



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN BANCO DE PRUEBAS PARA
CARACTERIZAR MATERIALES VISCOELÁSTICOS SOMETIDOS A VIBRACIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
DANIEL ANTONIO BRISEÑO URBINA

TUTORES PRINCIPALES
MARCELO LÓPEZ PARRA
LEONARDO URBIOLA SOTO

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. ALEJANDRO C. RAMÍREZ REIVICH
Secretario: DR. SAÚL DANIEL SANTILLÁN GUTIÉRREZ
Vocal: DR. MARCELO LÓPEZ PARRA
1er. Suplente: DR. ADRIÁN ESPINOSA BAUTISTA
2do. Suplente: DR. VICENTE BORJA RAMÍREZ

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: **FACULTAD DE INGENIERÍA**

TUTOR DE TESIS:
DR. MARCELO LÓPEZ PARRA

FIRMA

Para Grisél y Tomás.

Yo acuso al gobierno de mi país de pretender dar un paso atrás en la liberación e independencia de mi pueblo, de no mostrar con ello el mínimo respeto hacia los hombres que le han dado historia, cultura y soberanía, aquellos héroes que hicieron de México un país con ideales y aspiraciones de progreso y libertad.

Daniel Briseño

Septiembre de 2013

Contenido

1	Síntesis y objetivo	6
2	Introducción	7
3	Normas vigentes para la caracterización dinámica de materiales viscoelásticos sometidos a vibración.....	9
3.1	ASTM.....	9
3.2	ISO	12
4	Naturaleza viscoelástica	17
4.1	Dependencia de la temperatura	17
4.2	Termofluencia, relajación y carga cíclica.....	18
4.3	Propiedades dinámicas	19
4.4	Modelos dinámicos	20
4.4.1	Modelo de Maxwell	20
4.4.2	Modelo de Kelvin Voigt.....	20
4.4.3	Modelo lineal estándar	21
4.4.4	Modelo de Wiechert	21
4.4.5	Modelo de histéresis.....	22
4.5	No linealidades	23
4.5.1	Temperatura	23
4.5.2	Amplitud y frecuencia de excitación.....	23
4.5.3	Geometría.....	24
4.6	Conclusiones	25
5	Diseño del banco de pruebas	26
5.1	Especificaciones.....	26
5.2	Diseños conceptuales	26
5.3	Selección de diseño	28
5.4	Diseño elegido.....	29
5.5	Banco construido.....	32
6	Análisis de vibración, dinámico y de resistencia.	36
6.1	Simbología de los análisis.	36
6.2	Datos y suposiciones.	39
6.3	Análisis de vibración transmitida al banco de pruebas para el método indirecto.....	41
6.4	Análisis dinámico del mecanismo	45

6.4.1	Análisis cinemático.....	46
6.4.2	Análisis cinético.....	46
6.5	Fuerzas en los patines.....	48
6.6	Esfuerzos, deflexión y frecuencia natural del perno de transmisión.....	52
6.7	Esfuerzos, deflexión y frecuencia natural de la flecha del motor.....	55
6.7.1	Reacciones y deflexiones de la flecha.....	55
6.7.2	Esfuerzos en la flecha.....	61
6.8	Resultados de los análisis y límites de funcionalidad del banco.....	63
7	Validación funcional del banco.....	71
8	Lectura y procesamiento de datos.....	74
9	Uso de las tablas de límites.....	77
9.1	Ejemplos del uso de las tablas de límites.....	77
10	Conclusiones.....	81
11	Discusión.....	82
12	Referencias.....	83
13	Anexo.....	84
13.1	Tablas de MSL del perno, deflexión del perno potencia requerida del motor.....	85
14	Índice alfabético.....	87

1 Síntesis y objetivo

El objetivo general del presente trabajo es la construcción de un banco de pruebas que cumpla con las condiciones impuestas en la normatividad vigente para caracterizar materiales viscoelásticos sometidos a vibración; un banco que permita incrementar la participación de la Facultad de Ingeniería en el desarrollo y análisis de estos materiales ampliamente utilizados en la amortiguación de maquinaria industrial y electrodomésticos.

Este trabajo contiene una sección acerca de las características y fenómenos físicos de los materiales viscoelásticos, además se desarrolla un proceso de diseño del banco en función de la teoría expuesta y de los lineamientos de la normatividad vigente, y por último se valida el funcionamiento y la construcción del banco en base a mediciones hechas en operación y se establecen sus límites de funcionalidad por medio del análisis dinámico del mecanismo y a la transmisibilidad del sistema vibratorio. Este escrito está constituido por las siguientes partes: Normatividad vigente, información de materiales viscoelásticos, especificaciones del banco, generación de ideas, selección del diseño conceptual, validación de la funcionalidad, establecimiento de límites de funcionamiento, y por último, las conclusiones del trabajo y una breve discusión acerca del uso de este banco para futuros trabajos de investigación en el área.

La Figura 1-1 ilustra algunos ejemplos de suspensiones con elementos viscoelásticos y otras aplicaciones de amortiguamiento con estos materiales.



Figura 1-1 Ejemplos de suspensiones y otras aplicaciones de los materiales viscoelásticos

2 Introducción

El diseño de suspensiones para amortiguar es uno de los principales rubros del diseño mecánico, ya que tanto los electrodomésticos como la maquinaria industrial necesitan suspensiones que cumplan con exigencias de tamaño, costo y operación. La maquinaria que opera bajo extremas condiciones de trabajo exige al diseñador garantizar larga vida útil de los componentes que la conforman y esto se logra en gran medida con una correcta amortiguación, además los altos niveles de vibración que produce el deterioro de las máquinas es corregible por medio de mejoras en su amortiguación mecánica.

Un ejemplo cualitativo del impacto que la amortiguación de maquinaria tiene en la sociedad es que reduce los altos niveles de ruido ocasionados por los medios de transporte que están en contacto directo con el ser humano. Un segundo ejemplo aún más impactante es que al alargar la vida de los componentes de una máquina se reduce la necesidad de adquirir periódicamente refacciones. Los componentes de las máquinas en general utilizan petróleo para su fabricación, y su producción masiva ha desencadenado desde hace muchas décadas el consumo desmedido de éste recurso natural, tan importante en la historia humana y tan emblemático de la soberanía nacional. La escasez de petróleo es una realidad que el país y el mundo entero habrán de enfrentar si se mantiene el consumismo desmedido de la sociedad como lo ha hecho en el último siglo y medio.

Los materiales viscoelásticos han demostrado ser una factible solución a los problemas de espacio, costo y efectividad en muchos ejemplos de maquinaria; sin embargo, su compleja naturaleza los hace elementos difíciles de predecir, y los modelos matemáticos que aproximan su comportamiento solo se acercan a la realidad en algunas condiciones de operación muy específicas; en otras palabras, muchas veces es más factible probar los componentes viscoelásticos de una suspensión que diseñar en base a algún modelo matemático. Por esta razón, este trabajo, en conjunto con el banco de pruebas diseñado es una contribución como herramienta a la investigación actual enfocada en el diseño de suspensiones de maquinaria amortiguada con materiales viscoelásticos.

Por otro lado, el mecanismo de excitación senoidal es el punto central del banco de pruebas y como tal también de los análisis presentados en los capítulos ulteriores, el mecanismo del banco construido reproduce un movimiento armónico simple que sirve de generador de vibración sobre las probetas viscoelásticas. Actualmente, los bancos comerciales más especializados utilizan un actuador servo hidráulico para imponer la vibración; de hecho, las normas vigentes de caracterización de materiales viscoelásticos sometidos a vibración (1) y (2) hacen mención de la superioridad de los actuadores servo hidráulicos por su versatilidad de excitación frente a otro tipo de mecanismos, en los que variar la forma o amplitud de la excitación requiere de soluciones mecánicas complejas. Este trabajo propone una solución económica para reproducir un movimiento armónico a diferentes amplitudes sin necesidad de actuadores. El banco de pruebas construido es una modificación del mecanismo conocido como *yugo escocés* y ha surgido como respuesta al elevado costo de los actuadores servo hidráulicos comerciales; si bien éstos cuentan con una amplia gama de reproducción de funciones, el yugo escocés reproduce la función senoidal que caracteriza a los modelos matemáticos utilizados en las normas vigentes.

Este trabajo comprende el proceso de diseños conceptuales, selección del mecanismo, dibujos tridimensionales de los diferentes ensambles que conforman el banco, análisis dinámicos y de

resistencia de piezas específicas, construcción del banco, validación de su funcionalidad en base a mediciones en operación y por último los límites de funcionamiento de la máquina en función de los análisis dinámicos y de resistencia.

Por último, este trabajo es una referencia para el diseño de mecanismos y para el mejor conocimiento del comportamiento dinámico de los materiales viscoelásticos. En la Figura 2-1 se muestra una imagen de la parte frontal del mecanismo del banco de pruebas que se construyó.

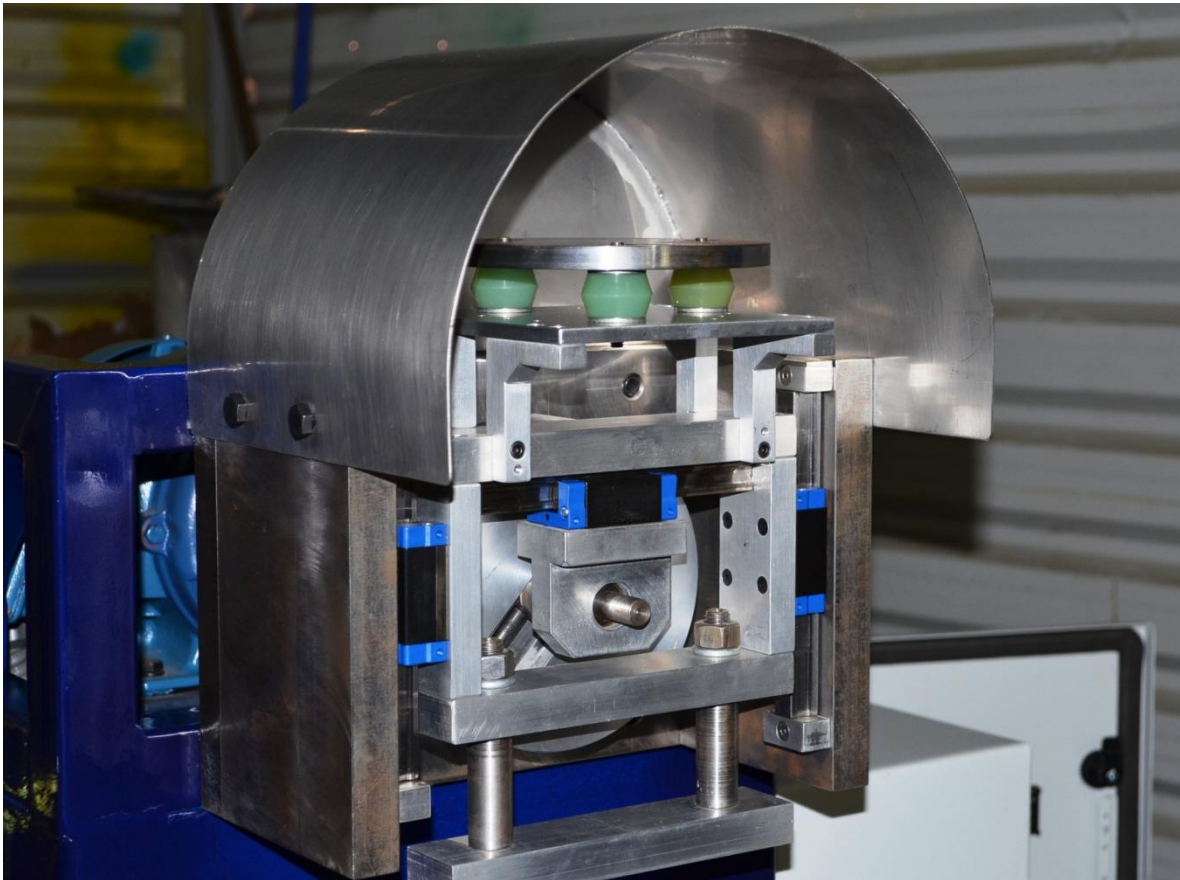


Figura 2-1. Imagen de la parte frontal del mecanismo de excitación del banco de pruebas construido. El mecanismo es una modificación del mecanismo de *yugo escocés*.

3 Normas vigentes para la caracterización dinámica de materiales viscoelásticos sometidos a vibración.

3.1 ASTM

En la actualidad, la caracterización dinámica de elastómeros (materiales viscoelásticos) se puede llevar a cabo siguiendo los lineamientos de la norma ASTM (2). Dicha norma contiene información teórica y práctica para realizar cuatro diferentes tipos de pruebas dinámicas de laboratorio cada una con su respectivo método.

El primer método contenido en el documento es llamado *vibración libre resonante* y la Figura 3-1 (3) contiene un esquema de un banco de pruebas para el método. La prueba consiste en impactar con un martillo una masa colocada sobre una o varias probetas elastoméricas, quedando así suspendida. La energía del impacto se convierte en movimiento libre de la masa y un transductor de posición pegado a ella registra el movimiento como una función del tiempo. Al realizar la prueba, se observa que la masa oscila libremente con un movimiento parecido a la curva teórica con amortiguamiento viscoso mostrado en la Figura 3-2 (3). La suposición básica de este método es que el movimiento medido debe ser aproximado a la curva teórica que representa la oscilación libre de un sistema con amortiguación viscosa, por lo que el decremento logarítmico proporciona directamente las características dinámicas como rigidez y factor de pérdida (loss factor en inglés) de la suspensión.

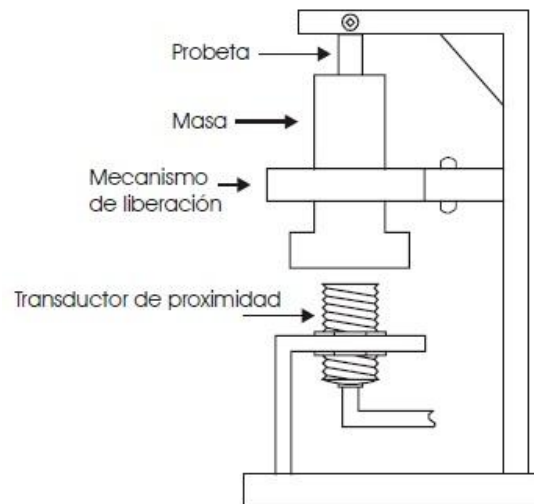


Figura 3-1 Diagrama del banco de pruebas utilizado para aplicar el método de vibración libre resonante (3)

Como se verá en los capítulos consecuentes, la frecuencia de excitación es una variable que influye en el comportamiento de los elastómeros sometidos a cargas cíclicas, por lo que este método por ser un método de impacto y no cíclico no proporciona información útil a este trabajo. Esta prueba resulta de gran utilidad si la función de la suspensión es contener impactos. Otra dificultad de la prueba es que el impacto del martillo puede producir vibración en varias direcciones ya que la masa está simplemente suspendida sobre las probetas. También cabe destacar la complicación al procesar los datos obtenidos del transductor, ya que el ruido de la señal, las no linealidades inherentes a los

elastómeros y los ajustes mecánicos hacen necesario un procesamiento especial de la señal. Eduardo Rubio (3) menciona algunas otras complicaciones que se tienen al realizar esta prueba.

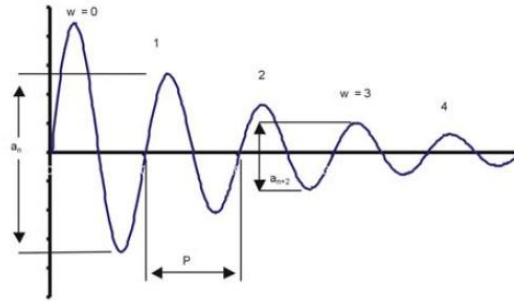


Figura 3-2. Respuesta esperada del método. Este comportamiento es muy parecido a la respuesta de un sistema con amortiguamiento viscoso (3).

El segundo método de la norma es la *vibración forzada resonante*, y la Figura 3-3 (4) lo ilustra con un esquema que muestra los acelerómetros colocados de tal forma que sea posible obtener la transmisibilidad del sistema. Esta prueba consiste en colocar las probetas sobre una tabla y sobre ellas poner una masa. Al hacer vibrar la tabla se registra, por medio de transductores, la transmisibilidad del sistema, es decir la relación entre el movimiento (posición, velocidad o aceleración) de la tabla vibratoria y el de la masa suspendida. Esta prueba debe realizarse a diferentes velocidades de excitación para trazar la curva de transmisibilidad parecida a la mostrada en la Figura 3-4, cuya altura determina al factor de pérdida, y la rigidez dinámica es calculada al conocer la frecuencia de resonancia (2). En la Figura 3-4 se hace una comparación de la transmisibilidad entre el modelo viscoso y el modelo histerético. La Figura 3-3 muestra además algunos otros elementos que son necesarios para realizar la prueba, más detalle de éstos se encuentra en la norma.

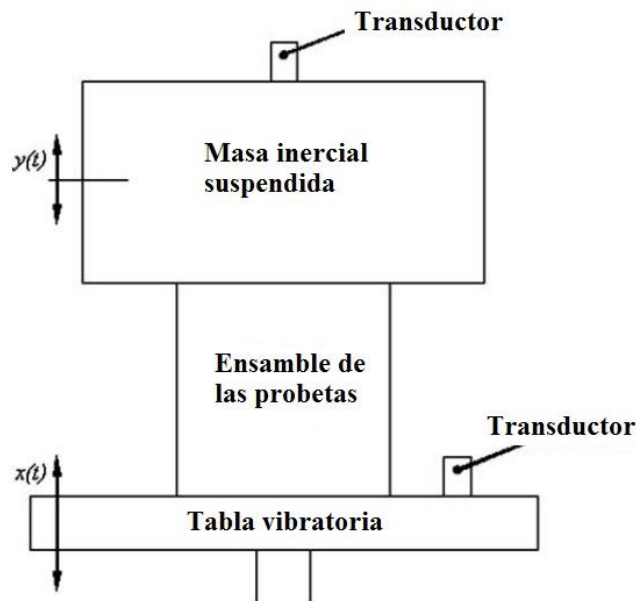


Figura 3-3. Esquema para el método de vibración forzada resonante. (4)

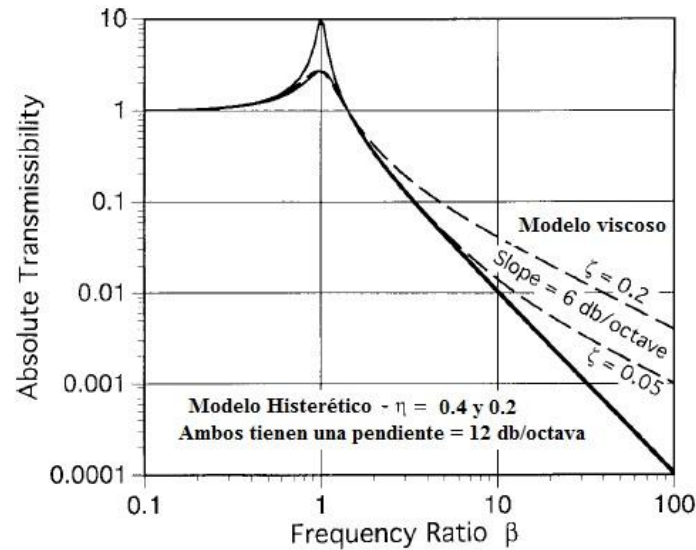


Figura 3-4. Comparación de la transmisibilidad de los modelos viscoso e histerético. (2)

Las dificultades de este método son variadas. Una de las más importantes es que la transmisibilidad debe ser medida en cuanto el sistema alcanza su equilibrio dinámico, es decir cuando todos los fenómenos transitorios presentes al comienzo de la prueba han desaparecido y dan lugar a una vibración armónica de la masa suspendida. En los materiales viscoelásticos cada ciclo de carga calienta las probetas y el comportamiento térmico del sistema se ve alterado, generando errores en los resultados.

El último método contenido en la norma es el de la *vibración forzada no resonante*. Como lo muestra la Figura 3-5, el método consiste en producir una vibración directamente sobre la probeta, este método es el más caro de los tres ya que requiere de piezas específicas para cada prueba como es el *aguijón* (*stinger* en inglés), pero también es el más confiable, ya que requiere de menos ciclos de prueba y es fácil de procesar, la norma establece este método como el más deseado si el costo no es fundamental. Éste método permite dibujar el diagrama fuerza-desplazamiento ya que la transformada de Fourier determina el desfase de las señales de entrada y salida; así, la energía disipada por ciclo de la probeta se estima por el área dentro de la curva del diagrama, que en ocasiones se aproxima con la elipse de histéresis. Como ya se mencionó, la principal desventaja de este método es el costo, pero también la dificultad de ensamble es un inconveniente.

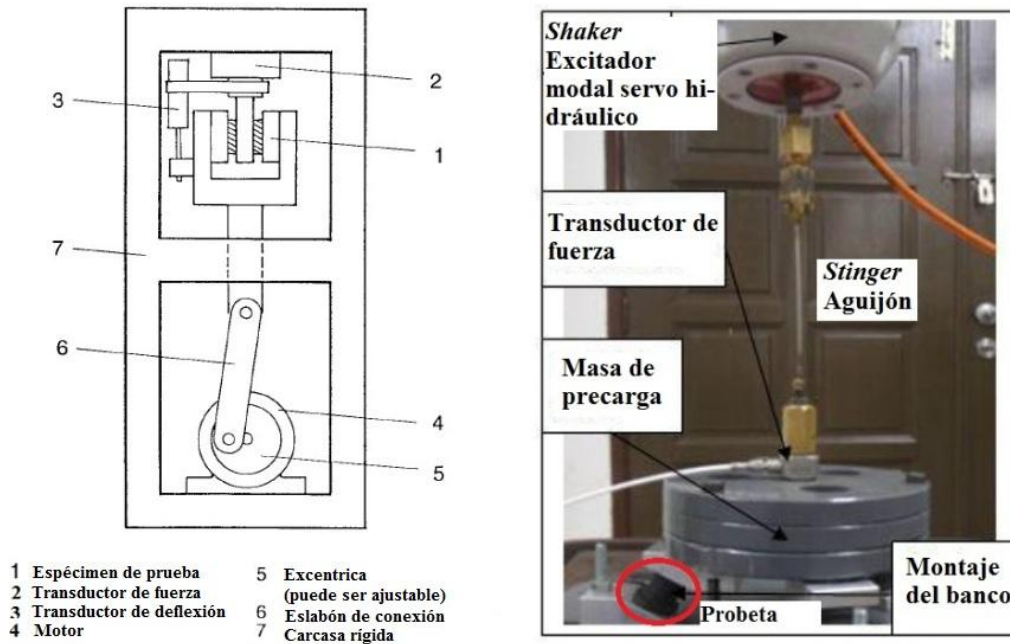


Figura 3-5. A la izquierda se muestra el diagrama para el mecanismo excitador en el método de vibración forzada no resonante (2). A la derecha se ve una imagen de un banco de pruebas usando éste método de caracterización. Nótese en la imagen la presencia del agujón (*stinger*) para transmitir la vibración. Referencias (2) y (5).

Escoger uno u otro método depende de la cercanía de las condiciones reales de operación con las condiciones impuestas en el laboratorio, sin embargo el costo de fabricación del banco de pruebas es un factor determinante en la selección.

3.2 ISO

Esta norma sirve para escoger correctamente el método para caracterizar elementos viscoelásticos dependiendo del uso que vayan a tener. Los métodos presentados aplican en general para elementos que serán sometidos a vibraciones a bajas frecuencias en el orden de 1 a 80 Hz, o para atenuar la transmisión de frecuencias de audio a estructuras en el rango de 20Hz a 20 kHz.

La norma cuenta con tres métodos similares a los métodos de vibración forzada resonante y no resonante de la norma ASTM, pero con diferente nombre, a saber: Método directo, indirecto y punto conductor (*driving point* en inglés). Los métodos contienen un trasfondo teórico basado en linealidades¹ para caracterizar las probetas. La *rigidez de transferencia dinámica* (*dynamic transfer stiffness*) de los elementos viscoelásticos es una función de su elasticidad, inercia y amortiguamiento y es comúnmente usado en la caracterización dinámica viscoelástica a bajas frecuencias. La ventaja de ésta norma sobre la norma ASTM es que maneja la rigidez dinámica en forma matricial, lo que permite caracterizar las probetas bajo movimiento en todas direcciones (seis grados de libertad) como lo muestra la Figura 3-6.

¹ Si bien las características dinámicas de estos materiales dependen de la frecuencia, precarga, temperatura, humedad relativa, etc., los modelos matemáticos tanto de ésta como de la norma ASTM no toman en cuenta estas dependencias.

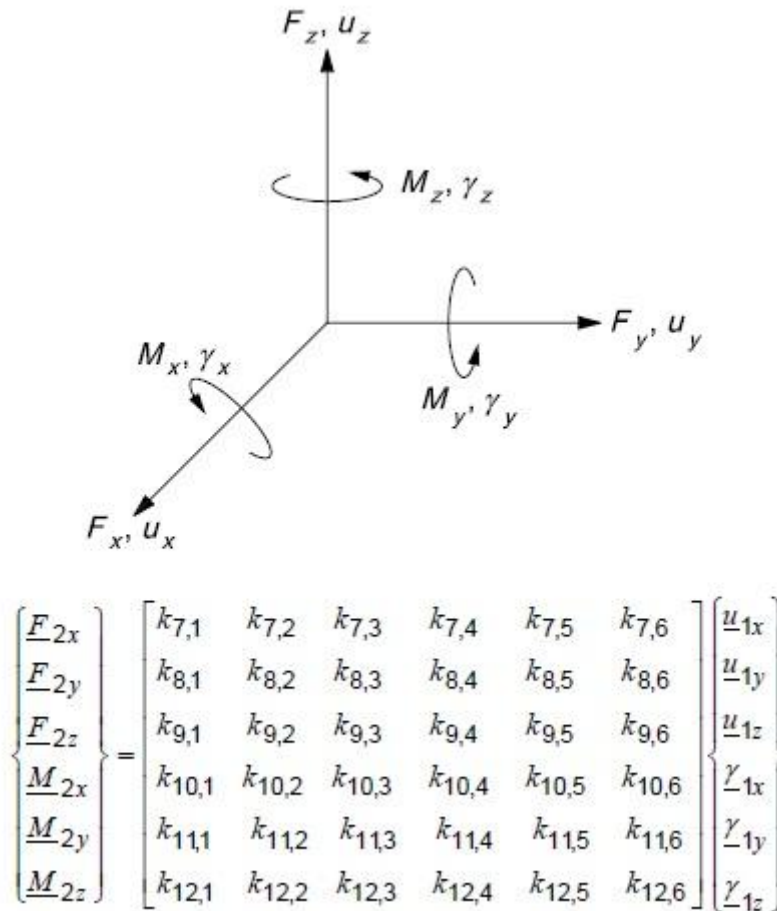
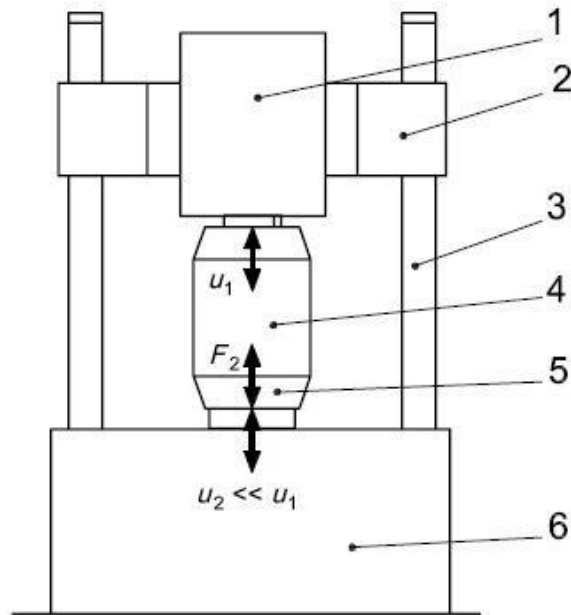


Figura 3-6. Representación matricial de la rigidez dinámica para los seis grados de libertad mostrados en el diagrama de arriba. (1)

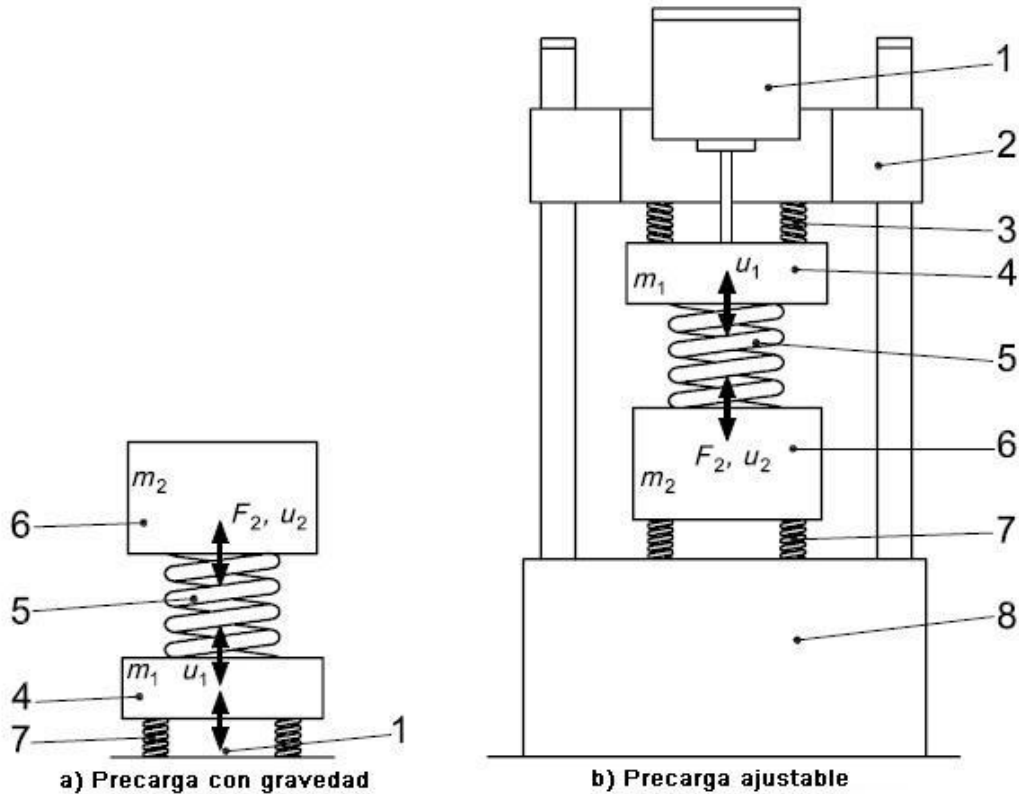
La Figura 3-7 aparece en la norma para representar el banco de pruebas del método directo, en éste caso es necesario medir el desplazamiento (o velocidad o aceleración) de impuesto a la probeta y la fuerza que ésta transmite a la salida.



