UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

METODOLOGÍAS COHERENTES PARA VALUAR RIESGOS DE PORTAFOLIO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA DE SISTEMAS –INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

P R E S E N T A:

OSCAR DESEUSA RIVERO

TUTOR:

FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

2011

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. JOSÉ DE JESÚS ACOSTA FLORES

Secretario: DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA

Vocal: DR. FRANCISCO VENGAS MARTÍNEZ

1er Suplente: DR. RICARDO ACEVES GARCÍA

2do Suplente: DRA. HERICA SANCHEZ LARIOS

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

MÉXICO D.F.

TUTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

____

FIRMA

CONTENIDO

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es exponer el concepto de medidas coherentes de riesgo en el sentido de Artzner (1999), a través de un conjunto de axiomas. En particular se considera el riesgo de mercado y se desarrolla el concepto de valor en riesgo, VeR, asi como sus variantes más utilizadas, lo anterior con la finalidad de confrontarlo contra los axiomas de coherencia. De esta manera se demuestra que el VeR no es una medida coherente de riesgo al no cumplir con uno de los aximomas, la subaditividad. Adicionalmente se construye una medida alternativa que si es considerada como coherente, la esperanza condicional de la cola del VeR. Asi mismo, se propone una demostración sencilla del teorema de representación de medidas coherentes de riesgo en términos de una familia de probabilidades condicionales. Por último, se establecen varias reglas para construir medidas coherentes a partir de otras medidas coherentes.

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. El capítulo uno expone una introducción al concepto de riesgo, al tiempo que brinda los antecedentes históricos de las finanzas cuantitativas asi como una introducción a las técnicas más comunes para calcular el Valor en Riesgo. En el segundo capítulo se presenta el concepto de Valor en riesgo como la función de cualtiles y se expone el cálculo del Valor en Riesgo para un portafoliode 2 y n activos. Posteriormente se extiende el concepto de VeR a la descoposición de Cholesky y al análisis de componentes principales. En el capítulo tercero se presentan algunas generalizaciones del VeR como son: VeR incremental, El ídice Herfindahl-Hirchman, VeR promedio, la esperanza condicional de la cola del VeR, VeR y CAPM, VeR con un activo libre de riesgo, VeR con un activo de riesgo crédito y VeR Delta-Gamma para derivados. Posteriormente en el capítulo 4, se expone el concepto de medidas coherentes de riesgo y se comprueba que el VeR no cumple con uno de los axiomas necesarios para ser considerado una medida coherente. Así mismo se prueba que la esperanza condicional de la cola del VeR si cumple con tales axiomas. Finalmente y en el mismo capítulo, se expone el teoréma de representación de medidas coherentes de riesgo así como las reglas para construir medidas de riesgo. Por último las conclusiones.

CAPÍTULO 1

Introducción

La palabra riesgo tiene sus raíces en el latín *risicare* (o *resecare*) que significa atreverse y en el griego *rizha* (o *riza*) que significa navegar por un acantilado para alcanzar la costa. Se trata entonces de atreverse a navegar por un acantilado para alcanzar la costa; una labor que puede resultar muy peligrosa, pero que en ocasiones es necesaria. Existe un refrán popular que permite describir esta situación, "el que no arriesga no gana", es decir, "el que no arriesga no alcanza la costa". De la misma manera, navegar por un acantilado, sin revisar otras alternativas, es como lanzarse contra los gigantes que alguna vez enfrentó Don Quijote; otra labor casi imposible. En este caso, la única alternativa que Don Quijote consideró fue precipitarse contra los gigantes montado en Rocinante, lo que casi le cuesta la vida. Sin embargo, Don Quijote bien pudo pedirle al agudo Sancho un consejo sobre otra alternativa para enfrentar a los gigantes, Sancho pudo haber contestado –"muchos pocos hacen un mucho"–, es decir, Don Quijote y Sancho juntos podrían hacer mejor frente contra los gigantes. Existe también en este caso, otro refrán popular que describe la consideración de distintas alternativas: "no hay que poner todos los huevos en la misma canasta". Cuando se conjugan estas máximas, "el que no arriesga no gana" y "no hay que poner todos los huevos en la misma canasta", el nombre del juego es "diversificar riesgos", parte esencial de lo que hoy se conoce como administración de riesgos.

Aristóteles (384aC-322aC) en su libro Ética a Nicómaco planteó la noción de virtud en términos de las actidudes de tres personajes: el cobarde, el valiente y el temerario. En el contexto del párrafo anterior, el cobarde nunca asumirá riesgo alguno y, por lo tanto, nunca alcanzará la costa, el temerario se lanzará sin importarle ningún riesgo y podría morir en el intento, mientras que el valiente es aquel que toma acciones intermedias, lo que Aristóteles llama virtud. Así pues, el valiente revisa diferentes alternativas y considera sus posibles consecuencias; esta es justo la tarea diaria que realiza el administrador de riesgos. De esta manera es fácil observar que la tarea del administrador de riesgos se encuentra implicita en muchas áreas de interés para el ser humano, de hecho la mayoría de nosotros la procura aunque en ocasiones sin éxito. Con base en esa idea es difícil hallar una definición única, sin embargo todas las posibles definiciones, que refieren a riesgos latentes en las distintas áreas, coinciden en el hecho de minimizar o en el mejor de los casos eliminar dichos riesgos. Asi pues, es posible afirmar que la administración de riesgos es el área encargada de reducir el riesgo latente asociado a la actividad en cuestión. La actividad que es de interés en esta investigación es la financiera y en particular se tratará el riesgo de mercado.

El riesgo de mercado se define como la pérdida potencial por cambios en los precios de los activos y pasivos financieros, los cuales inciden sobre la valuación o sobre los resultados esperados de las operaciones que tienen que ver con tasas de interés, tipos de cambio, índices de precios, entre otros.

La forma de cuantificar los riesgos financieros ha evolucionado rápidamente en las últimas décadas. A continuación se exponen algunos antecedentes a dichos temas

1.1 Antecedentes de las medidas de riesgo

En las últimas décadas el desarrollo de metodologías, modelos, herramientas y técnicas que se emplean en la teoría y práctica financiera han tenido un avance considerable. Al respecto, es posible caracterizar tres periodos relevantes en la evolución de las finanzas modernas:

1). Media-varianza, Markowitz (1952-1956).

2). Modelos en tiempo continuo, Merton, Black (1969-1973) y Scholes.

3). Medidas coherentes de riesgo, Artzner (1999).

Antes de los trabajos de Markowitz el riesgo financiero era considerado como un factor correctivo del retorno esperado y los retornos ajustados por riesgo eran definidos de una manera *ad hoc*. El primer período de importantes desarrollos fue iniciado por Markowitz que propuso como medidas de riesgo, asociada al rendimiento de inversiones individuales, el cuadrado de la desviación con respecto a la media de la distribución de los retornos (la varianza), y en el caso de una combinación (portafolio) de activos, la covarianza entre todos los pares de inversiones. Lo interesante de la propuesta de Markowitz estaba en la forma de medir el riesgo de un portafolio, que describe las características individuales (rendimientos de los activos) por medio de la media y la varianza de la distribución y la dependencia entre activos por medio del coeficiente de correlación lineal entre cada par de retornos aleatorios. La aplicación práctica del modelo de Markowitz requiere suponer que la distribución de los rendimientos es normal o distribución-t. Por lo tanto, si se usa un modelo de varianza-covarianza para distribuciones distintas a la normal o distribución-t, se puede subestimar eventos extremos que causan las mayores pérdidas.

El segundo período de importantes desarrollos fue iniciado por Robert Merton, Fisher Black y Myron Scholes y pueden ser llamados "modelos en tiempo continuo". Estos modelos permiten abordar muchos problemas asociados con la valuación de opciones y otros derivados.

El tercer período de grandes desarrollos es más reciente y algunos académicos lo sitúan en 1997 cuando fueron publicados los primeros resultados sobre medidas de riesgo coherentes desarrollados por Artzner (1997) y (1999). Los métodos para cuantificar el riesgo de mercado con base en modelos analíticos inicia en la década de los treinta con el trabajo de Macaulay (1938). Sin embargo, fue hasta 1995 cuando se publicó un documento técnico del Banco J. P. Morgan donde se propuso un método para cuantificar el riesgo de mercado asociado a todas las posiciones del banco a través del calculo de un solo número, lo que se conoce como Valor en Riesgo (VeR).

Evidentemente el avance en estas metodologias sugió como respuesta a la complejidad del comportamientos del mercado. En ocasines tal complejidad a venido acompañada por desastres financieros, de los cuales es posible nombrar los siguientes:

Caso Barinas Enero 1994 (Venezuela).

Caso Metallgesellschaft Refining & Marketing (Chile).

Caso Orange Country 1994 (Condado de Orange, Estados Unidos).

Efecto Tequila 1994 (México).

Caso Daiwa 1996 (Japón).

Efecto Dragón Octubre de 1997.

Sin embargo, no sólo el desarrollo de nuevas metodologias han surgido para hacer frente a tales problemas, ya que también se han creado regulaciones al respecto. El organismo encargado de esta regulación es conocido como el Comite de Basilea.

El comite de Basilea

Se llama grupo de los diez, G10, a los diez países más industrializados: Alemania, Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Gran Bretaña, Holanda, Italia, Japón y Suecia. En 1975, los miembros del G10 crearon, en la Ciudad de Basilea, un Comité integrado por los gobernadores de los bancos centrales, con el fin de uniformizar los criterios que se utilizan en la supervisión de las instituciones financieras de carácter internacional, primero en sus respectivos países y posteriormente en todo el mundo. Después, se integraron al Comité los bancos centrales de España y Luxemburgo además de los supervisores nacionales de aquellos países en los que la actividad supervisora no es llevada a cabo por el banco central. El llamado Comité de Basilea emitió, en 1988, los Acuerdos de Basilea I. Estos se referían al mínimo capital que debe tener una institución financiera para cubrir su exposición al riesgo, principalmente al crediticio. En 1996 se ampliaron los acuerdos para incluir el riesgo de mercado. Se fijó el año 2000 como fecha límite para que los bancos internacionales implementaran estas medidas. El 25 de junio de 2004, Jaime Caruana, exgobernador del Banco Central de España y expresidente del Comité de Basilea y Jean Claude Trichet, presidente del Banco Central Europeo, presentaron a la opinión pública los Acuerdos de Basilea II, que buscan definir nuevos niveles de capital que respalden mejor los riesgos bancarios. Estas medidas comenzaron a funcionar a partir del mes de diciembre de 2006 y toman en cuenta, por primera vez, el riesgo operativo.

Debido a que Basilea II no puede forzar a ninguna nación a acatar sus recomendaciones, cada país decide voluntariamente adoptarlas conforme lo permita la evolución de su sistema financiero local y su propia regulación.

El Comité de Basilea se ha ocupado, hasta ahora, de tres tipos de riesgo al que están expuestos los bancos: el de mercado, asociado a las fluctuaciones del precio de los activos; el de crédito, asociado a la incertidumbre en el pago de las obligaciones de los deudores; y el operativo, que está asociado a la posibilidad de error humano, fallas tecnológicas, fraudes y desastres naturales.

El riesgo del mercado se estudia a través de un portafolio que puede consistir en acciones, bonos, derivados, préstamos o en la posición global de una institución financiera en activos con riesgo. La diferencia del valor de un portafolios al inicio de un período y al final de éste, se conoce como la pérdida del portafolios en dicho período. Estas pérdidas se pueden plantear en función de los rendimientos del portafolio y uno de los objetivos es estimar la distribución de las pérdidas. Dicha distribución permite calcular el Valor en riesgo (VeR).

Las técnicas que más se utilizan en la banca para valuar el VeR es conocido como el método de varianza-covarianza, basado en el trabajo de Markowitz, en el que se asume que los rendimientos se distribuyen normalmente. El segundo método es el método histórico de simulación en el que, a diferencia del método anterior, la distribución de las pérdidas se estima a partir de la distribución empírica que se construye con la información de los datos históricos. Por último, se tiene el método de Monte Carlo, que consiste en lo siguiente: a partir de los datos históricos, se construye un modelo factorial que sirve para generar nuevos datos que estime las pérdidas para distintos escenarios futuros. Con esta información se infiere la distribución de las pérdidas y se estiman el VeR

CAPÍTULO 2

VALOR EN RIESGO

2.1 Valor en Riesgo y la función de cuantiles

Para entender el concepto de valor en riesgo (VeR) es necesario, primero, estudiar la función de cuantiles. La función de cuantiles se define como la inversa de la función de distribución de una variable aleatoria, es decir,

$$F_X(x)^{-1} = Q(q).$$

Por ejemplo, suponga que X es una variable aleatoria exponencial con parámetro 1, entonces la función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x}.$$

En este caso, la función inversa se obtiene de la siguiente forma[1]:

$$1 - e^{-x} = q,$$

lo cual implica

$$1 - q = e^{-x},$$

en consecuencia

$$-\log(1-q) = x = Q(q).$$

La función de cuantiles se define como:

$$Q(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq q\},$$

equivalentemente

$$Q(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{X \geq x\} \leq 1-q\}.$$

[1] A diferencia de la función de probabilidad, la función inversa tiene como a incógnita explícita el punto x tal que, por ejemplo, $\mathbb{P}\{X \leq x\} = q = 0.5$, en lugar de la probabilidad q, de que $X \leq x$ como se hace en la fucnión de distribución.

Con la finalidad de construir la función de cuantiles para el caso de una variable aleatoria discreta suponga que X puede tomar sólo tres valores y que se define mediante:

$$\mathbb{P}\{X = j\} = \theta_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

con

$$\sum_{j=1}^{3} \theta_j = 1.$$

En este caso la función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1, \\ \theta_1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ \theta_1 + \theta_2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Suponga que

$$q_1 \leq \theta_1,$$

entonces los valores de x para los cuales

$$F_X(x) \geq q_1$$

son $1 \leq x < \infty$. Tal como se aprecia en la Gráfica 2.1. De esta manera el q_1-ésimo cuantil es:

$$Q(q_1) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq q_1\} = 1.$$

Esto es, el q-ésimo cuantil es el número x tal que es menor que todos los posibles valores de X que están dentro del intervalo $[1, \infty)$. Si se considera ahora

$$\theta_1 < q_2 \leq \theta_1 + \theta_2,$$

los valores de x para los cuales

$$F_X(x) \geq q_2$$

son $2 \leq x < \infty$. En consecuencia,

$$Q(q_2) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{X \geq x\} \leq 1 - q_2\} = 2.$$

Por último, si

$$\theta_1 + \theta_2 < q_3 \leq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$$

y

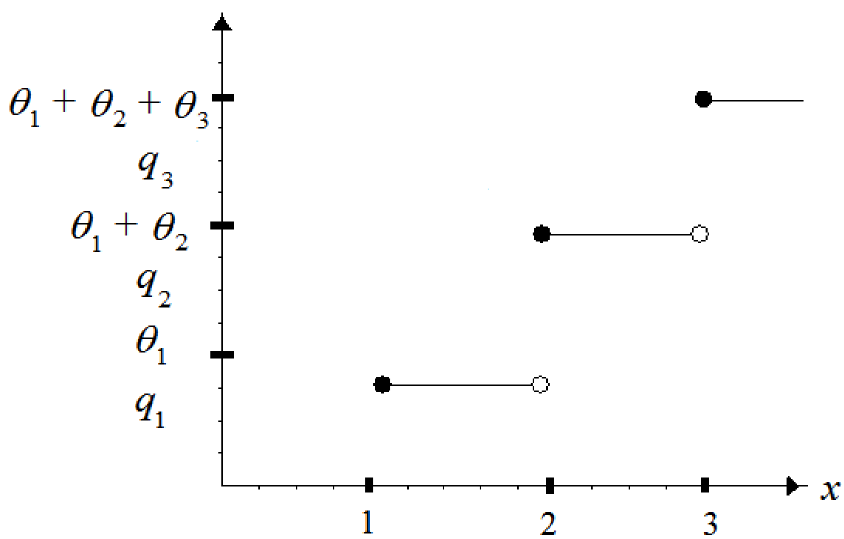
$$F_X(x) \geq q_3,$$

se tiene que

$$Q(q_3) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{X \geq x\} \leq 1 - q_3\} = 3.$$

En resumen la función de cuantiles es:

$$Q(q) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < q \leq \theta_1, \\ 2 & \text{si} \quad \theta_1 < q \leq \theta_1 + \theta_2, \\ 3 & \text{si} \quad \theta_1 + \theta_2 < q \leq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \end{cases}$$



Gráfica 2.1 Función de cuantiles.

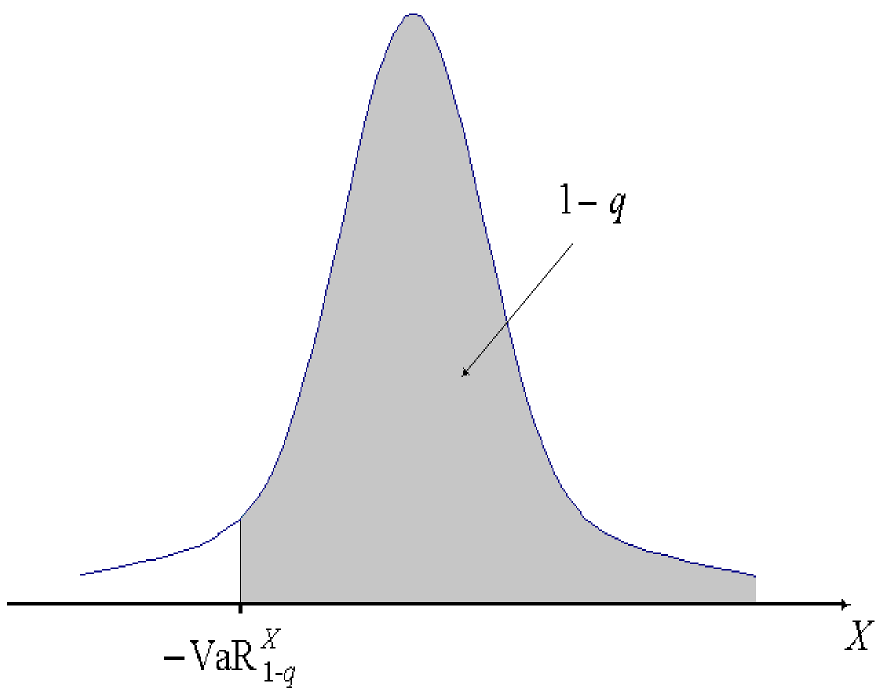
Ahora suponga que la v. a. X representa el rendimiento de un activo en un periodo de tiempo determinado, $[t, T]$. En este caso, una pregunta interesante es ¿cúal es la interpretación de la función de cuantiles para dicha variable? La respuesta es que el q-ésimo cuantil de los rendimientos del activo es el peor valor potencial de todos los posibles rendimientos que se pueden encontrar con un nivel de confianza del $(1-q)\times 100\%$ durante $[t, T]$. De esta manera, es natural definir el valor en riesgo del rendimiento, $-\mathrm{VeR}^X_{1-q}$, al nivel (de confianza) $1-q$, mediante

$$\mathbb{P}\left\{-\mathrm{VeR}^X_{1-q} \leq X\right\} = 1 - q.$$

Esta definición es aplicable tanto para variables aleatorias continuas como discretas. De lo anterior se desprende, inmediatamente, que

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\{X > x\} \leq 1-q\}.$$

Como puede observarse, el número VeR_{1-q}^{X} es una estimación estadística del peor valor de X con cierto grado de confianza en un intervalo de tiempo dado. La Gráfica 2.2 ilustra el concepto del valor en riesgo.



