



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis numérico en el  
estudio de la ósmosis inversa  
mediante FreeFem++**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

Emiliano Víctor Manuel Solares Córdova

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Edgar Ali Ramos Gómez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado ANALISIS NUMERICO EN EL ESTUDIO DE LA OSMOSIS INVERSA MEDIANTE FREEFEM++ que presenté para obtener el título de INGENIERO MECÁNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

---

**EMILIANO VICTOR MANUEL SOLARES CORDOVA**  
Número de cuenta: 313155394



## AGRADECIMIENTOS

Estos párrafos son los últimos que escribo de este trabajo que ha sido un verdadero reto, no únicamente por la complejidad del tema sino por el tiempo, energía y demás recursos que consume, de no haber sido por la guía y la paciencia del Dr. Alí simplemente no hubiese sido posible redactarlo.

Por otra parte, me siento muy contento de culminar con esta etapa ya que no se trata únicamente de un trabajo de grado, sino de una carrera maratónica en la que muchas veces no creí que sería posible siquiera divisar la meta, y no pude tener un apoyo más constante, incondicional y cariñoso que el de mi madre, sin dejar de lado lo mucho que me sirvió el consejo y la firmeza en los interminables regaños de mi padre. Cada uno a su modo se esforzó y contribuyó para que finalmente concluyera esta etapa académica, este trabajo es el fruto de tantos sacrificios.

Finalmente, a mis amigos “los desconectados”, contados con los dedos de las manos pero que siempre se ofrecieron a escucharme y darme ánimos para continuar, realmente han sido mi círculo de apoyo, pero sobre todo Nayeli, que los últimos 4 años, me ha regañado, corregido y apresurado para concluir el trabajo, sin nunca dejar de darme todo su amor.

A todos gracias.



## ÍNDICE

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| CAPÍTULO I. INTORDUCCIÓN.....                                             | 1  |
| 1.1 La escasez de agua en México y el mundo. ....                         | 1  |
| 1.2 Proyectos relevantes y propuestas en torno a la Osmosis Inversa. .... | 4  |
| 1.3 Conceptos importantes de la Osmosis Inversa. ....                     | 7  |
| 1.4 Polarización de concentración. ....                                   | 8  |
| 1.5 Modelos para la predicción de la concentración de polarización. ....  | 9  |
| 1.6 Modelos de transporte. ....                                           | 10 |
| 1.7 Justificación del problema. ....                                      | 10 |
| CAPÍTULO II. DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DEL PROBLEMA. ....                    | 11 |
| 2.1 Sistema de ecuaciones. ....                                           | 13 |
| 2.2 Condiciones de Frontera. ....                                         | 15 |
| 2.3 Análisis de Orden de Magnitud. ....                                   | 17 |
| 2.3.1 Continuidad. ....                                                   | 18 |
| 2.3.2 Navier-Stokes en dirección $x$ . ....                               | 18 |
| 2.4 Variables adimensionales. ....                                        | 19 |
| CAPÍTULO III. IMPLEMENTACIÓN Y RESOLUCIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO. ....       | 22 |
| 3.1 ¿Cómo funciona FreeFem++? ....                                        | 22 |
| 3.2 Análisis de Malla. ....                                               | 25 |
| 3.3 Sintaxis de las Ecuaciones. ....                                      | 28 |
| 3.4 Ecuación de Continuidad. ....                                         | 29 |
| 3.5 Ecuación de Momentum en Dirección Longitudinal. ....                  | 30 |
| 3.5.1 Primera Parte, Términos Convectivos ....                            | 31 |
| 3.5.2 Segunda Parte, Término de Presión. ....                             | 31 |
| 3.5.3 Tercera Parte, Términos Difusivos. ....                             | 32 |
| 3.6 Sistema de Ecuaciones en Sintaxis de FreeFem++. ....                  | 33 |
| CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS. ....                                 | 34 |
| 4.1 Bajo Número de Schmidt ( $Sc = 50$ ). ....                            | 34 |
| 4.1.1 Presión. ....                                                       | 34 |

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1.2 Velocidad longitudinal.....                                     | 35 |
| 4.1.3 Velocidad transversal.....                                      | 37 |
| 4.2 Alto Número de Schmidt ( $Sc = 100$ ). ....                       | 40 |
| 4.2.1 Presión. ....                                                   | 40 |
| 4.2.2 Velocidad longitudinal.....                                     | 42 |
| 4.2.3 Velocidad transversal.....                                      | 43 |
| 4.3 Concentración.....                                                | 46 |
| CONCLUSIONES. ....                                                    | 50 |
| APÉNDICE 1. LISTADO DE VARIABLES Y PARÁMETROS .....                   | 52 |
| Variables dimensionadas .....                                         | 52 |
| Propiedades geométricas del canal .....                               | 52 |
| Variables características .....                                       | 52 |
| Variables y parámetros adimensionales.....                            | 52 |
| Propiedades mecánicas del fluido/SOLUTO .....                         | 52 |
| APÉNDICE 2. ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL SISTEMA .....   | 53 |
| Adimensionalización de la ecuación de continuidad en 2D. ....         | 53 |
| Adimensionalización de las ecuaciones de Navier – Stokes .....        | 54 |
| En dirección $x$ : .....                                              | 54 |
| En dirección $y$ : .....                                              | 57 |
| Adimensionalización de la ecuación de concentración.....              | 59 |
| Condición de frontera de caudal.....                                  | 61 |
| Condición de frontera de velocidad $\nu$ .....                        | 63 |
| Condición de frontera para la ecuación de transferencia de masa ..... | 65 |
| BIBLIOGRAFÍA .....                                                    | 68 |

## CAPÍTULO I. INTORDUCCIÓN.

### 1.1 LA ESCASEZ DE AGUA EN MÉXICO Y EL MUNDO.

El agua ha constituido la base de las civilizaciones humanas y de la vida desde sus orígenes. Sus usos abarcan desde la simple satisfacción de la sed y la hidratación del organismo, hasta funciones de alta complejidad tecnológica, como la generación de energía en reactores nucleares.

Si bien este recurso ha sido esencial para el desarrollo de la sociedad, el abuso en aprovechamiento, la ineficiencia en su gestión para fines sociales e industriales, así como diversos factores socioeconómicos, han llevado a que las poblaciones más vulnerables enfrenten un desabasto inhumano, mientras que los habitantes de las grandes urbes resienten cada vez más el fenómeno del estrés hídrico.

Este problema no es reciente. Para 2022, el consumo anual de agua alcanzó aproximadamente 4600 km<sup>3</sup>, (equivalentes a 4600 billones de litros). Esta cifra representa ocho veces el consumo anual registrado un siglo atrás. Se estima, además, que para 2050 dicho consumo incremente entre un 20 % y un 30 %, y que para ese mismo año cerca de la mitad de las ciudades en el mundo serán catalogadas como regiones con escasez de agua, afectando entre 1.7 y 2.4 billones de personas en el planeta [1].

Un aspecto de gran relevancia es el estudio del estrés hídrico es la contaminación de los cuerpos de agua, factor que agrava significativamente la escasez de este recurso. Existen eventos de contaminación de gran magnitud, como los derrames de crudo en los océanos, con múltiples consecuencias ambientales negativas, así como casos locales que suelen pasar inadvertidos, por ejemplo, industrias que vierten desechos en ríos y lagos. Datos más recientes revelan que en 2016 se emitieron entre 19 a 23 millones de toneladas de residuos plásticos que terminaron contaminando ecosistemas acuáticos a nivel mundial. Se estima que los ríos constituyen la principal fuente de contaminación plástica marina, con emisiones de entre 0.8 y 2.7 millones de toneladas anuales [2].



La contaminación de los cuerpos de agua con desperdicios plásticos es de una particular interés y preocupación cuando se habla de la presencia de microplásticos y de sus efectos en la salud. Esta variable entre muchas otras ha direccionado los esfuerzos y desarrollos científicos y tecnológicos a mejorar, innovar y crear nuevos procesos y sistemas de filtrado/limpieza de aguas residuales/salobres, en un intento por mitigar los efectos negativos de la contaminación de los cuerpos de agua.

El suministro de agua potable de la Ciudad de México depende en un 25% del sistema hídrico Cutzamala [4], el cual se ha caracterizado en los últimos años por registrar niveles de almacenamiento críticamente bajos. A pesar de episodios de lluvias intensas, como las ocasionadas por el huracán “Beryl” en julio de 2024, el almacenamiento de este sistema apenas alcanzó un 32.4% de su capacidad hacia finales de ese mismo mes [3]. Dicho escenario refleja que, aun con fenómenos meteorológicos extremos, la magnitud de la demanda de agua en la capital es tal que resulta insostenible con las reservas actuales.

En el norte del país, el río Santa Catarina recorre las entrañas de la ciudad de Monterrey, para los regios no es extraño que el cauce de este cuerpo de agua hoy en día sea prácticamente inexistente, aquí la extracción de agua es destinada a las grandes industrias que devoran toda clase de recursos del Estado de Nuevo León. El mes de junio de 2024 la tormenta tropical Alberto vino a cambiar el paisaje regio, el río Santa Catarina se desbordó y se observó un nivel de agua que no se había visto en muchos años. Dos meses bastaron para que el río nuevamente estuviera seco, el nivel de demanda de agua para uso industrial es tal que puede hacer desaparecer los efectos de una tormenta tropical en tan solo un par de meses.



Imagen 1. Vista aérea del Río Santa Catarina en Monterrey, el 20 de junio 2024. [Internet]. 2024 [citado 10 octubre 2024]. Disponible en: <https://elpais.com/mexico/2024-06-21/el-paso-de-alberto-por-nuevo-leon-desborda-el-rio-santa-catarina.html>

En Calera, Zacatecas, la situación es igualmente alarmante: desde hace más de 15 años los habitantes reportan grietas en el terreno asociadas a la sobreexplotación de los acuíferos. Según la CONAGUA, el 95% del agua extraída en el estado se destina a actividades ganaderas, aunque diversos sectores atribuyen la crisis al consumo excesivo de la industria cervecera instalada en la región [5].

En el sureste del país la situación también es muy desfavorable, en el Estado de Chiapas se ha hecho público el mal manejo de concesiones de uso del agua, un ejemplo de esto son las concesiones que CONAGUA cedió a FEMSA sobre el control del recurso en la zona durante 20 años, esto sin realizar consultas ciudadanas. Además, cabe resaltar que entre 1995 y el 2015 CONAGUA ya había otorgado concesiones a la compañía Inmuebles de Golfo S.A de C.V. para la fabricación de la bebida “Coca-Cola”, permitiendo que esta empresa consumiera diez mil millones de litros de agua, volumen que es equivalente a diez veces el cupo del Estadio Azteca [6].

Las causas de la escasez de agua son de origen múltiple, no obstante, este trabajo se acota a brindar un estudio desde el campo de la ingeniería buscando que el lector comprenda la situación tan crítica que atraviesa México y de la urgencia de innovar e invertir en infraestructura que permita el abasto de agua potable a todos los mexicanos.

## 1.2 PROYECTOS RELEVANTES Y PROPUESTAS EN TORNO A LA OSMOSIS INVERSA.

Los procesos de desalinización más comunes empleados históricamente para producir agua potable han sido la evaporación instantánea multietapas (MSF), destilación multiefecto (MSF) y la compresión térmica de vapor (MED). No obstante, estos métodos pueden consumir una gran cantidad de combustibles fósiles en comparación con los procesos basados en membranas que ofrecen ventajas como alta eficiencia energética, uso eficiente del espacio, procesos y plantas más compactos, son fáciles de operar y el proceso puede ser fácilmente automatizado [7].

Dentro de los procesos de membranas más utilizados se encuentran [8]:

- RO (Ósmosis Inversa): Considerado el sistema de filtración más fino, con poros de tamaño nanométrico (aproximadamente 0.1 [nm]), capaces de retener partículas extremadamente pequeñas.
- NF (Nanofiltración): Este filtrado utiliza membranas con poros ligeramente más grandes, que son capaces de retener partículas con un diámetro de aproximadamente 0.002[ $\mu\text{m}$ ] a 0.005[ $\mu\text{m}$ ].

Ambos procesos fueron diseñados con el fin de generar agua potable, la NF es capaz de eliminar contaminantes dañinos para la salud como lo son compuestos de pesticidas y macromoléculas orgánicas, mientras que permite el paso de otros minerales que la RO es capaz de retener como el cloruro de sodio [8]. Para garantizar que el lector comprenda los procedimientos y conclusiones del presente estudio, será necesario asentar algunos conceptos clave que son propios del estudio de la RO.

En los últimos 20 años, el estudio de la difusión a través de membranas se ha desarrollado rápidamente debido su relativo bajo costo de operación e implementación. Estos métodos utilizan membranas porosas de diferentes arquitecturas y se encuentra en constante estudio y desarrollo en contraste con otros métodos de separación basados en difusión como la absorción, en las que las ideas básicas se encuentran bien establecidas desde hace 50 años. [33]

Una ventaja de los métodos de filtración por medio de membranas en comparación a métodos térmicos de separación (conducidos por calor) es el considerable ahorro energético. En contraste con los sistemas más eficientes de separación de agua conducidos por calor, el consumo energético de los sistemas de osmosis inversa es entre 10 y 100 veces menor. Esta es una de las razones por las cuales la osmosis inversa ha dominado la industria de la desalinización con una capacidad mundial aproximada de 100 millones de metros cúbicos por día. Sin embargo, los métodos de separación térmica regularmente utilizan energía residual en forma de calor, producto de otra operación o actividad principal mientras que una planta de osmosis inversa generalmente utiliza energía eléctrica para operar, haciendo la comparativa utilizar calor residual es mucho más barato [34].

Saber Khanmohammadi [35], explica cómo se han realizado diversos intentos por crear una simbiosis de estos dos métodos de desalinización procurando obtener las ventajas particulares de cada uno de ellos, inclusive explica una solución propuesta por Peter Godart [36] [37] basada en un cilindro que aloja dos pistones conectados por una barra los cuales tienen movimiento producto de la expansión/contracción de un fluido de trabajo que está alojado en una recámara del cilindro y que será afectado por un flujo de energía en forma de calor. A medida que la temperatura y presión aumentan a volumen constante, el fluido de trabajo ejercerá presión sobre la segunda recámara del cilindro la cual contiene el fluido de alimentación del proceso de osmosis inversa, obligándolo a cruzar a través de una membrana hasta alcanzar la presión osmótica y completar el proceso de desalinización.

Actualmente, el método más confiable para purificar el agua y que se ha utilizado con el fin de reducir costos es la Osmosis Inversa (RO), este método se comenzó a utilizar desde la década de los 50's. [9] Cabe resaltar que 50% del agua desalinizada a nivel global se obtiene mediante el método de Osmosis Inversa. Basándose en la calidad del agua que hay a la entrada de una planta que opera mediante este proceso, estas se pueden clasificar del siguiente modo [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Plantas de agua salobre (BWRO)} \rightarrow \text{Rango de salinidad } (500 - 10,000) \left[ \frac{mg}{L} \right] \\ \text{Plantas de agua de mar (SWRO)} \rightarrow \text{Rango de salinidad } \approx 30,000 \left[ \frac{mg}{L} \right] \end{array} \right.$$

A su vez las plantas de agua salobre se clasifican como:

$$BWRO \left\{ \begin{array}{l} \text{Baja salinidad} \rightarrow (500 - 2,500) \left[ \frac{mg}{L} \right] \\ \text{Alta salinidad} \rightarrow (2,500 - 10,000) \left[ \frac{mg}{L} \right] \end{array} \right.$$

Estos datos llaman la atención cuando se analiza la viabilidad de un proyecto pensado para subsanar la deficiencia en el suministro de agua potable de alguna comunidad o población, especialmente si las condiciones geográficas permiten un suministro de agua marina constante. Jahangir [38] plantea un estudio que contempla 10 “capas” de información que no solo contemplan el proceso de osmosis inversa per se, incluye análisis del potencial económico, ambiental, técnico y geológico de un proyecto de desalinización mediante ósmosis inversa en las provincias de Sistan y Baluchestan en Irán.

Recordando conclusiones del trabajo de Khanmohammadi sobre el consumo energético de las plantas de desalinización mediante osmosis inversa, tal recuso representa una parte importante de los costos operativos; Jahangir evaluó la viabilidad de utilizar a favor los recursos solares/eólicos de los que pueden disponer las provincias iraníes cercanas al golfo de Oman y después de aplicar los criterios correspondientes concluyó que existe un potencial promedio aproximado de 6643 y 9330 millones de metros cúbicos anuales de agua desalinizada por año, utilizando energía eólica y solar respectivamente para alimentar el suministro energético de una planta de osmosis inversa en estas regiones iraníes [38].

La realidad mexicana como ya lo hemos planteado, no se encuentra exenta del estrés hídrico que se vive mundialmente, y de hecho ya se han planteado proyectos en torno al uso de la osmosis inversa como método de desalinización para operar plantas de tratado de aguas en el municipio de Tijuana y Rosarito en el estado de Baja California, de la cual se ha llegado a estimar una capacidad de 100 millones

de galones por día (aproximadamente 138 millones de metros cúbicos anuales) [39]. Tomando en cuenta las diversas propuestas que se han planteado, no sería arriesgado pensar en incorporar tecnologías de suministro de energía eólica o solar en un proyecto de tal envergadura, sería muy desatinado no realizar el análisis de esta posibilidad ya que a tan solo 150km de Rosarito, en el poblado de la Rumorosa se encuentra en marcha el proyecto de generación de energía eólica más importante del país, un parque eólico de capacidad de 30 [MW]. [40]

### 1.3 CONCEPTOS IMPORTANTES DE LA OSMOSIS INVERSA.

Entrando en materia del fenómeno físico, este ha sido bien conocido desde hace bastantes años, la osmosis puede ser definida como el proceso mediante el cual las moléculas de agua presentes en una solución, se mueven de forma natural y espontáneamente de una región baja concentración de soluto a otra región de la solución con una alta concentración de soluto, las moléculas de agua logran realizar este movimiento gracias a la ayuda de una membrana semipermeable que separa las regiones de alta y baja concentración e impide el flujo del soluto permitiendo que solo fluyan las moléculas de agua a través de ella, este movimiento continuará hasta el punto en que el sistema llega al estado de equilibrio osmótico, que se caracteriza porque el sistema presentará potenciales químicos constantes a través de la membrana. Ahora, el flujo de las moléculas de agua puede detenerse o bien realizarse en dirección contraria aplicando presión al sistema en la región de alta concentración de la solución o “solución de alimentación”, y en caso de que la diferencia de presión aplicada a través de la membrana sea mayor a la presión osmótica, las moléculas de agua se verán forzadas a moverse en dirección contraria al proceso natural de osmosis, dando como resultado el proceso de osmosis inversa. [41] [42] [43]

La presión osmótica está estrechamente relacionada con otras propiedades coligativas de las soluciones tales como la elevación ebulloscópica, el descenso crioscópico y el descenso de la presión de vapor del disolvente. Para soluciones diluidas ideales, la presión osmótica se calcula de la siguiente manera: [44] [45]

$$\Pi = CRT$$

Sal rechazada: Se define como el porcentaje de algún soluto particular entrante al sistema, que es rechazado por la membrana del proceso de RO, se calcula con ayuda de la concentración del flujo de entrada ( $C_F$ ) y la concentración del flujo filtrado ( $C_P$ ):

$$SR = \left(1 - \frac{C_P}{C_F}\right) \cdot 100\%$$

Paso de sal: Se define como el porcentaje de algún soluto en particular que ha logrado permear la membrana del sistema de RO [11]:

$$SP = 100\% - SR$$

#### 1.4 POLARIZACIÓN DE CONCENTRACIÓN.

Durante el proceso de desalinización mediante RO, se genera un flujo convectivo de solutos, que viaja a través de la alimentación a la membrana, esto aumenta considerablemente la concentración del soluto sobre la superficie de la membrana y consecuentemente crea una “capa límite”, dentro de la cual la concentración de soluto es mayor que la concentración en el demás volumen.

