OPTIMIZACION Y CONT. _ DE INVENTARIOS

PROGRAMA DEL CURSO

FECHA	TEMA	EXPOSITOR
MARTES 6	INTRODUCCION. SISTEMAS. COSTOS. TIPOLOGIA POLITICAS COMPONENTES.	ARIEL KLEIMAN
JUEVES 8	MODELOS DETERMINISTICOS. PUNTO DE REORDEN. LOTE OPTIMO. GENERALIZACIONES.	ENRIQUE NOVELO
MARTES 13	POLITICAS DE CONTROL. REVISION DE DEFINICIONES DE TEORIA DE LA PROBABILIDAD. MODELOS PROBABILISTICOS.	ENRIQUE NOVELO
JUEVES 15	MODELO PROBABILISTICO DE LOTE OPTIMO EN EL CASO DE PERIODO UNICO, CON Y SIN COSTOS DE ABASTECIMIENTO.	ENRIQUE NOVELO CLARA ZOMMER
MARTES 20	MODELO PROBABILISTICO DE LOTE OPTIMO EN EL CASO DE DOS PERIODOS, CON Y SIN ACTUALIZACION DE COSTOS.	ENRIQUE NOVELO CLARA ZOMMER
JUEVES 22	MODELO PROBABILISTICO DE LOTE OPTIMO EN EL CASO DE MULTIPLES PERIODOS	ENRIQUE NOVELO
MARTES 27	ENTREGA NO INSTANTANEA DE PRODUCTOS (PERIODO DE ABASTECIMIENTO NO NULO)	ENRIQUE NOVELO
JUEVES 1	APLICACION DE LAS CADENAS DE MARKOV.	CLARA ZOMMER
MARTES 6	BANCO DE DATOS PARA SISTEMAS DE INVENTARIOS	CLARA ZOMMER
JUEVES 8	SIMULACION DE SISTEMAS DE INVENTARIOS	JOAQUIN GONZALEZ MARIN
MARTES 13	METODOS DE PREDICCION DE LA DEMANDA	ARIEL KLEIMAN
JUEVES 15	METODOS DE CALCULO DE INVENTARIOS DE SEGURIDAD	ARIEL KLEIMAN
MARTES 20	SEMINARIOS	SALOMON CAMHAJI ANTONIO FERNANDEZ ESPARZA
JUEVES 22	SEMINARIOS	
MARTES 27	SEMINARIOS, (CONCLUSION)	

GLOSARIO DE TERMINOS

ABASTECIMIENTO INSTANTANEO — Cuando el período de rezago es nulo.

ABASTECIMIENTO UNIFORME — Cuando la tasa de abastecimiento es constante.

ANALISIS DEL SISTEMA DE INVENTARIOS — Consiste en:

a) Determinar las propiedades del sistema
b) Formular el problema de inventarios
c) Formular el modelo de inventarios
d) Derivar la solución del modelo

CANTIDAD DEMANDADA — La cantidad requerida para satisfacer la demanda del producto.

COSTO TOTAL — El costo de un sistema de inventario durante un período de tiempo.

DEMANDA INSTANTANEA — La demanda, cuando la tasa de demanda es infinita.

DEMANDA UNIFORME — La demanda, cuando la tasa de demanda es constante.

FACTOR DE SEGURIDAD — Factor que indica la relación del inventario de seguridad entre la desviación estandar.

FILTRADO EXPONENCIAL — Método de revisión del Modelo de Pronóstico para incorporar la última información disponible.

INVENTARIO DE SEGURIDAD — Inventario requerido para afrontar niveles de demanda superiores al nivel promedio.

INVENTARIO DE TRABAJO — El valor medio del inventario requerido para la operación normal del sistema no incluye el Inventario de Seguridad.

LOTE DE ABASTECIMIENTO — Cantidad programada para abastecimiento

LOTE ECONOMICO — El Lote de Abastecimiento que minimiza el costo total.

NIVEL DE REORDEN — Cantidad específica a la que debe elevarse el inventario al programar un abastecimiento.

NIVEL DE SERVICIO — Probabilidad de satisfacer la demanda esperada.

PERIODO DE REZAGO — El tiempo que demora llegar al Lote de Abastecimiento al Inventario.

PERIODO DE PROGRAMACION — El tiempo que transucrre entre dos decisiones consecutivas con respecto al abastecimiento.

PERIODO DE REVISION — El tiempo entre revisión del nivel del inventario para determinar si se ha llegado al punto de reorden.

PUNTO DE REORDEN — Cantidad específica que genera la programación de un abastecimiento cuando el nivel de inventario es igual o menor.

PROBLEMA DE INVENTARIO — Consiste en encontrar la decisión óptima, la que minimiza el costo total del sistema.

REGLAS DE DECISION — Solución del problema de inventarios. Se emplea cuando no se pueden obtener valores específicos de las variables controlables.

SISTEMA DETERMINISTICO — Sistema de Inventarios con demanda conocida.

SISTEMA DE INVENTARIOS — Sistema en el cual son significativos tres costos:

Costo de mantener inventarios
Costo de escasez
Costo de abastecimiento (procuración)

y dos más de ellos están sujetos a control.

SISTEMA PROBABILISTICO — Un sistema de inventarios con distribución de demanda conocida.

SOLUCION DEL PROBLEMA DE INVENTARIOS — Un conjunto de valores específicos de las variables controlables que minimizan el costo total.

TASA DE ABASTECIMIENTO — El abastecimiento por unidad de tiempo.

TASA DE DEMANDA — La cantidad demandada por unidad de tiempo

TIEMPO DE ENTREGA — El tiempo entre la decisión de abastecimiento y su adición real al inventario.

TOMADOR DE DECISIONES — La persona responsable por el problema de inventario y que debe tomar las decisiones

VALOR DE LA DEMANDA — El valor monetario de la demanda

VARIABLE CONTROLABLE — Elemento del sistema de inventarios que está sujeto a control por parte del tomador de decisiones.

ANTECEDENTES HISTORICOS

Si bien los problemas de inventarios son muy actiguos, sólo hasta el fin del siglo pasado se iniciaron los primeros intentos de utilizar técnicas analíticas para su estudio, optimización y control. Los esfuerzos iniciales surgieron en diversas ramas de la ingeniería en especial en la Ingeniería Industrial. La necesidad de efectuar estos análisis se centró fundamentalmente en las industrias en que se presentaban problemas de secuenciación de la producción y de manejo de inventarios, con altos costos para iniciar la producción de un producto específico.

La primera fórmula matemática, llamada en la actualidad "fórmula simple para el tamaño de lote" fue elaborada por Harris para la Westinghouse Corporation en 1915. La misma fórmula se obtuvo, al parecer sin ninguna relación con la anterior, por diversos métodos y en relación a diversos problemas. Tambien se la conoce como la "fórmula de Wilson" ya que el ingeniero R. H. Wilson la incluyó como parte de un método general de control que ofreció a numerosas empresas industriales en calidad de consultor.

El primer libro que trata con amplitud los problemas de inventarios, fue escrito en 1931 por F. E. Raymond profesor del M.I.T. No trata de la teoría matemática de los inventarios sino que explica varias generalizaciones de la fórmula de Wilson y muestra como puede utilizarse en la práctica.

Con la segunda guerra mundial y con el desarrollo de la investigación de Operaciones y las Ciencias de la Administración es cuando se comenzó a analizar con todo detenimiento la naturaleza de los problemas de inventarios y sus características estocásticas. Antes, todos los problemas se manejaban como si fueran totalmente determinísticos, salvo en el caso de Wilson quien incluyó algunas consideraciones probabilísticas.

El primer libro que publicó una versión estocástica de la fórmula del lote económico se publicó en 1953 por el profesor T. M. Whitin de la Universidad de Princeton. Debe notarse que el interés original por la utilización de técnicas analíticas surge en la industria, es decir en la aplicación de teorías a la solución de problemas prácticos, y que fueron los ingenieros los que tuvieron el liderazgo en este campo. Los economistas y los administradores de empresas no tuvieron participación activa, debido a que su atención se concentraba en la solución de modelos de equilibrio estático, algo alejados de las aplicaciones prácticas.

En los últimos años ha habido un notable interés en los modelos de inventarios por parte de economistas y matemáticos. Tampoco

##

C-12

se han centrado en las aplicaciones prácticas, ya que su interés en estos modelos reside mas bien en las formulaciones matemáticas y sus propiedades económicas. Por ejemplo el primer artículo matemáticamente riguroso sobre modelos de inventarios se publico en 1951 por los autores Arrow, Harris y Marschak. En 1952 y 1953 los autores Dvoretzky. Kiefer y Wolforwitz publicaron otros artículos de carácter abstracto Actualmente se llevan adelante muchas investigaciones sobre problemas de control y optimización de inventarios a distintos niveles de profundidad. Por una parte tenemos los trabajos que son eminentemente prácticos, y por otra parte los que se preocupan por las propiedades matemáticas abstractas sin interés en las aplicaciones prácticas. Es así como ya se cuenta con varios miles de artículos y unas decenas de libros sobre estos temas, casi todos en inglés. La bibliografía en idioma castellano es sumamente escasa.

PROF ARIEL KLEIMAN

Importancia de los inventarios

En los últimos años ha crecido notablemente el interés por el análisis, optimización y control de inventarios. Los responsables por la dirección de empresas han advertido que el capital que inmovilizan en inventarios debe ser restringido a un mínimo, porque impide que la empresa pueda invertir esos recursos financieros en otros proyectos de mayor rentabilidad. Este no sería el caso si la disponibilidad de capital fuera ilimitada, pero generalmente todas las empresas, por amplios que sean sus recursos, tienen limitaciones en la obtención de capital. En consecuencia debe buscarse que el capital de trabajo sea utilizado en los proyectos que puedan resultar en mayores beneficios.

Con el desarrollo de la Investigación de Operaciones en las últimas décadas, se han diseñado técnicas que permiten optimizar los recursos disponibles, y uno de los esfuerzos mas importantes ha tenido como objetivo la optimización y el control de inventarios, tanto en la industria como en el sector público.

Generalmente se piensa que un sistema de inventarios tiene como misión primordial el abastecer la demanda, esto es el mercado, los consumidores. Sin embargo esta no es mas que una de sus funciones, ya que es posible satisfacer la demanda de los consumidores de muy diversas maneras, y carece de racionalidad lograrlo en base a un enorme inventario de productos terminados.

Por lo tanto el sistema debe analizarse desde dos ángulos distintos Desde el punto de vista industrial, se busca la satisfacción de la demanda, manteniendo el sistema de producción bien abastecido para evitar escasez que redunde en interrupciones indeseables.

Por otra parte, desde el punto de vista financiero, se busca una alta rotación de los inventarios, es decir, vender la mayor cantidad-de productos con la mínima inmovilización financiera en inventarios.

Entre estas dos orientaciones opuestas se llega generalmente a un punto de equilibrio, que determina el nivel máximo de inversión que no debe ser excedido durante cada período de operaciones. El punto óptimo que así se logra, es lo suficientemente bajo para satisfacer al director financiero, y lo suficientemente alto para tranquilizar al director industrial.

Tipología de costos

El sistema de inventarios se define como un sistema en el que son significativos y están sujetos a control por el responsable por la toma de decisiones, al menos dos de los siguientes tres costos:

- el costo de mantener inventarios,
- el costo de incurrir en escasez,
- el costo de abastecer inventarios.

El costo de mantener inventarios abarca el costo de almacenaje, el costo de manejo de material, el costo de obsolescencia, el costo del seguro, el costo de oportunidad de la inversión, y en general todos aquellos costos que intervienen en una forma u otra en la inversión y almacenamiento del inventario.

El costo de incurrir en escasez, abarca el valor de las ventas perdidas, el valor del "crédito mercantil", los pagos por tiempo extra, los esfuerzos administrativos especiales, y en general todos los costos en que incurre la empresa cuando no tiene suficientes materiales y no puede cumplir con sus compromisos.

El costo de abastecer el inventario, esto es el de producir o adquirir inventarios, abarca el costo de preparar pedidos, activar entregas, recibir el material, inspeccionar el material, y en general todos los costos en que se incurre al iniciar el abastecimiento de un pedido o de una orden de producción.

La suma de estos tres tipos de costos, se llama "costo total del sistema de inventarios". En este contexto, la palabra costo se utiliza en un sentido amplio y general, ya que abarca tanto conceptos efectivos como conceptos imputados. Hay que entender, por consiguiente, que el costo total del sistema de inventarios es la medida de efectividad que nos sirve para analizar, optimizar y controlar ese sistema. El supuesto básico es que el mantener inventarios, el incurrir en escasez y el abastecer inventarios, son actividades que se pueden reducir a un denominador común, mediante una unidad de medida común que permita establecer comparaciones significativas para la toma de decisiones. Es pues natural, recurir al costo como esa medida común.

Por otra parte es importante notar que los tres tipos de costos mencionados se encuentran íntimamante relacionados entre sí. Cualquier acción que haga decrecer uno de estos tres costos, generalmente produce un efecto opuesto en los otros dos. Esto es, cualquier decisión que afecta al costo total del sistema, disminuye ciertos costos a la vez que aumenta otros.

Tipología de Sistemas

Hemos mencionado que en un sistema de inventarios se controlan cuando menos dos de los tres costos significativos. Esto nos permite distinguir entre varios tipos de sistemas de inventarios:

Los sistemas de inventarios tipo (1,2), en los cuales se encuentran sujetos a control el costo de mantener inventario y el costo de escasez. En los sistemas de este tipo el costo de abastecer no está sujeto a control por parte del responsable por la toma de decisiones.

Los sistemas de inventarios tipo (1,3), en los cuales están sujetos a control el costo de mantener inventarios y el costo de abastecer (requerir o procurar). En estos tipos de sistemas el costo de escasez de inventarios no está sujeto a control por el responsable.

Los sistemas de inventarios tipo (1,2,3) son los mas completos, ya que los tres tipos de costos están sujetos a control por el responsable del sistema.

No es de importancia el tratamiento de los sistemas tipo (2,3), ya que en esos sistemas no está sujeto a control el costo de mantener inventarios. Los sistemas de este tipo son muy poco usuales en la práctica.

Los problemas de inventarios

Hemos mencionado que el costo total de un sistema de inventarios se utiliza como la medida de efectividad del comportamiento del sistema. El mejor sistema será aquel cuyo costo total sea mínimo. Por lo tanto el objetivo a lograr por el responsable del sistema, es la optimización (minimización) del costo total. Por lo tanto el problema de inventarios consiste en tomar decisiones que permitan obtener el costo total mínimo para el sistema; es decir tomar decisiones óptimas. Como al disminuir unos costos aumentan otros, el objetivo del responsable se logra cuando finalmente alcanza una condición tal para el sistema, en que la suma de todos los costos es un mínimo.

Esas decisiones se toman en términos de tiempo y cantidad, respondiendo a las dos preguntas siguientes:

- ¿cuando debe ser abastecido el inventario?¿ cuando ordenar una requisición?
- ¿cuanto ordenar en cada requisición?¿cuanto producir en cada corrida?
- ¿cuanto agregar al inventario?

Tiempo (cuando?) y cantidad (cuanto?) son las variables que están sujetas a control, y por lo tanto se llaman "variables controlables".

Solución de problemas de inventarios

El valor que se asigne a cada variable controlable afectará al costo de mantener inventarios, al costo de incurrir en escasez y al costo de abastecer el inventario, y por lo tanto al costo total del sistema. Por esto es que el problema de inventarios, como problemas de decisiones óptimas consiste en encontrar los valores específicos de esas variables que permitan optimizar el costo total. Desde este punto de vista, la solución de un problema de inventarios consiste en encontrar un conjuntode valores específicos de las variables controlables.

Sin embargo, hay casos en que no es posible obtener esos valores específicos, por la propia naturaleza del problema que se maneja. En tales casos, la solución no está dada por valores numéricos específicos-para las variables, sino por un conjunto de reglas de decisión. Esas - reglas son reglas óptimas de decisión; óptimas en el sentido de que la solución del problema de inventarios está ligada a un proceso de optimización, que se lleva a cabo mediante la aplicación de esas reglas de decisión.

Políticas de inventarios

Habiendo encontrado la solución de un problema de inventarios se -- tiene la respuesta para ambas preguntas fundamentales: ¿cuándo? y - - ¿cuanto? Ahora bien, cada una de esas preguntas puede ser respondida - en dos formas distintas:

. respuestas al ¿cuando?

i. procure mas unidades cuando la cantidad en inventario sea igual o menor que cierta cantidad s_o llamada "punto de reorden",

ii. procure mas unidades cada t_o unidades de tiempo, llamados "periodos de programación".

. respuestas al ¿cuanto?

i. la cantidad debe ser ordenada en un determinado "tamaño del lote"; procure q_o unidades en cada requisición;

ii. la cantidad que sea ordenada debe ser tal que eleve el inventario a un nivel determinado S_o, llamado "nivel de reorden"

Estos distintos tipos de respuestas, y sus combinaciones, dan lugar a varios tipos de políticas:

. (s,q): fijar el punto de reorden y el tamaño de lote

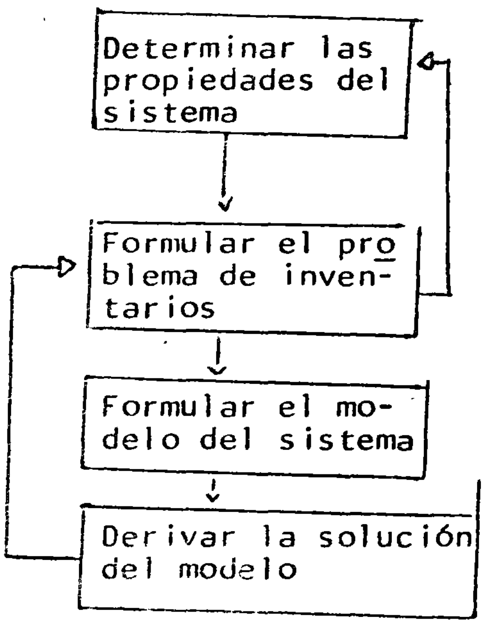
. (t,s); fijar el período de programación y el punto de reorden

. (s,S): fijar el punto de reorden y el nivel de reorden

. (t,q): fijar el período de programación y el tamaño del lote

Análisis de sistemas de inventarios

El ánalisis de un sistema de inventarios se puede esquematizar en el siguiente diagrama:



¿Cuál es el problema?
¿Cuáles son los datos disponibles?
¿Qué es lo que está ocurriendo?

¿Cuáles son las variables?
¿Cuáles son controlables?
¿Qué tipo de problema es?

¿Cómo se relacionan entre sí las variables controlables y el costo total?

¿Cuáles son los valores óptimos de las variables?
¿Cuáles son las reglas de decisión óptima?
¿Cuál es el costo mínimo total?

Determinar las propiedades del sistema

Las propiedades de un sistema de inventarios se pueden estudiar con referencia a cuatro componentes fundamentales: la demanda, la reposición (la oferta, el abastecimiento), los costos, y las restricciones.

<u>Propiedades de la demanda</u>: La demanda es el componente más importante del modelo, ya que es la causa agente de las existencias de problemas de inventarios. Se trata de una variable exógena, no controlable directamente. Respecto a este componente se pueden analizar la cantidad demandada, su distribución, su tasa de ocurrencia, y su comportamiento en el tiempo. <u>La cantidad demandada</u> puede ser constante o variable, y se mide en unidades continuas o en unidades discretas. Cuando se conoce la cantidad demandada con anticipación se dice que el sistema es determinístico. La dimensión de esta variable es el número de unidades demandadas.

El algunas ocasiones aunque no se conoce la cantidad demandada se puede conocer o estimar su <u>distribución de probabilidad</u>. Esta puede ser discreta o continua, y seguir o no algún modelo teórico conocido.

Interesa su valor promedio, su variabilidad, su distribución acumulativa, y otras propiedades útiles.

La <u>tasa de demanda</u> es la cantidad de demanda en la unidad de tiempo, es importante en los modelos en que la demanda se distribuye probabilísticamente.

El <u>comportamiento de la demanda</u> en el tiempo, se refiere a como van saliendo las unidades del inventario disponible. Esto puede ocurrir de muy diversas maneras: la demanda puede ser lineal, parabólica creciente, parabólica decreciente, instantánea al principio de cada período de programación, o instantánea al final del mismo, etc.

Propiedades de la oferta: se refieren al abastecimiento o procuración, es decir a la forma en que se abastece el inventario. Respecto a esta variable, se pueden analizar el período de programación, el lote de abastecimiento y la longitud del rezago, y la tasa de abastecimiento.

El período de programación es la longitud de tiempo que transcurre entre dos decisiones consecutivas de programación. Responde a la pregunta ¿Cuando ordenar? y es generalmente una variable controlable.

El lote de abastecimiento es la cantidad programada para reponer el inventario. Es la cantidad producida, adquirida o el tamaño de la oferta. Esa es una variable controlable.

La longitud del rezago o tiempo de entrega, es el tiempo que transcurre entre la programación de un abastecimiento y su incorporación efectiva al inventario. Esta no es una variable controlable. Cuando el lote se agrega al inventario en forma instantánea (en su totalidad), el tiempo de entrega (rezago) es nulo.

La tasa de abastecimiento es la relación entre la cantidad (lote) de abastecimiento y el período de rezago.

En algunos sistemas de inventario se sigue una política de reposición que consiste en emitir una requisición (generar un pedido) cuando el nivel del inventario baja hasta un cierto nivel predeterminado. Ese nivel se denomina punto de reorden. En otros sistemas se sigue la política de programar el lote de abastecimiento de modo de elevar el nivel del inventario hasta una cantidad previamente especificada. Ese nivel se conoce como nivel de reorden.

Propiedades de los costos: Se refieren a los costos asociados con la tenencia y no tenencia de inventarios, así como con los costos en que se incurre para elevar el nivel de éstos. Entre los costos de mantener inventarios tenemos costos efectivos y costos imputados.

Por ejemplo entre los costos de mantener inventarios, tenemos costos efectivos, tales como seguros, impuestos, rentas, luz, mermas, sueldos del personal del almacen, sueldos de vigilancia, etc. Y también tenemos costos imputados, tales como el costo financiero en que se incurre por inmovilizar capital (recursos) en inventarios en lugar de utilizarlo en cualquier otro destino más lucrativo. Ese costo depende de las políticas de utilización de recursos que maneja la empresa, y del rendimiento alternativo del capital de trabajo. Es un costo imputado, en el sentido de que no constituye una erogación efectiva, y por lo tanto no se registra en los estados contables y financieros de la empresa.

Por lo general, el costo de mantener inventarios se aplica como un porcentaje anual del costo de una unidad del producto en inventario.

Los costos de "no tenencia" de inventarios o de faltante o de escasez, son aquellos en que se incurre al existir demanda que no puede ser satisfecha con la disponibilidad existente. Son costos difíciles de determinar, y requieren del ejercicio del criterio, sentido común y conocimiento del mercado de la empresa. Incluye pérdida de ventas, pérdida de clientela, costos administrativos de tiempo y tramitación para surtir esas órdenes no satisfechas, tiempos extras en la línea de producción, pérdida del "crédito mercantil" de la empresa, etc.
A veces esta escasez puede ser irreparable. Tal es el caso de un inventario de refacciones para maquinaria, que deja inactivo un sis

tema de producción (o de defensa) por falta de un repuesto específico; o el caso de un inventario de tubos de oxígeno en salas de cirujía mayor, etc.

En los sistemas de inventario puede aceptarse o no la posibilidad de faltantes. En los casos en que no se admite escasez, se estipula que el costo de escasez sea infinito. En los sistemas en que se admite la escasez, se planea su presencia, y se pueden presentar dos situaciones distintas: el de escasez con lista de espera de los pedidos no surtidos, y el de escasez con ventas definitivamente pérdidas. En el primer caso los pedidos no satisfechos se listan según un cierto orden de prioridad, y se van satisfaciendo a medida que se recibe un nuevo lote de abastecimiento. En el segundo caso, la venta que no se realaliza en el momento en que se crea la demanda por el producto, se pierde definitivamente: el cliente se dirige a otro proveedor. Se suelen medir como la utilidad no ganada por unidad no vendida.

