2. BASES MATEMATICAS DE LA HIDRAÚLICA DE CAUCES Y CANALES

2.1 CLASIFICACIÓN DEL FLUJO

El movimiento de lo fluidos puede clasificarse de muchas maneras, según diferentes criterios y según sus diferentes características, este puede ser:

Flujo turbulento: Este tipo de flujo es el que más se presenta en la práctica de ingeniería. En este tipo de flujo las partículas del fluido se mueven en trayectorias erráticas, es decir, en trayectorias muy irregulares sin seguir un orden establecido, ocasionando la transferencia de cantidad de movimiento de una porción de fluido a otra o de modo similar a la transferencia de cantidad de movimiento molecular pero a una escala mayor.
En este tipo de flujo, las partículas del fluido pueden tener tamaños que van desde muy pequeñas, del orden de unos cuantos millares de moléculas, hasta las muy grandes, del orden de millares de pies cúbicos en un gran remolino dentro de un río o en una ráfaga de viento.

Fig. 2.1 Fluido en estado Turbulento

En la figura 2.1 se hace notar que las partículas del fluido tienen un movimiento en estado turbulento debido a los obstáculos que van encontrando en su trayectoria en el modelo de la escotadura en el río carrizal Instituto de Ingeniería UNAM.

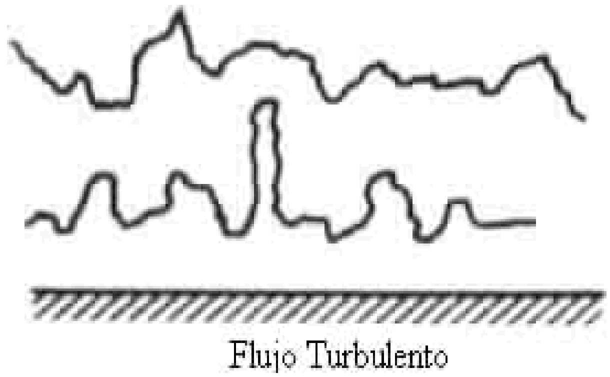

Fig. 2.2 Comportamiento de las partículas dentro del flujo turbulento

Factores que hacen que un flujo se torne turbulento:

- La alta rugosidad superficial de la superficie de contacto con el flujo, sobre todo cerca del borde y a altas velocidades, irrumpe en la zona laminar de flujo y lo vuelve turbulento.
- Calentamiento de la superficie por el fluido, asociado y derivado del concepto de entropía, si la superficie de contacto está muy caliente, transmitirá esa energía al fluido y si esta transferencia es lo suficientemente grande se pasará a flujo turbulento.

Flujo laminar: Se caracteriza porque el movimiento de las partículas del fluido se produce siguiendo trayectorias bastante regulares, separadas y perfectamente definidas dando la impresión de que se tratara de laminas o capas mas o menos paralelas entre si, las cuales se deslizan suavemente unas sobre otras, sin que exista mezcla macroscópica o intercambio transversal entre ellas.

La ley de Newton de la viscosidad es la que rige el flujo laminar:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.1)$$

Esta ley establece la relación existente entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación angular. La acción de la viscosidad puede amortiguar cualquier tendencia turbulenta que pueda ocurrir en el flujo laminar.

En situaciones que involucren combinaciones de baja viscosidad, alta velocidad o grandes caudales, el flujo laminar no es estable lo que hace que se transforme en un flujo turbulento.

Fig. 2.3

En la figura 2.3 del modelo hidráulico del río Suchiate se muestra la combinación de poca velocidad y poco caudal que asemejan un estado laminar sin llegar a serlo del todo.

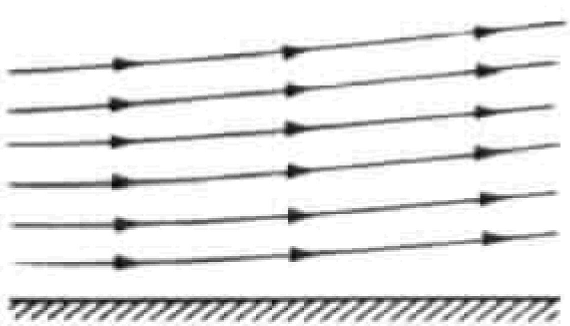

Fig. 2.4 Comportamiento de las partículas dentro del flujo laminar.

Flujo permanente: Llamado también flujo estacionario.
Este tipo de flujo se caracteriza porque las condiciones de velocidad de escurrimiento en cualquier punto no cambian con el tiempo, o sea que permanecen constantes con el tiempo o bien, si las variaciones en ellas son tan pequeñas con respecto a los valores medios. Así mismo en cualquier punto de un flujo permanente, no existen cambios en la densidad, presión o temperatura con el tiempo, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad (2.2)$$

Flujo no permanente: Llamado también flujo no estacionario.
En este tipo de flujo en general las propiedades de un fluido y las características mecánicas del mismo serán diferentes de un punto a otro dentro de su campo, además si las características en un punto determinado varían de un instante a otro se dice que es un flujo no permanente, es decir:

$$\frac{\partial N}{\partial t} \neq 0 \qquad (2.3)$$

Donde:
N: parámetro a analizar.
El flujo puede ser permanente o no, de acuerdo con el observador.
Dentro de la clasificación de flujo permanente existe la posibilidad de clasificar dos tipos de escurrimiento:

Flujo uniforme: Este tipo de flujos son poco comunes, es aquel en que todas las secciones del canal tienen iguales características hidráulicas y ocurren cuando el vector velocidad en todos los puntos del escurrimiento es idéntico tanto en magnitud como en dirección para un instante dado, o expresado matemáticamente.

$$\frac{\partial v}{\partial s} \neq 0 \qquad (2.4)$$

Donde el tiempo se mantiene constante y s es un desplazamiento en cualquier dirección.
Una consecuencia de esta condición es que, en un canal con régimen uniforme, las trazas de la plantilla y de la superficie del agua con un plano vertical alojado en la dirección del flujo son líneas paralelas, lo que sucede también con la línea de la energía debido a que la velocidad media del agua en el canal es constante.

Flujo no uniforme: Es el caso contrario al flujo uniforme, es decir, las condiciones hidráulicas son diferente una sección de otra, este tipo de flujo se encuentra cerca de fronteras sólidas por efecto de la viscosidad.

Si la sección y la pendiente de la plantilla del canal son constantes, se puede formar un ***flujo gradualmente variado*** que se caracteriza porque sus tirantes cambian en forma continua a lo largo del escurrimiento.

