



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA EL CONTROL DE FUERZA
SOBRE SUPERFICIES ESFÉRICAS EMPLEANDO CUATERNIONES
UNITARIOS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:

SALVADOR GÓMEZ MOYA

TUTOR PRINCIPAL:

MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D.F. ENERO 2015

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Héctor Benítez Pérez

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

1er. Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

2do. Vocal: Dr. Jesús Savage Carmona

3er. Vocal: Dr. Martín Velasco Villa

Lugar de realización de la tesis:

Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México DF

TUTOR DE TESIS:

Marco Antonio Arteaga Pérez

FIRMA

**PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS
PARA EL CONTROL DE FUERZA
SOBRE SUPERFICIES ESFÉRICAS
EMPLEANDO CUATERNIONES
UNITARIOS**

απὸ μηχανῆς θεός¹

¹*Poética*, Aristóteles. Su traducción al latín es la que se ha difundido: *Deus ex machina*.
Dios desde la máquina.

Dedicatoria

($\approx$)800 días necesité para escribir estas ($\approx$)80 páginas que son para
Ximena.

Agradecimientos

A Ximena y a mi familia porque son lo que más quiero.

A los profesores del Colegio de Control de la UNAM y a los sinodales, en especial al Dr. Marco Arteaga, por ayudarme a aprender lo que más me gusta.

A los compañeros del posgrado, en especial a Javier, por su ayuda invaluable.

Al apoyo económico del CONACYT y del PAPIIT IN116314: *Control de robots coordinados por medio de sistemas maestro-esclavo.*

Infinitas gracias.

Resumen

En esta tesis se presenta la adaptación a coordenadas esféricas de un ley de control posición-fuerza para un robot manipulador. Se desarrolla la teoría necesaria para aplicar el controlador en un robot industrial del Laboratorio de Robótica del Posgrado de Ingeniería de la UNAM. El robot cuenta con seis grados de libertad (tres para posición y tres para orientación), y está dotado en su extremo (efector final) con un sensor de fuerza. El robot seguirá tres tipos de trayectorias sobre una superficie esférica: la primera en dos dimensiones, la segunda en tres dimensiones y la tercera es una trayectoria cerrada (un círculo) en tres dimensiones. Esto es para la parte de control de posición, para la de fuerza, el efector final aplicará una fuerza variable del tipo senoidal. Como se mencionó anteriormente, se utilizaron coordenadas esféricas; esto, al ser una forma natural de expresar movimientos sobre una esfera, facilitó el cálculo de la ley de control y su posterior implementación. La ley de control puede verse como un controlador proporcional-integral-derivativo no lineal.

El control de un robot manipulador en interacción con su entorno, como es este el caso, es uno de los problemas más extendidos en el campo de la Robótica; en el presente trabajo de tesis el entorno lo representa una superficie esférica, que constituye un mayor desafío tanto en el diseño como en la implementación de la ley de control, con respecto a otros trabajos del mismo tipo donde la superficie suele ser plana. Se corroboró la teoría con buenos desempeños en los experimentos.

Prólogo

Quiero decirle por qué me sorprende mi Autómata:
 hoy un robot
 es una máquina vagamente humanoide;
 más bien parece computadora o cualquier trasto electrónico.
 En cambio mi autómatas
 como por arte de magia
 se levanta, saluda, enciende las velas,
 se sienta al piano
 y toca para asombro de los presentes
La Polonesa.

El Autómata, José Emilio Pacheco

Decir *control de fuerza* en la robótica, es visualizar al robot en contacto con su mundo, su entorno. Es entender a éste interactuando con los objetos que le rodean, como lo haría el hombre primitivo, como seguimos haciendo. Es exponenciar la utilidad del robot, idealizarlos en menor medida y por lo tanto hacerlos más aptos para la realidad.

Jorge Luis Borges afirmaba, hablando de la tecnología, que era una extensión del cuerpo; por ejemplo, la espada, una extensión del brazo. Y no es para menos, ya el término *robótica*, como es ampliamente conocido, tiene por genealogía un vocablo de la literatura checa que significa *trabajo* (especialmente el de la servidumbre). Así pues, los robots, en especial los industriales, son como nuestras extremidades que realizan tareas —estarán en juego las seis articulaciones que conforman la posición y orientación de

un brazo manipulador—, que por riesgosas, o por precisión, o por ser demasiado redundantes, no son aptas para el hombre. Y trabajar es interactuar *a pesar* o *con* el entorno, como no sería suficiente en movimiento libre.

Trabajo, en la definición más esencial de la física, es movimiento y es fuerza. De igual manera, el trabajo es para Marx la realización del hombre, y la forma en que éste transforma la realidad. De ahí la utilidad del presente trabajo de tesis: el control de movimiento y fuerza es útil en todos los órdenes la actividad humana; tanto en la industria, por ejemplo la automotriz, para labores de ensamblado, soldadura y pintado, así como para realizar tareas de, literalmente, *vital* precisión como en la medicina con el robot de teleoperación Da Vinci; es también célebre el robot Curiosity que tiene seis ruedas para compensar las irregularidades del suelo marciano; pero para conocerlo, al planeta, para saber de él, tiene un brazo manipulador.

El entorno. ¿Qué puede representar al mundo? “El Demiurgo le dio al cuerpo del mundo la figura más perfecta, la esférica”, se lee en el Timeo de Platón; para el filósofo de la antigua Grecia es la esfera la que contiene a todas las figuras. Parece una motivación demasiado *filosófica* para los términos prácticos a los que estamos acostumbrados, pero no está desencaminada: como se verá a largo del presente estudio, el control de fuerza y posición se vuelve especialmente difícil para el robot cuando se trata de superficies esféricas, en otras palabras, si es posible lograr que el robot realice *trabajo* sobre una esfera, entonces lo podrá hacer sin mayores dificultades con trayectorias sobre un plano, por ejemplo.

Si la esfera es la figura perfecta en el mundo tridimensional, el círculo lo es en el mundo bidimensional. Se cuenta en la mitología griega, que cuando la reina Dido fundó Cártago, sólo contaba con algunas correas cortadas de la piel de un toro para delimitar su dominio. La reina formó una sola y fina cuerda atando los extremos de las correas, y dibujó un círculo cuyo radio

era el conformado por la gran sogá. Con esto garantizaba haber abarcado la mayor cantidad de terreno posible. En 1697, Bernoulli demostró que, de todas las curvas planas cerradas, la que comprende mayor superficie, es la circunferencia (a esto se le conoce como cálculo variacional). En palabras de Heráclito: En la circunferencia se confunden el principio y el fin. La figura de mayor complejidad que nuestro robot trazará sobre la esfera es un círculo.

Y es que son escasas las referencias que existen en la literatura sobre el control de robots industriales en las que se involucre a la posición y la fuerza más allá de planos y trayectorias en 2D. En este trabajo de tesis se desarrollará la teoría y práctica para la planeación de trayectorias en 3D sobre superficies esféricas.

Índice general

1. Introducción	13
1.1. Estado del arte	16
1.2. Objetivos	18
1.3. Disposición de la tesis	18
2. Prolegómenos	20
2.1. Consideraciones preliminares del modelo dinámico	21
2.2. Coordenadas esféricas para la posición y orientación	22
2.3. Modelo del sistema en movimiento restringido	24
2.4. Principio de ortogonalización	24
3. Ley de control	26
3.1. Adaptación a coordenadas esféricas	27
3.2. Relaciones cinemáticas	30
3.3. Posición y orientación deseada	32
3.4. Algoritmo de control	33
4. Experimentos	36
4.1. Experimento 1: trayectoria en el plano	39
4.2. Experimento 2: trayectoria en 3D	45

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	10
4.3. Experimento 3: trayectoria tipo gota	51
5. Conclusiones	59
A. Propiedades de las matrices	62
B. El cuaternión unitario	66
C. Cinemática directa y diferencial	70
C.1. Cinemática directa	70
C.2. Jacobiano geométrico	72

Índice de figuras

1.1. Control de fuerza <i>compliance</i>	15
1.2. Robot de dos articulaciones en contacto con un plano rígido. Se asigna un sistema de referencia en el origen y en el punto de contacto.	17
2.1. Posición y orientación en coordenadas esféricas.	23
2.2. Descomposición fuerza-desplazamiento en el punto de contacto.	25
3.1. Diagrama esquemático del robot A465 y la superficie esférica.	28
3.2. Diagrama esquemático del robot A465 y la superficie esférica (acercamiento).	29
4.1. Robot A465 en contacto con una superficie esférica.	38
4.2. Experimento 1: trayectoria en el plano. Trayectoria sobre la esfera.	40
4.3. Experimento 1: trayectoria en el plano. Posición deseada (- -) y real (—).	41
4.4. Experimento 1: trayectoria en el plano. Orientación deseada (- -) y real (—).	42

4.5. Experimento 1: trayectoria en el plano. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (- -) y real ${}^0\mathbf{R}_n$ (—).	43
4.6. Experimento 1: trayectoria en el plano. Fuerza deseada (- -) y real (—).	44
4.7. Experimento 2: trayectoria en 3D.	46
4.8. a). Experimento 2: trayectoria en 3D. Posición deseada (- -) y real (—).	47
4.9. Experimento 2: trayectoria en 3D. Orientación deseada (- -) y real (—).	48
4.10. Experimento 2: trayectoria en 3D. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (- -) y real ${}^0\mathbf{R}_n$ (—).	49
4.11. Experimento 2: trayectoria en 3D. Fuerza deseada (- -) y real (—).	50
4.12. Experimento 3: trayectoria tipo gota.	53
4.13. Experimento 3: trayectoria tipo gota. Posición deseada (- -) y real (—).	54
4.14. Experimento 3: trayectoria tipo gota. Orientación deseada (- -) y real (—).	55
4.15. Experimento 3: trayectoria tipo gota. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (- -) y real ${}^0\mathbf{R}_n$ (—).	56
4.16. Experimento 3: trayectoria tipo gota. Fuerza deseada (- -) y real (—).	57
4.17. Experimento 3: trayectoria tipo gota. Singularidad en el punto (2).	58
5.1. Trayectorias realizadas sobre la esfera: en el plano, 3D y <i>gota</i>	61

Capítulo 1

Introducción

Nadie entre aquí que no sepa la geometría.

Inscripción a la entrada de la Academia de Platón.

Llevar a cabo con éxito una tarea de manipulación con un robot industrial requiere tanto del control de fuerza como de movimiento. El uso restrictivo de control de movimiento puede resultar en una aplicación excesiva de fuerza, en especial con objetos rígidos, como es este el caso, provocando un comportamiento inestable, y por lo tanto inseguro para el robot y el objeto. Además, es necesario tener un modelo preciso del sistema, es decir, es fundamental conocer a detalle las características de éste, lo cual puede resultar impráctico. El control de fuerza es necesario para lograr una correcta interacción entre el robot y los objetos que le rodean. Así pues, no sólo es ventajoso, sino imprescindible para una correcta, segura y robusta interacción.

Esta interacción puede caracterizarse dinámicamente de la siguiente manera: del tipo inercial, por ejemplo, dos robots que levantan un bloque y lo

cambian de posición; disipativo, esto es, el deslizamiento de un objeto sobre una superficie con fricción; y elástico, como un efector final que efectúa presión en una pared elásticamente compatible.

Otra forma de abordar el contacto robot-entorno es por medio de restricciones geométricas, en donde el efector final del robot sigue trayectorias sobre superficies de propiedades conocidas; a esto se le denomina como *restricciones cinemáticas*, y es el método que se utilizará en el presente trabajo de tesis. Este planteamiento corresponde al contacto con una superficie rígida, y se le conoce generalmente como *movimiento restringido* [17].

Cualquiera que sea el caso (interacción dinámica o cinemática), y aunque sólo esté juego el control de posición –como suele ser el caso de la interacción cinemática–, el uso de un control de movimiento puro es propenso a fallo, por lo que es menester el planteamiento de una estrategia de control que tome en cuenta la parte de fuerza [17].

Existen varios métodos para el control de fuerza. Uno ampliamente usado por ser de implementación sencilla es el denominado *compliance* pasivo y activo [9]. El primero consiste en hacer una adecuación mecánica entre el robot y el objeto, esta estructura dará elasticidad y amortiguamiento al contacto. Suele utilizarse en operaciones de ensamble del tipo *peg-into-hole*, *i. e.*, de inserción de objetos (ver Figura 1.1). Su ventaja es que puede no utilizarse sensores de fuerza (lo que lo hace barato); la desventaja es que cada estructura es para un propósito específico, lo que lo vuelve de poca flexibilidad. El control *compliance* activo, como su nombre lo dice, consiste en controlar activamente la rigidez aparente del efector final. Este enfoque en general requiere de la medición de la fuerza; es capaz de superar las desventajas del *compliance* pasivo, sin embargo también es más lento, más caro y más sofisticado, por lo que la mejor opción suele ser una combinación entre el *compliance* activo y pasivo.

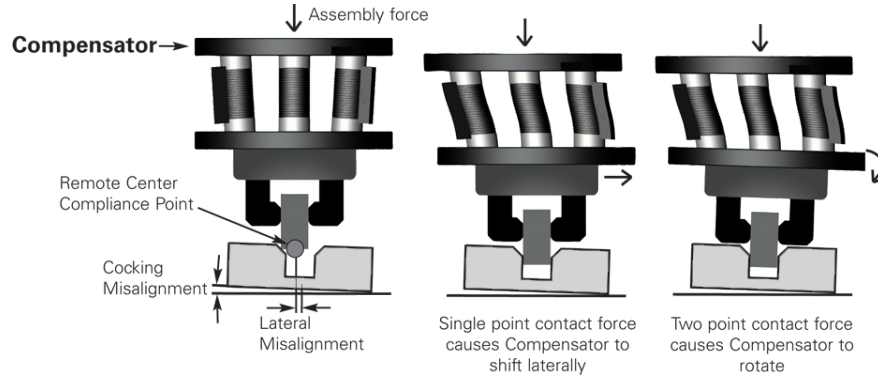


Figura 1.1: Control de fuerza *compliance*.

Otras estrategias de control de fuerza pueden dividirse en dos categorías. Se trata del control de fuerza directo e indirecto [13]. La principal diferencia consiste en que el indirecto logra control de fuerza vía control de movimiento sin necesidad de retroalimentación de fuerza. El directo tiene un lazo de retroalimentación de la fuerza, y ésta es regulada como se desee.

Un ejemplo del control indirecto es el control por impedancia. En este caso, el error entre la trayectoria deseada y la posición del efector final, debido a la interacción con el entorno, se expresa a través de una impedancia mecánica que consiste en un arreglo masa-resorte-amortiguador de parámetros ajustables. Al igual que el *compliance* pasivo, esta estrategia no requiere de mediciones de fuerza, además, la impedancia resultante es regularmente no lineal. Los parámetros de control deben ser sintonizados para cada tarea en específico [17].

El control de fuerza directo, a diferencia del anterior, requiere de un modelo explícito del objeto a ser manipulado. Se debe especificar la trayectoria y la fuerza deseadas con respecto a las restricciones impuestas por el entorno. A este grupo pertenece el control híbrido o de posición/fuerza (a

partir de aquí, estos dos términos se utilizarán como sinónimos) [5]. Ésta es la estrategia de control que se seguirá a lo largo del presente trabajo. Consiste en controlar el movimiento a través de direcciones no restringidas, y la fuerza en direcciones con restricciones de movimiento. El control híbrido se sirve de cierta propiedad geométrica que, en gran diversidad de tareas de control, consiste en establecer sistemas de referencia ortogonales, y que permite dividir el control en restricciones naturales y artificiales. Por ejemplo, considere un manipulador como el que se muestra en la Figura 1.2, cuyo efector final actúa sobre un plano, es decir, aplica una fuerza y traza trayectorias sobre éste. La fuerza aplicada, de la que sólo se considerará la que se ejerce de forma normal al plano, y puesto que éste es rígido (no puede ser atravesado), consiste en una restricción natural. Si la fuerza se ejerce de forma normal, el movimiento se realiza en forma tangencial. La trayectoria deseada es la restricción artificial. De esta manera es posible descomponer el control de fuerza y de movimiento y tratarlos por separado [9].