Finalmente tenemos los costos de adquisición o procuración,que se relacionan con el abastecimiento de lotes al inventario. Aquí tenemos dos posibilidades:

El costo en que se incurre cuando se ordena un lote a un proveedor externo a la empresa, y
el costo de lanzamiento de una corrida, o de preparación para la fabricación de un lote en el sistema de producción de la propia empresa.
En el primer caso tenemos los costos de emisión de documentos,administración, transporte, carga, descarga, seguros,etc. Son costos de colocación del pedido, obtención del material e inspección.

En el segundo caso tenemos los costos de ajuste de maquinaria, incluyendo trabajo y materiales, prueba del funcionamiento y valor de la inactividad del equipo de producción. Esto incluye costos de preparación de la unidad de producción, costos de materiales durante las pruebas, y el costo imputado del tiempo durante el cual no se puede efectuar producción debido a la preparación y ajuste.
Generalmente es un costo constante, independiente de la magnitud de la corrida.

Restricciones sobre el sistema

En un sistema de inventarios puede haber muy diferentes restricciones que afectan a diversos componentes del sistema.

Se tienen restricciones sobre las unidades de producto, en el caso que el sistema de producción es de unidades discretas o de unidades continuas.

Se tienen restricciones sobre la demanda, cuando se admite la posibilidad de escasez con lista de espera (o no), devoluciones de productos (o no), estructura de rezagos en el comportamiento de la demanda, propiedades markovianas, etc.

Se tienen restricciones sobre la oferta cuando el espacio para almacen es limitado, cuando hay políticas prescritas (predeterminadas), cuando se han predeterminado los períodos de programación, etc.
Puede haber restricciones sobre los costos, indicando que algunos de ellos deben ser nulos, o que otros deben ser infinitos.
Puede haber restricciones sobre la inversión financiera total permitida en inventarios. Puede prefijarse el porcentaje de pedidos que no se atienden por escasez de inventarios, etc.

Pueden manejarse simultáneamente varias restricciones de diversa naturaleza, etc.

Reuniendo todas las propiedades mencionadas de los componenntes del sistema, se tiene una noción precisa de la naturaleza del problema de inventarios que afecta al sistema bajo estudio. Se puede determinar qué tipo de problema es, cuáles son las variables y cuáles de ellas son controlables por el responsable por la toma de decisiones.

OBJETIVOS PARA LA OPTIMIZACION

- REDUCIR LA INVERSION FINANCIERA
- AUMENTAR EL NIVEL DE SERVICIO
- MINIMIZAR LOS COSTOS TOTALES DE OPERACION

COSTOS RELEVANTES DE LAS DECISIONES BASICAS DE INVENTARIOS

1. COSTOS DE ORDENAR (ABASTECER)
2. COSTOS DE MANTENER INVENTARIOS
3. COSTOS DE CARECER DE EXISTENCIAS (INCURRIR EN ESCASEZ)

COSTOS DE ORDENAR
(ABASTECER)

COMPRAS

- PREPARACION DE REQUISICIONES Y ORDENES DE COMPRA (PERSONAL O EQUIPO)
- TRAMITES CON PROVEEDORES (ENTREVISTAS, CORRESPONDENCIA, ETC.)
- PAPELERIA PARA MANEJAR COMPRAS
- RECIBO, INSPECCION Y MANEJO DE MATERIALES
- CONTROL DE MATERIALES EN CONTABILIDAD
- REVISION Y PAGO DE CUENTAS DE PROVEEDORES

PRODUCCION

- PROGRAMACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION
- ORDENAR PRODUCCION
- MANEJO DE MATERIALES
- PREPARACION DE MAQUINAS
- INEFICIENCIA DE ORDENES PEQUEÑAS DE PRODUCCION
- DESPERDICIO DE MATERIALES

COSTOS DE MANTENER INVENTARIOS

- COSTO DEL CAPITAL
- OBSOLESCENCIA Y DESPERDICIO
- SEGUROS
- ALMACENAJE
- MANEJO DE MATERIALES
- TOMA DE INVENTARIOS

COSTOS DE CARECER DE EXISTENCIAS

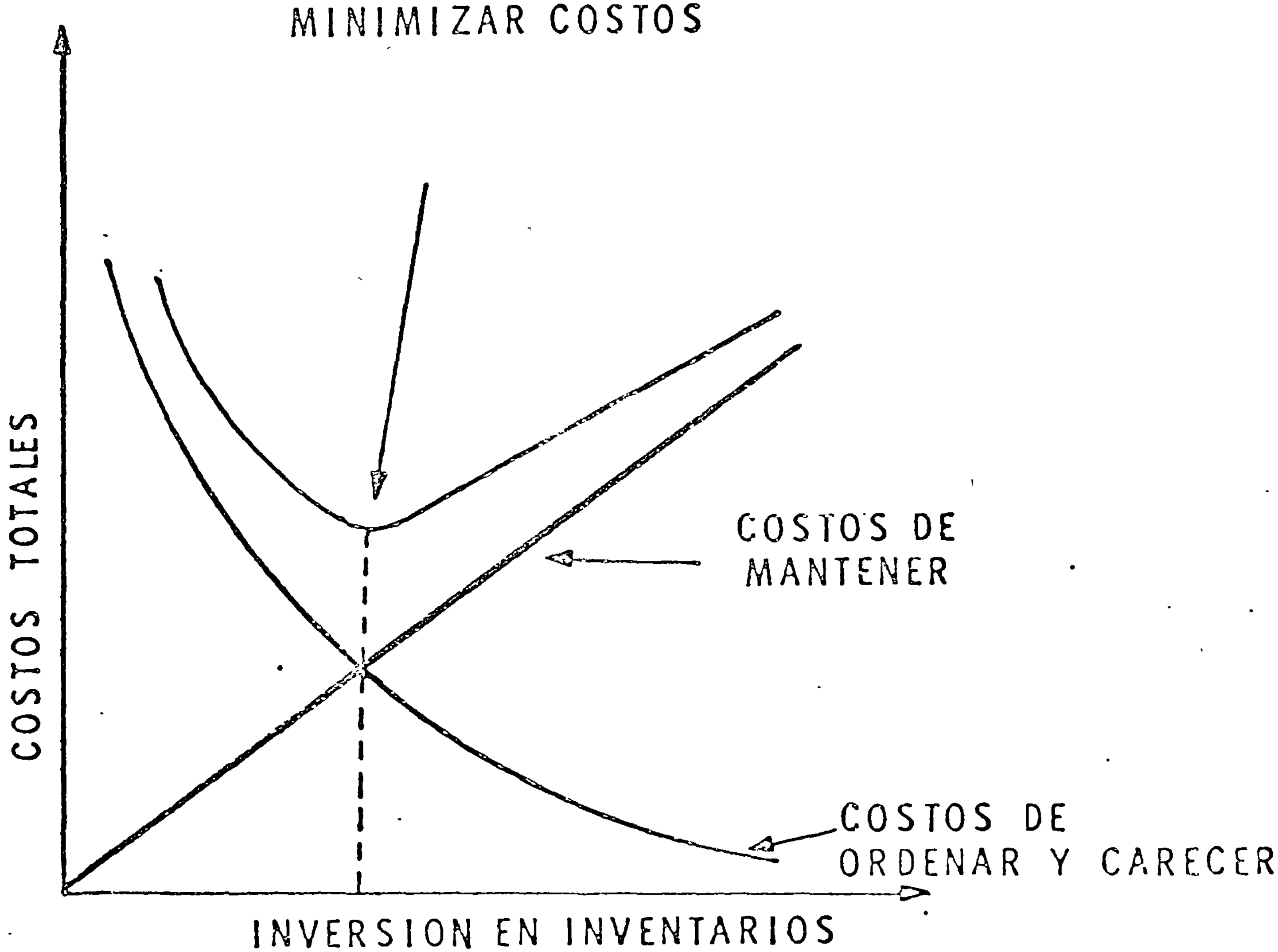
MATERIAS PRIMAS	PRODUCTOS TERMINADOS
DEMORAS EN PRODUCCION	PERDIDA DE VENTAS
TRAMITES URGENTES	PERDIDA DE CLIENTES (MALA REPUTACION)

INVERSION EN INVENTARIOS:	DISMINUYE	AUMENTA
- COSTOS DE MANTENER	DISMINUYEN	AUMENTAN
- COSTOS DE ORDENAR	AUMENTAN	DISMINUYEN
- COSTOS DE CARECER DE EXISTENCIAS	AUMENTAN	DISMINUYEN

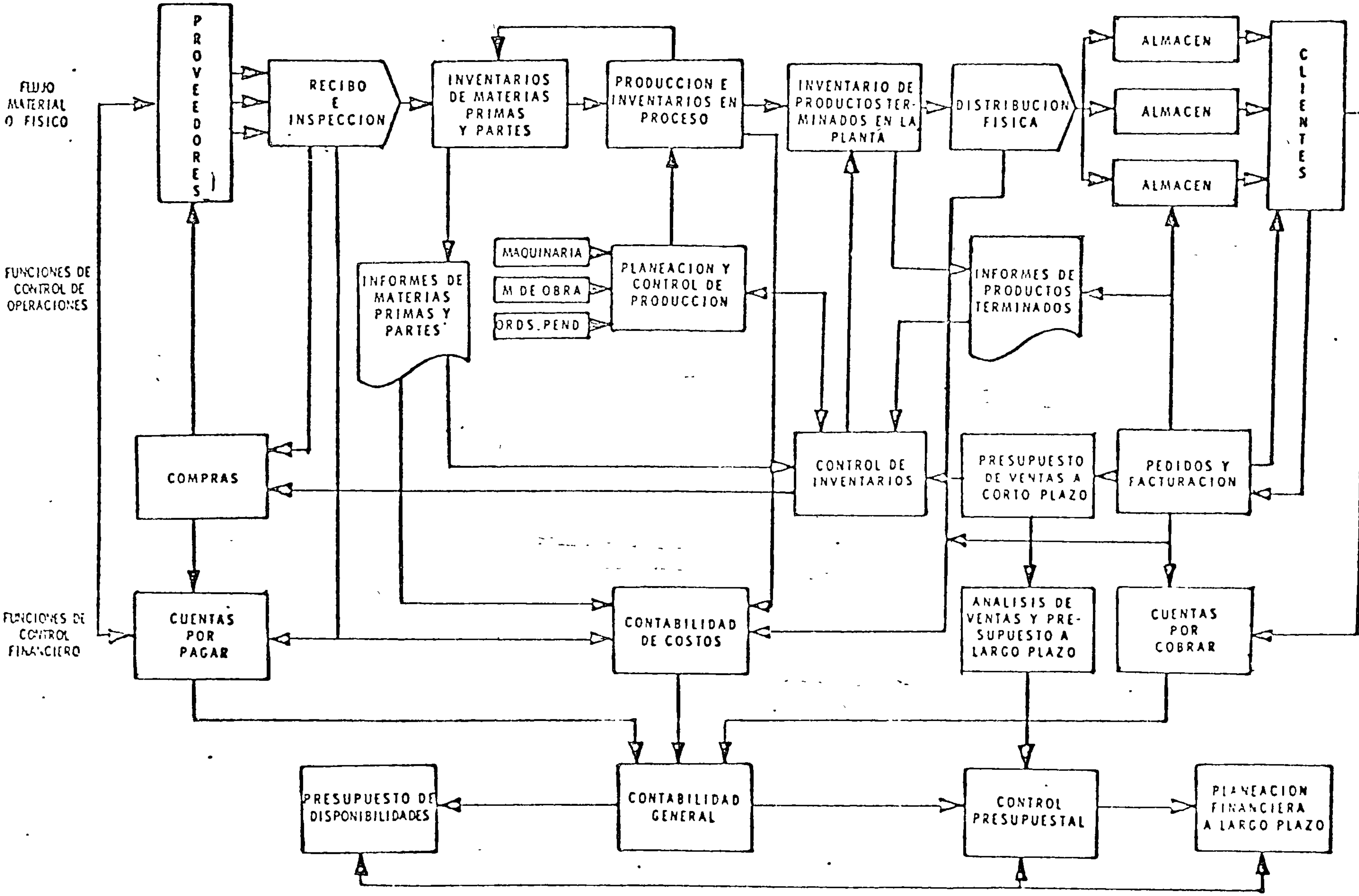
ADMINISTRACION DE INVENTARIOS

OBJETIVO:

MINIMIZAR COSTOS



SISTEMA INTEGRADO DE PLANEACION Y CONTROL PARA UNA COMPAÑIA MANUFACTURERA



CENTRO DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA, U.N.A.M.
CURSO: TEORÍA DE INVENTARIOS. FEBRERO, 1973

<u>Notas de clase</u> (Preparadas por Enrique Novelo)

Bibliografía:

A. Kaufmann, "Methods and Models of Operations Research", <u>Prentice-Hall</u>, 1963.

F.S. Hillier y G. J. Lieberman, "Introduction to Operations Research", <u>Holden-Day</u>, 1968.

H. M. Wagner, "Principles of Operations Research", <u>Prentice-Hall</u>, 1969.

E. S. Buffa, "Production-Inventory Systems", <u>Richard D. Irwin, Inc.</u>, 1968.

D. A. Rascón y A. G. Villarreal, "Introducción a probabilidades y estadística", <u>Instituto de Ingeniería, U.N.A.M.</u>, 1972.

<u>Punto de reorden</u>. (Modelo I)

Artículos iguales se consumen a una tasa constante por unidad de tiempo. Las demandas son conocidas e iguales durante periodos consecutivos. Se abastece el inventario con lotes de artículos nuevos. Los lotes contienen la misma cantidad de artículos.

Notación:

a tasa constante conocida a la que los artículos se consumen continuamente durante un período

Q tamaño de las órdenes, $Q>0$

K costo de preparación de cada orden

c costo de producción o compra/artículo

h costo de mantener en inventario un artículo/período

T costo total del inventario/período

t tiempo de reorden $= \frac{Q}{a}$ ②

N órdenes por período $NQ = a \therefore N = \frac{a}{Q} = \frac{1}{t}$

Restricciones:

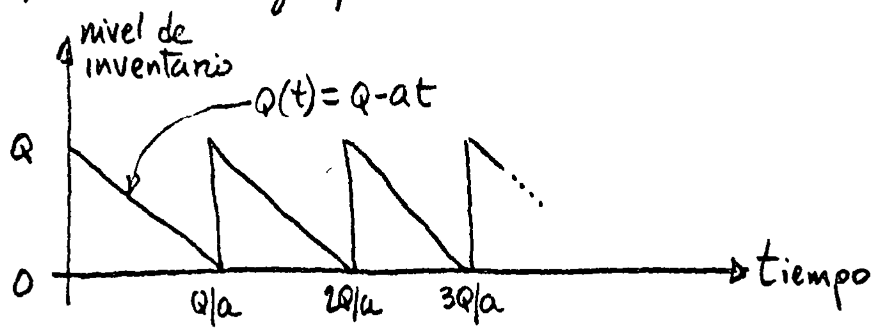
Producción instantánea.

No se permiten faltantes.

Objetivo:

Determinar cada cuando hacer una compra o corrida de producción y de qué tamaño debe ser la orden para que el costo/periodo sea mínimo.

Representación gráfica:



Cálculo de T

Costo de ordenar cada vez $= K + cQ$

Costo de mantener inventarios durante 0 a Q/a, o de Q/a a $2Q/a$, o ...

$$= h\int_0^{Q/a} Q(t)\,dt = h\int_0^{Q/a}(Q-at)\,dt = \frac{hQ^2}{2a}$$

$\therefore$

$$T = \left(K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}\right)N = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}$$

Para obtener Q tal que $\min T$:

$$\frac{dT}{dQ} = -\frac{aK}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

tenemos que

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$$

$$N^* = \frac{1}{t^*}$$

Ejemplo 1.

Si $a = 250$ artículos/año

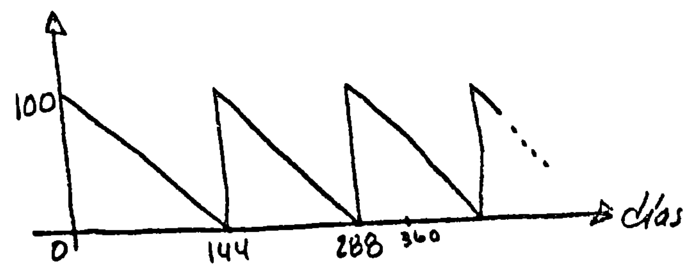
$K = \$\ 10$/orden

$h = \$\ 0.5$/artículo/año

$\therefore\ Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 250 \times 10}{0.5}} = 100$ artículos

$t^* = \frac{100}{250} = 0.4$ años entre órdenes

$N^* = \frac{1}{t^*} = 2.5$ órdenes por año



Ejemplo 2.

Si $a = 25$ artículos/mes

$K = \$15$/orden

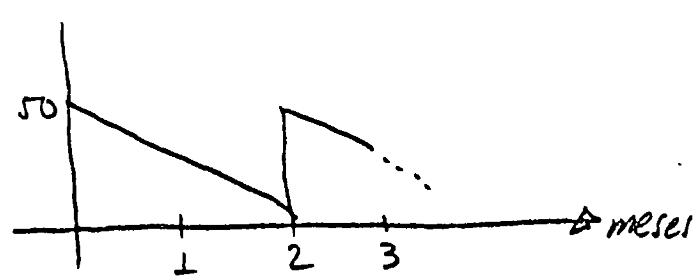
$c = \$\ 1$/artículo

$h = \$\ 0.3$/artículo/mes

$Q^* = 50$ artículos

$t^* = \frac{Q^*}{a} = 2$ meses

$N^* = 0.5$ órdenes/mes



Modificación al anterior (Modelo II)

Notación:

u costo por artículo faltante/periodo

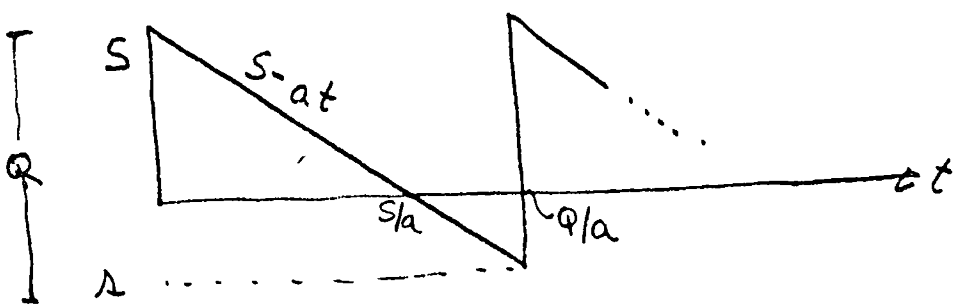
S nivel de inventario

s nivel de inventario faltante

Restricciones:

Se permiten faltantes.

Representación gráfica:



Cálculo del costo total por periodo

Costo de ordenar cada vez $= K + cQ$

costo de mantener inventario $= h \int_0^{S/a} (S - at)\,dt = \dfrac{hS^2}{2a}$

costo por faltante $= u \int_0^{\frac{Q}{a} - \frac{S}{a}} at\,dt = \dfrac{u(Q-S)^2}{2a}$

$\therefore$

$$T = \left(K + cQ + \frac{hS^2}{2a} + \frac{u(Q-S)^2}{2a}\right)N = \left(K + cQ + \frac{hS^2}{2a} + \frac{u(Q-S)^2}{2a}\right)\frac{a}{Q}$$

Para obtener Q^* y S^* tales que $\min T$

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{\partial T}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{hS}{2Q} - \frac{u(Q-S)}{Q} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = -\frac{aK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{u(Q-S)}{Q} - \frac{u(Q-S)^2}{2Q^2} = 0$$

resolviendo simultáneamente

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{u}{u+h}} \qquad t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}\sqrt{\frac{u+h}{u}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{u+h}{u}} \qquad N^* = \frac{1}{t^*}$$

La fracción de tiempo en que no existen faltantes es

$$\frac{\frac{S^*}{a}}{\frac{Q^*}{a}} = \frac{u}{u+h}$$

faltante máximo $= Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aK}{u}}\sqrt{\frac{h}{u+h}}$ $\qquad s^* = -$(faltante máx)

Política: Cuando el nivel de inventario esté en s, ordene hasta S.

Definición: Sea λ el tiempo entre poner y recibir una orden.

Modificación al Modelo I:

El punto de reorden es λa; o sea, cuando el nivel de inventario alcance el valor λa, ponga la orden.

El tiempo de reorden es $\frac{Q}{a} - \lambda$

Modificación al Modelo II:

El punto de reorden es $s + \lambda a$.

El tiempo de reorden es $\frac{Q}{a} - \lambda$

Ejemplo 3. Igual al ej. 2 pero se permiten faltantes a un costo $u = \$1.5$ artículo/mes.

Además, $\lambda = 1$ mes.

Datos:

$a = 25 \qquad h = 0.3$

$K = 15 \qquad u = 1.5$

$c = 1 \qquad \lambda = 1$

$$\therefore Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{u+h}{u}} = 55 \text{ artículos}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{u+h}{u}} = 45.45 \simeq 45 \text{ artículos}$$

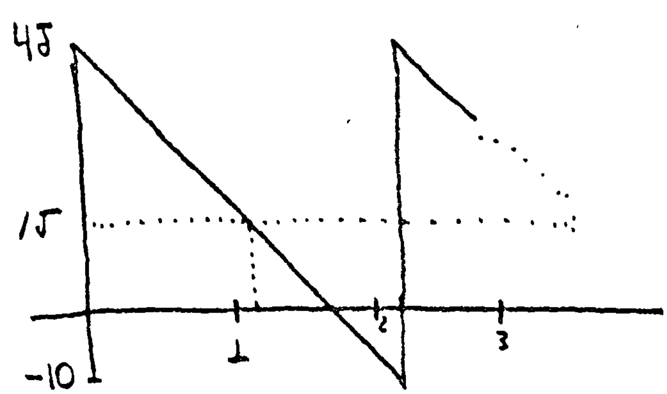
máx faltante $= Q^* - S^* = 10$ artículos

$s^* = -10$ artículos

$$t^* = \frac{55}{25} = 2.2 \text{ meses}$$

Punto de reorden $= s + \lambda a = 15$ artículos ; tiempo de reorden $= 1.2$ meses.

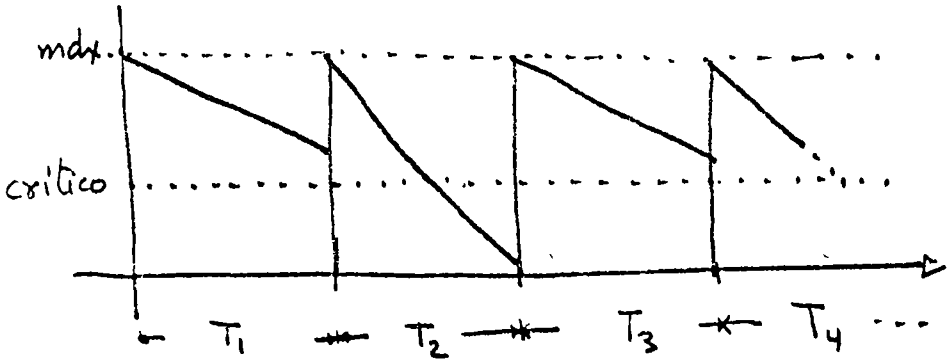
Fracción de tiempo en que no hay faltantes $= \dfrac{u}{u+h} = 0.83$ ó 83%



Otros sistemas de inventarios ($\lambda=0$) o ($\lambda>0$)

En los sistemas que se presentan a continuación no se conocen las demandas de los períodos considerados; sin embargo, se supone que su comportamiento a corto plazo puede predecirse extrapolando un número reducido de valores de demandas anteriores.

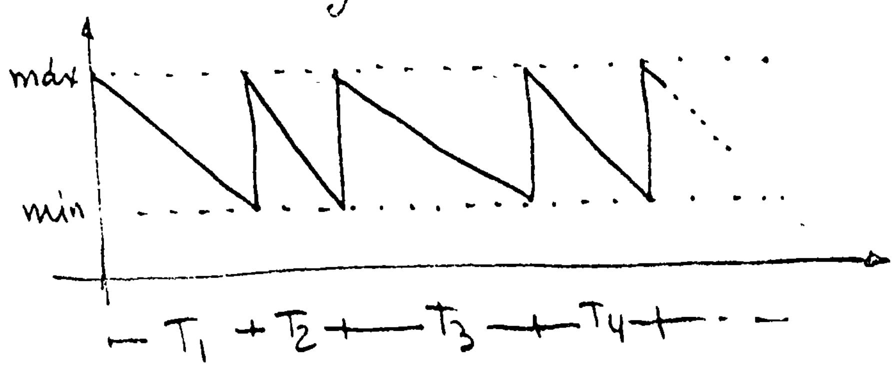
a) Sistema periódico ($\lambda=0$)



T_i iguales $\forall i$

riesgo: incurrir en faltantes.
ventaja: fácil administración.