El mayor nivel de concentración dentro de la capa límite provoca que los solutos regresen del flujo de salida hacia la membrana (a esto se le conoce como transporte de retorno), este fenómeno de acumulación de solutos rechazados sobre la superficie de la membrana se le conoce como polarización de concentración (CP) [9,11].

Debido a la concentración de polarización, también se incrementa el flujo de soluto a través de la membrana, esto hace que se reduzca el rechazo de sal debido a un incremento en la concentración del flujo filtrado.

Los efectos de la polarización de concentración en el desempeño de la desalinización mediante RO, son altamente indeseables. Los principales efectos adversos es el decremento del flujo permeado debido a: [12] [13] [14] [15] [16]

- Incremento de la resistencia hidráulica para el flujo de agua.
- Decremento de la presión neta que se ejerce a través de la membrana debido al incremento de la presión osmótica dentro de la capa límite.
- Probabilidad de precipitación de iones divalentes y sales escasamente solubles al aumentar sus concentraciones en la superficie de la membrana.
- Ensuciamiento de la membrana, en el caso de la alimentación con agua que contiene partículas coloidales, se presenta la formación de una “capa de pastel” en la superficie de la membrana.

El obstáculo formado por el transporte de retorno aumenta aún más los efectos negativos de la CP, a esto se le conoce como “Concentración de polarización aumentada por acumulación de soluto” (CECP) o “Presión osmótica aumentada por acumulación de soluto” (CEOP) [15,16].

La gravedad de los efectos de la CP es gobernada por las propiedades del soluto y la membrana y la hidrodinámica del proceso de RO, y a pesar de los efectos mencionados la CP es considerada como reversible y puede ser mitigada empleando una apropiada velocidad de alimentación, módulos rotativos/vibrantes, micromezclas reactivas, pulsación o espaciadores de alimentación [17].

### 1.5 MODELOS PARA LA PREDICCIÓN DE LA CONCENTRACIÓN DE POLARIZACIÓN.

Una buena comprensión y una adecuada predicción de la CP es altamente crítica para el diseño, predicción del desempeño y la elucidación de los mecanismos de ensuciamiento en los procesos de RO [18]. Despreciar los efectos de la CP en el modelado del RO puede conducir a una desestimación del requerimiento energético y una sobrestimación de la recuperación de agua y de la calidad del flujo filtrado [19].

El modelo clásico de “película” de capa límite, considera flujo unidimensional, una capa límite completamente desarrollada, estado estacionario y se basa en el balance de masa del soluto [12]:



$$J_w C + D \frac{dC}{dx} = J_w C_P$$

$J_w C$ : Flujo convectivo de salmuera que pasa por la membrana.

$D \frac{dC}{dx}$ : Flujo difusivo de salmuera que se aleja de la membrana.

$J_w C_P$ : Flujo filtrado que pasa a través de la membrana.

$D$ : Difusividad del soluto en el agua.

$x$ : Distancia a la que se encuentra de la membrana.

$C$ : Concentración en cualquier punto de la capa límite.

#### 1.6 MODELOS DE TRANSPORTE.

Los modelos de transporte de membrana son herramientas importantes para la comprensión del transporte de solutos y agua a través de la membrana en sistemas de RO. Estos modelos tienen una inmensa importancia para predecir el desempeño y en el diseño de nuevas membranas con características mejoradas, estos modelos son clasificados como fenomenológicos y mecanísticos [20,21].

#### 1.7 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.

El enfoque que se centra en el estudio bidimensional del transporte de nada y dinámica de fluidos a través de membranas de ósmosis inversa. Para ello, se analizan cuatro variables principales: velocidad horizontal ( $u$ ), velocidad vertical ( $v$ ), presión ( $P$ ) y concentración ( $C$ ). Dichas variables permiten describir la física del problema de ósmosis inversa (RO) y constituyen la base para el análisis y la modelación realizada en esta investigación.

## CAPÍTULO II. DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DEL PROBLEMA.

El enfoque que se utiliza en el presente trabajo pretende estudiar el comportamiento en dos dimensiones de cuatro variables principales: velocidad horizontal ( $u$ ), velocidad vertical ( $v$ ), presión ( $P$ ) y concentración ( $C$ ). Estas variables se encuentran directamente involucradas en el transporte de masa y la dinámica de fluidos que ocurre a través de la membrana y que describen fielmente la física del problema de RO.

El volumen de control corresponde a una sección de un canal rectangular que posee una longitud  $L$ , altura  $2H$  y profundidad  $w$ . Un caudal  $\dot{Q}_0$ , entra al canal en su extremo izquierdo y es de valor constante a lo largo de toda la superficie de entrada (coloreada de azul en la Imagen 2).

Además de la representación de las dimensiones, se puede encontrar en el diagrama en asurado negro las caras del canal en las que se encuentran las membranas de las que se compone el sistema, coloreado en verde y colineal con el eje  $x$ , se encuentra un plano imaginario denominado “plano simétrico”, y coloreado en rojo el sistema coordenado.

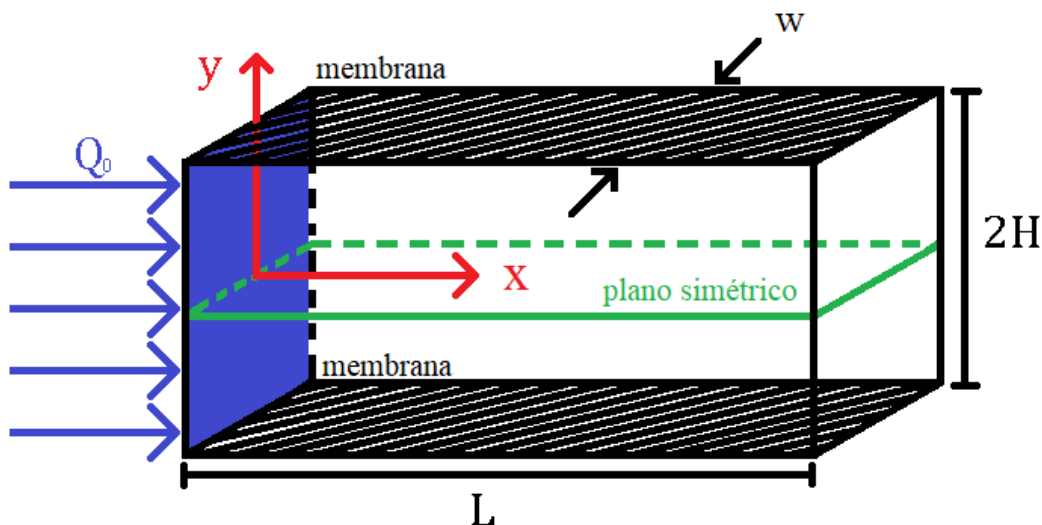


Imagen 2. Esquema geométrico del canal.

La ubicación del sistema coordenado cartesiano bidimensional  $(x,y)$ , ha sido designada arbitrariamente en el extremo izquierdo del canal, a la mitad de su altura y a la mitad de su profundidad. Esto ya que convenientemente se considera que tanto la membrana, como el comportamiento de las variables, guardarán una estricta condición simétrica respecto al plano simétrico. Más tarde la condición simétrica del problema implicará que solo la mitad superior del canal será utilizada en la resolución numérica del problema. Por lo que, de ahora en adelante, para efectos del texto y de las ecuaciones se hará más referencia a la altura  $H$ , y no a la altura total del canal, que naturalmente es de valor  $2H$ .

El modelo descrito anteriormente es de carácter fenomenológico, este no considera a la membrana como objeto de estudio, en otras palabras, no se realiza la solución de las ecuaciones que describen la dinámica de fluidos y el transporte de masa dentro de la membrana.

Procurando que la física del problema describa lo más fielmente al fenómeno de la RO, se tomaron en cuenta las siguientes consideraciones o hipótesis, en la resolución numérica del sistema:

1. La longitud del canal es extensamente mayor que su altura ( $L \gg H$ ). Esto asegura que una vez resueltas las ecuaciones de dinámica de fluidos y de transferencia de masa, y que se haya alcanzado el criterio de convergencia, llevarán el problema a un estado de flujo estacionario completamente desarrollado.
2. La membrana permitirá que el flujo permeado escape a lo largo de la pared superior del canal, sin embargo, debido a fenómeno de concentración de polarización, el flujo permeado no será constante a lo largo de la longitud  $L$  de la membrana.
3. La dinámica del fluido se realiza a bajos números de Reynolds, en otras palabras, no hay presencia efectos turbulentos en el sistema.
4. El sistema emplea como fluido de trabajo una disolución salina, y no hay presencia de compuestos o partículas ajenas a la solución que puedan reaccionar.

## 2.1 SISTEMA DE ECUACIONES.

Considerando la forma simplificada de la ecuación de la continuidad que se maneja en los libros de texto de mecánica de fluidos [24]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0$$

Ajustado esta ecuación a la naturaleza geométrica del sistema, hay que desarrollar los vectores en dos dimensiones y considerar a la densidad como una propiedad constante en el medio, por lo cual la ecuación de continuidad se puede escribir sencillamente como:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

En cuanto a las ecuaciones de cantidad de movimiento, la forma vectorial que se maneja comúnmente es [24]:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_{ij}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes serán adaptadas nuevamente a la geometría del problema en sus términos convectivos como difusivos, gradiente de presión, esfuerzos viscosos y se despreciará efecto gravitatorio alguno. La densidad se considera constante en el medio:

$$(2) \quad \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$(3) \quad \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

El transporte de masa es modelado por medio de la ecuación de balance de masa de Lavoisier, esta ecuación presenta el modelado fisicoquímico en propiedades físicas constantes, reacciones químicas de primer orden y soluciones diluidas en cualquier medio [22]:

$$(4) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} C = D \nabla^2 C - \bar{\nabla} \cdot \bar{J} - KC$$

Esta ecuación se compone de la derivada material de la concentración del lado izquierdo mientras que, por el otro lado, el primer término (el más significativo para este problema), es el término difusivo que describe el fenómeno de transporte de masa; a este lo acompañan un término que involucra al vector  $\bar{J}$ , que es un vector generalizado de flujo que representa efectos turbulentos y otros procesos de transferencia de masa; y a su vez  $K$ , la constante de reacción de primer orden que acompaña al tercer término.

Considerando la tercera hipótesis, el bajo número de Reynolds descarta que en el transporte de masa se vean involucrados efectos turbulentos en el flujo, con lo cual se desprecia el término  $\bar{\nabla} \cdot \bar{J}$  en la ecuación de Lavoisier.

Por otra parte, la constante de reacción  $K$  afecta a las reacciones en las cuales los productos de una reacción dependen únicamente de la concentración de uno de sus reactivos, sin embargo, el lector debe tener en cuenta que la RO es un proceso físico que involucra a una disolución salina (hipótesis 4), y que el filtrado del soluto no involucra un cambio o reacción química, por lo cual el término  $KC$  no tiene efecto sobre el modelado del problema de RO ya que aunque solo depende de la concentración del fluido, no es considerado un cambio químico con velocidad de reacción.

De modo que con las bases que han sido sentadas, la expresión para el transporte de masa para el problema de RO se escribe como:

$$(5) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} C = D \nabla^2 C$$

## 2.2 CONDICIONES DE FRONTERA.

Las ecuaciones (1) – (5) están sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

En  $x = 0$ :

$$(6) \quad \dot{Q}_0 = \int u \, dA, \quad v = 0 \quad y \quad C = C_0$$

En  $x = L$ :

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad y \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

En  $y = 0$ :

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad y \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

En  $y = H$ :

$$(9) \quad u = 0, \quad v = k[(P - P_0) - \sigma(\Pi - \Pi_0)] \quad y \quad vC - D \frac{\partial C}{\partial y} = vC_p$$

La primera ecuación del conjunto de condiciones (6) indica que la velocidad  $u$  es una velocidad promedio del caudal de entrada al canal, como ya se había mencionado en el apartado **2.1**, esta velocidad es constante a lo largo de toda la superficie de entrada, es decir a lo largo de todo el eje "y" en la representación de dos dimensiones en la cual se está planteando el problema.

En cuanto a  $v = 0$  y  $C = C_0$ , aseguran que la única componente de la velocidad se encuentre en dirección del eje  $x$ , y que la concentración a lo largo del eje  $y$ , sea uniforme y de valor  $C_0$  (el valor de la concentración inicial), todas estas consideraciones para  $x = 0$ .

El conjunto de ecuaciones (7) implican la condición de que las variables  $u, v$  y  $C$ , ya no presentan cambios en  $x = L$ , con lo cual se asegura que cuando se cumplan los criterios de convergencia, el flujo se encuentre completamente desarrollado.

Para las condiciones (8), las derivadas implican la condición de simetría que ya se había comentado previamente y por la cual solamente se resuelve el problema en la mitad superior del canal.

Por último, en  $y = H$  (9), la velocidad en la dirección  $x$  no presenta una componente, sin embargo, el flujo permeado debe presentar un valor de velocidad y este únicamente dependerá de la componente de la velocidad en dirección  $y$ , debido a esto  $u = 0$ , en cuanto a las variables  $v$  y  $C$ , los trabajos de Kedem-Katchalsky y Spiegler-Kedem [23, 12], muestran que las ecuaciones presentadas son las que mejor describen el fenómeno de Osmosis Inversa para este problema.

Para el caso de la velocidad  $v$ , la diferencia de presiones osmóticas está siendo modificada por el coeficiente de reflexión  $\sigma$ , el cual caracteriza las interacciones del flujo cuando la disolución atraviesa la membrana,  $\sigma < 1$  indica un soluto semipermeable,  $\sigma = 1$  indicaría un soluto impermeable [21]; el segundo modificador  $k$ , es el coeficiente de transferencia de masa.

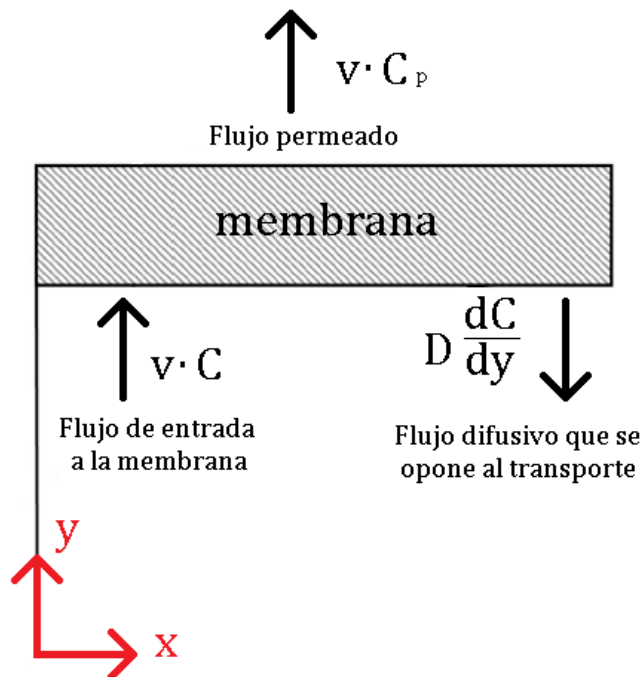


Imagen 3. Esquema de los flujos a través de la membrana.

En cuanto a la ecuación que involucra a  $C$ , es importante resaltar que cada término de esta ecuación hace referencia a un flujo en movimiento a través de la membrana del canal, por lo cual es preciso diferenciarlos.

La Imagen 3, presenta un esquema de como interactúan estos flujos, el flujo convectivo de transporte de sal  $vC$ , entra a la membrana para ser permeado, mientras que el flujo difusivo  $D \frac{\partial C}{\partial y}$ , regresa de la membrana ya que se opone al transporte del fluido, en este flujo  $D$  representa la difusividad del soluto en el agua; por último  $vC_p$  representa al flujo permeado que sale de la membrana, en el cual  $C_p$  representa la concentración del flujo permeado, que debería ser menor que la concentración inicial  $C_p < C_0$ .

Esta condición de frontera es particularmente importante, ya que describe el fenómeno de concentración de polarización, que en términos simples es la acumulación del soluto en la superficie de la membrana que se encuentra en el interior del canal. Este fenómeno es crítico en la predicción, desempeño y diseño de un sistema de RO, ya que una elevada concentración de polarización se traduce en un bajo desempeño del sistema ya que conduce a una subestimación de los requerimientos energéticos y de una sobreestimación de la calidad del flujo permeado hablando en términos de concentración, todo lo anterior ha sido estudiado en los modelos de película de capa límite [12], y es uno de los modelos más simples que describen el fenómeno de concentración de polarización.

### 2.3 ANÁLISIS DE ORDEN DE MAGNITUD.

Con la finalidad de redefinir el sistema de ecuaciones en términos de variables adimensionadas, se presenta a continuación un análisis de la ecuación de continuidad y de la ecuación de Navier-Stokes (en dirección  $u$ ), con el objetivo de que; tomando en consideración el comportamiento físico del fenómeno, encontremos relaciones entre las variables que sean útiles para la transformación de las ecuaciones en términos de variables adimensionales.



## 2.3.1 CONTINUIDAD.

Si se presta atención a las derivadas parciales de la ecuación de continuidad (6), es inevitable llegar a la conclusión de que el orden de magnitud de la primera derivada debe ser del mismo orden que la segunda ya que de otro modo no podría verse satisfecha la ecuación.

