



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

CONFIABILIDAD EN
ESTABILIDAD DE TALUDES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

P R E S E N T A :

AUDINI MONTOYA OROZCO

TUTOR:

DR. ALBERTO JAIME PAREDES



MÉXICO D.F.

ABRIL 2009

JURADO ASIGNADO:

Presidente : **M.I. Jorge Efraín Castilla Camacho**

Secretario : **Dr. Venancio Trueba López**

Vocal : **Dr. Alberto Jaime Paredes**

1er. Suplente : **M.I. Jaime Antonio Martínez Mier**

2do. Suplente : **Dra. Lilia Reyes Chávez**

Lugar donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Alberto Jaime Paredes

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por ser soporte, ejemplo y guía de vida.

Al Dr. Alberto Jaime Paredes por su apoyo, enseñanza y guía, aporte invaluable para la realización de esta tesis.

A mis sinodales M.I. Jorge Castilla Camacho, M.I. Jaime Martínez Mier, Dr. Venancio Trueba López y Dra. Lilia Reyes Chávez por sus comentarios y correcciones que enriquecieron este trabajo.

Al CONACyT por la beca brindada para cursar los estudios de posgrado.

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Antecedentes	1
1.2	Objetivos	1
1.3	Alcances	1
2	ESTABILIDAD DE TALUDES	3
2.1	Factores que influyen en la estabilidad de un talud	3
2.2	Tipos de falla de taludes	7
2.3	Hipótesis utilizadas en los análisis de estabilidad de taludes	12
2.4	Análisis de estabilidad en dos dimensiones	13
3	PROBABILIDAD	34
3.1	Probabilidad	34
3.2	Teorema de Bayes	36
3.3	Variables aleatorias	37
3.4	Esperanza matemática, medidas de tendencia central y medidas de dispersión	41
3.5	Momentos y funciones generadoras de momentos	45
3.6	Asimetría	46
3.7	Curtosis	47
3.8	Distribuciones de probabilidad	47
3.9	Estadística	55
4	ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD	66
4.1	Índice de confiabilidad	67
4.2	Sistemas de confiabilidad global	69
4.3	Métodos utilizados en los análisis de confiabilidad	72

5	INCERTIDUMBRE EN LAS PROPIEDADES DEL SUELO	86
5.1	Propiedades de interés	86
5.2	Representación de las propiedades del suelo	88
5.3	Fuentes de incertidumbre	95
6	EJEMPLO DE APLICACIÓN	105
6.1	Ejemplo 6.1	105
6.2	Ejemplo 6.2	116
6.3	Ejemplo 6.3	121
7	CONCLUSIONES	125
8	REFERENCIAS	127

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

El diseño tradicional en estabilidad de taludes se basa en factores de seguridad, cuyas magnitudes son dictadas por la experiencia acumulada en la práctica profesional a través de muchos años. Por su parte, los análisis de confiabilidad se basan en el modelo Demanda (cargas)-Capacidad (resistencia), en el cual el comportamiento no deseable se define como la probabilidad de que la demanda exceda a la capacidad.

Debido a la incertidumbre en la determinación de los parámetros mecánicos utilizados en los análisis de estabilidad de taludes y a la heterogeneidad que presentan los suelos que forman estas estructuras. La aplicación de la teoría de la probabilidad a estos análisis permite desarrollar estudios con mayor apego a las condiciones reales del problema.

El análisis de confiabilidad permite considerar en el diseño la incertidumbre de los parámetros del suelo y de las cargas actuantes. En esos análisis se parte de un modelo determinista, como es el caso de la estabilidad de taludes y permiten asignar a un factor de seguridad calculado un valor o índice de confiabilidad puede establecerse un rango cuantitativo entre el valor medio del factor de seguridad y el valor en el cual se considera la falla catastrófica o falla de servicio.

1.2 Objetivos

En el presente trabajo se pretenden los siguientes objetivos:

- Describir los conceptos básicos del análisis de confiabilidad en estabilidad de taludes.
- Exponer y comparar los principales métodos utilizados en los análisis de confiabilidad.
- Comparar entre sí los resultados de los diferentes métodos de análisis, a través de un caso práctico de estabilidad de un talud bidimensional.

1.3 Alcances

El capítulo 2 presenta la definición de talud para fines de ingeniería. Se consideran dos tipos de taludes en suelo: taludes naturales (laderas) y taludes construidos por el hombre (cortes y terraplenes); no se consideran los taludes en roca. Se describen los factores más comunes que producen la falla de estas estructuras, las principales hipótesis utilizadas para simplificar su análisis, los mecanismos de falla más comunes y los métodos empleados para su análisis en dos dimensiones.

El capítulo 3 presenta los conceptos básicos de probabilidad, que son la base de la teoría de confiabilidad. Está dividido en dos partes principales: en la primera se exponen los conceptos que aplican al manejo de las variables y las funciones de distribución comúnmente utilizadas; en la segunda parte se presentan los conceptos propios de la estadística descriptiva.

En el capítulo 4 se expone la teoría de confiabilidad, marcando conceptos y métodos aplicables a la ingeniería: índice de confiabilidad, método de segundo momento de primer orden, método del valor medio de serie de Taylor, método de estimadores puntuales, método del 3σ y método de Monte Carlo. Se comparan éstos por medio de un ejemplo de aplicación.

La incertidumbre en los análisis geotécnicos es resultado principalmente de dos factores: 1) la estratigrafía y propiedades del suelo en el sitio y, 2) las solicitaciones a las que se verán sometidos los suelos. Buscando obtener una representación cuantitativa de la heterogeneidad de los suelos en sus propiedades índices y mecánicas, se ha adoptado una descripción probabilista de ellas. En el capítulo 5 se presentan de forma global, las condiciones que deben evaluarse para lograr esta representación probabilista de los suelos.

Mediante un ejemplo de aplicación de estabilidad de taludes en el capítulo 6 se presenta la metodología aplicada en el cálculo del índice de confiabilidad por diferentes métodos, se realiza la comparación de los resultados obtenidos entre éstos y se compara con el cálculo del factor de seguridad aplicando el método del elemento finito.

Finalmente, en los capítulos 7 y 8, se presentan, respectivamente, las conclusiones derivadas y las referencias utilizadas en el trabajo.

2 ESTABILIDAD DE TALUDES

Se define como talud a una masa de suelo con una superficie externa inclinada con respecto a la horizontal. Cuando el talud se forma de manera natural, sin la intervención del hombre, se denomina ladera natural o ladera. Cuando la inclinación en la masa de suelo es generada por la intervención de la actividad humana, excavaciones o rellenos, se denomina talud.

La falla de un talud se presenta tanto en taludes naturales como en los construidos por el hombre. Muchos proyectos de ingeniería resultan afectados o afectan la estabilidad de taludes al producir modificaciones en la topografía, condiciones de flujo de agua, pérdida de resistencia, cambios en el estado de esfuerzos, por mencionar algunos factores.

En este caso, la finalidad de los análisis de estabilidad de taludes es estimar la posibilidad de falla de éstos al provocarse un deslizamiento de la masa de suelo que lo forma, buscando que el diseño de excavaciones y rellenos que den lugar a un talud o afecten la estabilidad de una ladera se realicen de forma segura y económica.

El análisis convencional de estabilidad de taludes en dos dimensiones busca el determinar la magnitud de las fuerzas o momentos actuantes (que provoquen el movimiento) y determinar la magnitud de las fuerzas o momentos resistentes (que se opongan al movimiento) que actúan en los suelos que forman al talud.

Para lograr lo anterior se calcula la relación entre las fuerzas o momentos resistentes y las fuerzas o momentos actuantes obteniendo un factor seguridad que está afectado por las incertidumbres de los parámetros que le dieron origen, por lo cual, a todo factor de seguridad intrínsecamente va ligado un grado de incertidumbre.

2.1 Factores que influyen en la estabilidad de un talud

La falla de un talud o ladera se debe a un incremento en los esfuerzos actuantes o a una disminución de resistencia al esfuerzo cortante del suelo. Esta variación, en general, es causada por efectos naturales y actividades humanas.

Según Budhu (2007) los factores principales que afectan la estabilidad de un talud, natural o diseñado son:

2.1.1 Erosión

El agua y el viento continuamente afectan a los taludes erosionándolos. La erosión modifica la geometría del talud y por tanto los esfuerzos a los que está sometido, resultando un talud diferente al inicialmente analizado o en una modificación de las condiciones que tenía, figura 2.1.

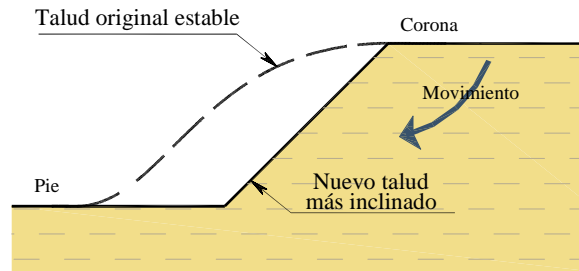


Figura 2.1. Variación de la geometría de un talud por erosión

2.1.2 Lluvia

Durante el periodo de lluvias, los taludes se ven afectados al saturarse los suelos que los forman, provocando un aumento de peso de la masa, una disminución en la resistencia al esfuerzo cortante y la erosión de la superficie expuesta. Al introducirse agua en las grietas que presente el talud se origina un incremento en las fuerzas actuantes o aparición de fuerzas de filtración, pudiendo provocar la falla del mismo, figura 2.2.

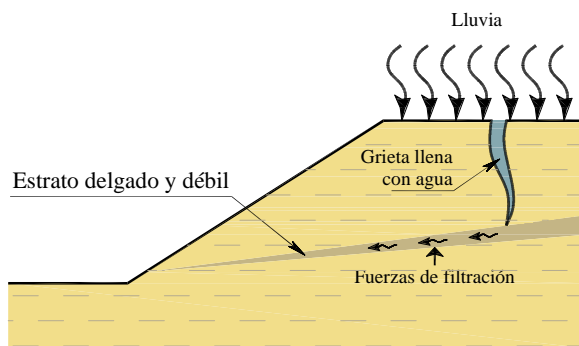


Figura 2.2. Talud sometido a lluvia

2.1.3 Sismo

Los sismos suman fuerzas dinámicas a las fuerzas estáticas actuantes a las que está sometido un talud, provocando esfuerzos cortantes dinámicos que reducen la resistencia al esfuerzo cortante, debilitando al suelo. Un aumento en la presión de poro en taludes formados por materiales granulares puede provocar el fenómeno conocido como licuación, figura 2.3.

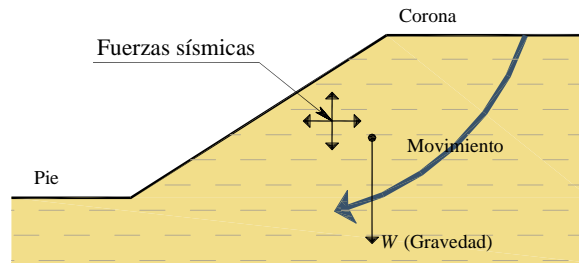


Figura 2.3. Fuerzas debidas a la gravedad y fuerza provocadas por sismos

2.1.4 Aspectos geológicos

Algunas fallas de taludes son provocadas por aspectos geológicos no detectados durante el levantamiento y exploración de campo, los cuales, al no ser considerados durante la evaluación de la estabilidad del talud, aumentan la incertidumbre del factor de seguridad calculado, figura 2.4.

Un ejemplo de este tipo de falla es el que se presentó durante la operación del Proyecto Hidroeléctrico en el talud excavado atrás de la casa de maquinas de la presa Agua Prieta, Herrera y Resendiz (1990), en el cual un bloque de roca deslizó sobre un estrato de arcilla, no detectado durante la exploración y construcción del proyecto.

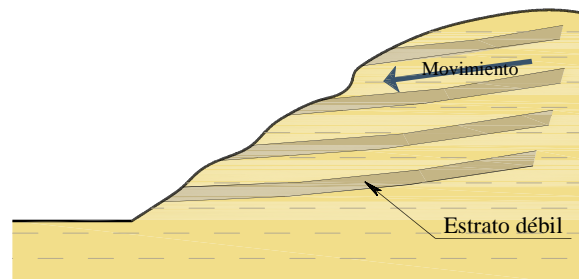


Figura 2.4. Aspectos geológicos que pueden provocar la falla de un talud

2.1.5 Cargas externas

La aplicación de cargas sobre la corona del talud provocan un aumento en las fuerzas actuantes en la masa de suelo, lo cual puede llevar a la falla del talud si estas cargas no son controladas o tomadas en cuenta durante la evaluación de la estabilidad del talud, figura 2.5.

En algunos casos esta situación se remedia mediante la excavación de una o más bermas en el cuerpo del talud, lo que reduce las fuerzas actuantes en éste.

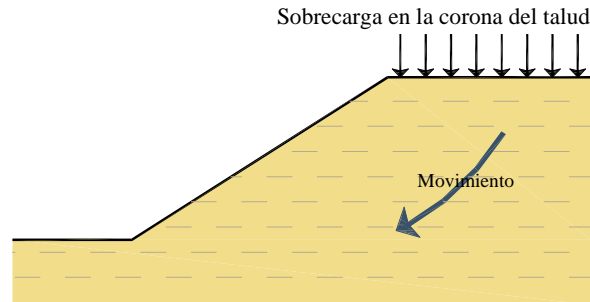


Figura 2.5. Sobre carga en la corona del talud

2.1.6 Excavaciones y/o rellenos

Las actividades de construcción realizadas al pie de un talud o colocación de una sobrecarga en la corona, pueden causar la falla de éste al modificar la condición de esfuerzos a las que está sometido. Generalmente, estas actividades de construcción corresponden a trabajos donde se realizan excavaciones y/o rellenos.

Cuando se realiza una excavación al pie del talud, el esfuerzo total se disminuye, generando en el suelo un incremento negativo en la presión de poro. Durante el tiempo en que este incremento de presión de poro se disipada, puede presentarse la falla del talud al disminuir la resistencia al esfuerzo cortante del suelo, figura 2.6.

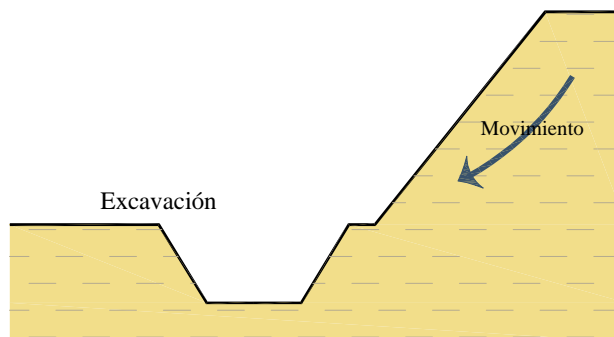


Figura 2.6. Excavación en el pie de un talud

Los taludes contruidos con material de banco de préstamo se realizan al compactar estos materiales en el sitio bajo especificaciones de control, generando un relleno artificial o terraplén.

2.1.7 Condición de presión de poro y vaciado rápido

Los embalses pueden estar sujetos a un cambio rápido en su nivel de agua y se ven sujetos a una reducción de la fuerza lateral que proporciona el agua, además de que el exceso de presión de poro no tiene tiempo de disiparse, figura 2.7.

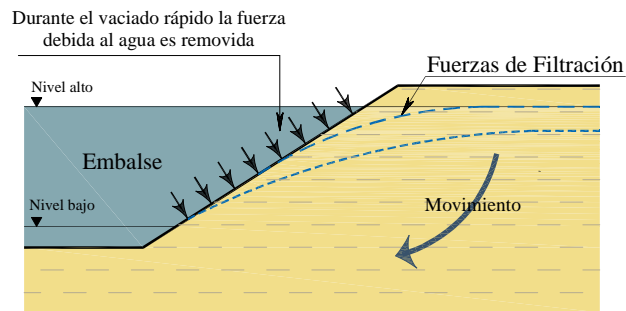


Figura 2.7. Vaciado rápido

En ese tiempo se puede presentar la falla del talud. Si el nivel de agua en el embalse permanece en niveles bajos y la falla no ocurre mientras presenta condiciones de resistencia al esfuerzo cortante no drenadas, el flujo que se presenta y las fuerzas de filtración pueden provocar la falla del talud, figura 2.8.

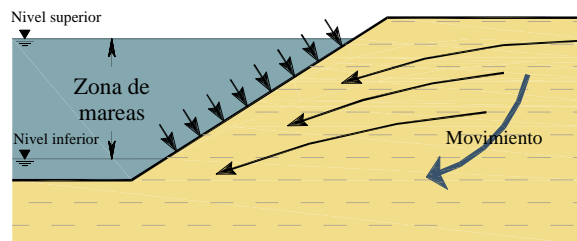


Figura 2.8. Fuerzas de filtración generadas por el cambio de nivel en el embalse

2.2 Tipos de falla de taludes

Toda masa de suelo que constituya un talud natural, terraplén o corte, presenta una tendencia a desplazarse hacia la parte baja y al frente por efecto de su propio peso. Cuando la resistencia al

esfuerzo cortante del suelo contrarresta esa tendencia, el talud es estable; en caso contrario, se produce un deslizamiento.

La clasificación de deslizamientos se basa en la forma que se produce el movimiento de la masa de suelo, como se trata a continuación.

2.2.1 Falla por deslizamiento superficial

A. Rico (2000) define esta falla como “un proceso más o menos continuo y por lo general lento de deslizamiento ladera abajo que se presenta en la zona superficial de algunas laderas naturales”. Además del término deslizamiento superficial, se utiliza la palabra inglesa “creep” para definir este tipo de falla.

Este tipo de falla suele afectar grandes áreas de terreno. El movimiento superficial se produce sin una transición brusca entre la parte superficial móvil y la masa inmóvil más profunda. No se presenta una superficie de falla definida.

Terzaghi (1948) distingue dos clases de deslizamiento superficial: 1) el estacional, que afecta sólo a la corteza superficial del talud cuyos suelos sufren la influencia de los cambios climáticos en forma de expansiones y contracciones humedecimiento y secado; 2) el masivo, que afecta a capas de suelo más profundas, no afectadas por el clima, por lo que sólo se puede atribuir al efecto de factores internos que actúan en los suelos.

El creep estacional produce movimientos que pueden variar con la época del año; el masivo presenta movimiento constante. La velocidad del movimiento rara vez excede algunos centímetros por año. La figura 2.9 presenta dos casos de falla por creep en taludes naturales.



Figura 2.9. Fallas por creep en laderas

Otro tipo de falla por deslizamiento superficial se presenta en la costra de suelo sobre un estrato que por condiciones geológicas es favorable al deslizamiento en una superficie de falla predefinida.

En general este tipo de movimiento está asociado a estratigrafías cuyo echado está en dirección del talud y que además se acelera al presentarse flujo de agua dentro del cuerpo del talud, figura 2.10.

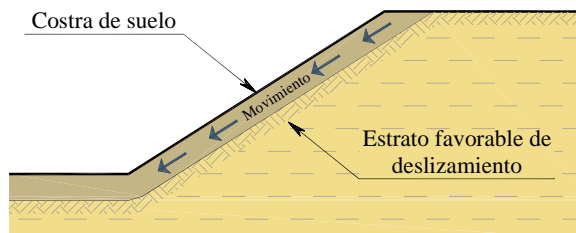


Figura 2.10. Falla por deslizamiento superficial sobre un estrato favorable al deslizamiento

2.2.2 Falla por rotación

El deslizamiento ocurre abarcando una masa considerable de suelo que afecta a profundidad la geometría del talud. Este tipo de falla presenta una superficie cilíndrica o concoidal, sobre la cual se produce el movimiento, generalmente de forma súbita. La falla por rotación se clasifica con respecto a la profundidad en que se presenta la superficie de falla y el punto donde esta superficie corta a los planos que forman la geometría externa del talud.

De forma general la falla por rotación puede clasificarse como:

- **Falla local**

Ocurre cuando la superficie de falla corta al plano inclinado del talud entre el hombro y el pie, sin cortar el pie del talud, figura 2.11. Coloquialmente a este tipo de falla se le conoce como “desconchamiento” y en la mayoría de los casos no corresponde a una falla catastrófica. Al provocar un cambio en la geometría del talud puede propiciar la aparición de fallas subsecuentes que lleven a la falla catastrófica del talud.

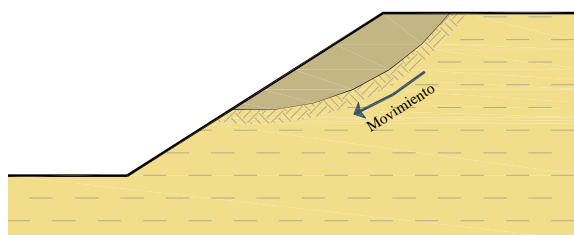


Figura 2.11 Falla local

- **Falla de pie**

Se presenta cuando la superficie de falla tiene salida en las cercanías del pie del talud, figura 2.12, y corresponde a una falla catastrófica del talud.

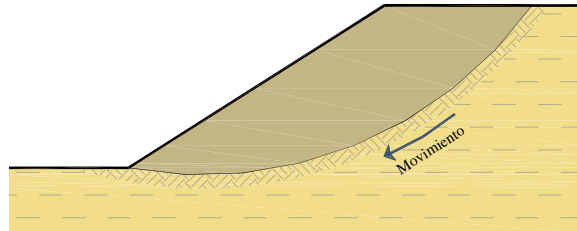


Figura 2.12. Falla de pie

- **Falla de base**

Ocurre cuando la superficie de falla corta al plano horizontal que forma la base del talud, figura 2.13, y corresponde a una falla general de toda la geometría del talud. Presenta la mayor profundidad y puede estar limitada por estratos más resistentes.

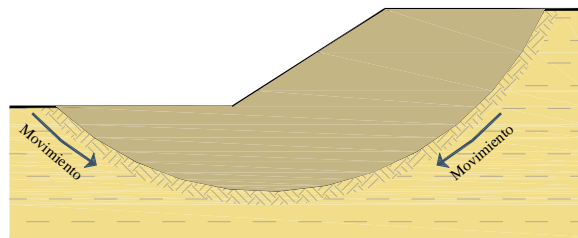


Figura 2.13. Falla de base

2.2.3 Falla por traslación

Esta falla se presenta como un movimiento importante del cuerpo del talud sobre una superficie relativamente plana asociada a estratos poco resistente localizada en las cercanías del pie del talud, figura 2.14.

La superficie de falla se desarrolla paralela a la estratificación de suelos débiles, terminando generalmente sobre planos de agrietamientos verticales. Los estratos débiles que propician la aparición de este mecanismo de falla por lo general corresponden a arcillas blandas, arenas finas o limos no plásticos, que se encuentran empacados entre estratos de suelos de mayor resistencia.

Generalmente el factor que provoca la activación del mecanismo de falla es un aumento en las condiciones de presión de poro en el estrato débil.

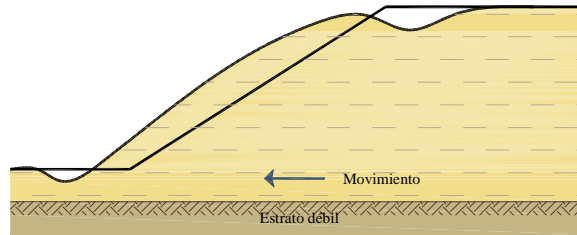


Figura 2.14 Falla por traslación

2.2.4 Falla por flujo

Corresponde a movimientos relativamente rápidos de una parte del talud, de forma que esos movimientos y las velocidades en las que ocurren, corresponden al comportamiento que presentaría un líquido viscoso. No se distingue una superficie de deslizamiento debido a que ésta se presenta en un periodo breve de tiempo.

Esta falla se presenta con mayor frecuencia en taludes naturales formados por materiales no “consolidados” y se desarrolla el mecanismo cuando hay un aumento apreciable en el contenido de agua. La figura 2.15, Rico (2000), muestra algunos deslizamientos de este tipo.

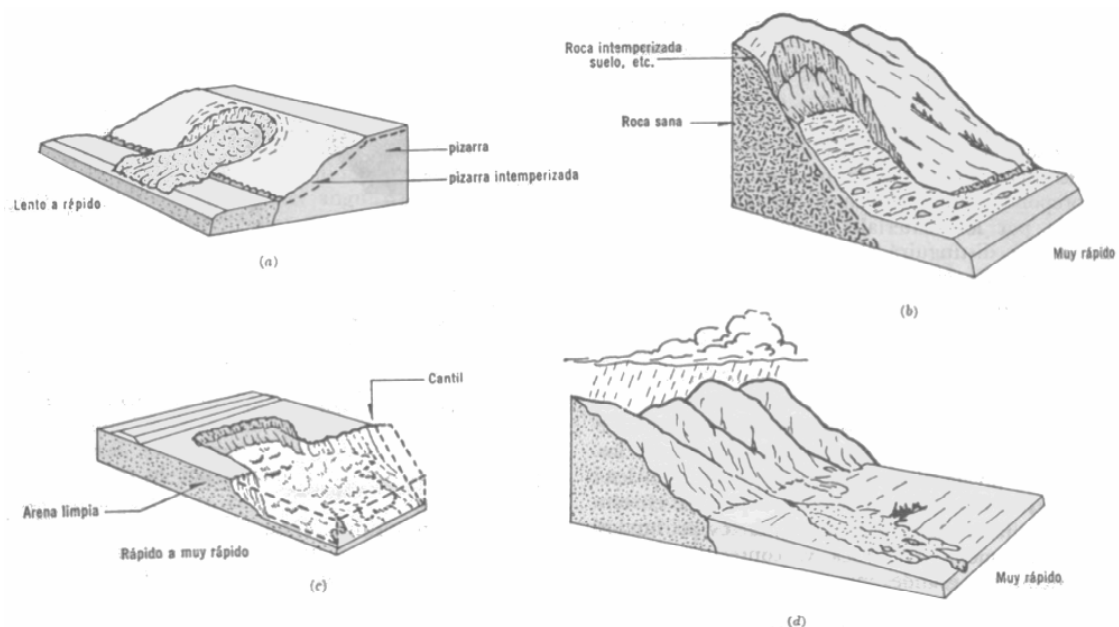


Figura 2.15. Falla por flujo en materiales húmedos

2.2.5 Falla por licuación

El fenómeno de licuación se presenta cuando se provoca una reducción rápida de la resistencia al esfuerzo cortante de un suelo. Esta pérdida conduce al colapso del suelo en que se presenta y con ello al de la estructura que forme o que se encuentre sobre éste.

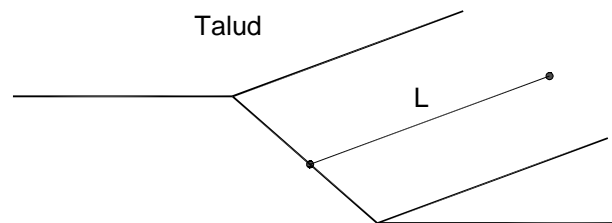
La licuación se ha presentado con mayor frecuencia en arenas finas, sumergidas sometidas a un incremento en la presión de poro por efecto de vibraciones o sismo alcanzando su gradiente crítico, lo que desencadena el fenómeno.

2.3 Hipótesis utilizadas en los análisis de estabilidad de taludes

Los métodos para análisis de estabilidad de taludes se basan en hipótesis propias. Para el análisis en dos dimensiones la mayoría de los métodos comparten las siguientes:

- **Análisis bidimensional**

Se idealiza que el problema es de deformación plana. Debido a que la longitud L es mucho mayor que las dimensiones de la sección transversal, figura 2.16, se considera que no existe influencia de factores que sumen deformación a las obtenidas al analizar la sección transversal; es decir, sus características en toda la longitud L son las mismas que en cualquier corte transversal generado sobre ésta, por lo cual se obtendrán los mismos resultados.



$L \gg$ dimensiones de la sección

Figura 2.16. Análisis plano de deformaciones

- **Superficie de falla**

Al presentarse el movimiento de la masa de suelo, ésta se desplaza sobre un plano que define la falla. En los modelos para análisis de estabilidad de taludes esta condición se representa mediante una forma geométrica que se apegue más a las condiciones presentadas en los taludes.

- **Movimiento de la masa de suelo como cuerpo rígido**

Se considera que la masa de suelo se desplaza sobre la superficie de falla como cuerpo rígido, por lo cual no se consideran deformaciones ni cambios de volumen en la masa de suelo al presentarse la falla.

- **Homogeneidad en las propiedades del suelo**

Esta simplificación considera que las propiedades del suelo no varían con respecto a la geometría o profundidad del talud.

- **Condición de falla generalizada a lo largo de toda la superficie de falla**

Se considera que la resistencia al esfuerzo cortante del suelo se presenta a lo largo de la superficie de falla. En caso de taludes estratificados, la resistencia al esfuerzo cortante será la suma de la resistencia de cada suelo a lo largo del tramo de superficie que corta cada estrato.

2.4 Análisis de estabilidad en dos dimensiones

Los procedimientos para el análisis de taludes en dos dimensiones se pueden agrupar, con respecto a su complejidad, en los siguientes métodos: empíricos, simplificados y detallados o rigurosos.

2.4.1 Métodos empíricos

Se basan en observaciones de campo y en la experiencia previa de los diseñadores tomando en cuenta las condiciones geológicas y geotécnicas de la zona donde se encuentra el talud. Permiten un análisis simple y relativamente rápido cuando las condiciones reales se apegan a las hipótesis en que se basan estos métodos; la incertidumbre inherente a estos métodos es alta debido a que no se realizan exploración, ensayos de laboratorio o cálculos rigurosos de estabilidad.

- **Observaciones de campo**

Rico y del Castillo (2000), tabla 2.1, presentan un sumario de recomendaciones de inclinación de cortes en diversos materiales, utilizadas en el diseño empírico de taludes para vías terrestres. La tabla, desarrollada hace más de 3 décadas, toma en cuenta los requerimientos usuales de las vías terrestres, pero debe utilizarse con reserva y revisar sus resultados aplicando una metodología rigurosa.

Tabla 2.1. Recomendaciones para inclinación de taludes en vías terrestres

TIPO DE MATERIAL	TALUD RECOMENDABLE				OBSERVACIONES
	Hasta 5 m	De 5 a 10 m	De 10 a 15 m	Mayor de 15 m	
Caliza intemperizada con flujo de agua.					Proyectar subdrenaje con contracunetas impermeables.
Caliza sana con echado contra el corte entre 90° y 45°, con lubricante arcilloso entre estratos.	Dar el talud correspondiente al echado. Si la roca está muy fracturada, proyectar bermas impermeabilizadas de 4 m a la mitad de la altura. Contracunetas impermeables.				
Caliza muy fracturada e intemperizada.					Contracuneta impermeable.
Caliza sana poco fracturada con echado contra el corte entre 30° y 45°.					Se puede considerar como si el echado fuera horizontal.
Caliza muy poco intemperizada y fracturada, con echado entre 45° y 30° contra el corte.					Descopetar la zona más fracturada a 1:1. Contracuneta impermeabilizada.
Pizarras	Mismas recomendaciones que para calizas.				
Aglomerado medianamente compacto con finos no plásticos.					Contracuneta impermeabilizada, para cortes mayores de 10 m construir banquetas de 1.0 m en el pie del talud.
Aglomerado medianamente compacto con finos plásticos.					Contracunetas impermeabilizadas. Para corte mayor de 10 m proyectar banqueta de 2 m a la mitad de la altura y para corte mayor de 15 m aumentar el ancho a 4 m.
Arenas limosas y limos compactos.					Descopetar 1:1 la parte superior más intemperizada, si son materiales fácilmente erosionables deberá proyectarse talud de 1:1 y proteger con pasto.
Arenas limosas y limos poco compactos.					Contracuneta impermeable. Descopetar a 1:5:1 a la parte más intemperizada. Para cortes mayores de 15 m proyectar banqueta de 3 m al pie del talud.

2.4.2 Métodos simplificados

Los métodos simplificados permiten calcular el factor de seguridad mínimo de un talud en forma simple y rápida, cuando las condiciones del talud se ajustan a las condiciones idealizadas con las cuales se generaron las gráficas de estabilidad propias del método.

En los puntos siguientes se presentan cuatro de los métodos simplificados más comunes.

