial displacement at the tip of the tooth (i)
d_{ti} = tangential displacement at the tip of the tooth (i)
f_i = load distribution factor
F_n = normal force acting on the flank of the teeth
F_r = radial force acting on the flank of the teeth
F_t = tangential component of the normal force (F_n)
m = slope of loading line in Goodman diagram
P_e = equivalent pressure on the flank of the teeth
r = stress ratio of alternating stress (s_{ai}) to mean stress (s_{mi})
S_{ai} = alternating stress at tooth (i)
S_{mi} = mean stress at tooth (i)
$S_{max,i}$ = maximum stress at tooth (i)
S_{vmi} = Von Mises criterion of failure
S_1, S_2, S_3 = principal stresses
T_i = torque carried by tooth (i)
T_{in} = input torque in the spline shaft
T_{p1} = torque carried by one friction plate
ϕ = pressure angle of the spline teeth

INTRODUCTION

The system considered in this analysis is a multiple disk brake, which is used in a typical rear axle of an agricultural tractor. The main objective of the analysis is the design improvement of the brake system which depends upon the performance of the friction plates. These friction plates are subject to fluctuating loads that may cause fatigue failure of the system. Therefore, the analysis is carried out having as primary interest the reduction of peak stresses occurring at the critical area of the friction plate.

In pursuing the objective it is desirable to keep the overall modifications to a minimum.

This paper demonstrates the application of the finite element method as an efficient tool to identify critically stressed areas of a typical friction plate, and also as a tool to qualitatively evaluate the design modifications proposed in order to reduce the critical stresses.

Fig. 1 shows the main components of the rear axle assembly which consists of a differential gear train (A), a clutch system (B), a dual brake system (C&C') and the planetary gear train systems (D&D'). The various components in the assembly of each brake system, are shown separately in Fig. 2.

The operation of a multiple disk brake system may be described briefly as follows: the friction plates rotate along with the shaft to which they are attached through the spline, and the steel plates are attached to the housing in such a way that rotation is prevented. Axial displacement is allowed for both the friction plates and steel plates. When hydraulic pressure is applied to the brake cylinder, the brake piston moves axially and presses the friction plates against the steel plates, the acting torque in the shaft is transmitted to the friction plates through the spline, and then transmitted to the steel plates through the friction material on the friction plates, the absorbed braking torque from the steel plates is finally transmitted to the housing which is attached to the frame of the tractor. The heat generated during the brake application is absorbed by coolant fluid which circulates on either side of the friction plate through the holes provided on the plate.

The braking loads imposed on the friction plates, induce high stress concentration at the root of the teeth in the spline, which are sub-

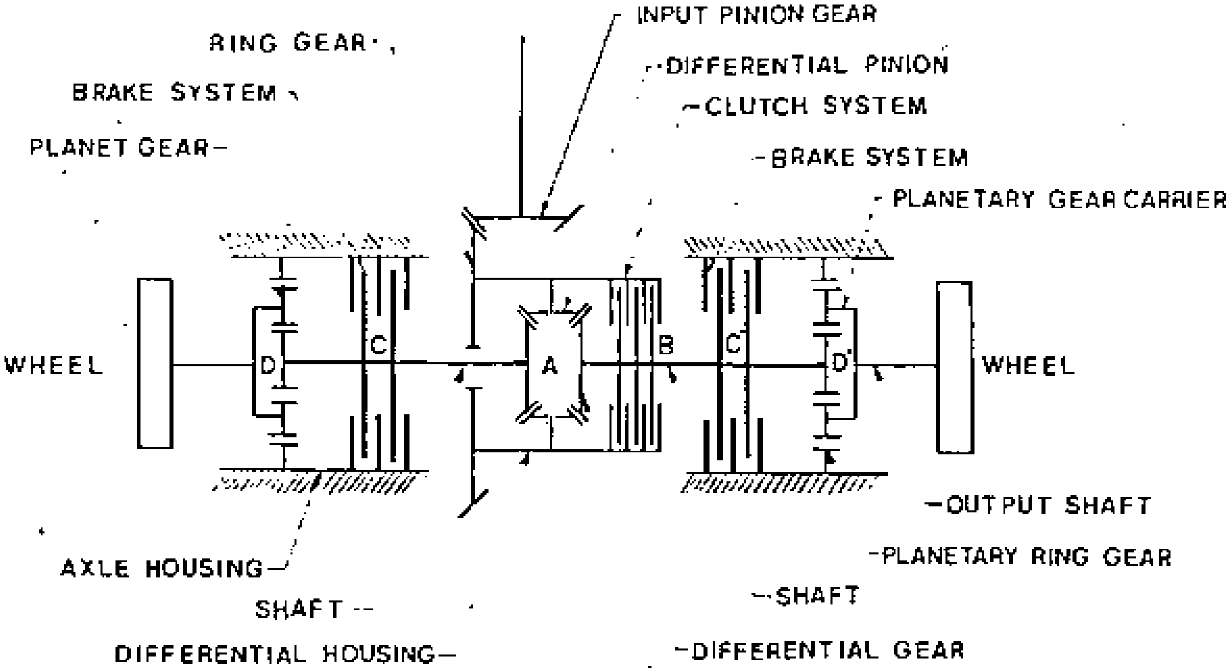


Fig. 1 Schematic view of a tractor rear axle assembly

ject to a stress variation ranging from zero value (idle mode) to some maximum value (brake application).

Fig. 3 shows schematically torques applied to the friction plate, the geometry of the spline, and the location of the coolant circulation holes.

LOADING CONSIDERATIONS

Due to the repetitive nature of the loads, these can be expressed by means of a static (mean) component, and a dynamic (alternating) component, for the purpose of analysis. These loads are distributed among the teeth on the friction plate, in such a way that the ratio of alternating stress to steady stress at any location of the plate is always constant. This is due to the fact that the load varies from zero to some maximum value in each brake application. However, the load that a particular tooth carries is not necessarily equal to the load carried by a different tooth in the spline.

Fig. 4 shows qualitatively the variation of stresses with respect to time, at three arbitrary locations of the friction plate. Also plotted in the same Fig. 4 is the variation of the load with respect to time. It can be appreciated that the maximum stresses at any of the locations shown are reached when the applied load is maximum, this is, the stress peaks are in phase with the load peaks.

Using the notation of Juvinall (1).[1] the stress ratio can be expressed as follows:

$$r = \frac{S_{ai}}{S_{mi}} \qquad (1)$$

where Sai is the alternating stress component Smi is the mean stress component and for the particular case in which the load varies from zero to a maximum value then r = 1; or .

$$S_{ai} = S_{mi} \qquad (2)$$

Fig. 5 shows the Goodman diagram and the loading line for the teeth in the spline of the friction plate. The slope of the loading line is such that:

$$S_{max,i} = S_{mi} + S_{ai} \qquad (3)$$

by substituting the equality (2) in equation (3) it results

$$S_{max,i} = 2S_{mi}$$

therefore, the slope of the loading time in the Goodman diagram is

$$m = 2$$

[1] Underlined numbers in parentheses designate References at end of paper.

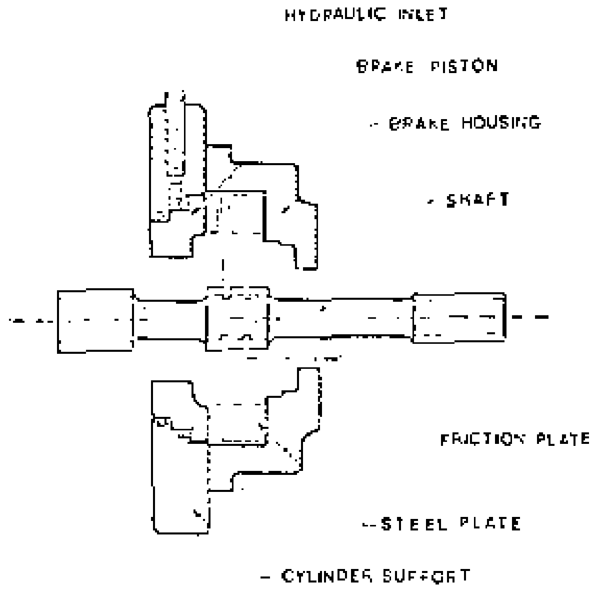


Fig. 2 Brake assembly system

Based on these stress relationships and for the particular case treated in this analysis, the following considerations can be made in order to formulate the finite element model.

1 From fatigue theory as treated by Sors (2), the alternating stress component must be as small as possible in order to improve the fatigue life of the part.
2 Due to the nature of the loads, and by inspection of equations (2) and (3), the reduction of the maximum peak stress at any location of the part will result in a reduction of the dynamic component of stress.
3 Since both the steel plates and friction plates are allowed to displace in the axial

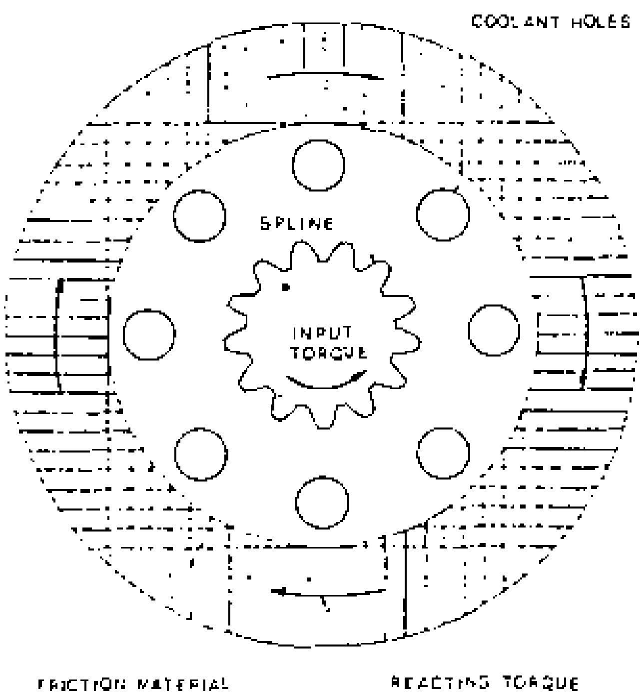


Fig. 3 Torques applied and geometry of the friction plate

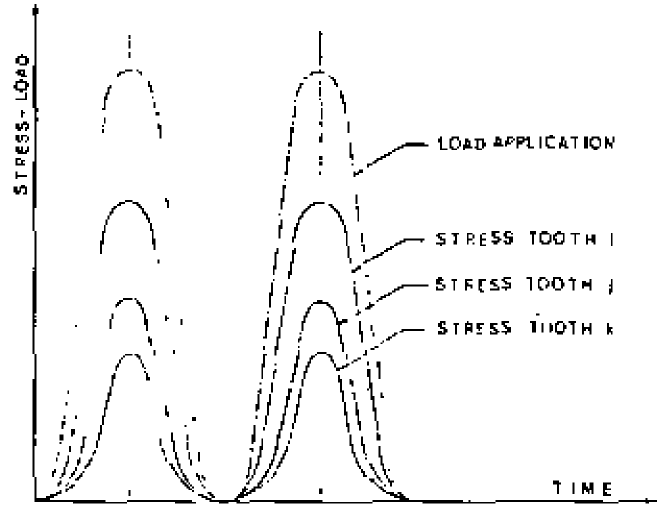


Fig. 4 Variation of load and stresses at three arbitrary locations of the friction plate

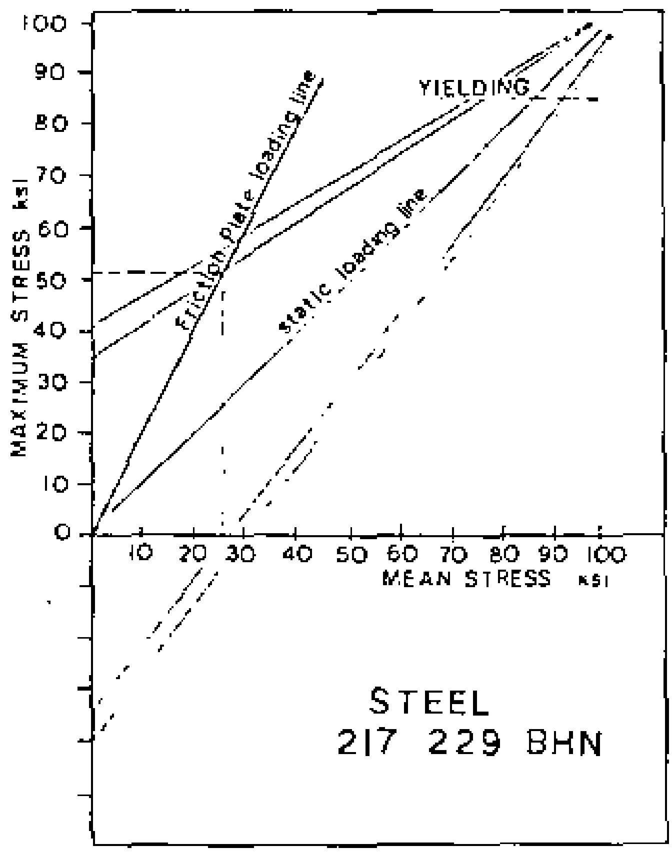


Fig. 5 Goodman diagram and loading line for the friction plate

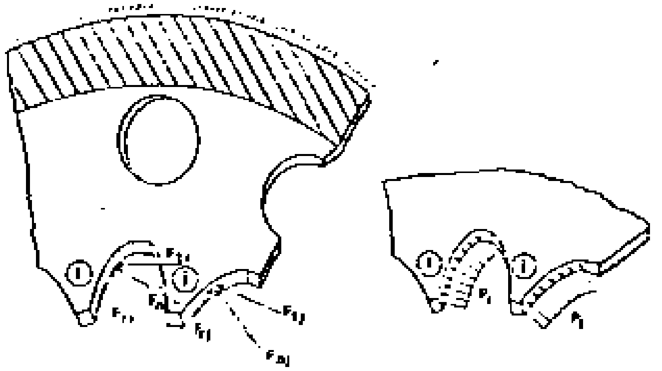


Fig. 6 Application of the load on the friction plate spline teeth

direction the load on the friction plate can be considered to be acting only in the plane of the plate and it has no component in the axial direction.

4 The total load acting on the friction plate can be broken down into tangential and radial forces acting on the teeth of the spline, such that the summation of the resulting tangential forces at the pitch circle, multiplied by the corresponding pitch radius is equivalent to the torque provided by the shaft.

5 The loads applied to the teeth of the plate are reacted by the friction material, which transmits the braking torque to the steel plates.

6 A static analysis alone can be performed on the friction plate, to estimate the stress distribution on the plate.

FORMULATION OF THE PROBLEM

Fig. 6 shows schematically the application of the load on the friction plate, at the location of two adjacent teeth, and the boundary conditions at the friction material area of the plate. In order to avoid local effects due to concentrated point loads, it is convenient to represent the applied forces at the teeth as uniform pressures along the flank of each tooth. The resultant force at the pitch circle must hold for the consideration as discussed earlier in item 4.

The total input torque for each wheel is carried by two plates, such that each plate carries one-half of the input torque.

For the numerical portion of this study

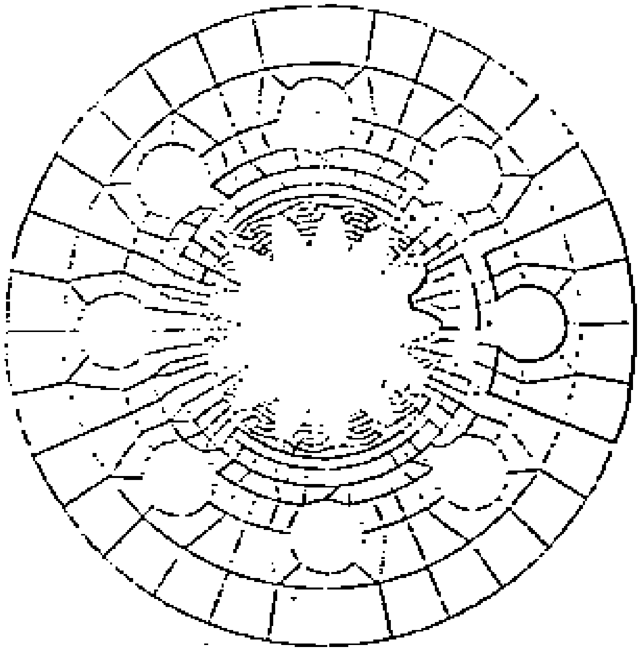


Fig. 7 Computer plot of the original design 8-holes friction plate geometry

and test data available for the particular case, the torque carried by each plate was determined to be as follows:

$$T_{p} = \frac{1}{2} T_{in} \qquad (4)$$

Then

$$T_{p} = \frac{1}{2}(32400) = 16200 \text{ lb-in} \qquad [1831 \text{ N-m}]^{2}$$

assuming equal load per tooth, the torque in the plate is distributed equally among the 13 teeth. The torque carried by each tooth is then:

$$T_{i} = \frac{1}{13} T_{p} \qquad (5)$$

then

$$T_{i} = \frac{1}{13}(16200) = 1250 \text{ lb-in} \qquad [141 \text{ N-m}]$$

The equivalent tangential force at each tooth acting at the pitch circle is obtained by dividing the torque by the radius of the pitch circle, this is:

[2] Numbers in brackets indicate the SI equivalence.

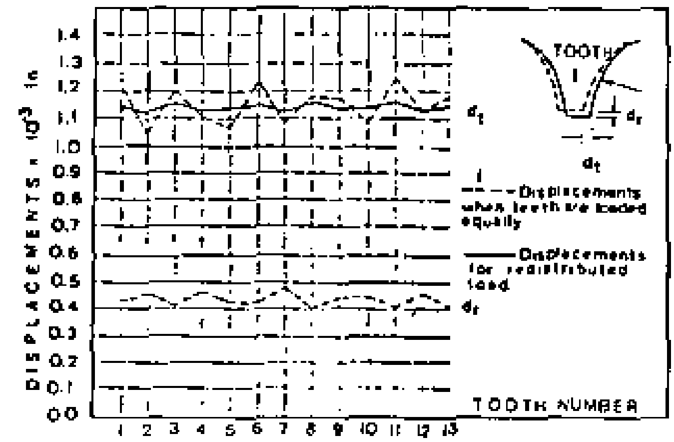


Fig. 8 Displacements at the tip of each tooth for the original 8-holes friction plate model

$$F_{ti} = \frac{T_i}{r_p} \qquad (6)$$

where r_p = 1.3 in. Then

$$F_{ti} = \frac{1250}{103} = 960 \text{ lb} \qquad [4276 \quad N]$$

The equivalent normal force at the flank of the tooth is obtained as follows:

$$F_{ni} = \frac{1}{\cos\phi} F_{ti} \qquad (7)$$

where ϕ is the pressure angle of the spline geometry. For the present case ϕ = 25 deg.

The normal force is then:

$$F_{ni} = \frac{1}{\cos 25°} (960) = 1060 \text{ lb} \qquad [4722 \text{ N}]$$

The equivalent pressure at the flank of the teeth is obtained by dividing the normal force by the area of the flank:

$$P_r = \frac{F_{ni}}{A_f} \qquad (8)$$

where A_f is the area of the flank of the tooth for the present case A_f = 0.04106 in.^{2} then:

$$P = \frac{1060}{.04106} = 25833 \text{ psi} \qquad [178 \text{ MPa}]$$

The load as uniform pressure on each tooth is estimated to be 25800 psi [178 MPa] acting on the overall flank of each tooth.

Table 1 Spline Teeth Load Factors Table

Tooth Number	Tangential Displacement $d_t \times 10^{-3}$ in	Inverse $1/d_t$	Percentage %	Nominal Percentage %	Percentage Difference %	Load Factor
1	0.1200	8.3333	7.2684	7.6923	-0.4239	0.9448
2	0.1054	9.4876	8.2753	7.6923	0.5829	1.0750
3	0.1200	8.3333	7.2684	7.6923	-0.4239	0.9448
4	0.1126	8.8809	7.7461	7.6923	0.0537	1.0069
5	0.1088	9.1911	8.0164	7.6923	0.3247	1.0421
6	0.1219	8.2034	7.1511	7.6923	-0.5372	0.9301
7	0.1064	9.3984	8.1974	7.6923	0.5050	1.0655
8	0.1166	8.5763	7.4804	7.6923	-0.2119	0.9724
9	0.1167	8.5689	7.4739	7.6923	-0.2184	0.9716
10	0.1062	9.4250	8.2207	7.6923	0.5283	1.0686
11	0.1220	8.1967	7.1493	7.6923	-0.5430	0.9294
12	0.1091	9.1659	7.9947	7.6923	0.3023	1.0393
13	0.1125	8.8888	7.7530	7.6923	0.0607	1.0079
Total	—	114.6496	100.000	100.000	—	—

THE FINITE ELEMENT MODEL

Due to the type of geometry and loading, plane stress elements were considered adequate for this analysis. Flat plate parabolic elements (8 nodes per element) were chosen to model the geometry of the friction plate.

In order to define the finite element mesh of the structure of the friction plate, node and element generation patterns were used. The procedure is as follows: only one tooth is broken down into finite elements, the location of nodes is defined with respect to a cylindrical coordinate system which origin is at the center of the plate. The element connectivity is also defined for this tooth, then, node generation is performed to define the node locations of the remaining 12 teeth. In the same manner, element generation is performed for the remaining 12 teeth. The generation is done by incrementing the node numbers by 100, at every 27.69 deg twelve times around the center of the plate. A similar approach is used to define the mesh for the outer part of the plate encompassing the coolant circulation holes; in this case one sector is defined and seven sectors are generated around the center of the plate. Finally, quadrilateral and triangular elements are used in order to connect the two sets of sectors together. This is shown in Fig. 7.

The finite element program used, developed by Structural Dynamics Research Corporation (7)

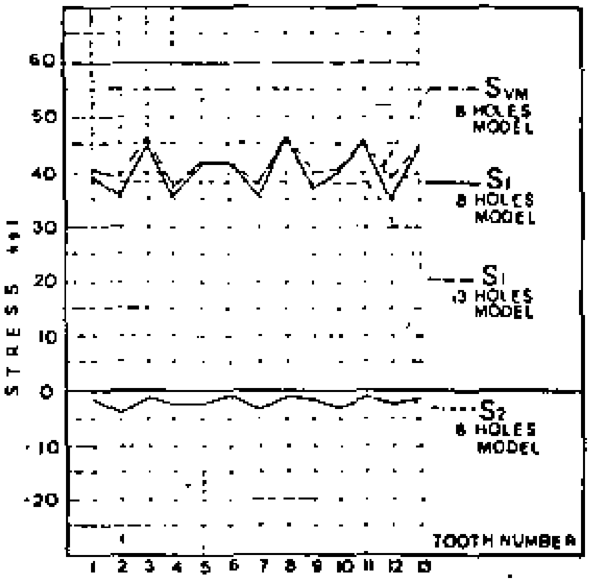


Fig. 9 Stresses at the root of each tooth. The von Mises failure criterion and the principal stresses S_1 and S_2, correspond to the original design. The constant line for S_1 corresponds to the proposed new design

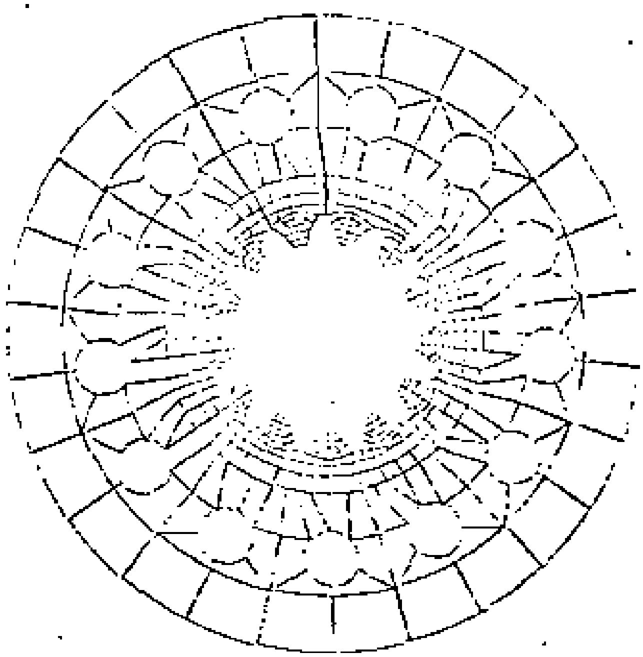


Fig. 10 Computer plot of the proposed 13-holes friction plate

is based on a wave front algorithm solver, therefore, node numbering does not affect the size of the wave front, which is in function of the order in which the elements are defined. (A more detailed description of the wave front algorithm solver can be found in Reference (4) by Nicolas et al.) However, the order in which it is convenient to generate the elements, is not necessarily the most efficient for the wave front size; therefore, a wave front optimizer preprocessor was applied after the mesh generation was accomplished, in order to rearrange the element definition.

The resulting wave front was considerably reduced and the computer costs of this analysis were also reduced.

THE FINITE ELEMENT COMPUTER RUNS

Inspection of the solution yielded by the finite element method application showed that the largest displacement for each tooth occurs at the tip. For the case where the load is considered equally distributed among the teeth, these displacements showed to be different from one tooth to another. Then, the relative differences of displacements are indicative of the particular flexibility of each tooth. Fig. 8 shows graphically the variation of tangential displacements at the tip for all thirteen teeth (dashed line).

Due to the variation in flexibility for each tooth, the load carried by the most flexible tooth must be less than that for the stiffest tooth. Because of this, a redistribution of the load must be considered, such that the load for a particular tooth is inversely proportional to the tangential displacement at every tooth.

Based on the relative differences of tangential displacements, load factors were developed, in order to redistribute the load on the teeth.

The significance of the load factors is that they indicate the amount of load in percentage carried by each individual tooth.

Table 1 summarizes the calculations made in order to obtain the load factor values for each tooth.

The equivalent pressures applied to the teeth as obtained by equation (8) are then modified as follows:

$$P_{e_i} = \frac{F_{ni}}{Af} (f_i) \tag{9}$$

i.e., f_i is the load factor for the ith tooth.

A computer run was performed considering the load factors, and the resulting displacements are shown in Fig. 8 (solid line) for all 13 teeth. The stress solution obtained from this run showed that the maximum stress for each tooth occurs at the base of the root.

Fig. 9 shows the magnitude of the maximum

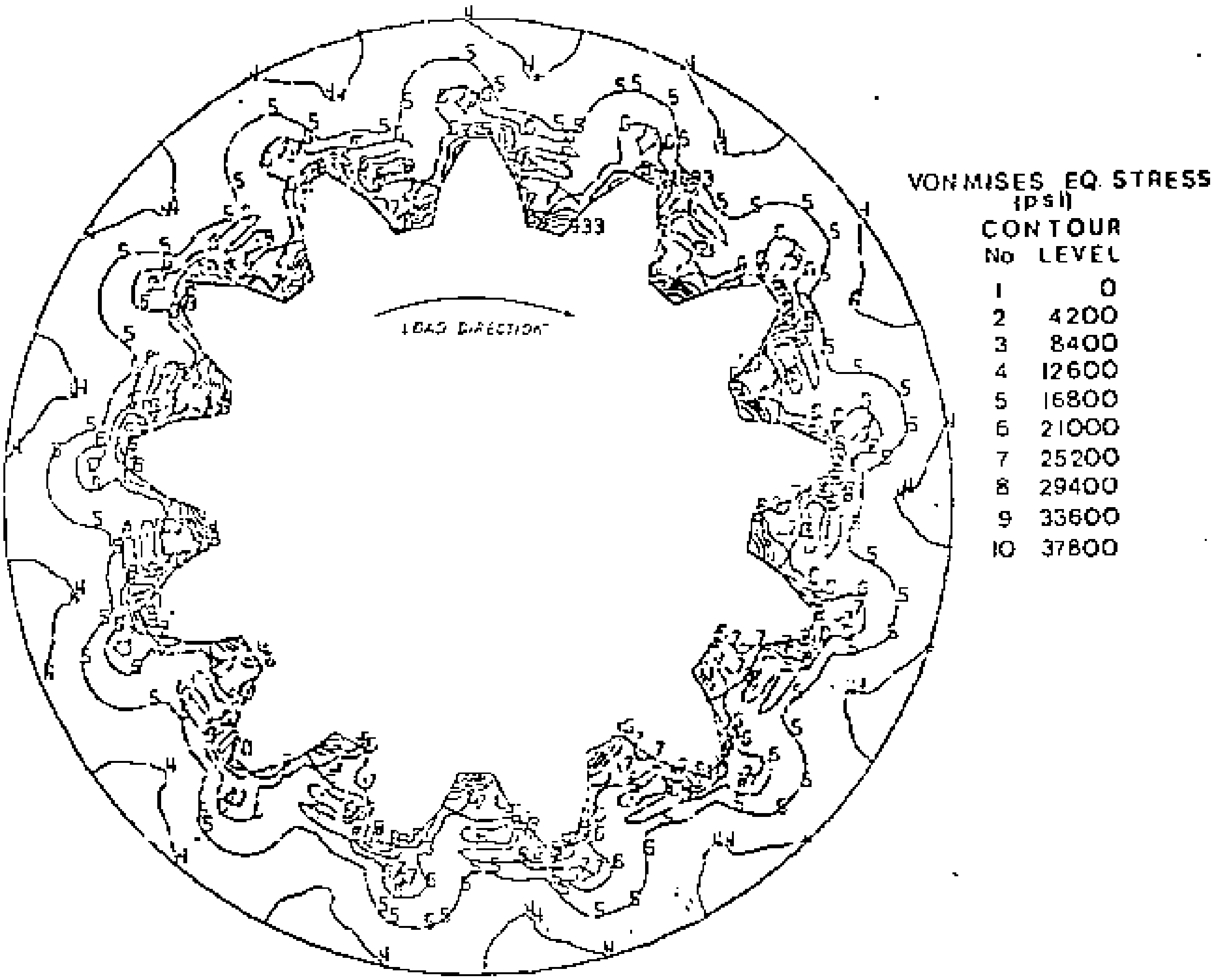


Fig. 11 Stress contour plot for the teeth of the 13-holes friction plate

principal stress (solid line) for all 13 teeth, and also in the same graph, the Von Mises criterion of failure is plotted (dashed line).

The Von Mises criterion of failure as treated by Juvinall (1) is given by the following expression:

$$S_{vm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(S_2 - S_1)^2 + (S_3 - S_1)^2 + (S_3 - S_2)^2 \right]^{1/2} \quad (10)$$

where S_1, S_2, S_3 are the principal stresses at the point of consideration.

For the particular case treated in this analysis, $S_3 = 0$ and equation (10) reduces to

$$S_{vm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(S_2 - S_1)^2 + S_1^2 + S_2^2 \right]^{1/2} \quad (11)$$

It can be observed in Fig. 9 that the second principal stress S_2 obtained at the root of the teeth is very small. In the limit, as the mesh is refined S_2 will approach zero.

From the results of the initial computer runs, it was concluded that there exists a significant influence of the relative positions of the coolant circulation holes with respect to each tooth on the spline, some of which will be more susceptible to fail due to fatigue.

A NEW DESIGN MODEL

On the basis of this study, and with the purpose of redistributing the loads and stresses more evenly, a new design having 13 holes equally spaced was suggested. The geometry of the model proposed is shown in Fig. 10.

The main objective of this change as described previously is to obtain a uniform stiffness for all the teeth such that each tooth carries the same load.

