



DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



FILTROS ACTIVOS

ANÁLISIS Y DISEÑO

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Antonio Salvá Calleja



FILTROS ACTIVOS

ANÁLISIS Y DISEÑO

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Antonio Salvá Calleja



SÁNCHEZ ESQUIVEL, Víctor Manuel

SALVÁ CALLEJA, Antonio

Filtros activos. Análisis y diseño

Universidad Nacional Autónoma de México,

Facultad de Ingeniería, 2026, 134 p.

Filtros activos. Análisis y diseño

Primera edición electrónica

de un ejemplar (6 MB) Formato PDF

Publicado en línea en marzo de 2026

D.R. © 2026, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA

<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional
Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total
o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita
del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuidado de la edición: Patricia Eugenia García Naranjo

Formación editorial y diseño de portada: Nismet Díaz Ferro

Fotografía de portada: Pikisuperstar/Freepik

Semblanza de los autores

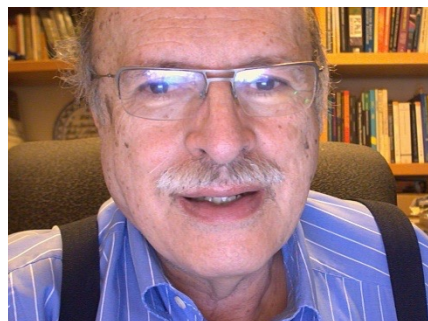
Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Profesor universitario convencido de que no hay ninguna certidumbre ahí donde no se pueda expresar con números. Con formación en ingeniería electromecánica, ha impartido cursos vinculados con sistemas y señales, circuitos eléctricos, electricidad y magnetismo y filtros eléctricos en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Su labor académica se ha complementado con proyectos de investigación, desarrollo y construcción de material didáctico. Ha participado en congresos internacionales y nacionales. Coautor del proyecto del Laboratorio de Circuitos Eléctricos de la División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería.



Antonio Salvá Calleja

El maestro Antonio Salvá Calleja es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Es Ingeniero Mecánico Electricista en el área de Comunicaciones, Electrónica y Control; titulado por la UNAM, cuenta con la Maestría en Ingeniería Eléctrica en esta misma Institución. Sus áreas de interés y experiencia son: Teoría de Circuitos, Control Analógico, Control Digital, Control Lógico, Filtros Eléctricos, Instrumentación y aplicaciones de los microcontroladores en las disciplinas aquí mencionadas. Ha escrito software para el diseño de filtros activos y digitales. Ha desarrollado software y hardware para aprendizaje y diseño de aplicaciones basadas en el microprocesador Z80 y, entre otros, los siguientes microcontroladores: 68HC11, 68HC12, 68HC908, MC9S08GT60, MC9S08QG8, MC9S08SH32, MSP430, TIVA y STM32F4XX.



Prefacio

Estas notas recogen la experiencia de los autores al impartir temas relacionados con el estudio, análisis y construcción de filtros eléctricos, tanto a los alumnos de la Licenciatura de Ingeniería Eléctrica y Computación, como a ingenieros que actualizan sus conocimientos y experiencias en la División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

La finalidad para escribir estos apuntes es la de contar con literatura y material didáctico donde se presente en forma ágil y clara información tanto teórica como práctica relacionada con los filtros eléctricos, para que los estudiantes de las asignaturas que tratan estos temas y conceptos encuentren teoría e información que normalmente está dispersa en diversas obras afines.

El Capítulo 1 inicia con el concepto de *la respuesta en frecuencia*, la forma correspondiente de los filtros eléctricos ideales y la de filtros eléctricos de primer y segundo orden. Continúa con los teoremas de escalamiento de impedancia y de frecuencia y finaliza con la descripción de las transformaciones de frecuencia requeridas para obtener, a partir de filtros eléctricos pasa bajas normalizados, filtros eléctricos desnormalizados pasa bajas, pasa altas, pasa banda y supresores de banda.

El Capítulo 2 explica la teoría relacionada con las aproximaciones clásicas pasa bajas normalizadas de tipo Butterworth, Chebyshev, Bessel y Elíptico. Cabe señalar, que en la literatura a la aproximación Bessel también se le denomina aproximación Thomson. Además, se describe el formato empleado, en este vademécum, para la definición de las plantillas de diseño asociadas con diversos requerimientos de filtrado.

En el Capítulo 3 se describe cómo realizar filtros eléctricos activos de orden dos, que como se sabe son los bloques funcionales básicos para la realización de filtros eléctricos activos de orden superior a dos. Para la obtención de las funciones de transferencia de las etapas básicas de orden dos, pasa bajas, pasa altas, pasa banda, supresor de banda y pasa todo, se emplea el poderoso método de análisis de nodos y las propiedades primordiales de los amplificadores operacionales. A partir de las expresiones para los coeficientes obtenidos en las diversas funciones de transferencia, se plantean por igualación de estos con definiciones estándar de coeficientes de etapas de orden dos, ecuaciones de diseño que se emplean para la obtención de los valores requeridos para los elementos resistivos y capacitivos implicados.

En el Capítulo 4 se define el concepto de *sensibilidad* de los parámetros de los filtros eléctricos con respecto a los valores de los componentes eléctricos asociados. Los parámetros de los filtros eléctricos podrían ser entre otros Q y ω_0 de una etapa de orden dos. Los valores de los componentes

o elementos físicos son valores de resistores, valores de capacitores y ganancias de etapas activas realizadas con amplificadores operacionales. Empleando las diversas sensibilidades implicadas en una determinada etapa de filtrado, se obtienen expresiones para el cambio porcentual de parámetros de filtrado en términos de cambios porcentuales en los elementos eléctricos que los constituyen; a partir de estas expresiones se presentan metodologías para la sintonización de las etapas de filtrado de orden dos.

En el Capítulo 5 se describe cómo obtener la función de transferencia de los filtros eléctricos activos de orden mayor que dos. Esto para plantillas pasa bajas, pasa altas, pasa banda y supresor de banda bajo las aproximaciones Butterworth, Chebyshev, Bessel y Elíptica. Lo anterior se realiza a partir de expresiones de la respuesta en frecuencia y singularidades (*polos* y *ceros*) de filtros eléctricos normalizados pasa bajas con las aproximaciones mencionadas.

El Capítulo 6 muestra el diseño y la realización de cinco filtros eléctricos activos con sendas plantillas de diseño, esto esencialmente para fines ilustrativos acerca de conceptos relacionados con la teoría y la práctica de los filtros eléctricos, focalizándose en realizaciones activas.

En los Apéndices se encuentran los valores de los ceros, polos y coeficientes de factores cuadráticos de los filtros eléctricos pasa bajas normalizados, se finaliza con una relación de la literatura afín a la que se ha recurrido para la realización de este trabajo.

Los autores esperan que estas notas sirvan de motivación y estímulo para que el estudiante interesado en esta materia profundice más en los temas que aquí se tratan y encuentre por añadidura la verdad y la belleza inmanentes a las *matemáticas* y la *física*.

Finalmente, hacemos patente nuestro reconocimiento y gratitud a las profesoras Laura Gabriela Ramírez Sánchez y Mayra Denisse Obispo Bahena por su disponibilidad, colaboración y asesoría en la realización y edición de este proyecto.

Víctor Manuel Sánchez Esquivel
Antonio Salvá Calleja

1

2

3

4

5

6

A

B

C

D

V

Índice general

1. Respuesta en frecuencia	1
1.1. Respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLI)	1
1.2. Filtros ideales	4
1.2.1. Filtro pasa bajas ideal	4
1.2.2. Filtro pasa altas ideal	4
1.2.3. Filtro pasa banda ideal	5
1.2.4. Filtro supresor de banda ideal	5
1.2.5. Filtro pasa todo ideal	5
1.3. Filtros eléctricos reales de primer y segundo orden	6
1.3.1. Función de transferencia del filtro pasa bajas de primer orden	6
1.3.2. Función de transferencia del filtro pasa altas de primer orden	8
1.3.3. Función de transferencia del filtro pasa bajas de segundo orden	9
1.3.4. Función de transferencia del filtro pasa altas de segundo orden	10
1.3.5. Función de transferencia del filtro pasa banda de segundo orden	12
1.3.6. Función de transferencia del filtro supresor de banda de segundo orden	13
1.3.7. Función de transferencia del filtro pasa todo	14
1.3.8. Función de transferencia de un filtro con un cero de transmisión	17
1.4. Escalamiento de impedancia y de frecuencia	19
1.4.1. Escalamiento de impedancia	19
1.4.2. Escalamiento de frecuencia	22
1.5. Desnormalización de una función de transferencia	25
1.6. Transformación de frecuencia	26
1.6.1. Transformación del filtro pasa bajas a filtro pasa altas.	26
1.6.2. Transformación de filtro pasa bajas a filtro pasa banda.	28
1.6.3. Transformación del filtro pasa bajas a filtro supresor de banda.	30
2. Aproximación	33
2.1. Aproximaciones clásicas	33
2.2. Plantilla de diseño para una especificación de filtrado	34
2.3. Aproximación de Butterworth normalizada	34
2.4. Aproximación de Chebyshev normalizada	37
2.4.1. Cálculo de los polos del filtro pasa bajas Chebyshev normalizado de orden n	40
2.5. Aproximación Elíptica normalizada	42
2.6. Aproximación de Bessel normalizada	48

3. Realizaciones activas de filtros eléctricos	53
3.1. Filtros eléctricos de ganancia infinita y realimentación múltiple	53
3.2. Filtros eléctricos con fuente de voltaje controlada por voltaje	54
3.3. Realización activa	55
3.4. Circuito eléctrico convertidor de impedancia negativa con inversión de corriente (INIC)	68
3.5. Filtros de amplificadores múltiples	71
4. Sensibilidad y sintonización	77
4.1. Sensibilidad	77
4.2. Sintonización	80
5. Síntesis y realización de filtros eléctricos activos	86
5.1. Funciones de transferencia de orden mayor de dos	86
5.2. Síntesis	87
6. Diseño y realización	93
6.1. Filtro eléctrico pasa altas	93
6.2. Filtro eléctrico pasa banda	96
6.3. Filtro eléctrico pasa bajas	99
6.4. Filtro eléctrico supresor de banda	105
6.5. Filtro eléctrico pasa todo	111
Bibliografía	114
A. Filtros Butterworth	116
B. Filtros Chebyshev	118
C. Filtros Elípticos	122
D. Filtros Bessel	131

Capítulo 1

Respuesta en frecuencia

Habida cuenta de que probablemente el lector ha estudiado un curso de sistemas y señales, en la parte inicial de este capítulo, se presenta un repaso de la forma de *la respuesta en estado permanente de un sistema lineal e invariante en el tiempo cuando la entrada es una señal sinusoidal*. Se continúa con las formas de la respuesta en frecuencia de filtros ideales y la función de transferencia de los sistemas de primer y segundo orden que los aproximan. Se finaliza el capítulo con conceptos de utilidad en la síntesis de los filtros eléctricos que se analizan.

1.1. Respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLI)

La forma de la respuesta en estado permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo (SLI), causal y estable, cuando la entrada es una señal sinusoidal, se puede determinar de la siguiente manera.

Considere un SLI causal y estable cuya respuesta al impulso es $h(t)$, al cual se le aplica la entrada $x(t) = \text{sen } \omega_o t$, como se muestra en la figura 1.1.

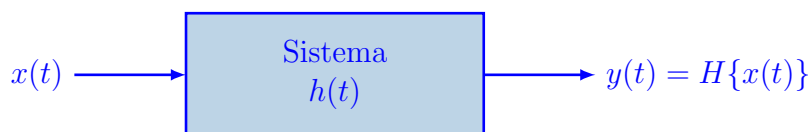


Figura 1.1: Sistema lineal e invariante en el tiempo con una entrada $x(t)$ y una salida $y(t)$

De la teoría de los sistemas, la respuesta de estado cero, $y_{zs}(t)$ de un sistema lineal, invariante en el tiempo, causal y que inicia en $t = 0$ es

$$y_{zs}(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (1.1)$$

Si $x(t) = \text{sen } \omega_o t$ y considerando que el sistema es estable, la respuesta en estado permanente, $y_p(t)$ es

$$y_p(t) = \int_0^\infty h(\tau)\text{sen } \omega_o (t - \tau)d\tau \quad (1.2)$$

y dado que

$$\text{sen } \omega_o (t - \tau) = \Im \left\{ e^{j\omega_o(t-\tau)} \right\}$$

sustituyendo en la ecuación (1.2)

$$y_p(t) = \Im \left\{ \int_0^\infty h(\tau) e^{j\omega_o(t-\tau)} d\tau \right\} = \Im \left\{ e^{j\omega_o t} \int_0^\infty h(\tau) e^{-j\omega_o \tau} d\tau \right\} \quad (1.3)$$

por consiguiente

$$y_p(t) = \Im \left\{ e^{j\omega_o t} H(j\omega_o) \right\} \quad (1.4)$$

donde $H(j\omega_o)$ es la función de transferencia del sistema evaluada para $s = j\omega_o$.

Considerando que $H(j\omega_o) = |H(j\omega_o)| \angle H(j\omega_o)$, la ecuación (1.4) se puede escribir como

$$\begin{aligned} y_p(t) &= |H(j\omega_o)| \text{sen}(\omega_o t + \angle H(j\omega_o)) \\ y_p(t) &= M(\omega_o) \text{sen}(\omega_o t + \Phi(\omega_o)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

De lo anterior se puede inferir que la respuesta en estado permanente de un SLI estable y causal, debida a una entrada sinusoidal es también otra señal sinusoidal multiplicada por el factor $|H(j\omega)| = M(\omega)$ y desfasada un ángulo $\angle H(j\omega) = \Phi(\omega)$.

Ejemplo 1.1 Sea el circuito eléctrico lineal e invariante de primer orden de la figura 1.2; donde la entrada es $x(t) = \text{sen } \omega t$ y la respuesta es $y(t) = v_c(t)$.

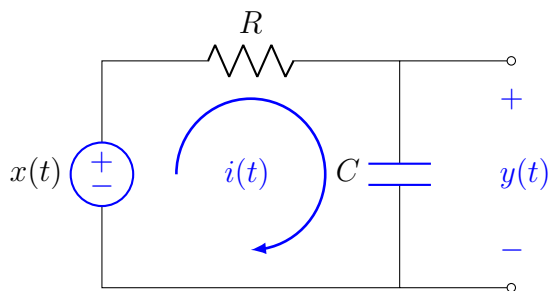


Figura 1.2: Circuito eléctrico RC

La función de transferencia del circuito eléctrico es

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC} I(s)}{\left(R + \frac{1}{sC} \right) I(s)} = \frac{1}{sCR + 1}$$

por tanto

$$H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle -\arctan(\omega CR)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.5), la respuesta permanente es

$$y_p(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \text{sen}(\omega t - \arctan(\omega RC)) \quad (1.6)$$

Las gráficas de la magnitud y la fase en función de la frecuencia ω , denominadas curvas de la *respuesta en frecuencia*, se presentan en la figura 1.3. Como se observa, la magnitud y la fase dependen tanto de ω como de los valores de los elementos que constituyen el circuito eléctrico. Así, un circuito eléctrico en el que varía la magnitud y/o la fase de su respuesta en frecuencia de acuerdo a cierta forma prefijada, se le denomina *filtro eléctrico*.

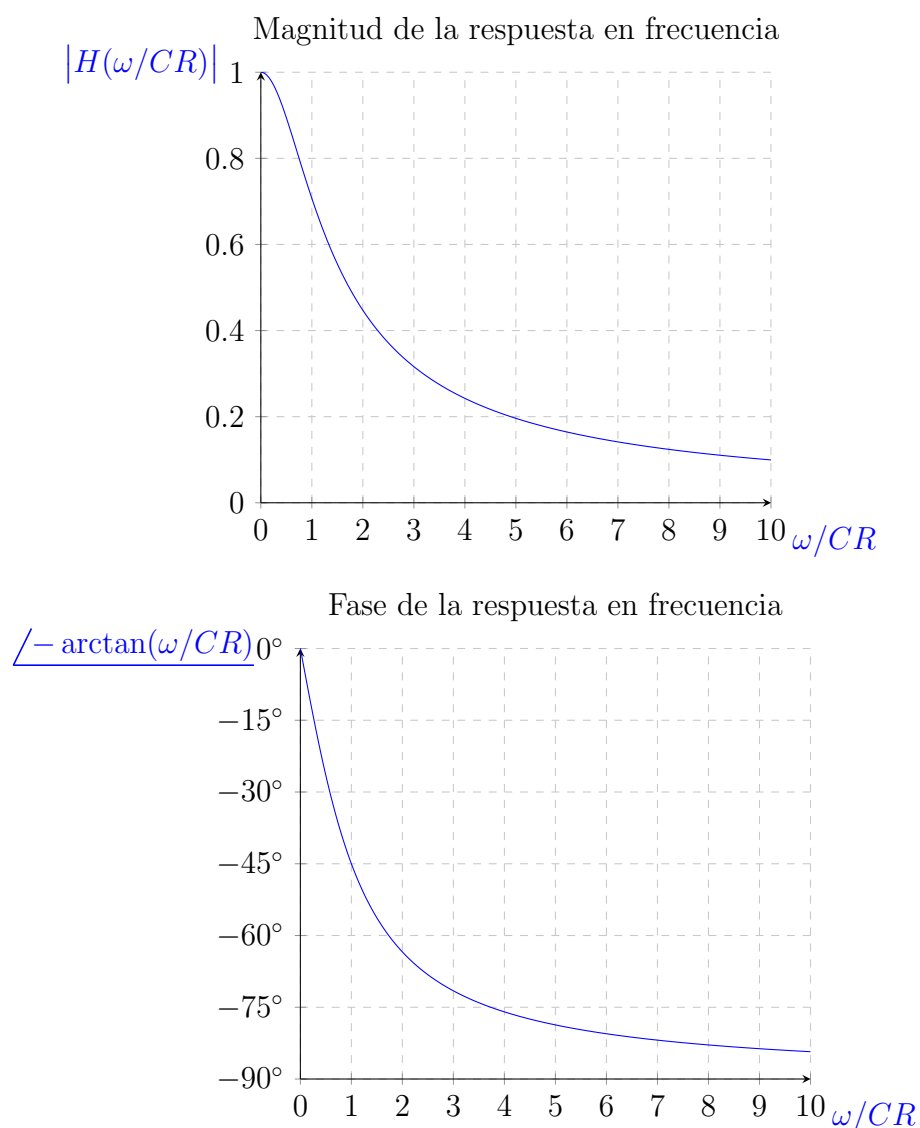


Figura 1.3: Respuesta en frecuencia del circuito eléctrico CR

A continuación se presentan los diversos tipos de filtros eléctricos ideales.

1.2. Filtros ideales

Un filtro eléctrico de frecuencia selectiva es un circuito eléctrico que permite el paso de señales con frecuencias comprendidas en ciertos rangos o bandas llamadas *pasa bandas* y bloquea o atenúa señales cuyas frecuencias están en otros rangos, llamadas *bandas de rechazo* o de *supresión*. La forma de $M(\omega) = |H(j\omega)|$ se puede utilizar para clasificar diferentes tipos de filtros eléctricos, de acuerdo a la localización de su banda de paso o su banda de rechazo. Un filtro eléctrico ideal es aquel que tiene una respuesta en fase lineal en su banda de paso, ninguna atenuación en dicha banda y una atenuación infinita $M(\omega) = 0$, en su banda de supresión.

1.2.1. Filtro pasa bajas ideal

El *filtro pasa bajas ideal* es un filtro eléctrico que permite el paso de señales de frecuencia, comprendidas entre 0 y ω_p y las señales de frecuencia mayor que ω_p las atenúa totalmente, esto es

$$M(\omega) \Big|_{\omega > \omega_p} = 0$$

El filtro eléctrico pasa bajas ideal tiene el diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia que se muestra en la figura 1.4.

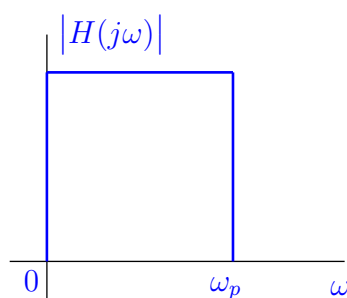


Figura 1.4: Diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas ideal

1.2.2. Filtro pasa altas ideal

El *filtro pasa altas ideal* presenta el diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia en la figura 1.5.

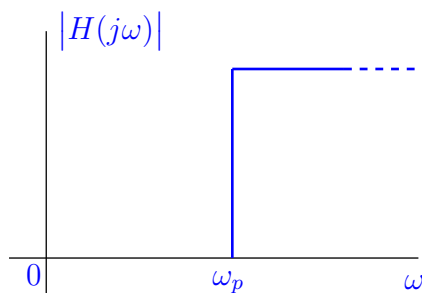


Figura 1.5: Diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas ideal

El filtro eléctrico pasa altas ideal es un filtro eléctrico que permite el paso de señales de frecuencia mayor que ω_p y atenúa totalmente, $M(\omega) = 0$, las señales de frecuencia comprendida entre 0 y ω_p .

1.2.3. Filtro pasa banda ideal

El *filtro pasa banda ideal* es un filtro eléctrico que permite el paso de señales de frecuencia comprendidas entre ω_a y ω_b . Atenúa totalmente, $M(\omega) = 0$, las señales de frecuencia $\omega < \omega_a$ y $\omega > \omega_b$.

El filtro eléctrico pasa banda ideal presenta el diagrama de la magnitud de la figura 1.6.

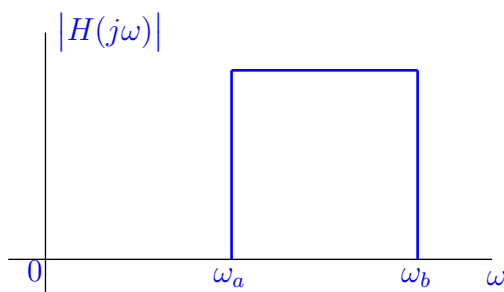


Figura 1.6: Diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda ideal

1.2.4. Filtro supresor de banda ideal

El *filtro supresor de banda ideal* es un filtro eléctrico que atenúa completamente, $M(\omega) = 0$, las señales de frecuencia comprendidas entre ω_a y ω_b . Permite el paso de señales de frecuencia $\omega < \omega_a$ y $\omega > \omega_b$.

El filtro eléctrico supresor de banda ideal tiene el diagrama de la respuesta en magnitud de la figura 1.7.

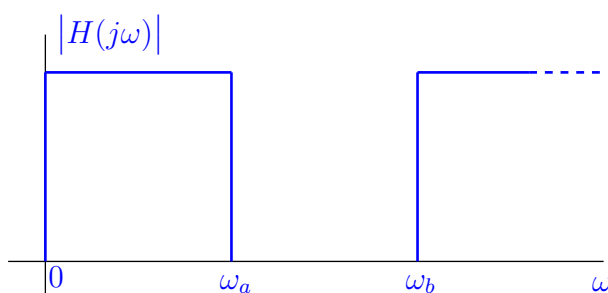


Figura 1.7: Diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro supresor de banda ideal

1.2.5. Filtro pasa todo ideal

El *filtro pasa todo ideal* es un filtro eléctrico que permite el paso de señales de cualquier frecuencia, $M(\omega) = \text{constante}$. Tiene como propósito proporcionar un cambio de la fase.

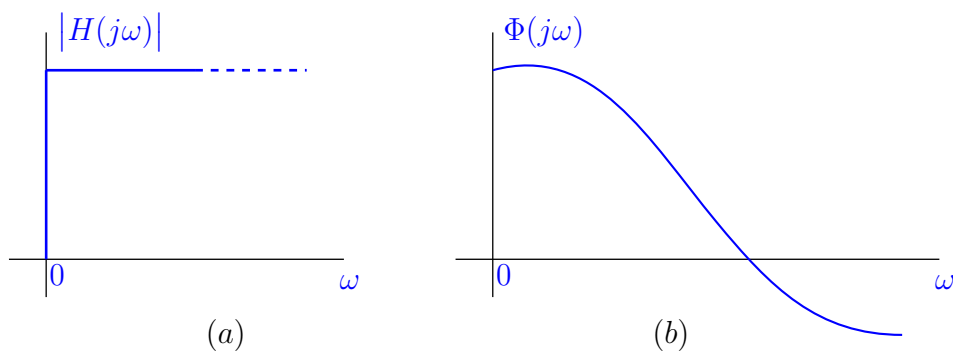


Figura 1.8: Diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa todo ideal.

(a) Magnitud. (b) Fase

El diagrama de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa todo ideal se muestra en la figura 1.8.

Debido a la *no causalidad* de los filtros eléctricos ideales *su realización física no es posible* y en la práctica la respuesta en frecuencia de los filtros eléctricos reales *sólo se aproxima* a la respuesta en frecuencia de los filtros eléctricos ideales.

1.3. Filtros eléctricos reales de primer y segundo orden

A continuación, se presenta la función de transferencia de sistemas dinámicos de primer y segundo orden que aproximan los casos ideales vistos.

1.3.1. Función de transferencia del filtro pasa bajas de primer orden

La función de transferencia del filtro eléctrico pasa bajas de primer orden está descrita por la siguiente ecuación

$$H(s) = \frac{H_o \omega_o}{s + \omega_o}$$

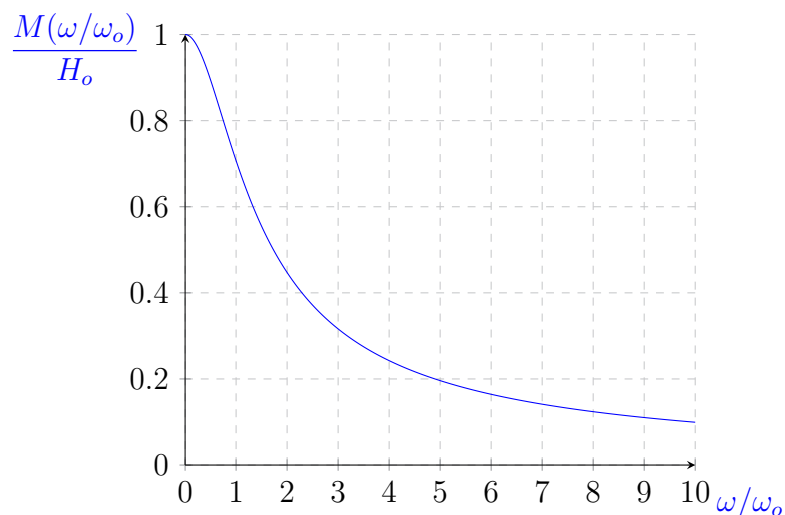
por tanto

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{H_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} e^{-j \left[\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right) \right]} = \frac{H_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} \angle -\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right) \quad (1.7)$$

Las gráficas correspondientes a esta ecuación se muestran en la figura 1.9.

Comparando las figuras 1.3 y 1.9 se observa que son semejantes. En consecuencia, se deduce que el circuito eléctrico de la figura 1.2 es un filtro eléctrico pasa bajas de primer orden.

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas de primer orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas de primer orden

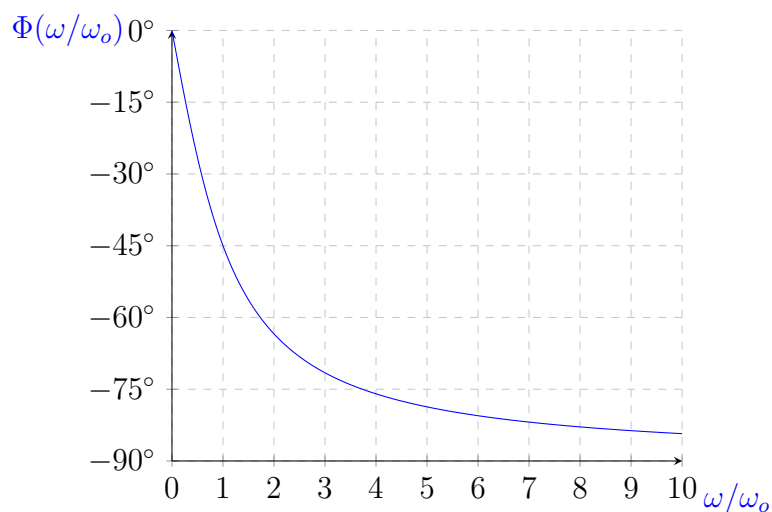


Figura 1.9: Respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas de primer orden

Considerando la figura 1.9, se estima que la respuesta permanente, debido a una entrada sinusoidal de frecuencia angular ω_o , es

$$y_p(t) = \frac{H_o}{\sqrt{2}} \text{sen}\left(\omega_o t - \frac{\pi}{4}\right) = 0.707 H_o \text{sen}\left(\omega_o t - \frac{\pi}{4}\right)$$

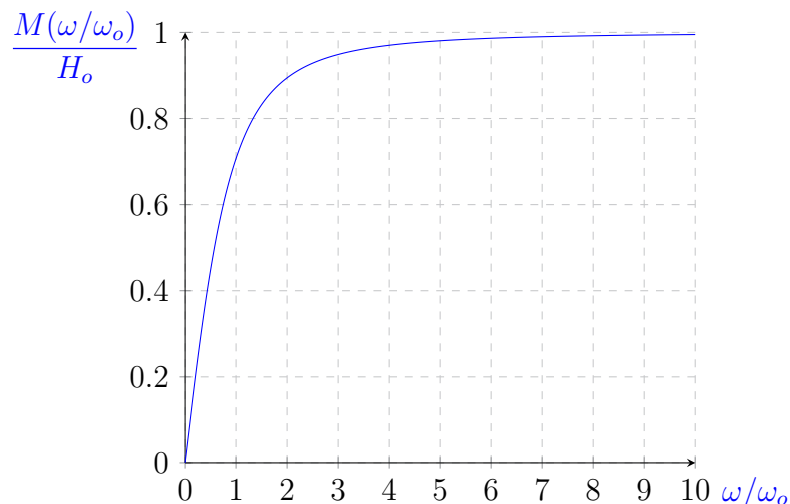
lo que implica que las señales de entrada de frecuencia $\omega > \omega_o$ (ω_o recibe el nombre de frecuencia de corte) son atenuadas más del 70.71 % de su valor original; lo que indica que la potencia de la señal que se transmite a la salida del filtro eléctrico es menor de la mitad de la potencia que se tiene a la entrada de tal filtro eléctrico.

Con base en estas consideraciones, se define el ancho de banda (AB) de un filtro eléctrico, al conjunto de frecuencias tales que

$$|H(j\omega)| \geq \frac{|H(j\omega)|_{\text{máximo}}}{\sqrt{2}} = 0.707|H(j\omega)|_{\text{máximo}}$$

que también se puede expresar como el conjunto de frecuencias tales que $|H(j\omega)|$ es atenuada $20 \log 0.707 = -3.01 \text{ dB}$ de su valor máximo¹.

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas de primer orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas de primer orden

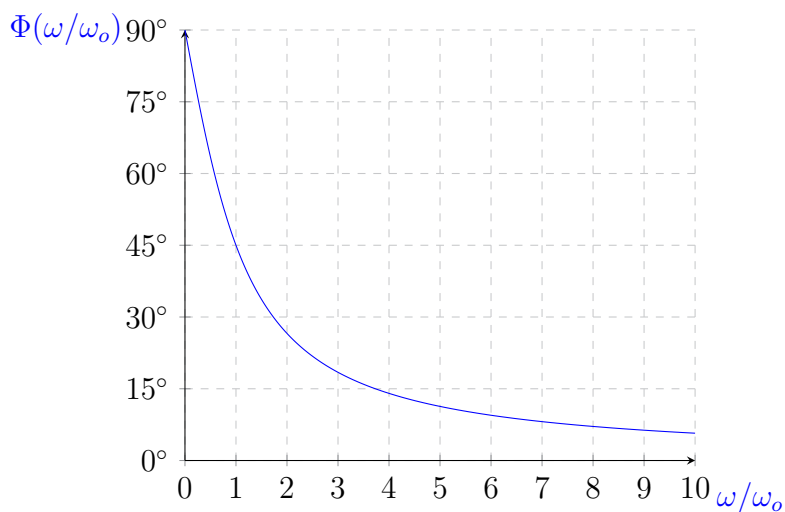


Figura 1.10: Respuesta en frecuencia del filtro pasa altas de primer orden

1.3.2. Función de transferencia del filtro pasa altas de primer orden

La función de transferencia del filtro pasa altas de primer orden está dada por

¹Una magnitud $M(\omega)$ se expresa en decibeles (dB) mediante la siguiente operación

$$M(\omega) \Big|_{\text{dB}} = 20 \log M(\omega)$$

$$H(s) = \frac{H_o s}{s + \omega_o}$$

por consiguiente

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{H_o \frac{\omega}{\omega_o}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} e^{j \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \right]} \quad (1.8)$$

las gráficas de la respuesta en frecuencia se muestran en la figura 1.10. De ellas se concluye que el ancho de banda del filtro eléctrico es el conjunto de frecuencias tales que $\omega > \omega_o$. Denominándose ω_o la frecuencia de corte.

1.3.3. Función de transferencia del filtro pasa bajas de segundo orden

La función de transferencia de un filtro eléctrico pasa bajas de segundo orden es

$$H(s) = \frac{H_o \omega_o^2}{s^2 + \alpha \omega_o s + \omega_o^2}$$

donde $\alpha \leq \sqrt{2}$. Su respuesta en frecuencia está dada por la siguiente ecuación

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{H_o}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{\alpha\omega}{\omega_o}\right]^2}} e^{-j \left[\arctan\left(\frac{\frac{\alpha\omega}{\omega_o}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}\right) \right]} \quad (1.9)$$

Las gráficas de la respuesta en frecuencia correspondientes se muestran en la figura 1.11.

Es de interés advertir que el máximo valor de $M(\omega)$ ocurre para ²

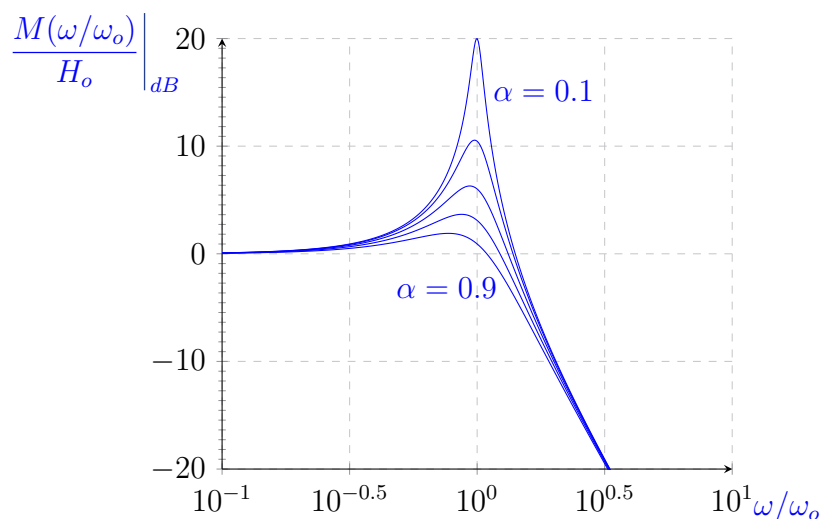
$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$$

esta frecuencia se denomina *frecuencia de resonancia*. La magnitud de la respuesta en frecuencia cuando $\omega = \omega_r$ es

$$|H(j\omega)|_{\omega=\omega_r} = \frac{H_o}{\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}}$$

²Este valor se obtiene de $\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0$

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas de segundo orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas de segundo orden

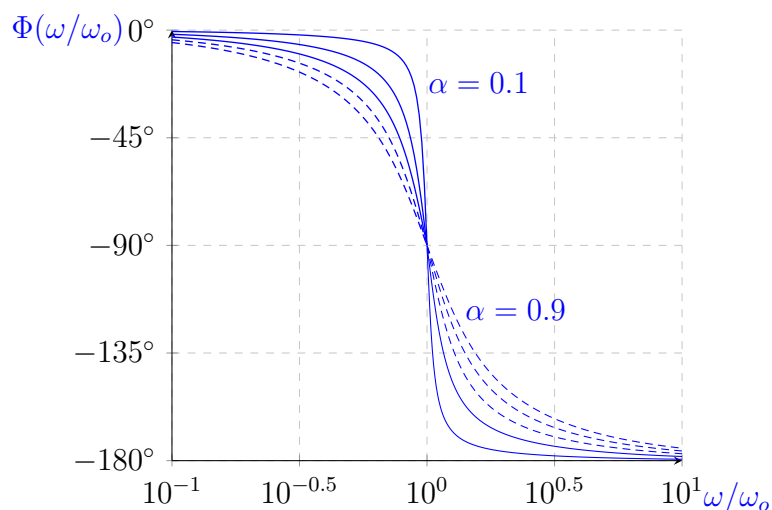


Figura 1.11: Respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas de segundo orden

1.3.4. Función de transferencia del filtro pasa altas de segundo orden

La función de transferencia y la respuesta en frecuencia de magnitud y de fase de un filtro eléctrico pasa altas de segundo orden están dadas, respectivamente por

$$H(s) = \frac{H_o s^2}{s^2 + \alpha \omega_o s + \omega_o^2}$$

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{H_o \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{\alpha\omega}{\omega_o}\right]^2}} e^{j \left[\pi - \arctan \left(\frac{\frac{\alpha\omega}{\omega_o}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} \right) \right]} \quad (1.10)$$

Sus gráficas de respuesta en frecuencia se presentan en la figura 1.12.

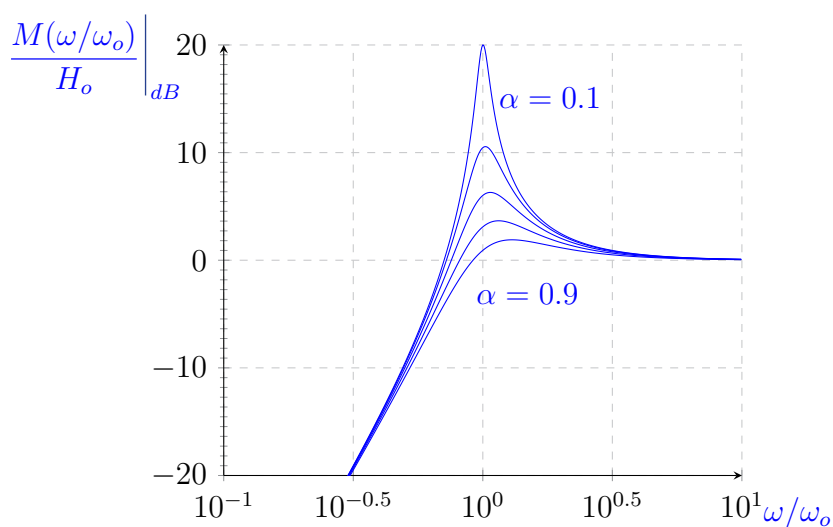
El valor máximo de $|H(j\omega)|$ es

$$|H(j\omega)|_{\omega=\omega_r} = \frac{H_o}{\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}}$$

y ocurre para el valor de ω de

$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$$

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas de segundo orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas de segundo orden

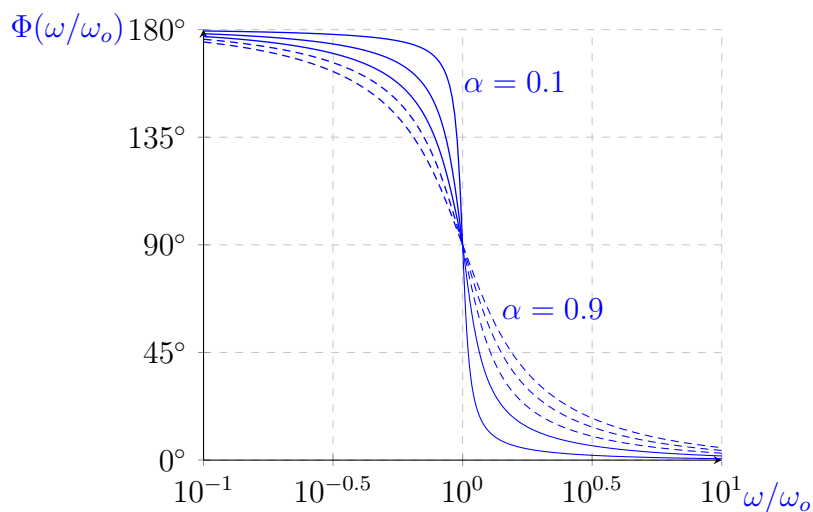


Figura 1.12: Respuesta en frecuencia del filtro pasa altas de segundo orden

1.3.5. Función de transferencia del filtro pasa banda de segundo orden

La función de transferencia de un filtro eléctrico pasa banda de segundo orden es

$$H(s) = \frac{H_o \alpha \omega_o s}{s^2 + \alpha \omega_o s + \omega_o^2}$$

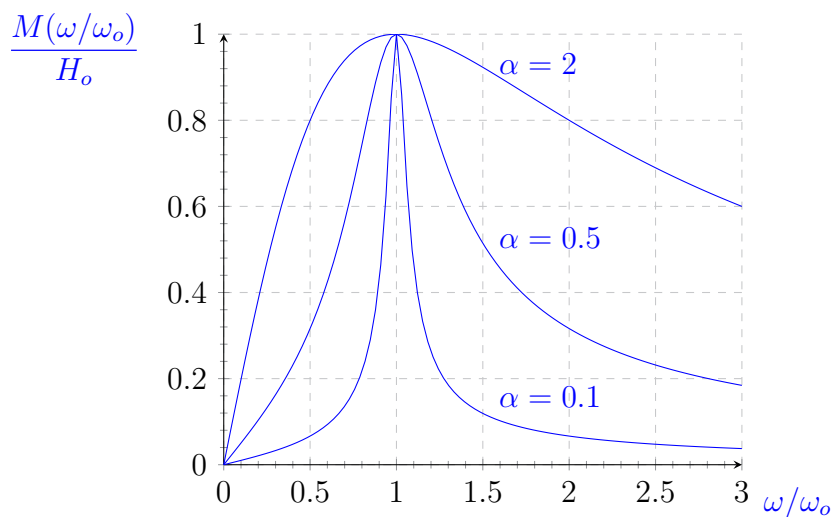
por consiguiente

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{H_o \alpha \omega_o j\omega}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\alpha \omega_o \omega}$$

ecuación que se puede escribir como

$$H(j\omega) = \frac{H_o}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$$

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda de segundo orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda de segundo orden

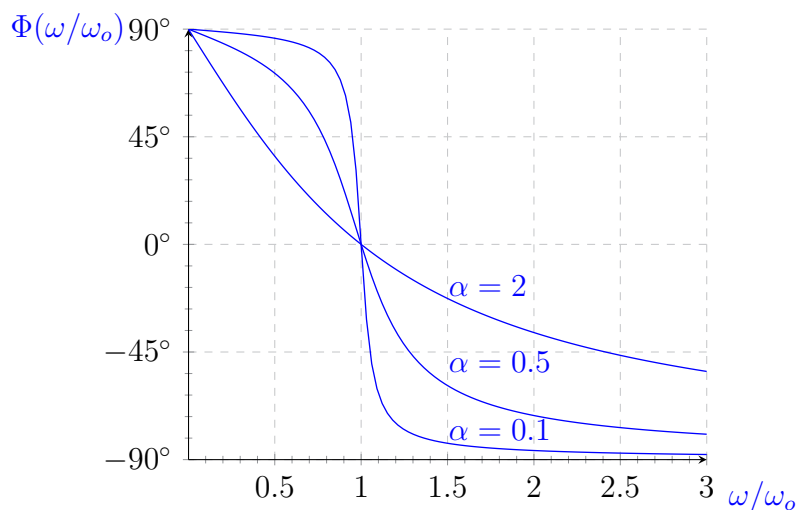


Figura 1.13: Respuesta en frecuencia del filtro pasa banda de segundo orden

así

$$H(j\omega) = \frac{H_o}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}} e^{-j \left[\arctan Q \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \right]} \quad (1.11)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{y} \quad Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_o}{AB} = \frac{f_o}{f_2 - f_1} \quad (1.12)$$

Q se denomina *factor de calidad*, ya que tiene que ver con la selectividad del filtro eléctrico. Asimismo, ω_1 y ω_2 son los valores de ω para los cuales

$$\left| H(j\omega) \right|_{\omega=\omega_1} = \left| H(j\omega) \right|_{\omega=\omega_2} = \frac{\left| H(j\omega) \right|_{\text{máxima}}}{\sqrt{2}} = 0.707 \left| H(j\omega) \right|_{\omega=\omega_o} = 0.707 H_o$$

reciben el nombre de frecuencias de corte.