- **Taylor**

Taylor (1948), desarrolló, con base en el método del círculo de fricción, gráficas para determinar el factor de seguridad mínimo de un talud homogéneo que se encuentra sobre un estrato

de suelo más competente o un estrato de roca, tanto para materiales con $c \neq 0$ y $\phi = 0$, como materiales con $c \neq 0$ y $\phi \neq 0$. Taylor considera una falla de base por rotación, que en el medio no existen grietas de tensión y no se presentan cargas externas o flujo de agua en el talud.

El factor de seguridad mínimo del talud se determina con la ecuación 2.1.

$$FS = N \left(\frac{c_u}{\gamma H} \right) \quad (2.1)$$

donde:

FS: factor de seguridad,

N: número de estabilidad,

c_u : cohesión del material,

γ : peso volumétrico del suelo,

H: altura del talud.

En las figuras 2.17 y 2.18 se muestran las gráficas de estabilidad para materiales con $c \neq 0$ y $\phi = 0$ y para $c \neq 0$ y $\phi \neq 0$, respectivamente.

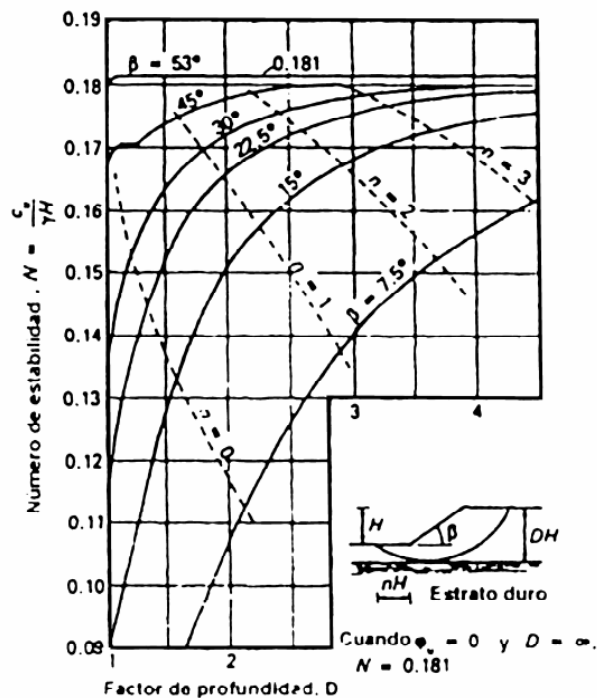


Figura 2.17. Gráfica de estabilidad para el caso de $c \neq 0$ y $\phi = 0$ (Taylor, 1948)

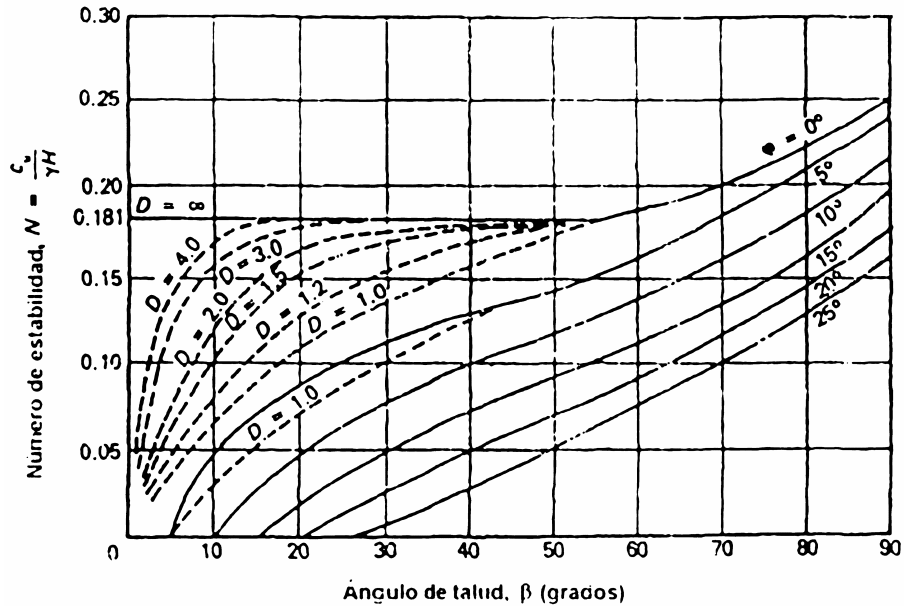
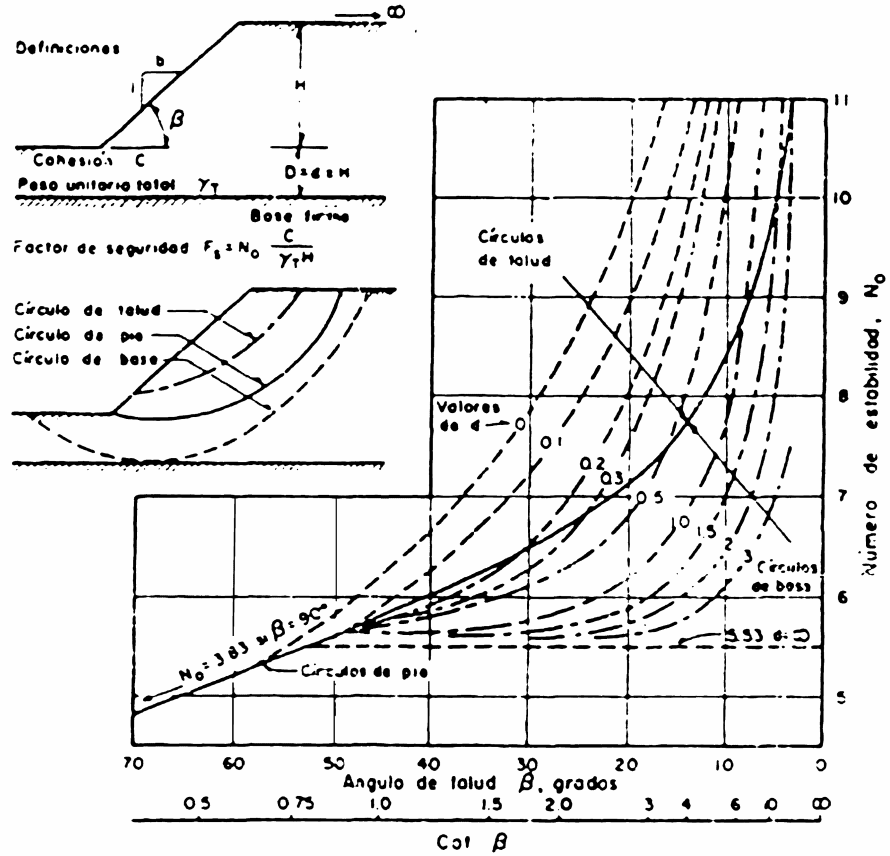


Figura 2.18. Gráfica de estabilidad para el caso de $c \neq 0$ y $\phi \neq 0$ (Taylor, 1948)

- **Janbu**

Janbu (1954) desarrolló gráficas de estabilidad para calcular el factor de seguridad mínimo de un talud con base en las siguientes hipótesis: a) no existe un tirante de agua al pie del talud; b) no se aplican sobrecargas; c) no hay grietas de tensión; d) el suelo es homogéneo y su resistencia se debe solamente a la cohesión; e) la cohesión es constante con la profundidad y e) la falla se produce por rotación.

En la figura 2.19 se presenta la gráfica de estabilidad de Janbu. Para determinar la superficie de falla se utilizan las gráficas de la figura 2.20.



HIPOTESIS

1. No existe un tirante de agua al pie del talud
2. No actúan sobrecargas
3. No existen grietas de tensión
4. El suelo es homogéneo hasta la profundidad D
5. La resistencia se debe únicamente a la cohesión y es constante con la profundidad
6. La falla se produce a lo largo de un círculo

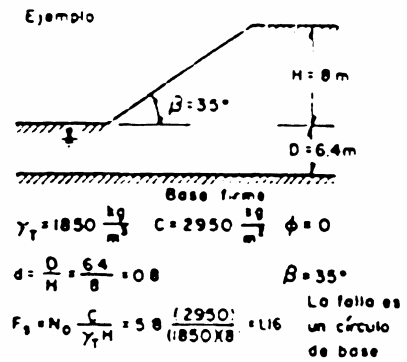


Figura 2.19. Gráfica de estabilidad para el caso de $\phi = 0$ (Janbu, 1954)

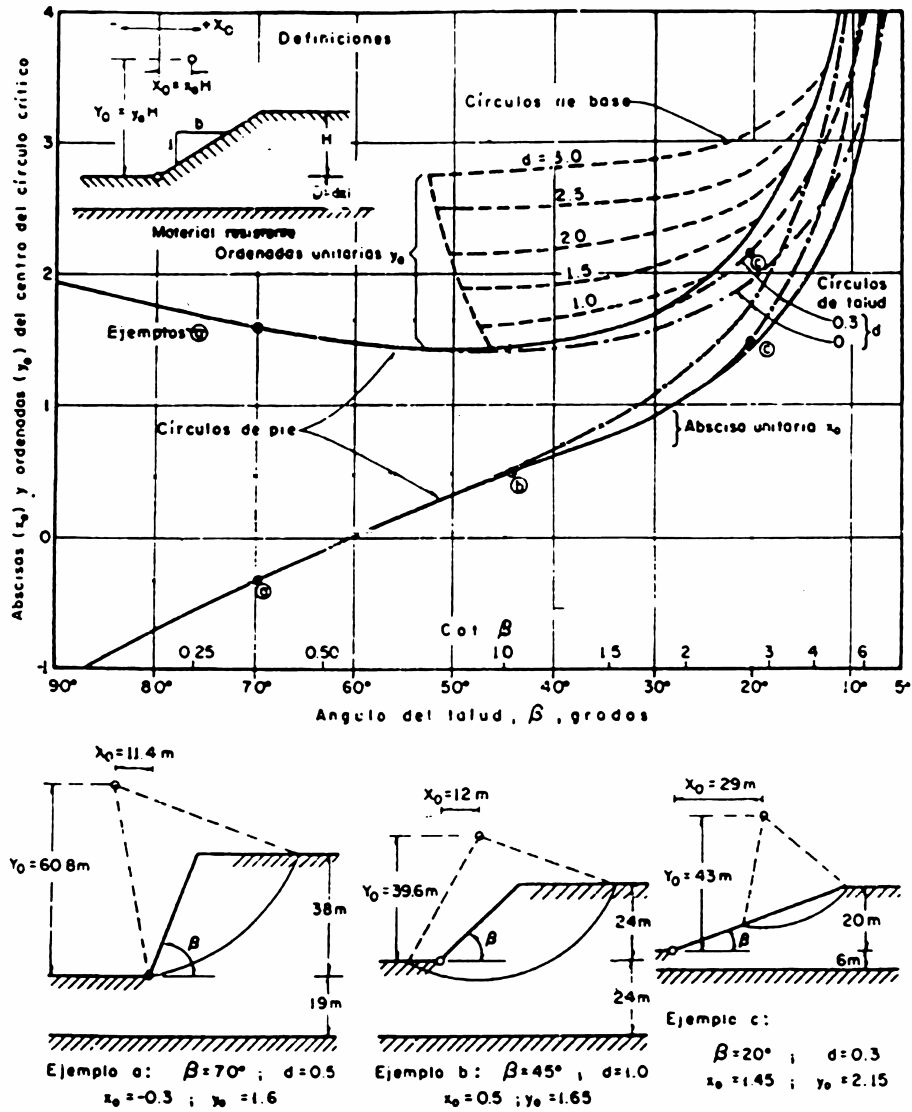


Figura 2.20. Centro y superficie de falla crítica para el caso de $\phi = 0$ (Janbu, 1954)

Janbu (1954) propone factores de corrección en caso de sobrecarga, grietas de tensión o tirante de agua al pie del talud, figura 2.21.

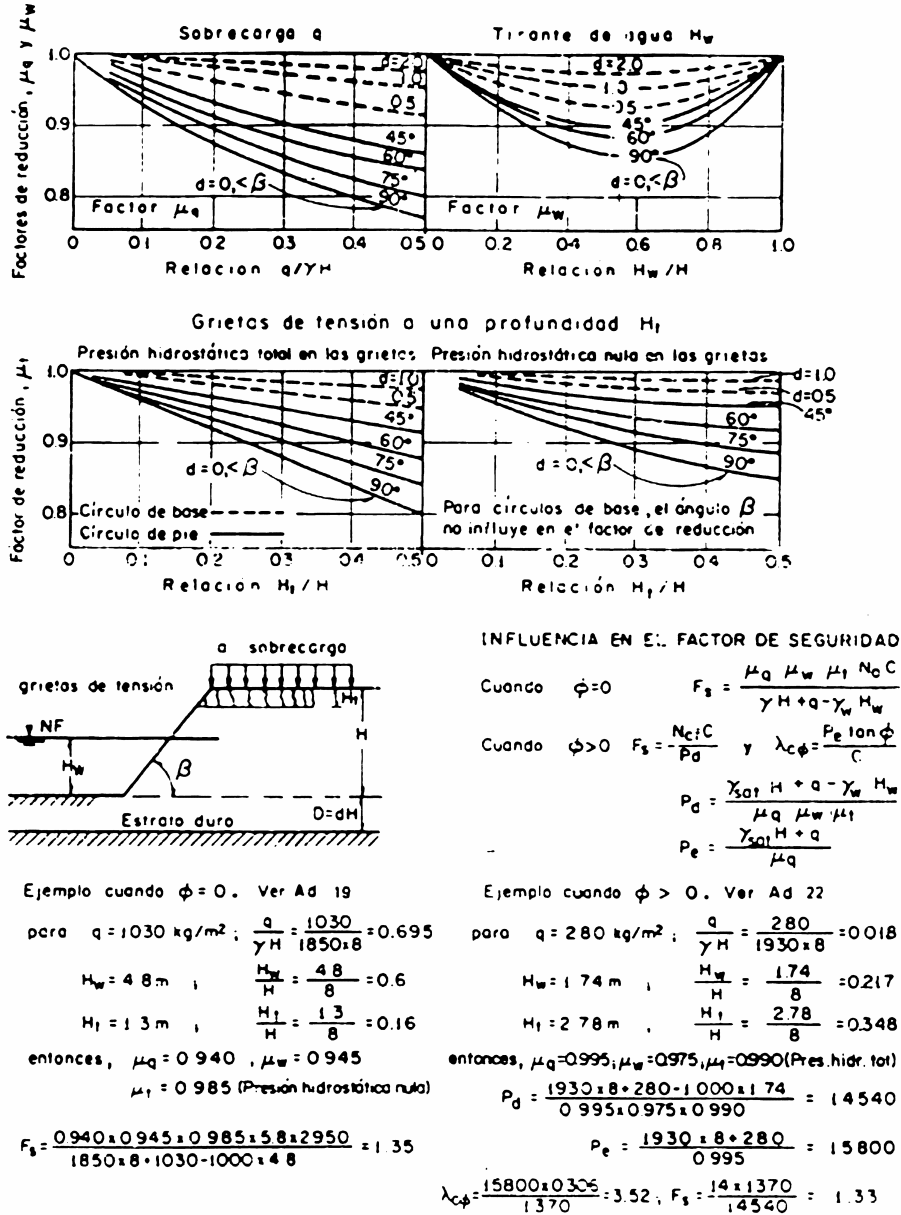


Figura 2.21. Corrección por influencia de sobrecarga, tirante de agua y grietas de tensión para el caso de $\phi = 0$ (Janbu, 1954)

• **Bishop - Morgenstern**

Bishop y Morgenstern (1960) proporcionan gráficas de estabilidad para determinar el factor de seguridad mínimo de un talud homogéneo, figura 2.22, con base en el método de Bishop modificado. El factor de seguridad se calcula aplicando la ecuación 2.2.

$$FS = m - n(r_u) \tag{2.2}$$

donde:

FS: factor de seguridad,

m, n: coeficientes de estabilidad,

r_u : relación de presión de poro.

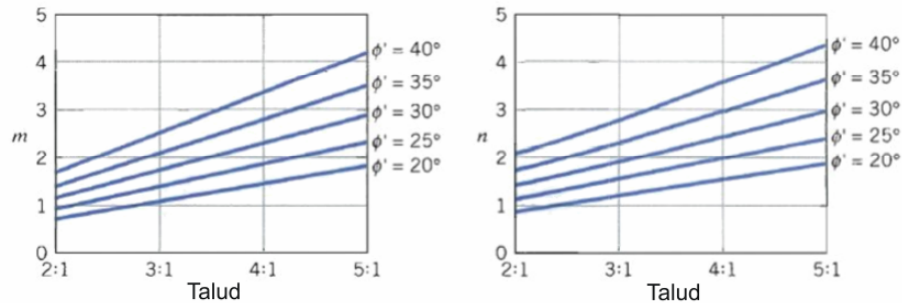


Figura 2.22. Gráfica valores de m y n (Bishop - Morgenstern, 1960)

2.4.3 Métodos detallados o rigurosos

Estos métodos se basan en procedimientos que toman en cuenta el equilibrio de fuerzas y/o momentos actuantes en el talud para determinar su factor de seguridad. Requieren de parámetros obtenidos en combinación de un programa de exploración del subsuelo y ensayos de laboratorio.

- **Análisis de superficies planas**

Cuando las dimensiones del talud son grandes y en las que se considera que el desplazamiento de la masa de suelo se produce sobre una superficie plana, el cálculo del factor de seguridad corresponde a la relación entre la resistencia al esfuerzo cortante del suelo y la fuerza cortante que actúa en el talud, ecuación 2.3.

$$FS = \frac{s}{\tau_m} \quad (2.3)$$

donde:

FS: factor de seguridad,

s: resistencia al esfuerzo cortante del suelo,

τ_m : fuerza cortante actuante en el talud.

Por simplificación, se considera en estos métodos que el suelo es homogéneo y no estratificado en la masa de suelo en movimiento.

Para taludes de longitud infinita formados por suelos con $c = 0$ y $\phi \neq 0$, el factor de seguridad se calcula como:

$$FS = \frac{s}{\tau_m} = \frac{\tan\phi}{\tan\beta} \left(1 - \frac{h_p \gamma_w}{H \gamma \cos^2\beta} \right) \quad (2.4)$$

donde:

ϕ : ángulo de fricción del suelo,

β : ángulo de inclinación del talud,

H: espesor del suelo en movimiento,

h_p : altura piezométrica dentro del talud en la superficie de falla,

γ : peso volumétrico del suelo,

γ_w : peso volumétrico del agua,

s. resistencia al esfuerzo cortante del suelo a lo largo de la superficie de falla,

τ_m : esfuerzo cortante actuante en el talud a lo largo de la superficie de falla.

En la figura 2.23 se muestra el diagrama de fuerzas consideradas en este caso.

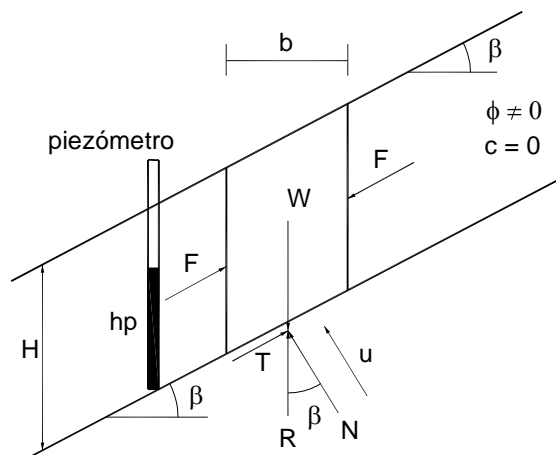


Figura 2.23. Talud de longitud infinita en suelos con $c = 0$ y $\phi \neq 0$

En taludes de longitud infinita, formados por suelos con $c \neq 0$ y $\phi \neq 0$, el factor de seguridad se calcula como:

$$FS = \frac{s}{\tau_m} = \frac{c}{\gamma H \cos \beta \sin \beta} + \frac{\tan \phi}{\tan \beta} \left(1 - \frac{h_p \gamma_w}{H \gamma \cos^2 \beta} \right) \quad (2.5)$$

donde:

ϕ : ángulo de fricción del suelo,

c: cohesión del suelo,

β : ángulo de inclinación del talud,

H: espesor del suelo en movimiento,

h_p : altura piezométrica dentro del talud en la superficie de falla,

γ : peso volumétrico del suelo,

γ_w : peso volumétrico del agua,

s. resistencia al esfuerzo cortante del suelo a lo largo de la superficie de falla,

τ_m : esfuerzo cortante actuante en el talud a lo largo de la superficie de falla,

En la figura 2.24 se presenta el diagrama de fuerzas considerado para taludes infinitos.

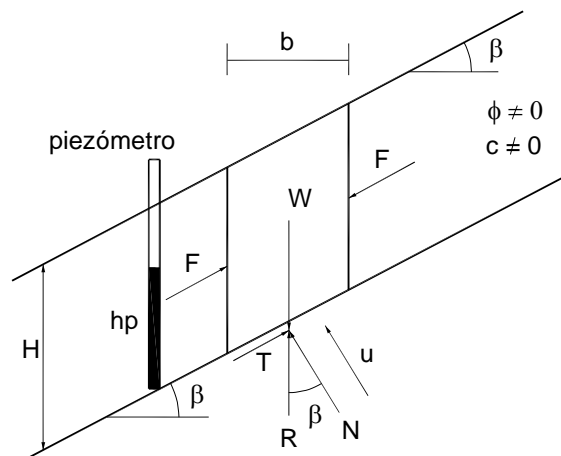


Figura 2.24. Talud de longitud infinita en suelos con $c \neq 0$ y $\phi \neq 0$

- **Fellenius**

También conocido como Método Sueco. Este método es el primer método riguroso que considera la estabilidad del talud a través del análisis de fuerzas que actúan en éste, dividiendo a la masa de suelo en movimiento en franjas independientes o dovelas.

El método considera una superficie de falla cilíndrica, la cual tiene rotación considerando un punto de giro que corresponde al centro del círculo que define la superficie de falla. Se ignora la

fricción entre dovelas y sólo se consideran las fuerzas normales y tangenciales a lo largo de la superficie de falla que actúan en cada una de ellas.

El factor de seguridad se calcula como la relación entre la sumatoria de los momentos resistentes de cada dovela y la sumatoria entre los momentos actuantes también en cada dovela, ambos respecto al centro del círculo de falla, figura 2.25.

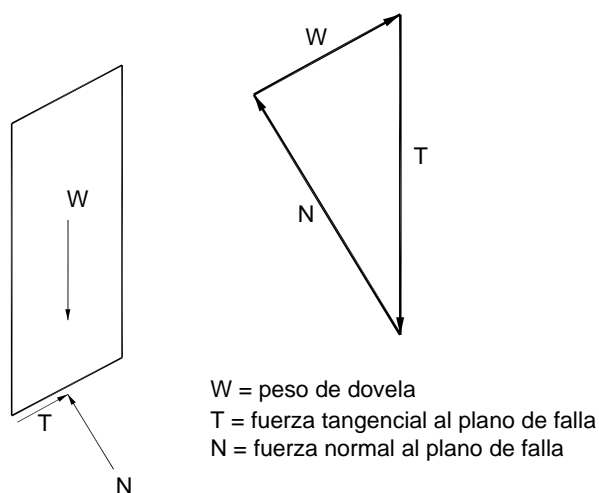


Figura 2.25. Diagrama de cuerpo libre y polígono de fuerzas aplicado en el método de Fellenius

El factor de seguridad está definido como:

$$FS = \frac{\sum (c\beta + N \tan \phi)}{\sum (W \sin \alpha)} \quad (2.6)$$

donde:

c: cohesión del suelo,

ϕ : ángulo de fricción del suelo,

β : longitud de la superficie de falla,

N: fuerza normal ($W \cos \alpha$),

W: peso de la dovela,

α : ángulo de inclinación de la superficie de falla.

- **Bishop modificado**

Bishop (1954) propuso un método cuya solución es una refinación mayor al método de Fellenius. Considera una superficie de falla cilíndrica y una masa de suelo que gira sobre un punto,

el cual corresponde al centro del círculo que define la superficie de falla. No considera la fricción entre dovelas, solamente las fuerzas normales a éstas.

Considerando que se establece el equilibrio vertical de todas las fuerzas que actúan sobre cada dovela, y que el factor de seguridad es la relación entre la sumatoria de los momentos resistentes y la sumatoria de los momentos actuantes, se tiene:

$$FS = \frac{1}{\sum W \text{sen} \alpha} \left(c\beta + W \tan \phi \left(\cos \alpha + \frac{\text{sen} \alpha \tan \phi}{FS} \right) \right) \quad (2.7)$$

donde:

c : cohesión del suelo,

ϕ : ángulo de fricción del suelo,

β : longitud de la superficie de falla,

W : peso de la dovela,

α : inclinación de la superficie de falla.

Como el factor de seguridad está implícito en la ecuación, el método se reduce a una solución mediante tanteos. Con la aplicación de la informática esta acción se puede resolver de manera sencilla. Kering (1955) propuso una gráfica que auxilia en la solución al asignar valores al coeficiente $\cos \alpha + \frac{\text{sen} \alpha \tan \phi}{FS}$.

En la figura 2.26 se muestra el diagrama de cuerpo libre y el polígono de fuerzas considerado por el método simplificado de Bishop.

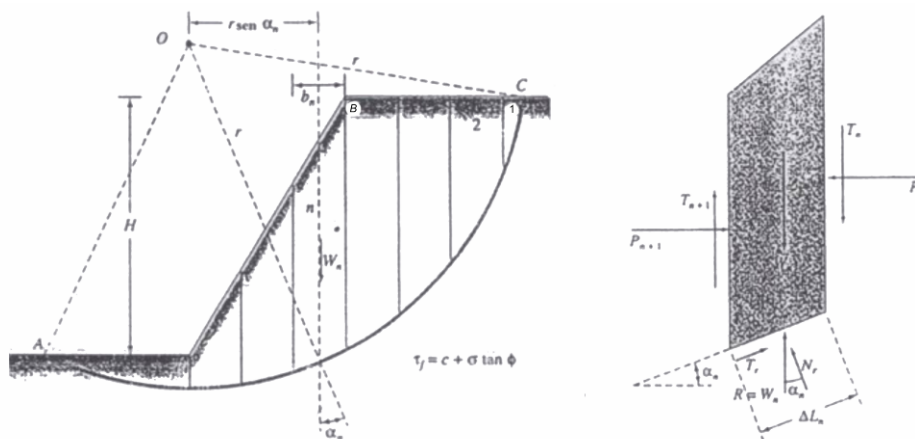


Figura 2.26. Diagrama de cuerpo libre y polígono de fuerzas aplicado en el método Bishop modificado

- **Janbu simplificado**

El método de Janbu simplificado, Fredlund y Krahn (1977), es similar al de Bishop modificado, con la diferencia de que solamente considera el equilibrio de fuerzas horizontales, mientras que Bishop modificado considera el equilibrio de momentos.

El método toma en cuenta las fuerzas normales generadas entre las dovelas, sin considerar las fuerzas de fricción generadas entre éstas.

El factor de seguridad se calcula como:

$$FS = \frac{\sum c(\cos\alpha) + (P - ul)\tan\phi \cos\alpha}{\sum P(\sin\alpha) + \sum kW \pm A - L\cos\alpha} \quad (2.8)$$

donde:

FS: factor de seguridad,

c: cohesión del suelo,

ϕ : ángulo de fricción del suelo,

l: longitud de la superficie de falla,

W: peso de la dovela,

α : inclinación de la superficie de falla,

P: fuerza normal total en la base de la dovelas,

u: presión de poro,

A: carga uniforme en la corona del talud,

k: coeficiente sísmico,

L: carga uniformemente repartida sobre la corona del talud.

- **Morgenstern – Price**

Morgenstern y Price (1965) propusieron un método que satisface el equilibrio estático de fuerzas y momentos en forma rigurosa. Considera que la fuerza resultante entre dovelas varía con respecto a un porcentaje de una función arbitraria y por una constante λ . Estos factores permiten utilizar superficies de falla curvas que no necesariamente sean cilíndricas.

Las ecuaciones 2.9 y 2.10 presentan el calculo del factor se seguridad con respecto al equilibrio de fuerzas y de momentos, respectivamente.

$$FS_m = \frac{\sum \{c\beta + (N - uL)R \tan \emptyset\}}{\sum W_x - \sum N_f \pm \sum D_d} \quad (2.9)$$

$$FS_f = \frac{\sum \{c\beta + (N - u) \tan \phi \cos \alpha\}}{\sum N \sin \alpha - \sum D \cos \alpha} \quad (2.10)$$

donde:

FS_m : factor de seguridad con respecto al equilibrio de momentos,

FS_f : factor de seguridad con respecto al equilibrio de fuerzas,

c : cohesión del suelo,

\emptyset : ángulo de fricción del suelo,

β : longitud de la superficie de falla,

W : peso de la dovela,

α : inclinación de la superficie de falla,

N : fuerza normal entre dovelas,

x : fuerza tangencial entre dovelas.

2.4.4 Estabilidad dinámica

Buscando cuantificar los efectos sísmicos que afectan a los taludes, se han desarrollado criterios para tenerlos en cuenta en el análisis y diseño. Marsal y Reséndiz (1975) consideran que los primeros análisis sísmicos aplicados en la estabilidad de taludes de presas se hicieron considerando el efecto sísmico como una aceleración horizontal, uniforme, aplicada estáticamente a las cargas que representan el talud.

Como resultado se obtiene un análisis aproximado, relativamente sencillo, que ha tenido gran aceptación entre los ingenieros de la práctica profesional. Con el desarrollo de la informática se han implementado métodos y modelos más rigurosos para el análisis dinámico de las estructuras térrreas.

- **Análisis seudoestático**

El análisis seudoestático representa los efectos del sismo mediante una aceleración que crea fuerzas internas, horizontales y verticales, causando un aumento en el número de fuerzas que actúan en el talud.

Estas fuerzas están definidas como:

$$F_h = \frac{a_h}{g} W = c_h W \quad (2.11)$$

$$F_v = \frac{a_v}{g} W = c_v W \quad (2.12)$$

donde:

F_h : fuerza horizontal,

F_v : fuerza vertical,

a_h : aceleración horizontal,

a_v : aceleración vertical,

g : fuerza de gravedad,

W : peso de la dovela,

c_h : coeficiente sísmico horizontal,

c_v : coeficiente sísmico vertical.

- **Análisis dinámico**

El análisis dinámico de la estabilidad de taludes debe incluir las fuerzas inerciales que obran en la masa del suelo del talud. Cuando el empleo de un modelo refinado, análisis elastodinámico o elasto – plástico dinámico, no se justifique, una alternativa consiste en realizar un análisis estático equivalente, simulando los efectos del sismo mediante fuerzas de inercia que actúan en el centro de gravedad de la masa de suelo.

Cuando sea aceptable suponer un mecanismo de falla rotacional, la masa de suelo que desliza estará delimitada por la superficie del terreno y por el círculo o espiral logarítmica que representa la superficie de falla; en este caso es recomendable emplear el método propuesto por Spencer (1978), que se describe a continuación.

El método de Spencer evalúa la estabilidad de taludes sujetos a fuerzas debidas a aceleraciones laterales. Los principales objetivos son: a) evaluar el efecto en la estabilidad del talud variando la inclinación de la fuerza causada por la aceleración lateral, y b) comparar la posición de la superficie de falla crítica obtenida con diferentes variables que satisfagan las ecuaciones de equilibrio.

a) Fuerzas que actúan en la masa de suelo.

La figura 2.27(a) muestra la sección transversal de un talud y la superficie de falla considerada para el análisis. El suelo dentro de la superficie de falla se divide en un número adecuado de dovelas. En la figura se muestra la dirección de la aceleración T y es posible considerar el efecto de

una grieta de tensión en la corona del talud con profundidad t . Se supone el efecto de la aceleración mediante el cálculo de la fuerza de inercia que actúa en el centro de gravedad de cada dovela.

