FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES

Octavio A. Rascón Chávez

7a. reimpresión: marzo 1986

NOTA: El contenido expresado en esta obra es responsabilidad del autor.

INDICE

Prólogo	1
Introducción	2
Experimento	2
Probabilidad	2
Estadística	3
Símbolos de desigualdades	4
Teoría de conjuntos	4
Subconjuntos	5
Conjunto vacío	6
Espacio de eventos	6
Eventos simples	7
Complemento de un evento	8
Eventos mutuamente exclusivos	9
Operaciones con eventos	9
Unión	9
Intersección	10
Diagramas de Venn	11
Eventos colectivamente exhaustivos	11
TEORIA DE PROBABILIDADES	12
Axiomas de la teoría de probabilidades	12
Ley general de la adición	13
Definición clásica de probabilidades	14
Método frecuencial	17
Teorema	19

Reglas de conteo	23
Regla de multiplicación	23
Permutaciones	28
Permutaciones parciales	31
Combinaciones	33
Permutaciones de grupos	34
Probabilidad condicional	38
Independencia de un grupo de eventos	40
Ley general de multiplicación	44
Teorema de la probabilidad total	48
Teorema de Bayes	49
Variables aleatorias	60
Leyes de probabilidades	62
Distribución de probabilidades	62
Distribución de probabilidades acumuladas	63
Función de distribución complementaria	80
Esperanzas	81
Medidas de tendencia central	86
Media, mediana y modo	86
Medidas de dispersión	90
Variancia, desviación estándar y coeficiente de variación	90
Distribuciones particulares	94
Distribución binomial o de Bernoulli	
Distribución geométrica	110
Distribución hipergeométrica	111

Distribución de Poisson 115

Proceso estocástico de Poisson 121

Distribución uniforme 128

Distribución normal 130

Teorema central del límite 140

Bibliografía 142

PROLOGO

Esta publicación está dirigida a aquellos lectores que por primera vez estudian la materia o a los que desean hacer un repaso de la misma.

Estas notas se han preparado a base de adiciones y modificaciones que se han ido incorporando a los apuntes elaborados por el autor para los diversos cursos que sobre el tema ha impartido - en la ahora División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería, y para el curso introductorio de Probabilidad y Estadística de esta División. Por lo anterior, se ha decidido mantener en esta edición el carácter original e informal de apuntes de clase.

INTRODUCCION

EXPERIMENTO

PARA FINES DE ESTE CURSO, SE ENTENDERA POR EXPERIMENTO A TODO PROCESO DE OBSERVACION DE UN FENOMENO O VARIABLE DE INTERES.
ASI UN EXPERIMENTO PUEDE SER PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE, O PUEDE SER EFECTUADO POR LA NATURALEZA, EN CASO DE UN FENOMENO NATURAL.
POR EJEMPLO, EL LANZAR UNA MONEDA O UN DADO Y OBSERVAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES UN EXPERIMENTO PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE. EL OBSERVAR LA CANTIDAD DE AGUA QUE LLUEVE ANUALMENTE EN UNA CIUDAD, ES UN EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENOMENO NATURAL.

AL RESULTADO DE UN EXPERIMENTO SE LE DENOMINA *DATO U OBSERVACION*.
A UN GRUPO O COLECCION DE DATOS SE LE LLAMA *MUESTRA*.

PROBABILIDAD

LA PROBABILIDAD ES UNA MEDIDA DE LA CERTIDUMBRE QUE SE LE ASOCIA A LA OCURRENCIA U OBSERVACION DE UN RESULTADO DETERMINADO, AL REALIZARSE EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

LA TEORIA DE PROBABILIDADES ES UNA RAMA DE LAS MATEMATICAS APLICADAS QUE TRATA LO CONCERNIENTE A LA ASIGNACION Y MANEJO DE PROBABILIDADES.

ESTADISTICA

LA ESTADISTICA ES LA RAMA DE LAS MATEMATICAS QUE SE ENCARGA DE ENSEÑAR LAS REGLAS PARA COLECTAR, ORGANIZAR, PRESENTAR Y PROCESAR LOS DATOS OBTENIDOS AL REALIZAR VARIAS VECES EL EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENOMENO O VARIABLE DE INTERES, Y PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DE ESTE ULTIMO. PROPORCIONA, ADEMAS, LOS METODOS PARA EL DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS Y PARA TOMAR DECISIONES CUANDO APARECEN SITUACIONES DE INCERTIDUMBRE.

CLASIFICACION

ESTADISTICA

* *DESCRIPTIVA*.- TRATA LO CONCERNIENTE A LA OBTENCION, ORGANIZACION, PROCESAMIENTO Y PRESENTACION DE LOS DATOS.
* *INFERENCIAL*.- TRATA LO CONCERNIENTE A LOS METODOS PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DEL FENOMENO O VARIABLE DEL CUAL PROVIENEN LOS DATOS.

SIMBOLOS DE DESIGUALDADES

$<$ menor que

$\leq$ menor o igual que

$>$ mayor que

$\geq$ mayor o igual que

$\neq$ diferente de

TEORIA DE CONJUNTOS

UN *CONJUNTO* ES UNA COLECCION BIEN DEFINIDA DE OBJETOS.

NOTACION: LOS CONJUNTOS SE DENOTAN USUALMENTE CON LETRAS MAYUSCULAS, Y SUS ELEMENTOS SE ANOTAN DENTRO DE UN PAR DE LLAVES O CORCHETES.

EJEMPLOS

A) EL CONJUNTO DE NUMEROS ANOTADOS EN UN DADO ES

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS MENORES QUE 5 ES

$S = \{-\infty, \ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

o $S = \{x$: x ES ENTERO Y $x \leq 4\}$

C) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS POSITIVOS MENORES QUE 5 ES

$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$E = \{x$: ES ENTERO Y $0 \leq x \leq 4\}$

D) EL CONJUNTO DE LOS CONTINENTES ES

C ={ASIA, EUROPA, AMERICA, AFRICA, OCEANIA}

E) EL CONJUNTO DE MARCAS QUE TIENE UNA MONEDA ES

M = {CARA, CRUZ}

F) EL CONJUNTO DE NUMEROS MAYORES DE 5 PERO MENORES O IGUALES QUE 10

$S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$

CONJUNTOS

- *FINITOS*.- CUANDO TIENEN UN NUMERO FINITO DE ELEMENTOS
- *INFINITOS*.- CUANDO TIENEN UN NUMERO INFINITO DE ELEMENTOS

SUBCONJUNTOS

PARA EXPRESAR QUE UN ELEMENTO *PERTENECE* A UN CONJUNTO SE USA EL SIMBOLO ε. PARA EXPRESAR QUE *NO PERTENECE* SE USA EL SIMBOLO $\notin$.

EJEMPLO

SI $S_1 = \{X:5<X\leq 10\}$, ENTONCES

$3 \notin S_1$; $5 \notin S_1$; $8 \in S_1$; $10 \in S_1$

PARA EXPRESAR QUE UN CONJUNTO *ESTA CONTENIDO* EN OTRO SE USA EL SIMBOLO $\subset$; SI *NO ESTA CONTENIDO* SE USA EL SIMBOLO $\not\subset$.

PARA QUE UN CONJUNTO ESTE CONTENIDO EN OTRO SE REQUIERE QUE *TODOS* SUS ELEMENTOS LO ESTEN, ES DECIR, QUE TODOS SUS ELEMENTOS PERTENEZCAN A AMBOS CONJUNTOS.

EJEMPLO

SEAN $E=\{3,5\}$; $F=\{3,8\}$; $G=\{7,9\}$. $E\not\subset S_1$; $F\not\subset S_1$; $G\subset S_1$

SI UN CONJUNTO, B, ESTA CONTENIDO EN OTRO, S, SE DICE QUE B ES *SUBCONJUNTO* DE S.

EJEMPLO

$B = \{X:3\leq X\leq 8\}$ Y $S_1=\{X: 5<X\leq 10\}$

EN ESTE CASO:

$G\subset S_1 \Rightarrow G$ ES SUBCONJUNTO DE S_1

$B\not\subset S_1 \Rightarrow B$ NO ES SUBCONJUNTO DE S_1

SE DICE QUE DOS CONJUNTOS SON IGUALES CUANDO CONTIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS (NO IMPORTA EL ORDEN EN QUE ESTOS SE ESCRIBAN)

EJEMPLO

SEAN $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{7,5,1,3\}$ Y $C=\{7,5,1\}$

EN TAL CASO, $A = B \neq C$

CONJUNTO VACIO

DE LA MISMA MANERA QUE EXISTE EL CERO EN LOS NUMEROS, EN LA TEORIA DE CONJUNTOS EXISTE EL *CONJUNTO VACIO*, EL CUAL *NO* TIENE ELEMENTOS. USUALMENTE SE DENOTA $\emptyset$.

EJEMPLO

¿CUAL ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS, X, TALES QUE 2X=7 Y X ES ENTERO?

SOLUCION .- ES EL CONJUNTO VACIO, $\emptyset$.

A $\emptyset$ SE LE CONSIDERA COMO SUBCONJUNTO DE CUALQUIER CONJUNTO. ASI, POR EJEM, TODOS LOS SUBCONJUNTOS DEL CONJUNTO

$S =\{2,5,10\}$ SON: $\{2\};\{5\};\{10\};\{2,5\};\{2,10\};\{5,10\};\{2,5,10\}$ Y $\emptyset$.

ESPACIO DE EVENTOS

ASOCIADO A UN EXPERIMENTO SIEMPRE HAY UN CONJUNTO DE RESULTADOS POSIBLES; A DICHO CONJUNTO SE LE LLAMA *ESPACIO DE EVENTOS*.

EJEMPLOS

EL ESPACIO DE EVENTOS ASOCIADO AL EXPERIMENTO DE LANZAR UN DADO Y ANOTAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES

$S =\{1,2,3,4,5,6\}$

EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL EXPERIMENTO DE LANZAR DOS DADOS Y ANOTAR LOS NUMEROS QUE QUEDAN HACIA ARRIBA ES

$$S=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}$$

SI EN ESTE EXPERIMENTO LA OBSERVACION DE INTERES FUESE LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS OBSERVADOS, ENTONCES EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO SERIA

$S=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

A TODO SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO DE EVENTOS SE LE LLAMA *EVENTO*. A LOS EVENTOS QUE TIENEN UN SOLO ELEMENTO DEL ESPACIO SE LES LLAMA *EVENTOS SIMPLES*.

SI AL REALIZAR UN EXPERIMENTO SE OBSERVA UN ELEMENTO DEL EVENTO A, ENTONCES SE DICE QUE *OCURRIO* O *SE VERIFICO* EL EVENTO A. POR EJEMPLO, SI $A=\{2,4\}$ Y AL LANZAR UN DADO SE OBSERVA EL 2 O 4, SE DICE QUE OCURRIO EL EVENTO A; SI SE OBSERVA CUALQUIER OTRO NUMERO, ENTONCES SE DICE QUE *NO* OCURRIO A.

ESPACIOS DE EVENTOS	
	DISCRETOS.- SI SUS ELEMENTOS PUEDEN NUMERARSE O CONTARSE. TIENEN UN NUMERO FINITO O INFINITO NUMERABLE DE ELEMENTOS.
	CONTINUOS.- SI SUS ELEMENTOS *NO* PUEDEN ENUMERARSE. TIENEN UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE ELEMENTOS

EJEMPLO

LOS ESPACIOS DE EVENTOS S_1={CARA, CRUZ}; S_2={1,2,3,4,5,6,}; S_3={VERDE, ROJO} SON DISCRETOS. LOS ESPACIOS DE EVENTOS $S_4=\{X: -\infty<X\leq 0\}$; $S_5\{Z: Z\geq 3\}$; $S_6=\{Y: 3\leq Y\leq 80\}$ SON CONTINUOS.

EJEMPLO

¿QUE TIPOS DE ESPACIOS DE EVENTOS CORRESPONDEN A LOS SIGUIENTES EXPERIMENTOS?

A) CONTEO DEL NUMERO DE GRANOS DE UNA MAZORCA DE MAIZ

$S=\{0,1,2,3,\ldots,\infty\}$, ES DISCRETO E INFINITO

B) MEDICION DE LA LONGITUD DE UNA ESPIGA DE TRIGO

$S=\{X: 0<X<\infty\}$, X EN CM, ES CONTINUO E INFINITO

C) MEDICION DEL EFECTO DE UNA VACUNA, EN TERMINOS DE "EXITO" O "FRACASO"

S={EXITO, FRACASO} ES DISCRETO Y FINITO.

D) MEDICION DEL CONTENIDO DE UN ANTIBIOTICO EN UNA CAPSULA

$S=\{Y: 0\leq Y<\infty\}$, Y en mg, ES CONTINUO E INFINITO.

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

EL *COMPLEMENTO* DE UN EVENTO A ES OTRO EVENTO QUE CONTIENE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE QUE NO ESTAN EN A. USUALMENTE SE DENOTA CON UNA TILDE SOBRE EL SIMBOLO QUE CORRESPONDE AL EVENTO QUE COMPLEMENTA, $\bar{A}$.

EJEMPLOS

SI $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ Y $A=\{1,3,5\}$ ENTONCES $\bar{A}=\{2,4,6\}$.

SI $S=\{X: 0\leq X\leq 58\}$ Y $A=\{X: 3<X\leq 17\}$, ENTONCES $\bar{A}=\{X: 0\leq X\leq 3,\ 17<X\leq 58\}$

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

CUANDO DOS O MAS EVENTOS NO PUEDEN OCURRIR SIMULTANEAMENTE AL REALIZAR UNA SOLA VEZ UN EXPERIMENTO, SE DICE QUE ESTOS SON *MUTUAMENTE EXCLUSIVOS*; ES DECIR, DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS CUANDO NO TIENEN NI UN SOLO ELEMENTO EN COMUN.

EJEMPLO

A) CUALQUIER EVENTO Y SU COMPLEMENTO SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS.

B) ¿SON $E=\{Y: 0 \le Y \le 25\}$ Y $A=\{2,50,100\}$ MUTUAMENTE EXCLUSIVOS?

NO, PORQUE TIENEN EL ELEMENTO 2 EN COMUN.

OPERACIONES CON EVENTOS

UNION

LA *UNION* DE DOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE AMBOS. LA OPERACION DE UNION SE DENOTA CON EL SIMBOLO $\cup$.

EJEMPLOS

A) SI $A=\{2,4,6\}$ Y $B=\{1,6,12\}$, ENTONCES

$C=A \cup B=\{1,4,6,12,2\}$

B) ¿SON A Y B MUTUAMENTE EXCLUSIVOS? NO PORQUE TIENEN EL 6 EN COMUN.

C) SI $D=\{Y: 0 \le Y \le 13\}$ Y $E=\{Y: 20 \le Y \le 50\}$,

ENTONCES

$D \cup E=\{Y: 0 \le Y \le 13,\ 20 \le Y \le 50\}$

D) SI $F=\{Y: 8 \le Y \le 20\}$, ENTONCES

$D \cup F=\{Y;\ 0 \le Y \le 20\}$.

E) SI $G=\{Y: 3 \le Y \le 10\}$, ENTONCES

$D \cup G=\{Y: 0 \le Y \le 13\}= D$; OBSERVESE QUE EN ESTE CASO $G \subset D$. EN GENERAL, SI $A \subset B$, ENTONCES $A \cup B=B$.

EN GENERAL, LA UNION DE VARIOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE LOS EVENTOS QUE SE UNEN.

EJEMPLO

$A \cup B \cup F = K = \{1,2,4,6,\ y:\ 8 \leq y \leq 20\}$

INTERSECCION

LA *INTERSECCION* DE DOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE PERTENECEN SIMULTANEAMENTE A AMBOS. PARA DENOTAR LA OPERACION DE INTERSECCION SE USA EL SIMBOLO $\cap$.

EJEMPLOS

A) $A = \{2,3,6\}$ Y $B = \{2,6,10\}$ ENTONCES $A \cap B = C = \{2,6\}$

B) $D = \{Y:\ 4 \leq Y \leq 5\}$, ENTONCES $A \cap D = \emptyset$.

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO A Y D SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE *NO* TIENEN NINGUN ELEMENTO EN COMUN. SIEMPRE QUE DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SU INTERSECCION ES EL CONJUNTO VACIO.

EN GENERAL, LA *INTERSECCION* DE VARIOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE TODOS ELLOS TIENEN EN COMUN.

EJEMPLO

SI $A = \{2,3,6,8\}$; $B=\{2,3,10,100\}$; $C=\{Y:\ 0 \leq Y \leq 5\}$ Y $D=\{Y:\ 2 \leq Y \leq 4\}$, ENTONCES

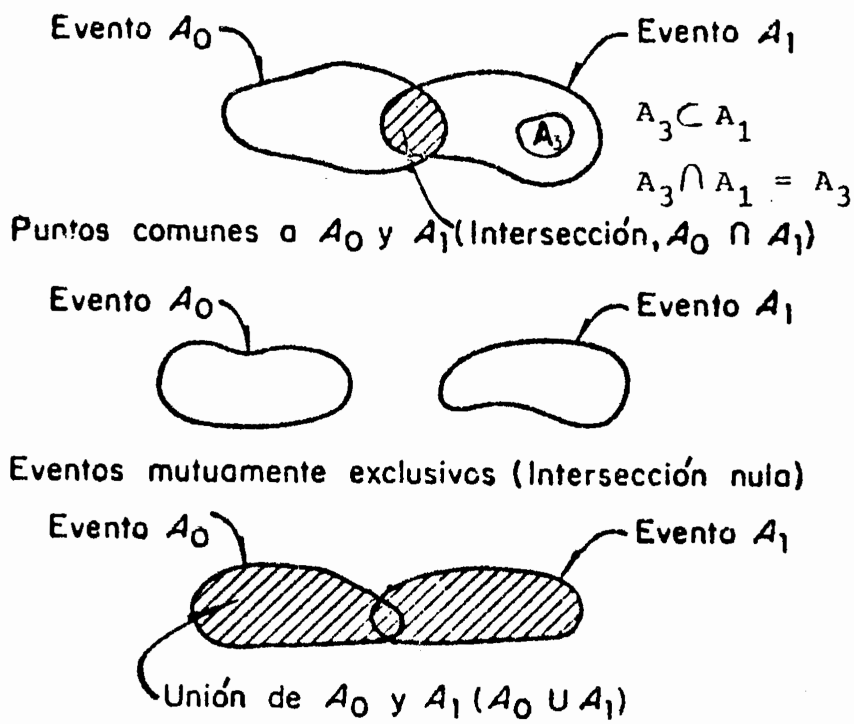
$A \cap B \cap C \cap D = E = \{2,3\}$

$A \cup B \cup C \cup D = F = \{Y:\ 0 \leq Y \leq 5,\ 6,8,10,100\}$

LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "Y" OTRO IMPLICA LA OCURRENCIA DE AMBOS A LA VEZ, ES DECIR, QUE SE VERIFIQUE LA *INTERSECCION*. LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "O" ALGUN OTRO, IMPLICA LA OCURRENCIA DE CUALQUIERA DE ELLOS, ES DECIR DE LA *UNION*.

DIAGRAMAS DE VENN

UNA MANERA DE ILUSTRAR GRAFICAMENTE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS ES MEDIANTE LOS DIAGRAMAS DE VENN. EN ESTOS, CADA CONJUNTO SE REPRESENTA POR UNA CURVA CERRADA QUE ENCIERRA LOS ELEMENTOS QUE LE CORRESPONDEN.

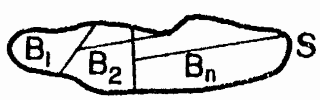


Diagramas de Venn (unión e intersección de eventos)

EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS

SE DICE QUE LOS EVENTOS B_1, B_2, ..., B_n SON COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS CUANDO LA UNION DE TODOS ELLOS ES IGUAL AL ESPACIO DE EVENTOS, ES DECIR, SI

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N = S$$



TEORIA DE PROBABILIDADES

AL LANZAR UNA MONEDA NO PODEMOS PREDECIR CON CERTEZA CUAL CARA QUEDARA HACIA ARRIBA. LO UNICO QUE SE PUEDE ASEGURAR, SI LA MONEDA NO ESTA CARGADA, ES QUE AMBAS CARAS TIENEN LA MISMA OPORTUNIDAD DE SALIR, ES DECIR, QUE LOS EVENTOS SIMPLES (CARA) Y (CRUZ) TIENEN LA MISMA PROBABILIDAD DE OCURRIR.

COMO YA SE DIJO, LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA UN EVENTO ES UNA MEDIDA DEL GRADO DE CONFIANZA QUE SE TIENE DE QUE ESTE OCURRA AL REALIZAR EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES

LAS PROBABILIDADES QUE SE ASIGNAN A LOS DIFERENTES EVENTOS RELACIONADOS CON UN FENOMENO ALEATORIO DEBEN CUMPLIR CON LOS SIGUIENTES TRES AXIOMAS:

AXIOMA 1: LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UN EVENTO A ES UN NUMERO, P(A), QUE SE LE ASIGNA A DICHO EVENTO, CUYO VALOR QUEDA EN EL INTERVALO

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

AXIOMA 2: SI S ES UN ESPACIO DE EVENTOS, ENTONCES

$$P(S) = 1$$

AXIOMA 3: LA PROBABILIDAD, P(C), DE LA UNION, C, DE DOS EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, A Y B, ES IGUAL A LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE ESTOS, ES DECIR,

$$P(A \cup B) = P(C) = P(A) + P(B)$$

LEY GENERAL DE LA ADICION

SI TODOS LOS EVENTOS E_i SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI, EL AXIOMA 3 SE GENERALIZA A:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_k)$$

ASIGNACION DE PROBABILIDADES

EXISTEN POR LO MENOS CUATRO MANERAS DE ASIGNARLE UNA PROBABILIDAD A UN EVENTO:

1. APLICANDO LA DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES.
2. EN TERMINOS DE LOS RESULTADOS DE REPETIR VARIAS VECES UN EXPERIMENTO (METODO FRECUENCIAL).
3. CON BASE EN UN MODELO MATEMATICO (PROBABILISTICO) DEL FENOMENO DE QUE SE TRATE.
4. MADIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA.

DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES

SI M(A) ES EL NUMERO DE MANERAS *IGUALMENTE PROBABLES* EN QUE PUEDE OCURRIR EL EVENTO A Y M ES EL NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE, ENTONCES LA PROBABILIDAD DE A ES

$$P(A) = \frac{M(A)}{M}$$

EJEMPLOS

A) SI EN UNA URNA SE TIENEN 5 BOLAS BLANCAS Y 15 NEGRAS, Y SE VA A SELECCIONAR UNA AL AZAR, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SEA BLANCA(A={BLANCA})?:

$M= 5+15=20;\ M(A)=5 \Rightarrow P(A)=\frac{5}{20}= \frac{1}{4}$

B) SI SE LANZAN DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE

1. SALGA UN 2 Y UN 5 (EVENTO B)?
2. LA SUMA SEA 7 (EVENTO A)

PARA EL INCISO 1 EL ESPACIO DE EVENTOS ES:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2.1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

SI EL DADO NO ESTA CARGADO, CADA PAREJA DE NUMEROS ES IGUALMENTE PROBABLE. EN TAL CASO, $M=36$ y $M(B)=2$ (APARECE (2,5) O (5,2)) $\Rightarrow P(B)=2/36=1/18$.

PARA EL INCISO 2 EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$S_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

PERO NO TODOS LOS ELEMENTOS (EVENTOS SIMPLES) SON IGUALMENTE PROBA-

BLES, YA QUE, POR EJEMPLO, EL 2 SOLO APARECERA SI SE OBSERVA LA PAREJA (1,1), EN CAMBIO EL 3 APARECERA SI OCURREN LAS PAREJAS - (1,2) O (2,1), ES DECIR, EL 3 TIENE EL DOBLE DE PROBABILIDAD QUE EL 2. POR ESTO, PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE LA SUMA - SEA 7 ES NECESARIO TRABAJAR CON EL ESPACIO S Y CONTAR LAS MANERAS POSIBLES DE QUE LA SUMA SEA 7, LO CUAL OCURRE SI SE OBSERVA CUALQUIERA DE LAS PAREJAS (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) o - (1,6), ES DECIR, HAY 6 MANERAS IGUALMENTE PROBABLES DE QUE OCURRA EL EVENTO A. POR LO TANTO

$$P(A) = \frac{M(A)}{M} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

PROCEDIENDO DE ESTA MANERA SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE LA SUMA SEA 2,3,4, ETC. LOS RESULTADOS SON:

$$\left.\begin{array}{llll} P(\{2\}) = \frac{1}{36}; & P(\{3\}) = \frac{2}{36}; & P(\{4\}) = \frac{3}{36}; & P(\{5\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{6\}) = \frac{5}{36}; & P(\{7\}) = \frac{6}{36}; & P(\{8\}) = \frac{5}{36}; & P(\{9\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{10\}) = \frac{3}{36}; & P(\{11\}) = \frac{2}{36} & \text{y } P(\{12\}) = \frac{1}{36} & \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{DISTRIBUCION} \\ \text{DE} \\ \text{PROBABILIDADES}\end{array}$$

OBSERVESE QUE $\sum_{i=2}^{12} P(\{i\}) = 1.$

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE UN DADO QUE NO ESTA CARGADO, MEDIANTE LA DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES SE LE PUEDE ASIGNAR A CADA NUMERO (A CADA EVENTO SIMPLE) UNA PROBABILIDAD DE 1/6. SI A = {2,4} Y B = {5,6}, ENTONCES, PUESTO QUE

A = {2} U {4} Y B = {5} U {6} , Y QUE LOS EVENTOS ELEMENTALES SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI, APLICANDO EL AXIOMA 3 SE OBTIENEN:

$$P(A) = P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

SI C=AUB, Y DADO QUE A Y B SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ADEMAS, OBSERVESE QUE SE CUMPLE CON LOS AXIOMAS 1 y 2, YA QUE

$$P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA SEA 7 U 11? ESTO ES EQUIVALENTE A PREGUNTAR POR LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA EL EVENTO C = {7}U{11}. PUESTO QUE {7} y {11} SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(\{7\}) + P(\{11\}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

METODO FRECUENCIAL

SI N(A) ES EL NUMERO DE VECES QUE SE OBSERVA EL EVENTO A (LA FRECUENCIA DE A) AL REALIZAR N VECES UN EXPERIMENTO, *LA FRECUENCIA RELATIVA* DE A, DEFINIDA COMO N(A)/N, SE CONSIDERA COMO ESTIMACION DE LA PROBABILIDAD DE A, ES DECIR:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

YA QUE, EN EL LIMITE, $P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$.

EJEMPLO

DE UNA URNA QUE CONTIENE BOLAS ROJAS, BLANCAS Y AZULES, SE SACO UNA BOLA, SE ANOTO SU COLOR Y SE REGRESO A LA URNA. SI ESTE EXPERIMENTO SE REPITE 20 VECES Y LOS RESULTADOS SON

b,b,a,r,r,r,a,b,r,a,b,b,a,r,b,r,r,a,r,a, DONDE

r = ROJA, b = BLANCA, a = AZUL.

¿QUE PROBABILIDADES LE ASIGNARIA A LOS EVENTOS $B = \{b\}$, $A = \{a\}$, y $R = \{r\}$, DE ACUERDO CON EL METODO FRECUENCIAL?

EN ESTA MUESTRA SE TIENE QUE N(B)=6, N(A)=6, N(R)=8, N=20

POR LO QUE $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$; $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$; $P(R) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$.

NOTESE QUE LOS EVENTOS B, A Y R SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE SON EVENTOS SIMPLES, Y QUE

$$P(B) + P(A) + P(R) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1 = P(S)$$

EN DONDE $S = \{r,b,a,\}$.

EJEMPLO

EN UN LABORATORIO SE PROBARON 100 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO NOMINALMENTE IDENTICAS, Y SE ANOTARON LAS CARGAS CON LAS CUALES FALLO CADA UNA. DE ESTA SUCESION DE EXPERIMENTOS SE ASIGNARON, EN TERMINOS DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS CORRESPONDIENTES, LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES, CON N(A) = 17, N(B) = 24, N(C) = 27, N(D) = 13, N(E) = 11, N(F) = 8, Y N = 100:

SI $A = \{X: 0<X\leq 20 \text{ ton}\}$; $P(A) = 0.17$ (17/100)

SI $B = \{X: 20<X\leq 40 \text{ ton}\}$; $P(B) = 0.24$ (24/100)

SI $C = \{X: 40<X\leq 60 \text{ ton}\}$: $P(C) = 0.27$ (27/100)

SI $D = \{X: 60<X\leq 80\}$; $P(D) = 0.13$ (13/100)

SI $E = \{X: 80<X\leq 100\}$; $P(E) = 0.11$ (11/100)

SI $F = \{X: 100<X\}$; $P(F) = \underline{0.08}$ (8/100)

$\Sigma P(.) = 1.00$

SI SE REALIZA UNA VEZ MAS EL EXPERIMENTO, CALCULEMOS LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

A) QUE LA RESISTENCIA SEA MENOR O IGUAL QUE 80 TON. PUESTO QUE $G = \{X: 0<X\leq 80 \text{ ton}\}$ SE TIENE QUE $G= A \cup B \cup C \cup D$, POR LO QUE

$$P(G) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 0.17 + 0.24 + 0.27 + 0.13 = $$
$$= 0.81$$

B) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 60 TONS. PUESTO QUE

$H = \{X: 60<X\leq \infty\}$ O $H=\{X: X>60\}$ SE TIENE QUE $H = D \cup E \cup F$,

POR LO QUE $P(H) = P(D) + P(E) + P(F) = 0.13 + 0.11 + 0.08 = 0.32$

C) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 40 TON, PERO CUANDO MUCHO 100 TON.