One additional computer run was performed considering again equal loading per teeth, and

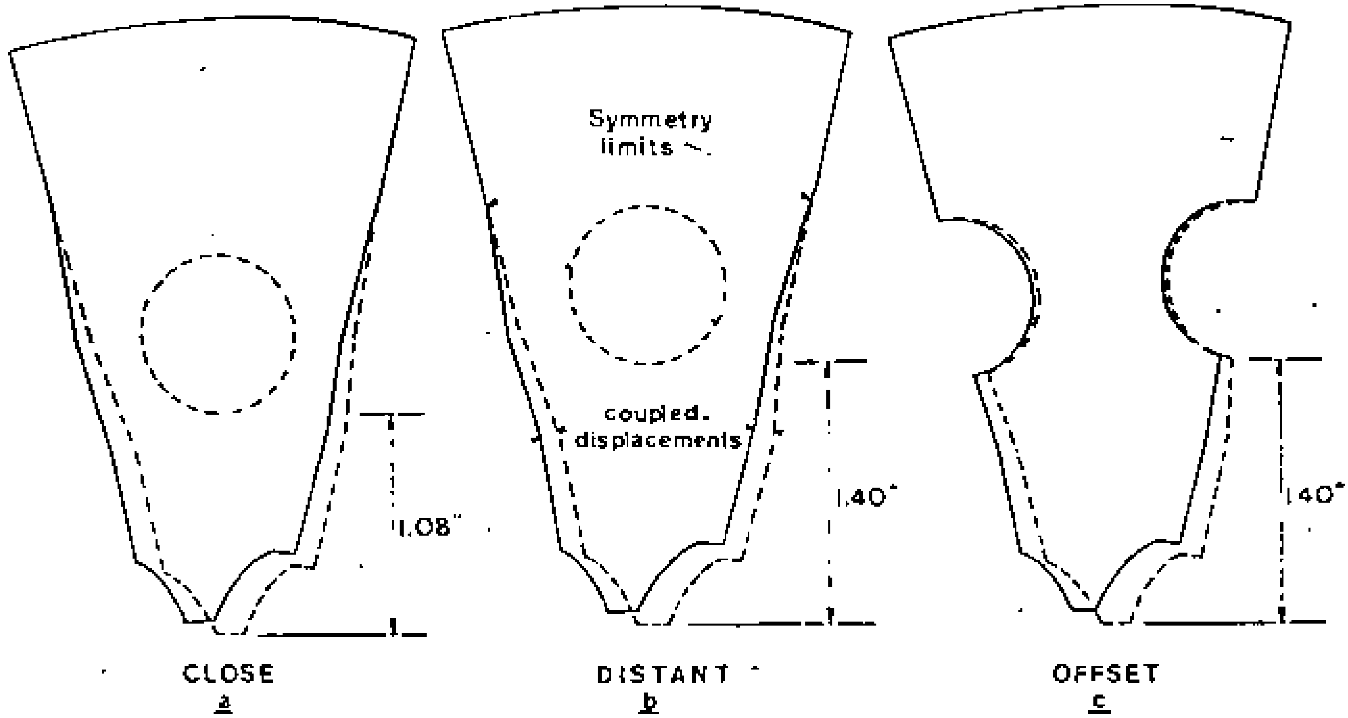


Fig. 12 Additional models of one sector used to determine the most adequate position of the holes with respect to the teeth

the resulting stress distribution (Fig. 11) shows a consistent pattern of stresses which indicates an even distribution of the load on the teeth.

The maximum stress level for the new design plots as the straight line in the graph shown in Fig. 9. As it can be observed, the peak stresses obtained with the original design can be reduced by having the same number of coolant holes than teeth on the plate.

Finally, three additional models were considered in the analysis to determine the most adequate position for the holes with respect to the teeth. These models were made for only one sector encompassing one tooth and one hole. In order to make the one sector model represent to complete structure of the plate, proper boundary conditions were imposed by coupling the displacements of the nodes in the symmetry limits as shown in Fig. 12.

Very good correlation was found between stresses obtained with the complete model and the stresses obtained with the simplified one sector model, (within a 1 percent of difference).

Table 2 summarizes the results obtained in the various computer runs, and provides a reference for the maximum stresses and locations for each case treated.

Table 2 Summary of Results Obtained from the Finite Element Method Computer Runs

RUN No	MODEL	LOAD DISTRIBUTION	MAXIMUM STRESS LOCATION psi [MPa]	MINIMUM STRESS LOCATION psi [MPa]
1	8-HOLES	Equal load per tooth	S_1=46000 [illegible] S_2=-1400 [-9.65] S_{eq}=47900 [illegible] Root of tooth No.2	S_1=33600 [illegible] S_2=-3900 [illegible] S_{eq}=35700 [illegible] Root of tooth No 6
2	8 HOLES	Distributed load by load factor	S_1=45500 [illegible] S_2=-1600 [11.0] S_{eq}=46300 [illegible] Root of tooth No 8	S_1=35200 [illegible] S_2=-3900 [illegible] S_{eq}=37300 [illegible] Root of tooth No 11
3	13 HOLES	Equal load per tooth	S_1=56500 [illegible] S_2=-4000 [illegible] S_{eq}=59500 [illegible] Root of all 13 teeth	same
4	ONE SECTOR Hole 1.40" from tooth	Uniform Pressure	S_1=38000 [illegible] S_2=-3000 [20.48] S_{eq}=40500 [illegible] Root of tooth	
5	ONE SECTOR Hole 1.08" from tooth	Uniform Pressure	S_1=39000 [illegible] S_2=-3000 [20.48] S_{eq}=41000 [illegible] Root of tooth	
6	ONE SECTOR Hole Offset from tooth	Uniform Pressure	S_1=39000 [illegible] S_2=-3000 [20.48] S_{eq}=41000 [illegible] Root of tooth	

CONCLUSIONS

From the results in this analysis, the following conclusions can be drawn:

1 The distribution of stresses on various teeth in the original design is uneven due to the unique position of each tooth with respect to the coolant circulation holes.
2 A uniform distribution of stresses among the teeth can be obtained by having the same number of holes and teeth.
3 The maximum stresses for the new 13-holes design are 22 percent lower than the stresses obtained with the 8-holes model, for the same loading condition.
5 The most adequated position of the holes with respect to the teeth is above the thick section of each tooth as shown in Fig. 12(b).

The new design produced by this analysis did not require any modification to any of the components of the assembly, and the reduction of the peak stresses resulted in an improvement of the life expectancy of the friction plate.

Laboratory tests have shown an improvement of 100 percent in the fatigue life of the new friction plate, as compared to the original design.

This represents a significant improvement the performance of the brake system in the rear axles under dynamic loading conditions.

There exists several other parts in the tractor system, which have similar characteristics to the part analyzed herein, and it is visualized that the present analysis method provides the fundamental base for some of the most important aspects to perform a finite element analysis.

ACKNOWLEDGMENT

The authors wish to acknowledge the support provided by the J. I. Case Company of Racine, Wisc., for this study and analysis.

REFERENCES AND BIBLIOGRAPHY

1 Juvinall, R. C., Stress, Strain and Strength, McGraw-Hill, New York, 1967.

2 Sors, L., Fatigue Design of Machine Components, Pergamon Press, New York, 1971.

3 S.D.R.C. "SUPERB," A General Finite Element Program, Cincinnati, Ohio, 1976.

4 Nicolas, V. T., and Citipitioglu, E., "A General Isoparametric Finite Element Program," S.D.R.C. "SUPERB," Second National Symposium on Computerized Structural Analysis and Design, George Washington University, Washington, D. C., 1976.

5 Citipitioglu, E., Nicolas, V. T., and Tolani, S. K., "Finite Element Method in Stress Analysis Practice," Second International Conference on Vehicle Mechanics, Southfield, Mich., April 18-20, 1977, SAE.

6 Segerlind, L. J., Applied Finite Element Analysis, Wiley, New York, 1976.

1

ANALYSIS OF CRANKSHAFT-BEARING SYSTEMS USING A FINITE ELEMENT-TRANSFER MATRIX APPROACH

V. H. Mucino, Professor of Mechanical Engineering
The University of Mexico City
Mexico City, Mexico

V. Pavelic, Professor of Mechanical Engineering
The University of Wisconsin—Milwaukee
Milwaukee, Wisconsin

R. G. Tschner, Engineering Analysis Manager
J. I. Case Company
Racine, Wisconsin

ABSTRACT

In this study a new approach is proposed for the analysis of a crankshaft-bearing system. The mathematical model of the system incorporates the elastic properties of the crankshaft and supports, the hydrodynamic nature of the journal-bearings, and for the first time the mass distribution of the rotating crankshaft. The procedure of analysis involves substructuring principles applied to the crankshaft for which each crank represents a substructure and a new condensation scheme is used for the synthesis of the system by operating over the transfer matrices of the substructures derived from the finite element discretization of each crank. The analysis yields the loads on the main bearings for a full cycle of 4π at constant speed of rotation.

NOMENCLATURE

{F}	vector of loads on crankshaft
$\{R_j\}$	vector of reactions on journals
$\{F_i\}$	vector of loads on crankpins
r	journal radius
p	pressure distribution
θ	circumferential polar coordinate
z	longitudinal polar coordinate
h	oil film thickness
ν	oil viscosity
ω	angular velocity
$\dot{\phi}$	journal precision rate
t	time
{B}	vector of bearing displacements
{e}	vector of eccentricities
$\{Y_s\}$	vector of displacements of crankshaft
[F]	flexibility matrix of supports
$\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$	displacement velocities and acceleration, absolute system
$\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}$	displacement velocities and acceleration, absolute system
$\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}$	displacement velocities and acceleration, absolute system
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
$y, \dot{y}, \ddot{y}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
$z, \dot{z}, \ddot{z}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
[C]	coordinate transformation matrix
{Y}	vector of d.o.f. in the absolute system
{Q}	vector of d.o.f. in the rotating system
m	lumped mass
k	spring stiffness
[K]	stiffness matrix of substructure
{X}	vector of d.o.f. of substructure
[M]	mass matrix of substructure
[D]	dynamic stiffness matrix of substructure
X_L	d.o.f. of left interface
X_I	d.o.f. of intermediate nodes
X_R	d.o.f. of right interface
F_L	loads on left interface
F_I	loads on intermediate nodes
F_R	loads on right interface
$[T_i]$	transfer matrix of substructure i
$\{Z_j\}$	state vector of interface j
{S}	vector of transfer matrix
L	length of bearing
D	diameter of bearing
c	radial clearance
{M}	mobility functions
{J}	journal displacements
{R}	reactions vector

INTRODUCTION

In the analysis of crankshaft-bearing systems, there are three main areas of concern: stress analysis, dynamic analysis and bearing performance analysis. The analytical models typically used for each of these three areas have very little in common, mainly due to simplifying assumptions which make the calculations practical for designers and analysts. In the stress analysis area, for instance, static loads are generally considered and the crankshaft is almost always isolated from the other components of the system. Stresses are then computed based on the static loads assumed and the corresponding reactions. In the dynamic analysis area, the stress distribution of the crank is of little interest and for all practical purposes of no interest whatsoever and the emphasis is placed on the torsional vibrations caused by the rotating and reciprocating masses and the lack of rotational constraints. Finally, in the area of bearing analysis, the loads acting on the bearings are generally assumed to be those obtained through the static analysis for a number of rotational positions along a full cycle of operation. The bearings are typically isolated from the entire system and thus the effects of the dynamics of the crankshaft and the interaction with the other components of the system are not fully incorporated.

Numerous studies have been published describing a variety of analytical, empirical and experimental methods in each of these three areas, such as the studies by Lowell [1], Eshleman [2] and Ross and Slaymaker [3] among many others.

However, few attempts have been made to model the crankshaft-bearing system as a whole, considering that the loads acting on the crankshaft cause deformations. This in turn interacts with the dynamics of the system, the flexibility of the supports and the hydrodynamics of the journal-bearings of the engine. While a more extensive literature search is presented in [4], here only some of the significant works are discussed.

Gross and Hussman [5] developed a method by means of which loads on the main bearings could be determined considering a model that consisted of a round shaft representing the crankshaft, elastic supports represented by springs and bearings which were assumed to behave as linear springs. The procedure derived by these authors considered the shaft as a statically undetermined system on flexible supports. The results obtained improved over the classical method of considering each crank as a separate simply supported beam on which certain loads act and the reactions satisfy the conditions of static equilibrium for each separate crank. However, the true reality of the hydrodynamic nature of the bearings was not considered. Later, Von Shnurbein [6] incorporated the hydrodynamic characteristics of the bearings by using the expressions derived by Holland [7] which relate the instantaneous eccentricities of the journals with certain velocity. By taking the eccentricities as deflections of the crankshaft, the reaction loads could be determined, but an important assumption was that the supports were rigid. In both cases, [5] and [6], a transfer matrix approach was used to carry out the calculations based on the Holzer method [8].

Most recently, Stickler [9] developed a more elaborate approach which for the first time introduced the finite element method to model the crankshaft and also incorporated the hydrodynamics of the bearings through the mobility method developed by Booker [10, 11]. In the model used by Stickler, the crankshaft was modeled with beam elements and the supports were represented through a flexibility matrix. This study showed very clearly the difficulties involved in considering the crankshaft as an actually unsymmetrical shaft as opposed to the round shafts used in studies [5] and [6]. It should be noted that in none of the previous cases was the mass distribution of the crankshaft considered in the formulation and thus an important aspect of the dynamics of the crankshaft was neglected.

In this study, a general approach is presented which yields the loads on the main bearings and uses a solid finite element model for each crank in such a way that the elastic properties are more representative and, for the first time, includes the mass distribution of the crankshaft.

The approach is based on the finite element-transfer matrix method developed by Mucino and Pavelic [12]. The synthesis of the system substructures is made by combining the state vectors of the substructures with the hydrodynamic loads on the bearings and the flexibility of the supports.

THE SYSTEM MODEL AND EQUATIONS

The system considered in this study consists of three main components: the crankshaft, the flexible supports and the journal-bearings as shown in Figure 1. It is assumed that the loads acting on the crankpins can be obtained using the pressure-volume diagram

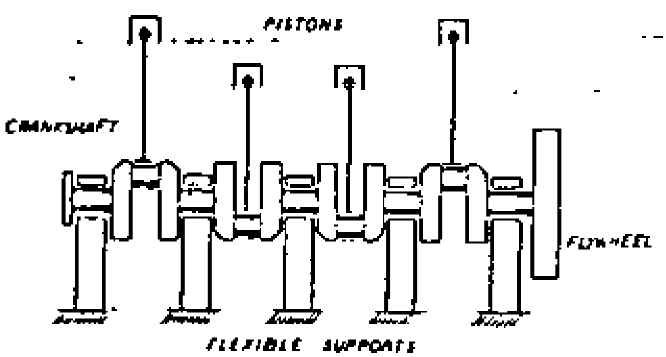


Fig. 1 A Typical Crankshaft-Bearing System on Flexible Supports

and the geometric characteristics of the system for the entire cycle of operation. Thus, the loads acting on the crankpins can be resolved into radial and tangential components as shown in Figure 2.

In order to formulate the equations of the system, it is necessary to define the degrees of freedom of the system in such a way that the interaction between the crankshaft and the bearings and the supports can also be described. First, the vector of loads acting on the crankshaft can be defined as:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_j \\ F_s \end{Bmatrix} \tag{1}$$

where $\{R_j\}$ are the reactions from the bearings acting on the main journals and $\{F_s\}$ are the loads from the connecting rods acting on the crankpins.

The reactions generated by the bearings are the result of integrating the pressure distribution developed by the lubricant oil film and thus:

$$\{R_j\} = \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{z=0}^{L} r \, P_j(\theta, z) \, d\theta \, dz \right\} \tag{2}$$

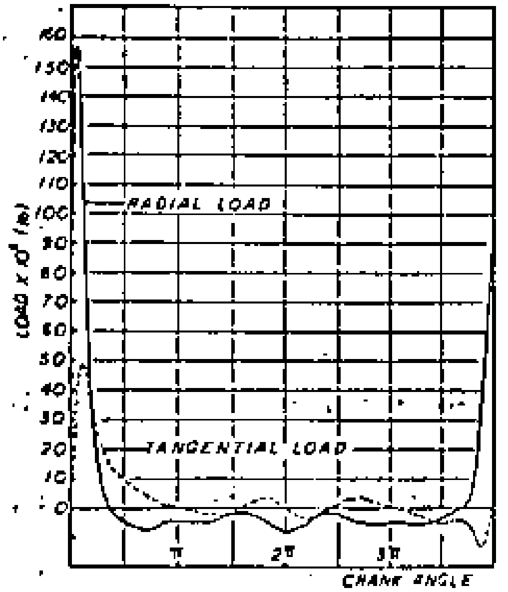


Fig. 2 Radial and Tangential Loads Acting on the Crankpin

where $P_j(\theta,z)$ is the pressure distribution around (θ) and along (L) for bearing of radius r as shown in Figure 3. The pressure distribution is governed by Reynold's equation:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[h^3\frac{\partial P_j}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial P_j}{\partial z}\right] = 6\mu\left[(\omega - 2\dot{\phi})\frac{\partial h}{\partial\theta} + 2\frac{\partial h}{\partial t}\right] \quad (3)$$

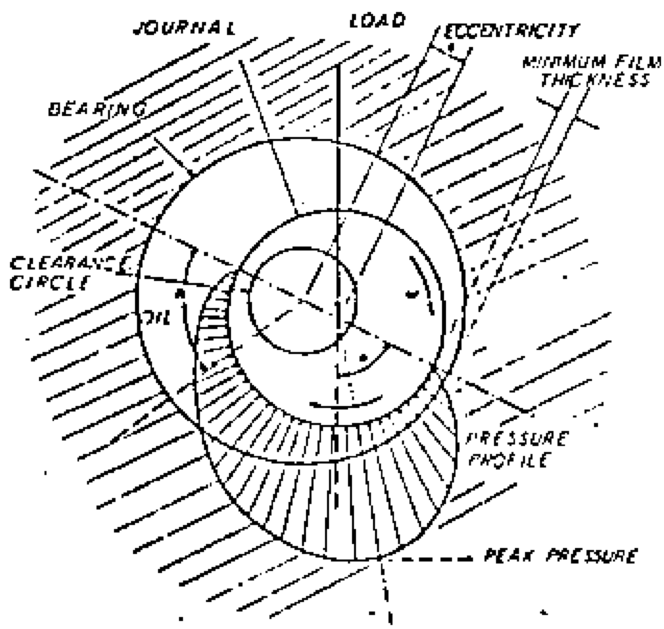


Fig. 3 A Journal-Bearing System and Lubricant Pressure Distribution

In this equation h is the oil film thickness around the bearing, μ is the viscosity of the lubricant, $\dot{\phi}$ is the journal precision rate and ω is the angular velocity of the journal. The vector of displacements of the crankshaft can then be defined as:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \{B\} + \{e\} \\ \{Y_s\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

where $\{B\}$ is the vector of displacements of the bearings which are rigidly attached to the supports, $\{e\}$ is the vector of eccentricities of the journals with respect to the bearings, and $\{Y_s\}$ is the vector of displacements of the crankshaft at other locations except the displacements of the main bearings.

To incorporate the flexibility of the supports, the vector $\{B\}$ can be expressed as:

$$\{B\} = [F]\{-R_j\} \quad (5)$$

where $[F]$ is the flexibility matrix representing the support structure and $\{-R_j\}$ is given by the negative of Equation (2).

Due to the nature of the mechanical system, two coordinate systems are needed to derive the equations of motion. Both systems coincide in the origin and one axis as shown in Figure 4, but one is fixed

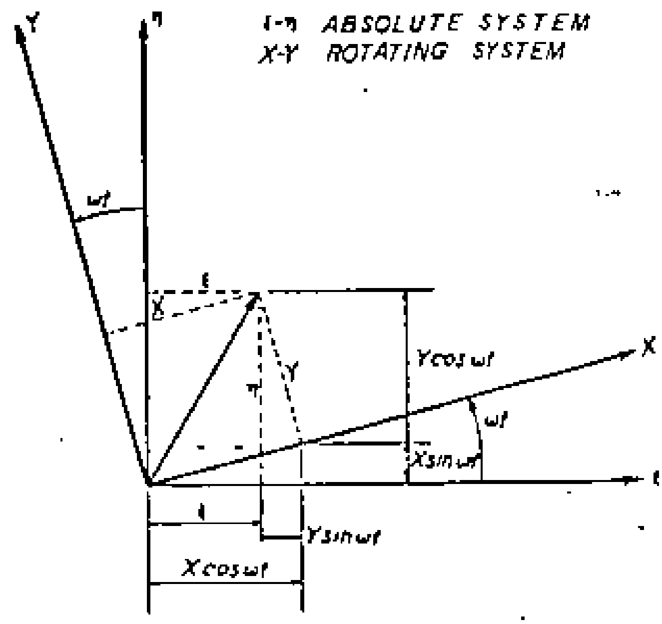


Fig. 4 Coordinate Systems: Rotating (x, y, z) and Absolute (ξ, η, ζ)

(ξ, η, ζ) and the other one rotates (x, y, z) and is attached to the crankshaft. The transformations from rotating to the absolute system are:

Displacements:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [C]\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Velocities:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Acceleration:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

where [C] is given by:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

The degrees of freedom for the crankshaft and supports can be expressed using the following notation.

In the absolute system (ξ, η, ζ):

$$\{\Psi\}_s^T = (\xi_1\eta_1\zeta_1\xi_2\eta_2\zeta_2 \cdots \xi_n\eta_n\zeta_n)_s =$$

$$(\psi_1\psi_2\psi_3 \cdots \psi_{3n})_s$$

In the rotating system (x, y, z)

$$\{Q\}_s^T = (x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \cdots x_ny_nz_n) =$$

$$(q_1q_2q_3 \cdots q_{3n})_s$$

Where the subscript s designates the d.o.f. of the crankshaft and for the supports the subscript is b

$$\xi_i = \psi_{3i-2} \qquad x_i = q_{3i-2}$$

$$\eta_i = \psi_{3i-1} \quad \text{and} \quad y_i = q_{3i-1}$$

$$\zeta_i = \psi_{3i} \qquad z_i = q_{3i}$$

Deriving the potential and kinetic energies of the elastic members, (crankshaft and supports), and applying the Lagrangian equation, the following equations of motion result:

$$M_i^s[\ddot{x}_i - 2\omega\dot{y}_i - \omega^2 x_i] + 2k_i[x_i - e_i^x] + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_j = P_{is}^x \quad (10)$$

$$M_i^s[\ddot{y}_i - \omega^2 y_i] + 2k_i[y_i - e_i^y] + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_j = P_{is}^y \quad (11)$$

$$M_i^s[\ddot{z}_i] + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_j = P_{is}^z \quad (12)$$

$$M_i^b[\ddot{e}_i^x - \ddot{x}_i - \omega^2(x_i - e_i^x)] + k_i[x_i - e_i^x] = P_{ib}^x \quad (13)$$

$$M_i^b[\ddot{e}_i^y - \ddot{y}_i - \omega^2(y_i - e^y)] + k_i[y_i - e_i^y] = P_{ib}^y \quad (14)$$

These equations are expressed using the degrees of freedom of the crankshaft in the rotating coordinate system and also in terms of the eccentricities of the journals with respect to the bearings in the rotational system.

The solution of this system of equations is not trivial due to the nature of the system once the loads derived from the pressure distribution generated in the bearings are incorporated in the right hand side of Equations (10) through (14).

NUMERICAL PROCEDURE

In order to carry out the analysis of the system and the solution of the equations previously formulated, it is necessary to make use of the fact that the crankshaft can be macrodiscretized into a number of substructures which have similar characteristics. Each substructure (crankthrow) is then discretized using a finite element model such as the one shown in Figure 5. The equation describing the static equilibrium of this substructure written in matrix form is:

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (15)$$

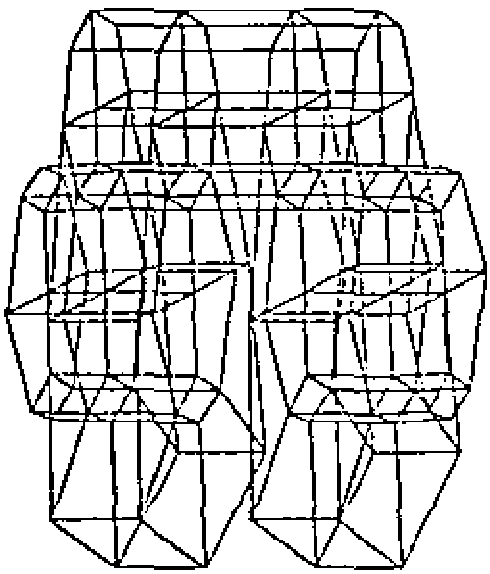


Fig. 5 Finite Element Model of a Crankthrow as a Substructure

where [K] is the stiffness matrix of the substructure and {X} is the vector of displacements of the nodes or degrees of freedom and {F} is the vector of loads acting on the substructure.

To introduce the mass distribution of the crankshaft, the mass matrix can be incorporated so that:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \tag{16}$$

It will be assumed that the internal damping can be neglected.

Considering that the load is harmonic with circular frequency of ω, then Equation (16) can be reduced to:

$$[D]\{X_o\} = \{F_o\} \tag{17}$$

where [D] is the "dynamic stiffness matrix" given by

$$[D] = [K] - \omega^2[M] \tag{18}$$

In order to synthetize all the substructures, the finite element-transfer matrix method can be applied. To do this, the vectors of displacements and loads can be partitioned as follows:

$$\{X_o\} = \begin{Bmatrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \{F_o\} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_I \\ F_R \end{Bmatrix} \tag{19}$$

Then, by following the formulation given in (12), the final expression for the transfer matrix can be obtained in the form:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & S_1 \\ T_{21} & T_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

Which written in a more compact form becomes:

$$\{Z_R\} = [T_1]\{Z_L\} \tag{21}$$

This equation is the transfer matrix relationship between state vectors $\{Z_R\}$ and $\{Z_L\}$ which contain both the displacements and the loads acting on the interfaces of the substructure. By changing the subscripts to 1 and 2 instead of L and R, a second substructure can be added by considering the following standard relationships as described by Pestel and Leckie [13]:

$$\{Z_3\} = [T_2]\,[T_1]\,\{Z_1\} \tag{22}$$

In this equation, $[T_1]$ and $[T_2]$ are the transfer matrices of the first and second substructures and more substructures can be assembled by multiplying the transfer matrices in the corresponding order.

It should be noted that the main advantage of this scheme is that by multiplying the matrices $[T_1]$, $[T_2]$, etc., the size of the matrices does not increase but remains compatible with the order of the matrices being multiplied.

The state vectors $\{Z_i\}$ contain the loads and displacements of the interfaces of the substructures. These in turn are the reactions and the displacements of the journals of the crankshaft where the interfaces were designated. From Equation (20) the following two expressions can be obtained to express the reactions on the main journals assuming that the corresponding displacements are known:

$$\{F_i^k\} = [T_{12}^k]^{-1}\left[\{X_{i+1}\} - [T_{11}^k]\{X_i\} - \{S_1^k\}\right] \tag{23}$$

$$\{F_{i+1}^k\} = [T_{21}^k]\{X_i\} + [T_{22}^k]\{F_i^k\} + \{S_2^k\} \tag{24}$$

where the superscripts k indicate that the vectors are obtained based on the transfer matrix of the k^{th} crankthrow. The net force on the bearings can be obtained by algebraically adding the contribution of each degree of freedom in the corresponding direction and through the displacements of the supports using the flexibility matrix of Equation (5).

The instantaneous velocities of the journal centers in the bearing clearance circle can be approximated using Booker's equations [10, 11] which have the following form:

$$\frac{de^x}{dt} = \frac{|F|}{LD}\,\frac{c/r}{\mu/c}\,(M^x) - \bar{\omega}(e^y) \tag{25}$$

$$\frac{de^x}{dt} = \frac{|F|}{LD}\,\frac{c/r}{\mu/c}\,(M^y) + \bar{\omega}(e^x) \tag{26}$$

where (M_x) and (M_y) are known as the mobility functions and are functions of the bearing characteristics and the eccentricities of the journals with respect to the bearings. The explicit form of these mobility functions which apply to finite bearings are given by Booker [14] and were developed by Moes [15].

Equations (25) and (26) allow the determination of the instantaneous velocities of the journals in the bearings in the plane perpendicular to the axis of the shaft. By extrapolating these velocities through an increment of time, Δt, a new position can be found which can be used to determine a new set of loads which will generate a new set of journal velocities.

COMPUTER ALGORITHM

The computational algorithm consists of an iterative procedure which yields a cycle of displacements and loads of the journals of the crankshaft in such a way that the elasto-hydrodynamic behavior of the system can be approximated. Once the transfer matrix has been derived for each harmonic component of the loads acting on the crankpin of each substructure, complete calculations are performed and the following steps define the algorithm:

1) Initiate with an arbitrary eccentricity of each journal in the bearings and take these eccentricities as the absolute displacements of the journals of the crankshaft.
2) Determine the loads acting on the journals which, combined with the instantaneous loads on the crankpin, are compatible with the eccentricities and displacements of the previous step, using Equations (23) and (24).
3) Determine the loads on the bearings using the following relationship

$$\{R_i\} = \{F_i\}^k - \{F_i\}^{k-1} \tag{27}$$

4) Compute displacements on the journals for the loads just found using Equations (4) and (5).
5) Once the displacements of the bearings and the displacements of the journals are known, the eccentricities can be found by the vectorial difference of these displacements. Thus,

$$\{e\} = \{B\} - \{J\} \tag{28}$$

where $\{e\}$ is the vector of eccentricities, $\{B\}$ is the vector of bearing displacements and $\{J\}$ is the vector of journal displacements.
6) Determine the instantaneous velocities of the journals in the bearings using Equations (25) and (26).
7) Extrapolate the displacements of the journals through an increment of time Δt and find a new absolute position using an extrapolating scheme, such as the Adam's formulas [16], mainly:

$$e_{i+1} = e_i + \frac{1}{2}\Delta t\,(3\dot{e}_i - \dot{e}_{i-1}) \tag{29}$$

8) Rotate the position of the crankshaft with respect to the support through an angle of $\omega\Delta t$ and calculate the new loads from the connecting rods on the crankpin.
9) Repeat steps 2 through 8 until one cycle 4π is completed.
10) Repeat steps 2 through 9 until convergence is achieved. In this step, convergence is achieved when the cycle of loads is identical to the previous cycle within certain margins.

The algorithm just described is shown in the form of a block diagram in Figure 6.

APPLICATION TO A REAL SYSTEM

The computational procedure developed in this study was applied on a crankshaft-bearing system, the main characteristics of which are given in Tables 1, 2 and 3. In this application, the loads on the crankpin were resolved into Fourier components and only the first 6 components were considered in the approximation.

The load cycles for main bearings 1, 2 and 3 are shown in Figures 7 through 12 for two cases. In the first, the mass of the crankshaft is not considered and in the second the mass is introduced by using the dynamic stiffness matrix of Equation (18).

CONCLUSIONS

From the results obtained in this analysis and based on the previous attempts for this type of system, the following conclusions can be drawn:

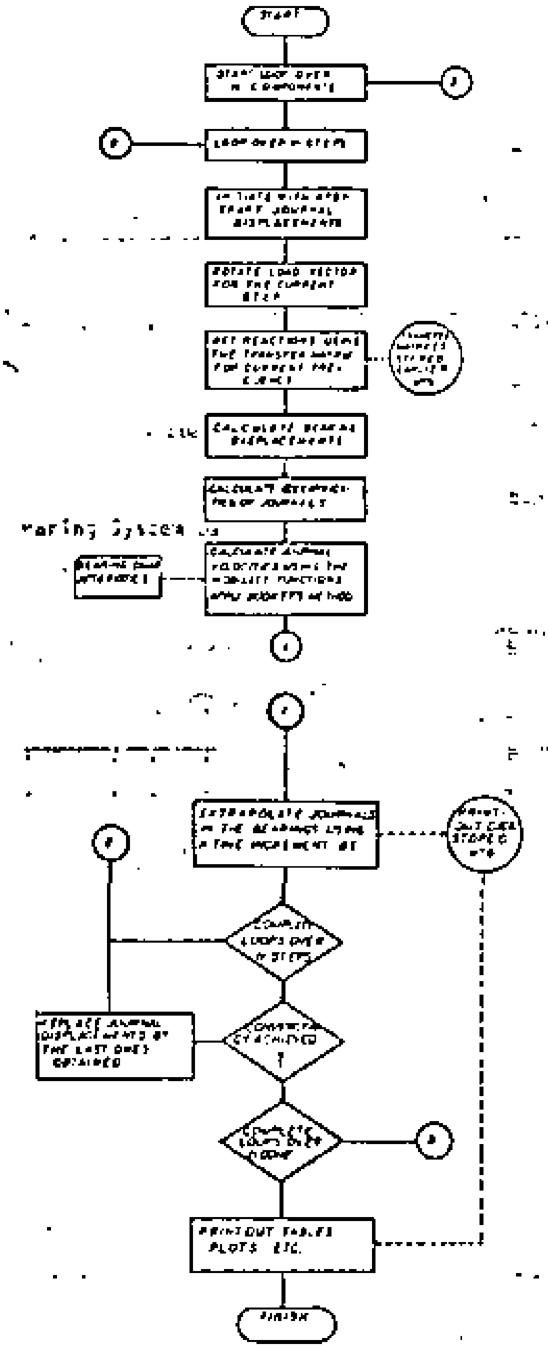


Fig. 6 Flowchart of Computer Algorithm

1) The incorporation of the mass distribution of the crankshaft in the analysis has a considerable effect on the calculation of the loads on the main journals, yielding loads which are approximately 12.5% and 22% smaller for main bearings 1 and 2 and approximately 7% greater for main bearing 3. This can be seen in the Figures 7 through 12.
2) The loads on the bearings, combined with the loads on the crankpins and the displacements of the journals, can be used to perform the stress analysis using the matrices obtained in Equation (15) for the finite element model.
3) The method developed here incorporates for the first time the mass distribution of the crankshaft to carry out the analysis.