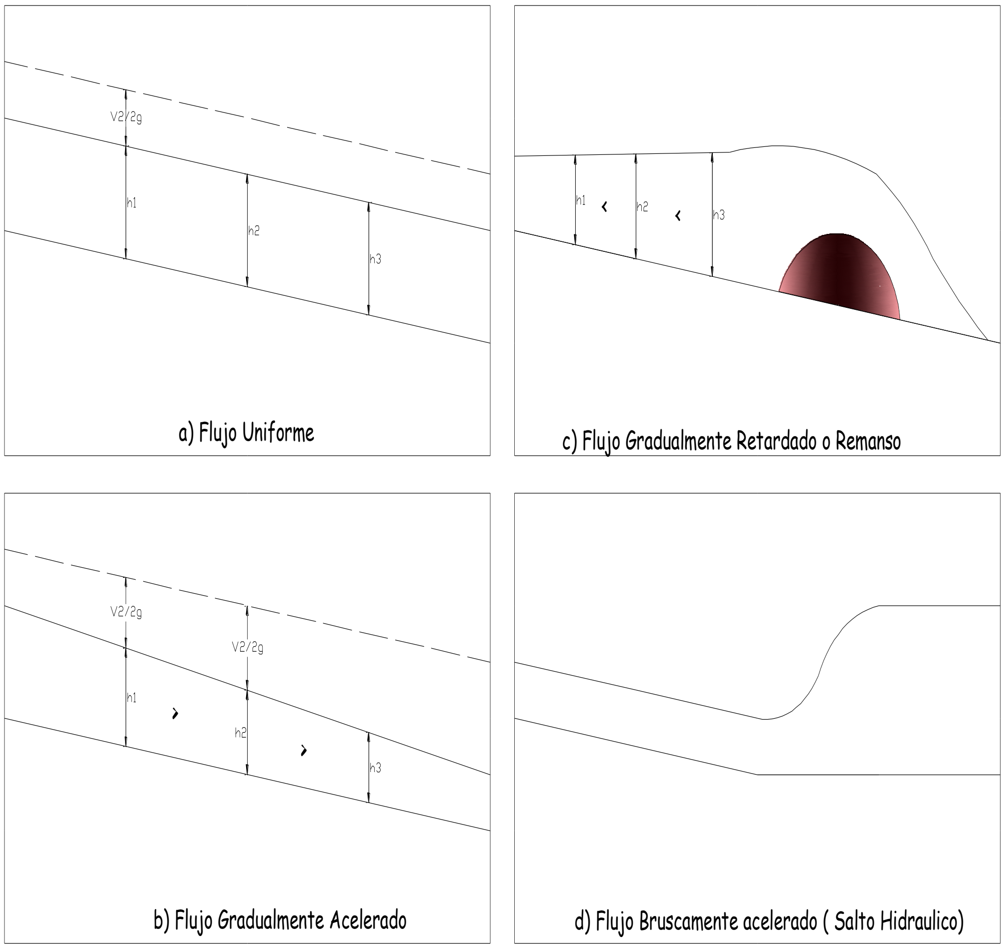

Fig. 2.5

2.2 FUNDAMENTOS MATEMATICOS EN LA HIDRAÚLICA DE CANALES

En los canales el agua fluye por la acción de la fuerza de gravedad y por tener siempre la superficie libre en contacto con la atmósfera.

En un líquido a superficie libre, el movimiento se ve afectado por las mismas fuerzas que intervienen en el flujo dentro de un tubo, y estas son:

- La fuerza de gravedad, es la más importante en el movimiento.
- La fuerza de resistencia en las fronteras rígidas por la fricción y la naturaleza del flujo; por lo regular turbulento.
- La fuerza producida por la presión ejercida sobre las fronteras del canal, en particular las zonas donde cambia su geometría.
- La fuerza viscosa del líquido, si el flujo es turbulento esta es despreciable.

Excepcionalmente, se pueden agregar:

- La fuerza de tensión superficial, consecuencia directa de la superficie libre.
- Las fuerzas ocasionales debidas al arrastre de sedimentos.

Para evaluar con medios matemáticos estos conceptos se introducen los parámetros que a continuación se presentan.

Número de Reynolds

El Número de Reynolds se denota como *R*e y se define como la relación que hay entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

Las fuerzas viscosas son aquellas que se presentan dentro de un fluido viscoso dando lugar a que exista una distribución de velocidades en la sección transversal de un canal; dichas fuerzas viscosas se obtienen de la ley de Newton para fluidos newtonianos la cual se expresa como.

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.1)$$

Donde

τ: es el esfuerzo cortante que hay entre dos planos que se mueven a diferente velocidad, dado por $\partial v/\partial y$,
v: es la velocidad del flujo,
y: el tirante, y
μ*:* es la viscosidad dinámica.

Con base en estos conceptos se puede demostrar que el número de Reynolds, para un flujo a superficie libre se expresa como

$$\mathrm{Re} = \frac{V\ 4R_h}{\upsilon} \tag{2.5}$$

Con

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.6}$$

Donde:
R_h: radio hidráulico
V: velocidad media del flujo
ν: Viscosidad cinemática (m^2/s). Para agua a una temperatura de 20° C, $\nu = 1x10^{-6}\, m^2/s$

La importancia de la fuerza de inercia respecto a la viscosa, ambas por unidad de masa, se mide con el número de Reynolds.
También este parámetro sirve para saber si un flujo esta en régimen laminar, de transición o turbulento:

Si	$Re \leq 500$	el flujo esta en régimen laminar
Sí	$Re \geq 2000$	el flujo esta en régimen turbulento
Sí	$500 < Re < 2000$	el flujo esta en régimen de transición.

Número de Froude

El Número de Froude se denota como f_r, y se define como la relación que existe entre la raíz cuadrada de las fuerzas de inercia y las gravitacionales, expresa una relación que involucra a la fuerza de inercia y las fuerzas producidas por el peso propio de los cuerpos.

$$\frac{f_{inercia}}{f_{peso\_propio}} \approx \frac{V}{\sqrt{gD}} = fr \tag{2.7}$$

Donde:
V: es la velocidad media del flujo,
D: es el tirante hidráulico, $D = A/T$, T el ancho de superficie libre, y
g: la aceleración de la gravedad. Este parámetro sirve para saber sí un flujo esta en régimen subcrítico, crítico o supercrítico:

Adimensionalmente se puede escribir con las siguientes variables:

$$\frac{\rho_{densidad} \cdot V_{elocidad}{}^{2} \cdot L_{ongitud}{}^{2}}{\gamma_{peso\_especifico} \cdot L_{ongitud}{}^{3}} = fr$$

Cada una de las fuerzas que intervienen son proporcionales a ciertas variables del problema, así:
Fuerza de inercia: $f_{inercia} = \rho_{densidad} \cdot V_{elocidad}{}^{2} \cdot L_{ongitud}{}^{2}$
Fuerza de peso propio $f_{peso\_propio} = \gamma_{peso\_especifico} \cdot L_{ongitud}{}^{3}$
Donde

V, L.- velocidad y longitud característica del problema
ρ, γ.- propiedades del fluido

Sí $f_r < 1$ el flujo esta en régimen subcrítico

Sí $f_r = 1$ el flujo esta en régimen crítico

Sí $f_r > 1$ el flujo esta en régimen supercrítico.

En canales, dado que el régimen del flujo es casi siempre turbulento, los efectos de la tensión superficial son despreciables. Y el número de Reynolds es mayor o igual a 12,000.

Ecuaciones básicas en los canales

El análisis de un flujo se realiza mediante el estudio de un volumen de control. En el análisis se considera el intercambio de masa, energía y cantidad de movimiento, a través de las fronteras del volumen de control que pueden ser de tamaño diferencial o de magnitud finita.

