



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

Uso de la Función de Distribución de Wigner
para Caracterizar el Chirp de un Diodo Láser

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - TELECOMUNICACIONES

PRESENTA:
VERÓNICA RIVERA SILVA

DIRIGIDA POR:
DR. RAMÓN GUTIÉRREZ CASTREJÓN



CIUDAD UNIVERSITARIA
2012

JURADO ASIGNADO

Presidente:	Dr. Julio César Tinoco Magaña
Secretario:	Dr. Roberto Ortega Martínez
Vocal:	Dr. Ramón Gutiérrez Castrejón
1er Suplente:	Dr. Bohumil Psenicka
2o Suplente:	Dr. Víctor García Garduño

Lugar donde se realizó la tesis:	Ciudad Universitaria, UNAM
----------------------------------	----------------------------

TUTOR DE TESIS

Dr. Ramón Gutiérrez Castrejón

A mi mamá, la mujer más maravillosa y admirable que hay en mi vida

*A mi papá, porque te agradezco el amor, la paciencia, tu responsabilidad
e inspiración que me has dado desde el día en que nací*

A Caro, pase lo que pase, siempre estaré a tu lado

A Ixchel, mi amiga y cómplice de toda la vida

A Karen, mi tercera hermana

A la memoria de mi querido abuelo

Je connais une planète où il y a un monsieur cramoisi. Il n'a jamais respiré une fleur. Il n'a jamais regardé une étoile. Il n'a jamais aimé personne. Il n'a jamais rien fait d'autre que des additions. Et toute la journée il répète comme toi: "Je suis un homme sérieux! Je suis un homme sérieux!", et ça le fait gonfler d'orgueil. Mais ce n'est pas un homme, c'est un champignon!

On ne voit bien qu'avec le cœur. L'essentiel est invisible pour les yeux.

—LE PETIT PRINCE, Antoine de Saint-Exupéry

*¡Terrible batallar! Potente rabia
De insensato furor ebrio de sangre;
Festín de la venganza*

—ODA A LA PATRIA, Manuel M. Flores

Agradecimientos

A la generosa Universidad Nacional Autónoma de México, mi segundo hogar.

Agradezco infinitamente a toda la gente que compartió su experiencia y conocimiento conmigo y me alentó e inspiró a hacer un buen trabajo. Al Dr. Ramón Gutiérrez Castrejón por las lecciones disciplina, enseñanzas transmitidas y el gran apoyo brindado al dirigir esta tesis. Agradezco especialmente al Dr. Roberto Ortega Martínez del CCADET por su disposición y generosa ayuda. Al profesor Ing. Héctor Palomino Salinas por inspirarme a pensar en cosas mayores. A todos los profesores que han sido parte de mi formación profesional a lo largo de mi trayectoria como estudiante de esta máxima casa de estudios.

A los profesores Dr. Patrick Flandrin, Dr. Pierre Borgnat y Dr. Nelly Pustelnik que generosamente me apoyaron durante mi estancia de investigación en el École Normale Supérieure de Lyon, Francia.

Por supuesto y antes que nada, a mi familia y a Adrián.

Resumen

Primeramente se hace una recapitulación de la teoría que define el funcionamiento de un láser de semiconductor modulado directamente a partir de sus ecuaciones de estado, entre las que se encuentra la que define a la fase, y a partir de esta ecuación se calcula el chirp (o chirrido) frecuencial, el cual se describe detalladamente, pues resulta ser el objeto de estudio del presente trabajo.

En segundo lugar, se describen los dos tipos de chirp existentes, transitorio y adiabático, y las condiciones bajo las cuales se genera cada uno.

Posteriormente se hace uso de la *Función de Distribución de Wigner (WD)*, cuyas características principales se enuncian en el texto, para proponer dos algoritmos diferentes que permiten hacer una clasificación del tipo de chirp que presentan esta clase de láseres. El primer algoritmo utiliza a la función de correlación cruzada para definir el tipo de chirp presente en la señal óptica a partir del establecimiento de un umbral de clasificación. El segundo algoritmo, hace un tratamiento de la *WD* de la señal como imagen, y se utiliza un algoritmo de procesamiento de imágenes conocido como *Transformada de Hough*, para hacer la clasificación del tipo de chirp predominante en la señal.

Estos algoritmos son validados mediante un extenso conjunto de láseres de prueba simulados con las ecuaciones anteriormente mencionadas. Dicho conjunto se define a partir de 9 grupos de parámetros láser reales extraídos de publicaciones y que han sido medidos experimentalmente. Mediante la variación del factor de confinamiento óptico del láser, se extiende el conjunto de láseres de prueba a cerca de 450 láseres que muestran comportamientos predominantemente transitorio, adiabático y mixto, y a los cuales se les aplica el algoritmo de clasificación.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos para ambos algoritmos de clasificación propuestos, así como una comparación entre ellos a fin de comprobar el correcto funcionamiento de ambos y por tanto, su validez para ser utilizado en configuraciones ópticas experimentales.

Abstract

Firstly, a summary of the theory that defines the operation of directly modulated semiconductor lasers based on a rate equation model is presented. One of the equations, defines the phase, from which the frequency chirp is calculated. The chirp is described in detail, considering that it is the object of study of this work.

Secondly, two types of chirp are described, transient and adiabatic, and the condition under each one is generated is also shown.

Next, the *Wigner Distribution Function (WD)*, whose main characteristics are stated in this work, is used to propose two different algorithms aimed to classify the type of chirp of laser diodes. The first algorithm is based on the cross-correlation and the use of a threshold. The second algorithm, considers the *WD* of the signal as an image, and employs an image processing algorithm, called *Hough Transform*, to make the classification of the type of chirp prevailing in the signal.

These algorithms are validated through an extensive set of test lasers derived from the afore mentioned model equations. This set is generated from 9 basic groups of real laser parameters extracted from experimental measurements and reported in the literature. By varying the optical confinement factor of the laser, the test set of lasers is extended to about 450 lasers that show predominantly transient, adiabatic and mixed behavior.

Finally, the results obtained for both proposed classification algorithms are presented, and a comparison between them to ensure the correct performance of both and therefore the validity for their use in optical experimental configurations are put forward.

Índice general

1. Introducción	23
1.1. Láseres de Semiconductor	24
1.1.1. Unión P-N	27
1.1.2. Comportamiento Cuántico	28
1.1.3. Inversión de Poblaciones	30
1.1.4. Resonador Óptico	31
1.1.5. Realimentación	32
1.1.6. Laser Distributed Feedback (DFB)	34
1.1.7. Ecuaciones de un Diodo Láser	35
1.1.8. Variación de la Fase: Chirp	38
1.1.9. Chirp Transitorio y Adiabático	40
1.2. Relevancia para los Sistemas de Fibra Óptica	42
2. Función de Distribución de Wigner	45
2.1. Probabilidad Conjunta o Bivariante	45
2.2. Distribución de Probabilidad Marginal	46
2.3. Valor Esperado de una Variable Aleatoria	47
2.4. Generalidades sobre Procesamiento Digital de Señales	48
2.4.1. La transformada de Fourier	49
2.4.2. Relación de Parseval	50
2.5. Análisis Tiempo-Frecuencia	50
2.6. Función de Distribución de Wigner	51
2.6.1. Ejemplos de la Distribución de Wigner	54
3. Conjuntos de Láseres de Prueba	69
3.1. Conjunto de Láseres de Prueba	70
3.1.1. Generador de Señales de Prueba	70
3.1.2. Grupos de Parámetros Láser	71
3.2. Señales Sintéticas	73
3.3. Conjunto Ampliado de Señales Sintéticas	78
3.4. Obtención de la WD	86
3.4.1. WD del Conjunto de Prueba	86
3.4.2. WD del Conjunto Ampliado de Prueba	88

4. Algoritmos de Clasificación	93
4.1. Correlación Cruzada	93
4.1.1. Definición	94
4.1.2. Momentos Probabilísticos de la <i>WD</i>	94
4.1.3. Validación del Algoritmo	100
4.2. Transformada de Hough	111
4.2.1. Aislamiento de Características	112
4.2.2. Definición de la <i>Transformada de Hough</i>	118
4.2.3. Aplicación de la <i>Transformada de Hough</i> para la Carac- terización del Chirp	121
4.2.4. Validación del Algoritmo Utilizando la <i>Transformada de</i> <i>Hough</i>	124
5. Conclusiones	133
A. Señal Analítica	135

Índice de figuras

1.1. Definición de un conductor (a), un aislante (b) y un semiconductor (c) en términos de su estructura de bandas de energía	26
1.2. Estructura cristalina de un semiconductor tipo N	26
1.3. Estructura cristalina de un semiconductor tipo P	27
1.4. Región activa de una unión P-N	27
1.5. Emisión estimulada	29
1.6. Potencia óptica de un láser DFB vs la corriente inyectada	30
1.7. Estructura de una cavidad Fabry-Perot para un láser de semiconductor	32
1.8. Ganancia óptica en función de la densidad de portadores [1]	33
1.9. Estructura de un láser DFB [2]	34
1.10. Configuración de un sistema con modulación externa	38
1.11. Configuración de un sistema de modulación directa	39
1.12. La gráfica superior muestra el comportamiento de la potencia óptica, mientras que la inferior corresponde al chirp transitorio	40
1.13. La gráfica superior muestra el comportamiento de la potencia óptica, mientras que la inferior corresponde al chirp adiabático	41
2.1. Comportamiento de la fase	55
2.2. Frecuencia instantánea	55
2.3. Parte real de una señal de amplitud constante modulada linealmente en frecuencia	56
2.4. Espectro de energía de una señal de amplitud constante modulada linealmente en frecuencia	56
2.5. Distribución de Wigner para una señal modulada linealmente en frecuencia	57
2.6. Ruido Gaussiano	58
2.7. Señal modulada linealmente en frecuencia más ruido Gaussiano	58
2.8. Espectro de energía de la señal de la figura 2.7	58
2.9. Distribución de Wigner para una señal modulada linealmente más ruido Gaussiano	59
2.10. Pulso Gaussiano	60
2.11. Señal modulada linealmente en frecuencia y modulada en amplitud con un pulso gaussiano	60

2.12. Espectro de energía de una señal modulada linealmente en frecuencia y modulada en amplitud con un pulso Gaussiano	60
2.13. <i>Distribución de Wigner</i> de una señal modulada linealmente en frecuencia y modulada en amplitud con un pulso Gaussiano	61
2.14. (a) Señal modulada linealmente en frecuencia de 0.2 a 0.3, (b) Señal modulada linealmente en frecuencia de 0 a 0.5, (c) Señal compuesta por las señales anteriores, (d) Espectro de energía de la señal compuesta.	62
2.15. Distribución de Wigner de una señal compuesta	62
2.16. (a) Comportamiento de la fase, (b) Frecuencia instantánea de la señal, (c) Señal con modulación senoidal en frecuencia, (d) Espectro de energía de la señal modulada senoidalmente en frecuencia.	64
2.17. Distribución de Wigner de una señal modulada senoidalmente en frecuencia	64
2.18. (a) Comportamiento de la fase, (b) frecuencia instantánea de la señal, (c) señal con modulación parabólica en frecuencia, (d) espectro de energía de la señal modulada parabólicamente en frecuencia	65
2.19. <i>Distribución de Wigner</i> de una señal modulada parabólicamente en frecuencia	66
2.20. Distribución de Wigner de una señal modulada parabólicamente en frecuencia multiplicada por un pulso Gaussiano centrado en (a) 32, (b) 64, (c) 96 y (d) 112.	67
3.1. Ejemplo de corriente moduladora de un láser modulado directamente	71
3.2. Potencia óptica P obtenida para todo el conjunto de láseres de prueba	75
3.3. Chirp calculado para todo el conjunto de láseres de prueba	77
3.4. Comportamiento del chirp para Laser1 con un factor de confinamiento variable	80
3.5. Comportamiento del chirp para Laser2 con un factor de confinamiento variable	82
3.6. WD obtenidas para todo el conjunto de láseres de prueba	87
3.7. Comportamiento de la WD para el Laser1 con un factor de confinamiento variable	89
3.8. Comportamiento de la WD para el Laser2 con un factor de confinamiento variable	90
4.1. Marginales en tiempo y frecuencia, WD y primer momento en frecuencia para el Laser1	95
4.2. Marginales en tiempo y frecuencia, WD y primer momento en frecuencia para el Laser2	96
4.3. Comparación entre el comportamiento que sigue el chirp (línea punteada) y la potencia (línea sólida) con un factor de confinamiento variable para el Laser1	98

4.4. Comparación entre el comportamiento que sigue el chirp (línea punteada) y la potencia (línea sólida) con un factor de confinamiento variable para el Laser2	99
4.5. Correlación obtenida para la potencia y el chirp con un factor de confinamiento variable para el Laser1	101
4.6. Correlación obtenida para la potencia y el chirp con un factor de confinamiento variable para el Laser2	101
4.7. Comportamiento de los máximos de correlación calculados para el láser Laser1 con Γ variable	103
4.8. Comportamiento de los máximos de correlación calculados para el láser Laser2 con Γ variable	104
4.9. Comportamiento que siguen los máximos de la correlación cruzada para el conjunto ampliado de prueba.	105
4.10. Comportamiento de los máximos de correlación calculados para todos los láseres con Γ variable	106
4.11. Aislamiento de información sobre la <i>WD</i> para el Laser1	113
4.12. Aislamiento de información sobre la <i>WD</i> para el Laser2	114
4.13. Acotamiento de la zona de información para el Laser1 y el Laser2	115
4.14. Comportamiento de la <i>WD</i> para el Laser1 en su forma binarizada con un factor de confinamiento variable	116
4.15. Comportamiento de la <i>WD</i> para el Laser2 en su forma binarizada con un factor de confinamiento variable	117
4.16. Relación entre el <i>espacio de parámetros de la imagen</i> (a) y el <i>espacio de parámetros de Hough</i> (b)	119
4.17. Singularidad de una recta cuando $k = \infty$ (a) y su cambio de parámetros a (r, θ) (b).	120
4.18. Resultados del algoritmo de clasificación utilizando la <i>Transformada de Hough</i> para el Laser1 con un factor de confinamiento variable	122
4.19. Resultados del algoritmo de clasificación utilizando la <i>Transformada de Hough</i> para el Laser2 con un factor de confinamiento variable	123
4.20. Resultados del algoritmo de clasificación utilizando la <i>Transformada de Hough</i> aplicado a la cartera de láseres de prueba disponible	125

Índice de tablas

3.1. Parámetros PRBS	70
3.2. Grupos de parámetros físicos experimentales	72
3.3. Grupos de parámetros físicos propuestos	73
3.4. Clasificación visual del tipo de chirp predominante con base en la observación del comportamiento de N y el chirp	74
3.5. Clasificación visual Laser1	84
3.6. Clasificación visual Laser2	84
3.7. Clasificación visual Laser3	84
3.8. Clasificación visual Laser4	84
3.9. Clasificación visual Laser5	84
3.10. Clasificación visual Laser6	84
3.11. Clasificación visual Laser7	85
3.12. Clasificación visual Laser8	85
3.13. Clasificación visual Laser9	85
4.1. Máximos de la función de correlación cruzada para el Laser1 cuando Γ varía.	102
4.2. Máximos de la función de correlación cruzada para el Laser2 cuando Γ varía.	102
4.3. Comparación de resultados para el Laser1	108
4.4. Comparación de resultados para el Laser2	108
4.5. Comparación de resultados para el Laser3	108
4.6. Comparación de resultados para el Laser4	109
4.7. Comparación de resultados para el Laser5	109
4.8. Comparación de resultados para el Laser6	109
4.9. Comparación de resultados para el Laser7	110
4.10. Comparación de resultados para el Laser8	110
4.11. Comparación de resultados para el Laser9	110
4.12. Comparación de resultados para el conjunto de prueba	126
4.13. Comparación de resultados para el Laser1	127
4.14. Comparación de resultados para el Laser2	127
4.15. Comparación de resultados para el Laser3	127
4.16. Comparación de resultados para el Laser4	128
4.17. Comparación de resultados para el Laser5	128
4.18. Comparación de resultados para el Laser6	128

4.19. Comparación de resultados para el Laser7	129
4.20. Comparación de resultados para el Laser8	129
4.21. Comparación de resultados para el Laser9	129

Capítulo 1

Introducción

El acrónimo LASER proviene de “Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation”, que traducido al español significa “*Amplificación de Luz por Emisión Estimulada de Radiación*”, consiste en un dispositivo que amplifica luz y produce un haz altamente direccional, coherente y de gran intensidad mediante emisión estimulada¹. La emisión estimulada junto con el proceso de realimentación son dos procesos que dan origen a la amplificación, pues en su forma más simple, un láser consiste en un medio o región de ganancia o amplificación (donde ocurre la emisión estimulada) y en un arreglo de espejos para la realimentación de la luz con el fin de provocar una amplificación continuamente creciente concentrando la luz en una sola dirección (estos fenómenos se explican a lo largo del desarrollo de esta tesis).

En 1917, Albert Einstein estableció las bases para el desarrollo del láser describiendo el fenómeno de emisión estimulada que permitía amplificar la luz tanto como hoy en día lo hace un láser. Sin embargo, el primer láser fue desarrollado hasta la década de los 60's por T. H. Maiman de los Laboratorios Hughes [2]. El gran impacto del láser es consecuencia de sus extraordinarias propiedades como su intenso brillo y direccionalidad, la cual es resultado del alto grado de coherencia que tiene. También se caracterizan por su monocromaticidad² y su alto grado de polarización³ [2].

A lo largo de la historia y desde los inicios del establecimiento de sus principios de funcionamiento se ha logrado aplicar esta tecnología en diferentes ámbitos, como el industrial, médico, militar, inclusive en el uso diario con los reproductores que utilizan luz coherente para la lectura de datos, sin embargo, para los propósitos de esta tesis, la que aquí incumbe es la rama de las comunicaciones.

¹Se le llama “estimulado” debido a que requiere energía electromagnética para estimular el electrón y así producir la excitación [3]

²Cuando el campo eléctrico para la luz se describe con una sola frecuencia

³La onda de luz se caracteriza por una muy alta orientación del campo eléctrico

Diferentes tipos de láseres se han venido creando y mejorando, y la gama ha sido tan amplia que se establecieron diferentes criterios de clasificación como los que a continuación se presentan:

- Clasificación por medio del estado de la materia de la región activa: sólido, líquido, gas o plasma
- Clasificación por medio del rango espectral de la longitud de onda del láser: espectro de luz visible, infrarrojo, etc.
- Clasificación por medio del método de excitación de la región activa: bombeo óptico, bombeo eléctrico, etc.
- Clasificación por medio de las características de la radiación emitida por el láser
- Clasificación por medio del número de niveles de energía que participan en el proceso láser

El funcionamiento de la mayoría de los láseres se basa en tres condiciones a satisfacer. La primera consiste en que debe existir una región activa que emita radiación en la parte óptica del espectro electromagnético. Segundo, la inversión de poblaciones para aumentar la probabilidad de que los fotones que pasen por la región activa produzcan emisión estimulada. Y por último, la tercera condición es la existencia de una realimentación que permita la amplificación de la luz produciendo un haz monocromático y colimado [2].

El objetivo de esta tesis implica que nos enfoquemos en los láseres de semiconductor o diodos láser, con el fin de conocer su funcionamiento y sus principios básicos de operación para lo cual será necesario definir ciertos conceptos de física de semiconductores que se presentan a lo largo de este capítulo.

1.1. Láseres de Semiconductor

Un sistema de láser de semiconductor o diodo láser consiste, como su nombre lo indica, en un semiconductor que ha sido dopado y contiene una unión P-N que emite luz coherente. Operan con relativamente baja potencia de entrada.

Un semiconductor es un arreglo cristalino de átomos que se encuentran unidos por enlaces covalentes. Dependiendo de diferentes factores se puede comportar como aislante o como conductor. Se clasifican en dos tipos: semiconductores

intrínsecos y semiconductores extrínsecos; que a su vez, estos últimos se dividen en tipo N y tipo P. A continuación se presenta la definición de un semiconductor en términos de sus bandas de energía.

Existen tres intervalos o bandas de energías electrónicas que definen ciertos comportamientos de los electrones estas son: la banda de valencia, la banda de conducción y la banda prohibida; se definen de la siguiente manera:

- Banda de Valencia: Es el estado de menor energía, se define como un estado estático de energía en el que se forman enlaces con átomos vecinos. Es la órbita más exterior la cual determina el potencial de conductividad del material
- Banda de Conducción: Un electrón libre en esta banda se encuentra excitado y existen las condiciones necesarias para que sea acelerado por algún campo eléctrico externo y así producir una corriente

El proceso de dopaje de un semiconductor consiste en la variación de concentraciones de electrones libres y huecos, proceso que da a lugar a los semiconductores extrínsecos tipo N y tipo P [3]. Un semiconductor tipo P es un tipo de semiconductor extrínseco, es decir, que se dopa con impurezas para modificar su densidad de portadores. Se le llama tipo P debido a que tiene un exceso de huecos y los materiales utilizados para el dopamiento son los del grupo 3 con lo que al formar los enlaces covalentes quedaría un hueco.

Se define la conductividad como la capacidad de un material de permitir el paso de corriente eléctrica mediante la libre circulación de cargas. Entre mayor cantidad de electrones existan en la banda de conducción mejor conductor es el material.

Un conductor tiene gran capacidad de tener electrones en la banda de conducción. Su banda prohibida es casi nula por lo que los electrones requieren absorber poca energía para pasar de la banda de valencia a la banda de conducción.

En un aislante, la banda prohibida es demasiado grande, tanto que complica el paso de los electrones de la banda de valencia a la de conducción.

En el caso de un semiconductor, cuando se encuentra bajo ciertas circunstancias (térmicas, de presión, etc.) se propician condiciones que permiten el paso de electrones de la banda de valencia a la de conducción [4]. Estos conceptos se ilustran en la figura 1.1.

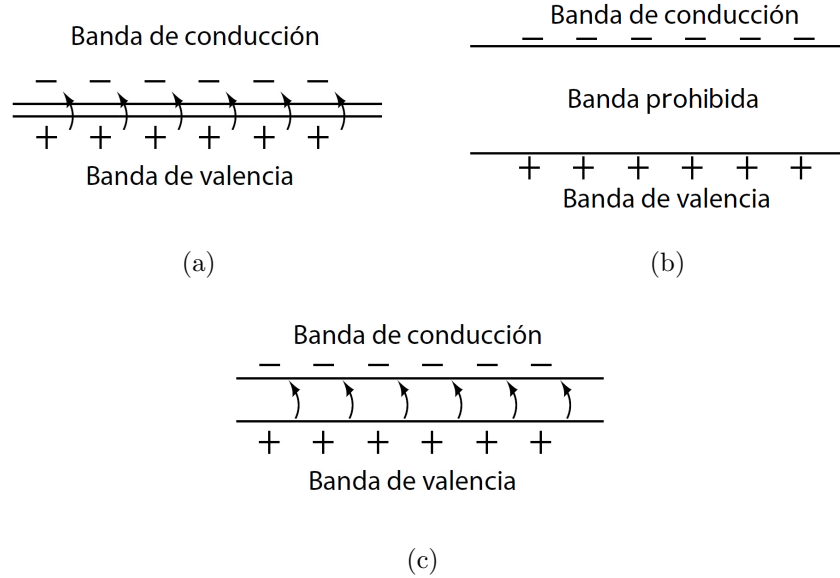


Figura 1.1: Definición de un conductor (a), un aislante (b) y un semiconductor (c) en términos de su estructura de bandas de energía

El Silicio y el Germanio son dos ejemplos de semiconductores que tienen 4 electrones en la capa de valencia, esta condición provoca que otros átomos se unan para compartir electrones de valencia. Para hacer del Silicio (Si) un conductor, se dopa con un elemento de 3 o 5 electrones de valencia, por ejemplo con Arsénico (As), el cual tiene 5 electrones de valencia. Por consiguiente, 4 electrones se unen y queda uno libre el cual conducirá el flujo de la corriente. Dada esta condición existe un exceso de electrones libres y se dice que el semiconductor es tipo N, es decir, existe un exceso de cargas negativas (electrones). La estructura cristalina de uno de ellos se muestra en la figura 1.2. Algunos elementos con 5 electrones de valencia son el Arsénico (As), Fósforo (P) y Antimonio (Sb) [3].

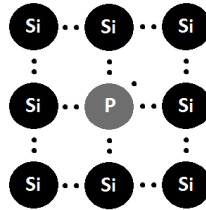


Figura 1.2: Estructura cristalina de un semiconductor tipo N

Si el dopado se realiza con un elemento que tiene 3 electrones de valencia se genera un hueco, el cual también conducirá un flujo de corriente. Esta condición implica entonces un exceso de cargas positivas o huecos, motivo por el cual se le llama semiconductor de tipo P. La estructura cristalina del Boro se muestra en la figura 1.3.

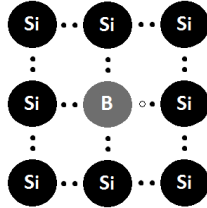


Figura 1.3: Estructura cristalina de un semiconductor tipo P

Algunos elementos utilizados para este tipo de dopado son el Indio (In), Galio (Ga), Aluminio (Al) y Boro (B).

1.1.1. Unión P-N

La unión P-N es la parte elemental del sistema, se presenta cuando existe una unión física de un semiconductor tipo P con un semiconductor tipo N la cual, al ser polarizada directamente, genera un flujo de electrones libres de la región tipo N hacia la región tipo P y un flujo de huecos de la región tipo P hacia la región tipo N [3]. En la figura 1.4 se muestra una unión P-N genérica.

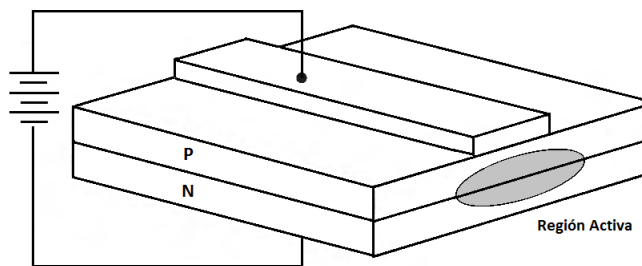


Figura 1.4: Región activa de una unión P-N

Lo anterior da lugar a la existencia de iones positivos y negativos que generan un voltaje V_d (llamado barrera de potencial) el cual impide que se sigan moviendo los portadores.

Un láser de semiconductor está conformado por una unión P-N la cual, al ser polarizada directamente, genera recombinaciones electrón-hueco dentro de una región llamada región activa. Tales recombinaciones pueden ser radiativas o no radiativas. Para que se lleve a cabo una emisión estimulada se requiere que exista una inversión de poblaciones lo cual significa que la densidad de portadores en la banda de conducción o estado de mayor energía sea superior al habido en estado de mayor energía. Condición antinatural de la materia por lo que requiere de una corriente que permita alcanzar la condición de umbral para que empiece a radiar como un láser. Para que la emisión estimulada o asistida se lleve a cabo, las energías $E_c - E_v = h\nu$ donde ν es la frecuencia de los fotones que han incidido sobre los electrones en estado de alta energía para generar otro fotón de idénticas características (misma ν) lo cual le da coherencia al haz de luz. Para ayudar al confinamiento del haz, se utilizan varios métodos como el de pulir perfectamente 2 paredes paralelas del semiconductor y las otras 2 hacerlas rugosas a fin de que absorban luz y evitar que salga por ahí. Para la región activa se utiliza otro semiconductor cuyas principales características es que tenga una banda prohibida menor y un índice de refracción mayor a fin de hacer que funcione como guía de onda para ayudar al confinamiento de la luz.

1.1.2. Comportamiento Cuántico

En la sección anterior se mencionó que en el caso de láseres de semiconductor se manejan dos niveles de energía: el de valencia y el de conducción, de los cuales podemos decir que cuando un electrón pasa de un estado de mayor energía E_2 a un estado de menor energía E_1 se libera un fotón, y viceversa, cuando un electrón pasa de un estado de menor energía a uno de mayor energía absorbe un fotón. Lo anterior se explica debido a que si un fotón puede estimular a un electrón para moverlo de un estado de baja energía a un estado de alta energía por medio de la absorción, entonces, un fotón también es capaz de estimular un electrón en estado de alta energía hacia el estado de baja energía.

