FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS

DISEÑO Y MUESTREO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

Del 28 de septiembre al 18 de octubre de 1994.

DIRECTORIO DE PROFESORES

1.- ING. RAFAEL BRITO RAMIREZ
DIRECTOR GENERAL
BRIRA, SA DE CV
HUESTACA NO. 169
COL. INDUSTRIAL
TEL. 537 21 85 y 517 18 30

2.- ING. BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ
SECRETARIO ADMINISTRATIVO, F.I., UNAM
FACULTAD DE INGENIERIA
CIUDAD UNIVERSITARIA
TEL. 550 52 15 ext. 3151 y 548 81 93
548 36 18 y 548 94 42

3.- DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
COORDINADOR DE ACTUALIZACION
Y CAPACITACION EN EL INSTITUTO
MEXICANO DEL TRANSPORTE
PROFESOR DE LA DIVISION DE --
ESTUDIOS DE POSGRADO, F.I. UNAM
TEL. 688 76 00 y 605 99 97

4.- ING. RUBEN TELLEZ SANCHEZ
PROFESOR DE LA SUBJEFATURA DEL AREA
DE INGENIERIA DE SISTEMAS
CIUDAD UNIVERSITARIA
TEL. 550 52 15 ext. 4482 y 4486

5.- ING. AUGUSTO VILLAREL ARANDA
DIRECTOR DE OPERACIONES
GRUPO VEA
AV. PACIFICO No. 213
COL. LOS REYES
DELEG. COYOACAN
C.P. 04330
TEL. 544 28 89 y 544 28 90
28 91

*rgd.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS
MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA
Del 28 de septiembre al 28 de octubre, 1994.

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
Miércoles 28 de sep.	17:00 a 21:00 hrs.	I n t r o d u c c i ó n	M. en I. Bernardo Frontana
Jueves 29	17:00 a 21:00 hrs.	Técnicas básicas de muestreo	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Viernes 30	17:00 a 21:00 hrs.	Técnicas básicas de muestreo	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Lunes 3 de oct.	17:00 a 21:00 hrs.	Técnicas básicas de muestreo	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Martes 4	17:00 a 21:00 hrs.	Diseño y análisis de experimentos para comparar dos tratamientos	M. en I. Rafael Brito Ramírez
Miércoles 5	17:00 a 21:00 hrs.	Introducción a los paquetes para - computadora	M. en I. Rafael Brito Ramírez
Jueves 6	17:00 a 21:00 hrs.	Diseño y análisis de experimentos para comparar K tratamientos	M. en I. Rafael Brito Ramírez
Viernes 7	17:00 a 21:00 hrs.	Diseño y análisis de experimentos con bloques aleatorizados	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Lunes 10 y Martes 11 - Jueves 13	17:00 a 21:00 hrs.	Diseño y análisis de experimentos factoriales	Dr. Octavio A. Rascón Chávez M. en I. Rafael Brito Ramírez
Viernes 14	17:00 a 21:00 hrs.	Diseño que usan cuadros	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Lunes 17	17:00 a 21:00 hrs.	Análisis de variancia en regresión lineal	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Martes 18	17:00 a 21:00 hrs.	Aplicaciones de paquetes para computadora	M. en I. Rafael Brito Ramírez

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

Del 28 de septiembre al 18 de octubre, 1994.

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
Miércoles 28 sep.	17 a 21 hrs.	Introducción	M. en I. Bernardo Frontana
Jueves 29	17 a 21 hrs.	Técnicas básicas de muestreo	M. en I. Rubeñ Téllez Sánchez
Viernes 30	17 a 21 hrs.	Técnicas básicas de muestreo	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Lunes 3 Oct.	17 a 21 hrs.	Técnicas básicas de muestreo	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Martes 4 Miércoles 5	17 a 21 hrs.	Diseño y análisis de experimentos para comparar dos tratamientos - introducción a los paquetes para computadora	M. en I. Rafael Brito
Jueves 6	17 a 21 hrs.	Diseño y análisis de experimentos para comparar K tratamientos	M. en I. Augusto Villarreal
Viernes 7 y Lunes 10 Martes 11	17 a 21 hrs.	Diseño y análisis de experimentos con bloques aleatorios	M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Jueves 13	17 a 21 hrs.	Diseño y análisis de experimentos factoriales	Dr. Octavio Rascón Chávez M. en I. Rafael Brito
Viernes 14	17 a 21 hrs.	Diseño que usan cuadros	M. en I. Rubeñ Téllez S.
Lunes 17	17 a 21 hrs.	Análisis de variancia en regresión lineal	M. en I. Rubén Téllez S.
Martes 18	17 a 21 hrs.	Aplicaciones de paquetes para computadora	M. en I. Rafael Brito

*rgd.

1.- ¿LE AGRADO SU ESTANCIA EN LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA?

SI	NO

SI INDICA QUE "NO" DIGA PORQUE.

2.- MEDIO A TRAVES DEL CUAL SE ENTERO DEL CURSO:

PERIODICO EXCELSIOR		FOLLETO ANUAL		GACETA UNAM		OTRO MEDIO	
PERIODICO EL UNIVERSAL		FOLLETO DEL CURSO		REVISTAS TECNICAS			

3.- ¿QUE CAMBIOS SUGERIRIA AL CURSO PARA MEJORARLO?

4.- ¿RECOMENDARIA EL CURSO A OTRA(S) PERSONA(S)?

SI		NO	

5.- ¿QUE CURSOS LE SERVIRIA QUE PROGRAMARA LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA.

6.- OTRAS SUGERENCIAS:

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

I N T R O D U C C I O N

ING. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

ETAPAS DE SOLUCION DE PROBLEMS

APROVECHAMIENTO DE OPORTUNIDADES

OBSERVACION	→ PROBLEMA / OPORTUNIDAD
MEDICION	→ REALIDAD (HECHOS)
PROCESAMIENTO	→ DATOS
ANALISIS	→ INFORMACION
CREATIVIDAD	→ ALTERNATIVAS
EVALUACION / PLANEACION	→ DECISION
EJECUCION	→ ACCION
	RESULTADOS

11. LISTA DE COMPROBACION PARA PLANEAR PROGRAMAS DE PRUEBA.

A. Obtenga un enunciado claro del problema.

1. Identifique la nueva e importante área del problema.
2. Subraye el problema específico dentro de sus limitaciones usuales
3. Defina el propósito exacto del programa de prueba.
4. Determine la relación del problema particular con la investigación total o desarrollo del programa.

B. Reúna la información básica disponible.

1. Investigue todas las fuentes de información disponibles.
2. Tabule los datos pertinentes para planear el nuevo programa.

C. Diseñe el programa de prueba.

1. Sostenga una conferencia respecto a todas las partes concernientes.
   a. Enuncie las proposiciones por probar
   b. Especifique respecto a la magnitud de las diferencias que usted considere que valen la pena.
   c. Esboce las alternativas posibles de los sucesos.
   d. Escoja los factores por estudiar.
   e. Determine el rango práctico de estos factores y los niveles específicos a los que se harán las pruebas.
   f. Escoja las mediciones finales que van a hacerse.
   g. Considere el efecto de variabilidad de muestreo y de la precisión de métodos de prueba.
   h. Considere las posibles interrelaciones (o "interacciones") de los factores.
   i. Determine las limitaciones de tiempo, costo, materiales, potencia humana, instrumentación y otros factores y de condiciones extrañas tales como condiciones metereológicas.
   j. Considere los aspectos de las relaciones humanas del programa.
2. Diseñe el programa en forma preliminar.
   a. Prepare una cédula sistemática y completa.
   b. Proporcione las etapas de ejecución o adaptación de la cédula, si es necesario.

c. Elimine los efectos de las variables que no están en estudio, mediante control, balanceo o aleatorización de las mismas.
d. Reduzca al mínimo el número de ejecuciones del experimento.
e. Elija el método de análisis estadístico.
f. Haga las indicaciones prudentes para una acumulación ordenada de datos.

3. Revise el diseño con todo lo concerniente.
   a. Ajuste el programa de acuerdo con los comentarios
   b. Desglose en términos precisos los pasos a seguir.

D. Planee y lleve a cabo el trabajo experimental.

1. Desarrolle métodos, materiales y equipo
2. Aplique los métodos o técnicas
3. Supervise y cheque los detalles; modificando los métodos si es necesario.
4. Registre cualquier modificación al diseño del programa
5. Sea cuidadoso en la colección de datos.
6. Registre el avance del programa.

E. Analice los datos.

1. Reduzca los datos registrados a forma numérica, si es necesario.
2. Aplique las técnicas adecuadas de la Estadística Matemática.

F. Interprete los resultados.

1. Considere todos los datos observados.
2. Limite las conclusiones a deducciones estrictas a partir de la evidencia obtenida.
3. Pruebe, mediante experimentos independientes, las controlversias que susciten los datos.
4. Llegue a conclusiones, tanto respecto al significado técnico de resultados como respecto a significancia estadística.
5. Especifique lo que implican los resultados para su aplicación y para trabajos posteriores.
6. Tome en cuenta todas las limitaciones impuestas por los métodos usados.

BIBLIOGRAFIA

1. Kempthorne O. "The Design and Analysis of Experiments". John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952, p. 10.

2. Bicking A. C. "Some uses of Statistics in the planning of experiments", Industrial Quality Control, Vol. 10, No. 4, enero 1954, p. 23.

3. Cox D.R. "Planning of Experiments". John Wiley and Sons, Inc., New York, 1978.

4. Ostle B. "Estadística Aplicada". Limusa-Wiley, México, 1975. cap. 10.

5. Méndez I. "Lineamientos Generales para la planeación de Experimentos". Monografia No. 15, Vol. 15, IIMAS. 1980.

RTS'rrb.

ETAPAS DE UNA ENCUESTA POR MUESTREO

1. PLANEACION

   . ESPECIFICACION DE FINES: OBJETIVOS Y METAS
   . DEFINICION DE LA POBLACION A MUESTREAR: POBLACION MUESTREADA=POBLACION OBJETO
   . ESPECIFICACION DE DATOS A SER COLECTADOS Y DE LA UNIDAD DE MUESTREO
   . ESPECIFICACION DE REFERENCIA DE TIEMPO Y PERIODO DE REFERENCIA
   . SELECCION Y ESPECIFICACION DE METODOS DE MEDICION Y METODO DE INSPECCION DE LA POBLACION
   . DISEÑO Y VALIDACION DE FORMAS DE REGISTRO O CUESTIONARIO (=> REALIZACION DE ENCUESTAS PILOTO)
   . DETERMINACION DEL MARCO MUESTRAL O ESPECIFICACION DE LA LISTA DE UNIDADES DE MUESTREO
   . SELECCION DEL METODO MUESTREO
   . DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA
   . ORGANIZACION DEL TRABAJO DE CAMPO

2. REALIZACION FISICA DE LA ENCUESTA
3. RESUMEN Y ANALISIS DE DATOS : INSPECCION DE LA INFORMACION CAPTADA
4. ANALISIS DE LA NO RESPUESTA
5. PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION
6. ANALISIS E INTERPRETACION DE INFORMACION
7. EVALUACION DE LA INVESTIGACION MUESTRAL

METODOS DE MUESTREO

- PROBABILISTICOS
  - IRRESTRICTO ALEATORIO: IGUAL PROBABILIDAD DE QUEDAR INCLUIDA EN LA MUESTRA PARA TODOS LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION
  - ESTRATIFICADO: COMBINACION DE MUESTREO IRRESTRICTO ALEATORIO EN CADA ESTRATO O SUBGRUPO DE LA POBLACION
  - DE CONGLOMERADOS: MUESTREO ALEATORIO, EN DONDE LAS UNIDADES MUESTRALES SON EN SI MISMAS POBLACIONES O CONGLOMERADOS
  - POLIETAPICO: MUESTREO ALEATORIO RECURSIVO DONDE LAS UNIDADES DE PRIMERA ETAPA CONTIENEN A LAS DE SEGUNDA ETAPA Y ASI SUCESIVAMENTE.
  - MONTECARLO O SIMULADO: MUESTREO ALEATORIO DONDE LA POBLACION REAL SE SUSTITUYE POR UNA QUE LA REPRESENTA: LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE LA VARIABLE QUE DESCRIBE EL COMPORTAMIENTO PROBABILISTICO DE LA POBLACION.
- DETERMINISTICOS
  - SISTEMATICO: CAPTACION SISTEMATICA O SECUENCIAL DE LAS UNIDADES MUESTRALES CON RELACION AL TIEMPO O A SU UBICACION EN LA POBLACION
  - DE CUOTAS: EN BASE A LA ESTRUCTURA DE LA POBLACION EN UN PERIODO PASADO SE HACE LA DISTRIBUCION O AFIJACION DE LA MUESTRA EN LAS PARTES DE LA POBLACION.
  - DE TRAZOS O INTENCIONADO: DE REGISTROS DE LA POBLACION (DIRECTORIOS, NOMINAS, ETC.) SE SELECCIONA EN FORMA ARBITRARIA PARA CONSTRUIR LA MUESTRA PARTES DE LA POBLACION
  - CAOTICO: DE MANERA SUBJETIVA O ARBITRARIA SE SELECCIONA LA MUESTRA; VALIDO UNICAMENTE PARA POBLACIONES CON UN NIVEL DE HOMOGENIDAD ELEVADA.

MUESTREO: ES EL PROCESO DE ADQUISICION DE UNA MUESTRA

MUESTREO

- *CON REEMPLAZO*.- CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO SE REINTEGRA AL LOTE DEL CUAL FUE EXTRAIDO, ANTES DE EXTRAER EL SIGUIENTE.
- *SIN REEMPLAZO*.- CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO NO SE REINTEGRA AL LOTE.

POBLACION: COLECCION DE DATOS QUE SE PUEDEN OBTENER AL REALIZAR UNA SECUENCIA EXHAUSTIVA DE EXPERIMENTOS.

POBLACION

- *DISCRETA*.- TIENE UN NUMERO FINITO O UN NUMERO INFINITO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES
- *CONTINUA*.- TIENE UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES

EJEMPLOS

1. EXPERIMENTO: LANZAMIENTO DE UNA MONEDA DIEZ VECES
   POBLACION: SUCESION INFINITA NUMERABLE DE "CARAS" Y "CRUCES" (DISCRETA)
   MUESTRA: GRUPO DE 10 OBSERVACIONES

2. EXPERIMENTO: MEDICION DE LA PRECIPITACION PLUVIAL DIARIA EN LA CIUDAD DE MEXICO DURANTE DIEZ AÑOS
   POBLACION: SUCESION INFINITA NO NUMERABLE DE VALORES (CONTINUA)
   MUESTRA: GRUPO DE 3652 OBSERVACIONES (TOMANDO DOS AÑOS BISIESTOS DE 29 DIAS EN FEBRERO)

15

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

Renglón \ Columna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	16408	81899	04153	53381	79401	21438	83035	92350	36693	31238	59649
2	18629	81953	05520	91962	04739	13092	37662	94822	94730	06496	35090
3	73115	47498	47498	87637	99016	00060	88824	71013	18735	20286	23153
4	57491	16703	23167	49323	45021	33132	12544	41035	80780	45393	44812
5	30405	03946	23792	14422	15059	45799	22716	19792	09983	74353	68668
6	16631	35006	85900	32388	52390	52390	16815	69298	38732	38480	73817
7	96773	20206	42559	78985	05300	22164	24369	54224	35083	19687	11052
8	38935	64202	14349	82674	66523	44133	00697	35552	35970	19124	63318
9	31624	76384	17403	03941	44167	64486	64758	75366	76554	01601	12614
10	78919	19474	23632	27889	47914	02584	37680	20801	72152	39339	34806

REFERENCIAS

1. Fisher, R. A. y Yates, F., "Statistical tables", Ed. Oliver and Boyd Ltd, Londres

2. Owen, B., "Handbook of statistical tables", Addisson-Wesley Co., 1962.

Tabla
Estimadores Aplicables a Muestreo Aleatorio Simple

Parámetro	*Estimador del Parámetro*	*Variancia del estimador*	*Estimador de la Variancia*	*Intervalos de confianza**
Media	$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$	$V(\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{S^2}{n}$	$\hat{V}(\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{s^2}{n}$	$\bar{y} \mp t(\hat{V}(\bar{y}))^{1/2}$
Total	$N\bar{y} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$	$V(N\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{N^2 S^2}{n}$	$\hat{V}(N\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{N^2 s^2}{n}$	$N\bar{y} \mp t(\hat{V}(N\bar{y}))^{1/2}$
Porcentaje	$p = \frac{a}{n} 100$ $\hat{A} = N \frac{a}{n}$	$V(p) = \frac{NPQ\ (1\text{-}f)}{(N-1)\ n}$ $V(\hat{A}) = \frac{N^3 PQ}{N-1} \frac{(1\text{-}f)}{n}$	$\hat{V}(p) = \frac{N\text{-}n}{(n\text{-}1)N}\ pq$ $\hat{V}(A) = \frac{N(N\text{-}n)}{n-1}\ pq$	$p \mp t(\hat{V}(p))^{1/2}$ $\hat{A} \mp t(\hat{V}(\hat{A}))^{1/2}$
Razones	$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$	$V(\hat{R}) = \frac{1\text{-}f}{n\bar{X}^2} \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i\text{-}Rx_i)^2}{N-1}$	$\hat{V}(\hat{R}) = \frac{1\text{-}f}{n\bar{X}^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i\text{-}\hat{R}x_i)^2}{n-1}$ Nota: Cuando se desconoce $\bar{X}$ puede ser usado $\bar{x}$ en su lugar.	$\hat{R} \mp t(\hat{V}(\hat{R}))^{1/2}$

* Para obtener intervalos de confianza del 95% use $t = 2$.

TABLA
Fórmulas para el cálculo de varianzas estimadas (m. a. s.)

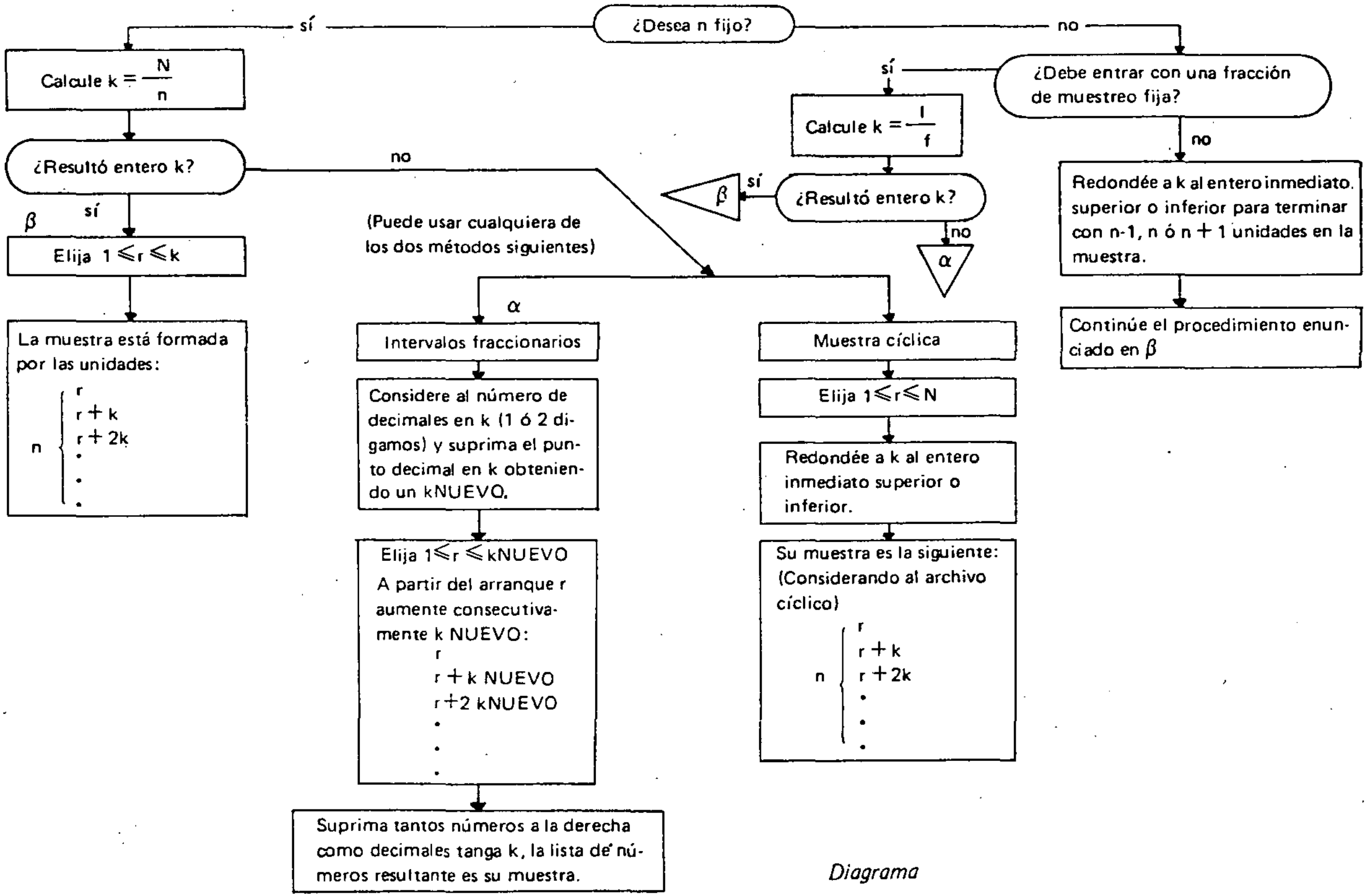
Parámetro	*Estimador*	*Se requiere*
Media	$\frac{1-f}{n} \frac{1}{n-1} (\sum^{n} y_i^2 - \frac{(\sum^{n} y_i)^2}{n})$	*i)* La suma de cuadradros de cada observación. *ii)* La suma de las observaciones elevada al cuadrado.
Total	$\frac{N^2(1-f)}{n} \frac{1}{n-1} (\sum^{n} y_i^2 - \frac{(\sum^{n} y_i)^2}{n})$	Misma información que para la media.
Razón	$\frac{1-f}{n\bar{X}^2} \frac{1}{n-1} (\sum^{n} y_i^2 - 2\hat{R}\sum^{n} y_i x_i + \hat{R}^2 \sum x_i^2)$ Donde $\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$	*i)* La suma de cuadrados de cada observación de la variable en el numerador. *ii)* La suma de cuadrados de cada observación de la variable en el denominador. *iii)* La suma de productos mixtos de las observaciones de una variable por la otra.
Proporción	$\frac{a}{n}$	*i)* El número total de unidades muestrales con la característica de interés.

Tabla

Estimadores aplicables a muestreo estratificado, con afijación proporcional y muestreo aleatorio simple en cada estrato.

	ESTRATO		POBLACION	
Media	$\bar{y}_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(\bar{y}_h) = (1 - f_h)\frac{s_h^2}{n_h}$	$\bar{y}_{est} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(\bar{y}_{est}) = \frac{1-f}{nN} \sum_{h=1}^{L} N_h s_h^2$
Total	$N_h\bar{y}_h = \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(N_h\bar{y}_h) = N(N\text{-}n) \frac{s_h^2}{n_h}$	$N\bar{y}_{est} = \frac{N}{n} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(N\bar{y}_{est}) = \frac{N(1-f)}{n} \sum_{h=1}^{L} N_h s_h^2$
Porcentaje	$p_h = \frac{a_h}{n_h} 100$	$\hat{V}(p_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h(n_h - 1)} p_h q_h$	$p_{est} = \left[\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} a_h\right] 100$	$\hat{V}(p_{est}) = \frac{1-f}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{nN_h - N} p_h q_h$

Selección sistemática



Diagrama

FACTORES EN LA DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

- TAMAÑO DE LA POBLACION
- HETEROGENIDAD DE LA POBLACION
- NIVEL DE ERROR: $\hat{\theta} - \theta$, donde:

  $\hat{\theta}$, estimación en base a información muestral

  θ , valor verdadero de la población desconocido
- NIVEL DE SIGNIFICANCIA: $\alpha = \Pr\,|\text{Error I}|$
- DISPONIBILIDAD DE RECURSOS
  - ECONOMICOS
  - HUMANOS
  - DE TIEMPO

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS:
TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

IDEAS BASICAS EN MUESTREO

ING. RUBEN TELLEZ SANZHEZ

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521 40-20 Apdo. Postal M-2285

IDEAS BASICAS EN MUESTREO

MÉTODO DE MUESTREO

UN METODO DE MUESTREO ES UN METODO DE SELECCIONAR DE TAL MANERA UNA FRACCION DE LA POBLACION QUE LA MUESTRA SELECCIONADA REPRESENTE A LA POBLACION ENTERA. UN METODO DE MUESTREO, SI VA A PROPORCIONAR UNA MUESTRA REPRESENTATIVA DE LA POBLACION, DEBE SER TAL QUE TODAS LAS CARACTERISTICAS DE LA POBLACION, INCLUYENDO LA DE VARIABILIDAD ENTRE SUS UNIDADES, SE REFLEJEN EN LA MUESTRA TAN APROXIMADAMENTE COMO EL TAMAÑO DE LA MUESTRA LO PERMITA, PARA QUE SE PUEDA FORMAR, A PARTIR DE LA MUESTRA, ESTIMACIONES DIGNAS DE CONFIANZA DE LOS CARACTERES DE LA POBLACION.

ERROR ESTÁNDAR

CUALQUIERA QUE SEA EL METODO DE SELECCION, UNA ESTIMADA POR MUESTRA DIFERIRA INEVITABLEMENTE DE LA QUE SE OBTENDRIA ENUMERANDO, CON IGUAL CUIDADO, A LA POBLACION COMPLETA. ESTA DIFERENCIA ENTRE LA ESTIMADA DE LA MUESTRA Y EL VALOR DE LA POBLACION SE LLAMA EL ERROR DE MUESTREO. UN METODO DE MUESTREO, SI HA DE SER UTIL, DEBE PROPORCIONAR ALGUNA IDEA SOBRE EL ERROR DE MUESTREO EN LA ESTIMACION DE UN PROMEDIO. PARA ESTE PROPOSITO HAY VARIAS MEDIDAS DISPONIBLES. UNA DE ELLAS, QUE PROPORCIONA LA MAGNITUD MEDIA DEL ERROR DE MUESTREO, SE LLAMA EL ERROR ESTANDAR DE LA ESTIMADA Y DA UNA MEDIDA DE LA SEGURIDAD DE LA ESTIMADA DE LA MUESTRA. ES LA MAGNITUD DEL ERROR ESTANDAR LA QUE DETERMINARA SI UNA ESTIMADA POR MUESTREO ES UTIL PARA UN PROPOSITO DADO.

PRINCIPIO DE SELECCIÓN ENTRE MÉTODOS ALTERNATIVOS DE MUESTREO

DEBEN TAMBIEN TOMARSE EN CUENTA LAS CONSIDERACIONES PRACTICAS

MUESTREO PROBABILISTICO

TODOS LOS PROCEDIMIENTOS DE MUESTREO, PARA LOS CUALES HA SIDO DESARROLLADA UNA TEORIA, TIENEN EN COMUN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES MATEMATICAS.

1. ES POSIBLE DEFINIR INEQUIVOCAMENTE UN CONJUNTO DE MUESTRAS $S_1, S_2, \ldots S_T$, MEDIANTE LA APLICACION DEL PROCEDIMIENTO A UNA POBLACION ESPECIFICA QUE CONDUZCA A LA SELECCION DE ESTAS MUESTRAS. ESTO QUIERE DECIR QUE PODEMOS INDICAR CON PRECISION CUALES UNIDADES DE MUESTREO PERTENECEN A S_1, S_2, Y ASI, SUCESIVAMENTE.
2. A CADA POSIBLE MUESTRA S_i, LE HA SIDO ASIGNADA UNA PROBABILIDAD CONOCIDA DE SELECCION π_i
3. SELECCIONAMOS UNA DE LAS S_i POR UN PROCESO MEDIANTE EL CUAL CADA S_i TIENE UNA PROBABILIDAD π_i DE SER SELECCIONADA
4. EL METODO PARA CALCULAR EL ESTIMADOR DE LA MUESTRA DEBE SER ESTABLECIDO Y DEBE CONDUCIR A UN ESTIMADOR UNICO PARA CUALQUIER MUESTRA ESPECIFICA.

VENTAJAS DEL MUESTREO PROBABILISTICO:

- COSTO REDUCIDO
- MAYOR RAPIDEZ
- MAYOR ALCANCE Y FLEXIBILIDAD DE ACUERDO AL TIPO DE INFORMACION A OBTENERSE
- MAYOR EXACTITUD
- ESTIMACION Y CONTROL DEL ERROR
- SON BASE DE ESTIMACIONES INSESGADAS DE LAS CARACTERISTICAS DE LA POBLACION

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL DISEÑO DE LA MUESTRA

A TODO PROCEDIMIENTO DE MUESTREO Y ESTIMACION SE ASOCIA EL COSTO DE LA ENCUESTA Y LA PRECISION DE LAS ESTIMADAS HECHAS (MEDIDA, DIGAMOS, EN TERMINOS DEL ERROR CUADRATICO MEDIO). SOLO SE CONSIDERAN LOS PROCEDIMIENTOS DE LOS QUE PUEDE HACERSE UNA ESTIMADA OBJETIVA DE LA PRECISION ALCANZADA A PARTIR DE LA MISMA MUESTRA. ADEMAS, LOS PROCEDIMIENTOS DEBEN DE SER PRACTICOS EN EL SENTIDO DE QUE SEA POSIBLE DESARROLLARLOS DE ACUERDO CON LAS ESPECIFICACIONES DESEADAS. DE TODOS LOS PROCEDIMIENTOS DE SELECCION DE LA MUESTRA Y ESTIMACION (LLAMADOS DISEÑO DE LA MUESTRA), SE PREFERIRA EL QUE DE MAYOR PRECISION POR UN COSTO DETERMINADO DE LA ENCUESTA, O EL QUE TENGA EL COSTO MINIMO Y NOS DA EL NIVEL DE PRECISION ESPECIFICADO. ESTE ES EL PRINCIPIO RECTOR DEL DISEÑO DE LA MUESTRA.

EN EL USO DE UN METODO DE MUESTREO.

MAS AUN, UN METODO DE MUESTREO, SI HA DE ACEPTARSE EN LA -- PRACTICA, DEBE SER SENCILLO, ACOMODARSE A LA EXPERIENCIA ADMINISTRATIVA Y A LAS CONDICIONES LOCALES Y ASEGURAR QUE SE VA A HACER EL USO MAS EFECTIVO DE LOS RECURSOS DISPONIBLES PARA EL QUE MUESTREA. EL PRINCIPIO A SEGUIR EN LA SELECCION DE UN METODO DE MUESTREO ES, EN REALIDAD, EL DE OBTENER EL RESULTADO DESEADO CON LA SEGURIDAD REQUERIDA A COSTO MINIMO, O CON LA MAXIMA SEGURIDAD A COSTO DADO, HACIENDO EL USO MAS EFICAZ DE LOS RECURSOS DISPONIBLES.

MUESTREO PROBABILÍSTICO

PARA LLENAR LOS REQUISITOS ANTERIORES ES NECESARIO QUE EL - METODO DE MUESTREO SEA OBJETIVO, BASADO EN LEYES DEL AZAR. EL METODO SE LLAMA DE MUESTREO PROBABILISTICO. EN ESTE METODO LA MUESTRA SE OBTIENE EN SELECCIONES SUCESIVAS DE UNA UNIDAD, CADA UNA CON UNA CONOCIDA PROBABILIDAD DE SELECCION ASIGNADA EN LA PRIMERA SELECCION A CADA UNIDAD DE LA POBLACION. EN CUALQUIER SELECCION SUBSECUENTE, LA PROBABILIDAD DE SELECCIONAR CUALQUIER UNIDAD DE ENTRE LAS UNIDADES DISPONIBLES PARA ESA SELECCION PUEDE SER PROPORCIONAL A LA PROBABILIDAD DE - SELECCIONARLA EN LA PRIMERA SELECCION O COMPLETAMENTE INDEPENDIENTE - DE ELLA.

LAS SELECCIONES SUCESIVAS DE UNA MUESTRA PROBABILISTICA PUEDEN HACERSE CON O SIN REEMPLAZO DE LAS UNIDADES OBTENIDAS EN LAS SELECCIONES PREVIAS. EL PRIMER PROCEDIMIENTO ES EL DE MUESTREAR CON REEMPLAZO, EL SEGUNDO ES EL PROCEDIMIENTO LLAMADO SIN REEMPLAZO.

LA APLICACION DEL METODO SUPONE QUE LA POBLACION PUEDE SUBDIVIDIRSE EN UNIDADES DISTINTAS E IDENTIFICABLES LLAMADAS UNIDADES DE MUESTREO. ESTAS PUEDEN SER UNIDADES NATURALES, TALES COMO INDIVIDUOS EN UNA POBLACION HUMANA, O TERRENOS EN UNA ESTIMACION DE CULTIVO, O - CONJUNTOS NATURALES DE ESAS UNIDADES COMO FAMILIAS O PUEBLOS; O PUEDEN

EL MUESTREO ALEATORIO IMPLICA QUE CADA UNO DE ESTOS POSIBLES CONGLOMERADOS TENGA UNA PROBABILIDAD IGUAL, A SABER,

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \qquad \text{CON} \qquad \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

DE SER SELECCIONADO COMO MUESTRA.

LA PALABRA "ALEATORIO" SE REFIERE AL METODO DE SELECCIONAR UNA MUESTRA MAS BIEN QUE A LA MUESTRA PARTICULAR ESCOGIDA. CUALQUIER MUESTRA POSIBLE PUEDE SER UNA MUESTRA IRRESTRICTA ALEATORIA, POR MUY POCO REPRESENTATIVA QUE PUEDA APARECER, CON TAL DE QUE HAYA SIDO OBTENIDA SIGUIENDO LA REGLA DE DAR UNA PROBABILIDAD IGUAL A CADA UNA DE LAS MUESTRAS POSIBLES.

PROCEDIMIENTO DE SELECCIONAR UNA MUESTRA ALEATORIA

EL PROCEDIMIENTO ES EN LA SIGUIENTE FORMA: (A) IDENTIFICAR N UNIDADES EN LA POBLACION CON LOS NUMEROS DEL 1 AL N, O LO QUE ES LA MISMA COSA, PREPARAR UNA LISTA DE UNIDADES EN LA POBLACION Y NUMERARLAS SERIADAMENTE: (B) SELECCIONAR DE MANERA SISTEMATICA NUMEROS *DIFERENTES* DE LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS, Y (C) TOMAR PARA LA MUESTRA LAS n UNIDADES CUYOS NUMEROS CORRESPONDEN A AQUELLOS OBTENIDOS DE LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS.

UNA MANERA USADA COMUNMENTE PARA EVITAR EL RECHAZO DE TANTOS NUMEROS ES DIVIDIR UN NUMERO ALEATORIO ENTRE N Y TOMAR EL RESIDUO COMO EQUIVALENTE AL NUMERO SERIADO CORRESPONDIENTE ENTRE 1 Y N-1, CORRESPONDIENDO EL RESIDUO CERO AL N .

MÉTODOS NO ALEATORIOS DE MUESTREO

LOS METODOS DE MUESTREO QUE NO ESTAN BASADOS EN LAS LEYES DE

PROBABILIDAD, SINO QUE EL JUICIO PERSONAL DEL ENUMERADOR DETERMINA CUALES UNIDADES DEBEN SER INCLUIDAS EN LA MUESTRA, SE LLAMAN METODOS NO ALEATORIOS O INTENCIONALES. SI QUEREMOS TENER ESTIMADAS INSESGADAS DEL CARACTER DE LA POBLACION CUYA EXACTITUD PUEDA SER CALCULADA DE LAS MISMAS MUESTRAS, SOLAMENTE DEBERA USARSE EL MUESTREO PROBABILISTICO.

ERRORES NO DE MUESTREO

LA EXACTITUD DE UN RESULTADO SE AFECTA NO SOLO POR LOS ERRORES DE MUESTREO QUE SURGEN DE LA VARIACION POR AZAR EN LA SELECCION DE LA MUESTRA, SINO TAMBIEN POR: A) FALTA DE PRECISION AL REPORTAR OBSERVACIONES; B) SELECCION INCOMPLETA O DEFECTUOSA DE UNA MUESTRA ALEATORIA, Y C) METODOS DEFECTUOSOS DE ESTIMACION. ESTOS ERRORES, PARTICULARMENTE AQUELLOS DE A) Y B), SE AGRUPAN USUALMENTE BAJO EL ENCABEZADO DE "ERRORES NO DE MUESTREO".

GENERACION DE NÚMEROS ALEATORIOS

COMO SE MENCIONO EN LA SECCION 5.1, EN LOS PROCESOS DE SIMULACION SE UTILIZAN FRECUENTEMENTE NUMEROS ALEATORIOS. ESTOS NUMEROS O VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTINTAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD. EN ESTA PARTE SE CONSIDERAN LAS FORMAS DE OBTENER DICHOS NUMEROS ALEATORIOS.

MÉTODOS MANUALES

LA MANERA MAS SENCILLA, Y LA PRIMERA EN QUE SE PIENSA CUANDO SE TRATA DE GENERAR NUMEROS ALEATORIOS, ES MEDIANTE EL EMPLEO DE ALGUN DISPOSITIVO MECANICO (POR EJEMPLO, UN DADO O UNA MONEDA).

DISPOSITIVOS USADOS COMUNMENTE PARA GENERAR NUMEROS ALEATORIOS POR METODOS MANUALES SON: LOS DADOS, LAS MONEDAS Y COMBINACIONES DE ESTAS, O SEA CONJUNTOS DE DADOS Y DE MONEDAS. EXISTEN TAMBIEN DADOS ESPECIALES CON 10 CARAS PARA GENERAR DIRECTAMENTE NUMEROS DECIMALES.

LOS METODOS MANUALES DE GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS, TIENEN LA VENTAJA DE SER FACILMENTE COMPRENDIDOS EN FORMA INTUITIVA Y GENERAN NUMEROS ALEATORIOS Y SECUENCIAS DE ESTOS DE BUENA CALIDAD. SIN EMBARGO, SON SUMAMENTE LENTOS Y LABORIOSOS Y NO PUEDEN REPETIRSE SECUENCIAS DE NUMEROS EN CASO DE QUE SE NECESITEN.

TABLAS DE NÚMEROS ALEATORIOS

EXISTE UN GRAN NUMERO DE PUBLICACIONES DE *TABLAS DE NUMEROS*, ENTRE LAS MAS FAMOSAS SE CUENTA: RAND CORPORATION. A MILLION RANDOM DIGITS WITH 100 000 NORMAL DEVIATES.

CASI TODOS LOS LIBROS DE PROBABILIDAD CUENTAN CON ESTAS TABLAS.

EL UTILIZAR TABLAS DE NUMEROS ALEATORIOS PERMITE REPETIR UNA SECUENCIA ALEATORIA TANTAS VECES COMO SEA NECESARIO.

MÉTODOS DE COMPUTACIÓN ANALÓGICA

ESTOS METODOS SON, EN ESENCIA, SIMILARES A LOS METODOS MANUALES. POR LO TANTO, TIENEN COMO ESTOS LA DESVENTAJA DE QUE NO SE PUEDE REPRODUCIR SECUENCIAS CUANDO ES NECESARIO.

UNO DE LOS METODOS UTILIZADOS PARA GENERAR NUMEROS CON UNA COMPUTADORA ANALOGICA, CONSISTE EN INTEGRAR UN RUIDO (COMO LA ESTATICA DEL RADIO) DURANTE UN CIERTO PERIODO DE TIEMPO Y CONSIDERAR EL VALOR DE LA INTEGRAL COMO NUMERO ALEATORIO.

MÉTODOS DE COMPUTACIÓN DIGITAL

ESTOS METODOS SON LOS MAS COMUNMENTE UTILIZADOS EN LA SIMULACION. EN PARTICULAR SE VERAN AQUELLOS METODOS DE COMPUTACION DIGITAL EN LOS QUE LAS SECUENCIAS DE NUMEROS SE GENERAN MEDIANTE RELACIONES DE RECURRENCIA.

UNA *RELACION DE RECURRENCIA* ES AQUELLA QUE PERMITE OBTENER CUALQUIER NUMERO DE UNA SUCESION A PARTIR DEL NUMERO ANTERIOR.

LOS METODOS MAS COMUNES PARA GENERAR NUMEROS ALEATORIOS EN UNA COMPUTADORA DIGITAL SON METODOS RECURRENTES, ENTRE ESTOS, LOS MAS CONOCIDOS Y EXITOSOS SON LOS *METODOS CONGRUENCIALES*, QUE SON LOS QUE SE CONSIDERAN A CONTINUACION.

PRIMERAMENTE SE ELIGEN CUATRO NUMEROS O PARAMETROS DE LA FUNCION DE RECURRENCIA CONGRUENCIAL:

x_0	VALOR INICIAL	$x_0 \geq 0$
a	EL MULTIPLICADOR	$a \geq 0$
c	EL INCREMENTO	$c \geq 0$
m	EL MODULO	$m > x_0$ $m > a$ $m > 0$

CUALES SON LAS CONSECUENCIAS DE:

- NO RECOLECTAR DATOS

- RECOLECTAR DATOS INADECUADOS

* TOMA DE DECISIONES INCORRECTAS

* ACCIONES TOMADAS SON INEFECTIVAS

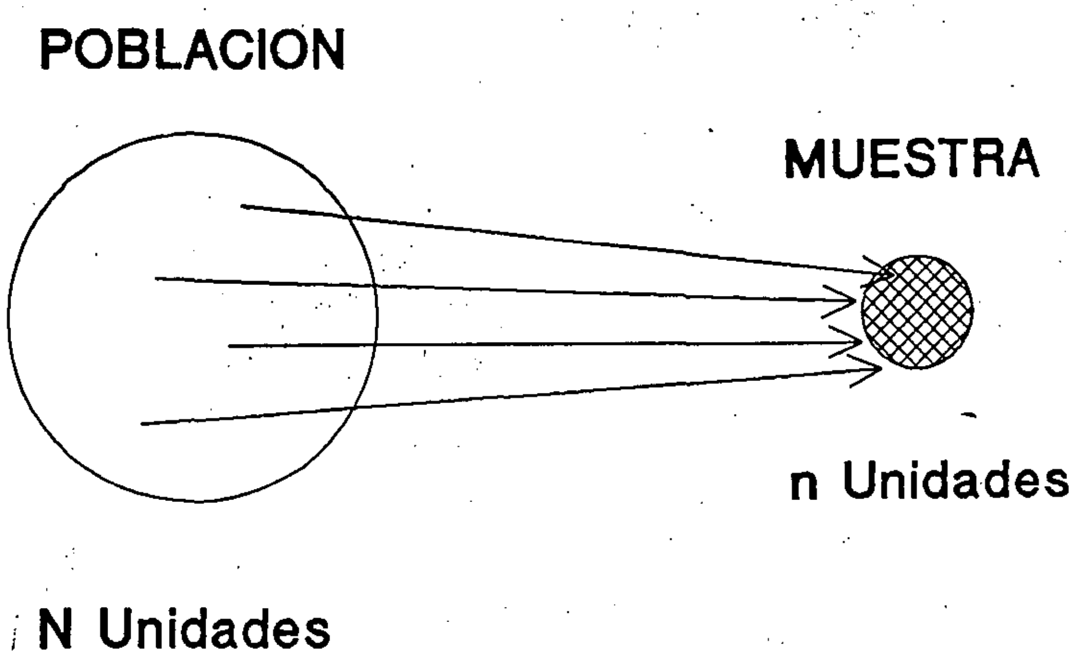
* DESPERDICIO DE TIEMPO, RECURSOS Y/O DINERO

* LAS PRIORIDADES NO PUEDEN SER ASIGNADAS EN FORMA APROPIADA

TQCT42

MUESTRA

UNA MUESTRA ES UN CONJUNTO DE ELEMENTOS SELECCIONADOS DE UNA POBLACION.



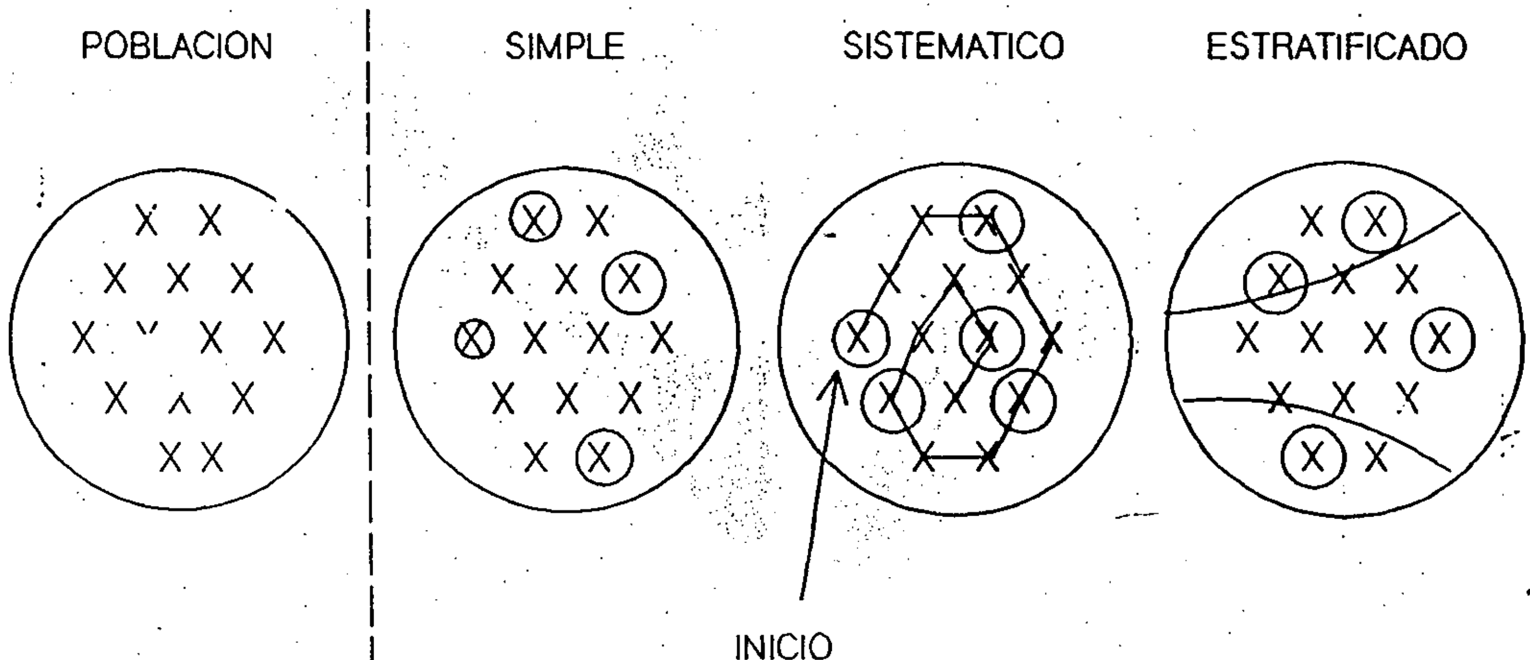
TQC041

POR QUE HACER MUESTREO?

* POBLACION DE GRANDES DIMENSIONES
* DISPONIBILIDAD DE TIEMPO
* DISPONIBILIDAD DE RECURSOS (DINERO, PERSONAL, ETC.)
* PRUEBAS DESTRUCTIVAS
* CALIDAD DE LA INFORMACION

TQCT41

TIPOS DE MUESTREO RANDOM



TQCT4-4

HEWLETT PACKARD

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORTA

TAMAÑO DE LA MIESTRA

EXPOSITOR: M. EN I. RUBEN TELLEZ SCHZ.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

4. TAMAÑO DE LA MUESTRA

Por: M en I Augusto Villarreal Aranda

INTRODUCCION

Dentro de un plan de muestreo, cuando ya se ha establecido la característica (o características) a estimar, así como el nivel de confianza y el grado de precisión requeridos, se debe decidir cuál debe ser el tamaño de la muestra o número de elementos a seleccionar por el procedimiento de muestreo que vaya a emplearse, en forma tal que los resultados que se obtengan no sean en exceso costosos o imprecisos.

Una vez que se ha fijado el error máximo admisible, que representa la precisión mínima que se exige tengan los resultados, así como el nivel de confianza $P_K = 1 - \alpha$, se requiere conocer además, en la forma más precisa posible, la variabilidad de la población, ya que cuanto más dispersos estén los valores de la variable asociada a ella más arriesgado será el utilizar una muestra de tamaño pequeño.

A continuación se expondrá el procedimiento para seleccionar el tamaño de muestra más adecuado en el caso del muestreo aleatorio simple o irrestrictamente aleatorio (sin remplazo). Más adelante se estudiarán los métodos para calcular el tamaño de la muestra para otros procedimientos de muestreo.

4.1 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Medias)

En este caso se trata de estimar la media μ de una población con variable aleatoria asociada X mediante el empleo del promedio aritmético $\bar{X}$, obtenido de una muestra aleatoria de tamaño n con un error máximo admisible absoluto e y un nivel de confianza P_K. Es natural que a la probabilidad P_K le corresponderá un cierto valor de desviación K, obtenido a partir de la desigualdad de Chebyshev, o bien considerando a K como el número de desviaciones estándar para una distribución normal o para una t de Student.

El procedimiento para obtener el tamaño de la muestra se fundamenta en el hecho de que

$$P\left(\bar{X} - K\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + K\sigma_{\bar{X}}\right) = P_K = 1 - \alpha$$

o sea que con probabilidad o nivel de confianza P_K se puede asegurar que el valor de μ de una población se encuentra dentro del

$(1-\alpha)$ % de los intervalos formados a partir de muestras de tamaño n, de la forma siguiente

$$(\bar{X} - K\sigma_{\bar{X}} \; , \; \bar{X} + K\sigma_{\bar{X}})$$

Lo anterior implica que los límites de confianza del P_K % para estimar a μ son

$$\bar{X} \pm K\sigma_{\bar{X}}$$

es decir, que el error en la estimación del valor de μ es, en valor absoluto,

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = K\sigma_{\bar{X}} \qquad (4.1)$$

Por lo tanto, es posible escribir

$$|\text{error máximo admisible}| = |\text{error en la estimación de } \mu| = e$$

4.1.1 Muestreo de una población finita

De la inferencia estadística, el valor de $\sigma_{\bar{X}}$, la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$ (o error estándar de $\bar{X}$) cuando la población es finita es

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \; \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

pudiéndose escribir entonces

$$e = K\sigma_{\bar{X}} = K \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \; \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

siendo K la desviación correspondiente al nivel de confianza P_K, N_p el tamaño de la población, σ_x^2 la variancia de esta última y n el tamaño de la muestra.

Puesto que se desea conocer el tamaño de la muestra, éste se puede obtener despejando de la ecuación anterior el valor de n. Para ello, se requiere elevar al cuadrado ambos miembros, es decir

$$e^2 = K^2 \frac{N_p - n}{N_p - 1} \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$e^2 = \frac{K^2 \sigma_x^2 N_p - K^2 \sigma_x^2 n}{(N_p - 1) n}$$

despejando a n:

$$ne^2 (N_p - 1) = K^2\sigma_x^2 N_p - K^2\sigma_x^2 n$$

$$ne^2 N_p - ne^2 = K^2\sigma_x^2 N_p - K^2\sigma_x^2 n$$

$$ne^2 N_p - ne^2 + K^2\sigma_x^2 n = K^2\sigma_x^2 N_p$$

$$n(e^2 N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2) = K^2\sigma_x^2 N_p$$

$$\therefore n = \frac{K^2\sigma_x^2 N_p}{e^2 N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2} \qquad (4.2)$$

La fórmula anterior permite obtener el tamaño de la muestra considerando conocidos K, e, N_p y σ_X^2. Puesto que el valor de σ_X^2 de la población usualmente se desconoce, se debe estimar previamente en forma adecuada considerando la información disponible de poblaciones semejantes a la que deberá muestrearse, o tomando una muestra preliminar suficientemente grande de dicha población.

Puesto que el tamaño de la muestra debe corresponder a un número entero positivo, se deberá asignar a n el valor entero más próximo por exceso al obtenido mediante la fórmula 4.2.

4.1.2 Muestreo de una población infinita

Cuando el muestreo se realiza a partir de una población infinita, el valor de $\sigma_{\bar{X}}$, la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$, es

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

en donde σ_X es la desviación estándar de la población y n el tamaño de la muestra.

considerando la ecuación 4.1, se puede escribir en este caso

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = e = K\sigma_{\bar{X}} = K\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Para obtener el valor de n, se elevan al cuadrado ambos miembros de la expresión anterior, es decir,

$$e^2 = \frac{K^2\ \sigma_X^2}{n}$$

Por lo cual

$$n = \frac{K^2\ \sigma_X^2}{e^2}$$

Para resaltar el hecho de que en este caso el tamaño de la muestra se obtiene a partir de una población infinita, en lugar de emplear n se puede emplear n_∞ , es decir

$$n_\infty = \frac{K^2\ \sigma_X^2}{e^2} \qquad (4.3)$$

Al igual que en el caso de una población finita, el tamaño de la muestra dado por la ec 4.3 debe corresponder a un número natural, por lo cual se debe aproximar por exceso al valor entero más cercano.

4.1.3 Comparación entre n y n_∞

Si se divide entre $N_p e^2$ el numerador y el denominador del miembro izquierdo de la ecuación 4.2, se obtiene

$$n = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2 N_p}{N_p e^2}}{\dfrac{e^2 N_p - e^2 + K^2\sigma_X^2}{N_p e^2}} = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2}}{1 - \dfrac{1}{N_p} + \dfrac{K^2\sigma_X^2}{N_p e^2}}$$

$$n = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2}}{1 + \dfrac{1}{N_p}\left(\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2} - 1\right)}$$

y, considerando el valor de n_∞ dado por la ec 4.3, se obtiene finalmente

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_\infty - 1)} \qquad (4.4)$$

Como se puede apreciar de la ec 4.4, el valor de n es menor que el de n_∞, a menos que $N_p = \infty$.

4.1.4 Empleo adecuado de n y n_∞

Para una población finita, se definirá la <u>fracción de muestreo</u> como

$$\text{fracción de muestreo} = fm = \frac{n_\infty}{N_p}$$

siendo n_∞ el tamaño de la muestra calculada con la ec 4.3, y N_p el tamaño de la población.

Al obtener el tamaño de la muestra cuando se trata de una población finita, usualmente se acostumbra emplear la fórmula 4.3, que proporciona dicho tamaño para población infinita, y considerar como bueno dicho valor siempre que se cumpla la condición

$$fm \leqslant 0.05$$

Lo anterior quiere decir que en la práctica se calcula el valor de n_∞, y si n_∞ / N_p cumple con la condición mencionada, entonces se considera que n_∞ es una aproximación satisfactoria de n. Si la condición no se cumple, entonces se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n.

Es claro que tomando como tamaño de la muestra a n_∞ siempre se estará del lado más prudente, en el sentido de que se toma una muestra igual o mayor que la necesaria. Sin embargo, la eficiencia del diseño exige que el gasto y el tiempo de muestreo no sean superiores a los que haya que efectuar.

Ejemplo 4.1

Sea una población normal finita con variancia aproximadamente igual a 500. Se desea obtener una muestra aleatoria para estimar mediante $\bar{X}$ a la media poblacional μ_X, con error en la estimación no mayor de 10 y nivel de confianza igual a 90%. Obténgase el valor de n considerando que el tamaño de la población es igual a

a. 1000

b. 100

Solución

a. Puesto que $\sigma_X^2 = 500$, $e = 10$ y $1 - \alpha = 0.90$, tratándose de una población normal se tiene que

$$K = Z_{0.45} = 1.645$$

por lo cual

$$n_\infty = \frac{K^2 \sigma_X^2}{e^2} = \frac{(1.645)^2 \ (500)}{10^2}$$

$$= (2.706)\ (5) = 13.53$$

$$\therefore n_\infty = 14$$

En virtud de que en este caso

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{14}{1000} = 0.014 < 0.05$$

se considera que n = 14.

b. En este caso

$$fm = \frac{14}{100} = 0.14 > 0.05$$

por lo cual se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n, es decir,

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_\infty - 1)} = \frac{14}{1 + \frac{1}{100}\ (14 - 1)}$$

$$= \frac{14}{1 + \frac{13}{100}} = \frac{14}{1.13} = 12.389$$

$$\therefore n = 13$$

Ejemplo 4.2

Cierta universidad cuenta con 4726 estudiantes, y se desea conocer el rendimiento académico medio de todos ellos, en términos de una escala de calificación que va de cero a cien puntos. En estudios semejantes en otras universidades, se obtuvo que la desviación estándar de las calificaciones es aproximadamente igual a 7 puntos. Si el error en la estimación de la media de calificaciones no debe ser mayor de un punto en valor absoluto, y el nivel de confianza es igual a 99%, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para realiaar la estimación?

Solución

En este caso, aproximando la distribución muestral de $\bar{X}$ mediante la distribución normal, se debe considerar que

$$P_K = 1 - \alpha = 0.99 \quad \therefore \quad K = Z_{0.495} = 2.58$$

$$\sigma_X^2 = (7)^2 = 49 \quad ; \quad e = 1 \text{ punto}$$

Por lo tanto,

$$n_* = \frac{Z_c^2 \ \sigma_X^2}{e^2} = \frac{(2.58)^2 \ (49)}{(1)^2}$$

$$= \frac{(6.656) \ (49)}{1} = 326.144$$

O sea $\quad n_\infty = 327$

Puesto que

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{327}{4726} = 0.0692 > 0.05$$

se procede a calcular n, es decir,

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)} = \frac{327}{1 + \frac{1}{4726}(327 - 1)}$$

$$= \frac{327}{1 + \frac{326}{4726}} = \frac{327}{1.069} = 305.89$$

$$\therefore n = 306$$

Ejemplo 4.3

Una muestra aleatoria de 14 observaciones de la altura alcanzada por cierto tipo de planta arrojó los siguientes datos:

Nº de elemento	Altura, X, en pulgadas
1	52.3
2	48.1
3	55.7
4	56.8
5	50.1
6	49.2
7	47.7
8	50.8
9	57.9
10	52.5
11	54.7
12	49.6
13	53.9
14	56.0

Obténgase el tamaño de muestra necesario para asegurar, con una probabilidad igual a 0.95, que el error en la estimación de la media de alturas de esta variedad de planta no sea mayor del 2.86%.

Solución

Se deben obtener primero los valores de $\overline{X}$ y S_X^2 de la muestra, con los cuales se estimarán los de μ_X y σ_X^2 de la población. Para ello, se dispone la información en la forma siguiente:

X_i	X_i^2
52.3	2735.3
48.1	2313.6
55.7	3102.5
56.8	3226.2
50.1	2510.0
49.2	2420.6
47.7	2275.3
50.8	2580.6
57.9	3352.4
52.5	2756.2
54.7	2992.1
49.6	2460.2
53.9	2905.2
56.0	3136.0
Σ 735.3	38766.2

Por lo tanto,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{14} (735.3) = 52.52 \text{ pulgadas}$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{14} (38766.2) - (52.52)^2$$

$$= 2769.01 - 2758.35 = 10.66 \text{ pulgadas}$$

Puesto que el error en la estimación de la media no debe ser mayor del 2.86%, y el estimador de μ_X es $\bar{X} = 52.52$, se tiene que

$$e = 52.52\ (0.0286) = 1.5 \text{ pulgadas}$$

Por otra parte, se desconoce el valor real de σ_X^2 de la población, además de que S_X^2, su estimador, se ha obtenido de una muestra menor de 30 elementos. Por lo tanto, la distribución teórica a la cual se debe aproximar la muestral debe ser la t de Student, siendo en este caso $K = t_c$. Sin embargo, puesto que en este caso se estima σ_X^2 mediante S_X^2 de la muestra, se debe tener presente que el error en la estimación de μ_X es

$$e = K\,\sigma_{\bar{X}} = t_c\,\sigma_{\bar{X}} = t_c\,\frac{S_X}{\sqrt{n-1}}$$

O sea, elevando al cuadrado

$$e^2 = t_c^2\,\frac{S_X^2}{n-1}$$

y, despejando a n,

$$n - 1 = \frac{t_c^2\,S_X^2}{e^2}$$

$$n = \frac{t_c^2\,S_X^2}{e^2} + 1$$

Por ser muestreo de población infinita, se puede escribir finalmente

$$n_\infty = \frac{t_c^2\ S_x^2}{e^2} + 1 \qquad (4.5)$$

Ya que el valor de t_c depende del número de grados de libertad de la muestra υ, y este último depende del tamaño de la muestra (ya que $\upsilon = n - 1$), la fórmula anterior para obtener el valor de n_∞ contiene dos incógnitas. Por ello, se sigue el siguiente proceso iterativo para obtener el valor de n_∞:

1. Se hace $t_{0.025} = Z_{0.475}$, es decir

$$t_{0.025} = 1.96$$

Con dicho valor de t_c se obtiene

$$n_\infty = \frac{(1.96)^2\ (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 18.2 + 1 = 19.2 \Rightarrow 20$$

De la tabla de la distribución t, se obtiene $t_{0.025} = 2.09$, para $\upsilon = 20-1 = 19$ grados de libertad.

2. Se toma ahora $t_{0.025} = 2.09$, y se obtiene

$$n_\infty = \frac{(2.09)^2\ (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 20.7 + 1 = 21.7 \rightarrow 22$$

De la tabla de la distribución t, se obtiene $t_{0.025} = 2.08$, para $\upsilon = 22-1 = 21$ grados de libertad.

3. Se toma ahora $t_{0.025} = 2.08$, y se obtiene

$$n_{\infty} = \frac{(2.08)^2 \ (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 20.5 + 1 = 21.5 \Rightarrow 22$$

En este paso se obtiene un valor de n_{∞} igual al del paso anterior, por lo que se puede considerar que el tamaño de muestra adecuado es igual a 22 plantas.

En este caso la población es infinita, por lo cual no se requiere hacer la corrección para población finita con la ec 4.4. Sin embargo, debe aclararse que es posible emplear la ec 4.5 para obtener n_{∞} primero y, si la población de la que se muestrea es finita, usar después la ec 4.4 para obtener el valor de n corregido.

4.2 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Totales)

Una característica o parámetro poblacional de gran interés es el total, que corresponde a la suma de todos los valores y_i que constituyen la población, es decir,

$$Y = \sum_{i=1}^{N_p} y_i$$

en donde Y denota al total, y N_p es el número de elementos de la misma.

Si se multiplica y divide por N_p el 2° miembro de la ecuación ante rior, se obtiene

$$Y = \frac{N_p}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} y_i = N_p \mu_Y$$

Es decir, el total de una población es igual al tamaño de la misma multiplicado por la media correspondiente.

Cono estimador puntual del total de la población se puede tomar el de la estadística

$$\hat{Y} = N_p \bar{Y}$$

en donde $\bar{Y}$ es el promedio aritmético de la muestra, y $\hat{Y}$ un estimador insesgado en virtud de que

$$E(\hat{Y}) = E(N_p\bar{Y}) = N_pE(\bar{Y}) = N_p \mu_Y = Y$$

Por otra parte, la variancia de la distribución muestral de $\hat{Y}$ es

$$\sigma^2_{\hat{Y}} = \sigma^2_{N_p\bar{Y}} = \text{Var}(N_p\bar{Y}) = N_p^2 \text{ Var }(\bar{Y}) = N_p^2 \sigma^2_{\bar{Y}}$$

y la desviación estándar es

$$\sigma_{\hat{Y}} = \sigma_{N_p\bar{Y}} = N_p\sigma_{\bar{Y}} = N_p \frac{\sigma_{Y.}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

De igual manera a como se hizo para las medias, el valor del tamaño de muestra para estimar el total con un nivel de confianza y un error absoluto dados, se obtiene en la forma siguiente

$$e = K\,\sigma_{\hat{Y}} = K\,N_p\,\frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas

$$e^2 = K^2\,N_p^2\,\frac{\sigma_Y^2}{n}\,\frac{N_p - n}{N_p - 1}$$

$$e^2 = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2 - K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2\,n}{n(N_p - 1)}$$

$$n\left(1 + \frac{K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1)}\right) = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1)}$$

O sea

$$n = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1) + K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2}$$

Dividiendo el numerador y denominador de la expresión anterior entre $N_p e^2$, se obtiene

$$n = \frac{\dfrac{K^2 N_p^3\,\sigma_Y^2}{N_p e^2}}{\dfrac{e^2 N_p - e^2 + K^2 N_p^2\,\sigma_Y^2}{N_p e^2}}$$

$$= \frac{N_p^2\,\dfrac{K^2\sigma_Y^2}{e^2}}{1 - \dfrac{1}{N_p} + \dfrac{N_p^2}{N_p}\,\dfrac{K^2\,\sigma_Y^2}{e^2}}$$

Considerando la ec 4.3, queda finalmente

$$n = \frac{N_p^2\,n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\,(N_p^2\,n_\infty - 1)} \qquad (4.6)$$

Ejemplo 4.4

Con el fin de hacer una solicitud al Gobierno, se recogieron firmas de habitantes de una ciudad en 676 hojas. Cada hoja tenía espacio suficiente para 42 firmas, pero en varias hojas se recolectó un número menor de ellas. Para obtener una estimación del total de firmas, se contó el número de firmas por hoja en una muestra aleatoria de 50 hojas, obteniéndose los datos que aparecen en la tabla siguiente:

Número de firmas, y_i	Número de hojas, f_i
42	23
41	4
36	1
32	1
29	1
27	2
23	1
19	1
16	2
15	2
14	1
11	1
10	1
9	1
7	1
6	3
5	2
4	1
3	1

Obtener el tamaño de muestra necesario para estimar el valor del total de firmas con un error absoluto igual al 5%, considerando un nivel de confianza igual a 95%.

Solución : Por conveniencia para realizar los cálculos, se dispone la información en la forma siguiente:

y_i	f_i	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
42	23	1764	966	40572
41	4	1681	164	6724
36	1	1296	36	1296
32	1	1024	32	1024
29	1	841	29	841
27	2	729	54	1458
23	1	529	23	529
19	1	361	19	361
16	2	256	32	512
15	2	225	30	450
14	1	196	14	196
11	1	121	11	121
10	1	100	10	100
9	1	81	9	81
7	1	49	7	49
6	3	36	18	108
5	2	25	10	50
4	1	16	4	16
3	1	9	3	9
Σ	50		1471	54497

$$\bar{Y} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{19} f_i\, y_i = \frac{1471}{50} = 29.42$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{19} f_i\, y_i^2 - (\bar{Y})^2 = \frac{54497}{50} - (29.42)^2 =$$

$$= 1089.94 - 865.44 = 224.5$$

Entonces

$$\hat{Y} = N_p\, \bar{Y} = 676 \times 29.42 = 19888 \text{ firmas}$$

y, puesto que el error absoluto debe ser igual al 5%, se tendría

$$e = (0.05)\ (19888) = 995$$

Por otra parte, el tamaño inicial de muestra igual a 50 permite suponer que la estimación de σ_Y^2 de la población es suficientemente buena con S_Y^2, y que la distribución muestral de totales puede aproximarse mediante la normal. Por lo tanto,

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

$$N_p = 676$$

$$\sigma_Y^2 \doteq S_Y^2 = 224.5$$

$$N_p^2 n_\infty = N_p^2 \frac{K^2 \sigma_Y^2}{e^2} = \frac{(676)^2\ (1.96)^2\ (224.5)}{(995)^2} = 397.9$$

$$n = \frac{N_p^2 n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(N_p^2 n_\infty - 1)} = \frac{397.9}{1 + \frac{1}{676}(397.9 - 1)}$$

$$= \frac{397.9}{1 + 0.58} = \frac{397.9}{1.58} = 251.83$$

$$\therefore \quad n = 252 \text{ hojas}$$

4.3 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Proporciones)

4.3.1 Antecedentes

Supóngase una población binomial de tamaño N_p tal que cada uno de sus elementos únicamente puede estar en una de dos clases: A o B (buenos o malos, negros o blancos, grandes o chicos, etc). La proporción de elementos de la población que están en la clase A es

$$P = \frac{A}{N_p}$$

y la proporción de elemtos que están en B es

$$Q = \frac{B}{N_p}$$

por lo cual

$$P + Q = \frac{A}{N_p} + \frac{B}{N_p} = 1 \quad ; \quad (A + B = N_p)$$

Si a todos los elementos X_i de la población que están en A se les asigna el valor 1 y a los de B el 0, se obtiene

$$P = \frac{A}{N_p} = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} X_i}{N_p} = \mu_X$$

Es decir, la proporción puede considerarse un caso particular de la media cuando los elementos de la población son unos y ceros.

La variancia es

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (X_i - P)^2$$

o sea

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i^2 - P^2$$

Sin embargo, como X_i sólo puede ser igual a uno o cero, se tiene que $X_i = X_i^2$, por lo cual

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i - P^2 = P - P^2 = P(1 - P) = PQ$$

En virtud de lo anterior, si se muestrea sin remplazo y con tamaño n de una población binomial finita, para estimar la proporción de elementos con cierta característica, se obtienen, considerando que la proporción se puede calcular como una media, los siguientes parámetros de la distribución muestral de proporciones

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Si la población es infinita, se obtiene

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$

estimándose P en ambos casos con el valor de p de la muestra, si se desconoce P de la población.

En la práctica se considera que la distribución muestral de proporciones es aproximadamente igual a la normal para tamaños de muestra mayores o iguales a 30 elementos.

4.3.2 Obtención del tamaño de la muestra

Aprovechando el hecho de que la proporción se puede calcular como una media simple, las ecs 4.3 y 4.4 se pueden emplear en este caso para obtener el tamaño de la muestra haciendo $\sigma_x^2 = PQ$. Entonces,

$$n_\infty = \frac{K^2 \ PQ}{e^2} \tag{4.7}$$

para muestreo de población infinita, y

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)}$$

para muestreo de población finita con tamaño N_p.

Usualmente se calcula primero el valor de n_∞, y si la fracción de muestreo es mayor de 0.05, se calcula a continuación el valor de n.

Ejemplo 4.5

En una colonia con 4000 casas se desea estimar el porcentaje de inquilinos que son a la vez propietarios de su casa, con un error estándar en la estimación no mayor del 1%. Se supone, de estudios semejantes, que el porcentaje real de inquilinos-propietarios se acerca al 10%. ¿Cuántas casas se deben muestrear para que se satisfaga la condición establecida?

Solución

El error estándar en la estimación de P de la población es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

y no debe ser mayor en este caso del 1%. Por lo tanto, siendo $N_p = 4000$, $P = 0.1$ y $Q = 1 - P = 0.9$, se obtiene

$$0.01 = \sqrt{\frac{(0.1)\ (0.9)}{n}} \sqrt{\frac{4000 - n}{4000 - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas

$$0.0001 = \frac{0.09}{n} \frac{4000 - n}{3999}$$

$$0.0001 = \frac{360 - 0.09\ n}{3999\ n}$$

$$0.3999\ n = 360 - 0.09\ n$$

$$n(0.3999 + 0.09) = 360$$

$$n = \frac{360}{0.4899} = 734.84$$

$$\therefore \quad n = 735 \text{ casas}$$

Ejemplo 4.6

En un estudio antropológico para estimar el porcentaje de habitantes de una isla con sangre del grupo O, se obtuvo una muestra aleatoria de 50 isleños, en la cual 22 de ellos pertenecen al grupo sanguíneo mencionado. Si en la isla habitan 3208 gentes, ¿cuál debe ser el tamaño de muestra mínimo para estimar con un error absoluto del 5% el valor real de P, suponiendo que el nivel de confianza es del 95%?

Solución

En este caso la proporción de la muestra es

$$p = \frac{22}{50} = 0.44$$

o sea

$$q = 1 - p = 1 - 0.44 = 0.56$$

Considerando que la muestra inicial es suficientemente grande, se aproxima mediante la distribución normal, obteniéndose

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

por lo cual

$$n_\infty = \frac{K^2\,PQ}{e^2} = \frac{K^2\,pq}{e^2} = \frac{(1.96)^2\ (0.44)\ (0.50)}{(0.05\ )^2}$$

$$= \frac{0.84515}{0.0025} = 338.06$$

$$\therefore\ n_\infty = 339$$

Como

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{339}{3208} = 0.106 > 0.05$$

se corrige el valor anterior, obteniéndose finalmente

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_\infty - 1)} = \frac{339}{1 + \frac{1}{3208}\ (339-1)}$$

$$= \frac{339}{1.105} = 306.787$$

$\therefore$ n = 307 habitantes

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

EJERCICIO DE MUESTREO

EXPOSITOR: M. EN I. RUBEN TELLEZ SCHZ.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

MUESTREO BIETÁPICO

M_i : Tamaño del i-ésimo conglomerado primario

$M = \sum^{N} M_i$: Total de elementos de conglomerados primarios

N : conglomerados de primera etapa

n : tamaño de muestra de conglomerados de primera etapa

m_i : tamaño de submuestra en i-ésima unidad primaria

y_{ij} : valor de característica en j-ésimo elemento de conglomerado i

$y_i = \sum^{m_i} y_{ij}$; $\bar{y}_i = y_i / m_i$: Total y media muestrales

• VALOR DE MEDIA POR UNIDAD PRIMARIA O CONGLOMERADO:

$$\bar{Y} = \sum^{N} \sum^{M_i} y_{ij} / N = \sum^{N} y_i / N$$

• VALOR DE LA MEDIA POR ELEMENTO:

$$\bar{\bar{Y}} = \sum^{N} \sum^{M_i} y_{ij} / \sum^{N} M_i = \sum^{N} y_i / \sum^{N} M_i = \sum^{N} y_i / N$$

• VALOR DEL TOTAL POBLACIONAL:

$$Y = \sum^{N} \sum^{M_i} y_{ij} = \sum^{N} y_i$$

• ESTIMADORES INSESGADOS DE LA MEDIA POR ELEMENTO Y DEL TOTAL:

$$\hat{\bar{\bar{Y}}} = \bar{\bar{y}} = \frac{1}{n\bar{M}} \sum^{n} M_i \bar{y}_i \quad , \quad \hat{Y} = M\bar{\bar{y}}$$

con varianzas estimadas:

$$\hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-f_1}{n\bar{M}^2} S_1^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2} \sum^{n} M_i^2 (1 - f_{2i}) \frac{S_{2i}^2}{m_i} \quad , \quad \hat{V}(\hat{y}) = M^2 \hat{V}(\bar{\bar{y}})$$

$$f_1 = n/N \, , \; f_{2i} = m_i/N_i \, , \; S_1^2 = \frac{\sum^{n} (M_i \bar{y}_i - \bar{M}\bar{\bar{y}})^2}{n-1} \, , \; S_{2i}^2 = \frac{\sum^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{m_i - 1}$$

• ESTIMADORES DE RAZON DE LA MEDIA POR ELEMENTO Y DEL TOTAL:

$$\hat{\bar{\bar{Y}}} = \bar{\bar{y}}_R = \sum^{n} M_i \bar{y}_i / \sum^{n} M_i \quad , \quad \hat{y}_R = \bar{\bar{y}}_R \sum^{N} M_i = \bar{\bar{y}}_R \; M$$

con varianzas estimadas:

$$\hat{V}(\bar{\bar{y}}_R) = \frac{1-f_1}{n\bar{M}^2} S_1^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2} \sum^{n} M_i^2 (1-f_{2i}) \frac{S_{2i}^2}{m_i} \quad , \quad \hat{V}(\hat{y}_R) = (\sum^{N} M_i)^2 \hat{V}(\bar{\bar{y}}_R)$$

$$\text{con } S_1^2 = \sum^{n} M_i^2 (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_R)^2 / (n-1) \quad , \quad S_{2i}^2 = \sum^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / (m_i - 1)$$

• ESTIMADOR ESTRATIFICADO DEL VALOR MEDIO POR ELEMENTO:

$$\hat{\bar{\bar{Y}}}_{est} = \sum^{L} M_h \bar{\bar{y}}_h / \sum^{L} M_h$$

con varianza estimada: $\hat{V}(\bar{\bar{y}}_{est}) = \sum_h \left[\frac{M_h}{\sum^{L} M_h} \right]^2 \hat{V}(\bar{\bar{y}}_h)$

E J E M P L O S

1. En una entidad, existen 9000 comercios, concentrados en 20 zonas de la capital y 10 poblaciones cercanas. Se elige aleatoriamente 6 de ellas y usando listados de los comercios de estas zonas, se elige aleatoriamente el 5% de estos comercios listados. Los datos son:

i	1	2	3	4	5	6
M_i	400	200	650	300	100	350
m_i	20	10	33	15	5	18
y_i	480	90	185	114	23	137
$M_i\bar{y}_i$	9600	1800	15462	2280	460	2663
f_{2i}	.05	.05	.051	.05	.05	.051
$M_i^2(1-f_{2i})$	152000	38000	400952	85500	9500	116252
s_{2i}^2	512	36	1309	62	3	77
$(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}_R)^2$	61.93	50.83	58.52	72.76	132.94	72.59

ESTIMADORES INSESGADOS:

- $\bar{\bar{y}} = \left(\frac{1}{n\bar{M}}\right)\sum^{n} M_i\bar{y}_i = \frac{30}{6(9000)}(32\,265) = 17.92$ empleados/comercio

  con $\hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-6/30}{6(300)^2}(34\,693\,997) + \frac{21\,031\,830}{6(30)(300)^2} = 52.68$, $EE(\bar{\bar{y}}) = 7.26$

  $\bar{\bar{y}} \pm 2\,EE(\bar{\bar{y}})$; $17.92 \pm 2(7.26) \Rightarrow \quad 3.4 < \bar{\bar{Y}} < 32.44$

ESTIMADORES DE RAZON:

- $\bar{\bar{y}}_R = \frac{\sum^{n} M_i\bar{y}_i}{\sum^{n} M_i} = \frac{32\,265}{2\,000} = 16.13$ empleados/comercio

  con $\hat{V}(\bar{\bar{y}}_R) = \frac{1-6/30}{6(300)}(10\,696\,359) + 1.29 = 17.14$, $EE(\bar{\bar{y}}) = 4.14$

  $\bar{\bar{y}} \pm 2EE(\bar{\bar{y}})$; $16.13 \pm 2(4.14) \Rightarrow \quad 7.85 < \bar{\bar{Y}} < 24.41$

2. De diez listas de agricultores, se eligen tres listas al azar para a su vez muestrear aleatoriamente la centésima parte de cada una de estas tres listas:

   $\bar{M} = \sum^{N} M_i / N = \sum^{10} M_i/10 = 14\,278/10 = 1428$

   $\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n\bar{M}}\sum M_i\bar{y}_i = \frac{22\,100}{3(1428)} = 5.16$ h/a , $EE(\bar{\bar{y}}) = 1.51 \Rightarrow [2.14, 8.18]$

   $\bar{\bar{y}}_R = \frac{\sum M_i\bar{y}_i}{\sum M_i} = \frac{22\,100}{3400} = 6.5$ h/a, $EE(\bar{\bar{y}}_R) = 0.364 \Rightarrow [5.77, 7.23]$

MUESTREO POR CONGLOMERADOS

N: Número de conglomerados
n: Tamaño de Muestra de conglomerados
M_i: Tamaño de Conglomerado i
$M = \sum_{i=1}^{N} M_i$ Total de elementos en toda la población

Estimador del Valor Medio por Conglomerado:

$$\hat{\bar{y}} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{M_i} y_{ij}$$

Estimador del Valor Total en conglomerados y elementos:

$$\hat{y} = N\bar{y} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Estimador de la Media por Elemento:

$$\hat{\bar{\bar{y}}} = \bar{\bar{y}} = \frac{\hat{y}}{M} = \frac{1}{\bar{M}}\frac{1}{n}\sum^{n} y_i$$

Varianzas Estimadas de estos estimadores:

$$\hat{V}(\bar{y}) = \frac{1-f}{n}\,\frac{\sum^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1},\quad \hat{V}(N\bar{y}) = \frac{N^2(1-f)}{n}\,\frac{\sum^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1},\quad \hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-f}{n\bar{M}^2}\,\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$$

Estimador de Razón para Total Poblacional:

$$\hat{y}_R = \frac{\sum^{n} y_i}{\sum^{n} M_i}\,M$$

con $\hat{V}(\hat{y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n}\,\frac{\sum^{n}(y_i - \bar{\bar{y}}_R M_i)^2}{n-1}$

Estimador de Razón para la Media Poblacional:

$$\hat{\bar{\bar{y}}}_R = \bar{\bar{y}}_R = \frac{\hat{y}_R}{M} = \frac{\sum^{n} y_i}{\sum^{n} M_i}$$

con $\hat{V}(\hat{\bar{\bar{y}}}_R) = \frac{1-f}{nM^2}\,\frac{\sum^{n}(y_i - \bar{y}_R M_i)^2}{n-1}$

Estimador de Razón de Porcentaje:

$$\hat{P}_R = P_r = \frac{\sum^{n} a_i}{\sum^{n} M_i}\,100$$

con $\hat{V}(P_R) = \frac{1-f}{n\bar{M}^2}\,\frac{\sum^{n} a_i^2 - 2P_R\sum^{n} a_i M_i + P_R^2\sum^{n} M_i^2}{n-1}$

EJEMPLO

Compañía con 10000 empleados en 600 oficinas. Se elige muestra de 20 oficinas y se identifica el número de hijos menores de cuatro años por empleado:

O	E	H	O	E	H
1	15	30	11	20	30
2	18	54	12	30	30
3	12	12	13	22	42
4	15	15	14	15	30
5	10	10	15	20	40
6	20	80	16	18	24
7	15	30	17	18	45
8	16	32	18	20	40
9	18	54	19	25	35
10	18	36	20	25	70

$\sum^{20} M_i = 368$, $\sum^{20} y_i = \sum\sum y_{ij} = 734$, $\sum y_i^2 = 33\,336$

$\sum M_i y_i = 14\,241$, $\sum M_i^2 = 7\,186$

ESTIMADORES INSESGADOS

- $\bar{\bar{y}} = \frac{600}{20(10000)} 734 = 2.202$ niños/empleado
  con error estándar de 0.25 niños/empleado
- $\bar{y} = 734/20 = 36.7$ niños/oficina
- $\hat{y} = N\bar{y} = 600(36.7) = 22\,020$ niños
  con error estándar de 2 462 niños

ESTIMADORES DE RAZON

- $\bar{\bar{y}}_R = 734/368 = 1.99$ niños/empleado
  con error estándar de 0.22 niños/empleado
- $\hat{y}_R = 1.99(10000) = 19\,900$ niños
  con error estándar de 2200 niños

Tabla

Conglomerado primario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Suma
No. de agricultores por unidad primaria M_i	78	1000	400	2200	700	1400	500	2000	3000	3000	14278
Unidades primarias en la muestra		•	•					•			

de cada 100 unidades secundarias. Las observaciones correspondientes y otros cálculos necesarios aparecen en la tabla 8.3.

a) Usando el estimador insesgado de la expresión 8.1 tenemos:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n\bar{M}} \sum_{i=1}^{i=n} M_i \bar{y}_i = \frac{22\,100}{3(1\,428)} = \frac{22\,100}{4\,284}$$

$$= 5.16 \text{ hijos por agricultor}$$

5.16 es el número medio estimado de hijos por agricultor. Para la estimación de su variancia, según la expresión 8.2 tenemos:

$$s_1^2 = \frac{\sum^{i=3} (M_i\bar{y}_i - \bar{M}\bar{\bar{y}})^2}{n-1} = \frac{1}{3-1}(39\,046\,672) = 19\,523\,336$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} M_i^2 (1 - f_{2i}) \frac{s_{2i}^2}{m_i} = 2\,771\,208$$

Por lo cual $\hat{V}(\bar{\bar{y}})$ vale:

$$\hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1 - \frac{3}{10}}{3(1\,428)^2}(19\,523\,336) + \frac{2\,771\,208}{3(10)(1\,428)^2}$$

$$= 2.23 + 0.0453 = 2.28$$

Tabla

Primaria	*1*	*2*	*3*	
No. de agricultores por unidad primaria en la muestra M_i	1 000	400	2 000	$\sum_{i=1}^{i=3} M_i = 3\,400$
Fracción de muestreo en las secundarias f_{2i}	0.01	0.01	0.01	
No. de agricultores submuestreados m_i	10	4	20	
No. de hijos por agricultor en la submuestra y_{ij}	6,2,11,8, 6,7,6,5, 8,10.	9,9,10, 4.	1,3,3,1,9,14, 7,10,4,5,7,7, 6,5,6,8,4,6,7,7.	
No. de hijos en la muestra por unidad primaria $y_i = \sum_{j=1}^{j=m_i} y_{ij}$	69	32	120	
No. medio estimado de hijos por unidad primaria en la muestra $\bar{y}_i = \frac{y_i}{m_i}$	6.9	8	6	
No. total estimado de hijos por unidad primaria en la muestra $M_i\bar{y}_i$	6 900	3 200	12 000	$\sum_{i=1}^{i=3} M_i\bar{y}_i = 22\,100$
$(1 - f_{2i})$	0.99	0.99	0.99	
$M_i^2(1 - f_{2i})$	990 000	158 400	3 960 000	
s_{2i}^2	6.54	7.33	9.26	
$(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_R)^2$	0.16	2.25	0.25	

8.9 En una farmacia existen 50 muebles (a manera de libreros) de seis tableros cada uno de ellos. En cada mueble y sobre los tableros están los medicamentos que ahí se expenden. Se desea estimar el total de dinero invertido en los medicamentos y para esto se obtiene una selección sistemática de cinco muebles y de cada uno de ellos en la muestra se hace una selección sistemática de dos tableros en cada mueble después de lo cual, se determina el valor de la mercancía en cada tablero en la muestra con los resultados siguientes:

Mueble	*No. de tableros en cada mueble*	*No. de tableros en la muestra*	*Valor de la mercancía en cada tablero*
1	6	2	1000 1000
2	6	2	2000, 1000
3	6	2	1000, 2000
4	6	2	3000, 2000
5	6	2	3000, 1000

I) Estime el valor total de la mercancía en la farmacia.

II) Encuentre intervalos del 95% para el total de la mercancía.

II

BIBLIOGRAFIA

Azorín Poch. 1969 *Curso de muestreo y aplicaciones.* Aguilar, España.

Babbie E. R. 1973. *Survey Research Methods.* Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont, California.

Chevry G. R. 1967 *Práctica de las encuestas estadísticas.* Ariel. España.

Cochran W. G. 1963 *Sampling techniques* John Wiley & Sons N. Y. Segunda edición.

Kish L. 1965 *Survey sampling.* John Wiley & Sons, N. Y.

Naylor T. H. Balintfy J. L. Burdich D. S. Chuk. 1977 *Experimentos de Simulación en Computadoras con Modelos de Sistemas Económicos* Editorial Limusa, S. A. México, D. F.

Raj Des. 1968. *Sampling theory.* McGraw-Hill. N. Y.

Sudman S. 1976. *Applied Sampling.* Academic Press. N. Y.

iv) Ambigüedad, posiblemente derivada a partir de homónimos.

Ejemplo 1.3 Al observar los salarios diarios de un conjunto de 10 personas se encontró lo siguiente: 175, 300, 125, 100, 100, 275, 150, 150, 200, 200.

i) El salario mínimo observado fue de 100 pesos al día, el máximo de 300, la diferencia entre el máximo y el mínimo o rango de las observaciones es de 300 − 100 = 200.

ii) El salario medio es de: 175 + 300 + 125 + 100 + 100 + 275 + 150 + 150 + 200 + 200 dividido entre 10, es decir, $\frac{1775}{10} =$ 177.5 pesos al día.

iii) La varianza de las observaciones es de (Apartado 3.6):

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \left(\Sigma y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{N} \right)$$

$$= \frac{1}{10-1} \Big(175^2 + 300^2 + 125^2 + 100^2 + 100^2 + 275^2 + 150^2 + 150^2 + 200^2 + 200^2 - \frac{(1775)^2}{10}\Big)$$

$$= \frac{1}{9} (356\,875 - 315\,062.5) = 4\,645.83 \text{ pesos al cuadrado.}$$

1.8 EJERCICIOS

1.1. *i.* Describa dos ejemplos de poblaciones a estudiar. *ii.* Especifique sus unidades o elementos. *iii.* Enuncie dos ejemplos de características de interés en cada una de ellas. *iv.* ¿Cuántos elementos tiene cada una de sus poblaciones? *v.* ¿Puede definir algunas subpoblaciones en ellas? , ¿cuáles?