Las curvas de respuesta en frecuencia correspondientes se muestran en la figura 1.13.

1.3.6. Función de transferencia del filtro supresor de banda de segundo orden

La función de transferencia de un filtro eléctrico supresor de banda de segundo orden es de la forma

$$H(s) = \frac{H_o (s^2 + \omega_o^2)}{s^2 + \alpha \omega_o s + \omega_o^2}$$

entonces

$$H(s) \big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{H_o (\omega_o^2 - \omega^2)}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\alpha \omega_o \omega}$$

ecuación que se puede escribir de la siguiente manera

$$H(j\omega) = \frac{H_o}{1 + j \frac{1}{Q \left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o} \right)}}$$

por tanto

$$H(j\omega) = \frac{H_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}}} e^{-j \left[\arctan \frac{1}{Q \left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o} \right)} \right]} \quad (1.13)$$

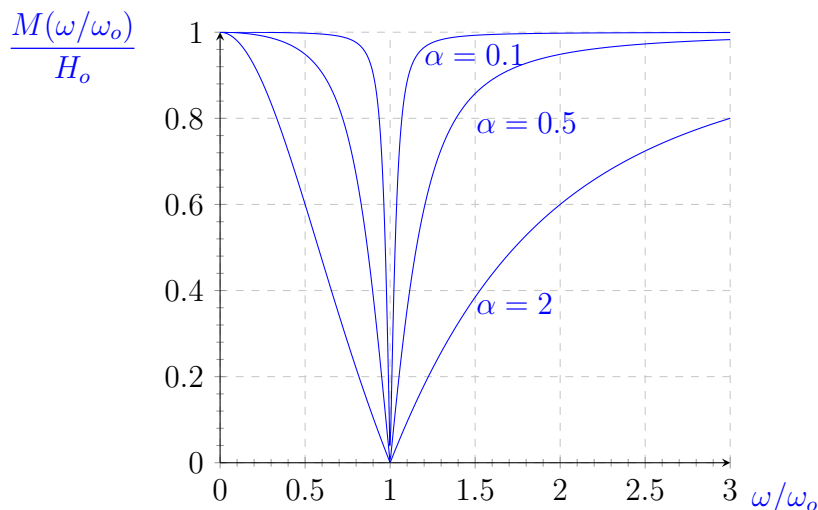
donde

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{y} \quad Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_o}{f_2 - f_1} \quad (1.14)$$

siendo $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ el intervalo de frecuencias para las cuales hay una atenuación de más de 3 dB con respecto a la ganancia máxima.

En la figura 1.14 se presentan las curvas de la respuesta en frecuencia correspondientes.

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro supresor de banda de segundo orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro supresor de banda de segundo orden

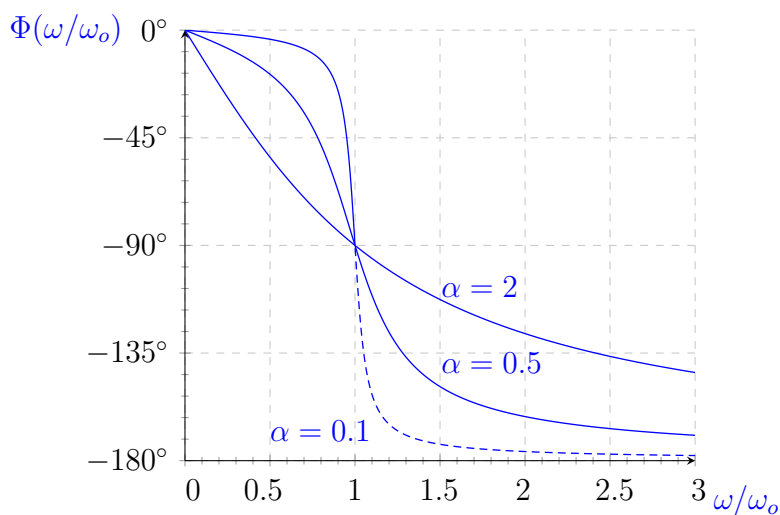


Figura 1.14: Respuesta en frecuencia del filtro supresor de banda de segundo orden

1.3.7. Función de transferencia del filtro pasa todo

La función de transferencia del filtro eléctrico pasa todo tiene la forma siguiente

$$H(s) = K \frac{Q(s)}{P(s)} = K \frac{P(-s)}{P(s)}$$

Filtro eléctrico pasa todo de primer orden

Su función de transferencia es

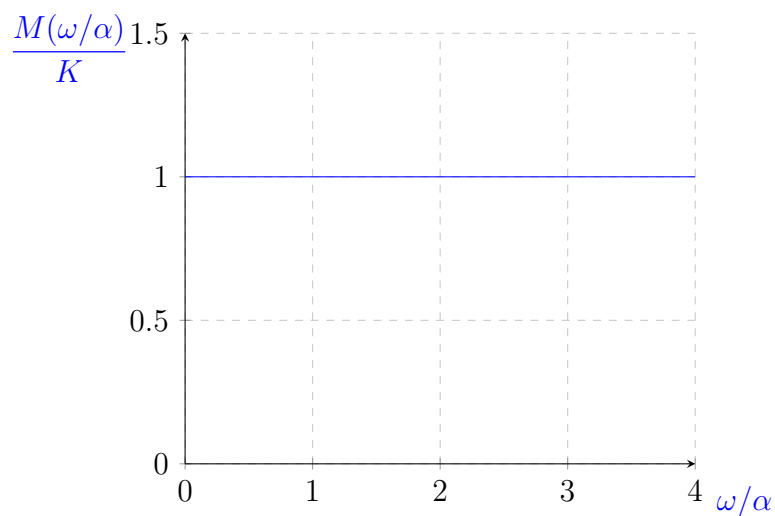
$$H(s) = K \frac{s - \alpha}{s + \alpha}$$

entonces

$$H(j\omega) = K \frac{j\omega - \alpha}{j\omega + \alpha} = K e^{-j \left[2 \arctan \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) \right]} \quad (1.15)$$

Sus curvas de respuesta en frecuencia se ilustran en la figura 1.15.

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa todo de primer orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa todo de primer orden

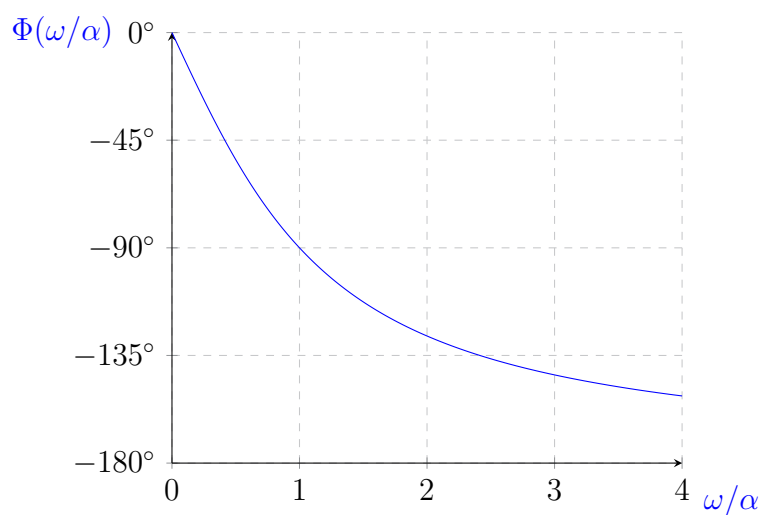


Figura 1.15: Respuesta en frecuencia del filtro pasa todo de primer orden

Filtro eléctrico pasa todo de segundo orden

La función de transferencia de un filtro eléctrico pasa todo de segundo orden tiene la forma

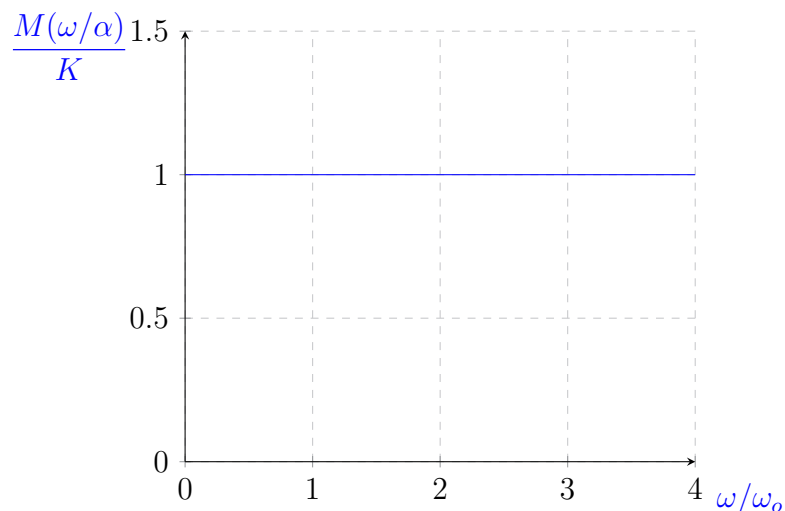
$$H(s) = K \frac{s^2 - \alpha\omega_o s + \omega_o^2}{s^2 + \alpha\omega_o s + \omega_o^2}$$

por consiguiente

$$H(j\omega) = K \frac{\omega_o^2 - \omega^2 - j\alpha\omega_o\omega}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\alpha\omega_o\omega} = Ke^{-j \left[2 \arctan \frac{\alpha \frac{\omega}{\omega_o}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2} \right]} \quad (1.16)$$

Las gráficas de respuesta en frecuencia correspondientes se muestran en la figura 1.16.

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa todo de segundo orden



Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa todo de segundo orden

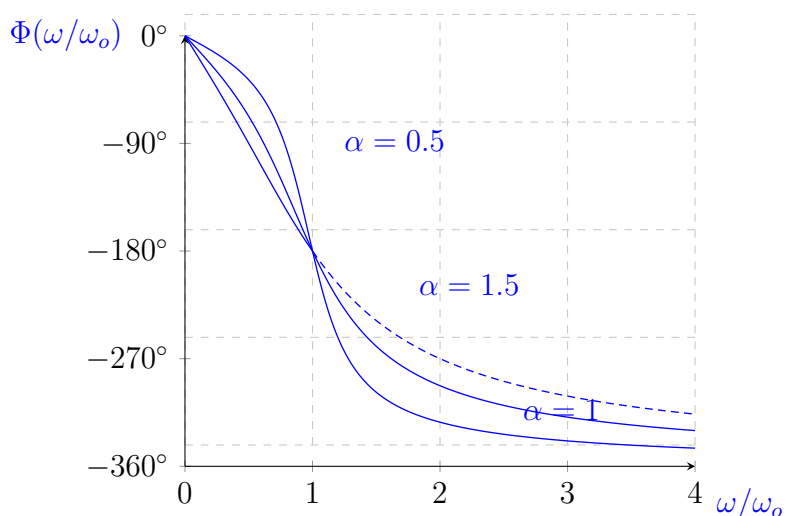


Figura 1.16: Respuesta en frecuencia del filtro pasa todo de segundo orden

1.3.8. Función de transferencia de un filtro con un cero de transmisión

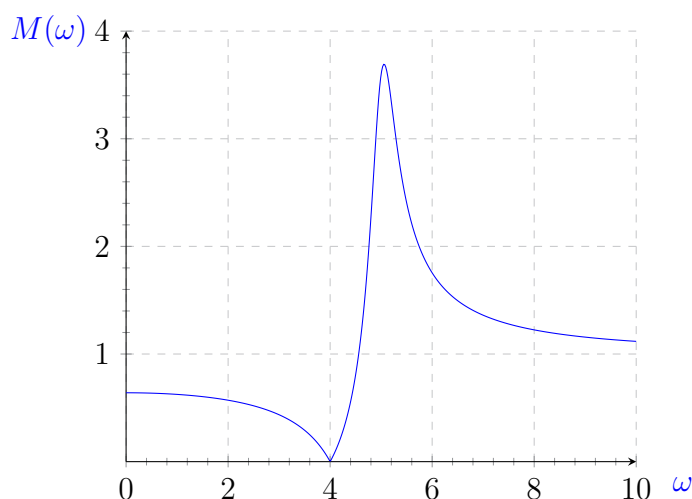
Este tipo de filtros eléctricos se utiliza en la realización de los *filtros de Cauer* o *filtros elípticos*. La función de transferencia está dada por la siguiente expresión

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_2^2}{s^2 + \alpha\omega_1 s + \omega_1^2} \quad (1.17)$$

entonces

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 + \omega_2^2}{-\omega^2 + j\alpha\omega_1\omega + \omega_1^2} \quad (1.18)$$

Magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa altas con un cero de transmisión



Fase de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa altas con un cero de transmisión

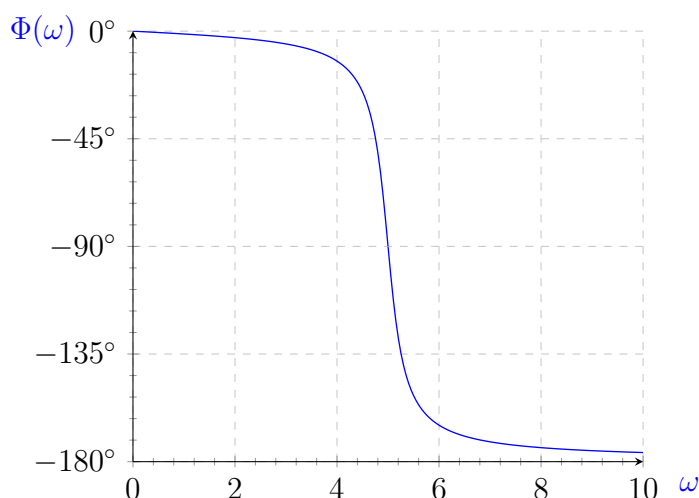


Figura 1.17: Respuesta en frecuencia del filtro pasa altas con un cero de transmisión

La gráfica de la respuesta en frecuencia de magnitud de la ecuación anterior presenta un máximo en

$$\omega_r = \omega_1 \sqrt{\frac{2(\omega_1^2 - \omega_2^2) + (\alpha\omega_2)^2}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2) - (\alpha\omega_1)^2}} \quad (1.19)$$

de tal forma que

$$H(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_r} = \frac{2 \left[(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + (\alpha\omega_1\omega_2)^2 \right]}{\alpha\omega_1^2 \left[\alpha (\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm j\sqrt{2(-\omega_1^2 + \omega_1^2)^2 (2 - \alpha^2) - (\alpha^2\omega_1\omega_2)^2} \right]} \quad (1.20)$$

Dependiendo del valor relativo entre ω_1 y ω_2 , este filtro eléctrico puede ser pasa bajas o pasa altas.

Filtro eléctrico pasa altas con un cero de transmisión

Si en la ecuación (1.17) $\omega_2 < \omega_1$, el filtro eléctrico cuya función de transferencia es dicha ecuación, se comporta como un filtro eléctrico pasa altas. El signo del radical de la ecuación (1.20) correspondiente a este caso (filtro eléctrico pasa altas) es el positivo. A continuación, se presenta un ejemplo.

Ejemplo 1.2 Sea

$$\omega_1 = 5 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \omega_2 = 4 \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad \text{y} \quad \alpha = 0.1$$

entonces

$$\omega_r = 5.0574 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

y

$$H(j\omega)\Big|_{\omega_r} = 0.822 - j3.5998 = 3.6924/\underline{-77.136^\circ}$$

Las gráficas de la respuesta en frecuencia correspondientes se presentan en la figura 1.17.

Filtro eléctrico pasa bajas con un cero de transmisión

En la ecuación (1.17) $\omega_2 > \omega_1$, la función de transferencia corresponde a un filtro eléctrico pasa bajas. En este caso el signo del radical de la ecuación (1.20) que se debe considerar es el negativo.

Ejemplo 1.3 Sea

$$\omega_1 = 5 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \omega_2 = 6 \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad \text{y} \quad \alpha = 0.1$$

entonces

$$\omega_r = 4.9310 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

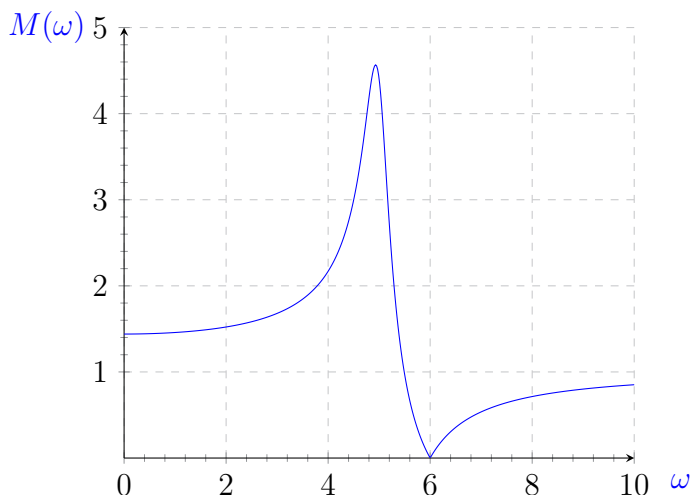
y

$$\begin{aligned} H(j\omega)\Big|_{\omega_r} &= 1.2231 + j4.3996 \\ &= 4.5664/\underline{74.464^\circ} \end{aligned}$$

Las gráficas de la respuesta en frecuencia correspondientes se observan en la figura 1.18.

De las figuras 1.17 y 1.18, se puede dilucidar porque este tipo de filtros eléctricos se utilizan en aplicaciones donde la banda de transición entre la banda pasante y la banda de supresión es estrecha.

Magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajas con un cero de transmisión



Fase de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajas con un cero de transmisión

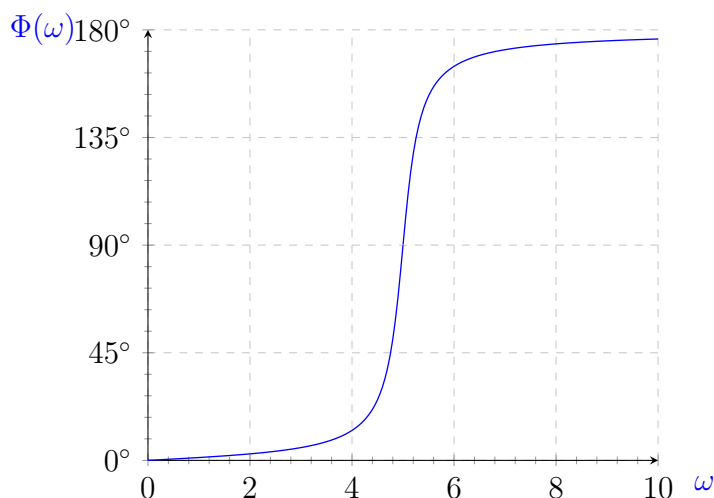


Figura 1.18: Respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas con un cero de transmisión

1.4. Escalamiento de impedancia y de frecuencia

Estos dos teoremas, son de gran trascendencia práctica ya que su utilidad y empleo permite la realización de *sistemas, filtros o ecualizadores* con valores de resistores, inductores y capacitores comerciales a partir de tablas normalizadas de filtros eléctricos.

1.4.1. Escalamiento de impedancia

Considere una red eléctrica de *parámetros concentrados* constituida por elementos lineales e invariantes en el tiempo, cuya entrada es la fuente independiente de voltaje $v_s(t)$ y la salida es el voltaje $v_o(t)$, correspondiente a una rama arbitraria de la misma red eléctrica, su gráfica asociada se observa en la figura 1.19.

El fasor V_o asociado al voltaje de la rama eléctrica con impedancia Z_o , está dado por

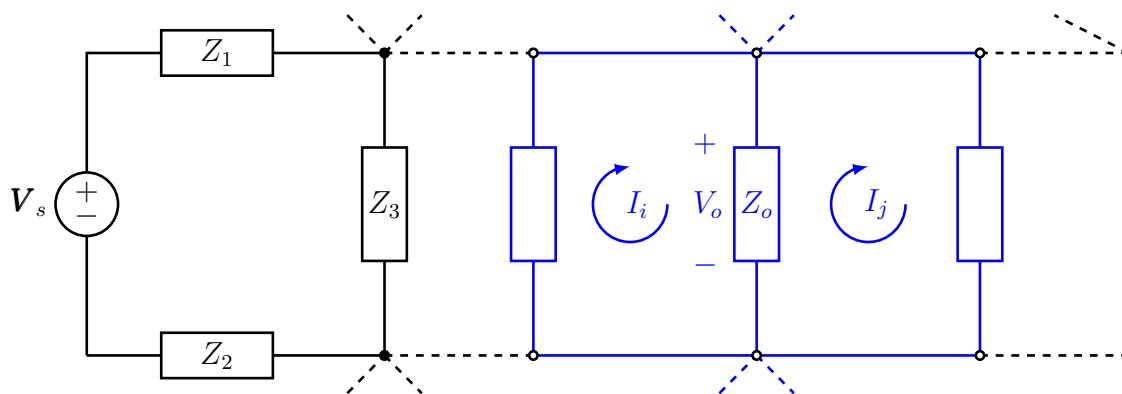


Figura 1.19: Red eléctrica plana con elementos lineales e invariantes en el tiempo

$$V_o = Z_o (I_i - I_j) \quad (1.21)$$

Por otra parte, la ecuación de mallas de la red eléctrica es

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) & \cdots & Z_{1m}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) & \cdots & Z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1}(j\omega) & Z_{m2}(j\omega) & \cdots & Z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

resolviendo para I_i e I_j

$$I_i = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(i-1)} & V_s & Z_{1(i+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & 0 & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (1.23)$$

$$I_j = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(j-1)} & V_s & Z_{1(j+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & 0 & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (1.24)$$

Si se define

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (1.25)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(i-1)} & Z_{2(i+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (1.26)$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(j-1)} & Z_{2(j+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (1.27)$$

Considerando las ecuaciones (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27) en la (1.21) se tiene

$$V_o = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} V_s \quad (1.28)$$

por lo que la función de transferencia resulta

$$\frac{V_o}{V_s} = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \quad (1.29)$$

Si todas las impedancias que constituyen la red eléctrica se multiplican por un factor k, de la ecuación (1.29), se tiene

$$\frac{V'_o}{V_s} = k Z_o \frac{(\Delta'_i - \Delta'_j)}{\Delta'} \quad (1.30)$$

donde por álgebra de determinantes

$$\begin{aligned} \Delta'_i &= k^{m-1} \Delta_i \\ \Delta'_j &= k^{m-1} \Delta_j \\ \Delta' &= k^m \Delta \end{aligned} \quad (1.31)$$

sustituyendo la ecuación (1.31) en la ecuación (1.30)

$$\frac{V'_o}{V_s} = k Z_o \frac{k^{m-1} (\Delta_i - \Delta_j)}{k^m \Delta} = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} = \frac{V_o}{V_s} \quad (1.32)$$

del resultado anterior se concluye lo siguiente:

Si en una red eléctrica se multiplican todas las impedancias por una misma constante arbitraria, k, la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

En función de los elementos que conforman la red eléctrica:

Si en una red eléctrica todas las resistencias e inductancias que la constituyen se multiplican por una constante arbitraria k y las capacitancias de la misma red eléctrica se dividen por la constante arbitraria k, la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

1.4.2. Escalamiento de frecuencia

La respuesta de estado sinusoidal permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable debida a una entrada de la forma $x(t) = \text{sen}(\omega t)$, está dada por

$$y(t) = |H(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle H(j\omega)) = M(\omega) \text{sen}(\omega t + \Phi(\omega)) \quad (1.33)$$

donde $H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$ es la función de transferencia de la red eléctrica, $H(s)$, evaluada en el eje imaginario del plano complejo, es decir

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

En una red eléctrica dada de b ramas, la función de transferencia depende de la frecuencia angular ω y de los valores de los componentes eléctricos que la conforman, esto es

$$H(j\omega) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega L_1, \dots, j\omega L_b, j\omega C_1, \dots, j\omega C_b)$$

Para una frecuencia angular ω_1 , se tiene

$$H(j\omega_1) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_1 L_1, \dots, j\omega_1 L_b, j\omega_1 C_1, \dots, j\omega_1 C_b) \quad (1.34)$$

Para una frecuencia angular ω_2 y suponiendo que las inductancias y las capacitancias de cada rama de la red eléctrica se pueden modificar

$$H(j\omega_2) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_2 L'_1, \dots, j\omega_2 L'_b, j\omega_2 C'_1, \dots, j\omega_2 C'_b) \quad (1.35)$$

Si se desea que las respuestas en frecuencia, dadas por las ecuaciones (1.34) y (1.35), presenten las mismas características de magnitud y fase, se requiere

$$\omega_1 L_n = \omega_2 L'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b$$

y

$$\omega_1 C_n = \omega_2 C'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b$$

por consiguiente, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son

$$L'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (1.36)$$

$$C'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (1.37)$$

por lo que se infiere: si se desea que la respuesta sinusoidal permanente de una red eléctrica a una cierta frecuencia angular ω_2 presente las mismas características de magnitud y fase que se tienen para una frecuencia angular ω_1 , los inductores y los capacitores que constituyen la red eléctrica deben modificarse de acuerdo a las ecuaciones (1.36) y (1.37).

Ejemplo 1.4 En la figura 1.20, se muestra el circuito eléctrico RLC paralelo y la traza de la impedancia vista por la fuente independiente de corriente, $|Z(j\omega)|$ en $[\Omega]$ versus ω en $[\text{s}^{-1}]$.

(a) Encuentre los valores de R, L y C.

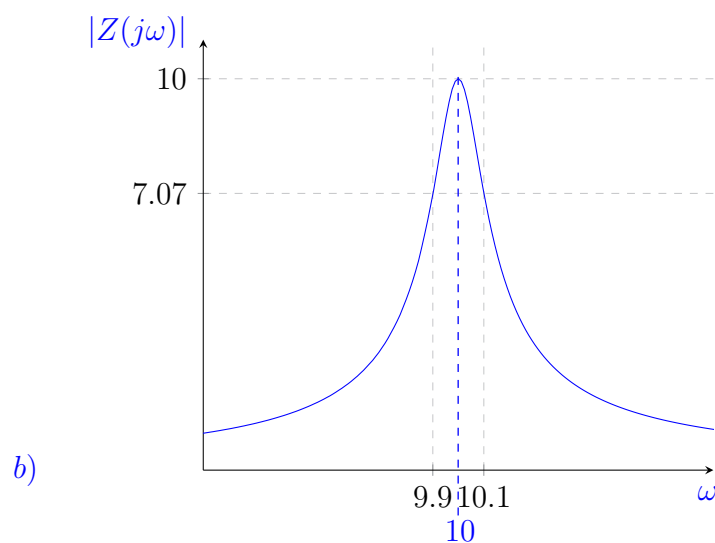
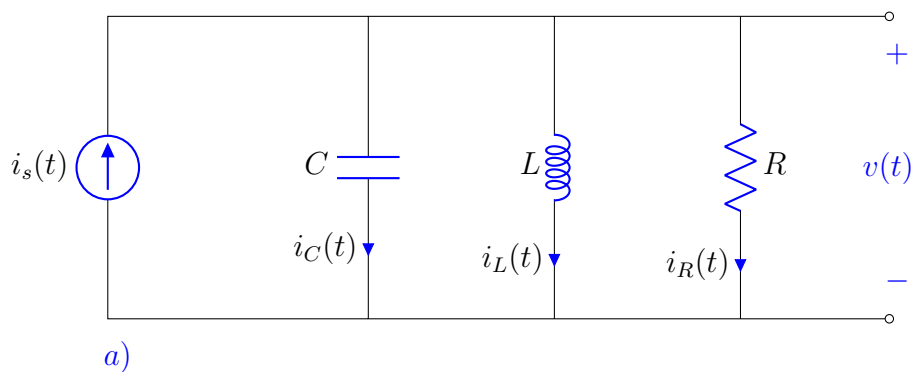


Figura 1.20: a) Circuito eléctrico RLC paralelo. b) Trazo de la impedancia vista por la fuente independiente de corriente

(b) Se desea la misma particularidad de la impedancia $|Z(j\omega)|$ alrededor de la frecuencia central de 20 [kHz]. Si el máximo valor de $|Z(j\omega)|$ debe ser de 100 [kΩ]. Determine los nuevos valores de R, L y C.

De la figura de la traza de la impedancia se puede obtener la siguiente información:

Frecuencia de resonancia, $\omega_o = 10$ [s⁻¹]

Ancho de banda, $AB = \omega_2 - \omega_1 = 10.1 - 9.9 = 0.2$ [s⁻¹]

por consiguiente, el factor de calidad es

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = 50$$

y dado que

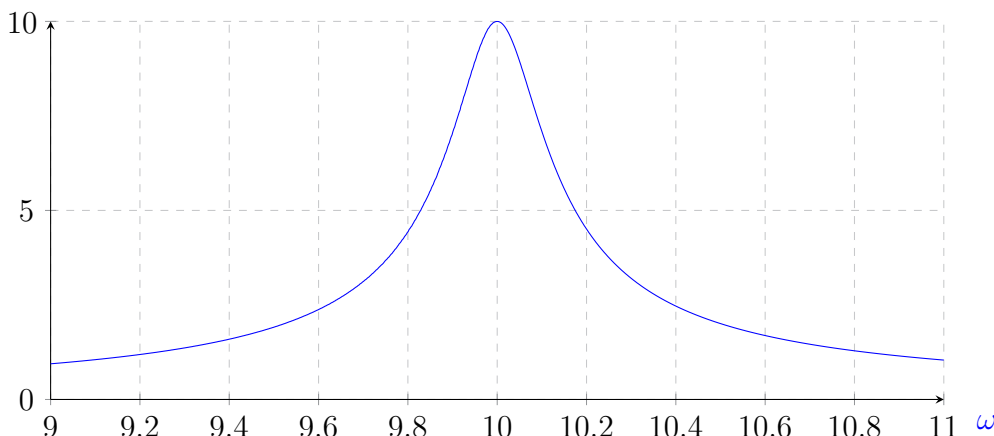
$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$$

entonces $Z(j\omega_o) = Z(j\omega)|_{\omega=\omega_o} = R = 10 \text{ } [\Omega]$. Con este valor y si $Q = RC\omega_o = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, es posible obtener el valor de C. Así

$$C = \frac{Q}{R\omega_o} = 0.5[\text{F}]$$

Ahora, como $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, el valor de la inductancia es $L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = 0.02[\text{H}]$.

$|Z(j\omega)|$ Magnitud de la impedancia del circuito RLC en función de la frecuencia



Magnitud de la impedancia del circuito RLC escalado en función de la frecuencia

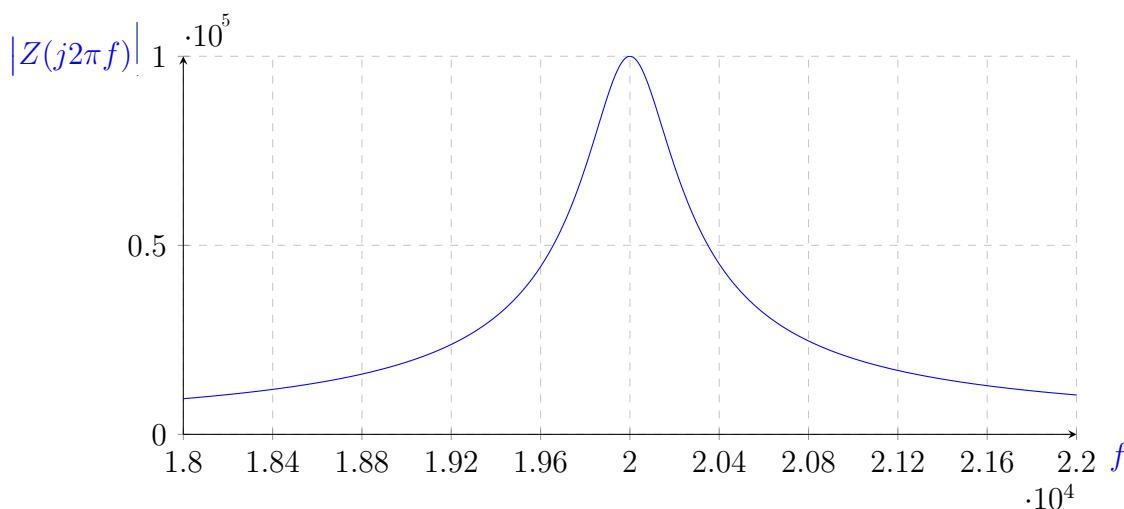


Figura 1.21: Magnitud de la impedancia de entrada de un circuito RLC paralelo sin escalar y con escalamiento de impedancia y de frecuencia

Para la segunda parte del ejercicio, en primer lugar se lleva cabo el escalamiento de impedancia, ya que se desea un resistor de $100 \text{ } [\text{k}\Omega]$, se calcula el factor de escala. Si $R_f = 10^5 = kR_i = k \text{ } 10$, entonces $k = 10^4$. De esta manera

$$L_j = kL_i = 200 \text{ } [\text{H}] \quad \text{y} \quad C_j = \frac{C}{k} = 50[\mu\text{F}]$$

A continuación se realiza el escalamiento de frecuencia y teniendo presente que el resistor *no cambia* su resistencia con la frecuencia

$$L_f = \frac{\omega_j L_j}{\omega_f} = \frac{10 \times 200}{2\pi(20 \times 10^3)} = 15.915[mH]$$

$$C_f = \frac{\omega_j C_j}{\omega_f} = \frac{10 \times 50 \times 10^{-6}}{2\pi(20 \times 10^3)} = 3.9789[\eta F]$$

En la figura 1.21 se presentan las formas de magnitud de la impedancia del circuito eléctrico RLC paralelo en función de la frecuencia con los valores obtenidos.

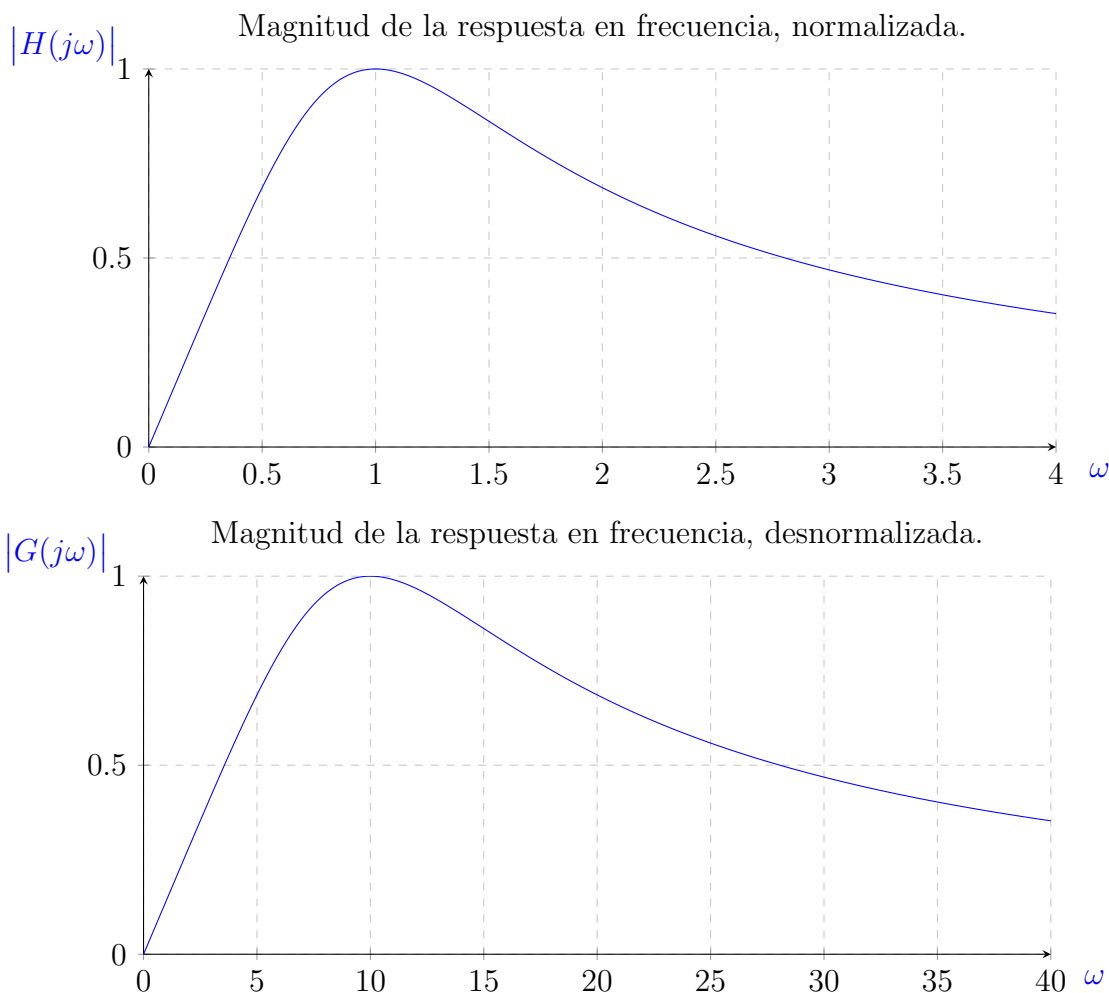


Figura 1.22: Magnitud de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia: *normalizada* y *desnormalizada*

1.5. Desnormalización de una función de transferencia

Dada una función de transferencia $H(s)$ que presenta alguna característica de interés, verbigracia: ganancia máxima, ganancia de 3 dB por debajo de la ganancia máxima, ángulo de fase, etc. para una frecuencia $\omega = 1 [s^{-1}]$, se puede afirmar que la función de transferencia

$$G(s) = H\left(\frac{s}{\omega_n}\right) \quad (1.38)$$

presenta la misma característica de interés en $\omega = \omega_n$.

Ejemplo 1.5 Sea

$$H(s) = \frac{\sqrt{2}s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

la función de transferencia de un filtro pasa banda con frecuencia de resonancia $\omega = 1$ [s⁻¹]. Encuentre la función de transferencia con las mismas características, pero con una frecuencia de resonancia $\omega_o = 10$ [s⁻¹].

De la ecuación (1.38)

$$G(s) = H\left(\frac{s}{10}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{s}{10}\right)}{\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{10}\right) + 1} = \frac{10\sqrt{2}s}{s^2 + 10\sqrt{2}s + 100}$$

La figura 1.22 muestra los resultados obtenidos.