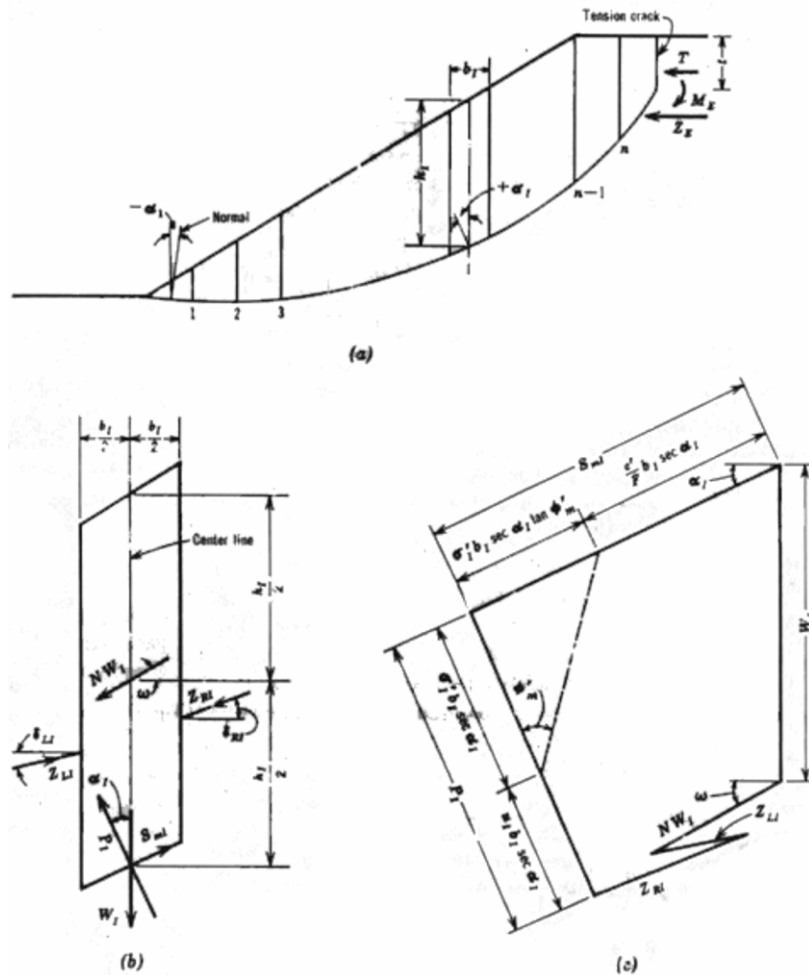


Figura 2.27. Diagrama de cuerpo libre y polígono de fuerzas aplicado en el método de Spencer

La figura 2.27(b) muestra una dovela. En ella se muestran las fuerzas consideradas en el análisis, la fuerza de inercia, NW_1 , correspondiente a una aceleración lateral N veces la gravedad; el peso de la dovela, W_1 ; la fuerza normal en la base de la dovela, P_1 ; la resistencia al esfuerzo cortante movilizada, S_{m1} , que es igual que la fuerza cortante disponible, S_1 , dividida por el factor de seguridad, F ; las fuerzas Z_{LI} , y Z_{RI} , que actúan en las fronteras laterales de la dovela. El polígono de fuerzas generado con las fuerzas antes mencionadas se presenta en la figura 2.27(c).

b) Ecuaciones para el equilibrio de fuerzas.

La ecuación 2.13 es la expresión utilizada para el cálculo de la fuerza Z_{RI} . Para aplicar esta ecuación, debe encontrarse la fuerza externa Z_E requerida para estabilizar el talud. El proceso de solución involucra la eliminación de la fuerza Z_E .

$$Z_{RI} = \frac{\frac{c'}{F} b_i \sec(\alpha_i) + \frac{\tan \phi'}{F} \{ (W_i [\cos(\alpha_i) + N \sin(\varpi - \alpha_i)]) - u_i b_i \sec(\alpha_i) \}}{\cos(\alpha_i - \partial_{RI}) + \frac{\tan \phi'}{F} \sin(\alpha_i - \partial_{RI})} - \frac{W_i [\sin(\alpha_i) + N \cos(\varpi - \alpha_i)]}{\cos(\alpha_i - \partial_{RI}) + \frac{\tan \phi'}{F} \sin(\alpha_i - \partial_{RI})} + Z_{LI} \left[\frac{\cos(\alpha_i - \partial_{LI}) + \frac{\tan \phi'}{F} \sin(\alpha_i - \partial_{LI})}{\cos(\alpha_i - \partial_{RI}) + \frac{\tan \phi'}{F} \sin(\alpha_i - \partial_{RI})} \right] \quad (2.13)$$

c) Ecuaciones para el equilibrio de momentos.

La ecuación 2.14 permite el cálculo del momento externo, M_E , que estabiliza el talud, el proceso de cálculo requiere de la eliminación de M_E .

$$M_E = M_T - 0.5 \sum_{i=1}^{n-1} \{ Z_i \cos(\partial_i) [\tan(\partial_i) (b_i + b_{i+1}) - (b_i \tan \alpha_i + b_{i+1} \tan \alpha_{i+1})] \} + 0.5 N \cos \varpi \sum_{i=1}^n (W_i h_i) \quad (2.14)$$

$$M_T = \frac{1}{2} t^2 l \gamma_w \quad (2.15)$$

d) Ecuaciones para el cálculo de fuerzas entre dovelas.

Para el cálculo de la fuerza que actúa entre dovelas se considera la expresión de la ecuación 2.16 en la cual se propone el ángulo Θ .

$$\tan \partial_i = k_1 \tan \theta \quad (2.16)$$

Para satisfacer las condiciones de equilibrio de fuerzas y de momentos, es necesario seleccionar dos variables cuyo valor debe ser ajustado hasta que la fuerza externa, Z_E , y el momento externo, M_E , se reduzcan a un valor despreciable.

- **Método Mononobe – Okabe**

Okabe (1926) y Mononobe y Matsuo (1929), desarrollaron las bases para un análisis pseudo-estático que evalúa las presiones sísmicas que desarrollan los suelos sobre muros de contención. Este método es conocido como el método Mononobe – Okabe.

El método considera la aplicación de aceleraciones pseudoestáticas, tanto en dirección horizontal como vertical, que actúan en la cuña activa considerada en el método de Coulomb. Las magnitudes de estas fuerzas pseudoestáticas, horizontales y verticales, están relacionadas con la masa de la cuña, ecuaciones 2.17 a 2.20.

$$a_h = k_h (g) \quad (2.17)$$

$$a_v = k_v (g) \quad (2.18)$$

$$F_h = k_h (W_i) \quad (2.19)$$

$$F_v = k_v (W_i) \quad (2.20)$$

donde:

a_h = aceleración horizontal,

a_v = aceleración vertical,

k_h = coeficiente sísmico horizontal,

k_v = coeficiente sísmico vertical,

F_h = Fuerza pseudoestática horizontal,

F_v = Fuerza pseudoestática vertical,

g = aceleración de la gravedad,

W_i = Peso de la cuña.

El método Mononobe – Okabe puede ser adaptado para su utilización en estabilidad de taludes considerando a las fuerzas pseudoestáticas, calculadas mediante las ecuaciones 2.19 y 2.20, al considerar el peso de la dovela en estudio dentro del equilibrio de fuerzas y/o momentos que emplee el método utilizado para el cálculo del factor de seguridad.

2.4.5 Uso del método del elemento finito para cálculo del factor de seguridad

El método del elemento finito es utilizado para calcular el desplazamiento y los esfuerzos provocados por las cargas que actúan en un talud. El cálculo del factor de seguridad con este método

corresponde a la relación del esfuerzo cortante calculado en un etapa de análisis con respecto al esfuerzo cortante calculado en un etapa de análisis anterior. Este proceso continúa hasta que se obtenga la convergencia del método.

El Cuerpo de Ingenieros del Ejercito de Estados Unidos, USACE por sus siglas en ingles (2003), define que el factor de seguridad aplicando el método de elemento finito se calcula con la ecuación 2.21.

$$FS = \frac{\sum s_i(\Delta l)}{\sum \tau_{i-1}(\Delta l)} \quad (2.21)$$

donde:

FS: factor de seguridad,

s_i : esfuerzo cortante calculado en la etapa i ,

τ_{i-1} : esfuerzo cortante calculado en la etapa $i-1$,

Δl : longitud de cada elemento individual en que fue dividida la superficie que desliza.

En la figura 2.28 se observa la comparación entre la superficie de falla obtenida con el método de elemento finito y el obtenido con el método de Morgenstern - Price. Se observa que existe una semejanza en la forma de la superficie de falla, la cual puede no ser cilíndrica.

Los cálculos del factor de seguridad con el elemento finito presentan variación al compararlos con los obtenidos con métodos de equilibrio límite; con el primero se obtienen resultados más conservadores.

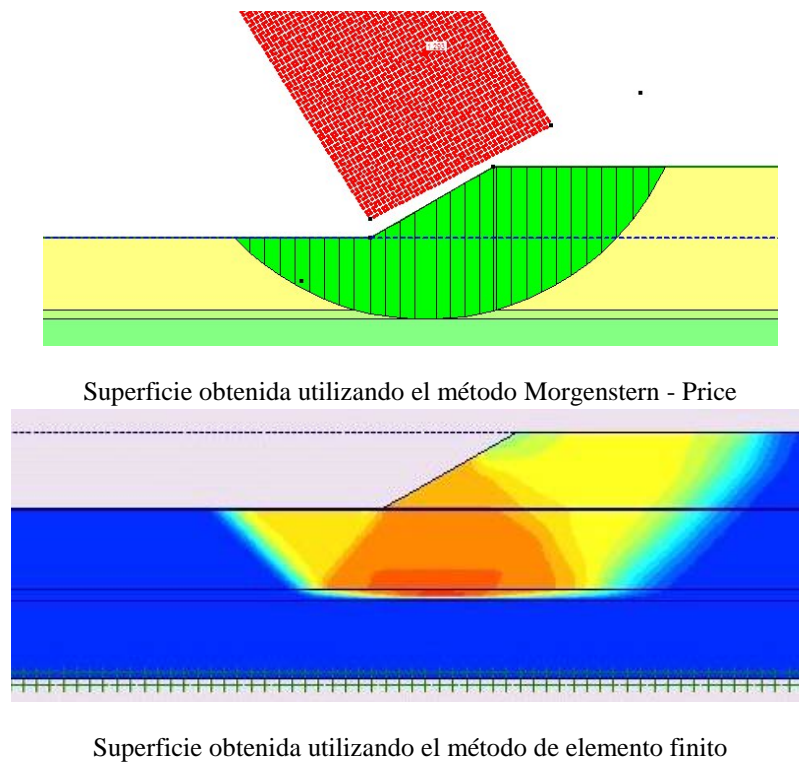


Figura 2.28. Comparación de superficies de falla obtenidas aplicando los métodos de elemento finito y Morgenstern - Price

2.4.6 Tipos de análisis para las diferentes condiciones del talud

Debido a los cambios en las condiciones internas y externas que presenta un talud a lo largo de su vida útil, se han establecido diferentes condiciones que deben analizarse al revisar el diseño de un corte o terraplén. Estas condiciones tratan de representar los estados críticos a los que puede estar sometido el talud.

- **Análisis para corto plazo**

También conocidos como análisis al final de la construcción. Estas condiciones se analizan utilizando métodos en función de esfuerzos totales, los cuales utilizan parámetros de resistencia obtenidos de pruebas triaxiales de tipo no consolidada no drenada (UU) o prueba de compresión simple (q_u) sobre especímenes compactados a las mismas condiciones de peso volumétrico y contenido de agua que en campo.

La presión de poro generada durante la construcción no se considera en forma explícita en los análisis.

- **Análisis para largo plazo**

Estas condiciones se analizan mediante métodos en función de esfuerzos efectivos, con parámetros determinados en pruebas triaxiales tipo consolidada drenada (CD) o tipo consolidada no drenada (CU) con medición de presión de poro, sobre especímenes compactados a las mismas condiciones de contenido de agua y peso volumétrico que el que presentan los materiales en campo.

La presión de poro generada en el cuerpo del talud está definida por las condiciones de filtración o flujo de agua, que deben ser evaluadas para considerarlos en el cálculo del factor de seguridad.

- **Vaciado rápido**

La condición de vaciado rápido o cualquier otra condición en la que el talud se haya consolidado bajo una cierta condición de carga, y repentinamente sufra un cambio de las cargas actuantes sin permitir que transcurra tiempo suficiente para disipar la presión de poro generada, se analizan en términos de esfuerzos totales, con parámetros obtenidos de ensayos triaxiales tipo CU, en especímenes compactados a las mismas condiciones de contenido de agua y peso volumétrico que los obtenidos en campo.

Debido a que la condición de vaciado rápido corresponde a un análisis de flujo de agua del tipo transitorio, se han desarrollado métodos gráficos para calcular el factor de seguridad como es el de Morgenstern (1963) o el de elemento finito.

3 PROBABILIDAD

3.1 Probabilidad

Buscando describir y cuantificar la heterogeneidad que presentan los suelos en sus propiedades índices y mecánicas se han utilizado conceptos propios de la probabilidad y la estadística, con el objetivo de generar un modelo representativo de estos suelos que se aplica en los análisis geotécnicos de interés.

La probabilidad considera el problema de un experimento que origina varios resultados. A la lista de resultados posibles y mutuamente excluyentes de un experimento se le conoce como espacio muestral; con lo anterior, se considera a un evento como cualquier subconjunto del espacio muestral.

La probabilidad se relaciona con la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento, por lo cual la probabilidad se determina como un número comprendido entre 0 y 1. Suponiendo un experimento que tiene asociado un espacio muestral S , la probabilidad de ocurrencia de un evento A , $P(A)$, es válida mientras se cumplan los siguientes axiomas:

La probabilidad del evento A es mayor o igual que 0

La probabilidad del evento A es menor o igual que 1

La probabilidad del espacio muestral S es igual que 1

La probabilidad de que ocurra el evento A se define como el cociente del número de veces en que puede ocurrir el evento A entre el número total de eventos que pueden ocurrir, ecuación 3.1.

$$P(A) = \frac{T}{N} \quad (3.1)$$

donde:

$P(A)$: probabilidad de ocurrencia del evento A ,

T : número de veces que puede ocurrir el evento A ,

N : número total de eventos que pueden ocurrir.

La relación entre los eventos y el correspondiente espacio muestral se pueden representar de forma gráfica utilizando diagramas de Venn, figura 3.1. En este diagrama se representa al espacio muestral como un rectángulo y los eventos como círculos trazados dentro del rectángulo.

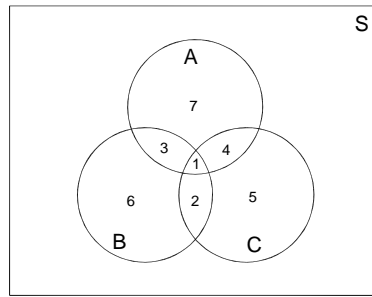


Figura 3.1. Representación mediante el diagrama de Venn

Para poder determinar la probabilidad de que ocurra un evento es necesario determinar el tipo de evento del que se trata, buscando relacionar su dependencia o independencia de otros eventos que se encuentran contenidos dentro del mismo espacio muestral.

Para ciertos experimentos estadísticos no es nada extraño definir dos eventos, A y B, que no pueden ocurrir de forma simultánea. En este caso se tiene que los eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos cuando no comparte elementos entre sí, lo que hace que la probabilidad de que ocurra A no depende de la probabilidad de que ocurra B y viceversa.

Si A_1, A_2, \dots es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, se tiene:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{3.2}$$

Con base en lo anterior, se concluye que si A y B son eventos mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia de A y B es igual a la suma de su probabilidad de ocurrencia individual, ecuación 3.3.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{3.3}$$

La probabilidad de que ocurran de forma simultánea los eventos A y B, cuando son mutuamente excluyentes, se calcula como el producto de la probabilidad de que ocurra A y la probabilidad de que ocurra B, ecuación 3.4.

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{3.4}$$

Para dos eventos mutuamente excluyentes, cuando comparten elementos entre sí, la probabilidad de que ocurra el evento A más la probabilidad de que ocurra el evento B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3.5)$$

Cuando los eventos A y B son dependientes entre sí, la probabilidad de que ocurra el evento A depende de la probabilidad de que ocurra el evento B y la probabilidad de que ocurran de forma simultánea los eventos A y B. Lo anterior se conoce como probabilidad condicional, en la cual la probabilidad de que ocurra A, dado que ocurrió el evento B es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3.6)$$

donde.

$P(A|B)$: probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B,

$P(A \cap B)$: probabilidad de que ocurra A y B,

$P(B)$: probabilidad de que ocurra B.

Así la probabilidad de que ocurra A y B es igual a la probabilidad de que ocurra A multiplicada por la probabilidad condicional de que ocurra B, dado que ocurre A, ecuación 3.7.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \quad (3.7)$$

donde:

$P(A \cap B)$: probabilidad de que ocurra A y B de forma simultánea,

$P(A)$: probabilidad de que ocurra A,

$P(B|A)$: probabilidad de B dado que ocurre A.

3.2 Teorema de Bayes

El teorema propuesto por Thomas Bayes da como resultado la distribución de probabilidad condicional de una variable aleatoria A, dado que ocurrió el evento B en términos de la distribución de probabilidad condicional de la variable B dado que ocurrió A y la distribución de probabilidad marginal de sólo el evento A.

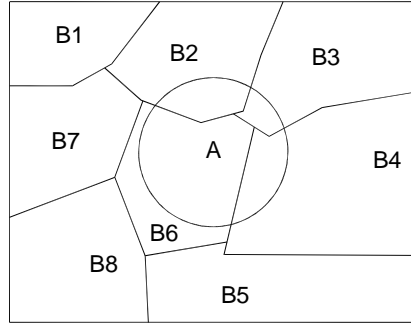


Figura 3.2. Partición del espacio muestral S

La figura 3.2 representa el caso donde el espacio muestral S se parte en k subconjuntos. Si los eventos B_1, B_2, \dots, B_k constituyen una partición del espacio muestral S, tal que $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces, para cualquier evento A del espacio muestral S, la probabilidad del evento A, ecuación 3.8, es conocida como regla de eliminación.

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i) \quad (3.8)$$

En vez de considerar la probabilidad del evento A mediante la regla de eliminación, se considera que se requiere encontrar la probabilidad condicional del evento B_i dado que ocurrió el evento A; para esto se utiliza el teorema o regla de Bayes.

Si los eventos B_1, B_2, \dots, B_k constituyen una partición del espacio muestral S, donde la probabilidad del evento B_i sea diferente de cero, $P(B_i) \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, k$, se tiene que para cualquier evento A que pertenezca al espacio muestral S, tal que $P(A) \neq 0$, la probabilidad de que ocurra un evento cualquiera B_r dado que ocurrió el evento A, está definida como:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)} \text{ para } r = 1, 2, \dots, k \quad (3.9)$$

3.3 Variables aleatorias

Una variable aleatoria es una función que se asocia a un número real con cada elemento del espacio muestral, Walpole (2007). Se pueden dividir en dos categorías: si un espacio muestral contiene un número finito de posibilidades, o una serie interminable con tantos elementos como

números enteros existen, se llama espacio muestral discreto, por lo cual, una variable aleatoria se llama variable aleatoria discreta si se puede contar su conjunto de resultados posibles.

Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades, igual al número de puntos en un segmento de línea, se le llama espacio muestral continuo, por lo cual, cuando una variable aleatoria puede tomar valores en un intervalo completo de números, dentro de una escala continua, se le conoce como variable aleatoria continua.

En la mayoría de los problemas prácticos, las variables aleatorias continuas representan datos medidos, mientras que las variables aleatorias discretas representan datos obtenidos mediante conteo.

En lo sucesivo se representará a una variable aleatoria por medio de una letra mayúscula, mientras que los valores numéricos reales que puede asumir dicha variable aleatoria se representan mediante la letra en minúscula utilizada para definir a la variable.

3.3.1 Distribuciones discretas de probabilidad

Una variable aleatoria discreta toma cada uno de sus valores posibles con cierta probabilidad. Con frecuencia es conveniente representar todas las probabilidades de una variable aleatoria X utilizando una función de los valores numéricos x que toma la variable, $f(x)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se llama función de probabilidad o distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X .

El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ forman una función de probabilidad para la variable aleatoria discreta X , si para cada resultado posible x se cumple: $f(x) \geq 0$, $\sum_x f(x) = 1$ y $P(X = x) = f(x)$.

Existen problemas en los que se calcula la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria X sea menor o igual que algún valor x . Al describir $F(x) = P(X \leq x)$ para cualquier número real de x , se define a $F(x)$ como una función de la distribución acumulada de la variable aleatoria X .

La distribución de la distribución acumulada $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \text{ para } -\infty < x < \infty \quad (3.10)$$

3.3.2 Distribuciones continuas de probabilidad

Una variable aleatoria continua tiene una probabilidad cero de tomar exactamente cualquiera de sus posibles valores, en consecuencia, su distribución de probabilidad no se puede dar de forma tabular, teniendo un intervalo de valores en lugar de un valor puntual de la variable aleatoria.

Es por ello que se define a la variable aleatoria X como continua si puede tomar el número infinito de valores asociados con intervalos de números reales y existe una función, $f(x)$, llamada función de densidad de probabilidad, si para cada resultado posible de x se cumple:

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d(x) = 1 \text{ y } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)d(x).$$

Para una variable aleatoria continua X con cualquier valor específico a la probabilidad de ésta es igual que cero, ecuación 3.11.

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)d(x) = 0 \tag{3.11}$$

La función de distribución acumulada, $F(x)$, de una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)d(x), \text{ para } -\infty \leq x \leq \infty \tag{3.12}$$

3.3.3 Distribuciones de probabilidad multivariadas

Se pueden definir variables aleatorias dentro de un mismo espacio muestral; en este caso, se tiene una distribución de probabilidad multivariada. Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias discretas, la distribución de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 es:

$$p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \text{ definida para los números reales } x_1 \text{ y } x_2 \tag{3.13}$$

A la función, $p(x_1, x_2)$, se le llama función de probabilidad conjunta de x_1 y x_2 .

Las funciones de probabilidad marginal de X_1 y X_2 , respectivamente, están definidas como:

$$p_1(v_1) = \sum_{v_2} p(v_1, v_2) \quad (3.14)$$

$$p_2(v_2) = \sum_{v_1} p(v_1, v_2) \quad (3.15)$$

Las probabilidades asociadas de dos variables aleatorias continuas X_1 y X_2 se pueden describir mediante una función bivariada, $f(x_1, x_2)$, que en una representación gráfica resulta en una superficie en tres dimensiones.

La probabilidad de que X_1 y X_2 estén simultáneamente en determinados intervalos está definida por:

$$P(a_1 \leq x_1 \leq a_2, b_1 \leq x_2 \leq b_2) = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x_1, x_2) d(x_1) d(x_2) \quad (3.16)$$

La probabilidad marginal para variables discretas, se puede determinar mediante la función de densidad univariada para X_1 , en el caso continuo, si se integran los valores de X_2 , por lo cual, la densidad marginal de X_1 , $f_1(x_1)$ está dada por:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) d(x_2) \quad (3.17)$$

Igualmente, la densidad marginal de X_2 , $f_2(x_2)$ está representada por:

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) d(x_1) \quad (3.18)$$

3.3.4 Independencia estadística

Sean X y Y dos variables aleatorias, discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$ y distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$, respectivamente. Se dice que las variables aleatorias X y Y son estadísticamente independientes, para toda (x, y) dentro de sus rangos, si y sólo si:

$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad (3.19)$$

Para el caso de variables con distribución de probabilidad conjunta, se tiene: Sean X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aleatorias, discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y distribuciones marginales $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$, respectivamente. Se considera que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son estadísticamente independientes, para toda x_1, x_2, \dots, x_n dentro de sus rangos, si y sólo si:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2), \dots, f_n(x_n) \quad (3.20)$$

3.4 Esperanza matemática, medidas de tendencia central y medidas de dispersión

En una función de distribución de probabilidad; el valor medio corresponde al operador esperanza matemática y su dispersión al operador varianza.

El promedio de una serie de valores corresponde a un valor típico o representativo de este conjunto de datos. Debido a que este valor se encuentra en las cercanías del centro del conjunto de datos ordenados por magnitud, a los promedios se les conoce como medidas de tendencia central. Los más comunes son: la media, la mediana y la moda.

Las medidas de dispersión o variación de los datos son medidas que describen de manera cuantitativa el grado en que los datos numéricos tienden a esparcirse alrededor del valor promedio. Las medidas de dispersión más comunes son: la desviación estándar, la varianza y la covarianza.

Debido a la semejanza que presentan estos conceptos, se llegan a utilizar sin distinción cayendo en un error.

3.4.1 Esperanza

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La esperanza o valor esperado de X se calcula como:

$$E(X) = \sum_x x f(x), \text{ si } X \text{ es una variable discreta} \quad (3.21)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \text{ si } X \text{ es una variable continua} \quad (3.22)$$

3.4.2 Media

La media de X da un valor que es representativo o promedio de los valores de X , por esta razón se le denomina como medida de tendencia central, se calcula como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (3.23)$$

donde:

\bar{x} = media,

x_n = valor de x ,

n = número de datos

3.4.3 Mediana

La mediana de un conjunto de datos ordenados por magnitudes es el valor central de esta serie o la media de los valores centrales y se describe como:

$$\bar{X} = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\sum f)_1}{f_{\text{mediana}}} \right) c \quad (3.24)$$

donde:

\bar{X} : mediana,

L_1 : frontera inferior de la clase de la mediana,

N : número de datos,

$(\sum f)_1$: suma de las frecuencias de las clases inferiores a la clase de la mediana,

f_{mediana} : frecuencia de la clase de la mediana,

c : tamaño del intervalo de la clase de la mediana.

Geométricamente, la mediana es el valor en el eje de las abscisas que corresponde a una recta vertical que divide un histograma en dos partes de igual área.

3.4.4 Moda

La moda de un conjunto de datos es el valor que ocurre con mayor frecuencia; ésta puede no existir o incluso no ser única. La moda llega a obtenerse de una distribución de frecuencias o de un histograma mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{X} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c \quad (3.25)$$

donde:

\hat{X} : Moda,

L_1 : frontera inferior de la clase modal,

Δ_1 : diferencia de la frecuencia de la clase modal con la frecuencia de la clase inmediata inferior,

Δ_2 : diferencia de la frecuencia de la clase modal con la frecuencia de la clase inmediata superior,

c : tamaño del intervalo de la clase modal.

3.4.5 Varianza

La varianza es una medida de dispersión de los datos alrededor del valor medio de la distribución. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ , la varianza se calcula como:

$$\text{var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x), \text{ si } X \text{ es una variable discreta} \quad (3.26)$$

$$\text{var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) d(x), \text{ si } X \text{ es una variable continua} \quad (3.27)$$

A la raíz cuadrada de la varianza, σ , se le conoce como desviación estándar.

3.4.6 Covarianza

La covarianza entre dos variables aleatorias es una medida de la naturaleza de asociación entre ambas. Sean X y Y variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conjunta $f(x,y)$, la covarianza se calcula como:

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y), \text{ si } X \text{ y } Y \text{ son variables discretas} \quad (3.28)$$

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) d(x) d(y), \text{ si } X \text{ y } Y \text{ son variables} \quad (3.29)$$

continuas

3.4.7 Desviación estándar

La desviación estándar, σ , de un conjunto de datos N , representa la desviación de cada uno de los números x_j con respecto a la media y corresponde a la raíz cuadrada de la varianza, se define como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \mu)^2}{N}} \quad (3.30)$$

Esta medida corresponde a la media cuadrática de las desviaciones en relación con la media; también es conocida como desviación de la media cuadrática.

3.4.8 Coeficiente de variación

La relación entre la desviación estándar (σ), como medida de dispersión, y la media (μ), como medida de centralización, permite evaluar el grado de dispersión que existe en una muestra. A esta relación se le llama coeficiente de variación (CV) y se calcula como:

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (3.31)$$

3.4.9 Coeficiente de correlación

Aunque la covarianza entre dos variables aleatorias brinda información respecto a la naturaleza de la relación, la magnitud de σ_{XY} no indica nada con respecto a la fuerza de la relación, ya que σ_{XY} depende de la escala. Su magnitud es función de las unidades en que se miden X y Y . A la versión de la covarianza libre de la escala se le denomina coeficiente de correlación.

Sean X y Y variables aleatorias con covarianza σ_{XY} y desviación estándar σ_X y σ_Y , respectivamente. El coeficiente de correlación X y Y se calcula como:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.32)$$

3.4.10 Tendencia

La tendencia se define como la componente no aleatoria de los datos y tiene, generalmente, una explicación física (como el crecimiento de la resistencia al esfuerzo cortante con la profundidad, por mencionar un ejemplo). La estimación de la tendencia puede conseguirse de varias maneras, la más

usual es utilizando el método de mínimos cuadrados para determinar la ecuación que represente la gráfica generada con los datos de la muestra analizada. Con esta ecuación se puede estimar numéricamente el valor de la pendiente que define la tendencia, si es que ésta existe.

Otra alternativa, aunque un tanto rudimentaria, es utilizar el método de libre ajuste, el cual consiste en ajustar manualmente una recta o curva de tendencia mediante la sola observación del gráfico. Este método tiene el inconveniente de depender en gran medida del criterio y la experiencia de la persona que realice el ajuste.

3.5 Momentos y funciones generadoras de momentos

El propósito de las funciones generadoras de momentos es determinar los momentos de las variables aleatorias y establecer la distribución que presentan estas variables. Si $g(X) = X^r$ para $r = 1, 2, 3, \dots$, un valor esperado, denominado r – ésimo momento alrededor del origen (μ'_r), de una variable aleatoria X está dado por:

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum x^r f(x), \text{ si } X \text{ es una variable discreta} \quad (3.33)$$

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) d(x), \text{ si } X \text{ es una variable continua} \quad (3.34)$$

Como el primer y el segundo momento alrededor del origen están definidos por $\mu'_1 = E(X)$ y $\mu'_2 = E(X^2)$, es posible escribir la media y la varianza de una variable aleatoria como:

$$\mu = \mu'_1 \quad (3.35)$$

$$\sigma^2 = \mu'_2 \quad (3.36)$$

Los momentos de una variable aleatoria se pueden determinar directamente con las ecuaciones 3.37 y 3.38. Existe un procedimiento alternativo, el cual requiere la utilización de una función generadora de momentos.

La función generadora de momentos de la variable aleatoria X está dado por $E(e^{tX})$ y se denota como $M_X(t)$, para una variable aleatoria continua y discreta, respectivamente, se define como:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum e^{tx} f(x), \text{ si } X \text{ es una variable discreta} \quad (3.37)$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) d(x), \text{ si } X \text{ es una variable continua} \quad (3.38)$$

Las funciones generadoras de momentos existen solamente si la suma o la integral de las ecuaciones 3.37 y 3.38 converge. Es posible utilizar una función generadora de momentos de una variable aleatoria para generar todos los posibles momentos de dicha variable mediante las ecuaciones 3.39 y 3.40 para una variable continua o discreta, respectivamente.

$$\left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \mu'_r = \sum x_r e^{tx} f(x), \text{ si } X \text{ es una variable discreta} \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x) d(x), \text{ si } X \text{ es una variable continua} \quad (3.40)$$

Al considerar $t = 0$, para ambos casos las ecuaciones se reducen a $E(X^r) = \mu'_r$. Las distribuciones que presentan las variables, obtenidas a partir de las funciones generadoras de momentos, se buscan ajustar a modelos preestablecidos de distribuciones de probabilidad para simplificar su aplicación.

3.6 Asimetría

La asimetría es el sesgo o la distorsión de la simetría de una distribución. Si la curva de frecuencia de una distribución tiene una cola más larga hacia la derecha del máximo central que hacia la izquierda, se considera como de asimetría positiva; en el caso contrario, cuando la distribución está cargada hacia la izquierda del máximo central la asimetría es negativa.