1.2. El número de miembros y de beneficiarios asociados a un organismo público en cada una de las 20 familias de una manzana fueron los de la tabla 1.1.

Tabla 1.1

Familia	*No. de miembros*	*No. de beneficiarios*	*Familia*	*No. de miembros*	*No. de beneficiarios*
1	2	0	11	11	5
2	5	5	12	6	0
3	3	1	13	6	0
4	6	0	14	3	1
5	9	0	15	7	0
6	7	0	16	6	0
7	5	0	17	6	0
8	5	1	18	4	0
9	6	3	19	9	2
10	4	0	20	8	0

Determine:

i. El número total de miembros en las 20 familias.

ii. El número medio de miembros por familia.

iii. El porcentaje de familias con al menos un beneficiario.

iv. El cociente del total de beneficiarios al total de habitantes en la manzana.

v. El número medio de beneficiarios por familia, para las familias con al menos un beneficiario.

1.3 Enuncie una situación en la cual un censo fuera preferible a un muestreo.

1.4 En una encuesta sobre la salud de las personas en una ciudad, se parte de un mapa de ella, se dibujan las manzanas, se numeran, se efectúa una selección de manzanas, y para aquellas manzanas seleccionadas se contruye un listado de las viviendas que las conforman. Así se tiene un listado de viviendas para cada manzana en la muestra. A partir de esos listados se hace una nueva selección ahora de viviendas dentro de manzana, y para cada vivienda seleccionada, el entrevistador ocurre a ella y llena un cuestionario por cada persona o miembro de la vivienda. I) ¿Cuáles son los elementos en esta encuesta?, II) ¿Cuáles son las unidades?, III) Proporcione seis ejemplos de características a estudiar. IV) En base a sus características elegidas en (III), defina cuatro parámetros poblacionales, V) ¿Qué método de medición emplearía para cada uno de ellos?, VI) ¿Cuál fué el marco de referencia?.

2.7 EJERCICIOS

2.1 Véase el ejercicido *2* del capítulo *1*. Marcamos una canica por familia con el número de ésta y de sus miembros; las ponemos en una urna, las mezclamos y elegimos aleatoriamente a cinco de ellas, obteniendo los resultados siguientes:

Canica	1	2	3	4	5
No. de miembros	5	5	3	6	7

i) ¿Cómo estimaría el número medio de miembros por familia?

ii) ¿Qué estimador utilizó?

iii) ¿Cuál es su valor particular para esta muestra?

iv) ¿La muestra fue buena?

2.2 En el ejercicio anterior, y con el propósito de evaluar los resultados del muestreo, es decir, de saber qué tan buena es nuestra estimación, usamos la ecuación siguiente:

$$\left(1-\frac{5}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\frac{\sum_{i=1}^{i=5}(y_i-\bar{y})^2}{5-1}=\left(1-\frac{5}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\frac{1}{5-1}\left(\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{5}y_i\right)^2}{5}\right)$$

llamada "estimador de la variancia";

i) ¿Cuál es su valor particular para la muestra elegida?

ii) ¿En qué unidades de medida está el resultado obtenido?

iii) A la raíz cuadrada de ella se le llama *error estándar*, ¿cuál es su valor en este caso?

iv) Haga un bosquejo de una distribución normal, con media igual al número medio de miembros por familia encontrado en el ejercicio 1.2 y con la desviación estándar calculada anteriormente.

v) Según su dibujo, ¿le parece que está muy dispersa esa distribución?, es decir, ¿su variancia es grande o pequeña?

2.3 En una encuesta de opinión desarrollada sobre los obreros de una fábrica, se encontró el porcentaje de obreros favorables a cierta regla. Este porcentaje fué de 38%. Como había información suficiente para obtener dos estimaciones, se hizo esto y se obtuvo, para la segunda, nuevamente 38%, aunque no así para sus errores estándar. En el primer caso se encontró 0.07 y en el segundo 0.05. ¿Cuál de las dos estimaciones es mejor?, dé sus razones.

Este ejemplo, envuelve al concepto de muestreo multietápico en el cual se eligen unidades grandes (salones) y dentro de ellos se efectúa un nuevo sorteo (estudiantes). Realmente el número de etapas puede ser cualquiera: ciudad, colonia, manzana, vivienda y persona. A los conglomerados más grandes se les denomina unidades primarias, a las siguientes secundarias, terciarias, etc.

3.8 EJERCICIOS

3.1 Una población consta de 1 050 unidades numeradas del 1 al 1 050. Es necesario seleccionar una muestra aleatoria simple sin remplazo de tamaño 13. ¿Cómo lo haría usted?

3.2 Suponga que las unidades en la población anterior están numeradas como se indica a continuación:

1 001	9 811
1 002	9 813
•	9 910
1 317	9 911
1 318	9 912
1 319	9 913
•	•
•	•
•	•
2 040	9 918

¿Cómo seleccionaría una muestra aleatoria simple sin remplazo de tamaño 10?

3.3 En una encuesta desarrollada sobre una población de 10 000 familias, se tomó una muestra aleatoria de 40 de ellas, de manera que la fracción de muestreo fue de $\frac{40}{10\,000} = \frac{1}{250}$ es decir se entrevistó a una familia de cada 250. El número de personas que trabajan y el número total de miembros en cada familia de la muestra aparecen en la tabla 3.5.
Estime: *a*) El número medio de personas que trabajan por familia y encuentre intervalos de confianza del 95%.
b) El total de personas que trabajan y dé una estimación del error estándar.

3.4 Usando la información del ejercicio 3.3 estime el porcentaje de familias con más de cinco miembros y encuentre el error estándar de su estimación.

3.5 Sobre el mismo ejercicio 3.3, estime el número de miembros por persona que trabajan y el error estándar de su estimación.

3.6 Sobre la definición de muestreo aleatorio simple en el apartado 3.1, muestre que si a cada muestra posible se le elige con probabilidad igual, esto es equivalente a que la muestra elegida haya sido obtenida mediante la selección de n números aleatorios diferentes entre 1 y N.

3.7 En el ejemplo 3.1 derive intervalos de confianza del 95% para el porcentaje de empresas que fabrican y venden su producto al menudeo.

3.8 En el ejemplo 3.1, estime las variancias de la media y del total de empleados y calcule intervalos de confianza del 95% para cada uno de ellos.

3.9 Un grupo asesor de una escuela técnica piensa que los planes de estudio del plantel están un poco desactualizados y, mediante una encuesta sobre los egresados de ella, piensa derivar resultados que le ayuden en su reestructuración. Las preguntas que se deben formular, van dirigidas para aquellos egresados que estén trabajando como investigadores. El listado muestra 638 nombres cada uno con su dirección, de ellos se elige una muestra aleatoria de tamaño 20. Al hacer el trabajo de campo, los entrevistadores preguntan al egresado si es o no investigador. Si responde afirmativamente le hacen la entrevista y en caso contrario no la hacen. Al devolver los cuestionarios, el grupo asesor encuentra que 18 de los egresados en la muestra se calificaron como investigadores. Y así, emite instrucciones para que en el procesamiento de la información, en el cálculo de porcentajes y medias se use como tamaño de muestra 20.

i) ¿Cree usted que está bien definida la población objetivo? Indique sus razones.

ii) En el supuesto de que la población estuviera bien definida, ¿sería correcto usar el tamaño de muestra de 20 que indica el grupo asesor?

3.10 En cada cuestionario de un conjunto de 800 provenientes de una encuesta agrícola existe un dato de un porcentaje referente a una cualidad de la parcela agrícola. Los cuestionarios no han sido procesados aún, y se desea tener alguna idea del valor de ese porcentaje en los diferentes cuestionarios. Para ello, aprovechando su numeración consecutiva se elige aleatoriamente a 60 de ellos y se estima el porcentaje teniendo éste como valor 32%. Otra persona dice que la muestra fue muy pequeña y decide aumentarla a 120, calcula el porcentaje y obtiene como valor 33.4%. Una tercera persona aumenta el tamaño de muestra hasta 250 y encuentra como valor estimado a 32.9%.

¿Qué comentarios puede usted hacer respecto a los valores obtenidos en las diferentes muestras?

Tabla 3.5

No. de familia	*No. de personas que trabajan y_i*	*No. de miembros x_i*
1	1	3
2	3	7
3	1	5
4	1	1
5	1	9
6	2	8
7	1	8
8	2	5
9	3	7
10	1	3
11	1	4
12	1	4
13	1	8
14	1	11
15	4	4
16	1	7
17	3	3
18	2	3
19	1	3
20	2	2
21	2	5
22	2	4
23	1	9
24	1	6
25	1	6
26	1	7
27	2	6
28	3	6
29	1	5
30	1	5
31	1	9
32	1	8
33	1	4
34	3	6
35	1	1
36	7	7
37	1	3
38	1	3
39	6	6
40	3	9

$\sum_{i=1}^{40} y_i = 73$ $\qquad \sum y_i x_i = 413$ $\qquad \sum_{i=1}^{i=40} x_i = 220$

$\sum y_i^2 = 207$ $\qquad \sum x_i^2 = 1436$

Tamaño de muestra	77	98	334	300	200	200	370

Se concluye que el tamaño de muestra a usar es de 370, superior en 293 unidades al tamaño de muestra que se requeriría para obtener exclusivamente la estimación que pretendía el economista.

En este ejemplo se ha tratado de ilustrar la situación usual en muchas encuestas, acerca de que cuando se va a desarrollar una de ellas, los interesados tienden a introducir más y más preguntas en los cuestionarios con la salvaguarda de que "ya que van a visitar a tales personas, pregunten de paso tales y cuales cosas".

Sin tocar de momento los fuertes problemas a que da lugar un cuestionario extenso, se trata de ilustrar la habilidad de que debe hacer gala el estadístico para detectar cuáles preguntas son introducidas sin tener una importancia capital, y cuándo la tienen verdaderamente. El hecho es que cuando se interroga sobre la pregunta importante, los interesados contestan que todas lo son, y que de no ser así, "no se hubieran formulado". En realidad, algunas de ellas son debidas a simple curiosidad y, en otras, el uso que se les va a dar no es de tal importancia como para que ellas gobiernen a la encuesta. No es raro ver encuestas con cuestionarios formados por varias decenas de hojas. Y desde el punto de vista de la entrevista o, en general, del método que se emplee para recabar la información es deseable que sea lo más reducido posible.

4.7 EJERCICIOS

4.1 Obtenga la expresión 4.3 para el tamaño de la muestra en el caso de la estimación de totales.

4.2 Obtenga la expresión 4.4 para el tamaño de la muestra en el caso de la estimación de porcentajes.

4.3 En el ejemplo 4.1 se encontró un tamaño de muestra de 24 para estimar el número medio de hojas por expediente, con un error que no excede al 20% y a una confianza del 95%.

Usando las tablas de números aleatorios (tabla 3.1) podemos materializar una muestra. Comenzando en la esquina superior izquierda y continuando posteriormente hacia abajo tenemos la tabla 4.3:

3.11 En una urna existen B canicas blancas y A canicas azules. Se extrae a n de ellas aleatoriamente y con reposición. Se desea determinar la probabilidad de que b canicas de entre las n extraídas ($b \leqslant n$) sean blancas. ¿Cuál es la distribución del número b de canicas blancas en cada muestra de tamaño n?, ¿cuál es la media y la variancia de esta distribución?

3.12 En la urna del ejercicio 3.11 la muestra aleatoria es extraída sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que b canicas ($b \leqslant n \leqslant A + B$) sean blancas? ¿Cuál es la distribución del número b de canicas blancas en cada muestra de tamaño n? ¿Cuál es la media y la variancia de esta distribución?

3.13 En el apartado 3.5 se derivó la esperanza de la media muestral y al hacerlo se afirma que: "la probabilidad de que no sea elegida en las primeras $j - 1$ *extracciones*" es $\frac{N-j+1}{N}$; ¿está usted de acuerdo?

3.14 Una escuela tiene 20 salones en la planta baja numerados del 1 al 20 y 16 en la planta alta numerados del 1 al 16.

i) Indique brevemente cómo numeraría o identificaría a los salones para seleccionar una muestra aleatoria simple de tamaño 5.

ii) Utilizando los números aleatorios siguientes y avanzando de arriba hacia abajo, obtenga los 5 salones en la muestra.

Números aleatorios

74	50
90	98
25	46
01	81
41	11
31	39
25	04

Tabla 4.3

Expediente	No. hojas	Expediente	No. hojas	Expediente	No. hojas
1	5	9	5	17	3
2	4	10	2	18	6
3	2	11	1	19	2
4	3	12	2	20	1
5	2	13	2	21	5
6	3	14	1	22	3
7	2	15	1	23	5
8	9	16	1	24	3

Estime el número medio de hojas por expediente y obtenga intervalos de confianza del 95%.

4.4 En el ejemplo 4.2, para la estimación del total de hojas en los 60 expedientes con un error del 20% y una confianza del 80% se llegó a $n = 13$.

Continuando en las tablas de números aleatorios, a partir del último número usado en el ejercicio 1: *i*) Obtenga una muestra; *ii*) estime el total de hojas, y *iii*) dé una estimación del error estándar.

4.5 La producción, en un día, de tarjetas perforadas de una persona se encuentra en una gaveta; siendo el total de ellas 2 000. Se quiere estimar el porcentaje de tarjetas que tienen al menos un error, mediante una muestra aleatoria. ¿Qué tamaño de muestra es necesario si se piensa que el porcentaje está entre 68 y 80%, y se acepta un error estándar de 3%?

4.6 En un archivo de 10 000 000 de nombres de habitantes del país se desea estimar el porcentaje de ellos cuyo apellido empieza con la letra *K*. El archivo no está ordenado alfabéticamente.

Considerando que el porcentaje es de aproximadamente 0.5 por ciento se pide encontrar el tamaño de muestra requerido bajo muestreo aleatorio simple si se acepta un error estándar no mayor de 0.05%.*

4.7 Para efectos de una planeación económica en la región occidental de México, es necesario estimar de entre 10 000 establos: *a*) el número medio de vacas lecheras por establo con un error del 10% y una confianza del 95%; y *b*) el rendimiento medio de leche por establo con un error del 10% y una confianza del 95%.

Una muestra aleatoria piloto de tamaño 20 arrojó las siguientes estimaciones:

* Cuando el atributo buscado es raro, un esquema de muestreo de tipo general como es el aleatorio ya no es eficiente, requiere tamaños de muestra muy grandes y es necesario recurrir a otros métodos.

Número medio de vacas por establo igual a 40,
s^2 igual a 1 000.
Rendimiento medio de leche por establo igual
a 300 litros y s^2 igual a 1 600.

¿Qué tamaño de muestra se necesita?

4.8 Si en el ejercicio 4.7 se deseara estimar el número total de vacas lecheras en los 10 000 establos con un error de 30 000 vacas y una confianza del 95%, ¿qué tamaño de muestra se requeriría?

4.9 Una compañía manufacturera de juguetes infantiles desea introducir un nuevo tipo de caballitos, los cuales puede fabricar con uno de dos materiales distintos al mismo costo. Ambos tienen prácticamente, la misma duración y aparentemente el mismo atractivo. Se desea usar una sola clase de material y para tomar una decisión se considera conveniente realizar una pequeña encuesta sobre la zona residencial que es considerada como su mayor cliente y de la cual se tiene un listado reciente de 10 000 familias. Por lo tanto, se trata de una encuesta de opinión, en la cual se entrevistará a la madre en cada familia. ¿Puede indicar algún valor razonable para el porcentaje que se busca, y en función de él, proponer alguna precisión?

luego, en el muestreo aleatorio simple con remplazo, la media muestral considerada como estimador de la media poblacional resulta ser insesgada de ella.

Ahora encontremos su variancia:

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\, V\left(\sum_{i=1}^{N} t_i\, y_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \cdot V(t_i) + 2 \sum_{i<j}^{N} y_i\, y_j \cdot \mathrm{Cov}(y_i, y_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} y_i^2\, \frac{n}{N}\, \frac{N-1}{n} - 2 \sum_{i<j}^{N} y_i\, y_j\, \frac{n}{N^2}\right]$$

$$= \frac{N-1}{N}\, \frac{S^2}{n}$$

Y se puede demostrar que un estimador insesgado de ella es:

$$\hat{V}(\bar{y}) = \frac{1}{n}\, \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

5.10 EJERCICIOS

5.1 En el apartado 5.2, la población de niños a que se hace referencia es la formada por aquellos nacidos en un sanatorio determinado y en el cual se llevan estadísticas de los recién nacidos. En una semana nacieron 2 000 niños y su talla o longitud media calculada para todos ellos fue de 46 centímetros. A los siete meses de edad se elige aleatoriamente a 30 de ellos, cada niño en la muestra es medido (y_i) y posteriormente se colecta su talla o longitud inicial (x_i) a partir de sus fichas de nacimiento. Los datos son los siguientes, (ver tabla 5.5).

Estime: *a*) la talla o longitud media de los niños a los 7 meses de edad, *b*) el error estándar de su estimador y *c*) calcule intervalos de confianza del 95% para la talla de los niños mediante *i*) la media muestral, y *ii*) el estimador de razón. ¿Qué método es más preciso?

5.2 En el apartado 5.2, sobre el ejemplo de las gavetas en los 6 estantes con 240 gavetas en total, se pide estimar el número total de tarjetas pertenecientes a hijos, así como el error estándar y dar intervalos de confianza del 95%. El tamaño de la muestra fue de 20 gavetas y el peso total de las tarjetas en ellas fue de 30 kilos*; la muestra arrojó los resultados de la tabla 5.6.

* 30 kilogramos son iguales a 30 000 gramos, que son las unidades de medida para x_i en la tabla 5.6.

Tabla 5.5

y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i
52	38	70	53	52	39
62	43	71	50	56	42
73	50	55	40	57	41
57	[illegible]5	59	47	60	46
68	45	71	47	58	44
54	42	58	44	74	50
53	40	72	48	48	37
51	38	74	49	52	39
63	46	63	46	57	44
70	48	53	40	70	48

Tabla 5.6

y_i:	160	180	190	240	200	150	190	190	240	220
x_i:	150	120	130	170	160	140	140	120	180	160
y_i:	200	200	220	240	180	160	190	200	130	170
x_i:	150	140	170	180	140	110	130	140	120	130

Calcule las estimaciones anteriores usando: *i*) $N\bar{y}$; *ii*) el estimador de razón.

5.3. Si $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, y, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, demuestre que bajo muestreo aleatorio simple la covariancia entre ellas está dada por:

$$\mathrm{COV}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1-f}{n} \; \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X})}{N-1}$$

5.4 Usando las definiciones y el resultado del ejercicio 5.3 y considerando la expansión por la serie de Taylor de la función $g(\bar{x}, \bar{y})$ alrededor del punto $(\bar{X}, \bar{Y})$:

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{X}, \bar{Y}) + (x - \bar{X}) \left.\frac{\partial g\,(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}\right|_{\substack{\bar{x} = \bar{X} \\ \bar{y} = \bar{Y}}} + (\bar{y} - \bar{Y}) \left.\frac{\partial g\,(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}\right|_{\substack{\bar{x} = \bar{X} \\ \bar{y} = \bar{Y}}}$$

$+$ (despreciable)

Entonces:

$$\mathrm{Var}\left[g(\bar{x}, \bar{y}) \right] = E\left[g(\bar{x}, \bar{y}) - g(\bar{X}, \bar{Y}) \right]^2$$

$$= \left[\frac{\partial g\,(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{x}}\bigg|_{\substack{\bar{x}\,=\,\bar{X}\\ \bar{y}\,=\,\bar{Y}}}\right]^2 \cdot \operatorname{Var}\bar{x} + \left[\frac{\partial g\,(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{y}}\bigg|_{\substack{\bar{x}\,=\,\bar{X}\\ \bar{y}\,=\,\bar{Y}}}\right]^2 \cdot \operatorname{Var}\bar{y} +$$

$$+\,2\left(\frac{\partial g\,(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{x}}\bigg|_{\substack{\bar{x}\,=\,\bar{X}\\ \bar{y}\,=\,\bar{Y}}}\right)\left(\frac{\partial g(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{y}}\bigg|_{\substack{\bar{x}\,=\,\bar{X}\\ \bar{y}\,=\,\bar{Y}}}\right) \cdot \operatorname{Cov}\,(\bar{x},\,\bar{y})$$

Si ahora, hacemos $g(\bar{x},\,\bar{y}) = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}} = \hat{R}$, demuestre que

$$\operatorname{V}(\hat{R}) = \frac{1-f}{n\bar{X}^2}\;\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - Rx_i)^2}{N-1}$$

5.5 En el caso de dominio de estudio demuestre que con muestreo aleatorio simple $\operatorname{E}\left(\dfrac{n_d}{N_d}\right) = \dfrac{n}{N}$

5.6 En referencia al ejemplo 5.2, calcule intervalos de confianza del 95% para el peso medio de piedras por saco, así como para el total en los 1 000 sacos.

5.7 En referencia al ejemplo 5.2, estime el error estándar del estimador del cociente entre el peso total de la piedra y el peso total de la semilla usando la aproximación normal y considerando como válida la expresión 5.3.

5.8 En referencia al ejemplo 5.3, estime la variancia del número medio de turistas por hotel para aquellos hoteles que cuentan con teléfono y estacionamiento.

5.9 En una encuesta sobre el personal de una empresa, se quiere estimar el porcentaje de empleados que se enteran regularmente de los cambios introducidos al reglamento de seguridad interno, así como el porcentaje de ellos que regularmente fuman cigarrillos. Para la encuesta se usan los listados de pago correspondientes a la última quincena. De ella se elige aleatoriamente a 40 empleados de entre un total de 5 000, obteniéndose los resultados de la tabla 5.7.

Calcule las estimaciones solicitadas, así como intervalos de confianza del 95% para el porcentaje de empleados que se enteran regularmente de los cambios introducidos al reglamento interno de seguridad.

Considere las expresiones obtenidas para las variancias de la media muestral en los esquemas de selección con y sin reemplazo. ¿Cuál es la magnitud de su diferencia?

Con referencia al ejemplo de los gaveteros del apartado 5.2. ¿por qué es necesario que las familias generalmente tengan más de dos hijos?

Tabla 5.7

No. del empleado	*Conocen los cambios al reglamento*	*Fuman cigarrillos*
1	no	sí
2	no	no
3	no	sí
4	no	sí
5	no	no
6	sí	no
7	no	no
8	sí	no
9	sí	no
10	no	no
11	sí	no
12	sí	no
13	sí	no
14	sí	no
15	renunció	—
16	sí	no
17	sí	sí
18	sí	no
19	no	sí
20	sí	sí
21	sí	sí
22	sí	no
23	tiene permiso por 6 meses	
24	renunció	—
25	no	sí
26	no	no
27	sí	no
28	no	no
29	sí	no
30	sí	no
31	sí	no
32	no	no
33	no	no
34	no	sí
35	sí	sí
36	no	no
37	no	no
38	no	no
39	no	no
40	no	no

Para el caso de camiones:

$$\hat{\bar{Y}}_d = \frac{13 + 4 + 55 + 0}{62 + 33 + 67 + 124} = \frac{72}{286} =$$

$$= 0.25 \text{ Camiones por predio ejidal tenga o no el vehículo.}$$

Para efectos del cálculo de la variancia, debe ser usada la expresión 6.34, su cálculo lo dejamos al lector. En este ejercicio hemos empleado las expresiones más simplificadas de los estimadores que son las correspondientes a la afijación proporcional, aunque formalmente por efecto del redondeo al calcular los tamaños de muestra no lo sea, pero su efecto es despreciable.

6.12 EJERCICIOS

6.10 Obtenga las expresiones 6.20, para calcular el tamaño de la muestra en el caso de totales.

6.11 Obtenga las expresiones 6.21, para calcular el tamaño de la muestra en el caso de porcentajes.

6.12 Obtenga la expresión 6.27, de la variancia del estimador de razón combinado en muestreo estratificado.

6.13 Usando una variable auxiliar que tome como valores uno o cero según que la unidad se encuentre o no en el dominio d-ésimo, muestre que la ecuación 6.31 es un cociente de medias estratificadas, y que, por lo tanto, es de la forma del estimador de razón combinado en la ecuación 6.26.

6.14 Suponga que en el ejemplo 6.8 hay 7 estados y que el número de gaveteros y datos de la muestra son los siguientes: (tabla 6.10).

Donde

$$Q_h = \sum_{i=1}^{n_h} \left((y_{hi} - \hat{R}x_{hi}) - (\bar{y}_h - \hat{R}\bar{x}_h)\right)^2$$

Usando la media estratificada estime el número total de tarjetas asociadas a los hijos y calcule una estimación del error estándar.

6.15 En el ejercicio anterior, 6.14, y usando el estimador de razón combinado, estime el número total de tarjetas asociadas a los hijos y calcule una estimación del error estándar. El peso total de las tarjetas en todos los

Se hace el sorteo sobre los listados de cada zona, se llevan a cabo las visitas y se obtiene la tabla 6.9

Tabla 6.9

Zona 1. Tractores:

1	0	0	0	1	0	0	1	1	3	1	0	0	0	1
PP	3	1	5	PP	1	1	2	0	0	1	0	0	0	0
0	0	7	1	3	1	1	1	1	2	0	3	1	1	2
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	PP										

Zona 1. Camiones:

0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
PP	1	0	2	PP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	PP										

En donde PP significa propiedad privada. El resto de los datos aparecen resumidos en la tabla siguiente:

Zona	*2*	*3*	*4*
No. de tractores	8	100	4
No. de camiones	4	55	0
No. de predios privados	1	7	3

Como en las zonas aparecieron algunos predios que son de propiedad privada, y éstos no deben formar parte del estudio, éste debe hacerse con el concepto de dominios de estudio. Para el caso de tractores de acuerdo a la ecuación 6.33 tenemos:

$$\hat{Y}_d = \frac{\sum_h^4 \sum_i^{n_{hd}} y_{hdi}}{\sum_h n_{hd}} = \frac{51 + 8 + 100 + 4}{62 + 33 + 67 + 124}$$

$$= \frac{163}{286} = 0.57$$ Tractores por predio ejidal tenga o no tenga el vehículo.

gaveteros es de 725 kilogramos. Considerando a los estimadores usados en el ejercicio 6.14 y en el actual, ¿cuál es mejor?

Tabla 6.10

Estado	N_h	n_h	$\bar{y}_h$	$\bar{x}_h$ *	Q_h		$(\Sigma\, y_{hi})^2$
1	400	10	710	464	87 002	5 390 000	50 410 000
2	100	6	500	334	22 500	1 680 000	9 000 000
3	200	7	829	545	20 804	4 920 000	33 640 000
4	100	6	817	547	7 151	4 110 000	24 010 000
5	150	7	786	496	2 595	4 490 000	30 250 000
6	300	8	650	402	4 916	3 640 000	27 040 000
7	200	7	815	490	5 366	4 770 000	32 490 000

6.16 Se cuenta con tres listados de establecimientos en los cuales aparecen mezclados y sin distinción alguna tortillerías y molinos-tortillerías. Estos últimos producen tanto masa como tortillas. Se hace una estratificación por listado y se toman muestras aleatorias con los resultados de la tabla 6.11.

Tabla 6.11

	No. de establecimientos	*Establecimientos en la muestra*		*No. de empleados en la muestra*	
		Molinos	*Molinos-tortillerías*	*Molinos*	*Molinos-tortillerías*
Estrato 1	48	2	3	6	5
Estrato 2	127	3	7	9	8
Estrato 3	390	4	6	9	6

Estime el número medio de empleados por tipo de establecimiento.

6.17 En el ejercicio 6.16 calcule el número de establecimientos que deben muestrearse si se desea estimar el número medio de empleados, sin distinción de establecimiento. La estimación se desea para los tres listados en conjunto con un error no mayor del 5% y una confianza del 95%. Use $d = 0.05(1.6) = 0.08$, $s_1^2 = 0.2$; $s_2^2 = 0.233$ y $s_3^2 = 0.5$ (ejercicio 6.8; notar que en este ejercicio a cualquier tipo de establecimiento se le denomina "tortillería").

* Peso medio en gramos.

6.18 Hace 10 años se estimó el número medio de familias por manzana en las 400 manzanas de un poblado. Se pensó que este número dependía del nivel socioeconómico de cada una de ellas y, así, las manzanas fueron estratificadas en dos estratos de tamaños 60 y 340 respectivamente. Se tomó una muestra aleatoria de manzanas en cada estrato y se obtuvo como resultado:

$$\bar{y}_1 = 25 \ , \bar{y}_2 = 55$$

$$s_1^2 = 50 \ , s_2^2 = 170$$

Ahora en la actualidad, se desea repetir la encuesta usando el mismo marco muestral, es decir, las mismas manzanas en los estratos previamente definidos. Pero ahora se desea que la estimación en el estrato 1, tenga un error no mayor a 3 familias por manzana, y en el 2 no mayor a 2 familias por manzana; ambos casos a una confianza del 95%. ¿Qué tamaño de muestra por estrato es necesario? Suponga que las medias actuales son 10% mayores que las de hace 10 años, y que las variancias aumentaron en 20% .

elegirse para la muestra a pocas unidades primarias. Si por el contrario, los conglomerados primarios resultan ser muy homogéneos, se hace necesario aumentar la fracción de muestreo de las primarias o, en otras palabras, aumentar el tamaño de muestra de ellas, para percatarse y tomar en consideración la alta variabilidad entre primarias. En esta situación, dentro de las unidades primarias muestrales se elegirán pocas unidades secundarias, ya que los elementos en la misma primaria tenderán a parecerse.

8.8 EJERCICIOS

8.1 En el ejemplo 8.1 sobre los comercios en un estado se definió a la unidad primaria como cada zona y como cada una de las diez poblaciones cercanas a la capital. ¿Qué comentarios puede hacer respecto a la variabilidad dentro de primarias? En un muestreo a dos etapas, en el cual interesa estimar la media por comercio a nivel estatal, y si los comercios aparecieran en listas por población sin más información que su nombre y su dirección, ¿cómo definiría usted a la unidad de primera etapa? Indique sus razones.

8.2 Si en el ejercicio 8.1 pudiera emplear muestreo estratificado, ¿cómo definiría a los estratos? Indique los pros y los contras de su definición.

8.3 Suponga que en el ejercicio 8.1 se definieron dos estratos; en uno se encuentran todos los comercios de la capital y en el otro el resto de comercios ¿Tendría alguna ventaja esta estratificación? La definición de unidades primarias se mantiene como en el ejemplo 8.1. De las zonas comerciales de la capital se elige aleatoriamente a 4 de ellas, siendo éstas las primarias 1, 3, 4 y 6 de la tabla 8.1 y las dos restantes son del otro estrato (2 y 5). Si en la capital existen 7 000 comercios, estime el número medio de empleados por comercio para cada uno de los estratos, así como a nivel estatal, e indique intervalos del 95% para su estimación.

8.4 Los estimadores 8.1 y 8.4 se vuelven autoponderados cuando $f_{2i} = f_2$ una constante; en este caso, encuentre la estructura de ellos y de sus respectivos estimadores de variancia.

8.5 Suponga que todos los conglomerados son de tamaño igual M, y que la fracción de muestreo de las secundarias es constante, $f_2 = m/M$. ¿Qué estructura adquieren 8.1 y 8.2?

8.6 Un organismo público desea llevar a cabo una encuesta de opinión sobre sus 130 000 empleados. Ellos se encuentran repartidos en 30 delegaciones regionales dispersas en los estados de la República Mexicana incluyendo a la capital del país. La nómina es elaborada de manera independiente en la capital y en cuatro delegaciones diferentes. Una vez que ésta ha sido elaborada se reparte a los diferentes estados y de esa manera se les paga a los empleados.

Cada una de las delegaciones que elaboran las nóminas regionales cubren a 7, 9, 4 y 9 delegaciones foráneas respectivamente. Quince días después de que la nómina ha sido pagada, se envía una copia de ella a las oficinas centrales en la capital.

Las estimaciones deseadas son de porcentajes definidos sobre los empleados, y se desean obtener para los empleados en la capital de la república y para todo el país, incluyendo a la capital. Suponiendo que se tiene acceso a los listados de empleados en las diferentes etapas del pago de la nómina, enuncie tres esquemas de muestreo diferentes que pudieran ser empleados para esta encuesta e identifique lo necesario en cada esquema.

8.7 Indique los estimadores que deberían ser empleados en cada uno de los esquemas de muestreo propuestos para el caso del ejercicio anterior, 8.6.

8.8 En una escuela con 30 salones se desea hacer una selección sistemática de 2 salones y dentro de cada salón, elegir pupitres con fracción de muestreo 1 de cada 20. Los salones y el número de pupitres por salón son como sigue:

Salón	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
No. de pupitres	20	25	20	27	26	25	48	30	25	40	21	20	27	35	38

Salón	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
No. de pupitres	30	40	43	48	40	21	21	25	27	29	35	40	42	42	45

i) Usando los números aleatorios siguientes y avanzando de arriba hacia abajo obtenga la selección deseada de salones y anótelos

39
48
30
07

ii) Dentro de los salones antes seleccionados y utilizando los siguientes números aleatorios, haga las selecciones de pupitres dentro de salón en la muestra con fracción de muestreo de 1 en 20. Anote el método usado y los pupitres que están en la muestra en cada salón.

Números aleatorios para el:

Primer salón de la muestra	*Segundo salón de la muestra*
75	09
19	48
15	07
30	16
03	

8.9 En una farmacia existen 50 muebles (a manera de libreros) de seis tableros cada uno de ellos. En cada mueble y sobre los tableros están los medicamentos que ahí se expenden. Se desea estimar el total de dinero invertido en los medicamentos y para esto se obtiene una selección sistemática de cinco muebles y de cada uno de ellos en la muestra se hace una selección sistemática de dos tableros en cada mueble después de lo cual, se determina el valor de la mercancía en cada tablero en la muestra con los resultados siguientes:

Mueble	*No. de tableros en cada mueble*	*No. de tableros en la muestra*	*Valor de la mercancía en cada tablero*
1	6	2	1000 1000
2	6	2	2000, 1000
3	6	2	1000, 2000
4	6	2	3000, 2000
5	6	2	3000, 1000

i) Estime el valor total de la mercancía en la farmacia.

ii) Encuentre intervalos del 95% para el total de la mercancía.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS
MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTOS DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS PARA COMPARAR DOS TRATAMIENTOS

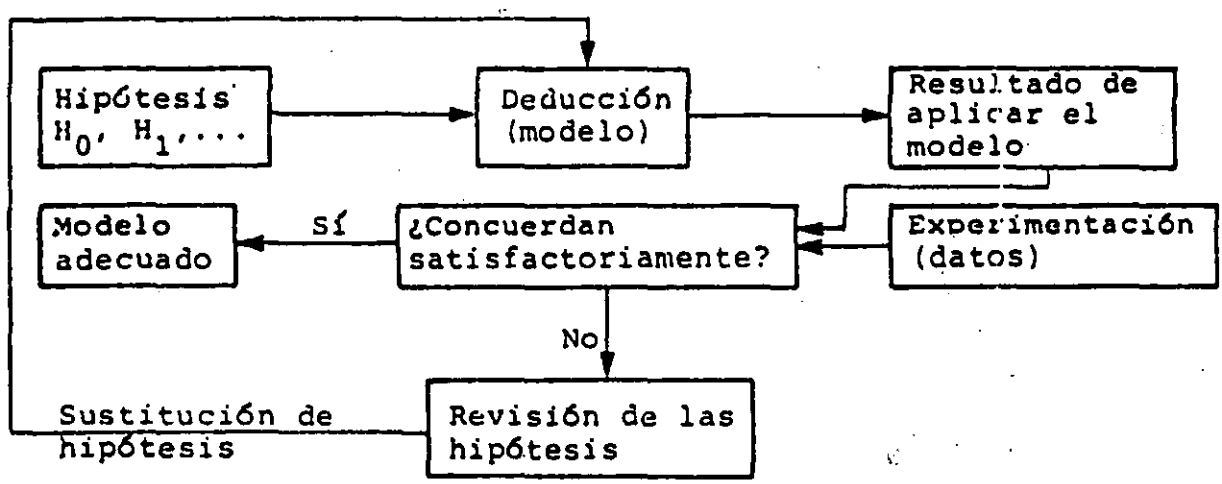
M. EN I. RAFAEL BRITO RAMIREZ

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

1. INTRODUCCION

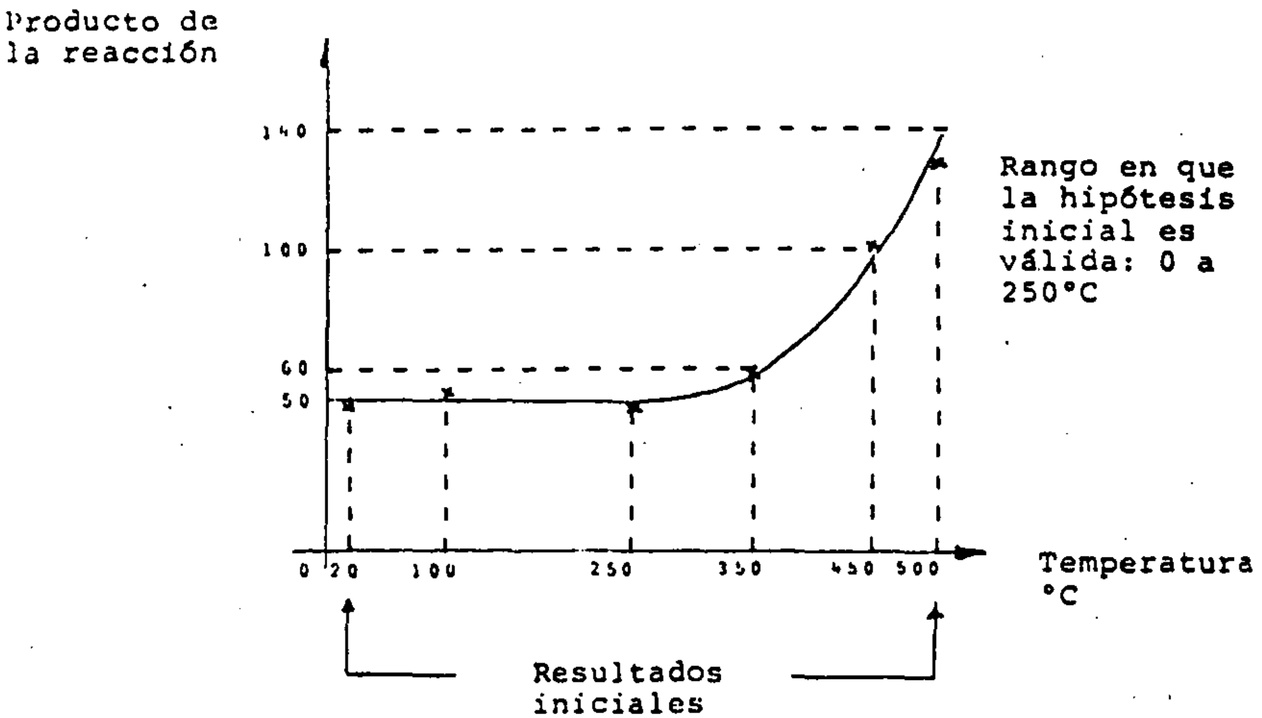
El papel de la experimentación

El proceso de investigación requiere que en algún momento se confirme si los resultados obtenidos con base en un modelo formulado bajo ciertas hipótesis son congruentes con la realidad; esto conduce a diseñar y llevar a cabo experimentos que permitan recolectar información que sirva para verificar la validez del modelo y, en su caso, modificar sus hipótesis. Este proceso de retroalimentación se muestra en el siguiente esquema



La deducción que se realiza después de la experimentación no necesariamente implica el formular un nuevo modelo, sino que puede limitarse a señalar en qué rangos de valores de los parámetros involucrados en las hipótesis el modelo es válido.

Por ejemplo, una hipótesis podría ser que cierta reacción química es independiente de la temperatura; si al realizar el experimento con dos temperaturas (20 y 500°C) para verificarla, se encuentra que no es así, se podría proceder a formular un nuevo modelo cambiando la hipótesis por la que señala que la reacción sí depende de la temperatura, o a ejecutar una serie de experimentos con otras temperaturas (por ejemplo 0, 100, 250, 350 y 450°C), para determinar en qué rangos de temperatura la hipótesis inicial es correcta, si ese fuera el caso; esto se ilustra en la siguiente figura:



Es usual que al diseñar un experimento se procure que se puedan estudiar a la vez todos los parámetros involucrados en las hipótesis, ya que pudiera suceder que dos de ellos, considerados por separado, no tuvieran efectos que condujeran a rechazar la hipótesis inicial, pero que al combinarse sí se detectarán efectos negativos.

Para tener éxito en un proceso de verificación de hipótesis, es necesario conjugar dos factores:

1. Tener un método eficiente para diseñar un experimento que conduzca a resultados que permitan obtener las respuestas a las preguntas que se plantean, y que sean afectados lo menos posible por alguna fuente de error.

2. Contar con algún método para analizar los resultados y sacar conclusiones.

De estos factores el más importante es el primero, ya que si el experimento no se diseña adecuadamente no se podrá obtener la información necesaria para extraer las conclusiones deseadas, aun cuando se cuenta con métodos de análisis sofisticados.

Dificultades confrontadas por los investigadores

Las dificultades usuales que tiene que vencer un investigador son:

a. Error experimental
b. Confusión de correlación con causalidad
c. Complejidad de los efectos estudiados

a. Error experimental. Toda variación en los resultados ocasionada por factores disturbantes, conocidos o no, se llama error experimental.

La confusión que ocasiona el error experimental se puede reducir grandemente mediante un diseño adecuado del experimento y mediante el uso de métodos estadísticos de análisis.

//

b. Confusión de correlación con causalidad. Es necesario saber disernir cuándo una correlación aparente entre dos parámetros es casual o causal; en el primer caso ésta aparecerá por casualidad; en el segundo, se tendrá cuando en realidad la variación de un parámetro se puede explicar por la variación del otro, es decir, que un cambio en uno causa un cambio en el otro.

c. Complejidad de los efectos estudiados. No siempre es fácil detectar si un parámetro influye en los resultados experimentales, y si sí, en qué rangos de valores lo hace, y de qué manera interactúa con otros parámetros para influir junto con ellos (efectos cruzados).

Por ejemplo, los parámetros vino y café pueden influir en el tiempo de reacción de un individuo ante cierto estímulo; los efectos pueden ser de manera individual (debido sólo al café o sólo al vino) o combinada (debido a ambos a la vez). Asimismo, los efectos pueden cambiar en función del número de tazas de café o de copas de vino.

Es muy importante que en cualquier investigación experimental:

a) se definan claramente los objetivos que se persiguen

b) se asegure de que todas las partes interesadas estén de acuerdo con ellos

c) se defina el criterio bajo el cual se probará si se cumplieron los objetivos, es decir, se seleccionan el diseño experimental que se considere adecuado y el método estadístico de prueba; y

d) se tengan acuerdos preliminares con las partes interesadas sobre las acciones a tomar en caso de que no se cumplan los objetivos.

En lo que sigue se entederá por espécimen o unidad experimental a la persona, animal u objeto sobre el cual se hace la medición de la propiedad o característica bajo estudio.

Por su parte, se entenderá por tratamiento a un nivel o valor de un factor o a una combinación de niveles de factores.

Por ejemplo, al comparar el rendimiento (en km/lt) que se tiene con cuatro aditivos para gasolina y dos marcas diferentes de automóvil:

- se tendrán dos factores, aditivo y marca, el primero con cuatro niveles y el segundo con dos
- cada tratamiento será una de las combinaciones aditivo-marca
- las unidades experimentales serán los vehículos a los cuales se les "apliquen" los tratamientos
- el rendimiento es la característica o variable en estudio
- los resultados de cada medición (km/lt) serán los datos u observaciones
- el conjunto de datos para cada tratamiento conforma la

muestra correspondiente.

En este ejemplo cada muestra debe ser representativa de la respectiva población; las poblaciones son las colecciones de resultados (rendimientos) que se tendrían si todo el aditivo disponible de cada tipo se usara en todos los automóviles de ambas marcas; obviamente sería no sólo antieconómico sino improcedente el usar todo el volumen fabricado de cada aditivo para hacer la comparación de rendimientos, puesto que no quedaría nada para usarse con el fin previsto (en este caso, escoger el mejor aditivo para los vehículos de una empresa), y la verificación teóricamente no terminaría nunca ya que las fábricas de aditivos y vehículos pueden producir continua e indefinidamente (se trataría de poblaciones teóricamente infinitas).

2. TABLAS DE CONTINGENCIA

CON FRECUENCIA SE DESEA DETERMINAR SI LA CLASIFICACION DE UNA MUESTRA EN TERMINOS DE 2 O MAS CRITERIOS ES TAL QUE PERMITA INFERIR SI ESOS CRITERIOS SON INDEPENDIENTES ENTRE SI.

POR EJEMPLO, UNA MUESTRA DE PERSONAS QUE HAN FALLECIDO SE PUEDE CLASIFICAR DE LA SIGUIENTE MANERA:

	MUERTE POR CANCER DEL PULMON	MUERTE POR OTRAS CAUSAS
FUMADORES	348	3152
NO FUMADORES	82	1418

EN UN CASO COMO ESTE SE PRETENDERIA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE FUMAR Y MORIR POR CANCER DEL PULMON SON CARACTERISTICAS INDEPENDIENTES.

CUANDO LOS DATOS SE CATEGORIZAN DE ESTA MANERA, SE DICE QUE SE FORMA UNA TABLA DE CONTINGENCIA.

SEA UNA MUESTRA DE TAMAÑO n Y QUE EL EXPERIMENTO SE HA DISEÑADO PARA CLASIFICARLA EN DOS CATEGORIAS, UNA CON r NIVELES Y LA OTRA CON c NIVELES.

SEA x_{ij} EL NUMERO (LA FRECUENCIA) DE ELEMENTOS DE LA MUESTRA QUE QUEDAN EN LA CELDA (i,j).

LA TABLA DE CONTINGENCIA SERÍA

CLASIFICACION 1	CLASIFICACION 2 1	2	3	. . . .	c	TOTAL
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1c}	$x_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2c}	$x_{2.}$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}		x_{3c}	$x_{3.}$
.						
.						
.						
r	x_{r1}	x_{r2}	x_{r3}		x_{rc}	$x_{r.}$
TOTAL	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.3}$		$x_{.c}$	n

LOS TOTALES POR RENGLON SE DENOTAN CON $x_{i.}$, ES DECIR

$$x_{i.} = \sum_{j=1}^{c} x_{ij}$$

LOS TOTALES POR COLUMNA SE DENOTAN

$$x_{.j} = \sum_{i=1}^{r} x_{ij}$$

LA SUMA DE LOS TOTALES POR COLUMNA O POR RENGLON DEBE SER EL TAMAÑO DE LA MUESTRA, ES DECIR

$$\sum_{i=1}^{r} x_{i.} = \sum_{j=1}^{c} x_{.j} = n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} x_{ij}$$

EL PROBLEMA DE VERIFICAR SI LAS CATEGORIAS SON INDEPENDIENTES EQUIVALE AL DE VERIFICAR SI LA PROBABILIDAD DE QUE EL ESPECIMEN CUMPLA CON ALGÚN NIVEL DE LA CATEGORIA 1 DEPENDE DE EN QUÉ NIVEL DE LA CATEGORIA 2 SE ENCUENTRA. ASÍ, EN EL

EJEMPLO ANTERIOR SE TRATARIA DE VERIFICAR SI LA MUERTE POR CANCER PULMONAR DEPENDE O NO DE SI LA PERSONA ES O NO FUMADORA.

EN INFERENCIA ESTADISTICA SE DEMUESTRA QUE LA ESTADISTICA

$$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\chi_i - nP_i)^2}{nP_i} \qquad (1)$$

TIENDE A UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES χ^2 CON k-r-1 GRADOS DE LIBERTAD CONFORME CRECE n, EN DONDE n ES EL TAMAÑO DE LA MUESTRA, χ_i ES LA FRECUENCIA CON QUE SE OBSERVO EL EVENTO i y P_i ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVARLO EN UNA REALIZACION DEL EXPERIMENTO.

EN NUESTRO CASO, SI P_{ij} ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN RESULTADO TENGA EL VALOR i DE LA CARACTERISTICA 1 Y EL VALOR j DE LA 2, Y SI LOS DOS METODOS DE CLASIFICACION SON REALMENTE INDEPENDIENTES, ENTONCES.

$$P_{ij} = \omega_i S_j, \; i = 1, 2, \ldots r; \; j = 1, 2, \ldots, c$$

DONDE ω_i ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ELEMENTO OBSERVADO CAIGA EN EL I-ESIMO NIVEL DE LA CLASIFICACION 1, Y S_j ES LA PROBABILIDAD DE QUE CAIGA EN EL J-ESIMO NIVEL DE LA CLASIFICACION 2,

POR OTRA PARTE, LOS ESTIMADORES DE MAXIMA VEROSIMILITUD DE ω_i Y S_i SON

$$\hat{\omega}_i = \frac{\chi_{i.}}{n} \quad , \quad \hat{S}_j = \frac{\chi_{.j}}{n}$$

POR LO TANTO, CON LA EC. (1) SE OBTIENE QUE

$$V = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(x_{ij} - n\hat{\omega}_i \hat{S}_j)^2}{n\hat{\omega}_i \hat{S}_j} \qquad (2)$$

TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON $(r-1)(c-1)$ GRADOS DE LIBERTAD PARA n GRANDE. ESTE NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD SE JUSTIFICA DE LA SIGUIENTE MANERA: SE TIENEN $K = rc$ CLASES Y PARA ESTIMAR LAS P_{ij} SE REQUIERE ESTIMAR $r-1$ VALORES DE ω Y $c-1$ VALORES DE S, ES DECIR, SE ESTIMAN $(r-1) + (c-1)$ PARAMETROS; POR LO TANTO LOS GRADOS DE LIBERTAD SON

$$rc-(r-1)-(c-1)-1 = (r-1)(c-1)$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI EL FUMAR Y EL MORIR POR CANCER PULMONAR SON INDEPENDIENTES, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO ESTADISTICO QUE CONSISTIO EN SACAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 5000 EXPEDIENTES CLINICOS DE PERSONAS FALLECIDAS EN UNA CADENA DE HOSPITALES, Y CLASIFICARLA EN UNA TABLA DE CONTINGENCIA. EL RESULTADO FUE EL SIGUIENTE:

	MUERTE POR CANCER PULMONAR	MUERTE POR OTRAS CAUSAS	TOTAL $X_{i.}$	$\hat{\omega}_i$
FUMADORES	348	3152	3500	0.7
NO FUMADORES	82	1418	1500	0.3
TOTAL : $X_{.j}$	430	4570	5000	1.0
$\hat{S}_j$	0.086	0.914	1.000	

PARA REALIZAR LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA SE UTILIZA LA EC (2), Y SE DETERMINA EL VALOR CRITICO DE χ^2 QUE CORRESPONDA A UN NIVEL DE CONFIANZA PRESTABLECIDO, $1-\alpha$, USANDO $(2-1)\times(2-1) = 1$ GRADOS DE LIBERTAD, YA QUE $r = c = 2$.

$$\hat{\omega}_1 = \frac{3500}{5000} = 0.7, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{1500}{5000} = 0.3$$

$$\hat{S}_1 = \frac{430}{5000} = 0.086, \quad \hat{S}_2 = \frac{4570}{5000} = 0.914$$

$$v = \frac{[348-5000\ (0.7)(0.086)]^2}{5000\ (0.7)(0.086)} + \frac{[3152-5000\ (0.7)(0.914)]^2}{5000\ (0.7)(0.914)} + \frac{[82-5000\ (0.3)(0.086)]^2}{5000\ (0.086)(0.3)} + \frac{[1418-5000\ (0.3)(0.914)]^2}{5000\ (0.3)(0.914)}$$

$$v = \frac{2209}{301.00} + \frac{2209}{3199.00} + \frac{2209}{129.00} + \frac{2209}{1371.00} =$$

$$= 7.34 + 0.69 + 17.12 + 1.61 = 26.76$$

SI $1-\alpha = 0.99$, ENTONCES

$$(\chi_c^2)_{0.99,1} = 6.63 < 26.76$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA.

EJEMPLO

UN CLUB DE PESCA DEPORTIVA ESTA INTERESADO EN SABER SI SE PESCA CADA TIPO DE PESCADO CON LA MISMA FRECUENCIA EN LOS MESES DE JUNIO A SEPTIEMBRE. PARA ELLO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN REGISTRAR LA PESCA MENSUAL EN UNO DE LOS BARCOS DE LOS TRES TIPOS DE PECES DE LA ZONA: ABADEJO, PEZ AZUL Y COLA AMARILLA.

LA TABLA DE CONTINGENCIA QUE SE FORMULO FUE LA SIGUIENTE:

	ABADEJOS	PECES AZULES	COLAS AMARILLAS	TOTAL	$\hat{\omega}$
JUNIO	315	1347	620	2282	0.2611
JULIO	270	1250	514	2034	0.2327
AGOSTO	295	1480	710	2485	0.2843
SEPTIEMBRE	246	1200	494	1940	0.2219
TOTAL	1126	5277	2338	8741	1.0000
$\hat{S}$	0.1288	0.6037	0.2675	1.0000	

PARA LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA CON CONFIABILIDAD $1-\alpha = 0.95$ Y $(4-1)(3-1) = 6$ GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE QUE $(\chi_c^2)_{0.95,6} =$ $= 12.6$.

EL VALOR DE LA ESTADISTICA V SE OBTIENE EN LA EC (2)

$$V = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \frac{(x_{ij} - 8741\ \hat{\omega}_i\ \hat{S}_j)^2}{8741\ \hat{\omega}_i\ \hat{S}_j}$$

CON $\hat{\omega}_1 = \frac{2782}{8741} = 0.2611, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{2034}{8741} = 0.2327$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{2485}{8741} = 0.2843, \quad \hat{\omega}_4 = \frac{1940}{8741} = 0.2219$$

$$\hat{S}_1 = \frac{1126}{8741} = 0.1288, \quad \hat{S}_2 = \frac{5277}{8741} = 0.6037$$

$$\hat{S}_3 = \frac{2338}{8741} = 0.2675$$

$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2611)\ (0.1288) = 293.957$$
$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2611)\ (0.6037) = 1377.809$$
$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2611)\ (0.2675) = 610.509$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2327)\ (0.1288) = 261.983$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2327)\ (0.6037) = 1227.944$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2327)\ (0.2675) = 544.103$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2843)\ (0.1288) = 320.077$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2843)\ (0.6037) = 1500.235$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2843)\ (0.2675) = 664.755$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2219)\ (0.1288) = 249.824$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2219)\ (0.6037) = 1170.953$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2219)\ (0.2675) = 518.850$$

$$v = \frac{(315-293.957)^2}{293.957} + \frac{(1347-1377.809)^2}{1377.809} + \frac{(620-610.509)^2}{610.509} +$$
$$\frac{(270-261.983)^2}{261.983} + \frac{(1250-1227.944)^2}{1227.944} + \frac{(514-544.103)^2}{544.103} +$$
$$\frac{(295-320.077)^2}{320.077} + \frac{(1480-1500.235)^2}{1500.235} + \frac{(710-664.755)^2}{664.755} +$$
$$\frac{(246-249.824)^2}{249.824} + \frac{(1200-1170.953)^2}{1170.953} + \frac{(494-518.850)^2}{518.850}$$

$$v = 1.506+0.689+0.148+0.245+0.396+1.665+1.965+0.273+3.079$$
$$0.059+0.721+1.190$$

$$v = 11.936 < 12.6$$

POR LO TANTO SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE LA CANTIDAD DE PECES ES INDEPENDIENTE DEL MES EN EL PERIODO DE JUNIO A SEPTIEMBRE, CON UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

71

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI LAS VARIABLES REGION GEOGRAFICA, PARTIDO DE AFILIACION Y SEXO SON INDEPENDIENTES, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO ESTADISTICO QUE CONSISTIO EN SACAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 1500 PERSONAS Y CLASIFICAR A CADA UNA DE ACUERDO CON ESAS VARIABLES; CON ESTO SE OBTUVO LA SIGUIENTE TABLA DE CONTINGENCIA:

	ESTE		OESTE			
PARTIDO	MASCULINO	FEMENINO	MASCULINO	FEMENINO	TOTAL	$\hat{w}_i$
DEMOCRATA	183	217	223	227	850	0.5667
REPUBLICANO	196	154	137	113	600	0.4000
OTRO	12	8	14	16	50	0.0333
	391 +	379	374 +	356	1500	
TOTAL	=770		=730			
$\hat{s}_j$	770/1500 = 0.5133		730/1500 = 0.4867			

391 + 374 = 765, 379 + 356 = 735, $\hat{r}_1 = 765/1500 = 0.51$

$\hat{r}_2 = 735/1500 = 0.49$, $r = 3$, $c = 2$, $m = 2$

LA ESTADISTICA $V = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{(x_{ijk} - 1500\hat{w}_i\hat{s}_j\hat{r}_k)^2}{1500\hat{w}_i\hat{s}_j\hat{r}_k} = 30.88$

TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON $rcm-(r+c+m)+2=7$ GRADOS DE LIBERTAD.

SI $1-\alpha = 95\%$, ENTONCES

$$\chi^2_{0.95,7} = 14.1 < 30.88$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE QUE LAS TRES VARIABLES SON INDEPENDIENTES.

FORMULA CORTA PARA TABLAS DE CONTINGENCIA DE 2 x 2

SI DENOTAMOS A LAS FRECUENCIAS DE LA TABLA CON a, b, c Y d, O SEA $x_{11} = a$, $x_{12} = b$, $x_{21} = c$ Y $x_{22} = d$, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL VALOR DE LA ESTADISTICA V SE CALCULA CON LA FORMULA

$$V = \frac{(ad - bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI DOS FABRICANTES DE TELEVISORES DE COLOR TIENEN IGUAL NIVEL DE CALIDAD SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN PREGUNTAR A 412 COMPRADORES DE LAS MISMAS SI SE REQUIRIO DE SERVICIO DE GARANTIA EN LOS DOS PRIMEROS AÑOS DE FUNCIONAMIENTO, CON LO CUAL SE INTEGRO LA SIGUIENTE TABLA DE CONTINGENCIA:

FABRICA	REQUIRIO SERVICIO	NO REQUIRIO SERVICIO	TOTAL
A	111 = a	152 = b	273
B	85 = c	54 = d	139
TOTAL	196	216	412

$$v = \frac{[(111)(54) - (152)(85)]^2 412}{(273)(139(196)(216)} = 15.51$$

$$\chi^2_{0.95,1} = 3.84 < 15.51$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE CALIDAD, A UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

CORRECCION DE YATES

CON EL FIN DE MEJORAR LA APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION χ^2 COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA ESTADISTICA V, CUANDO SE TIENEN POCAS CELDAS EN LA TABLA DE CONTINGENCIA, SE HA PROPUESTO INTRODUCIR UNA CORRECCION A LAS DIFERENCIAS DE LAS FRECUENCIAS OBSERVADAS MENOS LAS ESPERADAS, CONSISTENTE EN SUSTRAERLE 0.5 AL VALOR ABSOLUTO DE CADA DIFERENCIA, ES DECIR,

$$V = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(|x_{ij} - n\hat{w}_i\hat{s}_j| - 0.5)^2}{n\hat{w}_i\hat{s}_j}$$

CON ESTA CORRECCION LA FORMULA CORTA PARA TABLAS DE 2 x 2 QUEDA EN LA FORMA

$$V = \frac{(|ad - bc| - 0.5n)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

EN EL EJEMPLO INMEDIATO ANTERIOR, AL APLICAR ESTA CORRECCION SE OBTIENE:

$$V = \frac{[|(111)(54) - (162)(85)| - 0.5(412)]^2 412}{(273)(139)(196)(216)} = \frac{(7570)^2 412}{(273)(139)(196)(216)} = 14.69$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI EL GRADO DE MEJORIA EN EL FUNCIONAMIENTO DE UN TIPO DE PROTESIS ES INDEPENDIENTE DEL HOSPITAL DONDE SE COLOCA, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN FORMULAR UNA TABLA DE CONTINGENCIA; PARA ELLO SE OBTUVO UNA MUESTRA ALEATORIA DE PACIENTES DE 5 HOSPITALES CON ESTE TIPO DE PROTETESIS, Y A CADA UNO SE LE CALIFICO COMO: FUNCIONAMIENTO NORMAL, PARCIAL O NULO. LOS RESULTADOS FUERON

	HOSPITAL				
FUNCIONAMIENTO	A	B	C	D	E
NULO	13	5	8	21	43
PARCIAL	18	10	36	56	29
NORMAL	16	16	35	51	10

a. PROBAR LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA

b. ¿SON LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A, B, C Y D INDEPENDIENTES DEL FUNCIONAMIENTO?

c. ¿SI SE JUNTAN LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A, B, C Y D, ¿RESULTAN INDEPENDIENTES DE LOS DEL HOSPITAL E?

USAR 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

SOLUCION

a)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL					TOTALES	$\hat{w}_i$
	A	B	C	D	E		
NULO	13	5	8	21	43	90	0.245
PARCIAL	18	10	36	56	29	149	0.406
NORMAL	16	16	35	51	10	128	0.349
TOTALES	47	31	79	128	82	367	
$\hat{S}_j$	0.128	0.0845	0.215	0.349	0.223		

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(x_{ij} - n\,\hat{w}_i\,\hat{S}_j)^2}{n\,\hat{w}_i\,\hat{S}_j}$$

$$V = \frac{(13-(367)(0.245)(0.128))^2}{367 \times 0.245 \times 0.128} + \frac{(5-(367)(0.245)(0.0845))^2}{367 \times 0.245 \times 0.0845} +$$

$$\frac{(8-(367)(0.245)(0.215))^2}{367 \times 0.245 \times 0.215} + \frac{(21-(367)(0.245)(0.349))^2}{367 \times 0.245 \times 0.349} +$$

$$\frac{(43-(367)(0.245)(0.223))^2}{367 \times 0.245 \times 0.223} + \frac{(18-(367)(0.406)(0.128))^2}{367 \times 0.406 \times 0.128} +$$

$$\frac{(10-(367)(0.406)(0.0845))^2}{367 \times 0.406 \times 0.0845} + \frac{(36-(367)(0.406)(0.215))^2}{367 \times 0.406 \times 0.215} +$$

$$\frac{(56-(367)(0.406)(0.349))^2}{367 \times 0.406 \times 0.349} + \frac{(29-(367)(0.406)(0.223))^2}{367 \times 0.406 \times 0.223} +$$

$$\frac{(16-(367)(0.349)(0.128))^2}{367 \times 0.340 \times 0.128} + \frac{(16-(367)(0.349)(0.0845))^2}{367 \times 0.349 \times 0.0845} +$$

$$\frac{(35 - (367)(0.349)(0.215))^2}{367 \times 0.349 \times 0.215} + \frac{(51 - (367)(0.349)(0.349))^2}{367 \times 0.349 \times 0.349}$$

$$\frac{(10 - (367)(0.349)(0.223))^2}{367 \times 0.349 \times 0.223}$$

$$v = \frac{2.2227232}{11.50912} + \frac{6.7486558}{7.5978175} + \frac{128.40799}{19.331725} + \frac{107.75135}{31.380335} +$$

$$\frac{526.65454}{20.051045} + \frac{1.1497329}{19.0722566} + \frac{6.745659}{12.590669} + \frac{15.717815}{32.03543} +$$

$$\frac{15.986419}{52.001698} + \frac{17.8713}{33.227446} + \frac{0.1557281}{16.394624} + \frac{26.801189}{10.823014} +$$

$$\frac{55.683757}{27.537845} + \frac{39.677817}{44.700967} + \frac{344.56674}{28.562509}$$

$$v = 0.1931271 + 0.8882361 + 6.6423452 + 3.4337233 +$$

$$26.26569 + 0.060283 + 0.5330587 + 0.4906385 +$$

$$0.3074211 + 0.5378475 + 0.0094987 + 2.4763149 +$$

$$2.0220811 + 0.8876277 + 12.063602 = 56.811495$$

$v = 56.81$

GRADOS DE LIBERTAD: $v = (r-1)(c-1) = (3-1)(5-1) = 2 \times 4 = 8$

DE LAS TABLAS DE LA DISTRIBUCION x^2, PARA 95% DE NIVEL DE CONFIANZA Y 8 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$x_c^2 = x^2_{0.95,8} = 15.5$

$v = 56.81 > x_c^2 = 15.5$

27

POR TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA A UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA, O SEA QUE SI HAY RELACION ENTRE EL FUNCIONAMIENTO DE LA PROTESIS Y EL HOSPITAL.

b)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL				TOTALES $X_{i.}$	$\hat{w}_i$
	A	B	C	D		
NULO	13	5	8	21	47	0.165
PARCIAL	18	10	36	56	120	0.421
NORMAL	16	16	35	51	118	0.414
TOTALES: $X_{.j}$	47	31	79	128	285	
$\hat{S}_j$	0.165	0.109	0.277	0.449		1.000

$$v = \frac{(13 - (285)(0.165)(0.165))^2}{285 \times 0.165 \times 0.165} + \frac{(5 - (285)(0.165)(0.109))^2}{285 \times 0.165 \times 0.109} +$$

$$\frac{(8 - (285)(0.165)(0.277))^2}{285 \times 0.165 \times 0.277} + \frac{(21 - (285)(0.165)(0.449))^2}{285 \times 0.165 \times 0.449} +$$

$$\frac{(18 - (285)(0.421)(0.165))^2}{285 \times 0.421 \times 0.165} + \frac{(10 - (285)(0.421)(0.109))^2}{285 \times 0.421 \times 0.109} +$$

$$\frac{(36 - (285)(0.421)(0.277))^2}{285 \times 0.421 \times 0.277} + \frac{(56 - (285)(0.421)(0.449))^2}{285 \times 0.421 \times 0.449} +$$

$$\frac{(16 - (285)(0.414)(0.165))^2}{285 \times 0.414 \times 0.165} + \frac{(16 - (285)(0.414)(0.109))^2}{285 \times 0.414 \times 0.109} +$$

$$\frac{(35 - (285)(0.414)(0.277))^2}{285 \times 0.414 \times 0.277} + \frac{(51 - (285)(0.414)(0.449))^2}{285 \times 0.414 \times 0.449} +$$

$$v = \frac{27.466771}{7.759125} + \frac{0.0158068}{5.125725} + \frac{25.259922}{13.025925} + \frac{0.0130474}{21.114225} +$$

$$\frac{3.2310961}{19.797525} + \frac{9.4763311}{13.078365} + \frac{7.6405529}{33.235845} + \frac{4.5230018}{53.873265} +$$

$$\frac{12.029452}{19.46835} + \frac{9.853886}{12.86091} + \frac{5.3674232}{32.68323} + \frac{3.9105458}{52.97751} +$$

$$v = 3.5399315 + 0.0030838 + 1.9392037 + 0.0006179 +$$

$$0.1632071 + 0.7245807 + 0.2298889 + 0.0839563 +$$

$$0.6178979 + 0.7661889 + 0.1642256 + 0.0738152$$

$$v = 8.3065975 = 8.31$$

GRADOS DE LIBERTAD: $\nu = (r-1)(c-1) = (3-1)(4-1) = 2 \times 3 = 6$

DE LAS TABLAS, PARA 95% DE CONFIANZA Y 6 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$$\chi^2_c = \chi^2_{0.95,6} = 12.6$$

$$v = 8.31 < \chi^2_c = 12.6$$

POR LO TANTO SE ACEPTA LA HIPOTESIS. SE CONCLUYE QUE LAS VARIABLES SON INDEPENDIENTES, O SEA EL FUNCIONAMIENTO DE LAS PROTESIS ES INDEPENDIENTE DEL HOSPITAL.

c)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL		TOTALES $X_{i.}$	$\hat{w}_i$
	(A+B+C+D)	E		
NULO	47	43	90	0.245
PARCIAL	120	29	149	0.406
NORMAL	118	10	128	0.349
TOTALES: $X_{.j}$	285	82	367	
$\hat{S}_j$	0.777	0.223		1.000

$$v = \frac{(47 - (367)(0.245)(0.777))^2}{367 \times 0.245 \times 0.777} + \frac{(43 - (367)(0.245)(0.223))^2}{367 \times 0.245 \times 0.223} +$$

$$\frac{(120 - (367)(0.406)(0.777))^2}{367 \times 0.406 \times 0.777} + \frac{(29 - (367)(0.406)(0.223))^2}{367 \times 0.406 \times 0.223} +$$

$$\frac{(118 - (367)(0.349)(0.777))^2}{367 \times 0.349 \times 0.777} + \frac{(10 - (367)(0.349)(0.223))^2}{367 \times 0.349 \times 0.223} +$$

$$v = \frac{522.76044}{69.863955} + \frac{526.65454}{20.051045} + \frac{17.854394}{115.77455} + \frac{17.8713}{33.227446} +$$

$$\frac{341.49225}{99.520491} + \frac{344.56674}{28.562509}$$

$$v = 7.4825486 + 26.26569 + 0.1542169 + 0.5378475 +$$

$$3.4313763 + 12.063602 = 49.935281 = 49.94$$

GRADOS DE LIBERTAD: $\nu = (r-1)(c-1) = (3-1)(2-1) = 2 \times 1 = 2$

DE LAS TABLAS, PARA UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA Y 2 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$$\chi_c^2 = \chi^2_{0.95,2} = 5.99$$

$$v = 49.94 > \chi_c^2 = 5.99$$

30

POR LO TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS. SE CONCLUYE QUE CON 95% DE CONFIANZA LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A + B + C + D (JUNTOS) Y LOS DE E NO SON INDEPENDIENTES DEL FUNCIONAMIENTO DE LAS PROTESIS. EN GENERAL, SE PUEDE DECIR QUE LOS RESULTADOS DEL HOSPITAL E SON LOS QUE DAN LA DEPENDENCIA DE ESTE EXPERIMENTO.

3. EXPERIMENTOS PARA COMPARAR DOS TRATAMIENTOS

CUANDO INTERESA VERIFICAR SI DOS PROCEDIMIENTOS DISTINTOS PARA LOGRAR UN MISMO OBJETIVO CONDUCEN A RESULTADOS IGUALES, SE DISEÑA UN EXPERIMENTO QUE CONSISTE EN OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DE LOS RESULTADOS LOGRADOS CON CADA TRATAMIENTO, Y COMPARAR ENTRE SI LAS MEDIAS Y VARIANCIAS CORRESPONDIENTES.

CUANDO LAS OBSERVACIONES SON INDEPENDIENTES, ESTO SE LOGRA MEDIANTE LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS Y DE VARIANCIAS.

CUANDO NO LO SON, LA COMPARACION SE HACE EN TERMINOS DE LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES DE CADA PAREJA DE RESULTADOS.

AL DISEÑAR EL EXPERIMENTO SE DEBEN CONSIDERAR DOS ALTERNATIVAS:

a. ASIGNAR AL AZAR A CADA ESPECIMEN EL TRATAMIENTO QUE LE SERA APLICADO; A ESTE PROCESO SE LE LLAMA DE ALEATORIZACION.

EJEMPLO

POR EJEMPLO, SI SE TRATARA DE VERIFICAR SI UN FERTILIZANTE ES MAS EFICIENTE QUE OTRO, UNA VEZ DEFINIDOS LOS LOTES PARA SIEMBRA NOMINALMENTE IGUALES, HABRIA QUE ASIGNAR AL AZAR CADA LOTE A CADA FERTILIZANTE. SUPONGAMOS QUE SE DISPONE DE 11 LOTES Y QUE 5 SE TRATARAN CON EL FERTILIZANTE A Y 6 CON EL B. EL EXPERIMENTO ALEATORIZADO SERIA

LOTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
FERTILIZANTE	A	A	B	B	A	B	B	B	A	A	B
COSECHA DE TOMATE	29.9	11.4	26.6	23.7	25.3	28.5	14.2	17.9	16.5	21.1	24.3

COSECHA CON FERTILIZANTE A	COSECHA CON FERTILIZANTE B
29.9	26.6
11.4	23.7
25.3	28.5
16.5	14.2
21.1	17.9
104.2	24.3
	135.2

$$\bar{y}_A = \frac{104.2}{5} = 20.84, \quad \bar{y}_B = \frac{135.2}{6} = 22.53$$

$$\bar{y}_B - \bar{y}_A = 22.53 - 20.84 = 1.69$$

LAS VARIANCIAS INSESGADAS VALEN

$$S_A^2 = 52.50, \quad S_B^2 = 29.51$$

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LA VARIANCIA:

$$H_o: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 ; \quad H_1: \sigma_A^2 > \sigma_B^2; \ 1-\alpha = 0.99$$

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{52.50}{29.51} = 1.78, \quad F_{0.01,4,5} = 11.4 > 1.78$$

POR LO QUE SE ACEPTA H_o CON UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 99%.

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LAS MEDIAS:

$$H_o: \mu_A = \mu_B, \quad H_1: \mu_A \neq \mu_B, \quad 1-\alpha = 99\%$$

$$T = \frac{\bar{y}_B - \bar{y}_A}{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\nu_A s_A^2 + \nu_B s_B^2}{\nu_A + \nu_B}}$$

(CON VARIANCIAS INSESGADAS)

$$\nu_A = n_A - 1 = 4, \qquad \nu_B = n_B - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{4 \times 52.50 + 5 \times 29.51}{4 + 5}} = \sqrt{39.73} = 6.30$$

$$t = \frac{1.69}{6.30\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = 0.44 < t_{0.01,9} = 3.25$$

POR LO QUE SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS, O SEA, QUE CON 99% DE PROBABILIDAD EL RENDIMIENTO DE LAS TIERRAS CON AMBOS FERTILIZANTES ES EL MISMO.

b. APLICAR CADA TRATAMIENTO A GRUPOS O BLOQUES DE ESPECIMENES, EN ESTE CASO EN PAREJAS, QUE PERMITAN REDUCIR LA VARIANCIA O DISPERSION ALEATORIA DE LOS RESULTADOS, INVOLUCRANDO, A LA VEZ, UN PROCESO DE ALEATORIZACION EN LA ASIGNACION DE LOS BLOQUES; A ESTE PROCESO SE LA LLAMA DE <u>AGRUPAMIENTO EN BLOQUES</u>.

<u>EJEMPLO</u>

EN EL EJEMPLO INMEDIATO ANTERIOR LA INCERTIDUMBRE EN LOS RESULTADOS POR LOS EFECTOS ALEATORIOS INVOLUCRADOS SE PUEDE REDUCIR SI EN VEZ DE SORTEARSE LOS LOTES PARA CADA FERTILIZANTE, CADA

LOTE SE DIVIDE EN DOS PARTES IGUALES Y SE SORTEA QUE MITAD SE TRATARA CON CADA UNO DE ELLOS. CON ESTO LOS RESULTADOS QUEDAN AGRUPADOS POR PAREJAS (y_A, y_B), UNA PARA CADA LOTE, TENIENDOSE QUE y_B Y y_A NO SON INDEPENDIENTES. CON ESTO SE TIENE UN EXPERIMENTO CON AGRUPAMIENTO POR BLOQUES.

SOPONGAMOS QUE LAS PAREJAS DE DATOS QUEDARON DE LA SIGUIENTE MANERA PARA 5 LOTES:

y_A	y_B	$y_B-y_A=d$	d^2
29.9	26.6	-3.3	10.89
11.4	23.7	12.3	151.29
25.3	28.5	3.2	10.24
16.5	14.2	-2.3	5.29
21.1	17.9	-3.2	10.24
		6.7	187.95

$H_0: \mu_d = 0;\ H_1: \mu_d \neq 0;\ 1-\alpha = 0.99$

$\bar{d} = 6.7/5 = 1.34,\ \bar{d}^2 = 1.80$

$\overline{d^2} = 187.95/5 = 37.59$

$S_d^2 = 37.59-1.80 = 35.79$

$S_d = 5.98,\ t = \frac{\bar{d}}{S_d}\sqrt{n-1} = 0.448$

$t_{0.005,4} = 4.60 > 0.448;$ POR LO TANTO SE ACEPTA H_o.

EN ESTE CASO SE MANEJA LA ESTADISTICA $\bar{d}$ CON DISTRIBUCION t DE STUDENT.

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI DOS MATERIALES PARA FABRICAR SUELA DE ZAPATO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CON AGRUPAMIENTO POR BLOQUES Y ALEATORIZACION. EL AGRUPAMIENTO SE HIZO AL USAR EL ZAPATO DEL PIE IZQUIERDO CON UN MATERIAL Y EL DEL DERECHO CON EL OTRO; LA ALEATORIZACION SE HIZO AL ASIGNAR AL AZAR CUAL MATERIAL ESTARIA EN EL IZQUIERDO Y CUAL EN EL DERECHO, PARA CAD^

NIÑO QUE USARIA LOS ZAPATOS DE PRUEBA.

LAS DURACIONES DE LOS ZAPATOS, EN MESES, FUERON:

NIÑO	MATERIAL A	MATERIAL B	DIFERENCIA = d	d^2
1	13.2 (I)	14.0 (D)	0.8	0.64
2	8.2 (I)	8.8 (D)	0.6	0.36
3	10.9 (D)	11.2 (I)	0.3	0.09
4	14.3 (I)	14.2 (D)	-0.1	0.01
5	10.7 (D)	11.8 (I)	1.1	1.21
6	6.6 (I)	6.4 (D)	-0.2	0.04
7	9.5 (I)	9.8 (D)	0.3	0.09
8	10.8 (I)	11.3 (D)	0.5	0.25
9	8.8 (D)	9.3 (I)	0.5	0.25
10	13.3 (I)	13.6 (D)	0.3	0.09
			4.1	3.03

$H_0: \mu_{\bar{d}} = 0; \quad H_1: \mu_d \neq 0; \quad 1-\alpha = 0.99$

$\bar{d} = 4.1/10 = 0.41, \quad s_d^2 = \overline{d^2} - \bar{d}^2 = \frac{3.03}{10} - 0.41^2 = 0.1349$

$s_d = 0.367, \qquad t = \frac{0.41}{0.367}\sqrt{9} = 3.35 > t_{0.005,9} = 3.25$

POR LO TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE DURACION DE LAS SUELAS HECHAS CON AMBOS MATERIALES, CON UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA.

RESUMEN

1. LOS EXPERIMENTOS DEBEN SER COMPARABLES Y REPRODUCIBLES. CUANDO SE COMPARAN TRATAMIENTOS DEBE PROCURARSE QUE LOS

EXPERIMENTOS PARA CADA UN CORRAN EN PARALELO.

2. DEBE HABER REPLICAS DE CADA TRATAMIENTO. LAS VARIACIONES ENTRE LOS RESULTADOS DEBE PERMITIR ESTIMAR LOS "ERRORES" DEBIDOS AL AZAR

3. SIEMPRE QUE SEA POSIBLE SE DEBEN AGRUPAR LOS RESULTADOS EN BLOQUES PARA REDUCIR EL ERROR, AL HOMOGENIZAR LOS RESULTADOS DE CADA REPLICA.

6.12 DECISIONES ESTADISTICAS PARTICULARES

Habiendo desarrollado el procedimiento general para probar decisiones estadísticas, se establecerán a continuación los estadísticos, y sus distribuciones de probabilidad, adecuados para realizar pruebas de hipótesis sobre los parámetros poblacionales. Excepto en un caso, el establecimiento está íntegramente basado en los casos estudiados en los intervalos de confianza.

Para probar estadísticamente la media μ_x de una población de valores de la variable aleatoria x, como puede ser

$$H_0 : \mu_x = a \tag{6.38}$$

en base a los valores conocidos de la media $\bar{x}$ y la desviación estándar S_x de una muestra aleatoria de tamaño n de la población, se pueden distinguir dos casos: el que el tamaño n de la muestra sea grande $(n>30)$ y el que sea pequeña $(n<30)$. El primer caso asegura que la distribución de medias de la muestra sea normal, y que la desviación estándar muestral sea un buen estimador de la desviación estándar de la población. El segundo, para poderlo resolver, requiere que la población sea normal, o aproximadamente normal.

En el primer caso, y de acuerdo a la teoría del muestreo, se sabe que la variable

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}$$

es aproximadamente normal estándar. Si se admite como verdadera la hipótesis (6.38), entonces

$$z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma_x / \sqrt{n}} \tag{6.39}$$

también se aproxima a la distribución normal estándar. En base a este conocimiento se puede afirmar, con cierto grado de confianza, que los valores de z varían entre los valores críticos dados en la tabla 6.6, con lo que se puede establecer la regla de decisión del problema.

Si n es suficientemente grande, en (6.39) se puede sustituir la desviación estándar de la población por la de la muestra. Obsérvese que al establecer esa expresión se supuso implícitamente que la población es infinita o el muestreo se realiza con reemplazo.

Para el segundo caso, cuando n no es grande, no se puede admitir que $\bar{x}$ sea normal (sólo que también la población lo sea) ni sustituir σ_x por su estimador S_x en (6.39). En este caso, y aceptando que la población es normal, o aproximadamente normal, se tiene de (6.23) que la variable

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{x} - a}{S_x/\sqrt{n-1}} \qquad (6.40)$$

tiene distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Al saberlo, se puede establecer la regla de decisión del problema considerando los valores críticos de la distribución t de Student. Estos se obtienen de la tabla A.5 del Apéndice del capítulo 3.

Los dos casos analizados se presentan resumidos en los dos primeros renglones de la tabla 6.7. Los otros renglones, excepto el último, se obtienen en forma semejante a los estudiados, tomando en cuenta siempre los resultados contenidos en el capítulo 4 y en la primera parte de éste. Además, en este resumen sólo se consignan los casos en que la población es infinita o el muestreo es con reemplazo.

En el último renglón de la tabla 6.7 se presenta el estadístico que debe usarse para probar la homogeneidad de variancias de dos poblaciones independientes, lo cual debe verificarse antes de determinar el intervalo de confianza de la suma y diferen

Parámetro (s) que se prueba (n)	Hipótesis nula H_0	Distribución de la (s) población (es)	Tamaño de la(s) muestra(s)	Estadístico	Distribución del estadístico
Media	$\mu_x = a$	Cualquiera	Grande	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n}}$	Normal estándar
		Aproximadamente normal	Cualquiera	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}}$	t de Student con $n-1$ grados de libertad
Igualdad de medias	$\mu_1 = \mu_2$	Cualquiera	Grande	$z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	Normal estándar
		Aproximadamente normal	Cualquiera	$t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$ (se supone que $\sigma_1 = \sigma_2$)	t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad
Proporción de éxitos	$p = a$	Binomial	Grande	$z = \dfrac{\dfrac{x}{n} - p}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{n}\right)\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)}}$	Normal estándar

Tabla 6.7 Estadísticos para hacer pruebas de hipótesis (continúa)

2

Parámetro(s) que se prueba(n)	Hipótesis nula H_0	Distribución de la(s) población(es)	Tamaño de la(s) muestra(s)	Estadístico	Distribución del estadístico
Igualdad de proporciones	$p_1 = p_2$	Binomial	Grande	$z = \dfrac{\left(\dfrac{x_1}{n_1} - \dfrac{x_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}\left(\dfrac{x_1}{n_1}\right)\left(1 - \dfrac{x_1}{n_1}\right) + \dfrac{1}{n_2}\left(\dfrac{x_2}{n_2}\right)\left(1 - \dfrac{x_2}{n_2}\right)}}$	Normal estándar
Variancia	$\sigma_x^2 = a$	Aproximadamente normal	Cualquiera	$\chi^2 = \dfrac{n S_x^2}{\sigma_x^2}$	χ^2 con $n-1$ grados de libertad
			Grande	$\chi^2 = \dfrac{n S_x^2}{\sigma_x^2}$ en donde los valores críticos de χ^2 se determinan con $\chi^2 = \dfrac{1}{2}\left(z + \sqrt{2n-3}\right)^2$ y z es →	Normal estándar
Igualdad de variancias	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	Aproximadamente normal	Cualquiera	$F = \dfrac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	F de Fisher con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad

Tabla 6.7 Estadísticos para hacer pruebas de hipótesis (concluye)

cia de las medias de dos poblaciones (expresión 6.32), o antes de probar si existen diferencias significativas entre las medias de dos poblaciones (cuarto renglón de la tabla 6.7), en base a muestras pequeñas en ambos casos. En la sección 6.4 se obtuvo que si una población es normal, o aproximadamente normal, de desviación estándar σ_x, la variable v^2 definida en (6.22) tiene distribución χ^2 de $n-1$ grados de libertad. De esta manera, si se tienen dos poblaciones normales e independientes de desviaciones estándar σ_1 y σ_2, respectivamente, de donde se obtengan muestras de tamaño n_1 y n_2, y desviaciones estándar S_1 y S_2, también respectivamente, entonces las variables

$$v_1^2 = \frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \qquad (6.41)$$

y

$$v_2^2 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \qquad (6.42)$$

tendrán distribuciones χ^2 con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad respectivamente a cada población.

Por otra parte, en el capítulo 3 se estableció que si las variables aleatorias v_1^2 y v_2^2 eran independientes con distribuciones χ^2 con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces la variable

$$F = \frac{v_1^2/\nu_1}{v_2^2/\nu_2} \qquad (6.43)$$

tiene distribución F de Fisher con ν_1 y ν_2 grados de libertad. Sustituyendo en (6.43) las variables v_1^2 y v_2^2 definidas en (6.41) y (6.42), que tienen $\nu_1 = n_1-1$ y $\nu_2 = n_2-1$ grados de libertad, respectivamente, se obtiene que

$$F = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}\,\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{n_2}{n_2-1}\,\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)}\;\frac{S_1^2}{S_2^2}\;\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \tag{6.44}$$

tiene distribución F de Fisher con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad. Admitiendo la hipótesis de que

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

se obtiene el estadístico

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)}\;\frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{6.45}$$

cuyos valores deben estar contenidos dentro de ciertos valores críticos definidos por la propia distribución F con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad. Esto permite establecer la regla de decisión para probar la hipótesis de homogeneidad de varianzias de dos poblaciones. El resultado (6.44) es el que se presenta en el último renglón de la mencionada tabla 6.7.