Si se realiza una analogía considerando las variables características presentes en las variables adimensionales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{u_c}{L} \sim \frac{v_c}{H}$$

Se obtiene una expresión para la velocidad característica en el eje vertical despejando  $v_c$ :

$$(10) \quad v_c = \frac{H}{L} u_c$$

2.3.2 NAVIER-STOKES EN DIRECCIÓN  $x$ .

A continuación, se presenta nuevamente la ecuación (7):

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Debido a que a solución del problema conducirá a una condición de flujo estacionario completamente desarrollado, los términos difusivos (lado izquierdo de la ecuación), podrán despreciarse en esta condición.

A su vez, cuando se alcance esta condición la velocidad máxima será función únicamente de la posición vertical, por lo que solo el valor de la segunda derivada con respecto a “y”, tendrá una aportación numérica. La analogía con las variables características se escribe como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\Delta P_c}{L} = \mu \frac{u_c}{H^2}$$

Se despeja el valor de la presión característica y se obtiene una expresión en función de las demás variables características:

$$(11) \quad \Delta P_c = \mu \frac{u_c \cdot L}{H^2}$$

#### 2.4 VARIABLES ADIMENSIONALES.

Se presenta la definición de distintas variables adimensionales que serán de ayuda para la transformación del sistema de ecuaciones:

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{H} \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_c} \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c} \quad \tilde{C} = \frac{C}{C_0} \quad \tilde{P} = \frac{P - P_0}{\Delta P_c} \quad \tau = \frac{t}{t_c}$$

Es visible la estructura de estas variables adimensionales, ya que se componen de la relación entre la variable dimensionada y de una variable característica análoga; en el caso de la posición vertical y horizontal, tienen como magnitud característica a la longitud  $L$ , y a la altura  $H$  respectivamente. La variable original divide a la característica y así sucesivamente se ha planteado una variable característica a cada variable dimensionada.

Estas variables, sumadas a las ecuaciones (10) y (11) producto de los análisis de orden de magnitud, son la base de las transformaciones algebraicas de las ecuaciones (1) – (4), y pueden escribirse como:

$$(12) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0$$

$$(13) \quad (\varepsilon \cdot Re_H) \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2}$$

$$(14) \quad (\varepsilon^3 \cdot Re_H) \left[ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2}$$

$$(15) \quad (Re_H \cdot Sc \cdot \varepsilon) \left[ \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2}$$

Que corresponden a la ecuación de continuidad (12), Navier-Stokes en dirección  $X$  (13), Navier-Stokes en dirección  $Y$  (14), y transferencia de masa (15), en su versión adimensionalizada.

Para resolver el anterior sistema, estas ecuaciones están acopladas a las condiciones de frontera que ya fueron mencionadas, y que en su análogo adimensional se escriben como:

En  $X = 0$ :

$$(16) \quad \int_0^1 \tilde{u} dY = 1; \quad \tilde{v} = 0; \quad \tilde{C} = 1$$

En  $X = 1$ :

$$(17) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} = 0$$

En  $Y = 0$ :

$$(18) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = 0$$

En  $Y = 1$ :

$$(19) \quad \tilde{u} = 0, \quad \tilde{v} = \frac{\beta}{\varepsilon^2} \left[ \tilde{P} - \alpha \left( \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right) \right] \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = \varepsilon \cdot Re_H \cdot Sc \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{C} \left[ 1 - \frac{C_p}{\tilde{C} \cdot C_0} \right]$$

Adicionalmente, existen parámetros adimensionales que es necesario definir ya que se encuentran presentes en las ecuaciones anteriores y se presentan a continuación:

$$\varepsilon = \frac{H}{L}, \quad Re_H = \frac{\rho u_c H}{\mu}, \quad Sc = \frac{\mu}{\rho D}, \quad \alpha = \frac{C_0 R T}{\Delta P_c} \sigma, \quad \beta = \frac{k \mu}{H}$$

Donde  $\varepsilon$  es el parámetro adimensional que relaciona la altura  $H$  y la longitud  $L$  del canal que está siendo analizado; el número de Reynolds  $Re$ , ya bien conocido en la mecánica de fluidos, es también un parámetro adimensional que caracteriza los tipos de flujo en función del valor que tome, y los clasifica como: flujo laminar con líneas de corriente rectas, flujo laminar con ondulaciones y flujo turbulento. [29]

El número de Schmidt  $Sc$ , es otro parámetro adimensional que es utilizado frecuentemente en el análisis de fenómenos de transporte. Este relaciona la importancia relativa del momento de transporte (descrita por el número de Reynolds), con el transporte de masa (descrita por el número de Schmidt), en un sistema de flujo de fluidos. Por medio del análisis del número de Schmidt, los investigadores han logrado entender como la masa se transporta dentro de un medio. [30]

Por otra parte, el parámetro  $\alpha$  que también es adimensional, contempla el efecto de  $\sigma$ , que es conocido como el “coeficiente de reflexión”, este coeficiente es introducido con el fin de caracterizar las interacciones del flujo presenta cuando el agua y el soluto cruzan una membrana a través de un canal común, estas interacciones pueden clasificarse de acuerdo con el valor que adquiera  $\sigma$ . [31]

$\sigma < 1$ : Indica que el soluto es semipermeable.

$\sigma = 1$ : Indica que el soluto es impermeable.

Por último, el parámetro adimensional  $\beta$  contempla los efectos de  $k$ , el coeficiente de transferencia de masa cuyo significado físico es la constante de velocidad necesaria para mover una especie del soluto de la frontera hacia el volumen de la fase. [32]

Se solicita al lector que tenga dudas sobre el proceso matemático para la adimensionalización de alguna de las ecuaciones anteriores, acuda al Apéndice 2, en el cual podrá encontrar todos los pasos.

## CAPÍTULO III. IMPLEMENTACIÓN Y RESOLUCIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO.

A continuación, se explica el funcionamiento, la implementación y resolución numérica del modelo matemático planteado en el capítulo anterior. Para este fin, se utilizó el software de código libre “FreeFem++”, programa que permite resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales mediante el análisis de elementos finitos.

### 3.1 ¿CÓMO FUNCIONA FREEFEM++?

FreeFem++ es un software matemático de uso libre que se encuentra escrito en C++ y está enfocado en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales lineales usando el método de elementos finitos. Este programa utiliza un idioma de usuario para establecer y controlar el problema. Este lenguaje permite una rápida especificación de ecuaciones diferenciales parciales lineales con la formulación variacional del problema lineal en estado estacionario, mientras que el usuario puede escribir su propio script para la resolución de problemas no lineales y dependientes del tiempo [27].

En el método de diferencias finitas el dominio de la solución se encuentra segmentado en una malla con una cantidad finita de puntos discretos, a los que se les conoce como nodos. [46] Posteriormente en cada uno de los nodos se resuelve la ecuación diferencial parcial reemplazando las derivadas parciales por diferencias finitas divididas. [47] Sin embargo, este método, aunque es de fácil comprensión y una buena aproximación, es difícil de aplicar a sistemas con una geometría irregular, con condiciones de frontera no usuales o de composición heterogénea. El método de elementos finitos ofrece un camino para la resolución de distintos fenómenos físicos. A diferencia de las técnicas por diferencias finitas, la técnica de elementos finitos divide el dominio de la solución en regiones con formas sencillas o “elementos”, desarrollando de esa manera, una solución aproximada de la o las ecuaciones diferenciales parciales para cada uno de estos elementos. [48]

Finalmente, la unión de todas las soluciones particulares de cada nodo genera la solución total del sistema, y para esto es indispensable garantizar la continuidad de las fronteras de los elementos, por lo cual este método no es una opción viable en sistemas de composición heterogénea. Una vez resuelto cada nodo, la ecuación diferencial parcial se satisface por secciones [26].

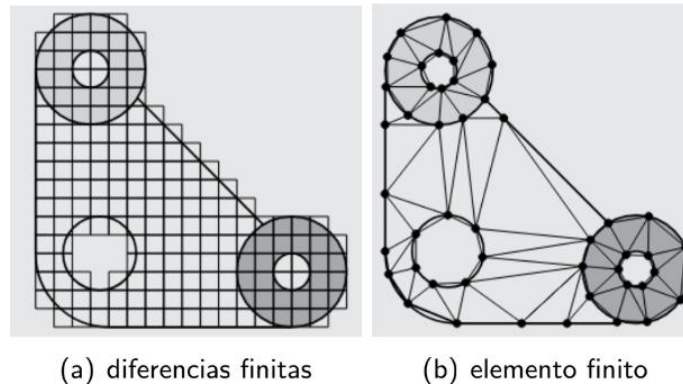


Imagen 4. Diferencias finitas vs Elemento finito (Chapra et al., 2011).

En esencia, FreeFem++ es un compilador, lo que significa que su lenguaje es mecanografiado, polimórfico y reentrante. Este aspecto hace posible identificar cada término de las ecuaciones diferenciales, así como las condiciones de frontera que intervienen en todo el dominio, a diferencia de otros programas, en donde su funcionamiento se asemeja a una “caja negra”, ya que no se pueden identificar las ecuaciones o el sistema que se está resolviendo, sólo se pueden agregar o modificar parámetros. Cada variable está declarada de un cierto tipo y cada sentencia va acompañada de un punto y coma al final de esta. Para poder resolver cualquier modelo matemático en FreeFem++, se debe de seguir una serie de pasos. El primero consiste en generar la geometría, es decir, definir el espacio en donde se van a resolver las ecuaciones diferenciales. Posteriormente, se genera una malla triangular en toda la geometría. Finalmente se define de manera variacional cada una de las ecuaciones que intervienen en el modelo físico.

En FreeFem++ el dominio  $\Omega$  es la región interna definida por su frontera  $\partial\Omega$ , que se encuentra implícitamente orientada por la parametrización. Para poder definir la frontera del dominio, se hace uso de la palabra clave “border”.

Por ejemplo:

```
border a(t = 0,1){x = t ; y = 0 ; }
border b(t = 0,1){x = 1; y = t ; }
border c(t = 0,1){x = 1 - t; y = 1 ; }
border d(t = 0,1){x = 0; y = 1 - t ; }
plot (a(10) + b(10) + c(10) + d(10)) ;
```

Y de igual manera se puede trabajar para la generación de un rectángulo y una circunferencia, obteniendo los siguientes resultados (Ver Imagen 5):

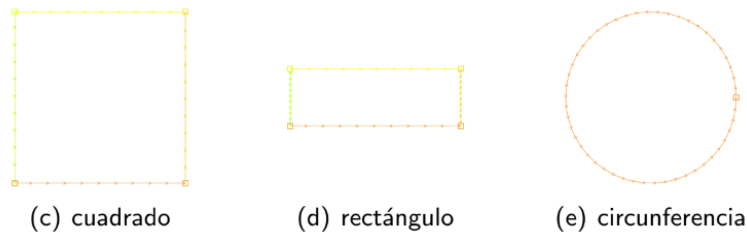


Imagen 5. Elementos generados por el comando "border".

Como ya se comentó, con la sentencia "border" se puede definir un segmento del contorno de la geometría y con las sentencias "mesh" y "buildmesh" se genera la geometría de la malla. Otro punto que destacar es que la numeración de los lados puede modificarse mediante la sentencia "label". A distintos lados se les puede asignar el mismo número de referencia si van a tener el mismo dato de contorno. Un ejemplo sencillo del comando "mesh" se muestra a continuación:

```
border a(t = 0,1){x = t ; y = 0 ; }
border b(t = 0,1){x = 1; y = t ; }
border c(t = 0,1){x = 1 - t; y = 1 ; }
border d(t = 0,1){x = 0; y = 1 - t ; }
plot (a(10) + b(10) + c(10) + d(10)) ;
mesh Th = buildmesh(a(10) + b(10) + c(10) + d(10)) ;
plot (Th, ps = "mcuadrado.eps");
```

Y de igual manera que el comando anterior, se puede generar la malla de  $(n)$  nodos de un rectángulo y una circunferencia.

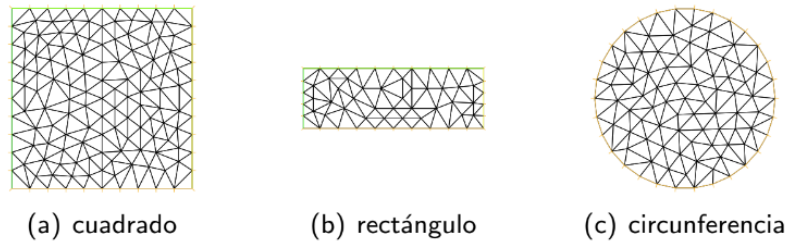


Imagen 6. Figuras generadas por el comando "mesh" y "buildmesh".

Para el caso del presente trabajo la geometría del canal es un cuadrado y para la cantidad de elementos generados por la malla triangular, se desarrolló un análisis de malla en el cual se encontró que el número de elementos  $nt = 80000$  era el mínimo necesario para resolver de manera satisfactoria el sistema de ecuaciones.

### 3.2 ANÁLISIS DE MALLA

Para determinar el número de elementos del dominio sobre el cual se han de resolver las ecuaciones diferenciales que describen el problema, se tomó como punto de partida un número arbitrario de nodos y una vez que se obtuvo solución, se iteró duplicando el número de nodos de cada frontera. Si las soluciones presentan diferencias, se repite el proceso, de lo contrario, una vez que las soluciones entre dos sistemas resueltos con una cantidad distinta de nodos no presentan diferencias, puede considerarse que la última cantidad de nodos seleccionada para resolver el sistema de ecuaciones es satisfactoria para la resolución del problema.

Inicialmente se determinó número de nodos por frontera es de  $n = 50$ . Una vez definido el dominio sobre el cual se ha de resolver el sistema de ecuaciones y la cantidad de nodos presentes en cada frontera, FreeFem++ ofrece información muy relevante acerca de la malla a través de las propiedades  $nt$  y  $nv$ , que representan la cantidad total de elementos o "triángulos" y la cantidad total de vértices o nodos en la malla, respectivamente.



Para el sistema ( $n = 50 ; nt = 5000 ; nv = 2601$ ) se muestra una representación en 2D de la malla que conforma el sistema, también puede observarse un esquema que muestra un mapa de los niveles de concentración en las distintas regiones del canal. Este sistema es el punto de partida del análisis, mientras los siguientes sistemas propuestos muestren diferencias con los resultados de este sistema, consideraremos que la cantidad de nodos ( $n = 50$ ), es insuficiente.

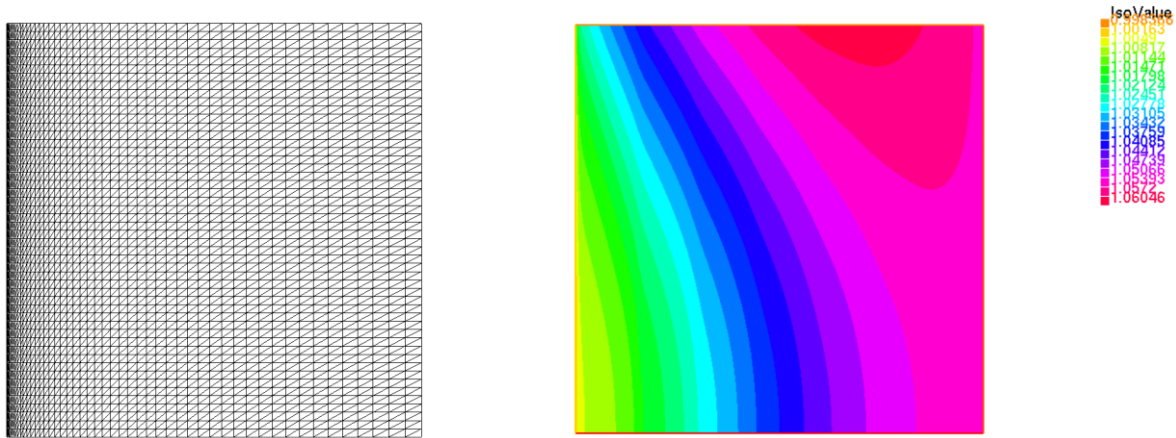


Imagen 7. Malla y solución a la concentración adimensional del sistema ( $n = 50 ; nt = 5000 ; nv = 2601$ )

Ahora resolviendo el sistema ( $n = 100 ; nt = 20000 ; nv = 10201$ ) que como ya se explicó duplica el valor de nodos presentes en cada frontera, se puede observar que el número de elementos creció considerablemente, un 400% para ser exacto. Nuevamente se presenta un esquema de la población de elementos dentro de la malla en donde se observa claramente el aumento de elementos, así como la representación del mapa de niveles de concentración en donde se muestran las distintas regiones del canal.

Tomando en cuenta el criterio definido para realizar el análisis, podemos afirmar que ( $n = 100$ ) es un número insatisfactorio de nodos, ya que, aunque son muy pequeñas, aún podemos observar diferencias en la solución de las regiones de concentración en el esquema (del orden de  $10^{-5}$ ), sin embargo, en estricto rigor aún existen diferencias.

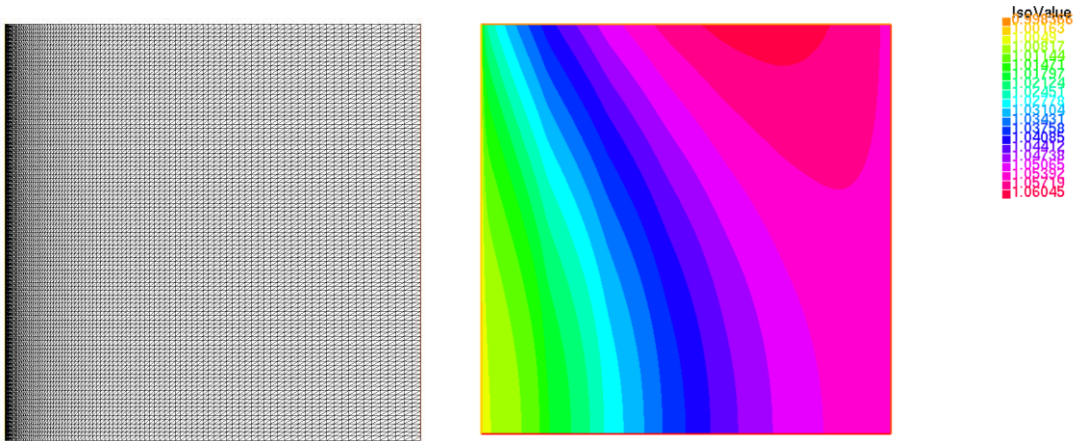


Imagen 8. Malla y solución a la concentración adimensional del sistema ( $n = 100$  ;  $nt = 20000$  ;  $nv = 10201$ )

Por último, el sistema ( $n = 200$  ;  $nt = 80000$  ;  $nv = 40401$ ) que es un 1600% más denso en elementos respecto al sistema inicial ( $n = 50$  ;  $nt = 5000$  ;  $nv = 2601$ ), finalmente ya no presenta diferencias en la solución de las regiones de concentración respecto al sistema anterior, por lo tanto, podemos considerar que ( $n = 200$ ), es la cantidad satisfactoria de nodos para conseguir una solución adecuada al sistema de ecuaciones. Aunque esto eleva sustancialmente el tiempo de cálculo de FreeFem++, todavía es perfectamente manejable y permite obtener resultados más refinados, por lo cual se consideran ( $nt = 80000$ ) elementos presentes en la malla.