BEARING NO	1	2	3	4	5
DIAMETER (in)	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87
LENGTH (in)	1.40	1.0	1.1	1.0	1.40
RADIAL CLEARANCE (in)	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035
FIRING ORDER	1	3	4	2	
OIL VISCOSITY	4.9 x 10⁻⁶				
CRANKSHAFT SPEED	1400 R.P.M.				

Table 1 Crankshaft-Bearing System Data

CRANK NO	1	2	3	4
PHASE ANGLE	0	540	180	360
STROKE (in)	4.125			
WEB THICKNESS (in)	1.1	(average)		
CRANKPIN DIA. (in)	2.25			
CRANKPIN LENGTH (in)	1.04			
MAIN JOURNAL DIA. (in)	2.87			
MAIN JOURNAL LENGTH (in)	1.40			

Table 2 Crankshaft Geometry Data

CRANK ANGLE	RADIAL FORCE	TANGENTIAL FORCE	CRANK ANGLE	RADIAL FORCE	TANGENTIAL FORCE
0	9273	0	370	-798	-148
10	15757	3661	380	-311	-753
20	9664	4454	390	-447	-311
30	6482	4529	400	-456	-372
40	2211	2945	410	-375	-279
50	793	2703	420	-595	-374
60	271	1704	430	-597	-54
70	-43	1376	440	-171	54
80	-374	1139	450	-215	351
90	-461	969	460	-296	213
100	-513	798	470	-382	96
110	-485	432	480	-421	101
120	-753	567	490	-487	110
130	-737	447	500	-499	113
140	-779	181	510	-519	104
150	-514	136	520	-510	88
160	-430	88	530	-518	63
170	-536	43	540	-517	8
180	-533	0	550	-516	-43
190	-636	-43	560	-518	-88
200	-636	-88	570	-511	-130
210	-614	-136	580	-444	-173
220	-499	-173	590	-494	-213
230	-487	-212	600	-431	-371
240	-481	-236	610	-477	-391
250	-362	-430	620	-415	-441
260	-799	-213	630	-338	-475
270	-726	-152	640	-242	-450
280	-195	-58	650	-164	-466
290	-342	96	660	-78	-495
300	-726	171	670	64	-1199
310	-325	279	680	464	-1738
320	-468	127	690	1454	-3144
330	-462	317	700	2811	-3998
340	-717	253	710	5858	-1986
350	-758	149			
360	-829	0			

Table 3 Radial and Tangential Loads on the Crankpin

LOAD CYCLE ON MAIN BEARING 1

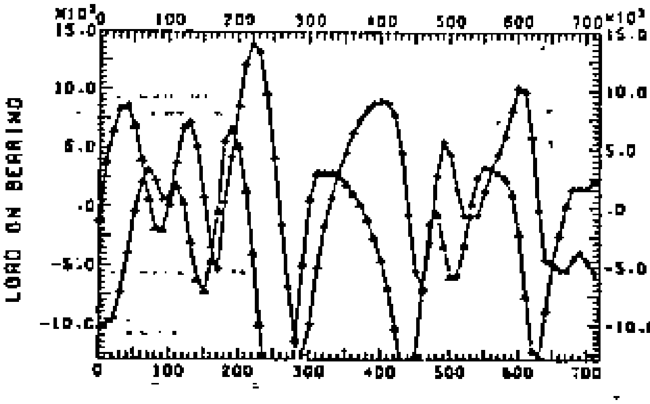


Fig. 7 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 1, Crankshaft Without Mass

LOAD CYCLE ON MAIN BEARING 2

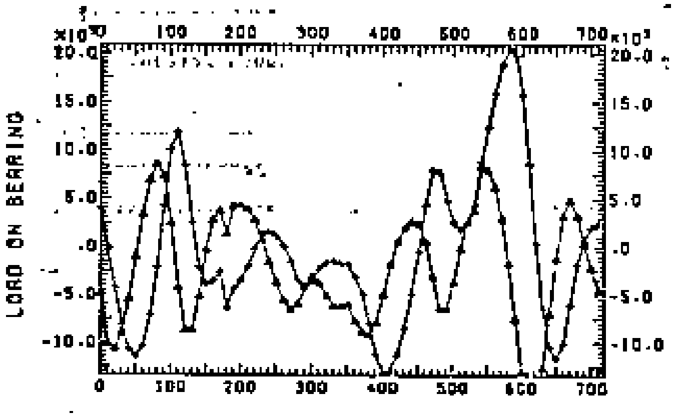


Fig. 8 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 2, Crankshaft Without Mass

LOAD CYCLE ON MAIN BEARING 3

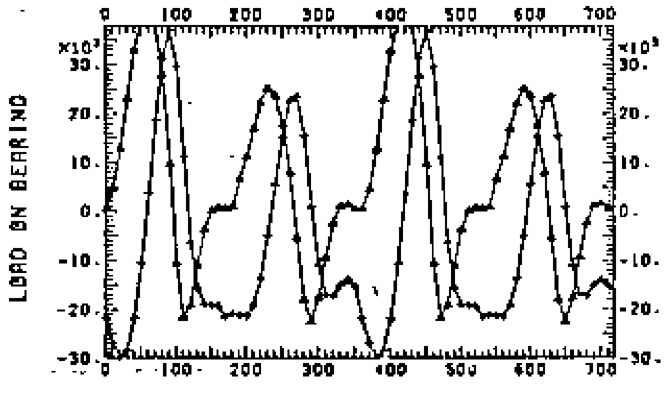


Fig. 9 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 3, Crankshaft Without Mass

4) The application of the finite element-transfer matrix method to this problem allows the detailed representat..n of the crankshaft structure without resulting in large system matrices. This fact increases the efficiency of the method which allows the stress analysis using the same

mod.' and results obtained in the elasto-hydro-dyn..ic analysis.

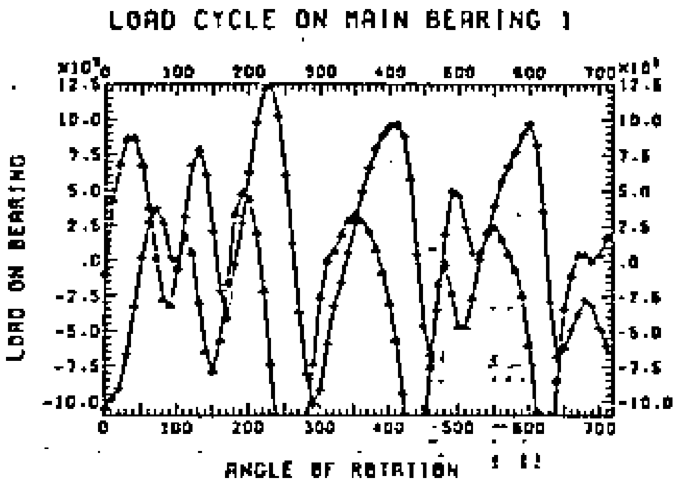


Fig. 10 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 1, Crankshaft With Mass

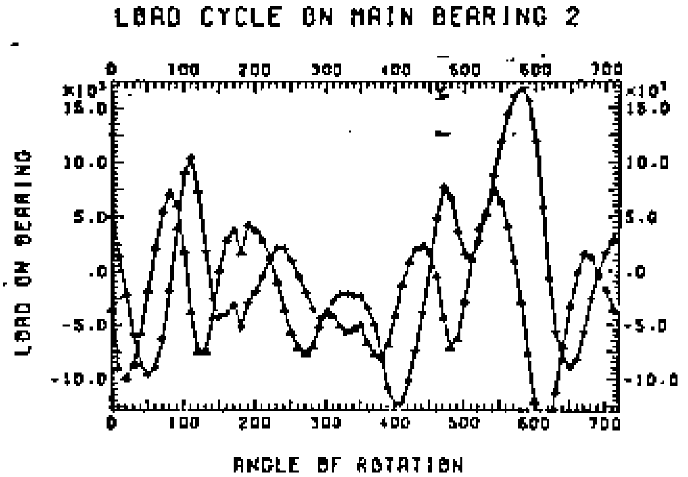


Fig. 11 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 2, Crankshaft With Mass

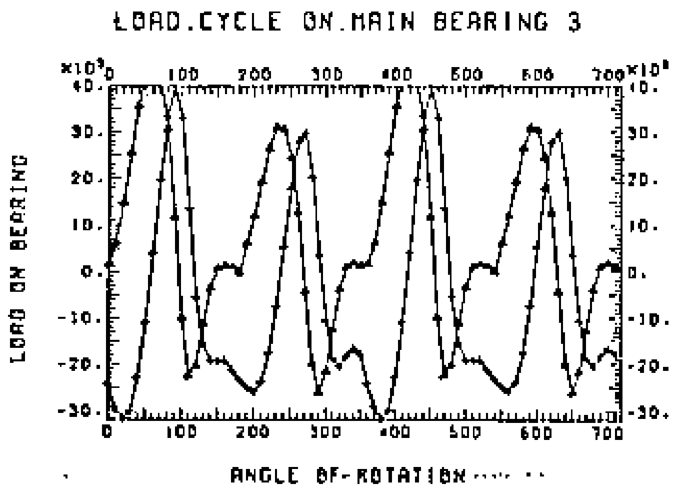


Fig. 12 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 3, Crankshaft With Mass

Recommendations for future work in this area may include the consideration of the rotational degrees of freedom in the system in order to obtain moments on the journals and also to consider the Coriolis components of the acceleration given in Equation (10) which was dropped by rotating the supports around the crankshaft instead of d*ing the opposite.

Also, some parametric analysis would allow the determination of the effect of some additional geometrical parameters on the systems' behavior.

REFERENCES

1. Lowell, C.M., "A Rational Approach to Crankshaft Design," presented by the Gas and Power Division of ASME, Chicago, Ill., Nov. 13-18, 1955, ASME Paper No. 55-A-57.

2. Eshleman, R.L., "Torsional Response of Internal Combustion Engines," Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, May 1974, pp. 441-449.

3. Ross, J.M., and Slaymaker, R.R., "Journal Center Orbits in Piston Engine Bearings," SAE Paper No. 690114, 1969.

4. Mucino, V.H., "Analysis of Multicylinder IC-Engine Crankshafts with Hydrodynamic Bearings Using a Finite Elements-Transfer Matrix Approach," Doctoral Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Wisconsin--Milwaukee, May 1981.

5. Gross, W., and Hussmann, W., "Forces in the Main Bearings of Multicylinder Engines," Trans. SAE, 1966, Paper 660756.

6. Von Schnurbein, E., "A New Method of Calculating Plain Bearings of Statically Indetermined Crankshafts," Trans. SAE, Vol. 79, 1970, Paper 700716.

7. Holland, J., "Contributions to the Investigation of Lubricating Conditions in Internal Combustion Engine," VDI Forsch, p. 475, 1959.

8. Holzer, H., "Die Bereschnung der Drehschwingungen," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1921, Republished by J.W. Edwards, Pub. Inc., Ann Arbor, Michigan.

9. Stickler, A.C., "Calculation of Bearing Performance in Indeterminate Systems," Ph.D. Dissertation, Cornell University, Dept. of Mechanical Engineering, 1974.

10. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution," Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, Series D, Vol. 87, Sept. 1965, p. 537.

11. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Maximum Film Pressure," Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, July 1969, p. 534.

12. Mucino, V.H., and Pavelic, V., "An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach," Journal of Mechanical Design, ASME PAPER No. 80-C2/DET-123, 1980.

13. Pestel, E.C., and Leckie, F.A., Matrix Methods in Elastodynamics, McGraw-Hill, N.Y., 1963, p. 148.

14. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method," Trans. ASME, Journal of Lubrications Technology, January, 1971, p. 168.

15. Moes, H., Discussion, I. Mech. E, 1969 Tribology Convention, Gothenburg, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 183, Part 3P, 1968-1969, p. 205.

16. Shaupine, L.F., and Gordon, M.K., Computer Solution of Ordinary Differential Equations, W. H. Freeman and Co., San Francisco, California, 1975, Ch. 3, p. 45.

AN ASME PUBLICATION
$3.00 per copy $1.50 to ASME Members

80-C2/DET-123

THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS
345 E 47 St., New York, N.Y. 10017

An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach

V. H. Mucino
Research Asst.,
Department of Mechanical Engineering,
Assoc. Mem. ASME

V. Pavelic
Professor of Mechanical Engineering,
Mem. ASME

The main objective of this study is to describe a new scheme to carry out the static or dynamic analysis of elastic systems using a combined Finite Element-Transfer Matrix Approach. The proposed scheme offers the advantage of automatic matrix size reduction without having to truncate degrees of freedom, and preserving the strain and kinetic energy throughout the condensation. Although limited to chain-like elastic systems, the method is generalized to non-repetitive configurations with substructures having intermediate active degrees of freedom.

Introduction

The analysis of large and complex systems often requires a discretization so refined that the resulting stiffness and mass matrices become too large for the computer to handle. To overcome this difficulty, several "reduction techniques" have been proposed, having as primary objective the size reduction of the system matrices, through a truncation of degrees of freedom (d.o.f.), which involves the selection of certain "master" and "slave" d.o.f., also known in literature as retained and truncated d.o.f., respectively.

Guyan [1] is credited with establishing the concepts involved in performing the reduction, which is based upon the assumption that for dynamic analysis, the kinetic energy of the lower frequency modes is less sensitive to the truncation than the kinetic energy of the higher frequency modes, while the strain energy is preserved through the truncation.

In this procedure, the problems involved are two-fold; first, the results are dependent on the ability and experience of the analyst, to arbitrarily select the master d.o.f. in such a way that the motion of the principal modes can be characterized adequately by the retained d.o.f., and second, that the truncation modifies to an extent the distribution of the inertial properties of the structure, which in turn introduces some error in the results obtained. Further, no criteria currently exists to relate the number and location of the retained d.o.f. and the error introduced by the truncation. Common sense, experience and technical intuition in some cases are about the only possible tools to come up with an efficient truncation, unless the problem in hand is fairly simple. However, for practical purposes, even though these techniques are used, they produce limited success results.

The idea of matrix condensation lends itself particularly well to the concept of substructuring, which involves the "Macrodiscretization" of a large system into a set of subsystems known as substructures, which in turn are discretized using a finite element method, having as its main purpose to extract the most significant modes and to assemble the system as a whole in terms of the principal modes of each substructure. This area received significant attention in the aerospace industry and is well documented under the subject of "Modal Synthesis Techniques." Hurty [2], Bamford [3] and Goldman [4], among others, have developed extensive studies in this area and the theory need not be repeated here.

These techniques have been well adapted to the present finite element practice, and several codes, such as NASTRAN [5], ANSYS [6] and SUPERB [7], among others, offer the features of "substructuring" and "dynamic condensation."

It is to be noted that the use of these techniques is primarily directed towards the dynamic analysis area, in which not only the stiffness matrix is stored, but also, the mass, and in some cases, the damping matrices are stored, thus reducing the problem size memory storage capacity requirements to enhance the computer analysis work.

While matrix methods of analysis have significantly contributed to the development of these techniques, particularly the "Direct Stiffness Method" [8], upon which the finite element method is based, other methods have not enjoyed the same degree of application, but may potentially be proved useful for the analysis of structures. Such is the case for the "Transfer Matrix Method" [9], which can be viewed as a continuity function for an enclosed system with transferable boundaries. Its advantages and limitations are documented by Dimarogonas [10] and Eshleman [11], but it has had some successful applications for very particular types of problems, as have the studies published by Prohl [12], Leckie [13], and Lin and McDaniel [14].

Contributed by the Design Engineering Division of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS for presentation at the Century 2 Design Technology Transfer Conference, San Francisco, Calif., Aug. 19-21, 1980. Manuscript received at ASME Headquarters March, 1980. Paper No. 80-C2/DET-123.

Copies will be available until May 1981.

The generalization achieved by the finite element method and the correspondence or correlation between the "Direct Stiffness" and the "Transfer Matrix" methods prompted various researchers to investigate the possibility of combining the advantages of both methods. Pestel and Leckie [15], treated the field transfer matrix as a different way of expressing the stiffness matrix. Later Dokainish [16] presented a combined Finite Element-Transfer Matrix (FE-TM) Method for the dynamic analysis of tapered or rectangular plates. In his approach, a finite element formulation was used to obtain the stiffness and mass matrices for a strip of elements whose boundaries were successively connected and whose end boundaries were characterized by state vectors, as defined in the standard transfer matrix method. Then a transformation of matrices was performed as described by Pestel and Leckie [15] and an algorithm similar to that proposed by Holzer [17] was used to successively solve for the natural frequencies of the system. McDaniel and Eversole [18] followed a similar approach to treat a stiffened plate structure and gave some numerical values of merit in the computing time efficiency of the algorithm as compared with regular finite element formulation without condensation.

In this paper a further generalization for the FE-TM method is presented with special emphasis on the non-repetitive configuration, but still chain-like type of structures, without restricting the substructures to be of the same nature. A special feature, described herein, is the treatment given to the intermediate d.o.f. which are condensed into a more compact form rather than regarding them as slave or truncated d.o.f. Condensation in this sense implies that all the d.o.f. contribute to both kinetic and strain energy.

Theory

The Equations of Motion. The equations of motion of any elastic structure able to store energy in terms of elastic and inertial properties can be obtained from the applicable form of the Lagrange equation as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]-\frac{\partial L}{\partial x_i}=Q_i \qquad (1)$$

Where the Lagrangian function (L) is given by the following expression:

$$L=1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\dot{X}_i\dot{X}_j-1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}X_iX_j \qquad (2)$$

In this expression, it is assumed that the characteristics of the system can be approximated by expressing the kinetic energy (first term), and the strain energy (second term) in terms of a finite number (n) of generalized coordinates of d.o.f.

The substitution of equation (2) in equation (1) yields the resulting equations of motion, which expressed in matrix notation have the following general form:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=\{F(t)\} \qquad (3)$$

Systems Matrices and Substructures. In finite element practice, the mass matrix $[M]$ can be formulated using a lumped mass approach as described by Bisplinghoff et. al. [19]. This formulation results in a diagonal matrix.

Also, a consistent mass formulation can be used to describe the distributed mass properties of the system. Archer [20] introduced the concept of consistent mass matrix, and gave it a physical interpretation analogous to that of the stiffness matrix. The later approach results in a banded matrix and the natural frequencies obtained using this consistent mass formulation are upper bounds to the exact frequencies of the system.

The formulation of the equations of motion using either a lumped or consistent mass matrix, generally satisfy the requirements of minimum potential energy. The explicit form of the equations of motion is as follows:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_n\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{n2} \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_n\end{Bmatrix} \qquad (4)$$

This system of equations is applicable to any elastic structure if damping can be neglected. If finite elements are used to discretize the overall structure, and the system is composed of several substructures, the overall system matrices have the following form:

Nomenclature

- $\dfrac{\partial}{\partial t}$ = partial derivative with respect to time
- $\dot{x}_i, \dot{x}_j$ = generalized velocities
- x_i, x_j = generalized coordinates
- Q_i = generalized forces
- L = Lagrangian function
- $\{\ddot{X}\}, \{X\}$ = vector of generalized (accelerations, displacements)
- $\{\ddot{X}_m\}, \{X_m\}$ = vector of (accelerations, displacements) of master d.o.f.
- $\{\ddot{X}_s\}, \{X_s\}$ = vector of (accelerations, displacements) of slave d.o.f.
- $\{X_L\}, \{X_R\}$ = vector of d.o.f. of the (left, right) boundaries of a substructure
- $\{X_I\}$ = vector of intermediate d.o.f. of a substructure
- m_{ij} = mass coefficient associated with generalized coordinates "i" and "j"
- $[M]$ = global mass matrix
- $[M_{mm}]$, $[M_{ms}]$ $[M_{sm}]$, $[M_{ss}]$ = partitions of the global mass matrix corresponding to the master and slave d.o.f.
- K_{ij} = stiffness coefficient associated with generalized coordinates "i" and "j"
- $[K]$ = global stiffness matrix
- $[K_{mm}]$, $[K_{ms}]$ $[K_{sm}]$, $[K_{ss}]$ = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the master and slave d.o.f.
- $[K_{LL}]$, $[K_{LR}]$ $[K_{RL}]$, $[K_{RR}]$ = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the left and right boundaries d.o.f.
- R = order of the global stiffness matrix
- r_i = order of the substructure "i" stiffness matrix
- d.o.f. = number of degrees of freedom per node
- N = number of nodes at the interfaces

11 21

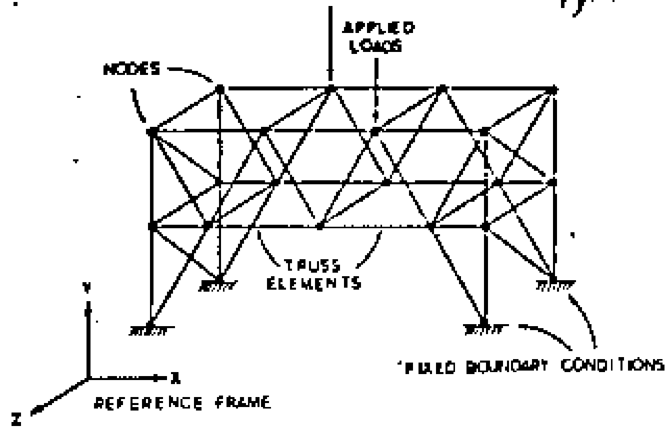


Fig. 1 Multidegree of freedom general structure with constrained boundary conditions and applied load vectors

$$\begin{bmatrix} [M_1] & \\ & [M_2] \end{bmatrix}_{r\times r} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_I \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix}_{r\times 1} + \begin{bmatrix} [K_1] & \\ & [K_2] \end{bmatrix}_{r\times r} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_I \\ X_2 \end{Bmatrix}_{r\times 1} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_I \\ f_2 \end{Bmatrix}_{r\times 1} \quad (7)$$

where:

$\{X_i\}$ are the degrees of freedom associated with subsystem "i" only $i = 1,2$ and $\{X_I\}$ are the degrees of freedom connecting the two substructures.

For the example used here, the order of the global matrices is given by the following relationship.

$$R = r_1 + r_2 - (\text{d.o.f.}) \times N \quad (8)$$

where:

r_i is the order of the ith substructure matrix, $i = 1,2$, N is

$$[M] = \begin{bmatrix} [m_1] & & \\ & [m_2] & \\ & & \ddots \; [m_n] \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [K] = \begin{bmatrix} [k_1] & & \\ & [k_2] & \\ & & \ddots \; [k_n] \end{bmatrix} \quad (5)$$

The overlap between the blocks represents the common boundaries between two adjacent substructures. Physically, the overlap between matrices represents the degrees of freedom connecting the two subsystems.

The order of these matrices is directly given by the total number of d.o.f. in the overall system. As an example, consider the structural system shown in Fig. 1.

If a lumped mass matrix is used, and no damping is assumed, the equations describing the motion of the structure under a harmonic driving force are as follows:

$$[M]_{r_1\times r_1}\{\ddot{X}\}_{r_1\times 1} + [K]_{r_1\times r_1}\{X\}_{r_1\times 1} = \{f\}_{r_1\times 1} \quad (6)$$

If the system as shown in Fig. 1 is assembled to another alike system, as shown in Fig. 2, such that some nodes are common to both systems, the resulting equations become:

the number of nodes at the interface and d.o.f. is the number of degrees of freedom per node.

In general, the substructures do not have to be of the same order, and several substructures can be assembled following the same procedure. The general expression for the order of the global matrices of the chain-like system shown in Fig. 3 is given by:

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{d.o.f.})_i \times N_i \quad (9)$$

It should be noted that the interfaces may or may not have the same number of nodes. The important fact to note here is that the more substructures there are in the system, the larger the order of the system matrices will be. This is not the case for the proposed method described in the following sections.

Nomenclature (cont.)

- $\{F(t)\}$ = vector of applied time dependent forces
- $\{F_m\}\{F_s\}$ = vector of forces associated with (master, slave) d.o.f.
- $\{F^*\}$ = reduced vector of applied forces after condensation
- $\{F_L\}\{F_R\}$ = vectors of forces for the (left, right) boundary d.o.f.
- $\{F_I\}$ = vector of forces at the intermediate d.o.f.
- $[D]$ = dynamic stiffness matrix
- $[D_{mm}]$ $[D_{ms}][D_{sm}]$ = partitions of the global dynamic stiffness matrix corresponding to the master and slave d.o.f.
- $[D_{ss}]$
- $[D^*]$ = reduced dynamic stiffness matrix after condensation
- $[T_i]$ = transfer matrix of substructure i
- $[T_{11}]$ $[T_{12}][T_{21}]$ = partitions corresponding to the overall transfer matrix of a substructure with active intermediate d.o.f.
- $[T_{22}]$
- $Z_R\,Z_L$ = state vectors of the (right, left) boundaries
- $[A][B][C]$ $[D][E][F]$ = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the (left, right and intermediate) d.o.f.
- $[G][H][I]$
- $[\psi_{11}]$ $\{\psi_{21}\}\{\psi_{12}\}$ = partitions of the reduced set of equations after the intermediate d.o.f. have been eliminated in the global system
- $[\psi_{22}]$
- $\{R_1\}$ = vectors of remainder terms after the intermediate d.o.f. have been eliminated in the global system
- $\{R_2\}$
- $\{S_1\}$ = complementary vectors for the extended transfer matrix of equation (32)
- $\{S_2\}$
- w = frequency of vibration

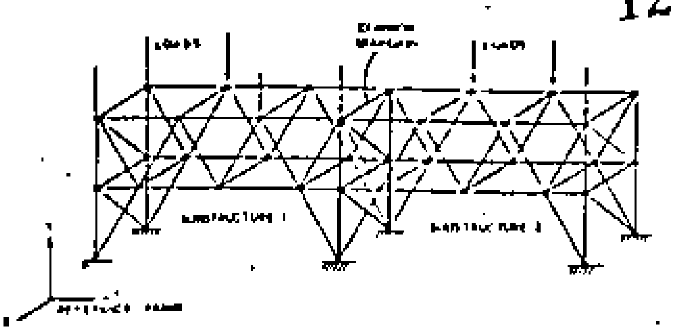


Fig. 2 Superstructure composed of two alike substructures having a common interface boundary

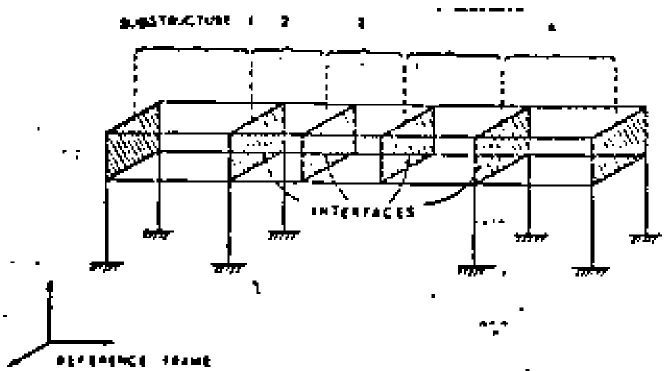


Fig. 3 Multisegmented superstructure with "n" substructures chain-like connected. The substructures are of a non-repetitive nature.

Condensation Techniques. As stated earlier, the condensation of d.o.f. has as its primary objective, the matrix size reduction and is conceptually done in four steps which are:

1 Selection of master set of d.o.f.
2 Partition of the system matrices.
3 Obtaining the solution for the master set of d.o.f.
4 Performing expansion or recovery for slave d.o.f.

The selection of the master set of d.o.f. is generally left to the analyst, who designates certain d.o.f. as being the most representative of the motion of the system. Once the master set has been specified, rearrangement of rows and columns is performed on the mass and stiffness matrices, in order to make the partitions given in the following equation:

$$\begin{bmatrix} Mmm & Mms \\ Msm & Mss \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}m \\ \ddot{X}s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Kmm & Kms \\ Ksm & Ksm \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Xm \\ Xs \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fm \\ Fs \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Where the subscript (m) indicates the terms associated with the "master set" of d.o.f., and subscript (s) indicates the terms associated with the "slave d.o.f." Assuming a harmonic solution, the following expression can be obtained:

$$\left[\begin{bmatrix} Kmm & Kms \\ Ksm & Kss \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} Mmm & Mms \\ Msm & Mss \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Xm \\ Xs \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fm \\ Fs \end{Bmatrix} \quad (11)$$

this equation can be written as follows:

$$\begin{bmatrix} Dmm & Dms \\ Dsm & Dss \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Xm \\ Xs \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fm \\ Fs \end{Bmatrix} \quad (12)$$

or

$$[D]\{X\} = \{F\} \quad (13)$$

Where the matrix $[D]$ is known as the "Dynamic Stiffness Expanding" equation (12), solving for $\{X_s\}$ and substituting, several times, the following system of equations is obtained:

$$[D^*]\{Xm\} = \{F^*\} \quad (14)$$

where

$$[D^*] = [Dmm] - [Dms] \quad [Dss]^{-1} \quad [Dsm] \quad (15)$$

and

$$\{F^*\} = \{Fm\} + [Dms] \quad [Dss]^{-1} \quad \{Fs\} \quad (16)$$

Equation (14) constitutes the "Reduced" set of equations, whose matrix order is dependent on the number of master d.o.f. The expanded solution can be obtained using the recovery equations; these equations are given by the following expression:

$$\{X_s\} = [Dss]^{-1}[\{F_s\} - [Dsm]\{Xm\}] \quad (17)$$

A special case in the condensation results when the master d.o.f. are chosen in such a way that there are no driving forces acting on the slave d.o.f.; in this case equations (16) and (17) become:

$$\{F^*\} = \{Fm\} \quad (18)$$

and

$$\{Xs\} = [Dss]^{-1}[Dsm]\{Xm\} \quad (19)$$

Aside from the inherent approximation in the discretization of the system, the solution expressed by equations (14) and (17) do not fully satisfy the Lagrange equation (1), since the kinetic energy is not minimized, considering the slave d.o.f. This argument is well documented by Guyan [21] and Clough [22], among others. Therefore, the truncation of d.o.f. introduces some error in the results obtained.

The Finite Element-Transfer Matrix Approach

Prior to the discussion and derivation of the proposed method, the fundamental concepts of combining the finite element and the transfer matrix method will be reviewed briefly. A more detailed description can be found in references [15, 16] and [18].

The application of the direct stiffness method to an elastic system subject to a static load vector results in the following equation:

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (20)$$

Now, let's consider the system described by equation (20) as a structure such that the degrees of freedom can be partitioned into "left" and "right" d.o.f. Then equation (20) becomes:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ X_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (21)$$

By expanding this expression and solving for $\{X_R\}$ and $\{F_R\}$ in terms of $\{X_L\}$ and $\{F_L\}$, the following equations can be obtained:

$$\{X_R\} = [-[K_{LR}]^{-1} \ [K_{LL}]] \ \{X_L\} + [K_{LR}]^{-1}\{F_L\} \quad (22)$$

and

$$\{F_R\} = [[K_{RL}] - [K_{RR}] \ [K_{LR}]^{-1} \ [K_{LL}]]\{X_L\}$$

$$+[K_{RR}]\,[K_{LR}]^{-1}\,\{F_L\} \tag{23}$$

which arranged in matrix form become:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -[K_{LR}]^{-1}[K_{LL}] & [K_{LR}]^{-1} \\ \hline [K_{RL}]-[K_{RR}][K_{LR}]^{-1}[K_{LL}] & [K_{RR}][K_{LR}]^{-1} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix} \tag{24}$$

or simplifying the notation, it can be written as follows:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix} \tag{25}$$

or

$$\{Z_R\} = [T]\{Z_L\} \tag{26}$$

Equation (26) can be recognized as the transfer matrix relationship between the state vectors $\{Z_R\}$ and $\{Z_L\}$, which were derived directly from the stiffness relationship between the displacement vector $\{X\}$ and force vector $\{F\}$, given by equation (20).

In this example, only the filed transfer matrix was derived. In a similar manner, the point transfer matrix could be derived.

