



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

Ubicación de Dispositivos FACTS para Sistemas  
Eléctricos de Potencia usando Análisis Modal y  
Descomposición en Valores Singulares

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Maestro en Ingeniería  
Ingeniería Eléctrica - Control**

PRESENTA:

**Ing. José Alejandro Hernández Morales**

TUTOR:

Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

CO-TUTOR:

Dra. María Cristina Verde Rodarte

2011



## Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

### JURADO ASIGNADO:

**Presidente:** Dr. Gerardo René Espinosa Pérez  
**Secretario:** Dr. Claudio Ruben Fuerte Esquivel  
**Vocal:** Dr. Paul Rolando Maya Ortiz  
**1er Suplente:** Dra. María Cristina Verde Rodarte  
**2do Suplente:** Dr. Luis A. Alvarez Icaza Longoria

### Lugar donde se realizó la tesis:

Facultad de Ingeniería  
*México, D.F.*

**TUTOR DE TESIS:**  
DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ

---

FIRMA

*A mis padres Ignacia y Alejandro, que me han enseñado a ser fuerte y a no dejar de luchar nunca, ustedes me mostraron que no hay imposibles, los quiero mucho y seguiré siempre su ejemplo. A mis hermanas, Anabel y Anai, por contar siempre con su apoyo y alegrarme siempre con sus risas. Ustedes han sido mi razón y mi fuerza para seguir adelante, sigamos siempre juntos.*

*Al resto de mi familia, abuela, tíos y primos, gracias por su apoyo y buenos consejos, a todos les aprecio mucho, esto también es de ustedes.*

*A ti padrino, perderte ha sido el dolor más grande de mi vida, nunca estuve preparado para ese momento y aun es difícil aceptarlo, te extraño y siempre estarás en mi corazón.*

*antes de que nos olviden...*

## Agradecimientos

- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado para la realización de la maestría.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México y el posgrado por la oportunidad de albergarme en sus aulas, han sido los mejores días de mi vida.
- Al colegio de control, por la formación académica recibida.
- A mis tutores Dr. Paul Maya y Dra. Cristina Verde por su apoyo en la realización de este trabajo.
- A todos mis compañeros del posgrado.

January 27, 2011

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Motivación</b>	<b>3</b>
<b>Antecedentes</b>	<b>5</b>
<b>Formulación del problema</b>	<b>7</b>
<b>Contribución</b>	<b>8</b>
<b>Organización de la Tesis</b>	<b>9</b>
<b>1 Estabilidad en SEP</b>	<b>10</b>
1.1 Estabilidad del Ángulo de Rotor . . . . .	11
1.2 Estabilidad de Voltaje . . . . .	13
1.3 Formulación Matemática de Estabilidad . . . . .	14
<b>2 Modelo del Sistema Eléctrico de Potencia Multi-Máquina</b>	<b>18</b>
2.1 Ecuaciones Dinámicas de la Máquina Síncrona . . . . .	19
2.2 Ecuaciones algebraicas del estator . . . . .	20

2.3	Ecuaciones de la Red . . . . .	21
2.4	Compensador Estático de VAR's . . . . .	22
2.5	Linealización del Sistema Eléctrico de Potencia Multi-Máquina . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Análisis de Sistemas Multivariables</b>	<b>27</b>
3.1	Análisis Modal . . . . .	28
3.1.1	Controlabilidad y Observabilidad Modal . . . . .	30
3.1.2	Residuos . . . . .	31
3.1.3	Factores de Participación . . . . .	32
3.1.4	Parámetros del Dispositivo Compensador . . . . .	33
3.1.4.1	Etapa de Compensación de Atraso . . . . .	34
3.1.4.2	La ganancia $K$ . . . . .	38
3.2	Descomposición en Valores Singulares . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Caso de Estudio</b>	<b>43</b>
4.1	Resultados del análisis modal . . . . .	46
4.2	Descomposición en Valores Singulares . . . . .	51
4.3	Simulaciones . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>68</b>
5.1	Trabajo Futuro . . . . .	69
<b>A</b>	<b>Modelo Linealizado</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Descomposición en valores singulares</b>	<b>81</b>

# Índice de figuras

1	Respuesta de un sistema de cuatro máquinas . . . . .	2
2	Dispositivos FACTS . . . . .	4
1.1	Circuito radial y la relaciones de voltaje en las terminales de la carga, potencia y corriente en función de la carga demandada . . . . .	13
2.1	Circuito de máquina síncrona de dos ejes . . . . .	20
2.2	Configuración básica del Compensador Estático de Var's . . . . .	24
2.3	Modelo dinámico de señal pequeña del SVC . . . . .	24
3.1	Lazo de conexión del SVC . . . . .	34
3.2	Configuración de polo y cero de un compensador de atraso . . . . .	34
3.3	Diagrama polar del compensador de atraso . . . . .	35
3.4	Diagrama de Bode del compensador de atraso . . . . .	36
3.5	Desplazamiento del valor propio critico por el efecto de compensación del SVC . . . . .	37
4.1	Diagrama unifilar del sistema de 3 máquinas y 9 buses . . . . .	43
4.2	Lugar geométrico del valor propio crítico . . . . .	49
4.3	Diagrama de Bode del SEP con el SVC . . . . .	50



4.4	Variación de Potencia en el Bus 5 . . . . .	53
4.5	Ángulo de rotor de Máquina Síncrona 2 . . . . .	54
4.6	Ángulo de rotor de Máquina Síncrona 3 . . . . .	55
4.7	Variación angular de Máquina Síncrona 2 . . . . .	56
4.8	Variación angular de Máquina Síncrona 3 . . . . .	57
4.9	Variación de susceptancia del SVC . . . . .	58
4.10	Variación de voltaje en el bus 1 . . . . .	58
4.11	Variación de voltaje en el bus 2 . . . . .	59
4.12	Variación de voltaje en el bus 3 . . . . .	59
4.13	Variación de voltaje en el bus 4 . . . . .	60
4.14	Variación de voltaje en el bus 5 . . . . .	60
4.15	Variación de voltaje en el bus 6 . . . . .	61
4.16	Variación de voltaje en el bus 7 . . . . .	61
4.17	Variación de voltaje en el bus 8 . . . . .	62
4.18	Variación de voltaje en el bus 9 . . . . .	62
4.19	Variación de Potencia en el buses PQ . . . . .	63
4.20	Ángulo de rotor de Máquina Síncrona 2 y 3, SVC en bus 2 . . . . .	64
4.21	Variación de velocidad angular de Máquina Síncrona 2 y 3, SVC en bus 2 . . . . .	65
4.22	Variación de susceptancia del SVC, SVC en bus 2 . . . . .	65
4.23	Variación de voltaje en el bus 1, 2, 3 y 4, SVC en bus 2 . . . . .	66
4.24	Variación de voltaje en el bus 5, 6, 7 y 8, SVC en bus 2 . . . . .	67
4.25	Variación de voltaje en el bus 9, SVC en bus 2 . . . . .	67

# Índice de tablas

4.1	Parámetros de máquinas síncronas y sistema de excitación (p.u.) . . . . .	44
4.2	Datos del sistema de transmisión . . . . .	44
4.3	Solución de flujos de potencia (p.u.) . . . . .	45
4.4	Valores de equilibrio (p.u.) . . . . .	45
4.5	Valores propios . . . . .	46
4.6	Factores de participación asociados al modo crítico . . . . .	47
4.7	Residuos . . . . .	48
4.8	Parametros de SVC . . . . .	48
4.9	Valores Propios . . . . .	49
4.10	Direcciones sensitivas . . . . .	51
4.11	Parametros del SVC . . . . .	52

# Introducción

El propósito de un sistema eléctrico de potencia (SEP) es generar, transmitir y distribuir energía eléctrica de manera segura, fiable, eficiente y económica. Esto se logra cuando la generación tiene capacidad de suministrar la energía eléctrica con voltajes de bus y frecuencia eléctrica en los valores nominales y sin sobrecarga de los elementos del sistema.

Un SEP puede ser dividido en tres subsistemas: generación, transmisión y distribución; siendo:

- *Generación.* Consiste en transformar algún tipo de energía, e.g. química, mecánica o térmica, en energía eléctrica. Para la generación se recurre a máquinas síncronas en instalaciones denominadas centrales eléctricas y son clasificadas dependiendo de su fuente primaria de energía utilizada: hidroeléctricas, termoeléctricas, nucleoelectricas, de ciclo combinado, eólicas, entre otras.
- *Transmisión.* Abarcan al conjunto de elementos esenciales, tales como estaciones transformadoras elevadoras, líneas de transmisión, estaciones de maniobra y estaciones transformadoras reductoras, encargados de transmitir la energía eléctrica, desde las centrales eléctricas a los centros de consumo a través de distintas etapas de transformación de niveles de voltaje.
- *Distribución.* Es el conjunto de instalaciones de baja y media tensión encargadas de suministrar la energía eléctrica desde la subestación de distribución a los usuarios finales en niveles normalizados y en condiciones de seguridad.

En régimen estacionario, todas las unidades de generación del sistema se encuentran en sincronismo, es decir, mantienen ángulos de carga constante con frecuencia eléctrica nominal (60

Hz en México). Sin embargo una perturbación puede provocar que el sistema salga del régimen de estado estacionario. Si después de haberse presentado una perturbación no hay cambios en la potencia de la generación, la carga o en la configuración de la red, las máquinas síncronas deben retornar a su estado original. Si ocurre un desbalance entre la generación y la demanda por un cambio en la potencia de generación, la carga o en la configuración de la red, un nuevo estado de operación es alcanzado. En todo caso, todas las máquinas síncronas deben mantenerse en sincronismo. Es necesario señalar que un incremento apreciable en las velocidades angulares de las máquinas síncronas puede no necesariamente significar que se pierda el sincronismo. Efectivamente, el factor importante es la diferencia de ángulos entre las máquinas cuando el ángulo de rotor es medido respecto a una referencia rotatoria síncrona. Esto es ilustrado en la Figura 1 donde los ángulos de los rotores de un sistema de cuatro máquinas son trazados durante un periodo transitorio después de una perturbación.

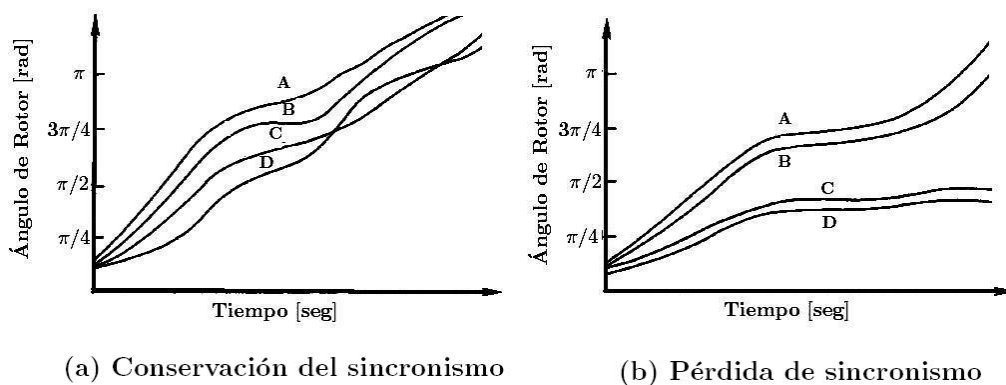


Figura 1: Respuesta de un sistema de cuatro máquinas

Con respecto a esta figura, en el caso (a) todos los ángulos de rotor incrementan más allá de  $\pi$  radianes, pero todas las diferencias entre los ángulos son pequeñas, por tanto el sistema mantiene el sincronismo. El caso (b) es evidente que las máquinas están separadas en dos grupos donde los ángulos de rotor continúan alejándose, este sistema no preserva el sincronismo.

El fenómeno de conservación del sincronismo de máquinas síncronas interconectadas es conocido como estabilidad de ángulo de rotor o estabilidad dinámica<sup>1</sup> y su principal problema de desempeño involucra el estudio de oscilaciones electromecánicas. Además de mantener el

<sup>1</sup>Las definiciones de estabilidad para SEP serán extendidas en el Capítulo 1.

sincronismo, otros aspectos que deben atenderse, es el de mantener la amplitud de voltaje constante en la frecuencia nominal en los buses del SEP. Si después de haberse presentado una perturbación, al menos una máquina síncrona pierde el sincronismo, se producen valores de amplitud de voltaje y frecuencia en las terminales de la máquina que difieren a los valores nominales. Sin embargo este problema también puede presentarse sin la pérdida de sincronismo, y está relacionado con ciertas características de la carga y la incapacidad del sistema, en particular el sistema de transmisión para satisfacer los niveles de voltaje requeridos y en la frecuencia nominal.

## Motivación

Si el SEP se mantiene estable después de haberse presentado una perturbación, las oscilaciones electromecánicas serán amortiguadas y el sistema alcanzará un estado de equilibrio. Una característica deseable que concierne a la estabilidad relativa del SEP es que el sistema cuente con suficiente amortiguamiento con el fin de reducir las oscilaciones electromecánicas. El amortiguamiento para estas oscilaciones electromecánicas es necesario para contrarrestar la aceleración y desaceleración oscilatoria de la(s) máquina(s) perturbada(s). Esto es, cuando el generador acelera, el ángulo incrementa ( $d\delta/dt > 0$ ), la potencia eléctrica demandada debe ser incrementada para compensar el exceso de energía mecánica de entrada. Consecuentemente, cuando el generador desacelera, el ángulo decrece ( $d\delta/dt < 0$ ), la potencia eléctrica demandada debe decrecer para balancear el déficit de potencia mecánica de entrada.

Los primeros problemas de oscilaciones electromecánicas en SEP fueron resueltos aprovechando los devanados de amortiguamiento de la máquina síncrona junto con el torque mecánico de entrada, aunque su capacidad de amortiguamiento es muy baja. El uso de un estabilizador del sistema de potencia (PSS, Power System Stabilizer) es un método efectivo para amortiguar oscilaciones locales, más no así ante oscilaciones de tipo inter-área<sup>2</sup>. Otros dispositivos implementados para amortiguar oscilaciones son los sistemas de transmisión flexible de corriente alterna (FACTS, Flexible Alternating Current Transmission System), por su habilidad para la regulación de variables y parámetros de líneas de transmisión.

El beneficio proporcionado por las capacidades de los dispositivos FACTS basados en

---

<sup>2</sup>Los tipos de oscilaciones electromecánicas en SEP se presentan en el Capítulo 1.

electrónica de potencia y equipos estáticos, es que pueden proporcionar regulación de uno o más parámetros del sistema de transmisión como impedancia serie, impedancia en derivación, corriente, voltaje, ángulo de fase y el amortiguamiento de oscilaciones electromecánicas en el SEP. En la Figura 2 se muestran algunos dispositivos FACTS: en (a) se muestra un compensador estático de volt-ampere reactivos (SVC, Static Var Compensator); en (b) se presenta un capacitor en serie en una subestación; en (c) un SVC con fuente de voltaje (STATCOM, STATic COMPensator); y (d) muestra un capacitor en serie controlado por tiristores (TCSC, Thyristor Controlled Series Compensation) en nivel de transmisión.

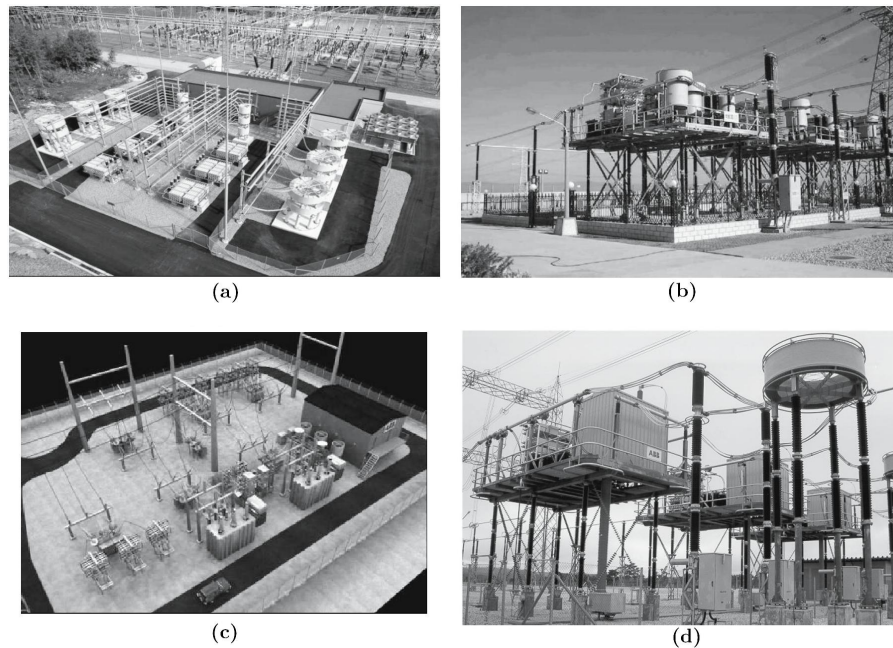


Figura 2: Dispositivos FACTS

El capital invertido y los costos de operación por los dispositivos FACTS pueden ser considerables, y aunque puedan ser compensados con los beneficios proporcionados por estos, surgen cuestiones muy importantes en el uso de estos dispositivos, como lo son la ubicación y las estrategias de control necesarias para su utilización. Estas son cuestiones clave ya que con una mala ubicación o sintonización de estos dispositivos podrían ser desaprovechados o incluso interactuar negativamente con las oscilaciones u otros fenómenos presentes en el SEP.

## Antecedentes

En los estudios hasta ahora realizados para el análisis de estabilidad de SEP se habla de diferentes tipos de estabilidad. El surgimiento de estas definiciones se da por la necesidad de identificar las causas que provocan inestabilidad en el SEP. La estabilidad de voltaje, frecuencia y ángulo de rotor encontradas en la literatura, son las definiciones y clasificación de estabilidad para los SEP [2][3], sin embargo estas definiciones de estabilidad son cualitativas y carecen de teoría matemática de estabilidad de sistemas dinámicos. En [3] se reportan definiciones y conceptos de estabilidad para SEP con argumentos matemáticos y de teoría de control, se presentan definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov, estabilidad entrada-salida y la aproximación por linealización.

En la literatura existen muchas formas de modelar los SEP, sobre todo las máquinas síncronas más que cualquier otro dispositivo. Desafortunadamente, esta vasta cantidad de material a veces hace el problema más complejo o puede crear confusión. Es por eso que se debe tener claro el objetivo del análisis, para obtener una representación matemática adecuada del SEP incluyendo los dispositivos FACTS.

En el contexto de sistemas multi-máquina en [2] se ha usado la representación de una máquina conectada a un bus infinito (SMIB, Single Machine Infinite Bus), y el sistema multi-máquina es representado por varias SMIB interconectadas por la matriz de impedancia de bus ( $Z_{BUS}$ ) que representa las características de impedancia del SEP, siendo los elementos de la diagonal de la  $Z_{BUS}$  las impedancias de Thevenin de cada bus y los elementos fuera de la diagonal son las impedancias mutuas entre los buses del SEP. Con este tipo de representación es posible hacer un análisis de estabilidad del SEP alrededor de un punto de equilibrio, sin embargo, se pierden información del sistema de transmisión como la potencia activa y reactiva en los buses o líneas de transmisión, esto porque las ecuaciones de red son obtenidas mediante un balance de corriente, por lo cual el modelo no es el más adecuado para analizar el efecto de compensación de oscilaciones electromecánicas proporcionado por los dispositivos FACTS.

Una representación suficiente para el análisis de SEP de varias máquinas síncronas con su respectivo control de excitación, red eléctrica, y la adición de dispositivos FACTS es reportada en [1], [19] y [20]. Aquí un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales no lineales forma la representación matemática del sistema multi-máquina, siendo el conjunto de ecuaciones diferenciales

las que representan a las máquinas síncronas y el conjunto de ecuaciones algebraicas las que representan la red eléctrica mediante un balance de potencia. Esta representación matemática es conveniente para realizar el análisis dinámico, analizar el amortiguamiento de oscilaciones electromecánicas y la regulación de parámetros en la red mediante los dispositivos FACTS.

Con respecto al modelado de los dispositivos FACTS, hay reportes de modelos dinámicos y el cálculo de los parámetros de los dispositivos en [12] y [14], sin embargo la estructura de estos modelos es la misma para todos los dispositivos FACTS y también para el PSS. En [19] y [20] se describen modelado y simulación de SEP con FACTS. En [15] se hace una descripción más detallada de modelos y componentes del dispositivo compensador SVC.

A partir de un modelo de estado estacionario, el análisis modal ha sido usado para determinar condiciones de operación para las cuales se tendrán bajos niveles de voltaje en la red a partir del análisis de "valores propios" obtenidos de una matriz Jacobiana reducida la cual solo relaciona la amplitud de voltaje con la potencia reactiva. Así como también poder determinar elementos de la red (buses, líneas de transmisión y máquinas síncronas) que presentan condiciones de operación crítica a partir de los vectores propios [13], y en [17] a partir de este análisis, se hace la aplicación coordinada de FACTS para mejorar los márgenes de transferencia de potencia en la red ubicando FACTS en esos elementos críticos.

De igual manera en [22], a partir de un modelo de estado estacionario, se hace la descomposición en valores singulares (SVD, Singular Value Decomposition) de la matriz Jacobiana de flujo de potencia para identificar nodos sensores a partir del vector singular derecho asociado al mínimo valor singular. En [23] se usa de la descomposición en valores singulares para identificar nodos sensores abordando el problema de distorsión de señales producidas por cargas no lineales; la representación del SEP es a partir de la  $Z_{BUS}$  y se hace un barrido en frecuencia para encontrar la frecuencia de resonancia del sistema, en esa frecuencia se hace la SVD y se emplea el vector izquierdo que corresponde al máximo valor singular para determinar los nodos sensores. Estos enfoques abordan el problema de bajos niveles de voltaje y distorsión de señales y aunque los resultados obtenidos son muy interesantes, son solamente validos para estos modelos y la estabilidad del sistema no puede ser relacionada al análisis del Jacobiano de flujo de potencia o la matriz  $Z_{BUS}$  que describen principalmente al sistema de transmisión del SEP.



## Formulación del problema

Bajo el panorama anterior, el interés es el de disminuir las oscilaciones electromecánicas y mejorar así el desempeño del SEP. Se utilizará un dispositivo compensador FACTS y el problema es encontrar la mejor ubicación para dispositivo compensador. Además de las características de compensación que proporcionan los dispositivos FACTS, también tienen capacidades de regulación de variables del SEP, es por eso que se selecciona un dispositivo en derivación, como lo es el compensador estático de volt-ampere reactivos (SVC, Static Var Compensator), para aprovechar su capacidad de regulación de voltaje.

El SEP es representado por un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales no lineales y el análisis se hará en un punto de operación para el SEP a partir de su aproximación por linealización. Para el modelo dinámico del SVC se necesita obtener una función de transferencia del SEP  $\Delta V/\Delta B_b$ , donde  $V$  es la amplitud de voltaje de bus y  $B_b$  es la susceptancia de bus<sup>3</sup>. Mediante análisis modal se evaluará el comportamiento dinámico e identificará la ubicación más adecuada del compensador a partir del método de residuos. Por lo que los pasos a realizar se sintetizan de la siguiente manera:

- A partir de la linealización del modelo dinámico del SEP, obtener una representación en el espacio de estados y caracterizar la estabilidad del punto de equilibrio del SEP a partir de la localización de los valores propios.
- Identificar el valor propio con menor factor de amortiguamiento.
- Obtener los residuos asociados al valor propio crítico de las funciones de transferencia  $\Delta V/\Delta B_b$ .
- Obtener los parámetros y ganancia del SVC.
- Realizar simulaciones donde se perturbe al sistema y hacer el análisis de resultados.

