



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS DE LOS MECANISMOS DE LA LICUEFACCIÓN DE UN MEDIO
GRANULAR, DEBIDA A PRESIONES DINÁMICAS DE OLEAJE
CON AMPLITUD MODERADA.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
M. EN C. EMMANUEL ARCOS HERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. ERIC GUSTAVO BAUTISTA GODÍNEZ,
SEPI-ESIME UA IPN

COMITÉ TUTOR
DR. JAIME GONZALO CERVANTES DE GORTARI,
FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE,
FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM

MÉXICO, D. F. MAYO 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **DR. JAIME GONZALO CERVANTES DE GORTARI**

Secretario: **DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE**

Vocal: **DR. ERIC GUSTAVO BAUTISTA GODÍNEZ**

1^{er}. Suplente: **DR. FRANCISCO JAVIER SOLORIO ORDAZ**

2^{do}. Suplente: **DR. LORENZO ALBERTO MARTÍNEZ SUÁSTEGUI**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional y Departamento de Termofluidos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

TUTOR DE TESIS:

DR. ERIC GUSTAVO BAUTISTA GODÍNEZ



FIRMA

Agradecimientos

A mi linda y querida esposa
Yessica Nathaly Velazquez Murillo
cuyo apoyo, amor y cariño atesoro.

Para ti Kenia, mi preciosa niña
Para ti Emmanuel, mi pequeño
a quien espero impacientemente
y quienes tanta felicidad me procuran.

A mis padres, Elodia Ma. Del Carmen y Félix Manuel;
y hermanos, Angélica, Verónica y José Carlos.

Al Dr. Eric Gustavo Bautista Godínez,
por sus enseñanzas académicas y científicas,
pero aún más por las largas horas dedicadas
a revisar y dirigir este trabajo.

Al Dr. Federico Méndez Lavielle,
por sus importantes comentarios y apoyo académico en este trabajo.

Al Dr. Jaime Gonzalo Cervantes De Gortari,
Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz y
Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui
por sus importantes comentarios en este trabajo.

Al **CONACyT**,
por haberme otorgado una beca durante mis estudios de doctorado.

A la **Universidad Nacional Autónoma de México**,
por brindarme la oportunidad de realizar
mis estudios de doctorado.

A la SEPI-ESIME Azcapotzalco del **Instituto Politécnico Nacional**,
por haberme facilitado sus instalaciones, equipo de cómputo y
material bibliográfico para realizar mis estudios de doctorado.

Al proyecto **CONACyT**,
de ciencia básica con número de referencia 221116,
“Estudio de la respuesta dinámica e inestabilidad
de un suelo marino poroelástico,
inducidas por ondas de agua no-lineales ”.

Al proyecto **SIP** con número de referencia 20161477,
“Radiación y difracción del oleaje inducida
por su interacción con un rompeolas flotante
de sección transversal elíptica ”.

Índice general

Resumen	VI
Abstract	VIII
Nomenclatura	IX
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.1.1. Licuefacción de suelos marinos	3
1.2. Antecedentes	5
1.3. Objetivos	8
2. Planteamiento del problema	9
2.1. Descripción del problema físico	9
2.2. Hipótesis	10
2.3. <i>Condiciones de frontera verticales</i>	13
2.3.1. <i>Condiciones de frontera en la superficie del suelo poroso.</i>	13
2.3.2. <i>Condiciones de frontera en una profundidad descono-</i> <i>cida en el suelo poroso</i>	14
2.3.3. <i>Condiciones de frontera laterales en el fondo marino.</i> .	16
2.4. Análisis de los órdenes de magnitud	17
2.5. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno	20
2.5.1. <i>Condiciones de frontera adimensionales</i>	22
2.6. Ecuaciones de gobierno para el límite de $\beta_0 \ll 1$	22

2.6.1.	<i>Problema de valores en la frontera</i>	23
2.6.2.	<i>Problema de valores en la frontera para la presión de poro en exceso</i>	24
2.6.3.	<i>Problema de valores en la frontera para el desplazamiento horizontal</i>	26
2.6.4.	<i>Problema de valores en la frontera para el desplazamiento vertical</i>	26
3.	Soluciones analíticas para la presión de poro en exceso y los desplazamientos horizontal y vertical	28
4.	Resultados	30
4.1.	<i>Metodología para obtener el valor característico $\beta_0 \ll 1$</i>	31
4.2.	<i>Comparación del presente modelo matemático con resultados experimentales de Liu et al. [20]</i>	32
4.3.	<i>Efectos de la longitud de onda en la profundidad máxima de licuefacción</i>	35
4.4.	<i>Influencia de la compresibilidad del fluido de poro en la presión de poro en exceso adimensional</i>	40
4.5.	<i>Influencia del módulo de corte en el esfuerzo vertical efectivo</i>	42
4.6.	<i>Resumen de las simplificaciones del modelo matemático</i>	46
	Conclusiones	47
	Bibliografía	49
A.	Constantes de integración de la solución analítica para la presión de poro en exceso y desplazamientos horizontales y verticales para el valle de una onda	53
A.1.	<i>Obtención de la constantes de integración para la presión adimensional</i>	54
A.2.	<i>Obtención de las constantes de integración para el desplazamiento horizontal adimensional</i>	56

A.3. <i>Obtención de las constantes de integración para el desplazamiento vertical adimensional</i>	57
B. Constantes de integración de la solución analítica de la presión de poro en exceso para la cresta de una onda	59
B.1. <i>Obtención de la constantes de integración para la presión adimensional</i>	59

Índice de figuras

1.1.	Ejemplos de inestabilidades de estructuras marítimas.	2
1.2.	Diagrama que muestra el fenómeno de la licuefacción de un suelo marino.	4
2.1.	Vista en perfil del modelo físico en estudio. El oleaje se propaga de izquierda a derecha sobre un suelo poroso de profundidad semi-infinita. La región café corresponde al medio poroso y las regiones grises consisten de un suelo impermeable.	10
4.1.	Comparación del esfuerzo vertical efectivo σ'_z obtenido con la presente solución analítica y los resultados experimentales reportados por Liu et al. [20] para los siguientes valores constantes de las características del oleaje: $h = 5.2$ m, $T = 15$ s y $\lambda = 107.13$ m. Las líneas azules y rojas corresponden al experimento de Liu et al. [20] y el presente modelo matemático, respectivamente. Se presentan dos casos: a) la profundidad mínima de licuefacción y b) la profundidad máxima de licuefacción.	34
4.2.	Presión de poro en exceso adimensional, \hat{P} , en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135,$ y 16155). Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065,$ y 0.0097 , respectivamente.	36

4.3.	Valores absolutos del desplazamiento horizontal adimensional, $ \widehat{U} $, para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$, y 16155). Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente.	37
4.4.	Valores absolutos del desplazamiento vertical adimensional, $ \widehat{W} $, en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} , para varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$, y 16155) y valores constantes de $\mu = 10$, $\Gamma = 5614.39$ y $\psi = 2.5$. Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente.	38
4.5.	Esfuerzo vertical efectivo adimensional, $\bar{\sigma}'_{\bar{Z}}$, en función de la posición en el eje vertical, \bar{Z} , para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$, y 16155). Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente.	39
4.6.	Presión de poro en exceso adimensional, \widehat{P} , en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} para un valor constante de $\alpha = 16055$ y varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58), para el cual $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente.	41
4.7.	Distribución vertical del esfuerzo vertical efectivo adimensional, $\bar{\sigma}'_{\bar{Z}}$, para un valor constante de $\alpha = 16055$ y varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58), para el cual $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente.	43

- 4.8. Valores absolutos del desplazamiento vertical, $|\hat{W}|$, en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} , para varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58) y valores constantes de $\alpha = 16055$, $\Gamma = 3746.43$ y $\psi = 2.5$. Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro μ son $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente. 44
- 4.9. Valores absolutos del desplazamiento horizontal, $|\hat{U}|$, en función de la posición en la variable adimensional \bar{Z} , para varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58) y un valor constante de $\alpha = 16055$. Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro μ son $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente. 45

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis de la respuesta dinámica de un suelo poro-elástico inducida por ondas de agua largas. Para ciertas combinaciones de los parámetros físicos del suelo y del oleaje, en cierta profundidad desconocida del suelo, los esfuerzos verticales tienden a cero. En estas condiciones la licuefacción del suelo es inminente y en este estado la presión de poro es prácticamente igual a la sobrecarga de la presión del suelo. Este tipo de problema se ha estudiado ampliamente en la literatura especializada y las contribuciones principales se basan en la solución de las ecuaciones de gobierno y el uso de criterios de licuefacción. En este trabajo, la profundidad de licuefacción máxima inducida por ondas largas es parte del problema y se obtiene como un problema de valores característicos. Para resolver el problema previo, las ecuaciones de gobierno parcialmente dinámicas se presentan en su forma adimensional. Los resultados muestran que para ondas largas, la magnitud de los desplazamientos horizontales son más pequeños, y que para incrementos de la longitud de onda o del período del oleaje, la profundidad de licuefacción máxima crece. Se obtienen soluciones analíticas para la presión de poro en exceso y el desplazamiento horizontal y vertical. Los esfuerzos verticales y la profundidad máxima de licuefacción se comparan con resultados experimentales reportados en la literatura especializada y se encontró que éstos tienen un buen ajuste.

Abstract

In this work, a theoretical analysis for the dynamic response of a poro-elastic soil induced by long water waves is carried out. For some combinations of the physical parameters of the soil and wave characteristics, the vertical stresses tend to zero at a certain unknown depth of the soil. Under this condition the liquefaction of the soil is imminent because of the fact that in this stage the excess pore pressure is practically equal to the overburden soil pressure. This kind of physical problem has been widely studied in the specialized literature and the main contributions are based on the solution of the governing equations and the use of a liquefaction criteria. Here, the maximum momentary liquefaction depth induced by long water waves is part of the problem and it is obtained as an eigenvalue problem. To solve the previous problem, the partial dynamic governing equations are presented in their dimensionless version. The results show that for long waves the magnitude of the horizontal displacements are smaller than the vertical displacements, and increasing the wavelength or the wave period increases the maximum liquefaction. Analytical solutions for the excess pore pressure and the horizontal and vertical displacement are obtained. The vertical stresses and the maximum liquefaction depth are compared with experimental results reported in the specialized literature and they are very close to each other.

Nomenclatura

Letras latinas

b	Ancho del suelo poroso
C	Velocidad de fase de la onda
C_1, C_2, C_3 y C_4	Constantes de integración
C_5 y C_6	Constantes de integración
C_7 y C_8	Constantes de integración
D_r	Densidad relativa del suelo
E	Módulo de Young del suelo
e	Relación de vacíos del suelo
e_{max}	Relación de vacíos en su estado más suelto
e_{min}	Relación de vacíos en su estado más compacto
g	Aceleración de la gravedad
h	Profundidad del agua
G	Módulo de corte del suelo
G_s	Gravedad específica
i	Número imaginario
K_f	Módulo de elasticidad del agua en el poro
k	Número de onda
k_s	Permeabilidad de Darcy
L_z	Profundidad máxima de licuefacción
n	Porosidad
$P(x, z, t)$	Presión del agua en el poro
\bar{P}	Presión de poro en exceso adimensional

$\widehat{P}(\overline{Z})$	Amplitud adimensional de las fluctuaciones de la presión de poro en exceso
$P_b(x, t)$	Presión del oleaje sobre la superficie del suelo poroso
p_c	Escala característica de la presión de poro
p_0	Amplitud de las fluctuaciones de la presión del oleaje
Re	Parte real de
t	Tiempo
T	Período del oleaje
$U(x, z, t)$	Desplazamiento del suelo en dirección horizontal
\overline{U}	Desplazamiento del suelo adimensional en dirección horizontal
$\widehat{U}(\overline{Z})$	Amplitud adimensional del desplazamiento horizontal del suelo
u_c	Escala característica del desplazamiento horizontal
$W(x, z, t)$	Desplazamiento del suelo en dirección vertical
\overline{W}	Desplazamiento del suelo adimensional en dirección vertical
$\widehat{W}(\overline{Z})$	Amplitud adimensional del desplazamiento vertical del suelo
w_c	Escala característica del desplazamiento vertical
x	Coordenada horizontal
z	Coordenada vertical
\overline{Z}	Coordenada vertical adimensional

$\alpha = \frac{\gamma_w n \beta C}{k_s k}$	Parámetro adimensional
$\beta_0 = (k L_z)^2$	Parámetro adimensional
β	Compresibilidad del fluido de poro
$\Gamma = \frac{C \gamma_w}{G k_s k}$	Parámetro adimensional
γ_s	Peso específico del suelo
γ_w	Peso específico del agua
ε	Deformación volumétrica
$\theta = \frac{\rho_w C^2}{G}$	Parámetro adimensional
λ	Longitud de onda
$\mu = n G \beta \left(1 + \frac{1}{(1-2\nu)} \right)$	Parámetro adimensional
ν	Coefficiente de Poisson del suelo
$\xi = \frac{\rho C^2}{G}$	Parámetro adimensional
$\phi = \frac{\rho_w C k k_s}{\gamma_w}$	Parámetro adimensional
ρ	Densidad media del fondo marino poroso
ρ_w	Densidad del agua
ρ_s	Densidad del suelo
$\sigma'_x(x, z, t)$	Esfuerzo efectivo horizontal
$\sigma'_z(x, z, t)$	Esfuerzo efectivo vertical
$\tau_{xz}(x, z, t)$	Esfuerzo cortante en la dirección z en el plano perpendicular al eje x
τ	Tiempo adimensional
\bar{x}	Coordenada horizontal adimensional
$\psi = \frac{1}{(1-2\nu)}$	Parámetro adimensional
ω	Frecuencia de oscilación del oleaje

Subíndices

I	Incidente
s	Referente al suelo
w	Referente al agua

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El fenómeno de la interacción del oleaje con el fondo marino ha atraído la atención de ingenieros marítimos y geotécnicos en los años recientes. Comprender los mecanismos y procesos del problema de la interacción oleaje-suelo marino es particularmente importante para el diseño de las cimentaciones de estructuras marítimas cuando éstas están sujetas a la hidrodinámica de oleaje. El oleaje, además de inducir fuerzas sobre las estructuras marítimas, también puede desarrollar inestabilidades en el suelo marino, [1–3]. En las décadas pasadas, se han hecho esfuerzos considerables en el estudio del fenómeno de interacción oleaje-fondo marino-estructuras. La razón de incremento en el interés de estudiar este fenómeno es que muchas estructuras costeras (tales como paredes verticales, columnas de plataformas petroleras, tuberías y rompeolas) han presentado daños por la respuesta del suelo marino inducida por el oleaje y no necesariamente por deficiencias constructivas. En la Fig. 1.1 se muestran algunos ejemplos de estructuras costeras que pueden ser afectadas por la inestabilidad del fondo marino. En la Fig. 1.1a se ve que las líneas de conductos de hidrocarburos requieren de anclajes, los cuales tienen la función de no permitir el desplazamiento de las tuberías. Cuando la inestabilidad del suelo alcanza la profundidad del anclaje, las tuberías pueden presentar



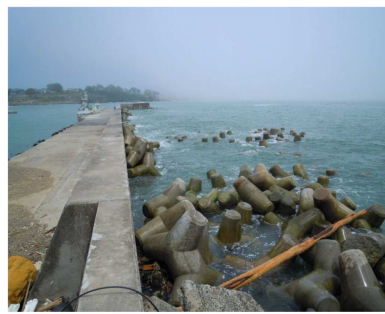
(a) Anclajes de conductos



(b) Ladeo de plataformas



(c) Cimentación de aerogeneradores



(d) Inestabilidad de rompeolas

Fig. 1.1: Ejemplos de inestabilidades de estructuras marítimas.

desplazamientos, incluso fracturas debido a la oscilación del oleaje. Otras estructuras que fallan debido a este fenómeno son las plataformas petroleras. En la Fig. 1.1b se presenta el ladeo de una plataforma petrolera debido a la inestabilidad de la cimentación sobre la cual se desplantan las columnas de la estructura. Otras estructuras marítimas como los aerogeneradores también pueden presentar inestabilidades en su cimentación (ver Fig. 1.1c). Las estructuras de protección costera como son los rompeolas son otras de la estructuras asentadas sobre el lecho marino que también pueden ser afectadas por los desplazamientos del fondo marino, como se muestra en la Fig. 1.1d.

