



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS TEÓRICO Y MECANISMOS DE ENFRIAMIENTO EN
MICROCANALES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
IAN GUILLERMO MONSIVAIS MONTOLIU

TUTOR
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE, FACULTAD DE INGENIERÍA
COMITÉ TUTOR
DR. JAIME GONZALO CERVANTES DE GORTARI, FACULTAD DE INGENIERÍA
DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ, ESIME, IPN

MÉXICO, CDMX. ABRIL DE 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. JAIME GONZALO CERVANTES DE GORTARI

Secretario: DR. FRANCISCO JAVIER SOLORIO ORDAZ

Vocal: DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

1^{er}. Suplente: DR. ROGELIO GONZÁLEZ OROPEZA

2^{d o}. Suplente: DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ

Lugar donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, CDMX

TUTOR DE TESIS:

DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

FIRMA

Abstract

In this work, we analyze asymptotically and numerically the conjugate heat transfer between a rarified gas flow and the lower wall of a thin horizontal microchannel, when the laminar motion of the gas is originated only by the thermal creep or transpiration effect on the lower wall of the microchannel. It is well known the need to impose, in general, a variable temperature regime at the lower wall to induce the transpiration effect. Usually, it can be reached by setting a linear temperature profile as a boundary condition. However, in our case, we prefer to avoid this simplification taking into account that in practical applications, the temperature profile at the lower wall can be unknown. This case can occur, for instance, in a heat sink or a similar device with a well defined heat dissipation rate. Under this physical configuration, we can assume then that the bottom or external face of this heat sink with finite thermal conductivity is exposed to a uniform heat flux. On the other hand, the upper wall of the microchannel is subject to a well-known prescribed thermal boundary condition. The above conditions are sufficient to consider the simultaneous or conjugate analysis of the heat conduction equation for the heat sink together with the mass, momentum and energy equations for the gas phase. The resulting governing equations are written in dimensionless form, assuming that the Reynolds number associated with the characteristic velocity of the thermal creep and the aspect ratio of the microchannel, are both very small. The velocity and temperature profiles for the gas phase and the temperature profiles for the solid wall are predicted as functions of the involved dimensionless parameters and the main results confirm that the phenomenon of conjugate thermal creep exists whenever the temperature of the lower wall varies linearly or nonlinearly.

Resumen

En este trabajo, analizamos asintóticamente y numéricamente el problema conjugado de la transferencia de calor entre un flujo de gas rarificado y la pared inferior de un microcanal horizontal muy delgado, cuando el movimiento laminar del gas se origina sólo por el efecto de transpiración térmica sobre la pared inferior del microcanal. Como lo dicen varios estudios previos, ha surgido la necesidad de imponer en general, un régimen variable de temperatura en la pared inferior para inducir el efecto de transpiración térmica. Por lo general, esto se ha logrado estableciendo un perfil lineal de temperatura como condición de frontera en la pared. Sin embargo, en nuestro caso, preferimos evitar esta simplificación teniendo en cuenta que en aplicaciones prácticas, el perfil de temperatura en la pared inferior puede ser desconocida lo que implica que nuestro problema sea más realista. Este caso puede ocurrir por ejemplo, en un disipador de calor o en un dispositivo similar con una velocidad de disipación de calor bien definida. Bajo esta configuración física, podemos asumir entonces que la cara inferior o externa de este disipador de calor con conductividad térmica finita se expone a un flujo uniforme de calor. Por otra parte, la pared superior del microcanal está sujeta a una condición de frontera ya conocida. Las condiciones anteriores son suficientes para considerar el análisis conjugado entre la ecuación de conducción de calor para el disipador y las ecuaciones de masa, cantidad de movimiento y energía para la fase gaseosa. Las ecuaciones de conservación resultantes se escriben en forma adimensional, suponiendo que el número de Reynolds asociado con la velocidad característica de transpiración térmica y la relación de aspecto del microcanal, son ambos muy pequeños. Los perfiles de velocidad y temperatura para la fase gaseosa y los perfiles de temperatura para la pared sólida se obtienen como funciones de los parámetros adimensionales implicados. Los resultados confirman que el fenómeno de transpiración térmica en un problema conjugado existe siempre que la temperatura de la pared inferior varíe lineal o no linealmente.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Aspectos Fundamentales	1
1.2. Transpiración Térmica	4
1.3. Otros efectos de rarefacción	7
1.4. Estudios Previos Sobre Transpiración Térmica	8
1.5. Objetivos de la tesis	13
2. Modelo Físico	15
2.1. Ecuaciones de Conservación	16
2.2. Condiciones de Frontera	18
2.3. Ecuación de conducción para el sumidero de calor	20
2.4. Orden de Magnitud	21
2.5. Ecuaciones Adimensionales	29
2.6. Reducción de las ecuaciones de conservación	33
2.7. Límite Asintótico Relevante ($Re_H \ll \epsilon$)	35
3. Soluciones del Problema Conjugado	43
3.1. Límite Térmicamente Grueso: $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$	44
3.2. Límite Térmicamente Delgado: $\alpha_c \gg 1$	46
3.3. Solución Numérica	53
4. Resultados	57
4.1. Régimen Térmicamente Grueso	58
4.2. Régimen Térmicamente Delgado	70

5. Conclusiones	91
Bibliografía	93

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de las últimas dos décadas, la micro y nano-tecnología han adquirido un enorme interés debido al auge de los sistemas micro-electromecánicos denominados MEMS por sus siglas en inglés. Como ejemplo más significativo tenemos a los microprocesadores electrónicos que se utilizan en infinidad de aplicaciones tales como la construcción de micro-robots, micro-reactores, nano-satélites, entre otros [1].

Debido a lo anterior, ha sido necesario la extensiva fabricación de microcanales para construir sistemas integrados de refrigeración y enfriamiento [2].

Las longitudes características presentes en la transferencia de momentum y energía dentro de los MEMS, son del orden de micras [3].

1.1. Aspectos Fundamentales

Las condiciones estándares bajo las que trabajan los MEMS en ambientes gaseosos presentan un trayectoria libre media de las moléculas de aproximadamente 70 nm [3], por lo cual, cuando se trabaja en estas escalas es necesario utilizar un parámetro llamado número de Knudsen (Kn) definido como:

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

donde λ es la trayectoria libre media de las moléculas y L la longitud característica del micro-canal.

A medida que el número de Knudsen aumenta, las hipótesis de la mecánica del medio continuo son inconsistentes y por lo tanto es necesario utilizar otros

modelos que describan el comportamiento de las propiedades físicas que se requieran estudiar [4]. Estas inconsistencias se deben fundamentalmente a los efectos de rarefacción e interacciones moleculares que típicamente presentan los gases en micro-escalas.

Los efectos de rarefacción son aquellos que se presentan en ambientes de baja presión en los cuales el esfuerzo cortante, momentum y los flujos de calor y masa ya no pueden ser predichos por modelos basados en la hipótesis de medio continuo. Sin embargo, es muy poco lo que se sabe de estos efectos en líquidos por lo que los estudios más avanzados son los que se han hecho en flujo de gases.

El efecto de rarefacción que se presenta con mayor frecuencia en un gas, es el de transpiración térmica observado por primera vez por Osborne Reynolds en 1879 [5] quien bautizó con ese nombre a este fenómeno; en inglés es comúnmente llamado *thermal creep*. La transpiración térmica se presenta cuando es posible generar un flujo debido a gradientes de temperatura en dirección tangencial a lo largo del canal. Además, la temperatura del estado final de las moléculas de fluido es mayor que la temperatura de éstas en el estado inicial. En otras palabras, las moléculas viajan de una zona fría a una caliente. En la siguiente sección se explica con mayor detalle este fenómeno ya que este efecto será el objeto principal de estudio de esta tesis en la cual se pretende resolver un problema conjugado que se explicará en el siguiente capítulo, considerando la presencia de la transpiración térmica. Mayores detalles sobre la transpiración térmica y otros efectos de rarefacción se encuentran en el libro de Karniadakis *et al.* 2005 [6].

Otro aspecto importante a considerar dentro del estudio de las micro-escalas son las interacciones entre la pared y las moléculas de fluido. Dentro de la dinámica molecular de los gases, cuando se enfoca al estudio de gases de baja densidad como el aire y gases monoatómicos, el modelo más usado es el de la esfera rígida [6]. En este modelo las interacciones moleculares con la pared son descritas principalmente por los llamados coeficientes de acomodamiento. La transferencia de energía y de momentum entre las moléculas del gas y la superficie de la pared requiere especificaciones de las interacciones entre la superficie y las moléculas de gas que la golpean, esta información nos la proporcionan los coeficientes de acomodamiento, los cuales son dos y se describen brevemente a continuación:

- *Coefficiente de Momentum Tangencial* (σ_v). Representa el intercambio de momentum tangencial de las moléculas del gas con la superficie de la

pared.

$$\sigma_v = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i - \tau_w}$$

donde

τ_i es el momentum tangencial de las moléculas que chocan con la superficie antes de que se impacten con ésta.

τ_r es el momentum tangencial de las moléculas después de chocar con la pared. Usualmente se dice que las moléculas son reflejadas por la pared.

τ_w es el momentum tangencial de las moléculas reflejadas pero que es igual al de la superficie de la pared. $\tau_w = 0$ para superficies estacionarias.

Cuando $\sigma_v = 0$, las moléculas no modifican su momentum tangencial al chocar con la pared. Esto se llama “Reflexión Especular”.

Cuando $\sigma_v = 1$, las moléculas son reflejadas desde la pared con una velocidad tangencial nula. Esto se llama “Reflexión Difusa”.

- *Coefficiente de Acomodo de Energía o Coeficiente Térmico (σ_T)*. Representa la transferencia de energía en forma de calor (energía térmica) que intercambian las moléculas de fluido con la superficie de la pared.

$$\sigma_T = \frac{dE_i - dE_r}{dE_i - dE_w}$$

donde

dE_i es el flujo de energía térmica de las moléculas que chocan con la superficie antes de que se impacten con ésta.

dE_r es el flujo de energía térmica de las moléculas reflejadas por la pared.

dE_w es el flujo de energía térmica si todas las moléculas que chocan con la pared fueran reflejadas con un flujo de energía correspondiente a la temperatura de la pared (T_w).

Idealmente las moléculas deberían ser reflejadas con un flujo de energía térmica igual a dE_w , por lo tanto, el intercambio perfecto de energía se tiene cuando $\sigma_T = 1$.

En el estudio de la transferencia de calor a nivel micro, se definen tres tipos de regímenes de acuerdo al valor que toma el número de Knudsen [6]:

- *Régimen de Deslizamiento* ($0 \leq Kn \leq 0.1$). En este tipo de flujo las ecuaciones de Navier-Stokes siguen siendo válidas para describir el movimiento del fluido sin embargo están sujetas a ciertas modificaciones en las condiciones de frontera tanto para la velocidad como para la temperatura las cuales son: velocidad de deslizamiento y salto de temperatura en la pared.
- *Régimen de Transición* ($0.1 \leq Kn \leq 10$). En este tipo de flujo ya los efectos de rarefacción e interacciones moleculares comienzan a invalidar las leyes de la mecánica del medio continuo; sin embargo, es posible hacer aproximaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes empleando la ecuación de Boltzmann para describir el movimiento de las moléculas de fluido. Este régimen se llama de transición debido a que el movimiento molecular pasa de ser ordenado (difusivo o continuo) a presentar un carácter aleatorio; es decir, las moléculas del fluido viajan libremente sin seguir un patrón fijo o conocido.
- *Régimen Molecular* ($Kn > 10$). En este régimen de flujo el movimiento de las moléculas de fluido ya no puede ser descrito por ninguna de las leyes de la física clásica por lo cual, si se requiere hacer una descripción analítica detallada de este comportamiento se necesita recurrir a la mecánica cuántica (ecuación de Schrödinger) o a la mecánica estadística. Actualmente se cuenta con técnicas de simulación numérica que pueden describir el comportamiento del fluido en el régimen molecular.

En numerosas ocasiones el comportamiento del flujo de un gas ya sea en el régimen molecular o de transición, se describe utilizando una técnica estocástica de simulación numérica conocida como Simulación Directa Monte Carlo (DSMC por sus siglas en inglés) [6].

En este trabajo, limitaremos nuestro análisis exclusivamente al régimen de deslizamiento ($0 \leq Kn \leq 0.1$).

1.2. Transpiración Térmica

Los efectos de transpiración térmica deben tomarse en cuenta cuando en la superficie de un microcanal se presentan gradientes longitudinales de tem-

peratura, por ejemplo cuando en la superficie de un microcanal se aplica un flujo uniforme de calor, dicha superficie está sujeta a variaciones longitudinales de temperatura lo que provoca que exista un flujo ocasionado por el efecto de transpiración térmica [6].

Es posible iniciar el flujo de un gas debido a gradientes longitudinales de temperatura sobre las paredes de un microcanal, desde las cuales el fluido comienza a moverse desde una región de menor temperatura a otra de mayor temperatura. Este es el llamado efecto de transpiración térmica. Este fenómeno se puede explicar con el siguiente ejemplo [6]: Consideremos dos contenedores llenos con el mismo gas ambos a la misma presión ($P_1 = P_2$) pero a diferentes temperaturas por ejemplo digamos que $T_1 > T_2$.

Si los dos contenedores están conectados por un canal relativamente grueso ($\lambda \ll h$), el sistema está aparentemente en equilibrio termodinámico por lo que no tiene porque presentarse movimiento alguno del fluido en el canal que conecta a los dos tanques. Pero si la altura (h) del microcanal es comparable con la trayectoria libre media de las moléculas del fluido (λ), tendremos que considerar la presencia de efectos de rarefacción. En este caso el mecanismo en el que este sistema puede lograr el equilibrio termodinámico es muy complejo ya que debemos considerar las interacciones moleculares entre el fluido y las paredes del microcanal. Para simplificar la discusión consideremos que nos encontramos en el régimen molecular es decir: $\lambda \gg h$. En este régimen de flujo las colisiones entre las moléculas del fluido son despreciables comparadas con las interacciones de éstas con las paredes. Si consideramos reflexión especular ($\sigma_v = 0$), podemos efectuar el siguiente análisis. Primero consideramos que la densidad ρ del fluido es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen n . Generalmente, a n se le conoce como número de densidad en el modelo de esfera rígida, entonces: $\rho \propto n$. Consideramos también que la temperatura del fluido es proporcional al cuadrado de la velocidad promedio de las moléculas del fluido (\bar{c}), esto es: $T \propto \bar{c}^2$.

Los flujos máxicos por unidad de área en el extremo más caliente y el más frío del canal están dados respectivamente por $mn_1\bar{c}_1$ y $mn_2\bar{c}_2$, donde m es la masa de las moléculas del fluido. Entonces:

$$\frac{mn_1\bar{c}_1}{mn_2\bar{c}_2} \approx \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{0.5} = \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{0.5} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{0.5} \leq 1 ,$$

en donde hemos utilizado la ecuación del gas ideal $P = \rho RT$ y la relación $(P_1/P_2) = 1$.

El análisis anterior indica que hay un flujo desde la región más fría a la más caliente. Como ya se dijo anteriormente, Osborne Reynolds fue el primero en visualizar este fenómeno en 1879, bautizándolo como transpiración térmica. A principios del siglo *XX* Knudsen construyó un compresor molecular basado en el concepto de transpiración térmica en el cual conectó una serie de tubos con pequeños canales que conectaban entre sí a cada uno de los tubos. Las dimensiones de estos canales eran demasiado reducidas con la finalidad de que pudieran presentarse los efectos de rarefacción. Calentando un mismo lado de estos canales a muy altas temperaturas ($773K$), Knudsen fue capaz de mantener gradientes de presión bastante considerables.

Nuevamente, en el libro de Karniadakis *et al.* 2005 [6] se pueden encontrar detalles de como incorporar el efecto de transpiración térmica a las condiciones de frontera para el flujo de gases en microcanales sin embargo, los modelos matemáticos que representan estas condiciones de frontera también se pueden derivar directamente de la ecuación de Boltzmann.

Otra característica muy importante del flujo debido a la transpiración térmica, es que este efecto puede modificar el flujo másico en un canal. Si el gradiente de presión que provoca el flujo de un gas en un canal y los gradientes longitudinales de temperatura en las paredes tienen la misma dirección el flujo másico disminuye, de otro modo éste aumenta. Por lo tanto es posible tener un flujo másico diferente de cero en un microcanal aún en el caso en el que el gradiente de presión sea cero. Sin embargo, se puede dar el caso de tener un flujo másico neto nulo en un microcanal cuando la transpiración térmica y el gradiente de presión tienen direcciones opuestas y se compensan entre sí. Esto se ha demostrado simulando el flujo de aire en microcanales de varias dimensiones que conectan dos tanques a diferentes condiciones termodinámicas [6]. El primer tanque se conserva a $300K$ y el otro a $400K$ además, las simulaciones se hicieron para tres valores diferentes del número de Knudsen ($Kn = 0.365, 0.122$ y 0.052).

La presión en ambos tanques es inicialmente la atmosférica. Los efectos de transpiración térmica ocasionan que el aire se desplace hacia el tanque más caliente, incrementando su presión y disminuyendo la del otro tanque. Esta diferencia de presiones provocará que eventualmente exista un flujo del tanque más caliente al más frío, es decir de la región de mayor presión a la de menor presión, dando como resultado que en algún momento dado exista un gasto másico neto igual a cero en el microcanal que une a los dos tanques.

Por último, se puede concluir que los efectos de transpiración térmica pue-

den ser significantes en flujo de gases a muy baja presión o bajo presión atmosférica siempre y cuando las dimensiones del microcanal sean del orden de micras o menores [6].

1.3. Otros efectos de rarefacción

Como ya se dijo en la sección 1.1, nuestro trabajo es estudiar el efecto de transpiración térmica aplicado a un sumidero de calor sin embargo, nos parece conveniente mencionar brevemente otros efectos de rarefacción que se presentan frecuentemente en el flujo de gases en microcanales. Además de la transpiración térmica, el cual es un efecto de orden Knudsen (esto se representa como $O(Kn)$), existen otros efectos térmicos que promueven el movimiento de un gas en ausencia de fuerzas externas tales como la gravedad o fuerzas debidas a gradientes de presión externos. La mayoría de estos efectos pueden derivarse de la ecuación de Boltzmann [6], y aunque es difícil aislarlos como efectos individuales, se sabe que están presentes en el flujo de gases en diversos microsistemas. A continuación se nombran y se describen brevemente cada uno de cuatro efectos de rarefacción que nos parece importante mencionar [6]:

- *Flujo debido al efecto de deslizamiento provocado por esfuerzos térmicos.* Este efecto es llamado *thermal stress slip flow* en inglés y está representado por un término de $O(Kn^2)$ que resulta de expandir la ecuación de Boltzmann en términos del número de Knudsen. Un gradiente no uniforme de temperaturas en el fluido en dirección normal a las paredes de un microcanal, puede ocasionar una velocidad de deslizamiento aún cuando las fronteras sean isotérmicas. Consideremos un gas originalmente en reposo que se encuentra entre dos cilindros circulares excéntricos uno exterior con temperatura constante dada por T_2 y uno interior cuya temperatura también constante es T_1 ($T_1 \neq T_2$). Por consiguiente no hay transpiración térmica; sin embargo, existe un gradiente normal de temperaturas no uniforme en el fluido entre los dos cilindros. En estas condiciones se ha observado un flujo de gas que circula en sentido antihorario si $T_2 > T_1$.
- *Flujo debido a esfuerzos térmicos no lineales.* Este efecto se llama *nonlinear thermal stress flow* en inglés y está representado por un término de $O(Kn)$ que resulta también de una expansión asintótica de la ecuación

de Boltzmann en términos del número de Knudsen. Cuando los gradientes de temperatura en el gas son excesivamente grandes, los contornos de las líneas o superficies isotérmicas en el fluido no son uniformes; es decir, estas líneas o superficies varían considerablemente su distancia entre unas y otras. Esta variación de distancias entre isoterma ocasiona que el gas en cuestión comience a moverse si es que éste se encontraba originalmente en reposo.

- *Flujo inducido alrededor del borde afilado de una placa que se calienta.* Este efecto no puede deducirse realizando un análisis asintótico de la ecuación de Boltzmann y se presenta al colocar una placa que se calienta uniformemente en medio de un gas que se encuentra dentro de un tanque con temperatura también uniforme. Para diversos valores del número de Knudsen se ha observado que en estas condiciones se induce un flujo hacia las esquinas de la placa. Como la temperatura es uniforme en todos lados no existe transpiración térmica. La velocidad inducida es aproximadamente de $O(\sqrt{Kn})$.
- *Flujo inducido por una discontinuidad de temperaturas.* Para observar este fenómeno se encierra un gas en un recipiente cuadrado, la mitad del cual se fija a una temperatura T_1 y la otra a una temperatura diferente T_2 . Esto induce un flujo de gas desde la región más fría a la más caliente provocando una discontinuidad de temperaturas en la mitad del recipiente. La velocidad máxima del gas tiende a un valor constante para valores bajos de Kn pero disminuye cuando $Kn \geq 0.1$.

1.4. Estudios Previos Sobre Transpiración Térmica

Los efectos de rarefacción en el régimen de deslizamiento han sido el objeto de estudio de muchas investigaciones en las cuales los diversos autores se han dado a la tarea de encontrar y desarrollar las condiciones de frontera que puedan representar adecuadamente estos fenómenos. Por ejemplo Lockerby *et al.* 2004 [7], demostraron que las condiciones de frontera como los modelos convencionales de Maxwell para la velocidad de deslizamiento en las paredes son incapaces de representar otros efectos de rarefacción tales como la transpiración térmica y el deslizamiento provocado por esfuerzos térmicos descrito

en la sección 1.3. Por lo tanto, estos autores derivaron relaciones constitutivas partiendo de la ecuación de Burnett con la finalidad de obtener modelos de deslizamiento de orden superior que representen a estos dos efectos de rarefacción. Roldughin 1996 [8], utilizó la teoría cinética de gases para estudiar la producción de entropía en sistemas que presentan un desequilibrio termodinámico; con este análisis, este mismo autor fue capaz de derivar también condiciones de frontera óptimas para describir efectos simples de rarefacción tales como el deslizamiento en las paredes de un microcanal.

Como ya se dijo anteriormente, el enfoque principal de esta tesis es analizar un problema conjugado en un microcanal en donde el flujo de un gas sea provocado únicamente por el efecto de transpiración térmica, por lo que nos limitaremos a discutir solamente los trabajos más relevantes en los que se consideren los efectos de deslizamiento en las paredes así como la transpiración térmica en el cual es posible inducir un flujo con gradientes longitudinales de temperatura a lo largo de las paredes es decir, un régimen de flujo controlado únicamente por el efecto de transpiración térmica [8]. Sin embargo nos interesa el caso en el que estos gradientes son desconocidos y deben ser determinados como parte del problema de hecho, esta condición es la que define al problema conjugado. Lo anterior debe ser congruente con el hecho de que el gas se desplaza desde la zona más fría a la más caliente tal y como lo observó Osborne Reynolds en 1879 [5], situación que define a un flujo ocasionado por el efecto de transpiración térmica.

Por otra parte, consideraremos aquellos trabajos que tomen en cuenta únicamente los modelos de la mecánica del medio continuo modificando las condiciones de frontera con los correspondientes modelos de deslizamiento incluyendo la transpiración térmica es decir, no se consideran trabajos basados en simulaciones moleculares en donde el flujo de gases se encuentra por ejemplo en el régimen de transición tal como lo explica Kogan 1969 [9] quien resuelve numéricamente la ecuación de Boltzmann para presentar soluciones a este problema conjugado. Como se dijo en la sección 1.1 limitaremos nuestro análisis al régimen de deslizamiento.

