



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

**ANÁLISIS TEÓRICO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR
PARA UN CIRCUITO INTEGRADO EN MICROCANALES**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A:

IAN GUILLERMO MONSIVAIS MONTOLIU

TUTOR:

DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

2012

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Gonzalo Cervantes De Gortari

Secretario: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

Vocal: Dr. Federico Méndez Lavielle

1er. Suplente: Dr. Jorge Naude De La LLave

2do. Suplente: Dr. Oscar E. Bautista Godínez

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Distrito Federal, México

TUTOR DE TESIS:
Dr. Federico Méndez Lavielle

FIRMA

A mi padre y hermanas: Guillermo, Bibiana y Karla.
Por brindarme siempre todo su cariño, apoyo y comprensión.

A la memoria de mi madre y de mi abuelita: María y Carmelita.

A mi novia Miriam.
Por todo su amor y por todos los momentos felices que hemos compartido.

A mi mamá Erika.
Por su ayuda y compañía en todos estos años.

A mi nana Paulina.
Por haberme cuidado desde que nací.

Agradecimientos

En esta etapa en la que comencé a realizar estudios de posgrado, quiero agradecer en primer instancia a la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de aprender un sin número de conocimientos tanto en el ámbito profesional como en el personal.

Agradezco a mi tutor, Federico Méndez Lavielle, por darme su voto de confianza y la oportunidad de trabajar en este proyecto que me ha servido para adentrarme en el mundo de la investigación.

A los miembros del jurado, los doctores Jaime Cervantes de Gortari, Francisco Solorio, Jorge Naude y Oscar Bautista, agradezco sus comentarios, críticas y el enriquecimiento general al presente trabajo. Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por la beca que me otorgó para poder realizar los estudios de maestría.

Agradezco también a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM, DGAPA-UNAM, ya que a través de este organismo esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM dentro del proyecto: Análisis y soluciones óptimas de flujos "maldistribuidos.^{en} micro-sistemas de transferencia de calor y masa. Clave del proyecto: IN115112.

Agradezco también a todos los que directa o indirectamente contribuyeron a la elaboración de esta tesis.

A todos mis tíos, tías, primos y primas (hermanos, hermanas, sobrinos o sobrinas de mi papá), con los que siempre he llevado una buena relación y me han apoyado en todo, sobre todo mis tías Paty y Laura, mi tío Raúl y mis primos Dierk y Daniel. Agradezco también a mi tío Carlos Monsivais por su apoyo cuando mi intención era la de desarrollarme en el ámbito profesional, al darme trabajo en su empresa. También a mi tía Mama Martita quien siempre me ha brindado todo su cariño.

A mis amigos que siempre han estado conmigo y con quienes he compartido grandes momentos en la vida, empezando por los que estuvieron conmigo en la facultad tanto en licenciatura como en posgrado, así como a mis inseparables amigos de la preparatoria 6 a quienes aún frecuento actualmente.

Resumen

En esta tesis se desarrolló un modelo analítico que describe el flujo de aire que entra a un micro-canal con el fin de enfriar un circuito micro-electrónico. Se estudió la transferencia de calor entre el aire y la pared del micro-canal cuando existe una pequeña diferencia entre la temperatura de la pared y la que tiene el aire cuando entra al micro-canal.

Dentro del estudio de la transferencia de calor en micro-canales se manejan diferentes patrones de flujo, uno de los cuales, el de deslizamiento, es el que se estudia en este trabajo y en donde se implementan las ecuaciones y condiciones de frontera que caracterizan este tipo de flujo. Sin entrar en detalles, en la introducción se mencionan los diferentes aspectos que se manejan en disciplinas como la teoría cinética de gases para describir ciertas propiedades de los mismos. Estas relaciones fueron tomadas directamente de referencias bibliográficas por lo que no se explica la manera en la que se obtienen.

Se dividió el micro-canal en dos zonas. La primera es una zona isotérmica en donde se calculó el perfil de velocidad en la dirección axial suponiendo flujo hidrodinámico completamente desarrollado y también se dedujo una expresión para la presión que tiene el aire en esta zona del micro-canal. La otra es una zona donde hay un flujo de calor desde la pared del micro-canal hacia el aire que circula por él, manteniendo la temperatura de la pared constante, T'_w . En esta zona nos encontramos con un problema de capa límite térmica en donde tenemos una región externa que en todo momento la temperatura del aire es igual a la de la pared T'_w y la presión se comporta de manera similar a la primera zona; sin embargo, existe una región interna que es en donde podemos apreciar el salto continuo que sufre la temperatura para alcanzar el valor de T'_w , partiendo de un valor T'_{ent} , que corresponde al que tiene el aire cuando entra al micro-canal.

En esta región interna se plantean expansiones asintóticas en función de dos parámetros: uno es la relación de esbeltez y otro es un pequeño incremento de temperaturas entre T'_{ent} y T'_w . Así mismo en esta sección se plantearon también expansiones para la presión, densidad y número de Nusselt del micro-canal. Se encontró que la temperatura alcanza más fácilmente el valor T'_w conforme va disminuyendo el valor

de la presión al inicio de la región interna P'_m . La presión decae con mayor facilidad conforme disminuye el valor de la presión al final de la región interna P'_{int} , también se vio que la presión aumenta con la diferencia entre T'_w y T'_{ent} .

Para la densidad observamos que ésta decrece considerablemente cuando aumentan (P'_{int}) y la diferencia entre T'_w y T'_{ent} . Se presenta un aumento de densidad cuando incrementamos el valor de P'_m .

Finalmente, encontramos que el número de Nusselt Nu también disminuye notablemente cuando aumentan P'_{int} y la diferencia entre T'_w y T'_{ent} . Al igual que la densidad, Nu aumenta cuando se incrementa el valor de P'_m .

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Aspectos Fundamentales | 1 |
| 1.2. Antecedentes | 4 |
| 1.2.1. Estudios Previos en Micro-Canales | 4 |
| 1.2.2. Antecedentes Directos de esta Tesis | 6 |
| 1.3. Objetivo de la Tesis | 8 |
| 2. Modelo Físico | 11 |
| 2.1. Breve Descripción | 11 |
| 2.2. Ecuaciones de Conservación | 13 |
| 2.3. Ecuaciones Adimensionales | 15 |
| 2.4. Estructura de la Capa Límite Térmica | 28 |
| 3. Solución por Método de Perturbación | 35 |
| 3.1. Región Externa de la Capa Límite Térmica | 35 |
| 3.2. Región Interna | 38 |
| 3.2.1. Acoplamiento | 41 |
| 3.3. Densidad y número de Nusselt | 42 |
| 3.3.1. Obtención del número de Nusselt | 42 |
| 4. Resultados | 45 |
| 5. Conclusiones | 53 |

Índice de figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1. | Esquema que muestra el flujo de aire entrando al micro-canal por la zona 1 o región isotérmica ($T'_1 = T'_{ent}$) y saliendo por la zona 2 o región de calentamiento ($T'_2 > T'_{ent}$). | 12 |
| 2.2. | Esquema que muestra el inicio de la región interna de la zona 2 ($x = L_1$, $T'_2 = T'_{ent}$ y $P'_2 = P'_m$) y el inicio de la región externa ($x = L_{int}$, $T'_2 = T'_w$ y $P'_2 = P'_{int}$). | 27 |
| 4.1. | Temperatura contra la posición representada por la coordenada axial (ξ). . . | 49 |
| 4.2. | Presión contra la posición representada por la coordenada axial (ξ). | 50 |
| 4.3. | Densidad contra la posición representada por la coordenada axial (ξ). | 51 |
| 4.4. | Nusselt contra la posición representada por la coordenada axial (ξ). | 52 |

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de las últimas dos décadas, la micro y nano-tecnología han adquirido un enorme interés debido al auge de los sistemas micro-electromecánicos denominados MEMS por sus siglas en inglés. Como ejemplo más significativo tenemos a los microprocesadores electrónicos que se utilizan en infinidad de aplicaciones tales como la construcción de micro-robots, micro-reactores, nano-satélites, entre otros (Hsieh *et al.* 2004; Wu *et al.* 1984).

Debido a lo anterior, ha sido necesario la extensiva fabricación de micro-canales para construir sistemas integrados de refrigeración y enfriamiento (Tuckerman 1984).

Las longitudes características presentes en la transferencia de momentum y energía dentro de los MEMS, son del orden de micras (Hsieh *et al.* 2004).

1.1. Aspectos Fundamentales

Las condiciones estándares bajo las que trabajan los MEMS en ambientes gaseosos presentan un trayectoria libre media de las moléculas de aproximadamente 70 nm (Hsieh *et al.* 2004), por lo cual, cuando se trabaja en estas escalas es necesario utilizar un parámetro llamado número de Knudsen (Kn) definido como:

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

donde λ es la trayectoria libre media de las moléculas y L la longitud característica del micro-canal.

A medida que el número de Knudsen aumenta, las hipótesis de la mecánica del medio continuo son inconsistentes y por lo tanto es necesario utilizar otros modelos que describan el comportamiento de las propiedades físicas que se requieran estudiar (Beskok *et al.* 1994). Estas inconsistencias se deben fundamentalmente a los efectos

de rarificación e interacciones moleculares que típicamente presentan los gases en micro-escalas.

Los efectos de rarificación son aquellos que se presentan en ambientes de baja presión en los cuales el esfuerzo cortante, momentum y los flujos de calor y masa ya no pueden ser predichos por modelos basados en la hipótesis de medio continuo.

El efecto de rarificación que se presenta con mayor frecuencia es el de transpiración térmica observado por primera vez por Osbourne Reynolds en 1879 quien bautizó con ese nombre a este fenómeno; en inglés es comúnmente llamado *thermal creep*. La transpiración térmica se presenta cuando es posible generar un flujo debido a gradientes de temperatura en dirección tangencial a lo largo del canal. Además, la temperatura del estado final de las moléculas de fluido es mayor que la temperatura de éstas en el estado inicial. En otras palabras, las moléculas viajan de una zona fría a una caliente. (Karniadakis *et al.* 2005)

Otro aspecto importante a considerar dentro del estudio de las micro-escalas son las interacciones entre la pared y las moléculas de fluido. Dentro de la dinámica molecular de los gases, cuando se enfoca al estudio de gases de baja densidad como el aire y gases monoatómicos, el modelo más usado es el de la esfera rígida. En este modelo las interacciones moleculares con la pared son descritas principalmente por los llamados coeficientes de acomodamiento (Karniadakis *et al.* 2005). La transferencia de energía y de momentum entre las moléculas del gas y la superficie de la pared requiere especificaciones de las interacciones entre la superficie y las moléculas de gas que la golpean, esta información nos la proporcionan los coeficientes de acomodamiento, los cuales son dos y se describen brevemente a continuación:

- *Coefficiente de Momentum Tangencial* (σ_v). Representa el intercambio de momentum tangencial de las moléculas del gas con la superficie de la pared.

$$\sigma_v = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i - \tau_w}$$

donde

τ_i es el momentum tangencial de las moléculas que chocan con la superficie antes de que se impacten con ésta.

τ_r es el momentum tangencial de las moléculas después de chocar con la pared. Usualmente se dice que las moléculas son reflejadas por la pared.

τ_w es el momentum tangencial de las moléculas reflejadas pero que es igual al de la superficie de la pared. $\tau_w = 0$ para superficies estacionarias.

Cuando $\sigma_v = 0$, las moléculas no modifican su momentum tangencial al chocar con la pared. Esto se llama “Reflexión Especular”.

Cuando $\sigma_v = 1$, las moléculas son reflejadas desde la pared con una velocidad tangencial nula. Esto se llama “Reflexión Difusa”.

- *Coefficiente de Acomodo de Energía o Coeficiente Térmico (σ_T)*. Representa la transferencia de energía en forma de calor (energía térmica) que intercambian las moléculas de fluido con la superficie de la pared.

$$\sigma_T = \frac{dE_i - dE_r}{dE_i - dE_w}$$

donde

dE_i es el flujo de energía térmica de las moléculas que chocan con la superficie antes de que se impacten con ésta.

dE_r es el flujo de energía térmica de las moléculas reflejadas por la pared.

dE_w es el flujo de energía térmica si todas las moléculas que chocan con la pared fueran reflejadas con un flujo de energía correspondiente a la temperatura de la pared (T_w).

Idealmente las moléculas deberían ser reflejadas con un flujo de energía térmica igual a dE_w , por lo tanto, el perfecto intercambio de energía se tiene cuando $\sigma_T = 1$.

En el estudio de la transferencia de calor a nivel micro, se definen tres tipos de regímenes de acuerdo al valor que toma el número de Knudsen (Karniadakis *et al.* 2005):

- *Régimen de Deslizamiento* ($0 \leq Kn \leq 0.1$). En este tipo de flujo las ecuaciones de Navier-Stokes siguen siendo válidas para describir el movimiento del fluido sin embargo están sujetas a ciertas modificaciones en las condiciones de frontera tanto para la velocidad como para la temperatura las cuales son: velocidad de deslizamiento y salto de temperatura en la pared.
- *Régimen de Transición* ($0.1 \leq Kn \leq 10$). En este tipo de flujo ya los efectos de rarefacción e interacciones moleculares comienzan a invalidar las leyes de la mecánica del medio continuo; sin embargo, es posible hacer aproximaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes empleando la ecuación de Boltzmann para describir el movimiento de las moléculas de fluido. Este régimen se llama de transición debido a que el movimiento molecular pasa de ser ordenado (difusivo o continuo) a presentar un carácter aleatorio; es decir, las moléculas del fluido viajan libremente sin seguir un patrón fijo o conocido.

- *Régimen Molecular* ($Kn > 10$). En este régimen de flujo el movimiento de las moléculas de fluido ya no puede ser descrito por ninguna de las leyes de la física clásica por lo cual, si se requiere hacer una descripción analítica detallada de este comportamiento se necesita recurrir a la mecánica cuántica (ecuación de Schrödinger) o a la mecánica estadística. Actualmente se cuenta con técnicas de simulación numérica que pueden describir el comportamiento del fluido en el régimen molecular.

En numerosas ocasiones el comportamiento del flujo de un gas ya sea en el régimen molecular o de transición, se describe utilizando una técnica estocástica de simulación numérica conocida como Simulación Directa Monte Carlo (DSMC por sus siglas en inglés). (Karniadakis *et al.* 2005)

En este trabajo, limitaremos nuestro análisis exclusivamente al régimen de deslizamiento ($0 \leq Kn \leq 0.1$).

1.2. Antecedentes

1.2.1. Estudios Previos en Micro-Canales

Durante mucho tiempo se han hecho una gran variedad de estudios en microcanales tanto analíticos como numéricos y/o experimentales, con el fin de comparar los resultados obtenidos con los que ya se tenían anteriormente con las ecuaciones de Navier-Stokes y la teoría de la mecánica del medio continuo. Las variables comúnmente estudiadas son los perfiles de velocidades, temperatura, densidad, fricción o esfuerzo cortante, presión, gasto másico y la tasa de transferencia de calor representada por el número de Nusselt. A continuación se describirán brevemente algunas de estas investigaciones:

En el trabajo de Harley *et al.* 1995, se estudió el comportamiento de varios gases modificando el número de Knudsen con la finalidad de observar los efectos de rarefacción, su experimento se hizo en un microcanal rectangular y el análisis fue solamente bidimensional.

Sharipov *et al.* 1998, estudiaron el flujo de gases para valores de Kn grandes empleando la ecuación de Boltzmann, estos autores analizaron flujos en capilares donde el flujo era inducido por un gradiente de presión o una diferencia de temperaturas. Encontraron que para capilares largos ($\epsilon \ll 1$, con $\epsilon = H/L$ para microcanales rectangulares donde H y L son la altura y longitud del microcanal respectivamente o en este caso $\epsilon = D/L$ donde D es el diámetro del capilar, al parámetro ϵ se le conoce como relación de esbeltez), la presión y temperatura no dependen de la coordenada radial, entonces la distribución de temperatura queda determinada por la temperatura de la pared del capilar; sin embargo, resaltan el hecho de que para

capilares de longitud finita existen dificultades al usar la ecuación de Boltzmann y solo muestran algunos resultados numéricos para calcular el gasto másico.

Sun *et al.* 2000, investigaron los efectos de rarificación y de compresibilidad en flujos a través de canales bidimensionales utilizando DSMC.

Hadjiconstantinou 2000, realizó simulaciones numéricas con DSMC para mostrar que en el caso de un flujo de calor constante en la pared, el Nusselt decrece monótonamente al incrementar el número de Knudsen.

He *et al.* 2005, simularon flujo de gas a través de micro-boquillas ($\epsilon = 0.067$) inducido por la diferencia de temperaturas entre la pared y el gas entrante. Encontraron que la transferencia de calor ocurre casi exclusivamente en la salida y entrada del micro-canal y que el flujo de calor promedio aumenta casi linealmente con la relación de presiones entrada-salida.

Para estudiar el régimen de deslizamiento, normalmente se utilizan las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de frontera de deslizamiento en la pared, por lo tanto se han elaborado diversos modelos analíticos para estudiar estos aspectos. Arkilic *et al.* 1993, desarrollaron un modelo simple que incluía la velocidad de deslizamiento en la pared y lo resolvieron para flujos de Poiseuille y de Couette; van den Berg *et al.* 1993, estudiaron un flujo laminar compresible en un capilar desarrollando una ecuación no lineal de segundo orden con dos parámetros pequeños y la resolvieron con una expansión basada en el método de perturbación; sin embargo, no tomaron en cuenta los efectos de rarificación.

También se han desarrollado estudios experimentales que se comparan con modelos analíticos. Arkilic *et al.* 1997, midieron el gasto másico en un canal de $1.33\mu\text{m}$ de alto por $7500\mu\text{m}$ de largo ($\epsilon = 1.77 \times 10^{-4}$), y expandieron las variables en potencias de ϵ , proporcionando una solución en el orden cero, sus resultados analíticos concuerdan con los experimentales; Zohar *et al.* 2002, midieron el gasto másico y la distribución de presiones en dos diferentes micro-canales ($\epsilon = 2.33 \times 10^{-4}$ y $\epsilon = 1.33 \times 10^{-4}$ respectivamente), y además extendieron el trabajo de van den Berg *et al.* 1993 para flujos en micro-canales rectangulares y micro-tubos circulares, sus resultados analíticos también concuerdan con los experimentales.