Respecto a las perturbaciones que se aplicarán al SEP, la descomposición en valores singulares será empleada como lo hacen en el estudio estático [22] donde solo consideran la red del SEP.

---

<sup>3</sup>En el Capítulo 2 se tratara el modelado del SEP y del SVC.

Las condiciones de operación del SEP bajo las cuales se desarrolla el trabajo son:

- Las señales de control a cada máquina síncrona son consideradas constantes, esto con el objetivo de reducir el número de estados por máquina síncrona y notar más aun el efecto de compensación del SVC.
- Las cargas en el SEP se considerarán del tipo potencia constante.

## Contribución

En el presente trabajo se centrará la atención en la aplicación del análisis modal para evaluar el comportamiento de los modos electromecánicos del SEP y encontrar la mejor ubicación de un dispositivo compensador para mejorar así las condiciones de estabilidad relativa del SEP ante la presencia de perturbaciones. La información proporcionada por los residuos permitirá determinar la mejor ubicación del SVC, además del diseño de los parámetros para el mismo.

Se mostrará que el método de los residuos proporciona información acerca de la elección de señales que tendrán una influencia significativa sobre el modo en interés. Además de que proporcionarán información suficiente para la obtención de los parámetros del compensador SVC.

A partir de un estudio estático se obtendrán perturbaciones para hacer el análisis del SEP con el SVC conectado en la red. Estos resultados obtenidos afectan de manera significativa las condiciones de operación del SEP, sin embargo la estabilidad del sistema no puede ser caracterizada con los resultados obtenidos de estos estudios.

Siendo conscientes de que el problema abordado en este trabajo es el mejorar el desempeño del SEP, se hace una revisión de las diferentes definiciones de estabilidad de SEP y se explica el porqué del surgimiento de estas definiciones.

## Organización de la Tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presentan las definiciones en SEP, se hacen comentarios acerca de ellas y la formulación matemática de estabilidad del SEP. En el Capítulo 2 se presenta la representación matemática del SEP de varias máquinas síncronas, red, el SVC y al final el modelo lineal multivariable. En el Capítulo 3 se presenta en análisis de sistemas multivariables que se empleará para el análisis del SEP con el fin de determinar la ubicación del dispositivo compensador, además de presentar la metodología que se llevara a cabo con el fin de determinar los márgenes de máxima transferencia de potencia en la red en los cuales se tienen niveles aceptables de voltaje. En el Capítulo 4 se presentan los resultados del análisis dinámico y estático que se presento en el Capítulo 3 y los resultados de simulación con y sin el dispositivo compensador. En el Capítulo 5 se hacen las conclusiones correspondientes y se hacen propuestas de trabajo futuro.

# Capítulo 1

## Estabilidad en SEP

La confiabilidad en la entrega de la energía eléctrica implica más que simplemente su disposición. Idealmente, las cargas deben alimentarse con amplitud de voltaje constante a frecuencia nominal. Así, se necesita que todas las máquinas se encuentren en sincronismo, y con la capacidad de generación de potencia necesaria para mantener la demanda de la carga y se asegure la integridad del sistema de transmisión evitando así interrupciones de flujo de potencia.

Las definiciones y clasificación de estabilidad en SEP es un problema que se ha estudiado desde hace décadas, la complejidad de estos sistemas, el aumento de interconexiones, y la creciente demanda han provocado diferentes fenómenos tales como la pérdida de sincronismo, bajos niveles de voltaje, colapso de voltaje, distorsión de señales, entre otros, afecten la estabilidad del SEP.

En las siguientes secciones se presentan las definiciones de estabilidad que se manejan en los SEP, las cuales carecen de argumentos matemáticos de teoría de sistemas siendo explicaciones cualitativas de fenómenos presentes en el SEP y surgen con el objetivo de poder llamarle de alguna manera a estos fenómenos [2][3]. En la sección 1.4 se presenta la formulación matemática de estabilidad en SEP.

## 1.1 Estabilidad del Ángulo de Rotor

*”La estabilidad del ángulo de rotor es la habilidad de las máquinas síncronas interconectadas de un SEP para mantenerse en sincronismo después de haber estado sujeto a una perturbación. El problema de estabilidad involucra el estudio de oscilaciones electromecánicas inherentes en SEP. Un factor fundamental en este problema es la manera en que la potencia de salida de las máquinas síncronas varía conforme su rotor oscila”*[2][3].

En condiciones de estado estacionario, existe equilibrio entre la potencia mecánica de entrada y la potencia eléctrica de salida en cada máquina. Así la velocidad angular se mantiene constante. Todo desbalance de potencia entre la generación y la carga provocado por una perturbación, inicia un periodo transitorio que causa oscilaciones del ángulo de rotor de las máquinas síncronas. Cuando una unidad de generación pierde el sincronismo con respecto al resto del sistema, se provocan fluctuaciones en la potencia de salida de la máquina, corriente y voltaje, lo que provoca que el sistema de protecciones aisle la máquina del resto del sistema. La pérdida de sincronismo puede darse en una unidad de generación contra el resto del sistema o entre grupos de máquinas. Por conveniencia, el análisis de estabilidad de ángulo de rotor es dividido en dos categorías.

*”La estabilidad de señal pequeña (o perturbaciones pequeñas), es declarada como la habilidad del sistema de potencia para mantenerse en sincronismo bajo pequeñas perturbaciones. Las perturbaciones son consideradas suficientemente pequeñas de tal forma que es válido usar el modelo lineal del sistema para el análisis*[2][3].

Si el sistema es estable en señal pequeña, la respuesta oscilatoria del SEP después de una perturbación será amortiguada, y el principal problema de desempeño del SEP es que se cuente con la capacidad de suficiente amortiguamiento de oscilaciones electromecánicas.

Las oscilaciones electromecánicas son clasificadas por el o los componentes afectados en el SEP, como lo son [2][19]:

- *Oscilaciones inter-planta* llamadas así cuando se presentan oscilaciones de rotor en máquinas síncronas dentro de la misma estación de generación de potencia, mientras el resto del sistema no está siendo afectado.
- *Oscilaciones locales* se presentan cuando máquinas síncronas presentan oscilaciones de

rotor en una estación de generación, además de un efecto de oscilación de potencia en la parte del sistema de transmisión conectado a la estación de generación.

- *Oscilaciones inter-área* involucra a dos grupos de máquinas síncronas con oscilaciones de rotor y consecuentemente oscilaciones de potencia en la parte del sistema de transmisión entre estos grupos.
- *Oscilaciones de control* se presenta cuando una mala sintonización del sistema de excitación, gobernadores, PSS y/o dispositivos FACTS interactúa negativamente con las oscilaciones de potencia en la red.
- *Oscilaciones torsionales* están asociadas con oscilaciones en el eje de la turbina-generador de la máquina síncrona.

*”La estabilidad transitoria (o de perturbaciones grandes), es definida como la habilidad del SEP para mantenerse en sincronismo cuando es sujeto a perturbaciones transitorias severas. La estabilidad depende del estado inicial del sistema y la gravedad de la perturbación. Usualmente, el sistema es alterado tanto que el estado de operación después de la perturbación difiere al estado de operación antes de la perturbación de tal forma que es necesario el modelo no lineal para el análisis [2][3]”.*

Usualmente las perturbaciones consideradas en el estudio de la estabilidad transitoria son cortos circuitos de diferentes tipos: fase a tierra, fase a fase a tierra, o trifásica y se asume que ocurren en el sistema de transmisión, en buses o en transformadores. Los elementos perturbados son aislados por el sistema de protecciones por la apertura de interruptores, despejando así la perturbación al SEP.

La estabilidad de ángulo de rotor es también conocida como estabilidad dinámica ya que está influenciada por la dinámica de las máquinas síncronas. Después, el estudio de estabilidad de transitoria es muy específico, bajo toda condición y para toda perturbación las máquinas estarán o no estarán manteniendo el sincronismo. El estudio de señal pequeña trata del desempeño del SEP alrededor de un punto de equilibrio, lo cual involucra el estudio de oscilaciones electromecánicas.

## 1.2 Estabilidad de Voltaje

”La estabilidad de voltaje es definida como la habilidad del SEP para mantener un estado aceptable de voltaje en todos los buses del sistema en condiciones normales o después de haber sufrido una perturbación para una condición de operación inicial. La inestabilidad de voltaje se manifiesta cuando una perturbación causa una progresiva caída del voltaje en al menos un bus del sistema [2][3].”

Como ya se menciona antes, una progresiva caída de voltajes de bus puede ser causada por inestabilidad de ángulo de rotor cuando una unidad de generación pierde el sincronismo, sin embargo, este problema también puede presentarse por ciertas características de carga o la incapacidad del sistema de transmisión para cumplir con los niveles requeridos del lado de la carga, de ahí que la estabilidad de voltaje también sea conocida como estabilidad de carga. La Figura 1.1 muestra un sistema radial, es una máquina síncrona con voltaje  $E_s$  en sus terminales; la impedancia de la línea de transmisión es  $Z_{LN}$  y la impedancia de la carga es  $Z_{LD}$ . Las relaciones de potencia, corriente y voltaje del sistema muestran que con la disminución de la impedancia  $Z_{LD}$  fluirá más potencia por la carga hasta un punto de máxima transferencia de potencia, que se presenta cuando  $Z_{LD} = Z_{LN}$ , esto provocará el aumento de corriente y la caída de voltaje en la línea de transmisión que iguala al voltaje en las terminales de la carga. Si  $Z_{LD}$  sigue decreciendo, aumentará la corriente del sistema hasta que la corriente  $I$  iguale la corriente corto circuito  $I_{SC}$  cuando  $Z_{LD} \ll Z_{LN}$ .

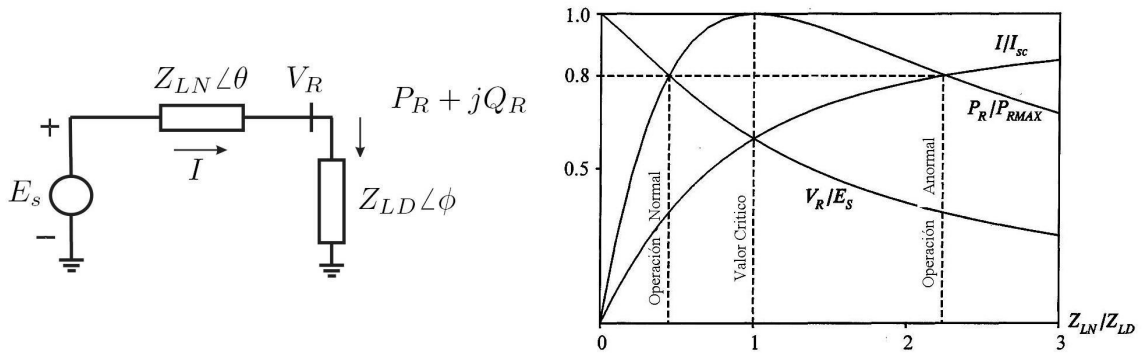


Figura 1.1: Circuito radial y las relaciones de voltaje en las terminales de la carga, potencia y corriente en función de la carga demandada

Este tipo de análisis se puede llevar a cabo para cualquier circuito o sistema que describa el flujo de potencia en el sistema de transmisión del SEP para determinar los puntos de máxima transferencia de potencia a través del mismo. El análisis de la matriz Jacobiana de flujo de potencia permite determinar los puntos de máxima transferencia de potencia en la red, al encontrar los puntos en que la matriz Jacobiana pierde rango y a su vez el punto para el cual ocurrirá un colapso de voltaje.

La interpretación los estudios aplicados al sistema de transmisión para determinar casos críticos de bajos niveles de voltaje o el colapso de voltaje son de gran utilidad ya que efectivamente determinan casos críticos que estarán provocando inestabilidad en el SEP.

### 1.3 Formulación Matemática de Estabilidad

Una vez que se ha introducido el concepto de estabilidad, puede observarse que las definiciones anteriores son explicaciones cualitativas, es decir, cómo una variable satisface las condiciones de operación ante la presencia de perturbaciones. Además tales definiciones no pueden describir características dinámicas del SEP sino que identifican causas de inestabilidad.

Por otro lado, en la teoría de sistemas dinámicos, el modelo del SEP es descrito en la forma explícita de ecuaciones diferenciales, y se considera que el sistema pasa por tres cambios en su configuración, siendo: antes de la perturbación o pre-falla, durante la perturbación y después de la perturbación o post-falla. Así, se considera que el SEP es un sistema dinámico representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales para cada cambio,

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad -\infty < t < t_F \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)), \quad t_F \leq t < t_p \quad (1.2)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t_p \leq t < \infty \quad (1.3)$$

donde,  $x(t)$  es el vector de variables de estado del SEP en el tiempo  $t$ . En algún tiempo  $t_F$  el SEP es sujeto a una perturbación, que implica un cambio en las condiciones de operación (desbalance de potencia entre la generación y la carga, corto circuito, etc.) y es representado por el cambio en las dinámicas que describen el comportamiento del SEP de (1.1) a (1.2). Antes de que se presente la perturbación se tienen las dinámicas descritas por (1.1). La duración de



la perturbación está comprendida en el intervalo de tiempo  $[t_F, t_p)$ , durante este intervalo de tiempo la dinámica del SEP es descrita por (1.2), en  $t = t_p$ , la perturbación es eliminada ya sea por el sistema de protecciones separando los elementos perturbados o cuando la perturbación desaparece, entonces el comportamiento del sistema es representado por (1.3).

Si en (1.1) el SEP se encuentra operando en un punto de equilibrio asintóticamente estable  $x_l$ , entonces se puede escribir

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)), \quad t_F \leq t < t_p, \quad x(t_F) = x_l \quad (1.4)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t_p \leq t < \infty \quad (1.5)$$

al final del periodo de perturbación, ya sea por la acción del sistema de protecciones o el desvanecimiento de la perturbación, el estado del sistema se encuentra en

$$x_p := \Phi_F(x_l, t_p - t_F) \quad (1.6)$$

donde  $\Phi_F(x_l, t)$  es el vector de la trayectoria del sistema en presencia de la perturbación (1.4) con condición inicial  $x_l$ .

Para el sistema después de la perturbación (1.5) se asume que tiene un punto de equilibrio  $x^*$ , i.e.,  $f(x^*) = 0$ , y que todos los valores propios de la matriz Jacobiana  $\partial f / \partial x|_{x=x^*}$  tienen parte real negativa, por lo cual,  $x^*$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Por lo anterior, hay una región en el espacio de estados donde las trayectorias convergen a  $x^*$ , llamada región de atracción de  $x^*$ , denotada por  $A(x^*)$ , por lo cual,

$$A(x^*) := \{x \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_F(x, t) = x^*\} \quad (1.7)$$

Si el punto de equilibrio antes de la perturbación  $x_l = x(t_F) \in A(x^*)$ , y se define al periodo de tiempo durante el cual se presenta la perturbación como  $\tau = t_p - t_F$ , entonces la trayectoria del sistema perturbado descrito por (1.6) puede abandonar la región de atracción (1.7). Según lo anterior, el problema de estabilidad del SEP será el determinar si el estado inicial después de la perturbación (1.5) pertenece a la región  $A(x^*)$ , entonces

$$x_p(\tau) \in A(x^*), \quad \tau < \tau_c, \quad y \quad x_p(\tau_c) \in \partial A(x^*) \quad (1.8)$$

donde  $\tau_c$  es llamado tiempo critico de liberación de la perturbación y  $\partial A(x^*)$  representa el conjunto de los puntos frontera de  $A(x^*)$ . Si la duración de la perturbación  $t_p - t_F < \tau_c$ , entonces el SEP preserva la estabilidad.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se hará una definición de estabilidad transitoria.

**Definición 1 (Estabilidad Transitoria)** Sea  $x_l = x_p(0) \in A(x^*)$  un punto de equilibrio asintóticamente estable de

$$\dot{x}(t) = f_l(x(t)), \quad -\infty < t < t_F$$

Sea  $\tau_c$  el tiempo critico de liberación de falla y  $\tau = t_p - t_F$  el tiempo durante el cual el sistema está sujeto a una perturbación, si  $\tau$  cumple

$$x_p(\tau) \in A(x^*), \quad \tau < \tau_c, \quad \text{y} \quad x_p(\tau_c) \in \partial A(x^*)$$

entonces se dice que el sistema preserva la estabilidad transitoria.

El análisis basado en la aproximación por linealización es posible siempre y cuando las perturbaciones no cambien el punto de equilibrio del sistema, es decir que la perturbación desvanezca en  $x_l$ , restaurándose el punto de equilibrio  $x_l = x^*$  después de la perturbación.

**Definición 2 (Estabilidad de Señal Pequeña)** Sea  $x_l = x_p(0) \in A(x^*)$  y  $x_l = x^*$ , un punto de equilibrio asintóticamente estable de

$$\dot{x}(t) = f_l(x(t)), \quad -\infty < t < t_F$$

y

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t_p \leq t < \infty$$

Sea  $\tau_c$  el tiempo critico de liberación de falla y  $\tau = t_p - t_F$  el tiempo durante el cual el sistema es sujeto a una perturbación, si  $\tau$  cumple

$$x_p(\tau) \in A(x^*), \quad \tau < \tau_c, \quad \text{y} \quad x_p(\tau_c) \in \partial A(x^*)$$

entonces se dice que el sistema preserva la estabilidad de señal pequeña.

La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. En el estudio de la estabilidad transitoria del SEP, bajo toda condición y para toda perturbación es sistema será estable o inestable, por lo cual la estabilidad transitoria se enfoca en el estudio de la estabilidad absoluta del SEP. La respuesta transitoria del SEP con frecuencia muestra oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario, el enfoque del estudio de la estabilidad de señal pequeña trata sobre el estudio de las oscilaciones electromecánicas del SEP. Así la estabilidad de señal pequeña se enfoca en el estudio de la estabilidad relativa del SEP, y es esta última sobre la cual se centra el presente trabajo.

## Capítulo 2

# Modelo del Sistema Eléctrico de Potencia Multi-Máquina

El sistema eléctrico de potencia multi-máquina es expresado como un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales no lineales de la forma,

$$\dot{x} = f(x, z, u) \quad (2.1)$$

$$0 = g(x, z, u) \quad (2.2)$$

$$y = h(x, z, u) \quad (2.3)$$

donde (2.1) representa el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que involucran la dinámica de las máquinas síncronas, el vector  $x \in C^{n_x}$  representa el vector de estados, donde  $n_x$  representa el número de estados del SEP multi-máquina; (2.2) representa el conjunto de restricciones de balance de potencia en la red, el vector  $z \in C^{2(n_b+m)}$  representa variables algebraicas como corriente y voltaje, donde el escalar  $n_b$  representa el número de buses y  $m$  representa el número de máquinas síncronas; (2.3) es el conjunto de ecuaciones de salida, el vector  $u \in C^p$  representa señales de entrada, el vector  $y \in C^q$  las señales de salida.

El modelo dinámico del SEP representa varias máquinas síncronas interconectadas por líneas de transmisión. Una restricción simple es que la carga trifásica es balanceada en las terminales de la máquina y en las terminales de la carga, bajo esta suposición se transforman todas las señales sinodales trifásicas balanceadas del estator de la máquina y de la red en señales

constantes. Entonces de la secuencia positiva (ABC) se toma una fase para el análisis del SEP.

Las ecuaciones dinámicas describen el modelo de máquina síncrona de dos ejes con sistema de excitación IEEE-Tipo 1, las ecuaciones de red son representadas en forma de balance de potencia. Además se presenta el modelo dinámico del SVC utilizado en este trabajo.

## 2.1 Ecuaciones Dinámicas de la Máquina Síncrona

Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de la  $i$ -ésima máquina síncrona están dadas por [1]

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_i - \omega_s \quad (2.4)$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\omega_s}{2H} \left[ T_{mi} - \left( E'_{qi} - X'_{di} I_{di} \right) I_{qi} - \left( E'_{di} + X'_{qi} I_{qi} \right) I_{di} - D (\omega_i - \omega_s) \right] \quad (2.5)$$

$$\frac{dE'_{qi}}{dt} = \frac{1}{T'_{doi}} \left[ -E'_{qi} - \left( X_{di} - X'_{di} \right) I_{di} + E_{fdi} \right] \quad (2.6)$$

$$\frac{dE'_{di}}{dt} = \frac{1}{T'_{qoi}} \left[ -E'_{di} + \left( X_{qi} - X'_{qi} \right) I_{qi} \right] \quad (2.7)$$

$$\frac{dE_{fdi}}{dt} = -\frac{K_{Ei} + S_E (E_{fdi})}{T_{Ei}} E_{fdi} + \frac{V_{Ri}}{T_{Ei}} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_{Ri}}{dt} = & -\frac{V_{Ri}}{T_{Ai}} + \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}} R_{fi} - \frac{K_{Ai} K_{Fi}}{T_{Ai} T_{Fi}} E_{fdi} \\ & + \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}} (V_{refi} - V_i) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{dR_{Fi}}{dt} = -\frac{R_{Fi}}{T_{Fi}} + \frac{K_{Fi}}{(T_{Fi})^2} E_{fdi} \quad (2.10)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ , donde  $m$  es el número de máquinas síncronas,

$\delta_i$  : ángulo del rotor de la máquina,

$\omega_i$  : velocidad angular del rotor,

$\omega_s = 2\pi f = 120\pi f_o$  : velocidad angular de referencia,

$E'_{qi}$  : fem transitoria dada por los enlaces de flujo de campo,

$E'_{di}$  : fem transitoria dada por los enlaces de flujo en el devanado de amortiguamiento del eje  $q$ ,

$E_{fdi}$  : voltaje de campo,  
 $S_E(E_{fdi})$ : función del nivel de excitación,  
 $V_{Ri}$  : salida del amplificador del sistema de excitación,  
 $R_{fi}$  : señal de retroalimentación del sistema de excitación,  
 $I_{di}$  : componente del eje  $d$  de la corriente de estator,  
 $I_{qi}$  : componente del eje  $q$  de la corriente de estator,  
 $X_{di}, X'_{di}$  : reactancia síncrona y transitoria, respectivamente a lo largo del eje  $d$ ,  
 $X_{qi}, X'_{qi}$  : reactancia síncrona y transitoria, respectivamente a lo largo del eje  $q$ ,  
 $T'_{doi}$  : constante de tiempo transitoria del eje  $d$ ,  
 $T'_{qoi}$  : constante de tiempo transitoria del eje  $q$ ,  
 $K_{Ei}, K_{Fi}, K_{Ai}$  : ganancias del sistema de excitación,  
 $T_{Ei}, T_{Fi}, T_{Ai}$  : constante de tiempo del sistema de excitación.