Teniendo en cuenta que la literatura relacionada con estos temas es muy vasta, se escogieron trabajos que comprenden únicamente las dos últimas décadas excepto los que se mencionaron previamente. Así pues comenzamos con Arkilic *et al.* 1997 [10], quienes estudiaron analítica y experimentalmente el flujo de un gas con ligeros efectos de rarefacción en un microcanal rectangular aplicando un modelo bidimensional descrito por las ecuaciones de Navier-

Stokes con modelos de deslizamiento de primer orden. Estos autores consideran condiciones isotérmicas sustituyendo los términos de densidad en términos de la presión utilizando la ecuación de gas ideal para gases monoatómicos y de baja densidad como el aire. Desarrollaron también un modelo analítico basado en técnicas de perturbación cuya solución muestra que el gasto másico coincide favorablemente con estudios experimentales previos realizados por estos mismos autores.

Otro estudio importante es el realizado por Hadjiconstantinou y Simek 2002 [11], quienes estudiaron la convección del flujo de un gas en el régimen de deslizamiento dentro de un microcanal manteniendo temperaturas uniformes en las paredes; sin embargo, su análisis se limita al caso en el que el flujo es totalmente desarrollado tanto térmica como hidrodinámicamente. Estos autores obtienen el número de Nusselt utilizando la técnica de Simulación Directa Monte Carlo (DSMC) por lo que extienden su análisis hasta el régimen de transición.

Otro aspecto a considerar es que también se ha analizado la influencia de las diversas formas geométricas que adoptan los microcanales de tal manera que no sea necesario considerar el efecto conjugado; es decir, proponer un perfil de temperaturas en las paredes por lo que los gradientes longitudinales son conocidos y dejan de ser parte del problema. Esta diversidad de geometrías se puede observar en el trabajo de Zhu *et al.* 2006 [12], quienes muestran que la relación de aspecto en un microcanal rectangular tiene un efecto considerable en el coeficiente de arrastre para un valor fijo del número de Knudsen. Dentro de esta misma temática cabe destacar que Hossainpour y Khadem [13] exploraron únicamente en el régimen de deslizamiento, las características del flujo y de la transferencia de calor de gases circulando en microcanales los cuales presentan diferentes formas y rugosidades. En este trabajo se estudiaron diferentes formas de rugosidades tales como triangulares, rectangulares e incluso trapezoidales cada una de las cuales, representan diferentes características en el flujo y la transferencia de calor de los gases en cuestión. La conclusión importante es que las rugosidades de forma triangular representan una geometría más realista para un microcanal.

Es importante mencionar que en varios de los estudios descritos anteriormente, se utilizaron modelos de primer y segundo orden basados en el número de Knudsen como parámetro principal es decir: $O(Kn)$ y $O(Kn^2)$. Sin embargo, Van Rij *et al.* 2007 [14], muestran que es conveniente tomar en cuenta la influencia multifactorial del número de Knudsen junto con los coeficientes de

acomodamiento, el deslizamiento en las paredes, efectos de flujo en desarrollo tanto térmica como hidrodinámicamente y los modelos de primer y segundo orden que respresentan otros efectos de rarefacción tales como la transpiración térmica. Estos autores aseguran que la velocidad de transpiración térmica y los modelos de deslizamiento de segundo orden juegan un papel importante en el número de Nusselt para el régimen de deslizamiento.

Otra cuestión importante acerca de los trabajos ya mencionados es que la mayoría utilizan técnicas numéricas para resolver las correspondientes ecuaciones de conservación. Sin embargo, en algunos casos, el uso de aproximaciones analíticas es útil para entender los mecanismos físicos involucrados en estos tipos de flujo debido a efectos de rarefacción. En relación a esto último describiremos con un poco más de detalle el trabajo de Méolans y Graur 2008 [15] quienes desarrollaron un análisis muy completo del flujo debido al efecto de transpiración térmica en un microcanal rectangular imponiendo un gradiente uniforme de temperaturas a lo largo de las paredes de un microcanal. Con base en un análisis de orden de magnitud, estos autores derivan soluciones analíticas que son comparadas con soluciones numéricas completas que abarcan desde las ecuaciones de conservación típicas de la hipótesis del medio continuo hasta modelos numéricos basados en la ecuación de Boltzmann. Un resultado muy importante que muestran estos autores en sus soluciones tanto numéricas como asintóticas es que los gradientes de presión inducidos por el efecto de transpiración térmica son de $O(Kn^2)$ y por lo tanto estos gradientes se pueden despreciar en las ecuaciones de Navier-Stokes. Cabe aclarar que esta consideración se toma en cuenta también en esta tesis lo cual se mencionará con más detalle en el siguiente capítulo. Esto quiere decir que el único mecanismo que promueve el movimiento del gas son los gradientes longitudinales de temperatura en las paredes, ya sea que estos gradientes sean conocidos o no. Por lo tanto el comportamiento anterior se asemeja a un flujo de Couette en el cual el movimiento del fluido era ocasionado únicamente por el movimiento de una de la paredes del microcanal y en nuestro caso, el flujo se logra exclusivamente por la presencia de gradientes longitudinales de temperatura en las paredes del microcanal. En ambos casos, no existen gradientes de presión externos ni tampoco inducidos, hecho que utilizaremos en los siguientes capítulos de la tesis.

Además la ausencia de gradientes de presión es confirmada por Han 2010 [16] quienes estudiaron el efecto de transpiración térmica usando Simulación Directa Monte Carlo (DSMC). El resultado más importante de estaas simu-

laciones es que para pequeños valores de Kn (régimen de deslizamiento) la presión que se induce cuando el fluido se mueve únicamente por el efecto de transpiración térmica y sus respectivos gradientes son despreciables. esto puede verse claramente en la sección de resultados de este último trabajo específicamente en las figuras 9, 14 y 17.

En años recientes han sido muchos los trabajos que aparecen en la literatura referente al efecto de transpiración térmica en ellos, se han considerado diversos factores tales como la analogía de Reynolds extendida al régimen de deslizamiento y de transición, correcciones a modelos de deslizamiento de primer y segundo orden, generación de entropía, propiedades termofísicas variables del fluido, efectos de entrada junto con el efecto de transpiración térmica, disipación viscosa, etc. Nuevas y relevante consideraciones físicas pueden encontrarse en diferentes referencias bibliográficas tales como [17–24]. Sin embargo, el problema conjugado en presencia de transpiración térmica no ha sido considerado salvo en casos excepcionales. En este trabajo, a nosotros nos interesan los problemas conjugados de transferencia de calor en donde exista simultáneamente una interacción térmica entre el fluido que entra a un microcanal y una placa sólida que se encuentra por fuera de éste. Esta geometría en particular se conoce comúnmente como sumideros de calor en microcanales y fue introducida por primera vez a principios de la década de los 1980s como mecanismos de enfriamiento para circuitos integrados.

Un resumen completo de la literatura especializada en estos temas se encuentra en la referencia [25] en donde se pueden ver los avances logrados en sumideros de calor en microcanales con el paso de los años. En otros trabajos tales como Ambatipudi y Rahman 2000 [26], Hetsroni *et al.* 2005 [27], Kosar 2010 [28] y Escandon *et al.* 2011 [29], se ofrecen nuevos detalles de los sumideros de calor en microcanales haciendo énfasis en la importancia que tienen los efectos conjugados de transferencia de calor en estos dispositivos de enfriamiento.

Sin embargo, la reducción del tamaño de los circuitos integrados demanda el conocimiento más a fondo del flujo de gases en microescalas e incluso de escalas menores las cuales presentan diversos desafíos para los investigadores. Como sabemos, a menores escalas los efectos tanto de rarefacción como de compresibilidad deben de ser tomados en cuenta junto con los efectos conjugados de transferencia de calor en los sumideros de calor. En este rubro, una contribución fundamental orientada a tratar el problema conjugado con transpiración térmica se encuentra en el trabajo de Croce *et al.* 2015 [30]. Estos

autores resuelven numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando los modelos de Maxwell y de Smoluchowski que representan respectivamente las condiciones de frontera de deslizamiento y salto de temperatura. Los resultados se presentan en términos del número de Nusselt, la resistencia térmica del sumidero de calor y la temperatura de la pared del microcanal. Además se presentan perfiles del número de Mach para diferentes condiciones de flujo. La conclusión importante es que los efectos de compresibilidad juegan un papel muy importante ya que la eficiencia del sumidero de calor es esencialmente una función del número de Mach. Por último mencionaremos que estos autores proporcionan las condiciones óptimas en las que esta geometría puede funcionar como sumidero de calor, presentando al número de Nusselt local como función de todos los parámetros adimensionales que se consideran.

1.5. Objetivos de la tesis

En esta tesis se desarrolla un problema conjugado completo del flujo de un gas en un microcanal rectangular del cual se deriva un modelo analítico y numérico tomando en cuenta el efecto de transpiración térmica. El principio físico que induce el movimiento del gas se debe a gradientes longitudinales desconocidos de temperatura a lo largo de la pared inferior del microcanal asumiendo que esta pared tiene una conductividad térmica finita. Es por eso que en el modelo matemático, se debe incluir la ecuación de conducción de calor considerando que en la cara externa de dicha pared, se aplica un flujo uniforme de calor. De esta manera esta pared sólida funciona como sumidero de calor.

Para completar el modelo matemático se presentan las ecuaciones de conservación para el gas junto con las condiciones de frontera apropiadas. Usando el análisis de orden de magnitud y algunos límites asintóticos relevantes para las ecuaciones de conservación y las condiciones de frontera pretendemos identificar la velocidad característica asociada con el efecto de transpiración térmica. Con esta velocidad característica y otros parámetros característicos pretendemos mostrar que las ecuaciones adimensionales de momentum se reducen considerablemente a tal grado que podemos encontrar una solución simple para la velocidad del fluido en términos de las temperaturas tanto del gas como de la pared inferior del microcanal. Por lo tanto el problema matemático se reduce básicamente a resolver la ecuación de la energía para el gas y la ecua-

ción de conducción de calor para la placa sólida que funciona como sumidero de calor. Esto se comparará con el modelo numérico correspondiente el cual también pretende resolver estas dos últimas ecuaciones simultáneamente.

Finalmente se presentarán los perfiles de temperaturas tanto del fluido como de la pared los cuales completan la solución de este problema conjugado de transferencia de calor el cual representa el comportamiento del flujo de un gas en un microcanal cuyo movimiento es inducido únicamente por el efecto de transpiración térmica.

Capítulo 2

Modelo Físico

En la figura 2.1 se muestra un esquema del modelo físico, el cual consiste en un microcanal rectangular bidimensional (x, y) , con el origen puesto en la esquina inferior a la entrada del microcanal. El eje x apunta a lo largo del microcanal y el eje y es perpendicular a la superficie inferior del mismo. El flujo de gas se origina debido a un gradiente desconocido de temperatura en la superficie inferior del microcanal, este gradiente es causado por un flujo uniforme de calor denotado por q'' ; asumimos además que la temperatura del gas a la entrada del microcanal dada por T'_0 , es constante. El gas comienza a circular desde la región más fría hacia la más caliente, aceptando que el único mecanismo que promueve el movimiento es el flujo uniforme de calor.

El microcanal está básicamente caracterizado por las dimensiones geométricas siguientes: la altura H y longitud L ; estas dimensiones son tales que: $H \ll L$. En la parte inferior del microcanal se tiene una placa sólida que sirve como sumidero de calor esto es, el flujo de calor suministrado q'' es transmitido del sólido hacia el fluido con el fin de que este calor pueda disiparse. El espesor de esta pared inferior está dado por h y es tal que: $h \ll L$; esto quiere decir que tenemos dos relaciones de esbeltez (o también llamadas de aspecto), una para el fluido $\epsilon = H/L$ y otra para el sólido dada por $\epsilon_h = h/L$.

Las pérdidas de calor en el interior del intervalo $0 \leq x \leq 1$ en la pared superior del microcanal, se controlan a través del parámetro q''_s , que es un flujo de calor dado tal que: $q''_s < q''$. Estas pérdidas de calor causan que la temperatura del fluido pueda cambiar en ambas direcciones, es decir puede sufrir cambios tanto longitudinales como transversales.

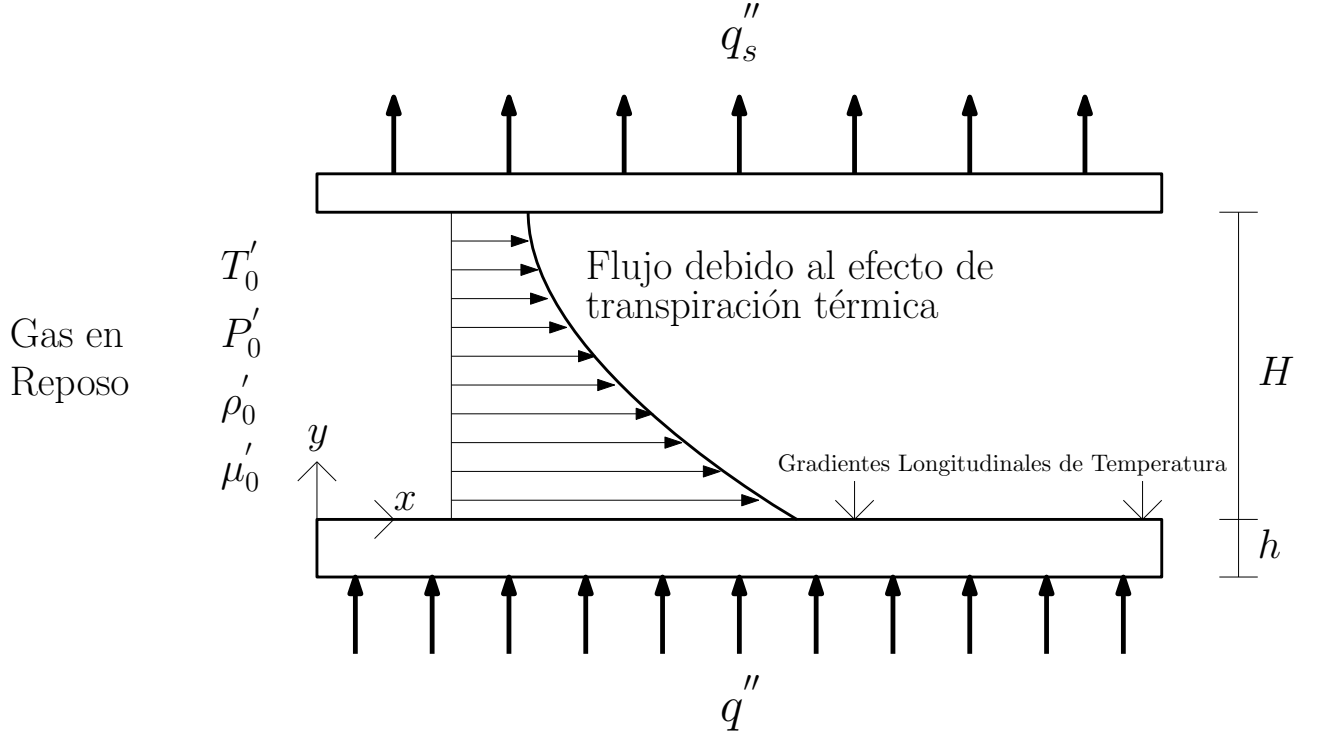


Figura 2.1: Esquema general del modelo físico estudiado

2.1. Ecuaciones de Conservación

Tomando en cuenta las consideraciones antes mencionadas, las ecuaciones de gobierno para un sistema bidimensional rectangular son las siguientes [15]:

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho' u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho' v'}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

donde:

ρ' → Densidad del fluido [kg/m^3].

u' → Velocidad del fluido en dirección longitudinal [m/s].

v' → Velocidad del fluido en la dirección transversal [m/s].

Ecuación de Momentum en x:

$$\frac{\partial \rho' (u')^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho' u' v'}{\partial y} = -\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu' \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu' \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu' \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu' \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (2.2)$$

Ecuación de Momentum en y:

$$\frac{\partial \rho' u' v'}{\partial x} + \frac{\partial \rho' (v')^2}{\partial y} = -\frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu' \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \mu' \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu' \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu' \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (2.3)$$

donde:

P' → Presión del fluido [Pa].

μ' → Viscosidad dinámica del fluido [Pa·s]

Ecuación del Gas Ideal:

$$P' = \rho' RT' \quad (2.4)$$

donde:

T' → Temperatura del fluido [K].

R → Constante del gas [J/(kgK)].

Ecuación de la Energía:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u' (E' + P')}{\partial x} + \frac{\partial v' (E' + P')}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \kappa' \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa' \frac{\partial T'}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu' u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \mu' v' \frac{\partial v'}{\partial x} \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu' u' \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu' v' \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu' u' \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu' v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu' u' \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu' v' \frac{\partial u'}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde:

E' → Energía total por unidad de volumen [J/m³].

κ' → Conductividad térmica del fluido [$W/(mK)$].

Ley de Sutherland:

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = \left(\frac{T'}{T_0}\right)^\omega \quad (2.6)$$

donde:

T_0' → Temperatura del fluido a la entrada del microcanal [K]

μ_0' → Viscosidad del fluido que corresponde a T_0' [$Pa \cdot s$]

ω → Índice de viscosidad utilizado en el modelo variable de esfera rígida.

2.2. Condiciones de Frontera

El sistema de ecuaciones (2.1)-(2.6) debe satisfacer las condiciones de frontera apropiadas. Por simplicidad se consideran los ya conocidos modelos de deslizamiento de primer orden pero se seleccionan aquellos que contengan los términos correspondientes al efecto de transpiración térmica, entonces para la velocidad las condiciones de frontera son las siguientes:

Para la pared inferior del microcanal:

$$u'(x, 0) = -\sigma_p \frac{\mu'(x, 0)}{P'(x, 0)} v'_m \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) \Big|_{y=0} + \sigma_T \frac{\mu'(x, 0)}{\rho'(x, 0)} \left(\frac{1}{T'(x, 0)}\right) \left(\frac{\partial T'}{\partial x}\right) \Big|_{y=0} \quad (2.7)$$

donde:

σ_p → Coeficiente de deslizamiento para la velocidad del fluido en la pared.

σ_T → Coeficiente térmico de deslizamiento.

$v'_m = \sqrt{2RT'(x, 0)}$ → Velocidad molecular más probable del fluido a la temperatura del mismo en la pared [m/s].

Para la pared superior:

$$u'(x, H) = -\sigma_p \frac{\mu'(x, H)}{P'(x, H)} v'_m \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) \Big|_{y=H} + \sigma_T \frac{\mu'(x, H)}{\rho'(x, H)} \left(\frac{1}{T'(x, H)}\right) \left(\frac{\partial T'}{\partial x}\right) \Big|_{y=H} \quad (2.8)$$

$H \rightarrow$ Altura del microcanal [m].

$v'_m = \sqrt{2RT'(x, H)}$ \rightarrow En este caso esta es la velocidad molecular del fluido en la pared superior del microcanal [m/s].

Ahora bien, con respecto a la temperatura, consideramos las condiciones de salto de temperatura en ambas caras interiores del microcanal:

$$T'(x, 0) - T'_w(x, 0) = \xi_T \left(\frac{\mu'(x, 0)}{P'(x, 0)} \right) v'_m(x, 0) \left(\frac{\partial T'}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0} \quad (2.9)$$

$\xi_T \rightarrow$ Coeficiente de salto de temperatura.

$$T'(x, H) - T'_{ws}(x, H) = -\xi_T \left(\frac{\mu'(x, H)}{P'(x, H)} \right) v'_m(x, H) \left(\frac{\partial T'}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=H} \quad (2.10)$$

$T'_{ws} \rightarrow$ Temperatura de la pared superior del microcanal [K].

También , imponemos condiciones de frontera para la entrada y salida del microcanal:

$$x = 0 : \quad T' = T'_0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial T'}{\partial x} \Bigg|_{x=L} = 0 . \quad (2.11)$$

Debe notarse que en las ecuaciones 2.9 y 2.10, T'_w y T'_{ws} son en principio desconocidas, por esta razón necesitamos considerar condiciones de frontera adicionales. Aquí es donde seleccionamos la versión más simplificada del problema conjugado, por lo que priorizamos el problema térmico conjugado entre la pared inferior y el gas, proponiendo un perfil conocido para T'_{ws} :

$$y = H : \quad T'_{ws} = A_{ws}x^n + T'_0 , \quad (2.12)$$

donde A_{ws} y n son constantes conocidas de orden unidad.

También, proponemos un flujo de calor conocido q_s'' en la pared superior:

$$y = H : \quad q_s'' = -\kappa' \frac{\partial T'}{\partial y} \Big|_{y=H} . \quad (2.13)$$

La ecuación 2.12 es una condición conocida para la temperatura $T'(x, H)$ y la única variable desconocida será T'_w en la pared inferior correspondiente a la fase gaseosa.

La continuidad del flujo de calor en la pared inferior del microcanal está dada por la condición:

$$y = 0 : \quad -\kappa' \frac{\partial T'}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\kappa'_w \frac{\partial T'_w}{\partial y} \Big|_{y=0} . \quad (2.14)$$

$\kappa'_w \rightarrow$ Conductividad térmica del sumidero de calor [$W/(mK)$].

Debido a que en $y = 0$ T'_w es incógnita, introducimos la ecuación de Laplace para el sumidero de calor junto con las correspondientes condiciones de frontera.

2.3. Ecuación de conducción para el sumidero de calor

Si se considera que κ'_w es constante, podemos determinar T'_w utilizando la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T'_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'_w}{\partial y^2} = 0 . \quad (2.15)$$

donde:

$T'_w \rightarrow$ Temperatura de la pared [K]

La ecuación 2.15 está sujeta a las siguientes condiciones adiabáticas:

$$x = 0 : \quad \text{and} \quad x = L : \quad \left. \frac{\partial T'_w}{\partial x} \right|_{y=0,L} = 0 \quad . \quad (2.16)$$

En la cara externa del sumidero de calor; es decir, en su superficie inferior, debe satisfacerse la condición de flujo de calor constante:

$$y = -h : \quad q'' = -\kappa'_w \left. \frac{\partial T'}{\partial y} \right|_{y=-h} = \text{constante} \quad . \quad (2.17)$$

$q'' \rightarrow$ Flujo de calor por unidad de superficie [W/m^2].

$h \rightarrow$ Altura de la placa sólida que compone al sumidero de calor [m].

2.4. Orden de Magnitud

Antes de proceder a presentar la forma adimensional de las ecuaciones (2.1) - (2.17) necesitamos escalar adecuadamente cada una de las variables involucradas. Por facilidad, comenzaremos con el análisis de orden de magnitud de las variables que aparecen en las ecuaciones definidas para la placa sólida considerada como sumidero de calor.

Por la ley de Fourier:

$$q'' = -\kappa'_w \left. \left(\frac{\partial T'_w}{\partial y} \right) \right|_{y=-h} \Rightarrow q'' \sim \kappa'_w \frac{\Delta T'_{c,y}}{h} \Rightarrow \Delta T'_{c,y} \sim \frac{hq''}{\kappa'_w} \quad , \quad (2.18)$$

donde:

$\Delta T'_{c,y}$ → Diferencia de temperaturas característica en el sólido en la dirección transversal [K]

De la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T'_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'_w}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta T'_{c,x}}{L^2} \sim \frac{\Delta T'_{c,y}}{h^2} = \frac{hq''}{h^2 \kappa'_w} \Rightarrow \Delta T'_{c,x} \sim \frac{hq''}{\kappa'_w \epsilon_h^2} \quad (2.19)$$

donde:

$\epsilon_h = \frac{h}{L}$ → Relación de esbeltez en el sumidero de calor. .

$\Delta T'_{c,x}$ → Diferencia de temperaturas característica en el sólido en dirección longitudinal [K].

Ahora se expresarán los órdenes de magnitud de las variables físicas más importantes del problema:

$$\begin{aligned} \rho' &\sim \rho'_0 \\ \mu' &\sim \mu'_0 \\ x &\sim L \end{aligned}$$

donde:

ρ'_0 → Densidad del aire que corresponde a la temperatura y presión de entrada al microcanal [kg/m^3].