PUESTO QUE $I = \{X: \ 40 < X \leq 100\}$ SE TIENE QUE $I = C \cup D \cup E$

POR LO QUE $P(I) = P(C) + P(D) + P(E) = 0.27 + 0.13 + 0.11 = 0.51$

ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN MODELO MATEMATICO

MEDIANTE ESTE METODO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN A PARTIR DE UN MODELO MATEMATICO QUE INVOLUCRE TODOS LOS FACTORES POSIBLES QUE INTERVIENEN EN LA ALEATORIEDAD DEL FENOMENO.

ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA.

EN ESTE CASO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN DE MANERA SUBJETIVA, CON BASE EN LA EXPERIENCIA QUE SE TENGA SOBRE UN PROBLEMA SEMEJANTE, PROPIA O AJENA, DE CARACTER TEORICO O EXPERIMENTAL.

TEOREMAS

DOS TEOREMAS IMPORTANTES QUE SE DEDUCEN A PARTIR DE LOS AXIOMAS SON:

TEOREMA 1.

SI A ES UN EVENTO DEL ESPACIO S, ENTONCES $P(\bar{A}) = 1-P(A)$

DEMOSTRACION

PUESTO QUE A Y $\bar{A}$ SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Y ADEMAS $A \cup \bar{A} = S$, ENTONCES $P(S) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\Rightarrow \ P(\bar{A}) = 1-P(A)$

CASO PARTICULAR: PUESTO QUE $P(\bar{S}) = 1-P(S) = 0$ Y $\bar{S} = \emptyset$, SE TIENE QUE $P(\emptyset) = 0$.

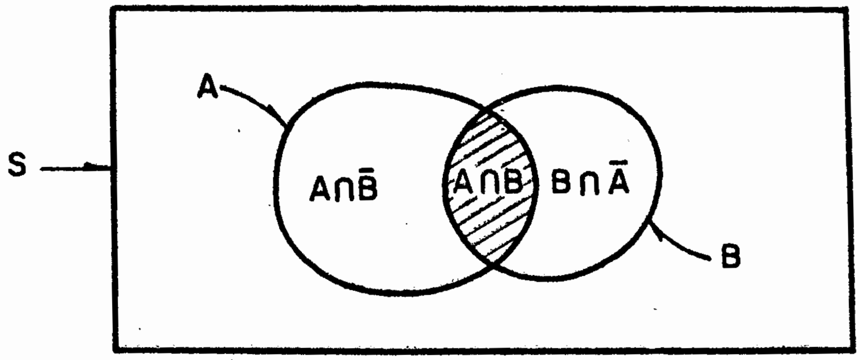
TEOREMA 2.

SI A Y B SON DOS EVENTOS CUALQUIERA DE S, ENTONCES

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

DEMOSTRACION

SEA EL DIAGRAMA DE VENN:



$A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$. PUESTO QUE $A\cap B$, $A\cap\bar{B}$ Y $B\cap\bar{A}$ SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE QUE $P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})+P(B\cap\bar{A})$.

SUMANDO Y RESTANDO $P(A\cap B)$ Y AGRUPANDO TERMINOS SE OBTIENE

$P(A\cup B) = [P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})]+[P(A\cap B)+P(B\cap\bar{A})]-P(A\cap B)$

PERO $A=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=P(A)$

Y $B=(A\cap B)\cup(B\cap\bar{A})\Rightarrow P(A\cap B)+P(B\cap\bar{A})=P(B)$, POR LO QUE FINALMENTE

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 28 TIRAS DE PAPEL Y EN CADA UNA SE ENCUENTRA ANOTADA UNA LETRA DISTINTA DEL ALFABETO. CALCULE LA PROBABILIDAD DE QUE AL EXTRAER AL AZAR UNA TIRA:

A) SE OBTENGA UNA VOCAL

B) SE OBTENGA a O z

C) OCURRAN C Y D, DONDE $C=\{x,y,z\}$ y $D=\{b,c,y,z\}$

D) OCURRA C O D

Respuestas

A) $A=\{a,e,i,o,u\} \Rightarrow P(A)=\frac{5}{28}$

B) $B=\{a,z\} \Rightarrow P(B)=\frac{2}{28}$

C) $F=C\cap D=\{y,z\} \Rightarrow P(F)=\frac{2}{28}$

D) $E=C\cup D=\{b,c,x,y,z\} \Rightarrow P(E)=\frac{5}{28}$

o $P(E)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$

$P(C\cap D)=P(F)=\frac{2}{28} \Rightarrow P(E)=\frac{3}{28}+\frac{4}{28}-\frac{2}{28}=\frac{5}{28}$

EJEMPLO

2. UN JUGUETE SE ARMA CON TRES PARTES. LA PROBABILIDAD DE QUE CADA PARTE SEA DEFECTUOSA ES 0.1; CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE EL JUGUETE ESTE DEFECTUOSO.

LOS EVENTOS A, B Y C SON INDEPENDIENTES, POR LO QUE EN

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

SE TIENE

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = 0.1 \times 0.1$$

$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C) = 0.1 \times 0.1$$

$$P(A \cap C) = P(A)\ P(C) = 0.1 \times 0.1$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C) = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = (0.1)^3$$

ENTONCES

$$P(A \cup B \cup C) = 3(0.1) - 3(0.1)\ (0.1) + (0.1)^3 = 0.271$$

REGLAS DE CONTEO

AL ASIGNAR PROBABILIDADES A LOS EVENTOS APLICANDO LA TEORIA CLASICA ES NECESARIO CALCULAR N(A) Y N PARA APLICAR LA FORMULA $P(A)=N(A)/N$.

SEAN, POR EJEMPLO, LOS EVENTOS $A=\{b,c\}$ Y $B=\{a,e,i,o,u\}$ CON LOS CUALES SE FORMAN PALABRAS DE DOS LETRAS, LA PRIMERA DE A Y LA SEGUNDA DE B. EL EVENTO QUE SE FORMA ASI ES

$$C=\{xy:\ x\varepsilon A;\ y\varepsilon B\}$$

SI ENUMERAMOS LOS ELEMENTOS:

$$\left.\begin{array}{l}\text{CON LA b: ba,be,bi,bo,bu}\\ \text{CON LA c: ca,ce,ci,co,cu}\end{array}\right\}\ \text{10 ELEMENTOS}$$

SIN EMBARGO, LA SOLUCION SE PUEDE OBTENER RAPIDAMENTE SIN NECESIDAD DE ENUMERAR TODAS LAS POSIBILIDADES, OBSERVANDO QUE LA PRIMERA LETRA SÔLÔ PUEDE SER DE DOS TIPOS b O c, MIENTRAS QUE LA SEGUNDA, DE CINCO TIPOS a,e,i,o,u, POR LO QUE EL TOTAL DE ELEMENTOS ES 2x5=10, ES DECIR, EL EVENTO C PUEDE OCURRIR DE 10 MANERAS DISTINTAS E IGUALMENTE PROBABLES.

REGLA DE LA MULTIPLICACION

EN GENERAL, SI DOS EVENTOS, A Y B, PUEDEN OCURRIR DE N(A) Y N(B) MANERAS DISTINTAS, RESPECTIVAMENTE, ENTONCES EL TOTAL DE MANERAS EN QUE AMBOS PUEDEN OCURRIR, EN EL ORDEN INDICADO, ES N(A) X N(B). ESTA REGLA SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS.

EJEMPLO

¿CUANTOS NUMEROS PARES DE TRES CIFRAS SE PUEDEN FORMAR UTILIZANDO LOS DIGITOS 5,6,7,8 y 9, SIN QUE SE USE EL MISMO DIGITO EN LAS DECENAS Y LAS CENTENAS?

SOLUCION.- SEAN LOS EVENTOS

$A = \{X: X$ ESTA EN LAS CENTENAS$\}$

$B = \{Y: Y$ ESTA EN LAS DECENAS$\}$

$C = \{Z: Z$ ESTA EN LAS UNIDADES Y ES PAR$\}$

$D = \{XYZ: X \epsilon A;\ Y \epsilon B;\ Z \epsilon C\}$

PUESTO QUE NO SE PERMITE REPETICION DE DIGITOS, $N(A)=5$ Y $N(B)=4$. ADEMAS, PUESTO QUE EL NUMERO DEBE SER PAR, $N(C)=2$. POR LO TANTO

$N(D) = 5x4x2=40$

SI EL ULTIMO DIGITO NO TUVIESE QUE SER PAR: $S=\{XYZ: X \epsilon A; Y \epsilon B; Z \epsilon F\}$

DONDE $F=\{Z: Z$ ESTA EN LAS UNIDADES$\}$

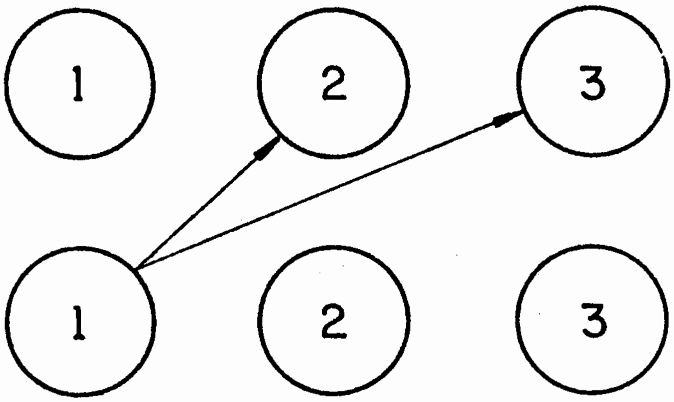
ENTONCES $N(F)=5$ Y $N(S)=5x4x5=100$.

CON ESTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE SI EL ESPACIO DE EVENTOS ES S Y SE ANOTAN TODOS LOS NUMEROS DEL MISMO EN UNA TIRA DE PAPEL, AL SACAR UNA AL AZAR DE UNA URNA, EL NUMERO SEA PAR:

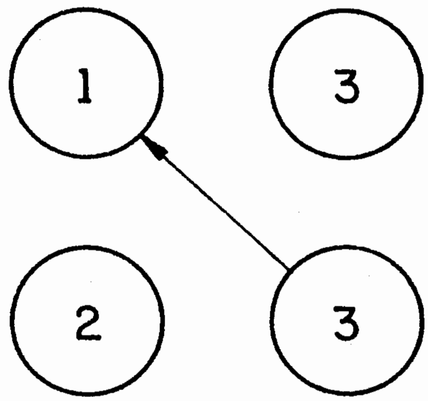
$$P(D) = \frac{N(D)}{N} = \frac{N(D)}{N(S)} = \frac{40}{100} = 0.4 = 40\%$$

EJEMPLO

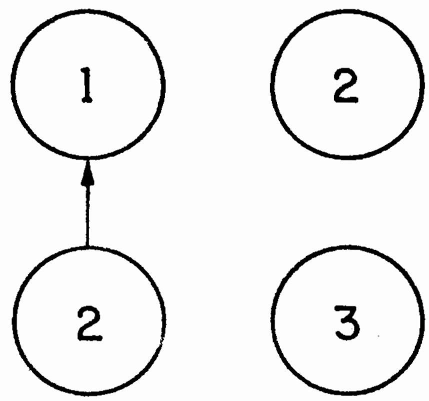
EN UNA CAJA SE TIENEN TRES PERFORACIONES NUMERADAS DEL UNO AL TRES. SI SE HECHAN EN ELLA TRES BOLAS TAMBIEN NUMERADAS DEL 1 AL 3 Y SE AGITA LA CAJA, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE NINGUNA BOLA CAIGA EN LA PERFORACION QUE TIENE SU NUMERO (EVENTO A)



2 POSIBILIDADES



1 POSIBILIDAD



1 POSIBILIDAD

$N(A) = 2x1x1=2$

$N = 3x2x1=6$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO

SE DISPONE DE TRES BANDERAS: UNA BLANCA, UNA NEGRA Y UNA VERDE.

1. SI CADA PAREJA DE BANDERAS DE DISTINTO COLOR CONSTITUYE UNA SEÑAL, ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER SI EL ORDEN DE COLOCACION DE LAS BANDERAS ES IMPORTANTE (EVENTO A)?

   $N(A) = 3x2=6$

2. SI TRES BANDERAS TAMBIEN CONSTITUYEN UNA SEÑAL CUANDO TODAS SON DE DIFERENTE COLOR ¿CUANTAS SEÑALES PODEMOS HACER CON LAS 3 BANDERAS A LA VEZ (EVENTO B)?

   $N(B) = 3x2x1=6$

3. ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER CON DOS O TRES BANDERAS EN LAS CONDICIONES ANTERIORES (EVENTOS C)? $C = A \cup B$

   $N(C) = N(A) + N(B) = 6+6=12$

4. SI CADA SEÑAL DEL EVENTO C SE DIBUJA EN UNA TIRA DE PAPEL Y LUEGO SE COLOCAN EN UNA URNA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE TOMA UNA AL AZAR,

   A) SALGA UNA SEÑAL ESPECIFICA (EVENTO F): (S=C)

   $P(F) = N(F)/N(C) = 1/12$

   B) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS POR LO MENOS (EVENTO G):

   $G=C \Rightarrow N(G)=12 \Rightarrow P(G) = \frac{12}{12} = 1$

   C) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO H):

   $N(H) = 1x2+2x1=4 \Rightarrow P(H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

   D) SALGA UNA SEÑAL CON TRES BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO I):

   $N(I) = 1x2x1 + 1x1x2 + 2x1x1 = 6$

   $P(I) = 6/12 = 1/2 = 50\%$

E) SALGA UNA SEÑAL CON DOS O TRES BANDERAS EN QUE SE USE UNA VERDE (EVENTO J)

$J = H \cup I \Rightarrow N(J) = N(H) + N(I) = 4+6=10$

$P(J) = 10/12 = 5/6$

O $P(J) = P(H) + P(I) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

PERMUTACIONES

EL ARREGLO DE N OBJETOS EN CIERTO ORDEN SE DENOMINA PERMUTACION.

POR EJEMPLO, TODAS LAS PERMUTACIONES QUE PUEDEN HACERSE CON LAS LETRAS A,B,C SON: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. EL TOTAL ES $3x2x1=6$ PERMUTACIONES $(N=3)$.

EN GENERAL, EL NUMERO DE PERMUTACIONES ES $N(N-1)(N-2)(N-3)x\ldots x1=N!$

EJEMPLO

¿CUANTAS PERMUTACIONES SE PUEDEN HACER CON 5 OBJETOS?

$$5! = 5x4x3x2x1=120$$

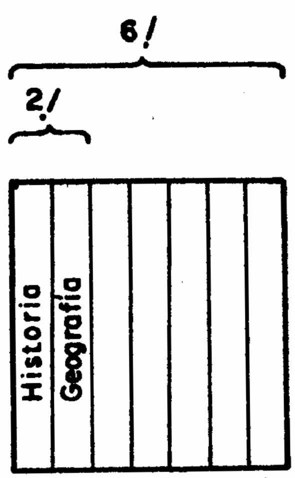
EJEMPLO

EN UN LIBRERO SE COLOCARAN AL AZAR 7 LIBROS. CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE EL DE HISTORIA Y EL DE GEOGRAFIA QUEDEN JUNTOS (EVENTO A).

$$P(A) = N(A)/N$$

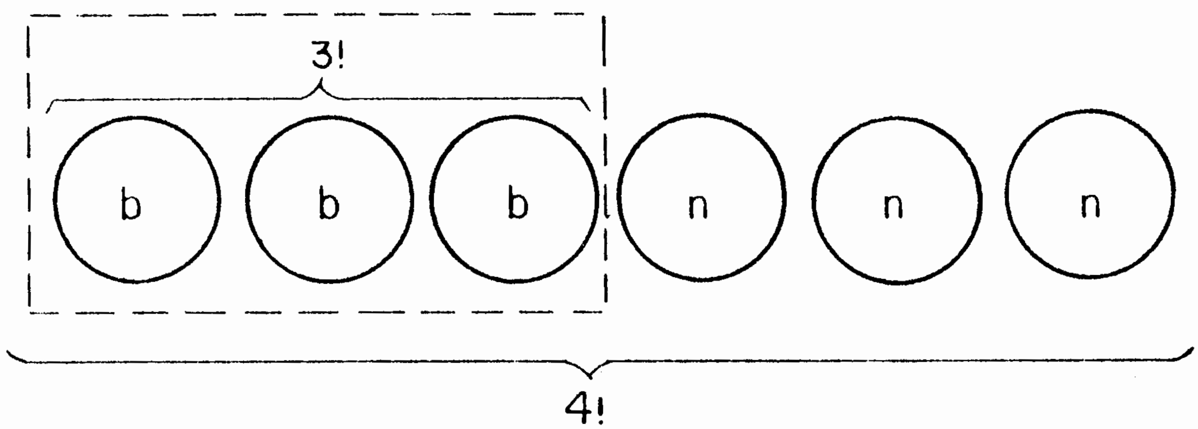
$$N=7! = 7x(6x5x4x3x2x1) = 7x6!$$

$$N(A) = 2!x6!; \quad P(A) = \frac{2!x6!}{7!} = \frac{2!x6!}{7\ x6!} = \frac{2}{7}$$



EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 6 ESFERAS, DE LAS CUALES 3 SON BLANCAS Y 3 SON NEGRAS. SI LAS SEIS SE EXTRAEN AL AZAR, UNA TRAS OTRA, SIN REMPLAZO LA PROBABILIDAD DE QUE LAS 3 BLANCAS SALGAN EN FORMA CONSECUTIVA (EVENTO F) ES:



$N(F) = 3! \times 4!$; $N = 6!$

$$P(F) = N(F)/N = \frac{3! \times 4!}{6!} = \frac{3! \times 4!}{6 \times 5 \times 4!}$$

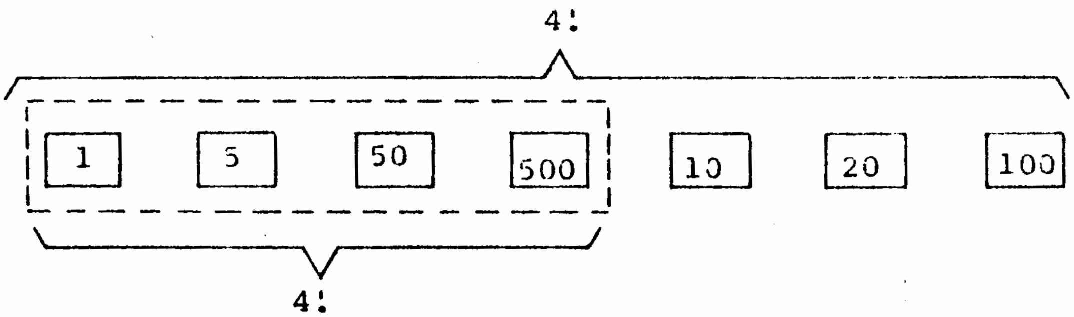
$$P(F) = \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{5}$$

LA PROBABILIDAD DE QUE LAS TRES BLANCAS SALGAN AL PRINCIPIO (EVENTO G) ES:

$N(G) = 3! \times 3!$, $P(G) = \dfrac{3! \times 3!}{6!} = \dfrac{3! \times 3!}{6 \times 5 \times 4 \times 3!} = \dfrac{1}{20}$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 7 SOBRES IDENTICOS Y CADA UNO CONTIENE UN BILLETE DE DIFERENTE DENOMINACION (1,5,10,20,50,100 y 500 PESOS)
¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE 1,5,50 y 500 PESOS SALGAN CONSECUTIVAMENTE EN CUALQUIER ORDEN, SI SE SACAN LOS SIETE AL AZAR, UNO TRAS OTRO (EVENTO A)?.



$N(A) = 4!x4!;\quad N=7!$

$$P(A) = \frac{4!x4!}{7!} = \frac{4!x4!}{7x6x5x4!} = \frac{4x3x2x1}{7x6x5} = \frac{4}{35}$$

LA PROBABILIDAD DE QUE SALGAN CONSECUTIVAMENTE Y EN EL ORDEN 1, 5, 50, 500 ES:

$$N(B) = 1 \times 4! = 4!,\quad P(B) = \frac{4!}{7!} = \frac{4!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{210}$$

PERMUTACIONES PARCIALES

EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$$_NP_r = \frac{N!}{(N-r)!}$$

ESTO ES EQUIVALENTE A DECIR QUE $_NP_r$ ES EL NUMERO DE DIFERENTES MANERAS EN QUE r OBJETOS PUEDEN SER SELECCIONADOS DE N OBJETOS ($r \leq N$) *SIN REEMPLAZAR* NINGUNO DE ELLOS AL LOTE ANTES DE SACAR EL SIGUIENTE.

OBSERVESE QUE SI r=N:

$$_NP_N = \frac{N!}{(N-N)!} = \frac{N!}{0!} = N!$$

EJEMPLO

SI SE TIENEN LAS LETRAS A,B,C,D, EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR TOMANDO DE 2 EN 2 ES

$$_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4x3x2!}{2!} = 12$$

EL CONJUNTO DE ESTAS POSIBILIDADES ES:

S ={AB,AC,AD,BA,BC,BD,CA,CB,CD,DA,DB,DC}

OBSERVESE QUE CUANDO EL ORDEN ES IMPORTANTE, AC NO ES LO MISMO QUE CA, ETC.

LA PROBABILIDAD DE QUE SALGAN CONSECUTIVAMENTE Y EN EL ORDEN 1,5, 50,500 ES:

$$N(B) = 1x4! \quad , \quad P(B) = \frac{4!}{7!} = \frac{4!}{7x6x5x4!} = \frac{1}{210}$$

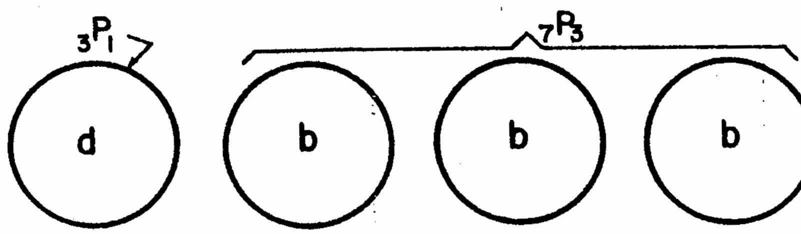
EJEMPLO

UNA CAJA CONTIENE 10 FOCOS, DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS. SI SELECCIONAMOS 4 AL AZAR SIN REEMPLAZO

A) ¿CUANTOS SON LOS RESULTADOS POSIBLES, ES DECIR, CUANTOS ELEMENTOS TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS?

$$N(S) = {}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10x9x8x7 = 5040$$

B) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN COMO PRIMER RESULTADO UN FOCO DEFECTUOSO Y TRES FOCOS BUENOS EN LOS OTROS TRES?

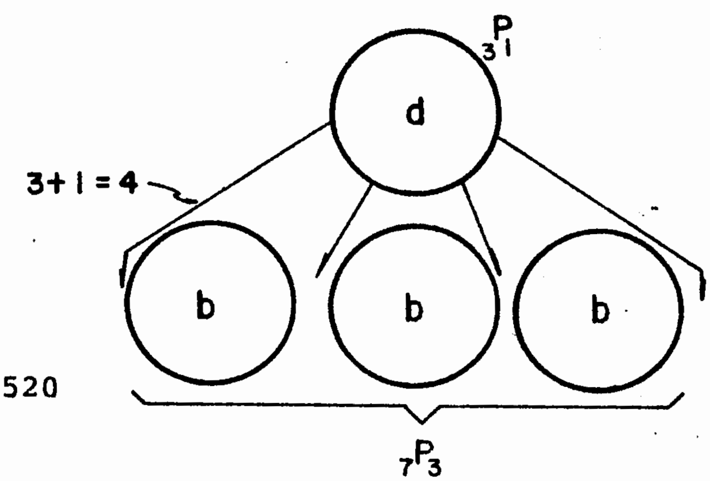


$$N(A) = {}_3P_1 \times {}_7P_3 = \frac{3!}{(3-1)!} \times \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{4!}$$

$$N(A) = 3 \times (7x6x5) = 630$$

$$\Rightarrow P(A) = 630/5040 = 63/504$$

C) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN UN FOCO DEFECTUOSO Y 3 BUENOS?



$$N(B) = 4 \times {}_3P_1 \times {}_7P_3 = 4x630 = 2520$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2520}{5040} = \frac{1}{2}$$

COMBINACIONES

CUANDO EL ORDEN NO ES IMPORTANTE, ES DECIR, SI EL AGRUPAMIENTO GA ES EL MISMO QUE EL AG, A LOS AGRUPAMIENTOS SE LES DENOMINA COMBINACIONES. POR EJEMPLO, SI SE FORMARA UNA COMISION DE 2 INDIVIDUOS DE UN GRUPO DE 8 TOMANDO SUS NOMBRES AL AZAR DE UNA URNA, Y DESEAMOS SABER CUANTOS COMITES DE 2 MIEMBROS PODRIAN FORMARSE COMO RESULTADO DEL PROCESO, ENTONCES LOS RESULTADOS (PEDRO, JOSE) Y (JOSE, PEDRO) CONSTITUIRIAN EL MISMO COMITE, ES DECIR, NO IMPORTARIA EN QUE ORDEN SE SACARAN SUS NOMBRES DE LA URNA.

ASI, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL NUMERO DE COMBINACIONES POSIBLES DE FORMAR DE N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$$_NC_r = \binom{N}{r} = \frac{N!}{(N-r)!r!}$$

ESTO EQUIVALE A DECIR QUE $_NC_r$ ES EL NUMERO DE MANERAS DISTINTAS EN QUE r OBJETOS PUEDEN SELECCIONARSE DE N $(r \leq N)$ SIN REEMPLAZO Y SIN IMPORTAR EL ORDEN EN QUE APAREZCAN.

CUANDO UNO SE ENFRENTA A UN PROBLEMA QUE IMPLICA LA REPETICION DE UN EXPERIMENTO, ES NECESARIO DETERMINAR SI HAY O NO REEMPLAZO DE LAS OBSERBACIONES. POR EJEMPLO, EL REPETIR EL LANZAMIENTO DE UN DADO Y OBSERVAR CADA VEZ EL NUMERO QUE QUEDA HACIA ARRIBA LLEVA IMPLICITO QUE HAY REEMPLAZO.

EJEMPLO

CALCULAR EL NUMERO DE COMBINACIONES QUE SE PUEDEN HACER CON LAS LETRAS A, B, C, D, SI SE TOMAN DE 2 EN 2.

$$_4C_2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

PERMUTACIONES DE GRUPOS

"EL NUMERO DE PERMUTACIONES POSIBLES DE N OBJETOS DE LOS CUALES SE TIENEN N_1 IGUALES ENTRE SI EN EL PRIMER GRUPO, N_2 IGUALES ENTRE SI EN EL SEGUNDO GRUPO, ETC, HASTA N_K IGUALES EN EL K-ESIMO GRUPO (LOS GRUPOS SON DISTINGUIBLES ENTRE SI), DE MANERA QUE $N_1 + N_2 + \ldots + N_K = N$, QUEDA DADO POR LA FORMULA:

$$N\, P_{N_1,\, N_2, \ldots, N_K} = \frac{N!}{N_1!\, N_2! \ldots N_K!}$$

EJEMPLO

EN EL INCISO C DEL EJEMPLO ANTERIOR SE TIENEN DOS GRUPOS EN LA MUESTRA, EL DE DEFECTUOSOS CON UN SOLO ELEMENTO, ES DECIR $N_1 = 1$, Y EL DE BUENOS, CON TRES ELEMENTOS, $N_2 = 3$, QUE SE PERMUTAN POR GRUPO DE $4P_{1,3} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$ MANERAS DISTINTAS.

EJEMPLO

ENUMERE LAS PERMUTACIONES QUE SE PUEDEN HACER CON DOS GRUPOS DE BOLAS, 2 NEGRAS Y 2 BLANCAS.

b b n n

b n b n

b n n b

n b b n

n n b b

n b n b

$n_1 = 2$

$n_2 = 2$

$$4P_{2,2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$$

SI A= {LAS DOS BLANCAS JUNTAS}, $N(A) = \frac{3!}{2!\ 1!} = 3$ (CON $N_1 = 2$ Y $N_2 = 1$), $P(A) = 3/6 = 1/2$.

EJEMPLO

UNA CAJA CONTIENE 25 TRANSISTORES DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE, SI SE EXTRAEN 5 AL AZAR SIN REMPLAZO,

A) SE OBTENGAN LOS 3 DEFECTUOSOS

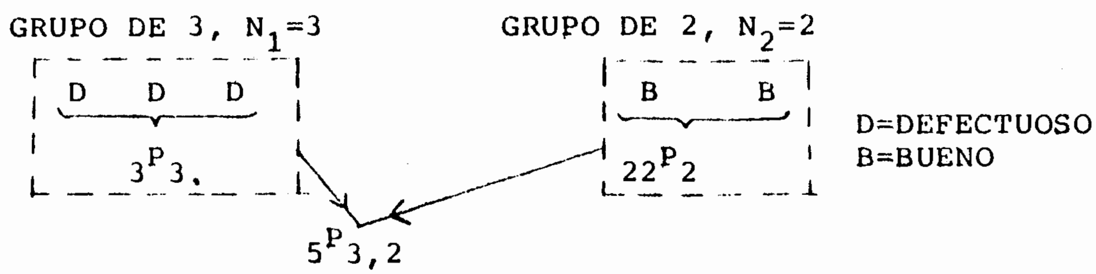
B) SE OBTENGAN SOLO 2 DEFECTUOSOS

C) SE OBTENGA SOLO 1 DEFECTUOSO

D) NO SE OBTENGA NINGUNO DEFECTUOSO?