1.1.1. Licuefacción de suelos marinos

El suelo marino es considerado como un medio poroso saturado o parcialmente saturado, (contiene burbujas de aire) y puede ser cohesivo o no cohesivo. Fundamentalmente, las fallas de las cimentaciones de estructuras marítimas debidas a inestabilidades del suelo marino pueden deberse a dos mecanismos, los cuales se conocen como licuefacción y falla por deslizamiento Silvester y Hsu [4]. Desde una perspectiva formal, la licuefacción de un suelo no-cohesivo, es la transformación del suelo en estado sólido a un estado licuado como una consecuencia del incremento de la presión de poro y la reducción de los esfuerzos efectivos. Cuando este fenómeno se presenta, el suelo pierde sus fuerzas estructurales, Groot et al. [5] y en estas condiciones las partículas del suelo quedan susceptibles de ser transportadas por las corrientes marinas como se muestra en la Fig. 1.2. En la literatura especializada se ha reportado que los órdenes de magnitud de los desplazamientos en estructuras marítimas son del orden de metros, Groot et al. [6].

El estudio del fenómeno de la licuefacción está ligado a la comprensión de los siguientes fenómenos:

1. Mecanismos del suelo asumiéndolo seco.

2. El comportamiento del suelo completamente no drenado y saturado considerando que no existe aire atrapado.
3. Condición de un suelo parcialmente saturado y sin drenar, tomando en cuenta la compresibilidad de la mezcla aire-agua en el poro; esta condición se presenta cuando existen burbujas de aire atrapadas.

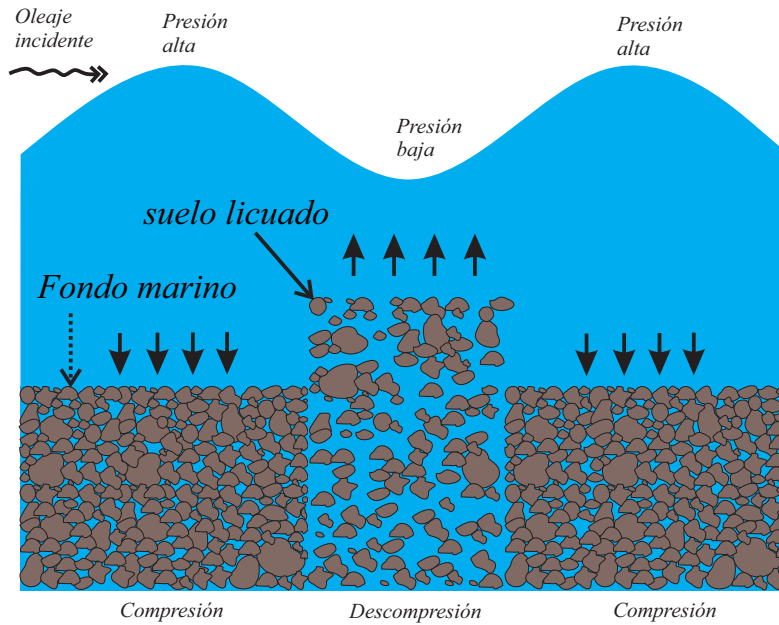


Fig. 1.2: Diagrama que muestra el fenómeno de la licuefacción de un suelo marino.

Para determinar el potencial de licuefacción (competencia entre esfuerzos efectivos normales y la presión de poro), en la literatura especializada se sugiere considerar la influencia que tiene la compresibilidad del fluido, el material sólido y la permeabilidad de la matriz porosa. La compresibilidad de la mezcla agua-aire en el poro genera una contracción del volumen de la masa. Ésto causa un ligero incremento de la presión en el poro y a su vez un suave decremento del esfuerzo efectivo y de la resistencia al corte. En el caso de una dilatación del suelo, la compresibilidad de la mezcla agua-aire

en el poro causa un ligero decremento de la presión en el poro y un ligero crecimiento del esfuerzo efectivo y de la resistencia al corte.

1.2. Antecedentes

Cuando se analiza la interacción dinámica entre el oleaje y los suelos marinos, el oleaje puede generar presiones hidrodinámicas que hacen que la presión del agua en los poros y los esfuerzos efectivos dentro del suelo marino cambien significativamente. Estos mecanismos producen un incremento y decremento de la presión de poro y de los esfuerzos efectivos verticales, respectivamente. La situación anterior puede llevar a la inestabilidad local de los fondos marinos incluido el conocido fenómeno de licuefacción. Una vez que el fenómeno de licuefacción ocurre, las partículas del suelo pueden ser transportadas por corrientes marinas o movidas junto con el oleaje. De acuerdo con la literatura especializada, el fenómeno de inestabilidad del fondo marino comúnmente ocurre en aguas poco profundas, aguas intermedias e incluso en aguas profundas. Se sabe muy bien que la inestabilidad del suelo inducida por el oleaje, es una razón sustancial para hacer que las estructuras costeras sean dañadas o destruidas [7, 8].

Basado en la teoría poro-elástica de Biot, desde la década de los 70s se han llevado a cabo muchas investigaciones de la interacción oleaje-suelo marino [9–11]. Entre éstos, Yamamoto et al. [12] y Madsen [13] desarrollaron una solución analítica para un suelo marino poro elástico e isotrópico con profundidad infinita. En estos trabajos el medio granular se trata como un medio compresible y deformable. Hsu y Jeng [14] determinaron para ondas cortas una solución analítica para un fondo marino isotrópico no-saturado con espesor finito. Jeng y Seymour [15] y Jeng y Seymour [16] analizaron la respuesta dinámica del suelo marino asumiendo que éste es poro-elástico e isotrópico de espesor infinito. Zhang y Jie [17] determinaron que la profundidad afectada del suelo por la presión hidrodinámica del oleaje es del mismo orden

de magnitud que la longitud de onda. Teniendo en cuenta los efectos combinados del oleaje con corrientes, Zhang et al. [18] obtuvieron una solución analítica para evaluar la presión de poro y esfuerzos efectivos en sedimentos marinos. Por otro lado, Chowdhury et al. [19] y Liu et al. [20] presentaron resultados experimentales de una serie de pruebas unidimensionales para obtener una mejor comprensión del comportamiento de las presiones de poro inducidas por el oleaje en dirección vertical. Además, gracias a los avances en las capacidades computacionales, las ecuaciones de gobierno que modelan la respuesta dinámica del suelo marino también se han resuelto numéricamente. Estos estudios se llevaron a cabo para dilucidar los efectos de las interacciones entre el oleaje y fondos marinos deformables en casos más complejos y más realistas, tales como cimientos y tuberías [21, 22].

Uno de los aspectos relevantes en el análisis de la respuesta dinámica de los suelos marinos inducida por el oleaje es la profundidad momentánea de la licuefacción. En este contexto, muchos investigadores han propuesto varios criterios de licuefacción para identificar la profundidad máxima de licuefacción momentánea. Entre éstos, Zen y Yamazaki [23] sugirieron un criterio para obtener la licuefacción del suelo bajo la influencia de oleaje progresivo bidimensional en un análisis elástico unidimensional. Consideraron que la licuefacción inducida por el oleaje en el suelo ocurre cuando el peso sumergido del suelo es menor que la fuerza de filtración ascendente ejercida sobre el depósito. Posteriormente, Tsai [24] extendió el criterio anterior a un análisis en tres dimensiones de la respuesta del medio poro-elástico. Recientemente, otros criterios relevantes de criterios de licuefacción tridimensionales se han reportado en la literatura especializada. Ye [25] obtuvo un criterio de licuefacción basado en el principio de fricción Mohr-Coulomb. Más tarde, Qi y Gao [26] propusieron un criterio de licuefacción en una dimensión para estudiar los efectos del grado de saturación en la licuefacción momentánea del suelo generada por el oleaje.

Los trabajos teóricos antes mencionados han permitido a la comunidad científica tener una comprensión física de la influencia que tienen los diversos

parámetros del oleaje en la respuesta dinámica del suelo, la cual se caracteriza por la presión del poro y las deformaciones del suelo. Además, estos trabajos han propuesto varios criterios de licuefacción que permiten la identificación, en una primera aproximación, de la profundidad de licuefacción momentánea. En la literatura especializada, ésta se obtiene de manera secuencial: se calcula primero la presión de poro y posteriormente se obtiene la profundidad de licuefacción a partir de un criterio de licuefacción. Sin embargo, la profundidad de licuefacción momentánea de un fondo marino granular es una parte inherente del problema y debe obtenerse simultáneamente con la presión de poro y deformaciones del suelo. Por lo tanto, el objetivo principal de este trabajo es obtener la profundidad de licuefacción momentánea de un suelo poroso simultáneamente con la presión de poro y las deformaciones del suelo.

En este trabajo, se obtiene la profundidad máxima de licuefacción para el valle de una onda, debido a que es más probable que ocurra la licuefacción momentánea en esta región, como resultado de una depresión del oleaje y el ascenso de la filtración del agua en el medio poroso, Wang et al. [27].

Para obtener la profundidad máxima de licuefacción, el modelo matemático se trata como un problema de valores característicos. Las ecuaciones de gobierno, parcialmente dinámicas, se presentan en forma adimensional y las escalas características para la presión de poro y desplazamientos se obtienen realizando un análisis de órdenes de magnitud. Las ecuaciones de gobierno corresponden a la aproximación $u - p$, que es una extensión de la aproximación cuasi-estática propuesta por Biot [9]. Se obtienen soluciones analíticas para la presión de poro en exceso y los desplazamientos horizontales y verticales. Los esfuerzos verticales y la profundidad máxima de licuefacción se comparan con los resultados experimentales de Liu et al. [20] y se muestra que ambos resultados ajustan correctamente. Además, las soluciones analíticas se comparan con la solución numérica de las ecuaciones de gobierno y se observa que ambas soluciones son prácticamente iguales.

1.3. Objetivos

Objetivo general:

Obtener la profundidad máxima de licuefacción momentánea de un suelo poroso de manera simultánea con la presión de poro y deformaciones del suelo.

Objetivos particulares:

1. Determinar los desplazamientos horizontales y verticales, la presión de poro en exceso y los esfuerzos verticales efectivos del suelo.
2. Estudiar la licuefacción de un suelo poro-elástico con permeabilidad pequeña.
3. Determinar la profundidad máxima de licuefacción inducida por ondas largas, mediante la solución del problema de valores característicos.
4. Obtener los parámetros adimensionales que describe la competencia entre los diferentes mecanismos del medio poro-elástico y el oleaje.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

2.1. Descripción del problema físico

El modelo físico se muestra en la Fig. 2.1. En este trabajo se considera que el oleaje incidente corresponde a ondas largas lineales de longitud λ y amplitud A_I . El oleaje se propaga de izquierda a derecha sobre un suelo poroso de profundidad semi-infinita. La profundidad media y uniforme del agua es h . En el sistema de coordenadas cartesianas seleccionado, la dirección positiva del eje x es hacia la derecha, con origen en la unión entre el suelo poroso y el suelo rígido impermeable. El eje z apunta hacia arriba en dirección normal al suelo. En el modelo físico, el medio poroso y el suelo impermeable se identifican por regiones café y grises, respectivamente. Se asume que el suelo poroso es un medio poroso deformable y que está compuesto de una mezcla de tres fases. Una fase sólida formada por el medio granular, una fase líquida que ocupa la mayor parte del espacio poroso y una fase gaseosa que a veces ocupa una pequeña porción del espacio poroso. El medio granular y el fluido en el poro (incluyendo tanto el líquido como el gas) pueden considerarse juntos como un medio compresible.

Para el valle de una onda en el medio poroso la profundidad máxima de licuefacción L_z se determina mediante el criterio de licuefacción $P_b - P = (\gamma_s - \gamma_w)L_z$, donde P_b es la presión del oleaje, P es la presión del poro, γ_s y

γ_w son los pesos específicos del suelo y el agua, respectivamente. Cuando el criterio de licuefacción se cumple a una cierta profundidad desconocida L_z , la licuefacción es inminente.

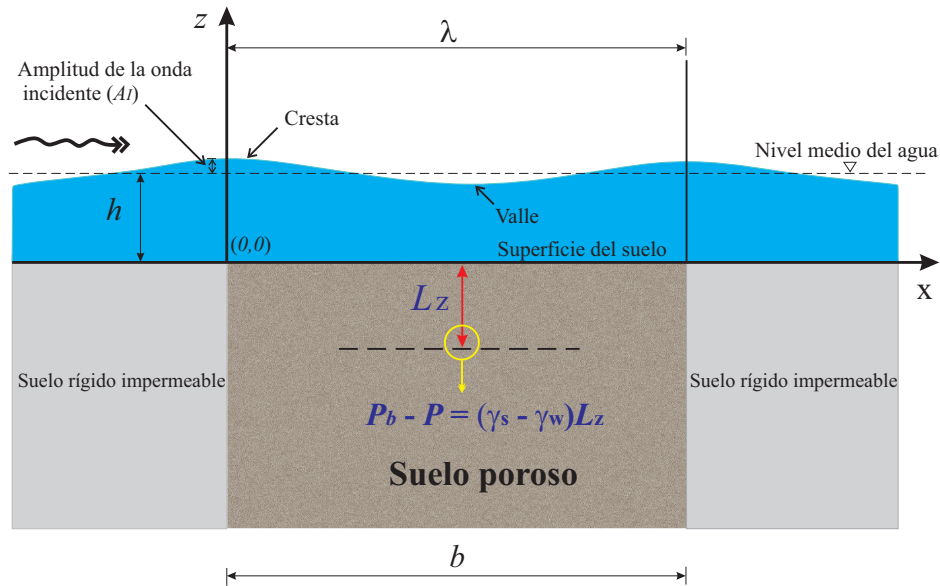


Fig. 2.1: Vista en perfil del modelo físico en estudio. El oleaje se propaga de izquierda a derecha sobre un suelo poroso de profundidad semi-infinita. La región café corresponde al medio poroso y las regiones grises consisten de un suelo impermeable.

2.2. Hipótesis

El planteamiento del modelo matemático del suelo marino, considera las siguientes hipótesis:

1. Isotropía del material.
2. Reversibilidad de las relaciones tensión-deformación en condiciones de equilibrio final.
3. Linealidad de las relaciones tensión-deformación.

4. Deformaciones pequeñas del suelo.
5. El agua contenida en los poros es incompresible.
6. El agua puede contener burbujas de aire.
7. El agua fluye a través del suelo poroso según la ley de Darcy.

Tomando en cuenta las hipótesis anteriores, Zienkiewicz et al. [28] dedujeron las ecuaciones de gobierno que corresponden a la bien conocida aproximación $u - p$. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas son

$$\frac{\partial \sigma'_x(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_z(x, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 W(x, z, t)}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

La ecuación de continuidad se expresa como

$$k_s \nabla^2 P(x, z, t) - \gamma_w n \beta \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial t} + k_s \rho_w \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \gamma_w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (2.3)$$

donde el operador Laplaciano se define como $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2)$, $P(x, z, t)$ es la presión del agua en el poro, k_s es la permeabilidad de Darcy, γ_w es el peso específico del agua, n es la porosidad del medio poroso, $\rho = \rho_w n + \rho_s(1 - n)$ es la densidad media del fondo marino poroso, ρ_w es la densidad del agua, ρ_s es la densidad del suelo y t es el tiempo. En la Ec. (2.3) la compresibilidad del fluido de poro, β , y la deformación volumétrica, ε , se definen como

$$\beta = \left(\frac{1}{K_w} + \frac{1 - S_r}{P_{w0}} \right) \quad (2.4)$$

y

$$\varepsilon = \frac{\partial U(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial W(x, z, t)}{\partial z} \quad (2.5)$$

donde $U(x, z, t)$ y $W(x, z, t)$ son los desplazamientos del suelo en dirección horizontal y vertical, respectivamente; S_r denota el grado de saturación del medio granular; P_{w0} expresa la presión estática absoluta del agua y K_w es el módulo de volumen de agua del poro.