Aquí cabe señalar que la variable que representa a la coordenada transversal en el fluido se escala con la altura del microcanal es decir: $y \sim H$ y en el sólido esta coordenada se escala con el espesor del sumidero de calor: $y \sim h$. Por otro lado, aunque por ahora son desconocidas las velocidades características estarán representadas por:

$$\begin{aligned} u' &\sim u'_c \\ v' &\sim v'_c \end{aligned}$$

u'_c → Velocidad característica del fluido en la dirección longitudinal [m/s].

$v'_c \rightarrow$ Velocidad característica del fluido en la dirección transversal [m/s].

Dejando de lado por ahora el orden de magnitud de la velocidad característica en dirección longitudinal (u'_c), procederemos a obtener el orden de magnitud de la velocidad característica transversal (v'_c) en función de la primera, basándonos en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho' u'}{\partial x} \sim \frac{\partial \rho' v'}{\partial y} \Rightarrow \frac{\rho'_0 u'_c}{L} \sim \frac{\rho'_0 v'_c}{H} \Rightarrow v'_c \sim \left(\frac{H}{L}\right) u'_c = \epsilon u'_c$$

$\epsilon = \frac{H}{L} \rightarrow$ Relación de esbeltez del microcanal.

Para la temperatura del fluido suponemos que la diferencia de temperaturas entre la temperatura de cualquier punto del micro canal y la de entrada al mismo, debe ser del orden de una diferencia de temperaturas característica transversal, debido a que asumimos que es en esa dirección por donde más se transfiere el calor que viene de la cara inferior del disipador. Entonces:

$$T' - T'_0 \sim \Delta T'_{T,F}$$

$\Delta T'_{T,F} \rightarrow$ Diferencia de temperaturas característica en el fluido en dirección transversal [K].

En el caso de la presión, suponemos que la diferencia de presiones entre la presión de cualquier punto del microcanal y la de entrada al mismo, debe ser del orden de una diferencia de presiones característica en dirección longitudinal, ya que asumimos que debido al tamaño del microcanal, los gradientes de presión transversales no son importantes, por lo que sólo consideramos los que ocurren en la dirección longitudinal del microcanal. Por lo tanto:

$$P' - P'_0 \sim \Delta P'_c$$

$P'_0 \rightarrow$ Presión del fluido a la entrada del microcanal [Pa].

$\Delta P'_c \rightarrow$ Diferencia de presiones característica en la dirección longitudinal [Pa].

Para gases ideales $\rightarrow P'_0 = \rho'_0 R T'_0$.

A continuación se obtendrá el orden de magnitud de la caída de temperaturas transversal en el fluido, considerando la condición de frontera (2.14):

$$\kappa' \left(\frac{\partial T'}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \sim \kappa'_w \left(\frac{T'_w}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \Rightarrow \kappa' \frac{\Delta T'_{T,F}}{H} \sim \kappa'_w \frac{\Delta T'_{c,y}}{h}. \quad (2.20)$$

pero de la ecuación 2.18 tenemos que:

$$\Delta T'_{c,y} \sim \frac{hq''}{\kappa'_w} \Rightarrow \Delta T'_{T,F} \sim \frac{Hq''}{\kappa'}. \quad (2.21)$$

Además:

$$\kappa' \sim \frac{\mu' C_p}{Pr} \sim \frac{\mu'_0 C_p}{Pr}.$$

$C_p \rightarrow$ Capacidad térmica del fluido a presión constante [$J/(kg \cdot K)$].

$Pr \rightarrow$ Número de Prandtl.

Entonces:

$$\Delta T'_{T,F} \sim \frac{Hq'' Pr}{\mu'_0 C_p}. \quad (2.22)$$

De la ecuación de Bernoulli, despreciando los cambios de energía potencial, la relación entre las condiciones del gas a la entrada y las de cualquier punto lejos de las paredes dentro del microcanal está dada por:

$$P'_0 + \frac{1}{2} \rho'_0 (u'_0)^2 = P' + \frac{1}{2} \rho' (u')^2.$$

$u'_0 \rightarrow$ Velocidad del fluido a la entrada del microcanal [m/s].

En el planteamiento inicial de nuestro problema, suponemos que el flujo se debe solamente al efecto de transpiración térmica, por lo tanto la velocidad del aire antes de entrar al microcanal es cero, esto es: $u'_0 = 0$, entonces:

$$P' - P'_0 \sim \frac{1}{2} \rho' (u')^2 \Rightarrow \Delta P'_c \sim \rho'_0 (u'_c)^2. \quad (2.23)$$

Consideramos ahora que la diferencia de temperaturas entre la temperatura de cualquier punto de la superficie superior del sumidero de calor y la temperatura del aire a la entrada del micro canal, debe ser del orden de la diferencia de temperaturas característica transversal en el disipador ($\Delta T'_{c,y}$); sin embargo, compararemos este parámetro con la diferencia transversal del fluido ($\Delta T'_{T,F}$) con la finalidad de saber cual es más importante para poder definir un orden de magnitud adecuado para la temperatura de la pared del sumidero de calor (T'_w).

$$\frac{\Delta T'_{c,y}}{\Delta T'_{T,F}} \sim \frac{(hq'')/(\kappa'_w)}{(Hq''Pr)/(\mu'_0 C_p)} \sim \left(\frac{\mu'_0 C_p}{Pr} \right) \left(\frac{h}{H\kappa'_w} \right) \sim \frac{h\kappa'_0}{H\kappa'_w} = \frac{\hat{\epsilon}^2}{\alpha_c}$$

donde:

$$\kappa'_0 = \frac{\mu'_0 C_p}{Pr}; \quad \alpha_c = \left(\frac{H\kappa'_w}{h\kappa'_0} \right) \epsilon_h^2. \quad (2.24)$$

Tomando en cuenta que $\epsilon_h^2 \ll 1$, consideraremos dos posibilidades:

$$\frac{\hat{\epsilon}^2}{\alpha_c} \sim 1 \Rightarrow \Delta T'_{c,y} \sim \Delta T'_{T,F}.$$

$$\alpha_c \gg 1 \Rightarrow \frac{\hat{\epsilon}^2}{\alpha_c} \ll 1 \Rightarrow \Delta T'_{c,y} \ll \Delta T'_{T,F}.$$

Por lo tanto la diferencia de temperaturas transversal más representativa del problema físico que estamos estudiando es la del fluido dada por ($\Delta T'_{T,F}$). Entonces:

$$T'_w - T'_0 \sim \Delta T'_{T,F}.$$

Definimos las siguientes variables adimensionales:

$$\chi = \frac{x}{L}; \quad \eta = \frac{y}{H}; \quad Z = -\frac{y}{h}; \quad u = \frac{u'}{u'_c}; \quad v = \frac{v'}{v'_c} = \frac{v'}{\epsilon u'_c}; \quad \theta = \frac{T' - T'_0}{\Delta T'_{T,F}};$$

$$\Pi = \frac{P' - P'_0}{\Delta P'_c}; \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_0}; \quad \mu = \frac{\mu'}{\mu_0}; \quad \theta_w = \frac{T'_w - T'_0}{\Delta T'_{T,F}}; \quad \theta_{ws} = \frac{T'_{ws} - T'_0}{\Delta T'_{T,F}},$$

Otras relaciones y parámetros importantes son los siguientes:

$$E' = \frac{1}{2}\rho'[(u')^2 + (v')^2] + \rho'e'; \quad e' = \frac{P'}{\rho'(\gamma - 1)}; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}; \quad C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1};$$

$$\kappa' = \frac{C_p \mu'}{Pr}; \quad Re_H = \frac{\rho'_0 u'_c H}{\mu'_0}; \quad Ma = \frac{u'_c}{a_0}; \quad a'_0 = \sqrt{\gamma RT'_0}; \quad Kn = \frac{\lambda}{H};$$

$$Kn = k_\lambda \sqrt{\gamma} \frac{Ma}{Re_H}; \quad \frac{(u'_c)^2}{RT_0} = \gamma Ma^2 = \frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2}; \quad k_\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \mu = \left[\left(\frac{\Delta T'_{T,F}}{T'_0} \right) \theta + 1 \right]^\omega,$$

donde:

e' → Energía interna del fluido por unidad de masa [J/kg].

$\gamma = 1.4$ → Relación de calores específicos para el aire.

Kn → Número de Knudsen.

λ → Trayectoria libre media de las moléculas del fluido [m].

Ma → Número de Mach.

Re_H → Número de Reynolds referido a la altura del microcanal (H).

C_v → Calor específico del aire a volumen constante [$J/(kgK)$].

a'_0 → Velocidad del sonido correspondiente a T'_0 [m/s].

k_λ → Coeficiente adimensional utilizado en el modelo de esfera rígida para describir la interacción molecular del fluido.

Para encontrar el orden de magnitud de la velocidad característica del fluido en la dirección longitudinal (u'_c), escalamos la velocidad característica en dirección longitudinal usando la condición de frontera (2.7), la cual fue propuesta por Méolans *et al.* 2008:

$$(u'_c)u \sim - \left(\frac{\sigma_p \mu'_0 u'_c}{HP'_0} \right) \left(\frac{\mu v'_m}{\beta_0 \Pi + 1} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} + \left(\frac{\sigma_T \mu'_0 \Delta T'_{L,F}}{L \rho'_0 T'_0} \right) \left(\frac{\mu}{\rho[\alpha_0 \theta + 1]} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) \Big|_{\eta=0} \quad (2.25)$$

donde:

$$v'_m \sim \sqrt{2RT'_0(\alpha_0 \theta + 1)}; \quad \alpha_0 = \frac{\Delta T'_{T,F}}{T'_0}; \quad \beta_0 = \frac{\Delta P'_c}{P'_0}.$$

De acuerdo a la física del problema, es pertinente pensar que la velocidad característica del fluido en la dirección longitudinal está íntimamente relacionada con el segundo término del lado derecho de 2.25, ya que este término es el que le corresponde al efecto de transpiración térmica. Cabe señalar que este término está relacionado con un gradiente de temperaturas longitudinal, por lo que para analizar su orden de magnitud es necesario considerar en el fluido, una diferencia de temperaturas característica en dirección longitudinal. Por lo tanto el orden de magnitud de la velocidad característica en cuestión se relaciona con este gradiente de la siguiente forma:

$$u'_c \sim \frac{\sigma_T \mu'_0}{\rho'_0 T'_0} \left(\frac{\Delta T'_{L,F}}{L} \right), \quad (2.26)$$

donde:

$\Delta T'_{L,F} \rightarrow$ Diferencia de temperaturas característica en el fluido en dirección longitudinal [K]

Entonces, se substituye (2.26) en (2.25) y tomando en cuenta las relaciones que involucran al número de Knudsen y haciendo algunos arreglos algebraicos, tenemos que:

$$u \sim - \left(\frac{\sigma_p \sqrt{2}}{k_\lambda} \right) Kn \left(\frac{\mu[\alpha_0 \theta + 1]^{1/2}}{\beta_0 \Pi + 1} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} + \left(\frac{\Delta T'_{T,F}}{\Delta T'_{L,F}} \right) \left(\frac{\mu}{\rho[\alpha_0 \theta + 1]} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) \Big|_{\eta=0};$$

consideramos que los órdenes de magnitud de los parámetros α_0 y β_0 definidos con anterioridad son pequeños comparados con la unidad, y que todas las

variables adimensionales u , μ , ρ , θ , y Π al igual que las constantes σ_p y k_λ son de orden uno, por lo cual tenemos que:

$$u \sim -Kn \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} + \left(\frac{\Delta T'_{T,F}}{\Delta T'_{L,F}} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) \Big|_{\eta=0} \sim 1 ,$$

pero en el régimen de deslizamiento los valores de Kn son considerablemente menores a la unidad, por lo tanto:

$$u \sim \left(\frac{\Delta T'_{T,F}}{\Delta T'_{L,F}} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) \Big|_{\eta=0} \sim 1 ,$$

si los gradientes de θ en dirección longitudinal son de orden unidad, entonces:

$$u \sim \left(\frac{\Delta T'_{T,F}}{\Delta T'_{L,F}} \right) \sim 1 \Rightarrow \Delta T'_{T,F} \sim \Delta T'_{L,F} \Rightarrow \Delta T'_{L,F} = \frac{Hq'' Pr}{\mu'_0 C_p} . \quad (2.27)$$

Ahora se substituye (2.27) en (2.26), con lo que finalmente encontramos que:

$$u'_c \sim \frac{\sigma_T Pr \epsilon q''}{\rho'_0 T'_0 C_p} . \quad (2.28)$$

Habiendo obtenido el orden de magnitud de la velocidades características, es conveniente expresar a α_0 y β_0 en función de otros parámetros importantes tales como ϵ , Re_H y Kn :

$$\alpha_0 = \frac{\Delta T'_{T,F}}{T'_0} = \frac{Hq'' Pr}{\mu'_0 C_p T'_0} = \frac{\rho'_0 u'_c H}{\mu'_0 \sigma_T \epsilon} = \frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} ; \quad (2.29)$$

$$\beta_0 = \frac{\Delta P'_c}{P'_0} = \frac{\rho'_0 (u'_c)^2}{P'_0} = \frac{(u'_c)^2}{RT'_0} = \frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2} ; \quad (2.30)$$

por lo tanto:

$$\alpha_0 = \frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} ; \quad \beta_0 = \frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2} .$$

2.5. Ecuaciones Adimensionales

En esta sección presentaremos las ecuaciones adimensionales que se obtuvieron de sustituir las variables adimensionales definidas anteriormente en las ecuaciones de conservación (2.1) - (2.6) que se presentaron al inicio de este capítulo. Cabe señalar, que según los resultados presentados por Méolans *et al.* 2008 [15], los gradientes de presión no son importantes para este tipo de estudio del flujo de aire en microcanales, es decir, bajo condiciones de flujo y geometrías similares a las del presente trabajo, estos autores reportaron que los incrementos de presión en ambas direcciones es casi nulo. De acuerdo a lo anterior, despreciaremos los términos de presión en las ecuaciones de cantidad de movimiento.

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial \chi} + \frac{\partial \rho v}{\partial \eta} = 0 \quad (2.31)$$

Ecuación de Momentum en χ :

$$(\epsilon Re_H) \left[\frac{\partial \rho u^2}{\partial \chi} + \frac{\partial \rho uv}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\epsilon^2) \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial u}{\partial \chi} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial v}{\partial \chi} \right]. \quad (2.32)$$

Ecuación de Momentum en η :

$$(\epsilon^3 Re_H) \left[\frac{\partial \rho uv}{\partial \chi} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial \eta} \right] = (\epsilon^2) \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + (\epsilon^4) \left[\frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial v}{\partial \chi} \right]. \quad (2.33)$$

Ecuación del Gas Ideal:

$$\left(\frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2} \right) \Pi + 1 = \rho \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta + 1 \right] \quad (2.34)$$

Ecuación de la Energía:

$$\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \left(\frac{\epsilon^2 \sigma_T Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{2} \rho [u^3 + \epsilon^2 uv^2] \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{2} \rho [vu^2 + \epsilon^2 v^3] \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +(\epsilon Re_H)[\rho(u \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta})] = \left(\frac{\epsilon^2}{Pr}\right) \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \left(\frac{1}{Pr}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\
& + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \left(\frac{\epsilon^3 \sigma_T Kn^2 Re_H}{k_\lambda^2}\right) \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \chi} \mu u \frac{\partial u}{\partial \chi} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \chi} \mu u \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \chi} \mu v \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu v \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \mu u \frac{\partial v}{\partial \chi} \right. \\
& \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu v \frac{\partial u}{\partial \chi} \right] + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \left(\frac{\epsilon^5 \sigma_T Kn^2 Re_H}{k_\lambda^2}\right) \left[\frac{\partial}{\partial \chi} \mu v \frac{\partial v}{\partial \chi} \right] + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \left(\frac{\epsilon \sigma_T Kn^2 Re_H}{k_\lambda^2}\right) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \mu u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Ley de Sutherland:

$$\mu = \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta + 1 \right]^\omega . \tag{2.36}$$

Ecuación de Laplace para el sumidero de calor:

$$(\alpha_c) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \left(\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \right) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} = 0 . \tag{2.37}$$

Por otro lado, las condiciones de frontera de las ecuaciones (2.7) - (2.12) presentan la siguiente forma adimensional:

Velocidad:

$$\begin{aligned}
u(\chi, 0) = & - \left(\frac{\sqrt{2} \sigma_p}{k_\lambda} \right) Kn \left[\frac{\left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 0) + 1 \right]^{\omega+1/2}}{\left(\frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2} \right) \Pi(\chi, 0) + 1} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} \\
& + \left[\frac{\left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 0) + 1 \right]^\omega}{\left(\frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2} \right) \Pi(\chi, 0) + 1} \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) \Big|_{\eta=0} .
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
u(\chi, 1) = & -\left(\frac{\sqrt{2}\sigma_p}{k_\lambda}\right)Kn \left[\frac{\left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T\epsilon}\right)\theta(\chi, 1) + 1\right]^{\omega+1/2}}{\left(\frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2}\right)\Pi(\chi, 1) + 1} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \Big|_{\eta=1} \\
& + \left[\frac{\left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T\epsilon}\right)\theta(\chi, 1) + 1\right]^\omega}{\left(\frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2}\right)\Pi(\chi, 1) + 1} \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi}\right) \Big|_{\eta=1}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Temperatura:

$$\theta(\chi, 0) - \theta_w(\chi, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}\xi_T}{k_\lambda}\right)Kn \left[\frac{\left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T\epsilon}\right)\theta(\chi, 0) + 1\right]^{\omega+1/2}}{\left(\frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2}\right)\Pi(\chi, 0) + 1} \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) \Big|_{\eta=0} \tag{2.40}$$

$$\theta(\chi, 1) - \hat{\gamma}_0\chi^n = \frac{\gamma_0}{\rho(\chi, 1) \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T\epsilon}\right)\theta(\chi, 1) + 1\right]^{1/2}}, \tag{2.41}$$

donde:

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\mu'_0 C_p A_{ws} L^n}{Hq'' Pr} ; \quad \gamma_0 = \frac{q_s''}{q''} \left(\frac{\sqrt{2}\xi_T}{k_\lambda}\right)Kn. \tag{2.42}$$

Estos parámetros adimensionales fueron evaluados tomando en cuenta las propiedades físicas y parámetros geométricos que se muestran en la tabla 2.1 . En la sección de resultados presentaremos un rango de valores de estos parámetros para ver de que manera afectan los perfiles de velocidad y de temperaturas.

Por otra parte, para la entrada y salida del microcanal tenemos que la forma adimensional de la condición (2.11) toma la siguiente forma:

$$\chi = 0 : \quad \theta = 0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi}\right) \Big|_{\chi=1} = 0 \tag{2.43}$$

Cuadro 2.1: Parámetros, propiedades físicas y geométricas del fluido y del sumidero de calor

Parámetro	Valor	Unidades
R	286.9	J/kg K
c_p	1007	J/kg K
γ	1.4	-
h	1×10^{-6}	m
H	1×10^{-6}	m
k'_0	26.3×10^{-3}	W/m K
k'_w	148	W/m K
L	1×10^{-4}	m
Pr	0.707	-
q''	1×10^5	W
μ'_0	1.8×10^{-5}	kg/m s
ρ'_0	1.1614	kg/m ³
σ_p	1.02	-
σ_T	1.175	-
T'_0	300	K

Para completar el problema conjugado la continuidad del flujo de calor en la pared inferior del microcanal se puede escribir como:

$$-\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \left[\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \theta + 1 \right]^\omega \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=0}. \quad (2.44)$$

Las condiciones de frontera anteriores, nos obligan a resolver la ecuación de conducción de calor (2.37) para el sumidero de calor; las condiciones adiabáticas correspondientes dadas por (2.16) y (2.17) son las siguientes:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} = 0, \quad (2.45)$$

junto con:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c}. \quad (2.46)$$

2.6. Reducción de las ecuaciones de conservación

Para el sistema de ecuaciones (2.31) - (2.36) y las condiciones de frontera (2.38) - (2.40), se despreciaron términos de orden $\epsilon^3 Re_H$, ϵ^4 , $\frac{Kn^2 Re_H^2}{k_\lambda^2}$ o términos de orden superior que resulten de la combinación de estos tres términos. Físicamente significa que en la ecuación de momentum en η , despreciamos los efectos inerciales y viscosos longitudinales y en la ecuación de la energía despreciamos efectos de compresibilidad y de disipación viscosa. Por lo tanto, al eliminar estos términos nos queda el sistema reducido que se muestra a continuación:

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial \chi} + \frac{\partial \rho v}{\partial \eta} = 0 \quad (2.47)$$

Ecuación de Momentum en χ :

$$(\epsilon Re_H) \left[\frac{\partial \rho u^2}{\partial \chi} + \frac{\partial \rho uv}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\epsilon^2) \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial u}{\partial \chi} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial v}{\partial \chi} \right]. \quad (2.48)$$

Ecuación de Momentum en η :

$$(\epsilon^2) \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (2.49)$$

Ecuación del Gas Ideal:

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta + 1} \quad (2.50)$$

Ecuación de la Energía:

$$(\epsilon Re_H) \left[\rho \left(u \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right] = \left(\frac{\epsilon^2}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial \chi} \mu \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \left(\frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (2.51)$$

Ley de Sutherland:

$$\mu = \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta + 1 \right]^\omega \quad (2.52)$$

Ecuación de Laplace:

$$(\alpha_c) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \left(\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \right) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} = 0 \quad (2.53)$$

CONDICIONES DE FRONTERA

Velocidad:

$$\begin{aligned} u(\chi, 0) = & - \left(\frac{\sqrt{2} \sigma_p}{k_\lambda} \right) Kn \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 0) + 1 \right]^{\omega+1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} \\ & + \left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 0) + 1 \right]^\omega \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) \Big|_{\eta=0} . \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} u(\chi, 1) = & - \left(\frac{\sqrt{2} \sigma_p}{k_\lambda} \right) Kn \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 0) + 1 \right]^{\omega+1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1} \\ & + \left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 1) + 1 \right]^\omega \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right) \Big|_{\eta=1} . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Temperatura:

$$\theta(\chi, 0) - \theta_w(\chi, 0) = \left(\frac{\sqrt{2} \xi_T}{k_\lambda} \right) Kn \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 0) + 1 \right]^{\omega+1/2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} \quad (2.56)$$

$$\theta(\chi, 1) - \widehat{\gamma}_0 \chi^n = \frac{\gamma_0}{\rho(\chi, 1) \left[\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta(\chi, 1) + 1 \right]^{1/2}} \quad (2.57)$$

Las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.44) - (2.46) no se ven afectadas por esta reducción de términos, pero porque así nos es conveniente, estas condiciones las reescribimos a continuación:

$$-\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \left[\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \theta + 1 \right]^\omega \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=0}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} = 0, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c}. \quad (2.60)$$

El sistema (2.47) - (2.60) define en forma adimensional el problema conjugado de flujo caracterizado por el efecto de transpiración térmica; sin embargo, el número de parámetros es todavía muy grande por lo que se desea reducir aún más el número de términos de las ecuaciones.

2.7. Límite Asintótico Relevante ($Re_H \ll \epsilon$)

Considerando que $Re_H \ll \epsilon \ll 1$, podemos expandir en series de Taylor las relaciones para la densidad y viscosidad dadas respectivamente por (2.50) y (2.52):

$$\rho = 1 - \left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta + \dots$$

$$\mu = 1 + \omega \left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right) \theta + \dots$$

donde podemos observar que si:

$$Re_H \ll \epsilon \Rightarrow \rho \sim 1; \mu \sim 1;$$

y además:

$$Re_H \ll \epsilon \Rightarrow Re_H \epsilon \ll \epsilon^2 \ll \ll 1;$$

entonces, en las ecuaciones (2.47), (2.48) y (2.51) podemos despreciar los términos que contengan al parámetro $\left(\frac{Re_H}{\sigma_T \epsilon} \right)$ así como también los que sean de orden ϵ^2 y $Re_H \epsilon$, lo que nos permite desacoplar ligeramente algunas de las ecuaciones. El sistema no pierde su sentido físico ya que se retienen características esenciales del problema conjugado. Entonces, podemos proceder a presentar el sistema final de ecuaciones de conservación para el fluido:

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 . \quad (2.61)$$

Ecuación de Momentum en χ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 . \quad (2.62)$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 0 . \quad (2.63)$$

Analizando la ecuación (2.62), podemos observar que este flujo de gas se asemeja a un flujo de Couette promovido por el gradiente desconocido de temperatura que se desarrolla en la pared inferior del microcanal.

