



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

CONTROL DE FUERZA DE ROBOTS PLANARES  
CON RETROALIMENTACIÓN VISUAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A:

IVÁN ALEJANDRO GUTIÉRREZ GILES

TUTOR:

DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

2011

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

1er. Suplente: Dr. Hebertt Sira Ramirez

2o. Suplente: Dr. Alejandro Rodríguez Angeles

La tesis se realizó en el Laboratorio de Robótica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

TUTOR DE TESIS:

---

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

# Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de esta tesis y de mis estudios de maestría.

Agradezco sinceramente a ...

... mi madre, por todo lo que ha hecho y ha dejado de hacer por mí.

... mi hermano, porque sin su apoyo todo sería más difícil.

... mi padre, por enseñarme a ser honesto y humilde.

... mi familia, que siempre es tan unida en las buenas y en las malas.

... el Dr. Marco, por ser un excelente asesor a quien respeto y admiro.

... los miembros del jurado, por tomarse el tiempo de revisar mi trabajo y hacerme sus  
valiosas observaciones.

... mis compañeros de maestría, en particular a Marco, Sofía, Naomi y Miguel, por aquellos  
tiempos.

... mis amigos dentro y fuera de la universidad, en especial a Alicia Poot.

... los compañeros del laboratorio de robótica, por todo el tiempo acumulado.

... la Universidad Nacional Autónoma de México, por todas las oportunidades que me ha  
dado.

... Iexiuh, porque este tiempo hemos crecido y aprendido muchas cosas juntos y porque  
aún nos faltan muchas más por vivir.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	8
1.2. Estado del Arte . . . . .	9
1.2.1. Control de Fuerza . . . . .	9
1.2.2. Control Servovisual de Robots . . . . .	10
1.2.3. Control de Fuerza con Retroalimentación Visual . . . . .	12
1.3. Solución Propuesta . . . . .	13
1.3.1. Alcances y Limitaciones . . . . .	14
1.4. Contribución . . . . .	15
1.5. Organización del Texto . . . . .	15
1.5.1. Notación y Convenciones Utilizadas . . . . .	16
<b>2. Preliminares Matemáticas</b>	<b>18</b>
2.1. Introducción . . . . .	18
2.2. Modelo Cinemático del Robot . . . . .	18
2.2.1. Cinemática Directa . . . . .	19
2.2.2. Cinemática Inversa . . . . .	20
2.2.3. Cinemática Diferencial . . . . .	21
Singularidades . . . . .	21
2.3. Modelo Dinámico del Robot . . . . .	22
2.3.1. Modelo Dinámico en Movimiento Libre . . . . .	23
2.3.2. Propiedades del Modelo Dinámico . . . . .	24
2.3.3. Modelo Dinámico Considerando la Dinámica de los Actuadores . . . . .	25
2.3.4. Modelo Dinámico en Movimiento Restringido . . . . .	27
2.4. Modelo de la Cámara . . . . .	28
2.4.1. Cinemática Visual . . . . .	29
2.4.2. Cinemática Visual Diferencial . . . . .	30
2.5. Empleo de Observadores GPI en el Control de Sistemas Mecánicos Perturbados	31
<b>3. Control de Posición y Fuerza</b>	<b>38</b>
3.1. Introducción . . . . .	38
3.2. Modelo Dinámico en Coordenadas Cartesianas . . . . .	40
3.3. Principio de Ortogonalización . . . . .	41

3.4.	Control de Posición y Fuerza de Robots Mediante Observadores GPI . . . . .	43
3.5.	Aplicación del Algoritmo Utilizando el Jacobiano Geométrico . . . . .	47
<b>4.</b>	<b>Control de Posición y Fuerza con Retroalimentación Visual</b>	<b>50</b>
4.1.	Introducción . . . . .	50
4.2.	Modelado Matemático en Coordenadas de Imagen . . . . .	52
4.3.	Principio de Ortogonalización Visual . . . . .	53
4.4.	Control de Posición y Fuerza de Robots Mediante Observadores GPI con Retroalimentación Visual . . . . .	54
<b>5.</b>	<b>Resultados</b>	<b>59</b>
5.1.	Control de Posición y Fuerza . . . . .	59
5.1.1.	Resultados Experimentales . . . . .	59
5.2.	Control de Posición y Fuerza con Retroalimentación Visual . . . . .	71
5.2.1.	Simulación . . . . .	71
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>83</b>
6.1.	Comentarios Finales . . . . .	83
6.2.	Trabajo Futuro . . . . .	84
	<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Es difícil concebir el mundo actual sin robots. Hace algunas décadas sólo se encontraban en algunas fábricas realizando tareas altamente repetitivas en ambientes completamente adecuados para su funcionamiento. Hoy en día, los robots se encuentran en todos los ámbitos de la vida humana, creando bienestar en la mayoría de los casos.

Este desarrollo ha sido consecuencia del perfeccionamiento de otras disciplinas a lo largo de la historia de la humanidad y en particular de los últimos dos siglos. A su vez, el desarrollo de la robótica ha contribuido al crecimiento o incluso al surgimiento de otras áreas del conocimiento humano.

Actualmente los robots ya no están supeditados a permanecer encerrados en fábricas o laboratorios, cada vez es mayor su presencia en el mundo exterior. Desde las aspiradoras robóticas de uso doméstico, hasta los robots astromóviles para la exploración espacial, el uso de los robots se extiende día con día a los lugares menos imaginables.

Se pueden encontrar otras muchas razones para afirmar que la robótica es ya una parte importante de la vida del hombre y que seguirá en crecimiento por muchos años más. Por ello, es importante la investigación y el desarrollo en esta área, que a su vez necesitará y nutrirá a otras áreas no sólo de la ciencia y la ingeniería. Pero conforme aumentan las aplicaciones y los ambientes de operación, también aumenta la sofisticación y la complejidad para crearlos y controlarlos. El tema del presente trabajo trata sobre esto último e intenta resolver un problema particular utilizando teoría de control, desarrollada en su mayor parte durante el siglo XX.

La complejidad del problema a resolver en este trabajo se debe a la interacción de un robot con un ambiente no estructurado. Para que un manipulador pueda interactuar

de manera segura con su entorno de operación es necesario garantizar la estabilidad de éste ante perturbaciones y además es necesario dotarlo de alguna fuente de información que le permita conocer este entorno.

Diversos enfoques se han utilizado para resolver el problema planteado en este trabajo, con diferentes grados de éxito y cada uno con sus ventajas y desventajas, por lo que el resultado de esta investigación se presenta como una alternativa a dichos enfoques. En otras palabras, aún no existe un método definitivo, por lo que su aplicación depende de la necesidad de quién lo utilice. Así mismo, a lo largo de este texto se hacen diversas suposiciones sobre ciertas condiciones que deben de cumplirse para el funcionamiento correcto de la solución que aquí se plantea.

## 1.1. Planteamiento del Problema

El problema que se plantea a resolver en este trabajo es el siguiente: *Dado un robot manipulador de  $n$  grados de libertad cuyo movimiento se encuentra restringido a permanecer en un plano del espacio cartesiano y una superficie rígida perpendicular al plano de movimiento del robot, seguir simultáneamente una trayectoria tanto en fuerza como en posición en un ambiente no estructurado, apoyado en la información de los sensores de fuerza, posición articular y un sistema de visión computacional.*

Se considerará que el contacto del manipulador con la superficie es puntual y que la fuerza que ejerce sobre ésta se encuentra sobre la componente normal a la misma.

Las aplicaciones de este problema son vastas, como ejemplos se mencionan:

- Corte de materiales industriales.
- Pulido de superficies.
- Limpieza de vidrios.
- Sellado de objetos.
- Cirugía médica, etc.

Además, se requiere que la solución propuesta sea robusta ante perturbaciones externas e incertidumbres en los parámetros que es necesario conocer para aplicar dicha solución.



## 1.2. Estado del Arte

El problema planteado en este trabajo es en realidad la conjunción de dos problemas conocidos en el control de robots: el control de fuerza el y control servovisual. Cada uno por sí mismo representa un reto y ha dado lugar a diversos métodos y filosofías de control. En las siguientes secciones, primero se hará una revisión de las investigaciones más relevantes en cada una de estas dos áreas y luego se estudiarán los trabajos en los que se ha llevado a cabo el control servovisual conjuntamente con el control de fuerza.

### 1.2.1. Control de Fuerza

El problema de control de fuerza en robots manipuladores se remonta al trabajo realizado por Goertz [Goertz y Bevilacqua, 1952], en el que se utiliza un control de fuerza retroalimentado para reflejar la fuerza de un robot teleoperado del tipo maestro-esclavo durante el manejo de sustancias radioactivas. Desde entonces esta línea de investigación se ha desarrollado continuamente hasta nuestros tiempos. Una revisión histórica del control de fuerza de robots manipuladores hasta 1985 se puede encontrar en [Whintey, 1985]. Años más tarde, en 1993, Arimoto, Liu y Naniwa proponen un esquema basado en el principio de ortogonalización [Arimoto et al., 1993b] y un control adaptable basado en el modelo no lineal completo del robot manipulador utilizando dicho principio [Arimoto et al., 1993a].

En general existen dos categorías para el control de robots interactuando con el ambiente [Siciliano y Villani, 1999]: el control de fuerza directo y el control de fuerza indirecto. En el caso del control directo, se establece un lazo de retroalimentación de fuerza para llevar a cabo la tarea, mientras que en el control indirecto, la interacción con el medio se hace a través únicamente del control de movimiento del manipulador. En el caso de la interacción indirecta los esquemas más comunes son el control por compliancia y el control por impedancia [Sciavicco y Siciliano, 1996]. A la categoría de control directo pertenecen el control híbrido y el control paralelo [Siciliano y Villani, 1999]. Con respecto a esto último, la combinación del principio de ortogonalización y el control híbrido dio como resultado el trabajo de Parra-Vega, Rodríguez-Ángeles, Arimoto y Hirzinger [Parra-Vega et al., 2001] aplicado al control de fuerza de robots cooperativos.

En los últimos años, la tendencia en la investigación del control de fuerza de robots se ha volcado hacia la eliminación de sensores de fuerza y velocidad como se reporta en el trabajo de Queiroz [de Queiroz et al., 1996] y en el de Martínez-Rosas, Arteaga-Pérez y

Castillo-Sánchez [Martínez-Rosas et al., 2006], en el que se trata el control descentralizado de robots cooperativos. También los esfuerzos en esta área se han centrado en prescindir del modelo dinámico del manipulador y de la cinemática inversa, como se reporta en el trabajo de Arteaga-Pérez y Rivera-Dueñas [Arteaga-Pérez y Rivera-Dueñas, 2007].

### 1.2.2. Control Servovisual de Robots

La inclusión de un sistema de visión en el lazo de control tiene ciertas ventajas importantes. La primera de ellas es la posibilidad de obtener información del ambiente en el que se desenvuelve el robot sin ser invasivo. Esto permite planear tareas sin conocimiento estructurado de dicho ambiente, lo que aumenta enormemente la flexibilidad del robot. Otra ventaja es la de permitir la supresión de algunos de los sensores comúnmente utilizados para control de robots como los encoders, tacómetros o sensores de fuerza.

Uno de los primeros esfuerzos para aprovechar las ventajas de la retroalimentación por medio de sistemas de visión fue llevada a cabo en 1973 por Shirai e Inoue [Shirai y Inoue, 1973], donde se describen las ventajas obtenidas con respecto a los sistemas que carecen de información visual en el lazo de control. Estos primeros enfoques se basaban en el llamado “mirar y moverse”, que consistía en tomar una imagen, obtener la información necesaria para planear la trayectoria y ejecutar el algoritmo de control de posición para llevar a cabo esta tarea, después de la cual se tomaba otra imagen y se repetía el proceso. Fue en 1979 cuando Hill y Park [Hill y Park, 1979] introdujeron el término *visual servoing* (o control servovisual), para distinguir el caso en el que la información del sistema de visión es incluida directamente en el lazo de control, de los anteriores basados en “mirar y moverse”. Este enfoque incrementa la precisión del control de posición, por lo que los esfuerzos en investigación se han centrado en él durante los últimos años, lo que también es consecuencia del avance en los sistemas computacionales a nivel de hardware, permitiendo obtener y procesar la información visual más rápido, haciendo con ello posible el control servovisual en tiempo real.

Otra cuestión importante cuando se trabaja con visión es la colocación de la cámara. Existen dos posibilidades:

**Configuración de Cámara Fija.** La cámara se encuentra en algún punto fijo con respecto al sistema coordinado de la base del robot como se muestra en la Figura 1.1.

**Configuración de Cámara en Mano.** La cámara se monta sobre alguna parte del robot,

comúnmente el efector final y se mueve junto con éste, como se muestra en la Figura 1.2

Ambas configuraciones tienen sus ventajas y sus desventajas, como se explica en [Hutchinson et al., 1996].

En ese mismo trabajo se trata sobre la clasificación de los tipos de control servovisual conforme al diseño de la tarea, llegando a definir dos esquemas básicos:

**Control Servovisual Basado en Posición.** La información del sistema de visión se utiliza para estimar la posición del efector final y del entorno con respecto al sistema coordinado de la cámara, con lo que se forma el error en el espacio cartesiano que luego se utiliza en el algoritmo de control.

**Control Servovisual Basado en Imagen.** En este caso la tarea se diseña en términos de las coordenadas de imagen, por lo que el error de seguimiento se obtiene también en el espacio de imagen. En otras palabras, dado un conjunto de parámetros de imagen deseados, se calcula la ley de control para que, mediante el movimiento del robot, estos parámetros deseados encajen con los parámetros detectados por el sistema de visión, con lo que finalmente se logra el control de la pose (posición y orientación) del robot.

La principal ventaja del control servovisual basado en imagen sobre el basado en posición es la mayor robustez de este último con respecto a incertidumbres en la calibración de la cámara, lo que siempre ha representado un gran problema al trabajar con visión computacional. Dentro de esta categoría se encuentran enfoques interesantes como el de *campos de velocidad*, iniciado por Li y Horowitz en 1999 [Li y Horowitz, 1999] con resultados satisfactorios obtenidos por Kelly, Moreno y Campa en 2004 [Kelly et al., 2004]. Este mismo enfoque se

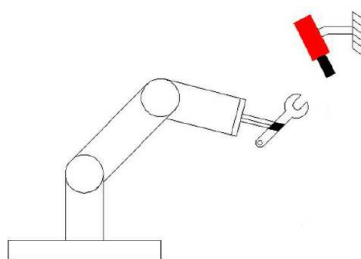


Figura 1.1: Configuración de cámara fija.

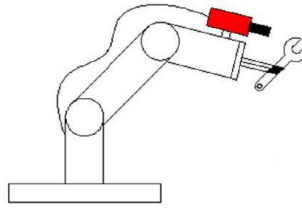


Figura 1.2: Configuración de cámara en mano.

utiliza en Arteaga, Bueno-López y Espinosa en 2009 [Arteaga et al., 2009], donde además se prescinde del conocimiento de los parámetros de la cámara y del modelo del robot.

Una revisión más amplia de las técnicas de control servovisual se encuentra en el tutorial de Chaumette y Hutchinson [Chaumette y Hutchinson, 2006], [Chaumette y Hutchinson, 2007].

### 1.2.3. Control de Fuerza con Retroalimentación Visual

El problema de control servovisual cuando se incluye simultáneamente el control de fuerza es un gran reto desde los puntos de vista tanto teórico como práctico. Además de los problemas inherentes a cada caso por separado, se suman otros problemas como la conjunción de la información de todos los sensores disponibles y la utilización de las redundancias existentes en esta información para mejorar el desempeño general del sistema. La literatura en esta área no es tan extensa como en los casos particulares, aunque se ha realizado un gran esfuerzo por obtener algoritmos eficientes durante las últimas décadas.

Uno de los primeros trabajos que lidia con el control simultáneo de posición y fuerza incluyendo las ventajas de la retroalimentación visual es el realizado por Ishikawa y Kosuge en 1991 [Ishikawa y Kosuge, 1991], donde se maneja la conmutación entre los algoritmos de fuerza y de visión para resolver ambas tareas, aunque esto no se hace simultáneamente. En 1996, Nelson y Khosla [Nelson et al., 1996], presentan un método para aprovechar las diversas señales de retroalimentación disponibles (visión, sensor de fuerza, posición) pero el tipo de control es intermitente, dándole prioridad a una u otra dependiendo de las condiciones del robot y de la tarea a realizar. Por su parte, en 1998, Hosoda, Igarashi y Asada [Hosoda et al., 1998], desarrollan un controlador adaptable para resolver este problema, sin embargo, las condiciones propuestas son muy restrictivas, puesto que suponen constante el mapeo del espacio articular al espacio de imagen, lo que hace que el robot necesite moverse muy

lentamente para cumplir con esta suposición.

En el año 2000, Xiao [Xiao et al., 2000] propone un algoritmo que es capaz de lidiar con un ambiente no calibrado, aunque supone conocida la cinemática y la dinámica del robot manipulador, además de requerir una calibración del sistema fuera de línea. Dos años más tarde, Baeten [Baeten et al., 2002] presenta un interesante enfoque basado en el formalismo referente a la tarea, mediante el que se pueden mejorar los algoritmos para control servovisual y de fuerza. Posteriormente Carelli, en 2004 [Carelli et al., 2004], expone una aplicación industrial de control visual y de fuerza en un robot tipo SCARA mediante controladores de fuerza tanto híbridos como por impedancia, en ambientes parcialmente estructurados. Dos años más tarde, Leite [Leite et al., 2006] ofrece un esquema adaptable para lidiar con la incertidumbre en la calibración de la cámara, sin embargo, supone conocida la dinámica del manipulador.

En el mismo año, el trabajo realizado por Dean-León y Parra-Vega [Dean-León et al., 2006], resolvió el problema de la incertidumbre en el modelo del robot y en la calibración de la cámara mediante la introducción del principio de ortogonalización visual y la aplicación de un esquema de control basado en modos deslizantes, con excelentes resultados. Sin embargo, este esquema requiere la medición directa de la velocidad articular.

Por su parte, Lipiello, Siciliano y Villani en 2007 [Lipiello et al., 2007], utilizan un control de fuerza por impedancia con retroalimentación visual para ambientes de geometría conocida pero de ubicación desconocida (incluso en movimiento). Por último, en 2010, Cheah, Hou, Zhao y Slotine [Cheah et al., 2010], presentan un trabajo que promete resolver el problema de la incertidumbre en la dinámica del robot, en la cinemática del mismo y de la cámara, así como de el desconocimiento del ambiente, basado en un esquema de control adaptable. No obstante, las suposiciones realizadas, aunque posibles, son difíciles de satisfacer y el trabajo sólo presenta resultados de simulación para validar el esquema.

### 1.3. Solución Propuesta

En este trabajo se propone el uso de la estimación de una perturbación dependiente del estado por medio de un observador Proporcional Integral Generalizado (GPI), de naturaleza lineal, que es la contraparte de los controladores GPI, desarrollados por M. Fliess, R. Márquez, E. Delaleau y H. Sira-Ramírez en [Fliess et al., 2002]. La propuesta presentada en este texto está basada en gran parte en el trabajo de Sira-Ramírez, Ramírez-Neria y

Rodríguez-Ángeles [Sira-Ramírez et al., 2010a], sobre el control lineal de sistemas mecánicos no lineales.

Un observador GPI de alta ganancia incluye naturalmente un modelo, con forma de polinomio en el tiempo auto-actualizable, de los efectos conjuntos de todas las perturbaciones no lineales dependientes del estado así como de las perturbaciones externas reflejadas en la entrada. Esta señal es estimada y puesta a disposición del controlador para cancelarla en tiempo real. Al mismo tiempo se estiman las variables de fase relacionadas con la salida medida del sistema. Sin embargo, este esquema es sólo aproximado, en el sentido de que se garantiza únicamente que el error será arbitrariamente pequeño a expensas de aplicar alta ganancia, lo que resulta en el incremento de la sensibilidad al ruido.

Esta estimación en tiempo real es combinada con un controlador lineal con la cancelación de la señal que engloba todas las perturbaciones, sin discriminar entre perturbaciones externas y dependientes del estado. Además, la estimación de esta señal se realiza mediante un observador de Luenberger, lo que representa un enfoque lineal para un problema de control de un sistema altamente no lineal, como lo es un robot manipulador.

### 1.3.1. Alcances y Limitaciones

Esta solución tiene algunas ventajas importantes sobre otras propuestas hechas bajo el mismo contexto. En primer lugar, no se requiere conocimiento de todo el modelo dinámico del robot, únicamente de la matriz de inercia que surge en un modelo típico obtenido a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Dado que es prácticamente imposible conocer el modelo exacto de un sistema mecánico, e incluso es muy difícil obtener una buena aproximación del mismo en algunos casos, esto representa una gran ventaja. Por supuesto, tampoco puede conocerse con exactitud la matriz de inercia mencionada, pero el esquema es robusto ante incertidumbres en los parámetros que componen esta matriz y por lo tanto sólo es necesario un conocimiento aproximado de ella.

Los algoritmos presentados están basados en técnicas de control lineal y estimación de perturbaciones por medio de observadores, por lo que la amplia teoría de sistemas lineales puede utilizarse para sintonizar los parámetros de estos algoritmos cumpliendo con ciertos criterios de desempeño deseados.

La naturaleza misma de los observadores GPI permite estimar la velocidad (que es una variable de fase de la posición, la salida del sistema), por lo que se puede omitir el

uso de un sensor de velocidad físico. Además, los algoritmos desarrollados en este trabajo no requieren conocer la cinemática inversa del robot, lo que representa menor tiempo de procesamiento y una mayor consistencia durante la ejecución de trayectorias de posición.

Una limitación de este algoritmo es la alta sensibilidad al ruido, dado el uso de altas ganancias en los observadores GPI, por lo que su desempeño en presencia de sensores ruidosos se ve afectado seriamente. Otra limitación no tan grave es la suposición del conocimiento de la matriz de inercia. Aunque este conocimiento no es tan estricto dada la robustez del método, en ciertos casos pueden no estar reportados los datos necesarios para aproximar esta matriz dado un robot en particular.

La discretización de los algoritmos representa otra limitación. Estos son diseñados en tiempo continuo y discretizados para llevarlos al sistema real, lo que afecta la naturaleza de alta ganancia de los observadores GPI. Lo anterior es especialmente notorio cuando el periodo de muestreo es elevado como es el caso de la retroalimentación visual, por lo que las trayectorias deben de ser más lentas en comparación con algoritmos sin retroalimentación visual.