Ejemplo 6.21 Una empresa produce cables con resistencia media a la ruptura de 200 kg y desviación estándar de 20 kg. Se piensa que con un nuevo proceso productivo la resistencia media a la ruptura se puede incrementar.

a) Diseñar una regla de decisión para aceptar el nuevo proceso productivo con un nivel de significación del 1% al probar 50 cables.

b) Bajo la regla de decisión adoptada en el inciso anterior, calcular la probabilidad de rechazar el nuevo proceso cuando en realidad está produciendo cables con resistencia media a la ruptura de 210 kg.

c) Dibujar la curva característica de operación de la regla de decisión.

a) Si μ_x es la resistencia media a la ruptura de los cables producidos con el proceso actual, se trata de decidir entre las hipótesis:

H_0 : $\mu_x = 200$ kg (el proceso nuevo es igual al actual)

H_1 : $\mu_x > 200$ kg (el proceso nuevo es mejor que el actual)

Como el tamaño de la muestra es grande, el estadístico que se usará para diseñar la regla de decisión es

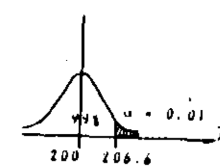
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}}$$

en donde el valor crítico de z al 1% de nivel de significación en una prueba de hipótesis de una cola vale 2.33. Despejando $\bar{x}$ de la expresión anterior, y sustituyendo en la resultante los datos del problema y el de la hipótesis nula, se obtiene:

$$\bar{x} = \mu_x + z\,\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$= 200 + 2.33\,\frac{20}{\sqrt{50}}$$

$$= 206.6 \text{ kg}$$



Obsérvese que se tiene un problema de decisión de una cola debido a que la hipótesis nula establece que se rechace H_0 siempre que el valor de la media sea *mayor* (no diferente) de 200 kg. Ahora, si $z > 2.33$ (rechazo de H_0) $\bar{x} > 206.6$ y la regla de decisión queda como:

1. Aceptar al nuevo proceso productivo si la resistencia media de 50 cables escogidos al azar es mayor de 206.6 kg
2. Rechazarlo en caso contrario

b) Se consideran ahora las hipótesis:

$H_0 : \mu_{\bar{x}} = 200$ kg

$H_1 : \mu_{\bar{x}} = 210$ kg

en donde las distribuciones de las resistencias medias a la ruptura están representadas por las curvas normales de la figura 6.5. De ésta se ve que la probabilidad de rechazar el nuevo proceso productivo, cuando en realidad produce cables con resistencia media de 210 kg, está dada por el área rayada bajo la curva normal de la derecha. Luego, aceptando la hipótesis de que $\mu_{\bar{x}}=210$ y que la desviación estándar conserva su valor, se tiene:

$$\beta = P(\bar{x} < 206.7)$$

$$= P\left(z < \frac{206.7-210}{20/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P(z < -1.17)$$

$$= 0.1210$$

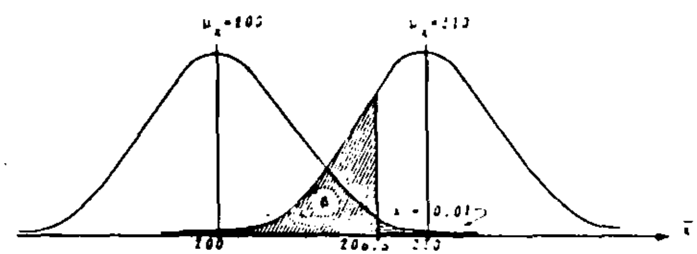


Figura 6.5 Error tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.21

c) Procediendo en forma idéntica al inciso anterior, aceptando que es cierto que $\mu_{\bar{x}}=202.5$, 205.0, 207.5, 212.5, 215.0 y otros, además de que $\sigma_{\bar{x}}=20$ siempre, se obtiene la tabla 6.8. Los valores de ésta están graficados en la figura 6.6.

$\mu_{\bar{x}}$	202.5	205.0	207.5	210.0	212.5	215.0
β	0.9306	0.7258	0.3897	0.1210	0.0202	0.0017

R. Brito R.

Tabla 6.8 Errores tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.21

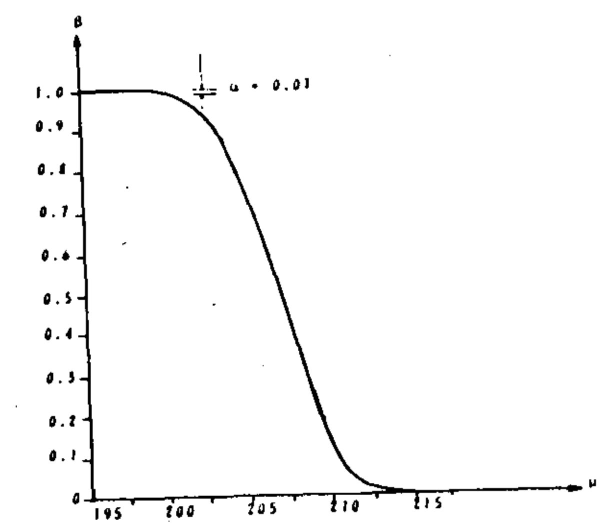


Figura 6.6 Curva característica de operación de la regla de decisión del ejemplo 6.21

Ejemplo 6.22 Con respecto al ejemplo anterior, calcular el tamaño de la muestra de manera que la probabilidad de rechazar la hipótesis $\mu_x=200$ kg, cuando debería aceptarse, sea cuando más 0.05; y la probabilidad de aceptar que $\mu_x=200$ kg, cuando la media se incrementó a 205 kg sea cuando más 0.02.

El enunciado del ejemplo establece limitaciones a la regla de decisión que se formule de manera que los errores tipos I y II tengan probabilidades de 0.05 y 0.02, respectivamente. Así, la regla de decisión hablará de una muestra de tamaño n y de los límites

$$\alpha = P[\text{error tipo I}] \leq 0.05$$

$$\beta = P[\text{error tipo II}] \leq 0.02$$

en donde el error del tipo II se refiere al caso de que $\mu_x=205$ kg. Esta situación se ilustra gráficamente en la figura 6.7

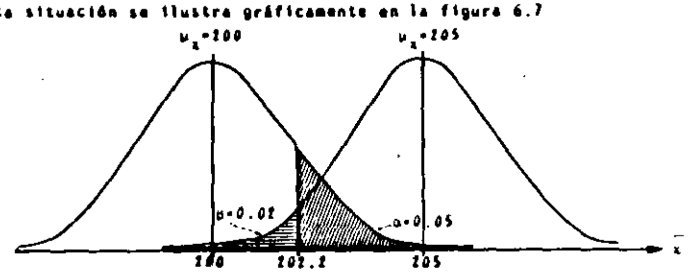


Figura 6.7 Errores tipo I y tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.22

Para que se cumpla que $\alpha=0.05$, bajo la hipótesis de que $\mu_x=200$, se debe tener

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{x}-200}{20/\sqrt{n}} \geq z_c\right) \leq 0.05$$

en donde el valor crítico de z_c al 5% de nivel de significación es 1.645. Luego

$$\frac{\bar{x}-200}{20/\sqrt{n}} \geq 1.645$$

La restricción de que $\beta=0.02$, cuando $\mu_x=205$ y se conserva σ_x en 20, se cumple si

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x}-205}{20/\sqrt{n}} \leq z_c\right) \leq 0.02$$

en donde z_c vale -2.055 al 2% de nivel de significación. Obsérvese que el valor crítico del estadístico es negativo porque la cola de rechazo está a la izquierda; el valor 2.055 se obtiene de la tabla de la distribución normal. De la última expresión se obtiene

$$\frac{\bar{x}-205}{20/\sqrt{n}} \leq -2.055$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, se llega a que

$$\bar{x} = 202.2 \quad y \quad n = 219.0$$

Por lo que el tamaño de la muestra debe ser de 219 cables y la regla de decisión dirá:

1. Aceptar el nuevo proceso productivo si la resistencia media de 219 cables escogidos al azar es mayor a 202.2 kg
2. Rechazarlo en caso contrario

De acuerdo a esta regla de decisión, si se seleccionan esos 219 cables al azar producidos con la técnica nueva, se prueban, y su media $\bar{x}$ resulta ser por ejemplo de:

1) 208 kg, se aceptará el nuevo proceso como mejor. En este caso se rechaza $\mu_x=200$, aunque cabe tener un error má

ximo del 5% en rechazar algo que es cierto.

2) 195 kg, se rechaza el nuevo proceso productivo. Aquí se estará aceptando que $\mu_x = 200$, aunque cabe tener un error máximo del 2% de aceptar algo que es falso.

Ejemplo 6.23 Un fabricante de balines de rodamiento asegura que sus balines tienen un diámetro medio de 1.905 cm de diámetro. Un ensamblador usa estos balines para producir baleros y, para aceptar un pedido, mide el diámetro de 10 balines del lote recibido. Si la media de la muestra de los 10 diámetros es de 1.931 cm y su desviación estándar es 0.023 cm, ¿deberá aceptar el ensamblador el lote?

En este ejemplo se trata de decidir entre las hipótesis

$H_0 : \mu_x = 1.905$ cm (aceptar el lote)
$H_1 : \mu_x \neq 1.905$ cm (rechazar el lote)

en donde x es una variable aleatoria que representa el diámetro de los balines recibidos. Para probar la hipótesis nula, y dado que la muestra es pequeña, se usará el estadístico

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}}$$

para lo cual se aceptará que la distribución de los diámetros de los balines es aproximadamente normal. En esta expresión $\mu_x = 1.905$ por hipótesis, $\bar{x} = 1.931$ y $S_x = 0.023$ de acuerdo a los datos del problema, y t tiene distribución t de Student con $n-1 = 9$ grados de libertad. Luego

$$t = \frac{1.931 - 1.905}{0.023/\sqrt{10-1}} = 3.39$$

Los valores críticos de t en problemas de decisión de dos colas, por prever la hipótesis alterna el rechazo de la nula porque la media de la población es menor o mayor que 1.905, con 9 grados de libertad y a niveles de significación del 5 y 1% son, respectivamente, ± 2.26 y ± 3.25. Como se observa en la figura 6.8, el valor observado de t cae en las regiones de rechazo de la hipótesis probada. Por lo tanto, la media de la población de diámetros es significativamente diferente de 1.905 m. y deberá rechazarse el lote de balines

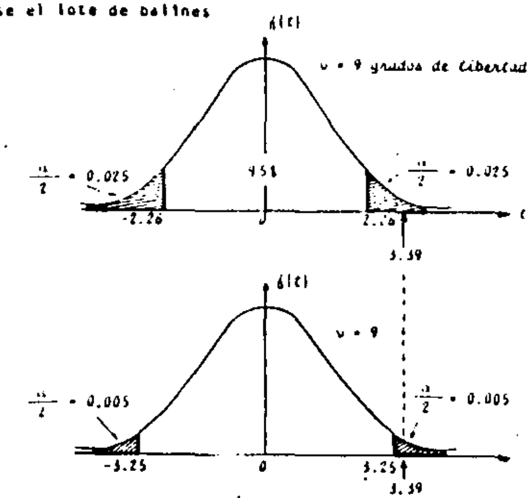


Figura 6.8 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.23.

Ejemplo 6.24 En relación al ejemplo anterior, establecer un procedimiento para controlar la aceptación de los lotes de balines.

Del ejemplo anterior se tiene que los valores críticos de

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{x} - 1.905}{0.023/\sqrt{10-1}}$$

son ± 2.26 y ± 3.25, al 5 y 1% de niveles de significación. Des

Despejando $\bar{x}$ de la expresión anterior, se obtienen sus valores críticos a los niveles de significación considerados. Estos son 1.888 y 1.922 al 5%, y 1.880 y 1.930 al 1%.

De acuerdo a estos valores, el procedimiento de aceptación de lotes de balines diría:

1. De cada lote de balines recibidos, calcular la media $\bar{x}$ de los diámetros de 10 balines seleccionados al azar.
2. Si $\bar{x}$ está entre los valores 1.888 y 1.922, aceptar el lote.
3. Si $\bar{x}$ está fuera del intervalo que va de 1.880 a 1.930, rechazar el lote.
4. Si $\bar{x}$ está contenido en los intervalos (1.880, 1.888) o (1.922, 1.930), repetir el proceso con otros balines.

El procedimiento anterior se ilustra gráficamente en la figura 6.9. El registro de las medias de las muestras de los lotes se representan por medio de puntos en la gráfica, la cual recibe el nombre de *carta de control de calidad*. Dependiendo que el punto trazado caiga en las zonas de aceptación, rechazo o duda, se actuará en consecuencia.

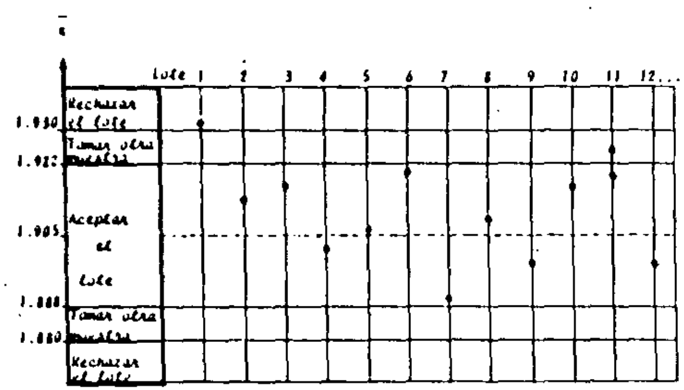


Figura 6.9 Carta de control de calidad.

Ejemplo 6.25 Para ir de México a Cuernavaca se tienen dos carreteras, la autopista y la federal. En el primer renglón de la tabla de frecuencias 6.9 se tienen los tiempos en minutos empleados por diferentes tipos de automóviles; en los otros dos renglones aparecen los números de automóviles que emplearon los tiempos de traslado indicados siguiendo una u otra carretera. Probar si existe algún ahorro de tiempo al usar la autopista. En caso afirmativo, ¿cuánto tiempo cabe esperar tener de ahorro?

Tiempo de viaje	40	45	50	55	60	65	70	75
Autopista	1	5	10	12	9	5	3	0
Federal	0	0	3	9	16	8	5	4

Tabla 6.9 Tabla de frecuencias del tiempo empleado entre México y Cuernavaca

Si x_1 y x_2 son variables aleatorias que representan los tiempos que usan los automóviles para recorrer la autopista y la carretera federal, respectivamente, entonces, en la primera parte del ejemplo se trata de decidir entre las hipótesis:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (no existen diferencias entre los tiempos de recorrido)

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (es más rápido el recorrido por la autopista)

Para probar la hipótesis H_0 se considerará la distribución de la diferencia de medias de las muestras, la que es normal por ser grandes las muestras. Los valores de los estadísticos de las muestras se obtienen de la tabla 6.9 y son:

$n_1 = 45$ $\qquad$ $n_2 = 45$

$\bar{x}_1 = 55.56$ $\qquad$ $\bar{x}_2 = 61.67$

$S_1^2 = 52.47$ $\qquad$ $S_2^2 = 44.44$

Sustituyendo estos valores, y la hipótesis H_0, en el estadístico mencionado en el tercer renglón de la tabla 6.7, se obtiene:

$$z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - (\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{(55.56-61.67) - 0}{\sqrt{\frac{52.47}{45} + \frac{44.44}{45}}}$$

$$= -4.16$$

Los valores críticos del estadístico z, en problemas de decisión de una cola, con niveles de significación del 5 y 1%, son -1.645 y -2.33, respectivamente. Comparando el valor observado del estadístico z con los críticos, se concluye que debe rechazarse la hipótesis nula, como se observa en la figura 6.10.

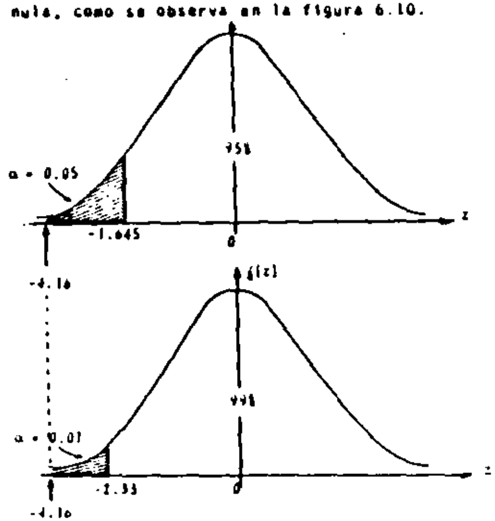


Figura 6.10 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.25

Habiendo aceptado que se ahorra tiempo al usar la autopista, ahora se determinará el intervalo de confianza de $\mu_2-\mu_1$ para obtener el ahorro en tiempo esperado al usar esta carretera. Usando (6.29) con z_c para el 95% de nivel de confianza, se obtiene:

$$\mu_2-\mu_1 = (\bar{x}_2-\bar{x}_1) \pm z_c \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}}$$

$$= (61.67-55.56) \pm 1.96 \sqrt{\frac{44.44}{45} + \frac{52.47}{45}}$$

$$= 6.11 \pm 2.88$$

Luego

$$3.23 \leq \mu_2-\mu_1 \leq 8.99 \quad \text{al } 95\%$$

Esto significa que, en el 95% de los casos, al usar la autopista se ahorrará por lo menos 3.23 minutos.

Ejemplo 6.26 En la tabla 6.10 se tiene el rendimiento en km/litro de cuatro automóviles que usan gasolina normal y gasolina activada con un aditivo. ¿Puede decirse que el aditivo mejora el rendimiento del automóvil?

Gasolina normal	12	10	11	11
Gasolina activada	13	12	13	14

Tabla 6.10 Rendimiento de cuatro automóviles que usan gasolina normal y activada

Sean x_1 y x_2 variables aleatorias que representan el rendimiento de un automóvil que usa gasolina normal y gasolina activada, respectivamente. Se trata de decidir entre las hipótesis

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 < \mu_2$

En base a las muestras de los estadísticos, se obtiene:

$$n_1 = 4$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{4}(12+10+11+11) = 11$$

$$S_1^2 = \frac{1}{4}\left[(12-11)^2+(10-11)^2+(11-11)^2+(11-11)^2\right] = 0.5$$

$$n_2 = 4$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{4}(13+12+13+14) = 13$$

$$S_2^2 = \frac{1}{4}\left[(13-13)^2+(12-13)^2+(13-13)^2+(14-13)^2\right] = 0.5$$

Como las muestras son pequeñas, debe usarse el estadístico t establecido en el cuarto renglón de la tabla 6.7 para hacer la prueba estadística. Pero la deducción de este estadístico supone la igualdad de las desviaciones estándar de las dos poblaciones, por lo que deberá resolverse previamente el problema de decisión dado por:

H_0' : $\sigma_1 = \sigma_2$

H_1' : $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Aceptando la hipótesis nula H_0', se tiene de (6.44) que

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} \; \frac{S_1^2}{S_2^2} \; \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

$$= \frac{4(4-1)}{4(4-1)} \; \frac{0.5}{0.5} = 1$$

Este estadístico tiene distribución F de Fisher con $\nu_1 = n_1 - 1 = 3$ y $\nu_2 = n_2 - 1 = 3$ grados de libertad. En la figura 6.11 se presentan los valores críticos del estadístico F al 5% comparado con el observado. De la comparación se concluye que debe aceptarse la hipótesis de que las desviaciones estándar de las poblaciones son iguales. Obsérvese que no se hace la prueba al 1% de nivel de significación ya que, al aceptar la hipótesis que se prueba al 5%, automáticamente queda aceptada al 1%.

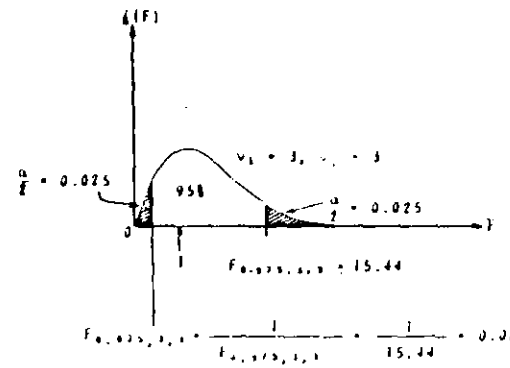


Figura 6.11 Prueba de la hipótesis de igualdad de desviaciones estándar

Habiendo probado la homogeneidad de variancias, o igualdad de desviaciones estándar, se volverá al problema de decisión original. Aceptando que $\mu_1 = \mu_2$ se tiene del cuarto estadístico de la tabla 6.7:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \frac{(11-13) - 0}{\sqrt{4(0.5) + 4(0.5)}} \sqrt{\frac{4(4)(4+4-2)}{4+4}}$$

$$= -3.46$$

Este valor se compara con el crítico de la distribución t con $\nu=n_1+n_2-2=8$ grados de libertad. En la figura 6.12 se muestran los valores críticos al 5 y 1% de niveles de significación. De la misma figura se desprende que hay que rechazar la hipótesis nula y aceptar que el aditivo mejora el rendimiento de los automóviles

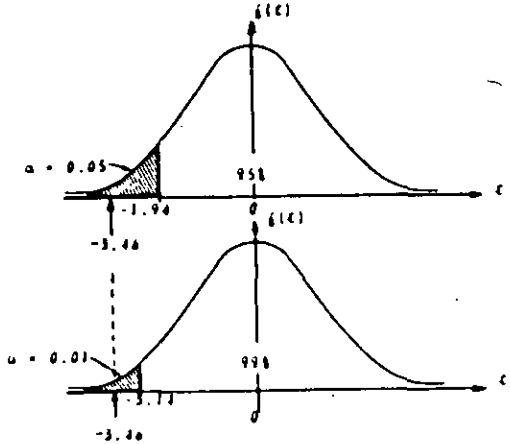


Figura 6.12 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.26.

Ejemplo 6.27 En una fábrica se tienen dos máquinas iguales para producir remaches, los que pueden salir o no defectuosos. A fin de determinar si las proporciones de remaches defectuosos que se obtienen de las dos máquinas son iguales, se obtienen muestras aleatorias de tamaño 100 de las producciones de remaches en un día. Si se obtienen 18 remaches defectuosos de la primera máquina y 8 de la segunda, investigar si existe evidencia de un funcionamiento diferente de las máquinas.

Sean p_1 y p_2 las proporciones de remaches defectuosos producidos por las máquinas. Se trata de decidir entre las hipótesis

H_0 : $p_1=p_2$ (las máquinas funcionan igual)

H_1 : $p_1\neq p_2$ (las máquinas funcionan diferente)

De las muestras extraídas de las dos poblaciones se tienen los datos:

$n_1 = 100$

$\frac{x_1}{n_1} = \frac{18}{100} = 0.18$ (proporción de éxitos en la muestra de la primera máquina, es decir, de remaches defectuosos)

$n_2 = 100$

$\frac{x_2}{n_2} = \frac{8}{100} = 0.08$

En base a estos valores, y como las muestras son grandes, se tiene del sexto estadístico de la tabla 6.7 que:

$$z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{x_1}{n_1}\right)\left(1-\frac{x_1}{n_1}\right) + \frac{1}{n_2}\left(\frac{x_2}{n_2}\right)\left(1-\frac{x_2}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{(0.18-0.08) - 0}{\sqrt{\frac{1}{100}(0.18)(1-0.18)+\frac{1}{100}(0.08)(1-0.08)}}$$

$$= 2.13$$

Comparando este valor del estadístico con los críticos al 5 y 1% de niveles de confianza, que son ± 1.96 y ± 2.58 respectivamente, se obtiene que probablemente sí existan diferencias significativas en el funcionamiento de las máquinas. Otras muestras pueden permitir llegar a tomar una decisión definitiva.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS

MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS PARA COMPARAR K TRATAMIENTOS

M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA

COMPARACION DE K MEDIAS. ANALISIS DE VARIANCIA(ANVA)

1. COMPORTAMIENTO DE POBLACIONES CON DISPERSION SIMILAR

Considérense las tres poblaciones

A	B	C
1	1	1
2	2	2
3	3	3

N= Tamaño de la población=3 $=N_A = N_B = N_C$

Las medias y variancias poblacionales son iguales, puesto que

$$\mu_A = \frac{1+2+3}{3} = 2 = \mu_B = \mu_C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3} = \frac{2}{3} = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2$$

$$= \frac{\text{SUMA DE CUADRADOS}}{N} = \frac{SS}{N}$$

Por otra parte, si se engloban los datos de las tres poblaciones en una sola, se obtiene

$$\mu_{TOTAL} = \mu_T = \frac{3(1)+3(2)+3(3)}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\sigma_{TOTAL}^2 = \sigma_T^2 = \frac{3(1-2)^2+3(2-2)^2+3(3-2)^2}{9} = 2/3 = 6/9 \quad (SS_T = 6)$$

Si se cobinan ahora las variancias que <u>internamente</u> posee cada población, se obtiene la llamada <u>variancia dentro</u> de las poblaciones, σ_D^2, de la manera siguiente

$$\sigma^2_{\text{DENTRO DE POBLACIONES}} = \sigma_D^2 = \frac{N_A\sigma_A^2 + N_B\sigma_B^2 + N_C\sigma_C^2}{N_A + N_B + N_C}$$

$$= \frac{3(2/3)+3(2/3)+3(2/3)}{3+3+3} = 2/3 = 6/9 \quad (SS_D = 6)$$

También es posible calcular la variancia para las diferencias de las medias de cada población respecto de la media total. Dicha variancia se llama <u>variancia entre</u> las poblaciones, σ_E^2 , y su valor se determina en la forma

$$\sigma^2_{\text{ENTRE LAS POBLACIONES}} = \sigma_E^2 = \frac{N_A(\mu_A - \mu_T)^2 + N_B(\mu_B - \mu_T)^2 + N_C(\mu_C - \mu_T)^2}{N_A + N_B + N_C}$$

$$= \frac{3(2-2)^2 + 3(2-2)^2 + 3(2-2)^2}{3+3+3} = \frac{0}{9} = 0 \qquad (SS_E = 0)$$

El resultado anterior se explica al tener en cuenta que las tres poblaciones son de igual media, por lo que no puede existir diferencia <u>entre</u> ellas. Sin embargo, σ_D^2 es igual con σ_A^2, σ_B^2 y σ_C^2 , es decir, equivale a la variancia <u>común</u> para las tres poblaciones.

A la diferencia que existe entre la media de cada población y la media total se le llama <u>efecto de la población</u>. Para el ejemplo que se trata, los efectos son

$$\gamma_A = \mu_A - \mu_T = 2-2=0, \quad \gamma_B = \mu_B - \mu_T = 2-2=0, \quad \gamma_C = \mu_C - \mu_T = 2-2=0$$

y, puesto que corresponden a desviaciones simples acerca de una media,

$$\gamma_A + \gamma_B + \gamma_C = 0 + 0 + 0 = 0 = \Sigma \gamma_i \quad ; \; i = A, B, C$$

De la definición de efecto poblacional, se puede concluir que σ_E^2, la variancia entre las poblaciones, corresponde a la variancia para los efectos γ_A , γ_B y γ_C. También resulta ser cierto que

$$\sigma_T^2 = 6/9 = \sigma_D^2 + \sigma_E^2 = 6/9+0$$

$$SS_T = 6 = SS_D + SS_E = 6 + 0$$

Es decir, la variancia total de la población en la cual se englobaron las poblaciones A,B y C es igual con la combinación de las variancias particulares de ellas, σ_D^2 , <u>más</u> la variancia de los efectos (o entre ellas), σ_E^2 . Lo anterior también ocurre con las sumas de cuadrados correspondientes. El primer resultado ocurre <u>únicamente</u> con poblaciones, pero el segundo lo hace <u>también</u> con muestras aleatorias de esas poblaciones, como se mostrará más adelante, y se le llama <u>partición de la suma de cuadrados</u>.

Dicho resultado constituye la base primordial del método estadístico conocido como <u>ANALISIS DE VARIANCIA</u>, que se emplea para probar la igualdad de las medias para dos o más poblaciones normales <u>con</u> dispersión similar, tomando como base muestras aleatorias extraídas de ellas.

Si ahora se juzga a las poblaciones

A	B	C
2	1	1
3	2	2
4	3	3

es factible determinar que son de dispersión semejante, pero sus valores medios no pueden considerarse iguales. En efecto,

$$\mu_A = \frac{2+3+4}{3} = 3$$

$$\mu_B = \mu_C = \frac{1+2+3}{3} = 2 \qquad \therefore \mu_A \neq \mu_B = \mu_C$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2}{3} = 2/3$$

$$\sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3} = 2/3 \qquad \therefore \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2$$

Al considerar a las tres poblaciones como una sola, se obtiene

$$\mu_T = \frac{2(1)+3(2)+3(3)+4}{9} = 21/9 = 7/3$$

$$\sigma_T^2 = \frac{2(1-7/3)^2+3(2-7/3)^2+3(3-7/3)^2+4(4-7/3)}{9} = 8/9 \qquad (SS_T = 8)$$

Las variancias <u>dentro</u> y <u>entre</u> poblaciones son

$$\sigma_D^2 = \frac{3(2/3)+3(2/3)+3(2/3)}{9} = 2/3 = 6/9 \qquad (SS_D = 6)$$

$$\sigma_E^2 = \frac{3(3-7/3)^2+3(2-7/3)^2+3(2-7/3)^2}{9} = 2/9 \qquad (SS_E = 2)$$

Los efectos de las poblaciones resultan

$$\gamma_A = 3-7/3=2/3, \quad \gamma_B = 2-7/3= -1/3, \quad \gamma_C = 2-7/3= -1/3$$

y su suma es

$$\gamma_A + \gamma_B + \gamma_C = 2/3 + (-1/3) + (-1/3) = 0$$

Obsérvese que la suma de variancias entre y dentro es igual a la variancia total, ya que

$$\sigma^2_T = 8/9 = \sigma^2_D + \sigma^2_E = 6/9 + 2/9$$

Finalmente, la partición de la suma de cuadrados total SS_T equivale a la suma de los términos SS_D y SS_E.

$$SS_T = 8 = SS_D + SS_E = 6 + 2$$

Es importante tener en cuenta que las tres poblaciones son de igual dispersión y medias no equivalentes y, por tanto, distintas entre sí. A ello se debe que existan efectos poblacionales no nulos, cuya suma de cualquier manera es cero. Sin embargo, se cumple también para esta clase de poblaciones no iguales entre sí la fórmula de la variancia total, así como la partición de la suma de cuadrados.

De acuerdo con lo anterior, conviene establecer la regla siguiente:

AUSENCIA ABSOLUTA DE EFECTOS = IGUALDAD ABSOLUTA DE POBLACIONES

2. COMPARACION DE DOS POBLACIONES. PRUEBA CON ESTADISTICO t

Supóngase que se desea probar la hipótesis de que la media μ_I de cierta población normal I es igual a la de otra población II también normal, μ_{II}. Supóngase de igual manera que las variancias de esas poblaciones son iguales, aunque desconocidas. En este caso, para probar la hipótesis nula

$$H_0 : \mu_I = \mu_{II} \qquad (\mu_I - \mu_{II} = 0)$$

con cierta significancia α, es factible emplear el estadístico

$$t = \frac{\bar{X}_I - \bar{X}_{II}}{\sqrt{\dfrac{(n_I-1)S^2_I + (n_{II}-1)S^2_{II}}{n_I + n_{II} - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_I} + \dfrac{1}{n_{II}}}}$$

en donde

S_I^2 = variancia insesgada obtenida de una muestra aleatoria de tamaño n_I extraída de la población I, con promedio $\bar{X}_I$

S_{II}^2 = variancia insesgada obtenida de una muestra aleatoria de tamaño n_{II} extraída de la población II, con promedio $\bar{X}_{II}$

Ejemplo 1 Muestras al azar de tamaño 12 para dos poblaciones aproximadamente normales, con dispersión similar, arrojaron los valores siguientes:

Población I	Población II
$n_I = 12$	$n_{II} = 12$
$\bar{X}_I = 5.30$	$\bar{X}_{II} = 5.00$
$S_I = 0.42$	$S_{II} = 0.38$

Para probar con $\alpha = 0.05$ la hipótesis de igualdad de medias para las dos poblaciones, se considera que

$$H_0 : \mu_I = \mu_{II}$$
$$H_1 : \mu_I > \mu_{II}$$

y,

$$t = \frac{5.3 - 5.0}{\sqrt{\frac{(12-1)(0.42)^2+(12-1)(0.38)^2}{12+12-2}}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}} = 1.84$$

El valor para t de tablas, considerando $\alpha = 0.05$ y $\nu = n_I + n_{II} - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$ grados de libertad, es igual con 1.72. Entonces, ya que

$$t_{muestra} = 1.84 > t_{tablas} = 1.72$$

se rechaza la hipótesis de igualdad de medias, concluyéndose que es significativamente mayor la media de la población I que la otra.

3. COMPARACION DE K POBLACIONES NORMALES DE VARIANCIA SIMILAR

Supóngase ahora que se tienen tres poblaciones normales con variancias semejantes y desconocidas. Si ahora se desea probar la hipótesis nula de que las tres medias poblacionales son iguales, es decir,

$$H_0 : \mu_I = \mu_{II} = \mu_{III}$$

dichas pruebas no pueden efectuarse de manera simultánea para las poblaciones involucradas, ya que el estadístico t permite realizar únicamente pruebas para parejas de medias. Sin embargo, existe una prueba estadística que permite analizar, todas a la vez, las medias de las poblaciones participantes en el problema, que se llama ANALISIS DE VARIANCIA (ANVA).

Dicha prueba provee de un método para aceptar o rechazar hipótesis que se planteen acerca de la igualdad de las medias, para dos o más poblaciones normales de variancia semejante. El ANVA hace uso de un estadístico que corresponde al cociente de dos variancias muestrales independientes, esto es, del estadístico F y de su distribución de probabilidad correspondiente.

A continuación se explicará de dónde provienen el numerador y el denominador en el cociente F, y de qué manera se deben interpretar. Para hacerlo, considérese el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Supónga que se emplean tres métodos diferentes para enseñar Química a tres grupos de estudiantes, y se desea comprobar si estos distintos métodos han tenido algún efecto sobre las calificaciones obtenidas. Se decide extraer una muestra aleatoria de cinco estudiantes de cada grupo, y sus calificaciones, sobre la base de 10 puntos máximo, se presentan en la tabla siguiente:

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
$Y_{11} = 3$	$Y_{21} = 4$	$Y_{31} = 7$
$Y_{12} = 6$	$Y_{22} = 7$	$Y_{32} = 6$
$Y_{13} = 5$	$Y_{23} = 7$	$Y_{33} = 7$
$Y_{14} = 4$	$Y_{24} = 4$	$Y_{34} = 7$
$Y_{15} = 7$	$Y_{25} = 8$	$Y_{35} = 8$
25	30	35
$n_1 = 5$	$n_2 = 5$	$n_3 = 5$

$$\bar{Y}_{1.} = \sum_{j=1}^{5} Y_{1j}/5 = \frac{Y_{1.}}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{Y}_{2.} = \sum_{j=1}^{5} Y_{2j}/5 = \frac{Y_{2.}}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{Y}_{3.} = \sum_{j=1}^{5} Y_{3j}/5 = \frac{Y_{3.}}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\bar{Y}_{..} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} Y_{ij}/n = \frac{90}{15} = 6$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 15$$

Se supondrá también que las calificaciones se distribuyen normalmente con medias μ_1, μ_2 y μ_3, respectivamente, y que las variancias de las notas para las poblaciones de las cuales provienen las muestras anteriores son iguales entre sí, y corresponden al valor común σ^2. Esta última suposición implica que aun cuando los distintos métodos de enseñanza pueden tener efecto sobre la nota media, no afectan a la dispersión de las calificaciones.

Tomando en cuenta lo anterior, si las poblaciones no difieren por dispersión, podrían hacerlo porque sus medias fuesen estadísticamente diferentes. Entonces, la hipótesis nula a probar es

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu \qquad \text{(No hay diferencia entre métodos)}$$

en contra de la hipótesis alternativa

H_1 : Al menos una media es distinta (Hay diferencia entre métodos)

Para probar la hipótesis nula se procede inicialmente a encontrar estimadores de σ^2, la variancia común, de la manera siguiente:

3.1 Variancia total, S_T^2, como estimador de σ^2

Si H_0 resulta ser cierta, las tres poblaciones de calificaciones serán iguales, pudiéndose considerar las tres muestras juntas como una gran muestra de tamaño $n = n_1+n_2+n_3 = 15$, de una única población con media μ estimable por $\bar{Y}_{..}$, y variancia σ^2 que se puede estimar de manera insesgada por

$$\hat{\sigma}^2 = S_T^2 = \text{VARIANCIA TOTAL} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2}{n-1} = \frac{SS_T}{n-1}$$

$$= \frac{(3-6)^2 + (6-6)^2 + \ldots + (7-6)^2 + (8-6)^2}{15-1} = \frac{36}{14} = 2.57$$

Obsérvese que para el resultado anterior la suma de cuadrados total es $SS_T = 36$, y el número de grados de libertad para SS_T es $\nu_T = n-1 = 14$, el denominador en el cociente obtenido.

3.2 Variancia dentro, s_D^2, como estimador de σ^2

Sabiendo que σ^2 es común para las tres poblaciones, y suponiendo que H_0 sea cierta ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$), las poblaciones en cuestión se pueden considerar como una gran población con variancia σ^2 y media μ. De acuerdo con ésto, las tres muestras (Grupos 1,2 y 3) se pueden juzgar como muestras distintas de esa gran población, con variancias muestrales insesgadas iguales con

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_1}(Y_{1j} - \bar{Y}_{1.}) = \frac{1}{4}\left[(3-5)^2 + \ldots + (7-5)^2\right] = \frac{4+1+0+1+4}{4} = 10/4 = 2.5 \quad \left[\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\bar{Y}_{1.})^2 = 10\right]$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_{2j} - \bar{Y}_{2.})^2 = \frac{1}{4}\left[(4-6)^2 + \ldots + (8-6)^2\right] = \frac{4+1+1+4+4}{4} = \frac{14}{4} = 3.5 \quad \left[\sum_{j=1}^{n_2}(y_{2j}-\bar{Y}_{2.}\quad\right]$$

$$s_3^2 = \frac{1}{n_3-1}\sum_{j=1}^{n_3}(Y_{3j} - \bar{Y}_{3.})^2 = \frac{1}{4}\left[(7-7)^2 + \ldots + (8-7)^2\right] = \frac{0+1+0+0+1}{4} = \frac{2}{4} = 0.5 \quad \left[\sum_{j=1}^{n_3}(y_{3j}-\bar{Y}_{3.})^2 = 2\right]$$

Las variancias anteriores son variancias internas o DENTRO de las muestras, y es posible encontrar un estimador insesgado de , la variancia común, si se combinan en la forma

$$\hat{\sigma}^2 = s_D^2 = \text{VARIANCIA DENTRO} = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2 + (n_3-1)s_3^2}{(n_1-1)+(n_2-1)+(n_3-1)} = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2 + (n_3-1)s_3^2}{n-3}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(Y_{1j}-\bar{Y}_{1.})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_{2j}-\bar{Y}_{2.}) + \sum_{j=1}^{n_3}(Y_{3j}-\bar{Y}_{3.})}{n-3} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2}{n-3} = \frac{SS_D}{n-3}$$

$$= \frac{10+14+2}{15-3} = \frac{26}{12} = 2.17$$

En el cociente anterior, $SS_D = 26$ corresponde a la suma de cuadrados dentro de las muestras, cuyo número de grados de libertad es $\nu_D = n-3 = 12$, el número total de observaciones menos el número de muestras, y es igual con el denominador del cociente.

3.3 Variancia entre, S_E^2, como estimador de σ^2

Suponiendo de nueva cuenta que H_0 sea cierta, las tres poblaciones de las cuales se ha muestreado se pueden confundir en una sola, con media μ y variancia σ^2. De ella se han extraído tres muestras de tamaño cinco, cuyos promedios son, respectivamente, $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$ Si idealmente el proceso de muestreo se continuara hasta obtener todas las muestras distintas posibles de tamaño cinco, y se calculara para todas ellas el promedio aritmético correspondiente, $\sigma^2_{\bar{Y}}$ sería el valor de la variancia para esos promedios. Para nuestro ejemplo, puesto que únicamente hay tres promedios disponibles, un estimador insesgado para $\sigma^2_{\bar{Y}}$ es

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{Y}} = \frac{(\bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..})^2 + (\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..})^2 + (\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{..})^2}{3-1} = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

Sin embargo, en inferencia estadística se demuestra que la relación de $\sigma^2_{\bar{Y}}$ con σ^2, la variancia de la población muestreada con tamaño cinco, es

$$\sigma^2_{\bar{Y}} = \frac{\sigma^2}{5} \quad \text{ó} \quad \sigma^2 = 5\,\sigma^2_{\bar{Y}}$$

En nuestro caso, un estimador insesgado de σ^2 es, entonces,

$$\hat{\sigma}^2 = S_E^2 = \text{VARIANCIA ENTRE} = 5\,\hat{\sigma}^2_{\bar{Y}} = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}5(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$= \frac{SS_E}{3-1} = \frac{1}{2}\left[5(5-6)^2+5(6-6)^2+5(7-6)^2\right] = \frac{10}{2} = 5$$

Para el resultado anterior, $SS_E = 10$ equivale a la suma de cuadrados entre las muestras, puesto que se forma con las diferencias entre cada promedio particular $\bar{Y}_{i.}$ de una muestra con cinco elementos, y el promedio $\bar{Y}_{..}$ de la muestra global con los 15 elementos. El número de grados de libertad para SS_E es $\nu_E = 3-1=2$, el denominador del cociente.

3.4 Partición de la Suma de Cuadrados Total, SS_T

Al analizar las sumas de cuadrados total, dentro y entre muestras, así como sus grados de libertad correspondientes, se halla que

$$SS_T = 36 = SS_D + SS_E = 26+10$$
$$\nu_T = 14 = \nu_D + \nu_E = 12+2$$

Es decir, tal como sucede con las poblaciones (Capítulo 1), la suma de cuadrados total es igual con la suma de cuadrados dentro más la de cuadrados entre. Algo similar ocurre con los grados de libertad para SS_T, cuyo valor equivale a la suma de ν_D y ν_E para SS_D y SS_E, respectivamente. Sin embargo, conviene destacar que

$$s_T^2 = 2.57 \neq s_D^2 + s_E^2 = 2.17 + 5 = 7.17$$

Lo anterior sí es cierto para poblaciones, según lo demostrado en el capítulo 1, pero para muestras no ocurre, ya que se emplean para estimar insesgadamente, bajo la suposición de que H_0 es cierta, a los estadísticos SS_T, SS_D y SS_E divididos entre sus grados de libertad correspondientes.

De acuerdo con los resultados anteriores, para el ejemplo de las calificaciones se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^{3} 5(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad \text{(SUMAS DE CUADRADOS)}$$
$$n-1 = (n-3) + (3-1) \quad \text{(GRADOS DE LIBERTAD)}$$

y, si en general se comparan K poblaciones normales con variancia similar, cada una de ellas representada a través de una muestra con n_i ($i= 1,\ldots,K$) elementos, las expresiones anteriores se generalizan para quedar como

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{K}n_i(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2 \qquad (SS_T = SS_D+SS_E)$$

$$n-1=(n-K)+(K-1) \qquad (\nu_T=\nu_D+\nu_E\text{ , con } n=\sum_{i=1}^{K}n_i)$$

Al resultado anterior se le llama PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS total, y su significado para nuestro ejemplo es el siguiente: Las diferencias entre las calificaciones Y_{ij} se pueden deber, si las observaciones se encuentran en muestras de métodos distintos de enseñanza, al efecto particular de cada método, o a variación al azar, o a ambos. El valor de SS_E refleja la contribución que hacen los diferentes métodos y el azar a la diferencia entre los resultados. Por otra parte, si existe diferencia entre observaciones de un mismo método, ella se debe únicamente al azar, puesto que todos los valores Y_{ij} dentro de una muestra deben poseer exactamente la misma componente de efecto del método de enseñanza correspondiente. Entonces, SS_D refleja la contribución que hace únicamente el azar a las diferencias entre los valores Y_{ij} que se encuentran en la misma muestra.

3.5 Estimación de los Efectos Poblacionales

El efecto del método de enseñanza 1 se puede obtener, según lo visto en el capítulo 1, en la forma

$$\gamma_1 = \mu_1 - \mu$$

Sin embargo, puesto que se desconocen los valores de μ_1 (media de calificación para el método 1) y μ (media de calificación para los tres métodos conjuntados en uno solo), el efecto puede ser estimado de manera insesgada por

$$\hat{\gamma}_1 = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..} = 5 - 6 = -1$$

De manera semejante, se obtienen los efectos estimados para los métodos 2 y 3 en la forma

$$\hat{\gamma}_2 = \bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..} = 6-6 = 0$$

$$\hat{\gamma}_3 = \bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{..} = 7-6 = 1$$

y, tal como sucede para poblaciones,

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{\gamma}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_3 = -1 + 0 + 1 = 0$$

puesto que se trata de la suma de desviaciones simples respecto de $\bar{Y}_{..}$.

3.6 Naturaleza de los Estimadores de σ^2

Al observar la partición en la suma de cuadrados se puede concluir que el valor de SS_T, al ser igual con la suma de SS_D y SS_E , no se puede considerar como independiente de estas últimas. Sin embargo, SS_D y SS_E sí son independientes entre sí, puesto que fueron obtenidas empleando procedimientos estadísticos diferentes. Más aún, las tres sumas de cuadrados son <u>estadísticos</u> (variables aleatorias de muestreo), puesto que sus valores estarían cambiando conforme hipotéticamente se extrajeran otras muestras de las poblaciones (métodos de enseñanza para el ejemplo). Se puede demostrar que las esperanzas o valores medios de esos estadísticos para K muestras (una de cada población) con tamaños respectivos $n_i (i = 1,2,\ldots,K)$, son

$$E(SS_T) = \sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + (n-1)\sigma^2 \qquad (\nu_T = n-1)$$

$$E(SS_D) = (n-K)\sigma^2 \qquad (\nu_D = n-K)$$

$$E(SS_E) = \sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + (K-1)\sigma^2 \qquad (\nu_E = K-1)$$

en donde, por definición, el multiplicador de la variancia σ^2 que se estima corresponde al número de grados de libertad para cada suma de cuadrados, confirmando los valores ν_T, ν_D y ν_E obtenidos previamente,

Puesto que los estimadores de σ^2 son

$$S_T^2 = \frac{SS_T}{n-1} = \frac{SS_T}{\nu_T} \;;\quad S_D^2 = \frac{SS_D}{n-K} = \frac{SS_D}{\nu_D} \;;\quad S_E^2 = \frac{SS_E}{K-1} = \frac{SS_E}{\nu_E}$$

entonces sus esperanzas corresponden a

$$E(S_T^2) = E\left(\frac{SS_T}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + \sigma^2$$

$$E(S_D^2) = E\left(\frac{SS_D}{n-K}\right) = \sigma^2$$

$$E(S_E^2) = E\left(\frac{SS_E}{K-1}\right) = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + \sigma^2$$

Considerando que, por definición, un estimador insesgado para σ^2 debe ser aquél cuyo valor medio equivalga exactamente con σ^2, se puede concluir al analizar las esperanzas anteriores que, existan o no efectos poblacionales o, equivalentemente, sean o no iguales las medias de las K poblaciones en estudio, S_D^2 siempre estimará de manera insesgada a σ^2. Sin embargo, S_T^2 y S_E^2 estimarán a σ^2 insesgadamente sólo si no hay efectos poblacionales o, en forma equivalente, si las medias son iguales, ya que en ese caso

$$E(S_T^2) = \sigma^2 \qquad (\gamma_i = 0, \text{ para } i=1,\ldots,K)$$

$$E(S_E^2) = \sigma^2 \qquad (\gamma_i = 0, \text{ para } i=1,\ldots,K)$$

Por otra parte, tomando en cuenta que las poblaciones involucradas en el estudio se consideran normales con dispersión semejante, el estadístico S_D^2 se juzga como una variable aleatoria que posee distribución de probabilidad $\chi^2/(n-K)$ [Ji cuadrada/(n-K)] con n-K grados de libertad. Asimismo, si H_0 es cierta, S_T^2 y S_E^2 también son variables aleatorias $\chi^2/(n-1)$ y $\chi^2/(K-1)$, con n-1 y K-1 grados de libertad, respectivamente. Además, ya que SS_D y SS_E suman SS_T, se demuestra con métodos avanzados de la estadística que SS_D y SS_E son variables aleatorias Ji cuadrada independientes entre sí, puesto que sus grados de libertad sumados equivalen a los de SS_T, lo cual confirma lo dicho anteriormente acerca de su independencia.

3.7 Prueba de la Hipótesis H_0 Empleando el Estadístico F

La relación de dos variables aleatorias Ji cuadrada independientes, cada una de ellas dividida entre sus grados de libertad corres pondientes, se denomina en estadística razón de la variancia, y la distribución de esa razón se llama distribución F. Lo anterior equivale a decir que dos variancias independientes con distribución Ji cuadrada forman un estadístico F, al dividir una entre otra.

Regresando al ejemplo de los métodos de enseñanza, de los tres estimadores de σ^2 encontrados, los únicos que son independientes son S_D^2 y S_E^2, cuyos valores, si H_0 es cierta, no deben diferir en mucho. Es decir, si los efectos de los métodos de enseñanza son inexistentes, se espera que el cociente

$$F = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{\frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3} 5(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{\frac{1}{15-3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}$$

posea un valor cercano a la unidad.

En efecto, si la hipótesis nula es cierta, los valores muestrales $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$, que estiman en forma insesgada a μ_1, μ_2 y μ_3, respectivamente, no deben variar <u>significativamente</u> entre sí, y tampoco de $\bar{Y}_{..}$, el estimador insesgado de μ, la media común.

Ello supone que si la hipótesis $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ no es cierta, se puede esperar que los promedios muestrales $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$ difieran entre sí y de $\bar{Y}_{..}$ en más de lo que se puede atribuir al azar. Esto, a su vez, implica que el estimador S_E^2 de σ^2, la variancia común, será grande porque incluye la desviación $(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$. Además, conviene recordar que si H_0 no es cierta S_E^2 no se puede considerar como estimador insesgado de σ^2, ya que su esperanza

$$E(S_E^2) = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3} 5\,\tau_i^2 + \sigma^2 \qquad (K=3,\ n_i=5,\ i=1,2,3)$$

incluye los efectos τ_i particulares para cada método de enseñanza.

Sin embargo, el estimador S_D^2 de σ^2, no se verá afectado por las diferencias entre $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$, porque únicamente incluye las desviaciones $(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$ de cada dato en una muestra respecto de su propio promedio muestral, y se sabe de la partición en la suma de cuadrados que ellas se deben únicamente al azar. De acuerdo con esto, S_D^2 será <u>siempre</u> estimador insesgado de σ^2.

Por lo tanto, S_D^2, que mide variación en los valores de los datos por la presencia del azar, no resultará afectado cuando H_0 no sea cierta, mientras que S_E^2, que mide variación en los valores de los datos por la presencia del azar y también por los efectos de los métodos de enseñanza, resultará con un valor mayor. Ello implica entonces que el cociente F será mayor que la unidad, y se puede decir que cuanto más la exceda mayor será la variación entre los promedios muestrales $\bar{Y}_{i.}$ y, por tanto, entre las medias de calificaciones μ_1, μ_2 y μ_3 para los métodos de enseñanza 1,2 y 3, respectivamente.

Si H_0 es cierta, el valor de F debe ser entonces menor o igual que el valor teórico

$$F_{K-1,n-K,\alpha}$$

leído en las tablas para la distribución F con un nivel de significancia α. Dicho valor se hallará en el extremo derecho de la distribución de probabilidad para F, ya que son viables los valores mayores que la unidad para el cociente S_E^2/S_D^2 cuando la hipótesis sea falsa. Cabe decir que el valor teórico $F_{K-1,n-K,\alpha}$ corresponde al valor máximo que, únicamente por presencia del azar, podría tomar el cociente S_E^2/S_D^2. Cualquier cociente mayor en valor que $F_{K-1,n-K,\alpha}$ ya no puede ocurrir por azar, se debe a la existencia de efectos poblacionales γ_i, y se rechazaría H_0.

Si se considera que, en general, se fueran a comparar las medias de K poblaciones normales con dispersión similar, empleando una muestra con n_i elementos para cada una $(i=1,\ldots,K)$, el valor del estadístico F se obtendría de esas muestras con la fórmula

$$F = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{\frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K} n_i\,(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{\frac{1}{n-K}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}$$

Para el ejemplo que se trata, el valor de F resulta ser

$$F = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{5}{2.17} = 2.3$$

y, si la prueba de la hipótesis H_0 se efectúa con una significancia α igual con 0.05, el valor leído en tablas es

$$F_{K-1,n-K,0.05} = F_{2,12,0.05} = 3.88$$

Comparando los valores de F muestral y téórico de tablas, se halla que

$$F = 2.3 < F_{2,12,0.05} = 3.8$$

aceptándose entonces la hipótesis nula, para concluir que, además,

a. la diferencia entre S_D^2 y S_E^2 se debe al azar

b. las muestras provienen de poblaciones iguales entre sí

c. los efectos γ_1, γ_2 y γ_3 son inexistentes; esto es, los tres métodos para la enseñanza de la Química conducen a los estudiantes a la obtención de calificaciones semejantes.

A. MODELO CON UN SOLO FACTOR. ANALISIS DE VARIANCIA

Supóngase que un experimentador está interesado en comparar la resistencia de cierta fibra elaborada a través de cinco métodos diferentes de producción. Cada método produce fibra con una media de resistencia particular, por lo que el experimentador decide probar estadísticamente la igualdad de las cinco medias.

Aparentemente el problema podría resolverse realizando la prueba t correspondiente para cada pareja posible de diferencia de medias, es decir, realizando $5!/2!\times 3!$ pruebas de diferencia de medias al nivel de significancia α seleccionado. Habiendo entonces 10 pruebas por realizar, y suponiendo que $1-\alpha= 0.95$, la probabilidad de aceptar correctamente la hipótesis nula para todas las pruebas previstas es de $(0.95)^{10}= 0.60$, siempre que dichas pruebas sean independientes.

De acuerdo con lo anterior, si el valor α inicial era de 0.05, al término de las 10 pruebas de diferencia de medias dicha cantidad habría quedado como 0.40, incrementando en consecuencia el error de tipo I.

Se puede concluir entonces que el procedimiento anterior es inadecuado para probar la igualdad de varias medias, puesto que modifica los valores de error α supuestos inicialmente.

Si para el ejemplo anterior se supone que los cinco métodos diferentes de producción corresponden a cinco niveles distintos (o <u>tratamientos</u> distintos) del factor "método de producción", el problema de probar estadísticamente la igualdad de las medias se puede resolver empleando la técnica que en inferencia estadística se conoce como <u>análisis de variancia</u>, sin modificar las suposiciones que se hagan acerca del valor de α inicialmente. Dicha técnica y sus implicaciones más importantes se presentan a continuación.

A.1. EFECTOS FIJOS. MODELO LINEAL

Supóngase que se tienen K tratamientos o niveles distintos de un factor que se desean comparar. Si el experimento de aplicación de los K tratamientos se realiza completamente al azar sobre las unidades experimentales, el diseño resultante se llama completamente aleatorizado, y los valores observados de respuesta para cada tratamiento corresponderán a valores de una variable aleatoria. Dichos valores o datos y_{ij} pueden presentarse en una tabla como la siguiente:

		OBSERVACIONES			
TRATAMIENTOS	1	y_{11}	y_{12}	....	y_{1n}
	2	y_{21}	y_{22}	....	y_{2n}
	.	.	.	....	.
	.	.	.	....	.
	.	.	.	....	.
	K	y_{k1}	y_{k2}	....	y_{kn}

$\downarrow i = 1,2,\ldots,K$

$\rightarrow j = 1,2,\ldots,n$

En donde, como ejemplo, y_{21} representa el primer resultado u observación (j=1) tomado bajo el tratamiento dos (i=2). Se observa que en este caso el número de datos para cada tratamiento es el mismo (n).

Si en este caso los K tratamientos o niveles del factor fueron escogidos específicamente por el experimentador, las conclusiones a que se llegue después de realizada la prueba de hipótesis que se describirá más adelante, no podrán extenderse a otros tratamientos del mismo factor no considerados en forma explícita en el análisis. Por ello, al modelo que aquí se presenta se le llama de efectos fijos, conociéndole también como modelo paramétrico o modelo I.

El modelo que describirá los valores de los datos u observaciones es el siguiente:

$$y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \quad ; \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,k \\ j = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

En el modelo lineal anterior y_{ij} representa la j-ésima observación tomada para el i-ésimo tratamiento, y μ es un parámetro común para todos los tratamientos, tal que

$$\mu = \frac{\sum_i n \mu_i}{\sum_i n} = \frac{n\sum_i \mu_i}{N} = \frac{n\sum_i \mu_i}{Kn} = \frac{\sum_i \mu_i}{K}$$

Siendo $\sum_i n = Kn = N$ el número total de observaciones tomadas para los K tratamientos, o tamaño de la muestra global, y μ_i la media particular del tratamiento i.

El término γ_i representa en el modelo lineal un parámetro propio <u>únicamente</u> del iésimo tratamiento, que se denomina efecto del tratamiento i, definido como la desviación de la media μ_i de dicho tratamiento respecto de la media común, μ, es decir,

$$\gamma_i = \mu_i - \mu \qquad ; \; i = 1, 2, \ldots, K$$

tal que

$$\sum_i \gamma_i = \sum_i (\mu_i - \mu) = \sum \mu_i - \sum \mu = K\mu - K\mu = 0$$

Si no existe efecto asociado con un tratamiento i entonces $\gamma_i = 0$. Si no existen efectos provocados por cualquiera de los tratamientos entonces

$$\gamma_i = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, K$$

y, siendo $\mu_i = \mu + \gamma_i$, se puede concluir que

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k = \mu$$

Lo anterior quiere decir que la ausencia absoluta de efectos debidos a los tratamientos es equivalente a la igualdad absoluta de todas las medias de dichos tratamientos.

Finalmente, el término e_{ij} en el modelo lineal representa la componente de error aleatorio que en general posee todo valor y_{ij}.

Dicho error e_{ij} es una variable aleatoria con esperanza nula, puesto que para algún tratamiento fijo i se obtendría

$$E(Y_{ij}) = \mu_i = E(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = E(\mu) + E(\gamma_i) + E(e_{ij})$$

$$= \mu + \gamma_i + E(e_{ij}) = \mu + \mu_i - \mu + E(e_{ij})$$

$$\therefore \quad E(e_{ij}) = 0$$

A.2 SUPOSICIONES PARA EL MODELO

Para poder realizar la prueba de hipótesis sobre igualdad de medias que se propondrá más adelante, es necesario hacer las siguientes suposiciones:

A.2.1. El error aleatorio e_{ij} representa una variable aleatoria normal con parámetros $E(e_{ij})=0$ y $VAR(e_{ij}) = \sigma_e^2$.

A.2.2. El error aleatorio e_{ij} es independiente de cualquier otro error e_{ij}.

A.2.3. La variancia σ_e^2 es la misma para cualquier tratamiento i.

Equivalentemente, la primera suposición implica que Y_{ij} es una variable aleatoria con distribución normal, y parámetros $E(Y_{ij}) = \mu$ y $VAR(Y_{ij}) = \sigma_y^2$, es decir,

$$VAR(Y_{ij}) = VAR(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = VAR(\mu) + VAR(\gamma_i) + VAR(e_{ij})$$

$$\therefore \quad \sigma_y^2 = 0 + \sigma_{\gamma_i}^2 + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior, si $\gamma_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, K$, entonces $\sigma_{\gamma_i}^2 = 0$ y $\sigma_y^2 = \sigma_e^2$

A.3 ESTIMADORES DE μ, μ_i, γ_i y e_{ij}

Ya que en la práctica se desconocen los valores de la media común, la media de cada tratamiento, el efecto de cada tratamiento y la componente de error, ellos pueden estimarse a través de los valores de datos que se presentan en la muestra de resultados obtenida para los K tratamientos.

Considérese que $Y_{i.}$ representa la suma total de valores de las observaciones obtenidas para el iésimo tratamiento, y que $\bar{Y}_{i.}$ representa el promedio de dichos valores. De manera semejante, $Y_{..}$ representa el gran total de valores de todas las observaciones, y $\bar{Y}_{..}$ el promedio global correspondiente. Entonces,

$$Y_{i.} = \sum_j y_{ij} \qquad \left(\begin{matrix} i = 1,2,\ldots,K \\ j = 1,2,\ldots,n \end{matrix}\right)$$

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_j y_{ij}}{n} = \frac{y_{i.}}{n}$$

$$y_{..} = \sum_i\sum_j y_{ij}$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_i\sum_j y_{ij}}{Kn} \quad \frac{\sum_i\sum_j y_{ij}}{N} = \frac{y_{..}}{N}$$

en donde N = Kn es el número total de observaciones o tamaño de la muestra global, y se observa que la notación "subíndice punto" implica la suma sobre los valores del subíndice al que remplaza el punto.

De acuerdo con lo anterior, para un tratamiento i.

$$E(\bar{y}_{i.}) = E\left(\frac{\sum_j y_{ij}}{n}\right) = \frac{\sum_j E(y_{ij})}{n} = \frac{n\,\mu_i}{n} = \mu_i$$

por lo que $\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i.}$ es un estimador puntual insesgado de μ_i; la media poblacional del tratamiento i.

De igual manera,

$$E(\bar{y}..) = E\left(\frac{\sum\sum_{ij} y_{ij}}{Kn}\right) = \frac{\sum\sum_{ij} E(y_{ij})}{Kn} = \frac{Kn\mu}{Kn} = \mu$$

por lo cual $\hat{\mu} = \bar{Y}..$ es un estimador puntual insesgado de μ, la media común de todos los tratamientos.

Combinando los estimadores anteriores, se obtiene un estimador de γ_i, ya que, como $\gamma_i = \mu_i - \mu$, entonces

$$\hat{\gamma}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}..$$

el cual es también insesgado, puesto que

$$E(\hat{\gamma}_i) = E(\bar{y}_{i.} - \bar{y}..) = E(\bar{y}_{i.}) - E(\bar{y}..) = \mu_i - \mu = \gamma_i$$

Ya que $Y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}$, entonces se puede escribir

$$Y_{ij} - \mu = \gamma_i + e_{ij}$$

empleando estimadores, la expresión anterior se escribe como

$$Y_{ij} - \bar{y}.. = \hat{\gamma}_i + \hat{e}_{ij}$$

pero $\hat{\gamma}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}..$, *por lo que*

$$y_{ij} - \bar{y}.. = \bar{y}_{i.} - \bar{y}.. + \hat{e}_{ij}$$

de donde

$$\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}.. - \bar{y}_{i.} + \bar{y}.. = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$$

De acuerdo con lo anterior, es válido escribir la identidad siguiente:

$$y_{ij} - \bar{y}.. = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}..) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$

la cual se empleará en forma importante para el desarrollo del modelo estadístico de análisis.

A.4 *Ejemplo*

Considérese que se desea comparar el rendimiento de combustible en millas de tres marcas distintas de automóviles: A, B y C. Se seleccionan al azar tres vehículos de cada marca, y cada uno de ellos se conduce durante 100 millas, bajo exactamente las mismas condiciones experimentales.

<u>CASO 1</u>: Se supone que cada una de las marcas posee un rendimiento medio de 20 millas por galón, y que no existe variabilidad en rendimiento para vehículos de la misma marca. En este caso n=3 y K=3, por lo que N=3x3=9 y, si $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$ y $e_{ij}=0$ para $\forall_{i,j}$, entonces los resultados quedarán de la manera siguiente:

			OBSERVACION		
$i=1$	MARCAS (TRATAMIENTOS)	A	20	20	20
$i=2$		B	20	20	20
$i=3$		C	20	20	20
			$j=1$	$j=2$	$j=3$

En este caso el modelo lineal es

$$y_{ij} = \mu + 0 + 0 = \mu$$

puesto que $\gamma_i = 0$ y $e_{ij} = 0$, $\forall_{i,j}$... Este modelo resulta ser poco realista, ya que supone que no existen efectos debidos a los tratamientos (marcas), ni errores aleatorios e_{ij}.

<u>CASO 2:</u> Supóngase el mismo ejemplo anterior, pero en este caso existen efectos de los tratamientos tales que $\gamma_1=1$, $\gamma_2=4$ y $\gamma_3=-5$ ($\sum_i \gamma_i = 0$). La disposición de los resultados es entonces

OBSERVACIONES

TRATAMIENTOS	A.	20+1=21	20+1=21	20+1=21
	B	20+4=24	20+4=24	20+4=24
	C	20-5=15	20-5=15	20-5=15

En este caso, $y_{ij} = \mu + \gamma_i + 0 = \mu + \gamma_i$

Este modelo tampoco resulta ser muy realista, pues aun cuando supone valores $\gamma_i \neq 0$, en la práctica es muy poco posible evitar el error aleatorio e_{ij} en el muestreo.

CASO 3: Si para el ejemplo anterior se agrega la componente e_{ij} de error aleatorio con valores

$e_{11} = 3$ $\quad e_{12} = -2$ $\quad e_{13} = 1$

$e_{21} = 0$ $\quad e_{22} = 1$ $\quad e_{23} = -3$

$e_{31} = -4$ $\quad e_{32} = -1$ $\quad e_{33} = 2$

los valores y_{ij} quedan

OBSERVACIONES

TRATAMIENTOS	A	20+1+3=24	20+1-2=19	20+1+1=22	$Y_{1.} = 65$
	B	20+4+0=24	20+4+1=25	20+4-3=21	$Y_{2.} = 70$
	C	20-5-4=11	20-5-1=14	20-5+2=17	$Y_{3.} = 42$

$\bar{Y}_{1.} = \frac{65}{3} = 21.67$; $\bar{Y}_{2.} = \frac{70}{3} = 23.33$; $\bar{Y}_{3.} = \frac{42}{3} = 14.00$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum\sum Y_{ij}}{N} = \frac{\sum Y_{i.}}{N} = \frac{65+70+42}{9} = 19.67$$

Para este modelo existen diferencias de rendimiento entre las tres distintas marcas o tratamientos, así como entre diferentes vehículos de la misma marca, es decir, diferencias dentro de las muestras de tres vehiculos de cada marca. Esto se debe a que para este modelo en general $e_{ij} \neq 0$, quedando el mismo como

$$y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \qquad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$

También,

$$\hat{e}_{ij} \begin{cases} \hat{e}_{11} = 24-21.67 = 2.33; & \hat{e}_{12} = 19-21.67 = -2.67\ ; & \hat{e}_{13} = 22-21.67 = 0.33 \\ \hat{e}_{21} = 24-23.33 = 0.67; & \hat{e}_{22} = 25-23.33 = 1.67\ ; & \hat{e}_{23} = 21-23.33 = -2.33 \\ \hat{e}_{31} = 11-14 = -3.00; & \hat{e}_{32} = 14-14 = 0\ ; & \hat{e}_{33} = 17-14 = 3.00 \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_i \begin{cases} \hat{\gamma}_1 = 21.67 - 19.67 = 2.00 \\ \hat{\gamma}_2 = 23.33 - 19.67 = 3.66 \\ \hat{\gamma}_3 = 14.00 - 19.67 = -5.67 \end{cases} \qquad (\textstyle\sum_i \hat{\gamma}_i = 0)$$

$$\hat{\mu}_i \begin{cases} \hat{\mu}_1 = 21.67 \\ \hat{\mu}_2 = 23.33 \\ \hat{\mu}_3 = 14.00 \end{cases}$$

$$\hat{\mu} = 19.67$$

A-5 DESLINDE DE LA VARIACION EN UN EXPERIMENTO

El ejemplo anterior sugiere que la evidencia acerca de efectos experimentales tiene que ver con las diferencias entre los tratamientos, y las diferencias dentro de los mismos. Ahora se separará la variabilidad de las observaciones en una parte que refleje errores aleatorios y efectos experimentales por un lado, y en otra que implique únicamente errores aleatorios. Para ello recuérdese que

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$

Elevando al cuadrado las desviaciones de cada observación Y_{ij}, respecto del promedio global $\bar{Y}_{..}$, y sumando sobre $\forall_{i,j}$, queda

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j \left[(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})\right]^2$$

$$= \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + 2\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

Pero

$$2\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) = 2\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

$$= 2\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) \left[\sum_j Y_{ij} - \sum_j \bar{Y}_{i.}\right] = 2\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) \left[Y_{i.} - n\bar{Y}_{i.}\right] = 0$$

y

$$\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

por lo que

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_i n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

A la igualdad anterior se le llama PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS, y es válida para cualquier conjunto de K muestras distintas, e implica que la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado respecto del promedio global se puede "partir" en dos: la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada resultado respecto del promedio de su propia muestra, es decir, DENTRO de las muestras, y la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada promedio de muestra respecto del promedio global de los N resultados, es decir ENTRE las muestras. A través de símbolos,

$$SS_W = SS_{DENTRO} = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

$$SS_B = SS_{ENTRE} = \sum_i n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$SS_T = SS_{TOTAL} = SS_W + SS_B = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

en donde

SS = SUM OF SQUARES = SUMA DE CUADRADOS

W = WITHIN = DENTRO

B = BETWEEN = ENTRE

El significado de la partición es el siguiente: Las diferencias entre los valores Y_{ij} se pueden deber, si las observaciones se encuentran en muestras (tratamientos) distintos, al efecto particular de cada tratamiento, o a variación al azar, o a ambos. El valor de SS_B refleja la contribución que hacen los distintos tratamientos y el azar a la diferencia entre los resultados. Por otra parte, si existe diferencia entre observaciones de un mismo tratamiento, ella se debe únicamente al azar, puesto que todos esos valores Y_{ij} deben poseer exactamente la misma componente de efecto del tratamiento correspondiente. Entonces, SS_W refleja la contribución que hace únicamente el azar a las diferencias de los valores Y_{ij} que se encuentran en la misma muestra.

A.6 ANALISIS DE SS_W

Empleando el operador esperanza

$$E(SS_W) = E\left[\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2\right]$$

pero

$$Y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}\ , \ y$$

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{\sum_j Y_{ij}}{n} = \frac{\sum_j}{n}(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = \frac{n\mu}{n} + \frac{n\gamma_i}{n} + \frac{\sum_j e_{ij}}{n}$$

$$= \mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.}$$

en donde $\bar{e}_{i.} = \frac{\sum_j e_{ij}}{n}$. *Entonces*,

$$E(SS_W) = E\left[\sum_i\sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \gamma_i - \bar{e}_{i.})^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i\sum_j (e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j (e_{ij}^2 - 2e_{ij}\bar{e}_{i.} + \bar{e}_{i.}^2)\right]$$

$$= E(\sum_i\sum_j e_{ij}^2) - 2E(\sum_i\sum_j e_{ij}\ \bar{e}_{i.}) + E(\sum_i\sum_j \bar{e}_{i.}^2)$$

$$= \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - 2E(\sum_i n\bar{e}_{i.}\ \bar{e}_{i.}) + \sum_i\sum_j E(\bar{e}_{i.}^2)$$

$$= \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - 2E(Kn\,\bar{e}_{i.}^2) + Kn(\bar{e}_{i.}^2)$$

$$= \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - KnE(\bar{e}_{i.}^2)$$

Pero $VAR(e_{ij}) = E(e_{ij}^2) - E^2(e_{ij}) = E(e_{ij}^2) = \sigma_e^2$, ya que $E(e_{ij}) = 0$. Por otro lado,

$$VAR(\bar{e}_{i.}) = VAR\left(\frac{\sum_j e_{ij}}{n}\right) = \sum_j \frac{VAR(e_{ij})}{n^2} = \frac{n}{n^2}\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{n} = E(\bar{e}_{i.}^2)$$

puesto que $E(\bar{e}_{i.}) = E\left(\frac{\sum_j e_{ij}}{n}\right) = \frac{n}{n}E(e_{ij}) = 0$. Por ello,

$$E(SS_w) = \sum_i\sum_j \sigma_e^2 - Kn\frac{\sigma_e^2}{n} = Kn\,\sigma_e^2 - K\,\sigma_e^2 = (N-K)\sigma_e^2$$

Si ahora se hace $MS_w = \frac{SS_W}{N-K}$, entonces

$$E(MS_W) = E\left(\frac{SS_W}{N-K}\right) = \frac{E(SS_W)}{N-K} = \frac{(N-K)\sigma^2}{N-K} = \sigma_e^2$$

lo cual implica que MS_W es un estimador puntual insesgado de σ_e^2, la variancia del error aleatorio, igual para cualquiera de los K tratamientos. A MS_W se le llama valor medio cuadrático dentro de las muestras, y al coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_W)$ se le denomina número de grados de libertad de SS_W, en este caso N-K.

Por otra parte, SS_W se puede escribir como

$$SS_W = \sum_i\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = \sum_i\left[\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2\right]$$

pudiéndose apreciar que la sumatoría dentro de los corchetes, si se divide entre n-1, es igual a la variancia de la muestra del iésimo tratamiento, es decir

$$s_i^2 = \frac{\sum(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n-1} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,K$$

La variancia anterior es un estadístico con n-1 grados de libertad, que es a su vez un estimador puntual insesgado de σ_e^2 ya que

$$E(S_i^2) = E\left[\frac{\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n-1}\right] = E\left[\frac{\sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \gamma_i - \bar{e}_{i.})^2}{n-1}\right] = E\left[\frac{\sum_j (e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2}{n-1}\right]$$

$$= \frac{\sum_j E(e_{ij}^2) - 2E\sum_j (e_{ij}\ \bar{e}_{i.}) + \sum_j (\bar{e}_{i.}^2)}{n-1} = \frac{\sum_j E(e_{ij}^2) - 2nE(\bar{e}_{i.}^2) + nE(\bar{e}_{i.}^2)}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[nE(e_{ij}^2) - nE(\bar{e}_{i.}^2)\right] = \frac{1}{n-1}\left[n\sigma_e^2 - n\frac{\sigma_e^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n-1}\ \sigma_e^2 = \sigma_e^2$$

Sin embargo, como de hecho existen K muestras que corresponden, respectivamente, a cada uno de los K tratamientos o niveles del factor de interés, se pueden combinar K variancias del tipo S_i^2 anterior con el fin de obtener un estimador de σ_e^2 de la manera siguiente:

$$\frac{(n-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2 + \ldots + (n-1)S_K^2}{(n-1) + (n-1) + \ldots + (n-1)} = \frac{\sum_i \left[\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2\right]}{\sum_i (n-1)} = \frac{\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{\sum_i n - \sum_i (1)}$$

$$= \frac{SS_W}{Kn-K} = \frac{SS_W}{N-K} = MS_W$$

El resultado anterior confirma que el estadístico MS_W, obtenido a través de la combinación de las variancias de las muestras de los K tratamientos, permite estimar en forma insesgada el valor de σ_e^2. Asimismo, implica que SS_W posee N-K grados de libertad, lo cual checa con el resultado obtenido anteriormente para $E(SS_W)$, es decir,

$$E(SS_W) = (N - K)\sigma_e^2$$

ya que, por definición el multiplicador de σ_e^2 al calcular la esperanza de SS_W debe ser el número de grados de libertad correspondiente.

A.7 ANALISIS DE SS_B

La esperanza de SS_B es $E(SS_B) = E\left[\sum_i n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2\right]$

pero, de A.6, $\bar{Y}_{i.} = \mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.}$. *Por otro lado,*

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_i\sum_j Y_{ij}}{Kn} = \frac{\sum_i\sum_j \mu}{Kn} + \frac{\sum_j\sum_i \gamma_i}{Kn} + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn} = \frac{Kn\mu}{Kn} + 0 + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn} = \mu + \bar{e}_{..}$$

en donde $\bar{e}_{..} = \dfrac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn} = \dfrac{\sum_i \bar{e}_{i.}}{K}$

$$E(SS_B) = E\left[\sum_i n(\mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right] = E\left[\sum_i n\{\gamma_i + (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})\}^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i n\{\gamma_i^2 + 2\gamma_i(\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..}) + (\bar{e}_{i.} - e_{..})^2\}\right] = E(\sum_i n\gamma_i^2) + 2E(\sum_i n\gamma_i\bar{e}_{i.}) -$$

$$-2E(\sum_i n\gamma_i\,\bar{e}_{..}) + E(\sum_i n\bar{e}_{i.}^2) - 2E(\sum_i n\bar{e}_{i.}\bar{e}_{..}) + E(\sum_i n\bar{e}_{..}^2)$$

$$= \sum_i nE(\gamma_i^2) + 2\sum_i nE(\gamma_i\bar{e}_{i.}) - 2ne_{..}E(\sum_i\gamma_i) + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2nE(\bar{e}_{..}K\bar{e}_{..}) + nKE(\bar{e}_{..}^2)$$

Tomando en cuenta que $\sum_i\gamma_i = 0$, y que $E(\gamma_i\bar{e}_{i.})$ es cero ya que $E(\gamma_i\bar{e}_{i.}) = \gamma_i E(\bar{e}_{i.}) = \gamma_i(0)$, se anulan el segundo y tercer términos, quedando

$$E(SS_B) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2KnE(\bar{e}_{..}^2) + KnE(\bar{e}_{..}^2) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - KnE(e_{..}^2)$$

Pero, de A.6, $E(\bar{e}_{i.}^2) = \dfrac{\sigma_e^2}{n}$, *y*

$$VAR(\bar{e}_{..}) = E(\bar{e}_{..}^2) - E^2(\bar{e}_{..}) = E(\bar{e}_{..}^2) - 0 = E(\bar{e}_{..}^2)$$

$$= VAR\left(\frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn}\right) = \frac{\sum_i\sum_j}{K^2n^2}VAR(e_{ij}) = \frac{Kn}{K^2n^2}\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{Kn}$$

por lo que

$$E(SS_B) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i\frac{\sigma_e^2}{n} - Kn\frac{\sigma_e^2}{Kn} = \sum_i n\gamma_i^2 + K\sigma_e^2 - \sigma_e^2 = \sum_i n\gamma_i^2 + (K-1)\sigma_e^2$$

Si se hace ahora $MS_B = \dfrac{SS_B}{K-1}$, entonces

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{K-1}\right) = \frac{E(SS_B)}{K-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2 + (K-1)\sigma_e^2}{K-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2}{K-1} + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior,

$E(MS_B) = \sigma_e^2$, siempre que $\gamma_i = 0$, $\forall_i$ (no hay efectos de tratamientos)

$E(MS_B) > \sigma_e^2$, siempre que $\gamma_i \neq 0$ para alguna(s) i, existiendo al menos algún efecto de tratamiento.

En el primer caso, MS_B es un estimador puntual insesgado de σ_e^2, la variancia común del error aleatorio. En el segundo caso la estimación que hace MS_B de σ_e^2 no es insesgada, debido al efecto de los tratamientos. A MS_B se le denomina valor medio cuadrático entre las muestras, y al coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_B)$ número de grados de libertad de SS_B, en este caso K-1.

Si $\gamma_i = 0$, $\forall_i$, es decir, si las medias de los K tratamientos son iguales, entonces el estadístico con K-1 grados de libertad

$$\frac{\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}$$

es un estimador puntual insesgado de σ_e^2/n, la variancia de la distribución de muestreo para los promedios de los n valores Y_{ij} obtenidos bajo los tratamientos i $(i=1,2,\ldots,K,\ldots)$. En efecto,

$$E\left[\frac{\sum_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}\right] = \frac{1}{K-1} E\left[\sum_i(\mu + \overset{\gamma_i}{\downarrow}{0} + \bar{e}_{i.} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right] = \frac{1}{K-1} E\left[\sum_i(\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2\right]$$

$$= \frac{1}{K-1}\left[E(\sum_i \bar{e}_{i.}^2) - 2E(\sum_i \bar{e}_{i.}\, e_{..}) + E(\sum_i e^2_{..})\right] = \frac{1}{K-1}\left[\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2KE(e_{..}^2) + KE(e_{..}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{K-1}\left[\sum_i \frac{\sigma_e^2}{n} - K\frac{\sigma_e^2}{Kn}\right] = \frac{1}{K-1}\left[\frac{K\sigma_e^2}{n} - \frac{\sigma_e^2}{n}\right] = \frac{K-1}{K-1}\,\frac{\sigma_e^2}{n} = \frac{\sigma_e^2}{n}$$

De igual manera, y considerando el resultado anterior, se obtiene:

$$E\left[\frac{n\sum_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2}{K-1}\right] = E\left(\frac{SS_B}{K-1}\right) = E(MS_B) = n\frac{\sigma_e^2}{n} = \sigma_e^2$$

lo cual confirma que el estadístico MS_B permite estimar en forma insesgada el valor de σ_e^2, siempre que no existan efectos de los tratamientos. Asimismo, implica que SS_B posee K-1 grados de libertad, checando con el resultado

$$E(SS_B) = \sum_i n\,\gamma_i^2 + (K-1)\sigma_e^2$$

para el cual el multiplicador de σ_e^2 es K-1, el número de grados de libertad de SS_B.

A.8 ANALISIS DE SS_T

La esperanza de SS_T es

$$\begin{aligned}
E(SS_T) &= E\left[\sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{..})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right] \\
&= E\left[\sum_i\sum_j (\gamma_i + \{e_{ij} - \bar{e}_{..}\})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j\{\gamma_i^2 + 2\gamma_i(e_{ij}-\bar{e}_{..}) + (e_{ij}-\bar{e}_{..})^2\}\right] \\
&= E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i^2\right) + 2E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i e_{ij}\right) - 2E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i \bar{e}_{..}\right) + E\left(\sum_i\sum_j e_{ij}^2\right) - 2E\left(\sum_i\sum_j e_{ij}\bar{e}_{..}\right) + \\
&\quad + E\left(\sum_i\sum_j \bar{e}_{..}^2\right) = \sum_j\sum_i E(\gamma_i^2) + 2\sum_i\sum_j E(\gamma_i e_{ij}) - 2\sum_i\sum_j E(\gamma_i \bar{e}_{..}) + \\
&\quad + \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - 2Kn\,E(\bar{e}_{..}^2) + Kn\,E(\bar{e}_{..}^2) \\
&= \sum_i n\gamma_i^2 + 0 - 0 + \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - Kn\,E(\bar{e}_{..}^2) \\
&= \sum_i n\gamma_i^2 + Kn\,\sigma_e^2 - Kn\frac{\sigma_e^2}{Kn} = \sum_i n\gamma_i^2 + (Kn-1)\sigma_e^2 \\
&= \sum_i n\gamma_i^2 + (N-1)\sigma_e^2
\end{aligned}$$

Si se hace $MS_T = \dfrac{SS_T}{N-1}$, entonces

$$E(MS_T) = E\left(\frac{SS_T}{N-1}\right) = \frac{E(SS_T)}{N-1} = \frac{\sum_i n\,\gamma_i^2 + (N-1)\sigma_e^2}{N-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2}{N-1} + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior,

$E(MS_T) = \sigma_e^2$, siempre que no haya efectos de tratamientos

$E(MS_T) > \sigma_e^2$, siempre que exista al menos un efecto de tratamiento.

En el primer caso, MS_T es un estimador puntual insesgado de σ_e^2; y en el segundo no es así debido al efecto de los tratamientos. A MS_T se le llama valor medio cuadrático total, y a N-1, el coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_T)$, el número de grados de libertad de SS_T.

Conviene observar que

$$\underset{(N-1 \text{ grados de libertad})}{SS_T} = \underset{(N-K \text{ grados de libertad})}{SS_W} + \underset{(K-1 \text{ grados de libertad})}{SS_B}$$

es decir,

$$N-1 = N-K + K-1 = N-1$$

y el número de grados de libertad de SS_T es igual a la suma de los grados de libertad asociados a SS_W y SS_B.

A.9 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE ESTIMADORES PARA σ_e^2

Se sabe de la inferencia estadística que

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{n-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} = \frac{\text{Suma de Cuadrados}}{\sigma_x^2} = \chi^2_{n-1}$$

en donde χ^2_{n-1} representa la variable aleatoria Ji cuadrada con n-1 grados de libertad, y S_x^2 la variancia insesgada para las muestras de tamaño n extraídas de una población normal con variancia σ_x^2.

También,

$$\frac{s_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\dfrac{\text{Suma de cuadrados}}{n-1}}{\sigma_x^2} = \frac{\dfrac{SS}{n-1}}{\sigma_x^2} = \frac{\dfrac{SS}{\text{grados de libertad } SS}}{\sigma_x^2}$$

$$= \frac{\text{Estimador de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\chi^2_{n-1}}{n-1} = \frac{\chi^2_\nu}{\nu}$$

siendo ν = número de grados de libertad. El resultado anterior es válido siempre que las observaciones en la muestra, X_i, correspondan a variables aleatorias normales e independientes, con media μ_x y variancia σ_x^2. Por otra parte, si χ_1^2, y χ_2^2 representan a dos variables aleatorias ji cuadrada independientes con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces el cociente

$$F_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$

corresponde a una variable F con ν_1 grados de libertad en el numerador y ν_2 en el denominador. Por ejemplo, si dos estimadores de σ_x^2 son independientes y poseen ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces

$$\frac{\dfrac{\text{Estimador 1 de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2}}{\dfrac{\text{Estimador 2 de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2}} = \frac{\text{Estimador 1 de } \sigma_x^2}{\text{Estimador 2 de } \sigma_x^2} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2} = F_{\nu_1,\nu_2}$$

De acuerdo con lo anterior, y bajo las suposiciones hechas en A.2 para el modelo lineal $Y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}$, se puede juzgar que

$$\frac{SS_w}{\sigma_e^2} = \chi^2_{N-K}; \quad \frac{\dfrac{SS_w}{N-K}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_w}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{N-K}}{N-K}$$

y, si $\gamma_i = 0, \ \forall_i$, entonces

$$\frac{SS_B}{\sigma_e^2} = \chi^2_{k-1}; \quad \frac{\frac{SS_B}{k-1}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_B}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{k-1}}{k-1}$$

$$\frac{SS_T}{\sigma_e^2} = \chi^2_{N-1}; \quad \frac{\frac{SS_T}{N-1}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_T}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{N-1}}{N-1}$$

Conviene hacer notar que los tres estimadores obtenidos para σ_e^2 no son independientes, ya que $SS_T = SS_w + SS_B$. Sin embargo, SS_w y SS_B sí lo son en virtud del Teorema de Cochran (Ref. 1, pág 50), que establece que si una variable aleatoria Ji cuadrada con ν grados de libertad es igual a la suma aritmética de n variables aleatorias Ji cuadrada con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, grados de libertad, respectivamente, estas n variables serán independientes si, y solo si,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n \qquad (n \leq \nu.)$$

En A.8 se concluyó que el número de grados de libertad de SS_T era igual a la suma de los grados de libertad de SS_w y SS_B, por lo cual, atendiendo al criterio de Cochran, SS_w y SS_B son <u>independientes</u>.

A.10 PRUEBA DE HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS

En general, existan o no efectos de los tratamientos, MS_w estima en forma insesgada el valor de σ_e^2, pero MS_B únicamente lo hace cuando $\gamma_i = 0, \ \forall_i$, es decir, cuando no existen efectos y las medias de los tratamientos son iguales.

Si se establecen entonces las hipótesis

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots. = \mu_k \qquad (i = 1,2,3,\ldots,k)$$

(o, equivalentemente, $H_0 : \gamma_i = 0, \ \forall_i$)

H_1 : al menos una media es distinta de las otras

(o, equivalentemente, $H_1 : \gamma_i \neq 0$, para alguna(s) i)
se podrá probar la primera en contra de la segunda a través del empleo del valor de la estadística de prueba

$$F_0 = \frac{\frac{MS_B}{\sigma_e^2}}{\frac{MS_w}{\sigma_e^2}} = \frac{MS_B}{MS_w} = \frac{\frac{SS_B}{K-1}}{\frac{SS_w}{N-K}} = \frac{\frac{\sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}}{\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N-K}}$$

que corresponde a una variable F con K-1 y N-K grados de libertad en numerador y denominador, respectivamente. El cociente que define a esa variable es el de dos variables aleatorias independientes con distribución χ^2, de acuerdo con la definición de F, y el razonamiento para su empleo es el siguiente: SS_T no es independiente de SS_w y SS_B y, por tanto, no puede usarse para generar una variable de prueba F_0. Ahora bien, al observar los valores de $E(SS_w)$ y $E(SS_B)$ se puede concluir que si H_0 es cierta el cociente de MS_B a MS_w debe ser cercano a la unidad. Sin embargo, si H_0 resultara falsa, es decir, si existieran efectos de los tratamientos, entonces MS_B tomará un valor mayor que el de MS_w, implicando que la F_0 de prueba será mayor que la unidad.

Lo anterior sugiere que la prueba de hipótesis se debe realizar, al nivel de significancia α seleccionado por el investigador, en la cola derecha de la distribución teórica de F.