La eliminación de los términos inerciales en este límite ($Re_H \ll \epsilon \ll 1$), es equivalente a despreciar los efectos de entrada y por lo tanto dejamos de satisfacer las condiciones de frontera a la entrada del microcanal. Una consecuencia importante es que la ecuación de la energía (2.63) no puede satisfacer las condiciones de entrada. Además, debido a la forma de esta última ecuación concluimos que el perfil de temperaturas es claramente influenciado por un régimen puramente difusivo.

La ecuación de Laplace se mantiene:

$$(\alpha_c) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \left(\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \right) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} = 0 \quad (2.64)$$

Las condiciones de frontera (2.54) - (2.57) se reducen a las siguientes expresiones:

$$u(\chi, 0) = -\frac{\sqrt{2}\sigma_p}{k_\lambda} Kn \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} ; \quad (2.65)$$

$$u(\chi, 1) = -\frac{\sqrt{2}\sigma_p}{k_\lambda} Kn \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} ; \quad (2.66)$$

$$\theta(\chi, 0) - \theta_w(\chi, 0) = \frac{\sqrt{2}\xi_T}{k_\lambda} Kn \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} ; \quad (2.67)$$

$$\theta(\chi, 1) - \hat{\gamma}_0 \chi^n = \gamma_0 . \quad (2.68)$$

Por otro lado, la continuidad de flujo de calor dada por la ecuación (2.58) toma la siguiente forma:

$$-\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=0}, \quad (2.69)$$

sin embargo, las condiciones adiabáticas (2.59) junto con la ecuación (2.60) se mantienen sin ninguna modificación:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} = 0, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c}. \quad (2.71)$$

Las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento para el fluido, pueden resolverse fácilmente en términos del perfil de temperaturas. Entonces, integramos dos veces la ecuación (2.62):

$$u = A_v(\chi)\eta + B_v(\chi) \implies \frac{\partial u}{\partial \eta} = A_v(\chi)$$

y aplicando las condiciones de frontera (2.65) y (2.66) tenemos que:

$$\begin{aligned} \eta = 0 \rightarrow u(\chi, 0) &= -\alpha_v \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} \\ \eta = 1 \rightarrow u(\chi, 1) &= -\alpha_v \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \end{aligned}$$

en donde el parámetro α_v queda definido como:

$$\alpha_v = \left(\frac{\sqrt{2}\sigma_P}{k_\lambda} \right) Kn. \quad (2.72)$$

Entonces a continuación tenemos que:

$$\eta = 0 \rightarrow u(\chi, 0) = B_v(\chi)$$

$$\eta = 1 \rightarrow u(\chi, 1) = A_v(\chi) + B_v(\chi)$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para A_v y B_v , obtenemos finalmente:

$$u = \left[\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} - \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} \right] \eta + (1 + \alpha_v) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} - \alpha_v \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \quad (2.73)$$

Para determinar la componente transversal de la velocidad v , integramos la ecuación de continuidad en dirección transversal teniendo en cuenta las condiciones de no permeabilidad en las paredes superior e inferior del microcanal, es decir: $v(\chi, 0) = v(\chi, 1) = 0$. Entonces, integrando (2.61) y despejando v tenemos que:

$$v = -\frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} - \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \chi} \left((1 + \alpha_v) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} - \alpha_v \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \right) \eta + C(\chi)$$

pero en $\eta = 0$, $v_0 = 0 \Rightarrow C(\chi) = 0$, por lo tanto:

$$v = -\frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} - \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \chi} \left((1 + \alpha_v) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} - \alpha_v \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \right) \eta \quad (2.74)$$

La ecuación anterior debe satisfacer también la otra condición de impermeabilidad correspondiente a la pared superior del microcanal, es decir: $v(\chi, 1) = 0$, entonces sustituimos $\eta = 1$ y $v = 0$ en la ecuación (2.74) y reordenando algunos términos tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha_v \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \right] + \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\left(\frac{1}{2} + \alpha_v \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} \right] = 0$$

De esta manera, de la ecuación anterior obtenemos una relación adicional para los gradientes de temperatura en las paredes del microcanal:

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=1} \right) = - \frac{\left(\frac{1}{2} + \alpha_v \right)}{\left(\frac{1}{2} - \alpha_v \right)} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} \right) \quad (2.75)$$

Finalmente, substituyendo (2.75) en (2.74), la ecuación para v queda como:

$$v = - \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\eta=0} \right) \left[\frac{\frac{1}{2}(\eta - \eta^2)}{\frac{1}{2} - \alpha_v} \right] \quad (2.76)$$

Las expresiones obtenidas para las componentes de la velocidad u y v dadas respectivamente por (2.73) y (2.76) serán utilizadas en la solución numérica que se explica en el siguiente capítulo. Mientras tanto, necesitamos resolver la ecuación de la energía ya que si queremos obtener las componentes de la velocidad es necesario determinar primero el perfil de temperaturas. Entonces, integramos dos veces la ecuación (2.63):

$$\theta = A_T(\chi)\eta + B_T(\chi) \implies \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = A_T(\chi)$$

y aplicando las condiciones de frontera (2.67) y (2.68) tenemos que:

$$\eta = 0 \rightarrow \theta(\chi, 0) = \theta_w(\chi, 0) + \alpha_T \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$$

$$\eta = 1 \rightarrow \theta(\chi, 1) = \widehat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0 ,$$

en donde el parámetro α_T queda definido como:

$$\alpha_T = \left(\frac{\sqrt{2}\xi_T}{k_\lambda} \right) Kn . \quad (2.77)$$

Entonces a continuación tenemos que:

$$\eta = 0 \rightarrow \theta(\chi, 0) = B_T(\chi)$$

$$\eta = 1 \rightarrow \theta(\chi, 1) = A_T(\chi) + B_v(\chi)$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para A_T y B_T , obtenemos finalmente:

$$\theta = \frac{[\hat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0 - \theta_w(\chi, 0)]\eta + \alpha_T(\hat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0) + \theta_w(\chi, 0)}{\alpha_T + 1} \quad (2.78)$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.73), (2.76) y (2.78), es evidente que se necesita conocer la temperatura θ_w en la pared del microcanal para completar la solución del problema conjugado. En el capítulo siguiente se desarrollan algunas soluciones asintóticas para resolver la ecuación de Laplace (2.64) junto con las correspondientes condiciones de frontera. Además, se presentará también la solución numérica con la que se comparan los modelos teóricos.

Capítulo 3

Soluciones del Problema Conjugado

En este capítulo se desarrollan dos soluciones asintóticas con base en un parámetro conjugado definido como α_c/ϵ_h^2 , donde α_c está dado por la ecuación (2.24) y $\epsilon_h = h/L$ es la relación de esbeltez en el sumidero de calor. Cada una de estas soluciones corresponde a un límite asintótico relevante para α_c/ϵ_h^2 que define la física del problema conjugado en cada caso. El primer límite lo llamaremos térmicamente grueso y corresponde a considerar que $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$; como se verá más adelante este es un régimen asintótico difusivo con ausencia de transpiración térmica por lo que en este límite, nuestra solución nos ayuda a identificar bajo que circunstancias ocurre la ausencia de este efecto que es el principal enfoque de nuestro estudio.

La segunda solución asintótica corresponde al límite $\alpha_c \gg 1$ que llamaremos térmicamente delgado y en el que observaremos que los gradientes transversales de temperatura en la placa sólida son insignificantes por lo tanto, en este régimen asintótico la velocidad y la temperatura del fluido presentan una fuerte dependencia de los gradientes longitudinales de temperatura en la placa sólida que funciona como sumidero de calor. Por lo tanto este límite muestra las condiciones en las que el perfil de temperaturas en la pared inferior del microcanal promueve el movimiento del fluido; es decir, el flujo del gas es provocado únicamente por el efecto de transpiración térmica.

Finalmente se presentarán los detalles de la formulación numérica que consiste en resolver la ecuación de la energía (2.51) acoplada con la ecuación de Laplace (2.64) variando el parámetro conjugado α_c/ϵ_h^2 en un amplio rango de

valores para hacer las comparaciones correspondientes con los modelos asintóticos y precisar que en los límites mencionados la teoría queda bien representada por el modelo numérico. Cabe señalar que en la parte numérica se retuvieron los términos convectivos de (2.51) y se utilizaron las ecuaciones (2.73) y (2.76), además de considerar que $\rho = \mu = 1$ tal como se hizo en la última sección del capítulo anterior.

3.1. Límite Térmicamente Grueso: $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$

Como se dijo anteriormente, en este límite nuestro parámetro conjugado es de orden unidad ($\alpha_c/\epsilon_h^2 \sim 1$; donde: $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$). Esto quiere decir que a simple vista, el segundo término del miembro izquierdo de la ecuación de Laplace dada por (2.64) es dominante; es decir, las variaciones transversales de temperatura son más importantes que las longitudinales y es por esta razón que a este límite asintótico se le conoce como térmicamente grueso. Entonces para simplificar (2.64) proponemos la siguiente expansión asintótica con α_c como parámetro de perturbación:

$$\theta_w = \theta_{w0} + \alpha_c \theta_{w1} + O(\alpha_c^2). \quad (3.1)$$

En la ecuación anterior, $O(\alpha_c^2)$ significa que omitimos términos de orden α_c^2 o de orden superior. Sustituyendo (3.1) en (2.64) y tomando en cuenta únicamente términos de orden cero en α_c , la ecuación de Laplace se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \theta_{w0}}{\partial Z^2} = 0. \quad (3.2)$$

Después de aplicar la expansión (3.1) a las condiciones de frontera (2.69) y (2.71) y tomar el orden cero para α_c , encontramos que:

$$-\left(\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} \Big|_{Z=0}; \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} \right|_{Z=1} = \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c}. \quad (3.4)$$

Integrando dos veces la ecuación (3.2) tenemos que:

$$\theta_{w0} = A(\chi) Z + B(\chi); \Rightarrow \theta_{w0} = A(\chi) Z + \theta_{w0}(\chi, 0). \quad (3.5)$$

Para encontrar la solución para $\theta_{w0}(\chi, \eta)$, sustituimos (2.78) en (3.3) y con ayuda de (3.4), obtenemos en este límite asintótico, el perfil de temperaturas en la pared inferior del microcanal:

$$\theta_{w0}(\chi, \eta) = \left(\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \right) Z + 1 + \alpha_T + \hat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0, \quad (3.6)$$

en donde:

$$\theta_{w0}(\chi, 0) = 1 + \alpha_T + \hat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0. \quad (3.7)$$

Para encontrar el perfil de temperaturas en el fluido, sustituimos (3.7) en (2.78) obteniendo la siguiente ecuación para θ :

$$\theta(\chi, \eta) = -\eta + \hat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0 + 1. \quad (3.8)$$

Ahora bien, observando la ecuación (3.8), debemos reconocer que:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right|_{\eta=0} = n \hat{\gamma}_0 \chi^{n-1} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right|_{\eta=1} \quad (3.9)$$

Por lo tanto para cualquier valor de $n \neq 0$ es imposible satisfacer la ecuación (2.75), la cual representa la condición de no permeabilidad para la componente

transversal v de la velocidad. La única manera de satisfacer (2.75) es cuando $n = 0$, por lo tanto las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) toman la siguiente forma:

$$\theta_{w0}(\chi, \eta) = \left(\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \right) Z + 1 + \alpha_T + \widehat{\gamma}_0 + \gamma_0, \quad (3.10)$$

$$\theta_{w0}(\chi, 0) = 1 + \alpha_T + \widehat{\gamma}_0 + \gamma_0, \quad (3.11)$$

$$\theta_0(\chi, \eta) = -\eta + \widehat{\gamma}_0 + \gamma_0 + 1. \quad (3.12)$$

En ambos casos, las temperaturas de la pared y del fluido son constantes (en $\eta = Z = 0$) y las velocidades u y v dadas respectivamente por (2.73) y (2.76) se reducen a $u = v = 0$.

De acuerdo a lo anterior, la conclusión importante es que el caso térmicamente grueso no puede representar analíticamente el efecto de transpiración térmica ya que éste se presenta solamente cuando hay gradientes longitudinales de temperatura y en el orden cero para este límite asintótico, estos gradientes no existen. El regimen térmicamente grueso sirve para validar el ya conocido caso cuando la temperatura de las paredes es uniforme, el efecto de transpiración térmica no está presente y el campo de velocidades es igual a cero. En este caso, las dos paredes tienen valores uniformes de temperatura y aunque éstos no son iguales, no son suficientes para provocar el efecto de transpiración térmica. Por lo tanto tenemos un regimen térmico difusivo con una solución diferente a la trivial debido a las condiciones de frontera en las paredes.

En la sección 3.3, se presentarán los detalles del modelo numérico que involucran valores de α_c/ϵ_h^2 de orden unidad o menores, con lo cual se obtendrán soluciones diferentes de la trivial, pero en este caso el campo de velocidades será diferente de cero.

3.2. Límite Térmicamente Delgado: $\alpha_c \gg 1$

En esta sección se procederá de manera similar al caso térmicamente grueso que se trató en la sección anterior, partiendo de la ecuación (2.78) y resolviendo

primero la ecuación de Laplace (2.64) para conocer el perfil de temperaturas $\theta_w(\chi, Z)$ del sumidero de calor, pero en este caso nuestra expansión asintótica se realizará considerando $\alpha_c \gg 1$. Seguimos considerando que $\epsilon_h \ll 1$ por lo tanto para nuestro parámetro conjugado tenemos que: $(\alpha_c/\epsilon_h^2) \gg 1$. Entonces proponemos la siguiente expansión asintótica:

$$\theta_w = \theta_{w0}(\chi) + \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \theta_{w1}(\chi, Z) + O\left(\left(\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c}\right)^2\right). \quad (3.13)$$

En la ecuación anterior el término $O\left(\left(\frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c}\right)^2\right)$ quiere decir que despreciaremos términos de orden $(\epsilon_h^2/\alpha_c)^2$ o de orden superior. Sustituyendo (3.13) en (2.64), tenemos que la ecuación de Laplace toma la siguiente forma:

$$\alpha_c \frac{d^2\theta_{w0}}{d\chi^2} + \frac{\partial^2\theta_{w1}}{\partial Z^2} = 0. \quad (3.14)$$

Esta última ecuación se puede integrar una vez en dirección transversal desde $Z = 0$ hasta $Z = 1$:

$$\alpha_c \frac{d^2\theta_{w0}}{d\chi^2} + \frac{\partial\theta_{w1}}{\partial Z} \Big|_{Z=1} - \frac{\partial\theta_{w1}}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0; \quad (3.15)$$

pero de las condiciones de frontera (2.69) y (2.71), considerando la expansión (3.13) y despreciando términos de orden mayor o igual a $(\epsilon_h^2/\alpha_c)^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial\theta_{w1}}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = 1; \quad \frac{\partial\theta_{w1}}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = -\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \Big|_{\eta=0};$$

por lo tanto:

$$\alpha_c \frac{d^2\theta_{w0}}{d\chi^2} + 1 + \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (3.16)$$

De la ecuación para la temperatura del fluido dada por (2.78), tenemos que:

$$\left. \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\hat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0 - \theta_{w0}}{(\alpha_T + 1)}, \quad (3.17)$$

ahora sustituimos (3.17) en (3.16), obteniendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\alpha_c \frac{d^2 \theta_{w0}}{d\chi^2} - \frac{\theta_{w0}}{(\alpha_T + 1)} = - \frac{\hat{\gamma}_0}{(\alpha_T + 1)} \chi^n - \frac{\gamma_0}{(\alpha_T + 1)} - 1$$

Con la finalidad de recalcar la influencia del valor del parámetro $\alpha_c \gg 1$ en este límite asintótico, la ecuación diferencial anterior la escribimos de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \theta_{w0}}{d\chi^2} - \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) \frac{\theta_{w0}}{(\alpha_T + 1)} = \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) \left[- \frac{\hat{\gamma}_0}{(\alpha_T + 1)} \chi^n - \frac{(\gamma_0 + 1 + \alpha_T)}{(\alpha_T + 1)} \right] \quad (3.18)$$

Para compactar la ecuación anterior, definimos las siguientes constantes:

$$B = \frac{1}{\alpha_T + 1}; \quad C = - \frac{\hat{\gamma}_0}{(\alpha_T + 1)}; \quad D = - \frac{(\gamma_0 + 1 + \alpha_T)}{(\alpha_T + 1)}, \quad (3.19)$$

y la ecuación (3.18) queda como:

$$\frac{d^2 \theta_{w0}}{d\chi^2} - \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) B \theta_{w0} = \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) [C \chi^n + D]; \quad (3.20)$$

sujeta a las siguientes condiciones adiabáticas:

$$\left. \frac{d\theta_{w0}}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0; \quad \left. \frac{d\theta_{w0}}{d\chi} \right|_{\chi=1} = 0. \quad (3.21)$$

Para resolver (3.20), proponemos la siguiente expansión asintótica regular:

$$\theta_{w0} = \theta_{w00} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_c} \right)^j \theta_{w0j} . \quad (3.22)$$

Entonces, sustituimos (3.22) en (3.20):

$$\frac{d^2 \theta_{w00}}{d\chi^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_c} \right)^j \frac{d^2 \theta_{w0j}}{d\chi^2} - \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) B \left[\theta_{w00} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_c} \right)^j \theta_{w0j} \right] = \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) [C \chi^n + D] ,$$

reteniendo términos de hasta orden α_c^{-2} y comparando los que sean del mismo orden, tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d^2 \theta_{w00}}{d\chi^2} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2 \theta_{w01}}{d\chi^2} - B \theta_{w00} = [C \chi^n + D] \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2 \theta_{w02}}{d\chi^2} - B \theta_{w01} = 0 \quad (3.25)$$

Aquí es conveniente recordar que el sistema de ecuaciones (3.23) - (3.25) está sujeto a las condiciones adiabáticas dadas por (3.21) ya que se utilizarán constantemente al resolver cada una de las ecuaciones del sistema anterior.

Resolviendo el orden cero:

$$\frac{d^2 \theta_{w00}}{d\chi^2} = 0 \Rightarrow \theta_{w00} = A_0 \chi + B_0 \Rightarrow \frac{d\theta_{w00}}{d\chi} = A_0 ,$$

aplicando la condiciones adiabáticas:

$$\left. \frac{d\theta_{w00}}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0; \quad \left. \frac{d\theta_{w00}}{d\chi} \right|_{\chi=1} = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \Rightarrow \theta_{w00} = B_0$$

Resolviendo el orden uno:

$$\frac{d^2\theta_{w01}}{d\chi^2} - B \theta_{w00} = [C \chi^n + D]$$

$$\Rightarrow \theta_{w01} = A_1 \chi + B_1 + \frac{C}{(n+1)(n+2)} \chi^{n+2} + \frac{(D + B B_0)}{2} \chi^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta_{w01}}{d\chi} = A_1 + \frac{C}{(n+1)} \chi^{n+1} + (D + B B_0) \chi,$$

utilizando la ecuación (3.21) tenemos que:

$$\left. \frac{d\theta_{w01}}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = 0; \quad \left. \frac{d\theta_{w01}}{d\chi} \right|_{\chi=1} = 0 \Rightarrow \frac{C}{(n+1)} + D + B B_0 = 0$$

$$\Rightarrow B_0 = -\left(\frac{1}{B}\right) \left[\frac{C}{(n+1)} + D \right],$$

por lo que el orden cero queda como:

$$\theta_{w00} = -\left(\frac{1}{B}\right) \left[\frac{C}{(n+1)} \right] \quad (3.26)$$

$$\Rightarrow \theta_{w01} = B_1 + \frac{C}{2(n+1)(n+2)} [2 \chi^{n+2} - (n+2) \chi^2]$$

Resolviendo el orden dos:

$$\frac{d^2\theta_{w02}}{d\chi^2} - B \theta_{w01} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_{w02} = A_2 \chi + B_2 + \frac{B C}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \chi^{n+4} - \frac{B C}{24(n+1)} \chi^4 + \frac{B B_1}{2} \chi^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta_{w02}}{d\chi} = A_2 + \frac{B C}{(n+1)(n+2)(n+3)} \chi^{n+3} - \frac{B C}{6(n+1)} \chi^3 + B B_1 \chi ,$$

aplicando una vez más las condiciones adiabáticas se tiene que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta_{w02}}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0 &\Rightarrow A_2 = 0; & \left. \frac{d\theta_{w02}}{d\chi} \right|_{\chi=1} &= \frac{B C}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{B C}{6(n+1)} + B B_1 = 0 \\ & & \Rightarrow B_1 &= \frac{C}{(n+1)} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] , \end{aligned}$$

y el orden uno queda como:

$$\theta_{w01} = \frac{C}{(n+1)} \left[\frac{\chi^{n+2}}{(n+2)} - \frac{\chi^2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] . \quad (3.27)$$

Al despreciar términos de orden $(1/\alpha_c)^2$ o superiores, la expansión asintótica dada por la ecuación (3.22) queda de la siguiente forma:

$$\theta_{w0} = \theta_{w00} + \alpha_c^{-1} \theta_{w01} + O(\alpha_c^{-2}) ; \quad (3.28)$$

para encontrar la ecuación para la temperatura de la pared θ_{w0} en este límite, sustituimos (3.26) y (3.27) en (3.28) con lo que obtenemos:

$$\theta_{w0} = - \left(\frac{1}{B} \right) \left[\frac{C}{(n+1)} + D \right] + \frac{C}{\alpha_c(n+1)} \left[\frac{\chi^{n+2}}{(n+2)} - \frac{\chi^2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] \quad (3.29)$$

Finalmente, sustituyendo (3.19) en (3.29) tenemos que:

$$\theta_{w0} = \left(\frac{\hat{\gamma}_0}{(n+1)} + \gamma_0 + 1 + \alpha_T \right) - \left(\frac{\hat{\gamma}_0}{\alpha_c(\alpha_T + 1)(n+1)} \right) \left[\frac{\chi^{n+2}}{(n+2)} - \frac{\chi^2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] \quad (3.30)$$

por lo que ahora ya podemos terminar de definir el problema conjugado sustituyendo la ecuación anterior en las ecuaciones del fluido para la temperatura y las componentes de velocidad dadas respectivamente por (2.78), (2.73) y (2.76):

Temperatura del Fluido:

$$\begin{aligned} \theta_0 = & \left(\frac{1}{\alpha_T + 1} \right) \left[- \frac{\hat{\gamma}_0}{(n+1)} - \gamma_0 - 1 - \alpha_T \right] (\eta - 1) \\ & + \left(\frac{\hat{\gamma}_0}{\alpha_c(\alpha_T + 1)^2(n+1)} \right) \left[\frac{\chi^{n+2}}{(n+2)} - \frac{\chi^2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] (\eta - 1) \\ & + \left(\frac{1}{\alpha_T + 1} \right) [\hat{\gamma}_0 \chi^n + \gamma_0] (\alpha_T + \eta) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Velocidad Longitudinal:

$$u = (n \hat{\gamma}_0 \chi^{n-1})(\eta - \alpha_v) + \frac{(1 + \alpha_v - \eta)}{(\alpha_T + 1)} \left[\frac{\hat{\gamma}_0}{\alpha_c(\alpha_T + 1)(n+1)} (\chi - \chi^{n+1}) + \alpha_T n \hat{\gamma}_0 \chi^{n-1} \right] \quad (3.32)$$

Velocidad Transversal:

$$v = \left(\frac{\hat{\gamma}_0}{\alpha_c(\alpha_T + 1)(n+1)} [(n+1)\chi^n - 1] - \alpha_T n(n-1) \hat{\gamma}_0 \chi^{n-2} \right) \left(\frac{1}{\alpha_T + 1} \right) \left[\frac{\frac{1}{2}(\eta - \eta^2)}{(\frac{1}{2} - \alpha_v)} \right] \quad (3.33)$$

Las ecuaciones (3.30) - (3.33) son las soluciones al problema conjugado en este límite asintótico $(\alpha_c/\epsilon_h^2) \gg 1$ y físicamente significa que las variaciones longitudinales de la temperatura en el sumidero de calor son más importantes que las transversales por lo que a este límite se le conoce como térmicamente delgado. Este límite nos sirve para anticipar que el perfil de temperaturas en la pared dado por la ecuación 3.30 depende fuertemente de la coordenada longitudinal χ y es suficiente para ocasionar el flujo de gas debido al efecto

de transpiración térmica. Esta idea es fuertemente confirmada por el análisis numérico de la siguiente sección de este capítulo en la que se presentan los detalles numéricos para diferentes valores de (α_c/ϵ_h^2) . La solución numérica muestra que cuando este parámetro es mayor que la unidad, la velocidad longitudinal u es mucho mayor que la que se obtiene cuando el parámetro conjugado es muy pequeño.