Gráfica 2.2 Valor en Riesgo.

Un supuesto importante en el calculo del VeR y que se mantendrá en el resto de este documento es la normalidad. Bajo este supuesto, el cálculo del VeR se convierte en una expresión muy sencilla y fácil de recordar ya que facilita el cálculo de la función de cuantiles.

Si los rendimientos de un activo durante $[t, T]$, X, son visto como una variable aleatoria continua y F es su función de distribución, entonces $-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = F^{-1}(q)$, es decir, VeR_{1-q}^{X} es el cuantil q de F. Por ejemplo, si el rendimiento $\mathrm{d}S_t/S_t$ satisface:

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $(\mathrm{d}W_t)_{t\in[0,T]}$ es un movimiento geométrico Browniano definido en un espacio de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, entonces

$$X \sim \mathcal{N}(\mu(T-t), \sigma^2(T-t)).$$

En este caso $\Omega = \mathbb{R}$ representa el espacio muestral, es decir, el conjunto de todos los posibles resultados, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es una σ-algebra (de Borel), es decir, una familia distinguida de eventos (subconjuntos de Ω), el elemento $\mathcal{F}_t$ de la filtración representa toda la información (relevante) disponible hasta el tiempo t y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$. En consecuencia

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{X-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \leq -z_q \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} = q,$$

lo cual implica que

$$\mathbb{P}\left\{ X \leq \mu(T-t) - z_q\sigma\sqrt{T-t} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} = q.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathrm{VeR}_{1-q}^{X} =& z_q\sigma\sqrt{T-t} + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[-X \mid \mathcal{F}_t\ ] \\ \mathrm{VeR}_{1-q}^{X} =& z_q\sigma\sqrt{T-t} - \mu(T-t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

A partir de las tablas de cuantiles de la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, se tiene que si $1-q = 0.95$, $z_q = 1.65$, y si $1-q = 0.99$, $z_q = 2.33$. Por lo tanto (2.1) puede ser considerada como la fórmula para obtener el VeR de una variable aleatoria X que modela los rendimientos de un activo. Note que

$$Z = \frac{X-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

y z_q es tal que

$$F_Z(z_q) = \mathbb{P}_Z\left\{Z \leq -z_q\right\} = q.$$

Si el rendimiento medio y la volatilidad son anualizados, valores típicos de $T-t$ son[2] 5/360 (5 días) y 10/360 (10 días). Si se definen $\mu_d = \mu/360$ y $\sigma_d = \sigma/\sqrt{360}$ como el rendimiento y la volatilidad diarios, se tiene que

$$\begin{aligned} -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} =& -z_q\sigma_d\sqrt{T-t} + \mu_d(T-t) \\ \mathrm{VeR}_{1-q}^{X} =& z_q\sigma_d\sqrt{T-t} - \mu_d(T-t) \end{aligned},$$

[2] Si se excluyen fines de semana y días festivos se puede dividir sobre 252 ó 264, dependiendo de si los meses se toman con 21 ó 22 días.

y, en este caso, $T-t$ toma los valores de 5 (días) y 10 (días).

2.2 Valor en Riesgo de un Portafolio

Por simplicidad, se considera un portafolio que combina dos activos con riesgo. Para ello, considere un intervalo de tiempo $[t,T]$. El valor inicial, en t, de un portafolio que consiste de w_1 unidades del activo cuyo precio es S_{1t} y w_2 unidades del activo dos con precio S_{2t} está dado por:

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}.$$

Paralelamente el valor final del mismo portafolio se expresa como:

$$\Pi_T = w_1 S_{1T} + w_2 S_{2T}.$$

Si supone que el rendimiento de cada uno de los activos siguen un movimiento geométrico Browniano

$$\mathrm{d}S_{it} = \mu_i S_{it}\mathrm{d}t + \sigma_i S_{it}\mathrm{d}W_{it} \quad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

con

$$\mathrm{d}Wit \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t),$$

entonces el cambio en el valor del portafolio, entre las fechas t y T, manteniendo las cantidades w_1 y w_2 constantes, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
X := \Pi_T - \Pi_t =& w_1(S_{1T} - S_{1t}) + w_2(S_{2T} - S_{2t}) \\
=& w_1\mathrm{d}S_{1t} + w_2\mathrm{d}S_{2t} \\
=& w_1(\mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_{1t}) + w_2(\mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{1t}\mathrm{d}W_{2t}) \\
=& (w_1\mu_1 S_{1t} + w_2\mu_2 S_{2t})\mathrm{d}t + (w_1\sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_{1t} + w_2\sigma_2 S_{2t}\mathrm{d}W_{2t}).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Si $S_{1T} : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $S_{2T} : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias definidas sobre dos espacios muestrales, Ω_1 y Ω_2, entonces $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, es una variable aleatoria asociada al cambio en el valor del portafolio. Asimismo, se supone que X está definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, donde θ es un vector de parámetros asociados con la distribución de X.

Tal como señala (2.1) el cálculo del VeR de una variable aleatoria X, se obtiene mediante

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = z_q\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{d}t} - \mathrm{E}[X]\mathrm{d}t.$$

De esta manera si los activos no se encuentran correlacionados, el VeR para un portafolio con dos activos se calcula como:

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = z_q\sqrt{w_1^2\mu_1^2S_{1t}^2 + w_2^2\mu_2^2S_{2t}^2}\sqrt{\mathrm{d}t} - (w_1\mu_1S_{1t} + w_2\mu_2S_{2t})\mathrm{d}t.$$

Alternativamente para el caso correlacionado se tiene

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = z_q\sqrt{w_1^2\sigma_1^2S_{1t}^2 + w_2^2\sigma_2^2S_{2t}^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2S_{1t}S_{2t}\rho_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - (w_1\mu_1S_{1t} + w_2\mu_2S_{2t})\mathrm{d}t.$$

Cuando

$$\mathrm{Cov}[\mathrm{d}W_1, \mathrm{d}W_2] = \rho_{12}\mathrm{d}t.$$

Si se desea calcular el VeR considerando los porcentajes de inversión de cada activo en el portafolio, es necesario realizar algunas modificaciones al cambio en el valor del portafolio anterior. Primero se divide dicho cambio de valor entre Π_t, de esta manera se llega a:

$$\begin{aligned}\frac{\Pi_T - \Pi_t}{\Pi_t} := \frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} &= \frac{w_1(S_{1T} - S_{1t})}{\Pi_t} + \frac{w_2(S_{2T} - S_{2t})}{\Pi_t}\\ &= \frac{w_1\mathrm{d}S_{1t}}{\Pi_t} + \frac{w_2\mathrm{d}S_{2t}}{\Pi_t}.\end{aligned}$$

Posteriormente es necesario multiplicar el primer y segundo miembro del lado derecho de la ecuación anterior por S_{1t}/S_{1t} y S_{2t}/S_{2t}, respectivamente. Es decir

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \frac{w_1S_{1t}}{\Pi_t}\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \frac{w_2S_{2t}}{\Pi_t}\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}. \tag{2.4}$$

Si se define

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{w_1S_{1t}}{\Pi_t},\\ \alpha_2 &= \frac{w_2S_{2t}}{\Pi_t},\end{aligned}$$

como la prorción invertida de cada activo en el portafolio total.[3] Entonces (2.4) se puede escribir como

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}.$$

De esta manera y de acuerdo con (2.2) se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1[\mu_1\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}W_{1t}] + \alpha_2[\mu_2\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}W_{2t}]\,.$$

[3] Los porcentajes óptimos de inversión, α_i, pueden ser calculados tal como se describe en el anexo 1.

Ahora ya es posible calcular en VeR del portafolio tomando en cuenta las proporciones α_1, α_2, invertidas en cada activo. De acuerdo con (2.1) es necesario conocer la media y la desviación estandar de la variable aleotoria $\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t$, las cuales se obtienen acontinuación para el caso correlacionado.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right] =& \mathrm{E}[\alpha_1[\mu_1\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}W_{1t}]] + \mathrm{E}[\alpha_2[\mu_2\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}W_{2t}]] \\ =& \mathrm{E}[(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t] + \mathrm{E}[\alpha_1\sigma_1\mathrm{d}W_{1t} + \alpha_2\sigma_2\mathrm{d}W_{2t}] \\ =& (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right] =& \mathrm{Var}[\alpha_1[\mu_1\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}W_{1t}]] + \mathrm{Var}[\alpha_2[\mu_2\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}W_{2t}]] \\ =& \mathrm{Var}[(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t] + \mathrm{Var}[\alpha_1\sigma_1\mathrm{d}W_{1t} + \alpha_2\sigma_2\mathrm{d}W_{2t}] \\ =& (\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2)\mathrm{d}t + 2\alpha_1\sigma_1\alpha_2\sigma_2\rho_{12}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De esta manera el VeR se calcula mediante

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} = z_q\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\sigma_1\alpha_2\sigma_2\rho_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t,$$

o alternativamente como

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} = z_q\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t, \qquad 2.5$$

cuando se considera

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}.$$

A continuación se muestra un ejemplo del cálculo del $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$ para dos activos[4]. Suponga que se invirtió un millon de pesos en la compra de dos acciones,AMXL y WALMEXV . En la columna (1) de la Tabla 2.1 se muestra un fragmento de los precios diarios de AMXL y, en la columna (2) es posible observar los coorrespondientes a WALMEXV. En las columnas (3) y (4) se expresan los precios del siguiente año . La columna (5) = [(3)−(1)]/(1) muestra los rendimientos anualizados de AMXL, mientras que en la columna (6) = [(4) − (2)]/(2) es posible observar el redimiento anualizado de WALMEXV.

[4] Es importante mencionar que los datos fueron obtenidos de la base ECONOMATICA, con periodicidad diaria, del 31/12/2004 al 29/12/2006, es decir, 500 datos (se excluyeron fines de semana y días festivos)

TABLA 2.1

Fecha 2005	AMXL (1)	WALMEXV (2)	Fecha 2006	AMXL (3)	WALMEXV (4)	R. A. AMXL (5)	R. A. WALMEXV B(6)
03/01	18.61	13.17	03/01	29.97	16.10	0.61	0.22
04/01	18.62	12.86	04/01	30.07	16.06	0.62	0.25
05/01	18.54	13.00	05/01	30.40	15.79	0.64	0.22
06/01	18.64	12.98	06/01	30.28	16.12	0.63	0.24

Con base en los rendimientos anualizados de los activos se obtienen los siguientes estadísticos, así como los porcentajes de inversión permitiendo ventas en corto.

TABLA 2.2

	Datos Anuales	
	WALMEXV 1	SORIANAB 2
μ	0.78	0.48
σ	0.18	0.10
σ^2	0.034	0.009
σ_{12}	0.011	0.011
α	-0.10	1.10

Si se desea conocer el $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$ diario con una confianza del 95% sólo se sustituyen los datos anteriores en (2.5) con $\mathrm{d}t = 1/250$ y $z_q = 1.65$. De esta forma

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VeR}_{1-.05}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} &= z_q\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t \\
\mathrm{VeR}_{.95}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} &= 0.008
\end{aligned}
$$

Por otro lado el cálculo del $\mathrm{VeR}_{.95}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$ anual implica que $\mathrm{d}t = 1$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VeR}_{1-.05}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} &= z_q\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t \\
\mathrm{VeR}_{.95}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} &= -0.30
\end{aligned}
$$

De esta manera, el $\mathrm{VeR}_{.95}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$, de este portafolio de un millon de pesos, señala que existe una posibilidad del 5% de que el portafolio gane el 0.008% en un día, sin embargo existe la misma probabilidad de que dicho portafolio pierda el 0.30% es decir, 3000 pesos a lo largo de un año.

Generalización a n activos

A continuación se presenta el cálculo del VeR, considerando las proporciones de inversión α, cuando el portafolio contiene "n" activos. Con la finalidad de exponer el caso general, se define el valor inicial y final del portafolio, de la siguiente forma:

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t} + \cdots + w_n S_{nt},$$

$$\Pi_T = w_1 S_{1T} + w_2 S_{2T} + \cdots + w_n S_{nT}.$$

Por lo tanto el cambio del valor de dicho portafolio puede expresarce como:

$$\begin{aligned} X := \Pi_T - \Pi_t =& w_1 S_{1T} + \cdots + w_n S_{nT} - [w_1 S_{1t} + \cdots + w_n S_{nt}] \\ =& w_1(S_{1T} - S_{1t}) + \cdots + w_n(S_{nT} - S_{nt}) \\ =& w_1 \mathrm{d}S_{1t} + \cdots + w_n \mathrm{d}S_{nt} \\ =& \mathrm{d}\Pi_t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donde

$$\mathrm{d}S_{it} = S_{iT} - S_{it} \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Y se supone

$$\mathrm{d}S_{it} = \mu S_{it}\mathrm{d}t + \sigma S_{it}\mathrm{d}W_t \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X =& w_1(\mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}w_{1t}) + \cdots + w_n(\mu_n S_{nt}\mathrm{d}t + \sigma_n S_{nt}\mathrm{d}W_{nt}) \\ =& (w_1\mu_1 S_{1t} + \cdots + w_n\mu_n S_{nt})\mathrm{d}t + (w_1\sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_{1t} + \cdots + W_n\sigma_n S_{nt}\mathrm{d}W_{nt}). \end{aligned}$$

Es necesario dividir la ecuación (2.5) entre Π_t. De esta manera se tiene

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \frac{w_1 \mathrm{d}S_{1t}}{\Pi_t} + \cdots + \frac{w_n \mathrm{d}S_{nt}}{\Pi_t}.$$

Ahora se debe multiplicar cada uno de los miembros del lado derecho de la ecuación anterior por $S_{it}/S_{it} \quad \forall\ i = 1...n$, tal como se hizo para el caso de dos activos. Esto es

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \cdots + \frac{w_n S_{nt}}{\Pi_t}\frac{\mathrm{d}S_{nt}}{S_{nt}}. \tag{2.6}$$

Si se define

$$\alpha_i = \frac{w_i S_{it}}{\Pi_t} \qquad \forall i = 1, ..., n$$

donde

$$\sum_{i}^{n} \alpha_i = 1.$$

Entonces (2.6) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} =\alpha_1 \frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \cdots + \alpha_n \frac{\mathrm{d}S_{nt}}{S_{nt}}.$$

Si se considera (2.2) se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} =\alpha_1[\mu_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}W_{1t}] + \cdots + \alpha_n[\mu_n \mathrm{d}t + \sigma_n \mathrm{d}W_{nt}].$$

Cuya media es:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right] &=\mathrm{E}[\alpha_1[\mu_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}W_{1t}] + \cdots + \alpha_n[\mu_n \mathrm{d}t + \sigma_n \mathrm{d}W_{nt}]] \\ &=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Y varianza

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right] &=\mathrm{Var}[\alpha_1[\mu_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}W_{1t}] + \cdots + \alpha_n[\mu_n \mathrm{d}t + \sigma_n \mathrm{d}W_{nt}]] \\ &=\mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \alpha_i \sigma_i \alpha_j \sigma_j \rho_{ij} \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.8}$$

o alternativamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right] &=\mathrm{Var}[\alpha_1[\mu_1 dt + \sigma_1 \mathrm{d}W_{1t}] + \cdots + \alpha_n[\mu_n \mathrm{d}t + \sigma_n \mathrm{d}W_{nt}]] \\ &=\mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Si se considera que:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

De esta forma y de acuerdo con (2.1) el VeR de $\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}$ se otiene mediante

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} = z_q \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}} \sqrt{\mathrm{d}t} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

Si se define:

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \text{ como la matriz de varianzas-covarianzas.}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ como el vector de porcentajes de inversión.}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \text{ como el vector cuyos elementos corresponden a las medias de los activos.}$$

Entonces (2.9) puede reescribirse como:

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} = z_q\sqrt{\alpha^T\Sigma\alpha} \quad \sqrt{\mathrm{d}t} - \alpha^T\mu\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

Donde el vector α puede ser obtenido previamente de un problema de programación no lineal[3] :

$$\text{Minimizar} \quad \tfrac{1}{2}\alpha^T\Sigma\alpha$$

s.a.

$$\alpha^T\mu = \mu_0$$

$$\alpha^T\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

Con la finalidad de mostrar un ejemplo del cálculo del $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$ para el caso de n activos, a continuación se presenta el calculo del valor en riesgo anual de un portafolio que contiene 14 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores.[5] Para tal efecto se optimizó el portafilio de mínima varianza global permitiendo ventas en corto.[6] Los resultados se muestran a continuación.

[3] Vea Anexo 1.

[5] Es importante mecionar que los activos cuentan con una periodicidad diaria (desde el 31 de Diciembre del 2004 hasta el 29 de Diciembre del 2006). No incluye fines de semana ni dias festivos. Sin embargo, el cálculo de los rendimientos es de forma anual. De esta forma se cuenta con 250 observaciones por cada rendimiento.

[6] El cálculo de los prorcentajes de inversión se obtuvo de acuerdo al modelo de mínima varianza global expuesto en el anexo 1.