The Proposed Method of Analysis

Consider now, that the structure to be analyzed is such that it can be broken down into substructures which are chain-like connected as shown in Fig. 4. The substructures have certain number of d.o.f. which are at the interfaces and some which are intermediate between the two interfaces. Then taking the vector of d.o.f. for one substructure, and dividing it into three subsets:

$$X = \begin{Bmatrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{Bmatrix}$$

where

$\{X_L\}$ are the d.o.f. at the left interface
$\{X_I\}$ are the intermediate d.o.f., and
$\{X_R\}$ are the d.o.f. at the right interface

Using this partition in equation (13) applied to one substructure, the following expressions can be written:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_I \\ F_R \end{Bmatrix} \tag{27}$$

solving for the X_I and substituting in the remaining equations, the following expressions are obtained:

$$[[A]-[B][E]^{-1}[D]]\{X_L\}$$

$$+[[C]-[B][E]^{-1}[I]]\{X_R\}+[B][E]^{-1}\{F_I\}=\{F_L\}$$

$$[[G]-[H][E]^{-1}[D]]\{X_L\}$$

$$+[[I]-[H][E]^{-1}[I]]\{X_R\}+[H][E]^{-1}\{F_I\}=\{F_R\} \tag{28}$$

which can also be written in matrix form as follows:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ S_R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} \tag{29}$$

where $[\psi_{ij}]$ and $[R_i]$ are the short hand notation of the matrices in the square brackets of equations (28).

By expanding and rearranging equation (29), it can be shown after various matrix manipulations that the left and right boundaries can be related by the following expression.

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -\psi_{12}^{-1}\,\psi_{11} & \psi_{12}^{-1} \\ \hline \psi_{21}-\psi_{22}\psi_{12}^{-1}\psi_{11} & \psi_{22}\psi_{12}^{-1} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix}$$

$$+\left[\begin{array}{c} -\psi_{12}^{-1}R_1 \\ \hline \psi_{22}\psi_{12}^{-1}R_1+R_2 \end{array}\right] \tag{30}$$

or simplifying the notation:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} \tag{31}$$

where T_{ij} correspond to the terms included in the partitions of the matrix of equation (30).

Adding one dummy equation to the system, i.e., $(1 = 1)$ the following equation can be obtained:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & S_1 \\ T_{21} & T_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{32}$$

which is the expanded transfer matrix relating the state of the left and right boundaries through the intermediate degrees of freedom.

For dynamic analysis, the stiffness matrix $[K]$ can be substituted by the dynamic stiffness matrix given in equations (11) and (13). The procedure then to obtain the transfer matrix is analogous to that just described.

Once the transfer matrix has been formulated for each substructure, the assembly of the system as a whole is made following standard transfer matrix method procedures.

The relation between the left and right interface state vectors, of a substructure in a chain-like connected system is given by equation (32), which in short hand notation has the form of equation (26) repeated here for convenience of the reader.

$$\{Z_R\}_n = [T_n]\{Z_L\}_n \tag{26}$$

When two substructures are linked together, the right interface of substructure (n), becomes also the left interface of substructure $(n+1)$, therefore;

$$\{Z_L\}_{n+1} = \{Z_R\}_n \tag{33}$$

The relationship between state vectors for substructure $(n+1)$ is then

$$\{Z_R\}_{n+1} = [T_{n+1}]\{Z_L\}_{n+1} \tag{34}$$

Combining equations (26), (33) and (34) the equation results;

$$\{Z_R\}_{n+1} = [T_{n+1}][T_n]\{Z_L\}_n \tag{35}$$

In this case, the general expression for the total system with "n" substructures as shown in Fig. 4 is given by

$$\{Z\}_n = [T_n][T_{n-1}][T_2][T_1]\{Z_0\} \tag{36}$$

24

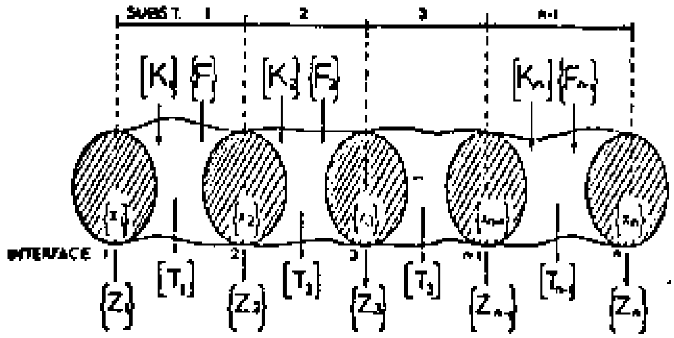


Fig. 4 A chain-like connected system, composed of "n" substructures or stations, with defined stiffnesses $[k]_i$ and applied force vectors $\{F\}_i$ and state vectors $\{Z\}$ defined at the connecting boundaries

or

$$\{Z\}_n = [U]\{Z_0\} \tag{37}$$

where

$$[U] = [T_n][T_{n-1}] \ldots [T_1] \tag{38}$$

It should be noted that by multiplying the transfer matrices $[T_i]$, the order of matrix $[U]$ does not increase but remains compatible with the matrices being multiplied. If the system is such that all substructures have the same transfer matrix the order of the system transfer matrix $[U]$ remains the same.

This feature results in a reduced size matrix which embodies the entire system. The end state vectors $\{Z\}_n$ and $\{Z\}_1$ contain the boundary conditions of the structure in terms of displacements in the direction of the d.o.f. and forces at the nodes located in the interfaces.

Once the system has been assembled, this is when all the transfer matrices have been multiplied as expressed by equation (38). Subsequently the boundary conditions have to be satisfied by solving for the unknown terms in the end state vectors. After the end state vectors are known the intermediate state vectors can be obtained by recursively applying equation (26) until all state vectors are known.

For dynamic analysis, the dynamic stiffness matrix contains the frequency terms. Those frequency values which satisfy the boundary conditions are the natural frequencies for the system. The procedure to obtain the natural frequencies and the modes is similar to that proposed by Holzer [17]. In this method a natural frequency value is assumed for which the system is "treated," where the test consists in multiplying the transfer matrices and observing whether or not the boundary conditions are satisfied. If the boundary conditions are not satisfied, a different "test" frequency must be chosen; and calculations must be repeated, until the boundary conditions are satisfied producing an actual natural frequency of the system. This iterative procedure is shown schematically in the computer flowchart in Fig. 5.

Operational Aspects of the Finite Element-Transfer Matrix Method

Due to the inherent complications of matrix operations, it is necessary to point out some important aspects to be considered in developing a suitable computer algorithm.

The proposed method is oriented towards the analysis of complex systems which can be modeled by means of substructures connected in a chain-like manner, for instance, beams with intermediate supports, bridges, multithrow crankshafts, etc. The complications involved in obtaining the stiffness and mass matrices are directly associated with the type of finite elements used to describe the structure. Several books [23, 24 among others] are available with detailed descriptions of the procedures required to obtain the system matrices of equations (3) and (4).

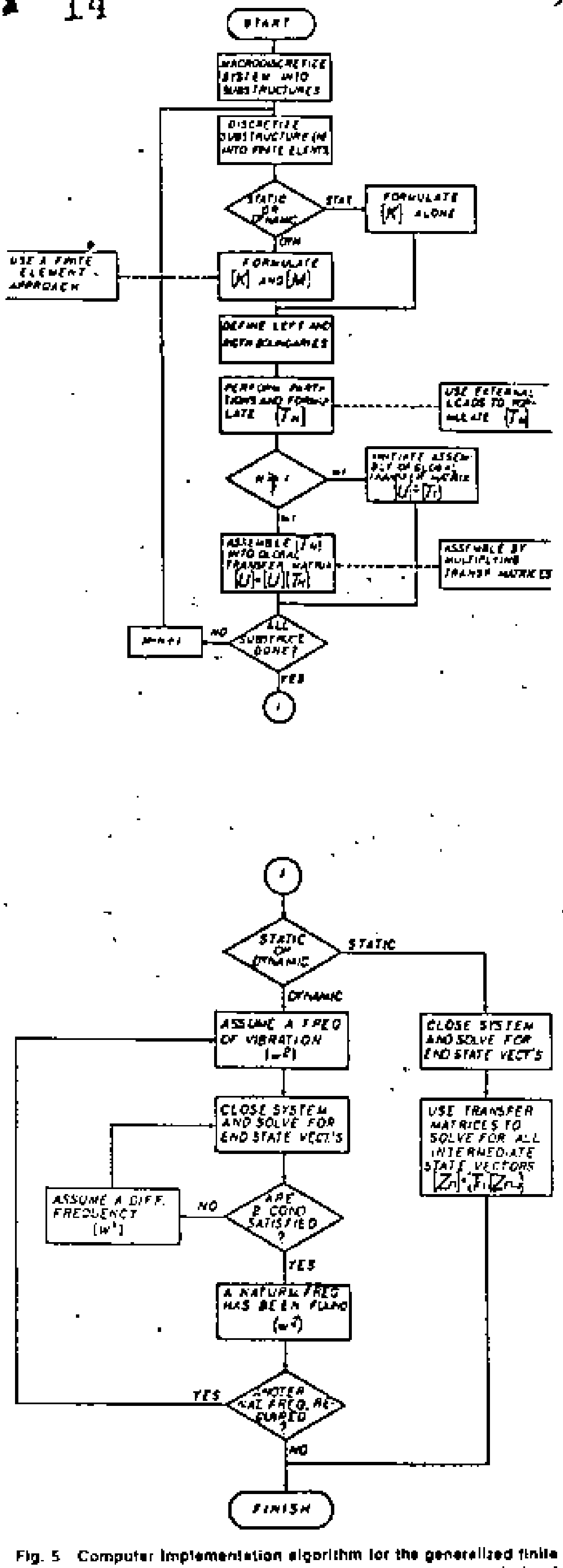


Fig. 5 Computer implementation algorithm for the generalized finite element-transfer matrix method for the static or dynamic analysis of chain-like structures

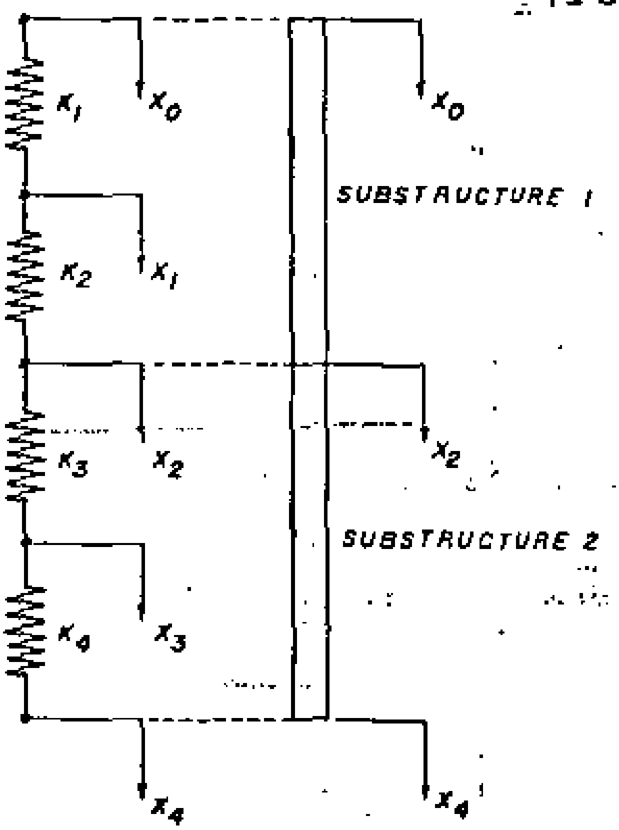


Fig.6 . Simple chain-like system and synthesis by substructuring

The derivation of the transfer matrix for a substructure, however, requires the inversion of submatrix $[E]$ in equation (27) and $[\psi_{12}]$ in equation (30). These inversions are sources of some numerical errors. However, these inversions are done only once for each substructure and are not affected by the load vector. This is an advantage, especially if all the substructures have the same configuration. This is the case in periodic structures such as those treated by Engels and Mairovitch [25]. Note also that the order of these matrices is smaller than the order of the stiffness and mass matrices for a given substructure, since only the intermediate d.o.f. are considered in the matrix to be inverted.

Finally, it can be noted that the matrix $[K]$ is banded and it does not require full storage in the computer memory. It is the assembly of the various substructures that makes storage requirements increase, since the order of the global matrices increases too. In the FE-TM method the substructure matrix $[T_i]$ is fully populated and requires full storage in the computer memory, but the global transfer matrix $[U]$ does not increase in size since it results from consecutive matrix multiplications as indicated by equation (36).

Some other aspects in obtaining the solution of the system are parallel to those involved in standard transfer matrix applications and discussion may be found, for instance, in papers by Pestel and Leckie [9] or [15].

Although the proposed method is oriented towards more complex structures, a simple example is given in the appendix with the purpose of illustrating the treatment of two substructures which have a common boundary and are chain-like connected. In this example, the stiffness matrix $[K]$ is first derived for each element in the substructure and then assembled using the standard direct stiffness method. Subsequently, the transfer matrix $[T]$ is formulated for each substructure by applying the transformations of equations (28), (30) and (32) to the stiffness matrix found earlier. Finally, global transfer matrix $[U]$ is obtained by multiplying the transfer matrices of each substructure.

Treatment of a larger and more complex system is analogous to that described in this example and the use of the finite element method allows more complex elements to be used to discretize the substructures and to obtain the substructure stiffness and mass matrices. Such applications have been done by the authors using 3-D isoparametric solid elements and will be reported in our next papers which are now in preparation.

Summary and Conclusions

A brief description of the currently available condensation and substructuring techniques has been made, pointing out some of the main features of these techniques and how they apply to the actual type of systems addressed in this study. The correlation between the stiffness and transfer matrix for simple elements was discussed, and a generalization of the concept was developed for complex substructures having intermediate active d.o.f. A detailed derivation of the equations involved in the proposed method was made, and a general computer algorithm flowchart (Fig. 5) was presented showing the main steps required for computer implementation of this method for practical applications to an actual physical system.

It is important to note that special attention must be paid to the numerical aspects involved in the matrix operations, in order to reduce the possibility of numerical error.

From inspection of the equations derived, and from the example given in the appendix, the following conclusions can be drawn which apply for chain-like connected systems.

1 Matrix reduction can be achieved by applying the FE-TM approach to the substructures of a system.

2 No selection of Master and Slave degrees of freedom is required in the FE-TM method, thus reducing the possibility of misrepresentation of the system.

3 All the degrees of freedom are included in the formulation of the reduced equations, and no sacrifice is required in approximating the kinetic energy of the system.

4 Intermediate active d.o.f. can be properly condensed, along with any external loads acting on them as shown by equation (28).

5 The advantages of the finite element method apply to the proposed method in terms of discretizing the system using substructures.

6 The advantages of the Transfer Matrix method also apply to the proposed method, specifically the fact that by multiplying the transfer matrices, the order of the resulting matrix does not increase.

Future improvements in this area perhaps will include the formulation of transfer matrices for structures with complex finite elements and in addition, the inclusion of branches in the system may be considered.

Some of this work is already in progress at this institution, specifically, transfer matrix for structures modeled with 3D-solid finite elements.

References

1 Guyan, R. J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *A.I.A.A. Journal*, Vol 3, No 2, Feb 1965, p 380.

2 Hurty, W. C., "Introduction to Modal Synthesis Techniques," Paper No. 1 of ASME Special Publication No. H00072, 1971, *Synthesis of Vibrating Systems*.

3 Bamford, R. M., "A Modal Combination Program for Dynamic Analysis of Structures," Technical Memorandum 33-290, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., July 1967.

4 Goldman, R. L., "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning," *A.I.A.A. Journal*, Vol. 7, No. 6, June 1969, p 1152.

5 MacNeal, R. H., "The NASTRAN Theoretical Manual," (Level 15.5), The MacNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, Ca. 1974.

6 DeSalvo, G. J., and Swanson, J. A., "The ANSYS User's Manual," Swanson Analysis Systems, Inc., Elizabeth, Pa., 1974.

7 SUPERB's User Manual, Structural Dynamics Research Corporation, Milford, Ohio, 1976.

8 Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, N.Y., 1975, p. 138.

9 Leckie, F. A., and Pestel, E., "Transfer Matrix Fundamentals," *Intern. J. Mech. Sci.*, Vol. 2, 1960, pp. 137-167.

10 Dimarogonas, A. D., *Vibration Engineering*, West Publishing Co., N.Y., 1976, p. 436.

11 Eshleman, R. L., *Flexible Rotor-Bearing System Dynamics*, ASME Special Publication, Book No. H00042, 1972.

12 Prohl, M. A., "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors," Transactions ASME, Vol. 67, 1945, pp. A142, A148.

13 Leckie, F. A., "The Application of Transfer Matrices to Plate Vibrations," *Ingenieur-Archiv*, Vol. XXXII, 1963, pp. 100-111.

14 Lin, Y. K., and McDaniel, T. J., "Dynamics of Beam-Type Periodic Structures," ASME, *Journal of Engineering for Industry*, Nov., 1969, p. 1133.

15 Pestel, E. C., and Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, N.Y., 1963, p. 148.

16 Dokainish, M. A., "A New Approach for Plate Vibrations: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique," ASME, *Journal of Engineering for Industry*, May 1972, pp. 526-530.

17 Holzer, H., "Die Berechnung der Drehschwingungen," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1921, Republished by J. W. Edwards, Pub., Inc., Ann Arbor, Mich.

18 McDaniel, T. J., and Eversole, K. B., "A Combined Finite Element-Transfer Matrix Structural Analysis Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, No. 2, 1977, pp. 157-169.

19 Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., and Halfman, R., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., 1955.

20 Archer, J. S., "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems," Proc. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 89, No. ST4, Aug. 1963.

21 Guyan, R. J., "Distributed Mass Matrix for Plate Element Bending," Technical Note, *A.I.A.A. Journal*, Sept. 1964, p. 567.

22 Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, N.Y., 1975, p. 235.

23 Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, N.Y., 1977.

24 Cook, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1974.

25 Engels, R. C., and Meirovitch, L., "Response of Periodic Structures by Modal Analysis."

APPENDIX

Transfer Matrix derivation for the two substructure system shown, Fig. 6.

Stiffness Matrix of Substructure 1:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Stiffness Matrix of Substructure 2:

$$\begin{bmatrix} K_3 & -K_3 & 0 \\ -K_3 & K_3+K_4 & -K_4 \\ 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Assembled Overall System Stiffness Matrix:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & -K_2+K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3+K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Partitions on Substructure 1 Stiffness Matrix for Transfer Matrix Formulation:

$$\left[\begin{array}{c:c:c} K_1 & -K_1 & 0 \\ \hdashline -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ \hdashline 0 & -K_2 & K_2 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} X_0 \\ \hdashline X_1 \\ \hdashline X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ \hdashline f_1 \\ \hdashline f_2 \end{Bmatrix}$$

Therefore

$$\begin{array}{lll} A = K_1 & B = -K_1 & C = 0 \\ D = -K_1 & E = K_1+K_2 & F = -K_2 \\ G = 0 & H = -K_2 & I = K_2 \end{array}$$

Then, using equations (30) and (32)

$$\psi_{11} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad \psi_{12} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad R_1 = -\frac{K_1f_1}{K_1+K_2}$$

$$\psi_{12}^{-1} = -\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}$$

$$\psi_{21} = -\frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad \psi_{22} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad R_2 = -\frac{K_2f_1}{K_1+K_2}$$

and

$$T_{11} = -\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right) = 1 \qquad T_{12} = -\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}$$

$$T_{21} = -\left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right) + \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)\left(\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right) = 0 \qquad T_{22} = \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right) = -1$$

$$S_1 = -\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{-K_1f_1}{K_1+K_2}\right) = -\frac{f_1}{K_2}$$

$$S_2 = \left(\frac{K_2K_1}{K_1+K_2}\right)\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{-K_1f_1}{K_1+K_2}\right) + \left(\frac{-K_2f_1}{K_1+K_2}\right) = \frac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)}$$

The Transfer Matrix for Substructure I is

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{K_1+K_2}{K_1K_2} & \dfrac{f_1}{K_2} \\ 0 & -1 & \dfrac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Therefore

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ f_2 \\ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{K_1+K_2}{K_1K_2} & \dfrac{f_1}{K_2} \\ 0 & -1 & \dfrac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ f_0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

The Global Transfer Matrix is

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ f_4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\dfrac{K_3+K_4}{K_3K_4} - \dfrac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right) & \left(-\dfrac{f_1}{K_2} - \dfrac{K_3+K_4}{K_3K_4}\left(\dfrac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)}\right) - \dfrac{f_3}{K_4}\right) \\ 0 & 1 & \left(-\dfrac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)} + \dfrac{f_3(K_3-K_4)}{K_3+K_4}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ f_0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

NOTAS COMPLEMENTARIAS

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

MAYO, 1984

acio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

- Método Numérico
- Simulador de ecuaciones diferenciales para sistemas lineales y no-lineales
- → Usa una ecuación Integral como base
- → Formulaciones: Variacional y Residuos pesados
- Aplicaciones en la Ingeniería:

Ing. Civil

Estructuras
Mecánica de Suelos
Mecánica de Rocas

Ing. Mecánica

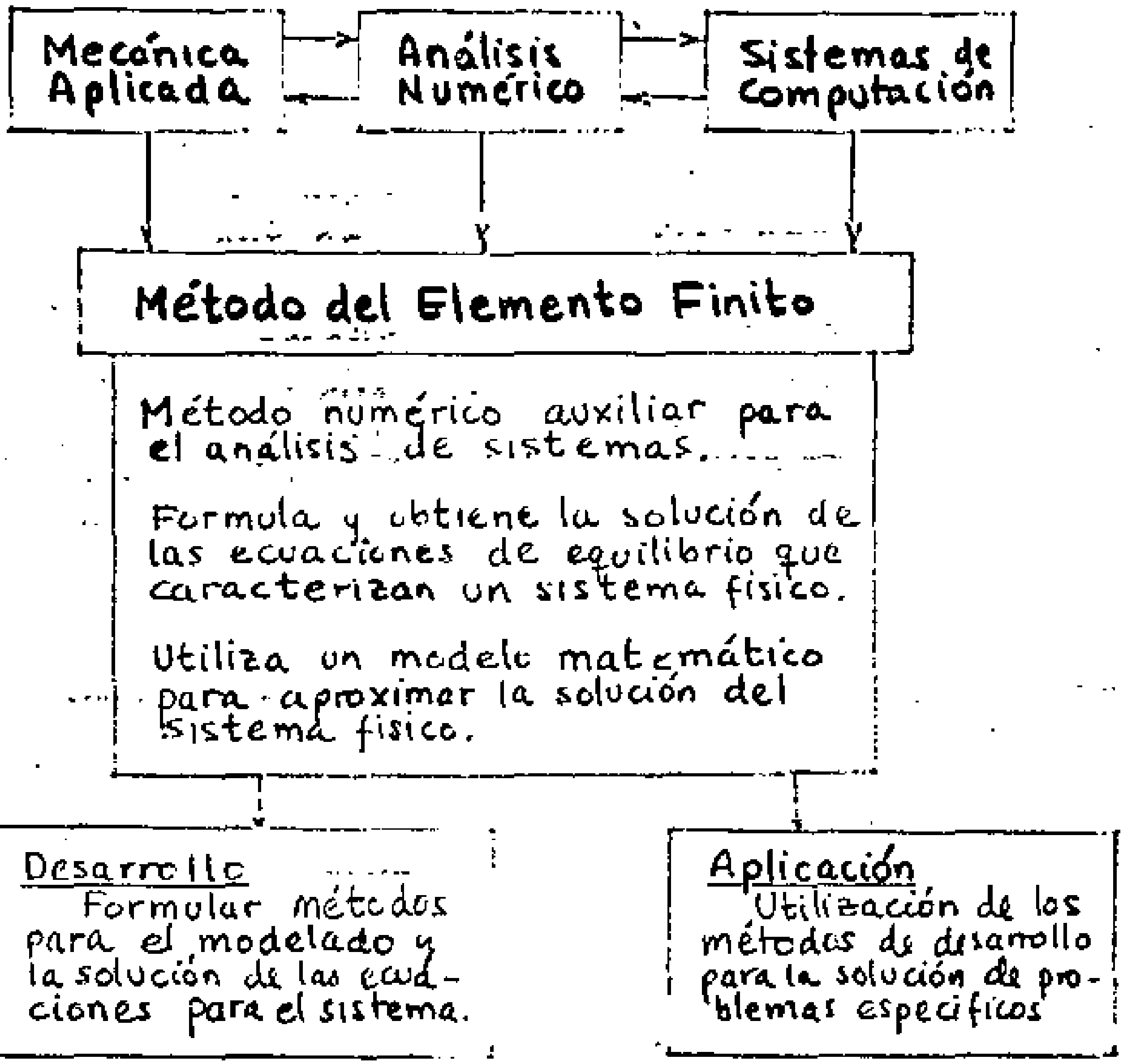
Diseño de elementos de máquina
Concentración de esfuerzos
Análisis de maquinaria (estático y dinámico)
Lubricación

Mecánica Teórica y Aplicada

Fluidos (Potencial, viscoso, medio poroso)
Termicas (transferencia de calor, radiación etc.
Medio Continuo (medio elástico)
Teoría de campos

Etc.

Disciplinas Involucradas en el Desarrollo del Método del Elemento Finito



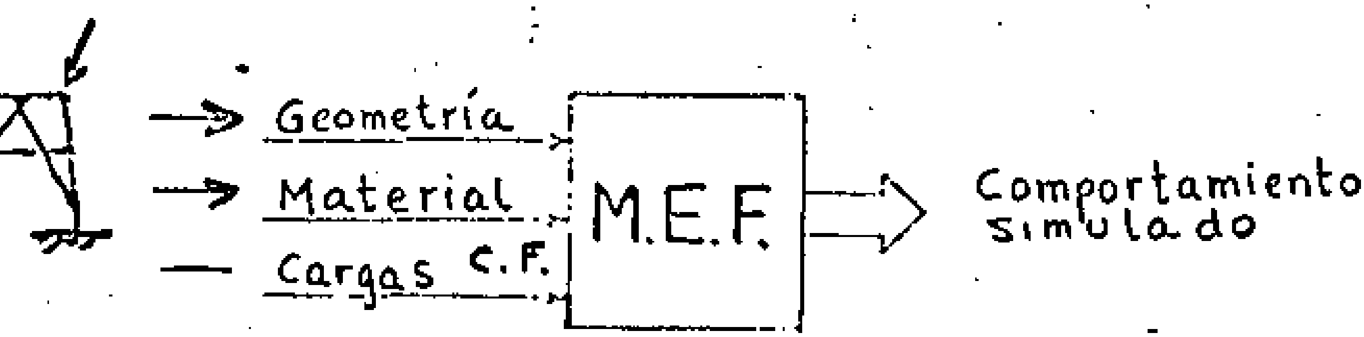
PROBLEMA DE DISEÑO

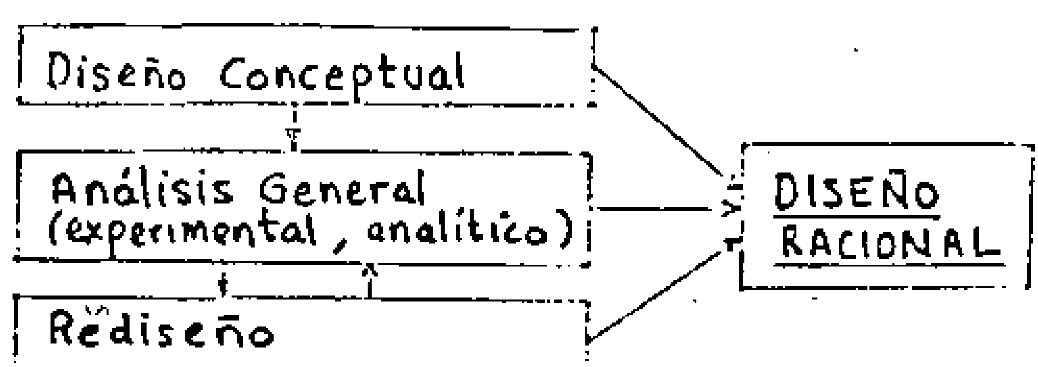
- Geometría
- Material
- Cargas (cond. de Frontera)
- Criterios de Falla

△ Dadas las cargas, el material y los criterios de falla, encontrar la geometría adecuada.

△ Dada la geometría, el material y las cargas, verificar si el diseño es adecuado comparando los resultados obtenidos con los criterios de falla.

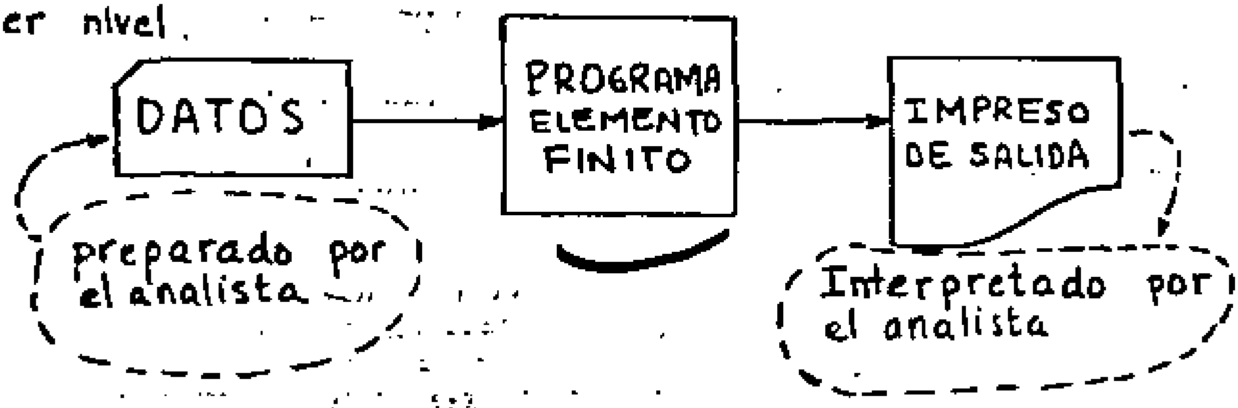
△ Dada la geometría y las cargas, seleccionar el material apropiado para el caso.