SOLUCION:

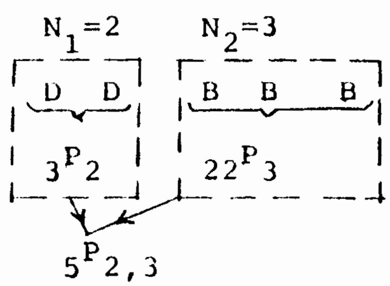
A) $N(S) = {}_{25}P_5 = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{25!}{20!}$



$$N(A) = {}_3P_3 \cdot {}_{22}P_2 \cdot {}_5P_{3,2} = 3! \times \frac{22!}{(22-2)!} \times \frac{5!}{3!\ 2!}$$

$$N(A) = 60\ \frac{22!}{20!}$$

$$P(A) = \frac{60\frac{22}{20!}}{\frac{25}{20!}} = 60\ \frac{22!}{25!} = \frac{60}{13800}$$



$$N(B) = {}_{3}P_{2} \times {}_{22}P_{3} \times {}_{5}P_{2,3} = \frac{3!}{(3-2)!} \; \frac{22!}{(22-3)!} \; \frac{5!}{2!\times 3!}$$

$$N(B) = 3! \; \frac{22!}{19!} \; \frac{5\times 4}{2} = 60 \; \frac{22!}{19!}$$

$$P(B) = \frac{60\frac{22!}{19!}}{\frac{25!}{20!}} = 60 \; \frac{22!}{25!} \; \frac{20\times 19!}{19!} = \frac{1200}{13800}$$

C) $\boxed{\begin{array}{c} N_1=1 \\ \underbrace{D}_{3} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c} N_2=4 \\ \underbrace{B \quad B \quad B \quad B}_{{}_{22}P_{4}} \end{array}}$

$${}_{5}P_{1,4}$$

$$N(C) = 3 \times {}_{22}P_{4} \times {}_{5}P_{1,4}$$

$$N(C) = 3 \; \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{5}{1!\times 4!}$$

$$N(C) = 3 \; \frac{22!}{18!} \; \frac{5\times 4!}{1\times 4!} = 15 \; \frac{22!}{18!}$$

$$P(C) = \frac{15\,\frac{22!}{18!}}{\frac{25!}{20!}} = \frac{15\times 20\times 19\times 18!}{\frac{25!}{22!}\times 18!} = \frac{5700}{13800}$$

D) $\underbrace{B \quad B \quad B \quad B \quad B}_{{}_{22}P_{5}}$

$$N(D) = {}_{22}P_{5} = \frac{22!}{(22-5)!} = \frac{22!}{17!}$$

$$P(D) = \frac{22!/17!}{\frac{25!}{20!}} = \frac{20\times 19\times 18\times 17!}{\frac{25!}{22!}\times 17!}$$

P(D) = 6840/13800.

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO HEMOS CALCULADO LAS PROBABILIDADES DE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL "NUMERO DE DEFECTUOSOS QUE SE PUEDEN OBSERVAR EN UNA SELECCION AL AZAR DE 5 ELEMENTOS", EN LA CUAL SOLO SE PUEDEN TENER 0,1,2, ó 3 DEFECTUOSOS, ES DECIR,

$$S_1 = \{0,1,2,3\}$$

VERIFIQUEMOS QUE, EN EFECTO, $P(S_1) = 1$:

$$P(S_1) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= \frac{6840}{13800} + \frac{5700}{13800} + \frac{1200}{13800} + \frac{60}{13800}$$

$$= \frac{13800}{13800} = 1$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL, $P(A|B)$, DEL EVENTO A, DADO QUE EL B HA OCURRIDO SE CALCULA CON LA FORMULA

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B)>0 \qquad (1)$$

EVENTOS INDEPENDIENTES

SI DOS EVENTOS, A Y B, SON INDEPENDIENTES, LA PROBABILIDAD DE A NO SE ALTERA SI OCURRE EL EVENTO B; ES DECIR, DOS EVENTOS SON INDEPENDIENTES SI

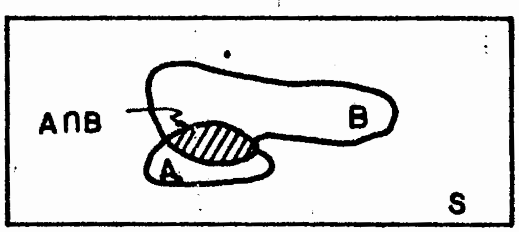
$$P(A|B) = P(A)$$

EN TAL CASO, DE LA ECUACION 1, $P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$, Y:

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B) \qquad (1')$$

PUESTO QUE $P(A\cap B) = N(A\cap B)/N(S)$ Y $P(B) = N(B)/N(S)$ LA ECUACION 1 SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$P(A|B) = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N(S)}}{\frac{N(B)}{N(S)}} = \frac{N(A\cap B)}{N(B)} \qquad (2)$$



EL TRABAJAR CON LA ECUACION 2 EQUIVALE A EMPLEAR UN ESPACIO DE EVENTOS REDUCIDO DE S A B.

EJEMPLO

EN UNA URNA HAY 10 TRANSISTORES BUENOS Y 10 DEFECTUOSOS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE SACAR UNO BUENO Y UNO DEFECTUOSO (EN CUALQUIER ORDEN) AL REALIZAR DOS EXTRACCIONES AL AZAR?, SI HAY REEMPLAZO DEL PRIMER TRANSISTOR OBSERVADO?

HAY VARIAS FORMAS DE RESOLVER ESTE PROBLEMA:

1. PUESTO QUE EL NUMERO DE DEFECTUOSOS ES IGUAL AL DE BUENOS, SE PUEDE FORMULAR EL SIGUIENTE ESPACIO DE EVENTOS, EN EL QUE TODOS LOS ELEMENTOS SON IGUALMENTE PROBABLES:

   $S = \{(d,d), (d,b), (b,b), (b,d)\}$

   EL EVENTO DE INTERES ES:

   $A = \{(d,b), (b,d)\}$

   POR LO QUE $N(S) = 4$, $N(A) = 2$

   Y $P(A) = 2/4 = 1/2$

2. HAY 10 x 10 MANERAS DISTINTAS DE QUE SALGA PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO, Y OTRAS TANTAS DE QUE OCURRA DE MANERA INVERSA. POR LO TANTO:

   $N(A) = (10 \times 10) \times 2 = 200$

   $N(S) = 20 \times 20 = 400$

   $P(A) = 200/400 = 1/2$

3. SEAN LOS EVENTOS

   B = {SALE PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO} = $\{(b, d)\}$

   F = {SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO Y LUEGO EL BUENO} = $\{(d, b)\}$

   D = {SALE PRIMERO EL BUENO}

   E = {SALE SEGUNDO EL DEFECTUOSO}

   O = {SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO}

   R = {SALE SEGUNDO EL BUENO}

POR LO TANTO, AL REALIZAR LAS DOS EXTRACCIONES CONSECUTIVAMENTE:

   $B = D \cap E$ Y $F = O \cap R$

SI A = {SALE UNO BUENO Y UNO MALO} = BUF

SE TIENE QUE P(A) = P(B)+P(F)

YA QUE B Y F SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, Y

$$P(B) = P(D\cap E) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(F) = P(O\cap R) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{1}{4}$$

YA QUE D Y E, Y O Y R SON INDEPENDIENTES. ESTO CONDUCE A

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

RESOLVAMOS AHORA ESTE PROBLEMA <u>SI NO HAY REEMPLAZO:</u>

$P(D\cap E) = P(E|D)P(D) = \frac{10}{19} \times \frac{10}{20} = \frac{10}{38}$, YA QUE

$P(D) = 10/20$, $P(E|D) = 10/19$ ANALOGAMENTE, $P(F) = \frac{10}{38}$,

POR LO QUE $P(A) = \frac{10}{38} + \frac{10}{38} = \frac{10}{19}$.

<u>*INDEPENDENCIA DE UN GRUPO DE EVENTOS*</u>

EN GENERAL, LOS EVENTOS $A_1, A_2, \ldots, A_M$

SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$P(A_{K_1}\cap A_{K_2}\cap \ldots \cap A_{K_R}) = P(A_{K_1}) \times P(A_{K_2}) \times \ldots \times P(A_{K_R})$$

PARA *CUALQUIER* GRUPO DE ENTEROS $K_1, K_2, \ldots, K_R$, CON $K_R \leq M$ (TODAS LAS PAREJAS, TERCIAS, ETC, DE EVENTOS POSIBLES DE FORMARSE DEBEN SER INDEPENDIENTES).

DICHO DE OTRA MANERA, LOS EVENTOS $A_1, A_2, \ldots, A_M$ SON INDEPENDIENTES SI LOS ELEMENTOS DE <u>TODOS</u> LOS SUBCONJUNTOS POSIBLES DE $R = \{A_1, A_2, \ldots, A_M\}$ SON INDEPENDIENTES.

EJEMPLO

SI $M = 3$, A_1, A_2 y A_3 SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$\left.\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{aligned}\right\}$$

TODAS LAS COMBINACIONES QUE PUEDAN FORMARSE CON DOS EVENTOS: $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_2, A_3\}$

SI $M=4$, PARA QUE A_1, A_2, A_3 y A_4 SEAN INDEPENDIENTES SE REQUIERE QUE SE CUMPLA QUE

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$\left.\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) &= P(A_1)P(A_2)P(A_4) \\ P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1)P(A_3)P(A_4) \end{aligned}\right\}$$

TODAS LAS COMBINACIONES DE TRES EVENTOS QUE PUEDAN FORMARSE $= {}_4C_3 = \frac{4!}{3!\ 1!} = 4$

$$\left.\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_4) &= P(A_1)P(A_4) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_4) &= P(A_2)P(A_4) \\ P(A_3 \cap A_4) &= P(A_3)P(A_4) \end{aligned}\right\}$$

TODAS LAS COMBINACIONES DE DOS EVENTOS QUE PUEDAN FORMARSE $= {}_4C_2 = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOCIOLOGICO SE INTERROGARON 1200 PERSONAS DE UNA COLONIA RESIDENCIAL, Y SE OBTUVIERON LOS SIGUIENTES DATOS:

GUSTO POR LA MUSICA CLASICA	TITULO UNIVER-SITARIO		SIN TITULO UNI-VERSITARIO		
	VARONES	DAMAS	VARONES	DAMAS	Σ
ALTO	100	50	200	250	600
BAJO	150	100	150	200	600
Σ	250	150	350	450	1200

SI A = {VARON} , B = {CON TITULO} , C = {GUSTO ALTO}

600 400 600

A. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE SELECCIONA UN CIUDADANO AL AZAR DE LA MISMA COLONIA, ESTE SEA VARON, TENGA TITULO Y GUSTO ALTO POR LA MUSICA?

POR EL METODO FRECUENCIAL: $P(D) = 100/1200 = 1/12$

B. VERIFIQUE SI A, B Y C SON INDEPENDIENTES POR TERCIA.

NUMERO DE VARONES = 250 + 350 = 600 = N(A)

NUMERO DE PERSONAS CON TITULO = 250 + 150 = 400 = N(B)

NUMERO DE PERSONAS CON ALTO GUSTO POR LA MUSICA = 600 = N(C)

POR LO TANTO

$P(A) = 600/1200 = 1/2$, $P(B) = 400/1200 = \frac{1}{3}$

Y $P(C) = 600/1200 = 1/2$.

POR OTRA PARTE $D = A \cap B \cap C$. SI A, B Y C SON INDEPENDIENTES, SE TIENE QUE $P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

QUE COINCIDE CON EL RESULTADO DEL METODO FRECUENCIAL. POR LO TANTO A, B Y C SON INDEPENDIENTES POR TERCIA.

EJEMPLO

LA URNA A CONTIENE 10 ARTICULOS, DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS; LA URNA B CONTIENE 6 ARTICULOS DE LOS CUALES 2 SON DEFECTUOSOS. SI SE SACA AL AZAR UNO DE CADA URNA:

a. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNO SEA DEFECTUOSO Y EL OTRO NO (EVENTO R)?

SEN LOS EVENTOS

C = {(DEFECTUOSO DE A, BUENO DE B)}

D = {(DEFECTUOSO DE B, BUENO DE A)}

EN TAL CASO

$$P(C) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{5}$$

$$P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{30}$$

$$P(R) = P(C) + P(D) = \frac{1}{5} + \frac{7}{30} = \frac{13}{30}$$

b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOS DOS SEAN DEFECTUOSOS (EVENTO T)?

T = {(DEFECTUOSO DE A, DEFECTUOSO DE B)}

$$P(T) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{10}$$

c. ¿ CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LOS DOS SEAN BUENOS (EVENTO V)?

V= {(BUENO DE A, BUENO DE B)}

$$P(V) = \frac{7}{10} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{15}$$

OBSERVESE QUE $P(R) + P(T) + P(V) = \frac{13}{30} + \frac{1}{10} + \frac{7}{15} = 1$

LEY GENERAL DE MULTIPLICACION

DE LA ECUACION (1):

$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

ESTA ECUACION SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS ASI:

$$P(E_1\cap E_2\cap \ldots \cap E_k) = P(E_1)P(E_2|E_1)\ P(E_3|E_1,E_2)\ldots(PE_k|E_1,E_2,\ldots,E_{k-1}) \qquad (3)$$

POR EJEMPLO, SI K=4

$$P(E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1,E_2)P(E_4|E_1,E_2,E_3).$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE AL EXTRAER SIN REEMPLAZO CUATRO CARTAS AL AZAR DE UN PAQUETE DE 52, LAS DOS PRIMERAS SEAN DIAMANTES Y LAS DOS ULTIMAS SEAN CORAZONES (EVENTO E)?

SEAN $A = \{$LA 1a. ES DIAMANTE$\}$, $B = \{$LA 2a. ES DIAMANTE$\}$,

$C = \{$LA 3a. ES CORAZON$\}$, $D = \{$LA 4a. ES CORAZON$\}$,

EN TAL CASO

$E = A\cap B\cap C\cap D = \{(d,d,c,c)\}$, $P(A) = 13/52$, $P(B|A)=12/51$, $P(C|A,B)=13/50$, $P(D|A,B,C) = 12/49$.

APLICANDO LA ECUACION 3 SE OBTIENE

$$P(E) = \frac{13}{52}\,\frac{12}{51}\,\frac{13}{50}\,\frac{12}{49} = \frac{78}{20825}$$

CON PERMUTACIONES:

$$\overbrace{\underset{\underset{13^{P}2}{\uparrow}}{dd}\qquad\qquad \underset{\underset{13^{P}2}{\uparrow}}{cc}}^{52^{P}\ 4} \qquad P(E) = \frac{(13!/11!)\ x\ (13/11!)}{52!/48!} = \frac{13}{52}\ x\ \frac{12}{51}\ x\ \frac{13}{50}\ x\ \frac{12}{49}$$

$$= 78/20825$$

SI LOS EVENTOS E_i QUE APARECEN EN LA ECUACION (3) SON INDEPENDIENTES, ENTONCES

$$P(E_1\cap E_2\cap \ldots \cap E_k) = P(E_1)xP(E_2)x\ldots xP(E_k)$$

QUE ES LA *LEY GENERAL DE MULTIPLICACION.*

EJEMPLO

SE TIENEN EN UNA URNA TRES BOLAS BLANCAS Y TRES NEGRAS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN LAS TRES BLANCAS AL PRINCIPIO SI SE EXTRAEN SIN REEMPLAZO SUCESIVAMENTE LAS SEIS?

1. $\overbrace{\underbrace{b\ b\ b}_{3!}\ \underbrace{n\ n\ n}_{3!}}^{6!}$

CON PERMUTACIONES:

$N(A) = 3! \times 3!$

$N(S) = 6!$

$P(A) = 3!\ 3!\ /\ 6! = 1/20$

2. $\boxed{b\ b\ b}\ n\ n\ n$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$N(A) = 1$

$N(S) = {}_6P_{3,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$

$P(A) = 1/20$

3. $$\begin{array}{cccc} b & b & b & \underbrace{n\ n\ n} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}$$

PROBABILIDADES: $\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{4}\ \ 1$

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

AHORA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LAS TRES BLANCAS APAREZCAN CONSECUTIVAMENTE?

1. $\overbrace{\underbrace{b\ b\ b}_{3!}\!\!\boxed{\ n\ n\ n}}^{6!}$ $\quad$ (recuadro $4!$)

CON PERMUTACIONES:

$$P(A) = \frac{3!4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

2. $\boxed{b\ b\ b}\ n\ n\ n$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$$N(A) = {}_4P_{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4, \quad N(S) = {}_6P_{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$P(A) = 4/20 = 1/5$$

3. $b\quad b\quad b\quad \underbrace{n\ n\ n}$

PROBABILIDADES: $\frac{1}{2}\quad \frac{2}{5}\quad \frac{1}{4}\quad 1$

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}x\frac{2}{5}x\frac{1}{4}\right){}_4P_{1,3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

EJEMPLO

DE UN LOTE DE 100 EJES DE RELOJERIA SE EXTRAEN CUATRO AL AZAR SIN REEMPLAZO, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN DOS DEFECTUOSOS (EVENTO A) SI EN EL LOTE HAY 20 POR CIENTO DE DEFECTUOSOS?

1.

$$\overbrace{d \qquad d \qquad b \qquad b}^{{}_4P_{2,2} \,=\, 6}$$

PROBABILIDADES: $\frac{20}{100} \qquad \frac{19}{99} \qquad \frac{80}{98} \qquad \frac{79}{97}$

CON PROBABILIDAD CONDICIONAL:

$$P(A) = \left(\frac{20}{100} \; \frac{19}{99} \; \frac{80}{98} \; \frac{79}{97}\right) 6 = 0.15$$

2.

$$\overbrace{\underbrace{d \quad d}_{{}_{20}P_2} \quad \underbrace{b \quad b}_{{}_{80}P_2}}^{{}_{100}P_4}$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$${}_4P_{2,2}$$

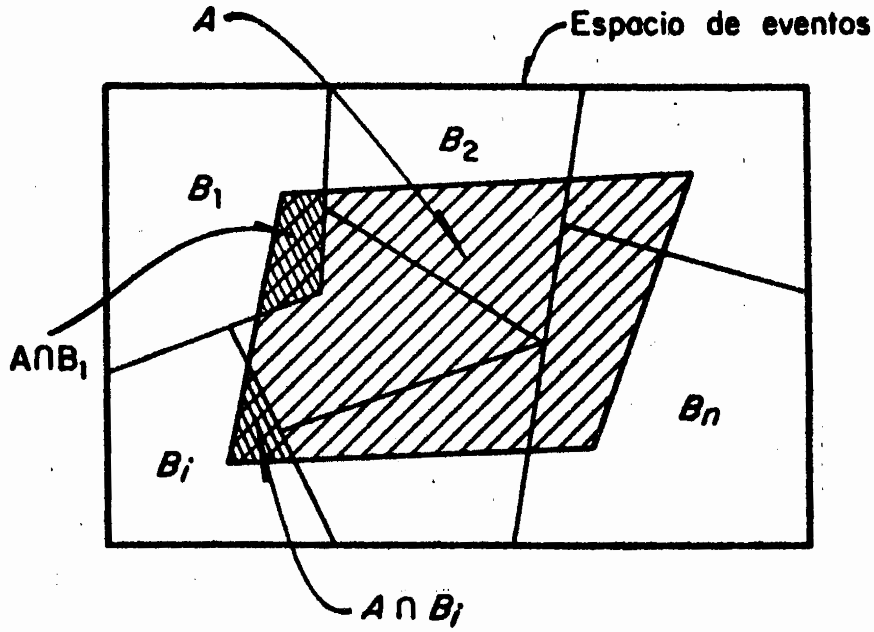
CON PERMUTACIONES PARCIALES Y EN GRUPOS:

$$P(A) = \frac{\frac{20!}{18!} \; \frac{80!}{78!} \; \frac{4!}{2!2!}}{\frac{100!}{96!}}$$

$$= \frac{(20x19)(80x79)(6)}{100x99x98x97} = 0.15$$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

SE DICE QUE UN GRUPO DE EVENTOS ES *COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO* SI LA UNION DE TODOS ELLOS ES EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE.



$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$

EN UN GRUPO DE EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS Y MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, B_1, B_2, ..., B_n, SI A ES UN EVENTO CUALQUIERA DEFINIDO EN EL MISMO ESPACIO, ENTONCES, APLICANDO EL AXIOMA 3, RESULTA

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A \cap B_i)$$

YA QUE LOS EVENTOS $A \cap B_i$ SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS $y\, (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots = A$

TOMANDO EN CUENTA QUE $P(A \cap B_i) = P(B_i) P(A|B_i)$, SE OBTIENE FINALMENTE LA ECUACION

$$P(A) = \sum_{i=1}^{i=n} P(B_i) P(A|B_i)$$

CON LA CUAL SE DEFINE EL LLAMADO *TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.*

TEOREMA DE BAYES

CONSIDERANDO QUE $P(B_j \cap A) = P(A \cap B_j)$, SE TIENE QUE

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

DE DONDE

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

ESTE RESULTADO SE CONOCE COMO *TEOREMA DE BAYES*. A LAS PROBABILIDADES $P(B_j)$ QUE SE ASIGNAN A LOS EVENTOS B_j ANTES DE OBSERVAR EL EVENTO A, SE LES DENOMINA *A PRIORI O PREVIAS*; A LAS PROBABILIDADES $P(B_j|A)$ QUE SE OBTIENEN DESPUES DE OBSERVAR EL EVENTO A, SE LES LLAMA *A POSTERIORI O POSTERIORES.*

EJEMPLO

EN UNA FABRICA SE RECIBEN REGULADORES DE VOLTAJE DE DOS PROVEEDORES, B_1 Y B_2, EN PROPORCION DE 3 A 1; ES DECIR, LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR PROVENGA DEL PROVEEDOR B_1 ES $P(B_1)=3/4$, Y DEL B_2 ES $P(B_2)=1/4$.

SUPONGAMOS ADEMAS QUE EL CONTROL DE CALIDAD DEL PROVEEDOR B_1 ES MEJOR QUE EL DE B_2, DE MANERA QUE EL 95% DE LOS REGULADORES DE B_1 TRABAJAN BIEN, Y SOLO EL 80% DE LOS DE B_2 FUNCIONAN CORRECTAMENTE. CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR FUNCIONE BIEN (EVENTO A):

$$P(A|B_1) = 0.95; \; P(A|B_2) = 0.80$$

DEL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)$$

$$= 0.95 \times \frac{3}{4} + 0.80 \times \frac{1}{4} = 0.9125$$

EJEMPLO

SUPONGAMOS AHORA QUE LA PREGUNTA DEL PROBLEMA SE CAMBIA A: ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR PROVENGA DEL PROVEEDOR B_1, SI SE HIZO UNA PRUEBA DEL REGULADOR Y SE OBSERVO QUE FUNCIONA CORRECTAMENTE?

APLICANDO EL TEOREMA DE BAYES:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\ P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)} \ ; \ P(B_1) = \frac{3}{4}\ ,\ P(B_2) = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times 0.95}{\frac{3}{4} \times 0.95 + \frac{1}{4} \times 0.80} = \frac{2.85}{3.65} = 0.78$$

ADEMAS

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)\ P(A|B_2)}{\frac{3.65}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \times 0.80}{\frac{3.65}{4}} = 0.22$$

OBSERVESE QUE

$$P(B_1|A) + P(B_2|A) = 0.78 + 0.22 = 1.00$$

EJEMPLO

SUPONGASE QUE UNA PRUEBA PARA DETECTAR DIABETES TIENE UNA EFICIENCIA DEL 95%, ES DECIR, SOLO EN EL 95% DE LOS CASOS SE DETECTA CON ELLA LA DIABETES EN UNA PERSONA QUE LA PADECE. SUPONGASE TAMBIEN QUE EL 2% DE LAS PRUEBAS QUE RESULTAN POSITIVAS SON DE GENTE SANA, Y QUE EL 3 % DE LA POBLACION DE UNA REGION DE MEXICO PADECE ESTA ENFERMEDAD.

a) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNA PERSONA SELECCIONADA AL - AZAR PUEDA SER DECLARADA DIABETICA POR LA PRUEBA?

b) SI LA PRUEBA DICE QUE SI ES DIABETICA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE REALMENTE LO SEA?

SOLUCION

$B_1 = \{\text{TIENE DIABETES}\}$; $B_2 = \{\text{NO TIENE DIABETES}\}$; $S = \{B_1, B_2\}$

$E = \{\text{LA PRUEBA DETECTA DIABETES}\}$

$P(B_1) = 0.03$, $P(B_2) = 0.97$

$P(E|B_1) = 0.95$, $P(E|B_2) = 0.02$

a) $$P(E) = P(E|B_1)P(B_1) + P(E|B_2)P(B_2)$$
$$= 0.95 \times 0.03 + 0.02 \times 0.97 = 0.0479$$

b) $$P(B_1|E) = \frac{P(B_1)P(E|B_1)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)}$$

$$= \frac{0.03 \times 0.95}{0.03 \times 0.95 + 0.97 \times 0.02} = 0.59$$

EJEMPLO

TRES MAQUINAS A, B Y C PRODUCEN EL 50, 20 Y 30 %, RESPECTIVAMENTE, DEL TOTAL DE ARTICULOS QUE PRODUCE UNA FABRICA. LOS PORCENTAJES DE DEFECTUOSOS QUE CADA MAQUINA ELABORA SON 1, 3 Y 5, RESPECTIVAMENTE. SI SE SELECCIONO UN ARTICULOS AL AZAR Y RESULTO DEFECTUOSO, CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE HAYA SIDO PRODUCIDO POR CADA UNA DE LAS MAQUINAS.

Solución

Sea D= {ARTICULO DEFECTUOSO}; ENTONCES

$$P(A|D)= \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)}$$

CON $P(A)= 0.5$, $P(B)= 0.2$, $P(C)= 0.3$, $P(D|A)= 0.01$,

$P(D|B)= 0.03$ Y $P(D|C)= 0.05$

SE OBTIENE

$$P(A|D)= \frac{0.5 \times 0.01}{0.5 \times 0.01 + 0.2 \times 0.03 + 0.3 \times 0.05} = \frac{0.005}{0.026} = 0.19$$

ANALOGAMENTE,

$$P(B|D)= \frac{0.2 \times 0.03}{0.026} = \frac{0.006}{0.026} = 0.23$$

$$P(C|D)= \frac{0.3 \times 0.05}{0.026} = \frac{0.015}{0.026} = 0.58$$

OBSERVESE QUE

$$P(A|D) + P(B|D) + P(C|D)= 0.19 + 0.23 + 0.58 = 1.00$$

EJEMPLO

UNA URNA, A, CONTIENE DOS BOLAS BLANCAS Y DOS NEGRAS. OTRA URNA, B, TRES BOLAS BLANCAS Y DOS NEGRAS. PASAMOS UNA BOLA DE LA URNA A A LA B. SE SACA UNA BOLA DE LA URNA B Y RESULTA QUE ES BLANCA. ¿ CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LA BOLA QUE PASAMOS HAYA SIDO BLANCA?

RESPUESTA. SEAN:

B = {LA BOLA QUE PASAMOS FUE BLANCA}; $P(B) = 2/4 = 1/2$

N = {LA BOLA QUE PASAMOS FUE NEGRA }; $P(N) = 2/4 = 1/2$

S_b = {LA BOLA QUE SACAMOS FUE BLANCA}; $P(S_b|B) = (3 + 1)/6 = 4/6$

ENTONCES

$$P(B|S_b) = \frac{P(S_b|B)\ P(B)}{P(S_b|B)\ P(B) + P(S_b|N)\ P(N)} = \frac{\frac{4}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{4}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

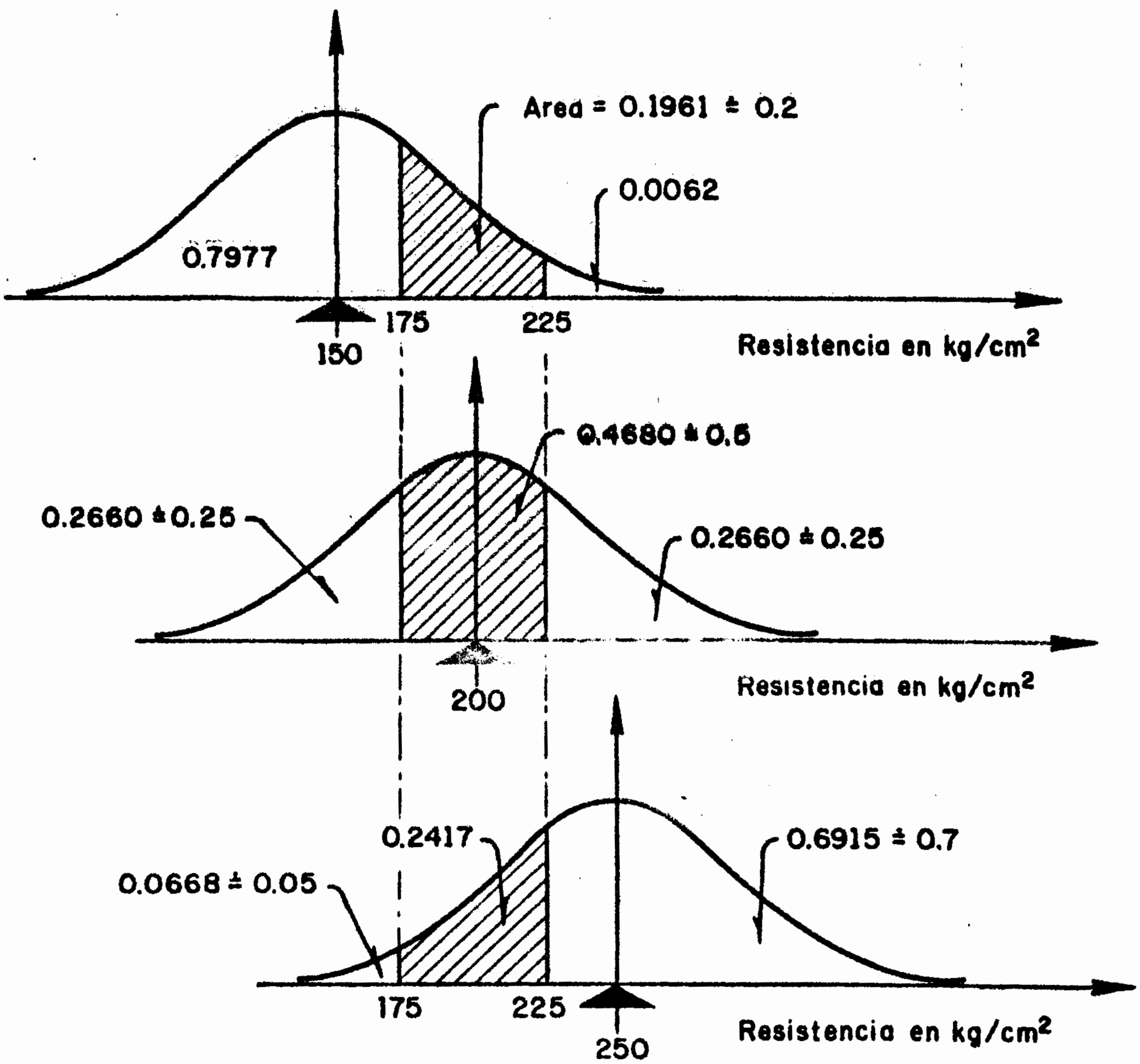
EJEMPLO

EXISTE UN EDIFICIO DE CONCRETO REFORZADO PARA EL CUAL SE INVESTIGA SU CAPACIDAD DE CARGA DE DISEÑO. UN INGENIERO, CON BASE EN SU EXPERIENCIA PERSONAL Y CON BASE EN LA EPOCA EN QUE FUE CONSTRUIDO, DECIDE QUE LA RESISTENCIA NOMINAL, f'_c, DEL CONCRETO PUDO SER DE 150 KG/CM^2, 200 KG/CM^2, 250 KG/CM^2, CON LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES PREVIAS:

RESISTENCIA NOMINAL, EN KG/CM^2	PROBABILIDAD
$B_1 = \{150\}$	$P(B_1) = 0.3$
$B_2 = \{200\}$	$P(B_2) = 0.6$
$B_3 = \{250\}$	$P(B_3) = 0.1$

PARA ESTIMAR LA RESISTENCIA NOMINAL REAL, ES NECESARIO REALIZAR UN EXPERIMENTO QUE CONSISTE EN EXTRAER CORAZONES (MUESTRAS) DEL CONCRETO DE LA ESTRUCTURA Y PROBARLOS A COMPRESION SIMPLE. EL INGENIERO DECIDE QUE LA RESISTENCIA, S, DE UN SOLO CORAZON DARA UNA INDICACION CONFIABLE, Y DEFINE LOS EVENTOS ANOTADOS EN LA PRIMERA COLUMNA DE LA TABLA DE LA SIGUIENTE HOJA, A LAS CUALES LES ASIGNA PROBABILIDADES CONDICIONALES, DADA LA RESISTENCIA NOMINAL, f'_c , DE ACUERDO CON LA SUPOSICION DE QUE LA RESISTENCIA CIA TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON LA MEDIA IGUAL A f'_c Y COEFICIENTE DE VARIACION CONSTANTE; DE ACUERDO CON LA TEXTURA DEL CONCRETO Y CON LA EPOCA DE CONSTRUCCION, LE ASIGNA UN VALOR DE 0.20 A DICHO COEFICIENTE (IMPLICA UN CONTROL DE CALIDAD MALO).