- 1 Actuador hidráulico (precarga estática y excitación dinámica)
- 2 Trabe móvil
- 3 Columnas
- 4 Elemento de prueba
- 5 Sistema de medición de fuerza
- 6 Elemento rígido en tierra

Figura 3-7. Diagrama del banco de pruebas para aplicar el método directo. Es necesario medir tanto el desplazamiento a la entrada como la fuerza a la salida. (1)

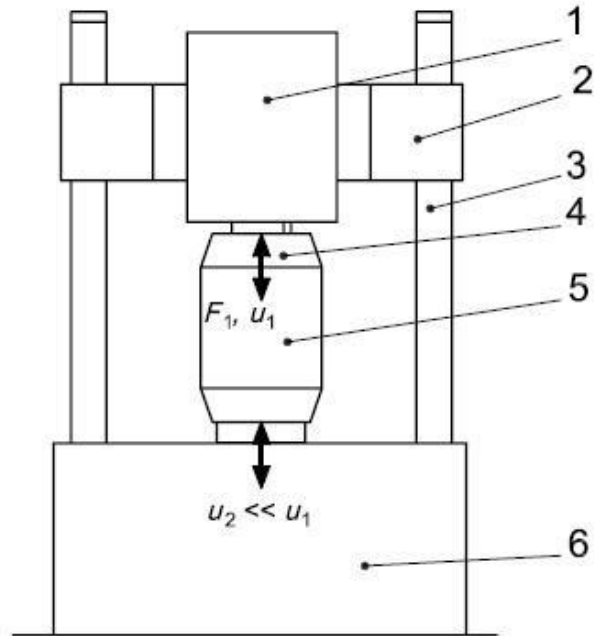
Para el método indirecto es necesario medir la transmisibilidad del sistema (relación entre los desplazamientos a la entrada y a la salida del sistema). Para aplicar el método, es posible medir ya sea los desplazamientos, velocidades o aceleraciones. La Figura 3-8 muestra el diagrama del banco de pruebas para este método.



- 1 Excitador de vibración
- 2 Trabe móvil
- 3 Resortes desacople dinámico, precarga estática
- 4 Masa de distribución de fuerzas
- 5 Elemento de prueba
- 6 Masa de bloqueo
- 7 Aislante de vibración
- 8 Elemento rígido en tierra

Figura 3-8. Diagrama del banco de pruebas para aplicar el método indirecto. En éste método es necesario medir la transmisibilidad del sistema. (1)

El último método de la norma es el método de punto conductor que es similar al método directo, la diferencia estriba en que la fuerza que se debe de medir es aquella a la entrada. En la Figura 3-9 se muestra el diagrama del banco de pruebas de éste método.



- 1 Actuador hidráulico (precarga estática y excitación dinámica)
- 2 Trabe móvil
- 3 Columnas
- 4 Sistema de medición de fuerza.
- 5 Elemento de prueba
- 6 Elemento rígido en tierra

Figura 3-9. Diagrama del banco de pruebas para aplicar el método del punto conductor. Es necesario medir tanto la fuerza a la entrada y el desplazamiento a la salida. (1)

4 Naturaleza viscoelástica

4.1 Dependencia de la temperatura

Los materiales viscoelásticos son polímeros con características que los hacen útiles para algunas aplicaciones especiales. Su reducido costo ha sido clave en el desarrollo de tecnología basada en estos materiales, y en la actualidad la industria y en general la vida cotidiana los hace unos de los materiales con más aplicación en el ramo del diseño mecánico.

La termodinámica establece que el incremento de trabajo mecánico (fuerza por distancia o presión por volumen) en un cuerpo/sistema es proporcional al cambio de su energía interna menos el cambio en la entropía, o visto de forma matemática $dW_m = dU - Tds$, donde dU , T y ds son el cambio en energía interna, la temperatura y el cambio en entropía del sistema respectivamente y dW_m es el aumento de trabajo mecánico (6). Desde el punto de vista termodinámico, la energía que se imprima a un sistema se convierte completamente en trabajo mecánico siempre y cuando su temperatura no se incremente en demasía de lo contrario la energía se disipará en forma de calor. La transferencia de calor entre el sistema y su entorno, resultado de la elevación de temperatura, produce entropía y eso sucede constantemente en todos los fenómenos de la naturaleza. Así, resulta notorio que el intercambio energético en el que participa un material viscoelástico no es lineal y que depende de la temperatura.

El comportamiento de los materiales metálicos sometidos a una carga es casi meramente elástico al punto de prescindir de los cambios de temperatura en los balances energéticos ingenieriles, pero los polímeros son más complejos y se comportan en general de tres formas distintas radicadas en la movilidad de sus arreglos internos que depende de la temperatura de trabajo, su conformado molecular, la humedad interna, etc. Mientras mayor movilidad se tenga, mayor será también la velocidad del polímero para restituir completamente una deformación impuesta (trabajo mecánico) (7).

La movilidad suele estimarse por medio de la expresión de *Arrhenius* (7) que se muestra en la gráfica izquierda de la Figura 4-1, ahí se añaden también los tres comportamientos de los polímeros. Cuando el polímero opera a una temperatura muy por debajo de su *temperatura vítrea* marcada como T_g en la gráfica de la Figura 4-1, su comportamiento es *crystalino o vítreo* (*glassy* en inglés) y su comportamiento es frágil ante una deformación impuesta, aunque si presenta algo de elasticidad sobretodo si su temperatura de operación se acerca a su temperatura vítrea. Este comportamiento hace que algunas veces se refiera a los polímeros vítreos como *congelados* respecto a su temperatura vítrea. De forma contraria, cuando el polímero trabaja a una temperatura muy por arriba de su temperatura vítrea se conoce como polímero *cauchoso* (*rubbery* en inglés), este comportamiento es muy elástico y hace que el polímero tenga la capacidad de deformarse grandemente cuando se le aplica una carga. Por último, cuando el polímero trabaja en las cercanías de su temperatura vítrea es un polímero *viscoelástico* (*leathery* en la Figura 4-1). En el caso de los polímeros viscoelásticos, además de ser elásticos, tienen la capacidad de disipar energía a los alrededores, que es una característica deseable si se quiere que el polímero actúe como amortiguador (7).

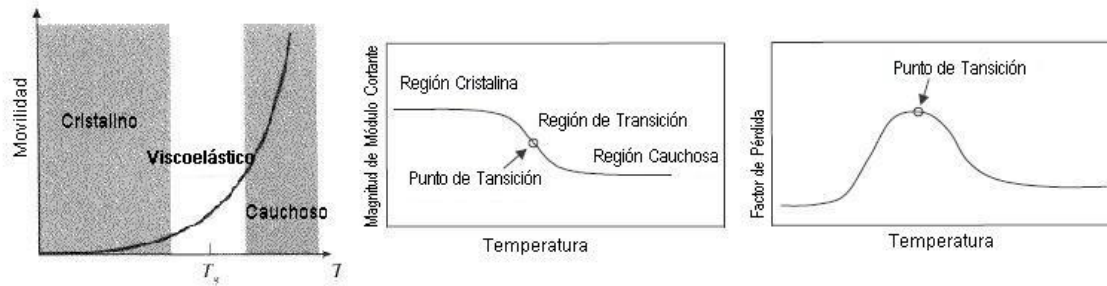


Figura 4-1. A la izquierda se muestra la gráfica de la ecuación de Arrhenius. Las figuras de en medio y a la derecha evidencian la dependencia de la magnitud del módulo de cortante y el factor de pérdida hacia la temperatura. (7)

4.2 Termofluencia, relajación y carga cíclica

En general, existen tres fenómenos físicos de bastante utilidad en el análisis del comportamiento de materiales viscoelásticos: Termofluencia, relajación de esfuerzo y carga dinámica (7).

El fenómeno llamado *termofluencia* (*creep* en inglés) se observa al colocar una carga en un material viscoelástico. Si la carga es aplicada por un largo tiempo, la deformación incrementa y continúa incrementando con el tiempo tendiendo a un valor fijo.

La relajación de esfuerzo es similar a la termofluencia, pero en este caso si se somete una probeta a deformación permanente. Se observa que la tensión disminuye con el tiempo de aplicación de la deformación. Este fenómeno se observa al amarrar fuertemente libros con un elastómero, ya que con el paso del tiempo los libros se podrán salir del paquete fácilmente. La Figura 4-2 ilustra cada uno de los fenómenos.

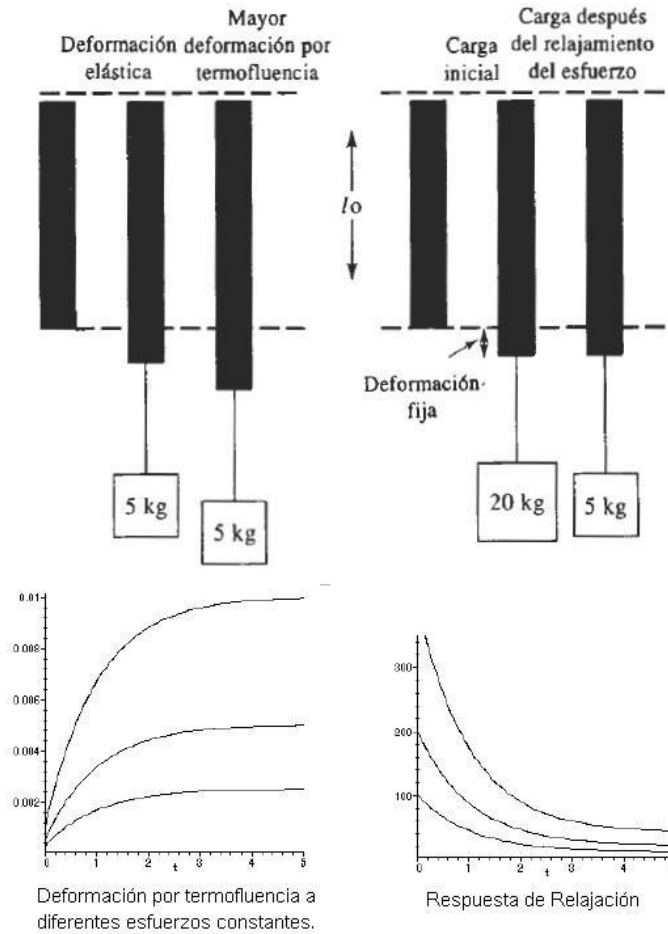


Figura 4-2. Ejemplos de la relajación y termofluencia. Referencias (8) y (7)

Por último, si se somete una probeta viscoelástica a carga (o deformación) cíclica en intervalos de tiempo pequeños, los fenómenos de termofluencia y relajación no tienen un aparente efecto en el comportamiento, ya que estos son notorios en intervalos de tiempo relativamente grandes; más bien, es observable que como resultado de la carga (o deformación) cíclica aplicados, la respuesta del elemento viscoelástico alcanza un estado estable de respuesta cíclica desfasada y con menor intensidad (7), lo que sugiere la posibilidad de utilizar materiales viscoelásticos como aislantes de vibraciones. Cabe destacar que bajo el efecto de deformaciones más grandes los fenómenos de relajación y termofluencia afectan la respuesta del sistema (9) y la hacen no lineal.

4.3 Propiedades dinámicas

Las propiedades tanto elásticas como disipadoras de materiales viscoelásticos se describen en términos del *módulo dinámico complejo* (4) siendo éste puesto de forma matemática en la Ecuación 4.1

Ecuación 4.1

$$E^* = E' + iE''$$

En donde el comportamiento elástico del material se denota por la componente de la respuesta que está en fase con la excitación conocida como *módulo de restitución* o *almacenamiento* E' (*storage modulus*). La componente en desfase es el comportamiento disipador del material conocida como *módulo de pérdida* E'' (*loss modulus*). El ángulo entre ambas componentes es el *ángulo de pérdida* (*loss angle*) y su tangente es el *factor de pérdida* (*loss factor*), como lo muestra la Ecuación 4.2

Ecuación 4.2

$$\tan\delta = \frac{E''}{E'}$$

4.4 Modelos dinámicos

4.4.1 Modelo de Maxwell

El primer modelo presentado es conocido como el modelo de Maxwell y es ilustrado en la Figura 4-3. Este modelo puede ser visualizado como la Ecuación 4.3 (analizada con más detalle en el capítulo 4.1). En donde el elemento elástico representa a la energía interna dU y el amortiguador representa la componente entrópica Tds (7).

Ecuación 4.3

$$dW_m = dU - Tds$$



Figura 4-3. Modelo dinámico de Maxwell para materiales viscoelásticos. (7)

Debido a la conexión en serie de los dos dispositivos, el desplazamiento total del sistema es la suma del desplazamiento de ambos dispositivos, así, la fuerza aplicada tanto al amortiguador como al resorte es la misma.

4.4.2 Modelo de Kelvin Voigt

El modelo de Kelvin-Voigt es sencillo como el modelo de Maxwell. A partir de la Figura 4-4, es notable que tanto el elemento disipador como el rígido se sufren el mismo desplazamiento y la fuerza necesaria para comprimir o estirar a cada elemento se suman para conocer la fuerza aplicada al sistema. Este modelo, al igual que el de Maxwell, no toma en cuenta la relajación ni la termofluencia y representa los elementos termodinámicos de la Ecuación 4.3, lo que puede ser válido si se somete la probeta a cargas en intervalos pequeños de tiempo. Si este modelo se excita de manera cíclica, su balance energético arroja su ecuación del movimiento que es de la forma $m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = F$ cuya solución es armónica y fácilmente encontrada, lo que hace de este modelo la base del estudio de las vibraciones mecánicas.

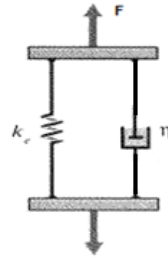


Figura 4-4. Modelo dinámico de Kelvin- Voigt para materiales viscoelásticos. (7)

Este modelo es sencillo y se asemeja a lo observado en pruebas cuando el elemento amortiguador es viscoso, (que no es lo mismo que viscoelástico). La diferencia entre amortiguamiento viscoso y viscoelástico es que el primero se produce por trasladar por un conducto estrecho un volumen de líquido de una cámara a otra y el segundo es producto del re-ordenamiento molecular del material (2).

4.4.3 Modelo lineal estándar

La Figura 4-5 representa este modelo. Si se observa el modelo de Maxwell, se nota que si se aplica una carga constante, el modelo tenderá a seguir aumentando su longitud independientemente del tiempo que la carga esté aplicada, lo que no concuerda con el fenómeno de termofluencia por lo que un resorte en serie dará la tendencia al equilibrio observable en dicho fenómeno mientras pasa el tiempo (2).

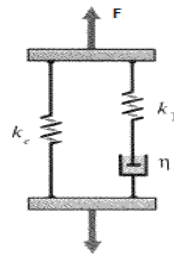


Figura 4-5. Modelo dinámico estándar para materiales viscoelásticos. (7)

4.4.4 Modelo de Wiechert

Este modelo es una generalización del modelo estándar y es conocido como modelo de Wiechert. La relajación conseguida con el modelo anterior es mejorada basándola en múltiples modelos de Maxwell acompañados por un resorte en paralelo al final de la cadena (2). La Figura 4-6 muestra el modelo.

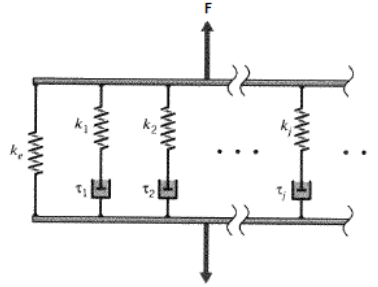


Figura 4-6. Modelo dinámico de Wiechert para materiales viscoelásticos. (7)

Este modelo, si es bien determinado, reproducirá los tres fenómenos físicos al mismo tiempo, a costa del aumento en el número de parámetros necesarios para su uso.

4.4.5 Modelo de histéresis

El modelo de histéresis (Figura 4-7) es presentado como alternativa al modelo de Kelvin-Voigt, ya que la solución de su ecuación diferencial de movimiento es parecida a la del modelo Kevin Voigt y representa a un solo elemento que es el viscoelástico.

El modelo histerético surge al observar en experimentos que un elemento elastómero o viscoelástico al ser excitado armónicamente tiene una respuesta (en estado estable) también armónica, pero desfasada. Dicho desfase es estimable en una prueba al transformar la señal leída por los transductores en una parte real y otra compleja. El uso de la transformada rápida de Fourier permite conocer el espectro de la señal leída y con ello el desfase entrada/salida. El nombre de histerético proviene del hecho de que al graficar la desplazamiento de la probeta y la fuerza aplicada contra ella, se obtiene la curva de histéresis cuya área representa la energía disipada por el elemento viscoelástico en cada ciclo durante la vibración. Por último, la parte real (en fase con la excitación) representa al elemento restaurativo y la parte compleja (componente desfasada) la respuesta del elemento disipador (10). Este modelo es utilizado en las normas vigentes de caracterización de viscoelásticos (1) y (2).

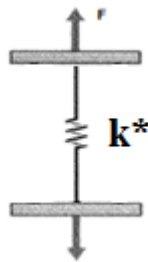


Figura 4-7. Modelo dinámico histerético para materiales viscoelásticos. En la figura se muestra la rigidez dinámica compleja K^* . (10)

4.5 No linealidades

4.5.1 Temperatura

La ecuación energética $dW_m = dU - Tds$ (Ecuación 4.3) vista en el capítulo anterior depende de la energía interna y de la entropía y por lo tanto, es función de la temperatura. Una forma de evitar esta no linealidad es sometiendo a la probeta a pocos ciclos (2). El método de vibración forzada no resonante es adecuado para prevenir este efecto.

4.5.2 Amplitud y frecuencia de excitación

Los efectos de Mullin’s y Payne son causa directa de esta no linealidad. El efecto de *Mullin* es observable cuando un material viscoelástico es sometido a carga cíclica y su respuesta en un principio dista de la respuesta que se obtiene una vez estabilizadas las moléculas internas de la probeta (11), este fenómeno puede ser visualizado como una solución transitoria. Para neutralizar este efecto, la medición se debe de realizar después de aplicar algunos ciclos de gran deformación a la probeta para permitir el reajuste de las moléculas (11). Mucho cuidado debe tenerse de no incrementar en gran cantidad la temperatura del componente. El efecto de *Payne* mostrado en la Figura 4-8 es más relevante en cuanto a la variación del factor de pérdida.

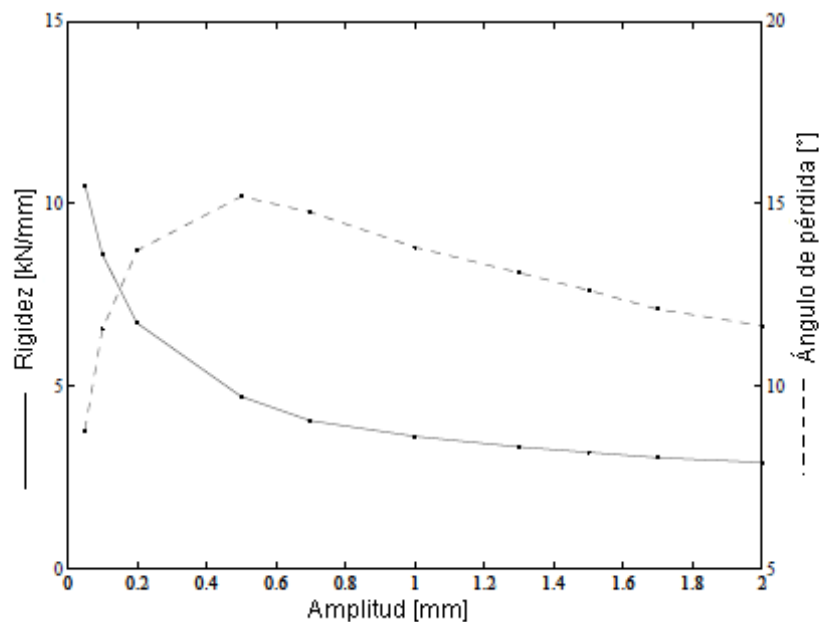


Figura 4-8. Las mediciones de rigidez y ángulo de pérdida de un aislador de vibración cauchoso muestran la dependencia de la amplitud de vibración conocida como efecto de Payne (11).

Estos efectos agregan no linealidades a la solución, que se ven reflejadas en los sobre tonos armónicos que acompañan a la solución como se modela en la Ecuación 4.4, donde los subíndices 0 y n denotan a las magnitudes de la fundamental y armónicas respectivamente y ω, F y δ son la frecuencia, magnitud y desfase respectivamente.

Ecuación 4.4

$$F = F_0 \sin(\omega_0 t + \delta_0) + \sum F_n \sin(\omega_n t + \delta_n).$$

La dependencia de la frecuencia está en función de la región en la que se encuentra el material como lo muestra la Ecuación 4.4. El *factor de pérdida* incrementa con la frecuencia en la región *rubbery*, decrece en la región *vítrea* (*glassy* en inglés) y llega a un máximo en la región de transición. La Figura 4-9 muestra esta dependencia de la frecuencia (11).

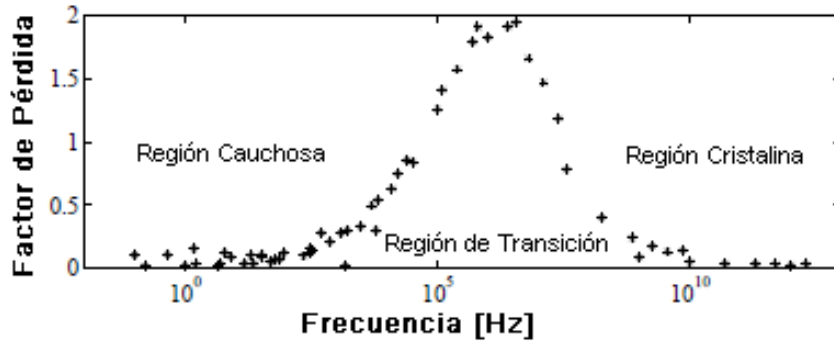
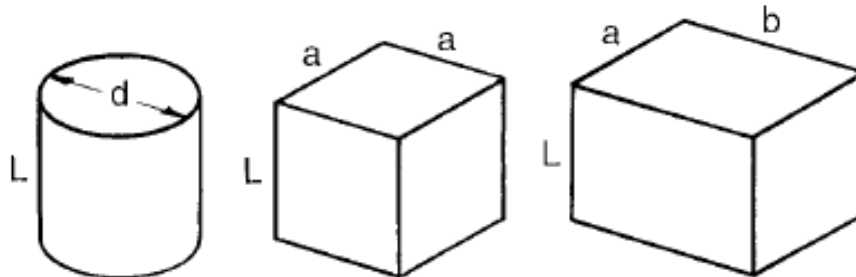


Figura 4-9. Evidencia de que el factor de pérdida depende de la frecuencia. (11)

Aunque es difícil cuantificar esta no linealidad, una manera recomendada de representarlo es con el modelo de Wiechert, sin embargo, dicho modelo es de difícil análisis debido a la cantidad de parámetros a medir.

4.5.3 Geometría

Una no linealidad presente en la caracterización de los materiales viscoelásticos es la geometría de la probeta (11), ya que si la geometría varía respecto a las formas de la Figura 4-10, se producen no linealidades de esfuerzos a lo largo del componente y la ecuación $E = \frac{kL}{A}$ que representa de forma lineal la rigidez de un sólido debe de ser modificada.



Especímenes de Expansión/Compresión

Figura 4-10. Formas comunes de las probetas viscoelásticas. (2)

4.6 Conclusiones

Para establecer los límites de funcionalidad del banco se necesitó utilizar un modelo dinámico comúnmente utilizado para describir el comportamiento viscoelástico. El modelo utilizado es el de amortiguación viscosa (Kelvin-Voigt) por su sencillez y familiaridad con los temas elementales de vibración. Antes de realizar alguna prueba es necesario *conocer* las características dinámicas de las probetas para poder aplicar el modelo viscoso y saber de forma aproximada si se exceden las capacidades de resistencia de las piezas. Paradójicamente, el objetivo del banco de pruebas es determinar dichas características.²

Por otra parte, la aplicación del modelo de Kelvin-Voigt no es la única suposición de los análisis consecutivos, también fue necesario cuál de los dos métodos de la norma ISO (método directo e indirecto) sería utilizado como base del análisis dinámico. El método directo se aplica a una sola probeta que recibe deformaciones axiales repetidas y el método indirecto se aplica suspendiendo una masa sobre varias probetas mientras vibran, dejando moverse libremente a la masa suspendida, por esta razón. La diferencia entre ambas, además de que la rigidez del sistema en el método indirecto es mayor, es que no hay manera en el método directo de provocar resonancia en la probeta. En el método indirecto la masa suspendida puede estar cerca o en resonancia, lo que eleva las cargas transmitidas interna y externamente de la máquina, razón por la cual los análisis dinámicos de este trabajo fueron basados en el método indirecto de la norma ISO.

El comportamiento de los polímeros conocidos como *viscoelásticos* es un modelo cuya dependencia de la temperatura de operación y del medio lo hace susceptible a cambios drásticos de comportamiento, así que es sugerido monitorear la temperatura de la probeta en futuros trabajos.

El modelo a utilizar para caracterizar las probetas es en el método directo y en el método indirecto de la norma ISO es el modelo histerético. Al final de este trabajo se añadió en el capítulo 8 en donde se expone dicho modelo. Algunas otras cuestiones de este capítulo teórico se discuten en los capítulos 10 y 11.

² En verdad el operador del banco podrá conocer los límites de funcionalidad directamente de las tablas anexas sin aplicar el modelo de Kelvin-Voigt.

5 Diseño del banco de pruebas

5.1 Especificaciones

Los objetivos del banco de pruebas a diseñar estarán garantizados si las siguientes premisas son veraces:

1. El banco de pruebas se adapta a dos métodos diferentes para caracterizar probetas: El método directo e indirecto de la norma ISO (1)³.
2. El costo del banco es menor que el costo de un banco comercial o inferior al costo del banco de pruebas utilizando un mecanismo servo hidráulico.
3. El banco de pruebas cuenta con el mayor número de piezas estándares y comerciales⁴.
4. El banco de pruebas se adapta a diferentes amplitudes y frecuencias de excitación bajo los rangos establecidos en la norma ASTM (2).
5. El banco de pruebas es funcional y se puede validar ésta característica.

La Tabla 5-1 muestra las especificaciones de la máquina a diseñar, éstas cuentan con valores determinados de funcionamiento y se encausan para cumplir con las premisas.

Rubro	Descripción
Movimiento de excitación	Armónico simple en sentido vertical con amplitud y frecuencia variables
Rango de frecuencia	0-100Hz controlada desde el motor
Rango de amplitud	0-10cm (pico a pico)
Intercambiabilidad entre métodos de medición	Vibración forzada resonante y vibración forzada no resonante (2)
Costo	Por debajo del mecanismo de actuador servo hidráulico (\$200,000 M.N. Agosto 2013)
Manufactura	Componentes maquinables en equipos convencionales (torno, fresadora). Estructura y componentes de acero.
Ergonomía y seguridad	Capaz de ser operado por un solo ingeniero y con carcasa de protección
Validación de funcionalidad	La vibración en sentidos que no sean el vertical, no deberá sobrepasar el 5% de consumo de energía en base al movimiento deseado

Tabla 5-1. Especificaciones del banco de pruebas.

5.2 Diseños conceptuales

Los bancos de pruebas actuales difieren en la forma de producir la vibración, en algunas ocasiones, se utilizan mecanismos de cuatro barras, flechas desbalanceadas o actuadores servo hidráulicos para lograr que la vibración ocurra en la forma y dirección deseada. La normatividad vigente (2)

³ Así se cubren también los métodos de la norma ASTM (2).

⁴ De esta forma aumenta la facilidad de construcción y el costo de manufactura

considera a los actuadores servo hidráulicos como una buena opción siempre que su costo no exceda ciertos límites. La principal ventaja que tienen éstos actuadores sobre las demás opciones es su capacidad de reproducir vibraciones no solo armónicas simples, sino una amplia gama de funciones que van desde escalones y rampas hasta armónicos más complicados, incluso tienen la posibilidad de reproducir movimientos aleatorios; no obstante, su costo es elevado y es posible prescindir de ellos siempre y cuando se asegure que la vibración será la deseada.

Por las razones expuestas en el párrafo anterior, es de extrema importancia seleccionar la forma en la que se producirá la vibración. El capítulo 5.3 contiene una tabla comparativa hecha en base a las especificaciones requeridas para este banco de pruebas, en la que fueron comparados los mecanismos surgidos a lo largo de la etapa de generación de ideas tomando como base el actuador servo hidráulico. Los mecanismos sugeridos en la etapa de generación de ideas se muestran en las imágenes de la Figura 5-1.

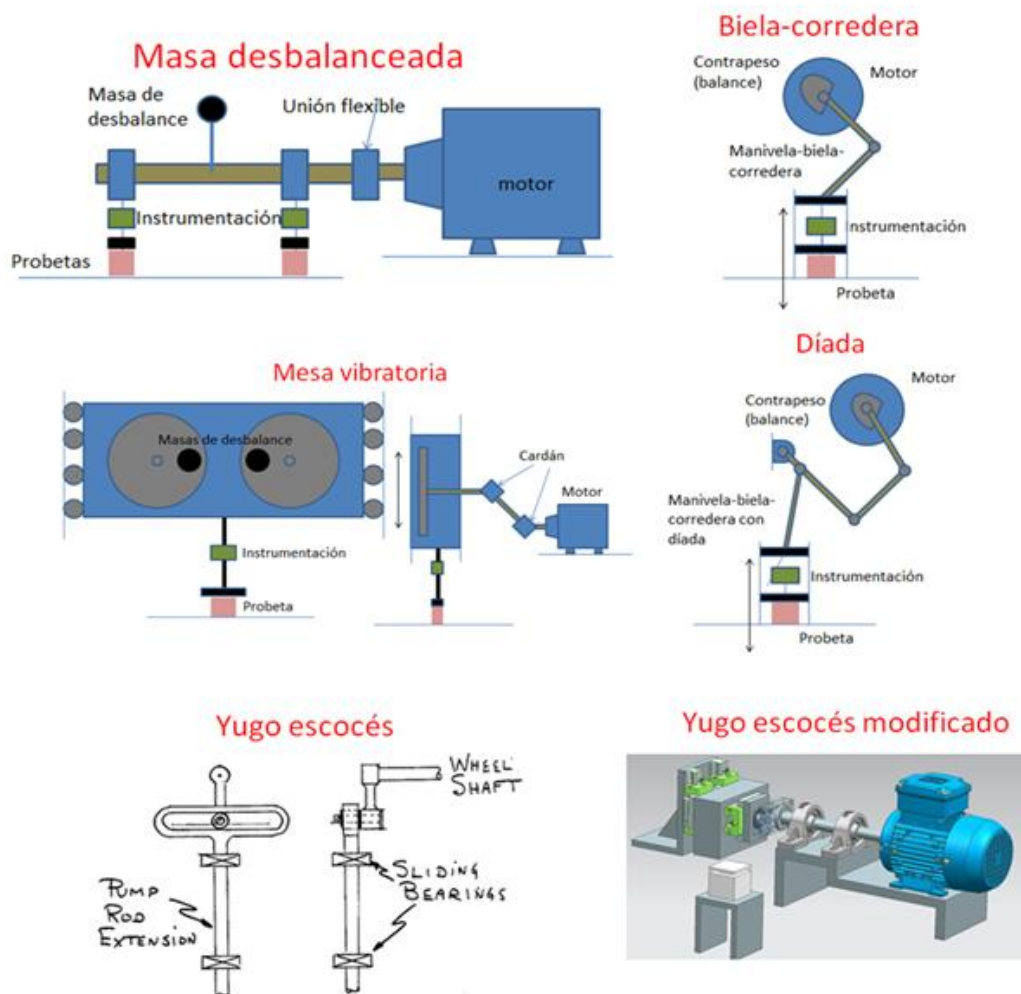


Figura 5-1. Mecanismos surgidos durante la etapa de generación de ideas, todos ellos producen movimientos repetitivos vibratorios.