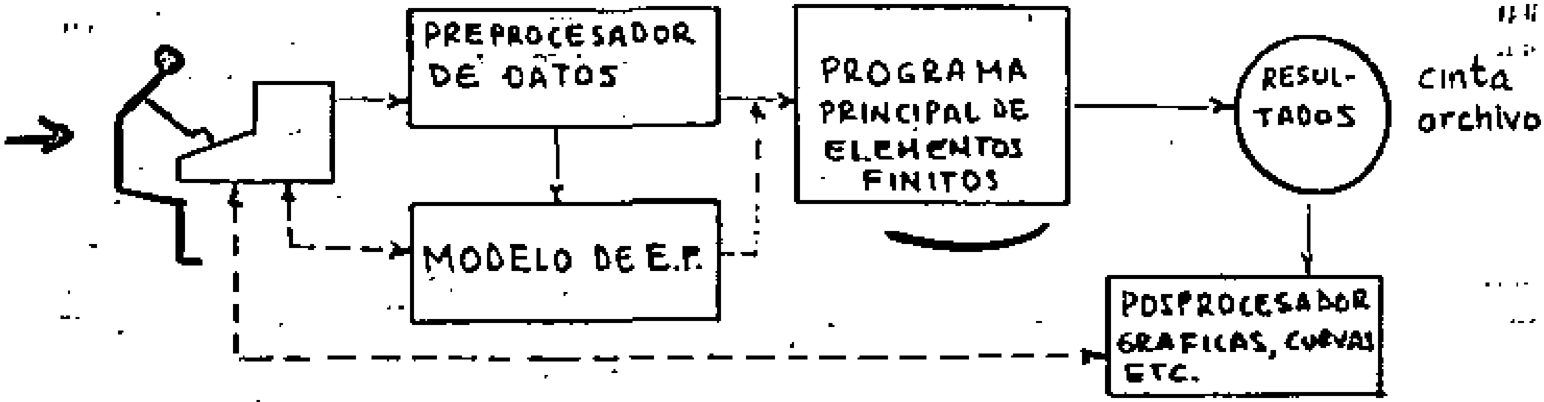


USO DEL M.E.F. A TRAVES DE PAQUETES COMPUTACIONALES

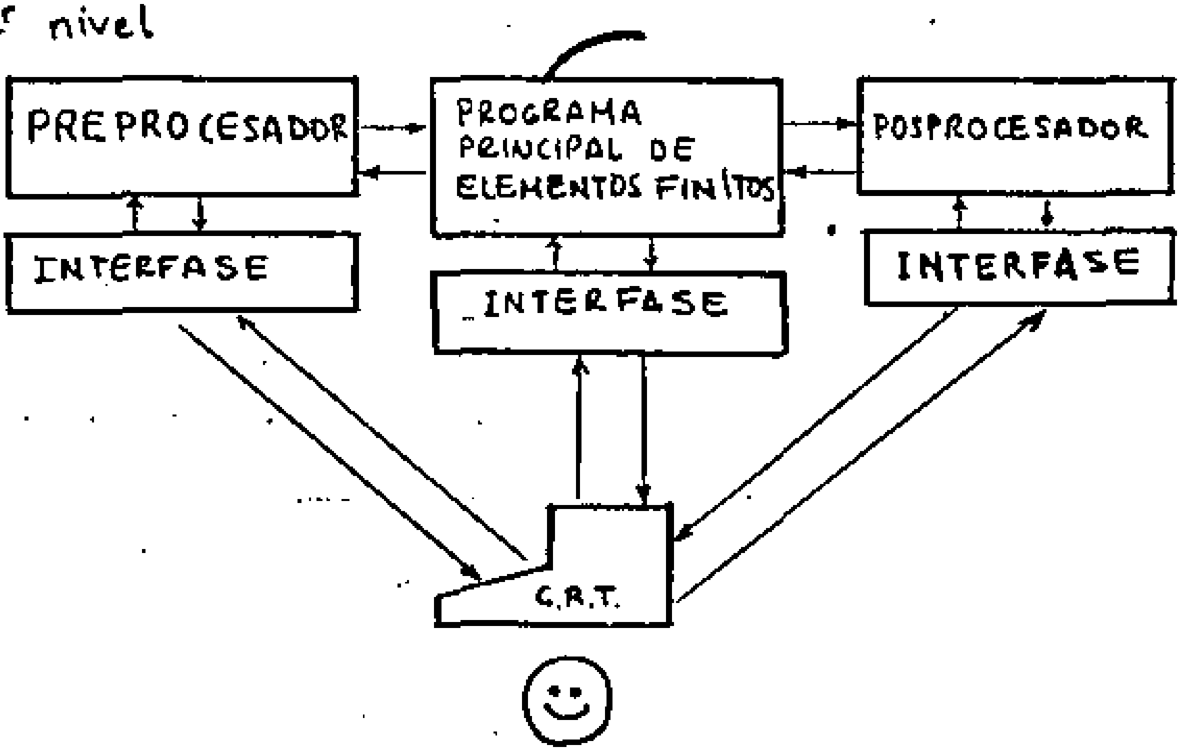
1er nivel

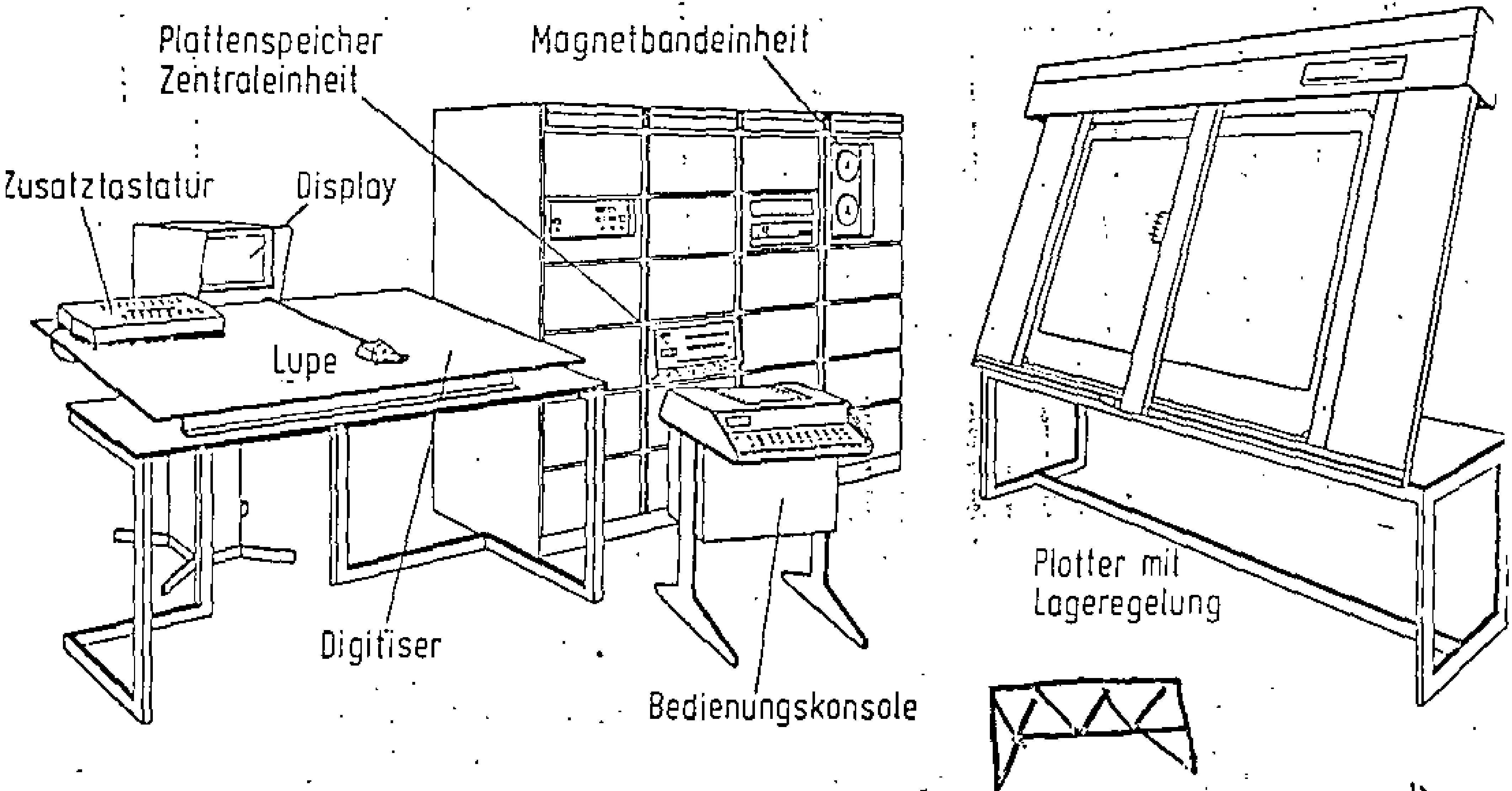


2º nivel



3er nivel




Plattenspeicher
Zentraleinheit
Magnetbandeinheit
Zusatztastatur
Display
Lupe
Digitiser
Bedienungskonsole
Plotter mit
Lageregelung

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

ANALISIS DE EDIFICIOS CON MUROS

DE CORTANTE

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

MAYO, 1984

2. SISTEMAS CON MUROS O CONTRAVIENTOS SUJETOS A CARGAS LATERALES

En muchos casos prácticos, para dar a los edificios rigidez y resistencia suficiente ante cargas laterales, se recurre al uso de muros de concreto, normalmente combinados con marcos rígidos. Otras formas de rigidizar marcos son rellenarlos con muros de mampostería o contraventearlos con elementos de concreto reforzado o de acero. Son comunes también los edificios de altura moderada en que los elementos resistentes son muros de mampostería con distintos tipos de refuerzo. En esta sección se describen métodos que sirven para analizar estos tipos de sistemas estructurales ante cargas laterales.

2.1 *Sistemas con muros*

2.1.1 Deformaciones ante cargas laterales

Aceptando la hipótesis de comportamiento elástico lineal las deformaciones de un muro ante cierto sistema de cargas en su plano deben calcularse con los métodos y teorías de la elasticidad. Además de las propiedades elásticas del material (como módulos de elasticidad, de cortante y de Poisson) hay que tomar en cuenta la magnitud y distribución de las cargas la geometría del muro y la forma en que está apoyado. Existen soluciones analíticas para ciertos casos sencillos (véase por ejemplo la ref 80), y los casos de geometría o condiciones de frontera complicadas se pueden tratar con el método del elemento finito, que se describe brevemente más adelante, y que permite obtener soluciones numéricas con la precisión que se desee (ref 16 a 18).

Sin embargo, para muros de sección rectangular empotrados en su base y sujetos a una carga lateral en su extremo superior, P, como se muestra en la fig 2.1, el desplazamiento lateral del extremo cargado δ, se puede calcular con bastante precisión con la expresión

$$\delta = \frac{Ph^3}{3EI} + \frac{Ph}{GA} \qquad (2.1)$$

donde h es la altura del muro, I y A el momento de inercia y el área de su sección transversal, E el módulo de elasticidad y G el de cortante.

En la fig 2.1 se incluye una comparación entre los resultados obtenidos con la ec 2.1 y los que proporciona el método de elementos finitos (que pueden considerarse como exactos) y se observa que los errores no exceden del 4 por ciento. Aunque la figura citada cubre valores de b (ancho del muro) entre h (altura) comprendidos entre 0.5 y 2.0, la ec 2.1 da la similar precisión fuera de ese intervalo porque para valores mayores de b/h son importantes solo las deformaciones por cortante consideradas con el término Ph/GA, y para valores menores son más apreciables las deformaciones debidas a flexión tomadas en cuenta con $Ph^3/3EI$.

De lo expuesto se concluye que para fines prácticos es suficiente calcular las deformaciones laterales de muros aislados con procedimientos de resistencia de materiales que consideren los efectos tanto de flexión como de cortante. Así se ha procedido para calcular las deformaciones en el caso mostrado en la fig 2.2. Las expresiones empleadas y los resultados se pre sentan en la tabla 2.1

2.1.2 Muros bajos

En muros de sección rectangular cuya altura total no excede de un tercio de su longitud y cuya base se halla aproximadamente empotrada, las deformaciones por flexión pueden ascender a 10 ó 15 por ciento del total, o aún menos, dependiendo de las condiciones en los otros tres bordes. Es aceptable despreciar esta contribución y calcular la rigidez de entrepiso tomando en cuenta solamente las deformaciones debidas a cortante. Es entonces aplicable la fórmula

$$R = eGL/h$$

donde

R = rigidez
G = módulo de rigidez efectivo del muro
e = espesor del muro
L = longitud del muro
h = altura del entrepiso donde se calcula la rigidez

En general para muros con sección diferentes de la rectangular la rigidez de entrepiso está dada por

$$R = G\Omega/h$$

donde

Ω = área efectiva de cortante del muro

2.1.3 Muros esbeltos

En estos muros tienen importancia las deformaciones por esfuerzo normal de bido a flexión como las provenientes de fuerza cortante. Por ello, las rigideces de entrepiso dependen de la distribución de fuerzas horizontales en la altura. Normalmente estos muros se encuentran acoplados con marcos y la interacción altura también sus rigideces de entrepiso. Así, por una parte las cortantes que toman los muros dependen de sus rigideces de entrepiso, y por otra, estas dependen de las primeras; por consiguiente para conocer estas cantidades es necesario proceder por iteracción (ref 14, 15).

Cuando las fuerzas laterales son tomadas solo por muros de distintas propiedades geométricas, es decir, si no son importante las rigideces de las vigas o de las losas que conectan a los muros, se cometen errores tolerables si dichas fuerzas se distribuyen proporcionalmente a la rigidez de cada muro, calculada para un desplazamiento unitario de su extremo superior (Es decir aplicando una fuerza en dicho extremo y dividiéndola entre el desplazamiento que allí produce). Cabe advertir sin embargo que este criterio no es aplicable si las variaciones de las propiedades geométricas de las secciones transversales de los distintos muros con la altura no son aproximadamente proporcionales. También son notables los errores en los pisos inferiores, donde la influencia de los esfuerzos cortantes es mayor que la que involucrado en esta forma de proceder. A continuación se presentan algunos métodos para analizar muros acoplados con marcos, que es el caso que con más frecuencia se presenta en la práctica.

2.1.4 Método de Khan y Sbarounis

La versión más simple del método propuesto por estos autores (ref 15) consiste en sustituir una estructura como la de la fig 2.3 por otra equivalente reducida que se esquematiza en la fig 2.4 en la cual el sistema W representa al muro o muros de rigidez; el momento de inercia de este sistema, en cualquier piso, es la suma de los momentos de inercia de todos los muros de rigidez representados. El sistema F (marcos) incluye a las columnas, vigas y losas que contribuyan a la rigidez lateral. Las rigideces (inercia/longitud) de las columnas (S_c) y vigas (S_b) son la suma de las rigideces de todos los elementos correspondientes en la estructura.

Los sistemas W y F se consideran ligados por barras horizontales de rigidez axial infinita y de rigidez a flexión nula, de forma tal que los desplazamientos laterales de ambos sistemas son iguales, pero no los giros.

Khan y Sbarounis proponen que las cargas laterales externas se apliquen inicialmente en su totalidad al sistema W como si estuviese aislado, y se calculen los desplazamientos laterales así provocados; se pueden incluir las deformaciones debidas a cortante. Luego se suponen unos desplazamientos laterales para el sistema F; a menos que se cuente con una mejor suposición, éstos serán iguales a los calculados para el sistema W. Por medio de distribución de momentos se pueden conocer los elementos mecánicos generados por los desplazamientos supuestos y las reacciones sobre el sistema W. Se calculan enseguida las modificaciones que producen estas reacciones; aplicándolas al sistema W, nuevamente aislado. Se comparan los desplazamientos de ambos sistemas y se repite el procedimiento hasta que dichos desplazamientos sean iguales dentro de cierta tolerancia.

Las fuerzas finales en los distintos muros representados en el sistema W son proporcionales a los momentos de inercia y, conocidos los desplazamientos en los marcos representados en el sistema F, se pueden determinar sus elementos mecánicos con aplicar una sola vez distribución de momentos.

Cuando los marcos toman una parte significativa de las cargas totales, el método expuesto puede requerir de varios ciclos y por tanto ser muy laborioso; por dicho motivo los autores presentan gráficas dando valores de los desplazamientos del conjunto W-F en términos del desplazamiento del muro en su extremo superior. Estas gráficas se reproducen en las fig 2.5 a 2.11. Para entrar a ellas la cantidad S_s/S_c debe calcularse mediante la fórmula

$$\frac{S_s}{S_c} = \frac{\Sigma E_s I_s}{\Sigma E_c I_c} \left(\frac{10}{N} \right)^2 \qquad (2.2)$$

donde E_s e I_s son, respectivamente, el módulo de elasticidad y el momento de inercia del sistema W, E_c e I_c son los correspondientes valores de las columnas del sistema F, y N es el número de pisos de la estructura.

Según la ref 15, se puede hacer una corrección de convergencia, consistente en emplear como valor inicial para el desplazamiento $\Delta_{ii(n+1)}$ en el piso i, en el ciclo n +1, el dado por expresión

$$\Delta_{ii(n+1)} = \Delta_{ii(n)} + \frac{\Delta_{ei(n)} - \Delta_{ii(n)}}{1 + \left(\dfrac{\Delta_i - \Delta_{ei(n)}}{\Delta_{ii(n)}}\right)} \qquad (2.3)$$

$\Delta_{ii(n)}$ es el desplazamiento inicial del piso i en el ciclo n, $\Delta_{ei(n)}$ el correspondiente desplazamiento al final de dicho ciclo, y Δ_i es el desplazamiento del sistema W, también en el nivel i, cuando se lo somete a las cargas totales como si estuviese aislado.

Como una variante para simplificar el método, al calcular las fuerzas cortantes en el sistema F se pueden emplear las fórmulas de Wilbur, en vez de efectuar una distribución de momentos. Esta última se puede hacer cuando ya hayan convergido los desplazamientos y en el marco completo, no en el equivalente, para hacer un ajuste final.

Como ejemplo de aplicación, se ha analizado la estructura de la fig 2.3 con los datos adicionales dados en la fig 2.4. En todos los cálculos se han empleado como unidades metros y toneladas. Se tiene

$$I_b = 0.25 \times 0.50^3/12 = 0.002604$$

$$I_c = 0.40^4/12 = 0.002133$$

$$I_m = 0.15 \times 4^3/12 = 0.8$$

$$S_b = \frac{12\ I_b}{6} + \frac{I_b}{4} = 0.005859$$

$$S_c = \frac{14\ I_c}{3} = 0.009954$$

$$I_s = 2\ I_m = 1.60$$

$$S_c/S_b = 1,70$$

$$\frac{S_s}{S_c} = \frac{1.60}{14 \times 0.002133} \left(\frac{10}{5} \right)^2 = 214 \text{ (ver expresión 2.2)}$$

Las operaciones efectuadas se resumen en la tabla 2.2. En primer lugar se han calculado, con el método de la viga conjugada, los desplazamientos Δ_i del muro sujeto a las cargas totales; en particualar el desplazamiento del piso superior Δ_s resulta 0.0449 m. Luego se han obtenido las rigideces de entrepiso mediante las fórmulas de Wilbur, las mismas se dan en la columna R_i (se han incluido en su cálculo todas las vigas y columnas de los tres marcos).

En el primer ciclo se han usado las fig 2.5 y 2.6 para estimar los valores de Δ_{ii}/Δ_s. Como Δ_s es conocído, se calculan enseguida los Δ_{ii}, con los cuales se determinan los desplazamientos de entrepiso δ_i, y, multiplicando estos por las rigideces de entrepiso correspondientes, las fuerzas cortantes en el sistema F, V_{fi}. Las fuerzas cortantes que obran sobre el muro, V_{mi}, son iguales a las cortantes totales, V_{ti}, menos las respectivas V_{fi}. Conocidas las V_{mi} se pueden calcular los desplazamientos Δ_{ei} que las mismas producen en el muro. Se comparan los Δ_{ei} con los Δ_{ii} para ver si son suficientemente parecidos. En este ejemplo el primer ciclo no da resultados satisfactorios, por lo que hay que seguir iterando.

Para iniciar el segundo ciclo se ha usado el criterio de convergencia dado por la expresión 2.3, como se ilustra en detalle en la tabla 2.2. Los resultados son nuevos valores de Δ_{ii}, con los que se vuelven a ejecutar los pasos descritos en el ciclo 1. De igual manera se ha procedido en el ciclo 3, es decir aplicando otra vez el criterio de convergencia mencionado Se encontró convergencia en el tercer ciclo, y se aceptó que no es necesario efectuar más iteraciones puesto que los desplazamientos iniciales y finales difieren, a lo más, en 3.4 por ciento. Como valores finales Δ_{fi}, se considerará a los que resulten del criterio de convergencia con los datos del último ciclo; se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{f_5} &= 0.0249\\
\Delta_{f_4} &= 0.0185\\
\Delta_{f_3} &= 0.0121\\
\Delta_{f_2} &= 0.0062\\
\Delta_{f_1} &= 0.0018
\end{aligned}
$$

Estos resultados dan lugar a las siguientes fuerzas cortantes en los sistemas W (V_{mi}) y F (V_{fi}):

$$
\begin{aligned}
V_{f_5} &= 7376\ (0.0249 - 0.0185) = 47.2; & V_{m_5} &= 50-47.2 = 2.80\\
V_{f_4} &= 7376\ (0.0185 - 0.0121) = 47.2; & V_{m_4} &= 90-47.2 = 42.8\\
V_{f_3} &= 7376\ (0.0121 - 0.0062) = 43.5; & V_{m_3} &= 120-43.5 = 76.5\\
V_{f_2} &= 7676\ (0.0062 - 0.0018) = 33.8; & V_{m_2} &= 140-33.8 = 106.2\\
V_{f_1} &= 11414\ (0.0018) = 20.5; & V_{m_1} &= 150-20.5 = 129.5
\end{aligned}
$$

En este ejemplo no se han incluido las deformaciones por cortante en el cálculo de desplazamientos, pero, a más de que en este caso no fueron significativas, esto no afecta la ilustración del método porque, de ser necesario, bastaría sumar a los desplazamientos debidos a flexión aquí calculados, los provenientes de cortante, en cada iteración. En el cálculo de fuerzas cortantes y en la aplicación del criterio de convergencia no se produce cambio alguno.

En la ref 15 se presentan además gráficas que permiten estimar las fuerzas cortantes en los sistemas W y F, en función de los parámetros S_c/S_b y S_s/S_c.

2.1.5 Método de Mc Leod

En la ref 13, Mc Leod presenta un procedimiento que permite estimar la fuerza cortante y el desplazamiento lateral máximos de sistemas fomados por marcos y muros, así como el momento de volteo en la base de los muros, a partir de suponer que todos ellos están conectados solo en sus extremos superiores.

Para cargas laterales con distribución triangular, la fórmula que proporciona la fuerza que une a los marcos con los muros, P, es:

$$\frac{P}{W} = \frac{11}{20} \frac{\Sigma K_f}{\Sigma K_f + \Sigma K_m} \tag{2.4}$$

donde K_f es la rigidez lateral de cada marco entendida como la fuerza concentrada en el extremo superior que produce un desplazamiento lateral unitario en su línea de acción, K_m es la rigidez de cada muro definida en el mismo sentido y W es la carga lateral total aplicada.

Antes de calcular estas cantidades y sumarlas, se pueden representar los muros y los marcos con un solo muro y un marco de una sola crujía, como se hace en el método de Khan y Sbarounis. Para calcular la rigidez del marco K_f, se pueden emplear las fórmulas de Wilbur, ya que conocidas las rigideces de los entrepisos, R_i, se tiene

$$\frac{1}{K_f} = \Sigma \frac{1}{R_i}$$

El desplazamiento lateral máximo se estima como $P/\Sigma K_f$, y la fuerza cortante máxima en el marco está dada por 1.3P. El momento de volteo en la base del muro es aproximadamente igual al momento total menos PH, donde H es la altura total del muro.

Como ejemplo considérese nuevamente el edificio cuyos datos se dan en las fig 2.3 y 2.4. Las rigideces de entrepiso, R_i, están dadas en la tabla 2.2 por tanto,

$$\frac{1}{K_f} = \frac{1}{11414} + \frac{1}{7676} + \frac{3}{7376}$$

Haciendo operaciones resulta K_f = 1601 ton/m; como están incluidas todas las vigas y columnas en el cálculo de las R_i, entonces $K_f = \Sigma K_f$.

En este caso $\Sigma K_m = \frac{3 \Sigma E I_w}{H^3}$, donde E es el módulo de elasticidad de los muros, I_w su momento de inercia y H su altura total. Así

$$\Sigma K_m = \frac{3 \times 1.5 \times 10^6 \times 2 \times 0.8}{15^3} = 2133 \text{ ton/m}$$

Ahora se puede emplear la fórmula 2.4, como sigue:

$$\frac{P}{W} = \frac{11}{20} \times \frac{1601}{1601 + 2133} = 0.236$$

Como W = 150 ton, P = 0.236x150 = 35.4 ton. La estimación del desplazamiento máximo es $P/\Sigma K_f$ = 35.4/1601 = 0.0221 m. El valor de la fuerza cortante total máxima en los marcos está dado por 1.3 P = 13x35.4=46.02 ton. Finalmente el momento de volteo en los muros se estima como 50x15+40x12+30x9+20x6+ +10x3x35.25x15 = 1119; a cada muro corresponde 1121/2 = 560.5 ton-m.

2.1.6 Método del elemento finito

En la actualidad, el método del elemento finito constituye una poderosa herramienta para el análisis de estructuras complejas como ciertos muros de composición y/o geometría complicada. Para fines prácticos, las soluciones obtenidas mediante la aplicación adecuada del método a problemas elásticos lineales pueden considerarse como exactas.

Básicamente, la aplicación del método en cuestión consiste en dividir la estructura en subregiones denominadas elementos finitos, dentro de las cuales se prescribe la forma en que varían los desplazamientos en función de los valores correspondientes a ciertos puntos denominados nudos (fig 2.12) Con base en las leyes constitutivas del material (esto es, en las relaciones que existen entre esfuerzos y deformaciones, por ejemplo, la ley de Hooke), en la función adoptada para prescribir los desplazamientos, y en las relaciones entre deformaciones unitarias y desplazamientos, se determina la matriz de rigideces de cada elemento, usando, por ejemplo, el principo de trabajos virtuales. Estas matrices están referidas a los grados de libertad de los nudos del elemento.

La matriz $\underline{K}$ de rigideces de la estructura completa se obtiene aplicando el método directo de rigideces, descrito al tratar el problema de marcos, es decir, sumando en donde les corresponda los términos de las matrices de rigideces de los elementos.

Los desplazamientos $\underline{U}$ de los nudos, ante un sistema de cargas $\underline{P}$ aplicadas en los mismos, se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\underline{K}\,\underline{U} = \underline{P}$$

Conocidos los valores de $\underline{U}$ se pueden calcular esfuerzos y deformaciones en cualquier punto de cada elemento, esto es, en cualquier punto de interés.

En las ref 16 a 18 se presenta con detalle el método, en forma orientada hacia el análisis de estructuras. El caso de los muros se puede modelar adecuadamente considerando que se trata de un problema de estado plano de esfuerzos, es decir, aceptando que son nulos los esfuerzos fuera del plano del muro. Aunque los elementos finitos que permiten tratar este tipo de problema pueden tener diversas formas, como triángulo o cuadriláteros, dado que las partes de un muro son usualmente rectángulos, es adecuado el uso de elementos rectangulares (véase la ref 16), como se muestra en la fig 2.12.

Existen programas para computadora que permite aplicar el método del elemento finito a diversos tipos de estructuras. Uno de los más difundidos es el que se describe en la ref 19, del cual se han desarrollado varias versiones mejoradas.

2.1.7 Método de la columna ancha

Este método se basa en que, como se ha expresado en la sec 2.1, las deformaciones laterales de un muro se pueden calcular con muy buena precisión con los procedimientos de resistencia de materiales, si se toman en cuenta las deformaciones debidas a flexión y a cortante; por ejemplo mediante la ec 2.1. Esta ecuación es aplicable a muros de sección diferente de la rectangular si se reemplaza A por el área efectiva de cortante Ω. Se denomina columna ancha a un miembro así analizado, para distinguirlo de las columnas normales en que solo son importantes las deformaciones por flexión.

Para analizar sistemas de muros y muro-marco se considera cada muro como una columna ancha con sus propiedades concentradas en su eje centroidal y se supone que las zonas de las vigas que se encuentran dentro de los muros son infinitamente rígidas a flexión. Esto se ilustra en la fig 2.13, y tiene la ventaja de que los sistemas con muros se idealizan como estructuras esqueletales, igual que los marcos.

Las deformaciones por cortante en las columnas y las zonas rígidas en las vigas modifican las respectivas matrices de rigideces. Con referencia a los grados de libertad y notación mostrados en la fig 2.14 dichas, matrices se escriben:

Para las columnas anchas:

$$\begin{bmatrix} \frac{12\,EI}{(1+\alpha)h^3} & & & & \text{simétrica} & \\ -\frac{12\,EI}{(1+\alpha)h^3} & \frac{12\,EI}{(1+\alpha)h^3} & & & & \\ -\frac{6\,EI}{(1+\alpha)h^2} & \frac{6\,EI}{(1+\alpha)h^2} & \frac{(4+\alpha)\,EI}{(1+\alpha)\,h} & & & \\ -\frac{6\,EI}{(1+\alpha)h^2} & \frac{6\,EI}{(1+\alpha)h^2} & \frac{(2-\alpha)\,EI}{(1-\alpha)\,h} & \frac{(4+\alpha)\,EI}{(1+\alpha)\,h} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{h} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{h} & \frac{EA}{h} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Para las vigas con zonas rígidas en sus extremos:

$$\frac{EI}{\lambda e}\begin{bmatrix} 4+12\frac{\gamma}{\lambda}\left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\right) & & \text{simétrica} & \\ 2+6\left(\frac{\gamma+\beta}{\lambda}\right)+12\frac{\gamma\beta}{\lambda^2} & 4+12\frac{\beta}{\lambda}\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right) & & \\ -\frac{6}{\lambda\ell}\left(1+\frac{2\gamma}{\lambda}\right) & -\frac{6}{\lambda\ell}\left(1+\frac{2\beta}{\lambda}\right) & \frac{12}{\lambda^2\ell^2} & \\ \frac{6}{\lambda\ell}\left(1+\frac{2\gamma}{\lambda}\right) & \frac{6}{\lambda\ell}\left(1+\frac{2\beta}{\lambda}\right) & \frac{12}{\lambda^2\ell^2} & \frac{12}{\lambda^2\ell^2} \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

En casos extremos, si el área de cortante es grande o las longitudes de zonas rígidas son bastante pequeñas, las matrices anteriores coinciden con las de una viga y columna normales. Así, si dichas matrices se incluyen en un programa para resolver marcos este servirá también para analizar sistemas muro-marco.

Mc Leod (ref 20) ha constatado la buena precisión del método comparando sus resultados con los de modelos elásticos a escala de muros con una hilera central de huecos. En efecto, el método es útil en casos de muros con huecos, sobre todo si se incluyen los efectos de extremos rígidos en las columnas y los de cortante en las vigas. Algunos ejemplos de idealización posibles se muestran en la fig 2.15. En ciertos casos es conveniente que las zonas rígidas en los extremos tengan forma de codo y no sean solamente rectas; para estas situaciones pueden consultarse la ref 21.

Existen programas para analizar edificios que incluyen explícitamente deformaciones por cortante y zonas rígidas (ref 22 y 23). Cuando se usan programas que no incluyan esta última opción, las zonas rígidas pueden representarse por tramos de vigas con momentos de inercia grandes, en comparación con las de las vigas y columnas del conjunto.

2.2 *Marcos contraventeados y tableros de muros confinados por marcos*

2.2.1 Marcos contraventeados

En el análisis de marcos contraventeados es fundamental tomar en cuenta no sólo los momentos flexionantes en trabes y columnas, sino también las fuerzas axiales que en ellas introducen las componentes horizontales y verticales de las fuerzas que obran en los contravientos.

En marcos contraventeados en todos los niveles de una misma crujía, si las vigas y columnas no son muy robustas una forma sencilla y razonablemente aproximada de determinar las cargas axiales en los distintos miembros, es analizar la crujía contraventeada como una armadura, ignorando la rigidez a flexión de las vigas y columnas.

Lo más conveniente para analizar marcos con cualquier disposición de contravientos es emplear el método de rigideces, incluyendo en la matriz de rigideces global el aporte de los contravientos. Estos usualmente se representan como elementos con solo rigidez axial, cuya matriz de rigideces, con referencia a los grados de libertad y propiedades que se indican en la fig 2.16, está dada por:

$$\underline{K} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

Debe procederse con cuidado especial en la determinación del módulo de elasticidad, E, y del área de la sección transversal A, sobre lo cual se comenta en la sec 2.3.

2.2.2 Muros confinados por marcos

El caso de tableros de muros de mampostería confinados por marcos y sujetos a cargas laterales (fig 2.17) ha sido objeto de numerosas investigaciones experimentales y analíticas; en las ref 24 a 26 se incluyen revisiones de la literatura sobre el tema. Se ha reconocido (ref 27) que inicialmente tablero y marco trabajan monolíticamente con una sola unidad en la cual son importantes las deformaciones por flexión y por cortante. Bastan sin embargo cargas laterales relativamente pequeñas para que tablero y marco se separen en esquinas opuestas de modo que el primero se apoya sobre el segundo en la forma que se indica en la fig 2.17. Se producen fuerzas axiales en vigas y columnas así como momentos y cortantes en las mismas. Los momentos son de poca importancia dado que las fuerzas de interacción se desarrollan en la proximidad de los nudos. Las fuerzas cortantes, por el contrario, son de consideración. En el tablero aparecen fuerzas de compresión diagonal que pueden producir fallas por compresión en las esquinas en contacto con el marco.

En la dirección de la otra diagonal aparecen esfuerzos de tensión en la mampostería que pueden ocasionar agrietamiento diagonal, del muro.

Para el cálculo de la rigidez lateral y de los elementos mecánicos en marco y tablero una posible idealización es simular cada tablero como una diagonal equivalente en compresión según se esquematiza en la fig 2.18. Como resultado de estudios analíticos con elementos finitos en los que se toma en cuenta el comportamiento descrito, en la ref. 26 se propone que la diagonal equivalente tenga los mismos espesor, t, y módulo de elasticidad, E, que el tablero y que su ancho sea (ver fig 2.19):

$$w_0 = (0.35 + 0.022\ \lambda)\ h \qquad (2.9)$$

donde

h = altura del tablero entre ejes

λ = parámetro adimensional basado en las rigideces de tablero y marco

Para determinar la matriz de rigideces de la diagonal se aplica la expresión 2.8, con $A = w_0 t$ y L = longitud de la diagonal

Al deducir las diagonales equivalentes en la ref 26 se ha considerado que el marco no está articulado en sus esquinas (fig 2.18). La expresión 2.9 se ha deducido suponiendo $G_m = 0.4\ E_m$ y es aplicable para valores de λ comprendidos entre 0.9 y 11, y valores de la relación de aspecto ζ (ver fig 2.19) que estén entre 0.75 y 2.5. Estos intervalos cubren la mayoría de los casos prácticos.