RESISTENCIA DEL CORAZON, S, EN KG/CM^2	$P(A_j \mid B_i)$		
	$(f'_c)_1 = 150$ $B_1 = \{150\}$	$(f'_c)_2 = 200$ $B_2 = \{200\}$	$(f'_c)_3 = 250$ $B_3 = \{250\}$
EVENTO $A_1 = \{S < 175\}$	0.80	0.25	0.05
EVENTO $A_2 = \{175 \leq S \leq 225\}$	0.20	0.50	0.25
EVENTO $A_3 = \{S > 225\}$	0	0.25	0.70



SUPONGASE QUE SE SACA UN CORAZON Y QUE SU RESISTENCIA RESULTA SER DE 164 KG/CM^2, ES DECIR, QUE OCURRE EL EVENTO A_1. LAS PROBABILIDADES A POSTERIORI DE LAS RESISTENCIAS NOMINALES SON, ENTONCES

$$P(\{150\}|A_1) = \frac{P(\{150\})P(A_1|\{150\})}{P(\{150\})P(A_1|\{150\})+P(\{200\})P(A_1|\{200\})+P(\{250\})P(A_1|\{250\})}$$

$$= \frac{0.3 \times 0.80}{0.3 \times 0.8 + 0.6 \times 0.25 + 0.1 \times 0.05} = \frac{0.24}{0.24 + 0.15 + 0.005}$$

$$= \frac{0.24}{0.395} = 0.6076$$

$$P(\{200\}|A_1) = \frac{P(\{200\})P(A_1|\{200\})}{0.395} = \frac{0.15}{0.395} = 0.3797$$

$$P(\{250\}|A_1) = \frac{P(\{250\})P(A_1|\{250\})}{0.395} = \frac{0.005}{0.395} = 0.0127$$

SUPONGASE AHORA QUE EN VEZ DE UN SOLO CORAZON EL INGENIERO HUBIESE DECIDIDO OBTENER DOS, SITUADOS EÑ DIFERENTES NIVELES DE LA ESTRUCTURA, Y QUE AL PROBARLOS EN UNO OCURRIO A_1 Y EN EL OTRO A_2. LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN AMBOS EVENTOS (A_1, A_2) SI f'_c ES REALMENTE 150, 200 O 250 KG/CM^2, SERA EL PRODUCTO DE DOS PROBABILIDADES CONDICIONALES, PUESTO QUE A_1 y A_2 SON INDEPENDIENTES.

$$P(A_1,A_2|\{150\}) = P(A_1|\{150\})P(A_2|\{150\}) = 0.80 \times 0.20 = 0.16$$

$$P(A_1,A_2|\{200\}) = P(A_1|\{200\})P(A_2|\{200\}) = 0.25 \times 0.50 = 0.125$$

$$P(A_1,A_2|\{250\}) = P(A_1|\{250\})\ P(A_2|\{250\}) = 0.05 \times 0.25 = 0.0125$$

ESTAS PROBABILIDADES SON INDISPENSABLES, YA QUE EL TEOREMA DE BAYES EN ESTE CASO NOS DARIA:

$$P(\{150\}|A_1,A_2) = \frac{P(\{150\})P(A_1,A_2|\{150\})}{P(\{150\})P(A_1,A_2|\{150\})+P(\{200\})P(A_1,A_2|\{200\})+P(\{250\})\times P(A_1,A_2|\{250\})}$$

EN ESTE CASO LAS PROBABILIDADES A POSTERIORI SON:

$$P(\{150\}|A_1,A_2) = \frac{0.3 \times 0.16}{0.3 \times 0.16 + 0.6 \times 0.125 + 0.1 \times 0.0125}$$

$$= \frac{0.048}{0.048 + 0.075 + 0.00125} = \frac{0.048}{0.12425} = 0.386$$

$$P(\{200\}|A_1,A_2) = \frac{P(\{200\})P(A_1,A_2|\{200\})}{0.12425} = \frac{0.075}{0.12425} = 0.604$$

$$P(\{250\}|A_1,A_2) = \frac{P(\{250\})P(A_1,A_2|\{250\})}{0.12425} = \frac{0.00125}{0.12425} = 0.010$$

LOS MISMOS RESULTADOS SE HABRIAN OBTENIDO SI EL INGENIERO, DESPUES DE EXTRAER EL PRIMER CORAZON Y DE CALCULAR LAS PROBABILIDADES POSTERIORES CORRESPONDIENTES, HUBIERA DECIDIDO SACAR EL SEGUNDO Y RECALCULAR DICHAS PROBABILIDADES CON BASE EN LAS OBTENIDAS PARA EL PRIMERO; ES DECIR, LAS PROBABILIDADES PREVIAS EN EL SEGUNDO CALCULO SERIAN $P(\{150\}) = 0.6076$, $P(\{200\}) = 0.3797$ Y $P(\{250\}) = 0.0127$. EN TAL CASO, LAS PROBABILIDADES POSTERIORES, DADO QUE OCURRIO A_2, SON

$$P(\{150\}|A_2) = \frac{P(\{150\})P(A_2|\{150\})}{0.2 \times 0.6076 + 0.5 \times 0.3797 + 0.25 \times 0.0127}$$

$$= \frac{0.12152}{0.12152 + 0.18975 + 0.00318} = \frac{0.12152}{0.31445} = 0.386$$

$$P(\{200\}|A_2) = \frac{P(\{200\})P(A_2|\{200\})}{0.31445} = \frac{0.18975}{0.31445} = 0.604$$

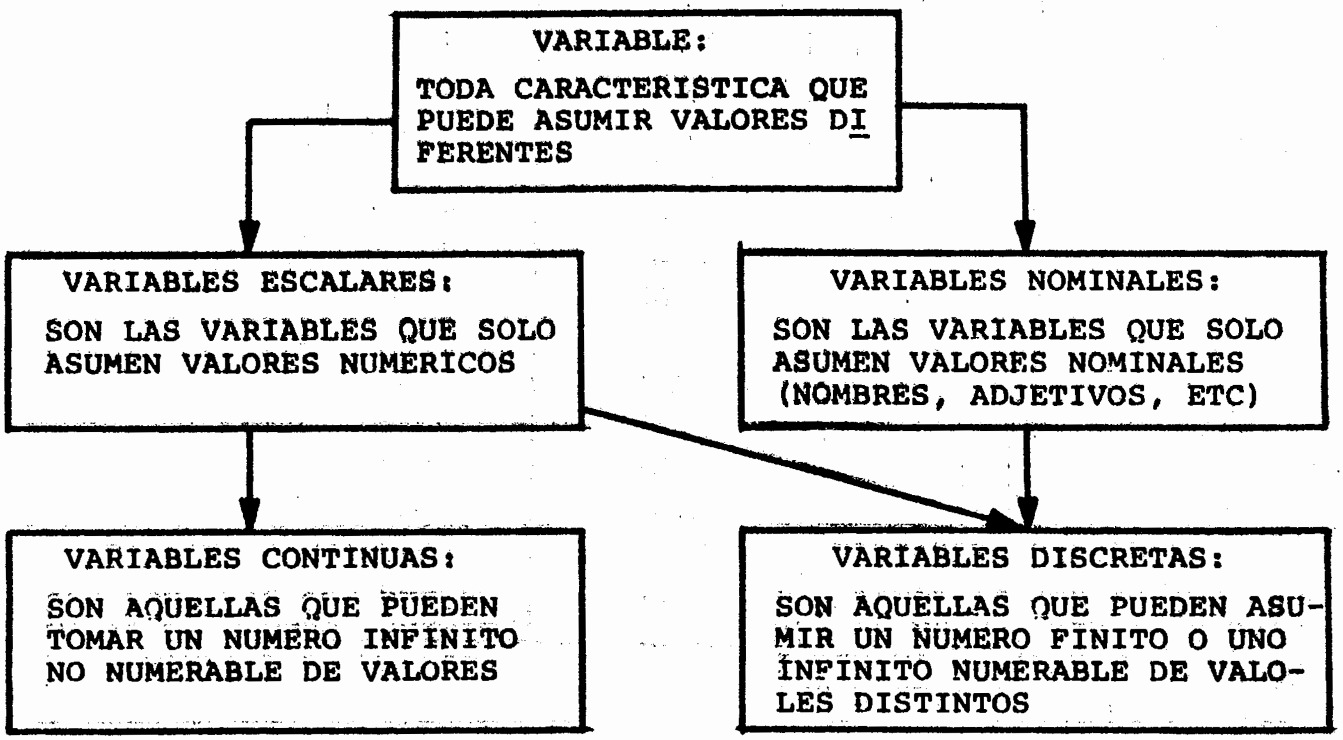
$$P(\{250\}|A_2) = \frac{P(\{250\})P(A_2|\{250\})}{0.31445} = \frac{0.00318}{0.31445} = 0.010$$

QUE SON IGUALES A LAS ANTERIORES.

CON LO ANTERIOR SE DEMUESTRA QUE LAS PROBABILIDADES SE PUEDEN ACTUALIZAR CONFORME SE VA OBTENIENDO NUEVA INFORMACION EXPERIMENTAL.

VARIABLES ALEATORIAS

CLASIFICACION DE VARIABLES



UNA *VARIABLE ALEATORIA* ES UNA VARIABLE TAL QUE NO PUEDE PREDECIRSE CON CERTEZA EL VALOR QUE ASUMIRA AL REALIZAR UN EXPERIMENTO. POR EJEMPLO, LA RESISTENCIA O CARGA DE FALLA DE UNAS VIGAS ES UNA VARIABLE ALEATORIA, YA QUE ANTES DE ROMPER UNA VIGA TOMADA AL AZAR NO SE PUEDE PRECISAR CUAL SERA SU RESISTENCIA. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON 15 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO, OBSERVANDOSE QUE ESTOS VARIAN DE UNAS A OTRAS DE MANERA ALEATORIA.

PRUEBAS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Número de la viga	Carga de agrietamiento, en kg , X	Carga de falla, en kg , Y
1	4 700	4 700
2	3 840	4 220
3	3 270	4 360
4	2 310	4 680
5	2 950	4 270
6	4 810	4 810
7	2 720	4 590
8	2 720	4 490
9	4 310	4 310
10	2 950	4 630
11	4 220	4 220
12	2 720	4 340
13	2 720	4 340
14	2 630	4 770
15	2 950	4 630

A TODO EXPERIMENTO SE LE PUEDE ASOCIAR AL MENOS UNA VARIABLE ALEATORIA, DEPENDIENDO ESTA DEL PROBLEMA QUE SE TENGA PLANTEADO. POR EJEMPLO, EN EL CASO DE LA RESISTENCIA DE LAS VIGAS DE VARIABLE ALEATORIA PUEDE SER DIRECTAMENTE DICHA RESISTENCIA, EN CUYO CASO SU ESPACIO DE EVENTOS SERIA

$$S_1 = \{X: 0<X<\infty\}$$

LA VARIABLE TAMBIEN PUDO HABER SIDO UNA CUYO ESPACIO DE EVENTOS FUERA

$$S_2 = \{\text{EXITO, FRACASO}\}$$

EN DONDE EL EXITO OCURRIRIA SI LA VIGA RESISTIERA MAS DE CIERTA CANTIDAD, POR EJEMPLO 4600 KG, Y EL FRACASO OCURRIRIA SI RESISTIERA MENOS, ES DECIR:

EXITO: SI $X \geq 4600$ KG

FRACASO: SI $X < 4600$ KG

LEYES DE PROBABILIDADES

EL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE ALEATORIA SE DESCRIBE MEDIANTE SU *LEY DE PROBABILIDADES*, LA CUAL PUEDE ESPECIFICARSE DE DIFERENTES FORMAS. LA MANERA MAS COMUN DE HACERLO ES MEDIANTE SU *DISTRIBUCION O DENSIDAD DE PROBABILIDADES.*

A FIN DE EVITAR CONFUSION, SE EMPLEARA UNA LETRA MAYUSCULA PARA DENOTAR UNA VARIABLE ALEATORIA, Y LA MINUSCULA CORRESPONDIENTE PARA LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR. SI LA VARIABLE ALEATORIA X ES DISCRETA Y PUEDE ASUMIR LOS VALORES x_i, SU DENSIDAD DE PROBABILIDADES, $f_X(x)$ SERA EL CONJUNTO DE LAS PROBABILIDADES

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

LA CUAL SE LEE "PROBABILIDAD DE QUE $X = x_i$". ESTO ES

$$f_X(x) = \{p_X(x_i)\} \qquad i = 1,2,\ldots n$$

PARA QUE UNA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SATISFAGA LOS TRES AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES, SE DEBEN CUMPLIR LOS SIGUIENTES REQUISITOS

A) $0 \leq p_X(x_i) \leq 1$ PARA TODA x_i

B) $\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$, DONDE n ES EL NUMERO TOTAL DE VALORES QUE PUEDE ASUMIR X

C) $P(x_m \leq X \leq x_r) = \sum_{i=m}^{i=r} p_X(x_i)$; $m \leq r$, DONDE LAS x_i ESTAN ORDENADAS EN FORMA CRECIENTE, ES DECIR,

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$$

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS O FUNCION DE DISTRIBUCION

OTRA FORMA DE ESPECIFICAR LA LEY DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA ES MEDIANTE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, $F_X(x)$, QUE SE DEFINE COMO EL CONJUNTO DE LAS SUMAS PARCIALES DE LAS PROBABILIDADES, $P_X(x_i)$, CORRESPONDIENTES A TODOS LOS VALORES DE X MENORES O IGUALES QUE x_i. POR LO TANTO, ESTA FUNCION DA LAS PROBABILIDADES DE QUE LA VARIABLE ALEATORIA TOME VALORES MENORES O IGUALES QUE x_m PARA CUALQUIER m, ES DECIR

$$F_X(x) = \{F_X(x_m)\} \quad ; \quad m = 1,2,\ldots,n$$

EN DONDE

$$F_X(x_m) = \sum_{i=1}^{i=m} P_X(x_i) = P(X \leq x_m) \; ; \; m=1,2,\ldots,n$$

EJEMPLO

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA "NUMERO TOTAL DE CARROS QUE SE DETIENEN EN UNA ESQUINA DEBIDO A LA LUZ ROJA DE UN SEMAFORO". SI LAS PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA VALOR, DETERMINADAS POR EL METODO FRECUENCIAL, SON

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{SI} \quad x = 0 \\ 0.2 & \text{SI} \quad x = 1 \\ 0.3 & \text{SI} \quad x = 2 \\ 0.2 & \text{SI} \quad x = 3 \\ 0.1 & \text{SI} \quad x = 4 \\ 0.1 & \text{SI} \quad x = 5 \\ 0 & \text{SI} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

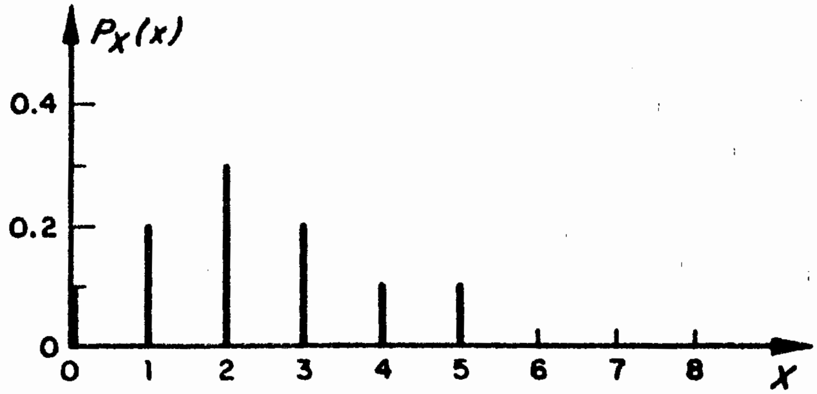
LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES Y LA DE PROBABILIDADES ACUMULADAS CORRESPONDIENTES SERAN

x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
<0	0	0
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
≥6	0	1.0

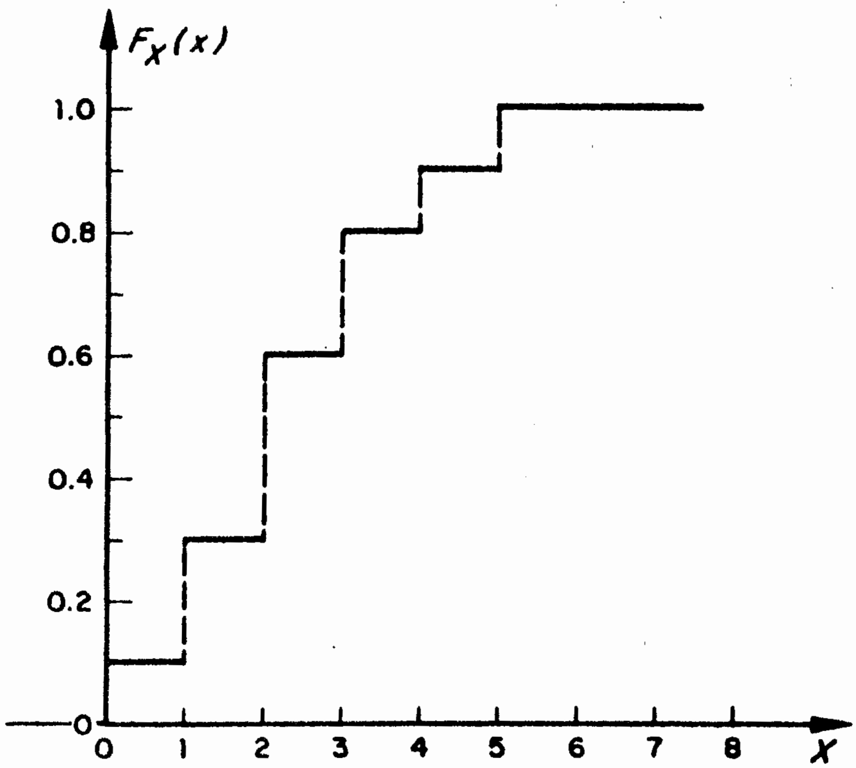
O SEA

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI} \quad x < 0 \\ 0.1, & \text{SI} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & \text{SI} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & \text{SI} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.8, & \text{SI} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & \text{SI} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1.0, & \text{SI} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

LAS GRAFICAS DE ESTAS DISTRIBUCIONES SE PRESENTAN EN LA FIGURA DE LA SIGUIENTE HOJA.



a) Distribución de probabilidades



b) Función de distribución

Ley de probabilidades del ejemplo del tráfico

EJEMPLO

SEA LA VARIABLE ALEATORIA X DEFINIDA POR LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA AL LANZAR DOS DADOS. EN ESTE CASO EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$$S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Y LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES

$$f_X(x) = \{\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}\}$$

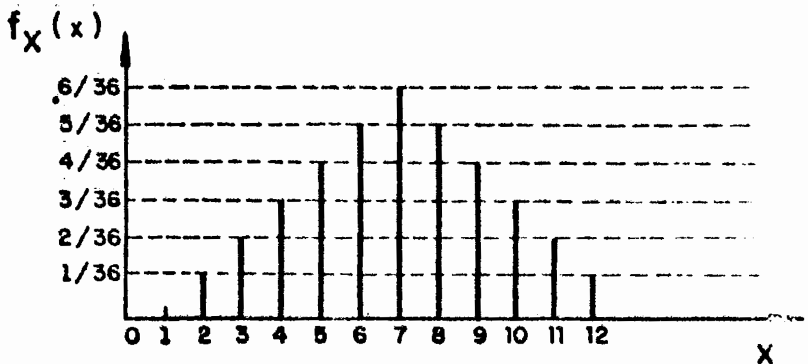
EN ESTE CASO $X_1=2,\ X_2=3,\dots,X_{11}=12$

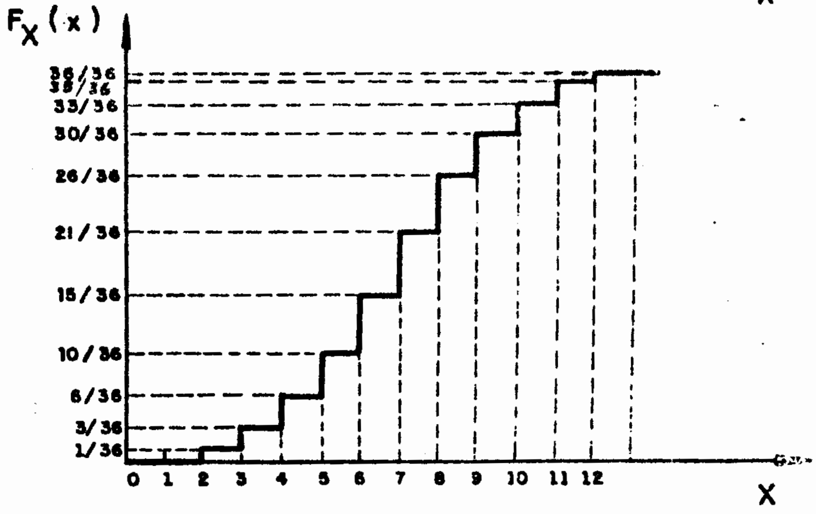
$$\text{Y}\quad f_X(2) = \frac{1}{36},\ f_X(3) = \frac{2}{36},\dots,f_X(12) = \frac{1}{36}$$

ESTAS PROBABILIDADES FUERON CALCULADAS EN UN EJEMPLO PREVIO SOBRE PROBABILIDADES DE EVENTOS .

CON ESTAS PROBABILIDADES SE PUEDE OBTENER LA FUNCION DE DISTRIBUCION O DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, DE LA SIGUIENTE MANERA:

x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
<2	0	0
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36=1
>12	0	1
	$\Sigma=1$	





EJEMPLO

TIRAMOS UN DADO HASTA QUE APAREZCA UN DOS. SEA LA VARIABLE ALEATORIA X EL NUMERO DE TIRADAS NECESARIAS:

a) ENCONTRAR F(x)

b) ENCONTRAR F(x) SI SE UTILIZAN DOS DADOS

RESPUESTA

a) $P(x = 1) = 1/6$

$P(x = 2) = (5/6)(1/6)$

$P(x = 3) = (5/6)^2(1/6)$

$P(X = x) = (5/6)^{x-1}(1/6)$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k=1}^{x} f(x_k) = \sum_{k=1}^{x} (5/6)^{k-1}(1/6)$$

b) EVENTOS FAVORABLES = 2 x 6 = 12:
(2,1), (2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2)(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)

EVENTOS POSIBLES = $6^2 = 36$

$P(\text{OBTENER UN } 2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$P(x = 1) = 1/3$

$P(x = 2) = (2/3)(1/3)$

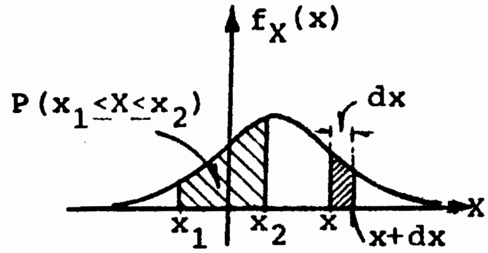
$P(x = 3) = (2/3)^2(1/3)$

$P(X = x) = (2/3)^{x-1}(1/3)$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X, LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA TOME UN VALOR COMPRENDIDO ENTRE x Y x + dx ESTA DADA POR $f_X(x)dx$, DONDE $f_X(x)$ ES LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X. POR LO TANTO, LA PROBABILIDAD DE QUE X ASUMA VALORES COMPRENDIDOS EN EL INTERVALO $x_1 \leq X \leq x_2$ ES

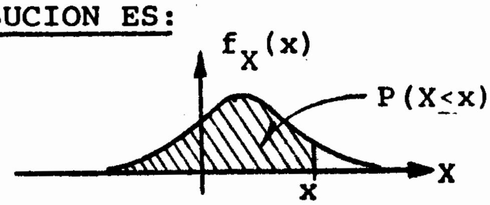
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx$$



LA INTERPRETACION GRAFICA DE ESTA PROBABILIDAD ES QUE CORRESPONDE AL AREA BAJO LA CURVA DE $f_X(x)$ COMPRENDIDA ENTRE x_1 Y x_2.

PUESTO QUE $F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\infty \leq X \leq x)$, Y EN VIRTUD DE LA ECUACION ANTERIOR SE TIENE QUE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ES:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(U)\, dU$$



DONDE U ES SOLO UNA VARIABLE MUDA DE INTEGRACION. EL VALOR DE ESTA INTEGRAL ES IGUAL AL AREA BAJO LA CURVA DE $F_X(x)$ A LA IZQUIERDA DE x. DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f_X(U)\, dU\right) = f_X(x)$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE $F_X(x)$ SON:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$
$$F_X(-\infty) = 0$$
$$F_X(\infty) = 1$$
$$F_X(x + \varepsilon) \geq F_X(x), \text{ SI } \varepsilon \geq 0$$

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

PARA SATISFACER LOS AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES SE NECESITA QUE

$$f_X(x) \geq 0 \text{ PARA TODA } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

EJEMPLO

CALCULAR EL VALOR DE A QUE HACE A $f_X(x)$ UNA FUNCION DE DENSIDAD.

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ A(8 - X) & \text{si } 4 \le x \le 8 \\ 0 & \text{si } x \le 0, \le 8 \end{cases}$$

DETERMINAR Y DIBUJAR LA FUNCION DE DISTRIBUCION CORRESPONDIENTE, Y CALCULAR $P\{X \le 6\}$ Y $P\{0 \le X \le 6\}$.