En las distribuciones asimétricas, la media tiende a caer en el mismo lado que la moda, por lo anterior es posible el cuantificar la simetría con respecto a estos dos parámetros. Este valor se puede volver adimensional si se divide entre una medida de dispersión como la desviación estándar.

$$\text{Asimetría} = \frac{\mu - \hat{x}}{\sigma^2} \quad (3.41)$$

Una medida de la asimetría es el coeficiente momento de asimetría, α_3 , el cual utiliza el tercer momento con respecto a la media expresado en forma adimensional y está dado por:

$$\alpha_3 = \frac{\mu'_3}{(\sqrt{\mu'_2})^3} \quad (3.42)$$

3.7 Curtosis

La curtosis mide qué tan puntiaguda es una distribución con respecto a una distribución normal. Una distribución con un pico relativamente alto se denomina leptocúrtica, una curva achatada recibe el nombre de platocúrtica y la distribución normal se le conoce como mesocúrtica. Una medida de la curtosis se realiza con el cuarto momento con respecto a la media, expresado en forma adimensional y es llamado coeficiente momento de curtosis, α_4 , ecuación 3.43.

$$\alpha_4 = \frac{\mu'_4}{\sigma_4} = \frac{\mu'_4}{(\mu'_2)^2} \quad (3.43)$$

3.8 Distribuciones de probabilidad

Cuando las variables aleatorias toman diversos valores, la probabilidad asociada a cada uno de ellos puede ser organizada como una distribución de probabilidad, la cual puede representarse a través de una tabla, una gráfica o una ecuación. En lo que sigue se presentan algunas de las distribuciones de probabilidad utilizadas para la solución de problemas de ingeniería.

3.8.1 Distribución de Poisson

El número de resultados que ocurren durante un intervalo dado o en una región específica que dan valores numéricos a una variable aleatoria, se le conoce como experimento de Poisson. Éste se deriva del proceso de Poisson que tiene las siguientes propiedades:

El número de resultados que ocurren en un intervalo o región específica es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo o región del espacio disjunto.

La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo o del tamaño de la región y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo o región.

La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tal intervalo corto, o que caiga en tal región pequeña, es insignificante.

Al número X de resultados que ocurren durante un experimento de Poisson se les conoce como variable aleatoria de Poisson y su distribución de probabilidad es conocida como Distribución de Poisson.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria de Poisson X que representa al número de resultados que ocurren en un intervalo dado o región específicos, t , es:

$$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.44)$$

Donde λ es el número promedio de resultados por unidad de medida y $e = 2.71828\dots$. A los resultados de la distribución de Poisson se les puede asignar un carácter de una prueba de cierto o falso.

Algunas de las propiedades de la distribución de Poisson son:

$$\text{Media: } \mu = \lambda \quad (3.45)$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \lambda \quad (3.46)$$

$$\text{Desviación estándar: } \sigma = \sqrt{\lambda} \quad (3.47)$$

$$\text{Coeficiente momento de asimetría: } \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.48)$$

$$\text{Coeficiente momento de curtosis: } \alpha_4 = 3 + \frac{1}{\lambda} \quad (3.49)$$

3.8.2 Distribución normal

Abraham DeMoivre desarrolló la ecuación matemática de la curva normal. Ésta ofrece una base sobre la que se fundamente una parte de la teoría estadística inductiva. Comúnmente se le conoce a la distribución normal como distribución de Gauss.

Una variable aleatoria continua X que tiene la distribución normal, es conocida como variable aleatoria normal. La ecuación que describe la distribución de una variable aleatoria normal depende de dos parámetros: la media y la desviación estándar. La densidad de la densidad de la variable aleatoria normal X , con media, μ , y desviación estándar, σ , es:

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad (3.50)$$

En la figura 3.3 se observa a la curva normal, la cual contiene las siguientes propiedades: a) la moda ocurre en $x = \mu$; b) la curva es simétrica con respecto a un eje vertical que cruza a través de la media; c) la curva tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$, es cóncava hacia abajo si $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, y es cóncava hacia arriba en cualquier otro caso; d) la curva normal es asintótica al eje horizontal; e) el área comprendida bajo la curva y el eje horizontal es igual que 1.

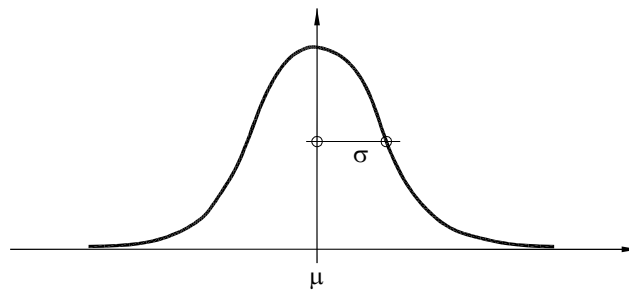


Figura 3.3. Curva Normal o campana de Gauss

Algunas propiedades de la distribución normal son:

$$\text{Media: } \mu \quad (3.51)$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 \quad (3.52)$$

$$\text{Desviación estándar: } \sigma \quad (3.53)$$

$$\text{Coeficiente momento de asimetría: } \alpha_3 = 0 \quad (3.54)$$

$$\text{Coeficiente momento de curtosis: } \alpha_4 = 3 \quad (3.55)$$

Se entiende que x es normal o que está normalmente distribuida, cuando se tiene una media igual que 0 y varianza igual que 1. Estos parámetros permiten observar que en una distancia de 6σ se encuentra comprendida un área del 99.73% del área total.

3.8.3 Distribución rectangular

Una de las distribuciones más simples aplicadas en estadística es la distribución uniforme continua o distribución rectangular. Esta distribución se caracteriza por tener una función de densidad plana que genera una probabilidad uniforme dentro de un intervalo cerrado, figura 3.4.

La función de densidad de la variable aleatoria uniformemente continua X en el intervalo [A, B] es:

$$f(x; A, B) = \frac{1}{B - A}, \quad A \leq x \leq B \quad (3.56)$$

Para cualquier otro caso $f(x; A, B) = 0$.

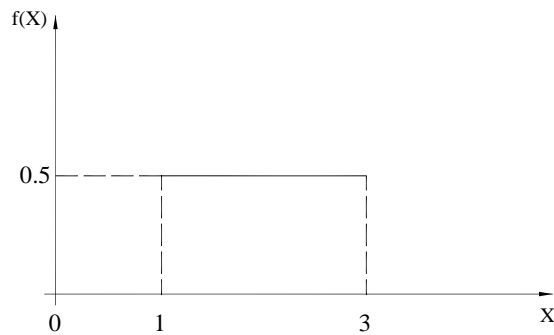


Figura 3.4. Función de densidad para una variable aleatoria en el intervalo [1,3]

Resulta sencillo calcular la probabilidad para una distribución uniforme. Se basa en la suposición de que es constante la probabilidad de ocurrencia en un intervalo de longitud fija [A, B], lo cual limita su aplicación y se corre el riesgo de realizar simplificaciones que no representan al problema en estudio.

Algunas propiedades de la distribución normal son:

$$\text{Media: } \mu = \frac{A + B}{2} \quad (3.57)$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{(B - A)^2}{12} \quad (3.58)$$

$$\text{Desviación estándar: } \sigma = \sqrt{\frac{(B - A)^2}{12}} \quad (3.59)$$

$$\text{Coeficiente momento de asimetría: } \alpha_3 = 0 \quad (3.60)$$

$$\text{Coeficiente momento de curtosis: } \alpha_4 = 0 \quad (3.61)$$

3.8.4 t de Student

Para muestras de tamaño $n < 30$ datos, conocidas como muestras pequeñas, la aproximación a una distribución normal no es adecuada y empeora al reducirse el número de datos con los que se

trabaja. Del estudio de distribuciones estadísticas para muestras pequeñas se desarrolla la distribución t de Student, en la cual:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad (3.62)$$

donde:

t: distribución de t,

\bar{X} : mediana,

μ : media,

S: análogo de la muestra para la desviación estándar,

n: número de datos.

Si se consideran muestras de tamaño n seleccionada de una población normal o aproximadamente normal, conociendo el valor de la media y si para cada muestra se calcula t se puede obtener la distribución de t. Esta distribución está dada por:

$$f(x) = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}} \quad (3.63)$$

$$v = n - 1 \quad (3.64)$$

donde:

f(x): función de X,

Y_0 : constante dependiente de n,

v: números de grados de libertad.

Para valores grandes de v o n las curvas de la distribución t se aproximan mucho a la curva normal como se observa en la figura 3.5.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5t^2} \quad (3.65)$$

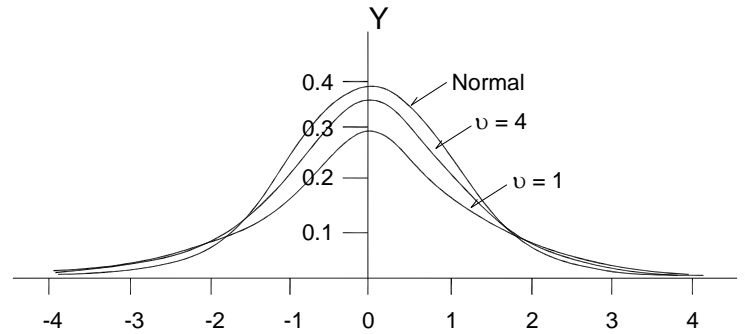


Figura 3.5. Distribución t de Student para diversos valores de ν

3.8.5 Distribución lognormal

La distribución lognormal o logarítmica normal se aplica en casos donde una transformación logarítmica natural tiene como resultado una distribución normal.

La variable aleatoria continua X tiene una distribución logarítmica normal si la variable aleatoria $Y = \ln(X)$ presenta una distribución normal. Para esta distribución la función de densidad de X es:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\mu\sigma x}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(x)-\mu]^2}, \text{ si } x \geq 0 \tag{3.66}$$

$$f(x; \mu, \sigma) = 0, \text{ si } x < 0 \tag{3.67}$$

En la figura 3.6 se observan las gráficas de las distribuciones logarítmicas normales.

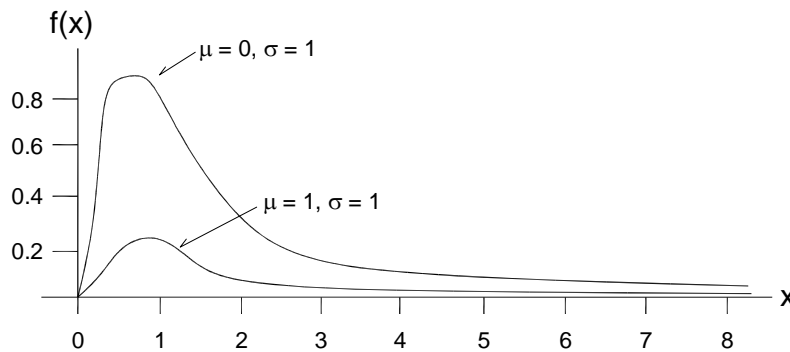


Figura 3.6. Distribuciones logarítmicas normales

La media y la varianza en esta distribución son:

$$\mu = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \tag{3.68}$$

$$\sigma^2 = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \tag{3.69}$$

La función de distribución acumulada es simple, debido a su relación con la distribución normal presenta la diferencia de ser cerrada en su extremo izquierdo al iniciar la gráfica del origen y es asintótica al eje horizontal en el extremo derecho.

3.8.6 Distribución Beta

La distribución de probabilidad beta es una distribución continua y está definida en el intervalo [a,b]. Se dice que una variable aleatoria X presenta una distribución beta si tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \text{ para } 0 < x < 1 \quad (3.70)$$

En la cual α, β son positivos y sus parámetros se determinan aplicando el nomograma de la figura 3.7. El parámetro B corresponde a la función beta, ecuación 3.71.

$$B(m, n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1} du, m > 0, n > 0 \quad (3.71)$$

La media y la varianza para esta distribución son:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (3.72)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (3.73)$$

Cuando se tiene $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, se presenta una moda única que está definida como:

$$\hat{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \quad (3.74)$$

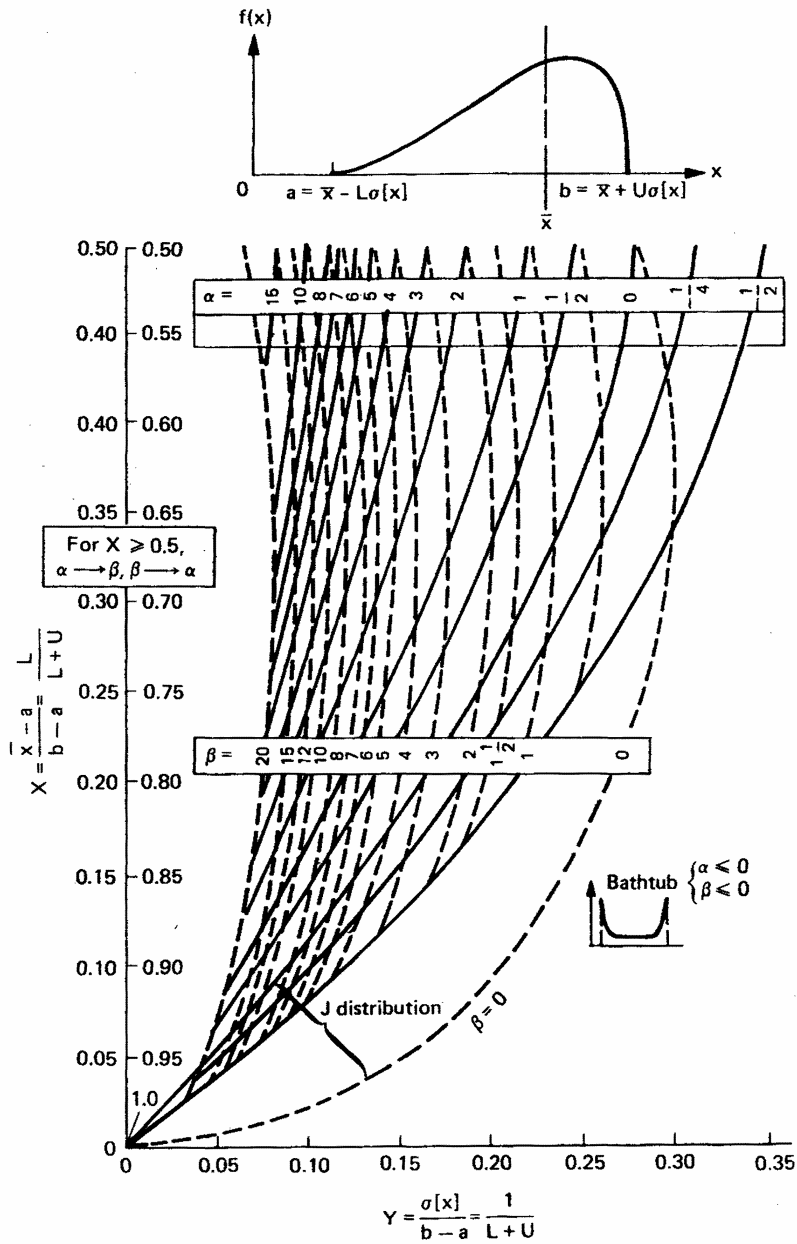


Figura 3.7. Valores de los parámetros α y β

Al variar los parámetros α y β la distribución beta puede tomar diferentes formas, similares a otras distribuciones de probabilidad, como se observa en la figura 3.8, con la ventaja de que esta función de densidad no es asintótica con el eje x en ambos extremos, lo que facilita su aplicación.

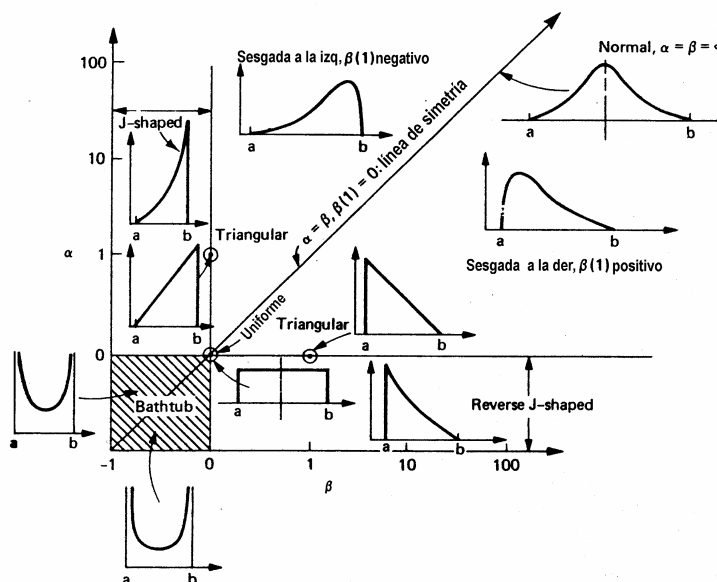


Figura 3.8. Formas que adquiere la distribución beta al variar los parámetros α y β

3.9 Estadística

3.9.1 Teoría de muestreo

La teoría de muestreo consiste en el estudio de las relaciones existentes entre una población y las muestras que se extraen de ésta. Es de gran utilidad para estimar características desconocidas de la población como son la media y la varianza. La teoría de muestreo permite determinar si las diferencias existentes entre dos muestras son significativas.

3.9.2 Muestras aleatorias y números aleatorios

Para que los resultados obtenidos mediante la teoría de muestreo sean válidos, se deben elegir muestras representativas de la población mediante el diseño del experimento. Una forma de obtener una muestra representativa es mediante un proceso de muestreo aleatorio, en el cual cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser incluido en la muestra. Un ejemplo de un muestreo aleatorio es obtener números de una urna.

Dependiendo de la forma en que se lleve a cabo el muestreo se pueden generar muestreos con y sin reemplazamiento; por ejemplo, si se saca un número de una urna, existe la opción de reponer o no el número en la urna antes de realizar la segunda extracción. Para poder estimar la forma en que se pueden extraer los números de la urna, se calculan el número de combinaciones y permutaciones que puedan presentarse.

3.9.3 Distribuciones de muestreo

Considerando todas las muestras posibles de tamaño N que pueden obtenerse de una población dada, con o sin reemplazamiento, en cada muestra se calcula un estadístico, media o desviación estándar, que varía de una muestra a otra. De esta manera, se puede obtener una distribución del estadístico considerado llamada “distribución muestral”.

- **Distribución muestral de medias**

Supóngase que se obtienen todas las muestras posibles sin reemplazamiento, de tamaño N , de una población finita de tamaño $N_p > N$. Si se simbolizan la media y la desviación estándar de la distribución muestral de medias por $\mu_{\bar{x}}$ y $\sigma_{\bar{x}}$ y la media y desviación estándar de la población por μ y σ , respectivamente, se tiene:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad (3.75)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} \quad (3.76)$$

Si la población es finita o el muestreo se hace con reemplazamiento, la ecuación 3.76 se reduce a la ecuación 3.77.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.77)$$

Para valores grandes de N , $N \geq 30$, la distribución muestral de medias es, en forma aproximada, una distribución normal, independiente de la población siempre que la media y la varianza de la población sean finitas y el tamaño de la población sea al menos el doble que el de la muestra.

- **Distribución muestral de proporciones**

Se tiene una población infinita y la probabilidad de ocurrencia de un evento es p , mientras que la probabilidad de no ocurrencia del evento es $q = 1 - p$, la distribución muestral de proporciones cuya media μ_p y desviación estándar σ_p son:

$$\mu_p = p \tag{3.78}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{N}} \tag{3.79}$$

Para muestras grandes, con valores de $N \geq 30$, la distribución muestral se aproxima a la distribución normal. Las distribuciones 3.78 y 3.79 también son válidas para muestras finitas que se realizan con reemplazamiento. En el caso de poblaciones finitas que se realizan sin reemplazamiento, estas ecuaciones adquieren la forma de las ecuaciones 3.75 y 3.76, respectivamente.

• **Errores estándar**

La desviación estándar de una distribución muestral de un estadístico se denomina error estándar. La tabla 3.1 presenta los errores estándar de las distribuciones muestrales para diversos estadísticos, bajo las condiciones de muestreo aleatorio de una población infinita o de muestreo con reemplazamiento de una población infinita.

Tabla 3.1. Errores estándar de las distribuciones muestrales

Distribución muestral	Error estándar	Observaciones especiales
Medias	$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	Es válido para muestras grandes o pequeñas. La distribución muestral de medias es aproximadamente normal para $N \geq 30$, inclusive cuando la población no es normal. $\mu_x = \mu$, la media poblacional, para todos los casos.
Proporciones	$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \sqrt{\frac{pq}{N}}$	Las observaciones hechas para las medias también se aplican aquí. $\mu_p = p$, para todos los casos.
Desviación estándar	(1) $\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$ (2) $\sigma_s = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4N\mu_2}}$	Para $N \geq 100$, la distribución muestral de s es casi normal. σ_s está dada por (1) sólo si la población es normal (o aproximadamente normal). Si no es normal, se puede usar (2). Nótese que (2) se reduce a (1) cuando $\mu_4 = \sigma^2$ y $\mu_2 = 3\sigma^2$, que es verdadero para las poblaciones normales. Para $N \geq 100$, $\mu_s = \sigma$ de forma muy cercana.
Medianas	$\sigma_{med} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2N}} = \frac{1.2533\sigma}{\sqrt{N}}$	Para $N \geq 30$, la distribución muestral de la mediana es casi normal. El resultado es válido sólo si la población es normal (o aproximadamente normal). $\mu_{med} = \mu$
Primero y tercer cuartiles	$\sigma_{Q1} = \sigma_{Q3} = \frac{1.3626\sigma}{\sqrt{N}}$	Aquí también se aplican las observaciones hechas para las medianas. μ_{Q1} y μ_{Q3} son casi iguales al primer y tercer cuartiles de la población. Nótese que $\sigma_{Q2} = \sigma_{med}$

Para muestras grandes las distribuciones muestrales son normales o semejantes a la distribución normal; por lo anterior, se les conocen a los métodos como métodos de muestreo grande. Para muestras pequeñas con $N < 30$ se aplica la teoría exacta de muestreo.

3.9.4 Estimación estadística puntual

Después de escoger para un fenómeno aleatorio un determinado tipo de distribución, es necesario el determinar los parámetros que definen la función correspondiente a esta distribución. Se obtienen una muestra X_1, \dots, X_n , de la variable aleatoria de interés X . Si Θ es el parámetro que se desea estimar, se busca obtener su valor de forma aproximada mediante un “estimador” $\hat{\Theta}$ que es función de la muestra obtenida, por lo cual:

$$\hat{\Theta} = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.80)$$

Esta función debe escogerse de forma tal que la estimación tenga una precisión adecuada al aplicar métodos como el de los momentos y el de la máxima verosimilitud.

Algunas de las propiedades de los estimadores que permiten definir la aproximación obtenida, son: estimador presenta sesgo respecto al parámetro estimado, si

$$E\left\{\hat{\Theta} - \Theta\right\} \neq 0 \quad (3.81)$$

Y un estimador es eficiente, si la ecuación 3.81 presenta un valor pequeño.

$$E\left\{\left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2\right\} \quad (3.82)$$

Ejemplo 3.1

Aplicando el método de los momentos se busca demostrar que el primer momento de la muestra coincide con el de la variable aleatoria de interés, esto es:

$$\mu_x = E\left\{\bar{X}\right\}$$

Calculando la esperanza de \bar{X} , se tiene:

$$E\left\{\bar{X}\right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left\{\bar{X}\right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_{Xi} = \frac{n\mu_X}{n} = \mu_X$$

$$E\left\{\bar{X}\right\} = \mu_X$$

Cuando esto se cumple se considera que se tiene un estimador insesgado.

3.9.5 Intervalos de confianza

Para evaluar el error de la estimación de un parámetro Θ desconocido a partir de un estimador $\hat{\Theta}$ se busca definir límites entre los que se encuentre el parámetro con alta probabilidad. A los intervalos así definidos se les conoce como intervalos de confianza. Para poder definir este intervalo es necesario disponer de una función $g(\text{muestra}, \Theta)$ del parámetro estimado con distribución de probabilidad conocida e independiente del parámetro, por lo cual, para cualquier proposición del tipo $P\{a < g < b\} = \beta$, permitirá obtener otra equivalente relativa al parámetro $P\{c < \Theta < d\} = 1 - \alpha$, que es el intervalo de confianza de éste. La probabilidad $1 - \alpha$ recibe el nombre de nivel de confianza.

- **Intervalo de confianza para medias**

Si el estadístico S es la media muestral \bar{X} , los límites de confianza están dados por $\bar{X} \pm z_c \sigma_{\bar{X}}$, donde z_c depende del nivel de confianza deseado. Utilizando los valores de la desviación estándar se tiene que los límites de confianza para la media poblacional están dados por:

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{3.83}$$

Si el muestreo se realiza a partir de una población infinita o de una población finita con reemplazamiento, los límites de confianza están dados por:

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} \quad (3.84)$$

Cuando la desviación estándar poblacional es desconocida, se pueden calcular los límites de confianza mediante la utilización de la estimación, s , de la muestra. Esto es adecuado cuando se tienen muestras grandes con $N \geq 30$. Para valores de $N < 30$, la aproximación es pobre y se debe emplear la teoría de muestras pequeñas.

Ejemplo 3.2

Considere que se miden 200 piezas producidas por una máquina durante un día, la media es $\bar{X} = 1.5$ cm y la desviación estándar $S_X = 0.042$ cm. Defina un intervalo de confianza para la media al nivel de $90\% = 1 - \alpha$. Se considera que $\sigma_X = S_X$.

Para este caso se tiene:

$$Z_c = 2.33$$

$$P\left(1.5 - 2.33 \frac{0.042}{\sqrt{200}} < \mu_X < 1.5 + 2.33 \frac{0.042}{\sqrt{200}}\right) = 98\%$$

$$P(1.499 < \mu_X < 1.501) = 98\%$$

- **Intervalos de confianza para desviación estándar**

Los límites de confianza para la desviación estándar σ de una población normalmente distribuida, estimados a partir de una muestra con desviación estándar S , están dados por:

$$S \pm z_c \sigma_s = S \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \quad (3.85)$$

Los valores de σ se calculan aplicando las ecuaciones de la tabla 3.1.

Ejemplo 3.3

Para medir el tiempo de reacción de un grupo de personas, un médico estima que la desviación estándar de la población es de 0.05 s. Determine qué cantidad de personas deben conformar la muestra para lograr un intervalo de confianza del 95% y que el error no exceda de 0.01 s, si se

considera que la desviación estándar de la población es igual a la desviación estándar de la media, $\sigma_x = S_x$.

Para un límite de confianza del 95 %, se tiene:

$$S_x + 1.96 \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Con un error de estimación:

$$1.96 \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 0.01$$

Se tiene:

$$1.96 \frac{0.05}{\sqrt{N}} = 0.01$$

$$\frac{0.048}{\sqrt{N}} = 0.01$$

$$N = (9.8)^2$$

$$N = 96.04$$

Por lo cual al considerar una muestra N igual o mayor a 97 personas, se obtendrán los niveles de confianza y de error buscados.

3.9.6 Pruebas de hipótesis

En problemas donde es más importante situar el valor del parámetro desconocido respecto a un valor prefijado que definir un intervalo de confianza, se utiliza para este fin la prueba de hipótesis, que consiste en admitir una hipótesis, H_0 , de que el parámetro tiene un valor prefijado y en verificar si los resultados del muestreo son compatibles con dicha hipótesis, conocida como hipótesis nula. En el caso contrario, se rechaza la hipótesis H_0 sustituyéndola por otra hipótesis alternativa H_1 .

Al aplicar este proceso es posible caer en dos errores: error tipo 1, rechazar una hipótesis nula cuando ésta es verdadera; error tipo 2, aceptar una hipótesis falsa. Al error tipo 1 se le conoce como nivel de significación de la prueba.

• **Pruebas de hipótesis relativas a la media**

a) Prueba de dos colas

Se admite una hipótesis H_0 , en la cual $\mu_X = \mu_0$, la que se va a probar contra una hipótesis alternativa H_1 , en la cual $\mu_X \neq \mu_0$. Bajo la hipótesis H_0 , la media \bar{X} de una muestra X_1, X_2, \dots, X_n , presenta una distribución normal, considerando al modelo de referencia como normal o aproximadamente normal, y corresponde a una muestra grande; su media es $\mu_X = \mu_0$ y debe caer en un intervalo de confianza definido por la ecuación 3.82 con probabilidad $1 - \alpha$.

Se observa que si \bar{X} cae en el intervalo de confianza señalado, la hipótesis es verdadera. En caso contrario se rechaza la hipótesis H_0 y se sustituye por una hipótesis alternativa H_1 .

b) Prueba de una sola cola

En algunos casos solo se requiere que el valor medio de una variable sea mayor o menor que un valor dado; para esto se realiza una prueba de una sola cola, en la cual se admite una hipótesis nula H_0 donde $\mu_X = \mu_0$ y la hipótesis alternativa H_1 puede ser $\mu_X < \mu_0$ o $\mu_X > \mu_0$. Para esta prueba el intervalo de aceptación se define sin límites a la derecha o a la izquierda, según sea el caso.

Ejemplo 3.4

Para probar la hipótesis de que una moneda no está trucada, se acepta la hipótesis de si el número de caras en una muestra de 100 lanzamientos resulta entre 40 y 60, de no ser así se rechaza la hipótesis. Determine la probabilidad de que se rechaza la hipótesis cuando esta es verdadera. Considerando una distribución normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 5$.

La probabilidad de que se obtenga entre 40 y 60 cara es:

Estandarizando los valores de la variable se tiene:

$$Z_1 = \frac{40 - 50}{5} = -2$$

$$Z_2 = \frac{60 - 50}{5} = 2$$

Por lo cual la probabilidad de ocurrencia es el área bajo la curva normal comprendida entre -2 a 2, esto es:

$$P(-2 < Z < 2) = 2(P(0 < X < 2))$$

$$P(-2 < Z < 2) = 2(0.4821)$$

$$P(-2 < Z < 2) = 0.9642$$

La probabilidad de que no se obtengan entre 40 y 60 caras cuando la moneda no esté trucada es $1 - 0.9642 = 0.0358$, por lo cual la probabilidad de rechazar la hipótesis aún cuando la moneda no sea falsa es de 0.0358.

3.9.7 Teoría de muestras pequeñas

Se considera a una muestra como pequeña cuando está compuesta por menos de 30 elementos, $N < 30$. Las distribuciones muestrales de muchos estadísticos se aproximan en gran medida a la distribución normal, mejorando la aproximación a mayor tamaño de N . Para muestras pequeñas esta aproximación no es buena y empeora al disminuir el valor de N .

Al estudio de distribuciones muestrales de estadísticos para muestras pequeñas se conoce como teoría de muestras pequeñas o teoría exacta de muestreo, debido a que es aplicable tanto a muestras pequeñas como a muestras grandes. La distribución más común para el estudio de muestras pequeñas es la distribución t de student, expuesta en el punto 3.8.4 de este capítulo.

- **Intervalos de confianza para muestras pequeñas**

Es posible definir los intervalos de confianza a diferentes porcentajes. De esta manera es posible estimarse la media poblacional, μ , dentro de los límites de confianza especificados. En general se pueden representar los intervalos de confianza para medias poblacionales como:

$$\bar{X} \pm t_c \frac{s}{\sqrt{N-1}} \quad (3.86)$$

Donde los valores t_c , valores críticos o coeficientes de confianza de la distribución t de student, dependen del nivel de confianza deseado y del tamaño de la muestra.

Ejemplo 3.5

Si $t_{0.975}$ son los valores de t para los cuales se tiene en 2.5 % del área con cada cola de distribución t de student, se obtiene que para un intervalo de confianza del 95 % para t es:

$$-t_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu}{s} < t_{0.975}$$

Considerando el intervalo de confianza para la media de un 95 %, se tiene:

$$P\left(\bar{X} - t_{0.975} \frac{S}{\sqrt{N-1}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975} \frac{S}{\sqrt{N-1}}\right) = 95\%$$

- **Pruebas de hipótesis**

Las pruebas de hipótesis se pueden aplicar a problemas que impliquen la utilización de muestras pequeñas. La diferencia principal radica en la utilización de estadístico t en lugar del estadístico z, donde:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} \quad (3.87)$$

La diferencia radica en que mientras el estadístico z presenta una distribución normal, t sigue la distribución t de student, por lo cual, conforme el valor de N aumenta estos estadísticos tienden a coincidir.