## 1.4. Contribución

Se aplicó el método de observadores GPI para resolver el problema de control de posición y fuerza de un robot manipulador sobre una superficie rígida. Este problema ya ha sido resuelto utilizando otros métodos. Sin embargo, hasta el momento no se ha reportado un resultado utilizando el enfoque propuesto en este documento, que presenta algunas ventajas ya mencionadas sobre otros algoritmos. Además, se realizó la validación experimental para el control de posición y fuerza sin retroalimentación visual. Estos resultados han sido sometidos a una revista de arbitraje internacional [Arteaga et al., 2011].

Otra contribución fue la adaptación del algoritmo para incorporar la retroalimentación visual, habilitando al robot para trabajar en entornos no estructurados. En este caso la validación se llevó a cabo mediante una simulación numérica.

## 1.5. Organización del Texto

El presente trabajo se compone de cuatro partes fundamentalmente, divididas en cuatro capítulos. En el Capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas básicas para el

desarrollo del resto del trabajo y comprende el modelo tanto cinemático como dinámico del robot, el modelo de la cámara y la presentación del método de control de sistemas mecánicos completamente actuados mediante observadores GPI, cuya parte medular es el Teorema 2.1 y su demostración, del que se hará uso en los siguientes capítulos.

El Capítulo 3 trata sobre la aplicación de los observadores GPI en el control simultáneo de fuerza y posición para robots manipuladores completamente actuados. Se introduce el principio de ortogonalización, que hace posible la separación del diseño de las dos etapas de control y la integración final de ambas en una única señal de control. Finalmente se presenta el algoritmo de control-observador obtenido.

La extensión del algoritmo para incorporar la retroalimentación visual se presenta en el Capítulo 4, comenzando con el modelado dinámico del manipulador en coordenadas de imagen. Luego se introduce el principio de ortogonalización visual, análogo al principio de ortogonalización presentado en el capítulo 3 y por último se obtiene el algoritmo para control simultáneo de fuerza y posición en coordenadas de imagen.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados de simulación y experimentales que sirven para validar la teoría de los Capítulos 3 y 4. Se exponen los parámetros utilizados para todos los casos y las consideraciones realizadas. Así mismo, se presenta un análisis del desempeño de los algoritmos propuestos.

Por último, se presentan las conclusiones y el trabajo futuro, así como algunas sugerencias que pueden llevarse a cabo para extender esta investigación.

### 1.5.1. Notación y Convenciones Utilizadas

Se considera un robot manipulador, que consiste en una cadena cinemática de  $n$  articulaciones que unen a  $n + 1$  eslabones (considerando la base como el eslabón 0). Dichas articulaciones pueden ser de revolución o prismáticas. Para una articulación de revolución, la  $i$ -ésima variable articular representa el ángulo de giro del eslabón  $i$  con respecto al eslabón  $i - 1$  y se denota por  $\theta_i$ . Para una articulación prismática la  $i$ -ésima variable articular representa el desplazamiento lineal del  $i$ -ésimo eslabón relativo al eslabón  $i - 1$  y se denota por  $d_i$ .

La **configuración del robot** es la especificación completa de cada punto de todos los que lo componen. El conjunto de todas las configuraciones del robot es llamado el **espacio de configuración** del manipulador. La configuración se puede conocer si se conocen todos



los valores de las articulaciones, por lo que se puede decir que el robot está en la configuración  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  es el vector de variables articulares.

La  $i$ -ésima variable articular está dada por  $q_i = \theta_i$ , si la articulación  $i$  es de revolución y  $q_i = d_i$ , si la articulación  $i$  es prismática.

Con la finalidad de simplificar la notación, en algunas ocasiones se utilizará una forma abreviada para las siguientes funciones trigonométricas de las variables articulares

$$\begin{aligned} c_i &= \cos(q_i), & c_{ij} &= \cos(q_i + q_j), & c_{ijk} &= \cos(q_i + q_j + q_k) \\ s_i &= \sin(q_i), & s_{ij} &= \sin(q_i + q_j), & s_{ijk} &= \sin(q_i + q_j + q_k) \end{aligned}$$

Normalmente, una tarea a realizar por el robot no se especifica en el espacio articular, sino que se define en el **espacio cartesiano**<sup>1</sup>, donde se representa la posición y la orientación del sistema coordenado asignado al efector final con respecto a un sistema coordenado fijo asignado a la base. La posición del efector final puede representarse con tres parámetros, que pueden ser directamente las coordenadas del efector final  $(x, y, z)$  con respecto a los ejes del sistema coordenado de la base  $(x_0, y_0, z_0)$ . En el caso de la orientación, ésta se puede precisar utilizando sólo tres parámetros (ángulos de Euler, Roll-Pitch-Yaw, etc.). Se denotará a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$  como el vector de coordenadas en el espacio cartesiano que contiene la información de la posición y la orientación del efector final.

En los Capítulos 4 y 5, se utiliza  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots]^T$  para representar las coordenadas cartesianas de posición y orientación del efector final, mientras que se usa  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots]^T$  para representar las coordenadas de imagen. Por lo tanto,  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , etc. deberán entenderse en cada caso por el contexto, lo que no debe de presentar dificultad alguna.

En este trabajo se utilizan indistintamente los términos *robot*, *manipulador*, *robot manipulador* y *brazo robótico*. De igual forma, se utilizan equivalentemente los términos *control servovisual* y *visual servoing*.

---

<sup>1</sup>La denominación *espacio cartesiano* representa un ligero abuso de notación al incluir además de la posición, la orientación de un sistema coordenado.

## Capítulo 2

# Preliminares Matemáticas

### 2.1. Introducción

Para desarrollar los esquemas de control que permitan resolver el problema planteado en este trabajo, es necesario primero conocer a fondo el sistema con el que se va a trabajar.

El contar con un modelo del sistema físico que se desea controlar facilita el análisis del comportamiento de éste, así como el diseño de los algoritmos para controlarlo. Un modelo matemático de un sistema es una abstracción del mismo, representado por ecuaciones que describen su comportamiento con cierto grado de aproximación.

En este trabajo se considerará como sistema un robot manipulador planar restringido a moverse en un plano en el espacio cartesiano y una cámara de video captando dicho movimiento. No obstante, la teoría desarrollada puede extenderse directamente a robots con tareas desempeñadas en tres dimensiones.

### 2.2. Modelo Cinemático del Robot

La cinemática de un robot es la descripción de su movimiento sin tomar en cuenta las fuerzas que lo causan. Se trata entonces de un problema enteramente geométrico. La cinemática presentada a continuación, se divide en tres partes. Primero se tratará la *cinemática directa*, que consiste en determinar la posición y la orientación del efector final del robot dados los valores de las coordenadas articulares del mismo. Luego se desarrollará la *cinemática inversa*, que consiste en obtener los valores de las articulaciones dada una posición

y una orientación deseada del efector final. Por último se tratará la cinemática diferencial que relaciona las velocidades de las variables articulares con las velocidades lineal y angular del efector final en el espacio cartesiano.

### 2.2.1. Cinemática Directa

El problema de la cinemática directa consiste en determinar la pose del efector final (posición y orientación) respecto a la base, en función de los valores de las variables articulares,  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ .

Para un robot de  $n$  grados de libertad se asignan  $n + 1$  sistemas coordenados, comenzando con la base (sistema 0), utilizando el algoritmo de Denavit-Hartenberg [Spong et al., 2006]. Cuando se utiliza este algoritmo, se puede definir una matriz de transformación homogénea  $\mathbf{A}_i$  que sólo depende de la variable articular  $q_i$  y relaciona a los sistemas coordenados  $i$  e  $i - 1$ , mediante

$$\mathbf{A}_i(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde:

- $\theta_i$  es el ángulo entre los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  con  $z_{i-1}$  como eje de giro; es positivo cuando el giro es en el sentido antihorario.
- $d_i$  es la distancia desde el origen  $O_{i-1}$  a la intersección de el eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$ , medida sobre  $z_{i-1}$ .
- $\alpha_i$  es el ángulo entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  tomando  $x_i$  como eje de giro; es positivo cuando el giro es en el sentido antihorario.
- $a_i$  es la distancia entre el origen  $O_i$  y la intersección de los ejes  $z_{i-1}$  y  $x_i$ , medida sobre  $x_i$ .

Por lo que la pose del efector final se puede representar utilizando la transformación homogénea

$${}^0\mathbf{H}_n(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n & {}^0\mathbf{o}_n \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  ${}^0\mathbf{R}_n$  es la matriz de rotación del efector final con respecto a la base y  ${}^0\mathbf{o}_n$  es la posición del origen del sistema coordinado del efector final con respecto al de la base.

Para representar la pose del efector final puede utilizarse esta matriz de transformación homogénea o de manera alternativa una parametrización de la misma mediante un vector

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \left[ {}^0\mathbf{o}_n \quad {}^0\boldsymbol{\phi}_n \right]^T, \quad (2.3)$$

donde  ${}^0\boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^p$  es una parametrización de la orientación,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , con  $m = 3 + p$  parámetros. El número  $p$  depende de la parametrización de la rotación utilizada ( $p = 3$  para ángulos de Euler y Roll-Pitch-Yaw y  $p = 4$  para eje-ángulo y cuaterniones unitarios).

### 2.2.2. Cinemática Inversa

La cinemática inversa consiste en determinar los valores de las variables articulares dada una posición y orientación del efector final deseada. Para resolver este problema se conocen dos métodos: el método analítico y el método geométrico. En este trabajo, dado que los robots empleados no requiere mayor complejidad, se utilizará el método geométrico, al ser éste más sencillo en general. Consiste en aprovechar aquello que se conoce de la geometría del manipulador y, mediante la aplicación de la trigonometría, tratar de precisar los valores de las variables articulares.

La cinemática inversa es un problema más complejo que el de la cinemática directa por las siguientes razones:

- Las ecuaciones resultantes son usualmente no lineales, por lo que en ocasiones es imposible encontrar una solución en forma cerrada.
- Pueden existir múltiples (incluso infinitas) soluciones a estas ecuaciones.
- Es posible que las soluciones no sean admisibles en el sentido de la estructura cinemática del manipulador.

La solución a la cinemática directa se garantiza sólo si la pose deseada del efector final se encuentran dentro del espacio de trabajo del robot manipulador.

Por otra parte, la existencia de múltiples soluciones depende no sólo de los grados de libertad, sino también del número de parámetros de Denavit-Hartenberg no nulos. En general, mientras más grande sea este número, mayor será el número de soluciones admisibles.

### 2.2.3. Cinemática Diferencial

La cinemática diferencial de un robot manipulador relaciona las velocidades en el espacio de configuración con la velocidad del efector final en el espacio cartesiano. Para encontrar esta relación se deriva la posición cartesiana

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.4)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  es la velocidad del efector final en coordenadas cartesianas,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es la velocidad de las coordenadas articulares y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es el *Jacobiano analítico* del manipulador.

Para representar la cinemática diferencial, suele utilizarse también el llamado *Jacobiano geométrico*, que consiste en la relación existente entre la velocidad angular y lineal del efector final con la velocidad de las variables articulares. La velocidad del efector final se representa por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n & {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix}^T, \quad (2.5)$$

donde  ${}^0\dot{\mathbf{p}}_n \in \mathbb{R}^3$  y  ${}^0\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$  son las velocidades lineal y angular del efector final, respectivamente, mientras que la velocidad en el espacio articular es  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, el Jacobiano geométrico está definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_g(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{J}_g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ .

### Singularidades

El Jacobiano relaciona las velocidades en el espacio cartesiano y el espacio articular por lo que, cuando éste pierde rango, el mapeo cinemático diferencial es deficiente y se dice

que el robot se encuentra en una configuración cinemática singular o *singularidad cinemática*. El conocimiento de estas singularidades es importante por las siguientes razones:

- Representan configuraciones en las que la movilidad de la estructura es reducida, no se pueden realizar movimientos arbitrarios del efector final.
- En las singularidades pueden existir soluciones infinitas al problema de la cinemática inversa.
- En la vecindad de una singularidad, pequeñas velocidades en el espacio cartesiano pueden ocasionar grandes velocidades en el espacio articular.

Por otra parte, las singularidades pueden clasificarse en dos categorías:

**Singularidades de Frontera.** Ocurren cuando el manipulador está ya sea contraído o estirado totalmente. Usualmente se evitan especificando la tarea a realizar de tal manera que el robot no llegue a la frontera del espacio alcanzable.

**Singularidades Internas.** Son las que se presentan dentro del espacio alcanzable y comúnmente se deben al alineamiento de dos o más ejes de movimiento. A diferencia de las anteriores, estas singularidades representan un serio problema debido a que se pueden presentar en cualquier lugar dentro del espacio alcanzable o en algún punto de una trayectoria diseñada dentro del espacio de operación.

Para conocer las singularidades, basta con determinar cuándo el Jacobiano pierde rango. En el caso de que sea  $m = n$  (cuando el Jacobiano es una matriz cuadrada), esto se puede llevar a cabo por medio del determinante del mismo dado que, cuando este determinante es cero, el Jacobiano pierde rango y el robot se encuentra en una singularidad.

### 2.3. Modelo Dinámico del Robot

El modelo dinámico de un sistema permite conocer el comportamiento del mismo tomando en cuenta las fuerzas que ocasionan su movimiento, tanto aquellas que lo motivan como aquellas que se oponen a éste. El modelo dinámico de un sistema comúnmente está dado por un conjunto de ecuaciones diferenciales, cuya solución define el comportamiento de los estados del sistema como funciones de las condiciones iniciales del sistema, del tiempo y de las fuerzas externas.

Los robots manipuladores, como cualquier sistema físico, son susceptibles a ser modelados matemáticamente. Estos modelos pueden ser complejos dependiendo del número de articulaciones del robot y del grado de aproximación que se desee para el comportamiento del modelo en comparación con el sistema físico real.

### 2.3.1. Modelo Dinámico en Movimiento Libre

Considérese un robot manipulador como una cadena cinemática con  $n$  articulaciones sujeto a restricciones holonómicas. Si las variables articulares se consideran como coordenadas generalizadas, entonces se puede utilizar el método de Euler-Lagrange para modelarlo [Spong et al., 2006]. Este método consiste en definir el Lagrangiano, que es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial y posteriormente utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener un modelo de la siguiente forma

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_1, \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{H}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $\mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva semidefinida que contiene los coeficientes de fricción viscosa en las articulaciones del robot,  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales y  $\boldsymbol{\tau}_1 \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques de entrada en las articulaciones.

Para ilustrar lo anterior, considérese el robot planar de dos grados de libertad con articulaciones de revolución mostrado en la Figura 2.1. El modelo dinámico de este manipulador está dado por la ecuación (2.7) con los siguientes valores para las matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} c_2) + I_1 + I_2 & m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2 \\ m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g c_1 + m_2 l_{c2} g c_{12} \\ m_2 l_{c2} g c_{12} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

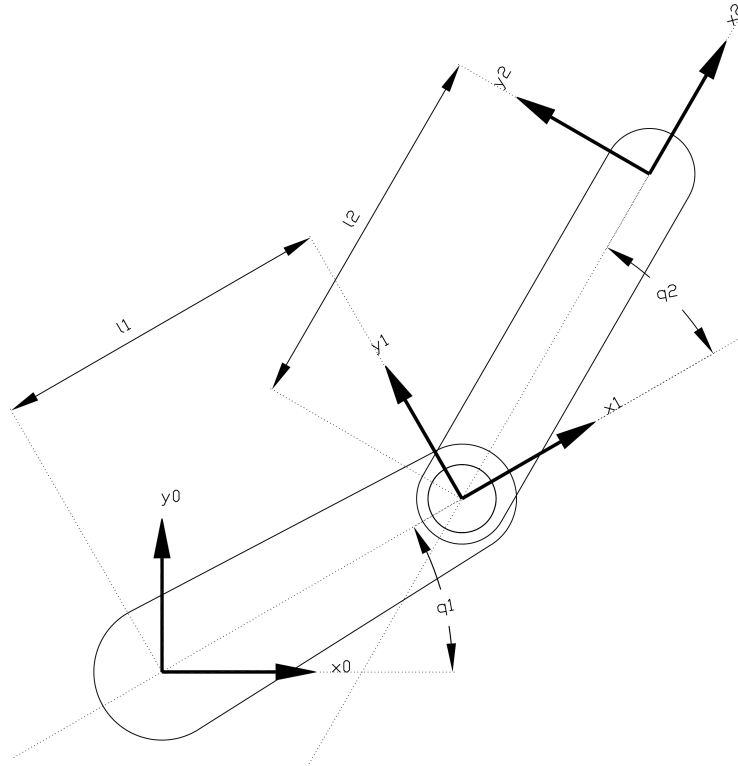


Figura 2.1: Robot Planar de Dos Eslabones.

- $l_{ci}$ : distancia del origen del sistema de coordenadas  $i - 1$  al centro de masa del eslabón  $i$ .
- $I_i$ : momento de inercia sobre un eje que cruza el centro de masa del eslabón  $i$  y que es paralelo al eje  $z_i$ .
- $g = 9.81[\text{m}/\text{seg}^2]$ : constante de aceleración debida a la gravedad.
- $d_i > 0$  : coeficiente de fricción viscosa en el eje de giro de la articulación  $i$ .

### 2.3.2. Propiedades del Modelo Dinámico

El modelo dinámico de la sección anterior, obtenido a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, tiene ciertas propiedades matemáticas que pueden ser explotadas al momento de diseñar un esquema de control. Las propiedades más importantes son las siguientes:



**Propiedad 2.1.** La matriz de inercia  $\mathbf{H}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica y positiva definida.  $\triangle$

**Propiedad 2.2.** La matriz  $\dot{\mathbf{H}}_1(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica, esto es

$$\mathbf{x}^T \left( \dot{\mathbf{H}}_1(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

$\triangle$

**Propiedad 2.3.** El mapeo que va de  $\tau_1$  a  $\dot{\mathbf{q}}$  es pasivo, esto es, existe una constante  $\beta \geq 0$  tal que

$$\int_0^T \dot{\mathbf{q}}^T(\zeta) \tau_1(\zeta) d\zeta \geq -\beta, \quad \forall T > 0. \quad (2.9)$$

$\triangle$

### 2.3.3. Modelo Dinámico Considerando la Dinámica de los Actuadores

En el modelo dinámico de la ecuación (2.7) se asume que los actuadores en las articulaciones del manipulador son capaces de generar fuerza y torque, necesarios para llevar a cabo el movimiento deseado del robot. Existen diversos tipos de actuadores que se encargan de convertir una cantidad física (voltaje, presión, etc.) en torques y fuerzas. Estos actuadores pueden ser de diversos tipos (eléctrico, hidráulico, neumático, etc.). Sin embargo, frecuentemente la señal de referencia para accionar el actuador se expresa en términos de voltaje. Esto hace que sea necesario tomar en cuenta la relación que existe entre esta señal de referencia y el torque o fuerza real que se refleja como entrada mecánica del manipulador.

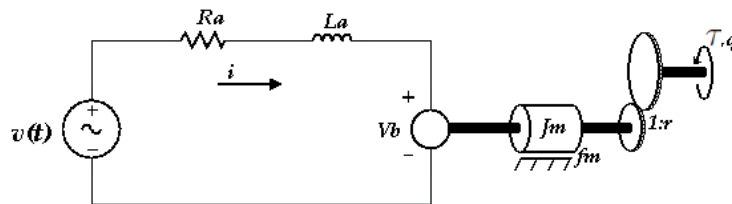


Figura 2.2: Motor de Corriente Directa con Carga.

En el robot considerado para este trabajo se asume que las entradas son torques (articulaciones de revolución) y que los actuadores son motores eléctricos de corriente directa controlados por armadura, acoplados a las articulaciones por medio de juegos de engranes de reducción de velocidad como se muestra en la Figura 2.2.

Si se desprecia la inductancia de la armadura  $L_a$ , se puede obtener el modelo dinámico del par generado  $\tau_1$  en función del voltaje  $v$  aplicado a las terminales del motor, como sigue [Kelly, 2003]

$$J_{mi}\ddot{q}_i + f_{mi}\dot{q}_i + \frac{K_{ai}K_{bi}}{R_{ai}}\dot{q}_i + \frac{1}{r_i^2}\tau_{1i} = \frac{K_{ai}}{r_i R_{ai}}v_i, \quad (2.10)$$

donde, para la articulación  $i$ ,

- $J_{mi}$  es la inercia del eje del motor [Kg · m<sup>2</sup>]
- $f_{mi}$  es la fricción en el eje del motor [N · m]
- $K_{ai}$  es la constante de par del motor [N · m/A]
- $K_{bi}$  es la constante de fuerza contraelectromotriz del motor [V · s/rad]
- $R_{ai}$  es la resistencia de armadura del motor [ $\Omega$ ]
- $r_i$  es la relación de reducción de los engranes
- $v_i$  voltaje aplicado en las terminales del motor [V]
- $\tau_i$  par neto generado [N · m]

La ecuación (2.10) se puede reescribir en forma matricial como

$$\mathbf{D}_j\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_f\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_n\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{D}_k\mathbf{v}, \quad (2.11)$$

donde

- $\mathbf{D}_j = \text{diag} \{J_{mi}\}$
- $\mathbf{D}_f = \text{diag} \left\{ f_{mi} + \frac{K_{ai}K_{bi}}{R_{ai}} \right\}$
- $\mathbf{D}_n = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_i^2} \right\}$
- $\mathbf{D}_k = \text{diag} \left\{ \frac{K_{ai}}{r_i R_{ai}} \right\}$ .

Si se sustituye la dinámica de los motores (2.11) en el modelo del robot con entrada de torque (2.7), se puede obtener el modelo completo del robot considerando la dinámica de los actuadores y la entrada del sistema como el voltaje en las terminales de los motores, como sigue

$$(\mathbf{H}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_j)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_f)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_k\mathbf{v}. \quad (2.12)$$

Si se definen  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{H}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_j$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{g}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{D} \triangleq \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_f$  y  $\boldsymbol{\tau} \triangleq \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_k\mathbf{v}$ , se puede reescribir el modelo del robot como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (2.13)$$

#### 2.3.4. Modelo Dinámico en Movimiento Restringido

Cuando el robot está en contacto con una superficie sobre la que ejerce cierta fuerza, las fuerzas de contacto entre el robot y la superficie deben de tomarse en cuenta en el modelo matemático. Además de la fuerza ejercida sobre la superficie, se tienen otras actuando sobre el manipulador, como la fricción entre el robot y la superficie, la fricción con el aire, etc. Estas perturbaciones se modelarán como un torque que se restará directamente al torque de entrada.