RESPUESTA

VALOR DE A:

$$1 = \int_0^4 Axdx + \int_4^8 A(8-x)d\,x = 8A + 32A - 32A + 8A \Rightarrow A = \frac{1}{16}$$

DETERMINACION DE F(x):

Si $X < 0$, $F(x) = 0$

Si $0 \le X \le 4$: $F(x) = \frac{1}{16} \int_0^x xdx = x^2/32$

Si $4 \le X \le 8$:

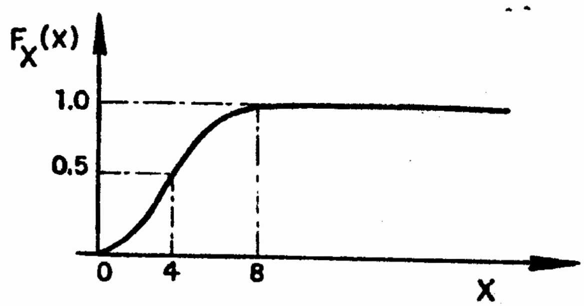
$$F(x) = \frac{1}{16} \int_0^4 xdx + \frac{1}{16} \int_4^x (8-x)\,dx = -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2} - 1$$

Si $x \ge 8$:

$F(x) = 1$

EN RESUMEN:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \ge 8 \\ \frac{-x^2}{32} + \frac{x}{2} - 1 & \text{si } 4 \le X \le 8 \\ \frac{x^2}{32} & \text{si } 0 \le X \ge 4 \\ 0 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$



$$F(6) = P\{X \le 6\} = -\frac{6^2}{32} + \frac{6}{2} - 1 = \frac{7}{8}$$

$$P\{0 \le X \le 6\} = F(6) - F(0) = 7/8$$

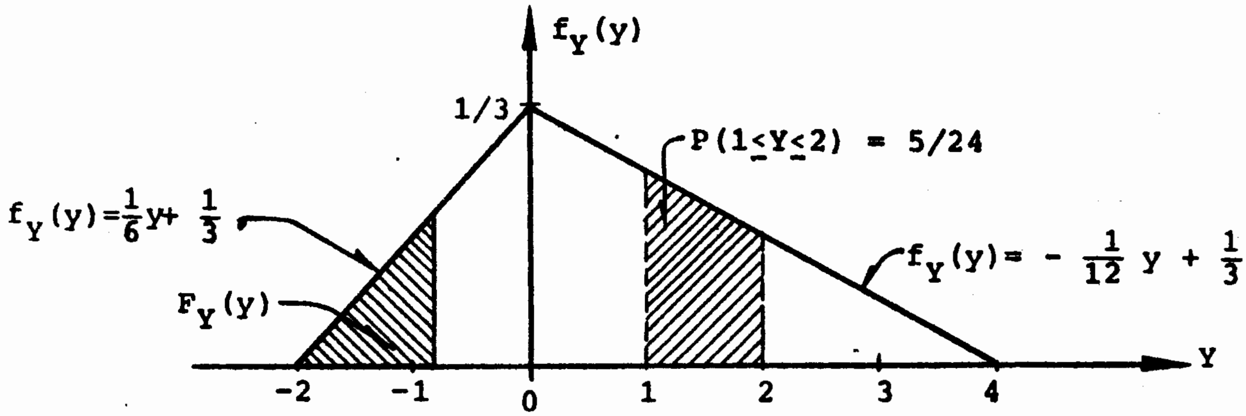
EJEMPLO

SEA UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES DE FORMA TRIANGULAR DADA POR LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}\,y + \frac{1}{3}\,,\ \text{SI}\ -2 \leq Y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12}\,y + \frac{1}{3}\,,\ \text{SI}\ \ 0 \leq Y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \qquad\qquad \text{SI}\ \ Y \leq 2\ \ \text{O}\ \ Y \geq 4$$



LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES, ENTONCES:

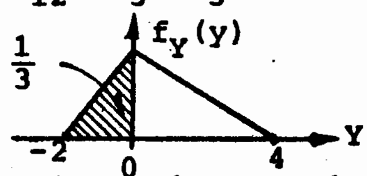
SI $-2 \leq Y \leq 0$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{Y} f_Y(U)\,dU = \int_{-2}^{Y} \left(\frac{1}{6}\,U + \frac{1}{3}\right)dU$$

$$= \left[\frac{U^2}{12} + \frac{U}{3}\right]_{-2}^{Y} = \frac{Y^2}{12} + \frac{Y}{3} + \frac{1}{3}$$

SI $0 \leq Y \leq 4$

$F_Y(0) = \frac{1}{3}$

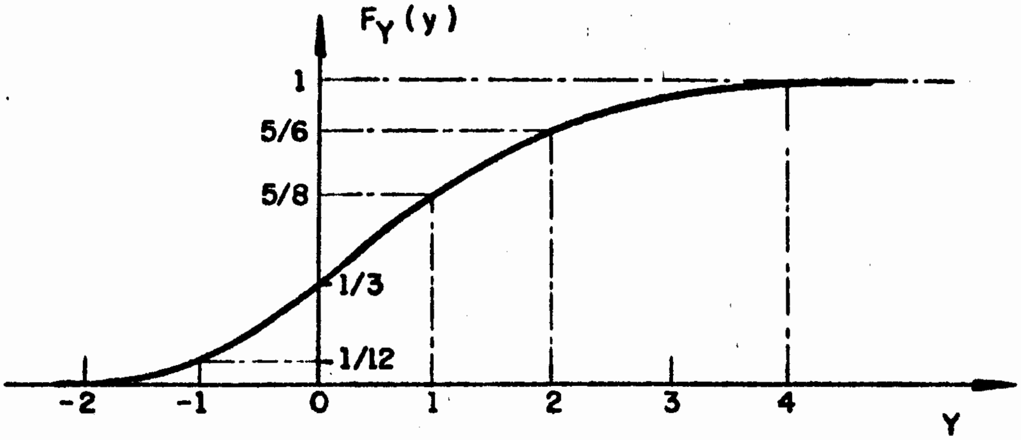


$$F_Y(y) = F_Y(0) + \int_0^{Y} \left(-\frac{1}{12}\,U + \frac{1}{3}\right)\,dU = \frac{1}{3} + \left[-\frac{U^2}{24} + \frac{U}{3}\right]_0^{Y} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{Y^2}{24} + \frac{Y}{3} \qquad\qquad \text{SI}\ 0 \leq Y \leq 4$$

$F_Y(y) = 0 \quad \text{SI} \quad y \leq -2$

$F_Y(y) = 1 \quad \text{SI} \quad y \geq 4$



SI SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO QUE INVOLUCRA A DICHA VARIABLE, EL VALOR QUE SE OBSERVE CAIGA EN EL INTERVALO $1 \leq Y \leq 2$, ENTONCES

$$P[1 \leq Y \leq 2] = \int_1^2 \left(-\frac{1}{12} y + \frac{1}{3}\right) dy = \left[-\frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{24}$$

O

$$P[1 \leq Y \leq 2] = F_Y(2) - F_Y(1) = \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

EJEMPLO

DEFINIR UNA FUNCION DE DENSIDAD USANDO $x(2-x)$, SOBRE EL CONJUNTO $0 \leq X \leq 2$. ENCONTRAR $P(a \leq x \leq b)$ SI

a) $0 \leq a \leq b \leq 2$

b) $a < o$ y $2 < b$.

RESPUESTA

$$A \int_0^2 x(2-x)\, dx = 1 = A\left(4 - \frac{8}{3}\right) \rightarrow A = 3/4$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\, x(2-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x < 0,\ x > 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 3/4\ \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x < 0,\ x > 2 \end{cases}$$

2. PARA $0 \leq a \leq b \leq 2$:

$$P\{a \leq x \leq b\} = F(b) - F(a) = \frac{3}{4}\left(b^2 - \frac{b^3}{3}\right) - \frac{3}{4}\left(a^2 - \frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{b^2(3-b)}{4} - \frac{a^2\ (3-a)}{4}$$

b) si $a < 0$, $2 < b$:

$$P\{a \leq x \leq b\} = P\{a \leq x \leq 0\} + P\{0 < x \leq 2\} + P\{2 < x \leq b\}$$

PUESTO QUE $P\{a \leq x \leq 0\} = P\{2 \leq x \leq b\} = 0$

Y $\qquad P\{0 < x \leq 2\} = F(2) - F(0) = 1$

ENTONCES $\quad P\{a < x \leq b\} = 1$

EJEMPLO

UN INGENIERO ESTA INTERESADO EN DISEÑAR UNA TORRE QUE RESISTA LAS CARGAS DEBIDAS AL VIENTO. DE UNA SERIE DE OBSERVACIONES DE LA MAXIMA VELOCIDAD ANUAL DEL VIENTO CERCA DEL SITIO DE INTERES, SE ENCUENTRA QUE EL HISTOGRAMA PUEDE AJUSTARSE RAZONABLEMENTE, DESDE UN PUNTO DE VISTA ESTADISTICO, MEDIANTE UNA *DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL* DE LA FORMA

$$f_X(x) = Ke^{-\lambda x} \; ; \; x \geq 0 \quad \text{Y} \quad f_X(x) = 0; \; x < 0$$

DONDE X ES LA MAXIMA VELOCIDAD DEL VIENTO, λ ES UNA CONSTANTE Y K ES OTRA CONSTANTE TAL QUE OBLIGA A QUE EL AREA BAJO LA CURVA DE $f_X(X)$ SEA IGUAL A UNO. POR TANTO,

$$\int_0^\infty Ke^{-\lambda x}\, dx = \frac{-K}{\lambda} \left[e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{K}{\lambda} = 1$$

DE DONDE

$$K = \lambda$$

POR TANTO

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; ; \; x \geq 0$$

LA FUNCION DE DISTRIBUCION SERA

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u)\, du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\, du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \; ; \; x \geq 0$$

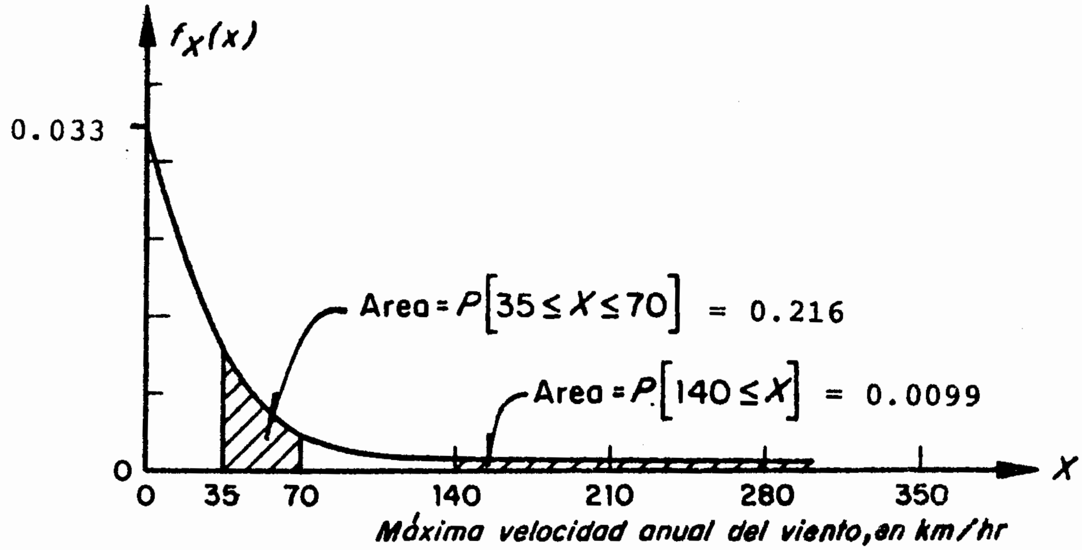
EL VALOR DE λ SE PUEDE TOMAR, POR EJEMPLO, DE MANERA QUE $F_X(x)$ SE AJUSTE PARA QUE COINCIDA CON UN VALOR EMPIRICO. ASI, SI LA FRECUENCIA RELATIVA DEL EVENTO $A = \{X \leq 70 \text{ KM/H}\}$ ES 0.9, ENTONCES

$$P(0 \leq X \leq 70) = F_X(70) = 0.9$$

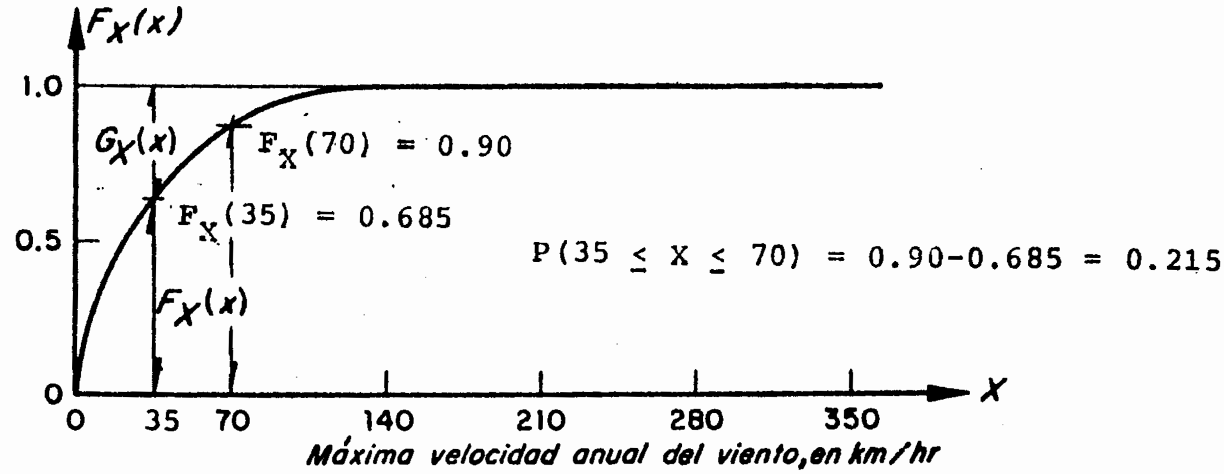
DE DONDE

$$0.9 = 1 - e^{-70\lambda}$$

POR LO CUAL $\lambda = 0.033$.



a) Densidad de probabilidades de X



b) Función de distribución de X

Ley de probabilidades correspondiente al ejemplo de la máxima velocidad anual del viento

SI SE DESEA CALCULAR, POR EJEMPLO, LA PROBABILIDAD DE QUE LA VELOCIDAD MAXIMA DEL VIENTO EN UN AÑO DADO ESTE ENTRE 35 Y 70 KM/H, SE TENDRA:

$$P(35 \leq X \leq 70) = \int_{35}^{70} 0.033e^{-0.033x}dx = \left[-e^{-0.033x}\right]_{35}^{70} =$$

$$= -e^{-0.033x70} - (-e^{-0.033x35}) = -e^{-2.31} + e^{-1.155} =$$

$$= -0.099 + 0.315 = 0.216$$

EN TERMINOS DE $F_X(x)$ ESTA PROBABILIDAD QUEDA DADA POR

$$P(35 \leq X \leq 70) = F_X(70) - F_X(35) = 0.90 - (1 - e^{-1.155}) = 0.90 - 0.685$$

$$= 0.215$$

EJEMPLO

SUPONIENDO QUE LA VIDA UTIL DE UN CIERTO TIPO DE BULBOS SIGUE UNA DENSIDAD $f(x) = 100/x^2$, si $x < 100$, y $f_x(x) = 0$, si $x \leq 100$. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE NINGUNO DE LOS TRES BULBOS DE UN RADIO TENGA QUE SER SUSTITUIDO DURANTE LAS PRIMERAS 150 HORAS DE OPERACION?.

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LOS TRES BULBOS ORIGINALES TENGAN QUE SER SUSTITUIDOS DURANTE LAS PRIMERAS 150 HORAS DE OPERACION?

RESPUESTA

$$P\{\text{FALLA DE UN BULBO}\} = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\,dx = 1/3$$

$$P\{\text{0 FALLAS EN 3 BULBOS}\} = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 8/27$$

$$P\{\text{3 FALLAS EN 3 BULBOS}\} = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1/27$$

OTRA FORMA:

P{NINGUNO DE LOS 3 BULBOS TENGA QUE SER SUSTITUIDO DURANTE LAS 150 H. DE OPERACION} $= \left(\int_{150}^{\infty} \frac{100}{x^2}\,dx\right)^3 = \frac{8}{27}$

P{LOS 3 BULBOS TENGAN QUE SER REEMPLAZADOS DURANTE LAS PRIMERAS 150 HORAS} $= \left(\int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\,dx\right)^3 = \frac{1}{27}$

EJEMPLO

CALCULAR Y DIBUJAR LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS CORRESPONDIENTE A LA FUNCION DE DENSIDAD DEFINIDA COMO:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3/4 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{-x}}{4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

RESPUESTA

Si $x < 0$:

$F(x) = 0;$

Si $x = 0$:

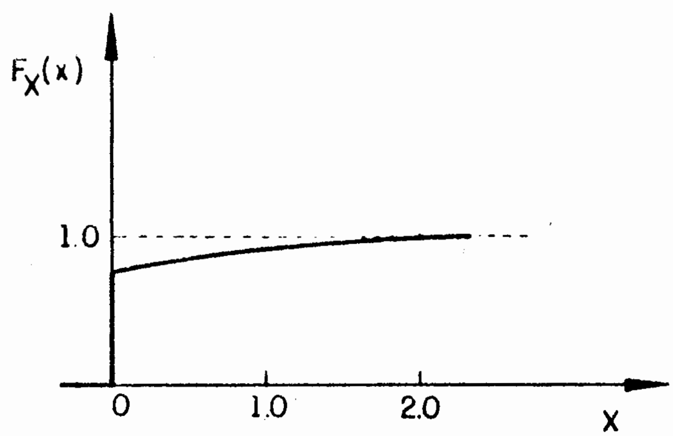
$F(x) = \frac{3}{4}$

Si $x > 0$:

$$F(x) = \frac{3}{4} + \int_0^x \frac{e^{-t}}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - \frac{e^{-x}}{4}$$

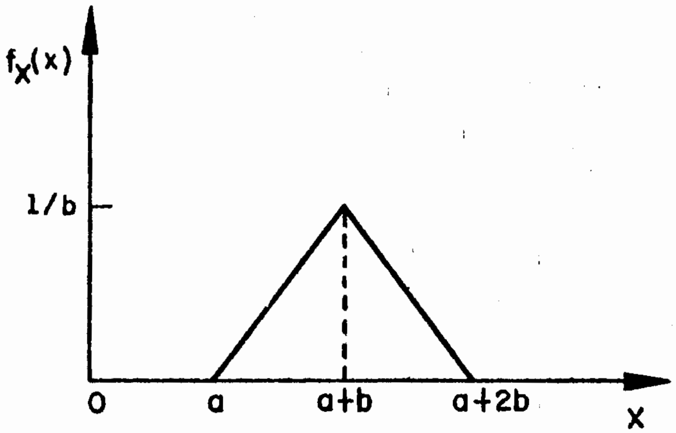
EN RESUMEN:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{e^{-x}}{4} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{3}{4} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



EJEMPLO

CALCULAR Y DIBUJAR LA FUNCION DE DISTRIBUCION CORRESPONDIENTE A LA FUNCION DE DENSIDAD:



RESPUESTA:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } > (a + 2b) \\ \frac{1}{b^2}\,(a+2b-x) & \text{si } (a + b) \leq x \leq (a + 2b) \\ \frac{1}{b^2}\,(x - a) & \text{si } a \leq x \leq (a + b) \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

Si $x < a$:

$$F_X(x) = 0$$

Si $a \leq x \leq (a + b)$:

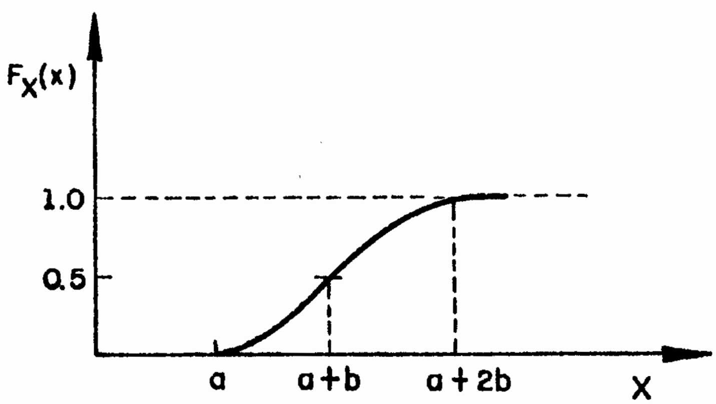
$$F_X(x) = \frac{1}{b^2} \int_a^x (x - a)\, dx = \frac{1}{b^2} \left(\frac{x^2}{2} - ax + \frac{a^2}{2} \right)$$

Si $(a + b) \leq x \leq (a + 2b)$:

$$F_X(x) = \frac{1}{b^2} \int_a^{(a+b)} (x - a)\, dx + \frac{1}{b^2} \int_{(a+b)}^{x} (a + 2b - x)\, dx$$

Si $x > a + 2b$:

$$F_X(x) = 1$$



FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA

EL COMPLEMENTO, $G_X(x)$, DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS SU UTILIZA CUANDO LAS DECISIONES SE TOMAN CON BASE EN PROBABILIDADES DE QUE SE EXCEDA UN VALOR DADO DE LA VARIABLE. LA FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA SE DEFINE COMO

$$G_X(x) = P\ (X>x) = 1 - F_X(x)$$

EJEMPLO

PARA EL PROBLEMA ANTERIOR DE LA VELOCIDAD MAXIMA ANUAL DEL VIENTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA SEA MAYOR DE 140 KM/H:

$$G_X(140) = P(X>140) = \int_{140}^{\infty} 0{,}33e^{-0{,}033x}dx = 0.0099$$

O, ALTERNATIVAMENTE

$$P(X\geq 140) = 1-F_X(140) = G_X(140) = 1-(1-e^{-0{,}033x140}) = e^{-4{,}62} = 0.0099$$

ESPERANZAS

LA ESPERANZA DE UNA FUNCION $g(X)$, DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, X, ES, POR DEFINICION

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{i=n} g(x_i)P_X(x_i)$$

O PARA UNA VARIABLE CONTINUA

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

EJEMPLOS

1. SI $g(X)$ = CONSTANTE = c

$$E(c) = c\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = c$$

2. SI $g(X) = x$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

3. SI $g(X) = a + bx$

$$E[a+bx] = a\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = a + bE[X]$$

4. SI $g(X) = g_1(X) + g_2(X)$

$$E[g_1(X) + g_2(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x)\,dx$$

$$= E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

5. SI $g(X) = \frac{x-c}{d} = \frac{1}{d}x - \frac{c}{d}$

$$E\left(\frac{x-c}{d}\right) = \frac{1}{d}E(x) - \frac{c}{d} = \frac{E(x) - c}{d}$$

6. SI $g(X) = ax^2$

$$E(ax^2) = a\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = a\,E(x^2)$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR LA ESPERANZA DE LA FUNCION

$$g(X) = X^2$$

EN ESTE CASO SE TIENE QUE

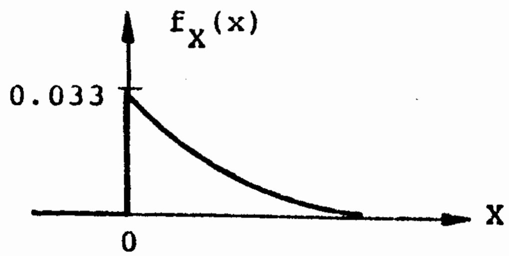
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ SI } 0 \leq X \leq \infty, \text{ Y } \quad f_X(x) = 0, \text{ SI } X<0$$

POR LO QUE

$$E(X^2) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{-x^2 e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\infty} + \frac{2\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{-2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda x}(1+\lambda x)\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

EN GENERAL, A LA ESPERANZA DE X^2 SE LE DENOMINA *VALOR MEDIO CUADRATICO.*



EN EL CASO DE LA VELOCIDAD ANUAL MAXIMA DEL VIENTO

$$E(X^2) = \frac{2}{(0.033)^2} = 1836.55 \left(\frac{km}{h}\right)^2$$

MOMENTOS DE OREDEN n

a) RESPECTO AL ORIGEN, CUANDO $g(X) = X^n$

$$E(X^n) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$$

EJEMPLO: $E(X^2)$ = MOMENTO DE 2° ORDEN RESPECTO AL ORIGEN

b) RESPECTO A LA MEDIA, CUANDO $g(X) = [X - E(X)]^n$

$$E[X - E(X)]^n = \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X)]^n f_X(x)dx$$

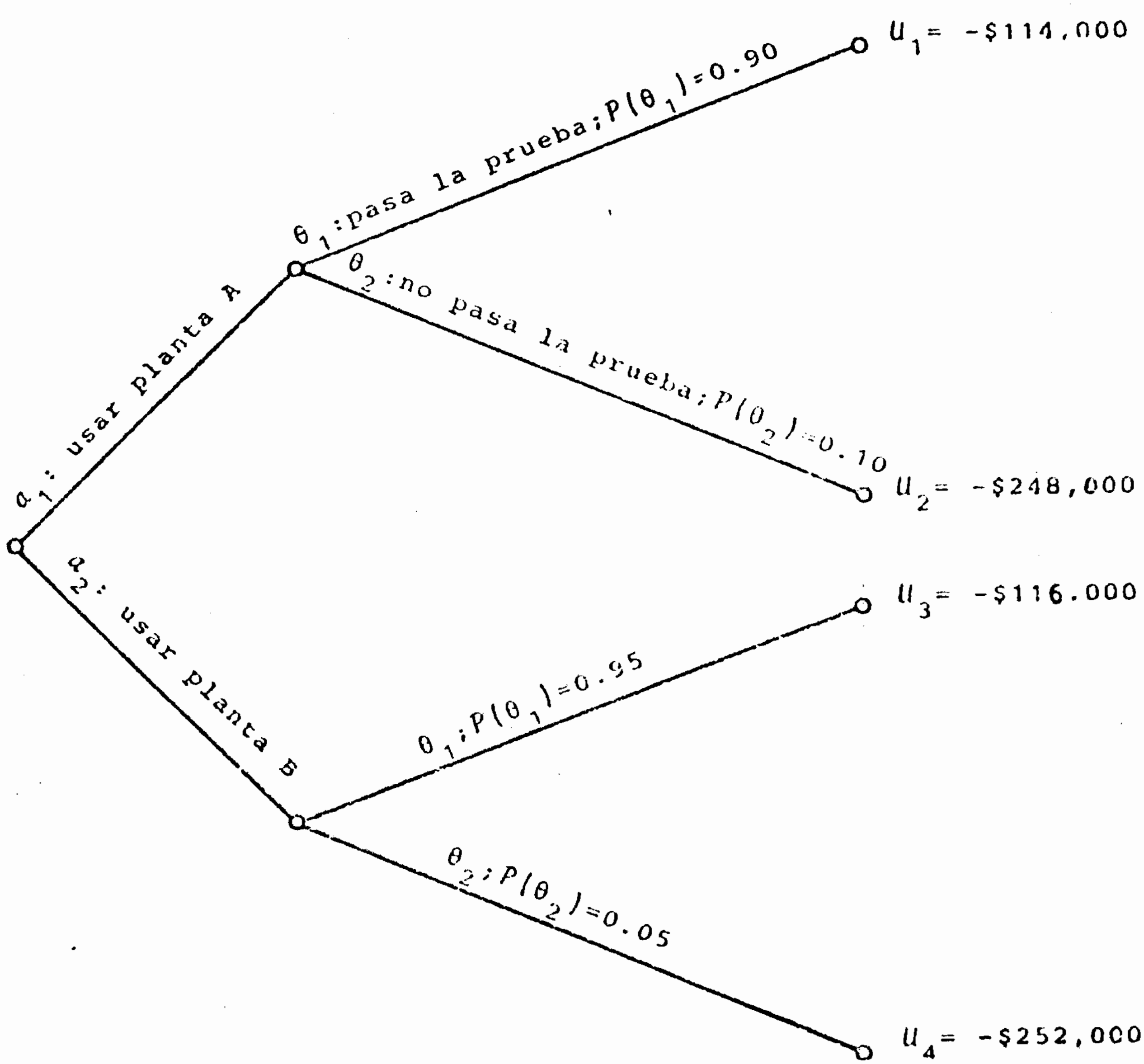
EJEMPLO: $E[X - E(X)]^2$ = MOMENTO DE 2° ORDEN RESPECTO A LA MEDIA.

EJEMPLO. *CONSTRUCCION DE LA CARPETA DE UNA CARRETERA*

UN CONTRATISTA CONSTRUIRA LA CARPETA DE UNA CARRETERA EN TRAMOS DE 50 m; EL GOBIERNO ACEPTARA O RECHAZARA CADA TRAMO DE ACUERDO CON UNA PRUEBA DE CONTROL DE CALIDAD. EL CONTRATISTA TIENE LA OPCION DE PEDIR EL CONCRETO A UNA DE DOS PLANTAS PREMEZCLADORAS; LA PLANTA A COBRA 140 PESOS/m^3 Y LA B 160 PESOS/m^3 PERO EL CONTROL DE CALIDAD QUE SE LLEVA EN LA PLANTA B ES MEJOR, LO CUAL HACE MAS PROBABLE QUE UN TRAMO DADO PASE FAVORABLEMENTE LA PRUEBA DE ACEPTACION. TOMANDO EN CUENTA QUE EN CADA TRAMO SE USAN 100 m^3 DE CONCRETO Y QUE LA PROBABILIDAD DE QUE EL PROVENIENTE DE LA PLANTA A NO PASE LA PRUEBA DE CONTROL ES 0.10, Y LA DE B ES 0.05, EL CONSTRUCTOR DEBERA DECIDIRSE POR CUAL PLANTA USAR.

SOLUCION

EL ARBOL DE DECISIONES DE ESTE PROBLEMA ES EL MOSTRADO EN LA FIGURA DE LA SIGUIENTE HOJA, DONDE $P(\theta_1)$ Y $(P(\theta_2)$ SON LAS PROBABILIDADES DE QUE OCURRAN θ_1 Y θ_2, RESPECTIVAMENTE. LA UTILIDAD $U_1 = u(a_1, \theta_1)$ ES LA QUE CORRESPONDE A UTILIZAR LA PLANTA A Y QUE LA CARPETA PASE LA PRUEBA DE CONTROL DE CALIDAD; EN ESTE CASO LA UTILIDAD (NEGATIVA) ES EL COSTO DEL CONCRETO ($14,000.00) MAS LA COLOCACION (SUPONGAMOS $100,000.00), POR LO CUAL $U_1 = -114,000.00$. $U_2 = u(a_1, \theta_2)$ ES LA QUE CORRESPONDE A USAR LA PLANTA A Y QUE LA CARPETA NO PASE LA PRUEBA DE CALIDAD; EN ESTE CASO EL CONSTRUCTOR DEBERA DEMOLER Y RECONSTRUIR EL TRAMOS CON LOS SIGUIENTES COSTOS:



Arbol de decisiones del ejemplo

CARPETA DEMOLIDA	MANO DE OBRA DE DEMOLICION	$ 15,000.00
	CONCRETO	14,000.00
	MANO DE OBRA DE COLOCACION	100,000.00
	PERDIDA DE PRESTIGIO	5,000.00
RECONSTRUCCION	MANO DE OBRA	$ 100,000.00
	CONCRETO	14,000.00
	T O T A L	248,000.00

DE MANERA SIMILAR SE OBTIENEN U_3 y U_4, CUYOS VALORES RESULTAN SER U_3 = - \$116,000.00 y U_4 = -\$252,000.00.