Al utilizar volúmenes finitos de control, se supone que el movimiento de un líquido se estudia como si fuera una vena líquida limitada; tanto en tuberías a presión como en canales. Es así, que la frontera de la vena líquida admite cierta deformación parcial o total, reduciéndose el problema a estudiar el movimiento en una sola dimensión (flujo unidimensional).

Las ecuaciones básicas en forma unidimensional de continuidad, energía y cantidad de movimiento y ecuación de Manning son:

Ecuación de Manning

La ecuación de Manning es el resultado del proceso de un ajuste de curvas, y por tanto es completamente empírica en su naturaleza. Debido a su simplicidad de forma y a los resultados satisfactorios que arroja para aplicaciones prácticas, la fórmula Manning se ha hecho la más usada de todas las fórmulas de flujo uniforme para cálculos de escurrimiento en canales abiertos.

Esta es una ecuación que nos ayuda a relacionar las variables de gastos, pendientes, tirantes y material de un canal.

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R_h^{2/3} \cdot S^{1/2} \qquad (2.8)$$

Donde

A, área de la sección transversal.
Rh, Radio hidráulico = Área/Perímetro mojado.
S pendiente del canal.

Determinación del coeficiente de rugosidad Manning

El coeficiente de Manning “n” varía con el tipo de material del lecho y con otras circunstancias

Aplicando la fórmula Manning, la más grande dificultad reside en la determinación del coeficiente de rugosidad *n* pues no hay un método exacto de seleccionar un valor *n*. Para ingenieros veteranos, esto significa el ejercicio de un profundo juicio de ingeniería y experiencia; para novatos, puede ser no más de una adivinanza, y diferentes individuos obtendrán resultados diferentes.

Para calcular entonces el coeficiente de rugosidad *n* se dispone de tablas (como la publicada por el U.S Departament of Agriculture en 1955; Chow, 1959) y una serie de fotografías que muestran valores típicos del coeficiente *n* para un determinado tipo de canal (Ramser, 1929 y Scobey, 1939).

Aparte de estas ayudas, se encuentra en la literatura numerosas fórmulas para expresar el coeficiente de rugosidad de Manning en función del diámetro de las partículas, las cuales tienen la forma n = m $D^{1/6}$, donde m es un factor de escala y D es un diámetro característico del material del lecho (D_{50}, D_{75}, D_{84}, D_{90}) que son, respectivamente, los diámetros correspondientes al 50, 75, 84 y 90% de la curva granulométrica del material del lecho.

Otros modelos tienen forma logarítmica y expresan n en función del diámetro de las partículas (D_{50} ó D_{84}) y de las características del flujo (radio hidráulico, profundidad media del flujo).

La siguiente tabla muestra valores del coeficiente de rugosidad de Manning teniendo en cuenta las características del cauce:

	Coeficiente de Manning
Cunetas y canales sin revestir	
En tierra ordinaria, superficie uniforme y lisa	0,020-0,025
En tierra excavada mecánicamente	0,028-0,033
En roca, superficie uniforme y lisa	0,030-0,035
En roca, superficie con aristas e irregularidades	0,035-0,045
Cunetas y Canales revestidos	
Concreto	0,013-0,017
Concreto revestido	0,016-0,022
Corrientes Naturales	
Limpias, orillas rectas, fondo uniforme, altura de lamina de agua suficiente	0,027-0,033
Limpias, orillas rectas, fondo uniforme, altura de lamina de agua suficiente, algo de vegetación	0,033-0,040
Lentas, con embalses profundos y canales ramificados, vegetación densa	0,100-0,200[1]
Áreas de inundación adyacentes al canal ordinario	0,030-0,200[1]

Fig. 2.5.1 Valores de “n” de Manning

Conservación de Masa

Esta ecuación a grandes rasgos nos expresa que la masa siempre será constante en una sección dada de un canal o de un volumen de control, es decir, la masa que entra es igual a la que sale dentro de la sección de estudio.

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = cte \qquad (2.9)$$

Donde

$$Q = V \cdot A \qquad (2.10)$$

Se mantiene constante en todo el canal.

Cantidad de movimiento

Ecuación de impulso y cantidad de movimiento.

Con esta herramienta podemos resolver los problemas donde intervienen fuerzas dentro de un volumen de control y donde importa la resultante de estas y su dirección, así como problemas más complejos de transferencia de cantidad de movimiento o momento lineal en fluidos con viscosidad relativamente grande.

¿Qué causa el movimiento de un fluido? Los fluidos empiezan a moverse cuando sobre ellos se aplica una fuerza resultante distinta de cero. Por ejemplo, cuando la presión en un lugar es mayor que en otro, el fluido tendera a moverse hacia la región de menor presión. La gravedad también puede causar que un fluido se mueva: los líquidos fluyen cuesta abajo, convirtiendo su energía potencial en energía cinética. De manera similar, las diferencias de temperatura causaran que una parte del fluido tenga una densidad menor a diferencia de otra parte del fluido y el fluido más ligero tendera a subir.

También esta presente la fricción. Cuando una capa de fluido se mueve con respecto a una capa adyacente, se desarrolla un esfuerzo viscoso tangente que hace que el flujo se mueva más rápido o lento. Algunas veces consideramos fluidos en los que la viscosidad es cero. Estos fluidos sin viscosidad no existen en la naturaleza por que todos los fluidos reales son viscosos, pero con frecuencia es posible usar esta aproximación si los efectos de la viscosidad son pequeños. Sin embargo, se debe de tener cuidado por que ignorar la viscosidad en ocasiones conduce a respuestas equivocadas.
Fuerzas.

Las fuerzas externas son de dos tipos:

a) fuerzas de frontera, las cuales incluyen.
    i. Aquellas que actúan normalmente a las fronteras de control y pueden ser medidas en términos de las intensidades de las presiones en los sistemas fluidos, Fp;
    ii. Aquellas que actúan paralelamente a las fronteras de control y que pueden ser medidas en función de los esfuerzos tangenciales, Fs.

b) fuerzas de cuerpo o de campo, aquellas que son debidas a campos magnéticos o gravitacionales. Fb.

La segunda ley de newton expresa que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el y es inversamente proporcional a su masa.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento se deduce de esta segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad (2.11)$$

Donde:
F.- fuerza
m.-masa
a.- aceleración.

Para un cuerpo rígido de masa m, la segunda ley de newton también se puede expresar como

$$\textit{Segunda ley de newton}\ \ \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \qquad (2.12)$$

Donde $\vec{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y $\vec{a}$ es la aceleración de ese cuerpo bajo la influencia de $\vec{F}$

Explicando este concepto de manera sencilla podemos decir, que si una partícula de masa "m" se mueve experimentando un cambio de velocidad denominado $d\overline{V}$ en un tiempo dt, este fenómeno es provocado por una fuerza F que, en general, es la resultante de un sistema de fuerzas F_i que actúa sobre la partícula.