1.1. Estado del arte

El control de robots industriales bajo restricciones de movimiento y fuerza, por su alto grado de aplicabilidad, ha desempeñado un lugar central en el dominio de la Robótica. Uno de los primeros trabajos sobre control de fuerza es realizado por Daniel E. Whitney (1977) [1], y ya desde entonces se presentaba la necesidad de dividir el control en posición y fuerza.

En 1979, Raibert y Craig [2] propusieron el control híbrido; se basa en la propiedad de ortogonalidad que se presenta entre los vectores de posición y fuerza en el espacio cartesiano. Oussama Khatib presentó el control de un robot bajo movimiento restringido formulando y utilizando explícitamente

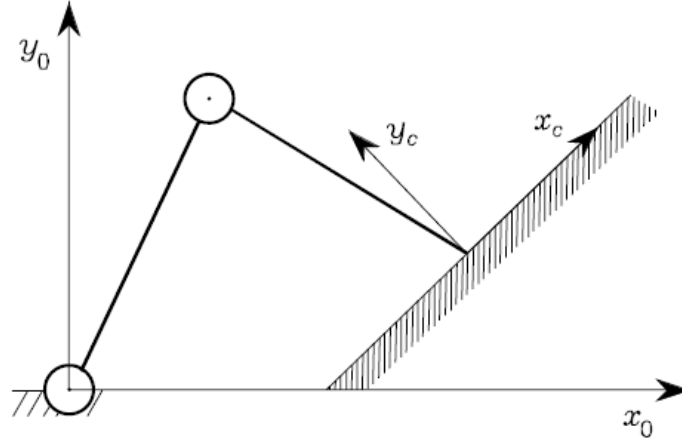


Figura 1.2: Robot de dos articulaciones en contacto con un plano rígido. Se asigna un sistema de referencia en el origen y en el punto de contacto.

la dinámica del robot [3]. En [4], De Luca y Manes introdujeron un método sistemático para modelar cinemática y dinámicamente la interacción de un robot con el entorno.

En Arimoto et al. [5] se presentó de igual manera un esquema de ortogonalización pero en el espacio articular. Parra-Vega y Arimoto [6] propusieron un cambio de coordenadas, en el que se induce un modo deslizante. En esta misma línea, Parra-Vega y Arteaga-Pérez [7], utilizan una técnica de modos deslizantes de segundo orden de movimiento libre para movimiento restringido; el controlador propuesto es localmente estable y logra convergencia exponencial para trayectorias de fuerza y posición.

El presente artículo está basado en el estudio de Rivera-Dueñas y Arteaga-Pérez [8]; destaca porque, además de no necesitar el modelo dinámico, no se requieren mediciones de velocidad ni fuerza. La orientación, además de ser calculada por medio de la matriz de rotación, se obtiene por medio

del cuaterniones unitarios para evitar singularidades.

1.2. Objetivos

Numerosos estudios sobre control de posición/fuerza en superficies planas pueden encontrarse en la literatura; no es el caso para las superficies esféricas, en las que el diseño e implementación de una ley de control aumenta en complejidad. El objetivo es que el efector final de un robot industrial trace trayectorias en 3D sobre una superficie esférica; se debe controlar tanto la posición como la orientación, es decir, las 6 articulaciones con que cuenta el robot estarán en uso. La ley de control de Rivera-Dueñas y Arteaga-Pérez [8] se ha adaptado a coordenadas esféricas, pues al ser una forma natural de expresar ese tipo de superficies, se simplifican diversos cálculos.

Por todo lo anterior se plantean los siguientes objetivos:

- Planeación de trayectorias para el seguimiento de posición/fuerza sobre superficies esféricas.
- Adaptación de un algoritmo de control de fuerza para su empleo directo con coordenadas esféricas.

Al cumplirse los dos objetivos propuestos se simplificará de manera significativa la aplicación de fuerza sobre objetos que no sean planos, en particular sobre esferas.

1.3. Disposición de la tesis

Este primer capítulo de introducción está dedicado a establecer las distintas estrategias de control enfocadas al control de fuerza; se sintetizan

los más importantes, en especial el control híbrido, utilizado en el presente trabajo de tesis. Se hace una revisión histórica de los trabajos y publicaciones que han culminado en el sistema y la ley de control que se explicarán en capítulos adelante. También se establecen los objetivos a cumplir.

El Capítulo 2, el de los Prolegómenos, son las preliminares matemáticas necesarias para plantear el problema de control —y la solución propuesta—; principalmente se habla de la dinámica de un robot manipulador en contacto con un entorno rígido.

En el Capítulo 3 se retoma una ley de control que ha demostrado ser útil en robots manipuladores que interactúan con alguna superficie. Se hace una adaptación a coordenadas esféricas.

En el Capítulo 4 se realizan tres experimentos que demuestran la eficacia de la ley de control utilizada; se discuten los resultados.

Finalmente, en el Capítulo 5 se hacen conclusiones generales del trabajo desarrollado.

Capítulo 2

Prolegómenos

—Paréceme que vuesa merced ha cursado las escuelas: ¿qué ciencias ha oído?
—La de la caballería andante —respondió don Quijote— [...]; ha de saber
matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas.

Don Quijote de la Mancha, Miguel de Cervantes

Algunas definiciones matemáticas son necesarias antes de iniciar con la descripción e implementación de la ley de control. Son tres los conceptos que constituyen la base del análisis del sistema físico y del diseño del algoritmo de control. El primero es el de las consideraciones del entorno y del robot, así como del movimiento restringido de éste sobre la superficie. En la segunda sección se analiza la representación de la posición y orientación de cualquier robot manipulador en coordenadas esféricas.

Otro concepto importante es el del modelo matemático. La importancia de éste radica en que es crucial en simulaciones, análisis de la estructura del sistema, así como del diseño de controladores. Gracias al modelo se puede predecir de manera aproximada el movimiento de los robots, las fuerzas y pares aplicados así como llevar a cabo el análisis de estabilidad y, por

ende, inclinarse por algún esquema de control. Y es que las pruebas en simulaciones resultaron valiosas para advertir que las posiciones articulares y de los eslabones fueran seguras para el robot; lo mismo se puede decir de la fuerza aplicada y los voltajes. Es por ello que la segunda sección está dedicada al modelo matemático en movimiento restringido.

En el Apéndice A se hace un listado de las propiedades más importantes de las matrices que se indican en las ecuaciones del modelo. Otro concepto importante, y parte central del diseño de la ley de control, es el principio de ortogonalización; debido a las características físicas de la interacción del robot con el entorno, es posible tratar el problema de control de movimiento y fuerza por separado. Este concepto es la base para realizar controladores híbridos.

2.1. Consideraciones preliminares del modelo dinámico

Es necesario establecer ciertas consideraciones que harán válido el desarrollo de las siguientes secciones:

- El efector final del robot es rígido.
- La superficie es indeformable, es decir, es rígida también y su posición absoluta y relativa son conocidas.
- El entorno es conocido con suficiente precisión.
- La cinemática del robot es conocida.
- La trayectoria del robot no pasa por ninguna singularidad.

2.2. Coordenadas esféricas para la posición y orientación

A partir de las coordenadas cartesianas se definen las coordenadas esféricas. Considérese la Figura 2.1, (X_0, Y_0, Z_0) es el sistema coordenado cartesiano de referencia de algún robot, (X_n, Y_n, Z_n) es un sistema coordenado en el efector final, $\mathbf{r}$ es el vector que va del origen del sistema de referencia al efector final y su longitud será ρ ; de esta forma, la posición y orientación del efector final en el espacio de trabajo, estará disponible gracias a la cinemática directa, obtenida con las matrices de transformación del Apéndice C. La relación entre los dos sistemas coordenados es:

$$x = \rho \sin \alpha \cos \theta, \quad y = \rho \sin \alpha \sin \theta, \quad z = \rho \cos \alpha, \quad (2.1)$$

donde

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Para especificar la posición y orientación del efector final se realizan las siguientes traslaciones/rotaciones (ver Figura 2.1):

1. Una traslación de ρ unidades a lo largo del eje $\mathbf{Z}_0$ ($T_{Z,\rho}$).
2. Una rotación de ángulo α respecto al eje $\mathbf{Y}_0$ ($T_{Y,\alpha}$).
3. Una rotación de ángulo θ respecto al eje $\mathbf{Z}_0$ ($T_{Z,\theta}$).

La matriz de transformación para las operaciones anteriores es

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_{Z,\theta} \mathbf{T}_{Y,\alpha} \mathbf{T}_{Z,\rho} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_\theta c_\alpha & -s_\theta & c_\theta s_\alpha & \rho c_\theta s_\alpha \\ s_\theta c_\alpha & c_\theta & s_\theta s_\alpha & \rho s_\theta s_\alpha \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha & \rho c_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La matriz (2.2) se puede escribir como

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} & \rho c_\theta s_\alpha \\ {}^0R_n & \rho s_\theta s_\alpha \\ & \rho c_\alpha \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

donde la última columna reprenta la posición y 0R_n la orientación.

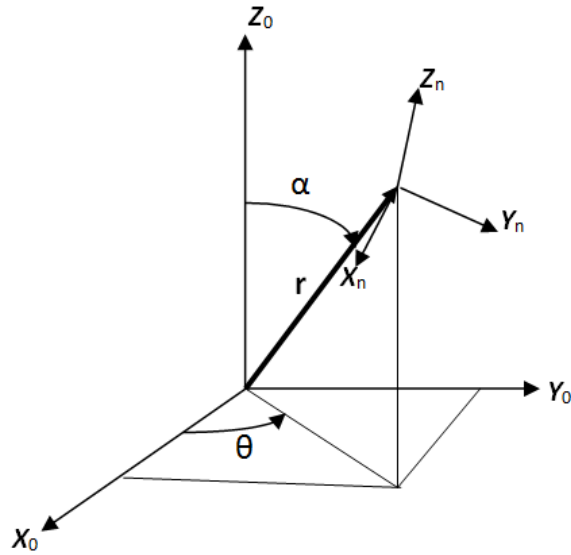


Figura 2.1: Posición y orientación en coordenadas esféricas.

2.3. Modelo del sistema en movimiento restringido

Considere un manipulador de n grados de libertad en contacto con m superficies rígidas descritas por la ecuación

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas articulares. Modelo del sistema en movimiento restringido Las ecuaciones de movimiento del robot están dadas por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^\mathrm{T}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\tau}_p \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia simétrica positiva definida, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica positiva semidefinida que contiene los coeficientes de fricción viscosa, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares generalizados, $\boldsymbol{\tau}_p \in \mathbb{R}^n$ representa cualquier perturbación externa acotada cuya primera derivada también está acotada y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de multiplicadores de Lagrange que representa la fuerza aplicada a la superficie en el punto de contacto. Por su parte, el gradiente $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla \varphi(\mathbf{q})$ se asume de rango completo.

2.4. Principio de ortogonalización

El principio de ortogonalización resulta de aplicar una fuerza sobre una superficie rígida, y de realizar a su vez un desplazamiento sobre ésta (Figura 2.2). El vector velocidad pertenece al plano tangente del punto de contacto $\phi(\mathbf{q}) = 0$, mientras que la fuerza aplicada es perpendicular al plano.

El principio se utiliza para hacer una proyección del vector de posición sobre un espacio tangente de dimensión $(n - 1)$ ortogonal al Jacobiano $\mathbf{J}_{\varphi s}^T$, donde $\mathbf{J}_{\varphi s}(\mathbf{x}_s) = \nabla \varphi(\mathbf{x}_s)$, $\mathbf{x}_s$ representa la posición y orientación del efector final en coordenadas esféricas¹ y será descrita a detalle en el siguiente capítulo. Matricialmente el plano tangente se calcula de acuerdo a

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{I} - \mathbf{P}_s \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{P}_s = \mathbf{J}_{\varphi s}^+ \mathbf{J}_{\varphi s}$ y $\mathbf{J}_{\varphi s}^+ = \mathbf{J}_{\varphi s}^T (\mathbf{J}_{\varphi s} \mathbf{J}_{\varphi s}^T)^{-1}$ es la pseudo inversa de Moore-Penrose [5].

A partir de lo anterior, es posible escribir la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{x}_s$ como:

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{Q}_s \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{P}_s \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{Q}_s \dot{\mathbf{x}}_s. \quad (2.7)$$

¹El subíndice 's' indica que alguna cantidad se encuentra expresada en coordenadas esféricas.

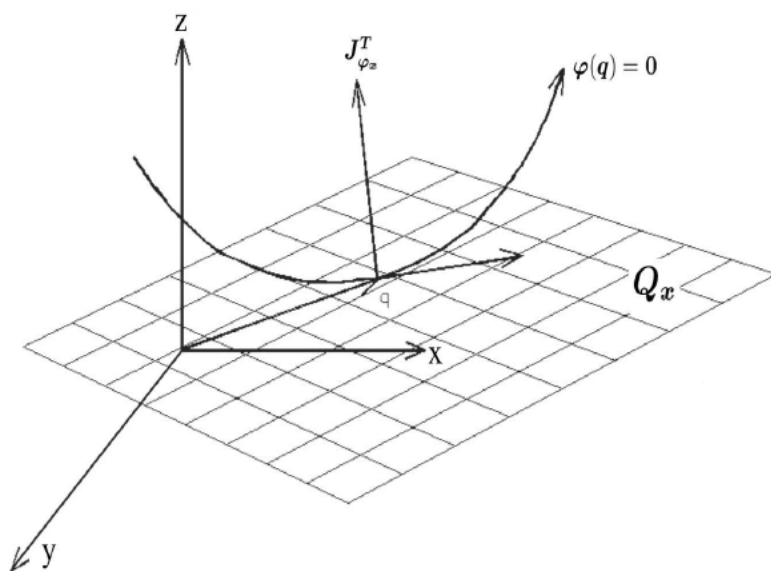


Figura 2.2: Descomposición fuerza-desplazamiento en el punto de contacto.

Capítulo 3

Ley de control

Hay en la materia algo más que lo puro geométrico, es decir, algo más que la pura extensión o el mero cambio. Y si estudiamos las cosas a detalle, percibimos que debemos añadirles alguna noción más alta, la de la sutancia, acción y fuerza.

Journal des savants, G. W. Leibniz

La ley de control se basa en el estudio de Rivera-Dueñas y Arteaga-Pérez [8], salvo que en el presente trabajo se omite el observador para la velocidad y la fuerza, es decir, estas señales se encuentran disponibles; se trata de una adaptación a coordenadas esféricas. Para realizar dicha adaptación es necesario explicar en primer lugar en qué consisten las coordenadas esféricas. En la Sección 3.1 se hace una descripción de éstas para el sistema bajo estudio.

En la Sección 3.2 se establecen las relaciones cinemáticas, es decir, las funciones geométricas y diferenciales obtenidas de utilizar coordenadas esféricas. En el Apéndice C se da una explicación de la cinemática directa y el Jacobiano geométrico y se consignan las matrices de transformación del robot. En la Sección 3.3 se detallan las ecuaciones de posición y orientación deseadas derivadas de seleccionar coordenadas esféricas y el cuaternión

unitario, respectivamente. En el Apéndice B se desarrolla a detalle la obtención del cuaternión unitario. Finalmente, en la Sección 3.4 se detalla el algoritmo de control.

3.1. Adaptación a coordenadas esféricas

Además de las coordenadas cartesianas y cilíndricas, otra posible generalización a las tres dimensiones son las coordenadas esféricas; éstas son útiles con frecuencia —como es este el caso— en problemas donde hay simetrías esféricas, *i. e.*, simetría relativa a un punto.