Se sabe muy bien que las relaciones entre los esfuerzos efectivos y los desplazamientos del suelo pueden expresarse en la forma siguiente, Jeng y Rahman [29]:

$$\sigma'_x(x, z, t) = 2G \left(\frac{\partial U(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon \right), \quad (2.6)$$

$$\sigma'_z(x, z, t) = 2G \left(\frac{\partial W(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon \right), \quad (2.7)$$

y

$$\tau_{xz}(x, z, t) = G \left(\frac{\partial U(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial W(x, z, t)}{\partial x} \right). \quad (2.8)$$

Aquí, $\sigma'_x(x, z, t)$ y $\sigma'_z(x, z, t)$ son los esfuerzos efectivos horizontales y verticales, respectivamente; $\tau_{xz}(x, z, t)$ es el esfuerzo cortante en la dirección z en el plano perpendicular al eje x ; ν es el coeficiente de Poisson del suelo y G es el módulo de corte que puede expresarse en términos del módulo de Young E y ν como sigue:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.9)$$

Al sustituir las Ecs. (2.6)-(2.8) en las Ecs. (2.1) y (2.2), en ausencia de fuerzas de cuerpo dentro del medio granular y basado en el concepto de esfuerzos efectivos, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas pueden expresarse en términos de los desplazamientos del suelo y la presión de poro de la siguiente manera:

$$G \left(\frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial t^2}, \quad (2.10)$$

y

$$G \left(\frac{\partial^2 W(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, z, t)}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 W(x, z, t)}{\partial t^2}. \quad (2.11)$$

2.3. *Condiciones de frontera verticales*

La solución de las ecuaciones de gobierno (2.3), (2.10) y (2.11) requieren de condiciones de frontera apropiadas. Se anticipa que las ecuaciones de gobierno antes mencionadas se reducen a tres ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación que modela la presión de poro en exceso es de cuarto orden y las correspondientes a los desplazamientos horizontal y vertical son de segundo orden. Por lo tanto, se necesitan cuatro condiciones de frontera para la presión de poro en exceso y dos condiciones de frontera para los desplazamientos vertical y horizontal. Estas condiciones de frontera se explican en las siguientes secciones. En lo subsecuente, las variables dependientes se escriben en forma simplificada como sigue: $P = P(x, z, t)$, $U = U(x, z, t)$, $W = W(x, z, t)$, $\sigma'_z = \sigma'_z(x, z, t)$, $\sigma'_x = \sigma'_x(x, z, t)$, y $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, z, t)$.

2.3.1. *Condiciones de frontera en la superficie del suelo poroso.*

En la superficie del suelo poroso se consideran las siguientes condiciones de frontera:

$$\sigma'_z = 0; \quad \tau_{x,z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (2.12)$$

y

$$P = P_b(x, t) \quad \text{en} \quad z = 0. \quad (2.13)$$

En la Ec. (2.13) la presión generada por la propagación de ondas largas lineales sobre la superficie del suelo marino se define como: $P_b(x, t) = p_0 \text{Re}[e^{i(kx + \omega t)}]$, donde $p_0 = \rho g A_I$ es la amplitud de las fluctuaciones de la

presión, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ es la longitud de onda, $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia de oscilación del oleaje, T es el período del oleaje, Re indica la parte real de la expresión agrupada entre corchetes y el término $i = \sqrt{-1}$. En este caso, la presión del oleaje sigue siendo hidrostática porque se usa la aproximación de ondas largas lineales; sin embargo, en la literatura especializada se pueden encontrar otras formulaciones más complejas para obtener la presión que actúa sobre la superficie del lecho marino, Zhou et al. [30].

Al sustituir la Ec. (2.12) en las Ecs. (2.7) y (2.8) y considerando que para ondas largas la relaciones $(\frac{\partial U}{\partial x}) / (\frac{\partial W}{\partial z}) \ll 1$ y $\frac{\partial W}{\partial x} \ll 1$ se mantienen (como se justifica en la Sección 2.4), las variaciones de los desplazamientos verticales y horizontales en el lecho marino se pueden asumir en la forma siguiente:

$$\frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad z = 0. \quad (2.14)$$

2.3.2. *Condiciones de frontera en una profundidad desconocida en el suelo poroso*

En la literatura especializada, la respuesta dinámica del suelo se obtiene generalmente para dos casos particulares: 1) Cuando la profundidad del suelo poroso es infinito, como en Zhang et al. [18], y 2) Cuando el fondo del suelo es rígido e impermeable, como en Wang et al. [27]. En estos trabajos, la profundidad de licuefacción se obtiene por separado usando un criterio de licuefacción. Sin embargo, la profundidad de licuefacción momentánea de los suelos marinos arenosos es una parte inherente del problema y debe obtenerse simultáneamente con la presión de poro y las deformaciones del suelo. Esto se puede conseguir incorporando un criterio de licuefacción en el proceso de resolver las ecuaciones de gobierno como se explica a continuación.

Siguiendo a Zen y Yamazaki [23], el esfuerzo vertical efectivo, σ'_z , se puede calcular a partir de la siguiente ecuación:

$$\sigma'_z = [P_b(x, t) - P] - (\gamma_s - \gamma_w) z, \quad (2.15)$$

donde γ_s y γ_w son los pesos específicos del suelo y el agua, respectivamente. En la Ec. (2.15) el esfuerzo vertical efectivo, σ'_z , muestra un comportamiento

armónico en el tiempo porque $P_b(x, t)$ y P varían con la misma frecuencia. Cuando el esfuerzo vertical efectivo a una cierta profundidad desconocida en el suelo poroso es $\sigma'_z \leq 0$, se forma un estado de licuefacción, Zen y Yamasaki [23]. Por esta razón, en este trabajo se considera que para algunas combinaciones de las propiedades del suelo y del oleaje y para una profundidad desconocida z , la licuefacción del suelo es inminente, por lo que el siguiente criterio de licuefacción se debe satisfacer:

$$[P_b(x, t) - P] - (\gamma_s - \gamma_w) z \leq 0. \quad (2.16)$$

De la Ec. (2.16) la presión de poro, P , en $z = -L_z$ se puede aproximar como

$$P \approx P_b(x, t) + (\gamma_s - \gamma_w) L_z. \quad (2.17)$$

La Ec. (2.17) se puede escribir como

$$\frac{P_b(x, t) - P}{(\gamma_s - \gamma_w) L_z} + 1 \leq 0. \quad (2.18)$$

El primer término de la Ec. (2.18) representa la competencia entre la presión de poro en exceso, $P_b(x, t) - P$, y la sobrecarga del suelo, $(\gamma_s - \gamma_w) L_z$; cuando esta relación es igual a “-1”, la licuefacción puede ocurrir. El proceso para obtener la profundidad desconocida del suelo, L_z , en la cual puede ocurrir la licuefacción para diferentes combinaciones de las características del suelo y del oleaje, se explica a detalle en la siguiente sección. En este trabajo la profundidad de licuefacción L_z se obtiene para el valle de la onda, ya que es más probable que ocurra la licuefacción momentánea en el punto más bajo de la onda como resultado del incremento de la filtración del agua en el medio poroso, Wang et al. [27]. Los valles de las ondas se definen para los valores de $t = T/2$ y $kx = \tilde{n}\pi$, donde $\tilde{n} = 0, 2, 4 \dots$. Para esta condición, la presión del oleaje que actúa sobre el lecho marino se puede reescribir como

$$P_b = -p_0. \quad (2.19)$$

Siguiendo a Qi y Gao [26], derivamos la Ec. (2.16) con respecto a la variable independiente z y obtenemos la siguiente condición de frontera:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -(\gamma_s - \gamma_w) \quad \text{en} \quad z = -L_z. \quad (2.20)$$

Como se muestra en la Ec. (2.20), cuando el esfuerzo efectivo vertical tiende a cero ($\sigma'_z \rightarrow 0$), la variación de la presión de poro, $\partial P/\partial z$, es una constante dada por la diferencia entre los pesos específicos del suelo (γ_s) y el agua (γ_w).

El comportamiento de los desplazamientos vertical, W , y horizontal, U , en la profundidad máxima de licuefacción no han sido reportados en la literatura especializada; sin embargo, está bien documentado que conforme aumenta la profundidad del suelo, los desplazamientos rápidamente tienden asintóticamente a cero [12, 23, 30]. En consecuencia, para los desplazamientos horizontal y vertical del suelo, en la profundidad L_z se sugieren las siguientes condiciones de frontera:

$$U, W \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad z = -L_z. \quad (2.21)$$

2.3.3. *Condiciones de frontera laterales en el fondo marino.*

Las condiciones de frontera laterales corresponden a un suelo impermeable y rígido, donde se considera que no hay desplazamientos del suelo. Por lo tanto, las condiciones de frontera horizontales están dadas las siguientes ecuaciones:

$$U = W = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad (2.22)$$

y

$$U = W = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = b. \quad (2.23)$$

2.4. Análisis de los órdenes de magnitud

El análisis de órdenes de magnitud es una metodología que se utiliza para obtener variables adimensionales independientes y dependientes en una ecuación que describe un proceso físico. La única característica de las variables independientes, dependientes y sus derivadas es que son limitadas a orden unidad; esto implica que la magnitud de las variables adimensionales y sus derivadas pueden variar entre cero y uno. Cuando se realiza este análisis de escalas, la magnitud de los grupos adimensionales permiten evaluar la importancia relativa de los diferentes términos en las ecuaciones de gobierno. La magnitud de los parámetros adimensionales que surgen de las ecuaciones, se utilizan para realizar una posible aproximación simplificada de las ecuaciones de gobierno del modelo físico. En esta sección se presenta el análisis de escalas del fenómeno de licuefacción.

En la literatura especializada, para obtener las soluciones analíticas y numéricas de las ecuaciones del modelo $u-p$, éstas se resuelven incluyendo todos los términos. Por medio de un análisis de escalas es posible simplificar las ecuaciones de gobierno y obtener soluciones analíticas sencillas.

En el presente trabajo, la escala característica horizontal es la longitud de onda λ , que está relacionada con el número de onda por la expresión $k = 2\pi/\lambda$; la escala característica del tiempo es el período del oleaje T , y está relacionada con la frecuencia del oleaje mediante la expresión $\omega = 2\pi/T$ y la escala característica vertical es la longitud desconocida L_z . Para obtener las escalas características para los desplazamientos horizontales (U) y verticales (W), se realiza un análisis de orden de magnitud. En este trabajo, se considera que la profundidad de licuefacción satisface $L_z \sim O(A_I)$ (ver Sakai et al. [31]), lo que implica que $kL_z \sim O(kA_I) \ll 1$. Con base en las consideraciones anteriores, los órdenes de magnitud de las variables dependientes e independientes están dadas por

$$x \sim \lambda, \quad z \sim L_z, \quad P \sim p_c, \quad U \sim u_c, \quad W \sim w_c, \quad \text{y} \quad t \sim T, \quad (2.24)$$

donde p_c , u_c y w_c son escalas características de la presión de poro y despla-

mientos horizontales y verticales, respectivamente. En la literatura especializada la escala característica de la presión de poro se trata como la amplitud de la presión del oleaje que actúa sobre el suelo $p_0 = \rho g A_I$. En el presente trabajo, esta escala característica se propone en la forma siguiente:

$$p_c \sim (\gamma_s - \gamma_w) L_z. \quad (2.25)$$

El desplazamiento vertical w_c se obtiene al sustituir la Ec. (2.24) en la ecuación de continuidad, Ec. (2.3), que expresada en órdenes de magnitud se obtiene

$$\frac{k_s (\gamma_s - \gamma_w)}{L_z} \overbrace{[k^2 L_z^2 + 1]}^1 - \gamma_w n \beta (\gamma_s - \gamma_w) L_z \omega + \frac{\rho_f k_s \omega^2 w_c}{L_z} \overbrace{\left[\frac{u_c}{w_c} k L_z + 1 \right]}^2 = \frac{\gamma_w \omega w_c}{L_z} \overbrace{\left[\frac{u_c}{w_c} k L_z + 1 \right]}^3. \quad (2.26)$$

Balanceando los términos 1, 2 y 3, la Ec. (2.26) se simplifica a la siguiente forma

$$\frac{k_s (\gamma_s - \gamma_w)}{L_z} - \gamma_w n \beta (\gamma_s - \gamma_w) L_z \omega + \frac{\rho_f k_s \omega^2 w_c}{L_z} = \frac{\gamma_w \omega w_c}{L_z} \quad (2.27)$$

la Ec. (2.27) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{k_s (\gamma_s - \gamma_w)}{L_z} \overbrace{\left[1 - \frac{\gamma_w n \beta \omega L_z^2}{k_s} \right]}^4 + \rho_f k_s \omega^2 \left[\frac{w_c}{L_z} \right] = \gamma_w \omega \left[\frac{w_c}{L_z} \right]. \quad (2.28)$$

Balanceando el término 4 de la Ec. (2.28) se tiene que

$$\frac{k_s (\gamma_s - \gamma_w)}{L_z} + \rho_f k_s \omega^2 \left[\frac{w_c}{L_z} \right] = \gamma_w \omega \left[\frac{w_c}{L_z} \right] \quad (2.29)$$

la Ec. (2.29) se reescribe como

$$\frac{k_s (\gamma_s - \gamma_w)}{L_z} = \gamma_w \omega \left[\frac{w_c}{L_z} \right] \overbrace{\left[1 - \frac{\rho_f k_s \omega}{\gamma_w} \right]}^5. \quad (2.30)$$

Finalmente se balancea el término 5 de la Ec. (2.30) y se obtiene que

$$w_c \sim \frac{k_s (\gamma_s - \gamma_w)}{\gamma_w C k} \ll 1. \quad (2.31)$$

La Ec. (2.31) corresponde al desplazamiento característico vertical, w_c , en el límite de $kL_z \ll 1$.

Para determinar el desplazamiento horizontal u_c , se sigue el procedimiento anterior. Sustituyendo la Ec. (2.24) en la Ec. (2.10), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{Gu_c}{L_z^2} \overbrace{[k^2 L_z^2 + 1]}^6 + \frac{Gw_c}{(1-2\nu)k^{-1}L_z} \overbrace{\left[\frac{u_c}{w_c} kL_z + 1\right]}^7 = \frac{(\gamma_s - \gamma_w) L_z}{k^{-1}} + \frac{\rho u_c}{\omega^{-2}}. \quad (2.32)$$

Balanceando los términos 6 y 7 de la Ec. (2.32), se obtiene que

$$\frac{Gu_c}{L_z^2} + \frac{Gw_c}{(1-2\nu)k^{-1}L_z} = \frac{(\gamma_s - \gamma_w) L_z}{k^{-1}} + \frac{\rho u_c}{\omega^{-2}} \quad (2.33)$$

la Ec. (2.33) se puede ordenar de la siguiente forma

$$\frac{Gu_c}{L_z^2} \overbrace{\left[1 - \left(\frac{w_c}{u_c}\right) \frac{kL_z}{(1-2\nu)}\right]}^8 = (\gamma_s - \gamma_w) L_z + \rho u_c \omega^2. \quad (2.34)$$

Balanceando el término 8 de la Ec.(2.34) se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{Gu_c}{L_z^2} \overbrace{\left[1 - \left(\frac{\rho \omega^2 L_z^2}{G}\right)\right]}^9 = (\gamma_s - \gamma_w) L_z. \quad (2.35)$$

De manera similar, se balancea el término 9 de la Ec. (2.35) y se obtiene que

$$\frac{Gu_c}{L_z^2} = \frac{(\gamma_s - \gamma_w) L_z}{k^{-1}}. \quad (2.36)$$

La ecuación anterior se reescribe como

$$u_c \sim \frac{(\gamma_s - \gamma_w) k L_z^3}{G} \ll 1. \quad (2.37)$$

La Ec. (2.37) corresponde al desplazamiento característico horizontal u_c . En el límite $kL_z \ll 1$, los desplazamientos u_c y w_c , satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{u_c}{w_c} = \frac{L_z^3 k}{Gk_s} < 1, \text{ o en otras palabras, } u_c < w_c. \quad (2.38)$$

Considerando la Ec. (2.38), las siguientes relaciones también se satisfacen,

$$\frac{\partial U / \partial x}{\partial W / \partial z} \sim \frac{2\pi L_z^4}{G\lambda^2} \ll 1 \quad (2.39)$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial x} \sim \frac{k_s(\gamma_s - \gamma_w)k}{\omega\gamma_w} \ll 1. \quad (2.40)$$

2.5. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno

En esta sección se presentan las ecuaciones de gobierno adimensionales, necesarias para determinar la respuesta dinámica del suelo marino poroso debido a la presión inducida por el oleaje. Considerando el análisis de orden de magnitud realizado anteriormente, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \bar{X} = kx, \quad \bar{Z} = \frac{z}{L_z}, \quad \tau = \omega t, \quad \bar{U} = \frac{G}{(\gamma_s - \gamma_w)kL_z^3} U, \\ \bar{W} = \frac{Ck\gamma_w}{k_s(\gamma_s - \gamma_w)} W \quad \text{y} \quad \bar{P} = -\frac{p_0 + P}{(\gamma_s - \gamma_w)L_z}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $C = \sqrt{gh}$ es la celeridad de la onda para ondas de agua largas lineales. Al sustituir las variables adimensionales definidas en la Ec. (2.41) en las

Ecs. (2.3), (2.10) y (2.11), se obtienen las siguientes ecuaciones de gobierno adimensionales:

$$-\beta_0 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{\chi}^2} - \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{Z}^2} + \beta_0 \alpha \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} + \beta_0^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\chi}} \right] + \phi \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}} \right] = \beta_0^2 \Gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\chi}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}} \right], \quad (2.42)$$

$$\beta_0^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{\chi}^2} + \beta_0 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{Z}^2} + \beta_0^2 \psi \frac{\partial}{\partial \bar{\chi}} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\chi}} \right] + \frac{\psi}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{\chi}} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}} \right] = -\beta_0 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\chi}} + \beta_0^2 \xi \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \tau^2}, \quad (2.43)$$

y

$$\beta_0 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\chi}^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{Z}^2} + \beta_0^2 \Gamma \psi \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\chi}} \right] + \psi \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{Z}^2} = -\beta_0 \Gamma \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{Z}} + \beta_0 \xi \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tau^2}, \quad (2.44)$$

donde los parámetros adimensionales que aparecen en las Ecs. (2.42)-(2.44) están dados por las siguientes relaciones:

$$\beta_0 = (kL_z)^2 = \left(2\pi \frac{L_z}{\lambda} \right)^2 \ll 1, \quad \alpha = \frac{\gamma_w n \beta C}{k_s k} \gg 1, \quad \theta = \frac{\rho_w C^2}{G} \ll 1, \\ \Gamma = \frac{C \gamma_w}{G k_s k} \gg 1, \quad \psi = \frac{1}{(1-2\nu)} \sim O(1), \quad \xi = \frac{\rho C^2}{G} \ll 1, \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\rho_w C k k_s}{\gamma_w} \ll 1.$$

En los parámetros anteriores, el valor característico $\beta_0 \ll 1$ es una incógnita debido a que la profundidad máxima de licuefacción no se conoce. Este valor característico se obtiene como parte del problema y su valor se determina siguiendo el procedimiento iterativo descrito en la Sección 4.1. Los otros parámetros adimensionales se calculan usando los parámetros físicos típicos del suelo y el oleaje.

