



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA**

**INSTITUTO DE INGENIERÍA**

**ELEMENTOS FINITOS CON DISCONTINUIDADES  
INTERIORES, FORMULACIÓN DE DESPLAZAMIENTOS  
Y FORMULACIÓN MIXTA**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

P R E S E N T A:

**RODRIGO JUÁREZ RANGEL**

TUTOR:

**DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN**



CIUDAD UNIVERSITARIA  
México 2009

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Oscar López Bátiz

Secretario: M. en I. Octavio García Domínguez

Vocal: Dr. A. Gustavo Ayala Milián

1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Juan José Pérez Gavilán

2<sup>do</sup> Suplente: Dr. Gelacio Juárez Luna

Lugar o lugares donde realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. A. Gustavo Ayala Milián

## Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por la formación intelectual que he recibido y por brindarme la oportunidad de pertenecer a ella.

A la Universidad Tecnológica de México, por haberme formado y enseñado a buscar siempre la superación continua.

Al CONACyT y a la DGAPA, por la beca otorgada para apoyar mis estudios de maestría.

A la CEP por el apoyo económico para concluir el trabajo de tesis.

A la Dirección General de Estudios de Posgrado y al Instituto de Ingeniería por los recursos materiales que me brindaron.

A mi tutor el Dr. A. Gustavo Ayala Milian, por su asesoría brindada durante todo el desarrollo de este trabajo, por haberme permitido formar parte de su equipo de trabajo, por haber sido mi guía en todo este periodo de gran aprendizaje y desarrollo personal.

A mis compañeros, porque juntos vivimos la experiencia de aprender, y durante nuestro aprendizaje tuvimos la dicha de crear una amistad imperecedera.

Al M. en C. Jaime Retama y al Dr. Gelacio Juárez, por el apoyo recibido a través de sus conocimientos y enseñanzas.

A mis sinodales, por sus aportaciones llenas de experiencia y por los comentarios realizados a este trabajo.

A mis padres, quienes me han rodeado de tanto amor y me han dado las todas bases para forjarme una personalidad y un pensamiento libre, que me ha permitido cumplir mis metas. Siempre han sido mis ángeles y las personas que más admiro.

A mis hermanos, por todos y cada uno de los momentos que hemos compartido, porque gran parte de lo que soy es gracias a ustedes, por el interés que han mostrado en el bienestar de cada uno de la familia.

A mi pareja Karina, por su amor, apoyo y comprensión, quien me ha acompañado todo el tiempo a lo largo de este camino que empezamos juntos.

A mis familiares y amistades, por estar al pendiente de mí, a cada uno de ustedes les agradezco por ese tiempo de compartir conmigo.

A LA MEMORIA DE:

Mi abuelita Pachis

Mi primo Quique.

Mi tía Rosy.

Mi abuelito Nacho.

Siempre estarán presentes en cada día de mi vida, hasta siempre.

# Índice

<b>Resumen.....</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>viii</b>
<b>Capítulo 1 Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1 Definición del problema .....	1
1.2 Antecedentes.....	1
1.3 Justificación.....	2
1.4 Contenido de la tesis.....	3
<b>Capítulo 2 Modelado numérico del daño en materiales.....</b>	<b>5</b>
2.1 Generalidades.....	5
2.2 Mecánica de la fractura elástica lineal.....	6
2.3 Modelos de la mecánica del daño.....	7
2.3.1 Modelo de daño continuo.....	7
2.3.1.1 Agrietamiento distribuido.....	7
2.3.2 Modelo de daño discreto.....	9
2.3.2.1 Grieta discreta.....	9
2.3.2.2 Elementos Finitos con Discontinuidades Interiores.....	11
2.3.2.2.1 Ecuaciones que gobiernan las aproximaciones de discontinuidades Interiores.....	13
<b>Capítulo 3 Introducción a los métodos variacionales de la mecánica.....</b>	<b>15</b>
3.1 Generalidades.....	15
3.2 Formulación variacional del problema.....	15
3.3 Formulación canónica de Fraeijs de Veubeke.....	16
3.3.1 Casos particulares.....	18
3.3.1.1 Campos simples.....	18
3.3.1.2 Campos mixtos.....	18
3.4 Formulación variacional del Modelo de Discontinuidades Interiores.....	19
3.5 Formulación variacional del Modelo de Discontinuidad Discreta.....	20
3.6 Funcional de Elemento Finito con Discontinuidades Interiores.....	22
<b>Capítulo 4 Formulaciones numéricas de la mecánica del daño.....</b>	<b>23</b>
4.1 Generalidades.....	23
4.2 Elemento finito con discontinuidades interiores formulación de desplazamientos.....	25
4.2.1 Matriz de rigideces.....	26
4.3 Elemento finito con discontinuidades interiores formulación mixta de dos campos, desplazamiento-deformaciones.....	27
4.3.1 Matriz de coeficientes.....	28
4.4 Elemento finito con discontinuidades interiores formulación mixta de tres campos, desplazamiento- deformaciones-esfuerzo.....	28
4.4.1 Matriz de coeficientes.....	29
4.5 Modelo de daño discreto.....	30
<b>Capítulo 5 Análisis inelástico.....</b>	<b>34</b>
5.1 Ejemplos de aplicación.....	34
5.1.1 Elemento con discontinuidades interiores.....	35
5.1.2 Viga de sección variable.....	45
5.1.3 Viga de 3 puntos.....	49
5.1.4 Placa con hendidura.....	51
5.1.5 Placa con perforación interior.....	52
5.1.6 Viga de tres puntos, comparación de mallas.....	56

<b>Capítulo 6 Suavizado de esfuerzos.....</b>	<b>60</b>
6.1 Parche Superconvergente.....	60
6.2 Suavizado de esfuerzos.....	64
6.3 Métodos de para suavizar el campo de esfuerzos.....	67
6.3.1 Suavizado por promediado directo de los valores de esfuerzo de los distintos elementos.....	67
6.3.2 Suavizado global en toda la malla, minimizando el error global debido al suavizado.....	68
6.3.3 Suavizado local en cada elemento, minimizando el error local debido al suavizado seguido de promediado de los distintos nodales .....	69
 <b>Capítulo 7 Conclusiones.....</b>	 <b>71</b>
7.1 Conclusiones finales.....	71
7.2 Líneas de investigación futuras.....	72
 <b>Apéndice .....</b>	 <b>73</b>
 <b>Referencias.....</b>	 <b>78</b>

# Índice de figuras

2.1 Modos fundamentales de falla (Bažant y planas, 1998).....	6
2.2 Modelo de fisura para un elemento de tensión plana.....	7
2.3 Modelo de grieta discreta.....	9
2.4 Idealización de una prueba a tensión según Hillerborg.....	10
2.5 Curvas del comportamiento del material.....	11
2.6 Aproximaciones.....	13
3.1 Medio continuo.....	17
3.2 Sólido dividido en subdominios.....	19
3.3 Modelo con discontinuidad discreta.....	21
4.1 Zona cohesiva (Anderson, 1995).....	31
4.2 Gráfica Esfuerzo-deformación.....	32
4.3 Gráfica tracción-salto.....	32
5.1 Gráfica tracción-desplazamiento.....	34
5.2 Elemento finito triangular.....	35
5.3 Gráfica esfuerzo-desplazamiento.....	36
5.4 Punto interno por donde pasa la discontinuidad.....	37
5.5 Esfuerzos máximos en el elemento.....	37
5.6 Gráfica esfuerzos principales.....	38
5.7 Alineamiento de la normal.....	38
5.8 Alineamiento de la normal calculada.....	39
5.9 Longitud de la discontinuidad.....	39
5.10 Obtención de $\mathbf{B}_c$ caso 1.....	40
5.11 Obtención de $\mathbf{B}_c$ caso 2.....	40
5.12 Gráfica tracción-salto.....	43
5.13 Esfuerzos relajados.....	43
5.14 Propagación de la discontinuidad no ajustada.....	44
5.15 Propagación de la discontinuidad ajustada.....	44
5.16 Saltos no compatibles.....	44
5.17 Viga de sección variable.....	45
5.18 Esfuerzos en dirección X.....	46
5.19 Esfuerzos obtenido por el MEF.....	47
5.20 Viga de sección variable discretizada.....	47
5.21 Orientación y propagación de la discontinuidad.....	47
5.22 Gráfica esfuerzo-desplazamiento.....	48
5.23 Gráfica tracción-salto.....	48
5.24 Gráfica P-u Viga de sección variable.....	49
5.25 Viga de tres puntos.....	49
5.26 Propagación y orientación de la discontinuidad y discretización del elemento.....	50
5.27 Gráfica P-u Viga de tres puntos.....	50
5.28 Geometría de apertura de placa.....	51
5.29 Propagación y orientación de la discontinuidad y discretización del elemento.....	51
5.30 Gráfica esfuerzo-desplazamiento.....	52
5.31 Gráfica tracción-salto.....	52
5.32 Gráfica P-u Placa con hendidura.....	52
5.33 Placas con perforación interior.....	53
5.34 Placas con perforación interior con cuatro apoyos.....	54
5.35 Gráfica esfuerzo-desplazamiento.....	54
5.36 Gráfica tracción-salto.....	54
5.37 Gráfica carga desplazamiento.....	55
5.38 Placas con perforación interior con cuatro apoyos.....	55
5.39 Geometría viga de tres puntos.....	56
5.40 Malla viga de tres puntos.....	57
5.41 Atoramiento de esfuerzos.....	57

5.42 Orientación y propagación de la discontinuidad.....	57
5.43 Orientación y propagación de la discontinuidad cambio de apoyo.....	58
5.44 Malla alternada.....	58
5.45 Malla alternada inversa.....	58
6.1 Rotación de la normal debido a la variación de los esfuerzos.....	60
6.2 Puntos de Gauss para el Parche superconvergente ( $\Delta$ ), Zienkiewicz y Zhu (1991).....	63
6.3 Parche típico del procedimiento SPR (NIST/MSEL).....	63
6.4 Parche típico del procedimiento SPR en las fronteras (NIST/MSEL).....	63
6.5 Campo de esfuerzo obtenido por el MEF ( Celigüeta, 2007).....	65
6.6 Esfuerzos suavizados ( Celigüeta, 2007).....	66
6.7 Aplicación del suavizado de esfuerzos ( Celigüeta, 2007).....	66
6.8 Suavizado por promediado directo ( Celigüeta, 2007).....	67
6.9 Extrapolados de los esfuerzos de Gauss ( Celigüeta, 2007).....	70
6.10 Esfuerzos extrapolados en los puntos de Gauss ( Celigüeta, 2007).....	70
A.1 Gráfica carga-desplazamiento.....	73
A.2 Control de carga.....	73
A.3 Control de desplazamiento.....	74
A.4 Método Regular Newton-Raphson.....	76
A.5 Criterios de convergencia.....	76
A.6 Snap back.....	77

## Índice de tablas

5.1 Propiedades del material para viga de sección variable.....	45
5.2 Esfuerzos y deformaciones para viga de sección variable.....	46
5.3 Propiedades del material para viga de tres puntos.....	49
5.4 Propiedades del material para placa con hendidura.....	51
5.5 Propiedades del material para placa con perforación interior.....	53
5.6 Propiedades del material para viga de tres puntos.....	56



## Resumen

Actualmente la simulación del daño en estructuras ha sido motivo de amplio estudio, debido a la complejidad que presenta el problema. En un principio cuando los materiales presentaban fisuras se estudiaba su comportamiento con la mecánica de la fractura, la cual puede ser elástica o inelástica dependiendo si el material es dúctil o frágil. La Mecánica de la Fractura permitió fundamentar las bases para el estudio de problemas cuando se presenta grietas. Se utiliza los métodos numéricos como el MEF para la solución aproximada del problema.

Para estudiar el problema del daño en las estructuras se utilizan herramientas como los métodos variacionales, los cuales están apoyados en el cálculo variacional, los cuales son una herramienta para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales. Con esta herramienta se obtiene el funcional, el cual, en su condición estacionaria obtiene las ecuaciones que gobiernan el problema, el principio variacional contiene el fenómeno físico del problema, por lo tanto, es en el funcional donde se incluye la física del problema.

Para plantear el problema del daño se hace uso de la formulación canónica de Fraeijs de Veubeke, donde se incluye las discontinuidades interiores, esta formulación permite variar los campos de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tracciones de manera independiente, esta formulación es la más general, aunque también existen otras como la formulación de Hellinger-Reissner y la de Hu-Washizu, las cuales tienen variación de campos mixtos.

Se desarrolla a partir del funcional con discontinuidades interiores las matrices de rigideces, primero variando un solo campo, después, se obtiene la matriz de coeficientes mixta de dos campos, donde se varía el campo de los desplazamientos y el campo de deformaciones, finalmente se obtiene la matriz de coeficientes mixta de tres campos, en la cual se varían el campo de desplazamientos, el campo de deformaciones y el campo de esfuerzo.

Actualmente con el apoyo del Método del Elemento Finito se trata de modelar el problema de fractura a través de dos formulaciones: una es con la teoría de modelos continuos, donde se usan relaciones esfuerzo-deformación, y otra es con la teoría discreta la cual usa relaciones tracción-salto para la caracterización del problema, en este trabajo se hace uso de la teoría discreta.

En la teoría discreta cuando aparece la discontinuidad se presentan fuerzas cohesivas que se deben tomar en cuenta, esto se logra a través de modelos cohesivos. La discontinuidad se modela como una línea donde se concentra los mecanismos de degradación del material, se maneja que por esta línea existe una degradación progresiva del material, lo cual inicia cuando se tiene el esfuerzo principal máximo excede o es igual al esfuerzo de fluencia del material. En la teoría discreta los parámetros que tienen más importancia para determinar la localización de la discontinuidad y su trayectoria, son las tracciones y la llamada energía de fractura, la cual es un parámetro de cada material.

Cuando se hace uso de la formulación de desplazamientos los esfuerzos no son continuos entre elementos vecinos, por lo que se obtiene diferentes valores para un nodo, esto hace que las variaciones de esfuerzo sean grandes, lo que causa problemas numéricos cuando se calcula la normal. Se plantea que para resolver este problema se suavicen los esfuerzos con el uso del Parche Superconvergente, el cual evita el cambio brusco del esfuerzo entre los elementos y logra la continuidad en el campo de esfuerzos en el Parche considerado.

## Abstract

At present the simulation of the damage in structures has been reason of wide study, due to the complexity that presents the problem. In a principle when the materials presented fissures their behavior it was studied with the mechanics of the fracture, which can be elastic or inelastic depending if the material is ductile or fragile. The Mechanics of the Fracture allowed generate the bases for the study of problems when it is presented cracks. It is used the numeric methods as the Finite Element Method like support for the solution of the problem.

To study the problem of the damage in the structures tools like the variational methods they are used, which are supported in the calculus of variations, which are a tool to approach the solution of differential equations. With this tool the functional one is obtained, the one which, in their stationary condition it obtains the equations that govern the problem, the variational principle it contains the physical phenomenon of the problem, therefore, it is in the functional one where the physics of the problem is included.

To outline the problem of the damage use of the canonical formulation of Fraeijs of Veubeke it is made, where it is included the interior discontinuities, this formulation allows to vary the fields of displacements, deformations, stress and tractions in an independent way, this formulation is the most general, although others also exist as the formulation of Hellinger-Reissner and that of Hu-Washizu, which have variation of mixed fields.

It is developed starting from the functional one with interior discontinuities the stiffness matrix, first varying a single field, later, the mixed stiffness matrix of two fields is obtained, where it is varied the field of the displacements and the field of deformations, finally the mixed stiffness matrix of three fields is obtained, in which the field of displacements, the field of deformations and the field of stress are varied.

At the moment with the support of the Finite Element Method it is to model the fracture problem through two formulations: one is with the theory of continuous models, where relationships stress-deformation are used, and another is with the discrete theory which uses relationships traction-jump for the characterization of the problem, in this work use of the discrete theory it is made.

In the discrete theory when the discontinuity appears cohesive forces they are presented that should take in bill, this is achieved through cohesive models. The discontinuity is modeled like a line where it concentrates the mechanisms of degradation of the material, it is managed that for this line a progressive degradation of the material exists, that which begins when one has the maximum principal stress it exceeds or it is similar to the stress yielding of the material. In the discrete theory the parameters that have more importance to determine the localization of the discontinuity and their trajectory, are the tractions and the call fracture energy, which is a parameter of each material.

When one makes use of the formulation of displacements the stress they are not continuous, for what is obtained different values for a node, this makes that the variations of stress are big, what causes numeric problems when the normal one is calculated. It thinks about that to solve this problem the stress they are softened with the use of the Superconvergent Recovery Patch, which avoids the abrupt change of the stress among the elements and it achieves the continuity in the field of stress in the considered Patch.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Definición del problema

La mecánica del daño estudia el proceso de falla de los materiales, que pueden presentar procesos inelásticos irreversibles, ya sea de plasticidad y daño, o solo daño. En las estructuras los procesos inelásticos se pueden presentar como grandes deformaciones en zonas muy reducidas, que finalmente lleva a un desarrollo progresivo de fisuras, fracturas, o bandas de deslizamiento libres de tensión. La mecánica del continuo establece que la falla está asociada al fenómeno de localización de deformaciones inducido por inestabilidades a nivel material.

Para estudiar la mecánica del daño, se parte de formulaciones variacionales, las cuales contienen las ecuaciones que gobiernan el problema. Las formulaciones variacionales, se basan en un tratamiento matemático riguroso y profundo, dentro del cual las soluciones numéricas deben garantizar su existencia, ser estabilidad y convergencia.

La mayoría de materiales estructurales a medida que se someten a un estado de esfuerzos van cambiando sus propiedades. El mecanismo de degradación del material es complejo, la simulación de la degradación del material involucra tres factores; la concepción de la parte física del fenómeno, la formulación variacional de los modelos teóricos, y métodos numéricos rigurosos que serán procesados a nivel computacional. Los factores en que se debe poner más atención en el modelado del daño son:

- Caracterización constitutiva del material;
- Planteamientos de estrategias generales y robustas de solución;
- Consistencia termodinámica; y
- Acoplamiento de problemas a distinta escala, es decir degradación del material a nivel microscópico, hasta la representación de degradación del material de forma macroscópica.

La presencia del daño en estructuras induce estados límite de discontinuidades en los campos de deformación y desplazamiento, además de complicaciones matemáticas en el modelado, el cual predice en algunos casos tan solo soluciones singulares. Por esta razón una herramienta para realizar estudios más rigurosos y profundos, se realiza con aproximaciones numéricas.

Existen en nuestro país un gran número de problemas de ingeniería donde se puede aplicar la mecánica del daño, se espera aplicar soluciones numéricas que permitan el manejo de este tipo de problemas ya que actualmente la simulación del proceso de falla es uno de los temas que más desafíos presenta por su complejidad.

### 1.2 Antecedentes

En el área de ingeniería es de gran interés conocer el comportamiento de las estructuras, para esto se hacen modelos que permiten tener una aproximación del comportamiento de las estructuras. Con la simulación podemos conocer los estados de esfuerzos y deformaciones actuantes en el modelo, desde que la estructura se ve sometida a un estado inicial de carga evolutiva, hasta que llega la estructura al colapso. Cuando se desarrollan análisis a nivel macroscópico se debe tener presente que el comportamiento de un modelo, está determinado por la estructuración que

presenta, desde el acomodo de los átomos que componen al elemento a nivel microscópico, hasta el acomodo del elemento estructural que forma parte de la estructura a nivel macroscópico.

La mayoría de materiales utilizados en ingeniería, cuando se ven sometidos a un estado de cargas incrementales, desarrollan un comportamiento elástico al inicio, cuando las fuerzas aumentan, llegan a un umbral, donde empieza un comportamiento que puede ser; plástico, elastoplástico o como degradación del material, esta degradación se modela como un ablandamiento del material.

El daño se presenta como una pérdida de resistencia fuera del rango elástico, en el rango inelástico puede haber presencia de grietas, que dependiendo del estado de cargas pueden cerrarse o abrirse. Para modelar grietas existen múltiples formas, una posibilidad es incluir en el análisis elementos tipo junta en el continuo elástico para representar las fisuras y sus posibles trayectorias. Los avances obtenidos hasta ahora permiten estudiar diferentes materiales, como los isótropos, los cuales son una simplificación de las propiedades del material, ya que como tal no existen en la naturaleza, hasta los anisótropos, inclusive se puede estudiar modelos para análisis no lineal de materiales compuestos.

En la literatura se presentan múltiples formulaciones variacionales para simular el proceso de falla en materiales, estas formulaciones se pueden clasificar principalmente en tres; de un campo, mixtas e híbridas. Las cuales utilizan modelos constitutivos, los cuales determinan el comportamiento del material, estos se clasifican en continuos y discretos. En la formulación continua para definir el comportamiento del material, se utilizan relaciones esfuerzo-deformación, y para la formulación discreta se utilizan relaciones tracción-salto. Con las formulaciones variacionales, los métodos numéricos y las herramientas computacionales, estamos en la posibilidad de simular los problemas de daño que se presentan en las estructuras.

### 1.3 Justificación

Es fundamental en ingeniería el análisis del estado de deformaciones y esfuerzos de los materiales deformables, ya que todos los estudios y avances obtenidos se ven reflejados directamente en diseños más confiables y óptimos. Estos análisis permiten predecir los posibles modos de falla, además permiten dar una estimación de la carga última, la cual está asociada al mecanismo de falla, inclusive se puede obtener el comportamiento de la estructura después de la carga última cuando se tiene degradación del material, hasta llegar al colapso, entonces, sí se puede estimar mejor los resultados con mejores formulaciones, se puede tener factores de seguridad más reales y así optimizar el diseño de las estructuras.

El estudio de la mecánica del daño se aplica en diversas áreas, por ejemplo para ingeniería civil, las estructuras que se presentan más complejas son las de concreto, ya que es un material anisótropo, lo que hace más complejo el predecir la falla. En general la mecánica del daño puede aplicarse a estructuras como; presas, puentes, termoeléctricas etc., también se utiliza en problemas geotécnicos, como estabilidad de taludes y terraplenes, desplazamientos en laderas naturales, aludes de tierra que se caracterizan por un desplazamiento masivo de material, otro problema de aplicación, es el determinar la capacidad última de las cimentaciones.

Estos conceptos se pueden aplicar al igual a la industria, donde se puede desarrollar modelos capaces de evaluar la degradación del material y la susceptibilidad a las fisuras, esto permite tener reducciones en los costos y mejoras en la calidad del producto final.

La mecánica computacional toma en cuenta principalmente tres aspectos, estos son: física del problema, métodos numéricos de solución y aspectos computacionales. Para tener modelos con mejor aproximación, se requiere complejas formulaciones teóricas, métodos numéricos robustos y consistentes, lo anterior es fundamental para poder desarrollar métodos convergentes y de una precisión considerable aún con el comportamiento no lineal que lleva intrínseco el problema.

En la actualidad aún existen limitaciones importantes en las aproximaciones aplicadas a los modelos desarrollados, lo cual conduce a la diversificación de las líneas de investigación, esto con el fin de tener un mayor detalle y precisión en los fundamentos del problema.

En este trabajo de tesis se plantea como objetivo principal la presentación de herramientas eficientes y completas de simulación del daño, que permita el modelado de la falla, permitiendo la localización de la discontinuidad y la determinación de su trayectoria, con el uso de formulaciones variacionales y métodos numéricos eficientes, específicamente Elementos Finitos del modelo de Discontinuidades Interiores.

## 1.4 Contenido de la tesis

En el capítulo 2 se describe las tendencias del modelado numérico del daño en materiales. Se muestra un panorama general de la mecánica de la fractura, que fue de los primeros estudios para estructuras que presentan daño, específicamente se estudia la mecánica del daño elástica lineal. Se muestra también modelos que surgieron después de la mecánica de la fractura como los de la mecánica del daño, de los cuales se estudio los modelos de daño continuo en su modelo de agrietamiento distribuido, otro modelo de daño que se estudia es el modelo de daño discreto específicamente modelos de grieta discreta y de elementos finitos con el modelo de discontinuidades interiores, finalmente se define el PVF en el modelo de discontinuidad discreta.

En el capítulo 3 se hace un estudio de los métodos variacionales de la mecánica, se incluye una descripción general de la formulación variacional del problema, con sus características y ventajas, se describe la formulación variacional del problema, además se marcan los fundamentos de la formulación canónica de Fraeijs de Veubeke, que es la base de los elementos finitos con el modelo de discontinuidades interiores, se muestra que de la formulación canónica de Fraeijs de Veubeke se desprenden otras formulaciones, que dependen de los campos sometidos a variación. Se revisa la formulación variacional del modelo de discontinuidades interiores y se especifica la formulación variacional del Modelo de Discontinuidad Discreta y finalmente se muestra el funcional que satisface el PVF del Modelo de Discontinuidad Discreta.

En el capítulo 4 se plantea la formulación numérica de la mecánica del daño, en este capítulo a través de los funcionales se llega a los elementos finitos con discontinuidades interiores variando diferentes campos. Primero se hace variar el campo de los desplazamientos llegando a los elementos finitos de desplazamientos con discontinuidades interiores, después se llega a los elementos finitos mixtos con discontinuidades interiores, donde primero se varía dos campos, estos son; desplazamientos y deformaciones, finalmente se obtienen los elementos finitos mixtos con discontinuidades interiores, variando el campo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos. Para cada una de estas formulaciones se obtiene las matrices de rigideces que se usan para la implementación. Al final del capítulo se describe el modelo de daño discreto que se utiliza en la implementación y por tanto a los ejemplos de aplicación.

En el capítulo 5 se muestran los ejemplos de aplicación utilizando un programa hecho en el programa MATLAB dicho programa fue desarrollado en el grupo de Mecánica Aplicada que dirige

el Dr. A. Gustavo Ayala y para aumentar su potencial se espera implementarlo en el programa FEAP en el trabajo Doctoral del M. en C. Jaime Retama Velasco. Los ejemplos desarrollados en este capítulo son analizados utilizando elementos finitos con discontinuidades interiores en el modelo discreto. Se inicia los ejemplos con un elemento finito con discontinuidades interiores, el cual se somete a un estado de desplazamientos y se estudia su comportamiento para sustentar los ejemplos consecuentes, después se describen algunos aspectos que se deben tener presentes durante el modelado, a continuación se estudian estructuras sometidas a desplazamientos prescritos las cuales son llevadas hasta el colapso. Los elementos quedan sujetos a un estado de cargas así se describe su comportamiento y su forma de falla, además de su capacidad máxima.

En el capítulo 6 se dan las conclusiones finales y se plantean las líneas de investigación futuras, finalmente se escribe el apéndice A que muestra los fundamentos del el análisis no lineal que es base del análisis de los ejemplos estudiados en este trabajo.

## Capítulo 2

# Modelado numérico del daño en materiales

### 1.1 Generalidades

Cuando los materiales están sujetos a grandes cargas o deformaciones se puede presentar un proceso de deformación plástica, este en su culminación es conocido como fractura. La fractura se manifiesta físicamente como una separación o fragmentación de un sólido en dos o más partes bajo las acciones de cierto estado de esfuerzos. La fractura se puede clasificar en dos según el fenómeno que se presenta en el extremo de la grieta:

1. Fractura dúctil: Esta se presenta como una consecuencia de una intensa deformación plástica en la vecindad de la grieta.
2. Fractura frágil: Esta se propaga con muy poca deformación plástica en la vecindad de la grieta.

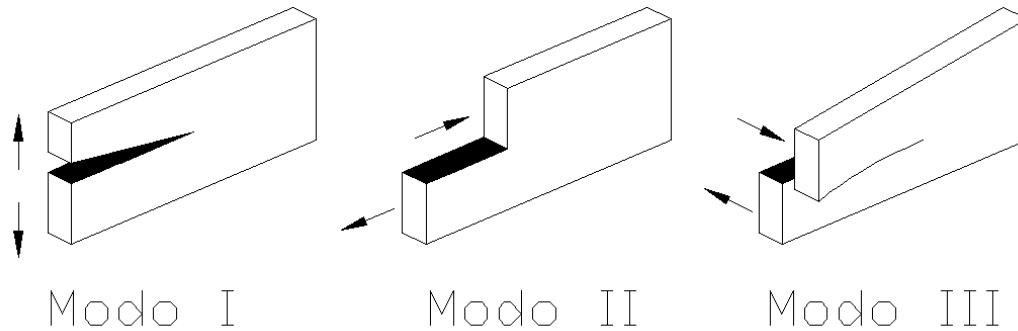
Cuando se presenta la fractura de forma súbita, se desarrolla una propagación inestable de una fisura, es importante señalar que este tipo de fractura puede o no estar precedida de una propagación lenta de la fisura. Cuando se presenta la fractura lenta existe una propagación estable de la fisura, para que siga creciendo la fisura es necesario un incremento continuo de las cargas o de los desplazamientos. En ingeniería es de gran importancia poder determinar el tipo de fractura que se presenta y si la propagación de la fisura va a ser de una forma lenta o rápida.