Las coordenadas esféricas se pueden definir a partir de las coordenadas cartesianas x, y y z . En la Figura 3.1 se observa un diagrama esquemático del sistema completo; se ha colocado un sistema de referencia inercial en la base del robot (Σ_0), también se han colocado sistemas coordenados en el efector final (Σ_n) y en el centro de la esfera (Σ_c).

El vector ${}^0\mathbf{p}_n$ representa el punto de contacto del efector final sobre la esfera, y se hace con respecto al sistema de referencia Σ_0 ; el vector ${}^0\mathbf{p}_c$ representa el centro de la bola respecto a la misma referencia. ${}^0\mathbf{p}_n$ se obtiene con la cinemática directa (ver Sección 2.2 y Apéndice C), y ${}^0\mathbf{p}_c$ se puede medir directamente en el sistema, por lo que el vector ${}^c\mathbf{p}_n$ queda completamente determinado, y es a partir del cual que se establecen las coordenadas esféricas.

En la Figura 3.2 se muestra un acercamiento del punto de contacto entre el efector final y la superficie. Se muestran las tres cantidades que conforman las coordenadas esféricas: (ρ, θ, α) , con respecto a Σ_c , donde $\rho \geq 0$ es el radio esférico, $0 \leq \alpha < \pi$ es el ángulo entre el eje positivo z_c y ρ , $0 \leq \theta < 2\pi$ es el ángulo entre la proyección de ρ en el plano $x_c y_c$ y el eje x_c .

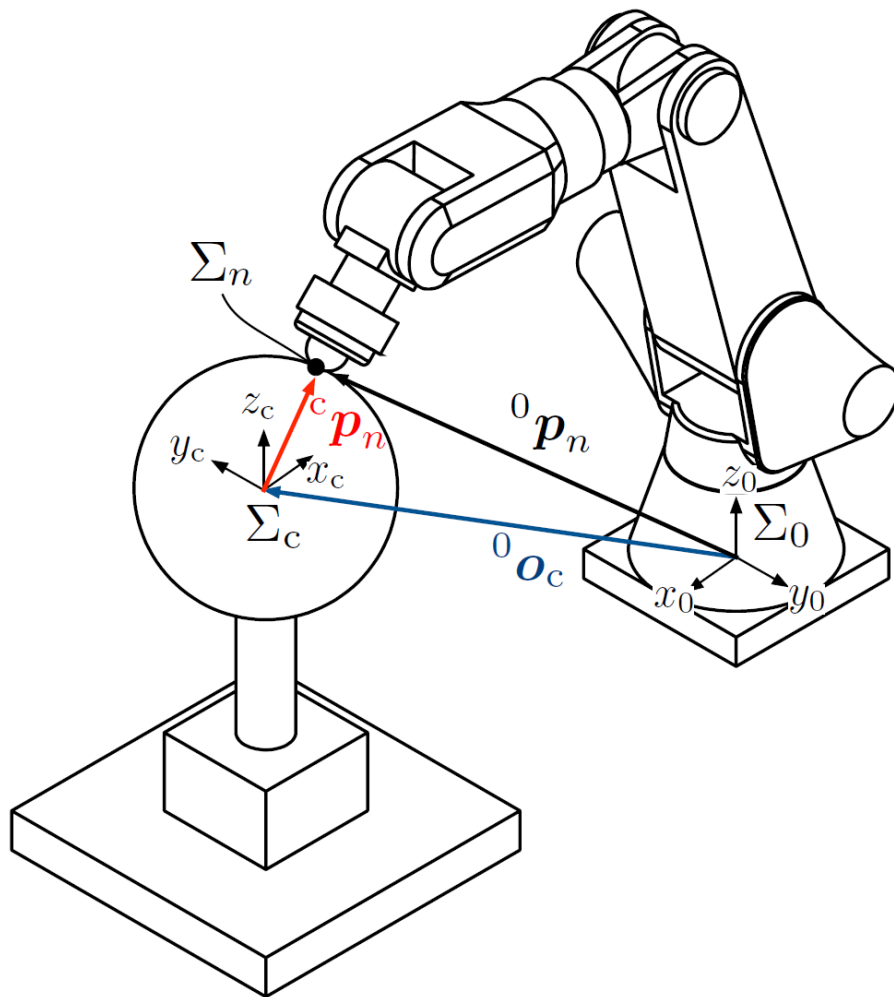


Figura 3.1: Diagrama esquemático del robot A465 y la superficie esférica.

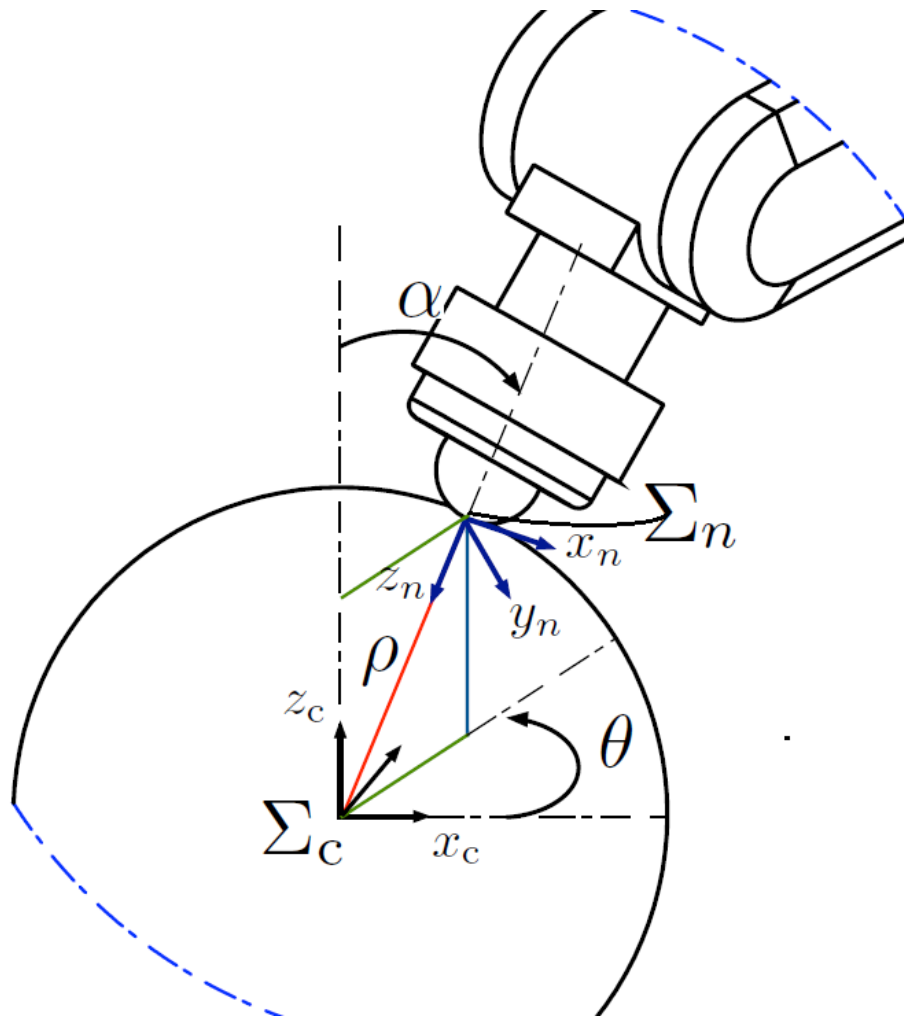


Figura 3.2: Diagrama esquemático del robot A465 y la superficie esférica (acercamiento).

3.2. Relaciones cinemáticas

De acuerdo con la Figura 3.1, la posición del efector final en el punto de contacto está dada por

$${}^0\mathbf{p}_n = {}^0\mathbf{o}_c + {}^0\mathbf{R}_c {}^c\mathbf{p}_n \quad (3.1)$$

donde ${}^0\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del efector final que se calcula mediante la cinemática directa del manipulador, ${}^0\mathbf{o}_c \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del centro de la esfera, ${}^0\mathbf{R}_c \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de rotación constante que relaciona los sistemas de referencia Σ_0 y Σ_c fijos a la base del robot y el centro de la esfera, respectivamente. El vector ${}^c\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{cx} & p_{cy} & p_{cz} \end{bmatrix}^T$ es el vector que va del centro de la esfera al punto de contacto expresado con respecto al sistema de referencia Σ_c y se obtiene como

$${}^c\mathbf{p}_n = {}^0\mathbf{R}_c^T ({}^0\mathbf{p}_n - {}^0\mathbf{o}_c). \quad (3.2)$$

Haciendo uso de la Figura 3.2, las coordenadas esféricas se calculan con respecto al sistema de referencia Σ_c como

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{p_{cx}^2 + p_{cy}^2 + p_{cz}^2} \\ \theta = \text{atan2}(p_{cy}, p_{cx}) \\ \alpha = \text{atan2}\left(\sqrt{p_{cx}^2 + p_{cy}^2}, p_{cz}\right) \end{cases} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) se escribe en forma compacta como

$${}^c\mathbf{p}_s = \psi({}^c\mathbf{p}_n) = \psi({}^0\mathbf{R}_c^T ({}^0\mathbf{p}_n - {}^0\mathbf{o}_c)) \quad (3.4)$$

con ${}^c\mathbf{p}_s = \begin{bmatrix} \rho & \theta & \alpha \end{bmatrix}^T$ y $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. La derivada de ${}^c\mathbf{p}_s$ está dada por

$${}^c\dot{\mathbf{p}}_s = \frac{\partial \psi}{\partial {}^0\mathbf{p}_n} {}^c\dot{\mathbf{p}}_n = \frac{\partial \psi}{\partial {}^0\mathbf{p}_n} {}^0\mathbf{R}_c^T {}^0\dot{\mathbf{p}}_n. \quad (3.5)$$

La ecuación anterior relaciona la velocidad lineal en coordenadas esféricas con la velocidad lineal en coordenadas cartesianas. La velocidad angular del efector final ${}^0\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$ expresada con respecto al sistema Σ_c está dada por

$${}^c\boldsymbol{\omega}_n = {}^0\mathbf{R}_c^T {}^0\boldsymbol{\omega}_n. \quad (3.6)$$

Se define el vector de velocidad en coordenadas esféricas como $\dot{\mathbf{x}}_s \triangleq \begin{bmatrix} {}^c\dot{\mathbf{p}}_s^T & {}^c\boldsymbol{\omega}_n^T \end{bmatrix}^T$. Tomando en cuenta (3.5) y (3.6) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{J}_\rho \dot{\mathbf{x}} \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{J}_\rho = \text{blockdiag} \left\{ \partial\psi/\partial\mathbf{p}_n {}^0\mathbf{R}_c^T \quad {}^0\mathbf{R}_c^T \right\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal por bloques y $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n^T & {}^0\boldsymbol{\omega}_n^T \end{bmatrix}^T$ es la velocidad del efector final.

La relación entre la velocidad en coordenadas esféricas y articulares está dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{J}_\rho \mathbf{J}_g(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{J}_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano geométrico del manipulador y se define $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\rho \mathbf{J}_g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Finalmente, la posición y orientación del efector final en coordenadas del espacio de trabajo se describen por el vector

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} {}^c\mathbf{p}_s \\ {}^c\boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

donde ${}^c\boldsymbol{\phi}_n = \int_0^t {}^c\boldsymbol{\omega}_n d\vartheta$ no tiene ningún significado físico.

La restricción se reescribe en coordenadas esféricas como

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Tomando en cuenta (3.7) y (3.8), la derivada de la restricción (3.10) está dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{J}_{\varphi s}(\mathbf{x}_s) \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{J}_{\varphi s} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Se tiene que

$$\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{x}_s) = \nabla \varphi(\mathbf{x}_s) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

y

$$\mathbf{J}_\varphi = \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{J}(\mathbf{q}). \quad (3.12)$$

3.3. Posición y orientación deseada

Similar al esquema utilizado en [8], la velocidad y posición deseada están dadas por

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \begin{bmatrix} {}^c \dot{\mathbf{p}}_{sd} \\ {}^c \boldsymbol{\omega}_d - k_\epsilon {}^c \mathbf{R}_d {}^d \boldsymbol{\epsilon}_n \end{bmatrix} \implies \mathbf{x}_d = \int_0^t \dot{\mathbf{x}}_d d\vartheta, \quad (3.13)$$

donde k_ϵ es un escalar positivo, ${}^c \dot{\mathbf{p}}_{sd} \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad deseada del efector final en coordenadas esféricas, ${}^c \boldsymbol{\omega}_d \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular deseada, y ${}^c \mathbf{R}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de rotación deseada; ${}^d \boldsymbol{\epsilon}_n \in \mathbb{R}^3$ es la parte vectorial del cuaternión unitario asociada a la matriz de rotación dada por ${}^d \mathbf{R}_n = {}^c \mathbf{R}_d^{\text{T}0} \mathbf{R}_c^{\text{T}0} \mathbf{R}_n$. La orientación del efector final del manipulador se elige tal que éste sea normal a la superficie. De acuerdo con la matriz ${}^0 \mathbf{R}_n$ obtenida en la Sección 2.2, y tomando en cuenta que la matriz de rotación deseada se calcula con respecto a Σ_c , se tiene

$${}^c \mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} -\cos \theta_d \cos \alpha_d & -\sin \theta_d & -\cos \theta_d \sin \alpha_d \\ -\sin \theta_d \cos \alpha_d & \cos \theta_d & -\sin \theta_d \sin \alpha_d \\ \sin \alpha_d & 0 & -\cos \alpha_d \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

3.4. Algoritmo de control

Como se mencionó anteriormente, el algoritmo de control está basado en el diseño realizado en [8], en el que se utilizaron coordenadas cartesianas para representar la posición y orientación del robot. En el presente trabajo el espacio operacional son las coordenadas esféricas.

Se definen los errores de seguimiento en posición y fuerza como

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_s & \triangleq \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_d \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} & \triangleq \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d \end{cases} \quad (3.15)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_d \in \mathbb{R}^m$ es la fuerza deseada aplicada a la superficie.

El siguiente paso es definir la variable deslizante

$$\mathbf{s} \triangleq \mathbf{Q}_s(\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_s \Delta \mathbf{x}_s) + \mathbf{J}_{\phi s}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} \triangleq \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_f \quad (3.16)$$

donde $\boldsymbol{\Lambda}_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices simétricas positivas definidas; es de notar que $\mathbf{s}_p \perp \mathbf{s}_f$ y

$$\Delta \mathbf{F} = \int_0^t \Delta \boldsymbol{\lambda} d\vartheta. \quad (3.17)$$

El diseño consiste en hacer tender $\mathbf{s}$ a cero. Como se mencionó, $\mathbf{s}_p$ y $\mathbf{s}_f$ son ortogonales, por lo que entonces $\mathbf{s}_p$ y $\mathbf{s}_f$ tienden a cero si $\mathbf{s}$ lo hace. Si es el caso, y dado que se asume $\mathbf{J}_{\phi x}^T$ de rango completo, también lo será $\mathbf{J}_{\phi x}^+$, y por lo tanto

$$\text{si } \mathbf{s} = \mathbf{0} \implies \Delta \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

pues $\boldsymbol{\xi}_2$ es una matriz definida positiva¹.

¹La prueba de estabilidad a detalle puede encontrarse en [8].

Se define la velocidad de referencia nominal como

$$\dot{\mathbf{x}}_r \triangleq \mathbf{Q}_s(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{\Lambda}_s \Delta \mathbf{x}_s) - \mathbf{J}_{\varphi s}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.18)$$

donde $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica positiva definida y $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ con

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-k_1 t}, \quad (3.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{\mathbf{K}_\beta s_1(\vartheta) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(\vartheta))\} d\vartheta, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d. \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal positiva definida, k_1 es una constante positiva, y $\text{sign}(\mathbf{s}_1) \triangleq [\text{sign}(s_{11}) \dots \text{sign}(s_{n1})]^T$, con s_{1i} elementos de s_1 , $i = 1, \dots, n$. $\mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^n$ se utiliza para ajustar el desempeño transitorio y puede seleccionarse como cero sin afectar el análisis de estabilidad.