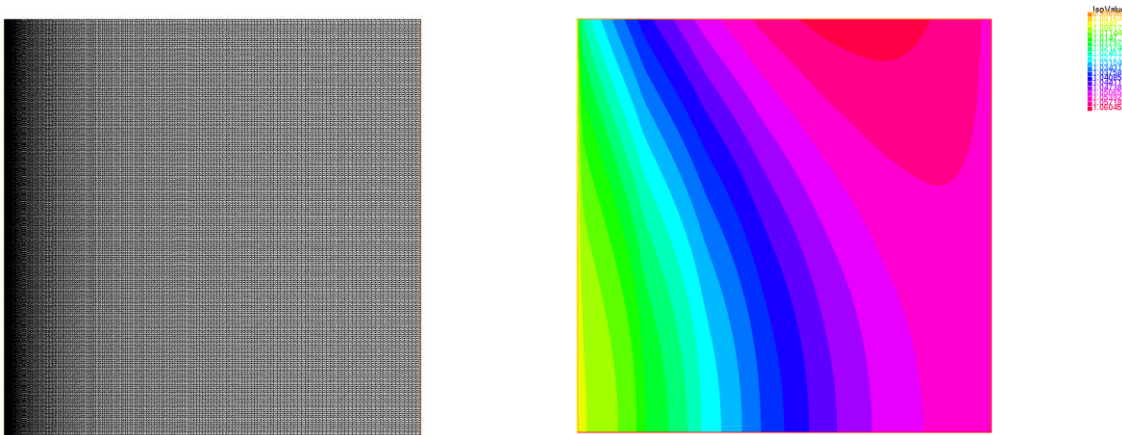


Imagen 8. Malla y solución a la concentración adimensional del sistema ( $n = 200$  ;  $nt = 80000$  ;  $nv = 40401$ )

## 3.3 SINTAXIS DE LAS ECUACIONES.

En FreeFem++ los problemas se describen en la forma variacional. Por lo tanto, habrá una forma bilineal  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , una forma lineal  $l(\mathbf{f}, \mathbf{v})$  y condiciones de frontera. La expresión general es:

$$\text{problem } P(u, v) = a(u, v) - l(f, v) + \text{condiciones de frontera} = 0;$$

Las palabras clave “problem” y “solve” definen y resuelven el problema variacional construyendo el sistema lineal con ayuda de sus distintos resolutores lineales: CG, UMFPACK y GM-RES [25]. La formulación débil (formulación variacional) de un problema definido mediante ecuaciones diferenciales es una forma alternativa en que dichas ecuaciones se escriben en forma integral, dando lugar a ecuaciones tratables mediante los métodos de álgebra lineal sobre un espacio vectorial. Para tal objetivo, se hace uso de las siguientes fórmulas de Green [28]:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \bar{n} ds = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dxdy + \int_{\Omega} f \Delta g \, dxdy$$

y

$$\int_{\Omega} (\nabla f) \eta \, dxdy = - \int_{\Omega} f (\nabla \eta) \, dxdy + \int_{\partial\Omega} (\bar{n} f) \eta \, ds$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $\eta$  pueden ser las variables dependientes o las auxiliares, las integrales de superficie sobre  $\Omega$  se definen en el dominio bidimensional de  $x$  y  $y$ , mientras que las integrales de línea indican las condiciones sobre la frontera  $\partial\Omega$ .

Para la presente tesis, se desarrolla una solución numérica mediante la técnica de elementos finitos para el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (12) – (15) que se encuentran acopladas a las condiciones de frontera (16) – (19). Se propone un método iterativo con ayuda de FreeFem++ que permita encontrar la solución aproximada de las variables adimensionales  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{P}$  y  $\tilde{c}$  mediante una convergencia de  $1 \times 10^{-8}$  para cada variable. Es muy importante aclarar que los términos convectivos de las ecuaciones de momentum pueden ser despreciados debido a que los números de Reynolds en la microescala son muy pequeños, sin embargo, el presente trabajo presenta una solución completa de cada una de las

ecuaciones que interviene en el sistema. Para llegar a dicha solución, se comienza con una discretización temporal y espacial de las ecuaciones con la finalidad de dividir la región de interés en múltiples dominios y así generar una mejor aproximación a la solución.

### 3.4 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

La formulación débil de las ecuaciones con ayuda de las fórmulas de Green, permite una fácil implementación de la ecuación de continuidad a través de un factor de corrección  $\epsilon \sim 1 \times 10^{-12}$  que la relaciona con las de momentum. Se hace uso del comando “convect” para poder trabajar con la parte temporal de los términos convectivos de las velocidades y la concentración. El uso de este comando permite una implementación numérica sencilla capaz de resolver problemas dependientes del tiempo, aspecto muy importante para el manejo de la convergencia. Para poder hacer uso de esta técnica numérica, se debe de considerar que, dependiendo del número de variables dependientes a resolver, será la cantidad de variables auxiliares que se deben de considerar. Tomando en cuenta los comentarios anteriores, a continuación, se presenta la formulación variacional de la ecuación de continuidad:

De la ecuación de continuidad (12):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0$$

Con la finalidad de relacionar esta expresión con las de momentum en las direcciones longitudinal y transversal, se agrega un tercer término del lado izquierdo de la igualdad, dejando la expresión anterior de la siguiente manera

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} + \epsilon \tilde{P} = 0$$

Multiplicando toda la ecuación por la presión auxiliar,  $p_a$ :

$$\left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} + \epsilon \tilde{P} \right] p_a = 0$$

Integrando sobre el dominio  $\Omega$ , se llega a la forma:

$$(20) \quad \int \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} + \epsilon \tilde{P} \right] p_a d\Omega = 0$$

La razón por la cual se utiliza la presión auxiliar en esta ecuación es porque para las ecuaciones de momentum en la direcciones longitudinal y transversal, se hace uso de  $u_a$  y  $v_a$ , respectivamente.

### 3.5 ECUACIÓN DE MOMENTUM EN DIRECCIÓN LONGITUDINAL.

Para el caso de las ecuaciones de momentum, antes de comenzar con una discretización espacial, se hace uso de una discretización temporal y para poder diferenciar entre las variables actuales y anteriores, se consideran las siguientes expresiones,  $\tilde{u}^{n+1}$  y  $\tilde{u}^n$ , respectivamente.

Recordando la ecuación original (13), tenemos que:

$$\epsilon R e_H \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2}$$

Se comienza igualando a cero la ecuación:

$$\epsilon R e_H \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} - \left( \epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) = 0$$

Para facilitar la implementación de la formulación débil a través de la discretización temporal y espacial, se explicará en 3 partes, correspondientes a los términos convectivos, el término relacionado a la presión y los términos difusivos. Esto con el fin de contar con ecuaciones más pequeñas y manejables. Comenzando con los términos convectivos, reemplazamos la derivada temporal por las variables  $\tilde{u}^{n+1}$  y  $\tilde{u}^n$  en toda la ecuación.

$$\epsilon R e_H \left( \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} + \tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \tilde{P}^{n+1}}{\partial X} - \left( \epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}^{n+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^{n+1}}{\partial Y^2} \right) = 0$$

## 3.5.1 PRIMERA PARTE, TÉRMINOS CONVECTIVOS

Retomando exclusivamente los términos convectivos, e incluyendo a las variables  $\tilde{u}^{n+1}$  y  $\tilde{u}^n$ :

$$\varepsilon Re_H \left( \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} + \tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right)$$

Se factoriza un  $\Delta t$ :

$$\varepsilon Re_H \left[ \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \left( \tilde{u}^n - \Delta t \left[ \tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right] \right) \right]$$

Se multiplica a toda la ecuación por una variable de velocidad auxiliar:

$$\varepsilon Re_H \left[ \tilde{u}_{aux} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{u}_{aux}}{\Delta t} \left( \tilde{u}^n - \Delta t \left[ \tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right] \right) \right]$$

Se hace uso del comando “convect”, obteniendo así la versión final de los términos convectivos de la ecuación de momentum en la dirección longitudinal:

$$(21) \quad \varepsilon Re_H \left[ \tilde{u}_{aux} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{u}_{aux}}{\Delta t} \cdot \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{u}^n) \right]$$

## 3.5.2 SEGUNDA PARTE, TÉRMINO DE PRESIÓN.

Continuando con la presión y los términos difusivos de la ecuación de momentum, se hace uso de las fórmulas de Green. Para comenzar con el término de presión, será necesario tomar en cuenta la segunda fórmula de Green:

$$\int \int_{\Omega} (\nabla f) \eta dx dy = - \int \int_{\Omega} f (\nabla \eta) dx dy + \int_{\partial \Omega} (\bar{n} f) \eta ds,$$

De las condiciones de tipo Dirichlet solo se conservan los siguientes términos:

$$\int \int_{\Omega} (\nabla f) \eta dx dy = - \int \int_{\Omega} f (\nabla \eta) dx dy$$

Adaptándolo al término de presión y multiplicando por la variable auxiliar, se obtiene una equivalencia que puede ser integrada a la sintaxis de la resolución del problema en FreeFem++, sin necesidad de utilizar comandos:

$$(22) \quad \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{aux} \frac{\partial \tilde{p}^{n+1}}{\partial X} d\Omega = - \int \int_{\Omega} \tilde{p}^{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_{aux}}{\partial X} d\Omega$$

### 3.5.3 TERCERA PARTE, TÉRMINOS DIFUSIVOS.

Para los términos difusivos también es requerido hacer uso de la primera fórmula de Green:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \bar{n} ds = \int \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dxdy + \int \int_{\Omega} f \Delta g dxdy$$

Y de las condiciones de frontera permanecen solo los siguientes términos:

$$\int \int_{\Omega} f \Delta g dxdy = - \int \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dxdy$$

Adaptándolo a los términos difusivos y multiplicando por la variable auxiliar, se obtiene la forma inicial de la ecuación de Green, por lo cual podemos llegar a una equivalencia escribiendo a  $\tilde{u}^{n+1}$  y  $\tilde{u}_{aux}$  como funciones mediante un gradiente, esta sería la forma final de los términos difusivos que puede aplicarse a la sintaxis de FreeFem++:

$$(23) \quad \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{aux} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}^{n+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^{n+1}}{\partial Y^2} \right) dxdy = - \int \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{aux} \cdot \nabla \tilde{u}^{n+1} dxdy$$

Finalmente, para el caso de la ecuación de momentum en dirección longitudinal, sustituyendo las ecuaciones (21), (22) y (23) en la ecuación de momentum en la dirección longitudinal, llegamos a una versión de la ecuación de momentum que se encuentra en términos de la sintaxis que se maneja en FreeFem++:

$$(24) \quad \int \int_{\Omega} \varepsilon Re_H \left[ \tilde{u}_{aux} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{u}_{aux}}{\Delta t} \cdot \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{p}^n], -\Delta t, \tilde{u}^n) \right] d\Omega - \int \int_{\Omega} \tilde{p}^{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_{aux}}{\partial X} d\Omega + \int \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{aux} \cdot \nabla \tilde{u}^{n+1} d\Omega = 0.$$

## 3.6 SISTEMA DE ECUACIONES EN SINTAXIS DE FREEFEM++.

El mismo procedimiento explicado en las secciones 3.5.1 – 3.5.3, debe realizarse para obtener una formulación variacional de la ecuación de momentum en la dirección transversal y de la ecuación de concentración.

Una vez que el total de las ecuaciones se encuentran en su formulación variacional, escritas con la sintaxis que maneja el software de FreeFem++ es posible integrarlas en el código del programa, a continuación, muestro un resumen del sistema que se obtiene una vez que todas las ecuaciones se encuentran en la forma deseada:

$$(25) \quad \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} + \epsilon \tilde{P} \right] p_a d\Omega = 0$$

$$(26) \quad \int_{\Omega} \epsilon Re_H \left[ \tilde{u}_{aux} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{u}_{aux}}{\Delta t} \cdot convect([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{u}^n) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{P}^{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_{aux}}{\partial X} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{aux} \cdot \nabla \tilde{u}^{n+1} d\Omega = 0.$$

$$(27) \quad \int_{\Omega} \epsilon^3 Re_H \left[ \tilde{v}_{aux} \frac{\tilde{v}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{v}_{aux}}{\Delta t} \cdot convect([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{v}^n) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{P}^{n+1} \frac{\partial \tilde{v}_{aux}}{\partial Y} d\Omega + O(\epsilon^4) \int_{\Omega} \nabla \tilde{v}_{aux} \cdot \nabla \tilde{v}^{n+1} d\Omega = 0$$

$$(28) \quad \int_{\Omega} \epsilon Re_H Sc \left[ \tilde{C}_{aux} \frac{\tilde{C}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{C}_{aux}}{\Delta t} \cdot convect([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{C}^n) \right] d\Omega + O(\epsilon^2) \int_{\Omega} \nabla \tilde{C}_{aux} \cdot \nabla \tilde{C}^{n+1} d\Omega = 0$$

Una vez integradas estas ecuaciones en el código, así como las condiciones de frontera, el problema puede resolverse mediante FreeFem++, a continuación, se presentan los resultados:



## CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Entre los diferentes parámetros que modifican las ecuaciones, realizaron observaciones a dos diferentes números de Schmidt. Como ya se explicó en el capítulo 2, el número de Schmidt es comúnmente utilizado en el estudio de la mecánica de fluidos, particularmente en el análisis de los fenómenos de transporte, y se trata de una magnitud física adimensional que caracteriza la importancia relativa entre la difusión de la cantidad de momento y la difusión de masa. A continuación, se presentan los resultados segmentando las gráficas en apartados:

### 4.1 BAJO NÚMERO DE SCHMIDT ( $Sc = 50$ ).

#### 4.1.1 PRESIÓN.

Esta sección muestra gráficamente la presión vista como una función de la coordenada  $X$ , manteniendo constantes los siguientes parámetros adimensionales: número de Schmidt, coordenada transversal, número de Reynolds, factor de esbeltez y coeficiente adimensional que considera el efecto de la reflexión ( $Sc = 50$ ,  $Y = 0.5$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ ).

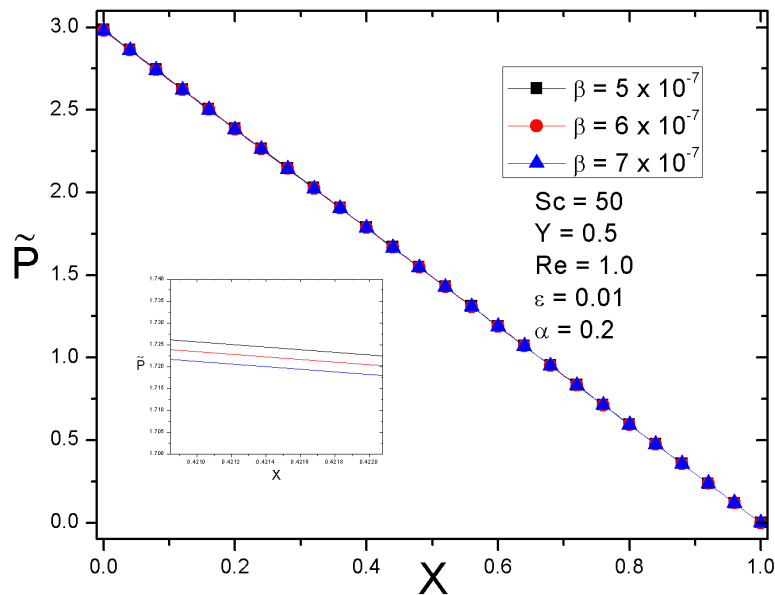


Imagen 9. Presión  $\tilde{P}$  contra  $X$ , sistema ( $Sc = 50$ ,  $Y = 0.5$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Al analizar esta variable hay que tener presente que la presión es función únicamente de la coordenada longitudinal adimensional ( $X$ ), esto debido a que estamos trabajando en un microcanal y el flujo se encuentra completamente desarrollado, por lo tanto, la diferencia de presión a lo largo de la coordenada transversal ( $Y$ ), es igual a cero y esta es la razón por la cual únicamente se gráfica esta variable respecto a la coordenada longitudinal.

Por otra parte, el gráfico ilustra adecuadamente el comportamiento físico del fluido, al ser la presión función únicamente de  $X$ , se espera que exista una caída de presión a lo largo del microcanal, registrando el valor máximo a la entrada del canal de aproximadamente 3 hasta reducirse a cero en la salida de este. Cabe aclarar que estos números representan el valor de la presión adimensional. Un punto para considerar es que, en el gráfico, tenemos 3 perfiles de presión con diferentes valores de  $\beta$  ( $\beta = 5 \times 10^{-7}, \beta = 6 \times 10^{-7}, \beta = 7 \times 10^{-7}$ ).

Puede parecer despreciable, pero es importante observar como el efecto de  $\beta$  se hace presente en la presión, realizando un acercamiento a las líneas de presión, puede descubrirse que este parámetro guarda una relación inversamente proporcional al valor de la presión. Tal y como se comentó en el capítulo 2, el parámetro  $\beta$  representa la filtración adimensional, sin embargo, entraremos más a detalle en su significado físico en las siguientes variables, debido a su poco impacto en la presión.

### 4.1.2 VELOCIDAD LONGITUDINAL.

Esta sección muestra gráficamente la velocidad longitudinal vista como una función de la coordenada transversal  $Y$ , manteniendo constantes los siguientes parámetros adimensionales: número de Schmidt, coordenada longitudinal, número de Reynolds, factor de esbeltez y factor de reflexión ( $Sc = 50, X = 0.5, Re = 1.0, \varepsilon = 0.01, \alpha = 0.02$ ).