En últimas décadas el estudio de fractura en los elementos estructurales ha ido evolucionando con el conocimiento de los efectos que se presentan en los extremos de la grieta, estas grietas actúan como concentradores de esfuerzos cuando se le aplica cierto estado de cargas, el material delante de la grieta está sometido a esfuerzos de tracción muy grandes, además se presentan esfuerzos de corte en planos de 45° respecto al plano de la grieta. Con esto en el vértice de la grieta se alcanza el esfuerzo admisible o el de fluencia, aún cuando el esfuerzo medio al que se ve sometido el cuerpo se encuentre en valores inferiores. La fisura se puede presentar cuando es sobrepasado el valor del esfuerzo de fluencia en el vértice de la o grieta.

Los mecanismos de falla que están involucrados en la iniciación y propagación de la grieta se enlistan a continuación (Ortúzar R. 1999).

- Fractura frágil
- Fractura dúctil
- Fatiga
- Creep
- Corrosión-fatiga
- Corrosión-esfuerzo

Los modos de falla que se consideran presentes en el material son tres; I apertura, II corte en el plano y III corte fuera del plano. Estos se representan en la figura 2.1:



**Fig. 2.1 Modos fundamentales de falla (Bažant y planas, 1998)**

A continuación se presenta una descripción general de las aproximaciones más comunes para el análisis de la falla en materiales en un nivel macroscópico, principalmente se dividen según sus modelos constitutivos en aproximaciones continuas que utiliza relaciones constitutivas esfuerzo-deformación y aproximaciones discretas en donde se utiliza relaciones constitutivas que son del tipo tracción-salto.

## 1.2 Mecánica de la fractura elástica lineal

La mecánica de la fractura es una rama de la mecánica de los cuerpos deformables, está enfocada al estudio de los sólidos que están agrietados, principalmente para materiales frágiles. Se busca obtener la distribución de esfuerzos y deformaciones, especialmente en la punta de la grieta. Dependiendo del mecanismo que presente se pueden clasificar en: Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, cuando el mecanismo no presenta plasticidad y si lo presenta, entonces, se aplica la Mecánica de la Fractura no Lineal. Los criterios que normalmente están basados en el esfuerzo máximo admisible o esfuerzo de fluencia, cuando las estructuras presentan una fisura ya no son suficientes, entonces se puede hacer uso de la mecánica de fractura, con la que se obtienen buenos resultados, pero tiene muchas hipótesis simplificadoras que no son de aplicación general pero algunos conceptos son utilizados por otros métodos.

La Mecánica de la Fractura Elástica Lineal trata de simular la falla en materiales con ayuda de los métodos numéricos, especialmente el de los Elementos Finitos y el de las Ecuaciones Integrales de Frontera. Cuando se usa elementos finitos para la propagación de la grieta es necesario remallar el dominio en la región de la grieta usando un procedimiento como el de Swenson e Ingrassia (1987).

Se maneja en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal el factor de intensidad de esfuerzos  $K$ , que es una variable que depende linealmente de la carga aplicada y es función de la longitud de la grieta y otros factores geométricos del sólido. El factor  $K$  es una medida del nivel de deformación que está presente en la vecindad de la grieta en una condición de fluencia para una amplia variedad de geometrías. El factor  $K$  se puede calcular por diversos métodos, estos pueden ser analíticos, numéricos, y experimentales, se considera que el material falla cuando  $K$  es mayor al valor crítico  $K_c$ , que es la propiedad de tenacidad del material.

Irwin determinó que cuando la zona plástica es pequeña con respecto a las dimensiones, longitud de la fisura y espesor del material, que son características del sistema, la formación de tal zona puede ser considerada como una perturbación a la solución elástica, asumiendo que la zona plástica es circular, además en materiales que se consideran isotrópicos linealmente elásticos y bajo



esfuerzo plano o deformación plana los campos de esfuerzo y deformaciones en la punta de la grieta presentan una singularidad.

Para poder determinar la forma de la zona plástica según la energía de distorsión o criterio de fluencia de Von Mises, se considera al material elástico, perfectamente plástico y no se toma en cuenta la redistribución de esfuerzos debido a deformación plástica.

Las ventajas de este método es que localiza la discontinuidad en forma física a través de la aparición de una grieta, los resultados que se obtienen son satisfactorios en materiales frágiles. Las desventajas que presenta, es el alto costo computacional debido al remallado para cada paso del análisis y que solo se puede aplicar a materiales frágiles que presentan una grieta inicial.

## 1.3 Modelos de la mecánica del daño

### 2.3.1 Modelo de daño continuo

#### 2.3.1.1 Agrietamiento distribuido

Existen principalmente tres modelos; grieta fija, grieta fija multidireccional y grieta giratoria. Cuando se inicia la fisuración en el elemento, el material, que en un principio era isótropo y elástico, cambia por uno ortotrópico que es función de la dirección de la fisuración. Haciendo este procedimiento se conserva la topología inicial de la malla.

Dentro del modelo de grieta fija la dirección normal a la fisura, es fija después de iniciarse la grieta. Los modelos de grieta giratoria admiten que la dirección normal a la fisura puede girar durante el proceso de fisuración, siguiendo las direcciones de los ejes de tensiones o deformaciones principales.

En la figura 2.2 se representa el modelo de fisura distribuida más simple.

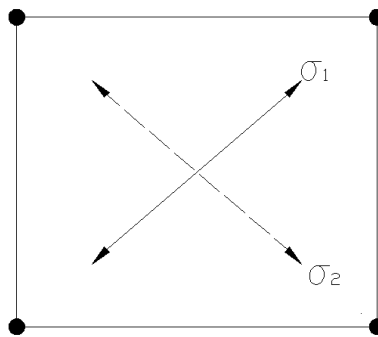


Fig. 2.2 Modelo de fisura para un elemento de tensión plana

Cuando el esfuerzo principal mayor supera el esfuerzo de tracción límite se supone que aparece una fisura en la dirección perpendicular al esfuerzo principal máximo. Cuando esto sucede se modifica la matriz constitutiva en ejes locales de manera que se anula la resistencia en la dirección normal a la fisura, manteniéndose intacta en la dirección de ésta. Por lo general se usa un módulo de rigidez por cortante reducido por un coeficiente  $\beta$ . La nueva relación ortotrópica en ejes locales se escribe en ejes globales mediante la transformación estándar, la cual se realiza por medio de la matriz de rotación  $T$  que depende de la dirección de la fisura.

El modelo de grieta distribuida hace una aproximación numérica como si fueran múltiples grietas pequeñas que son paralelas uniformemente distribuidas sobre una cierta área o región. En el modelo de Rashid (1998), se considera el cuerpo agrietado como un medio continuo e incluye la presencia de la grieta por medio de la modificación de las propiedades físicas.

Los modelos de grieta discreta según Rots (1988) pueden ser divididos en tres grupos: Grieta fija, Grieta fija multidireccional y Grieta giratoria.

En el modelo de agrietamiento distribuido las deformaciones se descomponen en dos: deformaciones de la parte continua que generalmente es elástica  $\varepsilon^e$  y las deformaciones de agrietamiento  $\varepsilon^f$ .

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f \quad (2.1)$$

Para el comportamiento del material se utilizan propiedades constitutivas del material no agrietado y las propiedades constitutivas del agrietado.

$$\Delta\sigma = D^e \Delta\varepsilon^e \quad (2.2)$$

$$\Delta T = D^f \Delta\varepsilon^f \quad (2.3)$$

$\Delta\sigma$  incremento de los esfuerzos en coordenadas globales

$\Delta T$  incremento de los esfuerzos en coordenadas locales

$\Delta\varepsilon^e$  incremento en las deformaciones elásticas globales

$\Delta\varepsilon^f$  incremento en las deformaciones de agrietamiento locales

$D^e$  matriz constitutiva de la parte no agrietada

$D^f$  matriz constitutiva de la parte agrietada

La matriz constitutiva de la grieta es función de los módulos de rigidez de la grieta en modo I, II, III de falla. La forma más simple es modelar de forma desacoplada. El modo I ha sido ampliamente estudiado para diversos materiales, el modo II de falla es un parámetro cuyo módulo es expresado en función del módulo de rigidez a corte y del factor de reducción de corte  $\beta$ .

Un punto muy importante en esta aproximación es determinar el ancho de banda de agrietamiento del elemento finito fisurado. La obtención de este parámetro permite la objetividad de los resultados a través de la correcta disipación de energía.

Algunos problemas característicos de los modelos de grieta distribuida en casos de fractura localizada con modo mixto de falla son:

- Efectos de la malla: Los resultados se ven afectados por el tamaño y orientación de los elementos, aunque esto puede ser minimizado utilizando mallas más finas.
- Modos cinemáticos falsos: Producto de la falta de convergencia en el análisis.
- Atoramiento de los esfuerzos: Esto ocurre por la compatibilidad de desplazamientos entre los elementos y de que la grieta no está alineada con el borde del elemento, como consecuencia el elemento en el interior de la banda de ablandamiento impone deformaciones a los elementos vecinos, si los elementos vecinos limitan dichas

deformaciones se produce un atoramiento de los esfuerzos en el interior y no llega a descargarse la banda por el ablandamiento.

## 2.3.2 Modelo de daño discreto

### 2.3.2.1 Grieta discreta

En los modelos de grieta discreta se supone que aparece una fisura cuando la fuerza nodal normal a los contornos de un elemento finito excede el máximo esfuerzo de tensión permisible, cuando sucede esto se agregan nuevos grados de libertad en la posición de dicho nodo y se crea así una identidad geométrica entre el nodo antiguo y el nuevo. Esto se muestra la figura 2.3:

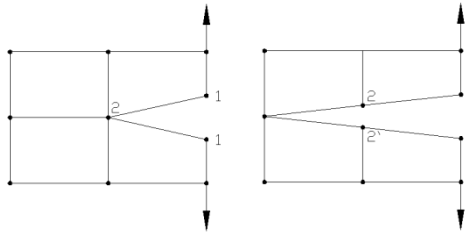


Fig. 2.3 Modelo de grieta discreta

Las desventajas que tiene este método son que requiere un cambio en la topología de la malla y que la propagación de las fisuras está restringida a las fronteras de los elementos. El método puede ser mejorado utilizando remallado y con el uso de elementos de interfaz como fisuras predefinidas en las zonas donde se espera la propagación de estas.

Se han utilizado ampliamente el método de los elementos finitos y el método de la ecuación integral de frontera para analizar problemas de la mecánica de la fractura con el modelo de la grieta discreta. En estos métodos se utilizan aproximaciones numéricas para calcular el valor de intensidad de esfuerzos "K" o la tasa de liberación de energía "G" y así relacionar ambas. La ventaja de calcular la tasa de liberación de energía es, que puede aplicarse a materiales con comportamiento no lineal.

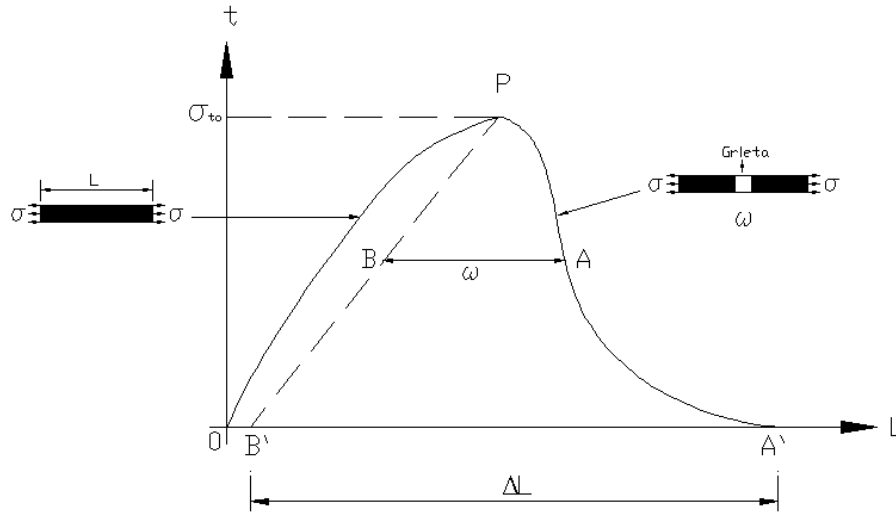
Una vez que se forma la grieta, por medio de la separación de los bordes de los elementos no se producen transmisión de esfuerzos a través de esta, existen materiales causifrágiles los cuales deben tener un tratamiento diferente a lo antes mencionado en este párrafo, ya que estos materiales si presentan transmisión de esfuerzos a través de las grietas. Se puede modelar los materiales causifrágiles utilizando el método de la grieta discreta, esto se logra colocando elementos de interface en la superficie de la grieta para incluir los efectos de los esfuerzos cohesivos presentes en la grieta cuando esta se va abriendo. Estrictamente no existe una discontinuidad física dentro del dominio, en lugar de esto se considera una grieta cohesiva en la que la transmisión de esfuerzos existe a través de está. El comportamiento del material en las interfaces es determinado por un modelo constitutivo discreto, que tiene una relación tracción-salto y se dice que cuando la grieta se propaga y se va abriendo existe transferencia de esfuerzos entre los bordes de la grieta.

En 1976 Hillerborg propone una grieta cohesiva que se puede desarrollar en cualquier lugar de un sólido sin la presencia de una macrogrieta. Esta prolongación de grieta cohesiva fue llamada grieta ficticia. Hillerborg supuso a través de un experimento en una prueba de tensión en el concreto, que la transferencia de esfuerzos es función de la apertura de la grieta:

$$\sigma = f(w) \tag{2.4}$$

Donde  $f(w)$  es una característica del material, determinada experimentalmente.

Hillerborg (1976) propuso por primera vez los modelos de grieta cohesiva para simular la degradación del material en el concreto bajo condiciones iniciales sin agrietamiento. Esta aproximación está basada en considerar que hasta antes de la carga máxima, las deformaciones en el continuo se distribuyen uniformemente, pero después de ese punto, las deformaciones se concentran en una zona, lo que da origen a una discontinuidad física.



**Fig. 2.4 Idealización de una prueba a tensión según Hillerborg**

Los resultados obtenidos demostraron que después de la carga máxima las deformaciones se concentran en una banda estrecha que posteriormente se desarrolla hasta convertirse en una discontinuidad física, mientras el resto del continuo se va descargando.

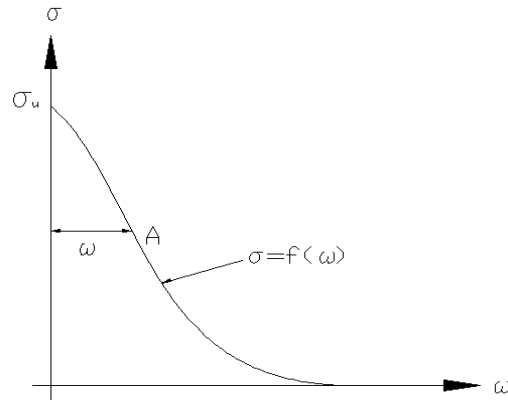
Se puede ver en la figura 2.4 que hasta el punto máximo de la curva las cargas se incrementan gradualmente, mientras las deformaciones están uniformemente distribuidas sobre todo el continuo, arco OP. En el punto P de carga las deformaciones se concentran en algún lugar del continuo y esto da lugar a una grieta cohesiva que es normal al eje de la barra. Después del punto máximo de carga, la grieta empieza a abrir mientras sigue transmitiendo esfuerzos a través de sus bordes, a la par el resto del continuo se descarga y sus deformaciones decrecen uniformemente a lo largo de la línea PB.

Para el modelo de grieta cohesiva en su forma más simple, se tienen las siguientes consideraciones.

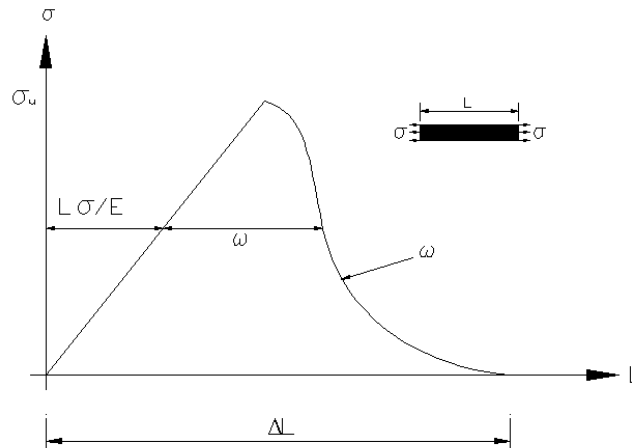
- Fuera de la zona de agrietamiento el material se considera como isótropo lineal elástico, con módulo elástico  $E$  y relación de Poisson  $\nu$ .
- Se considera que cuando los esfuerzos principales son iguales o mayores al esfuerzo de tensión  $\sigma_{to}$  en un punto del dominio aparece la grieta, y esta se propaga perpendicularmente a la dirección del esfuerzo principal máximo. Se considera que la grieta aparece sólo por esfuerzos de tensión y no existen esfuerzos de cortante.

- Si el análisis es limitado al modo I de fractura, entonces los esfuerzos que se transfieren a través de las paredes de la grieta están dados por:
 
$$\sigma = f(\omega) \tag{2.5}$$

Cuando se alcanza el valor de  $\sigma_u$  se tiene una apertura de grieta  $\omega = 0$ . Para simplificar el análisis se supuso no tomar en cuenta las deformaciones inelásticas y que el comportamiento global del material es lineal elástico el comportamiento se muestra en la figura 2.5.



a) Curva de ablandamiento esfuerzo-apertura



b) Curva esfuerzo-desplazamiento Bazant y Planas (1998)

Fig. 2.5 Curvas del comportamiento del material

Cuando se utiliza este método los resultados son buenos, sirviendo como punto de comparación al emplear otros métodos. Los elementos de interface proporcionan resultados satisfactorios debido a su representación cinemática fuerte del fenómeno de agrietamiento.

### 2.3.2.2 Elementos Finitos con Discontinuidades Interiores.

Esta aproximación surge de la necesidad de tener un modelo que tenga las virtudes de los modelos de grieta discreta y grieta distribuida, es decir un modelo que localice el daño pero que no requiera remallado, y que no presente las dificultades de los modelos antes mencionados. En la aproximación de discontinuidades interiores, los elementos finitos son mejorados en sus funciones

de interpolación para que sus campos de desplazamientos y deformaciones sean más adecuados para resolver problemas de fractura y/o localización de deformaciones.

Con esta aproximación es posible introducir discontinuidades sin necesidad de modificar la malla, además no existe la necesidad de definir con anterioridad zonas potenciales de falla ya que las discontinuidades se pueden introducir en cualquier momento del análisis.

Para el comportamiento de las discontinuidades se usan dos criterios en los modelos de discontinuidades interiores, uno es el de falla, que sirve para determinar el momento en que la discontinuidad aparece y el otro es el criterio de propagación, que se utiliza para conocer la posición geométrica de la discontinuidad durante el proceso de análisis.

Existen tres aspectos fundamentales que considera el modelo de discontinuidades interiores, estos son; la cinemática de los desplazamientos, la cinemática de las deformaciones y el equilibrio en la discontinuidad. En este modelo se debe imponer la continuidad interna de tracciones, de tal forma que se pueda cumplir el equilibrio interno entre las tracciones que están dentro de la discontinuidad y las que se encuentran en el material contiguo.

Podemos clasificar el modelo de discontinuidades interiores según el tipo de discontinuidad y las relaciones constitutivas utilizadas (Fernández, 2002). Considerando una barra sujeta a un estado de tensión como la mostrada en la figura 2.6 hasta que alcanza su resistencia máxima a tensión del material. El proceso de falla se realiza introduciendo una discontinuidad en el campo de desplazamientos y con una relación constitutiva, así surgen las siguientes aproximaciones:

1. Aproximación continua. En esta aproximación se considera que el sólido es continuo en todo el dominio, para su análisis se utilizan relaciones constitutivas esfuerzo-deformación. Se considera que la falla ocurre cuando se produce una zona de localización de deformaciones debido al deterioro del material. Para esta aproximación existen dos modelos: discontinuidades débiles y discontinuidades fuertes, en el primero de estos el campo de desplazamientos es continuo, aunque el campo de deformaciones es discontinuo en el dominio debido a que existe un salto en el campo de deformaciones a través de los bordes de la zona de localización, en el segundo modelo el campo de desplazamientos es discontinuo y el campo de deformaciones es no acotado en la discontinuidad. Esto sucede cuando se hace que el ancho de la zona de localización tienda a cero.
2. Aproximación discreta. En esta aproximación se considera que en el sólido aparece una grieta y por lo tanto deja de ser continuo, debido a esto se emplean relaciones constitutivas tracción-salto en la discontinuidad, para el demás continuo se utilizan relaciones constitutivas esfuerzo-deformación.

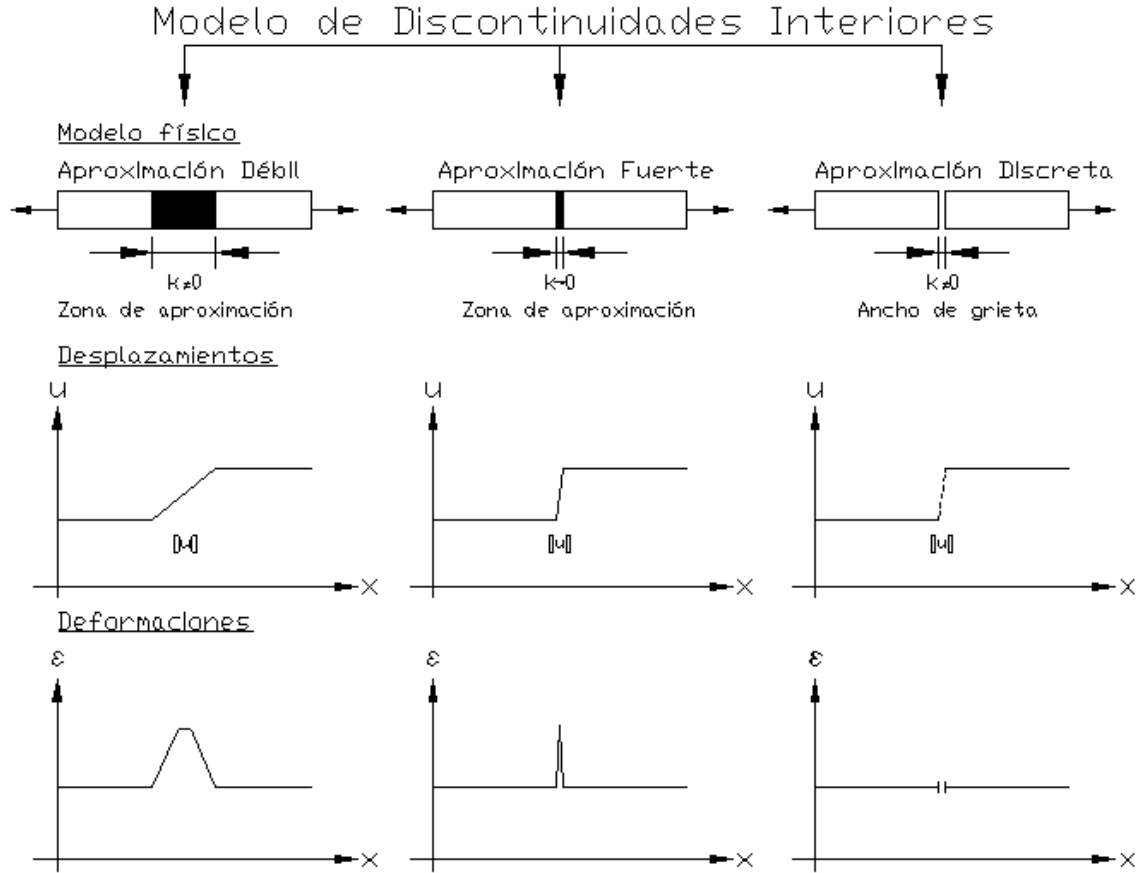


Fig. 2.6 Aproximaciones

En este modelo se utiliza el enriquecimiento cinemático, que es la representación de la posición de la discontinuidad dentro del elemento, así como los desplazamientos relativos entre los bordes de la discontinuidad. Para este modelo existen dos tipos de enriquecimiento llamados local y nodal, el primero utiliza un nodo interno que captura los saltos de la discontinuidad, esto para enriquecer el campo de desplazamientos, los grados de libertad del nodo interno se pueden condensar en forma estática. El enriquecimiento nodal está basado en el método de la partición de la unidad (Melenk y Babuska, 1996), esta representa el salto con la adición de grados de libertad en los nodos ya existentes.

### 2.3.2.2.1 Ecuaciones que gobiernan las aproximaciones de discontinuidades interiores

Las ecuaciones que gobiernan a las aproximaciones o también conocido por el PVF se muestran a continuación, la primera parte pertenece a la zona continua donde se puede presentar comportamiento elástico, y la segunda parte pertenece a la zona de localización que es donde se concentran los efectos no lineales.

#### Discontinuidad discreta

En el PVF de esta aproximación las ecuaciones de compatibilidad cinemática y constitutiva se definen en  $\Omega/S$ , ya que dependen de las deformaciones, se consideran que solo existen en la parte continua del sólido. Mientras que la compatibilidad constitutiva en  $S$  depende de la relación que existe entre las tracciones y el salto, esta se satisface usando una relación constitutiva discreta. La

continuidad interna de tracciones está dada por la proyección de los esfuerzos en el exterior de la discontinuidad y las tracciones dentro de la discontinuidad. Esto varía con las aproximaciones anteriores, donde las tracciones dentro de la discontinuidad están dadas por la proyección de esfuerzos en la discontinuidad.

Parte continua

Compatibilidad cinemática

$$\bar{\varepsilon}^u(x, t) - \bar{\varepsilon}(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega/S \quad (2.6)$$

Compatibilidad constitutiva

$$\sigma^{\bar{\varepsilon}}(x, t) - \sigma(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega/S \quad (2.7)$$

Equilibrio interno

$$\nabla \cdot \sigma(x, t) + b(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega/S \quad (2.8)$$

Equilibrio externo

$$\sigma(x, t) \cdot \nu = t^*(x, t) \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (2.9)$$

$$\sigma(x, t) \cdot \nu = t(x, t) \quad \text{en } \Gamma_u$$

Condiciones esenciales de frontera

$$u(x, t) = u^*(x, t) \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2.10)$$

Zona de localización

Continuidad interna de tracciones

$$\sigma_{\Omega^-} \cdot n - T = \llbracket \sigma \rrbracket_{S^-} \cdot n = 0 \quad \text{en } S \quad (2.11)$$

$$\sigma_{\Omega^+} \cdot n - T = \llbracket \sigma \rrbracket_{S^+} \cdot n = 0 \quad \text{en } S$$

Continuidad externa de tracciones

$$\sigma_{\Omega^+} \cdot n - \sigma_{\Omega^-} \cdot n = \llbracket \sigma \rrbracket_{\Omega/S} \cdot n = 0 \quad \text{en } S \quad (2.12)$$



## Capítulo 3

### Introducción a los métodos variacionales de la mecánica

#### 3.1 Generalidades

El análisis de estructuras que no se pueden modelar por medio de barras como, armaduras, marcos, arcos, etc., se ha manejado con la mecánica del medio continuo, la cual trata de resolver el problema a partir de la integración de ecuaciones diferenciales que gobiernan la cinemática y el equilibrio de un sólido elástico. Este enfoque, sin embargo, solo es aplicable a cuerpos simples, cuando se presentan estructuras complejas, se hace necesario recurrir a los métodos numéricos, los cuales resurgieron y se han desarrollado junto con las computadoras digitales, estas permiten un gran manejo de datos a altas velocidades. Durante el siglo XX se desarrolló el método de diferencias finitas Polya (1952) y antes de la mitad del siglo se implantó el método de elementos finitos, sus inicios con Hrennikoff (1941) y Courant (1943), que para una gran cantidad de casos mostró superioridad respecto a diferencias finitas para la solución de problemas. Después del método de los elementos finitos se han desarrollado otros métodos, como el método de los elementos de contorno y los métodos libres de malla, entre otros, sin embargo el método de los elementos finitos se ha impuesto para problemas de la práctica para la mayoría de casos.

El Método de los Elementos Finitos tuvo un gran desarrollo en la mecánica de sólidos y después se extendió a otras áreas de la física, como mecánica de fluidos, transferencia de masas y calor, electromagnetismo, etc. y ha tenido aplicación en procesos industriales, físicos, químicos y naturales, entre otras grandes aplicaciones que tiene el MEF se mencionan las siguientes : el funcionamiento de los filtros de carbón activo (canisters) empleados en la industria automotriz, la dispersión de contaminantes en la atmósfera, diseño de estructuras aerodinámicas para jets, flujos para yacimientos poco profundos, la distribución de estado estacionario de una sustancia pasiva disuelta en agua y transportada por flujo, transporte de múltiples reacciones químicas, clima espacial, galvanización de las hojas de acero y la solidificación de la aleación, aplicaciones financieras como la variación de los precios de activos en la bolsa de valores, simulación de terremotos, en modelación de astrofísica-computacional como es la formación de galaxias y vientos solares, flujo del electrón en semiconductores, la propagación de los incendios forestales, recientemente en problemas de nanotecnología como la mecánica del carbón en nanotubos y el movimiento de glaciares, análisis estructural. Todos estos fenómenos pueden describirse mediante modelos matemáticos muy similares

Se puede decir que toda estructura es del tipo continuo, es decir que presenta infinitos grados de libertad, estos modelos se pueden resolver con modelos matemáticos para casos sencillos, pero para resolver estructuras complejas se introducen técnicas numéricas, las cuales convierten el problema continuo en un problema discreto. Desde el punto de vista matemático se trata de llevar un problema formulado en términos de ecuaciones diferenciales, que por lo común son derivadas parciales, a un problema algebraico, por ejemplo para un problema de una viga en flexión tenemos:

$$EI \frac{d^2u}{dx^2} = -M \rightarrow kd = f \quad (3.1)$$

#### 3.2 Formulación variacional del problema

Una forma común para resolver un problema es a través del planteamiento de las ecuaciones de equilibrio, pero en estructuras muy complejas esto se vuelve poco práctico, pero existe una forma que no presenta tantas dificultades, son los llamados métodos variacionales, que tienen la ventaja

de no requerir que la estructura sea dividida en elementos, ni de la formulación de ecuaciones de equilibrio de cuerpo libre, por esta razón son de gran utilidad para obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de estructuras complejas, como las que se discretizan por el Método de los Elementos Finitos.