La energía de un fotón se define de la siguiente manera:

$$E = h\nu \quad (1.1)$$

Donde:

E es la energía del fotón

h es la constante de Planck

ν es la frecuencia de radiación del fotón

Cuando la diferencia de energías entre los dos niveles es igual a la energía del fotón (es decir, $E = E_2 - E_1$) puede ocurrir uno de tres fenómenos diferentes:

Emisión Espontánea

El fenómeno de emisión espontánea se produce cuando un electrón en estado de alta energía pasa a un estado de baja energía lo que provoca que se emita un fotón de manera espontánea.

Absorción

En el caso de la absorción el fotón desaparece ya que cuando este incide sobre un electrón de baja energía es absorbido lo que provoca que el electrón pase a un estado de alta energía.

Emisión Estimulada

La emisión estimulada se lleva a cabo cuando un fotón pasa a lado de un electrón excitado y este retorna a un estado no excitado a través de la emisión de un fotón con la misma fase, frecuencia, dirección y polarización; este es el fundamento del funcionamiento del láser el cual se ilustra en la figura 1.5.

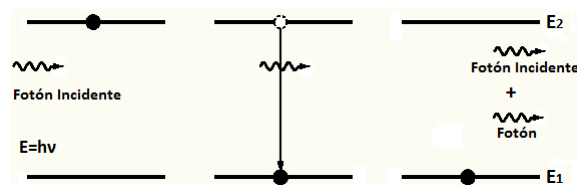


Figura 1.5: Emisión estimulada

La corriente generada debido a la polarización de la unión P-N, cuando no supera I_{th} genera una radiación mínima, por el contrario si supera este umbral hace que las recombinaciones sean predominantemente debidas a la emisión estimulada lo que implica que la estructura empiece a radiar como un láser.

La figura 1.6 muestra el comportamiento típico de la potencia óptica que irradia un láser DFB en función de la corriente inyectada.

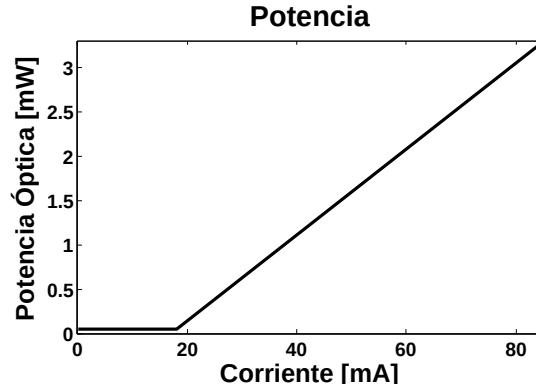


Figura 1.6: Potencia óptica de un láser DFB vs la corriente inyectada

Cuando la corriente supera un umbral I_{th} las recombinaciones son mayoritariamente debidas a emisión estimulada, fenómeno que se explica en la siguiente sección.

1.1.3. Inversión de Poblaciones

Se define la población como el número de electrones presentes en cada una de las bandas de energía. Cuando existe un equilibrio térmico un estado natural implica la presencia de un mayor número de electrones en la banda de valencia (la de menor energía) y solo unos cuantos electrones excitados térmicamente están presentes en la banda de conducción. Esta condición natural significa que existe una baja probabilidad de que los fotones que pasan por la región activa produzcan emisión estimulada y por el contrario se produzca el fenómeno de absorción y por consecuencia una menor amplificación de luz. Por lo anterior, es necesario invertir las poblaciones para lograr que el estado de mayor energía esté más densamente poblado que el de menor energía para así aumentar la probabilidad de que se produzca una emisión estimulada [5][2].

La inversión de poblaciones es una condición antinatural de la materia, la cual es alcanzada cuando existe una mayor densidad de portadores en estado de alta energía que en estado de baja energía.

Un semiconductor de bandas directas es aquel que para emitir un fotón no requiere modificar su cantidad de movimiento, algunos ejemplos son Ga, As, In y P. Por otro lado, un semiconductor de bandas indirectas es aquel que para emitir un fotón requiere de un cambio en su cantidad de movimiento, por lo tanto

pierde energía pues requiere de efectos térmicos para modificar su cantidad de movimiento.

1.1.4. Resonador Óptico

Un resonador óptico confina y almacena luz a cierta frecuencia de resonancia. La luz se refleja repetidamente dentro de la cavidad (haciéndola pasar varias veces por la región activa) permitiendo la salida de solo un mínimo porcentaje, mientras que la restante se utiliza para amplificarla más. El resonador más básico consiste en dos espejos entre los cuales la luz se refleja repetidamente con muy bajas pérdidas.

Su importancia radica en su uso como contenedor dentro del cual la luz se genera provocando una amplificación de la misma. El resonador determina la frecuencia y distribución espacial del haz, así como los modos longitudinales propios de la geometría con base en la siguiente fórmula:

$$\lambda_m = \frac{2L}{m} \quad (1.2)$$

Donde:

λ_m es la longitud de onda dentro del modo m dentro de la cavidad

L es la longitud de la cavidad

m es el número de modo

Para el caso que nos ocupa se utiliza una cavidad Fabry-Perot dentro de la cual ubicamos la región activa. Esta estructura consiste en un arreglo de dos espejos paralelos con la región activa en medio, uno de los espejos tiene un coeficiente de reflexión de 1 (es decir, refleja el 100 % de la luz que le llega) y otro de coeficiente de reflexión < 1 (permite el paso de una parte de la luz y la otra la refleja). En el caso de los láseres de semiconductor en lugar de espejos se utilizan las reflexiones de Fresnel, como se muestra en la figura 1.7, y mediante cortes en la estructura se simula el papel de los espejos [3].

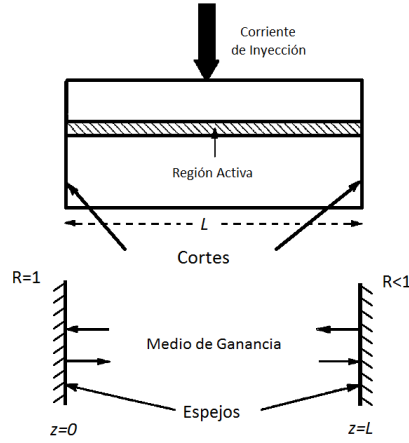


Figura 1.7: Estructura de una cavidad Fabry-Perot para un láser de semiconductor

Los cortes en las paredes actúan como espejos parcialmente reflejantes [1].

1.1.5. Realimentación

La onda crece a medida que es reflejada por los espejos a través de la región activa, pues esto implica que existe una cantidad de fotones cada vez mayor que irán generando una mayor emisión estimulada (siempre y cuando se disponga de suficiente energía para superar las pérdidas en la cavidad). La amplificación se presenta en forma exponencial dentro de la región activa, fuera de esta, la potencia es constante.

Dentro de la cavidad existen pérdidas de potencia que se clasifican en externas e internas. Las externas son las generadas por los coeficientes de reflexión de las paredes y las cuales resultan ser de mayor magnitud. Las internas son las causadas por efectos dispersivos, de absorción y de reflexiones, todas ellas englobadas en un coeficiente α (*coeficiente de pérdidas internas*). La ecuación (1.3) representa el comportamiento de la ganancia:

$$G = R_1 R_2 e^{2l(g - \alpha_{int})} \quad (1.3)$$

Donde:

G es la ganancia total

R_1, R_2 son los coeficientes de reflexión de los espejos en la cavidad

g es el coeficiente de ganancia

l es la longitud de la región activa

α_{int} es el coeficiente de pérdidas internas

Existe una condición llamada de umbral la cual establece el valor mínimo del coeficiente de ganancia para que exista una amplificación. Dicha condición parte de la igualdad entre la ganancia y las pérdidas en la cavidad que queda expresada con la ecuación (1.4) de la siguiente manera [3]:

$$g = \alpha_{int} - \frac{\ln(R_1 R_2)}{2l} \quad (1.4)$$

En términos de la densidad de portadores N , la ganancia se puede modelar de la siguiente manera:

$$g_p(N) = g_0(N - N_T) \quad (1.5)$$

Donde:

g_p es el coeficiente de ganancia

g_0 constante de ganancia diferencial

N_T es la densidad de portadores de transparencia

Las gráficas de la figura 1.8 muestran el comportamiento entre el coeficiente de ganancia y la densidad de portadores.

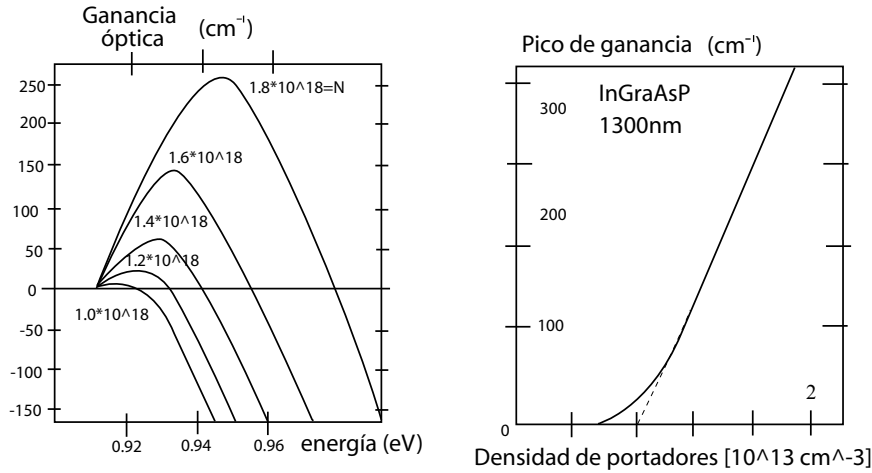


Figura 1.8: Ganancia óptica en función de la densidad de portadores [1]

Cuando se incrementa la ganancia también se incrementa el número de modos

presentes en la cavidad, esta es la justificación del uso de los láseres DFB.

1.1.6. Laser Distributed Feedback (DFB)

Un láser de semiconductor convencional no emite en un solo modo longitudinal, en general, el modo más cercano al pico de ganancia es el más intenso pero existen otros modos longitudinales situados en las proximidades, los cuales limitan la tasa de transmisión reduciendo el ancho de banda en la fibra. La utilización de láseres DFB es un medio que permite emitir luz predominantemente en un solo modo longitudinal bajo condiciones de modulación de alta velocidad.

Un láser DFB se caracteriza por la utilización de una rejilla de Bragg, dispositivo diseñado con un arreglo del índice de refracción interno del semiconductor sintonizado a cierta longitud de onda λ_m la cual es reflejada permitiendo el paso inadvertido de todas las demás longitudes de onda. Esta rejilla se usa en una de las capas pertenecientes a la heteroestructura de tal manera que el grosor de esta varía periódicamente a lo largo de la longitud de la cavidad. El resultado es una perturbación periódica del índice de refracción que proveerá la realimentación [5][1], tal como se muestra en la figura 1.9.

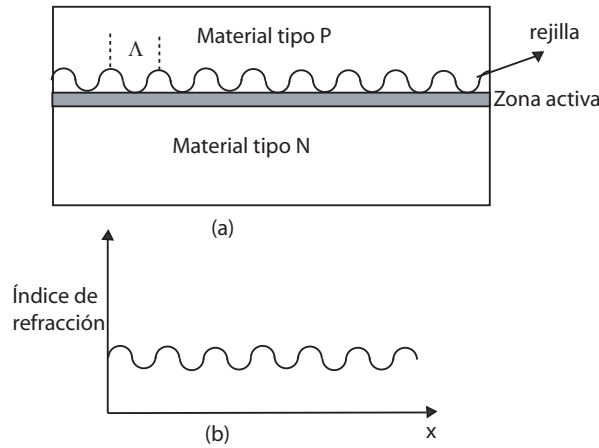


Figura 1.9: Estructura de un láser DFB [2]

Eligiendo un valor apropiado de periodo de la rejilla (Λ) se seleccionan adecua-

damente las longitudes de onda mediante la siguiente ecuación [5]:

$$\Lambda = m \left(\frac{\lambda_m}{2} \right) \quad (1.6)$$

Donde

Λ es el periodo de la rejilla

m es el orden de la difracción de Bragg inducida por la rejilla

λ_m es la longitud de onda dentro de la región activa

1.1.7. Ecuaciones de un Diodo Láser

Las ecuaciones de un diodo láser, que se presentan en esta sección, son tres expresiones que definen el funcionamiento de un láser de semiconductor monomodal, correspondiendo al comportamiento de un láser DFB; son conocidas también como ecuaciones de estado. Es necesario hacer hincapié en que cada modo electromagnético tiene su propio conjunto de ecuaciones, sin embargo, para el desarrollo de esta tesis se asume un láser de semiconductor de doble heteroestructura DFB el cual, como se menciono anteriormente, únicamente genera un modo electromagnético. Otra condición que se debe satisfacer es que las ecuaciones que a continuación se presentan son válidas para niveles de corriente cercanas al umbral de ganancia del láser.

Ecuación de Estado de Densidad de Portadores (N)

Esta ecuación define la variación de la densidad de portadores N con respecto al tiempo:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{qV} - \frac{N}{\tau_c} - \frac{g_0(N - N_T)S}{(1 + \epsilon S)} \quad (1.7)$$

Donde:

$\frac{I}{qV}$ es la inyección de portadores
 $\frac{N}{\tau_c}$ representa a las recombinaciones de portadores
 $\frac{g_0(N - N_T)S}{(1 + \epsilon S)}$ es el término de la emisión estimulada

I es la corriente inyectada al dispositivo y que fluye por la zona activa [C/s]

q es la carga unitaria del electrón ($q = 1.602 \times 10^{-19}[C]$)

V es el volumen de la zona activa [m^3]

N es la densidad de portadores

τ_c es el tiempo de vida de los portadores
 g_0 es el gradiente de ganancia
 N es la densidad de portadores
 N_T es la densidad de portadores de transparencia
 S es la densidad de fotones
 ϵ es el factor no lineal de confinamiento de ganancia

Inyección de Portadores

Densidad de electrones que fluyen por la región activa

Recombinación de Portadores

Es la suma de las recombinaciones no radiativas y las espontáneas. Solo da cuenta de las recombinaciones de portadores o electrones en estado excitado excluyendo la emisión estimulada. El signo negativo se debe a que por cada recombinación se pierde un electrón capaz de producir emisión estimulada.

Recombinaciones de Emisión Estimulada

Representa los portadores que pueden generar emisión estimulada, pero si no existe fotón que estimule a un portador nunca se presentará este fenómeno, por tal motivo está multiplicada por la densidad de fotones. El signo negativo se debe a que cada fotón generado por emisión estimulada es un portador que se pierde.

Ecuación de Estado de Densidad de Fotones (S)

La variación de la densidad de fotones respecto al tiempo se describe matemáticamente con la siguiente ecuación en la que se aprecian los tres tipos de recombinaciones que se presentan:

$$\frac{dS}{dt} = \Gamma B \frac{N}{\tau_c} - \frac{S}{\tau_P} + \frac{\Gamma g_0 (N - N_T) S}{(1 + \epsilon S)} \quad (1.8)$$

Donde:

$\Gamma B \frac{N}{\tau_c}$ es la término de emision espontánea
 $\frac{S}{\tau_P}$ son las pérdidas
 $\frac{\Gamma g_0 (N - N_T) S}{(1 + \epsilon S)}$ es el termino que representa la emisión estimulada

Γ es el coeficiente de confinamiento óptico
 B es el factor de acoplamiento de emisión espontánea
 N es la densidad de portadores
 τ_c es el tiempo de vida de portadores
 S es la densidad de fotones

τ_P es el tiempo de vida del fotón dentro de la cavidad
 α_{cav} son las pérdidas totales de fotones en la cavidad
 α_{esp} son las pérdidas de fotones producidas por los espejos
 α_{int} son las pérdidas internas de fotones en la cavidad

El primer término de la ecuación se refiere al fenómeno de emisión espontánea, mientras que el segundo término está relacionado con las pérdidas totales de fotones dentro de la cavidad, y las cuales resultan de la suma de las pérdidas producidas por los espejos y de las producidas internamente en la cavidad (como el scattering). El último término es igual al tercer término de la ecuación (1.7) pero multiplicado por el factor de confinamiento óptico Γ .

La importancia de la ecuación de estado de densidad de fotones radica en que a partir de ella se define la potencia óptica de la siguiente manera [6]:

$$P(t) = \frac{V\eta h\nu}{2\Gamma\tau_p} S(t) \quad (1.9)$$

El factor de confinamiento óptico Γ juega un papel muy importante debido a que representa la relación existente entre la potencia óptica que viaja a través de la región activa y la potencia total óptica [1]. El rango de valores que toma Γ puede variar entre 0 y 1 (comúnmente su valor oscila alrededor de 0.4 [1]), donde 0 representaría que no hay potencia óptica alguna en la región activa y 1 representaría que el 100 % de la potencia óptica se transmite por la región activa, es decir, un caso ideal y sin pérdidas.

Ecuación de Estado de la Fase

La tercera y última ecuación describe como varía la fase respecto al tiempo, o bien, que cambios se presentan en el espectro de la señal. La importancia de esta última ecuación radica en que sirve para la definición del fenómeno Chirp, el cual es fundamental para el desarrollo de esta tesis:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[\Gamma g_0 (N - N_T) - \frac{1}{\tau_P} \right] \quad (1.10)$$

Donde:

α es el factor de incremento del ancho de línea espectral del material (*Material Linewidth Enhancement Factor*), conocido también como factor de Henry.

El factor α es una representación de los cambios del índice de refracción n en la región activa con respecto a los cambios de la ganancia g del material, a consecuencia de la variación de la densidad de portadores N . La ecuación (1.11) es la definición matemática del factor α :

$$\alpha = -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{\frac{dn}{dN}}{\frac{dg}{dN}} = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{dn}{dg} \quad (1.11)$$

De la ecuación anterior es posible determinar que cuando la densidad de portadores N disminuye, la ganancia del material g igualmente disminuye y por el contrario el índice de refracción n aumenta.

1.1.8. Variación de la Fase: Chirp

En un sistema de comunicaciones óptico digital, una secuencia de bits se logra mediante la modulación de la potencia de la señal, estableciendo un umbral en base al cual se pueda definir qué nivel de potencia corresponde a un 1 o a un 0. Para lograr lo anterior existen dos métodos de modulación: externa y directa. La modulación externa implica la presencia de un elemento modulador de la señal a la salida del láser radiando en modo Onda Continua (*Continuous Wave*). El modulador básicamente permite el paso de radiación cuando se quiere transmitir un 1 o bien, la bloquea cuando se quiere transmitir un 0. A la salida del sistema, la señal conserva su forma con un ligero chirp (se explica más adelante) que se toma como efecto despreciable. El siguiente diagrama mostrado en la figura 1.10 corresponde a un sistema con modulación externa.

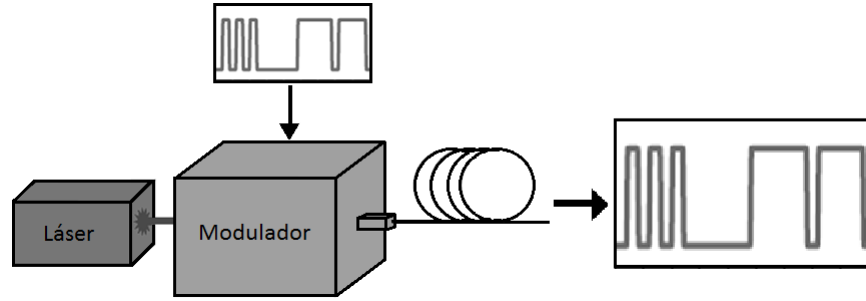


Figura 1.10: Configuración de un sistema con modulación externa

La modulación directa omite la presencia del elemento modulador (por lo tanto, el costo se reduce) y su funcionamiento se basa en la señal moduladora en forma de corriente que se ingresa de forma directa al láser provocando la emisión de una potencia óptica que será, en principio, proporcional al valor de la corriente de inyección. Así, para representar un 0 se aplica una corriente pequeña (que genere una potencia pequeña) y para representar un 1 se aplica una corriente

mayor (que genere una potencia mayor). La principal desventaja de este tipo de configuración es la distorsión de la señal de salida del sistema debido a la respuesta no lineal del láser y que afecta tanto a la potencia como particularmente a la fase (y por ende a la frecuencia) de la señal (presencia de chirp no despreciable) lo cual en muchos casos reduce el desempeño del sistema. El siguiente diagrama de la figura 1.11 muestra esta clase de configuración de modulación directa.

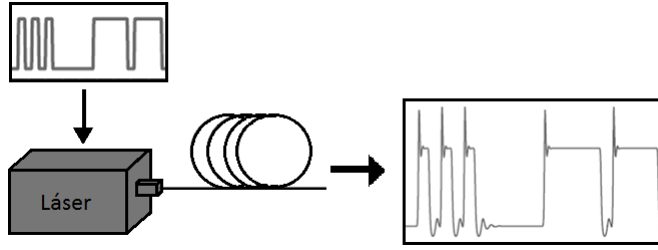


Figura 1.11: Configuración de un sistema de modulación directa

El objetivo de esta tesis, como se mencionó previamente, plantea la caracterización del chirp de una señal, por lo que se utilizarán sistemas ópticos con modulación directa debido al considerable efecto de este fenómeno sobre la señal de salida.

El fenómeno *chirp* se define como un efecto que se presenta en una señal óptica, que consiste en variaciones de la frecuencia de la señal óptica y es proporcional a la variación de la fase de la señal respecto al tiempo. Cuando se habla de una modulación directa, la variación de la frecuencia o chirp se presenta conforme a las variaciones de la corriente de inyección, pues cuando se modula la corriente de un láser de semiconductor, se genera una modulación en la fase debido a la variación del índice de refracción al variar la densidad de portadores. El tipo de láser que se asumirá en el desarrollo de esta tesis es el DFB (*Distributed Feed Back*) modulado directamente.

Matemáticamente el fenómeno se describe de la siguiente manera a partir de la ecuación de estado de la fase como sigue [7]:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\Delta\nu = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\Gamma g_0 (N - N_T) - \frac{1}{\tau_P} \right] [Hz] \quad (1.13)$$

De las ecuaciones anteriores podemos ver que el chirp es directamente proporcional al factor α . Al ser el chirp una variación de frecuencia se generan cambios

en el espectro que da como resultado un ensanchamiento.

1.1.9. Chirp Transitorio y Adiabático

Existen dos tipos de chirp: transitorio y adiabático. Una señal óptica derivada de un láser modulado directamente puede tener ambos tipos de chirp, pero uno es predominante sobre otro en la mayoría de los casos. Cuando una señal tiene en iguales proporciones chirp adiabático y chirp transitorio, se dice que es equilibrada o mixta [1]. Lo anterior dependerá de la relación $\alpha : \kappa$, dos parámetros presentes en las ecuaciones de estado de un diodo láser.⁴

El chirp transitorio se basa, como su nombre lo indica, en las transiciones de bit en una señal digital, es decir, cuando hay una transición de 0 a 1 (de subida) hay un incremento instantáneo de frecuencia, cuando la transición es de 1 a 0 (de bajada) existe un decremento instantáneo de la frecuencia, es decir, solo se presenta cuando el nivel de potencia cambia, esto provoca que exista una diferencia poco notable en el chirp entre 1s y 0s cuando la potencia óptica tiene un comportamiento estacionario. En la figura 1.12 se muestra este comportamiento y es posible notar que, aunque la potencia óptica se mantenga en determinado nivel, el chirp predominantemente transitorio solo sufre cambios cuando hay una transición de bit. Cuando no existe una transición de bit (es decir, no hay un cambio de nivel de potencia) tiende a mantenerse en 0 (obsérvese, para ejemplo, intervalos de tiempo de $53 - 54.5[ns]$ y de $55.5 - 56.5[ns]$ de ambas gráficas).

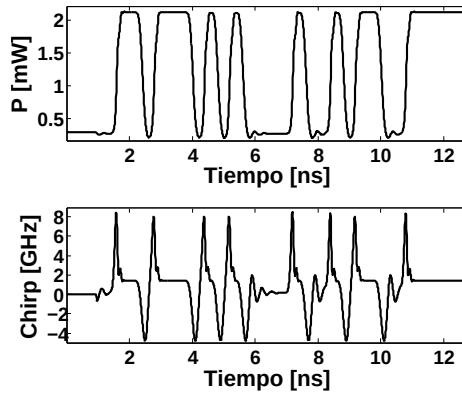


Figura 1.12: La gráfica superior muestra el comportamiento de la potencia óptica, mientras que la inferior corresponde al chirp transitorio

⁴ α (*Line Width Enhancement Factor*, relacionado con el chirp transitorio) y κ (relacionado con el chirp adiabático)

El chirp adiabático, a diferencia del transitorio, tiene un comportamiento muy similar al de la potencia óptica (la sigue adiabáticamente) pues se genera un cambio de frecuencia siempre respecto al nivel de potencia, es decir, los 1s (mayor potencia) tendrán una frecuencia mayor que los 0s (menor potencia), esto a su vez implica que existe diferencia notable entre 1s y 0s cuando la señal óptica tiene un comportamiento estacionario, dicho comportamiento se muestra en la figura 1.13.

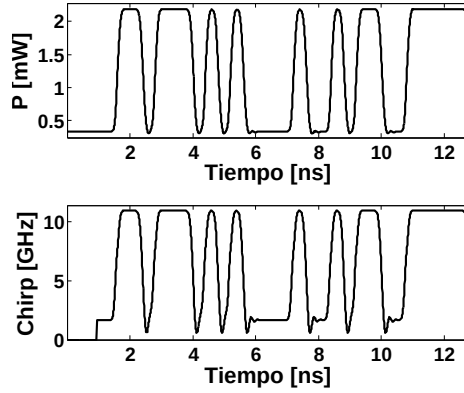


Figura 1.13: La gráfica superior muestra el comportamiento de la potencia óptica, mientras que la inferior corresponde al chirp adiabático

El chirp se define, en términos de la potencia óptica $P(t)$, de la siguiente manera:

$$\Delta\nu = \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{d}{dt}[\ln(P)] + \kappa P \right) \quad (1.14)$$

Donde:

κ es el coeficiente de *chirp* adiabático

El primer término representa el chirp transitorio y queda en términos únicamente de α . El segundo término representa el chirp adiabático, este queda en términos de α y κ . Cuando $\kappa \approx 0$ ó α es tal que el primer término domina sobre el segundo, la señal tiene un chirp predominantemente transitorio, cuando κ tiene un valor alto la señal presenta un chirp predominantemente adiabático.

En la ecuación (1.15) se define el coeficiente de chirp adiabático κ .

$$\kappa = \frac{2\Gamma}{\eta h\nu V} \epsilon \quad (1.15)$$

Donde:

$h\nu$ es la energía del fotón

η es la eficiencia cuántica⁵ del material semiconductor

Γ representa el factor de confinamiento óptico

ϵ representa el factor no lineal de compresión de ganancia⁶

V es el volumen de la región activa

De la ecuación (1.15) es posible notar que un coeficiente de chirp adiabático corresponde a un láser con un volumen activo de gran tamaño y/o con un factor de confinamiento óptico Γ muy pequeño.

1.2. Relevancia para los Sistemas de Fibra Óptica

Conocer el contenido adiabático y/o transitorio del chirp en una señal óptica nos permitirá establecer pautas para proponer nuevos diseños en láseres de semiconductor pues, con base en resultados publicados por diversas fuentes [8][9][10][6], se sabe que para mejorar el desempeño de un sistema óptico se puede aprovechar la presencia de chirp transitorio en la señal de salida mediante la gestión de la dispersión (interacción con una fibra óptica de dispersión positiva o negativa) pues, para el caso de la dispersión negativa, presenta un comportamiento que comprime los pulsos ópticos, lo cual implica la capacidad de incrementar la distancia de transmisión sin necesidad de regenerar la señal. El inconveniente de este tipo de configuración es la presencia de oscilaciones que al trasladarse a lo largo del pulso pueden ocasionar lecturas erróneas en el valor de un bit (lo cual disminuye la calidad de la señal).

Un láser con ciertas características de chirp puede entonces ser útil como parte de un sistema de transmisión basado en fibras ópticas. Resulta pues lógico pensar que una herramienta que permite determinar automáticamente las características de un láser modulado directamente a partir de la onda que genera resulta de gran utilidad para cuestiones relacionadas con la fabricación de láseres, fabricación de equipo de medición, etc.