A continuación se definen las siguientes variables auxiliares:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_r &\triangleq \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_r \\ &= \mathbf{Q}_s(\Delta \dot{\mathbf{x}}_s - \mathbf{\Lambda}_s \Delta \mathbf{x}_s) + \mathbf{J}_{\varphi s}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{s}_q \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_r) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{s}_r. \quad (3.23)$$

Si se reescribe (??) en términos de $\mathbf{s}_q$ se obtiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_q + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_q + \mathbf{D}\mathbf{s}_q = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{J}_{\varphi s}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{y}_a, \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_p, \quad (3.25)$$

y al emplear (3.12), la ley de control es:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1} \mathbf{s}_r + \mathbf{J}^T \mathbf{J}_{\varphi s}^T \boldsymbol{\lambda}_d - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_{\varphi s}^T \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \mathbf{F}, \quad (3.26)$$

donde $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices positivas definidas. Esta ley de control puede verse como un PID no lineal [8].

Al sustituir (3.26) en (3.24), se obtiene la dinámica en lazo cerrado dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_q \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_q + \mathbf{D}\mathbf{s}_q = -\mathbf{J}^T \mathbf{J}_{\varphi s}^T \Delta \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1} \mathbf{s}_r - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_{\varphi s}^T \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \mathbf{F} - \mathbf{y}_a. \quad (3.27)$$

Los resultados de esta sección se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 [8] *Considérese una trayectoria continua acotada $\mathbf{x}_d$, con primera y segunda derivadas acotadas, elegida lejos de cualquier singularidad. Entonces, para la ley de control (3.26) en lazo cerrado con el sistema (??), una combinación apropiada de ganancias $k_1, k_\epsilon, \xi_1, \xi_2, \mathbf{K}_\gamma, \mathbf{K}_\beta, \mathbf{K}_p$ y $\boldsymbol{\Lambda}_s$, puede ser siempre encontrada, tal que las variables de las dinámicas del error dadas por (3.17) y (3.27) están acotadas para todo tiempo y los errores de seguimiento y de fuerza tienden $(\Delta \mathbf{x}_s, \Delta \dot{\mathbf{x}}_s, \Delta \mathbf{F}, \Delta \boldsymbol{\lambda})$ a cero.*

◇

Capítulo 4

Experimentos

Los primeros filósofos fueron políticos. Fueron también ingenieros y no parece que se desinteresaran nunca de las posibilidades técnicas y prácticas que, una vez aplicada, puede tener la teoría.

Historia de la filosofía, Ramón Xirau

Las pruebas experimentales fueron realizadas en el Laboratorio de Robótica del Posgrado de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. El sistema experimental consiste en un robot A465 de seis grados de libertad del fabricante *CRS Robotics*, y una superficie esférica (una bola de boliche) que se muestran en la Figura 4.1. El robot cuenta con sensores de posición (encoders) en cada articulación y de fuerza en el extremo del brazo. El objetivo es que el efector final trace trayectorias sobre la superficie por medio de la ley de control del Capítulo 3.

Como se ha destacado en los capítulos anteriores, diversos cálculos se simplifican al adaptar la ley de control utilizada en [8] a coordenadas esféricas. Un ejemplo de ello es el gradiente.

Sin pérdida de generalidad, considérese la ecuación de una esfera de

radio r con centro en el origen en coordenadas cartesianas

$$\phi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + z^2 = r. \quad (4.1)$$

Haciendo uso de (2.1), la ecuación (4.1) en coordenadas esféricas es

$$\phi(\mathbf{x}_s) = \rho = r,$$

o bien se puede escribir alternativamente

$$\phi(\mathbf{x}_s) = \rho - r = 0,$$

que corresponde a la familia de esferas concéntricas.

A su vez, el gradiente es:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}_s) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

En coordenadas cartesianas hubiera sido necesario obtener las derivadas parciales de la ecuación de la esfera; además, con el gradiente se construye la pseudo inversa y las matrices $\mathbf{Q}_s$ y $\mathbf{P}_s$ de (2.5), que se utilizan directamente en el algoritmo de control programado como se observa en (3.22). De esto se observa claramente la ventaja de emplear coordenadas esféricas.

Se realizaron tres experimentos. El primero consiste en que el robot trace un perfil sobre la esfera, es decir, el movimiento será en 2D, similar al experimento realizado en [10], y que fuera uno de los más complicados. El segundo experimento es un movimiento en 3D sobre la esfera, esto ya es una aportación original del presente trabajo. El tercer experimento es el que requirió más tiempo en programación y sintonización, y que no tiene antecedente en la literatura: el robot trazará un círculo sobre la esfera. Es importante señalar que al utilizar coordenadas esféricas se presenta una singularidad en el Jacobiano ($\mathbf{J}_\rho$) si el punto de inicio es justo el punto de máxima altura de la esfera, es decir $z_c = \rho$, $x_c = 0$, $y_c = 0$. Es por ello que en todos los experimentos habrá un *offset* de 7° en alguna de las coordenadas.

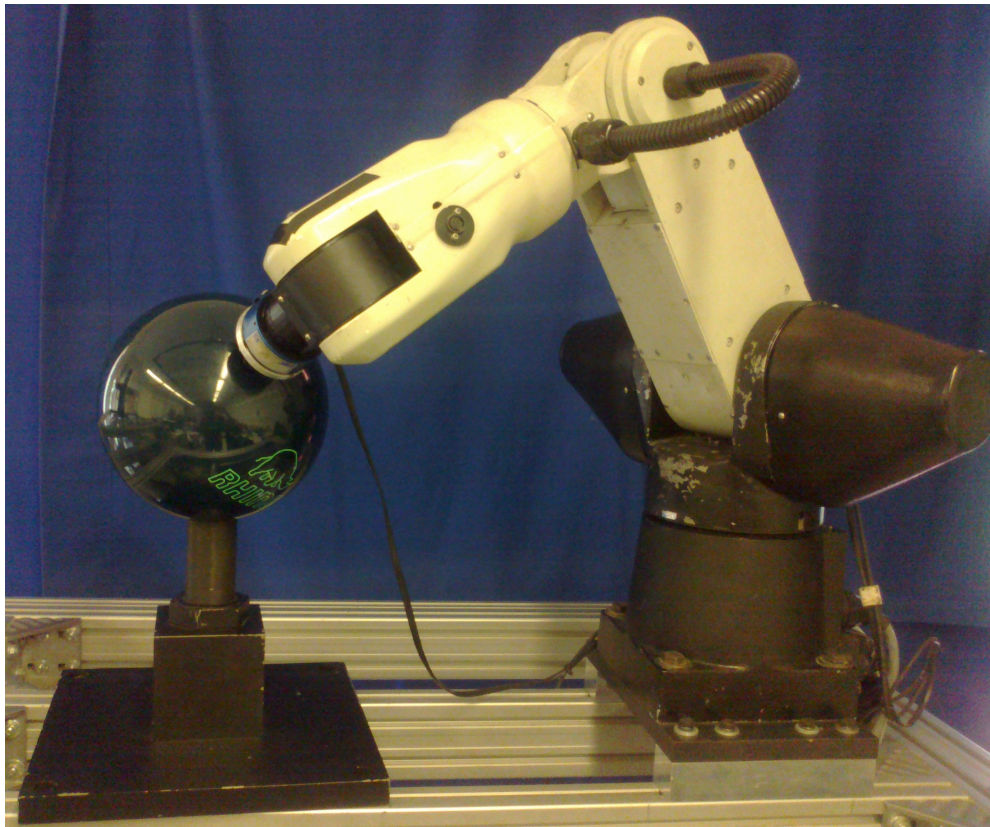


Figura 4.1: Robot A465 en contacto con una superficie esférica.

4.1. Experimento 1: trayectoria en el plano

El primer experimento consistió en trazar un perfil sobre la esfera en el plano xz . En la Figura 4.2 se muestra la trayectoria real; la dirección va desde el punto 1 hasta el punto 2. Este tipo de desplazamiento es el más común. Al ser un movimiento en 2D sólo cambiará una de las coordenadas, en este caso α . Las condiciones iniciales son: $\alpha_{d1} = 7^\circ$, $\theta_{d1} = 0^\circ$ y $\rho \approx 0.11$ [m] es el radio de la esfera, por lo que siempre será el mismo; la posición deseada es: $\alpha_{d2} = 44^\circ$, $\theta_{d2} = 0^\circ$ ¹. Se utilizaron polinomios de quinto orden para que la transición en posición y orientación fuera suave. La duración del experimento fue de $t_f = 14$ [s]. La fuerza deseada es variante en el tiempo: $\lambda_d = 40 + 15 \sin(\frac{2\pi t}{t_f})$ [N]. Los parámetros del controlador son: $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}[165, 115, 120, 163, 163, 163]$, $\mathbf{K}_\gamma = \text{diag}[0.44, 0.44, 0.44, 0.43, 0.43, 0.43]$, $\mathbf{K}_\beta = \text{diag}[0.35, 0.35, 0.35, 0.43, 0.43, 0.43]$, $\mathbf{K}_p = \text{diag}[28, 28, 28, 3, 3, 3]$, $\xi_2 = 0.0033$, $k_\epsilon = 0.1$, $\xi_1 = 17.1$, $k_1 = 0.4$.

En la Figura 4.3 se muestran las trayectorias deseadas (línea discontinua) para ρ, θ, α , y las reales (línea continua) para el primer experimento; la orientación deseada y real con cuaterniones unitarios se muestran en la Figura 4.4, y con matrices de rotación en Figura 4.5; la fuerza deseada y real se muestran en la Figura 4.6. Se observa que para la posición, orientación y fuerza el seguimiento es bueno. En el caso de la fuerza, en los primeros segundos hay un sobrepaso, debido a que los términos integrales del controlador requieren de unos instantes de tiempo para mejorar el comportamiento del sistema.

¹La elección de los valores de inicio tanto de este experimento como de los otros corresponde a guardar una posición segura para el robot, es decir, que no se encuentre con una singularidad y evitar que dos eslabones estén demasiado cerca.

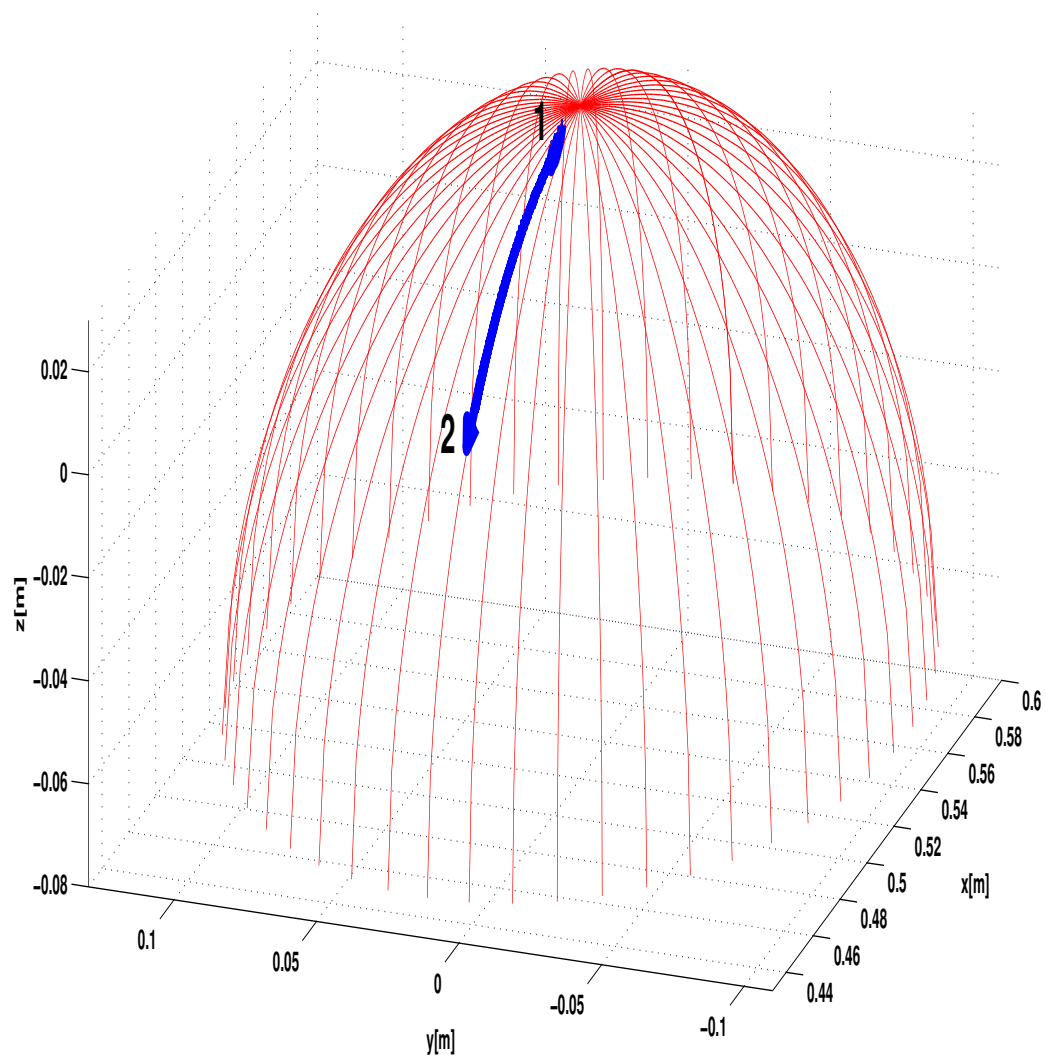


Figura 4.2: Experimento 1: trayectoria en el plano. Trayectoria sobre la esfera.

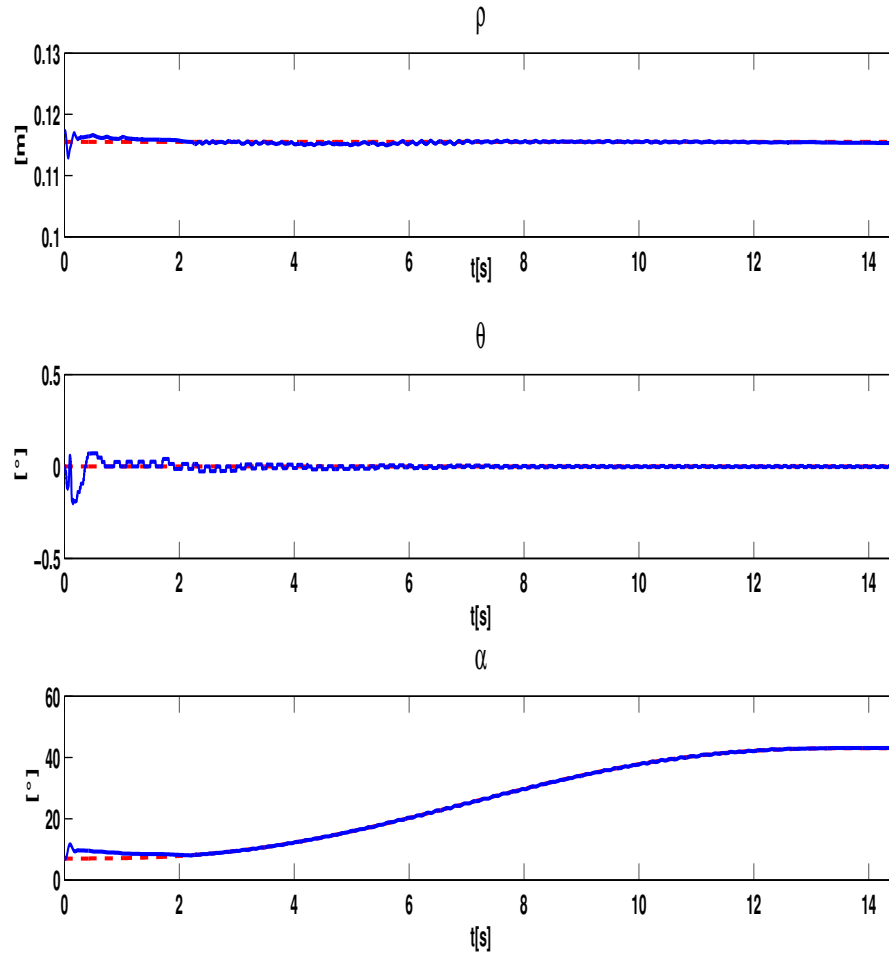


Figura 4.3: Experimento 1: trayectoria en el plano. Posición deseada (- -) y real (—).