Aludiendo la citada segunda ley de Newton podemos escribir:

$$\overline{F} = m\frac{d\overline{V}}{dt} \qquad (2.13)$$

Ó

$$\overline{F} \cdot dt = m \cdot d\overline{V} \qquad (2.14)$$

Donde el primer termino se le llama impulso y al segundo cantidad de movimiento
La suma vectorial F de todas las fuerzas externas que actúan sobre la masa de fluido, es igual a la rapidez de variación con respecto al tiempo del vector M, cantidad de movimiento lineal de la masa del fluido.

$$F = \frac{dM}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}. \qquad (2.15)$$

La cantidad de movimiento se define como el producto de la masa de una partícula y su vector velocidad o también se le llama a este mismo producto de la masa y de la velocidad de un cuerpo como momento lineal.

La cantidad de movimiento de un cuerpo rígido de masa “m” que avanza con una velocidad “$\vec{V}$” es “m $\vec{V}$”, entonces, la segunda ley de newton también se puede expresar como que “*la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre el*”. Por lo tanto, en la mecánica de fluidos suele hacerse referencia a la segunda ley de Newton como la ecuación de momento lineal.

$$F = \frac{dM}{dt} \qquad (2.15)$$

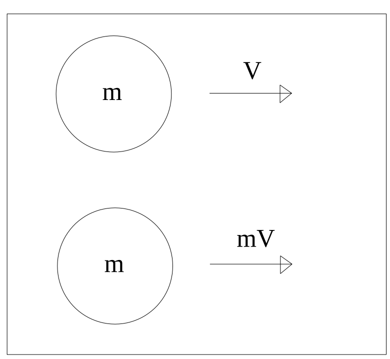

Fig. 2.6 Cantidad de movimiento

El momento lineal o cantidad de movimiento es el producto de la masa y la velocidad, y su dirección es la misma que la dirección del vector velocidad

La segunda ley de newton nos da una relación fundamental, no relativista, entre la suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula y la rapidez de variación de su cantidad de movimiento. Las expresiones resultantes se conocen como ecuaciones de movimiento.

Podemos ejemplificar una pequeña aplicación de esta herramienta matemática en los canales, donde es aplicable la cantidad de movimiento para encontrar el cambio del vector velocidad de un cauce al ser desviado por una batería de espigones para así poder diseñar una correcta estructura que soporte dichas fuerzas provocadas por el efecto del cambio de dirección del flujo.

En la siguiente figura se muestra una batería de espigones en funcionamiento que desvían el vector velocidad del flujo de un cauce hacia una nueva dirección y con esto también cambia la cantidad de movimiento de la masa del fluido en movimiento.

Fig. 2.7 Vector velocidad

La cantidad de movimiento de un sistema se mantiene constante cuando la fuerza neta que actúa sobre el es cero y, por lo tanto, la cantidad de movimiento de esos sistemas de conserva. Ésta se conoce como el ***principio de conservación de la cantidad de movimiento.*** Debe hacerse notar que la cantidad de movimiento es una cantidad vectorial que consta de magnitud, dirección y sentido, y en consecuencia la cantidad de movimiento tiene la dirección de la velocidad. Cualquier ecuación vectorial se puede escribir en forma escalar, para una dirección específica, con el uso de magnitudes; por ejemplo

$$F = ma_x = \frac{d(mV_x)}{dt} \qquad (2.16)$$

, en la dirección x.

De manera particular si se considera ahora un escurrimiento permanente con gasto Q y se escogen dos secciones, 1 y 2, de dicho escurrimiento, la masa que fluye por cualquiera de ellas en un tiempo Δt, es:

$$m = \frac{\gamma Q}{g} \Delta t \qquad (2.17)$$

Y si $\Delta\vec{V}$ es la diferencia de velocidades medias en ambas secciones, la segunda ley de Newton puede escribirse:

$$\vec{F} = \frac{\gamma Q}{g} \Delta\vec{V} \qquad (2.18)$$

O bien, separadamente:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F} = \frac{\gamma Q}{g} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \qquad (2.19)$$

Es importante observar el carácter vectorial de esta expresión. Cuando $\sum_{i=1}^{2} \vec{F}$, $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ sean vectores paralelos, pueden manejarse como escalares, cuidando únicamente que el signo sea el mismo en los dos miembros.

De manera mas general también se puede escribir la conservación de la cantidad de movimiento en función del gasto, del coeficiente de Boussinesq el cual se explicara mas adelante su origen, de la densidad y de la velocidad así.

$$F_p + F_\tau + F_c = \rho \left[(Q\beta V)_2 - (Q\beta V)_1 \right] \qquad (2.18)$$

El fenómeno de transferencia de cantidad de movimiento es de interés en mecánica de fluidos ya que engloba los conceptos que describen la resistencia interna de un fluido, esfuerzos tangenciales internos y esfuerzos en la frontera, así como propulsión y fuerzas sobre cuerpos inmersos.

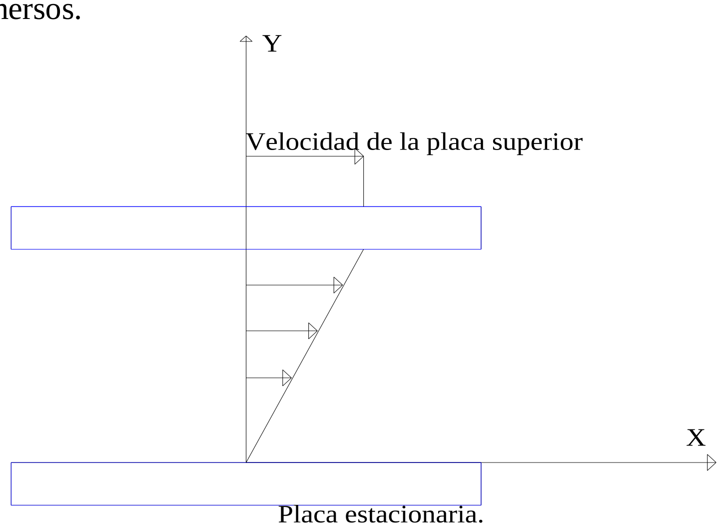

Fig. 2.8 Transferencia de la cantidad de movimiento

En la figura 2.8 se ejemplifica la transferencia de la cantidad de movimiento transversal y esfuerzo tangencial en la dirección del gradiente de la cantidad de movimiento, para el caso de un flujo laminar.

Para ejemplificar de manera un poco mas clara, considérese el movimiento producido en el fluido que ocupa el espacio entre dos grandes placas paralelas (figura 2.8). La placa superior esta en movimiento y la placa inferior estacionaria. El fluido que esta en contacto inmediato con las fronteras, toma la velocidad de estas de acuerdo con la condición de no-deslizamiento. El fluido adyacente a la placa superior adquiere una cantidad de movimiento longitudinal, que causa, a su vez, un movimiento longitudinal en la capa adyacente para satisfacer la condición de que la capa adyacente a la placa inferior tenga velocidad nula, la velocidad de cada capa subsiguiente, a partir de la que esta pegada a la placa superior, deberá disminuirse, hasta llegar a cero en la placa inferior. Las masas de fluido individuales adquieren, por lo tanto, cantidades de movimiento individuales diferentes. Cada capa adquiere una cantidad de movimiento longitudinal, debido a la transferencia de la cantidad de movimiento.