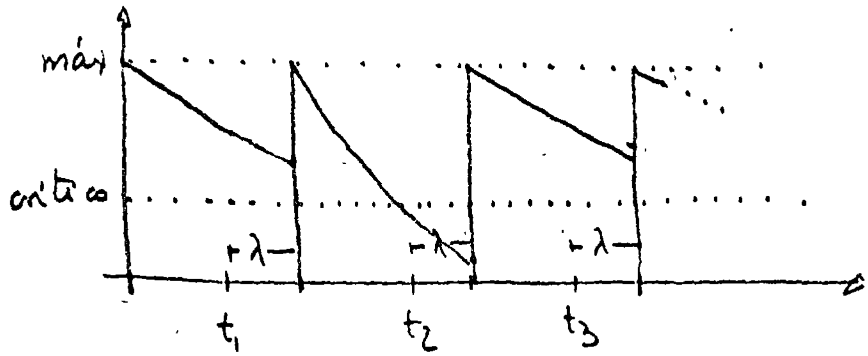
b) Sistema de relajación.



T_i diferentes $\forall i$

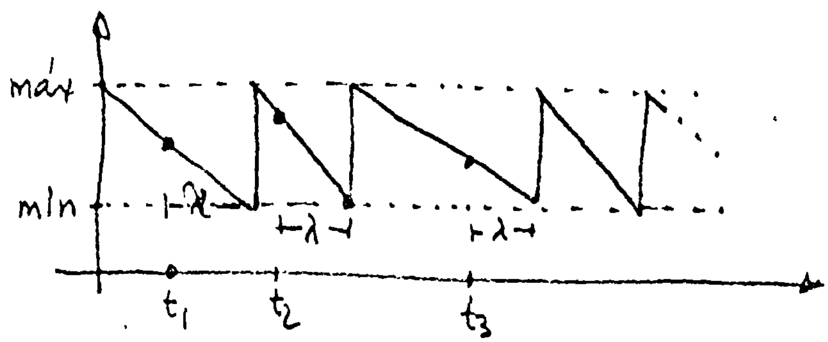
No hay riesgo de incurrir en faltantes
desventaja: dificultad en su administración
no es fácilmente sistematizable.

c) Sistema periódico ($\lambda > 0$, e independiente del tamaño de la orden)



Conocemos la fecha de poner la orden (t_i ; $i = 1, 2, \ldots$)
La cantidad por ordenar se encuentra extrapolando la cantidad demandada durante $T - \lambda$.
En algunos casos $\lambda > T$

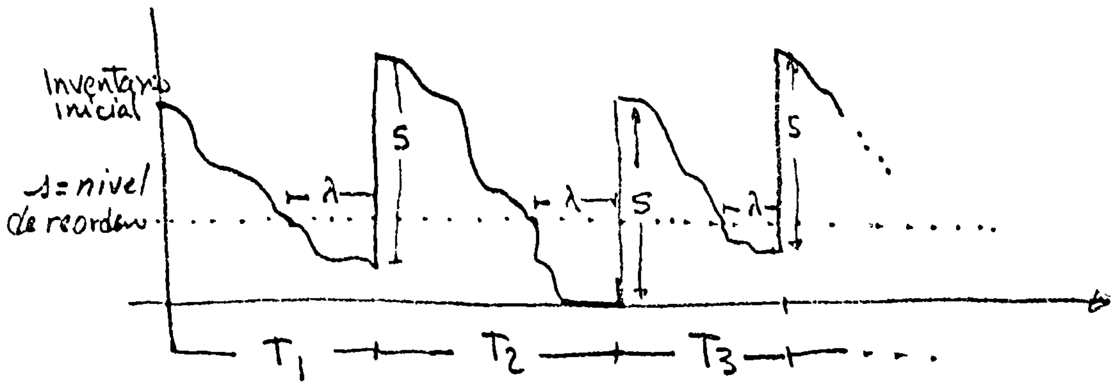
d) Sistema de relajación ($\lambda > 0$, e independiente del tamaño de la orden)



Conocemos la cantidad por ordenar
La fecha de poner la orden se encuentra extrapolando la cantidad demandada. En algunos casos, como t_2, no es posible lograr exactitud. Tambien λ puede ser mayor que algún T_i ; $i = 1, 2, \ldots$

Comentario: Si λ es proporcional al tamaño de la orden, resulta más conveniente el sistema de relajación que el periódico (en ocasiones).

e) Sistema sencillo (s, S). La demanda sigue un comportamiento menos uniforme que en los casos anteriores. El método consiste en poner una orden de tamaño S cuando el nivel de inventario es s. El riesgo de incurrir en faltantes depende de λ.



T_i diferentes $\forall i$

Ventaja: fácil administración

Desventaja: El tamaño del nivel de reorden define el margen de seguridad para evitar faltantes. Si s es muy grande, los costos por mantener inventarios pueden resultar ~~muy grandes~~ altos.

Planeación de la producción

Las demandas son conocidas para los períodos considerados y pueden ser diferentes entre sí.

Notación: K, c, h definidas anteriormente

r_i demanda en el período i ; $i = 1, 2, \ldots, n$

Restricciones:

No se permiten faltantes

No hay inventario inicial ni final.

Producción instantánea ($\lambda = 0$).

Objetivo: Cuánto debe producirse al principio de cada período de tal manera que se minimice el costo total en los n períodos.

Ilustración:

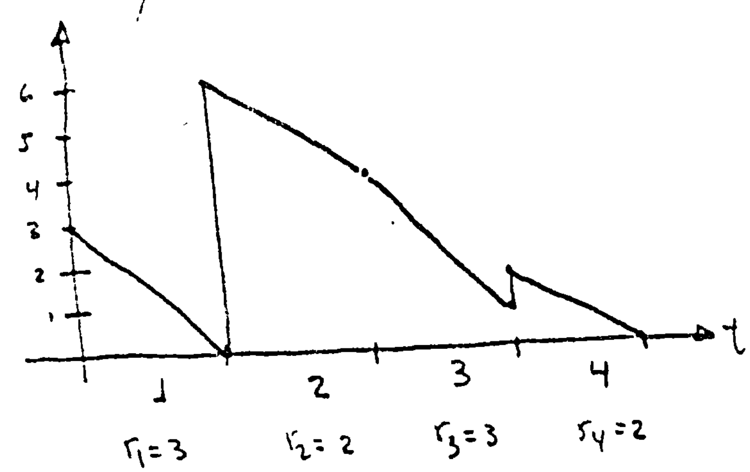
$K = \$2$/orden

$c = \$1$/artículo

$h = \$0.2$/artículo/período

$r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 2$

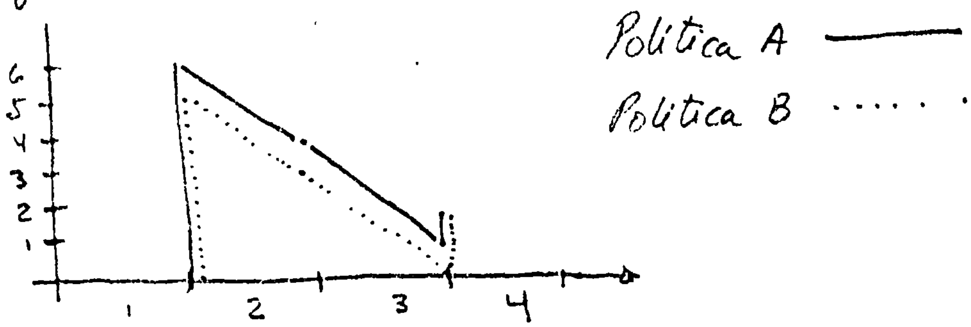
Política posible



Caracterización de políticas óptimas.

"Para cumplir una demanda cualquiera, con costos de preparación de órdenes y costos lineales de producción y almacenamiento, existe una política óptima en la cual se ordena únicamente cuando el nivel de inventario es cero".

Por ejemplo:



B domina a A

Argumento: K es el mismo para A y B
(ordenamos dos veces en A o B)

$7c$ el costo de producción de los siete artículos necesarios es el mismo para A o B.

Sin embargo:

$$h_B < h_A$$

$\therefore$ B domina a A y A no es óptima.

El criterio anterior puede utilizarse para determinar cuáles políticas no son óptimas, pero no para encontrar políticas óptimas.

Supongamos una política óptima:

"Si el tiempo de la última producción se conoce para esa política óptima (tiene que ser cuando el nivel de inventario es cero), el costo total de los períodos precedentes debe ser mínimo, para ese problema reducido, ya que la política total es óptima".

Notación:

C_i costo de los primeros i períodos usando una política óptima. $i=1,2,\ldots,n$.

Expresión recursiva para C_n

$$C_n = \min_{j=1,2,\ldots,n} \left[C_{j-1} + K + c(r_j + \cdots + r_n) + h\left(r_{j+1} + 2r_{j+2} + \cdots + (n-j)r_n\right)\right]$$

donde

j tiempo de la última producción.

$C_0 = 0$

$c(r_j + \cdots + r_n)$ costo de la última producción.

$h\left(r_{j+1} + 2r_{j+2} + 3r_{j+3} + \cdots + (n-j)r_n\right)$ costo de almacenamiento de la última producción.

Metodología:

Para encontrar la política óptima y su costo asociado, es necesario determinar $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, antes de obtener C_n.

Del ejemplo;

Ordenando para el primer período (única posibilidad)

$$C_1 = C_0 + K + c(r_1) = 0+2+1(3) = 5 \qquad \therefore \quad C_1 = 5$$

Ordenando para los dos primeros períodos (dos posibilidades)

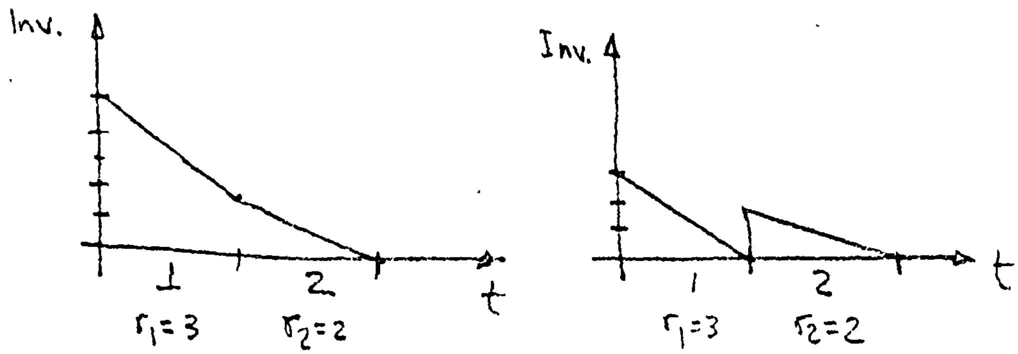


fig 1. fig. 2.

Def. C_j^i la última orden debe solicitarse al principio del i-ésimo período; C_j^i representará el costo asociado a esa posibilidad.

La fig. 1 presenta a C_2^1 ; la fig. 2 a C_2^2

De ahí que $C_2 = \min(C_2^1, C_2^2)$

y

$$C_2^1 = C_0 + K + c(r_1+r_2) + h(r_2)$$
$$= 0+2+1(3+2)+\frac{1}{5}(2) = 7.4$$

$$C_2^2 = C_1 + K + c(r_2)$$
$$= 5+2+1(2) = 9 \qquad \therefore \ C_2 = \min(7.4, 9) = 7.4$$

$$\therefore \ C_2 = 7.4$$

Ordenando para los tres primeros periodos.

Utilizando la caracterización de políticas óptimas (pág 11)

$C_3 = \min\left(C_3^1, C_3^2, C_3^3\right)$

$C_3^1 = C_0 + K + c(r_1 + r_2 + r_3) + h(r_2 + 2r_3)$
$= 0 + 2 + 1(3+2+3) + \frac{1}{5}\left[2 + 2(3)\right] = 11.6$

$C_3^2 = C_1 + K + c(r_2 + r_3) + h(r_3)$
$= 5 + 2 + 1(2+3) + \frac{1}{5}(3) = 12.6$

$C_3^3 = C_2 + K + c(r_3)$
$= 7.4 + 2 + 1(3) = 12.4$

$C_3 = \min(11.6, 12.6, 12.4) = 11.6$

$\therefore \quad C_3 = 11.6$

Ordenando para los cuatro primeros periodos.

$C_4 = \min\left(C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4\right)$

$C_4^1 = C_0 + K + c(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + h(r_2 + 2r_3 + 3r_4)$
$= 0 + 2 + 1(3+2+3+2) + \frac{1}{5}\left[2 + 2(3) + 3(2)\right] = 14.8$

$C_4^2 = C_1 + K + c(r_2 + r_3 + r_4) + h(r_3 + 2r_4)$
$= 5 + 2 + 1(2+3+2) + \frac{1}{5}(3 + 2(2)) = 15.4$

$C_4^3 = C_2 + K + c(r_3 + r_4) + h(r_4)$
$= 7.41 + 2 + 1(3+2) + \frac{1}{5}(2) = 14.8$

$C_4^4 = C_3 + K + c(r_4) =$
$= 11.6 + 2 + 1(2) = 15.6$

$\therefore \; C_4 = \min\{14.8,\ 15.4,\ 14.8,\ 15.6\} = 14.8$

I II

Políticas óptimas:

I Producir 10 artículos al principio del primer período.

II Producir 5 artículos al principio del primer período y las restantes al inicio del tercer período.

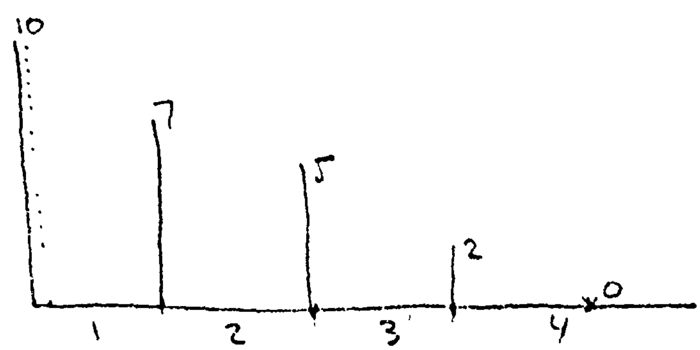
El costo de ambas políticas es \$ 14.8 y es mínimo.

Representación gráfica de la solución.

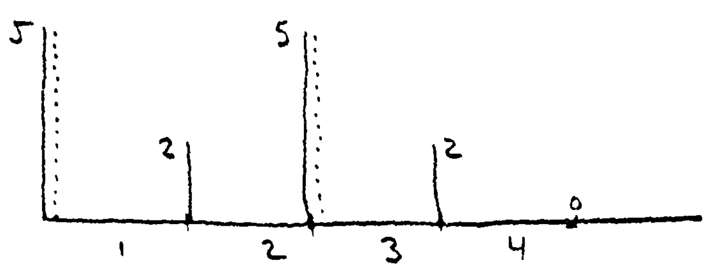
...... producción

—— nivel de inventario

I



II



Recordatorio:

Función cóncava: Una función $f(x)$, de una variable, es cóncava si, para cada par de valores x, digamos x' y x'',

$$f[\lambda x'' + (1-\lambda)x'] \geq \lambda f(x'') + (1-\lambda) f(x') \qquad \text{(A)}$$

para todos los valores de λ tales que $0 \leq \lambda \leq 1$.

Si $f[\lambda x'' + (1-\lambda)x'] > \lambda f(x'') + (1-\lambda) f(x')$, la función $f(x)$ es estrictamente cóncava.

En una función cóncava

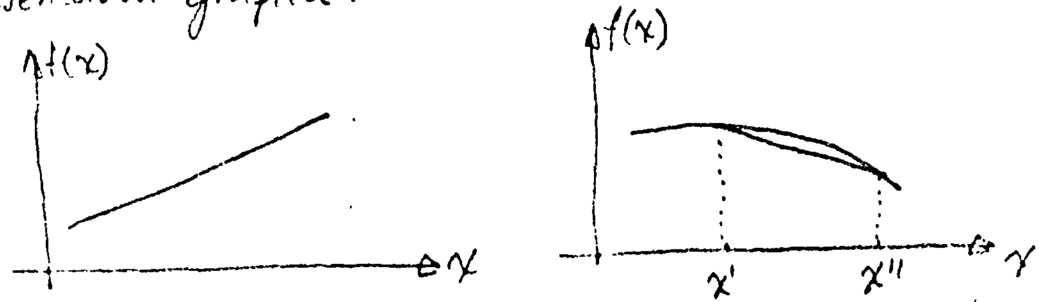
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0 \,, \qquad \ldots \text{(B)}$$

para todos los valores de x en el intervalo de convexidad.

En una función estrictamente cóncava

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0 \,.$$

Representación gráfica.



función cóncava — función estrictamente cóncava.

Planeación de la producción, considerando los costos de producción y mantenimiento como funciones cóncavas.

Si los costos de producción siguen una función cóncava $c(\cdot)$ y los de mantenimiento de inventario siguen una función cóncava $h(\cdot)$, la expresión recursiva para C_n es

$$C_n = \min_{j=1,2,\dots,n} \{ C_{j-1} + K + c(r_j + \dots + r_n) + h(r_{j+1} + \dots + r_n) + $$
$$+ h(r_{j+2} + \dots + r_n) + \dots + h(r_n) \} \quad \dots (A)$$

Para las siguientes combinaciones

c		h	
cóncava	y	lineal	*
lineal	y	cóncava	
lineal	y	lineal	

la expresión recursiva mantiene su validez.

Ejemplo: La demanda para los próximos cinco meses es $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 2$, $r_4 = 2$ y $r_5 = 3$. Los costos asociados al sistema de inventarios son: por preparar una corrida de producción, \$ 3.0; los costos de producción están dados por \$ $2(1 + \ln X)$, donde X es la cantidad producida en un mes; los costos de mantenimiento de inventario, \$ 0.25 artículo/mes. Determinar el plan de producción óptimo que permita cumplir con las demandas citadas.

Solución: La estructura de este problema es igual a la combinación marcada con asterisco, por lo cual usaremos la expresión recursiva A para encontrar C_n.

Datos:

$K = 3$	$r_1 = 2$	$r_4 = 2$
$c = 1$	$r_2 = 4$	$r_5 = 3$
$h = 0.25$	$r_3 = 2$	

$$C_1 = C_0 + K + 2\left[1 + \ln(r_1)\right] =$$
$$= 0 + 3 + 2\left[1 + \ln(2)\right] = 6.4 \qquad C_1 = 6.4$$

$$C_2 = \min\left(C_2^1, C_2^2\right)$$

$$C_2^1 = C_0 + K + 2\left[1 + \ln(r_1 + r_2)\right] + h(r_2) =$$
$$= 0 + 3 + 2\left[1 + \ln(2+4)\right] + 0.25(4) = 9.6 \qquad C_2 = \min(9.6, 14.2)$$
$$C_2^2 = C_1 + K + 2\left[1 + \ln(r_2)\right] = \qquad C_2 = 9.6$$
$$= 6.4 + 3 + 2\left[1 + \ln(4)\right] = 14.2$$

$$C_3 = \min\left(C_3^1, C_3^2, C_3^3\right)$$
$$C_3^1 = C_0 + K + 2\left[1 + \ln(r_1 + r_2 + r_3)\right] + h(r_2 + 2r_3) =$$
$$= 0 + 3 + 2\left[1 + \ln(2+4+2)\right] + 0.25(4 + 2(2)) = 11.2$$
$$C_3^2 = C_1 + K + 2\left[1 + \ln(r_2 + r_3)\right] + h(r_3) =$$
$$= 6.4 + 3 + 2\left[1 + \ln(4+2)\right] + 0.25(2) = 15.5 \qquad C_3 = \min(11.2, 15.5, 16)$$
$$C_3^3 = C_2 + K + 2\left[1 + \ln(r_3)\right] = \qquad C_3 = 11.2$$
$$= 9.6 + 3 + 2\left[1 + \ln(2)\right] = 16$$

$$C_4 = \min\left(C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4\right)$$
$$C_4^1 = C_0 + K + 2\left[1 + \ln(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)\right] + h(r_2 + 2r_3 + 3r_4) =$$
$$= 0 + 3 + 2\left[1 + \ln(2+4+2+2)\right] + 0.25(4 + 2(2) + 3(2)) = 13.1$$
$$C_4^2 = C_1 + K + 2\left[1 + \ln(r_2 + r_3 + r_4)\right] + h(r_3 + 2r_4) =$$
$$= 6.4 + 3 + 2\left[1 + \ln(4+2+2)\right] + 0.25(2 + 2(2)) = 17.1$$
$$C_4^3 = C_2 + K + 2\left[1 + \ln(r_3 + r_4)\right] + h(r_4) =$$
$$= 9.6 + 3 + 2\left[1 + \ln(2+2)\right] + 0.25(2) = 17.9$$

$$C_4^4 = C_3 + K + 2\left[1 + \ln(r_4)\right] =$$
$$= 11.2 + 3 + 2\left[1 + \ln(2)\right] = 17.6$$

$$C_4 = 13.1$$

$$C_5 = \min\left[C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5\right]$$

$$C_5^1 = C_0 + K + 2\left[1 + \ln(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)\right] + h(r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 4r_5) =$$
$$= 0 + 3 + 2\left[1 + \ln(2 + 4 + 2 + 2 + 3)\right] + 0.25(4 + 2(2) + 3(2) + 4(3)) = 15.45$$

$$C_5^2 = C_1 + K + 2\left[1 + \ln(r_2 + r_3 + r_4 + r_5)\right] + h(r_3 + 2r_4 + 3r_5) =$$
$$= 6.4 + 3 + 2\left[1 + \ln(4 + 2 + 2 + 3)\right] + 0.25(2 + 2(2) + 3(3)) = 19.95$$

$$C_5^3 = C_2 + K + 2\left[1 + \ln(r_3 + r_4 + r_5)\right] + h(r_4 + 2r_5) =$$
$$= 9.6 + 3 + 2\left[1 + \ln(2 + 2 + 3)\right] + 0.25(2 + 2(3)) = 20.4$$

$$C_5^4 = C_3 + K + 2\left[1 + \ln(r_4 + r_5)\right] + h(r_5) =$$
$$= 11.2 + 3 + 2\left[1 + \ln(2 + 3)\right] + 0.25(3) = 20.15$$

$$C_5^5 = C_4 + K + 2\left[1 + \ln(r_5)\right] =$$
$$= 13.1 + 3 + 2\left[1 + \ln(3)\right] = 20.3$$

$$C_5^5 = \min(15.45, 19.95, 20.4, 20.15, 20.3) = 15.45$$

Política óptima: Produzca las 13 unidades al principio del período 1, a un costo mínimo de \$ 15.45.

Representación gráfica

nivel de inventario ———

producción ......

Políticas de utilización de inventarios

Consideraciones:

n artículos en inventario

El valor de cada artículo depende de su edad.

Cada artículo tiene asociado su edad en el inventario S_i ; $i = 1, 2, \ldots, n$

La vida útil de un artículo, $L(S_i)$, es función de su edad en el inventario.

Cuando $L(S_i) = 0$ para algún artículo i, este se remplaza por alguno que forme la reserva mínima del inventario.

Objetivo: encontrar el orden en que debemos utilizar los artículos, de tal manera que se maximice la vida útil total obtenida del inventario.

Soluciones posibles:

Dada $L(S)$ existen $n!$ órdenes posibles de utilizar los artículos. Por comparación entre ellas, seleccionaríamos la correspondiente al valor máximo de la vida útil del inventario. Si n grande, este método es inoperante.

Definición de políticas.

Supongamos, por ahora, que tenemos dos artículos A_1 y A_2.
Conocemos $L(S)$ y S_1, S_2.