Otro procedimiento para calcular rigidez lateral y elementos mecánicos de un sistema marco-tablero es considerar que el conjunto constituye una columna ancha con lo que es aplicable la expresión 2.6 para valuar la matriz de rigideces. El momento de inercia I se considera que proviene de la rigidez axial de las columnas y se calcula como se indica en la fig 2.19; E es el módulo de elasticidad del marco, y G el módulo de cortante del muro. Para el área de cortante, Ω, se adopta un valor reducido, que toma en cuenta la separación entre muro y marco, dado por

$$\Omega_0 = (0.37 - 0.12\,\zeta + 0.023\,\lambda)\,(A_m + 2\,A_c) \qquad (2.10)$$

en esta expresión

- ζ es la relación de aspecto del muro
- A_m es el área de la sección transversal del muro
- A_c es el área de la sección de cada columna del marco, sin transformar a pesar de ser de diferente material. Estas definiciones, lo mismo que la de λ, se ilustran en la fig 2.22.

Como resultado del análisis considerando columnas anchas se obtienen momentos flexionantes M y fuerzas cortantes V. Las cargas axiales T de tensión y C de compresión en las columnas son:

$$T = \frac{M}{z\,\ell}$$

$$C = z\,\frac{M}{\ell}$$

siendo $z = 1.15 - 0.2\,\zeta \leq 1.0$.

La fuerza cortante máxima en las columnas es 0.6 V.

Esta aproximación también está limitada a los intervalos de valores de ζ y λ que se indican para el uso de diagonales equivalentes. Como ejemplo considérese la estructura mostrada en la fig 2.20. Para determinar las diagonales equivalentes a los tableros de mampostería se deben conocer las siguientes propiedades geométricas y mecánicas: área de las columnas, A_c, igual a 30x30 = 900 cm², área del muro, A_m, dada por 15 (400-40) = 540 cm²; módulo de elasticidad de las columnas, $E_c = 10{,}000\sqrt{200} = 141{,}000$ kg/cm².

En la sección 2.4.4 de la ref 31 se estipula que para cargas de corta duración, como son las sismicas el módulo de elasticidad de la mamposteria puede calcularse como $E_m = 400\ f_m^*$, donde f_m^* es la resistencia nominal a compresión, dada en la tabla 2.4.1.c de la misma referencia...En este caso se tiene $f_m^* = 15$ kg/cm² y, por tanto, $E_m = 6000$ kg/cm². G_m es igual a 0.4 E_m, es decir 2400 kg/cm² con estos valores se puede calcular el parámetro λ, definido en la fig 2.19, como sigue

$$\lambda = \frac{E_c\ A_c}{G_m\ A_m} = \frac{141000 \times 900}{2400 \times 5400} = 9.8$$

Aplicando la expresión 2.9, con h = 3m, resulta $w_e = (0.35+0.022 \times 9.8)\ 3 =$ = 1.70 m.

Las diagonales equivalentes tienen 170x15=2250cm² de área, 5 m de longitud y su módulo de elasticidad es 6000 kg/cm².

Se ha analizado esta estructura con el método de rigideces y algunos de los resultados más importantes se muestran en la fig 2.21

2.3 *Comentarios*

2.3.1 Sobre los distintos métodos

El método de los elementos finitos permite obtener soluciones prácticamente exacta para cualquier problema que involucre menos, si se acepta que el comportamiento es elástico lineal, e inclusive se pueden tratar con él problema no lineales (ref 18 y 26). Sin embargo, como se advierte en la fig 2.10, para obtener una precisión aceptable se debe representar el muro con varios elementos finitos, lo cual, en estructuras de varios pisos y crujías, requiere de tiempos y capacidades de computadora bastnte grandes, haciendo impráctica la aplicación del método. Además es alta la probabilidad de cometer errores por la gran cantidad de datos que hay que proporcionar y es difícil interpretar el elevado volumen de resultados que se obtienen. Otro asunto que hay que tener presente es que el método proporciona como resultados esfuerzos en distintos puntos, mientras que en los procedimientos para el di mensionamiento se emplean momentos flexionantes, fuerzas cortantes y normales, que son resultantes de dichos esfuerzos, y que no son fáciles de calcular automáticamente con los programas para computadora.

Por lo anterior el uso de elementos finitos en el análisis de edificios está reservado a ciertos casos especiales, como el de muros con geometría complicada; también se suele emplear para estudiar con más detalle algunas partes y no la totalidad del edificio.

Para una verificación adicional de la precisión del método de la columna ancha se ha analizado el conjunto muro-marco de la fig 2.22 con este método y con el de los elementos finitos. La comparación de resultados, que se muestra en la misma figura, revela que en este caso las diferencias entre los desplazamientos laterales obtenidos con ambos métodos son menores que 2 por ciento, confirmando que el uso de columnas anchas conduce a resultados prácticamente exactos. Nótese que muro y marco no son del mismo material.

Con el propósito de tener una idea sobre el grado de aproximación del método de Khan y Sbarounis se ha analizado con el método de la columna ancha la estructura simplificada de la fig 2.4 y los desplazamientos resultantes son, del piso superior al inferior, 0.0240, 0.0178, 0.0117, 0.060 y 0.0018 m, que difieren de los obtenidos en la sección 2.1.4 en menos de 4 por ciento; las cortantes que arroja el método de la columna-ancha-para el sistema W son -6.41, 45.25, 76.56, 106.08 y 134.88 ton, también bastante similares a las que se llegó en la sección mencionada, salvo en el piso superior, aunque hay que tener presente que allí la fuerza cortante es muy pequeña. Esto muestra que la forma en que se ha aplicado el método de Khan y Sbarouns es suficientemente precisa para fines prácticos.

También se ha analizado con el método de la columna ancha el edificio completo mostrado en la fig 2.3. Los desplazamientos y las fuerzas cortantes que toman los muros resultaron, respectivamente, 0.0203, 0.0152, 0.0101, 0.0053 y

0.0016 m, y 6.14, 54.97, 84.8, 111.8 y 136.9 ton. Las diferencias con los valores obtenidos con el método de Khan y Sbarounis se deben principalmente a que este usa una estructura equivalente. No obstante, se puede concluir que dicho método proporciona ideas bastante buenas de como se distribuyen las cortantes entre muros y marcos y de la magnitud de los desplazamientos laterales.

En la sección 2.1.5 se aplicó a este mismo edificio el método de Mc Leod y se encontró que el desplazamiento lateral del último piso, la fuerza cortante máxima que toman los marcos, y el momento de volteo que se origina en cada muro, son 0.0221 m, 16.02 ton y 560.5 ton-m, respectivamente. Los correspondientes valores que se obtienen con el método de la columna ancha son: 0.0203 m, 43.86 ton y 484.2 ton-m. Se desprende que el método de Mc Leod aunque no proporciona, información sobre la distribución de cortantes en altura, permite verificar con rapidez el orden de magnitud de resultados obtenidos con procedimientos más elaborados.

TABLA 2.1 CALCULO DE DEFORMACIONES

DEL MURO DE LA FIG 2.2

Nivel o entrepiso i	h_i	I_i	V_i	M_i	$E\phi_i$	$E\theta_i$	$E\delta_i$	Ed_i
3	3	1.5	90	0	220.0	3172.5	540.0	213[illegible]
2	3	2.0	150	270	742.5	2902.5	1252.6	1352[illegible]
1	4	2.0	180	720	2160.0	2160.0	4800.0	480[illegible]

i	A_i	$E\delta^*_i$	$E d^*_i$	$E(d_i + d^*_i)$	d_i	$d_i + d^*_i$
3	0.9	750.0	3187.5	24997.5	0.014540	0.01[illegible]
2	1.2	937.5	2037.5	15000.0	0.008375	0.0102[illegible]
1	1.2	1500.0	1500.0	6300.0	0.003200	0.00[illegible]

Por flexión

$$\delta_i = \frac{V_i h_i^3}{3EI_i} + \frac{M_i h_i^2}{2EI_i}$$

$$\phi_i = \frac{V_i h_i^2}{2EI_i} + \frac{M_i h_i}{EI_i}$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \phi_i$$

$$d_i = d_{i-1} + \delta_i + \theta_{i-1} h_i$$

Por cortante

$$\delta^*_i = \frac{V_i h_i}{GA_i}$$

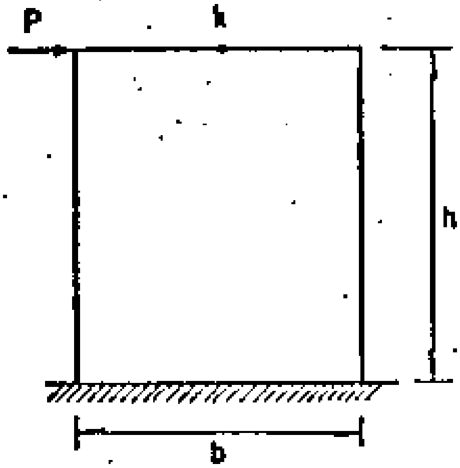
$$d^*_i = d^*_{i-1} + \delta^*_i$$

TABLA 2.2. METODO DE KHAN Y SBAROUNIS

Nivel	Valores iniciales V_i	Δ_i	R_i	Ciclo 1 Δ_{ii}/Δ_5*	Δ_{ii}	$\delta_i = \Delta_{ii}-\Delta_{ii-1}$	$V_{fi} = R_i\delta_i$	$V_{mi} = V_i - V_{fi}$	Δ_{ei}
5	50	0.0449	7376	0.43	0.0193	0.0036	26.55	23.45	0.0301
4	90	0.0324	7375	0.35	0.0157	0.0045	33.19	56.81	0.0219
3	120	0.0204	7376	0.25	0.0112	0.0054	39.83	80.17	0.0140
2	140	0.0101	7676	0.13	0.0058	0.0040	30.70	109.30	0.0071
1	150	0.0028	11414	0.04	0.0018	0.0018	20.55	129.45	0.0020

* De la gráfica de las fig 2-3 y 2.4

Nivel	Aplicación del criterio de convergencia $\Delta_i-\Delta_{ei}$	$\alpha = 1+\frac{\Delta_i-\Delta_{ei}}{\Delta_{ii}}$	$\beta = \Delta_{ei}-\Delta_{ii}$	Ciclo 2 $\Delta_{ii(2)} = \Delta_{ii}+\frac{\beta}{\alpha}$	Δ_{ei}	Ciclo 3 Δ_{ii}	Δ_{ei}
5	0.0148	1.77	0.0106	0.0254	0.0247	0.0250	0.0248
4	0.0105	1.67	0.0062	0.0194	0.0182	0.0187	0.0183
3	0.0064	1.57	0.0028	0.0130	0.0118	0.0123	0.0119
2	0.0030	1.52	0.0013	0.0067	0.0061	0.0065	0.0061
1	0.0008	1.44	0.0002	0.0019	0.0017	0.0018	0.0016



δ_{ef} = Desplazamiento de k obtenido con elementos finitos

δ_{ca} = Desplazamiento de k obtenido con la expresión

$$\delta_{ca} = \frac{Ph^3}{3EI} + \frac{Ph}{GA}$$

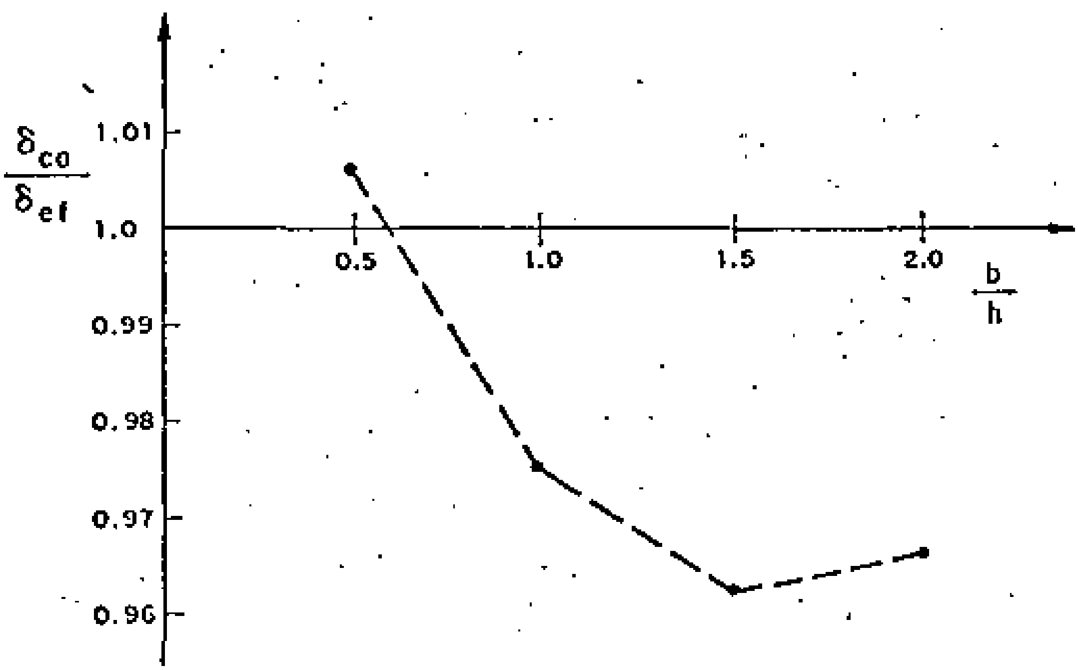
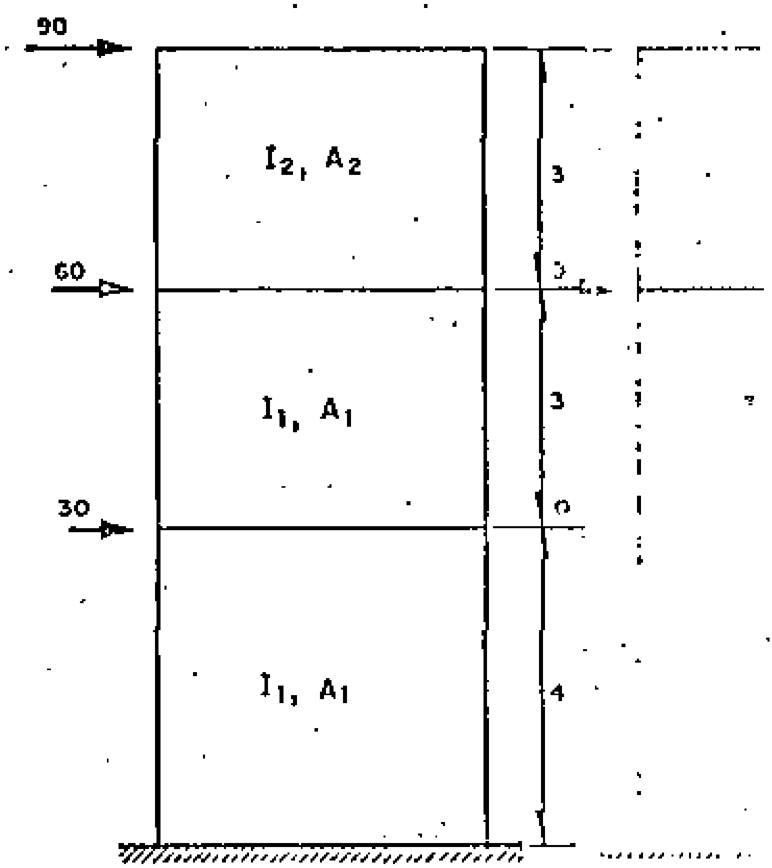
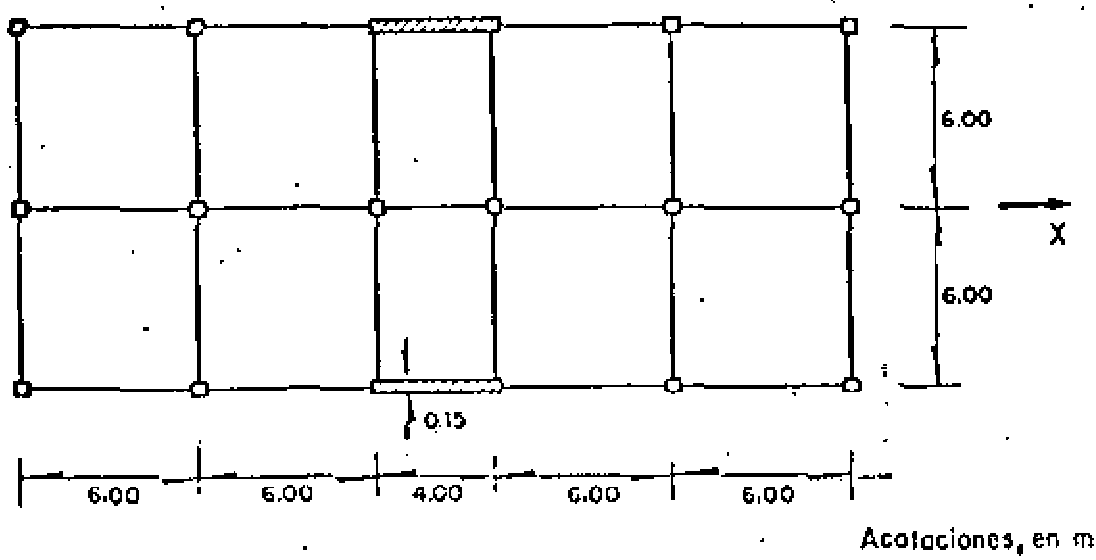


Fig 2.1 Comparación de los desplazamientos laterales de un muro obtenidos por dos métodos



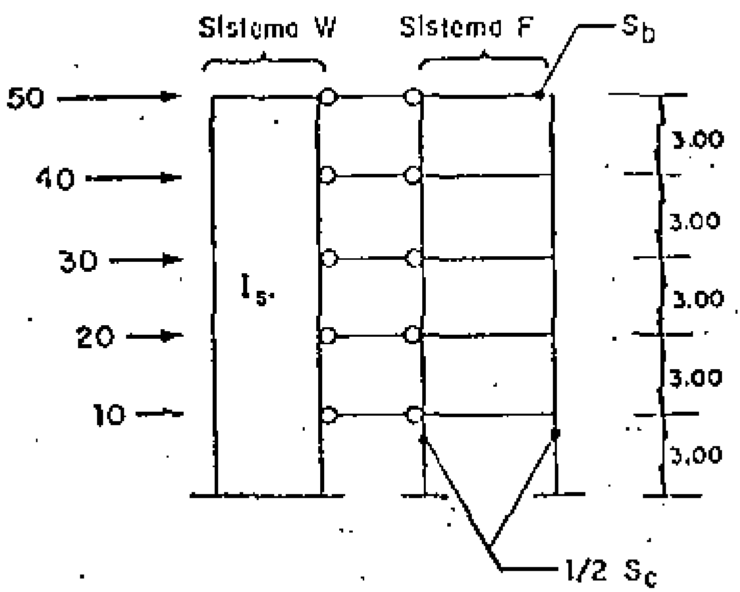
Alturas en m, cargas en ton
$I_1 = 2.0$ m^4, $A_1 = 1.2$ m^2
$I_2 = 1.5$ m^4, $A_2 = 0.9$ m^2
$E = 1500000$ ton/m^2
$G = 600000$ ton/m^2

Fig. 2.2 Muro aislado sujeto a cargas laterales



Notas: Columnas cuadradas iguales de 0.40 m de lado
Vigas iguales de 0.25 m de ancho por 0.50 m de peralte

Fig 2.3 Planta de un edificio con muros



Acotaciones, en m
Fuerzos, en ton
$I_s = 1.6\ m^4$
$S_b = 0.005859\ m^3$
$S_c = 0.009954\ m^3$
$E = 1.5 \times 10^6\ ton/m^2$

Fig 2.4 Representación del edificio de la fig 2.1 en el método de Khan y Sbarounis

96

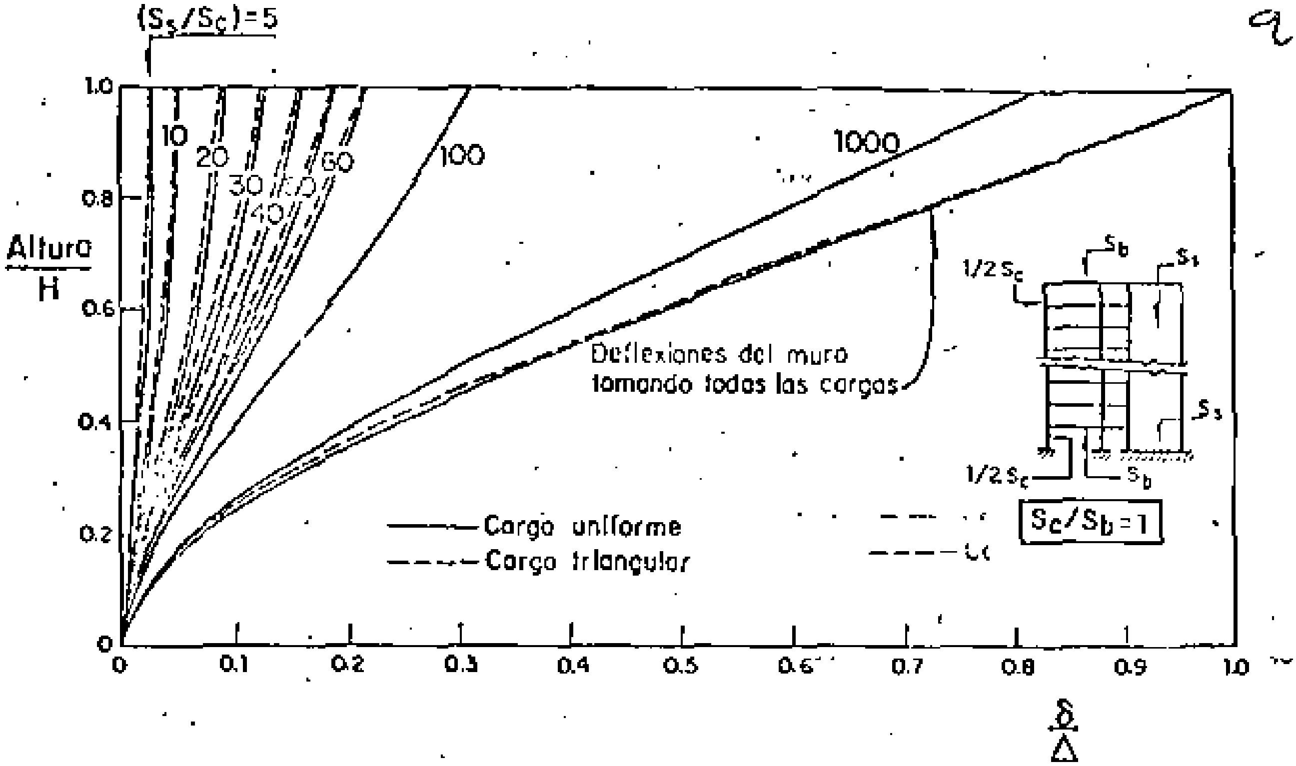


Fig 2.5 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

δ = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente

Δ = Deflexión del extremo superior del muro aplicándole las cargas totales

H = Altura total

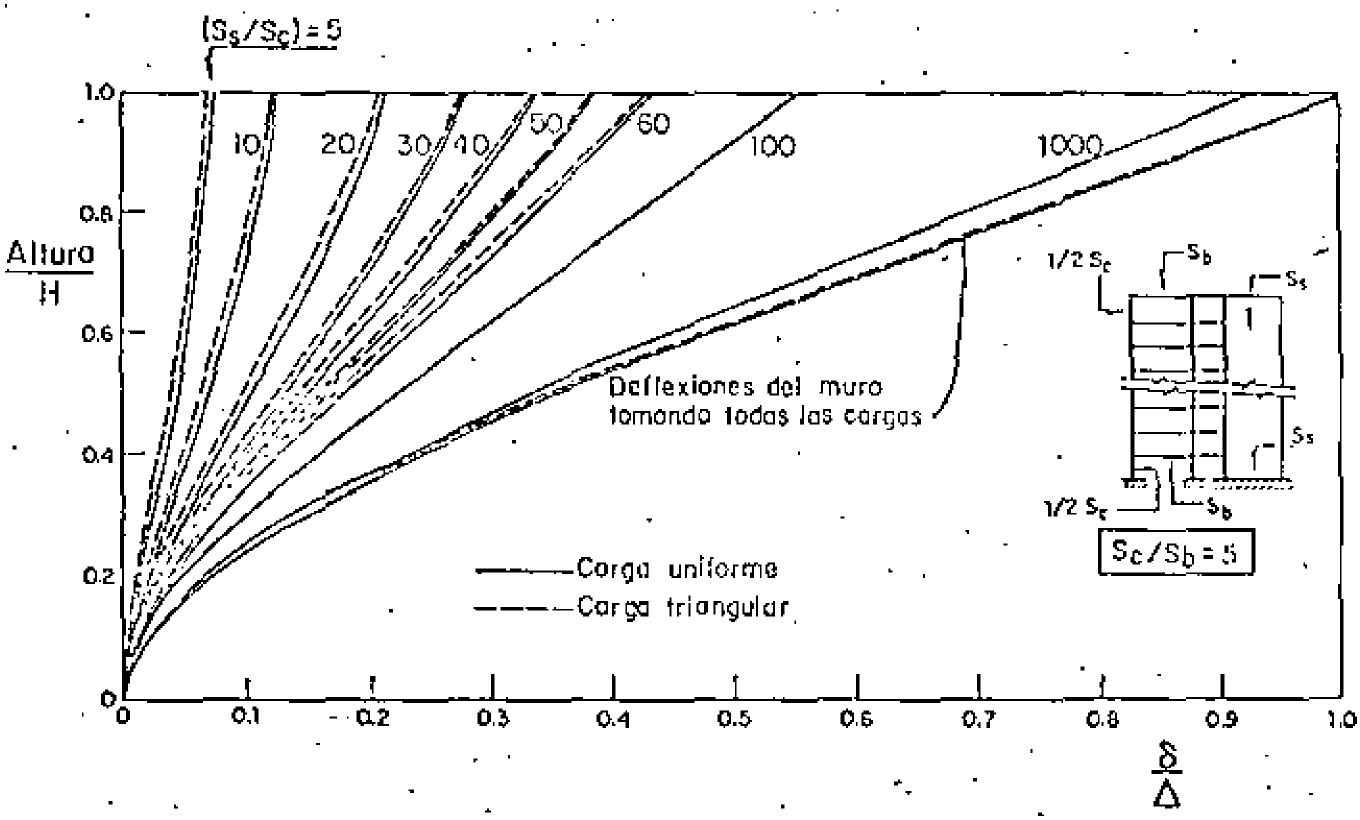


Fig 2.6 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

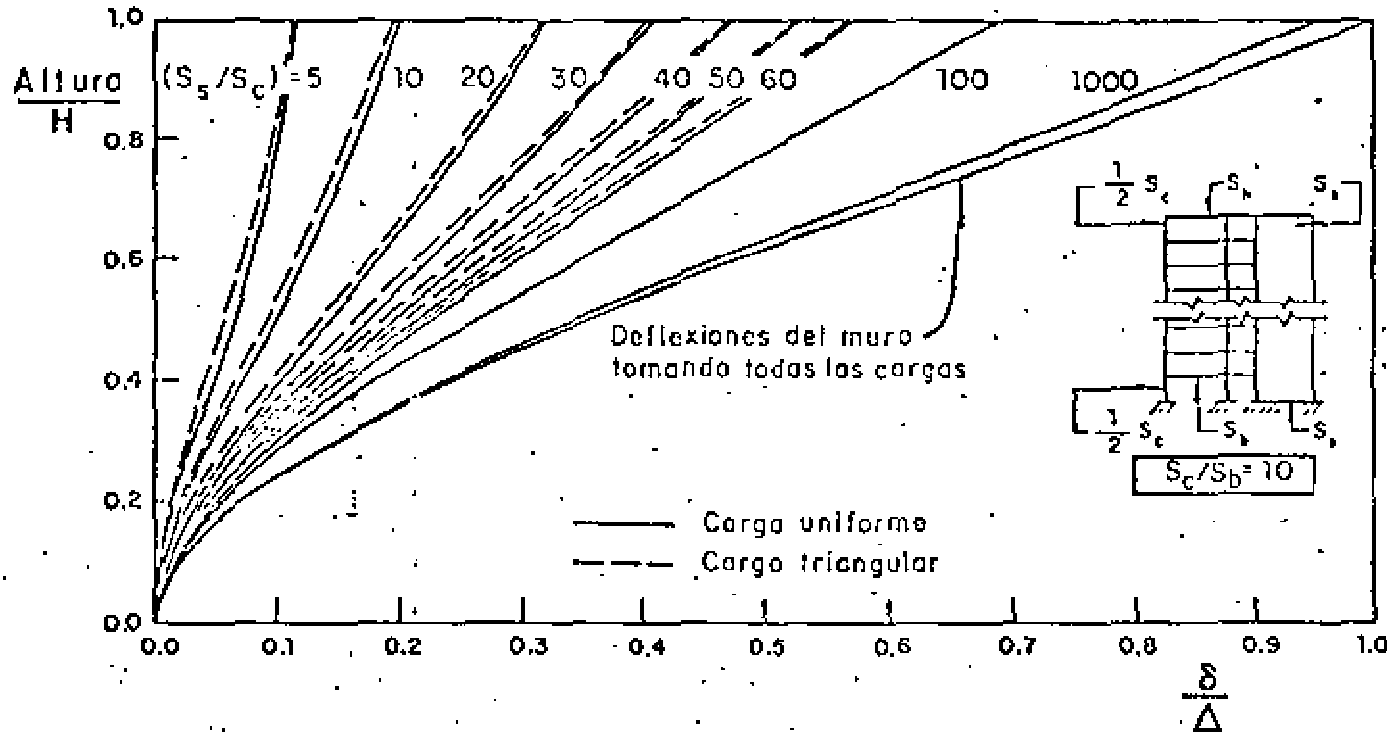


Fig 2.7 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

δ = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente

Δ = Deflexión del extremo superior del muro aplicándole las cargas totales

H = Altura total

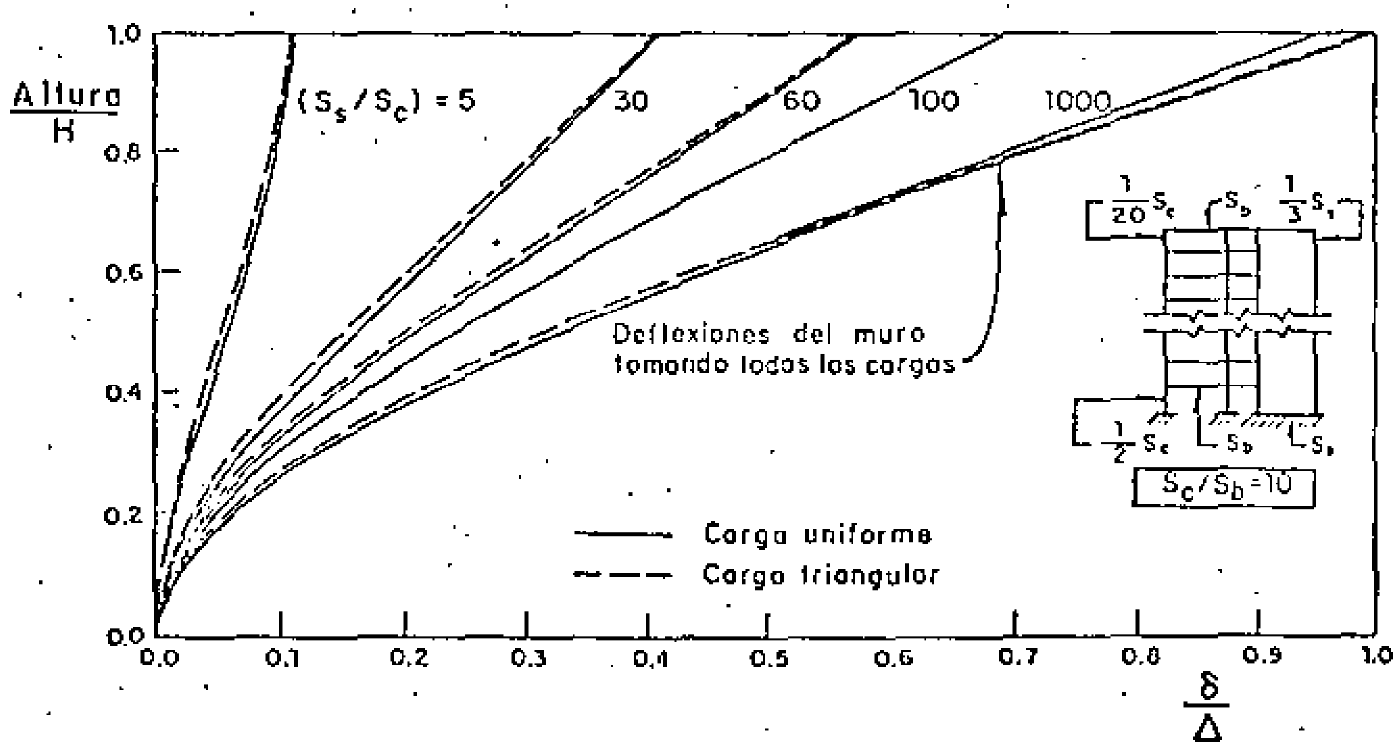


Fig 2.8 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

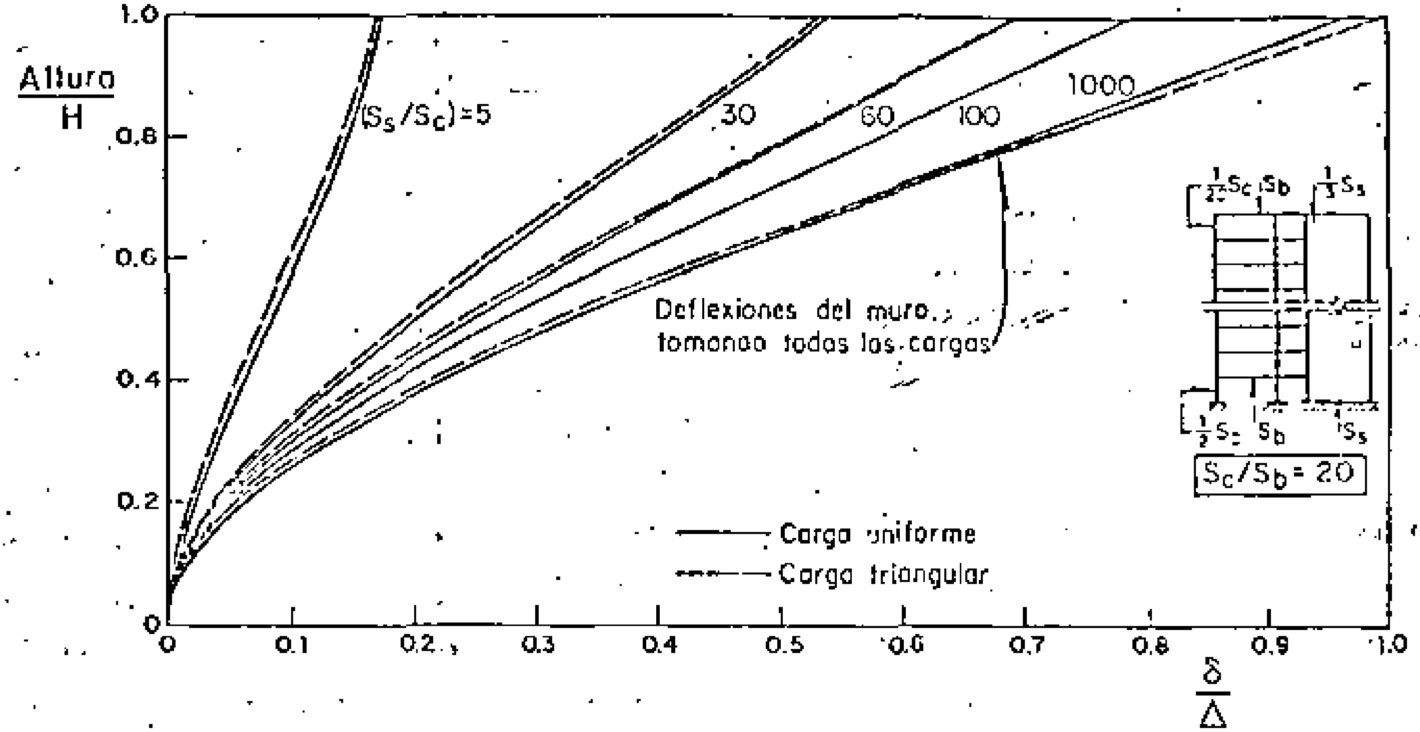


Fig 2.9 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

δ = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente
Δ = Deflexión del extremo superior del muro aplicándole las cargas totales
H = Altura total