TABLA 2.3 Porcentajes de inversión

Acción	α_i
AMX L	-13.6%
WALMEXV	36.4%
CEMEXCPO	-8.8%
TELEVISACPO	-16.8%
TELECOMA1	-60.5%
TELMEXL	122.2%
GMEXICOB	-1.6%
FEMSAUBD	3.3%
GCARSOA1	-3.3%
GFNORTEO	9.8%
BIMBOA	19.0%
GFINBURO	32.2%
SORIANAB	-27.6%
PEÑOLES	9.46%
λ	-0.002

Los datos de la tabla anterior, excluyendo la última fila, forman el vector de pesos, α, señalado en (2.10). Si se obtiene el rendimiento anual de cada activo, es decir, el cambio porcetual del precio de un activo de un año respecto al siguiente y se calcula el promedio de cada uno de ellos, se obtiene el vector μ. Dicho vector se muestra en la Tabla 2.6

TABLA 2.4 Rendimiento promedio anual	
Acción	μ_i
AMX L	78%
WALMEXV	48%
CEMEXCPO	51%
TELEVISACPO	33%
TELECOMA1	43%
TELMEXL	27%
GMEXICOB	78%
FEMSAUBD	57%
GCARSOA1	40%
GFNORTEO	54%
BIMBOA	16%
GFINBURO	4%
SORIANAB	22%
PEÑOLES	58%

Finalmente se calcula la matriz Σ, de varianzas y covarianzas existentes entre los rendimientos de los activos. Por último se sustituyen en la ecuación (2.10) con d$t = 1$ y $zq = 1.65$, es decir:

$$\begin{aligned} \mathrm{VeR}_{.95}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} =& zq\sqrt{\alpha^T\Sigma\alpha} \quad \sqrt{\mathrm{d}t} - \alpha^T\mu\mathrm{d}t \\ =& 1.65\sqrt{\alpha^T\Sigma\alpha} \quad \sqrt{1} - \alpha^T\mu(1)\,. \\ =& -0.038 \end{aligned}$$

De esta forma es posible afirmar que hay una probabilida del 5% de que un portafolio de un millón de pesos pierda el 0.038% en un año por causas del mercado.

2.3 Descomposición de Cholesky

Hasta este momento se ha mostrado como calcular el VeR del cambio del valor de un portafolio de "n" activos, lo cuales guardan una cierta estructura de correlación

$$\mathrm{Cov}\left[\frac{dS_{it}}{S_{it}}, \frac{dS_{jt}}{S_{jt}}\right] = \rho_{ij}\mathrm{d}t.$$

Si se desea realizar una simulación del cambio del valor del portafolio de este par de activos, necesita generar "n" variables aleatorias, de manera que todas ellas respeten la estrucutra de correlación existente entre el rendimientos de los activos. El método que permite tal hecho es conocido como la descomposición de Cholesky.

Por simplicidad considere el caso de un portafolio con dos activos. De acuerdo con Venegas(2006) los rendimientos de los activos pueden ser conducidos por un movimiento browniano estadarizado. Es decir

$$\frac{\frac{\mathrm{d}S_{it}}{S_{it}} - \mu_i\mathrm{d}t}{\sqrt{\sigma_i^2\mathrm{d}t}} = \epsilon_i$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_{1t} &= \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\sqrt{\mathrm{d}t}\epsilon_1 \\ \mathrm{d}S_{2t} &= \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\sqrt{\mathrm{d}t}\epsilon_2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $i = 1, 2$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\mathrm{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$.

Con la finalidad de realizar la simulación del cambio de valor de este portafolio formado por este par de activos, es necesario generar dos variables aleatorias ϵ_1, ϵ_2. Sin embargo, utilizar tales variables en el proceso de simulación, implicaría que los activos no guardan relación alguna. Por lo tanto, se necesita es un transformación de manera que:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1(\epsilon_1, \epsilon_2) \\ h_2 &= h_2(\epsilon_1, \epsilon_2) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\sqrt{dt}h_1$$

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\sqrt{dt}h_2$$

$$\mathrm{Cov}(h_1, h_2) = \rho.$$

La transformación señalada en (2.11) es conocida como al transformación de Cholesky.

A continuación se expone el procedimiento del cálculo correspondiente a tal transformación. Siguiendo a Venegas (2006) la matriz de correlación debe ser simetrica y definida positiva para poder aplicar la descomposición de Cholesky. Si se denota a la matriz de correlación existente entre el un par de activos como:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

La cual claramente cumple con las condiciones para aplicar la descomposicion de Cholesky, entonces existe una matriz A también llamada la raíz cuadrada tal que:

$$C = AA^T.$$

Donde A es trinagular inferior o equivalentemente.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix},$$

lo que implica

$$\begin{aligned} 1 =& a_{11}^2, \\ \rho =& a_{11}a_{12}, \\ 1 =& a_{12}^2 + a_{22}^2, \end{aligned}$$

ó

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}.$$

De esta forma la transformación se puede escribir como:

$$h = A\epsilon$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} h_1 = \varepsilon_1, \\ h_2 = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\ \varepsilon_2, \end{cases} \tag{2.12}$$

con primer y segundo momento:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[h_1] =& 0. \\
\mathrm{E}[h_2] =& \mathrm{E}[\rho\epsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon_2 \\
=& \rho\mathrm{E}[\epsilon_1] + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{E}[\epsilon_2] \\
=& 0. \\
\mathrm{Var}[h_2] =& \mathrm{Var}[\rho\epsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon_2] \\
=& \rho^2 + 1 - \rho^2 \\
=& 1. \\
\mathrm{Var}[h_1] =& \mathrm{Var}[\epsilon_1] \\
=& 1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[h_1, h_2] =& \mathrm{Cov}[\epsilon_1, \rho\epsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon_2] \\
=& \mathrm{E}[\epsilon_1^2\rho + \epsilon_1\epsilon_2\sqrt{1-\rho^2}] - \mathrm{E}[\epsilon_1]\mathrm{E}[\rho\epsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon_2] \\
=& \rho\mathrm{E}[\epsilon_1^2] + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{E}[\epsilon_1\epsilon_2] \\
=& \rho\mathrm{E}[\epsilon_1\epsilon_1] + \sqrt{1-\rho^2}(\mathrm{E}[\epsilon_1]\mathrm{E}[\epsilon_2] + \mathrm{Cov}[\epsilon_1, \epsilon_2]) \\
=& \rho[\mathrm{E}[\epsilon_1]\mathrm{E}[\epsilon_1] + \mathrm{Cov}[\epsilon_1\epsilon_1]] \\
=& \rho\mathrm{Var}[\epsilon_1] \\
=& \rho.
\end{aligned}$$

Observe que la transformación de Cholesky aplicada a las variables generadas (ϵ_1, ϵ_2) permite que las nuevas variables(h_1, h_2) mantengan la estructura de correlación deseada. De esta manera y con base en la transformación (2.12), ya es posible simular los rendimientos de los activos

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\sqrt{\mathrm{d}t}h_1$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\sqrt{\mathrm{d}t}h_2,$$

donde

$$h_2 = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2, \quad h_1 = \epsilon_1, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

y

$$\mathrm{Cov}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = 0.$$

$$\mathrm{Cov}\left[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}, \frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}\right] = \rho.$$

Ahora suponga que los rendimientos de los activos siguen un movimiento browniano no estandarizado, entonces se tiene que equivalentemente,

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_{1t}$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\mathrm{d}W_{2t},$$

donde

$$dW_{2t} = \rho\ dW_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}U_t,$$

y

$$\mathrm{Cov}[dW_{1t}, \mathrm{d}U_t] = 0,$$
$$\mathrm{d}W_{1t} \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t),$$
$$\mathrm{d}U_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{2t}] =& \mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}\mathrm{d}W_{2t}] - \mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}]\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{2t}] \\
=& \mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}(\rho\mathrm{d}W_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}U_t)] - \mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}]\mathrm{E}[\rho\mathrm{d}W_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}U_t] \\
=& \mathrm{E}[\rho\mathrm{d}W_{1t}^2 + \mathrm{d}W_{1t}\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}U_t] \\
=& \rho\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}^2] + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}\mathrm{d}U_t] \\
=& \rho\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}^2] + \rho\mathrm{Cov}[\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{1t}] + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}]\mathrm{E}[\mathrm{d}U_t] + \\
&+ \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{Cov}[\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}U_t] \\
=& \rho\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_{1t}] \\
=& \rho\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Que es la misma estructura de correlación que tienen los redimientos de las acciones si $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}, \frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}\right] =& \mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} - \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}\right]\right)\left(\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}} - \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}\right]\right)\right] \\
=& \mathrm{E}\left[(\mu_1\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}W_{1t} - \mu_1\mathrm{d}t)(\mu_2\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}W_{2t} - \mu_2\mathrm{d}t)\right] \\
=& \mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}\mathrm{d}W_{2t}] \\
=& \mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}]\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{2t}] - \mathrm{Cov}[\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{2t}] \\
=& \rho\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

De esta manera es sposible simular la dinámica del portafolio

$$\mathrm{d}\Pi_t = w_1 \mathrm{d}S_{1t} + w_2 \mathrm{d}S_{2t}. \tag{2.13}$$

Donde:

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_{1t} \tag{2.14}$$

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\mathrm{d}W_{2t}. \tag{2.15}$$

con

$$\mathrm{d}W_{2t} = \rho \mathrm{d}W_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}U_t, \tag{2.16}$$

$$\mathrm{d}W_{1t} \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t),$$

$$U_t \sim \mathcal{N}(N, \mathrm{d}t).$$

A groso modo, la simulación se puede resumir en los siguientes puntos:

1.- Generar un numero $\mathrm{d}W_{1t} \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$.

2.- Generar un numero $U_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$.

3.- Calcular el valor de $\mathrm{d}W_{2t}$ utilizando la trasnformación de Cholesky señalada en (2.16)

4.- Calcular el valor de $\mathrm{d}S_{1t}$ tal como lo señala (2.14). Los parametros $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ pueden evulucionar en el tiempo, su dinámica puede ser capturada por un modelo GARCH. De lo contrario se mantienen constantes.

5.- Calcular el valor de $\mathrm{d}S_{2t}$ como se indica en (2.15).

6.-Calcular el valor de $\mathrm{d}\Pi_t$ como señala (2.13).

7.- Repetir 10,000 veces.

El vector resultante $X \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$ de orden $10,000$ x 1 es interpretado como la distribución de probabilidad futura de $\mathrm{d}\Pi_t$. Siguiendo a Jorion (2007) el VeR se puede derivar de la distribución de X en un nivel de confianza dado $1-q$ al encontrar la peor realización, x, posible de X. Por ejemplo, para este caso se cuentan con 10,000 observaciones y se quiere determinar el VeR en un nivel de confianza del 95% a partir del 5% del lado izquierdo de la cola de pérdida del histograma, sería deseable encontrar x tal que el número de observaciones a su izquierda sea 10,000 x 0.05= 500. Es decir, el área de $-\infty$ a x debe sumar q, 5 %. El número x es denominado el quantil muestral de la distribución.

Generalización a "n" activos"

Claramente la descomposición de Cholesky se centra en determinar los valores de la matriz **A**. Para el caso de tres activos Sea Σ una matriz de varianza-covarianza.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix},$$

donde $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ con $i \neq j$. Sea **A** una matriz triangular inferior de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & a_{11}a_{31} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{11}a_{31} & a_{31}a_{21} + a_{22}a_{32} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene la siguiente solución recursiva

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = a_{11}^2 \quad &\Rightarrow \quad a_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{21} = a_{11}a_{21} \quad &\Rightarrow \quad a_{21} = \frac{\sigma_{21}}{a_{11}} \\ \sigma_2^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 \quad &\Rightarrow \quad a_{22} = \sqrt{\sigma_2^2 - a_{21}^2} \\ \sigma_{31} = a_{11}a_{31} \quad &\Rightarrow \quad a_{31} = \frac{\sigma_{31}}{a_{11}} \\ \sigma_{32} = a_{21}a_{31} + a_{32}a_{22} \quad &\Rightarrow \quad a_{32} = \frac{1}{a_{22}}(\sigma_{32} - a_{21}a_{31}) \\ \sigma_3^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \quad &\Rightarrow \quad a_{33} = \sqrt{\sigma_3^2 - a_{11}^2 - a_{22}^2}, \end{aligned}$$

Para el caso general de matrices de $n \times n$ se tiene que

$$a_{ii} = \left(\sigma_i^2 - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

y

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk} \right)^{1/2},$$

con $j = i+1, i+2, \ldots, n$.

2.4 VeR de un portafolio y componentes principales

En esta sección se presenta el método de componentes principales y su aplicación en el cálculo del VeR de un portafolio. Como se sabe, el rendimiento del portafolio se calcula en términos de los rendimientos de los n activos. Concretamente, el rendimiento del portafolio es la media de los rendimientos ponderada por la participación de cada activo en el valor total del portafolio. En el método de componentes principales dichos rendimientos se tranforman en n nuevas variables, donde la finalidad es trabajar sólo con las $n-k$ variables que aporten mayor riesgo al portafolio, llamadas componentes principales.

Si se cuenta con "n" activos, es posible calcular la varianza individual de los rendimientos, la covarianza existente entre todos ellos y por supuesto la varianza del portafolio. Sin embargo suponga que se desea encontrar una combinanción lineal de los rendimientos originales que explique la variabilidad de dicho portafolio. De esta manera sería posible identificar los activos que más afectan a la volatilidad. Por ejemplo una combinación lineal podría ser:

$$L = 0.2\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + 0.4\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}} + 0.2\frac{\mathrm{d}S_{10t}}{S_{10t}} + 0.5\frac{\mathrm{d}S_{nt}}{S_{nt}}. \tag{2.17}$$

Donde las variables $\mathrm{d}S_{it}/S_{it}$ representan los rendimientos de los activos.

Ahora bien, de todas las posibles combinaciones lineales, la que muestra mayor variabilidad (varianza mayor) se llama primer componente principal L_1 . La siguiente combinación lineal, L_2 con la varianza más grande y que no este correlacionadas con L_1, es el segundo componente principal y asi sucesivamente. Es decir,y de acuerdo con Venegas (2006) dichas componentes principales son combinaciones lineales de los rendimientos originales y cada una de ellas explica una parte de la varianza total de la transformación. Después de ordenar las componentes por su peso explicativo en la varianza total, aquellas que tengan una contribución insigificante en dicha varianza pueden eliminarse. De esta manera la dimensión del problema inicial se reduce en el problema transformado. Por ejemplo, si las últimas k componentes principales se eliminan, el problema transformado consiste de $n-k$ variables. De acuerdo con Tucker (1988) las primeras cuatro componentes principales explican el 90% de la variabilidad en un conjunto de 25 variables.

Las componentes principales es decir, los coeficientes de $\mathrm{d}S_{it}/S_{it}$ en (2.17) se obtienen de la matriz de varianzas-covarianzas, $\mathbf{C}$. De esta manera se puede mostrar que el vector de coeficientes de la primer componente principal es el vector dominante de longitud uno, eigenvector $\mathbf{u_1}$ de $\mathbf{C}$. Por lo tanto, encontrar los componentes principales se reduce a eigendescomponer la matriz $\mathbf{C}$ (de varianzas-covarianzas). Siguiendo a Tucker (1988) la eigendescomposición indica que si $\mathbf{C}$ es una matriz de orden nxn con n eigenvectores unitarios linealmente independientes $\mathbf{u_i}$ con $i = 1, ...n$ cada uno asociado a un eigen valor.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots |\lambda_n|.$$

Que $\mathbf{u_j^T}$ sea la j-ésima fila de una matriz llamada $\mathbf{U^{-1}}$ y $\mathbf{u_j}$ sea la j-ésima fila de la matriz $\mathbf{U}$. Entonces $\mathbf{C}$ puede expresarce como

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{D}_\lambda\mathbf{U^{-1}}$$

Donde $\mathbf{D}_\lambda$ es una matriz de ornden nxn cuya diagonal principal contiene a los eigenvalores λ_i y el resto de sus elementos son ceros.