Araki *et al.* 2002 midieron el factor de fricción en flujos de Helio y Nitrógeno en tres diferentes micro-canales, encontrando que en cuanto se vuelven importantes los efectos de rarificación, el factor de fricción se reduce con respecto al de la teoría convencional.

Turner *et al.* 2004 estudiaron sistemáticamente los efectos de la rugosidad relativa de la pared, los números de Knudsen y de Mach en el factor de fricción en flujo laminar de gases. Sus resultados, comparados con los de flujo incompresible de la teoría del medio continuo, muestran un incremento del ocho por ciento en el factor de fricción y una disminución del número de Mach en un cincuenta por ciento debido

a los efectos de rarificación, mientras que la rugosidad afecta fuertemente al factor de fricción tanto en el régimen continuo como en el de deslizamiento.

Inman 1964, muestra que el número de Nusselt disminuye con la presencia del deslizamiento, esto fue verificado por Kavehpour *et al.* 1997, quienes desarrollaron una serie de cálculos utilizando la teoría del medio continuo en el régimen de deslizamiento e investigaron los efectos de rarificación y compresibilidad, sin incluir el efecto de la conducción axial, el cual fue tomado en cuenta por Pahor *et al.* 1961, y muestra que en presencia de conducción axial, el Nusselt crece monótonamente alcanzando un valor máximo de $Nu = 8.1174$, esto representa un incremento del diez por ciento con respecto al valor conocido en la mecánica del medio continuo de $Nu = 7.5407$.

Por último, también se han desarrollado modelos analíticos de orden superior como el de Xue *et al.* 2000, para flujos donde el valor de Kn es considerablemente grande y la distribución de velocidad se expande en series de potencias en función de $\tanh(Kn)$ para obtener soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes, comparando estas soluciones con las obtenidas con DSMC ($\epsilon = 2.33 \times 10^{-4}$), los autores llegaron a la conclusión de que éstas pueden aplicarse al régimen de transición.

Como se ha visto en los párrafos anteriores, la relación de esbeltez (ϵ) es un parámetro que aparece constantemente en el análisis de flujos en micro-escalas y en este trabajo de tesis aparecerá muy frecuentemente.

1.2.2. Antecedentes Directos de esta Tesis

Este trabajo está basado principalmente en tres artículos de investigación de los cuales se retomaron varias ideas y se modificaron algunos detalles. A continuación se describen brevemente cada uno de ellos y las conclusiones a las que llegaron los autores:

- Hadjiconstantinou *et al.* 2002. En este trabajo los autores investigaron la transferencia de calor y sus características para el caso en el que se tiene una temperatura de pared constante, estudiando el flujo de un gas en dos dimensiones a través de micro y nano-canales rectangulares en las condiciones de flujo completamente desarrollado tanto térmica como hidrodinámicamente. Su análisis cubre tanto el régimen de deslizamiento como el de transición. Utilizaron la teoría de flujo con deslizamiento en presencia de conducción axial para calcular el número de Nusselt en el rango $0 \leq Kn \leq 0.2$ y la técnica de simulación directa DSMC para calcular el número de Nusselt en el rango $0.02 \leq Kn \leq 2$. Debido a que los flujos internos en escalas pequeñas están caracterizados por números de Péclet finitos, fue necesario incluir los efectos de la conducción axial en los modelos del medio continuo. Los resultados de este trabajo mues-

tran que el comportamiento del flujo descrito con el modelo de deslizamiento concuerda con los datos de la simulación DSMC para $Kn \leq 0.1$ y que este modelo también da buenos resultados más allá de su rango de aplicación. También se encontró que el número de Nusselt disminuye monótonamente al incrementar el Knudsen, esto ocurre en ambos regímenes, en el de deslizamiento y en el de transición. En el flujo con deslizamiento, la presencia de conducción axial incrementa el número de Nusselt. Finalmente, los autores aplicaron el modelo de deslizamiento a micro-tubos circulares obteniendo resultados similares a los de los micro-canales rectangulares.

Cabe señalar que en el artículo anterior, se proponen dos regiones dentro de un microcanal, una en la que la temperatura de la pared es igual a la temperatura del gas al entrar al micro-canal y cuya longitud es suficiente para que el flujo se desarrolle completamente, y otra donde hay una zona de calentamiento en la cual la temperatura de la pared es igual a la que tiene el gas a la salida, pero mayor que la de entrada. Adicionalmente se supone también que este incremento de temperatura es muy pequeño. Lo importante es recalcar que los autores no mencionan nada acerca de la densidad; es decir, no queda claro si la densidad depende de alguna de las variables espaciales o la manejan como constante, a pesar de que utilizan la forma de flujo compresible de las Ecuaciones de Navier-Stokes.

- Hsieh *et al.* 2004. Este artículo es un estudio analítico y experimental para flujo compresible en un micro-canal a bajos números de Reynolds. El gas utilizado fue Nitrógeno. El rango de valores del número de Knudsen oscila entre 0.001 y 0.02. Se hicieron mediciones sobre la caída de presión tanto a la entrada como a las salida del micro-canal así como el gasto másico, que se fue variando para encontrar diferentes valores del factor de fricción en función del número de Reynolds. Por otro lado, se elaboró un modelo analítico bidimensional utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes sujetas a condiciones de deslizamiento y se resolvieron empleando métodos de perturbación. En este modelo se utiliza un nuevo coeficiente global de acomodamiento (σ). Los resultados analíticos concuerdan con los experimentales. Consecuentemente, usando teoría de flujo con deslizamiento, se puede predecir el gasto másico, caída de presión a la salida o la entrada y el factor de fricción para sistemas tridimensionales.

Una cuestión importante del trabajo anterior es que en el modelo analítico el flujo es isotérmico y por lo tanto no se propone una expansión asintótica para la temperatura. El coeficiente global de acomodamiento (σ) depende de los coeficientes de acomodamiento descritos en la sección 1.1, los cuales fueron calculados experimentalmente. También debe recalcar que estos autores li-

mitaron su estudio al régimen de deslizamiento, utilizando también la teoría de flujo compresible del medio continuo pero sin considerar tampoco variaciones espaciales de la densidad.

- Qin *et al.* 2007. Aquí se estudió teóricamente un flujo subsónico de gas tanto en un micro-tubo como en un micro-canal rectangular, ambos en dos dimensiones, inducido por un gradiente de presión. Se propusieron las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma para flujo compresible sujetas a deslizamiento, y se resolvieron expandiendo las variables en cuestión utilizando el método de perturbación. El flujo se modela como isotérmico; sin embargo, sí se considera el salto de temperatura y la velocidad de deslizamiento en la pared. En el conjunto de ecuaciones adimensionales que gobiernan el flujo aparecen dos parámetros muy pequeños, el número de Knudsen Kn y la relación de esbeltez ϵ los cuales son la base para construir las expansiones asintóticas de la teoría de perturbación. Se estudia con detalle diferentes casos en los que se comparan el orden de magnitud de los parámetros en cuestión: $\epsilon \ll Kn^2$, $\epsilon \sim Kn^2$ y $\epsilon \sim Kn^{1.5}$. Se proporcionan también soluciones analíticas explícitas para la presión, densidad, gasto másico, velocidad y temperatura, pero que son de orden $O(Kn^2)$. Los resultados para canales largos $\epsilon \ll Kn^2$ concuerdan con trabajos previos; en particular, se muestra que la suposición de flujo isotérmico es redituable para los bajos órdenes (órdenes cero y uno en las expansiones asintóticas). Sin embargo para órdenes superiores el flujo no se puede considerar como isotérmico por lo que se tiene una corrección de orden superior para la temperatura. Las soluciones por el método de perturbación que se obtienen en este artículo pueden ser aplicadas a canales con longitudes relativamente cortas, lo cual se verifica utilizando DSMC.

Las principales diferencias del artículo mencionado en el párrafo anterior con este trabajo de tesis, recaen en que estos autores utilizan dos parámetros para el método de perturbación y que consideran que el flujo es isotérmico para el orden cero y uno del parámetro ϵ .

1.3. Objetivo de la Tesis

En este trabajo se desarrollará un modelo analítico bidimensional para un micro-canal rectangular, en donde se analizará el flujo de aire en el régimen de deslizamiento, al igual que en Hadjiconstantinou *et al.* 2002. El micro-canal consta de una región isotérmica donde la temperatura del aire y la de la pared es la misma debido a que no existe calentamiento. Después el aire entra a otra región donde la temperatura de la pared es mayor que la que tenía el aire al entrar al micro-canal.

Se plantearán las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible en coordenadas cartesianas, sujetas a las condiciones de frontera de velocidad de deslizamiento y salto de temperatura en la pared. La manera de adimensionalizar las ecuaciones es similar a la de Qin *et al.* 2007, la cual entre otras cosas utiliza el modelo de esfera rígida de la dinámica molecular de gases para adimensionalizar las velocidades y también para escribir la viscosidad, que en este trabajo se mantuvo constante, en términos de otros parámetros más convenientes, tales como el número de Knudsen.

Las condiciones de frontera en la pared; es decir, los modelos de deslizamiento, se tomaron directamente de Qin *et al.* 2007, los cuales se basan en los modelos de Maxwell descritos detalladamente en Kennard 1938. Así mismo, también se tomaron de este trabajo los valores de los coeficientes de acomodamiento, excepto que para la condición de la velocidad se usa el coeficiente global (σ) utilizado en Hsieh *et al.* 2004 con el fin de compactar la expresión.

El objetivo de esta tesis es encontrar la distribución de temperatura, presión y densidad en función de la coordenada longitudinal, empleando teoría de perturbación para poder describir un pequeño incremento de temperatura entre la región isotérmica y la de calentamiento en la pared. Los parámetros de perturbación serán la relación de esbeltez y el incremento de temperaturas, normalizado con la temperatura de la pared. Con base otra vez en Hadjiconstantinou *et al.* 2002 y Qin *et al.* 2007, suponemos que en el orden cero, para la relación de esbeltez, la velocidad transversal es cero y que la densidad, presión y temperatura también en este orden, no dependen de la coordenada transversal.

Por último hay que aclarar también, que no se consideró el efecto de la transpiración térmica (*thermal creep*), así como tampoco ningún otro efecto de rarificación a parte de los que se presentan en el régimen de deslizamiento, que son los de salto de temperatura y velocidad de deslizamiento en la pared.

Capítulo 2

Modelo Físico

En este capítulo se explicará en detalle el problema físico y se describirá metódicamente el modelo que describe el flujo en cuestión.

2.1. Breve Descripción

Como se dijo anteriormente, el objetivo de este trabajo es analizar la transferencia de calor entre el aire y la pared de un micro-canal, la cual se encuentra a una temperatura un poco mayor que la del aire a la entrada del micro-canal. Este micro-canal consta de dos secciones, una isotérmica a la que llamaremos zona 1 y otra llamada zona 2 en donde existe un flujo de calor desde la pared del micro-canal que se mantiene a temperatura constante. Encontraremos los perfiles de velocidades y de la presión en ambas zonas, además, como se apreciará más adelante existe una capa límite térmica en la zona 2 y obtendremos también el perfil de temperatura, densidad y número de Nusselt para la región interna de la capa límite. Para mejor entendimiento del problema obsérvese la figura 2.1.

Las variables y constantes que aparecen en la figura 2.1 se describen a continuación:

$T'_1 \rightarrow$ Temperatura del aire en la zona 1 $[K]$.

$P'_1 \rightarrow$ Presión del aire en la zona 1 $[Pa]$.

$T'_{ent} \rightarrow$ Temperatura del aire a la entrada del micro-canal $[K]$.

$P'_{ent} \rightarrow$ Presión del aire a la entrada del micro-canal $[Pa]$.

$T'_2 \rightarrow$ Temperatura del aire en la zona 2 $[K]$.

$P'_2 \rightarrow$ Presión del aire en la zona 2 $[Pa]$.

$T'_{sal} \rightarrow$ Temperatura del aire a la salida del micro-canal $[K]$.

$P'_{sal} \rightarrow$ Presión del aire a la salida del micro-canal $[Pa]$.

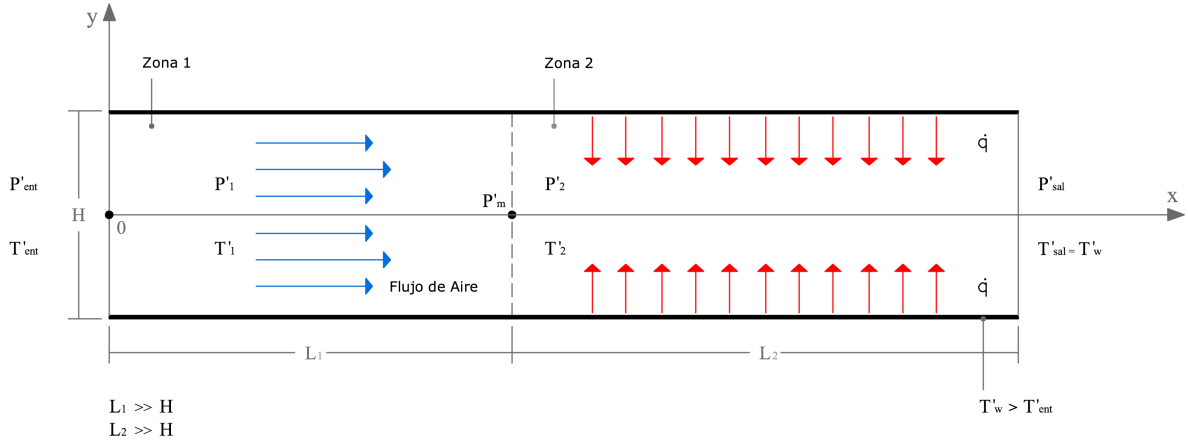


Figura 2.1: Esquema que muestra el flujo de aire entrando al micro-canal por la zona 1 o región isotérmica ($T'_1 = T'_{ent}$) y saliendo por la zona 2 o región de calentamiento ($T'_2 > T'_{ent}$).

$T'_w \rightarrow$ Temperatura de la pared del micro-canal en la zona 2 $[K]$.

$P'_m \rightarrow$ Presión del aire justo en el punto donde termina la zona 1 y empieza la zona 2 del micro-canal $[Pa]$.

$x \rightarrow$ Coordenada axial $[m]$.

$y \rightarrow$ Coordenada transversal $[m]$.

$L_1 \rightarrow$ Longitud de la zona 1 $[m]$.

$L_2 \rightarrow$ Longitud de la zona 2 $[m]$.

$H \rightarrow$ Altura total del micro-canal $[m]$.

$\dot{q} \rightarrow$ Flujo de calor desde la pared del micro-canal en la zona 2 $[W/m^2]$.

Aunque no se muestra en la figura 2.1, convenimos definir de una vez la variable \hat{h} $[W/(m^2K)]$ como el coeficiente convectivo entre la pared del micro-canal en la zona 2 y el aire, variable que se mencionará más adelante cuando se realice el procedimiento para calcular el número de Nusselt (Nu).

Como ya se dijo anteriormente en la sección 1.2, se hicieron varias consideraciones siguiendo los procedimientos usados por otros autores. Al igual que Hadjiconstantinou *et al.* 2002, consideramos que L_1 es suficientemente grande para que el flujo se considere completamente desarrollado; también suponemos que la temperatura de salida es igual a la de pared en la zona 2 ($T'_w = T'_{sal}$) y que las longitudes L_1 y L_2 son considerablemente más grandes que la altura H , tal como se indica en la figura 2.1.

2.2. Ecuaciones de Conservación

En esta sección se describirán las ecuaciones de conservación que gobiernan el movimiento del fluido. Las ecuaciones que se plantean son las de Navier-Stokes para flujo compresible bidimensional junto con la ecuación de gas ideal. Se describirán por separado las ecuaciones correspondientes a cada zona del micro-canal. Para cada zona primero se escribe la ecuación de continuidad, luego las ecuaciones de momentum, seguidas de la de gas ideal y por último y sólo para la zona dos, se dará la ecuación de conservación de la energía también para flujo compresible bidimensional.

ZONA 1 (Flujo Isotérmico)

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho'_1 u'_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho'_1 v'_1}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

donde:

$\rho'_1 \rightarrow$ Densidad del aire en la zona 1 [kg/m^3].

$u'_1 \rightarrow$ Velocidad del aire en la dirección axial en la zona 1 [m/s].

$v'_1 \rightarrow$ Velocidad del aire en la dirección transversal en la zona 1 [m/s].

Ecuación de Momentum en x:

$$\rho'_1 \left(u'_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x} + v'_1 \frac{\partial u'_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P'_1}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x \partial y} \right) \right]. \quad (2.2)$$

Ecuación de Momentum en y:

$$\rho'_1 \left(u'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x} + v'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P'_1}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_1}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 v'_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x \partial y} \right) \right], \quad (2.3)$$

donde:

$\mu \rightarrow$ Viscosidad dinámica del fluido [$Pa \cdot s$]

Ecuación del Gas Ideal:

$$P'_1 = \rho'_1 R T'_1, \quad (2.4)$$

donde:

$R \rightarrow$ Constante del aire: $287 [J/(kgK)]$.

ZONA 2 (Calentamiento en la Pared)

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho'_2 u'_2}{\partial x} + \frac{\partial \rho'_2 v'_2}{\partial y} = 0, \quad (2.5)$$

donde:

$\rho'_2 \rightarrow$ Densidad del aire en la zona 2 [kg/m^3].

$u'_2 \rightarrow$ Velocidad del aire en la dirección axial en la zona 2 [m/s].

$v'_2 \rightarrow$ Velocidad del aire en la dirección transversal en la zona 2 [m/s].