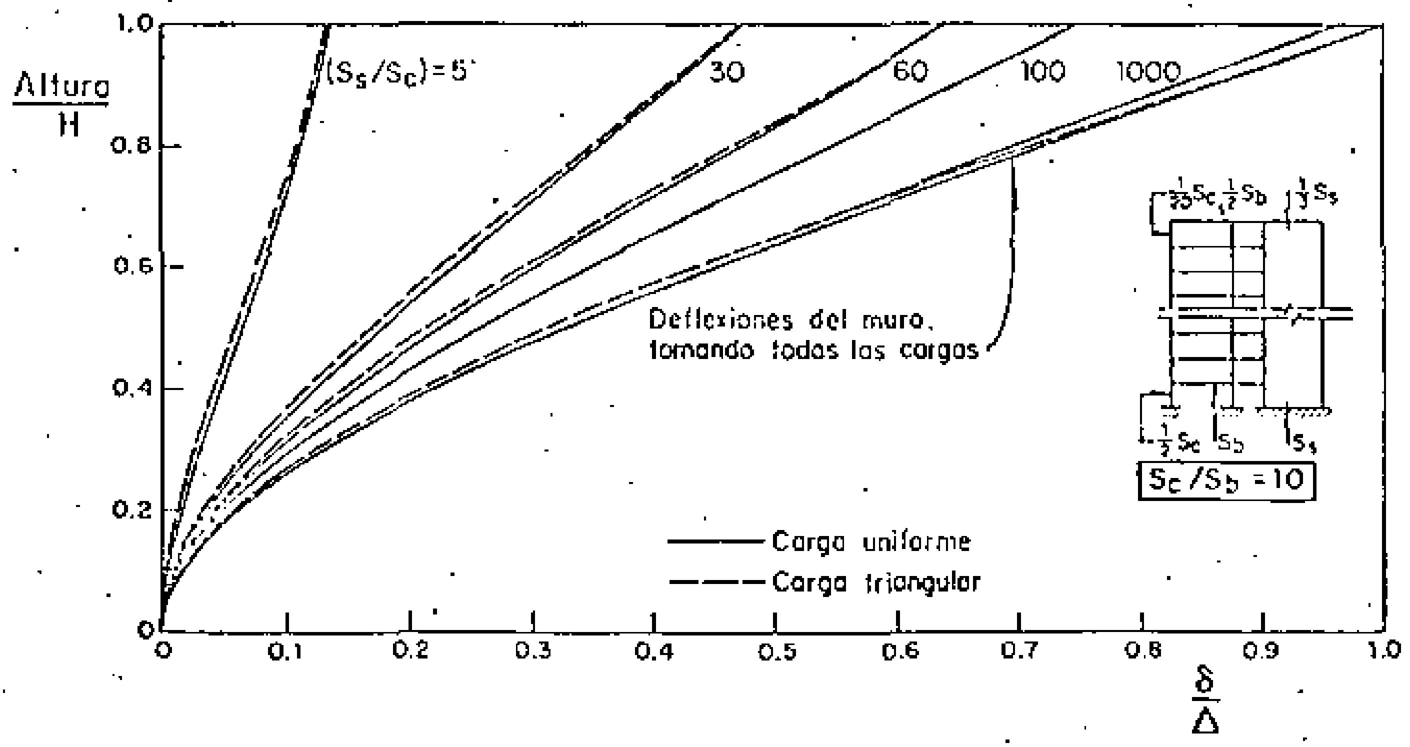
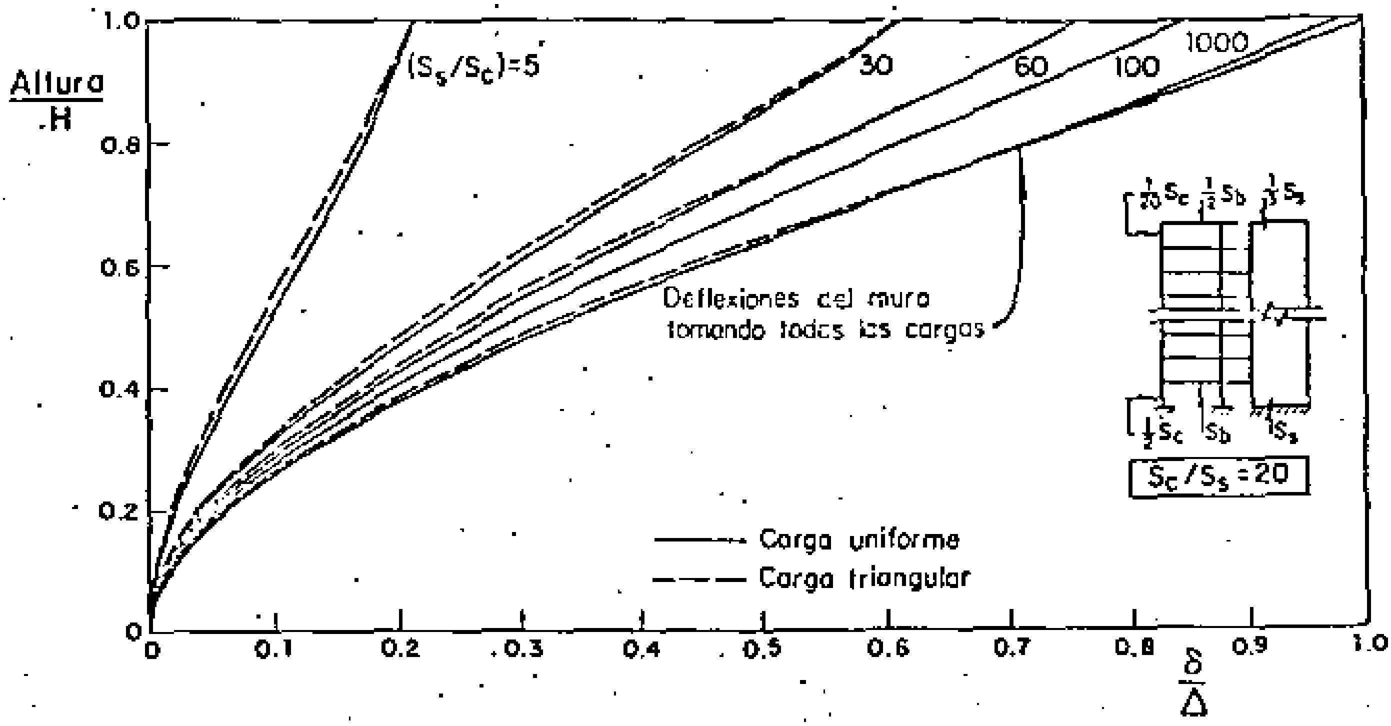


Fig 2.10 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)



δ = Deflexión de la estructura a la altura correspondiente
Δ = Deflexión del extremo superior del muro aplicándole las cargas totales
H = Altura total

Fig 2.11 Gráficas de Khan y Sbarounis (ref 15)

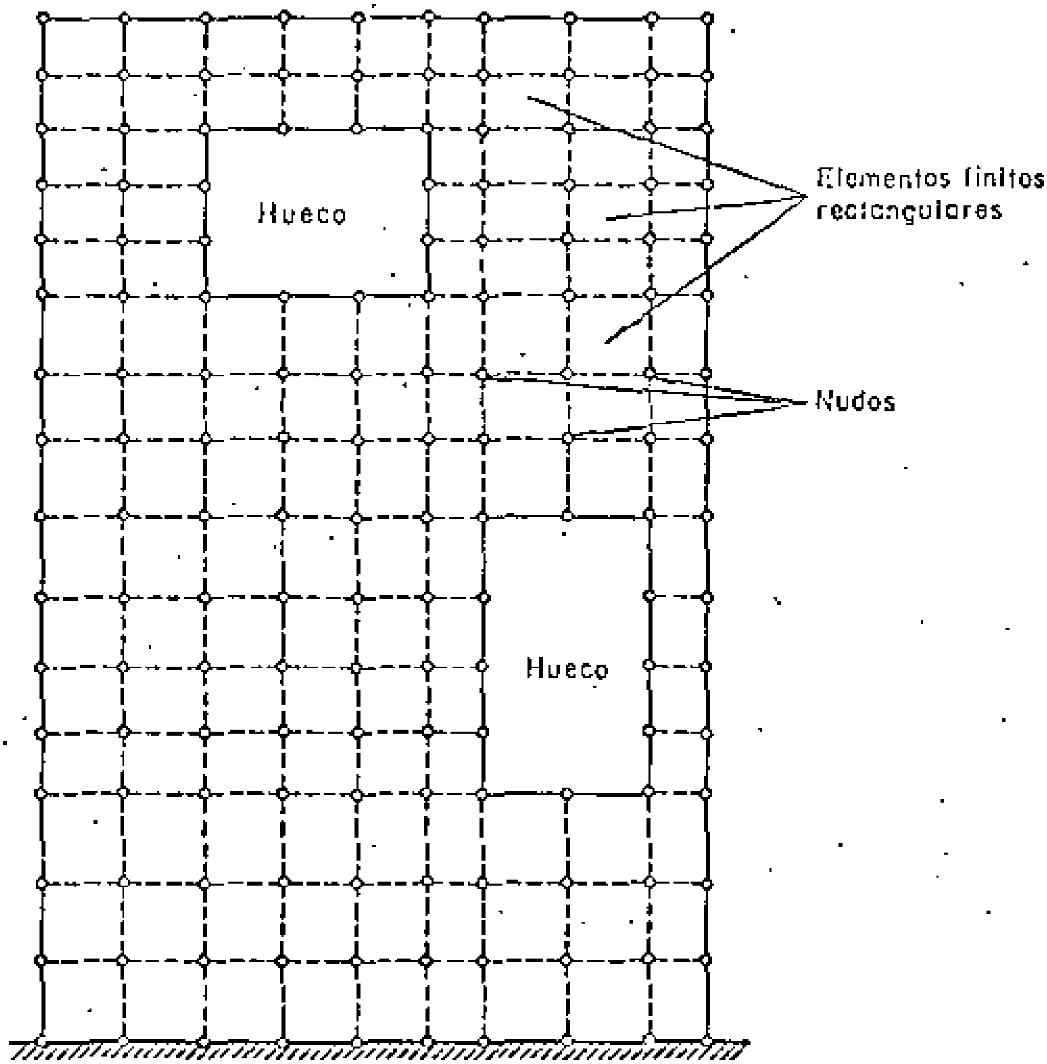


Fig 2.12 Malla de elementos finitos para analizar un muro con huecos

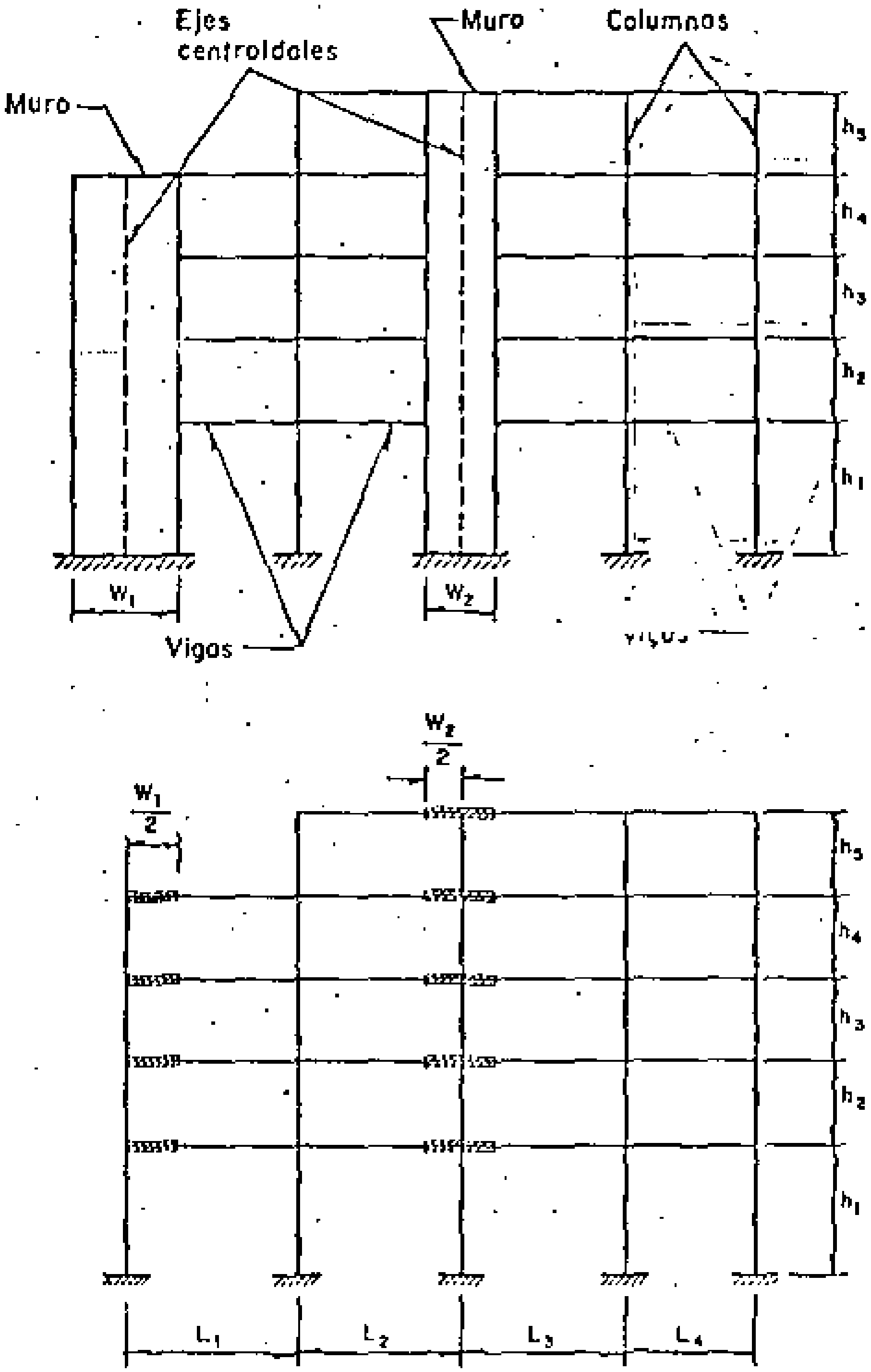
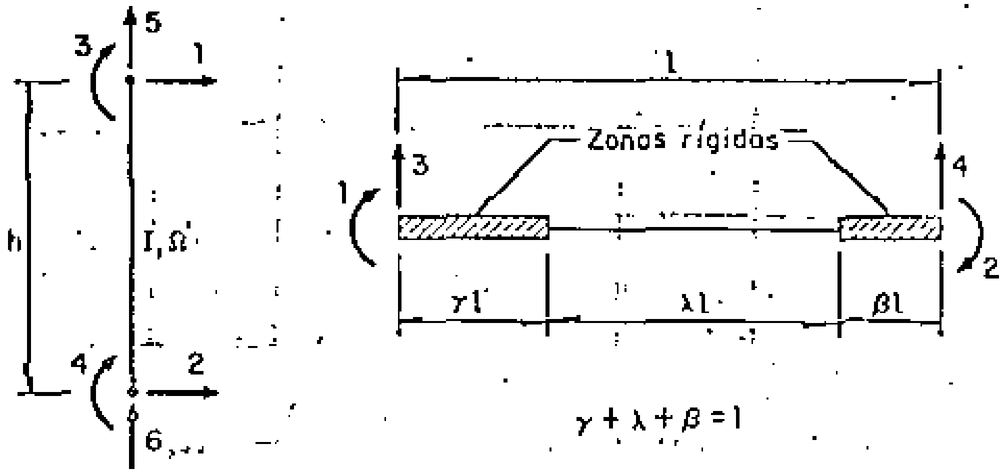


Fig 2.13 Sistema muro-marco típico y su idealización como un marco con columnas anchas



$\alpha = \frac{12\,EI}{G\Omega}$

a) Columna ancha

b) Viga con zonas infinitamente rígidas a flexión en sus extremos

Fig 2.14 Notación y grados de libertad para columnas y vigas en el método de la columna ancha

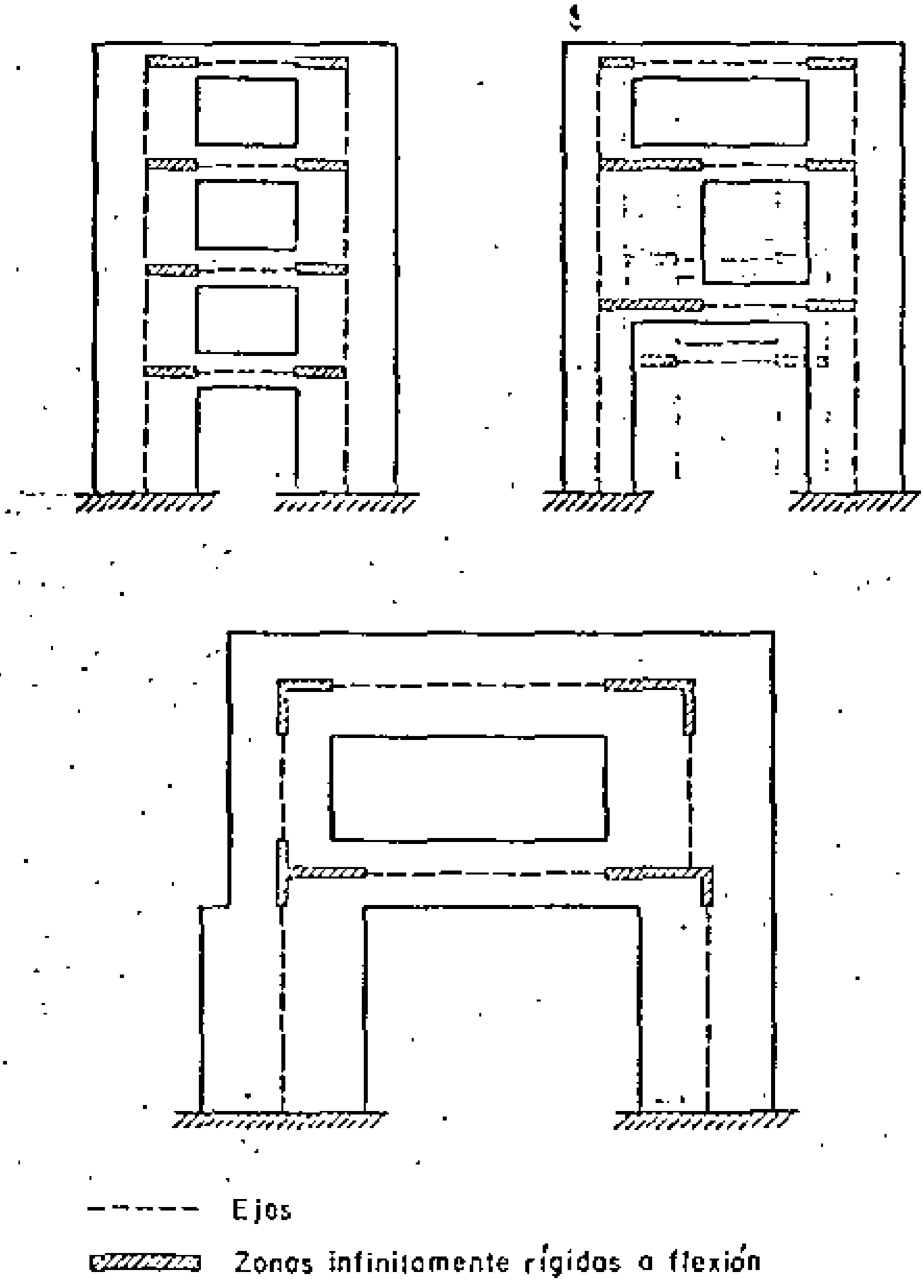


Fig 2.15 Algunos casos de muros con huecos que pueden analizarse con el método de la columna ancha

34

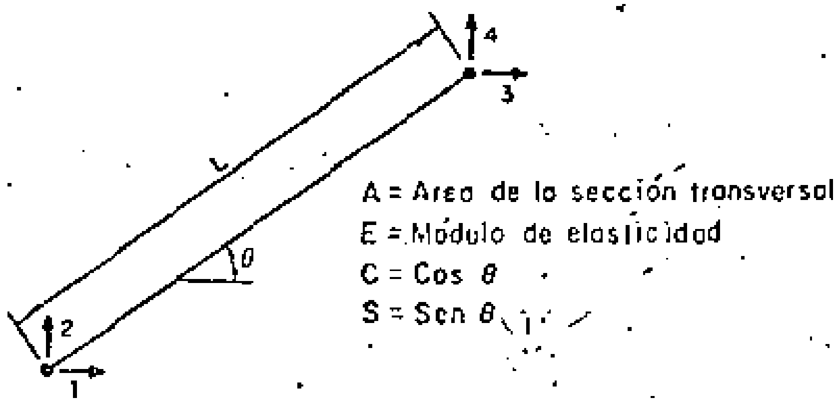


Fig 2.16 Propiedades y grados de libertad de una diagonal

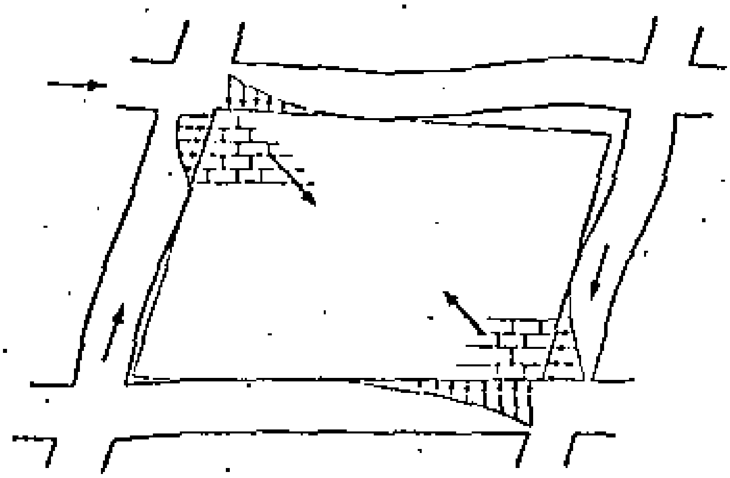


Fig. 2.17 Muro de mampostería confinado por un marco

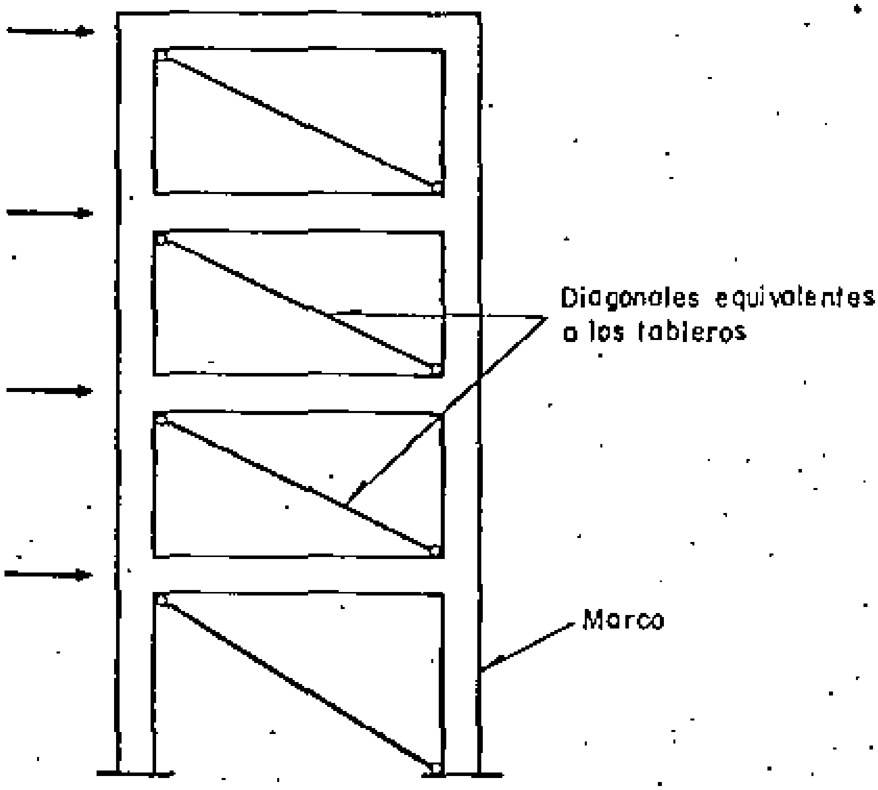
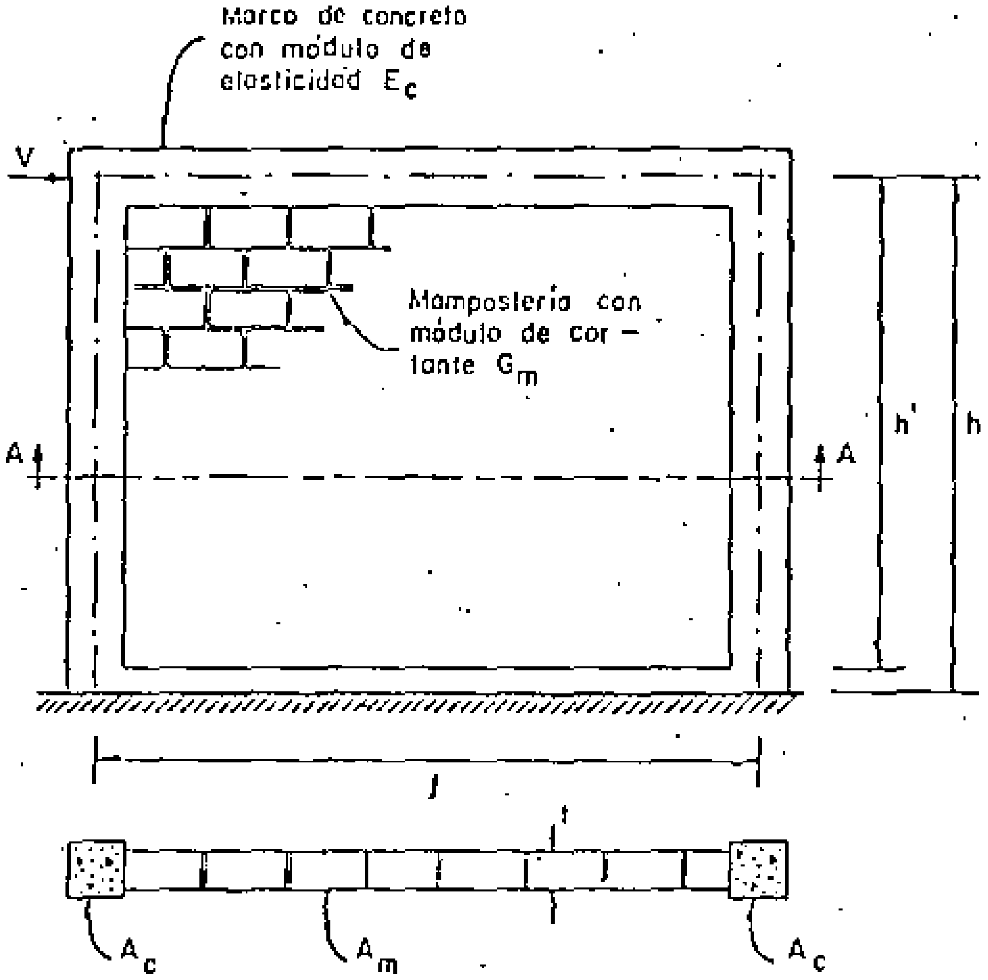


Fig 2.18 Diagonales en compresión equivalentes a tableros de mampostería confinados por vigas y columnas, cuando están sujetos a cargas laterales