## 2.2 Ecuaciones algebraicas del estator

Las ecuaciones algebraicas de estator se obtienen del circuito equivalente de la máquina síncrona de dos ejes que se muestra en la Figura 2.1; del cual, aplicando Ley de Voltajes de Kirchhoff para dicho circuito, se tiene [1]

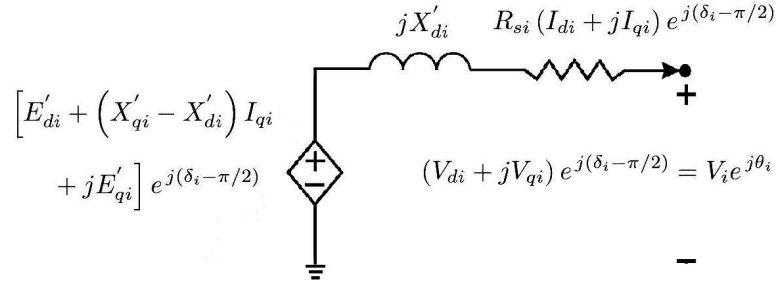


Figura 2.1: Circuito de máquina síncrona de dos ejes

$$0 = E'_{di} - V_i \sin(\delta_i - \theta_i) - R_{si} I_{di} + X'_{qi} I_{qi} \quad (2.11)$$

$$0 = E'_{qi} - V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - R_{si} I_{qi} - X'_{di} I_{di} \quad (2.12)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ , donde,

$V_i$  : amplitud de voltaje del  $i$ -ésimo bus,

$\theta_i$  : ángulo de voltaje del  $i$ -ésimo bus,

$R_{si}$  : resistencia de armadura.

## 2.3 Ecuaciones de la Red

Las ecuaciones de la red expresadas en forma de balance de potencia para los buses conectados una máquina síncrona (buses PV), se describen en dos partes; la de balance de potencia activa y balance de potencia reactiva [1]

$$0 = I_{di}V_i \sin(\delta_i - \theta_i) + I_{qi}V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - P_{Li} - \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k [G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)] \quad (2.13)$$

$$0 = I_{di}V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{qi}V_i \sin(\delta_i - \theta_i) - Q_{Li} - \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k [G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)] \quad (2.14)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Para los buses de carga (buses PQ), el procedimiento es similar, por lo tanto las ecuaciones son

$$0 = P_{Li} + \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k [G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)] \quad (2.15)$$

$$0 = Q_{Li} + \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k [G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)] \quad (2.16)$$

para  $i = m + 1, \dots, n_b$ , donde,  $n_b$  es el número total de buses en el sistema, aquí,  $P_{Li}, Q_{Li}$  representan carga activa y reactiva en el  $i$ -ésimo bus respectivamente,  $Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$  son los elementos de la  $i$ -ésima fila y la  $k$ -ésima columna de la matriz de admitancia de bus  $Y_{BUS}$ , donde  $Y_{BUS} = Z_{BUS}^{-1}$ .

El modelo dinámico del SEP multi-máquina tiene  $n_x$  ecuaciones diferenciales que necesitan ser resueltas para un problema de  $m$  máquinas y  $n_b$  buses. Como todo sistema rotacional, se

necesita una referencia para los ángulos, se definen los ángulos  $\delta_i$  relativos al ángulo  $\delta_1$  de la máquina 1, como [1][2]

$$\delta'_i = \delta_i - \delta_1, \quad i = 2, \dots, m \quad (2.17)$$

$$\delta'_1 = 0 \quad (2.18)$$

$$\dot{\delta}'_i = \omega_i - \omega_1, \quad i = 2, \dots, m \quad (2.19)$$

$$\dot{\delta}'_1 = 0 \quad (2.20)$$

$$\theta'_i = \theta_i - \delta_1, \quad i = 1, \dots, n_b \quad (2.21)$$

## 2.4 Compensador Estático de VAR's

Los SEP, especialmente el sistema de transmisión, se dice que son inflexibles debido a que ofrecen poca o nula posibilidad de regulación de sus variables ya que los parámetros y la configuración de la red son fijos. La tecnología de los dispositivos FACTS basados en electrónica de potencia, ofrece oportunidades para la regulación de variables del SEP, impedancia serie, impedancia en derivación, corriente, voltaje, ángulo de fase y amortiguamiento de oscilaciones. Los FACTS proporcionan ventajas sobre los dispositivos mecánicos, como la capacidad de conmutar mucho más rápido y poder direccionar flujo de potencia en fracciones de ciclo. Además, los dispositivos mecánicos tienden a desgastarse, mientras los FACTS pueden conmutar varias veces sin deteriorarse.

Existen diferentes formas de clasificar los dispositivos FACTS; una de ellas es en función de la conexión de los dispositivos, en general pueden ser divididos en cuatro categorías [4]:

- *Dispositivos en serie* pueden ser una impedancia variable, capacitiva o inductiva, conectados en serie con la línea. Por lo general representan inyección de voltaje en serie con la línea. El voltaje inyectado está en cuadratura con la corriente, por tanto, los dispositivos en serie solo generan o consumen VAR's para poder regular variables específicas de un SEP (típicamente potencia real).
- *Dispositivos en derivación* pueden ser una impedancia variable, capacitiva o inductiva, que conectados en derivación al voltaje de la línea causan un flujo de corriente y por consiguiente representan inyección de corriente en el punto de conexión. La corriente



inyectada está en cuadratura con el voltaje, por tanto, los dispositivos en derivación solo generan o consumen VAR's para poder regular variables específicas de un EPS (típicamente voltaje de bus).

- *Dispositivos serie-serie* pueden ser una combinación de dispositivos serie en un sistema de transmisión actuando de manera independiente o coordinada, de manera que es posible la compensación reactiva independiente o balance de potencia activa por medio de compensación reactiva en ambas líneas de manera coordinada.
- *Dispositivos en serie-derivación* pueden ser una combinación de dispositivos serie y derivación actuando de manera independiente o coordinada, por lo general esta combinación inyecta corriente en el punto de conexión con la parte en derivación y voltaje en serie en la línea con la parte en serie.

Es importante apreciar que los dispositivos en serie mejoran directamente la corriente y el flujo de potencia. A través de esto, si la propuesta es la regulación de corriente, flujo de potencia o el amortiguamiento de oscilaciones electromecánicas, los dispositivos serie son una mejor opción que los dispositivos en derivación.

En cambio un dispositivo en derivación como lo es el compensador estático de volt-ampere reactivos (SVC, por sus siglas en inglés) puede ser usado para el amortiguamiento de oscilaciones electromecánicas, y aprovechar sus capacidades la regulación de voltaje. La efectividad del amortiguamiento depende no solamente de la estructura y sintonización del SVC, también de su ubicación en el SEP.

El SVC se define como un dispositivo que genera o consume potencia reactiva, y cuya salida es ajustada para intercambiar corriente y así mantener o regular parámetros específicos del SEP, típicamente voltaje de bus. La topología típica de un SVC comprende la combinación de una o más bobinas inductoras conocido también como reactor, que es controlado por tiristores y un capacitor fijo tal como se muestra en la Figura 2.2.

La potencia reactiva inyectada por el SVC conectado al bus  $k$  está dada por

$$Q_k = V_k^2 B_{SVC} \quad (2.22)$$

donde  $B_{SVC} = B_C - B_L$ ,  $B_C$  y  $B_L$  son susceptancia fija del capacitor y la susceptancia variable

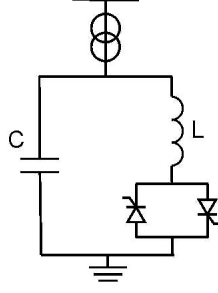


Figura 2.2: Configuración básica del Compensador Estático de Var's

del reactor. El modelo dinámico de señal pequeña para el SVC está dado en la Figura 2.3[19]. La referencia de voltaje en el bus es  $V_{ref}$ ,  $V_{ss-svc}$  es una señal adicional para las oscilaciones electromecánicas, ambas señales se consideran constantes, por lo tanto  $\Delta V_{ref} = 0$ ,  $\Delta V_{ss-svc} = 0$ .

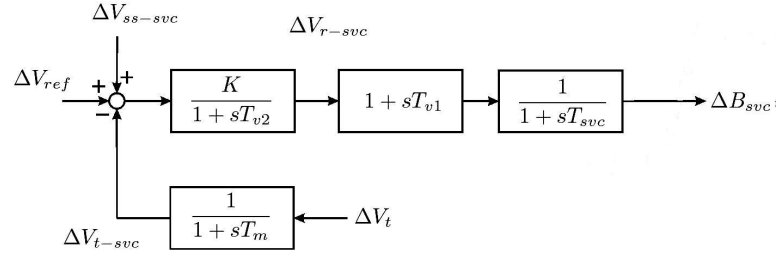


Figura 2.3: Modelo dinámico de señal pequeña del SVC

La constante de tiempo  $T_{SVC}$  representa el tiempo de respuesta del circuito de conmutación de los tiristores,  $T_m$  es la constante de tiempo que representa un retardo por la acción de medición,  $T_{v1}$  y  $T_{v2}$  son las constantes de tiempo que representan el bloque de regulación de voltaje<sup>1</sup>. Así,  $\Delta B_{SVC}$  está dado

$$\Delta B_{SVC} = -\Delta B_L \quad (2.23)$$

<sup>1</sup> $T_{SVC}$  y  $T_m$  comúnmente son tomadas entre 10 – 20ms, para  $T_{V1}$  y  $T_{V2}$  se calcularán más adelante.

Las ecuaciones dinámicas que representan al SVC son

$$\frac{d\Delta B_{SVC}}{dt} = \frac{1}{T_{SVC}} \left[ -\Delta B_{SVC} + \left(1 - \frac{T_{v1}}{T_{v2}}\right) \Delta V_{r-SVC} - \frac{KT_{v1}}{T_{v2}} \Delta V_{t-SVC} \right] + \frac{KT_{v1}}{T_{v2}T_{SVC}} [\Delta V_{ss-SVC} + \Delta V_{ref}] \quad (2.24)$$

$$\frac{d\Delta V_{r-SVC}}{dt} = \frac{1}{T_{v2}} (-\Delta V_{r-SVC} - K\Delta V_{t-SVC} + K\Delta V_{ref} + K\Delta V_{ss-SVC}) \quad (2.25)$$

$$\frac{d\Delta V_{t-SVC}}{dt} = \frac{1}{T_m} (\Delta V_t - \Delta V_{t-SVC}) \quad (2.26)$$

El dispositivo SVC trabaja con señales locales, por lo que la función de transferencia  $\Delta V/\Delta B_b$ , utilizará  $\Delta V_i$  y  $\Delta B_{bi}$  del  $i$ -ésimo bus, para  $i = 1, 2, \dots, n_b$  donde  $n_b$  es el número de buses del SEP.

## 2.5 Linealización del Sistema Eléctrico de Potencia Multi-Máquina

En general, el conjunto de ecuaciones DAE (2.4)-(2.16) son linealizadas respecto a un punto de operación  $(x_0, I_{g0}, V_{g0}, V_{l0})$  [1].

$$\Delta \dot{x} = A_1 \Delta x + B_1 \Delta I_g + B_2 \Delta V_g + E_1 \Delta U \quad (2.27)$$

$$0 = C_1 \Delta x + D_1 \Delta I_g + D_2 \Delta V_g \quad (2.28)$$

$$0 = C_2 \Delta x + D_3 \Delta I_g + D_4 \Delta V_g + D_5 \Delta V_l + D_6 \Delta B_b \quad (2.29)$$

$$0 = D_7 \Delta V_g + D_8 \Delta V_l + D_9 \Delta B_b \quad (2.30)$$

donde,

$x = [x_1^T, \dots, x_m^T]^T$  son los estados del sistema multi-máquina,

$x_i = [\delta_i, \omega_i, E'_{qi}, E'_{di}, E_{fdi}, V_{Ri}, R_{fi}]^T$  son los estados de la  $i$ -ésima máquina síncrona,

$I_g = [I_{d1}, I_{q1}, \dots, I_{dm}, I_{qm}]^T$  son las corrientes de los ejes de cada máquina síncrona,

$V_g = [\theta_1, V_1, \dots, \theta_m, V_m]^T$ , son el ángulo y la amplitud de voltaje en los buses PV,

$V_l = [\theta_{m+1}, V_{m+1}, \dots, \theta_{n_b}, V_{n_b}]^T$ , son el ángulo y la amplitud de voltaje en los buses PQ,

$U = [U_1^T, \dots, U_m^T]^T$ , son las señales de control para las máquinas síncronas,  
 $U_i = [T_{Mi}, V_{refi}]^T$ , son las señales de control para la  $i$ -ésima máquina síncrona,  
 $B_b = [B_{b1}, \dots, B_{bn_b}]^T$  es la suceptancia en los buses del SEP,  
 las matrices  $A1, B1, B2, C1, C2, D1, \dots, D9$ , del modelo linealizado se muestran en el Apéndice A.

Para determinar el modelo lineal, es necesario calcular el punto de operación, y se realizara en dos pasos:

1. Por medio de una simulación de flujos de potencia [20], se considerará que a partir de la carga instalada en la red y parámetros de las máquinas síncronas, la potencia activa demandada por la carga es repartida a cada máquina síncrona en proporción a la constantes de inercia de la misma, así se obtienen  $V_{go}$  y  $V_{lo}$  en los  $n_b$  buses y las potencias activa y reactiva de los buses PV.
2. Usando los valores de red obtenidos en el primer paso, en los buses PV se obtienen los valores de equilibrio  $x_0$  de las máquinas síncronas, completando así los valores de equilibrio del SEP multi-máquina.

Para obtener la representación en el espacio de estados para el SVC es necesario obtener la relación  $\Delta V_i / \Delta B_{bi}$ , donde  $\Delta V_i$  y  $\Delta B_{bi}$  es la variación en la amplitud de voltaje y la variación de suceptancia del  $i$ -ésimo bus del SEP, además se considerará que las señales de control para las máquinas síncronas son constantes, por lo tanto  $\Delta U = 0$ . Así, de las ecuaciones (2.27)-(2.30), se representa el sistema multivariable como

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta B_b \quad (2.31)$$

$$\Delta V = C\Delta x + D\Delta B_b \quad (2.32)$$

$\Delta x$  es el vector  $\Delta x \in C^{n_x}$  que representa las variaciones en los estados del SEP multi-máquina,  
 $\Delta V$  es un vector  $\Delta V \in C^{n_b}$  que representa variaciones de amplitud de voltaje en los buses,  
 $\Delta B_b$  es un vector  $\Delta B_b \in C^{n_b}$  y representa las variaciones de suceptancia en los buses,  $A$  es la matriz de estado,  $B$  es la matriz de entrada,  $C$  es la matriz de salida y  $D$  es la matriz de transmisión directa.

# Capítulo 3

## Análisis de Sistemas Multivariables

Los métodos de análisis de sistemas no lineales pueden ser usados para analizar los SEP, sin embargo, la aplicación es restringida a sistemas pequeños y simples, ya que la construcción de funciones de energía es fácil siempre que el modelo clásico del generador sea considerado con cargas de impedancia constante como el caso de la representación del sistema como una sola máquina conectada a un bus infinito (SMIB). Un sistema de potencia multi-máquina está compuesto por varias máquinas síncronas con su respectivo control de excitación, control de turbina, cargas dinámicas, y compensadores interconectados por una red, es un modelo más complejo y de orden mucho mayor, entonces una función de energía adecuada es difícil de obtener.

A pesar de que una representación no lineal del sistema de potencia proporciona información fundamental en el análisis de estabilidad, el análisis de la representación lineal proporciona una visión aproximada para determinar esta propiedad. Además, como se mostrará más adelante, las técnicas de análisis para sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas permitirán determinar escenarios críticos que provocan inestabilidad en el SEP.

El uso del análisis modal permite la identificación directa de las causas que contribuyen en forma negativa al amortiguamiento asociado con los modos electromecánicos mediante los factores de participación, así como la ubicación más adecuada de compensadores que contribuyan a mejorar el amortiguamiento de los mismos mediante los residuos. Además, esta metodología permite determinar características dinámicas como: frecuencia de oscilación, modos de oscilación,

factor de amortiguamiento y actividad relativa de las variables de estado asociadas a un modo particular [10].

### 3.1 Análisis Modal

Los modelos requeridos para representar los efectos dinámicos de los SEP involucran un gran número de variables asociadas con muchos componentes del sistema, con lo cual la identificación de variables para realización de alguna acción de control es un problema muy complejo.

Esta metodología está basada en el cálculo de los valores y vectores propios de la matriz de estado del modelo y presenta un procedimiento matemático conveniente para analizar el sistema de manera desacoplada que permitirá identificar las variables que tendrán un efecto más significativo en el amortiguamiento de oscilaciones. Como ya se menciono en secciones anteriores, para el SVC se necesita encontrar la mejor ubicación para realizar compensación, en tanto, identificar que señales  $\Delta V_i$  y  $\Delta B_{bi}$  del  $i$ -ésimo bus con las cuales el SVC realizará la mayor compensación en el SEP.

A partir del modelo linealizado del SEP representado por las ecuaciones (2.31)-(2.32). La ecuación característica de la matriz de estado  $A$  y los valores de  $\lambda$  que la satisfacen son llamados valores propios de  $A$ , así

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (3.1)$$

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_x} \quad (3.2)$$

Todo elemento de la matriz de transición de estado  $e^{\hat{A}t}$  es una combinación lineal de factores  $t^k e^{\lambda_i t}$ , para  $k = 0, 1, \dots, n_i - 1$ , e  $i = 1, 2, \dots, n_x$ , donde  $n_i$  indica la multiplicidad del valor propio. Entonces se le llama a  $t^k e^{\lambda_i t}$  un modo de la ecuación dinámica (2.31) [6]. Cada valor propio real está asociado a un modo no oscilatorio, un valor propio real negativo representa un modo en decaimiento, a mayor magnitud, más rápido el decaimiento. Un valor propio real positivo representa un modo en crecimiento. Valores propios complejos corresponden a modos

de oscilación, la componente imaginaria da la frecuencia de oscilación

$$\lambda = \sigma \pm j\omega \quad (3.3)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.4)$$

y el factor de amortiguamiento está dado por

$$\zeta = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad (3.5)$$

El par de valores propios con menor factor de amortiguamiento se considerarán críticos, y sobre ellos centrará el análisis.

Ahora, para todo valor propio  $\lambda_i$  existe un vector columna  $\Phi_i$  llamado vector propio derecho de  $A$ , de tal manera que satisface

$$(A - \lambda_i I) \Phi_i = 0 \Leftrightarrow A\Phi_i = \lambda_i \Phi_i, \Phi_i \neq 0 \quad (3.6)$$

De la misma manera, el vector fila  $\Psi_i$  es asociado con el valor propio  $\lambda_i$  y es conocido como vector propio izquierdo que satisface

$$\Psi_i (A - \lambda_i I) = 0 \Leftrightarrow \Psi_i A = \lambda_i \Psi_i, \Psi_i \neq 0 \quad (3.7)$$

Expresando las propiedades de la matriz de estado  $A$ , los vectores propios  $\Phi_i$  y  $\Psi_i$  asociados al valor propio  $\lambda_i$  forman las matrices modales, expresadas como sigue

$$\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n] \quad (3.8)$$

$$\Psi = [\Psi_1^T \Psi_2^T \cdots \Psi_n^T]^T \quad (3.9)$$

según lo establecido, con las matrices modales se cumple lo siguiente

$$A \Phi = \Phi \Lambda \quad (3.10)$$

$$\Psi \Phi = I, \Psi = \Phi^{-1} \quad (3.11)$$

donde  $I$  es una matriz identidad, entonces

$$\Psi A \Phi = \Lambda \quad (3.12)$$

donde  $\Lambda$ , es una matriz diagonal con los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_x}$  como elementos de la diagonal.

El conjunto de ecuaciones (2.31)-(2.32) que representan al SEP, presentan el problema del acoplamiento entre variables de estado, en tanto, es difícil identificar los variables de bus,  $\Delta V_i$  y  $\Delta B_{bi}$ , que están influenciando de manera significativa al modo en interés. Por lo anterior, se considera un nuevo vector de estados  $z$ , por la transformación,

$$\Delta x = \Phi z \quad (3.13)$$

donde  $\Phi$  es la matriz modal definida en la ecuación (3.6). Así, las ecuaciones (2.31)-(2.32) en términos de variables transformadas

$$\Phi \dot{z} = A\Phi z + B\Delta B_b \quad (3.14)$$

$$\Delta V = C\Phi z + D\Delta B_b \quad (3.15)$$

y en forma desacoplada

$$\dot{z} = \Lambda z + B' \Delta B_b \quad (3.16)$$

$$\Delta V = C' z + D\Delta B_b \quad (3.17)$$

La diferencia importante entre las ecuaciones (2.31)-(2.32) y (3.16)-(3.17) es que  $\Lambda$  es una matriz diagonal y generalmente, la matriz  $A$  es no diagonal. A partir de esto, es posible diagonalizar la matriz de estado y poder realizar el análisis sobre el modo de interés de manera desacoplada [2].

### 3.1.1 Controlabilidad y Observabilidad Modal

El objetivo es modificar el modo de oscilación crítico (con menor factor de amortiguamiento), la elección de señales de entrada y salida para la conexión del compensador puede ser determinada



por las medidas de controlabilidad y observabilidad modal. A partir de las ecuaciones (3.16)-(3.17), la controlabilidad y observabilidad modal están expresadas como sigue [2]

$$B' = \Phi^{-1}B \quad (3.18)$$

$$C' = C\Phi \quad (3.19)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.16)-(3.17), el  $k$ -ésimo modo, para  $k = 1, 2, \dots, n_x$  es no controlable si la  $k$ -ésima fila de la matriz  $B'$  es un vector cero, y es no observable si la  $k$ -ésima columna de la matriz  $C'$  es un vector cero. Si un modo es no controlable y no observable cualquier acción de compensación en los  $n_b$  buses del SEP, no tendrán efecto sobre ese modo.

### 3.1.2 Residuos

De la representación en el espacio de estados (2.31)-(2.32), una función de transferencia con una sola entrada y una sola salida es

$$G(s)_{ii} = \frac{\Delta V_i}{\Delta B_{bi}} = c_i(sI - A)^{-1}b_i + d_{ii} \quad (3.20)$$

donde  $c_i$  es el  $i$ -ésimo vector fila de la matriz de salida,  $b_i$  es el  $i$ -ésimo vector columna de la matriz de entrada, y  $d_{ii}$  es el elemento  $ii$  de la matriz de transmisión directa.

Cuando se expresa la ecuación (3.20) en fracciones parciales, las magnitudes de los residuos dependen tanto de los polos como de los ceros. Si hay un cero lejos (cerca) de un polo, el residuo de este polo es grande (pequeño) y el coeficiente del término de respuesta transitoria que corresponde a ese polo se vuelve grande (pequeño).

$$\begin{aligned} G(s)_{ii} &= \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_{m_x})}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_{n_x})} \\ &= \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \frac{R_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{R_{n_x}}{s - \lambda_{n_x}} + d_{ii} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Si un polo tiene cerca a un cero se cancelarán efectivamente uno al otro. Por tanto el residuo asociado a un polo puede dar índice de la proximidad de un cero y de la posibilidad de desplazarlo en el plano complejo mediante una acción de compensación.