La acción física del manipulador en contacto con la superficie se puede representar mediante una restricción en el espacio de configuración del robot como sigue

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$  define la superficie de contacto. Se asume que la fuerza de contacto del robot con la superficie es siempre perpendicular a esta última.

El gradiente de la restricción  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \triangleq \nabla\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , es una matriz que mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente que surge en el punto de contacto del robot con la superficie, por lo que servirá para calcular la fuerza de contacto entre ambos. Se asume que  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  es de rango  $m$  y que la restricción  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  se define de tal manera que  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  tiene norma unitaria.

Por lo tanto, el modelo cuando el manipulador está en contacto con la superficie y

se toman en cuenta las perturbaciones a la entrada es

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (2.15)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_p \in \mathbb{R}^n$  son las fuerzas (no modeladas) que perturban al sistema, mismas que se asumen acotadas y suaves,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de multiplicadores de Lagrange, cuyo significado físico es el de la fuerza aplicada a la superficie en el punto de contacto.

## 2.4. Modelo de la Cámara

Como se mencionó anteriormente, existen dos tipos de configuraciones de cámara para realizar el control de robots manipuladores: configuración de cámara fija y configuración de cámara en mano, cada una con sus propias ventajas y desventajas. En este trabajo se utilizará la configuración de cámara fija. De esta forma la superficie (que se considera fija también respecto al sistema coordenado de la base), tiene posición y orientación fija con respecto a la cámara.

Para desarrollar el esquema de control de fuerza y posición con retroalimentación visual es necesario conocer el modelo cinemático de la cámara. En este trabajo se utilizará el modelo de cámara tipo *pinhole* cuya geometría se presenta en la Figura 2.3.

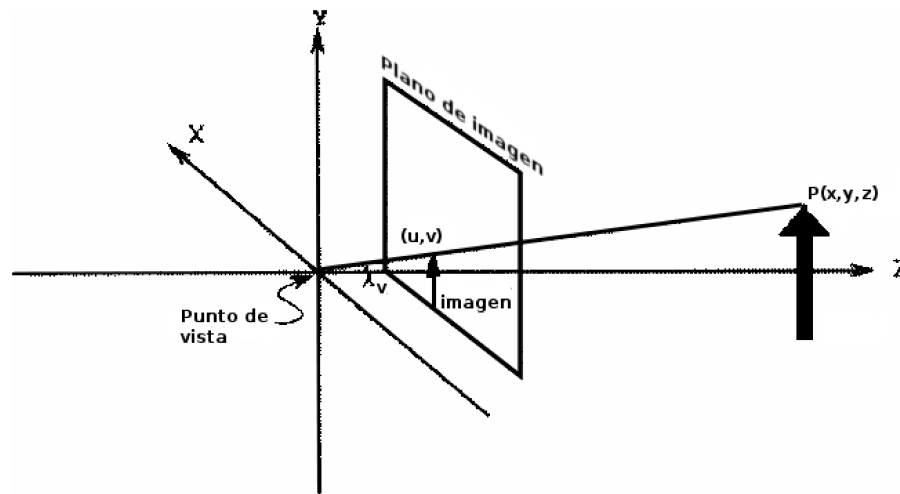


Figura 2.3: Geometría de la Cámara Tipo *Pinhole*.

Se considera que el eje z del sistema coordenado asignado a la cámara (llamado *eje principal*) coincide con el *eje óptico* de la cámara. Al plano perpendicular al eje óptico donde

se proyectan las imágenes tomadas del “mundo” por la cámara se le llama *plano de imagen*. El origen del sistema coordenado asignado a la cámara se hace coincidir con el *punto de vista* de la cámara (o centro de la cámara), de tal manera que a la distancia  $\lambda_v$  del origen del sistema al plano de imagen, medida sobre el eje principal se le conoce como *distancia focal*.

Al conjunto de todos los puntos que componen el plano de imagen se le conoce como *espacio de imagen*. Un punto sobre el plano de imagen con coordenadas  $\mathbf{y} = (u, v)$  es la proyección de una línea en el espacio cartesiano que pasa por el origen y el punto  $(u, v)$  en el plano de imagen. Así mismo, de la Figura 2.3, utilizando triángulos semejantes, a un punto en el espacio cartesiano con coordenadas  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  le corresponde un punto en el plano de imagen con coordenadas  $(u, v)$  dadas por la relación

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_v(x/z) \\ \lambda_v(y/z) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

### 2.4.1. Cinemática Visual

En la relación dada por la ecuación (2.16), las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  pueden representar la posición del efector final con respecto al sistema coordenado de la base. Así, conociendo la cinemática directa y la ecuación (2.16), se podrían determinar las coordenadas en el espacio de imagen del efector final en función de las coordenadas articulares del robot,  $\mathbf{q}$ . No obstante, los sistemas coordenados de la cámara y del efector final no son concurrentes, sino que están relacionados mediante rotaciones y traslaciones. Aún más, el punto de vista de la cámara en general no coincide con el origen del sistema coordenado asignado a la cámara.

Para tomar en cuenta estos elementos, se puede utilizar el mapeo cinemático perceptual [Dean-León, 2006], [Kelly et al., 2004]

$$\mathbf{y} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\phi \left( \mathbf{x} - \begin{bmatrix} {}^c O_{R1} \\ {}^c O_{R2} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde:

- $\alpha_\lambda \triangleq (\alpha_c \lambda_v) / ({}^c O_{R3} - \lambda_v)$ ,

- $\alpha_c$  es el número de píxeles por unidad de distancia en el plano de imagen (se asumen píxeles cuadrados),
- ${}^cO_{R3}$  el desplazamiento del origen del sistema coordinado asignado a la cámara con respecto a la base, sobre el eje  $z$ ,
- $\mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi_c) & \sin(\phi_c) \\ \sin(\phi_c) & -\cos(\phi_c) \end{bmatrix}$  es la matriz de rotación del sistema coordinado de la cámara con respecto a la base,
- $\phi_c$  es el ángulo de rotación sobre un eje perpendicular a los planos (paralelos) de la cámara y el formado por los ejes  $x$  e  $y$  del sistema coordinado de la base,
- ${}^cO_{R1}$  y  ${}^cO_{R2}$  son los desplazamientos del origen del sistema coordinado asignado a la cámara con respecto a la base, sobre los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente y
- $u_0, v_0$  son los desplazamientos del pixel coincidente con el eje principal de la cámara y el origen del sistema coordinado asociado al plano de imagen.

#### 2.4.2. Cinemática Visual Diferencial

La ecuación (2.17) define el mapeo de las coordenadas cartesianas del efector final a las coordenadas en el espacio de imagen, lo que representa una relación estática. Si se desea encontrar una relación entre las velocidades del efector final en el espacio cartesiano y en el espacio de imagen, se deriva la ecuación (2.17) con respecto al tiempo

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\phi \dot{\mathbf{x}} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\phi \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.18)$$

lo que define el *mapeo visual diferencial*, que relaciona la velocidad en el espacio cartesiano  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  (planar) con la velocidad en el espacio de imagen  $\dot{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^2$  (flujo óptico). Para obtener la ecuación (2.18) se consideró que la cámara tiene una cinemática constante con respecto al sistema coordinado de la base (cámara fija).

## 2.5. Empleo de Observadores GPI en el Control de Sistemas Mecánicos Perturbados

En esta sección se tratarán los aspectos generales del control de sistemas mecánicos completamente actuados, sujetos a perturbaciones. Se considera que estas perturbaciones están acotadas, lo cual es razonable para los tipos de perturbaciones más comunes que se pueden presentar en un escenario real.

Considérese el modelo de un robot de  $n$  grados de libertad (sistema mecánico completamente actuado) dado por la ecuación (2.7). Supóngase que  $\mathbf{q}$  puede medirse y que se conoce la matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ . Se asume que el término  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$  no se conoce por diferentes razones como incertidumbre en los parámetros del modelo, falta de mediciones, dinámicas no consideradas, etc.

Se desea que este sistema siga una trayectoria deseada,  $\mathbf{q}_r(t)$ , a pesar de los términos desconocidos y de otras perturbaciones, como fricción viscosa, fricción de Coulomb, resistencia del aire, zona muerta de los motores, juego de los engranes, etc. Se asume que existe una ley de control  $\boldsymbol{\tau}^*$  que logra el seguimiento ideal de la trayectoria, para la que se cumple la dinámica ideal

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}_r) = \boldsymbol{\tau}^*. \quad (2.19)$$

Dadas las suposiciones anteriores, el término  $\boldsymbol{\tau}^*$  no puede ser calculado con exactitud *a priori*, por lo que se forma la dinámica del error

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}} &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})] \\ &\quad + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_r)[\mathbf{C}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}_r)] - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_r)\boldsymbol{\tau}^*(t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_r$ ,  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$  y  $\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_r$ .

Si se agrupan todos los términos desconocidos en una señal  $\mathbf{z}(t)$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})] \\ &\quad + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_r)[\mathbf{C}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}_r)] - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_r)\boldsymbol{\tau}^*(t), \end{aligned} \quad (2.21)$$

se puede reescribir la dinámica anterior como

$$\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{z}(t). \quad (2.22)$$

Por lo tanto, el vector  $\mathbf{z}(t)$  agrupa los términos desconocidos debidos a la parte de la dinámica no modelada y a la entrada de control nominal. Esta señal actúa como una perturbación desconocida que varía con el tiempo y que afecta el seguimiento de la trayectoria. Si se conociera exactamente este vector de señales se podría cancelar en la ecuación (2.22) y dado que se supone  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  conocida se podría escoger la entrada de control  $\boldsymbol{\tau}$  de tal manera que, además de cancelar este término, se tendría un sistema de doble integrador, cuya dinámica puede ser diseñada para cumplir ciertos requisitos de diseño como sobrepaso máximo, tiempo de asentamiento, rechazo a perturbaciones, etc. Este tipo de sistemas es ampliamente conocido en la literatura de control lineal ([Chen, 1999], [Kuo, 1996]).

Entonces, el objetivo es estimar aproximadamente y en tiempo real  $\mathbf{z}(t)$ , lo que se hará mediante un observador de Luenberger, tomando como modelo genérico un vector de polinomios variantes con el tiempo, que servirá como modelo interno para esta señal desconocida.

Se asume que  $\mathbf{z}(t)$  satisface las siguientes condiciones:

**Suposición 2.1.** *Los componentes de  $\mathbf{z}(t)$  y un número finito  $p$  de sus derivadas, están absoluta y uniformemente acotadas para toda trayectoria  $\mathbf{q}(t)$  del sistema que converge a una vecindad de la señal de referencia  $\mathbf{q}_r(t)$  mediante la acción de algún controlador retroalimentado suave.* △

**Suposición 2.2.** *Cada uno de los componentes del término aditivo,  $\mathbf{z}(t)$ , de dimensión  $n$ , pueden ser escritos como la suma de un elemento arbitrario de una familia de polinomios de Taylor de  $(p - 1)$ -ésimo grado y un vector de términos residuales de la siguiente forma:*

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{a}_i t^i + \mathbf{r}(t), \quad (2.23)$$

donde cada  $\mathbf{a}_i$  es un vector de coeficientes constantes de dimensión  $n$  y  $\mathbf{r}(t)$  es el vector de términos residuales. △



**Suposición 2.3.** *Dado que son señales dependientes del tiempo, cada una de las componentes de  $\mathbf{z}(t)$ , puede ser instantáneamente modelada por un elemento de una familia fija de polinomios de Taylor de grado fijo ( $p - 1$ ). Este modelo de polinomio de grado fijo para las perturbaciones a la entrada,  $\mathbf{z}(t)$ , tiene la propiedad de ser invariante ante corrimientos en el tiempo y además cada una de estas entradas siempre satisface*

$$\frac{d^p \mathbf{z}_j}{dt^p} = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

△

Estas suposiciones son razonables dado que las perturbaciones que se aproximarán por medio de esta señal tienen como fuente las fuerzas centrífugas y de Coriolis, la atracción debida a la gravedad, la fricción viscosa, fricción de Coulomb, rozamiento con el aire, etc. Este tipo de perturbaciones y dinámicas no modeladas cumplen con las suposiciones acerca del acotamiento y es razonable suponer que sus efectos netos sobre el seguimiento de la señal de referencia articular  $\mathbf{q}_r(t)$  pueden ser aproximados por un vector de señales como el descrito por  $\mathbf{z}(t)$ .

Estos polinomios de Taylor en el tiempo pueden ser utilizados como modelo interno de los componentes del vector de perturbaciones,  $\mathbf{z}(t)$ , en la etapa de diseño del observador, lo que le otorga al modelo aproximado de la perturbación el carácter de auto-actualización necesario para estimar en tiempo real, con cierto grado de precisión, dicho modelo propuesto para estas perturbaciones. Como consecuencia, el observador está libre de reinicializaciones externas.

Al estimado de la señal desconocida,  $\mathbf{z}(t)$ , se le denominará  $\hat{\mathbf{z}}(t)$ . Esta aproximación puede ser hecha arbitrariamente cercana, como se verá más adelante.

La entrada de control  $\boldsymbol{\tau}$  para la dinámica del error (2.22), será diseñada como un controlador proporcional derivativo clásico (PD) más un término de cancelación:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \left[ -2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\omega}_n\dot{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\omega}_n^2\mathbf{e} - \hat{\mathbf{z}}(t) \right], \quad (2.25)$$

donde  $\dot{\mathbf{e}}$  es un estimado del error de velocidad angular de las articulaciones,  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$ ,  $\boldsymbol{\zeta}$  y  $\boldsymbol{\omega}_n$ , son matrices diagonales positivas definidas de  $n \times n$ , cuya utilidad es diseñar la respuesta del sistema bajo un controlador PD clásico, es decir, son los parámetros que definen la respuesta de un sistema de segundo orden del tipo  $\ddot{\mathbf{e}} + 2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\omega}_n\dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\omega}_n^2\mathbf{e}$ . Estos parámetros se

pueden elegir arbitrariamente para cumplir con los criterios de diseño deseados, siempre y cuando se cumpla que las cantidades aproximadas  $\hat{\mathbf{z}}(t)$  y  $\dot{\hat{\mathbf{e}}}$  sean exactamente iguales a las reales,  $\mathbf{z}(t)$  y  $\dot{\mathbf{e}}$ , respectivamente.

Tomando en cuenta lo anterior, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.1.** *Sea  $\mathbf{I}_n$  la matriz identidad de  $n \times n$ ,  $\zeta$  y  $\omega_n$  matrices diagonales positivas definidas, constantes, tales que la matriz diagonal de elementos polinomiales,  $\rho_c(s)$ , de variable compleja,  $s$ , definida por*

$$\rho_c(s) = s^2 \mathbf{I}_n + 2\zeta \omega_n + \omega_n^2, \quad (2.26)$$

*tiene la propiedad de que todos sus elementos diagonales son polinomios Hurwitz de segundo orden. Entonces, el esquema de control retroalimentado con observador lineal*

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{H}(\mathbf{q}) \left[ -2\zeta \omega_n \dot{\hat{\mathbf{e}}} - \omega_n^2 \mathbf{e} - \hat{\mathbf{z}}_1(t) \right] \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_1 &= \hat{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{p+1}(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\tau + \hat{\mathbf{z}}_1 + \lambda_p(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_1 &= \hat{\mathbf{z}}_2 + \lambda_{p-1}(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_2 &= \hat{\mathbf{z}}_3 + \lambda_{p-2}(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_{p-1} &= \hat{\mathbf{z}}_p + \lambda_1(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_p &= \lambda_0(\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_1 \hat{\mathbf{z}}_i, i = 2, \dots, p, \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2$$

*donde  $\dot{\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\mathbf{e}}_2$  y  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}_1$ , lleva global y asintóticamente al vector de errores de dimensión  $n$ ,  $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1$  y a su derivada temporal,  $\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \dot{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{e}}_2$ , a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del error de estimación,  $(\tilde{\mathbf{e}}, \dot{\tilde{\mathbf{e}}})$ , siempre que las matrices diagonales, constantes, de dimensión  $n \times n$ ,  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}\}$ , sean escogidas de tal forma que todos los componentes no nulos de la matriz diagonal de variable compleja, de dimensión  $n \times n$ ,  $\rho(s)$ , definida como*

$$\rho(s) = \rho(s) = s^{p+2} \mathbf{I} + \lambda_{p+1} s^{p+1} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0, \quad (2.28)$$

*sean polinomios Hurwitz de grado  $p+2$ , con raíces suficientemente alejadas del eje imaginario a la izquierda en el plano complejo.*

**Demostración** Sea el vector de error de seguimiento de posición articular definido por  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_r$  y sea  $\mathbf{e}_2$  el vector de error de seguimiento de velocidad articular dado por  $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$ . La dinámica del error de seguimiento (2.22), descrita con el modelo de la perturbación mediante la señal  $\mathbf{z}(t)$ , se puede escribir, de acuerdo con (2.23), como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{z}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{z}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{z}}_{p-1} &= \mathbf{z}_p \\ \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{r}^{(p)}(t).\end{aligned}$$

Sean  $\tilde{\mathbf{z}}_j = \mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  los errores de estimación del estado de la perturbación. Los vectores de error de observación,  $\tilde{\mathbf{e}}_j$ ,  $j = 1, 2$ , que están asociados con el error de seguimiento de posición y velocidad,  $\mathbf{e}$  y  $\dot{\mathbf{e}}$ , satisfacen la dinámica perturbada, predominantemente lineal

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_1 &= \tilde{\mathbf{e}}_2 - \boldsymbol{\lambda}_{p+1}\tilde{\mathbf{e}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_2 &= \tilde{\mathbf{z}}_1 - \boldsymbol{\lambda}_p\tilde{\mathbf{e}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 &= \tilde{\mathbf{z}}_2 - \boldsymbol{\lambda}_{p-1}\tilde{\mathbf{e}} \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_{p-1} &= \tilde{\mathbf{z}}_p - \boldsymbol{\lambda}_1\tilde{\mathbf{e}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_p &= \mathbf{r}^{(p)}(t) - \boldsymbol{\lambda}_0\tilde{\mathbf{e}},\end{aligned}$$

donde  $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}_1$ . Esta dinámica se puede representar como un sistema LIT de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_2 \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_{(p-1)} \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}_{(p+1)} & \mathbf{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\boldsymbol{\lambda}_p & 0 & \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ -\boldsymbol{\lambda}_{(p-1)} & 0 & 0 & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\boldsymbol{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\lambda}_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{z}}_{(p-1)} \\ \tilde{\mathbf{z}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}^{(p)}(t). \quad (2.29)$$

Si se define la salida como  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{e}}_1$  y la entrada como  $\mathbf{u} = \mathbf{r}^{(p)}(t)$ , el sistema de ecuaciones lineales e invariantes en el tiempo (2.29) está en la forma canónica observable y su función

de transferencia está dada por

$$\mathbf{Y}(s) = \left[ s^{p+2} \mathbf{I} + \boldsymbol{\lambda}_{(p+1)} s^{(p+1)} + \boldsymbol{\lambda}_p s^p + \boldsymbol{\lambda}_{(p-1)} s^{(p-1)} + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_1 s + \boldsymbol{\lambda}_0 \right]^{-1} \mathbf{U}(s), \quad (2.30)$$

cuya contraparte, en el dominio del tiempo, está dada por

$$\ddot{\tilde{\mathbf{e}}}^{(p+2)} + \boldsymbol{\lambda}_{p+1} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^{(p+1)} + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_0 \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{r}^{(p)}(t) = \frac{d^p}{dt^p} \mathbf{z}(t). \quad (2.31)$$

De la teoría de sistemas lineales, particularmente de la estabilidad entrada acotada-salida acotada (estabilidad BIBO), se tiene que el sistema descrito por (2.31) presenta una respuesta BIBO estable si se cumple que la entrada  $\mathbf{u} = \mathbf{r}^{(p)}(t)$  está acotada, así como sus derivadas temporales (lo cual es válido debido a las suposiciones hechas) y además si se cumple que los coeficientes matriciales,  $\{\boldsymbol{\lambda}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_0\}$ , se escogen de tal manera que los polinomios de variable compleja  $s$ , en la diagonal de la matriz  $\boldsymbol{\rho}(s)$ , dada por

$$\boldsymbol{\rho}(s) = s^{p+2} \mathbf{I}_n + \boldsymbol{\lambda}_{p+1} s^{p+1} + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_1 s + \boldsymbol{\lambda}_0, \quad (2.32)$$

son Hurwitz, con raíces ubicadas lo suficientemente lejos a la izquierda en el plano complejo [Chen, 1999]. Bajo estas condiciones, la respuesta en el tiempo de la dinámica (2.31), será exponencial, asintótica y uniformemente acotada por un disco arbitrariamente pequeño centrado en el origen del espacio de error de seguimiento de estimación,  $\tilde{\mathbf{e}} = \dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \ddot{\tilde{\mathbf{e}}} = \cdots = \tilde{\mathbf{e}}^{(p+1)} = \mathbf{0}$ . Aún más, el radio del disco que acota últimamente al error en el espacio de fase de  $\tilde{\mathbf{e}}$  es proporcional al inverso del valor absoluto de la parte real más pequeña de las raíces de los polinomios característicos que se encuentran en la diagonal de (2.32). Por otra parte, como consecuencia de la convergencia a un disco arbitrariamente pequeño alrededor del origen del espacio de errores de estimación para el modelo de error del sistema perturbado, los estados del observador de dimensión  $n$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_1$ , se convierten en estimaciones arbitrariamente cercanas de las funciones de perturbación a la entrada,  $\mathbf{z}(t)$ . Además, también se aproximan las derivadas temporales de esta señal, es decir,  $\mathbf{z}^{(j)}(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , por medio de las variables del observador correspondientes,  $\hat{\mathbf{z}}_{(j+1)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

La dinámica en lazo cerrado se obtiene sustituyendo la ley de control (2.27) en la dinámica del error (2.22), obteniendo

$$\ddot{\mathbf{e}} + 2\zeta\omega_n \dot{\mathbf{e}} + \omega_n^2 \mathbf{e} = \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t). \quad (2.33)$$

Cuando  $\dot{\hat{e}} \rightarrow \dot{e}$  y  $\hat{z}(t) \rightarrow z(t)$  (con  $\hat{z} = \hat{z}_1$ ), esta dinámica se comporta como un sistema lineal invariante en el tiempo de segundo orden, con una respuesta definida por los parámetros de diseño  $\zeta$  y  $\omega_n$ . Se puede comprobar que esto siempre sucede si se cumplen las condiciones para que (2.30) sea BIBO estable, dado que en esta situación la dinámica en lazo cerrado (2.33) es equivalente a

$$\ddot{e} + 2\zeta\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e = z(t) - \hat{z}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\hat{e}}. \quad (2.34)$$

Como la diferencia  $z(t) - \hat{z}(t)$  está uniformemente acotada por un disco centrado en el origen del espacio de errores de estimación, así como las trayectorias de los errores  $\tilde{e}$  y  $\dot{\tilde{e}}$ , el lado derecho de (2.34), puede verse como una perturbación finalmente acotada a la entrada del sistema lineal del lado derecho. En resumen, el observador GPI propuesto auto-actualiza continuamente la estimación de las perturbaciones,  $z(t)$ , en la forma de un vector de polinomios de grado  $(p-1)$ . El resultado total es que el término de residuo,  $r(t)$ , agregado a la aproximación de los polinomios de Taylor, también se auto-actualiza conforme avanza el tiempo, por lo que este término y un número finito de sus derivadas temporales pueden ser consideradas por sí mismas como una señal absoluta y uniformemente acotada.