Para utilizar el método variacional es preciso utilizar el cálculo variacional, que es una rama de las matemáticas que busca la solución de problemas extremales de funciones de funciones, el objetivo es buscar la función o funciones para las que el funcional tiene una variación nula. Estas funciones desconocidas del funcional pueden ser máximos o mínimos.

La funcional cuya variación es nula presenta un valor estacionario, así el cálculo variacional también conocido como extremal o de variaciones extremales, consiste tanto en la búsqueda de los valores de las funciones independientes asociadas al valor estacionario, así como la determinación de ellas.

El principio variacional asociado a un fenómeno físico lleva a las ecuaciones que gobiernan el problema, las cuales se obtienen a partir de las condiciones estacionarias del funcional involucrado. La solución que se obtiene es la solución óptima aunque pueden existir otras soluciones que a pesar de no ser las óptimas nos permiten el manejo de resultados. El utilizar la formulación variacional de un problema ofrece las siguientes ventajas:

- Un funcional tiene por lo general un sentido físico definido y es invariante. Después de que el funcional se ha formulado, se pueden obtener las ecuaciones que gobiernan el problema expresado en otro sistema coordinado, escribiendo la parte invariante en el nuevo sistema coordinado y después aplicando procedimientos de cálculo de variaciones.
- Los problemas formulados variacionalmente se resuelven con más facilidad que el problema planteado de forma fuerte. En un problema variacional con condiciones de frontera, la transformación se hace utilizando el método de los operadores de Lagrange, de aquí se produce una familia de principios variacionales que son equivalentes entre sí, es decir se pueden obtener diferentes funcionales según los campos independientes que se desee variar.
- Existen casos donde los problemas no pueden ser resueltos en su forma exacta, para esto la formulación variacional ofrece una posibilidad de aproximar el problema. Una formulación variacional puede proporcionar las ecuaciones que gobiernan el problema y las condiciones de frontera en forma aproximada.

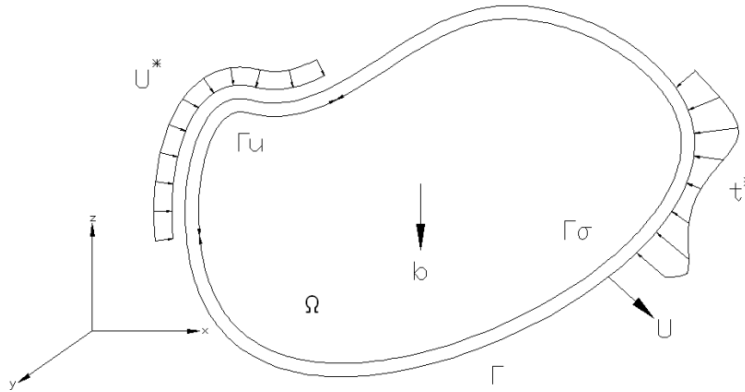
El fenómeno que se estudia en este trabajo es: el proceso de falla de materiales cuasifrágiles mediante el modelo de discontinuidades interiores. De las formulaciones existentes destaca una que es de nuestro interés ya que es la base de las formulaciones posteriores, su desarrollo se muestran en el punto siguiente.

### **3.3 Formulación canónica de Fraeijs de Veubeke**

La formulación variacional de Fraeijs de Veubeke permite la variación independiente de los campos de desplazamiento, deformaciones, esfuerzos y tracciones.

Para la formulación se tiene lo siguiente:

En un sólido continuo como el mostrado en la figura 3.1 con dominio  $\Omega$ , con elementos  $x$  llamados puntos materiales y fronteras  $\Gamma$ , donde las condiciones de frontera son tracciones prescritas  $t^*$  en  $\Gamma_\sigma$  y los desplazamientos prescritos  $u^*$  en  $\Gamma_u$ , se tiene que  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$  y  $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$



**Fig. 3.1 Medio continuo**

El principio variacional de Fraeijs de Veubeke (1951) sustenta que la primera variación del funcional de energía del continuo, la cual se realiza simultáneamente en los campos de desplazamiento  $u$ , deformación  $\varepsilon$ , esfuerzos  $\sigma$  y tracciones  $t$ , igualada a cero da lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a todas las ecuaciones de campo de la teoría de la elasticidad, incluyendo las condiciones esenciales (desplazamientos) y condiciones naturales (tracciones) de frontera, esto es:

$$\delta\pi_V = 0 \tag{3.2}$$

El potencial de energía del continuo está dado por:

$$\pi_V = U - P + D \tag{3.3}$$

donde:

$U$  es la energía de deformación total, la cual se calcula a partir del campo de deformaciones  $\varepsilon$ .

$$U = \int_{\Omega} W(\varepsilon) d\Omega \tag{3.4}$$

$P$  es la energía potencial de las cargas prescritas, las cuales se calculan a partir del campo integrable de desplazamientos  $u$ .

$$P = \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot u d\Gamma \tag{3.5}$$

$D$  es el potencial de dislocación que introduce un campo representado por los esfuerzos  $\sigma$  y las tracciones  $t$ .

$$D = \int_{\Omega} \sigma : (\varepsilon^u - \varepsilon) d\Omega + \int_{\Gamma_u} t \cdot (u - u^*) d\Gamma \tag{3.6}$$

Así se tiene cuatro campos independientes  $u, \sigma, \epsilon$  y  $t$ :

$$\pi_V(u, \sigma, \epsilon, t) = \int_{\Omega} [\sigma : (\epsilon^u - \epsilon) + W(\epsilon) - b \cdot u] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t \cdot (u - u^*) d\Gamma \quad (3.7)$$

Para un cuerpo elástico se tiene:

$$W(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon : C : \epsilon = \frac{1}{2} \sigma^\epsilon : \epsilon \quad (3.8)$$

Quedando dos campos dependientes los cuales son el de deformaciones  $\epsilon^u$  que depende de los desplazamientos  $u$  y el de los esfuerzos  $\sigma^\epsilon$  que dependen de las deformaciones  $\epsilon$ .

$$\epsilon^u = \nabla^S u = \frac{1}{2} (u \otimes \nabla + \nabla \otimes u)^S \quad (3.9)$$

$$\sigma^\epsilon = C : \epsilon \quad (3.10)$$

Finalmente tenemos expresando la forma variacional el funcional general de Fraeijs de Veubeke con cuatro campos independientes  $u, \sigma, \epsilon$  y  $t$ :

$$\pi_V(u, \sigma, \epsilon, t) = \int_{\Omega} \left[ \sigma : (\epsilon^u - \epsilon) + \frac{1}{2} \sigma^\epsilon : \epsilon - bu \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} t^* u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t (u - u^*) d\Gamma \quad (3.11)$$

Este funcional fue publicado simultáneamente por Washizu (1955) y Hu (1955) cuatro años después que Fraeijs de Veubeke.

### 3.3.1 Casos particulares

Dependiendo de qué campo se varíe, se desprende una serie de formulaciones, las más importantes se mencionan a continuación:

#### 3.3.1.1 Campos simples

Dentro de las formulaciones simples se tiene la de energía potencial total la cual, tiene como campo independiente  $u$ , si el campo independiente es  $\sigma$  tenemos la formulación de energía potencial complementaria, en esta misma clasificación se tiene otra formulación donde se tiene como el campo independiente  $\epsilon$  la cual no tiene un nombre específico.

#### 3.3.1.2 Campos mixtos

Cuando se tiene más de un campo independiente entonces se le llama formulaciones mixtas, con estas formulaciones si se tiene como campo independiente el  $u$  y  $\sigma$  entonces se llega a la formulación de Hellinger-Reissner, cuando se varían  $u, \epsilon$  y  $\sigma$  a esta formulación se le conoce con el nombre de formulación Hu-Washizu y cuando se hace la variación de  $u, \epsilon, \sigma$  y  $t$  la formulación es conocida como formulación de Fraeijs de Veubeke. Existen otras formulaciones donde se puede variar el  $u$  y  $\epsilon$  o donde se varían los campos independientes de  $\epsilon$  y  $\sigma$ .

### 3.4 Formulación variacional del Modelo de Discontinuidades Interiores

Esta formulación se aplica a un sólido dividido en subdominios como se muestra en la figura 3.2, este cuerpo es un medio continuo con dominio  $\Omega$  y tiene frontera en  $\Gamma$ . Para su análisis este medio continuo se divide en tres subdominios  $\Omega = \Omega^- + \Omega^h + \Omega^+$  y fronteras  $\Gamma = \Gamma^- + \Gamma^h + \Gamma^+$  cada uno de estos subdominios tiene un tensor constitutivo  $\mathbf{C}^-$ ,  $\mathbf{C}^h$  y  $\mathbf{C}^+$ . Las condiciones iniciales son: tracciones en la frontera  $t^*$ , en la frontera  $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^- + \Gamma_\sigma^h + \Gamma_\sigma^+$  y desplazamientos prescritos  $u^*$  los cuales están en  $\Gamma_u = \Gamma_u^- + \Gamma_u^h + \Gamma_u^+$  y cumple lo siguiente:  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$  y  $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \emptyset$ .

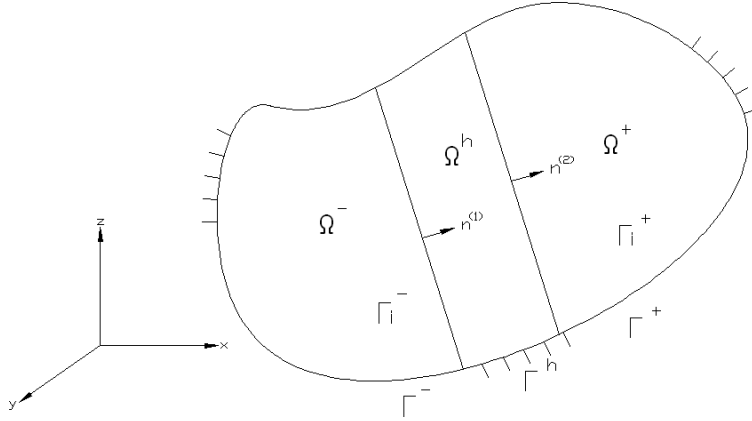


Fig. 3.2 Sólido dividido en subdominios

El funcional de energía para un continuo total, se obtendrá entonces con la suma de los tres subdominios.

$$\pi^\Omega = \pi^- + \pi^h + \pi^+ \quad (3.12)$$

Tomando el funcional de Fraeijis de Veubeke:

$$\pi_V = \int_\Omega \left[ \sigma : (\varepsilon^u - \varepsilon) + \frac{1}{2} \sigma^\varepsilon : \varepsilon - bu \right] d\Omega - \int_\Gamma t^* u d\Gamma - \int_\Gamma t(u - u^*) d\Gamma \quad (3.11)$$

Desglosando este funcional para los tres dominios tenemos:

$$\pi_V^{\Omega^-} \equiv \int_{\Omega^-} \left[ \sigma : (\varepsilon^u - \varepsilon) + \frac{1}{2} \sigma^\varepsilon : \varepsilon - bu \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^-} t^* u d\Gamma - \int_{\Gamma_u^-} t(u - u^*) d\Gamma \quad (3.13)$$

$$\pi_V^{\Omega^h} \equiv \int_{\Omega^h} \left[ \sigma : (\varepsilon^u - \varepsilon) + \frac{1}{2} \sigma^\varepsilon : \varepsilon - bu \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^h} t^* u d\Gamma - \int_{\Gamma_u^h} t(u - u^*) d\Gamma \quad (3.14)$$

$$\pi_V^{\Omega^+} \equiv \int_{\Omega^+} \left[ \sigma : (\varepsilon^u - \varepsilon) + \frac{1}{2} \sigma^\varepsilon : \varepsilon - bu \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^+} t^* u d\Gamma - \int_{\Gamma_u^+} t(u - u^*) d\Gamma \quad (3.15)$$

Se hace una primera variación, después aplicando el teorema de divergencia a las integrales que contienen  $\sigma : \delta \varepsilon^u$  y sustituyendo esto en cada uno de los subdominios (Juárez 2006) nos queda:

$$\begin{aligned} \delta\pi_V^{\Omega^-} &\equiv \int_{\Omega^-} (\varepsilon^u - \varepsilon) : \delta\sigma d\Omega + \int_{\Omega^-} (\sigma^\varepsilon - \sigma) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega^-} (\nabla\sigma + b) \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma^-}} (\sigma \cdot \nu - t^*) \cdot \delta u d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_{u^-}} (\sigma \cdot \nu - t) \cdot \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_{u^-}} (u - u^*) \delta t d\Gamma + \int_{\Gamma_i^-} \sigma_\Omega \cdot n^{(1)} \cdot \delta u d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \delta\pi_V^{\Omega^h} &\equiv \int_{\Omega^h} (\varepsilon^u - \varepsilon) : \delta\sigma d\Omega + \int_{\Omega^h} (\sigma^\varepsilon - \sigma) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega^h} (\nabla\sigma + b) \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma^-}} (\sigma_{\Omega^h} \cdot \nu - t^*) \cdot \delta u d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_{u^-}} (\sigma \cdot \nu - t) \cdot \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_{u^-}} (u - u^*) \delta t d\Gamma - \int_{\Gamma_i^-} \sigma_{\Omega^h} \cdot n^{(1)} \cdot \delta u d\Gamma + \int_{\Gamma_i^+} \sigma_{\Omega^h} \cdot n^{(2)} \cdot \delta u d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \delta\pi_V^{\Omega^+} &\equiv \int_{\Omega^+} (\varepsilon^u - \varepsilon) : \delta\sigma d\Omega + \int_{\Omega^+} (\sigma^\varepsilon - \sigma) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega^+} (\nabla\sigma + b) \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma^+}} (\sigma \cdot \nu - t^*) \cdot \delta u d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_{u^-}} (\sigma \cdot \nu - t) \cdot \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_{u^-}} (u - u^*) \delta t d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+} \sigma_\Omega \cdot n^{(2)} \cdot \delta u d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tenemos que  $\sigma^\varepsilon = C : \varepsilon$  y si los tensores  $C^- = C^h = C^+$  entonces el funcional puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta\pi^\Omega &\equiv \int_{\Omega} (\varepsilon^u - \varepsilon) : \delta\sigma d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma^\varepsilon - \sigma) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla\sigma + b) \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma \cdot \nu - t^*) \delta u + \int_{\Gamma_u} (\sigma \cdot \nu \\ &- t) \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u - u^*) \delta t d\Gamma - \int_{\Gamma_i^-} (\sigma_\Omega^h - \sigma_\Omega^-) n^{(1)} \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+} (\sigma_\Omega^+ - \sigma_\Omega^h) n^{(2)} \delta u d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

En esta ecuación se cumple en forma débil con todas las condiciones del problema de valores en la frontera para un sólido continuo, además tenemos la continuidad interna de tracciones:  $\sigma_\Omega^- \cdot n^{(1)} - \sigma_\Omega^h \cdot n^{(1)} = \llbracket \sigma \rrbracket_{\sigma_i} \cdot n^{(1)} = 0$  en  $\Gamma_i^-$  y  $\sigma_\Omega^+ \cdot n^{(2)} - \sigma_\Omega^h \cdot n^{(2)} = \llbracket \sigma \rrbracket_{\sigma_i} \cdot n^{(2)} = 0$  en  $\Gamma_i^+$ , esto nos muestra que existe continuidad interna de tracciones  $\llbracket \sigma \rrbracket_{\Gamma_i} \cdot n = 0$  en las fronteras  $\Gamma_i^-$  y  $\Gamma_i^+$  por lo que el sistema se encuentra en equilibrio.

### 3.5 Formulación variacional del Modelo de Discontinuidad Discreta

En esta aproximación aparece una grieta en el dominio  $\Omega$  por lo que deja de ser un continuo, se utilizan relaciones constitutivas tracción-salto en la continuidad, mientras que para el demás dominio  $\Omega/S$  se utilizan relaciones constitutivas esfuerzo-deformación.

Para este caso el funcional de energía del continuo está definido por la suma del funcional en los subdominios  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$ , ( $\Omega/S = \Omega^- + \Omega^+$ ) de la ecuación:

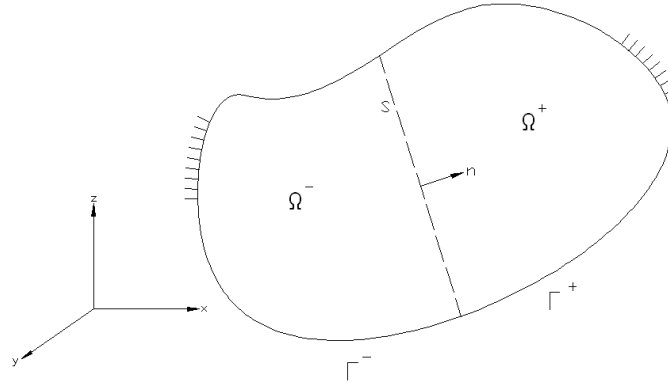
$$\pi^{\Omega/S} \equiv \int_{\Omega/S} [\sigma : (\bar{\varepsilon}^u - \bar{\varepsilon}) + W(\bar{\varepsilon}) - b \cdot u] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t \cdot (u - u^*) d\Gamma \quad (3.20)$$

y el potencial de interface o dislocación  $\pi_D^S$  en la discontinuidad S, el cual se deriva de

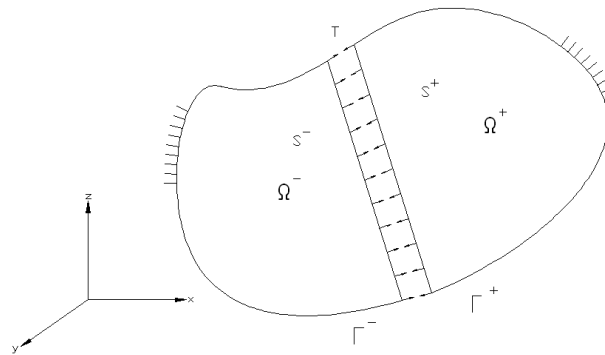
$$\pi_{DFU}^S([\![u]\!] , \sigma_S, \bar{\varepsilon}) \equiv \int_S [\sigma_S : (\bar{\varepsilon}^{\llbracket u \rrbracket} - \bar{\varepsilon}) + W(\bar{\varepsilon})] ds \equiv [\sigma_S \cdot n \cdot \llbracket u \rrbracket - \sigma_S : \bar{\varepsilon} + W(\bar{\varepsilon})] ds \quad (3.21)$$

como el producto de las tracciones  $t$  por el campo de desplazamientos  $u_{s^+} - u_{s^-}$  (el salto  $\llbracket u \rrbracket$ ) ya que el cuerpo deja de ser continuo.

$$\pi_{DDI}^S = \int_S t \cdot \llbracket u \rrbracket ds \quad (3.22)$$



a) Modelo con una discontinuidad fuerte



b) Modelo fragmentado

Fig. 3.3 Modelo con discontinuidad discreta

Incluyendo esta ecuación en:

$$\pi^{\Omega/S} \equiv \int_{\Omega/S} [\sigma : (\bar{\varepsilon}^u - \bar{\varepsilon}) + W(\bar{\varepsilon}) - b \cdot u] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t \cdot (u - u^*) d\Gamma \quad (3.23)$$

Se tiene:

$$\pi_{DDI}^S(u, \sigma_{\Omega/S}, \bar{\varepsilon}, \llbracket u \rrbracket, t) = \pi^{\Omega/S} + \pi_D^S \quad (3.24)$$

Que es un término de cinco variables. Desglosando  $\pi^{\Omega/S} + \pi_D^S$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi_{DDI}^S \equiv & \int_{\Omega/S} [\sigma: (\bar{\varepsilon}^u - \bar{\varepsilon}) + W(\bar{\varepsilon}) - b \cdot u] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t \cdot (u - u^*) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t \cdot u d\Gamma \\
& + \int_S t \cdot (u_{s^+} - u_{s^-}) dS \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Haciendo la primera variación a la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta\pi_{DDI}^S \equiv & \int_{\Omega/S} [(\bar{\varepsilon}^u - \bar{\varepsilon}): \delta\sigma + (\sigma^{\bar{\varepsilon}} - \sigma): \delta\bar{\varepsilon} + \sigma: \delta\bar{\varepsilon}^u - b \cdot \delta u] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u - u^*) \delta t d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_u} t \cdot \delta u d\Gamma + \int_S t \cdot (\delta u_{s^+} - \delta u_{s^-}) dS \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia y sustituyendo esto en cada uno de los subdominios (Juárez 2006) nos queda:

$$\begin{aligned}
\delta\pi_{DDI}^S \equiv & \int_{\Omega/S} (\bar{\varepsilon}^u - \bar{\varepsilon}) \delta\sigma d\Omega + \int_{\Omega/S} (\sigma^{\bar{\varepsilon}} - \sigma) \delta\bar{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega/S} (\nabla\sigma + b) \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma \cdot \nu - t^*) \cdot \delta u d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_u} (\sigma \cdot \nu - t) \cdot \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u - u^*) \delta t d\Gamma - \int_{S^-} (T - \sigma_\Omega^- \cdot n) \cdot \delta u_S^- d\Gamma - \int_{S^+} (\sigma_\Omega^+ \cdot n - t) \cdot \delta u_S^+ d\Gamma \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Este funcional satisface el PVF del modelo de discontinuidad discreta.

### 3.6 Funcional de Elemento Finito con discontinuidades interiores

Finalmente el funcional anterior considerando que  $u_{s^+} - u_{s^-} = \llbracket u \rrbracket$  en  $S$  y que el desplazamiento  $u = u^*$  en  $\Gamma_u$ , se define de la siguiente forma:

#### Discontinuidad discreta

$$\pi_{DDI}^\Omega(u, \sigma_{\Omega/S}, \bar{\varepsilon}, \llbracket u \rrbracket) \equiv \int_{\Omega/S} [\sigma: (\bar{\varepsilon}^u - \bar{\varepsilon}) + W(\bar{\varepsilon}) - b \cdot u] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot u d\Gamma + \int_S t \cdot \llbracket u \rrbracket dS \tag{3.28}$$



## Capítulo 4

### Formulaciones numéricas de la mecánica del daño

#### 4.1 Generalidades

Cuando se trata de un medio continuo, obtener la solución exacta a través de la formulación anterior es una tarea compleja ya que el continuo tiene un número infinito de grados de libertad, por este motivo se recurre a soluciones aproximadas donde se discretiza el medio continuo para obtener un número finito de grados de libertad, que llevan a sistemas de ecuaciones algebraicas que se resuelven de forma más sencilla.

El Método de los Elementos Finitos está basado en el método de Rayleigh-Ritz el cual se puede demostrar su equivalencia con el método de Galerkin. El Método de los Elementos Finitos nos permite discretizar la formulación variacional. Los funcionales antes vistos, discretizados con los elementos finitos, nos llevan a los elementos finitos con discontinuidades interiores.

Este capítulo trata la formulación variacional y como se aproxima con el uso del Método de los Elementos Finitos. Se pasa del funcional de energía a la aproximación usando el Método de los Elementos Finitos con discontinuidades interiores, aplicando los principios del cálculo de variaciones y a través de los campos de interpolación definida por la cinemática de la discontinuidad, para obtener las matrices de rigideces, las cuales nos permitirán calcular los desplazamientos en cada uno de los nodos de la estructura discretizada, con estos desplazamientos podemos conocer con el uso de la mecánica del medio continuo las deformaciones, así mismo, aplicando un modelo de daño se podrá conocer los esfuerzos.

Las formulaciones variacionales vistas en el capítulo anterior se aproximarán para obtener las matrices de rigideces, las cuales contienen discontinuidades interiores, la discontinuidad está en función de la concentración de esfuerzos y de un criterio de daño, estos dos parámetros junto con la deformación obtenida nos permiten describir el comportamiento de la estructura en su evolución a la falla. Se muestran a continuación cuatro formulaciones variacionales las cuales se aproximan con base en los campos de interpolación que describen la cinemática de la discontinuidad. La diferencia entre las siguientes formulaciones variacionales está en cuantos campos independientes se hacen variar, de aquí surgen una serie de principios variacionales los cuales son equivalentes. Se inicia el capítulo con la aproximación del funcional más simple el cual sólo utiliza un campo independiente, después se describen otras aproximaciones de formulaciones variacionales haciendo variar diversos campos independientes.

#### Funcional de energía con un campo independiente

Tenemos el siguiente funcional de energía:

$$\pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon \, d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot u \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot u \, d\Gamma \quad (4.1)$$

El cálculo variacional define que para que un funcional  $\pi$  tenga un valor estacionario, la primera variación del funcional debe ser igual a cero, considerando en esta variación a todos los campos independientes, en este funcional solo los desplazamientos  $u$  están sujetos a variación.

$$\delta\pi(u) = 0 \quad (4.2)$$

Las condiciones de estacionalidad de la formulación variacional corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir la forma fuerte, aunque la forma variacional presenta mayores ventajas (Washizu, 1967):

Aplicando la primera variación al funcional:

$$\delta\pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta\varepsilon^T \sigma \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta\sigma^T \varepsilon \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \cdot b \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \cdot \hat{t} \, d\Gamma = 0 \quad (4.3)$$

Se tiene el siguiente campo de interpolación:

$$u(x) = Nd \quad (4.4)$$

Compatibilidad cinemática se calcula como:

$$\varepsilon(u) = Bd \quad (4.5)$$

y la compatibilidad constitutiva:

$$\sigma(u) = CBd \quad (4.6)$$

donde  $u$  representa el vector de desplazamientos del elemento,  $N$  es la matriz de forma o de interpolación,  $d$  es el vector de los parámetros nodales,  $\varepsilon$  es el vector de deformaciones,  $B$  es la matriz de deformación,  $\sigma$  es el vector de esfuerzos y finalmente  $C$  es la matriz constitutiva,

Las variaciones de los campos de interpolación quedan expresadas por:

$$\delta u(x) = N\delta d \quad (4.7)$$

$$\delta\varepsilon(u) = B\delta d \quad (4.8)$$

$$\delta\sigma(u) = CB\delta d \quad (4.9)$$

Se incluyen los campos en la variación del funcional:

$$\delta\pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (B\delta d)^T (CBd) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (CB\delta d)^T (Bd) \, d\Omega - \int_{\Omega} (N\delta d) \cdot b \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (N\delta d) \cdot \hat{t} \, d\Gamma \quad (4.10)$$

Ordenando y simplificando tenemos:

$$\delta\pi(u) = \int_{\Omega} B^T CB\delta d \, d\Omega - \int_{\Omega} bN\delta d \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t}N\delta d \, d\Gamma \quad (4.11)$$

Aplicando las condiciones de estacionaridad tenemos  $\delta\pi(u) \rightarrow 0$ :

$$0 = \int_{\Omega} B^T CB \, d\Omega - \int_{\Omega} bN \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t}N \, d\Gamma \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} B^T CB \, d\Omega = \int_{\Omega} bN \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t}N \, d\Gamma \quad (4.13)$$

La cual se puede escribir de la forma  $K \cdot d = f_{ext}$ :

$$\left[ \int_{\Omega} B^T C B d\Omega \right] \cdot d = \int_{\Omega} b N d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} N d\Gamma \quad (4.14)$$

## 4.2 Elemento finito con discontinuidades interiores formulación de desplazamientos.

Funcional con discontinuidades interiores donde  $\llbracket u \rrbracket = u_s^+ - u_s^-$  y el desplazamiento prescrito  $u = u^*$  en  $\Gamma_u$ :

$$\pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega - \int_{\Omega} \hat{t} \cdot u d\Gamma + \int_S t \cdot \llbracket u \rrbracket dS \quad (4.15)$$

Aplicando la primera variación al funcional nos queda:

$$\delta\pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta\varepsilon^T \sigma d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta\sigma^T \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_S \delta \llbracket u \rrbracket \cdot t dS \quad (4.16)$$

Tenemos los siguientes campos de interpolación en los cuales a diferencia del capítulo anterior aparece un salto debido a la discontinuidad como se explico en el capítulo 3.4:

$$u(x) = Nd + N_c \llbracket u \rrbracket \quad (4.17)$$

Compatibilidad cinemática:

$$\varepsilon(u) = Bd + B_c \llbracket u \rrbracket \quad (4.18)$$

Compatibilidad constitutiva:

$$\sigma(u) = C(Bd + B_c \llbracket u \rrbracket) \quad (4.19)$$

Aparece  $N_c$  y  $B_c$  que son la matriz de forma y la matriz de deformación respectivamente en la continuidad.