Por simplicidad en la exposición, se considera un portafolio con dos activos. Los precios, S_{1t} y S_{2t}, de dos activos financieros son conducidos por las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\sqrt{\mathrm{d}t}\eta_1$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\sqrt{\mathrm{d}t}\eta_2 \tag{2.18}$$

donde

$$\eta_2 = \rho\eta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2$$

$$\eta_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{y} \quad \mathrm{Cov}\,(\eta_1, \varepsilon_2) = 0.$$

En este caso,

$$\underline{\eta} := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right),$$

con $\rho > 0$. En lo que sigue se denota

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar se determinan los eigenvalores (valores propios), λ_1 y λ_2, y los eigenvectores (vectores propios), $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, de $\mathbf{C}$, es decir, se determinan λ_i y $\mathbf{v}_i \neq (0,0)^T$, $\;i = 1, 2$, tales que

$$\mathbf{C}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \; i = 1, 2. \tag{2.19}$$

En este caso, (2.19) se puede reescribir como

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0.$$

Para que el sistema anterior tenga una solución no trivial, $\mathbf{v}_i$, se debe cumplir que

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de 2×2. Es decir,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \rho \\ \rho & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ó

$$(1-\lambda)^2 = \rho^2,$$

lo cual produce dos soluciones $\lambda_1 = 1 + \rho$ y $\lambda_2 = 1 - \rho$. Dado el supuesto $\rho > 0$, se sigue que $\lambda_1 > \lambda_2$. Claramente,

$$\det(\mathbf{C}) = \lambda_1 \lambda_2 = (1+\rho)(1-\rho) = 1 - \rho^2$$

y

$$\text{traza}(\mathbf{C}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.$$

Los vectores propios se determinan a través de los sistemas:

$$\begin{pmatrix} -\rho & \rho \\ \rho & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, eigenvectores correspondientes a distintos eigenvalores son linealmente independientes. Observe que, en este caso, $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$, es decir, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales. Si se normalizan estos vectores, es decir,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

entonces $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son eigenvectores ortonormales. Sean

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \;\; \text{y} \;\; \mathbf{D}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$$

las matrices de eigenvectores y eigenvalores, respectivamente de $\mathbf{C}$. La matriz $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ es simétrica, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$, e invertible, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Es decir $\mathbf{U}$ es una matriz ortogonal. Así́, $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^2 = \mathbf{I}$. Observe también que

$$\mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{U}D_\lambda,$$

lo cual, evidentemente, equivale a

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{C}\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2.$$

Por lo tanto, se puede escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{D}_\lambda\mathbf{U}^{\mathbf{-1}} = \mathbf{U}\mathbf{D}_\lambda\mathbf{U}^{\mathbf{T}}.$$

La eigendescomposición claramente permitió identificar los eigenvectores unitarios existentes en la matriz $\mathbf{C}$ y por tanto, a los componentes principales. Cada eigenvector unitario es una fila de la matriz $\mathbf{U}^{\mathbf{T}}$ y corresponde a un componente principal. El problema terminaría aquí́ siempre y cuando a tranformación de Cholesky no estuviera implicita en (2.18). Por lo tanto es necesario definir la siguiente transformación:

$$\underline{\gamma} = \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\underline{\eta}. \tag{2.20}$$

Es decir,

$$\begin{cases} \gamma_1 = & u_{11}\eta_1 + u_{12}\eta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta_1 + \eta_2\right) \\ \gamma_2 = & u_{21}\eta_1 + u_{22}\eta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta_1 - \eta_2\right) \end{cases}$$

Donde $\mathrm{E}[\underline{\gamma}] = (0,0)^T$ Y

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left[\gamma_1\right] =& \mathrm{Var}[\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2)] \\ =& (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\mathrm{Var}[\eta_1] + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\mathrm{Var}[\eta_2] + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Cov}[\eta_1\eta_2] \\ =& \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\rho \\ =& 1 + \rho \\ =& \lambda_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\gamma_2\right] =& \mathrm{Var}[\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_2)]\\ =&(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\mathrm{Var}[\eta_1] + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\mathrm{Var}[\eta_2] - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Cov}[\eta_1\eta_2]\\ =&\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\rho\\ =&1-\rho\\ =&\lambda_2,\end{aligned}$$

y

$$\mathrm{Cov}\left(\gamma_1, \gamma_2\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Cov}\left(\eta_1 + \eta_2, \eta_1 - \eta_2\right) = \frac{1}{4}(1 - \rho + \rho - 1) = 0.$$

De esta manera a la primer ecuación de (2.20) se le conoce como primera componente principal y a la segunda como segunda componente principal. En ocasiones, el vector propio asociado con el valor propio más grande, λ_1, es llamado la primer componente principal. Adicionalmente obseve que

$$\det(\mathbf{C}) = \mathrm{Var}\left[\gamma_1\right] \times \mathrm{Var}\left[\gamma_2\right] \quad \text{y} \quad \mathrm{traza}(\mathbf{C}) = \mathrm{Var}\left[\gamma_1\right] + \mathrm{Var}\left[\gamma_2\right].$$

Asimismo, se tiene que

$$\mathbf{u}_1 = \arg\max\left\{\max_{\{\mathbf{x}:||\mathbf{x}||=1\}} \mathrm{Var}\left[\mathbf{x}^T \underline{\eta}\right]\right\}.$$

Con la finalidad de calcular el VeR por medio de los componentes principales suponga que $\varepsilon_1 = \eta_1$ y con base en las transformaciones (2.18) y (2.20), se tiene que

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\sqrt{\mathrm{d}t}\gamma_1$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\sqrt{\mathrm{d}t}\gamma_2,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_1 + \eta_2\right), \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_1 - \eta_2\right),$$

$$\eta_2 = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon_2, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right) = 0,$$

$$\mathrm{Var}\left[\varepsilon_1\right] = \mathrm{Var}\left[\eta_2\right] = 1, \qquad \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_1, \eta_2\right) = \rho.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[\gamma_1] =& \frac{1}{2}\operatorname{Var}[\varepsilon_1+\eta_2]\\ =& \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left[(1+\rho)\varepsilon_1+\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2\right]\\ =& \frac{1}{2}\left((1+\rho)^2+1-\rho^2\right)\\ =& 1+\rho\\ =& \lambda_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[\gamma_2] =& \frac{1}{2}\operatorname{Var}[\varepsilon_1-\eta_2]\\ =& \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left[(1-\rho)\varepsilon_1-\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2\right]\\ =& \frac{1}{2}\left((1-\rho)^2+1-\rho^2\right)\\ =& 1-\rho\\ =& \lambda_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\gamma_1,\gamma_2) =& \frac{1}{2}\operatorname{Cov}\left((1+\rho)\varepsilon_1+\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2,(1-\rho)\varepsilon_1-\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2\right)\\ =& \frac{1}{2}\left((1+\rho)(1-\rho)-(1-\rho^2)\right)\\ =& 0\end{aligned}$$

Así pues, con base en lo anterior, y si se define $\gamma_1 = \mathrm{d}W_{1t}$, $\gamma_2 = \mathrm{d}W_{2t}$, $\epsilon_1 = \mathrm{d}U_{1t}$, $\epsilon_2 = \mathrm{d}V_t$ y $\eta_2 = \mathrm{d}U_{2t}$ es posible escribir

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_{1t}$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\mathrm{d}W_{2t},$$

donde

$$\mathrm{d}W_{1t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{d}U_{1t}+\mathrm{d}U_{2t}\right), \quad \mathrm{d}W_{2t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{d}U_{1t}-\mathrm{d}U_{2t}\right)$$

$$\mathrm{d}U_{2t} = \rho\mathrm{d}U_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}V_t,$$

$$\operatorname{Cov}(\mathrm{d}U_{1t},\mathrm{d}V_t) = 0.$$

De esta manera,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[\mathrm{d}W_{1t}\right] =& \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left[\mathrm{d}U_{1t}+\mathrm{d}U_{2t}\right] \\
=& \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left[(1+\rho)\mathrm{d}U_{1t}+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}V_t\right] \\
=& (1+\rho)\mathrm{d}t \\
=& \lambda_1\mathrm{d}t, \\
\operatorname{Var}\left[\mathrm{d}W_{2t}\right] =& \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left[\mathrm{d}U_{1t}-\mathrm{d}U_{2t}\right] \\
=& \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left[(1-\rho)\mathrm{d}U_{1t}-\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}V_t\right] \\
=& (1-\rho)\mathrm{d}t \\
=& \lambda_2\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(\mathrm{d}W_{1t},\mathrm{d}W_{2t}\right) \\
=& \frac{1}{2}\operatorname{Cov}\left((1+\rho)\mathrm{d}U_{1t}+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}V_t,(1-\rho)\mathrm{d}U_{1t}-\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}V_t\right) \\
=& \frac{1}{2}\left((1+\rho)(1-\rho)-(1-\rho^2)\right)\mathrm{d}t \\
=& 0
\end{aligned}
$$

De acuerdo con Vengas (2006) si se supone que $\mu_1=\mu_2=0$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi} =& \sqrt{\left(\alpha_1\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S_1/S_1}\right)^2+\left(\alpha_2\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S_2/S_2}\right)^2} \\
=& \sqrt{\left(\alpha_1 z_q\sqrt{\operatorname{Var}\left[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}\right]}\right)^2+\left(\alpha_2 z_q\sqrt{\operatorname{Var}\left[\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}\right]}\right)^2} \\
=& \sqrt{\left(\alpha_1 z_q\sqrt{\operatorname{Var}\left[\sigma_1\mathrm{d}W_{1t}\right]}\right)^2+\left(\alpha_2 z_q\sqrt{\operatorname{Var}\left[\sigma_2\mathrm{d}W_{2t}\right]}\right)^2} \\
=& \sqrt{\left(\alpha_1 z_q\sqrt{\sigma_1^2\operatorname{Var}\left[\mathrm{d}W_{1t}\right]}\right)^2+\left(\alpha_2 z_q\sqrt{\sigma_2^2\operatorname{Var}\left[\mathrm{d}W_{2t}\right]}\right)^2} \\
=& \sqrt{\left(\alpha_1 z_q\sqrt{\sigma_1^2\lambda_1\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\alpha_2 z_q\sqrt{\sigma_2^2\lambda_2\mathrm{d}t}\right)^2} \\
=& z_q\sqrt{\left(\alpha_1\sigma_1\sqrt{\lambda_1}\right)^2+\left(\alpha_2\sigma_2\sqrt{\lambda_2}\right)^2}\ \sqrt{\mathrm{d}t} \\
=& z_q\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2\lambda_1+\alpha_2^2\sigma_2^2\lambda_2}\ \sqrt{\mathrm{d}t} \\
\\
=& z_q\sqrt{2\alpha_1^2\sigma_1^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)+2\alpha_2^2\sigma_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}\ \sqrt{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

¿Cuál es la utilidad del método de componentes principales en el cálculo del VaR? La respuesta a esta pregunta es simple. Suponga que $\rho = 0.95$, entonces

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_{1t}\right] = (1+\rho)\mathrm{d}t = 1.95\mathrm{d}t.$$

Así, la varianza de $\mathrm{d}W_{1,t}$ con respecto de la varianza total es $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2) = 1.95/2 = 0.975$, mientras que la de $\mathrm{d}W_{2t}$ sólo explica el 0.025 $(= \lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2))$ de la varianza total. Si $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha_1 = 1-(1/\sqrt{2})$, $\sigma_1 = 1/\sqrt{10}$ y $\sigma_2 = 0.05$, entonces

$$2\alpha_2^2\sigma_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right) = (0.0025)(0.025) = 0.0000625.$$

Por lo tanto, la segunda componente principal puede eliminarse ya que su contribución a la varianza total es insignificante. De esta manera, un problema de dimensión 2, de dos activos, puede reducirse a un problema de dimensión 1, de la combinación lineal de los dos activos y

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi} \approx z_q\sqrt{2\alpha_1^2\sigma_1^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}\,\sqrt{\mathrm{d}t} = z_q(0.1293)\sqrt{\mathrm{d}t}.$$

CAPÍTULO 3

Algunas generalizaciones del VeR

3.1 VeR incremental

En el calculo de VeR , es natural preguntar cuál de los activos contribuye más al riesgo total. De esta manera es posible modificar las posiciones. De acuerdo con Venegas (2006) el cálculo aislado del VeR para cada uno de los activos no es la aproximación correcta debido a que se omiten los efectos de correlación con los otros activos. El VeR incremental de un activo se define como la razón de cambio entre el VeR y la proporción del valor del portafolio que se invierte en el activo. Esto es, indica cuanto cambia el VeR del portafolio al invertir un punto porcentual adicional en uno de los activos. Para calcularlo es necesario derivar parcialmente el VeR del portafolio con respecto a cada porcentaje de inversión $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. De esta manera, para el caso de dos activos el VeR incremental con respecto de α_1, denotado por $\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_1}$, está dado por:

$$\begin{aligned}\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_1} =& \frac{\partial \mathrm{VeR}_{1-q}}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2)\\ =& \frac{z_q}{2} \frac{(2\alpha_1\sigma_1^2 + 2\alpha_2\sigma_{12})}{\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}} \sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1 \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{\sqrt{\mathrm{d}t}}{\sqrt{\mathrm{d}t}}$

$$\begin{aligned}\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_1} =& z_q \frac{(\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_{12})}{(\sqrt{\mathrm{d}t})^{-1}\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t}} \sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1 \mathrm{d}t\\ =& z_q \frac{(\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_{12})}{(\sqrt{\mathrm{d}t})^{-1}\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}} \sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1 \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Si se sabe que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_1 t}, \alpha_1\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}] =& \frac{\alpha_1 \mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}] + \alpha_2 \mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}, \frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}]}{\mathrm{d}t}\\ =& \frac{\alpha_1\sigma_1^2\mathrm{d}t + \alpha_2\sigma_{12}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\\ =& \alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_{12}.\end{aligned}$$

Entonces (3.1) se puede expresar como:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_1} =& z_q \frac{\frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_1t}, \alpha_1\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}]}{(\sqrt{\mathrm{d}t})^{-1}\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}}\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1\mathrm{d}t \\
=& z_q \frac{\mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_1t}, \alpha_1\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}]}{\sqrt{\mathrm{d}t}\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}}\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Multiplicando por $\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2}}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_1} =& z_q \frac{\sigma_1\mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_1t}, \alpha_1\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}]}{\sqrt{\sigma_1^2}\sqrt{\mathrm{d}t}\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}}\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1\mathrm{d}t \\
=& z_q \frac{\sigma_1\mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_1t}, \alpha_1\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}]}{\sqrt{\sigma_1^2\mathrm{d}t}\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}}\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1\mathrm{d}t \\
=& z_q\sigma_1 \frac{\mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_1t}, \frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}]}\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}}\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Si se define:

$$
\beta_1 = \frac{\mathrm{Cov}[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_1t}, \frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}S1_t}{S1_t}]}\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}]}.}
$$

Entonces es posible escribir

$$
\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_1} = z_q\sigma_1\beta_1\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_1\mathrm{d}t.
$$

Para el caso en que el portafolio contiene n activos, cada $\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_k}$, se obtiene mediante

$$
\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_k} = z_q\sigma_k\beta_k\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu_k\mathrm{d}t. \tag{3.1}
$$

con

$$
\beta_k = \frac{\alpha\sigma\mathrm{d}W_T\sigma_k}{\sigma_k\sqrt{\mathrm{d}t}\sqrt{\alpha\Sigma\alpha^T}\sqrt{\mathrm{d}t}} \tag{3.2}
$$

donde

α, es una matriz 1xn, cuyos elementos son las α_i, $i = 1, 2, ..., k, ..., n$ de cada activo.

σ, es una matriz de orden nxn,cuya diagonal principal contiene las σ_i, $i = 1, ..., k, ..., n$ de los activos.

Σ, es una matriz de orden nxn de varianzas y covarianzas.

$\mathrm{d}W_T$, es una matriz nx1, que contienen los elementos $\mathrm{d}W_it$, $i = 1, ..., k, ..., n$ de los activos, donde, se considera $\mathrm{d}W_it = \mathrm{d}t$, cuando $i = k$ y $\mathrm{d}W_it = \rho_{ik}$ en cuanquier otro caso.

Adicionalmente es importante mostrar que $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}}$ es una función homogénea de primer grado en (α_1, α_2). Es decir, si

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} = z_q\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - [\alpha_1\mu_1\mathrm{d}t + \alpha_2\mu_2\mathrm{d}t].$$

Y se multiplica por una consante k

$$\begin{aligned}\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} =& Z_q\sqrt{(\alpha_1 k)^2 + (\alpha_2 k)^2 + 2(k\alpha_1)(k\alpha_2)\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - [(k\alpha_1)\mu_1\mathrm{d}t + (k\alpha_2)\mu_2\mathrm{d}t]\\ =& Z_q\sqrt{\alpha_1^2k^2 + \alpha_2^2k^2 + 2k^2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - kdt[\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2]\\ =& Z_q k[\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}}\sqrt{\mathrm{d}t} - \mathrm{d}t[\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2]]\\ =& k\mathrm{VeR}_{1-q}^{\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto y en virtud del teorema de euler es posible escribir al $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}}$ como:

$$\begin{aligned}\mathrm{VeR}_{1-q}(\alpha_1, \alpha_2) =& \alpha_1\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_1} + \alpha_2\mathrm{VeRI}_{1-q}^{\alpha_2}\\ =& z_q(\alpha_1\sigma_1\beta_1 + \alpha_2\sigma_2\beta_2)\sqrt{\mathrm{d}t} - (\mu_1 + \mu_2)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Es decir, el $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$ se calcula considerando las β, tal como se definió en este apartado, así como la volatilidad de los activos.

La generalización a "n" activos se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathrm{VeR}_{1-q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sqrt{\mathrm{d}t}z_q\sigma\beta\alpha\mathbf{1} - \mu^{\mathbf{T}}\mathbf{1}\mathrm{d}t.$$

Donde:

σ :es un vector de orden 1xn cuyos elementos son las volatilidades de los activos.

β :es una matriz de orden nxn, en cuya diagonal se encuentran las β de los activos y el resto de sus elementos son ceros.

α:es una matriz de orden nxn, en cuya diagonal se encuentran las α de los activos y el resto de sus elementos son ceros.

μ :es el vector de orden nx1 de medias.

A continuación se calcula el $\mathrm{VeR}_{1-q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ anual para AMXL, WALMEXV y CEMEXPO. Primeramente, es necesario calcular los las β_i para cada activo. De acuerdo con

(3.2) es necesario obtener el porcentaje de inversión, α_i, así como las desviaciones estándar de los rendimientos de los activos, σ_i, la matriz de varianzas y covarianza existente entre dichos rendimientos, Σ, y la matriz dW_T. Tales resultados se muestran a continuación.

TABLA 2.5

	Datos anuales		
	AMXL 1	WALMEXV 2	CEMEXPO 3
μ	0.78	0.48	0.51
α	16.9%	104.5%	-021.4%

TABLA 2.6

	Matriz de Var-Cov		
	AMXL 1	WALMEXV 2	CEMEXPO 3
AMXL 1	0.0342	0.0113	0.0448
WALMEXV 2	0.0113	0.0093	0.0170
CEMEXPO 3	0.0448	0.0170	0.0811

TABLA 2.7

	Matriz dW_T		
	AMXL 1	WALMEXV 2	CEMEXPO 3
AMXL 1	1	0.634	0.851
WALMEXV 2	0.634	1	0.620
CEMEXPO 3	0.851	0.620	1

Ahora es posible calcular $\beta_i, i = 1, 2, 3$. Sólo basta con sustituir los valores anteriores en (3.2), de esta manera se obtiene:

TABLA 2.8

	AMXL 1	WALMEXV 2	CEMEXPO 3
β	0.484	0.927	0.314

Finalmente el cálculo de $\text{VeRI}_{1-q}^{\alpha_k}$, se obtienen al sustiruir los datos anteriores en (3.1) y considerando que $z_q = 1.65$ y d$t = 1$, es decir

TABLA 2.9

	AMXL 1	WALMEXV 2	CEMEXPO 3
$\text{VeRI}_{1-q}^{\alpha_k}$	-0.629	-0.335	-0.358

Si se multiplican los datos anteriores, por sus respectivos pesos α_i, se tiene que

$$\mathrm{VeR}_{1-q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -0.38$$

3.2 Índice de Herfindahl-Hirschman

El índice de Herfindahl-Hirschman proporciona una medida de concentración del valor en riesgo de los activos del portafolio. Lo anterior es posible gracias a que el $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$ es una función homogenea de primer grado en (α_1, α_2). Observe que de acuerdo con (3.2), se puede escribir

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi} = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

donde

$$x_k = \alpha_k \mathrm{VaRI}_{1-q}^{\alpha_k}.$$

El índice de Herfindahl-Hirschman resulta de sumar los cuadrados de las participaciones del riesgo de cada activo en el VeR. Es decir

$$\mathrm{IHH} = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

donde

$$y_k = \frac{x_k}{\mathrm{VeR}_{1-q}^{d\Pi/\Pi}}.$$

Y toma valores entre el recíproco del número de activos de una la cartera, y uno.