Este sistema presenta en cada uno de sus componentes una dinámica dada por polinomios Hurwitz estables con raíces suficientemente lejos a la izquierda en el plano complejo. Por lo tanto, el vector de error de seguimiento articular,  $e$ , y su derivada temporal,  $\dot{e}$ , convergerán finalmente a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del espacio de errores de seguimiento.  $\triangle$

Este teorema será de vital importancia a lo largo de este trabajo, así como las suposiciones realizadas para probarlo. Las secciones siguientes son en realidad la aplicación del Teorema 2.1 para el control de posición y fuerza, además del control servovisual para robots manipuladores completamente actuados. No obstante, es aplicable a un gran número de problemas que involucran el control de sistemas mecánicos perturbados y lleva a la aplicación de un esquema de control lineal para controlar sistemas no lineales sujetos a perturbaciones. Algunas aplicaciones de este método pueden encontrarse en [Sira-Ramírez y Castro-Linares, 2010] y [Sira-Ramírez et al., 2010b].

## Capítulo 3

# Control de Posición y Fuerza

### 3.1. Introducción

En este capítulo se desarrollará la teoría necesaria para realizar el control simultáneo de posición y de fuerza de un robot manipulador sobre una superficie. En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de un manipulador en contacto con una superficie.

Se parte de la suposición de que se conoce exactamente la posición y la orientación de esta superficie con respecto a la base y que permanece inmóvil. Esto implica que la restricción que surge cuando el manipulador está en contacto con la superficie se puede expresar en términos de las coordenadas articulares del robot y es una relación constante.

Además, se supone también que dicha superficie es rígida. Esto permitirá utilizar el *principio de ortogonalización* que será definido más adelante y que juega un papel importante en el desarrollo del algoritmo de control simultáneo de fuerza y posición. Se pueden encontrar numerosas aplicaciones para el caso de control de fuerza en superficies rígidas, aunque existen muchas otras aplicaciones en las que esta suposición no es válida, *i.e.* ambientes deformables. Para este tipo de ambientes se pueden utilizar otras técnicas de control de fuerza, como las basadas en impedancia y en complianza [Siciliano y Villani, 1999].

Por otra parte, se considera que el manipulador se encuentra inicialmente en contacto con la superficie (se supone que ha sido llevado a ella por un control de posición previo). Desde el punto de vista técnico, esto se puede llevar a cabo mediante algún algoritmo de control de posición encontrado en la literatura (por ejemplo en [Fu et al., 1987] y [Kelly, 2003]), o con el propuesto en este texto (negando la parte de control de fuerza), dado que se supone la superficie calibrada con respecto a la base del robot.

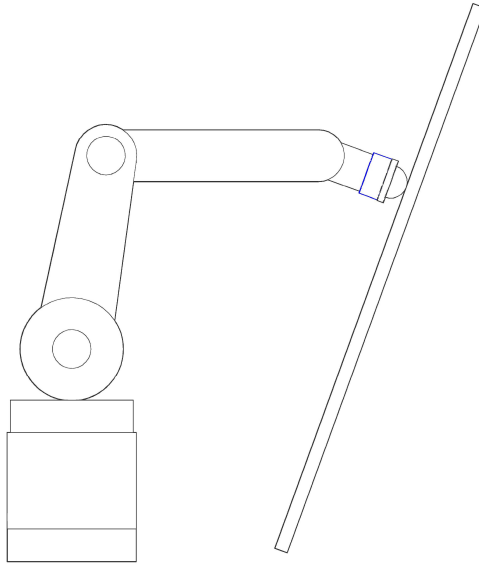


Figura 3.1: Robot en Contacto con la Superficie

Estas consideraciones sobre la superficie definen una restricción para el movimiento del robot, definida en coordenadas cartesianas como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

La restricción (3.1) difiere de la ecuación (2.14) en el sentido de que esta última está dada en términos de las coordenadas articulares, mientras que la primera está definida en términos de las coordenadas cartesianas de la superficie. En este caso,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$  es un vector que contiene la posición cartesiana del efector final, así como una parametrización de la orientación (e.g. ángulos de Euler), es decir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z & \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{bmatrix}^T. \quad (3.2)$$

Así mismo, el vector normal a la superficie definida por la restricción ahora estará dado por

$$\mathbf{J}_{\varphi x} \triangleq \nabla \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.3)$$

Se puede encontrar la relación entre  $\mathbf{J}_{\varphi}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi x}$ , utilizando la regla de la cadena

$$\mathbf{J}_\varphi = \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{J}(\mathbf{q}), \quad (3.4)$$

Debe notarse que la restricción (3.1) siempre puede definirse de tal manera que  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  tenga magnitud unitaria, lo que será de utilidad en el desarrollo subsecuente.

Por otra parte, se desea especificar la tarea a realizar por el manipulador en coordenadas cartesianas, es decir, la trayectoria que seguirá en la dirección de movimiento libre y la fuerza que aplicará sobre la superficie en la dirección de movimiento restringido. Para realizar el control de posición en el espacio cartesiano, por lo general se utiliza la cinemática inversa. En este trabajo se desea prescindir del cálculo de la cinemática inversa, por lo que se necesitará reescribir el modelo dinámico (2.15) en términos de las coordenadas cartesianas, como se desarrollará a continuación.

### 3.2. Modelo Dinámico en Coordenadas Cartesianas

Para reescribir el modelo dinámico de la ecuación (2.15) en coordenadas cartesianas, considérese primero la definición de  $\mathbf{x}$  dada en (3.2) y la definición del Jacobiano analítico (2.4) para obtener la relación

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ \frac{d^0\phi_n}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.5)$$

donde  ${}^0\mathbf{p}_n$  es el vector de posición del efector final con respecto a la base y  ${}^0\phi_n$  es una parametrización de la orientación del efector final (e.g. ángulos de Euler).

Si el robot no pasa por ninguna singularidad, el Jacobiano es de rango completo y puede invertirse para obtener

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}. \quad (3.6)$$

Por lo tanto, en este trabajo se asumirá que esta relación siempre se cumple mediante la siguiente suposición:

**Suposición 3.1.** *El robot no pasa por ninguna singularidad.*

△

A continuación, se deriva (2.4) con respecto del tiempo para obtener



$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}, \quad (3.7)$$

de la que se puede despejar  $\ddot{\mathbf{q}}$  como sigue

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.4) y la ecuación anterior en el modelo (2.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} = & \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\lambda} - \\ & \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\left\{ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_p - \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si se definen

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{N} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_p - \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.11)$$

se puede reescribir (3.9) como

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{N}. \quad (3.12)$$

### 3.3. Principio de Ortogonalización

El *principio de ortogonalización* para robots manipuladores en contacto con una superficie sobre la que se ejerce una fuerza se basa en la observación física de que la fuerza resultante aplicada por el manipulador está sobre la normal al plano tangente al punto de contacto del robot con dicha superficie y el movimiento del robot está contenido en dicho plano tangente. Este principio fue propuesto por Arimoto en [Arimoto et al., 1993b] y ha sido utilizado en diversos esquemas de control simultáneo de fuerza y posición (por ejemplo [Arimoto et al., 1993a], [Cheah et al., 2003], [Dean-León et al., 2006], [Gudiño-Lau y Arteaga, 2005]).

Para obtener la descomposición del espacio cartesiano en los subespacios de movimiento libre y movimiento restringido, se utilizarán las matrices de proyección  $\mathbf{P}_x$  y  $\mathbf{Q}_x$ . La primera de ellas mapea cualquier vector en el espacio cartesiano en el subespacio normal al plano tangente a la superficie en el punto de contacto y está dada por

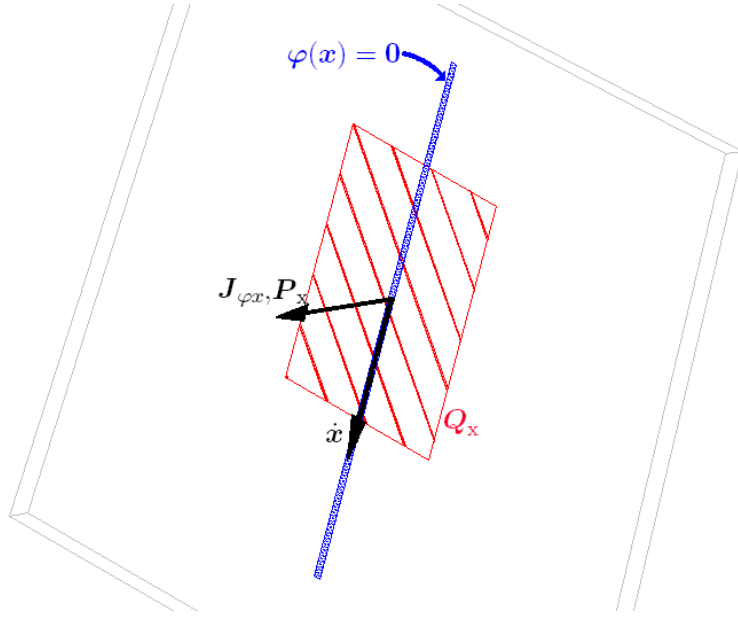


Figura 3.2: Separación del Espacio Cartesiano por el Principio de Ortogonalización.

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{J}_{\varphi x}^+ \mathbf{J}_{\varphi x}, \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  está definida por (3.3) y  $\mathbf{J}_{\varphi x}^+ \triangleq \mathbf{J}_{\varphi x}^T (\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{J}_{\varphi x}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la Pseudoinversa de Penrose.

Por otra parte la matriz  $\mathbf{Q}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mapea un vector en el espacio cartesiano al plano tangente a la superficie en el punto de contacto y es utilizado como el espacio de movimiento libre del robot. Esta matriz de proyección está definida por

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \triangleq (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}_x(\mathbf{x})) \quad (3.14)$$

y satisface la siguiente condición de rango

$$\text{rank}(\mathbf{Q}_x) = n - m. \quad (3.15)$$

Además, estas dos matrices de proyección son ortogonales, *i. e.*

$$\mathbf{Q}_x \mathbf{P}_x = \mathbf{O} \quad (3.16)$$

y también se cumple que  $\mathbf{Q}_x \mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_x$  y  $\mathbf{P}_x \mathbf{P}_x = \mathbf{P}_x$ , dado que la proyección de un vector que ya ha sido proyectado resulta en el mismo vector. Por esto, también se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{P}_x = \mathbf{J}_{\varphi x}. \quad (3.17)$$

Por último, dada la propiedad de ortogonalidad (3.16) y el hecho de que  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  siempre tenga la misma dirección que  $\mathbf{P}_x$ , se satisface

$$\mathbf{Q}_x \mathbf{J}_{\varphi x}^T = \mathbf{O} \quad (3.18)$$

y

$$\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{Q}_x = \mathbf{O}. \quad (3.19)$$

Considerando lo anterior, se puede puntualizar la siguiente propiedad

**Propiedad 3.1.** *El vector  $\dot{\mathbf{x}}$  puede ser escrito como*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}. \quad (3.20)$$

△

Nótese que  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \neq \mathbf{I}$ . La igualdad (3.20) proviene de que, si se deriva la ecuación (3.1) se obtiene

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}_{\varphi x} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

### 3.4. Control de Posición y Fuerza de Robots Mediante Observadores GPI

Para lograr el control simultáneo de fuerza y posición, el primer objetivo será separar la entrada de control, de modo que se tengan dos entradas independientes, una para el control en movimiento no restringido (posición) y otra para el control en movimiento restringido (fuerza), de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_u + \boldsymbol{\tau}_c, \quad (3.22)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_u \in \mathbb{R}^n$  será la entrada de control para la parte de movimiento no restringido y  $\boldsymbol{\tau}_c \in \mathbb{R}^n$  la respectiva entrada de control para la parte de movimiento restringido.

Para diseñar la parte de movimiento no restringido, se sustituye (3.22) en el modelo dinámico en coordenadas cartesianas (3.12), obteniendo

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \{ \boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N} \}. \quad (3.23)$$

Se define una trayectoria de referencia en el espacio cartesiano,  $\mathbf{x}_r$ , de tal manera que cumpla con la condición (3.1); esta referencia puede estar dada simplemente como

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_d \\ 0 \\ \boldsymbol{\phi}_d \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

A continuación, se define el error de seguimiento en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r. \quad (3.25)$$

Obteniendo la dinámica de este error

$$\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \{ \boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N} \} - \ddot{\mathbf{x}}_r. \quad (3.26)$$

Agrupando los términos desconocidos en una sola señal

$$\mathbf{z}_{u1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \{ \boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N} \} - \ddot{\mathbf{x}}_r, \quad (3.27)$$

se puede reescribir (3.26) como

$$\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{z}_{u1}. \quad (3.28)$$

El término de perturbación a la entrada  $\mathbf{z}_{u1}$  puede ser aproximado por un modelo interno consistente en un vector de señales como las descritas en la Sección 2.5, asumiendo que cumple con las Suposiciones 2.1, 2.2 y 2.3. Por lo tanto, puede aplicarse directamente el Teorema 2.1, dada la similitud de la ecuación (3.28) con la (2.22).

Por otra parte, para el movimiento restringido (fuerza) se tiene, derivando (3.20) con respecto al tiempo

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}}_x\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}_x\ddot{\mathbf{x}}, \quad (3.29)$$

Utilizando (3.14), se puede reescribir esta ecuación como

$$\dot{\mathbf{Q}}_x\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{Q}_x)\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_x\ddot{\mathbf{x}}. \quad (3.30)$$

Sustituyendo la dinámica en coordenadas cartesianas (3.12) y la separación de la entrada de control (3.22), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x \ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}}_x \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{P}_x \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{P}_x \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_c \\ &+ \mathbf{P}_x \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{P}_x \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Multiplicando esta ecuación por  $\mathbf{J}_{\varphi_x}$  y tomando en cuenta (3.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_x} \dot{\mathbf{Q}}_x \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_c \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

La entrada de control  $\boldsymbol{\tau}_c$  está asociada con el control de la fuerza aplicada por el manipulador sobre la superficie,  $\boldsymbol{\lambda}$ , por lo que resulta natural definir esta entrada como

$$\boldsymbol{\tau}_c = -\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\boldsymbol{\lambda}_d + \boldsymbol{\tau}_F), \quad (3.33)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}_d$  es la fuerza aplicada deseada y  $\boldsymbol{\tau}_F$  se utilizará como variable de diseño. De esta forma se pueden agrupar términos como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_x} \dot{\mathbf{Q}}_x \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\tau}_F) \\ &- \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Si se define el error para el algoritmo de control de fuerza como

$$\dot{\mathbf{e}}_f = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d \quad (3.35)$$

$$\mathbf{e}_f = \int_0^t (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d) d\vartheta, \quad (3.36)$$

y también se define de (3.10) y (3.34)

$$\mathbf{A}_F \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T = \mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T, \quad (3.37)$$

se puede reescribir la ecuación (3.34) como

$$\dot{\mathbf{e}}_f = \boldsymbol{\tau}_F + \mathbf{z}_{f1}, \quad (3.38)$$

donde

$$\mathbf{z}_{f1} \triangleq -\mathbf{A}_F^{-1} \left( \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\tau}_u - \mathbf{N}) - \mathbf{J}_{\varphi x} \dot{\mathbf{Q}}_x \dot{\mathbf{x}} \right). \quad (3.39)$$

Nótese que  $\mathbf{A}_F$  es invertible, dado que  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  lo es,  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  siempre es de rango completo y, por la Suposición 3.1,  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  también es de rango completo.

La dinámica del error (3.38) puede utilizarse para diseñar un sistema cuyo origen sea BIBO estable en una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del espacio de error,  $\mathbf{e}_f$ , aplicando el Teorema 2.1. Sin embargo, en este caso se tiene un sistema lineal de primer orden en lugar de uno de segundo orden, por lo que ahora en vez de los parámetros de diseño,  $\boldsymbol{\zeta}$  y  $\boldsymbol{\omega}_n$ , se tiene un sólo parámetro,  $\Lambda_F$ , para especificar el tipo de respuesta deseada para el seguimiento de fuerza.

Una vez definidas las dinámicas de los errores de seguimiento de posición (3.28) y de fuerza (3.38) en función de las entradas de control,  $\boldsymbol{\tau}_u$  y  $\boldsymbol{\tau}_c$ , y de las señales de perturbación,  $\mathbf{z}_{u1}$  y  $\mathbf{z}_{f1}$ , se procederá a diseñar el correspondiente algoritmo de control basado en los Observadores GPI.

Primero, para la parte no restringida, se tiene el siguiente esquema de control-observador propuesto

$$\boldsymbol{\tau}_u = \mathbf{M}(\mathbf{q}) [-2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\omega}_n \hat{\mathbf{e}}_2 - \boldsymbol{\omega}_n^2 \mathbf{e} - \hat{\mathbf{z}}_{u1}] \quad (3.40)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\mathbf{e}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_{u(r+1)} \tilde{\mathbf{e}} \quad (3.41)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_2 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u + \hat{\mathbf{z}}_{u1} + \boldsymbol{\lambda}_{ur} \tilde{\mathbf{e}} \quad (3.42)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u1} = \hat{\mathbf{z}}_{u2} + \boldsymbol{\lambda}_{u(r-1)} \tilde{\mathbf{e}} \quad (3.43)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u2} = \hat{\mathbf{z}}_{u3} + \boldsymbol{\lambda}_{u(r-2)} \tilde{\mathbf{e}} \quad (3.44)$$

⋮

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u(r-1)} = \hat{\mathbf{z}}_{ur} + \boldsymbol{\lambda}_{u1} \tilde{\mathbf{e}} \quad (3.45)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{ur} = \boldsymbol{\lambda}_{u0} \tilde{\mathbf{e}}, \quad (3.46)$$

donde  $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\omega}_n, \boldsymbol{\lambda}_{u0}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{u(r+1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas y se define el error de estimación como

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}. \quad (3.47)$$

De acuerdo con el Teorema 2.1, se puede demostrar que el error de estimación está acotado finalmente por una región arbitrariamente pequeña alrededor del origen del espacio de fase del error de estimación,  $(\tilde{\mathbf{e}}, \dot{\tilde{\mathbf{e}}})$ , con  $\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \dot{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{e}}_2$ , si se supone que las perturbaciones pueden ser modeladas por un vector de polinomios,  $\mathbf{z}_u(t)$ , que cumple con las Suposiciones 2.1, 2.2 y 2.3.

De la misma manera, para la parte de movimiento restringido, se propone el siguiente esquema

$$\boldsymbol{\tau}_F = -\Lambda_F \hat{\mathbf{e}}_f - \hat{\mathbf{z}}_{f1} \quad (3.48)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_f = \boldsymbol{\tau}_F + \hat{\mathbf{z}}_{f1} + \boldsymbol{\lambda}_{fp} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (3.49)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{f1} = \hat{\mathbf{z}}_{f2} + \boldsymbol{\lambda}_{f(p-1)} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (3.50)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{f2} = \hat{\mathbf{z}}_{f3} + \boldsymbol{\lambda}_{f(p-2)} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (3.51)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{f(p-1)} = \hat{\mathbf{z}}_{fp} + \boldsymbol{\lambda}_{f1} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (3.52)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{fp} = \boldsymbol{\lambda}_{f0} \tilde{\mathbf{e}}_f, \quad (3.53)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}_{f0}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{fp} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\Lambda_F \in \mathbb{R}$  es un parámetro de diseño. Utilizando de nuevo el Teorema 2.1, se puede demostrar que si  $\mathbf{z}_f$  cumple con las suposiciones 2.1, 2.2 y 2.3 y los polos del observador lineal están suficientemente lejos a la izquierda en el plano complejo, entonces el sistema estará finalmente acotado por una pequeña región centrada en el origen del espacio de error de fuerza,  $\mathbf{e}_f$ .

### 3.5. Aplicación del Algoritmo Utilizando el Jacobiano Geométrico

El Jacobiano del robot  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  utilizado hasta ahora en los esquemas de control mediante observadores GPI es el llamado **Jacobiano analítico** del manipulador, que se calcula directamente cuando se deriva el vector de la posición cartesiana,  $\mathbf{x}$ , con respecto al vector de configuración del robot,  $\mathbf{q}$ . La ventaja de utilizar este Jacobiano es que se puede realizar tanto el control de fuerza (en una dirección lineal del espacio cartesiano), como el control de torque (componente de fuerza angular).