Ecuación de Momentum en x:

$$\rho'_2 (u'_2 \frac{\partial u'_2}{\partial x} + v'_2 \frac{\partial u'_2}{\partial y}) = -\frac{\partial P'_2}{\partial x} + \mu [\frac{\partial^2 u'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_2}{\partial y^2} + \frac{1}{3} (\frac{\partial^2 u'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x \partial y})]. \quad (2.6)$$

Ecuación de Momentum en y:

$$\rho'_2 (u'_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x} + v'_2 \frac{\partial v'_2}{\partial y}) = -\frac{\partial P'_2}{\partial y} + \mu [\frac{\partial^2 v'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_2}{\partial y^2} + \frac{1}{3} (\frac{\partial^2 v'_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'_2}{\partial x \partial y})]. \quad (2.7)$$

Ecuación del Gas Ideal:

$$P'_2 = \rho'_2 R T'_2. \quad (2.8)$$

Ecuación de la Energía:

$$\begin{aligned} \rho'_2 C_p (u'_2 \frac{\partial T'_2}{\partial x} + v'_2 \frac{\partial T'_2}{\partial y}) &= u'_2 \frac{\partial P'_2}{\partial x} + v'_2 \frac{\partial P'_2}{\partial y} + \kappa (\frac{\partial^2 T'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'_2}{\partial y^2}) \\ &+ \zeta (\frac{\partial u'_2}{\partial x} + \frac{\partial v'_2}{\partial y})^2 + \mu [2 (\frac{\partial u'_2}{\partial x})^2 + 2 (\frac{\partial v'_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v'_2}{\partial x} + \frac{\partial u'_2}{\partial y})^2], \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde:

$C_p \rightarrow$ Calor específico del aire a presión constante [$J/(kgK)$].

$\kappa \rightarrow$ Conductividad térmica del aire [$W/(mK)$].

$\zeta \rightarrow$ Segundo coeficiente de viscosidad. Considerando que las moléculas del aire no se expanden ni se comprimen bruscamente, podemos definir este coeficiente como:

$\zeta = -(2/3)\mu$.

2.3. Ecuaciones Adimensionales

A continuación se describe la manera de adimensionalizar las ecuaciones de conservación de la sección 2.2, y cuando corresponda se presentaran los perfiles adimensionales de velocidades, temperatura, densidad, etc.

ZONA 1

Variables adimensionales:

$$\chi_1 = \frac{x}{L_1}; \quad \eta = \frac{y}{H}; \quad u_1 = \frac{u'_1}{u'_r}; \quad v_1 = \frac{v'_1}{v'_r}; \quad \theta_1 = \frac{T'_1}{T'_{sal}};$$

$$P_1 = \frac{P'_1}{\rho'_r a_r^2}; \quad \rho_1 = \frac{\rho'_1}{\rho'_r}; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}; \quad Kn = \frac{\lambda}{H}; \quad \epsilon_1 = \frac{H}{L_1}; \quad B = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}},$$

donde:

$\chi_1 \rightarrow$ Coordenada adimensional en la dirección axial en la zona 1.

$\eta \rightarrow$ Coordenada adimensional en la dirección transversal.

$u_1 \rightarrow$ Velocidad adimensional del aire en la dirección axial en la zona 1.

$v_1 \rightarrow$ Velocidad adimensional del aire en la dirección transversal en la zona 1.

$\theta_1 \rightarrow$ Temperatura adimensional del aire en la zona 1.

$P_1 \rightarrow$ Presión adimensional del aire en la zona 1.

$\rho_1 \rightarrow$ Densidad adimensional del aire en la zona 1.

$\gamma \rightarrow$ Relación de calores específicos para el aire.

$Kn \rightarrow$ Número de Knudsen.

$\epsilon_1 \rightarrow$ Relación de esbeltez en la zona 1.

$B \rightarrow$ Constante de orden unidad que se utiliza en el modelo de esfera rígida para modelar la viscosidad molecular (μ) de los gases (Qin *et al.* 2007).

$u'_r \rightarrow$ Velocidad de referencia en la dirección axial [m/s].

$v'_r \rightarrow$ Velocidad de referencia en la dirección transversal [m/s].

$\rho'_r \rightarrow$ Densidad de referencia [kg/m^3].

$a_r \rightarrow$ Velocidad del sonido en la zona 1 [m/s].

$C_v \rightarrow$ Calor específico del aire a volumen constante [$J/(kgK)$].

$\lambda \rightarrow$ Trayectoria libre media de las moléculas del aire [m].

Además:

$$\rho'_r = \frac{P'_{sal}}{RT'_{sal}}; \quad a_r = \sqrt{\gamma RT'_{sal}}.$$

En el modelo de esfera rígida usado en la dinámica molecular de gases, la viscosidad se puede modelar (ver Qin *et al.* 2007) como:

$$\mu = B\rho'_r a_r \lambda, \quad \text{pero: } \lambda = KnH, \quad \Rightarrow \quad \mu = B\rho'_r a_r KnH.$$

Según Qin *et al.* 2007, la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas está dada por: $\epsilon_1 Re \sim \epsilon_1 (Ma/Kn)$, donde Re es el número de Reynolds y Ma el número de Mach. Para flujos de gas en micro-canales con bajos números de Mach, las fuerzas de inercia pueden despreciarse si consideramos que $\epsilon_1 \ll Kn$, y entonces el cambio en la presión se debe únicamente a los efectos viscosos: $\partial P_1/\partial x \sim \mu(\partial^2 u_1/\partial y^2)$. Entonces el orden de magnitud de la velocidad axial (u_1) puede estimarse como:

$$u'_1 \sim \frac{(\frac{\partial P'_1}{\partial x})H^2}{\mu} \sim \frac{\rho'_r a_r^2 H^2}{\mu L_1},$$

$$\Rightarrow u'_1 \sim \frac{\rho'_r a_r^2 H^2}{B\rho'_r a_r KnHL_1} = \frac{a_r H}{BKnL_1}, \quad \Rightarrow u'_1 \sim \frac{\epsilon_1 a_r}{BKn},$$

si nos llevamos la última expresión a la ecuación de continuidad 2.1, podemos hacer una estimación del orden de magnitud de la velocidad transversal (v_1):

$$\frac{\rho'_1 u'_1}{L_1} \sim \frac{\rho'_1 v'_1}{H}, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1 u'_1 \sim v'_1, \quad \Rightarrow \quad v'_1 \sim \frac{\epsilon_1^2 a_r}{BKn};$$

entonces, utilizando los resultados de las últimas dos ecuaciones podemos definir las velocidades de referencia:

$$\Rightarrow u'_r = \frac{\epsilon_1 a_r}{BKn}; \quad v'_r = \frac{\epsilon_1^2 a_r}{BKn}.$$

Ahora sustituimos las variables adimensionales y constantes de referencia en las ecuaciones de continuidad (2.1), momentum en x (2.2), momentum en y (2.3) y gas ideal (2.4).

Continuidad:

$$\left(\frac{\rho'_r u'_r}{L_1}\right) \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial \chi_1} + \left(\frac{\rho'_r v'_r}{H}\right) \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial \eta} = 0,$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\rho'_r \epsilon_1^2 a_r}{BKnH}\right) \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial \chi_1} + \left(\frac{\rho'_r \epsilon_1^2 a_r}{BKnH}\right) \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial \eta} = 0,$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial \eta} = 0}. \quad (2.10)$$

Momentum en x:

$$\begin{aligned} & \rho'_r \rho_1 \left[\frac{(u'_r)^2}{L_1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \chi_1} + \frac{(v'_r)(u'_r)}{H} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = - \left(\frac{\rho'_r a_r^2}{L_1} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} \\ & + (B \rho'_r a_r Kn H) \left[\left(\frac{u'_r}{L_1^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \left(\frac{u'_r}{H^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3} \left(\left(\frac{u'_r}{L_1^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \left(\frac{v'_r}{L_1 H} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right) \right], \\ \Rightarrow & \rho'_r \rho_1 \left[\left(\frac{\epsilon_1^3 a_r^2}{B^2 Kn^2 H} \right) u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \chi_1} + \left(\frac{\epsilon_1^3 a_r^2}{B^2 Kn^2 H} \right) v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = - \left(\frac{\rho'_r a_r^2 \epsilon_1}{H} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} \\ & + (B \rho'_r a_r Kn H) \left[\left(\frac{\epsilon_1^3 a_r}{BK n H^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \left(\frac{\epsilon_1 a_r}{BK n H^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\epsilon_1^3 a_r}{BK n H^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \left(\frac{\epsilon_1^3 a_r}{BK n H^2} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right) \right], \\ \Rightarrow & \left(\rho'_r \frac{\epsilon_1^3 a_r^2}{B^2 Kn^2 H} \right) \rho_1 \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \chi_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = - \left(\frac{\rho'_r a_r^2 \epsilon_1}{H} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} \\ & + \left(\frac{\rho'_r a_r^2 \epsilon_1}{H} \right) \left[(\epsilon_1^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\epsilon_1^2}{3} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right) \right], \end{aligned}$$

finalmente multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por $H/(\rho'_r a_r^2 \epsilon_1)$, con lo que se obtiene:

$$\boxed{\left(\frac{\epsilon_1^2}{B^2 Kn^2} \right) \rho_1 \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \chi_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = - \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} + \epsilon_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\epsilon_1^2}{3} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right)}. \quad (2.11)$$

Momentum en y:

$$\begin{aligned} & \rho'_r \rho_1 \left[\frac{(u'_r)(v'_r)}{L_1} u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \chi_1} + \frac{(u'_r)^2}{L_1} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right] = - \left(\frac{\rho'_r a_r^2}{H} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \\ & + (B \rho'_r a_r Kn H) \left[\left(\frac{v'_r}{L_1^2} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1^2} + \left(\frac{v'_r}{H^2} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3} \left(\left(\frac{v'_r}{H^2} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \left(\frac{u'_r}{L_1 H} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \rho'_r \rho_1 \left[\left(\frac{\epsilon_1^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H} \right) u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \chi_1} + \left(\frac{\epsilon_1^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H} \right) v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right] = - \left(\frac{\rho'_r a_r^2}{H} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \\
&+ (B \rho'_r a_r K n H) \left[\left(\frac{\epsilon_1^4 a_r}{B K n H^2} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1^2} + \left(\frac{\epsilon_1^2 a_r}{B K n H^2} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\epsilon_1^2 a_r}{B K n H^2} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\epsilon_1^2 a_r}{B K n H^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right) \right], \\
&\Rightarrow \left(\rho'_r \frac{\epsilon_1^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H} \right) \rho_1 \left[u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \chi_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right] = - \left(\frac{\rho'_r a_r^2}{H} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \\
&+ \left(\frac{\rho'_r a_r^2 \epsilon_1^2}{H} \right) \left[(\epsilon_1^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right) \right],
\end{aligned}$$

finalmente multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por $H/(\rho'_r a_r^2)$, con lo que se obtiene:

$$\boxed{\left(\frac{\epsilon_1^4}{B^2 K n^2} \right) \rho_1 \left[u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \chi_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right] = - \frac{\partial P_1}{\partial \eta} + \epsilon_1^4 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \chi_1^2} + \epsilon_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\epsilon_1^2}{3} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi_1 \partial \eta} \right)}. \quad (2.12)$$

Gas Ideal:

$$\rho'_r a_r^2 P_1 = \rho'_r \rho_1 R T'_{sal} \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \rho'_r (\gamma R T'_{sal}) P_1 = \rho'_r \rho_1 R T'_{sal} \theta_1,$$

multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por $1/(\rho'_r R T'_{sal})$ y tenemos:

$$\boxed{\gamma P_1 = \rho_1 \theta_1}, \quad (2.13)$$

pero en la zona isotérmica $T'_1 = T'_{ent} \rightarrow \theta_1 = T'_{ent}/T'_{sal} = \theta_{ent}$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma P_1}{\theta_{ent}}. \quad (2.14)$$

Ahora analizamos los términos de la ecuación 2.11 que dependen del orden cero en ϵ_1

$$\Rightarrow 0 = - \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2},$$

resolviendo la ecuación anterior:

$$\Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} \eta + C_1, \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} \eta^2 + C_1 \eta + C_2 . \quad (2.16)$$

Condiciones de Frontera:

Para las condiciones de frontera de la velocidad, primero utilizamos el modelo de primer orden de Maxwell (descrito detalladamente en Kennard 1938) para la condición de deslizamiento en la pared y posteriormente usamos la condición de simetría en el centro del micro-canal:

$$\begin{aligned} \text{en } y = \frac{H}{2} \rightarrow u_1' &= \sigma \lambda \left(\frac{\partial u_1'}{\partial y} \right) \Big|_{y=\frac{H}{2}} \\ \Rightarrow u_1 &= \sigma \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} , \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde σ es el coeficiente global de acomodamiento definido en Hsieh *et al.* 2004 como: $\sigma = (2 - \sigma_v) / \sigma_v$ siendo σ_v el coeficiente de acomodamiento de momentum tangencial (Karniadakis *et al.* 2005).

$$\begin{aligned} \text{en } y = 0 \rightarrow \frac{\partial u_1'}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} &= 0 , \end{aligned} \quad (2.18)$$

sustituyendo 2.18 en 2.15 llegamos a que $C_1 = 0$, después sustituimos la ecuación 2.17 junto con el valor de C_1 en la ecuación 2.16:

$$u_1(\eta = \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} + C_2 = \sigma \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} ,$$

pero de 2.15:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} , \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{1}{8} \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} [4\sigma Kn - 1] , \end{aligned}$$

esto nos lleva entonces a que el perfil de velocidades para u_1 queda de la siguiente manera:

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{8} \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} [4(\eta^2 + \sigma Kn) - 1]} , \quad (2.19)$$

o también:

$$u_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} F(\eta) , \quad (2.20)$$

en donde:

$$F(\eta) = \frac{1}{8} [4(\eta^2 + \sigma Kn) - 1] .$$

Así mismo podemos comparar los términos que son de orden cero en ϵ_1 de la ecuación 2.12:

$$0 = -\frac{\partial P_1}{\partial \eta} , \quad \Rightarrow \quad P_1 \neq P_1(\eta) , \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_1(\chi_1) , \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_1}{\partial \chi_1} = \frac{dP_1}{d\chi_1} .$$

Ahora sustituímos 2.14 y 2.20 en la ecuación de continuidad 2.10:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\chi_1} [P_1 \frac{dP_1}{d\chi_1}] F(\eta) + P_1 \frac{\partial}{\partial \eta} [v_1] &= 0 , \quad (2.21) \\ \Rightarrow \quad v_1 &= -\left(\frac{1}{P_1}\right) \frac{d}{d\chi_1} [P_1 \frac{dP_1}{d\chi_1}] \int F(\eta) d\eta + C_3 , \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \int F(\eta) d\eta &= G(\eta) = \frac{1}{8} [4(\frac{\eta^3}{3} + \sigma Kn\eta) - \eta] , \\ \Rightarrow \quad v_1 &= -\left(\frac{1}{P_1}\right) \frac{d}{d\chi_1} [P_1 \frac{dP_1}{d\chi_1}] G(\eta) + C_3 , \end{aligned}$$

en $\eta = 1/2 \rightarrow v_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad C_3 = \left(\frac{1}{P_1}\right) \frac{d}{d\chi_1} [P_1 \frac{dP_1}{d\chi_1}] G\left(\frac{1}{2}\right) ,$$

donde:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{6\sigma Kn - 1}{24} , \\ \Rightarrow \quad v_1 &= \left(\frac{1}{P_1}\right) \frac{d}{d\chi_1} [P_1 \frac{dP_1}{d\chi_1}] [G\left(\frac{1}{2}\right) - G(\eta)] , \quad (2.22) \end{aligned}$$

pero en $\eta = -1/2 \rightarrow v_1 = 0$

$$\Rightarrow v_1 = \left(\frac{1}{P_1}\right) \frac{d}{d\chi_1} \left[P_1 \frac{dP_1}{d\chi_1} \right] \left[G\left(\frac{1}{2}\right) - G\left(-\frac{1}{2}\right) \right] = 0 ,$$

donde:

$$\begin{aligned} G\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1 - 6\sigma Kn}{24} , \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{P_1}\right) \frac{d}{d\chi_1} \left[P_1 \frac{dP_1}{d\chi_1} \right] &= 0 , \end{aligned} \quad (2.23)$$

sustituyendo 2.23 en 2.22:

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = 0} . \quad (2.24)$$

Ahora resolvemos 2.23:

$$\Rightarrow \frac{P_1^2}{2} = C_4 \chi_1 + C_5 ;$$

condiciones de frontera para la presión:

$$\text{en } x = 0 \rightarrow \chi_1 = 0 \rightarrow P_1 = P_{ent} = \frac{P'_{ent}}{\rho_r a_r^2} \Rightarrow C_5 = \frac{P'_{ent}}{2} ,$$

$$\text{en } x = L_1 \rightarrow \chi_1 = 1 \rightarrow P_1 = P_m = \frac{P'_m}{\rho_r a_r^2} \Rightarrow C_4 = \frac{1}{2} (P_m^2 - P_{ent}^2) ,$$

donde P'_m es el valor de la presión en la frontera entre las dos zonas del micro-canal; siendo P'_m desconocida.

$$\Rightarrow \boxed{P_1 = P_m \sqrt{\left(1 - \left[\frac{P_{ent}}{P_m}\right]^2\right) \chi_1 + \left[\frac{P_{ent}}{P_m}\right]^2}} . \quad (2.25)$$

ZONA 2

Variables adimensionales:

$$\chi_2 = \frac{x - L_1}{L_2}; \quad u_2 = \frac{u'_2}{u'_r}; \quad v_2 = \frac{v'_2}{v'_r}; \quad \theta_2 = \frac{T'_2}{T'_{sal}}$$

$$P_2 = \frac{P'_2}{\rho_r a_r^2}; \quad \rho_2 = \frac{\rho'_2}{\rho_r}; \quad \epsilon_2 = \frac{H}{L_2} ,$$

donde:

- $\chi_2 \rightarrow$ Coordenada adimensional en la dirección axial en la zona 2.
- $u_2 \rightarrow$ Velocidad adimensional del aire en la dirección axial en la zona 2.
- $v_2 \rightarrow$ Velocidad adimensional del aire en la dirección transversal en la zona 2.
- $\theta_2 \rightarrow$ Temperatura adimensional del aire en la zona 2.
- $P_2 \rightarrow$ Presión adimensional del aire en la zona 2.
- $\rho_2 \rightarrow$ Densidad adimensional del aire en la zona 2.
- $\epsilon_2 \rightarrow$ Relación de esbeltez en la zona 2.