Para ilustrar la utilidad de este índice suponga, por ejemplo, que un portafolio contiene 4 activos para los cuales $y_1 = 0.45$, $y_2 = y_3 = 0.25$ y $y_4 = 0.05$. En este caso,

$$\mathrm{IHH} = 0.33$$

Siguiendo a Venegas (2006) la interpretación de este índice es que su inverso $1/\mathrm{IHH} = 3$ significa que el portafolio bajo consideración, de 4 activos, es equivalente a uno con tres activos que contribuyen igualmente al VeR original.

3.3 VeR-promedio, AVeR (Average VeR), y esperanza condicional del VeR

Un concepto muy útil en administración de riesgos es el VeR-promedio, el cual consiste en tomar el promedio de $(1-q)*100\%$ de las perdidas potenciales. Su cálculo se obtiene a traves del promedio de los valores que exceden el VeR, dado el nivel de confianza q, es decir, se toma el promedio de las pérdidas potenciales con respecto al cuantil q. Así pues el VeR-promedio se define como

$$\mathrm{AVeR}_{1-q}^{X} = \frac{1}{q}\int_0^q \mathrm{VeR}_{1-s}^{X}\mathrm{d}s.$$

Si, por ejemplo,

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

es decir, X es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned} q =& 1 - e^{-\lambda x} \\ 1 - q =& e^{-\lambda x} \\ \ln(1-q) =& -\lambda x \\ -\frac{\ln(1-q)}{\lambda} =& \mathrm{VeR}_{1-q}^{X} \end{aligned} .$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathrm{AVeR}_{1-q}^{X} =& \frac{1}{q}\int_0^q \mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\mathrm{d}q \\ =& -\frac{1}{q}\int_0^q \frac{\ln(1-q)}{\lambda}\mathrm{d}q \\ =& -\frac{1}{q\lambda}\int_0^q \ln(1-q)\mathrm{d}q. \end{aligned}$$

Considere ahora el cambio de variable $u = 1 - q$. En este caso, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathrm{AVeR}_{1-q}^{X} =& -\frac{1}{q\lambda}\int_1^{1-q} \ln(u)\mathrm{d}u \\ =& -\frac{1}{q\lambda}\left[(u\ln(u) - u)\Big|_1^{1-q} \right] \\ =& -\frac{1}{q\lambda}\left[(1-q)\ln(1-q) - (1-q) + 1\right] \\ =& -\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1-q}{q}\right)\ln(1-q) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, la metodología de valor en riesgo no proporciona información alguna cuando el tamaño esperado del cambio de valor en el portafolio excede el umbral $-\mathrm{VeR}^X_{1-q}$. Por esta razón es conveniente introducir la siguiente medida de riesgo si se define esperanza condicional de la cola del VeR como:

$$\mathcal{E}^X_{1-q} = -\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X \,|\, X < -\mathrm{VeR}^X_{1-q}\right],$$

se puede reescribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^X_{1-q} &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X \,|\, X < -\mathrm{VeR}^X_{1-q}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[-X - \mathrm{VeR}^X_{1-q} + \mathrm{VeR}^X_{1-q} \middle| X < -\mathrm{VeR}^X_{1-q}\right] \\
&= \mathrm{VeR}^X_{1-q} + \mathrm{E}\left[-X - \mathrm{VeR}^X_{1-q} \middle| -\mathrm{VeR}^X_q - X > 0\right] \\
&= \mathrm{VeR}^X_{1-q} - \mathrm{E}\left[X + \mathrm{VeR}^X_{1-q} \middle| \mathrm{VeR}^X_q + X < 0\right].
\end{aligned}$$

Observe que si se denota $\mathrm{VeR}^X_{1-q} = -u$, y se define $e(u) = \mathrm{E}\left[X - u \,|\, X < u\right]$, entonces $\mathcal{E}^X_{1-q} = -u - e(u)$. En este caso,

$$e(u) = \frac{\int_{-\infty}^{u} (x-u) f(x) \mathrm{d}x}{Pr\{X < u\}}$$

y se sabe que

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e(u) &= \frac{\int_{-\infty}^{u} (x-u) \mathrm{d}F_X(x)}{F_X(u)} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{u} (x \mathrm{d}F_X(x) - u \mathrm{d}F_X(x))}{F_X(u)} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{u} x \mathrm{d}F_X(x)}{F_X(u)} - \frac{u \int_{-\infty}^{u} \mathrm{d}F_X(u)}{F_X(u)} \\
&= \frac{1}{F_X(u)} \int_{-\infty}^{u} x dF_X(x) - u
\end{aligned}.$$

Ahora si se integra por partes la expresión

$$\int_{-\infty}^{u} x \mathrm{d}F_X(x)$$

donde $z = x$ y $\mathrm{d}v = \mathrm{d}F_X(x)$, entonces $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$ y $v = F_X(x)$. Y se sigue que

$$\int_{-\infty}^{u} z \mathrm{d}v = zv - \int_{-\infty}^{u} v \mathrm{d}z,$$

y

$$\begin{aligned}
F_X(u) &= Pr\{X < u\} \\
&= \int_{-\infty}^{u} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{u} \mathrm{d}F(x) \\
&= F_X(x).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e(u) &= \frac{1}{F_X(u)}\left(uF_X(u) - \int_{-\infty}^{u} F_X(x)\mathrm{d}x\right) - u \\
&= -\frac{1}{F_X(u)}\int_{-\infty}^{u} F_X(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Si se toma en cuenta que $-u = \mathrm{VeR}_{1-q}^{X}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
e(-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}) =&\frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1-q)}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\exp\{\ln(1-q)\}}\right) \\
=&\frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1-q)}{q\lambda}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{1-q}^{X} =&\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} - e(-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}) \\
=&\frac{\ln(1-q)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(1-q)}{q\lambda} \\
=&-\frac{1}{\lambda}\left[\frac{-q\ln(1-q) + q + \ln(1-q)}{q}\right] \\
=&-\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\ln(1-q)(1-q) + q}{q}\right] \\
=&-\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\ln(1-q)(1-q)}{q} + \frac{q}{q}\right] \\
=&-\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1-q}{q}\right)\ln(1-q) + 1\right].
\end{aligned}$$

Es decir, $\mathrm{AVeR}_{1-q}^{X} = \mathcal{E}_{1-q}^{X}$.

3.4 VeR y CAPM (Modelo diagonal)

En este apartado se muestra la relación que existen entre el VeR y el modelo CAPM. A continuación se examina, bajo un conjunto de supuestos, la relación existente entre el valor en riesgo del rendimiento de un portafolio y el modelo CAPM (por las iniciales en inglés de Capital Asset Pricing Model).

El CAPM es un modelo que establece una relacion entre el riesgo y el rendimiento de un activo o de un portafolio de activos. Y tiene como supuestos básicos siguientes:

1. Mercados eficientes.

2. Inversionistas racionales.

3. Expectativas homogéneas e igual horizonte.

4. Existe una tasa libre de riesgo a la cual todos los inversionistas pueden prestar o pedir prestado.

5. No existen restricciones a la inversion, ni impuestos, ni costos de transaccion.

Siguiendo a Venegas (2006) una de las formas del modelo CAPM establece que:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_{it}\right] - r\mathrm{d}t = \beta_i \left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_{mt}\right] - r\mathrm{d}t\right), \tag{3.2}$$

donde $r\mathrm{d}t$ representa a la tasa libre de riesgo aplicada en el instante t y $\mathrm{d}R_{mt}$ representa el rendimiento del mercado.

Si se considera que

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{d}R_{it}, \mathrm{d}R_{mt})}{\mathrm{Var}[\mathrm{d}R_{mt}]},$$

además de que los rendimientos son conducidos por un movimeinto geométrico browniano, es decir,

$$\mathrm{d}R_{it} = \frac{\mathrm{d}S_{it}}{S_{it}} = \mu_i \mathrm{d}t + \sigma_i \mathrm{d}W_{it}, \quad i = 1, 2. \tag{3.3}$$

y por último

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{2t}) = \rho_{12}\mathrm{d}t.$$

Observe que en este caso, tal como se expusó en el apartado de VeR de un portafolio, el rendimiento del portafolio satisface

$$\mathrm{d}R_{\Pi} := \frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}},$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \qquad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}R_{\Pi}\right] = \left(\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}\right)\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

y

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_{\Pi}\right] = (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

Con la finalidad de mostrar la relación entre el VeR y el modelo CAPM, Venegas (2006) supone que, paralelamente los rendimeintos de los activos son conducidos por

$$\mathrm{d}R_{it} = \phi_i\mathrm{d}t + \beta_i\mathrm{d}R_{mt} + \mathrm{d}U_{it}, \quad i = 1, 2, \tag{3.6}$$

donde $\mathrm{d}U_{it}$ es normal con $\mathrm{E}[\mathrm{d}U_{it}] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}U_{it}] = \sigma_{iu}^2\mathrm{d}t$, y $\mathrm{d}R_{mt}$ es normal con $\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}] = \mu_m\mathrm{d}t$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}R_{mt}] = \sigma_m^2\mathrm{d}t$. Se supone además que $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}U_{it}, \mathrm{d}R_{mt}) = 0$ y $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}U_{1t}, \mathrm{d}U_{2t}) = 0$. Es decir y de acuerdo con Jorion(2007) el movimiento común en todos los activos se debe a un sólo factor; el mercado. Observe que si en la ecuación anterior se escribe $\phi_i = r(1 - \beta_i)$ y se toman esperanzas, se obtiene de nuevo la expresión (3.2).

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{it}] =& \mathrm{E}[\phi_i\mathrm{d}t] + \mathrm{E}[\beta_i\mathrm{d}R_{mt}] + \mathrm{E}[\mathrm{d}U_{it}] \\
=& \mathrm{E}[r(1 - \beta_i)\mathrm{d}t] + \mathrm{E}[\beta_i\mathrm{d}R_{mt}] + \mathrm{E}[\mathrm{d}U_{it}] \\
=& r(1 - \beta_i)\mathrm{d}t + \beta_i\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}] + \mathrm{E}[\mathrm{d}U_{it}] \\
=& r\mathrm{d}t - r\beta_i\mathrm{d}t + \beta_i\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}].
\end{aligned}$$

Se puede verificar, a partir de (3.6), que

$$
\begin{aligned}
\sigma_{12}dt =&\mathrm{Cov}[\mathrm{d}R_{1t},\mathrm{d}R_{2t}]\\
=&\mathrm{E}\left[(\mathrm{d}R_{1t}-\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{1t}])(\mathrm{d}R_{2t}-\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{2t}])\right]\\
=&\mathrm{E}[(r(1-\beta_1)\mathrm{d}t+\beta_1\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{1t}-r\mathrm{d}t-\beta_1(\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}-r\mathrm{d}t])(r(1-\beta_2)\mathrm{d}t+\\
&+\beta_2\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{2t}-r\mathrm{d}t-\beta_2(\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}-r\mathrm{d}t])]\\
=&\mathrm{E}[r\mathrm{d}t-\beta_1 r\mathrm{d}t+\beta_1\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{1t}-r\mathrm{d}t-\beta_1\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]+\beta_1 r\mathrm{d}t(r\mathrm{d}t-\beta_2 r\mathrm{d}t+\\
&+\beta_2\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{2t}-r\mathrm{d}t-\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]+\beta_2 r\mathrm{d}t)]\\
=&\mathrm{E}[(\beta_1\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{1t}-\beta_1\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}])(\beta_2\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{2t}-\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}])]\\
=&\mathrm{E}[\beta_1\mathrm{d}R_{mt}^2\beta_2+\beta_1\mathrm{d}R_{mt}\mathrm{d}U_{2t}-\beta_1\mathrm{d}R_{mt}\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]+\beta_2\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{1t}+\mathrm{d}U_{1t}\mathrm{d}U_{2t}-\\
&-\mathrm{d}U_{1t}\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]-\beta_1\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]\beta_2\mathrm{d}R_{mt}-\beta_1\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]+\mathrm{d}U_{2t}+\beta_1\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]]\\
=&\beta_1\mathrm{d}R_{mt}^2\beta_2-\beta_1\mathrm{d}R_{mt}\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]-\beta_1\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]\beta_2\mathrm{d}R_{mt}\beta_1\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]^2\\
=&\beta_1\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}^2]+\mathrm{E}[\beta_1\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]^2]\\
=&\beta_1\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}^2]\\
=&\beta_1\beta_2\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}\mathrm{d}R_{mt}]\\
=&\beta_1\beta_2(\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}]+\mathrm{Cov}[\mathrm{d}R_{mt},\mathrm{d}R_{mt}]\\
=&\beta_1\beta_2\mathrm{Var}[\mathrm{d}R_{mt}]\\
=&\beta_1\beta_2\sigma_m^2\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\sigma_i^2\mathrm{d}t =&\mathrm{Var}[\mathrm{d}R_{1t}]\\
=&\mathrm{Var}[r(1-\beta_i)\mathrm{d}t]+\mathrm{Var}[\beta_i\mathrm{d}R_{mt}]+\mathrm{Var}[\mathrm{d}U_{it}]\\
=&(\beta_i^2\sigma_m^2+\sigma_i^2)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Observe además que la esperanza de (3.3) es:

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{1t}]=\mu_1\mathrm{d}t$$

y que la esperanza de (3.6)cuando $\phi_1=r(1-\beta_1)$ es:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{1t}] =&r(1-\beta_1)\mathrm{d}t+\beta_1\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{1t}\\
=&(r-r\beta_1)\mathrm{d}t+\beta_1\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{1t}\\
=&r\mathrm{d}t-\beta_1 r\mathrm{d}t+\beta_1\mathrm{d}R_{mt}+\mathrm{d}U_{1t}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto es posible afirmar

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{1t}] + \sigma_1 \mathrm{d}W_{1t} =& \mathrm{E}[\mathrm{d}R_{1t}] + \beta_1 \mathrm{d}R_{mt}\mathrm{d}U_{1t} \\
\sigma_1 \mathrm{d}W_{1t} =& \beta_1 \mathrm{d}R_{mt}\mathrm{d}U_{1t},
\end{aligned}
$$

lo cual produce de nuevo (3.8),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\sigma_1 \mathrm{d}W_{it}] =& \mathrm{Var}[\beta_i \mathrm{d}R_{mt}\mathrm{d}U_{it}] \\
\sigma_i^2 \mathrm{d}t =& \beta_i^2 \sigma_m^2 \mathrm{d}t + \sigma_i^2 \mathrm{d}t \\
=& (\beta_i \sigma_m^2 + \sigma_i^2)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

como era de esperarse.

Las cantidades (3.7) y (3.8) se pueden reexpresar matricialmente como

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \sigma_m^2 + \begin{pmatrix} \sigma_{1u}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{2u}^2 \end{pmatrix}.
$$

Con la finalidad de obtener la varianza del rendimiento del portafolio, se sustituyen (3.7) y (3.8) en (3.4), de manera que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}R_{\Pi}\right] =& \alpha_1^2[\beta_1 \sigma_m^2 + \sigma_{1u}^2]\mathrm{d}t + \alpha_2^2[\beta_2^2 \sigma_m^2 + \sigma_{2u}^2]\mathrm{d}t + 2\alpha_1\alpha_2[\beta_1\beta_2\sigma_m^2]\mathrm{d}t \\
=& \alpha_1^2 \beta_1 \sigma_m^2 \mathrm{d}t + \alpha_1^2 \sigma_{1u}^2 \mathrm{d}t \alpha_2^2 \beta_2^2 \sigma_m^2 \mathrm{d}t + \alpha_2^2 \sigma_{2u}^2 \mathrm{d}t + 2\alpha_1\alpha" \beta_1\beta_2\sigma_m^2 \mathrm{d}t \\
=& \left(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\right)\sigma_m^2 \mathrm{d}t + (\alpha_1^2\sigma_{1u}^2 + \alpha_2^2\sigma_{2u}^2)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Asimismo, de (3.3) y (3.6) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{it}] =& \mathrm{E}[\mu_i \mathrm{d}t] + \mathrm{E}[\sigma_i \mathrm{d}W_{it}] \\
=& \mu_i \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{it}] =& \mathrm{E}[r\mathrm{d}t] - \mathrm{E}[r\beta_i \mathrm{d}t] + \mathrm{E}[\beta_i \mathrm{d}R_{mt}] + \mathrm{E}[\mathrm{d}U_{it}] \\
=& r\mathrm{d}t - r\beta_i \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Igualando

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{it}] + \sigma_i \mathrm{d}W_{it} =& \mathrm{E}[\mathrm{d}R_{it}] + \beta_1 \mathrm{d}R_{mt}\mathrm{d}U_{it} \\
\sigma_i \mathrm{d}W_{it} =& \beta_1 \mathrm{d}R_{mt}\mathrm{d}U_{it}.
\end{aligned}
$$

$$
\mu_i = \phi_i + \beta_i \mu_m,
$$

con lo cual es posible obtener la media del rendimientodel portafolio

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_\Pi\right] =& \alpha_1[\phi_1+\beta_1\mu_m]\mathrm{d}t+\alpha_2[\phi_2+\beta_2\mu_m]\mathrm{d}t\\ =&\alpha_1\phi_1\mathrm{d}t+\alpha_1\beta_1\mu_m\mathrm{d}t+\alpha_2\phi_2\mathrm{d}t+\alpha_2\beta_2\mu_m\mathrm{d}t\\ =&(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2)\mathrm{d}t+(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\mu_m\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Esta expresión se puede simplificar aún más si se denotan $\phi_\Pi = \alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2$, $\beta_\Pi = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$ y $\sigma^2_{\Pi,u} = \alpha_1^2\sigma^2_{1u}+\alpha_2^2\sigma^2_{2u}$, de tal suerte que

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}R_\Pi\right] = \left(\beta_\Pi^2\sigma_m^2+\sigma^2_{\Pi,u}\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_\Pi\right] = (\phi_\Pi+\beta_\Pi\mu_m)\mathrm{d}t.$$

En consecuencia,

$$\mathrm{VeR}^{\mathrm{d}R_\Pi}_{1-q} = z_q\sqrt{\left(\beta_\Pi^2\sigma_m^2+\sigma^2_{\Pi,u}\right)}\,\sqrt{\mathrm{d}t}-(\phi_\Pi+\beta_\Pi\mu_m)\mathrm{d}t.$$

Si la cantidad $\sigma^2_{\Pi,u}$ es despreciable (usualmente lo es a medida que aumenta el número de valores en el portafolio), se tiene que

$$\mathrm{VeR}^{\mathrm{d}R_\Pi}_{1-q} = z_q\beta_\Pi\sigma_m\sqrt{\mathrm{d}t}-(\phi_\Pi+\beta_\Pi\mu_m)\mathrm{d}t.$$

Si, en particular, $\phi_1=\phi_1=\mu_m=0$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{VeR}^{\mathrm{d}R_\Pi}_{1-q} =&\alpha_1\beta_1 z_q\sigma_m\sqrt{\mathrm{d}t}+\alpha_2\beta_2 z_q\sigma_m\sqrt{\mathrm{d}t}\\ =&(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)z_q\sigma_m\sqrt{\mathrm{d}t}\end{aligned}.$$

Esta expresión, bajo los supuestos establecidos, permite calcular el valor en riesgo del rendimiento de un portafolio mediante las betas de los activos y la volatilidad del mercado. De esta manera se observa que la sensibilidad del cambio relativo en el VeR del portafolio, en un cambio en la ponderación es β_1. Por lo tanto y siguiendo a Jorion(2007), las β_j miden la contribución por punto porcentual invertida en el activo j. Para el caso de n activos se tiene

$$\mathrm{VeR}^{\mathrm{d}R_\Pi}_{1-q} = \beta\alpha^{\mathbf{T}}\sqrt{\mathrm{d}t}\sigma_m.$$

Donde

β es el vector de coeficientes β de los activos de orden $nx1$.