Corte A-A

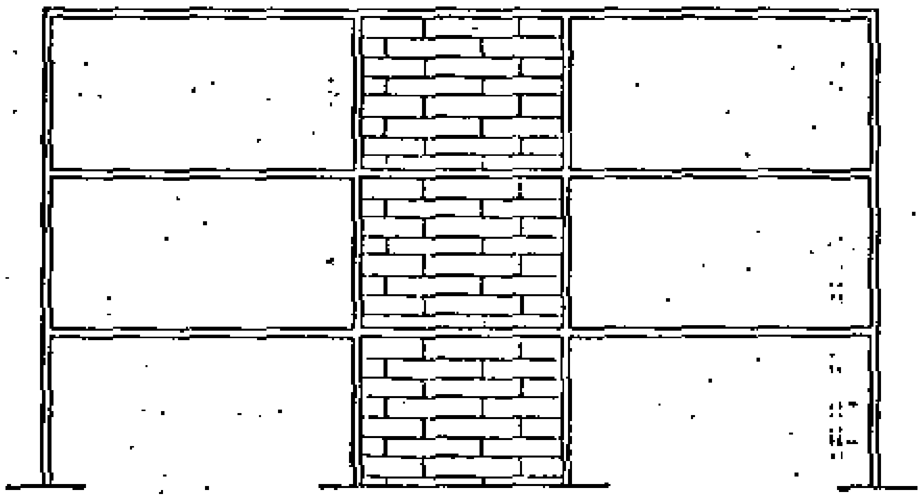
Definiciones

$$\zeta = \frac{l}{h} = \text{relación de aspecto}$$

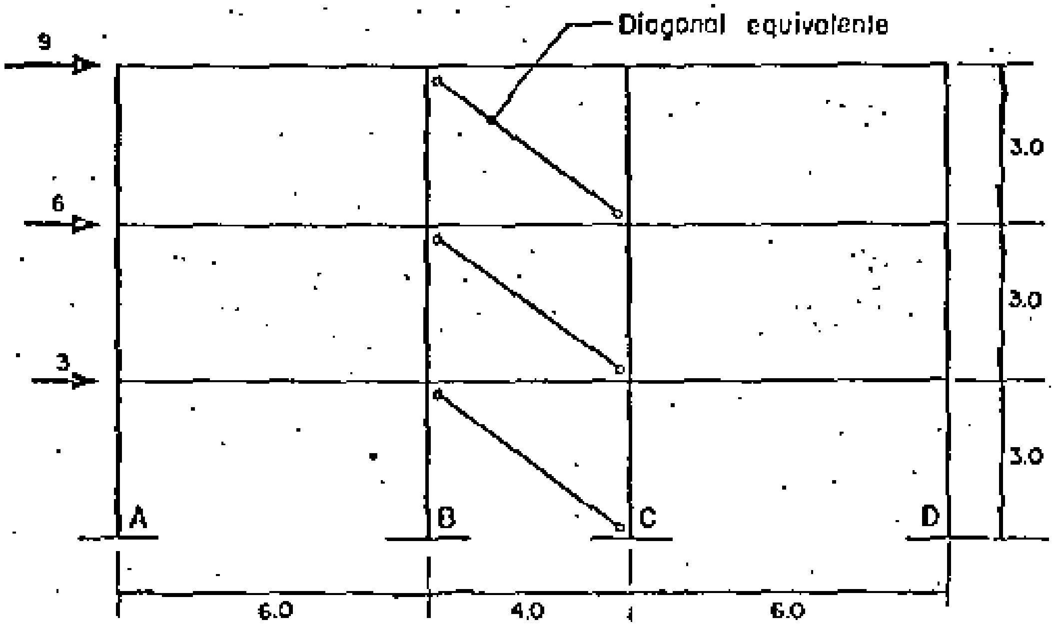
$$\lambda = \frac{E_c\ A_c}{G_m\ A_m}$$

$$I = \frac{A_c l^2}{2}$$

Fig 2.19 Definiciones empleadas para determinar la rigidez lateral de muros de mampostería confinados por marcos de concreto



Columnas de 0.30 X 0.30 y vigas de 0.25 X 0.50, de concreto con $f'c = 210 \ kg/cm^2$
Muros de tabique de barro recocido de 0.15 m de espesor



Fuerzas en toneladas y longitudes en metros

Fig 2.20 Marco con muros de mampostería

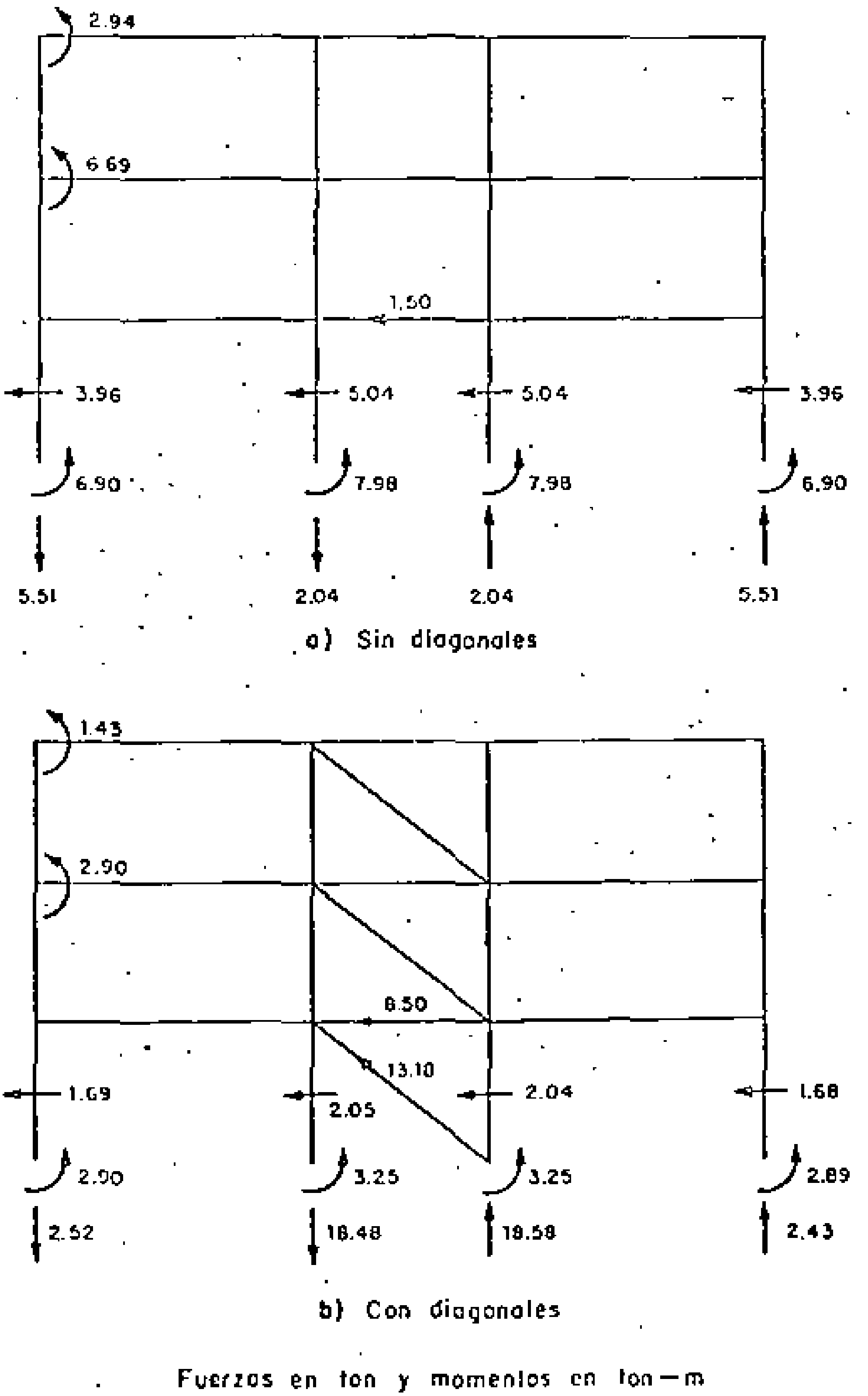


Fig 2.21 Algunos resultados de analizar el marco de la fig 2.19

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL
(Con Introducción al Método del Elemento Finito)

NOTAS COMPLEMENTARIAS A :
"GENERALIDADES SOBRE MATRICES

DR. JORGE ANGELES ALVAREZ

MAYO , 1984.

Notas complementarias a "Generalidades sobre Matrices", de J. Angeles

1. Necesidad del pivoteo parcial (intercambio de renglones) en el método de Gauss para reducir el error de redondeo.

Considérese el sistema

$$0.005 x_1 + x_2 = 0.5 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 = 1.0 \quad (2)$$

Su solución exacta es

$$x_1 = \frac{5000}{9950} \approx 0.503, \; x_2 = \frac{4950}{9950} \approx 0.497$$

Aplíquese el método de Gauss al sistema, con dos cifras significativas. Se tiene

$$(1) : 0.005 \Rightarrow x_1 + 200 x_2 = 100 \quad (1')$$

$$(1') - (2) \Rightarrow 200 x_2 = 99 \Rightarrow x_2 = \frac{99}{200} = 0.50,$$

con dos cifras significativas

x_2 en $(1') \Rightarrow x_1 = 0$, que es un resultado catastrófico, pues x_2 resulta aceptable; pero x_1, con un error de redondeo de $\frac{0.50-0}{0.50} \times 100 = 100\%$!

Con pivoteo parcial: Intercámbiese las ecuaciones, con el objeto de que la división se haga entre el coeficiente de x_1 de (2), que es igual a 1, y no entre el de x_1 en (1), que es 0.005, mucho más pequeño que 1. Así:

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (i)$$

$$0.005x_1 + x_2 = 0.5 \quad (ii)$$

$(i) - (ii) \Rightarrow (1 - 0.005)x_1 + (1-1)x_2 = 1 - 0.5$

que, con dos cifras significativas, da

$$x_1 = 0.5$$

x_1 en $(i) \Rightarrow x_2 = 1 - 0.5 = 0.5$

que es un resultado bastante aceptable.

Nótese la diferencia en ambos resultados, aun habiendo utilizado en ambos casos igual número de cifras significativas.

Ejemplos de métodos iterativos

Sea el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 1 \quad (1) \\ -x_1 + 4x_2 &= 2 \quad (2) \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = D + E + F = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow Dx = -(E+F)x + b$$

$\Rightarrow x^{k+1} = -D^{-1}(E+F)x^k + D^{-1}b$ (Esquema iterativo de Jacobi)

$$M_J = -D^{-1}(E+F) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Evolución del error:

$$\varepsilon^k = M_J^k \varepsilon^0, \quad M_J^k = \begin{cases} \frac{1}{4^k} M, & k \text{ non} \\ \frac{1}{4^k} I, & k \text{ par} \end{cases}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o sea, el error decrece aproximadamente a razón de $\frac{1}{4}$ por iteración. Así, si $x^0 = [0, 0]^T$,

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.50 \end{bmatrix}, \; x^2 = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.437 \end{bmatrix}, \; x^3 = \begin{bmatrix} 0.140 \\ 0.469 \end{bmatrix}, \; x^4 = \begin{bmatrix} 0.133 \\ 0.465 \end{bmatrix}$$

La solución exacta es $x = [0.4, 0.6]^T$

$\Rightarrow \varepsilon^0 = [0.4, 0.6]$, $\varepsilon^4 = [0.267, 0.135]^T$

$$\| \varepsilon^0 \| = \sqrt{0.4^2 + 0.6^2} = 0.72$$

$$\| \varepsilon^4 \| = \sqrt{0.267^2 + 0.135^2} = 0.299$$

$\Rightarrow$ Al cabo de la 4a iteración el error se redujo a un 40 % de su valor original, una reducción bastante más pobre que la predicha.

Con el esquema iterativo de Gauss-Seidel,

$$x_1^{k+1} = -\frac{1}{4}(x_2^k - 1) \quad , \quad x_2^{k+1} = -\frac{1}{4}(x_1^{k+1} - 2) =$$

$$= \frac{1}{16}(x_2^k + 7)$$

o sea

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{k+1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^k + \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$M_{GS} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Evolución del error:

$$\varepsilon^k = M_{GS}^k \varepsilon^0 \quad , \quad M_{GS}^k = \frac{1}{16^{k-1}} M_{GS}$$

o sea, el error decrece aproximadamente a razón de menos de $\frac{1}{4}$ por iteración. En realidad, a una tasa comprendida entre $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{4}$, dado el -4 dentro de M_{GS}. Desarrollando, se tiene, para $x^0 = [0, 0]^T$,

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.438 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 0.141 \\ 0.465 \end{bmatrix}, \quad x^3 = \begin{bmatrix} 0.134 \\ 0.466 \end{bmatrix}, \quad x^4 = \begin{bmatrix} 0.133 \\ 0.467 \end{bmatrix}$$

Resulta que Gauss-Seidel y Jacobi convergen más o menos con la misma lentitud, en este caso.

Se anexa un ejemplo en el que se observa falta de convergencia en un esquema iterativo.

SOME CONSIDERATIONS ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM.

Since the Neumann Problem has a unique solution up to an additive constant, it is expected that the discrete version of this problem does not yield a unique solution. In fact the corresponding linear equations are not linearly independent. However, n-1 of the n linear equations are linearly independent. This fact means that we are able to assign an arbitrary value to one of the components of the solution vector, thus obtaining a system of n-1 linearly independent equations.

One question arises: What happens if, disregarding the fact that the n linear equations are not linearly independent, one applies an interative procedure, e.g., Gauss Seidel, to solve the system of equations?,

It is apparent that one will not have convergence, but it is not obvious that the singularity of the matrix of the system will lead to divergence.

Let us see, however, what happens in a particularly simple problem. Given the Neumann Problem

$$\nabla^2 \omega = 0 \text{ in } \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = c_i \text{ on } \partial\Omega_i, i = 1,\ldots,N \tag{2}$$

Where Ω is the rectangular domain $0<x<h, 0<y<h$ in the X-Y plane and c_i is the constant value of the normal derivative of ω on the portion $\partial\Omega_i$ of the boundary. To be specific, let

$$\left.\begin{array}{l} \omega_x(o,y)=0,\ \omega_x(h,y)= c_1 \\ \omega_y(x,0)=0,\ \omega_y(x,h)= c_2 \end{array}\right\} \tag{3}$$

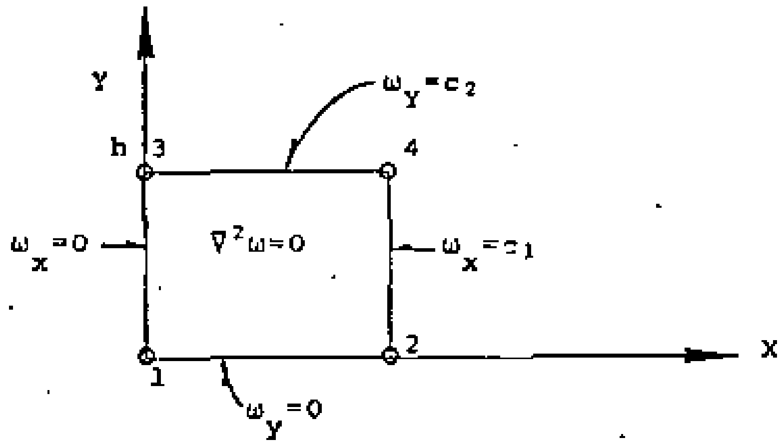
where the constants c_1 and c_2 are not arbitrary but they have to satisfy the compatibility condition

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\omega}{\partial n}\, ds=0, \tag{4}$$

from which we obtain

$$c_1=-c_2 \tag{5}$$

Let us construct a very coarse grid of 4 points over Ω, as is shown below,



The equations for the discretized solution $[\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4]^T$ are

$$\left.\begin{aligned}
&2\omega_3+2\omega_2-4\omega_1=0\\
&2\omega_4+2\omega_1+2hc_1-4\omega_2=0\\
&2\omega_4+2\omega_1+2hc_2-4\omega_3=0\\
&2\omega_3+2\omega_2+2hc_1+2hc_2-4\omega_4=0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

or, in matrix form, after dropping common factors,

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ -hc_1\\ -hc_2\\ -hc_1-hc_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

from which it is apparent that the first equation is a linear combination of the remaining three, namely, it is equal to the sum of the second and third equations subtracted from the fourth one.

It can be readily checked that the rank of the above matrix is 3.

Let us express equation (7) in the form

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{b} \tag{8}$$

In order to apply point Jacobi iterative procedure, express $\underset{\sim}{A}$ as the sum of a diagonal matrix, a strictly upper triangular and a strictly lower triangular matrices, namely

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{U} \tag{9}$$

Then equation (8) leads to the iterative scheme

$$\underset{\sim}{\omega}(k+1) = -\underset{\sim}{D}^{-1}(\underset{\sim}{L}+\underset{\sim}{U})\underset{\sim}{\omega}(\underset{\sim}{k})+\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{b} \tag{10}$$

or, in component form:

$$\begin{bmatrix} \omega_1(k+1) \\ \omega_2(k+1) \\ \omega_3(k+1) \\ \omega_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(k) \\ \omega_2(k) \\ \omega_3(k) \\ \omega_4(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2}h \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

which converges <u>if and only if</u> the spectral radius of the matrix

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

is less than one.

Let us compute the eigenvalues of $\underset{\sim}{B}$:

$$\det(\underset{\sim}{B}-\lambda\underset{\sim}{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2 = 0 \tag{12}$$

Hence

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=1$$

Thus, spectral radius of $\underset{\sim}{B}$ is 1 and so the iterative procedure (11) will not converge.

In fact, let us compute the <u>nth</u> power of $\underset{\sim}{B}$:

$$\underset{\sim}{B}^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{B}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{B}$$

From Cayley-Hamilton Theorem and the characteristic equation (12) we have

$$\underset{\sim}{B}^4 = \underset{\sim}{B}^2$$

and $$\underset{\sim}{B}^5 = \underset{\sim}{B}^3 = \underset{\sim}{B}$$

Thus, $$\underset{\sim}{B}^{2k} = \underset{\sim}{B}^2 \;,\; \underset{\sim}{B}^{2k+1} = \underset{\sim}{B}, k=1,2,... \tag{13}$$

and so the error, vector

$$\underset{\sim}{e}(k) = \underset{\sim}{\omega}(k) - \underset{\sim}{\omega} \tag{14}$$

where $\underset{\sim}{\omega}$= actual solution, oscillates.
Let us arbitrarily assign the value zero to ω_4. The system (7) reduces to

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -hc_1 \\ -hc_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\text{or } \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{b} \text{ and } \underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{b} \tag{16}$$

where $$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det A}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2\,(4-1) = -4$$

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Thus,

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -hc_1 \\ -hc_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2hc_1 - 2hc_2 \\ -3hc_1 - hc_2 \\ -hc_1 - 3hc_2 \end{bmatrix}$$

Substituting eq. (5), namely $c_1=-c_2$, into the above equation, one obtains

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2hc_1 \\ -1/2hc_1 \end{bmatrix}.$$

Thus the distribution of $\omega\ \Omega \cap \partial\Omega$ is

Y

$-\frac{1}{2}hc$ $\quad$ 0.0

0.0 $\quad$ $+\frac{1}{2}hc_1$ X

Comparing this discrete solution with the closed form solution of the continuous problem,

$$\omega(x,y)= \frac{c_1}{2h}\,(x^2- y^2),$$

one obtains

$$\omega(0,0)=0,\ \omega(0,h)=\frac{1}{2}hc_1,$$

$$\omega(h,0)=-\frac{1}{2}hc_1,\ \omega(h,h)=0,$$

i.e., we have zero error at the grid points.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ANALISIS ESTRUCTURAL

CON INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

ELEMENTOS DE ALGEBRA MATRICIAL
A N E X O S

DR. JORGE ANGELES ALVAREZ

MAYO, 1984

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-22

Matriz de $m \times n$

$$[A] = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & j\text{ª columna} & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & a_{mn} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i\text{º renglón} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Si $[A]$ y $[B]$ son de $m \times n$

$[A] = [B]$ si, y sólo si

$a_{ij} = b_{ij}$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$

Si c es un número real arb.

$[D] = c[A]$ es una matriz de $m \times n$

$$d_{ij} = c\, a_{ij}$$

$$[S] = [A] + [B]$$

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Si $[A]$ es de $m \times n$ y $[B]$ de $n \times p$, 2

$\underset{m\times p}{\longrightarrow}$ $[C] = [A][B]$ es el producto de $[A]$ y $[B]$ (en ese orden)

y se define como:

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \; ; \; i = 1, \dots, m,$$

$$k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p$$

$$c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

El número de cols de $[A]$ tiene que coincidir con el número de renglones de $[B]$

Si $m \neq p$, $[B][A]$ no se puede definir.

Sea un sistema algebraico (lineal de n ecs con n incógnitas:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Gauss, $\underbrace{\text{Gauss-Seidel}}$, Cramer,

Gauss → directo; Gauss-Seidel → iterativo; Cramer → D

Cholesky → D

$$\text{Cramer: } x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$|\cdot| = \det(\cdot)$

$\det(A) \neq 0$; Si $\det(A) = 0$, A es "singular"

4

$A: 2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A \equiv a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$A: 3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow i \doteq \text{renglón}$$

$$\det A \equiv a_{i1}\operatorname{cof}(a_{i1}) + a_{i2}\operatorname{cof}(a_{i2}) + a_{i3}\operatorname{cof}(a_{i3})$$

$a_{i-1,j+1}$

$$\operatorname{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det[A_{ij}]$$

$$\underbrace{A_{ij}}_{n' \times n'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$n' \equiv n - 1$

$$\operatorname{cof}(a_{21}) = (-1)^{2+1} \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

$$\operatorname{cof}(a_{22}) = (-1)^{2+2} \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$\operatorname{cof}(a_{23}) = (-1)^{2+3} \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$A: n \times n$

$$\det(A) = a_{i1}\operatorname{cof}(a_{i1}) + a_{i2}\operatorname{cof}(a_{i2}) + \dots + a_{in}\operatorname{cof}(a_{in})$$

$$A_i \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El cálculo de det(A), si A es $n \times n$, requiere $N = n!$ operaciones

$\Rightarrow$ La regla de Cramer da la soln al sist alg lin de n ecs con n incóg. en $(n+1)!$ ops.

Ej: $n = 25$. Para resolver un sist de 25 ecs con 25 inc por la regla de Cramer se requieren $26!$ operaciones $= 1.55 \times 10^{25}$ ops.

Si se efectúan 10^6 ops/seg

T = tiempo requerido de ejec.

$T = 1.55 \times 10^{19}$ s

La vida del universo $\approx 10^{17}$ s

Ej: Gauss

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \quad \text{— (1)}$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \quad \text{— (2)}$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \quad \text{— (3)}$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -15 \quad \cancel{(2)}$$
$$-3x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 = -9/2 \quad \cancel{(3)}$$

$$+ (1) \begin{cases} 5x_2 - 7x_3 = -11 & (2') \\ \frac{7}{\cancel{7}}x_2 - \frac{5}{\cancel{7}}x_3 = -\frac{1}{\cancel{7}} & (3') \end{cases}$$

$$(3') + (2') \Rightarrow -5x_2 + \frac{25}{7}x_3 = \frac{5}{7} \qquad (3'')$$

$$-\frac{24}{\cancel{7}}x_3 = -\frac{72}{\cancel{7}} \qquad (3''')$$

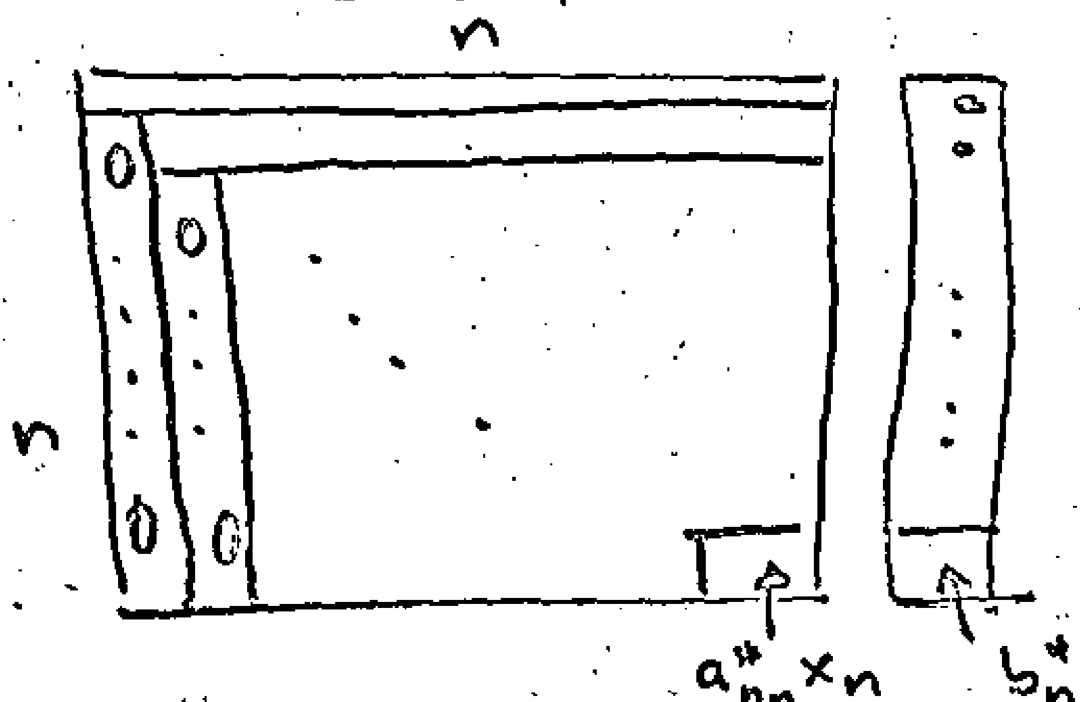
$$(3''') \Rightarrow \boxed{x_3 = 3} \qquad (\mathrm{III})$$

$$(\mathrm{III}) \text{ en } (2') \Rightarrow 5x_2 - 21 = -11$$

$$\Rightarrow 5x_2 = 10 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2} \qquad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{II}) \text{ y } (\mathrm{III}) \text{ en } (1) \Rightarrow 3x_1 + \cancel{4} - 3 = \cancel{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$



prec   red   error de red

$$fl[a\,x] = a(x+\delta x) =$$

$$= ax + \underbrace{a\delta x}_{\text{error de red}}$$

$$fl\left[\frac{a}{x}\right] = \frac{a}{x+\delta x} \approx \frac{a}{x} - \frac{a}{\delta x}$$

$$fl\left[\frac{x}{a}\right] = \frac{x+\delta x}{a} = \frac{x}{a} + \frac{\delta x}{a}$$

$$x_1 + 1000\,x_2 = 1 \qquad (1)$$

$$1000\,x_1 + x_2 = 1000 \qquad (2)$$

$$(1)\times 1000 - (2) \Rightarrow$$

$$(1000 - 1000)\,x_1 + (1000000 - 1)\,x_2 = 0$$

$$\cancel{x_1} + 1000000\,x_2 = 0$$

$$\cancel{x_2 = \frac{21}{1000}}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_1 + 1000\,x_2 = 10 \qquad (1)$$

$$1000\,x_1 + x_2 = 1000 \qquad (2)$$

$$(\underbrace{1000 - 1000}_{0})\,x_1 + (1000000 - 1)\,x_2 = 9000$$

$$1000000\,x_2 = 9000 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{1000}$$

9

x_2 en $(1) \Rightarrow x_1 = 10 - 9 = 1$

x_1 y x_2 en $(2) \Rightarrow$

$$1000 + \underbrace{\frac{9}{1000}}_{0.009} = 1000 \qquad \varepsilon = 0.009$$

$$1000x_1 + x_2 = 1000 \quad (1')$$
$$x_1 + 1000x_2 = 10 \quad (2')$$

$(1'):1000 - (2')$

$$\cancel{x_1} + \frac{x_2}{1000} - (\cancel{x_1} + 1000x_2) = -9$$

$$(\underbrace{0.001 - 1000})\, x_2 = -9$$

$$-1000x_2 = -9 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{9}{1000}}$$

x_2 en $(1') \Rightarrow 1000x_1 + \frac{9}{1000} = 1000$

$$1000x_1 = 1000 - \frac{9}{1000} = \underbrace{\underbrace{1000 - 0.009}_{999{,}991}}_{1000}$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

1C

Si A es de $n \times n$ y $\det A \neq 0$,

$Ax = b$ (sist alg lin de n ecs con n inc)

$[A]\{x\} = \{b\}$

tiene solución y ésta es <u>única</u>.

$x = A^{-1} b$

$\{x\} = [A^{-1}]\{b\}$

Gauss $\Leftrightarrow$ Descomposición LU

$A = LU$

L y U son <u>únicas</u>

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n'} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$n' \equiv n-1$

$\Rightarrow \quad LUx = b$

$Ux = y \Rightarrow Ly = b$

Inversión de matrices

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} cof(a_{11}) & cof(a_{12}) & \cdots & cof(a_{1n}) \\ cof(a_{21}) & cof(a_{22}) & \cdots & cof(a_{2n}) \\ \vdots & & & \\ cof(a_{n1}) & cof(a_{n2}) & \cdots & cof(a_{nn}) \end{bmatrix}^T$$

Ejemplo numérico: p15 Ballesteros

Gauss: $A = LU$

$Ax = b$

$A\{x\} = \{e_i\}, \quad i = 1, \ldots, n$

$\{e_i\} = [0, \ldots, 0, \underset{}{\overset{i^{\underline{o}}\ \text{elemento}}{1}}, 0, \ldots 0]^T$

$$A^{-1} = [\{x_1\} \vdots \{x_2\} \vdots \cdots \vdots \{x_n\}]$$

Invertir una matriz requiere

$N \doteq \frac{1}{3} n^4$ operaciones

Conjunto de p sists. alg. lin 13

$$A\{x\}=\{b\}_1,\ A\{x\}=\{b_2\}, \ldots, [A]\{x\}=\{b_p\}$$

$$N \doteq \frac{1}{3}n^3 p \text{ operaciones}$$

Casos particulares de matrices

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad [A^T]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$[A]$ es simétrica si $[A]=[A^T]$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n\times n}}{A}\ \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{u} = \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{v}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n = v_1$$
$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n = v_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n = v_n$$

Si A es p d,

$$\phi = u^T A u > 0$$

$$\phi = \|w\|^2 > 0$$

$$w = \underset{\substack{\uparrow \\ n\times n}}{B} u \quad , B^T B = A$$

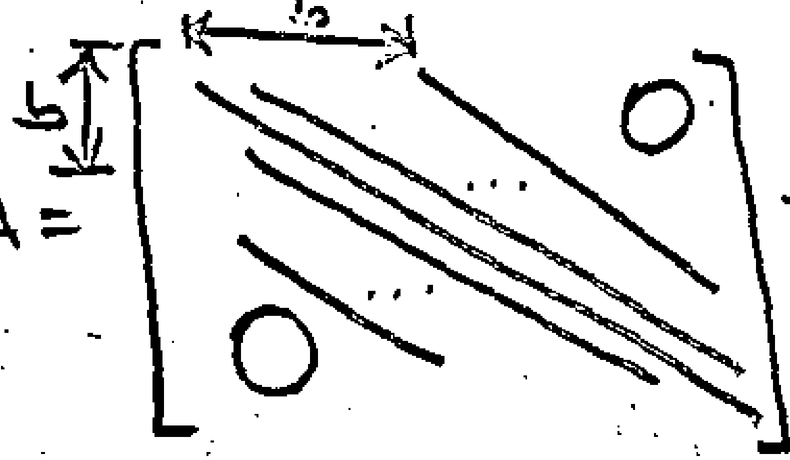
$$\|w\|^2 = w^T w = u^T B^T B u =$$

$$= u^T A u$$

$$A = LU = U^T U$$

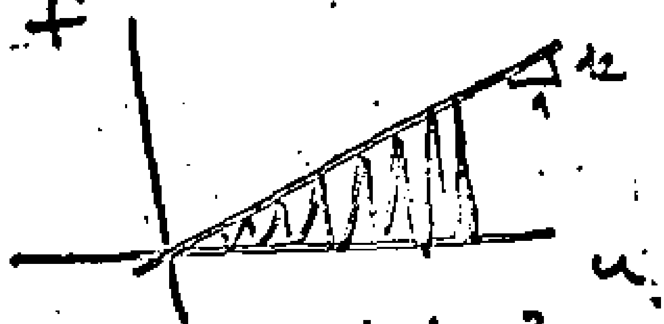
$$N_{op} < \frac{1}{3} n^3$$

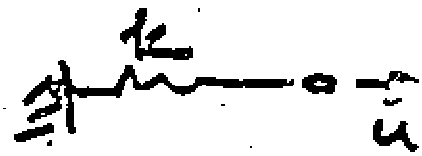
Si, además, A es bandeada con un ancho de banda b:

$A =$ 

$$\Rightarrow \underbrace{N_{op} \doteq \frac{1}{2} n^2 b}_{\text{Cholesky}}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \underbrace{u^T K u}_{\text{energía potencial elástica}} > 0$$





$$A = \frac{1}{2} k u^2$$

Métodos iterativos

A: $n \times n$ arbitraria

$A \equiv D + E + F$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_J = -\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$