Expresando la ecuación (3.21) en fracciones parciales por medio de los vectores propios derecho e izquierdo

$$G(s)_{ii} = \sum_{k=1}^{n_x} \frac{c_i \phi_k \psi_k b_i}{s - \lambda_k} + d_{ii} = \sum_{k=1}^{n_x} \frac{R_k}{s - \lambda_k} + d_{ii} \quad (3.22)$$

El residuo de una función de transferencia específica  $G_{ii}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n_b, i = i$  asociado al  $k$ -ésimo modo está dado por el producto del factor de observabilidad y el factor de controlabilidad asociado [2]

$$R_k = c_i \Phi_k \Psi_k b_i \quad (3.23)$$

De acuerdo a la ecuación (3.23), sean  $\Phi_k$  y  $\Psi_k$ , los vectores propios derecho e izquierdo asociados al modo de oscilación crítico, entonces existen  $n_b$  residuos asociados al modo de oscilación crítico, por tanto el residuo de mayor modulo indicara que con el uso de las señales  $\Delta V_i$  y  $\Delta B_{bi}$  del  $i$ -ésimo bus tendrán la mayor influencia sobre este modo, y así, se determina que el  $i$ -ésimo bus es el indicado para la ubicación del dispositivo compensador en el SEP.

Hasta ahora se ha considerado el análisis cuando se tienen valores propios distintos, siendo así que los vectores propios  $\Phi_k, \Psi_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, n_x$  son también distintos; sin embargo, si la matriz de estado  $A$  posee valores propios repetidos también es posible la diagonalización. En este caso, se transforma  $A$  en una forma canónica de Jordan, y el análisis puede realizarse siempre y cuando el modo en interés no se repita, ya que los residuos asociados a valores propios repetidos no pueden ser calculados a partir de la ecuación (3.23).

### 3.1.3 Factores de Participación

Los factores de participación dan una medida de sensibilidad de un valor propio no repetido ante cambios en los elementos de la diagonal de la matriz de estado  $A$ , considerando al sistema desacoplado, como en las ecuaciones (3.16)-(3.17), y están expresados como sigue [1][10]

$$p_{ki} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kk}} = \phi_{ki} \psi_{ik} \quad (3.24)$$

Los factores de participación son una medida de la participación relativa de la  $k$ -ésima variable de estado y el  $i$ -ésimo modo, es una medida desacoplada ya que solo analiza un modo a la vez[1]. El análisis de los factores de participación ayuda a la identificación de cómo cada variable de estado es afectada por un modo y viceversa, además permite identificar el tipo de oscilación. Así, si solamente variables de estado de una máquina síncrona tienen participación significativa en un modo seleccionado se presenta un fenómeno de oscilación local; si las variables de estado de máquinas síncronas pertenecientes a diferentes áreas tienen participación significativa, se presenta un fenómeno de oscilación inter-área. Dado lo anterior, es posible construir una matriz, llamada matriz de participación,

$$P = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n] \quad (3.25)$$

con

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{11}} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \psi_{i1} \\ \phi_{2i} \psi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \psi_{in} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.26)$$

donde  $p_i$  es un vector columna con los factores de participación relativa de las  $n_x$  variables de estado y el  $i$ -ésimo modo.

### 3.1.4 Parámetros del Dispositivo Compensador

Haciendo uso de los residuos, el SVC es ubicado en la red del sistema, con uso de la medición de señales locales para hacer compensación. Después, la compensación es una modificación dinámica realizada al sistema para satisfacer ciertas especificaciones, en este caso, aumentar el factor de amortiguamiento del valor propio crítico en lo posible y así mejorar las condiciones de estabilidad relativa del SEP.

La Figura 3.1 muestra el sistema con el lazo de conexión de SVC,  $G(s)$  representa el SEP y  $H(s)$  representa el SVC. A partir de las ecuaciones (2.24)-(2.26), la función de transferencia

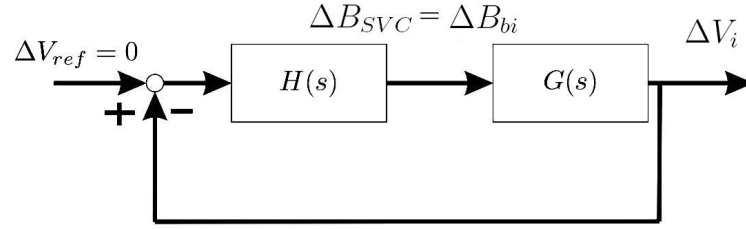


Figura 3.1: Lazo de conexión del SVC

del SVC está representada por

$$H(s) = K \left( \frac{1}{1 + sT_m} \right) \left( \frac{1 + sT_{v1}}{1 + sT_{v2}} \right) \left( \frac{1}{1 + sT_{SVC}} \right) \quad (3.27)$$

$$H(s) = KH_1(s) \quad (3.28)$$

Las constantes de tiempo por el retardo en las mediciones y el circuito de conmutación son  $T_m$  y  $T_{SVC}$  respectivamente, usualmente son tomadas entre  $5 - 10ms$  [19], se considera  $T_m = T_{SVC} = 10ms$ . Las constantes de tiempo  $T_{v1}$  y  $T_{v2}$  corresponden a una etapa de compensación.

### 3.1.4.1 Etapa de Compensación de Atraso

De la función de transferencia del SVC de la ecuación (3.27), los parámetros  $T_{v1}$  y  $T_{v2}$ , son parámetros libres para el diseño de la etapa de compensación de atraso. En el plano complejo, el compensador de atraso tiene un polo en  $s = -1/T_{v2}$  y un cero en  $s = -1/T_{v1}$  como se muestra en la Figura 3.2.

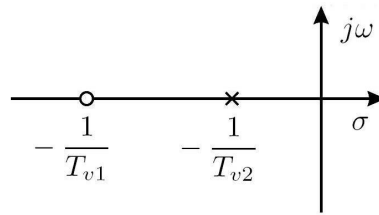


Figura 3.2: Configuración de polo y cero de un compensador de atraso

Así, a partir de la ecuación (3.27), la etapa de compensación de atraso tiene la siguiente función de transferencia,

$$T_{v1} = \alpha_c T_{v2}, \quad (0 < \alpha_c < 1) \quad (3.29)$$

$$\frac{1 + sT_{v1}}{1 + sT_{v2}} = \left( \frac{T_{v1}}{T_{v2}} \right) \left( \frac{s + \frac{1}{T_{v1}}}{s + \frac{1}{T_{v2}}} \right) = \alpha_c \left( \frac{s + \frac{1}{\alpha_c T_{v2}}}{s + \frac{1}{T_{v2}}} \right) \quad (3.30)$$

donde  $\alpha_c$  se denomina factor de atenuación del compensador de atraso. Dado que  $0 < \alpha_c < 1$ , el compensador de atraso tendrá el polo a la derecha del cero, y para valores pequeños de  $\alpha_c$ , el cero se localizará lejos del polo hacia la izquierda del plano complejo. Por lo anterior, la Figura 3.3 muestra el diagrama polar del compensador de atraso, y es posible notar que, para un valor determinado de  $\alpha_c$ , el ángulo formado entre el eje real positivo y la línea tangente dibujada desde el origen hasta el semicírculo, donde  $\omega = \omega_i$  que es la frecuencia del modo de oscilación crítico, proporciona el ángulo de atraso máximo,  $\rho_{com}$ , del compensador.

$$\frac{j\omega\alpha_c T_{v2} + 1}{j\omega T_{v2} + 1}, \quad (0 < \alpha_c < 1) \quad (3.31)$$

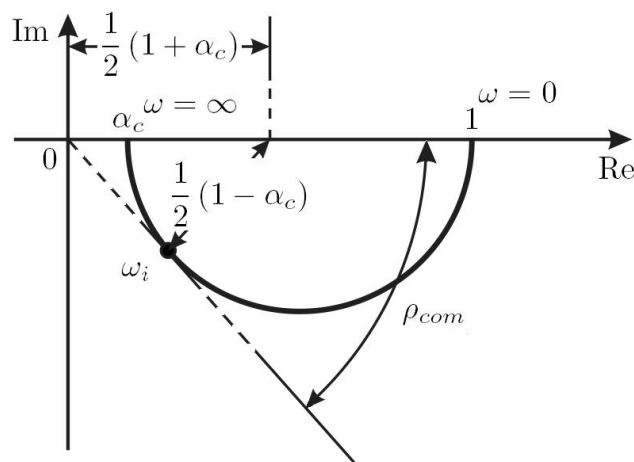


Figura 3.3: Diagrama polar del compensador de atraso

De la Figura 3.3, el ángulo de fase en  $\omega = \omega_i$  es  $\rho_{com}$ , donde la relación entre  $\rho_{com}$  y  $\alpha_c$

está dada por

$$\sin \rho_{com} = \frac{1 - \alpha_c}{1 + \alpha_c} \quad (3.32)$$

de donde,

$$\alpha_c = \frac{1 - \sin \rho_{com}}{1 + \sin \rho_{com}} \quad (3.33)$$

El diagrama de Bode del compensador de atraso cuando  $\alpha_c = 0.1$  se muestra en la Figura 3.4. Las frecuencias esquina para el compensador de atraso son  $\omega = 1/T_{v2}$  y  $\omega = 10/T_{v2}$ .

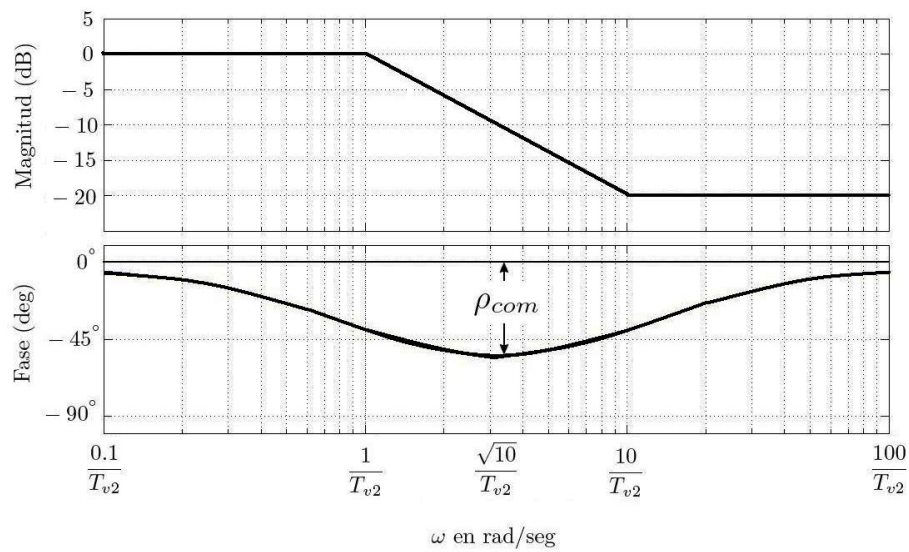


Figura 3.4: Diagrama de Bode del compensador de atraso

A partir del diagrama de Bode,  $\omega_i$  es la media geométrica de las dos frecuencias esquina, o bien

$$\log \omega_i = \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{T_{v2}} + \log \frac{1}{\alpha_c T_{v2}} \right) \quad (3.34)$$

así, si se reduce la Ecuación (3.34) y se despeja  $T_{v2}$

$$T_{v2} = \frac{1}{\omega_i \sqrt{\alpha_c}} \quad (3.35)$$

Así, con el conocimiento de el ángulo de compensación  $\rho_{com}$  que se debe proporcionar, y al obtener el factor de atenuación,  $\alpha_c$ , a partir de las ecuaciones (3.30), (3.33) y (3.35) es posible obtener los parámetros para la etapa de compensación.

Como se presentó en la Sección 3.1.2, además de que el residuo de mayor modulo indica cual es el mejor bus para la ubicación del SVC, el argumento del residuo es el ángulo de compensación necesario para mover el polo a la izquierda del semiplano complejo de manera paralela al eje real cuando es medido desde el eje real positivo, como se muestra en la Figura 3.5.

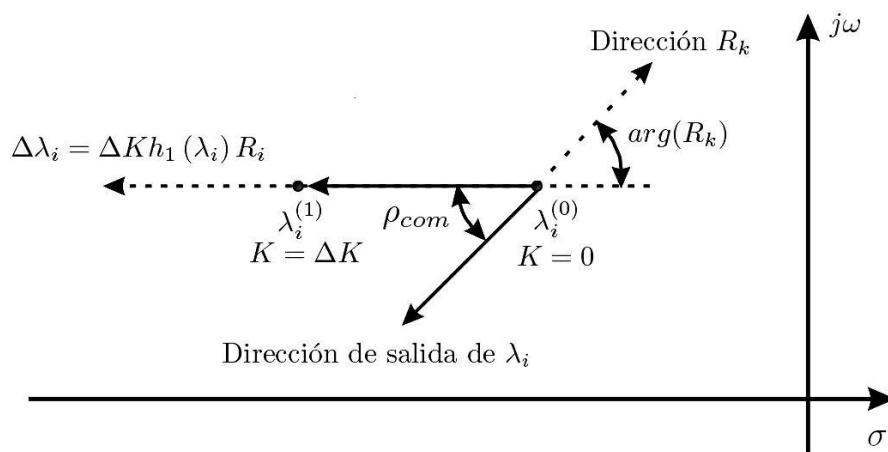


Figura 3.5: Desplazamiento del valor propio crítico por el efecto de compensación del SVC

De acuerdo al diagrama de Bode mostrado en la Figura 3.4, en el caso el ángulo de compensación necesario  $arg(R_k) = \rho_{com} > 90^\circ$ , se necesitará otra etapa de compensación. Según lo anterior y a partir de las ecuaciones (3.30), (3.33) y (3.35), los parámetros de la etapa

de compensación de atraso para el SVC son obtenidos por las siguientes ecuaciones,

$$\rho_{com} = \arg(R_k) \quad (3.36)$$

$$\alpha_c = \frac{1 - \sin\left(\frac{\varphi_{com}}{m_c}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\varphi_{com}}{m_c}\right)} \quad (3.37)$$

$$T_{v2} = \frac{1}{\omega_i \sqrt{\alpha_c}} \quad (3.38)$$

$$T_{v1} = \alpha_c T_{v2} \quad (3.39)$$

donde

$\arg(R_k)$  es el argumento del residuo  $R_k$ ,

$\alpha_c$  se denomina factor de atenuación,

$\omega_i$  es la frecuencia del modo de oscilación en *rad/seg*,

$m_c$  es el numero de etapas de compensación.

Como puede observarse en la Figura 3.4, el compensador de atraso es básicamente un filtro pasa bajas. La función principal del compensador de atraso es proporcionar una atenuación a frecuencias de interés, reduciendo la ganancia a altas frecuencias sin reducirla a bajas frecuencias y un retardo en la fase lo que reduce el margen de fase del SEP. A partir de la ecuación (3.34), con el compensador de atraso se busca reducir la ganancia en la frecuencia de oscilación del modo critico y así aumentar el factor de amortiguamiento del par de valores propios críticos.

### 3.1.4.2 La ganancia $K$

Hasta ahora se ha discutido la manera de obtener la ubicación y la obtención de los parámetros del SVC para un particular punto de operación del SEP. La característica básica de la respuesta transitoria del SEP se relaciona con la localización de los polos en lazo cerrado, que depende del valor de la ganancia del SVC. La ganancia  $K$  de la ecuación (3.27), será obtenida a partir del lugar geométrico de las raíces, considerando obtener el mayor amortiguamiento posible. Cabe señalar que se han hecho otras propuestas para el cálculo de esta ganancia, pero tienen la desventaja de que no consideran el comportamiento de los ceros que, posiblemente, pueden estar en el semiplano complejo derecho [12].



## 3.2 Descomposición en Valores Singulares

En estudios de SEP, el uso de la singularidad de la matriz Jacobiana de flujo de potencia permite conocer puntos máximos de transferencia de potencia en la red. El uso del mínimo valor singular de la matriz Jacobiana de flujo de potencia puede dar un índice relativo entre el punto de operación y el límite de máxima transferencia de potencia.

Para obtener este indicador, la red del SEP es representada por un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales, que describen un balance de potencia en los buses del SEP entre la generación, la carga y el intercambio de potencia en los elementos de transmisión. Estas ecuaciones están descritas de la siguiente manera,

$$P_i(\theta, V) = P_{Gi} - P_{Li} - \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k [G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)] = 0 \quad (3.40)$$

$$Q_i(\theta, V) = Q_{Gi} - Q_{Li} - \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k [G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)] = 0 \quad (3.41)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n_b$ , donde,

$\theta_i$  : ángulo de voltaje,

$V_i$  : amplitud de voltaje,

$P_{Gi}$  : potencia activa porporcionada por la generación,

$Q_{Gi}$  : potencia reactiva porporcionada por la generación,

$P_{Li}$  : potencia activa demandada la carga,

$Q_{Li}$  : potencia reactiva demandada por la carga.

El conjunto de ecuaciones (3.40)-(3.41), es linealizado en un punto de operación, entonces,

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\theta & P_V \\ Q_\theta & Q_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$J = \begin{bmatrix} P_\theta & P_V \\ Q_\theta & Q_V \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

donde la matriz Jacobiana,  $J$ , de la ecuación (3.43), contiene las primeras derivadas parciales de las ecuaciones (3.40)-(3.41) respecto a el ángulo  $\theta$  y la amplitud  $V$  de voltaje en los buses del SEP.

Si la descomposición en valores singulares es aplicada a la matriz Jacobiana,  $J$ , la ecuación (3.43) puede escribirse como

$$J = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_i u_i v_i^T \quad (3.44)$$

donde  $U$  y  $V$  son matrices ortonormales, y los vectores singulares  $u_i$  y  $v_i$  son las columnas de las matrices  $U$  y  $V$ . La matriz  $\Sigma$  contiene los valores singulares,  $\sigma_i$ , no negativos, arreglados en orden descendente a lo largo de su diagonal principal,

$$\Sigma(A) = \text{diag} \{ \sigma_i \}, \quad i = 1, 2, \dots, n_b \quad (3.45)$$

de donde, los valores singulares de la matriz Jacobiana son las raíces cuadradas de los valores propios positivos de  $J^T J$ ,

$$\sigma(J) = \sqrt{\lambda_i(J^T J)} \quad (3.46)$$

Si  $\sigma_i$ , es el  $i$ -ésimo valor singular de  $J$ ,  $u_i$  y  $v_i$  son el  $i$ -ésimo vector singular izquierdo y derecho respectivamente, entonces los vectores singulares pueden relacionarse de la siguiente manera,

$$Jv_i = \sigma_i u_i \quad (3.47)$$

$$u_i J = \sigma_i v_i \quad (3.48)$$

La ecuación (3.42), muestra como son afectadas las potencias activas y reactivas ante variaciones en el ángulo y amplitud de voltaje. Del mismo modo, el efecto en el vector,  $[\Delta\theta; \Delta V]$ , ante cambios en las potencias activas y reactivas,  $[\Delta P; \Delta Q]$ , se puede interpretar como

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = V\Sigma^{-1}U^T \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

entonces, un valor pequeño de  $\sigma_i$ , implicará que, ante pequeñas variaciones en las potencias activas y reactivas, se provocaran grandes cambios en las variables  $[\Delta\theta; \Delta V]$ . En el punto en que  $\sigma_{n_b}(J) = 0$ , se puede interpretar como una sensibilidad infinita en  $[\Delta\theta; \Delta V]$  ante variaciones

de potencia  $[\Delta P; \Delta Q]$ .

La descomposición en valores singulares proporciona información de las direcciones de entrada y salida con máxima y mínima amplificación. Para la ecuación (3.49), cada vector columna de  $U$  y  $V$  representa una dirección de entrada y salida respectivamente. Los vectores singulares  $u_{n_b}$  y  $v_{n_b}$ , asociados a  $\sigma_{n_b}$ , indicarán la sensibilidad en las variables  $[\Delta P; \Delta Q]$  y  $[\Delta\theta; \Delta V]$ , siendo que

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = u_{n_b} \quad (3.50)$$

indicará la dirección más sensitiva de cambios de inyección de potencia activa y reactiva, también,

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = v_{n_b} \quad (3.51)$$

indicará la sensibilidad de ángulo y amplitud en los voltajes de bus, y el mínimo valor singular  $\sigma_{n_b}$  da una medida relativa de la proximidad del límite de máxima transferencia de potencia en la red.

Entre los factores que afectan la capacidad de transmisión de energía eléctrica, está el del incremento en los niveles de flujo de potencia reactiva en las líneas de transmisión, que aumenta la caída de tensión en la red del SEP. Para hacer un análisis de la sensibilidad entre las relaciones  $V - Q$ , las variaciones en la potencia activa  $\Delta P$  y en los ángulos de voltaje en los buses  $\Delta\theta$  son considerados cero. Por lo anterior, de la ecuación (3.42), las relaciones entre cambios de potencia reactiva y amplitudes de voltaje pueden ser considerados por la submatriz  $Q_V$

$$\Delta Q = Q_V \Delta V \quad (3.52)$$

Sin embargo, el acoplamiento entre las variaciones de potencia reactiva  $\Delta Q$  y los ángulos de voltaje de bus  $\Delta\theta$  puede ser importante, la matriz  $Q_s$  es incluida como otra opción para este

análisis. Entnces, de la ecuación (3.42),

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\theta & P_V \\ Q_\theta & Q_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\Delta Q = (Q_V - Q_\theta P_\theta^{-1} P_V) \Delta V := Q_s \Delta V \quad (3.54)$$

La matriz  $Q_s$  permite relacionar directamente las variaciones de amplitud de voltaje y las variaciones de potencia reactiva. Con la descomposición en valores singulares de las matrices derivadas de la matriz Jacobiana, permiten hacer un análisis de sensibilidad de cómo se afectan las amplitudes de voltaje en los buses  $\Delta V$  ante variaciones de potencia reactiva en la red  $\Delta Q$ . Esta parte del análisis es hecha con el objetivo de determinar perturbaciones que afectan de manera significativa el desempeño del SEP alrededor de un punto de operación.

# Capítulo 4

## Caso de Estudio

Se considera el sistema de 3 máquinas y 9 buses de la Figura 4.1 [1], la potencia base es de 100 MVA y la frecuencia del sistema es de 60 Hz. En este capítulo, se presenta el análisis modal de este sistema en un particular punto de operación, se hace la identificación del modo de oscilación crítico y por los residuos asociados al modo crítico se identifica el mejor bus del SEP para la conexión del SVC, además de la obtención de los parámetros del SVC. También, a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz Jacobiana de flujo de carga se obtienen perturbaciones en la dirección más sensible para hacer pruebas al SEP con el SVC instalado.

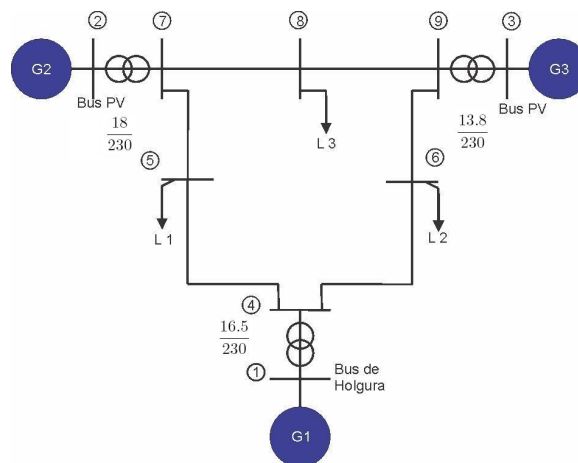


Figura 4.1: Diagrama unifilar del sistema de 3 máquinas y 9 buses

Los parámetros de las máquinas síncronas y sistemas de excitación están enlistados en la Tabla 4.1. Los valores de los parámetros del sistema de transmisión están enlistados en la Tabla 4.2.