A.11 Ejemplo

Considérese el caso 3 del ejemplo sobre el rendimiento de combustible para tres marcas distintas de automóviles, presentado en la sección A.4. La tabla de valores de y_{ij} es la siguiente:

		OBSERVACIONES		
MARCAS	A	24	19	22
	B	24	25	21
	C	11	14	17

$\bar{Y}_{1.} = 21.67$, $\bar{Y}_{2.} = 23.33$, $\bar{Y}_{3.} = 14.00$, $\bar{Y}_{..} = 19.67$, $n=3$, $K=3$, $N=9$

$$SS_w = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = (24-21.67)^2+(19-21.67)^2+(22-21.67)^2 + (24-23.33)^2+(25-23.33)^2+(21-23.33)^2 + (11-14)^2+(14-14)^2+(17-14)^2 = 39.33$$

$$SS_B = \sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 = 3(21.67-19.67)^2+ 3(23.33-19.67)^2+ + 3(14-19.67)^2 = 148.67$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = (24-19.67)^2+(19-19.67)^2+(22-19.67)^2 +(24-19.67)^2+(25-19.67)^2+(21-19.67)^2 +(11-19.67)^2+(14-19.67)^2+(17-19.67)^2 = 188.00$$

y se verifica que $SS_T = SS_w + SS_B = 39.33 + 148.67 = 188.00$

Los valores de MS_w y MS_B son

$$MS_w = \frac{SS_w}{N-k} = \frac{39.33}{9-3} = 6.55$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{k-1} = \frac{148.67}{3-1} = 74.33$$

por lo cual

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_w} = \frac{74.33}{6.55} = 11.35$$

para $K-1 = 3-1 = 2$ y $N-K = 9-3 = 6$ grados de libertad

El valor teórico para $F_{2,6}$ obtenido de la tabla correspondiente, considerando un nivel de significancia α igual con 0.01 (1%), es igual con 10.92, por lo que

$$F_0 = 11.35 > F_{2,6} = 10.92$$

y se debe rechazar $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, resultado que sugiere la existencia de efectos debidos a los tratamientos. En el caso del ejemplo, el rendimiento de combustible para un automóvil depende de si éste es de marca A, B o C.

A.12 COMENTARIOS

A.12.1 Cuando en el análisis de variancia se obtiene un valor de F_0 mucho menor que la unidad, ello indica que, siendo o no cierta la hipótesis H_0, MS_W adquiere un valor muy grande, lo cual a su vez generalmente implica el efecto presente de algún factor sistemático no aleatorio dentro de los valores de los datos en las muestras, que impide que MS_W refleje únicamente la variación al azar de los Y_{ij}. La existencia de tal efecto no controlado supone fallas en las suposiciones iniciales para la generación del modelo, y generalmente también, que el diseño del experimento es inadecuado. Más adelante se propondrán técnicas distintas a la ya presentada para procurar evitar la presencia de dichas componentes sistemáticas en el diseño correspondiente.

A.12.2 Una de las suposiciones iniciales especifica que la distribución de los errores e_{ij} es normal $\mathcal{N}(0,\sigma_e^2)$ para cada tratamiento i, y equivalentemente, que Y_{ij} es una variable aleatoria distribuída como $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$. Esta suposición es indispensable para determinar a MS_B/σ_e^2 y MS_W/σ_e^2 como variables con distribución χ^2, y así poder emplear el cociente $F_0 = MS_B/MS_W$ como estadístico de prueba para la hipótesis de igualdad de medias. Es posible demostrar, si se emplea el teorema del límite central, que las inferencias que se hacen para medias en el caso de poblaciones normales son válidas también para aquellas que no lo sean, siempre que el tamaño n (o n_i , en el caso del diseño desbalanceado que se presentará más adelante) de las muestras sea suficientemente grande. En virtud de ésto, si no es posible soportar los supuestos de normalidad para el modelo aquí desarrollado, es indispensable el manejo de muestras más grandes que permitan aproximaciones adecuadas a la distribución normal.

A.12.3 Otra de las suposiciones establece que σ_e^2 debe tener el mismo valor para todos los tratamientos. Esta suposición de homogeneidad de variancias, u homoscedasticidad, puede pasarse por alto sin consecuencias muy graves siempre que el número de valores Y_{ij} en cada muestra de tratamiento sea el mismo para todos los casos. Si, por el contrario, el valor de n es distinto para las muestras, y σ_e^2 no tiene el mismo valor para cada tratamiento, la inferencia final puede verse seriamente afectada.

A.12.4 Es extremadamente importante que los datos a los que se aplique el modelo expuesto se basen en observaciones independientes entre y dentro de las muestras, es decir, que cada observación no se relacione con las restantes, con el fin de soportar debidamente la suposición inicial de que los errores e_{ij} son independientes. Esta suposición es indispensable para justificar el empleo de la prueba F al realizar el análisis de variancia, y si no se cumple se pueden cometer errores muy graves que podrían desviar los resultados del análisis e invalidar la inferencia final.

A.12.5 Se recomienda al lector el estudio de los métodos de verificación analítica para los supuestos del modelo aquí expuesto, que se presentan en la referencia 1, págs. _ _

A.13 FORMULAS SIMPLIFICADAS DE CALCULO

Con el objeto de realizar los cálculos de SS_W, SS_B y SS_T en forma más cómoda, se pueden realizar las simplificaciones siguientes:

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..}y_{ij} + \bar{y}_{..}^2)$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..}\sum_i \sum_j y_{ij} + \sum_i \sum_j \bar{y}_{..}^2$$

y, como $\bar{y}_{..} = \dfrac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N}$ *y* $\sum_i \sum_j \bar{y}_{..}^2 = N\bar{y}_{..}^2$, *entonces*

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..}(N\bar{y}_{..}) + N\bar{y}_{..}^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2$$

Por otro lado,

$$SS_B = \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i n(\bar{y}_{i.}^2 - 2\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..} + \bar{y}_{..}^2)$$

$$= \sum_i n\bar{y}_{i.}^2 - 2n\bar{y}_{..}\sum_i \bar{y}_{i.} + n\sum_i \bar{y}_{..}^2$$

y, ya que

$$\bar{y}_{..} = \frac{n\sum_i \bar{y}_{i.}}{N} \quad y \quad \bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{n}, \text{ entonces}$$

$$SS_B = \sum_i n\frac{y_{i.}^2}{N} - 2N\bar{y}_{..}^2 + N\bar{y}_{..}^2 = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} - N\bar{y}_{..}^2$$

Finalmente, ya que $SS_T = SS_W + SS_B$, entonces

$$SS_W = SS_T - SS_B = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} + N\bar{y}_{..}^2$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n}$$

Se acostumbra presentar los resultados en la forma que sigue:

FUENTE DE VARIABILIDAD	SUMA DE CUADRADOS SS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F_o
ENTRE MUESTRAS (Tratamientos)	$SS_B = \sum_i \frac{y_{i.}}{n} - N\bar{y}_{..}^2$	K-1	$MS_B = \frac{SS_B}{K-1}$	$\frac{MS_B}{MS_W}$
DENTRO DE MUESTRAS (Error)	$SS_W = \sum_i\sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n}$	N-K	$MS_W = \frac{SS_W}{N-K}$	
TOTAL	$SS_T = \sum_i\sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2$	N-1		

A.14 EJEMPLO

Un fabricante de fibras sintéticas para telas sospecha que la resistencia de la fibra se ve afectada por el contenido de algodón en la misma. Para probar con $\alpha=0.01$ la hipótesis de ausencia de efectos debidos al porcentaje de algodón en la fibra, determina los niveles 15%, 20%, 25%, 30% y 35% (contenido de algodón en por ciento) y decide emplear cinco observaciones de resistencia de la fibra (en lb/in^2) para cada nivel del factor de interés. La asignación de los tratamientos se hace completamente al azar a las unidades experimentales, obteniéndose los resultados siguientes:

OBSERVACIONES

		1	2	3	4	5	$Y_{i.}$
% de Algodón (Tratamientos)	15	7	7	15	11	9	49
	20	12	17	12	18	18	77
	25	14	18	18	19	19	88
	30	19	25	22	19	23	108
	35	7	10	11	15	11	54

$i=1,2,3,4,5$

$j=1,2,3,4,5$

$\bar{Y}_{1.} = \frac{Y_{1.}}{5} = \frac{49}{5} = 9.8$; $\bar{Y}_{2.} = \frac{77}{5} = 15.4$; $\bar{Y}_{3.} = \frac{88}{5} = 17.6$; $\bar{Y}_{4.} = \frac{108}{5} = 21.6$

$\bar{Y}_{5.} = \frac{54}{5} = 10.8$

$$Y_{..} = \sum_i \sum_j y_{ij} = \sum_i y_{i.} = 49+77+88+108+54 = 376$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N} = \frac{376}{25} = 15.04$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2 = (7)^2+(7)^2+(15)^2+(11)^2+(9)^2+\ldots+(15)^2+(11)^2-25(15.04)^2$$

$$= 6292 - 5655.04 = 636.96$$

$$SS_B = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} - N\bar{y}_{..}^2 = \frac{(49)^2+(77)^2+(88)^2+(108)^2+(54)^2}{5} - 25(15.04)^2$$

$$= 6130.80 - 5655.04 = 475.76$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 636.96 - 475.76 = 161.20$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{k-1} = \frac{475.76}{5-1} = 118.94$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-k} = \frac{161.20}{25-5} = 8.06$$

$$F_o = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{118.94}{8.06} = 14.76$$

La tabla de concentración de resultados para el análisis de variancia es la siguiente:

FUENTE DE VARIABILIDAD	SUMA DE CUADRADOS	G. L.	MS	F_0
Tratamientos	475.76	4	118.94	14.76
ERROR	161.20	20	8.06	
TOTAL	636.96	24		

Al nivel de significancia de 1%, la F teórica con cuatro grados de libertad en el numerador y veinte en el denominador corresponde al valor 4.43, por lo que

$$F_o = 14.76 > F_{4,20} = 4.43$$

y se rechaza la hipótesis nula $H_o : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ (o, equivalentemente, $H_o : \gamma_i = 0,\ i = 1,2,3,4,5$), concluyéndose que las medias de los tratamientos difieren, es decir, que el porcentaje de algodón en la fibra afecta significativamente a la resistencia de la misma, para los niveles del factor empleados.

A.15 DISEÑO DESBALANCEADO

En algunas ocasiones el número de observaciones que se hacen para cada tratamiento puede no ser el mismo, es decir, el tamaño de la muestra puede variar entre los varios tratamientos. Se dice que el diseño correspondiente es desbalanceado, pero el análisis de variancia propuesto puede emplearse haciendo modificaciones ligeras en las fórmulas para las sumas de cuadrados.

Supóngase que se toman n_i observaciones bajo cada tratamiento i $(i = 1,2,\ldots,K)$. Entonces,

$$N = \sum_{i=1}^{K} n_i$$

y ahora se emplea la restricción $\sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i = 0$, ya que

$$\mu = \frac{\sum_i n_i \mu_i}{\sum_i n_i} = \frac{\sum_i n_i \mu_i}{N}$$

$$y \quad \sum_i n_i \gamma_i = \sum_i n_i(\mu_i - \mu) = \sum_i n_i \mu_i - \mu \sum_i n_i = N\mu - N\mu = 0$$

En este caso, las fórmulas de cálculo para las sumas de cuadrados se convierten en

$$SS_T = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - N\bar{y}^2_{..}$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{K} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - N\bar{y}^2_{..}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{K} \frac{y_{i.}^2}{n_i}$$

Por supuesto este diseño desbalanceado presenta desventajas en su uso comparándolo con el balanceado. Basta recordar que la suposición de homogeneidad de variancias para todos los tratamientos puede soportarse adecuadamente cuando los tamaños de muestra son iguales, lo que no sucede en el diseño desbalanceado.

A.16 EJEMPLO

Con el fin de comparar las propiedades reflectivas de cuatro tipos diferentes de pintura: A, B, C y D, se diseñó un experimento completamente aleatorizado cuyos resultados, obtenidos mediante el empleo de un instrumento óptico especial, fueron los siguientes:

		OBSERVACIONES						n_i	$y_{i.}$
PINTURA (Tratamientos)	A	195	150	205	120	60		5	830
	B	45	40	195	65	145	195	6	685
	C	230	115	235	225			4	805
	D	110	55	120	50	80		5	415

$$N = \sum_{i=1}^{4} n_i = 5 + 6 + 4 + 5 = 20$$

$$Y_{..} = \sum_i \sum_j Y_{ij} = \sum_i Y_{i.} = 830+685+805+415 = 2735$$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{2735}{20} = 136.75$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - N\bar{Y}_{..}^2 = (195)^2+(150)^2+(205)^2+\ldots+(50)^2+(80)^2-20(136.75)^2$$
$$= 457,865 - 374,011.25 = 83,863.75$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{4} \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - N\bar{Y}_{..}^2 = \frac{(830)^2}{5} + \frac{(685)^2}{6} + \frac{(805)^2}{4} + \frac{(415)^2}{5} - 20(136.75)^2$$
$$= 412,435.42 - 374,011.25 = 38,424.17$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 83,863.75 - 38,424.17 = 45,439.58$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{K-1} = \frac{38,424.17}{4-1} = 12,808.05$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-K} = \frac{45,439.58}{20-4} = 2839.97$$

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{12808.05}{2839.97} = 4.51$$

Con los datos anteriores se formula la tabla de análisis de variancia siguiente:

FUENTE DE VARIABILIDAD	SS	G.L.	MS	F_o
TRATAMIENTOS	38,424.17	3	12,808.05	4.51
ERROR	45,439.58	16	2,839.97	
TOTAL	83,863.75	19		

El valor teórico de $F_{3,16}$ considerando un nivel de significancia de 1% es, de tablas, igual con 5.29, por lo cual

$$F_0 = 4.51 < F_{3,16} = 5.29$$

implicando lo anterior que la hipótesis nula

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

(o, equivalentemente, $H_o : \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$) puede aceptarse al nivel de significancia empleado, resultado que supone la inexistencia de efectos en los valores de las reflectancias debidas a los cuatro tipos de pintura empleados en el experimento.

Conviene observar que, en este caso,

$$\hat{\gamma}_1 = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..} = 830/5 - 136.75 = 29.25; \quad \hat{\gamma}_2 = 685/6 - 136.75 = -22.58$$
$$\hat{\gamma}_3 = 805/4 - 136.75 = 64.5; \quad \hat{\gamma}_4 = 415/5 - 136.75 = -53.75$$

y que $\sum_{i=1}^{4} n_i \hat{\gamma}_i = 5(29.25) + 6(-22.58) + 4(64.5) + 5(-53.75)$

$$= 146.25 - 135.48 + 258 - 268.75 \doteq 0$$

C. PRUEBA DE IGUALDAD DE DOS MEDIAS, Y ANALISIS DE VARIANCIA.

Es factible establecer la conexión que existe entre una prueba de igualdad de dos medias, a través del empleo de la estadística t, y la prueba correspondiente con la F, que implica un análisis de variancia. Para ello, hay que recordar que la estadística t se define como el cociente que se forma de una variable aleatoria normal estándar a la raíz cuadrada de otra variable independiente Ji cuadrada dividida entre su número de grados de libertad, es decir,

$$t_{\nu} = \frac{z}{\sqrt{\chi^2/\nu}}$$

Si la expresión para t se eleva al cuadrado, se obtiene

$$t_{\nu}^2 = \frac{z^2}{\chi^2/\nu} = \frac{z^2/1}{\chi^2/\nu} = F_{1,\nu}$$

siendo $z^2/1$ una variable aleatoria Ji cuadrada con un grado de libertad, dividida entre dicho número. Por lo tanto, el valor de t obtenido de las muestras con las que se realice la prueba de igualdad de medias para dos poblaciones, debe ser igual, después de elevarlo al cuadrado, con el valor de F calculado en la prueba correspondiente que se efectúe por análisis de variancia.

Para aclarar este concepto, supóngase que se desea probar la hipótesis de igualdad de medias para dos poblaciones normales e independientes, I y II, a través de muestras aleatorias de tres elementos en cada caso, con los valores de datos

I	II
15	12
10	9
21	7

y un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

C.1 Solución a través de t

En este caso

$$H_o : \mu_I = \mu_{II}$$

$$H_1 : \mu_I \neq \mu_{II}$$

con $n_I = n_{II} = 3$, $\bar{x}_I = 15.33$ y $\bar{x}_{II} = 12.67$

Al calcular las variancias insesgadas de las muestras a través de la fórmula

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

se obtiene

$$s_{x_I}^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^{3} (x_{i_I} - \bar{x}_I)^2 = \frac{0.1089+28.4089+32.1489}{2} = 30.33$$

$$s_{x_{II}}^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^{3} (x_{i_{II}} - \bar{x}_{II})^2 = \frac{0.4489+40.0689+32.1489}{2} = 36.33$$

y

$$t = \frac{\bar{x}_I - \bar{x}_{II}}{\sqrt{\frac{(n_I-1)s_{x_I}^2 + (n_{II}-1)s_{x_{II}}^2}{(n_I-1)+(n_{II}-1)}}\sqrt{\frac{1}{n_I} + \frac{1}{n_{II}}}} = \frac{15.33 - 12.67}{\sqrt{\frac{2(30.33)+2(36.33)}{2+2}}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{15.33 - 12.67}{5.773(0.816)} = \frac{2.66}{4.71} = 0.565$$

con $\nu = (n_I - 1) + (n_{II} - 1) = n_I + n_{II} - 2 = 3+3-2 = 4$ grados de libertad.

De tablas, el valor $|t_4|$ es 2.776, con $\alpha = 0.05$ para prueba de dos extremos, y como

$$-t_4 = -2.776 < t = 0.565 < t_4 = 2.776$$

se acepta la hipótesis H_o de igualdad de las medias.

Los valores de t de prueba y de tablas elevados al cuadrado son

$$t^2 = (0.565)^2 = 0.319$$

$$t_4^2 = (2.776)^2 = 7.71$$

C.2 Solución a través de análisis de variancia

Para este caso, la tabla de resultados es

		OBSERVACIONES			$Y_{i.}$
TRATAMIENTOS (POBLACIONES)	I	15	10	21	46
	II	12	9	7	38

$j=1,2,3\ (n=3)$

$i=1,2\ (K=2)$

$N=nK=6$

como $Y_{..} = \sum_i Y_{i.} = 46+38=84$, entonces $\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{N} = \frac{84}{6} = 14$, y

$$N\bar{Y}^2_{..} = 6(14)^2 = 1176 \; ; \quad \sum_{i=1}^{2} \frac{Y^2_{i.}}{n} = \frac{46^2 + 38^2}{6} = 1186.66$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} Y^2_{ij} = 15^2 + 10^2 + 21^2 + 12^2 + 9^2 + 7^2 = 1320$$

por lo que

$$SS_T = \sum_i \sum_j Y^2_{ij} - N\bar{Y}^2_{..} = 1320 - 1176 = 144$$

$$SS_B = \frac{\sum_i Y_{i.}}{n} - N\bar{Y}^2_{..} = 1186.66 - 1176 = 10.66$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 144 - 10.66 = 133.34$$

y los valores medios cuadráticos resultan ser

$$MS_B = \frac{SS_B}{K-1} = \frac{10.66}{1} = 10.66$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-K} = \frac{133.34}{4} = 33.335$$

El valor de la estadística de prueba es

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{10.66}{33.335} = 0.319$$

Al 5% de significancia $F_{1,4} = 7.71$, y como

$$F_o = 0.319 < F_{1,4} = 7.71$$

se acepta la hipótesis $H_o : \mu_I = \mu_{II}$, que es la misma conclusión a que se llegó a través del empleo de la estadística t.

También se verifica que

$$t^2 = F_0 = 0.319$$

$$t_4^2 = F_{1,4} = 7.71$$

implicando ello que la prueba de igualdad de medias para dos poblaciones empleando a t conduce a los mismos resultados que el análisis de variancia correspondiente.

A.13 METODO DE DUNCAN

La llamada prueba del rango múltiple de DUNCAN, es un método muy extendido para realizar pruebas de comparación entre todas las parejas de medias de tratamientos. El procedimiento es muy efectivo para detectar diferencias entre medias cuando existen realmente tales diferencias, y por ello se ha convertido en el método más popular para efectuar comparaciones por parejas.

Para aplicar la prueba del rango múltiple, se ordenan de menor a mayor los K promedios de tratamientos, y se forma un primer grupo conteniendo a los K. A continuación, se forma un segundo grupo de K-1 promedios, eliminando del grupo anterior al promedio de mayor valor. Este procedimiento se continúa hasta llegar al último grupo de dos promedios. Por ejemplo, si los promedios, ya ordenados, obtenidos de muestras para K=4 tratamientos son

$$\bar{Y}_{1.}=52 \ , \quad \bar{Y}_{4.}=60 \ , \quad \bar{Y}_{2.}=67 \ , \quad \bar{Y}_{3.}=71$$

el primer grupo de K promedios es

$\bar{Y}_{1.}= 52$
$\bar{Y}_{4.}= 60$
$\bar{Y}_{2.}= 67$ GRUPO 1
$\bar{Y}_{3.}= 71$

Al eliminar el promedio de mayor valor ($\bar{Y}_{3.}=71$), el segundo grupo con K-1=3 promedios queda como

$\bar{Y}_{1.}= 52$
$\bar{Y}_{4.}= 60$ GRUPO 2
$\bar{Y}_{2.}= 67$

Eliminando el valor $\bar{Y}_{2.}$ =67 del grupo anterior, el tercer grupo con K-2 =2 promedios corresponde a

$\bar{Y}_{1.}= 52$
$\bar{Y}_{4.}= 60$ GRUPO 3

Una vez que se han formado todos los grupos de promedios, se procede a calcular las diferencias entre el promedio de mayor valor en cada grupo y cada uno de los promedios restantes incluidos en el mismo. Para el grupo 1, la primera diferencia es $\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.} = 71-52$, siendo su valor igual con el rango (71-52) de los promedios 52,60,67 y 71. Para el mismo grupo, la segunda diferencia es $\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{4.} = 71-60$, igual con el rango de los promedios 60,67 y 71. La tercera y última diferencia es $\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.} = 71-67$, y este valor equivale al rango para los promedios 67 y 71. Es decir, calcular las diferencias entre los promedios en la forma indicada es, para el primer grupo, equivalente a calcular los rangos para cuatro, tres y dos promedios, respectivamente.

Entonces, las diferencias entre promedios para cada uno de los grupos son

GRUPO 1

$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.} = 71-52$ (Rango de <u>4</u> promedios: 52,60,67 y 71)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{4.} = 71-60$ (Rango de <u>3</u> promedios: 60,67 y 71)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.} = 71-67$ (Rango de <u>2</u> promedios: 67 y 71)

GRUPO 2

$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.} = 67-52$ (Rango de <u>3</u> promedios: 52,60 y 67)
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{4.} = 67-60$ (Rango de <u>2</u> promedios: 60 y 67)

GRUPO 3

$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.} = 60-52$ (Rango de <u>2</u> promedios: 52 y 60)

Obsérvese que al calcular las seis diferencias anteriores, se plantearon los $K(K-1)/2=4(4-1)/2$ contrastes que se requieren para efectuar todas las comparaciones de medias por parejas para los K tratamientos.

A continuación, se deben obtener los k-1 <u>rangos mínimos significativos</u>

$$'R_p = r_\alpha (p,f) \sqrt{\frac{MS_w}{n_H}} \quad ; \; p = 2,3,\ldots,K$$

en donde α es la significancia para el análisis de variancia original, MS_w el valor medio cuadrático del error obtenido en el mismo análisis, f el número de grados de libertad para SS_w, en este caso N-K, $r_\alpha(p,f)$ para p=2,3,...,K, el valor leído en la tabla de rangos significativos de DUNCAN que se anexa a continuación, y

$$n_H = n \qquad \text{(diseño balanceado)}$$

$$n_H = \frac{K}{\sum_i \frac{1}{n_i}} \qquad \text{(diseño desbalanceado)}$$

Para realizar la prueba de significancia de alguna diferencia de promedios, que equivalga a un rango de p promedios, se compara dicha diferencia con el valor R_p del rango mínimo significativo correspondiente, y si la diferencia es mayor que R_p se concluye que la pareja de medias en cuestión es significativamente diferente, repitiéndose el proceso hasta que las K(K-1)/2 parejas de promedios se hayan probado. Como ejemplo, para los cuatro promedios que se han manejado, las pruebas se efectuarían considerando que

$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.}$ se debe comparar con R_4

$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{4.}$ se debe comparar con R_3

$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.}$ se debe comparar con R_2

$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.}$ se debe comparar con R_3

$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{4.}$ se debe comparar con R_2

$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.}$ se debe comparar con R_2

Para evitar contradicciones, no se deben considerar como significativas las diferencias en parejas de medias, cuando las medias involucradas se encuentran entre otra pareja que no difiere significativamente.

A.14 EJEMPLO

Para el problema tratado en A.5, los promedios ordenados son

$$\bar{Y}_{3.} = \frac{42}{3} = 14.00 \quad , \quad \bar{Y}_{1.} = \frac{65}{3} = 21.67 \quad , \quad \bar{Y}_{2.} = \frac{70}{3} = 23.33$$

RANGOS SIGNIFICATIVOS DE DUNCAN

$r_{.01}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.3	9.3	9.3
4	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.5	7.5	7.5
5	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.8	6.8	6.8
6	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.3	6.3	6.3
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	6.0	6.0	6.0
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.8	5.8	5.8
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.7	5.7	5.7
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.55	5.55	5.55
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.39	5.39	5.39
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.26	5.26	5.26
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.15	5.15	5.15
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	5.07	5.07	5.07
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	5.00	5.00	5.00
16	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.94	4.94	4.94
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.73	4.75	4.89	4.89	4.89
18	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.85	4.85	4.85
19	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.82	4.82	4.82
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.79	4.79	4.79
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.65	4.71	4.71
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.59	4.69	4.69
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.53	4.66	4.66
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.48	4.64	4.65
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.41	4.60	4.68

f = degrees of freedom.
* Reproduced with permission from "Multiple Range and Multiple F Tests," by D. B. Duncan, *Biometrics*, Vol. 1, No. 1, pp. 1–42, 1955.

$r_{.05}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.53	3.53
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67

f = degrees of freedom

y los grupos de promedios quedan

$$\begin{array}{ll} \bar{Y}_{3.} = 14 & \\ \bar{Y}_{1.} = 21.67 & \text{GRUPO } 1 \\ \bar{Y}_{2.} = 23.33 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bar{Y}_{3.} = 14 & \\ \bar{Y}_{1.} = 21.67 & \text{GRUPO } 2 \end{array}$$

Entonces, las diferencias entre promedios previstos para cada uno de los grupos son

GRUPO 1

$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{3.} = 23.33-14.00 = 9.33$ (Rango para 3 promedios)
$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{1.} = 23.33-21.67 = 1.66$ (Rango para 2 promedios)

GRUPO 2

$\bar{Y}_{1.}-\bar{Y}_{3.} = 21.67-14.00 = 7.67$ (Rango para 2 promedios)

Puesto que se requieren rangos mínimos significativos para dos y tres promedios, siendo $\alpha = 1\%$ y $MS_w = 6.55$, con f=6 grados de libertad, los valores de r_α (p,f) para p igual con 2 y 3 resultan

$$r_{0.01}(2,6) = 5.24$$

$$r_{0.01}(3,6) = 5.51$$

Por lo tanto, con n=3,

$$R_2 = r_{0.01}(2,6)\sqrt{\frac{MS_w}{n}} = 5.24(1.478) = 7.74$$

$$R_3 = r_{0.01}(3,6)\sqrt{\frac{MS_w}{n}} = 5.51(1.478) = 8.14$$

y las comparaciones finales resultan

$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{3.} = 9.33 > R_3 = 8.14$ (Rechazo)
$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{1.} = 1.66 < R_2 = 7.74$ (Aceptación)
$\bar{Y}_{1.}-\bar{Y}_{3.} = 7.67 < R_2 = 7.74$ (Aceptación con duda)

A.15 EJEMPLO

Para el problema de las fibras sintéticas visto en A.6, los promedios ya ordenados son

$$\bar{Y}_{1.} = 9.8 \quad , \bar{Y}_{5.} = 10.8 \quad , \bar{Y}_{2.} = 15.4 \quad , \bar{Y}_{3.} = 17.6 \; , \; \bar{Y}_{4.} = 21.6$$

y se forman los grupos

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$
$\bar{Y}_{2.} = 15.4$ GRUPO 1
$\bar{Y}_{3.} = 17.6$
$\bar{Y}_{4.} = 21.6$

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$
$\bar{Y}_{2.} = 15.4$ GRUPO 2
$\bar{Y}_{3.} = 17.6$

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$ GRUPO 3
$\bar{Y}_{2.} = 15.4$

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$ GRUPO 4

cuyas diferencias de promedios son

GRUPO 1

$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.} = 21.6 - 9.8 = 11.8$ (Rango de 5 promedios)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{5.} = 21.6 - 10.8 = 10.8$ (Rango de 4 promedios)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{2.} = 21.6 - 15.4 = 6.2$ (Rango de 3 promedios)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{3.} = 21.6 - 17.6 = 4.0$ (Rango de 2 promedios)

GRUPO 2

$\bar{Y}_{3.}-\bar{Y}_{1.} = 17.6 - 9.8 = 7.8$ (Rango de <u>4</u> promedios)
$\bar{Y}_{3.}-\bar{Y}_{5.} = 17.6 -10.8 = 6.8$ (Rango de <u>3</u> promedios)
$\bar{Y}_{3.}-\bar{Y}_{2.} = 17.6 -15.4 = 2.2$ (Rango de <u>2</u> promedios)

GRUPO 3

$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{1.} = 15.4 - 9.8 = 5.6$ (Rango de <u>3</u> promedios)
$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{5.} = 15.4 -10.8 = 4.6$ (Rango de <u>2</u> promedios)

GRUPO 4

$\bar{Y}_{5.}-\bar{Y}_{1.} = 10.8 - 9.8 = 1.0$ (Rango de <u>2</u> promedios)

Los rangos mínimos significativos requeridos para realizar las comparaciones son, tomando en cuenta que $\alpha = 0.01$, $MS_w = 8.06$, con $f = N-K = 25-5 = 20$ grados de libertad y $n=5$, los siguientes:

$$r_{0.01}(2,20) = 4.02$$
$$r_{0.01}(3,20) = 4.22$$
$$r_{0.01}(4,20) = 4.33$$
$$r_{0.01}(5,20) = 4.40$$

Por lo tanto,

$$R_2 = r_{0.01}(2,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.02)(1.27) = 5.10$$

$$R_3 = r_{0.01}(3,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.22)(1.27) = 5.36$$

$$R_4 = r_{0.01}(4,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.33)(1.27) = 5.50$$

$$R_5 = r_{0.01}(5,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.40)(1.27) = 5.59$$

y las comparaciones finales son

$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.}$	$= 11.8$	$>$	$R_5 = 5.59$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{5.}$	$= 10.8$	$>$	$R_4 = 5.50$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{2.}$	$= 6.2$	$>$	$R_3 = 5.56$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{3.}$	$= 4.0$	$<$	$R_2 = 5.10$	(Aceptación)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.}$	$= 7.8$	$>$	$R_4 = 5.50$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{5.}$	$= 6.8$	$>$	$R_3 = 5.36$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.}$	$= 2.2$	$<$	$R_2 = 5.10$	(Aceptación)
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.}$	$= 5.6$	$>$	$R_3 = 5.36$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{5.}$	$= 4.6$	$<$	$R_2 = 5.10$	(Aceptación)
$\bar{Y}_{5.} - \bar{Y}_{1.}$	$= 1.0$	$<$	$R_2 = 5.10$	(Aceptación)

Conviene hacer mención de que el método de rangos múltiples de DUNCAN, por considerarse tal vez el más sensible de todos los procedimientos para comparaciones por parejas, se encuentra disponible en gran número de paquetes de programación en computadoras para el análisis de variancia.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS
MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

MODELOS BASICOS DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS

AUTORES: IRWIN MILLER, JOHN E. FREUND
EXPOSITOR: M. EN I. RUBEN TELLEZ SCHZ.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

12

Análisis de variancia

Algunos de los ejemplos del capítulo 11 nos han enseñado que podemos ahorrarnos muchos cálculos si planeamos apropiadamente un experimento de antemano. Y que es aún más importante: la planeación dará una seguridad razonable de que los resultados ofrecerán respuestas claras a las preguntas que se trata de responder. Como es imposible dar en este capítulo una exposición completa de diseño experimental, incluyendo muchas de las trampas a las que el experimentador está expuesto, empezaremos explicando algunos de los principios generales del diseño experimental. Varios de los diseños que se emplean con mayor frecuencia en ingeniería y otras ramas de la investigación aplicada se expondrán en secciones subsecuentes.

En las secciones 12.2 y 12.3 estudiaremos los diseños de [illegible] en una y en dos direcciones, los cuales son utilizados muy a menudo, en la sección 12.5 introduciremos los diseños del cuadrado latino y del cuadrado grecolatino; y en el resto del capítulo expondremos pruebas para comparar [illegible] y el análisis de un experimento balanceado en presencia de una variable concomitante o covariada.

12.1 ALGUNOS PRINCIPIOS GENERALES

Varios de los múltiples aspectos del diseño experimental pueden ilustrarse por medio de un ejemplo proveniente del importante tema de las mediciones en ingeniería.

Supóngase que una fundidora de acero surte de lámina de hojalata a tres fabricantes de latas, la especificación principal es que el peso del revestimiento de estaño deberá ser al menos de 0.25 libras en el fondo del envase de hojalata. La fundidora y cada uno de los fabricantes de latas tienen laboratorios donde se realizan mediciones de los pesos de los revestimientos de estaño, tomando muestras de cada cargamento. Supongamos también que han surgido algunos desacuerdos sobre los pesos reales de los revestimientos de estaño de los cargamentos de lámina, y se decide planear un experimento para determinar si los cuatro laboratorios están realizando mediciones consistentes. Un factor que complica las cosas es que parte del proceso de medidas consiste en eliminar con productos químicos el estaño de la superficie del metal en la base; de manera que es imposible tener las mismas mediciones en las muestras de cada laboratorio para determinar qué tan aproximadas son las mediciones.

Una posibilidad consiste en enviar varias muestras (con forma de discos circulares de igual área) a cada uno de los laboratorios. Aun cuando los discos en realidad pueden no tener pesos idénticos del revestimiento de estaño, se confía en que tales diferencias sean muy pequeñas y que más o menos "alcancen un promedio". En otras palabras, se supondrá que, si bien pueden existir diferencias entre las medias de las cuatro muestras, podrán ser atribuidas sólo a diferencias sistemáticas en las técnicas de medición y a variabilidad aleatoria. Esto abre la posibilidad de averiguar si los resultados obtenidos en los laboratorios son consistentes comparando la variabilidad de las medias de las cuatro muestras con una medida apropiada de la variación aleatoria.

Ahora queda el problema de decidir cuántos discos deben enviarse a cada laboratorio y cuántos en realidad deben seleccionarse. La pregunta del tamaño muestral puede contestarse en varias formas, una de las cuales consiste en usar la fórmula de la página 242 para la desviación estándar de la distribución muestral de la diferencia entre dos medias. Sustituyendo valores conocidos de σ_1 y de σ_2 y especificando qué diferencias entre las medias reales de cualesquiera de dos laboratorios debe detectarse con una probabilidad al menos de 0.95 (o 0.98 o 0.99), es determinar $n_1 = n_2 = n$ (véase el ejercicio 12.12 de la página 380). Supóngase que este método y, quizás, también las consideraciones de costo y disponibilidad de los especímenes necesarios orillen a tomar la decisión de enviar una muestra de 12 discos a cada laboratorio.

El problema de seleccionar los 48 discos requeridos y asignar 12 a cada laboratorio no es tan simple como podría parecer a primera vista. Para em-

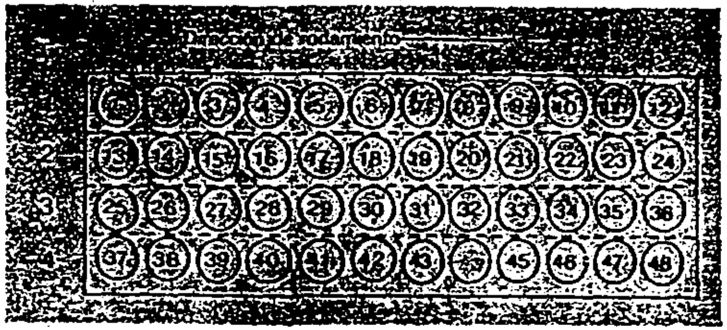


Figura 12.1 Numeración de las muestras de hojalata.

pezar, supóngase que una lámina de hojalata de las dimensiones apropiadas se selecciona y que los 48 discos se cortan de ella como se aprecia en la figura 12.1. Los 12 discos cortados de la tira 1 se envían al primer laboratorio, los 12 obtenidos de la tira 2 se mandan al segundo laboratorio, etc. Si se descubre que las medias de los pesos de los cuatro revestimientos subsecuentemente obtenidos varían significativamente, ¿nos permitiría esto concluir que las diferencias pueden atribuirse a falta de consistencia en las técnicas de medición? Supóngase, por ejemplo, que otras investigaciones indican que la cantidad de estaño depositada electrolíticamente sobre una larga lámina de acero tiene un patrón distinto y repetido perpendicular a la dirección en que es laminado. (El patrón podría originarse en la disposición de los electrones, "efectos de borde", etc.). Entonces, aunque los cuatro laboratorios hayan medido la cantidad de estaño consistentemente y sin error, las diferencias en las determinaciones de los pesos de los revestimientos de estaño se deberían a alguna otra causa. La asignación de los discos de una tira completa a cada laboratorio es tal que las inconsistencias entre los métodos de medición de los laboratorios no pueden separarse (o confundirse), si las diferencias provienen de la cantidad real de estaño depositado perpendicularmente a la dirección en que la hoja de metal se lamina.

Una forma de evitar este tipo de confusión consiste en numerar los discos y distribuirlos a los cuatro laboratorios al azar como en el siguiente esquema, que se obtuvo con ayuda de la tabla de números aleatorios:

Laboratorio A:	3,	38,	17,	32,	24,	30,	48,	19,	11,	31,	22,	41
Laboratorio B:	44,	20,	15,	25,	45,	4,	14,	5,	39,	7,	40,	34
Laboratorio C:	12,	21,	42,	8,	27,	16,	47,	46,	18,	43,	35,	26
Laboratorio D:	9,	2,	28,	23,	37,	1,	10,	6,	29,	36,	33,	13

Si hubiese algún patrón real en el grueso del recubrimiento de estaño sobre la lámina de hojalata, sería "disuelto" por la **aleatorización.**

Si bien identificamos y contrarrestamos un posible patrón de variación sistemática, no hay seguridad de que lo podamos hacer con los otros. Por ejemplo, pueden existir diferencias sistemáticas en las áreas de los discos causadas por un desgastamiento progresivo del instrumento de corte o pueden presentarse rayaduras u otras imperfecciones en una parte de la lámina, lo que podría afectar a las mediciones. En consecuencia, siempre existe la posibilidad de que las diferencias en las medias atribuidas a inconsistencias entre los laboratorios sean en realidad causadas por alguna otra variable incontrolable, y el propósito de la aleatorización es evitar confundir la variable sujeta a investigación con otras.

Distribuyendo totalmente al azar los 48 discos entre los cuatro laboratorios, no tenemos otra opción que incluir cualquier variación atribuible a causas extrañas bajo la etiqueta de "variación aleatoria". Esto puede darnos una estimación demasiado grande de la variación aleatoria, lo cual a su vez puede dificultar detectar diferencias entre las medias reales de laboratorio. Con el propósito de evitar esto, podríamos, quizás, sólo usar discos cortados de la misma tira (o de alguna otra región homogénea). Por desgracia, esta clase de **experimentación controlada** nos presenta nuevas complicaciones. ¿De qué serviría, por ejemplo, efectuar un experimento que nos permitiera concluir que los laboratorios son consistentes (o inconsistentes), *si tal conclusión se limita a mediciones realizadas a una distancia fija a partir de un extremo de la lámina?* Para ofrecer un ejemplo más realista, supóngase que un fabricante de artículos de plomería desea comparar el rendimiento de varias clases de materiales que se usarán en tuberías subterráneas de agua. Si condiciones como la acidez del suelo, la profundidad del tubo y el contenido de minerales del agua que transportará pudieran mantenerse fijas, las conclusiones sobre qué material es mejor serían válidas sólo para el conjunto de condiciones dadas. Lo que el fabricante quiere saber es cuál material es mejor en una amplia variedad de condiciones; el diseñar un experimento adecuado sería aconsejable (en realidad, necesario) especificar que el tubo de cada material será enterrado a diferentes profundidades en diversos tipos de suelos y lugares en donde el agua tiene diferente dureza.

Este ejemplo sirve para ilustrar que rara vez se desean mantener fijos todos o la mayoría de los factores extraños a lo largo de un experimento; se consigue así una estimación de la variación aleatoria que no esté "inflada" por variaciones debidas a otras causas. (En realidad, es muy raro, sino imposible, ejercer un control tan estricto, esto es, mantener fijas *todas* las variables extrañas.) En la práctica, los experimentos deberán planearse de tal manera que las fuentes conocidas de variabilidad sean deliberadamente consideradas sobre un rango tan amplio como sea necesario; más aún, deberán variarse en tal forma que su variabilidad pueda eliminarse en la estimación de la variación aleatoria. Una manera de lograrlo es repetir el experimento en varios **bloques**, en los que fuentes conocidas de variabilidad (esto es, variables extrañas) se mantienen fijas en cada bloque, pero variando de bloque a bloque.

En el problema del revestimiento de estaño podríamos explicar así las variaciones a través de la lámina de acero, asignando aleatoriamente tres discos de cada tira a cada uno de los laboratorios como en el siguiente arreglo:

	Tira 1	*Tira 2*	*Tira 3*	*Tira 4*
Laboratorio A:	8, 4, 10	23, 24, 19	26, 29, 35	37, 44, 48
Laboratorio B:	2, 6, 12	21, 15, 22	34, 33, 32	45, 43, 46
Laboratorio C:	1, 5, 11	16, 20, 13	36, 29, 30	41, 38, 47
Laboratorio D:	7, 3, 9	17, 18, 14	28, 31, 25	39, 40, 42

En este esquema experimental, las tiras forman los bloques, y si fundamentamos nuestra estimación de la variación aleatoria en la variabilidad dentro de los 16 conjuntos de tres discos, esta estimación no será inflada por variables extrañas, esto es, las diferencias entre las tiras. (Obsérvese también que, con este arreglo, las diferencias entre las medias obtenidas por los cuatro laboratorios no pueden atribuirse a variaciones entre las tiras. No podemos decir lo mismo del arreglo de la página 366.)

El análisis de experimentos en que los **bloques** se utilizan para eliminar una de las fuentes de variabilidad se abordará en la sección 12.3. El análisis de experimentos en que dos o tres fuentes de variabilidad son en esta forma eliminadas se expondrá en la sección 12.5.

12.2 DISEÑOS COMPLETAMENTE ALEATORIOS

En esta sección consideramos, en general, el análisis estadístico de el diseño **completamente aleatorio o con un criterio de clasificación.** Supondremos que el experimentador cuenta con los resultados de k muestras aleatorias independientes, cada una de tamaño n, de k diferentes poblaciones (esto es, datos relativos a k tratamientos, k grupos, k métodos de producción, etc.); y le interesa probar la hipótesis de que las medias de esas k poblaciones son todas iguales. Un ejemplo de tal experimento, con $k = 4$, está dado por el esquema de la página 366. Si denotamos la j-ésima observación en la i-ésima muestra por y_{ij}, el esquema general para un criterio de clasificación es como sigue:

		Medias
Muestra 1:	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1j}, \ldots, y_{1n}$	$\bar{y}_1$
Muestra 2:	$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2j}, \ldots, y_{2n}$	$\bar{y}_2$
. . .	. . .	.

		Medias
Muestra i:	$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{in}$	$\bar{y}_i$
. . .	. . .	.
Muestra k:	$y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kj}, \ldots, y_{kn}$	$\bar{y}_k$
		$\bar{y}_{.}$

En relación con el esquema experimental de la página 336 y_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, \ldots, 12$) es la j-ésima medición del peso del revestimiento de estaño del i-ésimo laboratorio, $\bar{y}_i$ es la media de las mediciones obtenidas en el i-ésimo laboratorio y $\bar{y}$ es la media global (o **gran media**) de las 48 observaciones.

Para probar la hipótesis de que las muestras se obtuvieron de k poblaciones con medias iguales, haremos varias suposiciones. Con más precisión, supondremos estar trabajando con poblaciones normales que tienen variancias iguales. Existen métodos para probar lo razonable que es esta última suposición (véase el libro de A. M. Mood y F. A. Graybill mencionado en la bibliografía), pero los métodos que desarrollaremos en este capítulo son bastante vigurosos; esto es, son relativamente insensibles a las violaciones de la suposición de normalidad y a la de igualdad de variancias.

Si μ_i denota la media de las i-ésima población y σ^2 indica la variancia común de las k poblaciones, podemos expresar cada observación y_{ij} como μ_i más el valor de un componente aleatorio; es decir, podemos escribir

$$y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, n$$

De acuerdo con las suposiciones anteriores, los ϵ_{ij} son valores de variables aleatorias independientes, distribuidas normalmente con medias cero y la variancia común σ^2.†

Para lograr uniformidad en las ecuaciones correspondientes a clases de diseño más complicados, se acostumbra reemplazar μ_i por $\mu + \alpha_i$, donde μ es la media de las μ_i y α_i es el efecto del i-ésimo tratamiento; de ahí que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ (véase el ejercio 12.13 de la página 380). Con estos nuevos parámetros, podemos escribir la ecuación modelo para el criterio de clasificación

$$\boxed{y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, n}$$

† Nótese que esta ecuación o modelo puede considerarse como una ecuación de regresión múltiple; introduciendo las variables x_{il} que son iguales a 0 o al 1 dependiendo de si los dos subíndices son distintos o iguales, podemos escribir

$$y_{ij} = \mu_1 x_{i1} + \mu_2 x_{i2} + \ldots + \mu_k x_{ik} + \epsilon_{ij}$$

Los parámetros μ_i pueden interpretarse ahora como coeficientes de regresión y pueden estimarse por el método de mínimos cuadrados que se vio en el capítulo 11.

y la hipótesis nula de que las medias de las k poblaciones son iguales puede reemplazarse con la hipótesis nula de que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. La hipótesis alterna de que al menos dos de las medias son distintas equivale a que $\alpha_i \neq 0$ para alguna i.

Para probar la hipótesis nula de que las medias de las k poblaciones son iguales, compararemos dos estimaciones de σ^2 (una con base en la variación entre las medias muestrales y la otra con la variación dentro de las muestras). Dado que, como se ha supuesto, cada muestra proviene de una población que tiene la varianza σ^2, la varianza puede estimarse por cualquiera de las varianzas muestrales

$$s_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n-1}$$

y entonces también por su media

$$\hat{\sigma}_W^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i^2}{k} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \frac{(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{k(n-1)}$$

Obsérvese que cada una de las varianzas muestrales s_i^2 está basada en $n - 1$ grados de libertad ($n - 1$ desviaciones independientes de $\bar{y}_i$) y, entonces, $\hat{\sigma}_W^2$ está basada en $k(n - 1)$ grados de libertad. Ahora bien, la varianza de las k medias muestrales está dada por

$$s_{\bar{y}}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_.)^2}{k-1}$$

y *si la hipótesis nula es verdadera* esta expresión nos da una estimación de σ^2/n. Así, una estimación de σ^2 basada en las diferencias entre las medias muestrales está dada por

$$\hat{\sigma}_B^2 = n \cdot s_{\bar{y}}^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_.)^2}{k-1}$$

y está basada en $k - 1$ grados de libertad.

Si la hipótesis nula es cierta, puede demostrarse que $\hat{\sigma}_W^2$ y $\hat{\sigma}_B^2$ son estimaciones independientes de σ^2, y se sigue de ello que

$$F = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2}$$

es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución F con $k - 1$ y $k(n - 1)$ grados de libertad. Cabe esperar que la varianza entre muestras, $\hat{\sigma}_B^2$, exceda a la varianza dentro de las muestras, $\hat{\sigma}_W^2$, cuando la hipótesis nula es *falsa;* por eso la hipótesis nula será rechazada si F excede a F_α, donde F_α se obtuvo de la tabla 6 con $k - 1$ y $k(n - 1)$ grados de libertad.

El argumento anterior ha indicado cómo la prueba de la igualdad de las k medias puede fundamentarse en la comparación de dos estimaciones de varianzas. Más notable, quizás, es el hecho de que las dos estimaciones en cuestion [excepto por los divisores $k - 1$ y $k(n - 1)$] pueden obtenerse "partiendo" o analizando la varianza total de las nk observaciones en dos partes. La varianza muestral de las nk observaciones está dada por

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \frac{(y_{ij} - \bar{y}_.)^2}{nk-1}$$

y con respecto a su numerador, llamado suma de cuadrados total, probaremos ahora el siguiente teorema.

Identidad para el análisis con un criterio de clasificación

> *Teorema 12.1*
>
> $$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_.)^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + n \cdot \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_i - \bar{y}_.)^2$$

La demostración de este teorema se basa en la identidad

$$y_{ij} - \bar{y}_. = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y}_.)$$

Elevando ambos lados al cuadrado y sumando sobre i y sobre j, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_.)^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{y}_.)^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}_.)$$

Ahora bien, observemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}_.) = \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_i - \bar{y}_.) \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i) = 0$$

dado que $\bar{y}_i$ es la media de la i-ésima muestra y, de ahí que $\sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i) = 0$ para toda i. Para completar la demostración del teorema 12.1, sólo debemos observar que en el sumando de la segunda sumatoria del lado derecho de la identidad anterior no aparece el subíndice j y que, en consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_i - \bar{y})^2 = n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

Se acostumbra denotar la suma total de cuadrados, el miembro izquierdo de la identidad del teorema 12.1 por SST. El primer término del lado derecho es $\hat{\sigma}_w^2$ veces sus grados de libertad; y a esta suma la llamaremos **suma de cuadrados del error, SSE**. El término "suma de cuadrados del error" expresa la idea de que la cantidad estima errores aleatorios (o al azar). El segundo término del lado derecho de la identidad del teorema 12.1 es $\hat{\sigma}_B^2$ veces sus grados de libertad, y a esto lo llamaremos suma de cuadrados **entre muestras** o **suma de cuadrados entre tratamientos, $SS(Tr)$**. (La mayoría de las primeras aplicaciones de este tipo de análisis se hicieron en la agricultura, donde k poblaciones representaban distintos tratamientos, tales como fertilizantes, aplicados a parcelas agrícolas.) Obsérvese que con esta notación la razón F de la página 370 puede escribirse así

Razón F para tratamientos

$$F = \frac{SS(Tr)/(k-1)}{SSE/k(n-1)}$$

Las sumas requeridas para calcular esta última fórmula suelen obtenerse por medio de las siguientes expresiones que ahorran bastante trabajo, las cuales se le pedirá al lector verificar en el ejercicio 12.14 de la página 380. En primer término calculamos SST y $SS(Tr)$ por medio de las fórmulas

Suma de cuadrados en muestras de igual tamaño

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{k} T_i^2}{n} - C$$

donde C, denominado término de corrección, está dado por

$$C = \frac{T^2}{kn}$$

En estas expresiones, T_i es el número total de n observaciones en la i-ésima muestra mientras que T es el gran total de las kn observaciones. La suma de cuadrados del error, SSE, se obtiene entonces por sustracción; de acuerdo con el teorema 12.1 podemos escribir

Suma de cuadrados del error

$$SSE = SST - SS(Tr)$$

Los resultados obtenidos al analizar la suma total de cuadrados en sus componentes son resumidos de manera conveniente por medio de la siguiente tabla de análisis de variancia:

Fuente de variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Media cuadrada*	*F*
Tratamientos	$k-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = SS(Tr)/(k-1)$	$\frac{MS(Tr)}{MSE}$
Error	$k(n-1)$	SSE	$MSE = SSE/k(n-1)$	
Total	$nk-1$	SST		

Nótese que cada cuadrado medio (MS) (media cuadrada) se obtuvo dividiendo la suma de cuadrados correspondiente entre su número de grados de libertad.

EJEMPLO A fin de ilustrar el análisis de variancia (nombre que apropiadamente se da a esta técnica) para un criterio de clasificación, supongamos que según el esquema de la página 366 cada laboratorio mide los pesos de los revestimientos de estaño de 12 discos y que los resultados son los siguientes:

Laboratorio A	*Laboratorio B*	*Laboratorio C*	*Laboratorio D*
0.25	0.18	0.19	0.23
0.27	0.28	0.25	0.30
0.22	0.21	0.27	0.28
0.30	0.23	0.24	0.28
0.27	0.25	0.18	0.24
0.28	0.20	0.26	0.34
0.32	0.27	0.28	0.20
0.24	0.19	0.24	0.18
0.31	0.24	0.25	0.24
0.26	0.22	0.20	0.28
0.21	0.29	0.21	0.22
0.28	0.16	0.19	0.21

Construye una tabla de análisis de varianza.

Solución Los totales para las cuatro muestras son, respectivamente, 3.21, 2.72, 2.76 y 3.00, el gran total es 11.69, y los cálculos con que se obtienen las sumas necesarias son los siguientes:

$$C = \frac{(11.69)^2}{48} = 2.8470$$

$$SST = (0.25)^2 + (0.27)^2 + \ldots + (0.21)^2 - 2.8470 = 0.0809$$

$$SS(Tr) = \frac{(3.21)^2 + (2.72)^2 + (2.76)^2 + (3.00)^2}{12} - 2.8470 = 0.0130$$

$$SSE = 0.0809 - 0.0130 = 0.0679$$

En esta forma, obtenemos la siguiente tabla de análisis de varianza:

Fuente de variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Laboratorios	3	0.0130	0.0043	2.87
Error	44	0.0679	0.0015	
Total	47	0.0809		

Puesto que el valor obtenido para F excede 2.82, que corresponde al valor de $F_{.05}$ con 3 y 44 grados de libertad, la hipótesis nula puede rechazarse con nivel de significancia de 0.05; concluimos que los laboratorios *no* están logrando resultados consistentes.

Para estimar los parámetros μ, α_1, α_2, α_3 y α_4 o (μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4), podemos emplear el método de mínimos cuadrados, minimizando

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

con respecto a μ y a las α_i, sujetas a la restricción de que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$. Esto puede realizarse eliminando una de las α o, mejor aún, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, que se expone en la mayoría de los libros de cálculo avanzado. En cualquier caso obtenemos las estimaciones "intuitivamente obvias" $\hat{\mu} = \bar{y}$ y $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, y las estimaciones correspondientes para las μ_i dadas por $\hat{\mu}_i = \bar{y}_i$.

EJEMPLO Estima los parámentros del modelo con un criterio de clasificación para los pesos de los revestimientos de estaño del ejemplo anterior.

Solución Para los datos de los cuatro laboratorios obtenemos

$$\hat{\mu} = \frac{11.69}{48} = 0.244, \qquad \hat{\alpha}_1 = \frac{3.21}{12} - 0.244 = 0.024$$

En consecuencia,

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{2.72}{12} - 0.244 = -0.017, \qquad \hat{\alpha}_3 = \frac{2.76}{12} - 0.244 = -0.014,$$

y, por tanto,

$$\hat{\alpha}_4 = \frac{3.00}{12} - 0.244 = 0.006.$$

El análisis de varianza descrito en esta sección se aplica a criterios de clasificación en que cada muestra tiene el mismo número de observaciones. En caso contrario y si los tamaños muestrales son $n_1, n_2, \ldots$ y n_k sólo tenemos que sustituir $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ por nk en todo lo anterior y escribir las expresiones para calcular SST y $SS(Tr)$ en la forma

Suma de cuadrados para muestras de tamaños distintos

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C$$

En lo demás, el procedimiento es el mismo que antes. (Véase también el ejercicio 12.15 de la página 380.)

EJEMPLO Como parte de la investigación del derrumbe del techo de un edificio, un laboratorio prueba todos los pernos disponibles que conectaban la estructura de acero en tres distintas posiciones del techo. Las fuerzas requeridas para "cortar" cada uno de los pernos (valores codificados) son las siguientes:

Posición 1: 90, 82, 79, 98, 83, 91
Posición 2: 105, 89, 93, 104, 89, 95, 86
Posición 3: 83, 89, 80, 94

Efectúa un análisis de variancia para probar con un nivel de significancia de 0.05 si las diferencias entre las medias muestrales en las tres posiciones son significastivas.

Solución Ut... ando las mismas etapas para pruebas de hipótesis que en capítulos previos, obtenemos

1. *Hipótesis nula:* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
   Hipótesis alterna: Las μ no son iguales.
2. *Nivel · significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criter : * Se rechaza la hipótesis nula si $F > 3.74$, el valor de $F_{0.05}$ para $k - 1 = 3 - 1 = 2$ y $N - K = 17 - 3$ grados de libertad, donde F es determinado por un análisis de variancia; de lo contrario, lo aceptamos.
4. *Cálculos:* Sustituyendo $n_1 = 6, n_2 = 7, n_3 = 4, N = 17, T_1 = 523$, $T_2 = 661$, $T_3 = 346$, $T_. = 1530$, y $\sum \sum y_{ij}^2 = 138{,}638$ en las expresiones para calcular las sumas de cuadrados, obtenemos

$$SST = 138{,}638 - \frac{1530^2}{17} = 938$$

$$SS(Tr) = \frac{523^2}{6} + \frac{661^2}{7} + \frac{346^2}{4} - \frac{1530^2}{17}$$

$$= 234$$

y también

$$SSE = 938 - 234 = 704$$

El rest del trabajo se advierte en la siguiente tabla de análisis de var ıncia:

Fuente de variancia	*Grados de libertad*	*Media de cuadrados*	*Media de cuadrados*	*F*
Posiciones	2	234	117	2.33
Error	14	704	50.3	
Total	16	938		

5. *Decisic :* Dado que $F = 2.33$ no sobrepasa 3.74, o sea el valor de $F_{0.05}$ para 2 y 14 grados de libertad, la hipótesis nula no puede rechazarse; en otras palabras, no podemos concluir que existe una diferencia en las resistencias medias a los esfuerzos deslizantes de los pernos en las tres posiciones sobre el techo.

EJERCICIOS

12.1 Se efectúa un experimento para comparar la acción limpiadora de dos detergentes: el detergente A y el detergente B. Veinte muestras de ropa se manchan con mugre y grasa, cada una se lava con uno de los detergentes en una lavadora automática y se mide después la "blancura". Critica los siguientes aspectos del experimento:

(a) Todo el experimento se realiza con agua suave.
(b) Quince muestras se lavan con el detergente A y cinco con el detergente B.
(c) Para acelerar la prueba, se emplean en el experimento agua muy caliente y tiempos de lavado de 30 segundos.
(d) Las mediciones de "blancura" de todas las muestras lavadas con el detergente A se hacen primero.

12.2 Un bebedor desea averiguar la causa de sus frecuentes malestares después de las borracheras, y realiza el siguiente experimento. La primera noche sólo ingiere whiskey y agua; la segunda toma vodka y agua; la tercera ginebra y agua, y en la cuarta, ron y agua. Cada una de las mañanas siguientes sentía el malestar, y concluyó que el factor común, el agua, era la causa de sus malestares.

(a) Esta conclusión obviamente carece de fundamentos, ¿pero puedes citar qué principios de un diseño experimental firme se han violado?
(b) Da un ejemplo menos obvio de un experimento que tenga el mismo inconveniente.
(c) Supón que nuestro amigo modificó su experimento de tal forma que ingirió cada una de las cuatro bebidas alcohólicas con agua y sin ella; así que el experimento duró ocho noches. ¿Podrían servir los resultados de este experimento modificado para apoyar o refutar la hipótesis de que el agua fue la causa de los malestares? Explica tu respuesta.

12.3 Para comparar la eficiencia de tres métodos de enseñanza de programación de cierta computadora (el método A consiste en instrucción directa con la computadora, el método B requiere la intervención de un instructor y de algunas prácticas directas con la computadora y el método C que tan sólo exige atención personal de un instructor), se extraen de grandes grupos de personas instruidas por los tres métodos muestras de tamaño cuatro. Las calificaciones que obtuvieron en una prueba de aprovechamiento adecuada son las siguientes:

Método A	*Método B*	*Método C*
73	91	72
77	81	77
67	87	76
71	85	79

(a) Sin utilizar las fórmulas del inicio de la página 375, calcula

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2, \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2, \quad y \quad n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$$

y comprueba la identidad del teorema 12.1.

(b) Verifica los resultados obtenidos para las tres sumas de cuadrados empleando las fórmulas de la página 375.

12.4 Mediante las sumas de cuadrados obtenidas en el ejercicio 12.3, prueba con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ si las diferencias obtenidas para las tres muestras son significativas.

12.5 Las cifras siguientes son el número de errores realizados en cinco días consecutivos de trabajo por cuatro técnicos de un laboratorio fotográfico:

Técnico I	*Técnico II*	*Técnico III*	*Técnico IV*
6	14	10	9
14	9	12	12
10	12	7	8
8	10	15	10
11	14	11	11

Prueba con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$ si las diferencias entre las cuatro muestras pueden atribuirse al azar.

12.6 Los datos siguientes se refieren a las pérdidas de peso de ciertas piezas mecánicas (en miligramos) debidas a la fricción, cuando tres lubricantes diferentes se utilizaron en condiciones controladas.

Lubricante A: 12.2, 11.8, 13.1, 11.0, 3.9, 4.1, 10.3, 8.4
Lubricante B: 10.9, 5.7, 13.5, 9.4, 11.4, 15.7, 10.8, 14.0
Lubricante C: 12.7, 19.9, 13.6, 11.7, 18.3, 14.3, 22.8, 20.4

(a) Prueba con un nivel de significancia de 0.01 si las diferencias entre las medias muestrales puede atribuirse al azar.

(b) Estima los parámetros del modelo usado en el análisis de este experimento.

12.7 Para encontrar el efecto de la carga de polvo en la salida de un sistema con un precipitante, se efectuaron las siguientes mediciones:

Flujo total (pie^3/*hora*)	*Carga del polvo de salida* (*gramos por yarda*^{3} *en el tubo del gas*)				
200	1.5	1.7	1.6	1.9	1.9
300	1.5	1.8	2.2	1.9	2.2
400	1.4	1.6	1.7	1.5	1.8
500	1.1	1.5	1.4	1.4	2.0

Emplea un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ para probar si el flujo a través del precipitante tiene algún efecto sobre la carga del polvo de salida.

12.8 Con objeto de estudiar el rendimiento de un motor fuera de borda, recientemente diseñado, se cronometró sobre un trayecto determinado en diversas condiciones acuáticas y del viento:

Condiciones de calma 20, 17, 14, 24
Condiciones moderadas 21, 23, 16, 25, 18, 23
Condiciones agitadas 26, 24, 23, 29, 21

Utiliza un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

12.9 Para determinar la mejor disposición de los instrumentos sobre un tablero de control de un aeroplano, se prueban tres distintos arreglos simulando una situación de emergencia y observando el tiempo de reacción requerido para corregir la avería. Los tiempos de reacción (en décimas de segundo) de 28 pilotos (aleatoriamente asignados a los diversos arreglos) son los siguientes:

Disposición 1: 14, 13, 9, 15, 11, 13, 14, 11
Disposición 2: 10, 12, 9, 7, 11, 8, 12, 9, 10, 13, 9, 10
Disposición 3: 11, 5, 9, 10, 6, 8, 8, 7

Con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$ prueba si podemos rechazar la hipótesis nula de que las diferencias entre los disposiciones no tuvieron efecto alguno.

12.10 Varias aleaciones de aluminio se han considerado para utilizarse en aplicaciones de circuitos destinados a servicio pesado. Entre las propiedades deseadas está una baja resistencia, y varios modelos de cada alambre se prueban aplicando un voltaje fijo a una longitud determinada de alambre y se mide la corriente que fluye a través del alambre. Dados los resultados siguientes, ¿puedes concluir que las aleaciones difieren en resistencia? (Emplea un nivel de significancia de 0.01.)

Aleación	*Corriente (amperes)*				
1	1.085	1.016	1.009	1.034	
2	1.051	0.993	1.022		
3	0.985	1.001	0.990	0.988	1.011
4	1.101	1.015			

12.11 Se realizan dos pruebas de la resistencia a la compresión en seis muestras de concreto. La fuerza que fractura cada muestra de forma cilíndrica, medida en kilogramos, está dada en la siguiente tabla:

Muestra	A	B	C	D	E	F
Prueba 1	110	125	98	95	104	115
Prueba 2	105	130	107	92	96	121

Prueba con un nivel de significancia de 0.05 si estas muestras difieren en su resistencia a la compresión.

12.12 Refiriéndonos a la exposición de la página 365, supón que las desviaciones estándar de los pesos de los revestimientos de estaño determinados por cada uno de los laboratorios tienen el valor común $\sigma = 0.012$, supón también que se desea detectar con una confianza del 95% alguna diferencia en las medias entre dos de los laboratorios en más de 0.01 libras en el fondo de la lata. Demuestra que estas suposiciones llevan a la decisión de enviar una muestra de 12 discos a cada laboratorio.

12.13 Demuestra que, si $\mu_i = \mu + \alpha_i$, y μ es la media de las μ_i, se sigue que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$.

12.14 Verifica las fórmulas para calcular SST y $SS(Tr)$ dadas en la página 372.

12.15 Establece y prueba un resultado análogo al teorema 12.1 para el caso de que el tamaño de la i-ésima muestra sea n_i, esto es, donde los tamaños muestrales no necesariamente son iguales.

12.16 El contenido de aflatoxina de algunas muestras de crema de cacahuate se prueba y se consiguen los siguientes resultados:

Contenido de aflatoxina (ppb)

Marca A	Marca B
0.5	4.7
0.0	6.2
3.2	0.0
1.4	10.5
0.0	2.1
1.0	0.8
8.6	
2.9	

(a) Emplea el análisis de variancia para probar si las dos marcas difieren en contenido de aflatoxina.
(b) Prueba la misma hipótesis usando una prueba t bimuestral.
(c) Puede comprobarse que el estadístico t con ν grados de libertad y el estadístico F con 1 y ν grados de libertad están relacionados por la fórmula

$$F(1, \nu) = t^2(\nu)$$

donde ν = grados de libertad. Con este resultado prueba que los métodos de análisis de variancia y la prueba t bimuestral son equivalentes en este caso.

12.3 DISEÑOS EN BLOQUES ALEATORIOS

Como observamos en la sección 12.1, la estimación de la variación aleatoria (el error experimental) a menudo puede reducirse, esto es, liberarse de la variabilidad debida a causas extrañas, dividiendo las observaciones de cada clasificación en bloques. Esto se logra cuando fuentes conocidas de variabilidad (es decir, variables extrañas) se mantienen fijas dentro de cada bloque, pero varían de bloque en bloque.

En la presente sección supondremos que el experimentador tiene a su disposición mediciones relativas a a tratamientos distribuidos sobre b bloques. En primer término, consideraremos el caso en que hay exactamente una observación de cada tratamiento en cada bloque; en relación con la ilustración de la página 368, este caso aparecería si cada laboratorio probara un disco de cada tira. Conveniendo en que y_{ij} denote la observación relativa el i-ésimo tratamiento y al j-ésimo bloque, $\bar{y}_{i.}$ la media de las b observaciones para el i-ésimo tratamiento, $\bar{y}_{.j}$ la media de las a observaciones en el j-ésimo bloque y $\bar{y}_{..}$ la gran media de las b observaciones, empleamos el siguiente esquema en esta clase de clasificación con dos criterios:

Bloques

	B_1 B_2 ... B_j ... B_b	Medias
Tratamiento 1:	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1j}, \ldots, y_{1b}$	$\bar{y}_{1.}$
Tratamiento 2:	$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2j}, \ldots, y_{2b}$	$\bar{y}_{2.}$
.	. . . . . .	.
Tratamiento i:	$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{ib}$	$\bar{y}_{i.}$
.	. . . . . .	.
Tratamiento a:	$y_{a1}, y_{a2}, \ldots, y_{aj}, \ldots, y_{ab}$	$\bar{y}_{a.}$
Medias	$\bar{y}_{.1}$ $\bar{y}_{.2}$ ... $\bar{y}_{.j}$ ... $\bar{y}_{.b}$	$\bar{y}_{..}$

Este tipo de esquema se denomina también **diseño en bloques aleatorios**, siempre que los tratamientos sean asignados el azar *dentro* de cada bloque. Nótese que, cuando un punto se usa en lugar de un subíndice, esto significa que la media se obtiene sumando sobre él.

El modelo fundamental que supondremos para el análisis de esta clase de experimento con una observación por "celda" (esto es, existe una observación correspondiente a cada tratamiento dentro de cada bloque) está dado por

Ecuación modelo para diseño de bloques aleatorios

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, a;\ j = 1, 2, \ldots, b$$

Aquí μ es la gran media, α_i es el efecto del i-ésimo tratamiento, β_j es el efecto del j-ésimo bloque y los ϵ_{ij} son valores de variables aleatorias *independientes normalmente distribuidas* que tienen *medias cero* y la *variancia común* σ^2. En forma semejante a lo que hicimos en el modelo para un criterio de clasificación, restringimos los parámetros imponiendo las condiciones de que $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ y que $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$ (véase el ejercicio 12.28 de la página 394).

En el análisis de clasificación con dos criterios cada tratamiento es representado una vez dentro de cada bloque, el objetivo principal consiste en probar la significancia de las diferencias entre las $\bar{y}_{i.}$, o sea probar la hipótesis nula

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$$

Más aún, quizá convenga probar si la división en bloques ha sido eficaz, esto es, si la hipótesis es nula

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$$

puede rechazarse. En cualquier caso, la hipótesis alterna establece que al menos uno de los efectos no es cero.

Como en el análisis de variancia con un criterio de clasificación, fundamentaremos esta prueba de significancia mediante comparaciones de σ^2 (una basada en la variación entre tratamientos, otra basada en la variación entre bloques y la última que mide el error experimental). Nótese que sólo el último es una estimación de σ^2 cuando cualquiera (o ambas) de las hipótesis nulas no son válidas. Las sumas de cuadrados requeridas son dadas por las tres componentes en que la suma de cuadrados total se divide por medio del siguiente teorema:

Identidad para análisis de una clasificación con dos criterios

Teorema 12.2

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 + b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

El lado izquierdo de esta identidad representa la suma de cuadrados total, SST, y los términos del lado derecho son, respectivamente, la suma de cuadrados del error, SSE, la suma de cuadrados entre tratamientos, $SS(Tr)$ y la suma de cuadrados en bloque $SS(Bl)$. Para probar este teorema, empleamos la identidad

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$

y seguimos en esencia el mismo argumento de la demostración del teorema 12.1.

En la práctica, calculamos las sumas necesarias por medio de fórmulas que ahorran trabajo y que son análogas a las de la página 372, en lugar de usar las expresiones que definen estas sumas de cuadrados en el teorema 12.2. Inicialmente calcularemos SST, $SS(Tr)$ y $SS(Bl)$ por medio de las fórmulas

Sumas de cuadrados para el análisis de variancia de una clasificación con dos criterios

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{a} T_{i.}^2}{b} - C$$

$$SS(Bl) = \frac{\sum_{j=1}^{b} T_{.j}^2}{a} - C$$

donde C, que es el término de corrección, está dado por

$$C = \frac{T^2}{ab}$$

En estas fórmulas $T_{i.}$ es la suma de las b observaciones para el i-ésimo tratamiento, $T_{.j}$ es la suma de las a observaciones en el j-ésimo bloque y $T_{..}$ es el gran total de todas las observaciones. Notemos que los divisores de $SS(Tr)$ y de $SS(Bl)$ son el número de observaciones en los totales respectivos, $T_{i.}$ y $T_{.j}$. La suma de cuadrados del error se obtiene entonces por sustracción; de acuerdo con el teorema 12.2 podemos escribir

Suma de cuadrados del error

$$SSE = SST - SS(Tr) - SS(Bl)$$

En el ejercicio 12.29 de la página 294, se le pedirá al lector verificar que todas estas fórmulas sean, en realidad, equivalentes a los términos correspondientes de la identidad del teorema 12.2.

Empleando estas sumas de cuadrados, podemos rechazar la hipótesis nula de que las α_i son todas iguales a cero, con un nivel de significancia α si la

Razón F para tratamientos

$$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE} = \frac{SS(Tr)/(a-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede F_α con $a-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. La hipótesis nula de que todas las β_j son iguales a cero puede rechazarse con un nivel de significancia α si

Razón F para bloques

$$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE} = \frac{SS(Bl)/(b-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede a F_α con $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. Nótese que las medias de los cuadrados $MS(Tr)$, $MS(Bl)$ y MSE se definen otra vez como las correspondientes sumas de cuadrados divididas entre sus grados de libertad.

Los resultados de este análisis se resumen en la siguiente tabla de análisis de variancia:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Tratamientos	$a-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{(a-1)}$	$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE}$
Bloques	$b-1$	$SS(Bl)$	$MS(Bl) = \frac{SS(Bl)}{(b-1)}$	$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE}$
Error	$(a-1)(b-1)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(a-1)(b-1)}$	
Total	$ab-1$	SST		

EJEMPLO Se diseñó un experimento para estudiar el rendimiento de cuatro detergentes diferentes. Las siguientes lecturas de "blancura" se obtuvieron con un equipo especialmente deseñado para 12 cargas de lavado distribuidas en tres modelos de lavadoras:

	Lavadora 1	Lavadora 2	Lavadora 3	Totales
Detergente A	45	43	51	139
Detergente B	47	46	52	145
Detergente C	48	50	55	153
Detergente D	42	37	49	128
Totales	182	176	207	565

Considerando los detergentes como tratamientos y las lavadoras como bloques, obtenemos la tabla de análisis de variancia adecuada y probamos con un nivel de significancia de 0.01 si existen diferencias entre los detergentes o entre las lavadoras.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
   Hipótesis alterna: No todas las α son iguales a cero; tampoco todas las β.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* Para tratamientos, rechazamos la hipótesis nula si $F > 9.78$, el valor de $F_{0.01}$ con $a-1 = 4-1 = 3$ y $(a-1)(b-1) = (4-1)(3-1) = 6$ grados de libertad; para bloques, rechazamos la hipótesis nula si $F > 10.9$, el valor de $F_{0.01}$ para $b-1 = 3-1 = 2$ y $(a-1)(b-1) = (4-1)(3-1) = 6$ grados de libertad.
4. *Cálculos:* Sustituyendo $a = 4$, $b = 3$, $T_{1.} = 139$, $T_{2.} = 145$, $T_{3.} = 153$, $T_{4.} = 128$, $T_{.1} = 182$, $T_{.2} = 176$, $T_{.3} = 207$, $T_{..} = 565$ y $\sum\sum y_{ij}^2 = 26{,}867$ en las fórmulas para las sumas de cuadrados, obtenemos

$$C = \frac{(565)^2}{12} = 26{,}602$$

$$SST = 45^2 + 43^2 + \ldots + 49^2 = 26{,}867 - 26{,}602 = 265$$

$$SS(Tr) = \frac{139^2 + 145^2 + 153^2 + 128^2}{3} - 26{,}602 = 111$$

$$SS(Bl) = \frac{182^2 + 176^2 + 207^2}{4} - 26{,}602 = 135$$

$$SSE = 265 - 111 - 135 = 19$$

Después dividimos las sumas de cuadrados entre sus respectivos grados de libertad para obtener las sumas de cuadrados adecuadas, los resultados finales se indican en la siguiente tabla de análisis de variancia:

Fuente de variancia	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Detergentes	3	111	37.0	11.6
Lavadoras	2	135	67.5	21.1
Error	6	19	3.2	
Total	11	265		

5. *Decisiones*: Dado que $F_{Tr} = 11.6$ sobrepasa 9.78, el valor de $F_{0.01}$ con 3 y 6 grados de libertad, concluimos que existen diferencias en la eficacia de los cuatro detergentes. También, puesto que $F_{Bl} = 21.1$ excede a 10.9, el valor de $F_{0.01}$ con 2 y 6 grados de libertad, concluimos que las diferencias entre los resultados obtenidos por las tres lavadoras son significativos, es decir, que la división en bloques fue eficaz. Con el fin de hacer resaltar aún mas el efecto de estos bloques, se le pedirá al lector verificar en el ejercicio 12.24 de la página 393 que la prueba de las diferencias entre los detergentes *no* produzca resultados significativos si consideramos los datos con un criterio de clasificación.

El efecto del *i*-ésimo detergente puede estimarse por medio de la fórmula $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$, que se obtuvo por el método de mínimos cuadrados. Las estimaciones resultantes son:

$$\hat{\alpha}_1 = 46.3 - 47.1 = -0.8, \qquad \hat{\alpha}_2 = 48.3 - 47.1 = 1.2;$$
$$\hat{\alpha}_3 = 51.0 - 47.1 = 3.9, \qquad \hat{\alpha}_4 = 42.7 - 47.1 = -4.4$$

Cálculos similares nos llevan a que $\hat{\beta}_1 = -1.6$, $\hat{\beta}_2 = -3.1$, ya que $\hat{\beta}_3 = 4.7$ para los efectos estimados de las lavadoras.

Debería observarse que la clasificación con dos criterios de manera automática nos permite repetir las condiciones experimentales; por ejemplo, en el experimento anterior cada detergente fue probado tres veces. Un número mayor de repeticiones pueden manejarse en varias formas, y debemos tener presente que el modelo debe describir de manera aproximada la situación considerada. Una forma de considerar más repeticiones en la clasificación con dos criterios es incluir un número mayor de bloques (por ejemplo, probar cada detergente usando más lavadoras, aleatorizando el orden de prueba de cada máquina). Obsérvese que el modelo en esencia es el mismo que antes; la única diferencia es que se ha aumentado b, y un correspondiente incremento en los grados de libertad de los bloques y del error. Este último detalle es importante, debido a que un incremento en los grados de libertad del error hace que la prueba de la hipótesis nula $\alpha_i = 0$ para cada *i sea mas sensible* a pequeñas diferencias entre las medias de los tratamientos. En realidad, el objetivo real de esta clase de repetición es aumentar los grados de libertad del error, y por ende incrementar la sensibilidad de las pruebas F (véase el ejercicio 12.27 de la página 394).

Un segundo método consiste en repetir el experimento por completo, empleando un nuevo patrón de aleatorización para obtener $a \cdot b$ nuevas observaciones. Esto es posible sólo si los bloques son *identificables*, esto es, si las condiciones que definen a cada bloque pueden repetirse. Por ejemplo, en el experimento descrito en la sección 12.1, en que se pesaba el recubrimiento de estaño, los bloques son tiras transversales a la dirección en que una lámina de hojalata se desplaza hacia los rodillos; y, dada una nueva lámina es posible reconocer que se trata de la tira 1, de la tira 2, etc. En el ejemplo de esta sección, este tipo de repetición (denominado por lo general duplicación) requeriría que la operación de las lavadoras sea exactamente duplicada. Este tipo de repetición será usado en relación con los diseños de cuadros latinos de la sección 12.5; véase también los ejercicios 12.25 y 12.26 de la página 393.

Un tercer método de repetición es incluir n observaciones para cada tratamiento en cada bloque. Cuando se diseña un experimento en esta forma, las n observaciones en cada "celda" se condideran como duplicados y se espera que su variabilidad sea algo menor que el error experimental. Para ilustrar este punto, supongamos que los pesos de los recubrimientos de estaño de los tres discos de posiciones adyacentes en una tira se miden sucesivamente en uno de los laboratorios, empleando las mismas soluciones químicas. La variabilidad de estas mediciones probablemente sea considerada menor que la de tres discos de la misma tira medidos en esos laboratorios en distintas ocasiones, usando diferentes soluciones químicas y quizás distintos laboratoristas. El análisis de variancia adecuado para este tipo de repetición se reduce en esencia a un análisis de variancia con dos criterios aplicado a las *medias* de los n duplicados en las $a \cdot b$ celdas; así, *no habría* *ganancia en los grados de libertad del error*, y, en consecuencia, *ninguna ganancia en la sensibilidad de las pruebas F*. Puede esperarse, sin embargo, que halla alguna reducción en el error de la media cuadrada, dado que ahora mide la variancia residual de las *medias* de varias observaciones.

12.4 COMPARACIONES MÚLTIPLES

Las pruebas F utilizadas hasta ahora en este capítulo han indicado si las diferencias entre varias medias son significativas, pero no nos informaron si una media dada (o grupo de medias) difieren en forma significativa de otra media considerada (o grupo de medias). En la práctica, esto último es la clase de información que un investigador en realidad desea; por ejemplo, habiendo determinado en la página 374 que las medias de los pesos de los recubrimientos de estaño obtenidos por los cuatro laboratoristas difieren de manera significativa, puede ser importante determinar qué laboratorio (o laboratoristas) difieren de los otros.

Si un experimentador tiene ante sí k medias, parece razonable en primer término probar diferencias significativas entre todos los pares posibles, esto es, efectuar

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

pruebas t bimuestrales como se describen en la página 373. Aparte de que esto requeriría un gran número de pruebas aun cuando k sea relativamente pequeño, estas pruebas no serían independientes y sería casi imposible asignar un nivel de significancia global a este procedimiento.

Se han propuesto varias **pruebas de comparaciones múltiples** para salvar estas dificultades, entre ellas la **prueba del rango múltiple de Duncan**, que se estudiará en esta sección. (Referencias a otras pruebas de comparaciones múltiples aparecen en el libro de W. T. Federer citado en la bibliografía.) Las suposiciones básicas de las pruebas del rango múltiple de Duncan son, en esencia, las del análisis de variancia en una dimensión para tamaños muestrales iguales. La prueba compara el rango de cualquier conjunto de p medias con un apropiado **rango de mínima significancia**, R_p, dado por

Rango de mínima significancia

$$\boxed{R_p = s_{\bar{x}} \cdot r_p}$$

Aquí $s_{\bar{x}}$ es una estimación de $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$, y puede calcularse mediante la fórmula

Error estándar de la media

$$\boxed{s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}}$$

donde MSE es la media de los cuadrados del error en el análisis de variancia. El valor de r_p depende del nivel deseado de significancia y del número de grados de libertad correspondientes a la MSE, que se obtienen de las tablas 12(a) y (b) para $\alpha = 0.05$ y 0.01, para $p = 2, 3, \ldots, 10$, y para varios grados de libertad entre 1 y 120.

EJEMPLO Con respecto a los datos de los pesos del recubrimiento de estaño de la página 373, aplica una prueba de rango múltiple de Duncan para probar cuáles medias de los laboratorios difieren de las otras empleando un nivel de significancia de 0.05.

Solución En primer término ordenamos en un orden creciente de magnitud las cuatro medias muestrales como sigue:

Laboratorio	*B*	*C*	*D*	*A*
Media	0.227	0.230	0.250	0.268

A continuación calculamos $s_{\bar{x}}$, usando la media del error cuadrado 0.0015 que se obtuvo en el análisis de variancia de la página 373, y tenemos así

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0.0015}{12}} = 0.011$$

Entonces, obtenemos (por interpolación lineal) de la tabla 12(a) los siguientes valores de r_p para $\alpha = 0.05$ y 44 grados de libertad:

p	2	3	4
r_p	2.85	3.00	3.09

Multiplicando cada valor de r_p por $s_{\bar{x}} = 0.011$, obtenemos finalmente

p	2	3	4
R_p	0.031	0.033	0.034

El rango de *las cuatro medias* es $0.268 - 0.227 = 0.041$, que excede a $R_4 = 0.034$, que es el rango significativo mínimo. Este resultado era de esperarse, dado que la prueba F de la página 374 indicó que las diferencias entre las cuatro medias eran significativas con $\alpha = 0.05$. Para probar si hay diferencias significativas entre *tres medias adyacentes*, obtenemos rangos de 0.038 y 0.023, respectivamente, para 0.230, 0.250, 0.268 y 0.227, 0.230, 0.250. Puesto que el primero de estos valores sobrepasa $R_3 = 0.033$, las diferencias observadas en el primer conjunto son significativas y dado que el segundo valor no sobrepasa 0.033, las diferencias correspondientes no son significativas. Por último en el caso de *parejas adyacentes* de medias encontramos que ningún par adyacente tiene un rango mayor que el rango significativo mínimo $R_2 = 0.031$. Todos estos resultados pueden resumirse escribiendo

$$\underline{0.227\quad 0.230\quad \underline{0.250}}\quad \underline{0.268}$$

donde se ha *dibujado una línea bajo cualquier conjunto de medias adyacentes para las cuales el rango es menor que un valor correspondiente de R_p, esto es, bajo cualquier conjunto de medias adyacentes para las cuales las diferencias no son significativas.* Concluimos así en nuestro ejemplo que el laboratorio A obtiene pesos medios del recubrimiento de estaño más altos que los laboratorios B y C.

Si aplicamos el mismo método al ejemplo de la sección 12.3, donde comparábamos los cuatro detergentes, obtenemos (véase también el ejercicio 12.30 de la página 394).

Detergente			
D	*A*	*B*	*C*
42.7	46.3	48.3	51.0

En otras palabras, entre las ternas de medias adyacentes ambos conjuntos de diferencias son significativos. Hasta ahora, por lo que a parejas de medias respecta, encontramos que sólo la diferencia entre 42.7 y 46.3 es significativa. Interpretando estos resultados, concluimos que el detergente D es significativamente inferior a cualquiera de los otros y que el detergente A es evidentemente inferior al detergente C.

EJERCICIOS

12.17 Un técnico laboratorista mide la resistencia a la ruptura de cinco clases de fibras textiles por medio de cuatro distintos instrumentos, y obtiene los siguientes resultados (en onzas):

Instrumento de medición

	I_1	I_2	I_3	I_4
Fibra 1	20.6	20.7	20.0	21.4
Fibra 2	24.7	26.5	27.1	24.3
Fibra 3	25.2	23.4	21.6	23.9
Fibra 4	24.5	21.5	23.6	25.2
Fibra 5	19.3	21.5	22.2	20.6

Considerando las fibras como tratamientos y los instrumentos como bloques, realiza un análisis de varianza con un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$.

12.18 Considerando a los días (renglones) como bloques, resuelve de nuevo el ejercicio 12.5 de la página 378 por el método de la sección 12.3.

12.19 Cuatro formas diferentes, y a pesar de ello supuestamente equivalentes, de un material estandarizado de una prueba vocacional fue aplicado a cinco estudiantes, los cuales obtuvieron las siguientes calificaciones:

	Estud. 1	*Estud. 2*	*Estud. 3*	*Estud. 4*	*Estud. 5*
Forma A	75	73	59	69	84
Forma B	83	72	56	70	92
Forma C	86	61	53	72	88
Forma D	73	67	62	79	95

Efectúa un análisis de varianza en dos dimensiones para probar con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$ si es razonable manejar las cuatro formas como equivalentes.

12.20 Se desarrolló un experimento para juzgar el efecto que cuatro diferentes combustibles y dos tipos de lanzacohetes tienen sobre el alcance de cierto proyectil. Prueba, con base en los siguientes datos (en millas naúticas), si existen diferencias significativas (a) entre las medias obtenidas para los combustibles y (b) entre las medias obtenidas para los lanzacohetes:

	Combustible I	Combustible II	Combustible III	Combustible IV
Lanzacohetes X	62.5	49.3	33.8	43.6
Lanzacohetes Y	40.4	39.7	47.4	59.8

Emplea un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

12.21 Se han tomado muestras de aguas subterráneas de cinco diferentes zonas de depósito de aguas tóxicas por cada una de tres agencias siguientes: la EPA, la compañía propietaria de los lugares de depósito y un asesor independiente dedicados a asuntos de ingeniería. Cada muestra fue analizada buscando detectar la presencia de cierto contaminante por todos los métodos de laboratorio que la agencia que recolectó la muestra suele emplear. Se consiguieron los siguientes resultados:

Concentración (partes por millón)

	Lugar A	*Lugar B*	*Lugar C*	*Lugar D*	*Lugar E*
Agente 1	23.8	7.6	15.4	30.6	4.2
Agente 2	19.2	6.8	13.2	22.5	3.9
Agente 3	20.9	5.9	14.0	27.1	3.0

¿Existe alguna razón para creer que los laboratoristas no son, en sus mediciones, consistentes entre sí? ¿Difiere una zona de depósito con respecto a cualquier otra en su nivel de contaminación? Utiliza un nivel de significancia de 0.05.