5.3 Selección de diseño

Ya que en la normatividad vigente se hace mención del mecanismo servo hidráulico como la solución más recomendada para producir la vibración del banco de pruebas, se utilizó éste como base para hacer la comparación entre los conceptos mostrados en la sección anterior. La comparación se realizó por medio de la *metodología de la matriz de Pugh* tomando en cuenta los criterios mostrados en la Tabla 5-2 y otorgándole a cada característica su importancia del uno al cinco, donde cinco es característica muy importante y cero es una característica no muy importante. En la Tabla 5-2, se ha utilizado la siguiente nomenclatura: *s* es igual a la base, ++ es mucho mejor que la base, + mejor que la base, -- mucho peor que la base y - peor que la línea base.

Criterio	Importancia	Masa desbalanceada	Biela-corredera	Mesa vibratoria	Díada	Yugo escocés	Yugo escocés modificado	Servo hidráulico
Frecuencia de excitación								
Frecuencia variable entre diferentes pruebas	5	s	s	s	s	s	s	s
Frecuencia fija en operación	5	s	s	s	s	s	s	s
Excitación armónica vertical	5	-	s	s	s	s	s	s
Rango acorde a la normatividad	5	-	s	--	s	s	s	s
Amplitud de excitación								
Amplitud variable entre diferentes pruebas	5	-	--	s	-	--	s	s
Amplio rango de amplitudes	1	s	--	s	-	--	+	s
Amplitud fija en operación	5	s	s	s	s	s	s	s
Tiempo entre pruebas (ajuste de amplitud)	5	-	--	s	s	--	s	s
Temperatura de prueba								
Alcanzar la frecuencia de operación en pocos ciclos	4	--	-	-	-	-	-	s
Posible adición de sensores térmicos y resistencias	1	s	s	-	s	s	s	s
Espacio para probeta e instrumentación								
Para diferentes geometrías de probetas	5	-	-	s	s	s	s	s
Tiempo entre pruebas (cambio de probetas)	2	--	s	+	s	s	s	s
Análisis de mediciones								
Método de FFT y/o filtros	2	s	s	s	s	s	s	s
Ergonomía								
Medidas estándares	4	s	s	s	s	s	s	s
Valor agregado								
Costo	4	s	++	++	++	++	++	s
Innovación	4	+	s	s	+	s	++	s
Reutilizable en otros métodos	2	+	s	+	+	s	+	s
Total		-31	-23	-3	4	-18	14	

Tabla 5-2. Comparación por la metodología de Pugh.

Los resultados arrojados en la comparación de la Tabla 5-2 visualmente perceptibles con la Figura 5-2. De donde es posible concluir que *el mecanismo modificado de yugo escocés es la opción mejor calificada para cumplir con las especificaciones, ya que en comparación con el mecanismo servo hidráulico, reúne características más positivas y menos negativas entre todas las opciones analizadas.*

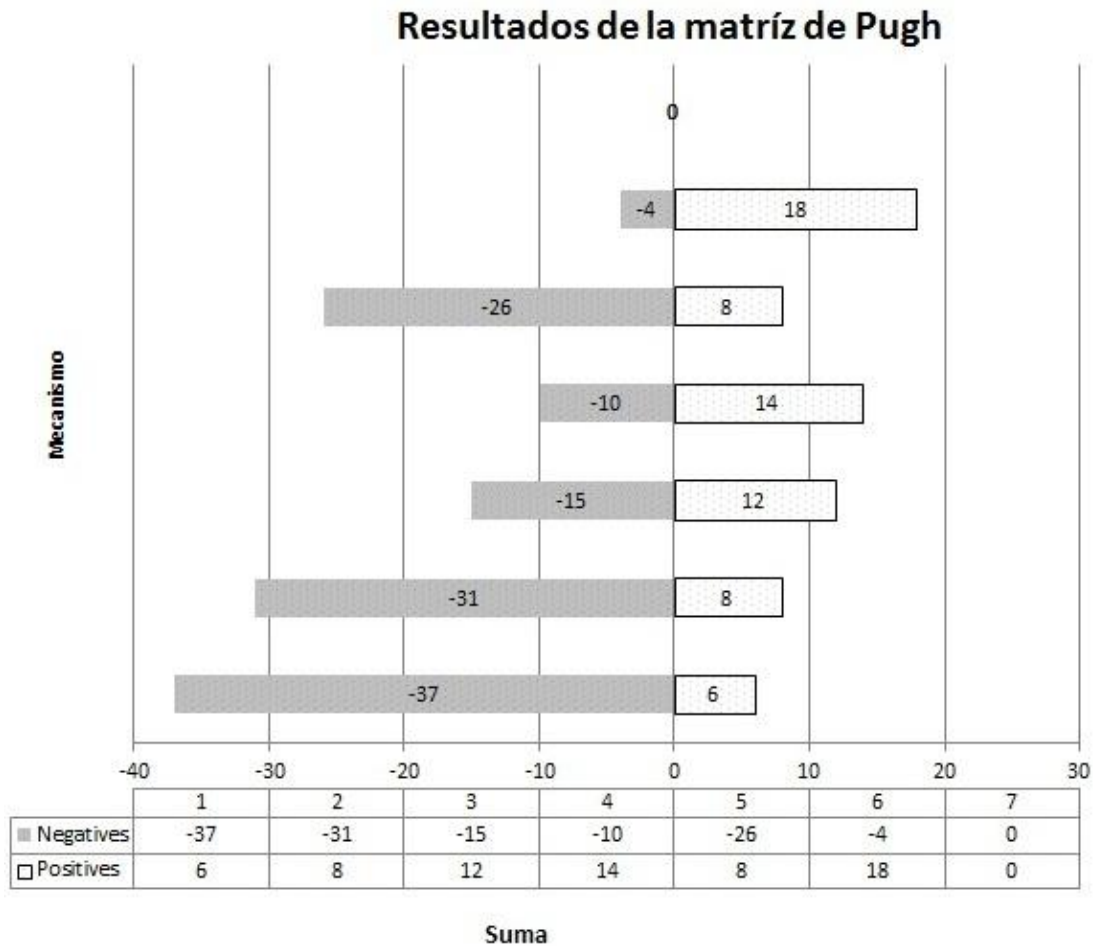


Figura 5-2. Resultados de la comparación según la metodología de la matriz de Pugh.

5.4 Diseño elegido

En la Figura 5-3 se presentan imágenes de la conceptualización tridimensional del ensamble del banco de pruebas. Como es apreciable en las imágenes de la Figura 5-4, la principal diferencia entre el mecanismo de *Yugo escocés* y la modificación aquí presentada estriba en que se suplió la ranura del yugo por un riel externo por el que se desliza un patín para dar libertad al perno de moverse en dirección horizontal. Para dar al perno diferentes radios de giro (variar la amplitud) se añadió también una junta deslizante en la manivela que se puede mantener en un punto fijo por medio de un tornillo de ajuste. En el banco construido la solución de un tornillo opresor que fijara al perno fue contundente. A continuación se presenta una explicación de la configuración y de las partes más importantes del diseño elegido.

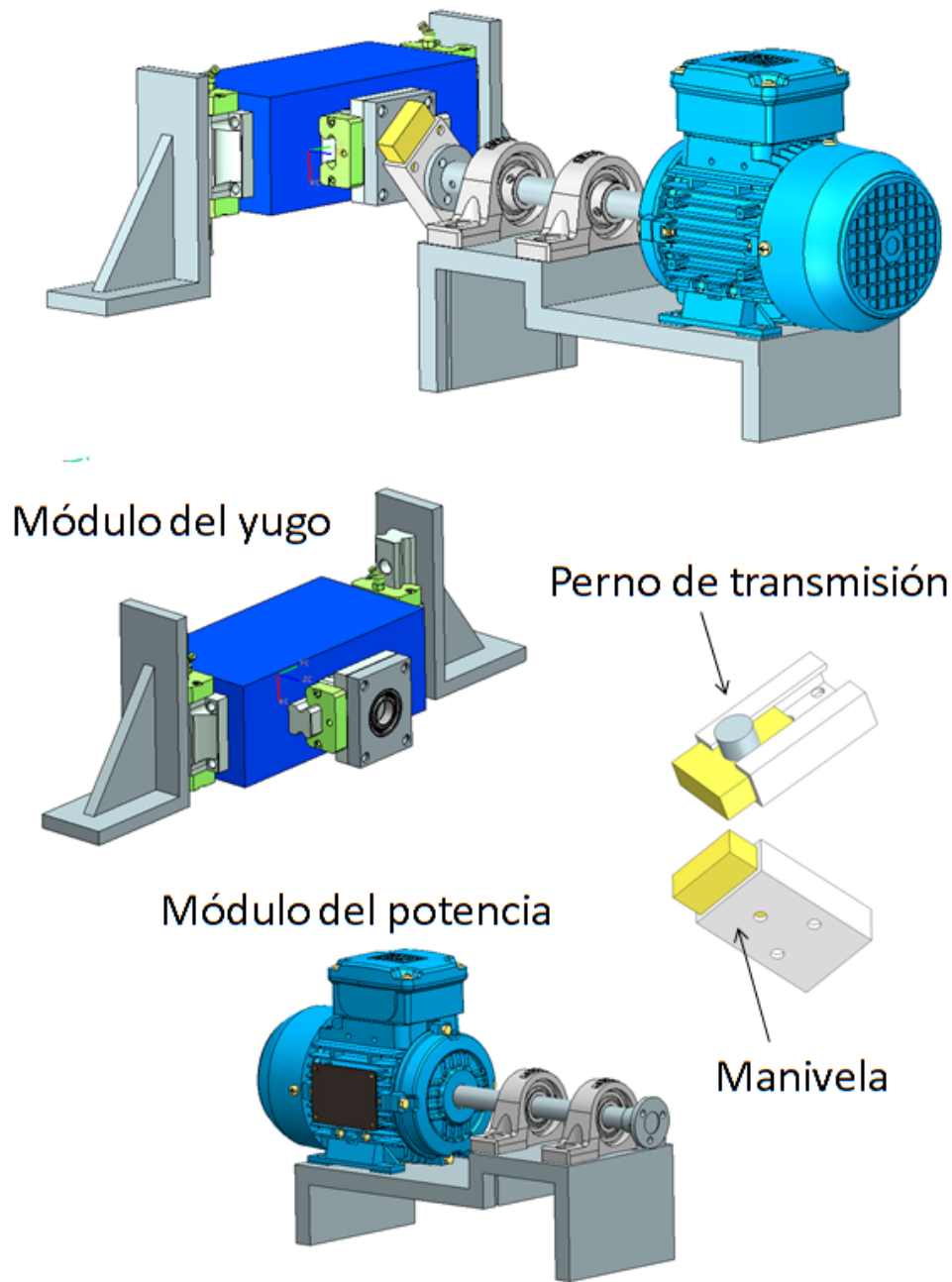


Figura 5-3. Imágenes de la conceptualización tridimensional del mecanismo elegido.

Fundamentalmente, el banco está dividido en dos partes o módulos a los que nos referimos como módulo de potencia (que incluye al motor y su flecha) y el módulo del yugo (que incluye al yugo y

las partes que lo acompañan en su movimiento). Como lo muestra la imagen de la Figura 5-3, ambos módulos son conectados por el *perno de transmisión*⁵, parte fundamental del diseño.

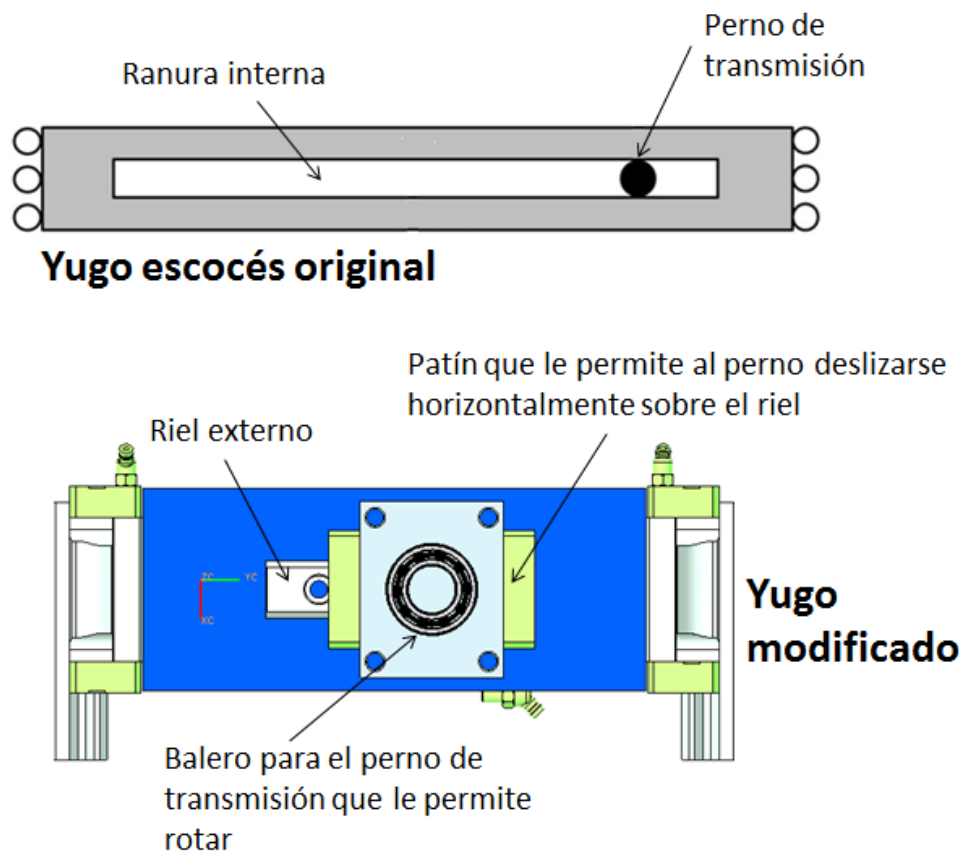


Figura 5-4. Comparación entre el yugo escocés original y el aquí mostrado haciendo énfasis en la sustitución de la ranura interna por un riel externo. También el perno de transmisión puede girar por medio del balero.

A diferencia del mecanismo de *Yugo Escocés*, la modificación aquí presentada permite al *perno de transmisión* moverse a lo largo de su riel para incrementar o disminuir la excentricidad entre el eje del perno y el de la flecha del motor. La Figura 5-5 no muestra el mecanismo que sujeta al perno en una posición fija.

⁵ Este perno debe asegurar que el par entregado por el motor mueva al yugo de forma armónica simple; un perno deficiente sería aquel que se rompiera o deformara grandemente en operación produciendo movimientos no deseados del yugo.

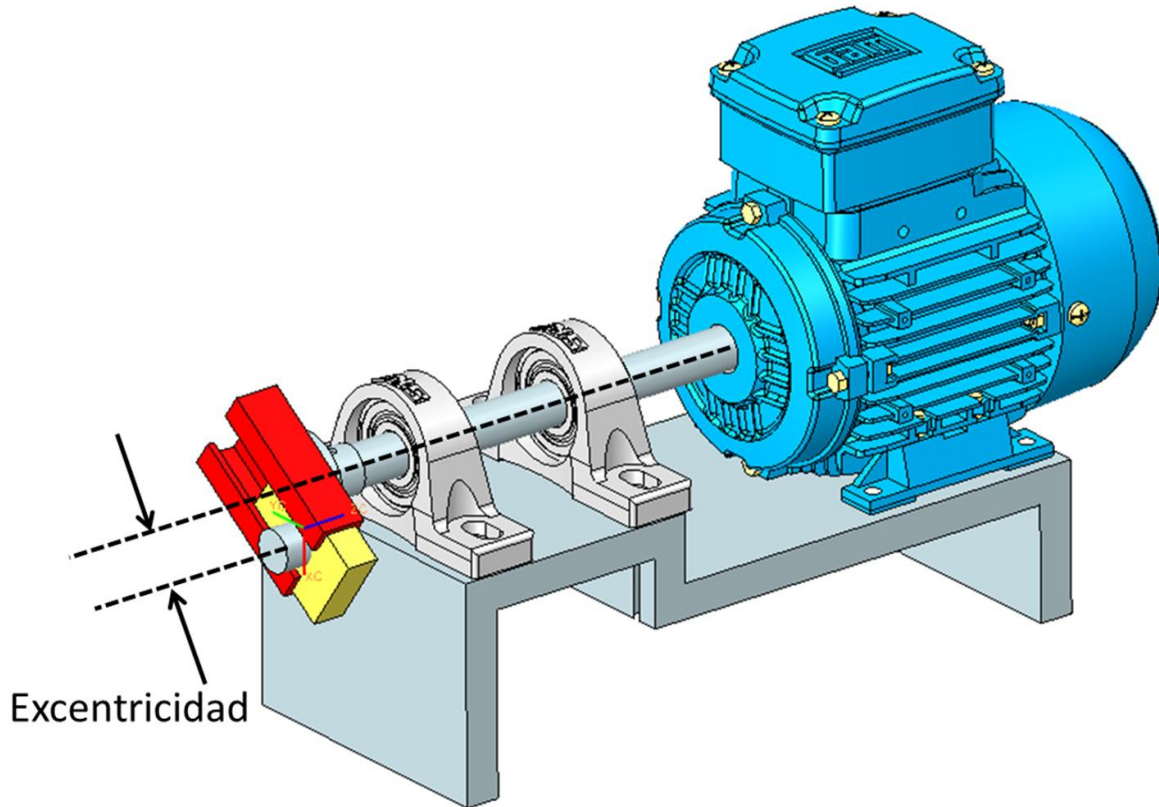


Figura 5-5. La excentricidad entre el perno de transmisión y la flecha del motor proporciona la amplitud de vibración del yugo. En esta figura no se muestra el mecanismo que mantiene la excentricidad fija a lo largo de la prueba.

El taller de manufactura recibió estas imágenes como punto de partida del diseño detallado para la fabricación del banco de pruebas. Las ideas propuestas por el taller respecto a la estructura que soporta los módulos del banco y las bases de la misma se presentan de manera básica en la Figura 5-6. El taller de manufactura se encargó de generar los planos detallados de las piezas a manufacturar, además dio solución a la forma de mantener la excentricidad de la flecha y del perno y del ensamble por medio de un tornillo sujetador también mostrado en la Figura 5-6.

5.5 Banco construido

Como es apreciable en la Figura 5-7 y en las imágenes de los anexos, el diseño final del mecanismo excitador del banco de pruebas cumple con la conceptualización tridimensional abordada en la sección anterior. Para solucionar el problema de la sujeción del perno se colocó un tornillo sujetador para brindar un ajuste preciso que soporte las condiciones de operación.



Figura 5-6. A la izquierda superior se muestra el diseño realizado por el taller de manufactura. A la derecha superior están los soportes que se apoyan y se empotran en el piso. Las imágenes de abajo muestran el tornillo sujetador que al girarlo cambian la excentricidad del perno de transmisión.

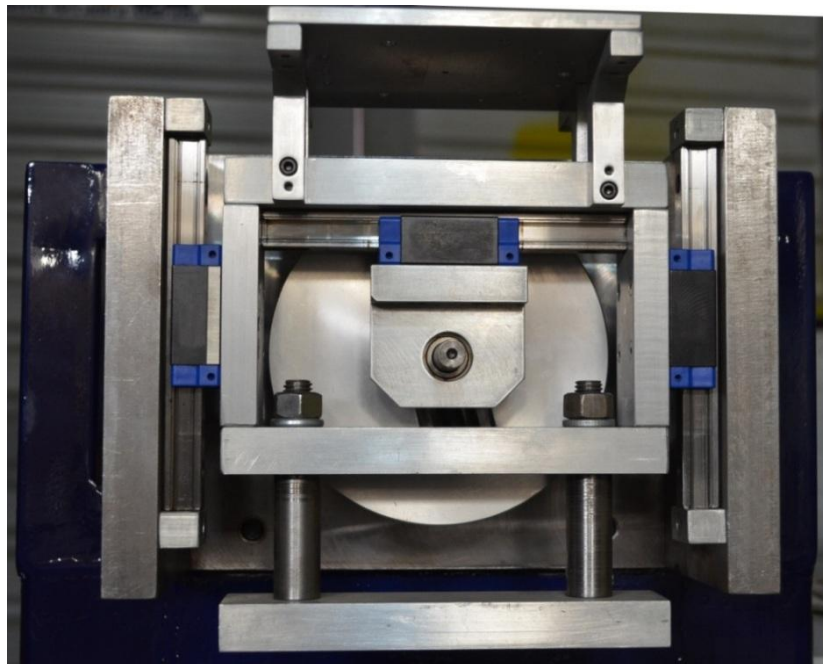


Figura 5-7. Imagen frontal del mecanismo del banco de pruebas en el que se muestran montados la tabla vibratoria (arriba) y el punzón (abajo). La tabla sirve para aplicar el método indirecto y el punzón para el método directo.

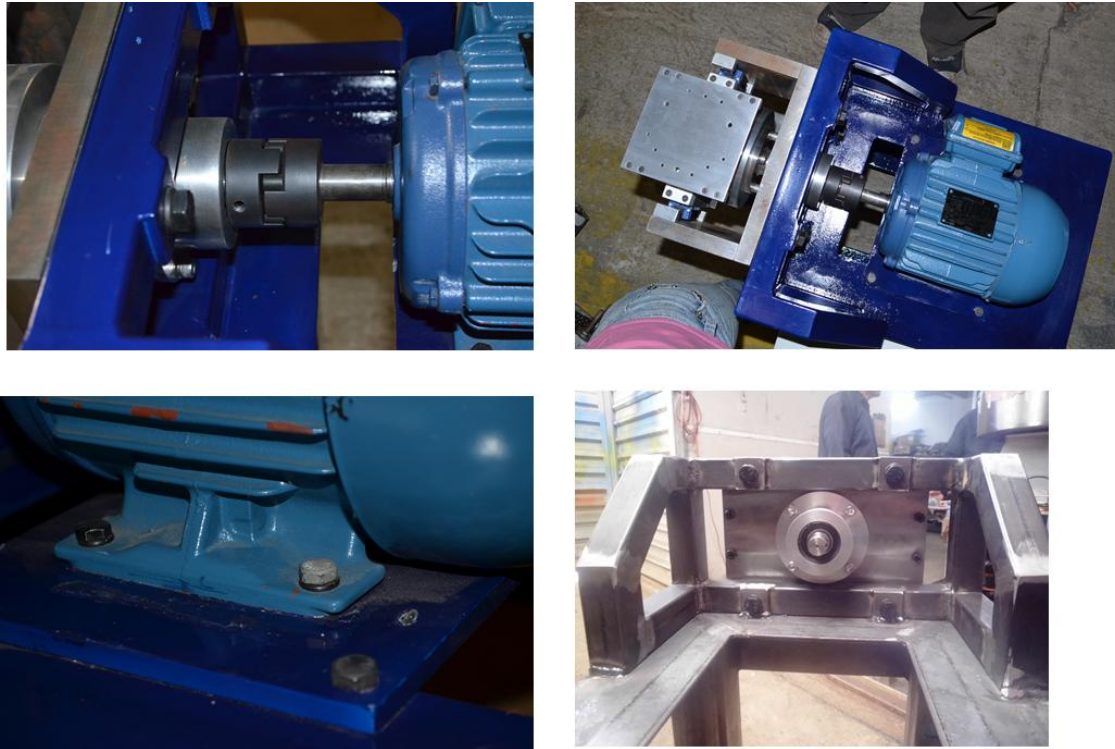


Figura 5-8. En la imagen superior izquierda se muestra la unión flexible de la flecha del motor con la flecha de transmisión. En la imagen superior derecha se muestra una vista superior del banco de pruebas, en ella se observa la tabla vibratoria en donde se colocan las probetas. La imagen inferior izquierda muestra los tornillos de fijación del motor con la estructura del banco. La imagen inferior derecha muestra la brida por la que se une la flecha al volante de inercia.

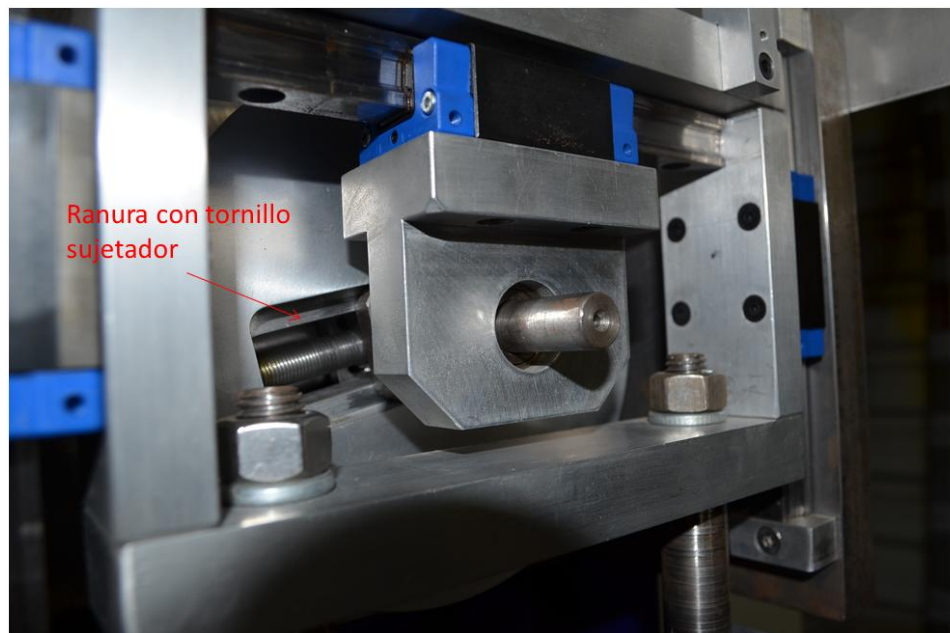


Figura 5-9. La imagen muestra la apariencia frontal del mecanismo del banco, también se not la ranura en el volante de inercia por la que se sujeta la posición del perno por medio de un tornillo.



Figura 5-10. La imagen superior izquierda muestra la caja de la circuitería eléctrica para el control de la velocidad del motor. La imagen inferior izquierda muestra la estructura del banco. La imagen de la derecha muestra el ensamble para el método directo de medición, las probetas y la masa suspendida.

6 Análisis de vibración, dinámico y de resistencia.

6.1 Simbología de los análisis.

- b Coeficiente de amortiguación viscosa. [N/mm/s]
- c Radio mínimo del perno de transmisión. [m]
- C_c Magnitud del coseno que compone el vector de desplazamiento de la masa suspendida en respuesta a la vibración impuesta a las probetas en el método indirecto. [m]
- C_s Magnitud del seno que compone el vector de desplazamiento de la masa suspendida en respuesta a la vibración impuesta a las probetas en el método indirecto. [m]
- $C_{1,2,3,4}$ Constantes de integración obtenidas a partir de las relaciones de curva elástica para vigas utilizadas para el método de superposición.
- E Energía requerida del motor durante la prueba. [J]. Módulo de elasticidad del material de la pieza que se esté analizando. [Pa]
- \dot{E} Potencia requerida del motor durante la prueba. [W en los análisis, hp en las tablas de límites]
- \dot{E}_{RMS} Potencia RMS (raíz mínima cuadrada) del motor durante la prueba. [hp]
- E_{total} Energía entregada por el motor para mover el banco de pruebas.
- $E_{x,y,z}$ Energía requerida del motor para desplazar al yugo en los ejes x , y y z . Este valor proviene de la lectura de velocidad de los acelerómetros ubicados ortogonalmente sobre el yugo. [J]
- F Fuerza de compresión de los patines laterales. [N]
- f Frecuencia de excitación, frecuencia del motor del banco en pruebas. [rad/s]
- F_a Fuerza viscosa, fuerza que el amortiguador transmite al mecanismo durante su vibración al suponer que las probetas se comportan de forma viscosa. [N]
- F_r Fuerza elástica, fuerza que el resorte transmite al mecanismo durante su vibración al suponer que las probetas se comportan de forma elástica. [N]
- f_n Frecuencia natural del sistema vibratorio. [rad/s]
- g Longitud del patín en dirección de su deslizamiento por el riel. [m]
- h Distancia entre los rieles laterales. [m]
- I Segundo momento de área de la sección que se esté analizando. [m^4]

- k Rigidez del sistema. [N/mm]
- k_{flecha} Rigidez de la flecha proveniente del motor. [N/m]
- k_t Factor de concentración de esfuerzo en el perno debido al chaflán.
- L Longitud en voladizo del perno de transmisión, carga a corte del perno. [N]
- $L_{1,2,3}$ Distancias entre los soportes de la flecha proveniente del motor. El subíndice se refiere a los tramos de entre los soportes de la flecha. [m]
- M Momento de flexión en el perno. [Nm]
- m Masa de la pieza en análisis. [Nm]
- MSL Margen de seguridad límite de la pieza analizada.
- $M_{1,2,3}$ Momentos internos en la flecha del motor. Los subíndices indican el tramo en el que actúan. [Nm]
- P Fuerza que el perno transmite al yugo para producir la vibración, carga a corte del perno en voladizo, fuerza de compresión del patín horizontal. [N]
- Q Reacción en el segundo soporte de la flecha proveniente del motor. [N]
- R Reacción en el tercer soporte de la flecha proveniente del motor. [N]
- S Reacción en el primer soporte de la flecha proveniente del motor. [N]
- S_y Esfuerzo de cedencia o límite elástico del material de la pieza analizada. [Pa]
- T Par requerido del motor durante la prueba. [Nm].
- t Tiempo analizado de la prueba. [s]
- V Fuerza transmitida, fuerza que la masa suspendida transmite al yugo mientras se realiza la prueba. [N]
- v Deflexión en algún punto de la flecha especificado por el subíndice. [m]
- W Fuerza gravitacional del yugo más la masa suspendida más los elementos que se mueven verticalmente durante la prueba.
- $x(t)$ Desplazamiento vertical función del tiempo de la masa suspendida durante la prueba. [m]
- $y(t)$ Desplazamiento vertical función del tiempo del yugo durante la prueba. [m]

\emptyset Diámetro menor del perno. [m]

Símbolos griegos

Δ_{max} Máxima deflexión del perno de transmisión. [m]

δ Amplitud de la vibración, excentricidad del perno de transmisión y la flecha del motor. [m]

ξ Factor de amortiguación viscosa supuesto del sistema vibratorio (masa-probetas).