2.5.1. Condiciones de frontera adimensionales

Las condiciones de frontera adimensionales en $\bar{Z} = 0$, necesarias para resolver las Ecs. (2.42)-(2.44) son

$$\bar{\sigma}'_{\bar{Z}} = 0, \quad \bar{\tau}_{\bar{x}, \bar{Z}} = 0 \quad y \quad \bar{P} = 0, \quad (2.45)$$

y las versiones adimensionales de la condiciones de frontera para el fondo del suelo están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{P} = -1 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{Z}} = 1 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1 \quad (2.47)$$

y

$$\bar{U}, \bar{W} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1. \quad (2.48)$$

Las condiciones de frontera laterales están formuladas como

$$\bar{U} = \bar{W} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\chi}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{\chi} = 0 \quad y \quad \bar{\chi} = kb. \quad (2.49)$$

2.6. Ecuaciones de gobierno para el límite de

$$\beta_0 \ll 1$$

En esta sección, las ecuaciones de gobierno adimensionales, Ecs. (2.42)-(2.44) se simplifican para el caso en que el valor característico β_0 satisface $\beta_0 = (2\pi L_z/\lambda)^2 \ll 1$, que desde un punto de vista físico indica que la profundidad máxima de licuefacción es muy pequeña comparada con la longitud de onda. Por lo tanto, para el límite de $\beta_0 \ll 1$, las ecuaciones de gobierno adimensionales Ecs. (2.42)-(2.44) se simplifican de la siguiente manera:

$$-\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{Z}^2} + \beta_0 \alpha \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} = \beta_0^2 \Gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\chi}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}} \right], \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{Z}^2} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\chi}}, \quad (2.51)$$

y

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{Z}^2} + \beta_0^2 \Gamma \psi \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\chi}} \right] + \psi \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{Z}^2} = -\beta_0 \Gamma \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{Z}}. \quad (2.52)$$

De las Ecs. (2.50) y (2.52), se aprecia que los términos en los cuales β_0 se conserva son de orden unidad, porque $\beta_0 \alpha = \frac{L_z^2 \gamma_w n \beta C k}{k_s} \sim O(1)$ y $\beta_0 \Gamma = \frac{L_z^2 C k \gamma_w}{G k_s} \sim O(1)$. Los órdenes de magnitud de los parámetros físicos que se encuentran en estas expresiones se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Propiedades físicas del suelo

Permeabilidad (k_s)	0.01–0.0001, m/s
Módulo de corte (G)	4.8×10^5 – 4.8×10^8 , N/m ²
Porosidad (n)	0.25–0.45
Grado de saturación del agua del poro (S_r)	0.95–1
Compresibilidad del fluido del poro (β)	5.1×10^{-7} – 5.3×10^{-10} , [m ² /N]
Coefficiente de Poisson del suelo (ν)	0.3–0.4
Módulo aparente del agua de poro (K_w)	1.9×10^9 , N/m ²
Densidad del suelo (ρ_s)	2650, kg/m ³

2.6.1. *Problema de valores en la frontera*

La aproximación $u - p$, para medios poro-elásticos, puede reducirse a un problema de valores en la frontera asumiendo que las variables dependientes tienen una oscilación armónica con frecuencia de oscilación igual a la del oleaje. En estas condiciones las ecuaciones de gobierno transitorias del suelo marino pueden plantearse como un problema de valores de frontera.

Madsen [13], propuso que las soluciones para $\bar{U}(\bar{Z}, \bar{\chi}, \tau)$, $\bar{W}(\bar{Z}, \bar{\chi}, \tau)$, $\bar{P}(\bar{Z}, \bar{\chi}, \tau)$ pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\bar{U}(\bar{Z}, \bar{\chi}, \tau) = \text{Re} \left\{ \hat{U}(\bar{Z}) \exp [i(\bar{\chi} + \tau)] \right\}, \quad (2.53)$$

$$\overline{W}(\overline{Z}, \overline{\chi}, \tau) = \text{Re} \left\{ \widehat{W}(\overline{Z}) \exp [i(\overline{\chi} + \tau)] \right\}, \quad (2.54)$$

y

$$\overline{P}(\overline{Z}, \overline{\chi}, \tau) = \text{Re} \left\{ \widehat{P}(\overline{Z}) \exp [i(\overline{\chi} + \tau)] \right\}. \quad (2.55)$$

Donde las variables dependientes $\widehat{U}(\overline{Z})$ y $\widehat{W}(\overline{Z})$ son las amplitudes adimensionales de los desplazamientos horizontales y verticales del suelo, respectivamente, y $\widehat{P}(\overline{Z})$ es la amplitud adimensional de las fluctuaciones de la presión de poro en exceso del suelo.

Sustituyendo las Ecs. (2.53)-(2.55) en las Ecs. (2.50)-(2.52), se obtiene el problema de valores en la frontera como sigue

$$-\frac{d^2 \widehat{P}}{d\overline{Z}^2} + i\beta_0 \alpha \widehat{P} + \beta_0^2 \Gamma \widehat{U} - i \frac{d\widehat{W}}{d\overline{Z}} = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{d^2 \widehat{U}}{d\overline{Z}^2} = -i \widehat{P} \quad (2.57)$$

y

$$\frac{d^2 \widehat{W}}{d\overline{Z}^2} + i\beta_0^2 \Gamma \psi \frac{d\widehat{U}}{d\overline{Z}} + \psi \frac{d^2 \widehat{W}}{d\overline{Z}^2} = -\beta_0 \Gamma \frac{d\widehat{P}}{d\overline{Z}}. \quad (2.58)$$

Combinando las Ecs. (2.56)-(2.58) se obtienen las ecuaciones de gobierno para determinar la presión de poro en exceso y los desplazamientos. El desarrollo matemático se presenta en las siguientes secciones.

2.6.2. *Problema de valores en la frontera para la presión de poro en exceso*

Con base en las consideraciones expuestas anteriormente, se obtiene el siguiente problema de valores en la frontera para la presión de poro en exceso adimensional:

$$\frac{d^4 \hat{P}(\bar{Z})}{d\bar{Z}^4} - i\beta_0 \alpha \frac{(1+\mu)}{\mu} \frac{d^2 \hat{P}(\bar{Z})}{d\bar{Z}^2} + i\beta_0^2 \frac{\alpha}{\mu} \hat{P}(\bar{Z}) = 0 \quad (2.59)$$

donde $\mu = nG\beta \left(1 + \frac{1}{(1-2\nu)}\right)$.

Para obtener la solución de la Ec. (2.59) se requieren cuatro condiciones de frontera. Sustituyendo la Ec. (2.19) en la Ec. (2.13) y considerando las variables adimensionales definidas en las Ecs. (2.41) y (2.55), se obtiene la siguiente condición de frontera

$$\hat{P} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = 0. \quad (2.60)$$

De manera similar a lo anterior, se observa en la Ec. (2.13) que la presión de poro en exceso en el lecho marino solo es una función de la posición sobre el eje x , lo cual implica que la variación de la presión sobre el fondo marino se pueda escribir en la forma siguiente:

$$\frac{d\hat{P}}{d\bar{Z}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = 0. \quad (2.61)$$

Mediante la sustitución de la Ec. (2.55), para $\tau = \pi$ y $\chi = \tilde{n}\pi$, $\tilde{n} = 0, 2, 4, \dots$ en las Ecs. (2.46) y (2.47), se determinan las condiciones de frontera adimensionales en $\bar{Z} = -1$ como sigue

$$\hat{P} = 1 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1 \quad (2.62)$$

y

$$\frac{d\hat{P}}{d\bar{Z}} = -1 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1 \quad (2.63)$$

2.6.3. *Problema de valores en la frontera para el desplazamiento horizontal*

El problema de valores en la frontera para el desplazamiento horizontal adimensional está dado por

$$\frac{d^2\widehat{U}}{d\overline{Z}^2} = -i\widehat{P}(\overline{Z}). \quad (2.64)$$

En la Ec. (2.64) se observa que el desplazamiento horizontal solo es una función de la presión de poro en exceso adimensional, \widehat{P} . Teniendo en cuenta que en la superficie del fondo marino el esfuerzo cortante es cero, $\tau_{x,z} = 0$ (Ec. (2.12)), y que $\frac{\partial W}{\partial x} \rightarrow 0$ (Ec. (2.40)), se deduce de la Ec. (2.8) que $\frac{\partial U}{\partial z} \rightarrow 0$; por lo tanto, la primera condición de frontera que se requiere para resolver la Ec. (2.64) es

$$\frac{d\widehat{U}}{d\overline{Z}} = 0 \quad \text{en} \quad \overline{Z} = 0. \quad (2.65)$$

Sustituyendo la Ec. (2.53) en la Ec. (2.48) se obtiene la siguiente condición de frontera

$$\widehat{U} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad \overline{Z} = -1. \quad (2.66)$$

2.6.4. *Problema de valores en la frontera para el desplazamiento vertical*

El problema de valores en la frontera que describe el comportamiento del desplazamiento a lo largo del eje vertical está descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2\widehat{W}}{d\overline{Z}^2} = -\frac{\beta_0\Gamma}{(1+\psi)} \left[\frac{d\widehat{P}}{d\overline{Z}} + i\beta_0\psi \frac{d\widehat{U}}{d\overline{Z}} \right]. \quad (2.67)$$

En la Ec. (2.67) se observa que para ondas largas, el desplazamiento vertical es una función del desplazamiento horizontal, \widehat{U} , y la presión de poro en exceso \widehat{P} . Sin embargo, el efecto dominante es $d\widehat{P}/d\overline{Z}$ porque $i\beta_0\psi \ll 1$.

Sustituyendo las Ecs. (2.12), (2.39) y (2.41) en la Ec. (2.7) se obtiene la siguiente condición de frontera

$$\frac{d\widehat{W}}{d\overline{Z}} = 0 \quad \text{en} \quad \overline{Z} = 0. \quad (2.68)$$

De la Ec. (2.21) se puede deducir que la condición de frontera adimensional para el desplazamiento vertical en $\overline{Z} = -1$ está dada por la siguiente ecuación:

$$\widehat{W} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad \overline{Z} = -1. \quad (2.69)$$

En la Sección 3 se presentan las soluciones analíticas de los problemas de valores en la frontera obtenidas anteriormente.

Capítulo 3

Soluciones analíticas para la presión de poro en exceso y los desplazamientos horizontal y vertical

La solución analítica de la ecuación de gobierno de la presión de poro en exceso adimensional, Ec. (2.59), está dada por la siguiente ecuación, Polyanin y Zaitsev [32],

$$\hat{P}(\bar{Z}) = C_1 e^{-\varphi\bar{Z}} + C_2 e^{\varphi\bar{Z}} + C_3 e^{-\tilde{\varphi}\bar{Z}} + C_4 e^{\tilde{\varphi}\bar{Z}}, \quad (3.1)$$

donde $\varphi = [\beta_0/(1+\mu)]^{1/2}$ y $\tilde{\varphi} = \varphi \left[\frac{i(1+\mu)^2\alpha}{\mu} - 1 \right]^{1/2}$. Las constantes de integración C_1, C_2, C_3 y C_4 se muestran en el Apéndice A, ver Ecs. (A.10)-(A.13).

Al sustituir la Ec. (3.1) en la Ec. (2.64) y aplicando las condiciones de frontera Ecs. (2.65) y (2.66), la solución analítica que modela el comportamiento del desplazamiento horizontal está dada por la ecuación siguiente

$$\begin{aligned} \hat{U}(\bar{Z}) = i\varphi^{-1} \left[C_1 \left(\Delta_1 - \varphi^{-1} e^{-\varphi\bar{Z}} - \bar{Z} \right) + C_2 \left(\Delta_2 - \varphi^{-1} e^{\varphi\bar{Z}} + \bar{Z} \right) \right] + \\ i\tilde{\varphi}^{-1} \left[C_3 \left(\Delta_3 - \tilde{\varphi}^{-1} e^{-\tilde{\varphi}\bar{Z}} - \bar{Z} \right) + C_4 \left(\Delta_4 - \tilde{\varphi}^{-1} e^{\tilde{\varphi}\bar{Z}} + \bar{Z} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\Delta_1 = \varphi^{-1}e^\varphi - 1$, $\Delta_2 = \varphi^{-1}e^{-\varphi} + 1$, $\Delta_3 = \tilde{\varphi}^{-1}e^{\tilde{\varphi}} - 1$ y $\Delta_4 = \tilde{\varphi}^{-1}e^{-\tilde{\varphi}} + 1$. La integración de la Ec. (2.64) implica dos constantes adicionales, éstas se expresan en términos de las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 . De manera similar a lo anterior, pero ahora sustituyendo las Ecs. (3.1) y (3.2) en la Ec. (2.67) y aplicando las condiciones de frontera Ecs. (2.68) y (2.69), se obtiene la solución analítica para el desplazamiento vertical, la cual está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\bar{Z}) = & C_1\varphi^{-1} \left[\left(e^{-\varphi\bar{Z}} - e^\varphi \right) \Delta_5 + \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \bar{Z}^2 \right) + (1 + \bar{Z}) \Delta_6 \right] + \\ & C_2\varphi^{-1} \left[- \left(e^{\varphi\bar{Z}} - e^{-\varphi} \right) \Delta_5 - \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \bar{Z}^2 \right) + (1 + \bar{Z}) \Delta_6 \right] + \\ & C_3\tilde{\varphi}^{-1} \left[\left(e^{-\tilde{\varphi}\bar{Z}} - e^{\tilde{\varphi}} \right) \Delta_7 + \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \bar{Z}^2 \right) + (1 + \bar{Z}) \Delta_8 \right] + \\ & C_4\tilde{\varphi}^{-1} \left[- \left(e^{\tilde{\varphi}\bar{Z}} - e^{-\tilde{\varphi}} \right) \Delta_7 - \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \bar{Z}^2 \right) + (1 + \bar{Z}) \Delta_8 \right] , \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $\Delta_5 = \vartheta\varphi^{-2} + \tilde{\vartheta}$, $\Delta_6 = \vartheta\varphi^{-1} + \tilde{\vartheta}\varphi$, $\Delta_7 = \vartheta\tilde{\varphi}^{-2} + \tilde{\vartheta}$, $\Delta_8 = \vartheta\tilde{\varphi}^{-1} + \tilde{\vartheta}\tilde{\varphi}$, $\vartheta = \beta_0^2\Gamma\psi/(1 + \psi)$, $\tilde{\vartheta} = \beta_0\Gamma/(1 + \psi)$.

En la siguiente sección se discuten las implicaciones físicas de los parámetros adimensionales en el comportamiento de la presión de poro y los desplazamientos horizontales y verticales, en el límite de $\beta_0 \ll 1$.