12.22 Un ingeniero industrial prueba cuatro diferentes disposiciones de los anaqueles de una tienda de departamentos que cuenta con seis cuadrillas de trabajadores para ensamblar, los cuales montan una sección, y se mide el tiempo que emplean (en minutos) obteniendo los resultados siguientes:

	Arreglo 1	*Arreglo 2*	*Arreglo 3*	*Arreglo 4*
Grupo A	48.2	53.1	51.2	58.6
Grupo B	49.5	52.9	50.0	60.1
Grupo C	50.7	56.8	49.9	62.4
Grupo D	48.6	50.6	47.5	57.5
Grupo E	47.1	51.8	49.1	55.3
Grupo F	52.4	57.2	53.5	61.7

Prueba con un nivel de significancia de 0.01 si las cuatro disposiciones producen distintos tiempos de montaje y si alguno de los equipos de utilería son consistentemente más rápidos al montar estos anaqueles.

12.23 En relación con el ejercicio 12.7 de la página 378, supón que los datos en cada una de las cinco columnas fueron obtenidos de un precipitador diferente. Repite el análisis de variancia, manejando el experimento en dos dimensiones, y observa qué cambios producen en la media de los cuadrados del error.

12.24 Con el objeto de subrayar la importancia de la separación en bloques analiza de nuevo los datos de "blancura" como una clasificación con un criterio, considerando los cuatro detergentes como tratamientos diferentes.

12.25 Si en una clasificación con dos criterios el experimento completo se repite r veces, el modelo es entonces

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_k + \epsilon_{ijk}$$

para $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$ y $k = 1, 2, \ldots, r$, donde la suma de las α las β y las ρ son iguales a cero, y donde las ρ representan los efectos de las repeticiones. Las ϵ_{ijk} son otra vez valores de variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con medias cero y la variancia común σ^2.

(a) Escribe (no necesitas probarla) una identidad análoga a la de teorema 12.2, dividiendo la suma total de cuadrados en componentes atribuibles a tratamientos, bloques, repeticiones y error.

(b) Generaliza las fórmulas de cálculo de la página 383 de tal manera que se apliquen diseño de bloques aleatorios repetidos. Nótese que el divisor en cada caso es igual al número de observaciones en los totales respectivos.

(c) Si el número de grados de libertad para la suma de cuadrados de las repeticiones es igual a $r - 1$, ¿cuántos grados de libertad hay para el error de la suma de cuadrados?

12.26 Los siguientes datos se refieren al número de unidades defectuosas producidas por cuatro trabajadores operando, en sucesión, tres diferentes máquinas; en cada caso, la primer cifra representa el número de unidades defectuosas producidas en un viernes y la segunda corresponde a la cantidad producida el lunes siguiente:

Trabajador

	B_1	B_2	B_3	B_4
Máquina A_1	37, 43	38, 44	38, 40	32, 36
Máquina A_2	31, 36	40, 44	43, 41	31, 38
Máquina A_3	36, 40	33, 37	41, 39	38, 45

Con la teoría desarrollada en el ejercicio 12.25 analiza las cifras combinadas para los dos días mediante una clasificación de dos dimensiones con repetición. Emplea un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

12.27 Como señalamos en la página 387, dos formas de aumentar el tamaño de un experimento para una clasificación con dos criterios son (a) duplicar el número de bloques y (b) repetir el experimento completo. Analiza y compara la ganancia en grados de libertad para la suma de cuadrados del error por los dos métodos.

12.28 Demuestra que si $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$, la media de las μ_{ij} (sumada sobre j) es igual a $\mu + \alpha_i$, y la media de las μ_{ij} (sumada sobre i y sobre j) es igual a μ, se sigue $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$.

12.29 Verifica que las fórmulas de cálculo para *SST*, *SS(Tr)*, *SS(Bl)* y *SSE*, dadas en la página 383, son equivalentes a los términos correspondientes de la identidad del teorema 12.2.

12.30 Comprueba los resultados de la prueba de Duncan en la comparación de los cuatro detergentes, dados en la página 390.

12.31 Emplea la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$ para comparar la eficacia de los tres métodos de enseñanza de programación de computadoras del ejercicio 12.3 de la página 377.

12.32 Utiliza la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$ en la comparación de la eficacia de los tres lubricantes del ejercicio 12.6 de la página 378.

12.33 Compara la resistencia de las cinco fibras textiles del ejercicio 12.17 de la página 390 usando la prueba de Duncan con $\alpha = 0.01$.

12.34 ¿Tienen sentido emplear la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$ con el fin de comparar los resultados obtenidos con los cuatro combustibles del ejercicio 12.20 de la página 357? ¿Por qué?

12.35 Compara los niveles de contaminación de las cinco zonas del ejercicio 12.21 de la página 392 por medio de la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$.

12.36 ¿Una de las agencias del ejercicio 12.21 de la página 392 está produciendo resultados que consistentemente son más grandes (o más pequeños) que los correspondientes para las otras dos? (Emplea $\alpha = 0.05$.)

12.37 Determina cuál de las disposiciones de los anaqueles de la tienda de departamentos del ejercicio 12.22 de la página 392 (si hay alguna) difiere de las otras en el tiempo promedio que ocupa el equipo de trabajadores para montar la sección considerada. (Utiliza un nivel de significancia de 0.01.)

12.5 ALGUNOS OTROS DISEÑOS EXPERIMENTALES

El diseño en bloques aleatorios de la sección 12.4 es adecuado cuando una fuente de variabilidad extraña se elimina comparando un conjunto de medias muestrales. Una característica importante de este tipo de diseño es su

balance, que se logra asignando el mismo número de observaciones a cada tratamiento de cada bloque. (En este contexto, véase también el comentario de la página 368, donde señalamos que las diferencias debidas a los bloques no afectan las medias obtenidas para los distintos tratamientos.) La misma clase de balance puede lograrse en otros tipos de diseño más complicados, en los cuales es conveniente eliminar el efecto de varias fuentes extrañas de variabilidad. En esta sección explicaremos otros dos diseños balanceados: el diseño de cuadros latinos y el diseño de cuadros grecolatinos, que se usarán para eliminar los efectos de dos y tres fuentes extrañas de variabilidad, respectivamente.

Con el fin de presentar el diseño de cuadro latino, supongamos que es necesario comparar tres tratamientos, *A*, *B* y *C*, en presencia de otras dos fuentes de variabilidad. Por ejemplo, los tres tratamientos pueden ser tres métodos de soldadura para conductores eléctricos, y las dos fuentes extrañas de variabilidad pueden ser (1) diferentes operadores aplicando la soldadura y (2) la utilización de diversos fundentes para soldar. Si tres operadores y tres fundentes son considerados, el experimento podría disponerse según el patrón siguiente:

	Fund. 1	*Fund. 2*	*Fund. 3*
Operador 1	*A*	*B*	*C*
Operador 2	*C*	*A*	*B*
Operador 3	*B*	*C*	*A*

Aquí cada método de soldadura se aplica una sola vez por cada operador junto con cada fundente, y si existiesen efectos sistemáticos debidos a diferencias entre los operadores o entre los fundentes dichos efectos estarían presentes de igual manera en cada tratamiento, esto es, en cada método de soldadura.

Un arreglo experimental como el que se describió se denomina **cuadro latino**. Un cuadro latino $n \times n$ es un arreglo cuadrado de n letras distintas, las cuales aparecen sólo una vez en cada renglón y en cada columna. Ejemplos de cuadros latinos con $n = 4$ y $n = 5$ aparecen en la figura 12.2, y cuadros de mayor tamaño se incluyen en el libro de W. G. Cochran y G. M. Cox citado en la bibliografía. Nótese que en un experimento de cuadro latino que requiera n tratamientos es necesario incluir n^2 observaciones, n por cada tratamiento.

Como veremos en la página 397, un experimento de cuadro latino sin repetición da sólo $(n-1)(n-2)$ grados de libertad para estimar el error

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D	E
B	A	E	C	D
C	D	A	E	B
D	E	B	A	C
E	C	D	B	A

Figura 12.2 Cuadros latinos

experimental. Así, tales experimentos son efectuados en contadas ocasiones sin repetición cuando n es pequeña, esto es, sin repetir el patrón completo de cuadro latino varias veces. Si existe un total de r repeticiones, el análisis de los datos presupone el siguiente modelo, donde $y_{ij(k)l}$ es la observación en el i-ésimo renglón en la j-ésima columna de la l-ésima repetición, y el subíndice k, entre paréntesis, indica que corresponde al k-ésimo tratamiento:

Ecuación del modelo para cuadro latino

$$y_{ij(k)l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + \epsilon_{ij(k)l}$$

para $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ y $l = 1, 2, \ldots, r$, sujeta a las restricciones de que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^{r} \rho_l = 0$$

Aquí μ es la gran media, α_i es el efecto del i-ésimo renglon, β_j es el efecto de la j-ésima columna, γ_k es el efecto del k-ésimo tratamiento, ρ_l es el efecto de la l-ésima repetición y los $\epsilon_{ij(k)l}$ son valores de variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con medias cero y la variancia común σ^2. Obsérvese que por "los efectos de los renglones" y "los efectos de las columnas" entenderemos los efectos de las dos variables extrañas, y que estamos incluyendo los efectos de repetición pues como veremos la repetición puede introducir una tercera variable extraña. Nótese también que el subíndice k está entre paréntesis en $y_{ij(k)l}$, debido a que, para un diseño de cuadro latino dado, k es automáticamente determinado cuando i y j se conocen.

La hipótesis principal que desearemos probar es la hipótesis nula $\gamma_k = 0$, para toda k, es decir, la hipótesis nula de que no existe diferencia en la eficacia de los n tratamientos. Sin embargo, podemos probar también si el "bloqueo cruzado" del diseño en cuadro latino ha sido eficaz; esto es, podemos probar las dos hipótesis nulas $\alpha_i = 0$ para toda i y $\beta_j = 0$ para toda j (contra las alternativas adecuadas), con el fin de comprobar si las dos variables extrañas en realidad tienen algún efecto sobre el fenómeno que se está considerando. Más aún, podemos probar la hipótesis nula $\rho_l = 0$ para toda l contra la alternativa de que no todas las ρ_l son iguales a cero, y esta prueba de los efectos de las repeticiones puede ser importante si las partes del experimento que representan los cuadros latinos individuales fueron realizadas en distintos días, por varios técnicos, a diferentes temperaturas, etc.

Las sumas de cuadrados requeridas para efectuar estas pruebas suelen obtenerse por medio de las siguientes fórmulas abreviadas, donde $T_{i..}$ es el total de las $r \cdot n$ observaciones en todos los i-ésimos renglones, $T_{.j.}$ es el total de las $r \cdot n$ observaciones en todas las j-ésimas columnas, $T_{..l}$ es el total de las n^2 observaciones en la l-ésima repetición, $T_{(k)}$ es el total de todas $r \cdot n$ observaciones relativas al k-ésimo tratamiento y $T_{...}$ es el gran total de todas las $r \cdot n^2$ observaciones:

Suma de cuadrados — cuadro latino

$$C = \frac{(T_{...})^2}{r \cdot n^2}$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{k=1}^{n} T_{(k)}^2 - C$$

$$SSR = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{i=1}^{n} T_{i..}^2 - C \qquad \text{(para renglones)}$$

$$SSC = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{j=1}^{n} T_{.j.}^2 - C \qquad \text{(para columnas)}$$

$$SS(Rep) = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{r} T_{..l}^2 - C \qquad \text{(para repeticiones)}$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} y_{ij(k)l}^2 - C$$

$$SSE = SST - SS(Tr) - SSR - SSC - SS(Rep)$$

Obsérvese de nuevo que cada divisor es igual al número de observaciones en los correspondientes totales cuadrados. Por último, los resultados del análisis son los que aparecen en la siguiente tabla de análisis de variancia:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Tratamientos	$n-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{n-1}$	$\frac{MS(Tr)}{MSE}$
Renglón	$n-1$	SSR	$MSR = \frac{SSR}{n-1}$	$\frac{MSR}{MSE}$
Columna	$n-1$	SSC	$MSC = \frac{SSC}{n-1}$	$\frac{MSC}{MSE}$
Repeticiones	$r-1$	$SS(Rep)$	$MS(Rep) = \frac{SS(Rep)}{r-1}$	$\frac{MS(Rep)}{MSE}$
Error	$(n-1)(rn+r-3)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(n-1)(rn+r-3)}$	
Total	rn^2-1	SST		

Como antes, los grados de libertad para la suma de cuadrados total es igual a la *suma* de los grados de libertad de los componentes individuales; así, en definitiva los grados de libertad del error se encuentran por sustracción.

EJEMPLO Supón que se efectuán dos repeticiones del ya mencionado experimento de soldadura, empleando el siguiente arreglo:

	Repetición I fundente 1	2	3	*Repetición II fundente* 1	2	3
Operador 1	A	B	C	C	B	A
Operador 2	C	A	B	A	C	B
Operador 3	B	C	A	B	A	C

Los resultados, que señalan el número de libras de fuerza de tensión requerida para separar los puntos soldados, fueron como se indica a continuación:

Repetición I			*Repetición II*		
14.0	16.5	11.0	10.0	16.5	13.0
9.5	17.0	15.0	12.0	12.0	14.0
11.0	12.0	13.5	13.5	18.0	11.5

Analiza el experimento como un cuadro latino y prueba con un nivel de significancia de 0.01 si existen diferencias en los métodos, en los operadores, los fundentes o las repeticiones.

Solución

1. *Hipótesis nula*: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$; $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$; $\rho_1 = \rho_2 = 0$.
   Hipóteis alterna: Las α no son todas iguales a cero; no todas las β son iguales a cero; no todas las γ son iguales a cero, no son iguales a cero todas las ρ.
2. *Niveles de significancia*: $\alpha = 0.01$ para cada prueba.
3. *Criterios:* Para tratamientos, renglones o columnas, se rechaza la hipótesis nula si $F > 7.56$, el valor de $F_{0.01}$ para $n-1 = 3-1 = 2$ grados de libertad y $(n-1)(rn+r-3) = (3-1)(2 \times 3 + 2 - 3) = 10$ grados de libertad. Para repeticiones, se rechaza la hipótesis nula si $F > 10.00$, el valor de $F_{0.01}$ para $r-1 = 2-1 = 1$ y 10 grados de libertad.
4. *Cálculos:* Sustituyendo $n = 3$, $r = 2$, $T_{1..} = 81.0$, $T_{2..} = 79.5$, $T_{3..} = 79.5$, $T_{.1.} = 70.0$, $T_{.2.} = 92.0$, $T_{.3.} = 78.0$, $T_{..1} = 119.5$, $T_{..2} = 120.5$, $T_{(A)} = 87.5$, $T_{(B)} = 86.5$, $T_{(C)} = 66.0$, $T_{...} = 240.0$, y $\sum\sum\sum y_{ij(k)l}^2 = 104.5$ en las fórmulas de las sumas de cuadrados, obtenemos

$$C = \frac{(240)^2}{18} = 3200.0$$

$$SS(Tr) = \tfrac{1}{6}[(87.5)^2 + (86.5)^2 + (66.0)^2] - 3200.0 = 49.1$$

$$SSR = \tfrac{1}{6}[(81.0)^2 + (79.5)^2 + (79.5)^2] - 3200.0 = 0.2$$

$$SSC = \tfrac{1}{6}[(70.0)^2 + (92.0)^2 + (78.0)^2] - 3200.0 = 41.3$$

$$SS(Rep) = \tfrac{1}{9}[(119.5)^2 + (120.5)^2] - 3200.0 = 0.1$$

$$SST = (14.0)^2 + (16.5)^2 + \ldots + (11.5)^2 - 3200. = 104.5$$

$$SSE = 104.5 - 49.1 - 41.3 - 0.2 - 0.1 = 13.8$$

y los resultados son como se indica en la tabla siguiente de análisis de variancia:

Fuente de variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Tratamientos (métodos)	2	49.1	24.6	17.6
Renglones (operador)	2	0.2	0.1	0.1
Columnas (fundantes)	2	41.3	20.6	14.7
Repeticiones	1	0.1	0.1	0.1
Error	10	13.8	1.4	
Total	17	104.5		

5. *Decisión*: Por lo que respecta a tratamientos (métodos) y a columnas (fundentes), dado que $F = 17.6$ y 14.7 sobrepasan 7.56, las hipótesis nulas correspondientes deben rechazarse; para renglones (operadores), dado que $F = 0.1$ no excede 7.56, y para repeticiones, dado que $F = 0.1$ no excede a 10.00, la hipótesis nula correspondiente no puede rechazarse. En otras palabras, concluimos que las diferencias en los métodos y los fundentes, pero no en los operadores ni en las repeticiones, afectan a la resistencia de la soldadura de las terminales eléctricas. Más aún, la prueba de rango múltiple de Duncan de la sección 12.4 da el siguiente *patrón de decisión* con un nivel de significancia de 0.01.

	Método C	*Método B*	*Método A*
Media	11.0	14.4	14.6

En consecuencia, concluimos que el método C produce uniones con soldadura más debiles que los métodos A o B.

La eliminación de *tres* fuentes extrañas de variabilidad puede lograrse por medio de un diseño denominado cuadro grecolatino. Este diseño es un arreglo cuadrado de n letras latinas y n letras griegas, formando con ellas un cuadro latino; más exactamente cada letra latina aparece sólo una vez al lado de cada letra griega. A continuación se da un ejemplo de un cuadro grecolatino de 4 × 4:

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

La construcción de cuadros grecolatinos, también denominados cuadros latinos ortogonales, da lugar a interesantes problemas matemáticos, algunos de los cuales se mencionan en el libro de H. B. Mann citado en la bibliografía.

Con el objeto de dar un ejemplo en el cual podría ser adecuado el uso de un cuadro latino, supóngase que en el ejemplo de la soldadura la temperatura de ésta es otra fuente de variabilidad. Si tres temperaturas de soldado, denotadas por α, β y γ, se utilizan junto con los tres métodos, tres operadores (renglones) y tres fundentes (columnas), la repetición de un experimento apropiado de cuadro grecolatino puede establecerse de la siguiente manera:

	Fund. 1	*Fund. 2*	*Fund. 3*
Operador 1	$A\alpha$	$B\gamma$	$C\beta$
Operador 2	$C\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$
Operador 3	$B\beta$	$C\alpha$	$A\gamma$

Así pues, el método A sería utilizado por el operador 1 usando fundente 1 a temperatura α, por el operador 2 con fundente 2 a temperatura β y por el operador 3 empleando fundente 3 a temperatura γ. En forma similar, el método B lo aplicaría el operador 1 usando fundente 2 y temperatura γ, etc.

En un cuadro grecolatino, cada variable (representada por renglones, columnas, letras latinas o letras griegas) está "distribuida equitativamente" respecto a las otras variables. Así, al comparar las medias obtenidas de una variable, los efectos de las otras son promediados por completo. El análisis de un cuadro grecolatino es similar al de un cuadro latino, sólo que se agrega una fuente extra de variabilidad correspondiente a las letras griegas.

Existe una gran variedad de diseños experimentales, aparte de los expuestos en este capítulo, adecuados para diversos propósitos. Entre los más utilizados están los **diseños en bloques incompletos**, que se caracterizan por el hecho de que cada tratamiento no está representado en cada bloque. Si el número de tratamientos que se investiga en un experimento es grande, a menudo es imposible encontrar bloques homogéneos tales que todos los tratamientos puedan acomodarse en cada bloque.

Por ejemplo, si n pinturas son comparadas aplicando cada una de ellas a una hoja de metal e introduciéndolas en un horno, quizá sea imposible poner todas las hojas al mismo tiempo dentro del horno. En consecuencia, es necesario valernos de un diseño experimental en que $k < n$ tratamientos (pinturas) sean incluidos en cada bloque (hornada). Una manera de hacer esto es asignar los tratamientos a cada hornada en tal forma que cada tratamiento ocurra junto con cualquier otro en el mismo número de bloques. Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 2$, podríamos utilizar el siguiente esquema:

Serie	*Pinturas*
1	1 *y* 2
2	3 *y* 4
3	1 *y* 3
4	2 *y* 4
5	1 *y* 4
6	2 *y* 3

Este tipo de diseño se denomina diseño balanceado en bloques incompletos y tiene la importante propiedad de que *las comparaciones entre dos tratamientos cualesquiera pueden realizarse con igual precisión.*

Dado que el diseño en bloques incompletos puede requerir demasiados bloques, se han ideado otros esquemas. La mayoría de estos diseños experimentales cumplen las necesidades específicas de experimentadores, sobre todo en el campo de la agricultura. Como señalamos antes, gran parte de la terminología del diseño experimental, incluyendo los términos como "tratamientos", "bloques", "parcelas", etc., tienen su origen en la agricultura. Sólo en años recientes se han aplicado diseños más complejos a la industria y a la experimentación en ingeniería, y, con una mayor aplicación, se espera que se den muchísimos otros para satisfacer los requerimientos de estos campos.

EJERCICIOS

12.38 Conforme al ejemplo de las muestras de lámina de hojalata que fueron distribuidas entre los cuatro laboratorios (sección 12.1), supón que nos interesan las diferencias sistemáticas en el peso del recubrimiento de estaño transversalmente a la dirección del laminado tanto como longitudinalmente. A fin de eliminar estas dos fuentes de variabilidad, las dos láminas se dividen en 16 partes, que representan cuatro posiciones a través de ella y cuatro a lo largo en la dirección del laminado. Entonces, cuatro muestras de cada lámina se envían a cada uno de los laboratorios A, B, C y D, como se indica, y los pesos resultantes del recubrimiento de estaño son:

Repetición I

C 0.20	A 0.24	D 0.20	B 0.27
B 0.28	C 0.19	A 0.22	D 0.28
D 0.34	B 0.23	C 0.21	A 0.28
A 0.32	D 0.22	B 0.16	C 0.27

Dirección de rodillos

Repetición II

B 0.29	A 0.25	C 0.18	D 0.28
D 0.28	B 0.18	A 0.21	C 0.25
C 0.28	D 0.23	B 0.20	A 0.28
A 0.30	C 0.19	D 0.24	B 0.25

A partir de estos datos determina si los laboratorios obtuvieron resultados consistentes. También determina si existen diferencias reales en los pesos del recubrimiento de estaño transversal y longitudinalmente a la dirección de laminado. (Emplea un nivel de significancia de 0.05.)

12.39 Mediante un diseño de cuadro latino se comparó la resistencia de las uniones de alambres semiconductores de oro unidos al extremo de una terminal con cinco diferentes métodos, A, B, C, D y E. Las uniones fueron realizadas por cinco distintos operadores, y los dispositivos fueron recubiertos con cinco diferentes plásticos, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en libras requeridas para romper la unión.

Analiza los resultados anteriores y aplica la prueba de rango múltiple de Duncan con $\alpha = 0.01$ a la media de las resistencias a la ruptura de los cinco métodos de unión. Cuadro de la siguiente página.

12.40 Se realiza una prueba para determinar cuál de tres diferentes diseños de pelotas de golf, A, B y C darán una mayor distancia. Las bolas de golf son probadas por tres golfistas profesionales, P_1, P_2 y P_3, empleando tres palos distintos, D_1, D_2 y D_3. El experimento se realizó en tres pistas, y las distancias del

Operador

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P_1	A 3.0	B 2.4	C 1.9	D 2.2	E 1.7
P_2	B 2.1	C 2.7	D 2.3	E 2.5	A 3.1
Plástico P_3	C 2.1	D 2.6	E 2.5	A 2.9	B 2.1
P_4	D 2.0	E 2.5	A 3.2	B 2.5	C 2.2
P_5	E 2.1	A 3.6	B 2.4	C 2.4	D 2.1

punto de partida al punto en que cayó la bola se midieron en yardas, como se indica a continuación:

Primera parte

	D_1	D_2	D_3
P_1	B 265	A 311	C 249
P_2	A 350	C 284	B 330
P_3	C 258	B 305	A 351

Segunda parte

	D_1	D_2	D_3
P_1	B 220	A 276	C 189
P_2	A 319	C 232	B 264
P_3	C 175	B 254	A 307

Tercera parte

	D_1	D_2	D_3
P_1	B 159	A 205	C 142
P_2	A 262	C 168	B 246
P_3	C 198	B 237	A 283

¿Es cualquiera de los diseños de bolas de golf superior a los otros con respecto a la distancia?

12.41 Con el fin de estudiar la eficacia de cinco clases de sistemas para fijar el asiento delantero de los automóviles, A, B, C, D y E, se realiza el siguiente experimento en cuadro latino. Los renglones representan diferentes tipos de automóviles (del subcompacto a los automóviles de tamaño más grande), las columnas representan diferentes velocidades de choque y las letras griegas α, β, γ, δ y ϵ indican diferentes ángulos de impacto. Los resultados del experimento están dados en términos de un índice de fuerzas en puntos críticos de la prueba simulada que están relacionados con la probabilidad de un accidente fatal.

$A\alpha$ 0.50	$B\beta$ 0.21	$C\gamma$ 0.43	$D\delta$ 0.35	$E\epsilon$ 0.46
$B\gamma$ 0.51	$C\delta$ 0.20	$D\epsilon$ 0.40	$E\alpha$ 0.25	$A\beta$ 0.39
$C\epsilon$ 0.45	$D\alpha$ 0.07	$E\beta$ 0.29	$A\gamma$ 0.20	$B\delta$ 0.31
$D\beta$ 0.39	$E\gamma$ 0.10	$A\delta$ 0.31	$B\epsilon$ 0.24	$C\alpha$ 0.27
$E\delta$ 0.43	$A\epsilon$ 0.17	$B\alpha$ 0.31	$C\beta$ 0.22	$D\gamma$ 0.32

Analiza este experimento.

12.42 Un fabricante de ropa necesita determinar cuál de cuatro diferentes diseños de aguja es mejor para sus máquinas de coser. Las fuentes de variabilidad que deben eliminarse para efectuar esta comparación son las máquinas que se utilizan, la operadora y el tipo de hilo. Con el diseño indicado (los renglones representan las operadoras, las columnas a las máquinas, las letras latinas a las agujas y las letras griegas indican los tipos de hilo), el fabricante anotó el número de prendas rechazadas al término de cada una de dos semanas, consiguiendo los siguientes resultados:

Primera semana

$D\gamma$ 47	$B\alpha$ 40	$A\beta$ 23	$C\delta$ 72
$C\beta$ 74	$A\delta$ 37	$B\gamma$ 28	$D\alpha$ 75
$A\alpha$ 52	$C\gamma$ 95	$D\delta$ 57	$B\beta$ 15
$B\delta$ 10	$D\beta$ 45	$C\alpha$ 93	$A\gamma$ 52

Segunda semana

$C\alpha$ 105	$A\gamma$ 38	$B\delta$ 15	$D\beta$ 60
$D\delta$ 70	$B\beta$ 20	$A\alpha$ 60	$C\gamma$ 85
$B\gamma$ 13	$D\alpha$ 82	$C\beta$ 90	$A\delta$ 28
$A\beta$ 33	$C\delta$ 75	$D\gamma$ 53	$B\alpha$ 31

Empleando un nivel de significancia de 0.05 determina si existe alguna diferencia en la eficacia de las agujas. También, investiga si existen diferencias significativas atribuibles a los operadores, a las máquinas y a los tipos de hilo.

12.43 Da un ejemplo de un diseño balanceado en bloques incompletos en el cual
(a) $n = 3$ y $k = 2$;
(b) $n = 4$ y $k = 3$;
(c) $n = 6$ y $k = 4$.
¿Cuál es el número mínimo de veces que cada tratamiento debe repetirse en cada uno de estos diseños?

12.6 ANÁLISIS DE COVARIANCIA

El objetivo de los métodos de las secciones 12.3 y 12.5 fue librar al error experimental de la variabilidad debida a causas extrañas identificables y controlables. En esta sección abordamos un método, denominado **análisis de covariancia**, que se aplica cuando esas variables extrañas, o **concomitantes**, no pueden mantenerse fijas pero pueden medirse. Esto sucedería, por ejemplo, si necesitamos comparar la eficacia de varios programas de capacitación industrial y los resultados que dependen del CI de los aprendices; si deseamos comparar la durabilidad de varios tipos de suelas de cuero y los resultados dependen del peso de las personas que utilizan los zapatos; si queremos comparar las cualidades de varios agentes limpiadores y los resultados dependen de las condiciones originales de las superficies que se pretende limpiar.

El método mediante el cual analizamos los datos de este tipo es una combinación del método de regresión lineal de la sección 11.1 y del análisis de variancia de la sección 12.2. El modelo fundamental está dado por

Ecuación modelo para el análisis de covariancia

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \delta x_{ij} + \epsilon_{ij}$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Como en el modelo de la página 369, μ es la gran media, α_i es el efecto i-ésimo y las ϵ_{ij} son valores de variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con medias cero y la variancia común σ^2; como en el modelo de la página 324 donde la llamamos β, δ es la pendiente de la ecuación de regresión lineal.

En el análisis de tales datos, los valores de la variable concomitante x_{ij}, son eliminados por métodos de regresión, es decir, estimando δ con el método de mínimos cuadrados, y después efectuando un análisis de variancia sobre las y ajustadas, esto es, las cantidades $y'_{ij} = y_{ij} - \hat{\delta} x_{ij}$. Este procedimiento recibe el nombre de análisis de covariancia, cuando requiere una partición de la suma de productos

$$SPT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{..})(x_{ij} - \bar{x}_{..})$$

en la misma forma que un análisis de variancia ordinario requiere la partición de la suma total de cuadrados. En la práctica, los cálculos se realizan de la siguiente manera:

1. El total, el tratamiento y la suma de cuadrados del error se calculan para las x por medio de las fórmulas de un criterio de clasificación mencionado en la página 372; serán denotados por SST_x, $SS(Tr)_x$, y SSE_x.
2. El total, el tratamiento y la suma de cuadrados del error se calculan para las y mediante las fórmulas de un criterio de clasificación mencionado en la página 372; serán denotados por SST_y, $SS(Tr)_y$, y SSE_y.
3. El total, el tratamiento y la suma de productos del error se calculan por medio de las fórmulas

Suma de productos—análisis de covariancia

$$SPT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot y_{ij} - C$$

$$SP(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{k} T_{x_i} \cdot T_{y_i}}{n} - C$$

$$SPE = SPT - SP(Tr)$$

donde el término de corrección, C, está dado

$$C = \frac{T_x \cdot T_y}{k \cdot n}$$

y donde T_{x_i} es el total de las x para el i-ésimo tratamiento, T_{y_i} es el total de las y para el i-ésimo tratamiento, T_x es el total de todas las x y T_y es el total de todas las y.
4. El total, el error y las sumas de cuadrados de tratamientos se calculan para las y ajustadas mediante las fórmulas

Sumas de cuadrados ajustadas — análisis de covariancia

$$SST_Y = SST_y - \frac{(SPT)^2}{SST_x}$$

$$SSE_Y = SSE_y - \frac{(SPE)^2}{SSE_x}$$

$$SS(Tr)_Y = SST_Y - SSE_Y$$

Los resultados obtenidos en estos cálculos se resumen de manera conveniente en el siguiente tipo de tabla de analisis de covariancia:

Fuente de variación	*Suma de cuadrados para x*	*Suma de cuadrados para y*	*Suma de productos*	*Grados de libertad para y.*	*Suma de cuadrados*	*Cuadro medio*
Tratamiento	$SS(Tr)_x$	$SS(Tr)_y$	$SP(Tr)$	$SS(Tr)_Y$	$k-1$	$MS(Tr)_Y = \frac{SS(Tr)_Y}{k-1}$
Error	SSE_x	SSE_y	SPE	SSE_Y	$nk-k-1$	$MSE_Y = \frac{SSE_Y}{nk-k-1}$
Total	SST_x	SST_y	SPT	SST_Y	$nk-2$	

Nótese que cada media de cuadrados se obtiene dividiendo la suma de cuadrados correspondiente entre sus grados de libertad.

Por último, la hipótesis nula $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ se prueba contra la hipótesis alterna de que no todas las α_i son iguales a cero con base en el estadístico

Razón F para tratamientos ajustados

$$F = \frac{MS(Tr)_Y}{MSE_Y}$$

Se rechaza con un nivel de significancia α si el valor obtenido de F excede a F_α con $k-1$ y $nk-k-1$ grados de libertad.

EJEMPLO Supón que un investigador tiene tres sustancias limpiadoras diferentes, A_1, A_2 y A_3, y que desea seleccionar la más eficiente para limpiar una superficie metálica. La limpieza de una superficie se mide por su poder de reflexión, expresado en unidades orbitrarias como la razón del poder de reflexión observado con respecto al de un espejo común. El análisis de covariancia debe utilizarse debido a que el efecto de la sustancia limpiadora sobre el poder de reflexión dependerá de la limpieza original, es decir, del poder de reflexión original de la superficie. El investigador obtuvo los siguientes resultados:

A_1	Poder de reflexión original, x	0.50	0.55	0.60	0.35
	Poder de reflexión final, y	1.00	1.20	0.80	1.40
A_2	Poder de reflexión original, x	0.75	1.65	1.00	1.10
	Poder de reflexión final, y	0.75	0.60	0.55	0.50
A_3	Poder de reflexión original, x	0.60	0.90	0.80	0.70
	Poder de reflexión final, y	1.00	0.70	0.80	0.90

Determina mediante un análisis de covariancia (con un nivel de significancia de 0.05) si exiten diferencias en las mejoras del poder de reflexión producidas por los tres agentes limpiadores.

Solución

1. *Hipótesis nula*: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
   Hipótesis alterna: no todas las α son iguales a cero.
2. *Nivel de significancia*: $\alpha = 0.05$.
3. *Criterio*: se rechaza la hipótesis nula si $F > 4.46$, el valor de $F_{0.05}$ para $k-1 = 3-1 = 2$ y $nk-k-1 = 4 \times 3 - 3 - 1 = 8$ grados de libertad.
4. *Cálculos*: los totales son $T_{x_1} = 2.00$, $T_{x_2} = 4.50$, $T_{x_3} = 3.00$, $T_x = 9.50$, $T_{y_1} = 4.40$, $T_{y_2} = 2.40$, $T_{y_3} = 3.40$, y $T_y = 10.20$.

   Para las x, el término de corrección es $\frac{(9.50)^2}{3 \cdot 4} = 7.52$, y las sumas de cuadrados son

$$SST_x = 0.50^2 + 0.55^2 + \ldots + 0.70^2 - 7.52 = 1.31$$

$$SS(Tr)_x = \frac{2.00^2 + 4.50^2 + 3.00^2}{4} - 7.52 = 0.79$$

$$SSE_x = 1.31 - 0.79 = 0.52$$

Para las y, el término de corrección es $\frac{(10.20)^2}{3 \cdot 4} = 8.67$ y las sumas de cuadrados son

$$SST_y = 1.00^2 + 1.20^2 + \ldots + 0.90^2 - 8.67 = 0.79$$

$$SS(Tr)_y = \frac{4.40^2 + 2.40^2 + 3.40^2}{4} - 8.67 = 0.50$$

$$SSE_y = 0.79 - 0.50 = 0.29$$

Para las sumas de productos, el término de corrección es $\frac{(9.50)(10.20)}{3 \cdot 4} = 8.08$, y obtenemos

$$SPT = (0.50)(1.00) + (0.55)(1.20) + \ldots + (0.70)(0.90) - 8.08$$
$$= -0.80$$

$$SP(Tr) = \frac{(2.00)(4.40) + (4.50)(2.40) + (3.00)(3.40)}{4} - 8.08$$
$$= -0.63$$

$$SPE = -0.80 - (-0.63) = -0.17$$

Por último, para las y ajustadas obtenemos

$$SST_{y'} = 0.79 - \frac{(-0.80)^2}{1.31} = 0.30$$

$$SSE_{y'} = 0.29 - \frac{(-0.17)^2}{0.52} = 0.23$$

$$SS(Tr)_{y'} = 0.30 - 0.23 = 0.07$$

Todos estos resultados se resumen en la siguiente tabla de análisis de covariancia:

Fuente de variación	Suma de cuadrados para x	Suma de cuadrados para y	Suma de productos	Suma de cuadrados para y'	Grados de libertad	Cuadrados medios
Tratamientos	0.79	0.50	−0.63	0.07	2	0.035
Error	0.52	0.29	−0.17	0.23	8	0.026
Total	1.31	0.79	−0.80	0.03	10	

5. *Decisión*: Dado que $F = \frac{0.035}{0.026} = 1.34$ no sobrepasa 4.46, la hipótesis nula no puede rechazarse. En otras palabras, no podemos concluir que algunas de las sustancias limpiadoras sea más eficaz que las otras.

Los métodos de análisis de covariancia no habían sido utilizados de manera amplia sino hasta años recientes, debido principalmente a que se requieren cálculos más bien complicados. Por supuesto, con la mayor disponibilidad de computadoras y de programas apropiados, esto ya no es problema. Hay varias formas en que el método de análisis de covariancia presentado aquí puede generalizarse. En primer término, puede haber más de una variable concomitante; entonces, el método puede aplicarse a clases de diseño más complicados, digamos, a un diseño en bloques aleatorios, donde el coeficiente de regresión incluso podría considerarse diferente en cada bloque.

EJERCICIOS

12.44 Con el fin de comparar la vida útil de un transistor en tres condiciones de funcionamiento y tomar en cuenta al mismo tiempo una corriente de dispersión (colector a la base), un laboratorista obtuvo los siguientes resultados, donde la corriente de dispersión, x, está en microamperes y la vida útil, y, en horas:

Condición de almacenamiento 1		Condición de almacenamiento 2		Condición de almacenamiento 3	
x	y	x	y	x	y
4.8	9,912	6.4	9,952	8.8	9,596
7.2	9,383	8.7	9,482	6.2	9,697
5.5	9,734	7.1	9,435	7.5	9,700
6.0	9,551	5.3	9,915	4.9	9,610
8.3	8,959	4.6	9,492	5.4	10,145
7.6	9,474	6.0	9,565	5.8	10,191
5.9	9,179	7.2	9,704	7.3	9,855
8.0	9,359	8.8	9,636	8.6	9,682
4.3	9,580	5.4	9,608	8.8	10,160
5.1	9,245	7.8	9,548	6.0	9,982

Efectúa un análisis de covariancia, empleando un nivel de significancia $\alpha = 0.05$. También, estima el valor del coeficiente de regresión.

12.45 Cuatro diferentes configuraciones de muestras de tramos de ferrocarril fueron probadas con el objeto de determinar cuál es más resistente a la ruptura en condiciones de uso. Diez millas de cada tipo se instalaron en seis diferentes lugares y el número de resquebrajaduras y otras condiciones relacionadas con fracturas (y) se midieron en un período de dos años de uso. Pero para comparar en forma adecuada estos diseños de tramos, es necesario hacer una corrección para tomar en cuenta el uso (x), medidos en términos del número promedio de trenes por día que recorren cada sección. Usa los siguientes resultados experimentales (con un nivel de significancia de 0.01), si todos los diseños de los tramos son iguales de resistentes a la ruptura, y estima el efecto que el uso tiene sobre tal resistencia.

Diseño de tramo A		Diseño de tramo B		Diseño de tramo C		Diseño de tramo D	
x	y	x	y	x	y	x	y
10.4	3	16.9	8	17.8	5	19.6	9
19.3	7	23.6	11	24.4	9	25.4	8
13.7	4	14.4	7	13.5	5	35.5	16
7.2	0	17.2	10	20.1	6	16.8	7
16.3	5	9.1	4	11.0	4	31.2	11

12.46 Tres diferentes disposiciones de tableros de instrumentos fueron probadas por pilotos comerciales en simuladores de vuelo y se probó su tiempo de reacción ante emergencias simuladas en vuelo. Cada piloto afrontó diez condiciones de emergencia en orden aleatorio y se midió el tiempo total requerido para adoptar una acción correctiva en la diez condiciones, consiguiéndose los siguientes resultados:

Tablero de intrumentos 1		Tablero de instrumentos 2		Tablero de instrumentos 3	
x	y	x	y	x	y
8.1	6.55	12.1	5.74	15.2	6.37
19.4	6.40	2.1	5.93	8.7	6.97
11.6	5.93	3.9	6.16	7.2	7.38
24.9	6.79	5.2	5.68	6.1	6.43
6.2	7.16	4.6	5.41	11.8	7.59
3.8	5.64	14.4	6.29	12.1	7.16
18.4	5.87	16.1	5.55	9.5	7.02
9.4	6.32	8.5	4.82	2.6	6.85

En esta tabla, x es el número de años de experiencia del piloto y y es el tiempo total de reacción en segundos. Efectúa un análisis de covariancia para probar si las configuraciones del tablero de instrumentos producen resultados significativamente diferentes ($\alpha = 0.05$). También, realiza un análisis de variancia en una dimensión (ignorando la covariada x) y determina de qué manera la experiencia afecta a los resultados.

12.7 CONCEPTOS BÁSICOS (con el número de página en que aparecen)

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS FACTORIALES

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

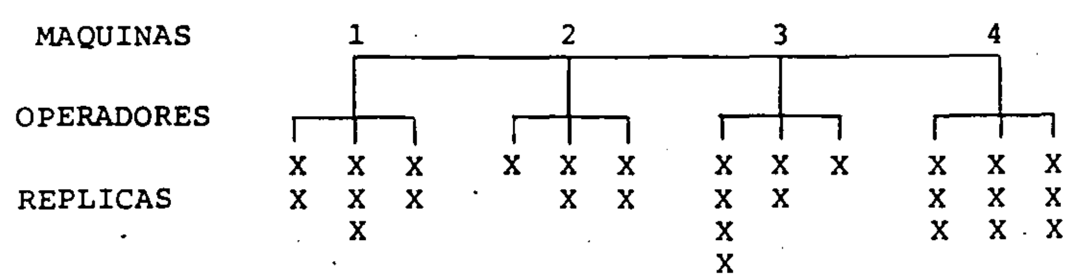
Palacio de Mineria   Calle de Tacuba 5   Primer piso   Deleg. Cuauhtémoc 06000   México, D.F.   APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955   512-5121   521-7335   521-1987   Fax   510-0573   521-4020 AL 26

8. EXPERIMENTOS CON CLASIFICACION DE DOS FACTORES

EN OCASIONES NO INTERESA RELACIONAR AL FACTOR PRINCIPAL CON TODOS LOS NIVELES DEL FACTOR SECUNDARIO, POR LO CUAL A CADA NIVEL DEL FACTOR PRINCIPAL SE LE ASOCIA UN DIFERENTE CONJUNTO DE NIVELES DEL SECUNDARIO. EN TAL CASO SE TIENE UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES NO CRUZADO.

EN CAMBIO, CUANDO CADA NIVEL DEL FACTOR PRINCIPAL SE COMBINA CON TODOS LOS NIVELES DEL SECUNDARIO SE DICE QUE EL EXPERIMENTO ES DE DOS FACTORES CRUZADOS.

POR EJEMPLO, SI SE TIENE QUE EN UNA FABRICA SE DISPONE DE CUATRO MAQUINAS Y SE QUIERE ESTIMAR SU RENDIMIENTO, SE PUEDE DISEÑAR UN EXPERIMENTO EN EL QUE A CADA UNA SE LE ASIGNEN AL AZAR TRES OPERADORES. SI NO SE IDENTIFICA ALGUNA CARACTERISTICA DE LOS OPERADORES QUE SEÑALE LA CONVENIENCIA DE DISTINGUIRLOS EN TERMINOS DE ELLA, EL EXPERIMENTO CONSISTIRA EN REGISTRAR LOS RENDIMIENTOS INDIVIDUALES DE CADA PERSONA EN CADA VEZ QUE LA OPERE; ESTE EXPERIMENTO DE FACTORES NO CRUZADOS SE ILUSTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



SI POR EL CONTRARIO, SE SABE QUE LOS OPERADORES TIENEN DI

FERENTE EXPERIENCIA EN EL USO DE MAQUINAS IGUALES A LAS DEL ESTUDIO, SERA NECESARIO DISEÑAR UN EXPERIMENTO CLASIFICANDOLOS EN TERMINOS DEL NIVEL DE EXPERIENCIA. SUPONGAMOS QUE ESTOS NIVELES SON 2, 4 Y 6 AÑOS DE EXPERIENCIA Y QUE A CADA MAQUINA SE LE ASIGNEN AL AZAR. EL EXPERIMENTO RESULTANTE SERA DE DOS FACTORES CRUZADOS, EL CUAL SE PUEDE REPRESENTAR EN UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

EXPERIENCIA	MAQUINAS			
	I	II	III	IV
2 AÑOS	X X	X	X X X X	X X X
4 AÑOS	X X X	X X	X X	X X X
6 AÑOS	X X	X X	X	X X X

EN ESTE EJEMPLO EL NUMERO DE REPLICAS ES DIFERENTE PARA CADA NIVEL DE COMBINACION MAQUINA-EXPERIENCIA. EL ANALISIS DE ESTOS EXPERIMENTOS SE SIMPLIFICA GRANDEMENTE SI PARA CADA CELDA SE OBTIENE IGUAL NUMERO DE REPLICAS, n

EXPERIMENTO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS O JERARQUIZADO

MODELO PARAMETRICO (I)

EL MODELO PARAMETRICO PARA ANALIZAR ESTE TIPO DE EXPERIMENTOS ES

$$X_{tij} = \xi + \gamma_t + \delta_{ti} + Z_{tij} \qquad (1)$$

DONDE $j = 1, 2, \ldots, n_{ti}$, ES EL NUMERO DE OBSERVACIONES (REPLICAS) DEL t-ÉSIMO GRUPO

A PARTIR DE LAS ECS (2), (3) Y (4) SE OBTIENEN LAS SIGUIENTES DESVIACIONES:

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = \gamma_t + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...}; \quad E(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}) = \gamma_t \quad (5)$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} = \delta_{ti} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..}; \quad E(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..}) = \delta_{ti} \quad (6)$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}$$

POR LO ANTERIOR γ_t Y δ_{ti} SE PUEDEN ESTIMAR MEDIANTE LAS ESTADISTICAS:

$$\hat{\gamma}_t = \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} \quad \text{Y} \quad (8)$$

$$\hat{\delta}_{ti} = \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} \quad \text{RESPECTIVAMENTE} \quad (9)$$

LAS ESTADISTICAS PARA ANALIZAR LA INFORMACION DE UN EXPERIMENTO DE ESTE TIPO SE DEDUCEN DE LA SIGUIENTE PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS:

$$\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = SSP + SSPW + SSR = \sum_t N_{t.} (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2 + $$
$$+ \sum_t \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 +$$
$$+ \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})2 \quad (10)$$

LOS TERMINOS DEL MIEMBRO DERECHO SE DENOMINAN: SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS PRINCIPALES, SUMA DE CUADRADOS ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES, Y SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL, RESPECTIVAMENTE.

PRINCIPAL Y DEL i-ESIMO GRUPO SECUNDARIO (SUBGRUPO)

$i = 1, 2, \ldots, m_t$, ES EL NUMERO DE SUBGRUPOS EN EL t-ESIMO NIVEL PRINCIPAL

$t = 1, 2, \ldots, k$, ES EL NUMERO DE GRUPOS EN EL FACTOR PRINCIPAL

ξ MEDIA GLOBAL

γ_t ES EL EFECTO MEDIO DEL TRATAMIENTO t

δ_{ti} ES EL EFECTO MEDIO DEL i-ESIMO SUBGRUPO EN EL t-ESIMO GRUPO PRINCIPAL

Z_{tij} ES EL RESIDUO O ERROR ALEATORIO CON VARIANCIA σ^2 Y MEDIA CERO

AL IGUAL QUE EN EL MODELO DE CLASIFICACION EN UNA DIRECCION, A ESTOS EFECTOS SE LES IMPONEN LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

$$\sum_{t=1}^{k} N_{t.}\gamma_t = 0, \quad \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti}\delta_{ti} = 0, \text{ PARA TODA } t \quad (N_{t.} = \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti})$$

LOS PROMEDIOS ARITMETICOS QUE RESULTAN DE ESTE MODELO SON:

PARA LOS SUBGRUPOS: $\bar{X}_{ti.} = \xi + \gamma_t + \delta_{ti} + \bar{Z}_{ti.}$ (2)

PARA LOS GRUPOS PRINCIPALES: $\bar{X}_{t..} = \xi + \gamma_t + \bar{Z}_{t..}$ (3)

PARA LA MEDIA GLOBAL: $\bar{X}_{...} = \xi + \bar{Z}_{...}$ (4)

AL DEDUCIR ESTAS DOS ULTIMAS ECUACIONES SE HACE USO DE LAS DOS CONDICIONES ANTERIORES IMPUESTAS A γ_t Y δ_{ti}.

LAS ESPERANZAS RESPECTIVAS SON:

ENTRE GRUPOS PRINCIPALES: $E(SSP) = (k-1)\sigma^2 + \sum_t N_{t.} \gamma_t^2$

ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES:

$E(SSPW) = (\sum_t m_t - k)\sigma^2 + \sum_t \sum_i n_{ti} \delta_{ti}^2$

RESIDUAL: $E(SSR) = (N_{..} - \sum_t m_t)\sigma^2$; $(N_{..} = \sum_t \sum_i n_{ti})$

AL DIVIDIR ENTRE LOS NUMEROS CORRESPONDIENTES DE GRADOS DE LIBERTAD: $k-1$, $\sum_t m_t - k$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$, SE OBTIENEN LOS RESPECTIVOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS, A SABER

ENTRE GRUPOS PRINCIPALES: $E(MSP) = \sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_t N_{t.} \gamma_t^2$ (11)

ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES:

$$E(MSPW) = \sigma^2 + \frac{1}{\sum_t m_t - k} \sum_t \sum_i n_{ti} \delta_{ti}^2 \quad (12)$$

RESIDUAL: $E(MSR) = \sigma^2$ (13)

COMPARANDO MSP CON MSR SE PUEDE PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_t = 0$ PARA TODA t. COMPARANDO MSPW CON MSR SE PUEDE PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\delta_{ti} = 0$ PARA TODA t e i. AMBAS COMPARACIONES SE HACEN MEDIANTE LA ESTADISTICA F:

$$F_p = MSP/MSR \quad (14)$$

CON $k-1$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD.

$$F_{PW} = MSPW/MSR \qquad (15)$$

CON $\sum_t m_t - k$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD.

SI SE DESEA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\delta_{ti} = 0$ PARA $i = 1, 2, \ldots, m_t$, Y CADA t POR SEPARADO, SE USA LA VARIANCIA

$$S_t^2 = \frac{1}{m_t - 1} \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 \qquad (16)$$

QUE TIENE COMO ESPERANZA A

$$\sigma^2 + (m_t - 1)^{-1} \sum_i n_{ti} \delta_{ti}^2 \qquad (17)$$

POR LO QUE SE PUEDE COMPARAR, PARA CADA t, CON MSR MEDIANTE LA ESTADISTICA

$$F_t = S_t^2/MSR \qquad (18)$$

CON $m_t - 1$ y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD

TODO ESTO SE PUEDE RESUMIR EN UNA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA.

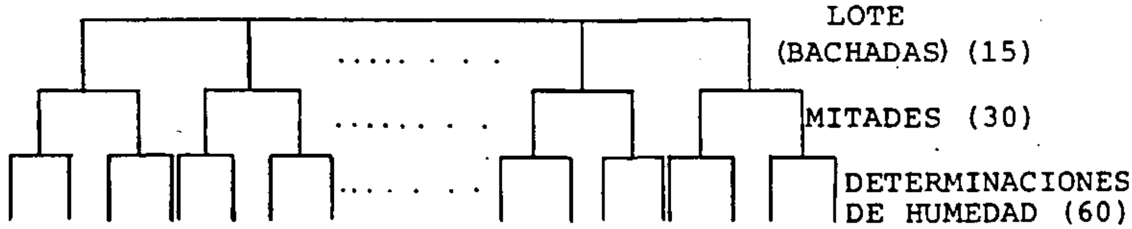
EN CASO DE QUE TODOS LOS SUBGRUPOS TENGAN IGUAL NUMERO DE OBSERVACIONES $n_{ti}=n$, Y DE QUE TODOS LOS GRUPOS PRINCIPALES TENGAN IGUAL NUMERO DE SUBGRUPOS $m_t=m$, DOS DE LOS GRADOS DE LIBERTAD SE PUEDEN ESCRIBIR DE LA SIGUIENTE MANERA

$$N_{..} - \sum_{t=1}^{k} m_t = kmn - km = km\ (n-1) \qquad (19)$$

$$\sum_{t=1}^{k} m_t - k = km - k = k(m-1) \qquad (20)$$

EJEMPLO

EN EL PROCESO DE FABRICACION DE UN COLORANTE INTERVIENE COMO VARIABLE IMPORTANTE EL CONTENIDO DE HUMEDAD DEL PRODUCTO. SE QUIERE VERIFICAR SI EL METODO DE PRUEBA PARA MEDIR LA HUMEDAD INTRODUCE UNA VARIACION APRECIABLE EN LOS RESULTADOS QUE SE REPORTAN. PARA ESTO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO NO CURZADO EN QUE EL FACTOR PRINCIPAL ES EL LOTE Y EL SECUNDARIO ES PARTE DEL LOTE; SE DISPUSO DE k=15 LOTES, CON DOS MITADES CADA UNO (m_t=m=2) Y SE HICIERON n_{ti}=n=2 DETERMINACIONES DE HUMEDAD DE CADA MUESTRA. HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO.



BACHADA	MUESTRA	HUMEDAD
1	1	40, 39
	2	30, 30
2	3	26, 28
	4	25, 26
3	5	29, 28
	6	14, 15
4	7	30, 31

BACHADA	MUESTRA	HUMEDAD
	8	24, 24
5	9	19, 20
	10	17, 17
6	11	33, 32
	12	26, 24
7	13	23, 24
	14	32, 33
8	15	34, 34
	16	29, 29
9	17	27, 27
	18	31, 31
10	19	13, 16
	20	27, 24
11	21	25, 23
	22	25, 27
12	23	29, 29
	24	31, 32
13	25	19, 20
	26	29, 30
14	27	23, 24
	28	25, 25
15	29	39, 37
	30	26, 28

t	i	X_{ti1}	X_{ti2}	$\overline{X}_{ti.}$	$\overline{X}_{t..}$
1	1	40	39	39.5	34.75
1	2	30	30	30	
2	1	26	28	27	26.25
2	2	25	26	25.5	
3	1	28	29	28.5	21.5
3	2	14	15	14.5	
4	1	30	31	30.5	27.25
4	2	24	24	24	
5	1	19	20	19.5	18.25
5	2	17	17	17.0	
6	1	33	32	32.5	28.75
6	2	26	24	25.0	
7	1	23	24	23.5	28
7	2	32	33	32.5	
8	1	34	34	34.0	31.5
8	2	29	29	29.0	
9	1	27	27	27	29
9	2	31	31	31	
10	1	13	16	14.5	20
10	2	27	24	25.5	
11	1	25	23	24	25
11	2	25	27	26	
12	1	29	29	29	30.25
12	2	31	32	31.5	
13	1	19	20	19.5	24.5
13	2	29	30	29.5	
14	1	23	24	23,5	24.25
14	2	25	25	25	
15	1	39	37	38.0	32.5
15	2	2	2	27	

Donde
$$\overline{X}_{ti.} = \frac{\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{n_{ti}} = \frac{\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{2}$$

$$\overline{X}_{t..} = \frac{\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{N_{t.}} = \frac{\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{4}$$

$$N_{..} = \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} n_{ti} = \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} 2 = 15x2x2=60$$

$$\sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij} = 40 + 39 + 30 + 30 + 26 + 28 + \ldots + 25 + 25 + 39 + 37 + 26 + 28 = 1607$$

$$\overline{X}_{...} = \frac{1607}{60} = 26.783$$

$$N_{t.} = \sum_{i=1}^{2} n_{ti} = 4$$

$$SSP = \sum_{t=1}^{15} N_{t.}(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2 = 4 \sum_{t=1}^{15} (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2$$

$$= 4\left[(34.75-26.783)^2 + (26.25-26.783)^2 + (21.5-26.783)^2 + \ldots + (32.5-26.783)^2\right]$$

$$= 4(63.47 + 0.28 + 27.91 + \ldots + 32.684) = 1211.0$$

$$SSPW = \sum_t \sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 = 2 \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2$$

$$= 2\left[(39.5-34.75)^2 + (30-34.75)^2 + (27-26.25)^2 + (25.5-26.25)^2 + \ldots + (27-32.5)^2\right]$$

$$= 2\left[22.56 + 22.56 + \ldots\right]$$

$$= 2x424.88 = 869.7$$

$$\sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}^2 = 40^2 + 39^2 + 30^2 + 30^2 + \ldots + 39^2 + 37^2 + 26^2 + 28^2$$

$$= 45149$$

$$kmn\bar{X}_{...}^2 = 15x2x2x26.783^2 = 43040.82$$

$$SST = \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}^2 - kmn\bar{X}_{...}^2 = 45149-43040.8 = 2108.2$$

$$SSR = SST-SSP-SSPW = 2108.2 - 1211.0 - 869.7 = 27.5$$

G. de L.: $k - 1 = 15 - 1 = 14$

$$\sum_{t=1}^{15} m_t - k = 15 \times 2 - 15 = 15$$

$$N_{..} - \sum_{t=1}^{15} m_t = 60 - 30 = 30$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES:

FUENTE DE VARIACION	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F
ENTRE BACHADAS	1211.0	14	86.6	92.2
ENTRE MITADES DE LOS GRUPOS PRINCIPALES	869.7	15	58.0	64.4
RESIDUO (ENTRE PRUEBAS)	27.5	30	0.9	
TOTAL	2108.2	59		

$$F_{0.01,14,30} = 2.75 < 92.2$$

$$F_{0.01,15,30} = 2.70 < 64.4$$

POR LO QUE SE RECHAZAN LAS HIPOTESIS DE QUE NO HAY EFECTOS DE BACHADAS Y DE MITADES A UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA. ADEMAS, AL COMPARAR LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS SE CONFIRMA QUE NO ES EL METODO DE PRUEBA, SINO LAS BACHADAS Y LAS MITADES LAS QUE INTRODUCEN LA MAYOR VARIABILIDAD DE LOS RESULTADOS, PUESTO QUE EL MS DEL RESIDUO ES MUY PEQUEÑO EN COMPARACION CON LOS OTROS DOS.

MODELO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS. MODELO CON FACTORES ALEATORIOS (II)

SI TANTO EL FACTOR PRINCIPAL COMO EL SECUNDARIO SON VARIABLES ALEATORIAS Y EN EL EXPERIMENTO SOLO SE INCLUYEN ALGUNOS NIVELES (O VALORES) DE LAS MISMAS, ENTONCES EL MODELO ES DE FACTORES ALEATORIOS O MODELO II. EN ESTE CASO EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR A CADA OBSERVACION, X_{tij}, ES:

$$X_{tij} = \xi + U_t + V_{ti} + Z_{tij} \tag{21}$$

DONDE U_t ES UNA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA EL EFECTO MEDIO DEL FACTOR PRINCIPAL, V_{ti} ES OTRA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA AL EFECTO MEDIO DEL I-ESIMO SUBGRUPO EN EL T-ESIMO GRUPO PRINCIPAL. ξ Y Z_{tij} TIENEN EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL SUBCAPITULO ANTERIOR. SE SUPONE QUE U_t, V_{ti} Y Z_{tij} SON INDEPENDIENTES ENTRE SI, CON DISTRIBUCION NORMAL Y QUE $E(U_t) = 0$, $E(V_{ti}) = 0$ Y $E(Z_{tij} = 0)$; PARA LAS VARIANCIAS USAREMOS LOS SIGUIENTES SIMBOLOS:

$$\text{Var } (U_t) = \sigma_u^2; \quad \text{Var } (V_{ti}) = \sigma_v^2$$

CON ESTE MODELO SE TIENE QUE:

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = U_t - \bar{U} + \bar{V}_{t.} - \bar{V}_{..} + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...} \tag{22}$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} = V_{ti} - \bar{V}_{t.} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} \tag{23}$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.} \tag{24}$$

DONDE

$$\bar{U} = \sum_{t=1}^{k} N_{t.}U_t/N_{..}\,,\quad \bar{V}_{t.} = \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti}V_{ti}/N_{t.}\,,\quad \bar{V}_{..} = \sum_{t=1}^{k} N_t\bar{V}_{t.} \tag{25}$$

EN ESTE CASO LA DESCOMPOSICION DE CUADRADOS CONDUCE A LOS SIGUIENTES VALORES MEDIOS CUADRATICOS:

$$E\{\frac{\sum_t\sum_i\sum_j(X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}{N_{..} - \sum_t m_t}\} = E(MSR) = \sigma^2 \tag{26}$$

$$E\{\frac{\sum_t N_{t.}(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2}{k-1}\} = E(MSP) = \sigma^2 + \frac{\sum_t(N_{t.}^{-1} - N_{..}^{-1})\sum_i n_{ti}^2}{k-1}\sigma_v^2 + \frac{N_{..} - \sum_t N_{t.}^2/N_{..}}{k-1}\sigma_u^2 \tag{27}$$

$$E\{\frac{\sum_t\sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2}{\sum_t m_t - k}\} = E(MSPW) = \sigma^2 + \frac{N_{..} - \sum_t N_{t.}^{-1}\sum_i n_{ti}^2}{\sum_t m_t - k}\sigma_v^2 \tag{28}$$

EN ESTAS ECUACIONES SE OBSERVA QUE SI $\sigma_v^2 = 0$, ENTONCES $E(MSR) = E(MSPW)$, POR LO QUE PARA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_v^2 = 0$ BASTA FORMULAR LA ESTADISTICA

$$F_{PW} = MSPW/MSR \tag{29}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(\sum m_t - k)$ Y $(N_{..} - \sum_t m_t)$ GRADOS DE LIBERTAD.

POR SU PARTE LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_u^2 = 0$ NO SE PUEDE PROBAR COM

PARANDO MSP CON MSR, YA QUE EN E(MSP) INTERVIENEN TANTO σ_u^2 COMO σ_v^2. EN EL CASO PARTICULAR DE QUE $n_{ti}=n$ PARA TODO t E i, ENTONCES $N_{t.}=m_t n$ Y:

$$E(MSP) = \sigma^2 + n^2\sigma_v^2 + \frac{(\sum_t m_t)^2 - \sum_t m_t^2}{(k-1)\sum_t m_t} n\sigma_u^2 \qquad (30)$$

$$E(MSPW) = \sigma^2 + n\sigma_v^2 \qquad (31)$$

POR LO QUE LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_u^2=0$ SE PUEDE PROBAR COMPARANDO MSP CON MSPW MEDIANTE LA ESTADISTICA

$$F_P = MSP/MSPW \qquad (32)$$

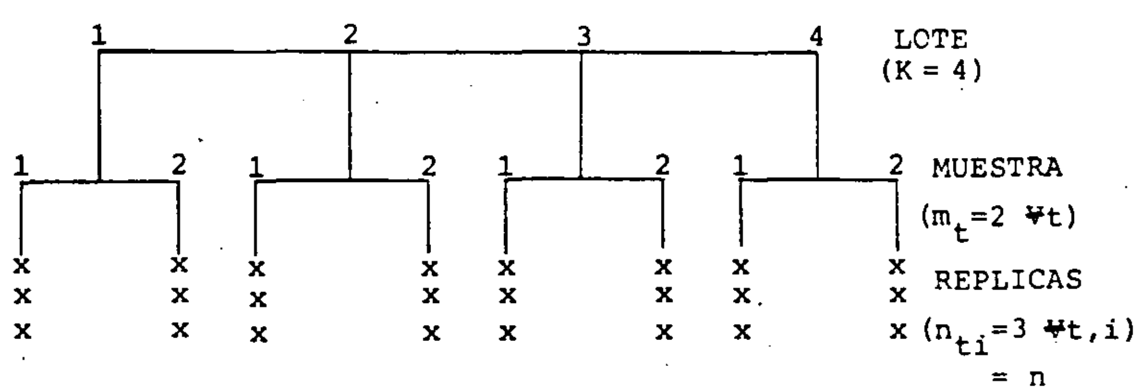
QUE TIENE DISTRIBUCION F CON (k-1) y $(\sum_t m_t - k)$ GRADOS DE LIBERTAD.

EJEMPLO

SE MUESTREARON CUATRO LOTES DE HULE CRUDO. DE CADA LOTE SE TOMARON DOS MUESTRAS. TRES PRUEBAS INDEPENDIENTES DE ESPECIMENES SE PREPARARON Y ANALIZARON PARA CADA UNO. ABAJO SE MUESTRAN LOS DATOS QUE DAN EL MODULO DE ELASTICIDAD OBTENIDO EN PORCENTAJE. CONSIDERE QUE SE APLICA EL MODELO DE VARIANCIA DE UNA COMPONENTE,CONSTRUYA LA TABLA ANOVA (ANALISIS DE VARIANCIA). USANDO LA TABLA OBTENGA ESTIMACIONES DE LA VARIANCIA DE CADA COMPONENTE.

LOTE O BACHADA	MODULO DE ELASTICIDAD (%)			
	1	2	3	4
MUESTRA 1	560 580 600	600 640 620	600 610 640	680 700 730
MUESTRA 2	660 610 600	580 630 670	580 660 620	720 770 740

SOLUCION



SE TRATA DE UN EXPERIMENTO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS.

LAS ECUACIONES A EMPLEAR SON

$$SST = \sum_{tij}\sum\sum (X_{tij} - \overline{X}_{...})^2 = \sum_{tij}\sum\sum X_{tij}^2 - kmn\,\overline{X}^2_{...}$$

$$SSP = \sum_{t} N_{t.}(\overline{X}_{t..} - \overline{X}_{...})^2$$

$$SSPW = \sum_{ti}\sum n_{ti}(\overline{X}_{ti.} - \overline{X}_{t..})^2$$

$$SSR = \sum_{tij}\sum\sum (X_{tij} - \overline{X}_{ti})^2 = SST - SSP - SSPW$$

APLICANDO LAS ECUACIONES TENEMOS

$k = 4$

$m = 2$

$n = 3$

LOTE O BACHADA	MUESTRA	MODULO DE ELASTICIDAD X_{tij}	X^2_{tij}	$\bar{X}_{ti.}$	$\bar{X}_{t..}$	$(\bar{X}_{ti.}-\bar{X}_{t..})^2$	$(X_{t..}-\bar{X}_{...})^2$
1	1	560	313600	580.0	601.6667	469.444	1599.99
		580	336400				
		600	360000				
	2	660	435600	623.333		469.444	
		610	372100				
		600	360000				
2	1	600	360000	620.0	623.333	11.1111	336.11
		640	409600				
		620	384400				
	2	580	336400	626.667		11.1111	
		630	396900				
		670	448900				
3	1	600	360000	616.667	618.333	2.7778	560.11
		610	372100				
		640	409600				
	2	580	336400	620.0		2.7778	
		660	435600				
		620	384400				
4	1	680	462400	703.333	723.333	400.0001	6615.11
		700	490000				
		730	532900				
	2	720	518400	743.333		400.0001	
		770	592900				
		740	547600				
TOTALES		15,400	9956200			1766.667	9111.33

$\overline{X}_{...} = 15400/24 = 641.6667$

$kmn = 4 \times 2 \times 3 = 24$

$SST = \sum_{tij}\sum\sum X^2_{tij} - kmn\,\overline{X}^2_{...}$

$\sum_{tij}\sum\sum X^2_{tij} = 560^2+580^2+600^2+660^2+610^2+600^2+600^2+640^2+620^2+580^2+630^2+670^2+$

$600^2+610^2+640^2+580^2+660^2+620^2+680^2+700^2+730^2+720^2+770^2+740^2 =$

$2,177,700+2,336,200+2,298,100+3,144,200 = 9,956,200$

$SST = 9,956,200 - 24(641.667)^2 = 74,533.33$

$SSP = 6(9111.33) = 54,667.98$

$SSPW = 3(1766.667) = 5,300.00$

$SSR = SST - SSP - SSPW = 74,533.33 - 54,667.98 - 5,300.00 = 14,565.35$

$MSP = \frac{SSP}{k-1} = \frac{54,667.98}{4-1} = 18,222.66$

$MSPW = \frac{SSPW}{k(m-1)} = \frac{5300.00}{4(2-1)} = 1,325.00$

$MSR = \frac{SSR}{km(n-1)} = \frac{14,565.35}{4x2(3-1)} = 910.33$

DE TABLAS PARA UN 99% DE

NIVEL DE CONFIANZA

$F_{PW} = \frac{MSPW}{MSR} = \frac{1,325.00}{910.33} = 1.46 \quad < \quad F_{0.01,4,16} = 4.77$

$F_P = \frac{MSP}{MSPW}\ \frac{18,222.66}{1,325.00} = 13.75 \quad < \quad F_{0.01,3,4} = 16.69$

POR LO TANTO, PARA LOS SUBGRUPOS SE ACEPTA LA HIPOTESIS, O SEA NO HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LAS MUESTRAS A UN NIVEL DE CONFIANZA DE 99%. PARA LOS LOTES SE ACEPTA LA HIPOTESIS, O SEA NO HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LOTES A UN NIVEL DE CONFIANZA DE 99%.

ANOVA

FUENTE DE VARIACION	SS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F (CALC)	F (DE TABLAS) (α = 0.01)
ENTRE LOTES O BACHADAS	SSP=54,667.98	k - 1 3	MSP=18,222.66	F_p=13.75<	16.69
ENTRE PARTES DE LAS BACHADAS	SSPW=5,300.00	k(m-1) 4	MSPW=1,325.00	F_{PW}=1.46<	4.77
RESIDUAL (ENTRE PRUEBAS)	SSR=14,565.35	km(n-1) 16	MSR=910.33		
TOTAL	74,533.33	23			

$F_{3,4,0.99} = 16.69$, $F_{4,16,0.99} = 4.77$

ESTIMACIONES DE LAS VARIANCIAS DE CADA COMPONENTE

PUESTO QUE E(MSR) = σ^2, SE TIENE

$\hat{\sigma}^2$ = MSR = 910.33

DE LA EC 31, $\sigma_V^2 = (E(MSPW) - \sigma^2)/n$, POR LO QUE

$\hat{\sigma}_V^2 = (MSPW - MSR)/n = (1325.00 - 910.33)/3 = 138.22$

RESTANDO LA EC. 31 A LA EC. 30:

$$E(MSP) - E(MSPW) = \frac{(\Sigma m_t)^2 - \Sigma m_t^2}{(k-1)\Sigma m_t} n\sigma_u^2 = sn\sigma_u^2$$

POR LO QUE

$$\sigma_u^2 = \{E(MSP) - E(MSPW)\}/sn$$

Y

$$\hat{\sigma}_u^2 = (MSP - MSPW)/sn$$

EN NUESTRO PROBLEMA

$$S = \frac{8^2 - 4 \times 4}{3 \times 8} = 2$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = (18{,}222.66 - 1325.00)/6 = 2816.28$$

9. EXPERIMENTO CON DOS FACTORES CRUZADOS. MODELO PARAMETRICO

EL MODELO PARA REPRESENTAR LA j-ESIMA OBSERVACION, X_{tij}, CORRESPONDIENTE AL NIVEL t DEL PRIMER FACTOR Y AL NIVEL i DEL SEGUNDO FACTOR ES

$$X_{tij} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{tij} \qquad (1)$$

DONDE ρ_t Y κ_i SON EL EFECTO DEL t-ESIMO NIVEL (RENGLON) DEL PRIMER FACTOR Y DEL i-ESIMO NIVEL (COLUMNA) DEL SEGUNDO FACTOR, RESPECTIVAMENTE, $(\rho\kappa)_{ti}$ ES EL EFECTO DE INTERACCION DE LOS DOS FACTORES EN SUS NIVELES t E i, Y Z_{tij} ES EL RESIDUO, ERROR O EFECTO NO EXPLICABLE POR LOS FACTORES; LAS Z_{tij} SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES CON DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA CERO E IDENTICA VARIANCIA, σ^2.

SI $t = 1, 2, \ldots, r$, E $i = 1, 2, \ldots, c$, SE DICE QUE SE TIENE UN EXPERIMENTO CRUZADO rxc; SE DICE QUE ESTE ES ORTOGONAL SI TIENE IGUAL NUMERO DE DATOS EN CADA CELDA (t, i), Y SI TODOS ESTOS SON RESULTADO DE OBSERVACIONES INDEPENDIENTES DE UNA POBLACION CON DISTRIBUCION NORMAL.

PUESTO QUE EL TOTAL DE PARAMETROS INVOLUCRADOS EN LA EC (1) PARA PRESENTAR A rc VALORES ESPERADOS ES $1 + r + c + rc$, ES NECESARIO IMPONER OTRAS $r + c + 1$ CONDICIONES; ELLAS SON:

$$\sum_{t=1}^{r} \rho_t = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{c} \kappa_i = 0 \qquad (3)$$

$$\sum_{t=1}^{r} (\rho\kappa)_{ti} = 0 \quad \text{PARA TODA } i \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{c} (\rho\kappa)_{ti} = 0 \quad \text{PARA TODA } t \qquad (5)$$

EN DONDE HAY $r + c + 2$ CONDICIONES, PERO UNA DE LAS DE LA EC (5) ES REDUNDANTE ($\sum_{i=1}^{c} (\rho\kappa)_{ri}$), YA QUE QUEDA OBLIGADA EN TERMINOS DE LAS $r + c - 1$ CONDICIONES RESTANTES IMPUESTAS POR LAS ECS (4) y (5).

DE ACUERDO CON ESTE MODELO SE OBTIENEN LOS SIGUIENTES PROMEDIOS:

PROMEDIO POR RENGLONES: $\bar{X}_{t..} = \xi + \rho_t + \bar{Z}_{t..}$ (6)

PROMEDIO POR COLUMNAS: $\bar{X}_{.i.} = \xi + \kappa_i + \bar{Z}_{.i.}$ (7)

PROMEDIO POR CELDAS: $\bar{X}_{ti.} + \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + \bar{Z}_{ti}$ (8)

PROMEDIO GLOBAL: $\bar{X}_{...} = \xi + \bar{Z}_{...}$ (9)

LOS EFECTOS DE CADA PARAMETRO SE PUEDEN SEPARAR MEDIANTE LAS ESTADISTICAS, QUE SE OBTIENEN CON LAS ECUACIONES (6) A (9):

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = \rho_t + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...}; \; E(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}) = \rho_t \qquad (10)$$

$$\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...} = \kappa_i + \bar{Z}_{.i.} - \bar{Z}_{...}; \; E(\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}) = \kappa_i \qquad (11)$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...} = (\rho\kappa)_{ti} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{.i.} + \bar{Z}_{...}$$

$$E(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}) = (\rho\kappa)_{ti} \qquad (12)$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}; \; E(X_{tij} - \bar{X}_{ti.}) = 0 \qquad (13)$$

PARA ANALIZAR LAS FUENTES DE VARIABILIDAD DE LOS DATOS, LA SUMA DE CUADRADOS SE PUEDE DIVIDIR, EN UNA PRIMERA ETAPA, EN LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE CELDAS Y DENTRO DE LAS CELDAS:

$$\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{\sum_t \sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE CELDAS}} + \underbrace{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}_{\text{DENTRO DE LAS CELDAS}} \quad (14)$$

UTILIZANDO LA EC (13) SE DEMUESTRA QUE

$$E\{\text{SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS}\} = E\{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2\} = $$
$$= (N_{..} - rc)\sigma^2 \quad (15)$$

POR LO QUE EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DE LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS ES $(N_{..} - rc)$ Y, POR LO TANTO, LA ESTADISTICA VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE LAS CELDAS O RESIDUAL:

$$MSR = \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2/(N_{..} - rc) \quad (16)$$

ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE σ^2.

LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE CELDAS SE PUEDE DIVIDIR EN TRES PARTES SOLO SI LAS n_{ti} SON IGUALES PARA TODA CELDA $(n_{ti}=n)$, O SI SE SATISFACEN CIERTAS CONDICIONES DE PROPORCIONALIDAD*; AQUI SOLO TRATAREMOS EL PRIMERO DE ESTOS CASOS, EN EL QUE SE OBTIENE:

$$n \sum_t \sum_i (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{nc \sum_t (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE RENGLONES = SSBR}} +$$

*BANCROFT, T. A., "TOPICS IN INTERMEDIATE STATISTICAL METHODS", IOWA UNIVERSITY PRESS, 1968.

$$+ \underbrace{nr\sum_{i}(\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE COLUMNAS} = SSBC} + \underbrace{n\sum_{t}\sum_{i}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...})^2}_{\text{INTERACCION} = SSI} \qquad (17)$$

LAS ESPERANZAS DE LOS TERMINOS DEL MIEMBRO DERECHO DE LA EC (17) SON:

ENTRE RENGLONES: $E(SSBR) = (r-1)\sigma^2 + nc\sum_{t}\rho_t^2$ (18)

ENTRE COLUMNAS: $E(SSBC) = (c-1)\sigma^2 + nr\sum_{i}\kappa_i^2$ (19)

INTERACCION: $E(SSI) = (r-1)(c-1)\sigma^2 + n\sum_{t}\sum_{i}(\rho\kappa)_{ti}^2$ (20)

POR LO QUE LOS GRADOS DE LIBERTAD RESPECTIVOS SON (r-1), (c-1) Y (r-1)(c-1); EN ESTAS CONDICIONES LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS SON:

ENTRE RENGLONES: $E(MSBR) = \sigma^2 + (r-1)^{-1}\, nc\sum_{t}\rho_t^2$ (21)

ENTRE COLUMNAS: $E(MSBC) = \sigma^2 + (c-1)^{-1}\, nr\sum_{i}\kappa_i^2$ (22)

INTERACCION: $E(MSI) = \sigma^2 + (r-1)^{-1}(c-1)^{-1}\, n\sum_{t}\sum_{i}(\rho\kappa)_{ti}^2$ (23)

POR LO ANTERIOR, LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE QUE $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$ SE PUEDE HACER PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE RENGLONES Y RESIDUAL, PARA LO CUAL SE UTILIZA LA ESTADISTICA

$$F = MSBR/MSR \qquad (24)$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(r-1)$ Y $(N_{..}-rc) = rc(n-1)$ GRADOS DE LIBERTAD.

ASIMISMO, LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE QUE $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots \kappa_c = 0$ SE PUEDE HACER PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE COLUMNAS Y RESIDUAL, CON LA ESTADISTICA

$$F = MSBC/MSR \tag{25}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(c-1)$ Y $rc(n-1)$ GRADOS DE LIBERTAD.

LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE INTERACCION NULA, O SEA, DE QUE $(\rho\kappa)_{ti} = 0$ PARA TODA t E i SE PRUEBA CON

$$F = MSI/MSR \tag{26}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(r-1)(c-1)$ Y $rc(n-1)$ GRADOS DE LIBERTAD.

EN EL CASO PARTICULAR DE UNA OBSERVACION POR CELDA $(n=1)$, NO SE REQUIERE EL TERCER INDICE (j) Y EL MODELO ES

$$X_{ti} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{ti} \tag{27}$$

EN ESTAS CONDICIONES NO SE OBTIENE NINGUNA SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL Y NO ES POSIBLE ESTIMAR A σ^2 DE MANERA SEPARADA DE ρ_t, κ_i Y $(\rho\kappa)_{ti}$ Y, EN CONSECUENCIA, NO SE PUEDEN HACER LAS COMPARACIONES DE VARIANCIAS DADAS POR LAS ECS (24), (25) Y (26). PARA SALVAR ESTE OBSTACULO EL MODELO DE LA EC (27) SE REDUCE A

$$X_{ti} = \xi + \rho_t + \kappa_i + Z_{ti} \tag{28}$$

EL CUAL IMPLICA QUE $(\rho\kappa)_{ti} = 0$ PARA TODA t E i, ES DECIR, QUE NO HAY INTERACCION ENTRE LOS PARAMETROS; EN ESTE CASO LA ESTADISTICA

$$\sum_t \sum_i (X_{ti} - \bar{X}_{t.} - \bar{X}_{.i} + \bar{X}_{..})^2/(r-1)(c-1) \tag{29}$$

ES EL VALOR MEDIO CUADRATICO RESIDUAL, MSR.

EL EXPERIMENTO DE BLOQUES ALEATORIZADOS VISTO ANTERIORMENTE ES, COMO PUEDE VERSE, EL CASO PARTICULAR DE UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES CRUZADOS CON n=1.

FORMULAS SIMPLIFICADAS PARA LAS SUMAS DE CUADRADOS (SS)

TOTAL: $$SST = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 \tag{30}$$

ENTRE RENGLONES: $$SSBR = nc\sum_t \bar{X}_{t..}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 \tag{31}$$

ENTRE COLUMNAS: $$SSBC = nr\sum_i \bar{X}_{.i.}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 \tag{32}$$

DENTRO CELDAS (RESIDUAL): $$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - n\sum_t \sum_i \bar{X}_{ti.}^2 \tag{33}$$

INTERACCION: $$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR \tag{34}$$

SI n = 1, SSR = SST - SSBR - SSBC.

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA EN DOS DIRECCIONES CON FACTORES CRUZADOS QUEDA EN LA FORMA:

FUENTE DE VARIACION	G. DE L.	SS	MS	F
ENTRE RENGLONES	r-1	SSBR	MSBR	MSBR/MSR
ENTRE COLUMNAS	c-1	SSBC	MSBC	MSBC/MSR
INTERACCION	(r-1)(c-1)	SSI	MSI	MSI/MSR
RESIDUAL (DENTRO DE LAS CELDAS)	rc(n-1)	SSR	MSR	
TOTAL	rcn-1	SST		

EJEMPLO

EN UN EXPERIMENTO PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE EXPANSION DE ALGUNAS ALEACIONES DE TITANIO, FABRICADAS CON DOS PROCEDIMIENTOS DIFERENTES, SE ELABORARON 16 ESPECIMENES A LOS CUALES SE LES MIDIO EL COEFICIENTE DE EXPANSION TERMICA. SE DESEA SABER SI LAS ALEACIONES Y PROCEDIMIENTOS INFLUYEN EN DICHO COEFICIENTE.

LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES SE PRESENTAN EN LA TABLA SIGUIENTE, EN LA CUAL CADA CELDA TIENE LAS SIGUIENTES ANOTACIONES:

X_{ti1}

X_{ti2} $\bar{X}_{ti.}$ $\bar{X}^2_{ti.}$

COEFICIENTES DE EXPANSION

PROCEDIMIENTOS	ALEACIONES					
	A	B	C	D	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	4.78 4.28 4.53 20.5209	3.84 5.28 4.56 20.7936	5.82 5.77 5.795 33.5820	4.57 5.44 5.005 25.0500	4.9725	24.7258
2	4.46 4.79 4.625 21.3906	4.73 3.36 4.045 16.3620	4.76 3.31 4.035 16.2812	4.30 3.86 4.08 16.6464	4.1963	17.6085
TOTALES	18.31	17.21	19.66	18.17		42.3343
$\bar{X}_{.i.}$	4.5775	4.3025	4.915	4.5425		
$\bar{X}^2_{.i.}$	20.9535	18.5115	24.1572	20.6343		

EL MODELO AQUI ES

$$X_{tij} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{tij}$$

$$t = 1,2; \quad i = 1,2,3,4; \quad j = 1,2$$

POR LO TANTO: $r = 2$, $c = 4$, $n = 2$, $\bar{X}_{...} = 73.35/16 = 4.5844$

$$\bar{X}^2_{...} = 21.0164, \; nrc\,\bar{X}^2_{...} = 336.2639$$

SSBR = 2 x 4 (24.7258 + 17.6085) - 336.2639

= 338.6741 - 336.2639 = 2.4102

SSBC = 2 x 2 (20.9535 + 18.5115 + 24.1572 + 20.6343)-

- 336.2639

SSBC = 337.0260 -336.2639 = 0.7621

TABLA DE CUADRADOS

X^2_{tij}

	A	B	C	D
1	22.8484 18.3184	14.7456 27.8784	33.8724 33.2929	20.8849 29.5936
2	19.8916 22.9441	22.3729 11.2896	22.6576 10.9561	18.4900 14.8996
TOTAL	84.0025	76.2865	100.7790	83.8681

$\sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} = 344.9361$

SSR = 344.9361 - 2(20.5209 + 20.7936 + 33.5820 + 25.0500 +

+ 21.3906 + 16.3620 + 16.2812 + 16.6464) = 344.9361 -

- 341.2534 = 3.6827

SST = 344.9361 - 336.2639 = 8.6722

SSI = 8.6722 - 0.7621 - 2.4102 - 3.6827 = 1.8172

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA RESULTA SER:

FUENTE DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ENTRE RENGLONES (PROCEDIMIENTOS)	2.4102	1	2.4102	5.236
ENTRE COLUMNAS (ALEACIONES)	0.7621	3	0.2541	0.552
INTERACCION	1.8172	3	0.6057	1.316
RESIDUAL	3.6827	8	0.4603	
TOTAL	8.6722			

$F_{0.95,1,8} = 5.32 > 5.236$ SE ACEPTA $H_0: \rho_t = 0 \ \forall t$

$F_{0.95,3,8} = 4.07 > 0.552$ SE ACEPTA $H_0: \kappa_i = 0 \ \forall i$

$F_{0.95,3,8} = 4.07 > 1.316$ SE ACEPTA $H_0: (\rho\kappa)_{ti} = 0 \ \forall t,i$

EJEMPLO

PARA DETERMINAR EL EFECTO DE CUATRO DIFERENTES PESTICIDAS EN LA PRODUCCION DE TRES TIPOS DE FRUTA CITRICA, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES CRUZADOS EN EL QUE SE ASIGNARON AL AZAR DOS ARBOLES FRUTALES DE CADA TIPO PARA SER FUMIGADOS POR CADA PESTICIDA. LAS PRODUCCIONES DE FRUTA EN KG/ARBOL SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

VARIEDAD DE FRUTA	PESTICIDA 1	2	3	4
1	49 39	50 55	43 38	53 48
2	55 41	67 58	53 42	85 73
3	66 68	85 92	69 62	85 99

REALIZAR EL ANALISIS DE VARIANCIA Y HACER ESTIMACIONES PUNTUALES DE LOS EFECTOS, DE LAS INTERACCIONES Y DE σ^2.

LAS HIPOTESIS A PROBAR SON:

LOS EFECTOS DE LAS FRUTAS SON NULOS: H_o: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

H_1: NO TODOS LOS EFECTOS DE LAS FRUTAS SON IGUALES A CERO

LA CUAL PUEDE HACERCE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE VARIEDADES DE FRUTAS (RENGLONES) Y RESIDUAL, MEDIANTE LA ESTADISTICA:

$$F_R = MSBR/MSR \quad \text{VERSUS } F_{0.01,2,12} = F_{CR}$$

b) LA PRUEBA DE LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS ENTRE LOS PESTICIDAS SON NULOS: H_o: $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0$

CONTRA LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS NO SON TODOS NULOS,

LA CUAL PUEDE HACERSE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE PESTICIDAS Y RESIDUAL:

$$F_C = MSBC/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,3,12}$$

c) FINALMENTE LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE INTERACCION NULA H_o: $(\rho K)_{ti} = 0 \forall t, \forall i$, CONTRA LA HIPOTESIS H_1 DE QUE NO TODAS LAS INTERACCIONES SON NULAS, PUEDE HACERSE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIA ENTRE LAS INTERACCIONES Y LA RESIDUAL, CON LA ESTADISTICA:

$$F_I = MSI/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,6,12}$$

DESARROLLEMOS LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA EN 2 DIRECCIONES CON FACTORES CRUZADOS.