1.6. Transformación de frecuencia

La transformación de frecuencia nos permite la realización de los filtros eléctricos pasa bajas, pasa altas, pasa banda y supresor de banda a partir del filtro eléctrico pasa bajas normalizado, esto es para $\omega = 1$ [s⁻¹].

1.6.1. Transformación del filtro pasa bajas a filtro pasa altas.

Suponga que se tiene una función de transferencia $H(s)$ cuya magnitud de la respuesta en frecuencia se aproxima a la que se observa en la figura 1.23 y se desea encontrar la transformación que aplicada a $H(s)$ nos proporcione una función $G(s)$ cuya magnitud de la respuesta en frecuencia se aproxima a la de la figura 1.24.

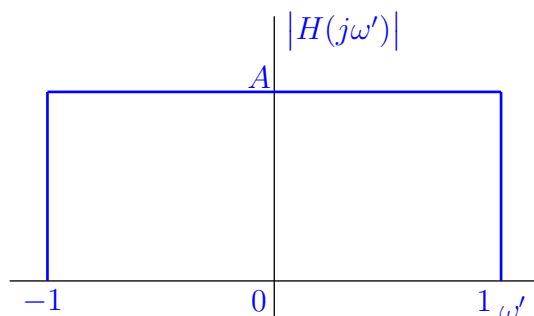


Figura 1.23: Magnitud de la respuesta en frecuencia normalizada de un filtro pasa bajas ideal

La transformación debe ser tal que cuando $\omega' = 0$, $\omega = \infty$ y cuando $\omega' = \pm 1$, $\omega = \pm\omega_c$. Por lo que

$$j\omega' = \frac{\omega_c}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega' = -\frac{\omega_c}{\omega}$$

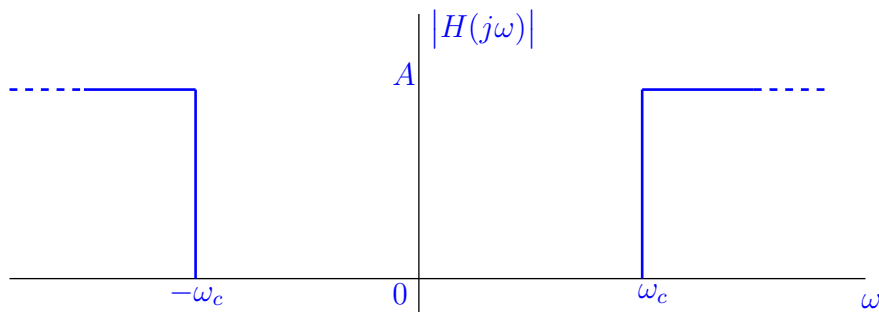


Figura 1.24: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas ideal

En esa misma línea, si

$$s = j\omega \quad \text{y} \quad \rho = j\omega'$$

entonces

$$\rho = \left(\frac{\omega_c}{s} \right)$$

así, finalmente

$$G(s) = H\left(\frac{\omega_c}{s}\right) \quad (1.39)$$

Ejemplo 1.6 La figura 1.25 muestra la magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajas *Chebyshev* de orden 4 con un rizo de 1 dB. Cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{0.2456533}{s^4 + 0.9528114s^3 + 1.4539248s^2 + 0.7426194s + 0.2756276}$$

Bosquejar la magnitud de la respuesta en frecuencia que resulta bajo la transformación dada por la ecuación (1.39).

La transformación dada por la ecuación (1.39) implica

$$H(\rho) = G(s)$$

$$G(s) = \frac{0.2456533s^4}{0.2756278s^4 + 0.7426194s^3 + 1.4539248s^2 + 0.9528114s + 1}$$

consecuentemente

$$\left| G(j\omega) \right| = \left| H\left(\frac{1}{j\omega}\right) \right| = \left| H\left(\frac{-j}{\omega}\right) \right| = \left| H\left(\frac{j}{\omega}\right) \right|$$

El resultado de esta transformación se presenta en la figura 1.25.

Otra característica importante que se debe destacar al efectuar la transformación anterior, es el hecho de que los polos del filtro eléctrico pasa altas son respectivamente los recíprocos de los polos del filtro eléctrico pasa bajas.

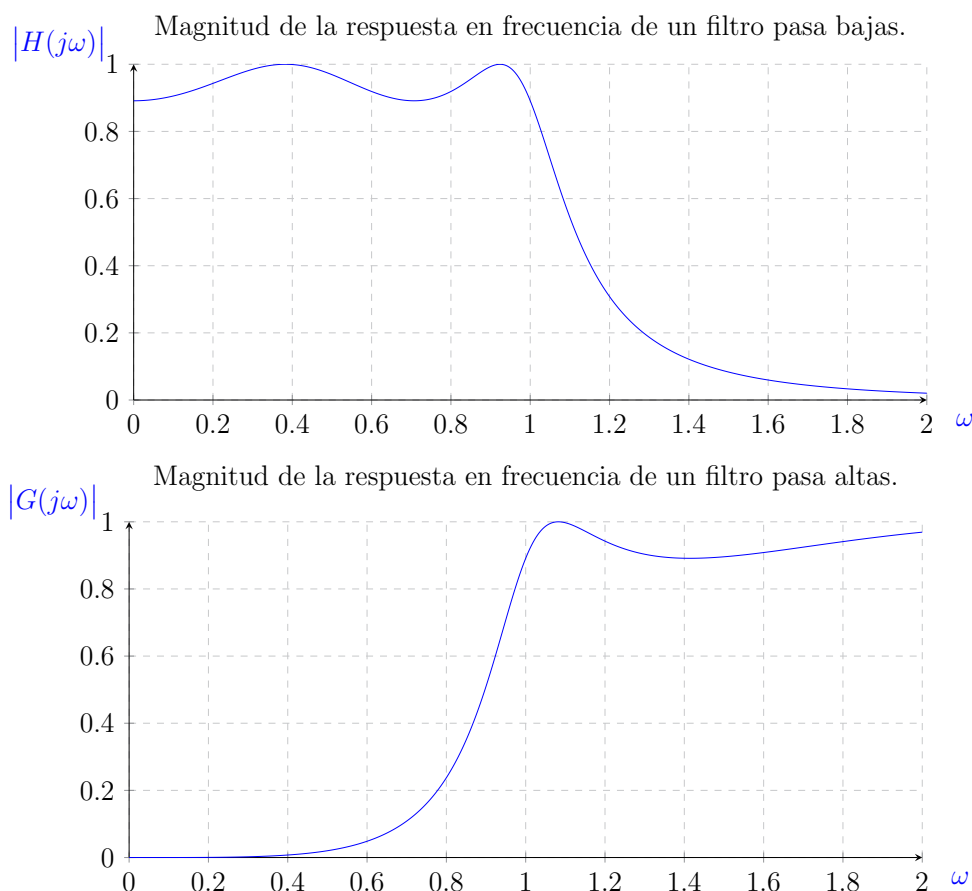


Figura 1.25: Magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa altas, a partir de un filtro pasa bajas, bajo la transformación: $\rho = \omega_c/s$

1.6.2. Transformación de filtro pasa bajas a filtro pasa banda

Para transformar el filtro eléctrica pasa bajas ideal, cuya magnitud de la respuesta en frecuencia de magnitud mostrada en la figura 1.26, de frecuencia central ω_o y ancho de banda $AB = \omega_b - \omega_a$, se aplica una transformación de tal forma que

$$H(j\omega') \longleftrightarrow H\left[jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right]$$

Si

$$s = j\omega \quad \text{y} \quad \rho = j\omega'$$

entonces

$$\rho = Q\left[\frac{s}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{s}\right] = \frac{Q}{\omega_o}\left[s + \frac{\omega_o^2}{s}\right] = \frac{Q}{\omega_o}\left[\frac{s^2 + \omega_o^2}{s}\right] \quad (1.40)$$

es la transformación que nos permite pasar de una función de transferencia de un filtro eléctrico pasa bajas a una función de transferencia de un filtro eléctrico pasa banda.

De la ecuación (1.40)

$$\frac{Q}{\omega_o}s^2 - \rho s + Q\omega_o = 0$$

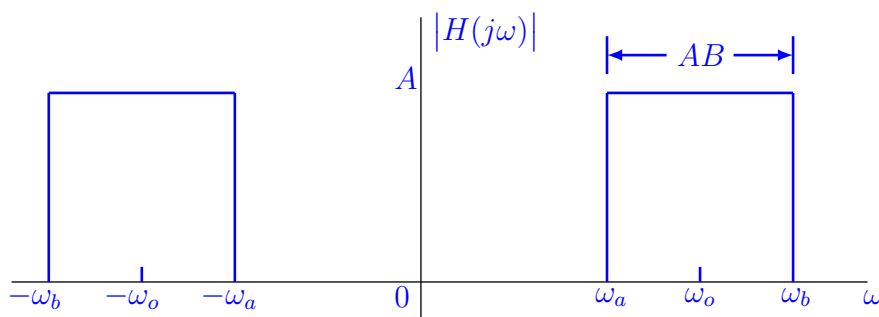


Figura 1.26: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda ideal

que también se puede expresar como

$$s^2 - \frac{\omega_o}{Q}\rho s + \omega_o^2 = 0$$

y cuyas raíces son

$$s = \frac{\frac{\omega_o}{Q}\rho \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{Q}\rho\right)^2 - 4\omega_o^2}}{2} = \frac{\omega_o}{2Q}\rho \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_o^2}{Q^2}(\rho^2 - 4Q^2)}$$

finalmente

$$s = \frac{\omega_o}{2Q} \left[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4Q^2} \right] \quad (1.41)$$

expresión que nos permite determinar los polos del filtro eléctrico pasa banda en función de los polos del filtro eléctrico pasa bajas.

Ejemplo 1.7 Considere el filtro eléctrico pasa bajas *Butterworth* de segundo orden con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Encuentre la función de transferencia de un filtro eléctrico pasa banda Butterworth con $\omega_o = 1$ [s⁻¹] y $Q = 5$.

Empleando la transformación dada por la ecuación (1.40)

$$H(\rho) = G(s) = \frac{1}{25\left(\frac{s^2+1}{s}\right)^2 + \sqrt{2}5\left(\frac{s^2+1}{s}\right) + 1}$$

$$G(s) = \frac{\frac{s^2}{25}}{s^4 + \frac{\sqrt{2}}{5}s^3 + \frac{51}{25}s^2 + \frac{\sqrt{2}}{5}s + 1}$$

Como los polos del filtro eléctrico pasa bajas son

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm j)$$

de la ecuación (1.41), con $\rho = 1/\underline{135^\circ}$, se tiene

$$s_1 = -65.7107 \times 10^{-3} - j929.3018 \times 10^{-3} = 931.6221 \times 10^{-3} \underline{-94.045^\circ}$$

$$s_2 = -75.7106 \times 10^{-3} + j1.0707 = 1.0734 \underline{94.045^\circ}$$

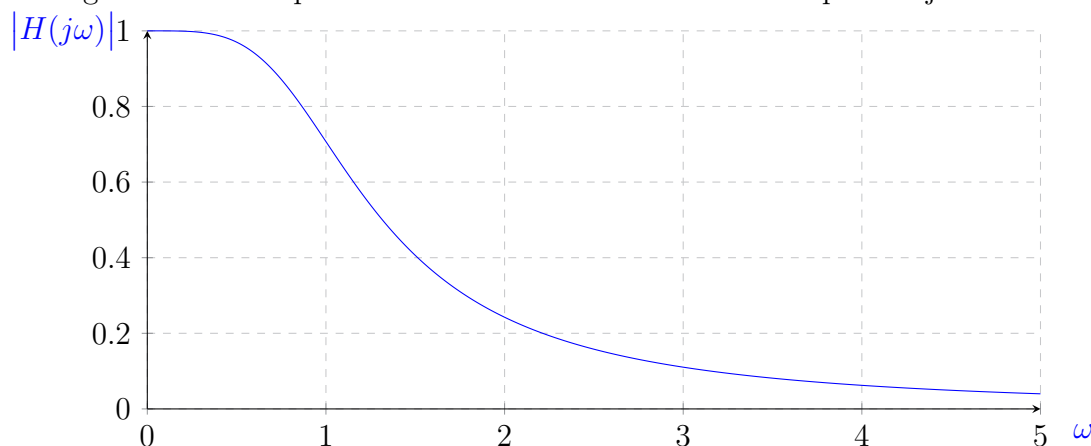
con $\rho = 1/\underline{-135^\circ}$, resulta

$$s_3 = -65.7107 \times 10^{-3} + j929.3018 \times 10^{-3} = 931.6221 \times 10^{-3} \underline{94.045^\circ}$$

$$s_4 = -75.7106 \times 10^{-3} - j1.0707 = 1.0734 \underline{-94.045^\circ}$$

En la figura 1.27 se puede observar los resultados que se tienen al llevar a cabo el mapeo señalado.

Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa bajas Butterworth.



Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa banda Butterworth.

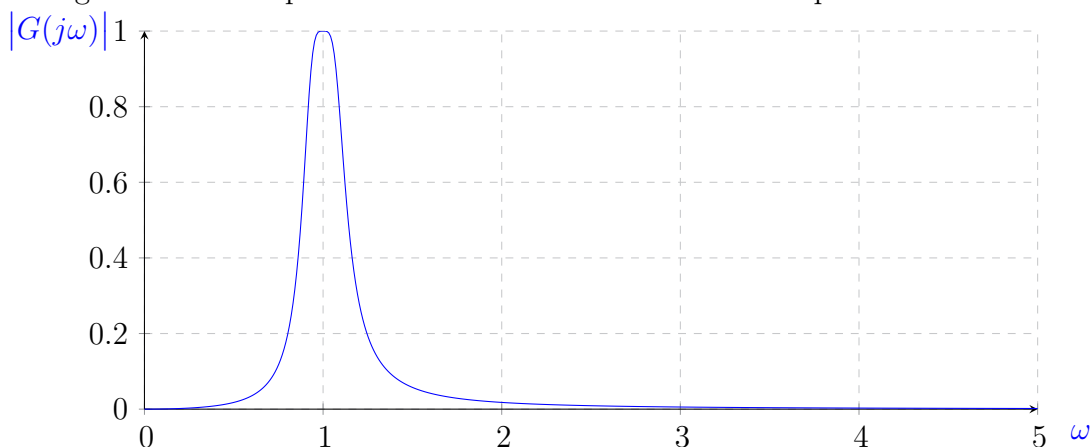


Figura 1.27: Transformación del filtro pasa bajas a filtro pasa banda

1.6.3. Transformación del filtro pasa bajas a filtro supresor de banda

Ahora la transformación requiere mapear la figura 1.23 en la figura 1.28. Se realiza utilizando las dos transformaciones anteriores, es decir, del filtro eléctrico pasa bajas se pasa al filtro eléctrico pasa altas y de aquí al filtro eléctrico pasa banda.

En consecuencia, la transformación que resulta es

$$\rho = \frac{\omega_o}{Q} \left[\frac{s}{s^2 + \omega_o^2} \right] \quad (1.42)$$

por lo que

$$s = \frac{\omega_o}{2Q} \left[\frac{1}{\rho} \pm \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 4Q^2} \right] \quad (1.43)$$

Expresión equivalente a la ecuación (1.41) y que proporciona los polos del filtro eléctrico supresor de banda.

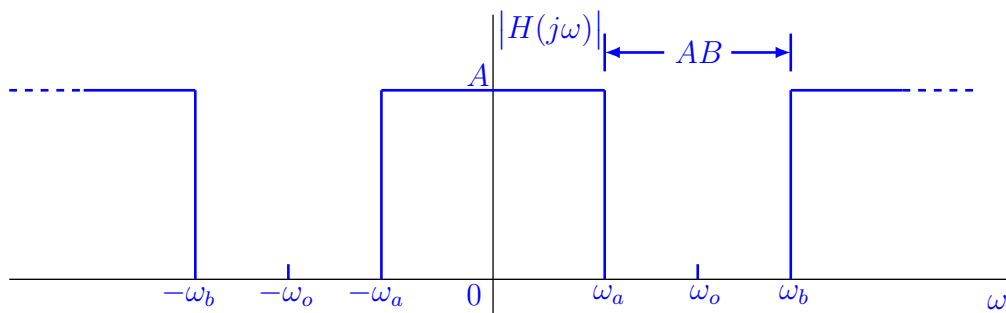


Figura 1.28: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro supresor de banda ideal

Ejemplo 1.8 Considere el filtro eléctrico pasa bajas Butterworth con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Se desea diseñar un filtro eléctrico supresor de banda Butterworth con $\omega_o = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ y $Q = 5$.

Empleando la transformación dada por la ecuación (1.42)

$$H(\rho) = G(s) = \frac{1}{\frac{1}{25} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) + 1}$$

$$G(s) = \frac{(s^2 + 1)^2}{s^4 + \frac{\sqrt{2}}{25} s^3 + \frac{51}{25} s^2 + \frac{\sqrt{2}}{25} s + 1}$$

De nuevo, con

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 \pm j)$$

en la ecuación (1.43)

$$s_1 = -65.7107 \times 10^{-3} - j929.3018 \times 10^{-3} = 931.6221 \times 10^{-3} \angle -94.045^\circ$$

$$s_2 = -75.7106 \times 10^{-3} + j1.0707 = 1.0734 \angle 94.045^\circ$$

$$s_3 = -65.7107 \times 10^{-3} + j929.3018 \times 10^{-3} = 931.6221 \times 10^{-3} \angle 94.045^\circ$$

$$s_4 = -75.7106 \times 10^{-3} - j1.0707 = 1.0734 \angle -94.045^\circ$$

En la figura 1.29 se presentan las magnitudes de las respuestas en frecuencia de los filtros eléctricos pasa bajas y supresor de banda correspondientes

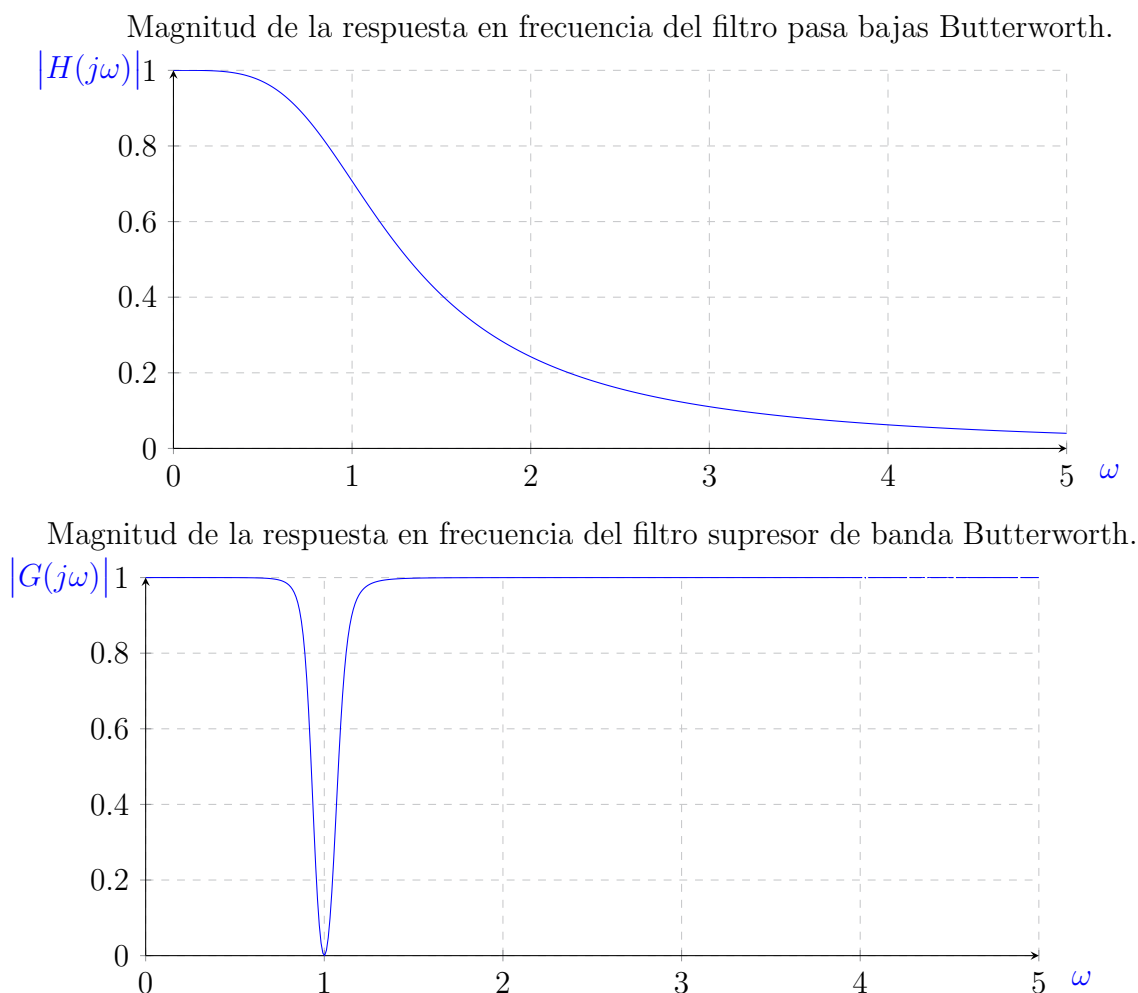


Figura 1.29: Transformación del filtro pasa bajas a filtro supresor de banda

Si se comparan las posiciones de los polos del filtro eléctrico supresor de banda con las posiciones de los polos del filtro eléctrico pasa banda del ejemplo 1.7, ambas coinciden. Esto es obvio, ya que los polinomios característicos de ambos filtros eléctricos son idénticos. Esto no es de extrañar, pues ambos filtros eléctricos se obtuvieron de un mismo filtro eléctrico (pasa bajas Butterworth) y los polos de este tipo de filtro eléctrico normalizado se encuentran sobre un círculo de radio unitario, lo que implica que su módulo es 1 (lo que varía es su fase). Tomando en cuenta las ecuaciones (1.41) y (1.43) se tiene el resultado mencionado, es decir, el recíproco de un número complejo cuyo módulo es la unidad es igual a su conjugado. Es importante puntualizar que lo anterior sólo ocurre para el filtro eléctrico pasa bajas Butterworth normalizado.

1

2

3

4

5

6

A

B

C

D

Capítulo 2

Aproximación

Un sistema o ecualizador o filtro eléctrico opera sobre una señal de entrada, la transforma o la modifica y produce una señal de salida. Así, para que una respuesta en frecuencia satisfaga ciertas características que se desean, existen varias alternativas. En este capítulo se presentan algunas opciones.

2.1. Aproximaciones clásicas

Como se mencionó en el capítulo anterior, cualquier filtro eléctrico pasa bajas, pasa altas, pasa banda o supresor de banda se puede obtener a partir de filtros eléctricos pasa bajas, para los cuales la frecuencia que delimita el fin de la banda de paso es unitaria, o sea $\omega_p = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$.

Visto que el filtro eléctrico pasa bajas ideal es irrealizable, en la práctica se cuenta con aproximaciones normalizadas a este ($\omega = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$), las cuales entre otras son

- Aproximación de *Butterworth*
- Aproximación de *Chebyshev*
- Aproximación de *Elíptica*
- Aproximación de *Bessel*

En general, la magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro eléctrico pasa bajas presenta la siguiente especificación

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + F(\omega^2)}} \quad (2.1)$$

donde $F(\omega^2)$ es una función que puede ser un polinomio (aproximaciones de Butterworth y de Chebyshev) o bien un cociente de polinomios (aproximación Elíptica). A la función $F(\omega^2)$, *función par* de la frecuencia, se le denomina *función característica*.

Para la aproximación de Bessel, en la que interesa más la fase que la magnitud (como se verá más adelante) no tiene sentido expresar la magnitud de un filtro pasa bajas de tipo Bessel en la forma dada por la ecuación (2.1).

2.2. Plantilla de diseño para una especificación de filtrado

A la especificación requerida para un determinado requerimiento de filtrado, dependiente de la frecuencia, se le denomina plantilla de diseño. En esta se definen, dependiendo de si el filtro eléctrico es pasa bajas o pasa altas o pasa banda o supresor de banda, los siguientes parámetros

- Ganancia en la(s) banda(s) de paso
- Atenuación mínima en la(s) banda(s) de supresión
- Frecuencia(s) que delimita(n) a la(s) banda(s) de paso
- Frecuencia(s) que delimita(n) a la(s) banda(s) de supresión

Para aclarar ideas en la figura 2.1 se muestra el formato de una plantilla de diseño para un filtro eléctrico pasa bajas.

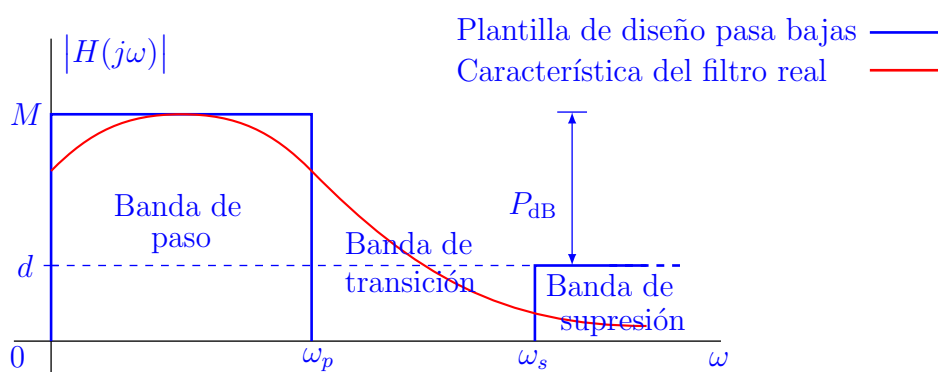


Figura 2.1: Plantilla de diseño de un filtro eléctrico pasa bajas

Lo propio para el formato de plantillas de diseño para filtros eléctricos pasa altas, pasa banda y supresor de banda, se describirá más adelante conforme sea necesario.

Con referencia a la figura 2.1, la magnitud P_{dB} está dada por

$$P_{dB} = 20 \log \frac{M}{d}$$

En la práctica, una vez que se ha escogido un cierto tipo de aproximación, se determina el orden que debe tener el filtro eléctrico y se procede a construirlo, ya sea mediante síntesis activa o pasiva. En este vademécum se estudia únicamente la síntesis activa en la realización de los filtros eléctricos.

A continuación se trata cada una de las aproximaciones mencionadas.

2.3. Aproximación de Butterworth normalizada

Para esta aproximación la función característica tiene la forma

$$F(\omega^2) = \omega^{2n}$$

donde n denota el orden del filtro eléctrico. La magnitud $|H(j\omega)|$ está dada por

$$|H(j\omega)| = \frac{M}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \quad (2.2)$$

Puede probarse que la respuesta del filtro eléctrico Butterworth es máximamente plana en la banda pasante.^[1] Se debe percatar, además, que en la ecuación (2.2), $\omega = 1 [s^{-1}]$ es la frecuencia de corte del filtro eléctrico independientemente del orden del mismo; por tanto la ecuación (2.2) representa un filtro eléctrico pasa bajas normalizado. Si se desea construir un filtro eléctrico con frecuencia de corte diferente de $1 [s^{-1}]$, se normaliza la plantilla de diseño, se obtiene la función de transferencia del filtro eléctrico normalizado y después se desnormaliza dicha función de transferencia para que la frecuencia de corte sea la deseada.

A continuación se determinan los polos de la función de transferencia del filtro eléctrico cuya magnitud está dada por la ecuación (2.2). El cuadrado de la magnitud es

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{M^2}{1 + \omega^{2n}}$$

sustituyendo $\omega = -js$ y puesto que

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega)$$

se tiene

$$H(s)H(-s) = \frac{M^2}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

así, los polos están dados por

$$s = [-1(-1)^n]^{1/2n}$$

entonces

$$\text{Para } n \text{ impar} \quad s = (1)^{1/2n} = 1e^{j\pi k/2n} \quad k = 0, 2, 4, \dots, 4n - 2 \quad (2.3a)$$

$$\text{Para } n \text{ par} \quad s = (-1)^{1/2n} = 1e^{j\pi k/2n} \quad k = 1, 3, 5, \dots, 4n - 1 \quad (2.3b)$$

De las ecuaciones anteriores, se deduce que de los $2n$ polos, la mitad se encuentra en el semiplano izquierdo y la otra mitad en el semiplano derecho del plano complejo. En la figura 2.2 se ilustra lo anterior para $n = 5$.

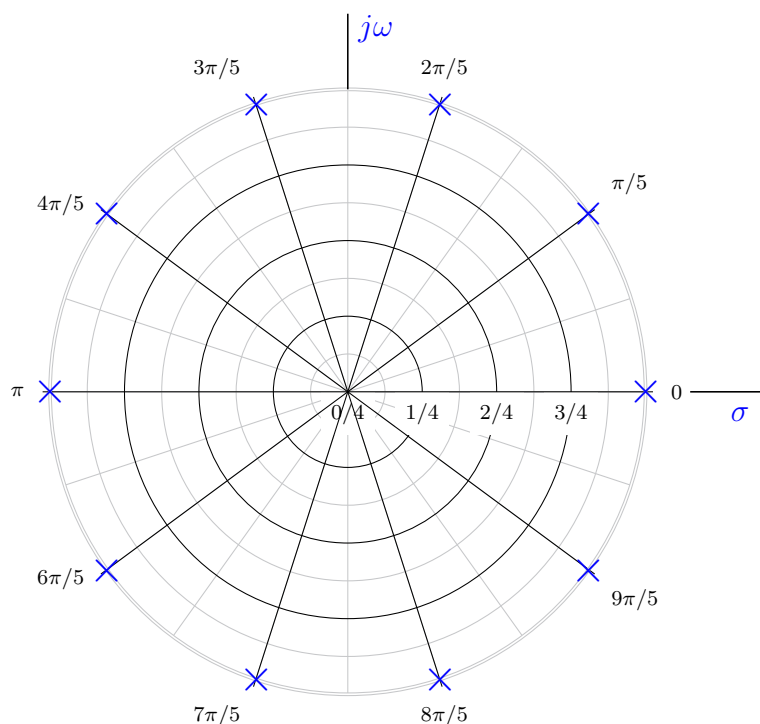


Figura 2.2: Polos de $H(s)$ $H(-s)$ de un filtro pasa bajas de orden 5

Por supuesto, los polos que interesan son los del semiplano izquierdo, ya que conducen a una realización estable.

Ejemplo 2.1 Determine los polos y la función de transferencia de un filtro eléctrico pasa bajas Butterworth de orden 2.

Según la ecuación (2.3b) los polos en el semiplano izquierdo son

$$p_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad p_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La función de transferencia del filtro eléctrico pasa bajas correspondiente es

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

En el Apéndice A se encuentran tablas que proporcionan los polos y los coeficientes de los factores cuadráticos del denominador de la función de transferencia, para filtros eléctricos Butterworth normalizados de hasta noveno orden.

Para determinar el orden correspondiente a una plantilla de diseño dada, se puede utilizar la siguiente expresión

$$n = \mathbf{I} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\log(10^{0.1P_{dB}} - 1)}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} + 1 \right\} \quad (2.4)$$

donde el símbolo $\mathbf{I}\{\cdot\}$ es un operador que significa “la parte entera de.”.

Ejemplo 2.2 Determine el orden de un filtro eléctrico pasa bajas Butterworth que satisfaga las siguientes especificaciones de diseño

$$P_{dB} = 40 \text{ dB}$$

$$\omega_p = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\omega_s = 2 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Al efectuar las operaciones indicadas en la ecuación (2.4), resulta

$$n = \mathbf{I} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\log(10^{0.1(40)} - 1)}{\log\left(\frac{2}{1}\right)} + 1 \right\} = \mathbf{I}\{7.64378\} = 7$$

2.4. Aproximación de Chebyshev normalizada

La magnitud $|H(j\omega)|$ de un filtro eléctrico pasa bajas de orden n de este tipo es

$$|H(j\omega)| = \frac{M}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega)}} \quad 0 < \epsilon \leq 1 \quad (2.5)$$

donde $C_n(\omega)$ es un polinomio de Chebyshev de grado n que se define de la siguiente manera

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\omega)) & \text{si } |\omega| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arcosh}(\omega)) & \text{si } 1 \leq \omega \\ (-1)^n \cosh(n \operatorname{arcosh}(-\omega)) & \text{si } \omega \leq -1 \end{cases} \quad (2.6)$$

De la ecuación (2.6), se pueden deducir las siguientes propiedades de los polinomios de Chebyshev.

$$1. \quad C_n^2(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$2. \quad C_n^2(\omega) = 1 \quad \text{si} \quad \omega = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$3. \quad C_n(\omega) = 2\omega C_{n-1}(\omega) - C_{n-2}(\omega)$$

4. Las raíces de $C_n(\omega)$ son reales, se encuentran en el intervalo $|\omega| \leq 1$ y están dadas por la siguiente ecuación

$$\omega = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$5. \quad \begin{aligned} C_0(\omega) &= 1 \\ C_1(\omega) &= \omega \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 Empleando las propiedades 3) y 5), determine los polinomios de Chebyshev de orden 2 y 3.

De la propiedad 3)

$$C_2(\omega) = 2\omega C_1(\omega) - C_0(\omega)$$

considerando la propiedad 5)

$$C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

con la propiedad 3), nuevamente

$$C_3(\omega) = 2\omega C_2(\omega) - C_1(\omega) = 2\omega(2\omega^2 - 1) - \omega = 4\omega^3 - 3\omega$$

Por lo visto antes y considerando la ecuación (2.5), la magnitud $|H(j\omega)|$ de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev presenta un rizo para frecuencias comprendidas en el intervalo $|\omega| \leq 1$, su magnitud en decibels está dada por la siguiente expresión

$$|R|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \epsilon^2} \quad (2.7)$$

En la figura 2.3 se muestran las curvas de magnitud de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev de orden 6, para distintos valores de ϵ y $M = 1$.

Asimismo, de la ecuación (2.7) se deduce

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1|R|_{\text{dB}}} - 1} \quad (2.8)$$

Adicionalmente, en la figura 2.4 se bosqueja la magnitud $|H(j\omega)|$ de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev de 3 dB de rizo y de ordenes $n = 2, 3, 4$ y 5.

En la práctica la magnitud del rizo en decibels está comprendida en el rango

$$0 < |R|_{\text{dB}} \leq 3 \text{ dB}$$

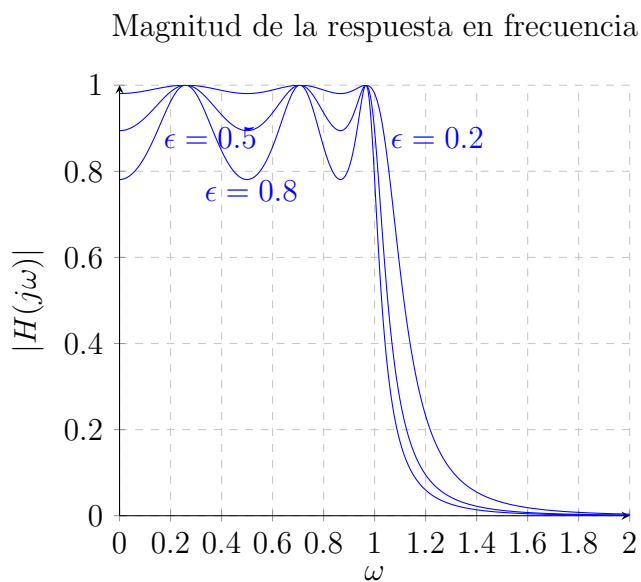


Figura 2.3: Variación de la magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev de orden $n = 6$ y $M = 1$

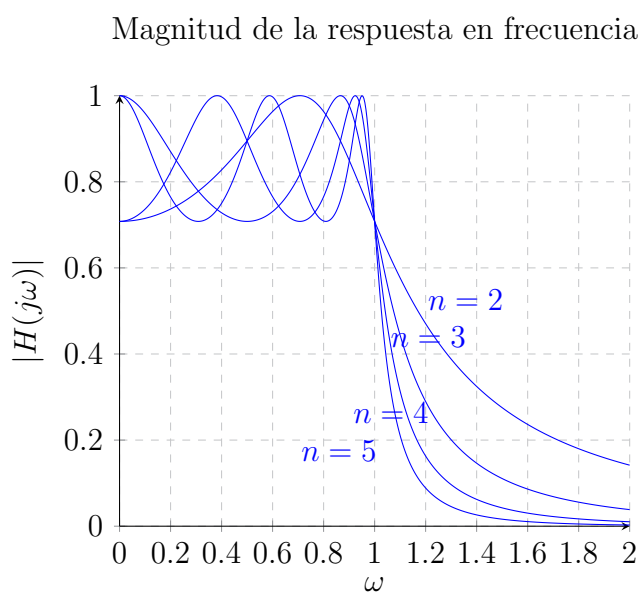


Figura 2.4: Curvas de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev de 3 dB de rizo y ordenes $n = 2, 3, 4$ y 5

por tanto, la frecuencia de corte del filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev normalizado será mayor o igual a uno, como lo indica la siguiente ecuación que se puede deducir a partir de la ecuación (2.5).

$$\omega_c = \cosh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) \quad (2.9)$$

por lo que $\omega_c \geq 1$.

Ejemplo 2.4 Determine la frecuencia de corte ω_c de un filtro pasa bajas Chebyshev normalizado de orden $n = 2$ y rizo de $R = 1$ dB.

De la ecuación (2.8)

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.50884$$

teniendo en cuenta que

$$\operatorname{arcosh}(x) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

de la ecuación (2.9)

$$\omega_c = \cosh\left(\frac{1}{2} \ln\left(1.9652 + \sqrt{2.8621}\right)\right) = 1.2176$$

2.4.1. Cálculo de los polos del filtro pasa bajas Chebyshev normalizado de orden n

De la ecuación (2.5)

$$H(s)H(-s) = \frac{M^2}{1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{s}{j}\right)}$$

de aquí, la ecuación que determina los polos es

$$1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 0$$

por tanto

$$\cos\left(n \arccos\left(\frac{s}{j}\right)\right) = \pm \frac{j}{\epsilon} \quad (2.10)$$

haciendo

$$\arccos\left(\frac{s}{j}\right) = \omega = u + jv \quad (2.11)$$

sustituyendo la ecuación (2.11) en la ecuación (2.10)

$$\cos[n(u + jv)] = \cos(nu) \cosh(nv) - j \operatorname{sen}(nu) \operatorname{senh}(nv) = \pm \frac{j}{\epsilon}$$

de donde

$$\cos(nu) \cosh(nv) = 0 \quad (2.12)$$

$$\operatorname{sen}(nu) \operatorname{senh}(nv) = \pm \frac{1}{\epsilon} \quad (2.13)$$

de la ecuación (2.12)

$$\cos(nu) = 0$$

lo que implica

$$u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (2.14)$$

Considerando las ecuaciones (2.13) y (2.14), se tiene

$$v = \frac{1}{n} \operatorname{arsenh} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \quad (2.15)$$

de la ecuación (2.11)

$$s = j \cos(u_k + jv) = \operatorname{sen}(u_k) \operatorname{senh}(v) + j \cos(u_k) \cosh(v)$$

La parte real y la parte imaginaria de los polos complejos en el semiplano izquierdo del plano complejo están dados por

$$\left. \begin{aligned} T_k &= - \operatorname{sen}(u_k) \operatorname{senh}(v) \\ \omega_k &= \cos(u_k) \cosh(v) \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.16)$$

De la ecuación anterior se puede concluir una importante relación

$$\frac{T_k^2}{\operatorname{senh}^2(v)} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2(v)} = 1$$

lo que indica que los polos de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev se localizan a lo largo de una elipse. En la figura 2.5, se ilustra la disposición geométrica de los polos de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev de orden $n = 15$ y rizo de $R = 0.05$ dB.

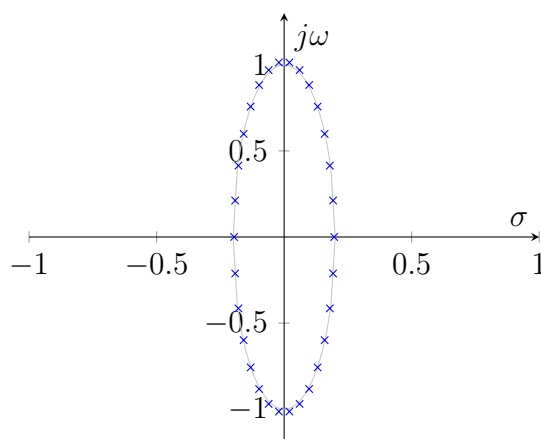


Figura 2.5: Disposición geométrica de los polos de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev de orden $n = 15$ y rizo $R = 0.05$ dB

Ejemplo 2.5 Determine la función de transferencia de un filtro eléctrico pasa bajas Chebyshev de orden $n = 2$ y rizo $R = 3$ dB.

De las ecuaciones (2.14) y (2.15)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4}\pi & u_2 &= \frac{3}{4}\pi \\ v &= 441.5268 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

considerando la ecuación (2.16), se tiene

$$\begin{aligned} T_1 &= -322.4498 \times 10^{-3} & w_1 &= 777.1576 \times 10^{-3} \\ T_2 &= -322.4498 \times 10^{-3} & w_2 &= -777.1576 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

y la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{M}{(s + 0.3224 + j0.7771)(s + 0.3224 - j0.7771)} = \frac{M}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$$

En las tablas del Apéndice B se enlistan los polos y los factores cuadráticos del denominador de la función de transferencia de filtros pasa bajas Chebyshev normalizados de hasta octavo orden.