Capítulo 4

Resultados

En esta sección se presentan los resultados analíticos que ilustran los efectos de las diferentes características del oleaje y parámetros físicos del suelo en la profundidad máxima de licuefacción y en el comportamiento de la presión de poro y los desplazamientos horizontales y verticales. En la Tabla 2.1 se muestran los parámetros físicos utilizados para la obtención de los parámetros adimensionales.

Para verificar los resultados del presente modelo matemático, éstos se comparan con los resultados experimentales reportados en la literatura especializada y con las soluciones numéricas de las Ecs. (2.59), (2.64) y (2.67). Los resultados presentados corresponden para el caso del valle de una onda, con valores de $\omega t = \pi$ y $kx = \tilde{n}\pi$, $\tilde{n} = 0, 2, 4, \dots$ como se indica en la Sección 2.5.

Al sustituir la variable adimensional $\bar{\sigma}'_{\bar{Z}} = \frac{\sigma'_z}{(\gamma_s - \gamma_w)} L_z$ en la Ec. (2.15), el esfuerzo vertical efectivo adimensional se calcula usando la siguiente ecuación:

$$\bar{\sigma}'_{\bar{Z}} = \bar{P} - \bar{Z}. \quad (4.1)$$

Tabla 4.1. Propiedades físicas del suelo en el experimento de Liu et al. [20]

Permeabilidad (k_s)	1.8×10^{-4} , m/s
Módulo de corte (G)	1.27×10^6 , N/m ²
Porosidad (n)	0.39
Grado de saturación del agua de poro (S_r)	99.6 %
Coefficiente de Poisson (ν)	0.3
Módulo de elasticidad del agua en el poro (K_w)	1.9×10^9 , N/m ²
Gravedad específica (G_s)	2.67
Relación de vacíos del suelo (e)	0.63
Relación de vacíos en su estado más suelto (e_{max})	0.92
Relación de vacíos en su estado más compacto (e_{min})	0.53
Densidad relativa (D_r)	73.8
Peso específico del suelo (γ_s)	16069.14 N/m ³

4.1. Metodología para obtener el valor característico $\beta_0 \ll 1$

El valor característico $\beta_0 \ll 1$ es una incógnita y su obtención es parte del problema. Este valor característico se determina a partir de la condición de frontera (2.62) y aplicando la siguiente metodología:

1. Se calculan los parámetros adimensionales definidos en la Sección (2.5) utilizando los parámetros físicos típicos del suelo.
2. Se evalúa la Ec. (3.1) en $\bar{Z} = -1$ y la ecuación resultante se sustituye en la Ec. (2.62).
3. El valor característico β_0 se obtiene mediante un procedimiento iterativo.
4. En la literatura especializada, la máxima profundidad de licuefacción es del orden $L_z \sim O(A_I)$, Sakai [31]. Con base en lo anterior, el valor

de β_0 para iniciar el proceso iterativo debe ser $\beta_0 \sim O[(kA_I)]$. Para la aplicación del presente modelo matemático, se deben seleccionar cuidadosamente los parámetros físicos del oleaje, de tal forma que se satisfaga la aproximación de ondas largas lineales, la cual está definida por el siguiente valor del número de Ursell, U_r ,

$$U_r = \frac{A_I/h}{(kh)^2} \ll 1, \quad (4.2)$$

con $A_I/h \ll 1$ y $kh < \pi/10$.

5. Para el valor propuesto de β_0 , si la presión de poro adimensional $\hat{P} \rightarrow 1$, entonces el procedimiento termina; de lo contrario, se propone un valor diferente del parámetro β_0 .
6. Se fija un criterio de convergencia absoluto para el procedimiento iterativo.

4.2. *Comparación del presente modelo matemático con resultados experimentales de Liu et al. [20]*

Para verificar la precisión de los resultados analíticos, se seleccionó el estudio experimental realizado por Liu et al. [20], quienes obtuvieron la máxima profundidad de licuefacción para distintas condiciones de presión sobre un estrato de suelo poroso. En la Fig. 4.1 se muestra una comparación del esfuerzo vertical físico σ'_z , en función del eje vertical z , con los resultados experimentales reportados por Liu et al. [20]. Para esta comparación, los parámetros físicos del suelo se muestran en la Tabla 4.1. Se necesitan dos parámetros físicos adicionales, el peso específico del suelo γ_s , y la porosidad, n . Éstos parámetros se calculan utilizando las siguientes fórmulas, Das [33]:

$$\gamma_s = \frac{G_s \gamma_w}{1 + e}, \quad n = \frac{e}{1 + e} \quad \text{y} \quad e = e_{max} - (e_{max} - e_{min}) D_r, \quad (4.3)$$

donde G_s es la gravedad específica, e es la relación de vacíos del suelo; e_{max} y e_{min} son las relaciones de vacíos en su estado más suelto y más compacto, respectivamente; y D_r es la densidad relativa del suelo. En los experimentos de Liu et al. [20], la profundidad del agua sobre la superficie del suelo es de 0.20 m, y sobre esta columna de agua se incluye una presión de 50 kPa, la cual simula una presión hidrostática del agua de 5.0 m; por lo tanto, sobre la superficie del suelo actúa una profundidad de agua equivalente a 5.2 m. Además, Liu et al. [20] usaron un período de onda de $T = 15$ s. Estos valores nos permiten calcular la longitud de onda para ondas largas lineales mediante la siguiente relación

$$C = \sqrt{gh} = \lambda/T, \quad (4.4)$$

resultando una longitud de onda de $\lambda = 107.13$ m.

Para una cresta del oleaje, la presión de poro en exceso adimensional se define como $\bar{P} = \frac{p_0 - P}{(\gamma_s - \gamma_w)L_z}$. La solución analítica de la Ec. (2.59) que modela la presión de poro en exceso está dada por la siguiente ecuación

$$\hat{P}(\bar{Z}) = A_1 e^{-\varphi \bar{Z}} + A_2 e^{\varphi \bar{Z}} + A_3 e^{-\tilde{\varphi} \bar{Z}} + A_4 e^{\tilde{\varphi} \bar{Z}}. \quad (4.5)$$

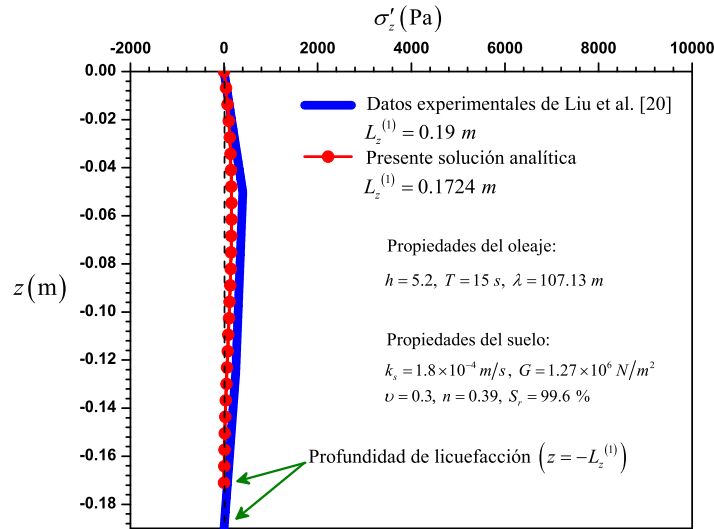
Las constantes A_1 , A_2 , A_3 and A_4 , están definidas por las Ecs. (B.5)-(B.8) en el Apéndice B y se obtienen considerando las siguientes condiciones de frontera:

$$\hat{P} = -1 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1 \quad (4.6)$$

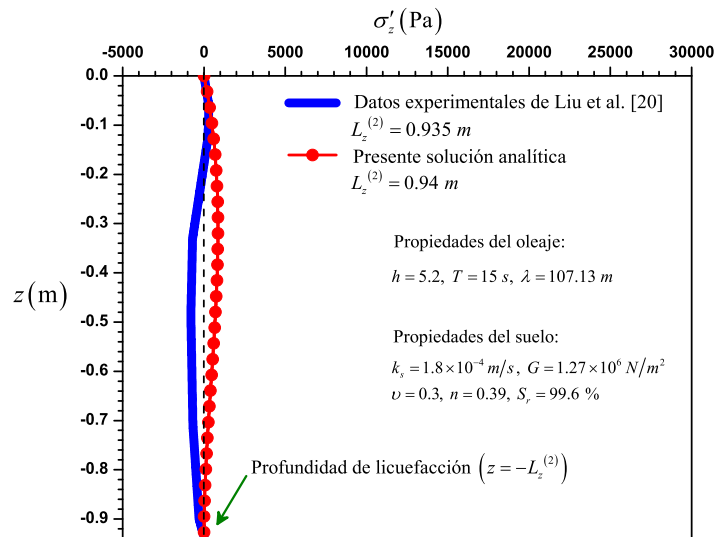
y

$$\frac{d\hat{P}}{d\bar{Z}} = 1 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1. \quad (4.7)$$

En la Fig. 4.1 se muestra la comparación del esfuerzo vertical efectivo, σ'_z y los resultados experimentales reportados por Liu et al. [20]. Las líneas azules y rojas corresponden al experimento de Liu et al. [20] y el presente modelo matemático, respectivamente. Se presentan dos casos: a) La profundidad mínima de licuefacción, y b) La profundidad máxima de licuefacción.



(a) Profundidad mínima de licuefacción



(b) Profundidad máxima de licuefacción

Fig. 4.1: Comparación del esfuerzo vertical efectivo σ'_z obtenido con la presente solución analítica y los resultados experimentales reportados por Liu et al. [20] para los siguientes valores constantes de las características del oleaje: $h = 5.2 \text{ m}$, $T = 15 \text{ s}$ y $\lambda = 107.13 \text{ m}$. Las líneas azules y rojas corresponden al experimento de Liu et al. [20] y el presente modelo matemático, respectivamente. Se presentan dos casos: a) la profundidad mínima de licuefacción y b) la profundidad máxima de licuefacción.

El comportamiento del esfuerzo vertical efectivo para la profundidad mínima de licuefacción, $L_z^{(1)}$, se presenta en la Fig. 4.1a; se observa que hasta una profundidad de $z = -0.19$ m las dos soluciones son muy similares. El comportamiento del esfuerzo vertical efectivo para la profundidad máxima de licuefacción, $L_z^{(2)}$, se presenta en la Fig. 4.1b. En esta figura se observan algunas diferencias entre los resultados; éstas surgen porque la solución analítica se obtiene para una profundidad del suelo semi-infinito, mientras que el experimento se realizó utilizando un espesor finito del suelo. Las profundidades mínima y máxima de licuefacción obtenidas con el presente modelo matemático son $L_z^{(1)} = 0.1724$ m y $L_z^{(2)} = 0.94$ m, respectivamente, mientras que Liu et al. [20] obtuvieron $L_z^{(1)} = 0.19$ m y $L_z^{(2)} = 0.935$ m; se observa que estas profundidades de licuefacción son casi iguales.

La comparación anterior muestra que aún cuando la presente solución analítica se obtuvo para el límite de $\beta_0 \ll 1$, los resultados muestran una buena precisión.

4.3. *Efectos de la longitud de onda en la profundidad máxima de licuefacción*

En la Fig. 4.2 se muestra la presión de poro en exceso adimensional, \hat{P} , para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro $\alpha (= 16055, 16130, 16135, \text{ y } 16155)$. Para el caso particular de $\alpha = 16155$ y $\beta_0 = 0.0097$, la solución numérica de la Ec. (2.59) se compara con la solución analítica dada por la Ec. (3.1). Como se puede ver, ambas soluciones son prácticamente iguales. Los valores del parámetro adimensional $\alpha = \frac{\gamma_w n \beta C}{k_s k} \gg 1$ tienen implicaciones físicas diferentes. Los valores de este parámetro se calcularon considerando diferentes valores del número de onda $k = 2\pi/\lambda$ y valores constantes de $\gamma_w = 9810$ N/m³, $n = 0.4$, $\beta = 2.04 \times 10^{-7}$ m²/N, $C = 9.9$ m/s y $k_s = 0.0001$ m/s. Debido a que el modelo matemático está expresado en variables adimensionales, otros valores de los parámetros físicos se pueden seleccionar. Los resultados muestran que en el intervalo

$-0.6 \leq \bar{Z} \leq 0$, la presión de poro en exceso adimensional, \hat{P} , aumenta

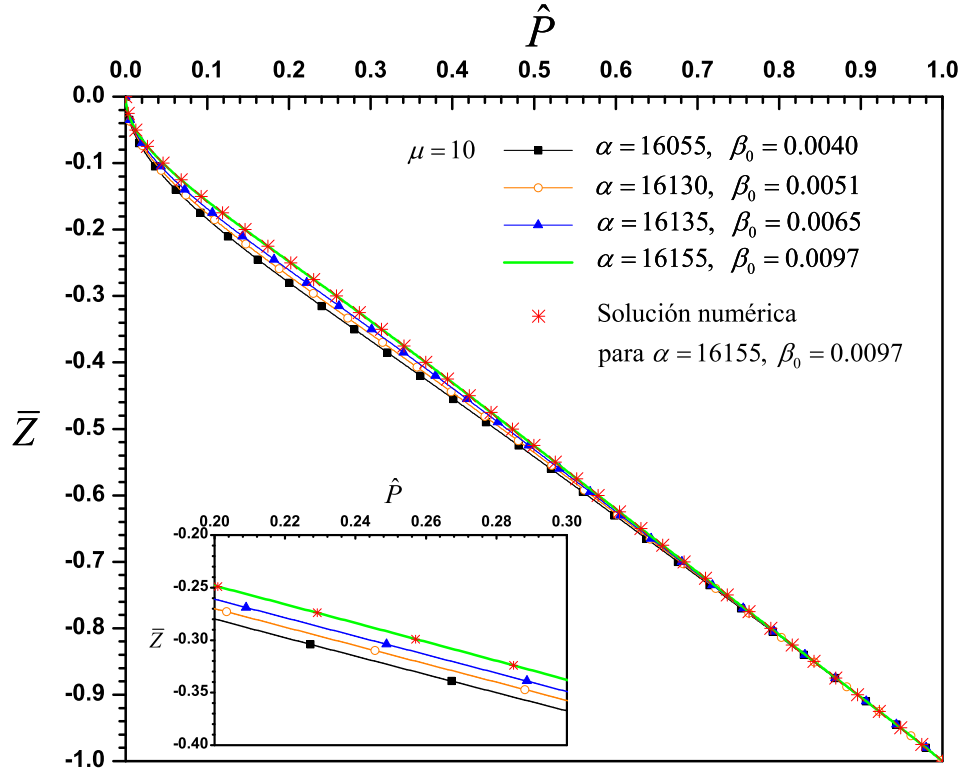


Fig. 4.2: Presión de poro en exceso adimensional, \hat{P} , en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$, y 16155). Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente.

con un valor creciente del parámetro α . Sin embargo, fuera de este intervalo, la presión de poro en exceso es casi igual para todos los valores del parámetro α . Cada valor de α corresponde a un valor característico diferente de β_0 ($= 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente), y como se puede observar, a medida que el parámetro α aumenta, el valor característico también aumenta; desde un punto de vista físico, esto indica que a medida que aumenta la longitud de onda, la profundidad máxima de licuefacción, L_z ,

también aumenta. Para los mismo valores de los parámetros discutidos en

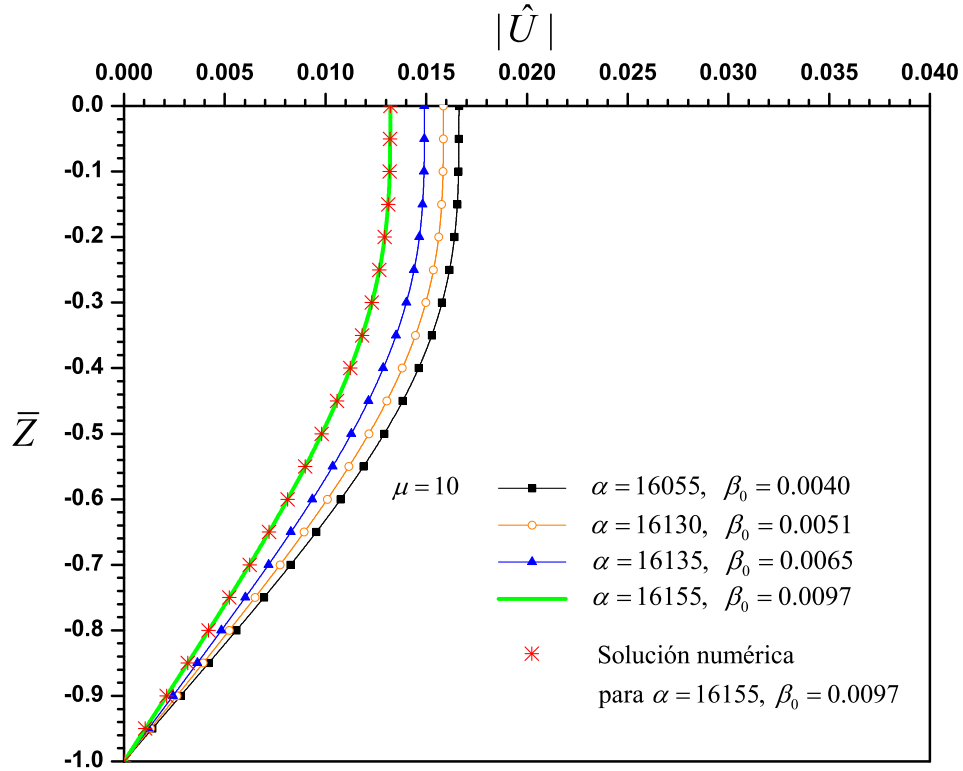


Fig. 4.3: Valores absolutos del desplazamiento horizontal adimensional, $|\hat{U}|$, para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$, y 16155). Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente.