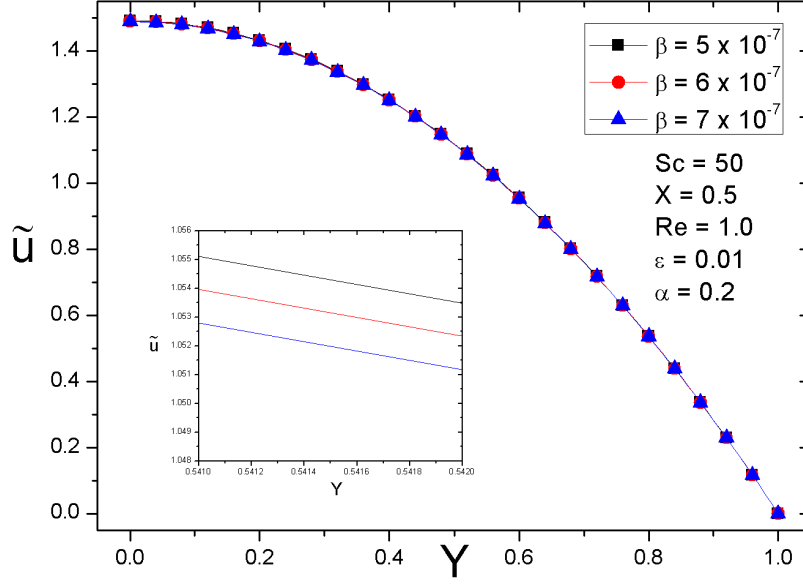


Imagen 10. Velocidad  $\tilde{u}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 50$ ,  $X = 0.5$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

En esta figura se muestran 3 perfiles de velocidad  $\tilde{u}$  para 3 valores de  $\beta$  ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 6 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ), observando que en los 3 casos se obtienen perfiles parabólicos, aspecto que no es de extrañar, ya que claramente se puede observar que en  $Y = 0$ , punto que representa el centro del microcanal, la máxima velocidad alcanzada es de aproximadamente 1.5 para los 3 casos; mientras que en  $Y = 1$ , se satisface para todos los perfiles la condición de no deslizamiento, y por lo tanto para todos los perfiles la velocidad  $\tilde{u}$  es de cero. Como ya se comentó, en esta figura se muestran 3 perfiles, sin embargo, tal y como se observa en la presión la dependencia del parámetro de filtración  $\beta$  no tiene mucha influencia en la velocidad longitudinal, pero si analizamos mediante un acercamiento como se muestra en el recuadro inferior izquierdo se puede observar que conforme el parámetro adimensional  $\beta$  aumenta, la velocidad  $\tilde{u}$  disminuye. Esto se debe a que al aumentar ligeramente el valor de  $\beta$ , la filtración a lo largo de la coordenada transversal aumenta, propiciando un incremento en la velocidad transversal  $\tilde{v}$  y debido a la conservación de masa, si  $\tilde{v}$  aumenta  $\tilde{u}$  disminuye. Esta es la razón por la cual existen fluctuaciones muy ligeras en la presión. Quiero destacar que el valor de  $\beta$  puede tomar valores mucho más grandes para visualizar de mejor manera este efecto, lamentablemente al trabajar con la concentración se debe cuidar muy bien

el fenómeno físico, y en un problema de ósmosis inversa la velocidad transversal de filtración va a ser muy baja en todo momento.

Es importante tener presente que, como se explicó en la sección anterior, los cambios en la presión a lo largo de la coordenada transversal son despreciables y la caída de presión lineal que experimenta el flujo, está en función únicamente de la coordenada longitudinal, esto nos llevará a observar una reducción en el perfil de la velocidad  $\tilde{u}$ , sin embargo, esta caída de presión no representa un cambio en el perfil de una magnitud considerable. Esta es la razón de que no se muestran gráficos de la velocidad  $\tilde{u}$  a distintos valores de  $X$ .

#### 4.1.3 VELOCIDAD TRANSVERSAL.

Esta sección muestra gráficamente la velocidad transversal vista como una función de la coordenada transversal  $Y$ , manteniendo constantes los siguientes parámetros adimensionales: número de Schmidt, número de Reynolds, factor de esbeltez y el factor de reflexión ( $Sc = 50$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.02$ ). Se presentan 2 gráficos cuyo valor  $\beta$ , representan los dos extremos analizados para este parámetro ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ), y a su vez, cada gráfico muestra el perfil de velocidad  $\tilde{v}$ , en distintos valores de  $X$ . Retomando el análisis de la sección anterior, los gráficos muestran que la velocidad  $\tilde{u}$  para  $Y = 1$ , es igual a cero, ya que es en las paredes del canal donde se cumple la condición de no deslizamiento; la conservación de masa nos indica entonces, que la velocidad en este punto se compone únicamente de su componente transversal, y efectivamente en los gráficos de esta sección podemos observar que la velocidad transversal máxima  $\tilde{v}$ , se presenta en  $Y = 1$ . Caso contrario para  $Y = 0$ , en donde la velocidad longitudinal máxima se hace presente (aproximadamente 1.5), en el gráfico de la velocidad transversal observamos que la velocidad es igual a cero, por lo tanto, se satisface la ecuación de continuidad.

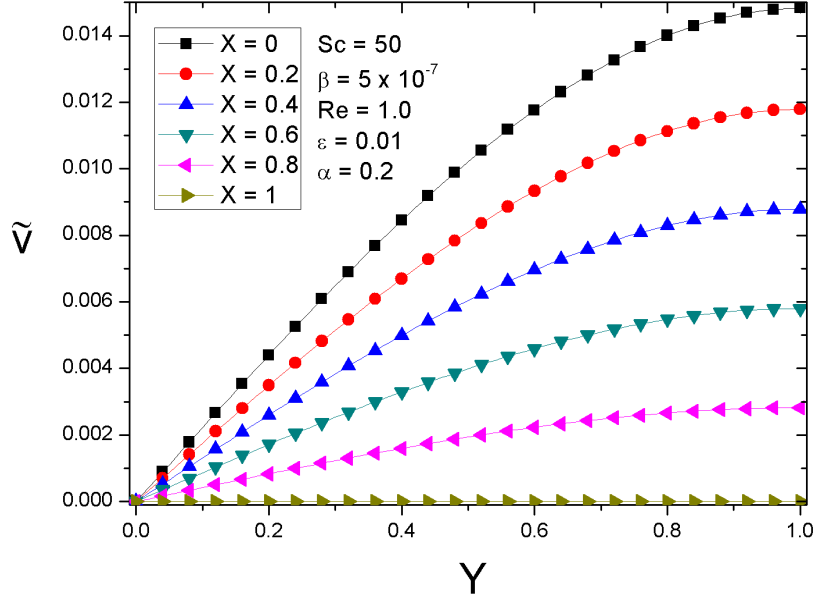


Imagen 11. Velocidad  $\tilde{v}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 50$ ,  $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Lo anterior se cumple para todos los perfiles graficados con excepción de  $X = 1$ , para explicar este comportamiento hay que retomar la ecuación (19), de las condiciones de frontera; observar que la velocidad  $\tilde{v}$  depende de la presión  $\tilde{P}$  y del parámetro de filtración  $\beta$ . Ahora, si se observa el gráfico de presión de la primera sección de este capítulo, encontraremos que a medida que nos acercamos a  $X = 1$ , la presión tiende a cero, por lo tanto, conectado este comportamiento con la ecuación (19), si la presión tiende a cero en  $X = 1$ , entonces esto se verá reflejado en la velocidad  $\tilde{v}$ , la cual tiende también a un valor cercano a cero, que es precisamente el comportamiento que observamos en el gráfico.

Habiendo explicado esta correlación entre la velocidad  $\tilde{v}$  y la presión  $\tilde{P}$ , entonces es de esperarse que, así como en  $X = 1$ , (que la presión tiende a cero y por consecuencia la velocidad  $\tilde{v}$  también tiende a cero), cuando  $X = 0$ , se presenta la presión máxima, y relacionando esto con la ecuación (19), y con el gráfico mostrado en esta sección, podremos encontrar que la velocidad máxima  $\tilde{v}$ , se presenta en este punto ( $X = 0$ ).

En la siguiente tabla se muestra una comparación de los valores aproximados que toma  $\tilde{v}$  en  $Y = 1$ , para los dos casos de  $\beta$  ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ) y para todos los perfiles graficados a distintos valores de  $X$ :

| Valor de $X$ | $\tilde{v}$<br>( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ) | $\tilde{v}$<br>( $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ) | Incremento en $\tilde{v}$ |
|--------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------|
| 0            | 0.015                                         | 0.021                                         | 40%                       |
| 0.2          | 0.012                                         | 0.0165                                        | 38%                       |
| 0.4          | 0.009                                         | 0.012                                         | 33%                       |
| 0.6          | 0.006                                         | 0.008                                         | 33%                       |
| 0.8          | 0.003                                         | 0.004                                         | 33%                       |
| 1            | 0                                             | 0                                             | 0%                        |

Como lo comentábamos en el párrafo anterior la velocidad  $\tilde{v}$ , se correlaciona con el parámetro de filtración  $\beta$  en las ecuaciones de frontera, esto queda bien evidenciado en el análisis de la tabla anterior en donde podemos observar claramente una relación directamente proporcional entre el parámetro de filtración y la velocidad transversal. A un mayor valor de  $\beta$ , naturalmente encontraremos que la velocidad transversal será más grande, debido a un aumento en la capacidad de filtrado.

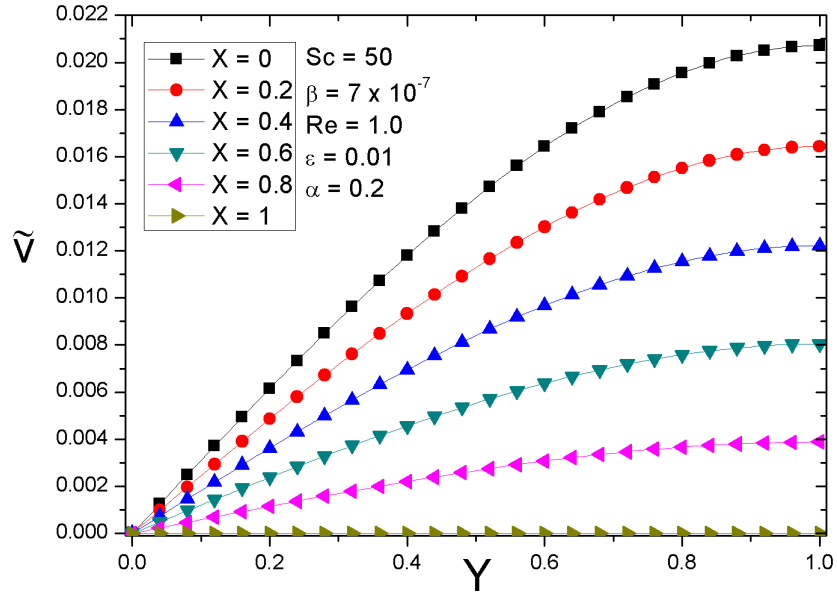


Imagen 12. Velocidad  $\tilde{v}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 50$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Es muy interesante como un aumento del 40% en el valor del parámetro de filtrado tiene como consecuencia un aumento de la misma magnitud para el perfil de velocidad en  $X = 0$ , punto en donde se registra el valor máximo de velocidad transversal, para luego permanecer en un aumento constante del 33%, a partir de  $X = 0.4$

## 4.2 ALTO NÚMERO DE SCHMIDT ( $Sc = 100$ ).

### 4.2.1 PRESIÓN.

Esta sección muestra gráficamente la presión vista como una función de la coordenada  $X$ , manteniendo constantes los siguientes parámetros adimensionales: número de Schmidt, coordenada transversal, número de Reynolds, factor de esbeltez y factor de reflexión ( $Sc = 100$ ,  $Y = 0.5$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.02$ ).

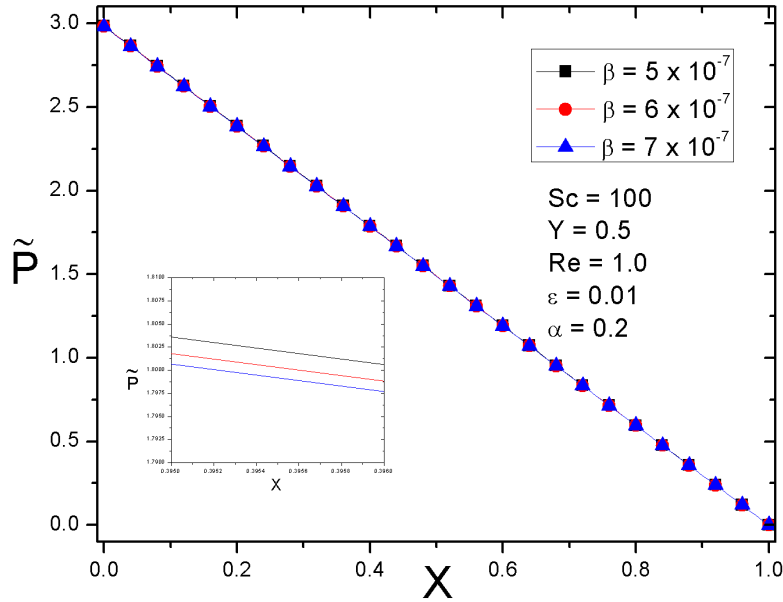


Imagen 13. Presión  $\tilde{P}$  contra  $X$ , sistema ( $Sc = 100$ ,  $Y = 0.5$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Hay que recordar que la presión es función únicamente de la coordenada longitudinal adimensional ( $X$ ), debido a que se analiza un microcanal con presencia de flujo completamente desarrollado, en consecuencia, la diferencia de presión a lo largo de la coordenada transversal ( $Y$ ), es igual a cero. Es por esto que solo se gráfica esta variable respecto a la coordenada longitudinal.

Ya que la presión es función únicamente de  $X$ , existe una caída de presión a lo largo del microcanal, registrando el valor máximo a la entrada del canal de aproximadamente 3 hasta reducirse a cero en la salida de este. Estos valores representan el valor de la presión adimensional.

La gráfica muestra 3 perfiles de presión con diferentes valores de  $\beta$  ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 6 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ), hay que recordar que el parámetro  $\beta$  representa la filtración adimensional. Es importante observar como el efecto de  $\beta$  se hace presente en la presión, por muy diminuto que parezca, realizando un acercamiento a las líneas de presión, puede descubrirse que este parámetro guarda una relación inversamente proporcional al valor de la presión.



## 4.2.2 VELOCIDAD LONGITUDINAL.

Esta sección muestra gráficamente la velocidad longitudinal vista como una función de la coordenada transversal  $Y$ , manteniendo constantes los siguientes parámetros adimensionales: número de Schmidt, coordenada longitudinal, número de Reynolds, factor de esbeltez y factor de reflexión ( $Sc = 100$ ,  $X = 0.5$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.02$ ).

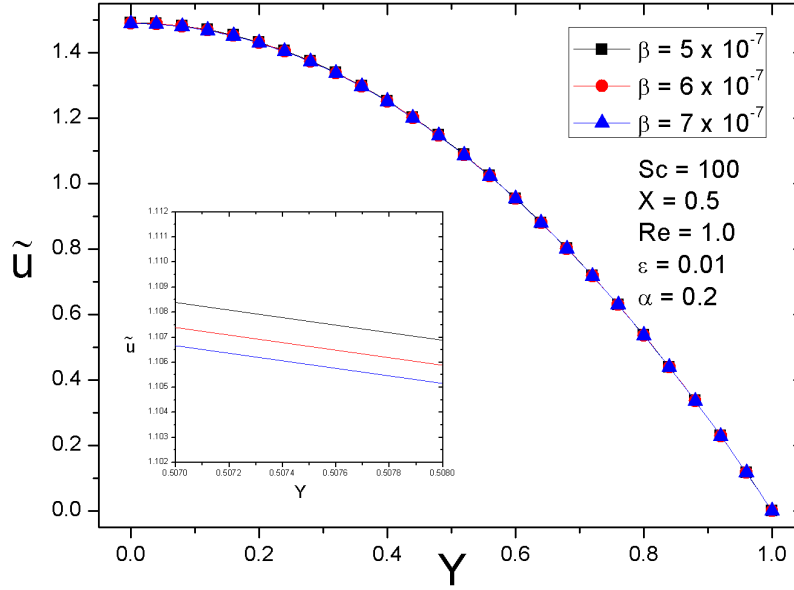


Imagen 14. Velocidad  $\tilde{u}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 100$ ,  $X = 0.5$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

En esta figura se muestran 3 perfiles de velocidad  $\tilde{u}$  para 3 valores de  $\beta$  ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 6 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ), nuevamente es posible observar que para  $Y = 0$ , en el centro del microcanal, la máxima velocidad alcanzada es de aproximadamente 1.5 para los 3 casos; por otra parte, en  $Y = 1$ , se satisface para todos los perfiles la condición de no deslizamiento, y por lo tanto para todos los perfiles la velocidad  $\tilde{u}$  es de cero. Como ya se comentó en el primer análisis de presión y velocidad longitudinal para un número de  $Sc$  bajo ( $Sc = 50$ ), para el caso de la presión y de la velocidad longitudinal la dependencia del parámetro de filtración  $\beta$  no tiene un impacto significativo, si realizamos un acercamiento en el gráfico de velocidad longitudinal se puede observar que conforme el parámetro adimensional  $\beta$  aumenta, la velocidad  $\tilde{u}$  disminuye. Esto se debe a que al aumentar ligeramente el valor de  $\beta$ , la filtración a lo largo de la coordenada transversal aumenta,

propiciando un incremento en la velocidad transversal  $\tilde{v}$  y debido a la conservación de masa, si  $\tilde{v}$  aumenta  $\tilde{u}$  disminuye, nuevamente podemos observar que se satisface la ecuación de conservación de masa. Esta es la razón por la cual existen fluctuaciones muy ligeras en la presión. Nuevamente hay que remarcar que el valor de  $\beta$  puede tomar valores mucho más grandes para visualizar de mejor manera este efecto, sin embargo, al trabajar con la concentración se debe cuidar muy bien el fenómeno físico, y en un problema de ósmosis inversa la velocidad transversal de filtración va a ser muy baja en todo momento.

Hay que recordar que los cambios en la presión a lo largo de la coordenada transversal son despreciables y la caída de presión lineal que experimenta el flujo, está en función únicamente de la coordenada longitudinal, tal como en el análisis anterior de la velocidad longitudinal se espera observar una reducción en el perfil de la velocidad  $\tilde{u}$ , sin embargo, esta caída de presión no representa un cambio en el perfil de una magnitud considerable, debido a esto no se muestran gráficos de la velocidad  $\tilde{u}$  a distintos valores de  $X$ .

#### 4.2.3 VELOCIDAD TRANSVERSAL.

Esta sección muestra gráficamente la velocidad transversal vista como una función de la coordenada transversal  $Y$ , manteniendo constantes los siguientes parámetros adimensionales: número de Schmidt, número de Reynolds, factor de esbeltez y el factor de reflexión ( $Sc = 100$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.02$ ). Se presentan 2 gráficos cuyo valor  $\beta$ , representan los dos extremos analizados para este parámetro ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ), y a su vez, cada gráfico muestra el perfil de velocidad  $\tilde{v}$ , en distintos valores de  $X$ . Nuevamente observamos que los gráficos muestran que la velocidad  $\tilde{u}$  para  $Y = 1$ , es igual a cero, por lo que se cumple la condición de no deslizamiento en las paredes del canal y la velocidad en este punto se compone solo de su componente transversal, se observa también que la velocidad transversal máxima  $\tilde{v}$ , se presenta en  $Y = 1$ . Mientras que para  $Y = 0$ , se presenta la velocidad longitudinal máxima (aproximadamente 1.5), observando el gráfico de la velocidad transversal en este mismo punto observamos que la velocidad es igual a cero, por lo tanto, se satisface la ecuación de continuidad.