σ_a Tensor de esfuerzo en el punto a de la flecha proveniente del motor. [Pa]

σ_b Tensor de esfuerzo en el punto b de la flecha proveniente del motor. [Pa]

$\sigma_{concentrado}$ Esfuerzo de flexión del perno de transmisión incrementado debido a su chaflán. [Pa]

σ_{f_a} Esfuerzo de flexión en el punto a de la flecha proveniente del motor. [Pa]

$\sigma_{flexión}$ Esfuerzo de flexión del perno de transmisión. [Pa]

σ_o Esfuerzo de operación de la pieza analizada. [Pa]

σ_{VM} Esfuerzo de von Mises en el punto de análisis de la flecha proveniente del motor. [Pa]

$\sigma_{1,2,3}$ Esfuerzos principales en el punto de análisis de la flecha proveniente del motor. Los subíndices se refieren al número de esfuerzo principal. [Pa]

τ_a Esfuerzo cortante en el punto a de la flecha proveniente del motor. [Pa]

τ_b Esfuerzo cortante en el punto b de la flecha proveniente del motor. [Pa]

τ_{corte} Esfuerzo cortante del perno de transmisión. [Pa]

ϕ Ángulo de desfase entre la excitación $y(t)$ y la posición $x(t)$. [rad]

ω Velocidad angular de excitación, velocidad angular del motor del banco en pruebas. [rad/s]

ω_n Velocidad angular natural del sistema vibratorio. [rad/s]

$\omega_{n_{flecha}}$ Velocidad angular de la flecha proveniente del motor. [rad/s]

6.2 Datos y suposiciones.

El objetivo de los análisis consecuentes es establecer los límites de operación del banco de pruebas construido en base a los esfuerzos de las piezas clave de la máquina⁶, tales como el perno de transmisión, los patines y la flecha de transmisión. Para esto, se tomó como base la prueba del método indirecto de la norma ISO (1) que es más crítica que la del método directo ya que la masa suspendida vibra libremente y puede transmitir cargas debidas a su resonancia en algún momento de la prueba a diferencia del método directo donde una deformación controlada es aplicada directamente sobre la probeta evitando así el paso por resonancia. La Figura 6-1 contiene los nombres que se han dado a las piezas del mecanismo excitador y que serán usados a lo largo del análisis.



Figura 6-1. Nombres de las piezas del banco con el montaje de la caracterización por medio del método indirecto.

Todas las suposiciones de funcionamiento de las piezas establecen situaciones conservadoras para obtener el peor estado de carga y están especificadas en el análisis correspondiente para facilitar el seguimiento a los análisis uno por uno.

⁶ De hecho los límites de funcionamiento se estimaron en base al margen de seguridad que es función de los esfuerzos y de límite de cedencia del material.

Diseño y construcción de un banco de pruebas para
caracterizar materiales viscoelásticos sometidos a vibración

Los datos geométricos de las piezas manufacturadas se agrupan en la Tabla 6-1. Las propiedades de los materiales se obtuvieron del paquete CES 2012 de materiales (12) para acero de bajo contenido de carbono, ya que tanto el perno como la flecha se manufacturaron con acero A36 que es de bajo contenido de éste elemento.

Datos geométricos:		
Diámetro del perno	35	mm
Radio del chaflán del perno	3	mm
Diámetro de la flecha	25	mm
Longitud en voladizo del perno	46	mm
Longitud 1 de la flecha	10.9	cm
Longitud 2 de la flecha	5.8	cm
Longitud 3 de la flecha	3.6	cm
Datos de materiales: acero de bajo carbono		
densidad	7800	kg/m ³
Módulo de elasticidad	200	GPa
Límite elástico	250	MPa
Esfuerzo último	345	MPa
Datos de masa de las piezas móviles:		
Masa de patines, marco y mesa	2.1	Kg

Tabla 6-1. Datos geométricos, de materiales y de masa de las piezas manufacturadas.

La carga que el perno de transmisión impone al yugo debe de ser tal que prevalezca ante los efectos inerciales del mecanismo y los vibratorios de la masa suspendida, debido esta combinación de efectos no es fácil determinar los límites del funcionamiento del banco; por ejemplo, cuanto mayor masa esté suspendida la resonancia del sistema se presentará a velocidades angulares más bajas en las que la inercia del mecanismo no tiene un valor considerable por ser un movimiento lento, pero la fuerza resultante puede ser incluso mayor que si la misma masa se excita a mayor velocidad.

Rangos de prueba:		
	min	max
Masa suspendida (kg)	1	5
Rigidez por probeta (N/mm) ⁷	6	40
Factor de amortiguamiento del sistema (ξ)	0.25	0.65
Velocidad angular de la prueba (rpm)	100	3000
Amplitud de vibración cero a pico (mm)	1	5

⁷ El rango de la rigidez de las probetas se obtuvo mediante las especificaciones de los geles de la Facultad.

Tabla 6-2. Datos necesarios para los análisis dinámicos. Los datos se muestran en rangos y contienen suposiciones como la rigidez de las probetas y el factor de amortiguamiento.

6.3 Análisis de vibración transmitida al banco de pruebas para el método indirecto.

El ensamble del método indirecto se esquematiza en la Figura 6-2, en la que el yugo sirve de tabla vibratoria y las probetas cuentan con tornillos que las fijan a la masa suspendida y al yugo. A partir del ensamble podemos establecer los diagramas de cuerpo libre consecuentes.

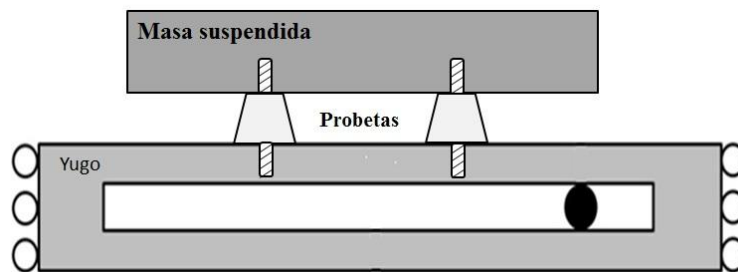


Figura 6-2. Diagrama del ensamble para el método indirecto.

Para estimar la carga que la masa suspendida transmite al mecanismo, se supuso que la probeta se conformaría de un elemento elástico y otro viscoso (modelo de Kelvin-Voigt), aunque éste no sea el caso exacto del material viscoelástico se asemeja a la realidad y sobretodo es relativamente sencillo de modelar matemáticamente. La diferencia entre el comportamiento del modelo de Kevin-Voigt y el modelo viscoelástico se discute en la norma ASTM de medición de vibración en elastómeros (2). En este análisis se prescindió de la fricción que hay entre todas las partes móviles en contacto.

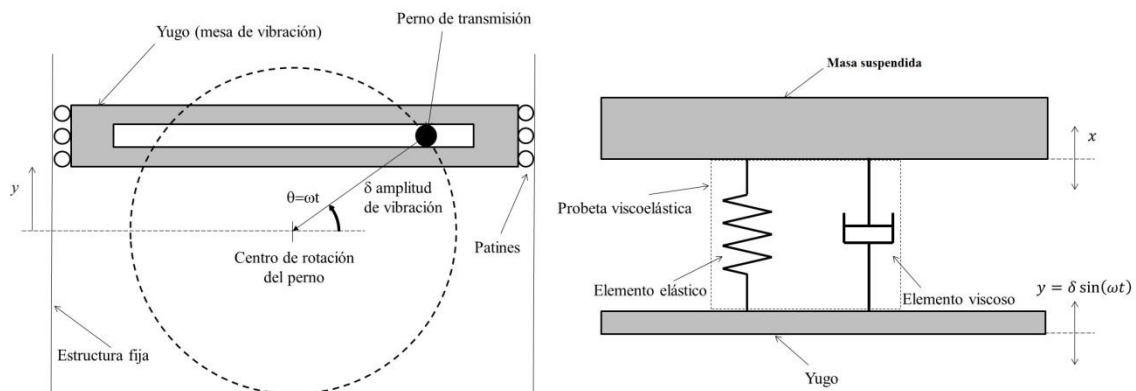


Figura 6-3. A la izquierda se muestra un diagrama básico del mecanismo de yugo escocés y a la derecha está una visualización del ensamble yugo-probeta-masa suspendida. Nótese que δ es la amplitud de la vibración y en el banco construido se controla por medio del tornillo sujetador.

A la izquierda de la Figura 6-3 se muestra el diagrama básico del mecanismo de yugo escocés y del lado derecho un diagrama del método indirecto. El yugo se mueve verticalmente (vibra en el sentido de y) de forma senoidal con una amplitud δ constante. El diagrama de cuerpo libre de la masa suspendida mostrado en la Figura 6-4 sirve para obtener la fuerza que ésta transmite al yugo al estar en vibración V . A continuación se presenta el análisis basado en estas suposiciones.

La ecuación del movimiento que se muestra en la Ecuación 6.1 no toma en cuenta el peso W de la masa suspendida, ya que es constante y mejor es sumarla al resultado dinámico por aparte. En la Ecuación 6.1, k y b son respectivamente la rigidez y la constante de viscosidad de la probeta y m es la masa suspendida (precarga). Dicha ecuación se obtiene de aplicar la Segunda ley de Newton. A partir del diagrama:

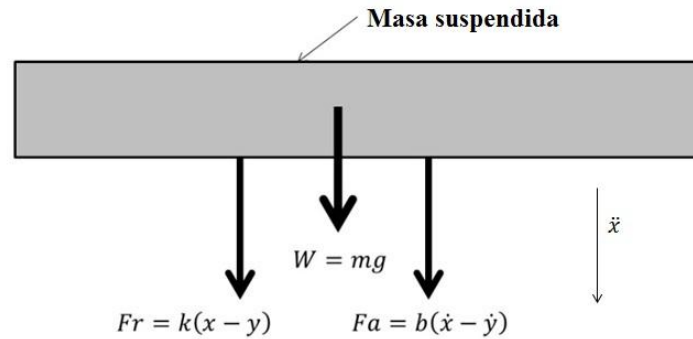


Figura 6-4. Diagrama de cuerpo libre de la masa suspendida. Las fuerzas mostradas son resultado de la rigidez y amortiguamiento de las probetas, también se muestra el peso de la masa suspendida como una fuerza.

Ecuación 6.1

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y$$

Al introducir el factor de amortiguamiento viscoso como $\xi = \frac{b}{2\sqrt{km}}$, la frecuencia natural del sistema como $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $y = \delta \sin(\omega t)$, la Ecuación 6.1 puede ser rescrita en la forma de la Ecuación 6.2

Ecuación 6.2

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 2\xi\omega_n\omega\delta \cos(\omega t) + \omega_n^2\delta \sin(\omega t)$$

La parte estable de la solución de la Ecuación 6.2 tiene la forma senoidal de la Ecuación 6.3.

Ecuación 6.3

$$x(t) = C_s \sin(\omega t) + C_c \cos(\omega t)$$

En donde C_s y C_c son las magnitudes o amplitudes de cada uno de los vectores que componen la Ecuación 6.3. Sustituyendo la Ecuación 6.3 en la Ecuación 6.2 y dado que las funciones seno y coseno son linealmente independientes, es posible obtener los valores de C_s y C_c resolviendo el sistema mostrado en la Ecuación 6.4. Las soluciones se muestran en la Ecuación 6.5 y la Ecuación 6.6.

Ecuación 6.4

$$\begin{pmatrix} \omega_n^2 - \omega^2 & 2\xi\omega_n\omega \\ -2\xi\omega_n\omega & \omega_n^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_c \\ C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_n\omega\delta \\ \omega_n^2\delta \end{bmatrix}$$

Ecuación 6.5

$$C_s = \frac{d \left[4\xi^2 - 1 + \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 \right]}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 4\xi^2 - 2 + \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2}$$

Ecuación 6.6

$$C_c = \frac{-2\delta\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 4\xi^2 - 2 + \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2}$$

Finalmente la Ecuación 6.7, es otra forma de escribir la Ecuación 6.3 usando las soluciones del sistema donde $\tan \phi = \frac{C_s}{C_c}$

Ecuación 6.7

$$x(t) = \frac{\sqrt{1 + \left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right]^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right]^2}} \delta \cos(\omega t - \phi)$$

El término de la raíz cuadrada de la Ecuación 6.7 es la transmisibilidad del sistema⁸ que es la relación entre el desplazamiento de la masa suspendida y el desplazamiento del yugo. La Figura 6-5 muestra su gráfica generada a diferentes valores de amortiguación y de frecuencia. Como se puede apreciar, a menor amortiguamiento, los efectos de la resonancia son más notables; también, a mayor velocidad angular del yugo, la transmisibilidad tiende a desaparecer (la masa suspendida tiende a permanecer inmóvil pese a la vibración a la que está expuesta).

Por último, aplicando los valores de la Tabla 6-2, (ξ , k , δ y ω), es posible, por medio de la Ecuación 6.7, estimar x , \dot{x} , y y \dot{y} para establecer las fuerzas transmitidas por el resorte y por el amortiguador en base al diagrama de cuerpo libre de la Figura 6-4. Dichas fuerzas se expresan en las Ecuación 6.8 y Ecuación 6.9 respectivamente.

⁸ El término dentro de la raíz cuadrada es el radio y/x (movimiento del yugo/movimiento de la masa suspendida).

Ecuación 6.8

$$F a = b(\dot{x} - \dot{y})$$

$$F a = -2\xi\omega\delta \left[\frac{1 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2} \sin(\omega t - \phi) + \cos(\omega t) \right]$$

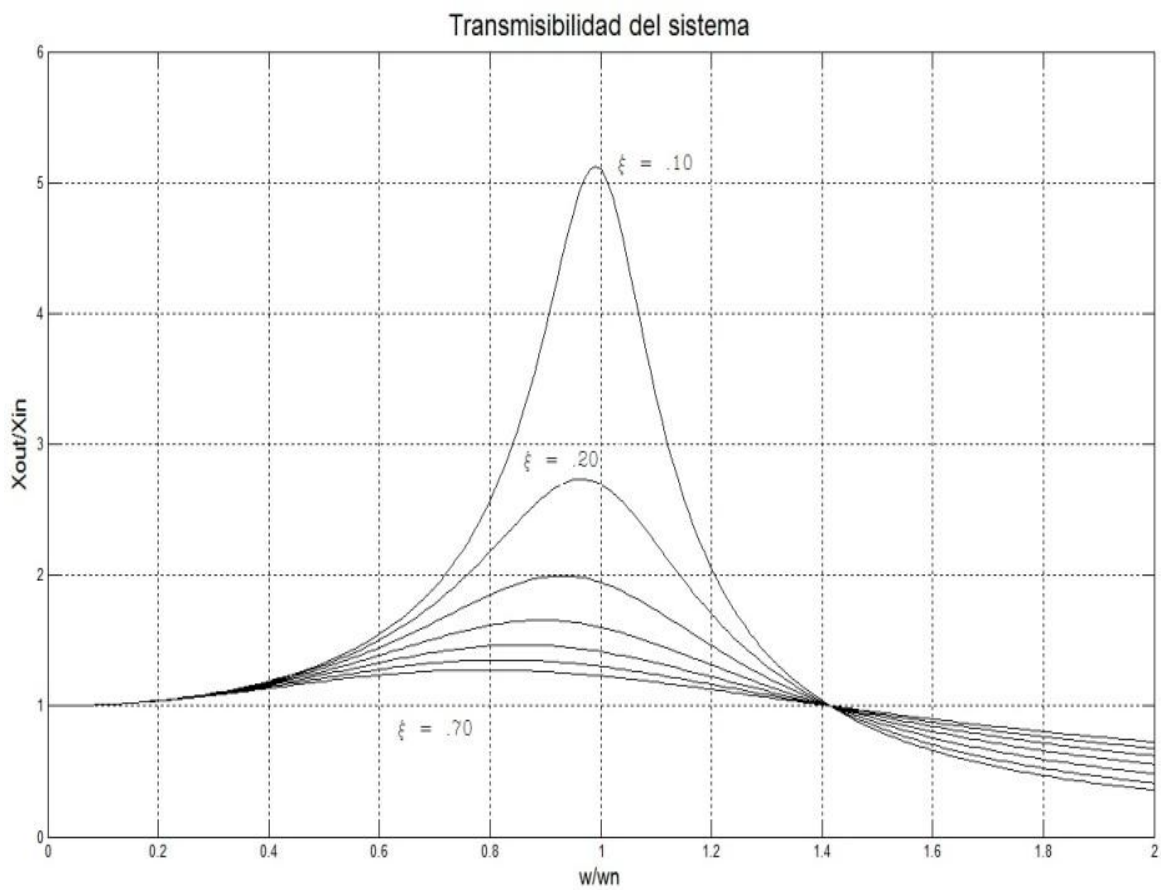


Figura 6-5 Transmisibilidad del sistema.

Ecuación 6.9

$$F r = k(x - y)$$

$$Fr = k\delta \left[\frac{1 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2} \cos(\omega t - \phi) - \sin(\omega t) \right]$$

Por último la suma de ambas fuerzas es la carga total que el yugo recibe de la masa que está en vibración; dicha fuerza (V) es la que deberán de soportar los tornillos que unen a las probetas con la mesa vibratoria y la masa suspendida, como se aprecia en la Figura 6-6. Por último, la Ecuación 6.10 define a la *fuerza transmitida* V , ésta es la suma de las fuerzas del resorte y del amortiguador.

Ecuación 6.10

$$V = Fa + Fr$$

$$V = \sqrt{(4\xi^2\omega^2km + k^2)[(C_s - d)^2 + C_c^2]} \cos(\omega t - \psi)$$

$$\tan(\psi) = \frac{k(C_s - d) - 2C_c\xi\omega\sqrt{km}}{2(C_s - d)^2\xi\omega\sqrt{km} + kC_c}$$

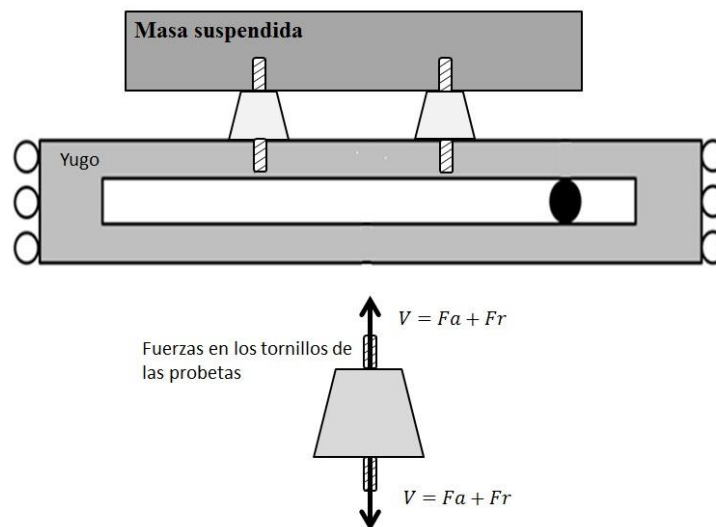


Figura 6-6. La suma de las fuerzas elástica y amortiguada es la carga total que el yugo recibe de la masa suspendida al vibrar. La fuerza V es la que deberán de soportar los tornillos que unen a las probetas con la mesa vibratoria y la masa suspendida.

6.4 Análisis dinámico del mecanismo

El mecanismo diseñado puede ser modelado igual que el mecanismo clásico de *yugo escocés* mostrado a la derecha de la Figura 6-7.

6.4.1 Análisis cinemático.

La Figura 6-7 muestra el esquema en el plano del mecanismo de yugo escocés. Es apreciable que el yugo está restringido a moverse únicamente en el sentido vertical establecido como y en la Figura 6-7 por lo que la Ecuación 6.11 describe la posición de cualquier punto del yugo en función del tiempo, ésta se obtiene por medio de la proyección del perno en el eje vertical.

Ecuación 6.11

$$y = \delta \sin \omega t$$

Donde δ es la distancia del centro de giro al perno de transmisión (amplitud de la vibración) y ω es la velocidad angular del perno. De esta forma podemos definir a la velocidad y aceleración del yugo escocés como la Ecuación 6.12 y la Ecuación 6.13 respectivamente:

Ecuación 6.12

$$\dot{y} = \omega \delta \cos \omega t$$

Ecuación 6.13

$$\ddot{y} = -\omega^2 \delta \sin \omega t$$

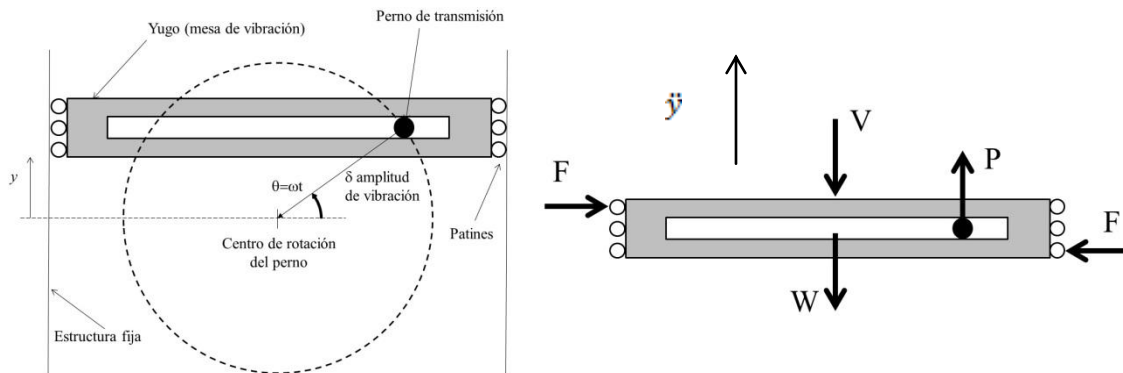


Figura 6-7. Diagrama de cuerpo libre del yugo mostrando también las cargas laterales de los patines..

6.4.2 Análisis cinético.

La Figura 6-7 muestra el diagrama de cuerpo libre del yugo escocés. El valor de la fuerza transmitida “ V ” se obtuvo en la sección anterior y depende del amortiguamiento y la rigidez de las probetas, así como de la masa suspendida. Aplicando la Segunda ley de Newton al yugo del diagrama de cuerpo libre de la Figura 6-7 se obtiene la Ecuación 6.14 que define su movimiento.

Ecuación 6.14

$$P - V - W = ma$$

Donde m es la masa del yugo y W la suma de su peso y el peso de la masa suspendida que no había sido considerado en el análisis de transmisibilidad de vibración. V es la fuerza transmitida por la vibración obtenida en el capítulo anterior y P es la carga que el perno de transmisión aplica sobre el yugo para moverlo. Cabe hacer notar que W también considera a todas las piezas que se mueven junto con el yugo (patines, baleros, perno, etcétera).

Introduciendo las ecuaciones Ecuación 6.9, Ecuación 6.10, Ecuación 6.11 y Ecuación 6.13 en la Ecuación 6.14, se tiene las expresiones de la Ecuación 6.15 que definen la fuerza que el perno deberá de imponer al yugo para que éste se mueva con la aceleración requerida para realizar la prueba.

Ecuación 6.15

$$P = V - m\omega^2\delta \sin(\omega t) + W$$

$$P = b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) - m\omega^2\delta \sin(\omega t) + W$$

$$P = \sqrt{(4\xi^2\omega^2km + k^2)[(C_s - d)^2 + C_c^2]} \cos(\omega t - \psi) - m\omega^2\delta \sin(\omega t) + W$$

Donde b y k son la constante de amortiguamiento y la rigidez de la probeta. Las expresiones de C_s y C_c son las magnitudes de los vectores que componen la respuesta en estado estable del sistema y ψ es el desfase de la vibración del yugo y la masa suspendida. (Ecuación 6.5 y Ecuación 6.6).

El par necesario para hacer rotar al perno mientras aplica la carga al yugo es determinado por la Ecuación 6.16 que es la multiplicación de la carga por su palanca. Nótese en la Ecuación 6.16 que la palanca no es un valor fijo y corresponde a la proyección en el eje x de la posición del perno

Ecuación 6.16

$$T = P\delta \cos(\omega t) = (V + W)\delta \cos(\omega t) - m\omega^2\delta^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

La potencia para mover el mecanismo es entonces definida por la Ecuación 6.17, en donde T es el par y \dot{E} es la potencia

Ecuación 6.17

$$\dot{E} = T\omega = (V + W)\omega\delta \cos(\omega t) - m\omega^3\delta^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

Por último, ya que la potencia es una función de la energía y en este caso es una función armónica, el valor RMS (raíz mínima cuadrada) es un valor más apropiado para evaluar la potencia. La Ecuación 6.18 es usada para obtener el valor RMS de la potencia.

Ecuación 6.18

$$\dot{E}_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum \dot{E}^2}{n}}$$

Donde n es el número de puntos que definen el dominio de la función en el tiempo analizado.

6.5 Fuerzas en los patines

La Figura 6-8 muestra el diagrama de cuerpo libre del yugo con las dimensiones para conocer el momento y la fuerza que el riel y los patines tendrán que soportar en operación. Este diagrama es básicamente el mismo de la Figura 6-7 y en la Figura 6-9 se muestra una imagen del banco construido con las dimensiones g y h del diagrama.

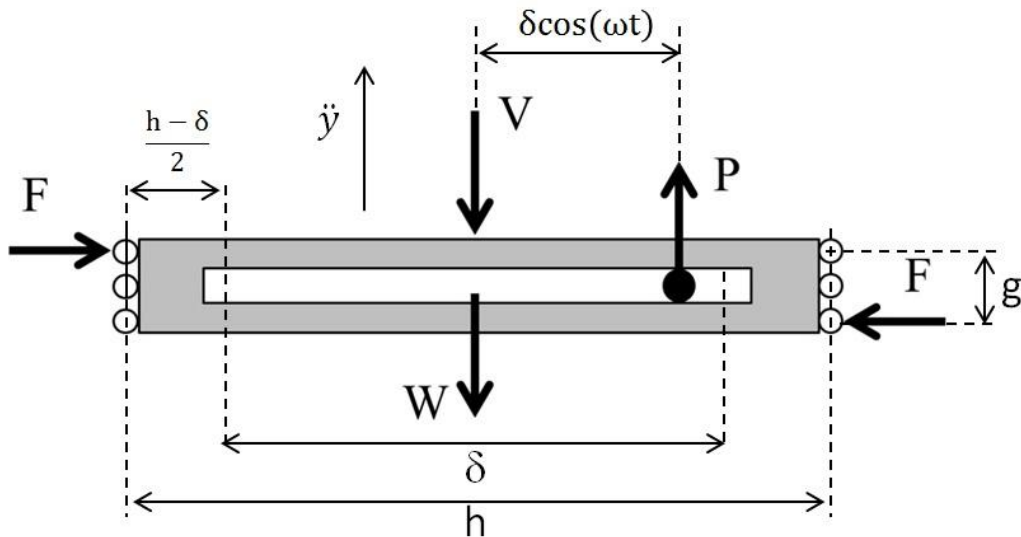


Figura 6-8. Diagrama de cuerpo libre del yugo mostrando las cargas laterales en los patines y las dimensiones necesarias para el análisis de los patines. Nótese en la figura que la aceleración \ddot{y} no se dibujó en el centroide del yugo para que no quedara encimada con las fuerzas W y V .

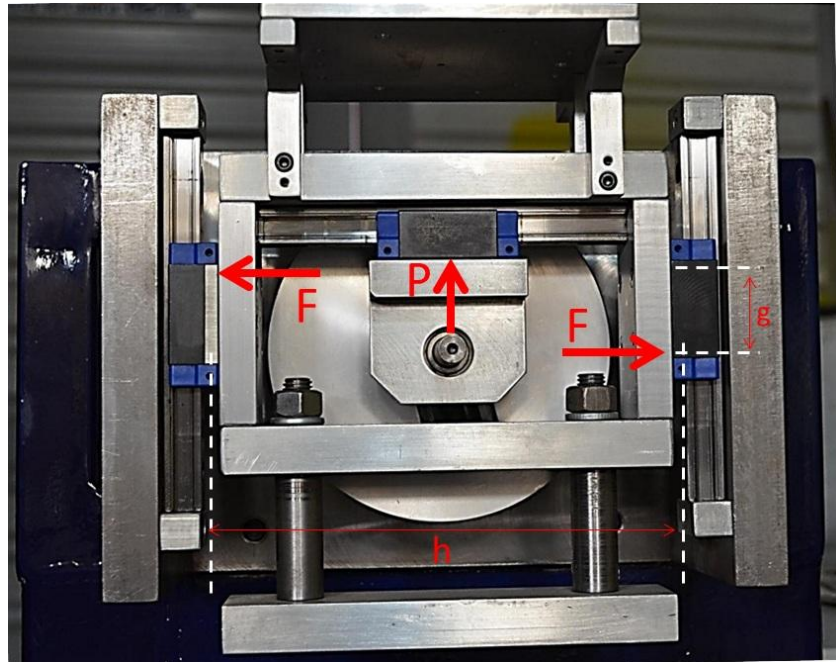


Figura 6-9. Vista frontal del mecanismo en la que se muestran las dimensiones h y g del diagrama de la Figura 6-8 y las cargas que se transmiten a los patines debido al movimiento del yugo. Nótese que el riel interno del yugo por donde se desliza el perno del diagrama fue suplido por un patín horizontal externo en el diseño final.

Ya conocidas las cargas inerciales, P , V y W , y a partir del diagrama de cuerpo libre de la Figura 6-8 se igualaron los momentos externos a los momentos cinéticos del yugo, lo que resulta en la Ecuación 6.19 que define a la carga de compresión F que el patín lateral deberá de soportar como lo muestran la Figura 6-8 y Figura 6-9.