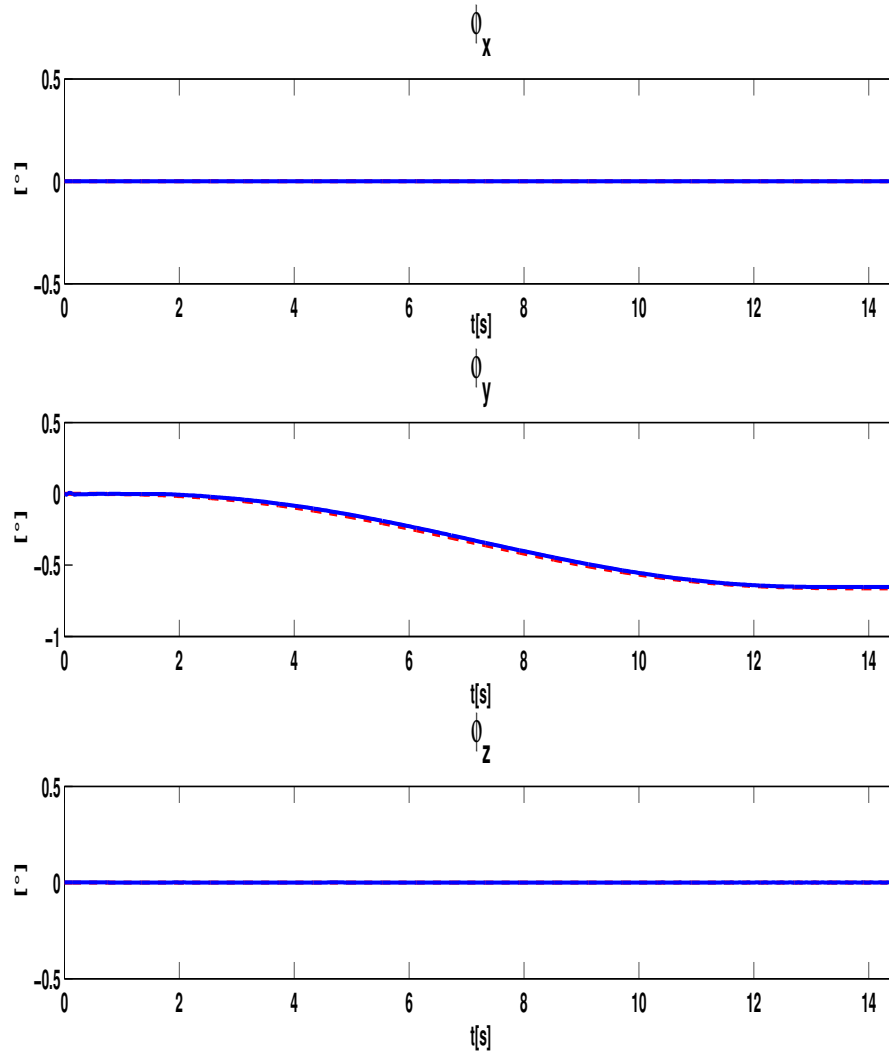


Figura 4.4: Experimento 1: trayectoria en el plano. Orientación deseada (- -) y real (—).

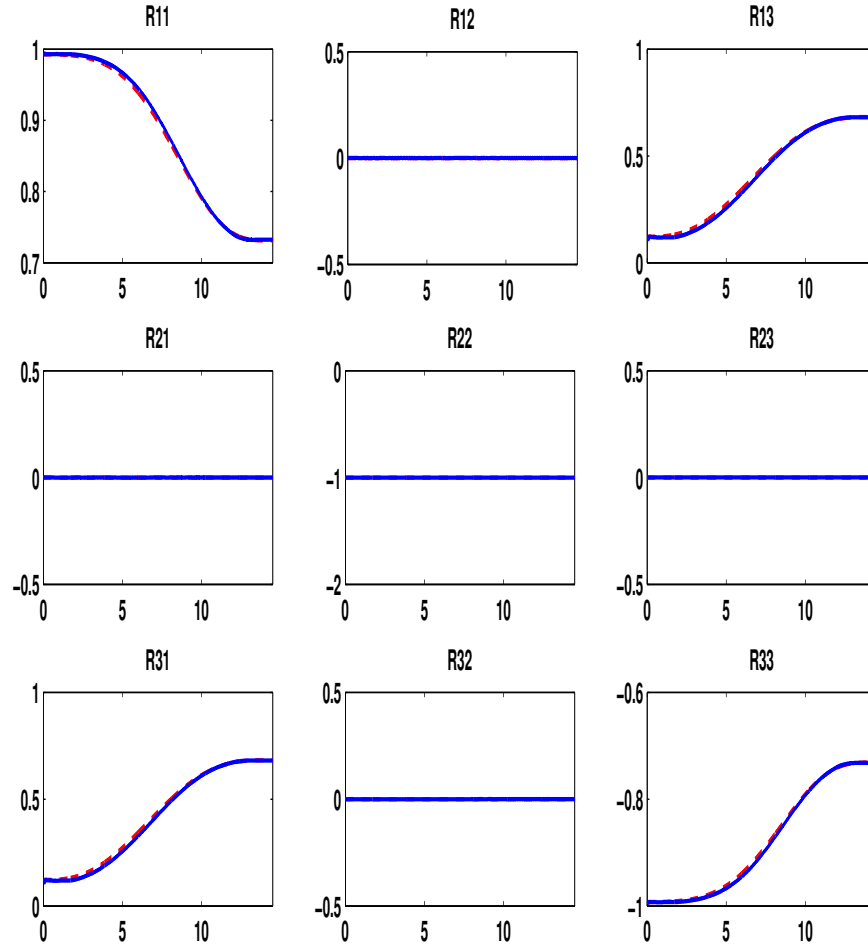


Figura 4.5: Experimento 1: trayectoria en el plano. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (- -) y real ${}^0\mathbf{R}_n$ (—).

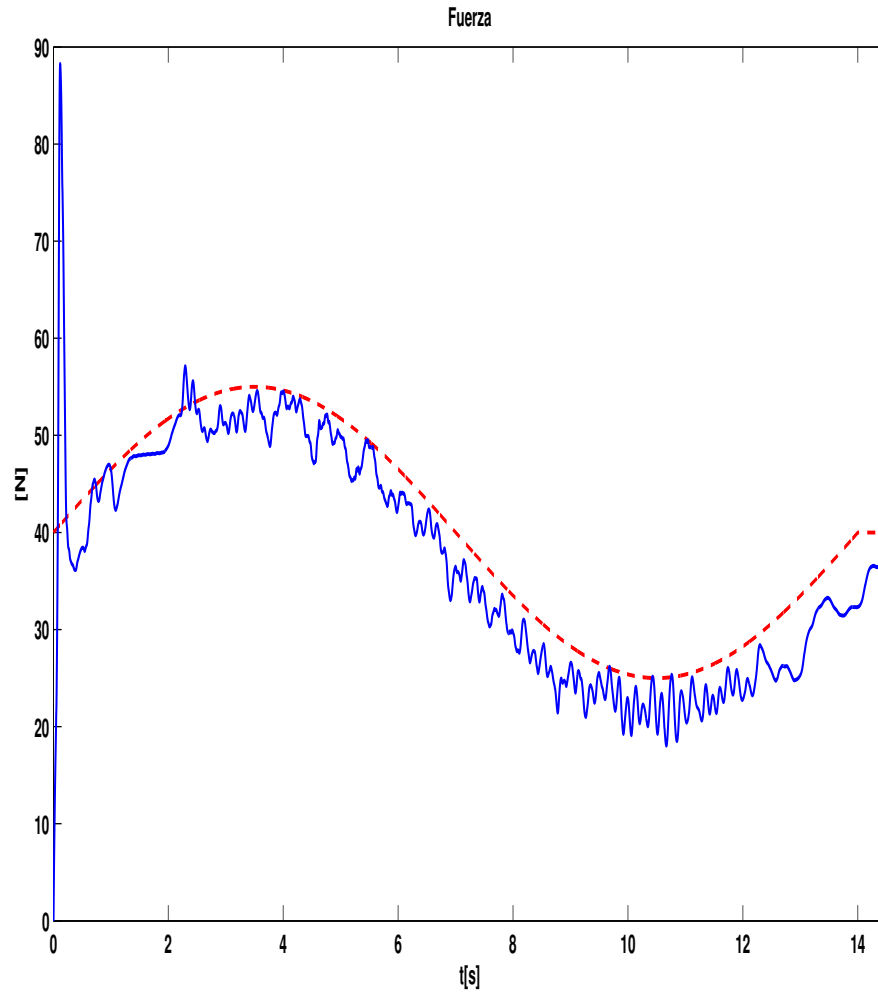


Figura 4.6: Experimento 1: trayectoria en el plano. Fuerza deseada (- -) y real (—).

4.2. Experimento 2: trayectoria en 3D

El segundo experimento corresponde a un movimiento en 3D, *i. e.*, a través de los tres ejes (x, y, z) . En la Figura 4.7 se muestra la trayectoria real; la dirección va desde el punto 1 hasta el punto 2. En este caso los valores de inicio son: $\alpha_{d1} = 7^\circ, \theta_{d1} = 0^\circ$ y $\rho \approx 0.11$; y los valores finales son: $\alpha_{d2} = 48^\circ, \theta_{d2} = 55^\circ$ y la fuerza deseada: $\lambda_d = 40 + 15 \sin(\frac{2\pi t}{t_f})$ [N]. La duración del experimento fue de $t_f = 14$ [s]. Los parámetros del controlador para esta segunda prueba son: $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}[177, 127, 127, 167, 167, 167]$, $\mathbf{K}_\gamma = \text{diag}[0.46, 0.46, 0.46, 0.4, 0.4, 0.4]$, $\mathbf{K}_\beta = \text{diag}[0.37, 0.37, 0.37, 0.4, 0.4, 0.4]$, $\mathbf{K}_p = \text{diag}[31.1, 31.1, 31.1, 3.1, 3.1, 3.1]$, $\xi_2 = 0.003$, $k_\epsilon = 0.1$, $\xi_1 = 17.3$, $k_1 = 0.4$.

Las comparaciones entre los valores deseados y reales de posición, orientación con cuaterniones unitarios, orientación con matrices de rotación, y fuerza se muestran en las Figuras 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11, respectivamente. En este caso, se observa que conforme el robot avanza de acuerdo a la trayectoria, el seguimiento se vuelve más complicado, pues debe hacer mayores esfuerzos en las seis articulaciones y tomar posiciones como la que se muestra en la Figura 4.1, por lo que la posición en ρ, α , orientación ϕ_x y la fuerza presentan errores mayores que para el Experimento 1; sin embargo se puede considerar que estos son aceptables.

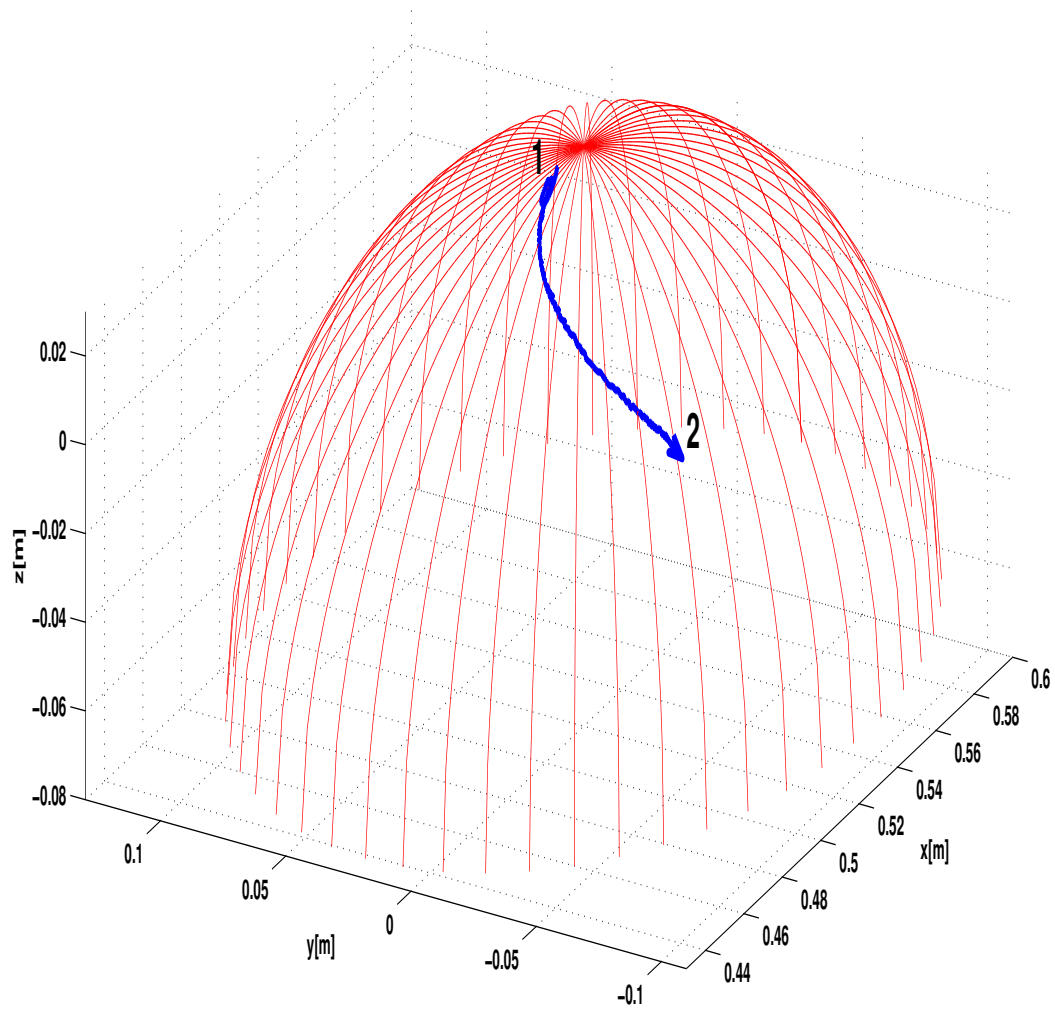


Figura 4.7: Experimento 2: trayectoria en 3D.