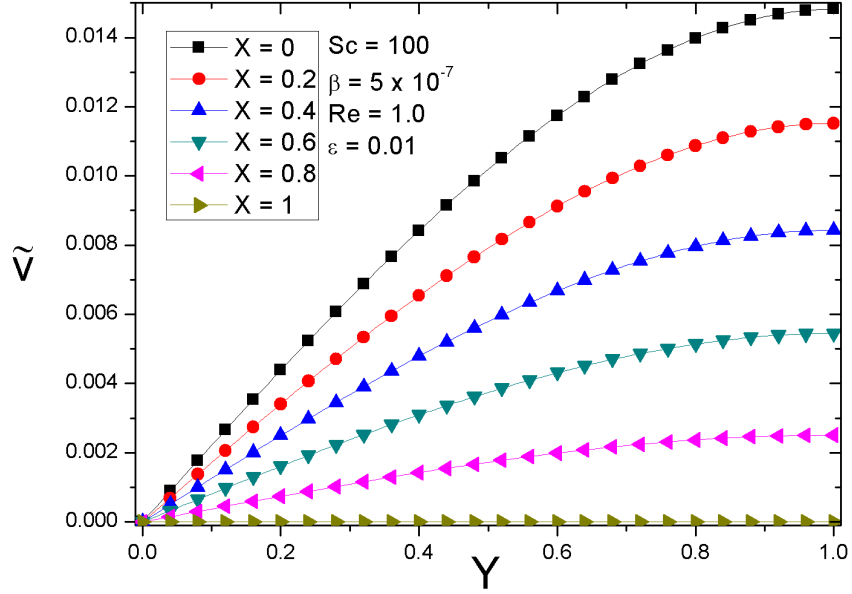


Imagen 15. Velocidad  $\tilde{v}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 100$ ,  $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Nuevamente todos los perfiles graficados con excepción de  $X = 1$ , cumplen con este comportamiento y esto se explica con apoyo la ecuación (19), de las condiciones de frontera; donde se aprecia que la velocidad  $\tilde{v}$  depende de la presión  $\tilde{P}$  y del parámetro de filtración  $\beta$ .

Relacionando esto con gráfico de presión, encontraremos que cercanos a  $X = 1$ , la presión tiende a cero, por lo tanto, si la ecuación (19) nos dice que  $\tilde{v}$  depende de  $\tilde{P}$ , y la presión tiende a cero en  $X = 1$ , entonces  $\tilde{v} = 0$ . Aplicando esta lógica (y tomando en cuenta la ecuación (19)), cuando en  $X = 0$  se presenta la presión máxima, podemos esperar encontrar la velocidad máxima  $\tilde{v}$ , en este punto ( $X = 0$ ). En la siguiente tabla se muestra una comparación de los valores aproximados que toma  $\tilde{v}$  en  $Y = 1$ , para los dos casos de  $\beta$  ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ) y para todos los perfiles graficados a distintos valores de  $X$ :

| Valor de $X$ | $\tilde{v}$<br>( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ) | $\tilde{v}$<br>( $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ) | Incremento en $\tilde{v}$<br>( $Sc = 100$ ) | Incremento en $\tilde{v}$<br>( $Sc = 50$ ) |
|--------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 0            | 0.015                                         | 0.021                                         | 40%                                         | 40%                                        |
| 0.2          | 0.0115                                        | 0.015                                         | 30%                                         | 38%                                        |
| 0.4          | 0.0085                                        | 0.010                                         | 17%                                         | 33%                                        |
| 0.6          | 0.0055                                        | 0.006                                         | 9%                                          | 33%                                        |
| 0.8          | 0.0025                                        | 0.0025                                        | 0%                                          | 33%                                        |
| 1            | 0                                             | 0                                             | 0%                                          | 0%                                         |

La relación entre parámetro de filtración  $\beta$  y la velocidad  $\tilde{v}$  se observa claramente, a un mayor valor de  $\beta$ , encontraremos que  $\tilde{v}$  es más grande.

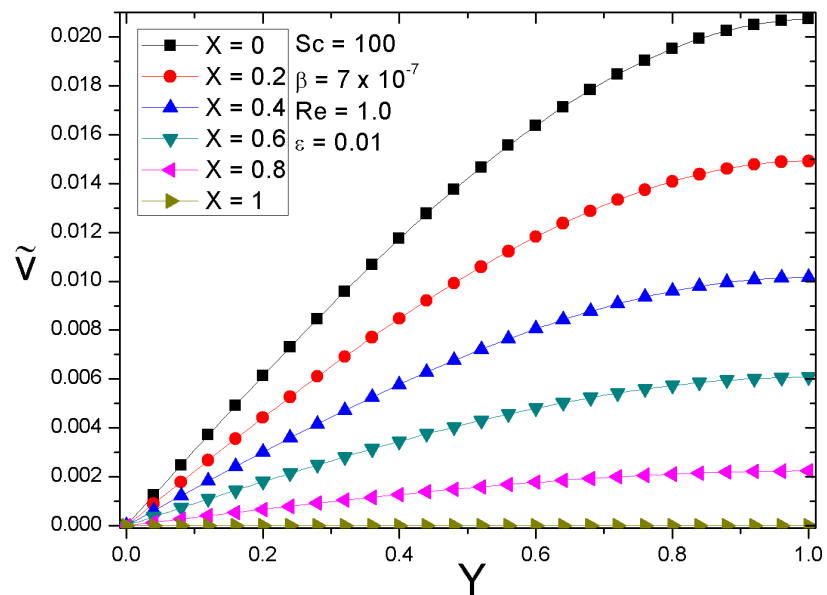


Imagen 16. Velocidad  $\tilde{v}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 100$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\epsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

## 4.3 CONCENTRACIÓN

Se generó una sección específica para el análisis de la concentración ya que esta variable física responde directamente al parámetro adimensional en el que nos apoyamos para distinguir las secciones anteriores (Número de Schmidt). A continuación, se muestra gráficamente la concentración como una función de la coordenada transversal  $Y$ , manteniendo constantes los siguientes parámetros adimensionales: número de Reynolds, factor de esbeltez y el factor de reflexión ( $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.02$ ). Se presentan 2 gráficos para cada caso del Número de Schmidt ( $Sc = 50, 100$ ), y a su vez para cada caso de  $Sc$ , se presentan dos valores de  $\beta$ , que representan los dos extremos analizados para este parámetro ( $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ), cada gráfico muestra los valores de concentración, en distintos valores de  $X$ .

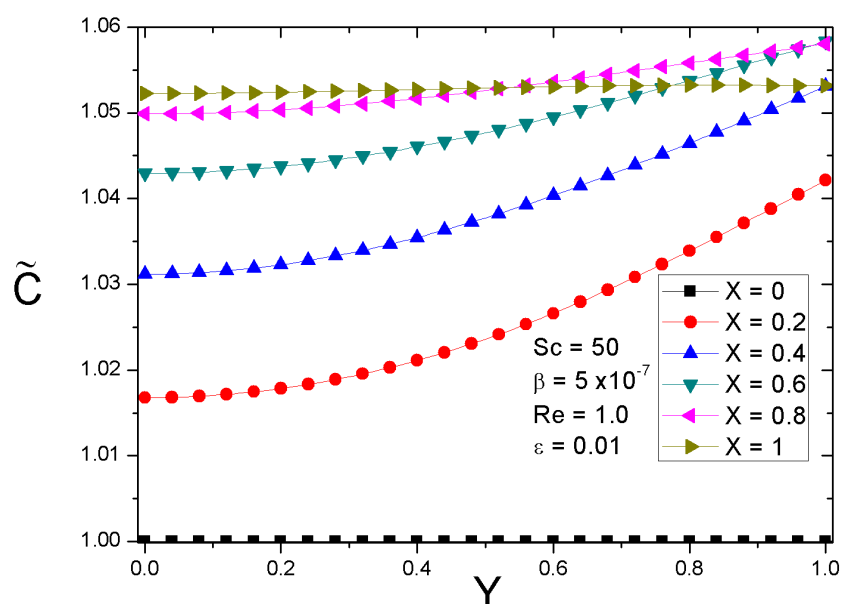


Imagen 17. Concentración  $\tilde{C}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 50$ ,  $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

La primera anotación es el valor constante de la concentración para  $X = 0$  a cualquier valor de  $Y$ , así como también se observa un comportamiento similar en  $X = 1$ , tomando valores de concentración “constantes” (se observan variaciones mínimas). Lo anterior es explicado a través de las ecuaciones (17) y (18), que son las condiciones de frontera.

Esto sucede indistintamente del valor del número de Schmidt sobre el que grafiquemos, ya que es una condición del problema determinada arbitrariamente, sin embargo, al variar el valor del parámetro  $\beta$  sobre un mismo valor del Número de Schmidt, el valor de la concentración máxima cambia.

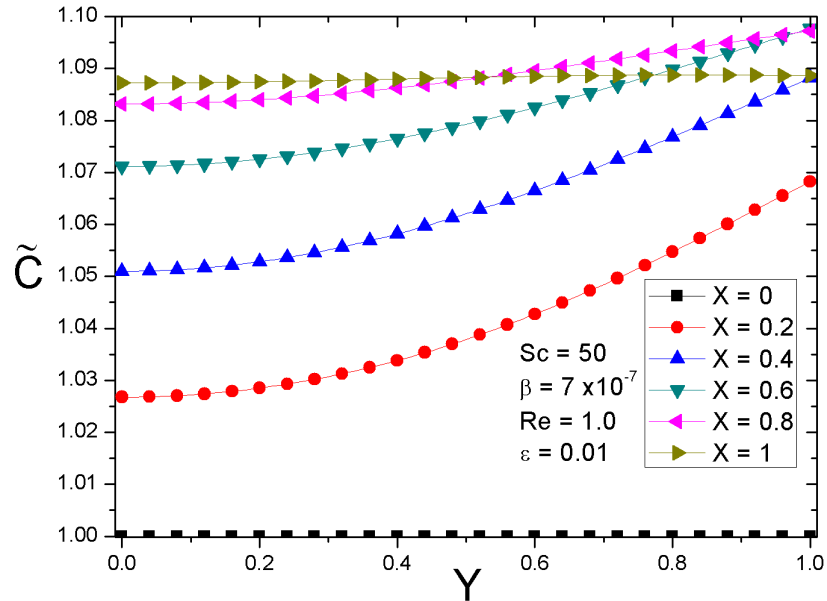


Imagen 18. Concentración  $\tilde{C}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 50$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Las dos gráficas anteriores mantienen un valor constante del Número de Schmidt ( $Sc = 50$ ), sin embargo, a un valor de  $\beta = 5 \times 10^{-7}$ , el aumento máximo en la concentración aparece en  $(X = 0.8, Y = 1)$ , y es un 6% mayor que la concentración inicial aproximadamente. Mientras que a un valor de  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ , este aumento aparece en  $(X = 0.8, Y = 1)$  y es aproximadamente un 10% mayor que la concentración inicial.

Que el aumento máximo en la concentración se haga presente en  $Y = 1$ , puede explicarse debido al fenómeno de concentración de polarización, que como ya se comentó en el capítulo 1, está asociado con el proceso de ósmosis inversa y que es indeseable para usos industriales del mismo. Relacionando esto con el parámetro que considera la filtración  $\beta$  estamos en el entendido que guarda una relación directamente proporcional con el valor de  $\tilde{v}$ , y a su vez, por lo que observamos en el gráfico, este parámetro también guarda una relación directamente proporcional

con el valor de la concentración. En otras palabras, a un mayor valor de  $\beta$ , el valor de la concentración máxima  $\tilde{C}$  incrementa.

Hay que remarcar que este comportamiento, al igual que los valores constantes de la concentración para cualquier valor de  $Y$  en  $X = 0$  y  $X = 1$ , se presentan a cualquiera de los valores de  $Sc$  utilizados en este análisis, y a su vez, esto queda perfectamente explicado con la ecuación de frontera (19), en la que se muestra claramente que la concentración está afectada directamente por el valor de  $\tilde{v}$ .

A continuación, se muestran los gráficos para un valor mayor del Número de Schmidt ( $Sc = 100$ ):

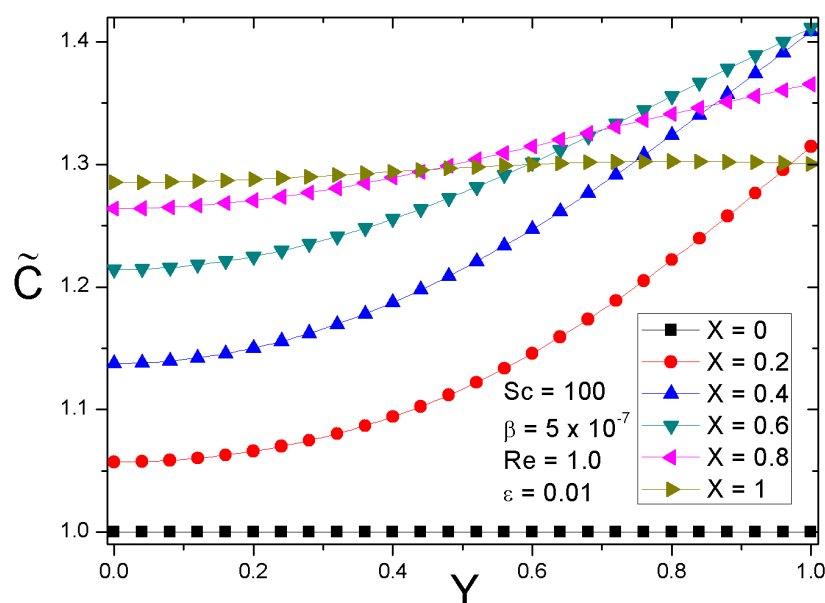


Imagen 19. Concentración  $\tilde{C}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 100$ ,  $\beta = 5 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\epsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Para el caso de  $\beta = 5 \times 10^{-7}$ , el valor del aumento máximo en la concentración es de aproximadamente 40%, mientras que para un valor de  $\beta = 7 \times 10^{-7}$  el aumento máximo es de aproximadamente un 160%. Es importante notar que un aumento en el número de Schmidt de este grado comienza a generar incrementos muy considerables en el valor de la concentración, e incluso comenzamos a ver que los valores de la concentración en  $X = 1$  comienzan a sufrir variaciones más notorias, lo cual compromete la ecuación (17), que debería cumplirse a cabalidad ya que es

una condición de frontera planteada inicialmente. La grafica se muestra a continuación para visualizar la situación detalladamente.

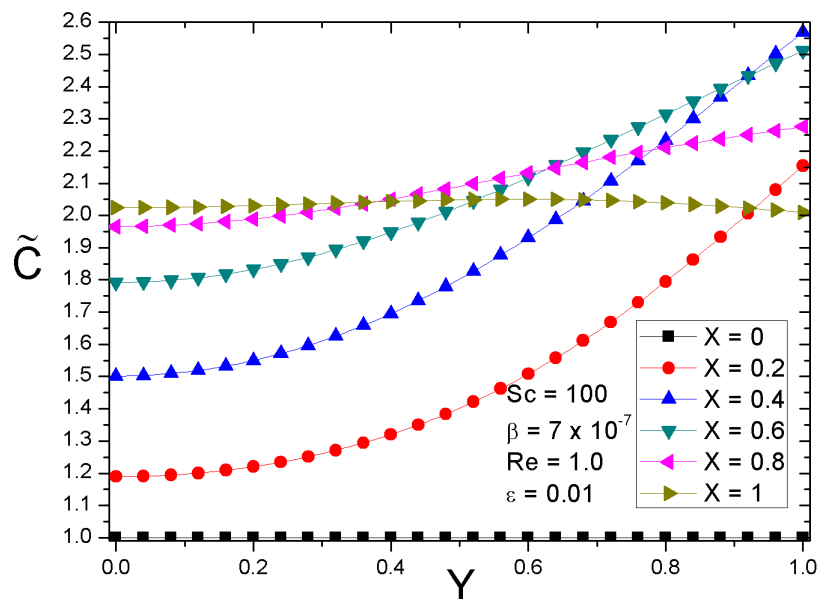


Imagen 20. Concentración  $\tilde{C}$  contra  $Y$ , sistema ( $Sc = 100$ ,  $\beta = 7 \times 10^{-7}$ ,  $Re = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.2$ )

Al ser el número de Schmidt una comparación entre difusión de la cantidad de movimiento y la difusión de masa, podemos tener certeza de que este parámetro debería ser mayor a uno ( $Sc > 1$ ), ya que siendo menor, estaríamos en un sistema en el cual la capa límite de la velocidad posee un menor espesor que la capa límite de la concentración, sin embargo, como pudimos comprobarlo con la gráfica anterior, hay que tener mucho cuidado con el manejo del Número de Schmidt en los sistemas de ósmosis inversa.



## CONCLUSIONES.

Recordando las consideraciones/hipótesis con las cuales se compone el problema:

*“La longitud del canal es extensamente mayor que su altura ( $L \gg H$ ). Esto asegura que una vez resueltas las ecuaciones de dinámica de fluidos y de transferencia de masa, y que se haya alcanzado el criterio de convergencia, llevarán el problema a un estado de flujo estacionario completamente desarrollado”*

Podemos aseverar que esto se cumple a cabalidad ya que la resolución de las ecuaciones con apoyo de FreeFem++ con un criterio de convergencia tan rígido ( $\varepsilon = 1 \times 10^{-12}$ ), garantiza que el flujo se encuentre en un estado estacionario completamente desarrollado. En cuanto a la consideración número 3:

*“La dinámica del fluido se realiza a bajos números de Reynolds, en otras palabras, no hay presencia efectos turbulentos en el sistema.”*

Además de encontrarnos en un régimen de flujo estacionario completamente desarrollado, estamos trabajando a un bajo número de Reynolds. Sin embargo, nuevamente recalco atención en el enunciado número 3:

*“La membrana permitirá que el flujo permeado escape a lo largo de la pared superior del canal, sin embargo, debido a fenómeno de concentración de polarización, el flujo permeado no será constante a lo largo de la longitud  $L$  de la membrana.”*

En el análisis de resultados, se reportó una pérdida de presión a lo largo del eje  $X$ , esto nos da un primer indicio de que la salida de flujo no es constante a lo largo de la longitud total de la membrana, no obstante, esta hipótesis queda casi completamente sustentada en el análisis de la variable de velocidad vertical  $\tilde{v}$ , en donde podemos verificar que la filtración a lo largo de todo el eje  $X$ , se realiza a distintas velocidades y que efectivamente, el parámetro adimensional  $\beta$ , guarda una relación directamente proporcional con la velocidad  $\tilde{v}$ .