La cantidad de movimiento de la masa de fluido que ocupa al volumen de control en cualquier instante cambiara bajo la acción de una fuerza resultante de acuerdo con la segunda ley de Newton.

De la mecánica de sólidos se puede recordar que el impulso, $\int F \cdot dt$, aplicado a un cuerpo, es igual al cambio de cantidad de movimiento $MV_2 - MV_1$, para un intervalo de tiempo dado. La situación directamente análoga para el flujo de fluidos es el caso de un líquido en un tubo que se acelera mediante una presión diferencial a lo largo del tubo. Estos dos casos pueden denominarse de estado simple no estacionario. Cuando se tiene un flujo no uniforme, que puede ser estacionario o no, el proceso se vuelve mas complicado y se tiene que regresar a la aproximación del volumen de control básico para desarrollar las ecuaciones de la cantidad de movimiento.

Factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento, β

Por desgracia, la velocidad a través de la mayoría de las entradas y salidas de interés para la ingeniería práctica no es uniforme.

El llamado **coeficiente de Boussinesq**, que se designa con la letra griega β sirve para corregir la cantidad de movimiento cuando se calcula con la velocidad media de una sección.

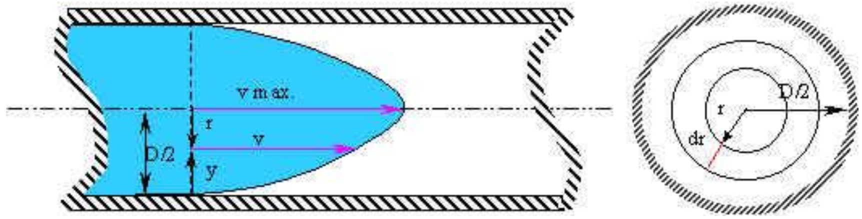

Fig. 2.9 Corte transversal y axial del flujo en una tubería

El impulso desarrollado por un escurrimiento en una sección de área hidráulica A durante un tiempo dt, y asumiendo que $dQ = \vec{V} \cdot dA$ se puede escribir

$$\vec{F} = \int_{aA} \frac{\gamma Q}{g} \Delta\vec{V} = \int_{A} \frac{\gamma}{g} \vec{V}^{2} dA \qquad (2.21)$$

Y si se calcula con la velocidad media para toda la sección A, habrá que corregirlo con coeficiente β de manera que

$$I = \beta \frac{\gamma}{g} V_m^2 A \qquad (2.22)$$

Al igualar las dos educaciones anteriores y despejar β se llega a:

$$B = \frac{\int_A \vec{V}^2 dA}{V_m^2 A} \qquad (2.23)$$

Flujo de cantidad de movimiento a través de un diferencial de área	$\rho v^2 dA$
Flujo total de cantidad de movimiento a través de la sección	$\int_A \rho v^2 dA$
La velocidad varía en los diferentes puntos de la sección transversal, y el resultado del integral requiere un ajuste para poderlo expresar en términos de la velocidad media en la sección. El coeficiente que permite igualar las expresiones, β, se conoce como coeficiente de Boussinesq para la corrección de la cantidad de movimiento	$\int_A \rho v^2 dA = \beta \rho v_m^2 A$
Y la expresión para el coeficiente de corrección de Boussinesq es	$\beta = \frac{\int_A v^2 dA}{v_m^2 A}$
A partir de este coeficiente se redefine la ecuación de fuerza dinámica	$F = \beta \rho v_m^2 A$

Se puede decir que la aplicación de esta ecuación simplificada es una herramienta de gran importancia en la hidráulica dedicada a canales y en general en el manejo de fluidos nos ayuda a entender su comportamiento tan complejo

Teorema de Bernoulli. Ecuación de la energía.

Supóngase que en un fluido perfecto en movimiento se toma un elemento diferencial de ancho unitario cuyas dimensiones están referidas a un plano de referencia arbitrario "N-S". Como se muestra a continuación.

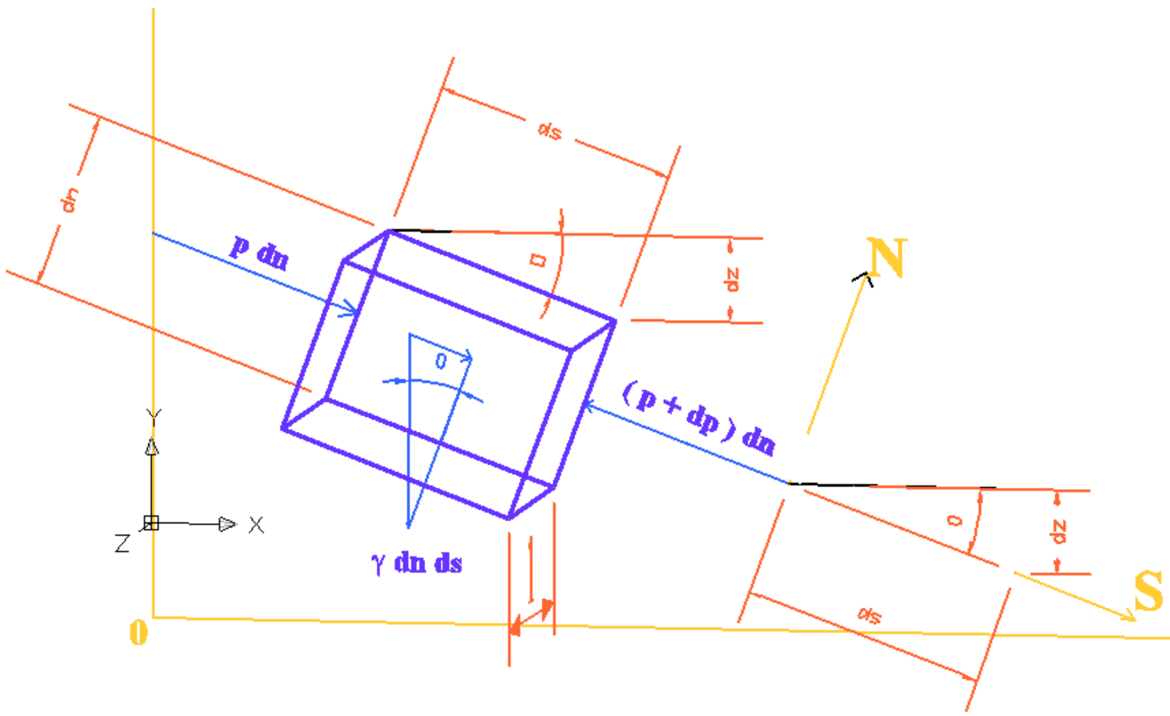

Fig. 2.10

El elemento se desplaza en la dirección positiva del eje S con una velocidad instantánea V y está sometido a la acción de su propio peso y de las presiones indicadas, la segunda Ley de Newton (F = m a) resultaría:

$$\sum F_s = \frac{\gamma}{g} \cdot dn \cdot ds \cdot \frac{dV}{dt} \qquad (2.24)$$