También que

$$S_2 > S_1$$

LIFO: Utilizar primero el artículo de menor edad.
orden de utilización (S_1, S_2); o sea (A_1, A_2)

FIFO: Utilizar primero el artículo de mayor edad.
orden de utilización (S_2, S_1); o sea (A_2, A_1)

La vida útil total si usamos LIFO

$$L(S_1) + L[S_2 + L(S_1)]$$

La vida útil total si usamos FIFO

$$L(S_2) + L[S_1 + L(S_2)]$$

FIFO es una política óptima si

$$L(S_2) + L[S_1 + L(S_2)] \geq L(S_1) + L[S_2 + L(S_1)] \quad \cdots \text{(I)}$$

Si (I) no es verdadera, entonces LIFO es la política óptima —

Ejemplo: Dos baterías A_1, A_2; sus edades son S_1, S_2 respectivamente. También $S_2 > S_1$. $L(S) = 2 - \frac{S}{2}$; donde S está dado en meses.

$$2 - \frac{S_2}{2} + 2 - \frac{1}{2}\left[S_1 + 2 - \frac{S_2}{2}\right] > 2 - \frac{1}{2}S_1 + 2 - \frac{1}{2}\left(S_2 + 2 - \frac{S_1}{2}\right)$$

$$3 - \frac{S_1}{2} - \frac{S_2}{4} > 3 - \frac{S_1}{4} - \frac{S_2}{2}$$

$$-\frac{S_1}{4} > -\frac{S_2}{4} \qquad \therefore\ S_2 > S_1 \text{ que es lo que supusimos.}$$

Por lo tanto (I) es verdadera y FIFO es la política óptima.
orden de utilización (A_2, A_1)

Criterio:

"FIFO es siempre una política óptima para toda S_1 y S_2 ($S_2 > S_1$) siempre y cuando la pendiente b, en $L(S) = a + bS$, sea mayor o igual a -1".

Condición de optimalidad para FIFO cuando hay n artículos.

"Si $L(S) = a + bS$ y $b \geq -1$, entonces FIFO es la política óptima, para $n \geq 2$".

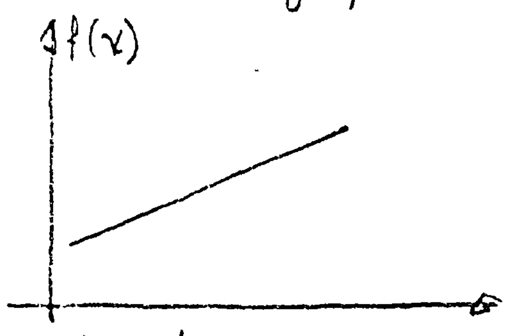
Si la vida útil es una función cóncava, tenemos la siguiente condición de optimalidad:

"Si $\frac{dL(S)}{dS} \geq -1$ y $L(S)$ es una función cóncava en el intervalo donde $L(S)$ es estrictamente positiva, entonces FIFO es la política óptima, para $n \geq 2$".

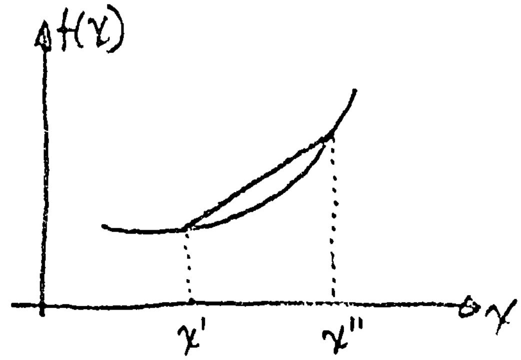
Recordatorio:

Función convexa: su definición es la misma que la que dimos en la pág 16 para funciones cóncavas, cambiando $\geq$ por $\leq$ en (A) y (B)

Representación gráfica:



función convexa



Si la vida útil es una función convexa, tenemos la siguiente condición de optimalidad:

"Si $L(S)$ es una función convexa y si LIFO es una política óptima para $n=2$, entonces LIFO es una política óptima para $n>2$".

En general,

"Si $\frac{dL(S)}{dS} \geq -1$ y si LIFO es una política óptima cuando $n=2$, entonces LIFO es una política óptima para $n>2$".

MODELOS ESTOCÁSTICOS DE INVENTARIOS.

Modelo a un periodo

Este modelo puede utilizarse para artículos que se vuelven obsoletos rápidamente. La producción o compra se efectúa una sola vez, al principio del periodo, y no se repite.
Dos aplicaciones posibles: a) Producir o comprar para vender después. Si no hay artículos en inventario cuando se demandan, se pierde la venta. La cantidad por producir o comprar al inicio del periodo debe ser la que maximice la ganancia esperada. b) Al ordenar un equipo, que no se produce en serie, se solicita el número de refacciones que se necesitarán durante la vida útil del mismo. El precio de las refacciones, en fecha posterior al pedido, aumenta considerablemente. Se desea determinar el tamaño del pedido de refacciones de manera que el costo esperado por adquisición de las mismas sea mínimo.

Notación: c, h, K

p precio de venta/artículo

y tamaño de la orden

D variable aleatoria de tipo continuo que representa la demanda en el periodo

$\varphi_D(\xi)$ función de densidad de D.

$\Phi_D(\xi)$ función de distribución de D.

$P(y)$ ganancia en el periodo

Restricciones:

$h=0$, $K=0$

Solución:

Encontraremos y^* que $\max[P(y)]$

La cantidad vendida es $= \left\{ \begin{array}{ll} D & \text{si } D<y \\ y & \text{si } D \geq y \end{array} \right\} = \min(D,y)$

$$P(y) = \left\{ \begin{array}{ll} pD - cy & \text{si } D<y \\ py - cy & \text{si } D \geq y \end{array} \right\} = p\min(D,y) - cy$$

y
$$E[P(y)] = p\left[\sum_{D<y} D\,P\{D<y\} + \sum_{D\geq y} y\,P\{D\geq y\} \right] - cy$$

$$= p\left[\int_0^y z\,\varphi_D(z)\,dz + y\int_y^\infty \varphi_D(z)\,dz \right] - cy$$

$$= p\int_0^\infty z\,\varphi_D(z)\,dz - p\int_y^\infty z\,\varphi_D(z)\,dz + py\int_y^\infty \varphi_D(z)\,dz - cy$$

$$E[P(y)] = pE[D] - \left[p\int_y^\infty (z-y)\,\varphi_D(z)\,dz + cy \right] \quad \ldots \text{I}$$

Como p y $E[D]$ son constantes, $\max E[P(y)]$ es equivalente a $\min C(y)$; donde $C(y)$ es la expresión en [ ].

cy y $p\int_y^\infty (z-y)\,\varphi_D(z)\,dz$ representan los costos de producción y demanda insatisfecha, respectivamente.

De ahí que $E[P(y)] = pE[D] - E[C(y)]$; en palabras, la ganancia esperada es igual a p veces la demanda esperada menos el costo esperado por faltantes, menos el costo de producción.

Cambio en las restricciones:

$h>0$

Dependiendo de la duración del periodo y los costos considerados para formar el costo por mantenimiento de inventario, podemos tener dos casos:

a) Considerar el costo por mantenimiento de inventario al inicio del periodo y cambiar los costos de producción cy por $(c+h)y$, y sustituir esta última expresión en (I). Las conclusiones a partir de (I) se mantienen verdaderas.

Para $\min E[C(y)] = \min \left\{ (c+h)y + p\int_y^{\infty}(\xi - y)\varphi_D(\xi)d\xi \right\}$

$$\frac{dE[C(y)]}{dy} = c+h - p\int_y^{\infty}\varphi_D(\xi)d\xi = c+h+p\int_{\infty}^{y}\varphi_D(\xi)d\xi$$

$$= c+h-p\left[1-\Phi_D(y^*)\right] = 0$$

$$\therefore \Phi_D(y^*) = 1 - \frac{c+h}{p} \quad \cdots (A)$$

$\therefore y^*$ es la solución a la ec. A

Para demostrar que es el valor que minimiza $E[C(y)]$

$$\frac{d^2 E\{C(y)\}}{dy^2} = p\,\varphi_D(y) \geq 0$$

b) Considerar el costo de mantenimiento de inventario al final del periodo y hacerlo función de las unidades sobrantes, si existen; o sea

$$H(y) = \begin{cases} h(y-D) & D<y \\ 0 & D>y \end{cases}$$

y

$$E[H(y)] = \sum_{D<y} h(y-D) P\{D<y\} + 0\, P\{D \geq y\}$$

$$= \int_0^y h(y-\xi)\,\varphi_D(\xi)\,d\xi$$

Entonces

$$E[P(y)] = pE\{D\} - \left\{ p\int_y^{\infty} (\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi + h\int_0^y (y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi + cy \right\}$$

$$= pE\{D\} - E[C(y)] - E[H(y)]$$

O sea, la ganancia esperada es igual a p veces la demanda esperada menos el costo esperado por faltante, menos el costo de producción, menos el costo esperado por mantenimiento de inventario.

De lo anterior, $\max E\{P(y)\}$ es equivalente a

$$\min \{ E[C(y)] + E[H(y)] \}$$

Por facilidad de notación, $F(y) = E[C(y)] + E[H(y)]$

$$\therefore \quad f(y) = h\int_0^y (y-z)\,\varphi_D(z)\,dz + p\int_y^\infty (z-y)\,\varphi_D(z)\,dz + cy$$

$$\frac{df(y)}{dy} = h\int_0^y \varphi_D(z)\,dz - p\int_y^\infty \varphi_D(z)\,dz + c = 0$$

$$= h\,\Phi_D(y^*) - p\left[1-\Phi_D(y^*)\right] + c = 0$$

$$= h\,\Phi_D(y^*) - p + p\,\Phi_D(y^*) + c = 0$$

$$\therefore \quad \Phi_D(y^*) = \frac{p-c}{h+p} \qquad \cdots \text{(B)}$$

y^* es la solución a la ec. (B)

Para demostrar que es el valor que minimiza $f(y)$

$$\frac{d^2 f(y)}{dy} = h\,\varphi_D(y) + p\,\varphi_D(y) > 0$$

Ejemplo:

Supongamos que la demanda de una refacción para avión sigue una distribución exponencial* con parámetro $1/50$

$$\varphi_D(z) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-z/50} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

* Una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial representa, entre otras aplicaciones, al tiempo de espera necesario para observar la primera ocurrencia de un evento, de determinado tipo, cuando eventos del mismo tipo ocurren aleatoriamente a una tasa media λ por unidad de tiempo.

El avión será obsoleto en un año y, por lo tanto, toda la producción se hará ahora.
El costo por refacción, ahora, es de $\$1000^{\underline{00}}$ y después será de $\$10000^{\underline{00}}$.
El costo por mantenimiento de inventario, impuesto únicamente a las unidades sobrantes, es de $\$100$/refacción.
Determinar el número necesario de refacciones.

Sol:

y^* es la solución a $\Phi(y^*) = \dfrac{p-c}{p+h}$

y $p = 10000$
$c = 1000$
$h = 100$

$$\Phi(y) = \int_0^y \frac{1}{50} e^{-z/50} dz = 1 - e^{-y/50}$$

Entonces:

$$1 - e^{-y^*/50} = \frac{10000-1000}{10000+100} = \frac{90}{101} \quad \therefore \quad y^* = 50 \ln \frac{101}{11} = 111$$

$y^* = 111$ refacciones

Como ejemplo: si en el problema anterior consideramos el costo por mantenimiento de inventario al inicio del periodo;

y^* es la solución a $\Phi(y^*) = 1 - \dfrac{c+h}{p}$

$$1 - e^{-y^*/50} = 1 - \frac{1000+100}{10000} \quad \text{y} \quad y^* = 50 \ln \frac{100}{11} \simeq 111$$

Modificación a las restricciones.

El nivel de inventario inicial $x > 0$

Para tener un nivel de inventario disponible "y" al inicio del periodo tendremos que ordenar $y-x$; o sea $y=(y-x)+x$

Dos casos:

a) Si se considera el costo por mantenimiento de inventario al inicio del periodo.

$$E\{P(y)\} = pE\{D\} - \left\{ p\int_y^\infty (z-y)\,\varphi_D(z)\,dz + (c+h)(y-x) \right\}$$

para $\min \left\{ p\int_y^\infty (z-y)\varphi_D(z)dz + (c+h)(y-x) \right\} = \min E\{C(y)\}$

$$\frac{d\,E\{C(y)\}}{dy} = c+h - p\int_y^\infty \varphi_D(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \Phi_D(y^*) = 1 - \frac{c+h}{p} \quad \cdots (A)$$

y^* es la solución a la ec. A.

Política óptima:

ordenar $y^* - x$, si $y^* - x > 0$

no ordenar, si $y^* - x \leq 0$

b) Si se considera el costo por mantenimiento de inventario al final del periodo.

$$E\{P(y)\} = pE\{D\} - \left\{ p\int_y^\infty (z-y)\varphi_D(z)dz + h\int_0^y (y-z)\varphi_D(z)dz + c(y-x)\right\}$$

Para

$$\min\left\{ p\int_y^\infty (z-y)\varphi_D(z)dz + h\int_0^y (y-z)\varphi_D(z)dz + c(y-x)\right\} = \min E\{C(y)\}$$

$$\frac{dE\{C(y)\}}{dy} = h\int_0^y \varphi_D(z)dz - p\int_y^\infty \varphi_D(z)dz + c = 0$$

$$= h\,\Phi_D(y^*) - p[1-\Phi_D(y^*)] + c = 0 \quad \cdots \text{I}$$

$$\therefore \Phi_D(y^*) = \frac{p-c}{h+p} \quad \cdots \text{B}$$

y^* es la solución a la ec. B

Política:

Ordenar y^*-x, si $y^*-x>0$

No ordenar si $y^*-x<0$

Es interesante observar la forma gráfica de $E\{C(y)\}$

DE I

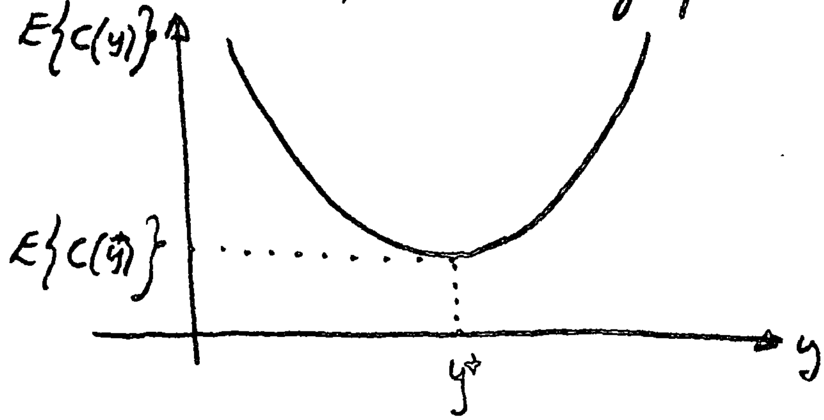
$$\lim_{y\to 0} \frac{dE\{C(y)\}}{dy} = \lim_{y\to 0}\{h\,\Phi_D(y) - p[1-\Phi_D(y)] + c\}$$

$$= -p+c < 0 \quad \text{ya que } c<p$$

$$y \lim_{y\to\infty} \frac{dE\{C(y)\}}{dy} = \lim_{y\to\infty} \{ h\,\Phi_D(y) - p[1-\Phi_D(y)] + c \}$$ (32)

$$= h + c > 0$$

Por lo tanto, la representación gráfica es



Notación:

$$y^* = S$$

$$L(y) = p\int_y^\infty (\xi - y)\varphi_D(\xi)d\xi + h\int_0^y (y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi$$

Modificación a las restricciones:

$K > 0$

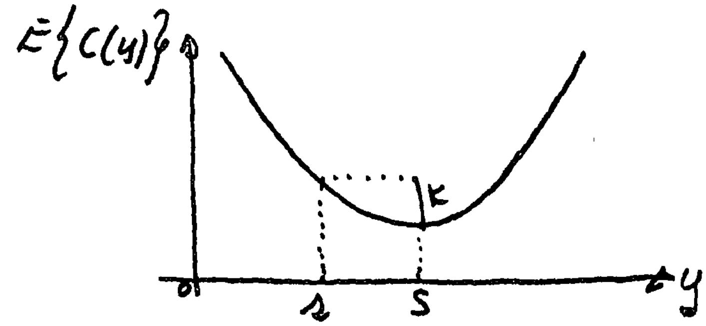
Ahora:

$$E\{C(y)\} = K + c(y-x) + p\int_y^\infty (\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi + h\int_0^y (y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi$$

Utilizando la última notación:

$$E\{C(y)\} = \begin{cases} K + c(y-x) + L(y) & \text{si } y > x \\ L(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

De la fig. 1



Definición:

Sea s el menor valor de "y" para el cual

$$cs + L(s) = K + cS + L(S)$$

Tenemos varios casos:

Si $x > S$ no ordenar, como concluimos en la pág 31

Si $s \leq x \leq S$, para cualquier $y > x$

$$K + cy + L(y) \geq cx + L(x)$$

por lo tanto, es más barato no ordenar.

Si $x < s$

$$K + cS + L(S) < cx + L(x)$$

entonces, es conveniente ordenar hasta S.

Política óptima:

si $x < s$ ordene hasta S

si $x \geq s$ no ordene,

donde S es la solución a la ecuación $\Phi(S) = \dfrac{p-c}{p+h}$

y s es el menor valor de y para el cual

$$cs + L(s) = K + cS + L(S)$$

Aproximación útil para cuando la demanda sigue una distribución exponencial.

$$S = \lambda \ln\left(\frac{h+p}{h+c}\right)$$

$$\Delta = S - s = \sqrt{\frac{2\lambda K}{c+h}} \qquad \text{condición} = \frac{\Delta}{\lambda} \simeq 0$$

donde λ es el parámetro de la distribución.

Ejemplo: Supongamos que la demanda de un juguete en un almacén sigue una distribución exponencial. Los juguetes pasan de moda cada año, por lo que queremos determinar el nivel de inventario al inicio del periodo anual.

Los costos unitarios del inventario son:

por mantenimiento = \$ 0.3, por faltante \$ 1.5, precio de compra = \$1.0 y el costo por ordenar = \$ 15.0

Determinar el nivel de inventario inicial que haga máximo el valor esperado de la ganancia por ventas.

Solución:

Ya que $\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{25} e^{-\xi/25} & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$

y $h = 0.3$, $p = 1.5$, $c = 1$, $K = 15$

tenemos, aplicando la aproximación,

$$S = \lambda \ln\left(\frac{h+p}{h+c}\right) = 25 \ln\left(\frac{0.3+1.5}{0.3+1}\right) \simeq 8$$

$$\Delta = S - s = \sqrt{\frac{2\lambda K}{c+h}} = \sqrt{\frac{2(25)(15)}{1.3}} = 7.6 \simeq 7 \qquad \therefore s = 1$$

Política

si $x = 0$ ordene 8

si $x \geq 1$ no ordene.

centro de educación contínua
facultad de ingeniería, unam

OPTIMIZACION Y CONTROL DE INVENTARIOS

ING. ENRIQUE NOVELO

febrero de 1973

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

En algunos procesos de producción la diferencia entre el costo por producir el máximo número de artículos permitidos por la capacidad instalada y el costo por producir un número menor de artículos que ese máximo, es insignificante; o sea, conviene ordenar por paquetes (batches)

Consideremos los siguientes costos en el modelo a un periodo:

$K=0$

Por mantenimiento de inventario $h(y-D)=\frac{3}{10}(y-D)$

Por faltantes $p(D-y)=\frac{3}{2}(D-y)$

La función de densidad de la demanda está dada por:

$$\varphi_D(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{25}e^{-\xi/25} & \text{si } \xi\geq 0\\ 0 & \xi<0\end{cases}$$

Debemos ordenar en paquetes de 50 artículos y la entrega es instantánea

Si x es el nivel de inventario inicial y no ordenamos; $y=x$

Si se ordena un paquete, entonces $y=x+50$

Sea $E\{C(y)\}$ el costo total esperado cuando hay "y" artículos disponibles para el periodo, cuando ya hemos recibido la orden,

$$E\{C(y)\}=h\int_0^y(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi+p\int_y^\infty(\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi$$

Sustituyendo los costos del enunciado del problema

$$E\{C(y)\} = \frac{3}{10}\int_0^y (y-z)\,\frac{e^{-z/25}}{25}\,dz + \frac{3}{2}\int_y^\infty (z-y)\,\frac{e^{-z/25}}{25}\,dz$$

$$= \frac{3}{10}\left(-y e^{-z/25} + z e^{-z/25} + 25 e^{-z/25}\right)\Big|_0^y +$$

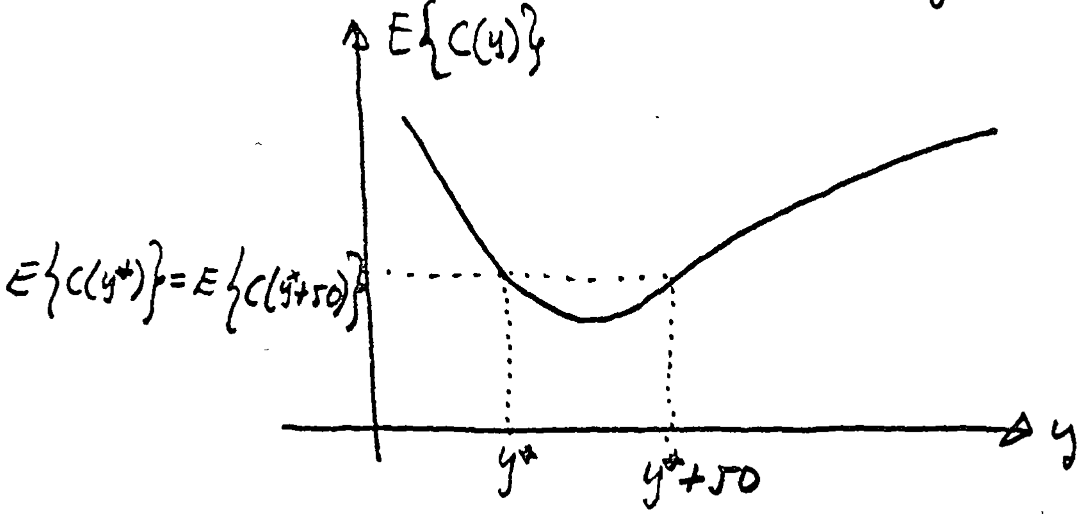
$$+ \frac{3}{2}\left(-z e^{-z/25} - 25 e^{-z/25} + y e^{-z/25}\right)\Big|_y^\infty =$$

$$= 45 e^{-y/25} + \frac{3}{10}y - \frac{15}{2}$$

Para cualquier nivel de inventario es necesario comparar

$E\{C(y)\}$ y $E\{C(y+50)\}$ y decidir

si se ordena. El nivel óptimo y^* se representa como



Por lo tanto:

$$E\{C(y^*)\} = E\{C(y^*+50)\}$$

$$\frac{3}{10}y^* + 45 e^{-y^*/25} = \frac{3}{10}y^* + 45 e^{-2} e^{-y^*/25} + 30$$

$$\therefore\ y^* = 23.8 \simeq 24$$

La política óptima es:

si $x < 24$ ordene un paquete (50 artículos)

si $x \geq 24$ no ordene

De la figura anterior puede verse que el costo total esperado si ordenamos más de un paquete no es óptimo.

Cambio a las restricciones:

$K = 0$

Los costos por mantenimiento de inventario y por faltantes no son funciones lineales.