3.9.8 Verificación de modelos

Al representar un fenómeno aleatorio mediante un modelo teórico, es necesario, después de estimar los parámetros de dicho modelo, verificar si se ajusta efectivamente a las observaciones. La prueba chi cuadrada se puede utilizar para determinar qué tan bien se ajustan las distribuciones teóricas a las distribuciones empíricas.

- **Prueba χ^2**

El estadístico χ^2 proporciona una medida de la discrepancia existente entre la frecuencia observada, o_i , y la frecuencia esperada, e_i , que está dada por:

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \dots + \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} = \sum_{j=1}^k \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \quad (3.88)$$

Si la frecuencia total es N entonces $\sum o_j = \sum e_j = N$. Una expresión equivalente a la ecuación 3.86 es:

$$\chi^2 = \sum \frac{O_j^2}{e_j} - N \quad (3.89)$$

Si $\chi^2 = 0$ las frecuencias observadas y teóricas coinciden de forma exacta; si $\chi^2 > 0$ las frecuencias no coinciden de forma exacta. A mayor valor de χ^2 , mayor es la discrepancia entre las frecuencias observadas y esperadas. La distribución muestral de χ^2 se aproxima a la distribución χ^2 , ecuación 3.88, la aproximación mejora cuando las frecuencias esperadas son mayores o iguales que 5.

$$Y = Y_0 \chi^{\nu-2} e^{-0.5\chi^2} \quad (3.90)$$

El número de grados de libertad, ν , está dado por: $\nu = k - 1$, si las frecuencias esperadas pueden calcularse, sin tener que estimar los parámetros poblacionales; a partir de estadísticos muestrales y $\nu = k - 1 - m$, si las frecuencias esperadas suelen calcularse sólo estimando m parámetros de la población a partir de los estadísticos muestrales.

Ejemplo 3.6

En 200 lanzamientos de una moneda se obtienen 115 caras y 85 cruces. Pruebe la hipótesis de que la moneda no esté trucada para obtener un nivel de significancia de 0.05.

Las frecuencias obtenidas de caras y cruces son: $o_1 = 115$ y $o_2 = 85$, respectivamente, y las frecuencias esperadas de caras y cruces, considerando que la moneda no está trucada, es $e_1 = 100$ y $e_2 = 100$. Por lo cual se tiene:

$$\chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N = \frac{(115-100)^2}{100} + \frac{(85-100)^2}{100} = 4.5$$

Dado que el número de categorías o clases es $k = 2$, $\nu = k - 1 = 1$. El valor crítico $\chi^2_{0.95}$ para 1 grado de libertad es 3.84. Por lo cual, puesto que $\chi^2 = 4.5$, obtenido del histograma del muestreo, es mayor a 3.84, que corresponde al valor obtenido en la distribución chi cuadrada, se rechaza la hipótesis de que la moneda no esté trucada.

4 ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

Kaufmann define la confiabilidad, R , como la probabilidad de que un sistema lleve a cabo sus funciones de forma adecuada, dentro de un periodo de tiempo y bajo condiciones de operación establecidas, Auvinet (2002).

Tradicionalmente los análisis en geotecnia se realizan buscando definir un factor de seguridad para el problema en estudio bajo condiciones de carga y resistencia establecidas. El factor de seguridad, FS , se expresa como la relación entre la capacidad o resistencia, C , y la demanda o solicitaciones, D , Harr (1987).

$$FS = \frac{C}{D} \quad (4.1)$$

Al aplicar esta definición se realizan las siguientes hipótesis: a) la demanda del sistema, D , se mantiene constante durante toda la vida de la obra y es igual o mayor a la máxima demanda prevista para la estructura; b) la capacidad o resistencia, C , es igual o menor a la mínima resistencia estimada. En la práctica estas condiciones no son absolutas, lo que conlleva a, intrínsecamente, aceptar un riesgo o probabilidad de falla, $p_f(f)$.

Al considerar como variables aleatorias tanto a la capacidad como a la demanda, se pueden representar por una función de densidad de probabilidad, figura 4.1. El diseño óptimo será aquel que minimice la probabilidad de ocurrencia de falla, p_f , es decir, hacer que las funciones de C y D tengan el menor traslape posible o aceptable.

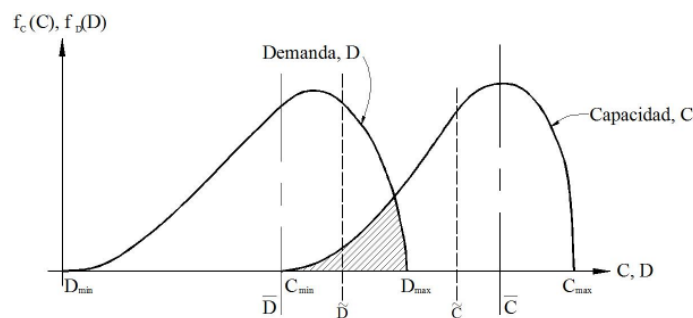


Figura 4.1. Funciones de densidad de probabilidad de capacidad y demanda

El área del traslape es una medida gruesa de la probabilidad de falla. Si se conocen las funciones de densidad de probabilidad de la capacidad y la demanda, la p_f se calcula como:

$$p_f = \int_{C_{\min}}^{D_{\max}} F_D(x) f_C(x) dx \quad (4.2)$$

donde:

$F_D(x)$: Función de distribución acumulada de la demanda,

$f_C(x)$: Función de densidad de probabilidad de la capacidad.

Desde el punto de vista de la probabilidad, la confiabilidad se define como el complemento de la probabilidad de falla. Los análisis de confiabilidad buscan determinar la confiabilidad, R , o el riesgo de falla de un sistema o estructura, considerando a éste confiable mientras que no se presente la falla. Partiendo de la definición probabilista de confiabilidad se tiene:

$$R + P_f(f) = 1 \quad (4.3)$$

$$R = 1 - P_f(f) \quad (4.4)$$

El término probabilidad de falla puede utilizarse para cualquier tipo de falla, sea ésta catastrófica o no, por lo cual para definir una falla de servicio se utiliza $P_f(f)$.

Wolff (1995) establece que los análisis de confiabilidad se utilizan en los siguientes contextos generales:

- a) Calcular la confiabilidad de un sistema o estructura nueva durante su construcción y primera carga.
- b) Calcular la confiabilidad de una estructura o sistema existente ante una nueva condición de carga.
- c) Calcular la probabilidad de falla de una parte de la estructura o sistema que funcione durante un periodo de tiempo.

4.1 Índice de confiabilidad

El índice de confiabilidad es una medida cuantitativa de la confiabilidad de un sistema o estructura que refleja la mecánica del problema y la incertidumbre en las variables de entrada. Este

índice fue desarrollado en ingeniería estructural para proporcionar una medida de confiabilidad sin tener que determinar la distribución de probabilidad necesaria para calcular un valor exacto de la probabilidad de falla.

El índice de confiabilidad es función del valor esperado y la desviación estándar de la distribución de probabilidad de la resistencia y de las cargas aplicadas, y permite comparar la confiabilidad para diferentes condiciones sin tener que calcular los valores absolutos de probabilidad.

El índice de confiabilidad se calcula, Harr (1987); como:

$$\beta = \frac{E\{C\} - E\{D\}}{\sqrt{\text{var}[C] + \text{var}[D]}} \quad (4.5)$$

Considerando la distribución que presenta el factor de seguridad calculado, el valor esperado y la distribución estándar de éste, el índice de confiabilidad se calcula como:

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\sigma_{FS}} \quad (4.6)$$

Como se aprecia, el índice de confiabilidad es el número de desviaciones estándar a las que se encuentra el valor esperado del FS, con respecto al comportamiento indeseable; por ejemplo, un factor de seguridad de 1, figura 4.2.

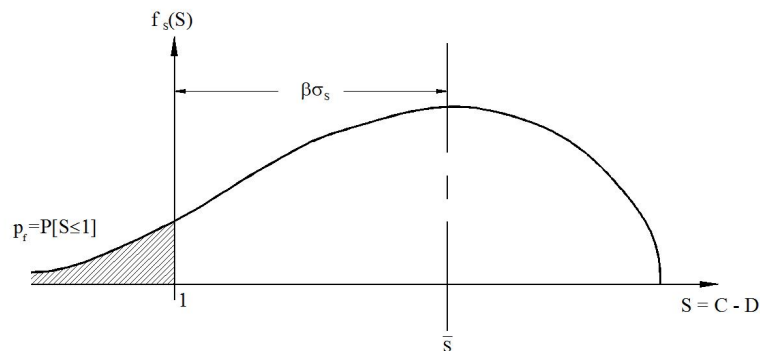


Figura 4.2. Índice de confiabilidad

Para calcular el índice de confiabilidad se requiere contar con los siguientes datos: a) un modelo determinista; b) una función de distribución de las variables de interés; c) valor esperado y desviación estándar de las variables de interés; d) definir el criterio del estado límite de falla; e) un método para calcular el valor esperado y la desviación estándar del estado límite de falla dado el valor esperado y la desviación estándar de los parámetros y f) un método de análisis de confiabilidad.

4.2 Sistemas de confiabilidad global

Los índices de confiabilidad para un número de componentes o un número de modos de desarrollo pueden ser utilizados para estimar la confiabilidad global de un sistema. Existen dos tipos de sistemas: los sistemas en serie y los sistemas en paralelo.

4.2.1 Sistemas en serie

Un sistema en serie se desarrollará insatisfactoriamente si cualquier componente de éste no funciona adecuadamente. Si un sistema tiene n componentes en series, la probabilidad de desarrollo insatisfactorio del componente i es p_i y su confiabilidad, $R_i = 1 - p_i$; entonces, la confiabilidad del sistema, o la probabilidad de que todos los componentes se desarrollen satisfactoriamente es el producto de las confiabilidades de sus componentes.

$$R = R_1 R_2 R_3 \dots R_i \dots R_n$$

$$R = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) \dots (1 - p_i) \dots (1 - p_n) \quad (4.7)$$

4.2.2 Sistema simple en paralelo

Un sistema simple en paralelo se comporta insatisfactoriamente si todos los componentes se comportan así. Por lo tanto, la confiabilidad se calcula como la unidad menos la probabilidad de que todos los componentes se comporten insatisfactoriamente, ecuación 4.8.

$$R = 1 - p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots p_n \quad (4.8)$$

4.2.3 Series de sistemas en paralelo.

Las soluciones están disponibles para sistemas que requieren de componentes operables r - fuera de n , los cuales pueden ser aplicables a problemas como bombeo con múltiples bombas,

donde r está definido como el número de unidades confiables. Los subsistemas que envuelven sistemas en paralelo y en serie pueden ser matemáticamente combinados. La confiabilidad de este sistema se determina como:

$$R = \sum_{k=r}^N C_k^N \bar{R}^k (1-\bar{R})^{N-k} \quad (4.9)$$

donde:

k : repeticiones del experimento de Bernoulli,

N : número de éxitos del experimento de Bernoulli,

C_k^N : número de combinaciones en que se pueden presentar N éxitos en k experimentos,

R : confiabilidad,

\bar{R} : confiabilidad del sistema en serie.

Las fronteras superiores e inferiores en los sistemas de confiabilidad pueden determinarse considerando que todos los componentes son de un subgrupo de sistemas paralelos y en serie, respectivamente.

Una aproximación práctica es considerar que la confiabilidad de unos pocos subsistemas o componentes pueden gobernar la confiabilidad de un sistema completo, por lo cual, desarrollando un promedio que caracterice y compare la confiabilidad de estos componentes como una función del tiempo es suficiente para realizar juicios como priorizar las operaciones o los gastos de mantenimiento.

4.2.4 Fronteras de confiabilidad

Efectuar el cálculo de la confiabilidad o la probabilidad de falla de un sistema es una tarea que se resuelve aplicando aproximaciones, por lo cual se busca acotar el problema delimitando fronteras de la correspondiente probabilidad de falla (Harr, 1987).

Cuando $k = N$ en la ecuación 4.9 se obtiene que la probabilidad de falla está dada por:

$$p(f) = 1 - \left(1 - \bar{p}\right)^N \quad (4.10)$$

Si $k = 1$ se obtiene que la probabilidad de falla se calcula como una expansión binomial, ecuación 4.11.

$$p(f) = \left(\bar{p}\right)^N \quad (4.11)$$

Considerando que un sistema N - fuera de - N es equivalente a una configuración en serie y que un sistema 1 – fuera de – N es equivalente a un sistema en paralelo, se acepta que es igual la confiabilidad de todos sus componentes particulares.

Para delimitar las fronteras de la probabilidad de falla se establece que la frontera superior corresponde a la probabilidad de un sistema en serie y la inferior a un sistema en paralelo, para N componentes independientes, por lo cual, la probabilidad de falla queda comprendida entre

$$\prod_{i=1}^N p_i \leq p(f) \leq \sum_{i=1}^N p_i \quad (4.12)$$

La ecuación 4.12 es equivalente a la ecuación 4.13 considerando en lugar de la probabilidad de falla a la confiabilidad.

$$1 - \prod_{i=1}^N (1 - R_i) \leq R \leq \sum_{i=1}^N R_i \quad (4.13)$$

Existen varios procedimientos en la literatura para delimitar éstas fronteras, como los presentados por Ditlevsen, y Ang y Tang, Harr (1987). Una simplificación llamada Frontera de primer orden (Ang y Amin, 1969) reemplaza la frontera superior de la ecuación 4.13 por el valor mínimo de confiabilidad que presente cualquiera de los componentes, $(R_i)_{\min}$, ecuación 4.14.

$$(R_i)_{\min} \leq R \leq \sum_{i=1}^N R_i \quad (4.14)$$

Otra aproximación para obtener los límites superior e inferior es la presentada por Serfling (1974), en la cual sustituye la distribución binomial del cálculo de la confiabilidad de un sistema r – fuera de – N por el cálculo de la confiabilidad aplicando una distribución de Poisson, ecuación 4.15.

$$F_{\mu}(N-r)+L \geq R \geq F_{\mu}(N-r)-L \quad (4.15)$$

Donde:

$$F_{\mu}(N-r) = \sum_{x=0}^{N-r} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad (4.16)$$

$$L = 0.5 \sum_{i=1}^N (1-R_i)^2 \quad (4.17)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^N (1-R_i) \quad (4.18)$$

4.3 Métodos utilizados en los análisis de confiabilidad

La evaluación de los niveles de seguridad depende de la precisión con que son modeladas las sollicitaciones y las resistencias de los materiales, por lo cual es posible clasificar los métodos de acuerdo a su nivel de exactitud (Harr, 1985).

La primera clasificación corresponde a los llamados métodos exactos. Requiere el conocimiento de la distribución de probabilidad de las variables aleatorias como datos de entrada, debido a la complejidad que se puede generar en el cálculo usualmente se adoptan las distribuciones normal, lognormal e incluso la uniforme. Algunos de los métodos que se encuentra en esta categoría son: la integración numérica y el método de Monte Carlo.

La segunda categoría, llamada de primer orden, corresponde a los métodos que aplican el segundo momento de la variable aleatoria o simplificaciones de éstos. La base de estos métodos es la aplicación de las series de Taylor. Como datos de entrada se requiere conocer los dos primeros momentos de las variables aleatorias y la covarianza de las variables correlacionadas.

La ventaja de estos métodos corresponde en la amabilidad de cálculo, por lo que, en la mayoría de los casos, no es necesaria la utilización de programas de computadora. Entre los métodos que se encuentran en esta categoría están el método Hasofer – Lind, método de la serie de Taylor y método regla 3σ .

La tercera categoría corresponde al método de estimación puntual propuesto por Rosenblueth (1975).

Otra clasificación de los métodos utilizados en el cálculo de la confiabilidad es la propuesta por Rosenblueth, Auvinet (2002), en la cual se considera el nivel de seguridad dependiendo de la precisión en que sean modelados los elementos resistentes y actuantes; ésta clasificación toma en cuenta los siguientes niveles:

Nivel 0. Corresponde a la utilización de métodos deterministas evaluando la seguridad mediante la utilización del factor de seguridad, considerando la relación entre las solicitaciones que ayudan a la estabilidad, resistentes, y las que provocan la falla, motrices. La confiabilidad en este nivel consiste en buscar un factor de seguridad mayor que el mínimo recomendado, en la mayoría de los casos producto del empirismo o establecido a través de la práctica profesional.

Nivel 1. En este nivel se reconoce que las solicitaciones tienen un comportamiento aleatorio y se verifica la seguridad mediante la implementación de valores máximos de solicitaciones motoras contra valores mínimos de resistencia, buscando que estos últimos sean siempre mayores a los primeros a lo largo de toda la vida de la estructura. Ejemplo de este nivel son los métodos conocidos como diseño por factor de carga y resistencia, LRFD, por sus siglas en inglés.

Nivel 2. Corresponde a los métodos que se basan en la expansión de la serie de Taylor, buscando definir los primeros momentos de la variable de interés a partir del conocimiento de las funciones de distribución de probabilidad de las variables de entrada que le dan origen. Se considera que una estructura es segura si el índice de confiabilidad es mayor que una probabilidad de falla predeterminada. Ejemplos de este nivel son los métodos de primer orden y primeros momentos, segundo orden y segundos momentos, el método de aproximación puntual de Rosenblueth y el método de simulación de Monte Carlo.

Nivel 3. Se efectúa el análisis de confiabilidad mediante el cálculo exacto de la probabilidad de falla, conociendo la distribución de probabilidad de las variables involucradas en el cálculo. Este nivel constituye el método más complejo, por lo cual su aplicación en la práctica es limitada aunque sirve como parámetro de comprobación de los métodos del nivel inferior. La solución de los métodos correspondientes a este nivel es mediante aproximaciones y tanteos como el método propuesto por Hasofer y Lind.

4.3.1 Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias. Muzachiodi, (2003), utiliza el siguiente ejemplo para describir el método.

Supóngase que se busca calcular el área de una figura plana S , de la figura 4.3.

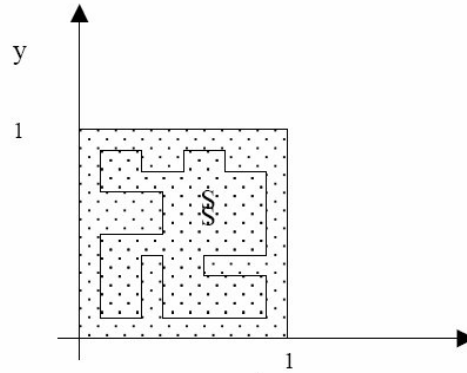


Figura 4.3. Área de la figura plana S

Esta es una figura arbitraria con fronteras curvilíneas, definida gráfica o analíticamente y compuesta por uno o varios pedazos y se encierra en un cuadrado unitario como muestra la figura 4.3. Se tiene en el cuadrado N puntos aleatorios. Si N' son los puntos dentro de S, el área de S es aproximadamente igual a:

$$S \approx \frac{N'}{N} \quad (4.19)$$

Cuanto mayor sea la cantidad de puntos que se obtengan en el cuadro unitario, mejor será la aproximación del área de la figura. Si $N = 40$ y $N' = 12$, $S = 0.3$, por lo que el valor estimado de S es 0.30, lo cual parece razonable un área $S < 1$ pues el área de cuadrado es igual a 1.

El algoritmo del método de Monte Carlo tiene una estructura muy sencilla. Como regla se elabora un programa para la realización de una prueba aleatoria (en el ejemplo es escoger un punto aleatorio en el cuadrado y comprobar si pertenece o no a S). Esta prueba se repite N veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes y se toma la media de los resultados de los experimentos.

El error es proporcional a la magnitud de la ecuación 4.20 donde D es una constante y N el número de pruebas.

$$e = \sqrt{\frac{D}{N}} \quad (4.20)$$

Cuando los métodos analíticos no son aplicables o se requiera comprobar su exactitud, es aplicable el método de Monte Carlo. La idea del método es sencilla y consiste en realizar sorteos del fenómeno casual con ayuda de un procedimiento organizado que incluya la casualidad y de un resultado aleatorio. Generalmente el método se utiliza en los siguientes casos: a) para simular operaciones complejas que tienen muchos factores aleatorios que actúan recíprocamente; b) para comprobar la aplicabilidad de métodos analíticos más simples; c) para obtener muestras aleatorias simples de una variable aleatoria de la cual se conozca su distribución de probabilidad.

4.3.2 Serie de Taylor

El método es utilizado para estimar los momentos de la función de distribución resultante con base en los momentos de las variables aleatorias de entrada. Está basado en la expansión de la serie de Taylor de la función de distribución resultante sobre algún punto. La expansión se realiza sobre los valores esperados de las variables aleatorias.

Dada la función $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ donde X_i son los valores de la variable independiente, el valor esperado de la función se obtiene evaluando el valor esperado de las variables aleatorias de entrada:

$$E[Y] = g(E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n]) \quad (4.21)$$

Una función como la del factor de seguridad, implica que el valor esperado de él es calculado utilizando el valor esperado de las variables aleatorias que le dan origen:

$$E[FS] = FS(E[\emptyset], E[c], \dots, E[\gamma]) \quad (4.22)$$

La varianza de la función resultante es:

$$\text{var}[Y] = \sum \left[\left(\frac{\delta Y}{\delta X_i} \right)^2 \text{var}[X_i] \right] \quad (4.23)$$

Las derivadas parciales son tomadas al punto de la expansión de la serie de Taylor (en este caso el valor esperado). Usando el factor de seguridad como una función resultante, por dar un ejemplo,

la varianza se obtiene calculando la derivada parcial del factor de seguridad con respecto a cada variable aleatoria, evaluada al valor esperado de esa variable, al cuadrado, multiplicando el resultado por la varianza de la variable aleatoria utilizada y sumando este resultado al resultado de la función con respecto a las demás variables aleatorias.

$$\text{var}[\text{FS}] = \sum \left[\left(\frac{\delta \text{FS}}{\delta X_i} \right)^2 \text{var}[X_i] \right] \quad (4.24)$$

Teniendo el valor esperado y la varianza del factor de seguridad, el índice de confiabilidad se calcula aplicando la ecuación 4.6.

Entre las ventajas que presenta este método están: a) el método proporciona un índice relativo de la incertidumbre del resultado asociada a cada variable aleatoria que interviene en su cálculo; b) es exacto si se utilizan distribuciones de probabilidad lineales. Tiene como desventajas que es necesario determinar el valor de las derivadas parciales y cuando se utilizan funciones no lineales, el error aumenta al elevarse el orden de éstas.

La derivada parcial se puede estimar de forma aproximada evaluando dos puntos ubicados a más menos una desviación estándar del valor esperado de la variable X_i , esto es:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} = \frac{g(E[X_i] + \sigma_{X_i}) - g(E[X_i] - \sigma_{X_i})}{2\sigma_{X_i}} \quad (4.25)$$

Aplicando esta aproximación la ecuación 4.23 se simplifica como se indica a continuación:

$$\text{var}[Y] = \sum \left[\frac{(g(X_+) - g(X_-))^2}{2} \right] \quad (4.26)$$

Donde X_+ y X_- son los valores de la variable aleatoria a más y menos una desviación estándar, respectivamente.

Cuando las variables aleatorias están correlacionadas, el cálculo de la varianza es:

$$\text{var}[Y] = \sum \left[\left(\frac{\delta Y}{\delta X_i} \right)^2 \text{var}[X_i] \right] + 2 \sum \left[\frac{\delta Y}{\delta X_i} \frac{\delta Y}{\delta X_j} \text{cov}(X_i, X_j) \right] \quad (4.27)$$

Donde el término de la covarianza contiene las condiciones para cada posible combinación de las variables aleatorias.

4.3.3 Método Hasofer – Lind

Los métodos de primer orden y segundos momentos de la variable aleatoria calculan la desviación estándar de la variable a partir de la expansión de una serie de Taylor, ecuación 4.23. El método Hasofer – Lind, propuesto por Hasofer y Lind (1974), es una simplificación del método de la serie de Taylor. Este último parte de reconocer que el primer término de la ecuación 4.23 es el segundo término de la serie de Taylor y que el primer término de la serie sólo puede ignorarse si la derivada parcial se evalúa en un punto donde $X = 1$. Partiendo de este punto, se realiza la iteración hacia los puntos adyacentes para conocer sus valores.

4.3.4 Método de estimación puntual

Un método alternativo para estimar los momentos de una función resultante, con base en los momentos de las variables aleatorias, es el método de estimación puntual. Es un procedimiento donde las distribuciones de probabilidad continuas de las variables aleatorias son representadas por una distribución "equivalente" discreta a partir de dos o más valores conocidos.

Los elementos de estas distribuciones discretas (o estimaciones puntuales) tienen valores específicos con probabilidades definidas, tal que los primeros momentos de la distribución discreta coincidan con los de la variable aleatoria continua. Este método de estimación puntual fue propuesto por Rosenblueth (1975, 1981) y es resumido por Harr (1987).

Considerando la distribución de probabilidad que se observa en la figura 4.4, una variable aleatoria continua X que es representada por dos estimaciones puntuales, X_+ y X_- , con inferencia de probabilidad de ocurrencia P_+ y P_- , respectivamente. Como las dos estimaciones puntuales y su correspondiente probabilidad de ocurrencia equivalen a la probabilidad de la distribución, los dos valores de P deben sumar la unidad.

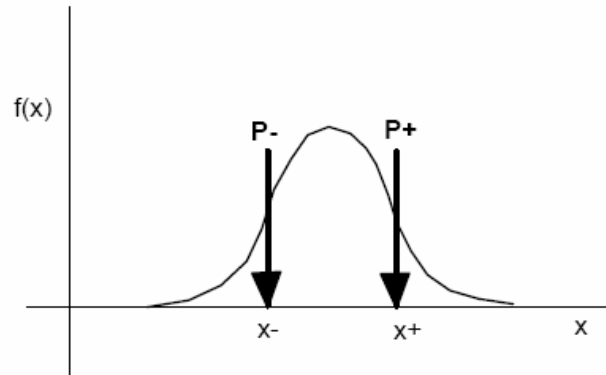


Figura 4.4. Método de estimación puntual

Las dos estimaciones puntuales y su respectiva concentración de probabilidad de ocurrencia son elegidas para coincidir con los tres primeros momentos de la variable aleatoria. Cuando esta condición es cumplida para variables aleatorias simétricamente distribuidas, las estimaciones de punto se toman a más menos una desviación estándar del valor esperado:

$$X_{i+} = E[X_i] + \sigma_{X_i} \quad (4.28)$$

$$X_{i-} = E[X_i] - \sigma_{X_i} \quad (4.29)$$

Para variables aleatorias independientes, las concentraciones de probabilidad asociadas son:

$$P_{i+} = P_{i-} = 0.5 \quad (4.30)$$

Conociendo la estimación puntual y su correspondiente concentración de probabilidad, el valor esperado de la función de las variables aleatorias elevado a cualquier potencia M puede ser evaluado de forma aproximada, ecuación 4.31.

$$E[y^M] = p_- x_-^M + p_+ x_+^M \quad (4.31)$$

La varianza se obtiene de la identidad:

$$\text{var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 \quad (4.32)$$

$$\text{var}[Y] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \quad (4.33)$$

La correlación entre las variables aleatorias simétricamente distribuidas es tratada ajustando las concentraciones de probabilidad ($P_{\pm \pm \dots \pm}$), Harr (1987). Para dos variables aleatorias correlacionadas en un grupo de dos o más, el producto de sus concentraciones de probabilidad son modificadas agregando un término que corresponde a la correlación entre estas variables.

$$P_{i+j-} = P_{i-j+} = (P_{i-})(P_{j+}) - \frac{\rho}{4} \quad (4.34)$$

$$P_{i+j+} = P_{i-j-} = (P_{i+})(P_{j+}) + \frac{\rho}{4} \quad (4.35)$$

Teniendo el valor esperado y la varianza del factor de seguridad, el índice de confiabilidad se calcula aplicando la ecuación 4.6.

4.3.5 Método regla 3σ

Esta regla, propuesta por Day y Wang y descrita por Duncan (2000), parte del hecho que en una distribución normal el 99.73% de los valores se encuentran comprendidos en un área ubicada a más menos 3 desviaciones estándar del valor medio. Con base en lo anterior, se considera el valor máximo y el valor mínimo concebible para el parámetro en estudio.

La regla 3σ es utilizada para estimar el valor de la desviación estándar mediante la igualdad

$$\sigma = \frac{\text{HCV} - \text{LCV}}{6} \quad (4.37)$$

donde:

σ : desviación estándar,

HCV: máximo valor concebible del parámetro,

LCV: mínimo valor concebible del parámetro.

La regla puede aplicarse cuando están disponibles datos limitados. También puede usarse para juzgar la racionalidad de valores de los coeficientes de variación, considerando que el valor concebible más bajo se ubica a 3 desviaciones estándar debajo de la media y el valor más alto está ubicado a 3 desviaciones estándar sobre la media.

La regla 3σ utiliza como base a la distribución Gaussiana al cubrir virtualmente la población entera. Sin embargo, es aplicable a otras distribuciones, Harr (1987), y la regla no se ata rígidamente a una distribución supuesta de la variable aleatoria.

Ejemplo 4.1

Los métodos mencionados se exponen con el siguiente ejemplo: Según la teoría de Coulomb, el coeficiente de empuje activo de un material no cohesivo sobre un muro de retención liso vertical es:

$$K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

Si se admite que existe una incertidumbre sobre el ángulo de fricción interna del material ϕ que puede representarse por medio de una densidad normal con esperanza 33° y desviación estándar de 2 grados, se estima la esperanza y varianza del coeficiente de empuje usando los siguientes métodos:

- **Método de primeros momentos y primer orden**

Se realiza el cálculo aproximado de los momentos a partir del desarrollo de una serie de Taylor en la vecindad de la media de la función de la variable. Se considera K_a como función de ϕ .

$$E\{K_a\} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{0.576}{2}\right) = 0.295$$

$$\text{var}[K_a] = \text{var}[\phi] \left(\frac{\partial K_a(\mu_\phi)}{\partial \phi}\right)^2$$

Derivando la ecuación del empuje activo, se tiene:

$$K'_a = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - \tan^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

$$K'_a = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)K_a$$

$$K'_a = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)(1 + K_a)$$

Se evalúan las funciones para μ_{\emptyset} :

$$K_a(\mu_{\emptyset}) = 0.295$$

$$K'_a = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\emptyset}{2}\right)(1 + K_a)$$

$$K'_a = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{0.576}{2}\right)(1 + 0.295)$$

$$K'_a = -0.703$$

$$\text{var}[\emptyset] = (0.035)^2 = 0.0012$$

$$\text{var}[K_a] = 0.0012(-0.703)^2$$

$$\text{var}[K_a] = 0.0006$$

- **Método de primeros momentos y segundo orden**

Aplicando este método se obtienen los primeros momentos mediante la expansión de la serie de Taylor hasta la segunda derivada.

$$E\{K_a\} = K_a(E\{\emptyset\}) + \frac{\text{var}[\emptyset]}{2} \left(\frac{\partial K_a(\mu_{\emptyset})}{\partial \emptyset} \right)$$

$$E\{K_a\} = 0.295 + \frac{0.0012}{2} (-0.703) = 0.294$$

$$\text{var}[K_a] = \text{var}[\emptyset] \left(\frac{\partial K_a(\mu_{\emptyset})}{\partial \emptyset} \right)^2 + \text{var}[\emptyset] K_a(\mu_{\emptyset}) \frac{\partial^2 K_a(\mu_{\emptyset})}{\partial \emptyset^2}$$

donde:

$$K''_a = \frac{1}{2} [3K_a^2 + 4K_a + 1]$$

$$K''_a = \frac{1}{2} [3(0.295)^2 + 4(0.295) + 1]$$

$$K''_a = 1.22$$

Sustituyendo en $\text{var}[K_a]$, se tiene:

$$\text{var}[K_a] = 0.0012(-0.703)^2 + 0.0012(0.295)(1.22)$$

$$\text{var}[K_a] = 0.001$$

• **Método de estimación puntual Rosenblueth**

El método de estimación puntual propuesto por Rosenblueth considera que la distribución de probabilidad puede representarse mediante la aproximación de dos puntos ubicados a más o menos una desviación estándar de la media, a los cuales se les asigna una probabilidad acumulada, de tal manera que la suma de esta representa el área bajo la curva de la función de distribución.