Como podemos observar, la manera de adimensionalizar las variables en la zona 2 es muy similar a la de la zona 1, por lo que las variables que no se especificaron en esta zona del micro-canal, resultan ser exactamente las mismas que en la zona 1. Por otro lado, suponemos que el orden de magnitud de las velocidades no cambia de una zona a otra por lo que las velocidades de referencia se mantienen igual.

$$\Rightarrow \quad u'_r = \frac{\epsilon_2 a_r}{BK_n}; \quad v'_r = \frac{\epsilon_2^2 a_r}{BK_n}.$$

A continuación se presentará la forma adimensional de las cinco ecuaciones de conservación correspondientes a la zona 2 (ecuaciones 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9). Es preciso tener claro que las variables adimensionales de la zona 2 tienen la misma forma que las de la zona 1, es por eso que para evitar demasiadas operaciones algebraicas nos limitaremos a presentar la forma final adimensional correspondiente a las ecuaciones de continuidad, las dos de momentum y la de gas ideal. Además puede observarse con facilidad que la velocidad en la dirección x también tiene la misma forma que en la zona 1 y es por eso que la forma de la expresión matemática que adopta esta velocidad será muy similar a la de la zona isotérmica. Incluso está sujeta a las mismas condiciones de frontera. En el caso de la ecuación de la energía, sí se explicará con más detalle el proceso de adimensionalización.

Continuidad:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho_1 u_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial \eta} = 0}. \quad (2.26)$$

Momentum en x:

$$\boxed{\left(\frac{\epsilon_2^2}{B^2 K_n^2}\right) \rho_2 \left[u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right] = -\frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + \epsilon_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \frac{\epsilon_2^2}{3} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial \chi_2 \partial \eta} \right)}. \quad (2.27)$$

Momentum en y:

$$\left(\frac{\epsilon_2^4}{B^2 K n^2} \right) \rho_2 \left[u_2 \frac{\partial v_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right] = - \frac{\partial P_2}{\partial \eta} + \epsilon_2^4 \frac{\partial^2 v_2}{\partial \chi_2^2} + \epsilon_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \frac{\epsilon_2^2}{3} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \chi_2 \partial \eta} \right). \quad (2.28)$$

Gasi Ideal:

$$\boxed{\gamma P_2 = \rho_2 \theta_2} . \quad (2.29)$$

Energía:

$$\rho_r' \rho_2 C_p \left[\left(\frac{u_r' T_w'}{L_2} \right) u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{v_r' T_w'}{H} \right) v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right] = \left(\frac{u_r' \rho_r' a_r^2}{L_2} \right) u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{v_r' \rho_r' a_r^2}{H} \right) v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta}$$

$$+ \kappa T_w' \left[\left(\frac{1}{L_2^2} \right) \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \left(\frac{1}{H^2} \right) \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} \right] - \frac{2}{3} (B \rho_r' a_r K n H) \left[\left(\frac{u_r'}{L_2} \right) \frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{v_r'}{H} \right) \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right]^2$$

$$+ (B \rho_r' a_r K n H) \left\{ 2 \left(\frac{u_r'}{L_2} \right)^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_r'}{H} \right)^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 + \left[\left(\frac{v_r'}{L_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{u_r'}{H} \right) \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right]^2 \right\},$$

\Rightarrow

$$\rho_r' \rho_2 C_p T_w' \left[\left(\frac{\epsilon_2^2 a_r}{B K n H} \right) u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{\epsilon_2^2 a_r}{B K n H} \right) v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right] = \left(\frac{\epsilon_2^2 a_r^3 \rho_r'}{B K n H} \right) u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{\epsilon_2^2 a_r^3 \rho_r'}{B K n H} \right) v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta}$$

$$+ \frac{\kappa T_w'}{H^2} \left[\epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} \right] + (B \rho_r' a_r K n H) \left\{ 2 \left(\frac{\epsilon_2^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\epsilon_2^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{\epsilon_2^3 a_r}{B K n H} \right) \frac{\partial v_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{\epsilon_2 a_r}{B K n H} \right) \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\epsilon_2^2 a_r}{B K n H} \right) \frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} + \left(\frac{\epsilon_2^2 a_r}{B K n H} \right) \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right]^2 \right\},$$

\Rightarrow

$$\left(\frac{\rho_r' C_p T_w' a_r \epsilon_2^2}{B K n H} \right) \rho_2 \left[u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right] = \left(\frac{\epsilon_2^2 a_r^3 \rho_r'}{B K n H} \right) \left[u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\kappa T'_w}{H^2} [\epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2}] + (B \rho'_r a_r K n H) \{ 2 (\frac{\epsilon_2^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) [(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial \eta})^2] \\
& + [(\frac{\epsilon_2^6 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) (\frac{\partial v_2}{\partial \chi_2})^2 + 2 (\frac{\epsilon_2^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) (\frac{\partial v_2}{\partial \chi_2}) (\frac{\partial u_2}{\partial \eta}) + (\frac{\epsilon_2^2 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) (\frac{\partial u_2}{\partial \eta})^2] \\
& - \frac{2}{3} [(\frac{\epsilon_2^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) (\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2})^2 + 2 (\frac{\epsilon_2^2 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) (\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2}) (\frac{\partial v_2}{\partial \eta}) + (\frac{\epsilon_2^2 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) (\frac{\partial v_2}{\partial \eta})^2] \} ,
\end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned}
& (\frac{\rho'_r C_p T'_w a_r \epsilon_2^2}{B K n H}) \rho_2 [u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}] = (\frac{\epsilon_2^2 a_r^3 \rho'_r}{B K n H}) [u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta}] \\
& + \frac{\kappa T'_w}{H^2} [\epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2}] + (B \rho'_r a_r K n H) \{ 2 (\frac{\epsilon_2^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) [(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial \eta})^2] \\
& + (\frac{\epsilon_2^2 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) [\epsilon_2^4 (\frac{\partial v_2}{\partial \chi_2})^2 + 2 \epsilon_2^2 (\frac{\partial v_2}{\partial \chi_2}) (\frac{\partial u_2}{\partial \eta}) + (\frac{\partial u_2}{\partial \eta})^2] \\
& - \frac{2}{3} (\frac{\epsilon_2^4 a_r^2}{B^2 K n^2 H^2}) [(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2})^2 + 2 (\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2}) (\frac{\partial v_2}{\partial \eta}) + (\frac{\partial v_2}{\partial \eta})^2] \} ,
\end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned}
& (\frac{\rho'_r C_p T'_w a_r \epsilon_2^2}{B K n H}) \rho_2 [u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}] = (\frac{\epsilon_2^2 a_r^3 \rho'_r}{B K n H}) [u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta}] \\
& + \frac{\kappa T'_w}{H^2} [\epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2}] + (\frac{\rho'_r a_r^3 \epsilon_2^2}{B K n H}) \{ 2 \epsilon_2^2 [(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial \eta})^2] \\
& + [\epsilon_2^4 (\frac{\partial v_2}{\partial \chi_2})^2 + 2 \epsilon_2^2 (\frac{\partial v_2}{\partial \chi_2}) (\frac{\partial u_2}{\partial \eta}) + (\frac{\partial u_2}{\partial \eta})^2] - \frac{2}{3} \epsilon_2^2 (\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta})^2 \} ,
\end{aligned}$$

multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por $H^2/(\kappa T'_w)$ y recordamos que $a_r^2 = \gamma R T'_w$, entonces:

$$(\frac{\rho'_r C_p a_r H}{B K n \kappa}) \epsilon_2^2 \rho_2 [u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}] = (\frac{\rho'_r a_r H}{B K n \kappa T'_w}) (\gamma R T'_w) \epsilon_2^2 [u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta}]$$

$$\begin{aligned}
& +\epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\rho_r' a_r H}{BK n \kappa T_w'} \right) (\gamma RT_w') \epsilon_2^2 \left\{ 2\epsilon_2^2 \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right. \\
& \left. + \left(\epsilon_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{2}{3} \epsilon_2^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \right\},
\end{aligned}$$

por otro lado:

$$R = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) C_p; \quad \rho_r' = \frac{P_{sal}'}{RT_{sal}'},$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{P_{sal}' \gamma a_r H}{(\gamma - 1) BK n T_{sal}' \kappa} \right) \epsilon_2^2 \rho_2 \left[u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right] = \left(\frac{P_{sal}' \gamma a_r H}{BK n T_{sal}' \kappa} \right) \epsilon_2^2 \left[u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta} \right] \\
& + \epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{P_{sal}' \gamma a_r H}{BK n T_{sal}' \kappa} \right) \left\{ 2\epsilon_2^4 \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right. \\
& \left. + \epsilon_2^2 \left(\epsilon_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{2}{3} \epsilon_2^4 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \right\},
\end{aligned}$$

definimos el siguiente parámetro adimensional

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{P_{sal}' \gamma a_r H}{\kappa T_{sal}' BK n} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right),$$

finalmente tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \boxed{\hat{\alpha}_1 \epsilon_2^2 \rho_2 \left[u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right] = \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) \epsilon_2^2 \left[u_2 \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta} \right] + \epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2}} \\
& \boxed{+ \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) \left\{ 2\epsilon_2^4 \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \epsilon_2^2 \left(\epsilon_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{2}{3} \epsilon_2^4 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \right\}}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Ahora analizamos los términos de la ecuación 2.27 que son de orden cero en ϵ_2 :

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2},$$

como ya se dijo anteriormente esta ecuación es similar a la que se resolvió para u_1 en la zona 1 y está sujeta a las mismas condiciones de frontera:

en $\eta = 1/2 \rightarrow u_2 = \sigma Kn \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1/2}$,
 en $\eta = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} = 0$,

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} F(\eta)} , \quad (2.31)$$

en donde:

$$F(\eta) = \frac{1}{8} [4(\eta^2 + \sigma Kn) - 1] . \quad (2.32)$$

Así mismo, analizamos los términos de la ecuación 2.28 que dependen del orden cero en ϵ_2 :

$$0 = -\frac{\partial P_2}{\partial \eta}, \quad \Rightarrow \quad P_2 \neq P_2(\eta), \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_2(\chi_2), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} = \frac{dP_2}{d\chi_2} .$$

Ahora sustituímos 2.31 en 2.30:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \hat{\alpha}_1 \epsilon_2^2 \rho_2 [F(\eta) \left(\frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} \right) \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \chi_2} \right) + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}] = \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) \epsilon_2^2 [F(\eta) \left(\frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} \right)^2 + v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta}] + \epsilon_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} \\ & + \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) \{ 2\epsilon_2^4 [F^2(\eta) \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial \chi_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2] + \epsilon_2^2 \left(\epsilon_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial \chi_2} + \left[\frac{dF(\eta)}{d\eta} \right] \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} \right)^2 - \frac{2}{3} \epsilon_2^4 \left(F(\eta) \frac{\partial^2 P_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 \} , \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde $F(\eta)$ está dada por la ecuación 2.32.

Tomando los términos de 2.33 que dependen del orden cero en ϵ_2 llegamos a que:

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = K_1 \chi_2 + K_2 . \quad (2.34)$$

Condiciones de frontera para la temperatura θ_2 en la dirección transversal: tomaremos el modelo de salto de temperatura en la pared en su forma adimensional propuesto por Von Smoluchowski utilizado por Qin *et al.* 2007, y descrito detalladamente en Kennard 1938, también consideraremos la condición de simetría en el centro del micro-canal:

▪ $\eta = 1/2$:

$$\Rightarrow \quad \theta_2 - \theta_w = -\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)Pr} \left[\frac{B1Kn}{\rho_2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1/2} \right] , \quad (2.35)$$

donde $\theta_w = 1$, Pr es el número de Prandtl y $B1$ es un coeficiente de orden unidad del modelo de von Smoluchowski (Qin *et al.* 2007).

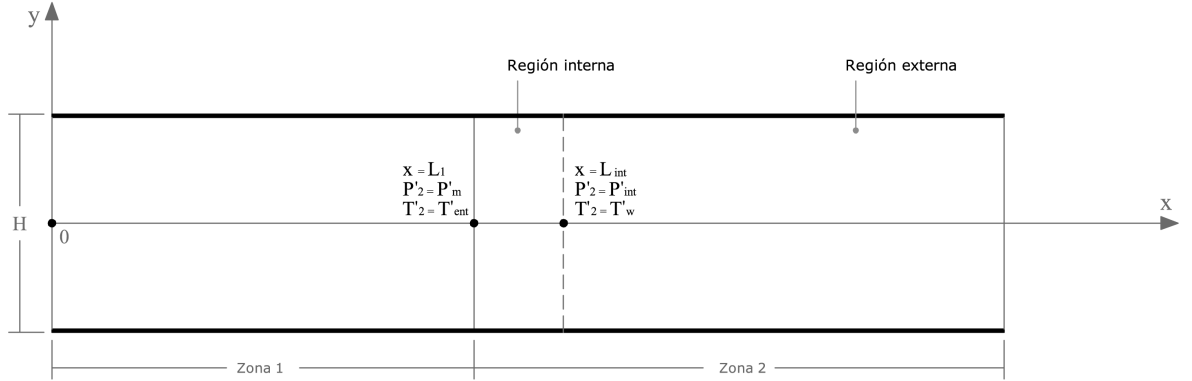


Figura 2.2: Esquema que muestra el inicio de la región interna de la zona 2 ($x = L_1$, $T'_2 = T'_{ent}$ y $P'_2 = P'_m$) y el inicio de la región externa ($x = L_{int}$, $T'_2 = T'_w$ y $P'_2 = P'_{int}$).

- $\eta = 0$:

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0}, \quad (2.36)$$

sustituímos 2.35 y 2.36 en 2.34:

$$\begin{aligned} \text{en } \eta = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0, \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} &= 0; \quad \text{y además: } \theta_2 = K_2, \quad \Rightarrow \quad \theta_2 \neq \theta_2(\xi, \eta), \\ \text{en } \eta = \frac{1}{2} &\rightarrow K_2 - \theta_w = -\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)Pr} \left[\frac{B1Kn}{\rho_2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} \right] = 0, \\ &\Rightarrow \quad K_2 = \theta_w = 1, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_2 = 1}. \end{aligned}$$

El resultado anterior implica que la temperatura cambia repentinamente desde un valor constante T'_{ent} en la zona 1, a otro valor constante T'_w en la zona 2 indicando una aparente discontinuidad en $x = L_1$, lo que es físicamente imposible. Esto nos indica que en la zona 2 se presenta un problema de capa límite térmica donde tenemos la existencia de una región interna y otra externa como lo muestra la figura 2.2.

En la figura 2.2 se ve claramente que la región interna comienza en $x = L_1$ y termina en $x = L_{int}$, que es el punto en el que la temperatura del fluido alcanza

el valor de T'_w , en este punto decimos que el valor de la presión es P'_{int} , tanto L_{int} como P'_{int} son valores desconocidos. Observamos que la extensión de la región interna está íntimamente relacionada con la coordenada x y que al tomar el orden cero en ϵ_2 en la ecuación 2.33, el término de la segunda derivada (término difusivo) de la temperatura con respecto a la coordenada axial desaparece, el cual nos describe la física del problema dentro de la región interna de la capa límite térmica, por lo tanto éste es un caso de perturbación singular en donde debemos re-escalar a la variable χ_2 para poder conservar el término difusivo en la coordenada axial que es importante en esta zona del micro-canal debido al calentamiento en la pared (para mayores detalles sobre la teoría de perturbación consultar Bender *et al.* 1978).