En particular, resultaría de gran relevancia para los fabricantes de transmisores

⁵La eficiencia cuántica se refiere al número de pares electrón-hueco creados por cada fotón

⁶(*Gain Compression Coefficient*) es una relación entre ganancia óptica respecto a la densidad de fotones, pues cuando S aumenta la ganancia disminuye. Según [1] el rango de valores reportados para la región activa del material InGaAsP (Indium Gallium Arsenide Phosphide) alrededor de $1.55[\mu m]$ es $0.42 \times 10^{-23}[m^3] < \epsilon < 0.42 \times 10^{-23}[m^3]$

modulados directamente para ser usados en sistemas de telecomunicaciones, y de ahí la importancia del estudio presentado en esta tesis.

Capítulo 2

Función de Distribución de Wigner

Comprender la función de *Distribución de Wigner* implica la utilización de ciertos conceptos relacionados con probabilidad y estadística a fin de entender su comportamiento como “Distribución”, así como algunas otras generalidades referidas al procesamiento digital de señales. Estos conceptos son tratados en la primera parte de este capítulo a fin de comprender su funcionamiento, tema que es tratado en la parte final de este capítulo.

Ejemplo de los conceptos necesarios como antecedentes para el estudio de la *Distribución de Wigner* son las distribuciones de probabilidad conjunta y las distribuciones marginales. En el primer caso, las distribuciones de probabilidad conjunta se aplican en situaciones donde se desea registrar resultados simultáneos de dos o más variables aleatorias (por ejemplo tiempo y frecuencia), como en nuestro caso. En el segundo caso, las distribuciones marginales son funciones de densidad univariantes obtenidas a partir de una bivalente.

En este capítulo se hace referencia a todos esos conceptos que necesariamente son antecedentes al entendimiento de la función de Distribución de Wigner.

2.1. Probabilidad Conjunta o Bivalente

La probabilidad conjunta se refiere a la probabilidad de ocurrencia de fenómenos que contienen dos o más eventos, o bien, es la probabilidad de que un evento A y un evento B sucedan al mismo tiempo. Para cualesquiera variables aleatorias X y Y , la función de distribución (bivalente) conjunta $F(x, y)$ es [11]:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.1)$$

Para $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$. La función de distribución conjunta contiene los valores $F(x, y)$ para cualquier par de valores (x, y) dentro del rango de las variables aleatorias X y Y .

Se dice que dos variables aleatorias son continuas conjuntas si su función de distribución conjunta $F(x, y)$ es continua en ambos argumentos. Si X y Y son dos variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta $F(x, y)$, existe una función $f(x, y)$ llamada función de densidad de probabilidad conjunta (o simplemente función de densidad), tal que [11]:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dy dx \quad (2.2)$$

Donde $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$.

La función de densidad de probabilidad bivalente $f(x, y)$ traza una superficie de densidad de probabilidad sobre el plano xy tal que $P(a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2)$ es igual a [11]:

$$\int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy \quad (2.3)$$

De esta forma, una función de densidad expresa cómo una cantidad o más cantidades dadas se distribuyen en relación a una (o más) variable x dada por unidad de x .

2.2. Distribución de Probabilidad Marginal

Cuando tenemos la probabilidad conjunta $F(x, y)$ es posible obtener la distribución para una sola de las variables integrando todos los valores posibles para la otra variable. En el análisis de una distribución marginal, para hallar $p(x)$, se suma $p(x, y)$ para todos los valores de y , lo que implica que acumulamos las probabilidades en el eje x (o margen) [11][12].

Matemáticamente, las funciones de probabilidad marginal de X y Y cuando estas son variables aleatorias discretas conjuntas con función de probabilidad $p(x, y)$ están dadas por [11]:

$$p(x) = \sum_{\forall y} p(x, y) \quad (2.4)$$

$$p(y) = \sum_{\forall x} p(x, y) \quad (2.5)$$

Si X y Y son variables aleatorias continuas conjuntas con función de densidad conjunta $f(x, y)$ entonces las funciones de densidad marginal de X y Y están dadas por [11]:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (2.6)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (2.7)$$

De lo anterior, las marginales son el estudio centrado en el comportamiento de una sola de las variables, con independencia de cómo se comporta la otra, es decir, manteniéndola como margen.

2.3. Valor Esperado de una Variable Aleatoria

El valor esperado es un parámetro descriptivo de una variable aleatoria que para una variable aleatoria discreta Y se define de la siguiente manera [11][12]:

$$E(Y) = \sum_{\forall y} y p(y) \quad (2.8)$$

Si Y es una variable aleatoria continua [11]:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy \quad (2.9)$$

Sin embargo, muchas distribuciones diferentes pueden poseer los mismos valores esperados. A fin de definir una función de distribución de manera única se emplean los momentos, cuya finalidad es calcular la distribución de probabilidad de una variable aleatoria [11].

El k -ésimo momento de una variable aleatoria Y tomada alrededor del origen se define como $E(Y^k)$ y se denota como μ'_k y está dado por $\mu'_k = E(Y^k)$, para $k = 1, 2, 3, \dots$, particularmente, el primer momento ($k = 1$) alrededor del origen es $E(Y) = \mu'_1 = \mu$ y el segundo momento ($k = 2$) alrededor del origen $\mu_2 = V(Y) = \sigma^2$.

Una función generadora de momentos $m(t)$ describe todos los momentos para una variable aleatoria en una sola expresión como lo dice la ecuación (2.10) [11]:

$$m(t) = E(e^{tY}) \quad (2.10)$$

Donde $E(e^{tY})$ es una función de todos los momentos μ'_k alrededor del origen. Si $m(t)$ existe, entonces para cualquier entero positivo k [11]:

$$\frac{d^k m(t)}{dt^k} \Big|_{t=0} = m^{(k)}(0) = \mu'_k \quad (2.11)$$

Esto quiere decir que la k -ésima derivada de $m(t)$ con respecto a t valuada en 0 da como resultado μ'_k [11].

Utilizando la información anterior se puede construir el equivalente multivariante a partir del caso univariante. Considerando dos variables aleatorias X y Y con función de densidad $f(x, y)$ se sigue el siguiente procedimiento para obtener el valor esperado:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx \quad (2.12)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx \quad (2.13)$$

De las ecuaciones (2.7) y (2.6) podemos determinar que la cantidad dentro de los paréntesis rectangulares es la función de densidad marginal para X , por lo tanto se obtiene [11]:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) es formalmente la definición del valor esperado para una distribución bivalente.

2.4. Generalidades sobre Procesamiento Digital de Señales

El análisis de Fourier es una herramienta mediante la cual una señal periódica se puede representar como combinación lineal de exponenciales complejas (series de Fourier). Sin embargo, su importancia se extiende a la aplicación a señales no periódicas. Mientras que para una señal periódica, las exponenciales complejas que constituyen su serie de Fourier están relacionadas armónicamente, para

las señales aperiódicas las exponenciales complejas están infinitesimalmente cercanas en frecuencia¹, es decir, podemos considerar una señal aperiódica como una señal periódica con un periodo infinito, y su representación en términos de una combinación lineal adopta la forma de una integral en lugar de una suma [13][14].

Los coeficientes resultantes de esta representación se conocen como transformada de Fourier. La integral que utiliza estos coeficientes para representar la señal de interés como combinación lineal de exponenciales complejas se conoce como transformada inversa de Fourier.

2.4.1. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función $s(t)$ y su inversa se definen, para funciones cuya integral sea finita y para funciones con energía finita, mediante las siguientes relaciones [13]:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.15)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.16)$$

Para el caso discreto se define de la siguiente manera [13]:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega n} \quad (2.17)$$

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.18) representan la transformada inversa de Fourier para tiempo continuo y discreto, mientras que las ecuaciones (2.15) y (2.17) se conocen como transformada de Fourier para tiempo continuo y discreto, respectivamente. La transformada $S(\omega)$ de una señal aperiódica $s(t)$ se conoce comúnmente como espectro de $s(t)$ debido a que describe a la señal como una combinación lineal de señales senoidales a diferentes frecuencias [13].

¹Conforme el periodo se incrementa, la frecuencia fundamental disminuye y las componentes relacionadas armónicamente se hacen más cercanas en frecuencia [13]

2.4.2. Relación de Parseval

Sea $s(t)$ una señal continua con su transformada de Fourier $S(\omega)$, entonces [13]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (2.19)$$

A la expresión anterior se le conoce como relación de Parseval siendo el término del lado izquierdo la energía total E_s en la señal $s(t)$, la cual, según la relación de Parseval, puede ser determinada, ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo² ($|s(t)|^2$) e integrando sobre todo el tiempo, o bien calculando la energía por unidad de frecuencia ($\frac{1}{2\pi}|S(\omega)|^2$) e integrándolo sobre todas las frecuencias. El término $|S(\omega)|^2$ se le conoce como espectro de densidad de energía [13]³ o densidad espectral.

Análogamente, para el caso discreto, la relación de Parseval es la siguiente [13]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (2.20)$$

Siendo el miembro izquierdo de la ecuación la energía total que puede ser determinada integrando la energía por unidad de frecuencia ($\frac{1}{2\pi}|S(\omega)|^2$) sobre un ciclo completo (2π).

2.5. Análisis Tiempo-Frecuencia

Para poder comprender mejor lo que implica un análisis tiempo-frecuencia, conviene definir el análisis de ambos dominios por separado. Un análisis frecuencial consiste básicamente en conocer las componentes frecuenciales de una señal y su intensidad, por ejemplo el análisis de Fourier; sin embargo, el análisis de Fourier da como resultado un espectro ruidoso. Existen otros métodos con los cuales se obtiene un espectro más limpio de ruido [15].

En la naturaleza existe un tipo de señales que se caracterizan por la variación de su espectro respecto al tiempo, por ejemplo una señal de voz o el *chirp*. En estos casos un análisis frecuencial resulta inútil pues lo que se necesita es obtener una distribución conjunta en donde se pueda conocer la fracción de energía existente en un cierto rango de frecuencia y tiempo a la vez; es decir, conocer que frecuencias existen en un tiempo en particular para poder calcular

²También llamada energía instantánea

³También llamado espectro de energía

la frecuencia media en un momento dado, a esto se le conoce como análisis tiempo-frecuencia.

En resumen, el análisis tiempo-frecuencia consiste en la representación temporal y frecuencial (Representaciones Tiempo-Frecuencia o *TFR* por sus siglas en inglés) de una señal, a fin de entender y describir las situaciones en donde el contenido de la frecuencia cambia con el tiempo. La más conocida por su simplicidad de cálculo es la *Distribución Wigner-Ville* (o simplemente *Distribución de Wigner*). En el caso del análisis de Fourier este establece una relación uno a uno entre la señal y su espectro, es decir, no permite la combinación de los dos dominios pues, aunque descompone la señal en componentes de frecuencia individuales y establece la intensidad relativa de cada componente, no es capaz de establecer en qué instante de tiempo ocurre cada frecuencia.

2.6. Función de Distribución de Wigner

Al inicio de este capítulo se hizo referencia a ciertos conceptos que nos permitirían entender el funcionamiento de la *Distribución de Wigner* (de aquí en adelante *WD*), específicamente, entender su comportamiento como “*Distribución*”, un concepto definido en la teoría de probabilidad y estadística. En general, una *TFR* se define como una función de densidad de probabilidad conjunta o bivariente, donde las variables en cuestión son el tiempo t y la frecuencia ω , por lo que podemos definir a la *WD* como una función de densidad de probabilidad⁴ debido a que la *WD* de una señal s puede ser interpretada como la distribución de energía de s en el tiempo y la frecuencia [16]. Haciendo uso de esta definición y tomando en consideración la relación de Parseval para una señal continua definida en la ecuación (2.19), la energía total de una función de densidad conjunta es igual a la energía total de la señal (E_s), es decir, de las ecuaciones (2.2) y (2.19) con el correspondiente cambio de variable (t, ω) [17]:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (2.22)$$

Donde $|s(t)|^2$ y $|S(\omega)|^2$ son las correspondientes distribuciones de probabilidad marginal de $WD(t, \omega)$ [18], es decir, de las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.19) se obtiene que [17] [18]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2 \quad (2.23)$$

⁴Es decir, $f(x, y)$ es equivalente a $WD(t, \omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2 \quad (2.24)$$

Por lo que $|S(\omega)|^2$ es el espectro de energía de la señal⁵ y $|s(t)|^2$ es la energía instantánea de la señal⁶ [17].

La WD se define matemáticamente de la siguiente manera [18] [17]:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.25)$$

La definición anterior es en base al dominio del tiempo. Definida a partir del espectro de la señal queda [17] [18]:

$$WD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) e^{-j\omega\xi} d\xi \quad (2.26)$$

De las ecuaciones (2.25) y (2.26) se demuestra que la WD es simétrica en sus definiciones de dominio en tiempo y frecuencia.

Haciendo uso de la ecuación (2.23) y la definición matemática presentada en la ecuación (2.25), para la WD la energía instantánea $|s(t)|^2$ de una señal $s(t)$ se define mediante la siguiente expresión [17]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau d\omega \quad (2.27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \delta(\tau) d\tau = |s(t)|^2 \quad (2.28)$$

Mientras que el espectro de energía $|S(\omega)|^2$ de la señal $s(t)$ se obtiene al integral respecto al tiempo de la siguiente forma [18]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) e^{-j\xi t} d\xi dt \quad (2.29)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) \delta(\xi) d\xi = |S(\omega)|^2 \quad (2.30)$$

En [15] y [16] se define el primer momento para cualquier distribución tiempo-frecuencia mediante la siguiente relación:

⁵Intensidad por unidad de frecuencia en la frecuencia ω [18]

⁶Intensidad por unidad de tiempo en el instante t [18]

$$\omega_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega TFR(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} TFR(t, \omega) d\omega} \quad (2.31)$$

$$= Im \left\{ \frac{d}{dt} \ln s(t) \right\} \quad (2.32)$$

Entonces, el primer momento de la *WD* en frecuencia se le conoce como frecuencia instantánea ω_s y se define en la ecuación (2.33) [19]:

$$\omega_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega WD(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) d\omega} \quad (2.33)$$

Tomando en consideración la ecuación (2.23) obtenemos que [18]:

$$\omega_s = \frac{1}{|s(t)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega WD(t, \omega) d\omega \quad (2.34)$$

Una señal analítica $s(t)$, la cual se define en el apéndice A, en su forma polar se escribe como:

$$s(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} \quad (2.35)$$

Entonces, para la *WD* de una señal analítica como la definida en (2.35) llegamos a que [15]:

$$\omega_s = \frac{1}{2\pi} \varphi'(t) \quad (2.36)$$

⁷De donde podemos concluir que la derivada de la fase en un tiempo t de una señal analítica es la frecuencia instantánea.

Análogamente para la variable t el primer momento de la *WD* se le conoce como retardo de grupo t_s [19]:

$$t_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t WD(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} WD(t, \omega) dt} \quad (2.37)$$

Tomando en consideración la ecuación (2.24) llegamos a que [18]:

$$t_s = \frac{1}{|S(\omega)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t WD(t, \omega) dt \quad (2.38)$$

En [16] se define la siguiente relación:

⁷Si la señal no es de la forma analítica se le llama simplemente frecuencia promedio

$$t_s = -Im \left\{ \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right\} \quad (2.39)$$

$$= -Im \left\{ \frac{d}{d\omega} \ln S(\omega) \right\} \quad (2.40)$$

Si el espectro de la señal se escribe de la forma:

$$S(\omega) = a(\omega) e^{j\psi(\omega)} \quad (2.41)$$

Llegamos a que [16]:

$$t_s = -\psi'(\omega) \quad (2.42)$$

De donde podemos deducir que el retardo de grupo t_s es igual a la derivada negativa de la fase espectral de la señal $\psi(\omega)$. Teniendo la frecuencia instantánea y el retardo de grupo es posible entonces caracterizar la señal en el plano de tiempo-frecuencia por medio de su posición [19]:

$$(t_s, \omega_s) \quad (2.43)$$

2.6.1. Ejemplos de la Distribución de Wigner

Para poder ilustrar la *Distribución de Wigner* se ha hecho uso del toolbox *Time-Frequency* de MATLAB [19], en el cual existen funciones y ejemplos de diferentes *TFR*.

Señal Modulada Linealmente

Primeramente se considera una señal con amplitud constante modulada linealmente en frecuencia variando de 0 a 0.5 considerando normalizada su frecuencia con un número de muestras de 128 cuya función se representa en la ecuación (2.44):

$$\Psi_s(t) = e^{j2\pi\phi(t)} \quad (2.44)$$

La fase de la señal varía respecto al tiempo con base en la siguiente función:

$$\phi(t) = [F_{ni} * (t - t_0)] + \left(\frac{F_{nf} - F_{ni}}{2(N - 1)} \right) [(t - 1)^2 - (t_0 - 1)^2] \quad (2.45)$$

Donde:

$\Psi_s(t)$ es una señal analítica con amplitud constante cuya fase varía con el tiempo

F_{ni} es la frecuencia normalizada inicial, para nuestro ejemplo $F_{ni} = 0$

F_{nf} es la frecuencia normalizada final, para nuestro ejemplo $F_{nf} = 0.5$

N es el número de muestras de la señal, para nuestro ejemplo $N = 128$

t_0 es la referencia de tiempo para la fase, para nuestro ejemplo $t_0 = \frac{N}{2}$

En la figura 2.1 se muestra el comportamiento que sigue la fase, es decir $\phi(t)$:

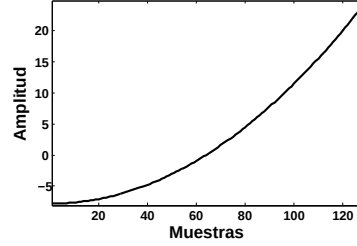


Figura 2.1: Comportamiento de la fase

La fase tiene un comportamiento parabólico, lo cual podemos constatar de dos maneras, la primera observando la gráfica y la segunda haciendo un bosquejo de la ecuación (2.45) en la que la variable independiente t es un término cuadrático y los demás valores constantes. Haciendo uso de la ecuación (2.36) obtenemos la frecuencia instantánea mostrada en la figura 2.2:

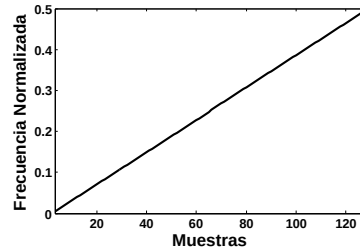


Figura 2.2: Frecuencia instantánea

La señal resultante $\Psi_s(t)$ se muestra en la figura 2.3:

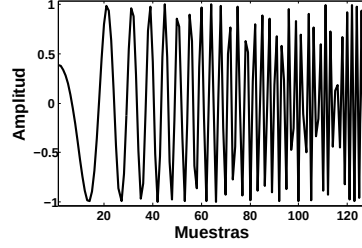


Figura 2.3: Parte real de una señal de amplitud constante modulada linealmente en frecuencia

La señal mostrada en la figura 2.3 es una representación en el dominio del tiempo y no es posible, al menos por simple observación, ver qué tipo de modulación tiene la señal. Ahora consideremos la energía espectral de la señal sacando el cuadrado del módulo de su transformada de Fourier como se explicó en la sección 2.4.1 y 2.4.2, se obtiene la siguiente representación sobre el dominio de la frecuencia:

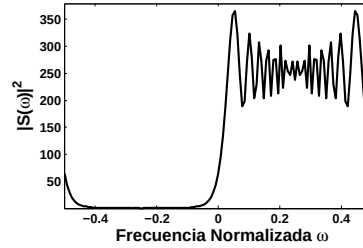


Figura 2.4: Espectro de energía de una señal de amplitud constante modulada linealmente en frecuencia

De la gráfica mostrada en la figura 2.4 puede verse que la frecuencia normalizada varía solo entre 0 y 0.5, tal como se dijo al inicio, sin embargo con esta representación la señal está ilocalizable en el tiempo.

La *WD* muestra mayor y mejor información sobre este tipo de señales haciendo una representación del tiempo y la frecuencia a la vez. La *WD* de la señal se muestra en la figura 2.5.

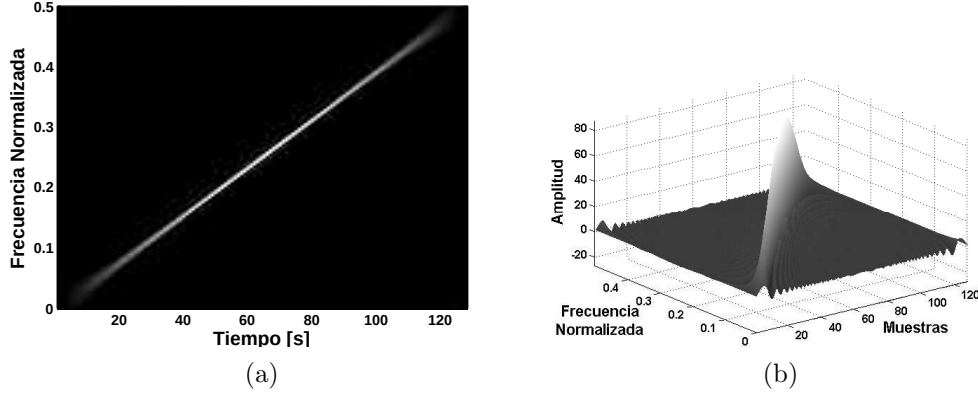


Figura 2.5: Distribución de Wigner para una señal modulada linealmente en frecuencia

De la figura 2.5 podemos notar la presencia de muestras con una amplitud superior al resto del plano las cuales forman en conjunto una especie de franja centrada con cierta inclinación la cual está directamente relacionada con la modulación en frecuencia normalizada de 0 a 0.5, igualmente podemos apreciar la presencia de las mayores amplitudes al centro de la franja⁸, hecho que se puede constatar si observamos su espectro de energía presentado en la figura 2.4.

De la gráfica también es posible observar que la señal existe para todo el intervalo de muestras de 0 a 128 siendo en los extremos del intervalo donde se presentan las menor densidad espectral de la franja.

Señal Modulada Linealmente con Ruido

Para ilustrar este comportamiento utilizamos la señal del ejemplo anterior solo que esta vez se le agrega un ruido Gaussiano como el que se muestra en la figura 2.6:

⁸Es decir, existe una mayor densidad espectral en esta zona

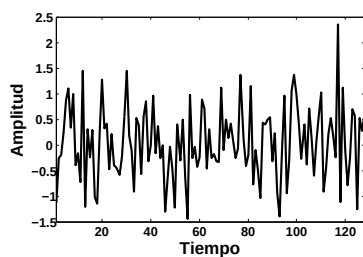


Figura 2.6: Ruido Gaussiano

La señal obtenida y su energía espectral se muestran en las figuras 2.7 y 2.8, las cuales se pueden comparar con las correspondientes figuras 2.3 y 2.4 que no presentan ruido:

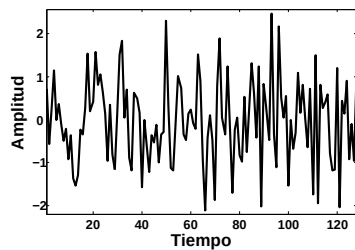


Figura 2.7: Señal modulada linealmente en frecuencia más ruido Gaussiano

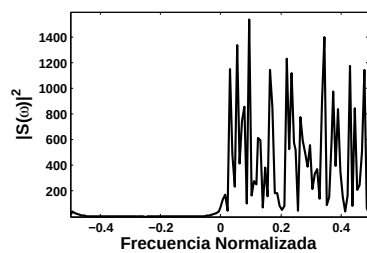


Figura 2.8: Espectro de energía de la señal de la figura 2.7

Su WD se muestra en la figura 2.9:

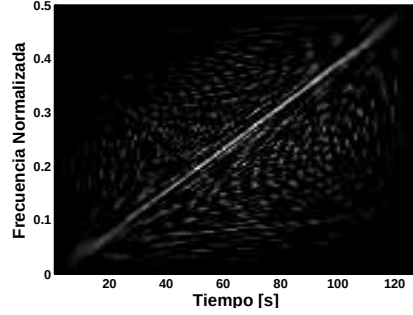


Figura 2.9: Distribución de Wigner para una señal modulada linealmente más ruido Gaussiano

De la gráfica anterior es posible, aún con el ruido Gaussiano agregado, ver que la frecuencia normalizada varía de 0 a 0.5 y que, haciendo una comparación con la figura 2.5, existen amplitudes en forma de “manchas” que no forman parte de la diagonal centrada. Estas manchas son debidas a términos cruzados generados por interferencias provocadas por la bilinealidad de la WD . La presencia de estos términos cruzados, producidos en este caso por la adición del ruido Gaussiano, es muy común en la WD y en ocasiones problemática debido a que se pueden sobreponer a términos que sí son generados por la señal en sí (no por una interferencia) lo que puede llegar a dificultar la interpretación de la WD . Existe más información al respecto de los términos cruzados en [17] [19]. Aunque en la mayoría de los casos, aún cuando hay presencia de términos cruzados, es posible ver la progresión de la frecuencia en el tiempo, siempre y cuando la magnitud del ruido así lo permita.

Señal Modulada Linealmente Multiplicada por un Pulso Gaussiano

Otro ejemplo útil para entender la WD es ver su comportamiento cuando una señal se multiplica por un pulso Gaussiano. Por ejemplo, si tomamos la misma señal que se muestra en la figura 2.3 y la multiplicamos por un pulso Gaussiano centrado en la muestra 96 como el que se muestra en la figura 2.10:

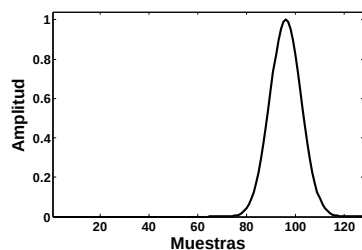


Figura 2.10: Pulso Gaussiano

La señal resultante es la mostrada en la figura 2.11:

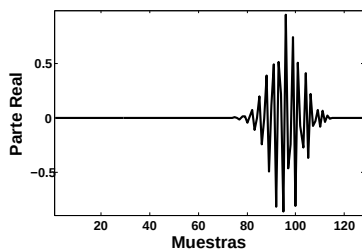


Figura 2.11: Señal modulada linealmente en frecuencia y modulada en amplitud con un pulso gaussiano

Cuyo espectro de energía se muestra en la figura 2.12:

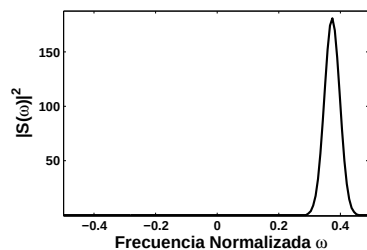


Figura 2.12: Espectro de energía de una señal modulada linealmente en frecuencia y modulada en amplitud con un pulso Gaussiano

Observemos que el espectro de energía está centrado en un valor de frecuencia

normalizada de $\omega=0.375$. Al calcular la *WD* de la señal obtenemos la gráfica mostrada en la figura 2.13(a):

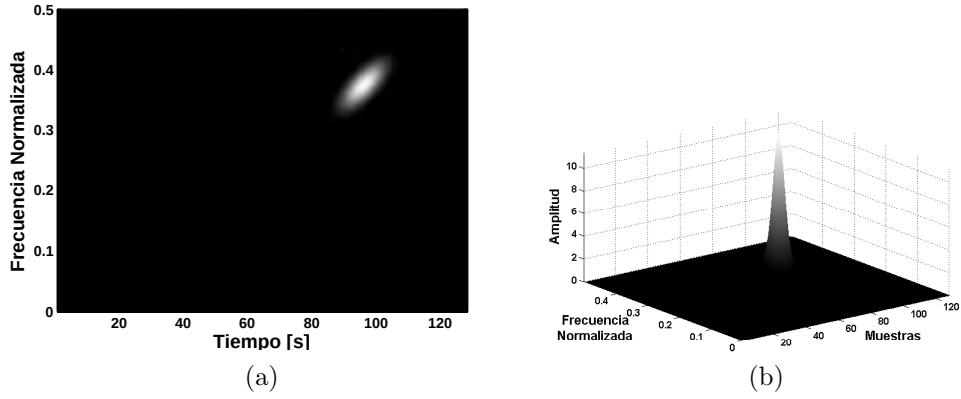


Figura 2.13: *Distribución de Wigner* de una señal modulada linealmente en frecuencia y modulada en amplitud con un pulso Gaussiano

La zona ovalada está centrada a la altura de las coordenadas (96, 0.375), tal cual se definió en 2.43. La inclinación de la zona ovalada está directamente relacionada con la modulación lineal en frecuencia cuya frecuencia normalizada varía entre 0 a 0.5 y la forma ovalada con la forma de la señal. La *WD* en tres dimensiones se aprecia en la figura 2.13(b) donde la amplitud máxima corresponde a las mismas coordenadas.