Las variaciones de los campos de interpolación quedan expresadas por:

$$\delta u(x) = N\delta d + N_c \delta \llbracket u \rrbracket \quad (4.20)$$

$$\delta \varepsilon(u) = B\delta d + B_c \delta \llbracket u \rrbracket \quad (4.21)$$

$$\delta \sigma(u) = C(B\delta d + B_c \delta \llbracket u \rrbracket) \quad (4.22)$$

Se incluyen los campos de interpolación en la variación del funcional:

$$\begin{aligned} \delta\pi(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (B\delta d + B_c \delta \llbracket u \rrbracket)^T (C(Bd + B_c \llbracket u \rrbracket)) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (C(B\delta d + B_c \delta \llbracket u \rrbracket))^T (Bd + B_c \llbracket u \rrbracket) d\Omega - \\ & \int_{\Omega} (N\delta d + N_c \delta \llbracket u \rrbracket) \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (N\delta d + N_c \delta \llbracket u \rrbracket) \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_S \delta \llbracket u \rrbracket \cdot t dS \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \delta\pi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (B\delta d + B_c\delta[u])^T (C(Bd + B_c[u])) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (C(B\delta d + B_c\delta[u]))^T (Bd + B_c[u]) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (N\delta d + N_c\delta[u]) \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (N\delta d + N_c\delta[u]) \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_S \delta[u] \cdot t dS \end{aligned} \quad (4.24)$$

Desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} \delta\pi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(B^T\delta d C B d) + (B^T\delta d C B_c[u]) + (B_c^T\delta[u] C B d) + (B_c^T\delta[u] C B_c[u])] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(B^T\delta d C \\ B d) + (B^T\delta d C B_c[u]) + (B_c^T\delta[u] C B d) + (B_c^T\delta[u] C B_c[u])] d\Omega - \int_{\Omega} (N\delta d + N_c\delta[u]) \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (N \\ \delta d + N_c\delta[u]) \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_S \delta[u] \cdot t dS \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \delta\pi(u) &= \int_{\Omega} [(B^T\delta d C B d) + (B^T\delta d C B_c[u]) + (B_c^T\delta[u] C B d) + (B_c^T\delta[u] C B_c[u])] d\Omega - \int_{\Omega} N\delta d \cdot b d\Omega \\ &- \int_{\Omega} N_c\delta[u] \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} N\delta d \cdot \hat{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} N_c\delta[u] \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_S \delta[u] \cdot t dS \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \delta\pi(u) &= \int_{\Omega} B^T C B \delta d d\Omega + \int_{\Omega} B^T C B_c \delta d \Omega [u] + \int_{\Omega} B_c^T C B \delta [u] d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T C B_c \delta [u] d\Omega [u] \\ &- \int_{\Omega} N\delta d \cdot b d\Omega - \int_{\Omega} N_c\delta[u] \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} N\delta d \cdot \hat{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} N_c\delta[u] \cdot \hat{t} d\Gamma + \int_S \delta[u] \cdot t dS \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aplicando las derivadas parciales de cada uno de los campos independientes nos queda:

$$\frac{\partial\pi(u)}{\partial d} = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega + \int_{\Omega} B^T C B_c d\Omega [u] - \int_{\Omega} b \cdot N d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot N d\Gamma \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial\pi(u)}{\partial [u]} = \int_{\Omega} B_c^T C B d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T C B_c d\Omega [u] - \int_{\Omega} b \cdot N_c d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot N_c d\Gamma + \int_S t dS \quad (4.29)$$

Finalmente ordenado los términos anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} B^T C B d\Omega + \int_{\Omega} B^T C B_c d\Omega [u] - \int_{\Omega} b \cdot N d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot N d\Gamma + \int_{\Omega} B_c^T C B d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T C B_c d\Omega [u] - \\ &\int_{\Omega} b \cdot N_c d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot N_c d\Gamma + \int_S t dS = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

### 4.2.1 Matriz de rigideces

La ecuación anterior se puede expresar de la forma  $K \cdot u = f$ :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} B^T C B d\Omega & \int_{\Omega} B_c^T C B d\Omega \\ \left( \int_{\Omega} B^T C B_c d\Omega \right)^T & \int_{\Omega} B_c^T C B_c d\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \llbracket u \rrbracket \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

$$f_{ext} = \int_{\Omega} b \cdot N d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot N d\Gamma \quad (4.32)$$

### 4.3 Elemento finito con discontinuidades interiores formulación mixta de dos campos, desplazamiento-deformaciones.

Tenemos el siguiente funcional con discontinuidades interiores de dos campos:

$$\pi(u, \varepsilon) = \int_{\Omega} \left[ \varepsilon^u C \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon C \varepsilon - b \cdot u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot u d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket T \llbracket u \rrbracket d\Gamma \quad (4.33)$$

Aplicamos la primera variación al funcional:

$$\begin{aligned} \delta\pi(u, \varepsilon) &= \int_{\Omega} \left[ \delta\varepsilon^T C \varepsilon^u + \delta\varepsilon^{u^T} C \varepsilon - \frac{1}{2} \delta\varepsilon^T C \varepsilon - \frac{1}{2} \delta\varepsilon^T C \varepsilon - b \cdot \delta u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot \delta u d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket T \delta \llbracket u \rrbracket d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket T \delta \llbracket u \rrbracket d\Gamma \end{aligned} \quad (4.34)$$

Simplificando tenemos:

$$\delta\pi(u, \varepsilon) = \int_{\Omega} \left[ \delta\varepsilon^T C \varepsilon^u + \delta\varepsilon^{u^T} C \varepsilon - \delta\varepsilon^T C \varepsilon - b \cdot \delta u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot \delta u d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket T \delta \llbracket u \rrbracket d\Gamma \quad (4.35)$$

Campos de interpolación.

$$u = N d + N_c \llbracket u \rrbracket \quad (4.36)$$

$$\varepsilon^u = B d + B_c \llbracket u \rrbracket \quad (4.37)$$

$$\varepsilon = N_{\varepsilon} e \quad (4.38)$$

Las variaciones de los campos de interpolación quedan expresadas por:

$$\delta u = N \delta d + N_c \delta \llbracket u \rrbracket \quad (4.39)$$

$$\delta \varepsilon^u = B \delta d + B_c \delta \llbracket u \rrbracket \quad (4.40)$$

$$\delta \varepsilon = N_{\varepsilon} \delta e \quad (4.41)$$

Sustituyendo los campos en la variación de los campos:

$$\begin{aligned} \delta\pi(u, \varepsilon) &= \int_{\Omega} \left[ (N_{\varepsilon} \delta e)^T C (B d + B_c \llbracket u \rrbracket) + (B \delta d + B_c \delta \llbracket u \rrbracket)^T C (N_{\varepsilon} e) - (N_{\varepsilon} \delta e)^T C (N_{\varepsilon} e) - (N \delta d + N_c \delta \llbracket u \rrbracket) \cdot b \right] d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot (N \delta d + N_c \delta \llbracket u \rrbracket) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket T \delta \llbracket u \rrbracket d\Gamma \end{aligned} \quad (4.42)$$

Desglosando términos:

$$\begin{aligned} \delta\pi(u, \varepsilon) &= \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T \delta e C B d d\Omega + \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T \delta e C B_c \llbracket u \rrbracket d\Omega + \int_{\Omega} B^T \delta d C N_{\varepsilon} e d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T \delta \llbracket u \rrbracket C N_{\varepsilon} e d\Omega \\ &- \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T \delta e C N_{\varepsilon} e d\Omega - \int_{\Omega} N \delta d \cdot b d\Omega - \int_{\Omega} N_c \delta \llbracket u \rrbracket \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} N \delta d \cdot \hat{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} N_c \delta \llbracket u \rrbracket \cdot \hat{t} d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket T \delta \llbracket u \rrbracket d\Gamma \end{aligned} \quad (4.43)$$

Variando los campos independientes:

$$\frac{\partial\pi(u, \varepsilon)}{\partial e} = \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C B d d\Omega + \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C B_c \llbracket u \rrbracket d\Omega - \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C N_{\varepsilon} e d\Omega \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \pi(u, \varepsilon)}{\partial d} = \int_{\Omega} B^T C N_{\varepsilon} e d \Omega - \int_{\Omega} b \cdot N d \Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} N d \Gamma \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \pi(u, \varepsilon)}{\partial \llbracket u \rrbracket} = \int_{\Omega} B_C^T C N_{\varepsilon} e d \Omega - \int_{\Omega} b N_C d \Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} N_C d \Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} T \llbracket u \rrbracket d \Gamma \quad (4.46)$$

Quedando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C B d d \Omega + \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C B_C \llbracket u \rrbracket d \Omega - \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C N_{\varepsilon} e d \Omega + \int_{\Omega} B^T C N_{\varepsilon} e d \Omega - \int_{\Omega} b \cdot N d \Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} N d \Gamma + \\ & \int_{\Omega} B_C^T C N_{\varepsilon} e d \Omega - \int_{\Omega} b N_C d \Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} N_C d \Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} T \llbracket u \rrbracket d \Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

### 4.3.1 Matriz de coeficientes

La ecuación anterior se puede expresar de la forma  $K \cdot u = f$ :

$$\begin{bmatrix} - \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C N_{\varepsilon} d \Omega & \int_{\Omega} B^T C N_{\varepsilon} d \Omega & \int_{\Omega} B_C^T C N_{\varepsilon} d \Omega \\ \left( \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C B d \Omega \right)^T & 0 & 0 \\ \left( \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C B_C d \Omega \right)^T & 0 & \int_{\Gamma_{\sigma}} T d \Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ d \\ \llbracket u \rrbracket \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{ext} \\ f_{\llbracket u \rrbracket} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

$$f_{ext} = \int_{\Omega} b \cdot N d \Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} N d \Gamma \quad (4.49)$$

$$f_{\llbracket u \rrbracket} = \int_{\Omega} b N_C d \Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} N_C d \Gamma \quad (4.50)$$

Cuando  $k \rightarrow 0$

## 4.4 Elemento finito con discontinuidades interiores formulación mixta de tres campos, desplazamiento-deformaciones-esfuerzo.

Funcional con discontinuidades interiores:

$$\pi(u, \varepsilon, \sigma) = \int_{\Omega} \left[ \sigma^T \varepsilon^u - \varepsilon^T \sigma + \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon \right] d \Omega - \int_{\Omega} b \cdot u d \Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot u d \Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket^T T \llbracket u \rrbracket d \Gamma \quad (4.51)$$

Haciendo la primera variación del funcional tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \pi(u, \varepsilon, \sigma) &= \int_{\Omega} \left[ \delta \varepsilon^{u^T} \sigma + \delta \sigma^T \varepsilon^u - \delta \sigma^T \varepsilon - \delta \varepsilon^T \sigma + \frac{1}{2} \delta \varepsilon^T C \varepsilon + \frac{1}{2} \delta \varepsilon^T C \varepsilon \right] d \Omega - \int_{\Omega} b \cdot \delta u d \Omega \\ &- \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot \delta u d \Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket^T T \delta \llbracket u \rrbracket d \Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket^T T \delta \llbracket u \rrbracket d \Gamma \end{aligned} \quad (4.52)$$

Simplificando los términos anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \pi(u, \varepsilon, \sigma) &= \int_{\Omega} \left[ \delta \varepsilon^{u^T} \sigma + \delta \sigma^T \varepsilon^u - \delta \sigma^T \varepsilon - \delta \varepsilon^T \sigma + \delta \varepsilon^T C \varepsilon \right] d \Omega - \int_{\Omega} b \cdot \delta u d \Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot \delta u d \Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket^T T \delta \llbracket u \rrbracket d \Gamma \end{aligned} \quad (4.53)$$

Campos de interpolación:

$$u = N d + N_C \llbracket u \rrbracket \quad (4.54)$$

$$\varepsilon^u = B d + B_C \llbracket u \rrbracket \quad (4.55)$$

$$\varepsilon = N_\varepsilon e \quad (4.56)$$

$$\sigma = N_\sigma S \quad (4.57)$$

$$[[u]] = N_c \alpha \quad (4.58)$$

$$t = T[[u]] \quad (4.59)$$

Las variaciones de los campos de interpolación quedan expresadas por:

$$\delta u = N \delta d + N_c \delta [[u]] \quad (4.60)$$

$$\delta \varepsilon^u = B \delta d + B_c \delta [[u]] \quad (4.61)$$

$$\delta \varepsilon = N_\varepsilon \delta e \quad (4.62)$$

$$\delta \sigma = N_\sigma \delta S \quad (4.63)$$

$$\delta [[u]] = N_c \delta \alpha \quad (4.64)$$

$$t = T[[u]] \quad (4.65)$$

Sustituyendo los campos de interpolación en la primera variación del funcional:

$$\begin{aligned} \delta \pi(u, \varepsilon, \sigma) = & \int_{\Omega} [(B \delta d + B_c \delta [[u]])^T N_\sigma S + (N_\sigma \delta S)^T (B d + B_c [[u]]) - (N_\sigma \delta S)^T N_\varepsilon e - (N_\varepsilon \delta e)^T N_\sigma S + \\ & (N_\varepsilon \delta e)^T C(N_\varepsilon e)] d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot (N \delta d + N_c \delta [[u]]) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t} \cdot (N \delta d + N_c \delta [[u]]) d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} [[u]]^T T \delta \\ & [[u]] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.66)$$

Desarrollando el funcional y desglosándolo:

$$\begin{aligned} \delta \pi(u, \varepsilon, \sigma) = & \int_{\Omega} B^T \delta d N_\sigma S d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T \delta [[u]] N_\sigma S d\Omega + \int_{\Omega} N_\sigma^T \delta S B d d\Omega + \int_{\Omega} N_\sigma^T \delta S B_c [[u]] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} N_\sigma^T \delta S N_\varepsilon e d\Omega - \int_{\Omega} N_\varepsilon^T \delta e N_\sigma S d\Omega + \int_{\Omega} N_\varepsilon^T \delta e C N_\varepsilon e d\Omega - \int_{\Omega} b N \delta d d\Omega - \int_{\Omega} b N_c \delta [[u]] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t} \cdot N \delta d d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t} \cdot N_c \delta [[u]] d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} [[u]]^T T \delta [[u]] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.67)$$

Se hace la variación con respecto a cada campo independiente:

$$\frac{\partial \pi(u, \varepsilon, \sigma)}{\partial e} = - \int_{\Omega} N_\varepsilon^T N_\sigma S d\Omega + \int_{\Omega} N_\varepsilon^T C N_\varepsilon e d\Omega \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial \pi(u, \varepsilon, \sigma)}{\partial S} = \int_{\Omega} N_\sigma^T B d d\Omega + \int_{\Omega} N_\sigma^T B_c [[u]] d\Omega - \int_{\Omega} N_\sigma^T N_\varepsilon e d\Omega \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial \pi(u, \varepsilon, \sigma)}{\partial [[u]]} = \int_{\Omega} B_c^T N_\sigma S d\Omega - \int_{\Omega} b N_c d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t} \cdot N_c d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} [[u]]^T T d\Gamma \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \pi(u)}{\partial d} = \int_{\Omega} B^T N_\sigma S d\Omega - \int_{\Omega} b N d\Omega - \int_{\Omega} \hat{t} \cdot N d\Gamma \quad (4.71)$$

Nos queda la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} N_\varepsilon^T N_\sigma S d\Omega + \int_{\Omega} N_\varepsilon^T C N_\varepsilon e d\Omega + \int_{\Omega} N_\sigma^T B d d\Omega + \int_{\Omega} N_\sigma^T B_c [[u]] d\Omega - \int_{\Omega} N_\sigma^T N_\varepsilon e d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T N_\sigma S \\ d\Omega - \int_{\Omega} b N_c d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t} \cdot N_c d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} [[u]]^T T d\Gamma + \int_{\Omega} B^T N_\sigma S d\Omega - \int_{\Omega} b N d\Omega - \int_{\Omega} \hat{t} \cdot N d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

#### 4.4.1 Matriz de coeficientes

La ecuación anterior se puede expresar de la forma  $K \cdot u = f$ :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T C N_{\varepsilon} d\Omega & -\int_{\Omega} N_{\sigma}^T N_{\varepsilon} d\Omega & 0 & 0 \\ \left(-\int_{\Omega} N_{\varepsilon}^T N_{\sigma} d\Omega\right)^T & 0 & \int_{\Omega} B^T N_{\sigma} S d\Omega & \int_{\Omega} B_C^T N_{\sigma} d\Omega \\ 0 & \left(\int_{\Omega} N_{\sigma}^T B d\Omega\right)^T & 0 & 0 \\ 0 & \left(\int_{\Omega} N_{\sigma}^T B_C d\Omega\right)^T & 0 & \int_{\Gamma_{\sigma}} \llbracket u \rrbracket T d\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ S \\ d \\ \llbracket u \rrbracket \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_d \\ F_u \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

$$F_d = \int_{\Omega} b N d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t} \cdot N d\Gamma \quad (4.74)$$

$$F_u = \int_{\Omega} b N_C d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot N_C d\Gamma \quad (4.75)$$

## 4.5 Modelo de daño discreto.

Los modelos discretos formulados en términos de los desplazamientos y tracciones en la superficie poseen características aplicables al análisis de falla. Estos no sufren de una limitación cuando aparece ablandamiento del material, a diferencia de los modelos continuos y discontinuos, estos están formulados en términos de tracciones y desplazamientos aplicados sobre una superficie. El trabajo que se realiza en la superficie es integrado sobre esta, el cual lleva a una disipación de energía diferente de cero, porque la superficie tiene un área diferente de cero, a diferencia de los modelos continuos donde se integra en el volumen y cuando la superficie localizada tiende a cero en la falla no se disipa energía.

Una de las principales características de este modelo, es la anisotropía que puede ser fácilmente introducida. Para modelar materiales donde el tipo de fractura es del modo I como dominante, se usa el modelo de grieta cohesiva. Cuando se llega a la carga máxima, aparece una micro grieta y flujo plástico el rededor de la punta de la grieta, los cuales son modelados como un equivalente de fuerzas de tracción en las caras de las grietas, la respuesta inelástica es gobernada entonces por dos propiedades del material, que son, la fuerza de tensión  $f_t$  y la energía de fractura  $G_f$ . Una discontinuidad aparece cuando el esfuerzo principal excede el esfuerzo de fluencia del material, el vector normal a la discontinuidad es alineado en la dirección del máximo esfuerzo principal. Este modo I es usualmente utilizado para materiales cuasi-frágiles. Una discontinuidad es introducida y la tracción es transferida a la discontinuidad la cual es dependiente del salto. En los modelos cohesivos se concentran las discontinuidades sobre una línea en dos dimensiones y sobre una superficie en tres dimensiones. En la discontinuidad se asumen tracciones que están asociadas a la abertura y deslizamiento del salto. La tracción que existe en la abertura se desaparece cuando se excede de cierto límite y la discontinuidad queda libre de esfuerzo.

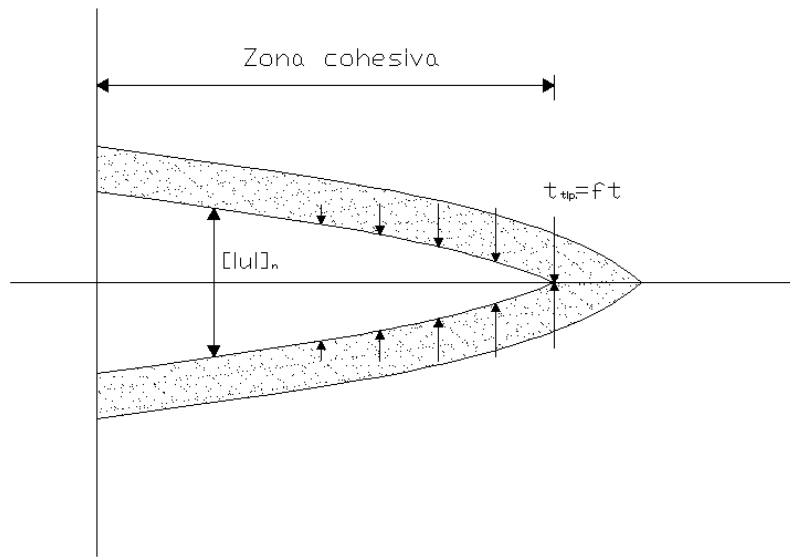
En este trabajo la aproximación se hará en materiales cuasi-frágiles, como lo son: el concreto, mampostería, rocas, polímeros, algunas cerámicas, y algunos metales, además bajo ciertas condiciones atmosféricas materiales frágiles o dúctiles pueden ser considerados cuasi-frágiles. Los materiales cuasi-frágiles son materiales que presentan una curva esfuerzo-deformación a tensión en la cual se observa un intervalo de ablandamiento por deformación después de alcanzar el esfuerzo máximo. Este intervalo se caracteriza por un decremento gradual de la magnitud de los esfuerzos, al incrementarse las deformaciones debido la propagación del agrietamiento, para esta



fase la formulación discreta es más apropiada. El comportamiento del material cuando aparece el ablandamiento se puede describir empleando una curva esfuerzo- apertura ( $\sigma - \omega$ ) que se define en base a tres parámetros:

1. La resistencia a tensión  $f_t$ .
2. La energía de fractura  $G_f$ .
3. La abertura de grieta crítica  $\omega_c$ , que se define como la abertura de grieta para la cual la transferencia de esfuerzo es nula.

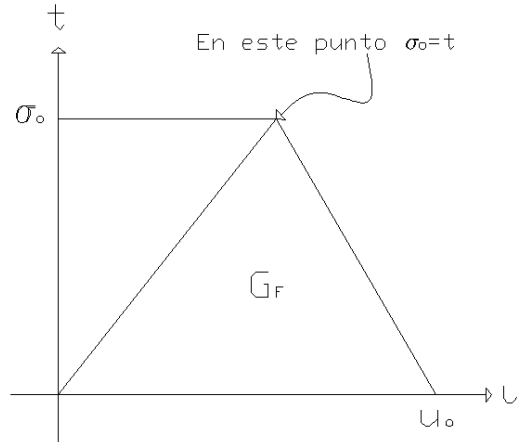
El ablandamiento por deformación no puede considerarse cuando se pretende modelar el comportamiento de un sólido continuo, pero en la aproximación discreta se considera que la fisura empieza a formarse cuando la tensión alcanza la resistencia máxima a tracción  $f_t$ . En el instante empieza a desarrollarse la discontinuidad y se empiezan a considerar los mecanismos cohesivos entre las superficies de la grieta, las cuales van teniendo una relajación progresiva de las tensiones con el incremento de la abertura de la grieta  $\omega$ . Debido a esto se utiliza una ecuación constitutiva tracción-salto de la grieta. El modelo de grieta cohesiva se ve en la figura 4.1.



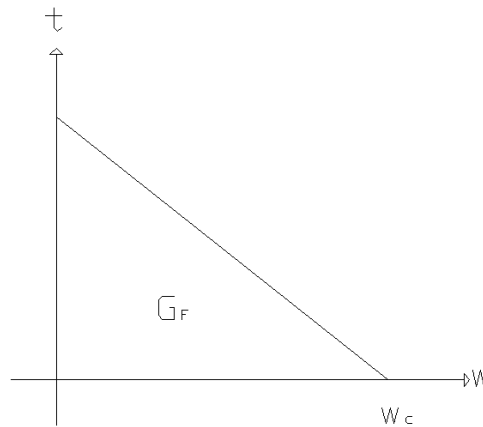
**Fig. 4.1 Zona cohesiva (Anderson, 1995)**

Antes se llegaba a analizar hasta valores de carga máxima, pero cuando se quiere conocer el comportamiento del material después de ese punto se presentan problemas ya que las ecuaciones de gobierno ya no son aplicables, ya que se mal condicionan y se vuelven dependientes de la malla. Para remediar este problema se pone una zona cohesiva que se introduce en una discontinuidad. En los últimos años se han venido desarrollando los modelos constitutivos discretos estos son formulados en términos de desplazamientos y tracciones. Uno de ellos se describe a continuación:

Para la curva tracción-deformación al igual que para la curva de ablandamiento tracción-salto el área bajo la curva es la energía de fractura que representa la energía necesaria para crear una unidad de superficie de grieta, la energía de fractura es una propiedad del material (Bažant y Planas, 1998). Introducir la energía de fractura para poder caracterizar el ablandamiento permite objetividad de los resultados con respecto a la malla, la relación de las curvas se muestra en la figura 4.2, 4.3



**Fig. 4.2 Gráfica Esfuerzo-deformación**



**Fig. 4.3 Gráfica tracción-salto**

Con lo cual se puede decir que existe relación a través de la energía de fractura de ambas curvas. Por lo que se puede decir lo siguiente: Tenemos que la ecuación que describe la gráfica tracción-salto está dada por:

$$t = f_0 \left(1 - \frac{W}{W_c}\right)^n \tag{4.76}$$

Donde:

t = Tracciones

f<sub>0</sub> = Esfuerzo de fluencia

w = Salto

w<sub>c</sub> = Abertura de grieta donde la transferencia de esfuerzo es nula.

n = Coeficiente que le da el grado de curvatura a la gráfica.

Entonces podemos integrar para obtener la energía de Fractura utilizando la ecuación (4.77):

$$G_F = \int_{w=0}^{w=W_c} t \, dw = \int_0^{W_c} f_0 \left(1 - \frac{W}{W_c}\right)^n \, dw \tag{4.77}$$

$$G_F = \frac{f_0}{(n+1)} \left(1 - \frac{w}{w_c}\right)^{(n+1)} (-w_c) \Big|_0^{w_c} = -\frac{f_0 w_c}{(n+1)} \left(1 - \frac{w}{w_c}\right)^{n+1} \Big|_0^{w_c} \quad (4.78)$$

$$G_F = \frac{+f_0 w_c}{n+1} \quad (4.79)$$

De la ecuación (4.79) podemos despejar el salto en la discontinuidad, que es función de la energía de fractura y del esfuerzo de fluencia  $f_0$ .

$$w_c = \frac{G_F(n+1)}{f_0} \quad (4.80)$$

Sustituyendo (4.80) en (4.77) tenemos:

$$t = f_0 \left(1 - \frac{w f_0}{G_F(n+1)}\right)^n \quad (4.81)$$

Nos queda una ecuación donde se puede calcular las tracciones, el salto es la única variable.

Para el cálculo del salto es necesario obtener el tensor constitutivo tangente  $T^T$  que se obtiene de la pendiente de la grafica tracción- salto. Derivando la función  $t$ .

$$T^T = \frac{\partial t}{\partial w} = n f_0 \left(1 - \frac{w f_0}{G_F(n+1)}\right)^{n-1} \left(-\frac{f_0}{G_F(n+1)}\right) \quad (4.82)$$

$$T^T = \frac{-n f_0}{G_F(n+1)} \left(1 - \frac{w f_0}{G_F(n+1)}\right)^{n-1} \quad (4.83)$$

## Capítulo 5 Análisis inelástico

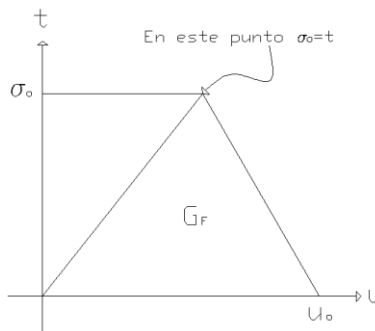
### 5.1 Ejemplos de aplicación.

Se presentan los siguientes ejemplos analizados utilizando elementos finitos con discontinuidades interiores, la energía que se introduce a las estructuras por desplazamientos prescritos, se libera o se transforma en la energía para desarrollar una discontinuidad. La zona de localización de deformaciones donde aparece la discontinuidad representa físicamente una grieta, o en su caso una articulación, una dislocación, o combinación de estas dependiendo del problema que se esté simulando.

En los ejemplos que se muestran a continuación, se emplea un modelo de daño discreto para materiales cuasifrágiles. Se tiene de la formulación de elementos finitos con discontinuidades interiores el siguiente sistema de submatrices:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} B^T C B d\Omega & \int_{\Omega} B^T C B_c R d\Omega \\ \int_{\Omega} -R^T G^T C B d\Omega & \int_{\Omega} -R^T G^T C B_c R d\Omega + \int_{\Gamma} T d\Gamma \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

En un elemento, cuando existe ablandamiento, el material se comporta como lo muestra la figura 5.1, donde el ablandamiento puede ser lineal o exponencial según requiera el modelo:



**Fig. 5.1 Gráfica tracción-desplazamiento**

En la parte inicial a medida que el desplazamiento impuesto aumenta, el esfuerzo también aumenta hasta que en el elemento se llega al esfuerzo de fluencia del material, en este momento se considera la presencia de una discontinuidad, la cual se representa por una línea donde se concentran todos los procesos de degradación progresiva, en la discontinuidad existen fuerzas de tracción que representan las fuerzas cohesivas, las cuales van disminuyendo a medida que aumenta el desplazamiento impuesto. Se dice que el elemento falla cuando ya no hay presencia de fuerzas cohesivas.