Solución:

Si los costos por mantenimiento de inventario se representan como

$$\begin{cases} h(y-D) & \text{si } y \geq D \\ 0 & y < D \end{cases}$$

donde $h(\cdot)$ es una función no lineal

y los costos por faltantes

$$\begin{cases} p(D-y) & \text{si } D \geq y \\ 0 & D < y \end{cases}$$

donde $p(\cdot)$ es una función no lineal

Entonces

$$E\{C(y)\} = c(y-x) + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_y^\infty p(\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi$$

$$y \quad L(y) = \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_y^\infty p(\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi$$

$$\therefore \quad E\{C(y)\} = c(y-x) + L(y)$$

Política óptima: Si $L(y)$ es estrictamente convexa (una condición suficiente es que $h(\cdot)$, $P(\cdot)$ sean cada una convexa y $\varphi_D(\xi) > 0$), la política óptima está dada por

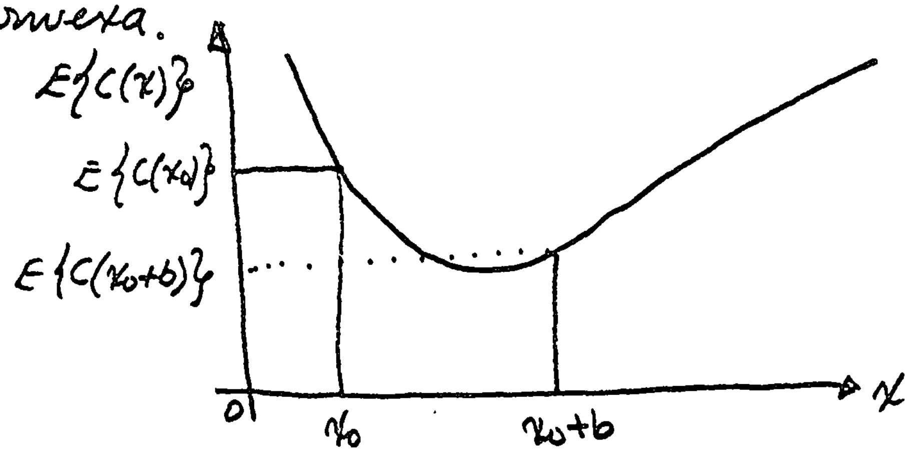
ordene hasta y^* si $x < y^*$, ordene $y^* - x$

no ordene   si $x \geq y^*$

donde y^* es el valor de "y" que satisface a la ecuación

$$\frac{dL(y)}{dy} + c = 0$$

Problema: Supongamos que las órdenes deben ser en paquetes de tamaño b; o sea, ordene $b, 2b, 3b, \ldots$ Además, para una cantidad fija x, de inventario existente, los costos esperados están dados por $E\{C(x)\}$, función convexa.



Si se ordenan b artículos, los costos esperados están dados por $E\{C(x+b)\}$. Por ejemplo, si $x = x_0$ y no se ordena, el costo esperado es $E\{C(x_0)\}$, como aparece en la figura. Si se ordenan b artículos, el costo esperado $E\{C(x_0+b)\}$. Según la figura, resulta más conveniente ordenar b artículos. Describir la política óptima para poner las órdenes.

Solución: y^* será el valor para el cual $E\{C(x)\}$ es mínimo.

Si $x \geq y^*$ no ordene

si $x < y^*$ encuentre los valores adyacentes tales que $y^* \in [x + k^*b, x + (k^*+1)b]$

Mediante prueba y error, calcule el valor $k \in [k^*, k^*+1]$ que de el menor valor de $E\{C(\cdot)\}$. Entonces, ordene kb.

Modelo a dos periodos

Supongamos que tenemos dos corridas de producción antes de que la parte o artículo resulten obsoletos. La solución no es utilizar la política óptima para un período dos veces. El problema de encontrar los niveles óptimos que permitan describir una política óptima de inventario se resolverá utilizando la metodología de la programación dinámica.

Restricciones:

$K=0$

producción inmediata

Se permiten faltantes al final del primer periodo.

Notación: c, h, p (funciones lineales)

D_1, D_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que representan las demandas en el primer y segundo periodos, respectivamente. Así definidas, $D_1 = D_2 = D$.

$\varphi_D(\xi)$ función de densidad de la demanda

$C_1(x_1)$ costo de seguir una política óptima cuando aún falta una etapa en el horizonte y existen x_1 artículos en inventario.

$C_2(x_2)$ costo de seguir una política óptima cuando aún faltan dos etapas en el horizonte y existen x_2 artículos en inventario.

y_1^* nivel de inventario óptimo cuando falta una etapa en el horizonte.

y_2^* nivel de inventario óptimo cuando faltan dos etapas en el horizonte.

Solución:

Para la última etapa, y_1^* se determina de

$$\Phi_D(y^*) = \frac{p-c}{h+p} \qquad (\text{pág } 31)$$

Política óptima

$$\begin{array}{lll} \text{ordene } y_1^* - x_1 & \text{si} & x_1 < y_1^* \\ \text{no ordene} & \text{si} & x_1 \geq y_1^* \end{array}$$

donde x_1 es una variable aleatoria que depende del nivel de inventario al inicio del primer periodo y de la demanda (variable aleatoria) durante el mismo; o sea $x_1 = y_2 - D_2$

De ahí que

$$C_1(x_1) = C_1(y_2 - D_2) = \begin{cases} L(y_2 - D_2) & y_2 - D_2 \geq y_1^* \\ c(y_1^* - y_2 + D_2) + L(y_1^*) & \text{si } y_2 - D_2 < y_1^* \end{cases}$$

donde: (pág 32)

$$L(y) = p\int_y^\infty (\xi - y)\,\varphi_D(\xi)\,d\xi + h\int_0^y (y-\xi)\,\varphi_D(\xi)\,d\xi$$

Por lo tanto:

$$E\{C_1(x_1)\} = \int_0^{y_2 - y_1^*} L(y_2 - \xi)\,\varphi_D(\xi)\,d\xi + \int_{y_2 - y_1^*}^\infty \left[c(y_1^* - y_2 + \xi) + L(y_1^*)\right]\varphi_D(\xi)\,d\xi$$

Para los dos periodos tenemos

$$E\{G_2(x_2)\} = \min_{y_2 \geq x_2} \left\{ c(y_2 - x_2) + L(y_2) + E\{G_1(x_1)\} \right\}$$

Ya que $c(y_2 - x_2) + L(y_2) + E\{G_1(x_1)\}$ es una función estrictamente convexa, existe un mínimo único, y_2^*.

La política óptima es:

Al principio del primer periodo

ordene hasta y_2^* ordene $(y_2^* - x_2)$ si $x_2 < y_2^*$

no ordene si $x_2 \geq y_2^*$

Al principio del segundo periodo

ordene hasta y_1^* ordene $(y_1^* - x_1)$ si $x_1 < y_1^*$

no ordene si $x_1 \geq y_1^*$

Ejemplo: Los costos unitarios de un artículo son: por producción \$10.0; por mantenimiento en inventario, \$10.0 y por faltante, \$15.0. Además, son independientes del nivel de inventario (funciones lineales).

Si la demanda en cada período sigue la función de densidad

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \le \xi \le 10 \\ 0 & \xi < 0,\ \xi > 10 \end{cases}$$

Determinar la política óptima de inventario a dos períodos.

Solución:

Datos: $c = 10,\ h = 10,\ p = 15$ y $\Phi_D(y) = \int_0^y \frac{1}{10} d\xi = \frac{y}{10}$

Para encontrar y_1^* tenemos

$$\Phi_D(y_1^*) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{15-10}{15+10} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{y_1^*}{10} = \frac{1}{5} \qquad y \quad y_1^* = 2$$

Los costos por faltantes o sobrantes, dado un nivel inicial "y", en cualesquiera de los dos periodos, están dados por

$$L(y) = \int_0^y h(y-\xi)\,\varphi_D(\xi)\,d\xi + \int_y^\infty p(\xi-y)\,\varphi_D(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_0^y 10(y-\xi)\frac{1}{10}\,d\xi + \int_y^{10} 15(\xi-y)\frac{1}{10}\,d\xi$$

$$= 75 - 15y + \frac{5}{4}y^2$$

El costo esperado a un periodo es:

$$E\{C_1(x_1)\} = \int_0^{y_2-y_1^*} L(y_2-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_{y_2-y_1^*}^{\infty} [c(y_1^*-y_2+\xi)+L(y_1^*)]\varphi_D(\xi)d\xi$$

$$= \int_0^{y_2-2} \left[75-15(y_2-\xi)+\frac{5}{4}(y_2-\xi)^2\right]\frac{1}{10}d\xi \; +$$

$$+ \int_{y_2-2}^{10} \left[10(2-y_2+\xi)+75-15(2)+\frac{5}{4}(2)^2\right]\frac{1}{10}d\xi =$$

$$= \int_0^{y_2-2} \left[75-15(y_2-\xi)+\frac{5}{4}(y_2-\xi)^2\right]\frac{1}{10}d\xi + \int_{y_2-2}^{10}[70-10(y_2-\xi)]\frac{1}{10}d\xi =$$

$$= \frac{(y_2)^3}{24} - \frac{(y_2)^2}{4} - \frac{19y_2}{2} + \frac{359}{3}$$

El costo esperado a dos periodos se encuentra de la expresión:

$$E\{C_2(x_2)\} = \min_{y_2 \geq x_2} \{c(y_2-x_2)+L(y_2)+E\{C_1(x_1)\}\}$$

$$= \min_{y_2 \geq x_2} \left\{10(y_2-x_2)+75-15y_2+\frac{5}{4}(y_2)^2+\frac{(y_2)^3}{24}-\frac{(y_2)^2}{4}-\frac{19}{2}y_2+\frac{359}{3}\right\}$$

$$= \min_{y_2 \geq x_2} \left\{-10x_2+\frac{(y_2)^3}{24}+(y_2)^2-\frac{29}{2}y_2+\frac{584}{3}\right\} \quad \ldots \text{I}$$

Para encontrar y_2^*

$$\frac{d\{\ \}}{dy_2} = \frac{1}{8}(y_2^*)^2 + 2y_2^* - \frac{29}{2} = 0$$

$$y_2^* = 5.42$$

Sustituyendo en (I) los valores redondeados $y_2^* = 5$ y $y_2^* = 6$, resulta que el valor mínimo de $E\{C_2(x_2)\}$ es para $y_2^* = 5$.

Por lo tanto, la política óptima es

Al inicio del primer período

ordene $5 - x_2$ si $x_2 < 5$

no ordene si $x_2 \geq 5$

y al inicio del segundo período

ordene $(2 - x_1)$ si $x_1 < 2$

no ordene si $x_1 \geq 2$

Definición:

Tasa anual de descuento, α, es la relación entre el valor actual del dinero al valor actual del dinero más la tasa de retorno anual del mismo; ejemplo: para una tasa de retorno anual de 0.04/peso, entonces, $\alpha = \frac{1}{1+0.04} = \frac{1}{1.04} = 0.961$

Modificación al modelo a dos periodos.

si $\alpha > 0$

Entonces

$$E\{C_2(x_2)\} = \min_{y_2 \geq x_2} \{C(y_2 - x_2) + L(y_1) + \alpha E\{C_1(x_1)\}\}$$

y la política óptima es la misma que la descrita en la pág. 42.

Del ejemplo anterior, si $\alpha = 0.75$

$$C_2(x_2) = \min_{y_2 \geq x_2} \left\{10(y_2 - x_2) + 75 - 15y_2 + \frac{5}{4}y_2^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{(y_2)^3}{24} - \frac{(y_2)^2}{4} - \frac{19y_2}{2} + \frac{359}{3}\right)\right\}$$

$\therefore$ resolviendo para y_2^*, como en la página anterior, encontramos que $y_2^* = 5$

Política óptima

Al inicio del primer periodo

ordene $5 - x_2$ si $x_2 < 5$

no ordene si $x_2 > 5$

al inicio del segundo periodo

ordene $(2 - x_1)$ si $x_1 < 2$

no ordene si $x_1 \geq 2$

Modelo a n periodos

Restricciones:

Producción inmediata.

Se permiten artículos faltantes al inicio de cada periodo, los cuales hay que reponer, excepto en el último periodo, donde, si se presentan faltantes, se pierde la venta.

Las demandas para los n periodos son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, cuya función de densidad es $f_D(\xi)$

Los costos por producción o compra son una función lineal.

$L(y)$, función lineal de los costos por faltantes o sobrantes, estrictamente convexa.

α factor de descuento, $0<\alpha<1$

Notación:

$E\{C_n(x_n)\}$ costo esperado de seguir una política óptima cuando faltan n etapas en el horizonte y existen x_n artículos disponibles.

$E\{C_{n-1}(x_{n-1})\}$ igual al anterior ; $n-1$ etapas y x_{n-1} artículos disponibles.

$\vdots$

$E\{C_1(x_1)\}$ una etapa y x_1 artículos disponibles.

Al principio de la n-ésima etapa se decide ordenar $y_n - x_n$, si $y_n \geq x_n$ a un costo esperado

$$E\{C_n(x_n)\} = c(y_n - x_n) + L(y_n)$$

La cantidad disponible al inicio de la etapa $n-1$ es una variable aleatoria que es función de la demanda durante la etapa n y depende de y_n; o sea, es igual a $y_n - D_n$.

El costo esperado mínimo de seguir una política óptima, incluido el factor de descuento, desde el inicio de la etapa $n-1$ en adelante es

$$\alpha\, E\{C_{n-1}(x_{n-1})\} = \alpha\, E\{C_{n-1}(y_n - D_n)\} = \alpha \int_0^\infty C_{n-1}(y_n - \xi)\,\varphi_D(\xi)\,d\xi$$

Así

$$E\{C_n(x_n)\} = \min_{y_n \geq x_n} \{c(y_n - x_n) + L(y_n) + \alpha\, E\{C_{n-1}(y_n - D_n)\}\}$$

donde $C_0(x_0) = 0$; no hay valor de recuperación para los artículos sobrantes al finalizar los n períodos.

Este modelo tiene las siguientes características:

1) La política óptima para ordenar en cada período es un número crítico, $y_n^*, y_{n-1}^*, \ldots, y_2^*, y_1^*$

2) $y_1^* \leq y_2^* \leq \ldots \leq y_{n-1}^* \leq y_n^* \leq \ldots \leq y^*$

donde y^* satisface

$$L'(y^*) + c(1-\alpha) = 0$$

3) Para cada valor de x, la sucesión $E\{C_n(x)\}$ converge. (49)
De ahí que podamos definir una función

$$E\{C(x)\} = \lim_{n\to\infty} E\{C_n(x)\}$$

4) La función límite, $E\{C(x)\}$, satisface la ecuación

$$E\{C(x)\} = \min_{y\geq x}\left\{ c(y-x) + L(y) + \alpha\int_0^\infty C(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi \right\}$$

5) El valor de "y" que satisface a la ecuación anterior es el $\max(y^*, x)$, donde y^* se obtiene de

$$L'(y^*) + c(1-\alpha) = 0$$

6) $\lim_{n\to\infty} y_n^* = y^*$

7) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{y^* - y_n^*}{\alpha^n} \right| \leq \frac{2c}{L''(y^*)}$ (Rapidez en la convergencia de y_n^* a y^*)

De lo anterior y suponiendo que $y > x$, el costo total esperado para las n etapas es

$$E\{C_n(x)\} = c(y-x) + L(y) + \alpha[cD_1 + L(y)] + \alpha^2[cD_2 + L(y)] + \cdots + \alpha^j[cD_j + L(y)] + \cdots$$

La política será entonces ordenar en cada periodo hasta "y"; la cantidad por ordenar depende de la demanda durante el periodo anterior al considerado.

Para encontrar y^*,

$$E\{C_n(x)\} = cy - cx + L(y)[1+\alpha+\alpha^2+\cdots] + cE\{D\}\alpha[1+\alpha+\alpha^2+\cdots]$$

$$= cy - cx + \frac{L(y)}{1-\alpha} + \frac{cE\{D\}\alpha}{1-\alpha}$$

y minimizando $E\{C_n(x)\}$

$$\frac{dE\{C_n(x)\}}{dy} = c + \frac{L'(y)}{1-\alpha}$$

$$\therefore L'(y^*) + c(1-\alpha) = 0 \qquad \cdots (A)$$

y^* es la solución a la ecuación A.

Ejemplo: Determinar la política óptima de inventario para el siguiente modelo con un número infinito de periodos. Los costos unitarios asociados al inventario son: por mantenimiento en inventario, \$0.3; por faltante, \$1.5 y por producción o compra, \$1.0. El factor de descuento se considera 0.9.

La función de densidad de la demanda es

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{25} e^{-\xi/25} & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

Solución:

Datos

$c = 1 \quad h = 0.3 \qquad \varphi_D(\xi) = \frac{1}{25} e^{-\xi/25} \qquad \Phi_D(\xi) = 1 - e^{-\xi/25}$

$p = 1.5 \quad \alpha = 0.9$

Para determinar y^* deberemos resolver la ecuación

$$L'(y^*)+c(1-\alpha)=0 \qquad \ldots(A)$$

Primero

$$L(y)=\int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi+\int_y^\infty p(\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi$$

$$=0.3\int_0^y (y-\xi)\frac{1}{25}e^{-\xi/25}d\xi+1.5\int_y^\infty(\xi-y)\frac{1}{25}e^{-\xi/25}d\xi$$

$$L'(y)=0.3\int_0^{y^*}\frac{1}{25}e^{-\xi/25}d\xi-1.5\int_{y^*}^\infty\frac{1}{25}e^{-\xi/25}d\xi$$

$$=0.3\left[\Phi_D(y^*)\right]-1.5\left[1-\Phi_D(y^*)\right]$$

$$=0.3\left[1-e^{-y^*/25}\right]-1.5\left[1-(1-e^{-y^*/25})\right]$$

$$=0.3-0.3e^{-y^*/25}-1.5e^{-y^*/25}$$

Sustituyendo en la ecuación A

$$0.3-0.3e^{-y^*/25}-1.5e^{-y^*/25}+0.1=0$$

$$\therefore\quad y^*=-25\ln\left(\frac{0.4}{1.8}\right)=-25\ln(0.222)=-25(-1.5)=37.52$$

$$y^*\simeq 38$$

Política óptima

En cada periodo

si $x<38$ ordene hasta 38 ; ordene $38-x$

si $x\geq 38$ no ordene

Cambio en las restricciones.

El tamaño de las órdenes debe ser múltiplo de Q, una cantidad fija no negativa. Podremos ordenar $Q, 2Q, 3Q, \ldots$

Q puede representar un paquete de artículos, la carga de una góndola de ferrocarril, la capacidad de la caja de un camión de volteo, etc.

Se permiten faltantes al final de cada periodo. Además, hay un valor de recuperación de los artículos sobrantes al final del periodo n-ésimo. Se considera el valor de recuperación igual al precio "c" de compra o producción.

La política (k, Q) es óptima y se describe como sigue:

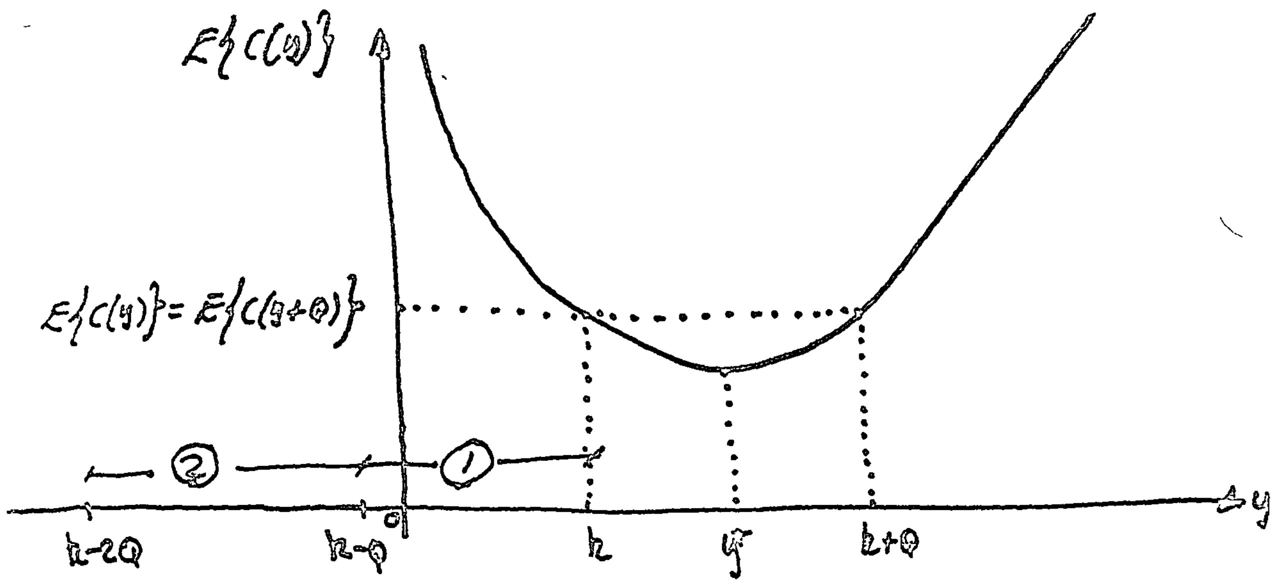
"Si al inicio de un periodo el nivel de inventario existente es menor que k, debe ordenarse el menor múltiplo de Q que lleve al nivel de inventario al menos a k (o probablemente mayor); de otra manera, no ordene. El mismo parámetro k se utiliza en todos los periodos."

El parámetro k se escoge de la siguiente manera:

Sea y^* el mínimo de

$$E\{C(y)\} = (1-\alpha)cy + L(y)$$, función convexa.

k es cualquier número para el cual $k \le y^* \le k+Q$ y $E\{C(y)\} = E\{C(y+Q)\}$, como se representa en la figura siguiente.



Como comentario, si el nivel de inventario al inicio de un periodo cualquiera está en el intervalo ①, el tamaño de la orden es k; si el nivel de inventario inicial está en el intervalo ②, el tamaño de la orden es $2Q$, etc.

Ejemplo: Considere el modelo presentado en la pág. 35 para un infinito número de periodos y $\alpha = 0.95$.
La política óptima (k, Q) puede determinarse de la siguiente manera:

Datos: $\alpha = 0.95$ $\qquad \varphi_D(\xi) = \frac{1}{25} e^{-\xi/25}$

$h = \frac{3}{10}$ $\qquad c = 0$

$p = \frac{3}{2}$ $\qquad Q = 50$

Solución:

$$E\{C(y)\} = (1-\alpha)cy + L(y)$$
$$= 45\, e^{-y/25} + \frac{3}{10} y - \frac{15}{2}$$

$$\frac{d\,E\{C(y)\}}{\partial y} = -\frac{9}{5}e^{-y/25} + \frac{3}{10} = 0$$

$$\therefore \quad y^* = 25 \ln 6 = 44.8$$

De la pág. 35

$$E\{C(k)\} = E\{C(k+50)\}$$

$$k = 23.8 \quad y \quad k+50 = 73.8$$

Como $y^* = 44.8$ está en el intervalo $[23.8, 73.8]$, la política óptima es:

Si $x < 24$, ordene 50 unidades

si $x \geq 24$ no ordene.

Modelos de inventarios para varios productos.

Si la demanda y los costos de cada uno de los productos son independientes de la demanda y los costos de los demás productos, y lo mismo es verdadero para todos los productos, pueden utilizarse los modelos desarrollados anteriormente.

Si existen N productos diferentes, deberán resolverse N modelos de un producto, de acuerdo con las características de cada sistema de inventarios.

Si el sistema de inventarios no cumple con la condición citada pueden encontrarse los modelos apropiados en las referencias que se presentan en la primera página de estas notas de clase.

Clara Zommer

Introducción de las Cadenas de Markov

Considere un sistema que puede tomar los estados En (n= 0, 1, 2, 3 ...); los cambios de estado no pueden producirse más que en los tiempos o, 1, 2, ..., i, ...

Sea p_n (i) la probabilidad del estado En en el tiempo i. El conjunto de probabilidades pn (i) que corresponde al tiempo i será un vector cuya dimensión es igual al número de estados posibles (finito o infinito) del sistema. Por la definición de probabilidad

$$\{p\ (i)\} = [po(i)\quad p_1(i)\ \ldots\ pn\ (i)] \tag{1}$$

$$0 \leq p_n\ (i) \leq 1 \qquad n= 0,1,2\ldots \tag{2}$$

$$\sum_n p_n\ (i) = 1 \tag{3}$$

El vector mostrado en (1) es un vector estocástico y en este caso es un "vector de estado" del sistema.
Suponga ahora que la transición de un estado a otro depende solamente de esos 2 estados. O sea, que a todo par (En,En') es posible vincular una probabilidad condicional Pnn', que es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado n' en el tiempo i+1, dado que estaba en el estado n en el tiempo i.
Las probabilidades iniciales pn (o) se suponen conocidas.
Una "cadena de Markov" está representada por las ecuaciones:

$$Pn'\ (i+1) = \sum_n P_n\ (i)\ pnn' \tag{4}$$

$$n' =),\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

o por

$$\left[p\ (i+1)\right] = \left[p\ (i)\right]\ \left[\mathcal{T}\right] \qquad (5)$$

en donde la matriz cuadrada está formada por los elementos pnn' tales que:

$$0 \leq p_{nn'} \leq 1 \qquad (6)$$

$$\sum_{n'} p_{nn'} = 1 \qquad (7)$$

para todo n

Una matriz que tiene las propiedades (6) y (7) es una matriz estocástica(a veces se llama matriz de transición) y cada una de sus líneas es un vector estocástico. Las probabilidades pnn' se llaman "probabilidades de transición".