En la práctica, una vez que se ha determinado la magnitud deseada del rizo y se tiene una especificación de diseño, el orden adecuado del filtro eléctrico se puede determinar con la siguiente ecuación

$$n = \mathbf{I} \left\{ \frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\epsilon} \sqrt{(10^{0.1|P|_{\text{dB}}} - 1)} \right)}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \right\} + 1 \quad (2.17)$$

Con relación a la ganancia para $\omega = 0$, se puede afirmar, con base en la propiedad 1) de los polinomios de Chebyshev lo siguiente: Si el orden del filtro eléctrico es par, la ganancia para $\omega = 0$ es la que marca el umbral inferior del rizo. Si el orden del filtro eléctrico es impar, la ganancia para $\omega = 0$ es la que marca el umbral superior del rizo.

2.5. Aproximación Elíptica normalizada

En las aproximaciones de Butterworth y Chebyshev estudiadas, la magnitud $|H(j\omega)|$ del filtro eléctrico pasa bajas puede representarse por medio de la ecuación (2.1); donde $F(\omega^2)$ es un polinomio. En la aproximación elíptica $F(\omega^2)$ ya no es un polinomio, sino una función definida por las ecuaciones (2.18) y (2.19), para las cuales los numeradores tienen raíces en el intervalo $[0,1]$.

Si n es par

$$F(\omega^2) = A \left[\frac{\left(\omega_1^2 - \frac{\omega^2}{\omega_s} \right) \left(\omega_2^2 - \frac{\omega^2}{\omega_s} \right) \dots \left(\omega_l^2 - \frac{\omega^2}{\omega_s} \right)}{\left(1 - \frac{\omega_1^2 \omega^2}{\omega_s} \right) \left(1 - \frac{\omega_2^2 \omega^2}{\omega_s} \right) \dots \left(1 - \frac{\omega_l^2 \omega^2}{\omega_s} \right)} \right] \quad (2.18)$$

donde A es una constante y $l = \frac{n}{2}$.

Si n es impar

$$F(\omega^2) = B \left[\frac{\omega \left(\omega_1^2 - \frac{\omega^2}{\omega_s} \right) \left(\omega_2^2 - \frac{\omega^2}{\omega_s} \right) \dots \left(\omega_l^2 - \frac{\omega^2}{\omega_s} \right)}{\left(1 - \frac{\omega_1^2 \omega^2}{\omega_s} \right) \left(1 - \frac{\omega_2^2 \omega^2}{\omega_s} \right) \dots \left(1 - \frac{\omega_l^2 \omega^2}{\omega_s} \right)} \right] \quad (2.19)$$

donde B es una constante y $l = \frac{n-1}{2}$.

Las ecuaciones anteriores hacen que el filtro pasa bajas elíptico presente un rizo tanto en la banda de paso como en la banda de supresión que dependiendo de la paridad de n hay $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$ frecuencias para las cuales la ganancia es nula.

En la figura 2.6 se ilustra la magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajas elíptico normalizado, con $n = 4$, $\omega_s = 1.05 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ y $|R| = 1 \text{ dB}$.

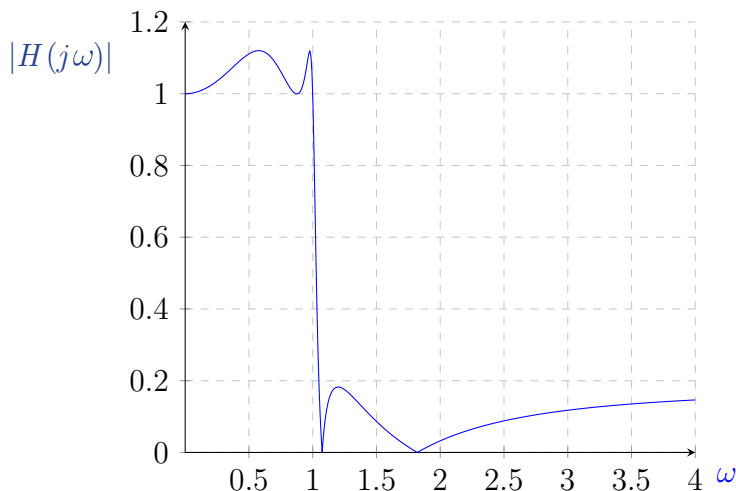


Figura 2.6: Magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro bajas elíptico normalizado

La relación entre el borde de la banda de paso ω_p y el borde de la frecuencia de supresión ω_s es

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s}$$

este parámetro k recibe el nombre de *factor de selectividad*.

En el filtro eléctrico normalizado, $\omega_p = 1$ por lo que

$$k = \frac{1}{\omega_s}$$

En el mismo orden de ideas, las características de las dos bandas con rizo constante establecen la siguiente propiedad ^[11]

$$\omega_{pi} \omega_{zi} = \omega_s = \frac{1}{k} \quad (2.20)$$

Siendo ω_{pi} una frecuencia en la que la ganancia en la banda pasante es máxima y ω_{zi} una frecuencia en la que se tiene una ganancia nula en la banda de supresión. Para un determinado orden ^[11], los valores explícitos se obtienen a partir de

$$\omega_{pi} = sn\left(\frac{ik_a}{n}, k\right) \quad (2.21)$$

donde

$$i = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots, n-1 & \text{para } n \text{ impar} \\ 1, 3, 5, \dots, n-1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

y sn denota la función *seno elíptico*.

Para el cálculo de los senos elípticos ^{[4][11]}, se pueden emplear las siguientes expresiones

$$sn\left(\frac{ik_a}{n}, k\right) = \sin \phi$$

donde ϕ se define implícitamente empleando

$$\frac{ik_a}{n} = \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

siendo

$$k_a = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.22)$$

Siguiendo un proceso similar, en principio, al que se siguió para los casos Butterworth y Chebyshev, se pueden determinar los polos del filtro eléctrico pasa bajas elíptico normalizado ^{[3][4]}. Los ceros q_i (imaginarios) del mismo están dados por

$$q_i = \pm j\omega_{zi} \quad (2.23)$$

A continuación se proporciona un algoritmo para determinar la función de transferencia de un filtro pasa bajas elíptico normalizado.

Dados ω_s , R_{dB} y P_{dB} la función de transferencia tiene la forma

$$H(s) = \frac{H_o}{D_o(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}}$$

donde

$$r = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{para } n \text{ impar} \\ \frac{n}{2} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

y

$$D_o(s) = \begin{cases} s + \sigma_o & \text{para } n \text{ impar} \\ 1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Los coeficientes de la función de transferencia y H_o se pueden determinar, empleando las siguientes expresiones matemáticas tomadas de la referencia [4]

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$q_o = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \right]$$

$$q = q_o + 2q_o^5 + 15q_o^9 + 150q_o^{13}$$

$$D = \frac{10^{0.1P} - 1}{10^{0.1R} - 1}$$

$$n \geq \frac{\log (16 D)}{\log \left(\frac{1}{q}\right)}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2n} \ln \frac{10^{0.05R} + 1}{10^{0.05R} - 1}$$

$$\sigma_o = \left| \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sinh \left[(2m+1)\Lambda \right]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cosh 2m\Lambda} \right|$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_o^2) \left(1 + \frac{\sigma_o^2}{k} \right)}$$

$$\Omega_i = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sen \frac{(2m+1)\pi\mu}{n}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos \frac{2m\pi\mu}{n}}$$

donde

$$\mu = \begin{cases} i & \text{para } n \text{ impar} \\ i - \frac{1}{2} & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, r$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\Omega_i^2) \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{k} \right)}$$

$$A_{0i} = \frac{1}{\Omega_i^2}$$

$$B_{0i} = \frac{(\sigma_o V_i)^2 + (\Omega_i W)^2}{(1 + \sigma_o^2 \Omega_i^2)^2}$$

$$B_{1i} = \frac{2\sigma_o V_i}{1 + \sigma_o^2 \Omega_i^2}$$

$$H_o = \begin{cases} \sigma_o \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & \text{para } n \text{ impar} \\ 10^{-0.05R} \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

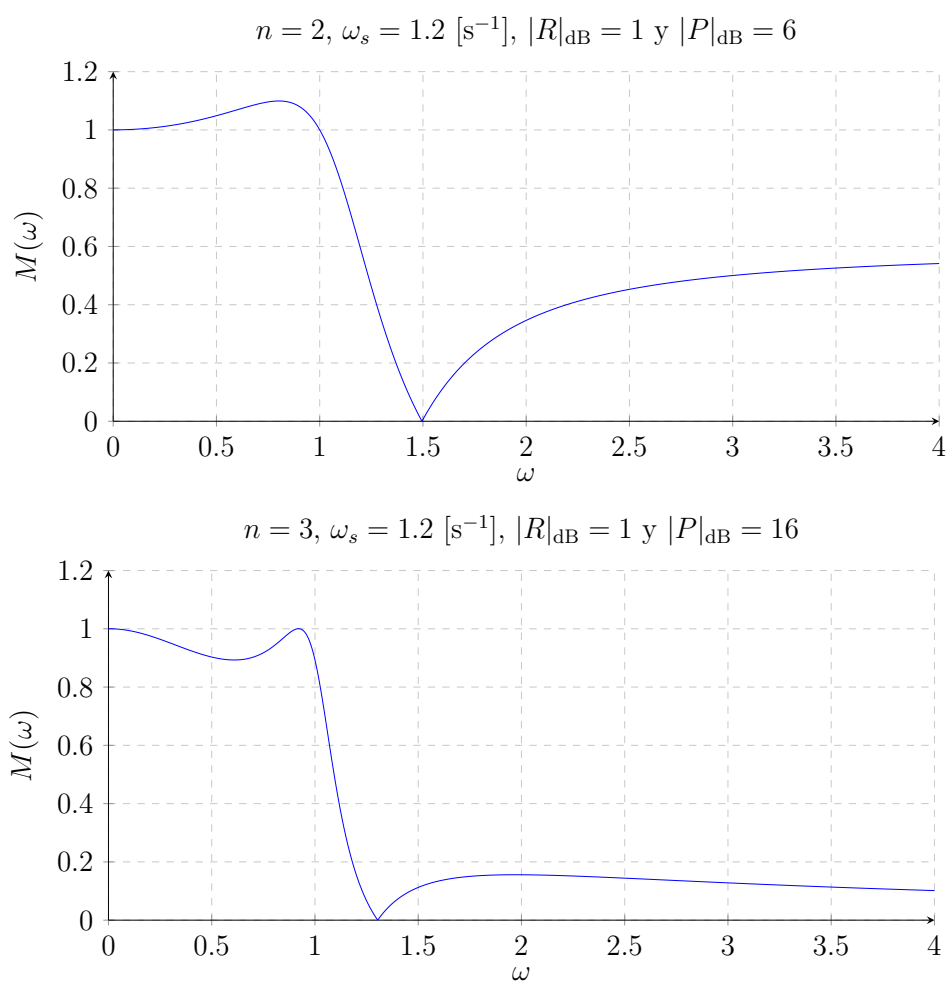


Figura 2.7: Formas de la magnitud de la respuesta en frecuencia de filtros eléctricos pasa bajas elípticos de orden *par* e *impar*

En las tablas del Apéndice C se presentan los polos y la forma de la función de transferencia de filtros eléctricos elípticos normalizados de hasta noveno orden. Se debe advertir que dicha tabla, está normalizada de acuerdo a la figura 2.6, de modo que para $\omega = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ se tiene el inicio de la banda de transición.

Cabe mencionar que para una especificación de diseño dada, el filtro eléctrico elíptico es el que requiere del menor orden de las tres aproximaciones tratadas hasta ahora; en otras palabras, *el filtro eléctrico elíptico es el que presenta un corte más abrupto para una n dada.*

En lo que toca a la ganancia para $\omega = 0$, si el orden del filtro eléctrico es par, la ganancia es la que marca el umbral inferior del rizo en la banda pasante. Si el orden es impar, la ganancia es la que marca el umbral superior del rizo en la banda de paso, la figura 2.7 ilustra estos asertos.

Ejemplo 2.6 Determine la función de transferencia de un filtro eléctrico pasa bajas elíptico sujeto a las siguientes especificaciones.

1. 0.1 dB de rizo en la banda de paso.

2. Frecuencia que inicia la banda de transición, 1000 [Hz].
3. Frecuencia que inicia la banda de supresión, 2000 [Hz].
4. Ganancia máxima en la banda de paso, 10.
5. Pérdida de cuando menos 20 dB en la banda de transición.

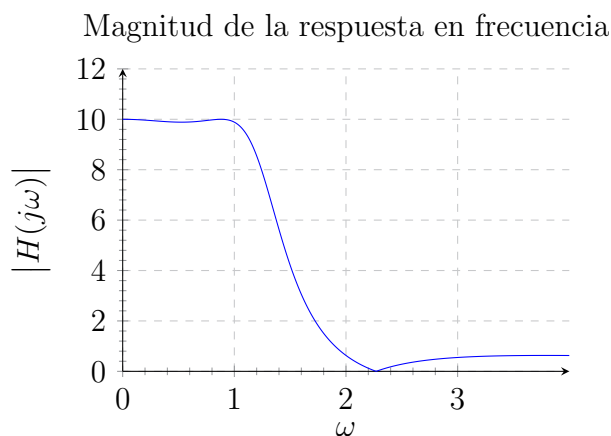


Figura 2.8: Filtro eléctrico normalizado

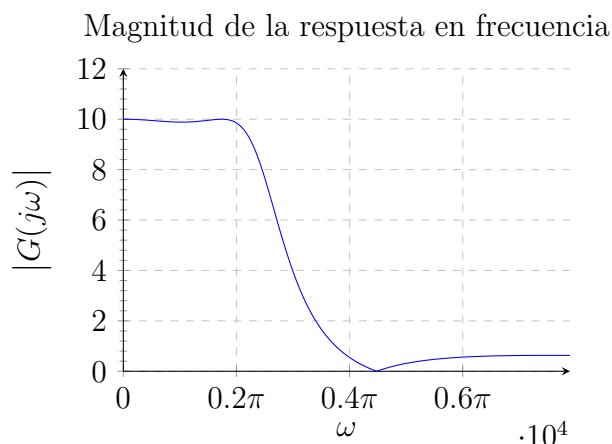


Figura 2.9: Filtro eléctrico desnormalizado

De la Tabla C.2 del Apéndice C, se encuentra que los coeficientes de la función de transferencia normalizada son

n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
3	2	24.0101700	0.7639745	1.6298671	5.1532091	1.1173823

entonces

$$H(s) = \frac{H_o(s^2 + 5.1532091)}{(s + 1.1173823)(s^2 + 0.7639745s + 1.6298671)}$$

como el filtro elíptico es de orden impar

$$H(0) = 10$$

lo que implica

$$10 = \frac{H_o(5.1532091)}{(1.1173823)(1.6298671)}$$

por tanto

$$H_o = 3.534086$$

Finalmente, al desnormalizar la función de transferencia, de tal modo que la frecuencia de inicio de la banda de transición sea de $2\pi \times 1000$ [s⁻¹] y no de 1 [s⁻¹], la función de transferencia que se busca es

$$G(s) = \frac{22.20532 \times 10^3(s^2 + 203.4406 \times 10^6)}{(s + 7.020728 \times 10^3)(s^2 + 4.800197 \times 10^3s + 64.34463 \times 10^6)}$$

En las figuras 2.8 y 2.9 se muestran las magnitudes de la respuesta en frecuencia de los dos filtros eléctricos pasa bajas elípticos, normalizado y desnormalizado, que se han encontrado.

2.6. Aproximación de Bessel normalizada

En las tres aproximaciones que se han discutido, el diseño de los filtros eléctricos se fundamenta en aproximar una magnitud dada, sin hacer ninguna consideración acerca de la fase o argumento. En la figura 2.10 se muestra la fase de la respuesta en frecuencia de filtros eléctricos pasa bajas normalizados de tipo Butterworth y Chebyshev (con Rizo = 1dB).

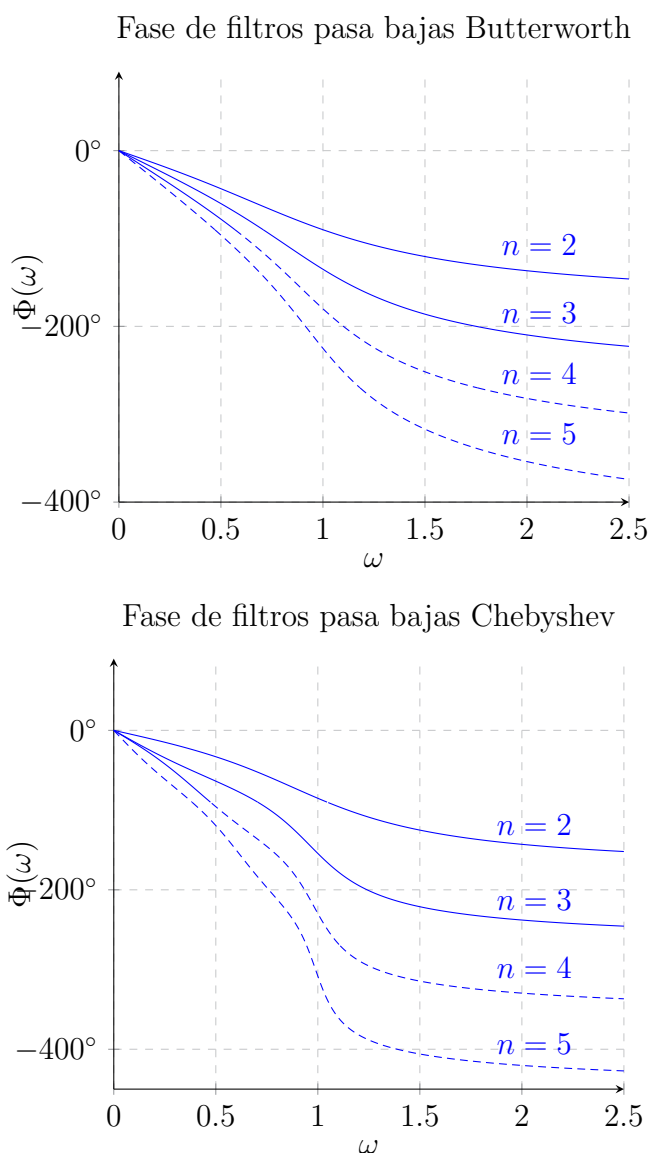


Figura 2.10: Fase de la respuesta en frecuencia de filtros pasa bajas Butterworth y Chebyshev normalizados

En esta figura se advierte la *relación no lineal* entre la fase $\Phi(\omega)$ y la frecuencia ω , lo cual en algunas aplicaciones puede resultar no deseable, verbigracia: procesamiento de señales de video, ya que cada

componente de la señal a procesar experimenta retrasos de diferente magnitud, lo que distorsiona su forma.

Si la relación entre la fase y la frecuencia es lineal de la forma

$$\Phi(\omega) = -\omega T(\omega) \quad (2.24)$$

todas las componentes de la señal a través del filtro eléctrico son retrasadas T unidades de tiempo. Si se define la función $T(\omega)$, denominada *tiempo de retraso*, por medio de la siguiente expresión

$$T(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} \quad (2.25)$$

se aprecia que si la fase de la respuesta en frecuencia de cierto filtro eléctrico es lineal y de la forma dada por la ecuación (2.24), $T(\omega)$ es constante e igual a T . Desafortunadamente, en la práctica la dependencia entre la fase $\Phi(\omega)$ y la frecuencia ω , no es lineal, por lo que el tiempo de retardo depende de la frecuencia. A continuación se verá una forma de aproximar en la práctica la respuesta en frecuencia proporcionada por la ecuación (2.24).

Un filtro eléctrico con la fase de la respuesta en frecuencia lineal podría tener la función de transferencia

$$H(s) = e^{-s} \quad (2.26)$$

donde la fase y el tiempo de retardo son respectivamente

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= -\omega \\ T(\omega) &= 1 \end{aligned}$$

puesto que

$$e^{-s} = \cosh(s) + \sinh(s)$$

entonces

$$H(s) = \frac{1}{\cosh(s) + \sinh(s)} \quad (2.27)$$

o bien

$$H(s) = \frac{1}{M(s) + N(s)} \quad (2.28)$$

donde $M(s)$ es un polinomio de orden par y $N(s)$ es un polinomio de orden impar. De las ecuaciones (2.27) y (2.28)

$$\frac{\cosh(s)}{\sinh(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (2.29)$$

considerando los desarrollos de Mac-Laurin

$$\begin{aligned} \cosh(s) &= 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^6}{6!} + \dots \\ \sinh(s) &= s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \frac{s^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

la ecuación (2.29) se puede escribir como

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{\vdots}{\frac{1}{2n-1}}}}}$$

Si el miembro derecho de la ecuación anterior se trunca en n términos, se tiene, una vez que se determinen los polinomios $M(s)$ y $N(s)$ una aproximación de orden n de la función de transferencia dada por la ecuación (2.26). Por ejemplo, si $n = 2$

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s}} = \frac{s^2 + 3}{3s}$$

por tanto

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3 + 3s} = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}$$

que representa un filtro eléctrico de tipo Bessel de segundo orden. La fase de este filtro eléctrico es

$$\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{3\omega}{3 - \omega^2}\right)$$

y el tiempo de retardo está dado por

$$T(\omega) = \frac{3\omega^2 + 9}{\omega^4 + 3\omega^2 + 9}$$

Por consiguiente

$$T(0) = 1 \quad \text{y} \quad T(1) = \frac{12}{13} \approx 1$$

Para $n = 4$, la función de transferencia que aproxima la respuesta lineal de la fase es

$$H(s) = \frac{K}{s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105}$$

se puede ver para este caso que

$$T(0) = 1 \quad \text{y} \quad T(1) = \frac{12745}{12746} \approx 1$$

En general, se puede probar que el filtro eléctrico de orden n que mejor aproxima la característica lineal de la fase es de la forma

$$H(s) = \frac{B_n(0)}{B_n(s)}$$

donde $B_n(s)$ es un polinomio de Bessel, dado por

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} k! (n-k)!} s^k \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Todos estos filtros están normalizados de modo que

$$T(0) = 1 \quad \text{y} \quad H(0) = 1$$

En la figura 2.11 se presenta la fase de la respuesta en frecuencia de filtros eléctricos pasa bajas de tipo Bessel normalizados de distinto orden.

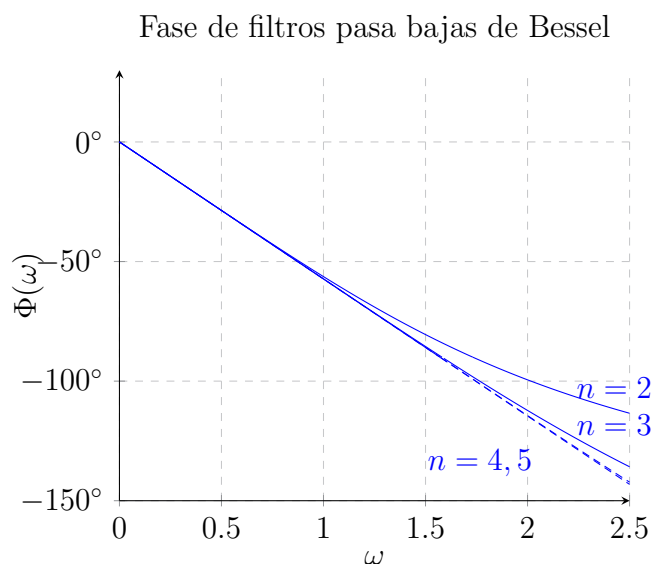


Figura 2.11: Fase de la respuesta en frecuencia de filtros pasa bajas Bessel de diverso orden

Si se desea que $T(0)$ no sea la unidad, sino t_o , es fácil avistar que basta cambiar s por $t_o s$.

Ejemplo 2.7 Encuentre la función de transferencia de un filtro eléctrico pasa bajas de tipo Bessel, cuyo tiempo de retraso $T(0)$ sea de dos segundos.

$$H(s) = \frac{3}{(2s)^2 + 3(2s) + 3} = \frac{\frac{3}{4}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{3}{4}}$$

Es importante resaltar que en este tipo de filtros eléctricos la frecuencia de corte no es unitaria, sino que varía con el orden del filtro eléctrico. En el Apéndice D se incluyen tablas que enlistan los polos y los factores cuadráticos del denominador para filtros eléctricos pasa bajas tipo Bessel de hasta octavo orden.

A los filtros eléctricos de tipo Bessel también se les denomina *Filtros de Thomsom* en la literatura relacionada sobre los filtros eléctricos.

Ejemplo 2.8 Deduzca la función de transferencia de un filtro eléctrico pasa todo de segundo orden que aproxime una característica lineal de fase, normalizado, de modo que $T(0) = 1$ y $|H(j\omega)| = 3$ para toda ω .

De lo tratado en el Capítulo 1 sobre filtros eléctricos pasa todo, se tiene que partir del polinomio característico de un filtro eléctrico pasa bajas Bessel con $T(0) = 0.5$, por tanto

$$H(s) = 3 \frac{\left(\frac{1}{2}s\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}s\right) + 3}{\left(\frac{1}{2}s\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}s\right) + 3} = 3 \frac{s^2 - 6s + 12}{s^2 + 6s + 12}$$

Capítulo 3

Realizaciones activas de filtros eléctricos

Un procedimiento para realizar la forma activa de un filtro eléctrico, consiste en colocar en cascada filtros eléctricos de primer y segundo orden; por lo que es importante estudiar cómo se realizan en forma activa las funciones de transferencia de los filtros eléctricos básicos de primer y segundo orden. El elemento activo en todas las realizaciones que se estudian en este vademécum es el *amplificador operacional* que, conectado únicamente con resistores y capacitores, puede realizar funciones de transferencia de segundo orden con polos complejos. Esto es importante, ya que como se vio en el capítulo anterior, la función de transferencia de un filtro eléctrico, que se basa en alguna de las aproximaciones clásicas, presenta siempre polos complejos con, a lo más, un polo real cuando el orden del filtro eléctrico en cuestión es impar. Se debe enfatizar que conectando únicamente resistores y capacitores, es imposible realizar funciones de transferencia con polos complejos.

Es importante resaltar que los rangos de frecuencia de operación de las realizaciones activas, dependen de la respuesta en frecuencia de los amplificadores operacionales que se utilizan. Los rangos se pueden extender a frecuencias que se encuentran entre 0 y 10 KHz o entre 0 y 20 KHz cuanto más aproximadamente. Sin embargo, recurriendo a ciertas técnicas especiales que se basan en el conocimiento de la respuesta en frecuencia del amplificador operacional que se emplea en las realizaciones, el rango anterior se puede ampliar hasta alcanzar frecuencias cercanas a los 100 KHz.

A continuación, se describen algunas formas de implementar las funciones de transferencia básicas de segundo orden. Las topologías empleadas, así como los procedimientos recomendados, están tomados de las referencias citadas.

3.1. Filtros eléctricos de ganancia infinita y realimentación múltiple

En esta sección se considera un circuito eléctrico general constituido por resistores, capacitores y un amplificador operacional, a partir del cual se pueden construir filtros eléctricos pasa bajas, pasa altas y pasa banda al seleccionarse valores adecuados de las admitancias $Y(s)$. El circuito eléctrico se muestra en la figura 3.1.

La relación *entrada-salida* (función de transferencia) del circuito eléctrico se puede determinar a partir de la ecuación de nodos.

Para el nodo (α)

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)V_\alpha - Y_4V_o = Y_1V_i$$

Para el nodo (β)

$$-Y_3V_\alpha - Y_5V_o = 0$$

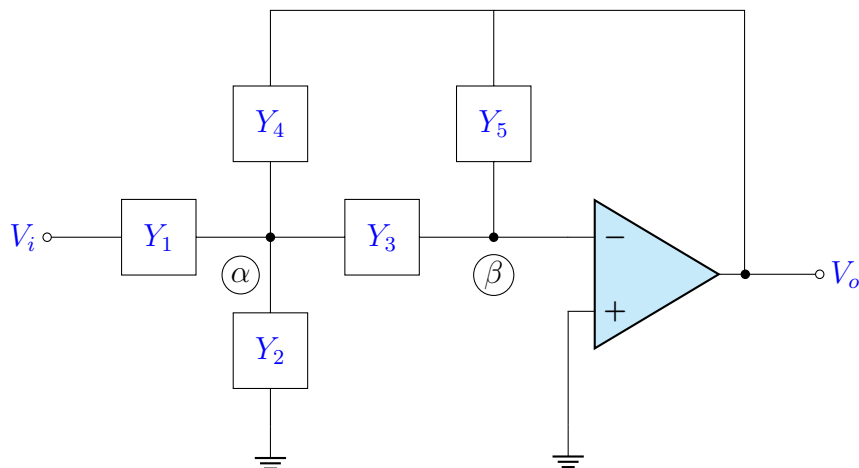


Figura 3.1: Filtro eléctrico general de segundo orden de ganancia infinita y realimentación múltiple

De donde

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-Y_1Y_3}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5 + Y_3Y_4} \quad (3.1)$$

3.2. Filtros eléctricos con fuente de voltaje controlada por voltaje

Otra configuración general para la construcción de filtros eléctricos pasa bajas y filtros eléctricos pasa altas se muestra en la figura 3.2. El filtro eléctrico pasa banda se puede construir a partir del mismo, conectando una admitancia Y del nodo (α) a tierra.

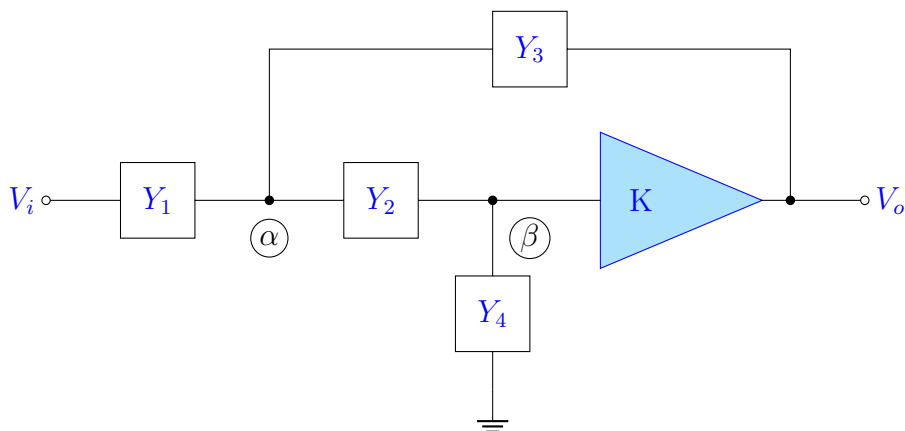


Figura 3.2: Filtro eléctrico general de segundo orden con fuente de voltaje controlada por voltaje

Las ecuaciones de nodo para α y β son, respectivamente

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3)V_\alpha - Y_2 \frac{V_o}{K} - Y_3 V_o = Y_1 V_i$$

$$(Y_2 + Y_4) \frac{V_o}{K} - Y_2 V_\alpha = 0$$

así

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{KY_1 Y_2}{(Y_2 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3) - Y_2 Y_2 - KY_2 Y_3} \quad (3.2)$$

3.3. Realización activa

Filtro eléctrico pasa bajas *Realimentación múltiple*

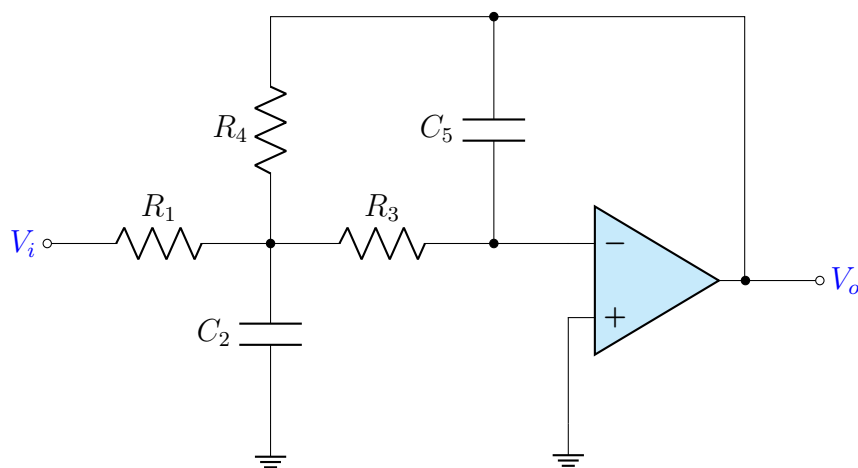


Figura 3.3: Filtro eléctrico pasa bajas

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.3 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-1}{s^2 + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] \frac{s}{C_2} + \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.3

$$H_o = \frac{R_4}{R_1}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_5}{C_2}} \left[\sqrt{\frac{R_3}{R_4}} + \sqrt{\frac{R_4}{R_3}} + \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1} \right]$$

Entonación:

Se ajusta ω_o con R_3 en $\omega = 10\omega_o$ y α con R_1 en $\omega = \omega_o\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$.

Procedimiento de diseño:

Dados

$$H_o, \alpha \text{ y } \omega_o$$

seleccionar

$$C_2 = C \quad (\text{Un valor conveniente})$$

$$C_5 = KC$$

calcular

$$R_4 = \frac{\alpha}{2\omega_o C} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(H_o + 1)}{K\alpha^2}} \right]$$

$$R_1 = \frac{R_4}{H_o}$$

$$R_3 = \frac{1}{\omega_o^2 C^2 R_4 K}$$

Filtro eléctrico pasa bajas *Fuente de voltaje controlada por voltaje*

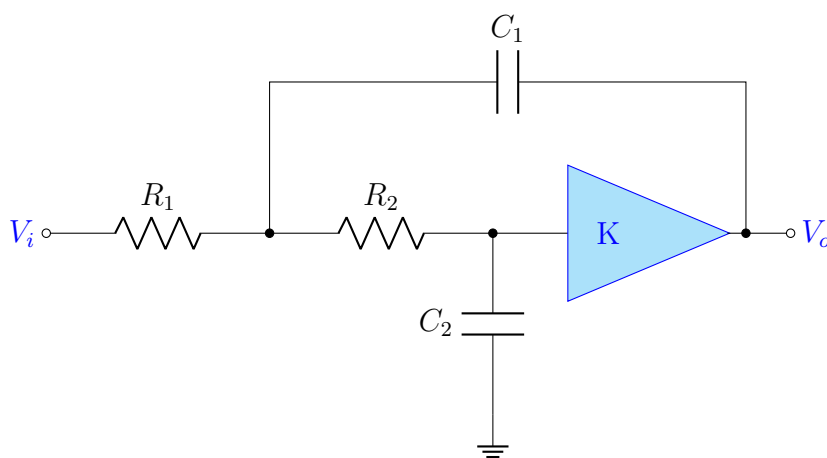


Figura 3.4: Filtro eléctrico pasa bajas

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.4 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-K}{R_2 C_2} \right] s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.3

$$H_o = K$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} + \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} + (1 - K) \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}}$$

Entonación:

Se ajusta ω_o con R_1 y R_2 con porcentajes iguales (α no se afecta). C_1 y C_2 pueden ajustarse de la misma forma, α se ajusta por medio de K .

Procedimiento de diseño:

Dados

$$H_o, \alpha \text{ y } \omega_o$$

seleccionar

$$C_1 = C_2 = C \quad (\text{Un valor conveniente})$$

calcular

$$K = H_o > 2$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{2\omega_o C} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(H_o - 2)}{\alpha^2}} \right]$$

$$R_1 = \frac{1}{\omega_o^2 C^2 R_2}$$

Para $H_o > 10$ los valores de los elementos del circuito eléctrico no son comparables en magnitud.

Filtro eléctrico pasa altas *Realimentación múltiple*

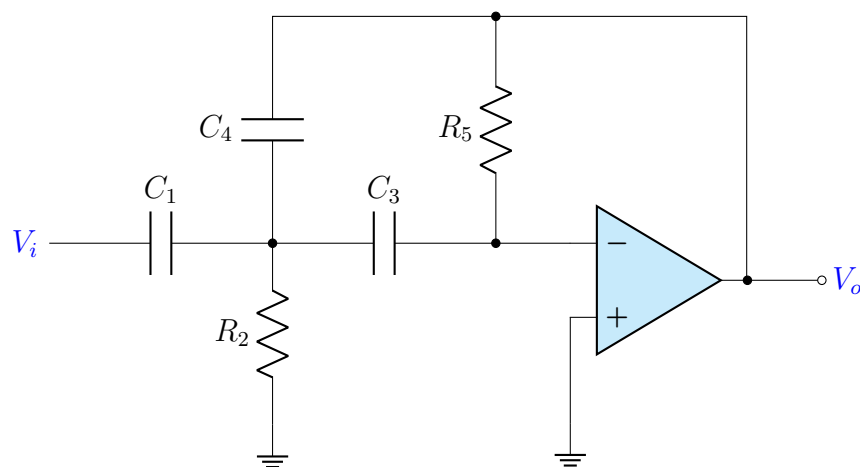


Figura 3.5: Filtro eléctrico pasa altas

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.5 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-\frac{C_1}{C_4}s^2}{s^2 + \left[\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{C_1}{C_3C_4} \right] \frac{1}{R_5}s + \frac{1}{R_2R_5C_3C_4}}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.4

$$\begin{aligned} H_o &= \frac{C_1}{C_4} \\ \omega_o &= \sqrt{\frac{1}{R_2R_5C_3C_4}} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{R_2}{R_5}} \left[\frac{C_1}{\sqrt{C_3C_4}} + \sqrt{\frac{C_3}{C_4}} + \sqrt{\frac{C_4}{C_3}} \right] \end{aligned}$$

Entonación:

Se ajusta α con R_2 o R_5 a la frecuencia donde $|H(j\omega)|_{\text{máxima}}$ ocurre. El ajuste de ω_o se hace mediante R_2 y R_5 variándolos en el mismo porcentaje (α permanece constante).

Procedimiento de diseño:

Dados

$$H_o, \alpha \text{ y } \omega_o$$

seleccionar

$$C_1 = C_3 = C \quad (\text{Un valor conveniente})$$

calcular

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\alpha}{\omega_o C (2H_o + 1)} \\ R_5 &= \frac{1}{\alpha \omega_o C} (2H_o + 1) \\ C_4 &= \frac{C_1}{H_o} \end{aligned}$$

Filtro eléctrico pasa altas *Fuente de voltaje controlada por voltaje*

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.6 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Ks^2}{s^2 + \left[\frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1-K}{R_1C_1} \right] s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

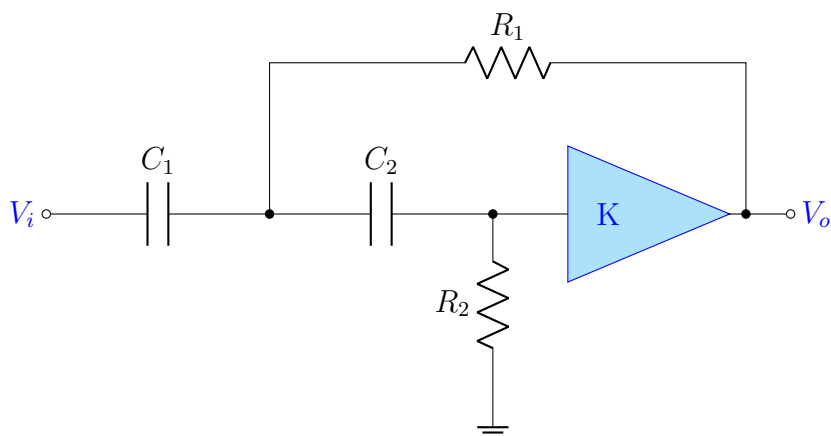


Figura 3.6: Filtro eléctrico pasa altas

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.4

$$H_o = K$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} + \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} + (1 - K) \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}}$$

Entonación:

Se efectúa un procedimiento semejante al filtro anterior.

Procedimiento de diseño:

Dados

$$H_o, \alpha \text{ y } \omega_o$$

seleccionar

$$C_1 = C_2 = C \quad (\text{Un valor conveniente})$$

calcular

$$R_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8(H_o - 1)}}{4\omega_o C}$$

$$R_2 = \frac{4}{\omega_o C \sqrt{\alpha^2 + 8(H_o + 1)}}$$

$H_o = K$ debe ser tal que R_1 y R_2 sean positivos. Circuitos eléctricos con H_o grandes hacen que los valores de los elementos que los constituyen no sean comparables en magnitud.