Ecuación 6.19

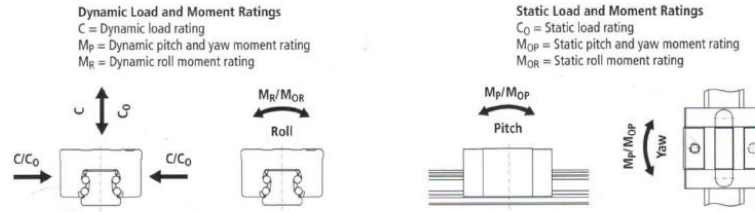
$$F = \frac{P[h + 2\delta \cos(\omega t)] - (V + W + m\ddot{y})h}{2g}$$

Por otro lado, el patín horizontal recibirá y transmitirá al yugo la fuerza del perno de transmisión, por lo tanto la carga P es la carga de compresión/tensión que deberá de soportar dicho patín, esto se ilustra también en la Figura 6-9. Los límites de carga de los patines utilizados se muestran en la Figura 6-10.

En la Figura 6-11 se muestra una sección del patín en la que se aprecian algunos aspectos importantes del ensamble interno de los patines, por ejemplo se observa que hay dos líneas de baleros (metiéndose a la hoja) a cada lado del riel, una superior y otra inferior, permitiendo así resistir cargas a compresión y tensión. En los esquemas se nota que el contacto de las balas con el riel y con las guías internas del patín es superficial, así que las reacciones del diagrama son meramente una aproximación de la carga resultante del contacto superficial, y únicamente sirven para ilustrar la forma en la que se contienen las fuerzas a compresión y a tensión.

Diseño y construcción de un banco de pruebas para
caracterizar materiales viscoelásticos sometidos a vibración

511 Style C and D



Style	Size	Load Rating									Weights	
		Static			Dynamic						Carriage (kg)	Rail (kg/m)
		C_0 (N)	M_{OR} (Nm)	$M_{OP, OY}$ (Nm)	100 Km			50 Km				
C	M_p (Nm)	M_{pY} (Nm)	C	M_p (Nm)	M_{pY} (Nm)	C	M_p (Nm)	M_{pY} (Nm)				
C	15	19 600	181	146	9 000	83	67	11 339	105	84	0.2	1.4
	20	31 400	373	292	14 400	171	134	18 143	215	169	0.5	2.2
	25	46 100	631	513	21 100	289	235	26 584	364	296	0.7	3.0
	30	63 700	1 084	829	29 200	497	380	36 790	626	479	1.2	4.3
	35	84 400	1 566	1 252	38 700	718	574	48 759	905	723	1.8	5.4
D	20	41 100	490	495	17 400	206	208	21 923	260	262	0.6	2.2
	25	60 300	825	863	25 500	349	365	32 128	440	460	0.9	3.0
	30	83 300	1 414	1 390	35 300	599	589	44 475	755	742	1.5	4.3
	35	110 300	2 048	2 104	46 700	867	891	58 838	1 092	1 123	2.3	5.4

1. The dynamic load and moment ratings are based on the travel life specified on the table (100 Km or 50 Km). When comparing these load ratings with other bearings you must take into consideration the proper travel life basis.
2. The static load and moment ratings are the maximum radial load and moment load that should be applied to the bearing when there is no relative motion between the carriage and the rail.

Figura 6-10. Nomenclatura y límites de carga en los patines. Esta figura es un extracto de la especificación de los patines que se ensamblaron en el banco construido. Esta figura no fue traducida por ser parte de la especificación original, sin embargo las traducciones de los ángulos/momentos son las siguientes: *Pitch* = elevación, *roll* = cabeceo y *yaw* = desvío.

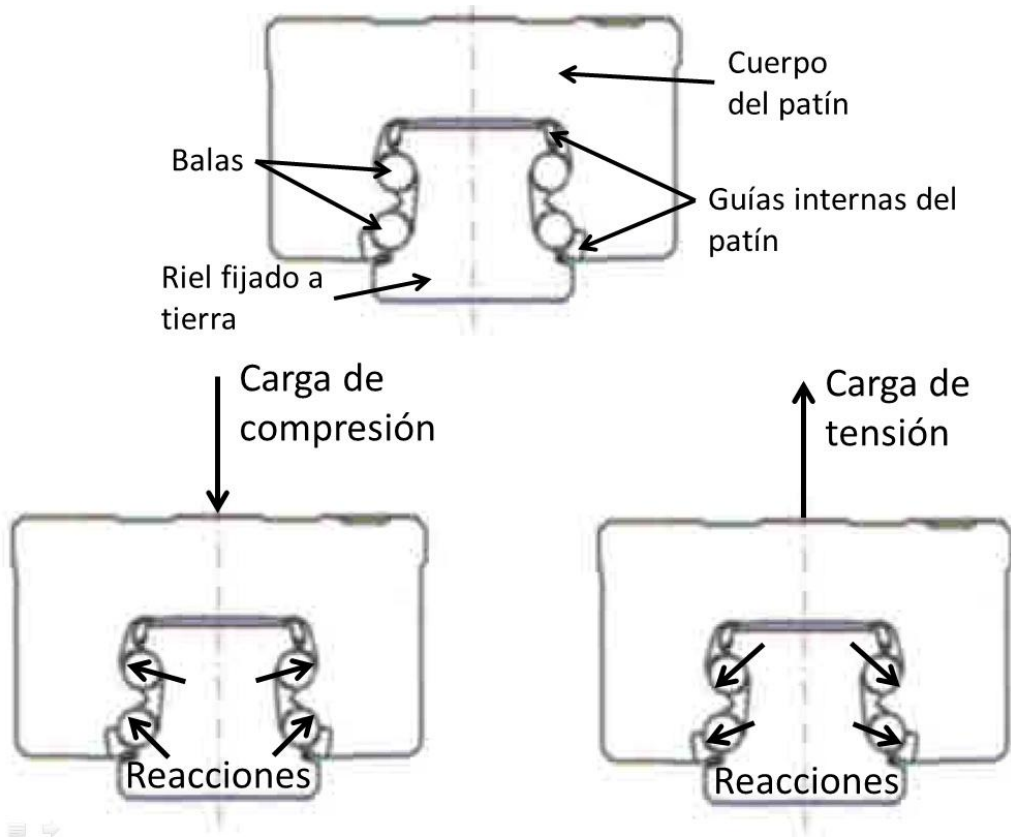


Figura 6-11. Sección de los patines y esquemas de sus reacciones. Nótese que el contacto es superficial y las reacciones dibujadas únicamente sirven para idealizar el funcionamiento del patín.

Por último, las gráficas de la Figura 6-12 muestran el comportamiento armónico de las fuerzas calculadas hasta este momento (V , W , P , y F). Nótese que en las gráficas se utilizó una de las múltiples combinaciones de características posibles. Más detalle sobre las combinaciones referirse al capítulo de resultados y límites de funcionalidad del banco.

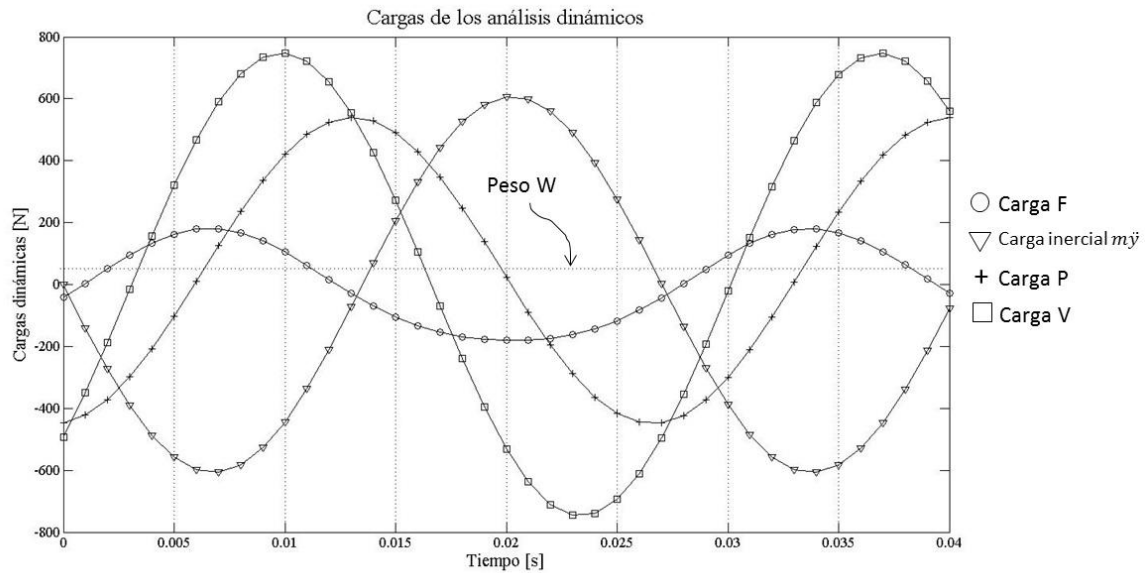


Figura 6-12. Cargas dinámicas en estado estable de vibración. Para los resultados mostrados fueron supuestas las siguientes características: masa suspendida = 2.5kg, masa del yugo = 2.1kg, rigidez /3probetas = 40N/mm, factor de amortiguamiento = .65, frecuencia de excitación = 37Hz y amplitud de vibración (cero a pico) = 4.5mm

6.6 Esfuerzos, deflexión y frecuencia natural del perno de transmisión

Para los análisis consecuentes se tomaron como cargas los valores máximos obtenidos en el capítulo precedente. El diagrama de cuerpo libre de la Figura 6-13 se asemeja a las condiciones reales de operación del perno de transmisión y contempla su forma manufacturada. El valor máximo de la fuerza transmitida por el perno al yugo escocés calculada en la sección anterior P (Ecuación 6.15) es utilizada para calcular los esfuerzos y las deformaciones en el perno, ya que esta pieza compromete altamente la integridad y exactitud del banco de pruebas, y bajo ninguna circunstancia debe presentar grandes deformaciones o inclusive ruptura. Como se aprecia en el diagrama de la Figura 6-13 el perno trabaja como una viga en voladizo sujeta a una carga cortante.

Los tres puntos marcados en la Figura 6-13 son las zonas sometidas a esfuerzos considerables. El punto A deberá resistir únicamente el esfuerzo de tensión debido a la flexión de la viga, el punto B por pasar por el eje de simetría de la pieza no se somete a flexión, sin embargo, tendrá que resistir esfuerzos de carga cortante y por último la flexión en el punto C, que aunque es menor en magnitud a la del punto A, se ve incrementada por el chaflán puesto que éste provoca concentración de esfuerzos.

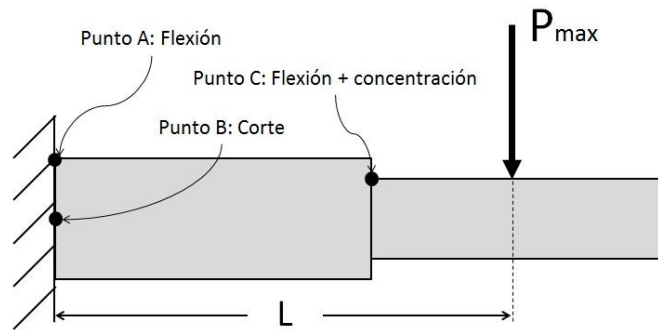


Figura 6-13. Diagrama de cuerpo libre del perno de transmisión.

Para cuantificar conservadoramente los esfuerzos en el punto A del perno se utilizó el diámetro menor, ya que como lo muestra la Ecuación 6.20, el esfuerzo de flexión es indirectamente proporcional al diámetro.

Ecuación 6.20

$$\sigma_{flexión} = \frac{Mc}{I} = \frac{32PL}{\pi\phi^3}$$

El esfuerzo a corte del punto B también se calculó con el diámetro menor del perno, de esta forma se obtienen resultados conservadores. La Ecuación 6.21 expresa el esfuerzo cortante en el punto B.

Ecuación 6.21

$$\tau_{corte} = \frac{3P}{2A} = \frac{6P}{\pi\phi^2}$$

En el punto C se tiene un chaflán incrementa los esfuerzos causados por la flexión, el incremento se conoce como concentración de esfuerzos. Como se aprecia en la Figura 6-14 (13) el *factor de concentración de esfuerzos* k_t depende de 3 valores: Diámetro mayor, diámetro menor y radio del filete; de hecho, se aprecia en la figura que a mayor radio de filete, menor es la concentración. La Figura 6-14 está marcada con el valor de k_t del perno real. El esfuerzo resultante de la concentración es directamente proporcional al valor del esfuerzo nominal (sin chaflán) y al valor de k_t . La Ecuación 6.22 expresa lo dicho. El esfuerzo nominal por flexión se calcula por medio de la Ecuación 6.20 y el valor de L es la palanca desde la carga P al chaflán. Cabe señalar que el punto C por estar en la periferia del perno está sometido únicamente a flexión y no a corte así que no es posible combinar esfuerzos y por ende, la Ecuación 6.22 da la magnitud máxima del esfuerzo que se comparó directamente con la cedencia del material⁹. Por último, los cálculos desarrollados en el capítulo de análisis demuestran que este punto C es más que los puntos A y B, así que éste es el esfuerzo al que nos referiremos cuando hablamos de esfuerzo en el perno de transmisión.

Ecuación 6.22

$$\sigma_{concentrado} = k_t * \sigma_{flexión} = \sigma_{máximo\ del\ perno}$$

⁹ El criterio utilizado en los análisis ulteriores es el criterio de máxima energía de distorsión en el que se calcula el esfuerzo de Von Mises. En este caso el esfuerzo de Von Mises está dado por la Ecuación 6.22

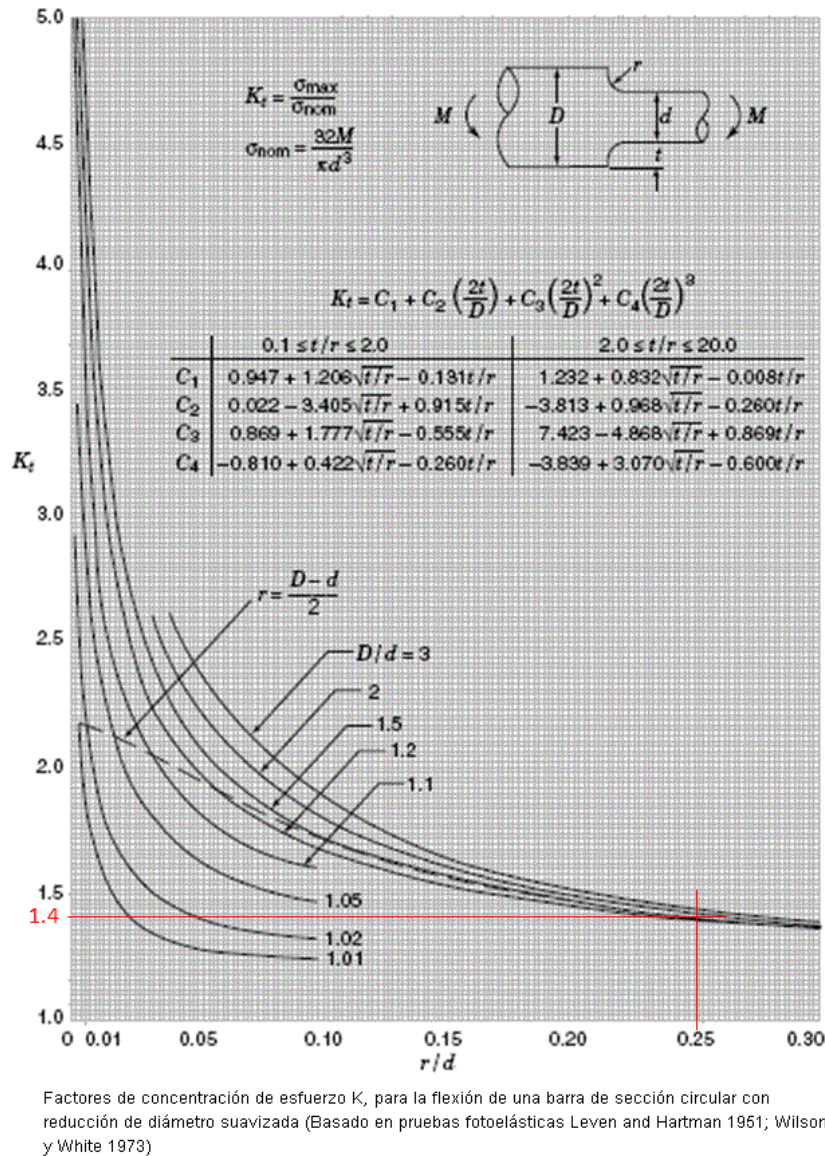


Figura 6-14. Concentración de esfuerzos en el perno de transmisión. (13)

Debido a la precisión que la máquina requiere, se aseguró que la deflexión del perno no alcanzara valores demasiado grandes. El estudio de la deflexión se hizo por medio de la Ecuación 6.23 que es la deflexión máxima (ubicada en el punto de aplicación de la carga) de una viga en voladizo. El uso de ésta ecuación es también conservador si se utiliza el diámetro menor en el cálculo. En operación la deflexión será menor debido a que el incremento de diámetro disminuye la deflexión.

Ecuación 6.23

$$\Delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{64PL^3}{3E\pi\phi^4}$$

Por último, para obtener la frecuencia natural del perno, se determina su rigidez (Ecuación 6.24) y después se aplica la fórmula de la frecuencia natural de una viga en voladizo sujeta a carga en su extremo mostrada en la Ecuación 6.25 y en la que se supuso que $m_{efectiva} = \frac{1}{3}m_{perno}$.

Ecuación 6.24

$$k_{perno} = \frac{P}{\Delta_{max}} = \frac{3E\pi\phi^4}{64L^3}$$

Ecuación 6.25

$$\omega_{nperno} = \sqrt{\frac{k_{flecha}}{m_{efectiva}}} = \sqrt{\frac{9E\pi\phi^4}{64L^3m_{perno}}} = 21,537.5 \frac{rad}{s}$$

$$f_{nperno} = \frac{21,537.5}{2\pi} = 3,427.8Hz$$

Utilizando las medidas y las propiedades reales del perno, se obtiene el resultado mostrado en la Ecuación 6.25. Como se observa, las pruebas se realizarán muy por debajo de la resonancia del perno de transmisión (0-100Hz).

6.7 Esfuerzos, deflexión y frecuencia natural de la flecha del motor

6.7.1 Reacciones y deflexiones de la flecha

La suposición básica de este análisis es que la unión flexible cuya función es permitir cierta holgura en la colinealidad del eje del motor con el eje de la flecha no entra en función, así es posible hacer un análisis conservador ya que los resultados aquí obtenidos serán más adversos que los reales. Los resultados demuestran que la flecha está muy lejos de romperse o de deformarse grandemente, incluso también muy lejos de entrar en resonancia, sin embargo a continuación se presenta su análisis.

Sin la unión flexible, la flecha proveniente del motor es difícil de analizar ya que es estáticamente indeterminada y hay diferentes maneras de lidiar con ella. El diagrama de cargas de la flecha se ilustra en la Figura 6-15. A continuación se explican los procedimientos usados para conocer las cargas, esfuerzos y deflexiones en esta parte fundamental del módulo de potencia de la máquina.

Para conocer las reacciones en los soportes de la flecha se usó el método de *superposición para resolver vigas estáticamente indeterminadas*. El método se puede seguir de la siguiente manera:

- Detectar la carga de reacción que indetermina a la viga, llamada *redundante*. La elección de la carga redundante se hace de forma arbitraria.
- Dibujar una viga estáticamente determinada que contenga a todas las cargas menos a la carga redundante. A esta viga se le llama *primaria*, y se resuelve para la deflexión en la ubicación en donde estaba la redundante.
- Se añade otra viga determinada que contenga únicamente a la carga redundante y se resuelve la deflexión en donde está la carga redundante.

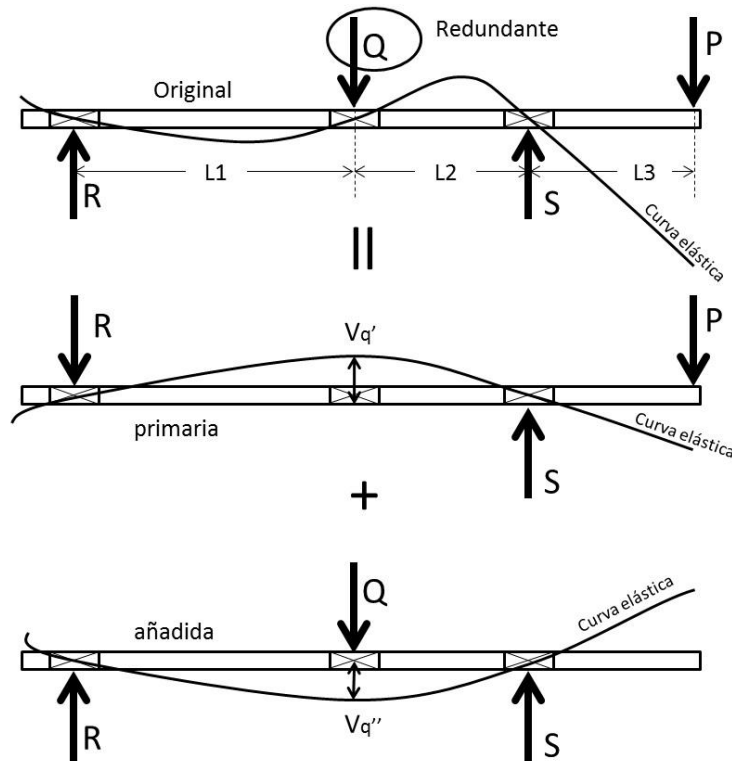


Figura 6-15. Diagramas de carga de la viga original, primaria y añadida en las que se muestran la curva elástica y la carga redundante Q .

- Encontrar una *relación de continuidad* en el punto de la carga redundante mediante las curvas elásticas de la vigas original, la primaria y la añadida.
- Obtener por medio de la relación de continuidad el valor de la reacción redundante y a partir de eso determinar todas las cargas restantes.

El procedimiento aquí descrito se ejemplifica con la Figura 6-15. Como se aprecia, la deflexión en el punto en donde se aplica (punto Q) es fácil de determinar, ya que es una viga simplemente apoyada con carga entre los apoyos y existen tablas que contienen la fórmula de su deflexión¹⁰. La Ecuación 6.26 expresa la magnitud de la deflexión en ese punto. El signo negativo significa que la deflexión de la viga es hacia abajo.

Ecuación 6.26

$$v''_q = -\frac{Q}{3EI} \frac{L_1^2 L_2^2}{(L_1 + L_2)}$$

La viga primaria es más compleja y no hay tablas para conocer la deformación en la zona de interés (punto de aplicación de la redundante Q), por lo que se usó el método de integración para solucionarla:

¹⁰ Ver el apéndice C del libro de Hiebbeler de resistencia de materiales (15)

Se divide la viga en dos tramos y se calculan los momentos en cada uno para después integrarlos al aplicar las relaciones de la curva elástica.

Para $0 \leq x_1 \leq (L_1 + L_2)$, tenemos:

$$M_1 = EI \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = -\frac{PL_3}{(L_1 + L_2)} x_1$$

$$EI \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{PL_3}{2(L_1 + L_2)} x_1^2 + C_1$$

$$EIv_1 = -\frac{PL_3}{6(L_1 + L_2)} x_1^3 + C_1 x_1 + C_2$$

En donde v es la deflexión, M es el momento, E es el módulo elástico del material e I es el segundo momento de área (conocido como momento de inercia del área) de la sección transversal de la flecha

Para $0 \leq x_2 \leq L_3$, tenemos:

$$M_2 = EI \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = -Px_2$$

$$EI \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{P}{2} x_2^2 + C_3$$

Ecuación 6.27

$$EIv_2 = -\frac{P}{6} x_2^3 + C_3 x_2 + C_4$$

Las cuatro constantes de integración se obtienen utilizando tres condiciones de frontera más una ecuación de continuidad:

Primera condición de frontera: $v_1 = 0$ en $x_1 = 0$

Segunda condición de frontera: $v_1 = 0$ en $x_1 = (L_1 + L_2)$

Tercera condición de frontera: $v_2 = 0$ en $x_2 = 0$

Ecuación de continuidad: $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ en $x_1 = (L_1 + L_2)$ y $x_2 = L_3$

Las cuatro ecuaciones resultantes de las condiciones anteriores se resuelven simultáneamente para encontrar los valores de las constantes de integración estipuladas en las tres expresiones siguientes. Nótese que $C_2 = 0$.

Ecuación 6.28

$$C_1 = \frac{P}{6} [L_3(L_1 + L_2)]$$

Ecuación 6.29

$$C_3 = \frac{P}{3} \left[L_3(L_1 + L_2) + \frac{3}{2}L_3^2 \right]$$

Ecuación 6.30

$$C_4 = \frac{P}{3} [L_3^3 + L_3^2(L_1 + L_2)]$$

Sustituyendo las constantes de integración en la Ecuación 6.27, se obtiene la Ecuación 6.31 que define a la deflexión en el punto q de la viga primaria.

Ecuación 6.31

$$Elv_2 = -\frac{P}{6}x_2^3 + \frac{P}{3} \left[L_3(L_1 + L_2) + \frac{3}{2}L_3^2 \right]x_2 + \frac{P}{3} [L_3^3 + L_3^2(L_1 + L_2)]$$

Resolviendo para $x_2 = (L_2 + L_3)$ tenemos finalmente la Ecuación 6.32:

Ecuación 6.32

$$v'_q = \frac{P L_1 L_2 L_3 (2L_1 + L_2)}{6 EI (L_1 + L_2)}$$

Las Ecuación 6.26 y Ecuación 6.32 son respectivamente las deflexiones de la viga añadida y primaria en el punto q ; ahora regresando al método de superposición, solo falta aplicar una relación de continuidad para relacionar ambas ecuaciones y así poder conocer el valor de la carga Q . La relación de continuidad se muestra en la Ecuación 6.33. Una vez conocido el valor de Q (Ecuación 6.34), las reacciones R y S se calculan aplicando la estática en la viga y sus valores se definen por las Ecuación 6.35 y Ecuación 6.36.

Ecuación 6.33

$$v'_q + v''_q = 0$$

Ecuación 6.34

$$Q = \frac{P L_3 (L_1 + L_2)}{2 L_1 L_2}$$

Ecuación 6.35

$$R = \frac{P L_2 L_3}{2 L_1 (L_1 + L_2)}$$

Ecuación 6.36¹¹

$$S = \frac{P(2L_2^2 + 2L_1L_2 + 2L_1L_3 + 3L_2L_3)}{2L_2(L_1 + L_2)}$$

Ya conocidas las reacciones en los apoyos, se aplicó el *teorema de Castigliano* para estimar la deflexión en el extremo de la viga, ya que ahí es en donde se conecta la flecha con el disco que contiene al perno de transmisión. La importancia de ésta deflexión es enorme, ya que de ser mucha podría inducir armónicos indeseados durante las pruebas. Además al ser un elemento desbalanceado puede entrar en resonancia y tener deflexiones enormes, por lo que la frecuencia natural de la flecha también fue calculada.

El método del *teorema de Castigliano* comienza colocando una carga ficticia en el punto en el que se desea calcular la deflexión. Como lo muestra la Figura 6-16 en este caso se colocó la carga P' en lugar de la carga P real ya que es ahí en dónde se desea conocer la deflexión. Con la carga ficticia se calcula el momento en cada una de las secciones de la viga, en nuestro caso hay tres secciones o tramos en medio de los soportes (tramos L_1 , L_2 y L_3 en la Figura 6-16). Después se calcula la derivada parcial de cada uno de los momentos con respecto a la carga ficticia P' . Este proceso se desarrolla a continuación.

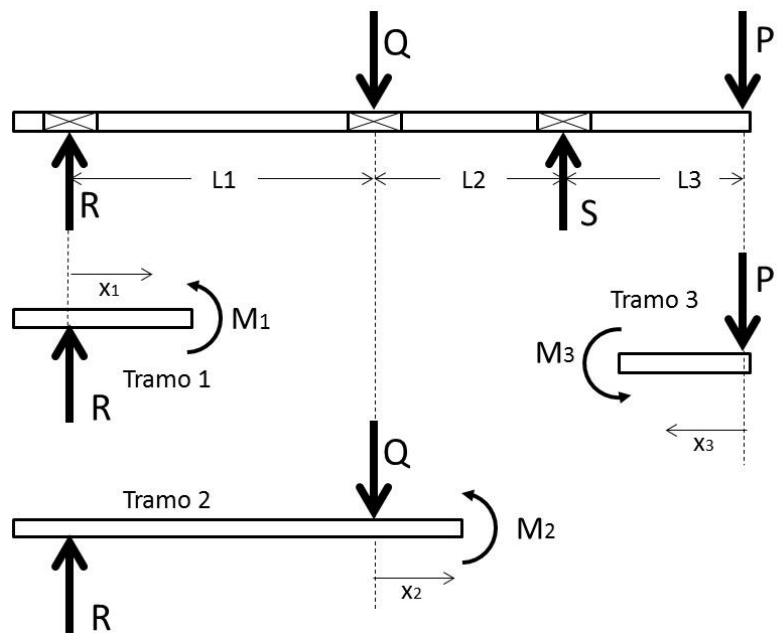


Figura 6-16. Obtención de los momentos en los tramos por el método de secciones.

Para el primer tramo $0 \leq x_1 \leq L_1$, tenemos:

$$M_1 = Rx_1 = \frac{P'}{2} \frac{L_2L_3}{L_1(L_1 + L_2)} x_1$$

¹¹ Más detalle de este método se referirse al libro de Hibbeler (15)

$$\frac{\partial M_1}{\partial P'} = \frac{L_2 L_3}{2L_1(L_1 + L_2)} x_1$$

Para $0 \leq x_2 \leq L_2$, tenemos:

$$M_2 = (R - Q)x_2 + RL_1 = -\frac{P' L_3 (3x_2 L_2 + 2x_2 L_1 - L_2^2)}{2 L_2 (L_1 + L_2)}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P'} = -\frac{L_3 (3x_2 L_2 + 2x_2 L_1 - L_2^2)}{2L_2(L_1 + L_2)}$$

Para $0 \leq x_3 \leq L_3$, tenemos:

$$M_3 = P' x_3$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P'} = x_3$$

Una vez conocidas los momentos y las derivadas parciales, se aplica el segundo teorema de Castigliano con P' igual a P real para obtener la deflexión como sigue¹²:

$$v_p = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$v_p = \int_0^{L_1} M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial P'} \right) \frac{dx}{EI} + \int_0^{L_2} M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial P'} \right) \frac{dx}{EI} + \int_0^{L_3} M_3 \left(\frac{\partial M_3}{\partial P'} \right) \frac{dx}{EI}$$

Ecuación 6.37

$$v_p = \frac{P L_3^2 (3L_2^2 + 4L_1 L_2 + 4L_1 L_3 + 4L_2 L_3)}{12 (L_1 + L_2) EI}$$

La Ecuación 6.37 es la deflexión de la flecha del motor en el extremo en donde se ensambla con el módulo siguiente. Para conocer la frecuencia natural de la flecha es necesario definir a su rigidez por medio de la Ecuación 6.38 y aplicar la fórmula de la frecuencia natural mostrada en la Ecuación 6.39.