el párrafo anterior, en la Fig. 4.3 se presentan los valores absolutos de los desplazamientos horizontales adimensionales $|\hat{U}|$. Para el caso particular de $\alpha = 16155$ y $\beta_0 = 0.0097$, la solución numérica de la Ec. (2.64) se compara con la solución analítica dada por la Ec. (3.2), y se encontró que el comportamiento de ambas soluciones son semejantes. Se observa en la Fig. 4.3 que a medida que el parámetro α aumenta, implica que la longitud de onda λ también aumente, y los desplazamientos horizontales decrecen significativamente,

$|\widehat{U}| \rightarrow 0$. Este comportamiento puede observarse a partir del desplazamiento característico $u_c \sim \frac{(\gamma_s - \gamma_w)L_z^3}{G}k \ll 1$, donde se aprecia claramente que para los valores fijos del peso específico del suelo (γ_s), el peso específico del agua (γ_w) y el módulo de corte (G), la magnitud del desplazamiento característico aumenta o disminuye proporcionalmente a la magnitud del número de onda, (k). Además, el desplazamiento característico horizontal tiende a cero para

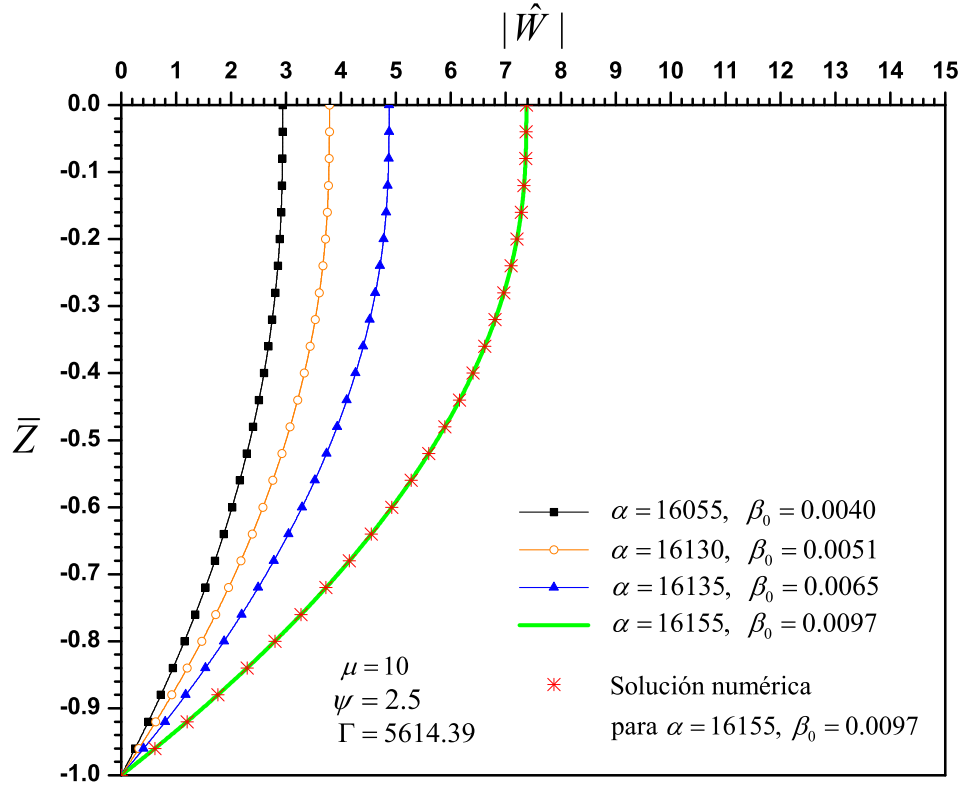


Fig. 4.4: Valores absolutos del desplazamiento vertical adimensional, $|\widehat{W}|$, en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} , para varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$, y 16155) y valores constantes de $\mu = 10$, $\Gamma = 5614.39$ y $\psi = 2.5$. Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente.

valores grandes del módulo de corte (G). En la Fig. 4.4 se muestran los valores absolutos del desplazamiento vertical adimensional, $|\widehat{W}|$, a lo largo del eje adimensional \bar{Z} para los mismos valores de los parámetros utilizados en la Fig. 4.2 y valores adicionales de $\psi = 2.5$ y $\Gamma = 5614.39$. Para los valores de los parámetros $\alpha = 16155$ y $\beta_0 = 0.0097$, en la Fig. 4.4 se incluye una

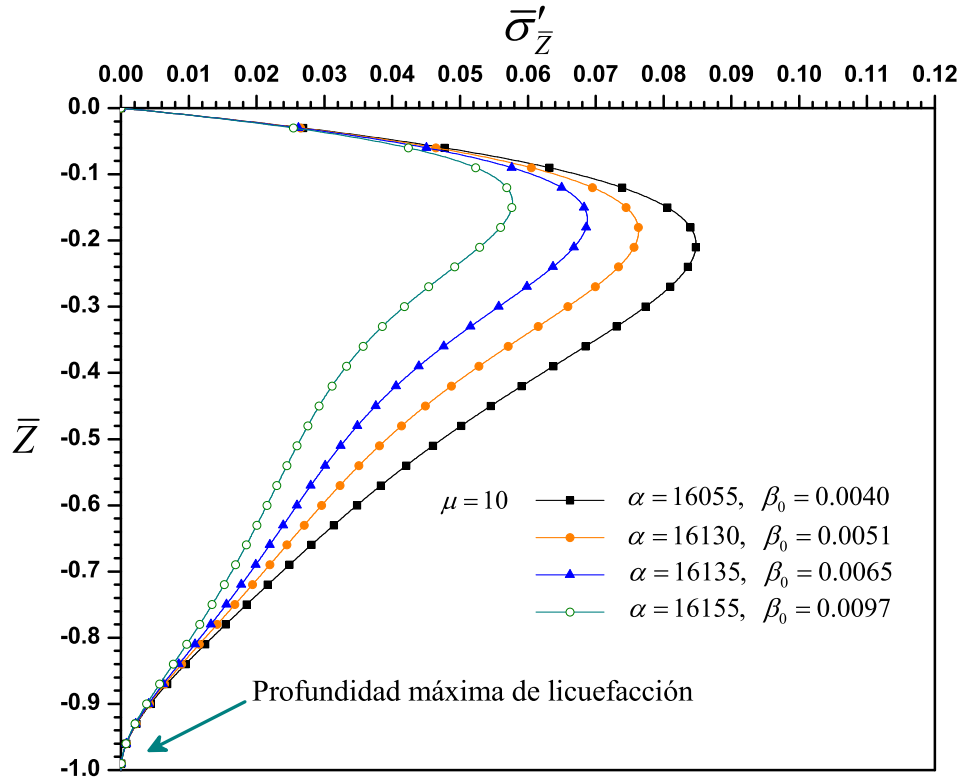


Fig. 4.5: Esfuerzo vertical efectivo adimensional, $\bar{\sigma}'_{\bar{Z}}$, en función de la posición en el eje vertical, \bar{Z} , para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$, y 16155). Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro α son $\beta_0 = 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente.

comparación de la solución analítica del desplazamiento vertical, Ec. (3.3), con la solución numérica Ec. (2.67). Las dos soluciones ajustan adecuada-

mente. En la Fig. 4.4 se observa que los desplazamientos verticales presentan un comportamiento opuesto al obtenido para el desplazamiento horizontal: para valores grandes del parámetro α , implicando valores más pequeños del número de onda, los desplazamientos verticales crecen en magnitud. El comportamiento de los desplazamientos verticales se confirman analizando las escalas características verticales, $w_c \sim \frac{k_s(\gamma_s - \gamma_w)}{\gamma_w C k} \ll 1$, a partir de la cual se analiza que para un número de onda $k \ll 1$ el desplazamiento vertical característico es mayor para valores fijos de los parámetros físicos k_s , γ_s , γ_w y C . Además, a partir del desplazamiento característico vertical, se aprecia que cuando la permeabilidad del suelo k_s crece, el desplazamiento vertical también crece.

En la Fig. 4.5 se aprecia el comportamiento de los esfuerzos verticales efectivos adimensionales, $\bar{\sigma}'_{\bar{Z}}$, en función del eje vertical, \bar{Z} , para un valor constante de $\mu = 10$ y varios valores del parámetro α ($= 16055, 16130, 16135$ y 16155). Los resultados indican que cuando el parámetro α crece, el valor característico β_0 ($= 0.0040, 0.0051, 0.0065$, y 0.0097 , respectivamente) también crece. Físicamente, este comportamiento implica que al aumentar la longitud de onda (λ) o el período del oleaje causa que la profundidad máxima de licuefacción L_z también aumente, porque $L_z = \lambda \beta_0^{1/2} / (2\pi) = CT \beta_0^{1/2} / (2\pi)$. Además, en la misma figura se muestra que conforme crece el parámetro α , implica que la longitud de onda crece y el suelo sea más vulnerable a la licuefacción porque el esfuerzo efectivo vertical disminuye.

4.4. *Influencia de la compresibilidad del fluido de poro en la presión de poro en exceso adimensional*

En la Fig. 4.6 se muestra el comportamiento de la presión de poro en exceso adimensional, \hat{P} , como una función de la posición sobre el eje adimensional \bar{Z} , para un valor constante de $\alpha = 16055$ y diferentes valores del parámetro

μ ($= 15, 28, 52$, y 58). Los valores correspondientes del valor característico β_0 ($= 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente) se calcularon para cada valor del parámetro μ de las Ecs. (2.62) y (3.1) usando el procedimiento iterativo descrito en la Sección 4.1. El parámetro $\mu = nG\beta [1 + 1/(1 - 2\nu)]$ está formado por la porosidad, n ; el módulo de corte, G ; la compresibilidad del fluido del poro, β ; y el coeficiente de Poisson, ν . Para la interpretación física de los resultados, la atención se centra en el parámetro β . Los

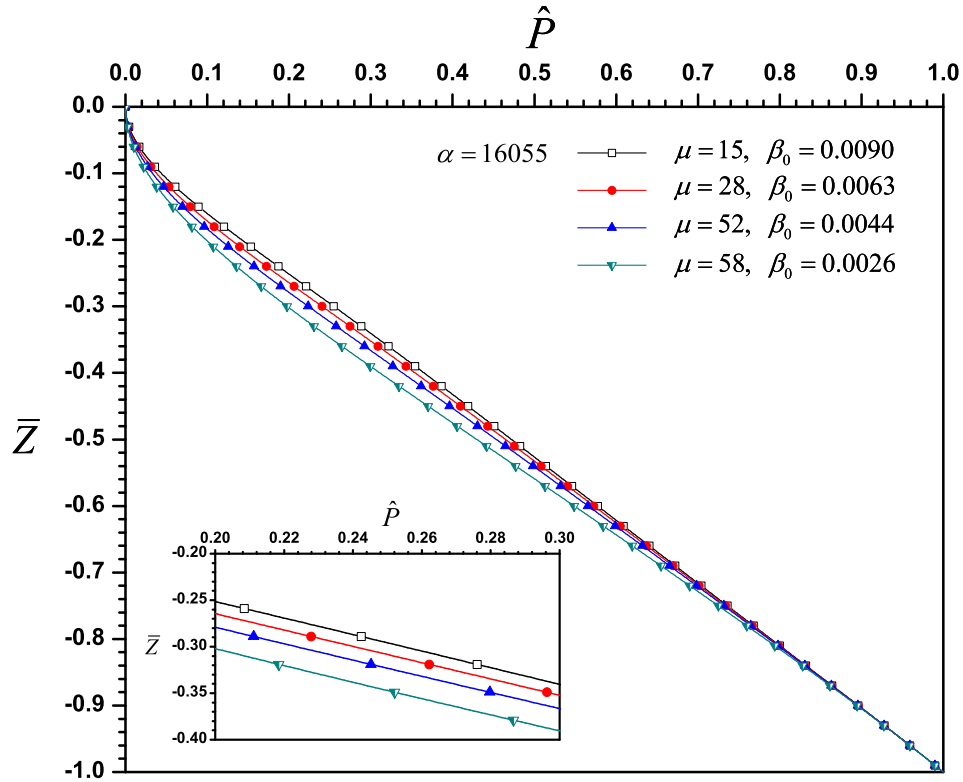


Fig. 4.6: Presión de poro en exceso adimensional, \hat{P} , en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} para un valor constante de $\alpha = 16055$ y varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58), para el cual $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente.

resultados indican que si el parámetro μ crece, físicamente implica que la

compresibilidad de fluido del poro también crece y la presión de poro en exceso muestra un pequeño aumento en magnitud. Como ejemplo ilustrativo, las presiones máximas de poro en exceso para $\mu = 15$ y 58 en $\bar{Z} = -0.4$ son $\hat{P} = 0.3$ y 0.38 , respectivamente, lo que indica que la compresibilidad del fluido del poro tiene una influencia pequeña sobre la presión de poro en exceso. La discusión anterior se puede también aclarar mediante un análisis de orden de magnitud. Al sustituir las Ecs. (2.31) y Ecs. (2.37)-(2.40) en la Ec. (2.3), el orden de magnitud de la presión de poro está dada por

$$P \sim \frac{(\gamma_s - \gamma_w) L_z}{\left(1 - \frac{nL_z^2 \gamma_w \omega}{k_s} \beta\right)}, \quad (4.8)$$

donde para valores fijos de los parámetros físicos γ_s , γ_w , n , k_s , ω y L_z y valores ascendentes de la compresibilidad del fluido del poro $\beta = 5.1 \times 10^{-7} - 5.3 \times 10^{-10}$, [m²/N], la presión de poro crece ligeramente porque $\frac{nL_z^2 \gamma_w \omega \beta}{k_s} \ll 1$.

4.5. *Influencia del módulo de corte en el esfuerzo vertical efectivo*

En la Fig. 4.7 se aprecia la distribución y magnitud del esfuerzo vertical, $\bar{\sigma}'_{\bar{Z}}$, a lo largo del eje adimensional \bar{Z} . Estos resultados se obtuvieron considerando los mismos valores de α , μ y β_0 usados en la Fig. 4.6. El módulo de corte, G , se define como el coeficiente proporcional en la relación de esfuerzo cortante. El módulo de corte es una de las propiedades dominantes de un suelo y es importante elucidar su efecto en el esfuerzo vertical efectivo. El módulo de corte aparece en el parámetro $\mu = nG\beta[1 + 1/(1 - 2\nu)]$, donde se puede apreciar que a medida que el valor de G aumenta, el parámetro μ también aumenta. En la Fig. 4.7 se muestra la influencia del parámetro μ en el esfuerzo vertical efectivo. En esta figura se aprecia que si μ crece, el esfuerzo vertical efectivo también crece. Sin embargo, el valor característico (β_0) decrece, lo que físicamente representa que la licuefacción máxima disminuye.