Filtro eléctrico pasa banda *Realimentación múltiple*

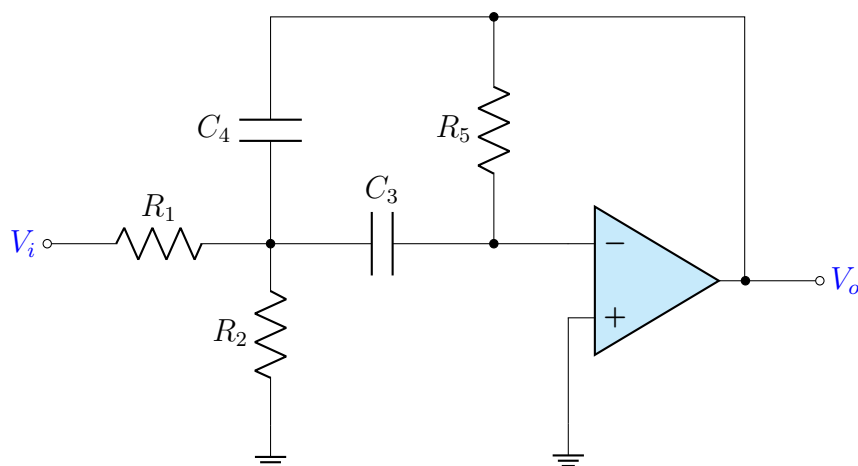


Figura 3.7: Filtro eléctrico pasa banda

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.7 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-\frac{s}{R_1 C_4}}{s^2 + \left[\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right] \frac{1}{R_5} s + \frac{1}{R_5 C_3 C_4} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.5

$$H_o = \frac{1}{\frac{R_1}{R_5} \left[1 + \frac{C_4}{C_3} \right]}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_5 C_3 C_4} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{R_5 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}} \left[\sqrt{\frac{C_3}{C_4}} + \sqrt{\frac{C_4}{C_3}} \right]$$

Entonación:

En la práctica $R_1 \gg R_2$ y con R_2 se ajusta α . Variando simultáneamente R_2 y R_5 en el mismo porcentaje se ajusta la frecuencia central.

Procedimiento de diseño:

Dados

$$H_o, \alpha \text{ y } \omega_o$$

seleccionar

$$C_3 = C_4 = C \quad (\text{Un valor conveniente})$$

calcular

$$Q = \frac{1}{\alpha}$$

$$R_1 = \frac{Q}{H_o \omega_o C}$$

$$R_2 = \frac{Q}{(2Q^2 - H_o) \omega_o C}$$

$$R_5 = \frac{2Q}{\omega_o C}$$

Filtro eléctrico pasa banda *Realizado con dos amplificadores operacionales*

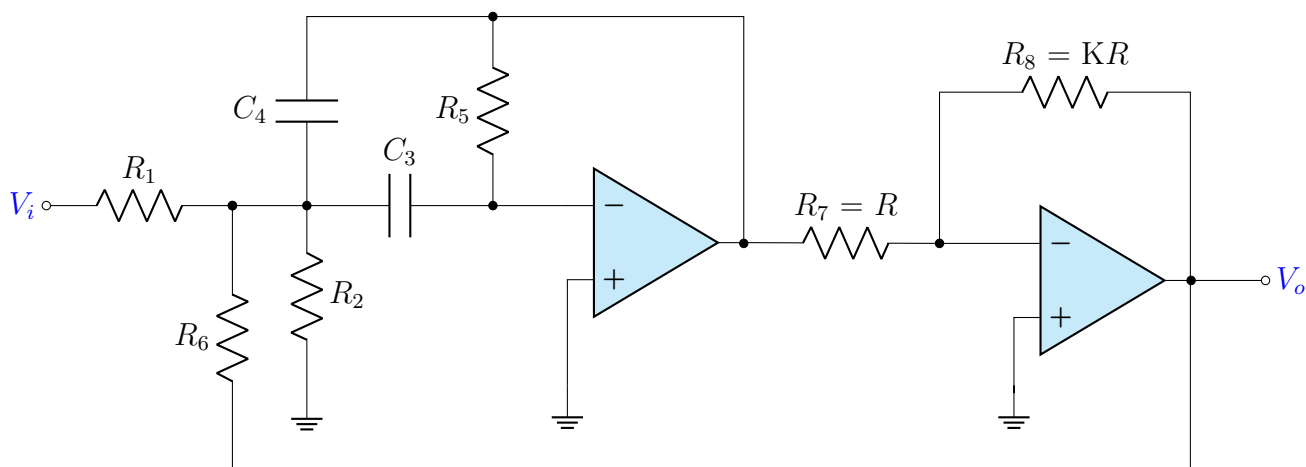


Figura 3.8: Filtro eléctrico pasa banda

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.8 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{K}{R_1 C_4} s}{s^2 + \left[1 + \frac{C_4}{C_3} - K \frac{R_5}{R_6} \right] \frac{1}{R_5 C_4} s + \frac{1}{R_5 C_3 C_4} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right]}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.5

$$H_o = \frac{1}{R_1} \frac{1}{\frac{1}{KR_5} \left[1 + \frac{C_4}{C_3} \right] - \frac{1}{R_6}}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_5 C_3 C_4} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right]}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{R_5 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right]}} \sqrt{\frac{C_3}{C_4} \left[1 + \frac{C_4}{C_3} - K \frac{R_5}{R_6} \right]}$$

Entonación:

Si R_1 y R_6 son mucho mayores que R_2 , esta se utiliza para compensar la frecuencia central, α se puede ajustar por medio de K sin afectar ω_o .

Procedimiento de diseño:

Dados

$$Q = \frac{1}{\alpha} \text{ y } \omega_o$$

H_o es un parámetro libre

seleccionar

$$C_3 = C_4 = C$$

$$R_1 = R_5 = R$$

K se selecciona de tal manera que las magnitudes de los valores de los elementos sean comparables. Se recomienda $1 < K < 10$.

calcular

$$R = \frac{Q}{\omega_o C}$$

$$\frac{R}{R_2} = \left(Q - 1 - \frac{2}{K} + \frac{1}{KQ} \right)$$

$$\frac{R}{R_6} = \frac{2}{K} - \frac{1}{KQ}$$

Para este procedimiento, $H_o = K\sqrt{Q}$.

Filtro eléctrico pasa banda *Tipo A. Fuente de voltaje controlada por voltaje*

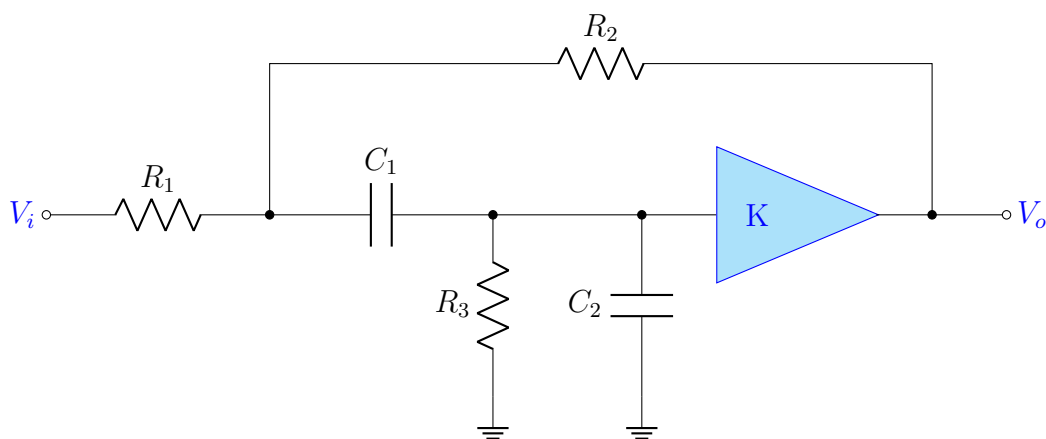


Figura 3.9: Filtro eléctrico pasa banda

Este filtro eléctrico se muestra en al figura 3.9, su función de transferencia es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{K}{R_1 C_2} s}{s^2 + \left[\frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-K}{R_2 C_2} \right] s + \frac{1}{R_3 C_1 C_2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.5

$$H_o = \frac{K}{1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{C_2}{C_1} \left[1 + \frac{R_1}{R_2} \right] + (1 - K) \frac{R_1}{R_2}}$$

$$\omega_o = \sqrt{\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \frac{1}{R_3 C_1 C_2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \left[\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1 - K}{R_2} \right) + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

Procedimiento de diseño:

Dados

$$Q = \frac{1}{\alpha} \text{ y } \omega_o$$

H_o es un parámetro libre

seleccionar

$$C_1 = C_2 = C \quad (\text{Un valor conveniente})$$

calcular

$$K = 5 - \frac{\sqrt{2}}{Q}$$

$$R = R_1 = R_2 = R_3 = \frac{\sqrt{2}}{\omega_o C}$$

entonces

$$H_o = \frac{5Q}{\sqrt{2}} - 1$$

En circuitos eléctricos con Q alta, los valores de sus componentes no son comparables. Se recomienda $Q < 10$ para tener mejores resultados.

Filtro eléctrico pasa banda *Tipo B. Fuente de voltaje controlada por voltaje*

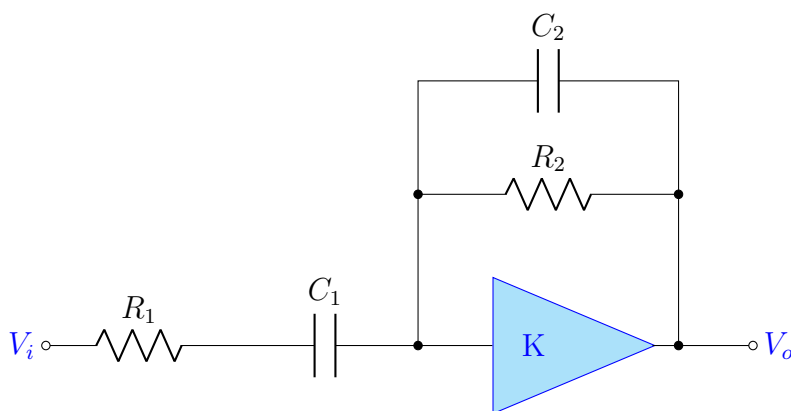


Figura 3.10: Filtro eléctrico pasa banda

La función de transferencia del filtro eléctrico de la figura 3.10, es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{K}{(1-K)R_1C_2}s}{s^2 + \left[\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2(1-K)} \right] s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.5

$$H_o = \frac{K}{(1-K) \left[\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right] + 1}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_1C_1}{R_2C_2}} + \sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}} - \frac{1}{1-K} \sqrt{\frac{R_2C_1}{R_1C_2}}$$

Entonación:

La frecuencia central puede ser ajustada variando R_1 y R_2 simultáneamente, tal que su razón sea constante. Q se puede ajustar con K . Se debe notar que hay una restricción sobre el valor mínimo que puede tener K para que el sistema sea estable. Debido a esto último H_o es negativo.

Procedimiento de diseño:

Dados

$$Q = \frac{1}{\alpha} \text{ y } \omega_o$$

H_o es un parámetro libre

seleccionar

$$C_1 = C_2 = C \quad (\text{Un valor conveniente})$$

calcular

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega_o C}$$

$$K = \frac{3Q - 1}{2Q - 1}$$

entonces

$$|H_o| = 3Q - 1 \quad \text{donde} \quad Q < 10$$

Filtro eléctrico supresor de banda *Realimentación múltiple*

Para este tipo de filtros eléctricos las funciones de transferencia están normalizadas; esto se hace con el propósito de que al aplicarse a un caso real, se realicen las desnormalizaciones necesarias.

Si $\omega_o = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, $\omega_o \alpha = \frac{\omega_o}{Q} \text{ [s}^{-1}\text{]}$ y $C = 1 \text{ F}$, la función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.11 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + \frac{1}{R_1R_2}}{s^2 + \frac{2}{R_2}s + \frac{1}{R_1R_2}}$$

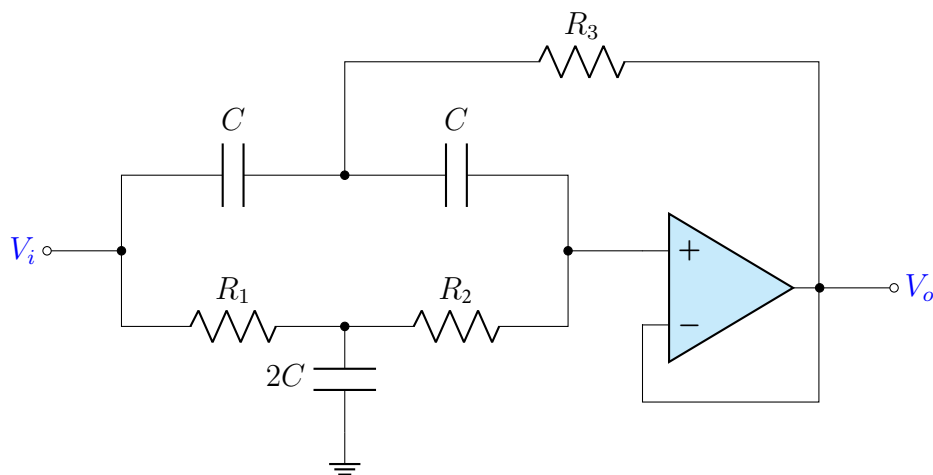


Figura 3.11: Filtro eléctrico supresor de banda

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.6

$$H_o = 1$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

por tanto

$$R_1 R_2 = 1$$

$$Q = \frac{R_2}{2}$$

$$\frac{1}{R_3} = 2Q + \frac{1}{2Q}$$

Se recomienda $Q < 10$ para que las magnitudes de los valores de los elementos sean comparables. De las ecuaciones anteriores Q se puede ajustar por medio de R_2 y la frecuencia central mediante R_1 . Una desventaja de este circuito eléctrico es que la ganancia es unitaria.

Filtro eléctrico supresor de banda *Realimentación múltiple*

Un circuito eléctrico de un filtro supresor de banda que no presenta la desventaja anterior (ganancia unitaria y $Q < 10$) se muestra en la figura 3.12

La función de transferencia del circuito eléctrico es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-\frac{R_6}{R_3} \left[s^2 + \frac{1}{R_4 C^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]}{s^2 + \frac{2}{R_4 C} s + \frac{1}{R_4 C^2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.6

$$R_3 R_4 = 2 R_1 R_5$$

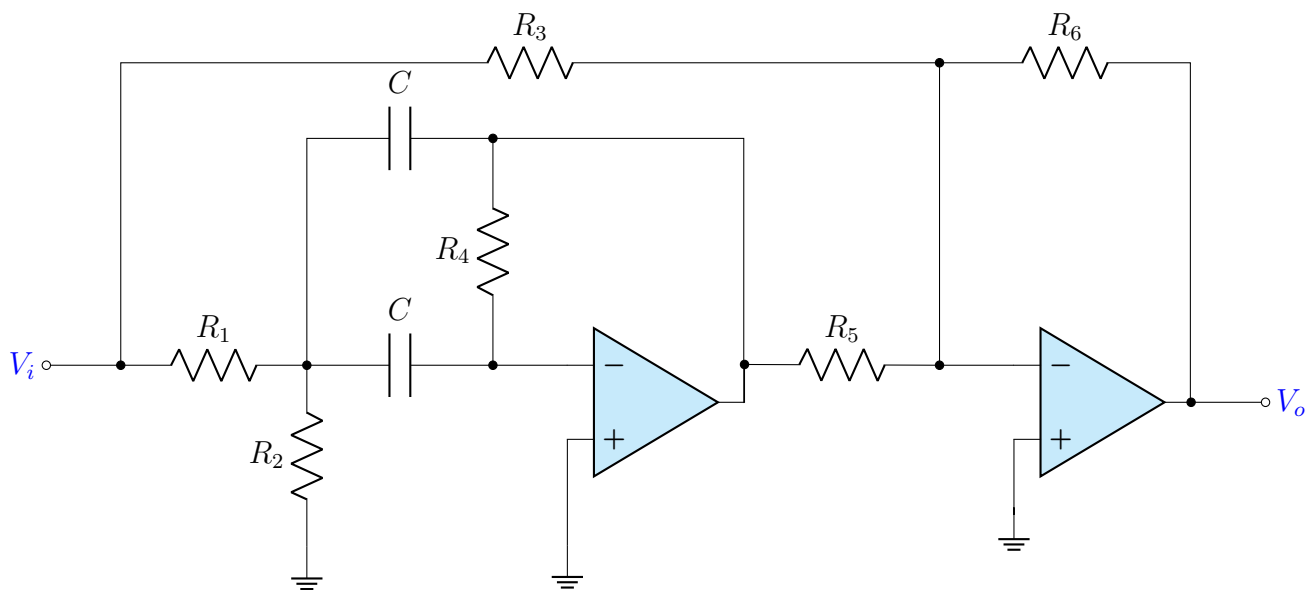


Figura 3.12: Filtro eléctrico supresor de banda

Para el caso normalizado $\omega_o = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, $\omega_o \alpha = \frac{\omega_o}{Q} \text{ [s}^{-1}\text{]}$ y $C = 1 \text{ F}$.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{Q}{2} & R_2 &= \frac{1}{2 \left(Q - \frac{1}{Q} \right)} & R_3 &= 1 \\ R_4 &= 2Q & R_5 &= 2 & R_6 &= H_o \end{aligned}$$

Filtro eléctrico pasa todo *Realimentación múltiple*

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.13 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H_o \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.7

$$a = \frac{2}{CR_2} \quad b = \frac{1}{R_1 R_2 C^2}$$

$$H_o = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

si

$$4R_1 R_4 = R_2 R_3$$

se recomienda

$$R_2 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

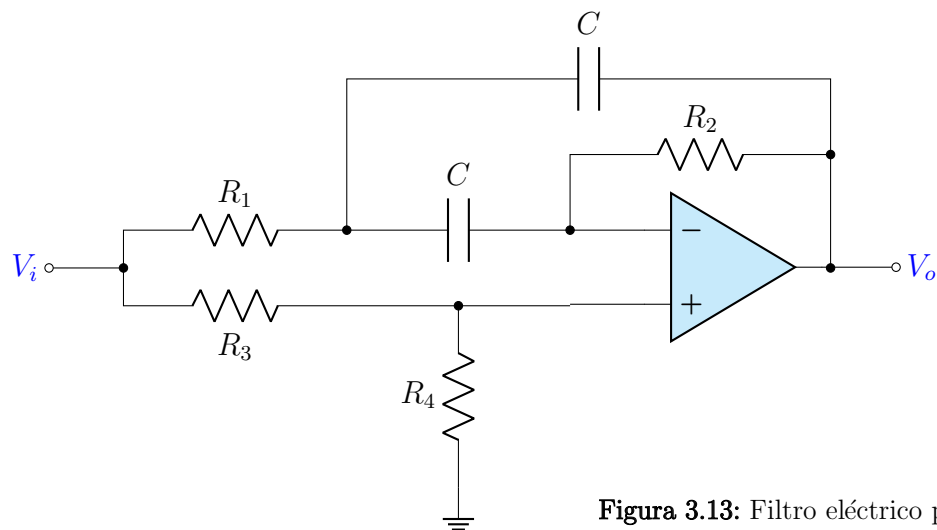


Figura 3.13: Filtro eléctrico pasa todo

por lo que

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a}{2bC} & R_2 &= \frac{2}{aC} \\ R_3 &= \frac{2(a^2 + b)}{abC} & R_4 &= \frac{2(a^2 + b)}{a^3C} \\ H_o &= \frac{b}{a^2 + b} < 1 \end{aligned}$$

Filtro eléctrico con cero de transmisión *Realimentación múltiple*

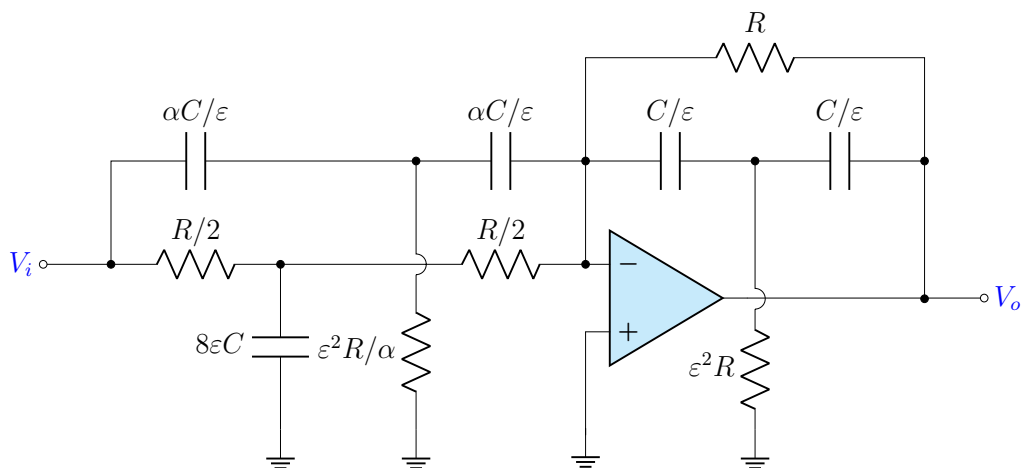


Figura 3.14: Filtro eléctrico de segundo orden con un cero de transmisión

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.14 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-(R^2 C^2 \alpha s^2 + 1)}{R^2 C^2 s^2 + 2\epsilon RCs + 1}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.8

$$\omega_1 = \frac{1}{RC} \quad \omega_2 = \frac{1}{RC\sqrt{\alpha}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{\alpha}} \quad Q = \frac{1}{2\epsilon}$$

3.4. Circuito eléctrico convertidor de impedancia negativa con inversión de corriente (INIC)

Este tipo de circuitos eléctricos tiene la propiedad de presentar una impedancia de entrada de signo contrario al de la impedancia de la salida, esto es

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = -KZ_2 \quad (K > 0)$$

dichos circuitos eléctricos se emplean en la síntesis de filtros eléctricos activos y su realización práctica se presenta en la figura 3.15.

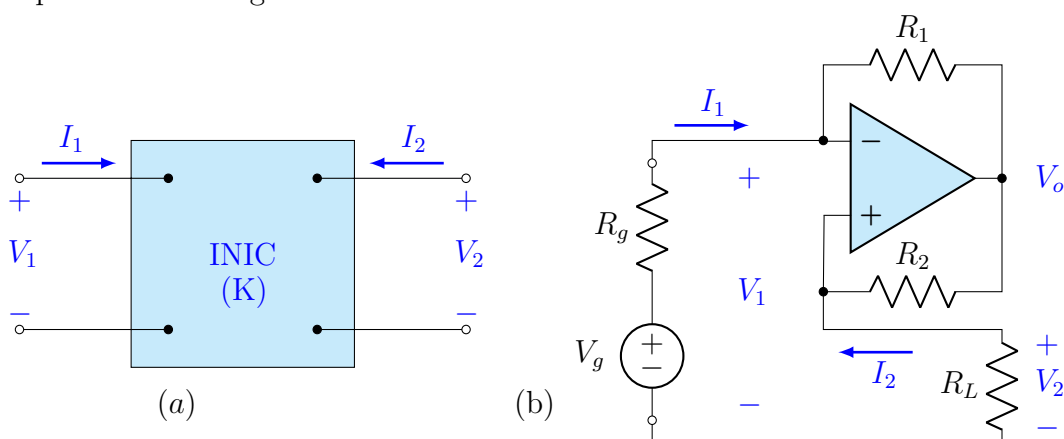


Figura 3.15: Convertidor de impedancia negativa. (a) Símbolo. (b) Realización práctica

Dado que

$$V_1 - V_o = R_1 I_1$$

$$V_2 - V_o = R_2 I_2$$

La relación entre I_1 e I_2 es

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 = K I_1$$

Es necesario, para garantizar que el circuito eléctrico sea estable (hay una realimentación positiva y otra realimentación negativa) que

$$R_g R_2 > R_L R_1$$

Filtro eléctrico con un cero de transmisión

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.16 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 - R_1 C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3) s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_3 - R_1 C_2 - R_1 C_4) s + 1}$$

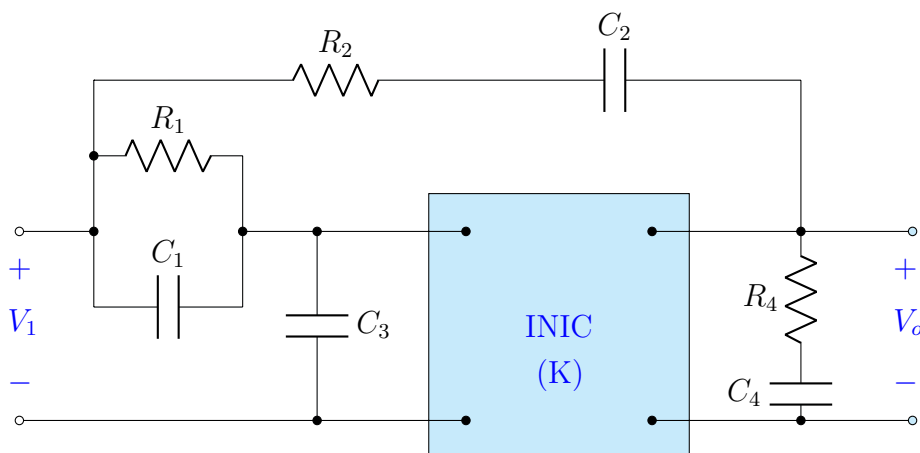


Figura 3.16: Filtro eléctrico pasa bajas de segundo orden con un cero de transmisión que utiliza un INIC

si

$$R_2 C_2 = R_4 C_4 \quad \text{y} \quad K = 1$$

Si además

$$R_1 C_1 + R_2 C_2 = R_1 C_2$$

resulta

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + 1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3) s^2 + R_1 (C_3 - C_4) s + 1}$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.8

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3)}} < \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 C_2 (C_1 + C_3)}}{(C_3 - C_4) \sqrt{R_1}}$$

Para el circuito eléctrico anterior no es posible que $\omega_1 > \omega_2$. Pero si se cambia el capacitor C_3 por una resistencia R_3 , como se observa en la figura 3.17.

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.17, con $R_2 C_2 = R_4 C_4$ y $R_1 C_2 = R_1 C_1 + R_2 C_2$ es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_1 \left(\frac{R_2 C_2}{R_3} - C_4 \right) s + \frac{R_1}{R_3} + 1}$$

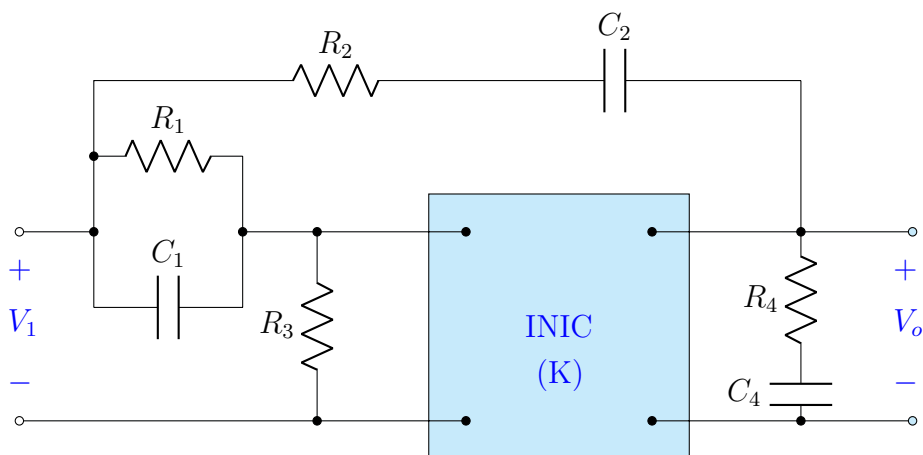


Figura 3.17: Filtro eléctrico pasa altas de segundo orden con un cero de transmisión

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.8

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} > \omega_2$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_2 R_3 C_1 C_2 (R_1 + R_3)}{R_1 (R_2 C_2 - R_3 C_4)^2}}$$

Se debe enfatizar, que estos dos últimos circuitos eléctricos son de una realización difícil, ya que se requiere que $R_2 C_2 = R_4 C_4$ y $R_1 C_2 = R_1 C_1 + R_2 C_2$.

Filtro eléctrico con un cero de transmisión *Fuente de voltaje controlada por voltaje*

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 3.18 es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K (q^2 R^2 C^2 s^2 + 1)}{R^2 C^2 (q^2 + 2mq) s^2 + 2RC [m + 2q(1 - K)] s + 1} \quad (3.3)$$

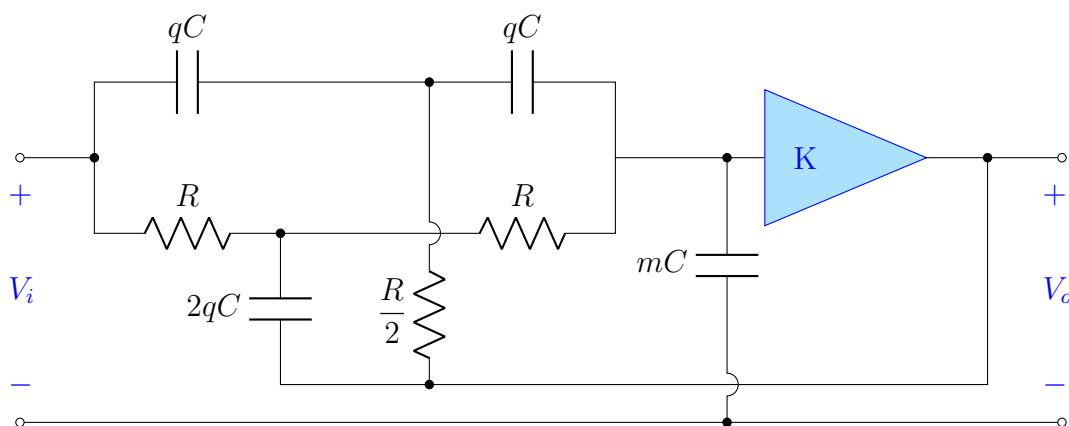


Figura 3.18: Filtro eléctrico pasa bajas de segundo orden con un cero de transmisión

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.8

$$\omega_2 = \frac{1}{qRC}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{RC\sqrt{q^2 + 2mq}} < \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{q^2 + 2mq}}{2[m + 2q(1 - K)]}$$

Como $\omega_1 < \omega_2$, el circuito eléctrico de la figura 3.18 conforma un filtro eléctrico pasa bajas.

Si en el circuito eléctrico de la figura 3.18, se intercambian el capacitor con capacitancia mC por un resistor con resistencia $\frac{q}{m}R$ y el factor q de la capacitancia de los otros capacitores por $\frac{1}{q}$, el circuito eléctrico que resulta se presenta en la figura 3.19.

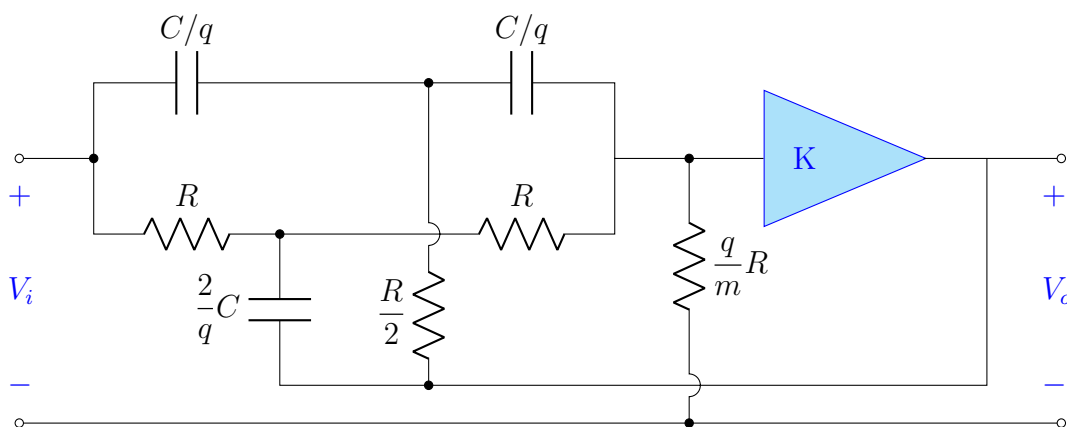


Figura 3.19: Filtro eléctrico pasa altas de segundo orden con un cero de transmisión

La función de transferencia, correspondiente a la de un filtro eléctrico pasa altas, es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K(R^2C^2s^2 + q^2)}{R^2C^2s^2 + 2RC[m + 2q(1 - K)]s + q^2 + 2mq} \quad (3.4)$$

Considerando lo expresado en el subtema 1.3.8

$$\omega_2 = \frac{q}{RC}$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{q^2 + 2mq}}{RC} > \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{q^2 + 2mq}}{2[m + 2q(1 - K)]}$$

3.5. Filtros de amplificadores múltiples

A continuación se introducen dos realizaciones con amplificadores operacionales múltiples denominadas: *Variables de Estado* y *Resonador*.

Filtro eléctrico de variables de estado

Este filtro eléctrico, también denominado *Filtro KHN*, tiene gran flexibilidad y funcionamiento, además de bajas *sensibilidades*. El nombre de variables de estado se deriva del hecho de que el método de variables de estado se usa en el desarrollo de su realización.

Considere la función de transferencia siguiente

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-|H|s}{s^2 + a_1s + a_0}$$

si se introduce la variable auxiliar $X(s)$, en la ecuación anterior, resulta

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-|H| \frac{X(s)}{s}}{X(s) + a_1 \frac{X(s)}{s} + a_0 \frac{X(s)}{s^2}}$$

entonces

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_i(t) - a_1 \int x(t)dt - a_0 \int \left[\int x(t)dt \right] dt \\ v_o(t) &= -|H| \int x(t)dt \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) se puede resolver por medio del diagrama de *computadora analógica* de la figura 3.20.

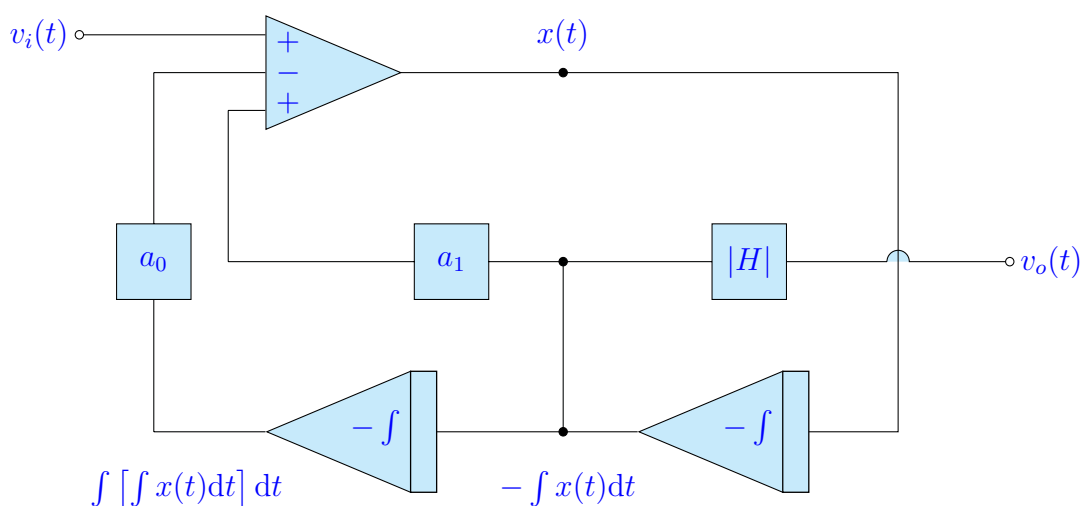


Figura 3.20: Configuración general del filtro eléctrico de variables de estado

Mediante el empleo de amplificadores operacionales, la configuración de la figura 3.20 se muestra en la figura 3.21. Donde $V_{PB}(s)$, $V_{PBd}(s)$ y $V_{PA}(s)$ son las salidas pasa bajas, pasa banda y pasa altas, respectivamente.

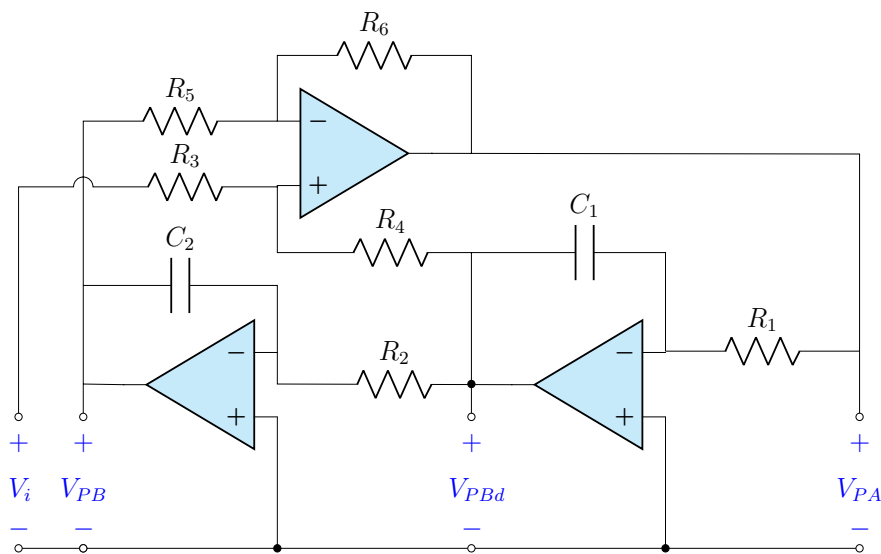


Figura 3.21: Filtro eléctrico de variables de estado

$$V_{PB} = -\frac{V_{PBd}(s)}{sR_2C_2}$$

$$V_{PBd}(s) = -\frac{V_{PA}(s)}{sR_1C_1}$$

$$V_{PA}(s) = -\frac{R_6}{R_5}V_{PB}(s) + \frac{R_5 + R_6}{(R_3 + R_4)R_5} [R_4V_i(s) + R_3V_{PBd}(s)]$$

$$V_{PBd}(s) = \frac{-1}{sR_1C_1} \left[\frac{R_6}{sR_2R_5C_2}V_{PBd}(s) + \frac{R_4(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5}V_i(s) + \frac{R_3(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5}V_{PBd}(s) \right]$$

finalmente

$$\frac{V_{PBd}(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{R_4(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5} \frac{s}{R_1C_1}}{D(s)}$$

$$\frac{V_{PB}(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R_4(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5} \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{D(s)}$$

$$\frac{V_{PA}(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R_4(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5} s^2}{D(s)}$$

donde

$$D(s) = s^2 + \frac{R_3(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5} \frac{s}{R_1C_1} + \frac{R_6}{R_1R_2R_5C_1C_2}$$

Las expresiones para ω_o y Q son

$$\omega_o = \sqrt{\frac{R_6}{R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{R_3(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5} \sqrt{\frac{R_2 R_5 C_2}{R_1 R_6 C_1}}$$

H_o es diferente para cada una de las realizaciones. A continuación, se muestran para cada caso.

Pasa bajas:

$$H_o = \frac{R_4(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5}$$

Pasa banda:

$$H_o = -\frac{R_4}{R_3}$$

Pasa altas:

$$H_o = \frac{R_4(R_5 + R_6)}{(R_3 + R_4)R_5}$$

Si se selecciona

$$R_5 = R_6 \quad \text{y} \quad R_1 = R_2 = R$$

$$C_1 = C_2 = C$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{2R_3}{R_3 + R_4}$$

Procedimiento de diseño:

Dados

$$Q = \frac{1}{\alpha} \text{ y } \omega_o$$

seleccionar valores convenientes de

$$C_1 = C_2 = C \quad \text{y} \quad R_3 = R_5 = R_6$$

calcular

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega_o C}$$

$$R_4 = (2Q - 1)R_3$$

H_o para las diferentes configuraciones es

Pasa bajas y pasa altas:

$$H_o = \frac{2Q - 1}{Q}$$

Pasa banda:

$$H_o = 1 - 2Q$$

Filtro eléctrico resonador

La figura 3.22 muestra el filtro eléctrico resonador.

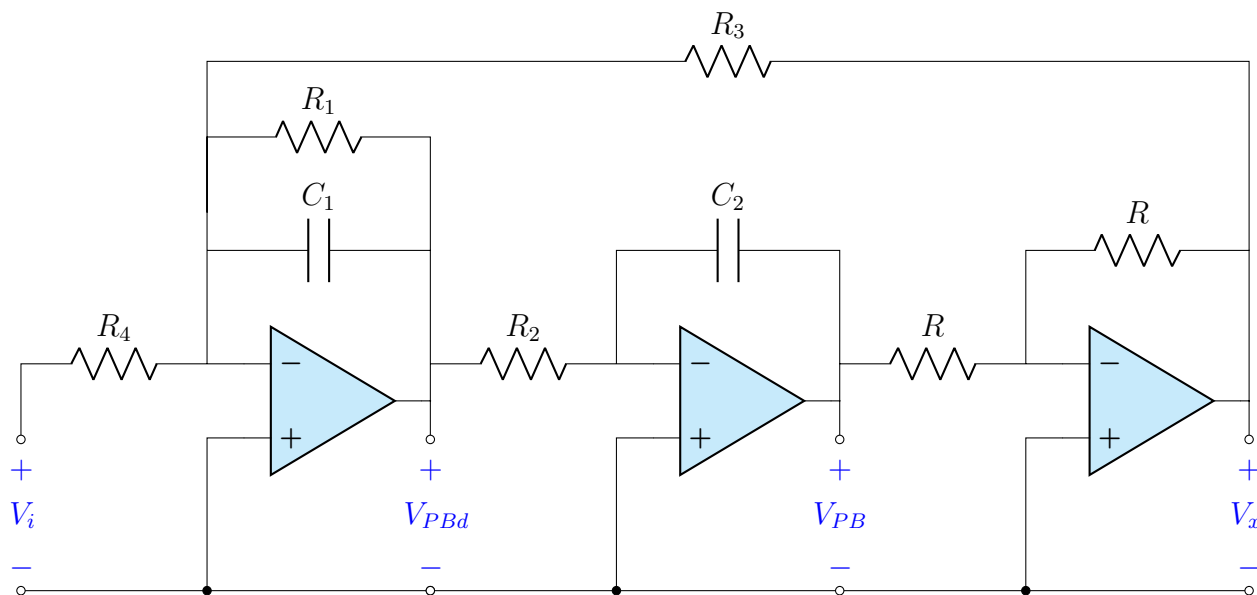


Figura 3.22: Filtro eléctrico resonador

$$V_{PBd}(s) = -\frac{\frac{1}{R_4 C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} V_i(s) - \frac{\frac{1}{R_3 C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} V_x(s)$$

empero

$$V_x(s) = -V_{PB}(s) = \frac{1}{R_2 C_2 s} V_{PBd}(s)$$

así

$$\frac{V_{PBd}(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{s}{R_4 C_1}}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

$$\frac{V_{PB}(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Considerando lo expresado en los subtemas 1.3.3 y 1.3.5

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{R_2 R_3 C_2}{C_1}}$$

Las expresiones para H_o son

Pasa bajas:

$$H_o = \frac{R_3}{R_4}$$

Pasa banda:

$$|H_o| = \frac{R_1}{R_4}$$

Un procedimiento de diseño puede ser, asumiendo

$$\begin{aligned} R_2 &= R_3 = R \\ C_1 &= C_2 = C \end{aligned}$$

Dados

$$\omega_o, Q \text{ y } H_o$$

entonces

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

calcular

$$R_1 = QR$$

Pasa bajas:

$$R_4 = \frac{R}{H_o}$$

Pasa banda:

$$R_4 = \frac{R_1}{|H_o|}$$

Capítulo 4

Sensibilidad y sintonización

4.1. Sensibilidad

Al realizar un filtro eléctrico analógico, ya sea de forma pasiva o activa, los elementos empleados en su construcción siempre tienen una cierta tolerancia hacia arriba o hacia abajo de su valor nominal, dicha tolerancia se expresa en forma de porcentaje. En la práctica las variaciones mencionadas originan desviaciones en los parámetros característicos y en las curvas de la respuesta en frecuencia de un filtro eléctrico diseñado teóricamente, por lo que es importante conocer en qué porcentaje cambia cierto parámetro característico y al cambiar el valor de un elemento x_i en un porcentaje conocido.