### 5.1.1 Elemento con discontinuidades interiores.

Para mostrar el procedimiento de análisis se estudia el elemento más sencillo, se estudia un elemento triangular donde se aplica control de desplazamientos, la geometría se muestra en la figura 5.2, se impone un desplazamiento en el nodo 2, en dirección x y los nodos 1 y 3 están restringidos en sus dos grados de libertad:

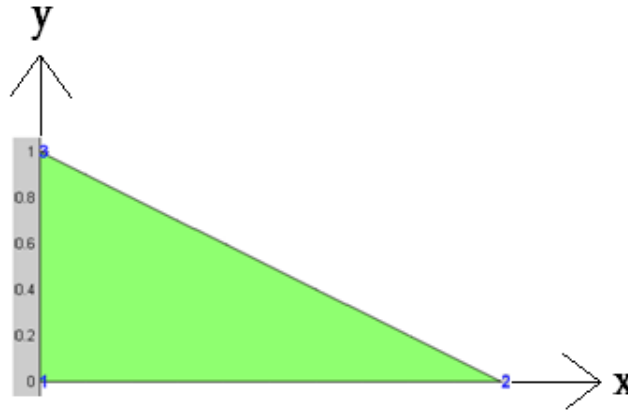


Fig. 5.2 Elemento finito triangular

El material del elemento tiene las siguientes propiedades:

$$E = 1000$$

$$\nu = 0.18$$

$$\sigma_u = 1$$

$$G_f = 0.005$$

$$k_0 = 1e - 10$$

Hasta antes del esfuerzo de tensión máximo del material tenemos un comportamiento elástico-lineal y la matriz de rigideces se obtiene con elementos finitos estándar:

$$K = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega \quad (5.2)$$

Para un elemento triangular como el que se analiza se tiene:

La matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento:

$$B = \begin{bmatrix} n_{1x} & 0 & n_{2x} & 0 & n_{3x} & 0 \\ 0 & n_{1y} & 0 & n_{2y} & 0 & n_{3y} \\ n_{1y} & n_{1x} & n_{2y} & n_{2x} & n_{3y} & n_{3x} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Se obtiene la matriz constitutiva elástica, se considera que el elemento se encuentra en esfuerzo plano, por lo tanto:

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Con estos parámetros se calcula la matriz de rigideces, la cual se muestra a continuación:

<b>Ke=</b>	<b>690.5</b>	<b>294.1</b>	<b>-255.8</b>	<b>-217.4</b>	<b>-434.8</b>	<b>-76.7</b>
	<b>294.1</b>	<b>1131.7</b>	<b>-76.7</b>	<b>-108.7</b>	<b>-217.4</b>	<b>-1023</b>
	<b>-255.8</b>	<b>-76.7</b>	<b>255.8</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>76.7</b>
	<b>-217.4</b>	<b>-108.7</b>	<b>0</b>	<b>108.7</b>	<b>217.4</b>	<b>0</b>
	<b>-434.8</b>	<b>-217.4</b>	<b>0</b>	<b>217.4</b>	<b>434.8</b>	<b>0</b>
	<b>-76.7</b>	<b>-1023</b>	<b>76.7</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1023</b>

Una vez que se consideran las condiciones de frontera y restringir los grados de libertad correspondientes, la matriz anterior se reduce al siguiente sistema:

$$KU = F \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \{F_{ext}\} \quad (5.6)$$

Al resolver el sistema se puede construir la grafica esfuerzo-deformación  $\sigma - u$ , hasta el esfuerzo máximo, figura 5.3.

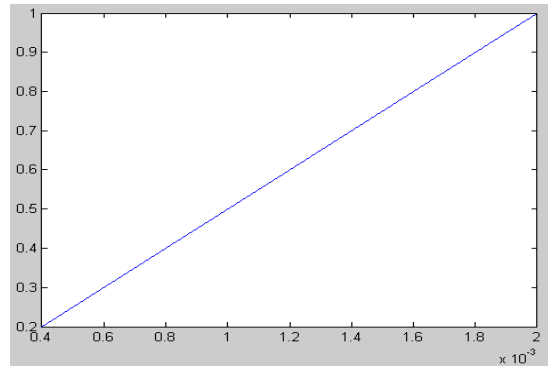


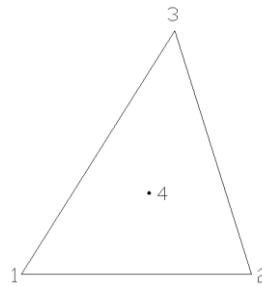
Fig. 5.3 Gráfica esfuerzo-desplazamiento

Donde se observa que el elemento llega a su esfuerzo maximo cuando se alcanza una deformación unitaria de 0.002, a partir de este momento el elemento presenta daño, comienzan a producirse pequeñas grietas, la discontinuidad y la cohesión se hacen presentes, la matriz de rigideces inicial se modifica, quedando la matriz de rigideces con discontinuidades interiores la cual tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} B^T C B d\Omega & \int_{\Omega} B^T C B_c R d\Omega \\ \int_{\Omega} -R^T G^T C B d\Omega & \int_{\Omega} -R^T G^T C B_c R d\Omega + \int_{\Gamma\Omega} T d\Gamma \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

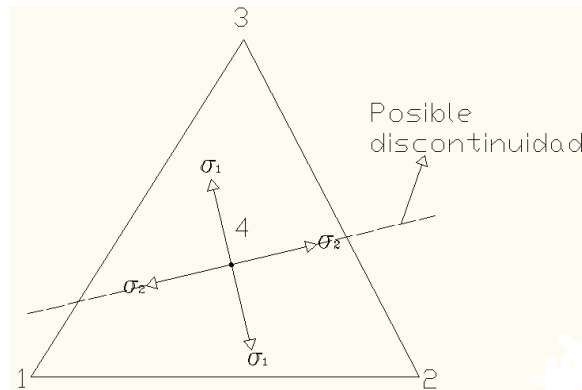
Se tiene una matriz de dos grados de libertad por nodo, en el caso del triángulo se tiene tres nodos del elemento y cuando aparece la discontinuidad un nodo interno adicional representa la discontinuidad con dos grados de libertad adicionales, así su tamaño será una matriz de 8 x 8.

Cuando se llega al esfuerzo de fluencia del material se coloca un nodo dentro del elemento para que su cinemática sea solo función del elemento. Debido a la cinemática de la formulación, las deformaciones y los esfuerzos en el elemento son constantes, así que este nodo se puede colocar arbitrariamente dentro del elemento. Para los modelos tratados, el punto se coloca en el centroide del elemento, aunque puede colocarse en cualquier parte del continuo ya que el esfuerzo en el elemento es constante, el nodo que representa la discontinuidad se muestra en la figura 5.4. En (Juárez G. y Ayala G., 2009), muestran que la relación tracción-esfuerzo depende de la longitud de la discontinuidad  $l_{dd}$  y de la orientación de esta, debido a la energía de fractura  $G_f$  que se necesita para crear la discontinuidad. Cuando la discontinuidad es localizada al centroide del elemento se tienen áreas de disipación de energía mayores a la física del problema, así los resultados varían dependiendo donde se considere la localización de la discontinuidad en el elemento.



**Fig. 5.4 Punto interno por donde pasa la discontinuidad**

Cuando aparece la discontinuidad, esta queda orientada en dirección perpendicular al esfuerzo principal máximo, una representación de la orientación está dada en figura 5.5 donde se representan los esfuerzos principales.



**Fig. 5.5 Esfuerzos máximos en el elemento**

Para este caso el estado de deformaciones y esfuerzos es el siguiente:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

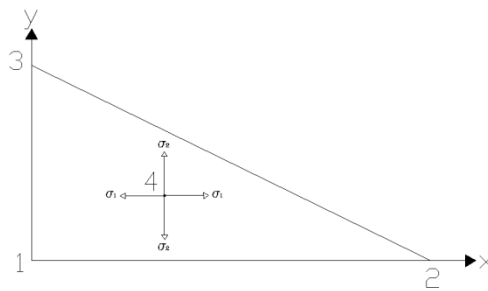
$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

Del círculo de Mohr calculamos los esfuerzos principales:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = 1 \tag{5.9}$$

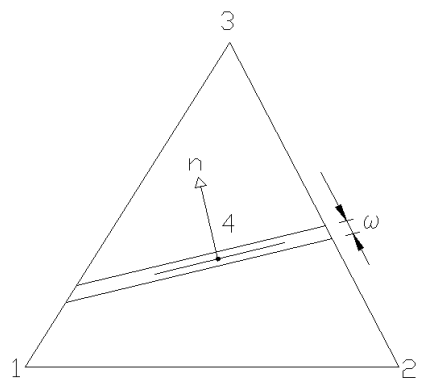
$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0 \tag{5.10}$$

El esfuerzo principal máximo para este ejemplo tiene un ángulo nulo, con lo cual la normal de la discontinuidad queda paralela al eje x, figura 5.6.



**Fig. 5.6 Gráfica esfuerzos principales**

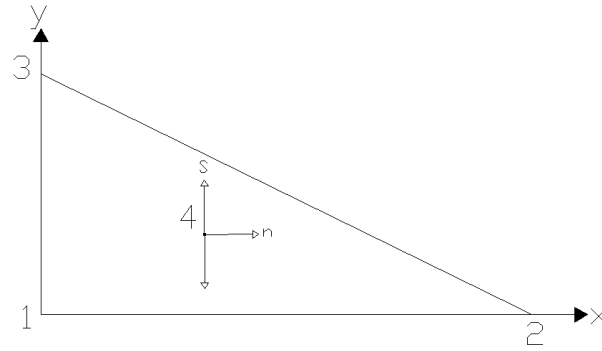
La normal se alinea con el esfuerzo principal máximo, en el momento de aparecer la discontinuidad se considera que la apertura de la grieta  $\omega \approx 0$ . Una representación de la apertura y la normal se muestra en la figura 5.7.



**Fig. 5.7 Alineamiento de la normal**

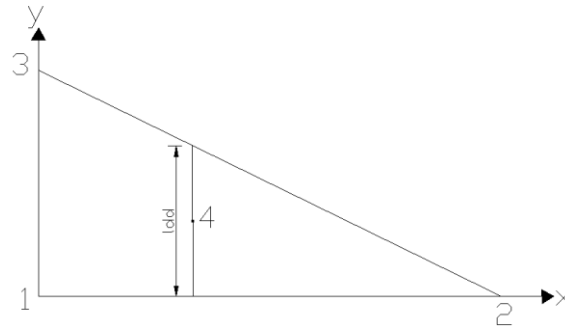
En este ejemplo la orientación de la discontinuidad queda de la siguiente forma, figura 5.8:





**Fig. 5.8 Alineamiento de la normal calculada**

Se calcula la longitud de la discontinuidad que es función de la geometría y del ángulo que forma el esfuerzo principal máximo con el eje x, figura 5.9. Cuando se quiere calcular la longitud de la discontinuidad en diversas geometrías, se utilizan las funciones de forma y la ecuación de la recta de la longitud de la discontinuidad, a través de estas graficas se determina donde se interceptan y así calcular la longitud de la discontinuidad.



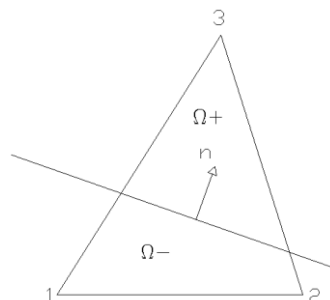
**Fig. 5.9 Longitud de la discontinuidad**

Para este ejemplo se tiene:

$$l_{dd} = 0.6667$$

Cuando se presenta una discontinuidad, el elemento queda dividido en dos dominios  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ , el dominio  $\Omega^+$  está del lado donde apunta la normal, así la matriz de deformaciones  $B_c$  incluye los nodos que están presentes en  $\Omega^+$ , para este elementos triangular se pueden presentar dos casos, los cuales se muestran en las figuras 5.10 y 5.11:

**Caso 1:**



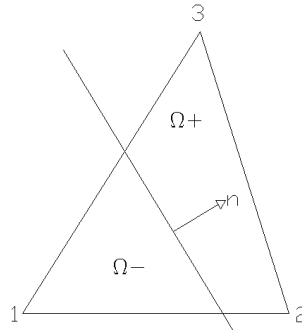
**Fig. 5.10 Obtención de  $B_c$  caso 1**

Para este caso solo el nodo 3 esta en este domino, por lo que la matriz tiene la siguiente forma:

$$B_C = - \begin{bmatrix} n_{3x} & 0 \\ 0 & n_{3y} \\ n_{3y} & n_{3x} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

**Caso 2:**

Un segundo caso sería que estuvieran dos nodos, esta posibilidad se muestra en la figura 5.11:



**Fig. 5.11 Obtención de  $B_c$  caso 2**

Entonces  $B_c$  queda de la siguiente forma:

$$B_C = - \begin{bmatrix} n_{2x} & 0 & n_{3x} & 0 \\ 0 & n_{2y} & 0 & n_{3y} \\ n_{2y} & n_{2x} & n_{3y} & n_{3x} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

En este ejemplo tenemos que solo el nodo 2 está en  $\Omega^+$  por los tanto la matriz  $B_c$  tiene la siguiente forma:

$$B_C = - \begin{bmatrix} n_{2x} & 0 \\ 0 & n_{2y} \\ n_{2y} & n_{2x} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La matriz  $G$  es la matriz de deformación enriquecida, es función de la longitud de la grieta  $l_{dd}$ , del área del elemento y de la orientación de la discontinuidad. La matriz de deformación enriquecida  $G$  está dada por:

$$G = \frac{-l_{dd}}{A} [n] = \frac{-l_{dd}}{A} \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} = \frac{-l_{dd}}{A} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \frac{-0.6667}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Para transformar de coordenadas globales a locales, usamos la matriz de transformación de coordenadas  $R$  que tiene la siguiente forma:

$$R = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Y finalmente el tensor constitutivo:

$$T^T = \begin{bmatrix} kn & 0 \\ 0 & ks \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

donde:

$$kn = \frac{-nf_0}{G_F(n+1)} \left( 1 - \frac{wf_0}{G_F(n+1)} \right)^{n-1} \tag{5.16}$$

$ks$  = rigidez alta para que no exista desplazamiento en la discontinuidad (arbitraria)

$n$  es el grado de curvatura de ablandamiento, en este caso se tiene que  $n = 1$ , la pendiente es negativa por ser ablandamiento y lineal por el grado de  $n$ , así el tensor constitutivo queda de la siguiente forma:

$$T^T = \begin{bmatrix} kn & 0 \\ 0 & ks \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

$$T^T = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Ahora se calculan las submatrices de la matriz de rigideces cuando aparece la discontinuidad.

$$K_{aa} = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega = \tag{5.18}$$

<b>Ke=</b>	<b>690.5</b>	<b>294.1</b>	<b>-255.8</b>	<b>-217.4</b>	<b>-434.8</b>	<b>-76.7</b>
	<b>294.1</b>	<b>1131.7</b>	<b>-76.7</b>	<b>-108.7</b>	<b>-217.4</b>	<b>-1023</b>
	<b>-255.8</b>	<b>-76.7</b>	<b>255.8</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>76.7</b>
	<b>-217.4</b>	<b>-108.7</b>	<b>0</b>	<b>108.7</b>	<b>217.4</b>	<b>0</b>
	<b>-434.8</b>	<b>-217.4</b>	<b>0</b>	<b>217.4</b>	<b>434.8</b>	<b>0</b>
	<b>-76.7</b>	<b>-1023</b>	<b>76.7</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1023</b>

$$K_{ab} = \int_{\Omega} B^T C B_C R d\Omega = \tag{5.19}$$

<b>255.8</b>	<b>217.4</b>
<b>76.7</b>	<b>108.7</b>
<b>-255.8</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>-108.7</b>
<b>0</b>	<b>-217.4</b>
<b>-76.7</b>	<b>0</b>

$$K_{ba} = \int_{\Omega} -R^T G^T C B d\Omega = \tag{5.20}$$

<b>341</b>	<b>102.3</b>	<b>-341</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-102.3</b>
------------	--------------	-------------	----------	----------	---------------

**289.9      144.9      0      -144.9      -289.9      0**

$$K_{bb} = \int_{\Omega} -R^T G^T C B_c R d\Omega + \int_{\Gamma_d} T d\Gamma = \tag{5.21}$$

**274.3      0**  
**0      278.3**

Ensamblando las submatrices de las ecuaciones (5.18) a (5.21) se tiene:

$$K = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} B^T C B d\Omega & \int_{\Omega} B^T C B_c R d\Omega \\ \int_{\Omega} -R^T G^T C B d\Omega & \int_{\Omega} -R^T G^T C B_c R d\Omega + \int_{\Gamma_d} T d\Gamma \end{bmatrix} =$$

<b>690.5</b>	<b>294.1</b>	<b>-255.8</b>	<b>-217.4</b>	<b>-434.8</b>	<b>-76.7</b>	<b>255.8</b>	<b>217.4</b>
<b>294.1</b>	<b>1131.7</b>	<b>-76.7</b>	<b>-108.7</b>	<b>-217.4</b>	<b>-1023</b>	<b>76.7</b>	<b>108.7</b>
<b>-255.8</b>	<b>-76.7</b>	<b>255.8</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>76.7</b>	<b>-255.8</b>	<b>0</b>
<b>-217.4</b>	<b>-108.7</b>	<b>0</b>	<b>108.7</b>	<b>217.4</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-108.7</b>
<b>-434.8</b>	<b>-217.4</b>	<b>0</b>	<b>217.4</b>	<b>434.8</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-217.4</b>
<b>-76.7</b>	<b>-1023</b>	<b>76.7</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1023</b>	<b>-76.7</b>	<b>0</b>
<b>341</b>	<b>102.3</b>	<b>-341</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-102.3</b>	<b>274.3</b>	<b>0</b>
<b>289.9</b>	<b>144.9</b>	<b>0</b>	<b>-144.9</b>	<b>-289.9</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>278.3</b>

Se calculan los esfuerzos  $\sigma^u$  que son función de los desplazamientos y los esfuerzos  $\sigma^\omega$  que son función de los saltos y así para cada uno se calculan las fuerzas internas, las cuales están dadas por:

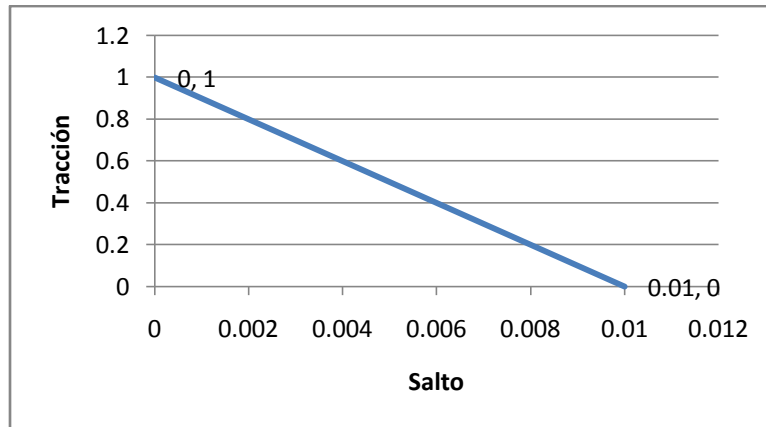
$$f_{int}^u = \int_{\Omega} B^T (\sigma^u - \sigma^\omega) d\Omega \tag{5.22}$$

$$f_{int}^\omega = \int_{\Omega} G^T (\sigma^u - \sigma^\omega) d\Omega + \int_{\Gamma_d} T d\Gamma \tag{5.23}$$

La suma de los esfuerzos siempre debe cumplir la condición de equilibrio por lo tanto, durante el ablandamiento se debe cumplir:

$$(\sigma^u - \sigma^\omega) = 0 \tag{5.24}$$

Aplicando un análisis incremental con control de desplazamientos se calcula la apertura de la discontinuidad y su tracción correspondiente, se obtiene la siguiente gráfica tracción-salto del elemento mostrada en la figura 5.12.

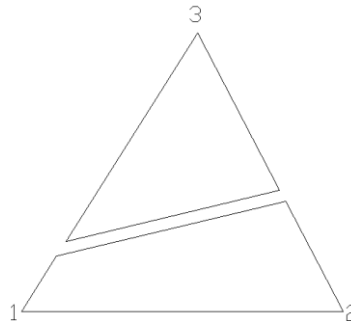


**Fig. 5.12 Gráfica tracción-salto**

En la gráfica cuando aparece la discontinuidad se considera que  $\sigma \approx T$ , además, el área bajo la curva, también llamada energía de fractura para este caso es  $G_f=0.005$ , la cual nos dice que la energía disipada por la discontinuidad es correcta.

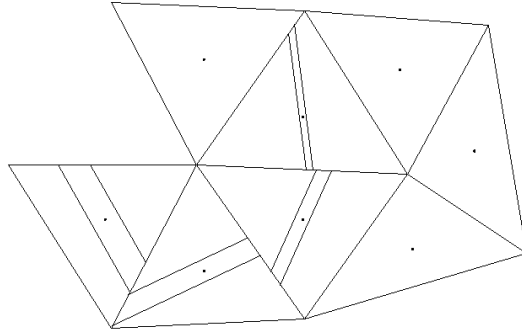
#### Conceptos del modelado.

La discontinuidad se abre y con esto disminuyen gradualmente los esfuerzos de tracción en los bordes de la discontinuidad hasta un límite fijado  $\omega_0$ , en este punto los bordes de la discontinuidad quedan totalmente relajados, es decir sin esfuerzo, esto indica que ya no hay fuerzas de cohesión y el elemento falla, esto se muestra en la figura 5.13.



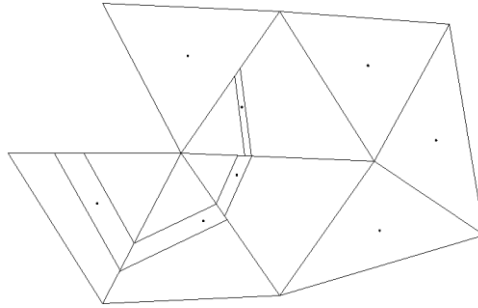
**Fig. 5.13 Esfuerzos relajados**

Cuando la discontinuidad se propaga, la discontinuidad pierde continuidad entre elementos, no existe esta continuidad debido a los saltos grandes de esfuerzo entre elementos figura 5.14, aunque existen tratamientos para seguir una propagación de la discontinuidad.



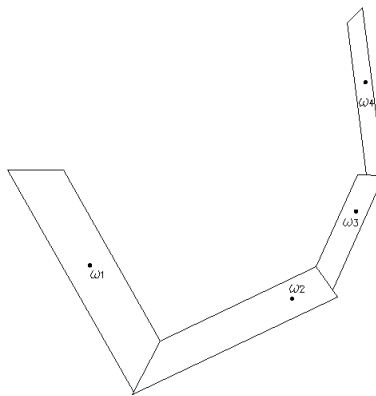
**Fig. 5.14 Propagación de la discontinuidad no ajustada**

El problema de la variación grande de esfuerzos entre elementos se puede disminuir al refinar la malla, también se puede tener un tratamiento escogiendo los nodos dentro del continuo que no necesariamente pasen por el centroide del elemento para que la discontinuidad presente una trayectoria continua como se observa en la figura 5.15.



**Fig. 5.15 Propagación de la discontinuidad ajustada**

Al realizar lo anterior la discontinuidad sigue una trayectoria, aunque se tiene que los saltos no son compatibles  $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_4$ , figura 5.16.



**Fig. 5.16 Saltos no compatibles**

En elemento finito con discontinuidades interiores influye el tamaño y forma del elemento cuando se usan modelos de daño continuo, cuando se usa modelos de daño discreto como en este caso el modelo de daño es función de la apertura de la discontinuidad y no de la geometría del elemento,

aunque si se tiene mallas poco finas los esfuerzos presentan variaciones muy abruptas entre elementos, lo que puede causar problemas numéricos.

### 5.1.2 Viga de sección variable.

Se muestra una viga de sección variable, la cual está empotrada en uno de sus extremos, la geometría se muestra en la figura 5.17. La viga trabaja en esfuerzo plano, tiene un espesor unitario, las propiedades del material se muestran en la tabla 5.1:

	E	$\nu$	$\sigma_u$	$G_f$
Material	1000	0.18	1	0.005

Tabla 5.1 Propiedades del material para viga de sección variable

Se aplica control de desplazamientos y se lleva la estructura hasta la falla.

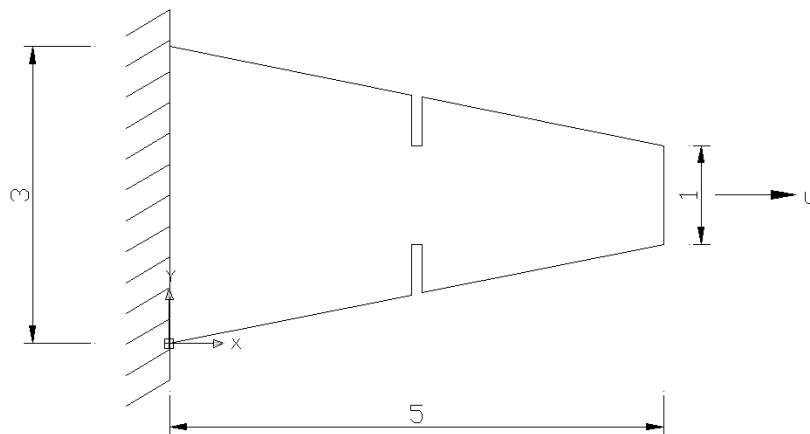


Fig. 5.17 Viga de sección variable

### Resultados.

El Método del Elemento Finito nos permite obtener aproximaciones de la cinemática del problema, pero, por si solo este método no funciona cuando en el material existe daño. Cuando hay presencia de daño el material presenta degradación y por lo tanto cambian sus propiedades, este cambio de propiedades es incluido con modelos constitutivos del material.

Cuando inicia la carga hasta antes de llegar al esfuerzo de fluencia del material, el modelo tiene la siguiente distribución de esfuerzos, figura 5.18:

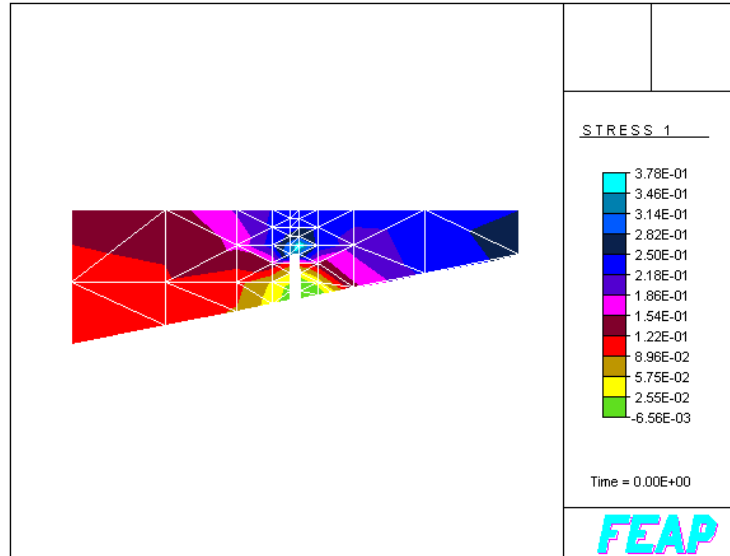


Fig. 5.18 Esfuerzos en dirección X

En la tabla 5.2 se muestran los esfuerzos y deformaciones con tres diferentes valores de desplazamiento impuesto, el primero es antes de llegar al esfuerzo de fluencia del material, el segundo es al sobrepasar el esfuerzo de fluencia y el tercero es cuando se considera que falló el elemento 1.

Desplazamiento	Elemento	Material	x-Coordenada	y-Coordenada	x-Esfuerzo	y- Esfuerzo	Angulo
	<b>xx- Esfuerzo</b>	<b>yy- Esfuerzo</b>	<b>zz- Esfuerzo</b>	<b>xy- Esfuerzo</b>			
	<b>XX-Deformación</b>	<b>yy- Deformación</b>	<b>ZZ- Deformación</b>	<b>XY- Deformación</b>			
	<b>X- Deformación</b>	<b>y- Deformación</b>	<b>Z- Deformación</b>				
0.001	1	1	2.517	1.033	0.75	1.11E-01	-2.36E+00
	7.48E-01	1.12E-01	0.00E+00	-2.62E-02			
	7.28E-04	-2.28E-05	-1.55E-04	-6.19E-05			
	7.29E-04	-2.41E-05	-2.36E+00				
0.0015	1	1	2.517	1.033	1.12	1.66E-01	-2.36E+00
	1.12E+00	1.68E-01	0.00E+00	-3.93E-02			
	1.09E-03	-3.42E-05	-2.32E-04	-9.28E-05			
	1.09E-03	-3.61E-05	-2.36E+00				
0.0035	1	1	2.517	1.033	2.62	3.88E-01	-2.36E+00
	2.62E+00	3.92E-01	0.00E+00	-9.18E-02			
	2.55E-03	-7.98E-05	-5.42E-04	-2.17E-04			
	2.55E-03	-8.43E-05	-2.36E+00				

Tabla 5.2 Esfuerzos y deformaciones para viga de sección variable

En la figura 5.19 se observan los esfuerzos obtenidos con el Método de los Elementos Finitos estándar que no consideran la degradación del material, los esfuerzos calculados por el Método de los Elementos Finitos son mayores que el de fluencia del material y siguen aumentando al incrementar los desplazamientos impuestos.