Otros Ejemplos

A continuación se presentan algunos ejemplos con diferentes tipos de señales a fin de mejorar la comprensión de la *WD*.

Señal compuesta

El primer ejemplo que presentamos es el caso de una señal compuesta por dos señales cada una con una modulación lineal en frecuencia normalizada de 0.2 a 0.3 (ver figura 2.14(a)) y de 0 a 0.5 (ver figura 2.14(b)).

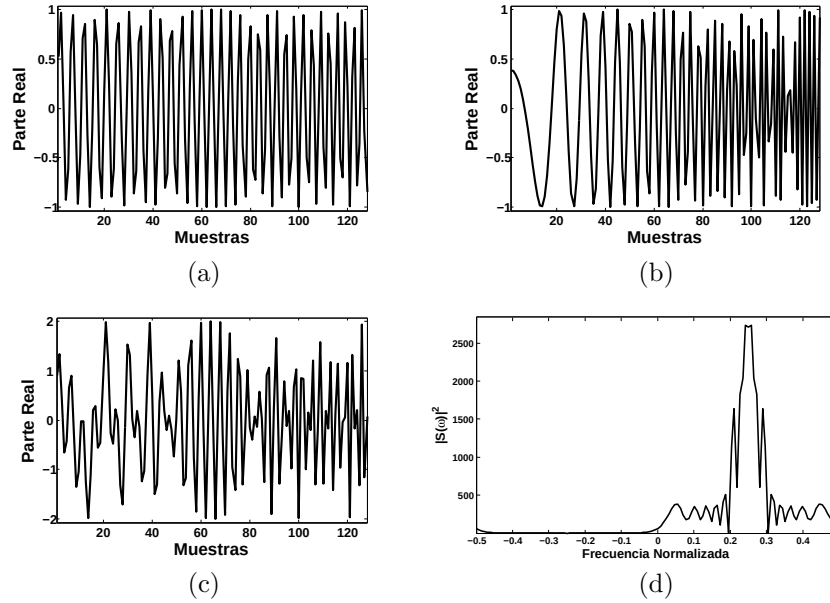


Figura 2.14: (a) Señal modulada linealmente en frecuencia de 0.2 a 0.3, (b) Señal modulada linealmente en frecuencia de 0 a 0.5, (c) Señal compuesta por las señales anteriores, (d) Espectro de energía de la señal compuesta.

La figura 2.15 muestra la *WD* de la señal compuesta:

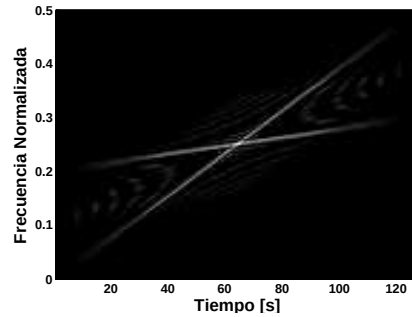


Figura 2.15: Distribución de Wigner de una señal compuesta

La *WD* muestra claramente las progresiones lineales para ambas modulaciones en forma de franjas, una para cada modulación lineal. Podemos notar también

la presencia de términos cruzados alrededor de las franjas debidas a la bilinealidad de la *WD* como se mencionó anteriormente.

Señal modulada senoidalmente en frecuencia

El siguiente ejemplo que se presenta es el de una señal con una modulación senoidal en frecuencia para lo cual se generó una señal de 128 muestras con límites de modulación de 0.05 a 0.45 en frecuencia normalizada. La siguiente ecuación es la función que describe a la señal modulada:

$$\Psi_s(t) = e^{j\varphi(t)} \quad (2.46)$$

La fase $\varphi(t)$ describe el siguiente comportamiento:

$$\varphi(t) = (2\pi f_{mid}t) + \Delta f \tau \left[\text{sen} \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \phi \right) - \text{sen}(\phi) \right] \quad (2.47)$$

Donde:

$$f_{mid} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2} \quad (2.48)$$

$$\phi = -\text{acos} \left(\frac{f_0 - f_{mid}}{\Delta f} \right) \quad (2.49)$$

$$\Delta f = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} \quad (2.50)$$

f_{mid} es la frecuencia media resultante entre $f_{max}=0.45$ y $f_{min}=0.05$

τ es el periodo de la senoidal, en nuestro caso $\tau = N$

t es la variable independiente que representa al tiempo

f_0 es la frecuencia normalizada a un tiempo promedio, en nuestro caso $f_0=0.25$

Al graficar la fase definida en la ecuación (2.47) obtenemos el comportamiento que se muestra en la figura 2.16(a). La frecuencia promedio se muestra en la misma figura (b). La señal resultante de esta modulación con una amplitud constante es la mostrada en (c). Finalmente obtenemos un espectro de energía como el de (d).

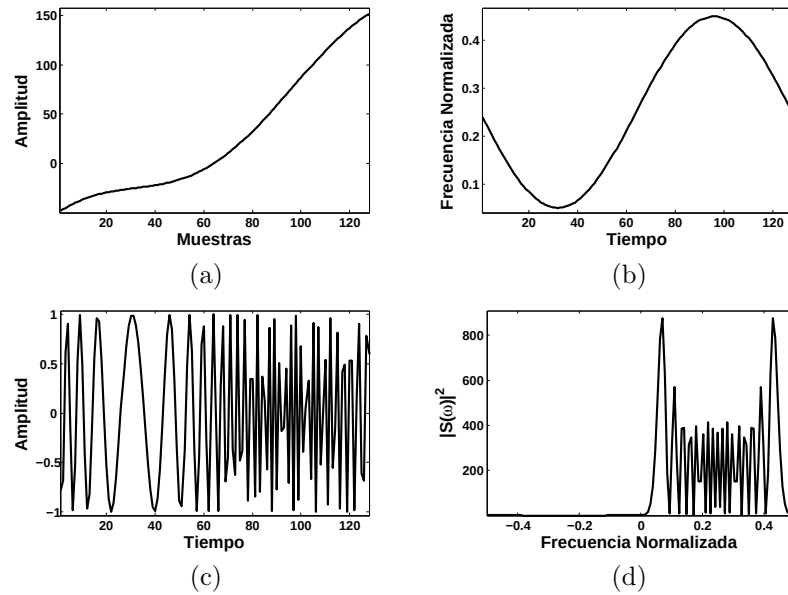


Figura 2.16: (a) Comportamiento de la fase, (b) Frecuencia instantánea de la señal, (c) Señal con modulación senoidal en frecuencia, (d) Espectro de energía de la señal modulada senoidalmente en frecuencia.

La *WD* de una señal modulada senoidalmente en frecuencia se muestra a continuación:

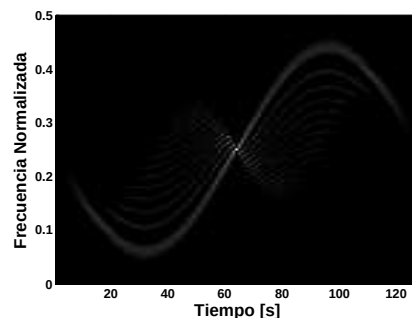


Figura 2.17: Distribución de Wigner de una señal modulada senoidalmente en frecuencia

Aún con la presencia de términos cruzados es posible notar el comportamien-

to senoidal de la frecuencia para cada muestra de la señal. Existe una mayor densidad espectral cercana a los límites de la frecuencia normalizada tal cual lo describe la figura 2.16(d) a pesar de que la amplitud máxima se presenta al centro del plano.

Señal modulada parabólicamente en frecuencia

La ecuación (2.51) describe el comportamiento de una señal modulada en frecuencia parabólicamente de acuerdo a la ecuación de su fase expresada en (2.52) y cuyas gráficas se muestran en la figura 2.18:

$$\Psi(t) = e^{j\varphi(t)} \quad (2.51)$$

$$\varphi(t) = 2\pi \left(at + \frac{b}{2}t^2 + \frac{c}{3}t^3 \right) \quad (2.52)$$

Donde a , b y c son constantes y para nuestro ejemplo $a = 0.4$, $b = 0.0112$, $c = 8.6806 \times 10^{-5}$.

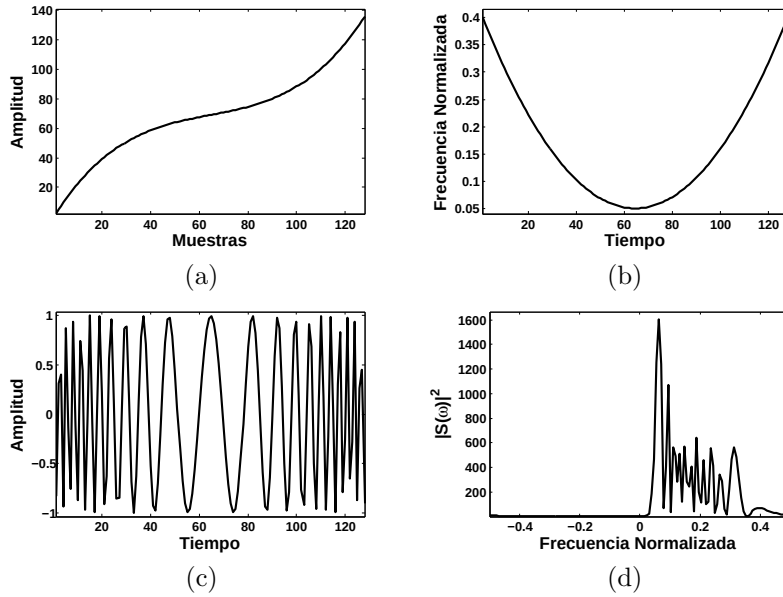


Figura 2.18: (a) Comportamiento de la fase, (b) frecuencia instantánea de la señal, (c) señal con modulación parabólica en frecuencia, (d) espectro de energía de la señal modulada parabólicamente en frecuencia

La WD de una señal modulada parabólicamente en frecuencia se muestra en la figura 2.19:

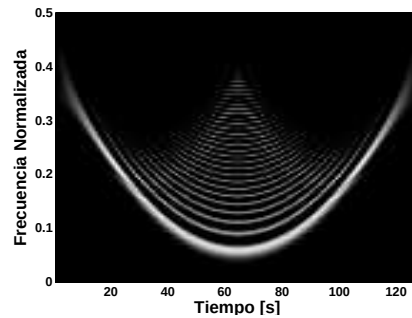


Figura 2.19: *Distribución de Wigner* de una señal modulada parabólicamente en frecuencia

La ecuación del comportamiento de la fase es de tercer orden, lo que implica que al derivar la fase obtendríamos una ecuación de segundo orden, es decir, una parábola tal cual se muestra en la figura 2.19.

Si multiplicamos la señal anterior por un pulso cuyo centro se desplace a lo largo de las 128 muestras obtendríamos una WD que, por zonas, sería similar a la de la figura 2.19 como se muestra en la siguiente secuencia de imágenes de la figura 2.20:

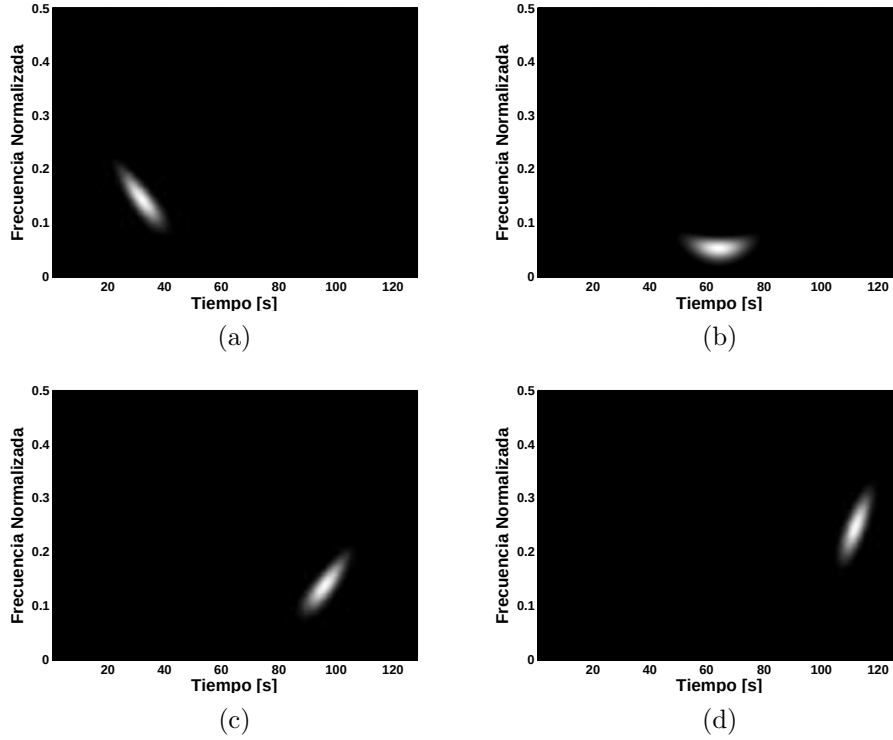


Figura 2.20: Distribución de Wigner de una señal modulada parabólicamente en frecuencia multiplicada por un pulso Gaussiano centrado en (a) 32, (b) 64, (c) 96 y (d) 112.

Al multiplicar la señal por un pulso Gaussiano provocamos que la señal solo exista para cierto intervalo de muestras, de ahí que solo se vea una porción de la *WD* de la primera señal.

Capítulo 3

Conjuntos de Láseres de Prueba

En el capítulo 1 se hizo una descripción del funcionamiento de un láser de semiconductor DFB con base en tres ecuaciones diferenciales conocidas como *ecuaciones de estado*. La primera de estas ecuaciones diferenciales, conocida como ecuación de estado de densidad de portadores, representa la variación de N respecto al tiempo. La segunda ecuación, llamada ecuación de estado de densidad de fotones, hace una descripción de la variación de S respecto al tiempo; la importancia de esta ecuación radica en el hecho de que a partir de esta se obtiene la potencia de la señal óptica. La tercera y última ecuación, llamada ecuación de estado de la fase, describe las variaciones dinámicas con respecto a la frecuencia nominal del láser, es decir, el chirp, fenómeno descrito en el capítulo 2 de esta tesis.

Todos estos conceptos, presentados en el capítulo 1, son utilizados a lo largo de este capítulo para hacer una clasificación del tipo de chirp presente en una señal óptica derivada de un láser para telecomunicaciones que es modulado directamente. En este capítulo se presentan los diferentes láseres utilizados en las pruebas realizadas para validar los algoritmos de clasificación que se proponen en el capítulo 4. Además, se hace referencia a sus parámetros físicos y a la generación de señales sintéticas que, junto con los conceptos estudiados en el capítulo 2, serán utilizados en el siguiente capítulo para validar los algoritmos de clasificación, y que forman la aportación más importante de esta tesis.

3.1. Conjunto de Láseres de Prueba

Hacer una clasificación del tipo de chirp presente en una señal óptica modulada directamente implica la realización de pruebas con diferentes láseres donde cada uno contenga distintas características de chirp. Debido a que no se cuenta con señales experimentales, se construyen las señales ópticas sintéticas a partir de los valores de los parámetros físicos que definen los láseres que las producen. Estas son resultado de la resolución de las ecuaciones de estado (1.7), (1.8) y (1.10).

3.1.1. Generador de Señales de Prueba

La configuración del sistema de transmisión óptico que se ha planteado para trabajar en esta tesis es el de modulación directa, el cual, como se mencionó en el capítulo 1, se basa en el uso de una señal de corriente ingresada directamente al láser para modularlo provocando la emisión de una señal óptica que es, en principio, proporcional a la corriente de inyección. En este tipo de configuración la corriente modulada es acotada por umbrales de corriente que establecen el valor de un 0 o de un 1 lógico. Así, para la representación de un 0 se aplica una corriente I_0 y para la representación de un 1 se aplica una corriente I_1 . Este tipo de configuración se presentó en la figura 1.11, y corresponde a modulación en amplitud de campo eléctrico, o ASK (*amplitude shift keying*).

Se hace uso de la herramienta matemática MATLAB para el desarrollo de la programación necesaria para la obtención y el análisis de resultados. Para la construcción de las señales de prueba se hace uso de una secuencia PRBS (*Pseudo Random Binary Sequence*) de 64[Bits] y a una velocidad de transmisión de 2.5[Gbps]. La señal es muestreada a una tasa de 64[muestras/bit]¹. En la tabla 3.1 se resumen los parámetros utilizados para la secuencia PRBS con sus respectivos valores:

Parámetro	Valor
Tasa de muestreo	1.6×10^{11} [muestras/s]
Periodo de muestreo	6.25[ps]
Ventana de tiempo	25.6[ns]

Tabla 3.1: Parámetros PRBS

En la figura 3.1 se muestra el ejemplo de una corriente moduladora basada en una secuencia PRBS y con los umbrales de corriente $I_0 = 10.2$ [mA] y $I_1 =$

¹La razón de utilizar estos valores se justifica en el uso de la memoria de procesamiento

41.32[mA].

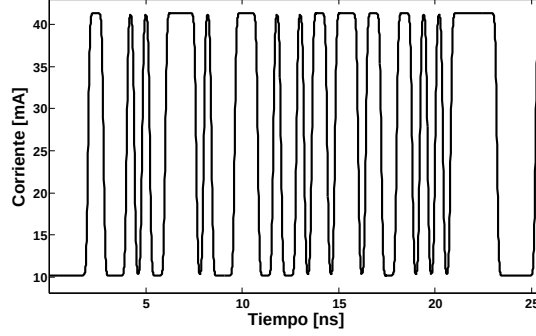


Figura 3.1: Ejemplo de corriente moduladora de un láser modulado directamente

La corriente moduladora presentada en la figura 3.1 representa la entrada que recibe el sistema óptico modulado directamente. Para generar las señales ópticas de prueba se resuelven las tres ecuaciones de estado mediante el uso de la función `ode45` de MATLAB estableciendo uno a uno el valor de los parámetros físicos y el de las condiciones iniciales necesarias N_0 y S_0 para obtener finalmente la potencia P con la ecuación (1.9), la fase ϕ y la densidad de portadores N de la señal óptica con las ecuaciones (1.10) y (1.7), respectivamente.

3.1.2. Grupos de Parámetros Láser

La realización de pruebas de los algoritmos propuestos implica la necesidad de contar con una gama de grupos de parámetros físicos de láser a fin de hacer las comparaciones necesarias para el análisis de resultados. Al no tener disponibles datos experimentales, se hace uso de la literatura para obtener estos conjuntos de parámetros físicos de prueba. En [6] se presentan procedimientos para la extracción de parámetros físicos de un láser mediante observaciones experimentales y del uso de las ecuaciones de estado, similares a las descritas en el capítulo 1. Los láseres definidos en esta publicación forman parte del conjunto de láseres de prueba utilizados en esta tesis. En [1] se presentan otros grupos de parámetros derivados también de mediciones experimentales que igualmente son utilizados en este trabajo. El resto de los conjuntos de parámetros de láseres utilizados en esta tesis son propuestos por el grupo de trabajo, basados en la experiencia y el comportamiento de los láseres cuyos parámetros fueron derivados de mediciones experimentales. Esta manera de proceder nos asegura que el algoritmo propuesto es validado con señales derivadas de modelos teóricos muy

apegados a lo que se observaría en la realidad. Esto garantiza que, de funcionar bien el algoritmo de clasificación propuesto, no habrá, en principio, problemas al ser trasladado a señales reales.

Se tienen disponibles un total de 9 grupos de parámetros físicos láser, los cuales se dividen en dos clasificaciones: de parámetros físicos experimentales y de parámetros físicos propuestos. En la primera clasificación se presentan cuatro grupos de parámetros láser, donde los grupos **Laser1** y **Laser2** son tomados de [6]; y **Laser3** y **Laser4** son tomados de [1].

En la tabla 3.2 se presentan los valores para los grupos de parámetros de la primera clasificación:

Parámetro	Unidades	Laser1	Laser2	Laser3	Laser4
Γ	[1]	0.12	0.12	0.25	0.12
g_0	$[m^3/s] \times 10^{-12}$	7.8956	4.6143	1.4251	10.468
N_T	$[1/m^3] \times 10^{23}$	0.49616	6.7926	10.7278	1.2804
ϵ	$[m^3] \times 10^{-23}$	7.4895	0.442	0.83	0.958
τ_p	[ps]	3.6355	9.6808	0.78689	2.1498
η	[1]	0.1515	0.1726	0.151	0.2813
τ_c	[ns]	0.374	0.256	0.74	0.167
V	$[m^3] \times 10^{-17}$	3.2	3.2	2.18	3.2
α	[1]	2.2	5.6	2.7	2.7
β	$[1] \times 10^{-5}$	2.81	1.9539	9.325	0.3791
N_0	$[1/m^3] \times 10^{23}$	3.3993	8.658	47.5	4.9762
S_0	$[1/m^3] \times 10^{16}$	1.1159	7.6767	110000	7.6767
I_0	[mA]	10.2068	21.2493	35	36.01
I_1	[mA]	41.3213	48.2195	65	73.88
κ	[THz/W]	28.7	1.5	9.9	1.98
λ	[nm]	1536.8	1550	1550	1550
I_{th}	[mA]	4.66	17.34	21.9	15.3

Tabla 3.2: Grupos de parámetros físicos experimentales

La segunda clasificación ha sido denominada de parámetros propuestos debido a que se presentan 5 grupos de parámetros físicos donde a cada uno de los parámetros se le asignó un valor dentro del rango de valores posibles que puede tomar tal parámetro, logrando de esta manera definir grupos de parámetros con características específicas para fines de comparación de resultados. En la tabla 3.3 se presentan los valores de los grupos de parámetros físicos propuestos:

Parámetro	Unidades	Laser5	Laser6	Laser7	Laser8	Laser9
Γ	[1]	0.4	0.4	0.12	0.4	0.12
g_0	$[m^3/s] \times 10^{-12}$	6.0083	4.9989	2.58916	6.0083	7.6906
N_T	$[1/m^3] \times 10^{23}$	1.3779	3.005	8.37397	1.3501	4.7176
ϵ	$[m^3] \times 10^{-23}$	25	0.3	0.205	5.50	2
τ_p	[ps]	2.5716	2.5155	10.7	2.5283	9.558
η	[1]	0.4	0.4	0.120068	0.4	0.1655
τ_c	[ns]	2	1.5	0.286	2	0.3
V	$[m^3] \times 10^{-17}$	30	30	3.2	30	3.2
α	[1]	5.5	8	4.5	5.5	4
β	$[1] \times 10^{-5}$	2.047	1.9994	0.909391	2.0125	5.2645
N_0	$[1/m^3] \times 10^{23}$	2.99	4.99	3.3993	2.9959	3.3993
S_0	$[1/m^3] \times 10^{16}$	0.31542	0.66969	1.1159	0.30487	1.1159
I_0	[mA]	10	22	27.26	10	14
I_1	[mA]	25.1	56	65.995	25	41.8
κ	[THz/W]	13	0.156	0.998483	2.86	7.0216
λ	[nm]	1545	1546	1550	1550	1540
I_{th}	[mA]	7.2	16	20.4	7.2	10

Tabla 3.3: Grupos de parámetros físicos propuestos

La definición de todos los parámetros que contienen las tablas han sido previamente presentados en el capítulo 1.

3.2. Señales Sintéticas

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la resolución de las ecuaciones de estado para cada uno de los grupos de parámetros que conforman el conjunto de láseres de prueba. De las ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.10) se obtiene N , ϕ y con S se obtiene P [6]. Para todos los casos se eliminan las oscilaciones de relajación iniciales a fin de evitar cualquier afectación en los resultados. Estas son producidas al encender el láser y por ende no deben ser tomadas en cuenta.

Grupo de parámetros	Clasificación
Laser1	<i>Adiabático</i>
Laser2	<i>Transitorio</i>
Laser3	<i>Adiabático</i>
Laser4	<i>Adiabático</i>
Laser5	<i>Adiabático</i>
Laser6	<i>Transitorio</i>
Laser7	<i>Transitorio</i>
Laser8	<i>Transitorio</i>
Laser9	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.4: Clasificación visual del tipo de chirp predominante con base en la observación del comportamiento de N y el chirp

En la figura 3.2 se presentan las gráficas de la potencia óptica P obtenida para cada uno de los láseres del conjunto de prueba:

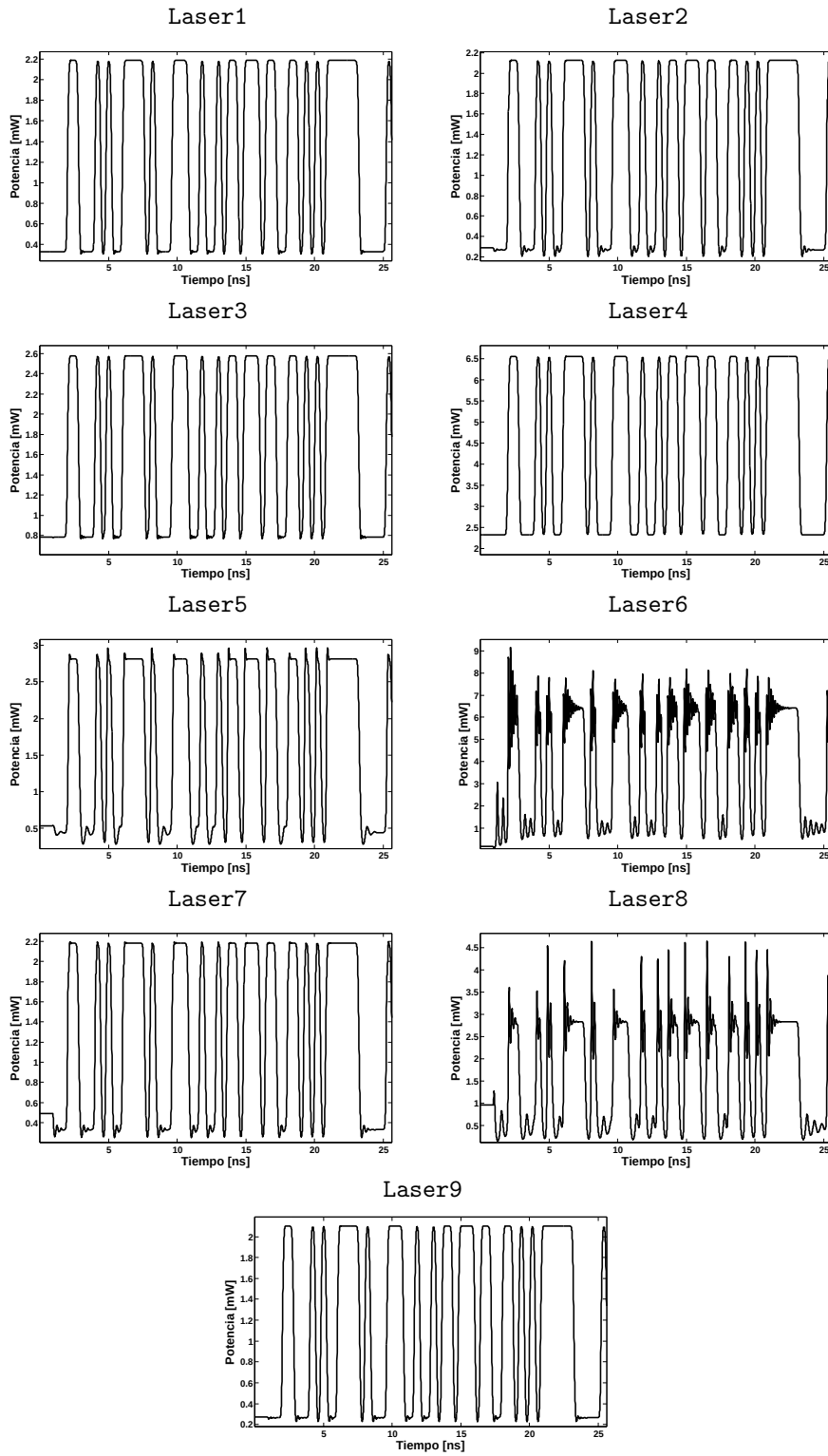


Figura 3.2: Potencia óptica P obtenida para todo el conjunto de láseres de prueba

A diferencia de N , la información desplegada por el comportamiento de P resulta insuficiente para conocer el tipo de chirp predominante en la señal, sin embargo, de la figura 3.2 se observan ciertas amortiguaciones que se presentan al inicio de cada bit. Para el caso del **Laser6** y **Laser8** estas son más prolongadas y de mayor amplitud que para los casos restantes. Esto deriva directamente del comportamiento de la densidad de fotones definida en la ecuación (1.8) dada su relación con la potencia presentada en la ecuación (1.9), donde el valor de los parámetros τ_c y τ_p determinan en buena medida la duración de dichas amortiguaciones u oscilaciones de relajación [3][5].