3.3. Solución Numérica

En esta sección se presentan algunos detalles numéricos para resolver las ecuaciones de conservación con base en el software FreeFEM++, el esquema numérico basado en este paquete será aplicado para resolver las siguientes ecuaciones:

Para el fluido:

$$(\epsilon P e_H) \left[u \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] = \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad ; \quad (3.34)$$

Para la placa:

$$(\alpha_c) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \left(\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \right) \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} = 0 \quad . \quad (3.35)$$

En la ecuación 3.34 hemos usado las componentes de velocidad dadas por las ecuaciones (2.73) y (2.76).

Las condiciones de frontera en la dirección longitudinal son:

$$\text{en } \chi = 0 : \quad \theta = 0 \quad \text{y en } \chi = 1 : \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0 \quad . \quad (3.36)$$

Como se dijo en la sección del térmicamente grueso, el límite $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$ conduce a valores uniformes de las temperaturas eliminando el problema conjugado. Por otro lado, el límite $\alpha_c/\epsilon_h^2 \gg 1$ nos muestra la fuerte dependencia

de la temperatura del fluido a gradientes longitudinales de temperatura en el sumidero de calor y sobre todo en la superficie en donde hace contacto con el fluido. Sin embargo, los casos anteriores representan solamente límites asintóticos y por esta razón, exploramos numéricamente las ecuaciones de conservación utilizando el ya conocido software FreeFEM++.

FreeFEM++ es una herramienta con modelado tipo Elemento Finito (FEM por sus siglas en inglés) en el cual la geometría, condiciones de frontera y las ecuaciones diferenciales parciales de interés son resueltas. Normalmente se usa el método clásico de Elemento Finito para resolver las ecuaciones acopladas de la energía y Laplace dadas por (3.34) y (3.35) respectivamente. La implementación numérica es capaz de resolver por razones de convergencia, un sistema de ecuaciones dependientes del tiempo. Se ha utilizado el esquema implícito de Euler hacia atrás, que es la manera en la que se discretizan las derivadas de las ecuaciones de conservación.

Primero consideramos que el vector velocidad de componentes (u, v) es conocido en términos del campo de temperaturas y está dado por las ecuaciones (2.73) y (2.76). La temperatura y las componentes de la velocidad son espacialmente discretizadas en una malla estructural de elementos triangulares. El método de interpolación utilizado para interpolar los valores de la temperatura dentro de las celdas triangulares es el llamado P1 que es un elemento continuo de interpolación lineal. El desarrollo del método de elemento finito se basa en un tipo de planteamiento matemático llamado formulación débil. Este método permite integrar una vez a las ecuaciones diferenciales parciales involucradas bajando el orden de las derivadas en cuestión; pero al integrar se pierde información la cual es recuperada en una variable auxiliar. En nuestro caso tendremos dos variables auxiliares de temperatura, una para el fluido y otra para la pared. Estas variables auxiliares se llaman parámetros de balance porque ayudan a mantener la conservación del sistema de ecuaciones que se quiere resolver. Esta metodología es la base del ya bien conocido cálculo variacional.

FreeFem++ tiene la opción para tratar los términos convectivos a través de una función llamada `convect` que no es otra cosa que aplicar el algoritmo de Chorin para el caso en que las velocidades no son muy altas. Este algoritmo se utiliza para desacoplar la presión de las velocidades en las ecuaciones de Navier Stokes, en un primer paso omite los términos de presión y calcula una velocidad llamada intermedia en función de una velocidad en un paso de tiempo anterior que ya es conocida; posteriormente en el siguiente paso de este proceso, se

utiliza esta velocidad intermedia para calcular los términos de presión que no se habían considerado anteriormente. Similarmente, utilizamos la función convect en la ecuación de la energía, en la que se aplica el algoritmo de Chorin para desacoplar los gradientes de temperatura con las velocidades que para nuestro problema también dependen de las derivadas de la temperatura. Entonces, en un primer paso convect calcula las velocidades en un tiempo ya conocido y en el siguiente paso hace uso de estas velocidades para calcular las nuevas temperaturas; es decir, las temperaturas del paso de tiempo actual que eran desconocidas.

Las ecuaciones del sistema acoplado en formulación débil toman la siguiente forma:

$$\frac{1}{\Delta\tau^n} \int_{\Omega} \theta^{n+1} \theta_a d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon^2 \mu \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} d\Omega + \int_{\Omega} \mu \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_a}{\partial \eta} d\Omega = \frac{1}{\Delta\tau^n} \int_{\Omega} (\theta^n oU) \theta_a d\Omega \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{\Delta\tau^n} \int_{\Omega} \theta_w^{n+1} \theta_{wa} d\Omega + \int_{\Omega} \alpha_c \frac{\partial \theta_w^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_{wa}}{\partial \chi} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \frac{\partial \theta_w^{n+1}}{\partial Z} \frac{\partial \theta_{wa}}{\partial Z} d\Omega = \frac{1}{\Delta\tau^n} \int_{\Omega} \theta_w^n \theta_{wa} d\Omega \quad (3.38)$$

En donde θ_a y θ_{wa} son los parámetros de balance, $(\theta^n oU) = \theta^n (\vec{u} - \theta^n \Delta\tau^n)$ es la contribución de los términos convectivos y \vec{u} es el vector velocidad utilizado en el algoritmo de Chorin cuyas componentes están dadas por: (u^{n+1}, v^{n+1}) . Las condiciones de frontera son las mismas que se utilizaron en las ecuaciones (2.7)-(2.14) y una vez que FreeFEM++ genera las matrices de datos resultantes [31], este paquete desarrolla todas las inversiones matriciales utilizando un resolutor Crout Multifrontal lineal, iterando en un tiempo específico hasta alcanzar una convergencia de orden 1×10^{-8} para el sistema completo.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo presentamos los resultados numéricos y teóricos de las ecuaciones de conservación presentados en el capítulo anterior. La solución numérica explicada en la sección 3.3 se compara con los modelos asintóticos desarrollados en las secciones 3.1 y 3.2; por lo cual las gráficas se analizarán en dos secciones diferentes. En la sección 4.1 se compara el modelo numérico con los modelos asintóticos descritos en la sección 3.1 correspondiente al límite asintótico que denominamos térmicamente grueso; en esta sección nuestro modelo numérico lo ajustamos de tal manera que los valores de nuestro parámetro conjugado sea del orden $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$ es decir: $(\alpha_c/\epsilon_h^2) \sim 1$; de tal manera que la solución numérica pueda ser comparada correctamente con la asintótica que corresponda a este régimen térmicamente grueso.

En la sección 4.2 se compara el modelo numérico con los modelos asintóticos desarrollados en la sección 3.2 correspondiente al límite asintótico que llamamos térmicamente delgado. En este caso para nuestro modelo numérico el rango de valores que utilizaremos para el parámetro conjugado es del orden $(\alpha_c/\epsilon_h^2) \gg 1$ de tal manera que $\alpha_c \gg \epsilon_h^2$.

En general, para presentar los resultados, en este capítulo se utilizaron las propiedades físicas y geométricas que se muestran en la tabla 2.1 por lo tanto, los correspondientes valores de los parámetros adimensionales que se presentan en cada una de las gráficas, son evaluados tomando la información de esta misma tabla.

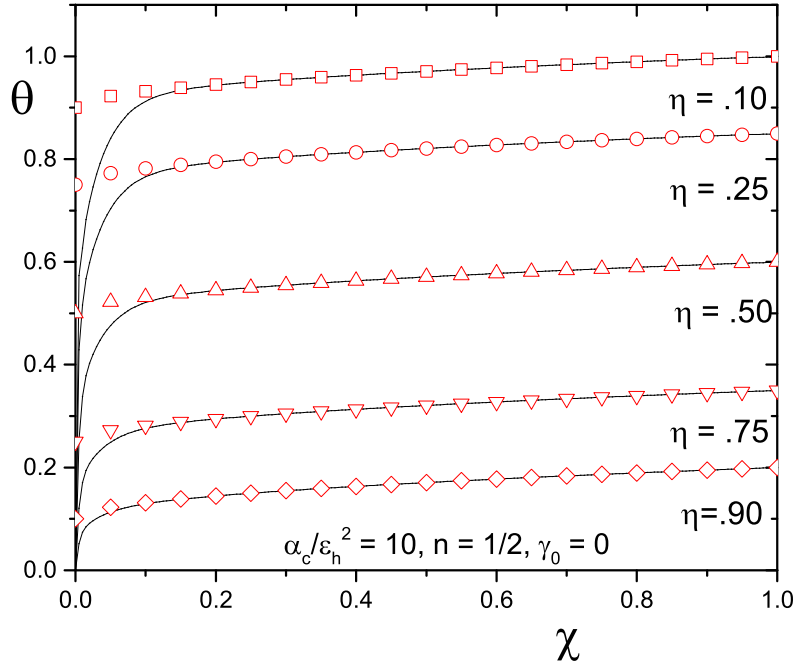


Figura 4.1: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 10, n=1/2, \gamma_0 = 0$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas continuas negras las soluciones numéricas.

4.1. Régimen Térmicamente Grueso

Como se dijo anteriormente, en esta sección comparamos la solución numérica desarrollada en la sección 3.3 con los modelos asintóticos obtenidos para las temperaturas de la pared inferior del microcanal y del fluido dadas respectivamente por las ecuaciones (3.10) y (3.12). En esta sección, los valores del parámetro conjugado (α_c/ϵ_h^2) que se utilizaron en la solución numérica se ajustan a un rango de valores típicos que representen este límite térmicamente grueso, con la finalidad de poder comparar el modelo numérico con el asintótico es decir, consideramos que: $(\alpha_c/\epsilon_h^2) \sim 1$. Es pertinente recordar que en este

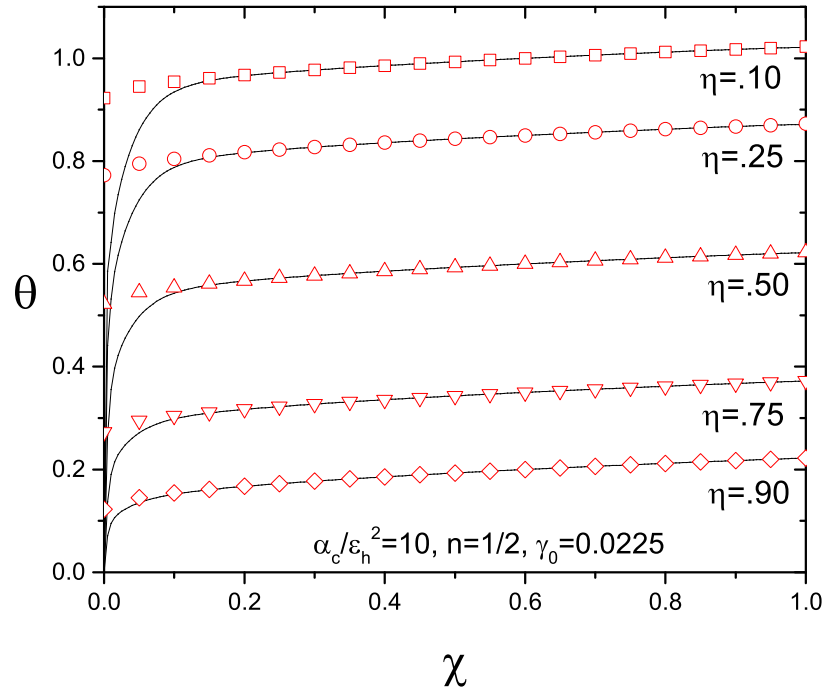


Figura 4.2: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 10$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.0225$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

límite asintótico el campo de velocidad es nulo tal como se explica en la sección 3.1 sin embargo, debemos tomar en cuenta que el modelo numérico conserva los términos convectivos de la ecuación de la energía (3.34) y por lo tanto, el modelo numérico sí presenta valores diferentes de cero para cada una de las componentes de la velocidad. Sin embargo, como se demostrará más adelante estas velocidades están presentes a la entrada del microcanal pero decrecen su valor hasta cero después de recorrer una distancia aproximadamente del 10% de la longitud total del microcanal. Este comportamiento se explicará más adelante cuando se presenten las gráficas de las soluciones numéricas para cada una de las componentes de la velocidad.

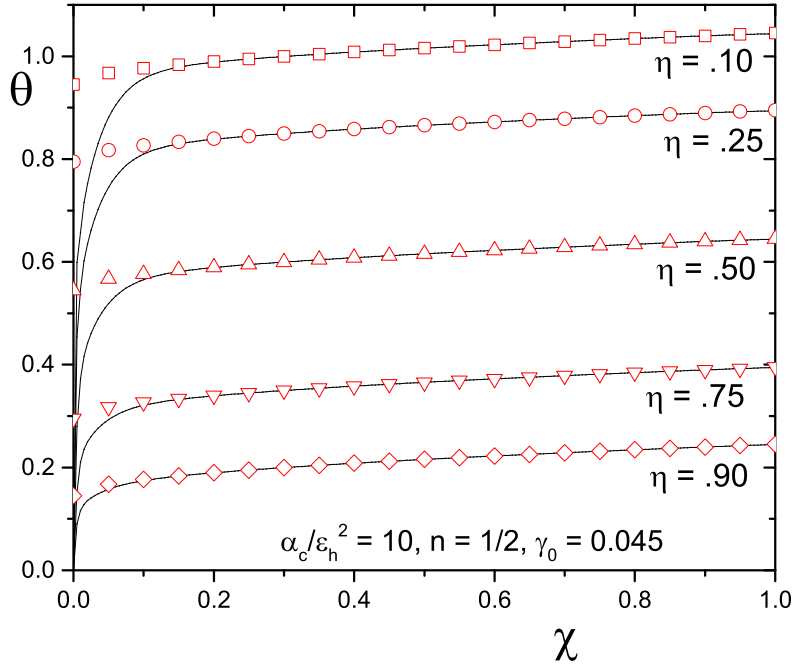


Figura 4.3: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 10, n=1/2, \gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

Para presentar las diversas gráficas que nos representan la solución de nuestro problema conjugado, exploramos algunos valores del parámetro conjugado α_c/ϵ_h^2 que sean representativos de este régimen térmicamente grueso para poder comparar la solución numérica con los respectivos modelos asintóticos. Otro aspecto importante a considerar en los resultados es que también se variaron los parámetros que aparecen en el perfil de temperaturas propuesto para la pared superior del microcanal dado por la ecuación (2.68), en donde el exponente n puede ser cualquier número real y los parámetros adimensionales $\hat{\gamma}_0$ y γ_0 están dados por la ecuación (2.42). Cabe señalar que todas las gráficas de esta sección (figuras 4.1 - 4.17), corresponden a $\hat{\gamma}_0 = 0.1$; sin embargo, la

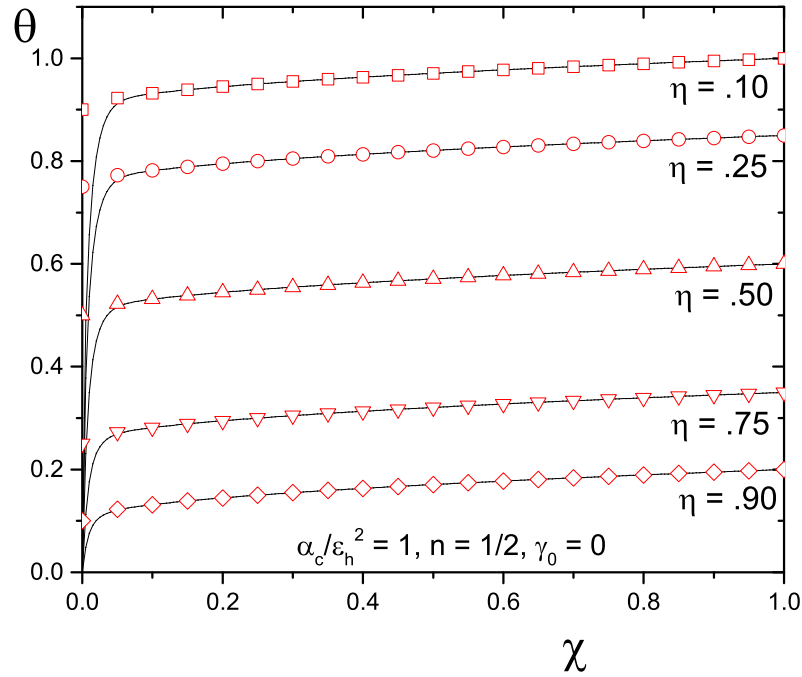


Figura 4.4: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

influencia de este parámetro en los perfiles de temperaturas se analizará al final de la siguiente sección.

En la figura 4.1 se muestra una comparación entre la solución numérica y la asintótica dada por la ecuación (3.12), en la que se presenta a la temperatura del fluido θ como función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal η . Los valores de los parámetros involucrados son: $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 10$, $n = \frac{1}{2}$ y $\gamma_0 = 0$. En esta figura se observa que para un valor dado de χ la temperatura siempre disminuye conforme se incrementa el valor de η , esto es consecuencia del calor que se transfiere al fluido desde la pared inferior del microcanal. La solución asintótica representa este regimen difusivo

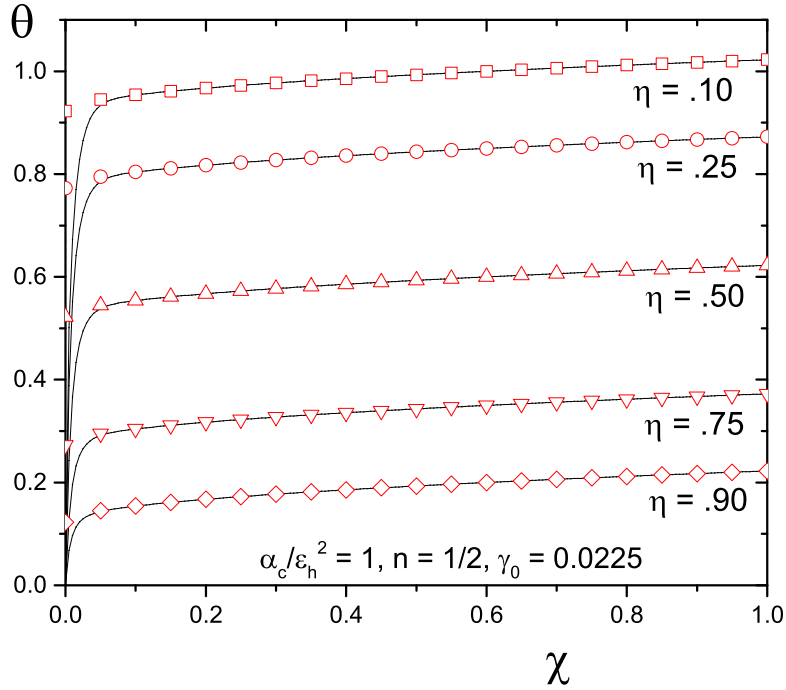


Figura 4.5: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.0225$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

con excelente aproximación excepto en regiones cerca de la entrada al microcanal, esto es consecuencia de haber despreciado los términos convectivos en la ecuación de la energía por lo tanto, el modelo asintótico no puede satisfacer la condición de frontera ($\theta = 0$) a la entrada del microcanal, condición que sí satisface nuestro modelo numérico. Esta situación se presenta en todas las gráficas en donde se comparan soluciones numéricas con las asintóticas para perfiles de temperatura ya sea del fluido o de la pared, y como ya se dijo anteriormente eso se debe al origen de los modelos asintóticos presentados en el capítulo anterior. Por lo tanto, en este tipo de gráficas siempre habrá una diferencia entre dichas soluciones en las regiones de entrada al microcanal. Sin

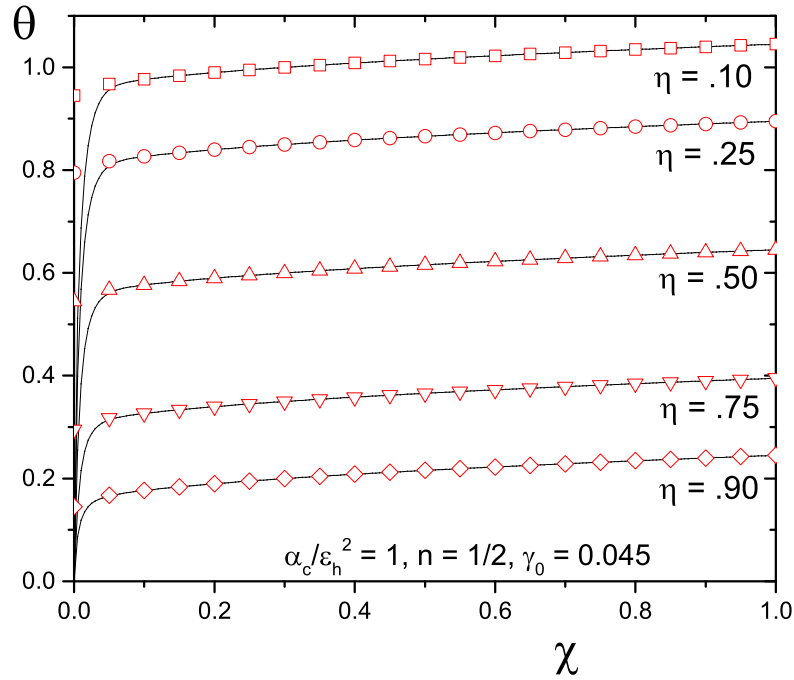


Figura 4.6: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

embargo, fuera de esta región de entrada las soluciones asintóticas presentan una muy buena aproximación con respecto al modelo numérico.

En las figuras 4.2 y 4.3 se pretende analizar la influencia del parámetro γ_0 en el perfil de temperaturas del fluido, por lo que se presentan valores de $\gamma_0 = 0.0225$ y $\gamma_0 = 0.045$ respectivamente, manteniendo $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 10$ y $n = \frac{1}{2}$. En estas dos figuras se muestra también a θ como función de χ para diferentes valores de η . Se puede observar que al incrementar el valor de γ_0 el valor de la temperatura es siempre mayor que el de la figura 4.1; sin embargo, la influencia de este parámetro en los perfiles de temperatura es bastante débil.