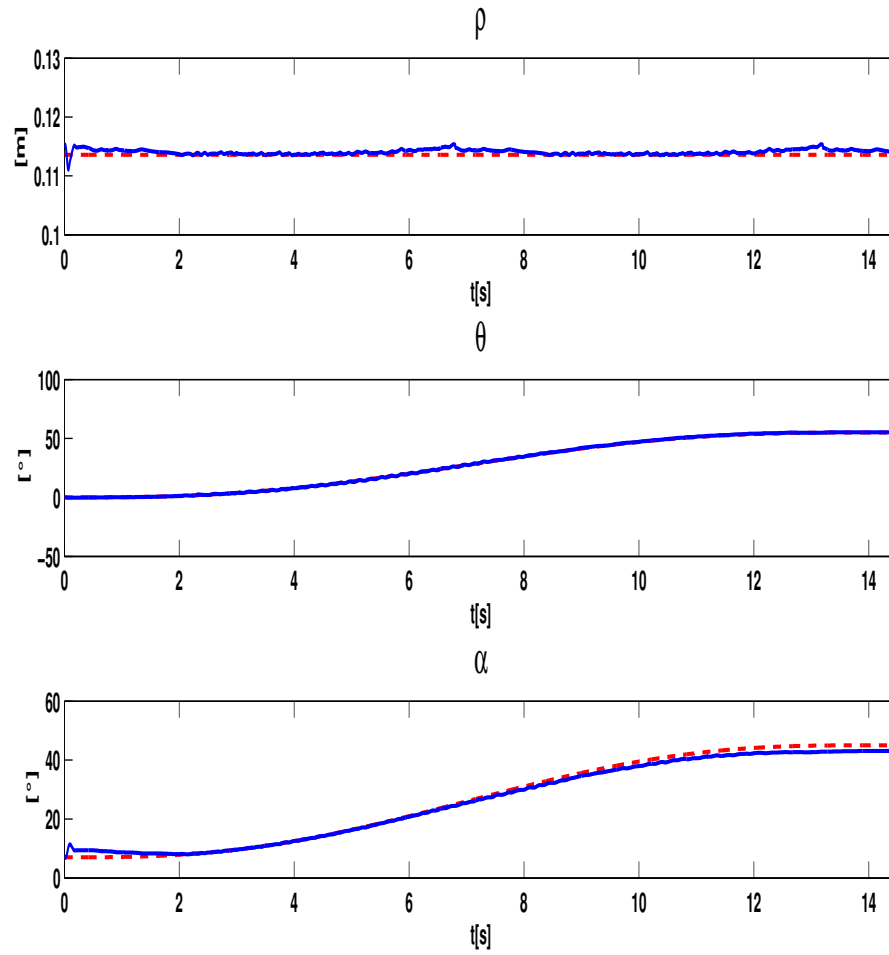


Figura 4.8: a). Experimento 2: trayectoria en 3D. Posición deseada (- -) y real (—).

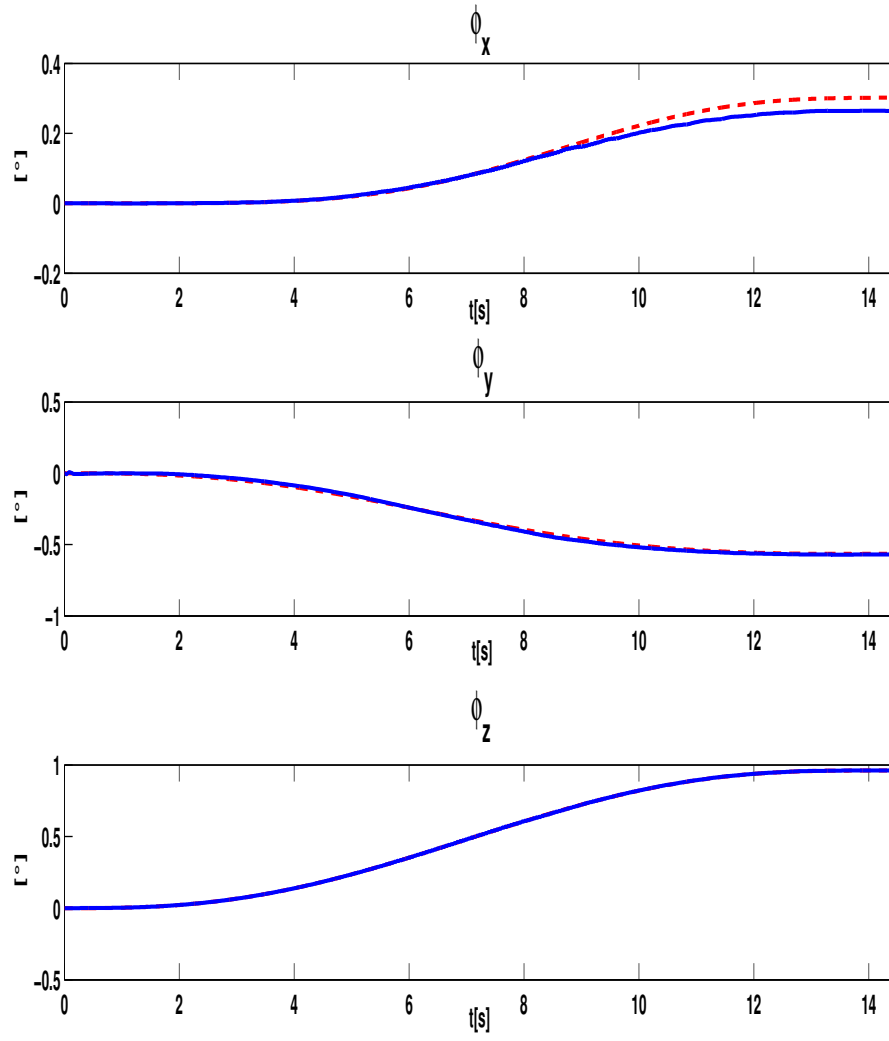


Figura 4.9: Experimento 2: trayectoria en 3D. Orientación deseada (- -) y real (—).

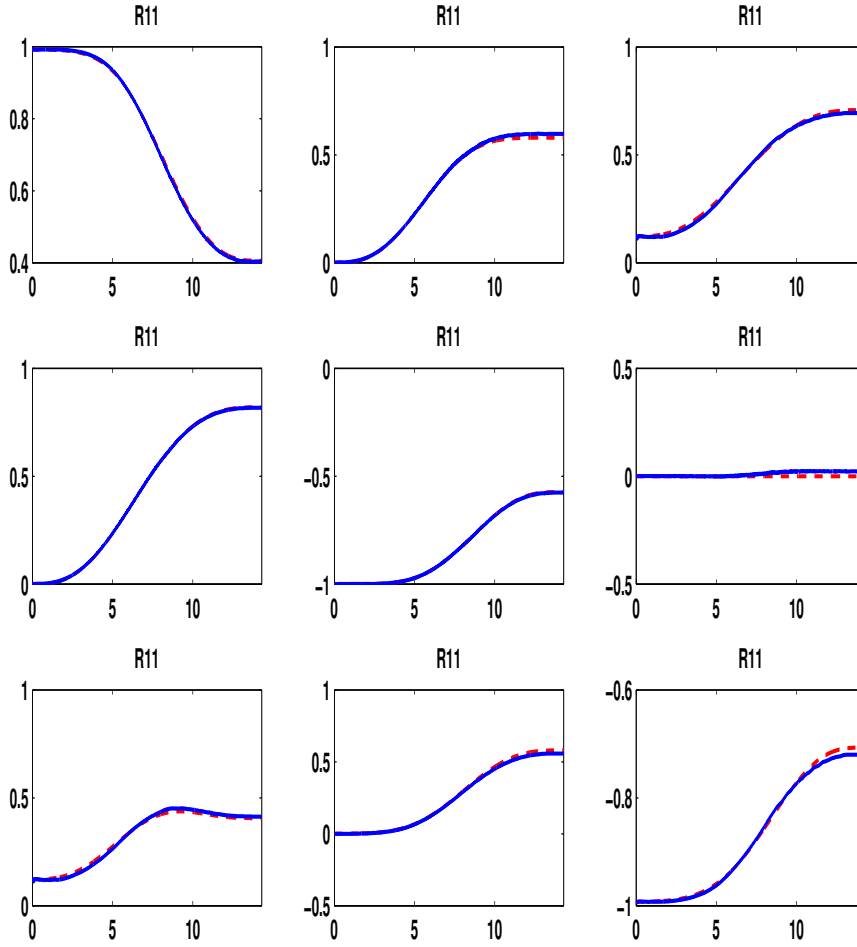


Figura 4.10: Experimento 2: trayectoria en 3D. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (- -) y real ${}^0\mathbf{R}_n$ (—).

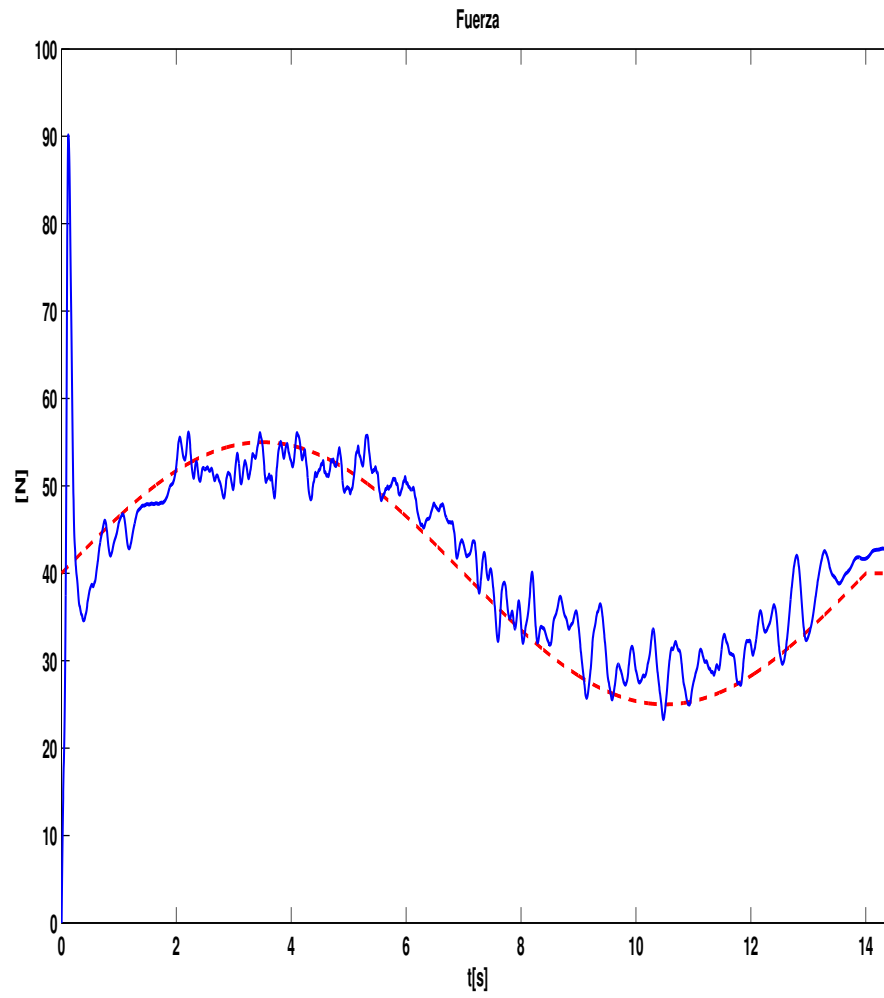


Figura 4.11: Experimento 2: trayectoria en 3D. Fuerza deseada (- -) y real (—).

4.3. Experimento 3: trayectoria tipo gota

El tercer experimento corresponde a otra trayectoria en 3D tipo gota, como se muestra en la Figura 4.12; la dirección es (1)-(2)-(3); siendo que el punto (2) ocurre para $t = 14$ [s]. Se puede observar que la trayectoria es cerrada y tiene la forma de una *gota*. En α hubo un offset de 7° ; en esta coordenada como en θ se utilizó la parametrización seno/coseno del círculo y polinomios de quinto orden para las transiciones. La fuerza deseada es $\lambda_d = 40 + 15 \sin(\frac{2\pi t}{t_f})$ [N]. La duración del experimento fue de $t_f = 28$ [s]. Los parámetros del controlador son: $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}[165, 115, 120, 150, 150, 150]$, $\mathbf{K}_\gamma = \text{diag}[0.44, 0.44, 0.44, 0.35, 0.35, 0.35]$, $\mathbf{K}_\beta = \text{diag}[0.35, 0.35, 0.35, 0.3, 0.3, 0.3]$, $\mathbf{K}_p = \text{diag}[28, 28, 28, 2.5, 2.5, 2.5]$, $\xi_2 = 0.001$, $k_\epsilon = 0.1$, $\xi_1 = 11$, $k_1 = 0.4$.

En la Figura 4.13 se muestran las trayectorias deseadas (línea discontinua) para ρ, θ, α , y las reales (línea continua); se observa que en el seguimiento de ρ se presentan errores, lo que significa que el efector final no permaneció en todo momento sobre la superficie, en especial en el punto (2) de la Figura 4.12, que es cuando se completa la primera mitad de la *gota* y se inicia la segunda; sin embargo, y dado el grado de dificultad del movimiento, dichos errores pueden considerarse aceptables.

La orientación deseada y real con cuaterniones unitarios se muestran en la Figura 4.14, y con matrices de rotación en la Figura 4.15; en los dos casos se puede apreciar que sólo se presentan errores a la mitad del tiempo de duración del experimento, *i. e.*, justo cuando se hace la transición en el punto (2). El error se considera mínimo.

La fuerza deseada y real se muestran en la Figura 4.16. En este caso es más notoria la transición en el punto (2), puesto que la fuerza disminuye a cero, es decir, en ese instante se pierde el contacto. Este decremento en el

desempeño está relacionado con las incertidumbres de conocimiento de la superficie.

Otra razón se presenta al examinar la Figura 4.17, que corresponde al punto (2) . Se observa que en ese punto el robot se aproxima a una *singularidad de muñeca* [17], *i. e.*, prácticamente se han alineado las articulaciones 4 y 6 que corresponden a la orientación, y que quizá el empleo del cuaternión no ha resuelto del todo.

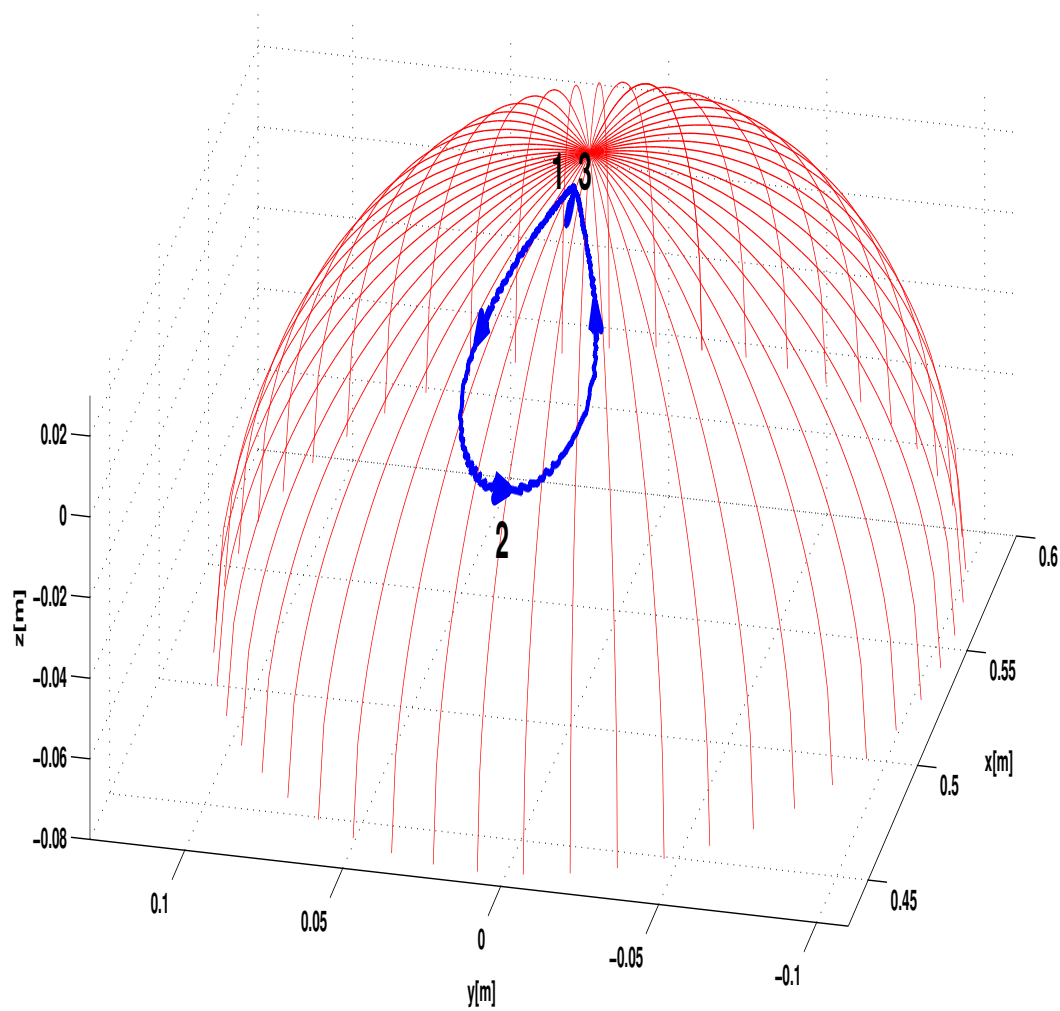


Figura 4.12: Experimento 3: trayectoria tipo gota.