En la figura 3.3 se presenta el chirp calculado para cada uno de los grupos de parámetros del conjunto de prueba a partir de ϕ dada la ecuación (1.12):

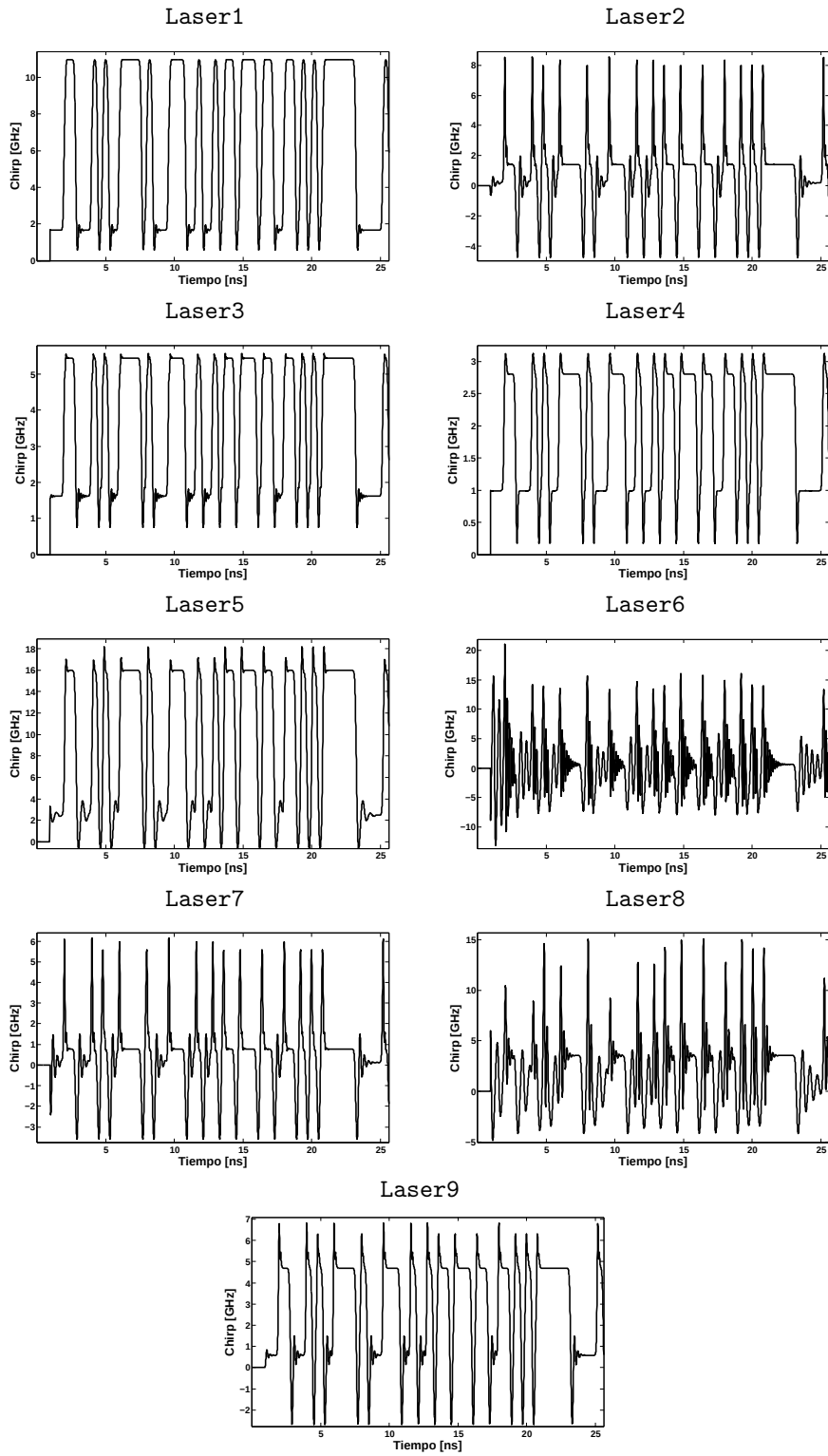


Figura 3.3: Chirp calculado para todo el conjunto de láseres de prueba

Para el chirp correspondiente a los grupos de parámetros **Laser1**, **Laser3**, **Laser4**, **Laser5** y **Laser9** que se presentan en la figura 3.3 es claro que el comportamiento que sigue el chirp es adiabático, dado que los cambios de frecuencia se presentan siempre respecto al nivel de potencia, además de que al observar el comportamiento del chirp es claramente visible la diferencia entre 1's y 0's. Al hacer una comparación entre la gráfica del chirp de estos grupos de parámetros con su correspondiente gráfica de potencia de la figura 3.2 se observa un comportamiento muy similar entre ambas variables, lo que reafirma que se trata de la presencia de chirp predominantemente adiabático.

En el caso del chirp de los grupos de parámetros **Laser2**, **Laser6**, **Laser7** y **Laser8** se observa un comportamiento predominantemente transitorio debido a que los cambios de frecuencia se presentan muy bruscamente en las transiciones de bit, un incremento pronunciado e instantáneo de frecuencia cuando la transición es de subida y un decremento pronunciado e instantáneo de frecuencia cuando la transición es de bajada, además de que la frecuencia tiende a permanecer a cierto nivel en todo momento, inclusive después de una transición de bit. Al hacer una comparación del chirp con su correspondiente gráfica de potencia de la figura 3.2 se observa un muy ligero parecido entre ambos comportamientos. Este criterio fue utilizado en la tabla 3.4 para clasificar visualmente el tipo de chirp predominante,

Cabe destacar que en [6] y [1] el **Laser1** es clasificado como adiabático y el **Laser2** es clasificado como transitorio, lo cual demuestra que la resolución del sistema de ecuaciones de estado realizada arroja datos fidedignos y apegados a lo esperado.

3.3. Conjunto Ampliado de Señales Sintéticas

En la definición física de chirp existen dos variables clave para su identificación, estas son: el factor de incremento de ancho de línea espectral del material α , relacionado con el chirp transitorio, y el coeficiente de chirp adiabático κ , ambas presentes en las distintas ecuaciones que describen al chirp, así como en las tablas de parámetros anteriormente presentadas. Al modificar alguna de estas variables se modifica también el chirp de la señal óptica, forzando su comportamiento como transitorio o adiabático según sea el caso. Este experimento resulta útil para las pruebas de clasificación del tipo de chirp ya que se amplía considerablemente el número de grupos de parámetros disponibles y, sobre todo, permite asegurarse del tipo de chirp de la señal óptica sintética con que se está trabajando. El saber a priori si el chirp de la señal que se está probando es predominantemente adiabático o transitorio (o ninguno de los dos) es funda-

mental para poder saber si el algoritmo de clasificación opera correctamente.

Dada la ecuación (1.15) que define a κ , se elige como parámetro a variar Γ debido a que es más fácilmente manipulable que el resto de los parámetros que intervienen en esta ecuación, por el rango de valores que toma, pues al representar la cantidad de luz confinada en una unidad de área, toma un rango de valores $0 \leq \Gamma \leq 1$.

Al modificar el valor de Γ en cada grupo de parámetros de prueba se provoca que el chirp se modifique gradualmente siguiendo una lógica, pues al aumentar el valor de Γ , tornamos el láser a que tenga un comportamiento más adiabático, y viceversa, al disminuir el valor de Γ , el láser presenta un comportamiento más transitorio, lo cual nos permite tener control sobre el chirp de la señal que el láser genera y que se utilizará para validar los algoritmos presentados en esta tesis.

En la figura 3.4 se muestra la evolución del chirp del **Laser1** cuando variamos su valor de Γ . Nótese que el valor original, propuesto en la tabla 3.2, corresponde a $\Gamma = 0.12$.

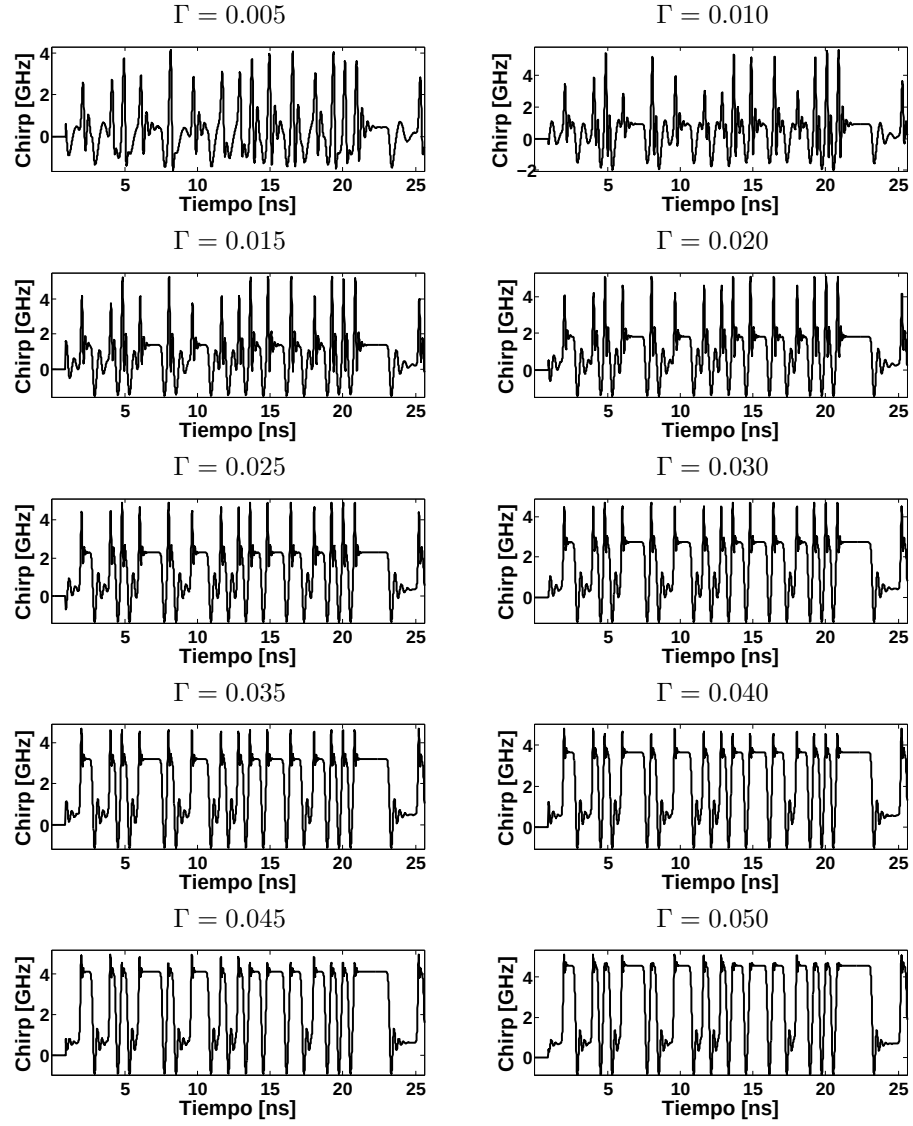


Figura 3.4: Comportamiento del chirp para Laser1 con un factor de confinamiento variable

Conforme se incrementa el valor de Γ , el chirp se modifica, haciéndose cada vez más adiabático. Cuando $\Gamma < 0.015$ el chirp predominante es prácticamente transitorio sin lugar a dudas, en un intervalo aproximado entre $0.020 < \Gamma < 0.030$ podemos identificar una zona de incertidumbre en la que no es fácilmente discernible si se trata de chirp predominantemente adiabático o transitorio, sin embar-

go, a partir de $\Gamma > 0.035$ el comportamiento es predominantemente adiabático. El valor máximo alcanzado de Γ es 0.42 aproximadamente, a partir de este valor, el chirp se distorsiona debido a una saturación de la señal óptica.

A continuación se muestra en la figura 3.5 el caso del chirp del grupo de parámetros **Laser2** cuando variamos su valor de Γ . Nótese que el valor original, propuesto en la tabla 3.2, corresponde a $\Gamma = 0.12$.

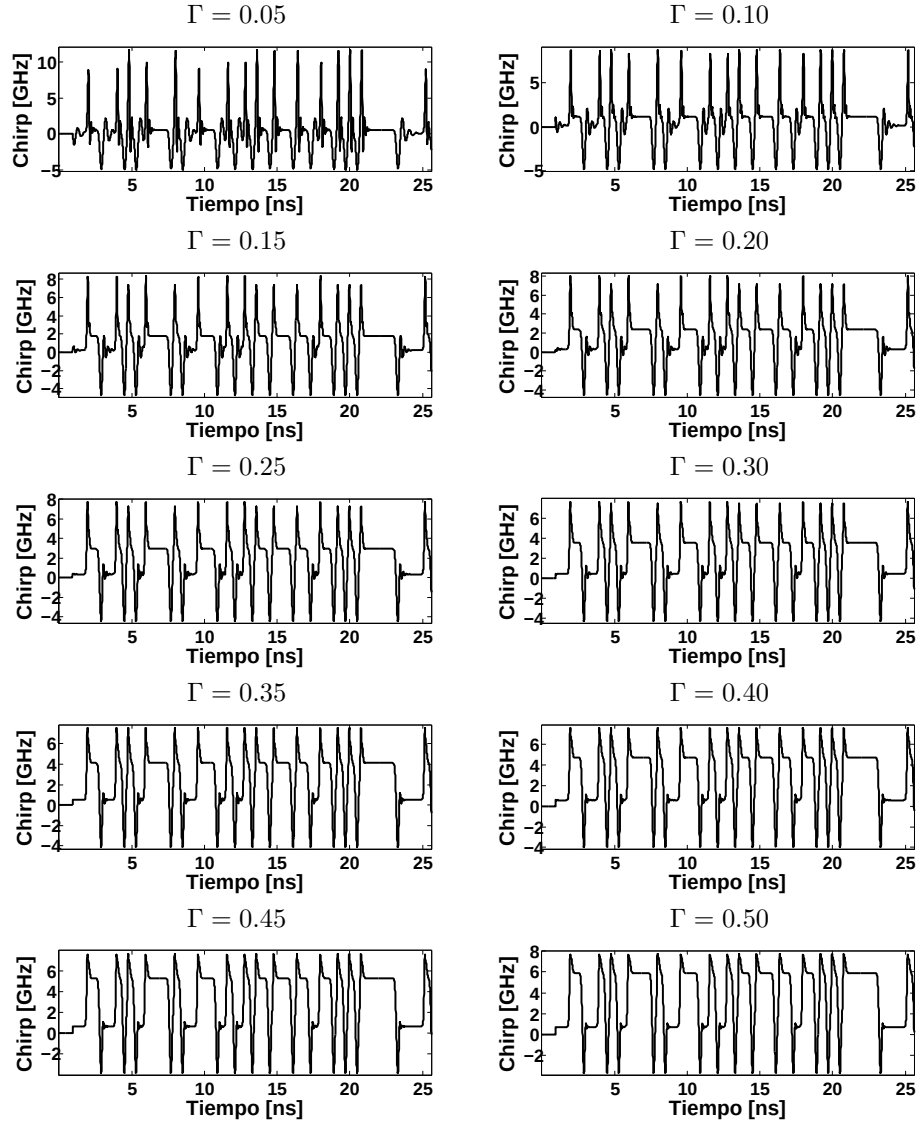


Figura 3.5: Comportamiento del chirp para *Laser2* con un factor de confinamiento variable

Para el caso del *Laser2* se observa que para $\Gamma < 0.15$ el comportamiento es predominantemente transitorio. Se presenta la zona de incertidumbre en un rango de aproximadamente $0.2 < \Gamma < 0.3$ donde es difícilmente identificable el tipo de chirp predominante. A partir de un valor de $\Gamma > 0.35$ el comportamiento que predomina es claramente adiabático.

De las dos figuras anteriores se demuestra que al modificar el valor de Γ efectivamente se modifica el chirp en la señal óptica. Al hacer el mismo ejercicio para el resto del conjunto de prueba se obtienen resultados similares, sin embargo, por razones de espacio no se muestra el resto de los casos.

A continuación se presentan las clasificaciones visuales de tipo de chirp predominante para el conjunto de prueba a fin de hacer una comparación con los resultados obtenidos de los algoritmos de clasificación propuestos en los siguientes capítulos. En la primera columna se muestran los valores del factor de confinamiento óptico. Cabe destacar que aún cuando algún valor de Γ no necesariamente corresponda a casos físicamente posibles estos se utilizan con la finalidad de controlar la transición de transitorio a adiabático.

En la segunda columna se muestra la relación $\alpha : \kappa$, definida en la sección 1.1.9 correspondiente para ese valor de Γ . En la tercera columna se muestra el tipo de chirp predominante visualmente detectado. Para aquellos valores de Γ para los cuales no es claro visualmente qué tipo de chirp predomina, se clasifican como *Mixtos*, haciendo alusión a que ambos tipos de chirp predominan, además de ser la zona que enmarca la zona de incertidumbre.

Nótese que los intervalos en que se varía Γ son diferentes para cada láser. Dichos intervalos (y la correspondiente diferencia entre valores de Γ) se definieron de manera que incorporaran una transición del tipo de láser de adiabático a transitorio, de modo que permitan validar el algoritmo de clasificación que más adelante se presenta.

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.005	2.2 : 1.19	<i>Transitorio</i>
0.01	2.2 : 2.38	<i>Transitorio</i>
0.015	2.2 : 3.58	<i>Transitorio</i>
0.02	2.2 : 4.77	<i>Mixto</i>
0.025	2.2 : 5.97	<i>Mixto</i>
0.03	2.2 : 7.16	<i>Mixto</i>
0.035	2.2 : 8.36	<i>Adiabático</i>
0.04	2.2 : 9.55	<i>Adiabático</i>
0.045	2.2 : 10.75	<i>Adiabático</i>
0.05	2.2 : 11.94	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.5: Clasificación visual **Laser1**

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.05	5.6 : 0.62	<i>Transitorio</i>
0.1	5.6 : 1.25	<i>Transitorio</i>
0.15	5.6 : 1.88	<i>Transitorio</i>
0.2	5.6 : 2.5	<i>Mixto</i>
0.25	5.6 : 3.12	<i>Mixto</i>
0.3	5.6 : 3.75	<i>Mixto</i>
0.35	5.6 : 4.37	<i>Adiabático</i>
0.4	5.6 : 4.99	<i>Adiabático</i>
0.45	5.6 : 5.62	<i>Adiabático</i>
0.5	5.6 : 6.24	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.6: Clasificación visual **Laser2**

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.025	5.6 : 1.25	<i>Transitorio</i>
0.05	5.6 : 1.887	<i>Transitorio</i>
0.075	5.6 : 2.5	<i>Mixto</i>
0.1	5.6 : 3.12	<i>Mixto</i>
0.125	5.6 : 3.75	<i>Adiabático</i>
0.15	5.6 : 4.37	<i>Adiabático</i>
0.175	5.6 : 4.99	<i>Adiabático</i>
0.2	5.6 : 5.62	<i>Adiabático</i>
0.225	5.6 : 6.24	<i>Adiabático</i>
0.25	5.6 : 6.87	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.7: Clasificación visual **Laser3**

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.0125	2.7 : 0.21	<i>Transitorio</i>
0.025	2.7 : 0.42	<i>Transitorio</i>
0.0375	2.7 : 0.62	<i>Mixto</i>
0.05	2.7 : 0.83	<i>Mixto</i>
0.0625	2.7 : 1.04	<i>Mixto</i>
0.075	2.7 : 1.23	<i>Adiabático</i>
0.0875	2.7 : 1.45	<i>Adiabático</i>
0.1	2.7 : 1.66	<i>Adiabático</i>
0.1125	2.7 : 1.87	<i>Adiabático</i>
0.125	2.7 : 2.07	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.8: Clasificación visual **Laser4**

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.025	5.5 : 0.81	<i>Transitorio</i>
0.075	5.5 : 2.43	<i>Transitorio</i>
0.125	5.5 : 4.05	<i>Mixto</i>
0.175	5.5 : 5.67	<i>Mixto</i>
0.225	5.5 : 7.29	<i>Adiabático</i>
0.275	5.5 : 8.9	<i>Adiabático</i>
0.325	5.5 : 10.52	<i>Adiabático</i>
0.375	5.5 : 12.14	<i>Adiabático</i>
0.425	5.5 : 13.76	<i>Adiabático</i>
0.475	5.5 : 15.38	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.9: Clasificación visual **Laser5**

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.1	8 : 0.04	<i>Transitorio</i>
0.2	8 : 0.08	<i>Transitorio</i>
0.3	8 : 0.12	<i>Transitorio</i>
0.4	8 : 0.16	<i>Transitorio</i>
0.5	8 : 0.19	<i>Transitorio</i>
0.6	8 : 0.23	<i>Transitorio</i>
0.7	8 : 0.27	<i>Transitorio</i>
0.8	8 : 0.31	<i>Transitorio</i>
0.9	8 : 0.35	<i>Transitorio</i>
1	8 : 0.39	<i>Transitorio</i>

Tabla 3.10: Clasificación visual **Laser6**

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.1	4.5 : 0.83	<i>Transitorio</i>
0.2	4.5 : 1.66	<i>Transitorio</i>
0.3	4.5 : 2.5	<i>Mixto</i>
0.4	4.5 : 3.32	<i>Mixto</i>
0.5	4.5 : 4.16	<i>Mixto</i>
0.6	4.5 : 4.99	<i>Adiabático</i>
0.7	4.5 : 5.82	<i>Adiabático</i>
0.8	4.5 : 6.66	<i>Adiabático</i>
0.9	4.5 : 7.49	<i>Adiabático</i>
1	4.5 : 8.32	<i>Adiabático</i>

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.5	5.5 : 3.57	<i>Transitorio</i>
0.55	5.5 : 3.93	<i>Transitorio</i>
0.6	5.5 : 4.23	<i>Transitorio</i>
0.65	5.5 : 4.65	<i>Mixto</i>
0.7	5.5 : 5	<i>Mixto</i>
0.75	5.5 : 5.36	<i>Mixto</i>
0.8	5.5 : 5.72	<i>Mixto</i>
0.85	5.5 : 6.07	<i>Adiabático</i>
0.9	5.5 : 6.43	<i>Adiabático</i>
0.95	5.5 : 6.79	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.11: Clasificación visual **Laser7** Tabla 3.12: Clasificación visual **Laser8**

Γ	$\alpha : \kappa$	Clasificación
0.025	4 : 1.46	<i>Transitorio</i>
0.0375	4 : 2.19	<i>Transitorio</i>
0.05	4 : 2.93	<i>Transitorio</i>
0.0625	4 : 3.65	<i>Mixto</i>
0.075	4 : 4.38	<i>Mixto</i>
0.0875	4 : 5.12	<i>Mixto</i>
0.1	4 : 5.85	<i>Mixto</i>
0.1125	4 : 6.58	<i>Adiabático</i>
0.125	4 : 7.31	<i>Adiabático</i>
0.1375	4 : 8.05	<i>Adiabático</i>

Tabla 3.13: Clasificación visual **Laser9**

En el caso del **Laser6**, presentado en la tabla 3.10, este se clasifica para cualquier valor de Γ como transitorio, esto se debe a la notable diferencia que existe entre los valores de la relación $\alpha : \kappa$ para cualquier valor de Γ , pues α es notablemente predominante sobre κ dada la definición del chirp presentada en la sección 1.1.9 donde se describió esta relación.

Para el **Laser1** la transición de chirp transitorio a adiabático se genera para valores muy pequeños de Γ debido a que el valor del parámetro α no es muy grande² en proporción con los valores que κ va tomando conforme aumenta Γ . Se presenta un caso muy similar para **Laser4** y **Laser9**.

Observando el comportamiento que se presenta en todos los láseres podemos concluir que entre más rápido crece el valor de κ conforme Γ aumenta implica

²dado el comportamiento del **Laser6** podemos considerar su valor de $\alpha = 8$ grande

que la transición de transitorio a adiabático se presentará más rápidamente, es decir, para valores más pequeños de Γ . Sin embargo, lo más importantes es notar que existe una congruencia clara entre la relación $\alpha : \kappa$ y la clasificación que visualmente se le está dando al chirp.

3.4. Obtención de la WD

A lo largo de este capítulo se han descrito los diferentes láseres que se han utilizado para validar los algoritmos de clasificación que se presentan en el capítulo 4. En esta sección se presentan las WD obtenidas para cada uno de los láseres de prueba, además, se hace una descripción de como varía su WD conforme forzamos el comportamiento del chirp de la señal sintética haciéndolo más transitorio o adiabático, según sea el caso.

De las ecuaciones (1.9) y (1.10), y mediante el programa desarrollado en MATLAB se obtiene una señal s para cada láser de prueba a partir de la ecuación (3.1), la cual describe a una señal compleja de amplitud $\sqrt{P}$ y fase ϕ de la forma:

$$s = \sqrt{P}(\cos(\phi) + j\sin(\phi)) \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) tiene la forma de (A.4) en su forma cuadrada definida en el apéndice A. Se eliminan las oscilaciones de relajación iniciales a fin de evitar cualquier afectación en los resultados. La señal s es la utilizada para determinar la WD cuya definición se hizo en la ecuación (2.25).

Dada la ecuación (2.25) que define a la WD , se utiliza una subrutina escrita en MATLAB para determinar primeramente el producto $s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2})$ y posteriormente calcular su transformada de Fourier para obtener así la WD .

3.4.1. WD del Conjunto de Prueba

En la figura 3.6 se presentan las WD obtenidas en MATLAB, correspondientes a las señales sintéticas generadas y presentadas en la sección 3.2.