Siendo ΣF_s, la suma de fuerzas en la dirección del eje S

De acuerdo con la figura 2.10 y en la dirección del eje S, la expresión anterior nos conduce a:

$$[p-(p+dp)]dn+\gamma\cdot dn\cdot ds\cdot sen\theta=\frac{\gamma}{g}\cdot dn\cdot ds\cdot\frac{dV}{dt} \qquad (2.25)$$

Que queda simplificado como:

$$-\frac{dp}{ds}+\gamma\cdot sen\theta-\frac{\gamma}{g}\frac{dV}{dt}=0 \qquad (2.26)$$

Y siguiendo de acuerdo con la figura.

$$sen\theta=-\frac{dz}{ds} \qquad (2.27)$$

Que sustituyendo en la ecuación (2.21) resulta:

$$\frac{dp}{ds}+\gamma\cdot\frac{dz}{ds}+\gamma\cdot\frac{dV}{ds}=0 \qquad (2.28)$$

Que resulta ser la ecuación de Euler.

Ahora por otra parte, siendo que la velocidad V del elemento finito es una función del tiempo t y de su posición S, es decir V = f (t, s), de la definición de derivada total se tiene:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial s} \qquad (2.29)$$

Y como el flujo es solo en la dirección positiva del eje S, se cumple:

$$\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{dV}{ds} \qquad (2.30)$$

Además si el área hidráulica de la sección es constante, necesariamente el gasto Q será siempre el mismo si el flujo es permanente o estacionario y, por consiguiente, la velocidad V y el tirante h en la sección tampoco variaran con el tiempo; todas estas condiciones se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial t}=0 \qquad (2.31)$$

Tratándose de flujo permanente y de acuerdo con la ecuación 2.26 resulta que la expresión 2.24 se reduce a $\frac{dV}{dt} = V \cdot \frac{dv}{ds}$, que sustituida en la ecuación 2.23 y después de simplificar permite escribir:

$$dp + \gamma \cdot dz + \frac{\gamma}{g} \cdot V \cdot dV = 0 \qquad (2.32)$$

Al integrar esta ecuación diferencial se obtiene:

$$p + \gamma \cdot z + \gamma \cdot \frac{V^2}{2g} = cte. \qquad (2.33)$$

Que también se puede escribir:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cte. \qquad (2.34)$$

Si se asume la suposición de que todas las partículas del fluido en escurrimiento se desplazan como el elemento analizado, puede considerare que esta expresión es válida para cualquier sección de un escurrimiento permanente, ya que no ha sido demostrada para una en particular. Esto significa que la suma de los tres términos indicados es igual en todas las secciones 1, 2, 3,…, i. la ecuación $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cte.$ (2.34) se puede escribir como:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + V_1^{\,2} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\,2}}{2g} = z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^{\,2}}{2g} = \ldots$$

$$= z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\,2}}{2g} = cte. \qquad (2.35)$$

Que es el teorema de Daniel Bernoulli publicado en su tratado sobre Hidrodinámica en 1732, conocido solo como teorema de Bernoulli.

Lo anterior es debido a que se supuso un líquido perfecto, pero si se hace referencia a un líquido real, es necesario considerar todas las pérdidas de carga denotada como $hf_{1\text{-}2}$ entre las secciones 1 y 2, agregándolas al segundo miembro de la ecuación de la forma:

$$\mathbf{z_1} + \frac{\mathbf{P_1}}{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{V_1}^{2} = \mathbf{z_2} + \frac{\mathbf{P_2}}{\boldsymbol{\gamma}} + \frac{\mathbf{V_2}^{2}}{\mathbf{2g}} + \mathbf{h_{f12}} \qquad (2.36)$$

Conocida como la ecuación de la energía.

Rigurosamente si consideramos el ángulo θ y sabemos que el peso específico del agua es la unidad la expresión resulta:

$$H_1 = H_2$$

$$z_1 + y_1 \cos\theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 \cos\theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_r \qquad (2.37)$$

Donde

$$H = z + y\cos\theta + \frac{\bar{V}}{2g} \qquad (2.38)$$

Si $\theta \leq 10^{\circ}$ se cumple que $\cos\theta \approx 1$

A los términos de la expresión anterior se les llama respectivamente: carga de posición, carga de presión y carga de velocidad.

El coeficiente α se conoce como de Coriolis el cual es un factor correctivo que depende del tipo de distribución de velocidades existente en las secciones

A continuación se presenta la deducción de que estas cargas corresponden a las energías: potencial, de presión y cinética **por unidad de peso** de la partícula del fluido cuyo comportamiento se estudia.

Para ejemplificar la ecuación 2.33 se presenta al final de este capitulo un ejercicio de aplicación hacia la modelación hidráulica con una batimetría de un prototipo real.

Carga de posición

Energía potencial es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo (W). Puede pensarse como la *energía almacenada* en un sistema, o como una medida del trabajo que un sistema puede entregar. Más rigurosamente, la energía potencial es una magnitud escalar asociada a un campo de fuerzas. Cuando la energía potencial está asociada a un campo de fuerzas, la diferencia entre los valores del campo en dos puntos A y B es igual al trabajo realizado por la fuerza para cualquier recorrido entre B y A.

Un cuerpo posee energía potencial cuando es llevado a una posición en donde tiende a regresar a la posición anterior. Se mide en Jules y se expresa comúnmente como:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \qquad (2.39)$$

Donde:
m.- Masa del cuerpo (en este caso la masa de la vena liquida en aplicación a la hidráulica)
g.- Aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2)
h.- Altura del cuerpo con respecto a un eje Horizontal de Referencia.

Si dividimos la ecuación entre la masa y la gravedad obtenemos la carga de posición, es decir la energía por unidad de peso:

$$E_p = Z \qquad (2.40)$$

La energía potencial o carga de posición se mide con respecto a un nivel de referencia conocido como plano horizontal de referencia.

Carga de velocidad

La energía cinética de un cuerpo es la energía que surge debido al fenómeno del movimiento. Está definida como *el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa dada desde su posición de equilibrio hasta una velocidad dada*. Una vez conseguida esta energía durante la aceleración, el cuerpo mantiene su energía cinética sin importar el cambio de la rapidez. Un trabajo negativo de la misma magnitud podría requerirse para que el cuerpo regrese a su estado de equilibrio
La energía cinética de una partícula es en mecánica clásica, la energía cinética de un objeto puntual (un cuerpo tan pequeño que su dimensión puede ser ignorada), o en un sólido rígido que no rote, está dada la ecuación

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.41)$$

Donde "m" es la masa y "v" es la rapidez (o velocidad) del cuerpo.