Si se desea utilizar **Jacobiano geométrico** en lugar del Jacobian analítico (por facilidad de cómputo, conocimiento del mismo, etc.), éste puede ser utilizado con el esquema propuesto si no se desea controlar el torque, sino únicamente la fuerza del manipulador sobre una superficie. El Jacobiano geométrico se denota por  $\mathbf{J}_g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  y está definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_g(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.54)$$

donde  ${}^0\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^v$  es la velocidad angular del efector final y  ${}^0\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^{(n-v)}$  es la posición del efector final. Por lo tanto, a diferencia de (3.2), en este caso  $\mathbf{x}$  está especificado como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{p}_n \\ {}^0\boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{p}_n \\ \int_0^t {}^0\boldsymbol{\omega}_n d\vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Cabe aclarar que  ${}^0\boldsymbol{\phi}_n$  no tiene ningún significado físico, por lo que la restricción (3.1) puede ser reescrita como

$$\boldsymbol{\varphi}({}^0\mathbf{p}_n) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.56)$$

donde se hace explícito que  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  sólo depende de la parte superior de  $\mathbf{x}$ . Al utilizar el Jacobiano geométrico se necesita especificar la orientación mediante alguna parametrización. La mejor opción en este caso es utilizar los *cuaterniones unitarios*, como se muestra en [Arteaga-Pérez y Rivera-Dueñas, 2007]. Primero se define la referencia de velocidad

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_d \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_d - k_e {}^0\mathbf{R}_d {}^d\boldsymbol{\epsilon}_n \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

donde  $k_e$  es una constante escalar positiva,  ${}^0\mathbf{p}_d$  es la posición deseada del efector final,  ${}^0\boldsymbol{\omega}_d \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular deseada y  ${}^0\mathbf{R}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación deseada (que especifica la orientación deseada).  ${}^d\boldsymbol{\epsilon}_n \in \mathbb{R}^3$  es la parte vectorial del cuaternión unitario relacionado con la matriz de rotación dada por

$${}^d\mathbf{R}_n = {}^0\mathbf{R}_d^T {}^0\mathbf{R}_n, \quad (3.58)$$

donde  ${}^0\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación entre el sistema coordenado asignado al efector final y el sistema coordenado de la base del robot.  $\mathbf{x}_r$  se obtiene mediante

$$\mathbf{x}_r = \int_0^t \dot{\mathbf{x}}_r d\vartheta. \quad (3.59)$$



Nótese que la posición deseada  ${}^0\mathbf{p}_d$  debe ser elegida tal que se satisfaga (3.56). También la orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  debe ser dada de tal manera que sea perpendicular a la superficie descrita por  $\varphi({}^0\mathbf{p}_d) = \mathbf{0}$ .

Entonces, de acuerdo con el Teorema 2.1, se puede garantizar que los errores de estimación y seguimiento tenderán a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen, esto es,  $\tilde{\mathbf{e}} \approx \mathbf{0}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{e}}} \approx \mathbf{0}$ . No es necesario un análisis extra para la parte de posición, puesto que se define igual cuando se usa cualquiera de los dos Jacobianos. En el caso de orientación se puede llevar a cabo el análisis de estabilidad como se hace en [Siciliano y Villani, 1999] para concluir  ${}^0\mathbf{R}_n \rightarrow {}^0\mathbf{R}_d$  y  ${}^0\Delta\boldsymbol{\omega} = {}^0\boldsymbol{\omega}_n - {}^0\boldsymbol{\omega}_n \approx \mathbf{0}$ .

## Capítulo 4

# Control de Posición y Fuerza con Retroalimentación Visual

### 4.1. Introducción

Como se ha mencionado anteriormente, la incorporación de un sistema de visión en el control de posición de robots, conocida también como *visual servoing*, mejora el desempeño de éstos sobre todo en ambientes no estructurados. Por lo tanto, existen grandes razones para extender el controlador de fuerza y posición desarrollado en el Capítulo 3 para incorporar la información del sistema de visión con el objetivo de mejorar el desempeño general del robot manipulador en este tipo de escenarios.

Para desarrollar la adaptación del algoritmo con la incorporación de la retroalimentación visual, se considerará primero el modelo de un robot manipulador en contacto con una superficie descrito por (2.15). Esta superficie por lo general se define en términos de una restricción en coordenadas cartesianas  $\boldsymbol{x}$  como en (3.1). Esta restricción cumple además con (3.21), con  $\boldsymbol{J}_{\varphi\boldsymbol{x}}$  definido en (3.3).

Por otra parte, para modelar la cámara, se utilizará la Proyección de Perspectiva definida en (2.17), cuya cinemática diferencial está dada por (2.18).

Se asume que la cámara puede ver siempre un punto conocido sobre el efector final (no hay oclusiones) y algunos parámetros que servirán para identificar la superficie como se muestra en la Figura 4.1. En este trabajo se supone que el sistema de visión identifica la trayectoria a seguir sobre la superficie de restricción  $\varphi$ , descrita en coordenadas cartesianas

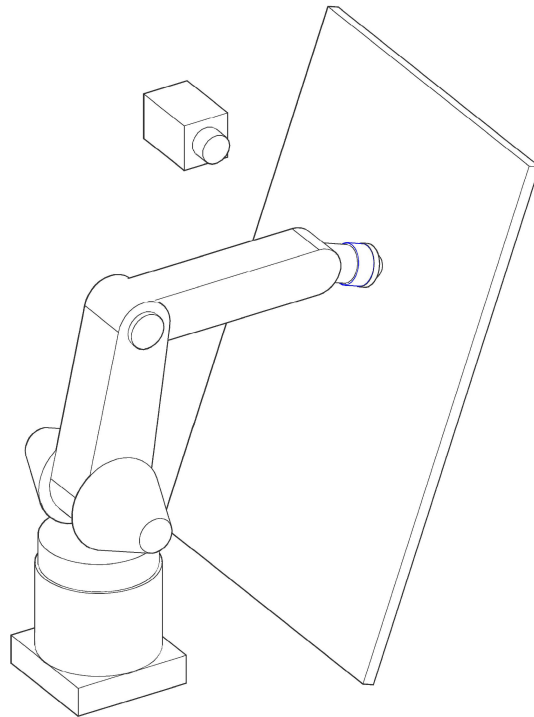


Figura 4.1: Robot planar en contacto con la superficie y cámara de video.

por (3.1), cuya ecuación de restricción en coordenadas de imagen está dada por

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\varphi \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad (4.2)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$  se define de tal forma que  $\mathbf{J}_{\varphi \mathbf{y}} \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$  tenga norma unitaria. Si se sustituye la cinemática visual diferencial (2.18) en esta ecuación se obtiene

$$\alpha_\lambda \mathbf{J}_{\varphi \mathbf{y}} \mathbf{R}_\phi \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Dividiendo ambos lados entre  $\alpha_\lambda$

$$\mathbf{J}_{\varphi \mathbf{y}} \mathbf{R}_\phi \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Comparando esta ecuación con (3.21) se obtiene una relación entre  $\mathbf{J}_{\varphi_x}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_y}$  como sigue

$$\mathbf{J}_{\varphi_x} = \mathbf{J}_{\varphi_y} \mathbf{R}_\phi. \quad (4.5)$$

## 4.2. Modelado Matemático en Coordenadas de Imagen

Para utilizar el algoritmo de control visual, se debe de reescribir el modelo del robot manipulador en términos de las coordenadas de imagen  $\mathbf{y}$ . Para ello, se deriva con respecto al tiempo la cinemática visual diferencial (2.18), obteniendo

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\phi \left( \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right). \quad (4.6)$$

Despejando  $\ddot{\mathbf{q}}$  de esta última ecuación

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.7)$$

Sustituyendo en el modelo del robot en contacto con la superficie (2.15), se tiene

$$\frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}_p + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.8)$$

Si se definen

$$\mathbf{M}_v(\mathbf{q}) \triangleq \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \quad (4.9)$$

y  $\mathbf{N}$  como en (3.11), se puede reescribir este modelo en términos de las coordenadas de imagen  $\mathbf{y}$  como

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N} + \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.10)$$

El modelo en coordenadas de imagen de la ecuación (4.10) es importante para el desarrollo siguiente porque permite, además de diseñar la tarea del robot en coordenadas de imagen, realizar el control del mismo sin recurrir a la cinemática inversa, ni al mapeo visual inverso. Esto tiene algunas ventajas como son la evasión intrínseca de las singularidades y menor tiempo de procesamiento al momento de aplicar el controlador en el sistema físico en tiempo real.

### 4.3. Principio de Ortogonalización Visual

En el Capítulo 3 se habló del principio de ortogonalización, que se presenta en el caso de robots en contacto con una superficie sobre la que ejercen cierta fuerza y sobre la que realizan una trayectoria en el espacio cartesiano. Este principio se puede extender para el espacio de imagen, dado que la propiedad física subsiste, porque en el subespacio donde existe movimiento en coordenadas de imagen el robot no ejerce fuerza y en el subespacio donde ejerce fuerza sobre la superficie no hay movimiento del punto sobre el efector final en coordenadas de imagen. Esto se puede deducir analíticamente, dado que el mapeo entre la velocidad cartesiana  $\dot{\mathbf{x}}$  y el flujo óptico  $\dot{\mathbf{y}}$  es estático para la configuración de cámara fija propuesta en este trabajo.

Por consiguiente, se puede descomponer el espacio de imagen en dos subespacios. Para esto se utilizan dos matrices de proyección,  $\mathbf{P}_y(\mathbf{y})$  y  $\mathbf{Q}_y(\mathbf{y})$ . La primera de ellas mapea cualquier vector en el espacio de imagen en el subespacio normal al plano tangente que se forma en el punto de contacto de la punta del robot con la superficie y se define como

$$\mathbf{P}_y(\mathbf{y}) = \mathbf{P}_y \triangleq \mathbf{J}_{\varphi y}^T (\mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{J}_{\varphi y}^T)^{-1} \mathbf{J}_{\varphi y}. \quad (4.11)$$

Así mismo, la matriz de proyección definida por

$$\mathbf{Q}_y(\mathbf{y}) = \mathbf{Q}_y \triangleq (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}_y), \quad (4.12)$$

mapea cualquier vector en el espacio de imagen al subespacio tangente a la superficie en el punto de contacto del robot con ésta. Estas matrices de proyección son ortogonales, *i. e.*

$$\mathbf{Q}_y \mathbf{P}_y = \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

además, cumplen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y \quad (4.14)$$

$$\mathbf{P}_y \mathbf{P}_y = \mathbf{P}_y \quad (4.15)$$

$$\mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{P}_y = \mathbf{J}_{\varphi y}. \quad (4.16)$$

Lo anterior lleva a definir el principio de ortogonalización visual, análogo al principio de ortogonalización definido por la Propiedad 3.1, como sigue

**Propiedad de Ortogonalización Visual.** El vector  $\dot{\mathbf{y}}$  tiene la siguiente propiedad

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_y(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}_y(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_y(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}}. \quad (4.17)$$

△

La última igualdad de (4.17) se debe a que, de (4.2) y (4.11), se tiene

$$\mathbf{Q}_y(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{J}_{\varphi y}^T (\mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{J}_{\varphi y}^T)^{-1} \mathbf{J}_{\varphi y} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_y(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}}. \quad (4.18)$$

#### 4.4. Control de Posición y Fuerza de Robots Mediante Observadores GPI con Retroalimentación Visual

Se desea diseñar un esquema de control que separe la entrada en dos partes: una para el movimiento restringido y otra para el movimiento no restringido del robot, de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_u + \boldsymbol{\tau}_c. \quad (4.19)$$

Para diseñar la parte del movimiento restringido, se deriva (4.17) con respecto del tiempo

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_y \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}}. \quad (4.20)$$

Agrupando términos

$$(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{Q}_y) \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}_y \ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}}. \quad (4.21)$$

Sustituyendo (4.10) en esta última ecuación

$$\dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N} + \mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.22)$$

Al examinar la ecuación (4.22), se puede notar que la elección natural de  $\boldsymbol{\tau}_c$  sería

$$\boldsymbol{\tau}_c = -\mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\lambda}_d + \boldsymbol{\tau}_f), \quad (4.23)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}_d$  es la fuerza deseada y  $\boldsymbol{\tau}_f$  es la parte a diseñar de esta entrada. Sin embargo, se debe de expresar  $\boldsymbol{\tau}_c$  en términos de la restricción conocida en coordenadas de imagen por lo que, utilizando las ecuaciones (3.4) y (4.5), se obtiene

$$\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi x}^T = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}_\phi\mathbf{J}_{\varphi y}^T, \quad (4.24)$$

dado que  $\mathbf{R}_\phi^T = \mathbf{R}_\phi$ . Por lo tanto, la parte restringida de la entrada queda como

$$\boldsymbol{\tau}_c = -\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}_\phi\mathbf{J}_{\varphi y}^T (\boldsymbol{\lambda}_d + \boldsymbol{\tau}_f) \quad (4.25)$$

y el modelo en términos de la restricción en coordenadas de imagen, como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}} &= -\mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N} + \mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u \\ &+ \mathbf{P}_y \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \mathbf{J}_{\varphi y}^T \boldsymbol{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Si se multiplica esta última ecuación por  $\mathbf{J}_{\varphi y}$  y utilizando (4.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi y} \dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}} &= -\mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N} + \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \mathbf{J}_{\varphi y}^T \boldsymbol{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Sustituyendo (4.25) en esta última ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi y} \dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}} &= -\mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N} + \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \mathbf{J}_{\varphi y}^T (\boldsymbol{\lambda}_d + \boldsymbol{\tau}_f). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si se define el error de fuerza como

$$\dot{\mathbf{e}}_f = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d \quad (4.29)$$

$$\mathbf{e}_f = \int_0^t (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d) d\vartheta \quad (4.30)$$

y

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \mathbf{J}_{\varphi y}^T, \quad (4.31)$$

entonces se tiene

$$\dot{e}_f - \boldsymbol{\tau}_f = \mathbf{A}_F^{-1} \left\{ \mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})(-\boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{N}) + \mathbf{J}_{\varphi y} \dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}} \right\}. \quad (4.32)$$

Nótese que  $\mathbf{A}_F$  es siempre invertible, dado que el término

$$\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\phi^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi, \quad (4.33)$$

lo es, puesto que  $\mathbf{R}_\phi$  es invertible,  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  es una matriz diagonal, positiva definida,  $\alpha_\lambda$  es positiva y por la Suposición 3.1, se asume que  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  también lo es. Por su parte, el término  $\mathbf{J}_{\varphi y}$  también es siempre invertible.

El término de la derecha en la ecuación (4.32) se considera desconocido y se utilizará un modelo interno en términos de un vector de polinomios y un término residual,  $z_{f1}$ , como el descrito en la Sección 2.5, cumpliendo además con las suposiciones 2.1, 2.2 y 2.3. De esta forma, se puede reescribir la ecuación (4.32) como

$$\dot{e}_f = \boldsymbol{\tau}_f + z_{f1}. \quad (4.34)$$

Por otra parte, para el movimiento no restringido se tiene, de (4.10)

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N}). \quad (4.35)$$

Definiendo el error de seguimiento

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{y} - \mathbf{y}_r \quad (4.36)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_y = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r \quad (4.37)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_y = \ddot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{y}}_r, \quad (4.38)$$

donde  $\mathbf{y}_r$  es la señal de referencia a seguir, en coordenadas de imagen. De la definición de  $\ddot{\mathbf{e}}_y$  y la ecuación (4.35) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{e}}_y = \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N}) - \ddot{\mathbf{y}}_r. \quad (4.39)$$

El segundo término del lado derecho de esta última ecuación se considera desconocido, por lo que se propone utilizar como modelo interno un vector de polinomios en el tiempo más un término residual,  $z_{u1}$ , como el descrito en la Sección 2.5, asumiendo las Suposiciones 2.1, 2.2 y 2.3. De esta forma, se puede reescribir la ecuación (4.39) como



$$\ddot{\mathbf{e}}_y = \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{z}_{u1}. \quad (4.40)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones (4.32) y (4.40) se puede aplicar el Teorema 2.1. El principio de ortogonalización visual permite diseñar separadamente la parte de control en movimiento libre (posición) de la parte de control en movimiento restringido (fuerza). Debe notarse que para aplicar el esquema de control que se utiliza en este teorema, es necesario conocer la matriz que multiplica a la entrada de control  $\boldsymbol{\tau}_u$  en (4.40), en este caso  $\mathbf{M}_v$ , definida en (4.9).

Para la parte de movimiento libre, la aplicación del Teorema 2.1 lleva al siguiente esquema controlador-observador

$$\boldsymbol{\tau}_u = \mathbf{M}_v(\mathbf{q}) [-2\zeta\omega_n\hat{\mathbf{e}}_2 - \omega_n^2\mathbf{e}_y - \hat{\mathbf{z}}_{u1}] \quad (4.41)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_y = \hat{\mathbf{e}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_{u(r+1)}\tilde{\mathbf{e}}_y \quad (4.42)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_2 = \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \hat{\mathbf{z}}_{u1} + \boldsymbol{\lambda}_{ur}\tilde{\mathbf{e}}_y \quad (4.43)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u1} = \hat{\mathbf{z}}_{u2} + \boldsymbol{\lambda}_{u(r-1)}\tilde{\mathbf{e}}_y \quad (4.44)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u2} = \hat{\mathbf{z}}_{u3} + \boldsymbol{\lambda}_{u(r-2)}\tilde{\mathbf{e}}_y \quad (4.45)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u(r-1)} = \hat{\mathbf{z}}_{ur} + \boldsymbol{\lambda}_{u1}\tilde{\mathbf{e}}_y \quad (4.46)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{ur} = \boldsymbol{\lambda}_{u0}\tilde{\mathbf{e}}_y, \quad (4.47)$$

donde  $\zeta, \omega_n, \boldsymbol{\lambda}_{u0}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{u(r+1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas y se define el error de estimación como

$$\tilde{\mathbf{e}}_y = \mathbf{e}_y - \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (4.48)$$

Se puede demostrar, utilizando el Teorema 2.1, que el esquema de control-observador propuesto llevará al sistema a una vecindad arbitrariamente pequeña centrada en el origen del espacio de error de estimación,  $(\tilde{\mathbf{e}}_y, \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_y)$ , con  $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_y \triangleq \dot{\mathbf{e}}_y - \dot{\hat{\mathbf{e}}}_2$ . Una ventaja más de este esquema basado en observadores GPI, es que además de estimarse el modelo interno escogido para la perturbación a la entrada,  $\mathbf{z}_{u1}$ , se estima el error de velocidad en el espacio de imagen, del que puede extraerse el flujo óptico  $\dot{\mathbf{y}}$ , sin necesidad de medirlo directamente o utilizar un estimador basado en una aproximación de la derivada.

Por otra parte, se propone el siguiente esquema para el control de movimiento restringido

$$\boldsymbol{\tau}_F = -\Lambda_F \hat{\mathbf{e}}_f - \hat{\mathbf{z}}_{f1} \quad (4.49)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_f = \boldsymbol{\tau}_F + \hat{\mathbf{z}}_{f1} + \boldsymbol{\lambda}_{fp} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (4.50)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{f1} = \hat{\mathbf{z}}_{f2} + \boldsymbol{\lambda}_{f(p-1)} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (4.51)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{f2} = \hat{\mathbf{z}}_{f3} + \boldsymbol{\lambda}_{f(p-2)} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (4.52)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{f(p-1)} = \hat{\mathbf{z}}_{fp} + \boldsymbol{\lambda}_{f1} \tilde{\mathbf{e}}_f \quad (4.53)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{fp} = \boldsymbol{\lambda}_{f0} \tilde{\mathbf{e}}_f, \quad (4.54)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}_{f0}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{fp} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas.

Utilizando de nuevo el Teorema 2.1 se puede demostrar que el esquema propuesto lleva al sistema a una vecindad arbitrariamente pequeña centrada en el origen del espacio de error de fuerza  $\mathbf{e}_f$ , siempre que  $\mathbf{z}_f$  cumpla con las Suposiciones 2.1, 2.2 y 2.3 y que los polos del observador se localicen suficientemente lejos en el semiplano izquierdo del plano complejo. En este caso el parámetro  $\Lambda_F$  sirve para diseñar la respuesta del sistema de primer orden correspondiente a la parte lineal del sistema, que surge cuando se estima perfectamente  $\mathbf{z}_{f1}$  y se cancela en (4.34) mediante la acción de control (4.49).

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1. Control de Posición y Fuerza

#### 5.1.1. Resultados Experimentales

En esta sección se presenta la validación experimental de la teoría desarrollada en el Capítulo 3. Para esto se utilizó el robot de *CRS Robotics* modelo *A465* que se muestra en la Figura 5.1. En este caso sólo se utilizaron tres grados de libertad, que son las articulaciones 2, 3 y 5, renombradas como 1, 2 y 3 para mayor claridad.

Este robot cuenta con encoders ópticos de cuadratura para medir la posición angular de las articulaciones (todas de revolución). Estas señales se procesan en un sistema de adquisición de datos basado en el *CompactRIO* de *National Instruments*, el mismo que manda la información a una PC, donde se lleva a cabo el procesamiento del algoritmo de control.

Se equipó a este manipulador con el sensor de fuerza JR3 sobre el último eslabón, justo antes del efector final. Este sensor manda una señal a la PC con información de seis ejes de fuerza (tres para fuerza traslacional y tres para torque), de los cuales sólo se utilizará la fuerza medida a lo largo del eje  $z$ , que debe de encontrarse alineada con la dirección normal a la superficie en el punto de contacto. Para esto, se colocó un balín de acero inoxidable en la punta del robot con la finalidad de obtener un contacto puntual y al mismo tiempo disminuir la fricción en la dirección de movimiento de éste sobre la superficie. Además, el hecho de contar con tres articulaciones permitió definir la orientación en el plano para que el último eslabón siempre se encuentre perpendicular a la superficie planar durante el desarrollo del



Figura 5.1: Robot CRS Robotics A465 con superficie rígida plana.

experimento.