VARIEDAD DE FRUTA	PESTICIDA 1		2		3		4		TOTALES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	49 39	44 1936	50 55	52.5 2756.25	43 38	40.5 1640.25	53 48	50.5 2550.25	375	46.88	2197.27
2	55 41	48 2304	67 58	62.5 3906.25	53 42	47.5 2256.25	85 73	79 6241	474	59.25	3510.56
3	66 68	67 4489	85 92	88.5 7832.25	69 62	65.5 4290.25	85 99	92 8464	626	78.25	6123.06
TOTALES	318		407		307		443		$N_{..} =$ 1475		11830.89
$\bar{X}_{.i.}$	53		67.83		51.17		73.83			$\bar{X}_{...} =$ 61.46	
$\bar{X}^2_{.i.}$	2809		4601.36		2618.03		5451.36		15479.75		$\bar{X}^2_{...} =$ 3777.23

	$\bar{X}_{ti.}$
X_{ti1}	
X_{ti2}	$\bar{X}^2_{ti.}$

$$\sum_t \sum_i \bar{X}^2_{ti} = 48{,}667.75$$

TOTAL: $SST = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - nrc\bar{X}^2_{...} = 49^2+39^2+55^2+41^2+...+73^2+85^2+55^2-2x3x4x$

$= 97839 - 90,655.92$

$= 7183.04$

ENTRE RENGLONES:

$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - nrc\bar{X}^2_{...} = 2 \times 4 \times 11830.89 - 90,655.92$

$= 94647.12 - 90,655.92$

$= 3991.20$

ENTRE COLUMNAS:

$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{...} = 2 \times 3 \times 15479.75 - 90,655.92$

$= 92878.50 - 90655.92$

$= 2222.58$

ENTRE CELDAS:

$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - n\sum_t \sum_i \bar{X}^2_{ti.} = 97839 - 2 \times 48667.75$

$= 507.5$

INTERACCION:

$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$

$= 7183.04 - 3991.20 - 2222.58 - 507.5$

$= 461.76$

PUDIENDO CON LO ANTERIOR COMPLETAR LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA:

FUENTE DE VARIACION	G. DE L	SS	MS	F_E	F_C
ENTRE VARIEDADES DE FRUTA	r-1=3-1=2	SSBR = 3991.20	SSBR/(r-1)= 1995.60	MSBR/MSR= = 47.19 >	$F_{CR}=F_{0.01,2,12}$ = 6.93
ENTRE PESTICIDA	c-1=4-1=3	SSBC = 2222.58	SSBC/(c-1)= 740.86	MSBC/MSR= = 17.52 >	$F_{CC}=F_{0.01,3,12}$ = 5.95
INTERACCION	(r-1)(c-1) = 6	SSI = 461.76	SSI/(r-1)(c-1)= 76.96	MSI/MSR = = 1.82 <	$F_{CI}=F_{0.01,6,12}$ = 4.82
RESIDUAL (DENTRO DE CELDAS)	rc(n-1)=12	SSR = 507.5	SSR/rc(n-1) 42.29		
TOTAL	rcn-1=23	SST = 7183.04			

COMO PUEDE OBSERVARSE EN LAS F_E (F ESTIMADA) Y LAS F_C (F CRITICAS) SE TENDRAN LAS SIGUIENTES CONCLUSIONES DEL ANALISIS DE VARIANCIA (VER LAS 2 ULTIMAS COLUMNAS)

1. DADO QUE $F_{ER} > F_{CR} \Rightarrow$ SE RECHAZA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ SI HAY EFECTO ENTRE VARIEDADES DE FRUTAS
2. DADO QUE $F_{EC} > F_{CC} \Rightarrow$ SE RECHAZA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ SI HAY EFECTO ENTRE LOS DIFERENTES TIPOS DE PESTICIDAS.
3. DADO QUE $F_{EI} < F_{CI} \Rightarrow$ SE APLICA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ NO HAY EFECTO DE INTERACCION

CALCULO DE LOS ESTIMADORES DE LOS EFECTOS:

EFECTO DE LA VARIEDAD DE FRUTAS

DADO QUE $E\{\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}\} = \rho_t \Rightarrow \hat{\rho}_t = \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}$

$\hat{\rho}_1 = 46.88 - 61.46 = -14.58$

$\hat{\rho}_2 = 59.25 - 61.46 = -2.21$

$\hat{\rho}_3 = 78.25 - 61.46 = 16.79$

EFECTOS DE LA VARIEDAD DE PESTICIDAS

DADO QUE $E\{\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}\} = k_i \Rightarrow \hat{k}_i = \bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}$

$\hat{k}_1 = 53 - 61.46 = -8.46$

$\hat{k}_2 = 67.83 - 61.46 = 6.37$

$\hat{k}_3 = 51.17 - 61.46 = -10.29$

$\hat{k}_4 = 73.83 - 61.46 = 12.37$

ESTIMACIONES PUNTUALES DE LAS INTERACCIONES:

DADO QUE $E\{\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}\} = (\rho k)_{ti} \Rightarrow$

TENDREMOS:

$\widehat{(\rho k)}_{ti} = \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}$

$(\hat{\rho k})_{1,1} = 44 - 46.88 - 53 + 61.46 = 5.58$

$(\hat{\rho k})_{1,2} = 52.5 - 46.88 - 67.83 + 61.46 = -0.75$

$(\hat{\rho k})_{1,3} = 40.5 - 46.88 - 51.17 + 61.46 = 3.91$

$(\hat{\rho k})_{1,4} = 50.5 - 46.88 - 73.83 + 61.46 = -8.75$

$(\hat{\rho k})_{2,1} = 48 - 59.25 - 53 + 61.46 = -2.79$

$(\hat{\rho k})_{2,2} = 62.5 - 59.25 - 67.83 + 61.46 = -3.12$

$(\hat{\rho k})_{2,3} = 47.5 - 59.25 - 51.17 + 61.46 = -1.46$

$(\hat{\rho k})_{2,4} = 79 - 59.25 - 73.83 + 61.46 = 7.38$

$(\hat{\rho k})_{3,1} = 67 - 78.25 - 53 + 61.46 = -2.79$

$(\hat{\rho k})_{3,2} = 88.5 - 78.25 - 67.83 + 61.46 = 3.88$

$(\hat{\rho k})_{3,3} = 67.5 - 78.25 - 51.17 + 61.46 = -2.46$

$(\hat{\rho k})_{3,4} = 92 - 78.25 - 73.83 + 61.46 = 1.38$

FINALMENTE, DADO QUE EL VALOR DE MSW (O MSR) <u>ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE $\sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 42.29$ (VER TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA</u>

<u>CABE OBSERVAR QUE TODOS LOS ESTIMADORES $\hat{\rho}_t$, $\hat{k}_i$, $(\hat{\rho k})_{ti}$ Y $\hat{\sigma}^2$ SON INSESGADOS</u>.

MODELO CON DIFERENTES TAMAÑOS DE MUESTRA

SE DESARROLLA LA SUMA DE CUADRADOS:

$$\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(X_{tij}-\bar{X}_{...})^2 = \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{t..}-\bar{X}_{...})^2 +$$

$$+ \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{.i.}-\bar{X}_{...})^2 +$$

$$+ \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(X_{tij}-\bar{X}_{ti.})^2 +$$

$$+ \sum_{t=1}^{r}\sum_{r=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{ti.}-\bar{X}_{t..}-\bar{X}_{.i.}+\bar{X}_{...})^2$$

SST = SSBR + SSBC + SSI + SSR

$$n_{t.} = \frac{\sum_{i=1}^{c} n_{ti}}{c} \; ; \qquad n_{.i} = \frac{\sum_{t=1}^{r} n_{ti}}{r} \; ; \qquad n_{..} = \frac{\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c} n_{ti}}{cr}$$

ASI:

$$SSBR = \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{t..}^2 - 2\bar{X}_{t..}\bar{X}_{...} + \bar{X}_{...}^2)$$

$$= c\sum_{t=1}^{r} n_{t.}\bar{X}_{t..}^2 - 2c\bar{X}_{...}\sum_{t}^{r} n_{t.}\bar{X}_{t..} + n_{..}cr\bar{X}_{...}^2$$

$$= c \sum_{t=1}^{r} n_{t.} \bar{X}^2_{t..} - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSBC = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (\bar{X}_{.i.}^2 - 2\bar{X}_{.i.} \bar{X}_{...} + \bar{X}_{...}^2)$$

$$= r \sum_{i=1}^{c} n_{.i} \bar{X}^2_{.i.} - rcn_{..} \bar{X}_{...}^2$$

$$SSR = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (X_{tij}^2 - 2X_{tij} \bar{X}_{ti.}^2)$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} X_{tij}^2 - \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} n_{ti} \bar{X}_{ti.}^2$$

$$SST = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (X_{tij}^2 - 2X_{tij} \bar{X}_{...} + \bar{X}^2_{...})$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} X_{tij}^2 - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$$

EJEMPLO:

$t = 1, r;\quad r = 2$

$i = 1, c;\quad c = 3$

$j = 1, n_{ti}$

TRATAMIENTOS	BLOQUES		
	1	2	3
1	10 15 8	12 9	5 18
2	7 12	13 11 10	9

$$n_{ti} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};\qquad n_{t.} = \begin{bmatrix} 2.33 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$n_{.i} = [2.5,\ 2.5,\ 1.5];\quad n_{..} = 2.165$$

CALCULOS NECESARIOS:

$$\bar{X}_{...} = 10.692;\quad \bar{X}^2_{...} = 114.325$$

$$\sum_t \sum_i \sum_j X^2_{ijk} = 1627$$

$$\bar{X}_{ti.} = \begin{bmatrix} 11 & 10.5 & 11.5 \\ 9.5 & 11.33 & 9 \end{bmatrix};\qquad \bar{X}_{t..} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10.33 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_{.i.} = [10.4,\ 11,\ 10.66\ ];$$

$$\sum_{t}\sum_{i} n_{ti}\,\bar{X}_{ti.}^{2} = 1494.606$$

$$\sum_{t} n_{t.}\,\bar{X}_{t..}^{2} = 495.711$$

$$\sum_{i} n_{.i}\,\bar{X}_{.i.}^{2} = 743.353$$

SST = 1627 - (2)(3)(2166)(114.325) = 140.775

SSBR = (3)(495.711) - (2)(3)(2.166)(114.325) = 1.366

SSBC = (2)(743.353) - (2)(3)(2.166)(114.325) = 0.939

SSR = 1627 - 1494.606 = 132.394

SSI = 140.775 - 1.366 - 0.939 - 132.394 = 6.076

ANALISIS DE VARIANZA:

FUENTE:	SS	G.L.	MS	F	$\alpha = 0.05$
RENGLONES (BR)	1.366	r - 1 = 1	1.366	0.0722	5.59
COLUMNAS (BC)	.939	c - 1 = 2	0.4695	0.0248	4.74
INTERACCION (I)	6.076	(r-1)(c-1) = 2	3.038	0.1606	4.74
RESIDUAL (R)	132.394	$rc(n_{..}-1) = 6.996 \cong 7$	18.913		
TOTAL (T)	140.775				

∴ NO HAY EFECTO POR RENGLONES (TRATAMIENTOS).

NO HAY EFECTO POR COLUMNAS (BLOQUES).

NO HAY EFECTO POR LA INTERELACION ENTRE RENGLONES Y COLUMNAS

MODELO CON NIVELES CRUZADOS ALEATORIOS

ESTE MODELO SE OBTIENE A PARTIR DEL PARAMETRICO REEMPLAZADO ρ_t, k_i $(\rho k)_{ti}$ POR U_t, V_i, W_{ti}, RESPECTIVAMENTE DONDE LAS U's V's Y W's SON VARIABLES ALEATORIAS NORMALES, MUTUAMENTE INDEPENDIENTES CADA UNA CON VALOR ESPERADO CERO Y:

$$1) \quad Var(U_t) = \sigma_U^2 \ \forall t$$

$$2) \quad Var(V_i) = \sigma_V^2 \ \forall i$$

$$3) \quad Var(W_{ti}) = \sigma_W^2 \ \forall t,i$$

CONSIDERAMOS SOLAMENTE EL CASO $n_{ti} = n \ \forall t,i$ O SEA IGUAL NUMERO DE ELEMENTOS EN CADA CELDA ti, CON LO CUAL EL MODELO SERA:

$$4) \quad X_{tij} = \xi + U_t + V_i + W_{ti} + Z_{tij}$$

DE DONDE:

$$5) \quad \bar{X}_{...} = \xi + \bar{U} + \bar{V} + \bar{W}_{..} + \bar{Z}_{...}$$

$$6) \quad \bar{X}_{t..} = \xi + U_t + \bar{V} + \bar{W}_{t.} + \bar{Z}_{t..}$$

$$7) \quad \bar{X}_{.i.} = \xi + \bar{U} + V_i + \bar{W}_{.i} + \bar{Z}_{.i.}$$

$$8) \quad \bar{X}_{ti.} = \xi + U_t + V_i + W_{ti} + \bar{Z}_{ti.}$$

6) -5):

$$9) \quad \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = (U_t - \bar{U}) + (\bar{W}_{t.} - \bar{W}_{..}) + (\bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...})$$

7) -5):

$$10) \quad \bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...} = (V_i - \bar{V}) + (\bar{W}_{.i} - \bar{W}_{..}) + (\bar{Z}_{.i.} - \bar{Z}_{...})$$

8) - 6) - 7) + 5)

$$11) \quad \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...} = (W_{ti} - \bar{W}_{t.} - \bar{W}_{.i} + \bar{W}_{..}) + $$
$$+ (\bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{.i.} + \bar{Z}_{...})$$

DONDE:

$$12) \quad \bar{U} = \sum_{t=1}^{r} U_t/r \qquad 13)\ldots \quad \bar{V} = \sum_{i=1}^{c} V_i/c$$

$$14) \quad \bar{W}_{t.} = \sum_{i=1}^{c} W_{ti}/c \qquad 15)\ldots \quad \bar{W}_{.i} = \sum_{t=1}^{r} W_{ti}/r$$

$$16) \quad \bar{W}_{..} = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} W_{ti}/rc$$

4) - 8):

$$17) \quad X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}$$

NUEVAMENTE, PARA ANALIZAR LA FUENTE DE VARIABILIDAD DE LOS DATOS, LA SUMA DE CUADRADOS SE PUEDE DIVIDIR EN 2 PARTES:

$$18). \quad \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{\sum_t \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE CELDAS}} + \underbrace{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}_{\text{DENTRO DE LAS CELDAS}}$$

DE AQUI QUE:

E{SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS} =

$$E\{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2\} = (N_{..} - rc)\sigma^2$$

POR LO CUAL LA ESTADISTICA VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE CELDAS O RESIDUAL (MSW O MSR)

$$19)\quad E(MSR) = \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2/(N_{..} - rc) = \sigma^2$$

SE USA NUEVAMENTE PARA ESTIMAR σ^2 O SEA LA VARIANZA DE CADA Z_{tij}.

DE LAS ECS. 9), 10) y 11) ENCONTRAMOS LOS SIGUIENTES VALORES ESPERADOS DE LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS:

ENTRE RENGLONES: $E\{MSBR\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2 + nc\sigma_u^2$

ENTRE COLUMNAS: $E\{MSBC\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2 + nr\sigma_v^2$

INTERACCION: $E\{MSI\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2$

LA SITUACION ES SIMILAR A LA DE LA CLASIFICACION DE DOS FACTORES NO CRUZADOS CUANDO UN MODELO ALEATORIO ES APROPIADO.

<u>LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_w^2 = 0$ PUEDE PROBARSE COMPARANDO EL VALOR MEDIO CUADRATICO DE LAS INTERACCIONES CON EL RESIDUAL; ESTO ES:</u>

$$F = MSI/MSR$$

POR OTRO LADO PARA PROBAR LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_u^2 = 0$ DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE RENGLONES DEBERA HACERSE LA COMPARACION DE:

$$F = MSBR/MSI$$

Y FINALMENTE; PARA PROBAR LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_v^2 = 0$, DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE COLUMNAS, DEBERA HACERSE LA COMPARACION DE:

$$F = MSBC/MSI$$

JUSTAMENTE, COMO EN EL CASO DE LA CLASIFICACION NO CRUZADA, TAMBIEN ES LA ALEATORIEDAD DEL TERMINO QUE REPRESENTA LA INTERACCION EN EL MODELO EL QUE TOMA LA DIFERENCIA ESENCIAL EN EL ANALISIS. EL PROCEDIMIENTO FORMAL DE PRUEBA NO SE AFECTA SI LOS EFECTOS ENTRE RENGLONES O COLUMNAS SE CAMBIAN DE PARAMETRICOS A TERMINOS ALEATORIOS O VICEVERSA (DANDO UN MODELO MEZCLADO).

ES UTIL RECORDAR QUE SI EL MSBR O MSBC SE COMPARA CON EL MSR CUANDO EL MODELO ALEATORIO ES APROPIADO, EL POSIBLE EFECTO DE UNA VARIANCIA $\sigma_w^2 \neq 0$ DE INTERACCION PUEDE DEBERSE SOLAMENTE AL INCREMENTO DEL TAMAÑO MEDIO DE LA RELACION CON EL MSR.

EJEMPLO

SUPONGAMOS QUE UNA COMPAÑIA DISPONE DE n FUENTES DIFERENTES DE MATERIAS PRIMAS A_n Y m MAQUINAS DE DISTINTAS MARCAS B_m PARA PRODUCIR UN NUEVO PRODUCTO. SE SABE QUE LAS MARCAS DE MAQUINAS SON IGUALMENTE PRODUCTIVAS EN TERMINOS DE VELOCIDAD - EL NUMERO DE TIRADAS PRODUCIDAS POR HORA - PERO NO SE SABE SI TRABAJAN IGUALMENTE BIEN EN TERMINOS DEL NUMERO DE UNIDADES DEFECTUOSAS ELABORADAS ENTRE LAS PRODUCCIONES POR HORA.

ADEMAS, LA FIRMA DESCONOCE SI HAY DIFERENCIAS EN LA CALIDAD DE LAS MATERIAS PRIMAS PROVENIENTES DE LAS FUENTES. POR ULTIMO SE SOSPECHA QUE LA MATERIA PRIMA DE UNA FUENTE PUEDE PRESENTAR UN EFECTO ESPECIAL EN UNA MAQUINA PARTICULAR O VICEVERSA. POR CONSIGUIENTE, SE DESEA ESTABLECER SI LOS A_n SON DIFERENTES, SI LOS B_m SON DIFERENTES Y SI EXISTE ALGUN EFECTO CONJUNTO A x B. PARA RESPONDER A ESTAS PREGUNTAS SE SELECCIONARON AL AZAR 4 FUENTES: A_1, A_2, A_3 Y A_4 Y 3 MARCAS DE MAQUINAS B_1, B_2 Y B_3, Y SE HIZO OPERAR CADA MARCA DE MAQUINA EN IDENTICAS CONDICIONES CON CADA FUENTE DE MATERIAL DURANTE DOS HORAS Y SE REGISTRO EL NUMERO DE UNIDADES DEFECTUOSAS POR CADA HORA COMO SE INDICA EN LA TABLA. CON ESTOS DATOS, ¿A QUE CONCLUSION SE PUEDE LLEGAR?

MAQUINA	FUENTES DE MAT. PRIMA								TOTALES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
	1		2		3		4				
1	9 5	7 49	6 6	6 36	8 4	6 36	5 7	6 36	50	6.5	39.06
2	4 2	3 9	5 3	4 16	2 6	4 16	1 5	3 9	28	3.5	12.5
3	10 6	8 64	8 9	8.5 72.5	7 8	7.5 56.25	9 5	7 49	62	7.75	60.06
TOTALES	36		37		35		32		140		111.62
$\bar{X}_{.i.}$	6		6.17		5.83		5.33			$\bar{X}_{...}$ = 5.83	
$\bar{X}^2_{.i.}$	36		38.03		34.03		28.44		136.5		$\bar{X}^2_{...}$ = 33.99

$r = 3$, $c = 4$, $n = 2$

$$\sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} = 9^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 + \ldots.\ 5^2 + 9^2 + 5^2 = 952$$

TOTAL: $SST = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - ncr\bar{X}^2_{...} = 952 - 2 \times 3 \times 4 \times 33.99 =$

$$= 952 - 815.73 = 136.27$$

ENTRE RENGLONES:

$$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - ncr\bar{X}^2_{...} = 892.96 - 815.73 = 77.23$$

ENTRE COLUMNAS:

$$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{...} = 819 - 815.73 = 3.27$$

ENTRE CELDAS:

$$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - n\sum_t \sum_i \bar{X}^2_{ti.} = 952 - 2 \times 448.75 = 54.50$$

INTERACCION: $SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$

$$= 136.27 - 77.23 - 3.27 - 54.50$$

$$= 1.27$$

LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA SERA:

FUENTE DE VARIACION:

	G. de l.	SS	MS	F estimada.		F crítica.
ENTRE MAQUINAS	r-1=3-1=2	SSBR = 77.23	SSBR/(R-1) = 38.62	F_{ER} = 38.62/0.21 183.90	>	$F_{ER} = F_{0.01,2,6}$ = 10.92
ENTRE FUENTES	c-1=4-1=3	SSBC = 3.27	MSBC = SSBC/(c-1) = 1.09	F_{EC} = 1.09/0.21 5.19	<	$F_{CC} = F_{0.01,3,6}$ = 9.78
INTERACCION	(r-1)(c-1) = 6	SSI = 1.27	MSI = SSI/(r-1)(c-1) = 0.21	F_{EI}=0.21/4.54 = 0.05	<	$F_{CI} = F_{0.01,6,12}$ = 4.82
RESIDUAL	rc(n-1)=12	SSR = 54.50	MSR = SSR/rc(n-1) = 4.54			
TOTAL	rcn-1 = 23	SST = 136.27				

DE LO ANTERIOR CONCLUIMOS QUE:

DADO, QUE $F_{CR} < F_{ER} \Rightarrow$ SI HAY VARIABILIDAD ENTRE LAS DIFERENTES MARCAS DE MAQUINA.

COMO $F_{CC} > F_{EC} \Rightarrow$ NO HAY EFECTO ENTRE LAS DIFERENTES FUENTES DE MATERIA PRIMA

Y FINALMENTE COMO:

$F_{CI} > F_{EI} \Rightarrow$ NO HAY EFECTO ENTRE LAS INTERACCIONES DE LAS MAQUINAS Y LAS FUENTES DE MATERIA PRIMA.

EJEMPLO

EN UNA INVESTIGACION SOBRE LA ACUMULACION DE UNA SUSTANCIA EN LOS DIENTES DE LAS JOVENES DE 18 A 20 AÑOS DE EDAD EN UNA LOCALIDAD, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO EN EL QUE SE SELECCIONARON AL AZAR TRES JOVENES, A CADA UNA DE LAS CUALES SE LES RASPO EL SARRO DE LA DENTADURA; EL SARRO DE CADA UNA SE DIVIDIO EN SEIS PARTES IGUALES Y SE LES ENTREGARON DOS PARTES A CADA UNO DE TRES ANALISTAS TOMADOS TAMBIEN AL AZAR, CON EL FIN DE QUE HICIERAN EL ANALISIS QUIMICO PARA DETERMINAR LA CANTIDAD DE LA SUSTANCIA DE INTERES CONTENIDA EN CADA PARTE. LAS CONCENTRACIONES, EN MICROGRAMOS OBTENIDAS SE PRESENTAN EN LA SIGUIENTE TABLA:

	MUJER		
ANALISTA	A	B	C
1	13.2	10.6	8.5
	12.3	9.8	8.9
2	12.5	9.6	7.9
	12.9	10.7	8.4
3	13.0	9.9	8.3
	12.4	10.3	8.6

SOLUCION

a) HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA Y LAS ESTIMACIONES DE TODOS LOS PARAMETROS DE INTERES; TOME $\alpha = 0.05$. ESBOCE SUS CONCLUSIONES.

SE TRATA DE UN PROBLEMA DE NIVELES ALEATORIOS. PARA OBTENER LOS PARAMETROS NECESARIOS PARA EL CALCULO DE LAS ESTADISTICAS F, SE USARA LA SIGUIENTE TABLA.

ANALIS-TA	MUJER A		MUJER B		MUJER C		TOTA-LES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	13.2 12.3	12.75 162.563	10.6 9.8	10.2 104.04	8.5 8.9	8.7 75.69	63.3	10.55	111.3025
2	12.5 12.9	12.7 161.29	9.6 10.7	10.15 103.023	7.9 8.4	8.15 66.422	62	10.333	106.7778
3	13.0 12.4	12.7 161.29	9.9 10.3	10.1 102.01	8.3 8.6	8.45 71.403	62.5	10.41667	108.5069
TOTALES	76.3		60.9		50.6		187.8		326.5872
$\bar{X}_{.i.}$	12.71667		10.15		8.433				
$\bar{X}^2_{.i.}$	161.71361		103.0225		71.1211		Σ=335.85722		r = 3 c = 3 n = 2

EN CADA CELDA SE INDICA:

$$\boxed{\begin{array}{cc} X_{ti1} & \bar{X}_{ti.} \\ X_{ti2} & \bar{X}^2_{ti.} \end{array}}$$

DE LOS DATOS:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ X^2_{tij} = 13.2^2+12.3^2+12.5^2+12.9^2+13^2+12.4^2+10.6^2+9.8^2+9.6^2+10.7^2+9.9^2+$$
$$+10.3^2+8.5^2+8.9^2+7.9^2+8.4^2+8.3^2+8.6^2 = 2017.38$$

DE LA TABLA:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ \bar{X}^2_{ti.} = 162.563+161.29+161.29+104.4+103.023+102.01+75.69+66.422+71.403=$$
$$= 1007.73$$

$\bar{X}_{\cdots} = \frac{187.8}{18} = 10.433$, $\bar{X}^2_{\cdots} = 108.854$, $nrc\bar{X}^2_{\cdots} = 2(3)(3)(108.854) = 1959.38$

$\sum_t \bar{X}^2_{t..} = 326.5872$, $\sum_i \bar{X}^2_{.i.} = 335.85722$

POR LO TANTO LAS SUMAS DE CUADRADOS VALDRAN:

$SST = \Sigma\Sigma\Sigma X^2_{tij} - nrc\bar{X}^2_{\cdots} = 2017.38 - 1959.38 = 58$

$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - nrc\bar{X}^2_{\cdots} = (2)(3)(326.58722) - 1959.38 = 0.14333$, CON $(r-1)$ G DE L.

$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{\cdots} = (2)(3)(335.85722) - 1959.38 = 55.76332$, CON $(c-1)$ G. DE L

$SSR = \Sigma\Sigma\Sigma X^2_{tij} - n\sum_{ti}\Sigma \bar{X}^2_{ti.} = 2017.38 - (2)(1007.731) = 1.918$, CON $rc(n-1)$ G. DE L

$SSI + SST - SSBR - SSBC - SSR = 58 - 0.1433 - 55.76332 - 1.918 = 0.1753467$, con $(r-1)(c-1)$ G. DE L

EN LA SIGUIENTE TABLA SE RESUMEN LOS RESULTADOS DEL ANALISIS DE VARIANCIA; COMO SE TRATA DE UN MODELO DE NIVELES ALEATORIOS, LAS ESTADISTICAS F SE CALCULARAN COMO:

EFECTOS DE INTERACCION: $F = \frac{MSI}{MSR}$

EFECTOS "DEL ANALISTA" $F = \frac{MSBR}{MSI}$

EFECTOS DE "LA MUJER" $F = \frac{MSBC}{MSI}$

TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA

ORIGEN DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ANALISTA	0.14333	2	0.071665	1.6347
MUJER	55.76332	2	27.88166	635.998
INTERACCION	0.1753467	4	0.0438392	0.2057
RESIDUO	1.918	9	0.213	
TOTAL	58			

LOS VALORES CRITICOS PARA LAS ESTADISTICAS ANTERIORES, CON $\alpha = 0.05$ SON:

ANALISTA: $F_{0.05,2,4} = 6.94$

MUJER $F_{0.05,2,4} = 6.94$

INTERACION $F_{0.05,4,9} = 3.63$

COMO: $6.94 > 1.6347$ EL EFECTO DEL ANALISTA NO ES SIGNIFICATIVO

$6.94 < 635.998$ EL EFECTO DE LA MUJER ES SIGNIFICATIVO

$3.63 > 0.2057$ EL EFECTO DE INTERACCION ANALISTA-MUJER NO ES SIGNIFICATIVO

COMO PUEDE VERSE DE LOS RESULTADOS ANTERIORES, EL UNICO EFECTO SIGNIFICATIVO ES EL DE LA MUJER; ES DECIR QUE LA CONCENTRACION DE LA SUSTANCIA DE INTERES SI DEPENDE DE LA MUJER DE QUE SE TRATE.

b) REALIZAR LO PEDIDO EN EL INCISO ANTERIOR CONSIDERANDO AHORA EL PROBLEMA COMO SI SE TRATARA DE PARAMETROS FIJOS. COMPARE Y COMENTE LOS RESULTADOS DE AMBOS INCISOS

EN ESTE CASO LAS ESTADISTICAS F ESTAN DADAS POR:

-ANALISTA: $F = \frac{MSBR}{MSR}$

-MUJER: $F = \frac{MSBC}{MSR}$

-INTERACCION: $F = \frac{MSI}{MSR}$

POR LO TANTO, LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA QUEDARIA:

ORIGEN DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ANALISTA	0.14333	2	0.071665	0.33645
MUJER	55.76332	2	27.88166	131.236
INTERACCION	0.1753467	4	0.0438392	0.2058
RESIDUO	1.918	9	0.213	
TOTAL	58			

LOS VALORES CRITICOS, EN TABLAS, SON:

ANALISTA: $F_{0.05,2,\ 9} = 4.26$

MUJER: $F_{0.05,2,\ 9} = 4.26$

INTERACCION: $F_{0.05,4,9} = 3.63$

COMO:

$4.26 > 0.33645$ EL EFECTO DEL ANALISTA NO ES SIGNIFICATIVO

$4.26 < 131.236$ EL EFECTO DE LA MUJER ES SIGNIFICATIVO

$3.63 > 0.2058$ EL EFECTO DE INTERACCION NO ES SIGNIFICATIVO

COMPARANDO LOS RESULTADOS DE AMBOS MODELOS PODEMOS OBSERVAR QUE LOS RESULTADOS HAN SIDO IGUALES EN CUANTO A CONCLUSIONES; NO OBSTANTE LOS RANGOS DE LAS ZONAS DE ACEPTACION HAN SIDO ALTERADAS, ASI COMO LAS ESTADISTICAS F CALCULADAS, POR LO QUE CABRIA LA POSIBILIDAD DE QUE EN UN CASO CERCA DE LOS LIMITES DE ACEPTACION (VALORES CRITICOS), LA APLICACION DE UN MODELO U OTRO DERIVARA EN CONCLUSIONES DIFERENTES.

c) CALCULAR EL INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA DE LAS CONCENTRACIONES MEDIAS OBTENIDAS POR LOS ANALISTAS 2 Y 3.

	ANALISTA		ANALISTA
	2	3	1
	12.5	13.0	13.2
	12.9	12.4	12.3
	9.6	9.9	10.6
	10.7	10.3	9.8
	7.9	8.3	8.5
	8.4	8.6	8.9
PROMEDIO	10.333	10.417	10.55

EL INTERVALO DE CONFIANZA ESTA DADO POR:

$$\overline{X}_i - \overline{X}_j \pm t_{\nu,\, \alpha/2} \; S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS, CONSIDERANDO LA TOTALIDAD DE LOS DATOS SERA:

$$(12.5-10.33)^2+(12.9-10.33)^2+(9.6-10.33)^2+(10.7-10.33)^2+(7.9-10.33)^2+(8.4-10.33)^2+$$

$$+\ (13-10.417)^2+(12.4-10.417)^2+(9.9-10.417)^2+(10.3-10.417)^2+(8.3-10.417)^2+(8.6-10.41$$

$$+\ (13.2-10.55)^2+12.3-10.55)^2+(12.5-10.55)^2+(12.9-10.55)^2+(13-10.55)^2+(12.4+10.55)^2$$

$$=\ 57.8567$$

ENTONCES $S^2 = \frac{57.8567}{N-k} = \frac{57.8567}{18-3} = 3.857,\ S = 1.9639$

EN TABLAS: $t_{15,0.025} = 2.132$

POR TANTO, EL INTERVALO DE CONFIANZA VALE:

$$10.417 - 10.333 \pm 2.132(1.9639)\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 0.084 \pm 2.417$$

d) APLIQUE EL METODO DE TUKEY PARA REALIZAR LAS COMPARACIONES MULTIPLES DE LAS MEDIAS DE LOS RESULTADOS DE LAS MUJERES. DESSARROLLE Y APLIQUE A ESTE PROBLEMA LOS METODOS DE FISHER Y DE DUNCAN PARA COMPARACIONES MULTIPLES.

METODO DE TUKEY

EL MARGEN, DE ACUERDO AL METODO DE TUKEY, ESTA DADO POR LA ECUACION:

$$\frac{q_{k,\nu,\alpha/2}}{\sqrt{2}}\, S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

EN ESTE CASO: $n_i = n_j = cte = n = 6$

EL VALOR DE S SE OBTENDRA DE LA TOTALIDAD DE LOS DATOS, COMO $MSW = S^2$, PARA ESTO SE OBTENDRA MSW:

	MUJER		
	A	B	C
	13.2	10.6	8.5
	12.3	9.8	8.9
	12.5	9.6	7.9
	12.9	10.7	8.4
	13.0	9.9	8.3
	12.4	10.3	8.6
PROMEDIOS :	12.717	10.15	8.433

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS SERA:

$$(13.2-12.717)^2+(12.3-12.717)^2+(12.5-12.717)^2+(12.9-12.717)^2+(13-12.717)^2+$$
$$+(12.4-12.717)^2+(10.6-10.15)^2+(9.8-10.15)^2+(9.6-10.15)^2+(10.7-10.15)+$$
$$+(9.9-10.15)^2+(10.3-10.15)^2(8.5-8.433)^2+(8.9-8.433)^2+(7.9-8.433)^2+(8.4-8.433)^2$$
$$+(8.3-8.433)^2+(8.6-8.433)^2 = 2.23667$$

$$MSW = \frac{2.23667}{18-3} = 0.149, \quad S = 0.386$$

DE TABLAS, EL RANGO ESTUDENTIZADO ES; CON $k = 3$ Y $\nu = 15$: $q_{3,15,.025} = 3.67$

POR LO TANTO, EL MARGEN VALE: $\frac{3.67}{\sqrt{2}}\, 0.386\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = 0.578$

LAS DIFERENCIAS ENTRE MEDIAS SON LAS SIGUIENTES, INDICANDO LAS SIGNIFICATIVAS CON UN MARCO:

MUJER	A	B	C
MEDIA	12.717	10.15	8.433
DIFERENCIAS	*	$\boxed{2.567}$	$\boxed{4.284}$
		*	$\boxed{1.717}$
			*

TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS

METODO DE DUNCAN

EL METODO DE DUNCAN, COMO EL DE TUKEY, SIRVE PARA EFECTUAR COMPARACIONES DE MEDIAS, NO OBSTANTE ESTE ES MAS CONSERVADOR QUE EL PRIMERO.

EL ERROR ESTANDAR DE CUALQUIER MEDIA ES: $S = \sqrt{\frac{MSW}{n}}$

DE LA TABLA DE DUNCAN PARA RANGOS SIGNIFICANTES OBTENEMOS $r_{\alpha}(p, f)$, DONDE α ES EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA, $p = 2, 3, \ldots k$ SON LOS TRATAMIENTOS, CUYAS MEDIAS SE ORDENAN DE MENOR A MAYOR, f SON LOS GRADOS DE LIBERTAD DE SSW: (N-k). EL RANGO SE CALCULA COMO: $R_p = r_{\alpha}(p, f)S$, PARA $p = 2, 3, \ldots k$

PARA PROBAR LAS DIFERENCIAS, SE PRUEBA LA MAYOR CON LA MENOR, COMPARANDO CON EL MAYOR R_{α}, ASI SE CONTINUA COMPARANDO EL MAYOR CON LOS RESTANTES, EN ORDEN CRECIENTE ESTOS ULTIMOS. SE PROCEDE IGUALMENTE EN EL DE SEGUNDA IMPORTANCIA, ETC.

EN ESTE CASO, ORDENANDO LAS MEDIAS EN ORDEN CRECIENTE:

$$\overline{y}_C = 8.433, \ \overline{y}_B = 10.15, \ \overline{y}_A = 12.717$$

EL VALOR DE MSW ES = 0.149, POR LO QUE, EN CUALQUIER CASO:

$$S = \sqrt{\frac{0.149}{6}} = 0.1576$$

EN TABLAS DEL METODO DE DUNCAN (DESIGN AND ANALYSIS OF EXPERIMENTS-MONTGOMERY-WILLEY INTERNATIONAL, 1976), CON $\alpha = 0.05$, $f = N-k=18-3=15$:

$$r_{0.05}(2,15) = 3.01, \ r_{.05}(3,15) = 3.16$$

POR LO TANTO, LOS MARGENES SERAN:

$$R_2 = 3.01(0.1576) = 0.474, \ R_3 = 3.16(0.1576) = 0.498$$

Y LAS COMPARACIONES DE MEDIAS SERAN:

VALORES CRITICOS EN LA PRUEBA DE DUNCAN DE RANGO MULTIPLE

Error df	α	p = NUMERO DE MEDIAS ADYACENTES 2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
1	.05	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
	.01	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	.05	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
	.01	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	.05	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
	.01	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.0	9.1	9.2	9.3	9.3
4	.05	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
	.01	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.3	7.4	7.4	7.5	7.5
5	.05	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
	.01	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.6	6.6	6.7	6.7	6.8
6	.05	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
	.01	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.1	6.2	6.2	6.3	6.3
7	.05	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
	.01	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	5.8	5.9	5.9	6.0	6.0
8	.05	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
	.01	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.6	5.7	5.7	5.8	5.8
9	.05	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
	.01	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.5	5.5	5.6	5.7	5.7
10	.05	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48
	.01	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.36	5.42	5.48	5.54	5.55
11	.05	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.24	5.28	5.34	5.38	5.39
12	.05	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.13	5.17	5.22	5.23	5.26
13	.05	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.04	5.08	5.13	5.14	5.15
14	.05	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	4.96	5.00	5.04	5.06	5.07
15	.05	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	4.90	4.94	4.97	4.99	5.00
16	.05	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.84	4.88	4.91	4.93	4.94
17	.05	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.72	4.75	4.80	4.83	4.86	4.88	4.89
18	.05	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.76	4.79	4.82	4.84	4.85
19	.05	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.47	3.47
	.01	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.72	4.76	4.79	4.81	4.82
20	.05	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.43	3.44	3.46	3.46	3.47
	.01	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.69	4.73	4.76	4.78	4.79
22	.05	2.93	3.08	3.17	3.24	3.29	3.32	3.35	3.37	3.39	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.99	4.17	4.28	4.36	4.42	4.48	4.53	4.57	4.60	4.65	4.68	4.71	4.74	4.75
24	.05	2.92	3.07	3.15	3.22	3.28	3.31	3.34	3.37	3.38	3.41	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.96	4.14	4.24	4.33	4.39	4.44	4.49	4.53	4.57	4.62	4.64	4.67	4.70	4.72
26	.05	2.91	3.06	3.14	3.21	3.27	3.30	3.34	3.36	3.38	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.93	4.11	4.21	4.30	4.35	4.41	4.46	4.50	4.53	4.58	4.62	4.65	4.67	4.69
28	.05	2.90	3.04	3.13	3.20	3.25	3.30	3.33	3.35	3.37	3.40	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.91	3.08	4.18	4.28	4.34	4.39	4.43	4.47	4.51	4.56	4.60	4.62	4.65	4.67
30	.05	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46	3.47
	.01	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.54	4.58	4.61	4.63	4.65
40	.05	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47
	.01	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.46	4.51	4.54	4.57	4.59
60	.05	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.37	3.40	3.43	3.45	3.47
	.01	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.39	4.44	4.47	4.50	4.53
100	.05	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.36	3.40	3.42	3.45	3.47
	.01	3.71	3.66	3.93	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.35	4.38	4.42	4.45	4.48
∞	.05	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.34	3.38	3.41	3.44	3.47
	.01	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.26	4.31	4.34	4.38	4.41

Reproduced from: D.B. Duncan, Multiple Range and Multiple F Tests, Biometrics, 11: 1-42, 1955. With permission from the Biometric Society and the author.

A VS. C: 12.717 - 8.433 = 4.284 > 0.498 (SIGNIFICATIVA)

A VS. B: 12.717 - 10.15 = 2.567 > 0.474 (SIGNIFICATIVA)

B VS. C; 10.15 - 8.433 = 1.717 > 0.474 (SIGNIFICATIVA)

COMO EN EL METODO DE TUKEY, TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS.

METODO DE FISHER

PARA REALIZAR COMPARACIONES MULTIPLES ENTRE LAS MEDIAS DE DIVERSOS TRATAMIENTOS SE PUEDE USAR LA ESTADISTICA DE FISHER (ESTE METODO EN REALIDAD ES UNA MODIFICACION DE LA COMPARACION ENTRE MEDIAS CON LA t DE STUDENT).

LA DISTRIBUCION t SE DEFINE COMO:

$$t = \frac{y}{\sqrt{\frac{\mu}{\phi}}} \qquad \text{(a)}$$

DONDE y ES N(0,1) Y μ TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON ϕ G. DE L.

SI QUEREMOS COMPARAR DOS MEDIAS:

$$y = \frac{(X_{1.} - X_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad \text{(b)}$$

SI SE SUPONE $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$y = \frac{(\overline{X}_{1.} - \overline{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(\overline{X}_{1.} - \overline{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$$

Y

$$\mu = \sum^{n_1} \left(\frac{X_{1j} - \bar{X}_{1.}}{\sigma_1}\right)^2 + \sum^{n_2} \left(\frac{X_{2j} - \bar{X}_{2.}}{\sigma_2}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^k \sum_j^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

QUE TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON N-k G. DE L.

COMO $\quad SW = \sum^k \sum^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$ CON N-k G. DE L.

$$E(MSW) = \sigma^2$$

SW ES LA VARIANCIA COMBINADA, ESTIMADOR INSESGADO DE σ^2, POR LO TANTO, EL DENOMINADOR DE (a) ES:

$$\frac{\mu}{\phi} = \frac{1}{\sigma^2} MSW \qquad \text{(c)}$$

SUSTITUYENDO (b) y (c) EN (a) SE OBTIENE, BAJO LA HIPOTESIS $\mu_1 =$

$$t = \frac{(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{MSW}} \sqrt{\frac{n_1 \, n_2}{n_1 + n_2}}$$

Y COMO $F = t^2$ SE OBTIENE:

$$F_0 = \frac{(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2}{MSW} \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

QUE COMPARADA CON F_c, CON 1 Y N-K G. DE L., NOS PERMITE SABER SI EXISTE DIFERENCIA SIGNIFICATIVA EN LAS MEDIAS.

PARA EFECTUAR CON MAYOR FACILIDAD COMPARACIONES MULTIPLES SE ACOSTUMBRA CALCULAR:

$$(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 \, n_2} \, MSW \, F_0$$

Y COMPARAR CON EL TEORICO: $\frac{n_1 + n_2}{n_1\ n_2}$ MSW $F_{\alpha,1,N-K}$ (MARGEN)

CUANDO $(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2$ ES MAYOR QUE EL MARGEN EXISTE UNA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA.

EJEMPLO

EN EL EJEMPLO ANTERIOR, EL MARGEN EN CUALQUIER CASO VALE, CON $F_{0.05,1,15} = 4.54$

$$\frac{6 + 6}{6(6)} (0.149)(4.54) = 0.225$$

LAS DIFERENCIAS ENTRE MEDIAS SON LAS SIGUIENTES (AL CUADRADO), INDICANDO LAS SIGNIFICATIVAS CON UN MARCO

MUJER	A	B	C
$\bar{X}$	12.717	10.15	8.433
(DIFERENCIAS)^2	*	$\boxed{6.59}$	$\boxed{18.35}$
		*	$\boxed{2.95}$
			*

TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS.

EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS

SUPONGAMOS QUE EL ENSAYO QUE SE LLEVA A CABO PARA DETERMINAR EL VALOR QUE TOMA CIERTA VARIABLE EN UNA UNIDAD DE EXPERIMENTACION (ESPECIMEN) TOMA UN TIEMPO RELATIVAMENTE LARGO, DIGAMOS UNA SEMANA, Y QUE CADA ANALISTA (EXPERIMENTADOR) SOLO PUEDE REALIZAR UN ENSAYO A LA VEZ.

SI SE USARA, POR EJEMPLO, UN EXPERIMENTO POR BLOQUES COMPLETAMENTE ALEATORIZADO CON TRES ANALISTAS Y TRES SEMANAS, PODRIA PRESENTARSE LA SIGUIENTE DISTRIBUCION DE LOS ENSAYES PARA LOS ESPECIMENES TIPOS A, B Y C:

SEMANA	ANALISTA		
	1	2	3
1	A	B	A
2	C	A	B
3	B	C	C

SI SE PROBARA LA HIPOTESIS NULA $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$, EN CONTRA DE LA ALTERNATIVA $H_1: \mu_A \neq \mu_B$, Y SE RECHAZARA H_0, QUEDARIA LA DUDA DE SI EN ESTE RESULTADO INFLUIRIA EL HECHO DE QUE LA PRIMER SEMANA SE PROBARON DOS ESPECIMENES DE A Y SOLO UNO DE B, EN LA SEGUNDA UNO DE A Y UNO DE B Y, EN LA TERCERA, SOLO UNO DE B.

SI ESTA DUDA FUERA LEGITIMA, SERIA NECESARIO ELIMINAR (FILTRAR)

EL EFECTO DEL FACTOR "SEMANA". ADICIONALMENTE AL FILTRADO, ES NECESARIO RESTRINGIR NUESTRO PROCESO DE ALEATORIZACION DE TAL MANERA QUE QUEDE UN SOLO ESPECIMEN DE CADA TIPO EN CADA SEMANA, QUEDANDO UNA DISTRIBUCION DE LOS ENSAYES COMO LA SIGUIENTE

SEMANA	ANALISTA		
	1	2	3
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

EN ESTE CASO LA ALEATORIZACION CONSISTIRIA EN ASIGNAR AL AZAR CADA ESPECIMEN TIPO A, B O C A CADA PAREJA (SEMANA, ANALISTA) DE NIVELES DE LOS FACTORES.

A UN DISEÑO EXPERIMENTAL COMO ESTE SE LE DENOMINA "DISEÑO DE CUADRADOS LATINOS". SE USA CUANDO SE QUIEREN COMPARAR t MEDIAS DE TRATAMIENTOS, EN PRESENCIA DE DOS FUENTES EXTRAÑAS DE VARIABILIDAD, LAS CUALES SE BLOQUEAN EN t RENGLONES Y EN t COLUMNAS.

DEFINICION: UN DISEÑO EXPERIMENTAL DE CUADRADOS LATINOS txt, ES TAL QUE LOS t TRATAMIENTOS QUE SE DESEAN COMPARAR SE ASIGNAN AL AZAR ENTRE t RENGLONES Y t COLUMNAS, DE TAL FORMA QUE CADA TRATAMIENTO APARECE EN CADA RENGLON Y EN CADA COLUMNA.

[illegible]LO PARA REPRESENTAR A CADA UNO DE LOS RESULTADOS,

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + Z_{ijk} \qquad (1)$$

[illegible] VARIABLES ALEATORIAS NORMALES INDEPENDIENTES [illegible] MEDIA CERO Y VARIANCIA DESCONOCIDA, σ^2, CADA UNA. [illegible] β_j Y γ_k SON LOS EFECTOS DEL TRATAMIENTO i, EL RENGLON j Y LA COLUMNA k, RESPECTIVAMENTE, CON

$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0$, Y μ ES LA MEDIA GLOBAL.

EN TAL CASO

$$E(X_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k \qquad (2)$$

$$\mathrm{Var}(X_{ijk}) = \sigma^2$$

LA DESCOMPOSICION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUEDA EN LA FORMA SIGUIENTE:

$$TSS = SST + SSR + SSC + SSE \qquad (3)$$

DONDE TSS ES LA SUMA DE CUADRADOS TOTAL, SST LA DE LOS TRATAMIENTOS, SSC LA DE COLUMNAS, SSR LA DE RENGLONES Y SSE LA DEL ERROR. LAS ECUACIONES PARA CALCULAR A CADA UNA DE ELLAS SON:

$$TSS = \sum_i \sum_j (X_{ijk} - \overline{X}_{...})^2 = \sum_i \sum_j X^2_{ijk} - n\,\overline{X}^2_{...} \qquad (4)$$

$$SST = t \sum_i (\overline{X}_{i..} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_i \overline{X}^2_{i..} - n\,\overline{X}^2_{...} \qquad (5)$$

$$SSR = t \sum_j (\overline{X}_{.j.} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_j \overline{X}^2_{.j.} - n\,\overline{X}^2_{...} \qquad (6)$$

$$SSC = t \sum_k (\bar{X}_{..k} - \bar{X}_{...})^2 = t \sum_k \bar{X}^2_{..k} - n \bar{X}^2_{...} \qquad (7)$$

$$SSE = TSS - SST - SSR - SSC \qquad (8)$$

$$n = t^2$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
TRATAMIENTOS	SST	t-1	MST=SST/(t-1)	MST/MSE
RENGLONES	SSR	t-1	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
COLUMNAS	SSC	t-1	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
ERROR	SSE	(t-1)(t-2)	MSE=SSE/(t-1)(t-2)	
TOTALES	TSS	t^2-1		

CON ESTAS ESTADISTICAS F SE PRUEBAN, RESPECTIVAMENTE, LAS HIPOTESIS:

a) $H_0: \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$
H_1: AL MENOS UNA α_i NO ES CERO

b) $H_0: \beta_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t$
H_1: AL MENOS UNA β_j NO ES CERO

c) $H_0: \gamma_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, t$
H_1: AL MENOS UNA γ_k NO ES CERO

ESTAS PRUEBAS DE HIPOTESIS SON TAMBIEN PARA EL CASO DE NIVELES

ALEATORIOS.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE INGENIERIA DE TRANSITO SE DESEAN COMPARAR LOS TIEMPOS EN QUE NO SE APROVECHA LA LUZ VERDE DEL SEMAFORO POR NO PASAR NINGUN VEHICULO, PARA 4 DISPOSITIVOS DE CONTROL AUTOMATICO DE SEMAFOROS EN 4 CRUCEROS DIFERENTES DE LA CIUDAD, LO SUFICIENTEMENTE DISTANTES ENTRE SI COMO PARA CONSIDERARSE INDEPENDIENTES. PARA ESTO, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO EN EL QUE SE MIDIERON LOS TIEMPOS DE DESPERDICIO, EN MINUTOS, QUE SE TUVIERON EN CUATRO HORAS DIFERENTES DEL DIA, DOS HORAS "PICO", Y DOS HORAS "VALLE" DEL DIA, CON LO CUAL SE INTEGRO EL SIGUIENTE EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS 4x4:

INTERSECCION	HORA DEL DIA				TOTALES	$\bar{X}_{.j.}$
	A. M. PICO	A. M. VALLE	P. M. VALLE	P. M. PICO		
1	D(15.5)	B(33.9)	C(13.2)	A(29.1)	91.7	22.92
2	B(16.3)	C(26.6)	A(19.4)	D(22.8)	85.1	21.27
3	C(10.8)	A(31.1)	D(17.1)	B(30.3)	89.3	22.32
4	A(14.7)	D(34.0)	B(19.7)	C(21.6)	90.0	22.50
TOTALES	57.3	125.6	69.4	103.8	356.1	
$\bar{X}_{..k}$	14.33	31.40	17.35	25.95		

EN ESTA TABLA LAS CIFRAS ENTRE PARENTESIS SON MINUTOS DE DESPERDICIO POR HORA PARA LOS DISPOSITIVOS A, B, C Y D.

LOS PROMEDIOS PARA CADA DISPOSITIVO SON:

$\bar{X}_{A..} = 94.3/4 = 23.58$; $\bar{X}_{C..} = 72.2/4 = 18.05$

$\bar{X}_{B..} = 100.2/4 = 25.05$; $\bar{X}_{D..} = 89.4/4 = 22.35$

$\bar{X}_{...} = 356.1/16 = 22.26$; $16\bar{X}^2_{...} = 7925.45$

$\bar{X}_{.1.} = 91.7/4 = 22.92$; $\bar{X}_{.2.} = 85.1/4 ; 21.27$; $\bar{X}_{.3.} = 89.3/4 = 22.32$;

$\bar{X}_{.4.} = 90.0/4 = 22.50$; $\bar{X}_{..1} = 57.3/4 = 14.33$; $\bar{X}_{..2} = 125.6/4 = 31.40$;

$\bar{X}_{..3} = 69.4/4 = 17.35$; $\bar{X}_{..4} = 103.8/4 = 25.95$.

$SST = 4(23.58^2 + 25.05^2 + 18.05^2 + 22.35^2) - 7925.45 =$

$= 4(555.78 + 627.50 + 325.80 + 499.52) - 7925.45 = 8034.41 - 7925.45 = 108.96$

$SSR = 4(22.92^2 + 21.27^2 + 22.32^2 + 22.5^2) - 7925.45 =$

$= 4(525.56 + 452.63 + 498.41 + 506.25) - 7925.45 = 7931.40 - 7925.45 = 5.95$

$SSC = 4(205.21 + 985.96 + 301.02 + 673.40) - 7925.45 = 8662.36 - 7925.45 = 736.91$

$TSS = 15.5^2 + 16.3^2 + 10.8^2 + 14.7^2 + 33.9^2 + \ldots + 21.6^2 - 7925.45 = 8801.05 - 7925.45 = 875.6$

$SSE = 875.6 - 108.96 - 5.95 - 736.91 = 23.78$

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
DISPOSITIVOS (TRATAMIENTOS)	108.96	3	36.32	9.17 > 4.76
RENGLONES (INTERSECCIONES)	5.95	3	1.98	0.50 < 4.76
COLUMNAS (HORAS DEL DIA)	736.91	3	245.64	61.87 > 4.76
ERROR	23.78	6	3.96	
TOTALES	875.60	15		

$F_{0.95,3,6} = 4.76$

DE LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE LOS DISPOSITIVOS Y ENTRE LAS HORAS DEL DIA, A UN 95 POR CIENTO DE NIVEL DE CONFIANZA.

EXPERIMENTOS DE
CUADRADOS LATINOS
CON REPLICAS

CON FRECUENCIA SE DISPONE DE TIEMPO Y RECURSOS PARA TENER VARIAS REPLICAS DE UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS, PRINCIPALMENTE CUANDO t ES PEQUEÑO. SUPONGAMOS QUE SE EJECUTAN r REPLICAS, EL MODELO MATEMATICO SERA, EN ESTE CASO:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + Z_{ijkl} \qquad (1)$$

EN DONDE ρ_l ES EL EFECTO DE LA L-ESIMA REPLICA, i, j y k = 1, 2, ..., t, Y l = 1, 2, ..., r; LOS DEMAS TERMINOS TIENEN EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL EXPERIMENTO SIN REPLICAS. LAS RESTRICCIONES DE LOS PARAMETROS SON

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = \sum_l \rho_l = 0 \qquad (2)$$

LA SUMA TOTAL DE CUADRADOS, EN ESTE CASO, SE DESCOMPONE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$TSS = SST + SSR + SSC + SSRe + SSE \qquad (3)$$

EN DONDE

$$TSS = \sum_i \sum_j \sum_l X^2_{ijkl} - N\bar{X}^2_{....} \; ; \; N = t^2 r \qquad (4)$$

$$SST = rt \sum_i \bar{X}^2_{i...} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (5)$$

$$SSR = rt \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (6)$$

$$SSC = rt \sum_{k} \bar{X}^2_{..k.} - N\bar{X}^2_{....} \tag{7}$$

$$SSRe = t^2 \sum_{l} \bar{X}^2_{...l} - N\bar{X}^2_{....} \tag{8}$$

$$SSE = TSS - SST - SSR - SSC - SSRe \tag{9}$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA CORRESPONDIENTE A ESTE EXPERIMENTO ES:

FUENTE DE VARIABILIDAD	G. de 1	SS	MS	F
TRATAMIENTOS	t - 1	SST	MST=SST/(t-1)	MST/MSE
RENGLONES	t - 1	SSR	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
COLUMNAS	t - 1	SSC	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
REPLICAS	r - 1	SSRe	MSRe=SSRe/(r-1)	MSRe/MSE
ERROR	g=(t-1)(rt+r-3)	SSE	MSE=SSE/g	
TOTAL	$rt^2 - 1$	TSS		

EJEMPLO

SE TIENE UN PROCESO DE FABRICACION EN EL CUAL SE RECUBRE UNA LAMINA CON UN CIERTO METAL. EXISTE LA DUDA DE SI EL ESPESOR DE ESE RECUBRIMIENTO CAMBIA EN LAS DIRECCIONES DEL ROLADO Y TRANSVERSAL A EL. PARA ESTUDIAR ESTO SE TOMO COMO VARIABLE AL PESO POR UNIDAD DE AREA QUE SE TENGA DE DICHO RECUBRIMIENTO. PARA ELIMINAR ESTAS DOS FUENTES DE VARIACION, CADA UNA DE 2 PLACAS FABRICADAS SE DIVIDIO EN 16 PARTES REPRESENTANDO 4 POSICIONES EN DIRECCION LONGITUDINAL Y 4 TRANSVERSALES AL ROLADO, Y LUEGO SE TOMARON 4 MUESTRAS DE CADA UNA Y SE MANDARON A LOS LABORATORIOS A, B, C Y D PARA DETERMINAR EL PESO DEL RECUBRIMIENTO, TENIENDOSE LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

TRANSVERSAL

LONGITUDINAL FACTOR	2.1	2.2	2.3	2.4	2.1	2.2	2.3	2.4	TOTALES	$\bar{X}_{.j..}$
1.1	$^{B}0.29$	$^{A}0.25$	$^{C}0.18$	$^{D}0.28$	$^{C}0.20$	$^{A}0.24$	$^{D}0.20$	$^{B}0.27$	1.91	0.239
1.2	$^{D}0.28$	$^{B}0.18$	$^{A}0.21$	$^{C}0.25$	$^{B}0.28$	$^{C}0.19$	$^{A}0.22$	$^{D}0.28$	1.89	0.236
1.3	$^{C}0.28$	$^{D}0.23$	$^{B}0.20$	$^{A}0.28$	$^{D}0.34$	$^{B}0.23$	$^{C}0.21$	$^{A}0.28$	2.05	0.256
1.4	$^{A}0.30$	$^{C}0.19$	$^{D}0.24$	$^{B}0.25$	$^{A}0.32$	$^{D}0.22$	$^{B}0.16$	$^{C}0.27$	1.95	0.244
									7.80	

1.1	$^{C}0.20$	$^{A}0.24$	$^{D}0.20$	$^{B}0.27$
1.2	$^{B}0.28$	$^{C}0.19$	$^{A}0.22$	$^{D}0.28$
1.3	$^{D}0.34$	$^{B}0.23$	$^{C}0.21$	$^{A}0.28$
1.4	$^{A}0.32$	$^{D}0.22$	$^{B}0.16$	$^{C}0.27$
TOTALES	2.29	1.730	1.620	2.160
$\bar{X}$	0.286	0.216	0.203	0.27

VERIFICAR LAS HIPOTESIS DE EFECTOS NULOS Y SI HAY ALGUNA QUE NO LA CUMPLA, HACER LA PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES.

SOLUCION

a) ANALISIS DE VARIANCIA

$$\bar{X}_{...1} = (0.29 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.25)/16 = 0.243$$

$$\bar{X}_{...2} = (0.20 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.27)/16 = 0.244$$

$$\bar{X}_{A...} = (0.25 + 0.21 + \ldots + 0.28 + 0.32)/8 = 0.263$$

$$\bar{X}_{B...} = (0.29 + 0.18 + \ldots + 0.23 + 0.16)/8 = 0.233$$

$$\bar{X}_{C...} = (0.18 + 0.25 + \ldots + 0.21 + 0.27)/8 = 0.221$$

$$\bar{X}_{D...} = (0.28 + 0.28 + \ldots + 0.34 + 0.22)/8 = 0.259$$

$$\bar{X}_{....} = \frac{0.29 + 0.28 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.28 + 0.27}{32} = 0.244$$

TOTALES: $TSS = \sum_j \sum_k \sum_\ell X^2_{ijk\ell} - N\bar{X}^2_{....} = 1.9628 - 32 \times 0.244^2 =$

$= 1.9628 - 1.905 = 0.058$

RENGLONES: $SSR = rt \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - N\bar{X}^2_{....} = 2 \times 4 \times (0.239^2 + 0.236^2 +$

$+ 0.256^2 + 0.244^2) - 1.905 = 0.002$

COLUMNAS: $SSC = rt \sum_k \bar{X}^2_{..k.} - N\bar{X}^2_{....} = 8(0.286^2 + 0.216^2 + 0.203^2 +$

$+ 0.27^2) - 1.905 = 0.035$

REPLICA: $SSRe = t^2 \sum_l \bar{X}^2_{...l} - N\bar{X}^2_{....} = 16(0.243^2 + 0.244^2) - 1.905 =$

$= 0.008$

TRATAMIENTOS: $SST = rt \sum \bar{X}^2_{i...} - N\bar{X}^2_{....} = 8(0.263^2 + 0.233^2 +$

$+ 0.221^2 + 0.259^2) - 1.905 = 0.010$

ERROR: $SSE = TSS - SST - SSC - SSR - SSRe = 0.058 - 0.002 - 0.035 - 0.008 - 0.01 = 0.003$

TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA

FUENTE	g. de l.	SS	MS	F_E		$F_{c(\alpha=0.05)}$
LONG. AL ROLADO	3	SSR=0.002	0.0007	5.00	>	3.07
TRANSV. AL ROLADO	3	SSC=0.035	0.0117	83.57	>	3.07
LABORATORIOS	3	SST=0.010	0.0033	23.57	>	3.07
REPLICAS	1	SSRe=0.008	0.008	57.14	>	4.32
ERROR	3(7)=21	SSE=0.003	0.00014			
TOTAL	31	TSS=0.058				

DE LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE:

1. SI HAY EFECTOS EN LA LONGITUD AL ROLADO
2. SI HAY EFECTOS ENTRE REPLICAS
3. SI HAY EFECTOS ENTRE LOS DIFERENTES LABORATORIOS
4. SI HAY EFECTOS EN LA DIRECCION TRANSVERSAL AL ROLADO

b) PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES

b-1) ENTRE LOS DIFERENTES LABORATORIOS:

LABORATORIO	C	B	D	A
MEDIA	0.221	0.233	0.259	0.263

DE LAS TABLAS PARA $\alpha = 0.05$, 21 G de L. y P = 2,3,4, TENEMOS (INTERPOLANDO)

p	2	3	4
r_p	2.9425	3.0925	3.1825

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{0.00014}{8}} = 0.00418$$

p	2	3	4
$R_p = r_p S_{\overline{X}}$	0.01231	0.01293	0.01330

EL RANGO PARA LAS 4 MEDIAS ES $R_4 = 0.042 > R_{4c}(0.01330)$, LO CUAL ERA DE ESPERARSE YA QUE LA PRUEBA F MOSTRO QUE SI HABIA EFECTO ENTRE LOS 4 TRATAMIENTOS.

LOS RANGOS PARA 3 MEDIAS ADYACENTES SON:

$$CBD = 0.259 - 0.221 = 0.038 > 0.01293$$

$$BDA = 0.263 - 0.233 = 0.030 > 0.01293$$

LOS RANGOS PARA PARES DE MEDIAS ADYACENTES SON:

$$CB = 0.233 - 0.221 = 0.012 < 0.01231$$

$$BD = 0.259 - 0.233 = 0.026 > 0.01231$$

$$DA = 0.263 - 0.259 = 0.0040 < 0.01231$$

POR LO TANTO TENDREMOS: $\underline{C\ \ B}\quad \underline{D\ \ A}$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE LOS LABORATORIOS C Y B, ASI COMO D Y A TUVIERON RESULTADOS CONSISTENTES, MIENTRAS LOS LABORATORIOS

B Y D PRESENTARON RESULTADOS DIFERENTES ESTADISTICAMENTE Y, POR ENDE, NO HABRA CONSISTENCIA ENTRE B Y A Y C Y D

b-2) EN LOS NIVELES DE LA DIRECCION TRANSVERSAL AL ROLADO:

NIVELES	3	2	4	1
MEDIAS	0.203	0.216	0.270	0.286

DE LAS TABLAS PARA $\alpha = 0.05$; 21 G. de L., p = 2,3,4 Y $S\bar{x} = 0.00418$ TENEMOS:

p	2	3	4
r_p	2.945	3.0925	3.1825
$R_p = r_p \times S_{\bar{x}}$	0.01231	0.01293	0.01330

EL RANGO PARA LAS 4 MEDIAS ES R4 = 0.286 - 0.203 = 0.0830 > Rcrítico (0.01330), LO CUAL RATIFICA EL RESULTADO DE LA PRUEBA F DE QUE SI HAY EFECTO ENTRE LOS 4 NIVELES DEL ROLADO TRANSVERSAL.

PARA LOS CONJUNTOS DE 3 MEDIAS ADYACENTES:

$$R_{324} = 0.27 - 0.203 = 0.0670 > 0.01293$$

$$R_{241} = 0.286 - 0.216 = 0.07 > 0.01293$$

POR LO QUE TAMBIEN HAY EFECTO SIGNIFICATIVO ENTRE LAS TRIPLETAS DE MEDIAS ADYACENTES. PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS ADYACENTES:

$R_{32} = 0.216 - 0.203 = 0.0130 > 0.01231$

$R_{24} = 0.27 - 0.216 = 0.0540 > 0.01231$

$R_{41} = 0.286 - 0.27 = 0.0160 > 0.01231$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE:

- FACTOR 2: N3 N2 N4 N1

EN LA DIRECCION TRANSVERSAL DEL ROLADO NINGUNA PAREJA DE NIVELES DIO RESULTADOS CONSISTENTES.

b-3) APLICANDO EL METODO DE FISHER DE COMPARACIONES MULTIPLES TENEMOS:

b-3.1) TRATAMIENTOS: $LSD = t_{21,\alpha/2} \sqrt{\frac{2MSE}{n}} = t_{21,0.025} \sqrt{\frac{2 \times 0.00014}{8}}$

$$= 2.080 \times 0.0059 = 0.01231$$

LABORATORIOS	C	B	D	A
MEDIAS	0.221	0.233	0.259	0.263
	*	0.0120	$\boxed{0.038}$	$\boxed{0.042}$
		*	$\boxed{0.026}$	$\boxed{0.03}$
			*	0.004

<u>C B</u> <u>D A</u>, QUE COINCIDE CON EL RESULTADO ANTERIOR

b-3.2) A NIVELES DEL ROLADO TRANSVERSAL: 3 2 4 1, QUE COINCIDE CON EL RESULTADO ANTERIOR

NIVELES	3	2	4	1
MEDIAS	0.203	0.216	0.27	0.286
	*	$\boxed{0.013}$	$\boxed{0.067}$	$\boxed{0.083}$
		*	$\boxed{0.054}$	$\boxed{0.07}$
			*	$\boxed{0.016}$

PARA EL EJERCICIO QUE SE DESARROLLO EN LA CLASE SOBRE FUNDENTES TENEMOS:

a) APLICANDO DUNCAN:

PARA LOS METODOS:

METODO	C	B	A
MEDIA	11.0	14.4	14.6

PARA $\alpha = 0.01$, $\nu = 10$; $p = 2,3$ TENEMOS

p	2	3
r_p	4.48	4.67
$R_p = r_p \times S_{\bar{x}} =$	2.1485	2.2397

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{1.38}{6}} = 0.4795$$

EL RANGO PARA 3 MEDIAS ADYACENTES $= \bar{X}_A - \bar{X}_C = 14.6 - 11 =$ 3.6 > 2.397 LO QUE SE VERIFICO EN LA PRUEBA F.

LOS RANGOS PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS ADYACENTES SON

$\bar{X}_B - \bar{X}_C = 14.4 - 11 = 3.40 > 2.1485 \therefore$ SIGNIFICATIVO

$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 14.6 - 14.4 = 0.2 < 2.1485 \therefore$ NO SIGNIFICATIVO

LO CUAL IMPLICA QUE C $\underline{B\ A}$; EL METODO C ES EL QUE PRODUCE EFECTOS ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

b) PARA LAS FUNDENTES:

FUNDENTE	1	3	2
MEDIA	11.6	13	15.33

EL RANGO PARA LAS TRES MEDIAS ADYACENTES: $R_{132} = 15.33 - 11.6 =$ $= 3.73 > 2.2397$ O SEA QUE SI HAY EFECTO ENTRE LOS 3 FUNDENTES COMO SE HABIA VISTO EN LA PRUEBA F. PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS:

$$\bar{X}_3 - \bar{X}_1 = 1.40 < 2.1485 \therefore \text{ NO SIGNIFICATIVO}$$

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_3 = 2.33 > 2.1485 \therefore \text{ SI SIGNIFICATIVO}$$

ENTONCES: FUNDENTES $\underline{1\ 3}$ 2, POR LO QUE EL FUNDENTE 2 PRODUCE EFECTOS DIFERENTES ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

APLICANDO FISHER:

a) PARA LOS METODOS

$$LSD = t_{0.005,10}\sqrt{\frac{2 \times 1.38}{6}} = 3.169 \times 0.6782 = 2.1493$$

METODOS	C	B	A
MEDIAS	11.0	14.4	14.6
	*	$\boxed{3.4}$	$\boxed{3.60}$
		*	0.20

C $\underline{B\ \ A}$

PARA LOS FUNDENTES

FUNDENTES	1	3	2
MEDIAS	11.6	B	15.33
	*	1.4	$\boxed{3.73}$
		*	$\boxed{2.33}$

<u>1 3</u> 2

11. EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS

EN OCASIONES SE CONSIDERA QUE EXISTEN NO SOLO DOS SINO TRES FACTORES EXTRAÑOS QUE PUEDEN INFLUIR EN LOS RESULTADOS DE UN TRATAMIENTO, COMO SUCEDE EN EL EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS; CUANDO ESTO SUCEDE, SE PUEDE FILTRAR O AISLAR EL EFECTO DEL TERCER FACTOR MEDIANTE EL EMPLEO DE UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS t x t.

EN ESTE TIPO DE EXPERIMENTO LOS t NIVELES DEL TERCER FACTOR SE REPRESENTAN USUALMENTE CON LETRAS GRIEGAS, LAS CUALES SE COMBINAN CON LAS LATINAS QUE REPRESENTAN LOS t NIVELES DEL TRATAMIENTO, DE TAL MANERA QUE CADA LETRA LATINA APARECE SOLO UNA VEZ EN CONJUNCION CON UNA GRIEGA EN CADA COLUMNA Y EN CADA RENGLON.

POR EJEMPLO, EN UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS DE 4x4 LAS LETRAS SE COMBINAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

FACTOR 1	FACTOR 2			
	1	2	3	4
1	Aα	Bβ	Cγ	Dδ
2	Bδ	Aγ	Dβ	Cα
3	Cβ	Dα	Aδ	Bγ
4	Dγ	Cδ	Bα	Aβ

UN EJEMPLO EN EL QUE SE USARIA UN EXPERIMENTO DE ESTE TIPO SERIA EL CASO DEL PROBLEMA MENCIONADO EN LOS CUADRADOS LATINOS

SI ADEMAS DE LOS FACTORES "OPERARIO" Y "FUNDENTE", SE AGREGARA EL DE "TEMPERATURA" DE LA SOLDADURA.

EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR A CADA RESULTADO DEL EXPERIMENTO ES UNA EXTENSION NATURAL DEL DE CUADRADOS LATINOS:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + \gamma_l + Z_{ijkl} \tag{1}$$

DONDE λ_k Y γ_l REPRESENTAN AHORA LOS EFECTOS DE LOS FACTORES REPRESENTADOS POR LAS LETRAS LATINAS Y GRIEGAS, RESPECTIVAMENTE.

POR SU PARTE, LA SEPARACION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUEDA EN LA FORMA

$$TSS = SSR + SSC + SSL + SSG + SSE \tag{2}$$

EN DONDE

$$TSS = \sum_i \sum_j X^2_{ijkl} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{3}$$

$$SSR = t \sum_i \bar{X}^2_{i...} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{4}$$

$$SSC = t \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{5}$$

$$SSL = t \sum_k \bar{X}^2_{..k.} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{6}$$

$$SSG = t \sum_l \bar{X}^2_{...l} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{7}$$

$$SSE = TSS - SSR - SSC - SSL - SSG \quad (8)$$

DE ESTA MANERA LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA CORRESPONDIENTE ES:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
FACTOR I (RENGLONES	t-1	SSR	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
FACTOR II (COLUMNAS)	t-1	SSC	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
FACTOR III (LETRAS LATINAS)	t-1	SSL	MSL=SSL/(t-1)	MS1/MSE
FACTOR IV (LETRAS GRIEGAS)	t-1	SSG	MSG=SSG/(t-1)	MSG/MSE
ERROR O RESIDUAL	(t-1)(t-3)	SSE	MSE=SSE/(t-1)(t-3)	
TOTAL	t^2-1			

EN ESTE EXPERIMENTO LAS ESTADISTICAS F TIENEN t-1 Y (t-1)(t-3) GRADOS DE LIBERTAD EN EL NUMERADOR Y EN EL DENOMINADOR, RESPECTIVAMENTE.

PUESTO QUE EL ERROR TIENE (t-1)(t-3) GRADOS DE LIBERTAD, PARA t=3 SE TIENE G. DE L.=0, POR LO CUAL NO SE PUEDE HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA.

<u>EJEMPLO</u>

EN UN PROBLEMA DE LA INDUSTRIA QUIMICA SE SOSPECHO QUE EN LOS RESULTADOS DE UN ENSAYE INFLUIAN CUATRO FACTORES: CONCENTRACION

DE LA SUBSTANCIA, VOLUMEN USADO, TAMAÑO DE ESPECIMEN Y TIEMPO DE LA REACCION, POR LO QUE SE DISEÑO UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS PARA VERIFICAR ESTADISTICAMENTE CUALES DE ELLOS EFECTIVAMENTE INFLUIAN DE MANERA DIFERENTE AL CAMBIAR SUS RESPECTIVOS NIVELES. LOS RESULTADOS QUE SE OBTUVIERON TOMANDO 5 NIVELES DE LOS FACTORES FUERON LOS SEÑALADOS EN LA TABLA SIGUIENTE (LAS LETRAS LATINAS SON LOS NIVELES DEL FACTOR TAMAÑO):

FACTOR I (CONCENTRACION)	FACTOR II (VOLUMEN)					TOTALES	$\bar{X}_{i...}$
	1	2	3	4	5		
1	$A\alpha$ 65	$B\gamma$ 82	$C\varepsilon$ 108	$D\beta$ 101	$E\delta$ 126	482	96.4
2	$B\beta$ 84	$C\delta$ 109	$D\alpha$ 73	$E\gamma$ 97	$A\varepsilon$ 83	446	89.2
3	$C\gamma$ 105	$D\varepsilon$ 129	$E\beta$ 89	$A\delta$ 89	$B\alpha$ 52	464	92.8
4	$D\delta$ 119	$E\alpha$ 72	$A\gamma$ 76	$B\varepsilon$ 117	$C\beta$ 84	468	93.8
5	$E\varepsilon$ 97	$A\beta$ 59	$B\delta$ 94	$C\alpha$ 78	$D\gamma$ 106	434	86.8
TOTALES	470	451	440	482	451	2294	
$\bar{X}_{.j..}$	94.0	90.2	88.0	96.4	90.2	$\bar{X}_{....} = \frac{2294}{25} = 91.76$	

$\Sigma X_{..A.} = 372, \ \Sigma X_{..B.} = 429, \ \Sigma X_{..C.} = 484, \ \Sigma X_{..D.} = 528, \ \Sigma X_{..E.} = 481$

$\bar{X}_{..A.} = \frac{372}{5} = 74.4, \ \bar{X}_{..B.} = \frac{429}{5} = 85.8, \ \bar{X}_{..C.} = \frac{484}{5} = 96.8,$

$\bar{X}_{..D.} = \frac{528}{5} = 105.6, \ \bar{X}_{..E.} = \frac{481}{5} = 96.2$

$\Sigma X_{...\alpha} = 377,\ \Sigma X_{...\beta} = 398,\ \Sigma X_{...\gamma} = 466,\ \Sigma X_{...\delta} = 537,\ \Sigma X_{...\varepsilon} = 534$

$\bar{X}_{...\alpha} = \frac{377}{5} = 75.4,\ \bar{X}_{...\beta} = \frac{398}{5} = 79.6,\ \bar{X}_{...\gamma} = \frac{466}{5} = 93.2,$

$\bar{X}_{...\delta} = \frac{537}{5} = 107.4,\ \bar{X}_{...\varepsilon} = \frac{534}{5} = 106.8,\ t^2\bar{X}^2_{....} = 25x91.76^2 = 210{,}497.44$

$SSR = 5(96.4^2+89.2^2+92.8^2+93.6^2+86.8^2)-210{,}497.44 = 227.76$

$SSC = 5(94.0^2+90.2^2+88.0^2+96.4^2+90.2^2)-210{,}497.44 = 285.76$

$TSS = 65^2+82^2+108^2+...+106^2-210{,}497.44 = 9880.56$

$SSL = 5(74.4^2+85.8^2+96.8^2+105.6^2+96.2^2)-210{,}497.44 = 2867.76$

$SSG = 5(75.4^2+79.6^2+93.2^2+107.4^2+106.8^2)-210{,}497.44 = 5536.56$

$SSE = 9880.56-227.76-285.76-2867.76-5536.76 = 962.72$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA RESULTANTE ES:

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
CONCENTRACION	227.76	4	56.94	0.47 < 3.84
VOLUMEN	285.76	4	71.44	0.59 < 3.84
TAMAÑO	2867.76	4	716.94	5.96 > 3.84
TIEMPO	5536.76	4	1384.14	11.50 > 3.84
ERROR	962.72	8	120.34	
TOTAL	9880.56	24		

$F_{0.95,4,8} = 3.84$ (PARA $\alpha = 0.05$)

DEL ANALISIS DEL EXPERIMENTO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE LOS FACTORES "CONCENTRACION" Y "VOLUMEN" NO INFLUYEN SIGNIFICATIVAMENTE EN LOS RESULTADOS A UN 95 POR CIENTO DE NIVEL DE CONFIANZA Y, EN CAMBIO, LOS FACTORES "TAMAÑO" Y "TIEMPO" SI INFLUYEN.

EJEMPLO

LOS FOCOS DE UNAS CAMARAS FOTOGRAFICAS FUERON COMPARADAS CON 5 CAMARAS, 5 TIPOS DE PELICULA Y 5 TIPOS DE FILTROS (DENOTADOS $\alpha, \ldots, \varepsilon$). DOS DUPLICADOS FUERON TOMADOS PARA CADA COMBINACION DE LOS 4 FACTORES OBTENIENDOSE LOS SIGUIENTES DATOS:

PELICULA	CAMARA 1	2	3	4	5	$\bar{X}_{i....}$
1	(Aα) 0.64 0.66 $\bar{X}_{ij...}$ = 0.65	(Bγ) 0.70 0.74 0.72	(Cε) 0.73 0.69 0.71	(Dβ) 0.66 0.66 0.66	(Eδ) 0.66 0.64 0.65	0.6780
2	(Bβ) 0.62 0.64 0.63	(Cδ) 0.63 0.61 0.62	(Dα) 0.69 0.67 0.68	(Eγ) 0.70 0.72 0.71	(Aε) 0.78 0.76 0.77	0.6820
3	(Cγ) 0.65 0.64 0.645	(Dε) 0.72 0.73 0.725	(Eβ) 0.68 0.68 0.68	(Aδ) 0.64 0.65 0.645	(Bα) 0.74 0.70 0.72	0.6830
4	(Dδ) 0.64 0.63 0.635	(Eα) 0.73 0.72 0.725	(Aγ) 0.68 0.70 0.69	(Bε) 0.74 0.74 0.74	(Cβ) 0.72 0.75 0.735	0.7050
5	(Eε) 0.74 0.74 0.74	(Aβ) 0.73 0.71 0.725	(Bδ) 0.67 0.66 0.665	(Cα) 0.74 0.75 0.745	(Dγ) 0.78 0.78 0.78	0.73
$\bar{X}_{.j...}$	0.66	0.702	0.685	0.70	0.731	

a) DETERMINE LA VARIANCIA RESIDUAL

b) QUE EFECTOS SON SIGNIFICANTES? (NOTA: LOS DUPLICADOS SE CORRIERON AL MISMO TIEMPO. ENTONCES ESTOS PUEDEN NO SER UNA MEDICION VERDADERA DEL ERROR).

c) DETERMINE UN INTERVALO DE CONFIANZA DEL 95% PARA LA DENSIDAD MEDIA DE LA CAMARA # 5

SOLUCION

$\bar{X}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} = 34.78/50 = 0.6956; \quad \bar{X}^2_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0.483859$

TOTALES: $TSS = \sum_{ijklr}\sum\sum\sum\sum X^2_{ijklr} - t^2 r \bar{X}^2_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} = (0.64^2 + 0.66^2 + 0.62^2 +$

$+ 0.64^2 + \ldots + 0.72^2 + 0.75^2 + 0.78^2 + 0.78^2) -$

$- 5^2 \times 2 \times 0.483859 = 24.298400 - 2 \times 25 \; (34.78/50)^2$

$= 24.298400 - 12.096484 \times 2 = 0.105432$

FACTOR I (PELICULAS): $SSR = (t \sum_i \bar{X}^2_{i\cdot\cdot\cdot} - t^2 \bar{X}^2_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot})r$

$= [5(0.459684 + 0.465124 + 0.466489 +$

$0.497025 + 0.532900) - 12.096484 \times 2$

$= 5 \times 2.421222 - 12.096484] \times 2 =$

$= (0.009626) \times 2 = 0.019252$

FACTOR II (CAMARAS): $SSC = (t \sum_j \bar{X}^2_{\cdot j\cdot\cdot\cdot} - t^2\bar{X}^2_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot})r$

$SSC = [5(0.4356+0.492804+0.469225+0.49+0.534361) -$

$- 12.096484] \times 2 = 2(5\times2.421990-12.096484) =$

$= (12.109950-12.096484) \times 2 = (0.013466) \times 2$

$= 0.026932$

FACTOR III (LETRAS LATINAS (FOCOS))

$SSL = (5 \sum_k \bar{X}^2_{\cdot\cdot k\cdot\cdot} - t^2\bar{X}^2_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot})r$

$= [5(0.483025+0.483025+0.477481$

$\bar{X}_{\cdot\cdot A\cdot\cdot} = 0.695000$

$\bar{X}_{\cdot\cdot B\cdot\cdot} = 0.695000$

$\bar{X}_{\cdot\cdot C\cdot\cdot} = 0.691000$

$\bar{X}_{\cdot\cdot D\cdot\cdot} = 0.696000$

$$= \quad + 0.484416 + 0.491401) \quad - \quad \bar{X}_{..E..} = 0.701000$$

$$- 12.096484 \,]\, x\ 2$$

$$= (5 \times 2.419348 - 12.096484) \times 2$$

$$= (12.096740 - 12.096484) \times 2 = 0.000256 \times 2 = 0.000512$$

FACTOR IV (LETRAS GRIEGAS (FILTROS)):

$\bar{X}_{...\alpha.} = 0.704$

$\bar{X}_{...\beta.} = 0.685$

$\bar{X}_{...\gamma.} = 0.709$

$\bar{X}_{...\delta.} = 0.643$

$\bar{X}_{...\varepsilon.} = 0.737$

$$SSG = (t\sum_{l}\bar{X}^2_{...l.} - t^2\bar{X}^2_{.....})r$$

$$= [\, 5(0.495816+0.469225+0.502681+$$

$$0.413449+0.543169) -$$

$$12.096484 \,]\ x\ 2$$

$$= (5 \times 2.424140 - 12.096484) \times 2$$

$$= (12.1207 - 12.096484) \times 2$$

$$= 0.024216 \times 2 = 0.048432$$

RESIDUAL (DUPLICADOS):

$$SSRes = \sum_{ijklr}\sum\sum\sum\sum X^2_{ijklr} - r\sum_{ij}\sum \bar{X}^2_{ij...}$$

$$= 24.2984-2(0.65^2+0.72^2+0.71^2+...+0.665^2+0.745^2$$

$$+ 0.78^2)$$

$$= 24.2984 - 2 \times 12.1467 = 0.005000$$

INTERACCIONES: $SSI = TSS - SSR - SSC - SSL - SSG - SSRes$

$$= 0.105432-0.019252-0.026932-0.000512-0.048432-$$

$$0.0050 = 0.005304$$

CON LO ANTERIOR PODEMOS FORMULAR LA SIGUIENTE TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA:

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	MEDIOS CUADRATICOS	F_{CALC}	$F_c = F_{\alpha,\nu_1\nu_2}$
FACTOR I (PELICULAS)	$t-1=5-1$ $=4$	SSR 0.019252	MSR=0.019252/4 =0.004813	F_I=MSR/MSRe =24.065	$F_I = F_{0,99,4,25}$ 4.18
FACTOR II (CAMARAS)	$t-1=5-1$ $=4$	SSC 0.026932	MSC=$\frac{0.026932}{4}$ =0.006733	F_{II}=MSC/MSRe = 33.665	$F_{II} = F_{0,99,4,25}$ 4.18
FACTOR III (BULBOS)	$t-1=4$	SSL 0.000512	MSL=0.000512/4 =0.000128	F_{III} =MSL/MSRe = 0.64	$F_{III} = F_{0.99,4,25}$ 4.18
FACTOR IV (FILTROS)	$t-1=4$	SSG 0.048432	MSG=$\frac{0.048432}{4}$ =0.012108	F_{IV}=MSG/MSRe =60.54	$F_{IV} = F_{0.99,4,25}$ 4.18
INTERACCIONES	$(t-1)(t-3)=$ $4\times2=8$	SSI 0.005304	MSI=0.005304/8 =0.000663	F_{IN}=MSI/MSRe =3.3150	$F = F_{0.99,8,25}$ 3.32
RESIDUAL (DUPLICADOS)	$=49-16-8$ $=25$	SSRe 0.0050	MSRe=0.0050/25 =0.00020		
TOTAL	rt^2-1 $2\times25-1$ $=49$	0.105432			

a) EL ESTIMADOR INSESGADO DE LA VARIANCIA RESIDUAL σ^2 ES $\hat{\sigma}^2$ = MSRes = 0.00020

b) DE LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA SE OBSERVA QUE LAS PELICULAS, LAS CAMARAS Y LOS TIPOS DE FILTROS PRODUCEN EFECTOS SIGNIFICATIVOS.

c) EL INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA CAMARA # 5 SERA (α = 0.05):

$$\bar{X}_{.5...} \pm t_{.025,25}\sqrt{\frac{MSRes}{5}} = 0.731 \pm 2.060\sqrt{\frac{0.00020}{5}} =$$

$$= 0.731 \pm 2.060 \times 0.006325 = 0.731 \pm 0.013029 = (0.717971,\ 0.744029)$$

d) COMPARACIONES MULTIPLES:

d.1) ENTRE LAS PELICULAS:

ICULA	1	2	3	4	5
....	0.6780	0.682	0.683	0.705	0.73
	*	0.0040	0.0050	0.0270	0.0520
		*	0.001	0.023	0.048
			*	0.022	0.047
				*	0.025

DUNCAN: 1 2 3 4 5

p	2	3	4	5
q'	2.915	3.065	3.145	3.215
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

DONDE

$$W_p = q' \sqrt{\frac{0.00020}{10}}$$

$$q' = q'_{0.05,(r,25)}$$

FISHER: $LSD = t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2MSR_{es}}{rt}} = t_{0.01/2,25}\sqrt{\frac{2x6.00020}{2x5}} =$

$= 2.060 \times 0.0063 = 0.013$

DE LA TABLA OBSERVAMOS QUE LAS PELICULAS 4 Y 5 PRESENTAN EFECTOS SIGNIFICATIVOS

METODO DE TUKEY:

$$W = q_{\alpha(t,v)}\sqrt{\frac{MSR_{es}}{rt}} = q_{0.05,(5,25)}\sqrt{\frac{0.00020}{10}} = 4.1583x0.0045 = 0.0186$$

OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE FISHER SE LLEGA A LA MISMA CONCLUSION (VER TABLA).

d.2) ENTRE CAMARAS

CAMARAS	1	3	4	2	5
$\bar{X}_{.j...}$	0.66	0.685	0.70	0.702	0.731
	*	0.0250	0.04	0.042	0.071
		*	0.015	0.017	0.0450
			*	0.002	0.031
				*	0.029

FISHER: LSD = 2.060x0.0063

= 0.013

TUCKEY: W = 0.0186

DUNCAN:

p	2	3	4	5
q'	2.915	3.065	3.145	3.215
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

OBSERVAMOS EN ESTE CASO QUE FISHER Y DUNCAN COINCIDEN EN RESULTADOS: μ_1, μ_3 Y μ_5 SON SIGNIFICATIVAMENTE DIFERENTES MIENTRAS μ_4 Y μ_2 SON MENOS SIGNIFICATIVOS; EL METODO DE TUCKEY DIFIERE EN LO REFERENTE A μ_3 DE DONDE SE INFIERE QUE LAS CAMARAS 1 Y 5 SON LAS QUE DIFIEREN.

d.3) PARA LOS FILTROS:

FILTROS	δ	β	α	γ	ε
$\bar{X}_{....i}$	0.643	0.685	0.704	0.709	0.737
	*	0.042	0.0610	0.066	0.094
		*	0.019	0.024	0.052
			*	0.005	0.033
				*	0.028

FISHER: LSD = 0.013

TUCKEY: W = 0.0186

DUNCAN:

p	2	3	4	5
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

EN ESTE CASO LOS FILTROS α Y γ SON MENOS SIGNIFICATIVOS EN LOS EFECTOS QUE LOS FILTROS RESTANTES δ, β Y ε (OBSERVESE LA COINCIDENCIA DE RESULTADOS POR LOS 3 METODOS.