En mecánica clásica la energía cinética se puede calcular a partir de la ecuación del trabajo y la expresión de una fuerza "F" dada por la segunda ley de Newton:

$$E_C = W = \int \int \overline{F} \cdot \overline{dr} = \int m\frac{\overline{dv}}{dt} \cdot v \cdot dt = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.42)$$

En donde:
F es la fuerza, dr es la diferencial del desplazamiento

En la Hidrodinámica se utiliza con mucha frecuencia la energía cinética por la *densidad* multiplicada por el volumen, es decir, la carga por cada unidad de volumen. Esto se escribe generalmente así:

$$E_c = \frac{\rho \cdot v \cdot V^2}{2g}, \qquad (2.43)$$

Donde
ρ describe la densidad del fluido.
v.- el volumen del fluido
V.- Velocidad del fluido.

Si dividimos la ecuación 2.43 entre la masa se obtiene la llamada carga de velocidad, es decir la energía cinética por unidad de peso:

$$E_c = \frac{V^2}{2g} \qquad (2.44)$$

Carga de Presión

Análogamente a los casos anteriores la carga de Presión está relacionada con la energía:

Por la definición de trabajo.

$$W = F \cdot D \qquad (2.45)$$

W.- Trabajo.
F.- Fuerza.
D.- Distancia.

La presión por área es una fuerza

$$F = P \cdot A \qquad (2.46)$$

P.- Presión

El área por un desplazamiento es un volumen, es decir, V_{ol}=A D sustituyendo en 2.46

$$W = P \cdot V_{ol} \qquad (2.47)$$

V_{ol}. – Volumen.

La energía de presión se expresa con la ecuación 2.47, sustituyendo Vol=m/γ y dividiendo entre la unidad de masa nos da por resultado la carga de Presión.

$$W = E_{presion} = \frac{P}{\gamma} \qquad (2.48)$$

Donde:
γ, es el peso específico del material.
La carga de presión también es representada como $h\cos\theta = \frac{P}{\gamma}$ (2.48.1) Debido a la proyección de la fuerza ejercida en el fondo de un canal por el líquido con el respectivo ángulo del canal. Como se muestra en la figura 2.11.

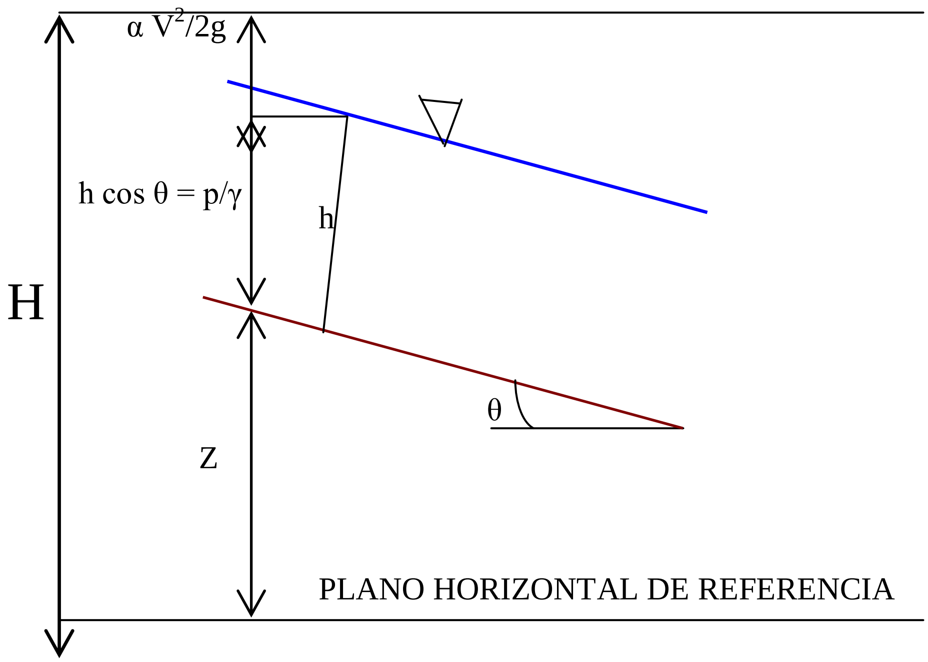

Fig. 2.11

Coeficientes de corrección α de la ecuación de energía

Al existir una distribución de velocidades en una sección, que además se aparta del valor medio V (velocidad), se comete un error en el cálculo de dicho valor medio. Puesto que en las ecuaciones de movimiento el termino $V^2/2g$ representa la energía cinética que posee la unidad de peso, la que corresponde al peso del liquido que atraviesa el área dA en la unidad de tiempo será

$$\frac{\gamma \cdot V \cdot dA \cdot V^2}{2 \cdot g} \qquad (2.49)$$

De igual forma, la energía cinética que posee el peso total del líquido que fluye a través de una sección de la vena liquida, en la unidad de tiempo, es $\gamma v A \alpha v^2/2g$, donde α corrige el error por considerar el valor medio de la velocidad. Por lo que se debe satisfacer:

$$\alpha \frac{V^2}{2g} \gamma \cdot V_m A = \iint_A \frac{v^2}{2g} \gamma\, v\, dA \qquad (2.50)$$

Como γ representa el valor medio del peso especifico en toda la sección, resulta:

$$. \ \alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA \qquad (2.51)$$

2.3 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Ejemplificando la ecuación de Bernoulli 2.33 se presenta las siguientes batimetrías y el siguiente cuadro de velocidades reales en el prototipo, se trabajaran tal cual sin escalar pues ese tema será visto en el siguiente capitulo presentando en el mismo algún ejemplo de cómo trabajar los datos con sus respectivas escalas.

Cuadro de velocidades medidas en dos secciones conocidas del cauce en el prototipo.

	Vel. Prototipo	
	Sección 23+000	Sección 22+500
	m/s	m/s
	3.79	3.8
	3.75	3.5
	4.02	3.25
Vel_{Media} =	**3.85**	**3.52**

Fig. 2.11.1

Velocidades en secciones del río Suchiate.

Estas dos secciones del cauce natural muestran el área de la sección transversal del río Suchiate en Chiapas México, la distancia entre cada sección es de 500 metros y el área