Para aplicar el algoritmo mencionado es necesario conocer la matriz de inercia del robot. Esta matriz de  $3 \times 3$  es de la forma

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
h_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos(\theta_2) + l_{c2}^2) \\
&+ m_3 (l_1^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) + 2 l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2^2 + 2 l_2 l_{c3} \cos(\theta_3) + l_{c3}^2) + I_1 + I_2 + I_3 \\
h_{12} &= h_{21} = m_2 (l_1 l_{c2} \cos(\theta_2) + l_{c2}^2) \\
&+ m_3 (l_1 l_2 \cos(\theta_2) + l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2^2 + 2 l_2 l_{c3} \cos(\theta_3) + l_{c3}^2) + I_2 + I_3 \\
h_{13} &= h_{31} = m_3 (l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_{c3} \cos(\theta_3) + l_{c3}^2) + I_3 \\
h_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 (l_2^2 + 2 l_2 l_{c3} \cos(\theta_3) + l_{c3}^2) + I_2 + I_3 \\
h_{23} &= h_{32} = m_3 (l_2 l_{c3} \cos(\theta_3) + l_{c3}^2) + I_3 \\
h_{33} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3.
\end{aligned}$$

Estos parámetros, para este robot en particular, han sido reportados en [Gudiño-Lau y Arteaga, 2005] y son los siguientes:

- Masas de los eslabones:

$$m_1 = 28.5[\text{kg}], \quad m_2 = 16.6[\text{kg}] \quad \text{y} \quad m_3 = 1.0[\text{kg}].$$

- Longitudes de los eslabones:

$$l_1 = 0.33[\text{m}], \quad l_2 = 0.35[\text{m}] \quad \text{y} \quad l_3 = 0.13[\text{m}].$$

- Distancias al centro de masa:

$$l_{c1} = 0.14[\text{m}], \quad l_{c2} = 0.14[\text{m}] \quad \text{y} \quad l_{c3} = 0.07[\text{m}].$$

- Momentos de inercia de los eslabones:

$$I_1 = 0.85[\text{Kg} \cdot \text{m}^2], \quad I_2 = 0.70[\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad \text{y} \quad I_3 = 0.18[\text{Kg} \cdot \text{m}^2].$$

Además, como la señal de referencia para la entrada de control se da en Volts [V] y no en Newton-metros [Nm] directamente, en este caso se tuvo que incluir la dinámica de los actuadores como se expuso en la Sección 2.3.3. Para la finalidad práctica, se llega a que la señal en voltaje y la señal en torque están relacionadas por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_k \mathbf{v},$$

donde

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \frac{K_{a1}}{R_{a1}r_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{a2}}{R_{a2}r_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{a3}}{R_{a3}r_3} \end{bmatrix}.$$

Los valores de los elementos de estas matrices también están reportados en [Gudiño-Lau y Arteaga, 2005] para este robot y son los siguientes:

- Relaciones de reducción de los engranes en cada articulación

$$r_1 = 100, \quad r_2 = 100 \quad \text{y} \quad r_3 = 100.$$

- Constantes de par del motor

$$K_{a1} = 0.1876896[\text{Nm/A}], \quad K_{a2} = 0.1876896[\text{Nm/A}] \quad \text{y} \quad K_{a3} = 0.053[\text{Nm/A}].$$

- Resistencias de armadura

$$R_{a1} = 0.84[\Omega], \quad R_{a2} = 0.84[\Omega] \quad \text{y} \quad R_{a3} = 2.7[\Omega].$$

La superficie es el plano inclinado rígido (acero inoxidable) mostrado en la Figura 5.1, perpendicular al plano de movimiento del robot. Esta superficie se describe mediante la restricción

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{y}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} - \frac{\tan \alpha (x - l)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \phi = -20[^\circ], \quad (5.1)$$

con  $\alpha = 70[^\circ]$  y  $l = 0.399[\text{m}]$  y está normalizada con el objetivo de que  $\mathbf{J}_{\varphi x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}$  tenga magnitud unitaria.

El experimento consistió en llevar al robot de un punto inicial  $(x_d(0), y_d(0)) = (0.4948, 0.2631)[\text{m}]$  a un punto final  $(x_d(t_f), y_d(t_f)) = (0.4606, 0.1691)[\text{m}]$ , ambos sobre la superficie, en un tiempo de  $t_f = 12[\text{seg}]$  y, simultáneamente, seguir una trayectoria de fuerza dada por

$$\lambda_d = 50(1 - e^{-(1/1.8)t})[\text{N}]. \quad (5.2)$$

Para generar la trayectoria deseada de posición  $x_d$  se utilizó un polinomio de quinto orden en el tiempo como en [Spong et al., 2006], mientras que  $y_d$ , se calculó para que cumpliera con la restricción (5.1). La componente deseada de orientación se mantuvo en  $\phi_d = -20[^\circ]$  para todo tiempo  $t \in [0, t_F]$ . El tiempo de muestreo utilizado fue de  $T = 0.004[\text{seg}]$ .

Por el lado de los parámetros del algoritmo, para la parte de control de movimiento no restringido se utilizaron

$$\zeta = 0.9\mathbf{I} \quad \text{y} \quad \omega_n = 0.5\mathbf{I}$$

y los coeficientes del polinomio del observador con  $r = 2$  fueron elegidos como

$$\lambda_{u0} = 100000000\mathbf{I}, \quad \lambda_{u1} = 4000000\mathbf{I}, \quad \lambda_{u2} = 60000\mathbf{I} \quad \text{y} \quad \lambda_{u3} = 400\mathbf{I},$$

por lo que los polos del observador se escogieron en  $p_{u1} = p_{u2} = p_{u3} = p_{u4} = -100$ .

Por otra parte, para el movimiento restringido se eligió el parámetro de diseño

$$\Lambda_F = 27,$$

y además se eligieron los coeficientes del polinomio del observador con  $p = 3$  como

$$\lambda_{f0} = 0.1, \quad \lambda_{f1} = 3.001, \quad \lambda_{f2} = 30.03 \quad \text{y} \quad \lambda_{f3} = 100.3,$$

lo que equivale a los polos del observador en  $p_{f1} = p_{f2} = p_{f3} = -0.1, p_{f4} = -100$ .

En las Figuras 5.2, 5.3 y 5.2, se muestra el seguimiento de la trayectoria en las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $\phi$ , respectivamente. El error de seguimiento en estas tres coordenadas se muestra en las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7, donde puede apreciarse que el error después del transitorio, para las dos primeras coordenadas, es menor a  $1[\text{mm}]$ , lo que representa un buen resultado experimental. Por su parte, el seguimiento de la orientación siempre fue menor a  $0.5[^\circ]$  e incluso menor a  $0.1[^\circ]$  después de la etapa transitoria, lo que también significa un desempeño bastante bueno. En la Figura 5.8 se muestra el seguimiento de la trayectoria de posición en el plano de movimiento del robot.

Por otra parte, en la Figura 5.9 se muestra el seguimiento de la trayectoria de fuerza y en la Figura 5.10 se muestra el error de fuerza correspondiente. En dichas figuras se

ve que el seguimiento es un poco ruidoso, a pesar de que se ha filtrado la señal proveniente del sensor de fuerza. Sin embargo, dada la magnitud de la fuerza final (50)[N], se puede decir que el desempeño del método en este aspecto es aceptable, puesto que el error se mantiene abajo del 10% = 5[N] después del transitorio.

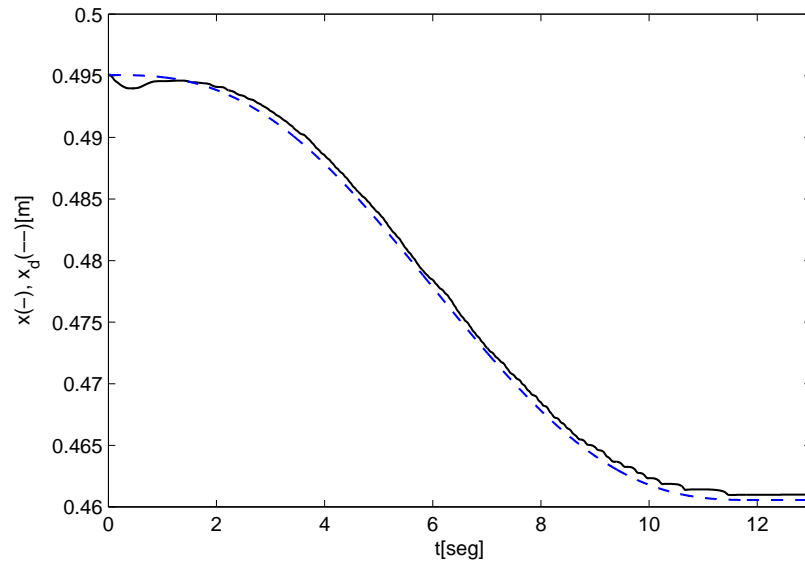


Figura 5.2: Trayectorias real (—) y deseada (- -) en la coordenada  $x$ .



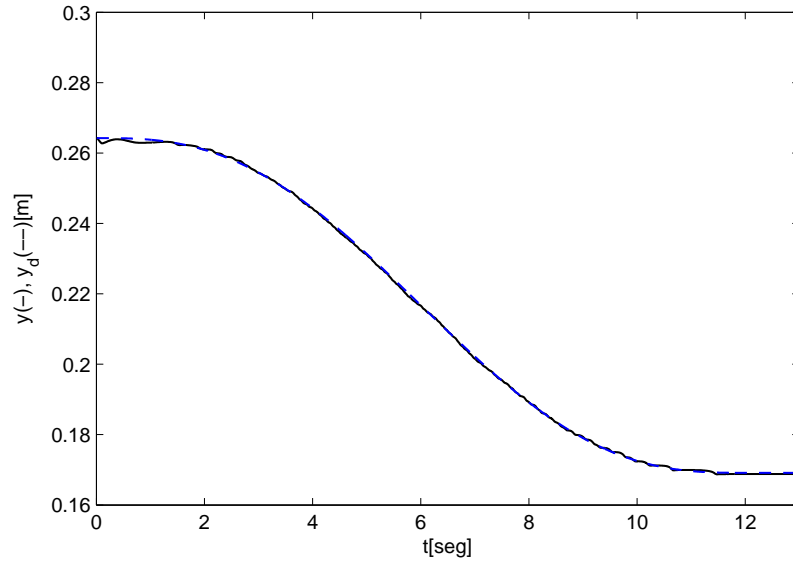


Figura 5.3: Trayectorias real (—) y deseada (- -) en la coordenada  $y$ .

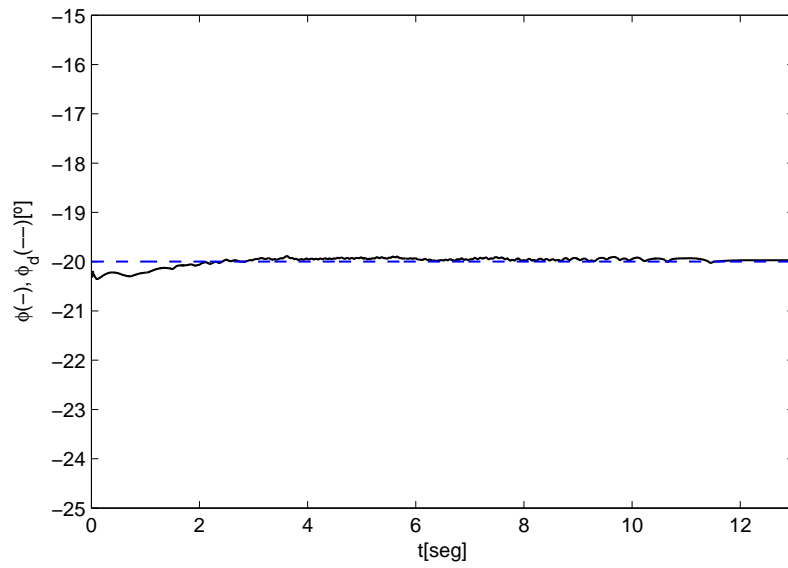
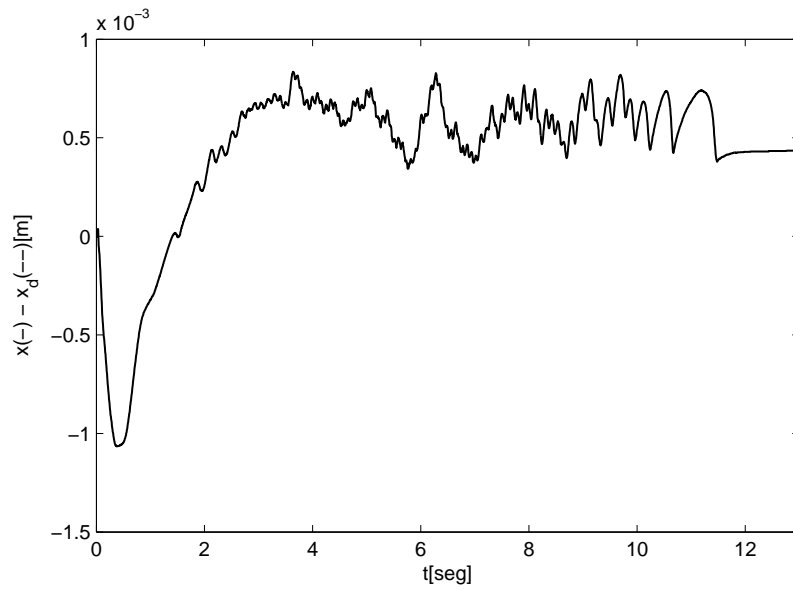
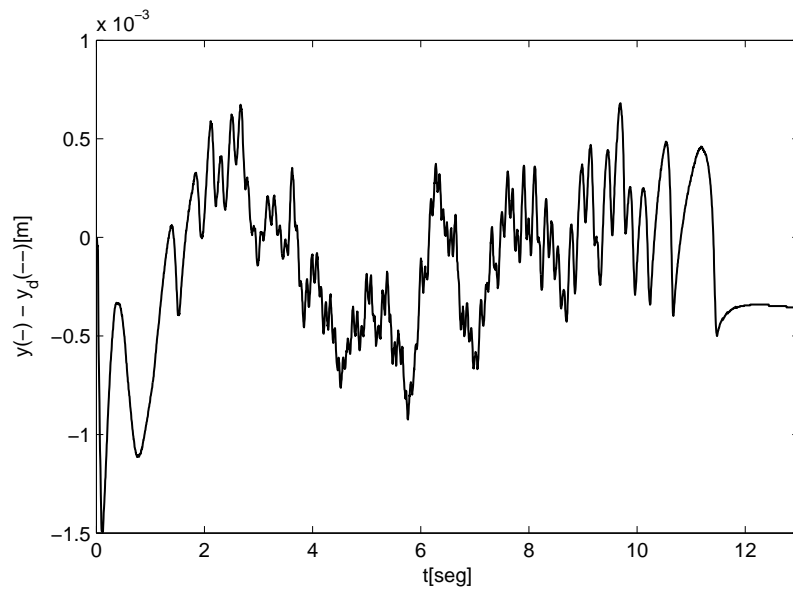


Figura 5.4: Trayectorias real (—) y deseada (- -) en la coordenada  $\phi$ .

Figura 5.5: Error de seguimiento en la coordenada  $x$ .Figura 5.6: Error de seguimiento en la coordenada  $y$ .

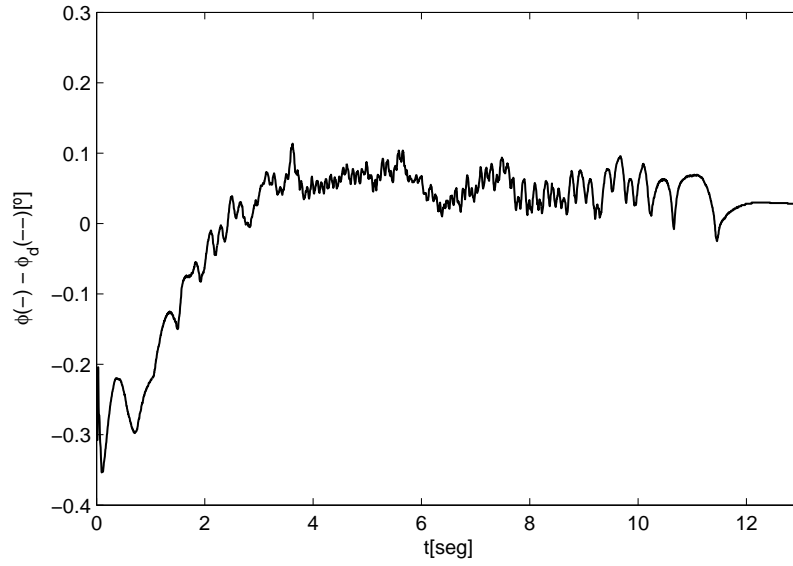


Figura 5.7: Error de seguimiento en la coordenada  $\phi$ .

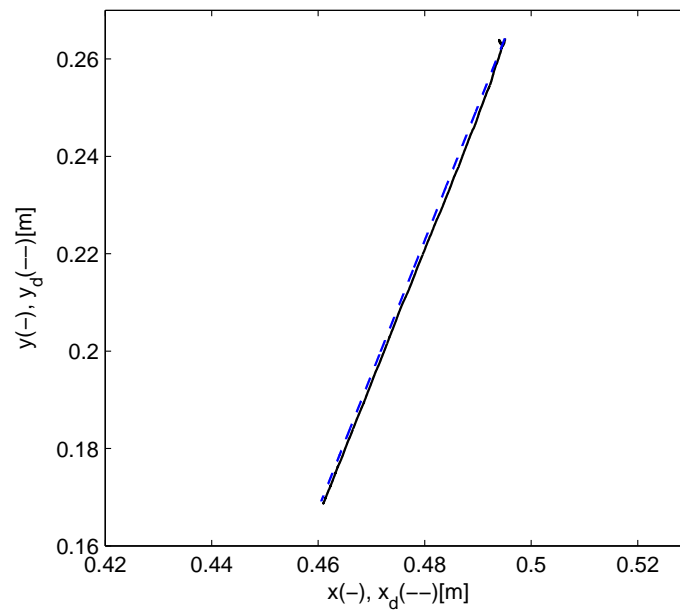


Figura 5.8: Seguimiento de la trayectoria en el plano  $xy$ .

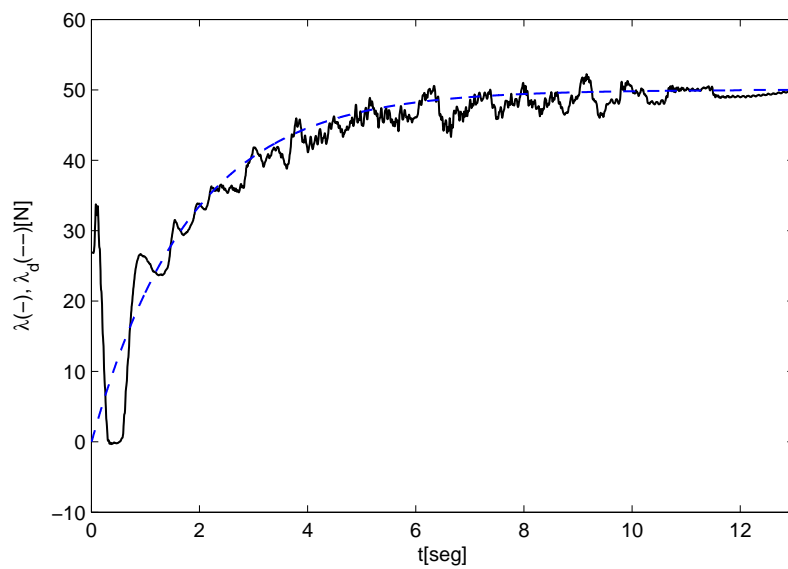


Figura 5.9: Fuerzas real (—) y deseada (- -) sobre la superficie.

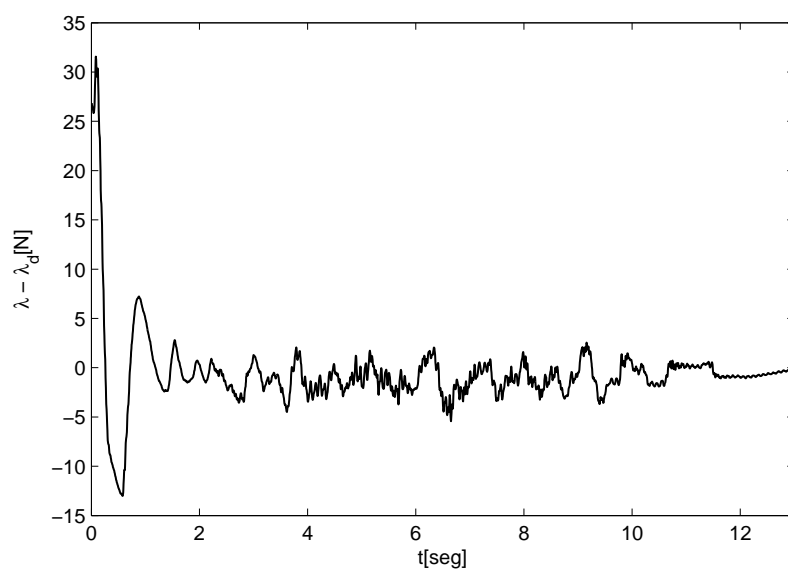


Figura 5.10: Error de seguimiento de fuerza.

Por último, en las Figuras 5.11, 5.12 y 5.13 se muestran las entradas de control para las articulaciones 1, 2 y 3, respectivamente. En estas figuras se puede ver que estas entradas nunca se saturan.

En general, los resultados obtenidos en esta parte del trabajo son bastante satisfactorios, aún más considerando que el enfoque de observadores GPI asegura sólo que las trayectorias permanecerán acotadas por una pequeña región alrededor del error cero. Debido al ruido en el sensor de fuerza y a la discretización del algoritmo, no se pudo emplear una alta ganancia para reducir aún más este error, pero es posible hacerlo con un tiempo de muestreo menor y con un sensor de fuerza menos sensible al ruido.

Además, aunque se utilizaron valores reportados rigurosamente para obtener la matriz de inercia y los parámetros de los actuadores, esto nunca llega a ser totalmente acertado, por lo que es un punto que aún se puede mejorar al aplicar este algoritmo.

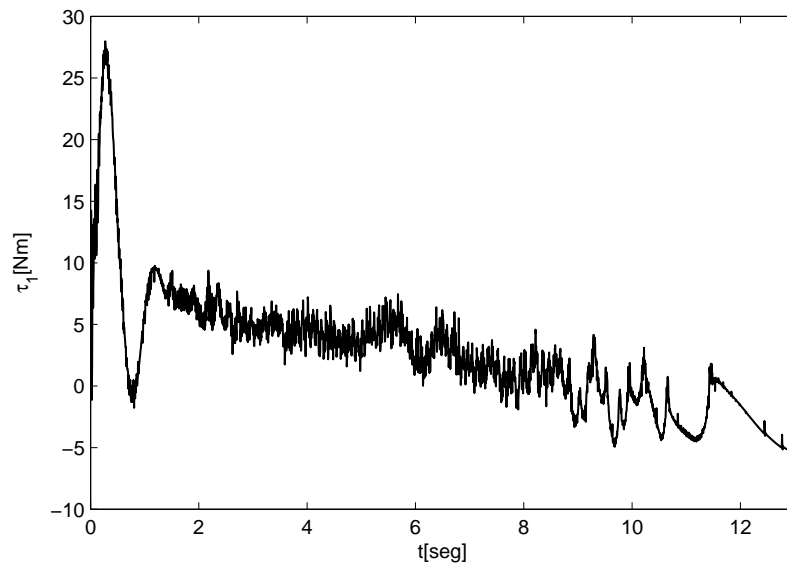


Figura 5.11: Entrada de control para la articulación 1.