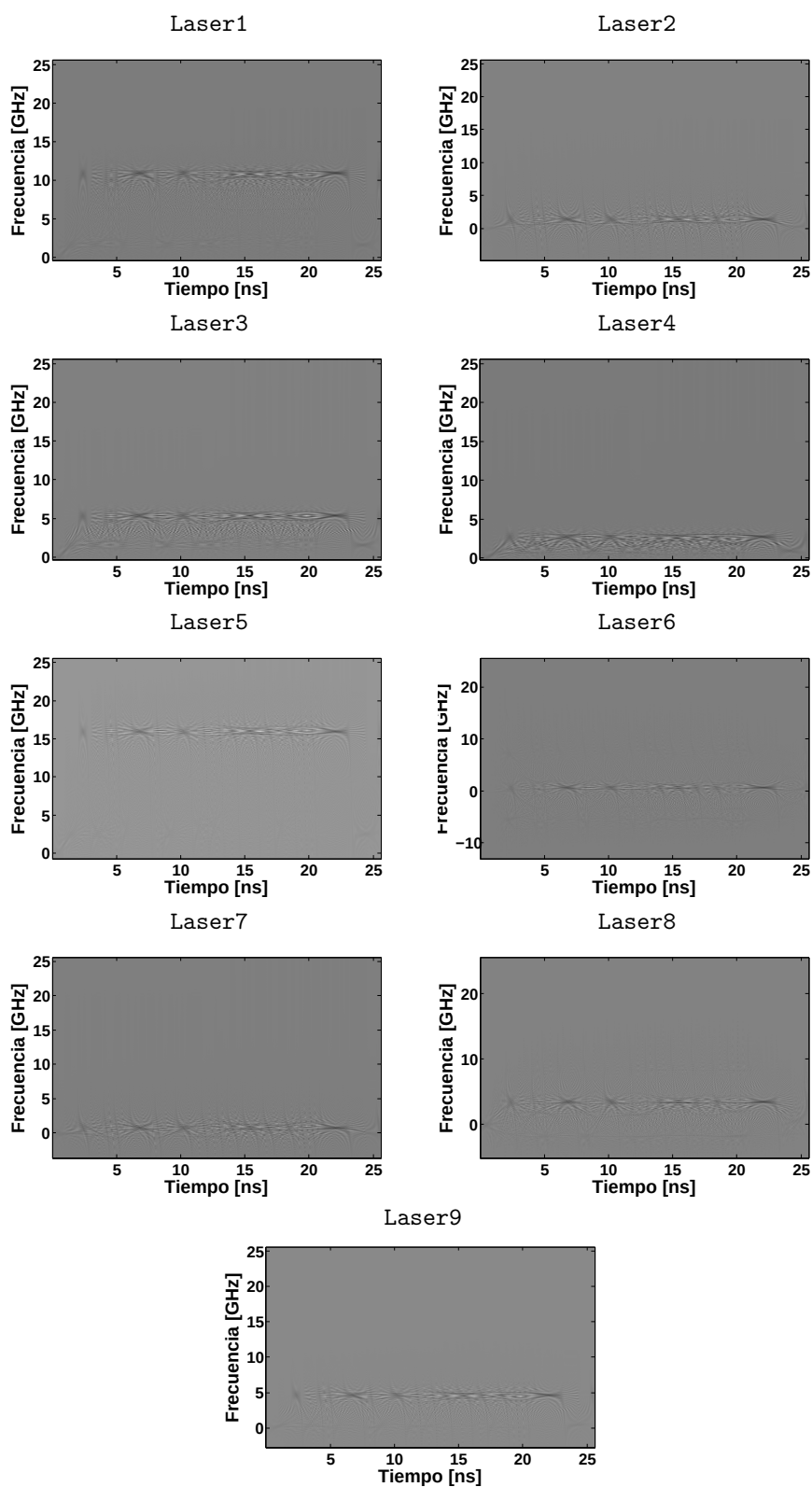


Figura 3.6: WD obtenidas para todo el conjunto de láseres de prueba

De la figura 3.6 podemos observar que en general las *WD* presentan un comportamiento tal que la mayor parte de su energía se ve concentrada en una especie de franja horizontal a un cierto nivel, el cual varía para cada láser. La razón de que aparezca una franja horizontal la podemos deducir observando las figuras 2.9, 2.15, 2.19 y 2.19 en las que se observan *WD* de diferentes señales y en las cuales se puede apreciar la forma que guarda la modulación en frecuencia aparente en la *WD*. Bajo el mismo razonamiento, lo que intenta dibujarse en la *WD* es la forma de la frecuencia instantánea o chirp. Sin embargo, se aprecia también la presencia de los términos cruzados o interferencias de los que se habló en el capítulo 2, y los cuales deforman la visualización del chirp sobre la *WD* (haciéndola ver con una franja continua y son los que representan la principal desventaja sobre esta distribución tiempo-frecuencia) tal cual sucede en la figura 2.19.

El objetivo de los algoritmos de clasificación que se proponen más adelante es determinar, a partir únicamente de las *WD* presentadas en la figura 3.6, las características del chirp de la señal s que nos permitan identificar el tipo de chirp predominante.

3.4.2. *WD* del Conjunto Ampliado de Prueba

En esta sección se presenta el comportamiento que sigue la *WD* cuando se modifica el valor del parámetro Γ para forzar el comportamiento del chirp, tal como se describió en la sección 3.3. En la figura 3.7 se muestran las *WD* para el **Laser1** para valores de Γ dentro del rango donde se detectó visualmente la transición de chirp predominantemente transitorio a adiabático. Estos valores fueron presentados en la tabla 3.5. En la figura 3.8 se presenta el mismo ejercicio para el **Laser2**.

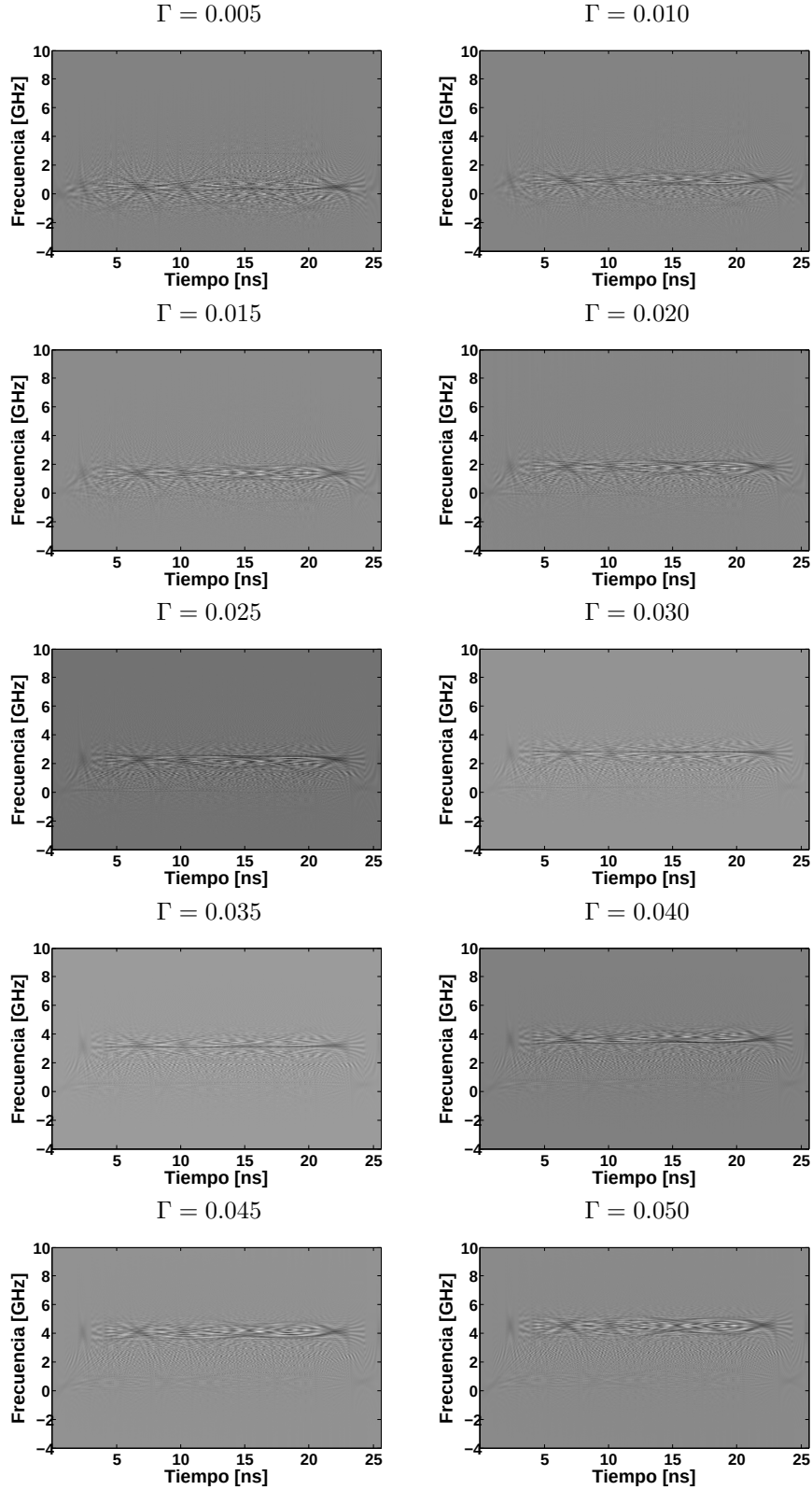


Figura 3.7: Comportamiento de la WD para el Laser1 con un factor de confinamiento variable

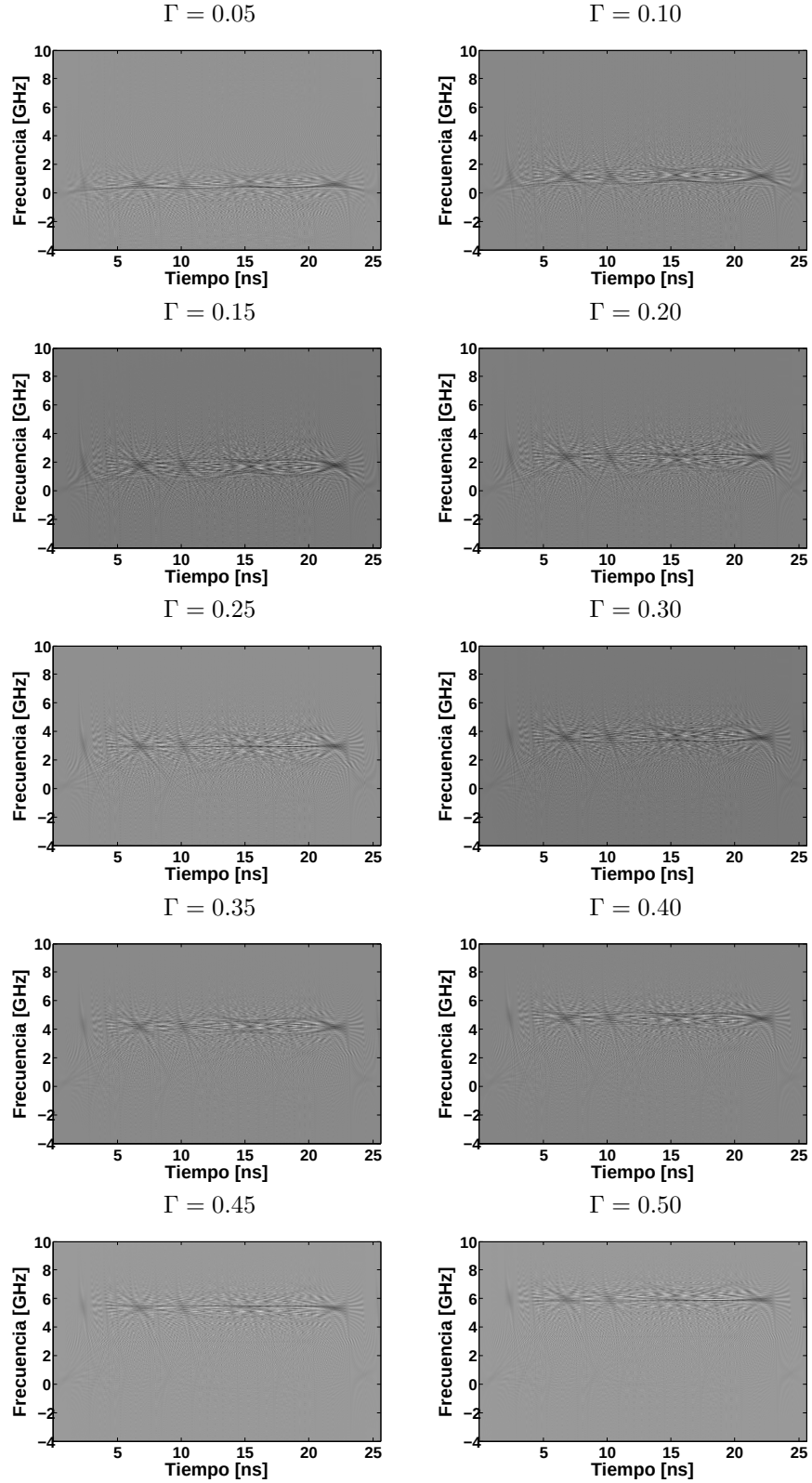


Figura 3.8: Comportamiento de la WD para el Laser2 con un factor de confinamiento variable

En las figuras 3.7 y 3.8 se observa cómo el nivel de mayor concentración de energía aumenta conforme Γ aumenta su valor. Se presenta el mismo comportamiento para el resto del conjunto de prueba, sin embargo, por razones de espacio se omiten las correspondientes gráficas.

Con base en las observaciones hechas en este capítulo se plantean dos maneras para identificar el tipo de chirp, la primera y más sencilla, no necesariamente la mejor, consiste en la utilización de la función de correlación cruzada entre la potencia y el chirp para conocer mediante el correlograma la relación que guardan las dos señales. La segunda propuesta plantea el tratamiento de la WD como imagen para la extracción de las características que permitan diferenciar entre un tipo de chirp y otro.

El conjunto de láseres de prueba, conformado por 9 grupos de parámetros físicos que ha sido presentado en este capítulo es el insumo principal con el cual se trabajará en el siguiente capítulo para hacer la misma clasificación del tipo de chirp presente, pero ya no de manera visual sino automática mediante la utilización de la *Distribución de Wigner* a través de dos algoritmos propuestos que se describirán detalladamente en el capítulo 4.

A este conjunto de láseres de prueba se le suman todos los casos posibles en los que a cada grupo de parámetros se le puede modificar el valor de Γ , logrando ampliar considerablemente el conjunto de prueba a un total aproximado de 400 láseres diferentes. Este amplísimo conjunto de prueba permitirá validar de manera confiable los algoritmos que más adelante se proponen para clasificar el chirp de las señales ópticas, teniendo además certeza a priori del tipo de chirp de cada señal sintética que se utiliza. Lo anterior aumenta el margen de confianza al poder realizar un mayor número de pruebas y reducir los límites de la zona de incertidumbre dentro de la cual los algoritmos propuestos podrían arrojar errores de clasificación.

Capítulo 4

Algoritmos de Clasificación

En los capítulos anteriores se han presentado todas las herramientas necesarias para la validación de los algoritmos de clasificación que se proponen en este capítulo. El primer y segundo capítulo sirvieron de introducción a conceptos que fueron aplicados en el capítulo 3 para generar las señales sintéticas a las cuales se les determinó su correspondiente *WD*.

Para cada elemento del conjunto de prueba ha sido presentada en la figura 3.6 su correspondiente *WD*, así como un análisis de las principales características observadas en comparación con los restantes elementos del conjunto. A partir de este análisis, que deriva única y exclusivamente de la *WD*, se presentan dos propuestas de algoritmos de clasificación.

El primer algoritmo que se presenta en la sección 4.1, se justifica en las propiedades de la *WD* descritas en el capítulo 2 y utiliza como principal herramienta de clasificación la función de correlación cruzada. El segundo algoritmo, presentado en la sección 4.2, propone el tratamiento de la *WD* como imagen, mediante el uso de la *Transformada de Hough* se identifican ciertas características que diferencian una *WD* de otra y de esta manera permite la clasificación del tipo de chirp predominante.

4.1. Correlación Cruzada

En esta sección se presenta el primer algoritmo de clasificación de tipo de chirp basado en el uso de la función de correlación cruzada y de las propiedades de la *WD* que fueron estudiadas en el capítulo 2 y las cuales sirvieron para comprender su funcionamiento. Dichos conceptos se utilizan en este capítulo de tal manera que junto con la función de correlación cruzada se obtiene información a partir de los momentos estadísticos en tiempo y frecuencia de la *función de*

Distribución de Wigner, para así establecer un umbral de clasificación.

4.1.1. Definición

Un tema básico del campo de procesamiento de señales es la función de correlación, la cual se define como una medida de la similitud entre dos señales de N muestras donde dicha similitud es representada mediante un correlograma¹. Cuando una señal se correlaciona consigo misma se le llama autocorrelación, donde el correlograma arrojado es una medida de la similitud entre esa señal y su desplazada. Cuando se utilizan dos señales distintas se le llama correlación cruzada. En la ecuación (4.1) se define la correlación cruzada r_{xy} de las señales $x[k]$ y $y[k]$ [15].

$$r_{xy}[l] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[k+l] \quad |l| = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

De la ecuación (4.1) se obtiene un vector que al graficarlo muestra la relación existente entre ambas señales. Cuando se habla de autocorrelación, el punto máximo en la curva del correlograma se alcanzará cuando el desplazamiento $l = 0$, es decir, cuando las señales estén completamente alineadas. En el caso de la correlación cruzada, el valor máximo de la curva se registrará en el desplazamiento l tal que ambas señales se parezcan más entre sí.

En las siguientes secciones se mostrará la utilización de la correlación cruzada en el algoritmo de clasificación del chirp.

4.1.2. Momentos Probabilísticos de la WD

En la ecuación (2.23) se define la marginal en frecuencia de la WD para una señal s , la cual, como se explicó en la sección 2.6, representa a la energía instantánea de la señal $|s(t)|^2$ y, por otro lado, en la ecuación (2.24) se define la marginal en tiempo de la WD que representa al espectro de energía de la señal $|S(\omega)|^2$. Igualmente en la ecuación (2.34) se define el primer momento en frecuencia de la WD que representa a la frecuencia instantánea de la s , es decir, el chirp de la señal.

En la figura (4.1), se muestra en la gráfica central la WD calculada para el

¹El correlograma obtenido es la representación de la relación que guardan entre sí ambas señales

Laser1, el resto de las gráficas de la figura son determinadas a partir de la *WD*. En la parte superior se muestra la marginal o momento cero en frecuencia a partir de la ecuación (2.23). La gráfica lateral izquierda corresponde a la marginal o momento cero en tiempo a partir de la ecuación (2.24). Por último, la gráfica inferior corresponde al primer momento en frecuencia a partir de la ecuación (2.34). En la figura 4.2 se presenta la misma información para el **Laser2**.

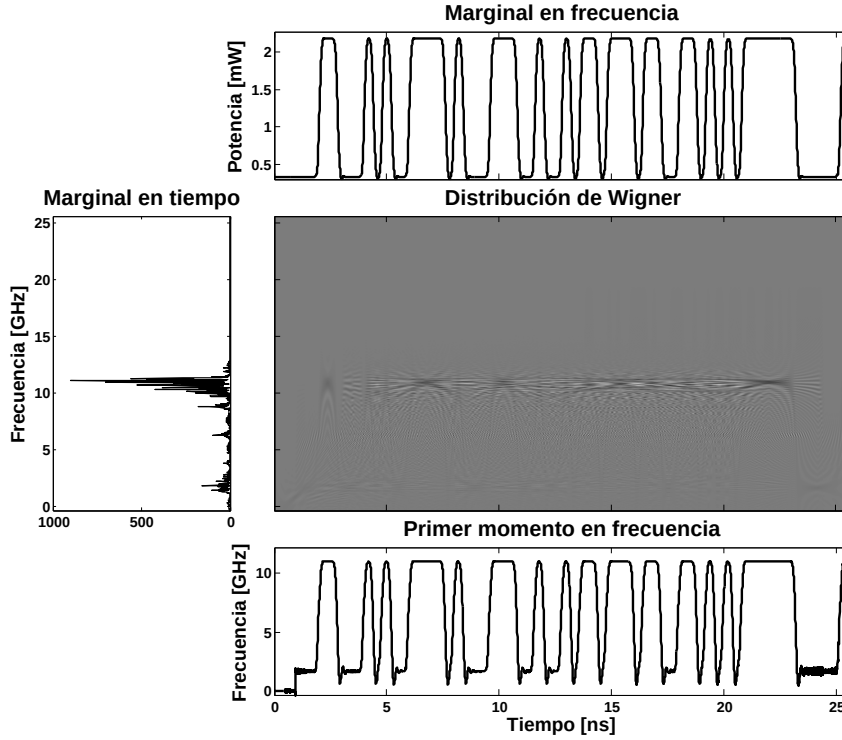


Figura 4.1: Marginales en tiempo y frecuencia, *WD* y primer momento en frecuencia para el **Laser1**

Al observar la figura 4.1 podemos comprobar la teoría que especifica que el comportamiento que sigue la marginal en frecuencia corresponde al de la potencia de la señal óptica, evidentemente existirán ligeras variaciones al comparar con la potencia óptica correspondiente al **Laser1** en la figura 3.2 derivado de las interferencias y términos cruzados de los que se habló en el capítulo 2. El comportamiento que sigue la marginal en tiempo corresponde al espectro de la señal *s* y el cual nos da una muestra de la distribución de energía de la *WD* en el dominio de la frecuencia. Por último, el comportamiento que sigue el primer momento en frecuencia corresponde al del chirp, lo cual se puede corroborar

al hacer una comparación con su correspondiente del **Laser1** presentado en la figura 3.3. Se presenta el mismo ejemplo en la figura 4.2 para el caso del **Laser2**.

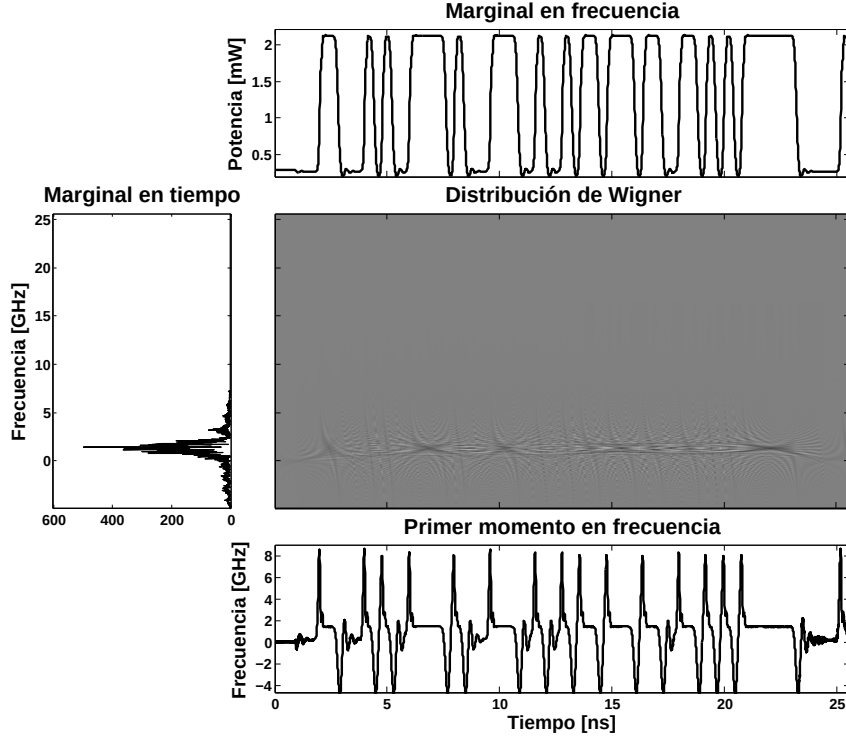


Figura 4.2: Marginales en tiempo y frecuencia, WD y primer momento en frecuencia para el **Laser2**

Para todos los casos existirán ligeras variaciones al comparar las gráficas obtenidas mediante la resolución de las ecuaciones de estado con las obtenidas directamente de la WD , esto se debe, como se ha mencionado previamente, a la presencia de las interferencias y términos cruzados de las que se habló en el capítulo 2, sin embargo, es comprobable visualmente que estas variaciones son despreciables.

En la figura 3.7 y 3.8 se muestra como varía la WD conforme el factor de confinamiento óptico aumenta, eso implica a su vez que sus marginales varían también cuando Γ varía. En la figura 4.3 se muestra una comparación entre la marginal en frecuencia, representada por la línea continua, con el primer momento en frecuencia, representado por la línea punteada, para el caso del **Laser1** cuando se modifica el valor de Γ . Se presenta la misma información para el caso del **Laser2** en la figura 4.4. Cabe señalar que las gráficas que se

presentan a continuación no tienen unidades debido a que se muestran con fines únicamente de comparación de sus formas.

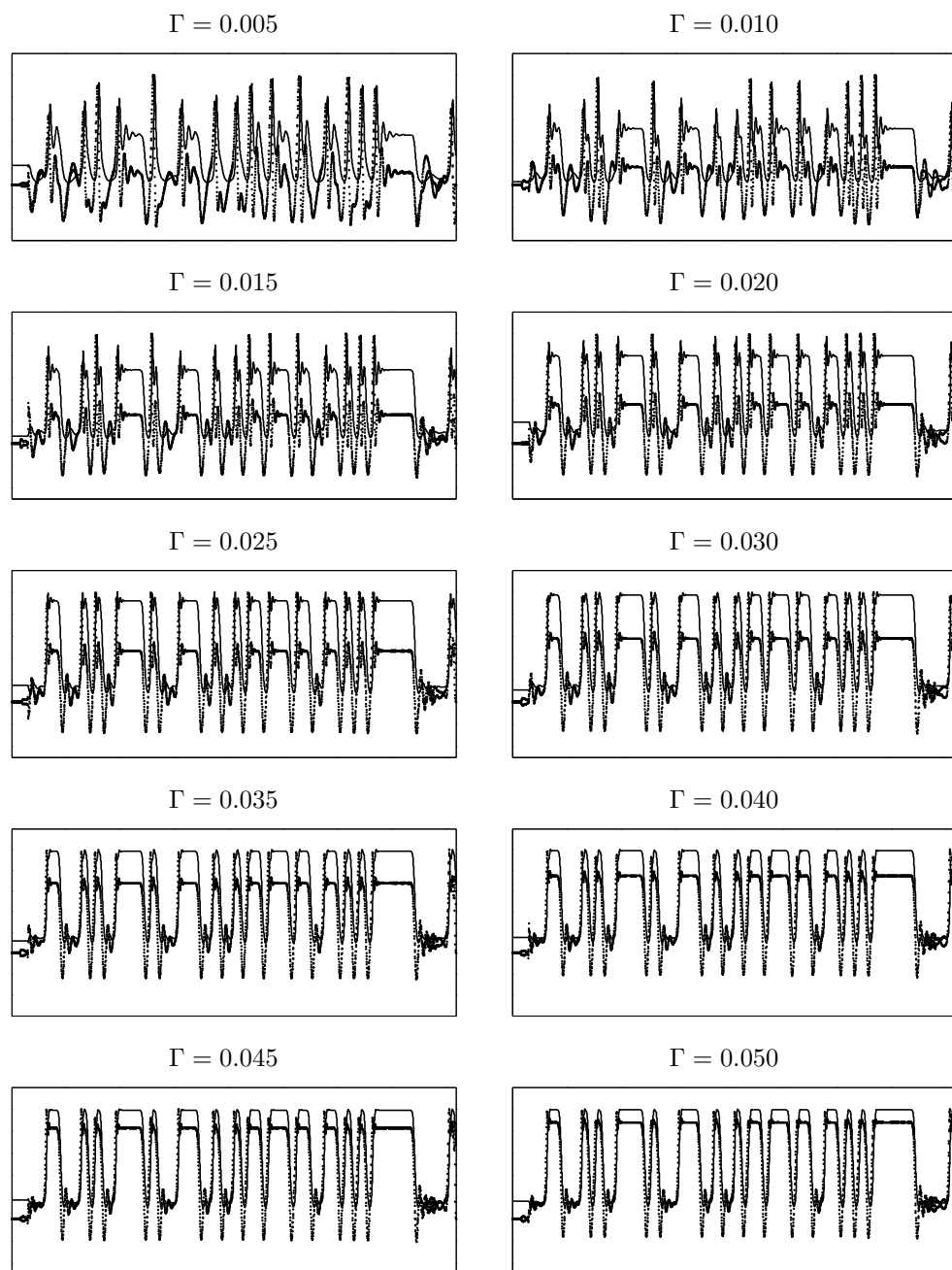


Figura 4.3: Comparación entre el comportamiento que sigue el chirp (línea punteada) y la potencia (línea sólida) con un factor de confinamiento variable para el Laser1

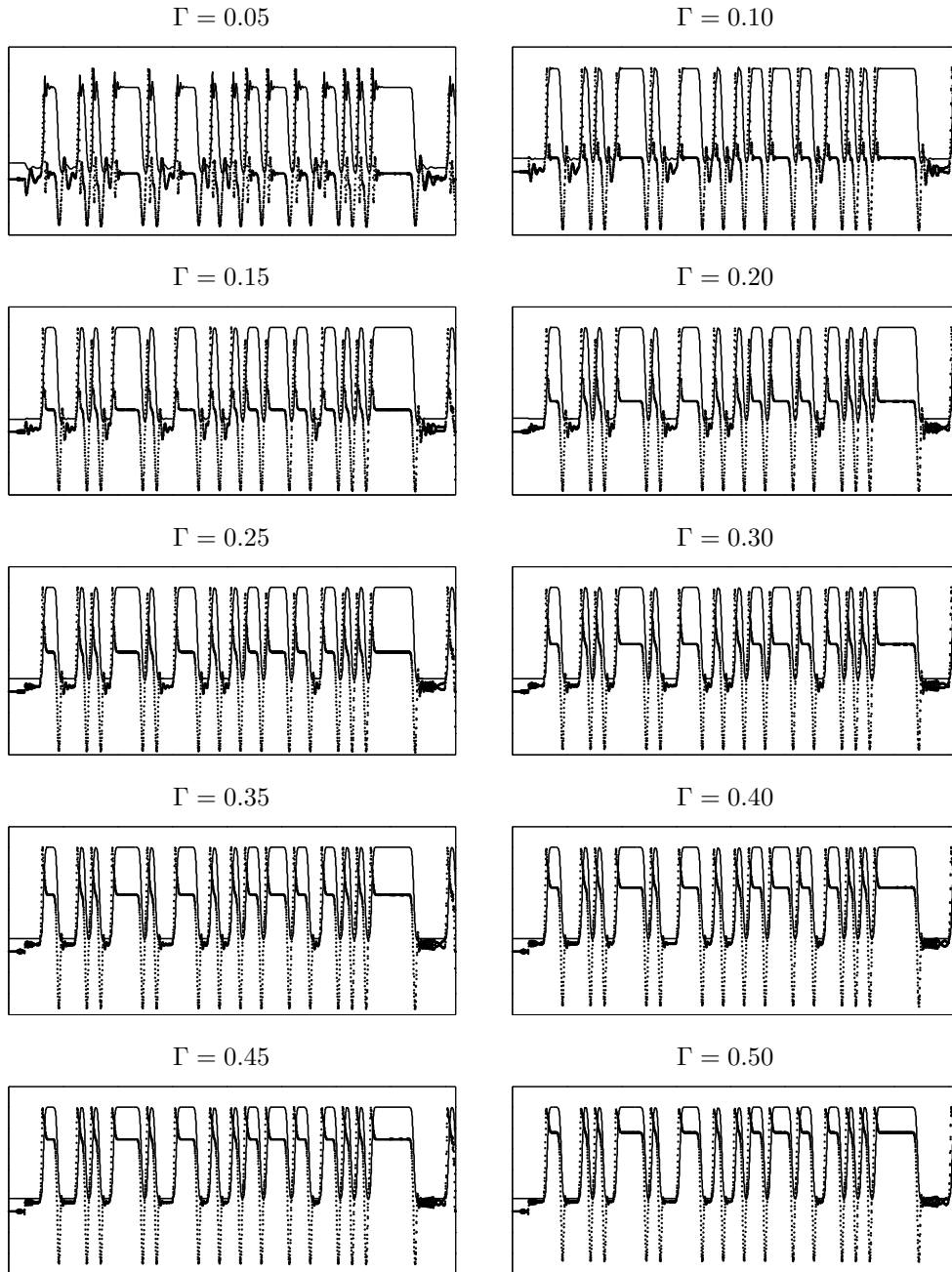


Figura 4.4: Comparación entre el comportamiento que sigue el chirp (línea punteada) y la potencia (línea sólida) con un factor de confinamiento variable para el Laser2

De las figuras 4.3 y 4.4 se observa que para ambos láseres, a medida que el valor de Γ aumenta, la similitud entre la marginal y el primer momento en frecuencia es mayor, es decir, las señales se van pareciendo más a medida que se torna el láser más adiabático. A partir de esta observación se justifica el uso de la función de correlación cruzada para medir la similitud entre ambas señales, pues, dada la definición de la correlación al inicio de este capítulo, dada la definición hecha del chirp en la sección 1.1.9 y dado el significado de la marginal y primer momento en frecuencia, es posible utilizar el valor máximo de correlación, el cual se incrementa a medida que el chirp y la potencia se asemejen más entre sí para determinar el tipo de chirp predominante a partir del establecimiento de un valor umbral.