α, corresponde al vector de porcentajes de inversión en cada activo, de orden $nx1$

3.5 Valor en riesgo del valor de un portafolio con un activo con riesgo crédito

El riesgo de crédito se define como la pérdida potencial que se registra por motivos de incumplimiento por parte de alguno de los participantes de la transacción financiera. A continuación se calcula el valor en riesgo del valor de un portafolio con un activo con riesgo crédito. En particular, el portafolio consiste de una acción y un bono, en este último existe una probabilidad positiva de que los intereses se recuperen parcialmente en T.

Se supone que el precio, S_t, de una acción es conducido por una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $(W_t)_{t\in[0,T]}$ es un movimiento Browniano. Considere un portafolio

$$\Pi_t = wS_t + M,$$

donde M es una cantidad que se destina a comprar un bono. Existe una probabilidad Q de que los intereses se recuperen parcialmente en T, es decir, si δ es la tasa de recuperación de los intereses, entonces

$$\mathbb{P}_\delta\left\{\delta = \delta_0\right\} = Q, \qquad 0 < \delta_0 < 1.$$

$$\mathbb{P}_\delta\left\{\delta = 1\right\} = 1 - Q.$$

El cambio en valor del portafolio $\Pi_T - \Pi_t$ satisface

$$\mathrm{d}\Pi_t = w\mathrm{d}S_t + Mr\delta\mathrm{d}t.$$

Es decir, la cantidad de dinero invertida en el activo S_t, w, multiplicada por el rendimiento en dicho activo, $\mathrm{d}S_t$, mas la cantidad de los intereses que se recuperan dentro del intervalo de tiempo $\mathrm{d}t = T - t$, $Mr\delta\mathrm{d}t$.

Sea $X = \mathrm{d}\Pi_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_W\left[X \mid \delta, \mathcal{F}_t\right] =& \mathrm{E}\left[\mathrm{d}\Pi_t\right]\\
=& \mathrm{E}\left[w\mathrm{d}S_t + Mr\delta\mathrm{d}t\right]\\
=& \mathrm{E}\left[w(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t) + Mr\delta\mathrm{d}t\right]\\
=& (w\mu S_t + Mr\delta)(T-t).
\end{aligned}$$

Paralelamente note que si $1-\delta$ es la tasa de no recuperación entonces

$$\begin{aligned}1-\delta &= 1-[(1-Q)(1-\delta_0)+(1-Q)\delta_0]\\ &= 1-[-Q-\delta_0+\delta_0 Q+1+(1+Q)\delta_0]\\ &= 1-[-Q+Q\delta_0+1+Q\delta_0]\\ &= 1+Q-Q\delta_0-1-Q\delta_0\\ &= 1+Q-2Q\delta_0-1\\ &= 1+Q(1-2\delta_0)-1\end{aligned}$$

De donde se observa que $\delta = 1-Q(1-2\delta_0)$. Con base en lo anterior y si se consideran ambas variables conjuntamente distribuidas se tiene

$$\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathrm{E}_\delta\left[\mathrm{E}_W\left[X \mid \delta, \mathcal{F}_t\ \right]\right] = (w\mu S_t + Mr(1-Q(1-2\delta_0)))(T-t).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_W\left[X \mid \delta, \mathcal{F}_t\ \right] =&\mathrm{Var}[\mathrm{d}\Pi_t]\\ =&\mathrm{Var}[w\mathrm{d}S_t + Mr\delta\mathrm{d}t]\\ =&\mathrm{Var}[w\mu S_t\mathrm{d}t + w\sigma S_t\mathrm{d}W_t + Mr\delta\mathrm{d}t]\\ =&w^2\sigma^2 S_t^2(T-t).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X \mid \mathcal{F}_t\ \right] =&\mathrm{Var}_\delta\left[\mathrm{E}_W\left[X \mid \delta, \mathcal{F}_t\ \right]\right] + \mathrm{E}_\delta\left[\mathrm{Var}_W\left[X \mid \delta, \mathcal{F}_t\ \right]\right]\\ =&\mathrm{Var}_\delta\left[(w\mu S_t + Mr(1-Q(1-2\delta_0)))(T-t)\right] + \mathrm{E}_\delta\left[w^2\sigma^2 S_t^2(T-t)\right]\\ =&w^2\sigma^2 S_t^2(T-t).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = z_q w\sigma S_t\ \sqrt{T-t} - (w\mu S_t + Mr(1-Q(1-\delta_0)))(T-t).$$

La expresión anterior puede ser reescrita como

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = w\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S_t}\sigma S_t\ \sqrt{T-t} - \mu_{_M}(T-t),$$

donde $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S_t} = z_q\sigma S_t\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu S_t\mathrm{d}t$ y $\mu_{_M}$ = pago esperado de los de intereses del bono. Si $-\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S_t}$ es el peor valor del cambio en el valor del activo, al $(1-q)100\%$ de confianza en $[t,T]$, entonces la cantidad $-w\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S_t}$ se reduce en el pago esperado de los de intereses del bono, $\mu_{_M}$.

3.6 VeR Delta Gamma para derivados

En esta sección se calcula el valor en riesgo de un portafolio que contiene productos derivados. En lo que sigue, por simplicidad, se considera el caso de un portafolio con un activo y una opción europea de compra sobre dicho activo.

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$. Se supone que el precio, S_t, de un activo subyacente, *v.g.*, una acción, es conducido por

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t, \tag{3.9}$$

donde $\mu\in\mathbb{R}$ y $\sigma>0$. Si $c=c(S_t,t)$ es el valor de la opción europea de compra, entonces y de acuerdo con Venegas(2006) el cambio marginal en el precio de la opción, durante $[t,t+\mathrm{d}t]$, satisface (vía el lema de Itô)

$$\mathrm{d}c=\frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t+\frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2+2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t\partial t}(\mathrm{d}S_t)(\mathrm{d}t)+\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right]. \tag{3.10}$$

Sustituyendo (3.9) en (3.10)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}c=&\frac{\partial c}{\partial S_t}(\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t)+\frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}(\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t)^2+\\
&+2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t\partial t}(\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t)(\mathrm{d}t)+\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2]\\
&=(\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t\mathrm{d}t+\frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W_t)+\frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}(\mu^2S_t^2\mathrm{d}t^2+2\mu\mathrm{d}t\sigma(S_t)^2\mathrm{d}W_t+\\
&+\sigma^2S_t^2\mathrm{d}W_t^2)+2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t\partial t}(\mu S_t(\mathrm{d}t)^2+\sigma S_t\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t)+\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2].
\end{aligned}$$

Si se considera que $(\mathrm{d}t)^2=0$, $(\mathrm{d}t)(\mathrm{d}W_t)=0$ y $(\mathrm{d}W_t)^2=\mathrm{d}t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}c&=\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t\mathrm{d}t+\frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W_t+\frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2(S_t)^2\mathrm{d}t\\
&=\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t+\tfrac{1}{2}\sigma^2S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W_t.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Considere ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente, entonces el valor del portafolio está dado por

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t).$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante $\mathrm{d}t$, se calcula considerando dicho portafolio en un periodo futuro T.

$$\Pi_T = \omega_1 S_T + \omega_2 c(S_T, T).$$

De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi_t &= \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t) - (\omega_1 S_T + \omega_2 c(S_T, T)) \\ &= \omega_1 \mathrm{d}S_t + \omega_2 \mathrm{d}c\end{aligned}$$

Si se sustituye (3.9) y (3.11) en la ecuación anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi_t &= \omega_1(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t) + \omega_2 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t\right] \\ &= \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right)\mu S_t \mathrm{d}t + \omega_2\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right) + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right)\sigma S_t \mathrm{d}W_t \\ &= \left[(\omega_1 + \omega_2 \Delta)\mu S_t + \omega_2\left(\theta + \tfrac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S_t^2\right)\right]\mathrm{d}t + (\omega_1 + \omega_2\Delta)\sigma S_t \mathrm{d}W_t,\end{aligned}$$

donde

$$\theta = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad \Delta = \frac{\partial c}{\partial S_t} \qquad \text{y} \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

De esta forma se tiene que

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}\Pi_t] = (\omega_1 + \omega_2\Delta)\mu S_t \mathrm{d}t + \omega_2(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \Gamma)$$

y

$$\mathrm{Var}[\mathrm{d}\Pi_t] = (\omega_1 + \omega_2\Delta)^2 \sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi} =& z_q (\omega_1 + \omega_2\Delta)\sigma S_t \sqrt{\mathrm{d}t} \\ & - \left[\ \omega_1 \mu S_t + \omega_2\left(\theta + \Delta\mu S_t + \tfrac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S_t^2\right)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En particular, si no se considera la opción de compra, es decir si, $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 0$,

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S} = z_q \sigma S_t \sqrt{\mathrm{d}t} - \mu S_t \mathrm{d}t$$

De la misma forma, si sólo se considera la opción, y por tanto $\omega_1 = 0$ y $\omega_2 = 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}c} =& z_q \sigma \Delta S_t \sqrt{\mathrm{d}t} - \left(\theta + \Delta\mu S_t + \tfrac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t \\ =& \Delta \mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}S} - \left(\theta + \tfrac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

MEDIDAS COHERENTES DE RIESGO

4.1 Introducción

En los últimos años y en gran medida gracias al trabajo de Artzner (1999), el desarrollo de las medidas de riesgos ha sido considerable. Hoy en dia se sabe que dichas medidas necesitan cumplir con un conjunto de supuestos, los cuales permiten que exista un vínculo entre la medida de riesgo y el comportamiento de los portafolios de activos financieros. Es decir que dicho comportamiento debe ser interpretado por la medida de riesgo. Por ejemplo, dicha medida debe reflejar la reducción del riesgo cuando se diversifica o bien no subestimar pérdidas potenciales. De esta manera, es objetivo de este capítulo verificar si el Valor en Riesgo cumple con las características para ser considerado una medida coherente de riesgo.

4.2 Medidas de riesgo

Hasta este punto se ha trabajado con el cambio en el valor de un portafolio, $X = \Pi_T - \Pi_t$, bajo un horizonte de tiempo determinado $[t, T]$. Tal variable, X, es vista como una varaible aleatoria y de acuerdo con Venegas(2006) una medida de riesgo se define como una función de dicha variable. De esta forma suponga que el valor inicial, en t, de un portafolio que consiste de w_1 unidades del activo S_{1t} y w_2 unidades del activo S_{2t} está dado por

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}.$$

El cambio en el valor del portafolio, entre las fechas t y T, manteniendo las cantidades w_1 y w_2 constantes, satisface

$$X := \Pi_T - \Pi_t = w_1 D_{1T} + w_2 D_{2T} \tag{4.1}$$

donde

$$D_{1T} = S_{1T} - S_{1t}, \qquad D_{2T} = S_{2T} - S_{2t}.$$

Si $S_{1T} : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $S_{2T} : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias definidas sobre dos espacios muestrales, entonces $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, es una variable aleatoria asociada al cambio en el valor del portafolio. Asimismo, se supone que X está definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se define la familia

$$\mathcal{A} = \{X \mid X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

De ahora en adelante, la variable aleatoria X será llamada cambio en el valor del portafolio y $\mathcal{A}$ denotará el conjunto de todos los posibles cambios en el valor del portafolio. Una medida de riesgo será vista como una función $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$. En términos generales, una medida de riesgo será definida con base en una medida de probabildad $\mathbb{P}$.

Por otro lado, si en lugar del cambio en el valor del portafolio, $\Pi_T - \Pi_t$, se considera el rendimiento del portafolio,

$$\frac{\Pi_T - \Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{S_{1T} - S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{S_{2T} - S_{2t}}{S_{2t}}, \tag{4.2}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \qquad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

se tiene que los rendimientos (cambios porcentuales en los precios) de los activos están acotados inferiormente por -1, mientras que los cambios en valor de los activos D_{1T} y D_{2T} pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

En ocasiones, la variable aleatoria X asociada al cambio en el valor de un portafolio entre dos fechas, recibe el nombre de riesgo, lo cual parece apropiado y en cuyo caso $\rho(X)$ debería leerse como "medida de riesgo del riesgo X," lo cual genera repetición de términos. Compare esta situación con el caso de una medida de probabilidad, la cual es llamada simplemente probabilidad, si a la medida de riesgo se le llama simplemente riesgo, entonces $\rho(X)$ debería leerse como "riesgo del riesgo." Para evitar estos problemas de terminología se insiste en hacer referencia a X como el cambio en valor de un portafolio, o incluso de manera simple como un elemento de $\mathcal{A}$ y en el peor de los casos como la posición X.

4.2.1 Propiedades deseables de una medida coherente de riesgo

En la actualidad, el comportamiento de los mercados financieros se encuentra en movimiento, en gran medida gracias al desarrollo tecnologico y por supuesto a la globalización. Ante este cambio continuo, la incertidumbre junto con la rápida respuesta por parte de los mercados han provocado que los instrumentos financieros tengan un comportamiento totalmente incierto. Es por esto que las medidas de riesgo que sean utilizadas sobre dichos intrumentos deben de entender la dinámica de los mercados. Por ejemplo la medida de riesgo debe de mostrar que al diversificar los intrumentos financieros el riesgo del portafoilio disminuye. De esta manera Artzner(1999) propone ciertas características que una medida de riesgo debe cumplir, si la medida de riesgo lo hace se dice que dicha medida es coherente en el sentido de Artzner y por lo tanto, cualquier medida que no satisface algunos de los axiomas producirá resultados paradójicos. Las propiedades deseables de una medida coherente de riesgo ρ se enlistan y justifican a continuación:

(*i*) Monotonía no creciente. Si $X, Y \in \mathcal{A}$ son tales que $X \leq Y$, entonces

$$\rho(X) \geq \rho(Y).$$

Por ejemplo, si $X = -5$ y $Y = -3$ representan dos posibles escenarios del cambio de valor de un mismo portafolio, de manera que

$$X \leq Y$$

En consecuencia habrán más perdidas en el escenario cuyo cambio es X. Tal comportamiento debe ser reflejado por la medida de riesgo ρ. La cual debe indicar que existe menor riesgo en el escenario cuyo cambio es Y.

$$\rho(X) \geq \rho(Y).$$

(*ii*) Subaditividad. Si $X, Y \in \mathcal{A}$, entonces

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Es decir si X y Y representan dos cambios del valor de portafolios distintos. La fusión de dichos portafolios no creará riesgo adicional y por tanto un portafolio fusionado tendrá un riesgo máximo equivalente al riesgo de los portafolios antes de fusionar. En el contexto de portafolios de inversión esta propiedad dice que la diversificación reduce el riesgo.

(*iii*) Homogeneidad positiva (homogeneidad de grado uno en X con constantes positivas). Si $\alpha \geq 0$ y $X \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X).$$

Si X representa el cambio del valor de un portafolio y se tiene que la cantidad de dinero invertida aumenta, entonces el riesgo aumentará de manera proporcional. Es decir, el tamaño del portafolio influye directamente en el riesgo. No es lo mismo invertir una unidad monetaria en activos financieros que invertir un millón en los mismos activos. En el segundo caso es un millón de veces más riesgoso. En este contexto, también se dice que $\rho(\cdot)$ es una función homogénea de grado uno. Observe, por último, que la subaditividad implica que $\rho(nX) \leq n\rho(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Invarianza bajo traslaciones. Si $X \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$. Si existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés libre de riesgo, r, entonces el valor futuro de una inversión inicial C, se encuentra descrita como:

$$C(1 + r)^n = M.$$

Si se tiene un inversión inicial $C = \alpha/r$, entonces α puede ser interpretada como el interés, libre de riesgo. De esta manera si se tiene que

$$\rho(X + \alpha) = \rho\left(X + \frac{\alpha}{r}r\right) = \rho(X) - \alpha.$$

Entonces, la propiedad indica que el riesgo disminuye en dichos intereses. Si α es negativa, se interpreta como un adeudo al banco, lo que incrementa el riesgo en el portafolio. Además, si se escribe $\alpha = \rho(X)$, es decir si los intereses se igualan a la medida de riesgo, entonces $\rho(X + \rho(X)) = 0$, ya que $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$, y por lo tanto dichos intereses carecen de riesgo. De esta manera, $\alpha = \rho(X)$ se puede interpretar como la cantidad monetaria que se requiere para eliminar el riesgo de X. Es decir, $\rho(X)$ funciona como cobertura de X. Por último, y siguiendo a Venegas(2006) observe que en términos estrictos, $\rho(X)$ no es invariante bajo traslaciones por el cambio de signo en α dentro y fuera de ρ. Sin embargo, en la literatura especializada esta propiedad ha adoptado dicho nombre y lo mismo se hará en el transcurso del presente capítulo. Un buen nombre para esta propiedad podría ser "invarianza monetaria".