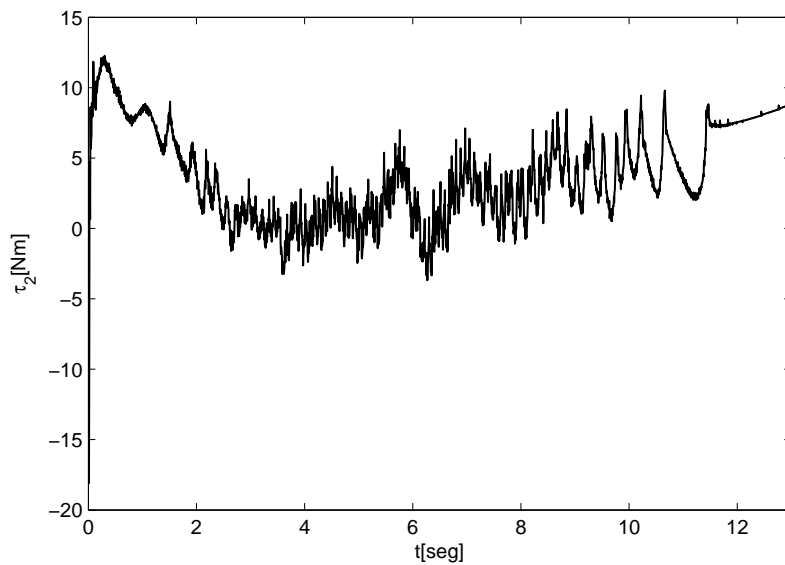


Figura 5.12: Entrada de control para la articulación 2.

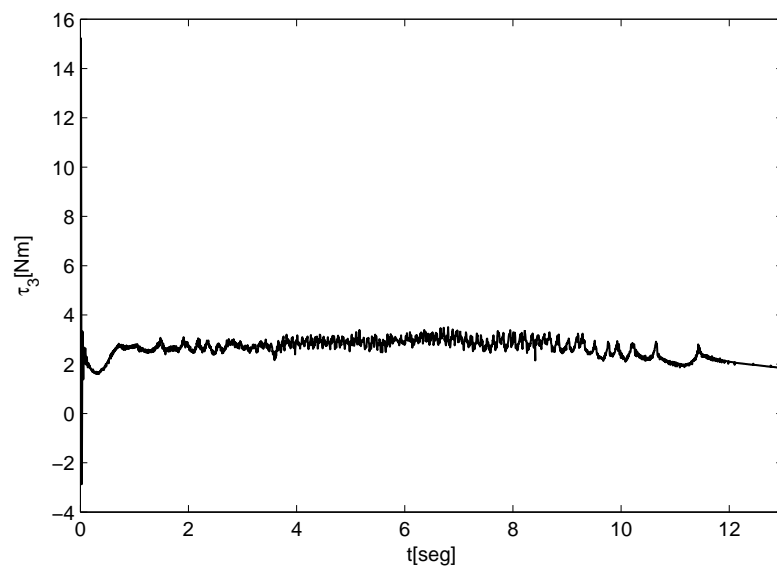


Figura 5.13: Entrada de control para la articulación 3.

## 5.2. Control de Posición y Fuerza con Retroalimentación Visual

### 5.2.1. Simulación

En esta sección se validan mediante una simulación los resultados teóricos obtenidos en el Capítulo 4. Para realizar esta simulación se consideró un robot de dos grados de libertad como el mostrado en la Figura 5.14.

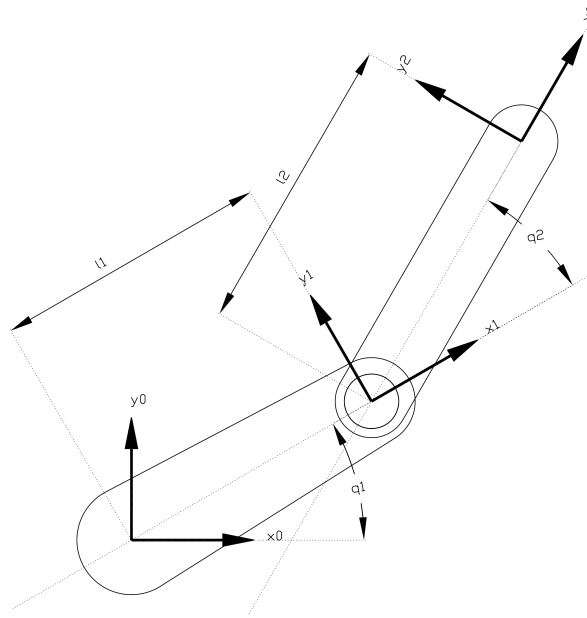


Figura 5.14: Robot Planar de Dos Eslabones.

Con los sistemas coordenados como se definen en la Figura 5.14, se obtiene los parámetros de Denavit-Hartenberg que se muestran en el Cuadro 5.1.

Eslabón	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$\theta_1^*$
2	$l_2$	0	0	$\theta_2^*$

Cuadro 5.1: Parámetros de D-H para el Robot Planar de 2 Eslabones.

Para este caso la posición del efector final representada por  $\mathbf{x}$ , en términos de los

valores de las articulaciones (la cinemática directa), está dada por

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Así mismo, la cinemática inversa de este manipulador está dada por

$$q_2 = \text{atan2} \left( D, \pm \sqrt{1 - D^2} \right) \quad (5.4)$$

$$q_1 = \text{atan2} (x, y) - \text{atan2} (l_1 + l_2 \cos(q_2), l_2 \sin(q_2)), \quad (5.5)$$

donde

$$D = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}. \quad (5.6)$$

La función de dos argumentos  $\text{atan2}(x, y)$  está definida para todo par  $(x, y) \neq (0, 0)$  y especifica un ángulo  $\theta$  tal que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por otra parte, se puede calcular el Jacobiano analítico de este manipulador utilizando la cinemática directa dada por la ecuación (5.3) de la siguiente forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Dada la simplicidad de este caso, el Jacobiano definido en (5.7) es tanto el Jacobiano geométrico como el Jacobiano analítico del manipulador. Por otro lado, el modelo dinámico de este robot se puede describir mediante la siguiente parametrización [Spong et al., 2006]

$$\begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 c_2 & \theta_3 + \theta_2 c_2 \\ \theta_3 + \theta_2 c_2 & \theta_3 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} -\theta_2 s_2 \dot{q}_2 & -\theta_2 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \theta_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \theta_4 c_1 + \theta_5 c_{12} \\ \theta_5 c_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_6 \dot{q}_1 + \theta_8 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \theta_7 \dot{q}_2 + \theta_9 \text{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}. \quad (5.8)$$

Con el objeto de llevar a cabo una simulación lo más realista posible, se utilizaron los siguientes datos del robot de dos grados de libertad incluidos en [Reyes y Kelly, 2001]



$$\boldsymbol{\theta} \triangleq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3516[\text{kg m}^2] \\ 0.0838[\text{kg m}^2] \\ 0.1019[\text{kg m}^2] \\ 38.4658[\text{N m}] \\ 1.8270[\text{N m}] \\ 2.2880[\text{N m} \cdot \text{seg}] \\ 0.1750[\text{N m} \cdot \text{seg}] \\ 7.1700[\text{N m}], \text{ si } \dot{q}_1 > 0 \text{ y} \\ 8.0490[\text{N m}] \text{ si } \dot{q}_1 < 0 \\ 1.7340[\text{N m}] \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Se considerará que los actuadores pueden proporcionar un par máximo  $\tau_{1\max} = 200[\text{Nm}]$  y  $\tau_{2\max} = 15[\text{Nm}]$  para las articulaciones 1 y 2, respectivamente. Las longitudes de los eslabones para este robot son  $l_1 = l_2 = 0.45[\text{m}]$

La superficie está definida ahora por la restricción en coordenadas de imagen  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$  definida como

$$\varphi(\mathbf{y}) = \frac{\tan \alpha_i (y_1 - l_i)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_i}} - \frac{y_2}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_i}}, \quad (5.10)$$

donde  $\alpha_i = -1.0472$  y  $l_i = 1229.3$ . Se asume que estos parámetros, que determinan la línea (orilla) visible del plano en la imagen captada por la cámara, se pueden calcular a partir de la información del sistema de visión. Nótese que (5.10) está definida de tal manera que  $\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{y}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}}$  tenga magnitud unitaria y apunte hacia afuera de la superficie.

La simulación consistió en llevar al robot de un punto inicial  $(y_1(0), y_2(0)) = (855, 648)[\text{píxeles}]$  a un punto final  $(y_1(t_f), y_2(t_f)) = (367, 1494)[\text{píxeles}]$ , en un tiempo de  $t_f = 25[\text{seg}]$  y, simultáneamente, seguir una trayectoria de fuerza dada por

$$\lambda_d = 10(1 - e^{-(1/0.8)t}) + 10[\text{N}]. \quad (5.11)$$

Para generar la trayectoria deseada de posición  $y_{1d}$  se utilizó un polinomio de quinto orden en el tiempo, mientras que  $y_{2d}$ , se calculó para que cumpliera (5.10). El tiempo de muestreo utilizado para el lazo de control de posición y fuerza fue de  $T = 0.0025[\text{seg}]$ , mientras que el tiempo de muestreo de la cámara fue propuesto en  $T_c = 1/33[\text{seg}]$ .

Los parámetros utilizados para modelar la cámara, mediante la proyección de perspectiva dada en la ecuación (2.17), son  $\alpha_c = 360000[\text{píxeles/m}]$ ,  $\lambda_v = 0.008$ ,  ${}^cO_{R1} = 0.25[\text{m}]$ ,  ${}^cO_{R2} = 0[\text{m}]$ ,  ${}^cO_{R3} = 1.3[\text{m}]$ ,  $\phi_c = 0[^\circ]$ ,  $u_0 = 250[\text{píxeles}]$  y  $v_0 = 230[\text{píxeles}]$ . Se asume que no se tiene conocimiento de  $u_0$ ,  $v_0$  ni de los parámetros  ${}^cO_{R1}$ ,  ${}^cO_{R2}$  y  ${}^cO_{R3}$ . También se supone desconocido el ángulo de rotación de la cámara y se propone  $\phi_c = 10[^\circ]$ . Así mismo se suponen desconocidos los parámetros  $\alpha_c$  y  $\lambda_v$ , por lo que esta incertidumbre se engloba en el desconocimiento de  $\alpha_\lambda$ , que se propone como  $\alpha_\lambda = 2897.8$ .

Los valores de la matriz de inercia,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , también se suponen desconocidos por lo que se propone

$$\hat{\theta}_1 = 3.057[\text{kg m}^2] \quad (5.12)$$

$$\hat{\theta}_2 = 0.1592[\text{kg m}^2] \quad (5.13)$$

$$\hat{\theta}_3 = 0.0408[\text{kg m}^2]. \quad (5.14)$$

Para la parte de control de movimiento no restringido se utilizaron los parámetros del controlador

$$\zeta = 18\mathbf{I} \quad \text{y} \quad \omega_n = 12.5\mathbf{I}$$

y los coeficientes del polinomio del observador con  $r = 2$  fueron elegidos como

$$\lambda_{u0} = 84375\mathbf{I}, \quad \lambda_{u1} = 20250\mathbf{I}, \quad \lambda_{u2} = 1800\mathbf{I} \quad \text{y} \quad \lambda_{u3} = 70\mathbf{I},$$

por lo que los polos del observador se escogieron en  $p_{u1} = p_{u2} = p_{u3} = p_{u4} = -15$ .

Por otra parte, para el movimiento restringido se eligió el parámetro de diseño

$$\Lambda_F = 0.5$$

y además se eligieron los coeficientes del polinomio del observador con  $p = 3$  como

$$\lambda_{f0} = 15000, \quad \lambda_{f1} = 6250, \quad \lambda_{f2} = 875 \quad \text{y} \quad \lambda_{f3} = 50,$$

lo que equivale a los polos del observador en  $p_{f1} = -5$ ,  $p_{f2} = -10$ ,  $p_{f3} = -15$  y  $p_{f4} = -20$ .

En las Figuras 5.15 y 5.15, se muestra el seguimiento de la trayectoria en el espacio de imagen, en las coordenadas  $y_1$  y  $y_2$ , respectivamente, mientras que en las Figuras 5.17 y

5.18 se muestran los errores de seguimiento de estas trayectorias, en pixeles. La trayectoria en el plano de imagen se muestra en la Figura 5.19. En estas figuras puede verse que el error máximo en estado estacionario es de 1[pixel] para la coordenada  $y_1$  y de 2[pixeles] para la coordenada  $y_2$ .

Por otra parte, el error de seguimiento de las trayectorias de posición en el espacio cartesiano se muestra en las Figuras 5.22 y 5.20, para las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente. En estas gráficas se ve que el error en ambas coordenadas, después del transitorio, es de menos de 1[mm], lo que significa que el seguimiento de trayectoria en posición tuvo un desempeño muy bueno.

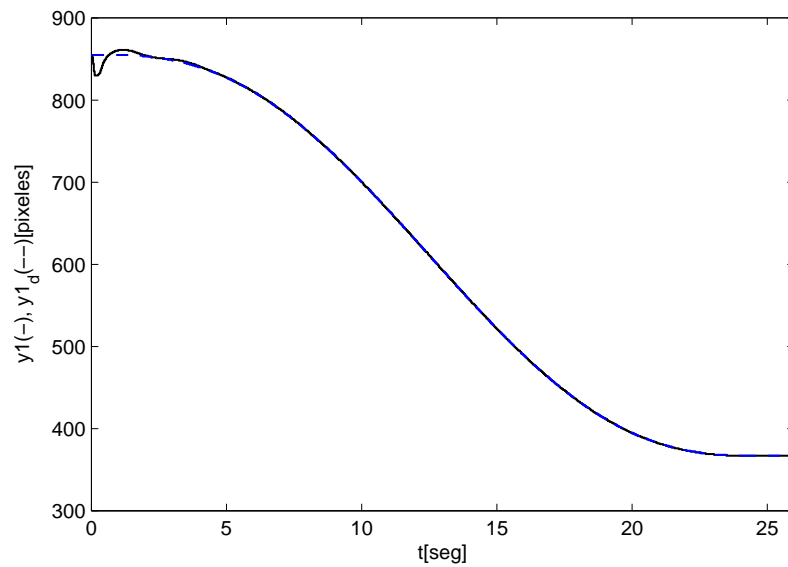


Figura 5.15: Trayectorias real (—) y deseada (- -) en la coordenada  $y_1$ .

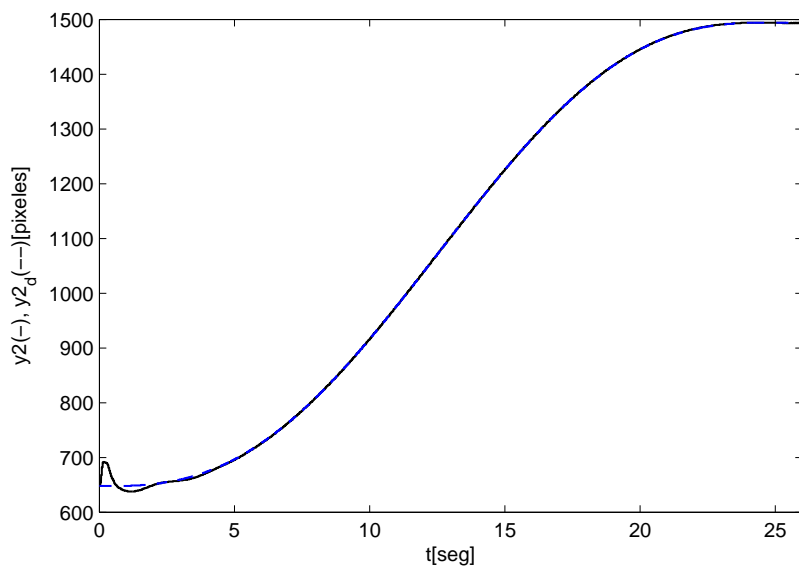


Figura 5.16: Trayectorias real (—) y deseada (- -) en la coordenada  $y_2$ .

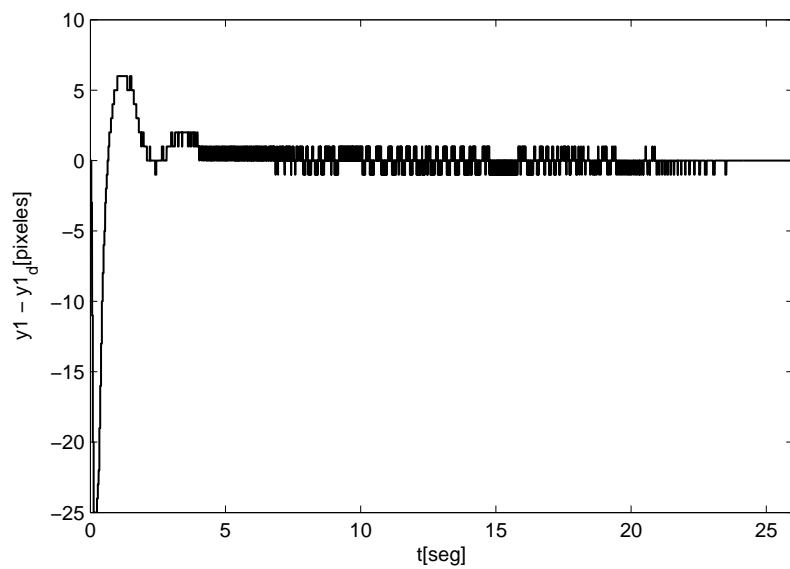


Figura 5.17: Error de seguimiento en la coordenada  $y_1$ .

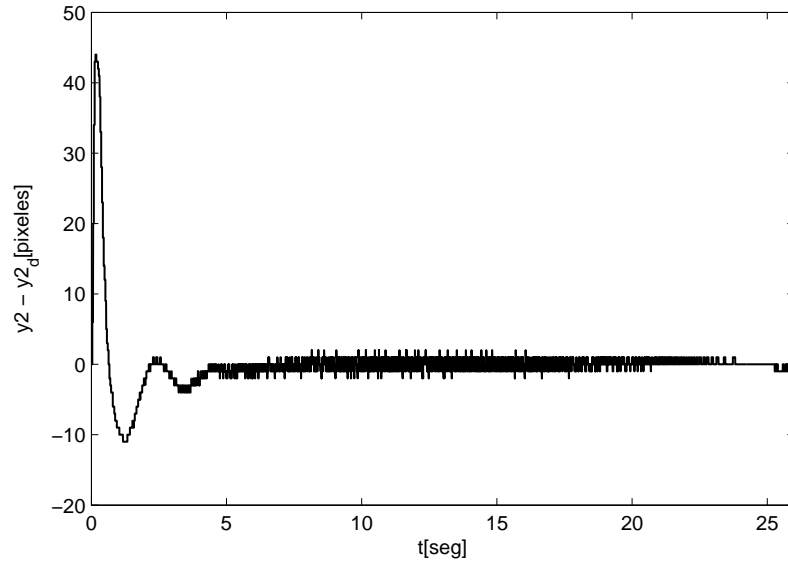


Figura 5.18: Error de seguimiento en la coordenada  $y_2$ .

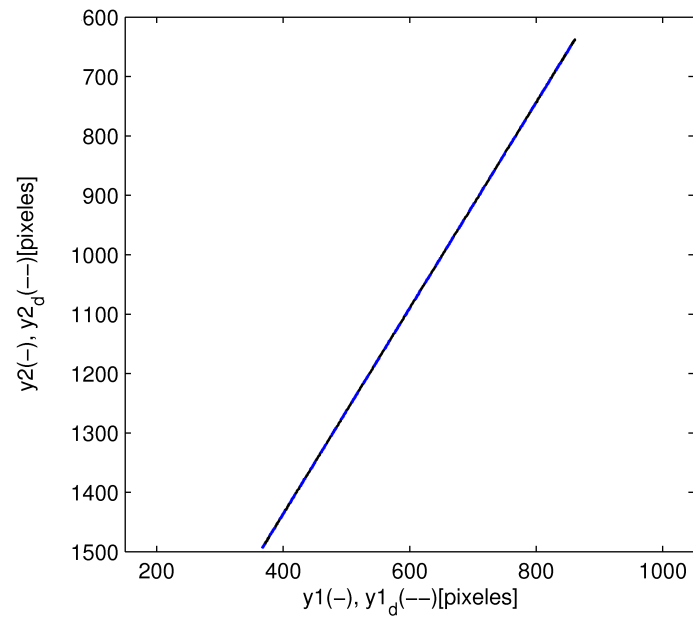


Figura 5.19: Seguimiento de la trayectoria en el plano de imagen,  $y_1 y_2$ .

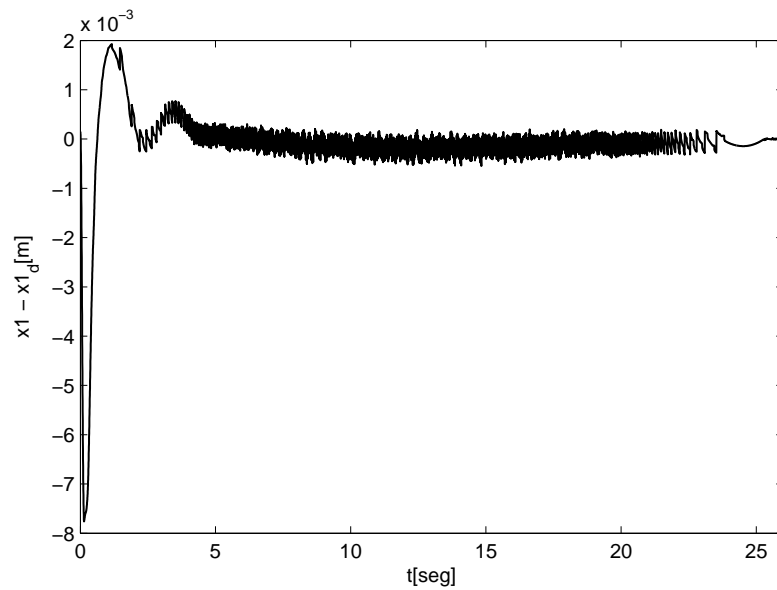


Figura 5.20: Error de seguimiento en la coordenada  $x_1$ .