Datos de Máquina			
Parámetros	G1	G2	G3
H(seg)	23.64	6.4	3.01
$X_d$ (p.u.)	0.146	0.8958	1.3125
$X'_d$ (p.u.)	0.0608	0.1198	0.1813
$X_q$ (p.u.)	0.0969	0.8645	1.2578
$X'_q$ (p.u.)	0.0969	0.1969	0.25
$T'_{do}$ (p.u.)	8.96	6.0	5.89
$T''_{do}$ (p.u.)	0.31	0.535	0.6
Datos de Excitación			
Parámetros	G1	G2	G3
$K_A$	20	20	20
$T_A$ (seg)	0.2	0.2	0.2
$K_E$	1.0	1.0	1.0
$T_E$ (seg)	0.314	0.314	0.314
$K_F$	0.063	0.063	0.063
$T_f$ (seg)	0.35	0.35	0.35
$S_{Ei}(E_{fdi}) = 0.0039e^{1.555E_{fdi}}, i = 1, 2, 3$			

Tabla 4.1: Parámetros de máquinas síncronas y sistema de excitación (p.u.)

Desde el bus	A el bus	Resistencia serie (p.u.)	Reactancia serie (p.u.)	Conductancia derivación (p.u.)	Suceptancia en derivación (p.u.)
1	4	0	0.0576	0	0
2	7	0	0.0625	0	0
3	9	0	0.0586	0	0
4	5	0.0100	0.0850	0	0.176
4	6	0.0170	0.0920	0	0.158
5	7	0.0320	0.1610	0	0.306
6	9	0.0390	0.1700	0	0.358
7	8	0.0085	0.0720	0	0.149
8	9	0.0119	0.1008	0	0.209

Tabla 4.2: Datos del sistema de transmisión

Los valores de las variables de la red, ángulo y amplitud de voltaje,  $\theta$  y  $V$ , potencias

activas y reactivas en la generación,  $P_G$  y  $Q_G$ , para la carga instalada,  $P_L$  y  $Q_L$ , son obtenidos de la solución de flujos de potencia y están enlistados en la Tabla 4.3.

N°BUS	Tipo	Voltaje(pu)	$P_G$ (pu)	$Q_G$ (pu)	$-P_l$ (pu)	$-Q_l$ (pu)
1	(holgura)	1.0400 $\angle 0^\circ$	2.3099	0.3728	0	0
2	(PV)	1.0250 $\angle -11.3969^\circ$	0.6	0.0291	0	0
3	(PV)	1.0250 $\angle -12.8217^\circ$	0.28	-0.0591	0	0
4	(PQ)	1.0273 $\angle -7.1536^\circ$	0	0	0	0
5	(PQ)	1.0000 $\angle -13.0796^\circ$	0	0	1.25	0.5
6	(PQ)	1.0133 $\angle -12.3809^\circ$	0	0	0.9	0.3
7	(PQ)	1.0239 $\angle -12.3809^\circ$	0	0	0	0
8	(PQ)	1.0132 $\angle -15.8274^\circ$	0	0	1.00	0.35
9	(PQ)	1.0285 $\angle -15.8274^\circ$	0	0	0	0

Tabla 4.3: Solución de flujos de potencia (p.u.)

Los valores de equilibrio para los estados de las máquinas síncronas son obtenidos sustituyendo los valores de equilibrio de las variables de red de los buses *PV* y de *holgura* de la Tabla 4.3, y mediante la función *fsolve* que proporciona MATLAB se obtienen los valores de equilibrio de las ecuaciones (2.4)-(2.10) para las tres máquinas síncronas, los resultados están enlistados en la Tabla 4.4.

Estado	$x_0$	Estado	$x_0$	Estado	$x_0$
$\delta_1$	11.3216°	$\delta_2$	14.3469°	$\delta_3$	6.9442°
$\omega_1$	376.9911	$\omega_2$	376.9911	$\omega_3$	376.9911
$E'_{q1}$	1.0676	$E'_{q2}$	0.9568	$E'_{q3}$	0.9733
$E'_{d1}$	0	$E'_{d2}$	0.3438	$E'_{d3}$	0.2777
$E'_{fd1}$	1.1348	$E'_{fd2}$	1.1739	$E'_{fd3}$	1.0799
$V_{R1}$	1.1606	$V_{R2}$	1.2023	$V_{R3}$	1.1026
$R_{F1}$	0.2043	$R_{F2}$	0.2113	$R_{F3}$	0.1903

Tabla 4.4: Valores de equilibrio (p.u.)

## 4.1 Resultados del análisis modal

Una vez obtenido el punto de operación para el SEP, se obtienen las matrices del modelo linealizado representado por las ecuaciones (2.27)-(2.30), enseguida, se obtienen las matrices de estado  $A$ , entrada  $B$ , salida  $C$  y de transmisión directa  $D$  de las ecuaciones (2.31)-(2.32). Los valores propios de la matriz de estado, están enlistados en la Tabla 4.5.

$i$	$\lambda$	$f$ (Hz)	$\zeta$
1,2	$-1.7426 \pm 12.1592i$	1.9352	0.1419
3,4	$-1.0603 \pm 8.8322i$	1.4057	0.1192
5,6	$-0.7358 \pm 9.0347i$	1.4379	0.0812
7,8	$-0.8433 \pm 8.9614i$	1.4263	0.0937
9	-9.1695	0	1.0000
10	-9.6033	0	1.0000
11	-9.4424	0	1.0000
12,13	$-0.1768 \pm 4.3946i$	0.6994	0.0402
14	-3.0035	0	1.0000
15	-2.2892	0	1.0000
16	-0.5180	0	1.0000
17	-0.1174	0	1.0000
18	-0.3284	0	1.0000
19	-0.2419	0	1.0000
20	0	0	-
21	-3.2258	0	1.0000

Tabla 4.5: Valores propios

De la Tabla 4.5, el valor propio localizado en el origen es el resultado de tomar el ángulo de rotor de la máquina síncrona uno como referencia, como se explico en la Sección 2.3, después, a partir de los valores propios se puede concluir que el SEP se encuentra operando en un punto de equilibrio asintóticamente estable, dado que todos los valores propios se localizan en el semiplano izquierdo complejo y se tienen valores propios complejos conjugados. El par de valores propios  $-0.1768 \pm 4.3946i$  con frecuencia de oscilación  $f=0.6994$ Hz cuentan con el menor factor de amortiguamiento  $\zeta=0.0402$ , por lo tanto, son los valores propios críticos.

Los factores de participación asociados al modo crítico están enlistados en la Tabla 4.6, de los cuales se puede apreciar que para este punto de operación se presenta el tipo de oscilación



local, ya que el modo de oscilación crítico tienen mayor participación en los estados  $\delta_2$  y  $\omega_2$  de la máquina síncrona número dos que en el resto de los estados del SEP.

Estado	Factor de participación Magnitud	Factor de participación $\angle$ (deg)
$\delta_1$	0	$0^\circ$
$\omega_1$	0.0556	$1.1994^\circ$
$E'_{q1}$	0.0005	$139.7965^\circ$
$E'_{d1}$	0	$0^\circ$
$E'_{fd1}$	0.0002	$-74.8492^\circ$
$V_{R1}$	0.0001	$-63.4034^\circ$
$R_{F1}$	0.0005	$-54.4275^\circ$
$\delta_2$	0.4408	$-2.0071^\circ$
$\omega_2$	0.3965	$0.3755^\circ$
$E'_{q2}$	0.0111	$83.2083^\circ$
$E'_{d2}$	0.0093	$108.3179^\circ$
$E'_{fd2}$	0.0016	$-103.1889^\circ$
$V_{R2}$	0.0013	$-91.7432^\circ$
$R_{F2}$	0.0050	$-82.7672^\circ$
$\delta_3$	0.0599	$-1.5378^\circ$
$\omega_3$	0.0490	$2.1257^\circ$
$E'_{q3}$	0.0002	$26.0541^\circ$
$E'_{d3}$	0.0014	$101.3768^\circ$
$E'_{fd3}$	0.0004	$-102.6615^\circ$
$V_{R3}$	0.0003	$-91.2157^\circ$
$R_{F3}$	0.0010	$-82.2398^\circ$

Tabla 4.6: Factores de participación asociados al modo crítico

En la Tabla 4.7 se muestran los valores de los residuos asociados al modo crítico para las funciones de transferencia  $\Delta V_i/\Delta B_{bi}$ . De acuerdo a los resultados obtenidos a partir de la ecuación (3.23), el residuo asociado al bus 2 es el de mayor valor absoluto, siendo la mejor ubicación del SVC para realizar compensación en los buses del SEP. Además, de la fase del residuo se obtiene la cantidad de fase que debe proporcionar el compensador de atraso,  $\rho_{com} = 64.8470^\circ$ , y se necesitara una etapa de compensación.

De los resultados obtenidos en la Tabla 4.7, de las magnitudes de los residuos enlistados se puede concluir que en los buses 2 y 8 es posible obtener la mayor compensación para el SEP mediante el SVC y con una etapa de compensación, el bus 8 con la segunda carga con mayor

No. de BUS Ubicación	Residuo  ·	Residuo $\angle$ (deg)
1	0.0343	-79.3245°
2	0.1045	64.8470°
3	0.0601	69.4255°
4	0.0244	-82.1869°
5	0.0145	57.0212°
6	0.0583	-92.2844°
7	0.0601	97.1076°
8	0.0889	67.2379°
9	0.0238	93.7060°

Tabla 4.7: Residuos

demanda de potencia. Los buses donde se tienen menores posibilidades de compensación son los buses 9 y 5, este último, casualmente tiene conectada la carga con mayor demanda de potencia activa y reactiva en el SEP.

Una vez obtenida la ubicación del SVC en la red y calcular mediante las ecuaciones (3.36)-(3.39) los parámetros del compensador con los resultados de la Tabla 4.7, es posible construir el lugar geométrico de de las raíces, que se muestra en la Figura 4.2, de donde es posible notar el desplazamiento del polo por la acción de compensación del SVC. Como se discutió en la Sección 3.1.4.2, la ganancia del compensador  $K$ , de la Ecuación (3.27), es seleccionada a partir de considerar el lugar geométrico de las raíces y obtener el mayor amortiguamiento posible para el SEP. Las líneas radiales indican el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada.

Los valores de los parámetros y ganancia para el compensador SVC cuando es ubicado en el bus 2 del SEP, se muestran en la Tabla 4.8.

Parametro	K	$T_m$	$T_{SVC}$	$T_{v1}$	$T_{v2}$
Valor	21.6	10 ms	10 ms	0.0508 s	1.0200 s

Tabla 4.8: Parametros de SVC

Con el SVC conectado al bus 2 del SEP, la Tabla 4.9, muestra la comparación de valores propios, frecuencia de oscilación y factores de amortiguamiento del SEP.

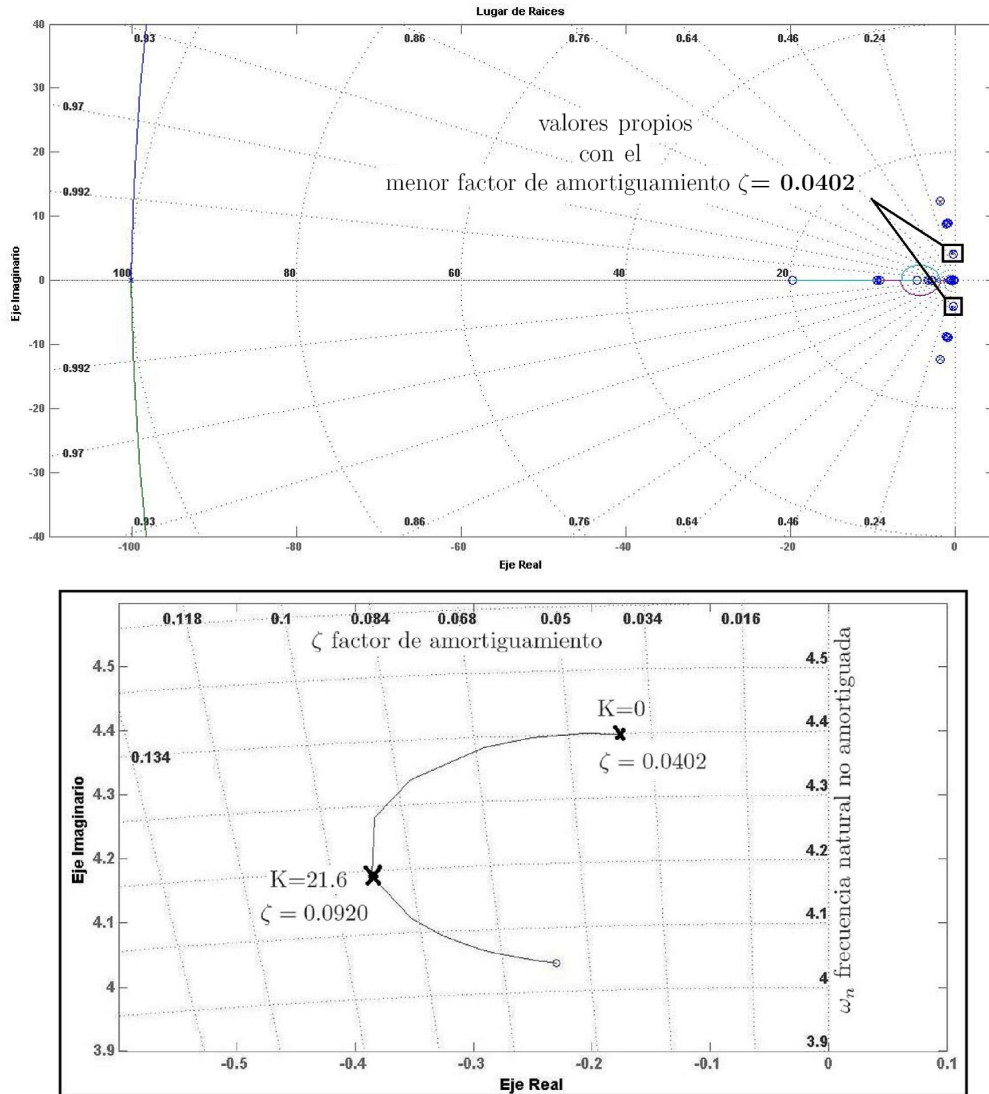


Figura 4.2: Lugar geométrico del valor propio crítico

El coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  es aumentado de 0.0402 a 0.0920, con los parámetros, ganancia y ubicación obtenida para por el método de residuos, y se mejora el amortiguamiento de oscilaciones en el SEP. Con las simulaciones de las siguientes secciones se comprobarán los resultados hasta ahora obtenidos.

El diagrama de Bode del SEP, el SVC y el SEP con el SVC instalado en el bus 2 está mostrado en la Figura 4.3, de donde es posible concluir que:

$\lambda$	$f$	$\zeta$	$\lambda$ con SVC	$f$ con SVC	$\zeta$ con SVC
$-1.7426 \pm 12.1592i$	1.9352	0.1419	$-97.6952 \pm 462232i$	7.3567	0.9039
$-1.0603 \pm 8.8322i$	1.4057	0.1192	$-1.6530 \pm 12.2467i$	1.9491	0.1419
$-0.7358 \pm 9.0347i$	1.4379	0.0812	$-0.8463 \pm 9.0903i$	1.4468	0.0927
$-0.8433 \pm 8.9614i$	1.4263	0.0937	$-1.0674 \pm 8.8367i$	1.4064	0.1199
-9.1695	0	1.0000	$-0.8429 \pm 8.9618i$	1.4263	0.0936
-9.6033	0	1.0000	-9.1746	0	1.0000
-9.4424	0	1.0000	-9.4423	0	1.0000
-3.0035	0	1	-9.6729	0	1.0000
$-0.1768 \pm 4.3946i$	0.6994	0.0402	$-0.3856 \pm 4.1733i$	0.6642	0.0920
-2.2892	0	1.0000	$-3.7121 \pm 2.4184i$	0.3849	0.8379
-0.5180	0	1.0000	-2.7661	0	1.0000
-0.1174	0	1.0000	-0.1140	0	1.0000
-0.3284	0	1.0000	-0.5263	0	1.0000
-0.2419	0	1.0000	-0.4683	0	1.0000
0	0	-	-0.2419	0	1.0000
-3.2258	0	1.0000	0	0	-
-	-	-	-3.2258	0	1.0000

Tabla 4.9: Valores Propios

- El diagrama de Bode del SEP muestra un valor pico de resonancia en la frecuencia de oscilación crítica  $\omega_i = 4.3946\text{rad/seg}$ , que corresponde al par de polos con bajo amortiguamiento  $\zeta = 0.0402$ , el SEP sin compensar tiene un margen de fase y de ganancia infinito.
- El SVC proporciona una atenuación en la frecuencia de interés de 13 dB, además de proporcionar un atraso en la fase de  $64.8470^\circ$ .
- El SEP compensado la ganancia en la frecuencia de interés es reducida por el efecto de compensación del SVC y el efecto de atraso de fase por la compensación no implica problema alguno en la estabilidad absoluta del SEP.

## 4.2 Descomposición en Valores Singulares

Para este punto de operación se hace la descomposición en valores singulares de la matriz Jacobiana, las direcciones de variación de potencia que provocarán mayor/menor variación en

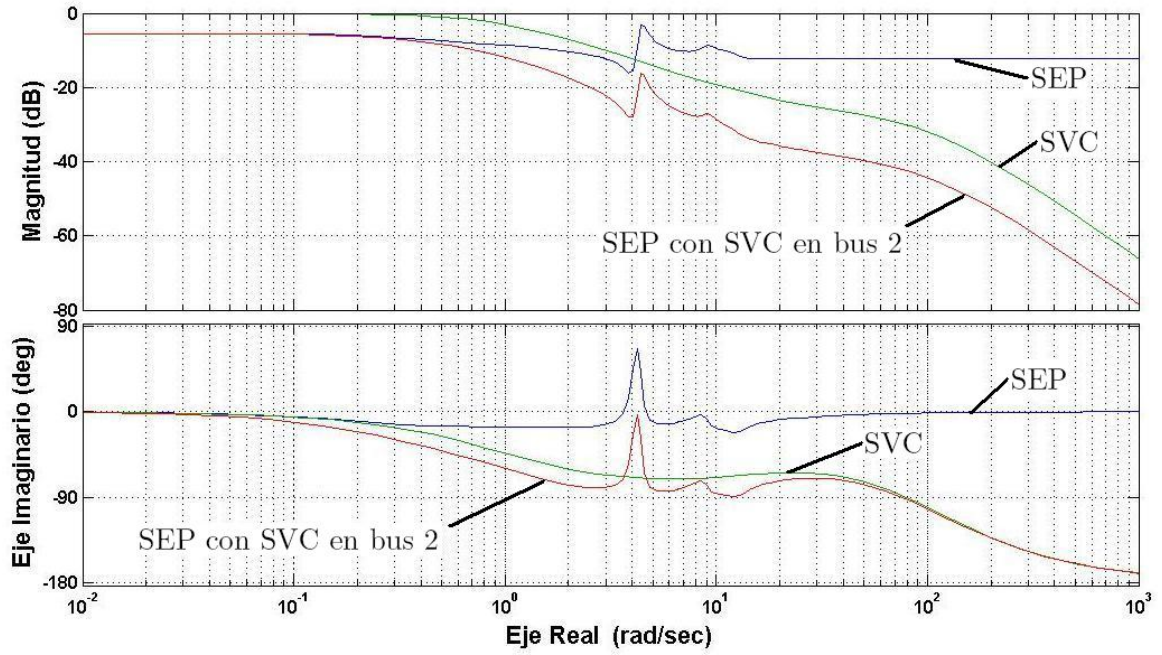


Figura 4.3: Diagrama de Bode del SEP con el SVC

amplitudes y ángulos de voltaje de bus se muestran en la Tabla 4.10.

$\bar{\sigma}$	$\overline{\Delta PQ}$	$\overline{\Delta \theta V}$	$\underline{\sigma}$	$\underline{\Delta PQ}$	$\underline{\Delta \theta V}$
20.4104	-0.5253	9.23e-017	6.0834	0.0989	1.58e-016
	0.1002	-5.81e-019		0.678	9.36e-017
	-0.4380	0.5595		-0.1482	0.0118
	0.1035	-0.019		-0.7102	-0.1312
	-0.7053	-0.011		-0.0004	0.0978
	0.1186	0.6648		-0.0644	0.0084
		-0.0179		0	0.0106
		0.4914		0	-0.0137
		0.0202		0	-0.0417
		0.0297		0	-0.076
		0.0176		0	0.0562
		-0.0035		0	-0.5541
		0.0321		0	0.0037
		-0.0082		0	0.8093

Tabla 4.10: Direcciones sensitivas

De la SVD de la matriz Jacobiana se tiene que  $\underline{\Delta PQ}$  da la dirección de las potencias en los buses de carga 5, 6 y 7 ordenadas en forma activa y reactiva,

$$\Delta PQ = [\Delta P_{L5} \ \Delta Q_{L5} \ \Delta P_{L6} \ \Delta Q_{L6} \ \Delta P_{L8} \ \Delta Q_{L8}]^T \quad (4.1)$$

En la siguiente sección se muestran los distintos comportamientos del sistema cuando es sujeto a perturbaciones. Estas son variaciones pequeñas de la potencia en los buses de carga en la dirección asociada al mínimo valor singular. De manera adicional, se indican las ventajas y beneficios del uso del SVC en el amortiguamiento de oscilaciones, regulación de voltaje, máxima transferencia de potencia y estabilidad dinámica.

### 4.3 Simulaciones

En esta sección se presentan graficas de los resultados de simulación del modelo lineal del SEP y comprobar que el SVC cumple con el amortiguamiento de oscilaciones electromecánicas. Se presentan dos diferentes simulaciones y se enlistan enseguida.

1. Comparación entre la ubicación de SVC en el bus 5 y el bus 2. Se hará en tres pasos:
  - (a) El SEP es sometido una perturbación tipo pulso de 1 seg. de duración, que consiste en la variación del 25% en las potencias activa y reactiva en el bus 5, donde la carga instalada es de  $P_{L5} = 1.25p.u.$  y  $Q_{L5} = 0.5p.u.$ .
  - (b) Enseguida se somete al SEP a la misma perturbación con el SVC ubicado en el bus 5 y se hace el análisis del resultado de compensación por parte del SVC.
  - (c) Con la misma perturbación, el SVC ubicado en el bus 2 y se hace la comparación con los puntos anteriores.
2. SVC en el bus 2 y se perturba en la dirección más sensitiva  $\underline{\Delta PQ}$ . El SEP es sometido el SEP es una perturbación tipo rampa durante 1 seg en la dirección de mayor sensibilidad, llegando a un incremento del 5 %, para despues desvanecer en 1 seg. hasta regresar al valor de equilibrio. El SVC es ubicado en el bus 2 y el SEP es sometido a la misma perturbación.

## Comparación entre la ubicación de SVC en el bus 5 y el bus 2.

Usando el método descrito en la Sección 3.1, los parámetros del SVC para la ubicación en el bus 5 se presentan en la Tabla 4.11, los parámetros de SVC cuando se conecta en el bus 2, se enlistan en la Tabla 4.8.

Parametro	K	$T_m$	$T_{SVC}$	$T_{v1}$	$T_{v2}$
Valor	45.2	10 ms	10 ms	0.0674 s	0.7687 s

Tabla 4.11: Parametros del SVC

La ganancia seleccionada para el SVC cuando se ubica en el bus 5, es tal que el SVC proporciona la mayor compensación posible en ese bus. La Figura 4.4, muestra la perturbación a la que es sometido el SEP,  $\Delta P_{L5} = -0.3125$  p.u. y  $\Delta Q_{L5} = -0.125$  p.u., durante 1 seg.