Ecuación 6.38

$$k_{flecha} = \frac{P}{v_p} = \frac{12(L_1 + L_2)EI}{L_3^2 (3L_2^2 + 4L_1 L_2 + 4L_1 L_3 + 4L_2 L_3)}$$

¹² Generalmente el valor real de P es igual a cero, a menos (como en este caso) que exista una carga en esa ubicación, para mayor información del método de Castigliano, referirse al libro de Hibbeler (15).

Ecuación 6.39

$$\omega_{n\text{flecha}} = \sqrt{\frac{k_{\text{flecha}}}{m_{\text{efectiva}}}} = \sqrt{\frac{12(L_1 + L_2)EI}{3L_3^2(3L_2^2 + 4L_1L_2 + 4L_1L_3 + 4L_2L_3)m_{\text{flecha}}}}$$

$$\omega_{n\text{flecha}} = 1,921 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Donde se supuso $m_{\text{efectiva}} = \frac{1}{3}m_{\text{flecha}}$ como en el caso de las vigas en voladizo sujetas a carga en su extremo. El resultado mostrado demuestra que las dimensiones y materiales reales del banco hacen que el rango de velocidad del motor (Tabla 6-2) está muy por debajo de la resonancia de la flecha de transmisión al igual que en el caso del perno de transmisión.

6.7.2 Esfuerzos en la flecha.

Para obtener los esfuerzos de la flecha iniciamos con los diagramas de fuerza y momento mostrados en la Figura 6-17, además se muestra también el diagrama de torque.

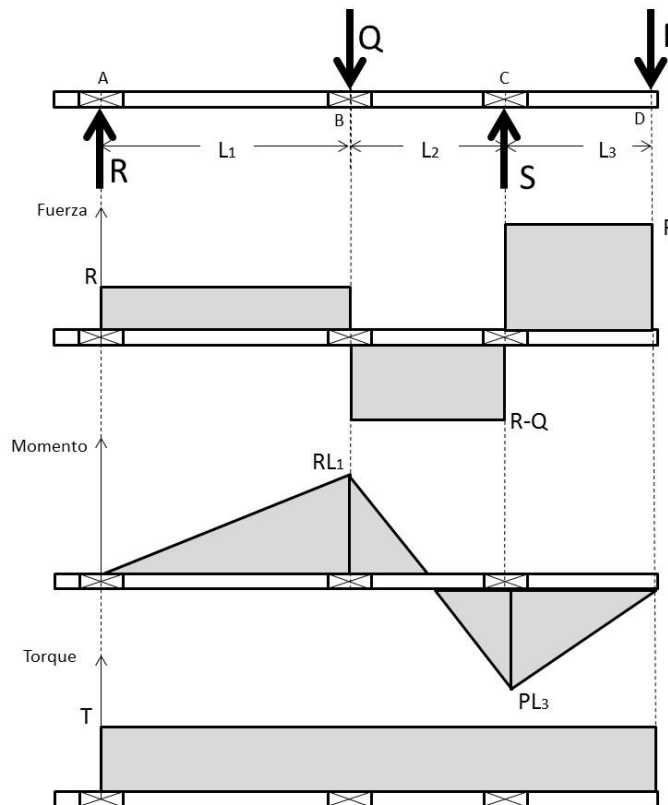


Figura 6-17. Diagramas de carga, momento de flexión y torque.

Como se aprecia en la Figura 6-17, el tramo L1 está sujeto a carga cortante, flexión y corte debido al torque, de hecho, todos los tramos tienen la misma configuración de esfuerzos, pero en diferentes

sentidos y magnitudes. Aplicando los valores reales es apreciable que las magnitudes de la flexión y del corte son mayores en el punto C, por lo que el análisis de esfuerzos se realizará en la ubicación de ese punto. Para ejemplificar lo dicho, se muestra la Figura 6-18 en la que se traduce el estado de esfuerzos en dos zonas del punto C.

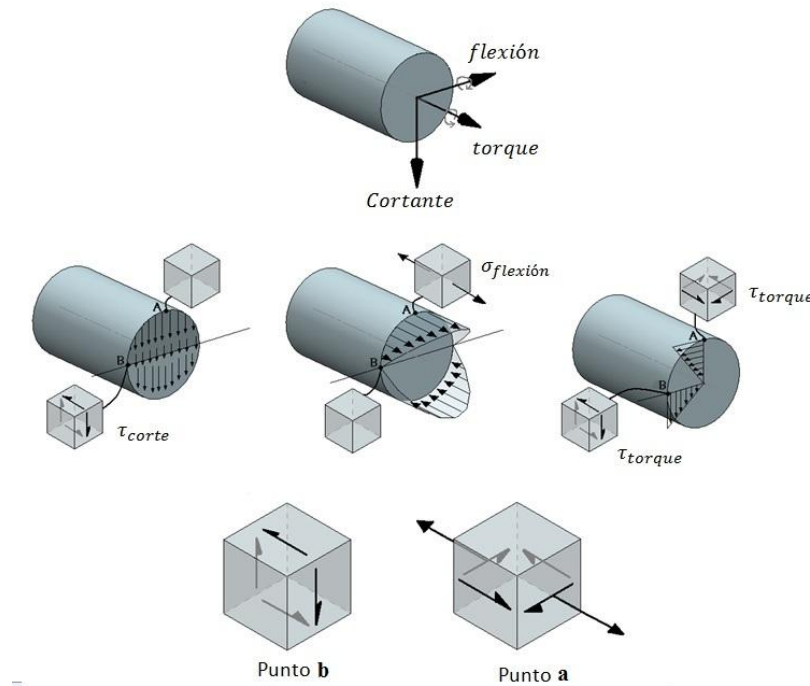


Figura 6-18. Análisis de la combinación de esfuerzos en los puntos a y b de la flecha

Las ecuaciones Ecuación 6.40, Ecuación 6.41 y Ecuación 6.42 enuncian respectivamente los esfuerzos de flexión y corte en los puntos a y b de la Figura 6-18

Ecuación 6.40

$$\sigma_{f_a} = \frac{Mc}{I} = \frac{32PL_3}{\pi\phi^3}$$

Ecuación 6.41

$$\tau_b = \frac{3P}{2A} = \frac{6P}{\pi\phi^2}$$

Ecuación 6.42

$$\tau_a = \frac{Tc}{J} = \frac{4T}{\pi\phi^3}$$

A partir de la Figura 6-18 podemos establecer el tensor de esfuerzos en los puntos *a* y *b* y representado matricialmente con las Ecuación 6.43 y Ecuación 6.44 cuyos eigenvalores representan los esfuerzos principales de cada punto respectivamente.

Ecuación 6.43

$$\sigma_a = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_f & \tau_t \\ \tau_t & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación 6.44

$$\sigma_b = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_t + \tau_c \\ \tau_t + \tau_c & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez encontrados los esfuerzos principales de las, se aplicó la ecuación del esfuerzo de energía de distorsión máxima conocido como esfuerzo de von Mises que es la Ecuación 6.45¹³.

Ecuación 6.45

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

6.8 Resultados de los análisis y límites de funcionalidad del banco

Como se mencionó en la sección de datos y suposiciones, los análisis se hicieron en base a rangos supuestos de rigidez, amortiguación, masa, frecuencia y amplitud de vibración y resulta evidente que existen incontables combinaciones posibles de éstos valores, por lo que establecer los límites de funcionalidad del banco resulta un tanto complejo, sin embargo el método que se presenta en esta sección resulta una excelente forma de garantizar la integridad del equipo ya que se puede conocer su margen de seguridad por medio de una *aproximación lineal* en base a las tablas presentadas en esta sección y en los anexos.

Para el perno de transmisión, y la flecha del motor se utilizó el *criterio de energía de distorsión* máxima. Para esto, se obtuvieron los esfuerzos conocidos como de *von Mises* en los puntos que aparecieron en la sección de análisis y se compararon con el límite de cedencia del material. La comparación se hizo en base al margen de seguridad y se le llamó *margen de seguridad límite (MSL)* que se calcula por medio de la Ecuación 6.46.

¹³ Para conocer el margen de seguridad de las piezas se utilizó el criterio de la máxima energía de deformación (Von mises) ya que los materiales son dúctiles.

Ecuación 6.46

$$MSL = \frac{S_y}{\sigma_o} - 1$$

En donde S_y es la resistencia a la cedencia del material y σ_o es el esfuerzo de operación del componente. El margen de seguridad es negativo si la pieza ha excedido el límite del material. Cabría recalcar que una pieza presenta un MSL menor que cero, ésta estaría operando por arriba de su límite elástico y se esperaría su falla (ruptura) en bajos ciclos por ser un componente de una máquina cíclica.

Por otro lado, no solo la ruptura del perno de transmisión sirvió como límite de funcionamiento, también su deflexión o la potencia que el motor puede suministrar. Las comparaciones se hicieron por medio de la Ecuación 6.46 ya que es cuestión de cambiar los esfuerzos por fuerzas o capacidades.

Antes de describir el método se pondrá atención en las gráficas presentadas en las Figura 6-19 a Figura 6-23. En éstas se muestra en gráficas el comportamiento del margen de seguridad del perno de transmisión (MSL) en función de las características del sistema (rigidez, masa, factor de amortiguamiento ξ y amplitud o frecuencia de vibración), por ejemplo, la Figura 6-19 deja ver que a partir de cierto valor, cualquier incremento o decremento en la masa puede reducir la magnitud del MSL, lo que hace de la masa un elemento muy importante en este análisis, pero por otra parte, las figuras Figura 6-22 y Figura 6-23 hacen constar que la rigidez y el factor de amortiguamiento del sistema (características únicamente de las probetas, ver la Ecuación 6.15) no alteran en gran medida el MSL al menos dentro de los rangos analizados ($6 \leq k \leq 40 \text{ N/mm}$ y $.25 \leq \xi \leq .65$), por lo que no son consideradas tan importantes como la masa o como la frecuencia y amplitud de la vibración que explícitamente tienden a disminuir de manera drástica el MSL del perno.

Además de estas observaciones, se encuentra que el menor margen de seguridad de las piezas analizadas (patines, perno y flecha) es en todos los casos el punto C del perno de transmisión debido a la concentración de esfuerzos en el chaflán. Los márgenes de seguridad de los patines, flecha y en general de todos los demás componentes no se muestran en las tablas subsecuentes, ya que todos son mayores al del perno y solo agobiarían la lectura de la tabla. En las tablas, los MSL negativos aparecen en rojo. Además, como el mecanismo es cíclico, las combinaciones en rojo fallarán a *bajo ciclaje*, ya que éste tipo de falla se presenta en piezas sometidas a esfuerzos cíclicos por arriba del límite de cedencia del material. Por esto, *se recomienda operar el banco con combinaciones de características que produzcan MSL positivos so pena de exponer al perno a romperse durante la prueba.*¹⁴.

¹⁴ Un análisis estructural más detallado mostraría que, aunque la resistencia última del material del perno se haya excedido en la zona del chaflán, el daño es puntual y el material que rodea a la concentración de esfuerzo no ha sobrepasado su límite último, por lo tanto no se romperá en los primeros ciclos, sin embargo la concentración produce una grieta y dependerá de la tenacidad del material para resistir grietas la vida de la pieza.

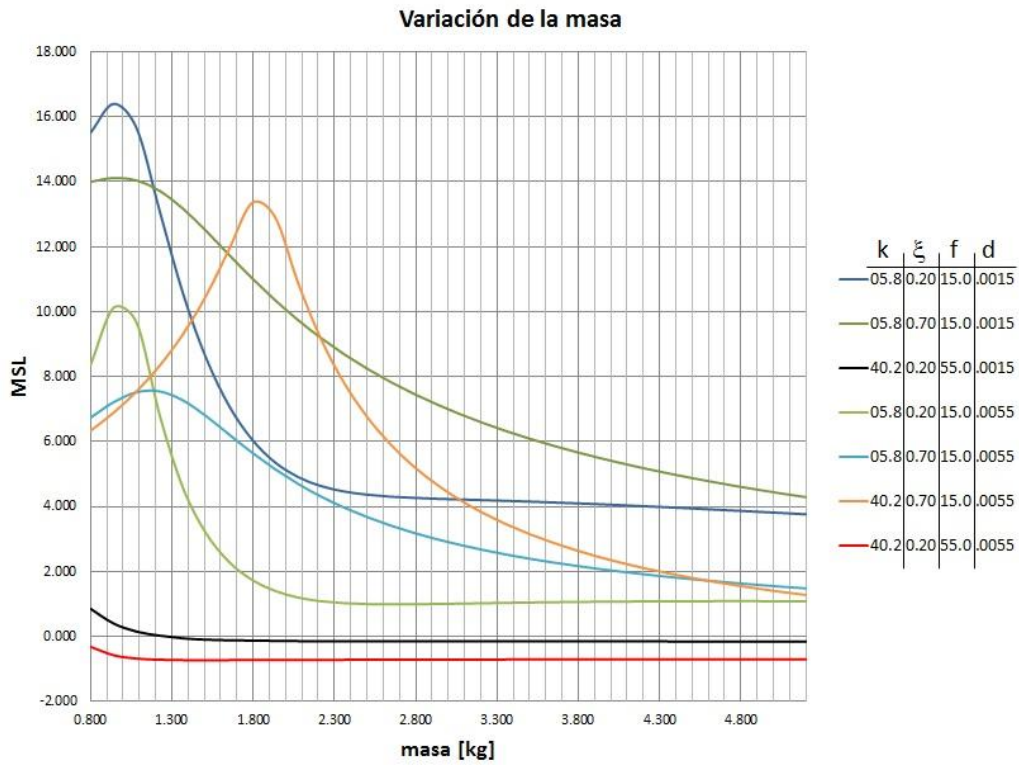


Figura 6-19. Variación del MSL en función de la masa.

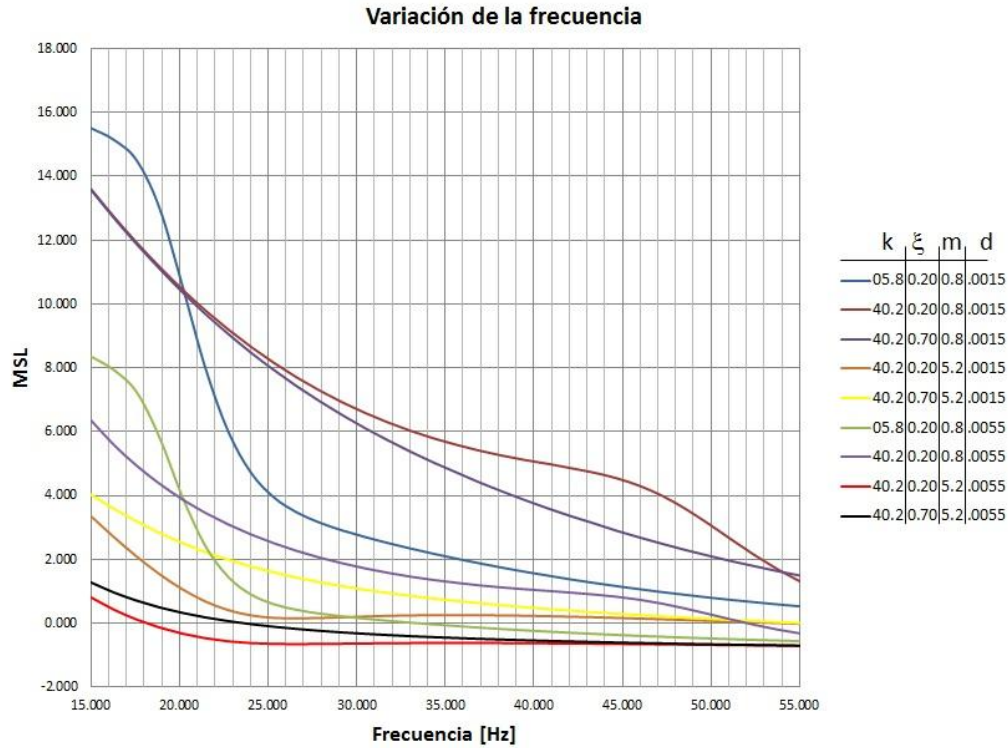


Figura 6-20. Variación del MSL en función de la frecuencia.

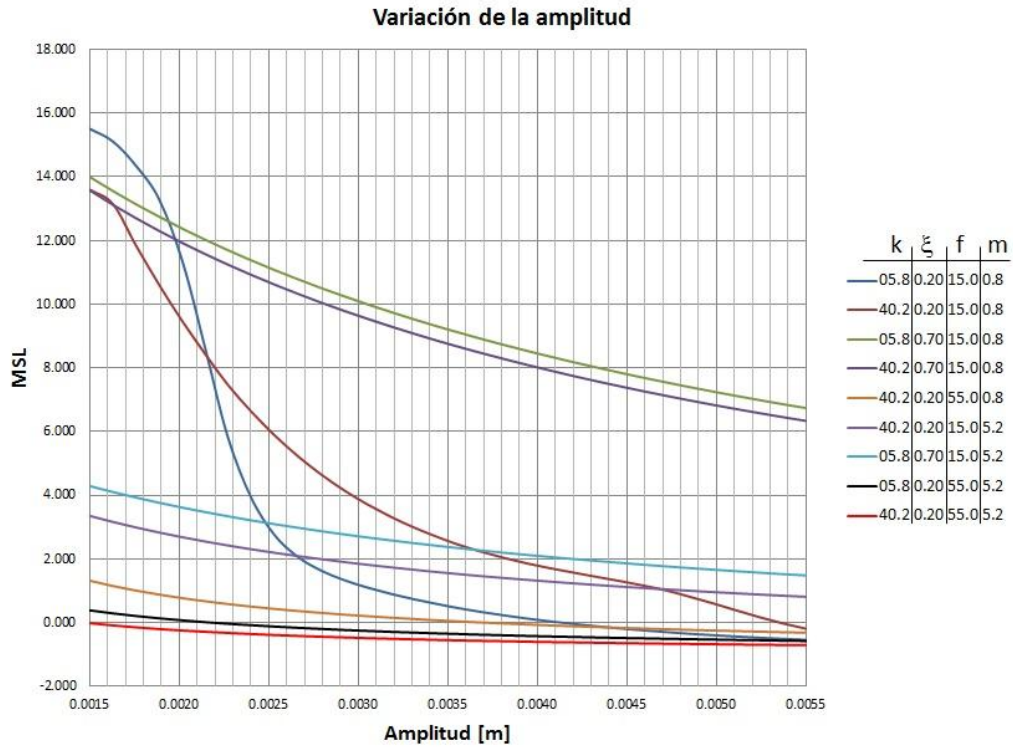


Figura 6-21. Variación del MSL en función de la amplitud de vibración.

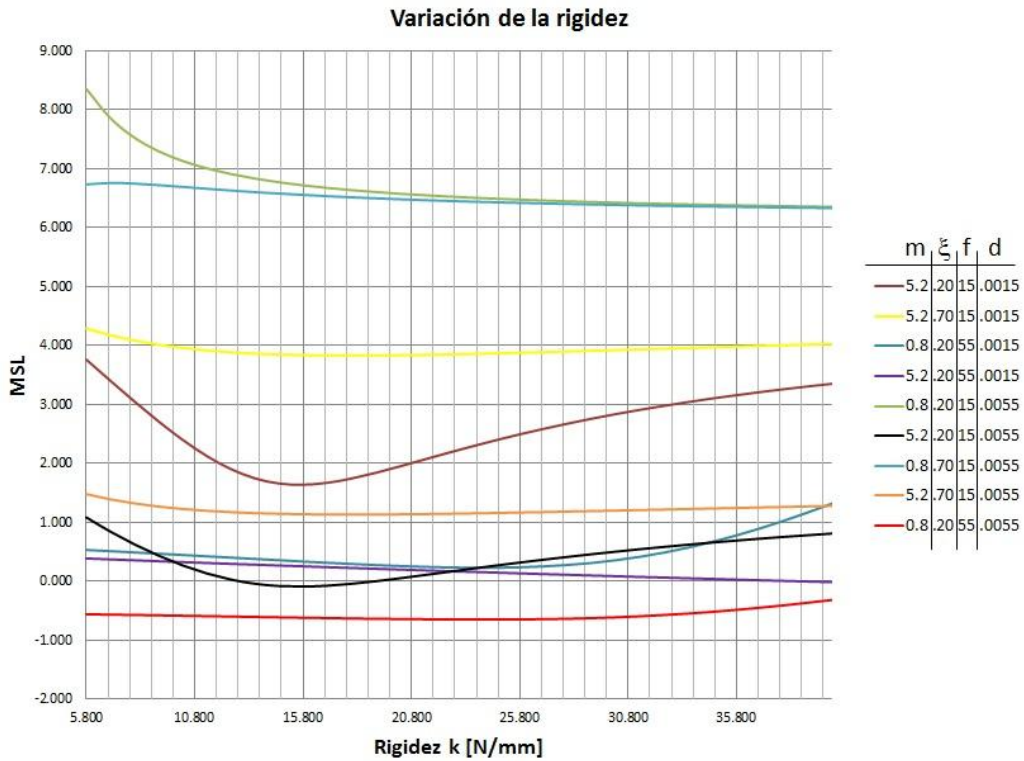


Figura 6-22. Variación del MSL en función de la rigidez de las probetas.

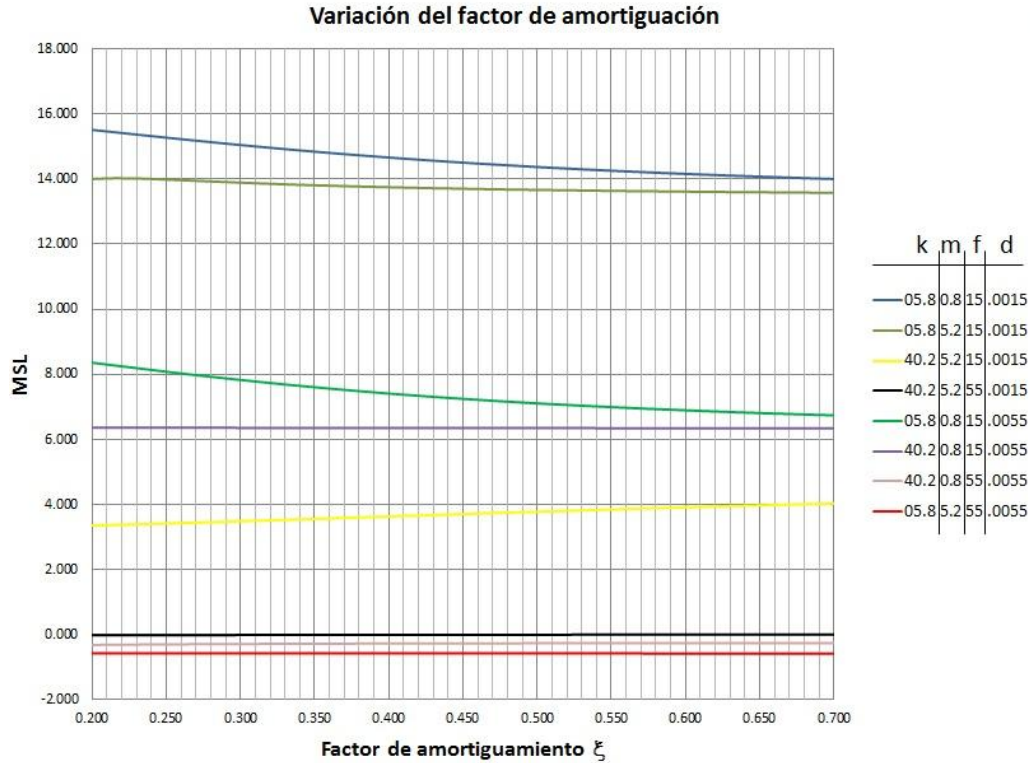


Figura 6-23. Variación del MSL en función del factor de amortiguamiento del sistema.

Para establecer los límites de funcionamiento del banco de pruebas se crearon las tablas Tabla 6-3 y Tabla 6-4 que tienen en total 250 combinaciones de características. Las combinaciones se hicieron de tal forma que es posible conocer el MSL de la máquina¹⁵ directamente con los datos tabulados, por ejemplo, es fácil leer de las tablas que el MSL será de .64 si las probetas tienen una rigidez aproximada de 6 N/mm y son de bajo amortiguamiento (.25), se coloca una masa suspendida como precarga de 2 kg, se excitan las probetas a 50Hz y 1mm de amplitud. Se espera que las combinaciones escogidas abarquen los rangos de las pruebas reales; sin embargo, de existir un caso que no se encuentre en las 250 combinaciones mostradas es aproximable un valor en base también a los valores tabulados; así, *no se podrá efectuar prueba alguna dentro de los rangos aquí analizados sin posibilidad de conocer el MSL de la máquina previamente, ya sea o con el valor exacto de la tabla o con una aproximación lineal con errores del 5 al 8%*.

Como se aprecia en las tablas, los valores de la rigidez y amortiguamiento de las probetas se catalogaron en dos, a saber, *alta rigidez* (40 N/mm) y *baja rigidez* (6 N/mm), el amortiguamiento también tomó valores altos y bajos de .25 a .65 respectivamente, lo que produce las 4 columnas en que se divide la tabla. Estos rangos altos y bajos, son suposiciones que el operador debe de asumir para conocer el MSL de la máquina, en un sentido irónico, estas dos características deben ser supuestas aunque sean de hecho las que se busca determinar con el banco por medio de los métodos de las normas ISO y ASTM. Para hacer una correcta suposición, el operador necesitará comparar

¹⁵ El MSL de la máquina es el mismo que el MSL del perno de transmisión, ya que es el elemento más esforzado (con menor MSL) de todo el banco de pruebas y el funcionamiento y la exactitud de la máquina están dictados también por el correcto funcionamiento de éste

cuantitativamente las probetas a caracterizar con los geles viscoelásticos que se tienen en la Facultad de Ingeniería de la UNAM y de los cuales se obtuvieron los rangos usados en los análisis¹⁶. Las otras tres características más importantes que la rigidez y el amortiguamiento son la masa, frecuencia y amplitud que completan las 250 combinaciones tabuladas. En el caso de la frecuencia se utilizaron los valores desde 10 hasta 55 Hz con incrementos de 5Hz, para la masa se utilizaron los valores de 1 a 5kg en incrementos de 1kg y la amplitud con valores de 1 a 5mm con incrementos de un milímetro. Cabe hacer notar que los valores de la masa se repiten cada renglón de la amplitud así como los valores de a frecuencia se repiten cada columna de amortiguamiento.

El siguiente procedimiento ilustra cómo se utilizan las tablas para conocer el MSL de la máquina en base a una aproximación lineal y en los anexos se muestra algunos ejemplos resueltos para la estimación del MSL:

1. Suponer alta o baja rigidez, así como alto o bajo amortiguamiento para ubicarse en las tablas de la columna de rigidez y amortiguamiento correspondientes.
2. Ubicar la(s) tabla(s) más próxima(s) a ser utilizada(s) en base a los renglones de la amplitud.
3. Ubicar la combinación de masa y frecuencia más próxima a los valores que serán utilizados en la prueba.
4. Realizar la aproximación lineal con la Ecuación 6.47

Ecuación 6.47

$$dM = \frac{\partial M}{\partial m} dm + \frac{\partial M}{\partial f} df + \frac{\partial M}{\partial d} dd$$

En donde M es el MSL de la máquina, m es la masa suspendida, f es la frecuencia de vibración y d es la amplitud de la vibración¹⁷. En los anexos se tienen ejemplos resueltos para familiarizarse con estas tablas, además también se muestran tablas similares para conocer la deflexión del perno y la potencia requerida del motor, ya que éstos resultados pueden utilizarse también como límites de funcionamiento o para estimar la precisión de la máquina.

¹⁶ Las comparaciones pueden hacerse por ejemplo colocando masas sobre las probetas para comparar la rigidez estática de la probeta con el gel viscoelástico que se tiene, también pueden realizarse pruebas a baja velocidad para hacer la comparación.