Se calculan los puntos a más y menos una desviación estándar:

$$\begin{aligned}
 v^- &= \mu_\phi - \sigma_\phi \\
 v^- &= 0.576 - 0.035 \\
 v^- &= 0.541 \\
 v^+ &= \mu_\phi + \sigma_\phi \\
 v^+ &= 0.576 + 0.035 \\
 v^+ &= 0.611 \\
 u^- &= \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{0.541}{2}\right) \\
 u^- &= 0.320 \\
 u^+ &= \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{0.611}{2}\right) \\
 u^+ &= 0.271 \\
 P^+ &= P^- = 0.5
 \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones del método:

$$\begin{aligned}
 E\{K_a\} &= P^- u^- + P^+ u^+ \\
 E\{K_a\} &= 0.5(0.320) + 0.5(0.271) \\
 E\{K_a\} &= 0.295 \\
 \text{var}[K_a] &= P^- (u^- - E\{K_a\})^2 + P^+ (u^+ - E\{K_a\})^2 \\
 \text{var}[K_a] &= 0.5(0.320 - 0.296)^2 + 0.5(0.271 - 0.296)^2 \\
 \text{var}[K_a] &= 0.0006
 \end{aligned}$$

- **Método de Monte Carlo**

La técnica de Monte Carlo consiste en generar un vector de gran tamaño del parámetro aleatorio (\emptyset) respetando su densidad de probabilidad. Primero se genera un número aleatorio uniformemente distribuido entre cero y uno, a partir del cual se obtiene la distribución de probabilidad inversa de la variable aleatoria (el valor correspondiente de \emptyset). Se evalúa la ecuación del coeficiente de empuje activo para obtener uno de sus posibles valores y se repite el proceso hasta definir su tendencia central, dispersión y densidad de probabilidad de K_a .

Para este caso se realizaron 1000 simulaciones mediante la generación de números aleatorios entre 0 y 1, a partir de éstos se obtiene el valor de z de la densidad normal estándar inversa, el ángulo de fricción interna entonces $\emptyset = z\sigma_{\emptyset} + \mu_{\emptyset}$ y la expresión de K_a es conocida.

También se ha considerado que la muestra a partir de la cual se obtuvieron los parámetros del ángulo de fricción interna es grande y que los estimadores son aproximadamente iguales a los parámetros de la población.

Para averiguar si la muestra es suficiente, se construyó el histograma del ángulo de fricción interna y se calculó la media y desviación estándar para compararlas con los datos, figuras 4.5 y 4.6.

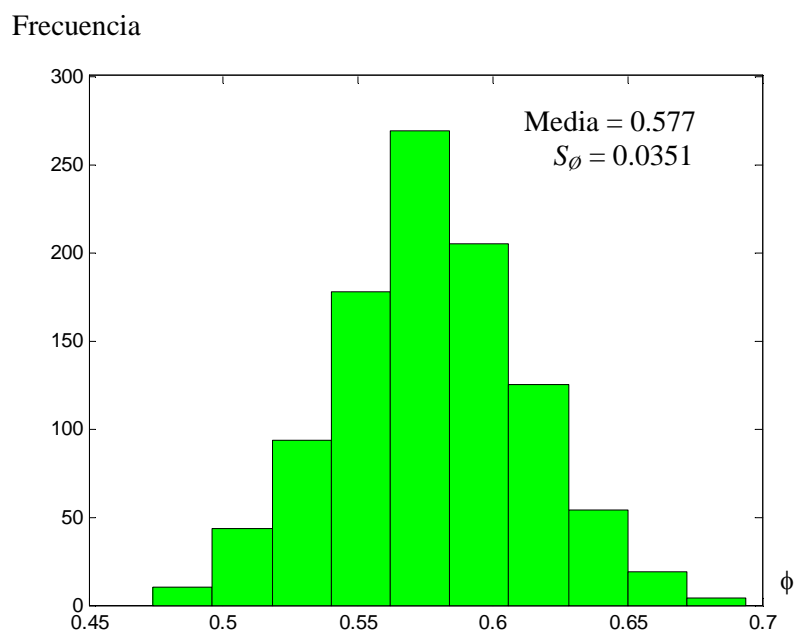


Figura 4.5. Histograma del ángulo de fricción interna

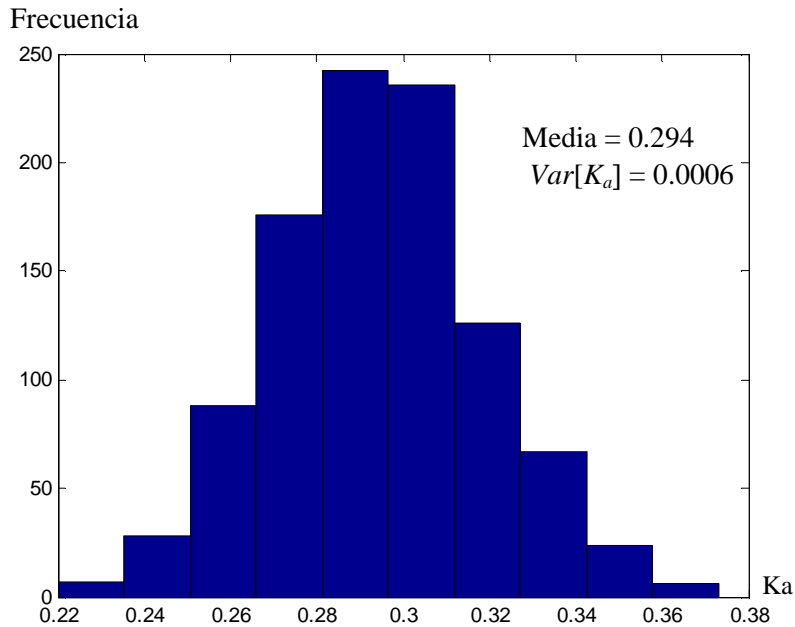


Figura 4.6. Histograma del coeficiente de empuje de tierra en reposo

La figura 4.7 muestra la función de distribución de K_a obtenida en la cual se observa que ésta tiene una distribución aproximada a la normal.

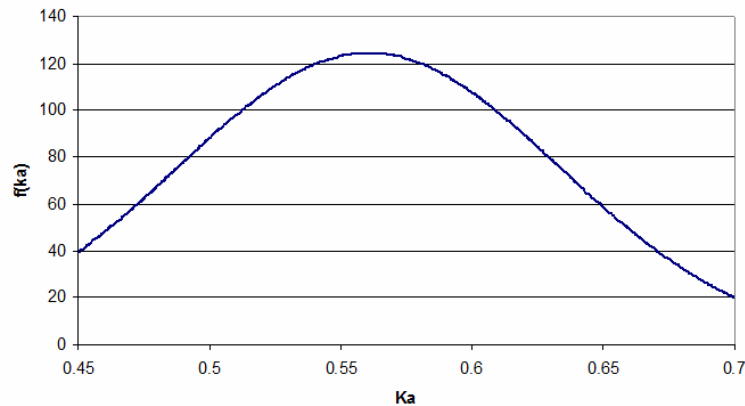


Figura 4.7. Función de distribución de densidad de probabilidad de K_a .

- **Método regla 3 σ**

Esta regla parte del hecho que en una distribución normal el 99.73% de los valores se encuentran comprendidos en un área ubicada a más menos 3 desviaciones estándar del valor medio. Con base en lo anterior, se considera el valor máximo y el valor mínimo concebible para el

parámetro en estudio, en nuestro caso se considera que el valor mínimo es 0.22 y el valor máximo concebible es 0.38, aplicando esta regla se tiene:

Calculando la desviación estándar:

$$\sigma = \frac{HCV - LCV}{6}$$
$$\sigma = \frac{0.38 - 0.22}{6}$$
$$\sigma = 0.026$$

Para la varianza tenemos:

$$\sigma^2 = (0.026)^2$$
$$\sigma^2 = 0.0006$$

La media es:

$$\mu = 0.38 - 3\sigma$$
$$\mu = 0.38 - 3(0.026)$$
$$\mu = 0.302$$

5 INCERTIDUMBRE EN LAS PROPIEDADES DEL SUELO

5.1 Propiedades de interés

Desde el punto de vista geotécnico, las propiedades del suelo se clasifican como índices, mecánicas e hidráulicas. Estas propiedades se determinan aplicando procedimientos y técnicas de campo y laboratorio estandarizados.

El tipo y número de pruebas realizadas para determinar un parámetro depende en mayor medida de la complejidad y nivel de estudio en el que se esté trabajando. A continuación se indican las propiedades más usuales.

5.1.1 Propiedades índice

De las propiedades índice, las que se presentan con mayor frecuencia están:

Contenido natural de agua. Es la propiedad que con frecuencia se determina en mayor número debido a la facilidad de ejecución de la prueba de laboratorio y bajo costo. Sirve como parámetro para la caracterización del material y permite inferir correlaciones con las propiedades mecánicas. Es posible definir la estratigrafía del subsuelo con base en este parámetro.

Límites de consistencia y granulometría. Estas pruebas sirven como base para la aplicación del Sistema Unificado de Clasificación de Suelos (SUCS) y permiten caracterizar a los suelos de acuerdo a la cantidad y tamaño de los granos que lo forman, además de poder inferir su comportamiento mecánico a partir de la compresibilidad.

Densidad de sólidos. El valor de la densidad de sólidos interviene en la mayor parte de los cálculos de mecánica de suelos y es un parámetro que relaciona las características gravimétricas con las volumétricas. La variación de los resultados de este parámetro es pequeña, por lo cual puede considerarse en mayor medida de forma determinista.

Peso volumétrico. En algunos estudios el número de determinaciones de este parámetro es reducido y el tamaño del volumen de la muestra utilizada influye en los resultados obtenidos, no obstante la variación de éste es relativamente reducida por lo cual se le considera de forma determinista.

5.1.2 Propiedades mecánicas

Las pruebas mecánicas comprenden:

Resistencia al esfuerzo cortante. Entre las pruebas de laboratorio para determinar la resistencia al esfuerzo cortante se encuentran las de corte directo, de compresión simple y de compresión triaxial. Las pruebas de compresión triaxial permiten determinar tanto las características esfuerzo – deformación como los parámetros de resistencia al corte; consisten en la aplicación de presiones laterales y axiales diferentes a un espécimen cilíndrico, confinado en una cámara, y estudiar su comportamiento. Se han desarrollado también pruebas de campo que permiten, mediante la aplicación de correlaciones, determinar los parámetros de resistencia al corte.

Compresibilidad. Este fenómeno ha sido explicado por varios investigadores mediante la implementación de diferentes teorías y equipos desarrollados para tal fin, como la prueba de consolidación unidimensional y las pruebas esfuerzo-deformación para determinar propiedades elásticas. En mayor medida el número de pruebas efectuadas es reducido, lo que conlleva en una insuficiencia de datos de este parámetro por lo que no pueden ser considerados como representativos de la formación estratigráfica donde procede o con el volumen total del suelo estudiado.

5.1.3 Propiedades hidráulicas

La conductividad hidráulica de un suelo, considerada por muchos especialistas como una propiedad mecánica, se ve afectada por características como tamaño de partículas, relación de vacíos, estructura, composición mineralógica, grado de saturación, así como del fluido que se encuentre en tránsito, peso específico, viscosidad, temperatura y composición química.

Tratando de reproducir el modelo físico de agua, se han desarrollado diferentes métodos para su obtención, los cuales se pueden dividir en dos grandes grupos: métodos directos y métodos indirectos.

Los métodos directos corresponden a pruebas efectuadas en campo en perforaciones o zanjas; entre ellos se encuentra las pruebas de bombeo, la prueba Lefranc y la Matsuo–Akai, las efectuadas en laboratorio a muestras representativas, alteradas e inalteradas, entre las que están los permeámetros de carga constante y carga variable.

Los métodos indirectos corresponden de correlaciones efectuadas a partir de datos obtenidos en otras pruebas como las granulométricas, cuyo propósito no es conocer la permeabilidad. Entre éstas se encuentran la prueba horizontal de capilaridad y la prueba de consolidación unidimensional.

5.2 Representación de las propiedades del suelo

Los resultados obtenidos en la exploración de campo y ensayos de laboratorio son organizados y presentados de forma que permitan ilustrar en forma clara las propiedades índices y mecánicas de los suelos.

Se han utilizado diferentes técnicas para presentar esta descripción. Tradicionalmente se presentan los resultados de manera determinista. Al representar de forma cuantitativa la incertidumbre en las propiedades se utiliza el análisis estadístico de los resultados deterministas y a partir de este análisis se ajusta una función de distribución de probabilidad considerando al parámetro en estudio como una variable aleatoria, logrando la descripción probabilista.

5.2.1 Representación determinista o tradicional

Las técnicas convencionales empleadas en la geotecnia para la presentación de las propiedades del suelo son mediante tablas, perfiles y cortes estratigráficos.

- **Tablas**

Las tablas constituyen la forma más sencilla para organizar y presentar los datos obtenidos de los trabajos de campo y laboratorio. Consisten en organizar los datos en columnas y renglones. En forma convencional, en las primeras columnas se registran los valores de las profundidades donde se realizan las pruebas de campo o donde se recuperó la muestra ensayada y en las siguientes se registran los valores medidos de las propiedades de interés. La tabla 5.1 presenta una distribución típica para representar datos geotécnicos mediante tablas.

Tabla 5.1. Pruebas de compresión triaxial UU, sondeo Deportivo Tlahuac, Jaime y Romo (1987)

Muestra	Prof. m	σ_c kg/cm ²	γ kg/m ³	ω %	M_i kg/cm ²	ϵ_f %	c_{uu} kg/cm ²
1-3	1.62	0.23	1.296	216	69	3.90	0.91
2-2	2.12	0.29	1.531	364	25	3.35	0.25
2-3	2.37	0.33	1.664	395	29	2.87	0.26
3-3	3.12	0.44	1.641	44	69	1.47	0.46
4-2	3.67	0.49	1.613	98	46	2.68	0.48
4-3	3.87	0.49	1.487	68	62	2.24	0.39
5-3	4.62	0.52	1.480	69	96	1.44	0.56

• **Perfiles estratigráficos**

Los perfiles estratigráficos son un método gráfico que permite organizar y representar los resultados obtenidos en los trabajos de campo y laboratorio. Constituyen una herramienta muy útil dado a que permiten distinguir las propiedades con respecto a la profundidad.

Los perfiles se elaboran utilizando patrones convencionales. Los elementos que comúnmente los conforman son:

- a) Tabla con la profundidad y descripción de los materiales localizados.
- b) Dibujo de la columna estratigráfica vertical, que muestra los cambios en la litología con respecto a la profundidad considerando la secuencia de unidades estratigráficas.
- c) Valores de las diferentes propiedades índices y mecánicas de interés con respecto a la profundidad.
- d) Indicación de la profundidad del nivel freático.
- e) Simbología utilizada en el perfil y datos generales del proyecto.

La figura 5.1 presenta parte de un perfil estratigráfico.

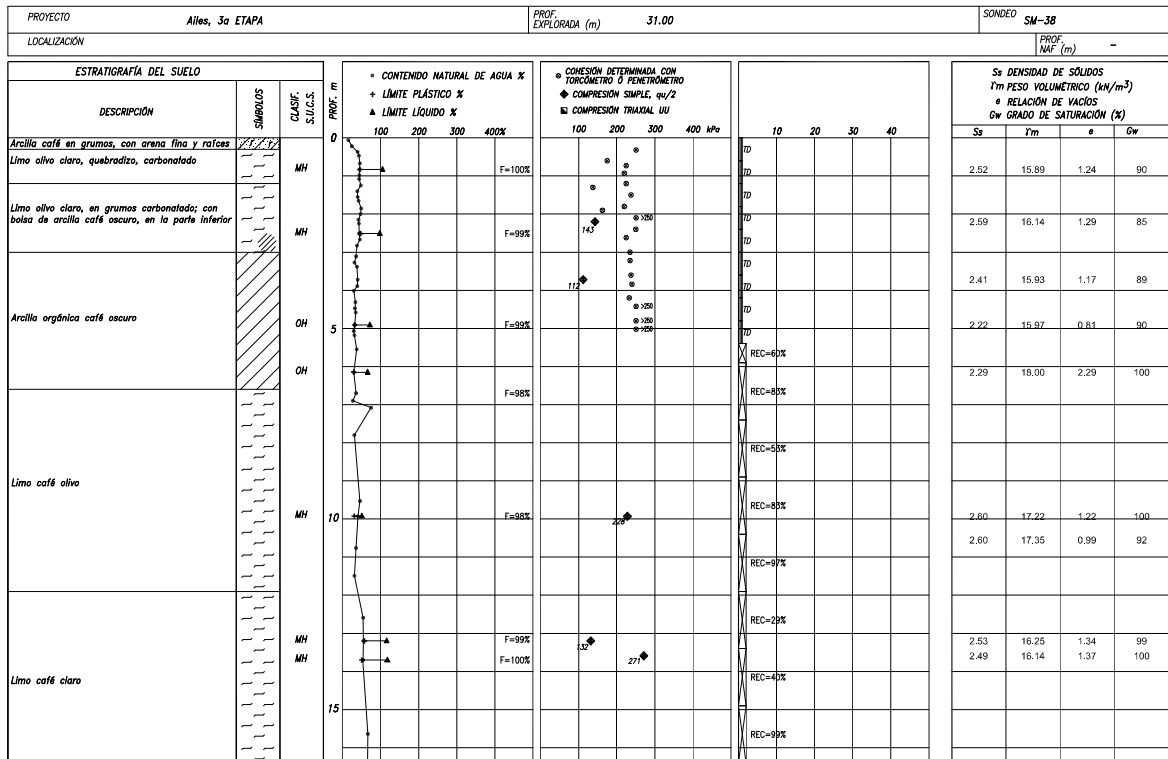


Figura 5.1. Perfil estratigráfico

- **Cortes estratigráficos**

Los cortes estratigráficos son otro método gráfico que se utiliza para presentar los datos obtenidos en los trabajos de campo y laboratorio. Están constituidos por la integración de un conjunto de perfiles estratigráficos individuales a lo largo de una línea o eje de referencia.

Un corte estratigráfico debe estar respaldado por un croquis de localización donde se ubica en planta la ubicación de los sondeos utilizados en éste y la línea o eje de referencia por donde pasa el corte.

Con la información de los perfiles estratigráficos se construye el corte. La continuidad de los estratos está definida por la distancia entre sondeos, por lo cual, a una separación entre sondeos menor se obtiene una mayor aproximación en el corte.

La adecuada elaboración e interpretación del corte estratigráfico permite conocer la distribución horizontal y vertical de los materiales que forman el subsuelo, los espesores de los estratos y los niveles piezométricos.

5.2.2 Representación estadística

Buscando cuantificar la anisotropía en las propiedades índices y mecánicas de los suelos en estudio se ha recurrido al uso de la estadística para organizar, presentar y describir los datos deterministas de las propiedades de los suelos, siendo complementadas con la utilización de técnicas cuantitativas o gráficas para analizar el conjunto de éstos.

En la estadística clásica, a partir de un conjunto de datos, se estiman parámetros estadísticos que representan medidas numéricas para describirlos, siendo los más usuales las medidas de tendencia central que se presentan en el capítulo 3.

En México, Marsal y Mazari fueron los primeros en emplear la estadística descriptiva y la probabilidad a casos que competen a la geotecnia en su trabajo presentado en el libro El subsuelo de la Ciudad de México, Marsal y Masari (1959), en el cual los autores recurren a esta técnica para describir las propiedades de los suelos en diferentes zonas de la ciudad de México.

Entre los análisis realizados en la estadística descriptiva básica se tienen:

- **Análisis cuantitativo**

Las propiedades del suelo se miden de muestras extraídas en diferentes sondeos y profundidades, con ellas se obtiene un conjunto de datos o población con la cual puede establecerse una muestra representativa de datos susceptible de clasificarse y procesarse con técnicas estadísticas.

Las variables del suelo pueden ser analizadas cuantitativamente mediante estimaciones numéricas realizadas en una muestra de datos, conocidos como parámetros estadísticos o estadísticas de la muestra.

Los parámetros estadísticos se clasifican en medidas de tendencia central y medidas de dispersión, siendo los más representativos la media, la mediana, la moda, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

- **Análisis gráfico**

Las muestras de datos también pueden ser analizadas mediante la aplicación de métodos gráficos estadísticos, siendo los más usuales el histograma y el polígono de frecuencias.

Para aplicar cualquiera de estos métodos es necesario ordenar en tablas los valores de la muestra, en orden de magnitud creciente o decreciente, y estimar el rango, la diferencia entre el mayor y el menor de los valores de los puntos de datos. El rango es dividido en intervalos de igual tamaño llamados clases. La frecuencia de la clase está definida por el intervalo de valores pertenecientes a cada una de las clases.

El histograma es una gráfica de barras donde se indica el número de ocurrencias en cada intervalo. Proporciona información acerca de la variabilidad en el conjunto de datos y muestra el rango de los datos, los valores de los datos que ocurren con mayor frecuencia y el grado de dispersión alrededor de los valores medios de la muestra de datos; en éste también se observan los valores de la media, mediana y moda.

El número de clases a emplear se define de manera arbitraria y a juicio de quien esté elaborando el histograma. Un número pequeño de clases puede ocultar la distribución real del conjunto de datos, mientras que un número grande puede dejar sin presencia a algunas clases, limitando su utilidad.

El número de clases que se emplea para clasificar los datos en una muestra depende de la cantidad de los datos que forman ésta.

Un polígono de frecuencias es un gráfico de línea trazado sobre las marcas de clase; el valor medio de una clase puede obtenerse uniendo los puntos medios de los techos de las barras que forman un histograma.

Se acostumbra prolongar el polígono hasta las marcas de clase inferior y superior inmediatas; en este caso, la suma de las áreas de las barras del histograma es igual al área total limitada por el polígono de frecuencias y el eje de las abscisas.

5.2.3 Representación probabilista

La variación de las propiedades de los suelos puede representarse considerando a la propiedad de interés como una variable aleatoria, la cual es descrita mediante un modelo probabilista (función de densidad de probabilidad) preestablecido. Una técnica para lograr esto es considerar que el histograma de los datos (analizados con métodos estadísticos) se idealiza mediante el ajuste de una función de densidad de probabilidad.

Es posible ajustar una función de densidad a los datos de un histograma debido a que el muestreo de los datos que le dieron origen se puede considerar aleatorio, lo cual lo convierte en un experimento definido.

Lo anterior permite definir una función cuyo dominio es un espacio S y cuyo contradominio es un conjunto de números reales. Por ejemplo, los valores obtenidos en la prueba de contenido de agua pueden considerarse como una variable aleatoria.

Al ajustar los resultados del histograma a una función de densidad preestablecida se busca lograr que las igualdades 5.1 y 5.2 se logren o en su caso que tengan una buena aproximación:

$$E\{X\} = \mu_x \quad (5.1)$$

$$\text{var}[X] = \sigma^2_x \quad (5.2)$$

Este enfoque supone que la realización de los sondeos y la obtención de las diversas muestras constituyen un mismo experimento. No se toma en cuenta la correlación que puede existir entre los resultados obtenidos en puntos vecinos, es decir con la estructura espacial del medio. Para lograr lo anterior, se requiere de un modelado mediante campos aleatorios, Vanmarcke (1977).

Ejemplo 5.1

Para ejemplificar el efecto de la determinación de los parámetros del suelo en un análisis geotécnico mediante un análisis bidimensional de estabilidad de taludes, se utilizan los datos del peso volumétrico, contenido de agua y cohesión, presentados en el estudio Tláhuac Deportivo.

Con estos datos se realiza el cálculo del factor de seguridad de un talud ficticio excavado en los primeros estratos del sitio, con la cohesión del material obtenida a partir del valor promedio, aplicando la regla del 3σ , considerando que se conocen los valores máximos y mínimos, y “a ojo” leído del perfil estratigráfico aplicando el criterio y la experiencia de quien diseña.

Se observa que una menor dispersión en el valor del peso volumétrico con respecto al obtenido en los otros dos parámetros, lo cual permite suponer, sin incurrir en un error significativo, que el peso volumétrico puede considerarse como un valor determinista.

Al definir qué parámetros tienen mayor variación en la magnitud que pueden tomar, se determina a cuales de ellos se les puede considerar como deterministas y a cuales como variables aleatorias, reduciendo la complejidad que pueda tener el cálculo del problema en estudio.

Sea un talud con pendiente 2:1 (H:V) con altura de 5.4 m, está excavado en el suelo 1, profundidad 0.0 a 5.4 m, utilizando el método de Morgenstern – Price mediante el programa de computo Slope/W, sin nivel de agua freática. Los valores utilizados se presentan en la tabla 5.2.

Tabla 5.2 Valores utilizados para el análisis

Estrato	Peso volumétrico γ (t/m ³)			Cohesión, c_{uu} (kg/cm ²)		
	“a ojo”	promedio	Regla del 3σ	“a ojo”	promedio	Regla del 3σ
Suelo 1	1.50	1.45	1.41	0.5	0.40	0.52
Suelo 2	1.20	1.21	1.27	0.3	0.25	0.28

Los resultados del factor de seguridad mínimo calculado se indican en la tabla 5.3 y en la figura 5.2 a 5.4; en ellas se observan las superficies de falla asociadas a cada factor de seguridad.

Tabla 5.3 Factor de seguridad mínimo calculado

Datos	Factor de seguridad
“a ojo”	1.95
Estadística	1.68
Regla del 3σ	1.92

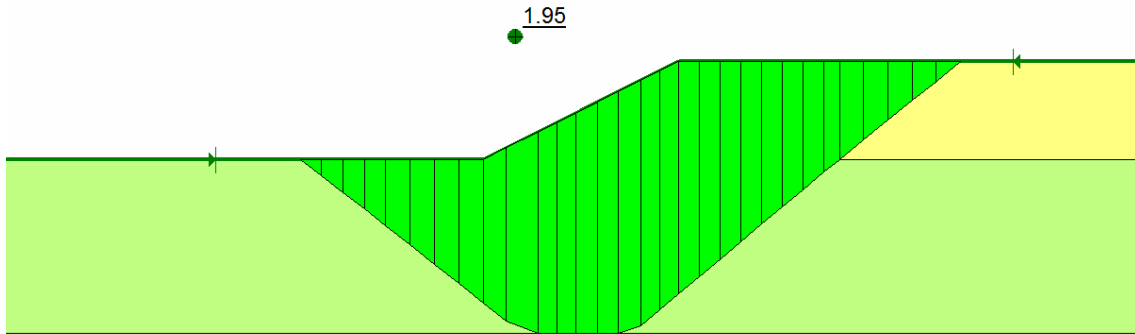


Figura 5.2. Mínimo factor de seguridad y superficie de falla calculada con los parámetros “a ojo”

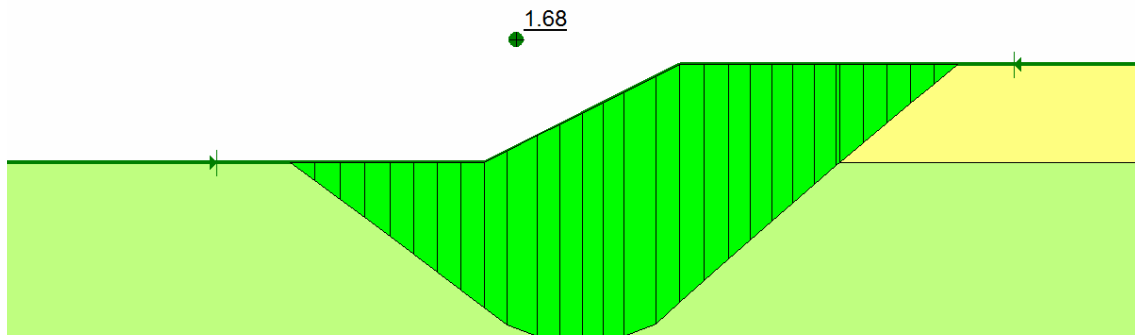


Figura 5.3. Mínimo factor de seguridad y superficie de falla calculada con los valores promedio

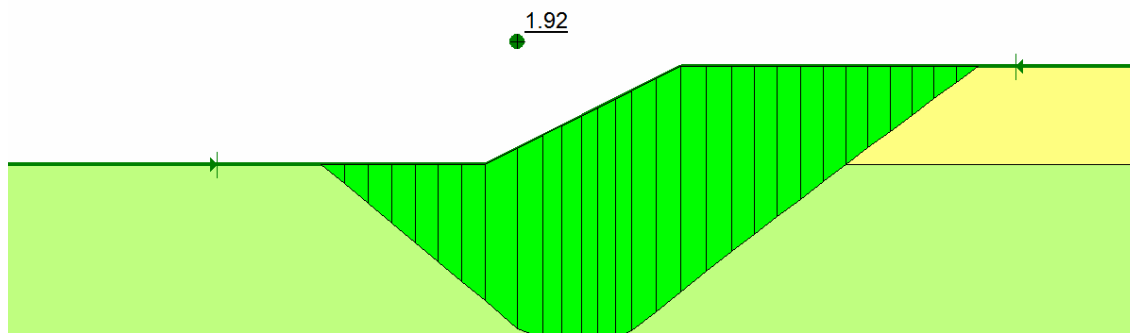


Figura 5.4. Mínimo factor de seguridad y superficie de falla calculada con los parámetros de la regla del 3σ

Se observa que el factor de seguridad varía de 1.68 a 1.95; el valor mínimo corresponde al obtenido con los valores promedio y el valor máximo con los valores determinados “a ojo”. Para la regla del 3σ se obtiene un valor intermedio al obtenido con los otros métodos, con mayor semejanza al obtenido “a ojo”.

5.3 Fuentes de incertidumbre

La incertidumbre en los análisis geotécnicos es resultado principalmente de dos factores, Jaime y Montoya (2008): a) la estratigrafía del sitio y, b) las solicitaciones a las que se verá sometido el suelo.

- **La estratigrafía del sitio**

Al hablar de estratigrafía se entiende a las capas de suelo presentes en el lugar y sus espesores, y al comportamiento de cada una de dichas capas. Los espesores de los estratos de suelo, por lo general, varían punto a punto en el sitio, incluso pueden desaparecer una o varias de las capas de suelo y aparecer otras. Las propiedades mecánicas de los suelos varían también puntualmente y a lo largo del espesor del mismo estrato de suelo.

Por ello, el geotecnista, con base en la información geológica, en los datos de campo y laboratorio, experiencia y juicio ingenieril hace un modelo tridimensional idealizado del suelo en el

sitio, desde la superficie hasta la profundidad de interés; asigna valores de espesores medios y de propiedades medias del suelo y con ello diseña.

Como puede inferirse, la precisión del modelo idealizado del suelo depende del conocimiento geológico, del número de sondeos y de la cantidad de muestras de suelo inalteradas y alteradas extraídas, así como del número de ensayos de laboratorio para determinar las propiedades índice y mecánicas, además de la experiencia geotécnica previa que se tenga de la zona estudiada.

Aún suponiendo que la extracción de muestras de suelo fuera perfecta y no se alterara el material y que los ensayos de laboratorio fueran también perfectos y representativos del comportamiento del suelo, se tendrían variaciones puntuales y en profundidad, tanto en las propiedades del suelo como en sus espesores. Dicho de otra manera, las propiedades índice y mecánicas del suelo son aleatorias en mayor o menor grado, es decir, varían alrededor de un valor medio con más o menos dispersión.

A la variabilidad espacial del material habría que agregar la dispersión causada por manipulación en el campo y en el laboratorio, primero, por la alteración causada al suelo al extraerlo y, segundo, debido a los métodos de ensayo y medición en laboratorio.

A lo anterior hay que añadir por lo menos los cuatro factores siguientes: a) muestreo del suelo escaso (pocos sondeos, y pocas muestras); b) orientación de la muestra, anisotropía y tamaño; c) tiempo de carga en el laboratorio vs tiempo de carga del proyecto en la realidad (ensayos de deformación controlada o de esfuerzo controlado); y d) análisis de deformaciones en el plano, ensayos con estados de esfuerzos aplicados al suelo diferentes a la realidad.