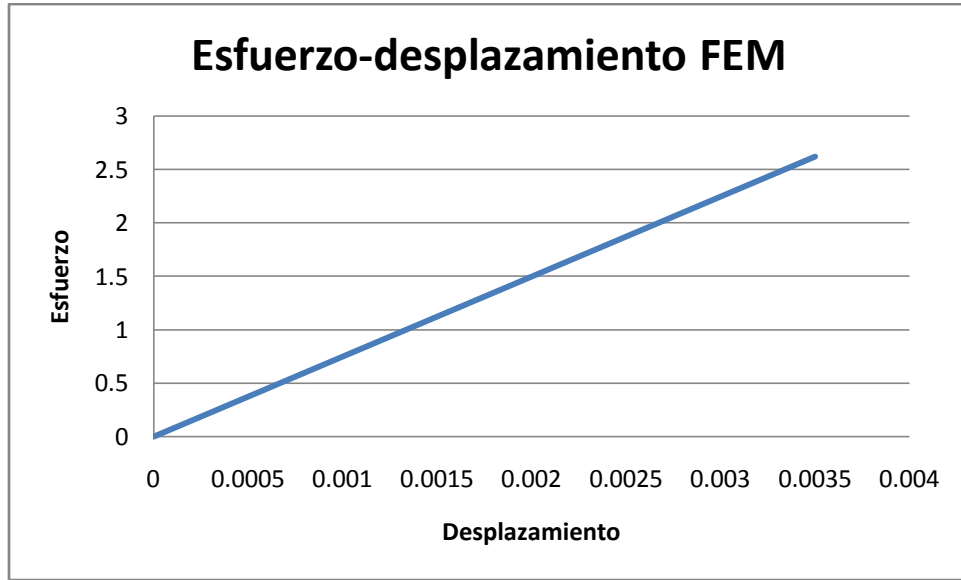


Fig. 5.19 Esfuerzos obtenido por el MEF

Considerando degradación del material, cuando el esfuerzo de fluencia se alcanza, aparece un salto en el campo de los desplazamientos, la discontinuidad se presenta, se propaga y se orienta en función de los esfuerzos principales en el elemento.

Para este ejemplo la viga tiene un plano de simetría, es suficiente simular solo una parte, la cual se muestra en la figura 5.20, al llevar la estructura hasta la falla aparecen las discontinuidades mostradas en la figura 5.21.

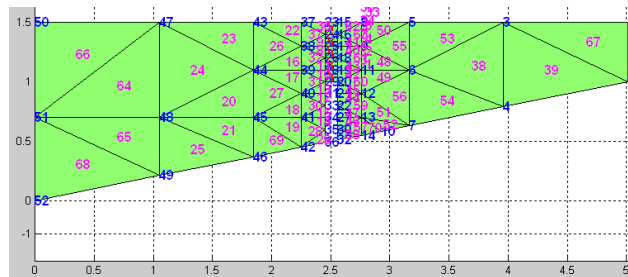


Fig. 5.20 Viga de sección variable discretizada

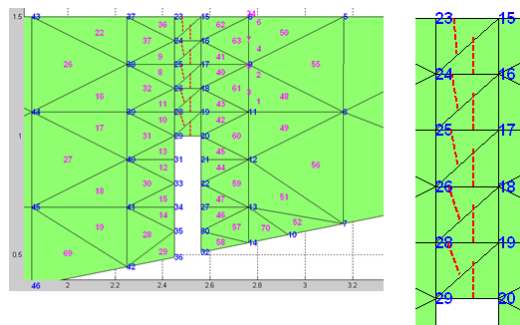
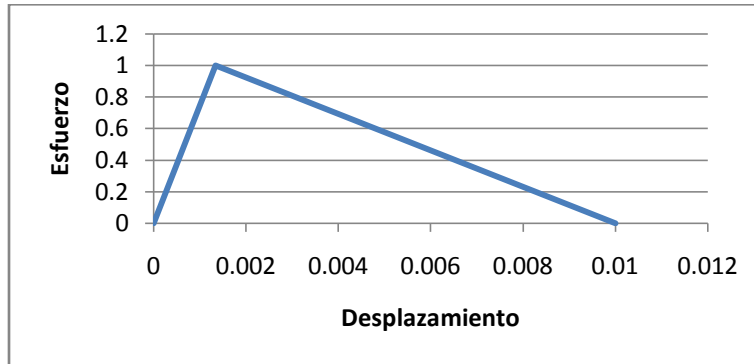


Fig. 5.21 Orientación y propagación de la discontinuidad

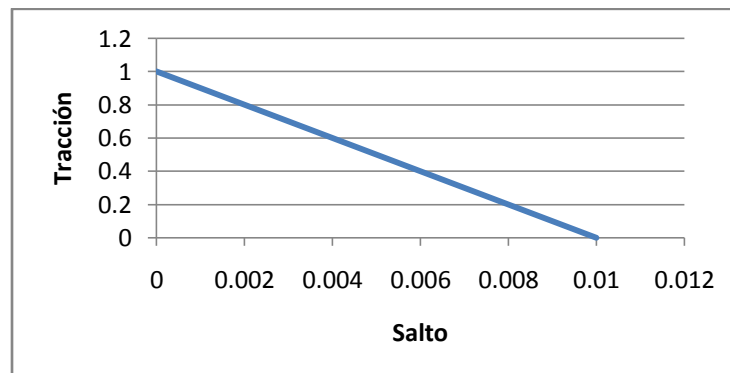
Del análisis obtenemos el esfuerzo último en el elemento, esto se muestra en la grafica esfuerzo-desplazamiento de la figura 5.22.



**Fig. 5.22 Gráfica esfuerzo-desplazamiento**

Cuando aparece la discontinuidad, el esfuerzo empieza a decrecer hasta que se pierde la cohesión en las caras de la discontinuidad y se llega a un esfuerzo cero, comportamiento que muestran los materiales cuasifrágiles.

Cuando se alcanza el esfuerzo máximo del material aparece un salto en el campo de los desplazamientos, con esto se presenta una discontinuidad que al aumentar el desplazamiento impuesto aumenta su apertura. Cuando se encuentra el elemento en el esfuerzo máximo del material  $\sigma_u = 1$  aparece la discontinuidad, a medida que aumentan los desplazamientos los esfuerzos de tracción en las caras de la discontinuidad se reducen hasta que las caras en la discontinuidad se descargan totalmente, es decir los esfuerzos son cero, el comportamiento de las tracciones de la discontinuidad se muestra en la figura 5.23, las gráficas 5.22 y 5.23 representan el último elemento donde aparece la discontinuidad antes de que falle la estructura.



**Fig. 5.23 Gráfica tracción-salto**

Cuando el salto tiene una apertura de 0.01 el elemento que lo contiene deja de transmitir esfuerzos, ya que no hay fuerzas de cohesión en ese punto.

En la gráfica carga-desplazamiento se observa el comportamiento de la estructura, en un principio es lineal hasta que llega a su esfuerzo de fluencia, en ese momento aparece la discontinuidad, en esta discontinuidad se modelan los procesos de degradación del material. A medida que aumenta el desplazamiento impuesto existe degradación progresiva del material la cual se representa como

ablandamiento, el comportamiento general de la estructura desde que inicia la carga hasta que se llega a la falla se puede observar en la figura 5.24.

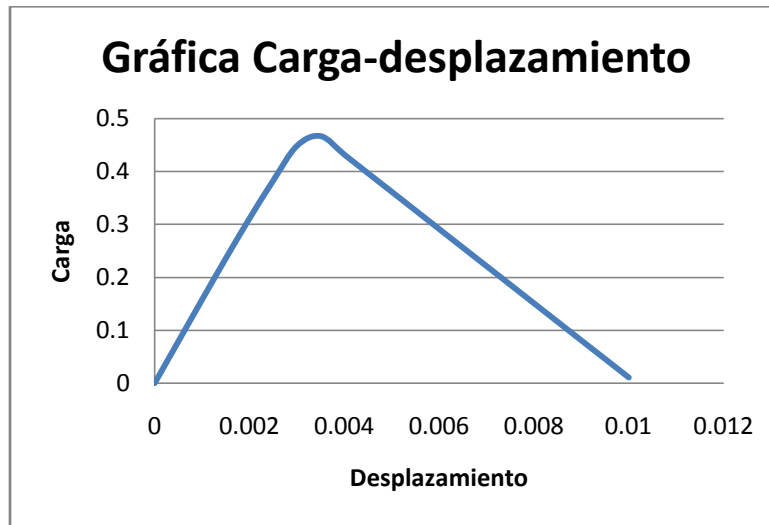


Fig. 5.24 Gráfica P-u Viga de sección variable

### 5.1.3 Viga de 3 puntos.

Se presenta en este ejemplo una viga de tres puntos, esta simplemente apoyada y se le aplica dos desplazamientos prescritos en la parte central del lecho superior, la geometría se presenta en la figura 5.25.

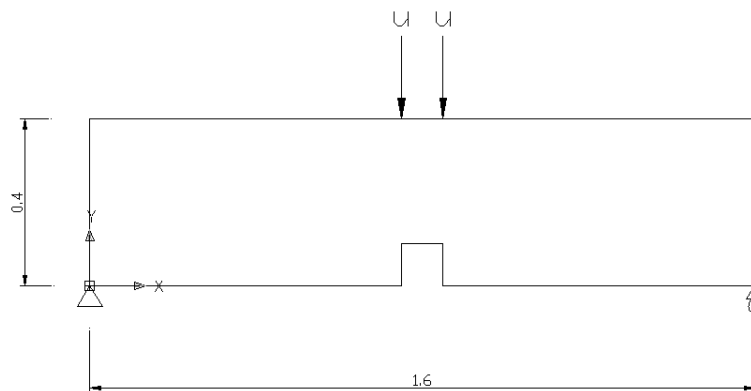


Fig. 5.25 Viga de tres puntos

La viga trabaja en esfuerzo plano, tiene un espesor unitario, sus propiedades se muestran en la tabla 5.3:

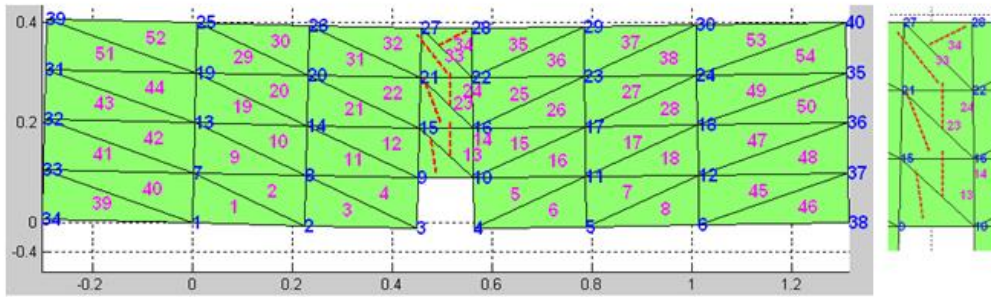
	E	$\nu$	$\sigma_u$	$G_f$
Material 1	1000	0.18	1	0.005

Tabla 5.3 Propiedades del material para viga de tres puntos

Se aplicara control de desplazamientos y se lleva la estructura hasta la falla.

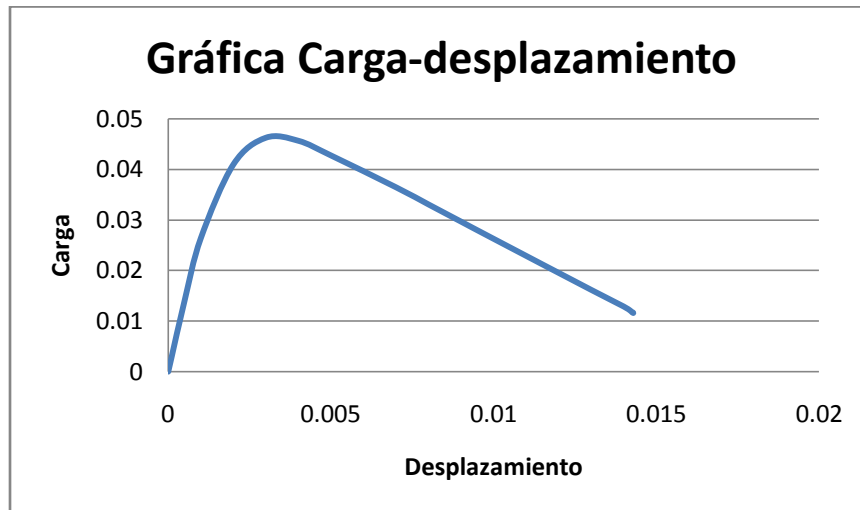
**Resultados.**

En la figura 5.26 se muestra la discretización de la viga, tambien se muestra la orientación y propagación de la discontinuidad. Se observa que en el elemento 34 la orientación de la grieta queda casi perpendicular a la propagación de la grieta, lo cual puede impedir la propagación de la grieta.



**Fig. 5.26 Propagación y orientación de la discontinuidad y discretización del elemento**

El comportamiento general de la estructura desde que inicia la carga hasta que se llega al colapso se puede observar en la figura 5.27, debido a que la variación de los esfuerzos entre elementos es muy grande, ya que el último elemento se encuentra en compresión y debido a que el modelo de daño no considera el efecto de compresión se presenta un problema numérico debido al modelo de daño. Para fines de análisis se muestra la grafica hasta antes del problema numérico.

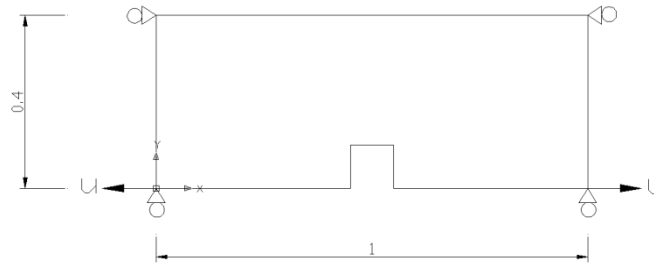


**Fig. 5.27 Gráfica P-u Viga de tres puntos**

En el ejemplo 5.1.6 se describe el problema numérico.

**5.1.4 Paca con hendidura.**

En este ejemplo se tiene una placa la cual se somete a dos desplazamientos que tienen la misma línea de acción pero son de signo contrario, las dimensiones y las condiciones de frontera se muestran en la figura 5.28.



**Fig. 5.28 Geometría de apertura de placa**

Las propiedades del material se muestran en la tabla 5.4:

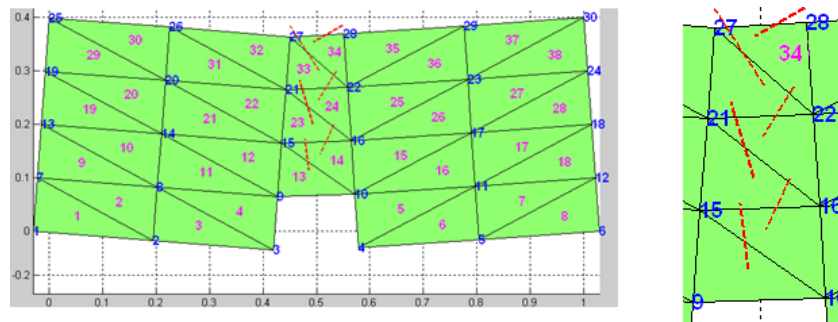
	E	v	$\sigma_u$	$G_f$
Material 1	1000	0.18	1	0.005

**Tabla 5.4 Propiedades del material para placa con hendidura**

Se revisa por control de desplazamientos la estructura hasta la falla.

### Resultados.

En la figura 5.29 se muestra la discretización, orientación y propagación de la discontinuidad al ser sometida la estructura a los desplazamientos impuesto.



**Fig. 5.29 Propagación y orientación de la discontinuidad y discretización del elemento**

El esfuerzo del último elemento donde aparece la discontinuidad antes del colapso se muestra en la figura 5.30 y la grafica de la apertura para este mismo elemento se observa en la figura 5.31.

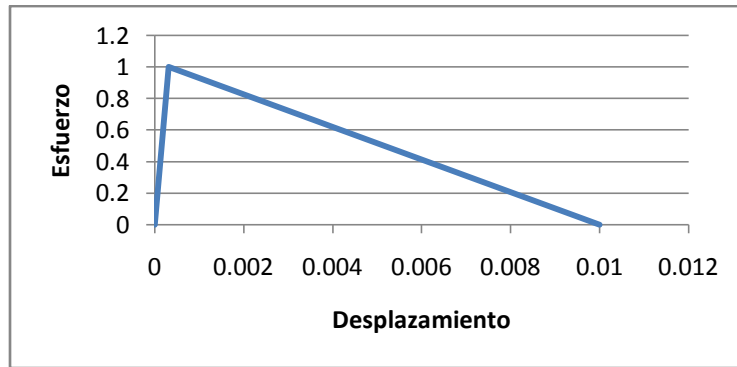


Fig. 5.30 Gráfica esfuerzo-desplazamiento

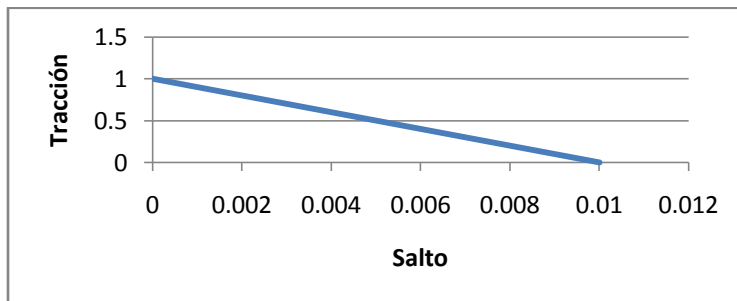


Fig. 5.31 Gráfica tracción-salto

El comportamiento general de la estructura desde que inicia la carga hasta que se llega al colapso se puede observar en la figura 5.32, donde se ve el ablandamiento que representa la degradación del material.

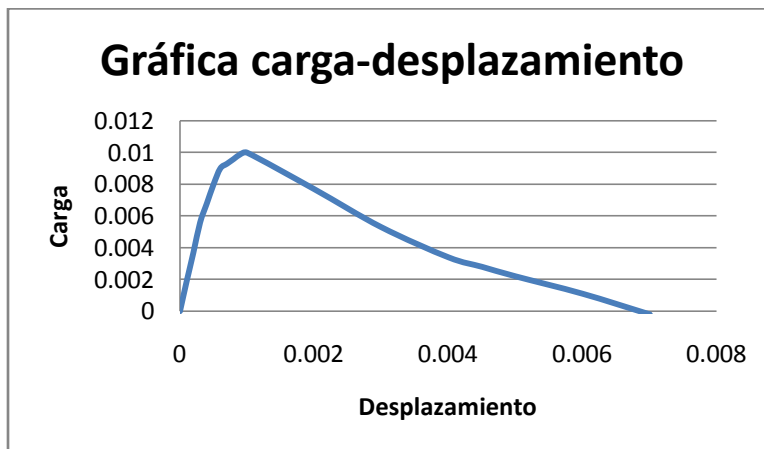


Fig. 5.32 Gráfica P-u Placa con hendidura

### 5.1.5 Placa con perforación interior.

A continuación se muestra una placa con una perforación en el interior, se encuentra restringida en cuatro puntos y se le aplican desplazamientos en dos de sus esquinas para provocar la propagación de la discontinuidad, para fines de estudio se hace una comparación utilizando la misma placa pero cambiando las condiciones de frontera en una de sus esquinas, esto se realiza

para observar el cambio en la orientación y propagación de la discontinuidad. El espesor se maneja unitario y las propiedades del material se muestran en la tabla 5.5:

	E	$\nu$	$\sigma_u$	$G_f$
Material 1	1000	0.18	1	0.005

Tabla 5.5 Propiedades del material para placa con perforación interior

La geometría se muestra en la figura 5.33. La figura 5.33-A es una placa con cuatro restricciones y figura 5.33-B es una placa con tres restricciones.

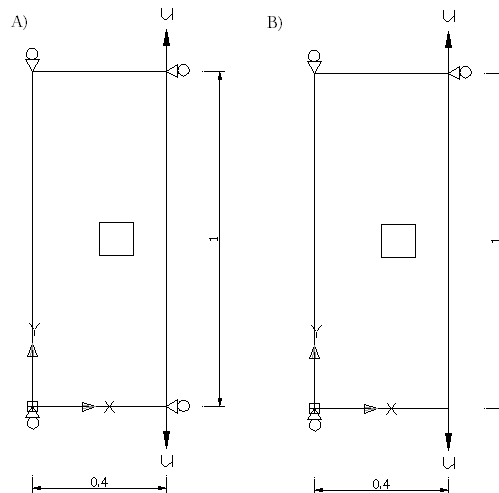
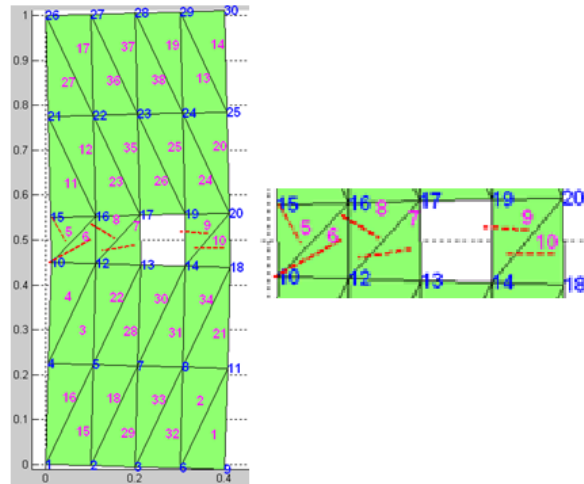


Fig. 5.33 Placas con perforación interior, A) cuatro apoyos, B) tres apoyos

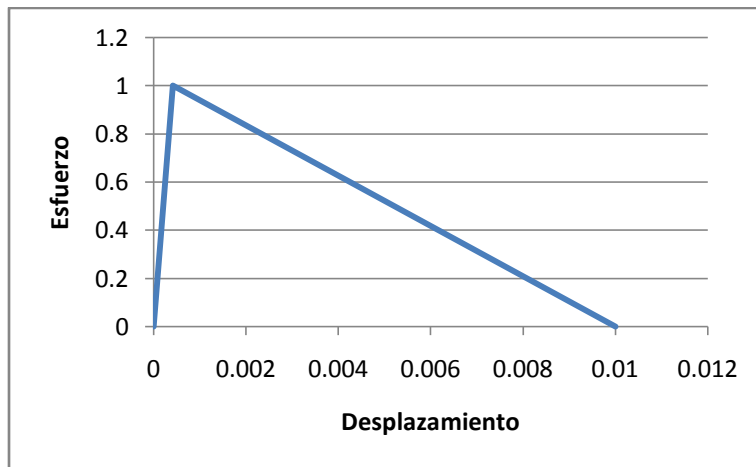
## Resultados.

En la figura 5.34 aparecen las discontinuidades la placa con cuatro apoyos, se muestra su orientación y propagación. Se observa que la propagación tiende a tomar la parte central, pero debido al tamaño de los elementos el cambio de dirección es muy brusco por las grandes diferencias de esfuerzos entre elementos contiguos, este problema se mejora con un refinamiento de la malla, al refinar la malla se suavizan los esfuerzos, otra forma es a través de los métodos de suavizado de esfuerzos que se muestra en el capítulo siguiente.

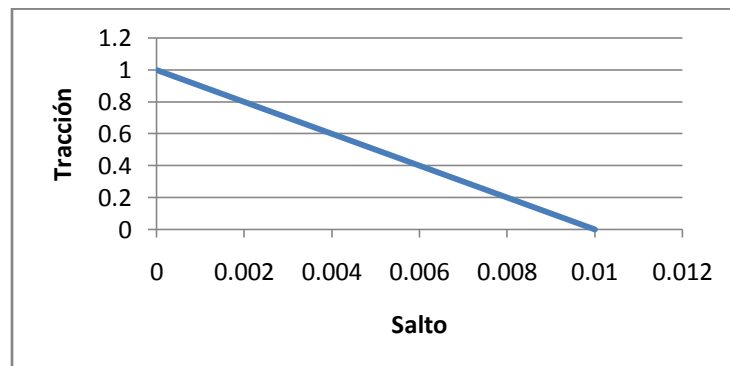


**Fig. 5.34 Placas con perforación interior con cuatro apoyos**

Se muestra en la figura 5.35 el esfuerzo en el último elemento que presenta daño antes de que la estructura falle, el comportamiento de la discontinuidad en este elemento se muestra en la gráfica tracción-salto mostrada en la figura 5.36.



**Fig. 5.35 Gráfica esfuerzo-desplazamiento**



**Fig. 5.36 Gráfica tracción-salto**



El comportamiento general de la estructura desde que inicia la carga hasta que se llega a la falla se puede observar en la figura 5.37 donde se observa que cuando se llega a la carga máxima, la estructura presenta ablandamiento, se hacen presentes las fuerzas cohesivas que son máximas al presentarse la discontinuidad y disminuyen a medida que aumenta el desplazamiento, en la degradación de la estructura se tienen grandes desplazamientos y disminuye la capacidad de carga hasta que la estructura falla.

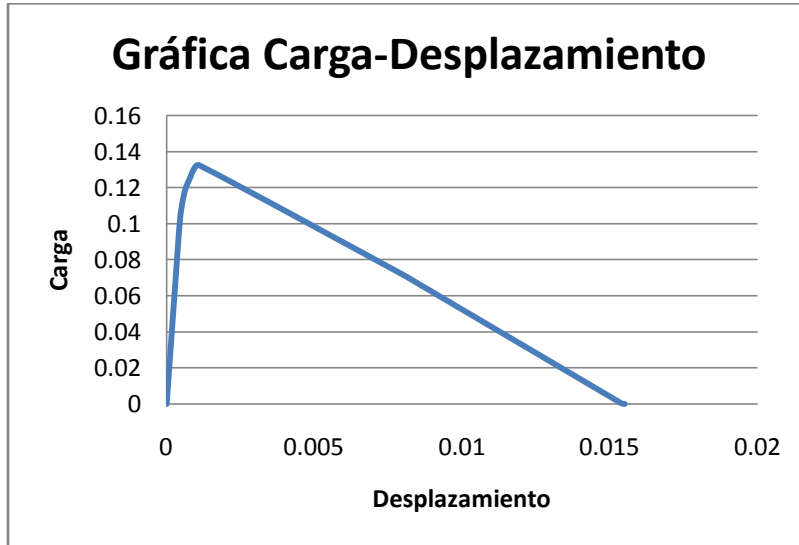


Fig. 5.37 Gráfica carga-desplazamiento

Si se cambia las condiciones de frontera, la propagación de la grieta y su orientación también cambian, esto se observa en la figura 5.38, donde ya no termina la grieta en el elemento 5 sino que ahora termina en el elemento 6 con una orientación diferente, con esta condición se presenta un atoramiento, el elemento 6 no descarga y nunca se presenta daño en el elemento 5, físicamente esto es imposible. El problema se debe a la orientación que toma la discontinuidad del elemento 6 debido a la discontinuidad que existe en el campo de esfuerzos.

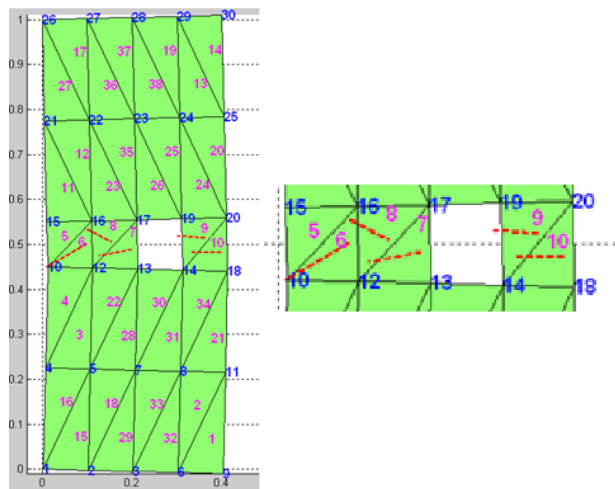


Fig. 5.38 Placas con perforación interior con cuatro apoyos

### 5.1.6 Viga de 3 puntos, comparación de mallas.

Para analizar de donde surge el problema numérico se presenta una viga de tres puntos, su geometría se muestra en la figura 5.39, tiene un ancho unitario, las propiedades de los materiales se muestran en la tabla 5.6:

	E	$\nu$	$\sigma_u$	$G_f$
Material 1	1000	0.18	1	0.005

Tabla 5.6 Propiedades del material para viga de tres puntos

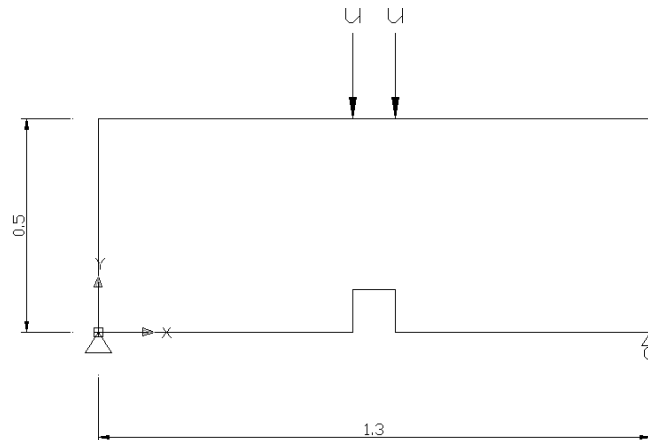


Fig. 5.39 Geometría viga de tres puntos

A la viga se le aplica dos desplazamientos prescritos mostrados en la figura 5.39, el análisis es por control de desplazamientos y se lleva la estructura hasta la falla.