Por otra parte, el fenómeno de concentración de polarización queda bien ilustrado en el análisis que se realiza a la concentración  $\tilde{C}$ , un punto importante del comportamiento numérico de esta variable es el cambio de sus valores a lo largo de todo el eje  $X$ , cuando  $Y = 1$ . Aunque el objetivo de este estudio no es ubicar el punto máximo de concentración en las paredes de la membrana, el comportamiento general de los casos estudiados es que en  $Y = 1$ , la concentración incrementa desde  $X = 0$ , hasta  $X = 0.6 - 0.8$ , para posteriormente reducir su valor hasta alcanzar el estado estacionario en  $X = 1$ , (que es una condición inicial del problema). Esto puede ser interpretado como la capa de soluto residual debido a la naturaleza del proceso de Osmosis Inversa, soportando la idea del enunciado número 3.

Por último, la consideración número 4 es más bien, una delimitante obligada para hacer uso de la ecuación (4), asegurando que las matemáticas utilizadas en este trabajo describan el proceso de Osmosis Inversa exclusivamente como el proceso físico y por lo cual el término  $KC$  no tiene efecto sobre el modelado del problema ya que, aunque solo depende de la concentración del fluido no es considerado un cambio químico con velocidad de reacción.

# APÉNDICE 1. LISTADO DE VARIABLES Y PARÁMETROS

## VARIABLES Y PARÁMETROS ADIMENSIONALES

*X*: Posición axial horizontal adimensional  
*Y*: Posición axial vertical adimensional  
 $\tilde{u}$ : Velocidad horizontal adimensional  
 $\tilde{v}$ : Velocidad vertical adimensional  
 $\tilde{C}$ : Concentración del flujo adimensional  
 $\tilde{P}$ : Presión adimensional  
 $\alpha$ : Parámetro adimensional alfa  
 $\beta$ : Parámetro adimensional beta  
 $\varepsilon$ : Relación longitud – ancho del canal.  
 $\tau$ : Tiempo adimensional  
 $\sigma$ : Coeficiente de reflexión  
 $Re_H$ : Número de Reynolds  
 $Sc$ : Número de Schmidt

## VARIABLES DIMENSIONADAS

*x*: Posición horizontal [m]  
*y*: Posición vertical [m]  
*u*: Velocidad horizontal  $\left[\frac{m}{s}\right]$   
*v*: Velocidad vertical  $\left[\frac{m}{s}\right]$   
*C*: Concentración de un punto  $\left[\frac{mg}{m^3}\right]$   
*P*: Presión del flujo [Pa]  
*T*: Temperatura del flujo [K]  
*t*: Tiempo [s]  
 $\dot{Q}_0$ : Caudal que ingresa al canal  $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

## VARIABLES CARACTERÍSTICAS

$u_c$ : Velocidad característica horizontal  $\left[\frac{m}{s}\right]$   
 $v_c$ : Velocidad característica vertical  $\left[\frac{m}{s}\right]$   
 $\Delta P_c$ : Presión característica del flujo [Pa]  
 $C_0$ : Concentración inicial del flujo  $\left[\frac{mg}{m^3}\right]$   
 $t_c$ : Tiempo Característico [s]

## PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL CANAL

*L*: Logitud del canal [m]  
*H*: Altura del canal [m]  
*w*: Profundidad del canal [m]  
*A*: Área transversal del canal [m<sup>2</sup>]

## PROPIEDADES MECÁNICAS DEL FLUIDO/SOLUTO

$\rho$ : Densidad del fluido  $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$   
 $\mu$ : Viscosidad dinámica del fluido  $\left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$   
*k*: Coeficiente de transferencia de masa  $\left[\frac{m^2 s}{kg}\right]$   
 $\Pi$ : Presión Osmótica [Pa]  
*R*: Constante de los gases ideales  $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$   
 $C_p$ : Concentración del flujo permeado  $\left[\frac{mg}{m^3}\right]$   
*D*: Difusividad del soluto en el agua  $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

## APÉNDICE 2. ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL SISTEMA

ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN 2D.

Partimos de la ecuación original:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Recordar la definición de  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$ , ya que se sustituirán las variables dimensionadas en la ecuación:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_c} \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c}$$

$$\frac{\partial(\tilde{u} \cdot u_c)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v} \cdot v_c)}{\partial y} = 0$$

$$u_c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v_c \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0$$

Se sustituye (10) en los valores de  $v_c$ , se factoriza  $u_c$  y se cancela:

Recordar: (10)  $v_c = \frac{H}{L} u_c$

$$u_c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \left( \frac{H}{L} u_c \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \left( \frac{H}{L} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0$$

Se utiliza la regla de la cadena con el fin de que las derivadas permanezcan en términos únicamente de variables adimensionales:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \left( \frac{H}{L} \right) \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0$$

Recordar la definición de  $X$  y  $Y$ , realizar la derivada  $\frac{\partial Y}{\partial y}$ :

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{H}$$

$$\left(\frac{1}{L}\right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{1}{H} \left(\frac{H}{L}\right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0$$

Finalmente se llega a una ecuación adimensional:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0$$

#### ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER – STOKES

Recordar las ecuaciones de Navier-Stokes bajo las consideraciones del problema:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

La adimensionalización de las ecuaciones debe realizarse en ambas direcciones, es importante tener en mente la definición de las variables adimensionales al momento de sustituirlas en alguna ecuación:

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{H} \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_c} \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c} \quad \tilde{C} = \frac{C}{C_0} \quad \tilde{P} = \frac{P - P_0}{\Delta P_c} \quad \tau = \frac{t}{t_c}$$

#### EN DIRECCIÓN $x$ :

Se sustituye el valor de las variables de velocidad y presión en busca de que las variables sean completamente adimensionales:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial(u_c \cdot \tilde{u})}{\partial t} + (u_c \cdot \tilde{u}) \frac{\partial(u_c \cdot \tilde{u})}{\partial x} + (v_c \cdot \tilde{v}) \frac{\partial(u_c \cdot \tilde{u})}{\partial y} \right) = - \frac{\partial(\tilde{P} \cdot \Delta P_c)}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2(u_c \cdot \tilde{u})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_c \cdot \tilde{u})}{\partial y^2} \right)$$

Se factoriza  $u_c$  en los términos convectivos y difusivos:

$$\rho u_c \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (u_c \cdot \tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + (v_c \cdot \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) = -\Delta P_c \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \mu u_c \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)$$

Se aplica la regla de la cadena para escribir las derivadas en función de variables adimensionales:

$$\rho u_c \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + (u_c \cdot \tilde{u}) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + (v_c \cdot \tilde{v}) \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = -\Delta P_c \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \mu u_c \left( \left[ \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right] + \left[ \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right] \right)$$

Resuelva las derivadas  $\frac{\partial X}{\partial x}$  y  $\frac{\partial Y}{\partial y}$ , para esto recuerde la definición de  $X$  y  $Y$ :

$$\rho u_c \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{(u_c \cdot \tilde{u})}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{(v_c \cdot \tilde{v})}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = -\frac{\Delta P_c}{L} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \mu u_c \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

Sustituya (10) y (11), en los valores de  $v_c$  y  $\Delta P_c$ :

Recordar:

$$(10) \quad v_c = \frac{H}{L} u_c$$

$$(11) \quad \Delta P_c = \mu \frac{u_c \cdot L}{H^2}$$

$$\rho u_c \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{(u_c \cdot \tilde{u})}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{(v_c \cdot \tilde{v})}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = -\frac{\Delta P_c}{L} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \mu u_c \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

$$\rho u_c \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \left( u_c \frac{H}{L} \right) \frac{\tilde{v}}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = -\mu \frac{u_c \cdot L}{L \cdot H^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \mu u_c \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

Cancele términos comunes y operaciones:

$$\rho \cancel{u_c} \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \left( u_c \frac{H}{L} \right) \frac{\tilde{v}}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = -\mu \frac{\cancel{u_c} \cdot L}{L \cdot H^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \mu \cancel{u_c} \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\mu}{H^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \mu \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

Multiplique la ecuación por  $\frac{H^2}{\mu}$ :

$$\rho \frac{H^2}{\mu} \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \frac{H^2}{\mu} \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

Factorice  $\frac{u_c}{L}$  en los términos convectivos y distribuya  $H^2$  en los términos difusivos:

$$\rho \frac{H^2}{\mu} \left( \frac{u_c}{L} \right) \left( \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \left( \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{H^2}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

Reacomode las variables y parámetros que multiplican a los términos convectivos:

$$\left( \frac{\rho \cdot u_c \cdot H}{\mu} \right) \left( \frac{H}{L} \right) \left( \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \left( \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right)$$

Tome en cuenta que:

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \quad Re_H = \frac{\rho \cdot u_c \cdot H}{\mu}$$

De modo que sustituyendo  $\varepsilon$  y  $Re_H$ :

$$(Re_H \cdot \varepsilon) \left[ \left( \frac{L}{u_c \cdot t_c} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2}$$

Finalmente se obtiene una ecuación que si se analiza detenidamente se puede visualizar que, el coeficiente de la derivada temporal, debido a que depende de **variables que no son adimensionales**, por lo que es preciso definir el orden de magnitud del tiempo característico:

$$\frac{L}{u_c \cdot t_c} \rightarrow t_c|_u = \frac{L}{u_c}$$

Y con lo anterior, se obtiene una ecuación completamente en términos de variables adimensionales:

$$(\varepsilon \cdot Re_H) \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2}$$

Ahora se busca realizar el mismo procedimiento, pero en la dirección de "v".

EN DIRECCIÓN y:

De igual modo se procede a sustituir la definición de las variables dimensionadas para que la ecuación esté en función de variables adimensionales:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial (v_c \cdot \tilde{v})}{\partial t} + (u_c \cdot \tilde{u}) \frac{\partial (v_c \cdot \tilde{v})}{\partial x} + (v_c \cdot \tilde{v}) \frac{\partial (v_c \cdot \tilde{v})}{\partial y} \right) = -\frac{\partial (\tilde{P} \cdot \Delta P)}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 (v_c \cdot \tilde{v})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (v_c \cdot \tilde{v})}{\partial y^2} \right)$$

Utilice la regla de la cadena para que las derivadas también sean función de variables adimensionales, revise la definición de X y Y, para resolver las derivadas:

$$\rho v_c \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + (u_c \cdot \tilde{u}) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + (v_c \cdot \tilde{v}) \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)$$

$$= -\frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial (\tilde{P} \cdot \Delta P_c)}{\partial Y} + \mu v_c \left( \left[ \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right] + \left[ \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right] \right)$$

Se sustituye el valor de (10) y (11), revise rápidamente las ecuaciones si existe duda:

$$\rho v_c \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \left( \frac{v_c}{H} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\Delta P_c}{H} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \mu v_c \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{H}{L} u_c \right) \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \left( \frac{H}{L} u_c \right) \left( \frac{1}{H} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = -\left( \mu \frac{u_c \cdot L}{H^2} \right) \frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \mu \left( \frac{H}{L} u_c \right) \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right)$$

Cancele términos comunes y operaciones:

$$\rho \left( \frac{H}{L} u_c \right) \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \left( \frac{H}{L} u_c \right) \left( \frac{1}{H} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = -\left( \mu \frac{u_c \cdot L}{H^2} \right) \frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \mu \left( \frac{H}{L} u_c \right) \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right)$$



Se obtiene:

$$\rho \left( \frac{H}{L} \right) \left( \frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = - \left( \mu \frac{L}{H^3} \right) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \mu \left( \frac{H}{L} \right) \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right)$$

Multiplique la ecuación por  $\frac{H^3}{\mu L}$  y factorice  $\frac{u_c}{L}$  de los términos convectivos:

$$\rho \left( \frac{H}{L} \right) \left( \frac{H^3}{\mu L} \right) \left( \frac{u_c}{L} \right) \left( \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \left( \frac{H^3}{\mu L} \right) \left( \frac{H}{L} \right) \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right)$$

Reagrupe variables y reduzca operaciones:

$$\left( \frac{\rho u_c H}{\mu} \right) \left( \frac{H^3}{L^3} \right) \left( \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \left( \frac{H^4}{L^2} \right) \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right)$$

Distribuya  $\left( \frac{H^4}{L^2} \right)$  en los términos difusivos:

$$\left( \frac{\rho u_c H}{\mu} \right) \left( \frac{H^3}{L^3} \right) \left( \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \left( \frac{H^4}{L^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right)$$

Revise la definición de  $Re_H$  y  $\varepsilon$ , y sustituya:

$$(Re_H \cdot \varepsilon^3) \left( \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2}$$

Nuevamente se obtiene la complicación que ya se había discutido en la sección anterior, por lo cual se define al valor del tiempo característico en dirección  $y$ , se obtiene una expresión idéntica que la del tiempo característico en dirección  $x$ , y la ecuación de Navier-Stokes en dirección  $y$ , ahora es función únicamente de variables adimensionales:

$$t_c|_v = \frac{L}{u_c}$$

$$(\varepsilon^3 \cdot Re_H) \left[ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2}$$

Nuevamente tenga en mente la definición de variables y parámetros adimensionales:

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{H} \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_c} \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c} \quad \tilde{C} = \frac{C}{C_0} \quad \tau = \frac{t}{t_c} \quad Sc = \frac{\mu}{\rho D}$$

También recuerde la ecuación en función de variables dimensionadas:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} C = D \nabla^2 C$$

Reescribiendo la ecuación se tiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right]$$

Utilizando la definición de la concentración adimensional, se procede a sustituirla para obtener variables adimensionales, cancele términos comunes:

$$\frac{\partial(\tilde{C} \cdot C_0)}{\partial t} + (\tilde{u} \cdot u_c) \frac{\partial(\tilde{C} \cdot C_0)}{\partial x} + (\tilde{v} \cdot v_c) \frac{\partial(\tilde{C} \cdot C_0)}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial^2(\tilde{C} \cdot C_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\tilde{C} \cdot C_0)}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\tilde{u} \cdot u_c) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + (\tilde{v} \cdot v_c) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial^2 \partial \tilde{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \partial \tilde{C}}{\partial y^2} \right]$$

Nuevamente se usa la regla de la cadena para obtener derivadas solo en función de variables adimensionales, revise la definición de  $X$  y  $Y$ , para resolver las derivadas:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + (\tilde{u} \cdot u_c) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + (\tilde{v} \cdot v_c) \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = D \left( \left[ \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} \right] + \left[ \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] \right)$$

$$\frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \left( \frac{u_c}{L} \right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \left( \frac{v_c}{H} \right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = D \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Recuerde (10), sustituya en  $v_c$ , y cancele operaciones:

$$\frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \left(\frac{u_c}{L}\right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \left(\frac{H}{L} u_c\right) \left(\frac{\tilde{v}}{H}\right) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = D \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

$$\frac{1}{t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \left(\frac{u_c}{L}\right) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \left(\frac{u_c}{L}\right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = D \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Multiplique la ecuación por  $\frac{L}{u_c}$ :

$$\left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \left( \frac{L \cdot D}{u_c} \right) \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Tome en cuenta que:

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \quad Re_H = \frac{\rho \cdot u_c \cdot H}{\mu}$$

Ambos lados de la ecuación se multiplican por el valor de  $Re_H$ , el lado derecho por su definición en función de otras variables:

$$Re_H \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \left( \frac{\rho \cdot \cancel{u_c} \cdot H}{\mu} \right) \left( \frac{L \cdot D}{\cancel{u_c}} \right) \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Reduciendo operaciones y reacomodando variables:

$$Re_H \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \left( \frac{\rho \cdot D}{\mu} \right) (H \cdot L) \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Tome en cuenta las siguientes definiciones:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D} \quad D = \frac{\mu}{\rho Sc}$$

Sustituyendo el valor de  $D$  y reduciendo operaciones:

$$Re_H \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \left( \frac{\rho}{\cancel{\rho}} \right) \left( \frac{\cancel{\mu}}{\rho Sc} \right) (H \cdot L) \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

$$Re_H \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \left( \frac{1}{Sc} \right) (H \cdot L) \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Distribuya  $H \cdot L$  del lado derecho:

$$Re_H \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \left( \frac{1}{Sc} \right) \left[ \frac{H}{L} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{L}{H} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Recuerde la definición de  $\varepsilon$  y sustituya en los términos difusivos:

$$Re_H \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \left( \frac{1}{Sc} \right) \left[ \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} \right]$$

Multiplique la ecuación por  $Sc \cdot \varepsilon$ :

$$(Re_H \cdot Sc \cdot \varepsilon) \left[ \frac{L}{u_c \cdot t_c} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2}$$

Tomando la definición del tiempo característico:  $t_c = \frac{L}{u_c}$

$$(Re_H \cdot Sc \cdot \varepsilon) \left[ \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} \right] = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA DE CAUDAL

Se presenta una definición de caudal:

$$\dot{Q}_0 = \int u \, dA$$

Según la **Figura 1**, el área de entrada al canal puede escribirse como:

$$A = H \cdot w$$

Expresando  $A$  como una función de  $y$ :

$$A = y \cdot w$$

Utilizando en los límites de integración las variables geométricas del canal, y la definición anterior de área, puede expresarse como:

$$\dot{Q}_0 = 2 \int_0^H u \, d(y \cdot w)$$

$$\dot{Q}_0 = 2w \int_0^H u \, dy$$

Recordar definiciones importantes:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_c} \quad Y = \frac{y}{H}$$

Estas se utilizan para obtener una definición de caudal en función de variables adimensionales, debido a que ahora son utilizadas únicamente variables adimensionales dentro de la integral, los límites de integración cambian, y queda definida de 0 a 1:

$$\dot{Q}_0 = 2w \int_0^1 (\tilde{u} \cdot u_c) H \, dY$$

$$\dot{Q}_0 = 2wu_c H \int_0^1 \tilde{u} \, dY$$

Se obtiene una ecuación en variables adimensionales, análoga a la definición de caudal:

$$\int_0^1 \tilde{u} \, dY = \frac{\dot{Q}_0}{2wu_c H} \quad \rightarrow \quad \int_0^1 \tilde{u} \, dY = 1$$

Esta ecuación restringe la selección del perfil de velocidad que será utilizado como condición de frontera en el tratamiento del problema, ya que se tendrá que satisfacer que la integral de cero a uno de dicho perfil sea unitaria.