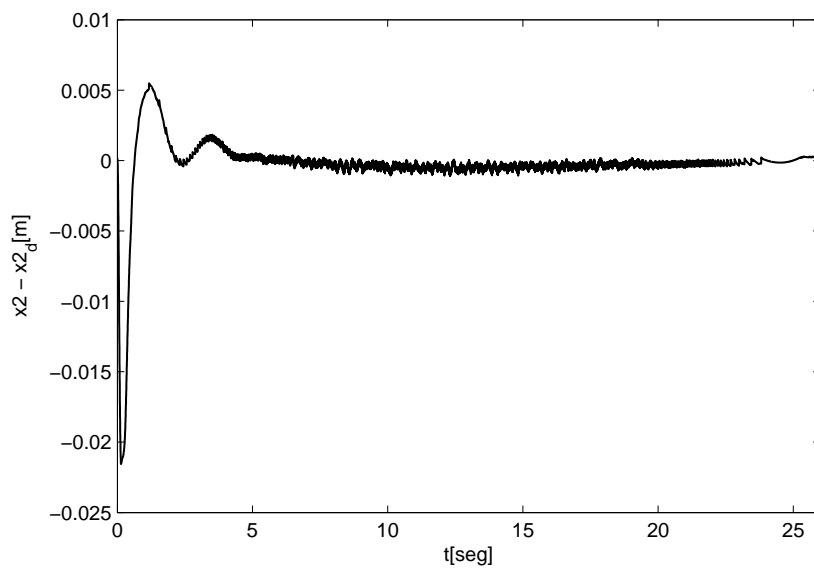


Figura 5.21: Error de seguimiento en la coordenada  $x_2$ .

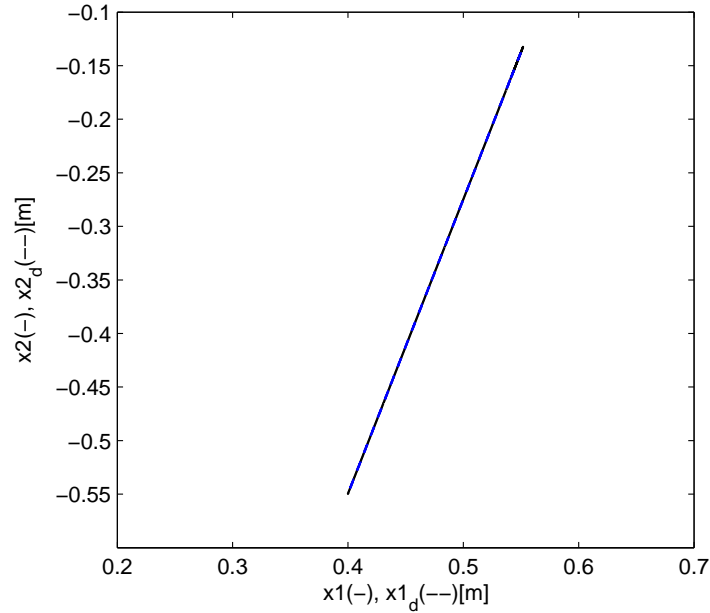


Figura 5.22: Seguimiento de la trayectoria en el plano  $x_1x_2$ .

Por otra parte, el seguimiento de la trayectoria en movimiento restringido (fuerza), se muestra en la Figura 5.23 y el error de seguimiento correspondiente en la Figura 5.24. El comportamiento ruidoso de este seguimiento se debe principalmente a la pixelación de la imagen, puesto que el control de posición intenta llegar a error cero rápidamente y como un error igual a cero puede representar un punto del otro lado de la superficie, la fuerza se incrementa drásticamente antes de que la parte de control de movimiento restringido actúe. A pesar de que se relajaron las ganancias de control de posición, la respuesta del control de fuerza depende mucho de esta pixelación. No obstante, siempre puede hacerse un intercambio entre errores de fuerza y de posición, ya que al relajar las ganancias para uno, mejora el desempeño en el otro, pero esto depende de la aplicación en particular. Además, esta situación mejora enormemente conforme se dispone de una cámara con mayor resolución y menor tiempo de muestreo. Aún así, el seguimiento de fuerza presenta un error en estado estacionario del orden de  $2[N]$ , lo que representa el 10% del valor máximo de referencia.

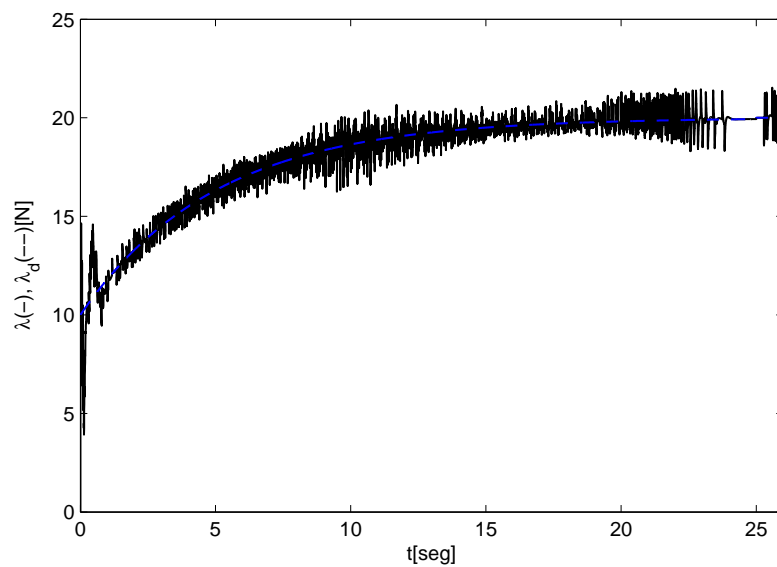


Figura 5.23: Fuerzas real y deseada sobre la superficie.

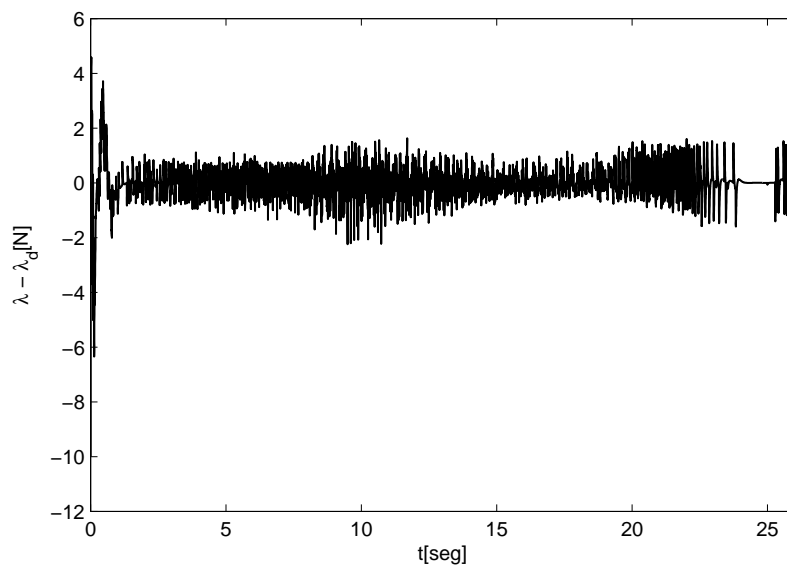


Figura 5.24: Error de seguimiento de fuerza.



Por último, en las Figuras 5.25 y 5.26 se muestran las entradas de control para las articulaciones 1 y 2, respectivamente. Puede observarse que estas entradas nunca se saturan, a pesar de ser un poco ruidosas.

Los resultados de esta simulación permiten conocer mejor cómo se comportará el sistema en una situación real. Aunque el seguimiento de fuerza presentó un error en estado estacionario de alrededor del 10% con respecto a la fuerza deseada máxima, este aspecto se puede mejorar si se sacrifica un poco el seguimiento de la trayectoria en posición, por lo que la elección depende de la tarea a desarrollar. En lo concerniente a los demás aspectos, se comprobó que la adaptación del algoritmo para incorporar la retroalimentación visual es adecuada y que es robusta ante cierta incertidumbre en los parámetros, tanto de la matriz de inercia (hasta 90% de error en uno de ellos) como de la calibración de la cámara (incertidumbre en  $\alpha_\lambda$  de 30% y error de rotación sobre el eje óptico de  $10^\circ$ ). Se intentó simular un sistema lo más parecido a lo que se puede encontrar en la actualidad en cuanto a equipo, lo que significa que conforme mejoren las prestaciones de las partes involucradas, mejorará el desempeño de este algoritmo también.

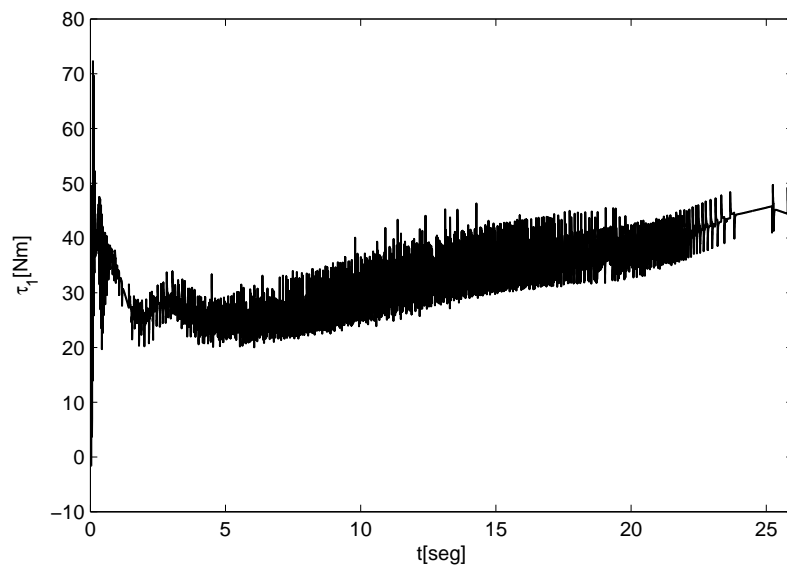


Figura 5.25: Entrada de control para la articulación 1.

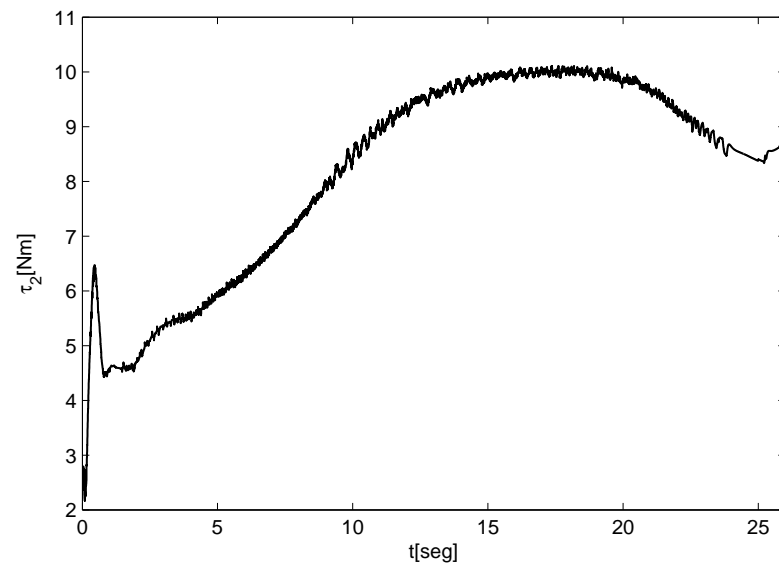


Figura 5.26: Entrada de control para la articulación 2.

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1. Comentarios Finales

En este trabajo se llevó a cabo el control de un sistema no lineal (robot manipulador) mediante un algoritmo lineal basado en los observadores GPI. Utilizando esta técnica se logró llevar a cabo el objetivo de controlar simultáneamente la posición del robot y la fuerza que éste ejerce sobre una superficie. Posteriormente se extendió exitosamente el algoritmo para incorporar la retroalimentación proveniente de un sistema de visión.

Algunas de las ventajas de utilizar este método fueron las siguientes:

- No se requiere conocer todo el modelo del robot, sólo la matriz de inercia.
- La sintonización es intuitiva, con una interpretación directa.
- Presenta cierta robustez ante incertidumbres en los parámetros requeridos (matriz de inercia, parámetros de la cámara, etc.).
- No se requiere medir directamente la velocidad, únicamente la posición.

Respecto a este último punto, el algoritmo, basado en la estimación en tiempo real del modelo interno propuesto para una señal de perturbación a la entrada, no sólo logró lidiar con esta perturbación para llevar a cabo el control del robot, sino que permitió estimar otras señales como la velocidad de las articulaciones del robot, lo que tuvo como resultado que se pudiera prescindir de un sensor físico de velocidad. Además del menor costo del equipo, se ganó en tiempo de adquisición y cómputo así como una señal menos ruidosa en comparación con otros métodos de estimación.

Las suposiciones hechas sobre el modelo interno de la señal de perturbación fueron adecuadas para lograr los propósitos de control en este trabajo, para ello la validación experimental de la Sección 5.1.1 jugó un papel importante, puesto que en las simulaciones no se pueden considerar todas las perturbaciones presentes en una situación real. Incluso se pudo comprobar que la incertidumbre del modelo de la matriz de inercia no afecta sensiblemente en el desempeño de este algoritmo de control.

## 6.2. Trabajo Futuro

Este trabajo comprende el control de posición y fuerza de robots planares, lo que ciertamente tiene muchas aplicaciones y es en sí mismo una buena aproximación para emplear los algoritmos de control diseñados a lo largo del mismo. No obstante, la extensión de este trabajo a un espacio de trabajo tridimensional es primordial para llevarlo a muchas más aplicaciones. Sin embargo, esto también representa retos más difíciles, sobre todo en el aspecto experimental, dado que en este texto se ha cubierto la parte esencial del desarrollo teórico. De hecho, la teoría desarrollada en el Capítulos 3, es válida para cualquier robot de  $n$  articulaciones moviéndose en un espacio ya sea de dos o tres dimensiones.

En el corto plazo, el trabajo siguiente es la validación experimental del control de fuerza y posición con retroalimentación visual desarrollado en el Capítulo 4. Aunque en la simulación se consideraron parámetros realistas tanto del robot como del sistema de visión, de los diferentes tiempos de adquisición de los datos, además de simular cierto desconocimiento de los parámetros que se necesitan para aplicar el algoritmo, la validación experimental es importante para comprobar la eficacia del método y la veracidad de las suposiciones establecidas.

# Bibliografía

- [Arimoto et al., 1993a] Arimoto, S., Liu, Y., and Naniwa, T. (1993a). Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. pages 618-623. Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- [Arimoto et al., 1993b] Arimoto, S., Liu, Y., and Naniwa, T. (1993b). The orthogonalization principle for robot manipulators. pages 507-512. Proceedings of the IFAC Congress on Automatic Control.
- [Arteaga et al., 2009] Arteaga, M. A., Bueno-Lopez, M., and Espinosa, A. (2009). A simple approach for 2d visual servoing. 18th IEEE International Conference on Control Applications, Saint Petersburg, Russia.
- [Arteaga et al., 2011] Arteaga, M. A., Sira-Ramírez, H., and Gutiérrez-Giles, A. (2011). A GPI approach to force control in robotic manipulators. Unpublished.
- [Arteaga-Pérez y Rivera-Dueñas, 2007] Arteaga-Pérez, M. A. and Rivera-Dueñas, J. C. (July, 2007). Force control without inverse kinematics nor robot model. pages 4385-4392. Kos Island, Greece, Proc. CD ROM. European Control Conference ECC07.
- [Baeten et al., 2002] Baeten, J., Bruyninckx, H., and De Schutter, J. (2002). Shared control in hybrid vision/force robotic servoing using the task frame. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Lausanne, Switzerland.
- [Carelli et al., 2004] Carelli, R., Oliva, E., Soria, C., and Nasisi, O. (2004). Combined force and visual control of an industrial robot. *Robotica*, 22:163–171.
- [Chaumette y Hutchinson, 2006] Chaumette, F. and Hutchinson, S. (2006). Visual servo control part i: Basic approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pages 82–90.

- [Chaumette y Hutchinson, 2007] Chaumette, F. and Hutchinson, S. (2007). Visual servo control part ii: Advanced approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pages 109–118.
- [Cheah et al., 2010] Cheah, C. C., Hou, S. P., Zhao, Y., and Slotine, J.-J. E. (2010). Adaptive vision and force tracking control for robots with constraint uncertainty. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 15 (3):389–397.
- [Cheah et al., 2003] Cheah, C. C., Kawamura, S., and Arimoto, S. (2003). Stability of hybrid position and force control for robotic manipulator with kinematics and dynamics uncertainties. *Automatica*, 39:847–855.
- [Chen, 1999] Chen, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design*. 3rd. edition.
- [de Queiroz et al., 1996] de Queiroz, M. S., Dawson, D. M., and Burg, T. (Abril, 1996). Position/force control of robot manipulators without velocity/force measurements. pages 2561-2566. Minneapolis, Minnesota, Proc. IEEE Conference on Robotics and Automation.
- [Dean-León, 2006] Dean-León, E. C. (2006). *Sistema Servo Visual No Calibrado de Fuerza/Posición para Robots Dinámicos Restringidos por Superficies de Contacto no Estructuradas*. Tesis de doctorado, CINVESTAV-IPN, Unidad Zacatenco.
- [Dean-León et al., 2006] Dean-León, E. C., Parra-Vega, V., and Espinosa-Romero, A. (2006). Global uncalibrated visual servoing for constrained robots working on an uncalibrated environments. Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Beijing, China.
- [Fliess et al., 2002] Fliess, M., Marquez, R., Delaleau, E., and Sira-Ramírez, H. (2002). Correcteurs proportionnels intégraux généralisés. *Nucleonics*, 10(11):43–45.
- [Fu et al., 1987] Fu, K. S., Gonzalez, R. C., and Lee, C. S. (1987). *Robotics : Control, Sensing, Vision and Intelligence*. McGraw-Hill Series in Cad/Cam Robotics and Computer Vision.
- [Goertz y Bevilacqua, 1952] Goertz, R. C. and Bevilacqua, F. (1952). A force-reflecting positional servomechanism. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 7(2):23–41.

- [Gudiño-Lau y Arteaga, 2005] Gudiño-Lau, J. and Arteaga, M. A. (2005). Dynamic model and simulation of cooperative robots: A case study. *Robotica*, 23:615–624.
- [Hill y Park, 1979] Hill, J. and Park, W. (1979). Real time control of a robot with a mobile camera. *Proc. of 9th ISIR, Washington D. C.*, 1:233-246.
- [Hosoda et al., 1998] Hosoda, K., Igarashi, K., and Asada, M. (1998). Adaptive hybrid control for visual and force servoing in an unknown environment. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, pages 39–43.
- [Hutchinson et al., 1996] Hutchinson, S., Hager, G. D., and Corke, P. I. (1996). A tutorial on visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12 (5):651–670.
- [Ishikawa y Kosuge, 1991] Ishikawa, J. and Kosuge, K. (1991). Intelligent control of assembling robot using vision sensor. pages 1904-1909. *IEEE Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation*.
- [Kelly, 2003] Kelly, R. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Educación S.A., Madrid, España.
- [Kelly et al., 2004] Kelly, R., Moreno, J., and Campa, R. (2004). Visual servoing of planar robots via velocity fields. 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- [Kuo, 1996] Kuo, B. C. (1996). *Sistemas de Control Automático*. 7a. edition.
- [Leite et al., 2006] Leite, A. C., Lizarralde, F., and Hsu, L. (2006). Hybrid vision-force control for tasks on unknown smooth surfaces. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Orlando, Florida, USA.
- [Li y Horowitz, 1999] Li, P. and Horowitz, R. (1999). Passive velocity field control of mechanical manipulators. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 15:751–763.
- [Lipiello et al., 2007] Lipiello, V., Siciliano, B., and Villani, L. (2007). A position-based visual impedance control for robot manipulators. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy.

- [Martínez-Rosas et al., 2006] Martínez-Rosas, J. C., Arteaga-Pérez, M. A., and Castillo-Sánchez, A. (2006). Decentralized control of cooperative robots without velocity-force measurements. *Automatica*, 42:329-336.
- [Nelson et al., 1996] Nelson, B. J., Morrow, J. D., and Khosla, P. K. (1996). Robotic manipulation using high bandwidth force and vision feedback. *Mathematical and Computer Modelling Journal*, 24 (5/6):11-29.
- [Parra-Vega et al., 2001] Parra-Vega, V., Rodríguez-Ángeles, A., Arimoto, S., and Hirzinger, G. (2001). High precision constrained grasping with cooperative adaptive handcontrol. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 32:235-254.
- [Reyes y Kelly, 2001] Reyes, F. and Kelly, R. (2001). Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *Mechatronics*, 11:267-282.
- [Sciavicco y Siciliano, 1996] Sciavicco, L. and Siciliano, B. (1996). *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill.
- [Shirai y Inoue, 1973] Shirai, Y. and Inoue, H. (1973). Guiding a robot by visual feedback in assembling tasks. *Pattern Recognition*, 5:99-108.
- [Siciliano y Villani, 1999] Siciliano, B. and Villani, L. (1999). *Robot Force Control*. Kluwer academic.
- [Sira-Ramírez y Castro-Linares, 2010] Sira-Ramírez, H. and Castro-Linares, R. (2010). Trajectory tracking for non-holonomic cars: A linear approach to controlled leader-follower formation. 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA.
- [Sira-Ramírez et al., 2010a] Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M., and Rodríguez-Ángeles, A. (2010a). On the linear control of nonlinear mechanical systems. 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA.
- [Sira-Ramírez et al., 2010b] Sira-Ramírez, H., Velasco-Villa, M., and Rodríguez-Ángeles, A. (2010b). Trajectory tracking control of an input delayed monocycle. 2010 American Control Conference, Baltimore, MD, USA.
- [Spong et al., 2006] Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley and Sons.



- [Whintey, 1985] Whintey, D. E. (1985). Historical perspective and state of the art on robot force control. pages 262-268. New York, USA, IEEE Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation.
- [Xiao et al., 2000] Xiao, D., Ghosh, B. K., Xi, N., and Tarn, T. J. (2000). Sensor-based hybrid position/force control of a robot manipulator in an uncalibrated environment. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8 (4):635–645.