12. BLOQUES ALEATORIZADOS INCOMPLETOS

ES USUAL QUE AL PLANEAR UN EXPERIMENTO SE PRESENTA LA SITUACION DE QUE LOS BLOQUES NO SON LO SUFICIENTEMENTE GRANDES COMO PARA ACOMODAR UNA REPLICA COMPLETA.

POR EJEMPLO, SI EN UN DIA SOLO SE PUEDEN REALIZAR 3 ENSAYES Y SI HAY 4 NIVELES DEL "TRATAMIENTO", ENTONCES EN UN SOLO DIA NO SE PUEDEN REALIZAR LOS ENSAYES PARA OBSERVAR LOS CUATRO NIVELES EN UN SOLO BLOQUE (DIA). EN ESTE CASO EL DISEÑO EXPERIMENTAL QUEDARIA CON 4 BLOQUES CON TRES RESULTADOS SOLAMENTE CADA UNO, DE LA SIGUIENTE MANERA:

BLOQUES			
I	II	III	IV
B	A	C	B
A	B	A	D
C	D	D	C

EN EL QUE EL ORDEN DE APARICION DE CADA TRATAMIENTO EN CADA BLOQUE HA SIDO ALEATORIZADO.

UN DISEÑO EXPERIMENTAL COMO ESTE SE DENOMINA DE BLOQUES ALEATORIZADOS INCOMPLETOS O BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS (BIB). EL TERMINO BALANCEADO NO SOLO SIGNIFICA QUE TODOS LOS BLOQUES SON DEL MISMO TAMAÑO Y QUE CADA NIVEL DEL TRATAMIENTO APARECE EL MISMO NUMERO DE VECES, SINO TAMBIEN QUE CADA PAREJA DE NIVELES DEL TRATAMIENTO APARECE JUNTA (EN EL MISMO BLOQUE) EL

MISMO NUMERO DE VECES; EN EL EJEMPLO ANTERIOR ESTO SUCEDE 2 VECES.

PARA DESCRIBIR UN EXPERIMENTO BIB SE UTILIZAN LOS SIGUIENTES TERMINOS:

t = NUMERO DE NIVELES DEL TRATAMIENTO

b = NUMERO DE BLOQUES

k = NUMERO DE NIVELES DEL TRATAMIENTO EN CADA BLOQUE

r = NUMERO DE REPLICAS DE CADA NIVEL DEL TRATAMIENTO

λ = NUMERO DE BLOQUES EN LOS CUALES APARECE CADA PAREJA DE NIVELES DEL TRATAMIENTO

UNA FORMA ALTERNATIVA DE EXPRESAR EL EXPERIMENTO ANTERIOR ES MEDIANTE LA SIGUIENTE TABLA:

TRATAMIENTOS	BLOQUES			
	I	II	III	IV
A	X	X	X	
B	X	X		X
C	X		X	X
D		X	X	X

t=4

b=4

k=3

r=3

λ=2

OTRO EJEMPLO ES EL SIGUIENTE:

TRATAMIENTOS	BLOQUES I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
A	X				X	X	X		X	X	
B		X				X	X	X		X	X
C	X		X				X	X	X		X
D	X	X		X				X	X	X	
E		X	X		X				X	X	X
F	X		X	X		X				X	X
G	X	X		X	X		X				X
H	X	X	X		X	X		X			
I		X	X	X		X	X		X		
J			X	X	X		X	X		X	
K				X	X	X		X	X		X

EN ESTE EJEMPLO: $t = 11$, $b = 11$, $k = 6$, $r = 6$ y $\lambda = 3$.

EN EL LIBRO DE COCHRAN Y COX, "EXPERIMENTAL DESIGNS", SE PRESENTAN UNA LISTA DE DISEÑOS BIB.

EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR AL DISEÑO BIB ES

$$X_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + Z_{ij} \qquad (1)$$

DONDE LAS β_i SON LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES, Y LAS τ_j LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS, CON $\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0$.

EN ESTOS EXPERIMENTOS SE PRESUME QUE NO HAY INTERACCION ENTRE LOS DOS FACTORES.

LA DIFERENCIA DEL EXPERIMENTO BIB Y EL DE BLOQUES COMPLETOS ALEATORIZADOS, ES QUE EN EL PRIMERO NO ESTÁN PRESENTES TODAS LAS POSIBLES COMBINACIONES DE i Y j.

CONSIDEREMOS UN NIVEL PARTICULAR DEL TRATAMIENTO, q; LA SUMA DE TODAS LAS OBSERVACIONES DE ESTE NIVEL ES, UTILIZANDO LA EC (1):

$$X_{\cdot q} = \sum_{i(q)} X_{iq} = r\mu + \sum_{i(q)} \beta_i + r\tau_q + \sum_{i(q)} Z_{iq} \qquad (2)$$

DONDE $\sum_{i(q)}$ DENOTA LA SUMATORIA SOBRE TODOS LOS BLOQUES (r) QUE CONTIENEN EL q-ESIMO TRATAMIENTO. SIMILARMENTE:

$$X_{i\cdot} = \sum_{j(i)} X_{ij} = k\mu + k\beta_i + \sum_{j(i)} \tau_j + \sum_{j(i)} Z_{ij} \qquad (3)$$

DONDE $\sum_{j(i)}$ DENOTA LA SUMATORIA SOBRE TODOS LOS TRATAMIENTOS INCLUIDOS EN EL i-ESIMO BLOQUE.

SUMANDO LA EC (3) SOBRE TODOS LOS BLOQUES QUE CONTIENEN EL q-ESIMO TRATAMIENTO SE OBTIENE:

$$\sum_{i(q)} \sum_{j(i)} X_{ij} = rk\mu + k \sum_{i(q)} \beta_i + \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} \tau_j + \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} Z_{ij} \qquad (4)$$

EL TERCER TERMINO DEL MIEMBRO DERECHO DE EST· ECUACION VALE:

$$\sum_{i(q)}\sum_{j(i)}\tau_j = r\tau_q + \lambda \sum_{j\neq q}\tau_j = (r-\lambda)\tau_q \qquad (5)$$

YA QUE $\sum_{j=1}^{t}\tau_j = 0 = \tau_q + \sum_{j\neq q}\tau_j$, POR LO QUE $\sum_{j\neq q}\tau_j = -\tau_q$

SUSTRAYENDO EL RESULTADO DE LA EC (4) PREVIA SUSTITUCION DE LA EC (5) AL DE LA EC (2) MULTIPLICADO POR k SE OBTIENE

$$k\sum_{i(q)}X_{iq} - \sum_{i(q)}\sum_{j(i)}X_{ij} = (kr - r + \lambda)\tau_q + k\sum_{i(q)}Z_{iq} - \sum_{i(q)}\sum_{j(i)}Z_{ij} \qquad (6)$$

POR TANTO, Y CONSIDERANDO QUE $E(Z_{ij}) = 0$ Y QUE LA RELACION $\lambda = r(k-1)/(t-1)$ ES VALIDA, DE LA EC (6) SE OBTIENE QUE UN ESTIMADOR INSESGADO DE τ_q ES

$$\hat{\tau}_q = \frac{1}{\lambda t}\{k\sum_{i(q)}X_{iq} - \sum_{i(q)}\sum_{j(i)}X_{ij}\} \qquad (7)$$

O

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t}\{\sum_{i(q)}X_{iq} - \bar{X}_{i.}\} = \frac{k}{\lambda t}\{X_{.q} - \sum_{i(q)}\bar{X}_{i.}\} \qquad (8)$$

DONDE $\bar{X}_{i.} = \sum_j X_{ij}/k$ = PROMEDIO ARITMETICO MARGINAL DE LAS OBSERVACIONES DEL BLOQUE i

$X_{.q}$ = SUMA DE TODAS LAS OBSERVACIONES DEL q-ESIMO TRATAMIENTO

SUMANDO LA EC (1) SOBRE TODAS LAS OBSERVACIONES SE ENCUENTRA QUE EL PROMEDIO GLOBAL

$$\bar{X}_{..} = \sum_{i} \sum_{j} X_{ij}/(kb) \tag{9}$$

ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE μ. POR TANTO, UN ESTIMADOR INSESGADO DEL EFECTO DEL q-ESIMO TRATAMIENTO ES $\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q$, EL CUAL TIENE COMO VARIANCIA A

$$\text{Var}\ (\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q) = \frac{\sigma^2}{r} \{\frac{1}{t} + \frac{k(t-1)^2}{(k-1)t^2}\} \tag{10}$$

DE IGUAL MANERA, LA DIFERENCIA DE EFECTOS ENTRE LOS TRATAMIENTOS q Y q' SE ESTIMA CON $\hat{\tau}_q - \hat{\tau}_{q'}$, CON LO CUAL SE TIENE UNA VARIANCIA DE LA ESTIMACION

$$\text{Var}(\hat{\tau}_q - \hat{\tau}_{q'}) = \sigma^2 \frac{2k}{\lambda t} \tag{11}$$

LA TABLA PARA EL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES (SIN AJUSTAR)	b - 1	SSB	MSB = SSB/(b - 1)	
TRATAMIENTOS (AJUSTADO)	t - 1	SST	MST = SST/(t - 1)	MST/MSE
ERROR O RESIDUAL	bk-t-b+1	SSE	MSE=SSE/(bk-t-b-1)	
TOTAL	bk - 1	TSS		

DONDE

$$SSB = \sum_{i=1}^{b} X_{i.}^{2}/k - bk\,\overline{X}_{..}^{2} \qquad (12)$$

$$SST = \frac{1}{k\lambda t}\sum_{j=1}^{t}\left(kX_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.}\right)^{2} \qquad (13)$$

$$TSS = \sum_{i}\sum_{j} X_{ij}^{2} - bk\,\overline{X}_{..}^{2} \qquad (14)$$

$$SSE = TSS - SSB - SST \qquad (15)$$

ES NECESARIO MENCIONAR QUE EL SSB CALCULADO CON LA EC (12) SOLO SIRVE EN ESTE CASO COMO AUXILIAR PARA CALCULAR SSE CON LA EC (15), PERO NO PARA HACER LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE EFECTOS DE LOS BLOQUES; LA RAZON DE ESTO ES QUE EN ESTE CASO, AL USAR LA EC (1) PARA CALCULAR SSB SE ENCUENTRA QUE DEPENDE DE β_i Y DE τ_j; PARA QUE SE PUEDA HACER PRUEBA DE EFECTOS DE BLOQUES SE REQUIERE DISEÑAR UN EXPERIMENTO DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADO Y SIMETRICO, EL CUAL SE ESTUDIARA MAS ADELANTE.

EJEMPLO

EN LA PRODUCCION DE UN COMPONENTE DE UNA MAQUINA, SE TIENE QUE EL DIAMETRO INTERIOR DE UN TUBO ES UNA DIMENSION CRITICA. ESTOS COMPONENTES SE FABRICAN CON 7 MAQUINAS Y 7 ALEACIONES DIFERENTES.

PARA DETERMINAR LOS EFECTOS DE LAS ALEACIONES SE DISEÑO UN EXPERIMENTO BIB, EN EL QUE LOS BLOQUES FUERON LAS MAQUINAS Y

LOS TRATAMIENTOS FUERON LAS ALEACIONES, Y SE TOMARON MUESTRAS DE 10 DIAMETROS EN CADA CASO. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LAS DIFERENCIAS DEL PROMEDIO DE LOS DIEZ DATOS Y LA DIMENSION NOMINAL, EN MM.

TRATAMIENTOS (ALEACIONES)	MAQUINAS (BLOQUES)							TOTALES ($X_{.j}$)
	1	2	3	4	5	6	7	
A	5	4	9					18
B			12	9	9			30
C	7			6		8		21
D			7			5	3	15
E	4				6		5	15
F		10			12	9		31
G		4		4			3	11
TOTALES ($X_{i.}$)	16	18	28	19	27	22	11	141
$\overline{X}_{i.}$	5.33	6.00	9.33	6.33	9.00	7.33	3.67	

EN ESTE CASO SE TIENE QUE b=t=7, k=r=3, $\lambda=1$, $\overline{X}_{..} = \frac{141}{21} = 6.7143$

$$SSB=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{7} X_{i.}^2 - 7x3x\,\overline{X}_{..}^2 = \frac{1}{3}(16^2+18^2+28^2+19^2+27^2+22^2+11^2)-946.7143=72.96$$

$$SST = \frac{1}{3x1x7}\sum_{j=1}^{7}(3X_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.})^2 = \frac{1}{21}\Big[\{3x18 - (16+18+28)\}^2 +$$

$$+ \{3x30 - (28+19+27)\}^2 + \{3x21 - (16+19+22)\}^2 +$$

$$+ \{3x15 - (28+22+11)\}^2 + \{3x15 - (16+27+11)\}^2 +$$

$$+ \{3x31 - (18+27+22)\}^2 + \{3x11 - (18+19+11)\}^2\Big] = 75.90$$

$$TTS = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - bk\,\overline{X}_{..}^2 = 5^2+4^2+9^2+12^2+\ldots+3^2 - 946.7143 = 156.29$$

$SSE = 156.29 - 72.96 - 75.90 = 7.43$

$MST = 75.90/6 = 12.65$, $MSE = 7.43/8 = 0.929$, $F_T = \frac{12.65}{0.929} = 13.62$

$F_{0.99,6,8} = 6.37 < 13.62$, POR LO QUE SE CONCLUYE QUE CON UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA SI HAY EFECTO DEBIDO A LA ALEACION QUE SE UTILIZA PARA FABRICAR EL COMPONENTE.

TAREA: ESTIMAR LOS τ_i

PARA EL EJEMPLO DE LOS DIAMETROS INTERNOS DE LOS TUBOS, CALCULAR LOS VALORES ESTIMADOS DE τ_j's Y HACER COMPARACIONES MULTIPLES:

PARA ESTIMAR LOS EFECTOS DE CADA TRATAMIENTO PODEMOS USAR LA FORMULA ALTERNATIVA:

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t}\left[\sum_{i(q)} X_{iq} - \sum_{i(q)} \bar{X}_{i.}\right]$$

$\hat{\tau}_A = \frac{3}{1x7}[18 - 20.66] = -1.143$ $\qquad$ $\hat{\tau}_E = -1.287$

$\hat{\tau}_B = 0.429[30 - 24.66] = 2.288$ $\qquad$ $\hat{\tau}_F = 3.718$

$\hat{\tau}_C = 0.429[21 - 19] = 0.858$ $\qquad$ $\hat{\tau}_G = -2.145$

$\hat{\tau}_D = 0.429[15 - 20.33] = -2.288$

COMPARACIONES MULTIPLES:

TRATAMIENTO	D	G	E	A	C	B	F
$\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q$	4.4263	4.5693	5.4273	5.5713	7.5723	9.0023	10.4323
	*	0.143	1.0010	1.1450	3.146	4.576	6.006
		*	0.858	1.002	3.003	4.433	5.863
			*	0.144	2.145	3.575	5.005
				*	2.001	3.431	4.861
					*	1.43	2.86
						*	1.43

<u>FISHER</u>: $LSD = t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2k\ MSE}{\lambda t}} = t_{0.05,8}\sqrt{\frac{2x3x0.929}{1x7}} = 0.061$

TUCKEY: $W = q_{0.05}\ (7,8)\ \frac{MSE}{t} = 5.4\ \frac{0.929}{7} = 1{,}967$

DUNCAN:

p	2	3	4	5	6	7
q'	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56
W_p	1.88	1.235	1.264	1.282	1.293	1.297

DONDE $W_p = q'_{0.05},\ (p,8)\ \frac{0.929}{7}$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE LOS TRATAMIENTOS D, G, E Y A SON SIGNIFICATIVAMENTE MENORES QUE C, B Y F.

EJEMPLO

UNA FABRICA DESEA COMPARAR LA COMODIDAD QUE OFRECEN 8 TIPOS NUEVOS DE ALMOHADAS Y UNO QUE YA ESTA EN EL MERCADO. PARA ESTO SE DISEÑO EL SIGUIENTE EXPERIMENTO DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADO:

PARA REDUCIR EL PROBLEMA QUE TENDRIA UNA PERSONA AL ASIGNAR UNA CALIFICACION AL GRADO DE COMODIDAD SI SE TUVIERAN LOS 9 TIPOS DE ALMOHADA JUNTOS, SE DECIDIO AGRUPAPLAS EN 12 BLOQUES DE 3, Y A CADA BLOQUE SE LE ASIGNARON AL AZAR LOS TIPOS DE ALMOHADA LOS CUALES, A SU VEZ, SE IDENTIFICARON CON LAS LETRAS DE LA A A LA I (LAS LETRAS NO SE PUSIERON VISIBLES). LA PRUEBA CONSISTIO EN SELECCIONAR AL AZAR A 20 PERSONAS PARA QUE CALIFICARAN CON NUMEROS DEL 1 AL 5 EL GRADO DE COMODIDAD; EL DATO QUE SE ANOTO EN CADA CASO FUE LA SUMA DE LAS CALIFICACIONES DE LAS 20 PERSONAS, HABIENDOSE OBTENIDO LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

BLOQUE	TRATAMIENTO (TIPO DE ALMOHADA)			TOTAL
1	A59	B26	C38	123
2	D85	E92	F69	246
3	G74	H52	I27	153
4	A62	D70	G68	200
5	B27	E98	H59	184
6	C31	F60	I35	126
7	A63	E85	I30	178
8	B22	F73	G75	170
9	C45	D74	H51	170
10	A52	F76	H43	171
11	B18	D79	I41	178
12	C41	E84	G81	206
				2065

$t = 9$, $b = 12$, $k = 3$, $r = 4$, $\lambda = 1$.

OTRA FORMA DE PRESENTAR LOS DATOS ANTERIORES ES:

TRATAMIENTO (TIPO DE ALMOHADA)	BLOQUE												TOTALES
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$(X_{.j})$
A	59			62			63			52			236
B	26				27			22			18		93
C	38					31			45			41	155
D		85		70					74		79		308
E		92			98		85					84	359
F		69				60		73		76			278
G			74	68				75				81	298
H			52		59				51	43			205
I			27			35	30				41		133
TOTALES $(X_{i.})$	123	246	153	200	184	126	178	170	170	171	138	206	2065

$$\bar{X}_{..} = 2065/(4\times 9) = 57.361111,\quad 36\,\bar{X}^2_{..} = 36\times 57.3611^2 = 118{,}450.69$$

$$SSB = \frac{1}{3}(123^2+246^2+153^2+200^2+184^2+126^2+178^2+170^2+170^2+$$

$$+171^2+178^2+206^2) - 118{,}450.69 =$$

$$= \frac{368{,}991.00}{3} - 118{,}450.69 = 4{,}546.31$$

$$SST = \frac{1}{3\times 1\times 9}\{(3\times 236-(123+200+178+171))^2+$$

$$+(3\times 93-(123+184+170+138))^2+$$

$$+(3\times 155-(123+126+170+206))^2+$$

$$+(3\times 308-(246+200+170+138))^2+$$

$$+(3\times 359-(246+184+178+206))^2+$$

$$+(3\times 278-(246+126+170+171))^2+$$

$$+(3\times 298-(153+200+170+206))^2+(3\times 205-(153+$$

$$+184+170+171))^2+(3\times 133-(153+126+178+138))^2\} =$$

$$= 322{,}122.00/27 = 11{,}930.07$$

$TSS = 59^2+62^2+63^2+52^2+26^2+27^2+ \ldots + 41^2-118,450.69 =$

$= 135,435.00-118,450.69 = 16,984.31$

$SSE = 16,984.31-4,546.31-11,930.07 = 507.93$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES	11	4,546.31	—	
TRATAMIENTOS	8	11,930.07	1491.26	46.97 > 2.59
ERROR	16	507.93	31.75	
TOTAL	35	16,984.31		

PUESTO QUE $F_{0.95,8,16} = 2.59 < 46.97$, SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LOS NUEVE TIPOS DE ALMOHADA. VEAMOS, POR TANTO, CUALES TIPOS SON LOS QUE DIFIEREN DE LOS DEMAS, PARA LO CUAL ESTIMAREMOS LOS EFECTOS, τ_q, DE CADA NIVEL.

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t} \{X_{.q} - \sum_{i(q)} \overline{X}_{i.}\}$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{3}{9}(236 - \frac{123+200+178+171}{3}) = \frac{1}{3}(236 - 224.00) = 4$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{1}{3}(93 - \frac{123+184+170+138}{3}) = \frac{1}{3}(93 - 205) = -37.33$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{1}{3}(155 - \frac{123+126+170+206}{3}) = \frac{1}{3}(155 - 208.33) = -17.78$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{1}{3}(308 - \frac{246+200+170+138}{3}) = 18.89$$

$$\hat{\tau}_5 = \frac{1}{3}(359 - \frac{246+184+178+206}{3}) = 29.22$$

$$\hat{\tau}_6 = \frac{1}{3}\left(278 - \frac{246 + 126 + 170 + 171}{3}\right) = 13.44$$

$$\hat{\tau}_7 = \frac{1}{3}\left(298 - \frac{153 + 200 + 170 + 106}{3}\right) = 18.33$$

$$\hat{\tau}_8 = \frac{1}{3}\left(205 - \frac{153 + 184 + 170 + 171}{3}\right) = -7.00$$

$$\hat{\tau}_9 = \frac{1}{3}\left(133 - \frac{153 + 126 + 178 + 138}{3}\right) = -21.78$$

LA TABLA DE ESTIMACIONES DE LOS EFECTOS DE LOS NIVELES DEL TRATAMIENTO SON:

TRATAMIENTO	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$\bar{y}_{..} + \hat{\tau}_q$	61.36	20.03	39.58	76.25	86.58	70.80	75.69	50.36	35.58

USANDO MSW = MSE = 31.75, CON 16 GRADOS DE LIBERTAD, LA MINIMA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE DOS MEDIAS ES, CON $\alpha = 0.05$:

$$LSD = t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2k(MSE)}{\lambda t}} = 2.12\sqrt{\frac{2 \times 3 \times 31.75}{1 \times 9}} = 9.75$$

LAS ESTIMACIONES $\hat{\tau}_q$ ORDENADAS EN FORMA CRECIENTE SON LAS QUE SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE, EN LA CUAL SE HAN ANOTADO TAMBIEN LAS DIFERENCIAS QUE HAY ENTRE ELLAS:

B	I	C	H	A	F	G	D	E
20.3	35.58	39.58	50.36	61.36	70.80	75.69	76.25	86.58
*	15.28							
	*	$\boxed{4.00}$	14.78					
		*	10.78					
			*	11.00				
				*	$\boxed{9.44}$	14.33		
					*	$\boxed{4.89}$	$\boxed{5.45}$	15.78
						*	$\boxed{0.56}$	10.89
							*	10.33

LAS MEDIAS QUE RESULTARON SER ESTADISTICAMENTE IGUALES SON LAS SUBRAYADAS A CONTINUACION CON LINEA COMUN:

B	I	C	H	A	F	G	D	E
20.3	35.58	39.58	50.36	61.36	70.80	75.69	76.25	86.58

BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS SIMETRICOS

SI EL NUMERO DE BLOQUES ES IGUAL AL DE TRATAMIENTOS $(b = t)$, ENTONCES $r = k$. EN ESTE CASO SE DICE QUE EL EXPERIMENTO ES DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS SIMETRICOS (SBIB), Y ES POSIBLE HACER PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES EN UNA MANERA SIMILAR QUE PARA LOS TRATAMIENTOS, MEDIAN

TE LA SIGUIENTE TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA, EN LA CUAL SE NOTA QUE HAY SUMAS DE CUADRADOS AJUSTADOS PARA CADA UNO DE LOS DOS FACTORES.

FUENTE	SS	G de L.	MS	F
BLOQUES	SSB			
TRATAMIENTOS (AJUSTADA)	$\tilde{SST}$	t - 1	$MST=\tilde{SST}/(t-1)$	MST/MSE
TRATAMIENTOS	SST			
BLOQUES (AJUSTADA)	$\tilde{SSB}$	b - 1	$MSB=\tilde{SSB}/(b-1)$	MSB/MSE
ERROR	SSE	bk-b-t-1		
TOTAL	TSS	bk - 1		

EN ESTA TABLA SSB, $\tilde{SST}$, SSE Y TSS SE CALCULAN CON LAS MISMAS FORMULAS QUE EN EL EXPERIMENTO BIB; LAS OTRAS SE CALCULAN CON LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$SST = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{t} X^2_{.j} - bk\bar{X}^2_{..}$$

$$\tilde{SSB} = \frac{1}{kt\lambda} \sum_{i=1}^{b} (rX_{i.} - \sum_{j(i)} X_{.j})^2$$

EJEMPLO

EL PROBLEMA PRESENTADO ANTERIORMENTE, DE LAS MAQUINAS Y ALEACIONES, ES UN EXPERIMENTO SBIB, YA QUE EN EL $t = b = 7$. PRO- [illegible] HIPOTESIS DE QUE $\beta_i = 0$ PARA CADA i, A UN 95% DE NIVEL

DE CONFIANZA.

$$SST = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{7} X_{.j}^{2} - bk\bar{X}_{..}^{2} = \frac{1}{3}(18^2 + 30^2 + 21^2 + 15^2 + 15^2 + 31^2 + 11^2) -$$

$$- 946.71 = 118.96$$

$$SSB = \frac{1}{3 \times 7 \times 1}\sum_{i=1}^{7} (3X_{i.} - \sum_{j(i)} X_{.j})^2 = \frac{1}{21}[(3 \times 16 - (18 + 21 + 15))^2 +$$

$$+ (3 \times 18 - (18 + 31 + 11))^2 + (3 \times 28 - (18 + 30 + 15))^2 +$$

$$+ (3 \times 19 - (30 + 21 + 11))^2 + (3 \times 27 - (30 + 15 + 31))^2 +$$

$$+ (3 \times 22 - (21 + 15 + 31))^2 + (3 \times 11 - (15 + 15 + 11))^2] = 29.90$$

PARA VERIFICAR, CALCULEMOS SSE = TSS − SST − SSB =
156.29 − 118.96 − 29.90 = 7.43 = TSS − SST − SSB

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. de L.	SS	MS	F
MAQUINAS		72.96		
ALEACIONES (AJUSTADA)	6	75.90	12.65	13.62>3.58
MAQUINAS (AJUSTADA)	6	29.90	4.98	5.36>3.58
ALEACIONES		118.96		
ERROR	9	7.43	0.929	
TOTAL	20	156.29		

$F_{0.95,6,8} = 3.58$

POR LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE LOS NIVELES TANTO DE LAS ALEACIONES COMO DE LAS MAQUINAS.

TAREA: ESTIMAR LAS MEDIAS PARA CADA NIVEL DE BLOQUES Y TRATAMIENTOS

EJEMPLO

DIEZ ESPECIMENES DE HULE SE ENVIARON A UN LABORATORIO PARA UNA PRUEBA DE RESISTENCIA A LA FLEXION. HAY CINCO TIEMPOS DE CURADO. SIN EMBARGO CADA ESPECIMEN ES SUFICIENTE SOLAMENTE PARA DOS MUESTRAS. ENTONCES SE PROPUSO UN DISEÑO BIB. LOS ESPECIMENES SE CONSIDERARON COMO BLOCKS Y LOS TIEMPOS DE CURADO COMO TRATAMIENTOS. INVESTIGUE EL EFECTO DEL TIEMPO DE CURADO SOBRE LA RESISTENCIA A LA FLEXION, USANDO LOS DATOS CODIFICADOS DE ABAJO.

(BLOQUES) ESPECIMENES	TIEMPOS DE CURADO 1	2	3	4	(TRAT) 5	TOTALES $X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
1	25				6	31	15.5
2	10		3			13	6.5
3	3			16		19	9.5
4	15	11				26	13
5			0		6	6	3
6				14	11	25	12.5
7		6			17	23	11.5
8			10	27		37	18.5
9		10	5			15	7.5
10		7		21		28	14
TOTALES $X_{.j}$	53	34	18	78	40	223	
$\bar{X}_{.j}$	13.25	8.5	4.5	19.5	10	$\bar{X}_{..}$	= 11.15

EN ESTE CASO TENEMOS: b = # BLOQUES = 10; t = # TRATAMIENTOS = 5; r = # REPLICAS = 4; k = # NIV. DE TRAT/BLOQUE = 2; λ = # BLOQUES C/PAREJAS IGUALES = 1

PARA LOS BLOQUES: $SSB = k^{-1} \sum_{i=1}^{b} X_{i.}^2 - (bk)^{-1} X_{..}^2$

$$= \frac{1}{2}(31^2 + 13^2 + \dots + 15^2 + 28^2) - \frac{1}{10 \times 2} 223^2$$

$$= 2867.5 - 2486.45 = 381.05$$

PARA LOS TRATAMIENTOS:

$$SST = \frac{t-1}{Nk(k-1)} \sum_{j=1}^{t} \left[kX_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.}\right]^2$$

$$SST = \frac{5-1}{20 \times 2(1)} \{[2 \times 53 - (31 + 13 + 19 + 26)]^2 + [2 \times 34 - (26 + 23 + 15 + 28)]^2 + [2 \times 18 - (13 + 6 + 37 + 15)]^2 + [2 \times 70 - (19 + 25 + 37 + 28)]^2 + [2 \times 40 - (31 + 6 + 25 + 23)]^2\} = \frac{1}{10}\{(17)^2 + (-24)^2 + (-35)^2 + (47)^2 + (-5)^2\} = \frac{1}{10}(289 + 576 + 1225 + 2209 + 25) = 432.4$$

TOTALES: $TSS = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{bk}$

$$= 25^2 + 10^2 + 3^2 + 15^2 + \dots + 6^2 + 6^2 + 11^2 + 17^2 - 2486.45$$

$$= 3503 - 2486.45 = 1016.55$$

ERROR: $SSE = TSS - SST - SSB$

$$= 1016.55 - 432.4 - 381.05 = 203.10$$

E DONDE:

FUENTE	g. de l.	SS	MS	F	$F_c = F_{0.05,4,6}$
ESPECIMENES (BLOQUES S/AJUST)	b - 1 = 10 - 1 = 9	SSB=381.05	MSB=SSB/(b-1) = 42.34	NO SE PUEDE	
TIEMPO DE CURADO (AJUSTADOS)	t - 1 = 5 - 1 = 4	SST=432.4	MST=SST/(t-1) =108.10	MST/MSE =108.10/33.85 = 3.19	< 4.53
ERROR	bk-t-b+1= 20-5-10+1= 6	SSE=203.10	MSE=SSE/bk-t-b+1 = 33.85		
TOTAL	bk - 1 = 10 x 2-1=19	TSS=1016.55			

DADO QUE F CALCULADA (3.19) < F CRITICA ($F_{0.05,4,6}$ = 4.53) ENTONCES CONCLUIMOS QUE LAS RESISTENCIAS A LA FLEXION DE LOS ESPECIMENES DE HULE NO SE AFECTAN POR LOS TIEMPOS DE CURADO, O SEA, POR LOS TRATAMIENTOS.

b) ESTIMACION DE LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS:

$$\hat{\tau}_q = \frac{kr}{\lambda t}\left(\bar{x}_{.q} - r^{-1}\sum_{i(q)} \bar{x}_{i.}\right)$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{2 \times 4}{1 \times 5}\left[13.25 - \frac{15.5 + 6.5 + 9.5 + 13}{4}\right] = 3.40$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{8}{5}\left[8.5 - \frac{13 + 11.5 + 7.5 + 14}{4}\right] = -4.80$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{8}{5}\left[4.5 - \frac{6.5 + 3 + 18.5 + 7.5}{4}\right] = -7.00$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{8}{5}\left[19.5 - \frac{9.5 + 12.5 + 18.5 + 14}{4}\right] = 9.40$$

$$\hat{\tau}_5 = \frac{8}{5}\left[10 - \frac{15.5 + 3 + 12.5 + 11.5}{4}\right] = -1.00$$

c) AUNQUE EN ESTE CASO LA PRUEBA DE ANALISIS DE VARIANCIA INDICO

INDEPENDENCIA ENTRE LOS TIEMPOS DE CURADO (TRATAMIENTOS) HAREMOS LA PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES PARA VERIFICAR QUE NO DIFIEREN DICHOS TRATAMIENTOS.

USANDO EL CRITERIO LSD = $t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2k(MSE)}{\lambda t}}$ =

$$t_{0.05/2,6}\sqrt{\frac{2 \times 2 \times 33.85}{5}} = 2.447\sqrt{27.08} = 12.73$$

TIEMPOS DE CURADO	3	2	5	1	4
$\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q$	4.15	6.35	10.15	14.55	20.55
	*	2.2	6.0	10.4	16.4
		*	3.8	8.20	14.20
			*	4.4	10.40
				*	6.0

13 CUADRADOS DE YUDEN

EL EXPERIMENTO DE CUADRADOS DE YUDEN ES UN TIPO DE CUADRADOS LATINOS INCOMPLETO. SI EL FACTOR I ES EL DE LOS RENGLONES, EL II EL DE LAS COLUMNAS, Y EL III EL DE LAS LETRAS LATINAS, Y SI SE CUMPLE QUE LOS FACTORES I Y III TIENEN EL MISMO NUMERO DE NIVELES (t = b), ENTONCES LOS CUADRADOS DE YUDEN QUEDAN EN FORMA SEMEJANTE A LOS DOS SIGUIENTES EJEMPLOS 7 x 3 Y 7 x 4:

FACTOR I	FACTOR II		
	1	2	3
1	G	A	C
2	A	B	D
3	B	C	E
4	C	D	F
5	D	E	G
6	E	F	A
7	F	G	B

FACTOR I	FACTOR II			
	1	2	3	4
1	D	F	G	A
2	E	G	A	B
3	F	A	B	C
4	G	B	C	D
5	A	C	D	E
6	B	D	E	F
7	C	E	F	G

ESTE DISEÑO EXPERIMENTAL SE PUEDE VER TAMBIEN COMO UN BIB CON UN FACTOR ADICIONAL (EL II), EN CUYO CASO LA TABLA DE DATOS TENDRIA LA SIGUIENTE PRESENTACION, QUE EJEMPLIFICA EL CASO 7 x 4 ANTERIOR:

TRATAMIENTOS (FACTOR III)	FACTOR I						
	1	2	3	4	5	6	7
A	(4)	(3)	(2)		(1)		
B		(4)	(3)	(2)		(1)	
C			(4)	(3)	(2)		(1)
D	(1)			(4)	(3)	(2)	
E		(1)			(4)	(3)	(2)
F	(2)		(1)			(4)	(3)
G	(3)	(2)		(1)			(4)

EN ESTA TABLA LOS NUMEROS EN PARENTESIS SON LOS NIVELES DEL FACTOR II; EN ELLA: $t=7$, $b=7$, $r=4$, $k=4$ y $\lambda=2$.

EL MODELO MATEMATICO PARA ESTUDIAR ESTE EXPERIMENTO ES

$$X_{ijl} = \mu + \beta_i + \tau_j + \gamma_l + Z_{ijl} \qquad (1)$$

DONDE $i = 1,2,\ldots, b$; $j = 1, 2,\ldots, t = b$; $l = 1, 2,\ldots, k(<t)$, Y $\Sigma\beta_i = \Sigma\tau_j = \Sigma\gamma_l = 0$.

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES LA SIGUIENTE:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES		SSB		
TRATAMIENTOS (AJUSTADA)	t-1	$\tilde{SST}$	$MST=\tilde{SST}/(t-1)$	MST/MSE
TRATAMIENTOS		SST		
BLOQUES (AJUSTADA)	b-1	$\tilde{SSB}$	$MSB=\tilde{SSB}/(b-1)$	MSB/MSE
FACTOR II	k-1	SS2	MS2=SS2/(k-1)	MS2/MSE
ERROR	bk-2b-k+2	SSE	MSE=SSE/(bk-2b-k+2)	
TOTAL	bk-1	TSS		

EN ESTA TABLA:

$$SSB = k^{-1} \sum_{i=1}^{b} X_{i..}^{2} - bk\, \bar{X}_{...}^{2} \quad (2)$$

$$\tilde{SST} = (k\lambda t)^{-1} \sum_{j=1}^{t} (kX_{.j.} - \sum_{i(j)} X_{i..})^{2} \quad (3)$$

$$SST = k^{-1} \sum_{j=1}^{t} X_{.j.}^{2} - bk\, \bar{X}_{...}^{2} \quad (4)$$

$$\tilde{SSB} = (k\lambda t)^{-1} \sum_{i=1}^{b} (rX_{i..} - \sum_{j(i)} X_{.j.})^{2} \quad (5)$$

$$SS2 = b^{-1} \sum_{l=1}^{k} X_{..l}^{2} - bk\, \bar{X}_{...}^{2} \quad (6)$$

$$TSS = \sum \sum X_{ijl}^{2} - bk\, \bar{X}_{...}^{2} \quad (7)$$

$$SSE = TSS - SSB - \tilde{SST} - SS2 \quad (8)$$

EJEMPLO

EN LA DETERMINACION DEL NUMERO DE OCTANOS DE UNA GASOLINA, UN METODO USA UNA GASOLINA BASE Y SE TIENEN 6 ADITIVOS COMO CANDITATOS PARA FORMAR UNA NUEVA MARCA. EL EXPERIMENTO ES UNO DE CUADRADOS DE YUDEN 7x3: A CADA COMBUSTIBLE SE LE DAN 2 MINUTOS EN EL MOTOR Y EL RESULTADO SE REGISTRA EN UN INSTRUMENTO ESPECIAL,EL CUAL SE LEE A LOS 60, 90 Y 120 SEG PARA VERIFICAR LA ESTABILIDAD; UNA MARCADA DIFERENCIA EN LA LECTURA A LOS 90 Y 120 SEG ES CAUSA DE ALARMA; LOS BLOQUES SON GRUPOS DE 3 LECTURAS DE 2 MINUTOS. LOS RESULTADOS FUERON:

FACTOR III (TRATAMIENTOS O GASOLINAS)	FACTOR I (BLOQUES)							TOTAL ($X_{.j.}$)
	1	2	3	4	5	6	7	
A	(1) 43				(3) 44		(2) 41	128
B	(2) 34	(1) 36				(3) 32		102
C		(2) 32	(1) 33				(3) 27	92
D	(3) 47		(2) 47	(1) 44				138
E		(3) 46		(2) 40	(1) 41			127
F			(3) 43		(2) 35	(1) 36		114
G				(3) 33		(2) 32	(1) 33	98
TOTAL ($X_{i..}$)	124	114	123	117	120	100	101	799

$\overline{X}_{...} = 799/3x7 = 38.0476;\ 3x7x38.0476^2 = 30,400.05$

$$SSB = \frac{1}{3}(124^2+114^2+123^2+117^2+120^2+100^2+101^2)-30,400.05 =$$

$$= 30,597-30,400.05 = 196.95$$

$$\tilde{SST} = \frac{1}{3x1x7}[\{3x128-(124+120+101)\}^2+\{3x102-(124+114+100)\}^2+$$

$$+\{3x92-(114+123+101)\}^2+\{3x138-(124+123+117)\}^2+$$

$$+\{3x127-(114+117+120)\}^2+\{3x114-(123+120+100)\}^2+$$

$$+\{3x98-(117+100+101)\}^2] = 493.62$$

$$SST = \frac{1}{3}(128^2+102^2+92^2+138^2+127^2+114^2+98^2)-30,400.05 = 608.29$$

$$\tilde{SSB} = \frac{1}{3x1x7}[\{3x124-(128+102+138)\}^2+\{3x114-(102+92+127)\}^2+$$

$$+\{3x123-(92+138+114)\}^2+\{3x117-(138+127+98)\}^2+$$

$$+\{3x120-(128+127+114)\}^2+\{3x100-(102+114+98)\}^2+$$

$$+\{3x101-(128+92+98)\}^2] = \frac{1}{21}\{4^2+21^2+\ldots+(-15)^2\} = 82.29$$

$X_{..1} = 43 + 36 + 33 + 44 + 41 + 36 + 33 = 266$

$X_{..2} = 34 + 32 + 47 + 40 + 35 + 32 + 41 = 261$

$X_{..3} = 44 + 32 + 27 + 47 + 46 + 43 + 33 = 272$

$$SS2 = \frac{1}{7}(266^2 + 261^2 + 272^2) - 30,400.05 =$$

$$= \frac{1}{7}(70,756 + 68,121 + 73,984) - 30,400.05 =$$

$$= 30,408.71 - 30,400.05 = 8.66$$

$$TSS = 43^2 + 44^2 + 41^2 + 34^2 + \ldots + 33^2 - 30,400.05 = 706.95$$

$$SSE = TSS - SSB - S\tilde{S}T - SS2 = 7.72$$

$F_{0.01,6,6} = 8.47$, $F_{0.01,2,6} = 10.90$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. de L.	SS	MS	F
ORDEN (BLOQUES)		196.95		
GASOLINA (AJUSTADA)	6	493.62	82.27	64.27 > 8.47
GASOLINA		608.29		
ORDEN (AJUSTADA)	6	82.29	13.72	10.72 > 8.47
TIEMPO	2	8.66	4.33	3.39 < 10.90
ERROR	6	7.72	1.28	
TOTAL	20	706.95		

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

DISEÑO DE EXPERIMENTOS ENFOQUE DE GENICHI TAGUCHI

ING. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

METODOLOGIA EN INGENIERIA DE CALIDAD

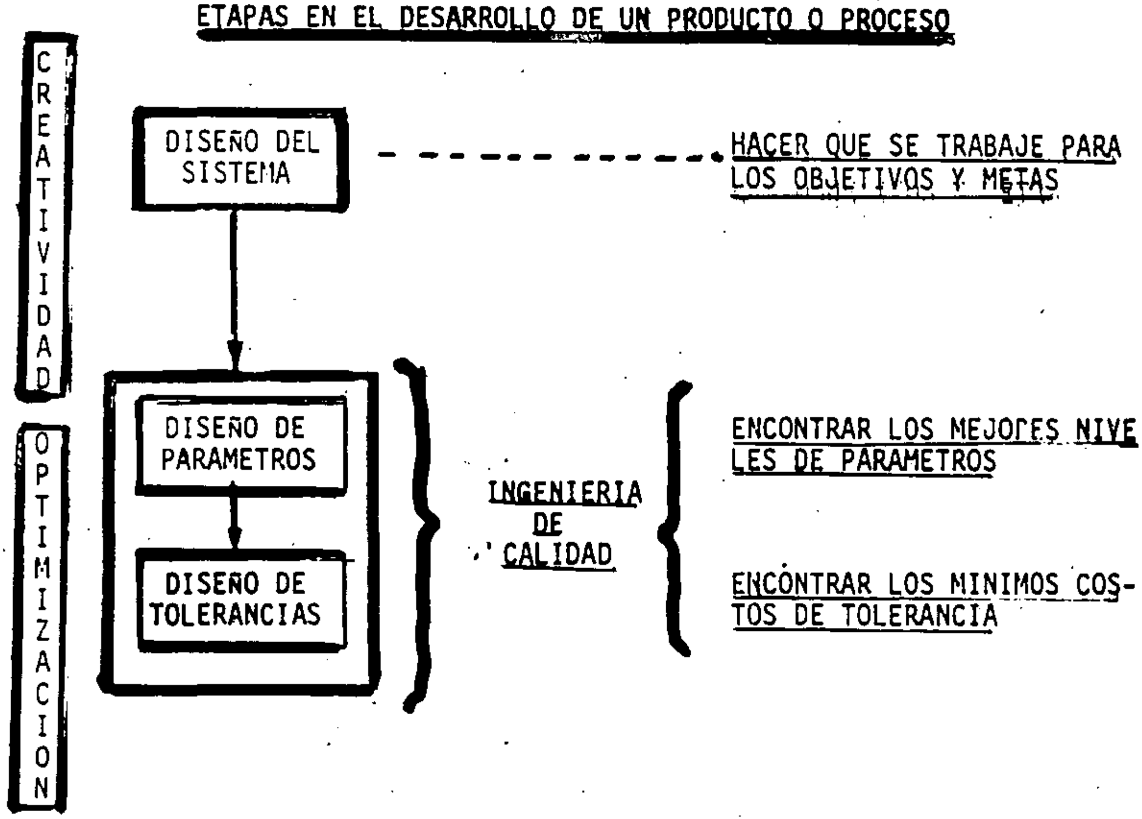
- LA METODOLOGIA DE LA INGENIERIA DE CALIDAD INVOLUCRA EL EMPLEO DE ARREGLOS ORTOGONALES, LA FUNCION DE PERDIDA Y OTRAS TECNICAS ANALITICAS PARA LA OPTIMIZACION DEL DISEÑO DURANTE EL DESARROLLO DEL PRODUCTO.

- EL OBJETIVO PRIMORDIAL ES LA REDUCCION DE COSTOS DE INGENIERIA DE MANUFACTURA Y SERVICIOS A TRAVES DE LA OPTIMIZACION DEL DISEÑO, CREANDO PRODUCTOS COMPETITIVOS.

- LA MEJORA DE CALIDAD SE CONVIERTE EN GANANCIA INDIRECTA A TRAVES DEL LOGRO DE UNA MAYOR UNIFORMIDAD EN EL PRODUCTO Y EN EL PROCESO.

- EL BENEFICIO SON: CICLOS DE DESARROLLO DEL PRODUCTO MAS CORTOS, CALIDAD MEJORADA Y REDUCCION DE COSTOS.

ETAPAS EN EL DESARROLLO DE UN PRODUCTO O PROCESO



ETAPAS EN EL DESARROLLO DE UN PRODUCTO O PROCESO

DISEÑO DEL SISTEMA (INNOVACION)

- INVOLUCRA INNOVACION
- REQUIERE CONOCIMIENTOS
  - -CIENCIA
  - -INGENIERIA
- INCLUYE SELECCION PRELIMINAR DE:
  - -MATERIALES
  - -PARTES
  - -VALORES PARAMETROS PRODUCTO
  - -EQUIPO PRODUCCION
  - -VALORES FACTORES PROCESO

DISEÑO DE PARAMETROS (OPTIMIZACION)

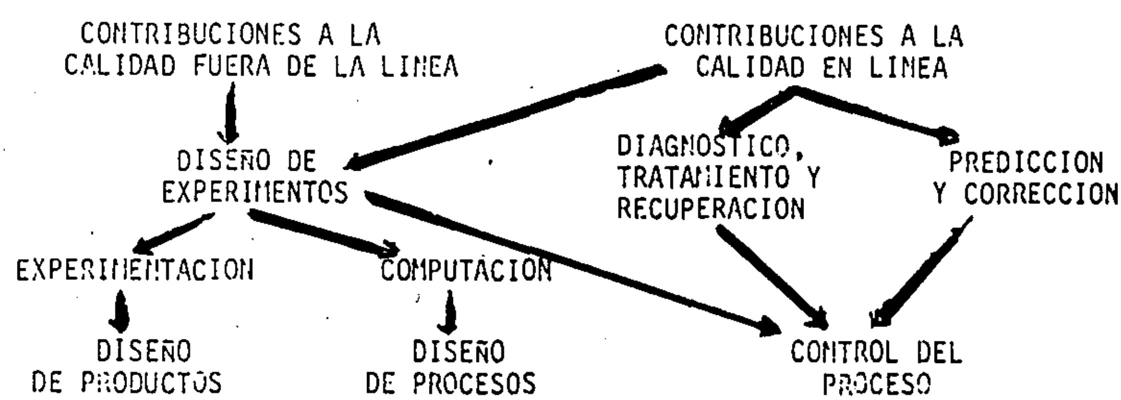
- INVOLUCRA DISEÑO EXPERIMENTOS
- SELECCIONA LA MEJOR COMBINACION DE NIVELES (AQUELLOS QUE SON MENOS SENSIBLES A CAMBIO DEBIDO AL RUIDO)
- LOGRA ALTA CALIDAD SIN INCREMENTAR EL COSTO
- FORTALEZA JAPONESA/DEBILIDAD AMERICANA

DISEÑO DE TOLERANCIAS (OPTIMIZACION)

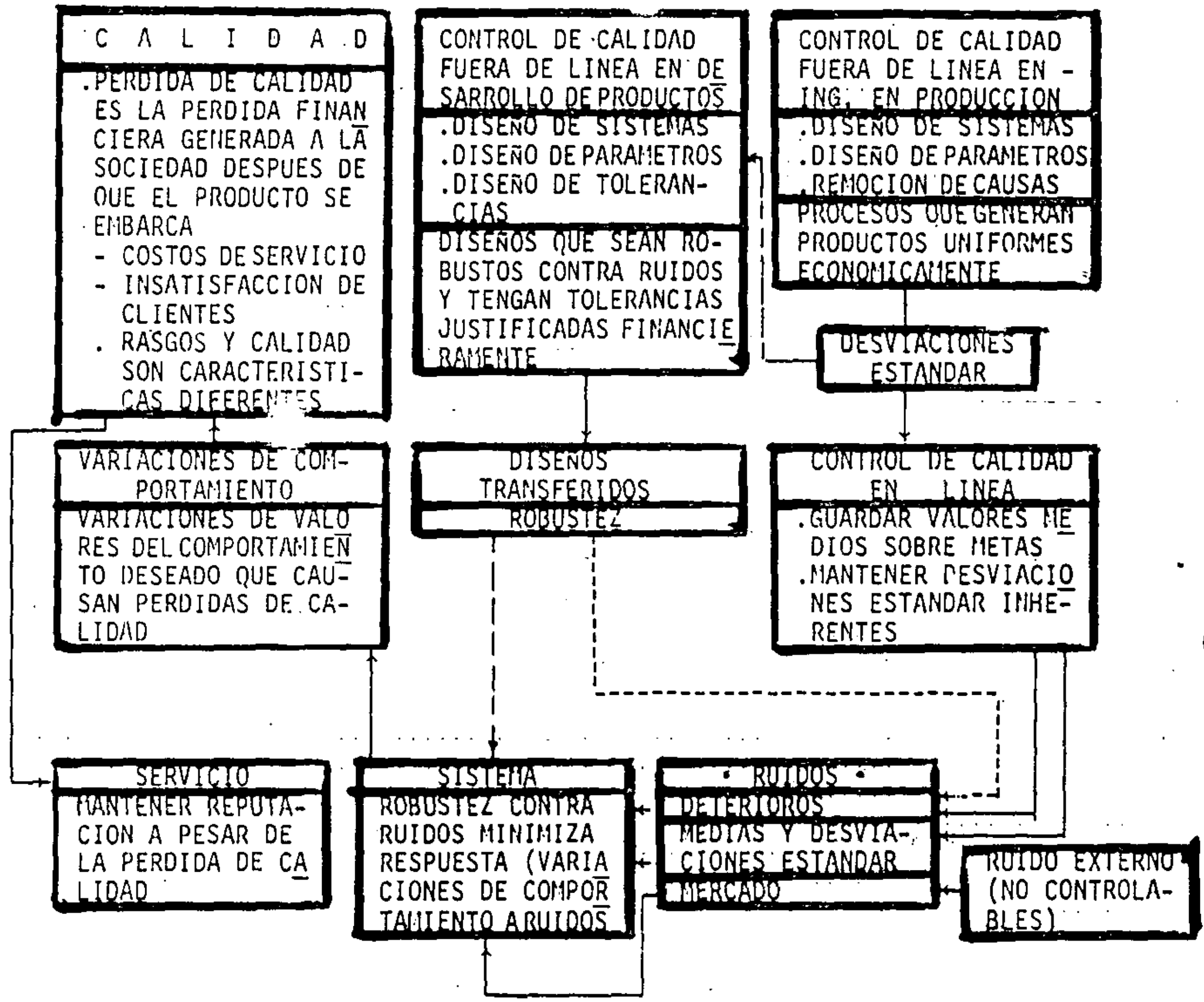
- INVOLUCRA AJUSTE TOLERANCIAS
- IDENTIFICA VARIACIONES EN FACTORES QUE TIENEN GRAN INFLUENCIA EN LA RESPUESTA.
- EMPLEAR SOLAMENTE EN CASO DE QUE LA REDUCCION DE LA VARIACION MEDIANTE DISEÑO DE PARAMETROS NO SEA SUFICIENTE.
- REQUIERE INVERSION ECONOMICA (MEJORES MATERIALES, COMPONENTES O MAQUINARIA).

CONTRIBUCIONES A LA CALIDAD DE LA INGENIERIA DE CALIDAD FUERA DE LINEA Y EN LINEA

- IDENTIFICAR LOS NIVELES DE PARAMETROS EN LOS QUE EL EFECTO DE LAS FUENTES DE RUIDO EN LA CARACTERISTICA DE RESPUESTA ES MINIMO.
- IDENTIFICAR LOS NIVELES DE PARAMETROS QUE REDUCEN EL COSTO SIN AFECTAR LA CALIDAD.
- IDENTIFICAR LOS PARAMETROS QUE TIENEN UNA GRAN INFLUENCIA EN LA MEDIA DE LA CARACTERISTICA DE RESPUESTA, PERO NO AFECTAN SU VARIACION. ESTOS PARAMETROS SE PUEDEN EMPLEAR PARA AJUSTAR LA MEDIA.
- IDENTIFICAR LOS PARAMETROS QUE NO AFECTAN (SIGNIFICATIVAMENTE) LA CARACTERISTICA DE RESPUESTA. LAS TOLERANCIAS DE ESTOS PARAMETROS SE PUEDEN RELAJAR.

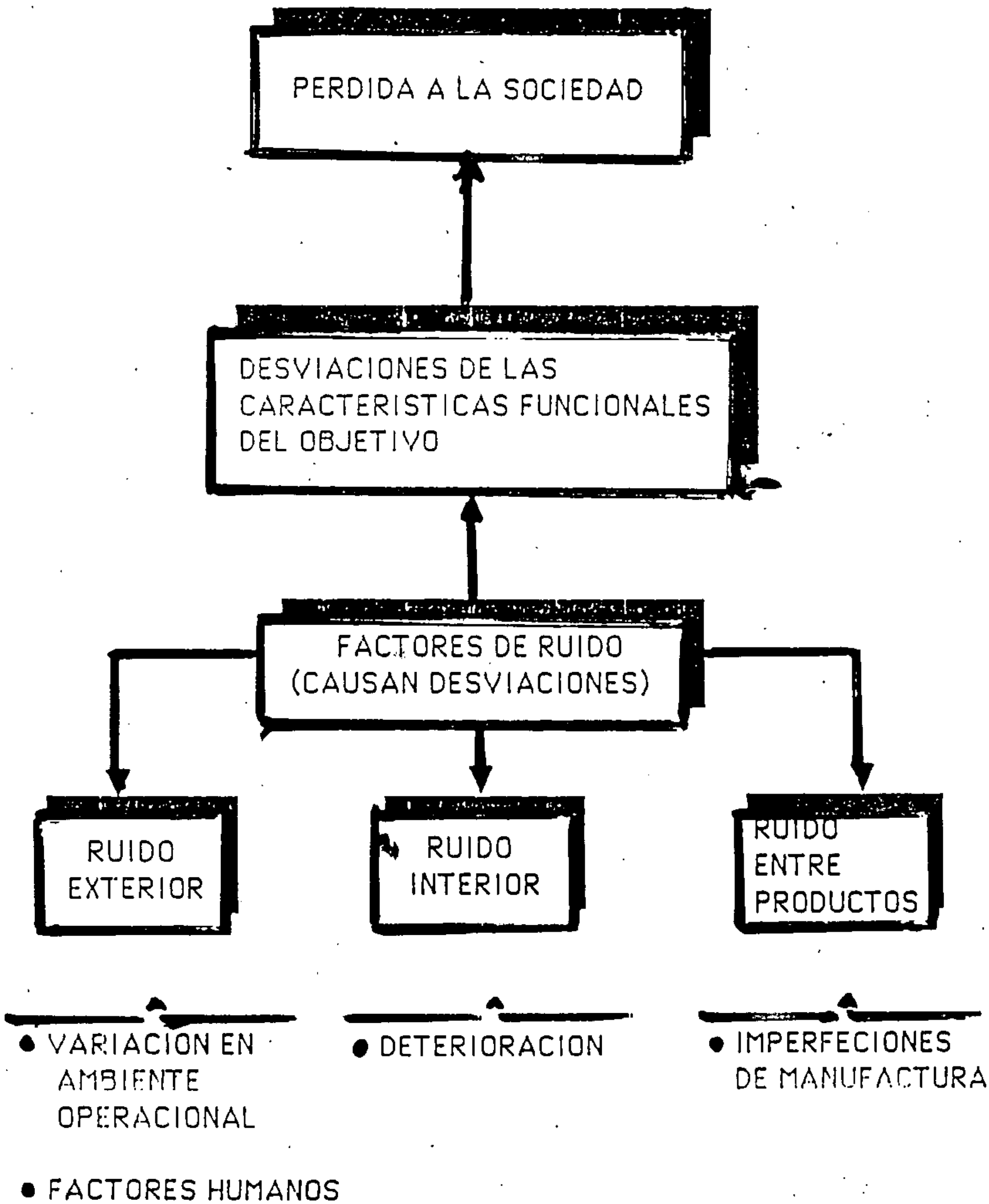


CONTROL DE CALIDAD VIA INGENIERIA DE CALIDAD FUERA DE LINEA Y EN LINEA



• RUIDOS INTERNOS •

FACTORES DE RUIDO



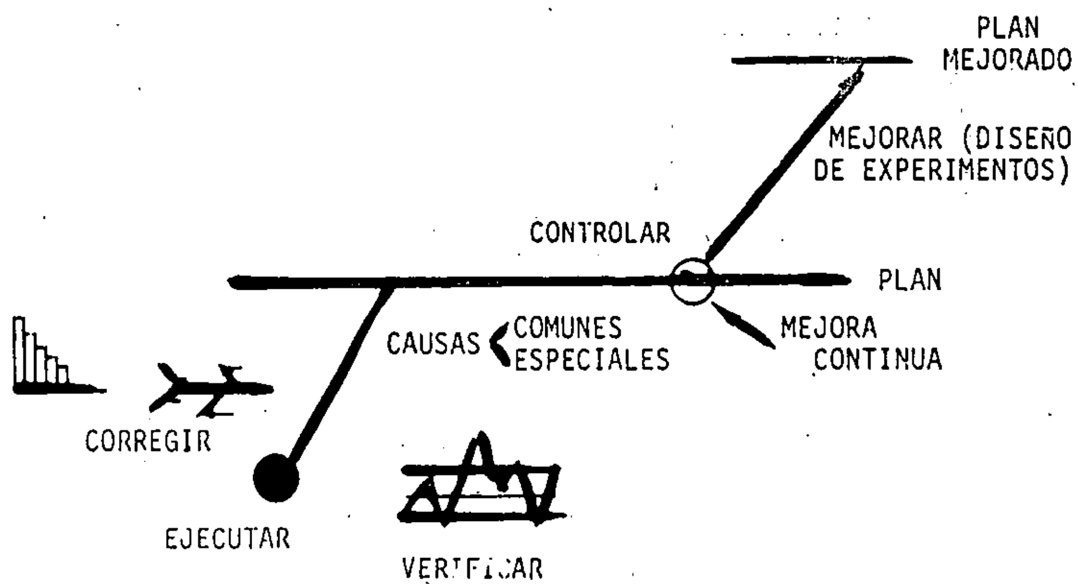
ETAPAS EN EL DESARROLLO DE UN PRODUCTO EN LAS CUALES SE PUEDEN ESTABLECER CONTRAMEDIDAS CONTRA LAS DIFERENTES FUENTES DE VARIACION EN EL PRODUCTO.

ETAPAS DE DESARROLLO DEL PRODUCTO	FUENTES DE VARIACION		
	VARIABLES AMBIENTALES	DETERIORO DEL PRODUCTO	VARIACIONES EN MANUFACTURA
DISEÑO DEL PRODUCTO	●	●	●
DISEÑO DEL PROCESO	X	X	●
MANUFACTURA	X	X	●

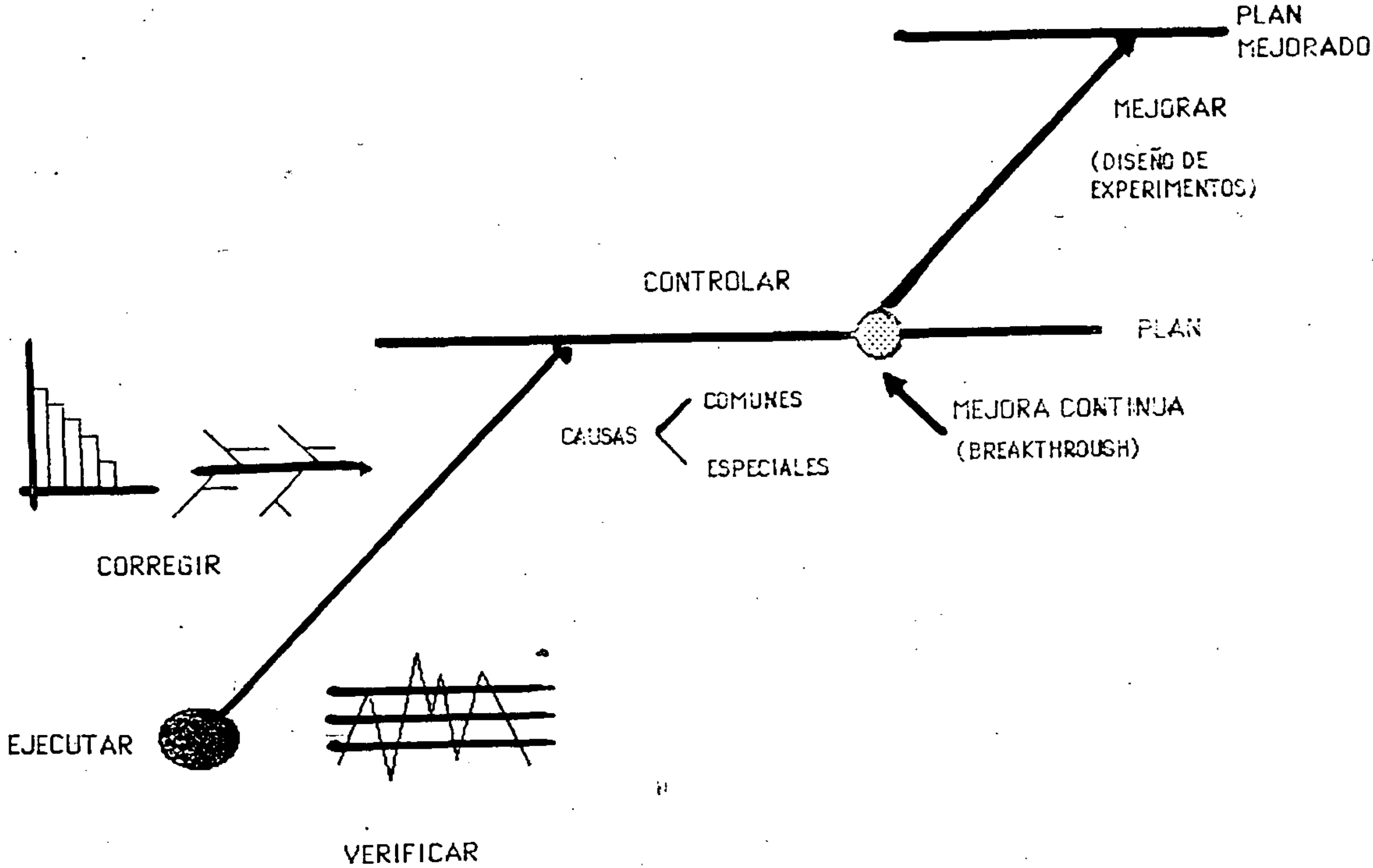
● - CONTRAMEDIDAS POSIBLES

X - CONTRAMEDIDAS IMPOSIBLES

CICLO DE CONTROL



CICLO DE CONTROL



EL PAPEL DE DIVERSAS ACTIVIDADES DE CONTROL DE CALIDAD SOBRE EL EFECTO DE TRES CLASES DE RUIDO

SISTEMA DE CONTROL DE CALIDAD	ETAPAS	PASOS	RUIDO EXTERIOR	RUIDO INTERNO DEBIDO A DETERIORACION	RUIDO DEBIDO A IMPERFECCIONES DE MANUFACTURA
FUERA DE LINEA	DISEÑO DE PRODUCTO	DISEÑO DE SISTEMAS	■	■	■
		DISEÑO DE PARAMETROS	■	■	■
		DISEÑO DE TOLERANCIAS	◐	■	■
	DISEÑO DE PROCESO	DISEÑO DE SISTEMAS	○	○	○
		DISEÑO DE PARAMETROS	○	○	■
		DISEÑO DE TOLERANCIAS	○	○	■
EN LINEA	PRODUCCION	DISEÑO DE SISTEMAS	○	○	■
		DISEÑO DE PARAMETROS	○	○	■
		DISEÑO DE TOLERANCIAS	○	○	■
SERVICIO AL CLIENTE			○	○	○

■ CONTROL POSIBLE

◐ CONTROL NO RECOMENDABLE

○ CONTROL IMPOSIBLE

MODELO DE SOLUCION DE PROBLEMAS

LINEAMIENTOS

ETAPA 1

IDENTIFICACION DEL PROBLEMA
- Identificar/problema (tormenta de ideas/consenso)
- Establecerlo claramente (significado claro)
- Seleccionar (Criterio de selección)

CONSENSO

ETAPA 2

ANALISIS DEL PROBLEMA
- Aislar/clasificar ("Diagrama de Ishikawa")
- Identificar datos necesarios (Hojas de verificac.)
- Obtener/Exhibir/Analizar datos (Gráficas/Pareto/Campo de Fuerzas)
- Elegir causas para acción (consenso)

CONSENSO

ETAPA 3

GENERAR SOLUCIONES POTENCIALES
- Listar posibles soluciones (Tormenta de ideas)
- Experimentar (Asignación del experimento/Realizar experimentos)
- Analizar soluciones (Costo-beneficio/Campo de fuerzas)
- Aislar soluciones viables (consenso)

ETAPA 4

SELECCION/PLANEACION DE SOLUCION
- Elegir la(s) solución(es)(Criterio de selección/consenso)
- Planear (quién, cómo, dónde, cuándo, porqué y como/criterio de evaluación)
- Obtener autorización/aprobación (Presentación a la Dirección)

CONSENSO

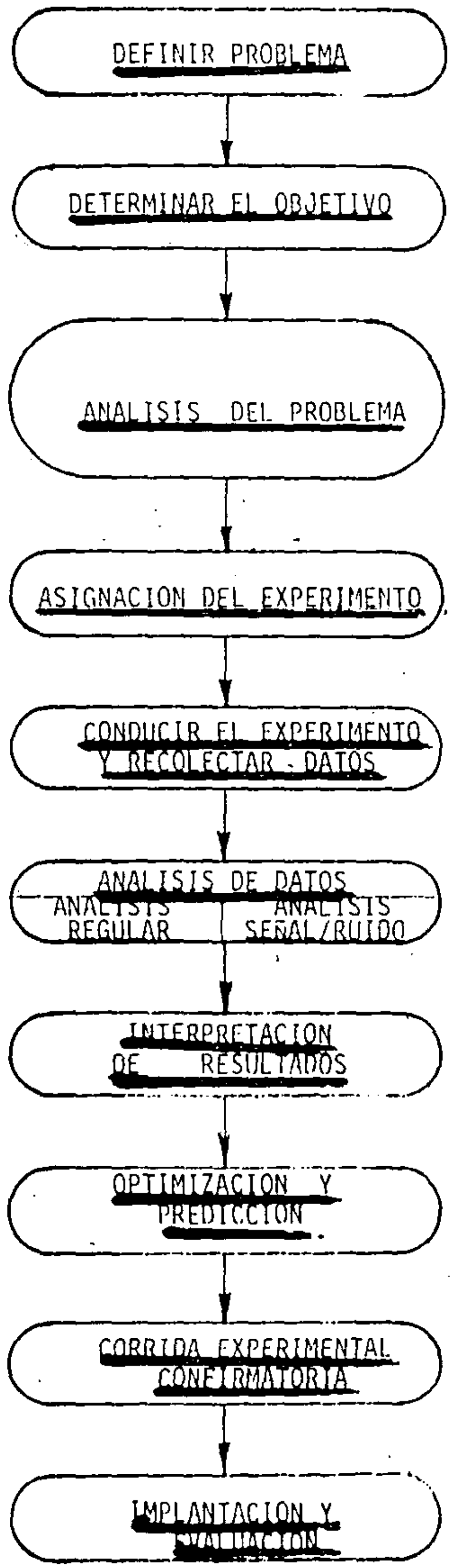
ETAPA 5

IMPLANTACION
- Ejecutar plan (Cédulas del plan de acción)
- Monitorear progreso (colección de datos y análisis)

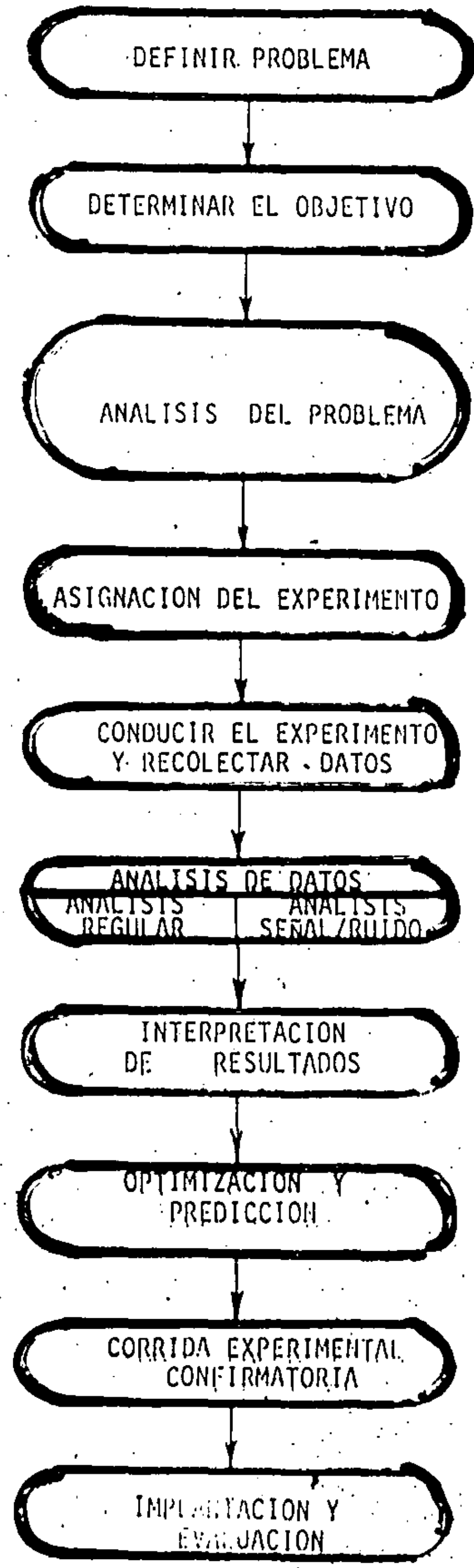
ETAPA 6

EVALUACION
- Aplicar criterio (Comparaciones pre-post)
- Asegurar resultados (consenso,
- Identificar problemas emergentes (tormenta de ideas)

METODOLOGIA DE INGENIERIA DE CALIDAD



METODOLOGIA DE INGENIERIA DE CALIDAD



PASOS SUGERIDOS EN EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

1. DEFINIR EL PROBLEMA: UN CLARO ENUNCIADO DEL PROBLEMA A SER RESUELTO

2. DETERMINAR EL OBJETIVO: IDENTIFICAR CARACTERISTICA DE SALIDA, PREFERENTEMENTE MEDIBLE Y CON BUENA ADITIVIDAD: DETERMINAR EL METODO DE MEDICION, LO CUAL PUEDE REQUERIR EXPERIMENTACION SEPARADA.

3. TORMENTA DE IDEAS: IDENTIFICAR FACTORES QUE SE CONSIDERA QUE INFLUYEN EN LA CARACTERISTICA DE SALIDA: AGRUPAR FACTORES EN FACTORES CONTROLABLES Y FACTORES DE RUIDO; DETERMINAR NIVELES Y VALORES PARA FACTORES

4. DISEÑAR EL EXPERIMENTO: ELEGIR EL ARREGLO OROTOGONAL APROPIADO PARA LOS FACTORES CONTROLABLES; ASIGNAR FACTORES CONTROLABLES E INTERACCIONES AL ARRELGO ORTOGONAL; ELEGIR UN ARREGLO EXTERNO PARA LOS FACTORES DE RUIDO Y ASIGNAR FACTORES A COLUMNAS.

5. REALIZAR EL EXPERIMENTO Y COLCETAR DATOS

6. ANALIZAR LOS DATOS POR:

ANALISIS REGULAR	ANALISIS SEÑAL/RUIDO
TABLAS DE RESPUESTA PROMEDIO	TABLAS DE RESPUESTA S/R
GRAFICAS DE RESPUESTA PROMEDIO	GRAFICAS DE RESPUESTA S/R
ANOVA	ANOVA S/R

7. INTERPRETAR RESULTADOS: ELEGIR NIVELES OPTIMOS DE FACTORES DE CONTROL (PARA NOMINAL ES MEJOR USAR ANALISIS DE RESPUESTA MEDIA EN COMBINACION CON EL ANALISIS SEÑAL/RUIDO); PREDECIR RESULTADOS PARA CONDICIONES OPTIMAS

8. SIEMPRE-SIEMPRE-SIEMPRE CORRER O LLEVAR A CABO LA EXPERIMENTACION CONFIRMATORIA PARA VERIFICAR LOS RESULTADOS PREDICHOS.

- SI LOS RESULTADOS NO SON CONFIRMADOS O RESULTAN INSATISFACTORIOS, SE REQUIERE REALIZAR EXPERIMENTOS ADICIONALES.

OBSERVACIONES

- EL PROPOSITO DE LA EXPERIMENTACION ES OBTENER CONDICIONES OPTIMAS DE UNA CARACTERISTICA DE CALIDAD.
- LA PLANEACION Y REALIZACION DE UN EXPERIMENTO ES MUY DIFICIL DE LLEVAR A CABO Y CON FRECUENCIA TRAUMATICA.
- EL PROCESO DE EXPERIMENTACION INVOLUCRA HABLAR CON MUCHA GENTE Y EN TRABAJO CONJUNTO PARA QUE SE ENTIENDA LO QUE SE REQUIERE DE ESTA GENTE.
- EL TENER "FLEXIBILIDAD" PARA CAMBIAR EL OBJETIVO DE LA INVESTIGACION ES MUY IMPORTANTE.
- DEBERA DESARROLLARSE, CUIDADOSAMENTE, Y POR ESCRITO EL PROCEDIMIENTO OPERACIONAL PARA EL EXPERIMENTO.

EL DISEÑO EXPERIMENTAL EN LA INGENIERIA DE CALIDAD

- EL PROPOSITO DE LA EXPERIMENTACION EN MANUFACTURA ES CONOCER MANERAS DE MINIMIZAR LA DESVIACION DE LAS CARACTERISTICAS DE CALIDAD DE UN OBJETIVO.
- ESTO SE LOGRA IDENTIFICANDO AQUELLOS FACTORES QUE AFECTAN LAS CARACTERISTICAS DE CALIDAD EN CUESTION Y MODIFICANDO SUS NIVELES PARA QUE LAS DESVIACIONES SEAN MINIMAS.
- DESDE UNA PERSPECTIVA DE CALIDAD, LA EXPERIMENTACION TIENE COMO PROPOSITO ENCONTRAR LOS MEJORES MATERIALES, LA PRESION MAS ADECUADA, LA MEJOR TEMPERATURA, EL TIEMPO DEL CICLO, ETC., QUE OPERARAN EN CONCIERTO CON NUESTRO PROCESO PARA PRODUCIR LA LONGITUD DESEADA, ESPESOR, DURABILIDAD, ETC., TOMANDO EN CUENTA EL COSTO.
- LOS METODOS CLASICOS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTACION FUERON DESARROLLADOS EN 1920 POR R.A. FISHER EN INGLATERRA Y CONSISTEN EN UNA VARIEDAD DE TECNICAS ESTADISTICAS. A PESAR DEL RIGOR MATEMATICO, UN PROBLEMA DE LOS METODOS CLASICOS EN LA INDUSTRIA, ES EL TIEMPO Y COSTO QUE SE REQUIERE PARA APRENDERLOS Y APLICARLOS.
- EN LA INGENIERIA DE CALIDAD SE HA DESARROLLADO UNA HERRAMIENTA EFICIENTE DE INGENIERIA, QUE ES DIRECTAMENTE APLICACLE A LOS PROBLEMAS Y REQUERIMIENTOS DE LA INDUSTRIA MODERNA TOMANDO EN CUENTA EL COSTO.
- LA INGENIERIA DE CALIDAD SIMPLIFICA O ELIMINA ALGUNOS CONCEPTOS ESTADISTICOS CLASICOS E INTRODUCE UNA MANERA DIRECTA DE EXAMINAR MUCHOS FACTORES SIMULTANEAMENTE EN FORMA ECONOMICA.
- LA INGENIERIA DE CALIDAD RECOMIENDA EL EMPLEO DE ARREGLOS ORTOGONALES Y GRAFICAS LINEALES PARA CONSTRUIR MATRICES DE FACTORES DE CONTROL Y FACTORES DE RUIDO EN EL DISEÑO EXPERIMENTAL. LOS ARREGLOS ORTOGONALES PERMITEN AL INGENIERO EVALUAR PRODUCTOS Y PROCESOS CON RESPECTO A ROBUSTEZ Y COSTO.
- EN CONTRASTE CON EL METODO CLASICO, LA INGENIERIA DE CALIDAD TRATA LAS INTERACCIONES (CUANDO SON LEVES) COMO EQUIVALENTES A RUIDO, PROPORCIONANDO CONDICIONES OPTIMAS Y BUENA REPRODUCTIBILIDAD EN UN EXPERIMENTO.

MONTO DE TIEMPO GASTADO EN EL DISEÑO

	CON LA INGENIERIA DE CALIDAD	SIN LA INGENIERIA DE CALIDAD
DISEÑO DEL SISTEMA	70%	40%
DISEÑO DE PARAMETROS	2%	40%
DISEÑO DE TOLERANCIA	28%	20%

OBSERVACIONES:

- TODO PROCESO GENERA INFORMACION QUE PUEDE EMPLEARSE PARA ME[illegible]
- PARA ELLO SE NECESITA QUE COINCIDAN UN OBSERVADOR PERCEPTIVO Y UN EVENTO CRITICO
- ESTO SE LOGRA A TRAVES DE LA EXPERIMENTACION DIRECTA

SE DEBE HACER UNA DECISION PARA MEJORAR EL RENDIMIENTO. UNA ALTERNATIVA ERA ACTUALIZAR EL DISEÑO DEL REACTOR LO CUAL SIGNIFICABA PARAR LA PLANTA CON UN COSTO DE 5 X 10^6 DLLS. OTRA ALTERNATIVA ERA COMPRAR OTRO REACTOR Y ACTUALIZAR LA PLANTA CON UN COSTO DE 35 X 10^6 DLLS. EL PROCESO DE ANALISIS Y SOLUCION VIA LA INGENIERIA DE CALIDAD SIGUIO LAS SIGUIENTES ETAPAS:

1. DEFINICION DEL PROBLEMA Y DEL OBJETIVO: LOGRAR UN RENDIMIENTO MINIMO DEL 84% A UN COSTO MINIMO

2. INVESTIGACION DE LO QUE AFECTA EL RENDIMIENTO, VIA EL CONOCIMIENTO DEL PROCESO Y HACIENDO USO DE LAS HERRAMIENTAS DE ISHIKAWA Y DE LA TORMENTA DE IDEAS:

   INFORMACION ⟷ $\boxed{\text{PROCESO}}$ ⟶ Y (73%). CARACTERISTICA

   a. SE ELABORO DIAGRAMA DE BALLENA: 

   b. SE USO EL ANALISIS DE PARETO Y LA ESTRATIFICACION PARA REDUCIR EL NUMERO DE FACTORES A CONSIDERAR.

   NOTA: EN ESTE NIVEL DE ANALISIS SE RESUELVE EL 30% DE LOS PROBLEMAS

   c. SE ENCONTRO QUE LOS FACTORES DETERMINANTES DEL RENDIMIENTO ERAN:

FACTORES	NIVELES
- TEMPERATURA (°F)	80°F, 85°F, 90°F
- CARBONATO DE SODIO (LBS)	35 LBS, 48 LBS, 55 LBS
- CATALIZADOR (PROVEEDOR)	1, 2, 3

   d. SE DETERMINO EL NUMERO DE NIVELES QUE ERA CONVENIENTE CONSIDERAR EN CADA FACTOR.

   e. SE DETERMINO EL NUMERO DE CORRIDAS EXPERIMENTALES: 27

3. SE DETERMINO EL ARREGLO ORTOGONAL QUE CONSTITUYE UNA FRACCION DEL ARREGLO FACTORIAL COMPLETO, QUE FUERA REPRESENTANTIVO DEL TODO:

NUEVO EXPERIMENTO	T	S	C	Y(%)
1	1	1	1	51
2	1	2	2	71
3	1	3	3	58
4	2	1	2	82
5	2	2	3	69
6	2	3	1	59
7	3	1	3	77
8	3	2	1	85
9	3	3	2	84

4. SE "CORRIO" LA EXPERIMENTACION REPRESENTATIVA DANDO LUGAR A LOS RESULTADOS ANOTADOS EN LA ULTIMA COLUMNA DE LA TABLA.

5. SE LLEVO A CABO UN ANALISIS DE LA INFORMACION, CON EL PROPOSITO DE HACER UN PRONOSTICO:

   a. SE CALCULO EL EFECTO PROMEDIO DE CADA PARAMETRO O RESPUESTA PROMEDIO:

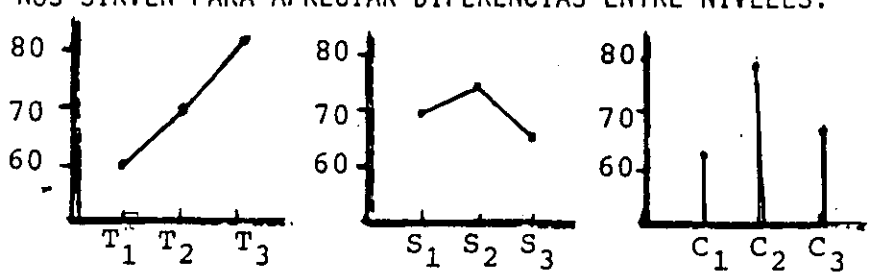
T_1: $(51 + 71 + 58)/3 = 60$
T_2: $(82 + 69 + 59)/3 = 70$
T_3: $(77 + 85 + 84)/3 = 82$
S_1: $(51 + 82 + 77)/3 = 70$
S_2: $(71 + 69 + 85)/3 = 75$
S_3: $(58 + 59 + 84)/3 = 67$
C_1: $(51 + 59 + 85)/3 = 65$
C_2: $(71 + 82 + 84)/3 = 79$
C_3: $(58 + 69 + 77)/3 = 68$

b. SE ELABORO LA TABLA DE RESPUESTA DE LOS PROMEDIOS:

	T	S	C
1	60	70	65
2	70	75	79
3	82	67	68

c. SE IDENTIFICARON LOS MAYORES VALORES ASOCIADOS CON CADA FACTOR, PARA CONSTRUIR EL OPTIMO O CAMPEON DE PAPEL: $T_3S_2C_2$

d. SE GENERARON LAS GRAFICAS FACTORIALES, IDENTIFICANDO SI SE TRATABA DE GRAFICAS LINEALES O NO LINEALES. ESTAS GRAFICAS NOS SIRVEN PARA APRECIAR DIFERENCIAS ENTRE NIVELES.



e. SE SELECCIONO COMO CAMPEON ECONOMICO A: $T_3\ S_1\ C_2$

f. SE ESTIMO O ELABORO LA PREDICCION DEL OPTIMO (PROMEDIO):

$$\mu_{OPT} = \bar{Y}_T + (\bar{T}_3 - \bar{Y}_T) + (\bar{S}_2 - \bar{Y}_T) +((\bar{C}_2 - \bar{Y}_T)$$
$$= 70.66 + (82 - 70.66) + (75 - 70.66) + (79 - 70.66)$$
$$= 94.66\%$$

6. SE LLEVO A CABO LA "CORRIDA DE CONFIRMACION O CORRIDA EXPERIMENTAL DE CONFIRMACION, DANDO LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

EXPERIMENTO	T	S	C	Y%
OPTIMO DE PAPEL	3	2	2	92
OPTIMO ECONOMICO	3	1	2	91
MEJOR ANTERIOR	3	2	1	84

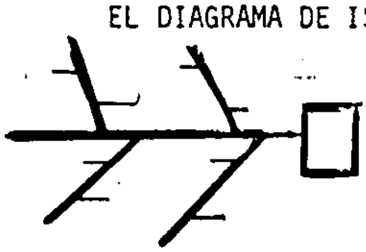
7. ELEGIDA LA COMBINACION APROPIADA, SE INSTRUMENTO Y VIGILO, OBTENIENDOSE UN RENDIMIENTO NUEVO DEL 91%, CON UNA REDUCCION EN LOS COSTOS.

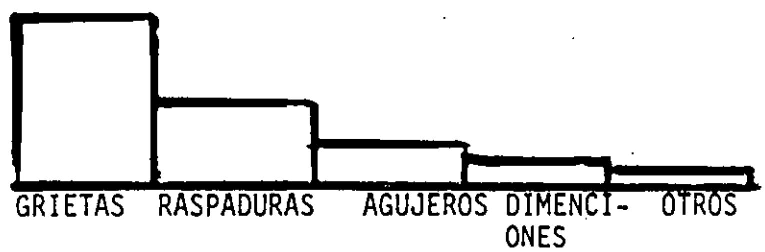
CASO 2

1. DEFINICION DEL PROBLEMA: DURANTE LA PRODUCCION DE UNA SEMANA DE "RESURMEX", 75 RESORTES RESULTARON DEFECTUOSOS.

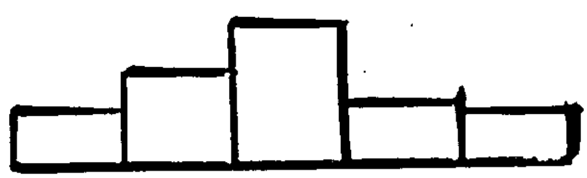
2. DETERMINACION DE OBJETIVO: REDISEÑAR LOS RESORTES PARA ELIMINAR EL PROBLEMA DE LOS DEFECTOS.