Una cadena de Markov está definida completamente mediante la matriz estocástica $\left[\mathcal{T}\right]$ y el conjunto de las probabilidades de estado iniciales p_nCo)

La matriz de transición $\left[\mathcal{T}\right]$ puede depender del tiempo, es decir, que las probabilidades de transición pnn' pueden ser funciones de i, en la siguiente forma:

$$p_{nn'}\ (i=1) = \sum_{n} pn\ (i)\ \ p_{nn'}\ (i) \qquad (8)$$

las p_n (o) y las pnn' (i) están dadas de antemano . A una cadena de este tipo se le llama "no estacionarios". La presencia dentro de la matriz de transición de un elemento pnn' no nulo indica que la transición En $\longrightarrow$ En' es posible. El conjunto de las transiciones posibles se puede representar en forma grá fica mediante una red. Los nudos de la misma representan los estados En y están unidos mediante arcos orientados que representan transiciones.

Propiedades de las Matrices Estocásticas

Matriz y ecuación dinámica

Sea

$$[\mathcal{P}] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \end{bmatrix} \qquad (9)$$

La matriz $[\mathcal{D}] = [\mathcal{P}] - [1]$, en donde $[1]$ es la matriz unidad del mismo orden que $[\mathcal{P}]$, se llama "matriz dinámica". Los elementos de $[\mathcal{D}]$ serán representados con dnn'.

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} p_{00}-1 & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11}-1 & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22}-1 & \cdots \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Esta matriz es tal que:

$$0 \leq d_{nn'} \leq 1 \quad (n \neq n''),$$

$$-1 \leq \underline{d_{nn}} \leq 0, \quad \sum d_{nn'} = 0$$

La ecuación (5) se puede escribir

$$[p(i+1)] - [p(i)] = [p(i)]\,[\mathcal{D}] \qquad (11)$$

representada bajo la forma de una ecuación matricial en diferencias finitas.

Propiedades y estructuras de las matrices estocásticas:

1° Si $[\mathcal{P}]$ es una matriz estocástica, $[\mathcal{P}]^i$, i = 1,2,... también lo es.

2°Si todas las líneas de $[\mathcal{T}]$ son idénticas, entonces:

$$[\mathcal{T}]^{i} = [\mathcal{T}] \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots. \tag{12}$$

3°Si $[\mathcal{T}]$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \tag{13}$$

en donde A y D son submatrices cuadradas, el sistema que se inicia en un estado contenido en A, no puede encontrarse jamás en un estado incluido en D y recíprocamente. La matriz $[\mathcal{T}]$ es "reducible" y los dos conjuntos de estados se dicen "aislador".

4°Si $[\mathcal{T}]$ tiene la forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ donde A y D son submatrices cuadradas, la probabilidad de que el sistema esté en uno de los estados de D, decrece monótonamente a medida que i crece. El paso de un estado D hacia un estado de A es posible, pero el paso contrario no puede realizarse. Los estados de D son "transitorios". Una propiedad correspondiente tiene lugar para toda matriz que tenga la forma simétrica de la precedente o sea $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ (15)

Estas formas se conservan cualquiera que sea la potencia entera positiva a la que se lleven estas matrices.
Se dirá en este caso también que la matriz $[\mathcal{T}]$ es reducible.

5°Si $[\mathcal{T}]$ tiene la forma $\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ (16

en donde las matrices cero son submatrices cuadradas todas las potencias pares de $[\mathcal{T}]$ darán matrices de la forma indicada en (13), y las potencias impares matrices de la forma indicada en (16). El sistema oscilará entre los entre los estados B y los de C; un sistema tal recibe el nombre de "periódico".

Propiedad ergódica en una Cadena de Markov.

Regimen transitorio

Esta propiedad permite poner en evidencia la posibilidad de un régimen límite o régimen permanente en un fenómeno estocástico estacionario.

Se demuestra que, si la matriz de transición $\left[\mathcal{C}\right]$ no es reducible y tampoco es periódica, entonces:

$$\lim_{i \to \infty} \left[p(i) \right] = \left[p(\infty) \right] = \left[p \right] \qquad (17)$$

en donde : p_n 0, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots.$
es decir que las probabilidades de estado tienden hacia valores límites p_o, p_1, p_2, .. independientes de la distribución inicial $\left[p\ (0) \right]$.

El sistema es así "estable en probabilidad", y se dice que tiene la "propiedad ergódica" . La matriz $\left[\mathcal{C}\right]$ correspondiente se dice "ergódica". Se asimilará esta noción a la que se encuentra introducida en dinámica cuando se pone en evidencia la presencia de un "régimen permanente".

Se llamará "régimen permanente" a aquel que corresponde al vector $\left[p\ (\infty) \right]$ en el caso en el cual el sistema tiene la propiedad ergódica. Cualquier otro régimen se llamará "transitorio". En el régimen transitorio, los vectores $\left[p\ (i) \right]$ (por valores discretos) o $\left[p\ (t) \right]$ (por valores continuos) son función del tiempo.

Este régimen permanente, cuando existe, se obtendrá resolviendo la ecuación matricial deducida en (5):

$$[p(\infty)] = [p(\infty)]\,[\mathcal{T}] \qquad (18)$$

o

$$[p(\infty)]\,[\mathcal{A}] = [0] \qquad (19)$$

Lamando pn, n = 0, 1, 2, 3 , las probabilidades pn ( ) del régimen permanente, se demuestra que, si la matriz $[\mathcal{T}]$ es ergódica, entonces

$$\lim_{i\to\infty} [\mathcal{T}]^i = \lim_{i\to\infty} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & \\ p_{20} & & \dots \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \end{bmatrix}$$

es decir que para i suficientemente grande, $[\mathcal{T}]^i$ está formada por líneas idénticas al vector límite p. Cualquiera que sea el vector inicial de $[p(0)]$ se obtiene siempre $[p(i)] = [p1\ p2\ p3\ \dots]$ para i suficientemente grande. Las ecuaciones en pn, n = 0, 1, 2, 3, ...:

$$(p)\,[\mathcal{A}] = [0], \qquad (21)$$

teniendo en cuenta la propiedad:

$$p0 + p1 + p2 + \dots = 1 \qquad (22)$$

constituyen un sistema de ecuaciones que tienen siempre una solución unica, si la matriz $[\mathcal{T}]$ es ergódica.

Regimen transitorio

El vector $[p(i)]$ puece calcularse mediante multiplicaciones matriciales sucesivas a partir de $[p(0)]$ y $[\mathcal{T}]$, según (5); por supuesto si se conocen las probabilidades de los estados en un instante $n < i$, puede utilizarse el mismo procedimiento de cálculo a partir de $[p(n)]$.

Se pueden utilizar también las propiedades y vectores de la matriz $[\mathcal{T}]$.

II Un ejemplo de aplicación de las Cadenas de Markov: "Banco de Datos"

En algunas ocasiones la distribución de probabilidad de la demanda no es conocida, generalmente se deriva de los datos históricos.
El "banco de datos" es un sistema de inventario en el cual las decisiones respecto al inventario están asociadas a la predicción de la demanda promedio. Así, en este caso, la predicción de la demanda es parte del sistema de inventarios.

Descripción del sistema de inventarios con banco de datos

La política de reemplazo de inventarios tiene que ver con el tiempo entre decisiones de reemplazo, y el nivel de inventario al momento de ordenar un nuevo reemplazo.

Cada t unidades de tiempo se toma una decisión respecto a reemplazo; para facilitar la discusión se hará $t = 1$.

La cantidad ordenada al tiempo i tiene los inventarios disponibles A_i a un "Banco" B_i.

no se permiten devoluciones.

La cantidad ordenada P_i (para reemplazar el inventario) es:

$$P_i = \max [B_i - A_i, 0] \qquad (1)$$

Se supondrá que t está fijada (no sujeta a control), e igual a 1 como se dijo antes.

La única variable sujeta a control es la variable B_i. (Generalmente esta no será la mejor política que se puede escoger).

B_i está compuesto de varias unidades de tiempo t por la demanda promedio

$$B_i = N \, \bar{S}_i \qquad (2)$$

donde:

N = número de unidades de tiempo en el banco de datos de inventario

$\bar{S}_i$ es la demanda promedio en la i-ésima unidad de tiempo

La demanda promedio $\bar{S}_i$ puede determinarse de varias maneras. Una de ellas es encontrar la demanda promedio del período i como el promedio de las demandas sobre el período de M unidades de tiempo que preceden al tiempo i. O sea:

$$\bar{S}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=i-M+1}^{i} S_j \qquad (3)$$

Los parámetros M y N especifican por completo la forma en que se tomarán las decisiones. Sean:

i = número del periodo que se analiza

Q_i = inventario a mano (en bodega) al comienzo del periodo i.

S_i = demanda en el periodo i

$\bar{S}$

q_i = inventario a mano (en bodega) al final del periodo i.

$\bar{S}_i$ = demanda promedio al final del periodo, de acuerdo a la ecuación (3)

A_i - inventario disponible al final del periodo i, antes de ordenar (cantidades a mano y ordenadas previamente & que aún no llegan).

R_i = orden que llega al inventario al final del periodo i, y que estaría disponible al comienzo del periodo $i+1$.

P_i = cantidad ordenada al final del periodo i, de acuerdo a la ecuación (1)

λ demora en unidades de tiempo

Otras relaciones entre las variables anteriores son:

$$q_i = Q_i - S_i \qquad (4)$$

$$A_i = \begin{cases} q_i & \text{si} \quad L = 0 \\ q_i + \sum_{j=i-L}^{i-1} s_i & \text{si} \quad L > 0 \end{cases} \qquad (5)$$

$$R_i = P_{i-L} \qquad (6)$$

$$Q_{i+1} = q_i + R_i \qquad (7)$$

Además:

I_1 = inventario promedio esperado por unidad de tiempo.

I_2 = escasez promedio esperada por unidad de tiempo.

I_3 = número de reemplazos promedio esperado por unidad de tiempo

Nuestro propósito es encontrar

$$I_1 = I_1(M, N) \;,\; I_2 = I_2(M, N) \;,\; I_3 = I_3(M, N)$$

y una vez que se conozcan esas funciones, la ecuación de costo esperado total del sistema por unidad de tiempo es:

$$C(M,N) = c_1 I_1(M,N) + c_2 I_2(M,N) + c_3 I_3(M,N) \qquad (8)$$

y esta última ecuación servirá para encontrar los M_o y N_o óptimos (los que minimizan el costo total esperado).

A continuación (Cuadro 1) se muestra un ejemplo con una demanda que varía entre 0 y 300 unidades, y en el cual la demora ~~cada~~ es 2 semanas y el tiempo entre ~~reemplazo~~ órdenes de reemplazo es 1 semana. $M = 4$ y $N = 6$

Cuadro 1: Banco de datos con $L = 2$, $M = 4$ y $N = 6$

i	Q_i	$\underline{S_i}$	q_i	$\bar{S}_i$	B_i	A_i	$B_i - A_i$	P_i	R_i
8		100							
9		100						100	
10		100	300					100	100
11	400	100	300	100	600	500	100	100	100
12	400	300	100	150	900	300	600	600	100
13	200	100	100	150	900	800	100	100	100
14	200	100	100	150	900	500	100	100	600
15	700	100	600	160	900	800	100	100	100
16	700	100	600	100	600	800	-200	0	100
17	700	200	500	125	750	600	150	150	100
18	600	0	600	100					0
19	600	100	500	100					150
2	750	100	550	100					

La utilización de reglas de decisión como las de las ecuaciones (1), (2) y (3) es práctica en sistemas de inventarios con muchos artículos. En ese caso no es fácil encontrar las distribuciones de demanda de todos los artículos.

La regla de decisión de la ecuación (3) tiene otra propiedad útil. Es posible que pueda detectar "tendencias" en la demanda si el parámetro M es relativamente pequeño. Sin embargo, un cambio aleatorio considerable en la demanda puede cambiar la demanda promedio $\bar{S}_i$ en forma tal que a consecuencia de esto, se tengan inventario o escaseces excesivas.

Para simplificar el análisis se ignorará la aparición de "tendencias" en la demanda y se supondrá que en el sistema la demora es cero y que la distribución de probabilidad de la demanda es conocida. La que se usará como ejemplo es la siguiente:

$$P(0) = 0.2, \quad P(100) = 0.7, \quad P(200) = 0.0, \quad P(300) = 0.1$$

donde la demanda promedio es 100.

<u>Primer</u> Caso: Valor Grande de M.

Si M tiende a infinito, entonces la ecuación (3) se reduce a

$$\bar{S}_i = \bar{S} = cte \qquad (9)$$

Por [illegible] el Primer B.° también será constante. Cada periodo empezará con una cantidad $N\bar{S}$ en inventario. Entonces

$$I_1(N) = \sum_{S=0}^{N\bar{S}} \left(N\bar{S} - \frac{S}{2}\right) P(S) + \sum_{S=N\bar{S}+1}^{\infty} \frac{(N\bar{S})^2}{2S} P(S) \qquad (10)$$

$$I_2(N) = \sum_{S=N\bar{S}+1}^{\infty} \frac{(S - N\bar{S})^2}{2S} P(S) \qquad (11)$$

$$I_3(N) = \sum_{S=1}^{\infty} P(S) = 1 - P(0) \qquad (12)$$

Para la distribución dada de probabilidad tenemos que:

N	1	2	3
I_1	56 667	151 667	250 000
I_2	6667	1.667	0.0
I_3	0 8	0.8	0 8

<u>Segundo Caso</u>: Cualquier M

Cuando M no es infinito, la cantidad Q a comienzo de cada periodo no es constante; la distribución de probabilidad de Q será E[Q]. Esta distribución depende en ~~gen~~ general de M y N o sea ~~[illegible]~~ E(Q; M, N).

Las ecuaciones (10) y (11) ~~y (12)~~ se escribirán ahora así:

$$I_1(M,N) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi_{max}} \left[\sum_{S=0}^{\varphi} \left(\varphi - \frac{S}{2}\right) P(S) + \sum_{S=\varphi+1}^{\infty} \frac{\varphi^2}{2S} P(S) \right]$$

$$G(\varphi, M, N) \qquad (13)$$

$$I_2(M,N) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi_{max}} \left[\sum_{S=\varphi+1}^{\infty} \frac{(S-\varphi)^2}{2S} P(S) \right] G(\varphi, M, N)$$

(14)

Note que

$$I_1(M,N) - I_2(M,N) = \bar{\varphi}(M,N) - \frac{\bar{S}}{2}$$

(15)

donde $\bar{\varphi}(M,N)$ es el inventario esperado al comienzo de cada período

La determinación de $I_3(M,N)$ no se puede hacer como extensión de la ecuación (12).

$$I_3(M,N) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi_{max}} \sum_{S=0}^{S_{max}} P(S)\, G(\varphi, M, N)\, B(\varphi, S)$$

(16)

donde $B(\varphi, S)$ es una función indicadora igual a 1 si hay reemplazo e igual a cero si no lo hay (v.g. si la cantidad a reemplazar es cero)

Solución por medio de cadenas de Markov

- Para encontrar la distribución $E(Q, M, N)$ y la función $B(Q, S)$ será conveniente definir ciertos estados del sistema de inventarios como estados de una Cadena de Markov.

Primer Caso: $M = 1$

En el Cuadro 2 se muestra un ejemplo en que $M = 1$ y $N = 2$.

Cuadro 2: Banco de datos con $L = 0$, $M = 1$, $N = 2$

i	Q_i	S_i'	r_i	S_i	B_i	A_i	$B_i - A_i$	P_i	R_i
1	200	100	100	100	200	100	100	100	100
2	200	300	-100	300	600	-100	700	700	700
3	600	100	500	100	200	500	-300	0	0
4	500	100	400	100	200	400	-200	0	0
5	400	100	300	100	200	300	-100	0	0
6	300	0	300	0	0	300	-300	0	0
7	300	100	200	100	200	200	0	0	0
8	200	100	100	100	200	100	100	100	100
9	200	0	200	0	0	200	-200	0	0
10	200	100	100	100	200	100	100	100	100

De la tabla mostrada en el Cuadro 2, se deduce que

$$Q_{i+1} = \max[2S_i, Q_i - S_i] \qquad (17)$$

o bien en la siguiente forma (de las ecuaciones (1) a (7)):

$$Q_{i+1} = q_i + R_i = q_i + P_i = q_i + \max[B_i - A_i, 0]$$
$$= q_i + \max[2\bar{S}_i - q_i, 0] = q_i + \max[2 S_i - q_i, 0]$$
$$= \max[2 S_i, q_i] = \max[2 S_i, Q_i - S_i] \quad (13)$$

La cantidad Q_{i+1} al comienzo del período $i+1$ depende solo de la cantidad al período previo i y la demanda S_i en ese período. La cantidad Q_i se puede asociar entonces con un estado j en una cadena de Markov. El sistema pasará del estado j (Q_i) al estado K (Q_{i+1}) con una probabilidad de transición $p_{jK} = P(S_i)$.

Para la distribución que se usa como ejemplo, las probabilidades de transición se muestran en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Probabilidades de transición p_{jK} para $M=1$ y $N=2$

Q	$j \backslash k$	1	2	3	4	5
200	1	0.9	0	0	0	0.1
300	2	0.7	0.2	0	0	0.1
400	3	0	0.7	0.2	0	0.1
500	4	0	0	0.7	0.2	0.1
600	5	0	0	0	0.7	0.3

Las probabilidades (estacionarias o de régimen permanente) del sistema de encontrarse en el estado r son las siguientes:

$$p_r = G\left[Q = 100(r+1) ; M=1, N=2\right] \qquad (19)$$

donde:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.9\,p_1 + 0.7\,p_2 \\ p_2 &= 0.2\,p_2 + 0.7\,p_3 \\ p_3 &= 0.2\,p_3 + 0.7\,p_4 \\ p_4 &= 0.2\,p_4 + 0.7\,p_5 \\ p_5 &= 0.1\,p_1 + 0.1\,p_2 + 0.1\,p_3 + 0.1\,p_4 + 0.3\,p_5 \end{aligned} \qquad (20)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

La solución del sistema de ecuaciones (20) se muestra en el Cuadro 4

Cuadro 4: Probabilidades de régimen permanente del Sistema para $M=1$ y $N=2$

Estado r	1	2	3	4	5
Cantidad Q	200	300	400	500	600
$p_r = G(Q; M=1, N=2)$	0.586	0.084	0.096	0.109	0.125

Para encontrar los valores de $B(Q, S)$ notamos que si $S=0$ no hay orden de reemplazo, por tanto $B(Q, 0) = 0$

Los valores que adquiere la función $B(Q, S)$ se muestran en el Cuadro 5

Cuadro 5: Función $B(Q, S)$ para $M=1, N=2$

S \ Q	200	300	400	500	600
0	0	0	0	0	0
100	1	0	0	0	0
300	1	1	1	1	1

Sustituyendo los valores de $E(Q, M, N)$ y $B(Q, S)$ en las ecuaciones (13), (14) y (16) obtenemos los valores $I_1(1,2)$, $I_2(1,2)$ y $I_3(1,2)$. Estos y otros valores de $I_i(M,N)$ $(i=1,2,3)$ se muestran en el Cuadro 6.

Cuadro 6: Valores de I_1, I_2, I_3 para $M=1$

N	1	2	3
I_1	91.189	261.277	464.100
I_2	5.289	0.977	0.
I_3	0.636	0.510	0.414

Segundo Caso: $M=2$.

Para $M=2$ y $N=2$ obtenemos a partir de las ecuaciones (1) a (7):

$$Q_{i+1} = q_i + R_i = q_i + P_i = q_i + \max[B_i - A_i, 0]$$

$$= q_i + \max[2(S_{i-1}+S_i)/2 - q_i, 0]$$

$$= \max[S_{i-1}+S_i, q_i]$$

$$Q_{i+1} = \max[S_{i-1}+S_i, Q_i - S_i] \qquad (21)$$

La transición de Q_i a Q_{i+1} depende, según la ecuación (21), de S_{i-1} y S_i. Este resultado sugiere definir una cadena de Markov como el par (S_{i-1}, Q_i) desde el cual se llegará al estado definido por el par (S_i, Q_{i+1}). Esta transición depende solamente de la ocurrencia de la demanda S_i cuya probabilidad conocemos. Los estados con sus correspondientes probabilidades de transición se muestran en el Cuadro 8 y en el cuadro 9.

Cuadro 7: El Sistema de Banco de Datos con $L = 0$, $M = 2$ y $U = 2$

i	Q_i	S_i	q_i	S_i	B_i	A_i	$B_i - A_i$	F_i	R_i
0		100							
1	200	300	-100	200	400	-100	500	500	500
2	400	0	400	150	300	400	-100	0	0
3	400	100	300	50	100	300	-200	0	0
4	300	100	200	100	200	200	0	0	0
5	200	0	200	50	100	200	-100	0	0
6	200	300	-100	150	300	-100	400	400	400
7	300	100	200	200	400	200	200	200	200
8	400	100	300	100	200	300	-100	0	0
9	300	100	200	100	200	200	0	0	0
10	200	100	100	100	200	100	100	100	100
11	200	100	100	100	200	100	100	100	100
12	200	0	200	150	100	200	-100	0	0
13	200	100	100	50	100	100	0	0	0
14	100	100	0	100	200	0	200	200	200
15	200	100	100	100	200	100	100	100	100
16	200	100	100	100	200	100	100	100	100
17	200	100	100	100	200	100	100	100	100
18	[illegible]	0	200	50	100	200	-100	0	0
19	[illegible]	100	100	50	100	100	0	0	0
20	[illegible]	100	0	100	200	0	200	200	200

Cuadro 8: Estados del sistema para M = 2

Estado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_{i-1}	0	0	0	0	0	0	100	100	100	100	100	300	300	300
q_i	100	200	300	400	500	600	100	200	300	400	500	300	400	600

Cuadro 9: Probabilidades de transición p_{jK} para M = 2 y N = 2

j \ K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.2	0	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0	0.1	0	0
2	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0	0.1	0	0
3	0	0	0.2	0	0	0	0.	0.7	0	0	0	0.1	0	0
4	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0	0	0.1	0	0
5	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0	0.1	0	0
6	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0.1	0	
7	0.2	0	0	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0	0.1	0
8	0	0.2	0	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0	0.1	0
9	0	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0	0.1	0
10	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0.1	0
11	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0	0	0.1	0
12	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0.1
13	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0.7	0	0	0	0.1
14	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0.7	0	0	0.1

Cuadro 10: Probabilidades de régimen estacionario para M = 2 y N = 2

Estado n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_{i-1}	0	0	0	0	0	0	100	100	100	100	100	300	300	300
q_i	100	200	300	400	500	600	100	200	300	400	500	300	400	600
P_n	0.024	0.13	0.023	[illegible]	0.002	0.002	0.096	0.451	0.074	0.041	0.009	0.020	0.070	0.010

La distribución de probabilidad $G(Q, M=2, N=2)$ se muestra en el Cuadro 11 y la obtenemos, como antes, a partir de las probabilidades de transición mostradas en el Cuadro 9, y las probabilidades de régimen estacionario mostradas en el Cuadro 10

Cuadro 11: La Distribución de Probabilidad $G(Q; M=2, N=2)$

Estados r	1,7	2,8	3,9,12	4,10,13	5,11	6,14
Q	100	200	300	400	500	600
$G[Q, M=2, N=2]$	0.120	0.564	0.117	0.176	0.011	0.012

La función $B(Q, S)$ no puede ~~calcularse~~ utilizarse en forma directa ~~de~~ en la ecuación (16). Se usará la ecuación (16) pero con cambio de variable, en la siguiente forma:

$$I_3(M, N) = \sum_{r=1}^{r_{max}} \sum_{S=0}^{S_{max}} P(S)\, \rho_r\, B(r, S) \qquad (22)$$

Los valores de la función $B(r, S)$ se muestran en el Cuadro 12

Cuadro 12: Función $B(r, S)$ para $M=2$ y $N=2$

S \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
300	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Con los valores de $G(CP, M, N)$; p_r y $B(r, S)$ se pueden calcular los valores de $I_1(2,2)$, $I_2(2,2)$, $I_3(2,2)$, los cuales aparecen junto con otros valores de I_1, I_2 e I_3 en el Cuadro 13

Cuadro 13: Valores de I_1, I_2, I_3 para $M = 2$

N	1	2
I_1	76.093	194.838
I_2	7.243	1.738
I_3	0.691	0.562

El Caso General:

El uso de Cadenas de Markov es generalmente difícil de aplicar. El número máximo de estados que se deben analizar está dado por

$$r_{max} \simeq \frac{M N_n^M}{(M, N)}$$

donde:

n = número de demandas distintas

(M, N) = máximo común divisor de M y N

En el caso de la distribución que usamos como ejemplo $n = 3$; luego para $M = 3$ y $N = 1$ $r_{max} = 81$; para $N = 2$ $r_{max} = 162$ y para $N = 3$ $r_{max} = 81$

En estos casos, puede resultar más sencillo utilizar otros métodos para encontrar la solución al sistema (e.g. simulación).