Para obtener una representación cuantitativa de la incertidumbre de los suelos en sus propiedades índices y mecánicas, se recurre al análisis estadístico de los resultados de las pruebas de campo y de laboratorio.

El análisis de las propiedades de los suelos se ha llevado a cabo a lo largo de la práctica de la geotecnia en diferentes grados. El valor del parámetro se determina “a ojo”, calculando su promedio o mediante el ajuste de la tendencia de los datos obtenidos. En esta forma de trabajo tiene gran relevancia la experiencia de la persona que lo realiza. Por tanto, los resultados obtenidos pueden variar de forma considerable de persona a persona. Desafortunadamente, constituye el método de mayor difusión y aplicación en la práctica.

En México, Marsal y Masari (1959) en su obra “El subsuelo de la ciudad de México” son los primeros autores en emplear el análisis estadístico y de probabilidad. Con ellos determinan las

propiedades medias índices y mecánicas de las arcillas del valle de México e identifican y caracterizan los distintos estratos y substratos arcillosos.

Los resultados de los análisis estadísticos se ajustan a la función de densidad de probabilidad que mejor represente dichos resultados. Se considera al parámetro del suelo como una variable aleatoria, y se determinan sus primeros momentos (el valor medio de la propiedad y su dispersión o varianza).

- **Las solicitaciones a las que se verá sometido el suelo**

Las fuerzas o solicitaciones a las que se ve sometido el suelo son muy variables. Determinar solo las cargas estáticas actuantes en una obra de ingeniería cubre capítulos completos de los manuales y reglamentos de construcción. A éstas hay que añadir las cargas dinámicas, principalmente, sismo y viento, que son inherentemente aleatorias, tanto en el tiempo (frecuencia) como en intensidad y duración.

En geotecnia, además, se puede presentar como factor adicional, la presión de poro en el suelo, la cual puede variar periódicamente o accidentalmente, por una oscilación temporal del nivel freático o por avenidas extraordinarias a lo largo de diques y bordos de protección, o por inundación o rotura de tuberías. Lo anterior tiene un impacto doble, ya que hace variar la respuesta del suelo y las cargas a las que está sometido.

La incertidumbre que se asocia a un parámetro tiene diferentes orígenes los cuales corresponden tanto a la naturaleza del material (incertidumbre asociada a la variación espacial) como a los efectos del muestreo, manipulación en laboratorio, ensayos, orientación de la muestra, de medición y humanos, y en las hipótesis que simplifican la aplicación de los modelos mecánicos (incertidumbre intrínseca).

La incertidumbre del resultado de una medición refleja la falta del conocimiento exacto del valor del mensurado. El resultado de una medición después de ser afectada por una corrección aplicando procedimientos sistemáticos reconocidos es, aún, sólo una estimación del valor verdadero que se pretende medir debido a la presencia de incertidumbre y de correcciones imperfectas de los resultados por efectos sistemáticos.

El resultado de una medición, después de ser corregido, puede estar muy cercano al valor verdadero de la propiedad que se busca medir, al grado que se considera a este error como un error despreciable. Sin embargo, aun puede tener una incertidumbre considerable, por lo que a la incertidumbre de una medición no debe considerarse como sinónimo de un error desconocido remanente.

Entre las fuentes posibles de incertidumbre asociadas a una medición están:

- La definición incompleta del mensurado; realización imperfecta de la definición del mensurado.
- La muestra no representa al mensurado definido.
- Conocimiento inadecuado de los efectos de las condiciones ambientales sobre las mediciones o mediciones imperfectas de dichas condiciones ambientales.
- Errores de apreciación del operador en la lectura de instrumentos.
- Resolución finita del instrumento.
- Valores inexactos de patrones de medición y materiales de referencia.
- Valores inexactos de constantes y otros parámetros obtenidos de fuentes externas.
- Aproximaciones e hipótesis incorporadas en los métodos de medición.
- Variaciones en observaciones repetidas del mensurado bajo condiciones aparentemente iguales.

Estas fuentes no son necesariamente independientes y la dependencia de éstas con otras puede contribuir en la influencia de una tercera fuente. Un efecto sistemático no reconocido no puede considerarse en la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición pero contribuye en su error. Tradicionalmente se considera que un error está compuesto por dos componentes una aleatoria y una sistemática.

Con base en la norma NMX-CH-140-IMNC-2002 “Guía para la expresión de la incertidumbre en mediciones”, los pasos para evaluar la incertidumbre de los resultados de una medición o de un proceso de medición se pueden resumir como sigue:

- 1) Expresar matemáticamente la relación del mensurado Y y las magnitudes de entrada X_i de las que depende Y mediante una función de distribución en la cual $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- 2) Determinar el valor estimado de la magnitud de entrada X_i , por medio de un análisis estadístico de una serie de observaciones o por otro método.
- 3) Calcular el valor esperado, la varianza y desviación estándar de cada estimado X_i .
- 4) Evaluar las covarianzas asociadas con cualquier estimado de las magnitudes de entrada que estén correlacionadas.
- 5) Calcular el resultado de la medición a partir de la función $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- 6) Informar del resultado de la medición “ y ” junto con su desviación estándar.

Sin embargo, lo anterior refleja también la variabilidad intrínseca del propio parámetro. En las variables que influyen en la determinación de un parámetro del suelo se tiene mayor control en las que involucran ensayos de campo y laboratorio, buscando minimizar la incertidumbre inherente a éstas se deben realizar de forma adecuada mediante procedimientos certificados y estandarizados.

5.3.1 Incertidumbre asociada a la variación espacial

La variabilidad espacial de las propiedades del suelo dentro de un estrato se puede describir por medio de campos aleatorios, Auvinet y González (2000), donde los valores de una propiedad dada en un punto X son considerados como una realización de un campo, que está definido por sus primeros momentos (valor esperado, varianza, coeficiente de variación y autocorrelación espacial).

En una masa de suelo estadísticamente homogénea, el valor esperado y la varianza son constantes en todo el dominio, aunque la autocorrelación espacial se espera que sea altamente anisótropa, lo que refleja el proceso de formación geológica del estrato de suelo o el procedimiento constructivo de la masa de suelo, en el caso de taludes construidos por el hombre.

En el caso de estructuras de tierra, Auvinet y González (2000) determinan que la autocorrelación espacial en la dirección vertical presenta oscilaciones bien definidas por el espesor de la capa en el sentido vertical y un rápido decremento con la distancia vertical entre dos puntos, mientras que decrece con mayor lentitud a lo largo de la dirección horizontal, por lo cual la autocorrelación del vector distancia T entre dos puntos del medio es:

$$\rho_v(X_1, X_2) = \rho_v(T) \quad (5.3)$$

Con lo anterior, el valor promedio V_A de la propiedad $V(X)$ en un dominio A es:

$$V_A = \frac{1}{A} \int_A V(X) dX \quad (5.4)$$

Y la varianza de este promedio es:

$$\text{Var}[V_A] = \frac{\sigma^2_{V(X)}}{A^2} \iint_A \rho_v(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (5.4)$$

Esta fórmula considera el efecto de escala geométrico debido a que la varianza del valor promedio de una propiedad aleatoria en un dominio dado, decrece conforme aumenta el tamaño del dominio.

Para aplicar la formulación de Vanmarcke (1977) y Auvinet y González (2000) se debe hacer el análisis de estabilidad con un modelo tridimensional. De otra forma el análisis no puede realizarse. Este método puede adaptarse al método de elemento finito tridimensional. En esos análisis, si las propiedades mecánicas son afectadas por la incertidumbre asociada a la variación espacial, las variables del momento resistente, MR, y Momento motor, MM, en el caso de mecanismos rotacionales, deben considerarse como variables aleatorias.

La probabilidad de falla asociada a una superficie de falla particular se define con la ecuación 5.5.

$$p_f = P[FS < 1] \quad (5.5)$$

Una expresión equivalente al cálculo de la confiabilidad es considerando el margen de seguridad, MS, que está definido por la ecuación 5.6, en la cual:

$$MS = MR - MM \quad (5.6)$$

Con lo cual la probabilidad de falla se define como:

$$p_f = P[MS < 0] \quad (5.7)$$

El índice de confiabilidad para este caso es:

$$\beta = \frac{E\{MS\}}{\sigma_{MS}} \quad (5.8)$$

La esperanza del margen de seguridad se evalúa con un análisis determinista de estabilidad considerando el valor esperado de la resistencia al corte, ecuación 5.9, y la desviación estándar del margen de seguridad se calcula con la ecuación 5.10.

$$E\{MS\} \cong E\{MR\} \left(1 - \frac{1}{E\{FS\}} \right) \quad (5.9)$$

$$\sigma_{MS} = \sqrt{\sigma_{MR}^2 + \sigma_{MM}^2 - 2Cov[MR, MM]} \quad (5.10)$$

Debido a que la fuerza resistente depende de la resistencia al corte no drenada a lo largo de la superficie de falla y la fuerza motora depende del peso específico del suelo, y como al peso volumétrico se puede considerar como determinista, la ecuación 5.8 se puede simplificar a:

$$\beta = \frac{E\{MS\}}{\sigma_{MR}} \quad (5.11)$$

Debido a que la desviación estándar de la fuerza resistente puede definirse en términos de la resistencia al corte del material, la varianza del momento resistente se considera como:

$$\text{var}[MR] = \text{var}[c_u] \quad (5.12)$$

Si el campo aleatorio de la resistencia al corte y el margen de seguridad se consideran Gaussiano, la probabilidad de falla en términos del índice de confiabilidad se expresa como:

$$P[MS < 0] = \Phi \left(\frac{0 - E\{MS\}}{\sigma_{MS}} \right) = \Phi(-\beta) \quad (5.13)$$

Donde Φ es la función de distribución de probabilidad normal.

En esta tesis se aborda el problema de la incertidumbre en las propiedades del suelo considerando el valor medio de los parámetros de interés y no el valor más probable de la propiedad (que en algunos casos pudieran llegar a ser iguales).

5.3.2 Incertidumbre intrínseca de las propiedades del suelo

La varianza promedio de un parámetro definida a lo largo de la superficie de falla, ecuación 5.4, tiende a cero conforme el valor de A tiende a infinito, ecuación 5.14, por lo cual para superficies de falla relativamente grandes se puede eventualmente despreciar la incertidumbre asociada a la variación espacial, quedando la incertidumbre inherente a la propiedad del suelo en análisis.

$$\text{Var}[V_A] \approx 0 \text{ para } A \rightarrow \infty \quad (5.14)$$

Lo anterior permite realizar los análisis de estabilidad con modelos bidimensionales, considerando para el cálculo del índice de confiabilidad los valores del parámetro del suelo aleatorio como una sola población. Ejemplos de este criterio son los trabajos realizados por Duncan (2000), Christian (2000), Harr (1987) y Wolff (1995).

Con éstos modelos se determinan los primeros momentos de la variable aleatoria que se considera para obtener el índice de confiabilidad, se calculan la media y desviación estándar por algún método de ajuste, Monte Carlo, primeros momentos y primer orden, estimadores puntuales, del factor de seguridad.

En el ejemplo 5.2 se aplica este procedimiento para calcular el índice de confiabilidad del talud del ejemplo 5.1, considerando como población a los valores de la cohesión obtenidos en la prueba triaxial rápida y mediante correlaciones de la resistencia de punta del cono eléctrico.

Ejemplo 5.2

Se utilizó el método Monte Carlo mediante el programa de Slope/W para estabilidad de taludes realizando 5000 simulaciones. Se considera al peso volumétrico como determinista y a la cohesión como una variable aleatoria. La tabla 5.3 presenta los valores considerados en el análisis.

Tabla 5.3 Valores utilizados para el análisis

Estrato	Peso volumétrico γ (t/m ³)	Cohesión, c (kg/cm ²)		
		E{c}	var[c]	σ_c
Suelo 1	1.4	0.40	0.224	0.050
Suelo 2	1.2	0.25	0.064	0.004

El histograma del factor de seguridad contra la frecuencia en porcentaje se presenta en la figura 5.5.

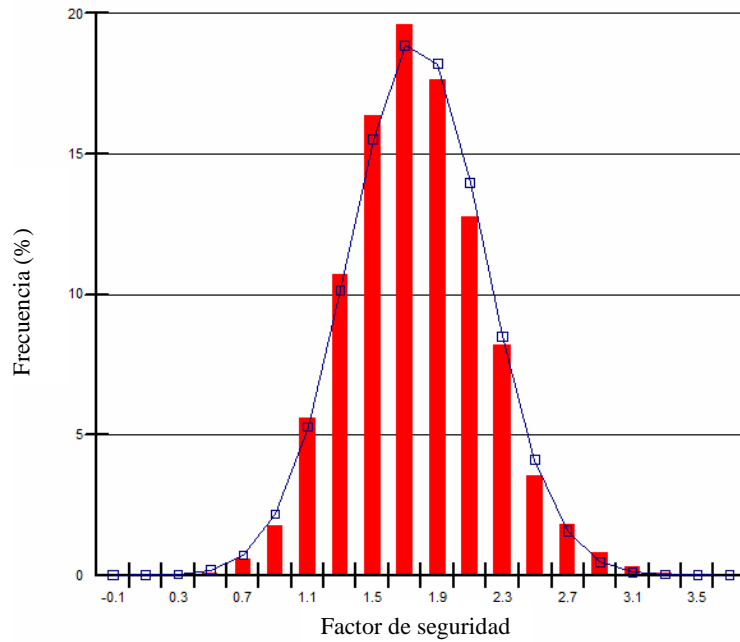


Figura 5.5. Histograma del factor de seguridad obtenido aplicando el método de Monte Carlo

El factor de seguridad presenta un valor mínimo, FS_{min} , de 0.57 y un valor máximo, FS_{max} , de 3.69 con una esperanza de 1.68 y una desviación estándar de 0.417. La figura 5.6 presenta la superficie de falla crítica y el valor esperado del factor de seguridad.

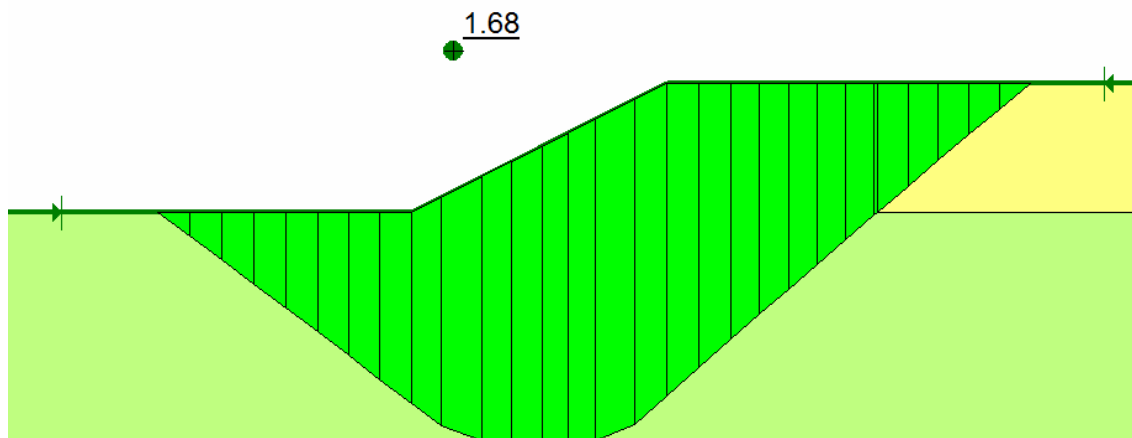


Figura 5.6. Valor esperado del factor de seguridad y superficie de falla calculada con el método de Monte Carlo

El índice de confiabilidad se calcula aplicando el criterio propuesto por Christian (2000) y Harr (1987), ecuación 5.14, se considera al $FS = 1$ como frontera para el estado de falla crítico.

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}} \quad (5.15)$$

El índice de confiabilidad para el talud en referencia es $\beta = 1.63$.

6 EJEMPLO DE APLICACIÓN

6.1 Ejemplo 6.1

Se tiene un talud de 6 metros de altura con pendiente 1.5 : 1, horizontal a vertical, que forma parte de los bordos marginales de un canal para conducción de agua; se considera que el canal está a su máxima capacidad, con tirante de 6 m, figura 6.1

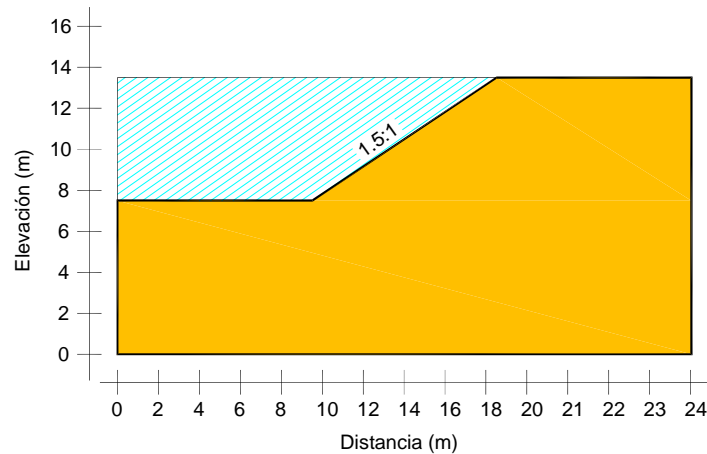


Figura 6.1. Talud de referencia

El talud está formado por arcilla arenosa, con peso volumétrico de 16 kN/m^3 , las propiedades de resistencia se consideran a partir del modelo de Mohr – Coulomb obtenidas en pruebas triaxiales UU, no consolidadas, no drenadas. Se tiene la incertidumbre en los resultados obtenidos en éstas, por lo que se considera a la cohesión y al ángulo de fricción como variables aleatorias con distribución muy semejante a la normal.

El ángulo de fricción tiene un valor medio de 25° y una desviación estándar de 2° , figura 6.2; y la cohesión presenta una media de 10 kPa, con una desviación estándar de 2 kPa, figura 6.3.

El factor de seguridad mínimo y el círculo de falla asociado a éste se calcularon aplicando el método de Morgentern – Price y es $FS = 3$, figura 6.4, para condiciones estáticas. Se busca calcular el índice de confiabilidad para el talud, considerando como $FS = 1$ para la condición de falla, con los siguientes métodos: Monte Carlo, Regla del 3σ , estimación puntual, primeros momentos y primer orden.

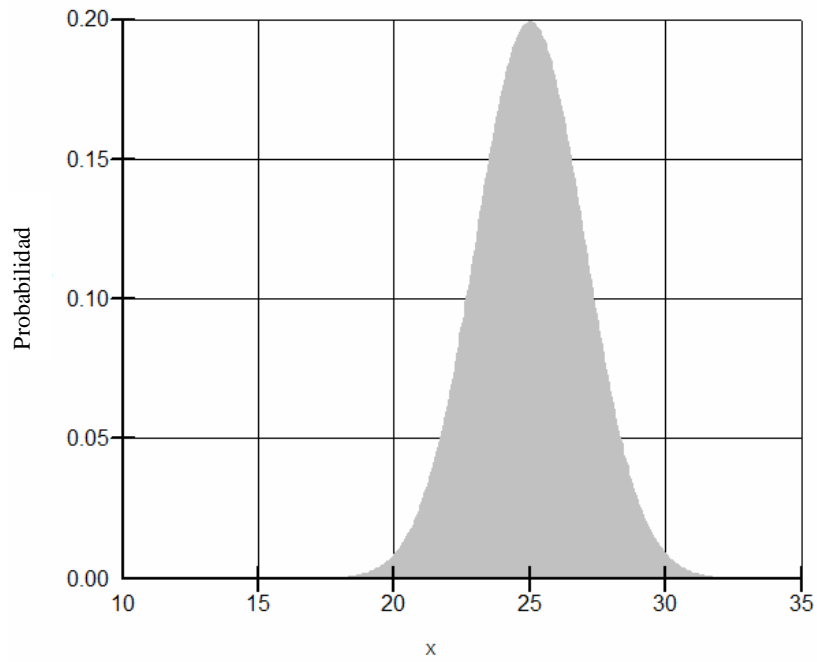


Figura 6.2. Función de densidad Beta para el ángulo de fricción

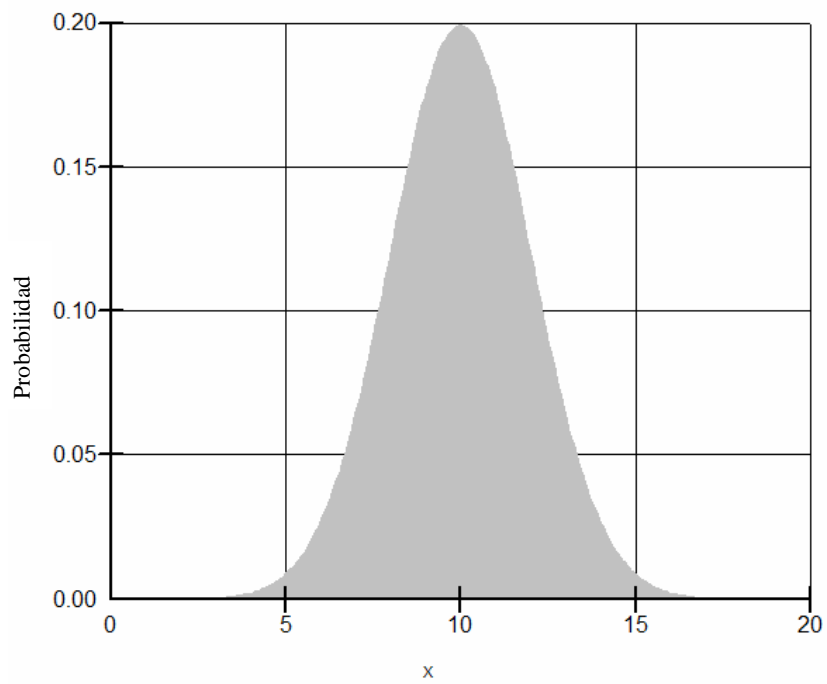


Figura 6.3. Función de densidad Beta para la cohesión

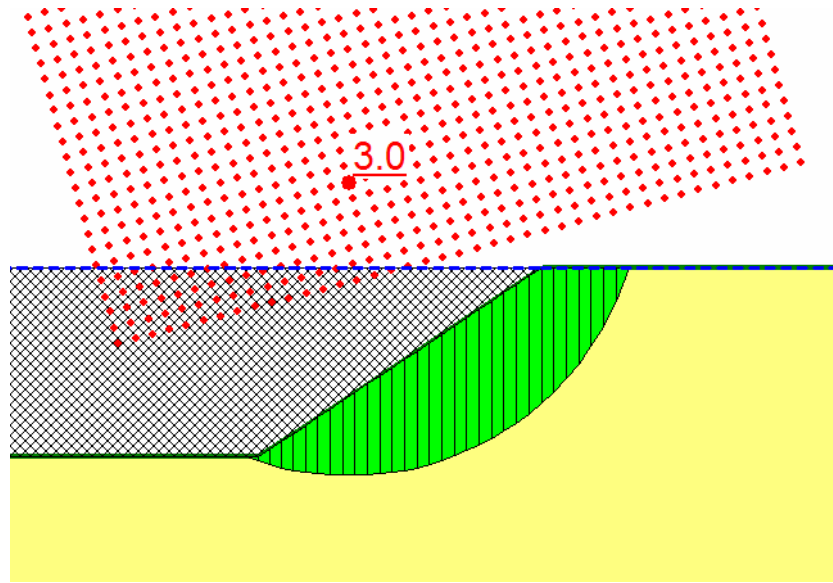


Figura 6.4. Mínimo factor de seguridad y círculo de falla crítico

- **Método de Monte Carlo.**

El método de Monte Carlo se aplicó utilizando el programa de Slope/W para estabilidad de taludes realizando 5000 simulaciones. El histograma del factor de seguridad contra la frecuencia en porcentaje obtenido se presenta en la figura 6.5.

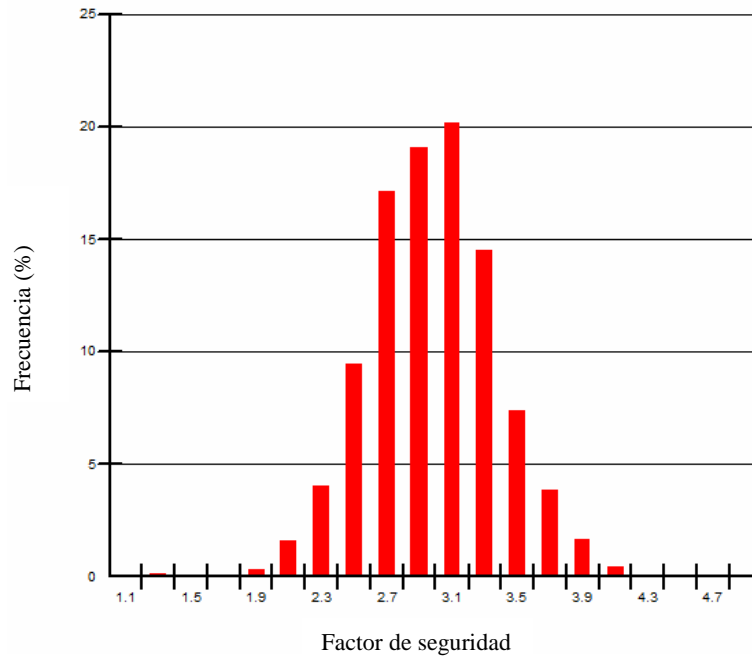


Figura 6.5. Histograma del factor de seguridad obtenido aplicando el método de Monte Carlo

El factor de seguridad presenta un valor mínimo, FS_{\min} , de 1.21 y un valor máximo, FS_{\max} , de 4.34, con una media de 2.98 y una desviación estándar de 0.389.

Se observa que el histograma presenta una distribución semejante a la función de densidad normal; para comprobarlo se realiza el ajuste de ésta función de distribución, se busca cumplir con las igualdades:

$$E\{FS\} = \mu_{FS} \quad (6.1)$$

$$\text{var}[FS] = \sigma_{FS}^2 \quad (6.2)$$

La esperanza y desviación estándar de la distribución normal son:

$$E\{FS\} = 0 \quad (6.3)$$

$$\text{var}[FS] = 1 \quad (6.4)$$

La media y la varianza de la muestra, en valores estandarizados, son:

$$M_{FS} = 0$$

$$\sigma_{FS}^2 = 0.158$$

Sustituyendo en las ecuaciones 6.1 y 6.2 se tiene:

$$E\{FS\} - \mu_{FS} = 0 \quad (6.5)$$

$$0 - 0 = 0$$

$$\text{var}[FS] - \sigma_{FS}^2 = 0 \quad (6.6)$$

$$1 - 0.158 = 0.842$$

Se observa que en cuanto a la media se logra la igualdad; sin embargo, para la varianza se tiene una diferencia de 0.842, por lo cual la distribución del histograma no se ajusta en su totalidad a la distribución normal.

Por lo anterior, se comprueba el ajuste con la función de densidad Beta, se busca cumplir con las igualdades:

$$E\{FS\} = \mu_{FS}$$

$$\text{var}[FS] = \sigma_{FS}^2$$

La esperanza y desviación estándar de la distribución Beta son:

$$E\{FS\} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \tag{6.7}$$

$$\text{var}[FS] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \tag{6.8}$$

Los valores de α y β se obtienen del nomograma de la figura 6.6, para nuestro caso son de 5 y 7, respectivamente.

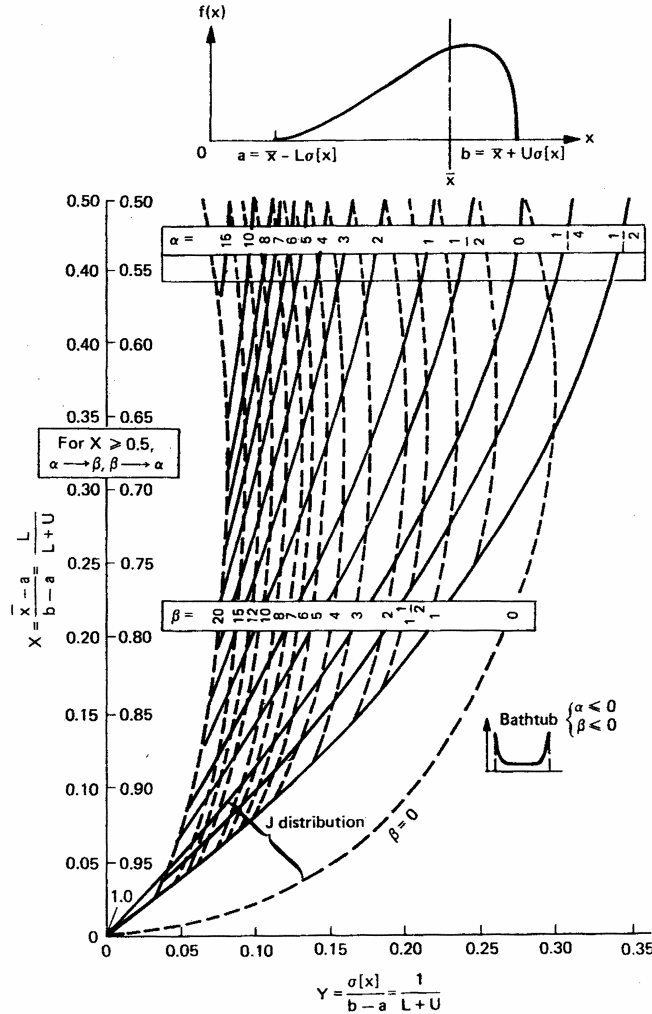


Figura 6.6. Valores de los parámetros α y β

Sustituyendo en las ecuaciones 6.6 y 6.7, se tiene:

$$E\{FS\} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E\{FS\} = \frac{5}{5 + 7}$$

$$E\{FS\} = 0.41$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\text{FS}] &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\ \text{var}[\text{FS}] &= \frac{5(7)}{(5 + 7)^2(5 + 7 + 1)} \\ \text{var}[\text{FS}] &= 0.018 \end{aligned}$$

La media y la varianza de la muestra, en valores estandarizados son:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{FS}} &= 0 \\ \sigma_{\text{FS}}^2 &= 0.158 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 6.5 y 6.6 se tiene:

$$\begin{aligned} E\{\text{FS}\} - \mu_{\text{FS}} &= 0.5 \\ 0.41 - 0 &= 0.41 \\ \text{var}[\text{FS}] - \sigma_{\text{FS}}^2 &= 0 \\ 0.018 - 0.158 &= - 0.14 \end{aligned}$$

El ajuste con esta distribución conducen a desigualdades menores que las obtenidas al realizar el ajuste con la distribución Normal. Se considera a la distribución Beta como la representativa para el factor de seguridad.

En este caso en particular coincide que la función de densidad de los parámetros de entrada sea igual a la función del parámetro a calcularse.

El índice de confiabilidad se calcula aplicando el criterio propuesto por Christian (2000) y Harr (1987), ecuación 6.9.

$$\beta = \frac{E\{\text{FS}\} - 1}{\text{var}[\text{FS}]^{0.5}} \quad (6.9)$$

Sustituyendo:

$$\beta = \frac{E\{FS\}-1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

$$\beta = \frac{2.98-1}{(0.158)^{0.5}}$$

$$\beta = 4.97$$

El índice de confiabilidad calculado aplicando los primeros momentos del método de Monte Carlo es de 4.97.

- **Método de la regla de 3σ**

Aplicando la regla del 3σ , se buscan determinar la media y desviación estándar del factor de seguridad para el talud en referencia. Se conoce que los valores mínimos y máximos son 1.21 y 4.34, respectivamente.

Aplicando las ecuaciones del método se tiene:

a) Cálculo de la desviación estándar

$$\sigma = \frac{FS_{\max} - FS_{\min}}{6} \tag{6.10}$$

$$\sigma = \frac{4.34-1.21}{6}$$

$$\sigma = 0.521$$

b) Cálculo de la media

$$\mu = FS_{\max} - 3\sigma \tag{6.11}$$

$$\mu = 4.34 - 3(0.521)$$

$$\mu = 2.77$$

Considerando que se cumplen las igualdades 6.5 y 6.6, el índice de confiabilidad para los primeros momentos obtenidos mediante la regla del 3σ , es:

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

$$\beta = \frac{2.77 - 1}{0.521}$$

$$\beta = 3.39$$

• **Método de estimación puntual**

Aplicando el método de estimación puntual propuesto por Rosenblueth se busca determinar los primeros momentos del factor de seguridad a partir de los primeros momentos de las funciones de densidad de las variables de entradas.