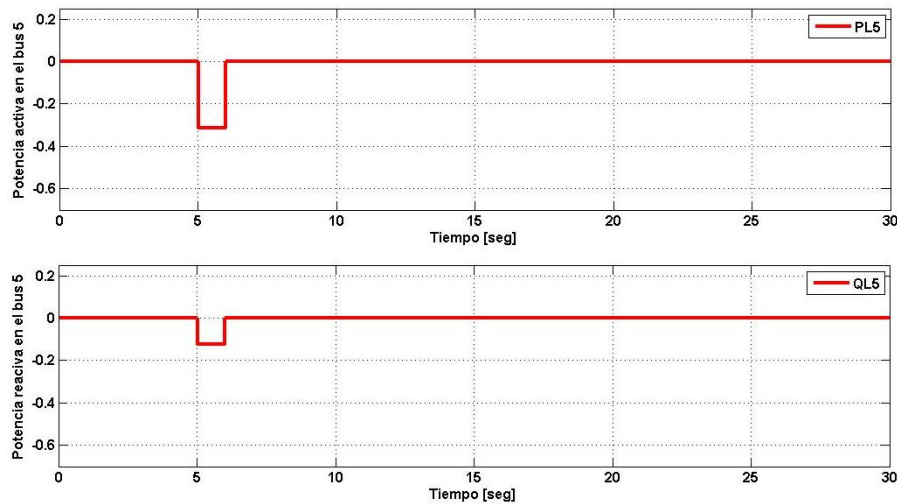


Figura 4.4: Variación de Potencia en el Bus 5

Los resultados muestran una compensación casi nula por parte del SVC cuando es instalado en el bus 5, donde se presenta la perturbación. Con la ubicación del SVC en el bus 2, se obtiene una compensación muy notoria, como lo muestran las Figuras 4.5 y 4.6, donde se grafican las variaciones angulares de rotor de las máquinas síncronas.

Más aun, en las variaciones de velocidad angular que se muestran en las Figuras 4.7 y 4.8, donde la compensación proporcionada por el SVC desde el bus 2 reduce satisfactoriamente las

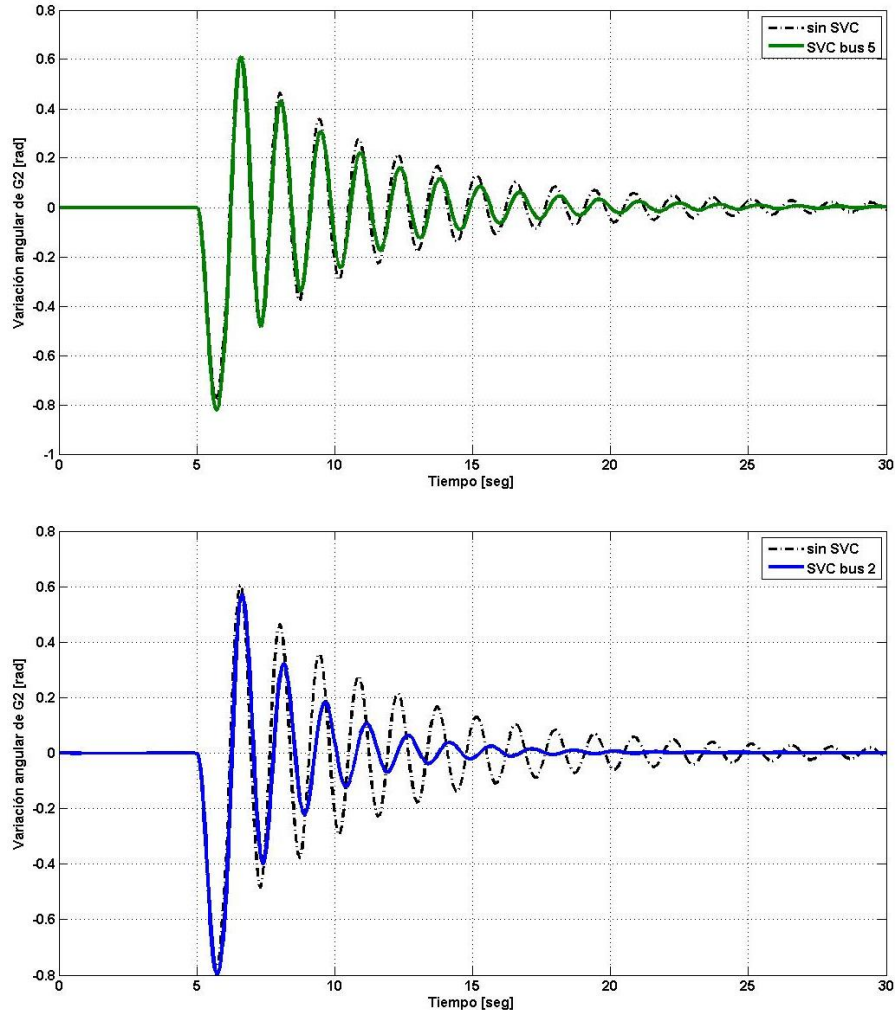


Figura 4.5: Ángulo de rotor de Máquina Síncrona 2

oscilaciones.

La diferencia entre las variaciones de susceptancia cuando se ubica el SVC en el bus 5 y bus 2 se muestra en la Figura 4.9. Es notable que la compensación proporcionada en el bus 2 es mucho mayor, esta diferencia entre la variación de susceptancia que proporciona el SVC, podría indicar que en el bus 2 se necesitará un compensador con mayor capacidad en comparación del bus 5.

De las Figuras 4.10-4.18, en ambas ubicaciones se aprecia que la regulación de voltaje en



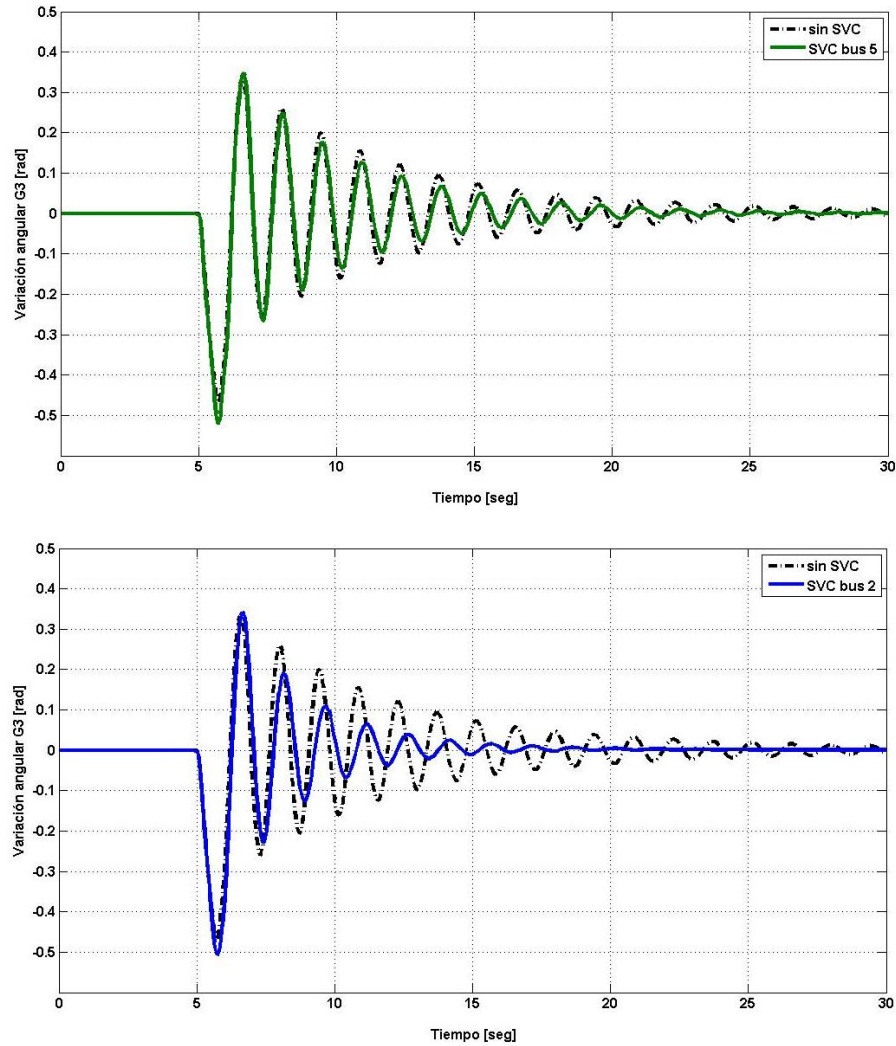


Figura 4.6: Ángulo de rotor de Máquina Síncrona 3

todos los buses del SEP no es la que se esperaba. En ambos casos de ubicación del SVC, en los buses 1, 4, 5 y 6, aparecen sobresaltos de voltaje durante la perturbación por el efecto de la compensación, más aun cuando el SVC se ubica en el bus 2. El caso mas crítico el del bus 6, donde el sobresalto se duplica por el efecto de la compensación en ambas ubicaciones, Figura 4.15.

Las simulaciones demostraron los resultados numéricos obtenidos en las Tablas 4.7 y 4.9, con la conexión del SVC en el bus 2 es posible obtener la mayor compensación. En ambos

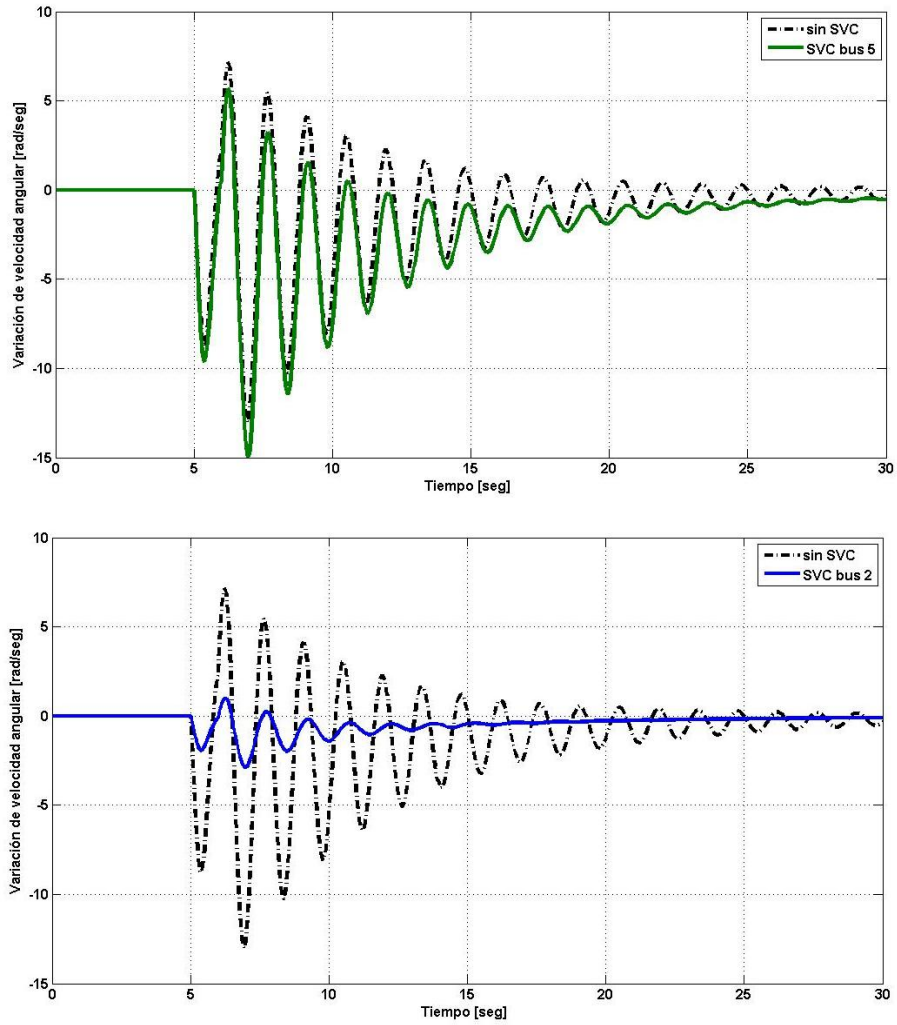


Figura 4.7: Variación angular de Máquina Síncrona 2

casos de regulación de voltaje los resultados no fueron los esperados.

### SVC en el bus 2 y se perturba en la dirección más sensitiva $\Delta PQ$

El SEP se sometido a una perturbacion en la dirección obtenida de la descomposición en valores singulares de la matriz Jacibiana de flujo de potencia. La Figura 4.19, muestra la perturbación

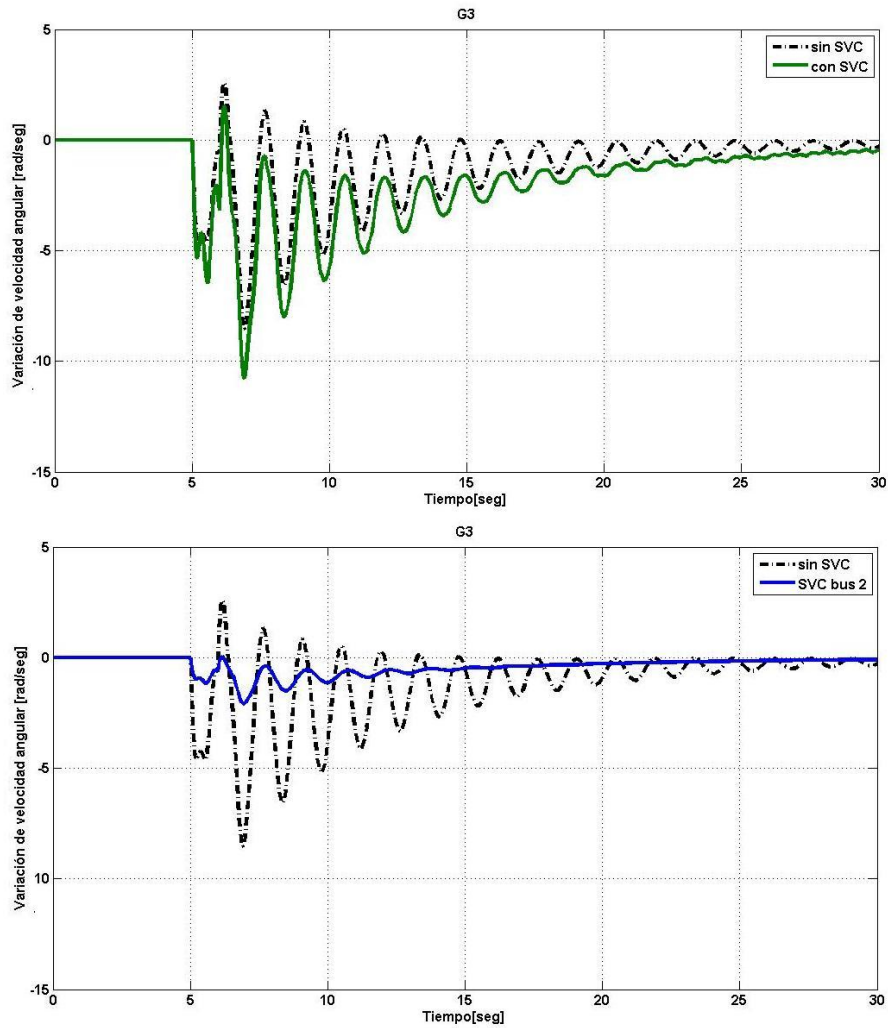


Figura 4.8: Variación angular de Máquina Síncrona 3

$\Delta PQ$ , durante 2 seg. El SVC es ubicado en el bus 2, y los parametros son los mostrados en la Tabla 4.8.

La perturbación provoca gran variación del valor de equilibrio. Con la ubicación del SVC en el bus 2, se obtiene una compensación muy notoria, como lo muestran la Figura 4.20, donde las variaciones angulares de rotor son amortiguadas por el efecto de compensación del SVC.

Las variaciones de velocidad angular que se muestran en las Figuras 4.21, el SVC compensa de manera satisfactoria.

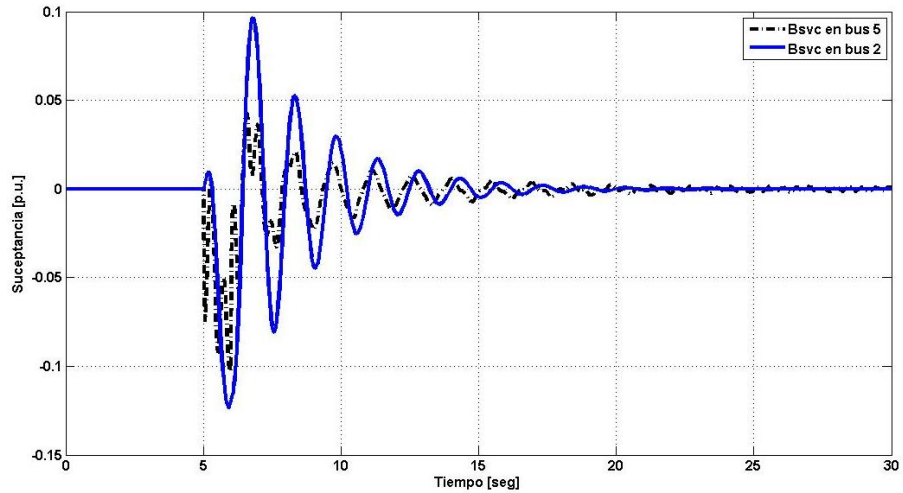


Figura 4.9: Variación de susceptancia del SVC

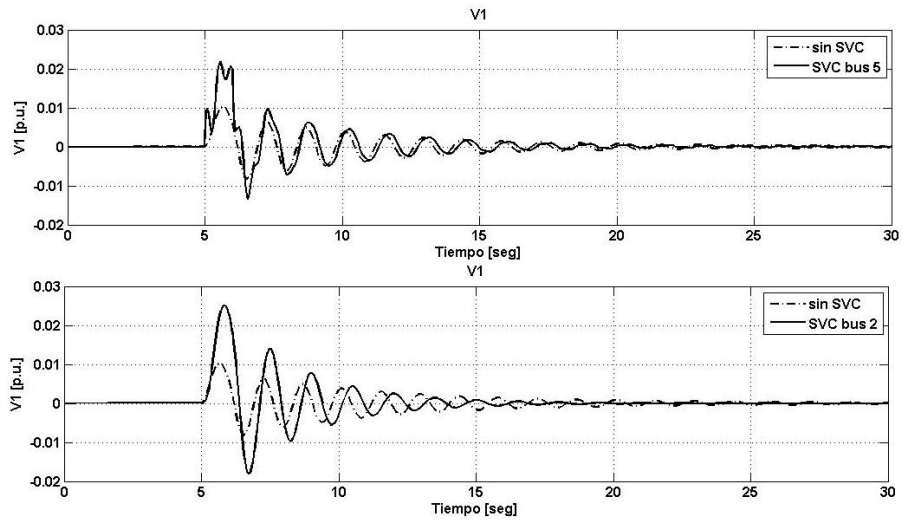


Figura 4.10: Variación de voltaje en el bus 1

La variación de la susceptancia se muestra en la Figura 4.22, se aprecia una gran variación de susceptancia del SVC, en el análisis que aquí se realiza no se establece el límite de variación de susceptancia.

De las Figuras 4.23-4.18, la regulación de voltaje se puede considerar que el SVC proporciona una ligera compensación. A diferencia de la perturbación que se aplicó al SEP, en esta

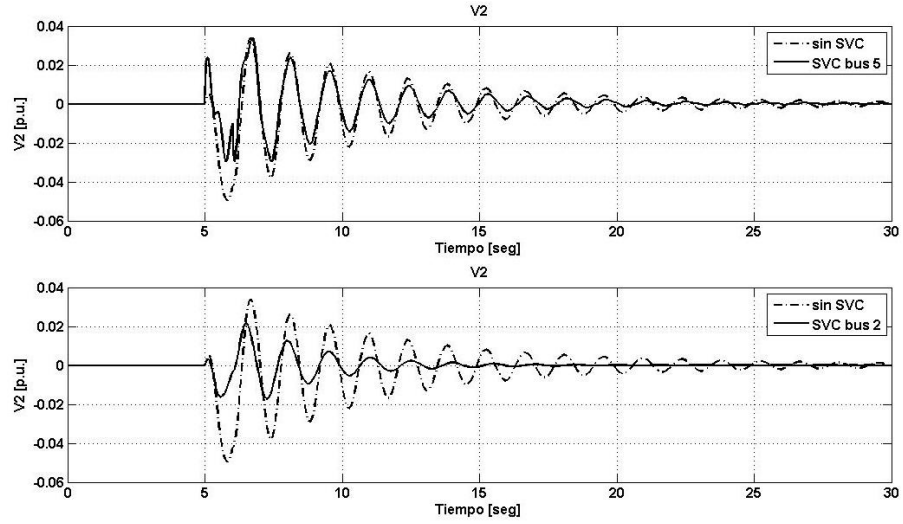


Figura 4.11: Variación de voltaje en el bus 2

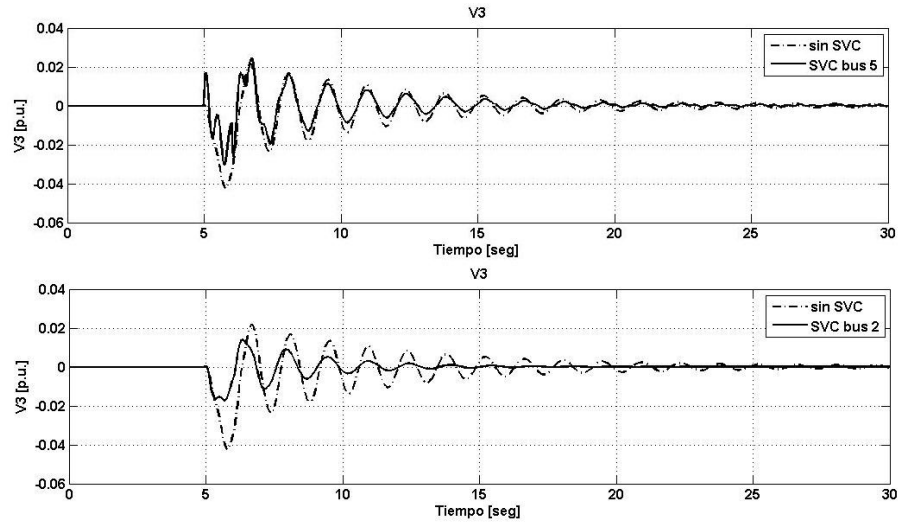


Figura 4.12: Variación de voltaje en el bus 3

ocasión la perturbación es más severa. Solo en el caso del bus 1, 4 y 5 se presenta un sobresalto mayor que cuando no se conectaba al SVC.