SI LA DECISION SE TOMARA SIN CONSIDERAR LAS PROBABILIDADES DE ACEPTAR LA CARPETA, EL CONSTRUCTOR SE DECIDIRIA POR LA PLANTA A, YA QUE LA PERDIDA (UTILIDAD NEGATIVA) SERIA MENOR. SI SE TOMAN EN CUENTA Y ADOPTAMOS COMO *CRITERIO DE DECISION* EL ESCOGER LA PLANTA QUE CONDUZCA A LA MENOR *ESPERANZA DE PERDIDA*, SE TENDRA (RECUERDE QUE $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i)$):

PARA LA PLANTA A:

$$E(U) = 0.90 \times (-114{,}000) + 0.10 \times (-248{,}000) = -\$127{,}400.$$

PARA LA PLANTA B:

$$E(U) = 0.95 \times (-116{,}000) + 0.05 \times (-252{,}000) = -\$122{,}800.$$

COMPARANDO AMBAS CIFRAS SE CONCLUYE QUE LA DECISION DE COMPRAR EL CONCRETO DE LA PLANTA B CONDUCE A UNA PERDIDA ESPERADA MENOR QUE LA DE LA PLANTA A, ES DECIR, SE ESCOGE LA PLANTA B AUNQUE EL PRECIO UNITARIO DEL CONCRETO SEA MAYOR.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

LA MEDIA O ESPERANZA, $E[X]$, DE UNA VARIABLE ALEATORIA, X, SE CALCULA CON LAS ECUACIONES ANTERIORES PARA EL CASO EN QUE $g(X)=X$. DE ESTA MANERA, SI LA VARIABLE ES DISCRETA, SU ESPERANZA QUEDA DADA POR

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \, p_X(x_i)$$

DONDE n ES EL TOTAL DE VALORES QUE X PUEDE ASUMIR.

PARA EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, LA MEDIA ES

$$\mu_X = m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

OTRAS MEDIDAS USUALES DE TENDENCIA CENTRAL DE UNA VARIABLE ALEATORIA SON LA MEDIANA Y EL MODO. LA PRIMERA SE DEFINE COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE UNA PROBABILIDAD ACUMULADA DE 50%, Y LA SEGUNDA, COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE LA MAYOR PROBABILIDAD O EL MAXIMO DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES, SEGUN SE TRATE DE UNA VARIABLE DISCRETA O DE UNA CONTINUA, RESPECTIVAMENTE.

EJEMPLO

SI LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA X CORRESPONDIENTE A LOS ERRORES EN UNA NIVELACIÓN, ES LA DE LA SEGUNDA COLUMNA DE LA SIGUIENTE TABLA, LA MEDIA DE DICHA VARIABLE RESULTA SER 4 167 LA MEDIANA 4000 Y EL MODO 4000 MICRAS. LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES SE LOCALIZAN EN LA TERCERA COLUMNA.

x_i, EN MICRAS	$P_X(x_i)$	$x_i P_X(x_i)$, EN MICRAS	$F_X(x_i)$
0	6/60	0	6/60
1 000	2/60	2 000/60	8/60
2 000	4/60	8 000/60	12/60
3 000	8/60	24 000/60	20/60
4 000	13/60	52 000/60	33/60 $\geq$ 0.5
5 000	12/60	60 000/60	45/60
6 000	7/60	42 000/60	52/60
7 000	4/60	28 000/60	56/60
8 000	2/60	16 000/60	58/60
9 000	2/60	18 000/60	60/60
TOTAL: $E[X]$ = 250 000/60=4 167 MICRAS			

LA MAXIMA PROBABILIDAD ES 13/60, POR LO QUE EL MODO VALE 4000 MICRAS. POR OTRA PARTE LA PROBABILIDAD ACUMULADA DEL 50 POR CIENTO SE EXCEDE EN x_i = 4000, POR LO QUE LA MEDIANA VALE TAMBIEN 4000 MICRAS.

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6} y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{12} y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \qquad \text{SI } y \leq -2 \text{ O } y \geq 4$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-2}^{0} y\left(\frac{y}{6} + \frac{1}{3}\right) dy + \int_{0}^{4} y\left(\frac{-y}{12} + \frac{1}{3}\right) dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{18} + \frac{y^2}{6}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-y^3}{36} + \frac{y^2}{6}\right]_{0}^{4} = \frac{2}{3}$$

EL MAXIMO DE ESTA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SE PRESENTA EN Y = 0, POR LO QUE

MODO = 0

POR OTRA PARTE EL 50 POR CIENTO DE PROBABILIDAD ACUMULADA SE COMPLETA EN EL VALOR DE Y QUE CUMPLE CON

$$F_Y(y) = 0.5 = \frac{1}{3} - \frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}$$

RESOLVIENDO ESTA ECUACION DE SEGUNDO GRADO SE ENCUENTRA:

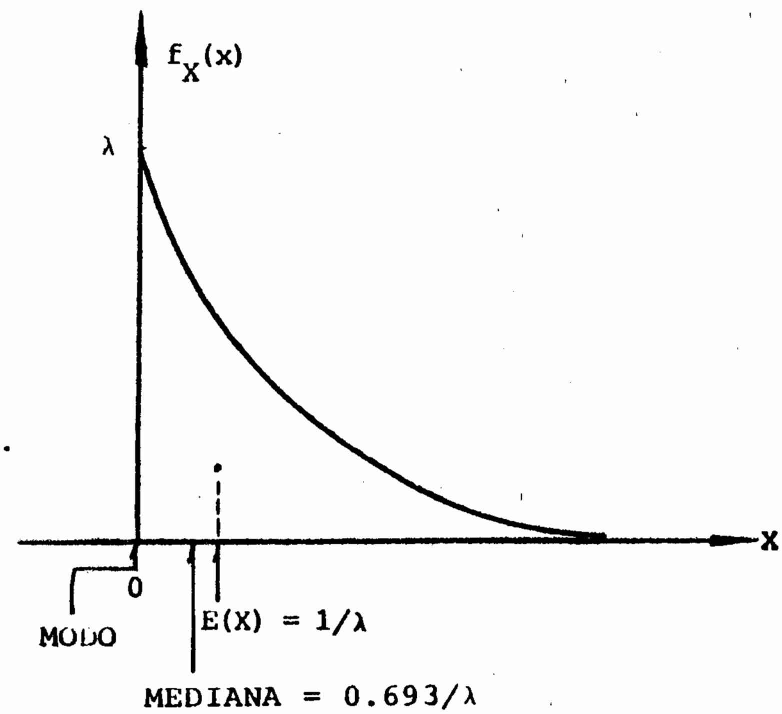
MEDIANA = 0.536

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda^2}(1+\lambda x)\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$



EL MAXIMO DE $f_X(x)$ ESTA EN x=0, POR LO QUE

MODO = 0

EL 50 POR CIENTO DE LA PROBABILIDAD ACUMULADA SE COMPLETA EN EL VALOR DE X QUE CUMPLE CON $F_X(x) = 0.5 = 1 - e^{-\lambda x}$

DE DONDE

$$\text{MEDIANA} = \frac{-\ln 0.5}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

DONDE $\ln$ ES LOGARITMO NATURAL.

MEDIDAS DE DISPERSION

UNA MEDIDA MUY COMUN DE LA DISPERSION O VARIABILIDAD DE LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR UNA VARIABLE ALEATORIA ES LA *VARIANCIA*, LA CUAL SE DENOTA COMO $\sigma^2(X)$ O VAR (X), LA CUAL SE DEFINE COMO LA ESPERANZA DE LA FUNCION $g(X) = [X-E(X)]^2$. ASI, PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$\sigma^2(X) = VAR(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$$

Y PARA UNA CONTINUA

$$\sigma^2(X) = VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx$$

DESARROLLANDO EL INTEGRANDO DE ESTA ULTIMA ECUACION:

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2-2xE(X) + E^2(X))f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - 2E(X)\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx+E^2(X)\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = E[X^2]-E^2[X]$$

ES DECIR, LA VARIANCIA SE PUEDE CALCULAR COMO LA DIFERENCIA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO Y EL CUADRADO DE LA MEDIA DE X.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION DE LA VARIABLE ALEATORIA X SON LA *DESVIACION ESTANDAR*, $\sigma(X)$, LA CUAL ES IGUAL A LA RAIZ CUADRADA DE LA VARIANCIA, Y EL *COEFICIENTE DE VARIACION* QUE SE DEFINE COMO

$$\nu(X)=\sigma(X)/E(X) \quad , \text{ SI } E(X)\neq 0$$

EJEMPLO

EN LA SIGUIENTE TABLA SE CALCULA LA VARIANCIA DE LA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SE PRESENTO EN EL EJEMPLO ANTERIOR ($E(x)$ = 4167 MICRAS)

$x_i - E(X)$ EN MICRAS	$(x_i - E(x))^2$ MICRAS^2	$P_X(x_i)$	$(x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$, EN MICRAS
-4 167	17 363 889	6/60	1 736 388
-3 167	10 029 889	2/60	334 329
-2 167	4 695 889	4/60	313 059
-1 167	1 361 889	8/60	181 585
- 167	27 889	13/60	6 042
833	693 889	12/60	138 777
1 833	3 359 889	7/60	391 987
2 833	8 025 889	4/60	535 059
3 833	14 691 889	2/60	489 729
4 833	23 357 889	2/60	778 596

TOTAL: 4 405 551 MICRAS^2 = $\sigma^2(X)$

LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION DE ESTA VARIABLE ALEATORIA SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\sigma(X) = \sqrt{4\ 405\ 551} = 2\ 215 \text{ MICRAS, Y } \nu(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{2\ 215}{4\ 167} = \mathbf{0.531}$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR SU VARIANCIA, DESVIACION ESTANDAR Y COEFICIENTE DE VARIACION:

$$\sigma^2(X) = E(X-E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^{\infty}(x^2-2xE[X]+E^2[X])e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx - 2E[X]\lambda\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx + E^2[X] \int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - 2\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

YA QUE $E(X) = 1/\lambda$ Y $E[x^2] = 2/\lambda^2$.

USANDO LA FORMULA $\sigma^2(X) = E[X^2] - E^2[X]$, Y TOMANDO EN CUENTA QUE $E[X^2] = 2/\lambda^2$ SE OBTIENE:

$$\sigma^2(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$$

EN CONSECUENCIA, LA DESVIACION ESTANDAR ES

$$\sigma(X) = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$$

Y EL COEFICIENTE DE VARIACION

$$\nu(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$$

EJEMPLO

SEA Y UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI} \quad -2\leq y\leq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{12}y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI} \quad 0\leq y\leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \qquad \text{SI} \quad y\leq -2 \text{ O } y\geq 4$$

CALCULAR LA VARIANCIA, LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION.

CALCULAREMOS PRIMERO EL VALOR MEDIO CUADRATICO PARA LUEGO APLICAR LA ECUACION $\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$

$$E[Y^2] = \int_{-2}^{0} y^2\left(\frac{1}{6}y+\frac{1}{3}\right)dy + \int_0^4 y^2\left(-\frac{y}{12}+\frac{1}{3}\right)dy = \left[\frac{y^4}{24}+\frac{y^3}{9}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-y^4}{48}+\frac{y^3}{9}\right]_0^4 =$$

$$\sigma^2(Y) = 2-(2/3)^2=14/9$$

$$\sigma(Y) = 1.25 \quad (\sqrt{14/9})$$

$$\nu(Y) = 1.25/(2/3) = 1.88$$

EJEMPLO

SI SE HACE LA TRANSFORMACION Y= ax, ¿CUANTO VALE LA VARIANCIA DE Y EN TERMINOS DE LA DE X?

DE LO VISTO ANTERIORMENTE, $E(Y) = aE(x)$ Y $E(Y^2) = a^2E(x^2)$

$$\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = a^2E(x^2) - a^2E^2(x) = a^2[E(x^2)-E^2(x)] = a^2\sigma^2(x$$

DISTRIBUCIONES PARTICULARES

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI

LA DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI SE EMPLEA COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS ASOCIADOS A EXPERIMENTOS EN LOS QUE SOLO HAY (O SOLO IMPORTAN) DOS RESULTADOS POSIBLES, UNO DE LOS CUALES USUALMENTE SE DENOMINA "EXITO" Y, EL OTRO, "FRACASO" (S = {EXITO, FRACASO}).

SEAN p= PROBABILIDAD DE OBSERVAR "EXITO" AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO

q= PROBABILIDAD DE "FRACASO" = 1-p

X= VARIABLE ALEATORIA "NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO "CON REEMPLAZO"

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES BINOMIAL ES

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x q^{n-x} \quad : \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS PARAMETROS DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = np \;, \quad \sigma^2(X) = npq$$

REFERENCIA: W. BEYER, "HANDBOOK OF TABLES FOR PROBABILITY AND STATISTICS", THE CHEMICAL RUBBER, CO. (1966).

DEMOSTRACION

SI $n=2$, ENTONCES X PUEDE ASUMIR LOS VALORES 0, 1 y 2, ES DECIR $S=\{0,1,2\}$. EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$S_1 = \{\underbrace{(\text{FRACASO, FRACASO})}_{X=0},\ \underbrace{(\text{EXITO, FRACASO})}_{X=1},\ \underbrace{(\text{FRACASO,EXITO})}_{X=1},$$

$$\underbrace{(\text{EXITO, EXITO})}_{X=2}\}$$

$$f_X(x) = \{f_X(0), f_X(1), f_X(2)\}$$

OBSERVESE QUE $x=0$ OCURRE DE UNA MANERA, $x=1$, DE DOS, Y $x=2$, DE UNA. ESTOS RESULTADOS SE PUEDEN OBTENER PERMUTANDO DOS GRUPOS, UNO CON x Y EL OTRO CON $n-x$ ELEMENTOS:

$x=0$: $\quad {}_2P_{0,2} = \frac{2!}{0!\times 2!} = 1$; $P(\{0\}) = q \times q = q^2 = p^0q^2$

$x=1$: $\quad {}_2P_{1,1} = \frac{2!}{1!\times 1!} = 2$; $P(\{1\}) = 2pq$

$x=2$: $\quad {}_2P_{2,0} = \frac{2!}{2!\times 0!} = 1$; $P(\{2\}) = p \times p = p^2 = p^2q^0$

$$\sum_{i=0}^{2} P(\{i\}) = q^2+2pq+p^2 = (p+q)^2 = 1$$

(OBSERVESE QUE LOS ELEMENTOS DE S_1 NO SON IGUALMENTE PROBABLES, A MENOS QUE $p = q = 1/2$.)

SI $n = 3$, $S = \{0,1,2,3\}$, e = EXITO Y f = FRACASO, ENTONCES

$S_1 = \{(f,f,f), (e,f,f), (f,e,f), (f,f,e), (e,e,f), (e,f,e), (f,e,e), (e,e,e)\}$

$x = 0: \; {}_3P_{0,3} = \frac{3!}{0!\,x\,3!} = 1 \; ; \; P(\{0\}) = 1\,p^0q^3 = q^3$

$x = 1: \; {}_3P_{1,2} = \frac{3!}{1!\,x\,2!} = 3 \; ; \; P(\{1\}) = 3\,pq^2$

$x = 2: \; {}_3P_{2,1} = \frac{3!}{2!\,x\,1!} = 3 \; ; \; P(\{2\}) = 3p^2q$

$x = 3: \; {}_3P_{3,0} = \frac{3!}{3!\,x\,0!} = 1 \; ; \; P(\{3\}) = 1p^3q^0 = p^3$

$$\sum_{i=0}^{3} P(\{i\}) = (p+q)^3 = 1$$

PASANDO AL CASO GENERAL DE CUALQUIER VALOR DE n, LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN x EXITOS Y n-x FRACASOS *EN UN ORDEN DETERMINADO* ES

$$P(X=x) = p^xq^{n-x}$$

EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION.

UN ORDEN POSIBLE SERIA, POR EJEMPLO,

$$\underbrace{\text{EXITO, EXITO,} \ldots, \text{EXITO,}}_{x} \; \underbrace{\text{FRACASO,} \ldots, \text{FRACASO}}_{n-x}$$

AHORA BIEN, LOS x EXITOS PUEDEN OCURRIR EN ${}_nP_{x,n-x}$ ORDENES DISTINTOS, CADA UNO CON PROBABILIDAD p^xq^{n-x}. POR LO TANTO, EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE ADICION, LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE X RESULTA SER

$$f_X(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^xq^{n-x} \; ; \; x = 0,1,\ldots,n$$

LA CUAL SE CONOCE CON EL NOMBRE DE *BINOMIAL O DE BERNOULLI.*

LA ESPERANZA DE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI ES

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= np \underbrace{\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}}_{(p+q)^{n-1}} = np(p+q)^{n-1} = np$$

LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL ES

$$\sigma^2(X) = E\left[(X-E(X))^2\right] = E\left[(X-np)^2\right]$$

PERO $E\left[(X-np)^2\right] = E(X^2-2npX + n^2p^2) = E\left[X + X(X-1) - 2npX + n^2p^2\right]$

$$=E\left[(1-2np)X\right] + E\left[X(X-1)\right] + E(n^2p^2)$$

$$=(1-2np)np + n^2p^2 + \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} x(x-1)$$

$$=np-n^2p^2 + \sum_{x=2}^{n} n(n-1) \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} q^{n-x}$$

$$=np-n^2p^2 + n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x}$$

$$=np-n^2p^2 + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = np-np^2=np(1-p)=npq$$

EN RESUMEN, PARA LA DISTRIBUCION BINOMIAL,

$$E(X) = np \quad ; \quad \sigma^2(X) = npq \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

TABLA 1

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	0.10	0.20	p 0.30	0.40	0.50
2	0	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500
	1	.9900	.9600	.9100	.8400	.7500
3	0	.7290	.5120	.3430	2160	.1250
	1	.9720	.8960	.7840	.6480	.5000
	2	.9990	.9920	.9730	.9360	.8750
4	0	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625
	1	.9477	.8192	.6517	.4752	.3125
	2	.9963	.9728	9163	.8208	.6875
	3	.9999	.9984	.9919	.9744	.9375
5	0	.5905	.3277	.1681	.0778	.0312
	1	.9185	.7373	.5282	.3370	.1875
	2	.9914	.9421	.8369	.6826	.5000
	3	.9995	.9933	.9692	.9130	.8125
	4	1.0000	.9997	.9976	.9898	.9688
6	0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156
	1	.8857	.6554	.4202	.2333	.1094

$$P(X \leq x_n) = P(X < x_n) + P(X = x_n); \quad P(X < x_n) = P(X \leq x_{n-1})$$

$$= P(X \leq x_{n-1}) + P(X = x_n)$$

$$P(X = x_n) = P(X \leq x_n) - P(X \leq x_{n-1})$$

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p 0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
6	2	.9842	.9011	.7443	.5443	.3438
	3	.9987	.9830	.9295	.8208	.6562
	4	.9999	.9984	.9891	.9590	.8906
	5	1.0000	.9999	.9993	.9959	.9844
7	0	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078
	1	.8503	.5767	.3294	.1586	.0625
	2	.9743	.8520	.6471	.4199	.2266
	3	.9973	.9667	.8740	.7102	.5000
	4	.9998	.9953	.9712	.9037	.7734
	5	1.0000	.9996	.9962	.9812	.9375
	6	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9922
8	0	.4305	.1678	.0576	.0168	.0039
	1	.8131	.5033	.2553	.1064	.0352
	2	.9619	.7969	.5518	.3154	.1445
	3	.9950	.9437	.8059	.5941	.3633
	4	.9996	.9896	.9420	.8263	.6367
	5	1.0000	.9988	.9887	.9502	.8555
	6	1.0000	.9999	.9987	.9915	.9648
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9961
9	0	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020
	1	.7748	.4362	.1960	.0705	.0195
	2	.9470	.7382	.4628	.2318	.0898
	3	.9917	.9144	.7297	.4826	.2539
	4	.9991	.9804	.9012	.7334	.5000
	5	.9999	.9969	.9747	.9006	.7461
	6	1.0000	.9997	.9957	.9750	.9102
	7	1.0000	1.0000	.9996	.9962	.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9980
10	0	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010
	1	.7361	.3758	.1493	.0464	.0107
	2	.9298	.6778	.3828	.1673	.0547
	3	.9872	.8791	.6496	.3823	.1719
	4	.9984	.9672	.8497	.6331	.3770

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p 0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
10	5	.9999	.9936	.9527	.8338	.6230
	6	1.0000	.9991	.9894	.9452	.8281
	7	1.0000	.9999	.9984	.9877	.9453
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9990
11	0	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005
	1	.6974	.3221	.1130	.0302	.0059
	2	.9104	.6174	.3127	.1189	.0327
	3	.9815	.8389	.5696	.2963	.1133
	4	.9972	.9496	.7897	.5328	.2744
	5	.9997	.9883	.9218	.7535	.5000
	6	1.0000	.9980	.9784	.9006	.7256
	7	1.0000	.9998	.9957	.9707	.8867
	8	1.0000	1.0000	.9994	.9941	.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
12	0	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002
	1	.6590	.2749	.0850	.0196	.0032
	2	.8891	.5583	.2528	.0834	.0193
	3	.9744	.7946	.4925	.2253	.0730
	4	.9957	.9274	.7237	.4382	.1938
	5	.9995	.9806	.8822	.6652	.3872
	6	.9999	.9961	.9614	.8418	.6128
	7	1.0000	.9994	.9905	.9427	.8062
	8	1.0000	.9999	.9983	.9847	.9270
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9972	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
13	0	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001
	1	.6213	.2336	.0637	.0126	.0017
	2	.8661	.5017	.2025	.0579	.0112
	3	.9658	.7473	.4206	.1686	.0461
	4	.9935	.9009	.6543	.3530	.1334
	5	.9991	.9700	.8346	.5744	.2905
	6	.9999	.9930	.9376	.7712	.5000
	7	1.0000	.9988	.9818	.9023	.7095

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	*p* 0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
13	8	1.0000	.9998	.9960	.9679	.8666
	9	1.0000	1.0000	.9993	.9922	.9539
	10	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	0	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001
	1	.5846	.1979	.0475	.0081	.0009
	2	.8416	.4481	.1608	.0398	.0065
	3	.9559	.6982	.3552	.1243	.0287
	4	.9908	.8702	.5842	.2793	.0898
	5	.9985	.9561	.7805	.4859	.2120
	6	.9998	.9884	.9067	.6925	.3953
	7	1.0000	.9976	.9685	.8499	.6047
	8	1.0000	.9996	.9917	.9417	.7880
	9	1.0000	1.0000	.9983	.9825	.9102
	10	1.0000	1.0000	.9998	.9961	.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
15	0	.2059	.0352	.0047	.0005	.0000
	1	.5490	.1671	.0353	.0052	.0005
	2	.8159	.3980	.1268	.0271	.0037
	3	.9444	.6482	.2969	.0905	.0176
	4	.9873	.8358	.5155	.2173	.0592
	5	.9978	.9389	.7216	.4032	.1509
	6	.9997	.9819	.8689	.6098	.3036
	7	1.0000	.9958	.9500	.7869	.5000
	8	1.0000	.9992	.9848	.9050	.6964
	9	1.0000	.9999	.9963	.9662	.8491
	10	1.0000	1.0000	.9993	.9907	.9408
	11	1.0000	1.0000	.9999	.9981	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p: 0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
16	0	.1853	.0281	.0033	.0003	.0000
	1	.5147	.1407	.0261	.0033	.0003
	2	.7892	.3518	.0994	.0183	.0021
	3	.9316	.5981	.2459	.0651	.0106
	4	.9830	.7982	.4499	.1666	.0384
	5	.9967	.9183	.6598	.3288	.1051
	6	.9995	.9733	.8247	.5272	.2272
	7	.9999	.9930	.9256	.7161	.4018
	8	1.0000	.9985	.9743	.8577	.5932
	9	1.0000	.9998	.9929	.9417	.7728
	10	1.0000	1.0000	.9984	.9809	.8949
	11	1.0000	1.0000	.9997	.9951	.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	0	.1668	.0225	.0023	.0002	.0000
	1	.4818	.1182	.0193	.0021	.0001
	2	.7618	.3096	.0774	.0123	.0012
	3	.9174	.5489	.2019	.0464	.0064
	4	.9779	.7582	.3887	.1260	.0245
	5	.9953	.8943	.5968	.2639	.0717
	6	.9992	.9623	.7752	.4478	.1662
	7	.9999	.9891	.8954	.6405	.3145
	8	1.0000	.9974	.9597	.8011	.5000
	9	1.0000	.9995	.9873	.9081	.6855
	10	1.0000	.9999	.9968	.9652	.8338
	11	1.0000	1.0000	.9993	.9894	.9283
	12	1.0000	1.0000	.9999	.9975	.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9936
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p 0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
18	0	.1501	.0180	.0016	.0001	.0000
	1	.4503	.0991	.0142	.0013	.0001
	2	.7338	.2713	.0600	.0082	.0007
	3	.9018	.5010	.1646	.0328	.0038
	4	.9718	.7164	.3327	.0942	.0154
	5	.9936	.8671	.5344	.2088	.0481
	6	.9988	.9487	.7217	.3743	.1189
	7	.9998	.9837	.8593	.5634	.2403
	8	1.0000	.9957	.9404	.7368	.4073
	9	1.0000	.9991	.9790	.8653	.5927
	10	1.0000	.9998	.9939	.9424	.7597
	11	1.0000	1.0000	.9986	.9797	.8811
	12	1.0000	1.0000	.9997	.9942	.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0	.1351	.0144	.0011	.0001	.0000
	1	.4203	.0829	.0104	.0008	.0000
	2	.7054	.2369	.0462	.0055	.0004
	3	.8850	.4551	.1332	.0230	.0022
	4	.9648	.6733	.2822	.0696	.0096
	5	.9914	.8369	.4739	.1629	.0318
	6	.9983	.9324	.6655	.3081	.0835
	7	.9997	.9767	.8180	.4878	.1796
	8	1.0000	.9933	.9161	.6675	.3238
	9	1.0000	.9984	.9674	.8139	.5000
	10	1.0000	.9997	.9895	.9115	.6762
	11	1.0000	1.0000	.9972	.9648	.8204
	12	1.0000	1.0000	.9994	.9884	.9165
	13	1.0000	1.0000	.9999	.9969	.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	0.10	0.20	p 0.30	0.40	0.50
20	0	.1216	.0115	.0008	.0000	.0000
	1	.3917	.0692	.0076	.0005	.0000
	2	.6769	.2061	.0355	.0036	.0002
	3	.8670	.4114	.1071	.0160	.0013
	4	.9568	.6296	.2375	.0510	.0059
	5	.9887	.8042	.4164	.1256	.0207
	6	.9976	.9133	.6080	.2500	.0577
	7	.9996	.9679	.7723	.4159	.1316
	8	.9999	.9900	.8867	.5956	.2517
	9	1.0000	.9974	.9520	.7553	.4119
	10	1.0000	.9994	.9829	.8725	.5881
	11	1.0000	.9999	.9949	.9435	.7483
	12	1.0000	1.0000	.9987	.9790	.8684
	13	1.0000	1.0000	.9997	.9935	.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

EJEMPLO

SI SE LANZA AL AIRE SEIS VECES UNA MONEDA HOMOGENEA,

A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER DOS "CARAS"?

B) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER POR LO MENOS CUATRO "CARAS" $(X \geq 4)$?

C) ¿CUANTO VALEN LA ESPERANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR?

SOLUCION

A) PUESTO QUE LA MONEDA ES HOMOGENEA SE TIENE $p=1/2$ Y $q=1-1/2=1/2$, DONDE p ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR "CARA" (CARA = EXITO) EN UN LANZAMIENTO. POR TANTO

$$P[X = 2] = f_x(2) = \frac{6!}{2!(6-2)!}(\tfrac{1}{2})^2(1/2)^{6-2} = \frac{6!}{2!\ 4!}(1/2)^6 = \frac{15}{64}$$

(DE LA TABLA: $P(X=2)=P(X\leq 3)<P(X\leq 2)= 0.3438-0.1094 = 0.2344$)

B) PARA QUE SE CUMPLA $X \geq 4$ EN SEIS LANZAMIENTOS, SE NECESITA QUE SE OBSERVEN 4,5 o 6 CARAS. PUESTO QUE ESTOS TRES EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE $\{X \geq 4\} = \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$

$$P[X \geq 4] = f_x(4) + f_x(5) + f_x(6)$$

CALCULANDO LOS TRES SUMANDOS COMO EN LA PREGUNTA ANTERIOR, RESULTA

$$P[X \geq 4] = \frac{6!}{4!\ 2!}(1/2)^4(1/2)^{6-4} + \frac{6!}{5!\ 1!}(1/2)^5(1/2)^{6-5} + \frac{6!}{6!\ 0!}(1/2)^6(1/2)^{6-6}$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} = 0.3438$$

(DE LA TABLA: $P(x \geq 4) = 1-P(x \leq 3) = 1-0.6562 = 0.3438$)

C) $E[X] = np = 6(1/2) = 3$

$$\sigma^2[X] = npq = 6(1/2)(1/2) = 3/2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{3/2} = 1.22$$

EJEMPLO

SI CON BASE EN LA EXPERIENCIA DE MUCHO TIEMPO SE SABE QUE UNA MAQUINA IMPRIME COLORES DEFECTUOSOS EN UN 5 POR CIENTO DE LAS VECES, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 10 IMPRESIONES SE OBTENGA:

a. NINGUNA DEFECTUOSA
b. UNA DEFECTUOSA
c. MAS DE UNA DEFECTUOSA

ASIMISMO, CALCULAR LA MEDIA Y LA DESVIACION ESTANDAR DEL NUMERO DE DEFECTUOSAS.