¹⁷ Este método se basa en establecer al MSL como función únicamente de m , f y d , así $M = f(m, f, d)$ y siendo una función continua en los rangos analizados, sus derivadas parciales existen. El error de este método ha sido estimado de 5a 8% del valor real. Nótese que ξ y k han sido excluidas de la Ecuación 6.47, pero sus valores se utilizan para ubicar la tabla correspondiente.

		k = 6N/mm (baja rigidez)																			
		$\xi = .25$ (bajo amortiguamiento)									$\xi = .65$ (alto amortiguamiento)										
		10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
d	f																				
d = 1mm	1.000	18.51	17.27	10.00	5.74	4.34	3.40	2.65	2.06	1.61	1.22	18.31	15.90	12.13	8.57	6.08	4.43	3.30	2.47	1.87	1.41
	2.000	13.57	7.72	5.82	4.85	3.92	3.12	2.46	1.93	1.52	1.14	14.18	11.24	8.36	6.27	4.75	3.63	2.80	2.15	1.65	1.25
	3.000	8.80	5.83	5.21	4.39	3.58	2.87	2.28	1.79	1.41	1.07	10.19	8.04	6.34	5.02	3.96	3.11	2.46	1.90	1.50	1.13
	4.000	6.22	5.23	4.70	3.98	3.27	2.65	2.12	1.67	1.32	1.00	7.90	6.34	5.18	4.22	3.40	2.72	2.16	1.70	1.34	1.02
	5.000	5.00	4.75	4.26	3.62	3.00	2.45	1.98	1.56	1.23	0.94	6.44	5.27	4.39	3.63	2.97	2.41	1.93	1.53	1.20	0.92
d = 2mm	1.000	16.76	14.79	6.37	2.99	2.04	1.45	1.00	0.65	0.39	0.17	16.43	12.85	8.42	5.14	3.23	2.10	1.39	0.89	0.54	0.27
	2.000	12.12	4.95	3.30	2.56	1.90	1.36	0.94	0.61	0.36	0.15	13.14	8.77	5.56	3.67	2.49	1.70	1.15	0.74	0.44	0.21
	3.000	6.80	3.61	3.06	2.39	1.77	1.27	0.88	0.56	0.33	0.12	8.74	5.88	4.09	2.90	2.05	1.44	0.99	0.63	0.38	0.16
	4.000	4.37	3.35	2.85	2.22	1.65	1.19	0.82	0.52	0.30	0.10	6.47	4.50	3.29	2.42	1.75	1.24	0.85	0.54	0.31	0.11
	5.000	3.39	3.13	2.64	2.06	1.54	1.11	0.77	0.48	0.26	0.08	5.13	3.69	2.77	2.07	1.51	1.08	0.73	0.46	0.24	0.07
d = 3mm	1.000	15.29	12.91	4.54	1.83	1.13	0.69	0.37	0.13	-0.05	-0.21	14.87	10.74	6.35	3.52	2.02	1.17	0.65	0.30	0.05	-0.13
	2.000	10.94	3.51	2.15	1.56	1.05	0.65	0.34	0.11	-0.06	-0.22	12.24	7.13	4.04	2.44	1.50	0.90	0.50	0.20	-0.01	-0.17
	3.000	5.48	2.48	2.02	1.47	0.99	0.61	0.31	0.09	-0.08	-0.23	7.62	4.55	2.89	1.88	1.21	0.73	0.40	0.14	-0.05	-0.21
	4.000	3.28	2.34	1.90	1.38	0.92	0.56	0.28	0.06	-0.10	-0.24	5.43	3.40	2.29	1.54	1.00	0.60	0.30	0.08	-0.09	-0.23
	5.000	2.46	2.23	1.78	1.29	0.86	0.52	0.26	0.04	-0.12	-0.25	4.21	2.75	1.90	1.29	0.84	0.49	0.23	0.03	-0.13	-0.26
d = 4mm	1.000	14.05	11.43	3.44	1.20	0.64	0.30	0.05	-0.14	-0.28	-0.40	13.58	9.19	5.02	2.58	1.34	0.67	0.26	-0.01	-0.20	-0.34
	2.000	9.95	2.63	1.48	1.00	0.59	0.27	0.03	-0.16	-0.29	-0.41	11.45	5.96	3.10	1.73	0.95	0.47	0.15	-0.08	-0.24	-0.37
	3.000	4.54	1.80	1.40	0.95	0.55	0.24	0.01	-0.17	-0.30	-0.41	6.73	3.66	2.15	1.29	0.73	0.34	0.08	-0.13	-0.27	-0.40
	4.000	2.55	1.71	1.33	0.89	0.51	0.21	-0.01	-0.18	-0.31	-0.42	4.65	2.67	1.67	1.02	0.57	0.25	0.01	-0.17	-0.31	-0.42
	5.000	1.86	1.65	1.25	0.83	0.47	0.19	-0.03	-0.20	-0.32	-0.43	3.54	2.12	1.36	0.83	0.45	0.17	-0.05	-0.21	-0.33	-0.43
d = 5mm	1.000	12.98	10.23	2.71	0.79	0.33	0.05	-0.16	-0.31	-0.42	-0.52	12.48	7.99	4.10	1.96	0.92	0.36	0.02	-0.20	-0.36	-0.47
	2.000	9.11	2.04	1.04	0.64	0.30	0.03	-0.17	-0.32	-0.43	-0.52	10.75	5.09	2.45	1.26	0.60	0.20	-0.07	-0.26	-0.39	-0.49
	3.000	3.84	1.34	0.99	0.60	0.27	0.01	-0.18	-0.33	-0.43	-0.53	6.00	3.01	1.65	0.90	0.42	0.10	-0.12	-0.29	-0.41	-0.51
	4.000	2.04	1.28	0.95	0.56	0.24	-0.01	-0.19	-0.34	-0.44	-0.53	4.04	2.14	1.24	0.68	0.29	0.02	-0.18	-0.33	-0.44	-0.53
	5.000	1.43	1.24	0.89	0.52	0.21	-0.03	-0.20	-0.35	-0.45	-0.54	3.01	1.67	0.98	0.52	0.20	-0.04	-0.22	-0.36	-0.46	-0.54

Tabla 6-3. Márgenes de seguridad de la máquina para probetas con alta rigidez. Los valores en rojo son valores negativos. Ver la tabla completa en los anexos

		k = 40N/mm (alta rigidez)																			
		$\xi = .25$ (bajo amortiguamiento)									$\xi = .65$ (alto amortiguamiento)										
		10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
d	f																				
d = 1mm	1.000	18.02	15.68	13.48	11.75	10.56	9.75	8.06	4.87	2.42	1.19	18.02	15.65	13.33	11.28	9.47	7.76	6.12	4.63	3.40	2.46
	2.000	15.31	14.54	12.33	8.64	4.84	2.33	1.20	0.81	0.64	0.49	15.29	14.62	12.87	10.20	7.45	5.24	3.69	2.64	1.93	1.40
	3.000	11.01	9.11	6.27	3.39	1.58	0.96	0.81	0.71	0.59	0.47	11.04	9.41	7.32	5.34	3.84	2.81	2.11	1.58	1.20	0.90
	4.000	8.46	6.31	3.66	1.65	0.95	0.84	0.79	0.69	0.57	0.44	8.51	6.72	4.87	3.46	2.50	1.88	1.45	1.11	0.85	0.63
	5.000	6.77	4.60	2.26	1.03	0.85	0.83	0.77	0.66	0.54	0.41	6.84	5.11	3.56	2.50	1.84	1.40	1.09	0.83	0.63	0.46
d = 2mm	1.000	15.96	12.56	9.87	8.04	6.88	6.15	4.73	2.40	0.85	0.15	15.95	12.52	9.70	7.57	5.90	4.49	3.26	2.23	1.45	0.88
	2.000	15.24	13.79	10.25	5.84	2.56	0.85	0.18	-0.04	-0.14	-0.22	15.21	13.93	11.03	7.52	4.69	2.86	1.74	1.05	0.61	0.30
	3.000	10.04	7.21	4.02	1.63	0.43	0.06	-0.03	-0.09	-0.15	-0.22	10.10	7.61	5.08	3.18	1.97	1.23	0.76	0.43	0.20	0.02
	4.000	7.29	4.47	1.95	0.51	0.07	0.01	-0.02	-0.09	-0.15	-0.23	7.37	4.95	3.00	1.79	1.08	0.66	0.38	0.17	0.01	-0.12
	5.000	5.59	2.97	0.97	0.13	0.02	0.01	-0.03	-0.09	-0.16	-0.24	5.70	3.52	2.00	1.15	0.67	0.37	0.17	0.01	-0.11	-0.21
d = 3mm	1.000	14.30	10.43	7.71	6.00	4.98	4.35	3.19	1.39	0.27	-0.22	14.29	10.38	7.54	5.58	4.15	3.00	2.04	1.27	0.70	0.29
	2.000	15.17	13.11	8.72	4.29	1.56	0.28	-0.19	-0.35	-0.41	-0.47	15.13	13.30	9.62	5.87	3.29	1.79	0.93	0.43	0.11	-0.11
	3.000	9.21	5.91	2.83	0.88	-0.01	-0.27	-0.34	-0.38	-0.42	-0.47	9.29	6.34	3.79	2.11	1.14	0.57	0.23	-0.01	-0.17	-0.30
	4.000	6.38	3.37	1.16	0.05	-0.26	-0.31	-0.33	-0.37	-0.42	-0.47	6.48	3.84	2.04	1.03	0.48	0.16	-0.04	-0.19	-0.31	-0.40
	5.000	4.72	2.08	0.41	-0.21	-0.29	-0.30	-0.33	-0.37	-0.42	-0.48	4.85	2.58	1.24	0.55	0.18	-0.04	-0.18	-0.30	-0.39	-0.46
d = 4mm	1.000	12.94	8.87	6.26	4.71	3.82	3.28	2.30	0.84	-0.03	-0.41	12.93	8.83	6.11	4.34	3.10	2.14	1.36	0.75	0.30	-0.02
	2.000	15.10	12.49	7.57	3.32	0.99	-0.02	-0.39	-0.51	-0.56	-0.60	15.05	12.72	8.51	4.75	2.44	1.19	0.50	0.09	-0.15	-0.33
	3.000	8.50	4.96	2.10	0.46	-0.24	-0.45	-0.50	-0.53	-0.56	-0.60	8.59	5.40	2.95	1.48	0.67	0.22	-0.05	-0.24	-0.37	-0.47
	4.000	5.65	2.64	0.70	-0.19	-0.44	-0.47	-0.49	-0.52	-0.56	-0.60	5.76	3.08	1.45	0.60	0.15	-0.10	-0.26	-0.38	-0.47	-0.54
	5.000	4.06	1.52	0.10	-0.40	-0.46	-0.46	-0.49	-0.52	-0.56	-0.60	4.19	1.97	0.78	0.21	-0.08	-0.26	-0.37	-0.46	-0.53	-0.59
d = 5mm	1.000	11.80	7.69	5.22	3.82	3.03	2.56	1.73	0.50	-0.22	-0.52	11.79	7.64	5.09	3.50	2.41	1.59	0.93	0.42	0.05	-0.21
	2.000	15.04	11.92	6.65	2.65	0.64	-0.20	-0.51	-0.60	-0.64	-0.68	14.97	12.18	7.61	3.95	1.88	0.80	0.22	-0.11	-0.32	-0.46
	3.000	7.89	4.24	1.60	0.20	-0.39	-0.55	-0.59	-0.62	-0.65	-0.68	7.98	4.67	2.36	1.06	0.37	-0.01	-0.23	-0.39	-0.49	-0.57
	4.000	5.05	2.12	0.41	-0.34	-0.55	-0.57	-0.59	-0.61	-0.65	-0.68	5.16	2.52	1.05	0.32	-0.06	-0.27	-0.40	-0.50	-0.57	-0.63
	5.000	3.53	1.13	-0.10	-0.51	-0.56	-0.57	-0.58	-0.61	-0.65	-0.68	3.66	1.53	0.48	-0.01	-0.25	-0.40	-0.49	-0.57	-0.62	-0.67

Tabla 6-4. Márgenes de seguridad de la máquina para probetas con baja rigidez. Los valores en rojo son valores negativos. Ver la tabla completa en los anexos

Las derivadas parciales de la Ecuación 6.47 se aproximan de la siguiente manera:

1. Se ubica el MSL de la combinación más cercana a la que se desea analizar y se leen los dos valores que lo rodean.
2. Se obtiene la diferenciación del MSL entre éstos dos valores y el MSL de la combinación más cercana por medio de la expresión de la derivada como límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donde h es el incremento tabulado de la característica evaluada como variable¹⁸.

3. Sacar el promedio de la diferencia de los dos valores

Más información de éste método está disponible en (14) y ejemplos resueltos se encuentran en los anexos.

¹⁸ Nótese que por la forma en que están hechas las tablas, los valores de h correspondientes para m , f y d siempre son los mismos.

7 Validación funcional del banco

La manera más directa en que se validó la funcionalidad del mecanismo excitador fue midiendo su vibración en operación. Un banco defectuoso sería aquél que se rompiese en pruebas, generara armónicos indeseables o que vibrara en sentido diferente al vertical¹⁹.

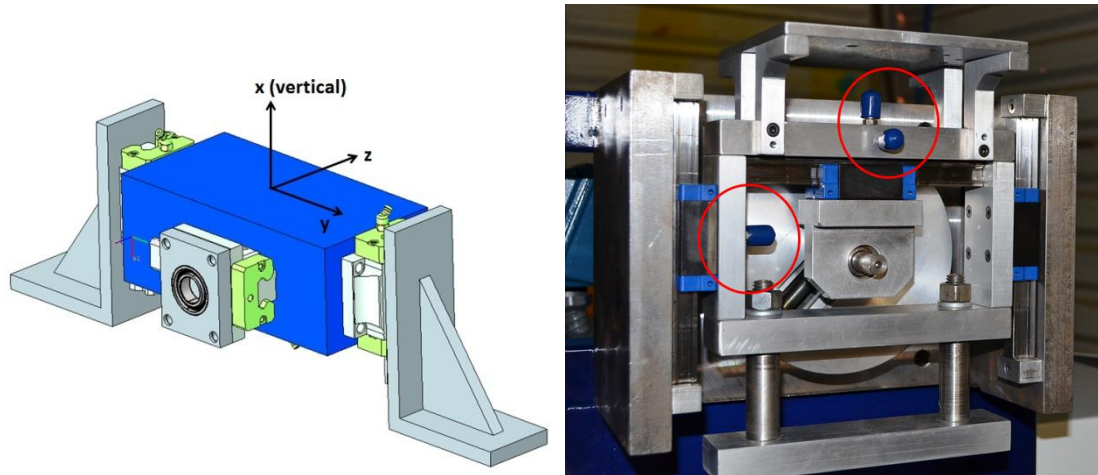


Figura 7-1. Montaje de los acelerómetros para las pruebas de validación. Los acelerómetros se muestran en rojo y están montados ortogonales entre si.

Para la validación del movimiento vertical de la máquina utilizaron tres transductores de aceleración localizados en la tabla vibratoria (yugo) y en direcciones ortogonales, simulando los ejes x , y y z como se muestra en la Figura 7-1. A grados rasgos se determinó en base a las mediciones el porcentaje de energía que el banco induce en el sentido de cada acelerómetro por medio de la Ecuación 7.1

Ecuación 7.1

$$E_{cinética} = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde m representa la masa de los componentes en movimiento del yugo; así, al medir directamente la velocidad²⁰ en cada uno de los transductores situados en la mesa del yugo, la energía total gastada en moverlo en las tres direcciones²¹ es determinada por la Ecuación 7.2.

¹⁹ El banco fue diseñado para inducir movimiento únicamente en sentido vertical, si existiera movimiento en el sentido horizontal por ejemplo, se hablaría de la existencia de un anclaje defectuoso, mala cimentación, baja rigidez de la estructura del banco o falta de exactitud de las piezas manufacturadas.

²⁰ Lo que se midió fue a aceleración. La velocidad se obtiene realizando algunas operaciones en la señal. Más detalle se muestra en las secciones consecuentes.

²¹ La Ecuación 7.2 no toma en cuenta la energía de rotación, ya que la configuración de los patines elimina este movimiento, además la ecuación es válida bajo las premisas de que la máquina tiene una rigidez elevada, está correctamente anclada y la cimentación del lugar es adecuada. Los resultados de ésta sección corroboran la veracidad de las premisas.

Ecuación 7.2

$$E_{cinética\ total} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Para obtener el porcentaje de energía en cada eje se utilizaron las Ecuaciones 7.3

Ecuaciones 7.3

$$\frac{E_x}{E_{total}} = \frac{v_x^2}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

$$\frac{E_y}{E_{total}} = \frac{v_y^2}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

$$\frac{E_z}{E_{total}} = \frac{v_z^2}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

La medición, filtrado, transformación y lectura de datos de los transductores se hizo por medio de una herramienta computarizada en el programa Labview. Esta herramienta fue hecha en el taller de manufactura y está basada en el siguiente procedimiento para cada transductor:

1. Lectura de datos de aceleración
2. Filtrado de señal (filtro de bajas, ya que la frecuencia es baja)
3. Aplicación de la transformada de Fourier a la señal filtrada
4. Lectura de la amplitud y frecuencia del armónico fundamental
5. Integración del armónico principal para establecer la magnitud de su velocidad²²
6. Obtener el valor RMS de la velocidad²³
7. Aplicar las Ecuaciones 7.3

Es importante remarcar algunos detalles de los procesos tres y cuatro. El armónico fundamental es la señal repetitiva con mayor magnitud de todo el espectro que compone la lectura de los transductores. En el caso más teórico, los transductores leerían una señal completamente senoidal; sin embargo, la aleatoriedad de los defectos inherentes al equipo electrónico y los defectos de manufactura aumentan la cantidad de señales dificultando la detección de la señal fundamental. Para detectarla se separan las señales repetitivas y las aleatorias cambiando el dominio de la señal, que originalmente es el tiempo, al dominio de la frecuencia, esto se hace por medio de la transformada de Fourier, así se obtiene la magnitud y la frecuencia del armónico fundamental siempre y cuando el filtro funcione adecuadamente.

²² La integración es sencilla: Partiendo de que la aceleración es $\ddot{x} = a \sin(\omega t)$, donde a y ω son la magnitud y la frecuencia respectivamente del armónico fundamental; la velocidad está dada por la integral de la aceleración respecto del tiempo, así $\dot{x} = -\frac{a}{\omega} \cos(\omega t)$. La magnitud de la velocidad es pues $|\dot{x}| = \frac{a}{\omega}$

²³ Las ecuaciones se aplicaron con los valores de velocidad RMS (mínimos cuadrados), éstos son calculados al suponer que la señal leída es únicamente el armónico fundamental, así $v_{RMS} = \frac{|\dot{x}|}{\sqrt{2}}$.

Los resultados de la validación se muestran en la tabla de la Figura 7-2, en la que se puede apreciar que a diferentes velocidades y amplitudes de vibración, el movimiento es prácticamente en la dirección deseada (más del 97% de la energía se gasta en el movimiento en el sentido del eje *x* excepto en un caso).

Frecuencia de vibración (Hz)	Amplitud de vibración (mm)	Aceleración en x (mm/s ²)	Aceleración en y (mm/s ²)	Aceleración en z (mm/s ²)	Velocidad RMS en x (mm/s)	Velocidad RMS en y (mm/s)	Velocidad RMS en z (mm/s)	Porcentaje de energía en x
25	1.79	44145.00	3924.00	3433.50	198.72	17.66	15.46	98.6%
20	1.86	29430.00	2943.00	1962.00	165.60	16.56	11.04	98.6%
16.7	1.79	19620.00	1471.50	1667.70	132.48	9.94	11.26	98.7%
9.1	2.41	7848.00	686.70	608.22	97.15	8.50	7.53	98.7%
28.6	0.91	29430.00	1962.00	1765.80	115.92	7.73	6.96	99.2%
16.7	0.72	7848.00	735.75	882.90	52.99	4.97	5.96	97.9%
10	0.99	3924.00	392.40	490.50	44.16	4.42	5.52	97.5%
10	0.50	1962.00	686.70	490.50	22.08	7.73	5.52	84.4%
15.4	0.37	3433.50	588.60	833.85	25.12	4.31	6.10	91.9%
20	0.50	7848.00	1226.25	1471.50	44.16	6.90	8.28	94.4%
25	0.40	9810.00	1177.20	784.80	44.16	5.30	3.53	98.0%
25	3.58	88290.00	6867.00	5886.00	397.44	30.91	26.50	99.0%
18.2	3.01	39240.00	4905.00	3924.00	242.88	30.36	24.29	97.5%

Figura 7-2. Resultados de las pruebas de validación del mecanismo. En prácticamente todos los casos se obtuvieron valores por arriba del 97 %

Se concluye así que el banco de pruebas tiene rigidez, anclaje, precisión de manufactura y ensamblaje correctos, además es apto para producir el movimiento senoidal requerido en el banco de pruebas.

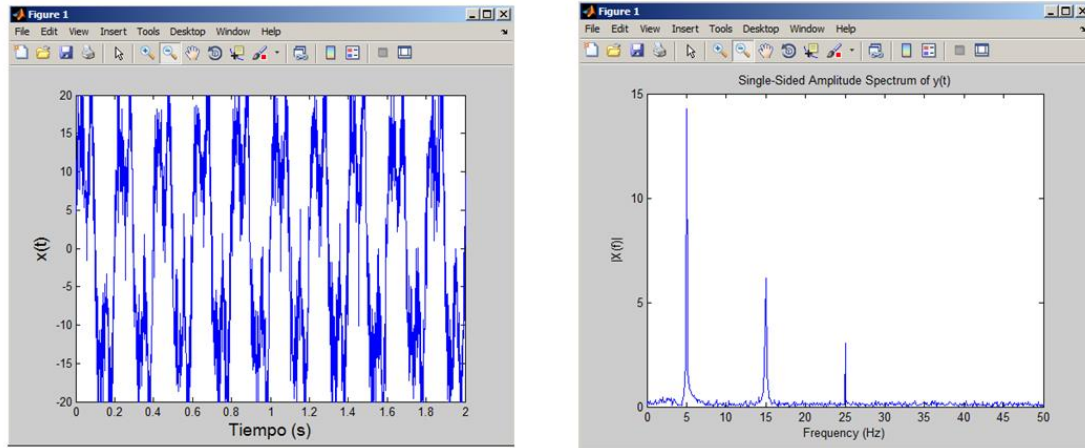


Figura 8-2. A la izquierda se muestra la simulación de la lectura de algún transductor. A la derecha se muestra el espectro de la señal, en él se lee que la señal está compuesta de tres armónicos y que el fundamental tiene una magnitud de 15 y una frecuencia de 5Hz

Ambos métodos, el directo y el indirecto, funcionan en base a la transformada de Fourier. En el método directo se requiere conocer el desfase entre la fuerza aplicada a la probeta y el desplazamiento en ésta, este desfase es típico de los materiales viscoelásticos, así como se explicó en el capítulo 9 y se obtiene en base a la descomposición de la lectura real en números complejos. En el método indirecto se requiere también de los números complejos generados por la transformada.

En el caso particular del método indirecto, la caracterización se realiza por medio del siguiente procedimiento en donde se utiliza el modelo dinámico de histéresis:

1. Lectura de los transductores.
2. Conversión de señal analógica a digital ya que los transductores son analógicos.
3. Filtrado de bajas en la señal para eliminar el ruido de la lectura.
4. Realizar las conversiones pertinentes en la señal para trabajar con unidades consistentes (aceleración en mm/s² en este caso).
5. Aplicar la transformada rápida de Fourier (FFT) a la señal, esto convertirá cada punto leído en tiempo a un número complejo que contiene la información de la amplitud, frecuencia y desfase de la señal.
6. Encontrar el número complejo cuya magnitud sea la mayor de todos los números transformados.

A partir de este paso se aplicará la ecuación de movimiento (Ecuación 8.1) que define al modelo histerético, en donde K^* es la rigidez dinámica compleja, X y Y son los desplazamientos de la entrada y la salida respectivamente (nótese el uso de mayúsculas para distinguir que éstos son números complejos obtenidos en el paso 6 del procedimiento expuesto).

Ecuación 8.1

$$m \cdot \ddot{Y} + K^*(Y - X) = 0$$

Además, como $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$, es posible establecer la Ecuación 8.2 que es la rigidez dinámica compleja del sistema probado, en donde m es la masa suspendida, ω es la frecuencia angular de excitación y $H^*(\omega)$ es la transmisibilidad compleja del sistema dependiente de la frecuencia angular que se muestra en la Ecuación 8.3

Ecuación 8.2

$$K^*(\omega) = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot H^*(\omega)}{H^*(\omega) - 1}$$

Ecuación 8.3

$$H^*(\omega) = \frac{Y}{X}$$

A partir de estas ecuaciones se puede obtener la rigidez dinámica del sistema para cualquier velocidad del motor del banco de pruebas, también es posible graficar la transmisibilidad del sistema en base a la magnitud de $H^*(\omega)$.

9 Uso de las tablas de límites.

9.1 Ejemplos del uso de las tablas de límites.

Ejemplo 1: Lectura del MSL directo en la tabla.

Combinación:

Masa (kg)	Rigidez (N/mm)	Factor de amortiguamiento (ξ)	Frecuencia (Hz)	Amplitud (mm)
2	6	0.25	35	2

1. Ubicar las tablas correspondientes en base a las columnas de rigidez y amortiguamiento
2. Ubicar la tabla específica en base a los renglones de la amplitud
3. Leer el valor del MSL correspondiente a la combinación.

		$k = 6\text{N/mm}$ (baja rigidez)										
		$\xi = .25$ (bajo amortiguamiento)										
		f	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$d = 2\text{mm}$	m	1.000	16.76	14.79	6.37	2.99	2.04	1.45	1.00	0.65	0.39	0.17
	2.000	12.12	4.95	3.30	2.56	1.90	1.36	0.94	0.61	0.36	0.15	
	3.000	6.80	3.61	3.06	2.39	1.77	1.27	0.88	0.56	0.33	0.12	
	4.000	4.37	3.35	2.85	2.22	1.65	1.19	0.82	0.52	0.30	0.10	
	5.000	3.39	3.13	2.64	2.06	1.54	1.11	0.77	0.48	0.26	0.08	

La combinación tiene un MSL positivo, por lo tanto se está *dentro del límite de funcionamiento del banco*.

Ejemplo 2: Aproximación lineal variando solamente una característica (masa)Combinación:

Masa (kg)	Rigidez (N/mm)	Factor de amortiguamiento (ξ)	Frecuencia (Hz)	Amplitud (mm)
4.25	40	0.65	50	2

1. Ubicar la tabla correspondiente al problema.

		k = 40N/mm (alta rigidez)										
		$\xi = .65$ (alto amortiguamiento)										
		f										
		m	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
d = 2mm	1.000	15.95	12.52	9.70	7.57	5.90	4.49	3.26	2.23	1.45	0.88	
	2.000	15.21	13.93	11.03	7.52	4.69	2.86	1.74	1.05	0.61	0.30	
	3.000	10.10	7.61	5.08	3.18	1.97	1.23	0.76	0.43	0.20	0.02	
	4.000	7.37	4.95	3.00	1.79	1.08	0.66	0.38	0.17	0.01	-0.12	
	5.000	5.70	3.52	2.00	1.15	0.67	0.37	0.17	0.01	-0.11	-0.21	

2. Aproximar linealmente el MSL la Ecuación 6.47 conociendo la característica a variar, que en este caso es la masa como se muestra a continuación:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial m} dm$$

Integrando:

$$M_{buscado} - M_{tabulado} = \frac{\partial M}{\partial m} (m_{buscada} - m_{tabulada})$$

Resolviendo con los datos de la tabla y las características del problema:

$$M_{buscado} = .01 + \frac{-0.11 - 0.20}{2(1)} (4.25 - 4) = .01 - .04 = -0.03$$

Por ser negativo el MSL se sugiere que la combinación de la prueba a realizar sobrepasa el límite de funcionamiento y por lo tanto *no es recomendado realizarla*.

Ejemplo 3: Aproximación lineal variando dos características (masa y frecuencia)

Combinación:

Masa (kg)	Rigidez (N/mm)	Factor de amortiguamiento (ξ)	Frecuencia (Hz)	Amplitud (mm)
3.2	40	0.65	43	3

1. Ubicar la tabla correspondiente al problema.

		k = 40N/mm									
		ξ = .65									
m \ f		10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
d = 3mm	1.000	14.29	10.38	7.54	5.58	4.15	3.00	2.04	1.27	0.70	0.29
	2.000	15.13	13.30	9.62	5.87	3.29	1.79	0.93	0.43	0.11	-0.11
	3.000	9.29	6.34	3.79	2.11	1.14	0.57	0.23	-0.01	-0.17	-0.30
	4.000	6.48	3.84	2.04	1.03	0.48	0.16	-0.04	-0.19	-0.31	-0.40
	5.000	4.85	2.58	1.24	0.55	0.18	-0.04	-0.18	-0.30	-0.39	-0.46

2. Aplicar la Ecuación 6.47 conociendo las características a variar, que en este caso son la masa y la frecuencia como se muestra a continuación:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial m} dm + \frac{\partial M}{\partial f} df$$

Integrando:

$$M_{buscado} - M_{tabulado} = \frac{\partial M}{\partial m} (m_{buscada} - m_{tabulada}) + \frac{\partial M}{\partial f} (f_{buscada} - f_{tabulada})$$

Resolviendo con los datos de la tabla y las características del problema:

$$M_{buscado} = -.01 + \frac{-0.17 - .23}{2(1)} (3.2 - 3) + \frac{-0.19 - .43}{2(5)} (43 - 45) = -.01 - .04 + .04 = -.01$$

Se concluye que *no es recomendado realizar ésta prueba*, ya que el MSL es negativo.

Ejemplo 4: Aproximación lineal variando tres características (masa, frecuencia y amplitud)

Combinación:

Masa (kg)	Rigidez (N/mm)	Factor de amortiguamiento (ξ)	Frecuencia (Hz)	Amplitud (mm)
2.5	40	0.65	37	4.5

1. Ubicar las tablas correspondientes al problema tomando en cuenta que en este caso también la amplitud varía.

Diseño y construcción de un banco de pruebas para
caracterizar materiales viscoelásticos sometidos a vibración

		k = 40N/mm									
		$\xi = .65$									
	m \ f	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
d = 3mm	1.000	14.29	10.38	7.54	5.58	4.15	3.00	2.04	1.27	0.70	0.29
	2.000	15.13	13.30	9.62	5.87	3.29	1.79	0.93	0.43	0.11	-0.11
	3.000	9.29	6.34	3.79	2.11	1.14	0.57	0.23	-0.01	-0.17	-0.30
	4.000	6.48	3.84	2.04	1.03	0.48	0.16	-0.04	-0.19	-0.31	-0.40
	5.000	4.85	2.58	1.24	0.55	0.18	-0.04	-0.18	-0.30	-0.39	-0.46
d = 4mm	1.000	12.93	8.83	6.11	4.34	3.10	2.14	1.36	0.75	0.30	-0.02
	2.000	15.05	12.72	8.51	4.75	2.44	1.19	0.50	0.09	-0.15	-0.33
	3.000	8.59	5.40	2.95	1.48	0.67	0.22	-0.05	-0.24	-0.37	-0.47
	4.000	5.76	3.08	1.45	0.60	0.15	-0.10	-0.26	-0.38	-0.47	-0.54
	5.000	4.19	1.97	0.78	0.21	-0.08	-0.26	-0.37	-0.46	-0.53	-0.59
d = 5mm	1.000	11.79	7.64	5.09	3.50	2.41	1.59	0.93	0.42	0.05	-0.21
	2.000	14.97	12.18	7.61	3.95	1.88	0.80	0.22	-0.11	-0.32	-0.46
	3.000	7.98	4.67	2.36	1.06	0.37	-0.01	-0.23	-0.39	-0.49	-0.57
	4.000	5.16	2.52	1.05	0.32	-0.06	-0.27	-0.40	-0.50	-0.57	-0.63
	5.000	3.66	1.53	0.48	-0.01	-0.25	-0.40	-0.49	-0.57	-0.62	-0.67

2. Aplicar la Ecuación 6.47 conociendo las características a variar:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial m} dm + \frac{\partial M}{\partial f} df + \frac{\partial M}{\partial d} dd$$

Integrando:

$$M_{buscado} - M_{tabulado} = \frac{\partial M}{\partial m} (m_{buscada} - m_{tabulada}) + \frac{\partial M}{\partial f} (f_{buscada} - f_{tabulada}) + \frac{\partial M}{\partial d} (d_{buscada} - d_{tabulada})$$

Resolviendo con los datos de la tabla y las características del problema:

$$M_{buscado} = .50 + \frac{-0.05 - 1.36}{2(1)} (2.5 - 2) + \frac{.09 - 1.19}{2(5)} (37 - 40) + \frac{.22 - .93}{2(1)} (4.5 - 4)$$

$$M_{buscado} = .50 - .35 + .33 - .18 = .3$$

La prueba no sobrepasa los límites de funcionamiento de la máquina.

Se concluye que *no es recomendado combinar de esta forma las características.*

10 Conclusiones

En base a las mediciones realizadas en el capítulo precedente, el mecanismo del banco de pruebas construido es un reproductor de vibración eficaz, en todos los casos medidos se tiene más del 95% de la vibración de la máquina en el sentido vertical, esto significa básicamente tres cosas:

1. La cimentación del lugar en donde se realizaron las pruebas es adecuada para contener la vibración de la máquina.
2. La máquina ha sido debidamente anclada a la tierra.
3. El banco cuenta con la suficiente rigidez para arrostrar los efectos dinámicos de la vibración.