Las pruebas realizadas en la simulaciones comprobaron los resultados numéricos de la Tabla 4.9. Mediante los residuos de obtiene la mejor ubicación del SVC en el SEP con el fin

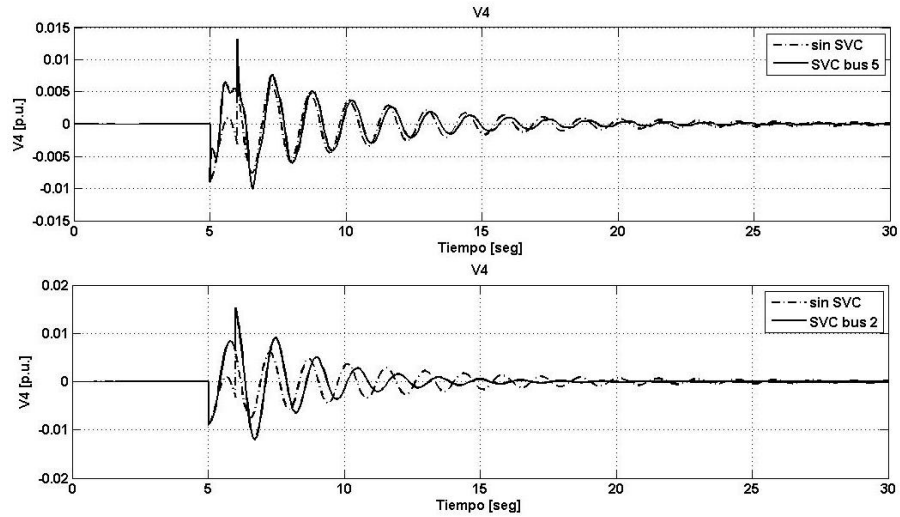


Figura 4.13: Variación de voltaje en el bus 4

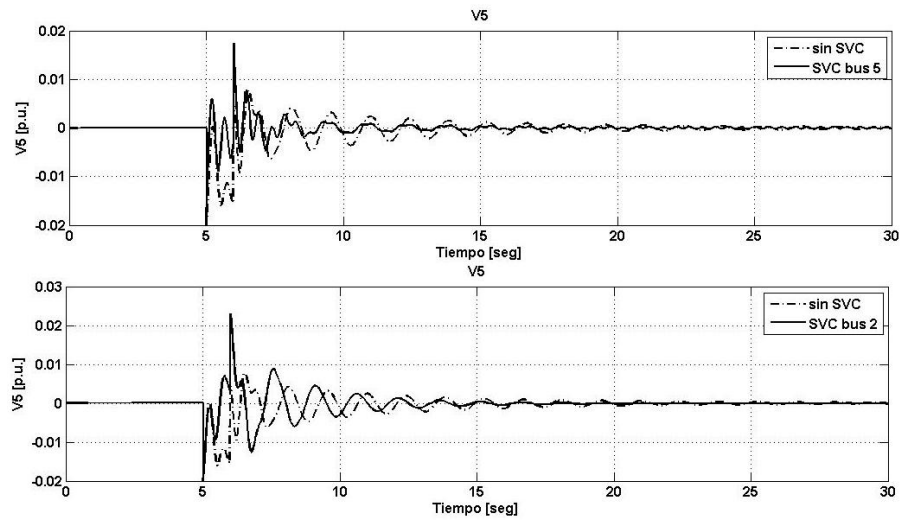


Figura 4.14: Variación de voltaje en el bus 5

de aumentar el amortiguamiento de oscilaciones y así mejorar las condiciones de estabilidad relativa del sistema. Con la SVD se obtuvieron perturbaciones con las cuales se prueba la capacidad de compensación del SVC.

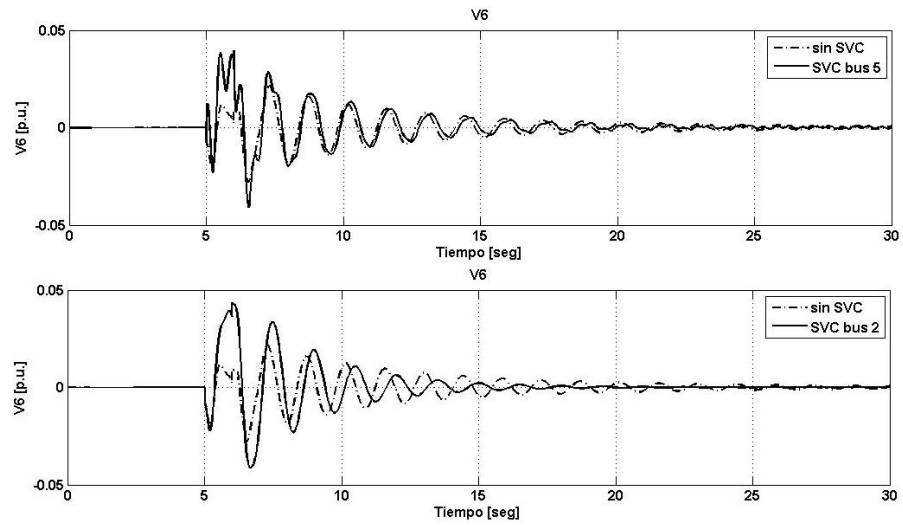


Figura 4.15: Variación de voltaje en el bus 6

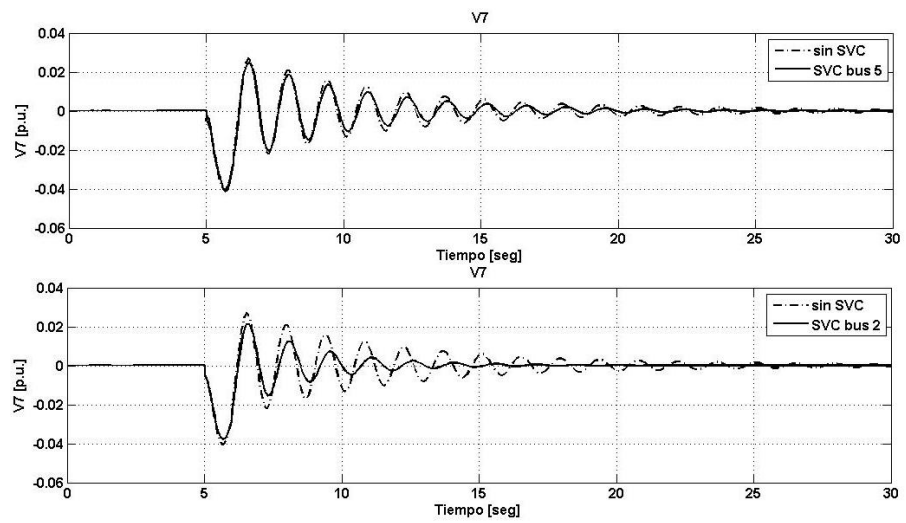


Figura 4.16: Variación de voltaje en el bus 7

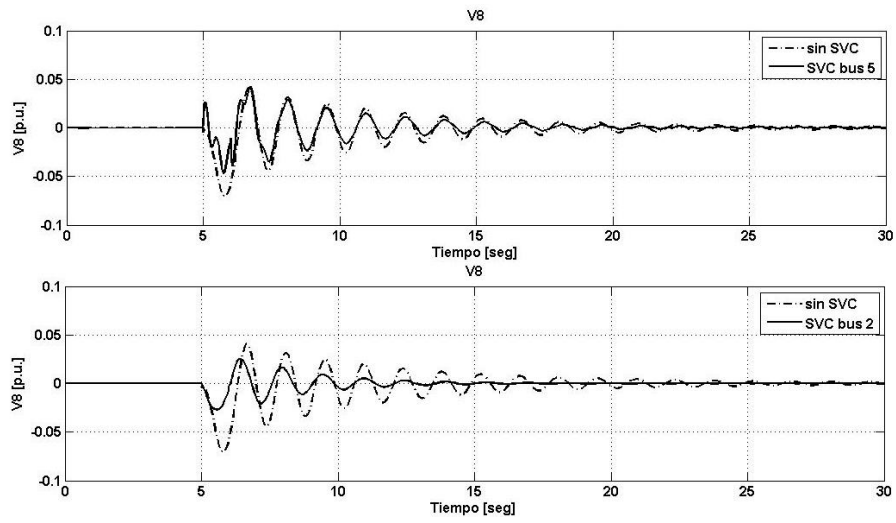


Figura 4.17: Variación de voltaje en el bus 8

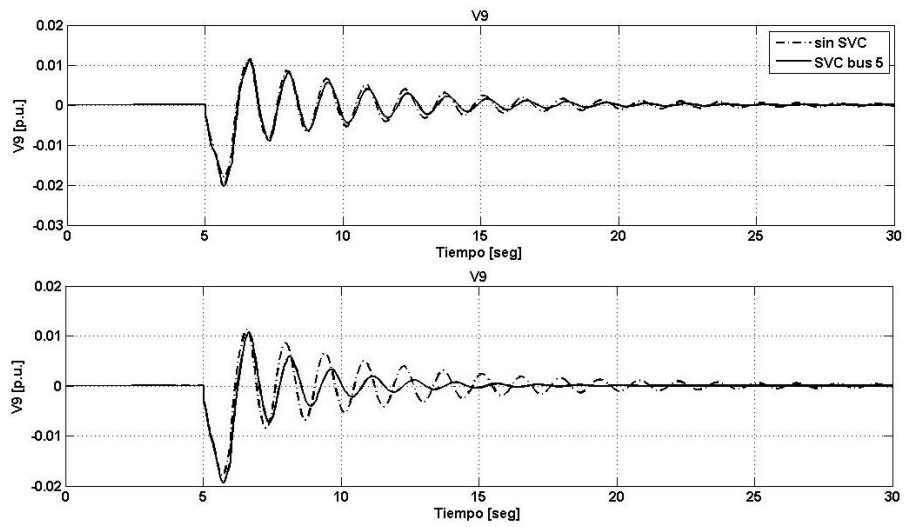


Figura 4.18: Variación de voltaje en el bus 9



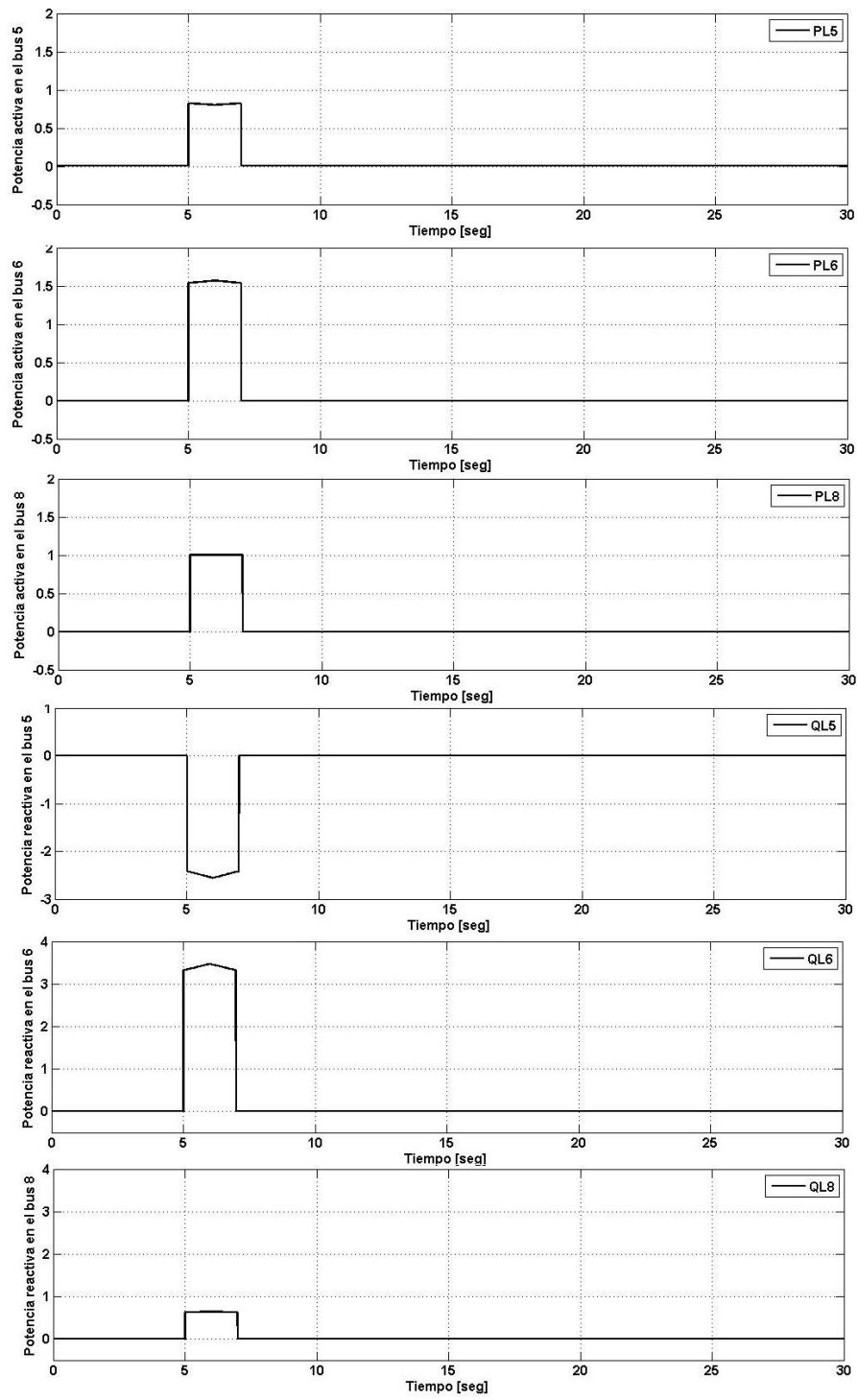


Figura 4.19: Variación de Potencia en el buses PQ

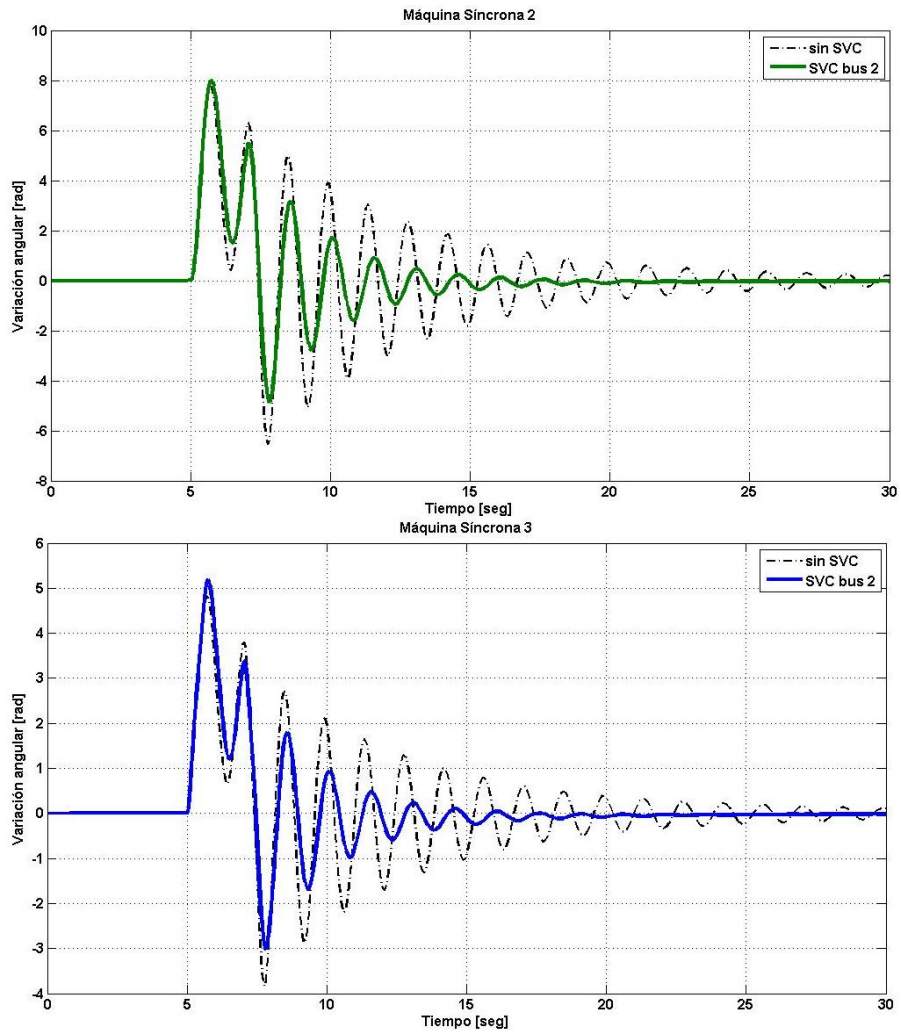


Figura 4.20: Ángulo de rotor de Máquina Síncrona 2 y 3, SVC en bus 2

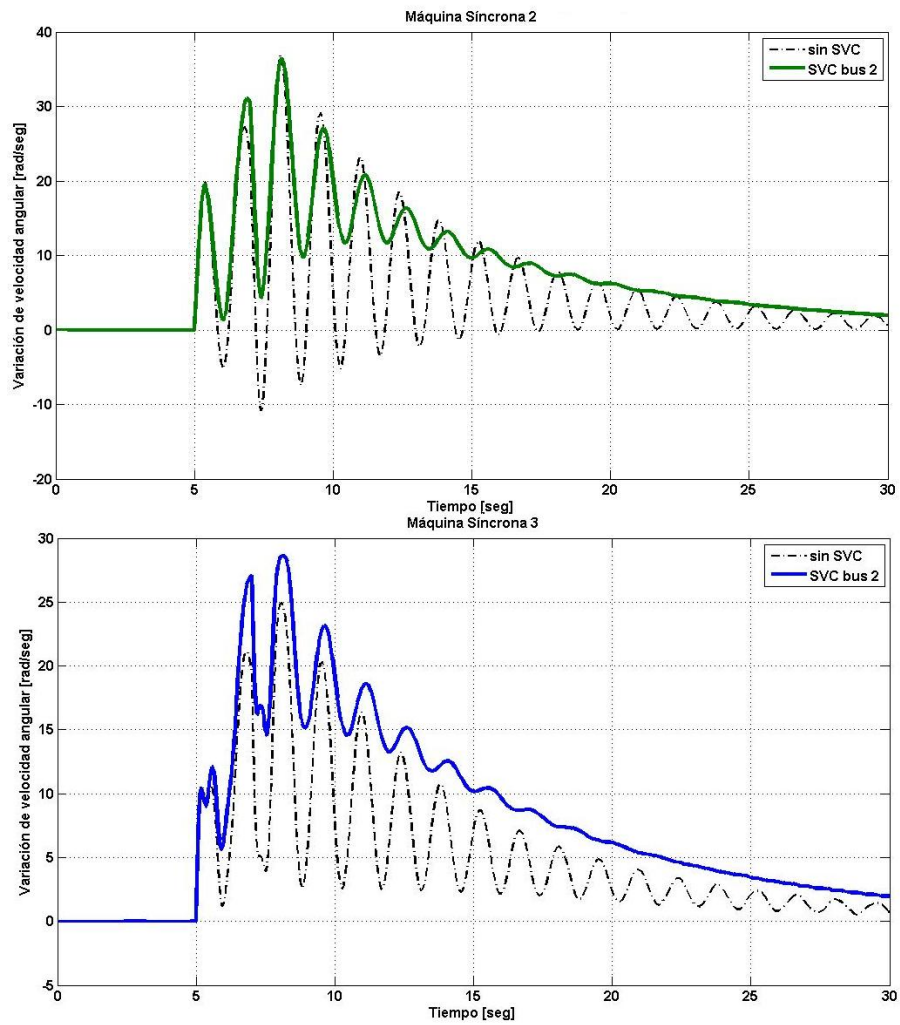


Figura 4.21: Variación de velocidad angular de Máquina Síncrona 2 y 3, SVC en bus 2