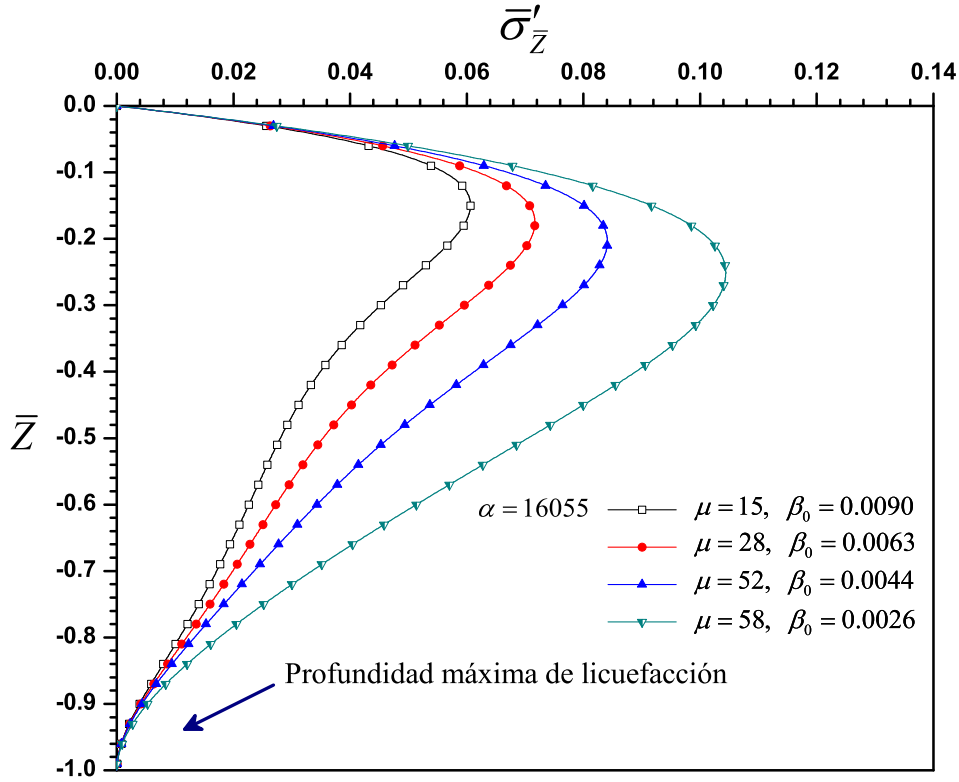


Fig. 4.7: Distribución vertical del esfuerzo vertical efectivo adimensional, $\bar{\sigma}'_z$, para un valor constante de $\alpha = 16055$ y varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58), para el cual $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente.

De la Ec. (2.7) y considerando las relaciones dadas en la Ec. (2.39), el orden de magnitud del esfuerzo vertical efectivo está dado por

$$\sigma'_z \sim 2G \left(1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \right) \frac{k_s (\gamma_s - \gamma_w)}{\gamma_w C k L_z}, \quad (4.9)$$

en donde se observa claramente que cuando el módulo de corte (G) crece, el esfuerzo vertical efectivo (σ'_z) también crece. Además, la Ec. (4.9) indica que para suelos de baja permeabilidad (k_s), los esfuerzos verticales efectivos son pequeños. Esto se debe a que la presión de poro en exceso en una arena

saturada con baja permeabilidad no puede disiparse entre cargas cíclicas diferentes, Huang et al. [34]. Por lo tanto, un suelo con permeabilidad baja es más vulnerable a la licuefacción que un suelo con alta permeabilidad. Las Figs. 4.8

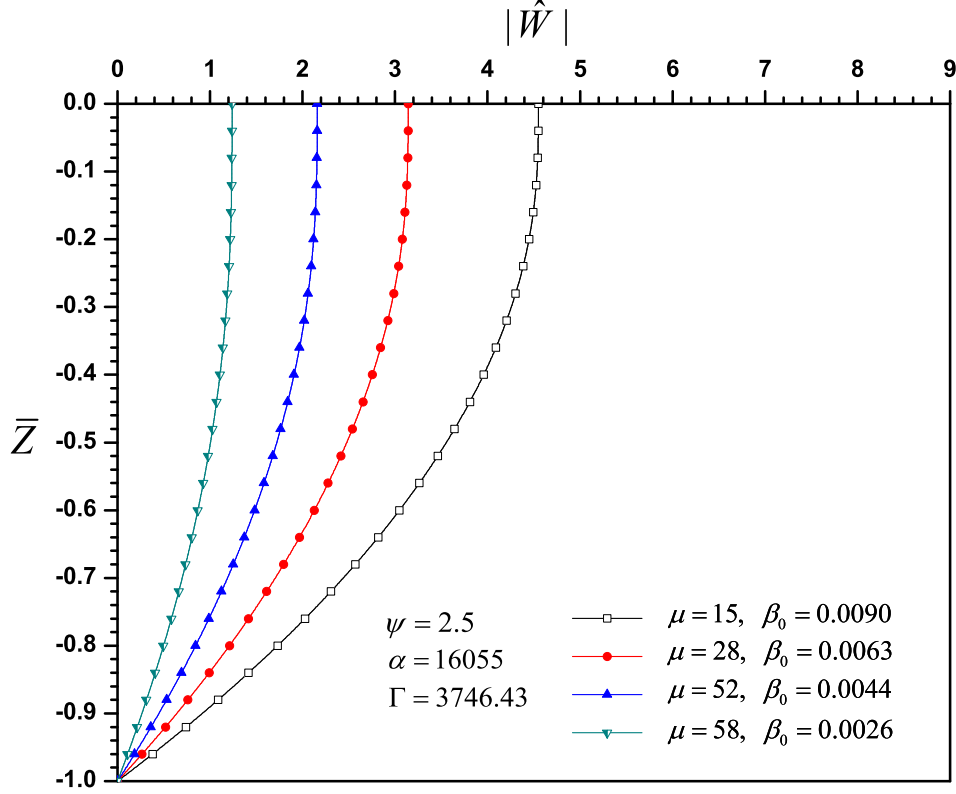


Fig. 4.8: Valores absolutos del desplazamiento vertical, $|\hat{W}|$, en función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} , para varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58) y valores constantes de $\alpha = 16055$, $\Gamma = 3746.43$ y $\psi = 2.5$. Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro μ son $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente.

y 4.9 muestran los valores absolutos de los desplazamientos verticales, $|\hat{W}|$, y horizontales, $|\hat{U}|$, respectivamente, como una función de la posición en el eje adimensional \bar{Z} , para varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58)

y valores constantes de $\alpha = 16055$, $\Gamma = 3746.43$ and $\psi = 2.5$. Los valores característicos obtenidos para cada valor de μ son $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente. El comportamiento de estos desplazamientos mues-

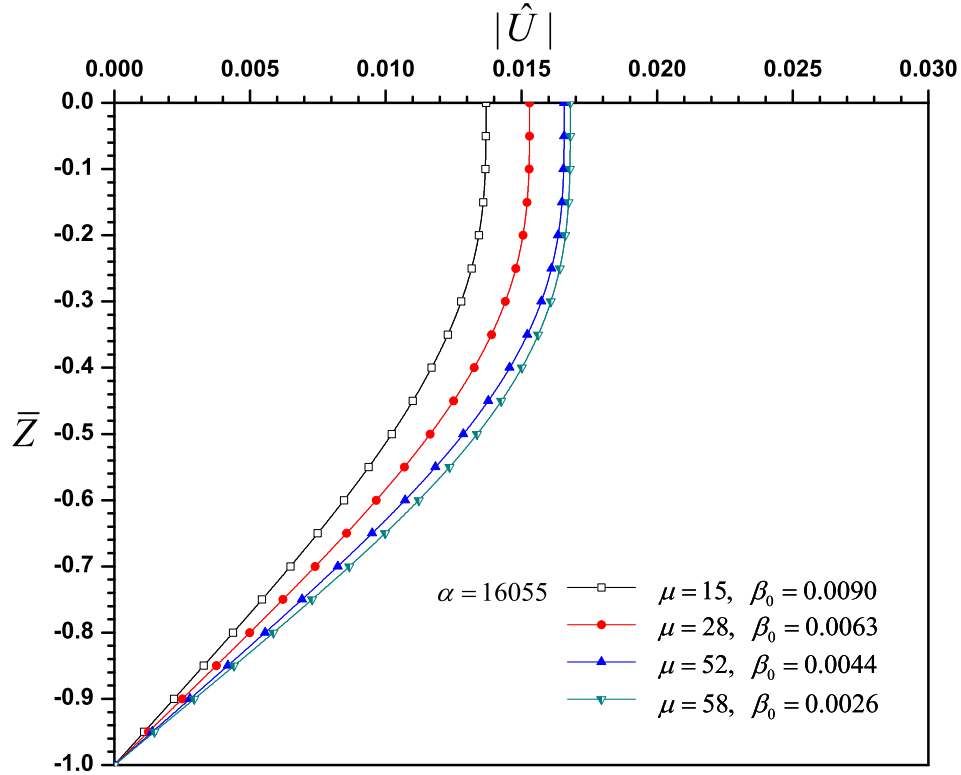


Fig. 4.9: Valores absolutos del desplazamiento horizontal, $|\hat{U}|$, en función de la posición en la variable adimensional \bar{Z} , para varios valores del parámetro μ ($= 15, 28, 52$, y 58) y un valor constante de $\alpha = 16055$. Los valores característicos obtenidos para cada valor del parámetro μ son $\beta_0 = 0.0090, 0.0063, 0.0044$, y 0.0026 , respectivamente.

tra una tendencia similar a la observada con respecto al parámetro α . Sin embargo, las magnitudes de $|\hat{W}|$ en función del parámetro α son más grandes que los obtenidos por el parámetro μ . Para el caso del desplazamiento horizontal, los valores son del mismo orden de magnitud para ambos α y μ .

4.6. *Resumen de las simplificaciones del modelo matemático*

El presente modelo matemático está limitado por las siguientes simplificaciones:

1. Las soluciones analíticas para la presión de poro en exceso y los desplazamientos se obtienen para el límite del valor característico de $\beta_0 = (kL_z)^2 \ll 1$.
2. Debido a que se usa la aproximación de ondas largas lineales, dada por $U_r \ll 1$, la presión inducida por el oleaje es todavía hidrostática.
3. El suelo poro-elástico es isotrópico.
4. El contenido de agua en los poros es incompresible y puede contener burbujas de aire.
5. El agua fluye a través del volumen poroso de acuerdo con la ley de Darcy, y no hay velocidad relativa entre el agua y el suelo.

Conclusiones

En este trabajo se estudia la respuesta dinámica de un suelo poro-elástico inducido por ondas de agua largas. Aquí, la profundidad de licuefacción momentánea máxima inducida por ondas de agua largas se considera como parte del problema, el cual se trata como un problema de valores característicos. El comportamiento del esfuerzo vertical efectivo a lo largo del eje z se compara con los resultados experimentales de Liu et al. [20] y se encontró que estos tienen un buen ajuste. Además, las soluciones analíticas para la presión de poro en exceso y los desplazamientos horizontales y verticales adimensionales se comparan con las correspondientes soluciones numéricas de los problemas de valores en la frontera y los resultados presentan un ajuste exacto. Las conclusiones principales se pueden resumir en la forma siguiente:

1. A partir de los resultados analíticos y del análisis de orden de magnitud, se deduce que para la aproximación de ondas largas lineales, $U_r \ll 1$, los desplazamientos horizontales son más pequeños que los desplazamientos verticales.
2. Los resultados muestran que conforme la longitud de onda o el período de onda crecen, los esfuerzos verticales decrecen, mientras que la presión de poro en exceso y la profundidad de licuefacción máxima crecen.
3. Un suelo con baja permeabilidad es más vulnerable de licuarse que un suelo con alta permeabilidad.

El modelo matemático que se propone en este trabajo puede usarse como una referencia práctica para identificar, como primera aproximación, la

profundidad de licuefacción máxima inducida por la propagación de ondas de agua largas.

Bibliografía

- [1] J. T. Christian, P. K. Taylor, J. K. C. Yen, and D. R. Erali. Large diameter underwater pipeline for nuclear power plant designed against soil liquefaction. *Proceeding of Offshore Technology Conference*, pages 597–606, 1974.
- [2] H. Lundgren, J. H. C. Lindhardt, and C. J. Romold. Stability of breakwaters on porous foundation. *Proceeding of 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, pages 451–454, 1989.
- [3] A. W. Smith and A. D. Gordon. Large breakwater toe failures. *J. Waterways Harbor Coast. Eng*, 109(2):253–255, 1983.
- [4] R. Silvester and J. R. C. Hsu. Sines revisited. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng*, 115(3):327–344, 1989.
- [5] M. B. Groot, M. D. Bolton, P. Foray, P. Meijers, A. C. Palmer, R. Sandven, A. Sawicki, and T. C. The. Physics of liquefaction phenomena around marine structures. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng*, 132(4):227–243, 2006.
- [6] M. B. Groot, M. Kudella, P. Meijers, and H. Oumeraci. Liquefaction phenomena underneath marine gravity structures subjected to wave loads. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng*, 132(4):325–335, 2006.

- [7] F. B. J. Barends. Interaction between ocean waves and seabed. In *Proceeding of International Conference on Geotechnical Eng. Coast*, volume 2, pages 1091–1108, 1991.
- [8] W. F. Marcuson. Definition of terms related to liquefaction. *J. Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng.*, 104(9):1197–1200, 1978.
- [9] M. A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12:155–164, 1941.
- [10] A. Verruijt. *Elastic Storage of Aquifers. In Flow Through Porous Media*. Academic Press, 1969.
- [11] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. part I. low frequency range. *J. Acoustical Society of America*, 28:168–177, 1956.
- [12] T. H. L. Yamamoto, H. Sellmeijer, and E. V. Hijum. On the response of a poro-elastic bed to water waves. *J. Fluid Mech.*, 87:193–206, 1978.
- [13] O. S. Madsen. Wave-induced pore pressures and effective stress in a porous bed. *Géotechnique*, 28(4):377–393, 1978.
- [14] J. R. C. Hsu and D. S. Jeng. Wave-induced soil response in an unsaturated anisotropic seabed of finite thickness. *Int. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 18:785–807, 1994.
- [15] D. S. Jeng and B. R. Seymour. Response in seabed of finite depth with variable permeability. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 123:902–911, 1997.
- [16] D. S. Jeng and B. R. Seymour. Wave-induced pore pressure and effective stresses in a porous seabed with variable permeability. *J. Offshore Mech. Arct. Eng.*, 119:226–233, 1997.
- [17] Y. L. Zhang and L. I. Jie. Analytical solution for wave-induced response of isotropic poro-elastic seabed. *Sci. China Tech. Sci.*, 53(10):2619–2629, 2010.

- [18] Y. Zhang, D. S. Jeng, F. P. Gao, and J. S. Zhang. An analytical solution for response of a porous seabed to combined wave and current loading. *Ocean Eng*, 57:240–247, 2013.
- [19] B. Chowdhury, G. R. Dasari, and T. Nogami. Laboratory study of liquefaction due to wave-seabed interaction. *J. Geotech. Geoenviron. Eng*, 132:842–851, 2006.
- [20] B. Liu, D. S. Jeng, G. L. Ye, and B. Yang. Laboratory study for pore pressures in sandy deposit under wave loading. *Ocean Eng*, 106:207–219, 2015.
- [21] H. Y. Zhao, D. S. Jeng, and C. C. Liao. Parametric study of the wave-induced residual liquefaction around an embedded pipeline. *Appl. Ocean Res*, 55:163–180, 2016.
- [22] Y. Jianhong, D. S. Jeng, P. L. F. Liu, A. H. C. Chan, W. Ren, and Z. Changqi. Breaking wave-induced response of composite breakwater and liquefaction in seabed foundation. *Coast. Eng*, 85:72–86, 2014.
- [23] K. Zen and H. Yamazaki. Mechanism of wave-induced liquefaction and densification in seabed. *Soils Found*, 30:90–104, 1990.
- [24] C. P. Tsai. Wave-induced liquefaction potential in a porous seabed in front of a breakwater. *Ocean Eng*, 22(1):1–18, 1995.
- [25] J. Ye. 3D liquefaction criteria for seabed considering the cohesion and friction of soil. *Appl. Ocean Res*, 37:111–119, 2012.
- [26] W. G. Qi and F. P. Gao. A modified criterion for wave-induced momentary liquefaction of sandy seabed. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 5:20–23, 2015.
- [27] J. G. Wang, M. R. Karim, and P. Z. Lin. Analysis of seabed instability using element free Galerkin method. *Ocean Eng*, 34:247–260, 2007.

- [28] O. C. Zienkiewicz, C. T. Chang, and P. Bettess. Drained, undrained, consolidating and dynamic behavior assumptions in soil. *Geotechnique*, 30(4):385–395, 1980.
- [29] D. S. Jeng and M. Rahman. Effective stresses in a porous seabed of finite thickness: inertia effects. *Can. Geotech. J.*, 37:1383–1392, 2000.
- [30] X. L. Zhou, J. Zhang, J. H. Wang, Y. F. Xu, and D. S. Jeng. Stability and liquefaction analysis of porous seabed subjected to cnoidal wave. *Appl. Ocean Res.*, 48:250–265, 2014.
- [31] T. Sakai, K. Hatanaka, and H. Mase. Wave-induced effective stress in seabed and its momentary liquefaction. *J. Waterw. Port C-ASCE*, 118(2):202–206, 1992.
- [32] A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall., Second ed, New York, 2002.
- [33] B. Das. *Principles of Geotechnical Engineering*. CENGAGE Learning, United States of America, 2010.
- [34] Y. Huang, Y. Bao, M. Zhang, C. Liu, and P. Lu. Analysis of the mechanism of seabed liquefaction induced by waves and related seabed protection. *Nat. Hazards*, 79:1399–1408, 2015.