### Resultados.

En un primer modelo se realiza una discretización de la estructura con la malla mostrada en la figura 5.40, la cual en la parte central tiene elementos triangulares orientados en la misma dirección.

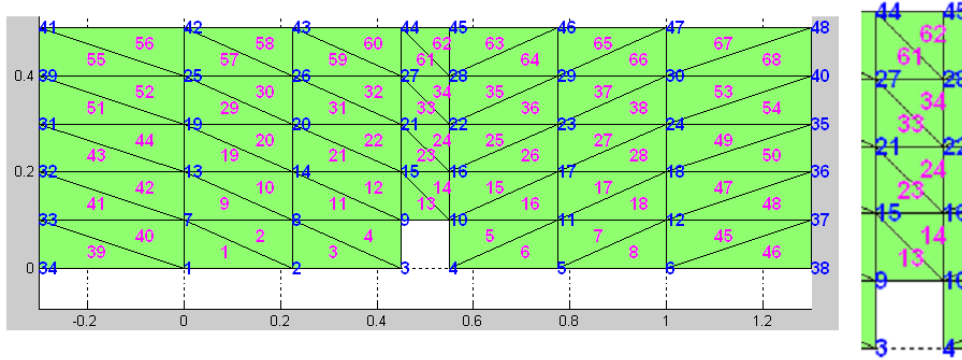


Fig. 5.40 Malla viga de tres puntos

Por el tipo de apoyo a medida que va apareciendo las discontinuidades los esfuerzos principales van tomando un ángulo mayor de inclinación, cuando la inclinación de la discontinuidad tiende a ser perpendicular a la dirección de propagación de la grieta, se atorán los esfuerzos y no se descargan en ese elemento, lo que produce un problema numérico, al no descargarse este elemento todos los elementos fallan, esto se muestra en la figura 5.41, físicamente no es posible por lo que el problema queda mal condicionado.

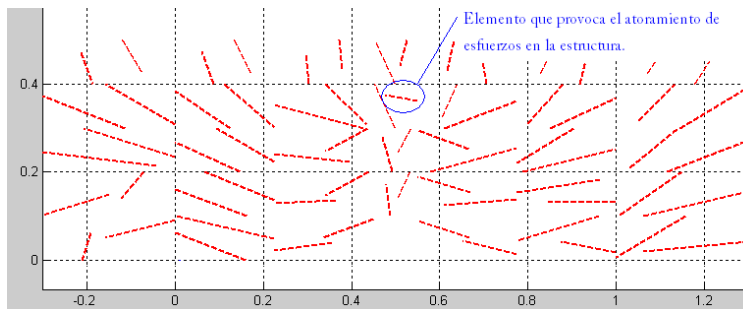


Fig. 5.41 Atoramiento de esfuerzos

Para poder solucionar este problema se cambia la malla, en una primera instancia se cambian los elementos que se encuentran cerca del atoramiento, la nueva discretización se muestra en la figura 5.42 donde se cambiaron las conectividades de los elementos 61 y 62. Con esta nueva configuración ya no existen atoramientos de esfuerzos, en la figura se observa la orientación y propagación de la discontinuidad.

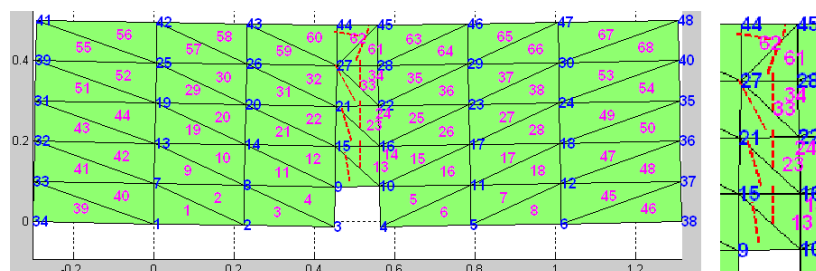
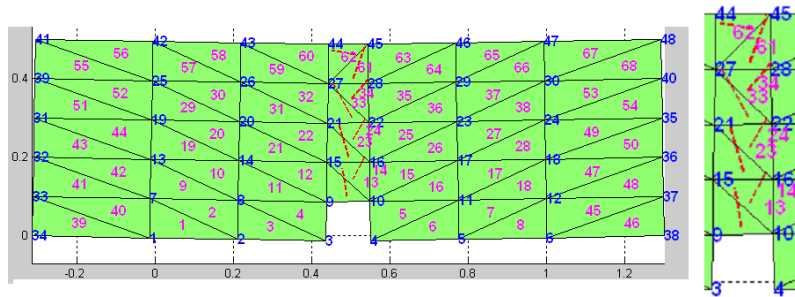


Fig. 5.42 Orientación y propagación de la discontinuidad

En este modelo la discontinuidad que aparece en el elemento 62 tiende a ser perpendicular a la discontinuidad, aunque en este caso no sucedió, se aproxima a presentar atoramiento de esfuerzos.

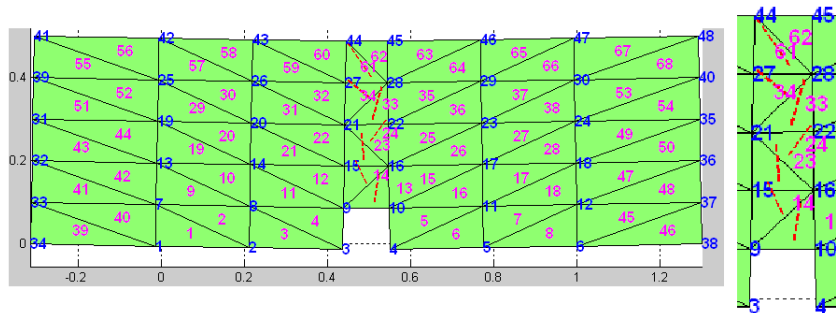
Para profundizar el análisis se presenta un cambio más en la malla, en la parte central, el elemento 62 se invierte, para lograr esto se invierten los apoyos, el nodo 34 se vuelve móvil y el 38 fijo. En la figura 5.43 se muestran las discontinuidades con su orientación y propagación.



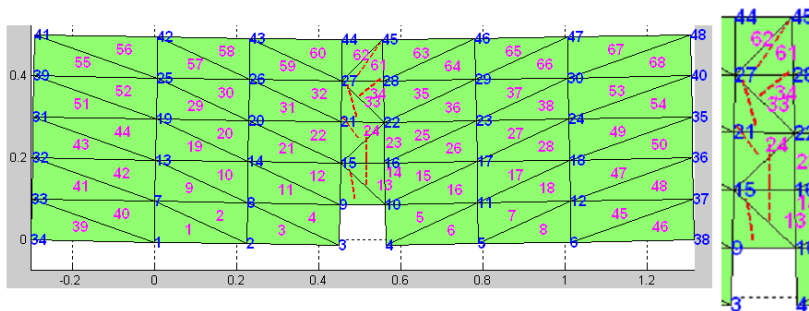
**Fig. 5.43 Orientación y propagación de la discontinuidad cambio de apoyo**

Se presento el mismo comportamiento de la discontinuidad en la estructura anterior, con la tendencia a volverse perpendicular al la propagación de la discontinuidad.

Si ahora se analiza una malla donde los elementos centrales tienen una distribución alternada, la cual se muestra en la figura 5.44. En la figura 5.45 aparece una configuración en la parte central inversa, en ambas figuras aparecen las dicontinuidades en los elementos con su orientación y propagación.



**Fig. 5.44 Malla alternada**



**Fig. 5.45 Malla alternada inversa**

Se observa que las discontinuidades en su orientación y trayectoria varían en las dos mallas anteriores, lo anterior se debe a que al variar la posición del elemento en la estructura cambia la condición del elemento y por lo tanto su comportamiento, esto repercute directamente en la longitud de la grieta la cual está referida al centroide, además también repercute en la orientación y la trayectoria de la discontinuidad, a pesar de que se mantienen los mismos tamaños en los elementos de estas dos últimas mallas.

Con diferentes estados de carga se encontró que las vigas presentan su carga máxima y su colapso en el mismo punto y que el área bajo la curva de ambas gráficas representa la misma energía de fractura  $G_f$ , por lo anterior, se muestra que la formulación es consistente ante cualquier estado de cargas. Lo que se vio en este último análisis es que según la malla, la grieta se propaga de diferente manera lo que hace dependiente de la malla los resultados. Este problema se disminuye al refinar la malla, también se logra con el uso de elementos mixtos o con un tratamiento de suavizado de esfuerzos.

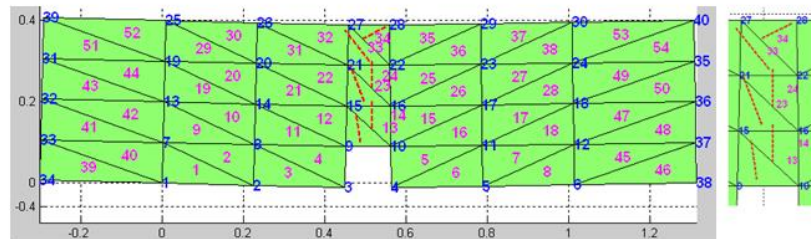
Los análisis anteriores muestran que la formulación desarrolla un buen comportamiento, que puede representar la discontinuidad con su orientación y propagación. Con la energía de fractura  $G_f$  propiedad del material y con la energía producto de los desplazamientos prescritos, se crea la energía para producir la discontinuidad, lo que demuestra que la formulación tiene la capacidad de localizar la discontinuidad y simular la falla.

## Capítulo 6

### Suavizado de esfuerzos

#### 6.1 Parche Superconvergente

Un problema que se tiene en la formulación de elementos finitos basados en desplazamientos es, que al no ser continuos los esfuerzos entre fronteras, los saltos en los esfuerzos son muy abruptos, lo cual puede causar problemas en elementos finitos con discontinuidades interiores ya que al calcular la normal debido a este salto en los desplazamientos, la normal en los elementos agrietados presenta un comportamiento poco representativo del fenómeno real, esto se muestra en la figura 6.1.



**Fig. 6.1 Rotación de la normal debido a la variación de los esfuerzos**

Es por esta razón que se busca como aliviar este problema producto de la propia formulación, una de las formas es suavizando el campo de esfuerzos, por lo que en este capítulo se muestra algunas formas de suavizar los esfuerzos, principalmente se habla del Parche Superconvergente, el cual permite en un punto del continuo obtener los esfuerzos suavizados, los cuales tienen una mejor aproximación.

Se ha presentado un avance muy importante en las técnicas de postprocesamiento que mejoran la solución obtenida a través del Método de Elementos Finitos, uno de ellos es el de Recuperación por Parche Superconvergente (Superconvergent Patch Recovery, SPR), el cual ha sido desarrollado por Zienkiewicz y Zhu (1992), este método busca el suavizado del campo de esfuerzos por zonas. En este desarrollo una expansión polinómica describe el campo de esfuerzos, utilizando un conjunto de elementos contiguos llamados "Parches" alrededor de los nodos donde se pretende realizar el suavizado del campo de esfuerzos. La expansión se hace utilizando mínimos cuadrados y los nuevos campos de esfuerzo suavizado se calculan de los campos de esfuerzos evaluados por el Método de los Elementos Finitos en los puntos de integración numérica.

A este método se le han realizado mejoras como en, Lee y Lo (1993), Blacker y Belystschko (1994), Wiberg y Abdulwab (1993), Wiberg et al.(1994) y Ródenas (2002). Además existen otros modelos que permiten el suavizado del campo de esfuerzos como: Recuperación por parches de equilibrio (Recovery by Equilibrium Patches, REP), propuesto por Boroomand y Zienkiewicz (1999) y la Técnica de Recuperación de Esfuerzo Superconvergente con restricción de equilibrio (Superconvergent Stress Recovery Technique with equilibrium constraint) propuesto por Lee et al. (1997) el cual es una combinación de Recuperación por Parche Superconvergente (SPR) y Recuperación por parches de equilibrio (REP).

A continuación se describe brevemente el procedimiento del Parche Superconvergente:

Se propone una expansión polinomial para cada componente  $\sigma_p^*$ , la cual se escribe como:

$$\sigma_p^* = Pa \quad (6.1)$$

donde  $P$  es una función polinómica que contiene los términos polinomiales y  $a$  son parámetros desconocidos.

Para un elemento en una dimensión de orden  $\rho$ , puede escribirse:

$$P = [1 \quad X \quad X^2 \quad \dots \quad X^\rho] \quad (6.2)$$

$$a = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{\rho+1}] \quad (6.3)$$

Siempre se debe cumplir que el polinomio que se usa sea completo, por ejemplo para dos dimensiones y una expansión lineal se tiene:

$$P = [1 \quad x \quad y] \quad (6.4)$$

Para una expansión cuadrática se tiene:

$$P = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \quad (6.5)$$

Por ejemplo para cuadriláteros bilineales se tiene:

$$P = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad (6.6)$$

La determinación del parámetro desconocido  $a$  de la expansión dada en la ecuación 6.1, se obtiene con la minimización del error cuadrático en el campo de los esfuerzos en los puntos de Gauss como se ve en la siguiente ecuación:

$$F(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i))^2 \quad (6.7)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i)a)^2 \quad (6.8)$$

donde:

$\sigma_h$  Son los esfuerzos obtenidos del análisis de Elementos Finitos por desplazamientos

$(x_i, y_i)$  Son las coordenadas de un grupo de puntos de Gauss

$n = mk$  Es el total de número de puntos de Gauss

$k$  Es el número de puntos de Gauss en cada elemento  $m_j$  ( $m_j = 1, 2, \dots, m$ ) del elemento parche

$\Omega_S = \bigcup_{j=1}^m \Omega_{mj}$  Es el dominio del parche

La condición de minimización de  $F(a)$  implica satisfacer lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) a = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (6.9)$$

Lo cual puede ser escrito en forma matricial como:

$$a = A^{-1}b \quad (6.10)$$

donde:

$$A = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \quad (6.11)$$

$$b = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (6.12)$$

La solución polinomial local sobre el elemento parche se obtiene minimizando cada componente:

$$F(a) = \int_{\Omega_s} (\sigma_h - \sigma_p^*)^2 d\Omega \quad (6.13)$$

$$= \int_{\Omega_s} (\sigma_h - Pa)^2 d\Omega \quad (6.14)$$

Donde:

$\Omega_s = \bigcup_{j=1}^m \Omega_{mj}$  Es el dominio del parche

La condición de minimización resulta:

$$\int_{\Omega_s} P^T P d\Omega a = \int_{\Omega_s} P^T \sigma_h d\Omega \quad (6.15)$$

Visto en forma matricial tenemos:

$$a = A^{-1}b \quad (6.10)$$

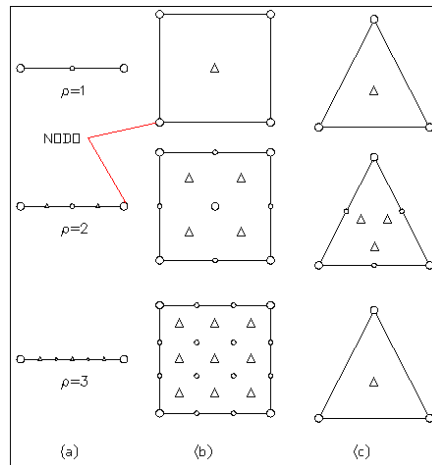
Con:

$$A = \int_{\Omega_s} P^T P d\Omega \quad (6.16)$$

$$b = \int_{\Omega_s} P^T \sigma_h d\Omega \quad (6.17)$$

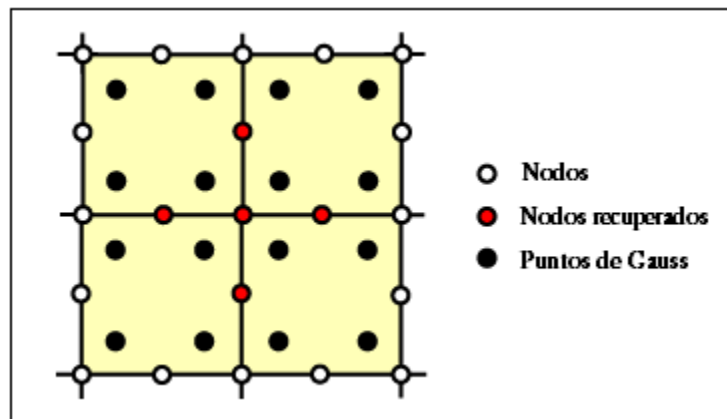
Los puntos superconvergentes de los elementos triangulo y cuadrilátero se presentan en la figura 6.2.



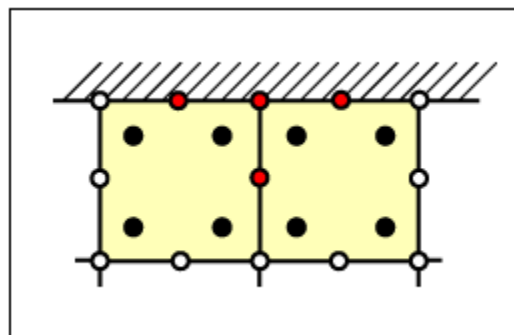


**Fig. 6.2 Puntos de Gauss para el Parche superconvergente ( $\Delta$ ), Zienkiewicz y Zhu (1991)**

Se recuperan los valores en los nodos que se encuentran dentro del parche, si el parche contiene las fronteras, entonces en las fronteras también se pueden recuperar los valores en los nodos. Un ejemplo de parche superconvergente se muestra en la figura 6.3 y en la figura 6.4 se puede ver un parche superconvergente en la frontera.



**Fig. 6.3 Parche típico del procedimiento SPR (NIST/MSEL)**



**Fig. 6.4 Parche típico del procedimiento SPR en las fronteras (NIST/MSEL)**

Para obtener resultados aceptables en cualquier punto de la malla se suele hacer un suavizado del campo de esfuerzos, así el campo resultante  $\sigma^*$  es interpolado con las mismas funciones de forma  $N$  que se usan al interpolar el campo de desplazamientos, entonces podemos decir que para una malla con  $n$  nodos se define:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n N_i \sigma_i^* = N^T \sigma^* \equiv [N_1 \quad N_2 \dots \quad N_n] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^* & \dots \\ \sigma_2^* & \\ \vdots & \\ \sigma_n^* & \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

donde:

$\sigma_i^*$  Son los esfuerzos suavizados correspondientes al nodo  $i$ -ésimo.

$N$  Es un vector columna formado por las  $n$  funciones de forma correspondientes a cada uno de los nodos utilizados.

$\sigma^*$  Es la matriz en la cual la fila  $i$ -ésima está formada por los esfuerzos suavizados modales  $\sigma_i^*$  la cantidad de columnas de esta matriz depende del tipo de estado para esfuerzo plano son tres y para deformación plana son cuatro (Zienkiewicz, 1987).

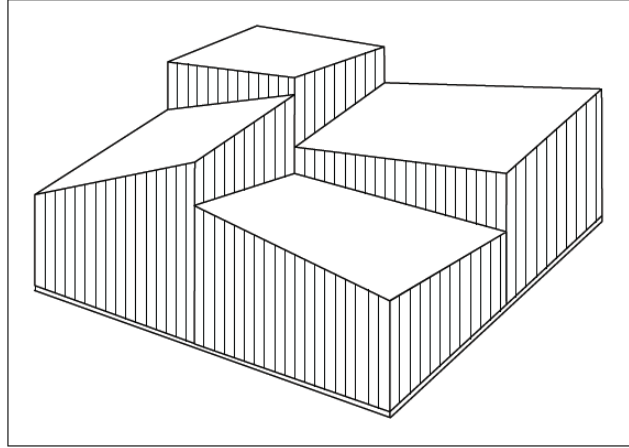
Los esfuerzos suavizados  $\sigma^*$  representan una mejor aproximación a la solución exacta del problema, que las  $\sigma_h$  que son los esfuerzos obtenidos a partir del Método de Elementos Finitos, esto se fundamenta en lo siguiente: Cuando los esfuerzos son suavizados, se eliminan las discontinuidades en el campo de los esfuerzos que existen en las caras de contacto entre elementos, se sabe que en la solución exacta el campo de esfuerzo es continuo, por lo tanto es razonable suponer que el campo de esfuerzos suavizados se aproxima más a la solución exacta. Además con el suavizado de esfuerzos se consigue una distribución de esfuerzos más uniforme dentro del dominio, con esto es posible evaluar los esfuerzos en cualquier punto con resultados aceptables, lo cual no sería posible con el campo de esfuerzos no suavizado en cual solo se puede evaluar correctamente los esfuerzos en los puntos de integración.

## 6.2 Suavizado de esfuerzos

En esta parte del capítulo se describen diferentes métodos para suavizar el campo de esfuerzos (Celigüeta, 2007). De la formulación de elementos finitos se tiene que los esfuerzos en cualquier punto del elemento se obtiene de:

$$\sigma = D\varepsilon = DB\delta^e \quad (6.19)$$

El problema es debido a que la matriz de deformaciones  $B$  que contiene las derivadas de las funciones de forma  $N$  no es continua, por lo tanto las deformaciones y los esfuerzos calculados no presentan continuidad en las fronteras, por lo tanto los valores de deformaciones y esfuerzos en los nodos no presentan continuidad entre elementos, como se muestra en la figura 6.5.



**Fig. 6.5 Campo de esfuerzo obtenido por el MEF (Celigüeta, 2007)**

Para suavizar el campo de esfuerzos se toma una componente  $\sigma$  cualquiera del esfuerzo y a continuación se considera:

$$\sigma = D_f \varepsilon = D_f B \delta^e \tag{6.20}$$

donde:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{6.21}$$

Para esfuerzo plano se tiene:

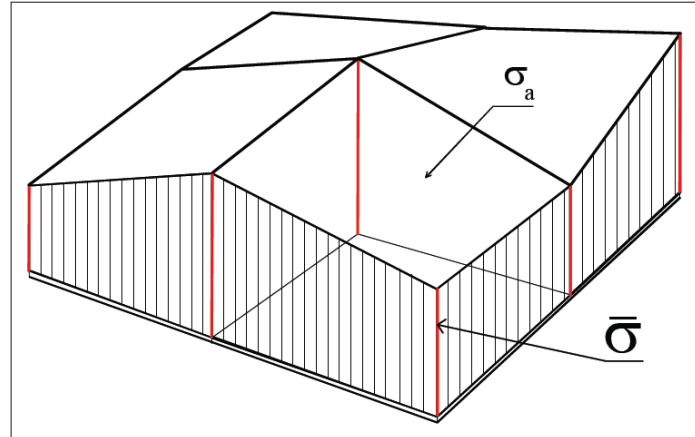
$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

$D_f$  Representa la fila correspondiente en la matriz  $D$

En la ecuación 6.20 si  $f = 1$ , se considera  $\sigma_x$  y la primera fila de  $D$ , si  $f = 2$ , se considera  $\sigma_y$  y la segunda fila de  $D$  y si  $f = 3$ , se considera  $\tau_{xy}$  y la tercera fila de  $D$ .

El principal objetivo del suavizado de esfuerzos es buscar un valor único del esfuerzo en cada nodo  $\bar{\sigma}$  tal que el campo de esfuerzos se represente a través de las funciones de interpolación  $N_i$  las cuales son usadas para las deformaciones y que el campo de esfuerzos en los elementos sea continuo. La variación de un esfuerzo suavizado dentro del elemento es interpolado respecto a los valores únicos en los nodos como se muestra en la figura 6.6 y se representa en la ecuación 6.23.

$$\sigma_a = \sum N_i \bar{\sigma}_i^e = N_f \bar{\sigma}^e \tag{6.23}$$



**Fig. 6.6 Esfuerzos suavizados (Celigüeta 2007)**

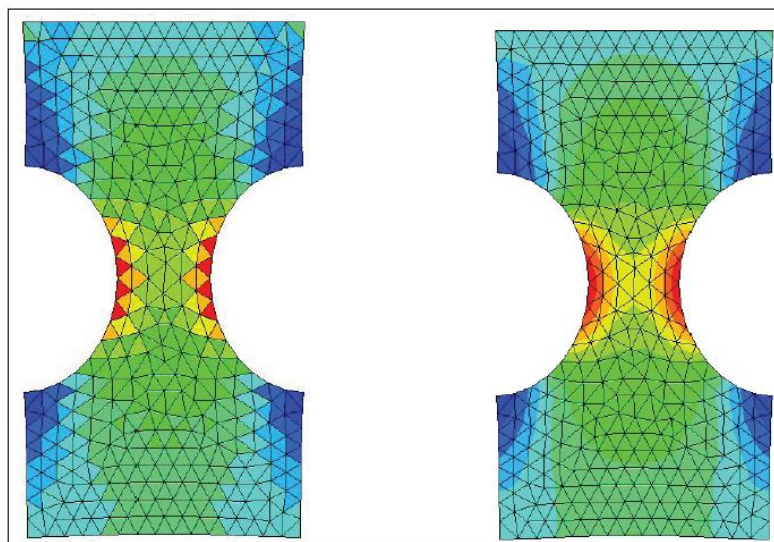
donde:

$N_f$  Vector fila con las funciones de interpolación del elemento.

$\bar{\sigma}_i^e$  Esfuerzo suavizado en el nodo  $i$  del elemento  $e$

$\bar{\sigma}^e$  Valores del esfuerzo suavizado  $\bar{\sigma}$  en todos los nodos del elemento  $e$  las cuales son incógnitas.

Los esfuerzos obtenidos con el Método de los Elementos Finitos se muestran a la izquierda de la figura 6.7. El alisamiento aplicado a los esfuerzos en el postprocesamiento en un modelo utilizando el Método del elemento finito se muestra a la derecha en la figura 6.7.



**Fig. 6.7 Aplicación del suavizado de esfuerzos (Celigüeta, 2007)**

### 6.3 Métodos para suavizar el campo de esfuerzos

Para encontrar los valores de los esfuerzos en los nodos  $\bar{\sigma}$ , se muestran tres métodos, los cuales se aplican por separado a cada una de las componentes del esfuerzo, es decir si es en el plano se aplican para  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , si son en el espacio se aplican a  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ .

#### 6.3.1 Suavizado por promediado directo de los valores de esfuerzo de los distintos elementos

Para los esfuerzos en el nodo  $i$  calculadas para cada elemento tenemos.

$$\sigma_i^e = D_f B(x_i, y_i) \delta^e \quad (6.24)$$

Para los esfuerzos promediados en el nodo  $i$ , entre todos los elementos que llegan a él:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sum_e \sigma_i^e}{n_i^e} \quad (6.25)$$

Donde:

$n_i^e$  es el número de elementos que llegan al nodo

Promediado directo con el área

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sum_e A^e \sigma_i^e}{\sum_e A^e} \quad (6.26)$$

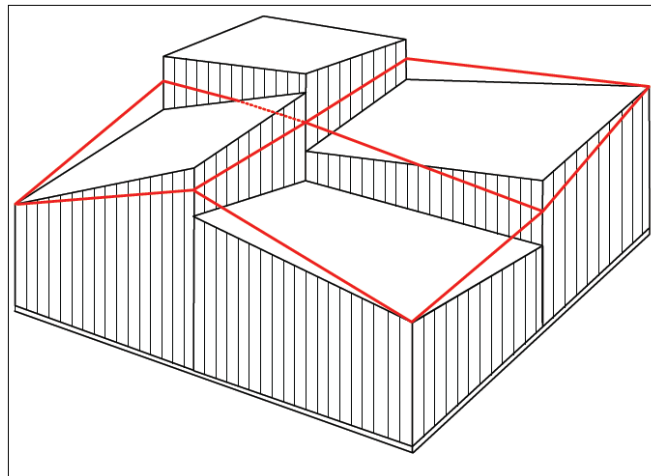


Fig. 6.8 Suavizado por promediado directo (Celigüeta, 2007)

El suavizado por promediado directo se muestra en la figura 6.8, este método es sencillo de implementar.

### 6.3.2 Suavizado global en toda la malla, minimizando el error global debido al suavizado

Primero se obtiene el error entre el esfuerzo suavizado y el esfuerzo obtenido a través del Método de Elementos Finitos.

$$E = \sigma_a - \sigma = N_f \bar{\sigma}^e - \sigma \quad (6.27)$$

El error cuadrático es:

$$E_2 = \int E^2 dv = \int (\sigma_a - \sigma)^2 dv \quad (6.28)$$

Entonces se buscan los esfuerzos suavizados en los nodos que minimicen el error cuadrático.

$$\frac{\partial E_2}{\partial \bar{\sigma}^e} = 0 \quad (6.29)$$

$$\int 2 \frac{\partial E}{\partial \bar{\sigma}^e} E dv = 0 \rightarrow \int 2 N_f^T (\sigma_a - \sigma) dv = 0 \quad (6.30)$$

$$\int N_f^T (N_f \bar{\sigma}^e - \sigma) dv = 0 \quad (6.31)$$

$$\int N_f^T N_f dv \bar{\sigma}^e = \int N_f^T \sigma dv \quad (6.32)$$

Esto se puede poner de la siguiente forma:

$$M^e \bar{\sigma}^e = R^e \quad (6.33)$$

Donde:

$M_{ij}^e = \int N_i N_j dv$  Matriz de suavizado de tamaño  $(n \times n)$  la cual es dependiente de la geometría

$R_i^e = \int N_i \sigma dv$  Término independiente función de los esfuerzos

Se ensambla para todos los elementos, así se minimiza el error del esfuerzo suavizado de forma global para toda la estructura:

$$M \bar{\sigma} = R \quad (6.34)$$

Con este método se obtiene de una sola vez el valor del esfuerzo suavizado en todos los nodos de la malla, aunque el costo computacional es mayor ya que se tiene que resolver un sistema de ecuaciones de tamaño igual al número de nodos y para cada componente del esfuerzo cambia el termino independiente  $R$ . Los términos  $M$  y  $R$  se calculan por integración numérica esto es, se minimiza el error de los esfuerzos suavizados respecto al obtenido con el Método de Elementos Finitos, este método se calcula en los puntos de Gauss, haciendo este método más eficaz pero computacionalmente más costoso.