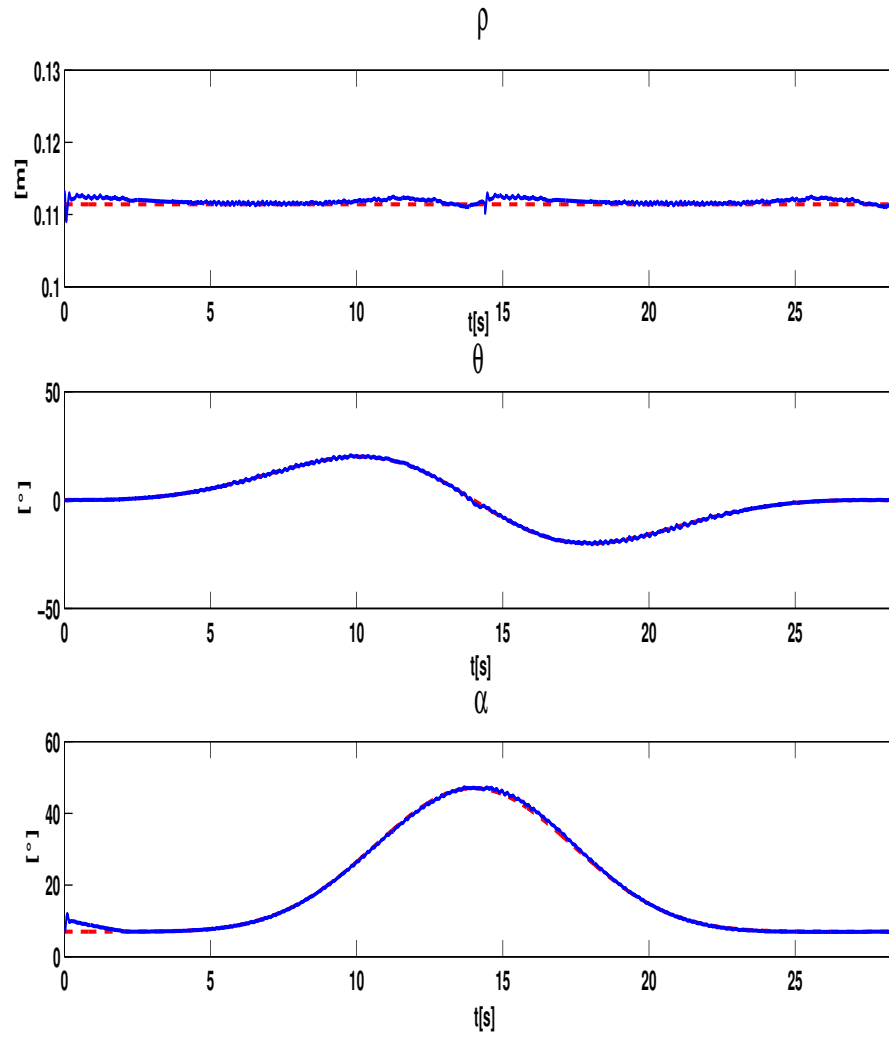


Figura 4.13: Experimento 3: trayectoria tipo gota. Posición deseada (- -) y real (—).

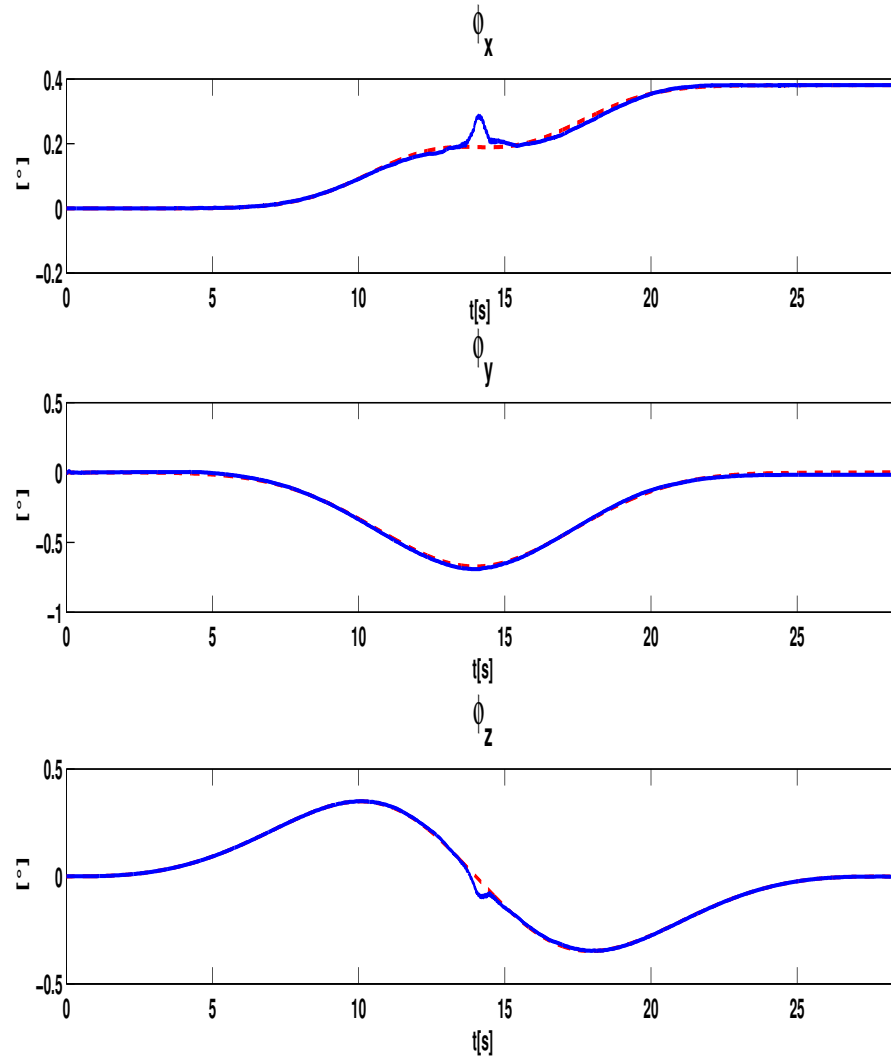


Figura 4.14: Experimento 3: trayectoria tipo gota. Orientación deseada (- -) y real (—).

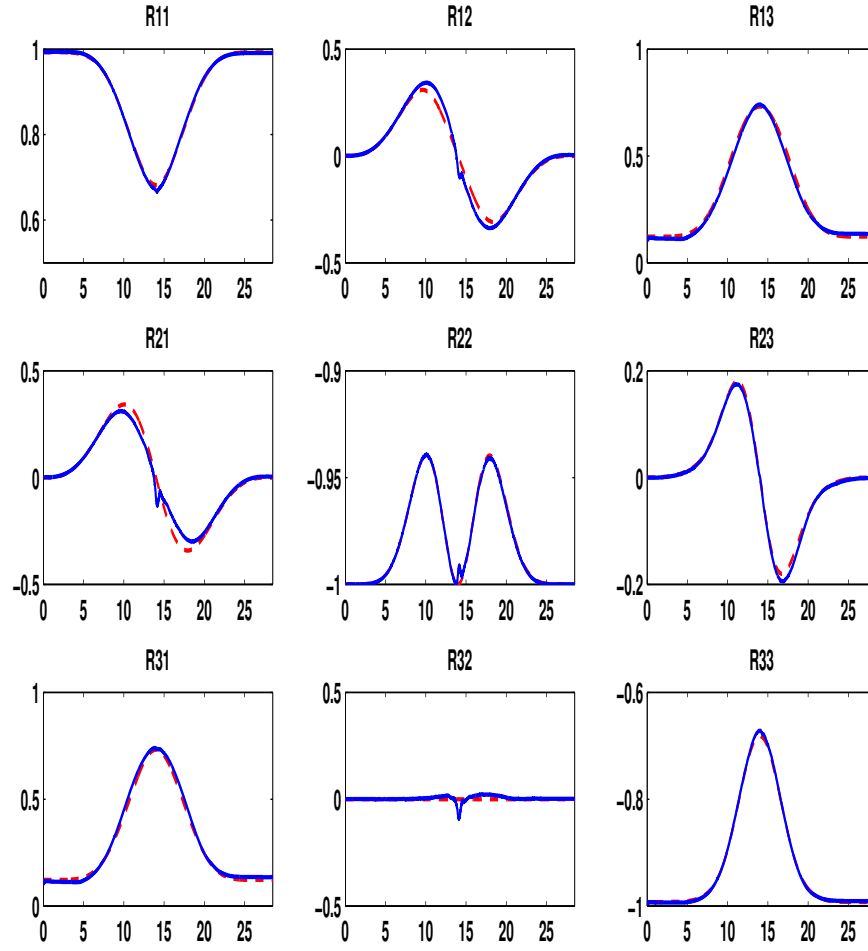


Figura 4.15: Experimento 3: trayectoria tipo gota. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (- -) y real ${}^0\mathbf{R}_n$ (—).

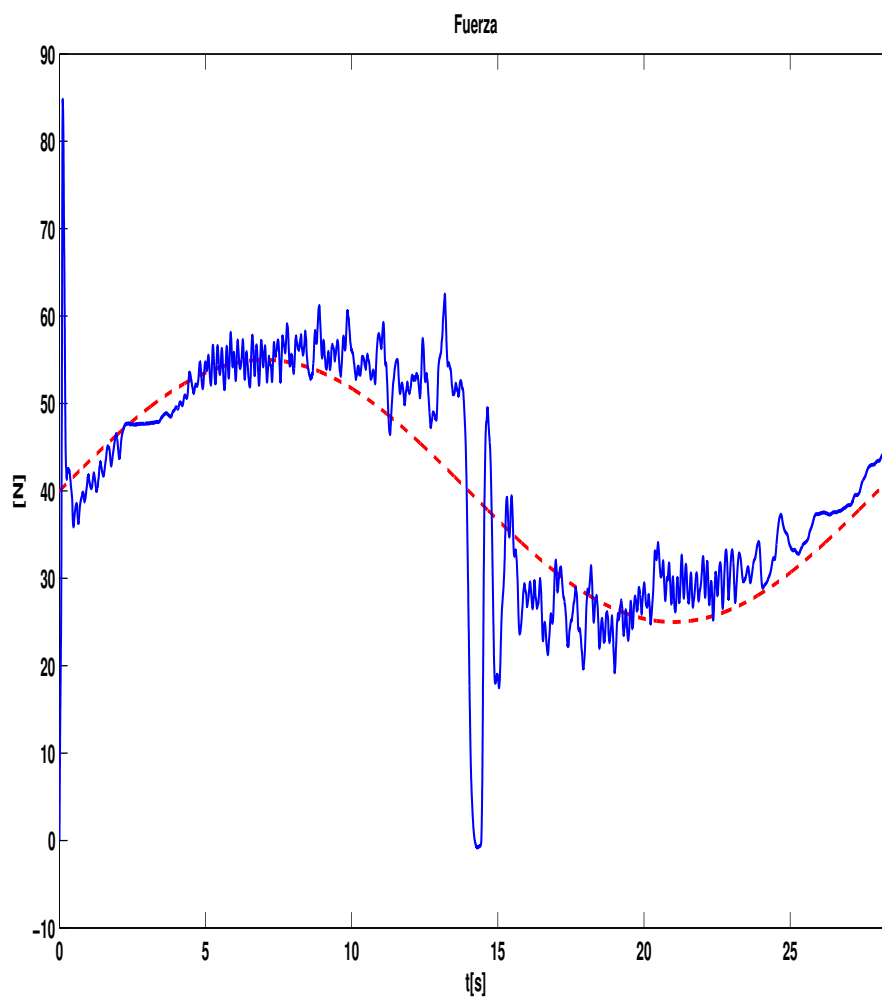


Figura 4.16: Experimento 3: trayectoria tipo gota. Fuerza deseada (- -) y real (—).



Figura 4.17: Experimento 3: trayectoria tipo gota. Singularidad en el punto (2).

Capítulo 5

Conclusiones

No haré nada por lo que el dios de la biorrobótica no me deje entrar en su cielo.

Roy Batty, líder de los renegados *replicants* del Nexus-6, *Blade Runner*

En el presente trabajo de tesis se realizó el control de posición/fuerza de un robot manipulador con restricción de movimiento. La restricción consistió en una superficie esférica; el robot trazó trayectorias en 2D y 3D: un perfil, un trazo a través de los tres ejes coordenados, y una *gota*, como se muestra en la Figura 5.1. Se utilizaron las tres articulaciones de posición y las tres de orientación con que cuenta el manipulador. Para la posición se hizo uso de coordenadas esféricas y para la orientación de cuaterniones unitarios. El experimento en 2D fue bueno, y los resultados son similares a trabajos que antecedieron a éste [8]. En el segundo experimento, el seguimiento no fue tan preciso como en el primero, pero bueno si se considera que todas las articulaciones estuvieron en movimiento —otros estudios sólo tienen actuadas tres de ellas—. El último experimento fue el más complicado para el robot, y no se encuentra un experimento similar en la literatura.

El seguimiento de trayectoria fue muy bueno, excepto por un instante de tiempo en que se pierde el contacto con la superficie.

Por su parte, adaptar el modelo, la cinemática y la ley de control, demostró no sólo ser una cuestión de representación. En realidad es una cuestión de fondo, pues repercute en el diseño de la ley control —lo facilita—, lo que a su vez reduce la programación del algoritmo, que se traduce en menor gasto de memoria y menos probabilidad de error cuando se escribe el código fuente.

La presente tesis sigue una línea de investigación en la que se ha trabajado en el Laboratorio de Robótica del Posgrado de la UNAM: una ley de control para robots manipuladores en movimiento restringido, y que ha demostrado ser efectiva en planos. En este estudio se propuso una superficie esférica, y el algoritmo de control demostró que sigue siendo válido.