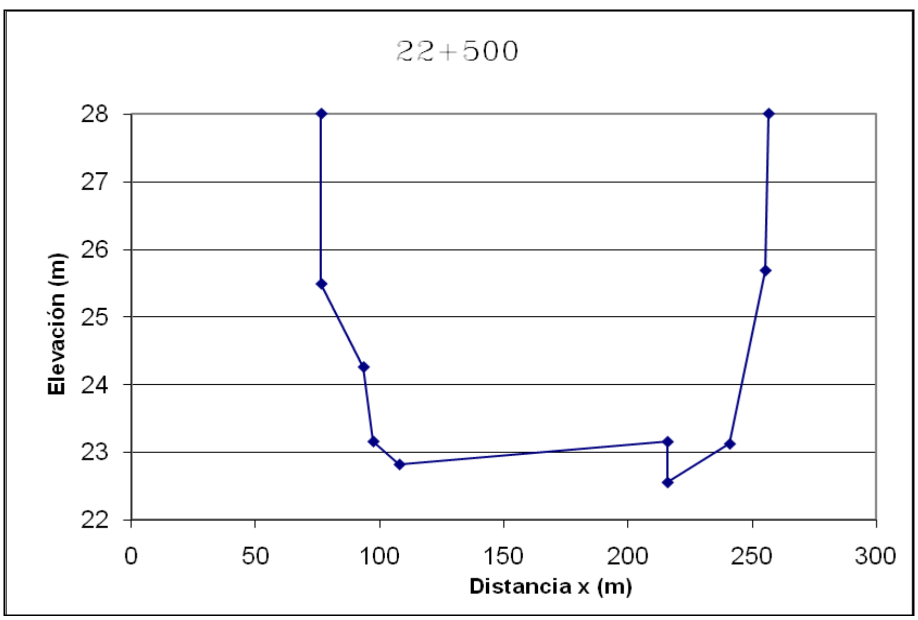

Fig. 2.12

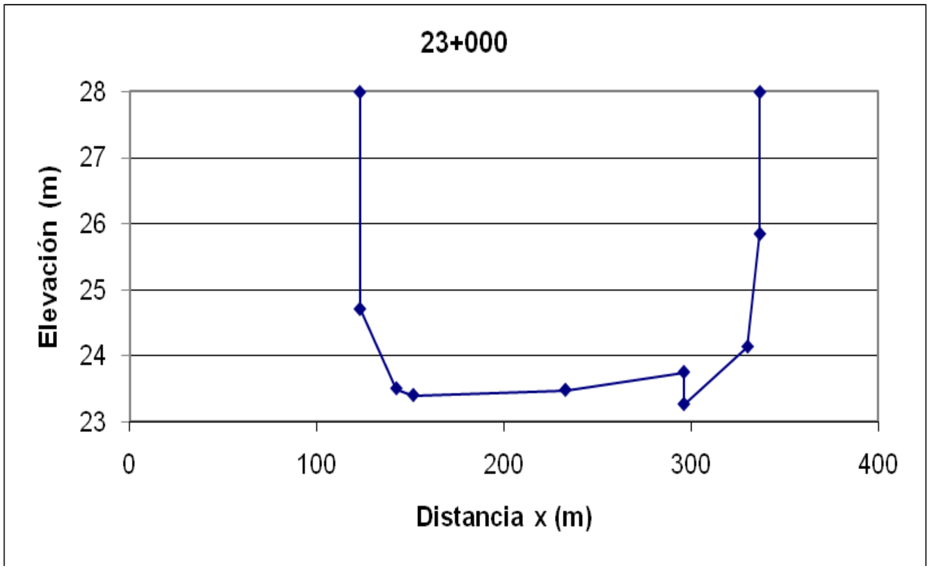

Fig. 2.13

Obteniendo la pendiente entre las secciones

Sección	Elevación Z Tal. [m]	Pendiente entre secciones
23+000	23.3	
		0.001402027
22+500	22.6	

Fig. 2.13.1

Elevaciones tomadas de las batimetrías para obtener la pendiente entre secciones

Ahora el procedimiento de cálculo es el siguiente donde en la **Fig. 2.13.2** se presentan los resultados de cada punto con los datos de las figuras 2.12 y 2.13:

1.- El área de cada sección transversal

2.- Perímetro mojado de cada sección

3.- Radio hidráulico.

4.- Obtención del número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{V\ 4R_h}{\upsilon} \qquad (2.5)$$

Donde la viscosidad cinemática del agua υ es 1.01E-06 [m^2/s]

5.- Obtención del número de Froude

$$\frac{f_{inercia}}{f_{peso\_propio}} \approx \frac{V}{\sqrt{gD}} = fr \qquad (2.7)$$

D: es el tirante hidráulico, $D = A/T$, *T* el ancho de superficie libre

Sección 23+000							
1	2	3	4				5
Área [m2]	Perímetro [m]	Radio Hidráulico [m]	Re_1	g[m/s^2]	T[m]	D =A/T	froude
921.7595	219.4145	4.200996288	6.41E+07	9.81	213.15	4.32446399	0.591508227

Sección 22+500							
1	2	3	4				5
Área [m2]	Perímetro [m]	Radio Hidráulico [m]	Re_2	g	T	D =A/T	froude
820.7281	185.0944	4.434105516	6.18E+07	9.81	180.22	4.55403451	0.526136634

Fig. 2.13.2

Como se puede observar por los resultados en las columnas 4 y 5 los números de Reynolds indican que el flujo se encuentra en estado turbulento y en el numero de Froude las fuerzas de inercia son menores a las fuerzas de peso propio y esto nos indica que tienen ambas secciones régimen subcrítico al ser $f_r < 1$.

Ahora se procede a calcular las cargas de posición, de presión y de velocidad para cada sección.

De la ecuación 2.40 podemos obtener la energía de posición para cada sección

$$E_p = Z \qquad (2.40)$$

Donde z esta medida desde un plano horizontal de referencia.

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (2.41)$$

Con la ecuación 2.44 obtenemos la carga de velocidad utilizando la velocidad media de cada sección.

$$E_c = \frac{V^2}{2g} \qquad (2.44)$$

Con la ecuación 2.48.1 obtenemos la carga de presión conociendo el tirante en cada sección medido desde el punto mas bajo de cada sección al punto mas alto de la sección hidráulica. El ángulo utilizado es el que arrojan las diferencia de cotas y la distancia horizontal entre las secciones dando por resultado un ángulo θ = 0.080º

$$h \cos\theta = \frac{P}{\gamma} \quad (2.48.1)$$

Y los resultados obtenidos son los siguientes para cada sección respectivamente.

Sección 23+000		
E_{posic} [m]	$E_{presion}$ [m]	Ec [m]
23.3	5.39999469	0.75652602
Sección 22+500		
E_{posic} [m]	$E_{presion}$ [m]	Ec [m]
22.6	4.69999538	0.63032337

Fig. 2.13.3

Finalmente:

$$H_1 = H_2$$

$$z_1 + y_1 \cos\theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 \cos\theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_r \qquad (2.37)$$

Considerando los coeficientes de corrección de las velocidades medias α =1 tenemos

$$H_1 = H_2$$

$$23.3 + 5.39 + \alpha_1 0.756 = 22.6 + 4.699 + \alpha_2 0.6303 + \Delta h_r$$

$$29.4 = 27.9 + \Delta h_r$$

Y las perdidas resultan ser:

$$\Delta h_r = 29.4 - 27.9 = 1.5[m]$$

Adicionalmente podemos calcular el tirante normal con la ecuación de Manning;

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R_h^{\ 2/3} \cdot S^{1/2} \qquad (2.8)$$

Despejando los términos geométricos de los términos constantes tenemos:

$$\frac{Q \cdot n}{S^{1/2}} = A \cdot R_h^{\ 2/3}$$

Ó también el termino del lado izquierdo es conocido y el derecho es la incógnita que queremos conocer.

$$\frac{V \cdot n}{S^{1/2}} = R_h^{\ 2/3}$$

En este capítulo se presentaron las herramientas matemáticas básicas que debemos dominar para poder entender el comportamiento de la naturaleza en los cauces ya sean artificiales o naturales y así intentar modificarlos de acuerdo a las necesidades de las sociedades cercanas a éstos para aprovechar los recursos, evitando el daño a la naturaleza y a las personas