A continuación, en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 en donde los valores de γ_0 corres-

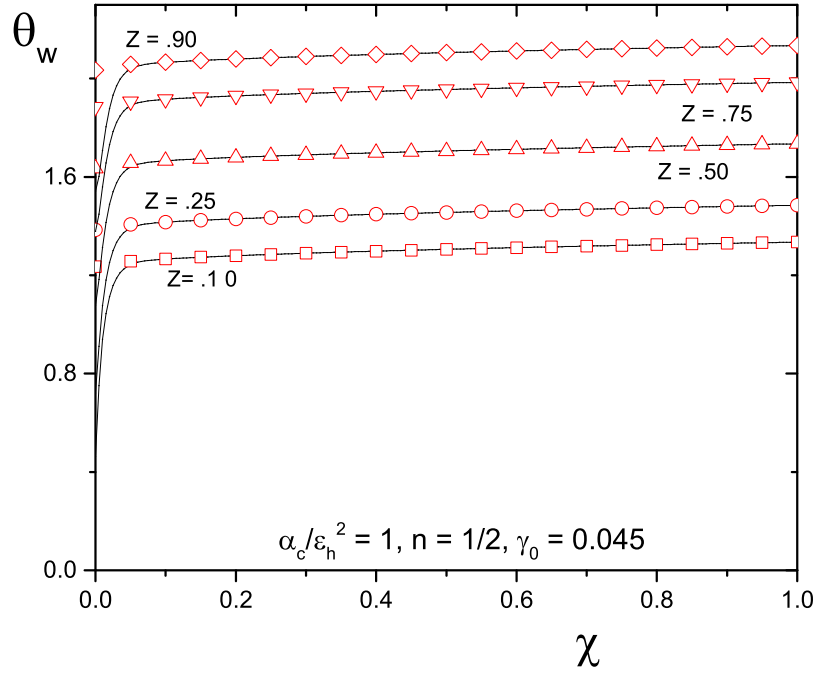


Figura 4.7: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $Z = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

ponden a 0, 0.0225 y 0.045 respectivamente, se presentan también gráficas de θ en función de χ para diferentes valores de η . En estas tres figuras, disminuimos el valor del parámetro conjugado a $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 1$, manteniendo $n = \frac{1}{2}$. Comparando las figuras 4.1 y 4.4 ($\gamma_0 = 0$), 4.2 y 4.5 ($\gamma_0 = 0.0225$) y también 4.3 y 4.6 ($\gamma_0 = 0.045$) respectivamente, observamos que la disminución del parámetro conjugado provoca una ligera disminución en los perfiles de temperatura sin embargo, es muy claro que la influencia de los parámetros γ_0 y α_c/ϵ_h^2 no juegan un papel importante en las distribuciones de temperatura del fluido. Esto tiene que ver con las características que presentan los perfiles de temperatura en la pared inferior del microcanal.

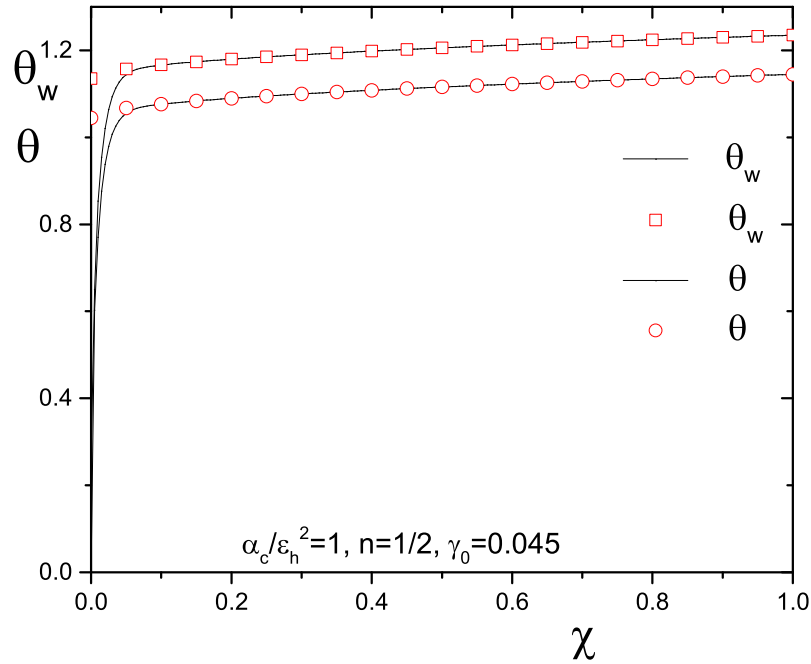


Figura 4.8: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal y del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para para $Z = \eta = 0$. Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

En la figura 4.7 mostramos los resultados numéricos y asintóticos para la temperatura de la pared θ_w como función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal Z . En esta gráfica se compara la solución numérica con la solución dada por la ecuación (3.10), manteniendo $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 1, \gamma_0 = 0.045$ y $n = \frac{1}{2}$.

Entonces, hasta ahora hemos visto que en general para el régimen térmicamente grueso $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$ la solución asintótica ofrece buenos resultados con respecto a la numérica; sin embargo, en ambas soluciones, los perfiles son casi independientes de la coordenada χ por lo tanto, en este límite obtenemos un régimen débil del efecto de transpiración térmica ya que éste es importante

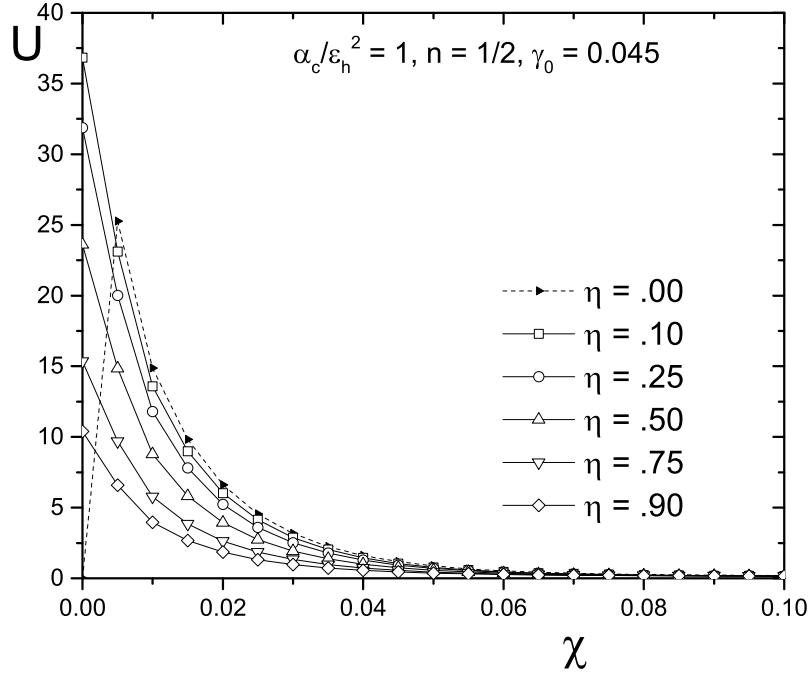


Figura 4.9: Solución numérica de los perfiles de velocidad longitudinal del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$.

solamente en regiones cerca de la entrada del microcanal como se demostrará más adelante.

En la figura 4.8, manteniendo $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 1$, $\gamma_0 = 0.045$ y $n = \frac{1}{2}$, se presenta a θ y θ_w como función de χ con la finalidad de mostrar la discontinuidad que existe entre la temperatura del fluido y la de la pared en $\eta = Z = 0$. Esta discontinuidad en la temperatura es una consecuencia directa de la condición de frontera (2.67) y como puede apreciarse, la temperatura de la pared θ_w siempre es mayor que la del fluido θ .

En las figuras 4.9 y 4.10, manteniendo $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 1$, $\gamma_0 = 0.045$ y $n = \frac{1}{2}$, se muestran respectivamente las componentes longitudinal y transversal del campo de velocidades en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores

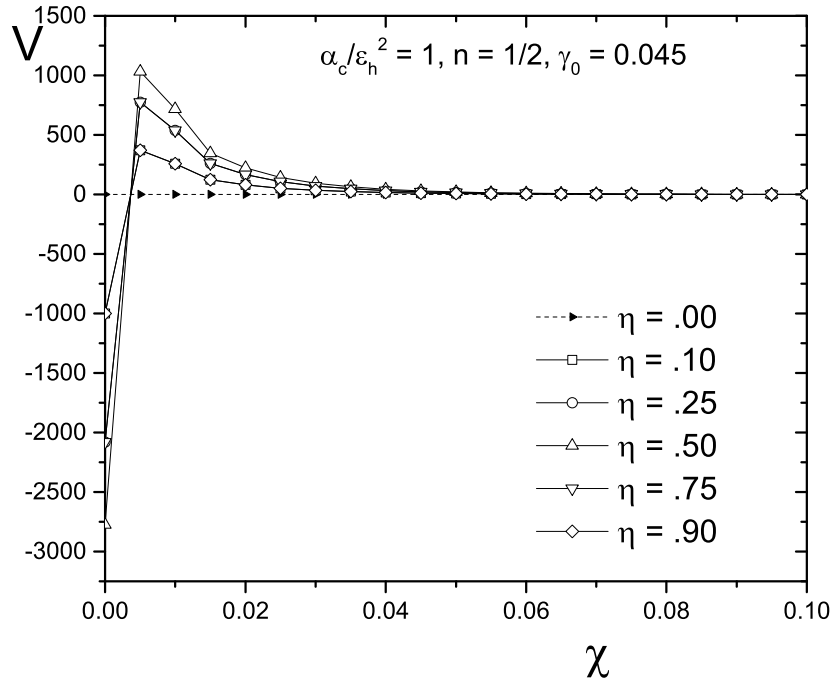


Figura 4.10: Solución numérica de los perfiles de velocidad transversal del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$.

de la coordenada transversal η . En ambas figuras, las predicciones numéricas para velocidades diferentes de cero corresponden a valores de la coordenada longitudinal de hasta $\chi = 0.1$. En este rango se presentan las variaciones de velocidad más pronunciadas en ambas componentes de la velocidad. Fuera de este dominio ($0 < \chi < 0.1$), ambas componentes de la velocidad tienden asintóticamente a cero debilitando el efecto de transpiración térmica lo que físicamente significa que el fluido se desacelera gradualmente debido a que los gradientes longitudinales de temperatura son muy pequeños a lo largo del microcanal.

En las figuras 4.11 y 4.12, manteniendo ahora $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 1$ y $\gamma_0 = 0.045$, se muestran respectivamente a θ y a θ_w como función de χ para diferentes valores de η . El objetivo principal de estas dos gráficas es mostrar la influencia del

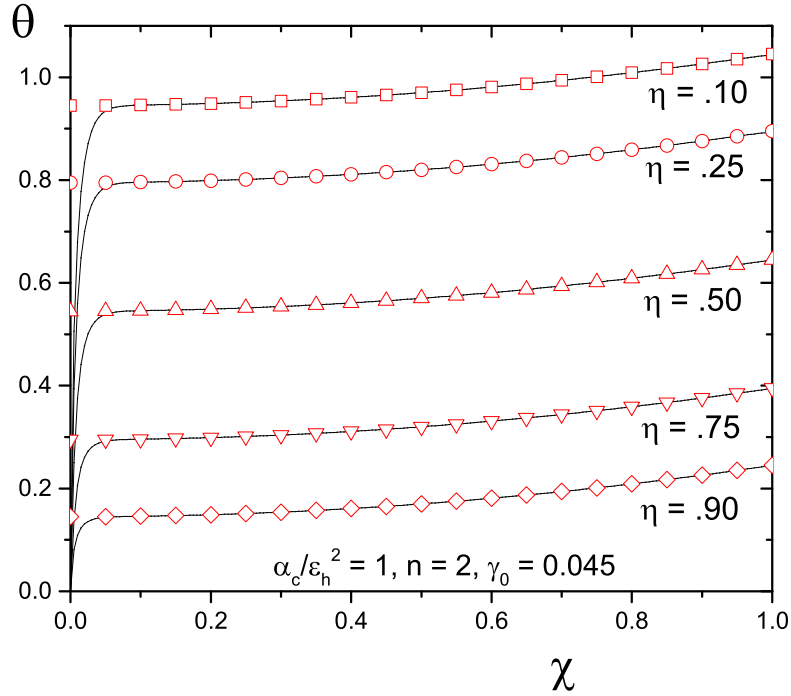


Figura 4.11: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1, n=2, \gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

exponente n en los perfiles de temperatura en el fluido y en la pared usando un valor de $n = 2$. Comparando la figura 4.6 con la 4.11 y también la figura 4.7 con la 4.12, podemos observar que la influencia de n es invertir la concavidad de las curvas que representan los perfiles de temperatura. En las figuras 4.6 y 4.7 las curvas son cóncavas mientras que en las figuras 4.11 y 4.12 las curvas son convexas. Por lo tanto este parámetro regula también la existencia de los gradientes longitudinales a lo largo del microcanal y del sumidero de calor.

En las figuras 4.13 y 4.14, con $\gamma_0 = 0.045$ y $n = 2$, reducimos el el valor del parámetro conjugado a $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 0.1$. En este caso la forma convexa de los perfiles de temperatura para el fluido se mantiene mientras que para la temperatura

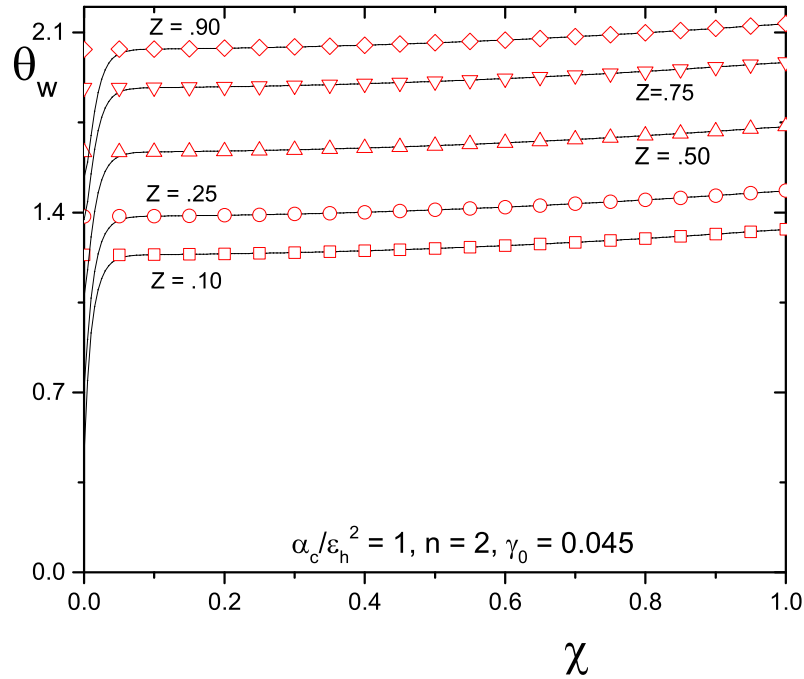


Figura 4.12: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $Z = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 1$, $n=2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

del sumidero de calor es prácticamente uniforme excepto en las regiones de entrada al microcanal. Los perfiles de temperatura de la pared inferior del microcanal, muestran una débil dependencia con la coordenada longitudinal χ . Una vez más podemos observar que el efecto de transpiración térmica está prácticamente ausente y por esta razón, a este comportamiento se le conoce como régimen difusivo débil, caso que representa muy bien el límite asintótico térmicamente grueso. Esta tendencia se repite si el parámetro conjugado se reduce aún más como lo confirman las figuras 4.15 y 4.16 ambas con $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h} = 0.05$, $\gamma_0 = 0.045$ y $n = \frac{1}{2}$.

Para finalizar esta sección, presentamos la figura 4.17 en la que se muestra

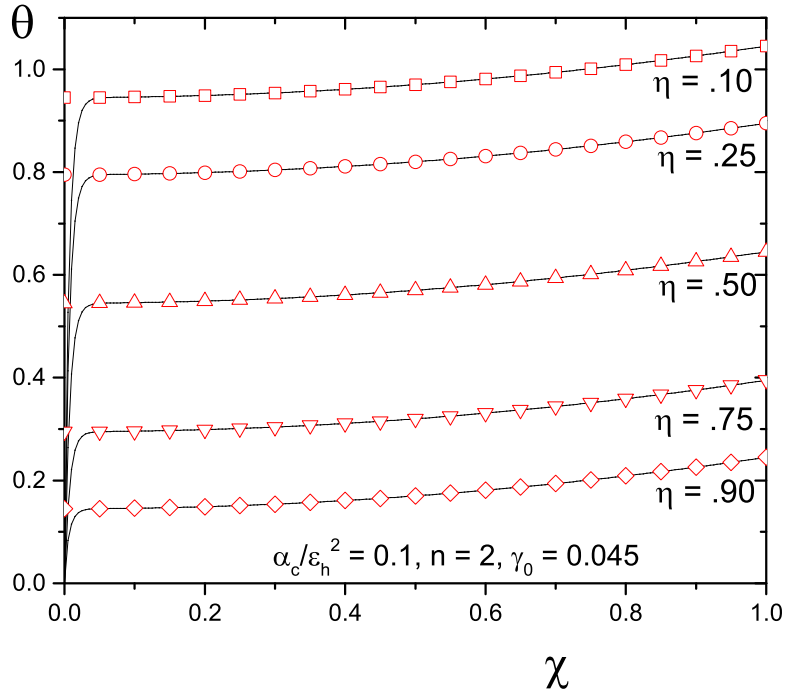


Figura 4.13: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 0.1$, $n=2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

nuevamente la discontinuidad de temperaturas en $\eta = Z = 0$ con $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 0.05$, $\gamma_0 = 0.045$ y $n = \frac{1}{2}$. Comparando las figuras 4.8 y 4.17 tenemos que la influencia del parámetro conjugado sobre los perfiles de temperaturas θ y θ_w es insignificante en el régimen térmicamente delgado.

4.2. Régimen Térmicamente Delgado

En esta sección comparamos la solución numérica con los modelos asintóticos de la sección 3.2, los cuales cooresponden a las soluciones teóricas para los perfiles de temperatura del sumidero de calor y del fluido dadas respectivamen-

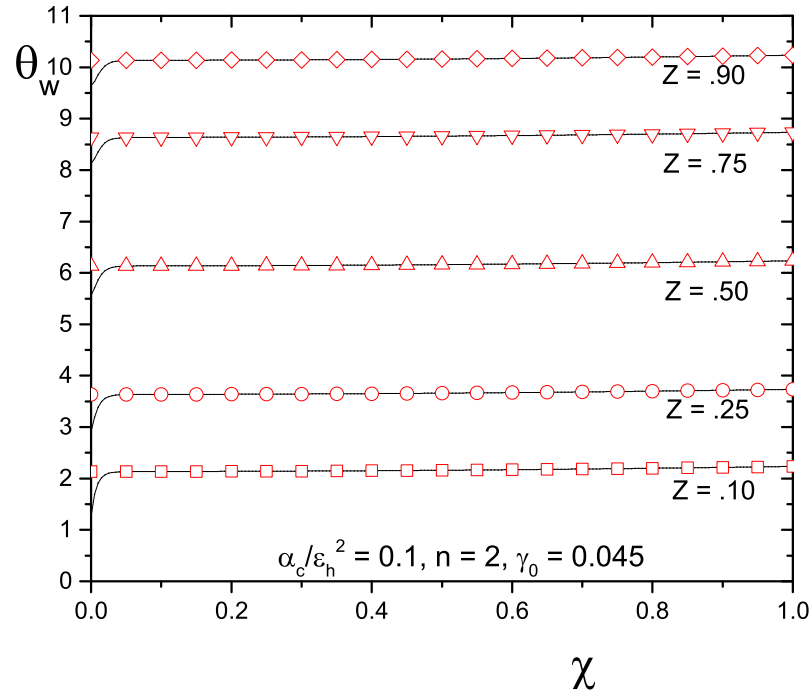


Figura 4.14: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $Z = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 0.1, n=2, \gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

te por las ecuaciones (3.30) y (3.31), así como también las correspondientes soluciones asintóticas para las componentes longitudinal y transversal del campo de velocidades dadas por las ecuaciones (3.32) y (3.33) respectivamente. Los valores del parámetro conjugado (α_c/ϵ_h^2) se ajustan a un rango de valores típicos que representan a este límite térmicamente delgado, con la finalidad de poder comparar el modelo numérico con el asintótico; es decir, consideramos que: ($\alpha_c \gg \epsilon_h^2$). A diferencia de la sección anterior el modelo teórico sí presenta perfiles de velocidad diferentes de cero debido a que en la pared inferior del microcanal se presentan grandes cambios de la temperatura en dirección longitudinal, por lo que en esta sección sí se mostrarán gráficas de velocidad

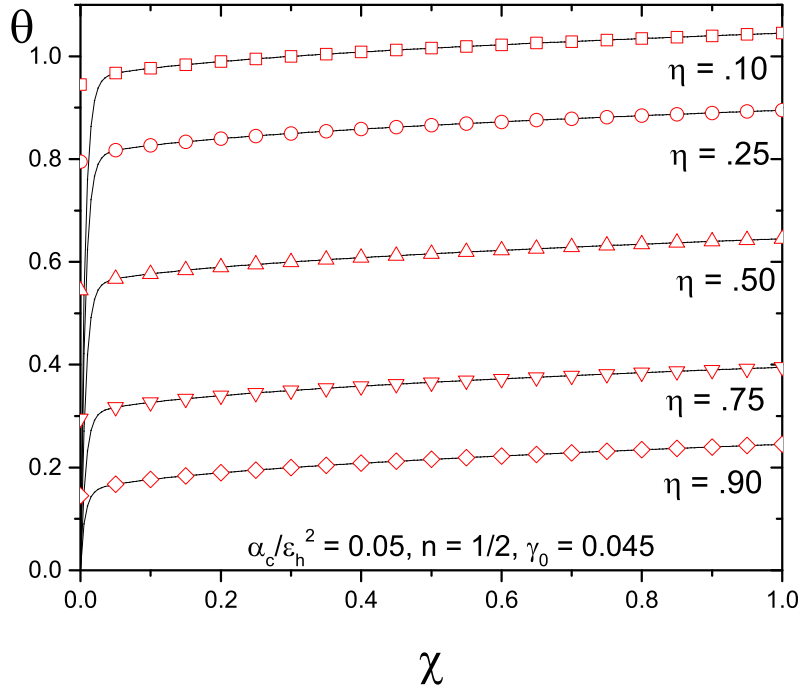


Figura 4.15: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 0.05$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

en las que se comparen los modelos asintóticos y numéricos.

Tal y como se hizo en la sección 4.1 para el régimen térmicamente grueso, en esta sección exploramos algunos valores del parámetro conjugado α_c/ϵ_h^2 pero que ahora sean representativos del régimen térmicamente delgado para poder comparar la solución numérica con los respectivos modelos asintóticos. Otro aspecto importante a considerar en estos resultados es que también se variaron los parámetros que aparecen en el perfil de temperaturas propuesto para la pared superior del microcanal dado por la ecuación (2.68), en donde el exponente n puede ser cualquier número real y los parámetros adimensionales $\hat{\gamma}_0$ y γ_0 están dados por la ecuación (2.42). Cabe señalar que en todas las

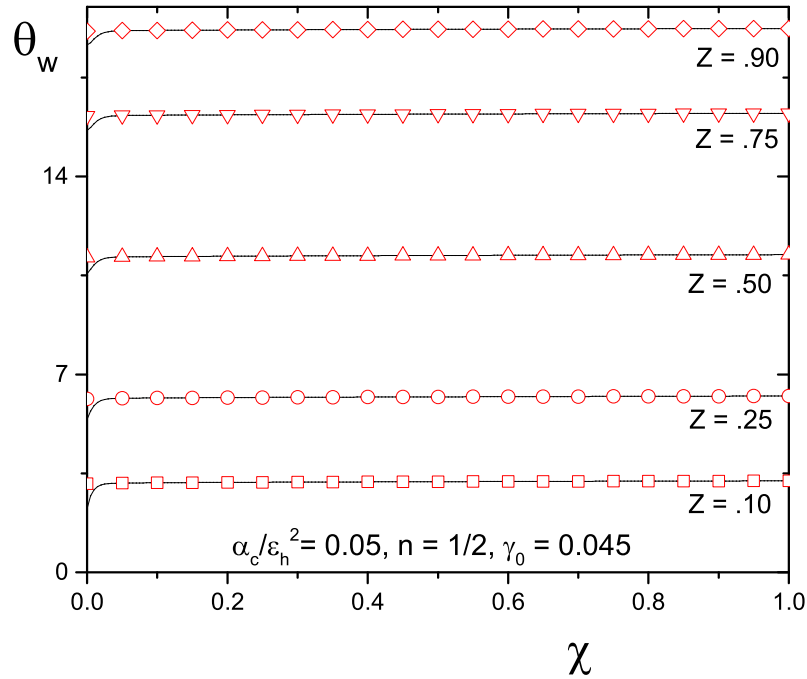


Figura 4.16: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $Z = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 0.05$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

gráficas de esta sección (figuras 4.18 - 4.32), se mantiene $\gamma_0 = 0.045$ ya que por lo visto en la sección anterior, la influencia de este parámetro en los perfiles de temperatura es casi insignificante. Además, queremos dejar en claro que para las figuras 4.18 - 4.27, consideramos $\hat{\gamma}_0 = 0.1$ mientras que para las figuras 4.28 - 4.32, con la finalidad de explorar la influencia de $\hat{\gamma}_0$ en los perfiles de temperatura y de velocidad, cambiamos el valor de este parámetro a $\hat{\gamma}_0 = 0.01$. Esto se comentará más adelante.