Se define la sensibilidad de y con respecto a x_i por medio de la siguiente ecuación

$$S_{x_i}^y \triangleq \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} \quad (4.1)$$

donde y representa un parámetro característico –a saber, la frecuencia de corte, el factor de calidad, la frecuencia central, entre otros– y que, en términos generales, depende de todos los elementos x_i empleados en la construcción del filtro eléctrico, tales como resistores, inductores, capacitores y las ganancias del amplificador operacional.

Ejemplo 4.1 Si se sabe que $S_{x_i}^y = -2$, determine en qué porcentaje cambia y al cambiar x_i en un diez por ciento hacia arriba.

De la ecuación (4.1)

$$\frac{\Delta y}{y} = S_{x_i}^y \frac{\Delta x_i}{x_i} = -2(0.1) = -0.2$$

por lo que el parámetro y cambia en un 20 % hacia abajo.

En la práctica, si los cambios porcentuales de los elementos son pequeños, no mayores del 10 %, la sensibilidad puede expresarse con una buena aproximación por medio de la ecuación

$$S_{x_i}^y = \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad (4.2)$$

que será la definición que se empleará de aquí en adelante.

Si se sabe que los cambios de los elementos son pequeños Δy se pueden expresar de la siguiente manera

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (4.3)$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{x_i} = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^y \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (4.4)$$

ecuación que expresa el cambio porcentual en el valor de un cierto parámetro y en función de las sensibilidades $S_{x_i}^y$ y los cambios porcentuales de los elementos x_i .

Ejemplo 4.2 La frecuencia de corte de un filtro eléctrico pasa bajas de primer orden, se expresa por medio de la ecuación

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Encuentre en qué porcentaje cambia la frecuencia ω_c , si la resistencia es en un momento dado un 10 % más grande y la capacitancia es un 5 % más pequeña.

$$S_R^{\omega_c} = \frac{R}{\omega_c} \frac{\partial \omega_c}{\partial R} = -1$$

de igual forma

$$S_C^{\omega_c} = \frac{C}{\omega_c} \frac{\partial \omega_c}{\partial C} = -1$$

conforme a la ecuación (4.4), el cambio porcentual de ω_c es aproximadamente

$$\frac{\Delta \omega_c}{\omega_c} = (-1)(0.10) + (-1)(-0.05) = -0.05$$

lo que significa que la frecuencia de corte será 5 % más pequeña que su valor nominal.

Realizando el cálculo en forma exacta, lo que es sencillo en este caso, se puede ver que el cambio real en el valor de ω_c es de 4.3062 % hacia abajo.

En varias de las referencias ^{[1][2][5]} se tienen expresiones matemáticas para las sensibilidades de los principales parámetros de las realizaciones básicas de segundo orden tratadas.

Para una realización activa, no obstante, cada parámetro de interés y_i es una función de la forma

$$y_i = f_i(R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m, X_1, X_2, \dots, X_l)$$

donde

- n representa el número total de resistores.
- m representa el número total de capacitores.

- l representa el número total de parámetros relacionados con elementos activos (*v. gr.* las ganancias de las fuentes controladas o dependientes.)

por tanto, de acuerdo con la ecuación (4.4), el cambio porcentual en el parámetro y_i está dado aproximadamente por

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{j=1}^n S_{R_j}^{y_i} \frac{\Delta R_j}{R_j} + \sum_{j=1}^m S_{C_j}^{y_i} \frac{\Delta C_j}{C_j} + \sum_{j=1}^l S_{X_j}^{y_i} \frac{\Delta X_j}{X_j} \quad (4.5)$$

si se verifican las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y_i(\lambda R_1, \lambda R_2, \dots, \lambda R_n, C_1, C_2, \dots, C_m, X_1, X_2, \dots, X_l) &= \\ \lambda^n y_i(R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m, X_1, X_2, \dots, X_l) &= \\ y_i(R_1, R_2, \dots, R_n, \lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_m, X_1, X_2, \dots, X_l) &= \\ \lambda^m y_i(R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m, X_1, X_2, \dots, X_l) &= \end{aligned}$$

puede probarse ^[1] lo siguiente (con $\lambda = 1$)

$$\sum_{j=1}^n S_{R_j}^{y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\Delta y_i}{y_i}}{\frac{\Delta R_j}{R_j}} = n \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^m S_{C_j}^{y_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\frac{\Delta y_i}{y_i}}{\frac{\Delta C_j}{C_j}} = m \quad (4.7)$$

Al construir un filtro eléctrico, es aconsejable que los resistores tengan una misma tolerancia al igual que los capacitores, esto es

$$\left| \frac{\Delta R_j}{R_j} \right| \leq K_R \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

$$\left| \frac{\Delta C_j}{C_j} \right| \leq K_C \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.9)$$

donde K_R y K_C son dos números positivos. Por ejemplo, si un filtro eléctrico se construye con resistores de $\pm 10\%$ de tolerancia y condensadores de $\pm 5\%$ de tolerancia, K_R y K_C son 0.1 y 0.05, respectivamente. Considerando la ecuación (4.5), las desigualdades (4.8) y (4.9) así como también las ecuaciones (4.6) y (4.7) y sabiendo que el peor caso se presenta cuando

$$\left| \frac{\Delta R_j}{R_j} \right| = K_R \quad \forall j \quad \text{y} \quad \left| \frac{\Delta C_j}{C_j} \right| = K_C \quad \forall j$$

se puede concluir

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = n K_R + m K_C + \sum_{j=1}^l S_{X_j}^{y_i} \frac{\Delta X_j}{X_j} \quad (4.10)$$

Ejemplo 4.3 Para el filtro eléctrico pasa altas que se muestra en la Figura 4.1, determine el cambio porcentual extremo en ω_o y en Q , si los cambios porcentuales extremos en los resistores y los capacitores son K_R y K_C , respectivamente.

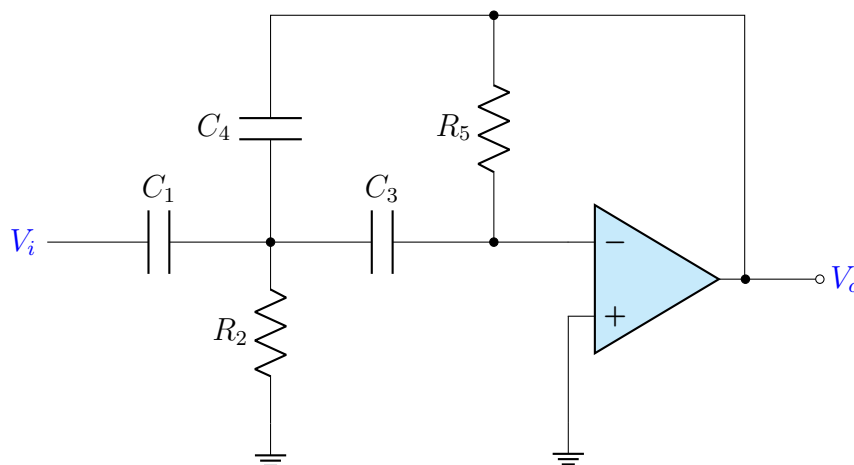


Figura 4.1: Filtro eléctrico pasa altas

Para este filtro eléctrico

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_5 C_3 C_4}}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \omega_o(\lambda R_2, \lambda R_5, C_1, C_3, C_4) &= \lambda^{-1} \omega_o \\ \omega_o(R_2, R_5, \lambda C_1, \lambda C_3, \lambda C_4) &= \lambda^{-1} \omega_o \end{aligned}$$

o sea

$$n = -1 \quad y \quad m = -1$$

así, según la ecuación (4.10)

$$\frac{\Delta \omega_o}{\omega_o} = -K_R - K_C$$

En lo que toca a Q

$$Q = \sqrt{\frac{R_5}{R_2}} \left[\frac{C_1}{\sqrt{C_3 C_4}} + \sqrt{\frac{C_3}{C_4}} + \sqrt{\frac{C_4}{C_3}} \right]^{-1}$$

se puede observar en este caso, que $n = m = 0$, por tanto, acorde con las ecuaciones (4.6) y (4.7)

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 0$$

4.2. Sintonización

Al realizar un filtro eléctrico, interesa tratar simultáneamente los cambios porcentuales en varios parámetros de interés y_i (*v. gr.* Q , ω_o , ω_c , $H(j\omega)$, $\Phi(j\omega)$, etc.) debidos a los cambios en los valores de los elementos x_j con los que está construido el filtro.

El vector de cambios porcentuales se puede expresar por medio de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta y_1}{y_1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta y_q}{y_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{x_1}^{y_1} & \cdots & S_{x_p}^{y_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1}^{y_q} & \cdots & S_{x_p}^{y_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_p}{x_p} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

donde q es el número total de parámetros de interés y p es el número total de elementos que intervienen en la construcción del filtro eléctrico, esto es $p = n + m + l$.

La ecuación (4.11) se puede escribir en forma compacta

$$\underline{y} = \underline{\mathcal{A}} \underline{x} \quad (4.12)$$

donde

$$a_{ij} = S_{x_i}^{y_j} \Big|_{x_j=x_j^*} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta y_1}{y_1} \\ y_1 \\ \vdots \\ \frac{\Delta y_q}{y_q} \\ y_q \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{x_1} \\ x_1 \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_p}{x_p} \\ x_p \end{bmatrix}$$

(x_j^* es el valor nominal del parámetro x_j)

En la práctica, existirá un cierto número de elementos que podrán ser ajustados y otros que no serán susceptibles de ajustarse. Bajo esta consideración la ecuación (4.12) se puede escribir

$$\underline{y} = \left[\underline{\mathcal{A}}_s \vdots \underline{\mathcal{A}}_f \right] \begin{bmatrix} \underline{x}_s \\ \underline{x}_f \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde

$\underline{\mathcal{A}}_s$ es una matriz de $q \times n_s$ y n_s es el número de elementos que se pueden ajustar.

$\underline{\mathcal{A}}_f$ es una matriz de $q \times n_f$ y n_f es el número de elementos que no se pueden ajustar.

$$\underline{x}_s = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{x_1} \\ x_1 \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_{n_s}}{x_{n_s}} \\ x_{n_s} \end{bmatrix} \right\} n_s \text{ elementos} \quad \underline{x}_f = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_{n_s+1}}{x_{n_s+1}} \\ x_{n_s+1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_p}{x_p} \\ x_p \end{bmatrix} \right\} n_f \text{ elementos}$$

así, la ecuación (4.13) puede escribirse

$$\underline{y} = \underline{\mathcal{A}}_s \underline{x}_s + \underline{\mathcal{A}}_f \underline{x}_f$$

o bien

$$\underline{y} = \underline{\mathcal{A}}_s \underline{x}_s + \underline{e}$$

donde

$$\underline{e} = \underline{\mathcal{A}}_f \underline{x}_f$$

Se debe advertir que $\underline{e}$ es el vector de cambios porcentuales en los parámetros cuando $\underline{x}_s = 0$, esto es, cuando los elementos que se pueden ajustar tienen su valor nominal y los elementos que no pueden reajustarse tienen un valor dentro de su rango de tolerancia. Es claro que el vector $\underline{e}$ puede determinarse en la práctica, midiendo las desviaciones respecto a los valores nominales de los parámetros y_i , cuando los elementos que pueden ajustarse tienen su valor nominal. Se puede entonces determinar el valor porcentual en que es necesario reajustar los parámetros $x_1, x_2, \dots, x_{n_s}$, para que el cambio correspondiente en los parámetros de interés sea nulo o bien presente un mínimo (*v. gr.* la norma euclidiana del vector $\underline{y}$ es mínima). Por tanto, para determinar el vector de ajustes $\underline{x}_s$ hay que minimizar la norma euclidiana de $\underline{y}$, destacándose los dos casos siguientes

Caso 1. El número de elementos que se pueden ajustar es igual al número de los parámetros de interés.

Caso 2. El número de elementos que se pueden ajustar es menor al número de los parámetros de interés.

A continuación se discuten cada uno de estos casos.

Estudio del caso 1.

La matriz $\underline{\mathcal{A}}_s$ es cuadrada y el vector $\underline{x}_s$ que minimiza la norma de $\underline{y}$ es

$$\underline{x}_s = -\underline{\mathcal{A}}_s^{-1} \underline{e} \quad (4.14)$$

Siempre y cuando $\underline{\mathcal{A}}_s$ sea una matriz no singular. Es fácil visualizar que el valor mínimo de la norma de $\underline{y}$ para este caso es cero.

Estudio del caso 2.

Para este caso puede probarse ^[9] que el vector $\underline{x}_s$, que minimiza la norma de $\underline{y}$, está dado por

$$\underline{x}_s = -\underline{\mathcal{A}}_s^+ \underline{e} \quad (4.15)$$

donde $\underline{\mathcal{A}}_s^+$ es la matriz pseudoinversa de $\underline{\mathcal{A}}_s$, dada por la ecuación

$$\underline{\mathcal{A}}_s^+ = (\underline{\mathcal{A}}_s^T \underline{\mathcal{A}}_s)^{-1} \underline{\mathcal{A}}_s^T \quad \text{donde} \quad |\underline{\mathcal{A}}_s^T \underline{\mathcal{A}}_s| \neq 0 \quad (4.16)$$

la norma mínima es

$$\|\underline{y}\|_{\text{mínima}} = \|[-\underline{\mathcal{A}}_s \underline{\mathcal{A}}_s^+ + \underline{I}] \underline{e}\|$$

Ejemplo 4.4 Se requiere construir un filtro eléctrico pasa banda de segundo orden sujeto a las siguientes especificaciones

$$\begin{aligned} \omega_o &= 10^3 \text{ [s}^{-1}\text{]} \\ Q &= 10 \\ H_o &= 1 \end{aligned}$$

El circuito eléctrico correspondiente se muestra en la figura 4.2

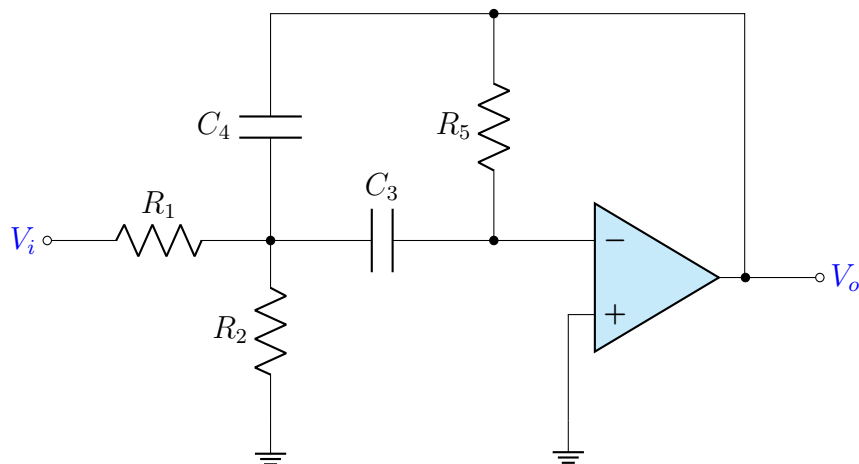


Figura 4.2: Filtro eléctrico pasa banda

Un juego de valores que satisfacen las condiciones de diseño son

$$C_3 = C_4 = 0.1 \mu F$$

$$R_1 = 10^5 \Omega$$

$$R_2 = 502.5126 \Omega$$

$$R_5 = 2 \times 10^5 \Omega$$

Al tener R_2 y R_5 como los valores nominales se observó que $Q = 9.5$ y $\omega_o = 980 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. (Estos cambios seguramente se deben a que los valores de R_1 , C_3 y C_4 no son los nominales.) Determine en qué porcentaje se deben reajustar R_2 y R_5 para que los parámetros ω_o y Q sean los nominales.

Las sensibilidades están dadas por las expresiones¹

$$S_{R_5}^{\omega_o} = S_{C_3}^{\omega_o} = S_{C_4}^{\omega_o} = -\frac{1}{2}$$

$$S_{R_1}^{\omega_o} = -\frac{1}{2\omega_o^2 R_1 R_5 C_3 C_4}$$

$$S_{R_2}^{\omega_o} = -\frac{1}{2\omega_o^2 R_2 R_5 C_3 C_4}$$

$$S_{R_1}^Q = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)} - \frac{1}{2}$$

$$S_{R_2}^Q = \frac{R_2}{2(R_1 + R_2)} - \frac{1}{2}$$

$$S_{R_5}^Q = \frac{1}{2}$$

$$S_{C_3}^Q = \frac{Q}{\omega_o R_5 C_3} - \frac{1}{2}$$

$$S_{C_4}^Q = \frac{Q}{\omega_o R_5 C_4} - \frac{1}{2}$$

¹Vale la pena recordar que la sensibilidad de una función de red $F(\omega)$ con respecto a un parámetro x está definido por $S_x^H = \frac{dF(\omega)/F(\omega)}{dx/x} = \frac{x}{F(\omega)} \frac{dF(\omega)}{dx}$

Las sensibilidades que interesan son las relacionadas con R_2 y R_5 , que son los elementos que se van a reajustar. No obstante, como ilustración se escribe la matriz $\underline{\mathcal{A}}$ completa; considerando que el vector $\underline{y}$ es

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \\ \frac{\Delta Q}{Q} \end{bmatrix}$$

los vectores $\underline{x}_s$ y $\underline{x}_f$ son

$$\underline{x}_s = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_5}{R_5} \\ \frac{\Delta R_2}{R_2} \end{bmatrix} \quad \underline{x}_f = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_1}{R_1} \\ \frac{\Delta C_3}{C_3} \\ \frac{\Delta C_4}{C_4} \end{bmatrix}$$

la matriz $\underline{\mathcal{A}}$ es

$$\underline{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} S_{R_5}^{\omega_o} & S_{R_2}^{\omega_o} & S_{R_1}^{\omega_o} & S_{C_3}^{\omega_o} & S_{C_4}^{\omega_o} \\ S_{R_5}^Q & S_{R_2}^Q & S_{R_1}^Q & S_{C_3}^Q & S_{C_4}^Q \end{bmatrix}$$

Considerando las expresiones para la sensibilidad y los valores nominales de los elementos, la matriz $\underline{\mathcal{A}}$ resulta

$$\underline{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4975 & -2.5 \times 10^5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.4975 & -2.5 \times 10^5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$\underline{\mathcal{A}}_s = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4975 \\ 0.5 & -0.4975 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \frac{980 - 1000}{1000} \\ \frac{9.5 - 10}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

Considerando la ecuación (4.14)

$$\underline{x}_s = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_5}{R_5} \\ \frac{\Delta R_2}{R_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1.005 & -1.005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.0703518 \end{bmatrix}$$

por consiguiente, los valores que R_2 y R_5 deben tener son

$$R_2 = 502.51(1 - 0.07035) = 467.1599 \Omega$$

$$R_5 = 2 \times 10^5(1 + 0.03) = 2.06 \times 10^5 \Omega$$

Ejemplo 4.5 Para el ejemplo anterior, suponga ahora que la única resistencia que se puede ajustar es R_5 . Si el vector $\underline{e}$ es el mismo, determine el valor de R_5 que mejor ajusta los valores de Q y ω_o .

Para este ejemplo

$$\underline{\mathcal{A}}_s = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

de acuerdo a las ecuaciones (4.15) y (4.16)

$$\frac{\Delta R_5}{R_5} = \underline{x}_s = \left[\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta R_5}{R_5} = 0.03$$

o sea que el nuevo valor de R_5 debe ser

$$R_5 = 2 \times 10^5(1 + 0.03) = 2.06 \times 10^5 \Omega$$

El vector $\underline{y}$ correspondiente es

$$\underline{y} = \left[- \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \underline{e} = \begin{bmatrix} -0.035 \\ -0.035 \end{bmatrix}$$

lo que indica que los cambios porcentuales de ω_o y Q , después del ajuste serán

$$\frac{\Delta \omega_o}{\omega_o} = -0.035 \quad \frac{\Delta Q}{Q} = -0.035$$

o sea

$$\omega_o = 0.965 \times 10^3 = 965 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$Q = 0.965 \times 10 = 9.65$$

Capítulo 5

Síntesis y realización de filtros eléctricos activos

En la práctica, el diseño y la realización de un filtro eléctrico bajo cierta aproximación, que satisfaga ciertas especificaciones de la respuesta en frecuencia, requiere de varios pasos, a saber: normalización, transformación de frecuencia, desnormalización y finalmente su construcción y sintonización. Este capítulo presenta un resumen de este procedimiento.

5.1. Funciones de transferencia de orden mayor de dos

Para diseñar y construir filtros eléctricos activos, se pueden seguir los siguientes pasos.

- 1 Determinación mediante una aproximación dada, de la función de transferencia $H(s)$, que satisfaga las especificaciones de la respuesta en frecuencia deseada. A este paso se le denomina frecuentemente *síntesis*.
- 2 La *realización* de la función de transferencia determinada en el paso anterior, mediante la construcción de circuitos eléctricos en los cuales intervienen, resistores, condensadores y amplificaciones operacionales.

Para efectuar la realización existen diversas formas ^[2]. Una de ellas consiste en la conexión en cascada de etapas de primer y segundo orden, esto es

$$H(s) = \prod_{i=1}^{N_1} H_{1i}(s) \prod_{i=1}^{N_2} H_{2i}(s) \quad (5.1)$$

donde N_1 y N_2 son respectivamente el número de etapas de primer y segundo orden que intervienen. $H_{1i}(s)$ y $H_{2i}(s)$ representan funciones de transferencia de primer y segundo orden respectivamente.

Si el filtro eléctrico diseñado es de tipo Butterworth, Chebyshev o Elíptico, N_1 y N_2 siempre están dados por las siguientes expresiones.

$$N_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

donde n representa el orden del filtro en cuestión. En la figura 5.1 se muestra la realización en cascada de un filtro eléctrico cuyo tipo puede ser Butterworth, Chebyshev o Elíptico.

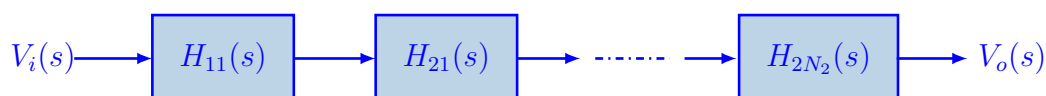


Figura 5.1: Realización en cascada de un filtro eléctrico activo cuyo tipo puede ser Butterworth, Chebyshev o Elíptico ($H_{1i}(s) = 1$, si el orden del filtro eléctrico es par)

- 3 Ajuste de los valores de los elementos (generalmente resistencias y/o ganancias de elementos activos) que intervienen en la construcción del filtro eléctrico, en caso de que no se satisfagan las especificaciones de la respuesta en frecuencia deseada. A este paso se le denomina *sintonización*.

A continuación se describe cómo llevar a cabo las síntesis.

5.2. Síntesis

Una forma para llevar a cabo la síntesis de la función de transferencia requerida para un caso dado, es transformar la especificación de diseño a una especificación correspondiente a un filtro eléctrico pasa bajas normalizado en frecuencia; a continuación determinar la función de transferencia adecuada, para después, mediante un mapeo apropiado de los polos y los ceros correspondientes, obtener la función de transferencia requerida originalmente. Si el filtro eléctrico que se quiere diseñar es pasa bajas entonces únicamente se normaliza la especificación de diseño para posteriormente, una vez que se obtiene la función de transferencia pasa bajas normalizada; desnormalizarla para obtener la función de transferencia deseada. La forma que presenta la función de transferencia pasa bajas normalizada depende del tipo de aproximación que se emplee. Los filtros eléctricos pasa bajas de tipo Butterworth generalmente se normalizan de modo que su frecuencia de corte sea $1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$; los filtros eléctricos pasa bajas normalizados de tipo Chebyshev y Elíptico lo están de tal manera que la frecuencia de $1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ corresponde a el fin de la banda pasante del filtro eléctrico. Estos filtros eléctricos presentan una oscilación de magnitud constante en su ganancia en la banda pasante. Por lo regular, la magnitud de dicha oscilación se especifica en *decibeles* y se denomina con el nombre de *rizo*. Si la magnitud del rizo es menor o igual que tres decibeles, la frecuencia de corte será mayor o igual que uno.

En la Tabla 5.1, se resumen las transformaciones de frecuencia y mapeo correspondientes, para obtener la función de transferencia de un filtro eléctrico desnormalizado que puede ser pasa bajas, pasa altas, pasa banda o supresor de banda.

Tabla 5.1:

Transformaciones y mapeos necesarios en la síntesis de funciones de transferencia de filtros eléctricos		
Clase de filtro eléctrico cuya función de transferencia se desea sintetizar	Transformación de frecuencia para pasar a un filtro eléctrico pasa bajas normalizado	Mapeo correspondiente
Pasa bajas	$\omega' = \frac{\omega}{\omega_a}$	$s_j = \omega_a \rho_i$
Pasa altas	$\omega' = \frac{\omega_a}{\omega}$	$s_j = \frac{\omega_a}{\rho_i}$
Pasa banda	$\omega' = Q \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)$	$s_j = \frac{\omega_o}{2Q} \left[\rho_i \pm \sqrt{\rho_i^2 - 4Q^2} \right]$
Supresor de banda	$\omega' = \frac{1}{Q \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)}$	$s_j = \frac{\omega_o}{2Q} \left[\frac{1}{\rho_i} \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_i^2} - 4Q^2} \right]$

Con relación a la Tabla 5.1, es conveniente hacer las siguientes indicaciones:

ω es la frecuencia asociada al filtro eléctrico cuya función de transferencia se desea sintetizar originalmente.

ω' representa la frecuencia en el filtro eléctrico pasa bajas normalizado correspondiente.

ρ_i representa un *polo* o un *cero* de la función de transferencia del filtro eléctrico pasa bajas normalizado.

s_j representa un *polo* o un *cero* de la función de transferencia del filtro pasa bajas que se desea construir.

ω_a representa la frecuencia que inicia la banda pasante del filtro eléctrico, si éste es pasa altas; en caso de que el filtro sea pasa bajas ω_a representa la frecuencia en que termina la banda pasante.

ω_o representa la frecuencia central, para filtros eléctricos pasa banda y supresor de banda.

$i = 1, 2, \dots, n$. donde n es el orden del filtro eléctrico pasa bajas normalizado correspondiente.

$j = 1, 2, \dots, k$. si la función de transferencia a sintetizar corresponde a un filtro eléctrico pasa bajas o pasa altas $k = n$. En otro caso $k = 2n$.

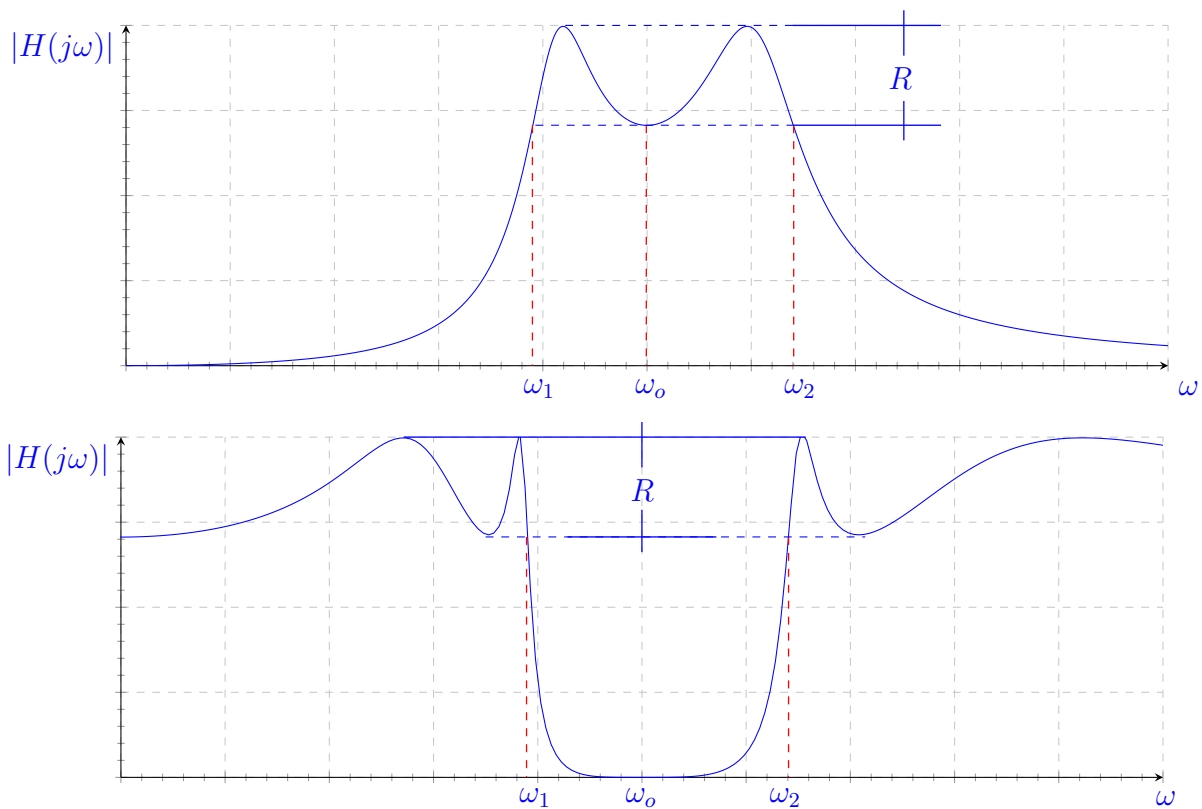


Figura 5.2: Significado de ω_1 y ω_2 para filtros eléctricos Chebyshev pasa banda y supresor de banda

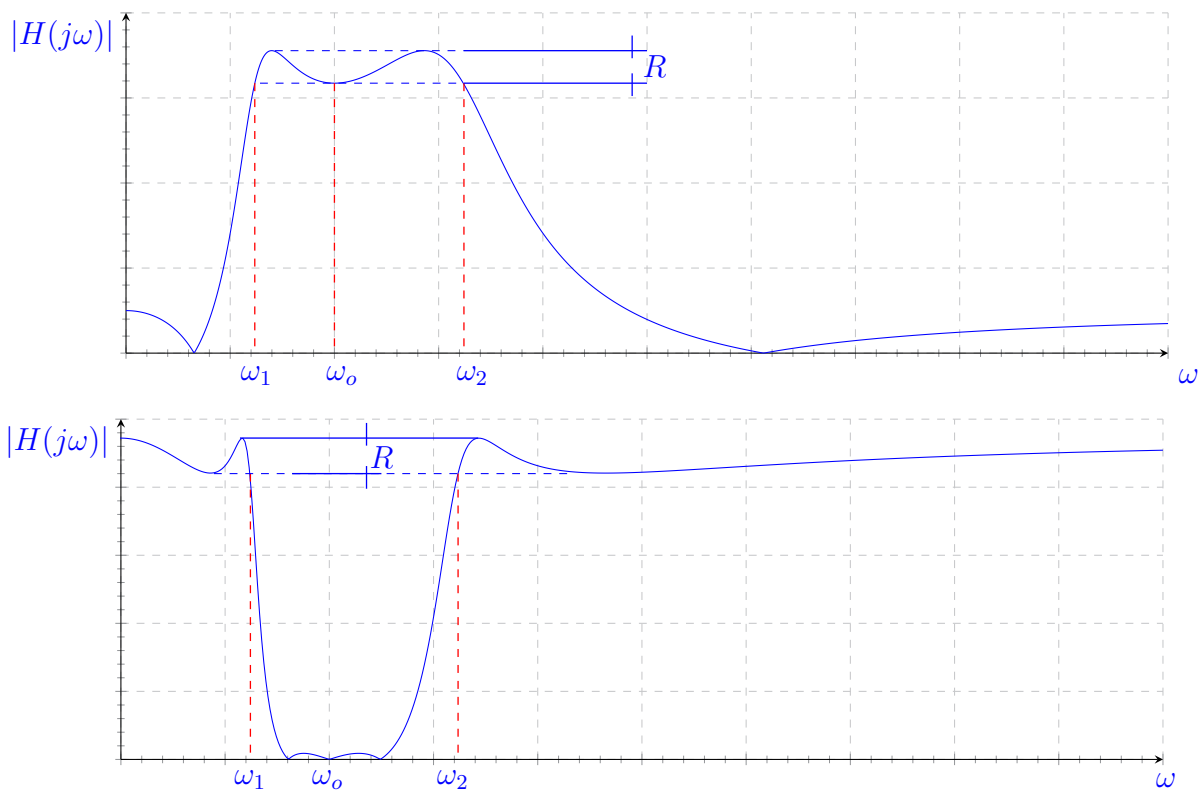


Figura 5.3: Significado de ω_1 y ω_2 para filtros eléctricos Elípticos pasa banda y supresor de banda

El parámetro Q que aparece en el caso de los filtros eléctricos pasa banda y supresor de banda se define de la siguiente manera.

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1}$$

Para la aproximación Butterworth ω_1 y ω_2 representan las frecuencias para las cuales la ganancia del filtro eléctrico está tres decibels por debajo de su valor máximo en la banda pasante.

En las figuras 5.2 y 5.3 se ilustran el significado de ω_1 y ω_2 para las aproximaciones Chebyshev y Elíptica, respectivamente.

Para aclarar cómo se lleva a cabo la síntesis de la función de transferencia requerida, se expone a continuación el siguiente ejemplo de diseño.

Ejemplo 5.1 Se requiere construir un filtro eléctrico Butterworth pasa banda sujeto a la plantilla de diseño de la figura 5.4.

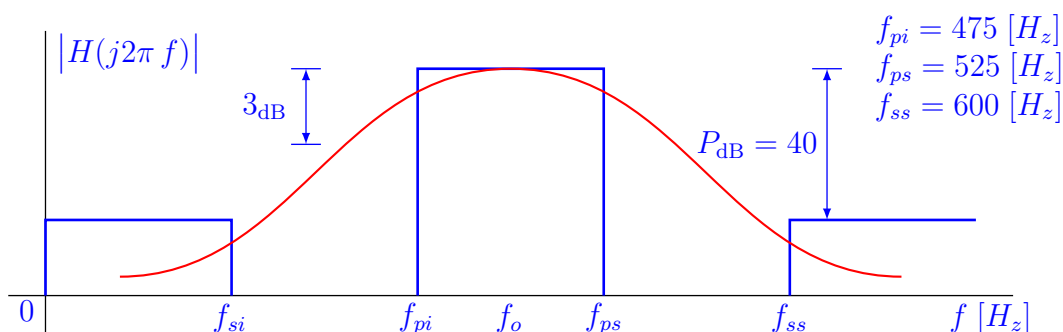


Figura 5.4: Plantilla del filtro eléctrico pasa banda

De las especificaciones

$$f_o = \sqrt{475 \times 525} = 499.3746 \text{ Hz}$$

$$Q = 9.98749$$

La plantilla del filtro eléctrico pasa bajas correspondiente se muestra en la figura 5.5

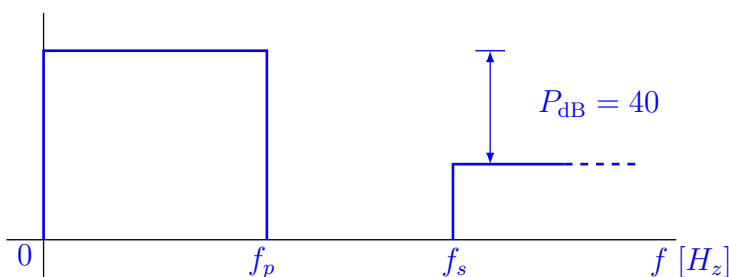


Figura 5.5: Plantilla del filtro eléctrico pasa bajas

donde

$$2\pi f_p = Q \left[\frac{f_{ps}}{f_o} - \frac{f_o}{f_{ps}} \right]$$

$$2\pi f_s = Q \left[\frac{f_{ss}}{f_o} - \frac{f_o}{f_{ss}} \right]$$

$$\frac{f_s}{f_p} = \frac{\frac{600}{499.375} - \frac{499.375}{600}}{\frac{499.375}{525} - \frac{525}{499.375}} = 3.6875$$

El orden del filtro eléctrico pasa bajas correspondiente, ecuación (2.4), es

$$n = \mathbf{I} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\log(10^{0.1P} - 1)}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} + 1 \right\} = 4$$

por tanto el orden del filtro eléctrico pasa banda que se requiere construir es de $n = 8$.

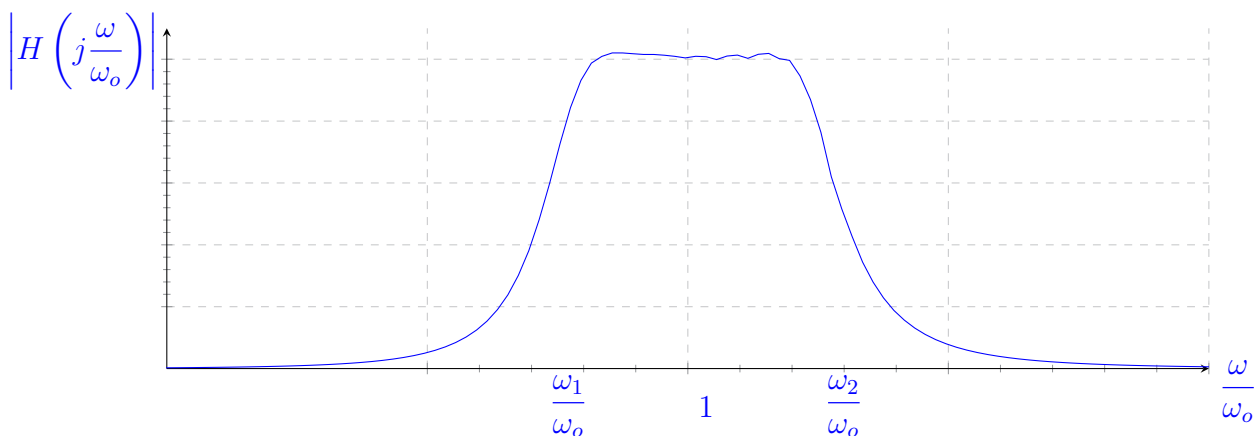


Figura 5.6: Magnitud de la respuesta en frecuencia normalizada del filtro eléctrico que se calcula en el ejemplo 5.1

De la Tabla A.2 del Apéndice A se obtienen los cuatro polos del filtro eléctrico pasa bajas normalizado correspondiente

$$\rho_{1,2} = -0.3826834 \pm 0.9238795j$$

$$\rho_{3,4} = -0.9238795 \pm 0.3826834j$$

los polos del filtro eléctrico pasa banda se obtienen a partir de la ecuación (1.41).

$$s = \frac{\omega_o}{2Q} \left[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4Q^2} \right]$$

donde ρ es un polo del filtro eléctrico pasa bajas normalizado y s es un polo del filtro eléctrico pasa banda. Al aplicar la ecuación anterior a cada uno de los cuatro polos del filtro eléctrico pasa bajas normalizado, se tiene

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= -57.334 \pm 2995.321j \\ s_{3,4} &= -62.889 \pm 3285.566j \\ s_{5,6} &= -142.339 \pm 3074.771j \\ s_{7,8} &= -147.905 \pm 3194.995j\end{aligned}$$

La función de transferencia correspondiente es la siguiente

$$H(s) = \frac{H_o s^4}{(s^2 + a_1 s + b_1)(s^2 + a_2 s + b_2)(s^2 + a_3 s + b_3)(s^2 + a_4 s + b_4)}$$

donde

$$\begin{aligned}a_1 &= 114.668 & b_1 &= 8975234.055 \\ a_2 &= 125.779 & b_2 &= 10798899.926 \\ a_3 &= 284.679 & b_3 &= 9474478.338 \\ a_4 &= 295.811 & b_4 &= 10229867.115\end{aligned}$$

Acorde con la ecuación (1.41), puede verse que la función de transferencia del filtro pasa banda tendrá cuatro ceros en el origen y cuatro ceros que tienden al infinito.