### 6.3.3 Suavizado local en cada elemento, minimizando el error local debido al suavizado, seguido de promediado de los distintos nodales

Se toma la formulación directa:

$$\sigma_i^e = D_f B(x_i, y_i) \delta^e \quad (6.24)$$

Pero esta vez se aplica en los puntos de Gauss, así los esfuerzos son más precisos, por lo tanto la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$\sigma_G = D_f B_G(x_G, y_G) \delta^e \quad (6.35)$$

Se obtiene el error en los puntos de Gauss entre el esfuerzo suavizado y el esfuerzo obtenido mediante el Método de los Elementos Finitos.

$$E_G = \sigma_{aG} - \sigma_G = N_{fG} \bar{\sigma}^e - \sigma_G \quad (6.36)$$

Se busca unos esfuerzos en los nodos  $\bar{\sigma}^e$  de tal forma que se minimice el error cuadrático en los puntos de Gauss:

$$E_{G2} = \sum_G H_G (E_G)^2 \quad (6.37)$$

Donde:

$H_G$  Factor de peso de cada punto en la integración numérica

Se minimiza el error con respecto a  $\bar{\sigma}^e$

$$\frac{\partial E_{G2}}{\partial \bar{\sigma}^e} = \sum_G 2 H_G \frac{\partial E_G}{\partial \bar{\sigma}^e} E_G = 0 \quad (6.38)$$

$$\sum_G 2 H_G N_{fG}^T (\sigma_{aG} - \sigma_G) = \sum_G 2 H_G N_{fG}^T (N_{fG} \bar{\sigma}^e - \sigma_G) = 0 \quad (6.39)$$

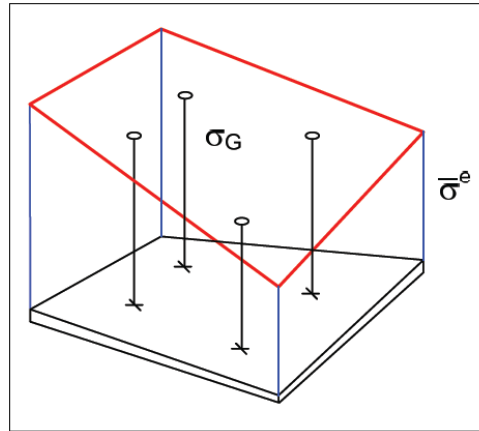
Además se tiene:

$$\sum_G H_G N_{fG}^T N_{fG} \bar{\sigma}^e = \sum_G H_G N_{fG}^T \sigma_G \quad (6.40)$$

Esta ecuación es la misma ecuación de suavizado individual del elemento que se utilizó en el suavizado global, evaluada numéricamente:

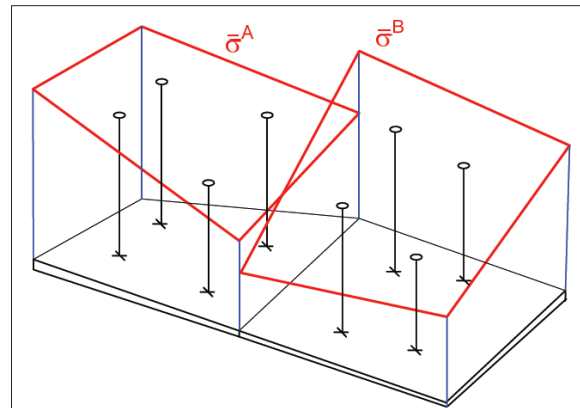
$$M^e \bar{\sigma}^e = R^e \quad (6.33)$$

Si se aplica esta ecuación al elemento  $e$ , se obtiene unos esfuerzos en los nodos que minimizan el error en los puntos de Gauss como se muestra en la figura 6.9, por lo tanto estos esfuerzos son extrapolados de los esfuerzos de Gauss.



**Fig. 6.9 Extrapolados de los esfuerzos de Gauss (Celigüeta, 2007)**

En este método los esfuerzos extrapolados en los puntos de Gauss son discontinuos en las fronteras, ya que se obtuvieron de forma independiente para cada elemento como se muestra en la figura 6.10. Se puede promediar los valores de esfuerzo en los nudos entre los elementos para obtener  $\bar{\sigma}$  definitivos siguiendo el método del punto 6.3.1. Este método requiere un costo computacional menor ya que el sistema de ecuaciones se resuelve a nivel elemento finito en vez de calcularlo para toda la malla.



**Fig. 6.10 Esfuerzos extrapolados en los puntos de Gauss (Celigüeta, 2007)**



## Capítulo 7

### Conclusiones

#### 7.1 Conclusiones finales

En el presente trabajo de tesis se presenta una formulación variacional general del modelo de Discontinuidades Interiores cuando se presenta localización de deformaciones en sólidos. Se vio que la formulación variacional general del Modelo de Discontinuidades Interiores incluye todas las ecuaciones que gobiernan el problema. La formulación variacional presenta ventajas matemáticas poderosas en la solución numérica como robustez, precisión, existencia, estabilidad y convergencia. Se ha revisado el problema de falla en materiales que pueden caracterizarse con un modelo constitutivo discreto. Se mostraron las potencialidades de la formulación variacional y la aproximación con elementos finitos con discontinuidades interiores.

Se obtuvo de una formulación mixta las matrices de coeficientes para elementos finitos con discontinuidades interiores en su forma discreta. A través de consideraciones cinemáticas se obtuvo la matriz de rigideces de la formulación de desplazamientos y la matriz de coeficientes mixta de dos campos desplazamiento-deformaciones, y de tres campos desplazamientos-deformaciones-esfuerzos. Se utilizó un modelo discreto que emplea como variable independiente al salto de los desplazamientos  $[[u]]$  y como variable dependiente a las tracciones  $T$ , además de la energía de fractura  $G_f$ . Actualmente el método del elemento finito continúa siendo el método numérico más poderoso para solución de problemas complejos, aunque queda limitado a problemas elásticos, por lo cual se recurre a formulaciones que incluyan el daño.

Se mostró que de la aproximación de los funcionales con el Método de Elementos Finitos se obtiene como resultado matrices de rigideces simétricas de los Elementos Finitos con Discontinuidades Interiores. La formulación garantiza dentro del elemento finito la continuidad del vector de tracciones en la discontinuidad y la posibilidad de movimientos de cuerpo rígido de las partes en que queda dividido el elemento por la discontinuidad.

La formulación general del modelo de Discontinuidades Interiores permite desarrollar elementos finitos con discontinuidades interiores tridimensionales que permitirán resolver problemas de localización de deformaciones que son de gran interés en el ámbito de la ingeniería, además se vio que cuando se introduce la continuidad de tracciones en el modelo en su forma variacional se satisface el PVF.

En la formulación de desplazamientos para conocer el estado de esfuerzo en puntos de interés se tiene que recurrir a métodos extra al análisis porque el campo de esfuerzos no es continuo, a diferencia de los elementos mixtos, que tienen la ventaja de obtener el estado de esfuerzo continuo en todos los puntos del dominio por lo que se evita un tratamiento extra. Con esta formulación no es necesario conocer a priori la dirección de la falla, debido a que esta surge a partir de las variables definidas en el modelo.

En el modelo de problemas de localización se ha observado cierta dependencia de acuerdo a la orientación de la malla, lo que no permite simular de manera objetiva los mecanismos de falla y propagación de la grieta. Una limitación que se tiene es la necesidad de tener una malla muy fina en la zona de falla para poder tener una respuesta estructural más objetiva, además se debe tener presente que al enriquecer el elemento y aparecer nuevos grados de libertad, existe un incremento

de la cantidad de ecuaciones por resolver lo cual implica un costo computacional mayor que va creciendo al aparecer nuevas discontinuidades.

Debido a los saltos de esfuerzo que existen entre elementos, producto la propia naturaleza del método de elementos finitos, la dirección de los ejes principales varía de elemento a elemento, su magnitud se modifica dependiendo el tamaño del elemento, por esta razón la propagación de la grieta aparece de manera muy difusa cuando se usan elementos grandes, para una mejor propagación de grieta se propone un algoritmo de propagación que permite minimizar los efectos de los saltos en los esfuerzos, esto se realiza a partir de un parche que se coloca donde se propagará la grieta, los esfuerzos son calculados de manera no local y con los nuevos esfuerzos se determina la orientación de la discontinuidad.

Se ha observado que en el modelo de fractura cuasi-frágil si se tiene una adecuada tecnología de elementos finitos como por ejemplo discontinuidades interiores en conjunto con algoritmos robustos de integración constitutiva y con buenas estrategias de trazado de la discontinuidad puede obtener un aumento en la velocidad de convergencia y disminuir costo computacional, así estar en posibilidad de abordar problemas computacionales avanzados, por ejemplo problemas en tercera dimensión y con múltiples fisuras, esto desde una computadora personal con un costo computacional razonable.

El desarrollo de los ejemplos numéricos presentados permite modelar discontinuidades, además a través de estos modelos se puede calcular la carga de agrietamiento y la carga máxima, el modo de falla y la energía que se necesita para que falle una estructura. El uso de estas herramientas computacionales es de gran apoyo a la ingeniería ya que se puede reproducir el comportamiento de la estructura en sus diferentes fases y reproducir el daño en los elementos. Estos resultados repercuten directamente en el avance en el análisis y diseño de estructuras, además de su evaluación desde que empieza la carga, pasando por la representación de los mecanismos inelásticos como la microfisuración hasta su falla.

Es muy importante ligar la fundamentación teórica del problema de Discontinuidades Interiores para el desarrollo de buenos modelos numéricos que describan la física del problema. Actualmente no existe un criterio que defina cual es la estrategia que se deba tomar definitivamente en la mecánica del daño, lo cual marca que aún existe un gran trabajo por realizar.

## 7.2 Líneas de investigación futuras

Se deja abierta la posibilidad de incurrir en las siguientes líneas de investigación

- Extensión de las formulaciones en el ámbito de la dinámica de fractura, esta línea de investigación es de gran interés debido a su aplicación industrial y civil.
- Extensión de los modelos al análisis de grandes deformaciones.
- Aplicación utilizando el fundamento conceptual y numérico a problemas en tercera dimensión.
- Generalización de las aproximaciones para incorporar modos mixtos de falla
- Análisis de elementos sujetos a explosiones.
- Acoplamiento de los efectos de degradación ambiental en los modelos de daño.

## Apéndice

### Análisis no lineal

En esta tesis se maneja estructuras que presentan comportamiento cohesivo, las cuales al ser sometidas a un estado de fuerzas que se van incrementando, tiene un comportamiento no lineal debido a la degradación de la rigidez, por lo tanto cambian las propiedades mecánicas del material, se necesitan métodos especiales para conocer el estado de esfuerzos y deformaciones, en el trabajo de tesis se utilizó el método Regular Newton Raphson el cual es explicado en este apéndice. Se calcularon elementos que presentan ablandamiento, este comportamiento se presenta en la figura A.1

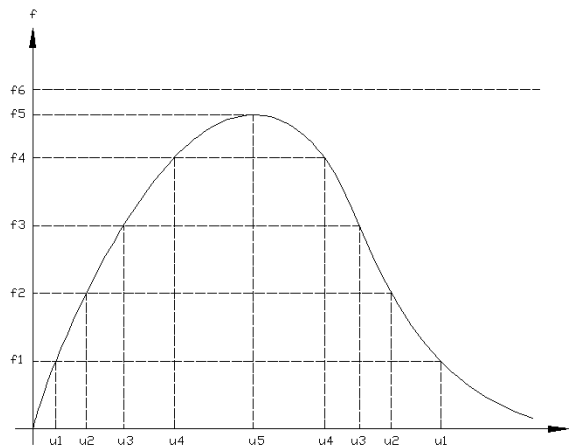


**Fig. A.1 Gráfica carga-desplazamiento**

La gráfica carga-desplazamiento se calcula aplicando cargas y obteniendo desplazamientos o de forma inversa, aplicar desplazamiento y se calcula la carga, el procedimiento se explica a continuación.

### Control de carga.

En este método se va modificando la carga y con esta se obtiene un desplazamiento, para los análisis normales de estructuras donde interesa sólo saber la carga máxima este método es satisfactorio, pero cuando se necesita saber que sucede más allá del punto de carga máxima, este método ya no funciona adecuadamente, esto se puede ver en la figura A.2:

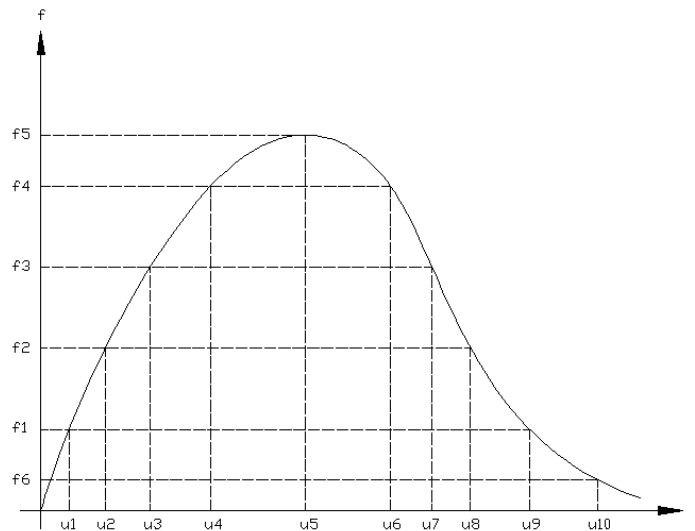


**Fig. A.2 Control de carga**

Como se puede observar cuando se quiere ir más allá del punto de fluencia sobre el eje de los desplazamientos, se tiene para un valor de carga dos valores de desplazamiento uno que se encuentra antes de que la estructura fluya y otro después de fluir, esto muestra grandes inconvenientes debido a que si se desea tener un comportamiento global para una cierta carga, a primera instancia no se puede saber si ese valor es cuando no fluye o si ya fluyó la estructura. Otro inconveniente sucede cuando se desea saber el comportamiento de la estructura hasta su falla es que después del punto de fluencia cuando se va aumentando la carga queda indeterminada lo cual se observa en la carga  $f_6$  donde para esa carga no existe ningún desplazamiento correspondiente.

### Control de desplazamiento.

Para resolver el problema anterior se puede ir aplicando desplazamientos a la estructura, al ir aumentando progresivamente los desplazamientos existen cargas que son únicas para cada desplazamiento por lo tanto se tiene un mejor control en la evolución al colapso de la estructura. Esto se puede observar en la siguiente figura A.3:



**Fig. A.3 Control de desplazamiento**

Se puede observar que para todos los desplazamientos se tiene el valor de carga y por lo tanto nunca se vuelve indefinido.

El control de desplazamiento es más adecuado cuando se desea tener la evolución de la estructura hasta la falla, utilizando este método se pueden conocer los valores de carga y desplazamiento en todo el proceso.

### Análisis incremental

Para conocer cómo cambian las deformaciones y los esfuerzos de un punto a otro hasta que la estructura falla de la estructura en un análisis incremental no lineal se puede recurrir a iteraciones, para ajustar la curva, las iteraciones nos arrojan errores, que llamaremos residuos, que son producto de las diferentes rigideces que se van obteniendo, los cuales se van corrigiendo hasta lograr un equilibrio estático entre las fuerzas internas y las fuerzas externas. Entre más pequeño sea el incremento ya sea de carga o desplazamiento se llega más rápido a la convergencia

### Proceso de iteración

El incremento en cada iteración esta dado por:

$$\Delta u_{i+1} = \Delta u_i + \delta u_{i+1} \quad (\text{A.1})$$

Para cada incremento  $\Delta u_{i+1}$  debemos contemplar que ya se tiene un desplazamiento anterior lo cual está indicado con  $\Delta u_i$ , finalmente para completar la ecuación debemos determinar el nuevo incremento  $\delta u_{i+1}$  el cual se calcula con la siguiente ecuación:

$$K \cdot \delta u_{i+1} = f_{ext} - f_{int} = g_i \quad (\text{A.2})$$

Donde:

$K$  = Matriz de rigideces

$\delta u_{i+1}$  =Desplazamiento de la nueva iteración

$f_{ext}$  = Vector de fuerzas externas

$f_{int}$  = Vector de fuerzas internas

$g_i$  = Residuo del vector de fuerzas al empezar la iteración

La forma como se determina  $\delta u_i$  es lo que hace la diferencia entre los diferentes métodos para calcular las iteraciones, esto debido a la forma de calcular la rigidez  $K$ , para calcular  $\delta u_i$  tenemos:

$$\delta u_i = K_i^{-1} g_i \quad (\text{A.3})$$

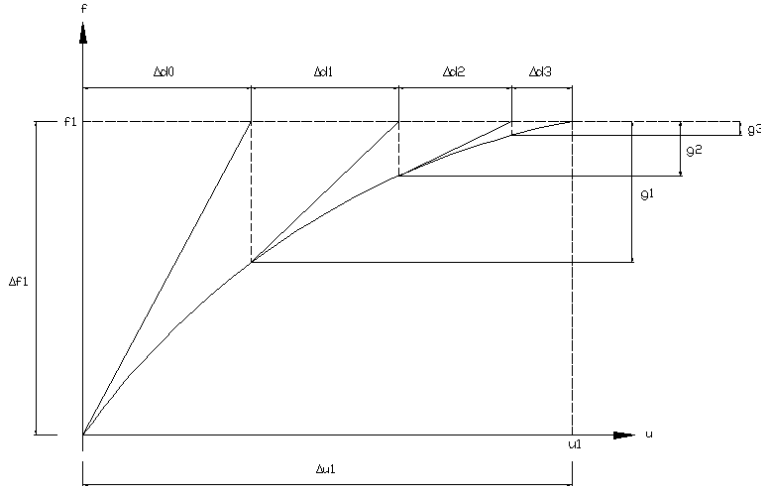
### Método regular de Newton-Raphson

Este método es usado para determinar el incremento iterativo del vector de desplazamiento. En este método la matriz de rigideces  $K_i$  representa la matriz de rigideces tangencial de la estructura:

$$K_i = \frac{\partial g}{\partial \Delta u} \quad (\text{A.4})$$

En este método la matriz de rigideces tangencial  $K_i$  debe ser calculada para cada iteración, esto hasta que se logra el equilibrio estático, es decir cuando  $g_i \approx 0$ .

En la figura A.4 se muestra con más detalle el proceso de cálculo de cada iteración, primero se tiene la rigidez inicial con la cual se llega al punto  $\Delta f_1$  ahí se tiene un residuo  $g_1$  luego a partir de ese punto se calcula la nueva matriz de rigideces tangencial, se puede ver que tanto  $\Delta d_i$  como  $g_i$  a cada paso de iteración va disminuyendo, se calcula la deformación unitaria, los esfuerzos, las fuerzas internas y el nuevo residuo, este proceso se repite hasta que  $g_i \approx 0$ .

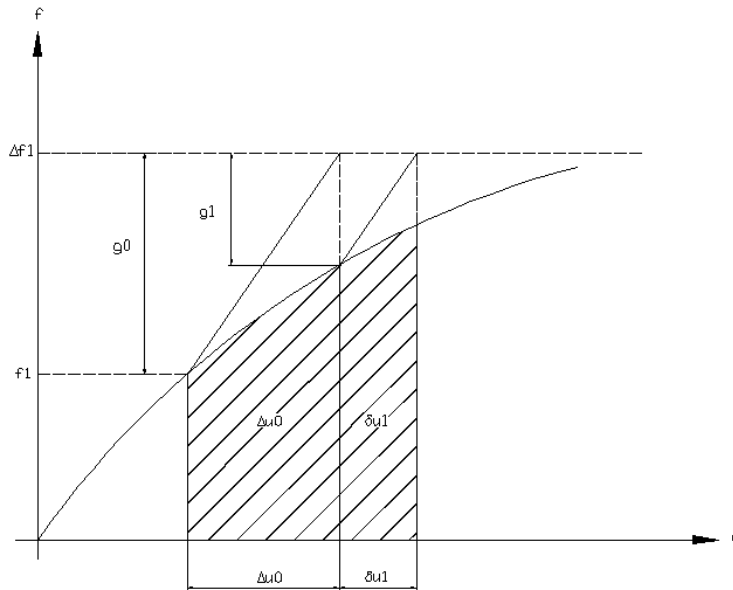


**Fig. A.4 Método Regular Newton-Raphson**

Este método por lo general necesita pocas iteraciones para converger hacia el equilibrio pero tiene la desventaja de necesitar ir calculando la matriz de rigideces tangente en cada iteración, lo que consume tiempo excesivo en el proceso de análisis.

**Criterio de convergencia**

El proceso de iteración de cada desplazamiento puede detenerse cuando se tiene un error deseado, con el cual se tienen resultados con aproximación satisfactoria, los criterios de convergencia de acuerdo a la grafica carga-desplazamiento se muestran en la siguiente figura A.5:



**Fig. A.5 Criterios de convergencia**

Así tenemos los siguientes criterios de convergencia.

- Norma de fuerza:

$$nf = \frac{\sqrt{g_i^T g_i}}{\sqrt{g_0^T g_0}} \quad (\text{A.5})$$

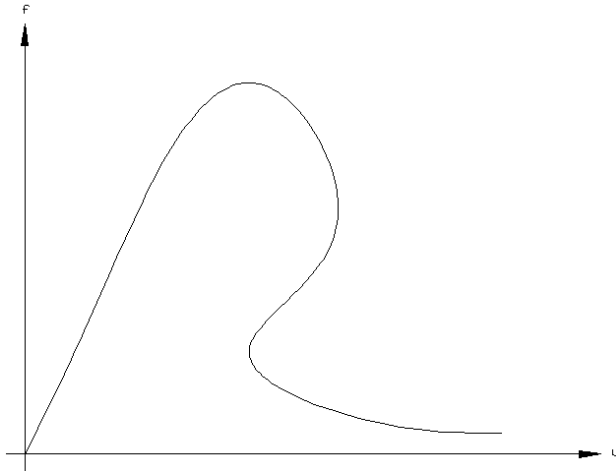
- Norma de desplazamiento:

$$nu = \frac{\sqrt{\delta u_i^T \delta u_i}}{\sqrt{\Delta u_0^T \Delta u_0}} \quad (\text{A.6})$$

- Norma de energía:

$$ne = \left| \frac{\delta u_i^T (f_{int,i+1} + f_{int,i})}{\Delta u_0^T (f_{int,1} + f_{int,0})} \right| \quad (\text{A.7})$$

Existen problemas que no se pueden resolver ni con Newton-Raphson ni con control de cargas ni con control de desplazamiento, este tipo de comportamiento se puede observar en la figura A.6:



**Fig. A.6 Snap back**

Para este tipo de problemas existen métodos para resolverlos uno de ellos es:

- Arc-Legth control
- Line search

## Referencias

1. Anderson T. L., "Fracture Mechanics, fundamentals and applications", 2<sup>da</sup> edición, Ed. CRC Press Inc, EUA, 1995.
2. Babuška y Melenk, "The Partition of Unity Method", The University of Texas at Austin, EUA, 1996.
3. Babuška y Zhang, "The partition of unity method for elastically supported beam" *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 152, 1-18, 1998.
4. Bažant y Planas, "Fracture and size effect in concrete and others quasibrittle materials", 1ra edición, Ed. CRC Press Inc, EUA, 1998
5. Blacker D. J., "A robust a posteriori error estimate for the Fortin-Soulie finite-element method", *Computers and Mathematics with Application*, vol. 48, pp. 1863-1876, 2004.
6. Boroomand B. y Zienkiewicz O. C., "Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behavior", *Comput Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 176, pp. 127-146, 1999.
7. Bugada, Ródenas y Oñate, "An integration of a low cost adaptive remeshing, strategy in the solution of structural shape optimization problems using evolutionary methods", *Computers and Structures*, vol. 86, pp. 1563-1578, 2008.
8. Celigüeta J., "Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, Alisado de Tensiones", Escuela de Ingenieros, Universidad de Navarra, 2007.
9. de Borst Réne, Gutiérrez Miguel A., Wells Garth N., Joris J. C. Remmers and Askes Harm, "Cohesive-zone models, higher-order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *Int. J. Numer. Meth. Engrg*; 60:289–315 (DOI: 10.1002/nme.963), 2004.
10. Dejong, Hendriks y Rots, "Sequentially linear analysis of fracture under non-proportional loading", *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, páginas 5042-5056, 2008.
11. Felippa, "On the original publication of the general canonical functional of linear elasticity". Report CU-CAS-99-07, Center for Aerospace Structures. Colleague of Engineering University of Colorado, Boulder, Co. 1999.
12. Felippa, "Introduction to Finite Element Methods. Course Notes", ver World Wide Web: <http://caswww.colorado.edu/Felippa.d/FelippaHome.d/Home.html>. 2004.
13. Fernández L., "Modelado numérico de la fractura en el concreto". Tesis presentada en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM para obtener el grado de Doctor en Ingeniería (estructuras), 2002
14. Juárez G. y Ayala G., "Embedded discontinuity formulation", Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Mexico D.F. 2009.
15. Juárez G., "Modelado Numérico de Problemas de Fractura en Sólidos Mediante Discontinuidades Interiores". PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2006.
16. Kettil, Ródenas, Aguilera y Wilberg, "Strength and deformation of arbitrary beam sections using adaptive FEM", *Computer and Structures*, vol. 85, pp. 15-29, 2007.
17. Lee y Lo, "A full 3D finite element analysis using adaptive refinement and PGC solver with back interpolation", *Comput Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 170, pp. 39-64, 1999.
18. Lee y Lo, "Automatic adaptive refinement finite element procedure for 3D stress analysis", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, pp 135-166, 1997.
19. Lo y Lee, "On constructing accurate recovered stress fields for the finite element solution of Reissner-Mindlin plate bending problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 160, pp. 175-191, 1998.



20. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. "The Finite Element Method. Volume 1: The Basis". Elsevier BH, Oxford, 5ta edición, 2000.
21. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. "The Finite Element Method. Volume 1: Its Basis and fundamentals". Elsevier, Oxford, sixth edition, 2005.
22. Ortúzar R. "Mecánica de fractura en estructuras navales", Universidad Técnica Federico Santa María, Trabajo presentado en el XVI Congreso Panamericano de Ingeniería Naval, Transporte Marítimo e Ingeniería Portuaria, Cartagena de Indias, Colombia, 1999.
23. Rabczuk, Song y Belytschko, "Simulation of instability in dynamic fracture by the cracking particles method", Engineering Fracture Mechanics, vol. 76, pp.730-741, 2009.
24. Rashid Y. R., "Creep considerations for the lower head", Nuclear Engineering and Design, Vol. 169, páginas 101-108, 1997.
25. Rots, Belletti y Invernizzi, "Robust modeling of RC structures with an "event-by-event" strategy", Engineering Fracture Mechanics, vol. 75, páginas 590-614, 2008.
26. Swenson y Hardeman, "The effects of the thermal deformation on flow in a jointed geothermal reservoir", Int. J. Rock Mech & Min. vol. 34, 1997.
27. Tinsley J., "Historical comments on finite elements", The University of Texas at Austin.
28. Ural, Heber, Wawrzynek, Ingraffea, Lewicki y Neto, "Three dimensional parallel, finite element simulation of fatigue crack growth in a spiral bevel pinion gear", Engineering Fracture Mechanics, vol. 72, páginas 1148-1170, 2004.
29. Van Zijl, de Borst y Rots, "The role of crack rate dependence in the long-term behavior of cementitious materials", International Journal of Solids and Structures, vol. 38, páginas 5063-5079, 2000
30. Wawrzynek y Ingraffea, "Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems engineering fracture mechanics", vol. 55, No. 2, pp 321-334, 1996.
31. Wilberg y Abdulwahab, "Error estimation with postprocessed finite element solutions", Computers and structures, vol. 64, pp. 113-137, 1997.
32. Wilberg, "Superconvergent Patch Recovery-a key to quality assessed FE solutions" Advances in Engineering software, vol. 28, pp. 85-95, 1997.
33. Zienkiewicz O. C., Boroomand B. y Zhu, "Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems", Comput Methods Appl. Mech. Engrg, vol. 176, pp. 111-125, 1999.
34. Zienkiewicz y Zhu, "The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol. 101 páginas 207-224, Holanda, 1992.
35. Zienkiewicz y Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1. The recovery technique", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, páginas 1331-1364, 1992.