2.4. Estructura de la Capa Límite Térmica

Entonces definimos una nueva variable:

$$\xi = \frac{\chi_2}{\epsilon_2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{d\chi_2} = \frac{1}{\epsilon_2}. \quad (2.37)$$

Sustituimos 2.37 en 2.33 y tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 \rho_2 F(\eta) \left(\frac{\partial P_2}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right) + \hat{\alpha}_1 \epsilon_2^2 \rho_2 v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} &= \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) F(\eta) \left(\frac{\partial P_2}{\partial \xi} \right)^2 + \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) \epsilon_2^2 v_2 \frac{\partial P_2}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} \\ + \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) \{ 2F^2(\eta) \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi^2} \right)^2 + 2\epsilon_2^4 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right)^2 + (\epsilon_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + [\frac{dF(\eta)}{d\eta}] \frac{\partial P_2}{\partial \xi})^2 - \frac{2}{3} (F(\eta) \frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi^2} + \epsilon_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial \eta})^2 \} &. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ahora para la solución de v_2 , θ_2 , ρ_2 y P_2 proponemos las siguientes expansiones:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{2,0}(\xi) + \epsilon_2 v_{2,1}(\xi, \eta) + \dots \\ \theta_2 &= \theta_{2,0}(\xi) + \epsilon_2 \theta_{2,1}(\xi, \eta) + \dots \\ \rho_2 &= \rho_{2,0}(\xi) + \epsilon_2 \rho_{2,1}(\xi, \eta) + \dots \\ P_2 &= P_{2,0}(\xi) + \epsilon_2 P_{2,1}(\xi, \eta) + \dots \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sustituimos en la ecuación 2.38 las expansiones 2.39 reteniendo hasta términos de primer orden en ϵ_2 :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 (\rho_{2,0} + \epsilon_2 \rho_{2,1}) F(\eta) \left(\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi} + \epsilon_2 \frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \theta_{2,0}}{\partial \xi} + \epsilon_2 \frac{\partial \theta_{2,1}}{\partial \xi} \right) + \hat{\alpha}_1 \epsilon_2^2 (\rho_{2,0} + \epsilon_2 \rho_{2,1}) (v_{2,0} + \epsilon_2 v_{2,1}) \left(\frac{\partial \theta_{2,0}}{\partial \eta} + \epsilon_2 \frac{\partial \theta_{2,1}}{\partial \eta} \right) &= \\ \hat{\alpha}_1 (\gamma - 1) F(\eta) \left[\left(\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi} \right)^2 + 2\epsilon_2 \left(\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi} \right) + \epsilon_2^2 \left(\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \hat{\alpha}_1 \epsilon_2^2 (\gamma - 1) (v_{2,0} + \epsilon_2 v_{2,1}) \left(\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \eta} + \epsilon_2 \frac{\partial P_{2,1}}{\partial \eta} \right) &. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\epsilon_2 \frac{\partial P_{2,1}}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \theta_{2,0}}{\partial \xi^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \theta_{2,1}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_{2,0}}{\partial \eta^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \theta_{2,1}}{\partial \eta^2} + \hat{\alpha}_1(\gamma-1) \{ 2F^2(\eta) [(\frac{\partial^2 P_{2,0}}{\partial \xi^2})^2 + 2\epsilon_2 (\frac{\partial^2 P_{2,0}}{\partial \xi^2}) (\frac{\partial^2 P_{2,1}}{\partial \xi^2}) \\
& + \epsilon_2^2 (\frac{\partial^2 P_{2,1}}{\partial \xi^2})^2] + 2\epsilon_2^4 [(\frac{\partial v_{2,0}}{\partial \eta})^2 + 2\epsilon_2 (\frac{\partial v_{2,0}}{\partial \eta}) (\frac{\partial v_{2,1}}{\partial \eta}) + \epsilon_2^2 (\frac{\partial v_{2,1}}{\partial \eta})^2] + 2[\frac{dF(\eta)}{d\eta}] \epsilon_2^2 [(\frac{\partial v_{2,0}}{\partial \xi}) (\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi}) + \\
& \epsilon_2 (\frac{\partial v_{2,0}}{\partial \xi}) (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi}) + \epsilon_2 (\frac{\partial v_{2,1}}{\partial \xi}) (\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi}) + \epsilon_2^2 (\frac{\partial v_{2,1}}{\partial \xi}) (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi})] + [\frac{dF(\eta)}{d\eta}]^2 [(\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi})^2 + 2\epsilon_2 (\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi}) (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi}) \\
& + \epsilon_2^2 (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi})^2] - \frac{2}{3} [F^2(\eta) (\frac{\partial^2 P_{2,0}}{\partial \xi^2})^2 + 2F^2(\eta) \epsilon_2 (\frac{\partial^2 P_{2,0}}{\partial \xi^2}) (\frac{\partial^2 P_{2,1}}{\partial \xi^2}) + F^2(\eta) \epsilon_2^2 (\frac{\partial^2 P_{2,1}}{\partial \xi^2})^2 \\
& + 2F\eta \epsilon_2^2 (\frac{\partial P_{2,0}}{\partial \xi} + \epsilon_2 \frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi}) (\frac{\partial v_{2,0}}{\partial \eta} + \epsilon_2 \frac{\partial v_{2,1}}{\partial \eta}) + \epsilon_2^4 (\frac{\partial v_{2,0}}{\partial \eta})^2 + 2\epsilon_2^5 (\frac{\partial v_{2,0}}{\partial \eta}) (\frac{\partial v_{2,1}}{\partial \eta}) + \epsilon_2^6 (\frac{\partial v_{2,1}}{\partial \eta})^2 \} .
\end{aligned}$$

A continuación haremos tres consideraciones: la primera es que omitiremos los términos de la ecuación anterior que sean de orden mayor o igual a dos en ϵ_2 , la segunda es que de acuerdo con las expansiones 2.39, las derivadas con respecto a η de v_2 , P_2 y θ_2 son cero y la tercera consideración es que la velocidad v_2 en el orden cero en ϵ_2 ($v_{2,0}$) debe comportarse de manera similar a la velocidad en la zona uno ($v_{2,0} \approx v_1$), $\Rightarrow v_{2,0} = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \hat{\alpha}_1 F(\eta) [\rho_{2,0} (\frac{dP_{2,0}}{d\xi}) (\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi}) + \epsilon_2 \rho_{2,0} \{ (\frac{dP_{2,0}}{d\xi}) (\frac{\partial \theta_{2,1}}{\partial \xi}) + (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi}) (\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi}) \} + \epsilon_2 \rho_{2,1} (\frac{dP_{2,0}}{d\xi}) (\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi})] \\
& = \hat{\alpha}_1(\gamma-1) F(\eta) [(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})^2 + 2\epsilon_2 (\frac{dP_{2,0}}{d\xi}) (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi})] + \frac{d^2 \theta_{2,0}}{d\xi^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \theta_{2,1}}{\partial \xi^2} \\
& + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \theta_{2,1}}{\partial \eta^2} + \hat{\alpha}_1(\gamma-1) [\frac{dF(\eta)}{d\eta}]^2 [(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})^2 + 2\epsilon_2 (\frac{dP_{2,0}}{d\xi}) (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial \xi})] \\
& + \frac{4}{3} \hat{\alpha}_1(\gamma-1) F^2(\eta) [(\frac{d^2 P_{2,0}}{d\xi^2})^2 + 2\epsilon_2 (\frac{d^2 P_{2,0}}{d\xi^2}) (\frac{\partial^2 P_{2,1}}{\partial \xi^2})]
\end{aligned}$$

y la ecuación anterior la integramos con respecto a η desde 0 hasta 1/2:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \widehat{\alpha}_1[\rho_{2,0}(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi}) + \epsilon_2\rho_{2,0}\{(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{\partial\theta_{2,1}}{\partial\xi}) + (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi})(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi})\} + \epsilon_2\rho_{2,1}(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi})] \int_0^{\frac{1}{2}} F(\eta) d\eta \\
&= \widehat{\alpha}_1(\gamma - 1)[(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})^2 + 2\epsilon_2(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi})] \int_0^{\frac{1}{2}} F(\eta) d\eta + \frac{1}{2}(\frac{d^2\theta_{2,0}}{d\xi^2} + \epsilon_2\frac{\partial^2\theta_{2,1}}{\partial\xi^2}) \\
&+ \epsilon_2[(\frac{\partial^2\theta_{2,1}}{\partial\eta^2})|_{\eta=\frac{1}{2}} - (\frac{\partial^2\theta_{2,1}}{\partial\eta^2})|_{\eta=0}] + \widehat{\alpha}_1(\gamma - 1)[(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})^2 + 2\epsilon_2(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi})] \int_0^{\frac{1}{2}} [\frac{dF(\eta)}{d\eta}]^2 d\eta \\
&+ \frac{4}{3}\widehat{\alpha}_1(\gamma - 1)[(\frac{d^2P_{2,0}}{d\xi^2})^2 + 2\epsilon_2(\frac{d^2P_{2,0}}{d\xi^2})(\frac{\partial^2P_{2,1}}{\partial\xi^2})] \int_0^{\frac{1}{2}} F^2(\eta) d\eta. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Ahora utilizamos las expansiones 2.39 para ρ_2 y θ_2 en la ecuación 2.35, donde omitimos los términos que dependen de un orden mayor a uno en ϵ_2 :

$$\begin{aligned}
[\theta_{2,0}(\xi, \frac{1}{2}) + \epsilon_2\theta_{2,1}(\xi, \frac{1}{2})] - 1 &= -\frac{\widehat{\beta}}{(\rho_{2,0} + \epsilon_2\rho_{2,1})} [(\frac{\partial\theta_{2,0}}{\partial\eta})|_{\eta=\frac{1}{2}} + \epsilon_2(\frac{\partial\theta_{2,1}}{\partial\eta})|_{\eta=\frac{1}{2}}], \text{ donde } \widehat{\beta} = \frac{2\gamma B_1 Kn}{(\gamma + 1)Pr} \\
\Rightarrow \epsilon_2(\frac{\partial\theta_{2,1}}{\partial\eta})|_{\eta=\frac{1}{2}} &= \frac{[1 - \theta_{2,0} - \epsilon_2\theta_{2,1}(\xi, \frac{1}{2})](\rho_{2,0} + \epsilon_2\rho_{2,1})}{\widehat{\beta}}, \quad (2.41)
\end{aligned}$$

donde: $\theta_{2,0}(\xi, 1/2) = \theta_{2,0}(\xi) = \theta_{2,0}$.

Sustituyendo 2.36 y 2.41 en 2.40, omitiendo los términos de orden dos en ϵ_2 tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\alpha}_1[\rho_{2,0}(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi}) + \epsilon_2\rho_{2,0}\{(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{\partial\theta_{2,1}}{\partial\xi}) + (\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi})(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi})\} + \epsilon_2\rho_{2,1}(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi})] \int_0^{\frac{1}{2}} F(\eta) d\eta \\
&= \widehat{\alpha}_1(\gamma - 1)[(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})^2 + 2\epsilon_2(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi})] \int_0^{\frac{1}{2}} F(\eta) d\eta + \frac{1}{2}(\frac{d^2\theta_{2,0}}{d\xi^2} + \epsilon_2\frac{\partial^2\theta_{2,1}}{\partial\xi^2}) + \frac{(1 - \theta_{2,0})\rho_{2,0}}{\widehat{\beta}} \\
&+ \epsilon_2\frac{(1 - \theta_{2,0})\rho_{2,1}}{\widehat{\beta}} - \epsilon_2\frac{\rho_{2,0}\theta_{2,1}(\xi, \frac{1}{2})}{\widehat{\beta}} + \widehat{\alpha}_1(\gamma - 1)[(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})^2 + 2\epsilon_2(\frac{dP_{2,0}}{d\xi})(\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi})] \int_0^{\frac{1}{2}} [\frac{dF(\eta)}{d\eta}]^2 d\eta
\end{aligned}$$

$$+\frac{4}{3}\widehat{\alpha}_1(\gamma-1)\left[\left(\frac{d^2P_{2,0}}{d\xi^2}\right)^2+2\epsilon_2\left(\frac{d^2P_{2,0}}{d\xi^2}\right)\left(\frac{\partial^2P_{2,1}}{\partial\xi^2}\right)\right]\int_0^{\frac{1}{2}}F^2(\eta)d\eta,$$

considerando sólo los términos de la ecuación anterior que dependen del orden cero en ϵ_2 :

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_1\left[\rho_{2,0}\left(\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right)\left(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi}\right)\right]\int_0^{\frac{1}{2}}F(\eta)d\eta &= \widehat{\alpha}_1(\gamma-1)\left[\left(\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right)^2\right]\int_0^{\frac{1}{2}}F(\eta)d\eta \\ +\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta_{2,0}}{d\xi^2}+\frac{(1-\theta_{2,0})\rho_{2,0}}{\widehat{\beta}}\right) &+ \widehat{\alpha}_1(\gamma-1)\left(\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right)^2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dF(\eta)}{d\eta}\right]^2d\eta \\ +\widehat{\alpha}_1(\gamma-1)\left[\left(\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right)^2\right] &\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dF(\eta)}{d\eta}\right]^2d\eta+\frac{4}{3}\widehat{\alpha}_1(\gamma-1)\left[\left(\frac{d^2P_{2,0}}{d\xi^2}\right)^2\right]\int_0^{\frac{1}{2}}F^2(\eta)d\eta, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}F(\eta)d\eta=\frac{6\sigma Kn-1}{24}; \quad (2.43)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dF(\eta)}{d\eta}\right]^2d\eta=\frac{1}{24}; \quad (2.44)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}F^2(\eta)d\eta=\frac{10\sigma Kn(3\sigma Kn-1)+1}{240}, \quad (2.45)$$

finalmente sustituimos las ecuaciones 2.43, 2.44 y 2.45 junto con $\rho_{2,0}=(\gamma P_{2,0})/\theta_{2,0}$ (gas ideal), en la ecuación 2.42:

$$A_1\left(\frac{P_{2,0}}{\theta_{2,0}}\right)\left(\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right)\left(\frac{d\theta_{2,0}}{d\xi}\right)=A_2\left(\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta_{2,0}}{d\xi^2}\right)+A_3P_{2,0}\left(\frac{1-\theta_{2,0}}{\theta_{2,0}}\right)+A_4\left(\frac{d^2P_{2,0}}{d\xi^2}\right)^2, \quad (2.46)$$

donde:

$$A_1=\widehat{\alpha}_1\gamma\left[\frac{6\sigma Kn-1}{24}\right]; \quad (2.47)$$

$$A_2=\widehat{\alpha}_1(\gamma-1)\left[\frac{6\sigma Kn}{24}\right]; \quad (2.48)$$

$$A_3 = \frac{\gamma}{\beta}; \quad (2.49)$$

$$A_4 = \frac{4}{3}\hat{\alpha}_1(\gamma - 1)\left[\frac{10\sigma Kn(3\sigma Kn - 1) + 1}{240}\right]. \quad (2.50)$$

Ahora seguimos el siguiente procedimiento: sustituimos el valor de $v_{2,0} = 0$, las expansiones 2.39 y las ecuaciones 2.31 y 2.37 en la ecuación 2.26, y después omitimos los términos de orden mayor a uno en ϵ_2 :

$$\begin{aligned} F(\eta)\frac{\partial}{\partial\chi_2}[\rho_2\frac{\partial P_2}{\partial\chi_2}] + \frac{\partial}{\partial\eta}[\rho_2 v_2] &= 0, \\ \Rightarrow \frac{F(\eta)}{\epsilon_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi}[\rho_2\frac{\partial P_2}{\partial\xi}] + \frac{\partial}{\partial\eta}[\rho_2 v_2] &= 0, \\ \Rightarrow \frac{F(\eta)}{\epsilon_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi}[(\rho_{2,0} + \epsilon_2\rho_{2,1})(\frac{dP_{2,0}}{d\xi} + \epsilon_2\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi})] + \frac{\partial}{\partial\eta}[(\rho_{2,0} + \epsilon_2\rho_{2,1})(\epsilon_2 v_{2,1})] &= 0, \\ \Rightarrow \frac{F(\eta)}{\epsilon_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\{\rho_{2,0}\frac{dP_{2,0}}{d\xi} + \epsilon_2[\rho_{2,0}\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi} + \rho_{2,1}\frac{dP_{2,0}}{d\xi}]\} + \epsilon_2\frac{\partial}{\partial\eta}[\rho_{2,0}v_{2,1}] &= 0, \end{aligned}$$

después multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por ϵ_2^2 :

$$\Rightarrow F(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\{\rho_{2,0}\frac{dP_{2,0}}{d\xi} + \epsilon_2[\rho_{2,0}\frac{\partial P_{2,1}}{\partial\xi} + \rho_{2,1}\frac{dP_{2,0}}{d\xi}]\} + \epsilon_2^3\frac{\partial}{\partial\eta}[\rho_{2,0}v_{2,1}] = 0,$$

finalmente consideramos los términos de la ecuación anterior que son de orden cero en ϵ_2 , junto con la ecuación de gas ideal: $\rho_{2,0} = (\gamma P_{2,0})/\theta_{2,0}$:

$$\begin{aligned} \gamma F(\eta)\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{P_{2,0}}{\theta_{2,0}}\right)\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right] &= 0, \\ \Rightarrow \frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{P_{2,0}}{\theta_{2,0}}\right)\frac{dP_{2,0}}{d\xi}\right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Condiciones de Frontera para $\theta_{2,0}(\xi)$ y $P_{2,0}(\xi)$ en las ecuaciones diferenciales 2.46 y 2.51:

Para establecer estas condiciones de frontera es necesario tener en mente que en $x = L_{int}$, podemos decir que la variable ξ llega a un valor en el que la temperatura del aire alcanza el de la temperatura de la pared (T'_w), en este momento estamos en

la región externa en la cual volvemos a tener el caso de un flujo isotérmico en donde la temperatura del aire es igual a la de la pared. Así mismo para la presión, cuando $x = L_{int}$, la variable P'_2 toma un valor P'_{int} , que es el valor de la presión al inicio de la región externa de la zona 2 del micro-canal. Entonces cuando estamos en la región interna decimos que los valores T'_w y P'_{int} se alcanzan cuando ξ llega a un valor muy lejos del inicio de la zona 2; es decir, cuando $\xi \rightarrow \infty$. También, en la zona externa se dice que los valores T'_w y P'_{int} se alcanzan cuando $\chi_2 \rightarrow 0$. Es claro ahora que las ecuaciones 2.46 y 2.51 describen la región interna de la zona 2; por lo tanto, para esas ecuaciones diferenciales tenemos las siguientes condiciones de frontera:

- en $\xi = 0 \Rightarrow \theta_{2,0} = \theta_{ent}$; $P_{2,0} = P_m$,
- cuando $\xi \rightarrow \infty \Rightarrow \theta_{2,0} = \theta_w = 1$; $P_{2,0} = P_{int} = P'_{int}/(\rho_r a_r^2)$.