Apéndice A

Constantes de integración de la solución analítica para la presión de poro en exceso y desplazamientos horizontales y verticales para el valle de una onda

La solución analítica de la ecuación de gobierno de la presión adimensional, Ec. (2.59), tiene una solución de la forma

$$\hat{P}(\bar{Z}) = e^{r\bar{Z}}, \quad (\text{A.1})$$

Derivando cuatro veces la Ec. (A.1) se tienen la siguientes derivadas

$$\frac{d^2 \hat{P}}{d\bar{Z}^2} = r^2 e^{r\bar{Z}} \quad \text{y} \quad \frac{d^4 \hat{P}}{d\bar{Z}^4} = r^4 e^{r\bar{Z}}. \quad (\text{A.2})$$

Sustituyendo las Ecs. (A.1) y (A.2) en la ecuación diferencial (2.59), se obtiene la siguiente relación

$$r^4 - i\frac{\beta_0(1+\mu)\alpha}{\mu}r^2 + i\frac{\beta_0^2\alpha}{\mu} = 0. \quad (\text{A.3})$$

La Ec. (A.3) tiene cuatro raíces que satisfacen la igualdad, y corresponden a las siguientes relaciones

$$r = \mp\varphi, \quad r = \mp\tilde{\varphi}. \quad (\text{A.4})$$

En la Ec. (A.4) las variables φ y $\tilde{\varphi}$ están dadas por $\varphi = [\beta_0/(1+\mu)]^{1/2}$ y $\tilde{\varphi} = \varphi \left[\frac{i(1+\mu)^2\alpha}{\mu} - 1 \right]^{1/2}$. La solución de la Ec. (2.59) tiene la forma siguiente.

$$\hat{P}(\bar{Z}) = C_1 e^{-\varphi\bar{Z}} + C_2 e^{\varphi\bar{Z}} + C_3 e^{-\tilde{\varphi}\bar{Z}} + C_4 e^{\tilde{\varphi}\bar{Z}}. \quad (\text{A.5})$$

A.1. Obtención de la constantes de integración para la presión adimensional

En este apéndice se presenta la obtención de las constantes de integración C_1, C_2, C_3 y C_4 . Aplicando las condiciones de frontera Ecs. (2.60) y (2.61) en la Ec. (3.1) se obtienen las siguientes relaciones algebraicas,

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$-\varphi C_1 + \varphi C_2 - \tilde{\varphi} C_3 + \tilde{\varphi} C_4 = 0. \quad (\text{A.7})$$

De manera similar se evalúan las Ecs. (2.62) y (2.63) en la solución Ec. (3.1) para obtener los siguientes términos

$$e^{\varphi} C_1 + e^{-\varphi} C_2 + e^{\tilde{\varphi}} C_3 + e^{-\tilde{\varphi}} C_4 = 1, \quad (\text{A.8})$$

$$-\varphi e^{\varphi} C_1 + \varphi e^{-\varphi} C_2 - \tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}} C_3 + \tilde{\varphi} e^{-\tilde{\varphi}} C_4 = -1. \quad (\text{A.9})$$

Las Ecs. (A.6)-(A.9) se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\varphi & \varphi & -\tilde{\varphi} & \tilde{\varphi} \\ e^\varphi & e^{-\varphi} & e^{\tilde{\varphi}} & e^{-\tilde{\varphi}} \\ -\varphi e^\varphi & \varphi e^{-\varphi} & -\tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}} & \tilde{\varphi} e^{-\tilde{\varphi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo la matriz anterior, las constantes de integración de la presión de poro en exceso, Ec. (3.1), están dadas por las siguientes ecuaciones

$$C_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\tilde{\delta}} \quad (\text{A.10})$$

$$C_2 = \frac{\delta_3 - \delta_4}{\tilde{\delta}} \quad (\text{A.11})$$

$$C_3 = \frac{\delta_5}{\tilde{\delta}} \quad (\text{A.12})$$

$$C_4 = \frac{\delta_6}{\tilde{\delta}} \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\delta_1 = \tilde{\varphi} \left(-(1 + \tilde{\varphi}) e^\varphi + 2e^{\tilde{\varphi}} + (-1 + \tilde{\varphi}) e^{(\varphi+2\tilde{\varphi})} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\delta_2 = \varphi \left((1 + \tilde{\varphi}) e^\varphi - 2\tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}} + (-1 + \tilde{\varphi}) e^{(\varphi+2\tilde{\varphi})} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\delta_3 = \tilde{\varphi} e^\varphi \left(1 + e^{2\tilde{\varphi}} - 2e^{(\varphi+\tilde{\varphi})} + \tilde{\varphi} (1 - e^{2\tilde{\varphi}}) \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\delta_4 = \varphi e^\varphi \left(1 - e^{2\tilde{\varphi}} + \tilde{\varphi} (1 + e^{2\tilde{\varphi}} - 2e^{(\varphi+\tilde{\varphi})}) \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\delta_5 = (-1 + e^{2\varphi}) (\varphi^2 e^{\tilde{\varphi}} + \tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}}) - \varphi (1 + \tilde{\varphi}) (-2e^\varphi + e^{\tilde{\varphi}} + e^{(2\varphi+\tilde{\varphi})}) \quad (\text{A.18})$$

$$\delta_6 = e^{\tilde{\varphi}} (-1 + e^{2\varphi}) (-\varphi^2 + \tilde{\varphi}) - e^{\tilde{\varphi}} \varphi (-1 + \tilde{\varphi}) (1 + e^{2\varphi} - 2e^{(\varphi+\tilde{\varphi})}) \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{\delta} = (-1 + e^{2\varphi}) (-1 + e^{2\tilde{\varphi}}) (\varphi^2 + \tilde{\varphi}^2) - 2\varphi\tilde{\varphi} (1 + e^{2\varphi} + e^{2\tilde{\varphi}} - 4e^{(\varphi+\tilde{\varphi})} + e^{2(\varphi+\tilde{\varphi})}) \quad (\text{A.20})$$

A.2. *Obtención de las constantes de integración para el desplazamiento horizontal adimensional*

En la Ec. (2.64) se ve que el desplazamiento horizontal adimensional \hat{U} es una función de la presión adimensional \hat{P} y para obtener la solución del desplazamiento horizontal se debe integrar la Ec. (2.64) como sigue

$$\hat{U} = -i \int \int \hat{P} d\bar{Z} d\bar{Z} + C_5 \int d\bar{Z} + C_6. \quad (\text{A.21})$$

La Ec. (A.21) se resuelve a partir de las siguientes condiciones de frontera: En la interfaz oleaje-suelo marino se presenta la siguiente condición

$$\frac{d\hat{U}}{d\bar{Z}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = 0. \quad (\text{A.22})$$

En el fondo del suelo se asume que los desplazamientos horizontales tienden a cero; por lo tanto, se escribe lo siguiente:

$$\hat{U} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad \bar{Z} = -1. \quad (\text{A.23})$$

Resolviendo el término $\int \hat{P} d\bar{Z}$ de la Ec. (A.21), se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{d\hat{U}}{d\bar{Z}} = i\varphi^{-1} (C_1 e^{-\varphi\bar{Z}} - C_2 e^{\varphi\bar{Z}}) + i\tilde{\varphi}^{-1} (C_3 e^{-\tilde{\varphi}\bar{Z}} - C_4 e^{\tilde{\varphi}\bar{Z}}) + C_5. \quad (\text{A.24})$$

Integrando la Ec. (A.24) se obtiene

$$\widehat{U}(\overline{Z}) = -i\varphi^{-2} \left(C_1 e^{-\varphi\overline{Z}} + C_2 e^{\varphi\overline{Z}} \right) - i\tilde{\varphi}^{-2} \left(C_3 e^{-\tilde{\varphi}\overline{Z}} + C_4 e^{\tilde{\varphi}\overline{Z}} \right) + C_5 \overline{Z} + C_6 \quad (\text{A.25})$$

donde las constantes de integración C_5 y C_6 se evalúan aplicando las condiciones de frontera (A.22) y (A.23) y se obtiene lo siguiente:

$$C_5 = i\varphi^{-1}(C_2 - C_1) + i\tilde{\varphi}^{-1}(C_4 - C_3) \quad (\text{A.26})$$

y

$$C_6 = i\varphi^{-1}C_1(\varphi^{-1}e^\varphi - 1) + i\varphi^{-1}C_2(\varphi^{-1}e^{-\varphi} + 1) + i\tilde{\varphi}^{-1}C_3(\tilde{\varphi}^{-1}e^{\tilde{\varphi}} - 1) + i\tilde{\varphi}^{-1}C_4(\tilde{\varphi}^{-1}e^{-\tilde{\varphi}} + 1) \quad (\text{A.27})$$

A.3. Obtención de las constantes de integración para el desplazamiento vertical adimensional

Para determinar la solución de la Ec. (2.67) se debe conocer previamente la solución de la presión adimensional \widehat{P} y la solución del desplazamiento horizontal \widehat{U} como se puede apreciar en la Ec. (2.67) que en su forma integral se escribe como sigue

$$\widehat{W}(\overline{Z}) = -i\vartheta \int \widehat{U} d\overline{Z} - \tilde{\vartheta} \int \widehat{P} d\overline{Z} + C_7 \overline{Z} + C_8 \quad (\text{A.28})$$

donde $\vartheta = \beta_0^2 \Gamma \psi / (1 + \psi)$ y $\tilde{\vartheta} = \beta_0 \Gamma / (1 + \psi)$. La Ec. (A.28) se resuelve a partir de las siguientes condiciones de frontera

$$\frac{d\widehat{W}}{d\overline{Z}} = 0 \quad \text{en} \quad \overline{Z} = 0 \quad (\text{A.29})$$

y

$$\widehat{W} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad \overline{Z} = -1. \quad (\text{A.30})$$

Resolviendo las integrales $\int \widehat{U} d\overline{Z}$ y $\int \widehat{P} d\overline{Z}$ y sustituyendo las condiciones de frontera Ecs. (A.29) y (A.30) en la Ec. (A.28) se obtienen las constantes de integración C_7 y C_8 como sigue

$$\begin{aligned}
C_7 = & C_1 \left(\vartheta (\varphi^{-2} - \varphi^{-2} e^\varphi + \varphi^{-1}) + \tilde{\vartheta} \right) + & (A.31) \\
& C_2 \left(\vartheta (\varphi^{-2} - \varphi^{-2} e^{-\varphi} - \varphi^{-1}) + \tilde{\vartheta} \right) + \\
& C_3 \left(\vartheta (\tilde{\varphi}^{-2} - \tilde{\varphi}^{-2} e^{\tilde{\varphi}} + \tilde{\varphi}^{-1}) + \tilde{\vartheta} \right) + \\
& C_4 \left(\vartheta (\tilde{\varphi}^{-2} - \tilde{\varphi}^{-2} e^{-\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi}^{-1}) + \tilde{\vartheta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_8 = & C_1 \varphi^{-1} \left(- \left(\vartheta \varphi^{-2} + \tilde{\vartheta} \right) e^\varphi + \vartheta \left(\frac{1}{2} + \varphi^{-1} \right) + \tilde{\vartheta} \varphi \right) + & (A.32) \\
& C_2 \varphi^{-1} \left(\left(\vartheta \varphi^{-2} + \tilde{\vartheta} \right) e^{-\varphi} - \vartheta \left(\frac{1}{2} - \varphi^{-1} \right) + \tilde{\vartheta} \varphi \right) + \\
& C_3 \tilde{\varphi}^{-1} \left(- \left(\vartheta \tilde{\varphi}^{-2} + \tilde{\vartheta} \right) e^{\tilde{\varphi}} + \vartheta \left(\frac{1}{2} + \tilde{\varphi}^{-1} \right) + \tilde{\vartheta} \tilde{\varphi} \right) + \\
& C_4 \tilde{\varphi}^{-1} \left(\left(\vartheta \tilde{\varphi}^{-2} + \tilde{\vartheta} \right) e^{-\tilde{\varphi}} - \vartheta \left(\frac{1}{2} - \tilde{\varphi}^{-1} \right) + \tilde{\vartheta} \tilde{\varphi} \right)
\end{aligned}$$

Apéndice B

Constantes de integración de la solución analítica de la presión de poro en exceso para la cresta de una onda

B.1. *Obtención de la constantes de integración para la presión adimensional*

En este apéndice se presenta la obtención de las constantes de integración A_1, A_2, A_3 y A_4 de la solución Ec. (4.5). Aplicando las condiciones de frontera Ecs. (2.60) y (2.61) en la Ec. (4.5) se obtienen las siguientes relaciones algebraicas,

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$-\varphi A_1 + \varphi A_2 - \tilde{\varphi} A_3 + \tilde{\varphi} A_4 = 0. \quad (\text{B.2})$$

De manera similar se evalúan las Ecs. (4.6) y (4.7) en la Ec. (4.5) para obtener los siguientes términos

$$e^\varphi A_1 + e^{-\varphi} A_2 + e^{\tilde{\varphi}} A_3 + e^{-\tilde{\varphi}} A_4 = -1, \quad (\text{B.3})$$

$$-\varphi e^\varphi A_1 + \varphi e^{-\varphi} A_2 - \tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}} A_3 + \tilde{\varphi} e^{-\tilde{\varphi}} A_4 = 1. \quad (\text{B.4})$$

Las Ecs. (B.1)-(B.4) se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\varphi & \varphi & -\tilde{\varphi} & \tilde{\varphi} \\ e^\varphi & e^{-\varphi} & e^{\tilde{\varphi}} & e^{-\tilde{\varphi}} \\ -\varphi e^\varphi & \varphi e^{-\varphi} & -\tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}} & \tilde{\varphi} e^{-\tilde{\varphi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo la matriz anterior, las constantes de integración de la presión de poro en exceso para una cresta están dadas por las siguientes relaciones:

$$A_1 = \frac{\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2}{\tilde{\delta}} \quad (\text{B.5})$$

$$A_2 = \frac{\tilde{\delta}_3 + \tilde{\delta}_4}{\tilde{\delta}} \quad (\text{B.6})$$

$$A_3 = \frac{\tilde{\delta}_5}{\tilde{\delta}} \quad (\text{B.7})$$

$$A_4 = \frac{\tilde{\delta}_6}{\tilde{\delta}} \quad (\text{B.8})$$

donde

$$\tilde{\delta}_1 = \tilde{\varphi} \left((1 + \tilde{\varphi}) e^\varphi - 2e^{\tilde{\varphi}} - (-1 + \tilde{\varphi}) e^{(\varphi+2\tilde{\varphi})} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\tilde{\delta}_2 = \varphi \left((1 + \tilde{\varphi}) e^\varphi - 2\tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}} + (-1 + \tilde{\varphi}) e^{(\varphi+2\tilde{\varphi})} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\tilde{\delta}_3 = -e^\varphi \tilde{\varphi} \left(1 + \tilde{\varphi} + e^{2\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi} e^{2\tilde{\varphi}} - 2e^{(\varphi+\tilde{\varphi})} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\tilde{\delta}_4 = e^\varphi \varphi (1 - e^{2\tilde{\varphi}} + \tilde{\varphi} (1 + e^{2\tilde{\varphi}} - 2e^{(\varphi+\tilde{\varphi})})) \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{\delta}_5 = (-1 + e^{2\varphi}) (-\varphi^2 e^{\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi} e^{\tilde{\varphi}}) + \varphi (1 + \tilde{\varphi}) (-2e^\varphi + e^{\tilde{\varphi}} + e^{(2\varphi+\tilde{\varphi})}) \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{\delta}_6 = e^{\tilde{\varphi}} (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} e^{2\varphi} + \varphi^2 (-1 + e^{2\varphi}) + \varphi (-1 + \tilde{\varphi}) (1 + e^{2\varphi} - 2e^{(\varphi+\tilde{\varphi})})) \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{\delta} = (-1 + e^{2\varphi}) (-1 + e^{2\tilde{\varphi}}) (\varphi^2 + \tilde{\varphi}^2) - 2\varphi\tilde{\varphi} (1 + e^{2\varphi} + e^{2\tilde{\varphi}} - 4e^{(\varphi+\tilde{\varphi})} + e^{2(\varphi+\tilde{\varphi})}) \quad (\text{B.15})$$