En la figura 4.18 mostramos la comparación entre la solución numérica y el modelo asintótico dado por la ecuación (3.31) en la que se muestra a la temperatura del fluido θ como función de la coordenada longitudinal χ para

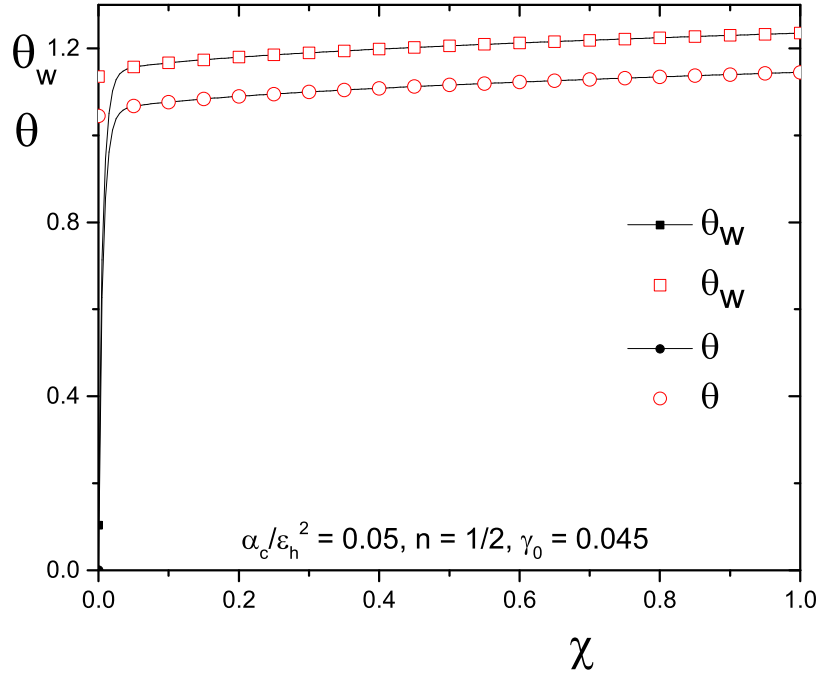


Figura 4.17: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal y del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para para $Z = \eta = 0$. Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 0.05$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones asintóticas y las líneas negras las soluciones numéricas.

diferentes valores de la coordenada transversal η . En esta gráfica los valores de los parámetros involucrados son: $\frac{\alpha_c}{\epsilon^2} = 50$, $n = \frac{1}{2}$ y $\gamma_0 = 0.045$. Podemos observar que para un valor fijo de χ la temperatura siempre disminuye al incrementar la coordenada transversal, esto es consecuencia del calor que se transfiere al fluido desde la pared inferior del microcanal. De manera similar a lo mostrado en el régimen térmicamente grueso (sección 4.1), fuera de las regiones de entrada las soluciones asintóticas presentan una muy buena aproximación con respecto al modelo numérico; sin embargo, en las gráficas que se presentan en esta sección siempre habrá una diferencia entre las soluciones numérica y asintótica en las regiones de entrada al microcanal. Esto se debe, como ya se

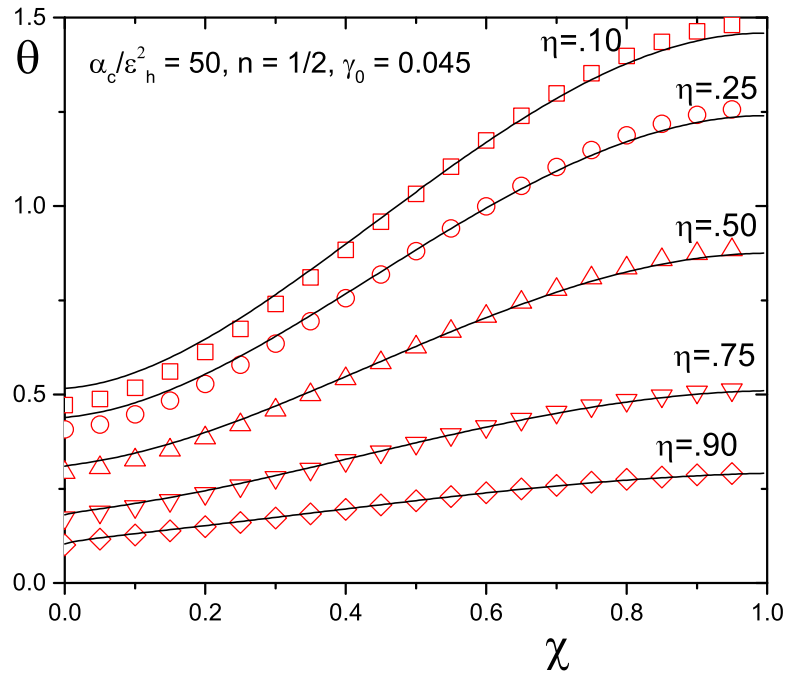


Figura 4.18: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

explicó en la sección anterior, a que despreciamos los términos convectivos en la ecuación de la energía por lo tanto, el modelo asintótico no puede satisfacer la condición de frontera ($\theta = 0$) a la entrada del microcanal, condición que sí satisface nuestro modelo numérico.

En la figura 4.19, manteniendo $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 50$, $n = \frac{1}{2}$ y $\gamma_0 = 0.045$, se muestra a la temperatura de la pared inferior del microcanal θ_w como función de la coordenada transversal χ para diferentes valores de la coordenada transversal Z . En esta gráfica se compara la solución numérica con la ecuación (3.30). Podemos observar que la dependencia del modelo numérico con la coordenada Z es casi imperceptible, lo que nos permite apreciar que en este régimen térmicamente

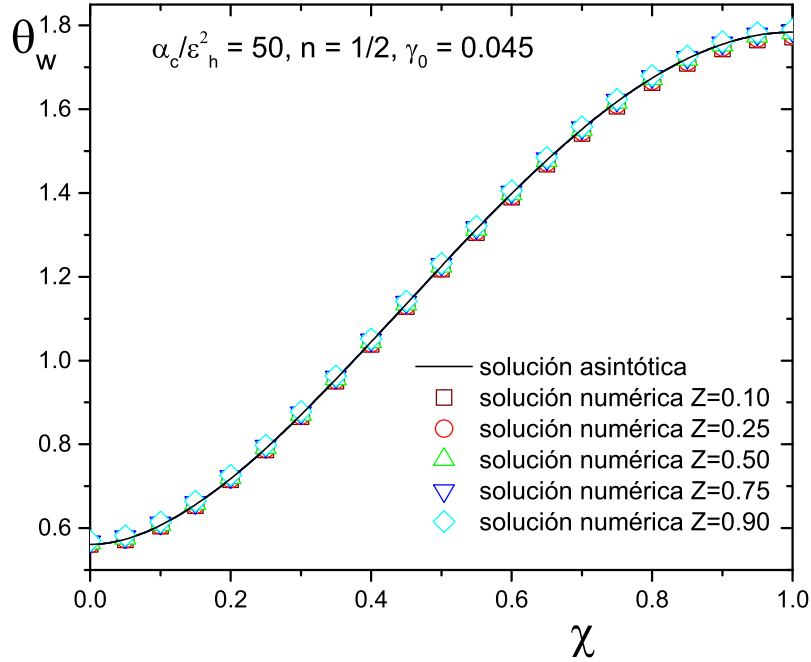


Figura 4.19: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $Z = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

delgado los perfiles de temperatura en el sumidero de calor no dependen de la coordenada transversal tal como lo predice el modelo asintótico. Sin embargo, los valores de temperatura se incrementan a lo largo del microcanal debido al efecto acumulativo de calentamiento conforme se va incrementando la coordenada longitudinal. Por otro lado, en la figura 4.20, manteniendo $\frac{\alpha_c}{\epsilon} = 50$, $n = \frac{1}{2}$ y $\gamma_0 = 0.045$, se presentan a θ y θ_w como funciones de χ . El objetivo de esta gráfica es mostrar una vez más la discontinuidad de las temperaturas en $\eta = Z = 0$, consecuencia de la condición de frontera dada por la ecuación (2.67).

En las figuras 4.21 y 4.22 se muestran respectivamente, las componentes

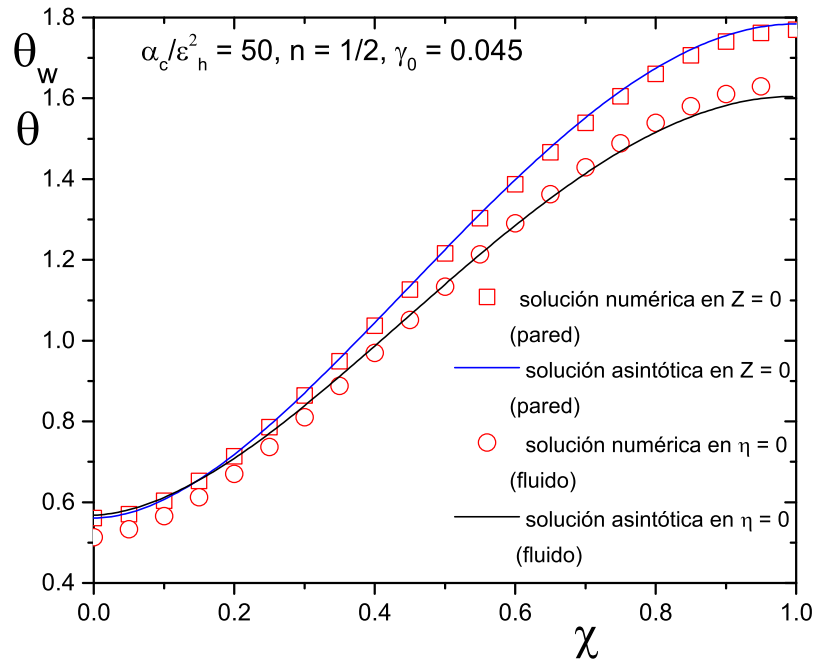


Figura 4.20: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal y del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para para $Z = \eta = 0$. Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

longitudinal y transversal de la velocidad como funciones de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal η , para $\frac{\alpha_c}{\epsilon^2} = 50$, $n = \frac{1}{2}$ y $\gamma_0 = 0.045$. En la figura 4.21 se compara la solución numérica con la ecuación (3.32), en la que se puede apreciar que la máxima velocidad ocurre justo en la pared inferior del microcanal ($\eta = 0$), lo cual era de esperarse ya que el efecto de transpiración térmica se origina debido a los gradientes de temperatura en esa pared. Otro resultado importante que se deriva de esta gráfica es que los perfiles de velocidad se incrementan hasta donde la coordenada longitudinal presenta un valor de $\chi = 0.5$ y después de este valor crítico, la velocidad longitudinal siempre vuelve a decaer. Según se observa en

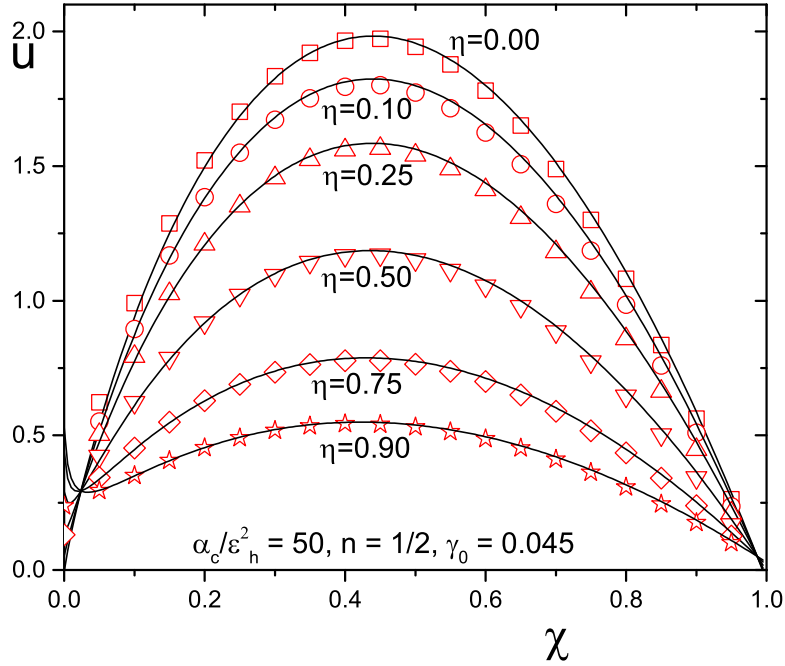


Figura 4.21: Soluciones numéricas y asintóticas de la velocidad longitudinal adimensional del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

la gráfica, esta tendencia es independiente de la coordenada transversal. Este comportamiento se debe directamente al perfil de temperaturas en el sumidero de calor que se muestra en la figura 4.20, ya que la gráfica de la temperatura θ_w presenta un punto de inflexión en aproximadamente $\chi = 0.5$ es decir, analizando en conjunto a las figuras 4.20 y 4.21, podemos observar que los cambios más pronunciados en la velocidad se presentan en las regiones del microcanal en donde existen los mayores gradientes de temperatura en esta pared. Esto ocurre en $\chi = 0.5$ o muy cerca de este valor. Por otro lado, en la figura 4.22 se compara la solución numérica con la solución asintótica para la velocidad transversal dada por la ecuación (3.33). En esta gráfica se observa que los va-

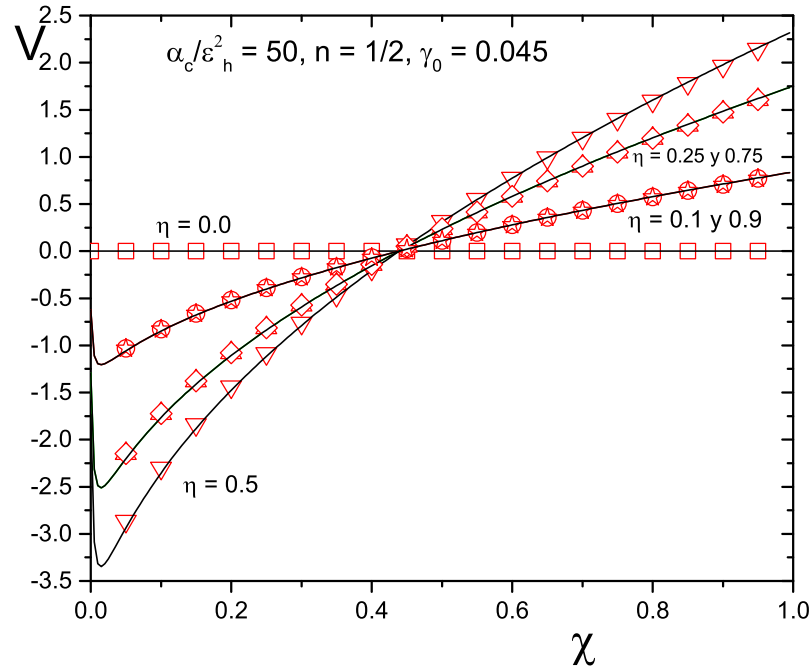


Figura 4.22: Soluciones numéricas y asintóticas de la velocidad transversal adimensional del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

lores de V son siempre negativos para $\chi \leq 0.5$. Después de este valor crítico, la velocidad transversal siempre es positiva excepto en $\eta = 0$ en donde debe satisfacerse siempre la condición de no permeabilidad. Como consecuencia de haber despreciado los términos inerciales en la ecuación de cantidad de movimiento en χ dada por (2.48), los perfiles de velocidad propuestos en función de la temperatura utilizando las ecuaciones (2.73) y (2.76), no pueden satisfacer las condiciones de frontera para la velocidad que sí satisface el modelo numérico; por lo tanto, en cuanto a las gráficas de velocidades se refiere las soluciones numéricas y asintóticas presentan diferencias tanto a la entrada como a la salida del microcanal.

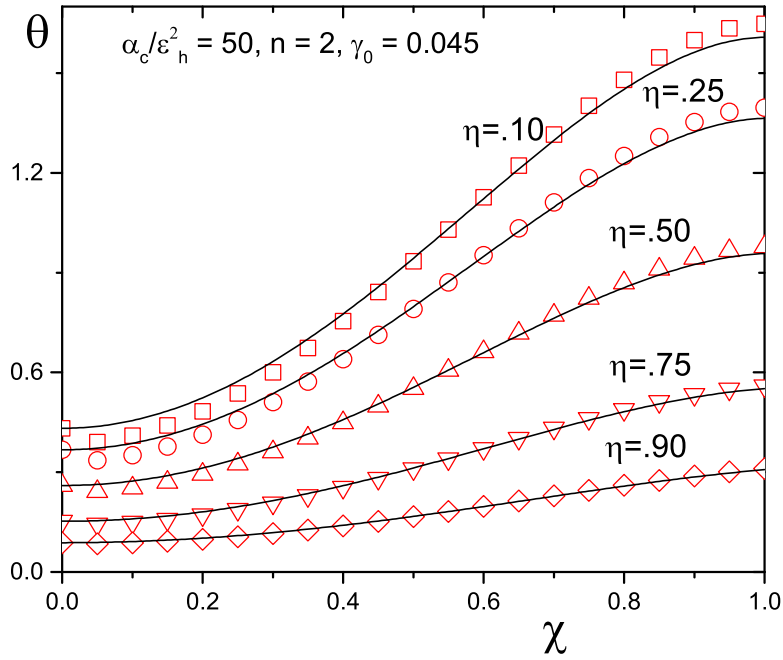


Figura 4.23: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

En el conjunto de figuras 4.23 - 4.27, exploramos la influencia del parámetro n manteniendo $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 50$ y $\gamma_0 = 0.045$ y considerando que $n = 2$. En la figura 4.23 se muestra a θ como función de χ para diferentes valores de η ; comparando esta gráfica con la de la figura 4.18, observamos que tenemos valores ligeramente mayores de temperatura en el fluido, por lo que podemos decir que este parámetro n presenta un efecto de aislamiento térmico ya que al aumentar la n los perfiles de temperatura aumentan su valor. Resultados similares se obtienen al comparar las figuras 4.19 y 4.24 en las cuales se muestra a θ como función de χ para diferentes valores de η . Al analizar en conjunto a estas dos figuras, se puede confirmar que el parámetro n provoca también un efecto

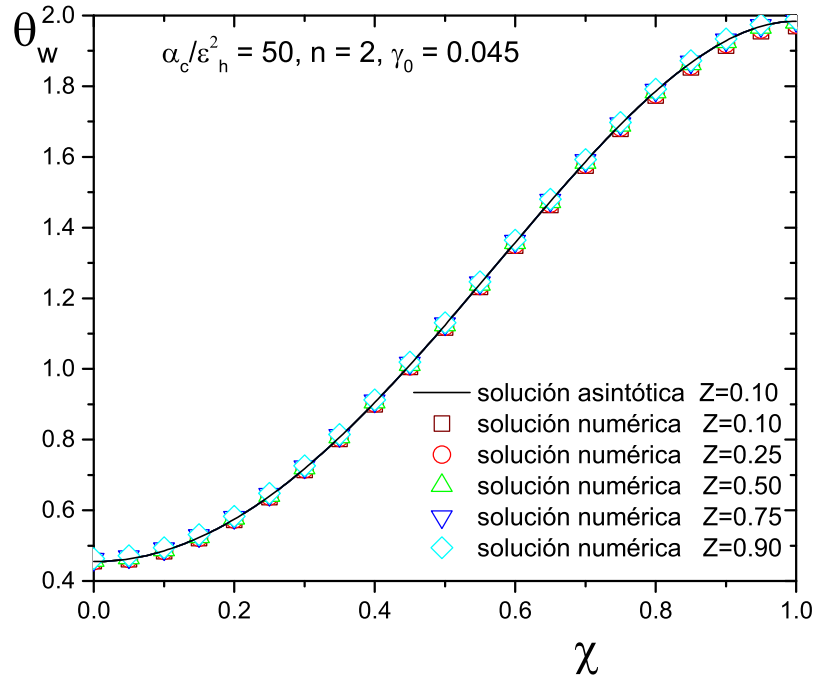


Figura 4.24: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $Z = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

de aislamiento térmico. Además, al igual que ocurre en la figura 4.19, la gráfica de la figura 4.24 muestra una débil dependencia de θ_w con la coordenada transversal Z , tal y como lo predice la solución asintótica. El parámetro n se comporta de manera similar si ahora comparamos las gráficas de las figuras 4.20 y 4.25, las cuales muestran a θ y θ_w como funciones de χ en $\eta = Z = 0$. Estas dos gráficas muestran la discontinuidad entre la temperatura del fluido y la de la pared inferior del microcanal, que como ya se dijo anteriormente, esto es consecuencia de la condición de frontera (2.67).

Las figuras 4.26 y 4.27 muestran respectivamente, las componentes longitudinal y transversal del campo de velocidades en función de χ para diferentes

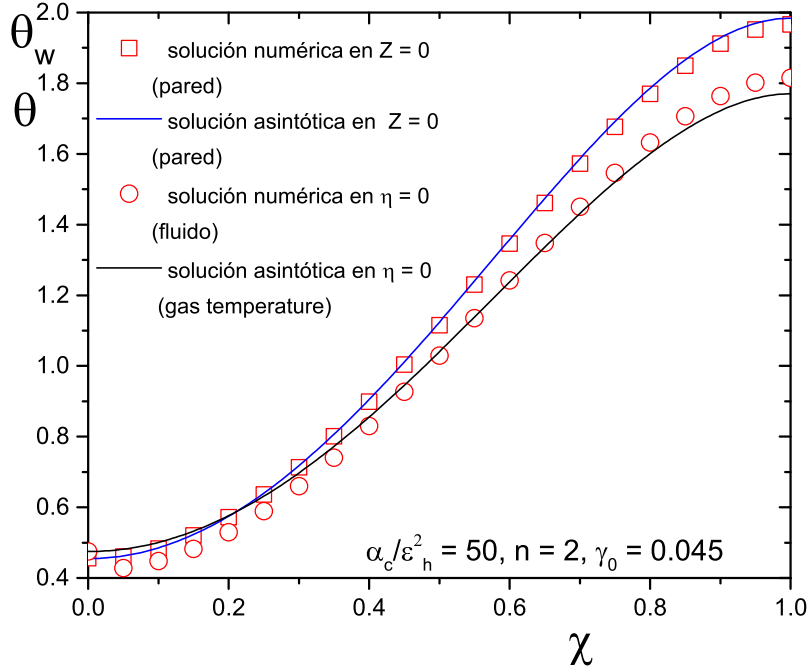


Figura 4.25: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal y del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para para $Z = \eta = 0$. Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

valores de η . Para analizar la influencia del parámetro n en los perfiles de velocidad, comparamos la gráfica de la figura 4.21 con la de la figura 4.26, con lo cual podemos observar que la única diferencia es que las velocidades máximas ocurren en $\chi = 0.6$. Este comportamiento se debe a la forma de la gráfica de la figura 4.25 sin embargo, el análisis de las figuras 4.25 y 4.26 es similar al que se hizo para las figuras 4.20 y 4.21, por lo que no se discutirá nuevamente. En las mismas condiciones que la figura 4.26 se presenta la figura 4.27, en la que se puede ver que para valores de $\chi \leq 0.6$ las velocidades son negativas pero para $\chi > 0.6$ las velocidades transversales siempre son positivas excepto en $\eta = 0$ porque es en donde debe satisfacerse la condición de no permeabilidad.