En la figura 5.6 se puede observar la magnitud de la respuesta en frecuencia normalizada del filtro eléctrico Butterworth pasa banda obtenido.

Capítulo 6

Diseño y realización

En este capítulo se presentan el diseño y la realización de varios filtros eléctricos, bajo diferentes aproximaciones. Para una mejor comprensión de los ejemplos prácticos aquí mostrados, se recomienda ver lo propio en el capítulo 3.

6.1. Filtro eléctrico pasa altas

Diseñe un filtro eléctrico pasa altas bajo una aproximación Chebyshev con las siguientes características:

- Frecuencia de supresión $f_s = 250$ Hz
- Frecuencia de corte $f_p = 500$ Hz
- Pérdida = 30 dB
- Rizo = 3 dB

La plantilla de diseño para estos requerimientos se muestra en la figura 6.1.

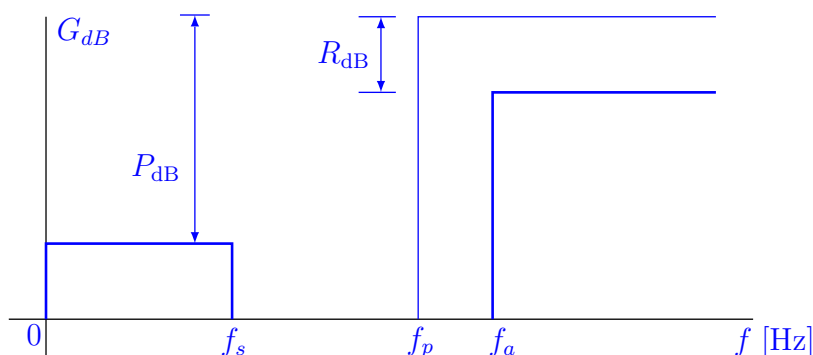


Figura 6.1: Plantilla de diseño el filtro eléctrico pasa altas Chebyshev

En este caso, como el rizo es de 3 dB, la frecuencia de corte f_p y la frecuencia de fin de rizo f_a son las mismas, es decir $f_p = f_a$. El primer paso para el diseño, consiste en transformar la plantilla anterior en la correspondiente de un filtro eléctrico pasa bajas normalizado a $\omega_p = 1$ [s⁻¹]. Considere la figura 6.2.

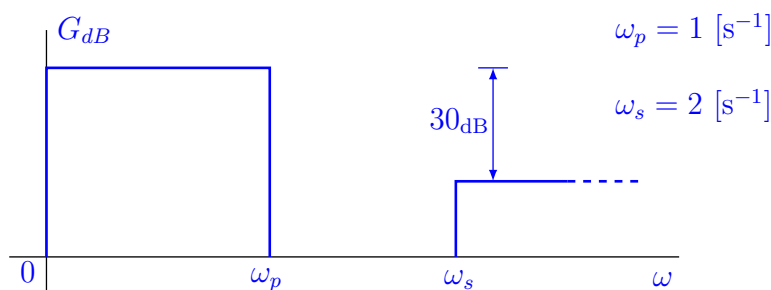


Figura 6.2: Plantilla del filtro eléctrico pasa bajas

A continuación se determina el orden del filtro eléctrico pasa bajas normalizado. De la ecuación (2.8)

$$\epsilon = 0.997628$$

de la ecuación (2.17)

$$n = 4$$

Conocido el orden del filtro y con ayuda de las tablas de coeficientes de los factores de filtros eléctricos Chebyshev con rizo de 3 dB, de la Tabla B.8 del Apéndice B, se obtiene la función de transferencia del filtro eléctrico pasa bajas normalizado.

$$H(s) = \frac{0.9030869}{s^2 + 0.1703408s + 0.9030869} \frac{0.195980}{s^2 + 0.411239s + 0.195980}$$

El siguiente paso consiste en transformar y desnormalizar la función de transferencia anterior a la de la función de transferencia del filtro eléctrico pasa altas mediante la transformación de la ecuación (1.39)

$$G(s) = H\left(\frac{\omega_p}{s}\right)$$

donde

$$\omega_p = 2\pi 500 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

así

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 592.569s + 10928742.739} \frac{s^2}{s^2 + 6592.231s + 50360263.298}$$

que es la función de transferencia del filtro eléctrico pasa altas con las especificaciones requeridas en el planteamiento del problema.

En la figura 6.3 se muestran las magnitudes de la respuesta en frecuencia de este filtro eléctrico y de cada una de las etapas que lo constituyen.

La realización física de la función de transferencia se lleva a cabo con dos etapas de segundo orden conectadas en cascada, empleando la configuración realimentación múltiple en cada una de ellas. Dicha configuración se muestra en la figura 6.4.

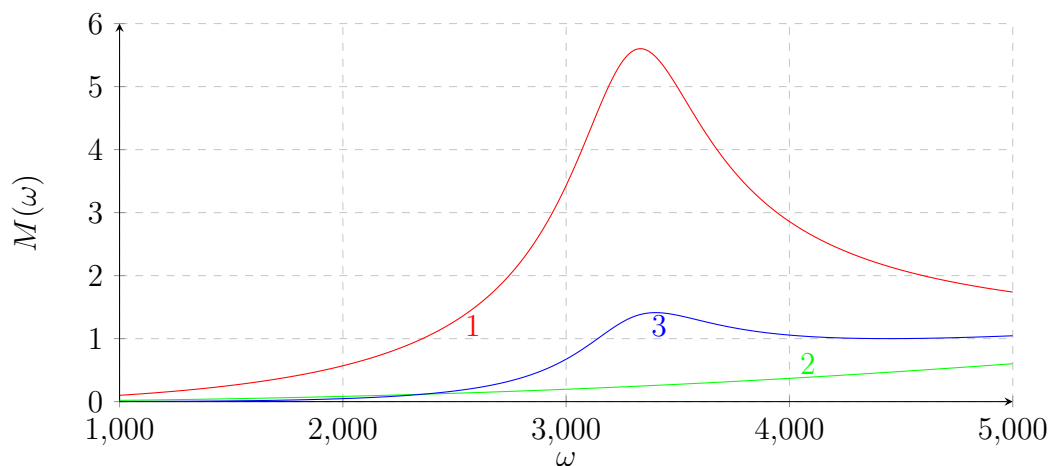


Figura 6.3: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa altas. Primera etapa 1. Segunda etapa 2. Filtro eléctrico total 3

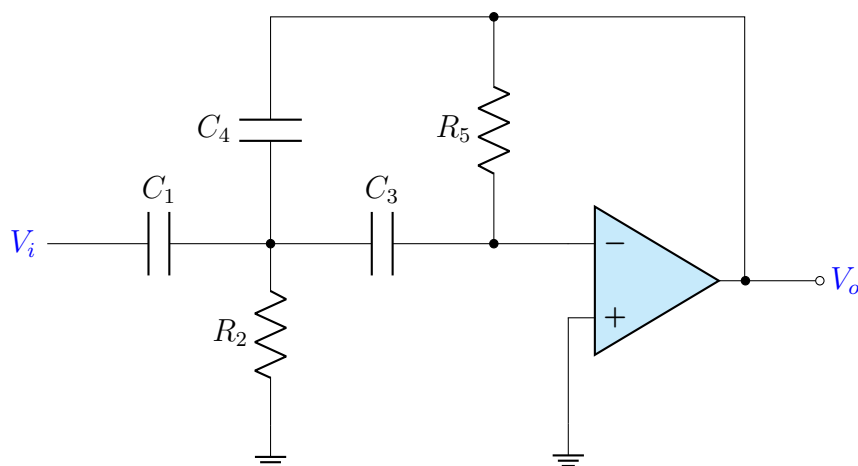


Figura 6.4: Configuración de realimentación múltiple para cada etapa de segundo orden de un filtro eléctrico pasa altas

Para la primera etapa, con $H_o = 1$
Primera etapa

$$\begin{aligned} C_1 = C_3 = C_4 &= 100 \text{ } \mu\text{F} \\ R_2 &= 180.737 \text{ } \Omega \\ R_5 &= 50\,627.005 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_o &= 3\,305.864 \text{ [s}^{-1}\text{]} \\ \alpha &= 0.179248 \end{aligned}$$

De igual forma, para la segunda etapa, con $H_o = 1$

$$\begin{aligned} C_1 = C_3 = C_4 &= 100 \text{ } \mu\text{F} \\ R_2 &= 436.338 \text{ } \Omega \\ R_5 &= 4\,550.811 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_o &= 7\,096.496 \text{ [s}^{-1}\text{]} \\ \alpha &= 0.928942 \end{aligned}$$

6.2. Filtro eléctrico pasa banda

A continuación se muestra el diseño y la realización de un filtro eléctrico pasa banda con aproximación Butterworth, que satisface las siguientes particularidades

- Frecuencia de paso inferior $f_{pi} = 450$ Hz
- Frecuencia de paso superior $f_{ps} = 550$ Hz
- Frecuencia de supresión superior $f_{ss} = 750$ Hz
- Pérdida = 30 dB

y que se pueden observar en la figura 6.5.

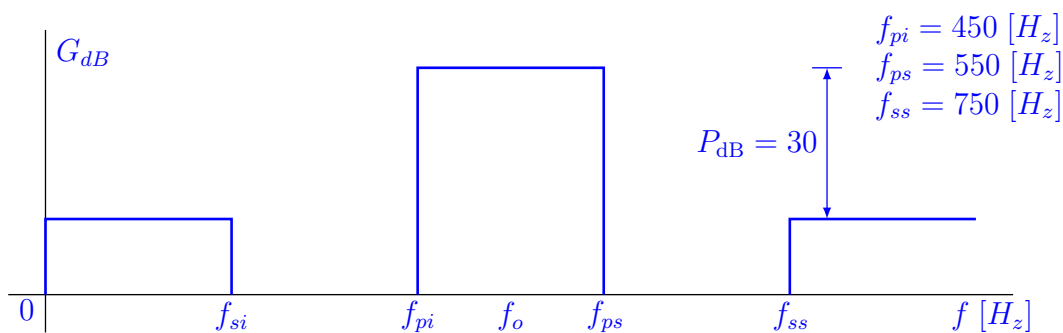


Figura 6.5: Plantilla de diseño del filtro eléctrico pasa banda Butterworth

A partir de los datos de la plantilla de diseño, se pueden obtener los parámetros restantes del filtro eléctrico deseado.

$$f_o = \sqrt{f_{pi} f_{ps}} = 497.494 \text{ Hz}$$

$$f_{si} = \frac{f_o^2}{f_{ss}} = 330 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{f_o}{f_{ps} - f_{pi}} = 4.975$$

Con los valores anteriores, se encuentra la plantilla de diseño del filtro eléctrico pasa bajas correspondiente, normalizado a $\omega_p = 1$ [s⁻¹], como se muestra en la figura 6.6, por medio de la transformación

$$\omega' = Q \left[\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right]$$

Se calcula el orden del filtro pasa bajas normalizado con la ecuación (2.4)

$$n = 3$$

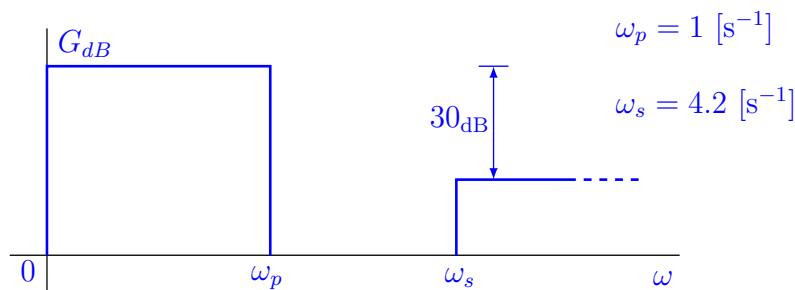


Figura 6.6: Plantilla del filtro eléctrico pasa bajas normalizado asociado al filtro eléctrico pasa banda

Con el auxilio de las tablas de coeficientes para los factores de los filtros Butterworth pasa bajas normalizados, Apéndice A, se obtiene la función de transferencia que satisface la plantilla de diseño de la figura 6.6.

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

De esta función de transferencia, se puede determinar que los polos de la misma están localizados en

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -1 \\ \rho_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \rho_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Con la transformación dada por la ecuación (1.41), se mapean los polos del filtro eléctrico pasa bajas normalizado a los polos del filtro eléctrico pasa banda deseado.

$$s = \frac{\omega_o}{2Q} \left[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4Q^2} \right] \quad (1.41)$$

donde ρ es la singularidad que se mapea. Cabe destacar que esta transformación lleva a cabo también la desnormalización del filtro eléctrico.

Así, los polos del filtro eléctrico pasa banda desnormalizados son

$$\begin{aligned} s_1 &= -314.159 + 3110.018i & s_2 &= -314.159 - 3110.018i \\ s_3 &= -170.717 + 3405.828i & s_4 &= -170.717 - 3405.828i \\ s_5 &= -143.442 + 2861.689i & s_6 &= -143.442 - 2861.689i \end{aligned}$$

Como se observa, el orden del filtro eléctrico es seis, es decir, se duplicó el orden del filtro eléctrico pasa bajas asociado. A partir de los polos, se encuentra la función de transferencia del filtro eléctrico pasa banda desnormalizado.

$$G(s) = \frac{341.434H_o s}{s^2 + 341.434s + 11628811.489} \frac{628.319H_o s}{s^2 + 628.319s + 9770908.357} \frac{286.884H_o s}{s^2 + 286.884s + 8209837.284}$$

Al realizar el mapeo de los ceros de la función de transferencia pasa bajas normalizada, empleando la ecuación (1.41), se obtienen los seis ceros de la función de transferencia paso banda desnormalizada ($\rho_{123} \rightarrow \infty$).

Para llevar a cabo la realización de este filtro eléctrico, se utilizan tres etapas cuadráticas, cada una con dos amplificadores operacionales. La configuración se observa en la figura 6.7.

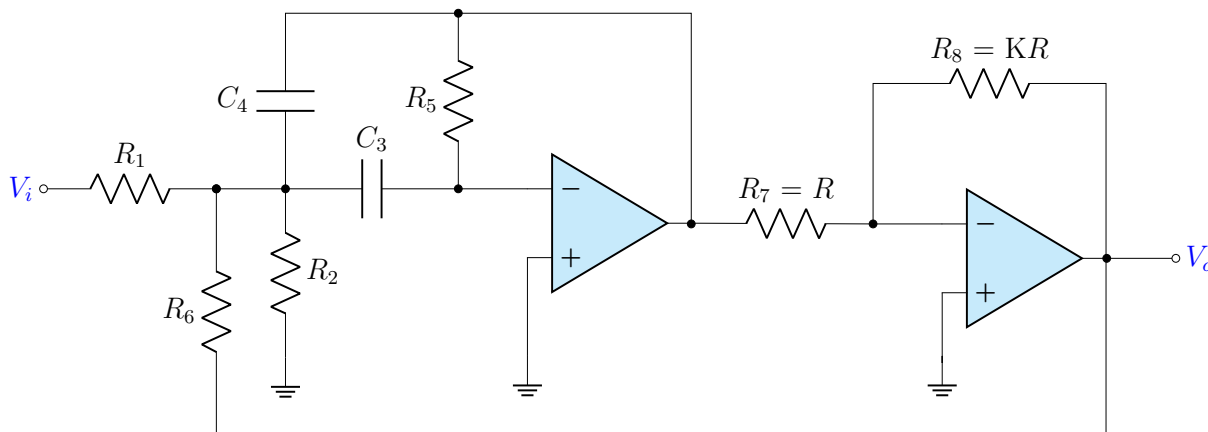


Figura 6.7: Filtro eléctrico pasa banda

Los valores asignados a los elementos de cada etapa son:

Primera etapa

$$\begin{aligned} w_o &= 3\,125.845 \text{ [s}^{-1}\text{]} & Q &= 4.975 \\ C_3 = C_4 &= 10 \text{ nF} \\ R_1 = R_5 &= 71\,355.316 \text{ }\Omega \\ R_2 = 29\,445.808 \text{ }\Omega & R_6 = 45\,986.398 \text{ }\Omega \\ K &= 1 & H_o &= 2.230 \end{aligned}$$

Resistencias de los resistores de la ganancia K :

$$R_7 = R_8 = 10\,000 \text{ }\Omega$$

Segunda etapa

$$\begin{aligned} w_o &= 2\,865.281 \text{ [s}^{-1}\text{]} & Q &= 9.987 \\ C_3 = C_4 &= 22 \text{ nF} \\ R_1 = R_5 &= 50\,134.919 \text{ }\Omega \\ R_2 = 6\,864.026 \text{ }\Omega & R_6 = 29\,778.832 \text{ }\Omega \\ K &= 1 & H_o &= 3.160 \end{aligned}$$

Resistencias de los resistores de la ganancia K :

$$R_7 = R_8 = 10\,000 \text{ }\Omega$$

Tercera etapa

$$w_o = 3\,410.104 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$Q = 9.987$$

$$C_3 = C_4 = 10 \text{ } \eta F$$

$$R_1 = R_5 = 92\,675.004; \Omega$$

$$R_2 = 12\,688.235 \text{ } \Omega \quad R_6 = 55\,046.529 \text{ } \Omega$$

$$K = 1$$

$$Ho = 3.160$$

Resistencias de los resistores de la ganancia K :

$$R_7 = R_8 = 10\,000 \text{ } \Omega$$

La magnitud de la respuesta en frecuencia correspondiente al filtro eléctrico pasa banda deseado y la de cada una de las etapas que lo conforman, se presentan en la figura 6.8.

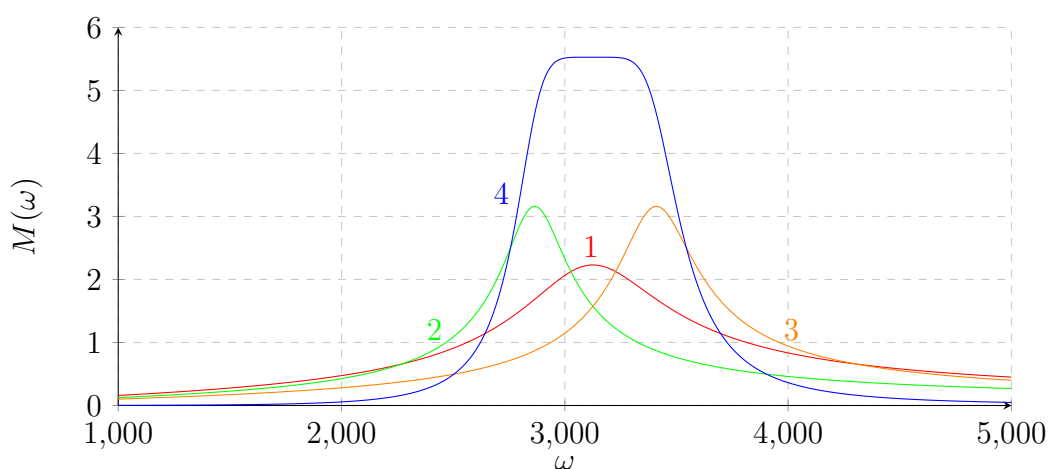


Figura 6.8: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa banda. Primera etapa 1. Segunda etapa 2. Tercera etapa 3. Filtro eléctrico total 4

6.3. Filtro eléctrico pasa bajas

Se desea diseñar y realizar un filtro eléctrico pasa bajas bajo una aproximación elíptica, que satisfaga las siguientes especificaciones

- Frecuencia de paso $f_p = 1000 \text{ Hz}$
- Frecuencia de supresión $f_s = 1500 \text{ Hz}$
- Pérdida = 50 dB
- Rizo = 1 dB

La plantilla de diseño correspondiente se observa en la figura 6.9.

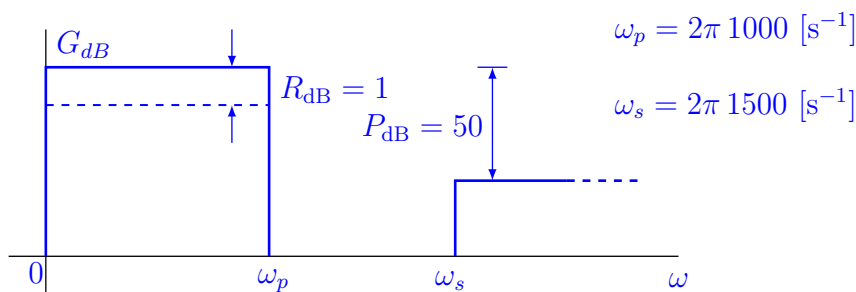


Figura 6.9: Plantilla de diseño del filtro eléctrico pasa bajas elíptico

Al normalizar la plantilla de diseño a $\omega_p = 1$ [s⁻¹], se obtiene

$$\omega_s = 1.5 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Utilizando las tablas de polos y coeficientes de factores cuadráticos de filtros elípticos, se encuentra que para obtener las características deseadas el orden del filtro es cinco y la función de transferencia del filtro normalizado a $\omega_p = 1$ [s⁻¹] es, Tabla C.12 del Apéndice C,

$$H(s) = \frac{s^2 + 2.4255147}{s^2 + 0.1330814s + 0.9949578} \frac{s^2 + 5.4376446}{s^2 + 0.4577497s + 0.5170688} \frac{0.3378465}{s + 0.3378465}$$

Al desnormalizar la función de transferencia para $\omega_p = 2\pi 1000$ [s⁻¹], por medio de la transformación

$$G(s) = H\left(\frac{s}{2\pi 1000}\right)$$

se obtiene la función de transferencia del filtro eléctrico deseado

$$G(s) = \frac{s^2 + 95755482.232}{s^2 + 836.175s + 39279359.527} \frac{s^2 + 214669604.303}{s^2 + 2876.126s + 20413058.017} \frac{2122.752}{s + 2122.752}$$

La traza de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa bajas elíptico y las de las etapas que lo forman, se muestran en la figura 6.10.

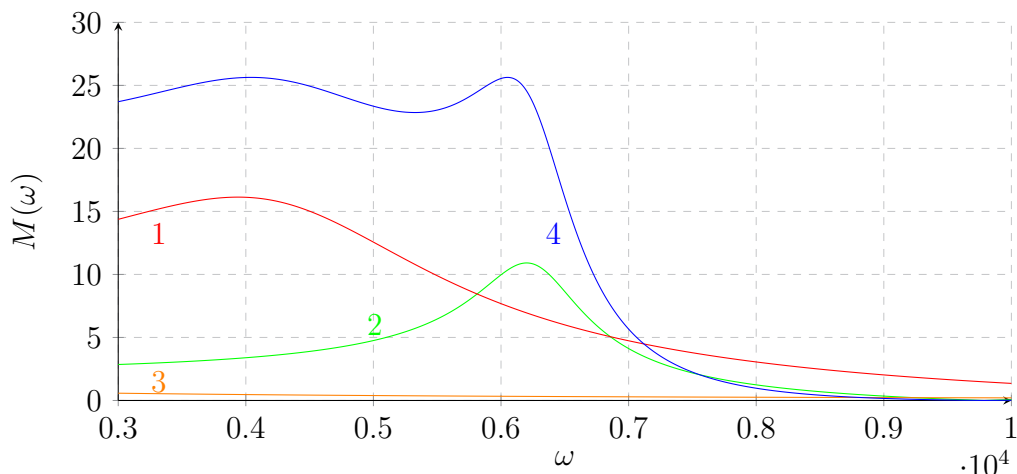


Figura 6.10: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa bajas elíptico. Primera etapa 1. Segunda etapa 2. Tercera etapa 3. Filtro eléctrico total 4

Para la realización de esta función de transferencia, que consta de dos etapas cuadráticas con dos ceros de transmisión cada una y de una etapa de primer orden, se emplea una configuración de fuente de voltaje controlada por voltaje para cada etapa de segundo orden y una configuración RC pasiva para la etapa de primer orden.

La estructura de los componentes para las etapas de segundo orden se muestra en la figura 6.11. En el Capítulo 3, se estudió una composición similar, como se aprecia en la figura 3.18. La configuración del filtro eléctrico que se propone es una disyuntiva.^[2]

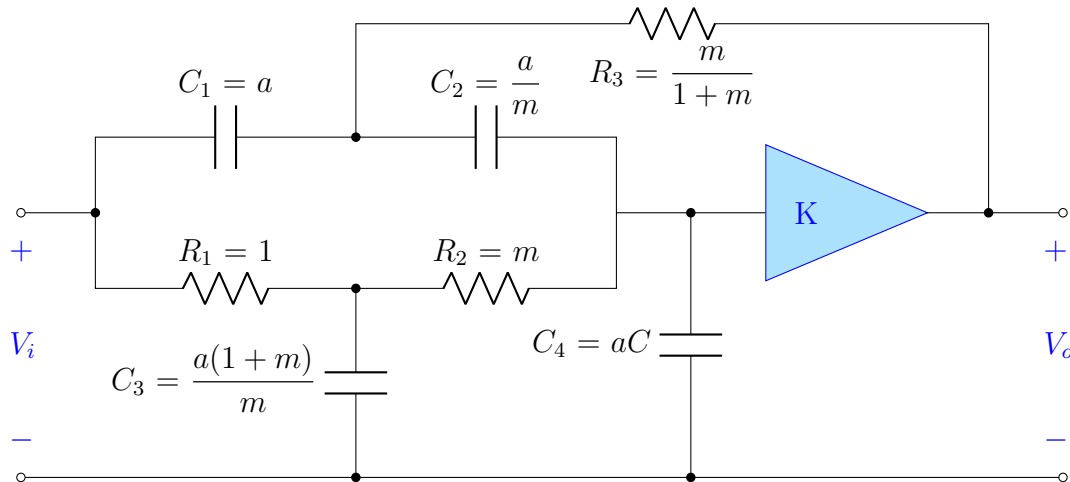


Figura 6.11: Configuración fuente de voltaje controlada por voltaje para realizar una etapa pasa bajas con un cero de transmisión

La función de transferencia del circuito eléctrico es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{K}{1 + (1+m)C} \left(s^2 + \frac{1}{a^2} \right)}{s^2 + \left[\frac{(1+m) \left(C + \frac{2-K}{m} \right)}{a [1 + (1+m)C]} \right] s + \frac{1}{a^2 [1 + (1+m)C]}}$$

Que constituyen etapas de la forma

$$H(s) = H_o \frac{s^2 + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Los parámetros de diseño son

$$a = \frac{1}{\sqrt{b_0}} \quad (6.1)$$

$$C = \frac{b_0 - a_0}{a_0(1 + m)} \quad (6.2)$$

$$K = 2 + \frac{m}{1 + m} \left[\frac{b_0}{a_0} - \frac{a_1 \sqrt{b_0}}{a_0} - 1 \right] \quad (6.3)$$

$$H_o = \frac{a_0}{b_0} K \quad (6.4)$$

$$C_4 = aC \quad (6.5)$$

A continuación, se presenta un procedimiento para llevar a cabo la asignación de valores para los elementos de cada etapa.

En la figura 6.11, se puede apreciar que los elementos del circuito eléctrico están normalizados con $R_1=1$, por tanto se propone un factor de desnormalización k_1 , de tal forma que

$$R_1 = \frac{1}{k_1} \quad (6.6)$$

en consecuencia

$$R_2 = \frac{m}{k_1} \quad (6.7)$$

$$R_3 = \frac{m}{k_1(1 + m)} \quad (6.8)$$

$$C_1 = ak_1 \quad (6.9)$$

$$C_2 = \frac{a}{m} k_1 \quad (6.10)$$

$$C_3 = \frac{a(1 + m)}{m} k_1 \quad (6.11)$$

$$C_4 = a \frac{b_0 - a_0}{a_0(1 + m)} k_1 \quad (6.12)$$

de las ecuaciones (6.1), (6.6) y (6.9) resulta

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{b_0}C_1} \quad (6.13)$$

si se elige $m = 1$, entonces

$$C_1 = C_2 \quad (6.14)$$

$$C_3 = 2C_1 \quad (6.15)$$

$$R_2 = R_1 \quad (6.16)$$

$$R_3 = 0.5R_1 \quad (6.17)$$

$$C_4 = \frac{b_0 - a_0}{2a_0}C_1 \quad (6.18)$$

Se muestra a continuación, un juego de valores posibles para los elementos de las dos etapas de segundo orden que conforman el filtro eléctrico.

Primera etapa

$b_0 = 214669604.303$	$a_1 = 2876.126$
$a_0 = 20413058.017$	$C_3 = 20 \eta F$
$C_1 = C_2 = 10 \eta F$	
$C_4 = 47.581 \eta F$	
$R_1 = R_2 = 6\,825.189 \Omega$	$R_3 = 3\,412.595 \Omega$
$K = 5.726$	$H_o = 0.544$

Segunda etapa

$b_0 = 95755482.232$	$a_1 = 836.175$
$a_0 = 39279359.527$	$C_3 = 20 \eta F$
$C_1 = C_2 = 10 \eta F$	
$C_4 = 7.189 \eta F$	
$R_1 = R_2 = 10\,219.23 \Omega$	$R_3 = 5\,109.615 \Omega$
$K = 2.614$	$H_o = 1.073$

Para realizar el bloque amplificador de ganancia K de cada etapa, se puede utilizar una configuración no-inversora con un amplificador operacional, como se aprecia en la figura 6.12.

Para la configuración mostrada, se tiene

$$K = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

de donde

$$R_b = R_a(K - 1)$$

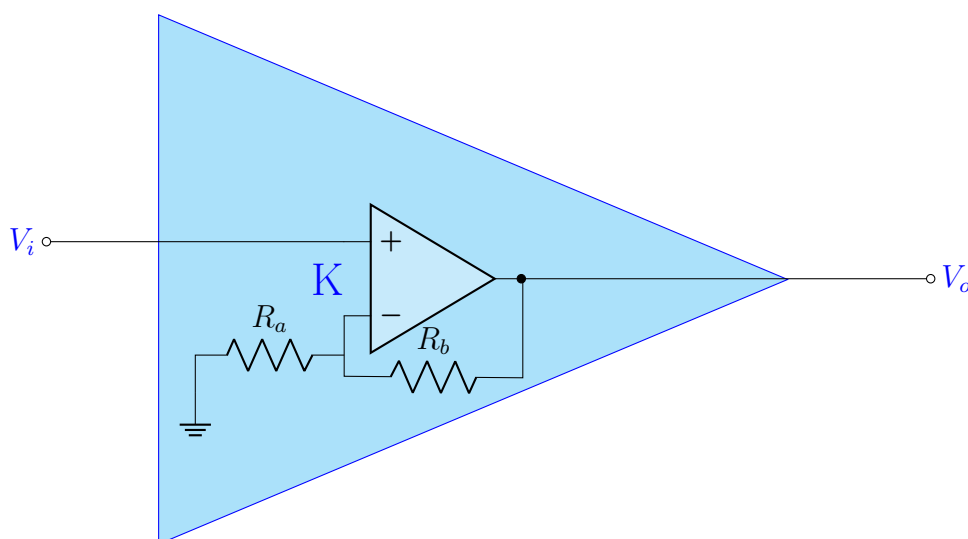


Figura 6.12: Circuito eléctrico para realizar el bloque amplificador de ganancia K

Algunos valores posibles para R_a y R_b son

Primera etapa.

$$K_1 = 5.726 \Rightarrow$$

$$R_a = 4\,700\ \Omega$$

$$R_b = 22\,212.034\ \Omega$$

Segunda etapa.

$$K = 2.614 \Rightarrow$$

$$R_a = 6\,800\ \Omega$$

$$R_b = 10\,980.281\ \Omega$$

Para la realización de la etapa de primer orden, se puede utilizar el circuito eléctrico de la figura 6.13. Se recomienda conectarlo después de las dos etapas anteriores para no producir una caída de tensión.

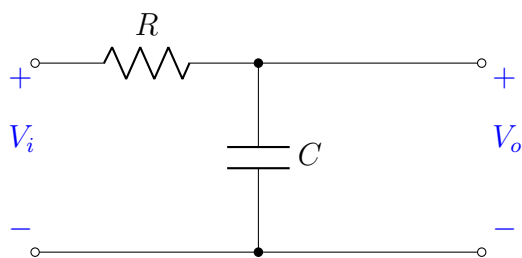


Figura 6.13: Circuito eléctrico para realizar la etapa de primer orden del filtro eléctrico pasa bajas elíptico

La función de transferencia del circuito anterior es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Por consiguiente, un juego de valores adecuado para esta etapa es

$$C = 10 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 47 \text{ } 108.655 \text{ } \Omega$$

6.4. Filtro eléctrico supresor de banda

Encuentre el filtro eléctrico supresor de banda elíptico con las siguientes características

- Frecuencia de supresión inferior $f_{si} = 300 \text{ Hz}$
- Frecuencia de supresión superior $f_{ss} = 400 \text{ Hz}$
- Frecuencia de paso superior $f_{ps} = 500 \text{ Hz}$
- Pérdida = 20 dB
- Rizo = 1 dB

estas particularidades se muestran en la figura 6.14.

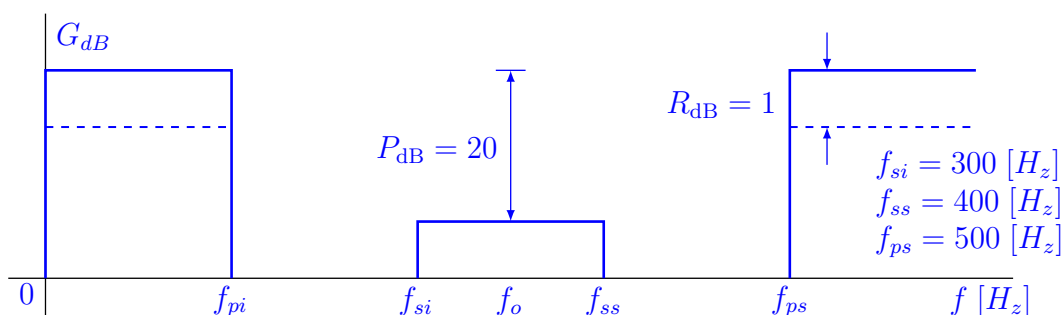


Figura 6.14: Plantilla de diseño del filtro eléctrico supresor de banda elíptico

A partir de los datos de la plantilla de diseño, se pueden obtener los parámetros restantes del filtro eléctrico deseado.

$$f_o = \sqrt{f_{si} f_{ss}} = 346.41 \text{ Hz}$$

$$f_{pi} = \frac{f_o^2}{f_{ps}} = 240 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{f_o}{f_{ps} - f_{pi}} = 1.332$$

Con la transformación indicada por la ecuación (6.19) se obtiene la plantilla de diseño del filtro eléctrico pasa bajas normalizado, figura 6.15, asociado al filtro eléctrico supresor de banda.

$$\omega' = \frac{1}{Q \left[\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right]} \quad (6.19)$$

Con el algoritmo que se proporcionó en la Capítulo 2 para la aproximación elíptica, se calcula el orden y los coeficientes de los factores de la función de transferencia normalizada a $\omega_p = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$.

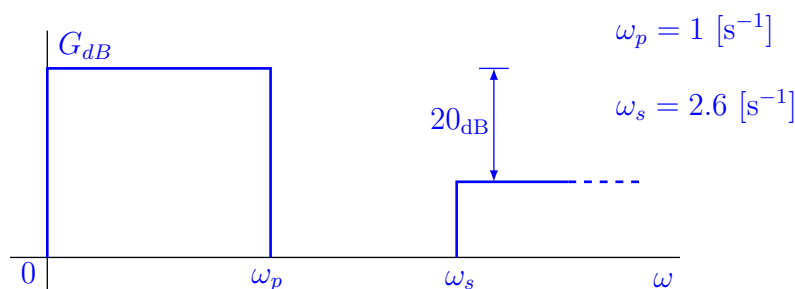


Figura 6.15: Plantilla de diseño del filtro eléctrico pasa bajas normalizado asociado al filtro eléctrico supresor de banda

El orden del filtro eléctrico es $n = 2$ y la función de transferencia normalizada es

$$H(s) = \frac{H_o(s^2 + 13)}{s^2 + 1.0468s + 1.1448}$$

donde

$$H_o = 0.07849$$

Los ceros de transmisión se encuentran localizados en

$$s_{1,2} = \pm 3.60555i$$

y los polos en

$$s_{1,2} = -523.402 \times 10^{-3} \pm 933.2159 \times 10^{-3}i$$

Con la transformación

$$s = \frac{\omega_o}{2Q} \left[\frac{1}{\rho_i} \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_i^2} - 4Q^2} \right] \quad (1.38)$$

donde ρ_i son las singularidades de la función de transferencia del filtro eléctrico pasa bajas normalizado. Se obtienen los ceros del filtro eléctrico supresor de banda, por ende

$$s_{z_1} = \pm 1961.774i$$

$$s_{z_2} = \pm 2414.861i$$

y los polos

$$s_{p_1} = -262.828 \pm 1582.177i$$

$$s_{p_2} = -484.039 \pm 2913.827i$$

con estos datos se encuentra la función de transferencia del filtro eléctrico que se desea

$$G(s) = \frac{s^2 + 5831551.921}{s^2 + 525.656s + 2572363.508} \frac{s^2 + 3848556.075}{s^2 + 968.078s + 8724682.379}$$

En la figura 6.16 se muestran las respuestas en frecuencia del filtro eléctrico obtenido y las de las etapas que lo integran.

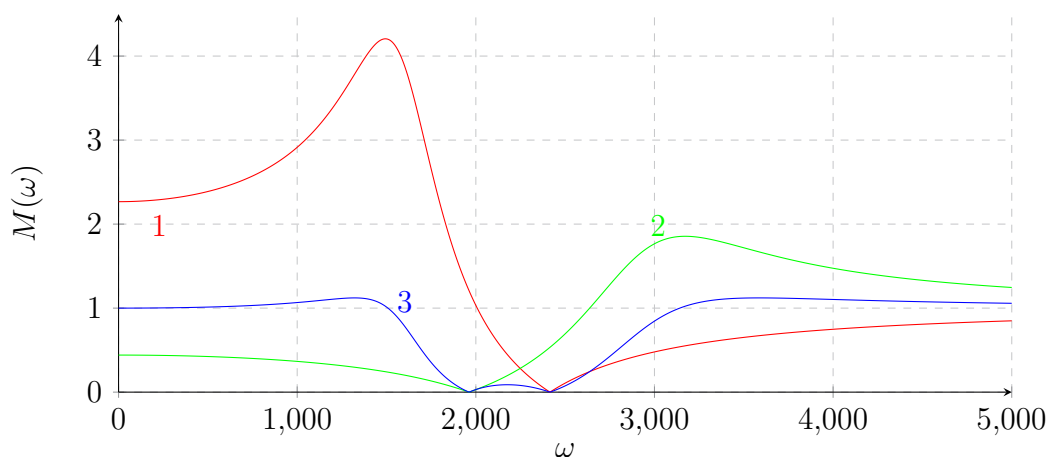


Figura 6.16: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro eléctrico supresor de banda elíptico.
Primera etapa 1. Segunda etapa 2. Filtro eléctrico total 3

Como se observa, el orden del filtro eléctrico supresor de banda es 4, esto es, el doble del orden del filtro eléctrico pasa bajas asociado.

Ambas etapas tienen la forma

$$H(s) = \frac{s^2 + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

no obstante, en la primera etapa $b_0 > a_0$; mientras que en la segunda etapa $b_0 < a_0$.

Esta diferencia ocasiona que las configuraciones de los circuitos eléctricos que se utilizan para realizar cada etapa no sean iguales. Para la primera etapa, se usa la configuración fuente de voltaje controlada por voltaje de un filtro eléctrico pasa bajas con un cero de transmisión; y para la segunda etapa una configuración fuente de voltaje controlada por voltaje de un filtro eléctrico pasa altas con un cero de transmisión.

A continuación se analiza la configuración para cada etapa.

Primera etapa.

$$H(s) = \frac{s^2 + 5831551.928}{s^2 + 525.656s + 2572363.508}$$

La figura 6.17 muestra el circuito eléctrico que realiza esta función de transferencia.

Como se recordará, esta configuración se analizó en el ejemplo anterior (figura 6.11). Utilizando las ecuaciones (6.13), $\dots$, (6.18) se obtienen los valores de los elementos correspondientes de esta etapa.