4.1.3. Validación del Algoritmo

En la figura 4.5 se muestran las gráficas de correlación obtenidas entre la marginal en frecuencia y el primer momento en frecuencia de la *WD* para el **Laser1** cuando el factor de confinamiento varía. Para la obtención de cada una de estas gráficas ambas señales son previamente normalizadas, es decir, se dividieron entre sus respectivos valores máximos a fin de lograr que tengan una amplitud máxima de una unidad y facilitar la comparación entre ambas. En la figura 4.6 se presenta la misma información para el **Laser2**.

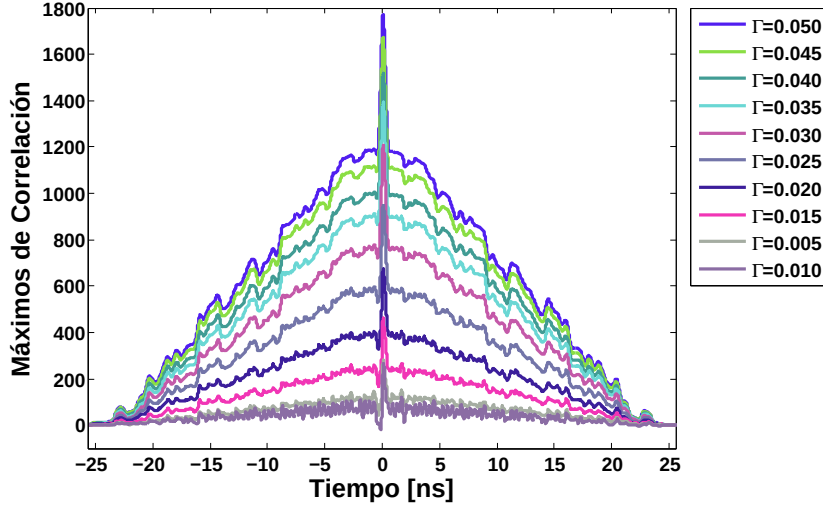


Figura 4.5: Correlación obtenida para la potencia y el chirp con un factor de confinamiento variable para el Laser1

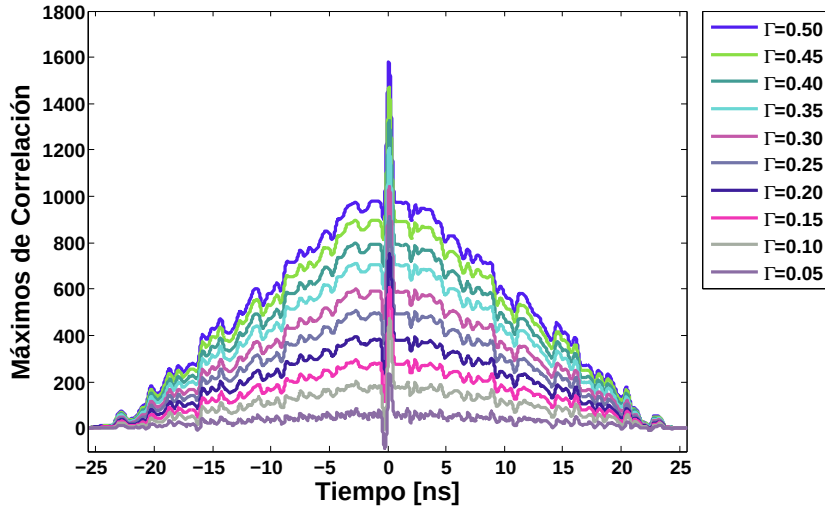


Figura 4.6: Correlación obtenida para la potencia y el chirp con un factor de confinamiento variable para el Laser2

De las figuras 4.5 y 4.6 se observa que para ambos casos el valor máximo de la función de correlación cruzada aumenta conforme lo hace Γ , además de que el máximo de correlación se presenta, en todos los ejemplos, para un mismo valor de desplazamiento de aproximadamente $l = 0$. Lo anterior, como se mencionó previamente, es debido a que para ese valor de desplazamiento ($l = 0$), es decir, cuando las señales están completamente sobrepuestas, la similitud entre ambas es máxima con respecto a cualquier otro valor de desplazamiento. Al comparar ambas figuras, debido a los valores máximos que se alcanzan, podemos deducir que para el caso del **Laser1**, los máximos son mayores debido a que la similitud entre la señal de potencia y la del chirp es mayor en comparación con el caso del **Laser2**, en el que se presenta un comportamiento contrario debido a una menor similitud existente entre la potencia y el chirp.

Cada señal se compone de un total de $N = 4096$ [muestras]² por lo que cada gráfica de correlación tiene un total de 8191 puntos³.

En las tablas 4.1 para el **Laser1** y 4.2 para el **Laser2** se muestran los valores que toma el máximo de correlación para cada caso.

Γ	Max. Correlación
0.005	266.5
0.01	279.9
0.015	460.2
0.02	672.6
0.025	954.2
0.03	1208.3
0.035	1391.1
0.04	1517.6
0.045	1674.8
0.05	1770.6

Tabla 4.1: Máximos de la función de correlación cruzada para el **Laser1** cuando Γ varía.

Γ	Max. Correlación
0.05	235.5
0.1	471.4
0.15	607.3
0.2	749.6
0.25	911.2
0.3	1040.8
0.35	1206.7
0.4	1326.1
0.45	1468.7
0.5	1580.8

Tabla 4.2: Máximos de la función de correlación cruzada para el **Laser2** cuando Γ varía.

En las tablas 4.1 y 4.2 se presentan los valores de máximo de correlación correspondientes para diez valores diferentes de Γ para cada láser. De las tablas, es apreciable que el valor del máximo de correlación crece a medida que Γ también incrementa. El rango que se presenta para cada caso fue elegido, con base en las pruebas realizadas, como el más representativo debido a que dentro de este rango es donde se detectó visualmente (ver tablas 3.5 y 3.6) la transición del chirp predominante de transitorio a adiabático, sin embargo, el comportamiento

²Dados los datos presentados en la sección 3.1.1

³o bien $2N - 1$ puntos

mostrado para este rango es el mismo para el resto del intervalo de valores que Γ puede tomar, es decir para todo el intervalo $0 \leq \Gamma \leq 1$.

Las pruebas realizadas, y que a continuación se presentan, se hacen para un aproximado de 400 casos distintos, cada uno con un valor diferente de Γ y dentro del intervalo de valores posibles que puede tomar, es decir, entre 0 y 1 (ver sección 1.1.7). De los resultados arrojados de las pruebas y de las clasificaciones visualmente obtenidas en la sección 3.3 se establece un umbral de clasificación para el valor del máximo de correlación a partir del cual se detecta la transición de chirp predominante.

El valor de umbral de clasificación se determina a partir de la clasificación visual del chirp presentada en las tablas 3.5 a 3.13 para todos los láseres analizados. De los valores de los máximos de correlación registrados para aquellos valores de Γ en los que se clasificó el chirp visualmente como *mixto*, al encontrarse todos ellos dentro de un intervalo de entre 760 a 1050.3 se determinó, derivado de las pruebas realizadas, que el mejor valor de umbral de clasificación es 1015, es decir, cualquier valor de máximo de correlación que sea menor a este umbral, el algoritmo arroja una clasificación de *chirp predominantemente transitorio*, y para un valor máximo de correlación superior a este umbral se clasifica como *chirp predominantemente adiabático*.

En las figuras de 4.7 a 4.9 se muestra el comportamiento que siguen los máximos de correlación para cada láser como función del factor de confinamiento óptico. La figura 4.7 muestra el comportamiento que presentan los máximos conforme el valor de Γ aumenta para el **Laser1**.

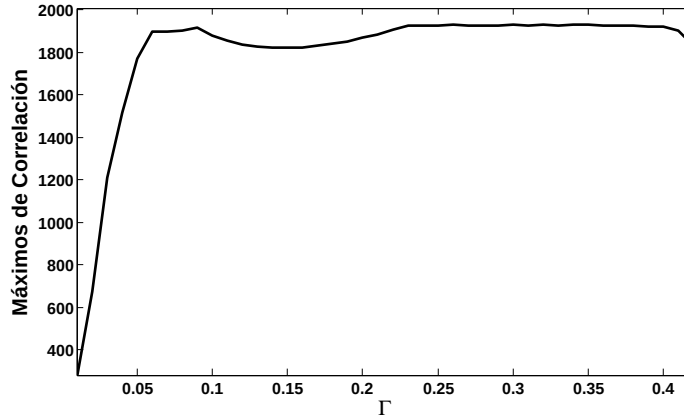


Figura 4.7: Comportamiento de los máximos de correlación calculados para el láser **Laser1** con Γ variable

La figura 4.8 muestra la misma información para el caso del **Laser2**.

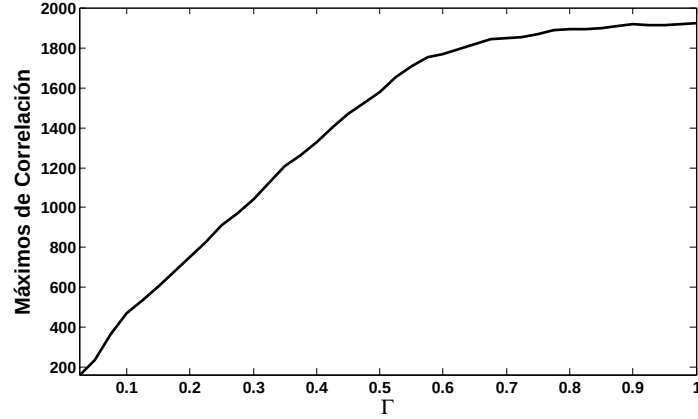


Figura 4.8: Comportamiento de los máximos de correlación calculados para el láser **Laser2** con Γ variable

De las gráficas 4.7 y 4.8 se observa que la principal diferencia entre ellas radica en la pendiente inicial, pues en el caso del **Laser1** esta aumenta más rápidamente que el **Laser2** y presenta un comportamiento que tiende a ser constante más rápidamente que el **Laser2**⁴. De las tablas 3.5 y 3.6 se observa que para el **Laser1** el intervalo de valores de Γ donde presenta un comportamiento mixto es $0.02 \leq \Gamma \leq 0.03$, inferior al intervalo para el **Laser2** que comprende $0.2 \leq \Gamma \leq 0.3$, un intervalo superior y que abarca más valores de Γ , de aquí que la pendiente brinde información sobre el tipo de chirp predominante en la señal óptica y lo cual se demuestra más adelante.

A continuación se presentan las gráficas del comportamiento que siguen los máximos de la correlación cruzada para el resto del conjunto ampliado de prueba.

⁴Obsérvese que en el capítulo 2 se clasificó el **Laser1** por sus características de chirp como adiabático, y el **Laser2** como transitorio

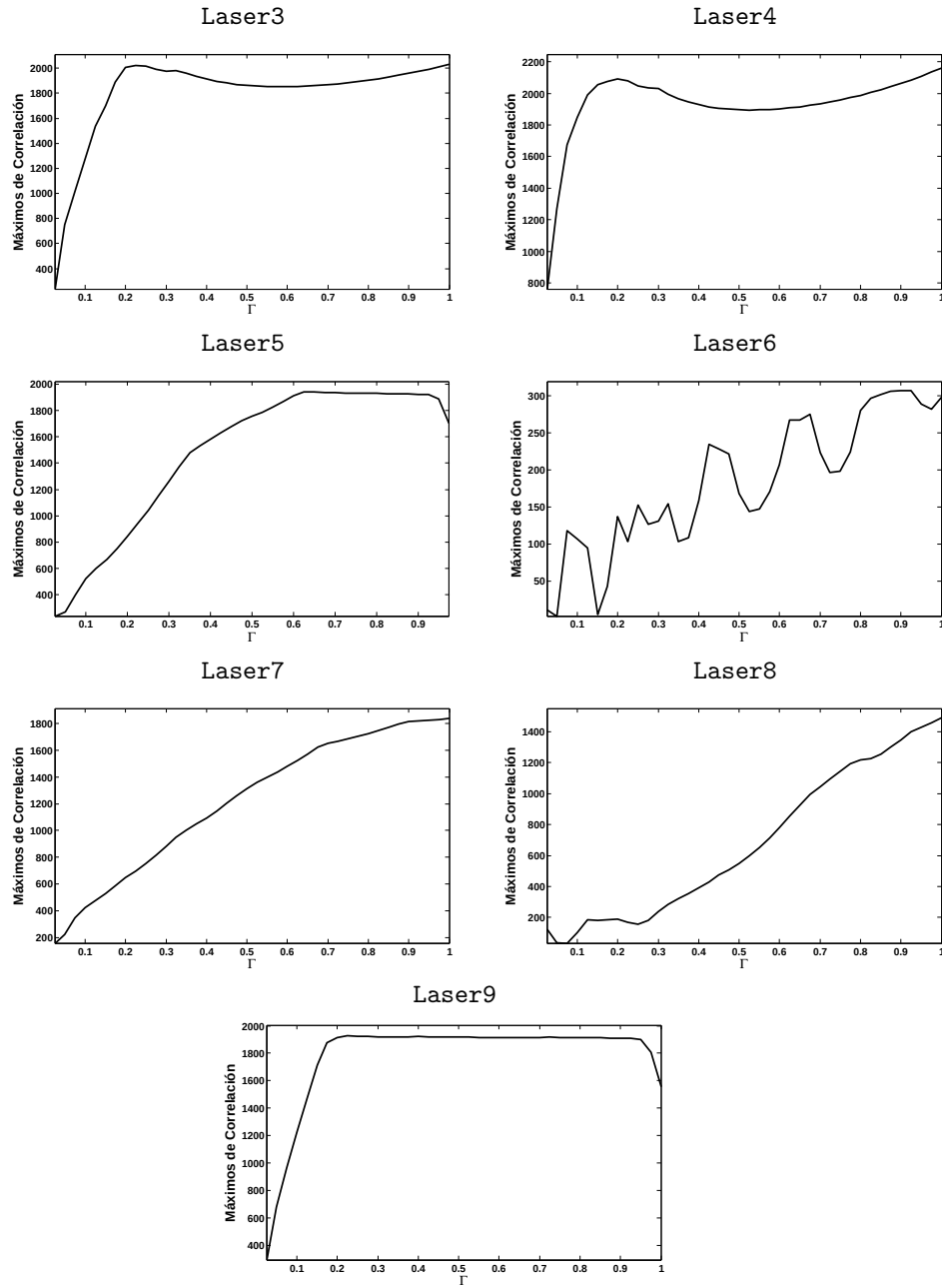


Figura 4.9: Comportamiento que siguen los máximos de la correlación cruzada para el conjunto ampliado de prueba.

Cada láser presenta un comportamiento muy característico en el que la principal diferencia entre cada uno es la rapidez con la que crece el valor de los máximos de correlación. El **Laser1** es el que presenta un incremento más rápido, le sigue el **Laser4**, mientras que el **Laser3** y el **Laser9** guardan comportamientos muy similares entre sí. El **Laser6** es el que presenta el incremento más lento e inestable, cabe destacar que este láser se comporta como transitorio para cualquier valor de Γ debido a su relación $\alpha : \kappa$, como se mencionó anteriormente. En la figura 4.10 se presentan todas las gráficas en conjunto a fin de facilitar la comparación.

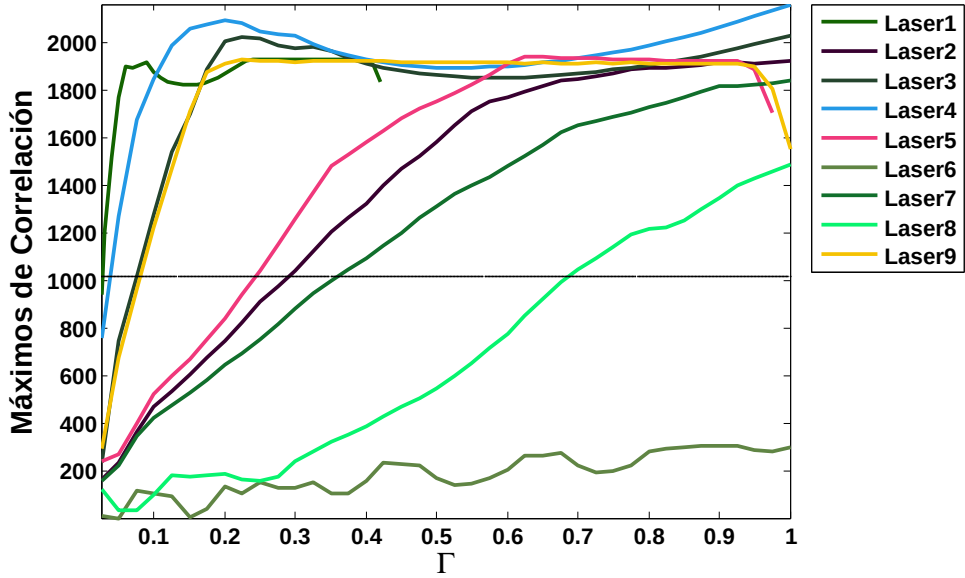


Figura 4.10: Comportamiento de los máximos de correlación calculados para todos los láseres con Γ variable

En la figura 4.10 podemos identificar cuatro zonas en las que se ubican las pendientes más pronunciadas para cada láser. La primera zona la conforman los láseres **Laser1**, **Laser3**, **Laser4** y **Laser9**, de este conjunto de láseres y al observar las tablas 3.5, 3.7, 3.8 y 3.13 en las que se realizó la clasificación visual del tipo de chirp, podemos notar que la transición de chirp se presenta para valores muy pequeños de Γ , dentro de un intervalo $0.02 < \Gamma < 0.1$. Es decir, la pendiente nos brinda información de la rapidez de transición del tipo de chirp predominante. Cuando la curva se estabiliza y tiende a ser constante es debido a que el chirp presenta un comportamiento más bien adiabático.

La segunda zona se conforma por el **Laser2**, **Laser5** y **Laser7**, donde cada uno posee una pendiente menos pronunciada que los elementos de la zona 1. De las tablas 3.6, 3.9 y 3.11 se observa que la transición de tipo de chirp se da para valores dentro del intervalo $0.125 < \Gamma < 0.5$, es decir, un intervalo superior al de la zona 1.

En la tercera zona se ubica el **Laser8** cuyo intervalo de transición se ubicó en $0.65 < \Gamma < 0.8$ según lo observado en la tabla 3.12.

En la cuarta y última zona se ubica el **Laser6**, el cual presenta claramente un comportamiento poco estable y con una pendiente muy poco pronunciada, lo cual deriva del hecho de que el valor de α predomina considerablemente sobre el de κ para cualquier valor de Γ (véase tabla 3.10).

Como se mencionó previamente, el umbral establecido de clasificación es de 1015, lo que significa que todos aquellos láseres, cuyo máximo de correlación cruzada entre el chirp y la potencia óptica este por arriba de este umbral, serán clasificados como predominantemente adiabáticos y por lo tanto, para aquellos máximos de correlación cruzada registrados por debajo del umbral serán clasificados como predominantemente transitorios. Dicho umbral se presenta en la figura 4.10 representado por una línea horizontal.

En las tablas 4.3 a 4.11 se presenta una comparación entre las clasificaciones realizadas visualmente sobre el conjunto ampliado de prueba en las tablas 3.5 a 3.13 con los resultados arrojados por el algoritmo de clasificación aquí propuesto. En la primera columna se muestra el intervalo de Γ donde se presenta la transición de chirp. En la segunda columna se presenta la clasificación visual realizada para ese intervalo y presentada previamente en las tablas 3.5 a 3.13. En la tercera columna se presenta el valor del máximo de correlación registrado para ese valor de Γ . Finalmente, en la cuarta columna se presenta la clasificación arrojada por el algoritmo de clasificación que se presenta en esta sección, basado en determinar si el máximo de correlación se encuentra por arriba o por abajo del umbral ya referido.

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.005	<i>Transitorio</i>	266.5	<i>Transitorio</i>
0.01	<i>Transitorio</i>	279.9	<i>Transitorio</i>
0.015	<i>Transitorio</i>	460.2	<i>Transitorio</i>
0.02	<i>Mixto</i>	672.6	<i>Transitorio</i>
0.025	<i>Mixto</i>	954.2	<i>Transitorio</i>
0.03	<i>Mixto</i>	1208.3	<i>Adiabático</i>
0.035	<i>Adiabático</i>	1391.1	<i>Adiabático</i>
0.04	<i>Adiabático</i>	1517.6	<i>Adiabático</i>
0.045	<i>Adiabático</i>	1674.8	<i>Adiabático</i>
0.05	<i>Adiabático</i>	1770.6	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.3: Comparación de resultados para el **Laser1**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.05	<i>Transitorio</i>	235.5	<i>Transitorio</i>
0.1	<i>Transitorio</i>	471.4	<i>Transitorio</i>
0.15	<i>Transitorio</i>	607.3	<i>Transitorio</i>
0.2	<i>Mixto</i>	749.6	<i>Transitorio</i>
0.25	<i>Mixto</i>	911.2	<i>Transitorio</i>
0.3	<i>Mixto</i>	1040.8	<i>Adiabático</i>
0.35	<i>Adiabático</i>	1206.7	<i>Adiabático</i>
0.4	<i>Adiabático</i>	1326.1	<i>Adiabático</i>
0.45	<i>Adiabático</i>	1468.7	<i>Adiabático</i>
0.5	<i>Adiabático</i>	1580.8	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.4: Comparación de resultados para el **Laser2**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.025	<i>Transitorio</i>	236.7	<i>Transitorio</i>
0.05	<i>Transitorio</i>	749.7	<i>Transitorio</i>
0.075	<i>Mixto</i>	1017.7	<i>Adiabático</i>
0.1	<i>Mixto</i>	1275.9	<i>Adiabático</i>
0.125	<i>Adiabático</i>	1539.3	<i>Adiabático</i>
0.15	<i>Adiabático</i>	1700.9	<i>Adiabático</i>
0.175	<i>Adiabático</i>	1887.8	<i>Adiabático</i>
0.2	<i>Adiabático</i>	2005.3	<i>Adiabático</i>
0.225	<i>Adiabático</i>	2023.6	<i>Adiabático</i>
0.25	<i>Adiabático</i>	2014.9	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.5: Comparación de resultados para el **Laser3**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.0125	<i>Transitorio</i>	459	<i>Transitorio</i>
0.025	<i>Transitorio</i>	761.2	<i>Transitorio</i>
0.0375	<i>Mixto</i>	1050.3	<i>Adiabático</i>
0.05	<i>Mixto</i>	1270.6	<i>Adiabático</i>
0.0625	<i>Mixto</i>	1533.9	<i>Adiabático</i>
0.075	<i>Adiabático</i>	1675.7	<i>Adiabático</i>
0.0875	<i>Adiabático</i>	1752.2	<i>Adiabático</i>
0.1	<i>Adiabático</i>	1847.2	<i>Adiabático</i>
0.1125	<i>Adiabático</i>	1966	<i>Adiabático</i>
0.125	<i>Adiabático</i>	1989.6	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.6: Comparación de resultados para el **Laser4**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.025	<i>Transitorio</i>	239	<i>Transitorio</i>
0.075	<i>Transitorio</i>	402	<i>Transitorio</i>
0.125	<i>Mixto</i>	598.2	<i>Transitorio</i>
0.175	<i>Mixto</i>	751.2	<i>Transitorio</i>
0.225	<i>Adiabático</i>	940.2	<i>Transitorio</i>
0.275	<i>Adiabático</i>	1151.6	<i>Adiabático</i>
0.325	<i>Adiabático</i>	1372.2	<i>Adiabático</i>
0.375	<i>Adiabático</i>	1531.8	<i>Adiabático</i>
0.425	<i>Adiabático</i>	1631.3	<i>Adiabático</i>
0.475	<i>Adiabático</i>	1724	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.7: Comparación de resultados para el **Laser5**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.1	<i>Transitorio</i>	106.9	<i>Transitorio</i>
0.2	<i>Transitorio</i>	137.6	<i>Transitorio</i>
0.3	<i>Transitorio</i>	131.7	<i>Transitorio</i>
0.4	<i>Transitorio</i>	159.1	<i>Transitorio</i>
0.5	<i>Transitorio</i>	168.3	<i>Transitorio</i>
0.6	<i>Transitorio</i>	207.5	<i>Transitorio</i>
0.7	<i>Transitorio</i>	223.7	<i>Transitorio</i>
0.8	<i>Transitorio</i>	280.1	<i>Transitorio</i>
0.9	<i>Transitorio</i>	307.4	<i>Transitorio</i>
1	<i>Transitorio</i>	298.6	<i>Transitorio</i>

Tabla 4.8: Comparación de resultados para el **Laser6**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.1	<i>Transitorio</i>	423.2	<i>Transitorio</i>
0.2	<i>Transitorio</i>	645.7	<i>Transitorio</i>
0.3	<i>Mixto</i>	884.2	<i>Transitorio</i>
0.4	<i>Mixto</i>	1095.0	<i>Adiabático</i>
0.5	<i>Mixto</i>	1312.3	<i>Adiabático</i>
0.6	<i>Adiabático</i>	1479.1	<i>Adiabático</i>
0.7	<i>Adiabático</i>	1653.4	<i>Adiabático</i>
0.8	<i>Adiabático</i>	1726.8	<i>Adiabático</i>
0.9	<i>Adiabático</i>	1814.9	<i>Adiabático</i>
1	<i>Adiabático</i>	1840.6	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.9: Comparación de resultados para el **Laser7**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.5	<i>Transitorio</i>	550	<i>Transitorio</i>
0.55	<i>Transitorio</i>	653.1	<i>Transitorio</i>
0.6	<i>Transitorio</i>	779.3	<i>Transitorio</i>
0.65	<i>Mixto</i>	925.2	<i>Transitorio</i>
0.7	<i>Mixto</i>	1044	<i>Adiabático</i>
0.75	<i>Mixto</i>	1142	<i>Adiabático</i>
0.8	<i>Mixto</i>	1216.7	<i>Adiabático</i>
0.85	<i>Adiabático</i>	1254.2	<i>Adiabático</i>
0.9	<i>Adiabático</i>	1347.4	<i>Adiabático</i>
0.95	<i>Adiabático</i>	1428	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.10: Comparación de resultados para el **Laser8**

Γ	Clasif. visual	Max. Correlación	Clasif. Algoritmo
0.025	<i>Transitorio</i>	293.3	<i>Transitorio</i>
0.0375	<i>Transitorio</i>	498.7	<i>Transitorio</i>
0.05	<i>Transitorio</i>	676.6	<i>Transitorio</i>
0.0625	<i>Mixto</i>	844.9	<i>Transitorio</i>
0.075	<i>Mixto</i>	964.2	<i>Transitorio</i>
0.0875	<i>Mixto</i>	1096.8	<i>Adiabático</i>
0.1	<i>Mixto</i>	1221.7	<i>Adiabático</i>
0.1125	<i>Adiabático</i>	1352.2	<i>Adiabático</i>
0.125	<i>Adiabático</i>	1471.1	<i>Adiabático</i>
0.1375	<i>Adiabático</i>	1591.5	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.11: Comparación de resultados para el **Laser9**

De las tablas 4.3 a 4.11 se observa que la clasificación realizada por el algoritmo coincide con la realizada visualmente pues la transición de chirp de transitorio a adiabático se da para aquellos valores de Γ en los cuales se clasificó visualmente como *mixto*, en vista de que no existía certeza del chirp predominante. Esto significa que el algoritmo arroja los resultados esperados y que cumple con lo previsto pues logra detectar la transición de chirp bajo las condiciones planteadas con base a la definición del fenómeno chirp presentada en la sección 1.1.9. En el caso del **Laser5** la transición de chirp se registra fuera del intervalo clasificado visualmente como *mixto*, esto deriva de que, como se mencionó previamente, no existe una exactitud tal para determinar el tipo de chirp predominante, ni cuando se clasifica visualmente ni cuando se clasifica con el algoritmo que se ha presentado en este capítulo. Cuando el láser se encuentra dentro o muy cerca de la zona de transición, ni el algoritmo ni la apreciación de un experto arrojan resultados confiables.