Se tomará como ejemplo un perfil de velocidad elegido arbitrariamente:

$$\tilde{u} = 1.5(1 - y)(1 + y)$$

Integrando de acuerdo con:  $\int_0^1 \tilde{u} dY = 1$

$$\int_0^1 1.5(1 - y)(1 + y) dy = 1.5 \int_0^1 (1 - y^2) dy = 1.5 \int_0^1 dy - 1.5 \int_0^1 y^2 dy$$

$$\int_0^1 1.5(1 - y)(1 + y) dy = \left[ 1.5y - \frac{1.5}{3}y^3 \right]_0^1 = 1.5 - 0.5$$

$$\int_0^1 1.5(1 - y)(1 + y) dy = 1$$

Por lo cual el perfil:  $u = 1.5(1 - y)(1 + y)$ , cumple con la condición de ser unitario en el intervalo de uno a cero y por lo tanto es apto para ser utilizado como el perfil de velocidad de entrada al canal.

#### CONDICIÓN DE FRONTERA DE VELOCIDAD $v$

Como se planteó en el trabajo de Kedem-Katchalsky y Spiegler-Kedem [23,12].

$$v = k[(P - P_0) - \sigma(\Pi - \Pi_0)]$$

Esta ecuación describe el fenómeno de RO y para adimensionalizarla, es imprescindible hacer uso de las siguientes variables:

$$\tilde{P} = \frac{P - P_0}{\Delta P_c} \quad \Pi = CRT \rightarrow \Pi_0 = C_p RT$$

No debe confundirse el término  $\Pi_0$  y asociarse con una “presión osmótica inicial” que conllevaría al uso de una concentración inicial  $C_0$ , sino que es más bien una concentración mucho menor a la inicial  $C_0 \gg C_p$ , tal como lo es la concentración del flujo permeado  $C_p$ . Ahora sustituyendo estas definiciones en la ecuación:

$$v = k[(\Delta P_c \cdot \tilde{P}) - \sigma(CRT - C_p RT)]$$

Factorizando RT de los paréntesis:

$$v = k[(\Delta P_c \cdot \tilde{P}) - RT\sigma(C - C_p)]$$

Factorizando  $\Delta P_c$  de los corchetes:

$$v = k\Delta P_c \left[ \tilde{P} - \frac{RT}{\Delta P_c} \sigma(C - C_p) \right]$$

Fuera de los corchetes se utiliza la definición de la ecuación (11), también se utiliza la definición de  $\tilde{C}$  dentro de los paréntesis:

Recordar:

$$(11) \quad \Delta P_c = \mu \frac{u_c \cdot L}{H^2}$$

$$v = k\mu \frac{u_c \cdot L}{H^2} \left[ \tilde{P} - \frac{C_0 RT}{\Delta P_c} \sigma(\tilde{C} \cdot C_0 - C_p) \right]$$

Se reagrupan parámetros y se factoriza  $C_0$  de los paréntesis:

$$v = \left( \frac{k \cdot \mu}{H} \right) u_c \left( \frac{L}{H} \right) \left[ \tilde{P} - \frac{C_0 RT}{\Delta P_c} \sigma \left( \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right) \right]$$

Después se utiliza una modificación a (10) que básicamente es despejar a  $u_c$

Recordar:

$$(10) \quad v_c = \frac{H}{L} u_c \rightarrow u_c = \frac{L}{H} v_c$$

$$v = \left( \frac{k \cdot \mu}{H} \right) \left( \frac{L}{H} v_c \right) \left( \frac{L}{H} \right) \left[ \tilde{P} - \frac{C_0 RT}{\Delta P_c} \sigma \left( \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right) \right]$$

Es necesario tomar en cuenta los siguientes parámetros:

$$\beta = \frac{k \cdot \mu}{H} \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \quad \alpha = \frac{C_0 RT}{\Delta P_c} \sigma$$

Aplicándolos a la ecuación se obtiene:

$$v = v_c \frac{\beta}{\varepsilon^2} \left[ \tilde{P} - \alpha \left( \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right) \right]$$

La ecuación se multiplica por:  $\frac{1}{v_c}$

$$\frac{v}{v_c} = \frac{\beta}{\varepsilon^2} \left[ \tilde{P} - \alpha \left( \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right) \right]$$

Finalmente se obtiene la ecuación adimensionalizada usando la definición de la velocidad adimensional  $\tilde{v}$ :

$$\tilde{v} = \frac{\beta}{\varepsilon^2} \left[ \tilde{P} - \alpha \left( \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right) \right]$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA DE MASA

La ecuación del modelo de concentración de polarización [12]:

$$vC - D \frac{\partial C}{\partial y} = vC_p$$

Para comenzar con el proceso es necesario tener en cuenta las siguientes definiciones de parámetros y variables adimensionales:

$$\tilde{C} = \frac{C}{C_0} \quad Sc = \frac{\mu}{D \cdot \rho} \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c} \quad Y = \frac{y}{H} \quad v_c = \frac{H}{L} u_c$$

Se comienza por despejar al termino difusivo:

$$v \cdot C - D \frac{\partial C}{\partial y} = v \cdot C_p$$

$$D \frac{\partial C}{\partial y} = v \cdot C - v \cdot C_p$$



Se factoriza  $v$  del lado derecho:

$$D \frac{\partial C}{\partial y} = v(C - C_p)$$

Se sustituyen todas las variables por su análoga adimensional:

$$D \frac{\partial(\tilde{C} \cdot C_0)}{\partial y} = (\tilde{v} \cdot v_c)[(\tilde{C} \cdot C_0) - C_p]$$

Se utiliza la regla de la cadena para obtener una derivada solo en función de variables adimensionales, revisar la definición de  $Y$  para resolverla:

$$D \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial(\tilde{C} \cdot C_0)}{\partial Y} = (\tilde{v} \cdot v_c)[(\tilde{C} \cdot C_0) - C_p]$$

$$\left(\frac{D \cdot C_0}{H}\right) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = (\tilde{v} \cdot v_c)[(\tilde{C} \cdot C_0) - C_p]$$

Se factoriza a la concentración inicial para cancelarla en ambos lados:

$$\left(\frac{D \cdot C_0}{H}\right) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = (\tilde{v} \cdot v_c) C_0 \left[\tilde{C} - \frac{C_p}{C_0}\right]$$

$$\left(\frac{D}{H}\right) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = (\tilde{v} \cdot v_c) \left[\tilde{C} - \frac{C_p}{C_0}\right]$$

Multiplique la ecuación por:  $\frac{H}{D}$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = \left(\frac{H}{D}\right) (\tilde{v} \cdot v_c) \left[\tilde{C} - \frac{C_p}{C_0}\right]$$

También se sustituye la difusividad por su equivalente en función del número de Schmidt:

$$D = \frac{\mu}{Sc \cdot \rho}$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = (H \cdot v_c) \left(\frac{Sc \cdot \rho}{\mu}\right) \tilde{v} \left[\tilde{C} - \frac{C_p}{C_0}\right]$$

Sustituya (10) en el valor de  $v_c$ :

Recordar:

$$(10) \quad v_c = \frac{H}{L} u_c$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = \left( H \cdot \frac{H}{L} u_c \right) \left( \frac{Sc \cdot \rho}{\mu} \right) \tilde{v} \left[ \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right]$$

Reagrupando parámetros:

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = \left( \frac{H}{L} \right) \left( \frac{\rho \cdot u_c \cdot H}{\mu} \right) Sc \cdot \tilde{v} \left[ \tilde{C} - \frac{C_p}{C_0} \right]$$

Tome en cuenta que:

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \quad Re_H = \frac{\rho \cdot u_c \cdot H}{\mu}$$

Finalmente se obtiene una ecuación adimensional que puede modelarse para ser la condición de frontera de la ecuación de transferencia de masa:

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} = \varepsilon \cdot Re_H \cdot Sc \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{C} \left[ 1 - \frac{C_p}{\tilde{C} \cdot C_0} \right]$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Zhong R, Chen A, Zhao D, Mao G, Zhao X, Huang H, Liu J. Impact of international trade on water scarcity: An assessment by improving the Falkenmark indicator. *J Clean Prod.* 2023; 385 (135740): 1
- [2] Jia, T., Kapelan, Z., de Vries, R., Vriend, P., Peereboom, E.C., Okkerman, I., Taormina, R., 2023. Deep learning for detecting macroplastic litter in water bodies: A review. *Water Res.* 2023; 231 (119632): 1
- [3] Por redacción. Milagro en el sistema Cutzamala: así fue su increíble recuperación en un mes [Internet]. CDMX: El Financiero. 2024. [Citado 26 de abril 2025]. Recuperado a partir de: <https://www.elfinanciero.com.mx/cdmx/2024/07/30/milagro-en-el-sistema-cutzamala-asi-fue-su-increible-recuperacion-en-un-mes/>
- [4] Por redacción National Geographic. Los 2 datos clave que demuestran la intensidad del huracán Beryl [Internet]. National Geographic. 2024. [Citado 26 de abril 2025]. Recuperado a partir de: <https://www.nationalgeographicla.com/medio-ambiente/2024/07/los-2-datos-clave-que-demuestran-la-intensidad-del-huracan-beryl>
- [5] Alfredo Valadez. La sobreexplotación de acuíferos parte y hunde la tierra en Calera [Internet]. Ciudad de México: Jornada. 2021. [Citado 26 de abril 2025]. Recuperado a partir de: <https://www.jornada.com.mx/2021/05/12/estados/026n1est>
- [6] Elio Henríquez. Conagua, sin elementos para revocar concesión a Coca Cola en Chiapas [Internet]. Ciudad de México: Jornada. 2020. [Citado 26 de abril 2025]. Recuperado a partir de: <https://www.jornada.com.mx/noticia/2020/05/06/estados/sin-elementos-para-revocar-concesion-a-coca-cola-en-chiapas-conagua-5631>
- [7] P.K. Park, S. Lee, J.S. Cho, J.H. Kim. Full-Scale simulation of seawater reverse osmosis desalination processes for boron removal: effect of membrane fouling. *Water Res.* 2012; 146 (12): 3796-3804
- [8] Reverse osmosis vs nanofiltration membrane process: what is the difference? [Internet]. New York City: SAMCO. [Citado 26 de abril 2025]. Recuperado a partir de: <https://samcotech.com/reverse-osmosis-vs-nanofiltration-membrane-process-what-is-the-difference/#:~:text=Nf%20removes%20harmful%20contaminates%2C%20such,sodium%20chloride%20to%20pass%20through.>
- [9] S. Burn, S. Gray, Efficient Desalination by reverse osmosis: A guide to RO practice, IWA Publishing, London, UNITED KINGDOM, 2015.
- [10] P.S. Goh, W.J Lau, M.H.D. Othman, A.F. Ismail. Membrane fouling in desalination and its mitigation strategies, *Desalination.* 2018; 425: 130-155
- [11] J. Kucera, Reverse Osmosis: Design, Processes, and Applications for engineers, Wiley, 2010.
- [12] Sutzkover, D. Hasson, R. Semiat. Simple technique for measuring the concentration polarization level in a reverse osmosis system. *Desalination.* 2000; 131 (200): 117-127.

- [13] C. Fritzmann, J. Löwenberg, T. Wintgens, T. Melin. State-of-the-art of reverse osmosis desalination. *Desalination*. 2007; 216: 1-76.
- [14] K. Jamal, M.A. Khan, M. Kamil. Mathematical modeling of reverse osmosis systems. *Desalination*. 2004; 160: 29-42.
- [15] E.M.V. Hoek, M. Elimelech. Cake-enhanced concentration polarization: a new fouling mechanism for salt-rejecting membranes, *Environ. Sci. Technol.* 2003; 37: 5581-5588.
- [16] K. NATH. Membrane separation processes. PHI Learning Pvt. Ltd., 2017.
- [17] S. Sablani, M. Goosen, R. Al-Belushi, M. Wilf. Concentration polarization in ultrafiltration and reverse osmosis: a critical review. *Desalination*. 2001; 141: 269-289.
- [18] R. Salcedo-Díaz, P. García-Algado, M. García-Rodríguez, J. Fernández-Sempere, F. Ruíz-Beviá. Visualization and modeling of the polarization layer in crossflow reverse osmosis in a slit type channel. *J. Memb. Sci.* 2014; 456: 21-30.
- [19] E.M.V. Hoek, J. Allred, T. Knoell, B.H. Jeong. Modeling the effects of fouling on full-scale reverse osmosis processes. *J. Memb. Sci.* 2008; 314: 33-49.
- [20] S. Jain, S.K. Gupta. Analysis of modified surface force pore flow model with concentration polarization and comparison with Spiegler-Kedem model in reverse osmosis systems. *J. Memb. Sci.* 2004; 232: 45-61.
- [21] J. Wang, D.S. Dlamini, A.K. Mishra, M.T.M. Pendergast, M.C.Y. Wong, B.B. Mamba, V. Freger, A.R.D. Verliefde, E.V.M. Hoek. A critical review of transport through osmotic membranes. *J. Memb. Sci.* 2014; 454: 516-537.
- [22] Thibodeaux, L. J., & Mackay, D. Handbook of chemical mass transport in the environment. Taylor & Francis Group. (2011). p. 17.
- [23] D. Van Gauwbergen, J. Baeyens. Modelling reverse osmosis by irreversible thermodynamics. *Sep Puri Technol.* 1998; 13 117-128
- [24] White Frank M. Mecánica de fluidos. 6ta ed. Mc Graw Hill. p.244
- [25] Chacón, E. Notas sobre FreeFem++ 2D y 3D: traducción del manual de F. Hecht, Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. 2010. [http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++ Spanish. pdf](http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++%20Spanish.pdf), p. 27-32.
- [26] Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., & Benites, G. E. Métodos numéricos para ingenieros. New York, USA: McGraw-Hill. 2011. p. 154-196
- [27] Hecht, F. New development in FreeFem++. *Journal of numerical mathematics*. 2012; 20 (3-4). 251-266.
- [28] Hecht, F., Pironneau, O., Le Hyaric, A., & Ohtsuka, K. FreeFem++ manual. Laboratoire Jacques Louis Lions. 2005.
- [29] R. Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot. Fenómenos de transporte. Barcelona: Reverté S.A; 1992. 28p.
- [30] T. Keerthivasan, M. Srinivasan, R. Madhesh, P. Ramasamy. Schmidt number's impact during the growth of mc-silicon ingot through directional solidification furnace for photovoltaic applications: A computational investigation. *Chemical Physics Impact*. 2023; 7 (100359): 9.

- [31] Jinwen Wang , Derrick S. Dlamini, Ajay K. Mishra, Mary Theresa M. Pendergast, Mavis C.Y. Wong, Bhekie B. Mamba, Viatcheslav Freger, Arne R.D. Verliefde, Eric M.V. Hoek. A critical review of transport through osmotic membranes. *Journal of membrane science*. 2014; 454: 516 – 537.
- [32] E. L. Cussler. *Diffusion, mass transfer in the fluid systems*. 3 ed. Nueva York: Universidad de Cambridge; 2009. 238p.
- [33] E. L. Cussler. *Diffusion, mass transfer in the fluid systems*. 3 ed. Nueva York: Universidad de Cambridge; 2009. 513p.
- [34] A. J. Schunke, G. A. Hernandez Herrera, L. Padhye, T. A. Berry, Energy recovery in SWRO desalination: current status and new possibilities, *Front. Sustain. Cities* 2 (2020).
- [35] S. Khanmohammadi, S. Yagnambhatt, D. DelVescovo, J. Maisonneuve. Thermally driven reverse osmosis: thermodynamics of a novel process that uses heat for desalination and water purification. *Desalination*. 2025; 613. 14.
- [36] P. Godart, Design and simulation of a heat-driven direct reverse osmosis device for seawater desalination powered by solar thermal energy, *Appl. Energy* 284 (2021) 116039.
- [37] P. Godart, Heat-driven direct reverse osmosis for high-performance and robust and low seawater desalination, *Desalination* 500 (2021) 114800.
- [38] M.H.Jahangir, M. Razeghi, A. Naseri, H. Yousefi, Y. Noorollahi, Hybrid solar-wind farm site selection for reverse osmosis desalination: A case of study in Sistan and Baluchestan using geographic information system, *Energy Reports*, 13 (2025) 6059-6078
- [39] V. Sánchez, La desalinizadora de agua de mar en Playas de Rosarito. Un proyecto estratégico frente a la dependencia del Río Colorado y la escasez de agua en Baja California, *Norteamérica*, 1 (2020)
- [40] Redacción Punto Norte. Parque eólico de Sempra en La Rumorosa será el más grande de México [Internet]. Tijuana: Punto Norte. 2025. [Citado 27 de agosto 2025]: Recuperado a partir de: <https://pontonorte.info/2025/03/07/parque-eolico-de-sempra-en-la-rumorosa-sera-el-mas-grande-de-mexico/>
- [41] M.E. Williams, A Brief Review of Reverse Osmosis Membrane Technology, EET Corporation and Williams Engineering Services Company, Harriman, TN, 2003.
- [42] T.Y. Cath, A.E. Childress, M. Elimelech, Forward osmosis: principles, applications, and recent developments, *J. Memb. Sci.* 281 (2006) 70–87
- [43] J.P. Chen, E.S.K. Chian, P.-X. Sheng, K.G.N. Nanayakkara, L.K. Wang, Y.-P. Ting, Desalination of seawater by reverse osmosis, in: L.K. Wang, J.P. Chen, Y.-T. Hung, N.K. Shamas (Eds.), *Membr. Desalin. Technol*, Humana Press, Totowa, NJ, 2011 pp. 559–601
- [44] N.B. Singh, S.S. Das, A.K. Singh, *Physical Chemistry*, Volume 2, New Age International, Daryaganj, India, 2000
- [45] A. Yokozeki, Osmotic pressures studied using a simple equation-of-state and its applications, *Appl. Energy* 83 (2006) 15–41
- [46] Instituto de Geofísica, UNAM. Diferencias Finitas - Introducción [Internet]. México: Universidad Nacional Autónoma de México; [citado 2025 Nov 6]. Disponible en:

[http://gmc.geofisica.unam.mx/papime2020/Descargables/presentaciones-metodosnumericos/01\\_DF\\_Introduccion.pdf](http://gmc.geofisica.unam.mx/papime2020/Descargables/presentaciones-metodosnumericos/01_DF_Introduccion.pdf)

- [47] Modern Physics. Métodos de Diferencias Finitas: Precisión, Eficiencia y Velocidad [Internet]. [citado 2025 Nov 6]. Disponible en: <https://modern-physics.org/metodos-de-diferencias-finitas-precision-eficiencia-y-velocidad/>
- [48] Maas M. Apuntes de Diferencias Finitas [Internet]. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires; 2020 [citado 2025 Nov 6]. Disponible en: [https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2020/Analisis\\_Numerico/apunte.pdf](https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2020/Analisis_Numerico/apunte.pdf)