Para terminar este capítulo haremos un pequeño cambio en las variables de las ecuaciones diferenciales 2.46 y 2.51, esto para facilitar el manejo algebraico que más adelante se presentará en el siguiente capítulo:

Cambio de Variables:

$$\Pi = \frac{P_{2,0}}{P_m}; \quad \hat{\theta} = \theta_{2,0} .$$

Ecuaciones:

$$\boxed{A_1 \left(\frac{\Pi}{\hat{\theta}} \right) \left(\frac{d\Pi}{d\xi} \right) \left(\frac{d\hat{\theta}}{d\xi} \right) = A_2 \left(\frac{d\Pi}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{2P_m^2} \right) \frac{d^2\hat{\theta}}{d\xi^2} + \left(\frac{A_3}{P_m} \right) \Pi \left(\frac{1 - \hat{\theta}}{\hat{\theta}} \right) + A_4 \left(\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} \right)^2}, \quad (2.52)$$

$$\boxed{\frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{\Pi}{\hat{\theta}} \right) \frac{d\Pi}{d\xi} \right] = 0}. \quad (2.53)$$

Condiciones de Frontera:

$$\text{en } \xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \hat{\theta}_{ent}, \quad (2.54)$$

$$\text{cuando } \xi \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = 1, \quad (2.55)$$

$$\text{en } \xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi = \Pi_m = 1, \quad (2.56)$$

$$\text{cuando } \xi \rightarrow \infty \Rightarrow \Pi = \Pi_{int} = \frac{P_{int}}{P_m}. \quad (2.57)$$

Capítulo 3

Solución por Método de Perturbación

3.1. Región Externa de la Capa Límite Térmica

Antes de presentar las soluciones para $\hat{\theta}$ y Π en la región interna de la zona 2, analizaremos la región externa. Para la temperatura, sabemos que después de $x = L_{int}$ la temperatura del aire toma el valor de la temperatura en la pared y así se mantiene hasta que sale del micro-canal ($T'_{sal} = T'_w$). Entonces en la región externa tenemos que:

$$\theta_2 = \theta_w = 1 ,$$

para la presión debemos proceder de modo similar a lo hecho en la zona 1:

Sustituimos 2.29 y 2.31 en la ecuación de continuidad 2.26, recordando que en la región externa de la zona 2, $\theta_2 = 1$ y la presión no depende de la coordenada transversal en el orden cero de ϵ_2 (este es el mismo criterio usado en la zona 1):

$$\frac{d}{d\chi_2} [P_2 \frac{dP_2}{d\chi_2}] F(\eta) + P_2 \frac{d}{d\eta} [v_2] = 0 , \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow v_2 = -\left(\frac{1}{P_2}\right) \frac{d}{d\chi_2} [P_2 \frac{dP_2}{d\chi_2}] \int F(\eta) d\eta + C_6 ,$$

donde:

$$\int F(\eta) d\eta = G(\eta) = \frac{1}{8} [4\left(\frac{\eta^3}{3} + \sigma K n \eta\right) - \eta] ,$$

$$\Rightarrow v_2 = -\left(\frac{1}{P_2}\right) \frac{d}{d\chi_2} \left[P_1 \frac{dP_2}{d\chi_2} \right] G(\eta) + C_6 ,$$

en $\eta = 1/2 \rightarrow v_2 = 0$,

$$\Rightarrow C_6 = \left(\frac{1}{P_2}\right) \frac{d}{d\chi_2} \left[P_2 \frac{dP_2}{d\chi_2} \right] G\left(\frac{1}{2}\right) ,$$

donde:

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6\sigma Kn - 1}{24} ,$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \left(\frac{1}{P_2}\right) \frac{d}{d\chi_2} \left[P_2 \frac{dP_2}{d\chi_2} \right] \left[G\left(\frac{1}{2}\right) - G(\eta) \right]} , \quad (3.2)$$

pero en $\eta = -1/2 \rightarrow v_2 = 0$,

$$\Rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{P_2}\right) \frac{d}{d\chi_2} \left[P_1 \frac{dP_2}{d\chi_2} \right] \left[G\left(\frac{1}{2}\right) - G\left(-\frac{1}{2}\right) \right] = 0 ,$$

donde:

$$G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - 6\sigma Kn}{24} ,$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{P_2}\right) \frac{d}{d\chi_2} \left[P_2 \frac{dP_2}{d\chi_2} \right] = 0 , \quad (3.3)$$

sustituyendo 3.3 en 3.2:

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = 0} . \quad (3.4)$$

Ahora resolvemos 3.3:

$$\Rightarrow \frac{P_2^2}{2} = C_7 \chi_2 + C_8 ,$$

condiciones de frontera para la presión:

en $x = L_{int} \rightarrow \chi_2 = \widehat{L}_{int} \rightarrow P_2 = P_{int}$, donde: $\widehat{L}_{int} = (L_{int} - L_1)/L_2$,

$$\Rightarrow \frac{P_{int}^2}{2} = C_7 \widehat{L}_{int} + C_8 , \quad (3.5)$$

en $x = L_1 + L_2 \rightarrow \chi_2 = 1 \rightarrow P_2 = P_{sal}$,

$$\Rightarrow \frac{P_{sal}^2}{2} = C_7 + C_8, \quad (3.6)$$

entonces, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (C_7 y C_8) definido por 3.5 y 3.6, que se resuelve por la regla de Cramer y los resultados obtenidos son los siguientes:

$$C_7 = \frac{P_{int}^2 - P_{sal}^2}{2(\widehat{L}_{int} - 1)}; \quad (3.7)$$

$$C_8 = \frac{\widehat{L}_{int}P_{sal}^2 - P_{int}^2}{2(\widehat{L}_{int} - 1)}, \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \frac{P_2^2}{2} = \left[\frac{P_{int}^2 - P_{sal}^2}{2(\widehat{L}_{int} - 1)} \right] \chi_2 + \left[\frac{\widehat{L}_{int}P_{sal}^2 - P_{int}^2}{2(\widehat{L}_{int} - 1)} \right],$$

debido a que nos encontramos en la región externa de la capa límite térmica podemos hacer aproximaciones para simplificar la ecuación anterior, primero suponemos que el valor de L_{int} es muy parecido o casi igual al de L_1 , entonces decimos que: $L_{int} \approx L_1 \Rightarrow \widehat{L}_{int} \approx 0$:

$$\Rightarrow P_2^2 = (P_{sal}^2 - P_{int}^2)\chi_2 + P_{int}^2,$$

$$\Rightarrow \Pi_2^2 = (\Pi_{sal}^2 - \Pi_{int}^2)\chi_2 + \Pi_{int}^2, \quad \text{donde:} \quad \Pi_2 = \frac{P_2}{P_m}; \quad \Pi_{sal} = \frac{P_{sal}}{P_m}; \quad \Pi_{int} = \frac{P_{int}}{P_m},$$

$$\Rightarrow \Pi_2^2 = \Pi_{int}^2 \left[\left(\frac{\Pi_{sal}^2}{\Pi_{int}^2} - 1 \right) \chi_2 + 1 \right] = \Pi_{int}^2 \left[\left(\frac{P_{sal}^2}{P_{int}^2} - 1 \right) \chi_2 + 1 \right],$$

finalmente suponemos también que el valor de P'_{int} es muy parecido o casi igual al de P'_m , entonces decimos que: $P_{int} \approx P_m \Rightarrow \Pi_{int} \approx 1$:

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_2 = \sqrt{\left(\frac{P_{sal}^2}{P_{int}^2} - 1 \right) \chi_2 + 1}}. \quad (3.9)$$

3.2. Región Interna

En esta sección obtendremos las distribuciones de temperatura y presión de la región interna de la capa límite térmica utilizando teoría de perturbación para simplificar las ecuaciones 2.52 y 2.53. Debido a que nuestro análisis se enfoca en un pequeño incremento de temperatura entre las zonas uno y dos, supondremos un parámetro de perturbación $\hat{\epsilon}$ que nos represente este problema:

$$\hat{\epsilon} = \frac{T'_w - T'_{ent}}{T'_w} \ll 1. \quad (3.10)$$

Entonces proponemos expansiones asintóticas en función de $\hat{\epsilon}$ para la temperatura ($\hat{\theta}$) y la presión (Π). Primero, para la temperatura tenemos que:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_0 + \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1, \quad (3.11)$$

en donde se han omitido los términos de orden mayor o igual a dos en $\hat{\epsilon}$.

Para encontrar una expansión adecuada para la presión, observamos la forma que toma ésta en la región externa dada por la ecuación 3.9. Entonces vemos que cuando nos acercamos a la región interna $\chi_2 \rightarrow 0$ y por lo tanto $\Pi_2 \rightarrow 1$, por lo tanto la presión en el orden cero en $\hat{\epsilon}$ no debe variar significativamente del valor de P'_m , lo que implica que $\Pi_0 = 1$. Otro aspecto que nos dice la ecuación 3.9 es que conforme va creciendo χ_2 , la presión Π_2 va disminuyendo, por lo que suponemos que ocurre lo mismo en la región interna. Entonces consideramos que el término de orden uno en $\hat{\epsilon}$ para la presión debe ser negativo. Así pues, la expansión asintótica de la presión queda como:

$$\Pi = 1 - \hat{\epsilon} \Pi_1. \quad (3.12)$$

En el siguiente procedimiento se omitirán los términos de orden mayor o igual a dos en $\hat{\epsilon}$, así que sustituyendo las expansiones 3.11 y 3.12 en la ecuación 2.52 tenemos que:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{1 - \hat{\epsilon} \Pi_1}{\hat{\theta}_0 + \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1} \right) \left(-\hat{\epsilon} \frac{d\Pi_1}{d\xi} \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_0}{d\xi} + \hat{\epsilon} \frac{d\hat{\theta}_1}{d\xi} \right) &= A_2 \left(-\hat{\epsilon} \frac{d\Pi_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{2P_m^2} \right) \left(\frac{d^2\hat{\theta}_0}{d\xi^2} + \hat{\epsilon} \frac{d^2\hat{\theta}_1}{d\xi^2} \right) \\ &+ \left(\frac{A_3}{P_m} \right) (1 - \hat{\epsilon} \Pi_1) \left(\frac{1 - \hat{\theta}_0 - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_0 + \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1} \right) + A_4 \left(-\hat{\epsilon} \frac{d^2\Pi_1}{d\xi^2} \right)^2, \end{aligned}$$

utilizando expansión en serie de Taylor, omitiendo términos cuadráticos y superiores:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\hat{\theta}_0 + \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1} \right) = \left(\frac{\hat{\theta}_0 - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_0^2} \right), \\
\Rightarrow & A_1(1 - \hat{\epsilon} \Pi_1) \left(\frac{\hat{\theta}_0 - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1}{(\hat{\theta}_0)^2} \right) \left(-\hat{\epsilon} \frac{d\Pi_1}{d\xi} \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_0}{d\xi} + \hat{\epsilon} \frac{d\hat{\theta}_1}{d\xi} \right) = \left(\frac{1}{2P_m^2} \right) \left(\frac{d^2\hat{\theta}_0}{d\xi^2} + \hat{\epsilon} \frac{d^2\hat{\theta}_1}{d\xi^2} \right) \\
& + \left(\frac{A_3}{P_m} \right) (1 - \hat{\epsilon} \Pi_1) (1 - \hat{\theta}_0 - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1) \frac{(\hat{\theta}_0 - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1)}{(\hat{\theta}_0)^2}, \\
\Rightarrow & -\frac{A_1 \hat{\epsilon}}{(\hat{\theta}_0)^2} \left(\frac{d\Pi_1}{d\xi} \right) \left[\hat{\theta}_0 \frac{d\hat{\theta}_0}{d\xi} + \hat{\epsilon} \hat{\theta}_0 \frac{d\hat{\theta}_1}{d\xi} - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1 \frac{d\hat{\theta}_0}{d\xi} - \hat{\epsilon} \Pi_1 \hat{\theta}_0 \frac{d\hat{\theta}_0}{d\xi} \right] \\
= & \left(\frac{1}{2P_m^2} \right) \frac{d^2\hat{\theta}_0}{d\xi^2} + \left(\frac{\hat{\epsilon}}{2P_m^2} \right) \frac{d^2\hat{\theta}_1}{d\xi^2} + \frac{A_3}{P_m(\hat{\theta}_0)^2} [\hat{\theta}_0 - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_1 - (\hat{\theta}_0)^2 - \hat{\epsilon} \hat{\theta}_0 \Pi_1 + \hat{\epsilon} (\hat{\theta}_0)^2 \Pi_1], \\
\Rightarrow & -\frac{A_1 \hat{\epsilon}}{(\hat{\theta}_0)^2} \left(\frac{d\Pi_1}{d\xi} \right) \left[\hat{\theta}_0 \frac{d\hat{\theta}_0}{d\xi} \right] = \left(\frac{1}{2P_m^2} \right) \frac{d^2\hat{\theta}_0}{d\xi^2} + \left(\frac{\hat{\epsilon}}{2P_m^2} \right) \frac{d^2\hat{\theta}_1}{d\xi^2} \\
& + \frac{A_3}{P_m(\hat{\theta}_0)^2} [\hat{\theta}_0 - (\hat{\theta}_0)^2] - \frac{\hat{\epsilon} A_3}{P_m(\hat{\theta}_0)^2} [\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_0 \Pi_1 - (\hat{\theta}_0)^2 \Pi_1], \\
\Rightarrow & \left(\frac{1}{2P_m^2} \right) \frac{d^2\hat{\theta}_0}{d\xi^2} + \frac{A_3}{P_m(\hat{\theta}_0)^2} [\hat{\theta}_0 - (\hat{\theta}_0)^2] + \hat{\epsilon} \left\{ \frac{A_1}{(\hat{\theta}_0)^2} \left(\frac{d\Pi_1}{d\xi} \right) \left[\hat{\theta}_0 \frac{d\hat{\theta}_0}{d\xi} \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{2P_m^2} \right) \frac{d^2\hat{\theta}_1}{d\xi^2} - \frac{A_3}{P_m(\hat{\theta}_0)^2} [\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_0 \Pi_1 - (\hat{\theta}_0)^2 \Pi_1] \right\} = 0, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Condiciones de Frontera:

$$\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_{ent} = \hat{\theta}_{ent,0} + \hat{\epsilon} \hat{\theta}_{ent,1},$$

por la definición de $\hat{\epsilon}$ tenemos que: $\hat{\epsilon} = 1 - \hat{\theta}_{ent} \Rightarrow \hat{\theta}_{ent} = 1 - \hat{\epsilon}$,

$$\Rightarrow 1 - \hat{\epsilon} = \hat{\theta}_{ent,0} + \hat{\epsilon} \hat{\theta}_{ent,1},$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{ent,0} = 1; \quad \hat{\theta}_{ent,1} = -1, \tag{3.14}$$

cuando $\xi \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{\theta}(\infty) = 1$, y sabiendo que

$$\widehat{\theta}(\infty) = \widehat{\theta}_0(\infty) + \widehat{\epsilon} \widehat{\theta}_1(\infty) ,$$

tenemos que:

$$1 = \widehat{\theta}_0(\infty) + \widehat{\epsilon} \widehat{\theta}_1(\infty) ,$$

$$\Rightarrow \widehat{\theta}_0(\infty) = 1; \quad \widehat{\theta}_1(\infty) = 0 , \quad (3.15)$$

es importante observar que de acuerdo con las ecuaciones 3.14 y 3.15 el orden cero de la temperatura ($\widehat{\theta}$) no cambia y su valor es 1:

$$\Rightarrow \widehat{\theta}_0 = 1 , \quad (3.16)$$

ahora sustituímos 3.16 en 3.13 con lo que obtenemos:

$$\frac{d^2 \widehat{\theta}_1}{d\xi^2} = 2P_m A_3 \widehat{\theta}_1 , \quad (3.17)$$

resolvemos 3.17:

$$\Rightarrow \widehat{\theta}_1 = C_9 e^{\sqrt{2C_0}\xi} + C_{10} e^{-\sqrt{2C_0}\xi} , \quad \text{donde : } C_0 = P_m A_3 ,$$

pero sabemos que:

$$\widehat{\theta}_1(0) = \widehat{\theta}_{ent,1} = -1, \quad \Rightarrow \quad C_9 + C_{10} = -1 ;$$

$$\widehat{\theta}_1(\infty) = 0, \quad \Rightarrow \quad C_9 = 0, \quad \text{por lo tanto : } C_{10} = -1 ,$$

$$\Rightarrow \widehat{\theta}_1 = -e^{-\sqrt{2C_0}\xi} ,$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{\theta} = 1 - \widehat{\epsilon} e^{-\sqrt{2C_0}\xi}} . \quad (3.18)$$

Ahora sustituímos las expansiones 3.13 y 3.12 en la ecuación 2.53:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{(1 - \widehat{\epsilon} \Pi_1)}{(\widehat{\theta}_0 + \widehat{\epsilon} \widehat{\theta}_1)} \left(-\widehat{\epsilon} \frac{d\Pi_1}{d\xi} \right) \right] = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 - \widehat{\epsilon} \Pi_1)(\widehat{\theta}_0 - \widehat{\epsilon} \widehat{\theta}_1)}{(\widehat{\theta}_0)^2} \frac{d\Pi_1}{d\xi} = A_0 ,$$

donde A_0 es una constante de integración y $\widehat{\theta}_0 = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_1}{d\xi} [1 - \hat{\epsilon} (\Pi_1 + \hat{\theta}_1)] &= A_0 , \\ \Rightarrow \left[\frac{d\Pi_1}{d\xi} - A_0 \right] &= \hat{\epsilon} [\Pi_1 + \hat{\theta}_1] \frac{d\Pi_1}{d\xi} , \end{aligned}$$

tomamos los términos de la ecuación anterior que dependen del orden cero en $\hat{\epsilon}$:

$$\frac{d\Pi_1}{d\xi} = A_0, \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 = \int_0^\xi A_0 d\tau + C_{11} = A_0\xi + C_{11} ,$$

pero: $\Pi(0) = 1 - \hat{\epsilon} \Pi_1(0) = 1, \Rightarrow \Pi_1(0) = 0, \Rightarrow C_{11} = 0,$

$$\Rightarrow \quad \Pi_1 = A_0\xi ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Pi = 1 - \hat{\epsilon} A_0 \xi} . \quad (3.19)$$

3.2.1. Acoplamiento

Para encontrar el valor de la constante A_0 es necesario realizar lo que en teoría de perturbación se conoce como acoplamiento asintótico, que consiste como su nombre lo indica, en acoplar la región interna con la externa justo en el dominio donde se conectan una y otra, que en este caso es cuando $x = L_{int}$. Para alcanzar este valor se dice que en la región interna la variable ξ tiende a infinito y en la región externa la variable χ_2 tiende a cero. Entonces tenemos que cuando $\xi \rightarrow \infty$ o bien $\chi_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \Pi \sim \Pi_2$, en donde Π está dado por la ecuación 3.19 y Π_2 por la 3.9. Esto quiere decir que:

$$1 - \hat{\epsilon} A_0 \xi \sim \sqrt{\left(\frac{P_{sal}^2}{P_{int}^2} - 1\right)\chi_2 + 1} ,$$

cuando $\chi_2 \rightarrow 0$, la ecuación 3.9 puede expandirse en serie de Taylor y omitiendo términos cuadráticos y superiores llegamos a que:

$$\begin{aligned} 1 - \hat{\epsilon} A_0 \xi &\sim 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{P_{sal}^2}{P_{int}^2} - 1 \right] \chi_2, \quad \text{donde : } \chi_2 = \epsilon_2 \xi , \\ \Rightarrow \quad \hat{\epsilon} A_0 \xi &\sim \frac{1}{2} \left[1 - \frac{P_{sal}^2}{P_{int}^2} \right] \epsilon_2 \xi , \end{aligned}$$

de la relación anterior concluimos que el acoplamiento sólo es posible cuando $\hat{\epsilon} \sim \epsilon_2$:

$$\Rightarrow \boxed{A_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{P_{sal}^2}{P_{int}^2} \right]}. \quad (3.20)$$

3.3. Densidad y número de Nusselt

De la ecuación del gas ideal sabemos que: $\rho_2 = (\gamma P_2)/\theta_2$, utilizando la expansión para la densidad de las ecuaciones 2.39 tenemos:

$$\rho_{2,0} + \epsilon_2 \rho_{2,1} = \frac{\gamma(P_{2,0} + \epsilon_2 P_{2,1})}{(\theta_{2,0} + \epsilon_2 \theta_{2,1})},$$

definiendo $\hat{\rho} = \rho_{2,0}$ y tomando los términos de orden cero en ϵ_2 de la ecuación anterior, llegamos finalmente a que:

$$\boxed{\hat{\rho} = \gamma P_m \left(\frac{\Pi}{\hat{\theta}} \right)}, \quad (3.21)$$

en donde $\hat{\theta}$ y Π están dadas por las ecuaciones 3.18 y 3.19 respectivamente.