Solución

SEA EXITO = IMPRESION DEFETUOSA

EN TAL CASO $p = 0.05$ Y $q = 1-0.05 = 0.95$

a. NINGUNA DEFECTUOSA ES LO MISMO QUE $X = 0$; ENTONCES $n-x = 10-0=10$ Y:

$$P(x=0) = f_x(0) = \frac{10!}{0!\ 10!}(0.05)^0(0.95)^{10}$$

$$= \frac{10!}{10!}(0.95)^{10} = 0.599 = 59.9\%$$

b. UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO QUE $X = 1$; ENTONCES $n-x = 10-1 = 9$ Y:

$$P(x = 1) = f_x(1) = \frac{10!}{1!\ 9!}(0.05)^1(0.95)^9$$

$$= \frac{10 \times 9!}{9!}(0.05)(0.6302) = 0.315$$

c. MAS DE UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO QUE $x > 1$

$$P(X > 1) = 1-P(X \leq 1) = 1-[P(x = 0)+P(x = 1)]$$

$$= 1-(0.599+0.315) = 0.086$$

$$E(x) = np = 10 \times 0.05 = 0.5$$

$$\sigma^2(x) = npq = 10 \times 0.05 \times 0.95 = 0.0475$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0.0475} = 0.2179$$

EJEMPLO

RESOLVER AHORA EL INCISO b. DEL EJEMPLO ANTERIOR, PARA EL CASO EN QUE $p = 0.1$

$$P(x = 1) = \frac{10!}{1!\ 9!}(0.10)^1(0.90)^9 = 0.3874 = 38.74\%$$

USANDO LAS TABLAS DE LA DISTRIBUCION BINOMINAL:

$$\{X = x\} \cup \{X \leq x-1\} = \{X \leq x\}$$

POR LO TANTO $P\{X = x\} + P\{X \leq x-1\} = P\{X \leq x\}$

Y $P\{X = x\} = P\{X \leq x\} - P\{X \leq x-1\}$

EN ESTE EJEMPLO $x = 1$ y $x-1=0$, POR LO QUE

$$P(X=1) = P(X\leq 1) - P(X \leq 0)$$

$$= 0.7361 - 0.3487 = 0.3874$$

EJERCICIO

EN UNA ZONA RURAL SE SABE QUE EL 20% DE LA POBLACION PADECE CIERTA ENFERMEDAD GASTROINTESTINAL. SI SE EXTRAE UNA MUESTRA ALEATORIA DE 10 SUJETOS DE ESA POBLACION, CALCULAR LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

a. QUE HAYA 2 ENFERMOS

b. QUE HAYA MAS DE 2 ENFERMOS

c. QUE HAYA 1 O MENOS ENFERMOS

d. QUE HAYA ENTRE 2 Y 4 ENFERMOS, INCLUSIVE

SOLUCION

SEA EXITO = ENFERMO. EN TAL CASO $p = 0.2$ Y $q = 1 - 0.2 = 0.8$. LA VARIABLE ALEATORIA DE INTERES ES X = NUMERO DE EXITOS (ENFERMOS) EN 100 REALIZACIONES DEL EXPERIMENTO ($n = 10$). DADO QUE LAS OBSERVACIONES SON INDEPENDIENTES, POR TRATARSE DE UNA MUESTRA ALEATORIA, LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE X SERA LA BINOMIAL:

$$f_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \quad , \; n = 0, 1, 2, \ldots, n$$

a. $P(X = 2) = f_X(2) = \frac{10!}{2!(10-2)!}(0.2)^2 \; (0.8)^{10-2}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8!}{2! \; 8!} (0.2)^2 (0.8)^8 = 45 \times 0.04 \times 0.1678$$

$$= 0.3020$$

CON LAS TABLAS $P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0.6778 - 0.3758 = 0.302$

b. INTERESA $P(X > 2) = G_X(2) = 1 - F_X(2)$

$F_X(2) = f_X(2) + f_X(1) + f_X(0)$

$f_X(1) = \frac{10!}{1!\ 9!}(0.2)^1\ (0.8)^9 = 10 \times 0.2 \times 0.1342 = 0.2684$

CON LAS TABLAS: $P(X = 1) = 0.3758 - 0.1074 = 0.2684$

$f_X(0) = \frac{10!}{0!\ 10!}(0.20)^0\ (0.8)^{10} = 0.1074$

$F_X(2) = 0.3020 + 0.2684 + 0.1074 = 0.6778$

$G_X(2) = 1 - 0.6778 = 0.3222$

c. $P(X \leq 1) = F_X(1) = f_X(1) + f_X(0) = 0.2684 + 0.1074 = 0.3758$

d. $P(2 \leq X \leq 4) = f_X(2) + f_X(3) + f_X(4)$

$f_X(3) = \frac{10!}{3!\ 7!}(0.2)^3\ (0.8)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}(0.0080)(0.2097) = 0.2013$

CON LAS TABLAS $f_X(3) = F_X(3) - F_X(2) = 0.8791 - 0.6778 = 0.2013$

DE IGUAL MANERA $f_X(4) = F_X(4) = F_X(3) = 0.9672 - 0.8791 = 0.0881$

$P(2 \leq X \leq 4) = 0.3020 + 0.2013 + 0.0881 = 0.5914$

CON LAS TABLAS: $\{2 \leq X \leq 4\} = \{2, 3, 4\}$

$P(2 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(1) = 0.9672 - 0.3758 = 0.5914$

DISTRIBUCION GEOMETRICA

SEA p LA PROBABILIDAD DE EXITO EN UN EXPERIMENTO. SI EL EXPERIMENTO ES CON REEMPLAZO Y SE REPITE SUCESIVAMENTE HASTA QUE SE OBSERVA UN EXITO, SE TENDRA LA VARIABLE ALEATORIA X=NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMIENTO HASTA QUE SE OBSERVA EL PRIMER EXITO. OBTENGAMOS LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X $(S = \{1,2,3\ldots,\infty\})$.

EL PRIMER EXITO OCURRIRA EN EL EXPERIMENTO NUMERO x SI, Y SOLO SI, EN LOS x-1 ANTERIORES HUBO PUROS FRACASOS. LA PROBABILIDAD DE ESTE EVENTO, DADO QUE LOS EXPERIMIENTOS SON INDEPENDIENTES, ES

$$f_X(x) = (1-p)^{x-1}p$$

ESTA FUNCION SE DENOMINA DISTRIBUCION GEOMETRICA. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \sum_{x=1}^{n} p(1-p)^{x-1} = 1 - (1-p)^n$$

Y QUE

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p = 1/p$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=1}^{\infty} (x-\tfrac{1}{p})^2(1-p)^{x-1}p = (1-p)/p^2$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN TORNILLO DEFECTUOSO POR PRIMERA VEZ EN LA SEXTA EXTRACCION, SI EL PORCENTAJE DE DEFECTUOSOS DEL LOTE DEL CUAL SE MUESTREA ES DE 5 POR CIENTO?

$$P(X=6) = f_X(6) = (1-0.05)^5 \times 0.05 = 0.95^5 \times 0.05 = 0.03869$$

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

CUANDO SE TIENE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CUYO ESPACIO DE EVENTOS TIENE SOLO DOS ELEMENTOS, DIGAMOS S={EXITO, FRACASO}, Y SE REALIZA UN MUESTREO *SIN REEMPLAZO*, ENTONCES LOS RESULTADOS DE CADA EXPERIMENTO *NO SON INDEPENDIENTES NI LA PROBABILIDAD DE EXITO PERMANECE CONSTANTE*, COMO EN LA DISTRIBUCION BINOMIAL, POR LO QUE ESTA ULTIMA NO ES APLICABLE.

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO CONSISTENTE EN EXTRAER, SIN REEMPLAZO, ELEMENTOS DE UN LOTE QUE TIENE N OBJETOS DE LOS CUALES M SON "EXITOS". EL NUMERO DE ELEMENTOS QUE TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$N(S) = {}_{N}C_{n}$$

EL NUMERO, N({X=x}), DE MANERAS POSIBLES E IGUALMENTE PROBABLES DE OBTENER x EXITOS ES:

EN EL LOTE	EN LA MUESTRA
N ELEMENTOS	n ELEMENTOS
$\overbrace{\underbrace{o\ o\ o \ldots o\ o}_{\text{M EXITOS}}\ \underbrace{o\ o\ o \ldots o\ o}_{\text{(N-M) FRACASOS}}}$	$\overbrace{\underbrace{o\ o\ o \ldots o\ o}\ \underbrace{o\ o \ldots o}}$
	x EXITOS QUE SE PUEDEN ELEGIR DE ${}_{M}C_{x}$ MANERAS | (n-x) FRACASOS QUE SE PUEDEN ELEGIR DE ${}_{N-M}C_{n-x}$ MANERAS

CADA ELECCION POSIBLE DE x EXITOS SE COMBINA CON CADA ELECCION POSIBLE DE (n-x) FRACASOS; POR LO TANTO, EL NUMERO TOTAL DE MANERAS DE OBTENER x EXITOS EN n EXTRACCIONES SIN REEMPLAZO ES

$$N(\{X=x\}) = ({}_{M}C_{x})({}_{N-M}C_{n-x})$$

POR LO TANTO

$$P(\{X=x\}) = f_X(x) = \frac{({}_MC_x)({}_{N-M}C_{n-x})}{{}_NC_n} = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x=0,1,\ldots,n$$

EN DONDE $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$, $\binom{N-M}{n-x} = \frac{(N-M)!}{(n-x)!(N-M-n+x)!}$

Y $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

QUE SE CONOCE COMO *DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA*. LA MEDIA Y LA VARIANCIA DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = nM/N = np \text{ , si } p = M/N$$

Y

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=0}^{n} \left(x-\frac{nM}{N}\right)^2 \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} = p(1-p)\ \frac{n(N-n)}{N-1}$$

RESPECTIVAMENTE.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD, SE TIENE UN LOTE DE 100 TRANSFORMADORES DE CORRIENTE ELECTRICA, DE LOS CUALES 40 SON DEFECTUOSOS (NO CUMPLEN LAS NORMAS DE FABRICACION). ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UNO DEFECTUOSO DE TRES SELECCIONADOS AL AZAR SIN REEMPLAZO?

$$P[X=1] = \frac{\binom{40}{1}\binom{100-40}{3-1}}{\binom{100}{3}} = \frac{\binom{40}{1}\binom{60}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$= \frac{\frac{40!}{39! \times 1!} \times \frac{60!}{58! \times 2!}}{\frac{100!}{97! \times 3!}} = 0.438$$

APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION HEPERGEOMETRICA MEDIANTE LA BINOMIAL

CUANDO N ES GRANDE Y n PEQUEÑO ($N \geq 10n$), LA DISTRIBUCION BINOMIAL SE PUEDE USAR *COMO APROXIMACION* DE LA HIPERGEOMETRICA. DE ESTA APROXIMACION SE HECHA MANO CUANDO LOS CALCULOS CON ESTA ULTIMA RESULTAN TEDIOSOS.

EN EL CASO DEL EJEMPLO ANTERIOR, SI SE USA LA DENSIDAD BINOMIAL SE OBTIENE, CON $p=40/100 = 0.40$ Y $n=3$

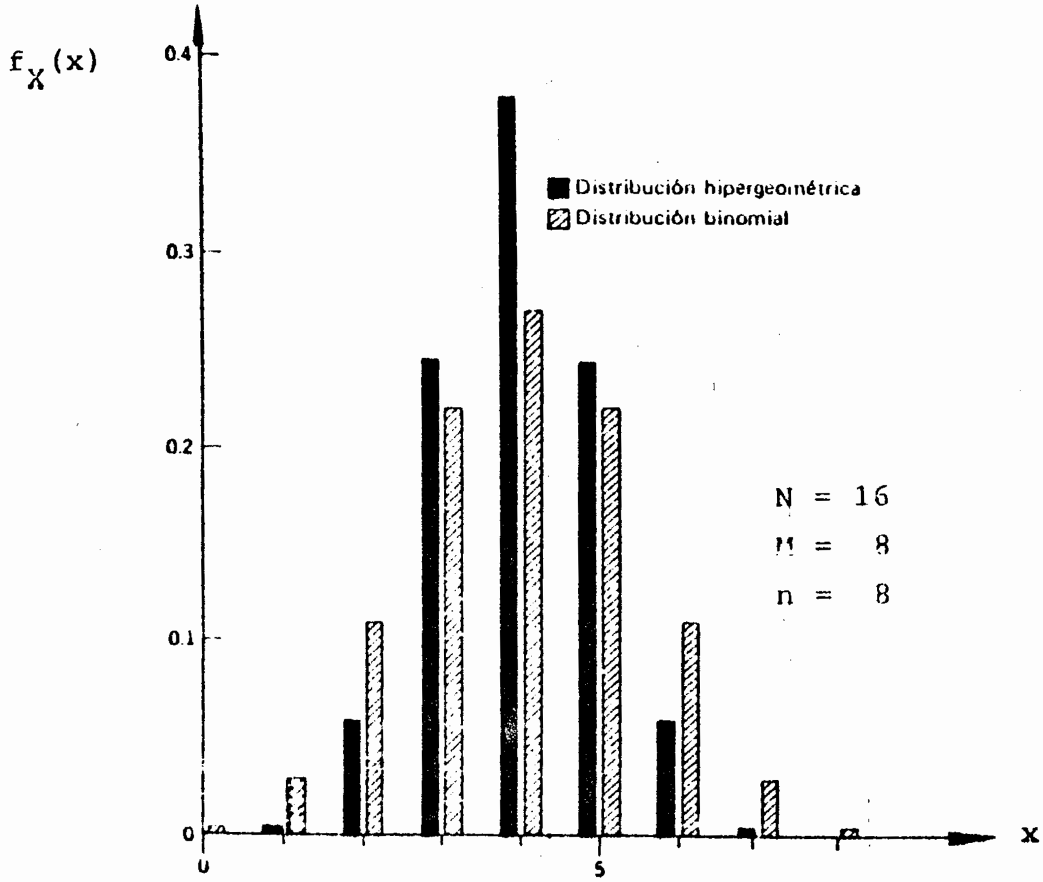
$$P[X=1] = \frac{3!}{1!\ 2!} (0.40)^1 (0.60)^2 = 0.432$$

FORMULA DE STIRLING

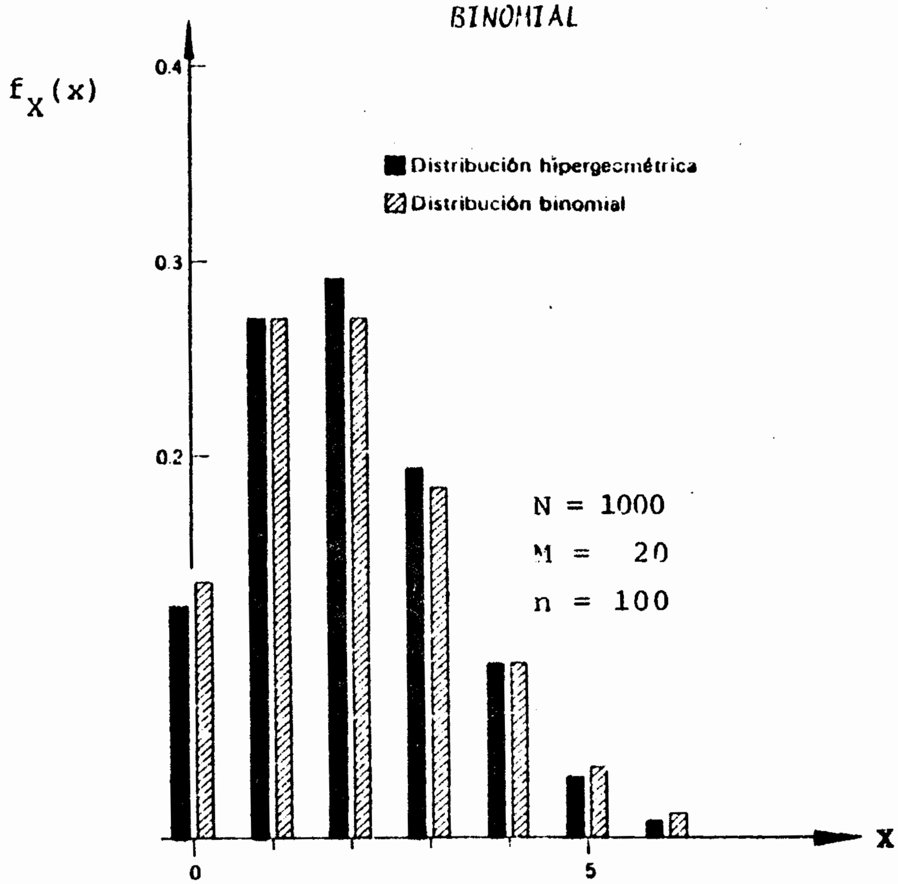
$$N! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad ; \quad (e = 2.718\ldots)$$

Error = 2% SI n = 4

Error = 0.8% SI n = 10



COMPARACION DE LAS DISTRIBUCIONES HIPERGEOMETRICA Y BINOMIAL



DISTRIBUCION DE POISSON

UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, X, DE LA FORMA

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

SE LLAMA DISTRIBUCION DE POISSON; EN ESTA ECUACION λ ES UNA CONSTANTE. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA MEDIA Y LA VARIANCIA PARA ESTA DISTRIBUCION QUEDAN DADAS POR

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

$$\sigma^2(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

UNA VEZ CONOCIDA λ, CON ESTA DISTRIBUCION SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE UN EVENTO OCURRA x VECES.

ES POSIBLE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE POISSON PUEDE EMPLEARSE COMO UNA PROXIMACION DE LA DE BERNOULLI, TOMANDO $\lambda = np$, CUANDO n ES GRANDE Y p PEQUEÑA, PERO DE TAL MANERA QUE $npq > 1$. AL RESPECTO, SI $n=20$ y $p=0.05$, ENTONCES EL ERROR QUE SE TIENE AL USAR DICHA APROXIMACION ES MENOR DE 3 POR CIENTO PARA VALORES DE X MENORES DE 3; PARA $X=4$ y $X=5$ LOS ERRORES RESPECTIVOS SON 15 Y 41 POR CIENTO, DEBIDO A QUE NO SE CUMPLE CON LA CONDICION DE QUE npq SEA MAYOR DE UNO, YA QUE $npq = 20 \times 0.05 \times 0.95 = 0.95$.

TABLA 2

FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

x	λ .50	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	.607	.368	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000
1	.910	.736	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001
2	.986	.920	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006
3	.998	.981	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021
4	1.000	.996	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055
5	1.000	.999	.983	.961	.785	.616	.446	.301	.191	.116
6	1.000	1.000	.995	.966	.889	.762	.605	.450	.313	.207
7	1.000	1.000	.999	988	.949	.867	.744	.599	.453	.324
8	1.000	1.000	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456
9	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706
11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.980	.947	.888	.803
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.991	.973	.936	.876
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.987	.966	.926
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.983	.959
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.992	.978
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.995
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

TABLA 2 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

x	λ 10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
2	.003	.001	.001	.000	.000	.000
3	.010	.005	.002	.001	.000	.000
4	.029	.015	.008	.004	.002	.001
5	.067	.038	.020	.011	.006	.003
6	.130	.079	.046	.026	.014	.008
7	.220	.143	.090	.054	.032	.018
8	.333	.232	.155	.100	.062	.037
9	.458	.341	.242	.166	.109	.070
10	.583	.460	.347	.252	.176	.118
11	.697	.579	.462	.353	.260	.185
12	.792	.689	.576	.463	.358	.268
13	.864	.781	.682	.573	.464	.363
14	.917	.854	.772	.675	.570	.466
15	.951	.907	.844	.764	.669	.568
16	.973	.944	.899	.835	.756	.664
17	.986	.968	.937	.890	.827	.749
18	.993	.982	.963	.930	.883	.819
19	.997	.991	.979	.957	.923	.875
20	.998	.995	.988	.975	.952	.917
21	.999	.998	.994	.986	.971	.947
22	1.000	.999	.997	.992	.983	.967
23	1.000	1.000	.999	.996	.991	.981
24	1.000	1.000	.999	.998	.995	.989
25	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.994
26	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997
27	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE UNA DETERMINADA FUERZA DE TENSION ES DE 0.001, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN A) TRES, B) MAS DE DOS?

CONSIDERANDO QUE npq = 1.9 > 1, SE PUEDE USAR LA DISTRIBUCION DE POISSON COMO APROXIMACION DE LA BINOMIAL CON $\lambda = 2000 \times 0.001 = 2$:

a)
$$P[X = 3] = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

$$P[X = 3] = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.1804$$

CON LAS TABLAS: $P[X = 3] = 0.857 - 0.677 = 0.18$.

EN ESTE CASO LA DISTRIBUCION BIONOMIAL DA COMO RESULTADO

$$P[X = 3] = \frac{2000!}{3! \times 1997!} (0.001)^3 (0.999)^{1997} = 0.184$$

b)
$$P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - F_X(2)$$
$$= 1 - \{P[X = 0] +$$
$$+ P[X = 1] + P[X = 2]\}$$
$$= 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} =$$
$$= 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

CON LAS TABLAS: $P[X > 2] = 1 - 0.677 = 0.323$.

EJEMPLO

UNA COMPAÑIA ASEGURADORA DESPUES DE MUCHOS AÑOS DE EXPERIENCIA HA HA ESTIMADO QUE EL 0.004% DE LA POBLACION FALLECE ANULAMENTE POR ACCIDENTE AUTOMOVILISTICO. SI ESTA COMPAÑIA TIENE 40,000 ASEGURADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE 2 DE ELLOS MUERAN EN UN AÑO POR ESTE TIPO DE ACCIDENTE?

SEA X EL NUMERO DE PERSONAS QUE MUEREN ANUALMENTE DE ENTRE LOS ASEGURADOS, POR ACCIDENTE, LA MEDIA DE X ES

$$E[X] = 0.00004 \times 40,000 = 1.6 = \lambda$$

ADEMAS, TOMANDO EN CUENTA QUE $npq>1$, SE PUEDE USAR SIN GRAN ERROR LA DISTRIBUCION DE POISSON:

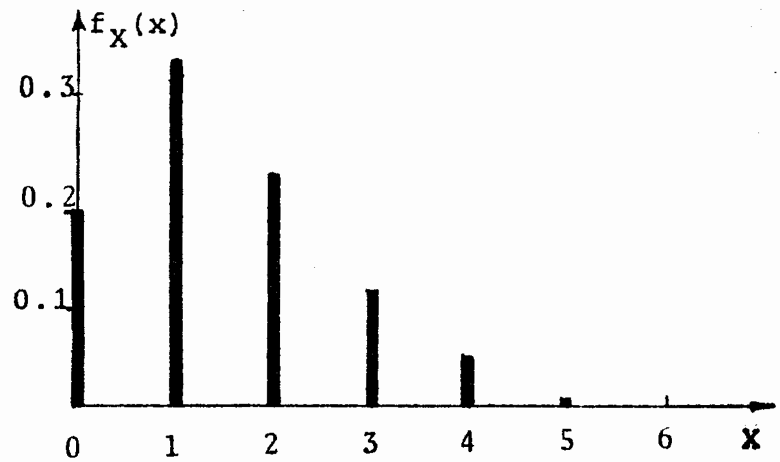
$$P[X=x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1.6)^x e^{-1.6}}{x!} \quad ; \; x=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

POR LO QUE

$$P\,[X=2] = \frac{(1.6)^2 e^{-1.6}}{2!} = \frac{0.2019 \times 2.56}{2} = 0.26$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA ESTA VARIABLE ALEATORIA ES:

x	0	1	2	3	4	5	6	
$f_X(x)$	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.005	...



EJEMPLO

EN LA AMPLIACION DEL CARRIL PARA DAR VUELTA A LA IZQUIERDA EN UNA AVENIDA, SOLO HAY CAPACIDAD PARA 3 AUTOS COMO MAXIMO ESPERANDO LA FLECHA LUMINOSA DEL SEMAFORO. EN UN ESTUDIO ESTADISTICO DEL TRANSITO EN ESE LUGAR SE ENCONTRO QUE EN CADA CICLO DE LUCES DEL SEMAFORO HAY EN PROMEDIO 6 AUTOS QUE VAN A DAR VUELTA. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN CICLO DEL SEMAFORO, TOMADO AL AZAR, SE CONGESTIONE EL TRANSITO POR EXCEDERSE LA CAPACIDAD DEL CARRIL?

$$G(3) = P[X>3] = ?$$

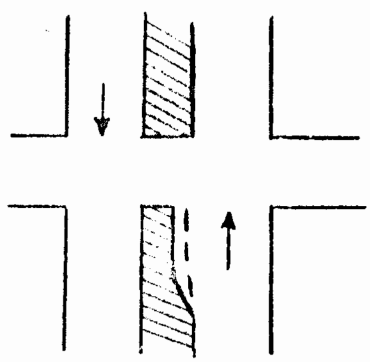
SI $A=\{X>3\}$, $\bar{A}=\{X\leq 3\}$

$P(\bar{A}) = 1-P(A)$ O $P(A) = 1-P(\bar{A})$. CON $\lambda=6$,

$$P(\bar{A}) = P[X\leq 3] = \sum_{x=0}^{x=3} f_X(x) = \sum_{x=0}^{x=3} \frac{e^{-6}6^x}{x!}$$

$$P(\bar{A}) = e^{-6}\left(1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{6}\right) = 61e^{-6} = 0.151$$

$$P[A] = P[X>3] = 1-0.151 = 0.849$$



DE LAS TABLAS:

$P[X>3] = 1-P[X\leq 3] = 1-0.151=0.849$

PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON

CON BASE EN LA DISTRIBUCION DE POISSON SE PUEDE DEDUCIR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DEL NUMERO DE OCURRENCIAS DE UN EVENTO DURANTE UN PERIODO t QUEDA DADA POR

$$f_X(x) = P[X = x \text{ EN UN LAPSO } t]$$

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

DONDE

λ = NUMERO MEDIO DE OCURRENCIAS POR UNIDAD DE TIEMPO.

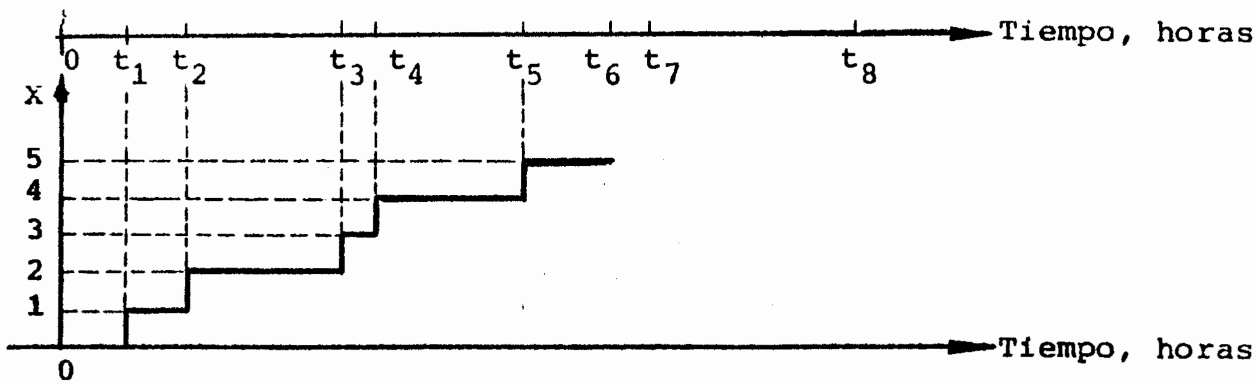
LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE ESTE PROCESO, PARA UN LAPSO t, SON

$$E(X) = \lambda t$$

$$\sigma^2(X) = \lambda t$$

PARA QUE ESTA DISTRIBUCION SE APLIQUE SE REQUIERE QUE EL EVENTO OCURRA CADA VEZ DE MANERA INDEPENDIENTE DE LAS OCURRENCIAS PREVIAS, Y QUE λ SEA CONSTANTE. A λ SE LE CONOCE COMO INTENSIDAD DEL PROCESO; A SU RECIPROCO, $1/\lambda$ SE LE DENOMINA *PERIODO DE RECURRENCIA.*

t_i = tiempo de ocurrencia de iésimo evento



EJEMPLO

EN UNA CENTRAL DE COMUNICACIONES SE TIENE UNA DEMANDA MEDIA DEL SERVICIO DE 8 LLAMADAS CADA MINUTO. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN 2 MINUTOS NO SE SOLICITE EL SERVICIO, DE QUE SE SOLICITE SOLO UNA VEZ, Y MAS DE UNA VEZ.

$$f_X(0) = P[X=0] = \frac{(8x2)^0 \; e^{-8x2}}{0!} = e^{-16} = 0.00004$$

$$f_X(1) = \frac{16^1 e^{-16}}{1!} = 0.00064$$

$$P[X>1] = 1 - (0.00004 + 0.00064) = 0.99932$$

EJEMPLO

MEDIANTE UN ESTUDIO ESTADISTICO SOBRE LA OCURRENCIA DE MAREMOTOS EN LA COSTA MEXICANA DEL OCEANO PACIFICO SE ESTIMO QUE UNA OLA DE 4m DE ALTURA O MAYOR SOBRE EL NIVEL DE LA MAREA TIENE UN PERIODO DE RECURRENCIA DE 100 AÑOS. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN LOS PROXIMOS 10, 50 y 100 AÑOS NO OCURRA NINGUN MAREMOTO EN DICHA REGION CUYA OLA MAXIMA EXCEDE DE 4m, SUPONIENDO QUE LA OCURRENCIA DE LOS MAREMOTOS SE PUEDE MODELAR MEDIANTE UN PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON.