Referencia: E. Naddor, Inventory Systems. Ed. Wiley & Sons

SIMULACION DEL PROBLEMA DEL DISTRUIDOR DE VEHICULOS

Un distribuidor de vehículos quiere mejorar su política de inventarios comparando las utilidades esperadas por medio de un proceso de simulación.

El fabricante entrega los pedidos en un plazo de 25 ± 5 días (mínimo 20, máximo 30); y los pedido los realiza el distribuidor, por razones administrativas el primer día de cada mes.

El último pedido que admite el proveedor es en el quinto mes.

El distribuidor calcula gastos fijos de $150,000 anuales y un gasto de $30 diarios por cada vehículo que tiene en inventario. Los ingresos por venta son de $10,000 por vehículo en el primer mes y decrecen linealmente hasta $833 en el doceavo mes.

DEMANDA DE VEHICULOS

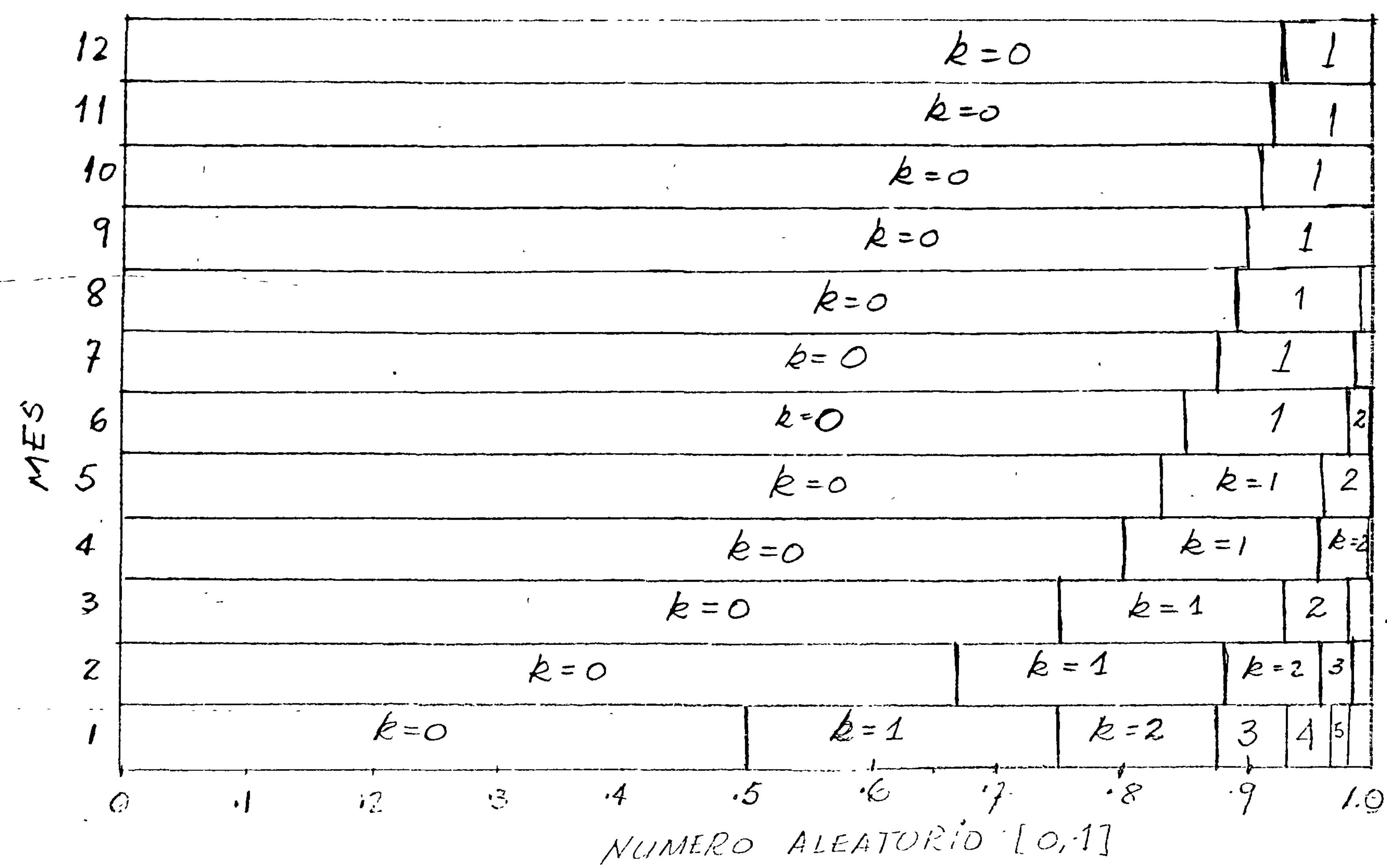
La demanda del número de vehículos (k) en un día del mes N está dado en términos probabilísticos por

$$P_N(k) = \frac{N}{(N+1)^{k+1}}$$

De acuerdo a lo anterior, las ventas mensuales esperadas son las siguientes

mes		unidades
1	—	30
2	—	15
3	—	10
4	—	7
5	—	6
6	—	5
7	—	4
8	—	4
9	—	3
10	—	3
11	—	3
12	-	2

* valores redondeados


MES
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
k=0
1
k=1
2
3
4
5
k=2
0
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1.0
NUMERO ALEATORIO [0,1]

POLITICA BASICA

a) La primera orden la hace con suficiente tiempo en el año anterior por la cantidad exacta que espera vender en el primer mes (30 unidades).

b) La siguiente orden la efectua a principios del mes 1 por una cantidad igual a la que espera vender en el mes 2 (15 unidades)

c) Las siguientes órdenes las hace también al principio de cada mes con la siguiente regla:

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad}\\ \text{ordenada}\\ \text{mes } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad}\\ \text{que espera}\\ \text{vender en}\\ \text{el mes } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad}\\ \text{que espera}\\ \text{vender en}\\ \text{el mes } i+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Exis-}\\ \text{tencia}\end{pmatrix}$$

d) En el quinto mes ordena de acuerdo a la regla anterior más las 19 unidades que espera vender en los meses 7 a 12.

EDUCACION CONTINUA
FI, UNAM.
Marzo 8, 1973

POLITICA BASICA

DISTRIBUIDOR DE VEHICULOS
RESULTADOS DE LA SIMULACION

AÑO	VENTAS	FALTANTES	EXISTENCIA	INGRESOS	COSTOS	UTILIDADES.	POLITICA BASICA
1	85	11	—	639,165	254,610	384,555	384,555
2	93	8	3	723,331	269,730	453,601	453,601
3	79	9	—	617,499	239,700	377,799	377,799
4	98	17	—	762,498	235,920	526,578	526,578
5	80	10	—	599,165	262,200	336,965	336,965
6	77	—	2	570,832	288,420	282,412	282,412
7	82	~~0~~	5	623,332	287,820	335,512	335,512
8	85	7	5	668,331	281,880	386,451	286,451
9	83	3	—	615,832	263,100	352,732	352,732
10	82	—	3	624,165	272,340	351,825	351,825

EDUCACION CONTINUA
FI, UNAM.
Marzo 8, 1973

DISTRIBUIDOR DE VEHICULOS
RESULTADOS DE LA SIMULACION

ALTERNATIVA I

SIMILAR A LA POLITICA BASICA Y ORDENA 5 ADICIONALES EN CADA ORDEN

AÑO	VENTAS	FALTANTES	EXISTENCIA	INGRESOS	COSTOS	UTILIDADES.	POLITICA BASICA	
1	92	1	—			367,751	384,555	(-)
2	93	4	11			418,464	453,601	(-)
3	83	4	0			348,382	377,799	(-)
4	104	7	—			554,914	526,578	(+)
5	87	3	3			334,528	336,965	(-)
6	78	—	7			240,025	282,412	(-)
7	82	—	10			284,512	335,512	(-)
8	90	2	10			385,158	286,451	≈
9	86	—	2			305,761	352,732	(-)
10	82	—	8			301,725	351,825	(-)

ALTERNATIVA II.

Política Básica con unidades adicionales:

mes 1 , 5 adicionales | mes 4 , 2 adic
" 2 , 4 " | " 5 , 1 "
" 3 , 3 "

EDUCACION CONTINUA
FI, UNAM.
Marzo 8, 1973

DISTRIBUIDOR DE VEHICULOS
RESULTADOS DE LA SIMULACION

AÑO	VENTAS	FALTANTES	EXISTENCIA	INGRESOS	COSTOS	UTILIDADES.	POLITICA BASICA	
1	88	8	—			397,808	384,555	(+)
2	98	3	4			485,154	453,601	(+)
3	80	8	—			366,126	377,799	(−)
4	102	13	—			569,324	526,578	(+)
5	84	6	—			344,631	336,965	(+)
6	76	—	4			256,782	282,412	(−)
7	85	—	7			342,805	335,512	(+)
8	82	6	7			362,362	286,451	(−)
9	81	—	1			295,628	352,732	(−)
10	82	—	4			335,328	351,825	(−)

ALTERNATIVA III
similar a la política básica,
con orden ADICIONAL DE 6 UNIDADES
EN EL MES 5.

EDUCACION CONTINUA
FI, UNAM.
Marzo 8, 1973

DISTRIBUIDOR DE VEHICULOS
RESULTADOS DE LA SIMULACION

AÑO	VENTAS	FALTANTES	EXISTENCIA	INGRESOS	COSTOS	UTILIDADES.	POLITICA BASICA	
1	91	5	0			362,761	384,555	(-)
2	93	8	9			414,901	453,601	(-)
3	85	3	—			317,869	377,799	(-)
4	104	11	—			502,151	526,578	(-)
5	81	9	5			298,258	336,965	(-)
6	77	—	8			243,712	282,412	(-)
7	82	—	11			297,172	335,512	(-)
8	85	7	11			347,751	286,451	(+)
9	86	—	3			316,801	352,732	(-)
10	82	—	9			313,485	351,825	(-)

EDUCACION CONTINUA
FI, UNAM.
Marzo 8, 1973

DISTRIBUIDOR DE VEHICULOS
RESULTADOS DE LA SIMULACION

ALTERNATIVA IV
Similar a la política básica, con la PRIMERA ORDEN PIDE 20 UNIDADES ADICIONALES (es decir, ordena 50 unidades)

AÑO	VENTAS	FALTANTES	EXISTENCIA	INGRESOS	COSTOS	UTILIDADES.	POLITICA BASICA	
1	88	10	—			385,154	384,555	+
2	96	5	2			479,171	453,601	+
3	77	8	—			329,709	377,799	−
4	91	17	—			475,078	526,578	−
5	80	8	—			297,238	336,965	−
6	77	—	3			278,472	282,412	−
7	84	1	6			349,922	335,512	+
8	79	7	7			349,485	286,451	+
9	95	8	1			471,185	352,732	+
10	93	2	4			444,941	351,825	+

ALTERNATIVA V

ORDENA CON UN MES DE ANTICIPACION, EXACTAMENTE LO QUE ESPERA VENDER EN CADA MES

EDUCACION CONTINUA
FI, UNAM.
Marzo 8, 1973

DISTRIBUIDOR DE VEHICULOS
RESULTADOS DE LA SIMULACION

AÑO	VENTAS	FALTANTES	EXISTENCIA	INGRESOS	COSTOS	UTILIDADES.	POLITICA BASICA	
1	92	1	—			373,841	384,555	(−)
2	85	12	7			389,618	453,601	(−)
3	87	0	5			294,545	377,799	(−)
4	92	19	—			498,428	526,578	(−)
5	88	—	4			350,978	336,965	(+)
6	79	—	13			230,725	282,412	(−)
7	87	—	5			370,565	335,512	(+)
8	90	6	2			438,405	286,451	(+)
9	85	—	7			264,888	352,732	(−)
10	82	—	10			292,621	351,825	(−)

```
 DEMANDAS SIARIAS DE VEHICULOS PARA LA POLITICA BASICA\
RUN

ANO   1 ******

MES 1 , DIA DE ENTREGA 22
 0  2  3  0  0  1  0  1  0  1  0  0  0  0  1  0  2  0  1  2  1  0  0
1  0  0  3  3  0  0 , TOTAL= 22
MES 2 , DIA DE ENTREGA 29
 4  1  3  1  0  0  0  1  0  3  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  1  0  1
0  1  2  1  0  0  2 , TOTAL= 22
MES 3 , DIA DE ENTREGA 27
 0  0  0  0  1  1  0  1  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  1  0  0
0  0  0  0  0  0  0 , TOTAL= 3
MES 4 , DIA DE ENTREGA 0
 1  0  3  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  2  0
0  0  1  0  0  0  0 , TOTAL= 8
MES 5 , DIA DE ENTREGA 29
 0  0  0  1  1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0 , TOTAL= 6
MES 6 , DIA DE ENTREGA 28
 0  1  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0
0  0  0  0  1  0  0 , TOTAL= 4
MES 7 , DIA DE ENTREGA 26
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0 , TOTAL= 1
MES 8 , DIA DE ENTREGA 27
 0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  1  0  0  1 , TOTAL= 4
MES 9 , DIA DE ENTREGA 22
 0  0  0  0  0  0  0  4  0  1  0  0  0  0  0  1  0  0  1  1  0  1  1
1  0  0  1  0  0  0 , TOTAL= 12
MES 10 , DIA DE ENTREGA 23
 2  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0 , TOTAL= 3
MES 11 , DIA DE ENTREGA 21
 1  0  0  C  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  3  0  1  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0 , TOTAL= 0
MES 12 , DIA DE ENTREGA 23
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  1  0  2  0  0  0 , TOTAL= 0
```

11a

ANO 2 ******

MES 1 , DIA DE ENTREGA 22
1 1 7 0 2 0 3 2 1 1 0 0 0 3 1 0 4 0 0 0 0 1 0
4 2 2 1 1 1 0 , TOTAL= 38
MES 2 , DIA DE ENTREGA 24
0 0 1 0 1 1 0 0 0 2 0 0 0 2 0 1 2 0 1 0 1 3 0
0 0 1 1 0 0 0 , TOTAL= 9
MES 3 , DIA DE ENTREGA 23
0 1 2 0 0 2 0 1 1 0 0 1 0 0 2 0 0 2 0 1 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 , TOTAL= 14
MES 4 , DIA DE ENTREGA 27
0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 2 , TOTAL= 5
MES 5 , DIA DE ENTREGA 26
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 1 0 0 1
0 0 0 0 1 0 0 , TOTAL= 6
MES 6 , DIA DE ENTREGA 26
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 , TOTAL= 5
MES 7 , DIA DE ENTREGA 26
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 , TOTAL= 1
MES 8 , DIA DE ENTREGA 26
1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 , TOTAL= 3
MES 9 , DIA DE ENTREGA 20
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 , TOTAL= 2
MES 10 , DIA DE ENTREGA 26
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 , TOTAL= 2
MES 11 , DIA DE ENTREGA 28
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 , TOTAL= 2
MES 12 , DIA DE ENTREGA 26
1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 , TOTAL= 6

```
LIST
0001 REM   SIMULACION DE INVENTARIOS,7-III-73
0010 FOR N=1 TO 6
0020   READ Z[N]
0030 NEXT N
0040 FOR A=1 TO 10
0043   PRINT
0044   PRINT
0045   PRINT "ANO ";A;"******"
0050   LET E=Z[1]
0054   LET U=0
0058   LET C=0
0059   LET C1=30
0060   LET T2=0
0061   LET F2=0
0070   FOR M=1 TO 12
0072     LET F=0
0075     LET N=M
0076     LET O=0
0080     IF M>5 GOTO  0130
0090     LET O=Z[M]+Z[M+1]-E
0100     IF M<>5 GOTO 0113
0110     LET O=O+19
0113     IF O>0 GOTO  0130
0120     LET O=0
0121     GOTO 0135
0130     GOSUB  2000
0135     PRINT
0136     IF P>0 GOTO  0138
0137     LET P=0
0138     PRINT "MES";M;", DIA DE ENTREGA";P
0140     LET T1=0
0150     FOR D=1 TO 30
0160       LET P=P-1
0170       IF P<>0 GOTO 0190
0180       LET E=E+O
0185       REM
0190       GOSUB  1000
0195       PRINT K;
0200       IF E>=K GOTO 0250
0210       LET V=E
0220       LET F=K-E+F
0230       LET E=0
0240       GOTO 0280
0250       LET V=K
0260       LET E=E-V
0280       LET T1=T1+V
0282       LET U=U+10000*(13-N)/12*V
0283       LET C=C+E*C1
0290     NEXT D
0292     PRINT ", TOTAL=";T1;
0293     LET T2=T2+T1
0294     LET F2=F2+F
0295   NEXT M
0299   GOTO 0320
0300   LET C=C+150000
0307   LET R=U-C
0308   PRINT T2;F2;E,U,C,R
0320 NEXT A
0999 END
```

```
1000 LET X=RND(2)
1030 LET Y=0
1040 FOR K=0 TO 20
1060   LET Y=Y+N/(N+1)↑(K+1)
1065   IF Y>X GOTO  1100
1070 NEXT K
1100 RETURN
2000 LET P=20+INT(10*(RND(1)+.05))
2010 RETURN
5000 DATA  30, 15, 10, 7, 6, 5
```

Teoría de Inventarios

Se desea determinar el nivel óptimo de las transferencias de energía entre dos sistemas que tienen las siguientes características:

Sistema A.

Produce energía predominantemente hidroeléctrica.

Año	Demanda máxima de Potencia (Mw)	Energía mensual requerida (Gwh)	Energía mensual Disponible (Gwh) 1/
1972	222	96	110
1973	239	104	110
1974	260	114	201
1975	279	123	201
1976	305	135	201
1977	330	147	201
1978	358	160	245
1979	388	174	245
1980	422	191	299
1981	460	208	299
1982	502	228	299
1983	548	249	282
1984	598	272	297
1985	652	297	297

1/ La energía mensual requerida es igual ala disponible en los meses de Febrero, Marzo y Abril. Actualmente la energía sobrante en los otros meses se pierde, ya que no hay embalse de regulación anual.

La energía sobrante se puede enviar al sistema B, a las siguientes horas en que la demanda es inferior a la demanda máxima.

0.0 a 9 horas (Demanda=
13.30 a 16 horas (Demanda= 70% de la demanda máxima)
20.30 a 24 horas (Demanda=
9 horas a 13.30 . Demanda máxima
16 horas a 20.30 horas . Demanda máxima

Sistema B

Produce energía predominantemente térmica.

Año	Demanda máxima de Potencia (Mw)	Requerimientos anuales de energía (Gwh)
1972	115	655
1973	134	740
1974	153	845
1975	174	972
1976	206	1170
1977	233	1338
1978	228	1260
1979	250	1390
1980	275	1530
1981	303	1670
1982	330	1840
1983	363	2030
1984	400	2230
1985	440	2450

La demanda diaria en el Sistema B, tiene la siguiente forma:

0.0 a 9 horas (Demanda=
9 a 16 horas (Demanda= 70% de la demanda máxima
16 a 20.30 horas (Demanda máxima)
20.30 a 24 horas (Demanda=

Se dispone de 390 Gwh anuales de energía hidroeléctrica, con una potencia máxima de 100 Mw , y siendo la mínima en operación de 20 Mw. Las unidades pueden entrar y salir cuando se requiere en el día y pueden utilizarse irregularmente durante el año, haciendo uso del embalse con regulación anual.
Cuando se usa energía térmica, la operación deberá hacerse a una potencia mínima de 20 Mw .
El precio de la energía proveniente del sistema A se ha establecido en US$ 0.003 por Kwh.
El costo de la energía hidroelectríca del sistema B es nulo.
El costo de la energía térmica es de US $ 0.0045.

<u>Alternativas de interconexión</u>
Para transferir la energía del Sistema A al Sistema deberá construirse una línea de transmisión, la cual entraría en operación el primero de enero de 1975. Existen dos alternativas:

1) Línea de 230 Kv (Capacidad máxima de transmisión 125 Mw,
Capacidad mínima de transmisión 30 Mw)
   Inversión : US$ 6.8×10^6
   Vida útil : 30 años
   Gastos de operación : US $ 40.000 + 0.8% de la inversión
2) Línea de 138 KV

(Capacidad máxima de transmisión: 50 Mw,
Capacidad mínima de transmisión: 15 Mw).

Inversión: Us$ 3.4×10^6
Vida útil: 30 años
Gastos de operación : US$ 40.000+ 0.8% de la inversión

Las pérdidas de transmisión se calcula que serán del orden del 5 por ciento de la energía transmitida.

Almacenamiento en el sistema B

La energía sobrante del Sistema A que no puede ser absorbida inmediatamente en el Sistema B, puede almacenarse en este último mediante una planta de bombeo y un embalse de capacidad ilimitada. Las características de la planta, que entraría en operación el primero de enero de 1975, son las siguientes:

Capacidad Instalada: 25Mw   Inversión: US$ 6×10^6
Capacidad Instalada: 50Mw   Inversión: US$ 9×10^6

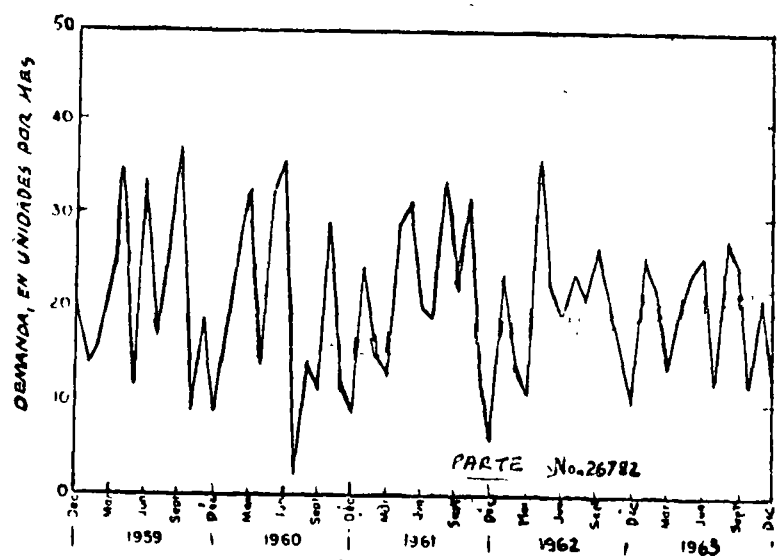
Costo anual de la operación = 1.1% de la inversión.
Vida útil= 40 años
Eficiencia de la operación: 60%.

Solución del Problema:
1. Decidir la capacidad de la línea
2. Decidir la capacidad de la planta de bombeo
3. Decidir los niveles óptimos de energía provenientes del Sistema A que se utilizarán en el sistema B. Desglosar señalando la energía que se almacenará temporalmente en B y durante cuanto tiempo.

Una solución preliminar al problema indica que la rentabilidad de la línea de 138 Kv es mayor que la de 230 Kv, y que las transferencias de energía serían en cada caso del orden de 2000 y 2500 Gwh respectivamente en el período 1975 a 1985. Estos resultados fueron obtenidos sin tomar en cuenta la posibilidad de almacenamiento en el sistema B de energía proveniente del sistema A.