El momento a la M aplicando este método es:

$$E[Y^M] = p_{++}g(c_+, \emptyset_+)^M + p_{+-}g(c_+, \emptyset_-)^M + p_{-+}g(c_-, \emptyset_+)^M + p_{--}g(c_-, \emptyset_-)^M \quad (6.12)$$

$$P_{+-} = P_{-+} = (P_{c-})(P_{\emptyset+}) - \frac{\rho}{4} \quad (6.13)$$

$$P_{++} = P_{--} = (P_{c+})(P_{\emptyset+}) + \frac{\rho}{4} \quad (6.14)$$

Se considera que la concentración de probabilidad es:

$$P_{c+} = P_{c-} = 0.5$$

$$P_{\emptyset+} = P_{\emptyset-} = 0.5$$

El coeficiente de correlación de c y \emptyset es:

$$\rho_{c\emptyset} = \frac{\sigma_{c\emptyset}}{\sigma_c \sigma_{\emptyset}} \quad (6.15)$$

$$\rho_{c\emptyset} = \frac{0}{2(2)} = 0$$

La concentración de probabilidad conjunta es:

$$P_{+-} = P_{-+} = (0.5)(0.5) - \frac{0}{4}$$

$$P_{+-} = P_{-+} = 0.25$$

$$P_{++} = P_{--} = (0.5)(0.5) + \frac{0}{4}$$

$$P_{++} = P_{--} = 0.25$$

Los valores puntuales para este caso son:

$$c_+ = 10 + 2 = 12$$

$$c_- = 10 - 2 = 8$$

$$\emptyset_+ = 25 + 2 = 27$$

$$\emptyset_- = 25 - 2 = 23$$

Con estos valores se calcula el factor de seguridad empleando el método de Morgenstern – Price mediante el programa slope/W para los arreglos indicados; el factor de seguridad para cada arreglo es:

$$FS(c_+, \emptyset_+) = FS(12, 27) = 3.45$$

$$FS(c_+, \emptyset_-) = FS(12, 23) = 3.23$$

$$FS(c_-, \emptyset_+) = FS(8, 27) = 2.69$$

$$FS(c_-, \emptyset_-) = FS(8, 23) = 2.50$$

Con estos valores se obtiene la esperanza del factor de seguridad, que es:

$$E[FS] = 0.25(3.45) + 0.25(3.23) + 0.25(2.69) + 0.25(2.50)$$

$$E[FS] = 2.97$$

La varianza del factor de seguridad se calcula a partir de los valores obtenidos para los arreglos antes mencionados y la esperanza del factor de seguridad calculada, en este caso es:

$$\begin{aligned} \text{var}[\text{FS}] &= P_{++} (g(c_+, \emptyset_+) - E\{\text{FS}\})^2 + P_{+-} (g(c_+, \emptyset_-) - E\{\text{FS}\})^2 \\ &\quad + P_{-+} (g(c_-, \emptyset_+) - E\{\text{FS}\})^2 + P_{--} (g(c_-, \emptyset_-) - E\{\text{FS}\})^2 \\ \text{var}[\text{FS}] &= 0.25(3.45 - 2.97)^2 + 0.25(3.23 - 2.97)^2 + 0.25(2.69 - 2.97)^2 + 0.25(2.50 - 2.97)^2 \\ \text{var}[\text{FS}] &= 0.149 \end{aligned}$$

Considerando que se cumplen las igualdades 6.5 y 6.6, el índice de confiabilidad para los primeros momentos obtenidos mediante el método de estimación puntual, es:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{E\{\text{FS}\} - 1}{\text{var}[\text{FS}]^{0.5}} \\ \beta &= \frac{2.97 - 1}{(0.149)^{0.5}} = 5.10 \end{aligned}$$

- **Método de primeros momentos y primer orden**

Este método calcula los primeros momentos de la variable de interés a partir de la expansión de la serie de Taylor hasta la primera derivada. En nuestro caso, el factor de seguridad se calcula con el método de Morgenstern – Price mediante el programa Slope/W, considerando el valor de la esperanza de la cohesión y del ángulo de fricción, ecuación 6.16.

$$E\{\text{FS}\} = \text{FS}(E\{\emptyset\}, E\{c\}) \tag{6.16}$$

Para nuestro caso, se tiene:

$$\begin{aligned} E\{\text{FS}\} &= \text{FS}(25, 10) \\ E\{\text{FS}\} &= 2.98 \end{aligned}$$

La varianza del factor de seguridad se calcula mediante la ecuación 6.17.

$$\text{var}[\text{FS}] = \left(\frac{\partial \text{FS}}{\partial c} \right)^2 \text{var}[c] + \left(\frac{\partial \text{FS}}{\partial \emptyset} \right)^2 \text{var}[\emptyset] \tag{6.17}$$

La derivada parcial se calcula de forma aproximada, Harr (1987), con la ecuación 6.18.

$$\frac{\partial FS}{\partial c} = \frac{FS(E\{c\} + \sigma_c) - FS(E\{c\} - \sigma_c)}{2\sigma_c} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \emptyset} = \frac{FS(E\{\emptyset\} + \sigma_\emptyset) - FS(E\{\emptyset\} - \sigma_\emptyset)}{2\sigma_\emptyset} \quad (6.19)$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial FS}{\partial c} = \frac{FS(12) - FS(8)}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial c} = \frac{3.34 - 2.59}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial c} = 0.187$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \emptyset} = \frac{FS(27) - FS(23)}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \emptyset} = \frac{3.08 - 2.87}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \emptyset} = 0.052$$

La varianza del factor de seguridad es:

$$\text{var}[FS] = 4(0.187)^2 + 4(0.052)^2$$

$$\text{var}[FS] = 0.151$$

El índice de confiabilidad para los primeros momentos obtenidos mediante primeros momentos y primer orden, es:

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

$$\beta = \frac{2.98 - 1}{(0.151)^{0.5}} = 5.09$$

En la tabla 6.1 se presenta el resumen de los valores obtenidos por los diferentes métodos.

Tabla 6.1. Resumen del índice de confiabilidad y primeros momentos del factor de seguridad

Método	$E\{FS\}$	$var\{FS\}$	σ_{FS}	β
Monte Carlo	2.98	0.151	0.389	4.97
Regla del 3σ	2.77	0.271	0.521	3.39
Estimación puntual	2.97	0.149	0.386	5.10
Primeros momentos y primer orden	2.98	0.151	0.388	5.09

6.2 Ejemplo 6.2

Se considera que el talud del ejemplo 6.1 sufre un proceso de vaciado rápido, disminuyendo el tirante del nivel máximo de 6 m a 2 m en un lapso de 4 horas. Se busca definir el índice de confiabilidad para esta condición aplicando los métodos empleados en el ejemplo 6.1.

- **Método de Monte Carlo.**

El método de Monte Carlo se aplicó utilizando el programa de Slope/W para estabilidad de taludes realizando 5000 simulaciones, y variación de la presión de poro debida al vaciado rápido de cálculo mediante el programa Seep/W, considerando que el nivel del tirante cambiaba con una velocidad de 1 m por hora.

El histograma del factor de seguridad contra la frecuencia en porcentaje obtenido se presenta en la figura 6.7.

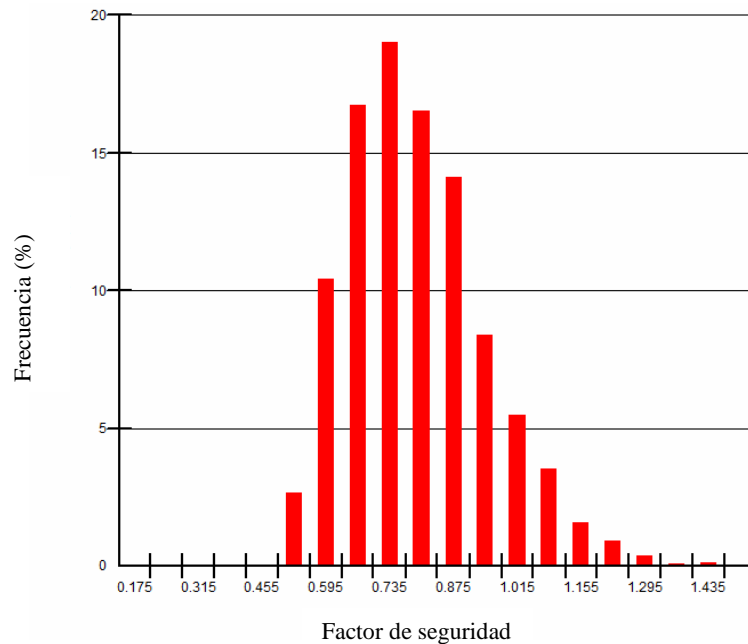


Figura 6.7. Histograma del factor de seguridad obtenido aplicando el método de Monte Carlo

El factor de seguridad presenta un valor mínimo, FS_{\min} , de 0.39 y un valor máximo, FS_{\max} , de 1.44 con una media de 0.79 y una desviación estándar de 0.152.

El índice de confiabilidad se calcula aplicando el criterio propuesto por Christian (2000) y Harr (1987).

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

Sustituyendo:

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

$$\beta = \frac{0.79 - 1}{0.152}$$

$$\beta = -1.38$$

El índice de confiabilidad calculado aplicando los primeros momentos del método de Monte Carlo es de -1.38.

- **Método de la regla de 3σ**

Con la regla del 3σ se busca determinar la media y desviación estándar del factor de seguridad para el talud en referencia. Se conoce que los valores mínimos y máximos son 0.39 y 1.44, respectivamente.

Aplicando las ecuaciones del método se tiene:

Cálculo de la desviación estándar

$$\sigma = \frac{FS_{\max} - FS_{\min}}{6}$$

$$\sigma = \frac{1.44 - 0.39}{6}$$

$$\sigma = 0.175$$

Cálculo de la media

$$\mu = FS_{\max} - 3\sigma$$

$$\mu = 1.44 - 3(0.175)$$

$$\mu = 0.915$$

Considerando que se cumplen las igualdades 6.5 y 6.6, el índice de confiabilidad para los primeros momentos obtenidos mediante la regla del 3σ , es:

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

$$\beta = \frac{0.915 - 1}{0.175}$$

$$\beta = -0.48$$

- **Método de estimación puntual**

Aplicando el método de estimación puntual propuesto por Rosenblueth, se busca determinar los primeros momentos del factor de seguridad a partir de los primeros momentos de las funciones de densidad de las variables de entradas.

El momento a la M aplicando este método es:

$$E[Y^M] = p_{++}g(c_+, \emptyset_+)^M + p_{+-}g(c_+, \emptyset_-)^M + p_{-+}g(c_-, \emptyset_+)^M + p_{--}g(c_-, \emptyset_-)^M$$

$$P_{+-} = P_{-+} = (P_{c-})(P_{\emptyset+}) - \frac{\rho}{4}$$

$$P_{++} = P_{--} = (P_{c+})(P_{\emptyset+}) + \frac{\rho}{4}$$

Se considera que la concentración de probabilidad es:

$$P_{c+} = P_{c-} = 0.5$$

$$P_{\emptyset+} = P_{\emptyset-} = 0.5$$

Y que las variables no están correlacionadas, como se demostró en el ejemplo 6.1, por lo que la concentración de probabilidad conjunta es:

$$P_{+-} = P_{-+} = 0.25$$

$$P_{++} = P_{--} = 0.25$$

Los valores puntuales para este caso son:

$$c_+ = 10 + 2 = 12$$

$$c_- = 10 - 2 = 8$$

$$\emptyset_+ = 25 + 2 = 27$$

$$\emptyset_- = 25 - 2 = 23$$

Con estos valores se calcula el factor de seguridad empleando el método de Morgenstern – Price mediante el programa slope/W para los arreglos indicados; el factor de seguridad para cada arreglo es:

$$FS(c_+, \emptyset_+) = FS(12, 27) = 0.85$$

$$FS(c_+, \emptyset_-) = FS(12, 23) = 0.78$$

$$FS(c_-, \emptyset_+) = FS(8, 27) = 0.51$$

$$FS(c_-, \emptyset_-) = FS(8, 23) = 0.53$$

Con estos valores se obtiene la esperanza del factor de seguridad, que es:

$$E[FS] = 0.25(0.85) + 0.25(0.78) + 0.25(0.51) + 0.25(0.53)$$

$$E[FS] = 0.667$$

La varianza del factor de seguridad se calcula a partir de los valores obtenidos para los arreglos antes mencionados y la esperanza del factor de seguridad calculada, en este caso es:

$$\begin{aligned} \text{var}[FS] = & P_{++} (g(c_+, \emptyset_+) - E\{FS\})^2 + P_{+-} (g(c_+, \emptyset_-) - E\{FS\})^2 \\ & + P_{-+} (g(c_-, \emptyset_+) - E\{FS\})^2 + P_{--} (g(c_-, \emptyset_-) - E\{FS\})^2 \end{aligned}$$

$$\text{var}[FS] = 0.25(0.85 - 0.667)^2 + 0.25(0.78 - 0.667)^2 + 0.25(0.51 - 0.667)^2 + 0.25(0.53 - 0.667)^2$$

$$\text{var}[FS] = 0.022$$

El índice de confiabilidad para los primeros momentos obtenidos mediante el método de estimación puntual, es:

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

$$\beta = \frac{0.667 - 1}{(0.022)^{0.5}} = -2.24$$

- **Método de primeros momentos y primer orden**

El factor de seguridad por este método se calcula aplicando el método de Morgenstern – Price mediante el programa Slope/W, considerado el valor de la esperanza de la cohesión y del ángulo de fricción.

$$E\{FS\} = FS(E\{\emptyset\}, E\{c\})$$

Para nuestro caso, se tiene:

$$E\{FS\} = FS(25, 10)$$

$$E\{FS\} = 0.67$$

Calculando las derivadas parciales, se tiene:

$$\frac{\partial FS}{\partial c} = \frac{FS(12) - FS(8)}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial c} = \frac{0.88 - 0.56}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial c} = 0.08$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \emptyset} = \frac{FS(27) - FS(23)}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \emptyset} = \frac{0.63 - 0.70}{4}$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \emptyset} = -0.017$$

La varianza del factor de seguridad es:

$$\text{var}[FS] = 4(0.08)^2 + 4(-0.017)^2$$

$$\text{var}[FS] = 0.026$$

El índice de confiabilidad para los primeros momentos obtenidos mediante primeros momentos y primer orden, es:

$$\beta = \frac{E\{FS\} - 1}{\text{var}[FS]^{0.5}}$$

$$\beta = \frac{0.67 - 1}{(0.026)^{0.5}} = -2.05$$

En la tabla 6.2 se presenta el resumen de los valores obtenidos por los diferentes métodos.

Tabla 6.2. Resumen del índice de confiabilidad y primeros momentos del factor de seguridad

Método	E{FS}	var[FS]	σ_{FS}	β
Monte Carlo	0.790	0.023	0.152	-1.38
Regla del 3σ	0.915	0.030	0.175	-0.48
Estimación puntual	0.667	0.022	0.148	-2.24
Primeros momentos y primer orden	0.670	0.026	0.161	-2.05

En este ejemplo lo que condiciona la estabilidad del talud es el mecanismo de falla actuante debido a que no importa que el valor que tomen las variables de entrada se obtiene como resultado un factor de seguridad menor al considerado como falla. Esto se observa al tener un índice de confiabilidad negativo al rebasarse la frontera establecida para considerar al talud en equilibrio $FS = 1$.

6.3 Ejemplo 6.3

Aplicando el método del elemento finito se busca determinar el factor de seguridad y la zona de falla para el talud del ejemplo 6.1, considerando los valores correspondientes a la media del ángulo de fricción y la cohesión de 10 kPa y 25° , respectivamente y para los siguientes arreglos: FS(12, 27), FS(12, 23), FS(8, 27) y FS(8, 23).

El cálculo se realizó utilizando el programa PLAXIS (versión estudiantil). Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 6.3 y en las figuras 6.8 a 6.12. Se observan las zonas de falla obtenidas para cada arreglo. Se nota que no existe una variación importante en cuanto a la profundidad y forma de la superficie de falla, debido a que en todos los casos corresponden a fallas por el pie del talud.

Tabla 6.3. Resumen del Factor de Seguridad obtenido por el método del elemento finito

Arreglo	c (kPa)	ϕ (°)	FS
1	10	25	3.7
2	12	27	4.1
3	12	23	3.9
4	8	27	3.4
5	8	23	3.2

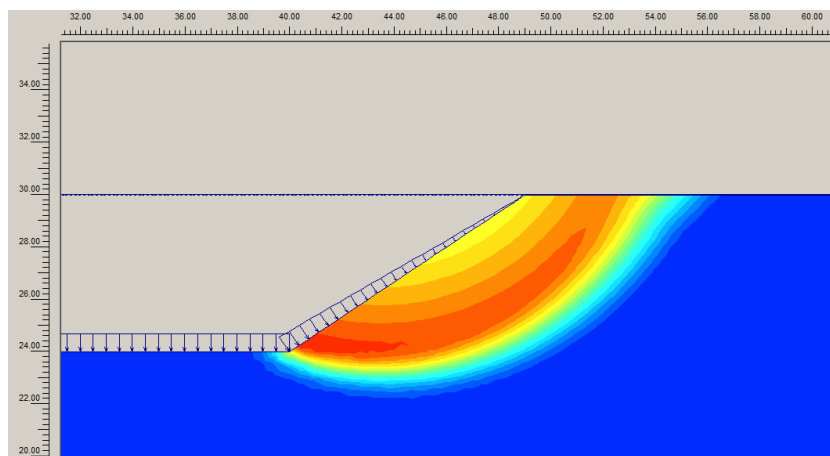


Figura 6.8. Zona de falla para FS(10,25) = 3.7

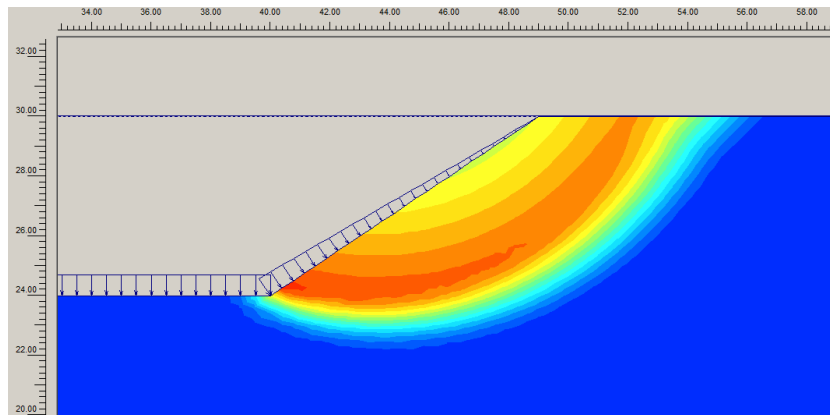


Figura 6.9. Zona de falla para FS(12,27) = 4.1

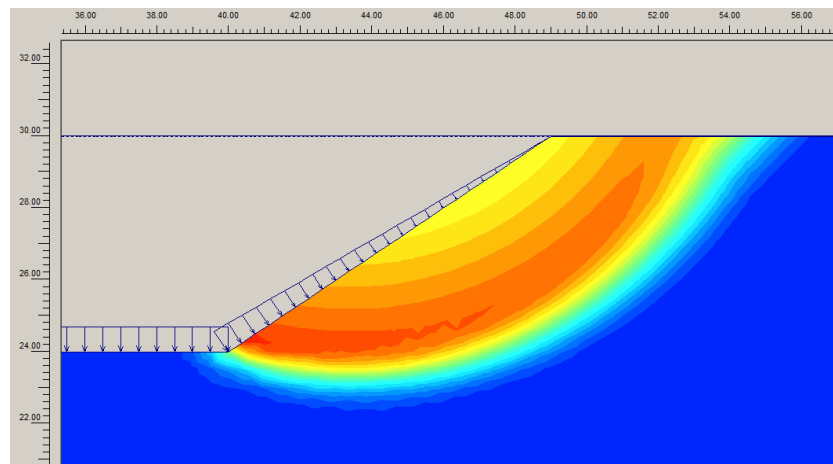


Figura 6.10. Zona de falla para $FS(10,23) = 3.9$

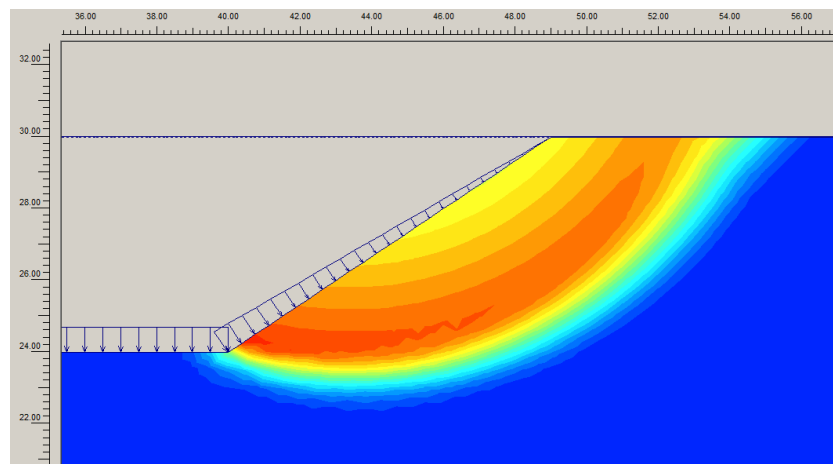


Figura 6.11. Zona de falla para $FS(8,27) = 3.4$

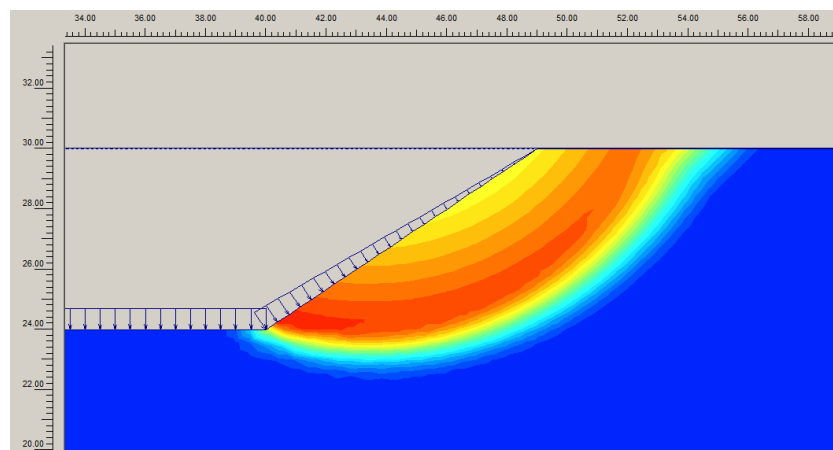


Figura 6.12. Zona de falla para $FS(8,23) = 3.2$

De los ejemplos presentados, se observa que una misma superficie de falla puede tener diferentes valores de factor de seguridad con base en la variación en las magnitudes de los parámetros involucrados en el cálculo. Como se observa en el ejemplo 6.2, en algunos casos el mecanismo de falla rige el comportamiento del talud llegando a ser más significativo que la variación de los parámetros, en el que la condición de vaciado rápido provoca la falla del talud.

7 CONCLUSIONES

- 1) La finalidad de los análisis de estabilidad de taludes es conocer la posibilidad de falla para que el diseño de cortes y rellenos que den lugar al talud o afecten la estabilidad de la ladera se realicen de forma segura y económica.
- 2) La estabilidad de un talud es afectada por los factores principales siguientes: modificaciones en su geometría, condiciones de flujo de agua, evolución de la resistencia del suelo y cambios en los esfuerzos actuantes.
- 3) El análisis de estabilidad de taludes busca determinar la magnitud de las fuerzas o momentos que provocan el movimiento y la magnitud de las fuerzas o momentos resistentes que se oponen al movimiento. El factor de seguridad es la relación entre éstos, al que intrínsecamente va ligado un grado de incertidumbre.
- 4) El diseño tradicional en estabilidad de taludes se basa en el cálculo de factores de seguridad, cuyas magnitudes derivan de la experiencia acumulada en la práctica profesional a través de muchos años.
- 5) Los análisis de confiabilidad se basan en el modelo de capacidad-demanda, en el que un comportamiento no deseable se define como la probabilidad de que la demanda exceda la capacidad.
- 6) Este análisis de confiabilidad permite tomar en cuenta la incertidumbre asociada a los parámetros del suelo y a las cargas a las que esté sometido. La incertidumbre es producto de dos factores principales: la estratigrafía y propiedades del subsuelo; y las sollicitaciones a las que se verá sometido.
- 7) Con el fin de cubrir esa incertidumbre, los análisis geotécnicos buscan cumplir con un factor de seguridad mínimo.
- 8) Los reglamentos de construcción modernos consideran a factores de carga y factores de reducción para los estados límite de falla y de servicio, en lugar de factores de seguridad.
- 9) La confiabilidad de un sistema o estructura se define como la probabilidad de que éste cumpla sus funciones de forma adecuada, dentro de un periodo de tiempo y bajo condiciones de operación establecidas.
- 10) Debido a que la evaluación rigurosa de la probabilidad de falla en la mayoría de los casos es complicada, se calcula un índice de confiabilidad que representa en forma cuantitativa al

número de desviaciones estándar a las que se encuentra el valor esperado del factor de seguridad con respecto al valor del comportamiento inadecuado.

- 11) Se han desarrollado diferentes métodos para predecir, a partir de características conocidas de las variables de entrada, los primeros momentos de la variable a calcular, en nuestro caso el factor de seguridad. El nivel de seguridad obtenido dependerá de la precisión con que son modeladas las sollicitaciones y la respuesta del suelo ante ellas. La clasificación de los métodos utilizados en los análisis de confiabilidad corresponde a su nivel de exactitud.
- 12) El método de Monte Carlo se utiliza para simular operaciones complejas que tienen muchos factores aleatorios que accionan recíprocamente; sirven como parámetro de comprobación para métodos analíticos más simples y para obtener muestras aleatorias de una variable de la cual se conoce su distribución de probabilidad. Es un método que fácilmente puede programarse en una rutina de cómputo.
- 13) El método de primeros momentos y primer orden es utilizado para estimar los primeros momentos (media y varianza), de la función de distribución resultante, con base en los momentos de las variables aleatorias de entrada a partir de la expansión de la serie de Taylor de dicha función sobre algún punto, generalmente sobre los valores de los primeros momentos de las variables de entrada.

Entre las ventajas que presenta este método están: la de proporcionar un índice relativo de la incertidumbre del resultado asociada a cada variable aleatoria que interviene en su cálculo; es exacto si se utilizan distribuciones de probabilidad lineales. Tiene como desventajas que se requiere determinar el valor de las derivadas parciales; cuando se utilizan funciones no lineales, el error aumenta al elevarse el orden de éstas.

- 14) El método de estimación puntual considera que las distribuciones de probabilidad continuas de las variables aleatorias de entrada son representadas por una distribución "equivalente", discreta, a partir de dos o más valores conocidos. Presenta como ventaja que su aplicación es relativamente más sencilla que otros métodos y sus resultados se aproximan en gran medida a los obtenidos con el método de primeros momentos y primer orden.
- 15) El método más sencillo es el llamado de la regla del 3σ , aunque es también el de mayor error. Se aplica cuando se cuenta con datos limitados y puede usarse para juzgar la racionalidad de valores de los coeficientes de variación, a partir del valor mínimo y máximo concebible para la variable de interés.

8 REFERENCIAS

- 1) Ang, A. H. S. and Amin, M. (1968), "Reliability of structures and structural systems", ASCE, J. Eng. Mech. Div., vol. 94.
- 2) Auvinet, G. (2002), "Incertidumbre en Geotecnia", XVI Conferencia Nabor Carrillo, SMMS, México.
- 3) Auvinet, G. y González J. (2000), "Análisis tridimensional de la confiabilidad de taludes" XX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos", SMMS, México.
- 4) Bishop, G. E. (1954) "The use of the slip circle in the stability analysis of slopes", *Geotechnique* 5 (1): 7 – 17.
- 5) Bishop, A. W. and Morgenstern, N. R. (1960), "Stability coefficients for earth slopes", *Geotechnique* 10 (4): 129 -147.
- 6) Budhu, M. (2007), "Soil mechanics and foundation", 2° Ed., John Wiley and Sons, New York.
- 7) Christian, J. T. (2000) "Reliability and stability of slopes", *Modeling in geomechanics*, John Wiley and Sons, New York.
- 8) Duncan, J. M. (2000), "Factors of safety and reliability in geotechnical engineering", ASCE, *Journal of geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 124 (4):307 – 316.
- 9) Fredlund, D. G. and Krahn, J. (1977), "Comparison of slope stability methods of analysis" *Canadian Geotechnical Journal* 14: 429 - 439.
- 10) Harr, M. E. (1987), "Reliability – Based desing in civil engineering", Mc. Graw Hill, USA.
- 11) Hasofer, A. A. and Lind, A. M. (1974), "An Exact and Invariant Second-Moment Code Format", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 100, 111-121.
- 12) Herrera, S. y Reséndiz, D. (1992), "Agua Prieta landslide: A case history", Raul J. Marsal Volume, SMMS, México.
- 13) Jaime, A. y Montoya, A. (2008) "Confiabilidad en geotecnia, cuatro enfoques", XXIV RNMS, SMMS, México.
- 14) Jaime, A. y Romo, M. P. (1987), "Características del suelo en el sitio Tlahuac deportivo", Proy 6504 elaborado para el DDF, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- 15) Janbu, N. (1954), "Stability analysis of slopes with dimensionless parameters", Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

- 16) Marsal, R. J. y Mazari, M. (1959), “El subsuelo de la ciudad de México”, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- 17) Marsal, R. J. y Reséndiz, D. (1975), “Presas de tierra y enrocamiento”, Limusa, México.
- 18) Mononobe, N. and Matsou, H. (1929), “On the determination of earth pressure during earthquakes” Proceeding World Engineering Congress, pp. 9.
- 19) Morgenstern, N. R. and Price, V. E. (1965), The analysis of the stability of general slip surfaces”, *Geotechnique* 15: 79 – 93.
- 20) Morgenstern, N. R. (1963), “Stability charts for earth slopes during rapid drawdown “, *Geotechnique* 113(2).
- 21) Muzachiodi, S. (2003), “Implicancias del Data Mining”, UNER, Argentina.
- 22) NMX-CH-IMNC-2002, “Guía para la expresión de incertidumbre en mediciones” Instituto mexicano de normalización y certificación, A. C., México.
- 23) Okabe, S. (1926), “General theory of earth pressures”, *Journal Japan Society of Civil Engineering*, Vol. 12 (1).
- 24) Rico, A. y Del Castillo, H. (2000), “La ingeniería de suelos en las vías terrestres”, 16° Reimpresión, Limusa, México.
- 25) Rosenblueth, E. (1975), “Point estimates for probability moments”, *Proceedings of the National Academy of Science*, 72 (10), USA.
- 26) Rosenblueth, E. (1981), “Two-Point Estimates in Probabilities”, *Applied Mathematical Modeling*, 5.
- 27) Taylor, D. W. (1948), “Fundamentals of soil mechanics” John Wiley and Sons, New York.
- 28) Terzaghi, K. (1948), “Soil Mechanics in Engineering Practice”, John Wiley and Sons, New York.
- 29) USACE (2003), “Slope stability”, Engineer manual EM-1110-2-1902, USA.
- 30) Vanmarcke, E. H. (1977), “Reliability of earth slopes”, ASCE, *Journal of Geotechnical Engineering Division*, vol. 103 (11): 1247 – 1265.
- 31) Walpole, R. E. (2007), “Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias” 8a. Edición, Prentice Hall, México.
- 32) Wolff, T. F. (1995), “Introduction to probability and reliability methods for use in geotechnical engineering”, ETL 1110-2-547, USCE.