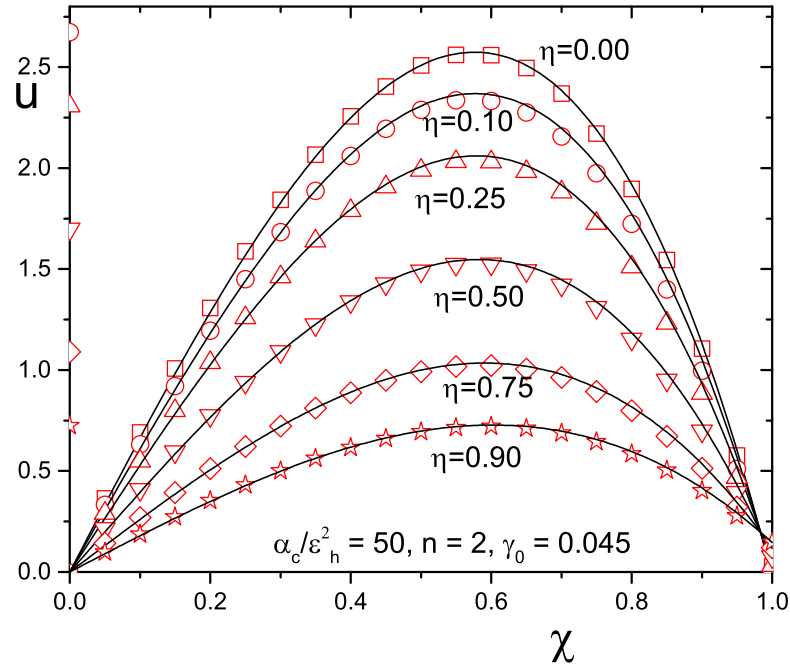


Figura 4.26: Soluciones numéricas y asintóticas de la velocidad longitudinal adimensional del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

En el último conjunto de figuras (4.28 - 4.32), mostramos la influencia del parámetro $\hat{\gamma}_0$ en los perfiles de temperatura tanto del fluido como del sumidero de calor así como también en los perfiles de cada una de las componentes del campo de velocidades. En este conjunto de figuras este parámetro reduce su valor a $\hat{\gamma}_0 = 0.01$. La razón principal es que en un principio se pretendía reducir el parámetro conjugado hasta un valor de $\frac{\alpha_c}{\epsilon^2} = 20$ sin modificar a ninguno de los otros parámetros; es decir, manteniendo $\gamma_0 = 0.045$ y $n = 2$, considerando que $\hat{\gamma}_0 = 0.1$; sin embargo, al hacer esto, los perfiles de θ y θ_w muestran valores negativos a la entrada del microcanal. Estos resultados se obtuvieron en los primeros ensayos numéricos que se hicieron pero no se muestran aquí porque

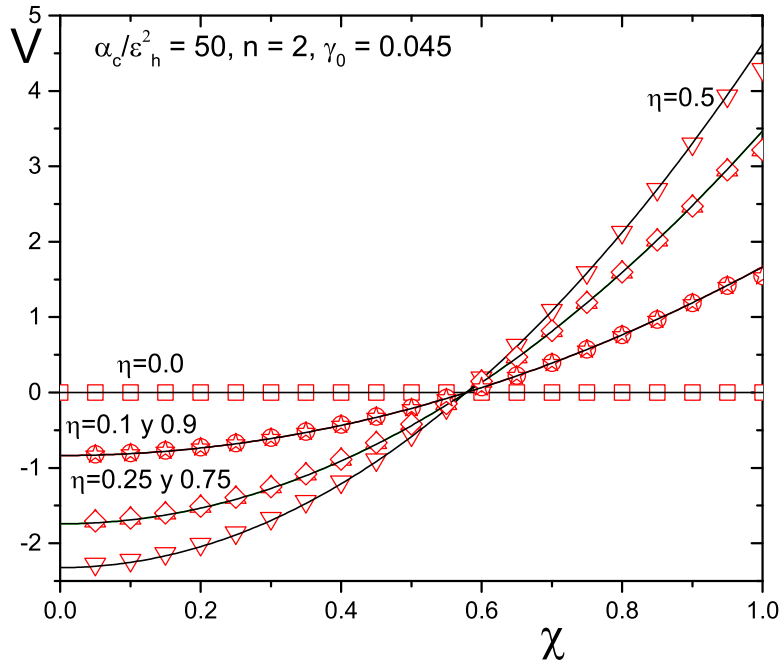


Figura 4.27: Soluciones numéricas y asintóticas de la velocidad transversal adimensional del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 50$, $n=2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

contradican las bases del modelo físico que se desarrolló en este trabajo teniendo en cuenta que si la pared inferior del microcanal se calienta uniformemente, los dos dominios tanto el de la pared como el del fluido sólo pueden admitir valores positivos de temperatura porque de lo contrario tendríamos efectos de enfriamiento. Recordando que $\hat{\gamma}_0$ es un parámetro arbitrario que se eligió para proponer el perfil de temperaturas en la pared superior del microcanal dado por la ecuación (2.68), se hicieron varios ensayos numéricos modificando este parámetro y al final se encontró que el valor de $\hat{\gamma}_0 = 0.01$ es suficiente para contrarrestar esta situación. De esta manera las temperaturas del fluido y del sumidero de calor presentan siempre valores positivos. Finalmente es perti-

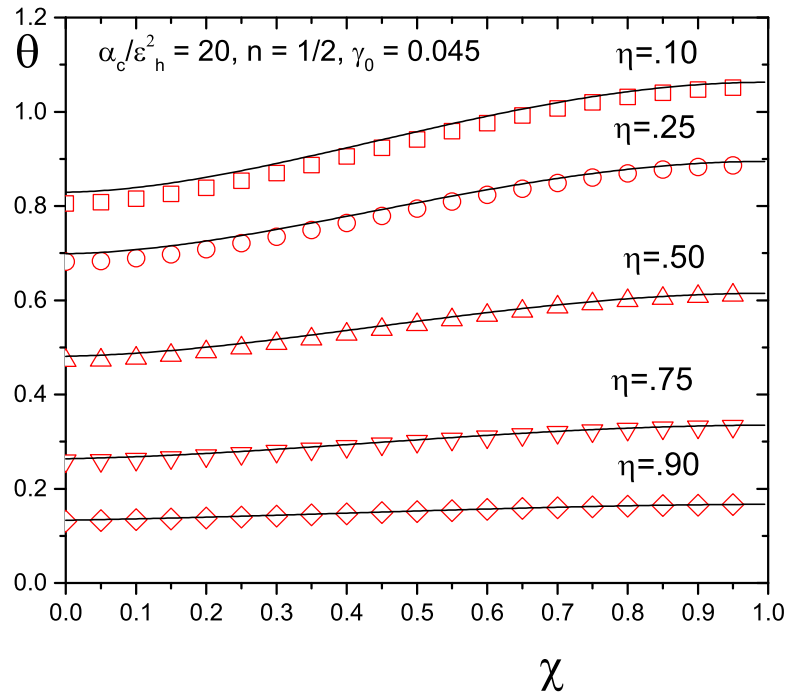


Figura 4.28: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional para el fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 20$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

mente mencionar que el conjunto de figuras 4.28 - 4.32 muestra características similares a las de las figuras 4.18 - 4.23, por lo que consideramos que no es necesaria una discusión adicional.

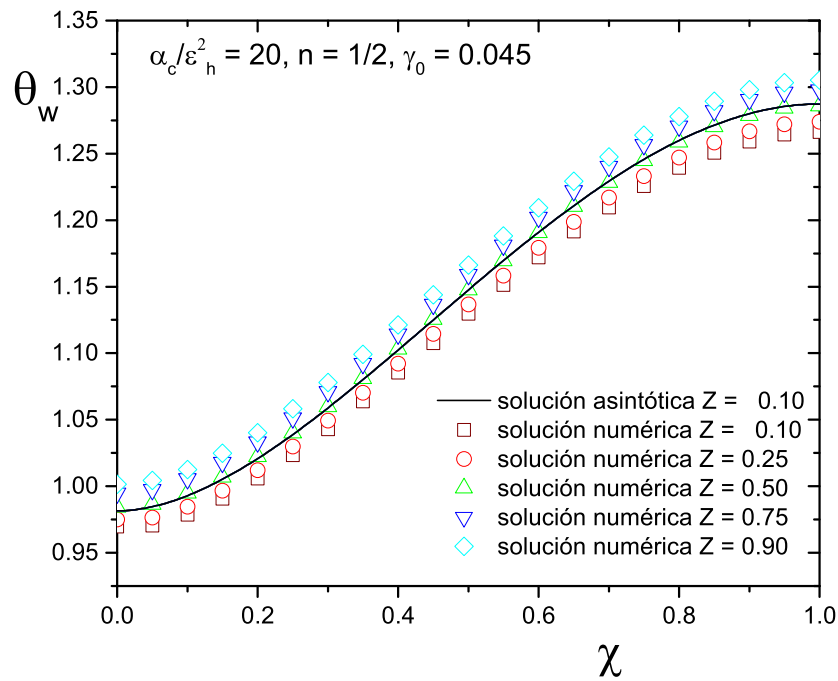


Figura 4.29: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $Z = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 20, n=1/2, \gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

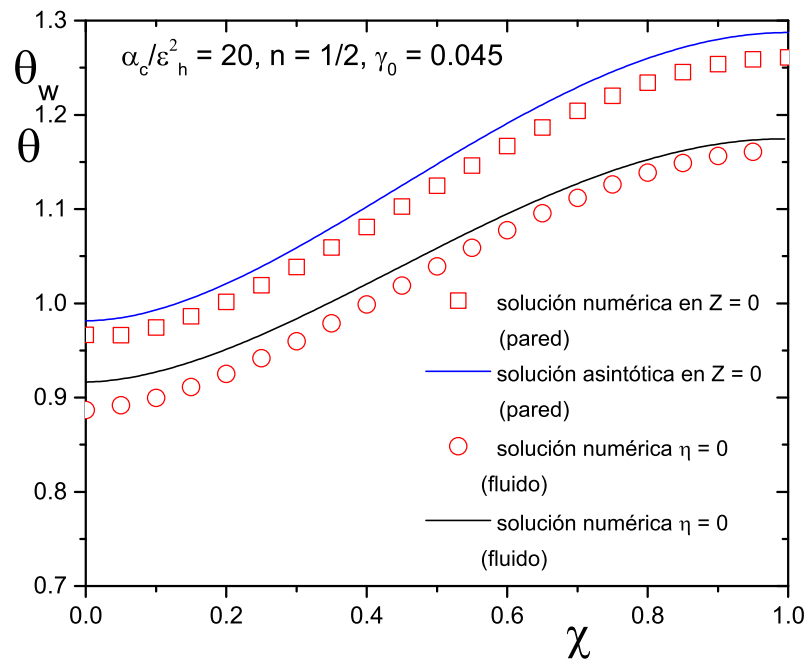


Figura 4.30: Soluciones numéricas y asintóticas de los perfiles de temperatura adimensional de la pared inferior del microcanal y del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para para $Z = \eta = 0$. Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 20$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

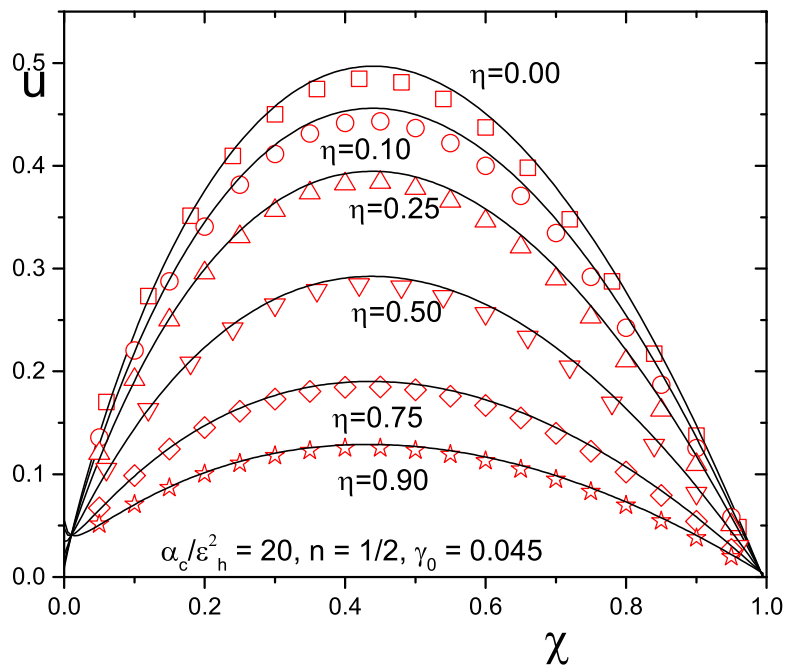


Figura 4.31: Soluciones numéricas y asintóticas de la velocidad longitudinal adimensional del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 20$, $n = 1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

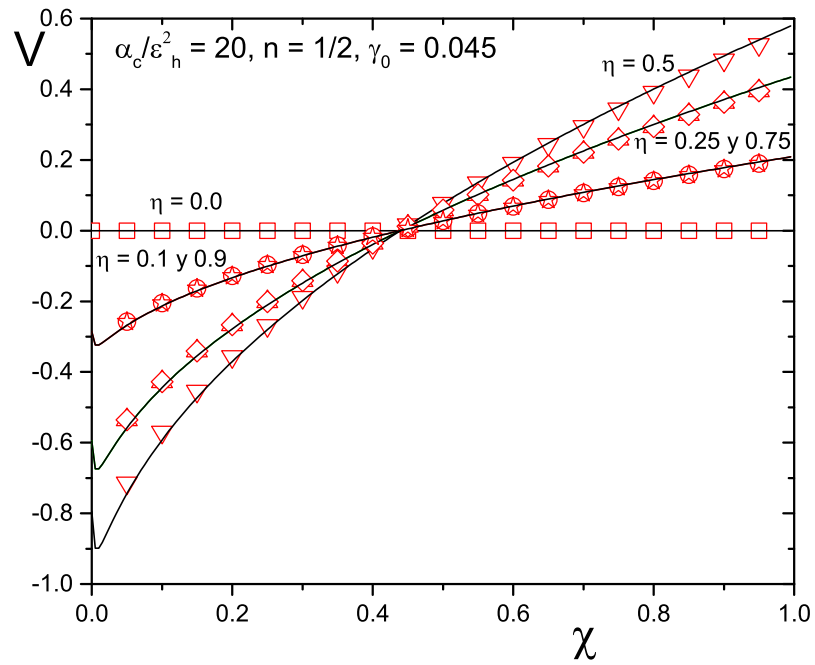


Figura 4.32: Soluciones numéricas y asintóticas de la velocidad transversal adimensional del fluido en función de la coordenada longitudinal χ para diferentes valores de la coordenada transversal $\eta = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son $\alpha_c/\epsilon_h^2 = 20$, $n=1/2$, $\gamma_0 = 0.045$. En esta gráfica, los símbolos rojos representan las soluciones numéricas y las líneas negras las soluciones asintóticas.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo de tesis se desarrolló un análisis numérico y asintótico para describir el problema conjugado entre el flujo de un gas que circula en un microcanal y la pared inferior de este microcanal que funciona como sumidero de calor al cual, se le aplica externamente un flujo uniforme de calor. Se aplicó el análisis de orden de magnitud para definir los parámetros adimensionales adecuados que nos permitieran deducir el sistema de ecuaciones de conservación que pudieran formular asintóticamente este problema conjugado el cual se origina por la presencia del efecto de transpiración térmica. Particularmente identificamos dos límites asintóticos que caracterizan esta formulación conjugada. El primero de ellos cooresponde al límite asintótico válido para α_c/ϵ_h^2 de orden unidad o menor que la unidad, en el cual las variaciones de temperatura tanto del gas como de la pared son muy pequeñas. Este primer límite se conoce como térmicamente grueso porque en este caso, las variaciones transversales de temperatura son bastante más importantes que las longitudinales.

El otro límite asintótico relevante es aquel que es válido para α_c/ϵ_h^2 más grande que la unidad para el cual, se presentan fuertes variaciones longitudinales de temperatura en la pared inferior del microcanal. Este segundo límite asintótico se conoce como térmicamente delgado porque en este caso, las variaciones transversales de temperatura en el sumidero de calor son despreciables o muy pequeñas comparadas con las longitudinales. En ambos regímenes, podemos observar que nuestro modelo se aproxima bastante bien a la solución numérica incluso si aumentamos el valor del parámetro conjugado a $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 10$ en el caso del régimen térmicamente grueso en el cual, para valores menores de este valor crítico la concordancia entre ambas soluciones es aún mejor.

Un aspecto muy importante de este análisis en general, es que las ecuaciones de momentum se reducen a una forma muy simple la cual se asemeja a un flujo de Couette. Sin embargo, en nuestro caso, el movimiento del fluido es ocasionado por un gradiente desconocido de temperatura en la pared inferior del microcanal. La velocidad y los perfiles de temperatura dependen de dos parámetros adimensionales: α_c/ϵ_h^2 que marca la importancia del problema conjugado y el exponente n que aparece en el perfil de temperaturas propuesto en la pared superior del microcanal. Ambos parámetros juegan un papel importante en las variaciones de temperatura tanto del gas como del sumidero de calor. Además, para valores fijos del parámetro γ_0 el cual representa la relación entre las pérdidas de calor y el calor suministrado, los resultados teóricos y numéricos muestran que la temperatura es muy sensible a lo que ocurra en el sumidero de calor. Sin embargo, también hay que dejar en claro que el exponente n modifica la forma de las distribuciones de temperatura en el microcanal en el caso térmicamente grueso y altera la magnitud de los perfiles de temperatura para el térmicamente delgado.

Bibliografía

- [1] P. Wu and W. A. Little. Measurement of heat transfer characteristics of the gas flow in fine channel heat exchangers used for micro-miniature joule–thomson refrigerators. *Cryogenics*, 24:415–423, 1984.
- [2] D. B. Tuckerman. Heat transfer micro-structures for integrated circuits. *Lawrence Livermore National Laboratory, USA*, page 53515, 1984.
- [3] S. S. Hsieh, H. H. Tsai, C. Y. Lin, C. F. Huang, and C. M. Chien. Gas flow in a long micro-channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:3877–3887, 2004.
- [4] A. Beskok and G. E. Karniadakis. Simulation of heat and momentum transfer in complex micro-geometries. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 8:647–655, 1994.
- [5] O. Reynolds. On certain dimensional properties of matter in the gaseous state. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 170:727–845, 1879.
- [6] G. E. Karniadakis, A. Beskok, and N. Aluru. *Microflows and Nanoflows*. Springer, 2005.
- [7] D. A. Lockerby, J. M. Reese, D. R. Emerson, and R. W. Barber. Velocity boundary condition at solid walls in rarefied gas calculations. *Physical Review E*, 70:017303–1, 017303–4, 2004.
- [8] V.I. Roldughin. Non-equilibrium thermodynamics of boundary conditions for rarefied gases and related phenomenol. *Advances in Colloid and Interface Science*, 65:1–35, 1996.
- [9] Mikhail N. Kogan. *Rarefied Gas Dynamics*. Plenum Press, 1969.

- [10] E. B. Arkilic, M. A. Schmidt, and K. S. Breuer. Gaseous slip flow in long microchannels. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 6:167–178, 1997.
- [11] N. G. Hadjiconstantinou and O. Simek. Constant-wall-temperature nusselt number in micro and nano-channels. *Journal of Heat Transfer*, 124:356–364, 2002.
- [12] X. Zhu, Q. Liao, and M. D. Xin. Gas flow in microchannel of arbitrary shape in slip flow regime. *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*, 10:41–54, 2006.
- [13] S. Hossainpour and M. Hakak Khadem. Investigation of fluid flow and heat transfer characteristics of gases in microchannels with consideration of different roughness shapes at slip flow regime. *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*, 14:137–151, 2010.
- [14] J. van Rij, T. Harman, and T. Ameel. The effect of creep flow on two-dimensional isoflux microchannels. *International Journal of Thermal Sciences*, 46:1095–1103, 2007.
- [15] J. G. Méolans and I. A. Graur. Continuum analytical modelling of thermal creep. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 27:785–809, 2008.
- [16] Yen-Lin Han. Working gas temperature and pressure changes for microscale thermal creep-driven flow caused by discontinuous wall temperatures. *Fluid Dynamics Research*, 42:045505, 2010.
- [17] A. Q. Zade, M. Renksizbulut, and J. Friedman. Heat transfer characteristics of developing gaseous slip-flow in rectangular microchannels with variable physical properties. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 32:117–127, 2011.
- [18] S. Colin. Gas microflows in the slip flow regime: a critical review on convective heat transfer. *Journal of Heat Transfer*, 134:020908–1–020908–13, 2012.
- [19] B. Cetin. Effect of thermal creep on heat transfer for a two-dimensional microchannel flow: an analytical approach. *Journal of Heat Transfer*, 135:101007–1–101007–8, 2013.

- [20] A. Amiri-Jaghargh and H. Niazmand. Entrance effects of thermal creep on fluid heating in rectangular microchannels. *International Journal of Modern Physics C*, 24:1350054–1–1350054–21, 2013.
- [21] B. Rahimi and H. Niazmand. Effects of high-order slip/jump, thermal creep, and variable thermophysical properties on natural convection in microchannels with constant wall heat fluxes. *Heat Transfer Engineering*, 35:1528–1538, 2014.
- [22] B. Cetin and S. Zeinali. Analysis of heat transfer and entropy generation for a low-peclet-number microtube flow using a second-order slip model: an extended-graetz problem. *Journal of Engineering Mathematics*, 89:13–25, 2014.
- [23] H. M. Kushwaha and S. K. Sahu. Analysis of gaseous flow in a micropipe with second order velocity slip and temperature jump boundary conditions. *Heat and Mass Transfer*, 50:1649–1659, 2014.
- [24] Z. Duan and B. He. Extended reynolds analogy for slip and transition flow heat transfer in microchannels and nanochannels. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 56:25–30, 2014.
- [25] I. Hassan, P. Phutthavong, and M. Abdelgawad. Microchannel heat sinks: an overview of the state-of-the-art. *Microscale Thermophysical Engineering*, 8:183–205, 2004.
- [26] K. K. Ambatipudi and M. M. Rahman. Analysis of conjugate heat transfer in microchannel heat sinks. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 37:711–731, 2000.
- [27] G. Hetsroni, A. Mosyak, E. Pogrebnyak, and L. P. Yarin. Heat transfer in micro-channels: comparison of experiments with theory and numerical results. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pages 5580–5601.
- [28] A. Kosar. Effect of substrate thickness and material on heat transfer in microchannel heat sinks. *International Journal of Thermal Sciences*, 49:635–642, 2010.

- [29] J. P. Escandon, O. Bautista, F. Mendez, and E. Bautista. Theoretical conjugate heat transfer analysis in a parallel flat plate microchannel under electro-osmotic and pressure forces with a phan-thien-tanner fluid. *International Journal of Thermal Sciences*, 50:1022–1030, 2011.
- [30] G. Croce, O. Rovenskaya, and P. D’Ágaro. Computational analysis of conjugate heat transfer in gaseous microchannels. *Journal of Heat Transfer*, 137:041701–1–041701–7, 2015.
- [31] F. Hecht. *FreeFem++*. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, third, version 3.26 edition, 2015. Web site: <http://www.freefem.org/ff++>.