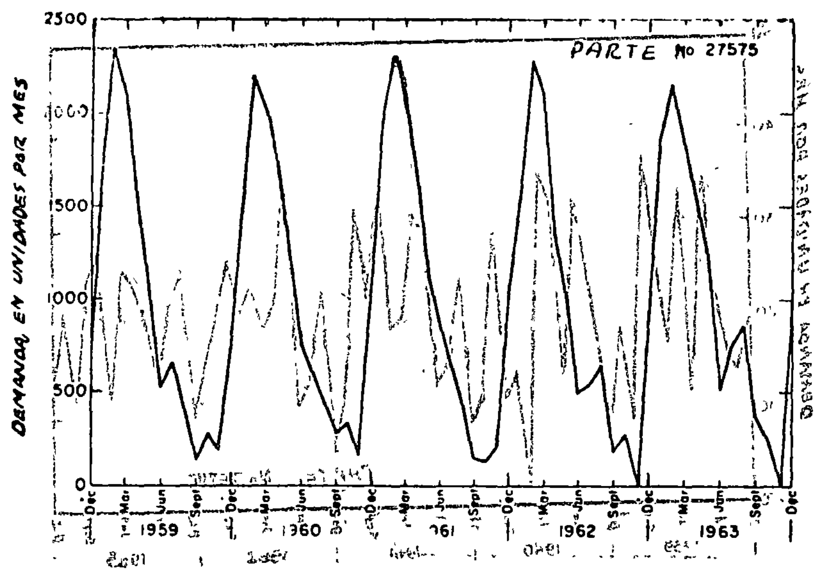
DEMANDA DE LA PARTE No. 26782

AÑO / MES	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
ENERO	18	20	13	17	22	14	18	25	24	26
FEBRERO	20	27	11	27	15	16	27	15	15	22
MARZO	18	24	12	17	38	24	33	13	11	14
ABRIL	30	30	21	18	15	37	13	29	36	20
MAYO	27	22	15	26	26	12	32	31	23	24
JUNIO	19	21	34	23	25	34	36	20	19	26
JULIO	30	27	21	34	32	17	2	19	24	12
AGOSTO	26	17	11	22	9	26	15	34	21	28
SEPTIEMBRE	17	24	19	36	16	38	11	21	27	25
OCTUBRE	12	21	22	39	22	9	31	32	21	12
NOVIEMBRE	24	19	25	17	20	19	12	13	16	22
DICIEMBRE	15	28	26	0	20	9	9	6	10	14



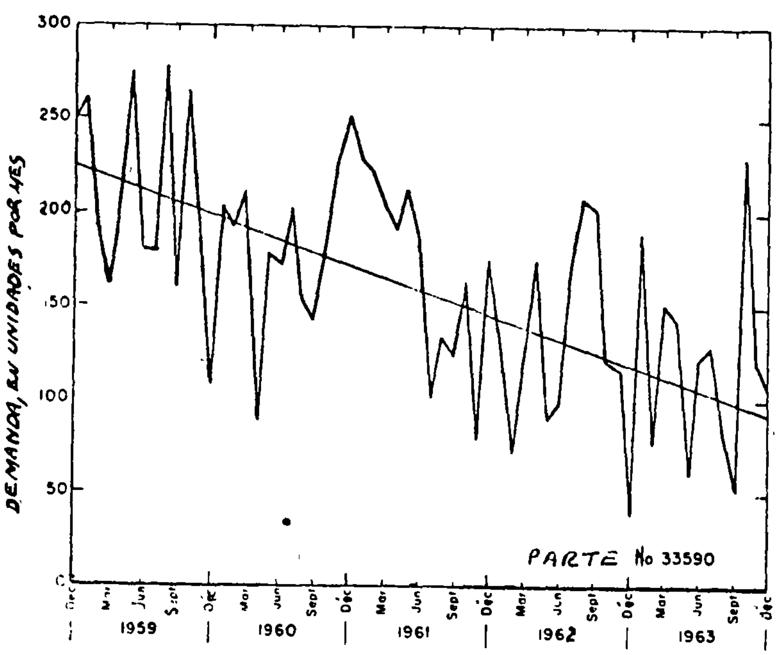
DEMANDA DE LA PARTE N° 27575

AÑO / MES	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
ENERO	1723	1912	1828	1876	2020	1750	1695	1942	1583	1852
FEBRERO	2316	2160	2231	2020	2135	2338	2199	2301	2278	2155
MARZO	2290	2222	2265	2131	2139	2084	2018	2093	2099	1855
ABRIL	1265	1551	1733	1534	1464	1551	1716	1601	1363	1501
MAYO	770	846	767	782	729	1109	1259	1106	995	1244
JUNIO	398	459	770	588	731	520	766	855	493	502
JULIO	267	537	720	628	714	663	596	625	537	729
AGOSTO	726	851	565	577	628	424	424	430	654	861
SEPTIEMBRE	264	578	540	205	493	128	284	144	170	418
OCTUBRE	298	125	158	0	314	275	327	132	264	243
NOVIEMBRE	150	105	94	408	360	182	165	208	0	0
DICIEMBRE	874	889	619	897	800	777	964	1014	888	955



DEMANDA DE LA PARTE Nº 33590

AÑO / MES	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Enero	189	224	213	293	191	259	203	228	124	188
Febrero	274	229	207	206	115	190	192	223	72	77
Marzo	256	264	237	236	108	161	211	203	124	151
Abril	263	283	145	263	117	211	89	190	175	142
Mayo	275	272	213	224	158	274	177	212	89	61
Junio	196	262	203	226	159	181	172	185	98	122
Julio	283	302	207	178	222	179	202	101	172	128
Agosto	230	239	242	176	207	284	153	133	207	83
Septiembre	210	223	232	256	240	159	142	123	201	53
Octubre	250	239	244	127	128	264	184	163	122	230
Noviembre	276	253	192	151	152	197	226	80	117	121
Diciembre	279	260	104	204	250	108	251	174	40	107



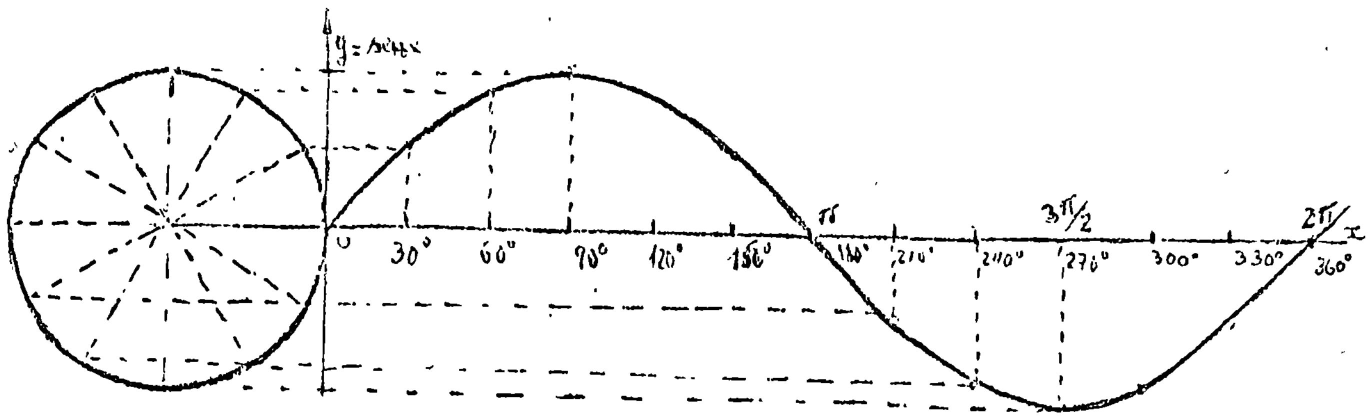


DIAGRAMA DE LA FUNCION SENO

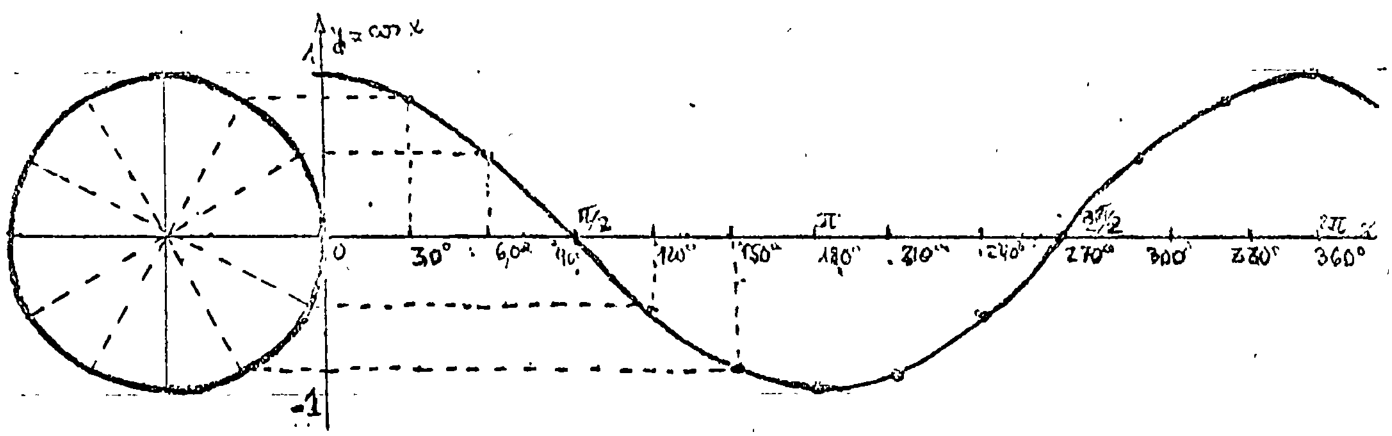
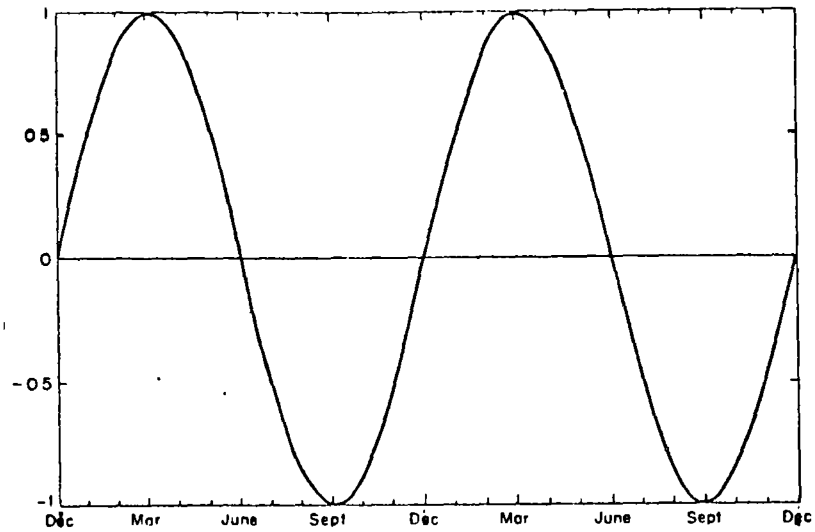
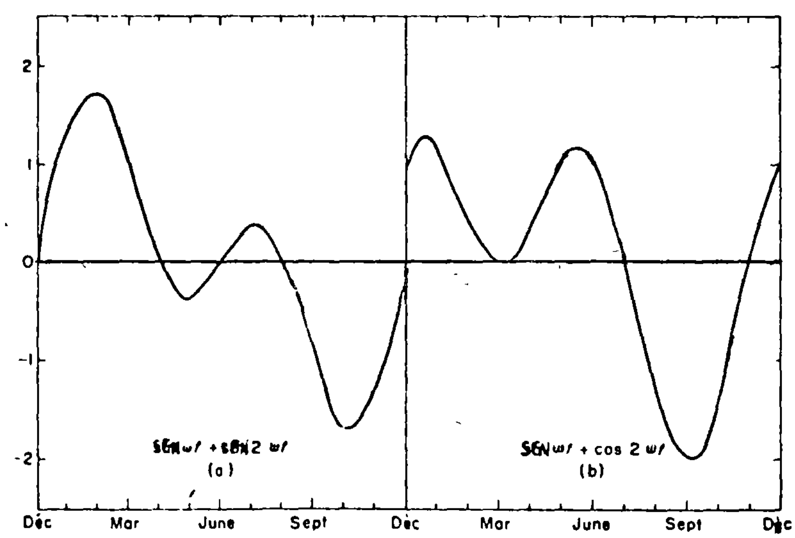


DIAGRAMA DE LA FUNCION COSENO



UNA SINUSOIDE



DOS COMBINACIONES DE ONDAS SINUSOIDALES.

TABLA DE FUNCIONES DE AJUSTE

t	$f_1 = 1$	$f_2 = t$	$f_3 = \sin \omega t$	$f_4 = \cos \omega t$	$f_5 = \sin 2\omega t$	$f_6 = \cos 2\omega t$	PARTES #26782 $x_1(t)$	#27575 $x_2(t)$	FECHA (MES)
0	1	0	0 000	1.000	0	1.0	—	—	
1	1	1	0.500	0 866	0 866	0 5	18	1723	ENERO 64
2	1	2	0 866	0 500	0 866	−0 5	20	2316	FEBRERO
3	1	3	1 000	0 000	0	−1 0	18	2290	MARZO
4	1	4	0 866	−0,500	−0 866	−0 5	30	1265	ABRIL
5	1	5	0 500	−0 866	−0 866	0 5	27	770	MAYO
6	1	6	0 000	−1.000	0	1 0	19	398	JUNIO
7	1	7	−0 500	−0 866	0 866	0 5	30	267	JULIO
8	1	8	−0 866	−0 500	0 866	−0 5	26	726	AGOSTO
9	1	9	−1 000	0 000	0	−1 0	17	264	SEPTIEMBRE
10	1	10	−0 866	0 500	−0 866	−0.5	12	298	OCTUBRE
11	1	11	−0 500	0 866	−0.866	0 5	24	150	NOVIEMBRE
12	1	12	0 000	1 000	0	1 0	15	874	DICIEMBRE.
13	1	13	0 500	0 866	0 866	0 5	20	1912	ENERO 65
14	1	14	0 866	0 500	0 866	−0 5	27	2160	FEBRERO
15	1	15	1 000	0 000	0	−1 0	24	2222	MARZO
16	1	16	0 866	−0 500	−0 866	−0 5	30	1551	ABRIL
17	1	17	0 500	−0 866	−0 866	0 5	22	646	MAYO
18	1	18	0 000	−1 000	0	1 0	21	459	JUNIO
19	1	19	−0 500	−0 866	0 866	0 5	27	537	JULIO
20	1	20	−0 866	−0 500	0 866	−0 5	17	851	AGOSTO
21	1	21	−1 000	0 000	0	−1 0	24	578	SEPTIEMBRE
22	1	22	−0 866	0 500	−0 866	−0 5	21	125	OCTUBRE
23	1	23	−0 500	0 866	−0 866	0 5	19	105	NOVIEMBRE
24	1	24	0 000	1 000	0	1 0	28	889	DICIEMBRE
25	1	25	0.500	0 866	0 866	0 5	13	1828	ENERO 66
26	1	26	0 866	0 500	0 866	−0 5	11	2231	FEBRERO
27	1	27	1 000	0 000	0	−1 0	12	2265	MARZO
28	1	28	0 866	−0 500	−0 866	−0 5	21	1733	ABRIL
29	1	29	0 500	−0 866	−0.866	0 5	15	767	MAYO
30	1	30	0 000	−1 000	0	1.0	34	770	JUNIO
31	1	31	−0 500	−0 866	0 866	0 5	21	720	JULIO
32	1	32	−0 866	−0 500	0 866	−0 5	11	565	AGOSTO
33	1	33	−1 000	0 000	0	−1 0	19	540	SEPTIEMBRE
34	1	34	−0 866	0 500	−0 866	−0 5	22	158	OCTUBRE
35	1	35	−0 500	0 866	−0 866	0 5	25	94	NOVIEMBRE
36	1	36	0 000	1.000	0	1 0	26	619	DICIEMBRE

$g = \Sigma x_1(t) f_i(t) =$ 766. 13,941 4 4809 −35 9187 −23.3828 35 5

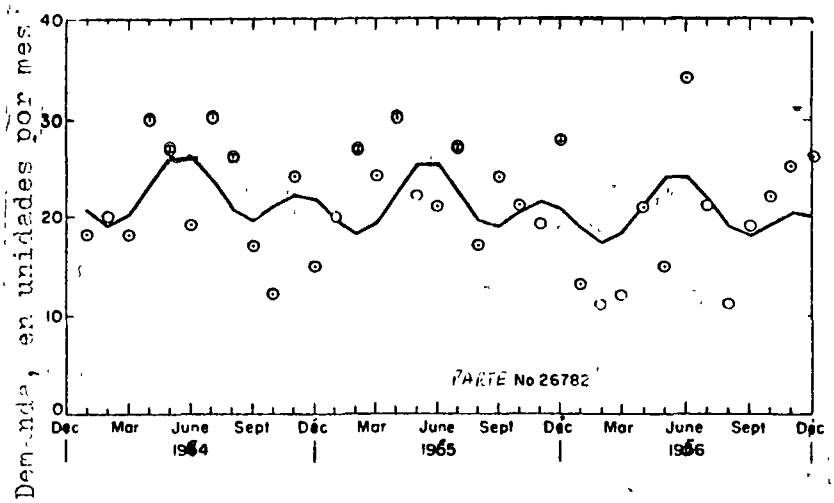
$g = \Sigma x_2(t) f_i(t) =$ 35,866 599,336. 15,771 334 2703 2872 6905.7232 −6280 0

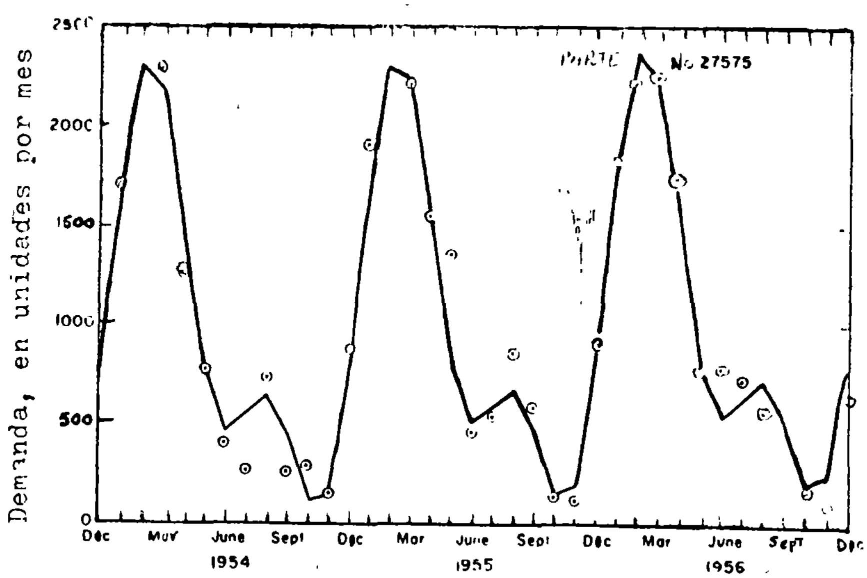
Matriz de varianzas-covarianzas

VECTOR	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
# 26782	766	13,941	4 4809	−35 9187	−23 3028	35 5
# 27575	35,866	599,366	15,771 3340	2703 2872	6905 7232	−6280 0
	0 124341	−0 005220	−0 01[illegible]480	0 005220	−0 009041	0 005220
	−0 005220	0 000282	0 001053	−0 000282	0 0004[illegible]	−0 [illegible]282
MATRIZ G DE COVARIANZAS $G =$	−0 01[illegible]480	0 001053	0 052485	−0 001053	0 001624	−0 [illegible]
	0 005220	−0 000282	−0 001053	0 055838	−0 000489	0 000[illegible]82
	−0 009041	0 000489	0 001824	−0 000489	0 056402	−0 000489
	0 005220	−0 000282	−0 001053	0 000282	−0.000489	0 05[illegible]838
COEFICIENTES	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
# 26782	22 584	−0 074	- 0 017	−1.922	−1 419	2 046
# 27575	942 593	2 79[illegible]	886.983	147 390	388.838	−351 685

Datos, pronósticos y residuos

	NO. 20782			NO. 27575		
Tiempo	DEMANDA	Pronóstico	RESIDUO	DEMANDA	Pronóstico	RESIDUO
t	x_t	$\hat{x}_t$	r_t	x_t	$\hat{x}_t$	r_t
0	—	22.71	—	—	738	—
1	18	20.63	−2.63	1723	1677	46
2	20	19.21	0.79	2316	2303	13
3	18	20.30	−2.30	2290	2190	100
4	30	23.44	6.56	1265	1487	−222
5	27	26.12	0.88	770	760	10
6	19	26.11	−7.11	398	460	−62
7	30	23.53	6.47	267	552	−285
8	26	20.72	5.27	726	636	90
9	17	19.89	−2.89	264	432	−168
10	12	21.10	−9.10	298	115	183
11	24	22.37	1.63	150	145	5
12	15	21.82	−6.82	874	772	102
13	20	19.74	0.26	1912	1711	201
14	27	18.32	8.68	2160	2337	−177
15	24	19.41	4.59	2222	2224	−2
16	30	22.55	7.45	1551	1521	30
17	22	25.23	−3.23	846	794	52
18	21	25.22	−4.22	459	494	−35
19	27	22.64	4.36	537	586	−49
20	17	19.83	−2.83	851	670	181
21	24	19.00	5.00	578	466	112
22	21	20.21	0.79	125	149	−24
23	19	21.48	−2.48	105	189	−84
24	28	20.93	7.07	889	806	83
25	13	18.85	−5.85	1828	1745	83
26	11	17.43	−6.43	2231	2371	−140
27	12	18.52	−6.52	2265	2258	7
28	21	21.66	−0.66	1733	1555	178
29	15	24.34	−9.34	767	828	−61
30	34	24.33	9.67	770	528	242
31	21	21.75	−0.75	720	620	100
32	11	18.94	−7.94	565	704	−139
33	19	18.11	0.89	540	500	40
34	22	19.32	2.68	158	183	−25
35	25	20.59	4.41	94	223	−129
36	26	20.04	5.96	619	840	−221
		$\Sigma r^2 =$	1,031.9643			583,305
		$\Sigma\lvert r\rvert =$	164.51			3,681
		MAD =	4.57			102.25
		$\sigma^2 =$	343.98			19,443.50


Demanda, en unidades por mes
40
30
20
10
0
PARTE No 26782
Dec
Mar
June
Sept
Dec
Mar
June
Sept
Dec
Mar
June
Sept
Dec
1954
1955
1956


Demanda, en unidades por mes
2500
2000
1500
1000
500
0
PARTE No 27575
Dec
May
June
Sept
Dec
Mar
June
Sept
Dec
Mar
June
Sept
Dec
1954
1955
1956

BIBLIOGRAFIA SOBRE CONTROL DE INVENTARIOS

A. LIBROS

Modelos matemáticos teóricos

1. Arrow, Karlin Scarf: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production
   Stanford University Press, 1958

2. Arrow, Karlin Scarf: Studies in Applied Probability and Management Science,
   Stanford University Press, 1962

3. Brown: Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series, Prentice Hall, 1963

Modelos matemáticos

4. Buchan y Koenisberg: Scientific Inventory Management, Prentice Hall, 1963

5. Hadley y Within: Analysis of Inventory Systems, Prentice Hall 1963

6. Naddor: Inventory Systems, John Wiley and Sons, 1966

7. Wagner: Statistical Management of Inventory Systems, John Wiley and Sons, 1962.

8. Within: The Theory of Inventory Management. Princetown University Press, 1957

9. Welch: Scientific Inventory Control Management, Publishing Corporation, 1946.

Modelos integrados

10. Magee: Production Planning and Inventory Control, Mc Graw Hill Book Co., 1958

11. Moore: Production Control Mc Graw Hill Co. 1959

12. Buffa: Modern Production Management, John Wiley and Sons, 1965

13. Buffa: Production-Inventory Systems: Planning and Control, Irwin, 1968

14. Holt, Modigliani, Mutli, Simon: Planning Production Inventory and Work Force, Prentice Hall, 1960

20. Starr: Production Management Systems and Synthesis, Prentice Hall, 1964

21. Starr y Miller: Inventory Control: Theory and Practice, Prentice Hall, 1962

22. Elmaghraby: The Design of Production Systems

23. Brown: Decision Rules for Inventory Management, Holt-Rinehart & Winston, 1967

24. Brown: Statistical Forecasting for Inventory Control, Prentice Hall

25. Fabrycky y Banks: Procurement & Inventory Systems Reinhold Press, 1966

B. ARTICULOS

Hay entre 75 y 100 artículos muy importantes publicados en las revistas Management Science, Operations Research, Econométrica, Noval Research Logistics Quarterly, y SIAM Journal on Applied Mathematics y más de mil artículos de menor importancia en revistas técnicas de Ingeniería Económica, Ingeniería Industrial, y semejantes.