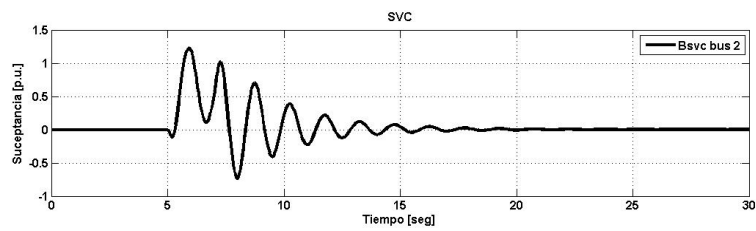


Figura 4.22: Variación de susceptancia del SVC, SVC en bus 2

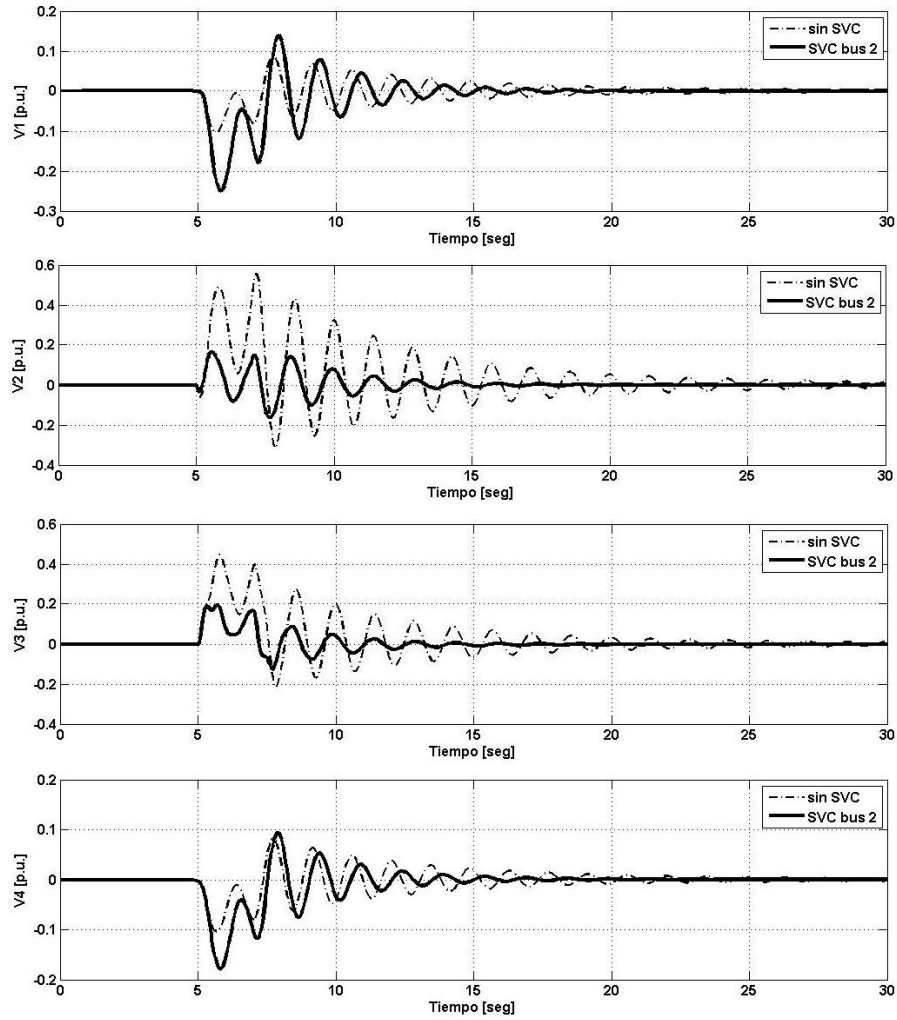


Figura 4.23: Variación de voltaje en el bus 1, 2, 3 y 4, SVC en bus 2

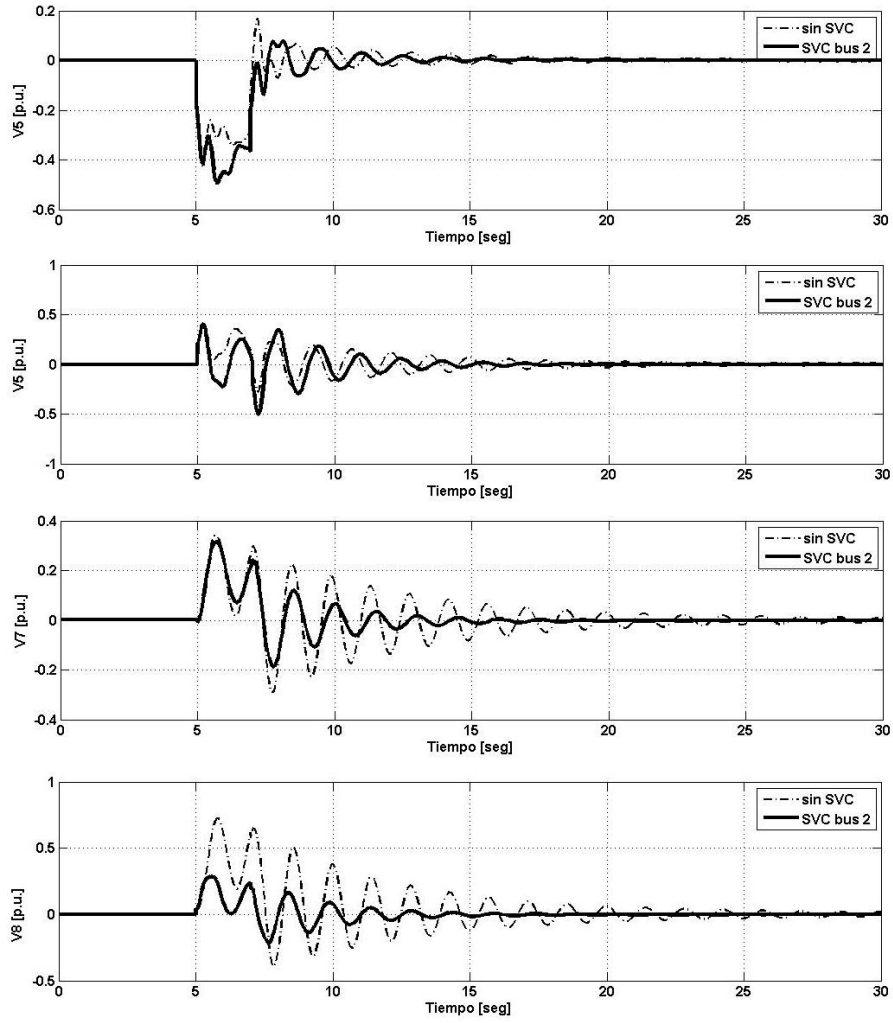


Figura 4.24: Variación de voltaje en el bus 5, 6, 7 y 8, SVC en bus 2

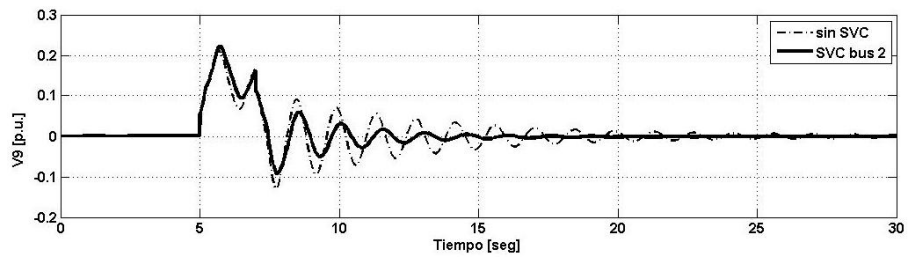


Figura 4.25: Variación de voltaje en el bus 9, SVC en bus 2

# Capítulo 5

## Conclusiones

Para un sistema y un punto de operación en particular, las oscilaciones electromecánicas fueron reducidas por la correcta ubicación del SVC. Si se realiza el análisis presentado para los demás buses, como se realizó para el bus 5 del sistema, se comprobará que el bus que indica los residuos es la mejor ubicación del SVC para el amortiguamiento de oscilaciones. El objetivo de regulación de voltaje en los buses del SEP, no se cumplió satisfactoriamente para un caso, en el periodo transitorio se presentaron sobresaltos que no son deseados en la operación de un SEP.

El análisis modal presenta una manera conveniente de analizar el sistema de manera desacoplada, que facilita analizar el modo de interés de los SEP. La obtención de residuos mediante el análisis modal proporciona una metodología efectiva para obtener la sensibilidad de los lazos de retroalimentación para realizar alguna acción de control. Los residuos dan una medida relativa de las capacidades de desplazamiento de los polos en el plano complejo, además que proporciono la cantidad de fase de compensación para desplazar al polo de manera paralela el eje real.

Se presentó una corrección en el método de los residuos, donde se aclara que el argumento del residuo medido desde el eje real positivo, proporciona el ángulo de compensación ya que señala la salida opuesta del polo en el lugar geométrico de las raíces.

Mediante la descomposición en valores singulares se obtuvieron perturbaciones de prueba, y verificar así la acción de compensación y de regulación de voltaje del SVC.

Se presentó un capítulo que estabilidad en SEP, donde se hace una interpretación de las diferentes estabilidades, y una formulación matemática de la misma apegada a la teoría de sistemas dinámicos.

Sin embargo, los SEP, son sistemas muy complejos que continuamente cambian de punto de operación. El análisis y resultado que aquí se presentó es solamente para particular un punto de operación, considerando cargas constantes y sin considerar las acciones de control locales de cada máquina síncrona. Una desventaja del método de residuos es que no es posible aplicarlo cuando el valor propio crítico para el SEP se múltiplo.

## 5.1 Trabajo Futuro

Ante la variedad de modelos para dispositivos FACTS que se han reportado, se crea confusión, se propone hacer revisión y estudio de modelos para los dispositivos FACTS y realizar el mismo análisis para otros tipos de dispositivos ya que aquí solo se utilizo el SVC que es un dispositivo en derivación.

En algunos estudios estáticos reportados en la literatura describen al mínimo valor singular como un índice de en punto de operación al punto de máxima transferencia de potencia, para el cual ocurrirá un colapso de voltaje que provocara inestabilidad en el SEP. Sin embargo, estos estudios solo tienen la representación matemática de la red y cuando se tenga incluida una representación matemática de las unidades de generación estos resultados pueden no ser del todo ciertos. Como trabajo futuro se plantea el análisis de puntos de máxima transferencia de potencia en el SEP, con un modelo dinámico en el cual se incluyan a las maquinas síncronas.

# Bibliografía

- [1] P.W. Sauer and M.A. Pai *Power System Dynamics and Stability*. Prentice-Hall, USA 1998.
- [2] P. Kundur *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, N. Y. 1994.
- [3] IEEE/CIGRE Joint Task Force on Stability Terms and Definitions *Definition and Classification of Power System Stability*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 19, N° 2, 2004.
- [4] N.G. Hingorani and L. Gyugyi *Understanding FACTS* IEE Press. USA 2000.
- [5] S. Skogestad and I. Postlethwaite *Multivariable Feedback Control*. John Wiley and Song, N.Y. 2000
- [6] C.T. Chen *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1984.
- [7] N. Martins *Efficient Eigenvalue and Frequency Response Methods Applied to Power System Small-Signal Stability Studies*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-1, N° 1, 1986.
- [8] D.Y. Wong, G.J. Rogers, B. Porreta and P. Kundur *Eigenvalue Analysis of Very Large Power Systems*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3, N° 2, 1988.
- [9] M. Kain, G.J. Rogers and P. Kundur *A Fundamental Study of Inter-Area Oscillation in Power Systems*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, N° 3, 1991.
- [10] I.J. Pérez-Arriaga, G.C. Verghese and F.C. Schweppe *Selective Modal Analisis with Applications to Electrical Power Systems*. Part I and II, IEE Transactions on Power Apparatus and System, Vol. PAS-101, N° 9, 1982.



- [11] N. Martins and L. Lima *Determination of Suitable location for Power Systems Stabilizers and Static VAR Compensators for Damping Electromechanical Oscillations in Large Power Systems*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, N° 4, 1989.
- [12] R. Sadiković *Use of FACTS Devices for Power Flow Control and Damping Oscillation in Power System*. PhD. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich 2006.
- [13] B. Gao, G.K. Morison and P.Kundur *Voltage Stability Evaluation Using Modal Analysis*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, No. 4, November 1992.
- [14] L. Cai *Robust Coordinated Control of FACTS Devices in Large Power Systems*. PhD. Thesis, Universität Duisburg-Essen, 2004.
- [15] IEEE Special Stability Controls Working Group *Static Var Compensator Models for Power Flow and Dynamic Performance Simulation*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, N° 1, 1994.
- [16] M. Parniani and M.R. Iravani *Voltage Control Stability and Dynamic Interaction Phenomena of Static Var Compensation*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, N° 3, 1993.
- [17] M.A. Pérez, A.R. Messina, C.R. Fuerte-Esquivel *Application of FACTS Devices to Improve Steady State Voltage Stability*. Power Engineering Society Summer Meeting, 2000.
- [18] V. Larsen, J. Sanchez-Gasca *Concepts for Design of FACTS Controller to Damping Power Swing*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, N° 2, 1995.
- [19] B. Pal and D. Chaudhuri *Robust Control in Power Systems*. Springer, London 2005.
- [20] X.P. Zhang, C. Rehtanz and B. Pal *Flexible AC Transmission Systems: Modeling and Control*. Springer, Germany 2006.
- [21] E. Acha, C.R. Fuerte-Esquivel, H. Ambriz-Peréz and C. Angeles-Camacho *FACTS Modelling and Simulation in Power Networks*. John Wiley, 2004.
- [22] P.A. Löf, G. Anderson and D.J. Hill *Voltage Stability Indices for Stressed power Systems*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, N° 1, 1993.

- [23] N. Romero *Selección del Punto de Ubicación de FACTS en Sistemas de Potencia*. Tesis de Licenciatura, UNAM, 2009.
- [24] C. Rajagopalan, B. Lesieutre, P. W. Sauer and M.A. Pai *Dynamic Aspects of Voltage/Power Characteristics*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, N° 3, 1992.

# Apéndice A

## Modelo Linealizado

Las ecuaciones dinámicas de la máquina síncrona (2.4)-(2.10) son linealizadas analíticamente, así, representado en forma matricial,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta}_i \\ \Delta \dot{\omega}_i \\ \Delta \dot{E}'_{qi} \\ \Delta \dot{E}'_{di} \\ \Delta \dot{E}_{fdi} \\ \Delta \dot{V}_{Ri} \\ \Delta \dot{R}_{fi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & 0 & a_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \\ \Delta V_{Ri} \\ \Delta R_{fi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{1i21} & b_{1i22} \\ b_{1i31} & 0 \\ 0 & b_{1i42} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{di} \\ \Delta I_{qi} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{2i62} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_{i21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{i62} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{Mi} \\ \Delta V_{refi} \end{bmatrix} \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, m$ , donde,

$$\begin{aligned}
a_{12} &= 1 \\
a_{22} &= -\frac{D_i}{M_i}, \quad a_{23} = -\frac{I_{qio}}{M_i}, \quad a_{24} = -\frac{I_{dio}}{M_i}; \\
a_{33} &= -\frac{1}{T'_{doi}}, \quad a_{35} = \frac{1}{T'_{doi}}; \\
a_{44} &= -\frac{1}{T'_{qoi}}; \\
a_{55} &= -\frac{K_{Ei} + E_{fdio} \partial S_E(E_{fdio}) + S_E(E_{fdio})}{T_{Ei}}, \quad a_{56} = \frac{1}{T_{Ei}}; \\
a_{65} &= -\frac{K_{Ai} K_{Fi}}{T_{Ai} T_{Fi}}, \quad a_{66} = -\frac{1}{T_{Ai}}, \quad a_{67} = \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}}; \\
a_{75} &= \frac{K_{Fi}}{(T_{Fi})^2}, \quad a_{77} = -\frac{1}{T_{Fi}}; \\
b_{1i21} &= \frac{I_{qio} (X'_{di} - X'_{qi}) - E'_{dio}}{M_i}, \\
b_{1i22} &= \frac{I_{dio} (X'_{di} - X'_{qi}) - E'_{qio}}{M_i}; \\
b_{1i31} &= -\frac{X_{di} - X'_{di}}{T'_{doi}} \\
b_{1i42} &= -\frac{X_{qi} - X'_{qi}}{T'_{qoi}} \\
b_{2i62} &= -\frac{K_{Ai}}{T_{Ai}}; \\
E_{i21} &= \frac{1}{M_i}, \quad E_{i62} = \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}}
\end{aligned}$$

si se reescribe (A.1),

$$\Delta \dot{x}_i = A_{1i} \Delta x_i + B_{1i} \Delta I_{gi} + B_{2i} \Delta V_{gi} + E_i \Delta u_i \quad (\text{A.2})$$

para  $i = 1, \dots, m$ , el sistema de  $m$  máquinas puede ser escrito como,

$$\Delta \dot{x} = A_1 \Delta x + B_1 \Delta I_g + B_2 \Delta V_g + E_1 \Delta U \quad (\text{A.3})$$

donde  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  y  $E_1$  son matrices en bloques. Las ecuaciones algebraicas de estator (2.11) y (2.12) en forma matricial,

$$0 = \begin{bmatrix} c_{1i11} & 0 & 0 & c_{1i14} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1i12} & 0 & c_{1i23} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_i \\ \Delta\omega_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \\ \Delta V_{Ri} \\ \Delta R_{fi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{1i11} & d_{1i12} \\ d_{1i21} & d_{1i22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{di} \\ \Delta I_{qi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{2i11} & d_{2i12} \\ d_{2i21} & d_{2i22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ , donde,

$$\begin{aligned} c_{1i11} &= -V_{io} \cos(\delta_{io} - \theta_{io}), \quad c_{1i14} = 1; \\ c_{1i21} &= V_{io} \sin(\delta_{io} - \theta_{io}), \quad c_{1i23} = 1; \\ d_{1i11} &= -R_{si}, \quad d_{1i12} = X'_{qi}; \\ d_{1i21} &= -X'_{di}, \quad d_{1i22} = -R_{si}; \\ d_{2i11} &= V_{io} \cos(\delta_{io} - \theta_{io}), \quad d_{2i12} = -\sin(\delta_{io} - \theta_{io}); \\ d_{2i21} &= -V_{io} \cos(\delta_{io} - \theta_{io}), \quad d_{2i22} = -\cos(\delta_{io} - \theta_{io}); \end{aligned}$$

si se reescribe (A.4)

$$0 = C_{1i} \Delta x_i + D_{1i} \Delta I_{gi} + D_{2i} \Delta V_{gi} \quad (\text{A.5})$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ , así para el sistema de  $m$  máquinas,

$$0 = C_1 \Delta x + D_1 \Delta I_g + D_2 \Delta V_g \quad (\text{A.6})$$

donde  $C_1$ ,  $D_1$  y  $D_2$  son matrices en bloques. La linealización las ecuaciones de red (2.13) y (2.14) para los buses PV,

$$\begin{aligned}
0 = & \begin{bmatrix} c_{2i_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2i_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_i \\ \Delta\omega_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \\ \Delta V_{Ri} \\ \Delta R_{fi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{3i_{11}} & d_{3i_{12}} \\ d_{3i_{21}} & d_{3i_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{di} \\ \Delta I_{qi} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} d_{4i_{11}} & d_{4i_{12}} \\ d_{4i_{21}} & d_{4i_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{5i_{11}} & d_{5i_{12}} \\ d_{5i_{21}} & d_{5i_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{6i_{11}} \\ d_{6i_{21}} \end{bmatrix} \Delta B \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $k = m + 1, \dots, n$ , donde,

$$\begin{aligned}
c_{2i_{11}} &= I_{dio}V_{io}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}) - I_{qio}V_{io}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}); \\
c_{2i_{21}} &= -I_{dio}V_{io}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}) - I_{qio}V_{io}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}); \\
d_{3i_{11}} &= V_{io}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}), \quad d_{3i_{12}} = V_{io}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}); \\
d_{3i_{21}} &= V_{io}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}), \quad d_{3i_{22}} = -V_{io}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}); \\
d_{4i_{11}} &= -I_{dio}V_{io}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}) + I_{qio}V_{io}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}) \\
&\quad - V_{io} \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ko} [-G_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) + B_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko})]; \\
d_{4i_{12}} &= I_{dio}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}) + I_{qio}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n V_{ko} [G_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) + B_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko})]; \\
d_{4i_{21}} &= I_{dio}V_{io}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}) + I_{qio}V_{io}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}) \\
&\quad - V_{io} \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ko} [G_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) + B_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko})]; \\
d_{4i_{22}} &= I_{dio}\cos(\delta_{io} - \theta_{io}) - I_{qio}\sin(\delta_{io} - \theta_{io}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n V_{ko} [G_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko})]; \\
d_{5i_{11}} &= -V_{io} \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ko} [G_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{5i_{12}} &= -V_{io} \sum_{k=m+1}^n [G_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) + B_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{5i_{21}} &= -V_{io} \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ko} [-G_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{5i_{22}} &= -V_{io} \sum_{k=m+1}^n [G_{ik}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{6i_{11}} &= - \sum_{k=1}^n V_{io}V_{ko}\sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) \\
d_{6i_{21}} &= \sum_{k=1}^n V_{io}V_{ko}\cos(\theta_{io} - \theta_{ko})
\end{aligned}$$

si se reescribe (A.7),

$$\begin{aligned}
0 = & \begin{bmatrix} C_{21} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{31} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{3m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{g1} \\ \vdots \\ \Delta I_{gm} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} D_{41,1} & \cdots & D_{41,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{4m,1} & \cdots & D_{4m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{g1} \\ \vdots \\ \Delta V_{gm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{51,m+1} & \cdots & D_{51,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{5m,m+1} & \cdots & D_{5m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{lm+1} \\ \vdots \\ \Delta V_{ln} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} D_{61,1} & \cdots & D_{61,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{6m,1} & \cdots & D_{6m,n} \end{bmatrix} \Delta B \tag{A.8}
\end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $l = m + 1, \dots, n$ , así para el sistema de  $m$  máquinas,

$$0 = C_2 \Delta x + D_3 \Delta I_g + D_4 \Delta V_g + D_5 \Delta V_l + D_6 \Delta B \tag{A.9}$$

donde  $C_2$  y  $D_3$  son matrices en bloques. La linealización las ecuaciones de red para los buses PQ (2.15) y (2.16),

$$\begin{aligned}
0 = & \begin{bmatrix} d_{7i_{11}} & d_{7i_{12}} \\ d_{7i_{21}} & d_{7i_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{8k_{11}} & d_{8k_{12}} \\ d_{8k_{21}} & d_{8k_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} d_{9i_{11}} & d_{9i_{12}} \\ d_{9i_{21}} & d_{9i_{22}} \end{bmatrix} \Delta B \tag{A.10}
\end{aligned}$$



para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $k = m + 1, \dots, n$ , donde,

$$\begin{aligned}
d_{7i_{11}} &= - \sum_{k=m+1, k \neq i}^n V_{io} V_{ko} [-G_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{7i_{12}} &= - \sum_{k=m+1}^n V_{io} V_{ko} [G_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) + B_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{7i_{21}} &= - \sum_{k=m+1, k \neq i}^n V_{io} V_{ko} [G_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) + B_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{7i_{22}} &= - \sum_{k=m+1}^n V_{io} V_{ko} [G_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{8k_{11}} &= -V_{io} \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ko} [G_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{8k_{12}} &= -V_{io} \sum_{k=1}^n [G_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) + B_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{8k_{21}} &= -V_{io} \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ko} [-G_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{8k_{22}} &= -V_{io} \sum_{k=1}^n [G_{ik} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) - B_{ik} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko})] \\
d_{9k_{11}} &= - \sum_{k=1}^n V_{io} V_{ko} \sin(\theta_{io} - \theta_{ko}) \\
d_{9k_{21}} &= \sum_{k=1}^n V_{io} V_{ko} \cos(\theta_{io} - \theta_{ko})
\end{aligned}$$

(A.11)

si se reescribe (A.10),

$$\begin{aligned}
0 = & \begin{bmatrix} D_{7m+1,1} & \cdots & D_{7m+1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{7n,1} & \cdots & D_{7n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{g1} \\ \vdots \\ \Delta V_{gm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{8m+1,m+1} & \cdots & D_{8m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{8n,m+1} & \cdots & D_{8n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{lm+1} \\ \vdots \\ \Delta V_{ln} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} D_{9m+1,1} & \cdots & D_{9n,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{9n,1} & \cdots & D_{9n,n} \end{bmatrix} \Delta B
\end{aligned} \tag{A.12}$$

para  $i = m + 1, \dots, n$  y  $l = m + 1, \dots, n$ , así,

$$0 = D_7 \Delta V_g + D_8 \Delta V_l + D_9 \Delta B \tag{A.13}$$

Este es el modelo linealizado del sistema eléctrico de potencia multi-máquina.

# Apéndice B

## Descomposición en valores singulares

**Definición.** Toda matriz compleja  $l \times m$  puede ser factorizada usando la SVD

$$A = U\Sigma V \quad (\text{B.1})$$

donde la matriz  $U$   $l \times l$  y la matriz  $V$   $m \times m$  son unitarias, y la matriz  $\Sigma$   $l \times m$  contiene una matriz diagonal  $\Sigma_1$  de valores singulares reales y no negativos,  $\sigma_i$ , arreglados en orden decedente como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad l \geq m \quad (\text{B.2})$$

o

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad l \leq m \quad (\text{B.3})$$

donde,

$$\Sigma_1 = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \}, \quad k = \min(l, m) \quad (\text{B.4})$$

y

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \equiv \underline{\sigma} \quad (\text{B.5})$$

Los vectores columna de  $V$ , denotados  $v_i$ , son llamados vectores singulares derechos o de entrada y los vectores columna de  $U$ , denotados  $u_i$  son llamados vectores singulares izquierdos o de salida. Nosotros definimos  $u \equiv u_1$ ,  $v \equiv v_1$ ,  $u \equiv u_k$  y  $v \equiv v_k$ .

Es posible notar que la descomposición en (B.1) no es unica. Por ejemplo, para una matriz cuadrada, una SVD alternativa es  $A = U' \Sigma V'^H$ , donde  $U' = US$ ,  $V' = VS$ ,  $S = \text{diag} \{e^{j\theta_i}\}$  y  $\theta_i$  es cualquier numero real. Sin embargo, los valores singulares son unicos.

Los valores singulares son las raices cuadradas positivas de los  $k = \min(l, n)$  mas grandes valores propios de ambos,  $AA^H$  y  $A^H A$ . Entonces

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} \quad (\text{B.6})$$

Tambien, las columnas de  $U$  y  $V$  son vectores propios unitarios de  $AA^H$  y  $A^H A$ , respectivamente. Para derivar (??) se escribe

$$AA^H = (U\Sigma V^H)(U\Sigma V^H)^H = (U\Sigma V^H)(V\Sigma^H U^H) = U\Sigma\Sigma^H U^H \quad (\text{B.7})$$

o equivalentemente  $U$  es unitaria y satisface  $U^H = U^{-1}$ , se obtiene

$$(AA^H)U = U\Sigma\Sigma^H \quad (\text{B.8})$$

Entonces,  $U$  es la matriz de valores propios de  $AA^H$  y  $\{\sigma_i^2\}$  son sus valores propios. Similarmente, se tiene que  $V$  es la matriz de vectores propios de  $A^H A$ .