3.3.1. Obtención del número de Nusselt

Partimos de la definición del número de Nusselt (Nu):

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{\hat{h} H}{\kappa}, \quad \text{donde:} \quad \hat{h} = \frac{\dot{q}}{T'_2 - T'_{sal}} \quad \text{y} \quad \dot{q} = -\kappa \left(\frac{\partial T'_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=\frac{H}{2}}, \\ \Rightarrow \quad Nu &= \frac{[-\kappa \left(\frac{\partial T'_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=\frac{H}{2}}] H}{(T'_2 - T'_{sal}) \kappa} = \frac{(-\frac{T'_w}{H}) \left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} \right] H}{T'_w (\theta_2 - 1)}, \\ \Rightarrow \quad Nu &= \frac{\left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} \right]}{(1 - \theta_2)}; \end{aligned} \quad (3.22)$$

por otro lado, en la pared:

$$\begin{aligned} 1 - \theta_2 &= \frac{2\gamma B_1 Kn}{(\gamma + 1) Pr} \left(\frac{1}{\rho_2} \right) \left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} \right] = \frac{\hat{\beta} \theta_2}{\gamma P_2} \left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} \right], \quad \text{donde:} \quad \hat{\beta} = \frac{2\gamma B_1 Kn}{(\gamma + 1) Pr}, \\ \Rightarrow \quad 1 - \theta_2 &= \frac{\theta_2}{A_3 P_2} \left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\frac{1}{2}} \right], \quad \text{donde:} \quad A_3 = \frac{\gamma}{\hat{\beta}}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) \right|_{\eta=\frac{1}{2}} = \frac{A_3 P_2}{\theta_2} (1 - \theta_2), \quad (3.23)$$

sustituimos 3.23 en 3.22:

$$\Rightarrow Nu = \frac{A_3 P_2}{\theta_2} = \frac{A_3 (P_{2,0} + \epsilon_2 P_{2,1})}{\theta_{2,0} + \epsilon_2 \theta_{2,1}};$$

por último, tomamos los términos de orden cero en ϵ_2 de la ecuación anterior:

$$\Rightarrow \boxed{Nu = \frac{C_0 \Pi}{\hat{\theta}}}, \quad (3.24)$$

en donde $C_0 = A_3 P_m$, y nuevamente $\hat{\theta}$ y Π están dadas por las ecuaciones 3.18 y 3.19 respectivamente.

Capítulo 4

Resultados

En el capítulo anterior obtuvimos las ecuaciones que definen a la temperatura, presión, densidad y Nusselt en la región interna de la capa límite térmica, ecuaciones 3.18, 3.19, 3.21, y 3.24 respectivamente. Por comodidad estas ecuaciones se reescriben a continuación:

$$\hat{\theta} = 1 - \hat{\epsilon} e^{-\sqrt{2C_0}\xi};$$

$$\Pi = 1 - \hat{\epsilon} A_0 \xi;$$

$$\hat{\rho} = \gamma P_m \left(\frac{\Pi}{\hat{\theta}} \right);$$

$$Nu = \frac{C_0 \Pi}{\hat{\theta}}.$$

También por comodidad repetiremos varias de las relaciones que describen a los parámetros y variables involucradas en las cuatro ecuaciones anteriores:

$$\hat{\epsilon} = 1 - \hat{\theta}_{ent} = 1 - \frac{T'_{ent}}{T'_w};$$

$$C_0 = P_m A_3; \quad P_m = \frac{P'_m}{\rho'_r a_r^2}; \quad A_3 = \frac{\gamma}{\beta};$$

$$\rho'_r = \frac{P'_{sal}}{RT'_w}; \quad a_r^2 = \gamma RT'_w;$$

$$\hat{\beta} = \frac{2\gamma B_1 Kn}{(\gamma + 1)Pr}; \quad Kn = \frac{\lambda}{H};$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{P_{sal}^2}{P_{int}^2} \right]; \quad \frac{P_{sal}}{P_{int}} = \frac{P'_{sal}}{P'_{int}}.$$

Entonces graficaremos las variables $\hat{\theta}$, Π , $\hat{\rho}$ y Nu con respecto a la coordenada axial (ξ) en la región interna y variaremos los parámetros $\hat{\epsilon}$, C_0 y A_0 para observar el comportamiento de estas variables físicas. Pero primero mostraremos una lista de valores dados a las constantes de referencia que son la base para obtener los parámetros mencionados:

$T'_w = 320K$ (cercana a la temperatura ambiente de $300K$ usada por Hadjiconstantinou *et al.* 2002).

$P'_{sal} = 680Pa$ (usada por Hsieh *et al.* 2004).

$\gamma = 1.4$ (para el aire).

$R = 287 [J/(kg \cdot K)]$ (para el aire).

$Pr = 0.72$ (Qin *et al.* 2007).

$B_1 = 1$ (Qin *et al.* 2007).

$\lambda = 70nm$ (Hsieh *et al.* 2004).

$H = 1.3\mu m$ (Qin *et al.* 2007 y Arkilic *et al.* 1997).

Para obtener tres diferentes valores de $\hat{\epsilon}$ se modifica tres veces la temperatura de entrada T'_{ent} :

$$T'_{ent} = 316.8 [K], \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon} = 0.01 .$$

$$T'_{ent} = 310.4 [K], \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon} = 0.03 .$$

$$T'_{ent} = 304 [K], \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon} = 0.05 .$$

Para obtener tres diferentes valores de C_0 se modifica tres veces el valor de la presión al inicio de la zona 2 P'_m :

$$P'_m = 1500 [Pa], \quad \Rightarrow \quad P_m = 1.6, \quad \Rightarrow \quad C_0 = 25.87 .$$

$$P'_m = 2000 [Pa], \quad \Rightarrow \quad P_m = 2.1, \quad \Rightarrow \quad C_0 = 34.49 .$$

$$P'_m = 2500 [Pa], \Rightarrow P_m = 2.6, \Rightarrow C_0 = 43.11 .$$

Para obtener los tres diferentes valores de A_0 se modifica tres veces el valor de la presión al final de la región interna e inicio de la región externa de la zona 2 P'_{int} :

$$P'_{int} = 1500 [Pa], \Rightarrow A_0 = 0.4 .$$

$$P'_{int} = 2000 [Pa], \Rightarrow A_0 = 0.44 .$$

$$P'_{int} = 2500 [Pa], \Rightarrow A_0 = 0.46 .$$

- TEMPERATURA

De la ecuación 3.18 observamos que: $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{\epsilon}, C_0, \xi)$, por lo tanto las gráficas de la temperatura quedan de la siguiente manera:

En las gráficas a), b) y c) de la figura 4.1, se fija $C_0 = 25.87$, $C_0 = 34.49$ y $C_0 = 43.11$ respectivamente y en cada una de ellas se hace variar el parámetro $\hat{\epsilon}$.

En las gráficas d), e) y f) de la figura 4.1, se fija $\hat{\epsilon} = 0.01$, $\hat{\epsilon} = 0.03$ y $\hat{\epsilon} = 0.05$ respectivamente y en cada una de ellas se hace variar el parámetro C_0 .

- PRESIÓN

De la ecuación 3.19 observamos que: $\Pi = \Pi(\hat{\epsilon}, A_0, \xi)$, por lo tanto las gráficas de la presión quedan de la siguiente manera:

En las gráficas a), b) y c) de la figura 4.2, se fija $\hat{\epsilon} = 0.01$, $\hat{\epsilon} = 0.03$ y $\hat{\epsilon} = 0.05$ respectivamente y en cada una de ellas se hace variar el parámetro A_0 .

En las gráficas d), e) y f) de la figura 4.2, se fija $A_0 = 0.46$, $A_0 = 0.44$ y $A_0 = 0.4$ respectivamente y en cada una de ellas se hace variar el parámetro $\hat{\epsilon}$.

- DENSIDAD

De la ecuación 3.21 observamos que: $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{\epsilon}, P_m, C_0, A_0, \xi)$, pero $C_0 = A_3 P_m$, así que podemos decir que: $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{\epsilon}, P_m, A_0, \xi)$, por lo tanto las gráficas de la densidad quedan de la siguiente manera:

Fijamos $\hat{\epsilon} = 0.05$, entonces, en la gráfica a) de la figura 4.3, se fija $P_m = 1.6$ y se hace variar el parámetro A_0 y en la gráfica b), se fija $A_0 = 0.44$ y se hace variar el parámetro P_m .

Fijamos $P_m = 2.1$, entonces, en la gráfica c) de la figura 4.3, se fija $\hat{\epsilon} = 0.01$ y se hace variar el parámetro A_0 y en la gráfica d), se fija $A_0 = 0.4$ y se hace variar el parámetro $\hat{\epsilon}$.

Fijamos $A_0 = 0.46$, entonces, en la gráfica e) de la figura 4.3, se fija $P_m = 2.6$ y se hace variar el parámetro $\hat{\epsilon}$ y en la gráfica f), se fija $\hat{\epsilon} = 0.03$ y se hace variar el parámetro P_m .

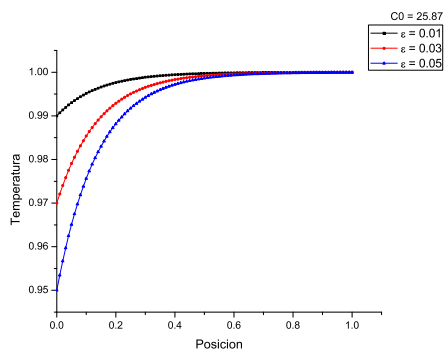
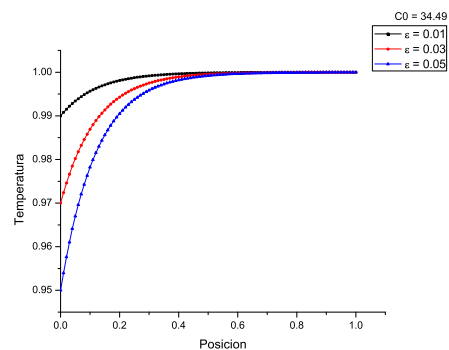
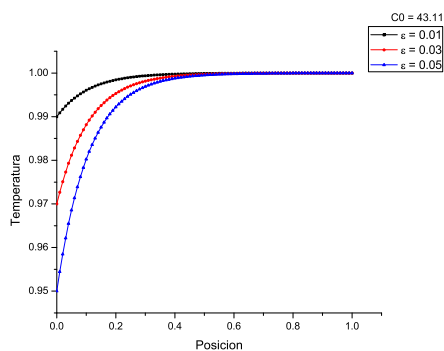
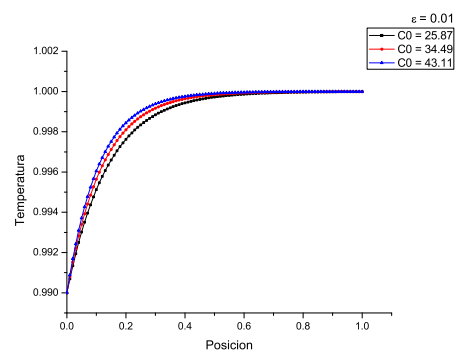
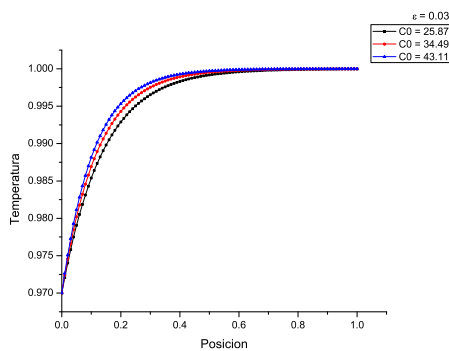
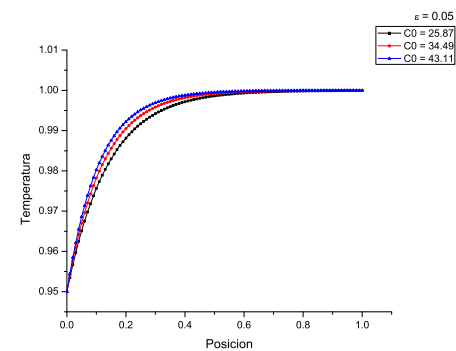
■ NUSSELT

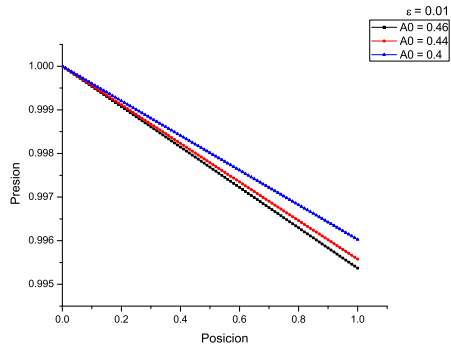
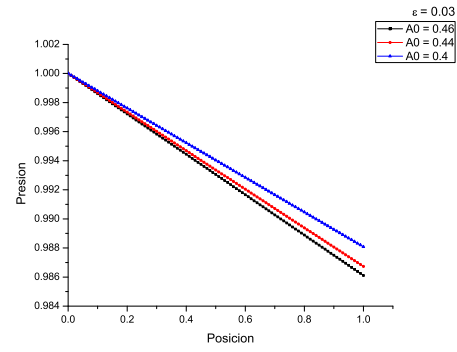
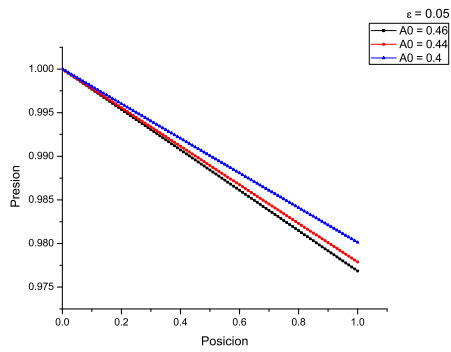
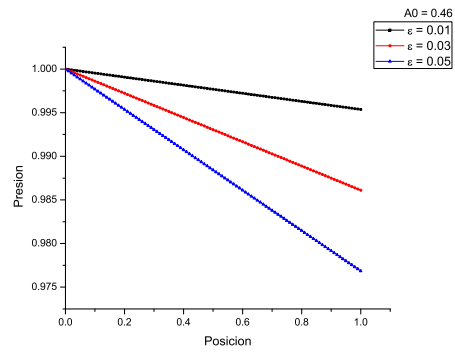
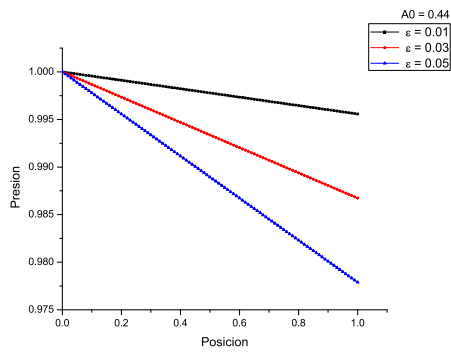
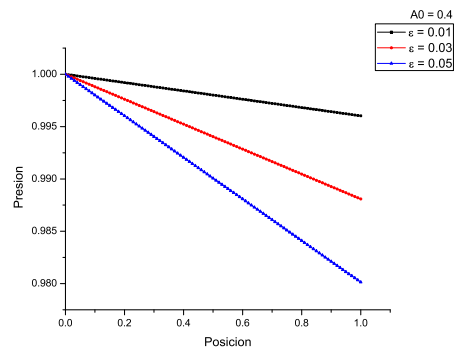
De la ecuación 3.24 observamos que: $Nu = Nu(\hat{\epsilon}, C_0, A_0, \xi)$, por lo tanto las gráficas del número de Nusselt quedan de la siguiente manera:

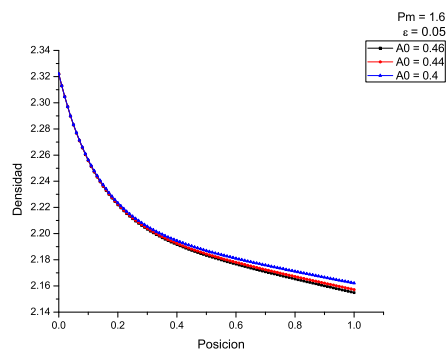
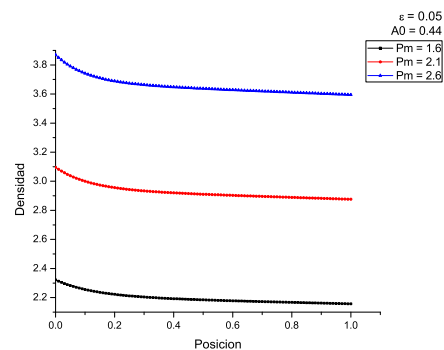
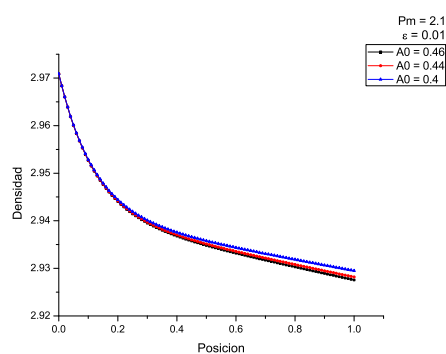
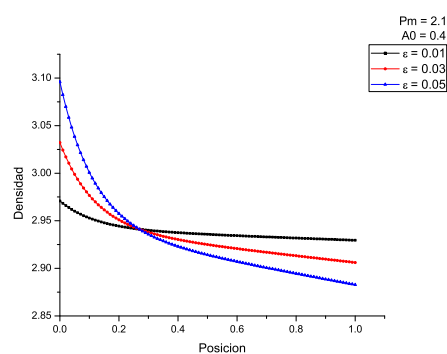
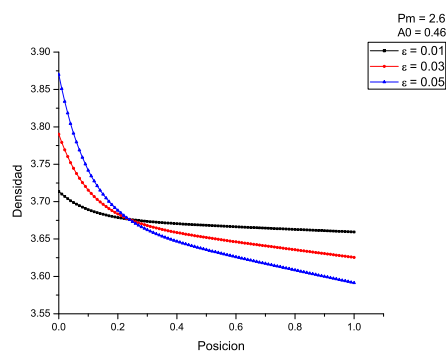
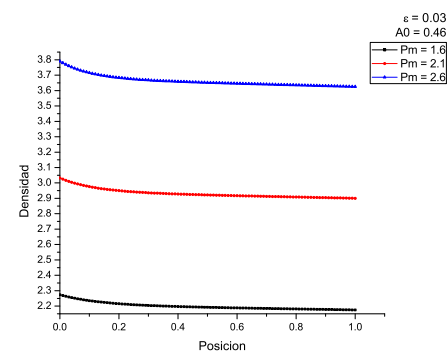
Fijamos $\hat{\epsilon} = 0.05$, entonces, en la gráfica a) de la figura 4.4, se fija $C_0 = 25.87$ y se hace variar el parámetro A_0 y en la gráfica b), se fija $A_0 = 0.44$ y se hace variar el parámetro C_0 .