Tomando en cuenta la forma del banco, así como los resultados de los análisis dinámicos, se tienen las siguientes conclusiones:

4. El banco de pruebas puede realizar ambas pruebas de la norma ISO (método directo e indirecto).
5. En caso de utilizar el banco para el método directo, los límites de funcionamiento de éste están debidamente establecidos en las Tabla 6-3 y Tabla 6-4. Además se cuenta con un anexo en el que se dan ejemplos prácticos del uso de las mismas, así como tablas similares para conocer la deflexión del perno para garantizar la precisión de la máquina en uso, o la potencia requerida del motor, ya que el límite del motor que se tiene es de 2 hp.
6. En caso de realizar el método directo, el límite de funcionamiento no deberá ser estimado con las tablas, de hecho es recomendable que el operador trate de inferir el límite basado en la capacidad del *aguijón (stinger en inglés)* en lugar del perno de transmisión, ya que como se indicó con anterioridad *el método directo produce cargas menores que el método indirecto*.
7. Además de las tablas del margen de seguridad de la máquina se muestran en los anexos tablas similares para conocer la potencia requerida del motor, ya que el motor del banco es de 2 hp.
8. Para brindar mayores rangos de funcionamiento de la máquina, es necesario modificar el perno de transmisión, ya sea o reduciendo la concentración de esfuerzos por el chaflán o cambiando el material de éste.

Por último en cuanto al método indirecto, el banco cuenta con una plataforma ya manufacturada lista para colocar las diferentes probetas que tiene la Facultad, así como diferentes masas y una interfaz en Labview que permite caracterizar las probetas. De esta forma se concluye también que:

9. El banco de pruebas está listo para ser utilizado con el método indirecto de la norma ISO, y cuenta con una interfaz computarizada fácil de utilizar.

11 Discusión

Una importante rama de la investigación enfocada en la caracterización de elementos viscoelásticos es la predicción de sus comportamientos por medio de modelos matemáticos y elementos finitos, también la caracterización en base al incremento de temperatura y otras mediciones indirectas han aumentado el conocimiento de los materiales viscoelásticos bajo cargas cíclicas y la imposición mecánica de vibraciones es siempre la validación más efectiva de todos estos intentos por predecir el comportamiento viscoelástico. Por mi parte, y apoyado en la experiencia e investigación previa del Dr. Leonardo Urbiola, he enfocado mi atención en la creación de un modelo matemático en base a la geometría de los elastómeros que haga predicciones más confiables del comportamiento de éstos, para ello, ya contamos con varios tipos de probetas y programas que faciliten la caracterización, también parte del marco teórico manejado en este trabajo tuvo como objeto adentrarse en las no linealidades que de ser tomadas en cuenta incrementarán la certidumbre de los resultados que se buscan con el modelo matemático. Por último, ya que no solo la geometría de las probetas altera el comportamiento viscoelástico, sino también la temperatura, precarga, velocidad, etc., se tienen en la mira otros modelos que contemplan éstas características con el fin de expandir esta investigación y generar escritos y trabajos alrededor del tema.

Ya que no solo la geometría de las probetas altera el comportamiento viscoelástico, sino también la temperatura, se buscará en un futuro contar con el equipo necesario para poder realizar este tipo de mediciones en conjunto, mientras tanto, este trabajo es una sólida base para continuar incontinenti con esta rama de investigación en la Facultad, debido a que un banco de pruebas es el elemento clave de las investigaciones al permitir la corroboración de los modelos matemáticos generados y la observación de los fenómenos como primer paso del método científico.

Otra parte fundamental a contender es el correcto funcionamiento de este banco, ya que aunque el elemento excitador opera correctamente, al colocar los ensambles independientes de cada método de la normatividad se deberá volver a constatar el correcto alineamiento y balance de todos los elementos mediante mediciones de la velocidad como las realizadas en la sección de la validación o utilizando cámaras de alta velocidad y definición. También los análisis demostraron que el perno de transmisión es el elemento más *débil* del banco y si se quiere incrementar los alcances dinámicos de éste, se deberá pensar en cambiar el material de dicho perno o quizás una solución más compleja sería cambiar toda su geometría.

12 Referencias

1. *Laboratory measurement of vibro-acoustic transfer properties of resilient elements* . **10846-3, ISO**. 2008.
2. *Standard guide for testing of vulcanized rubber and rubber-like materials using vibratory methods*. **ASTM, D5992-96**.
3. *Desarrollo de un instrumento y técnica experimental para determinar las características viscoelásticas en materiales por métodos vibratorios*. **Rubio Cerda, Eduardo y Jáuregui Correa, Juan Carlos**. Aguascalientes : Sociedad mexicana de ingeniería mecánica A. C., 2004, Vols. CIATEQ A.C., Centro de Tecnología Avanzada.
4. *High frequency dynamic testing of rubbers and rubber to metal devices*. **Cambiaghi, Danilo, y otros, y otros**. 3, s.l. : Journal of testing and evaluation, 2006, Vol. 34.
5. *Dynamic characterization of engine mount at different orientation using sine swept frequency test*. **Ripin, Zaidi Mohd y Ean, Ooi Lu**. Bali : Regional Conference on Mechanical and Aerospace Technology, 2010.
6. **Cengel, Yunus A. y Boles, Michael A**. *Termodinámica*. 2. s.l. : Mc Graw Hill. pág. 323. Vol. 1.
7. *Engineering viscoelasticity*. **Roylance, David**. Cambridge : Massachusetts Institute of Technology, 2001, Vol. Department of Materials Science and Engineering.
8. **Askeland, Donald R**. *Ciencia e ingeniería de los materiales*. s.l. : Thomson Editores.
9. *Thermo mechanical analyses of dynamically loaded rubber cylinders*. **Johnson, Arthur R. y Chen, Tzi-Kang**. 36, Hampton : NASA Langley research center, Vol. Army Research Laboratory.
10. *Viscoelastic Damping*. **Macioce, Paul**. Livonia, Michigan : s.n.
11. *On dynamic properties of rubber isolators*. **Sjöberg, Mattias**. Estocolmo : s.n., 2002.
12. **Ashby, Mike**. *CES Edupack2012*.
13. **Pilkey, Walter D y Pilkey, Deborah F**. *Peterson's Stress Concentration Factors*. [aut. libro] Carta 3.10.
14. **Stewart, James**. *Cálculo, Conceptos y contextos*. s.l. : International Thomson Editores. Sección 11, Derivadas parciales.
15. *Simulation of the time, temperature and stress dependent elastic, viscous and retarded creep behavior*. **Ehrenstein, G. W. y Dallner, C**. 3603, Erlangen : University of Erlangen-Nuremberg, 2003, Vols. Institute of Polymer Technology,.

16. *Coupled Thermo-mechanical analyses of dynamically loaded rubber cylinders.* **Johnson, Arthur R. y Chen, Tzi-Kang.** Hampton : NASA Langley Research Center, 2000, Vols. Army Research Laboratory,.
17. **Popov, Egor P.** *Mecánica de sólidos.* s.l. : Pearson Educational. 2a Edición.
18. **Hibbeler, C R.** *Mecánica de materiales.* s.l. : Pearson Education. 3a edición.
19. **Thompson.** *Teoría de vibraciones.*

13 Anexo.

13.1 Tablas de MSL del perno, deflexión del perno potencia requerida del motor.

Márgenes de Seguridad del perno de transmisión²⁴

m	f	k = 6N/mm																				k = 40N/mm																			
		$\xi = .25$										$\xi = .65$										$\xi = .25$										$\xi = .65$									
		10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
d = 1mm	1	18.514	17.266	9.999	5.738	4.338	3.395	2.654	2.064	1.614	1.216	18.311	15.898	12.131	8.568	6.079	4.427	3.298	2.473	1.869	1.407	18.022	15.678	13.477	11.751	10.560	9.747	8.063	4.870	2.416	1.185	18.019	15.645	13.327	11.280	9.466	7.762	6.121	4.629	3.402	2.461
	2	13.570	7.723	5.817	4.851	3.923	3.122	2.462	1.926	1.519	1.142	14.177	11.237	8.363	6.272	4.751	3.635	2.798	2.149	1.654	1.252	15.305	14.541	12.335	8.645	4.843	2.330	1.204	0.809	0.642	0.493	15.292	14.617	12.871	10.204	7.446	5.243	3.695	2.643	1.932	1.402
	3	8.797	5.832	5.208	4.393	3.580	2.873	2.284	1.795	1.413	1.070	10.194	8.035	6.341	5.016	3.959	3.113	2.457	1.904	1.496	1.126	11.007	9.110	6.269	3.390	1.580	0.962	0.807	0.708	0.595	0.471	11.043	9.412	7.315	5.341	3.844	2.808	2.113	1.584	1.200	0.899
	4	6.221	5.234	4.703	3.983	3.274	2.648	2.122	1.674	1.318	1.002	7.896	6.337	5.178	4.217	3.400	2.721	2.164	1.702	1.336	1.015	8.456	6.306	3.656	1.648	0.946	0.844	0.793	0.689	0.572	0.443	8.511	6.723	4.870	3.455	2.504	1.880	1.453	1.110	0.847	0.631
	5	4.996	4.754	4.257	3.624	3.002	2.446	1.975	1.563	1.230	0.939	6.438	5.270	4.394	3.635	2.972	2.407	1.930	1.531	1.200	0.917	6.766	4.597	2.265	1.026	0.846	0.832	0.767	0.660	0.539	0.411	6.841	5.113	3.558	2.497	1.837	1.400	1.089	0.833	0.629	0.455
d = 2mm	1	16.758	14.795	6.372	2.990	2.044	1.446	0.995	0.648	0.391	0.168	16.425	12.854	8.422	5.140	3.231	2.102	1.386	0.888	0.536	0.274	15.960	12.561	9.873	8.035	6.884	6.147	4.731	2.395	0.854	0.151	15.955	12.518	9.705	7.570	5.901	4.492	3.261	2.235	1.450	0.881
	2	12.125	4.945	3.305	2.562	1.897	1.358	0.935	0.606	0.364	0.146	13.144	8.769	5.556	3.674	2.488	1.699	1.148	0.742	0.444	0.209	15.238	13.790	10.247	5.836	2.556	0.853	0.181	-0.043	-0.135	-0.218	15.211	13.927	11.032	7.515	4.691	2.856	1.740	1.050	0.610	0.296
	3	6.802	3.613	3.062	2.391	1.772	1.271	0.876	0.563	0.329	0.123	8.738	5.878	4.089	2.899	2.055	1.438	0.989	0.632	0.379	0.156	10.038	7.207	4.020	1.634	0.430	0.060	-0.030	-0.087	-0.151	-0.221	10.098	7.613	5.077	3.177	1.968	1.226	0.765	0.433	0.200	0.023
	4	4.373	3.349	2.849	2.221	1.652	1.186	0.819	0.522	0.295	0.101	6.465	4.503	3.295	2.419	1.749	1.239	0.847	0.540	0.307	0.109	7.289	4.468	1.952	0.505	0.067	0.006	-0.024	-0.085	-0.154	-0.228	7.374	4.949	3.002	1.793	1.084	0.657	0.380	0.167	0.008	-0.119
	5	3.390	3.135	2.641	2.060	1.538	1.107	0.766	0.482	0.264	0.080	5.130	3.690	2.773	2.070	1.514	1.078	0.734	0.461	0.245	0.067	5.590	2.975	0.973	0.135	0.023	0.014	-0.025	-0.090	-0.162	-0.238	5.698	3.517	2.003	1.145	0.669	0.375	0.174	0.015	-0.109	-0.212
d = 3mm	1	15.291	12.912	4.544	1.834	1.129	0.694	0.372	0.128	-0.053	-0.207	14.874	10.740	6.347	3.521	2.017	1.172	0.651	0.296	0.049	-0.134	14.301	10.426	7.706	5.997	4.982	4.354	3.190	1.388	0.272	-0.219	14.295	10.379	7.544	5.581	4.147	2.999	2.040	1.269	0.697	0.291
	2	10.940	3.509	2.145	1.560	1.052	0.651	0.343	0.107	-0.065	-0.218	12.243	7.130	4.044	2.444	1.503	0.904	0.498	0.204	-0.008	-0.173	15.170	13.107	8.725	4.294	1.556	0.284	-0.193	-0.349	-0.413	-0.470	15.131	13.296	9.623	5.867	3.291	1.790	0.935	0.426	0.110	-0.113
	3	5.482	2.482	2.019	1.473	0.988	0.606	0.313	0.085	-0.083	-0.229	7.617	4.553	2.895	1.884	1.207	0.732	0.397	0.135	-0.048	-0.206	9.214	5.906	2.834	0.881	-0.011	-0.274	-0.337	-0.377	-0.422	-0.470	9.291	6.343	3.788	2.114	1.139	0.573	0.232	-0.009	-0.175	-0.300
	4	3.278	2.339	1.904	1.379	0.923	0.561	0.283	0.064	-0.101	-0.241	5.431	3.403	2.291	1.543	0.999	0.601	0.305	0.077	-0.093	-0.235	6.378	3.369	1.162	0.051	-0.265	-0.308	-0.329	-0.373	-0.421	-0.473	6.480	3.837	2.036	1.034	0.483	0.163	-0.040	-0.194	-0.307	-0.397
	5	2.463	2.227	1.785	1.287	0.858	0.517	0.255	0.043	-0.118	-0.251	4.213	2.746	1.901	1.295	0.839	0.495	0.231	0.027	-0.132	-0.261	4.722	2.082	0.414	-0.212	-0.292	-0.299	-0.327	-0.373	-0.424	-0.478	4.846	2.582	1.239	0.547	0.182	-0.037	-0.183	-0.298	-0.387	-0.459
d = 4mm	1	14.049	11.430	3.442	1.197	0.637	0.296	0.046	-0.143	-0.282	-0.400	13.577	9.185	5.021	2.577	1.344	0.671	0.262	-0.013	-0.204	-0.344	12.938	8.871	6.259	4.709	3.819	3.280	2.303	0.842	-0.032	-0.409	12.931	8.825	6.110	4.342	3.104	2.145	1.363	0.748	0.298	-0.017
	2	9.952	2.632	1.478	0.998	0.589	0.270	0.028	-0.155	-0.288	-0.406	11.449	5.961	3.098	1.726	0.952	0.471	0.149	-0.080	-0.245	-0.372	15.104	12.485	7.565	3.320	0.995	-0.018	-0.387	-0.507	-0.556	-0.599	15.052	12.716	8.510	4.754	2.444	1.186	0.495	0.093	-0.153	-0.325
	3	4.544	1.797	1.402	0.947	0.549	0.242	0.010	-0.169	-0.300	-0.413	6.727	3.656	2.155	1.288	0.728	0.343	0.076	-0.130	-0.273	-0.395	8.504	4.962	2.102	0.463	-0.244	-0.448	-0.496	-0.527	-0.562	-0.599	8.594	5.400	2.951	1.482	0.672	0.216	-0.054	-0.242	-0.371	-0.468
	4	2.554	1.710	1.332	0.886	0.508	0.214	-0.009	-0.183	-0.312	-0.420	4.648	2.669	1.668	1.024	0.571	0.246	0.008	-0.172	-0.305	-0.416	5.648	2.638	0.705	-0.192	-0.439	-0.473	-0.489	-0.523	-0.560	-0.600	5.758	3.076	1.446	0.599	0.151	-0.104	-0.264	-0.384	-0.472	-0.541
	5	1.859	1.646	1.254	0.825	0.466	0.186	-0.026	-0.196	-0.323	-0.427	3.535	2.118	1.357	0.832	0.450	0.167	-0.046	-0.208	-0.334	-0.435	4.057	1.516	0.101	-0.396	-0.459	-0.464	-0.486	-0.522	-0.562	-0.603	4.186	1.967	0.785	0.210	-0.085	-0.259	-0.374	-0.464	-0.532	-0.589
d = 5mm	1	12.982	10.234	2.706	0.794	0.330	0.050	-0.155	-0.309	-0.421	-0.517	12.476	7.994	4.100	1.960	0.917	0.357	0.022	-0.203	-0.358	-0.472	11.798	7.689	5.225	3.821	3.035	2.565	1.725	0.499	-0.218	-0.525	11.790	7.645	5.087	3.495	2.413	1.591	0.933	0.421	0.051	-0.206
	2	9.115	2.041	1.044	0.639	0.296	0.032	-0.167	-0.317	-0.426	-0.522	10.745	5.087	2.451	1.256	0.600	0.198	-0.067	-0.256	-0.390	-0.494	15.038	11.916	6.653	2.648	0.636	-0.205	-0.506	-0.603	-0.643	-0.678	14.973	12.181	7.608	3.951	1.876	0.796	0.218	-0.114	-0.316	-0.456
	3	3.843	1.337	0.994	0.605	0.269	0.013	-0.180	-0.327	-0.434	-0.527	6.004	3.008	1.651	0.896	0.420	0.097	-0.125	-0.295	-0.412	-0.512	7.886	4.244	1.604	0.197	-0.388	-0.555	-0.594	-0.619	-0.647	-0.677	7.985	4.672	2.362	1.064	0.373	-0.009	-0.232	-0.387	-0.492	-0.571
	4	2.040	1.280	0.948	0.563	0.240	-0.007	-0.192	-0.336	-0.443	-0.531	4.036	2.145	1.243	0.681	0.294	0.020	-0.178	-0.327	-0.437	-0.528	5.049	2.116	0.407	-0.344	-0.547	-0.574	-0.588	-0.615	-0.645	-0.677	5.164	2.522	1.048	0.318	-0.060	-0.271	-0.403	-0.502	-0.573	-0.630
	5	1.434	1.242	0.894	0.519	0.210	-0.027	-0.205	-0.346	-0.450	-0.536	3.013	1.671	0.984	0.525	0.196	-0.043	-0.221	-0.356	-0.459	-0.542	3.530	1.126	-0.098	-0.511	-0.562	-0.566	-0.584	-0.614	-0.646	-0.680	3.660	1.533	0.484	-0.007	-0.253	-0.398	-0.492	-0.566	-0.622	-0.668

Deflexión del perno de transmisión²⁵

m	f	k = 6N/mm																				k = 40N/mm																			
		$\xi = .25$										$\xi = .65$										$\xi = .25$										$\xi = .65$									
		10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
d = 1mm	1	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.04	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03
	2	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.06											

Potencia requerida del motor²⁶

m	f	k = 6N/mm										k = 40N/mm																													
		$\xi = .25$					$\xi = .65$					$\xi = .25$					$\xi = .65$																								
		10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55										
d = 1mm	1	0.002	0.003	0.005	0.008	0.011	0.015	0.020	0.027	0.035	0.045	0.002	0.003	0.004	0.006	0.009	0.013	0.018	0.025	0.033	0.043	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.010	0.020	0.042	0.072	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.011	0.017	0.024	0.035
	2	0.002	0.005	0.007	0.009	0.012	0.016	0.021	0.028	0.036	0.046	0.002	0.004	0.006	0.008	0.011	0.016	0.021	0.028	0.037	0.048	0.002	0.004	0.005	0.007	0.012	0.028	0.054	0.069	0.077	0.085	0.002	0.004	0.005	0.006	0.009	0.014	0.023	0.034	0.047	0.062
	3	0.003	0.006	0.007	0.010	0.013	0.017	0.022	0.029	0.038	0.048	0.003	0.005	0.007	0.010	0.014	0.018	0.024	0.032	0.041	0.052	0.003	0.005	0.007	0.012	0.032	0.052	0.059	0.064	0.071	0.081	0.003	0.005	0.006	0.009	0.015	0.024	0.036	0.049	0.064	0.081
	4	0.004	0.006	0.008	0.011	0.014	0.018	0.024	0.031	0.039	0.049	0.004	0.006	0.008	0.012	0.016	0.021	0.027	0.035	0.044	0.056	0.004	0.006	0.009	0.023	0.044	0.050	0.054	0.061	0.070	0.081	0.004	0.005	0.008	0.013	0.022	0.033	0.046	0.060	0.076	0.095
	5	0.005	0.007	0.009	0.012	0.016	0.020	0.026	0.032	0.041	0.051	0.004	0.007	0.010	0.013	0.018	0.023	0.030	0.038	0.048	0.059	0.004	0.007	0.013	0.034	0.044	0.047	0.052	0.060	0.070	0.082	0.004	0.007	0.010	0.017	0.027	0.039	0.054	0.069	0.087	0.106
d = 2mm	1	0.004	0.006	0.014	0.028	0.039	0.054	0.075	0.102	0.136	0.178	0.004	0.006	0.009	0.017	0.029	0.046	0.067	0.095	0.129	0.170	0.004	0.006	0.008	0.011	0.015	0.020	0.034	0.076	0.164	0.285	0.004	0.006	0.008	0.011	0.016	0.024	0.038	0.060	0.093	0.136
	2	0.005	0.013	0.021	0.028	0.039	0.055	0.077	0.104	0.138	0.180	0.005	0.008	0.015	0.025	0.038	0.056	0.079	0.108	0.143	0.185	0.005	0.007	0.010	0.016	0.039	0.110	0.214	0.274	0.305	0.338	0.005	0.007	0.010	0.015	0.027	0.050	0.085	0.129	0.182	0.243
	3	0.007	0.016	0.021	0.029	0.041	0.057	0.079	0.107	0.141	0.183	0.006	0.011	0.020	0.031	0.045	0.064	0.088	0.118	0.155	0.199	0.006	0.009	0.016	0.042	0.122	0.205	0.231	0.250	0.280	0.320	0.006	0.009	0.015	0.027	0.053	0.090	0.137	0.190	0.250	0.317
	4	0.009	0.016	0.022	0.031	0.043	0.060	0.082	0.109	0.144	0.186	0.008	0.014	0.023	0.036	0.051	0.072	0.097	0.128	0.166	0.212	0.007	0.012	0.027	0.088	0.174	0.197	0.211	0.236	0.272	0.317	0.007	0.012	0.021	0.043	0.078	0.123	0.176	0.235	0.300	0.372
	5	0.012	0.017	0.023	0.033	0.045	0.062	0.084	0.112	0.147	0.189	0.009	0.017	0.027	0.040	0.057	0.078	0.105	0.138	0.177	0.224	0.009	0.015	0.044	0.132	0.171	0.182	0.202	0.232	0.271	0.320	0.008	0.015	0.029	0.058	0.100	0.150	0.207	0.270	0.340	0.418
d = 3mm	1	0.006	0.009	0.028	0.061	0.086	0.120	0.168	0.229	0.305	0.398	0.006	0.009	0.017	0.035	0.063	0.100	0.149	0.211	0.288	0.381	0.006	0.009	0.014	0.020	0.027	0.039	0.072	0.168	0.368	0.640	0.006	0.009	0.014	0.021	0.032	0.050	0.082	0.133	0.206	0.305
	2	0.007	0.027	0.043	0.059	0.085	0.121	0.170	0.232	0.309	0.403	0.007	0.014	0.030	0.053	0.083	0.123	0.175	0.239	0.319	0.415	0.007	0.011	0.015	0.029	0.085	0.246	0.480	0.616	0.685	0.758	0.007	0.011	0.015	0.027	0.055	0.109	0.188	0.289	0.409	0.545
	3	0.011	0.032	0.042	0.060	0.087	0.124	0.173	0.236	0.313	0.408	0.010	0.021	0.039	0.065	0.098	0.141	0.195	0.263	0.345	0.444	0.009	0.015	0.030	0.090	0.274	0.459	0.518	0.562	0.627	0.718	0.009	0.015	0.026	0.056	0.115	0.200	0.305	0.426	0.562	0.712
	4	0.017	0.031	0.043	0.062	0.090	0.128	0.177	0.240	0.318	0.413	0.012	0.026	0.047	0.074	0.110	0.156	0.213	0.284	0.370	0.472	0.011	0.020	0.055	0.196	0.390	0.441	0.474	0.529	0.609	0.711	0.011	0.019	0.041	0.091	0.172	0.275	0.393	0.526	0.673	0.836
	5	0.022	0.031	0.044	0.065	0.093	0.132	0.182	0.245	0.324	0.419	0.015	0.031	0.053	0.083	0.121	0.170	0.230	0.304	0.392	0.498	0.013	0.027	0.094	0.294	0.384	0.407	0.451	0.518	0.607	0.715	0.013	0.025	0.058	0.125	0.220	0.334	0.462	0.604	0.762	0.937
d = 4mm	1	0.007	0.012	0.049	0.108	0.151	0.213	0.297	0.406	0.542	0.708	0.007	0.013	0.028	0.061	0.110	0.177	0.264	0.375	0.511	0.677	0.008	0.013	0.020	0.031	0.045	0.066	0.125	0.297	0.654	1.137	0.008	0.013	0.021	0.033	0.053	0.087	0.143	0.234	0.366	0.541
	2	0.010	0.046	0.075	0.103	0.148	0.213	0.300	0.410	0.547	0.714	0.010	0.022	0.050	0.091	0.146	0.217	0.309	0.424	0.565	0.736	0.010	0.014	0.022	0.048	0.150	0.436	0.853	1.094	1.216	1.348	0.010	0.015	0.022	0.042	0.095	0.191	0.332	0.512	0.725	0.968
	3	0.016	0.055	0.071	0.103	0.151	0.217	0.305	0.417	0.555	0.723	0.013	0.033	0.067	0.112	0.171	0.247	0.344	0.465	0.612	0.788	0.012	0.021	0.048	0.159	0.486	0.816	0.921	0.998	1.114	1.275	0.012	0.021	0.042	0.097	0.201	0.353	0.541	0.756	0.997	1.265
	4	0.028	0.052	0.072	0.106	0.155	0.223	0.311	0.423	0.563	0.731	0.017	0.043	0.080	0.128	0.192	0.274	0.376	0.502	0.654	0.836	0.015	0.031	0.094	0.348	0.692	0.782	0.841	0.940	1.081	1.262	0.015	0.029	0.069	0.159	0.303	0.486	0.698	0.933	1.194	1.484
	5	0.037	0.051	0.073	0.109	0.160	0.228	0.318	0.431	0.571	0.740	0.022	0.050	0.090	0.143	0.211	0.297	0.405	0.536	0.694	0.881	0.018	0.044	0.165	0.522	0.681	0.722	0.800	0.919	1.076	1.269	0.018	0.039	0.099	0.219	0.390	0.592	0.819	1.072	1.352	1.665
d = 5mm	1	0.009	0.016	0.075	0.167	0.235	0.331	0.463	0.633	0.846	1.105	0.009	0.018	0.042	0.093	0.171	0.276	0.412	0.585	0.798	1.058	0.010	0.017	0.029	0.046	0.067	0.100	0.194	0.464	1.021	1.777	0.010	0.017	0.029	0.049	0.081	0.133	0.222	0.364	0.570	0.845
	2	0.013	0.071	0.116	0.159	0.230	0.332	0.467	0.640	0.854	1.115	0.013	0.032	0.076	0.140	0.226	0.338	0.481	0.661	0.882	1.149	0.012	0.018	0.029	0.071	0.233	0.681	1.332	1.710	1.900	2.105	0.012	0.018	0.029	0.063	0.146	0.297	0.518	0.800	1.133	1.512
	3	0.023	0.085	0.109	0.158	0.234	0.338	0.475	0.649	0.865	1.128	0.018	0.049	0.102	0.173	0.265	0.385	0.536	0.724	0.954	1.230	0.015	0.028	0.072	0.246	0.759	1.274	1.438	1.558	1.740	1.991	0.015	0.027	0.061	0.149	0.313	0.551	0.844	1.181	1.557	1.976
	4	0.041	0.079	0.109	0.162	0.239	0.345	0.483	0.659	0.877	1.140	0.024	0.064	0.122	0.198	0.298	0.425	0.585	0.782	1.020	1.304	0.019	0.044	0.145	0.542	1.080	1.222	1.313	1.467	1.688	1.970	0.019	0.041	0.104	0.246	0.472	0.759	1.089	1.457	1.865	2.318
	5	0.056	0.077	0.111	0.166	0.245	0.352	0.492	0.669	0.888	1.153	0.030	0.075	0.138	0.220	0.326	0.461	0.629	0.835	1.082	1.375	0.024	0.064	0.256	0.815	1.063	1.128	1.248	1.434	1.680	1.982	0.023	0.056	0.152	0.340	0.607	0.924	1.279	1.673	2.112	2.600

²⁶ La potencia requerida se tabuló en hp. Los valores en color rojo violan los límites de funcionamiento ya que indican que la potencia requerida es mayor a la nominal del motor de 1.5 hp. Las unidades son kg para la masa y Hz para la frecuencia en todas las tablas

14 Índice alfabético

A

actuadores servo hidráulicos, 7, 28
 Amortiguamiento viscoelástico, 22
 Amortiguamiento viscoso, 9, 22
 Análisis dinámico, 47
aproximación lineal, 64, 68, 69
 armónico fundamental: señal fundamental, 73

C

carga ficticia, 60
 carga redundante, 56
 comportamiento cauchoso, 18
 comportamiento viscoelástico, 18
 criterio de energía de distorsión, 64

E

Efectos Mullin’s y Payne, 24
 el módulo del yugo, 31
 Elemento disipador, 23
 Elemento restaurativo, 23
 esfuerzo de von Mises, 64
 esfuerzo de Von mises, 64
 esfuerzos principales, 64
 especificaciones, 27
 espectro, 75
 expresión de Arrhenius, 18

F

factor de amortiguamiento viscoso, 44

factor de concentración de esfuerzos, 54
 factor de pérdida, 9, 10, 21, 25; loss factor, 24
 fatiga de bajo ciclaje: low cycle fatigue, 65
 fatiga de bajo ciclo, 65
 FFT, 29, 75
 frecuencia natural del perno, 56
 fuerza transmitida, 46, 48
 Fuerzas en los rieles, 49
 fuerzas transmitidas por el resorte y por el amortiguador, 45

K

Kelvin-Voigt, 43
 Kevin-Voigt, 21, 43

M

margen de seguridad, 40, 64, 65, 82
 margen de seguridad límite (MSL), 65
 método de superposición, 56, 59
 método indirecto, 42
 metodología de Pugh, 29
Metodología de Pugh, 29
 Modelo de Maxwell, 21
 Modelo de Wiechert, 22
 Modelo lineal estándar, 22
 módulo de almacenamiento, 21
 módulo de pérdida, 21
 módulo de potencia, 31, 56
 módulo de restitución, 21
 módulo dinámico complejo, 20

P

par, 32, 49
 perno de transmisión, 32
 potencia, 49, 69, 82, 86

R

relajación, 19, 20
 rigidez de transferencia dinámica, 12
 RMS, 49
rubbery, 25

T

temperatura vítrea, 18
 tensor de esfuerzos, 64
 teorema de Castigliano, 60
termofluencia, 19, 20
 Transformada de Fourier, 11, 23, 73
 transmisibilidad del sistema, 45

V

vibración forzada no resonante, 11, 24, 27
 vibración forzada resonante, 10
 viga añadida, 57
 viga primaria, 56

Y

Yugo escocés, 29, 30
 Yugo Escocés, 32