A continuación se formaliza el concepto de medida coherente de riesgo con base en las propiedades anteriores.

Se dice que una medida de riesgo ρ es coherente, en el sentido de Artzner (1999), si para $X, Y \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

(i) $Y \geq X \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$,

(ii) $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,

(iii) $\rho(\alpha X) = \alpha\rho(X), \quad \alpha \geq 0$,

(iv) $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

4.3 Valor en riesgo no es una medida coherente de riesgo

El valor en riesgo es una las medidas que se utilizan con mayor frecuencia en la estimación de pérdidas potenciales de un portafolio, por fluctuaciones adversas del mercado, en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dado. A continuación se muestra que el Valor en Riesgo carece de coherencia.

4.3.1 El valor en riesgo satisface la propiedad de monotonía no creciente

En esta sección se comprueba que el valor en riesgo satisface la propiedad de monotonía no creciente. Si X y Y son variables aleatorias con $Y \geq X$, entonces, las probabilidades de que cualquiera de las dos variables sea menor o igual que un valor z tendran el siguiente comportamiento:

$$F_Y(z) = \mathbb{P}\{Y \leq z\} \leq \mathbb{P}\{X \leq z\} = F_X(z)$$

para toda $z \in \mathbb{R}$, ya que si $\omega \in \Omega$ es tal que $Y(\omega) \leq z$, entonces $X(\omega) \leq Y(\omega) \leq z$, es decir, $X(\omega) \leq z$. Por lo tanto, si z es tal que $q \leq F_Y(z)$, como $q \leq F_Y(z) \leq F_X(z)$, se sigue que $q \leq F_X(z)$. Consecuentemente,

$$\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\},$$

entonces,

$$\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\}.$$

Es decir,

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{Y} = -\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \leq -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} = \mathrm{VeR}_{1-q}^{X}$$

ó

$$\rho^{(2)}(Y) \leq \rho^{(2)}(X).$$

4.3.2 El valor en riesgo satisface la propiedad de homogeneidad positiva

En esta sección se demuestra que el valor en riesgo es homogéneo positivo. Sean $\alpha > 0$ y $Y = \alpha X$, entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha X \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

de aquí se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{VeR}_{1-q}^{Y} =& -\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\
=& -\inf\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_Y(\alpha x) \geq q\} \\
=& -\inf\left\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_X\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) \geq q\right\} \\
=& -\inf\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\
=& -\alpha \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\
=& \alpha \mathrm{VeR}_{1-q}^{X}
\end{aligned}$$

ó

$$\rho^{(2)}(\alpha X) = \alpha \rho^{(2)}(X).$$

4.3.3 El valor en riesgo satisface la propiedad de invarianza bajo traslaciones

A continuación se prueba que el valor en riesgo es invariante bajo traslaciones. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $Y = X + \alpha$, entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X + \alpha \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq y - \alpha\} = F_X(y - \alpha)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{VeR}_{1-q}^{Y} =& -\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\
=& -\inf\{x + \alpha \in \mathbb{R} \mid F_Y(x + \alpha) \geq q\} \\
=& -\inf\{x + \alpha \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\
=& -(\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} + \alpha) \\
=& -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} - \alpha \\
=& \mathrm{VeR}_{1-q}^{X} - \alpha
\end{aligned}$$

ó

$$\rho^{(2)}(X + \alpha) = \rho^{(2)}(X) - \alpha.$$

4.3.4 El valor en riesgo no satisface la propiedad de subaditividad

En esta sección se construye un ejemplo que muestra que el valor en riesgo no satisface la propiedad de subaditividad. Esta propiedad es esencial en la optimización de portafolios pues de ella se desprende la convexidad en una superficie de riesgo, lo cual asegura un único portafolio óptimo. Considere dos variable aleatorias, X y Y, independientes e idénticamente distribuidas con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x \in (0,1], \\ 0.05 & \text{si } x \in [-2,0], \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Observe que la función de distribución, evaluada en 0, satisface

$$F_X(0) = P\{X \leq 0\} = \int_{-2}^{0} 0.05 \mathrm{d}x = 0.1.$$

Es decir

$$Q(0.1) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 0.1\} = 0,$$

equivalentemente

$$Q(0.1) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{X \geq x\} \leq .90\} = 0.$$

En consecuencia

$$-\mathrm{VeR}_{0.9}^{X} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{X \geq x\} \leq .90\} = 0.$$

$$-\mathrm{VeR}_{0.9}^{Y} = \inf\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{Y \geq y\} \leq .90\} = 0.$$

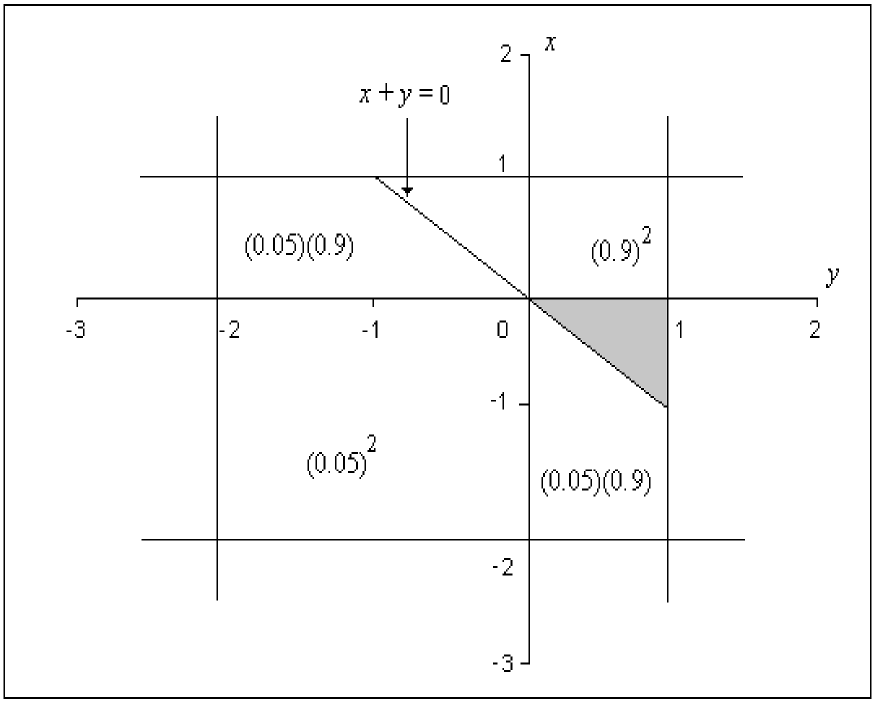
Por otro lado, observe que

$$\mathbb{P}\{X + Y \geq 0\} = \iint\limits_{X+Y \geq 0} f_{XY}(x,y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Para calcular esta integral observe primero que debido a la independencia estocástica de X y Y, se sigue que la función de densidad conjunta está dada por el producto de las densidades marginales, así

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (0.05)^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \text{ y } -2 \leq y \leq 0, \\ (0.05)(0.9), & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \text{ y } 0 < y \leq 1, \\ (0.9)(0.05), & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ y } -2 \leq y \leq 0, \\ (0.9)^2, & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ y } 0 < y \leq 1, \end{cases}$$

la cual se muestra en la Gráfica 4.1.



Gráfica 4.1 Función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y.

Se observa en la Gráfica 4.1 que la región $x + y \geq 0$ se encuentra a la derecha de la línea recta $x + y = 0$. Por lo tanto, con base en el área del triángulo sombreado, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X + Y \geq 0\} &= 2\int_{y=0}^{1}\int_{x=-1}^{0}(0.9)(0.05)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (0.9)^2\\ &= 2(0.9)(0.05)\left(\frac{1}{2}\right) + (0.9)^2\\ &= 0.855.\end{aligned}$$

Es decir que existe un .855 de probabilidad de que $\mathrm{VeR}^{X+Y} \geq (\mathrm{VeR}^X + \mathrm{VeR}^Y)$ y por tanto que viole el supuesto de subaditividad. En consecuencia,

$$\mathbb{P}\{X + Y \leq 0\} = 0.145$$

De aquí, se tiene que

$$-\mathrm{VeR}_{0.855}^{X+Y} = \inf\{(x + y) \in \mathbb{R} | \, F_{X+Y}(x + y) \geq 0.145\} = 0$$

por lo tanto

$$-\mathrm{VeR}_{0.9}^{X+Y} = \inf\{\,(x+y) \in \mathbb{R}|\, F_{X+Y}(x+y) \geq 0.1\} < 0$$

se sigue entonces que

$$\mathrm{VeR}_{0.9}^{X+Y} > 0 = \mathrm{VeR}_{0.9}^{X} + \mathrm{VeR}_{0.9}^{Y},$$

es decir, en este ejemplo, el valor en riesgo no cumple con la propiedad de subaditividad.

A continuación se presenta otro ejemplo que denota la carencia de subaditividad existente en el Valor en Riesgo. En el ejemplo mostrado en elapartado 2.2 se mostró que el $\mathrm{VeR}_{.95}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} = -.30$, cuando el portafolio contenía sólo dos acciones AMXL y WALMEXV. Por su parte en el apartado 3.1 se mostro que $\mathrm{VeR}_{.95}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t} = -.38$, cuando el portafolio contiene tres activos AMXL, WALMEXV y CEMEXCPO. Si se calcula el $\mathrm{VeR}_{.95}^{X}$, de la acción CEMEXCPO este debería ser menor o igual que -0.8 para cumplir con la subaditividad. De esta forma se podría afirmar que si se fusionan dos portafolios, el primero formado con AMXL y WALMEXV y el segundo formado solamente con CEMEXCPO, existiría menor riesgo que si se invierte en los portafolios por separado.

A continuación se calcula el $\mathrm{VeR}_{.95}^{X}$, con $\mathrm{d}t = 1$ para la acción CEMEXCPO. De acuerdo con la ecuación (2.1) el Valor en Riesgo de una variable aleatoria se encuentra determinado por

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = z_q\sigma\sqrt{\mathrm{d}t} - \mu(\mathrm{d}t).$$

Los estadísticos se muestran a continuación

TABLA 4.1

Datos Anuales	
	CEMEXCPO
μ	0.51
σ	0.285
σ^2	0.08

De esta manera se tiene que

$$\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} = -0.04.$$

Con base en el resultado anterior es posible afirmar que existe una probabilidad del 5% de que el portafolio fusionado disminuya 0.38%, mientras que en el caso de los portafolios divididos es 0.34%. Es decir que existe mayor riesgo en el portafolio diversificado.

4.4 La esperanza condicional de la cola del VeR es una medida coherente de riesgo

La metodología de valor en riesgo no proporciona información alguna cuando el tamaño esperado del cambio de valor en el portafolio excede el umbral $-\mathrm{VeR}^X_{1-q}$. Por esta razón es conveniente introducir la siguiente medida de riesgo:

$$\mathcal{E}^X_{1-q} = -\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X \middle| X < -\mathrm{VeR}^X_{1-q} \right].$$

Esta cantidad recibe también el nombre de esperanza condicional de la cola del VeR. Considere la siguiente forma alternativa de escribir $\mathcal{E}^X_{1-q}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^X_{1-q} &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X \middle| X < -\mathrm{VeR}^X_{1-q} \right] \\
&= \mathrm{E}\left[-X - \mathrm{VeR}^X_{1-q} + \mathrm{VeR}^X_{1-q} \middle| X < -\mathrm{VeR}^X_{1-q} \right] \\
&= \mathrm{VeR}^X_{1-q} + \mathrm{E}\left[-X - \mathrm{VeR}^X_{1-q} \middle| - \mathrm{VeR}^X_{1-q} - X > 0 \right] \\
&= \mathrm{VeR}^X_{1-q} - \mathrm{E}\left[X + \mathrm{VeR}^X_{1-q} \middle| \mathrm{VeR}^X_{1-q} + X < 0 \right].
\end{aligned}$$

Observe que si se denota $\mathrm{VeR}^X_{1-q} = -u$, y se define

$$e(u) = \mathrm{E}\left[X - u \middle| X < u \right],$$

entonces

$$\mathcal{E}^X_{1-q} = -u - e(u).$$

Observe ahora que por definición

$$\begin{aligned}
e(u) &= \frac{\int_{-\infty}^{u} (x-u)\mathrm{d}F_X(x)}{F_X(u)} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{u} x\mathrm{d}F_X(x) - uF_X(u)}{F_X(u)} \\
&= \frac{1}{F_X(u)} \int_{-\infty}^{u} x\mathrm{d}F_X(x) - u \\
&= \frac{1}{F_X(u)} \left(uF_X(u) - \int_{-\infty}^{u} F_X(x)\mathrm{d}x \right) - u \\
&= -\frac{1}{F_X(u)} \int_{-\infty}^{u} F_X(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

4.4.1 Un ejemplo ilustrativo sobre la esperanza condicional de la cola de VeR

En esta sección se desarrolla un ejemplo ilustrativo sobre la esperanza condicional de la cola de VeR. En particular, si

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_0^u F_X(x)\mathrm{d}x =& \int_0^u \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\mathrm{d}x \\ =& u - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda u}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e(u) = \frac{1}{\lambda} - \frac{u}{1 - e^{-\lambda u}}. \tag{4.3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathrm{VeR}^X_{1-q} &= -\inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\right\} \\ &= -\inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - e^{-\lambda x} \geq q\right\} \\ &= -\inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid \lambda x \geq -\ln(1-q)\right\} \\ &= -\inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{\ln(1-q)}{\lambda}\right\} \\ &= \frac{\ln(1-q)}{\lambda}\end{aligned} \tag{4.4}$$

y tomando en cuenta que $-u = \mathrm{VeR}^X_{1-q}$, se tiene que

$$\begin{aligned}e(-\mathrm{VeR}^X_{1-q}) =& \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1-q)}{\lambda}\left(\frac{1}{1 - \exp\left\{\ln(1-q)\right\}}\right) \\ =& \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1-q)}{q\lambda}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^X_{1-q} =& \mathrm{VeR}^X_{1-q} - e(-\mathrm{VeR}^X_{1-q}) \\ =& \frac{\ln(1-q)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(1-q)}{q\lambda} \\ =& -\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1-q}{q}\right)\ln(1-q) + 1\right]\end{aligned} \tag{4.5}$$

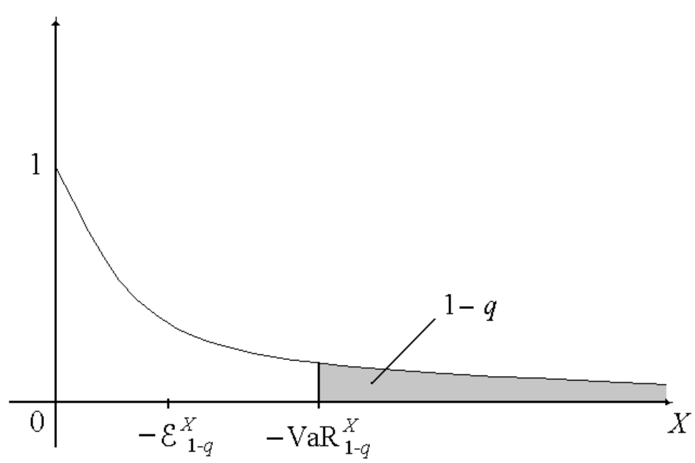
Si, por ejemplo, $\lambda = 1$ y $q = 0.05$, entonces $\mathrm{VeR}^X_{0.95} = -0.05$, y de acuerdo con (4.3) y $-u = \mathrm{VeR}^X_{0.95}$, se tiene que

$$\begin{aligned} e(-\mathrm{VeR}^X_{0.95}) =& 1 + \frac{\mathrm{VeR}^X_{0.95}}{1 - \exp\left\{\mathrm{VeR}^X_{0.95}\right\}} \\ =& 1 - \frac{0.05}{1 - \exp\{-0.05\}} \\ =& 1 - 1.02 = -0.02 \end{aligned}$$

En este caso,

$$\mathcal{E}^X_{1-q} = \mathrm{VeR}^X_{1-q} - e(-\mathrm{VeR}^X_{1-q}) = -0.05 + 0.02 = -0.03$$

Por último observe que si $q = 0$, se tiene que $\mathcal{E}^X_{1-q} = 0 = \mathrm{VeR}^X_{1-q}$. En la Gráfica 4.2 se ilustran los resultados cuando X tiene una distribución exponencial.



Gráfica 4.2 VeR y esperanza condicional de la cola VeR
de una distribución exponencial.

4.4.2 La esperanza condicional de la cola de VeR es homogénea positiva

A continuación se demuestra que la esperanza condicional de la cola de VeR satisface la propiedad de homogeneidad positiva. En efecto, sean $\alpha > 0$ y $X \in \mathcal{A}$, se define $Y = \alpha X$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{1-q}^{Y} =& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-Y|\, Y < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{Y}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-\alpha X|\, \alpha X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{\alpha X}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-\alpha X|\, \alpha X < -\alpha \mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-\alpha X|\, X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right] \\
=& \alpha \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X|\, X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right] \\
=& \alpha \mathcal{E}_{1-q}^{X}.
\end{aligned}$$

Es decir, $\rho^{(3)}(\alpha X) = \alpha \rho^{(3)}(X)$.

4.4.3 La esperanza condicional de la cola de VeR es invariante bajo traslaciones

Ahora se demuestra que la esperanza condicional de la cola de VeR es invariante bajo traslaciones. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathcal{A}$, se define $Y = X + \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{1-q}^{Y} =& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-Y|\, Y < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{Y}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X - \alpha|\, X + \alpha < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+\alpha}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X - \alpha|\, X + \alpha < -\left(\mathrm{VeR}_{1-q}^{X} - \alpha\right)\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X - \alpha|\, X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X|\, X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right] - \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-\alpha|X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[-X|\, X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right] - \alpha \\
=& \mathcal{E}_{1-q}^{X} - \alpha.
\end{aligned}$$

En otras palabras, $\rho^{(3)}(X + \alpha) = \rho^{(3)}(X) - \alpha$.