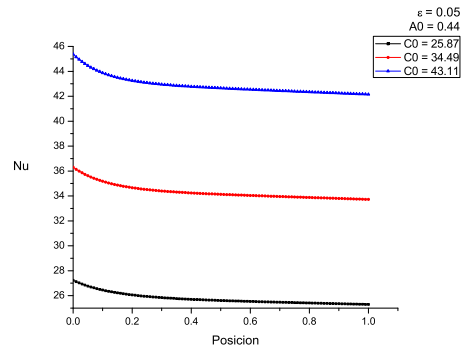
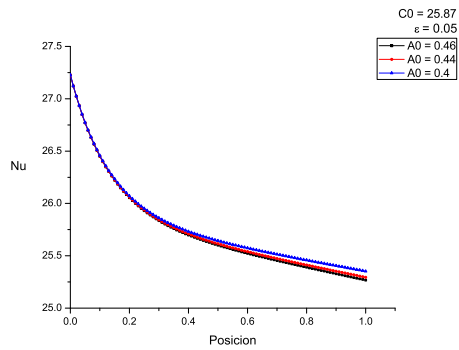
Fijamos $C_0 = 34.49$, entonces, en la gráfica c) de la figura 4.4, se fija $\hat{\epsilon} = 0.01$ y se hace variar el parámetro A_0 y en la gráfica d), se fija $A_0 = 0.4$ y se hace variar el parámetro $\hat{\epsilon}$.

Fijamos $A_0 = 0.46$, entonces, en la gráfica e) de la figura 4.4, se fija $C_0 = 43.11$ y se hace variar el parámetro $\hat{\epsilon}$ y en la gráfica f), se fija $\hat{\epsilon} = 0.03$ y se hace variar el parámetro C_0 .

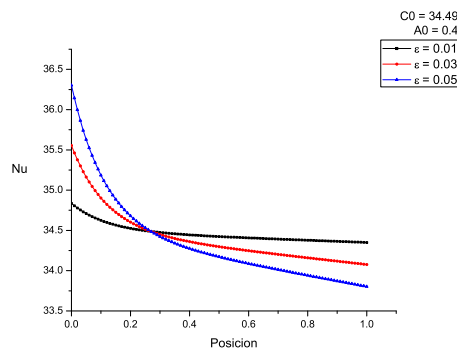
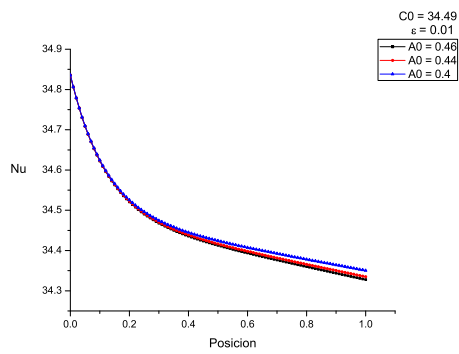
(a) Variación de $\hat{\epsilon}$ con C_0 fijo de 25.87(b) Variación de $\hat{\epsilon}$ con C_0 fijo de 34.49(c) Variación de $\hat{\epsilon}$ con C_0 fijo de 43.11(d) Variación de C_0 con $\hat{\epsilon}$ fijo de 0.01(e) Variación de C_0 con $\hat{\epsilon}$ fijo de 0.03(f) Variación de C_0 con $\hat{\epsilon}$ fijo de 0.05Figura 4.1: Temperatura contra la posición representada por la coordenada axial (ξ).

(a) Variación de A_0 con $\hat{\epsilon}$ fijo de 0.01(b) Variación de A_0 con $\hat{\epsilon}$ fijo de 0.03(c) Variación de A_0 con $\hat{\epsilon}$ fijo de 0.05(d) Variación de $\hat{\epsilon}$ con A_0 fijo de 0.46(e) Variación de $\hat{\epsilon}$ con A_0 fijo de 0.44(f) Variación de $\hat{\epsilon}$ con A_0 fijo de 0.4Figura 4.2: Presión contra la posición representada por la coordenada axial (ξ).

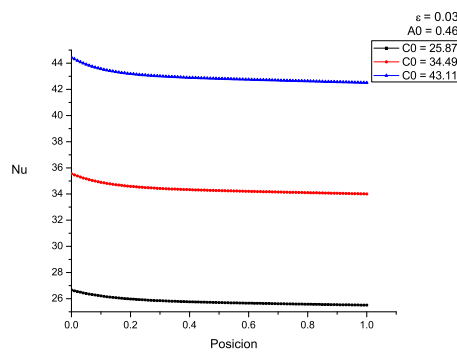
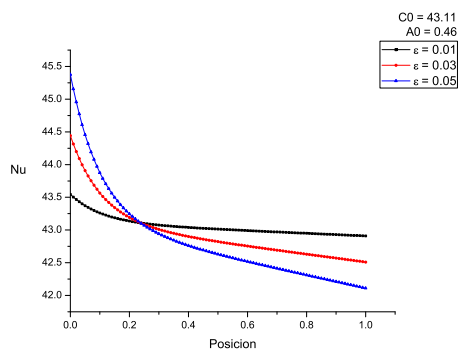
(a) Variación de A_0 ($\hat{\epsilon} = 0.05$ y $P_m = 1.6$)(b) Variación de P_m ($\hat{\epsilon} = 0.05$ y $A_0 = 0.44$)(c) Variación de A_0 ($\hat{\epsilon} = 0.01$ y $P_m = 2.1$)(d) Variación de $\hat{\epsilon}$ ($A_0 = 0.4$ y $P_m = 2.1$)(e) Variación de $\hat{\epsilon}$ ($A_0 = 0.46$ y $P_m = 2.6$)(f) Variación de P_m ($A_0 = 0.46$ y $\hat{\epsilon} = 0.03$)Figura 4.3: Densidad contra la posición representada por la coordenada axial (ξ).



(a) Variación de A_0 ($\hat{\epsilon} = 0.05$ y $C_0 = 25.87$) (b) Variación de C_0 ($\hat{\epsilon} = 0.05$ y $A_0 = 0.44$)



(c) Variación de A_0 ($\hat{\epsilon} = 0.01$ y $C_0 = 34.49$) (d) Variación de $\hat{\epsilon}$ ($A_0 = 0.4$ y $C_0 = 34.49$)



(e) Variación de $\hat{\epsilon}$ ($A_0 = 0.46$ y $C_0 = 43.11$) (f) Variación de C_0 ($A_0 = 0.46$ y $\hat{\epsilon} = 0.03$)

Figura 4.4: Nusselt contra la posición representada por la coordenada axial (ξ).

Capítulo 5

Conclusiones

Se estudió la transferencia de calor en la región interna de la capa límite térmica que se presenta en la zona de un micro-canal en donde existe flujo de calor entre la superficie de la pared que está a una temperatura constante T'_w y aire que circula a través de este micro-canal. Se propusieron expansiones asintóticas para la temperatura, presión, densidad y número de Nusselt (Nu), los cuales en ordenes bajos del primer parámetro de perturbación usado (relación de esbeltez en la zona 2: ϵ_2), sólo dependen de la coordenada axial x , representada por la variable ξ . Estas variables estudiadas después de cruzar el punto: $\xi = 1$ ($x = L_{int}$), llegan a la región externa de la capa límite térmica en la cual se presenta un flujo isotérmico en donde la temperatura del aire es igual a la de la pared (T'_w).

Dentro de la región interna se utilizó otro parámetro de perturbación ($\hat{\epsilon} = 1 - [T'_{ent}/T'_w]$) que tiene que ver con un incremento entre la temperatura de entrada del aire al micro-canal T'_{ent} y la de la pared del mismo T'_w . Con referencia a este nuevo parámetro se plantearon otras expansiones asintóticas omitiendo términos de orden superior a uno en $\hat{\epsilon}$, así se obtuvieron las relaciones analíticas para las diferentes variables físicas en cuestión: temperatura, presión, densidad y número de Nusselt. En estas relaciones aparecen tres diferentes parámetros que nos describirán el comportamiento de nuestras variables en cuestión. El primero de éstos es por supuesto el mismo $\hat{\epsilon}$ que es importante analizarlo porque representa el incremento de temperaturas que se desea estudiar. El parámetro C_0 aparece en la ecuación para la temperatura (3.18) y está directamente relacionada con la presión entre las dos zonas del micro-canal denotada por P'_m . Por último está el parámetro A_0 que aparece en la ecuación de la presión (3.19), que representa a la presión al final de la región interna de la capa límite térmica denotada por P'_{int} . A continuación se describen los resultados obtenidos al graficar nuestras variables con respecto a la coordenada axial (ξ) y al modificar los parámetros mencionados.

Para apreciar los perfiles de temperatura se puede consultar la figura 4.1. En las gráficas a) b) y c) de esta figura vemos que para valores fijos del parámetro C_0 , la temperatura del fluido alcanza más fácilmente el valor de la unidad, que en variables físicas representa el valor uniforme de la temperatura en la pared, T'_w conforme se incrementa $\hat{\epsilon}$. Lo anterior resulta obvio ya que mientras mayor sea la diferencia de temperaturas entre T'_{ent} y T'_w mayor será la distancia longitudinal necesaria para que el aire alcance la temperatura de la pared. En las gráficas d), e) y f) de esta misma figura, se observa que para valores fijos de $\hat{\epsilon}$ la temperatura del aire alcanza más fácilmente la unidad, conforme aumenta C_0 , esto quiere decir que cuando la presión P'_m aumenta su valor, el aire se calienta más fácilmente.

Para la presión observamos la figura 4.2. En las gráficas a), b) y c) de esta figura, vemos que para valores fijos del parámetro $\hat{\epsilon}$, la presión en esta zona del micro-canal decrece más fácilmente conforme el parámetro A_0 va disminuyendo; es decir, la pendiente en la gráfica de la presión es más pronunciada cuando disminuye el valor de la presión al final de la región interna, P'_{int} . Por otro lado, si observamos las gráficas d), e) y f) de esta misma figura, tenemos que para valores fijos de A_0 la presión aumenta conforme decrece $\hat{\epsilon}$, lo cual indica que la presión cae más fácilmente cuando la diferencia entre T'_{ent} y T'_w es mayor.

Para la densidad observamos la figura 4.3. Por ejemplo, en la gráfica a) vemos que la densidad decrece considerablemente conforme aumenta A_0 , lo que quiere decir que cuando aumenta la presión P'_{int} , el aire tiende a comprimirse. La gráfica b) es una muestra de que cuando el parámetro P_m aumenta, la densidad también aumenta, lo que nos dice que el aire se expande cuando aumenta el valor de P'_m . También podemos ver en la gráfica d) que a pesar de que cuando $\hat{\epsilon}$ crece, la densidad tiende a aumentar en un principio, ésta disminuye más fácilmente conforme incrementamos la diferencia entre T'_{ent} y T'_w .

Para el número de Nusselt observamos la figura 4.4. Por ejemplo, en la gráfica a) vemos que Nu decrece más notablemente conforme aumenta A_0 , lo que quiere decir que cuando aumenta la presión P'_{int} , la transferencia de calor entre al aire y la pared del micro-canal es mayor. La gráfica b) es una muestra de que cuando el parámetro C_0 aumenta, Nu también aumenta, lo que nos dice que la transferencia de calor es mayor cuando aumenta el valor de P'_m . También podemos ver en la gráfica d) que a pesar de que cuando $\hat{\epsilon}$ crece, Nu tiende a aumentar en un principio, éste disminuye más fácilmente conforme la diferencia entre T'_{ent} y T'_w se hace más grande.

Bibliografía

- [1] Araki, T., Kim, M.S., Iwai, H. y Suzuki, K. (2002). An Experimental Investigation of Gaseous Flow Characteristics in Micro-Channels. *Microscale Thermophysics Engineering*, **6**, pp. 117-130.
- [2] Arkilic, E.B., Schmidt, M.A. y Breuer, K.S. (1993). Gaseous Flow in Small Channels. *AIAA*, **93**, pp. 3270.
- [3] Arkilic, E.B., Schmidt, M.A. y Breuer, K.S. (1997). Gaseous Slip Flow in Long Micro-Channels. *Journal of Micro-Electro-Mechanical Systems*, **6**, pp. 167.
- [4] Bender, C.M. y Orszag, N.R. (1978). Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. *McGraw-Hill*, pp. 319-479.
- [5] Beskok, A. y Karniadakis, G. E. (1994). Simulation of Heat and Momentum Transfer in Complex Micro-Geometries. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **8**, pp. 647-655.
- [6] van den Berg, H.R., Seldam, C.A. y Gulik, P.S. (1993). Compressible Laminar Flow in a Capillary. *Journal of Fluids Mechanics*, **246**, pp. 1.
- [7] Hadjiconstantinou, N.G. (2000). Convective Heat Transfer in Micro and Nano Channels: Nusselt Number Beyond Slip Flow. *American Institute of Physics, Proceedings of the 2000 IMECE, HTD-Vol. 366-2*, pp. 13-22.
- [8] Hadjiconstantinou, N.G. y Simek, O. (2002). Constant-Wall-Temperature Nusselt Number in Micro and Nano-Channels. *Transactions of the ASME, Mechanical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139*, **124**, pp. 356-364.
- [9] Harley, J.C., Huang, Y., Bau, H.H. y Zemel, J.N. (1995). Gas Flow in Micro-Channels *Journal of Fluids Mechanics*, **284**, pp. 257-274.

- [10] He, Q.W., y Wang Q.W. (2005). DSMC Simulation of Low-Speed Gas Flow and Heat transfer in 2D rectangular Micro-Channel. *Prog. Comput. Fluid Dyn.*, **5**, pp. 230.
- [11] Hsieh, S.S., tsai, H.H., Lin C.Y., Huang C.F. y Chien, C.M. (2004). Gas Flow in a Long Micro-Channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **47**, pp. 3877-3887.
- [12] Inman, R.M. (1964). Heat Transfer for Laminar Slip Flow of a Rarefied Gas in a Parallel Plate Channel or a Circular Tube With Uniform Wall Temperature. *NASA TN*, D-2213.
- [13] Karniadakis, G.E., Beskok, A. y Aluru, N.R. (2005). Microflows and Nano-flows: Fundamentals and Simulation. *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer, pp. 51-195.
- [14] Kavehpour, H.P., Faghri, M. y Asako, Y. (1997). Effects of Compressibility and Rarefaction on Gaseous Flows in Micro-Channels. *Numerical Heat Transfer*, Part A, **32**, pp. 677- 696.
- [15] Kennard, E.H. (1938). Kinetic Theory of Gases. *McGraw-Hill*, New York.
- [16] Pahor, S. y Strnad, J. (2007). A Note on Heat Transfer in Laminar Flow Through a Gap. *Applied Science Researching*, **10**, pp. 81-84.
- [17] Qin, F.H., Sun, D.J. y Yin, X.Y. (2007). Perturbation Analysis on Gas Flow in a Straight Micro-Channel. *American Institute of Physics*, Physics of Fluids, **19**, pp. 027103-1 - 027103-14.
- [18] Sharipov, F., y Xie-Seleznev V. (1998). Data on Internal Rarified Gas Flows. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **27**, pp. 657.
- [19] Sun, H. y Faghri, M. (2000). Effects of Rarefaction and Compressibility of Gaseous Flow in Micro-Channel Using DSMC. *Numerical Heat Transfer*, Part A, **38**, pp. 153- 168.
- [20] Tuckerman, D.B. (1984). Heat Transfer Micro-Structures for Integrated Circuits. *UCRL 53515 Report*, Lawrence Livemore National Laboratory, USA.
- [21] Turner, E., Lam, L.C., Faghri, M. y Gregory, O.J. (2004). Experimental Investigation of Gas Flow in Micro-Channels. *ASME Journal of Heat Transfer*, **126**, pp. 753.

- [22] Xue, H. y Fan, Q. (2000). A New Analytic Solution of the Navier-Stokes Equations for Micro-Channel Flows. *Microscale Thermophysics Engineering*, **4**, pp. 125.
- [23] Wu, P. y Little, W.A. (1984). Measurement of Heat Transfer Characteristics of the Gas Flow in Fine Channel Heat Exchangers Used for Micro-Miniature Joule-Thomson Refrigerators. *Cryogenics*, **24**, pp. 415-423.
- [24] Zohar, Y., Lee, S.Y.K., Lee, W.Y., Jiang, L. y Tong, P. (2002). Subsonic Gas Flow in a Straight and Uniform Micro-Channel. *Journal of Fluid Mechanics*, **427**, pp. 125.