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA X=NUMERO DE MAREMOTOS CUYA OLA MAXIMA ES MAYOR DE 4m, CON $\lambda=1/100=0.01$ ES

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{(0.01t)^x\ e^{-0.01t}}{x!}$$

POR LO TANTO, PARA t=10, 50 Y 100 AÑOS, SE TIENE, RESPECTIVAMENTE, QUE:

a) $f_X(0) = \dfrac{(0.01x10)^0 e^{-0.01x10}}{0!} = e^{-0.1} = 0.905$

b) $f_X(0) = \dfrac{(0.01x50)^0 e^{-0.01x50}}{0!} = e^{-0.5} = 0.607$

c) $f_X(0) = \dfrac{(0.01x100)^0 e^{-0.01x100}}{0!} = e^{-1} = 0.368$

PARA ESTE MISMO PROBLEMA, LAS PROBABILIDADES DE QUE OCURRA AL MENOS UN MAREMOTO CON OLA MAXIMA MAYOR DE 4m SON, RESPECTIVAMENTE,

a) $P[X \geq 1] = 1 - f_X(0) = 1 - 0.905 = 0.095$

b) $P[X \geq 1] = 1 - 0.607 = 0.393$

c) $P[X \geq 1] = 1 - 0.368 = 0.632$

EJEMPLO

SE SABE QUE UNA MAQUINA QUE PRODUCE PAPEL PARA DIBUJO, LO HACE CON UN DEFECTO POR CADA 100 M FABRICADOS

a. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER CERO DEFECTOS EN UN PLIEGO DE 20 M?

$\lambda = 1/100 = 0.01$ DEFECTOS /METRO

$$P(X = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{(0.01x20)^0 e^{-0.01x20}}{0!} =$$

$$\frac{(0.2)^0 e^{-0.2}}{0!} = 0.820$$

(EN ESTE CASO t = LONGITUD)

b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UN DEFECTO EN 20m?

$$P(X = 1) = \frac{(0.2)^1 e^{-0.2}}{1!} = 0.164$$

c. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UNO O CERO DEFECTOS?

$P(0 \leq x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.820 + 0.164 = 0.98$

d. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER MAS DE UN DEFECTO?

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.984 = 0.016$

EJEMPLO

SE SABE QUE EN CIERTA ZONA GEOGRAFICA SE LOCALIZA UNA ESPECIE ANIMAL RARA A RAZON DE 2 EJEMPLARES POR 100 KM^2. SI SE TOMA UNA FOTOGRAFIA AEREA QUE ABARQUE 120 KM^2; a) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR 5 ANIMALES?

$$\text{CON } \lambda = \frac{2}{100} = 0.02 \text{ ANIMALES}/KM^2$$

$$P(X = 5) = \frac{(\lambda t)^5 e^{-\lambda t}}{X!} = \frac{(0.02 \times 120)^5 e^{-0.02 \times 120}}{5!} =$$

$$\frac{2.4^5 e^{-2.4}}{5!} = \frac{79.626}{120 \times 10.943} = 0.061$$

(EN ESTE CASO t= AREA)

b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR UN ANIMAL?

$$P(X = 1) = \frac{2.4^1 e^{-2.4}}{1!} = 0.219$$

c. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE NO LOCALIZAR NINGUNO?

$$P(X = 0) = \frac{(2.4)^0 e^{-2.4}}{0!} = 0.091$$

d. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR MAS DE UNO?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (0.219 + 0.091) = 0.690$$

TIEMPOS DE INTERARRIBO

CUANDO UN EVENTO OCURRE SIGUIENDO UN PROCESO DE POISSON, LA VARIABLE ALEATORIA "TIEMPO ENTRE UNA OCURRENCIA CUALQUIERA Y LA SIGUIENTE" TIENE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL.

EJEMPLO

SI LOS MAREMOTOS QUE SE REGISTRAN EN UN PUNTO DE LA COSTA MEXICANA DEL OCEANO PACIFICO OCURREN SIGUIENDO UN PROCESO DE POISSON CON $\lambda = 0.01$, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE ENTRE UN MAREMOTO Y EL SIGUIENTE TRANSCURRA UN TIEMPO

a. MAYOR DE 100 AÑOS
b. ENTRE 50 Y 100 AÑOS

a. $$P(t > 100) = \int_{100}^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda t} dt = e^{-0.01 \times 100} = e^{-1} = 36.79\%$$

b. $$P(50 \leq t \leq 100) = \int_{50}^{100} 0.01\, e^{-0.01\, t} dt = F(100) - F(50)$$

$$= (1 - e^{-0.01 \times 100}) - (1 - e^{-0.01 \times 50}) = e^{-0.5} - e^{-1} =$$

$$0.6065 - 0.3679 = 0,2386$$

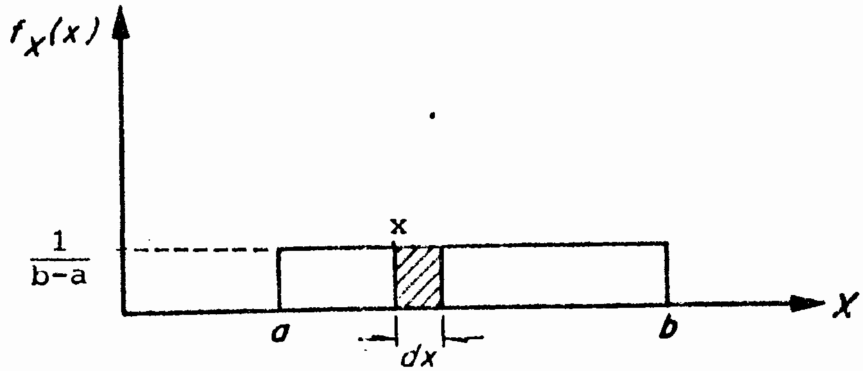
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

DISTRIBUCION UNIFORME

SE DICE QUE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X, TIENE *DISTRIBUCION UNIFORME* ENTRE X = a Y X = b(b>a) SI

$$f_X(x) = \text{CONSTANTE} = \frac{1}{b-a} \quad ; \quad a \leq X \leq b$$

LO QUE SIGNIFICA QUE LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN VALOR ENTRE x Y x + dx ES LA MISMA PARA CUALQUIER x COMPRENDIDA ENTRE a Y b. LA GRAFICA DE DICHA DISTRIBUCION ES



Distribución uniforme de una variable aleatoria continua

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION UNIFORME SE CALCULAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = (b+a)/2$$

$$\sigma^2(X) = \int_a^b (x-E[X])^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx + \int_a^b \frac{(E[X])^2}{b-a}\, dx -$$

$$- \int_a^b \frac{2xE[X]}{a-b}\, dx$$

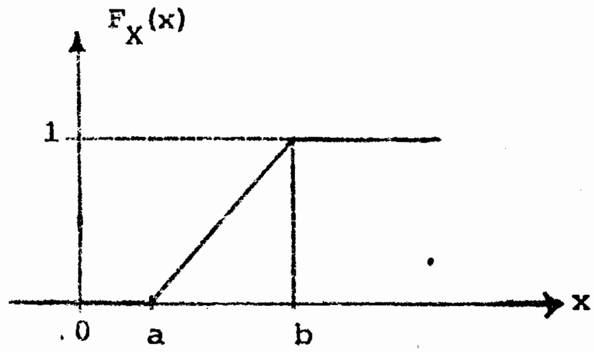
$$= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b + \left[\frac{(E[X])^2}{b-a}\, x\right]_a^b - \left[\frac{2\, E[X]}{b-a}\, \frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} + (E[X])^2 - E[X]\,(b+a) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \int_a^x f_X(u)\,du = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,du = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

LA GRAFICA DE ESTA FUNCION ES UNA LINEA RECTA DE a A b:



EJEMPLO

¿CUANTO VALE LA PROBABILIDAD DE QUE X SEA MENOR QUE 1/3, SI ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION UNIFORME EN EL INTERVALO 0-1?

$$F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{\frac{1}{3}-a}{b-a}$$

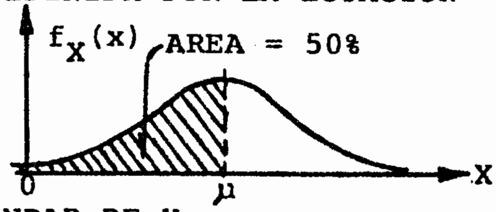
PARA a = 0 Y b = 1 NOS QUEDA

$$F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}-0}{1-0} = \frac{1}{3}$$

DISTRIBUCION NORMAL

UNA DE LAS DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS MAS UTIL ES LA *DISTRIBUCION NORMAL* O DE *GAUSS*, DEFINIDA POR LA ECUACION

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



DONDE μ ES LA MEDIA Y σ LA DESVIACION ESTANDAR DE X.

SI SE HACE LA TRANSFORMACION

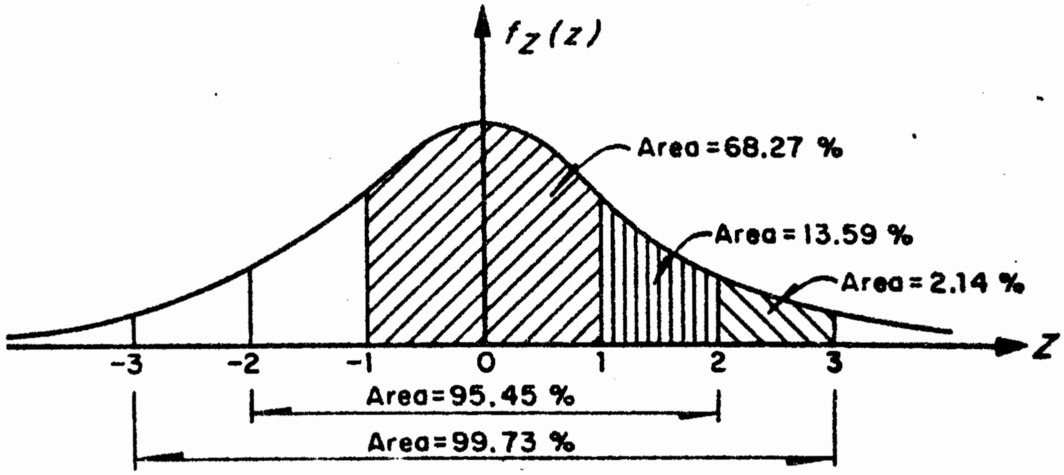
$$Z = (X-\mu)/\sigma \quad (E(Z) = E\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] = \frac{E(x)-\mu}{\sigma} = 0; \quad \sigma^2(Z) \quad \frac{\sigma^2(x)}{\sigma^2} = 1)$$

ENTONCES LA ECUACION ANTERIOR SE REDUCE A LA LLAMADA *FORMA ESTANDAR*, CUYA ECUACION ES

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \; ; \; F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

EN ESTE CASO LA VARIABLE ALEATORIA Z TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON *MEDIA IGUAL A CERO Y VARIANCIA IGUAL A UNO.*

EXISTEN TABLAS PARA CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ASOCIADA A UNA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRA LA FORMA DE CAMPANA DE ESTA DISTRIBUCION, OBSERVANDOSE LA SIMETRIA RESPECTO A $Z=E(Z)=0$ Y QUE ES ASINTOTICA AL EJE Z.



Distribución normal de una variable aleatoria continua

LA UTILIDAD DE LA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR RADICA EN QUE

$$P[x_1 \le X \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = P[z_1 \le Z \le z_2] = \int_{z_1}^{z_2} f_Z(z)\,dz$$

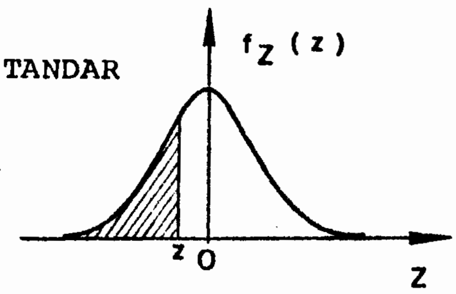
DONDE

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad Y \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

TABLA 3

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

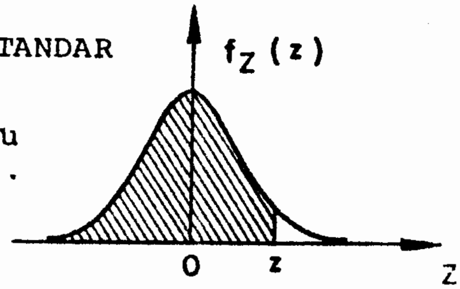


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.	.0013									
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0227	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1921	.1894	.1867
−.7	.2420	.2389	.2358	.2326	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

TABLA 3 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	.9987									

EJEMPLO

COMO RESULTADO DE UNA LARGA SERIE DE EXPERIMENTOS PROBANDO A COMPRESION SIMPLE CILINDROS DE CONCRETO, SE HA ESTIMADO QUE LA ESPERANZA DE LA RESISTENCIA ES DE 240 KG/CM^2 Y LA DESVIACION ESTANDAR DE 30 KG/CM^2.

A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE OTRO CILINDRO TOMADO AL AZAR RESISTA MENOS DE 240 KG/CM^2?

B. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE RESISTA MAS DE 330 KG/CM^2?

C) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SU RESISTENCIA ESTE EN EL INTERVALO DE 210 A 240 KG/CM^2?

SUPONGASE QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ES NORMAL.

SOLUCION

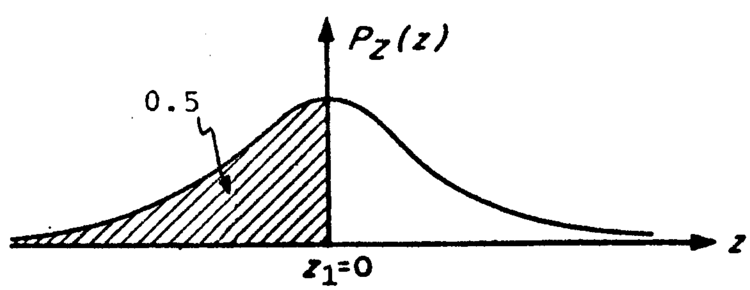
A) PARA EMPLEAR LAS TABLAS DE DISTRIBUCION NORMAL ES NECESARIO ESTANDARIZAR LA VARIABLE X, EMPLEANDO μ=240 Y σ=30, CON x_1=240:

$$z_1 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

RECURRIENDO A LA TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL SE OBTIENE

$$P[X \leq 240] = P[Z \leq 0] = 0.5$$

O SEA, LA PROBABILIDAD QUE CORRESPONDE AL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:



Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

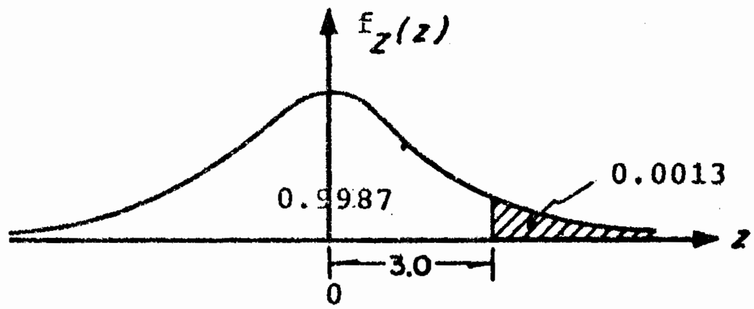
B) EL VALOR ESTANDARIZADO DE LA VARIABLE, PARA x_1=330 KG/CM^2, ES

$$z_1 = \frac{330 - 240}{30} = 3$$

POR LO QUE

$$P[X \geq 330] = P[Z \geq 3] = 1-0.9987 = 0.0013$$

QUE ES EL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:



Distribución normal correspondiente al inciso b del ejemplo

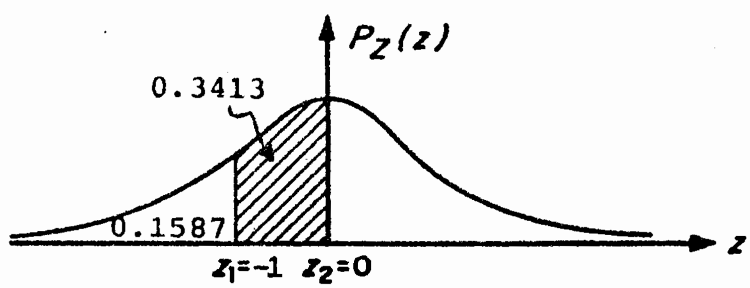
C) LOS VALORES ESTANDARIZADOS DE LA VARIABLE, PARA x_1=210 Y x_2=240 SON:

$$z_1 = \frac{210 - 240}{30} = -1$$

$$z_2 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

POR LO QUE

$$P[210 \leq X \leq 240] = P[-1 \leq Z \leq 0] = 0.3413$$



Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

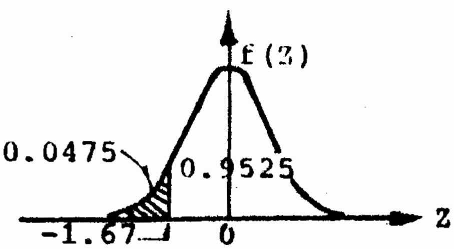
EJEMPLO

SE HA ENCONTRADO QUE LA VARIABLE ALEATORIA "ERROR EN LA MEDICION DE LAS DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS" TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA CERO. SI SE SABE QUE EL TAMAÑO VERDADERO DE UNA LINEA ES DE 2 M Y QUE LA VARIANCIA DE SUMEDICION ES $9CM^2$, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN UNA MEDICION LA LONGITUD QUE SE REGISTRE SEA

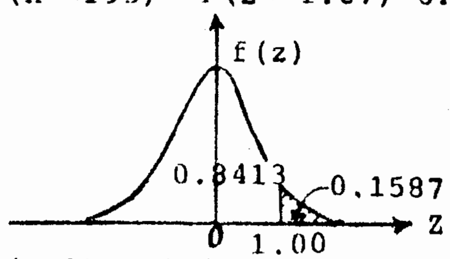
a. MENOR DE 195 CM
b. MAYOR DE 203 CM
c. COMPRENDIDO ENTRE 198 Y 202 CM.

a. $P(X < 195) = ?$ CON $\mu = 200$ CM Y $\sigma = \sqrt{9} = 3$ CM

$$Z = \frac{195-200}{3} = \frac{-5}{3} = -1.67$$



$P(X < 195) = P(Z < -1.67) = 0.0475 = 4.75$%



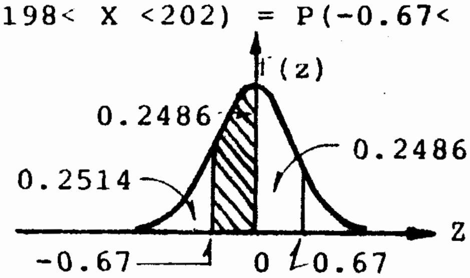
b. $$Z = \frac{203-200}{3} = 1$$

$P(X > 203) = 1 - P(X \leq 203) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$

c. $P(198 < X < 202) = ?$

$$Z_1 = \frac{198-200}{3} = -0.67, \quad Z_2 = \frac{202-200}{3} = 0.67$$

$P(198 < X < 202) = P(-0.67 < Z < 0.67) = 2 \times 0.2486 = 0.4972 = 49.72\ \%$



EJERCICIO

SE DESEA FABRICAR UN MATERIAL CUYA RESISTÉNCIA, SE SABE, TIENE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES NORMAL; EL CONTROL DE CALIDAD ES TAL QUE TIENE UN COEFICIENTE DE VARIACION DEL 5%. SI SE DESEA FABRICAR CON UNA PROBABILIDAD DE 10% DE QUE UN ESPECIMEN TOMADO AL AZAR NO RESISTA MENOS QUE UN VALOR NOMINAL x_0, DETERMINAR EL VALOR MEDIO DE LA RESISTENCIA PARA EL CUAL SE DEBE REALIZAR LA PRODUCCION.

$$z = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{\frac{x_0}{\mu} - 1}{\nu} \quad ; \text{ PARA } \quad P(X \le x_0) = 0.1, \; z = -1.28$$

POR LO TANTO $\frac{x_0}{\mu} - 1 = z\nu = 0.05(-1.28) = -0.064$

$\frac{x_0}{\mu} = -0.064 + 1 = 0.936$, DE DONDE $\mu = \frac{x_0}{0.936} = 1.0684\ x_0$.

SI $x_0 = 210$ kg/cm^2, $\mu = 1.064 \times 210 = \underline{224}$ kg/cm^2.

SI ν FUERA 20%:

$\frac{x_0}{\mu} - 1 = z \times 0.20 = -1.28(0.20) = -0.256$

$x_0/\mu = 0.744$, $\mu = 1.344\ x_0$

SI $x_0 = 210$ kg/cm^2, $\mu = 1.344 \times 210 = \underline{282}$ kg/cm^2.

PARA ESTE ULTIMO CASO, SI SE EXIGE UNA PROBABILIDAD DEL 3% EN VEZ DEL 10%, ENTONCES

$z = -1.88$ Y $x_0/\mu - 1 = -1.88(0.20) = -0.376$

$x_0/\mu = 0.624$, $\mu = x_0/0.624 = 1.6026\ x_0$.

SI $x_0 = 210$ kg/cm^2, $\mu = 336$ kg/cm^2.

EJEMPLO

EN UNA SERIE DE 462 EXPERIMENTOS CON FINES ANTROPOLOGICOS, CONSISTENTES EN MEDIR EL TAMAÑO DE LA CABEZA DE LOS INDIGENAS RESIDENTES EN UNA ZONA TROPICAL, SE OBTUVIERON LOS RESULTADOS ANOTADOS EN LAS DOS PRIMERAS COLUMNAS DE LA SIGUIENTE TABLA. SI LA VARIABLE ALEATORIA "TAMAÑO DE LA CABEZA" SE CONSIDERA QUE TIENE DISTRIBUCION NORMAL, ¿QUE CANTIDAD DE RESULTADOS SE ESPERARIA OBTENER ANTES DE HACER LAS MEDICIONES, SI SE CONSIDERA QUE $\mu = 191.8$ mm Y $\sigma = 6.48$ mm.

$$z_1 = \frac{171.5 - 191.8}{6.48} = -3.13; \quad z_2 = \frac{175.5 - 191.8}{6.48} = -2.51;$$

$$z_3 = \frac{179.5 - 191.8}{6.48} = -1.90, \quad z_4 = \frac{183.5 - 191.8}{6.48} = -1.28, \text{ ETC.}$$

$P(-3.13 \leq Z \leq -2.51) = 0.0051; \; P(-2.51 \leq Z \leq -1.90) = 0.0227;$

$P(-1.90 \leq Z \leq -1.28) = 0.0716$, ETC.

$462 \times 0.0051 = 2.4; \quad 462 \times 0.0227 = 10.5; \; 462 \times 0.0716 = 33.1$, ETC.

INTERVALO DE VALORES DE X, EN MM	NUMERO DE OBSERVACIONES (frecuencia, f)	INTERVALO DE $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$	PROBABILIDAD $P(z_1 \leq z \leq z_2) = P$	FRECUENCIA ESPERADA = 462 P
171.5-175.5	3	(-3.13)-(-2.51)	0.0051	2.4
175.5-179.5	9	(-2.51)-(-1.90)	0.0227	10.5
179.5-183.5	29	(-1.90)-(-1.28)	0.0716	33.1
183.5-187.5	76	(-1.28)-(-0.66)	0.1543	71.3
187.5-191.5	104	(-0.66)-(-0.05)	0.2255	104.2
191.5-195.5	110	(-0.05)- 0.57	0.2356	108.8
195.5-199.5	88	0.57 - 1.19	0.1673	77.3
199.5-203.5	30	1.19 - 1.80	0.0811	37.5
203.5-207.5	6	1.80 - 2.42	0.0281	13.0
207.5-211.5	4	2.42 - 3.04	0.0066	3.0
211.5-215.5	2	3.04 - 3.66	0.0011	0.5
215.5-219.5	1	3.66 - 4.27	0.0001	0.0

TOTAL: 462 TOTAL: 461.6

TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

SEAN LAS VARIABLES ALEATORIAS $X_1, X_2, \ldots, X_k$, CON DENSIDADES DE PROBABILIDADES ARBITRARIAS, CUYA SUMA SE DENOTARA COMO W, ES DECIR

$$W = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

ES POSIBLE DEMOSTRAR EL TEOREMA DENOMINADO *TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE*, CUYO ENUNCIADO INDICA QUE CONFORME AUMENTA EL NUMERO DE VARIABLES INVOLUCRADAS EN LA SUMA ANTERIOR (AL AUMENTAR k), LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE W TIENDE A SER LA DISTRIBUCION NORMAL. ADEMAS SE PUEDE DEMOSTRAR QUE SI TODAS LAS VARIABLES $X_1, X_2, \ldots, X_k$ TIENEN DISTRIBUCION NORMAL, ENTONCES, RIGUROSAMENTE, W TAMBIEN LA TIENE, INDEPENDIENTEMENTE DEL NUMERO DE VARIABLES QUE APAREZCAN EN LA SUMA.

A PARTIR DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL SE DEMUESTRA QUE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE PUEDE APROXIMAR MEDIANTE LA NORMAL CUANDO EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE (30 O MAS), CON LO CUAL SE LOGRA UN AHORRO CONSIDERABLE DE LABOR NUMERICA EN LA SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS. PARA MEJORAR ESTA APROXIMACION, CONVIENE EFECTUAR UNA CORRECCION POR CONTINUIDAD, LA CUAL SE JUSTIFICA POR USAR UNA DISTRIBUCION CONTINUA EN VEZ DE UNA DISCRETA, SUMANDO O RESTANDO, SEGUN SEA EL CASO, 0.5 AL VALOR DE X QUE SE USE. POR EJEMPLO, SI SE DESEA CUANTIFICAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 ENSAYES SE LOGREN DE 3 A 6 EXITOS, LOS LIMITES REALES QUE SE DEBEN USAR AL APLICAR LA DISTRIBUCION CONTINUA SON $x_1 = 2.5$ Y $x_2 = 6.5$.

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE CIERTA CARGA ES DE 0.001, DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN MAS DE DOS.

USANDO LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE OBTIENE

$$P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - (P[X=0] + P[X = 1] + P[X = 2])=$$

$$= 1 - (\frac{2\ 000!}{2\ 000!\ 0!} (0.001)^{0}(0.999)^{2\ 000} + \frac{2\ 000!}{1\ 999!\ 1!}(0.001)^{1}(0.999)^{1\ 999} +$$

$$+ \frac{2\ 000!}{1\ 998!\ 2!}(0.001)^{2}(0.999)^{1\ 998}) = 0.3233$$

LOS CALCULOS NECESARIOS PARA OBTENER LA SOLUCION SON BASTANTE MAS TEDIOSOS QUE LOS QUE DEBEN EFECTUARSE APROVECHANDO QUE EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE, A FIN DE UTILIZAR LA DISTRIBUCION NORMAL. EN ESTAS CIRCUNSTANCIAS, LA PROBABILIDAD DE QUE $X \leq 2$ EN EL CASO DISCRETO, EQUIVALE A LA DE QUE $X \leq 2.5$ EN EL CONTINUO; ASI

$$\mu = np = 2\ 000 \times 0.001 = 2 \text{ (SE USA LA MISMA MEDIA).}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\ 000 \times 0.001 \times 0.999} = 1.41$$

$$P[X \leq 2.5] = P[Z \leq \frac{2.5 - 2}{1.41}] = P[Z \leq 0.355] = 0.6387$$

DE DONDE

$$P[x > 2.5] = 1 - P[X \leq 2.5] = 1 - 0.6387 = 0.3613$$

BIBLIOGRAFIA

1. Mendenhall, W. y Scheaffer, R. L., "Mathematical statistics with applications", Duxbury Press (1973)

2. Marascuilo, L. A. y Mc Sweeney, M., "Nonparametric and distribution-free methods for the social sciences", Brooks/Cole Publ. Co. (1977)

3. Blake, I. F., "An introduction to applied probability" John Wiley (1979)

4. Ott, L., "An introduction to statistical methods and data analysis", Duxbury Press (1977)

5. Afifi, A. A. y Azen, S. P., "Statistical analysis", Academic Press (1979)

6. Cassel, C. M., Särndal, C. E. y Wretman, J. H., "Foundations of inference in survey sampling", John Wiley (1977)

7. Davies, O. L., "The design and analysis of industrial experiments", Longman Group Limited (1979)

8. Timm, N. H., "Multivariate analysis with applications in education and psychology", Brook/Cole Publ. Co.

9. Spatz, Ch. y Johnston, J. O., "Basic statistics: tales of distributions" Brooks/Cole Publ. Co.

10. Kreyszig, E., "Introducción a la estadística matemática", Limusa-Wiley (1973)

11. Larson, H. J., "Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística", Limusa-Wiley (1978)

12. Rascón, O. A., "Introducción a la Estadística Descriptiva", Vols. I y II, Ed. UNAM

13. Rascón, O. A., "Introducción a la Teoría de Probabilidades", Ed. UNAM

14. Bair, D., "Experimentation: an introduction to measurement theory and experiment design", Prentice Hall (1962)

15. Benjamin, J. and Cornell, C.A., "Probability, statistics and decision for civil engineers", McGraw;Hill (1970)

16. Bruning, J. and B. Kintz, "Computational handbook of statistics", Scott, Foreman and Co. (1968)

17. Cochran, W., "Experimental designs", Wiley (1957)

18. Dubes, R., "the theory of applied probability", Prentice-Hall (1968)

19. Feller, W., "Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones", Limusa-Wiley (1973)

20. Freund, J., "Mathematical statistics", Prentice Hall (1971)

21. Hays, W., "Statistics, probability, inference and decisions", Holt-Rinehart and Winston (1970)

22. Kish, L.,"Muestreo de encuestas", Trillas (1972)

23. Lindgren, B., "Statistical theory", Macmillan (1968)

24. Van der Gerr, J., "Introduction to multivariate analysis for the social sciences", Freeman (1971)