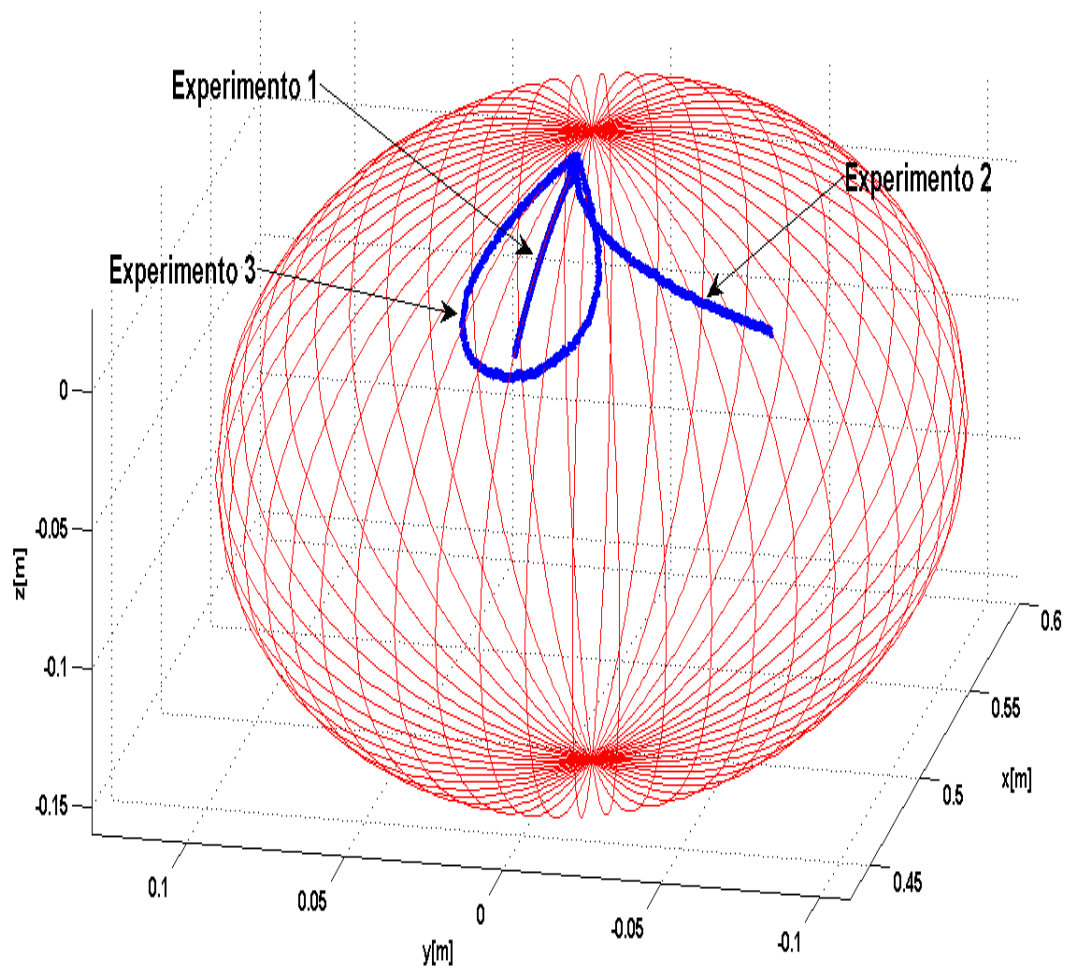


Figura 5.1: Trayectorias realizadas sobre la esfera: en el plano, 3D y *gota*.

Apéndice A

Propiedades de las matrices

Las propiedades básicas del modelo dinámico (??) para robots se muestran a continuación [12].

Propiedad A.1 Matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$

La matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ satisface las siguientes propiedades:

- *Existe una constante real positiva α tal que:*

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \geq \alpha \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{q} \in R^n$$

donde $\mathbf{I}$ denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. La matriz $\mathbf{H}(\mathbf{q})^{-1}$ existe y es definida positiva.

- *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:*

$$\lambda_{\max}\{\mathbf{H}(\mathbf{q})\} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in R^n.$$

- Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_H > 0$ tal que:

$$\| \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{y})\mathbf{z} \| \leq k_H \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \| \mathbf{z} \|$$

para todo vector, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^n$.

- Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ tal que:

$$\| \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{y} \| \leq k'_M \| \mathbf{y} \|$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$.

△

Propiedad A.2 Matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisface las siguientes propiedades:

- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único.
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{q} \in R^n$.
- Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^n$ y escalar α , se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha\mathbf{x})\mathbf{y} &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{y} + \alpha\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}. \end{aligned}$$

- Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{c1} > 0$ tal que:

$$\| \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} \| \leq k_{c1} \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$.

- La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está relacionada con la matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ por la expresión:

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in R^n$$

y de hecho, $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica con una definición apropiada de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. En forma análoga la matriz $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, y también resulta cierto que:

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T.$$

Independientemente de la manera en la que se obtenga $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ésta siempre satisfará:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in R^n.$$

△

Propiedad A.3 Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$

El vector de fuerzas gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ de $n \times 1$ depende sólo de las posiciones articulares $\mathbf{q}$. El vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está acotado si $\mathbf{q}$ lo está también. Adicionalmente tiene las siguientes propiedades:

- El vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ pueden relacionarse mediante:

$$\int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt = U(\mathbf{q}(T) - U(\mathbf{q}(0)))$$

donde $U(\mathbf{q})$ es la energía potencial para todo $T \in R^+$.

- Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz, i.e., existe una constante $k_g > 0$ tal que:

$$\| \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) \| \leq k_g \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$$

donde $U(\mathbf{q})$ es la energía potencial, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$.

- Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que:

$$\| \mathbf{g}(\mathbf{q}) \| \leq k'$$

para todo $\mathbf{q} \in R^n$.

△

Apéndice B

El cuaternión unitario

Los cuaterniones vienen de Hamilton, y han sido una verdadera maldición para quienes, de un modo u otro, han tenido alguna relación con ellos. El vector es un superviviente inútil, y jamás ha sido de la más mínima utilidad para criatura alguna.

Lord Kelvin

Los inconvenientes de la representación eje-ángulo pueden ser superados por una representación cuadriparamétrica; a ésta se le llama cuaternión unitario [13].

Los parámetros de Euler se definen como

$$\mathcal{Q} = \{\eta, \boldsymbol{\epsilon}\} \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\eta = \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sin \frac{\vartheta}{2} \boldsymbol{r} \quad (\text{B.3})$$

con $\eta \geq 0$ para $\vartheta \in [-\pi, \pi]$; a η se le conoce como la parte escalar del cuaternión mientras que $\boldsymbol{\epsilon}$ es la parte vectorial y están restringidas por

$$\eta^2 + \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = 1, \quad (\text{B.4})$$

de ahí el nombre cuaternión *unitario*. Es importante señalar que, a diferencia de la representación eje-ángulo, con una rotación de $-\vartheta$ alrededor de $-\mathbf{r}$ se obtiene el mismo cuaternión que una rotación ϑ alrededor de $\mathbf{r}$; esto soluciona el problema de no unicidad. Además, no ocurre ninguna singularidad. Al cuaternión obtenido de $\mathbf{R}^{-1}$ se le denota como Q^{-1} y puede ser calculado como

$$Q^{-1} = \{\eta, -\epsilon\}. \quad (\text{B.5})$$

La matriz de rotación correspondiente a un cuaternión dado es

$$\mathbf{R}(\eta, \epsilon) = (\eta^2 - \epsilon^T \epsilon) \mathbf{I} + 2\epsilon \epsilon^T + 2\eta \mathbf{S}(\epsilon). \quad (\text{B.6})$$

Por otra parte, el cuaternión correspondiente a una matriz de rotación es

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{R_{11} + R_{22} + R_{33} + 1} \quad (\text{B.7})$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{sgn}(R_{32} - R_{23}) \sqrt{R_{11} - R_{22} - R_{33} + 1} \\ \text{sgn}(R_{13} - R_{31}) \sqrt{R_{22} - R_{33} - R_{11} + 1} \\ \text{sgn}(R_{21} - R_{12}) \sqrt{R_{33} - R_{11} - R_{22} + 1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

La relación entre la derivada temporal de los parámetros de Euler y la velocidad angular del cuerpo $\boldsymbol{\omega}$ se establece por la llamada regla de propagación:

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2} \epsilon^T \boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\eta, \epsilon) \boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.10})$$

con

$$\mathbf{E}(\eta, \epsilon) = \eta \mathbf{I} - \mathbf{S}(\epsilon). \quad (\text{B.11})$$

Con respecto al problema de describir la orientación mutua entre dos sistemas coordenados, la igualdad

$$Q_{21} = \{\eta_{21}, {}^1\epsilon_{21}\} \quad (\text{B.12})$$

denota el cuaternión que puede ser obtenido directamente de ${}^1\mathbf{R}_2$. Es de notar que la parte vectorial del cuaternión es la misma cuando se refiere a $\sum_2$, esto es, ${}^1\epsilon_{21} = {}^2\epsilon_{21}$.

La regla de composición en la forma de cuaternión de, por ejemplo, ${}^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2$ se define por el operador “ $*$ ” como

$$Q_2 = Q_1 * Q_{21} \quad (\text{B.13})$$

con

$$\eta_2 = \eta_1 \eta_{21} - \epsilon_1^{T1} \epsilon_{21} \quad (\text{B.14})$$

$$\epsilon_2 = \eta_1 {}^1\epsilon_{21} + \eta_{21} \epsilon_1 + \mathbf{S}(\epsilon_1) {}^1\epsilon_{21}. \quad (\text{B.15})$$

Obsérvese que en (B.13) Q_1 y Q_2 son los cuaterniones que pueden ser obtenidos de ${}^0\mathbf{R}_1$ y ${}^0\mathbf{R}_2$, respectivamente, con Q_{21} como en (B.12).

En vista de (B.5) y (B.13), el cuaternión que expresa la orientación mutua entre dos sistemas coordenados puede también ser calculado por la composición

$$Q_{21} = Q_1^{-1} * Q_2 \quad (\text{B.16})$$

con

$$\eta_{21} = \eta_1 \eta_2 + \epsilon_1^{T1} \epsilon_2 \quad (\text{B.17})$$

$${}^1\epsilon_{21} = \eta_1 \epsilon_2 - \eta_2 \epsilon_1 - \mathbf{S}(\epsilon_1) \epsilon_2. \quad (\text{B.18})$$

La regla de propagación (B.9) y (B.10) para el cuaternión en (B.12) puede ser escrita como

$$\dot{\eta}_{21} = -\frac{1}{2} {}^1\epsilon_{21}^T \Delta^1 \omega_{21} \quad (\text{B.19})$$

$${}^1\dot{\epsilon}_{21} = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\eta_{21}, {}^1\epsilon_{21}) \Delta^1 \omega_{21} \quad (\text{B.20})$$

con $\mathbf{E}$ definida como en (B.11).

Apéndice C

Cinemática directa y diferencial

Por consiguiente, la geometría atrae al alma hacia la verdad, forma en ella el espíritu filosófico, obligándola a dirigir a los más alto su mirada, en vez de abatirla, como suele hacerse, sobre las cosas de este mundo.

La República, Platón

C.1. Cinemática directa

La posición de un cuerpo rígido en el espacio se expresa en términos de la posición de un punto conveniente sobre el cuerpo con respecto a un sistema coordenado fijo (traslación). Esto es para la posición; la orientación, por su parte, se expresa en términos de las componentes de los vectores unitarios de un sistema coordenado sobre el cuerpo con respecto al mismo sistema coordenado de referencia (rotación) [9]. El objetivo de la cinemática directa es calcular la posición del efector final como una función de las variables de

articulación

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T,$$

donde n es el número de articulaciones. Para describir la relación traslacional y rotacional entre elementos adyacentes se puede usar el método desarrollado por Denavit y Hartenberg [9]. Este método constructivo permite obtener la cinemática directa por medio de la composición de transformaciones individuales y al final se obtiene una matriz de transformación homogénea ${}^0\mathbf{T}_n \in R^{4 \times 4}$

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{A}_1(q_1) {}^1\mathbf{A}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n(q_n),$$

donde ${}^{i-1}\mathbf{A}_i \in R^{4 \times 4}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ es la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del sistema i al sistema $i - 1$.

De acuerdo a la Figura 3.1 se obtuvieron las matrices de transformación homogénea siguientes.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

C.2. Jacobiano geométrico

La cinemática directa consiste en las relaciones geométricas entre las articulares y el efector final. En esta sección se aborda la cinemática diferencial, es decir, se obtendrán las relaciones de las velocidades articulares y las componentes lineal y angular del efector final. Este mapeo es descrito por una matriz, el *Jacobiano geométrico* (o simplemente *Jacobiano*), el cual depende de la configuración del robot. El Jacobiano es una cantidad importantísima para el desarrollo ulterior de la ley de control, pues es útil para el mapeo entre fuerzas aplicadas en el efector final y los pares resultantes en las articulaciones; asimismo, es útil para encontrar singularidades y analizar redundancia [2].

Considérese un manipulador de n grados de libertad. La correspondencia entre las velocidades de las articulaciones y la velocidad lineal y angular y el efector final se establece por la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{C.1})$$

donde $\dot{\mathbf{d}} \in R^3$ es la velocidad lineal, $\boldsymbol{\omega} \in R^3$ la velocidad angular y $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in R^{6 \times n}$ es el Jacobiano geométrico. Es posible separarlo en vectores columna de 3×1

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_d \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{d1} & \cdots & j_{dn} \\ j_{o1} & \cdots & j_{on} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

donde

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{J}_d(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{C.3})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_o(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{C.4})$$

Al sustituir (C.2) en (C.1) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{d_1} & \dots & j_{d_n} \\ j_{o_1} & \dots & j_{o_n} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (\text{C.5})$$

donde cada término $j_{d_i} \dot{q}_i$ representa la contribución de una articulación a la velocidad lineal del efector final; por su parte $j_{o_i} \dot{q}_i$ es la contribución a la velocidad angular del efector final.

La obtención del Jacobiano en robots manipuladores con Denavit-Hartenberg es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{d_i} \\ \mathbf{J}_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

donde $\mathbf{z}_i$ son los vectores unitarios que representan el eje donde giran las articulaciones y $\mathbf{d}_i$ son los vectores de posición de cada una de las articulaciones.

Bibliografía

- [1] Daniel E. Whitney. *Force Feedback Control of Manipulator Fine Motions*. Dyn. Sys., Meas., Control 99(2), 91-97 (Jun 01, 1977). Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Volume 99, Issue 2.
- [2] M. Raibert y J.J. Craig. *A systematic method of hybrid position/force control of a manipulator*. Computer Software and Applications Conference, 1979. The IEEE Computer Society's Third International, 446-451.
- [3] Oussama Khatib. *A unified approach for motion and force control of robot manipulators: the operational space formulation*. IEEE J. Robot. Autom. vol. 3, 43-53 (1987)
- [4] A. De Luca y C. Manes. *Modeling robots in contact with a dynamic environment*. IEEE Trans. Robot. Autom. vol. 10, 542-548 (1994).
- [5] Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa. *Principle of orthogonalization for hibrid control of robot arms*. Proceedings of 12th IFAC Word Congress 1, 1993. 507-512.
- [6] V. Parra-Vega y S. Arimoto. *Adaptive control for robot manipulators with sliding mode error coordinate system: free and constrained mo-*

- tions. Robotics and Automation*. IEEE International Conference, 1995, Volume 1, 591 - 596.
- [7] V. Parra-Vega y M. A. Arteaga-Pérez. *Regressor-free second order sliding mode control for exponential tracking of constrained robot manipulators*. Third International Workshop on Robot Motion and Control, 159-162, 2002.
- [8] J. C. Rivera-Dueñas y M. A. Arteaga-Pérez. *Robot force control without dynamic model*. Robotica, 2012, Volume 31, 149-171.
- [9] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, y G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Ed. Springer, USA, 2009.
- [10] Juan C. Rivera Dueñas. *Control de posición-fuerza para manipuladores rígidos basado en cuaterniones unitarios*. Tesis de maestría, UNAM, México, 2007.
- [11] J. J. Sacala Estalella. *Análisis vectorial*. Ed. Reverté, España, 1988.
- [12] R. Kelly y V. Santibáñez. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Ed. Prentice Hall, Madrid, 2003.
- [13] B. Siciliano y L. Villani. *Robot Force Control*. Kluwer Academic Publishers, USA, 1999.
- [14] V. Parra-Vega, A. Rodríguez-Ángeles, S. Arimoto y G. Hirzinger. *High precision constrained grasping with cooperative adaptive control*. Journal of Intelligent and Robotic System.
- [15] J. Gudiño Lau y M. A. Arteaga. *Dynamic model and simulation of cooperative robots: a case study*. Cambridge University Press, Robotica, 2005, volume 23.

- [16] Russel C. Hibbeler. *Estática*. Prentice-Hall, México, 2004.
- [17] Siciliano y Khatib, editores. *Robotics*. Springer, 2008.