4.4.4 La esperanza condicional de la cola de VeR satisface la propiedad de monotonía no creciente

En esta sección se muestra que la esperanza condicional de la cola de VeR satisface la propiedad de monotonía no creciente. Con este propósito, suponga que $X \geq Y$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[Y|Y < -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right] \\
=& -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q} + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}|Y < -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right] \\
=& -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q} + \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right) 1_{\left\{Y < -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{Y < -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right\}} \\
=& -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q} + \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right) 1_{\left\{Y < -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right\}} 1_{\left\{X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right\}}\right]}{q} \\
&+ \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right) 1_{\left\{Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q} < 0\right\}} 1_{\left\{X \geq -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right\}}\right]}{q} \\
\leq& -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q} + \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right) 1_{\left\{Y < -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right\}} 1_{\left\{X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right\}}\right]}{q} \\
\leq& -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q} + \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right) 1_{\left\{X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right\}} \\
=& -\mathrm{VeR}^{Y}_{1-q} + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[Y + \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}|X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right] \\
=& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[Y|X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right] \leq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X|X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right].
\end{aligned}
$$

La primera desigualdad se debe al hecho de que la segunda esperanza de la tercera igualdad es negativa. La segunda desigualdad se sigue de que la intersección de dos eventos está contenida en cada uno de los eventos. Por lo tanto,

$$
-\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X|X < -\mathrm{VeR}^{X}_{1-q}\right] \leq -\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[Y|-Y > \mathrm{VeR}^{Y}_{1-q}\right].
$$

Equivalentemente, $\mathcal{E}^{X}_{1-q} \leq \mathcal{E}^{Y}_{1-q}$ ó $\rho^{(3)}(X) \leq \rho^{(3)}(Y)$.

4.4.5 La esperanza condicional de la cola de VeR es subaditiva

En esta sección se verifica que la esperanza condicional de la cola de VeR es subaditiva. Observe primero que si $X, Y \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X|X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right]\\
=&-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}+\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}|X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right]\\
=&-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}+\frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right)1_{\left\{X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right\}}\\
=&-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}+\frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right)1_{\left\{X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right\}}1_{\left\{X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right\}}\\
&+\frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right)1_{\left\{X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}<0\right\}}1_{\left\{X+Y\geq-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right\}}\\
\leq&-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}+\frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right)1_{\left\{X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right\}}1_{\left\{X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right\}}\right]}{q}\\
\leq&-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}+\frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left[X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right)1_{\left\{X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right\}}\\
=&-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}+\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X+\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}|X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right]\\
=&\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X|X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right].
\end{aligned}$$

Por simetría en los cálculos, también se tiene que

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[Y|Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{Y}\right]\leq\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[Y|X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right].$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{1-q}^{X+Y}&=-\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(X+Y|X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right)\\
&=-\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(X|X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right)-\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(Y|X+Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X+Y}\right)\\
&\leq-\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(Y|Y<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{Y}\right)-\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(X|X<-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right)\\
&=\mathcal{E}_{1-q}^{X}+\mathcal{E}_{1-q}^{Y}.
\end{aligned}$$

Así, $\rho^{(3)}(X+Y)\leq\rho^{(3)}(X)+\rho^{(3)}(Y)$.

4.5 Teorema de representación de medidas coherentes de riesgo

Considere un variable aleatoria X definida sobre dos espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$. Es decir, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene asociadas dos distribuciones. Se define

$$\rho_m(X) := -\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[X]\right),$$

entonces $\rho_m(X)$ es una medida coherente de riesgo. Observe que esta medida de riesgo se define en términos de dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$. Si $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}\rho_m(\alpha X) &= -\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[\alpha X], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[\alpha X]\right)\\ &= \alpha\left(-\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[X]\right)\right)\\ &= \alpha\rho_m(X).\end{aligned}$$

Asimismo, si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_m(X+\alpha) &= -\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X+\alpha], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[X+\alpha]\right)\\ &= \left(-\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[X]\right)\right) - \alpha\\ &= \rho_m(X) - \alpha.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\rho_m(X+Y) &= -\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X+Y], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[X+Y]\right)\\ &\leq \left(-\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X] + \mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[Y], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[Y] + \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[Y]\right)\right)\\ &= -\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[X]\right) - \max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[Y], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[Y]\right)\\ &= \rho_m(X) + \rho_m(Y).\end{aligned}$$

Por último, Si $X \leq Y$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_m(Y) &= -\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[Y], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[Y]\right)\\ &\leq \left(-\max\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}_1}[X], \mathrm{E}^{\mathbb{P}_2}[X]\right)\right)\\ &= \rho_m(X).\end{aligned}$$

A continuación se discute sobre el teorema de representación de una medida coherente de riesgo, el cual se puede enunciar como sigue: Una medida de riesgo, ρ, es coherente si y sólo si existe una familia, $\mathcal{P}$, de probabilidades definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que:

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[-X].$$

Esta definición se puede motivar de la siguiente manera. Sea Ω un espacio muestral con n posibles resultados igualmente probables. Considere una familia $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i=1}^m$ de subconjuntos de Ω, con la propiedad de que cada A_i tiene ν elementos y

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega.$$

Se define la medida de probabilidad $\mathbb{P}_i$ como la probabilidad condicional de que $\omega \in A_i$, y 0 de otra manera. Esto es,

$$\mathbb{P}_i(\{\omega\}) := \mathbb{P}_i(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu} & \text{si } \omega \in \ A_i, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Sea X una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F})$. Denote los posibles valores que X puede tomar, en orden creciente, como $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$. Sea k un número entero, $0 \le k < n$, y $\alpha \in [k/n, (k+1)/n)$. Dado que

$$\mathbb{P}\{X \le x_{k+1}\} = \frac{k+1}{n} > \alpha$$

y

$$\mathbb{P}\{X \le x_{k+1}\} \le \frac{k}{n} \le \alpha,$$

se tiene que $-\text{VeR}_{1-\alpha}^X = x_{k+1}$. Suponga ahora que cada A_i tiene exactamente $\nu = n-k$ elementos. En este caso, $\mathbb{P}_i\{\omega\} = 1/(n-k)$. Defina la familia de medidas $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_i\}_{1\le i\le m}$. Sea A_ℓ el miembro de $\mathcal{C}$ con elementos más pequeños, es decir, $\{x_1, x_2, ..., x_{n-k}\}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1-q}^X &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}_\ell}[-X | X \le -\text{VeR}_{1-\alpha}^X] \\ &= -\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-k}}{n-k} \quad , \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}_\ell}[-X] \end{aligned}$$

donde $\mathbb{P}_\ell$ es la medidad de probabilidad asociada a A_ℓ. Para cualquier otra $\mathbb{P}_i \in \mathcal{P}$, se tiene que

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}_i}[-X] \le \mathrm{E}^{\mathbb{P}_\ell}[-X].$$

En consecuencia,

$$\mathcal{E}_{1-q}^X = \sup_{\mathbb{P}_i \in \mathcal{P}} \mathrm{E}^{\mathbb{P}_i}[-X].$$

4.6 Construcción de medidas coherentes de riesgo

Es de inters saber que se pueden construir medidas coherentes de riesgo a partir de otras medidas coherentes de riesgo. Se puede demostrar que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ..., \rho_n$ son medidas coherentes de riesgo, entonces cualquier combinación lineal convexa $\rho := \sum_{i=1}^{n} \beta_i \rho_i$, con $\beta_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, es una medida coherente de riesgo. Similarmente, si ρ_δ, $\delta \in [a, b]$ es una familia paramétrica de medidas coherentes de riesgo, entonces para cualquier medida $\mathrm{d}\mu(\delta)$ en $[a, b]$ con $\int_a^b \mathrm{d}\mu(\delta) = 1$, se tiene que $\rho := \int_a^b \rho_\delta \mathrm{d}\mu(\delta)$ es una medida coherente de riesgo.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

La evolucion dentro de la teoria y practica financiera se ha carcaterizado por tres periodos importantes 1). Media-varianza, Markowitz (1952-1956). Modelos en tiempo continuo, Merton, Black (1969-1973) y Scholes. 3). Medidas coherentes de riesgo, Artzner. Tales avances surgieron como respuesta a la complejidad en la que esta inmersa el mercado. Así mismo y tambien como respuesta a dicha complejidad, emergieron esfuerzos por regular el mercado con la finalidad de evitar desastres financieros. El organimso encargado de tal regulacion es conocido como el comite de basilea. El comite de basilea sugiere a todos las instituciones finacnieras ciertas medidas en materia de riesgo de credito, de mercado y operativo. En particular para el riesgo de Mercado sugiere el cálculo del Valor en Riesgo

El Valor en Riesgo,VeR, tal como se ha expuesto es una herramienta muy útil dentro de la administración de riesgos, en gran medida gracias a los supuestos y a sus múltiples generalidades, tales características permiten un fácil cálculo e interpretación. Sin embargo, el Valor en Riesgo es generado a partir de un método estadístico y no debe ocultar que se trata sólo de una estimación y por lo tanto se deben tener presentes las limitaciones de su uso como medida de riesgo. Se define VeR como el q-ésimo cuantil, es decir como la funcion inversa de la funcion de distribucion. Además se supone que los rendimientos de un activo se distribuyen de una manera normal, lo cual implica que el cálculo del VeR sea una ecuacion sencilla y fácil de recordar su desventaja es que, al asumir la normalidad, se subestima la cola de la distribución de las pérdidas. por otro lado una de sus ventajas es que permite obtener la solución analítica sin necesidad de hacer simulaciones.

Como se mostró en el primer capítulo, si se decide utilizar el método histórico de simulación para el cálculo del Valor en Riesgo, la distribución de las pérdidas se estima a partir de la distribución empírica que se construye con la información de los datos históricos. Lo que resulta en un método fácil de implementar, no requiere estimar la distribución de las pérdidas, pero requiere de una base completa de datos para todos los factores de riesgo y en ocasiones no se tienen datos que permitan estimar situaciones extremas. Así mismo para el método de Monte Carlo, que a partir de los datos históricos construye un modelo factorial dando paso a la inferencia de la distribución de las pérdidas y a la estimación del VeR, es importante recordar que cuando se desea realizar una simulacion del cambio de valor de un portafolio bajo un horizonte de tiempo determinado, es necesario que en el proceso de dicha simulación se consideren las correlaciones existentes entre los rendimientos de los activos. Tal como se mostró en el capítulo 2 la descomposicion de Cholesky es la herramienta que permite que eso suceda. Por otro lado y en el mismo capítulo se expusó que el método de componentes principales sirve para identificar a los activos que afectan con mayor fuerza a la volatilidad del portafolio, de esta manera es posible eliminar a los que casi no la afectan y el problema se reduce de n a $n-k$ activos en el portafolio. Ambas técnicas son de suma utilidad dentro del cálculo de VeR.

En el capítulo 3 se expusó que el ver incremental indica que tanto aumenta el valor en riesgo al invertir un punto porcentual adicional en uno de los activos, es decir, se busca un parametro de sensibilidad que muestre la variacion del VeRante movimientos en los porcentajes de inversión α_i. para calcularlo es necesario derivar parcialmente el VeR con respecto a los porcentajes de inversion α de cada activo. se mostró que los coeficientes β de los activos pueden ser interpretados como dicho parámetro de sensibilidad. Asi mismo se mostro que el VeRes una funcion homogenea de grado cero en α_i y se expuso un ejemplo numérico para 3 activos. Por su lado el Índice de Herfindahl-Hirschman proporciona una medida de concentración del valor en riesgo de los activos del portafolio. Lo anterior es posible gracias a que el $\mathrm{VeR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi_t/\Pi_t}$ es una función homogenea de primer grado en (α_1, α_2). Así mimso se mostró que la metodología de valor en riesgo no proporciona información alguna cuando el tamaño esperado del cambio de valor en el portafolio excede el umbral $-\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}$. Por esta razón se definio la esperanza condicional de la cola del VeR como

$$\mathcal{E}_{1-q}^{X} = -\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X \middle| X < -\mathrm{VeR}_{1-q}^{X}\right],$$

. Y como se mostró, el cálculo de la esperanza condicional da el mismo resultado que el VeR promedio. Paralelamente se mostró que existe una relacion estrecha entre el VeR y el modelo CAPM de la cual se concluye que es posible calcular el valor en riesgo del rendimiento de un portafolio mediante las betas de los activos y la volatilidad del mercado. Finalmente y dada la popularidad de los instrumentos derivados se calculó el valor en riesgo de un portafolio para dichos productos, en concreto se consideró el caso de un portafolio con un activo y una opción europea de compra sobre dicho activo.

En el capítulo 4 se habló acerca del trabajo de Artzner *et all* (1999), sobre medidas coherentes de riesgo, el cual ha conducido a cambios y transformaciones profundas en la forma de cuantificar los riesgos. En este trabajo las propiedades básicas y/o deseables de una medida coherente de riesgo se expresan a través de un conjunto de axiomas;

(i) Monótona no creciente: $Y \geq X \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$,

(ii) Subaditividad: $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,

(iii) Homogeneidad positiva:$\rho(\alpha X) = \alpha\rho(X), \quad \alpha \geq 0$,

(iv) Invarianza bajo traslaciones: $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Infortunadamente el Valor en Riesgo no cumple con la subaditividad tal como se mostró en dicho capítulo. Sin embargo, la Esperanza condicional de la cola del Valor en Riesgo es coherente en el sentido de Artzner. De esta manera el utilizar dicha herramienta como medida de riesgo podrá brindar mejores elementos para la toma de desiciones respecto al riesgo de mercado. Y por último, si se costruye una combinación convexa de la esperanza condicional de la cola del Valor en Reisgo resultará otra medida también coherente.

ANEXO 1

Portafolio de mínima varianza global

El problema de optimización de portafolio se obtiene al resolver elsiguiente problema de programación no lineal:

$$\min \ \frac{1}{2}\alpha^T \Sigma \alpha$$

s.a.

$$\alpha^T \mathbb{1} = 1$$

$$\alpha \mu = \mu_0.$$

A continuación se presenta el lagragiano asociado al problema

$$L : \frac{1}{2}\alpha^T \Sigma \alpha + \lambda_1(\mathbb{1} - \alpha^T) + \lambda_2(\mu_0 - \alpha^T \mu).$$

Con las siguientes condicones necesarias:

$$\Sigma\alpha - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbb{1} = 0. \tag{a.1}$$

$$\mu_0 - \mu^T \alpha = 0. \tag{a.2}$$

$$1 - \mathbb{1}^T \alpha = 0. \tag{a.3}$$

Si se considera que se puede despejar α de (a.1), es decir

$$\alpha = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} \mathbb{1}, \tag{a.4}$$

y que se tienen las restricciones:

$$\mu_0 = \mu^T \alpha. \tag{a.5}$$

$$1 = \mathbb{1}^T \alpha. \tag{a.6}$$

Es posible formular un sistema de dos ecuaciones facil de resolver, basta con sustituir α de (a.4) en (a.5) y (a.6). Esto es

$$\begin{aligned} \mu_0 =& \mu^T \alpha \\ =& \lambda_1 \mu^T \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{a.7}$$

$$\begin{aligned} 1 =& \mathbb{1}^T\alpha \\ =& \lambda_1 \mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mu + \lambda_2 \mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}. \end{aligned} \tag{a.8}$$

Si se define

$$\begin{aligned} A =& \mu^T\Sigma^{-1}\mu. \\ B =& \mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}. \\ C =& \mu^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Es posible formular el sistema antes mencionado:

$$\begin{aligned} \lambda_1 A + \lambda_2 C =& \mu_0 \\ \lambda_1 C + \lambda_2 B =& 1. \end{aligned}$$

Con solución

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =& \frac{1}{AB - C^2} \begin{pmatrix} B & -C \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =& \frac{1}{AB - C^2} \begin{pmatrix} B\mu_0 - C \\ -\mu_0 C + A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} \frac{B\mu_0 - C}{AB - C^2} \\ \frac{-\mu_0 C + A}{AB - C^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La cual se sustituye en (a.4)

$$\alpha^* = \frac{B\mu_0 - C}{AB - C^2}\Sigma^{-1}\mu + \frac{-\mu_0 C + A}{AB - C^2}\Sigma^{-1}\mathbb{1}.$$

Es importante que tenga en cuenta que la matriz hessiana de la función objetivo siempre será definida positiva. Por lo tanto la función objetivo es convexa y cuanquier mínimo local es global. A continuación se muestra el gradiente y hessiano de la F.O.

$$\bigtriangledown f = \Sigma\alpha$$

$$\bigtriangledown^2 f = \Sigma.$$

Adicionalmente los valores óptimos α^* valuados en el gradiante y matriz hessiana siempre cumplen:

$$\bigtriangledown f(\alpha^*)d \geq 0$$

$$d^T \bigtriangledown f(\alpha^*)d \geq 0.$$

Donde d es un vector de orden nx1 cuyos elementos son trayectorias factibles. Por lo tanto las condiciones necesarias de optimización son suficientes.

Bibliografía

Artzner, Philippe, Fredy Delbaen, Jean-Marc Eber and David Heath (1997). “”Thinking Coherently”. *Risk*, 10, pp. 33-49.

Artzner, Philippe, Fredy Delbaen, Jean-Marc Eber and David Heath(1999). “”Coherent Measures of Risk”. *Mathematical Finance*, 9, pp. 203-228.

De Lara Haro A.(2005). Medición y control de riesgos financeros. Limusa, México D.F.

Jorion, P. (2007). Valor en Riesgo: El nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados. Limusa.

Macaulay, F. R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yield, and Stock Prices in the United States since 1856. Columbia University Press. New York.

Severini A. Thomas (2005). Elements of Distribution Theory. Cambridge University Press. U.S.A..

Tucker Alan (1988). A unified introduction to linear algebra: Models, methods, and theory . Macmillan . New York.

Venegas Martínez Francisco (2006). Riesgos Financieros y Económicos Productos Derivados y Decisiones Económicas bajo incertidumbre. Thompson, México D.F.