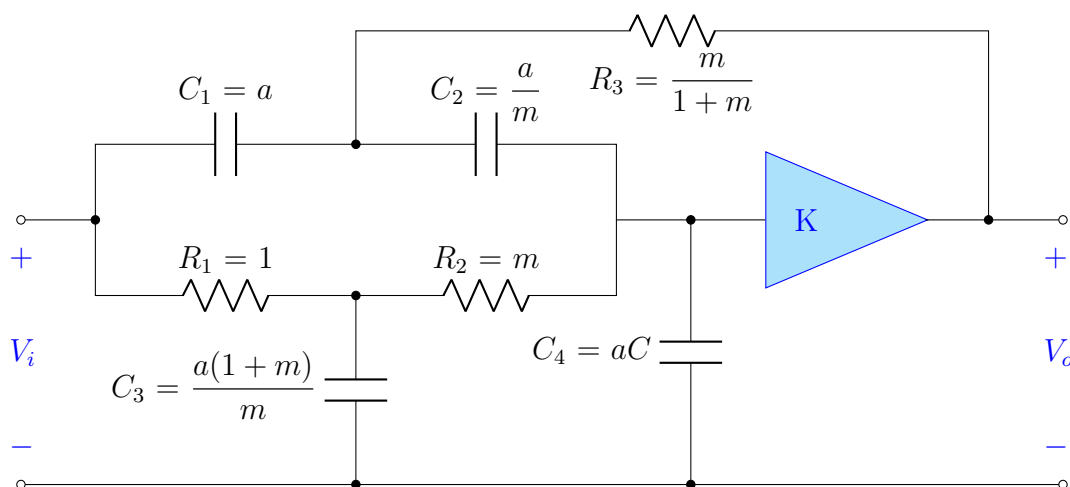


Figura 6.17: Configuración para realizar la primera etapa del filtro eléctrico supresor de banda elíptico

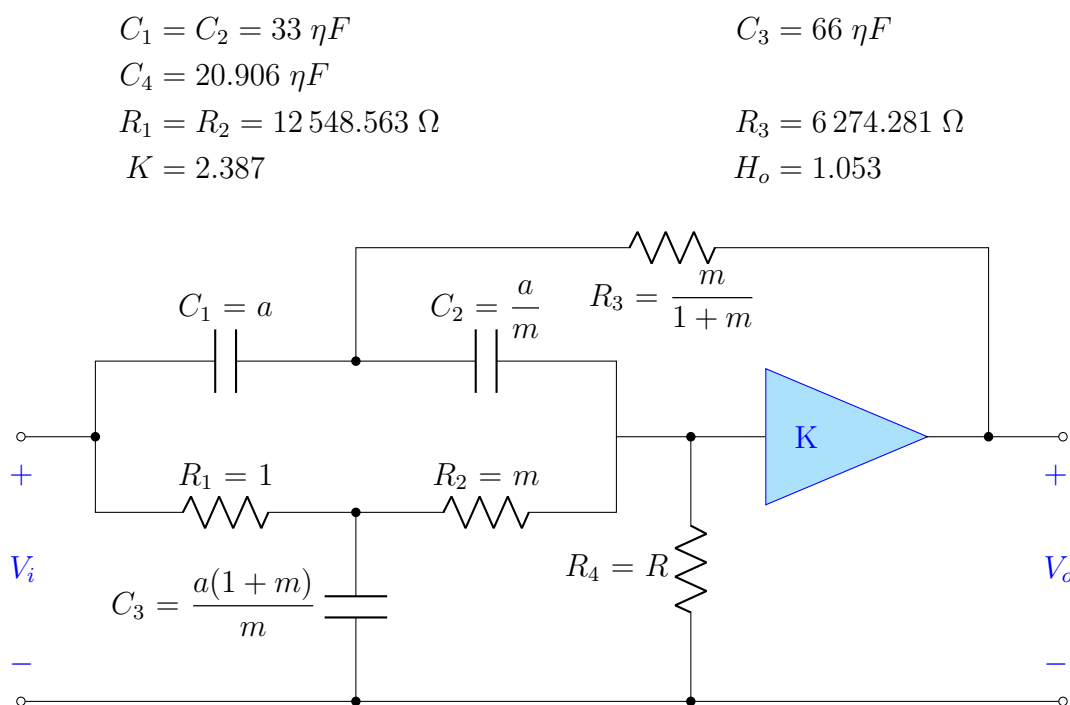


Figura 6.18: Configuración para realizar la segunda etapa del filtro eléctrico supresor de banda elíptico

Segunda etapa.

$$H(s) = \frac{s^2 + 3848556.075}{s^2 + 968.078s + 8724682.379}$$

En la figura 6.18 se presenta la configuración fuente de voltaje controlada por voltaje que realiza la segunda etapa. En el Capítulo 3, se estudió una composición semejante, como se observa en la figura 3.19. La configuración del filtro eléctrico que se propone, una vez más, constituye una alternativa.^[2]

La función de transferencia de este circuito eléctrico es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K \left(s^2 + \frac{1}{a^2} \right)}{s^2 + \frac{1+m}{a} \left[\frac{1}{R} + \frac{2-K}{m} \right] s + \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{1+m}{R} \right)}$$

Los parámetros de diseño están dados por

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{b_0}} \\ R &= \frac{(1+m)b_0}{a_0 - b_0} \\ K &= 2 + \frac{m}{1+m} \left[\frac{a_0}{b_0} - \frac{a_1}{\sqrt{b_0}} - 1 \right] \\ H_o &= K \end{aligned}$$

Mediante un proceso similar al del ejemplo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{k_1} & R_2 &= \frac{m}{k_1} \\ R_3 &= \frac{m}{k_1(1+m)} & R_4 &= \frac{(1+m)b_0}{k_1(a_0-b_0)} \\ C_1 &= ak_1 & C_2 &= \frac{a}{m}k_1 \\ C_3 &= \frac{a(1+m)}{m}k_1 \end{aligned}$$

entonces

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{b_0}C_1}$$

si se selecciona $m = 1$

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 \\ R_3 &= 0.5R_1 & R_4 &= \frac{2b_0}{a_0-b_0}R_1 \\ C_1 &= C_2 & C_3 &= 2C_1 \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones se puede encontrar un juego de valores para la segunda etapa del filtro eléctrico que se desea.

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = 10 \eta F & C_3 &= 20 \eta F \\ R_1 &= R_2 = 50\,974.279 \, \Omega & R_4 &= 80\,464.434 \, \Omega \\ R_3 &= 25\,487.139 \, \Omega \\ K &= H_o = 2.387 \end{aligned}$$

Los bloques amplificadores de ganancia K se realizan como en casos anteriores, con el circuito eléctrico que se muestra en la figura 6.12.

Primera etapa.

$$\begin{aligned} K_1 &= 2.387 \implies \\ R_a &= 10\,000 \, \Omega & R_b &= 13\,867.655 \, \Omega \end{aligned}$$

Segunda etapa.

$$\begin{aligned} K &= 2.387 \implies \\ R_a &= 10\,000 \, \Omega & R_b &= 13\,867.655 \, \Omega \end{aligned}$$

6.5. Filtro eléctrico pasa todo

Se quiere diseñar un filtro eléctrico pasa todo de segundo orden con una aproximación Bessel cuyo tiempo de retardo sea de $t_r = 1$ ms.

De las tablas de polos y coeficientes de factores de filtros eléctricos Bessel, Apéndice D, se obtiene la función de transferencia para un filtro eléctrico pasa bajas de segundo orden normalizado a un tiempo de retardo de 1 s.

$$h(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.16), se obtiene la función de transferencia del filtro eléctrico pasa todo a partir del filtro eléctrico pasa bajas normalizado.

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 + 3s + 3} \quad (6.20)$$

Sin embargo, esta función de transferencia no tiene un retardo normalizado de 1 s, pues de la ecuación (1.16) se observa que la fase de un filtro eléctrico pasa todo de segundo orden es el doble de la fase de un filtro eléctrico pasa bajas del mismo orden y con los mismos polos. Entonces, el retardo de la ecuación anterior es de 2 s. En consecuencia, la desnormalización de la ecuación (6.20) está dada por la siguiente expresión

$$g(s) = H\left(\frac{t_r}{2}s\right)$$

donde $t_r = 1$ ms.

Así, la función de transferencia del filtro eléctrico pasa todo con retardo de 1 ms es

$$g(s) = \frac{(0.5 \times 10^{-3}s)^2 - 3(0.5 \times 10^{-3}s) + 3}{(0.5 \times 10^{-3}s)^2 + 3(0.5 \times 10^{-3}s) + 3}$$

o bien

$$g(s) = \frac{s^2 - 6 \times 10^3 s + 12 \times 10^6}{s^2 + 6 \times 10^3 s + 12 \times 10^6}$$

La realización de este filtro eléctrico se lleva a cabo con el circuito eléctrico de figura 6.19. Este circuito eléctrico se analizó en el Capítulo 3 y se muestra en la figura 3.13.

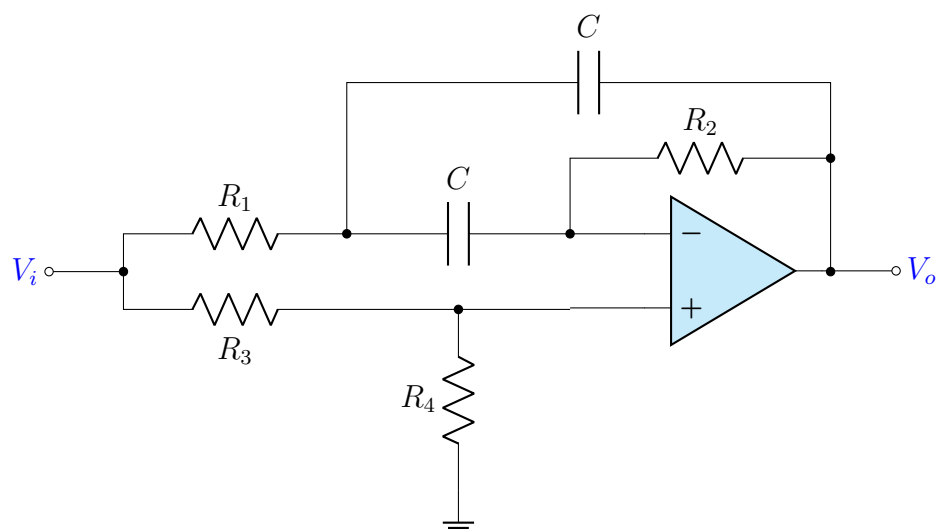


Figura 6.19: Filtro eléctrico pasa todo de segundo orden con configuración realimentación múltiple

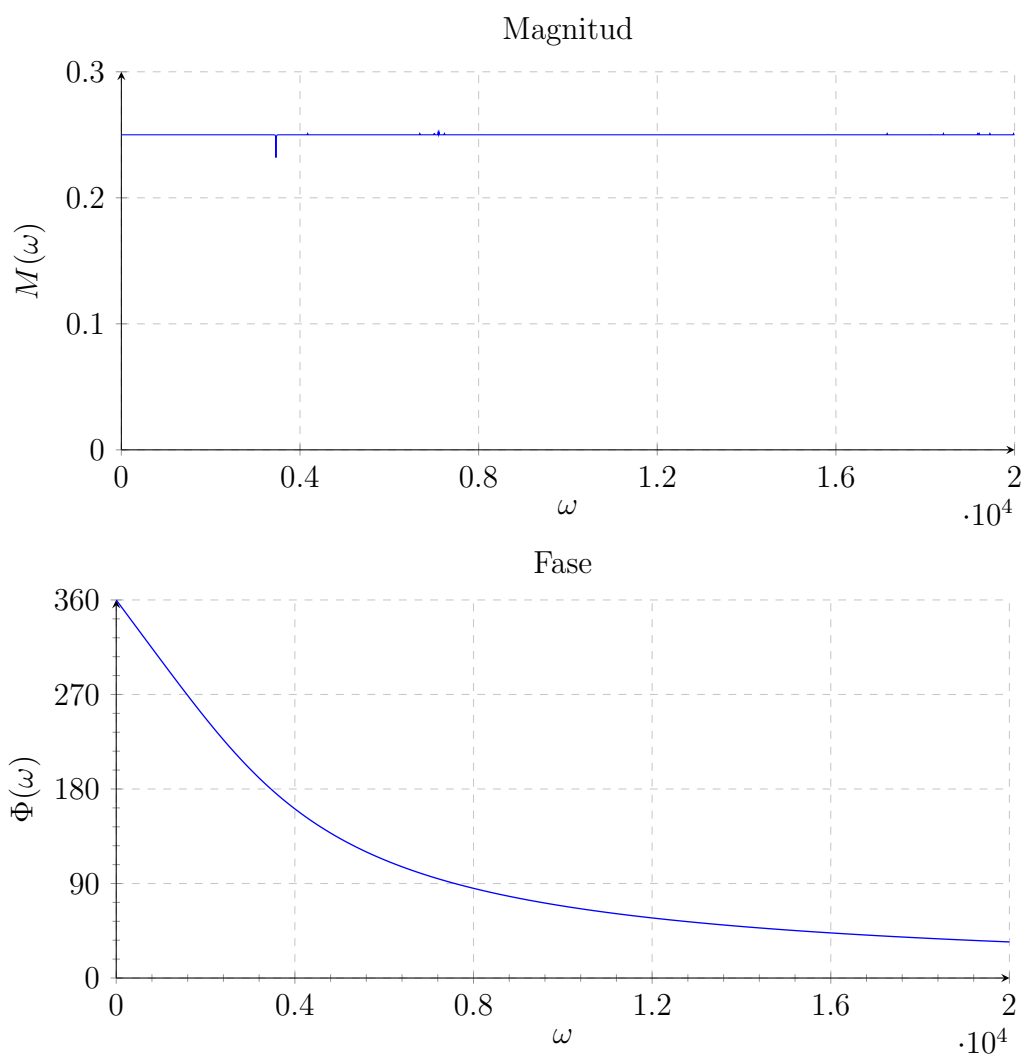


Figura 6.20: Respuesta en frecuencia del filtro eléctrico pasa todo

su función transferencia es

$$G(s) = \frac{R_2}{4R_1 + R_2} \frac{s^2 - \frac{2}{CR_2} + \frac{1}{C^2R_1R_2}}{s^2 + \frac{2}{CR_2} + \frac{1}{C^2R_1R_2}}$$

Un conjunto de valores posibles para los elementos que lo constituyen es el siguiente

$$\begin{aligned} C &= 10 \text{ } \mu F \\ R_1 &= 25\,000 \text{ } \Omega & R_2 &= 33\,333.333 \text{ } \Omega \\ R_3 &= 133\,333.333 \text{ } \Omega & R_4 &= 44\,444.444 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

la función de transferencia correspondiente que se obtiene, al sustituir valores, es

$$G(s) = 0.25 \frac{s^2 - 6 \times 10^3 s + 12 \times 10^6}{s^2 + 6 \times 10^3 s + 12 \times 10^6}$$

La traza de la respuesta en frecuencia de este filtro eléctrico *pasa todo* se observa en la figura 6.20.

Bibliografía

- [1] Johnson, D. E. (1976) *Introduction to Filter Theory*, Prentice-Hall.
- [2] Huelsman, L. P. & Allen, P. P. (1980) *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*, McGraw-Hill.
- [3] Bildstein, P. (1977) *Filtros Activos*, Marcombo.
- [4] Antoniou, A. (1979) *Digital Filters: Analysis and design*, McGraw-Hill.
- [5] Tobey, G. E., Graeme, J. G. & Huelsman, L. P. (1981) *Operational Amplifiers: Design and applications*, McGraw-Hill.
- [6] Rabiner, L. R. & Gold, B. (1975) *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall.
- [7] Oppenheim, A. V. & Schafer, R. W. (1975) *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall.
- [8] Hocevar, D. E. & Trick, T. N. (1982) *Automatic Tuning Algorithms for Active Filters*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 29(7), 448-458.
- [9] Borrie, J. A. (1986) *Modern Control Systems*, Prentice-Hall.
- [10] Desoer, C. A. and Kuh, E. S. (1969) *Basic circuit theory*, McGraw-Hill.
- [11] Parks, T. W. and Burrus, C. S. (1987) *Digital Filter Design*, Wiley.
- [12] Christian, F. and Eisenman, E. (1966) *Filter Design Tables and Graphs*, Wiley.

1

2

3

4

5

6

A

B

C

D

APÉNDICES



APÉNDICE A

Filtros Butterworth

POLOS Y COEFICIENTES DE FACTORES CUADRÁTICOS
DE LOS FILTROS BUTTERWORTH PASA BAJAS
NORMALIZADOS DE HASTA NOVENO ORDEN

Coeficientes del polinomio característico de Filtros pasa bajas Butterworth de la forma $s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + 1$, con una banda de paso comprendida entre 0 y 1 [s⁻¹].

Tabla A.1:

n	a_1	a_2	a_3	a_4
2	1.4142135			
3	2.0000000			
4	2.6131258	3.4142134		
5	3.2360678	5.2360678		
6	3.8637033	7.4641013	9.1416187	
7	4.4939594	10.0978346	14.5917931	
8	5.1258307	13.1370697	21.8461494	25.6883545
9	5.7587700	16.5817184	31.1634369	41.9863853

Localización de los polos¹ y los factores cuadráticos de la forma $s^2 + a_1 s + 1$ de los filtros pasa bajas Butterworth con una banda de paso comprendida entre 0 y 1 [s⁻¹].

Tabla A.2:

n	Polos	a_1
2	-0.7071068 ± 0.7071068i	1.4142135
3	-0.5000000 ± 0.8660254i	1.0000000
4	-0.3826834 ± 0.9238795i -0.9238795 ± 0.3826834i	0.7653669 1.8477590
5	-0.3090170 ± 0.9510565i -0.8090170 ± 0.5877852i	0.6180340 1.6180340
6	-0.2588190 ± 0.9659258i -0.7071068 ± 0.7071068i -0.9659258 ± 0.2588190i	0.5176381 1.4142135 1.9318516
7	-0.2225209 ± 0.9749279i -0.6234898 ± 0.7818315i -0.9009688 ± 0.4338837i	0.4450419 1.2469796 1.8019377
8	-0.1950903 ± 0.9807853i -0.5555702 ± 0.8314696i -0.8314696 ± 0.5555702i -0.9807853 ± 0.1950903i	0.3901806 1.1111405 1.6629392 1.9615705
9	-0.1736482 ± 0.9848077i -0.5000000 ± 0.8660254i -0.7660444 ± 0.6427876i -0.9396926 ± 0.3420202i	0.3472964 1.0000000 1.5320889 1.8793852

¹Todos los filtros de orden impar tienen además un polo en $s = -1$.

APÉNDICE B

Filtros Chebyshev

POLOS Y COEFICIENTES DE FACTORES CUADRÁTICOS
DE LOS FILTROS CHEBYSHEV PASA BAJAS NORMALIZADOS
DE HASTA OCTAVO ORDEN

Coefficientes del polinomio característico de Filtros pasa bajas Chebyshev de la forma $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0$, con una banda de paso comprendida entre 0 y 1 [s⁻¹].

Tabla B.1:

Rizo = 0.5 dB						
n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
2					1.4256245	1.5162026
3				1.2529130	1.5348954	0.7156938
4			1.1973857	1.7168663	1.0254552	0.3790506
5		1.1724910	1.9373674	1.3095747	0.7525181	0.1789234
6	1.1591761	2.1718447	1.5897635	1.1718613	0.4323669	0.0947627

Tabla B.2:

Rizo = 1 dB						
n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
2					1.0977343	1.1025103
3				0.9883412	1.2384092	0.4913067
4			0.9528113	1.4539248	0.7426194	0.2756276
5		0.9368201	1.6888160	0.9743961	0.5805342	0.1228267
6	0.9282510	1.9308249	1.2021403	0.9393455	0.3070806	0.0689069

Tabla B.3:

Rizo = 2 dB						
n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
2					0.8038165	0.8230604
3				0.7378216	1.0221903	0.3268901
4			0.7162150	1.2564819	0.5167981	0.2057651
5		0.7064606	1.4995433	0.6934770	0.4593491	0.0817225
6	0.7012257	1.7458588	0.8670149	0.7714618	0.2102706	0.05144128

Tabla B.4:

Rizo = 3 dB						
n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
2					0.6448997	0.7079478
3				0.5972404	0.9283481	0.2505943
4			0.5815798	1.1691176	0.4047680	0.1769870
5		0.5745000	1.4150251	0.5489371	0.4079663	0.0626486
6	0.5706979	1.6628481	0.6906098	0.6990978	0.1634299	0.0442467

Localización de los polos y los factores cuadráticos de la forma $s^2 + a_1s + a_0$ de los filtros pasa bajas Chebyshev con una banda de paso comprendida entre 0 y 1 [s⁻¹].

Tabla B.5:
Rizo = 0.5 dB

n	Polos	a_1	a_0
2	-0.7128123 ± 1.004043i	1.4256245	1.5162027
3	-0.3132282 ± 1.021927i -0.6264565	0.6264565	1.1424477
4	-0.1753531 ± 1.016253i -0.4233398 ± 0.420946i	0.3507061	1.0635186
5	-0.1119629 ± 1.011557i -0.2931227 ± 0.625177i -0.3623196	0.2239258	1.0357840
6	-0.0776501 ± 1.008461i -0.2121440 ± 0.738245i -0.2897940 ± 0.270216i	0.1553002	1.0230229
7	-0.0570032 ± 1.006409i -0.1597194 ± 0.807077i -0.2308012 ± 0.447894i -0.2561700	0.1140064	1.0161076
8	-0.0436201 ± 1.005002i -0.1242195 ± 0.852000i -0.1859076 ± 0.569288i -0.2192929 ± 0.199907i	0.3194388	0.6768836
		0.4616024	0.2538782
		0.0872402	1.0119318
		0.2484389	0.7413339
		0.3718152	0.3586504
		0.4385859	0.0880523

Tabla B.6:
Rizo = 1 dB

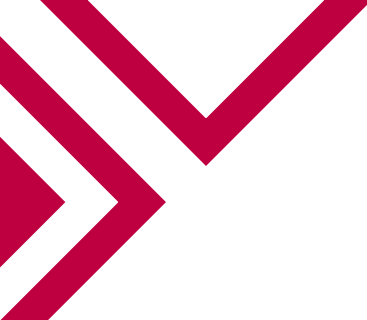
n	Polos	a_1	a_0
2	-0.5488672 ± 0.8951285i	1.0977343	1.1025103
3	-0.2470853 ± 0.9659987i -0.4941706	0.4941706	0.9942045
4	-0.1395360 ± 0.9833792i -0.3368697 ± 0.4073290i	0.2790720	0.9865049
5	-0.0894584 ± 0.9901071i -0.2342050 ± 0.6119198i -0.2894933	0.1789167	0.9883149
6	-0.0621810 ± 0.9934112i -0.1698817 ± 0.7272275i -0.2320627 ± 0.2661837i	0.1243620	0.9907322
7	-0.0457089 ± 0.9952839i -0.1280737 ± 0.7981558i -0.1850719 ± 0.4429430i -0.2054143	0.3397634	0.5577195
8	-0.0350082 ± 0.9964512i -0.0996950 ± 0.8447506i -0.1492041 ± 0.5644443i -0.1759983 ± 0.1982065i	0.0914180	0.9926795
		0.2561474	0.6534556
		0.3701438	0.2304501
		0.0700165	0.9941407
		0.1993900	0.7235426
		0.2984083	0.3408593
		0.3519966	0.0702612

Tabla B.7:
Rizo = 2 dB

n	Polos	a_1	a_0
2	$-0.4019082 \pm 0.8133451i$	0.8038165	0.8230604
3	$-0.1844554 \pm 0.9230771i$ -0.3689108	0.3689108	0.8860952
4	$-0.1048873 \pm 0.9579530i$ $-0.2532202 \pm 0.3967971i$	0.2097745	0.9286752
5	$-0.0674610 \pm 0.9734557i$ $-0.1766151 \pm 0.6016287i$ -0.2183083	0.1349220	0.9521671
6	$-0.0469732 \pm 0.9817052i$ $-0.1283332 \pm 0.7186581i$ $-0.1753064 \pm 0.2630471i$	0.0939464	0.9659515
7	$-0.0345664 \pm 0.9866205i$ $-0.0968528 \pm 0.7912082i$ $-0.1399563 \pm 0.4390875i$ -0.1553398	0.2566664	0.5329389
8	$-0.0264924 \pm 0.9897870i$ $-0.0754439 \pm 0.8391009i$ $-0.1129098 \pm 0.5606693i$ $-0.1331862 \pm 0.1968809i$	0.3506129	0.0999261
		0.0691327	0.9746149
		0.1937056	0.6353909
		0.2799127	0.2123856
		0.0529848	0.9803801
		0.1508878	0.7097820
		0.2258196	0.3270987
		0.2663724	0.0565006

Tabla B.8:
Rizo = 3 dB

n	Polos	a_1	a_0
2	$-0.3224498 \pm 0.7771575i$	0.6448997	0.7079478
3	$-0.1493101 \pm 0.9038145i$ -0.2986202	0.2986202	0.8391740
4	$-0.0851704 \pm 0.9464844i$ $-0.2056195 \pm 0.3920467i$	0.1703408	0.9030869
5	$-0.0548599 \pm 0.9659275i$ $-0.1436250 \pm 0.5969760i$ -0.1775303	0.4112390	0.1959800
6	$-0.0382295 \pm 0.9764061i$ $-0.1044450 \pm 0.7147789i$ $-0.1426745 \pm 0.2616272i$	0.1097197	0.9360255
7	$-0.0281456 \pm 0.9826957i$ $-0.0788623 \pm 0.7880607i$ $-0.1139594 \pm 0.4373407i$ -0.1264854	0.2872500	0.3770085
8	$-0.0215782 \pm 0.9867664i$ $-0.0614494 \pm 0.8365401i$ $-0.0919655 \pm 0.5589583i$ $-0.1084807 \pm 0.1962800i$	0.0764590	0.9548302
		0.2088900	0.5218176
		0.2853489	0.0888048
		0.0562913	0.9664830
		0.1577247	0.6272590
		0.2279188	0.2042537
		0.0431563	0.9741734
		0.1228988	0.7035754
		0.1839310	0.3208920
		0.2169614	0.0502939



APÉNDICE C

Filtros Elípticos

POLOS Y COEFICIENTES DE FACTORES CUADRÁTICOS DE LOS
FILTROS ELÍPTICOS PASA BAJAS NORMALIZADOS DE HASTA
NOVENO ORDEN

Localización de los ceros y los polos de Filtros Elípticos con función de transferencia de la forma:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= H_o \prod_{i=1} \frac{s^2 + c_i}{s^2 + a_i s + b_i} && \text{para } n \text{ par} \\
 H(s) &= H_o \frac{1}{s + d} \prod_{i=1} \frac{s^2 + c_i}{s^2 + a_i s + b_i} && \text{para } n \text{ impar}
 \end{aligned}$$

Con un rizo de 0.1 dB en la banda de paso.

Tabla C.1:

n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
2	1.05	0.2931901	0.2966923	1.2288219	1.4386640
	1.10	0.5128798	0.2627753	1.6229750	1.7140833
	1.20	1.0345651	0.0335155	2.2349739	2.2359899
	1.50	3.1860385	0.9685951	3.0876169	3.9270509
	2.00	7.4092054	1.7027462	3.3654733	7.4641016

Tabla C.2:

n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
3	1.05	1.7135615	0.0485502	1.1952864	1.2054102	5.7808194
	1.10	3.3508821	0.1481739	1.2977765	1.3703136	2.7991915
	1.20	6.6803885	0.3080734	1.4159927	1.6996171	1.8461291
	1.50	14.8461065	0.5800687	1.5589776	2.8060141	1.3052396
	2.00	24.0101700	0.7639745	1.6298671	5.1532091	1.1173823

Tabla C.3:

n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
4	1.05	6.3853745	1.2416717	1.7829289	3.3125181
			0.0731567	1.1004502	1.1536336
	1.10	10.7163095	1.4173462	1.4765239	4.3499304
			0.1331152	1.1439114	1.2909254
	1.20	17.0500202	1.4567523	1.1701769	6.2244021
			0.2169984	1.1940205	1.5724303
	1.50	29.0636158	1.3976650	0.8690595	12.0993095
			0.3472836	1.2581538	2.5355530
	2.00	41.4471397	1.3408955	0.7364110	24.2272011
			0.4325112	1.2940582	4.5932605

Tabla C.4:						
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
5	1.05	13.8393021	0.5344033	1.1071907	1.7737385	1.1367851
			0.0602031	1.0583322	1.1334220	
	1.10	20.0497532	0.6597900	1.0184282	2.1930925	0.9334447
			0.0990924	1.0829002	1.2593204	
	1.20	28.3030357	0.7584051	0.9102144	2.9683674	0.7830060
			0.1508720	1.1116917	1.5211268	
	1.50	43.4152184	0.8340779	0.7757361	5.4376446	0.6497559
			0.2282595	1.1497045	2.4255147	
	2.00	58.9007759	0.8581827	0.7044351	10.5677323	0.5909329
			0.2778249	1.1718433	4.3649509	

Tabla C.5:					
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
6	1.05	22.0880165	1.2949406	0.8146614	6.5287683
			0.3031067	0.9942619	1.4386640
			0.0467794	1.0377028	1.1233258
	1.10	29.6863842	1.1996856	0.6277401	8.8264550
			0.3889274	0.9434102	1.7140833
			0.0739313	1.0537293	1.2433619
	1.20	39.6301994	1.0952690	0.4845356	12.9526713
			0.4708626	0.8793439	2.2359899
			0.1091899	1.0727464	1.4950350
	1.50	57.7718163	0.9756624	0.3602917	25.8272420
			0.5547749	0.7939759	3.9270509
			0.1607697	1.0982711	2.3692888
	2.00	76.3547134	0.9144690	0.3078510	52.3568408
			0.5932989	0.7454669	7.4641016
			0.1933520	1.1133870	4.2481552

Tabla C.6:						
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
7	1.05	30.4699860	0.7248292	0.7574173	2.7143721	0.6979914
			0.1958700	0.9690233	1.3083409	
			0.0365505	1.0263187	1.1175213	
	1.10	39.3573265	0.7452196	0.6385064	3.5147693	0.5996372
			0.2582373	0.9333416	1.5239435	
			0.0565586	1.0376835	1.2341277	
	1.20	50.9628716	0.7423893	0.5311540	4.9666973	0.5197202
			0.3228958	0.8882741	1.9413408	
			0.0821607	1.0512838	1.4798722	
	1.50	72.1286011	0.7189465	0.4242095	9.5300781	0.4437098
			0.3966103	0.8267051	3.3139902	
			0.1191179	1.0697128	2.3365223	
	2.00	93.8086548	0.7003382	0.3746153	18.961095	0.4086020
			0.4342501	0.7906473	6.2017764	
			0.1422478	1.0807183	4.1800428	

Tabla C.7:					
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
8	1.05	38.8716545	1.0368681	0.4354194	11.0466061
			0.4472635	0.7840653	1.9061395
			0.1372561	0.9650387	1.2431181
			0.0290620	1.0194216	1.1138641
	1.10	49.0319862	0.9335259	0.3367667	15.1062239
			0.4928317	0.6942689	2.3804113
			0.1846803	0.9378678	1.4271032
			0.0444103	1.0279338	1.2282855
	1.20	62.2959518	0.8380129	0.2619302	22.3835994
			0.5234223	0.6054160	3.2528314
			0.2361304	0.9036633	1.7895085
			0.0638643	1.0381800	1.4702527
	1.50	86.4853973	0.7380825	0.1968535	45.059978
			0.5419828	0.5087389	6.0218242
			0.2981670	0.8564624	2.9956604
			0.0916985	1.0521474	2.3156973
	2.00	111.26260	0.6891220	0.1692048	91.761533
			0.5455486	0.4608598	11.7666735
			0.3315426	0.8284072	5.5450630
			0.1090069	1.0605290	4.1367342

Tabla C.8:						
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
9	1.05	47.2761726	0.7105139	0.5068861	3.9936736	0.5141792
			0.2991026	0.8199461	1.5942707	
			0.1017254	0.9669313	1.2054102	
			0.0235444	1.0149353	1.1114059	
	1.10	58.7070465	0.6834609	0.4136003	5.2992478	0.4482745
			0.3462968	0.7478412	1.9377187	
			0.1390257	0.9453311	1.3703136	
			0.0356876	1.0215639	1.2243475	
	1.20	73.6290588	0.6471959	0.3358264	7.6523928	0.3929719
			0.3856156	0.6724941	2.5791043	
			0.1806626	0.9182450	1.6996171	
			0.0509798	1.0295764	1.4637563	
	1.50	100.84218	0.5993825	0.2627700	15.014341	0.3390052
			0.4203638	0.5857034	4.6363361	
			0.2326041	0.8807032	2.8060141	
			0.0727239	1.0405419	2.3016164	
	2.00	128.71654	0.5726755	0.2300767	30.2010593	0.3136566
			0.4342625	0.5407383	8.9221914	
			0.2614205	0.8582116	5.1532091	
			0.0861830	1.0471417	4.1074418	

1

2

3

4

5

6

A

B

C

D

Con un rizo de 1 dB en la banda de paso.

Tabla C.9:

n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
2	1.05	2.4952767	0.2595076	1.2993737	1.4386640
	1.10	3.7901573	0.4457217	1.3270978	1.7140833
	1.20	6.0097723	0.6547145	1.3121617	2.2359899
	1.50	11.1508064	0.8914059	1.2377549	3.9270510
	2.00	17.0842628	1.0029862	1.1758052	7.4641016

Tabla C.10:

n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
3	1.05	8.0462980	0.1318371	1.0463237	1.2054102	0.9989386
	1.10	11.4394093	0.1966444	1.0468013	1.3703136	0.8329349
	1.20	16.1954422	0.2738273	1.0406398	1.6996171	0.7062479
	1.50	25.1741371	0.3755984	1.0239872	2.8060141	0.5914245
	2.00	34.4539337	0.4340977	1.0106285	5.1532091	0.5400007

Tabla C.11:

n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
4	1.05	15.8256330	0.8059000	0.6889795	3.3125181
			0.0741413	1.0111972	1.1536336
	1.10	20.8270340	0.7997916	0.5680881	4.3499304
			0.1090940	1.0099057	1.2909256
	1.20	27.4308472	0.7742307	0.4640281	6.2244021
			0.1513904	1.0063013	1.5724303
	1.50	39.5181999	0.7299936	0.3642895	12.0993095
			0.2088232	0.9988162	2.5355530
	2.00	51.9063492	0.7025468	0.3191974	24.2272011
			0.2429571	0.9932268	4.5932605

Tabla C.12:						
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
5	1.05	24.1323700	0.3626080	0.7700481	1.7737385	0.5122457
			0.0471441	1.0029281	1.1334220	
	1.10	30.4699936	0.4043556	0.6885903	2.1930925	0.4466498
			0.0692514	1.0016539	1.2593204	
	1.20	38.7566795	0.4351467	0.6070958	2.9683674	0.391589
			0.0961696	0.9992739	1.5211268	
	1.50	53.8745270	0.4577497	0.5170688	5.4376446	0.3378465
			0.1330814	0.9949576	2.4255147	
	2.00	69.3602600	0.4646762	0.4718655	10.5677323	0.3125989
			0.1552492	0.9919028	4.3649509	

Tabla C.13:					
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
6	1.05	32.5229988	0.6811870	0.3336950	6.5287683
			0.1985243	0.8387679	1.4386640
			0.0325697	1.0004600	1.1233258
	1.10	40.1416245	0.6301916	0.2667675	8.82645503
			0.2374651	0.7788754	1.7140833
			0.0478544	0.9994050	1.2433619
	1.20	50.0892601	0.5789347	0.2132678	12.9526713
			0.2731610	0.7146368	2.2359899
			0.0665224	0.9977177	1.4950350
	1.50	68.2313004	0.5216075	0.1645999	25.8272420
			0.3089605	0.6382546	3.9270510
			0.0922330	0.9948873	2.3692888
	2.00	86.8142014	0.4922715	0.1432581	52.3568408
			0.3253825	0.5975736	7.4641016
			0.1077420	0.9929574	4.2481552

Tabla C.14:						
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
7	1.05	40.9259262	0.4125932	0.5070742	2.7143721	0.3522542
			0.1239070	0.8830087	1.3083409	
			0.0238404	0.9996464	1.1175213	
	1.10	49.8163605	0.4135952	0.4287348	3.5147693	0.3101755
			0.1552922	0.8373390	1.5239435	
			0.0350478	0.9987953	1.2341277	
	1.20	61.4223289	0.4066322	0.3596063	4.9666973	0.2740688
			0.1867417	0.7864405	1.9413408	
			0.0487597	0.9975387	1.4798722	
	1.50	82.5880890	0.3915803	0.2910954	9.5300781	0.2381883
			0.2217567	0.7232912	3.3139902	
			0.0676882	0.9955303	2.3365223	
	2.00	104.26814	0.3813687	0.2591886	18.9610948	0.2211306
			0.2394498	0.6884471	6.2017764	
			0.0791319	0.9941962	4.1800429	

Tabla C.15:					
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i
8	1.05	49.3306313	0.5481582	0.1914974	11.0466061
			0.2607431	0.6403576	1.9061395
			0.0845238	0.9117554	1.2431181
			0.0182048	0.9993874	1.1138641
	1.10	59.4914284	0.4973285	0.1520454	15.1062239
			0.2793767	0.5637798	2.3804113
			0.1094716	0.87594048	1.4271032
			0.0267768	0.9986977	1.2282855
	1.20	72.7554398	0.4500982	0.1209745	22.3835994
			0.2914194	0.4910437	3.2528314
			0.1357821	0.8350644	1.7895085
			0.0372757	0.9977267	1.4702527
	1.50	96.9448853	0.4001055	0.0930075	45.0599777
			0.2981696	0.4138378	6.0218242
			0.1667996	0.7829681	2.9956604
			0.0517888	0.9962240	2.3156973
	2.00	121.72209	0.3753444	0.0808206	91.7615329
			0.2990855	0.3760145	11.7666735
			0.1832702	0.7535607	5.5450630
			0.0605744	0.9952435	4.1367342

Tabla C.16:						
n	ω_s	P_{dB}	a_i	b_i	c_i	d
9	1.05	57.7355919	0.3904947	0.3426468	3.9936736	0.2698780
			0.1750282	0.7309783	1.5942707	
			0.0613937	0.9311954	1.2054102	
			0.0143566	0.9993315	1.1114060	
	1.10	69.1665344	0.3734728	0.2822060	5.2992478	0.2385414
			0.1975839	0.6619103	1.9377188	
			0.0814468	0.9024380	1.3703136	
			0.0211256	0.9987655	1.2243475	
	1.20	84.0885468	0.3531559	0.2315223	7.6523927	0.2114193
			0.2161378	0.5927584	2.5791043	
			0.1033110	0.8690916	1.6996171	
			0.0294223	0.9979932	1.4637563	
	1.50	111.30167	0.3275629	0.1833992	15.0143415	0.1842751
			0.2324611	0.5154788	4.6363361	
			0.1300427	0.8258126	2.8060141	
			0.0409014	0.9968243	2.3016164	
	2.00	139.17603	0.3134914	0.1616355	30.2010593	0.1713093
			0.2390094	0.4761012	8.9221914	
			0.1446814	0.8010005	5.1532091	
			0.0478559	0.9960724	4.1074418	

1

2

3

4

5

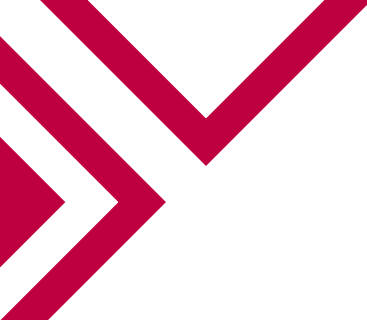
6

A

B

C

D



APÉNDICE D

Filtros Bessel

POLOS Y COEFICIENTES DE FACTORES CUADRÁTICOS DE LOS
FILTROS BESSEL PASA BAJAS NORMALIZADOS DE HASTA
OCTAVO ORDEN

Coeficientes del polinomio característico de Filtros Bessel pasa bajas de fase lineal (Thomsom) normalizados a un atraso de 1 segundo, de la forma $s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0$.¹

Tabla D.1:

n	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
2							3	3
3						6	15	15
4					10	45	105	105
5				15	105	420	945	945
6			21	210	1260	4725	10395	10395
7		28	378	3150	17325	62370	135135	135135
8	36	630	6930	51975	270270	945945	2027025	2027025

Localización de polos y factores cuadráticos de la forma $s^2 + a_1s + a_0$ de los filtros Bessel pasa bajas de fase lineal (Thomsom) normalizados a un atraso de 1 segundo.

Tabla D.2:

n	Polos	a_1	a_0
2	-1.5000000 ± 0.8660254i	3	3
3	-1.8389074 ± 1.7543809i -2.3221853	3.6778147	6.4594326 —
4	-2.1037893 ± 2.6574180i -2.8962107 ± 0.8672341i	4.2075787 5.7924213	11.4878006 9.1401310
5	-2.3246744 ± 3.5710230i -3.3519564 ± 1.7426614i -3.6467385	4.6493487 6.7039127	18.1563148 14.2724800
6	-2.5159323 ± 4.4926729i -3.7357085 ± 2.6262722i -4.2483592 ± 0.8675097i	5.0318646 7.4714170 8.4967184	26.5140266 20.8528233 18.8011284
7	-2.6856768 ± 5.4206944i -4.0701389 ± 3.5171740i -4.7582903 ± 1.7392861i -4.9717870	5.3713536 8.1402779 9.5165806	36.5967865 28.9365425 25.6664429
8	-2.8389840 ± 6.3539114i -4.3682890 ± 4.4144425i -5.2048407 ± 2.6161752i -5.5878859 ± 0.8676144i	5.6779680 8.7365780 10.4096813 11.1757717	48.4320183 38.5692520 33.9347382 31.9772224

¹Los coeficientes de fitros de mayor orden se pueden calcular por medio de la siguiente expresión

$$a_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}k!(n-k)!} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Filtros activos. Análisis y diseño

Se publicó la primera edición electrónica de un ejemplar (6 MB) en formato PDF en marzo de 2026, en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron CMU Serif y sus respectivas variantes.