3. ANALISIS DEL PROBLEMA: USANDO LA TORMENTA DE IDEAS:
   A) SE INDENTIFICARON LOS TIPOS DE DEFECTOS Y SU FRECUENCIA USANDO EL DIAGRAMA DE ISHIKAWA Y EL ANALISIS DE PARETO.:





   DE LOS 73 RESORTES DEFECTUOSOS, 42 SE DESECHARON POR GRIETAS.
   B) SE DESCUBRIO QUE HABIA DIFERENTES TAMAÑOS DE GRIETAS Y SE CLASIFICARON EMPLEANDO UN HISTOGRAMAS TANTO PARA LA INFORMACION TOTAL, COMO PARA LA INFORMACION "DIVIDIDA "O " ESTRATIFICADA" POR TIPO DE RESORTE.



4. DISEÑO EXPERIMENTAL:
   A) SE EMPLEO LA INFORMACION DEL PROCESO EN LA SELECCION DE LOS PARAMETROS (FACTORES Y SUS NIVELES), QUE RESULTARON SER:

FACTORES		NIVELES	
A: TEMPERATURA DEL ACERO		1450°F,	1600°F
B: CONTENIDO DE CARBON		0.5% ,	0.7 %
C: TEMPERATURA DEL ACEITE		70°F ,	120°F

B). SE ASIGNO EL EXPERIMENTO FACTORIAL COMPLETO 2^3:

EXP	T	C	O	Y
1	1	1	1	67
2	2	2	1	79
3	1	2	1	61
4	2	2	1	75
5	1	1	2	59
6	2	1	2	90
7	1	2	2	52
8	2	2	2	87

5. REALIZACION DEL EXPERIMENTO:

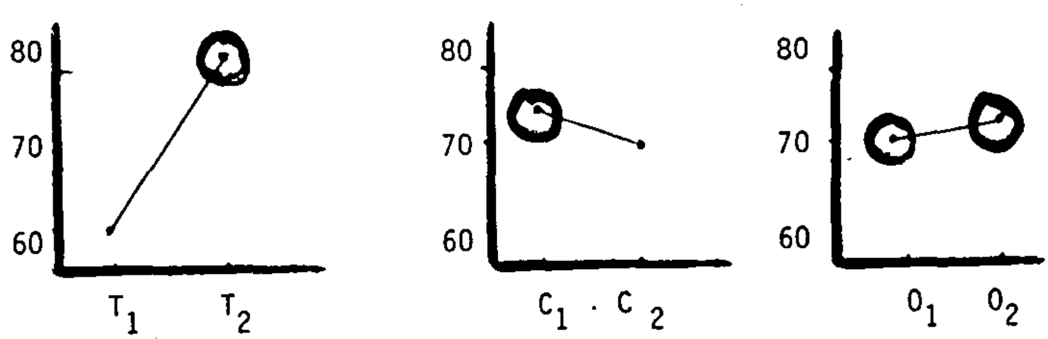
SE REALIZO EL EXPERIMENTO Y SE OBTUVIERON LOS DATOS DE LA ULTIMA COLUMNA DE TABLA ANTERIOR.

6. ANALISIS ESTADISTICO DE DATOS:

A) SE GENERO LA TABLA DE RESPUESTA:

	T	C	O
1	59	74	70
2	82	69	72

B) SE ELABORO LAS GRAFICAS FACTORIALES



C) SE INDENTIFICO EL CAMPEON DE PAPEL: T_2 C_1 O_2

D) SE INDENTIFICO EL CAMPEON ECONOMICO: T_2 C_1 O_1

7. INTERPRETACION DE RESULTADOS:

LA ESTIMACION O PREDICCION DEL OPTIMO ES

$$M_{OPT} = \bar{y}_T + (\bar{T}_2 - \bar{y}_T) + (\bar{C}_1 - \bar{Y}_T) + (\bar{O}_1 - \bar{Y}_T)$$
$$= 71.25 + (82.75 - 71.25) + (73.75 - 71.25) + (70.50 - 71.25)$$
$$= 71.25 + 11.5 + 2.5 + (-0.75) = 84.50$$

8. EXPERIMENTO CONFIRMATORIO:

LA EXPERIMENTACION CONFIRMATORIA CONDUJO A UN RESULTADO DE 82, SUPERIOR A LOS RESULTADOS INICIALES.

ASIGNACION DE FACTORES A UN ARREGLO ORTOGONAL

PROCEDIMIENTO:

PASO 1: SELECCIONAR EL ARREGLO ORTOGONAL APROPIADO.

a) OBTENER LOS GRADOS DE LIBERTAD (df) TOTALES

b) SELECCIONAR EL ARREGLO ORTOGONAL

NOMENCLATURA $L_k(n^f)$

k REPRESENTA EL NUMERO DE CORRIDAS EXPERIMENTALES

n REPRESENTA EL NUMERO DE NIVELES

f REPRESENTA EL NUMERO DE COLUMNAS DEL ARREGLO

PASO 2: DIBUJAR LA GRAFICA LINEAL REQUERIDA

0------------0

* LOS CIRCULOS REPRESENTAN FACTORES
* LA LINEA REPRESENTA INTERACCIONES

PASO 3: SELECCIONAR LA GRAFICA ESTANDAR APROPIADA. PUEDE HABER MUCHAS ALTERNATIVAS, ESCOJA UNA DE ELLAS.

PASO 4: AJUSTE LA GRAFICA LINEAL REQUERIDA A LA GRAFICA LINEAL ESTANDAR DEL ARREGLO ORTOGONAL QUE SELECCIONO.

PASO 5: ASIGNAR LOS EFECTOS PRINCIPALES Y LAS INTERACCIONES A LA COLUMNA APROPIADA.

NOTA: COMPRUEBE LOS RESULTADOS CON LA MATRIZ DE INTERACCIONES ENTRANDO CON EL NUMERO MAS PEQUEÑO (DE LAS DOS COLUMNAS) EN LA LINEA DE NUMEROS DIAGONALES.

Table 7.3 Orthogonal Array $L_4(2^3)$

Exp. No.	A 1	B 2	C 3	Results
1	1	1	1	y_1
2	1	2	2	y_2
3	2	1	2	y_3
4	2	2	1	y_4

$$L_A = -y_1 - y_2 + y_3 + y_4$$

$$L_B = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4$$

$$L_C = -y_1 + y_2 + y_3 - y_4$$

Effect of B $= \overline{B}_1 - \overline{B}_2$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_3) - \frac{1}{2}(y_2 + y_4)$$

Effect of C $= \overline{C}_1 - \overline{C}_2$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_4) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)$$

If in a linear equation with constant coefficients c_1, c_2, ... c_n, where

$$L = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n,$$

the sum of the coefficients is equal to zero.,

$$\text{i.e. } c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 0,$$

then L is called a 'Contrast' or 'Comparison'.

If in two contrasts,

$$L_1 = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots c_ny_n$$

$$L_2 = c'_1y_1 + c'_2y_2 + \ldots c'_ny_n,$$

the sum of the products of corresponding coefficients is equal to zero,

$$c_1c'_1 + c_2c'_2 + \ldots + c_nc'_n = 0,$$

the equations L_1 and L_2 are orthogonal.

Table 7.8 Layout and results

Factor	A	B	C	D	E	F	G	
No.	1	2	3	4	5	6	7	Results
1	1	1	1	1	1	1	1	84
2	1	1	1	2	2	2	2	96
3	1	2	2	1	1	2	2	89
4	1	2	2	2	2	1	1	97
5	2	1	2	1	2	1	2	94
6	2	1	2	2	1	2	1	91
7	2	2	1	1	2	2	1	94
8	2	2	1	2	1	1	2	92

Table 7.9 Total of factor levels

Factor	A	B	C	D	E	F	G
First level	366	365	366	361	356	367	36
Second level	371	372	371	376	381	370	37
Total	737	737	737	737	737	737	73

$A_1 = 84 + 96 + 89 + 97 = 366 \qquad \bar{A}_1 = \frac{366}{4} = 91.5$

$A_2 = 94 + 91 + 94 + 92 = 371 \qquad \bar{A}_2 = \frac{371}{4} = 92.5$

$$CF = \frac{(84 + 96 + 89 + \ldots + 92)^2}{8} = \frac{737^2}{8} = 67896 \qquad CF = \frac{T^2}{n}$$

$$S_T = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - CF$$

$$= 84^2 + 96^2 + \ldots + 92^2 - 67896 = 68019 - 67896 = 122$$

$$S_A = \frac{A_1^2}{n} + \frac{A_2^2}{n} - CF$$

$$= \frac{366^2}{4} + \frac{371^2}{4} - 67896 = 3$$

$$S_A = \frac{(366 - 371)^2}{8} = 3 \qquad S_B = \frac{(365 - 372)^2}{8} = 6$$

$$S_C = \frac{(366 - 371)^2}{8} =$$

Table 7.10 ANOVA

Source	f	S	V	F
A	1	3	3^{o}	
B	1	6	6^{o}	
C	1	3	3^{o}	
D	1	28	28	8.7*
E	1	78	78	24.3*
F	1	1	1^{o}	
G	1	3	3^{o}	
T	7	122		

$$\hat{\mu} = \bar{T} + (\bar{D}_1 - \bar{T}) + (\bar{E}_1 - \bar{T})$$

$$= \bar{D}_1 + \bar{E}_1 - \bar{T}$$

$$= \frac{361}{4} + \frac{356}{4} - \frac{737}{8} = 87$$

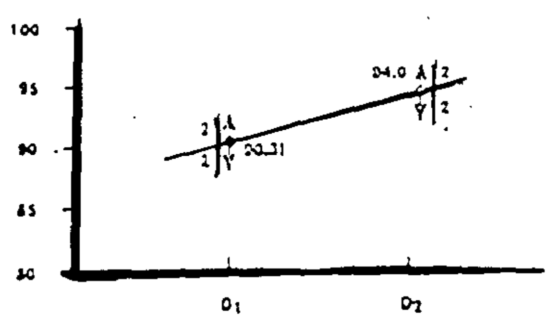
$$\hat{\mu} = \mu \pm \sqrt{F_{0.05}(1,5) \times V_e \times \frac{1}{n_e}}$$

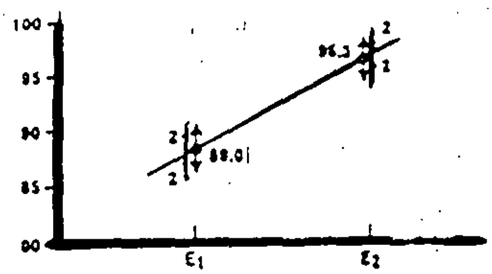
$$n_e = \frac{\text{Total number of experiments}}{\text{Total degrees of freedom of factorial effects used to estimate } \mu}$$

$$= \frac{8}{1_{(\text{mean})} + 1_{(D)} + 1_{(E)}} = 2.7$$

$$\text{C.I.} = \pm\sqrt{F_{0.05}\ (1,5) \times V_e \times \frac{1}{n_e}} = \pm\sqrt{6.61 \times 3.2 \times \frac{1}{n_e}\ (7.28)}$$

$$= \pm\ 2$$





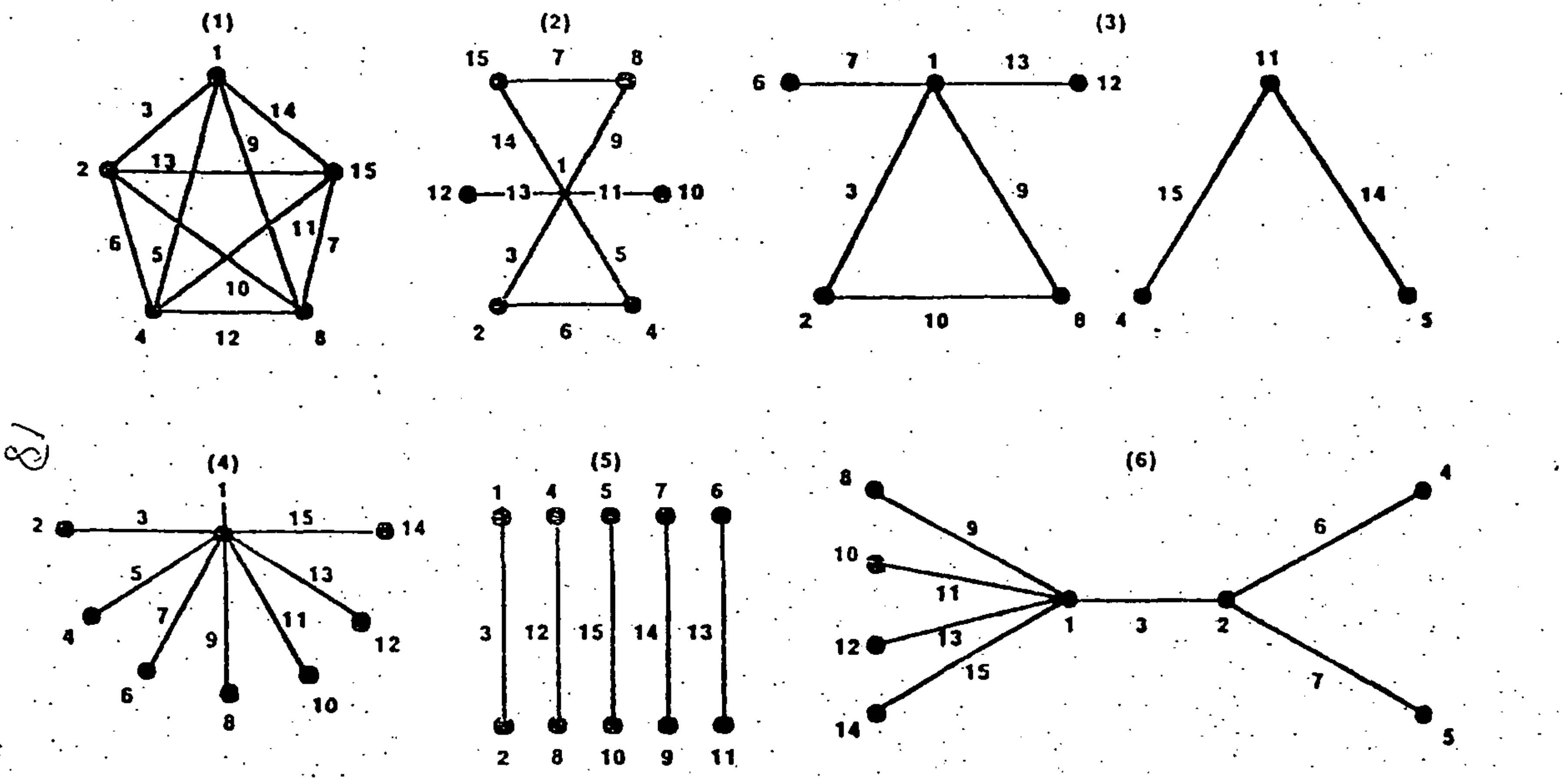


FIGURE 11.7 LINEAR GRAPH OF L_{16}

Table 11.7b Interactions Between Two Columns for L_{16} (2^{15})

Column	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
		(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
			(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
				(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
					(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
						(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
							(7)	15	14	13	12	11	10	9	8
								(8)	1	2	3	4	5	6	7
									(9)	3	2	5	4	7	6
										(10)	1	6	7	4	5
											(11)	7	6	5	4
												(12)	1	2	3
													(13)	3	2
														(14)	1

There is a strategy associated with selecting, for a given experiment, the appropriate linear graph. The objective is to assign the experiment so that interaction effects that are being analyzed are assigned correctly, as defined by Figure 11.7 (for an L_{16}). The best method for accomplishing this is to:

1. Construct the required linear graph which uses the dot, line conventions of section 11.2.

22

MEJORAMIENTO DEL PROCESO DE LAMINA MOLDEADA

1. INTRODUCCION

UN COMPROMISO DE LA ADMINISTRACION EN CHRYSLER MOTORS PARA DEDICAR RECURSOS PARA TRABAJAR CON PROVEEDORES PARA MEJORAR LA CALIDAD DE - LOS PRODUCTOS CONDUCE A ESTE CASO DE ESTUDIO. UNA FUERZA DE ATAQUE CONSISTENTE DE PERSONAL DE MANUFACTURA, ENSAMBLE, ASEGURAMIENTO DE CALIDAD DE PROVEEDORES E INGENIERIA FUE FORMADA PARA INVESTIGAR Y AYUDAR A MEJORAR EL COMPONENTE DE PROCESOS DE LAMINA MOLDEADA Y LA CALIDAD DEL PRODUCTO. EL PRODUCTO BAJO ESTUDIO EN ESTE EXPERIMENTO FUE EL DE PANELES DE REJILLA ABIERTA, EL CUAL HA SIDO PRODUCIDO POR EAGLE PICHER POR MUCHOS AÑOS. EL PROVEEDOR PREVIAMENTE CONDUJO EXPERIMENTACION DE MEJORA DE UN FACTOR A LA VEZ PARA MEJORAR EL RENDIMIENTO DE SU PROCESO. ESTOS EXPERIMENTOS TUVIERON RESULTADOS DESAGRADABLES.

2. EL PROBLEMA

LOS PANELES DE LA PARRILLA ABIERTA SON ENVIADOS A LAS PLANTAS DE ENSAMBLE DE CHRYSLER DESDE LOS PROVEEDORES Y ENSAMBLADOS EN EL CARRO ANTES DEL PROCESO DE PINTURA. LAS IMPERFECCIONES DE LA SUPERFICIE EN EL ACABADO DE LA PINTURA DESPUES DEL PROCESO DE PINTURA, CAUSA UNA BAJA CAPACIDAD DE PRIMERA VEZ DE APROXIMADAMENTE 77% PARA UNA PLANTA DE ENSAMBLE. EL HECHO DE QUE LAS IMPERFECCIONES NO FUERON DETECTADAS HASTA QUE LOS COMPONENTES FUERON EMBARCADOS, ENSAMBLADOS Y PINTADOS CREAN SERIOS EFECTOS CONCERNIENTES A PRODUCTIVIDAD PARA LAS PLANTAS ENSAMBLADORAS Y EL PROVEEDOR.

3. EL PROCESO

EL PROCESO ESTUDIADO EN ESTE EXPERMINETO INCLUIDO EL MEZCLADO DE LA MATERIA PRIMA AL TERMINDO DE LA PARTE CON EL PROVEEDOR. EAGLE PICHER.

LAS PARTES TERMINADAS FUERON EMPACADAS Y ENVIADAS A LAS PLANTAS DE CHRYSLER.

LA FIGURA 1. MUESTRA EL PROCESO DE PRODUCCION DEL PROVEEDOR EAGLE - PICHER DE LA GOP.

FIGURA 1 - EL PROCESO

Espesor del Material → Mezcla de vidrio → Moldeo → Limpieza

→ Troquelado y taladrado → Partes ensambladas al GOP →

Lavado de poder → Secado → Preparado de pintura base →

Empaque → Envio

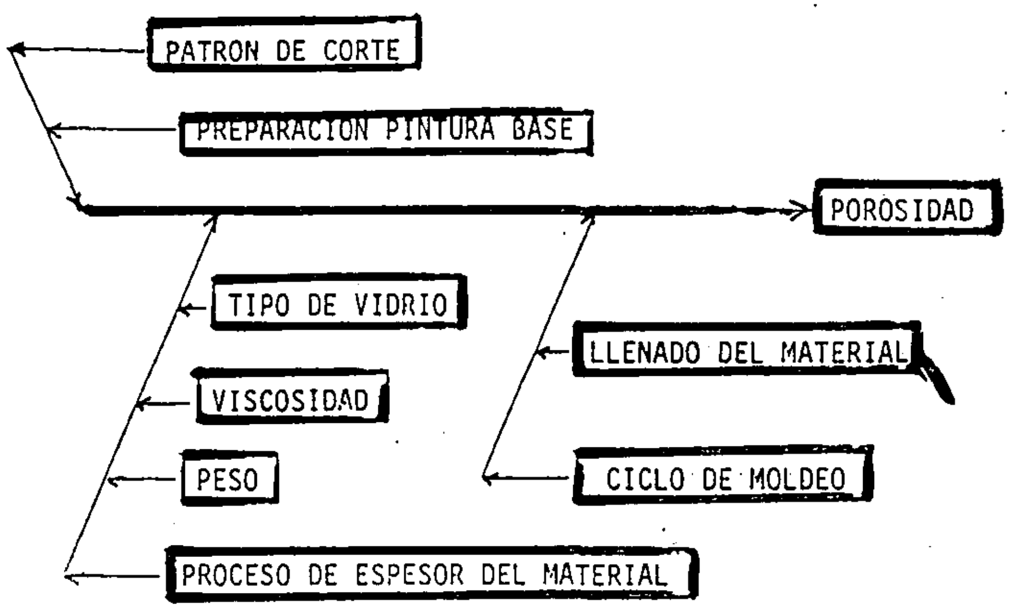
4. DIAGRAMA CAUSA Y EFECTO

EN UNA SESION DE TORMENTA DE IDEAS, LA FUERZA DE ATAQUE DE CHRYSLER Y EL EQUIPO DE TRABAJO DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DEL PROVEEDOR CONSTRUYO UN DIAGRAMA DEL EFECTO ENFOCADO AL PRODUCTO Y AL PROCESO. UNA VERSION ABREVIADA DEL DIAGRAMA APARECE EN LA FIGURA 2

5. PROCESO EXPERIMENTAL

USANDO EL DIAGRAMA CAUSA-EFECTO UN EXPERIMENTO FUE LLEVADO A CABO INCLUYENDO LAS NUEVE VARIABLES PRINCIPALES: (TABLA 1)

- FIGURA 2- DIAGRAMA CAUSA Y EFECTO -



PARAMETROS O FACTORES

TABLA 1

VARIABLE	No. DE NIVELES	NIVEL 1	NIVEL 2
PRESION DE MOLDES A	2	BAJA	ALTA
TEMPERATURA DE MOLDES B	2	BAJA	ALTA
CICLO DE MOLDES C	2	BAJO	ALTO
PATRON DE CORTE D	2	METODO 1	METODO 2
PREP. DE PINTURA BASE E	2	METODO 1	METODO 2
VISCOSIDAD F	2	BAJA	ALTA
PESO G	2	BAJO	ALTO
ESPESOR DE MATERIAL H	2	PROCESO I	PROCESO II
TIPO DE VIDRIO I	2	TIPO 1	TIPO II

EN ADICION DE ESTOS NUEVE EFECTOS PRINCIPALES, LAS SIGUIENTES CINCO INTERACCIONES POTENCIALES FUERON INVESTIGADAS EN ESTE EXPERIMENTO:

A X B

A X C

A X D

B X F

F X H

CON ESTAS CONSIDERACIONES EXPERIMENTALES, UNA DISTRIBUCION DE ARREGLO ORTOGONAL L16 FUE ELEGIDO PARA CONDUCIR EL EXPERIMENTO. EL ARREGLO Y LAS RESPUESTAS DE LAS POROSIDADES OBSERVADAS PUEDEN SER VISTAS EN LA TABLA 2, DOS RESPUESTAS POR EXPERIMENTO FUERON CORRIDAS. LOS VALORES DE RESPUESTA FUERON EL NUMERO DE "POPS" ENCONTRADOS.

TABLA 2. ARREGLO ORTOGONAL L16

Exp No.	(1) A	(2) B	(3) A X B	(4) F	(5) G	(6) B X F	(7) E	(8) C	(9) A X C	(10) H	(11) I	(12) D	(13) A X D	(14) F X H	(15) (e)	RESPONSES R1	RESPONSES R2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	53	10
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	17	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	4	3
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	1
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	4	13
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	50	49
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	3
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	0	3
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	3	2
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	12	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	3	4
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	4	10
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	0	5
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	0	8

6. ANÁLISIS

UN ANALISIS DE VARIANZA ANOVA INDICA QUE:

(1) LA PRESION DE MOLDES (A) PREPARACION DE PINTURA (E) Y EL CICLO DE MOLDEO (C) FUERON SIGNIFICANTES EN CONTRIBUCION A LA VARIACION EXPERIMENTAL .

(2) AUNQUE EL PROCESO DE ESPESOR DEL MATERIA (H) Y LA VISCOSIDAD (F) AMBAS FUERON SIGNIFICANTES, SON VALORES F DE .4854 y .0539 RESPECTIVAMENTE.

(3) LA INTERACCION FXH FUE SIGNIFICANTE CON VALOR F DE 11.0801 (NIVEL - DE CONFIANZA DE 99%) UNA OBSERVACION SIMILAR FUE VISTA EN BXF.

(4) COMO ANTICIPAMOS, LA INTERACCION AXC FUE ENCONTRADA SIGNIFICANTE

LA TABLA ANOVA COMPLETA SE PRESENTA EN LA TABLA 2 CON LA SUMA DE NIVELES DE LAS VARIABLES.

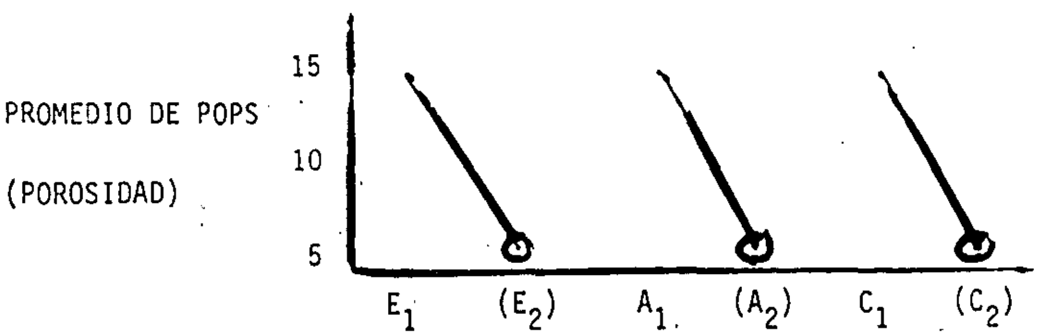
TABLA 2.- ANOVA

FUENTE	DF	S	V	F	F(pool)	S'	Rho %
A	1	800.000	800.000	9.588	11.728	731.788	11.04
B	1	45.125	45.125	0.541	---	---	---
AXB	1	15.125	15.125	0.181	---	---	---
F	1	4.500	4.500	0.054	---	---	---
G	1	0.500	0.500	0.006	---	---	---
BXF	1	595.125	595.125	7.133	8.725	526.913	7.95
E	1	990.125	990.125	11.867	14.515	921.913	13.01
C	1	351.125	351.125	4.208	5.148	281.913	4.27
AXC	1	630.125	630.125	7.552	9.128	561.913	8.48
H	1	40.500	40.500	0.485	---	---	---
I	1	50.000	50.000	0.599	---	---	---
D	1	78.125	78.125	0.933	---	---	---
AXD	1	120.125	120.125	1.440	1.761	51.913	0.78
FXH	1	924.500	924.500	11.080	13.553	856.288	12.92
e	1	648.000	648.000	7.766	9.500	579.788	8.75
Error	16	1335.000	83.438				
(pool)	(23)	(1568.873)	(68.212)			2114.571	31.90
Total	31	6628.000	213.807				

SUM/VARIABLES	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Primer Nivel (1)	220	121	193	115	229	134	138	122	120
Segundo Nivel (2)	60	159	87	165	51	146	142	158	160

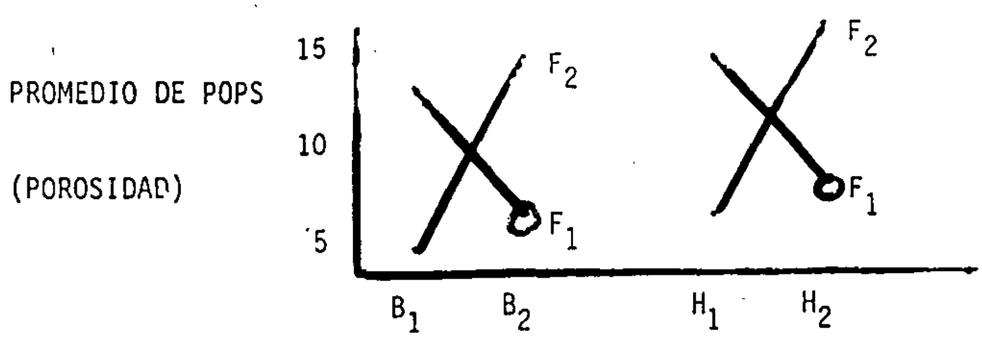
PARA TENER UNA CLARA IDEA DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES, LOS EFECTOS DE CADA FACTOR SIGNIFICANTE ES GRAFICADO.

ESTAS GRAFICAS REPRESENTAN LO QUE FUE OBSERVADO EN LA TABLA 2 (ANOVA) LOS FACTORES SON ARREGLADOS ASI QUE EL MAS SIGNIFICANTE ESTA A LA IZQUIERDA



( ) DENTRO CONDICIONES DESEADAS, ESTO ES:
EL NIVEL E_2 SE PREFIERE EN LUGAR DE E.

SE OBSERVA QUE B, F y H NO SON FACTORES SIGNIFICANTES PARA INFLUENCIAR LOS POPS AL MEDINA. SIN EMBARGO, LAS INTERACCIONES SON PRESENTADAS ENTRE B y F (BXF) Y TAMBIEN PARA F y H (FXH).



POR LO TANTO (B_2, F_1) , (H_2, F_1) SON RECOMENDABLES

LA MEJOR CONDICION BASADA EN LOS NIVELES DE FACTORES COMO SE INDICA EN ESTE PRIMER EXPERIMENTO ES:

PRESION DE MOLDEO	ALTA
TEMPERATURA DE MOLDEO	ALTA
CICLO DE MOLDEO	ALTO
PATRON DE CORTE	METODO II
PREPARACION DE PINTURA BASE	METODO II
VISCOSIDAD	BAJA
PESO	BAJO
PROCESO DE ESPESOR DE MATERIAL	PROCESO II
TIPO DE VIDRIO	TIPO I

7. CONFIRMACIÓN DE RESULTADOS

LOS EXPERIMENTOS CONFIRMADOS FUERON LLEVADOS A CABO POR EL PROVEEDOR EN SU PROPIA PLANTA.

NUESTRA PLANTA DE ENSAMBLE CONDUJO UN ESTUDIO ANTERIOR Y POSTERIOR SOBRE EL OPTIMO RESULTADO EN EL PROCESO. LOS RESULTADOS REVELARON UN INCREMENTO EN LA CAPACIDAD DE PRIMERA VEZ DE 77% a 96%.

8. CONCLUSIÓN

ESTE EXPERIMENTO ES CONSIDERADO UNICO Y EXITOSO DEBIDO A LOS SIGUIENTES ASPECTOS:

1) AMBAS AREAS DE INGENIERIA DEL PROVEEDOR Y CHRYSLER ESTUVIERON MUY ENTUSIASTAS EN LA PARTICIPACION DEL "DISEÑO DE EXPERIMENTOS". EL PROVEEDOR SE MUESTRA PARTICULARMENTE COMPLACIDO DE QUE UN ESFUERZO CONJUNTO SE HAYA HECHO PARA ASISTIRLO A MEJORAR SUS PROCESOS.

2) EL PROVEEDOR Y CHRYSLER HAN COMPRENDIDO EL PODER DE LOS METODOS TAGUCHI EN DDE.

3) EL PROVEEDOR A EXPANDIDO EL USO DE DDE A OTROS PRODUCTOS

4) LA HABILIDAD DEL PROVEEDOR PARA OPTIMIZAR PROCESOS INTERNOS PARA PARTES, ABASTECIDAS DAN COMO RESULTADO REDUCCION DE PRECIO PARA CHRYSLER.

5) CHRYSLER REALIZO UNA MEJORA EN LA CAPACIDAD DE USO DE PRIMERA VEZ DEL 77% a 96% EN LA PLANTA DE ENSAMBLE. EL AHORRO ESTIMADO AL REDUCIR LA INSPECCION Y REPARACION EN LA PLANTA DE ENSAMBLE DEL ORDEN DE 900,000 DOLARES POR AÑO.

6) HAY AHORROS ADICIONALES QUE NO PUEDEN SER PRECISAMENTE CALCULADOS , ESTAS AREAS INCLUYEN MENOR PERSONAL DE MANEJO Y REDUCCION DE INVENTARIOS EN LA PLANTA DE ENSAMBLE Y CON EL PROVEEDOR.

Presentado por: D.E. Goodwin de Chrysler Motors Engineering.

Col. / Exp. No.	A 1	AxB 2	B 3	C 4	AxC 5	E 6	D 7	Results
1	1	1	1	1	1	1	1	11
2	1	1	1	2	2	2	2	9
3	1	2	2	1	1	2	2	5
4	1	2	2	2	2	1	1	5
5	2	1	2	1	2	1	2	0
6	2	1	2	2	1	2	1	3
7	2	2	1	1	2	2	1	5
8	2	2	1	2	1	1	2	8

$$CF = \frac{(11 + 9 + \dots + 8)^2}{8} = 264.5$$

$$S_T = 11^2 + 9^2 + \dots + 8^2 - 264.5$$

$$= 85.5 \qquad (f=7)$$

$$S_A = \frac{A_1^2}{4} + \frac{A_2^2}{4} - CF$$

$$= \frac{(11 + 9 + 5 + 5)^2}{4} + \frac{(0 + 3 + 5 + 8)^2}{4} - 264.5$$

$$= 24.5$$

$$S_{A\times B} = \frac{((A_1B_1 + A_2B_2) - (A_1B_2 + A_2B_1))^2}{8}$$

$$= \frac{((A \times B)_1 - (A \times B)_2)^2}{8}$$

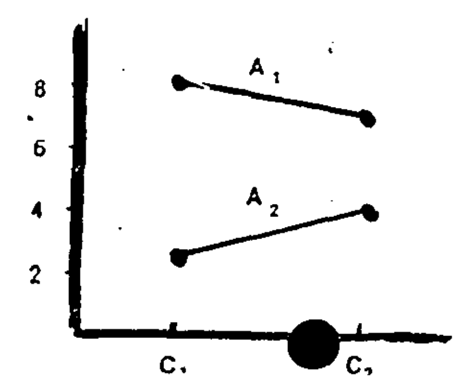
$$= \frac{((11 + 9 + 0 + 3) - (5 + 5 + 5 + 8))^2}{8}$$

$$S_{A\times C} = \frac{((A \times C)_1 - (A \times C)_2)^2}{8}$$

$$= \frac{((11 + 5 + 3 + 8) - (9 + 5 + 0 + 5))^2}{8} = 8$$

Table 11.7 Analysis of Variance Table

Source	f	S	V	F	S'	ρ(%)
A	1	24.5	24.5	32.7**	23.75	27.8
B	1	50.0	50.0	66.7**	49.25	57.6
C	1	2.0	2.0 o			
D	1	0.5	0.5 o			
E	1	0.5	0.5 o			
AxB	1	0.0	0.0 o			
AxC	1	8.0	8.0	10.7*	7.25	8.5
e	0	-	-	-		
(e)	(4)	(3.0)	(0.75)		(5.25)	(6.1)
T	7	85.5			85.5	100.0



ANALISIS REGULAR

SIRVE PARA OBTENER:

1.- EFECTOS PRINCIPALES PARA FACTORES DE CONTROL
2.- USANDO TABLAS DE RESPUESTA, GRÁFICAS FACTORIALES
3.- ESTUDIAR EL EFECTOR DE INTERACCIONES

ANALISIS SEÑAL/RUIDO

1.- SE ANÁLIZA LA MEDIA Y LA VARIABILIDAD
2.- SE ESTUDIA LA "INTERACCIÓN ENTRE FACTORES DE CONTROL Y FACTORES DE RUIDO"
3.- LA S/N ES UNA MEDIDA DE COMPORTAMIENTO CON RESPECTO AL RUIDO
4.- LA S/N ESTA RELACIONADA CON COSTOS
5.- LO DESEABLE ES QUE LA S/N TENGA UN VALOR ALTO. SE DEBERÁ SELECCIONAR EL VALOR MÁS ALTO DE LA RELACIÓN S/N PARA OPTIMIZAR SU PROCESO/PRODUCTO.

FORMAS ESTANDAR DE LA RELACION S/N

- $S/N = 10 \log_{10} \frac{1}{n} (Sm-Ve)/Ve$ NOMINAL ES MEJOR

  $Sm = \Sigma y_i^2/n$, $Ve = (\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2/n) / (n-1)$

- $S/N = -10 \log_{10} \frac{1}{n} \Sigma y_i^2$ MENOR ES MEJOR

- $S/N = -10 \log_{10} \frac{1}{n} \Sigma 1/y_i^2$ MAYOR ES MEJOR

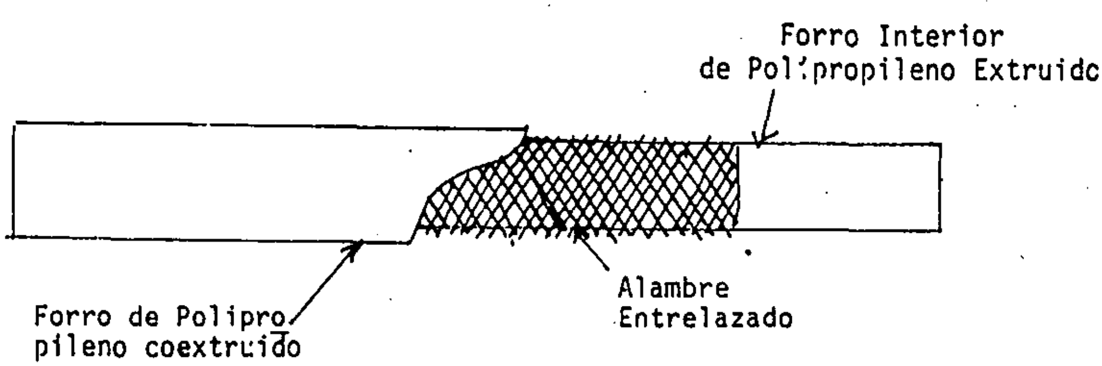
MEJORAMIENTO DE UN PRODUCTO

1. PRODUCTO SOMETIDO A PRUEBA

EL PRODUCTO SOMETIDO A ENSAYO EN ESTE EXPERIMENTO ES LA CUBIERTA EXTRUIDA EN TERMOPLASTICO DEL CABLE DEL VELOCIMETRO, MOSTRADO EN LA FIGURA 1, ESTE PRODUCTO ES UTILIZADO PARA CUBRIR EL CABLE DE LOS VELOCIMETROS MECANICOS EN AUTOMOVILES. EL PRODUCTO CONSISTE DE UN FORRO INTERIOR DE POLIPROPILENO EXTRUIDO, UNA CAPA DE ALAMBRE ENTRELAZADO Y UN FORRO COEXTRUIDO.

ESTE PRODUCTO HA SIDO PRODUCIDO POR MAS DE QUINCE AÑOS, PRIMERAMENTE MANUFACTURADO POR PRODUCTOS FLEX, EL FORRO BAJO PRUEBA HA SIDO PRODUCIDO POR UNA DIVISION DE LA CORPORACION GENERAL MOTORS. ESA DIVISION HA EFECTUADO MUCHA EXPERIMENTACION PARA UN SOLO FACTOR A UN TIEMPO CON ALTOS COSTOS Y RESULTADOS DECEPCIONANTES.

FIGURA.- 1 . EL PRODUCTO
CUBIERTA EXTRUIDA EN TERMOPLASTICO DEL CABLE DEL VELOCIMETRO



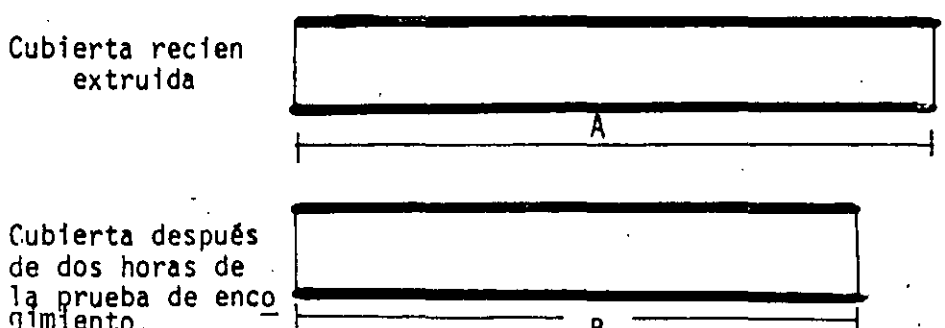
2. CARACTERISTICA DE CALIDAD

LA CARACTERISTICA DE CALIDAD DE INTERES ES EL ENCOGIMIENTO POSTERIOR A LA EXTENSION DEL FORRO. EL EXCESIVO ENCOGIMIENTO PUEDE CAUSAR RUIDO EN EL ENSAMBLE, EL CUAL HA SIDO UNO DE LOS GRANDES PROBLEMAS EN SU ENSAMBLE CON VELOCIMETROS MECANICOS. EL ENCOGIMIEN-

TO POSTERIOR A LA EXTRUSION SE PRESENTA APROXIMADAMENTE A LAS DOS HORAS DE LA PRUEBA DE CALENTAMIENTO (HEAT SOAK TEST) COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA 2.

EL PORCENTAJE DE ENCOGIMENTO SE OBTIENE POR LA MEDICION DE UN FORRO QUE HA SIDO ACONDICIONADO APROPIADAMENTE, COLOCANDO EL FORRO POR DOS HORAS EN MEDIO DE UNA CORRIENTE DE AIRE CALIENTE, DESPUES DE LO CUAL SE MIDE SU LONGITUD, LA LONGITUD FINAL ES ENTONCES RESTADA DE LA LONGITUD ORIGINAL Y ENTONCES MULTIPLICAMOS POR 100 PARA OBTENER EL RESULTADO EN POR CIENTO. LA LONGITUD APROXIMADA DE LAS MUESTRAS ES 600 mm.

FIGURA.- 2
LA CARACTERISTICA DE CALIDAD
PORCENTAJE DE ENCOGIMIENTO DESPUES DE DOS HORAS DE LA PRUEBA DE CALENTAMIENTO



3. EL PROCESO

EL PROCESO DE PRODUCCION PARA ESTE PRODUCTO ES (1) EXTRUIDA LA LINEA INTERIOR DEL POLIPROPILENO, SE ENFRIA Y SE ENROLLA, (2) DESARROLLANDO LA LINEA INFERIOR (POLIPROPILENO) SE COLOCA EL ALAMBRE TRENZADO SOBRE ELLA Y SE VUELVE A ENROLLAR Y (3) DESARROLLANDO EL ENSAMBLE PREVIO SE ESTRUYEN EL FORRO SOBRE EL Y ENTONCES SE HACE EL CORTE DEL PRODUCTO A SU LONGITUD FINAL.

HAY TRES OPERACIONES SEPARADAS. MUCHOS DE LOS ESFUERZOS PARA REDUCIR EL ENCOGIMIENTO POSTERIOR A LA EXTRUSION HAN SIDO DIRIGIDOS A LA OPERACION FINAL, DEBIDO A QUE LAS CARACTERISTICAS SE ESPECIFI-

CARON EN LOS DIBUJOS DE INGENIERIA. EN ADICION EN LAS DISCUCIONES CONCERNIENTES AL ENCOGIMIENTO POSTEXTRUSION LA OPERACION FINAL PARECIO LA OPERACION MAS LOGICA EN LA CUAL LOS EFECTOS SIGNIFICATIVOS PARA EL ENCOGIMIENTO POSTEXTRUSION LA OPERACION FINAL PARECIO LA OPERACION MAS LOGICA EN LA CUAL LOS EFECTOS SIGNIFICATIVOS PARA EL ENCOGIMIENTO EXISTIRIAN .

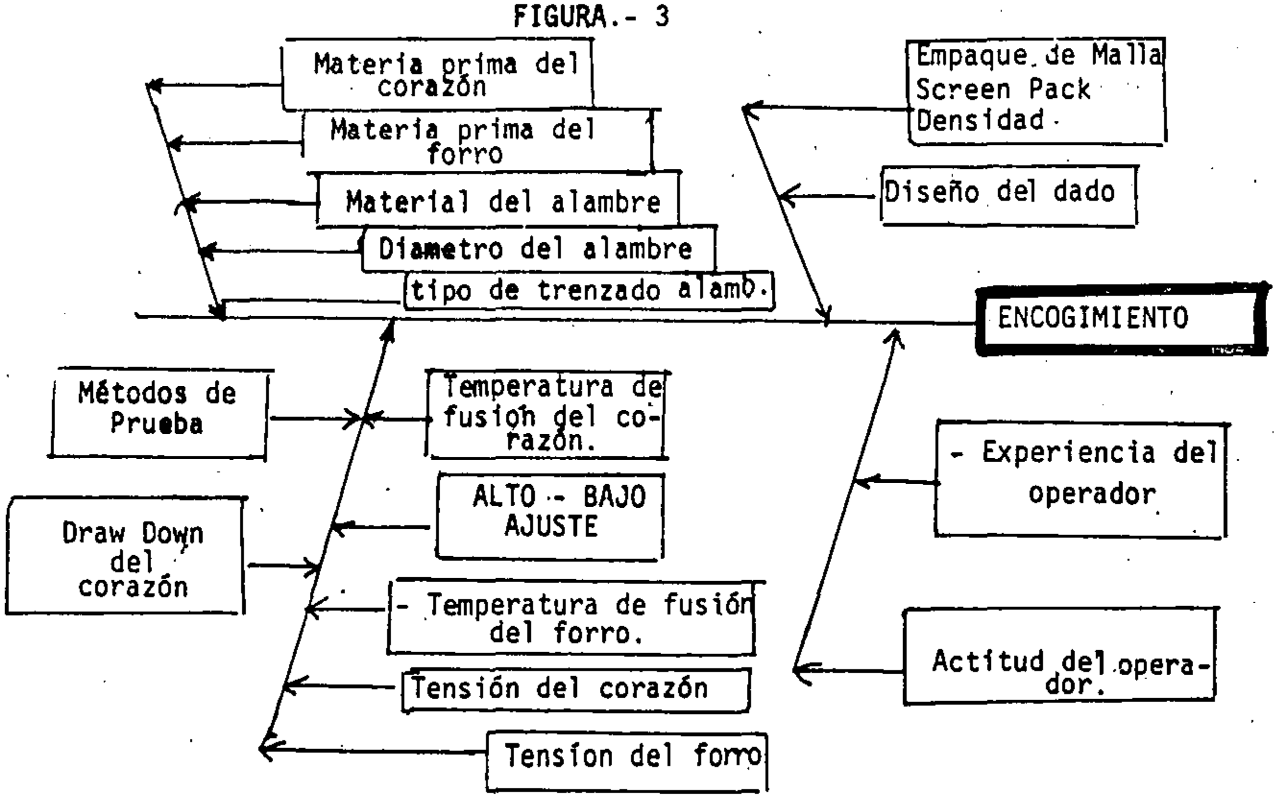
4. EL DIAGRAMA CAUSA Y EFECTO PARA EL EXPERIMENTO

EN EL DISEÑO PRELIMINAR DEL EXPERIMENTO, LOS DIAGRAMAS DE CAUSA Y EFECTO SON LA MANERA MAS UTIL DE GENERAR UNA LISTA DE LOS FACTORES PARA LA PRUEBA.

LOS DIAGRAMAS CAUSA-EFECTO, AYUDAN MAS A ESTRUCTURAR LAS IDEAS QUE LOS METODOS DE TORMENTA DE IDEAS TRADICIONALES.

LA FIGURA 3 , ES UNA VERSION ABREVIADA DE LOS DIAGRAMAS C-E REALES.

FIGURA.- 3



EN ESTE EXPERIMENTO, NOSOTROS OBTUVIMOS LA OPINION DE LOS USUARIOS, EL PERSONAL DE PRODUCCION, EL PERSONAL DE CALIDAD Y LOS INGENIEROS INVOLUCRADOS EN EL PRODUCTO Y EN EL PROCESO PARA DESARROLLAR UNA LISTA DE FACTORES QUE PODRIAN CONTRIBUIR AL ENCOGIMIENTO. OBTENIENDO LOS DATOS DE TODAS LAS PERSONAS INFORMADAS, LA PROBABILIDAD DE EFECTUAR UN EXPERIMENTO EXITOSO SE INCREMENTA DRAMATICAMENTE.

ESTE GRAN DIAGRAMA DE FACTORES POTENCIALES FUE ENTONCES REDUCIDO A LOS 15 MAS IDONEOS POR UN PROCESO DE CONSENSO.

5. LISTADO DE FACTORES

EL RESULTADO FINAL FUE UNA LISTA DE QUINCE FACTORES EN DOS NIVELES MOSTRADOS EN LA FIG. 4 NOTESE QUE CUATRO FACTORES CONCIERNEN AL - PRIMER PASO DEL PROCESO DE PRODUCCION, LOS TRES SIGUIENTES CONCIERNEN AL TRENZADO DEL ALAMBRE Y LOS OCHO SIGUIENTES CONCIERNEN CON EL PROCESO DE FORRADO.

UNOS CUANTOS DE ESOS FACTORES CONCIERNEN A LAS CARACTERISTICAS ESPECIFICAS DE DISEÑO. EL DIAMETRO EXTERIOR DEL ALAMBRE Y LA MATERIA PRIMA DEL FORRO SON TODOS DISEÑADOS PARA EL PRODUCTO.

LOS NIVELES DE LOS FACTORES FUERON SELECCIONADOS POR PERSONAL FAMILIARIZADO CON EL PROCESO. ESTE GRUPO FUE ESENCIALMENTE EL MISMO QUE PARTICIPO EN EL DIAGRAMA CAUSA-EFECTO CON LA EXCEPCION DE LOS CLIENTES, QUIENES NO FUERON INCLUIDOS.

6. EL ARREGLO DE LOS RESULTADOS UTILIZANDO UN ARREGLO L16 ORTOGONAL.

LA FIGURA 5 MUESTRA EL ARREGLO L16 PERMITE PROBAR HASTA 15 FACTORES EN DOS NIVELES. POR SUPUESTO EN ESTE TIPO DE DISEÑO SE CORRE EL -- RIESGO DE CONFUNDIR LOS EFECTOS INTERACTIVOS CON LOS EFECTOS FACTORIALES. LA ELIMINACION TOTAL DE ESTE RIESGO SOLAMENTE ES POSIBLE SI

TODAS LAS 32768 COMBINACIONES DE LOS FACTORES FUERON ENSAYADOS. PARA MINIMIZAR EL RIESGO, EL EXPERIMENTO DEBE ENSAYARSE POR REPRODUCTIBILIDAD.

FIGURA 4

LISTA DE FACTORES

PROCESO DEL CORAZON	A. DIAMETRO EXTERIOR DEL CORAZON	A1=ACTUAL	A2= CAMBIADO
	B. DADO PARA EL CORAZON	B1= ACTUAL	B2= CAMBIADO
	C. MATERIAL DEL CORAZON	C1= ACTUAL	C2= CAMBIADO
	D. VELOCIDAD DE LA LINEA DE CORAZON	D1= ACTUAL	D2= 80% DE LA ACTUAL
TRENZADO DEL ALAMBRE	E. TIPO DE TRENZADO DEL ALAMBRE	E1= ACTUAL	E2= COMBINADO
	F. TENSION DEL TRENZADO	F1= ACTUAL	F2= COMBINADO
	G. DIAM. DEL ALAMBRE	B1= MAS PEQ.	G2= ACTUAL
PROCESO DE FORRADO	H. TENSION DEL CORAZON	H1= ACTUAL	H2= MAYOR
	I. TEMPERATURA DEL CORAZON	H1= AMBIEN	12= PRECALENTADO
	J. MATERIAL DEL FORRO	J1= ACTUAL	J2= COMBINADO
	K. TIPO DE DADO PARA EL FORRO	k1= ACTUAL	K2= COMBINADO
	L. TEMPERATURA DE FUSION	L1= ACTUAL	L2= COMBINADO
	M. SCREEN PACK	M1= ACTUAL	M2= MAS FRIA
	N. METODO DE ENFRIAMIENTO.	N1= ACTUAL	N2= COMBINADO
	O. VELOCIDAD DE LA LINEA.	O1= ACTUAL	O2=70% DEL EXISTENTE.

EN VISTA DE QUE UN MINIMO DE 3,000 PIES DE PRODUCTO TERMINADO FUE LA CANTIDAD MAS PEQUEMA QUE PUEDE MANUFATURARSE PARA UNA COMBINACION DADA DE FACTORES 48,000 PIES DEL PRODUCTO FUERON SOMETIDOA A UN EXPERIMENTO.

EL EXPERIMENTO EN SI MISMO FUE COMPLICADO EN SU EJECUCION A TRAVES DE NUESTRA PLANTA DE EXTRUSION. EN UN ESFUERZO POR MINIMIZAR LA CONFUSION, HOJAS DE SUMARIO PARA CADA OPERACION FUERON DADAS A LOS SUPERVISORES Y A LOS OPERADORES, ESAS HOJAS ENLISTABAN LA COMBINACION DE LOS FACTORES Y LAS ORDENES DE PRODUCCION LAS CUALES SE HI-

CIERON AL AZAR EN LA MEDIDA DE LO POSIBLE

AUN CON EL USO DE HOJAS DE SUMARIO, LA EJECUCION DEL EXPERIMENTO NO FUE FACIL, LA ADMINISTRACION Y LOS OPERADORES DE PRODUCCION MERECEN MUCHO DEL CREDITO POR EL EXITO DE ESTE EXPERIMENTO.

DESPUES, MUESTRAS AL AZAR FUERON SELECCIONADAS DE CADA MUESTRA DE 3,000 PIES, SE EJECUTARON ENTONCES CUATRO PRUEBAS DE CALENTAMIENTO POR SEPARADO, FUE EFECTUANDO UNA PRUEBA POR DIA, CALCULANDOSE Y REGISTRANDOSE EL ENCOGIMIENTO.

FIGURA.- 5

ARREGLO UTILIZANDO UN AREGLO ORTOGONAL L16

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	TEST: L4 1	2	3	4	S/N RATIO
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.49	0.54	0.46	0.45	6.26
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0.55	0.60	0.57	0.58	4.80
1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	0.07	0.09	0.11	0.08	21.04
1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	0.16	0.16	0.19	0.19	15.11
1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	0.13	0.22	0.20	0.23	14.03
1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	0.16	0.17	0.13	0.12	16.69
1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	0.24	0.22	0.19	0.25	12.91
1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	0.13	0.19	0.19	0.19	15.05
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0.08	0.10	0.14	0.18	17.67
2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	0.07	0.04	0.19	0.18	17.27
2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	0.48	0.49	0.44	0.41	6.82
2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	0.54	0.53	0.53	0.54	5.43
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	0.13	0.17	0.21	0.17	15.27
2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	0.28	0.26	0.26	0.30	11.20
2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	0.34	0.32	0.30	0.41	9.24
2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	0.58	0.62	0.59	0.54	4.68

7. Razón de la Señal a Ruido

EL DR. TAGUCHI HA EXTENDIDO MI CONCEPTO DE AUDIO DE LA SEÑAL DE RUIDO

A LA EXPERIMENTACION CON VARIABLES MULTIPLES. LAS FORMULAS PARA SEÑAL DE RUIDO PERMITEN QUE EL EXPERIMENTO PUEDA SELECCIONAR SIEMPRE EL VALOR MAS ALTO PARA OPTIMIZAR EL EXPERIMENTO. POR ESTO, EL METODO DE CALCULAR, LA RAZON DE LA SEÑAL DE RUIDO DIFIEREN DEPENDIENDO SI UNA RESPUESTA DE GRAN AMPLITUD, UNA RESPUESTA DE AMPLITUD PEQUEÑA O UNA CIERTA RESPUESTA ES DESEABLE.

EN CASOS COMO ESTOS DONDE LA CANTIDAD DE ENCOGIMIENTO SI ES PEQUEÑA ES MEJOR, LA FORMULA ES MOSTRADA EN LA FIGURA 6, EN ESTE CASO UNA REDUCCION EN SU VARIABILIDAD MEJORARA LA SITUACION. LA FIGURA MUESTRA EJ MEJORAMIENTO EN LA RAZON DE LA SEÑAL DE RUIDO CUANDO CADA UNA DE ESTAS CARACTERISTICAS SE MEJORA.

FIGURA.- 6

RAZON SEÑAL A RESPUESTA CUANDO LA RESPUESTA MENOR ES MENOR

Formula:

$$\boxed{S/N = -10 \times \text{Log}\ (1/n \sum_{i=1}^{n} y_i^2)}$$

Ejemplos:

Case	Avg.	y_1	y_2	y_3	y_4	S/N
1...	.50	.56	.44	.54	.46	5.94
2...	.15	.21	.09	.19	.11	16.00
3...	.15	.15	.16	.14	.15	16.47

CASO 3 ES MEJOR- IGUAL PROMEDIO QUE EL CASO 2 PERO MENOR VARIABILIDAD

8.- LOS TOTALES PARA CADA NIVEL DE FACTORES

EL PRIMER PASO DE UN ANALISIS DE UN EXPERIMENTO MULTIVARIABLE ES SUMAR TODOS LOS RESULTADOS CONTENIDOS EN UN NIVEL DE UN FACTOR Y COMPARARLOS CON EL OTRO NIVEL DEL FACTOR. SI EL NIVEL UNO DEL FACTOR A POR EJEMPLO DECRECE EN EL PROMEDIO DE ENCOGIMIENTO O REDUCE SUSTANCIALMENTE SU VARIABILIDAD, ENTONCES LA RAZON DE LA SEÑAL DE RUIDO PARA A_1 SERIA MAS GRANDE QUE PARA A_2.

DEBIDO A QUE EL EXPERIMENTO FUE EFECTUADO UTILIZANDO UN ARREGLO ORTOGONAL, EL TOTAL PARA CADA NIVEL DE FACTOR CONTIENE OCHO RAZONES DE SEÑALES DE RUIDO. POR DEFINICION LOS TOTALES PARA AMBOS NIVELES DE UN FACTOR DADO IGUALAN EL TOTAL DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES, POR EJEMPLO 193.47, REVISANDO LOS NUMEROS DE LA FIGURA 7, UN TANTEO PARA EL EFECTO DE CADA FACTOR PUEDE OBTENERSE NOTANDO LA DIFERENCIA EN LAS SEÑALES DE RUIDO TOTALES PARA UN NIVEL DE FACTOR DADO.

A LA DIFERENCIA MAS GRANDE ENTRE EL NIVEL 1 Y EL NIVEL 2 PARA UN FACTOR, CORRESPONDE UN MAYOR EFECTO DEL FACTOR.

FIGURA .- 7

TOTALES DE S/N PARA CADA NIVEL DE FACTORES

A1 = 105.88	E1 = 67.96	I1 = 92.82	M1 = 94.97
A2 = 87.59	E2 = 125.51	I2 = 100.64	M2 = 98.50
B1 = 94.40	F1 = 87.89	J1 = 99.40	N1 = 94.51
B2 = 99.07	F2 = 105.51	J2 = 94.07	N2 = 98.96
C1 = 87.61	G1 = 77.74	K1 = 106.25	O1 = 95.01
C2 = 105.86	G2 = 115.73	K2 = 87.22	O2 = 98.96
D1 = 103.19	H1 = 103.24	L1 = 93.50	
D2 = 90.28	H2 = 90.22	L2 = 99.97	

LA MAYOR DE LAS DIFERENCIAS EN TOTALES DE NIVELES PARA UN FACTOR, LA MAYOR DE LAS SIGNIFICANCIAS DE ESE FACTOR

9. TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA

LA FIGURA 8, ES LA TABLA ANOVA PARA EL EXPERIMENTO EL ANALISIS SE EFECTUA ANOTANDO LAS FUENTES DE VARIACION EN LA COLUMNA DEL LADO IZQUIERDO, LAS CUALES SON POR SUPUESTO, LOS QUINCE FACTORES BAJO PRUEBA EN EL EXPERIEMNTO. LA COLUMNA DENOMINADA V, ES LA SUMA DE LOS CUADRADOS PARA EL FACTOR DIVIDIDOS POR EL GRADO DE LIBERTAD EN EL FACTOR. LA COLUMNA DENOMINADA F ES EL RESULTADO DE LA PRUEBA TRADICIONAL DE FISHER PARA SIGNIFICANCIA, Y UN ASTERISCO DENOTA SI EL FACTOR FUE SIGNIFICANTE A UN NIVEL DE CONFIANZA DE 95 ó 99 POR CIENTO.

NOTESE QUE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD, VARIOS EFECTOS FACTORIALES EN ESTE CASO HAN SIDO COMBINADOS EN LA ESTIMACION DE ERROR. ESTA ESTIMACION DE VARIANZA Y MEDIA DE LA SUMA DE CUADRADOS PARA EL ERROR, ES UTILIZADA COMO DENOMINADOR DE LA PRUEBA F.

FIGURA .- 8

TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA

FUENTE	df	S	V	F	S'	(%)
A	1	20.9128	20.9128	11.87*	19.1513	4.6
B	(1)	(1.3612)	1.3612	Pooled	-	-
C	1	20.8282	20.8282	11.82*	19.0667	4.6
D	1	10.4171	10.4171	5.91*	8.6556	2.1
E	1	207. 0275	207.0275	117.53**	205.2660	49.5
F	1	19.5625	19.5625	11.11*	17.8010	4.3
G	1	90.1788	90.1788	51.19**	88.4173	21.3
H	1	10.5963	10.5963	6.02*	8.8[illegible]48	2.1
I	(1)	(3.8226)	3.8226	Pooled	-	-
J	(1)	(1.7765)	1.7765	Pooled	-	-
K	1	22.6350	22.6350	12.85**	20.8736	5.0
L	(1)	(2.6146)	2.6146	Pooled	-	-
M	(1)	(0.7782)	0.7782	Pooled	-	-
N	(1)	(1.2355)	1.2355	Pooled	-	-
O	(1)	(0.7418)	0.7418	Pooled	-	-
e	7	12.3604	1.7615	-	26.4222	6.4
T	15	414.4886	-	-	414.4886	100.0

* = Significativo 95% de Confianza F(0.05,1.7)= 5.59

** = Significativo 99% de Confianza F(0.01,1.7)= 12.20

LA COLUMNA DENOMINADA S' ES EL EFECTO PURO DE CADA FACTOR, YA QUE TODO DISEÑO DE EXPERIMENTOS MULTIVARIABLE CONSIDERA QUE EL ERROR ES ASIGNADO IGUALMENTE SOBRE TODOS LOS GRADOS DE LIBERTAD DENTRO DEL EXPERIMENTO, CADA EFECTO SIGNIFICANTE CONTIENE UNA CANTIDAD DE ERROR QUE DEBE DE ELIMINARSE. EL ERROR SE ADICIONA A LA VARIACION TOTAL DENTRO DEL EXPERIMENTO ES CONSTANTE. LA COLUMNA FINAL ES EL VALOR DE S PARA CADA VALOR SIGNIFICANTE DIVIDIDO POR LA VARIACION TOTAL St. ESTA COLUMNA INDICA EL PORCIENTO DE CONTRIBUCION A LA VARIANZA DE CADA FACTOR.

DE ESTA TABLA ES FACIL VISUALIZAR QUE LOS FACTORES E y G SON LOS MAS IMPORTANTES EN TERMINOS DE ENCOGIMIENTO. ESTOS DOS FACTORES CONTABILIZAN MAS DEL 70% DE LA VARIANZA EXPERIMENTAL.

10. LA GRAFICA DE EFECTOS SIGNIFICANTES

PARA OBTENER UNA IDEA CLARA DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES, SE GRAFICA EL EFECTO DE CADA FACTOR SIGNIFICANTE. LOS FACTORES SE ARREGLAN DE TAL MANERA QUE LOS MAS SIGNIFICATIVOS ESTAN A LA IZQUIERDA. ESAS GRAFICAS INDICAN LO QUE FUE OBSERVADO EN LA TABLA DE RESULTADOS SUMARIOS- LA MAYOR DIFERENCIA ENTRE NIVELES, EL MAYOR EFECTO. LOS PUNTOS SON CALCULADOS TOMANDO LOS TOTALES PARA CADA NIVEL DEL FACTOR MOSTRADO EN LA FIGURA SIETE Y DIVIDIENDO EL NUMERO DE PUNTOS EN ESE TOTAL PARA OBTENER UN EFECTO PROMEDIO. EN EL CASO DE E1 POR EJEMPLO, EL EFECTO PROMEDIO EXPERIMENTAL ES 67.96 DIVIDIDO POR 8 ó 8.5 db. EL - PROMEDIO EXPERIMENTAL DE 12.1 db ES OBTENIDO DIVIDIENDO EL TOTAL PARA EL EXPERIMENTO (193.47) POR EL NUMERO DE PUNTOS (16).

LA BARRA VERTICAL ES EL 90% DEL RANGO DE CONFIANZA PARA LA ESTIMACION DE LA MEDIA DE LOS NIVELES DE FACTOR,. ESTO ESTA BASADO EN NUESTRA - ESTIMACION DEL ERROR Y LOS GRADOS DE LIBERTAD EXISTENTES.

YA QUE LA MAS ALTA RAZON DE SEÑAL A RUIDO ES MAS DESEABLE, PUEDE VERSE QUE EL MEJOR NIVEL DE LOS FACTORES SOMETIDOS A PRUEBA FUE USADO EN CINCO DE LOS OCHO CASOS SIGNIFICANTES. EL FACTOR MAS SIGNIFICANTE, DE -- CUALQUIER MANERA, FUE ESPECIFICADO EN LOS PLANOS DE INGENIERIA EN UN NIVEL DESEABLE.

11. CONDICIONES ACTUALES VERSUS CONDICIONES OPTIMAS

SI CADA FACTOR FUERA SELECCIONADO PARA LA MEJOR RELACION DE SEÑAL A RUIDO, CUAL SERIA EL EFECTO DE ENCOGIMIENTO DESPUES DE LA EXTRUSION CUANDO LO MEDIMOS POR LAS DOS HORAS DE PRUEBA? Y DEBIDO A QUE LA CONDICION. - DE PRODUCCION REAL NO FUE ENSAYADA EN ESTE EXPERIMENTO, ¿QUE HACE QUE -- NUESTRA PREDICCION DEL ACORTAMIENTO SEA COMO SI SE HUBIERA HECHO EN UNA CORRIDA CORRIENTE.

FIGURA 10

CALCULO DE LA RELACION S/N ACTUAL
VERSUS LA MEDIA OPTIMA

I. **EXISTENTE** = A1C1D1E1F1G1H1K1

$\hat{u}$ = A1 + C1 + D1 + E1 + F1 + G2 + H1 + K1 - 7 x T

$\hat{u}$ = 13.24+10.95+12.90+8.50+10.99+14.47+12.91+13.28-84.64

$\hat{u}$ = 12.60 ± 4.18 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_1^2 = 0.0595$

II. **OPTIMA** = A1C2D1E2F2G2H1K1

$\hat{u}$ = A1 + C2 + D1 + E2 + F2 + G2 + H1 + K1 - 7 x T

$\hat{u}$ = 13.24+13.23+12.90+15.69+13.20+14.47+12.91+13.28-84.64

$\hat{u}$ = 24.28 ± 4.18

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_1^2 = 0.0037$$

INTERVALO DE CONFIANZA

$$m = \hat{m} \pm \sqrt{\frac{F_{\alpha}(i,j) \times V_e}{n_e}}$$

$$n_e = \frac{\text{Número Total de Experimentos}}{\text{Total de grados de libertad de efectos factoriales usados para estimar } m}$$

CIRSE, SOLAMENTE FUE ALCANZADA CAMBIANDO UNO DE LOS CRITERIOS DE DISEÑO DEL PRODUCTO.

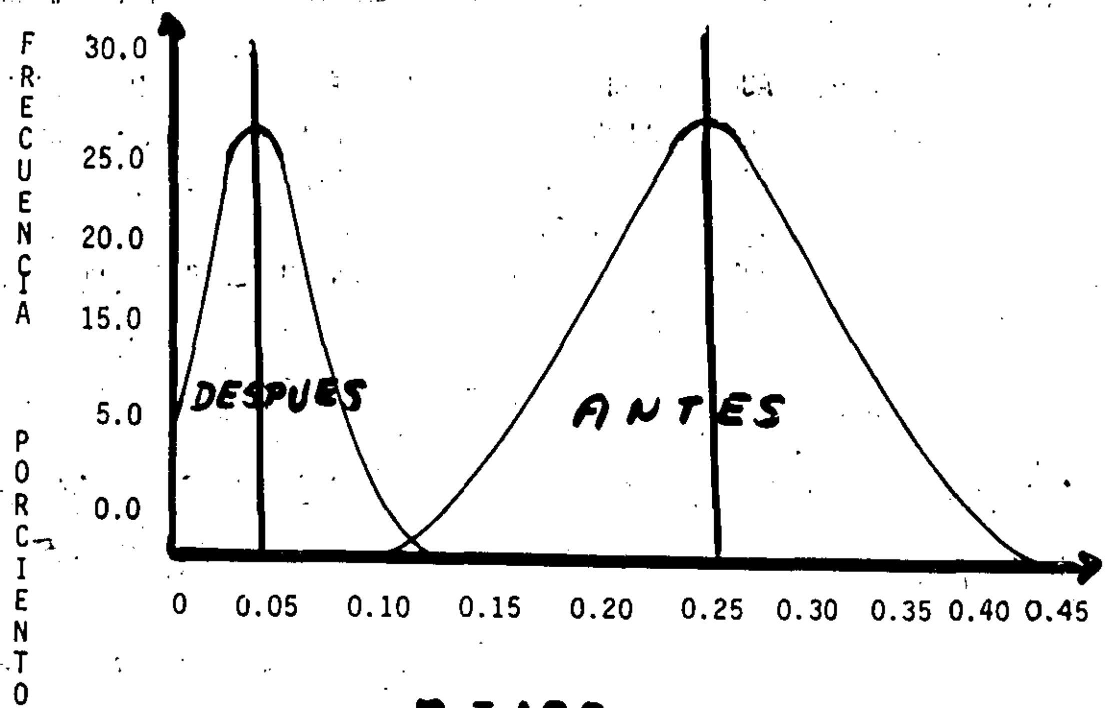
FIGURA 11

RESULTADOS REALES EN EL PROCESO

	$\bar{X}$	S	S/N	RANGO PREDICHO
ANTES	0.26	0.05	11.64	8.42/16.78
DESPUES	0.05	0.025	25.05	20.10/28.46

LOS ESFUERZOS DE LA CARTA DE CONTROL HAN SIDO ARDUAMENTE APLICADOS A ESTE PROCESO Y SIN ELLOS NO SE HUBIERA TENIDO EL EXITO EN LA REDUCCION DEL PROMEDIO DEL ACORTAMIENTO DESPUES DE LA EXTRUSION EN LA CANTIDAD MOSTRADA.

FIGURA 12



FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

C U R S O S   A B I E R T O S

MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA

MODELOS FACTORIALES CON MAS DE DOS FACTORES Y FACTORIAL 2

AUTORES:
MILLER Y FREUNA:
PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
PARA INGENIEROS

Palacio de Mineria   Calle de Tacuba 5   Primer piso   Deleg. Cuauhtémoc 06000   México, D.F.   APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955   512-5121   521-7335   521-1987   Fax 510-0573   521-4020 AL 26

1600° a 1900° F serviría para disminuir el tiempo de coquización en (63.1/9) — (45.5/9) = 1.96 horas. De hecho, este tiempo se disminuye en promedio sólo una cantidad tan pequeña como 0.77 horas cuando el espesor de las paredes del horno es de 4 pulgadas y en tanto como en 3.47 horas cuando el espesor es de 12 pulgadas.

14.2 Experimentos de varios factores

Una gran parte de la investigación y experimentación industrial está dirigida a descubrir los efectos individuales y de conjunto de algunos factores en variables que son las más importantes en los fenómenos investigados. El tipo de clasificación en dos direcciones o el de bloques simples al azar son los tipos de diseños de experimentos más usados, pero la característica distintiva de la mayoría de ellos es la disposición factorial de los tratamientos, o de las condiciones experimentales. Como observamos en la sección precedente, se pueden analizar r conjuntos de datos pertenecientes a $a \cdot b$ condiciones experimentales, como un experimento factorial con r réplicas si las condiciones experimentales representan todas las combinaciones posibles de los niveles de dos factores A y B. En esta sección, extenderemos el análisis de los experimentos factoriales al caso de más de dos factores, esto es, a experimentos donde las condiciones representan todas las combinaciones posibles de los niveles de tres, o más, factores.

Para ilustrar el análisis de un experimento de muchos factores consideraremos la situación siguiente. Se emplea un baño de solución sulfúrica caliente para quitar los óxidos de la superficie de un metal antes de someterlo a un recubrimiento electrolítico, y se desea determinar qué factores, además de la concentración de ácido sulfúrico, pueden afectar la conductividad eléctrica del baño. Como se sabe que la concentración de la sal y la temperatura del baño afectan también la conductividad, se planea un experimento para determinar los efectos individuales y en conjunto de estas tres variables sobre la conductividad eléctrica del baño. Para cubrir los recorridos de concentraciones y temperaturas que se encuentran normalmente, se decide emplear los niveles siguientes para los tres factores:

Factor	*Nivel 1*	*Nivel 2*	*Nivel 3*	*Nivel 4*
A. concentración de ácido %	0	6	12	18
B. Concentración de sal %	0	10	20	
C. Temperatura del baño	80	100		

El experimento factorial resultante necesitará $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ condiciones experimentales en cada réplica, donde cada condición experimental es un baño, hecho de acuerdo con las especificaciones. El orden en que se deben tomar estos baños serán al azar. Supongamos que efectivamente se han completado dos réplicas del

RESULTADOS DE LOS EXPERIMENTOS DE BAÑO-ACIDO

Nivel del factor			Conductividad (mhos/cm³)		
A	*B*	*C*	*Rep. 1*	*Rep. 2*	*Total*
1	1	1	0.99	0.93	1.92
1	1	2	1.15	0.99	2.14
1	2	1	0.97	0.91	1.88
1	2	2	0.87	0.86	1.73
1	3	1	0.95	0.86	1.81
1	3	2	0.91	0.85	1.76
2	1	1	1.00	1.17	2.17
2	1	2	1.12	1.13	2.25
2	2	1	0.99	1.04	2.03
2	2	2	0.96	0.98	1.94
2	3	1	0.97	0.95	1.92
2	3	2	0.94	0.99	1.93
3	1	1	1.24	1.22	2.46
3	1	2	1.12	1.15	2.27
3	2	1	1.15	0.95	2.10
3	2	2	1.11	0.95	2.06
3	3	1	1.03	1.01	2.04
3	3	2	1.12	0.96	2.08
4	1	1	1.24	1.20	2.44
4	1	2	1.32	1.24	2.56
4	2	1	1.14	1.10	2.24
4	2	2	1.20	1.19	2.39
4	3	1	1.02	1.01	2.03
4	3	2	1.02	1.00	2.02
		Total	25.53	24.64	50.17

experimento, esto es, se han medido las conductividades de los diferentes baños, y los resultados son los mostrados en la tabla de la página 303.

El modelo que supondremos para el análisis de este experimento (o cualquier experimento similar de tres factores) es una extensión inmediata del usado en la sección 14.1. Si y_{ijkl} es la medida de conductividad obtenida en el i-ésimo nivel de concentración de ácido, el j-ésimo nivel de concentración de sal, el k-ésimo nivel de temperatura del baño de la l-ésima réplica, tendremos

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \rho_l + \epsilon_{ijkl}$$

para $i = 1, 2, \ldots, a$; $j = 1, 2, \ldots, b$; $k = 1, 2, \ldots, c$; y $l = 1, 2, \ldots, r$. Supongamos, también, que las sumas de los efectos principales (α, β y γ) y la suma de los efectos de las réplicas son igual a cero, que las sumas de los efectos de la interacción en dos direcciones sumadas respecto de cualquier subíndice son igual a cero para cualquier valor de los otros subíndices, y que la suma de los efectos de la interacción en tres direcciones sumadas respecto de uno cualquiera de los subíndices, vale cero para cualesquiera valores de los otros dos subíndices. Como antes, se supone que las ϵ_{ijkl} son valores de variables aleatorias independientes que tienen medias cero y varianza común σ^2.

Comenzamos el análisis de los datos tratando el experimento como una clasificación en dos direcciones con $a \cdot b \cdot c$ tratamientos y r réplicas (bloques) y utilizando las fórmulas abreviadas de la página 256, obtenemos

$$C = \frac{(50.17)^2}{48} = 52.4381$$

$$SST = (0.99)^2 + (1.15)^2 + \ldots + (4.00)^2 - 52.4381 = 0.6624$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{2}[(1.92)^2 + (2.14)^2 + \ldots + (2.02)^2] - 52.4381 = 0.5712$$

$$SSR = \frac{1}{24}[(25.53)^2 + (24.64)^2] - 52.4381 = 0.0165$$

$$SSE = 0.6624 - 0.5712 - 0.0165 = 0.0747$$

Los grados de libertad para estas sumas de cuadrados son, respectivamente, 47, 23, 1 y 23.

A continuación, deseamos subdividir las sumas de cuadrados de los tratamientos en las tres *sumas de cuadrados de los efectos principales* SSA, SSB, SSC, las tres *sumas de cuadrados de la interacción en dos direcciones* $SS(AB)$, $SS(AC)$ y $SS(BC)$, y la *suma de cuadrados de interacciones en tres direcciones* $SS(ABC)$. Para facilitar el cálculo de estas sumas, construiremos primero las tres tablas siguientes análogas a la de la página 279:

Origen de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Réplicas	1	0.0165	0.0165	5.16
Efecto principal				
A	3	0.2750	0.0917	28.66
B	2	0.2262	0.1131	35.34
C	1	0.0002	0.0002	< 1
Interacción de dos factores				
AB	6	0.0289	0.0048	1.50
AC	3	0.0085	0.0028	< 1
BC	2	0.0042	0.0021	< 1
Interacción de tres factores				
ABC	6	0.0282	0.0047	1.47
Error	23	0.0747	0.0032	
Total	47	0.6624		

métodos del capítulo 12, podemos ajustar rectas, curvas o superficies para describir la superficie de respuesta que relaciona la conductividad con las variables consideradas.

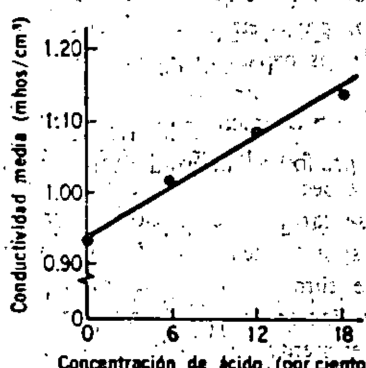


Fig. 14.3 Efecto de la concentración de ácido

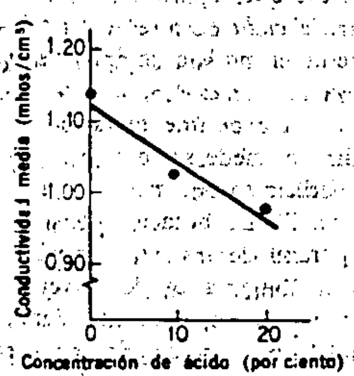


Fig. 14.4 Efecto de la concentración de sal

El procedimiento general de cálculo para un experimento de muchos factores es semejante al método ilustrado aquí para un experimento factorial de $4 \times 3 \times 2$. En primer lugar, analizamos los datos como una clasificación en dos direcciones (o cualquier otro diseño que se utilice) y después analizamos la suma de cuadrados de los tratamientos, descomponiéndola en las componentes atribuidas a los diversos efectos principales y las interacciones. En general, la suma de cuadrados sultaron "significativos" individualmente o en conjunto en el experimento de filtrado) tomados con más de dos niveles.

En el análisis de un experimento factorial 2^n es conveniente denotar los dos niveles por 0 y 1 (en lugar de 1 y 2). En consecuencia, los modelos usados para el análisis de estos experimentos difieren de los de la sección 14.2 solamente en que ahora tenemos $i = 0, 1$, en lugar de $i = 1, 2, \ldots a$, $j = 0, 1$, en lugar de $j = 1, 2, \ldots b$, y así por el estilo. Por ejemplo, en un experimento factorial 2^3 el modelo de la página 281 será:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \rho_l + \epsilon_{ijkl}$$

con $i = 0, 1$, $j = 0, 1$, $k = 0, 1$, y $l = 1, 2, \ldots, r$. Las ϵ_{ijkl} se definen como antes, y los parámetros se encuentran ahora sujetos a las restricciones

$$\alpha_1 = -\alpha_0, \quad \beta_1 = -\beta_0, \quad \gamma_1 = -\gamma_0, \quad (\alpha\beta)_{10} = (\alpha\beta)_{01} = -(\alpha\beta)_{11} = -(\alpha\beta)_{00}, \ldots,$$

$$\sum_{l=1}^{r} \rho_l = 0.$$

Nótese que, aparte de los parámetros para réplicas, sólo es necesario *un parámetro de cada tipo;* es decir, aparte de los parámetros para réplicas, podemos expresar el modelo completo en función de los parámetros μ, α_0, β_0, γ_0, $(\alpha\beta)_{00}$, $(\alpha\gamma)_{00}$, $(\beta\gamma)_{00}$, y $(\alpha\beta\gamma)_{000}$.

Un experimento factorial 2^n requiere 2^n condiciones experimentales; como su número puede ser bastante grande, será conveniente representar las condiciones del experimento por medio de una notación especial y enlistarlas en el llamado "orden normal". La notación consiste en representar cada condición experimental por el producto de las letras minúsculas correspondientes a los factores tomados en el nivel 1, llamados de "nivel alto". Si se elimina una letra minúscula correspondiente a un factor, esto significa que el factor se ha tomado en el nivel 0, llamado "nivel bajo". Entonces, en un experimento de tres factores, *ac* representa las condiciones experimentales en que los factores *A* y *C* se toman en el nivel alto y el factor *B* en el bajo; *c* representa la condición experimental en que se toma el factor *C* en el nivel alto y los factores *A* y *B* en el bajo; etc. El símbolo "1" se usa para denotar la condición experimental en que todos los factores se toman en el nivel bajo.

Aunque las condiciones experimentales se aplican en un orden al azar durante el experimento, para los propósitos de análisis de los resultados es conveniente ordenarlos en el *orden normal.* Para $n = 2$, este orden es 1, *a*, *b*, *ab*; y para $n = 3$ el orden es el mostrado en la tabla de la pág. siguiente.
Nótese que los símbolos de los cuatro primeros experimentos son como los de un experimento de dos factores, y los segundos cuatro se obtienen multiplicando cada uno de los cuatro primeros símbolos por *c*. De modo semejante, el orden para $n = 4$ de la página 294 se obtiene enlistando los ocho símbolos del experimento de tres factores y repitiendo el conjunto con cada símbolo multiplicado por *d*.

2^4, la única diferencia en un experimento factorial 2^n con $n > 3$ es que necesitamos una tabla más extensa de signos y que las sumas de cuadrados respectivas se obtienen dividiendo los cuadrados de los efectos totales por $r \cdot 2^n$. Para ilustrar esta técnica e introducir una mayor simplificación, consideraremos el siguiente experimento factorial 2^4, proyectado para determinar los efectos de ciertas variables en la exactitud de un interruptor giratorio que actúa a intervalos. Los factores estudiados fueron los siguientes:

Factor	*Nivel bajo*	*Nivel alto*
A. Lubricación	seco	lubricado
B. Protección polvo	no protegido	cubierto
C. Sin chispas	no	sí
D. Corriente	0	0.5 amp.

Cada interruptor se operó continuamente hasta que se presentó un fallo en el funcionamiento y el número de horas de operación se anotó en la lista siguiente. El experimento entero se realizó dos veces, con los siguientes resultados:

Condición experimental	*Horas de operación* Rep. 1	Rep. 2	Total
1	828	797	1625
a	997	948	1945
b	735	776	1511
ab	807	1003	1810
c	994	949	1943
ac	1069	1094	2163
bc	989	1215	2204
abc	889	1010	1899
d	593	813	1406
ad	773	1026	1799
bd	740	922	1662
abd	936	1138	2074
cd	748	970	1718
acd	1202	1182	2384
bcd	1103	966	2069
abcd	985	1154	2139
Total	14,388	15,963	30,351

Analizando estos datos como una clasificación de dos direcciones, con 16 tratamientos y 2 réplicas (bloques), obtenemos

$$C = \frac{(30{,}351)^2}{32} = 28{,}786{,}975$$

$$SST = (828)^2 + (997)^2 + \cdots + (1154)^2 - 28{,}786{,}975$$
$$= 744{,}876$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{2}[(1625)^2 + (1945)^2 + \cdots + (2139)^2] - 28,786,975$$
$$= 547,288$$
$$SSR = \frac{1}{16}[(14,388)^2 + (15,963)^2] - 28,786,975$$
$$= 77,520$$
$$SSE = 744,876 - 547,288 - 77,520 = 120,068$$

Para subdividir las sumas de cuadrados del tratamiento en SSA, SSB, ... y $SS(ABCD)$, podemos construir una tabla de signos como la de la página 293, calcular los efectos totales y, después, dividir los cuadrados de los efectos totales por $r \cdot 2^n = 2 \cdot 2^4 = 32$. Para el efecto principal del factor A, tendremos

$$[A] = -1625 + 1945 - 1511 + 1810 - 1943 + 2163 - 2204 + 1899$$
$$-1406 + 1799 - 1662 + 2074 - 1718 + 2384 - 2069 + 2139$$
$$= 2075$$

y
$$SSA = \frac{(2075)^2}{32} = 134,551$$

Estos cálculos son bastante tediosos, pero se pueden simplificar considerablemente utilizando un método aún más corto, llamado *método de* Yates. Este método de calcular los efectos totales se ilustra en la página 296. Las condiciones experimentales y los totales correspondientes se anotan en *orden normal*. En la columna (1), la mitad superior se obtuvo sumando pares sucesivos de totales de tratamientos y la mitad inferior se obtuvo restando pares sucesivos. Luego, en la columna (1) obtenemos

$$1625 + 1945 = 3570$$
$$1511 + 1810 = 3321$$
$$\cdots$$
$$2069 + 2139 = 4208$$
$$1945 - 1625 = 320$$
$$1810 - 1511 = 299$$
$$\cdots$$
$$2139 - 2069 = 70$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS
MUESTREO Y DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS POR COMPUTADORA
Del 26 de septiembre al 14 de octubre de 1994.
DIRECTORIO DE ASISTENTES

1. Martín Ricardo Carbajal López
Administrador
Abarrotes Leo
Libertad 58
Santa Clara
55540 Ecatepec, Edo. de México
Tel. 569 02 71

2. I.Q. Ernesto Galeana Chávez
Ingeniero químico
Dow Corning de México, S.A.C.V.
Campos Eliseos 345 piso 5
Col. Polanco
11550 México, D.F.
Tel. 329 13 00

3. Ing. Seth Ramírez Romero
Profesro
Univ. Aut. de Chapingo
Carr. México-Texcoco Km. 34½
Estado de México
Tel. 4 22 00

4. Lic. Psic. Leobardo A. Rosas Chávez
Técnico académico
CISE
Edificio CISE Cto. Ext. C.U.
04510 México, D.F.
Tel. 622 87 15

Act. Maritza Sandoval Bustos
Matemática
Barro de México
Juárez 90
Col. Centro
06040 México, D.F.
Tel. 761 85 88 ext. 4129

6. Lic. Cont. Marina Toriz García
Profesor
Fac. Ciencias Admvas.
Ciudad Universitaria
04510 Méixoc, D.F.
Tel. 796 28 43