Utilizar la función de correlación cruzada para comparar la marginal y el primer momento en frecuencia sobre la *WD* es quizá poco práctico debido a que finalmente se podría aplicar directamente a la señal óptica y al chirp. Sin embargo, este procedimiento permite ver y conocer más estrechamente la relación que existe entre la *WD* y sus respectivos momento cero y primer momento en frecuencia. Por tal motivo se presenta en la siguiente sección una segunda opción de algoritmo de detección de tipo de chirp que, a grandes rasgos, consiste en tratar la *WD* como una imagen, procesarla y detectar ciertas características que permitirían clasificar el tipo de chirp predominante.

4.2. Transformada de Hough

En esta sección se presenta el segundo algoritmo de clasificación propuesto, el cual se basa en la interpretación de la *WD* como imagen y en un conocido algoritmo de procesamiento de imágenes conocido como *Transformada de Hough*. Para lo cual se dedica una sección a la observación y análisis profundos de las características observadas de la *WD* para cada uno de los elementos del conjunto de láseres de prueba, presentados en el capítulo 3. La finalidad es la identificación de las características variables que se presentan cuando el chirp predominante varía de un tipo a otro, o bien, cuando se modifica el valor del factor de confinamiento óptico Γ . A partir de estas observaciones se propone entonces el uso de la *Transformada de Hough* para identificar dichas características de manera automática.

Se presentan también los resultados obtenidos de la aplicación de este algoritmo sobre el conjunto ampliado de prueba, con los cuales se demostrará su efectivi-

dad y el buen desempeño que presenta con base al análisis de resultados.

4.2.1. Aislamiento de Características

En las secciones 3.4.1 y 3.4.2 se presentó la *Distribución de Wigner* resultante para los diferentes grupos de parámetros láser disponibles. A partir de la observación de las figuras presentadas en dichas secciones, es posible detectar un comportamiento característico para cada caso, pues, al observar la figura 3.6 y al tomar en cuenta la clasificación visual que se hizo para este conjunto de prueba, presentada en la tabla 3.4, podemos observar ciertas características particulares de cada caso. Por ejemplo, al comparar el **Laser1**, identificado como predominantemente adiabático, con el **Laser2** identificado como predominantemente transitorio, se observa que ambos láseres tienen una *WD* muy similar, por lo menos en cuanto a la forma. Sin embargo, la principal y mayor diferencia que guardan es en el nivel en el que se concentra mayor energía. El **Laser1** tiene un nivel aproximado de $11[GHz]$, superior al del **Laser2** que se encuentra alrededor de $2[GHz]$, además de que la energía concentrada por abajo del nivel en el **Laser1** es mayor a la que se concentra por debajo del nivel en el **Laser2** y, por otro lado, la energía que se concentra por arriba del nivel del **Laser1** es inferior al que se concentra por arriba del nivel del **Laser2**. Otra característica que se observa es la presencia de zonas en las que la energía prácticamente es constante por arriba del nivel de mayor energía.

Para el caso del **Laser3**, **Laser4** y **Laser5** sucede lo mismo que para el **Laser1**, pues se concentra mayor energía por debajo del nivel de energía máxima que por encima. Caso contrario para el **Laser6**, **Laser7** y **Laser8**, en el que la energía se concentra tanto por arriba como por abajo del nivel máximo de energía, al igual que el **Laser2**.

Para todos los casos existe una zona de energía constante que no brinda información alguna. A fin de aislar la zona donde se contiene la mayor información se sigue un procedimiento que permite resaltar las características importantes de la *WD*.

Una imagen puede considerarse una función bidimensional representada matricialmente, es decir, una función bidimensional que cuantifica la intensidad de luz, donde cada elemento de la matriz se traduce en la intensidad en esa coordenada. A partir de esta consideración se binariza la imagen de la *WD* de la siguiente manera:

- Se calcula la moda⁵ de la imagen. Dado que la mayor parte de la imagen de

⁵En estadística, se define la moda como el valor que se presenta con mayor frecuencia en una distribución de datos

la WD es una zona de energía constante, el valor de la moda nos permite conocer el valor aproximado de esta zona.

- Se convierten en 0 todos aquellos valores que sean 0.5 % menores que el valor de la moda.
- Se convierten en 1 todos aquellos valores que sean 0.5 % mayores o iguales al valor de la moda.

De esta manera los valores de menor intensidad se anulan, mientras que los de mayor intensidad se hacen 1 logrando así la binarización de la imagen y a su vez se resalta la información importante. En la figura 4.11 se muestra el ejemplo resultante de la binarización para el caso del **Laser1**.

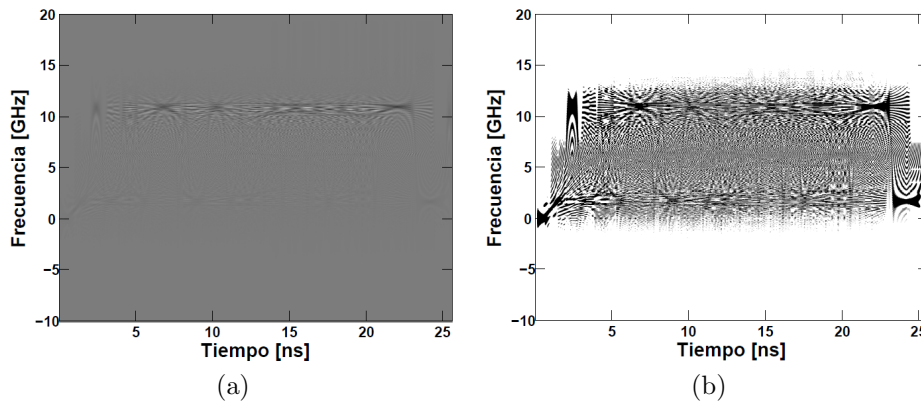


Figura 4.11: Aislamiento de información sobre la WD para el **Laser1**

De la figura 4.11, en la gráfica de la derecha podemos ver más claramente las características que difícilmente son visibles en la gráfica de la izquierda, y debido al proceso de binarización, se resaltan aspectos de la imagen que sirven para la identificación del tipo de chirp. En la figura 4.12 se muestra el ejemplo para el **Laser2**.

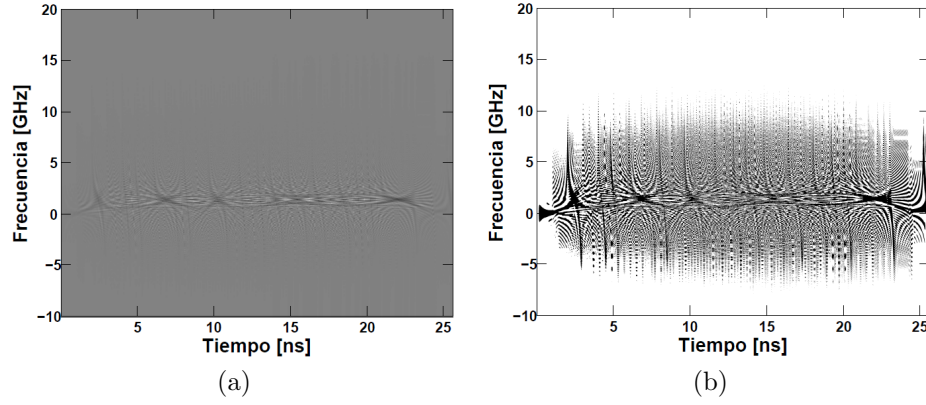


Figura 4.12: Aislamiento de información sobre la *WD* para el *Laser2*

En las figuras 4.11(b) y 4.12(b) se puede apreciar una zona que no contiene información alguna. A fin de omitir esta zona que no contiene información importante y acotar la zona que sí la tiene, se recorta la imagen tanto por la parte superior como por la inferior. Esto se logra primeramente leyendo la matriz de la imagen por renglones, posteriormente se identifica el primer renglón que contenga por lo menos un 1 y se corta la imagen desde el primer renglón hasta uno anterior al identificado. Luego, se identifica el último renglón que contenga por lo menos un 1 y la imagen se vuelve a cortar a partir del siguiente renglón y hasta el último. De esta manera, se desecha la parte superior e inferior de la imagen original y se asegura que todos los renglones sin información quedan fuera de la imagen final. La figura 4.13 muestra el resultado del acotamiento de la zona de información para el *Laser1* y el *Laser2*.

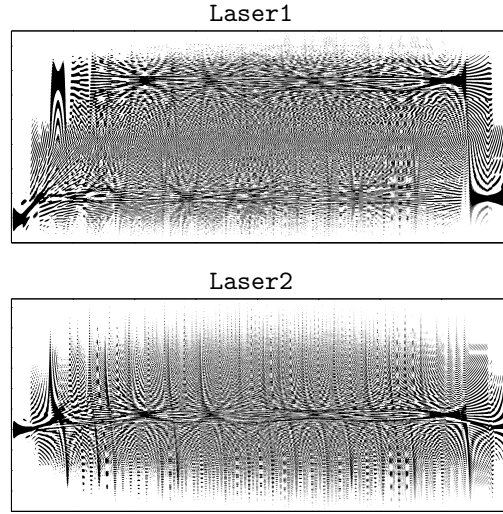


Figura 4.13: Acotamiento de la zona de información para el **Laser1** y el **Laser2**

El **Laser1** y el **Laser2** fueron previamente clasificados como adiabático y transitorio respectivamente, tanto visualmente como a partir del primer algoritmo propuesto y presentado en la sección anterior. Las diferencias que podemos observar entre sus respectivas *WD* a partir del análisis visual de las imágenes presentadas en la figura 4.13 son principalmente referidas a las formas geométricas que tienden a dibujarse en cada caso. Recordemos que estamos analizando la *WD* como imagen. Para el **Laser1**, se observa la presencia de las zonas con tendencia a formar líneas horizontales en la parte superior e inferior de la imagen, siendo la parte central la que tiene una textura más uniforme con menos tendencia a formar estas formas geométricas. Para el caso del **Laser2** las zonas con una textura uniforme se presenta en la parte superior e inferior, y en la parte central se presentan una especie de manchas más oscuras y tendiendo a formar líneas horizontales y alguna especie de parábolas.

En la figura 4.14 y 4.15 se presenta el mismo procedimiento aplicado al **Laser1** y **Laser2** respectivamente, cuando el factor de confinamiento óptico Γ varía.

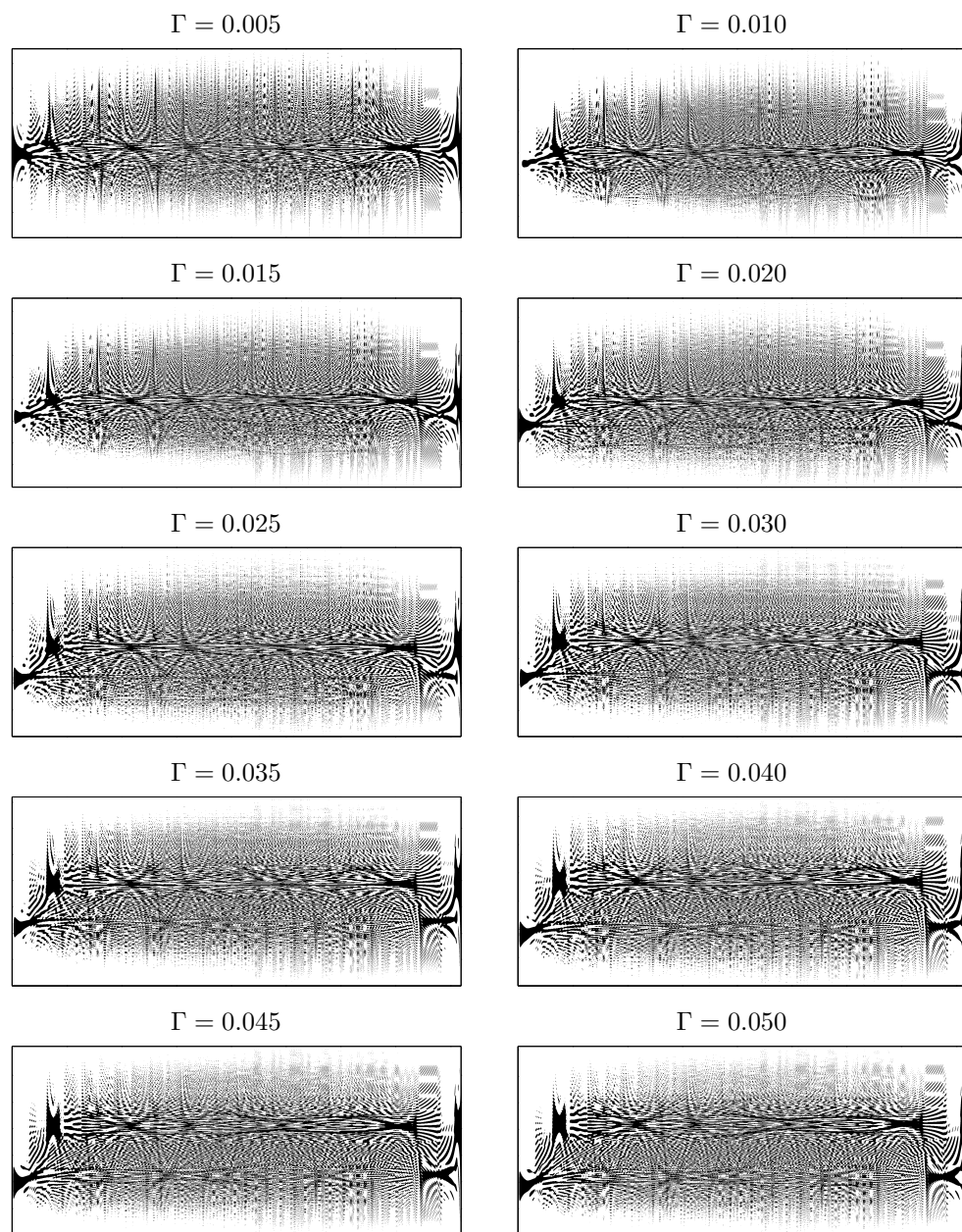


Figura 4.14: Comportamiento de la WD para el **Laser1** en su forma binarizada con un factor de confinamiento variable

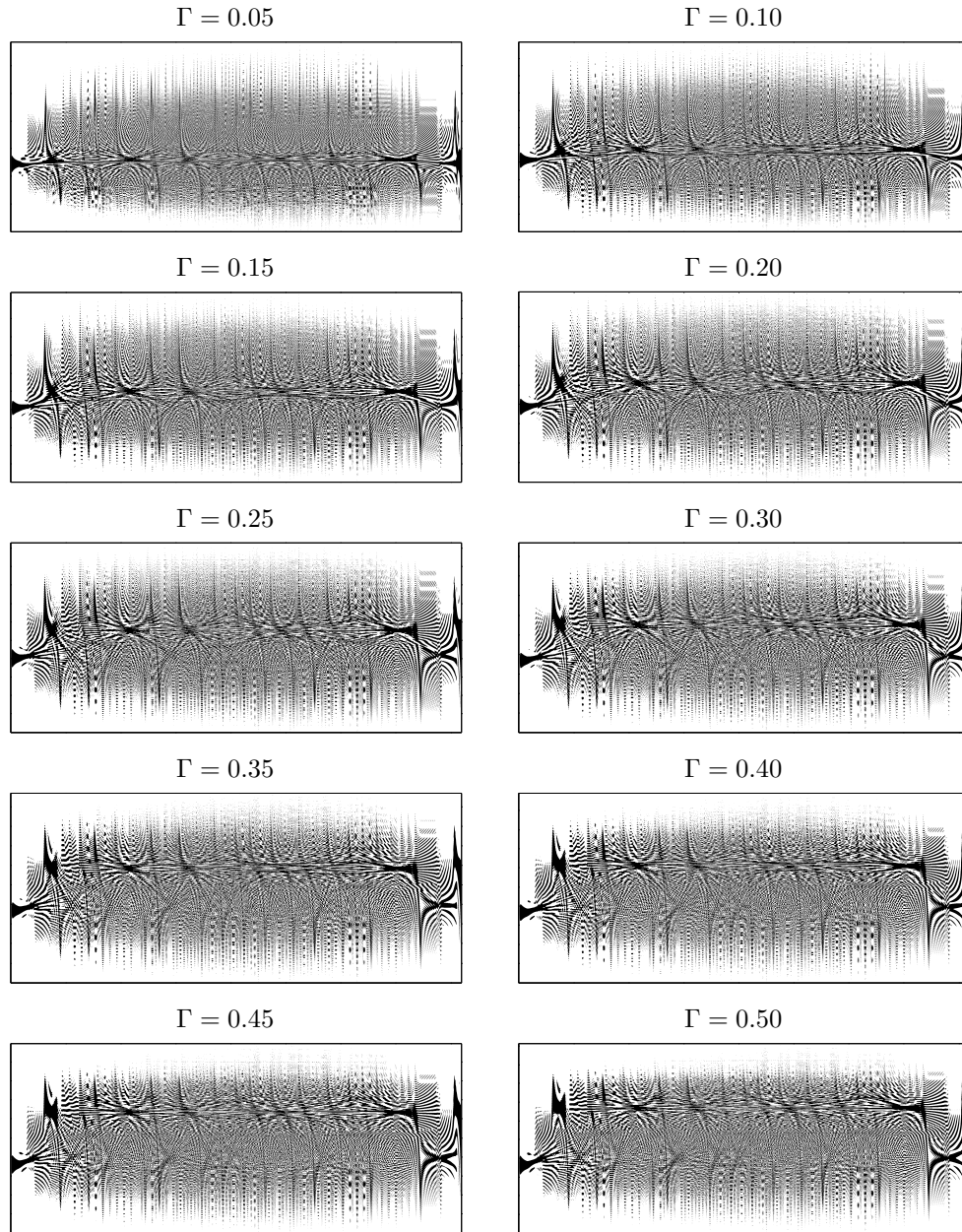


Figura 4.15: Comportamiento de la *WD* para el *Laser2* en su forma binarizada con un factor de confinamiento variable

Las figuras 4.14 y 4.15 muestran el mismo comportamiento mostrado en las figuras 3.7 y 3.8, pero debido al procesamiento que se le aplicó, es posible ver más fácilmente, las modificaciones que sufre la WD cuando el valor de Γ varía. Con esto se reafirman las observaciones hechas al inicio de esta sección respecto a los cambios en los niveles de mayor concentración de energía conforme el valor de Γ se modifica.

4.2.2. Definición de la *Transformada de Hough*

El objetivo de la *Transformada de Hough* es la localización automática de formas paramétricas (rectas, círculos, elipses, etc.) a partir de una distribución de puntos presentes en una imagen. Se trata de un algoritmo muy utilizado para el reconocimiento de patrones basado en la estadística y utilizado principalmente para la detección de líneas sobre imágenes binarias [20].

Para cada pixel de la imagen se determinan las posibles líneas de las cuales pudiera ser parte ese pixel mediante la aplicación de una operación que se realiza en una vecindad dentro de cierto rango alrededor de ese pixel. Se hace esto para todos los puntos de la imagen y, al final, se determinan aquellas líneas con mayor cantidad posible de puntos. Su forma de operación es a partir de la definición de una recta, como se explica a continuación.

Supongamos un punto $P_0(x_0, y_0)$ perteneciente a la imagen. Cualquier recta que pasa por P_0 tiene la ecuación:

$$y_0 = k x_0 + d \quad (4.2)$$

De donde:

$$d = y_0 - k x_0 \quad (4.3)$$

El conjunto de soluciones $\{k, d\}$ de la ecuación (4.3) se le conoce como *espacio de parámetros* o *espacio de Hough*, y este engloba a todas aquellas rectas que pasan por el punto P_0 . Para un determinado pixel de la imagen $P_i = (x_i, y_i)$, los parámetros x_i y y_i conforman el conjunto llamado *espacio de parámetros de la imagen*.

Ahora supongamos dos puntos de la imagen $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ cuyas ecuaciones de recta son:

$$y_1 = k_1 x_1 + d_1 \quad (4.4)$$

$$y_2 = k_2 x_2 + d_2 \quad (4.5)$$

Si P_1 y P_2 forman parte de la misma recta, entonces $k_1 = k_2 = k_{12}$ y $d_1 = d_2 = d_{12}$ que, en el *espacio de parámetros de Hough*, darían origen a un punto $q_{12}(k_{12}, d_{12})$ [20]. Lo anterior se ejemplifica en la figura 4.16.

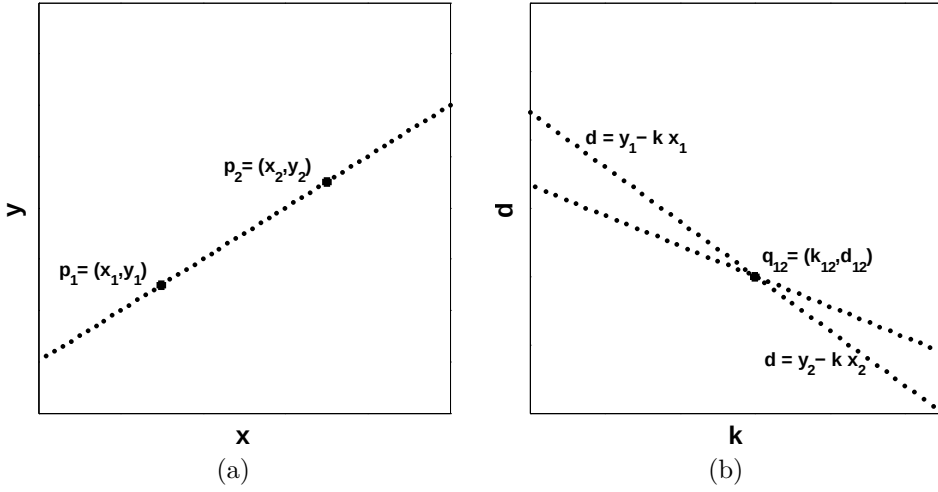


Figura 4.16: Relación entre el *espacio de parámetros de la imagen* (a) y el *espacio de parámetros de Hough* (b)

Cuantas más rectas en el *espacio de parámetros de Hough*, se corten en un punto, significará que existe una recta tal en el *espacio de parámetros de la imagen*, que estará conformada por igual número de puntos [20].

El objetivo es la localización de aquellas coordenadas del *espacio de parámetros de Hough* donde se corten varias líneas. Se realiza entonces un conteo del número de cortes producidos por la intercepción de varias rectas en el *espacio de parámetros de Hough*, mediante una matriz llamada *matriz de registros acumuladores*, donde cada celda se incrementa en función de la cantidad de rectas que pasan por la correspondiente posición $\{k, d\}$ [20]. El número almacenado en cada celda será entonces igual al número de píxeles en el *espacio de parámetros de la imagen* que conforman esa recta.

Sin embargo, existe una singularidad para el caso de la ecuación (4.2), cuando se trata de líneas verticales, es decir cuando $k = \infty$. Para resolver este problema, se utiliza entonces la ecuación (4.6):

$$x \cos \theta + y \sin \theta = r \quad (4.6)$$

La relación que existe entre el pixel de la imagen $p_i = (x_i, y_i)$ con los parámetros r y θ se define en la ecuación (4.7) como sigue:

$$r_{x_i, y_i} = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \quad (4.7)$$

Donde: $0 \leq \theta \leq \pi$

Si se toma como referencia el pixel central de la imagen $p_i = (x_c, y_c)$, el intervalo de valores que toma r se limita, de tal manera que $-r_{max} \leq r_{x, y}(\theta) \leq r_{max}$.

Donde, para una imagen de dimensiones $M \times N$, r_{max} se define mediante la siguiente ecuación:

$$r_{max} = \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} \quad (4.8)$$

La figura 4.17 ejemplifica la singularidad generada cuando se trata de líneas verticales, es decir, cuando la pendiente de la ecuación de la recta $d = \infty$ y su cambio de coordenadas para evitar tal singularidad.

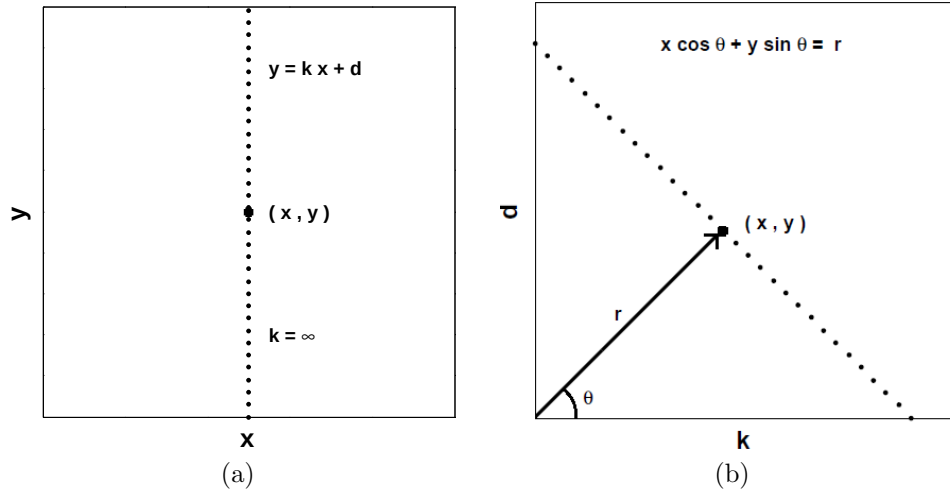


Figura 4.17: Singularidad de una recta cuando $k = \infty$ (a) y su cambio de parámetros a (r, θ) (b).

A continuación se presenta el algoritmo que se sigue para la detección de líneas utilizando la *Transformada de Hough* [20]:

- Se inicializa en ceros la *matriz de registros de acumulación*.
- Se recorre la imagen, tomando como referencia el pixel central de coordenadas (x_c, y_c) . Cada vez que se encuentra un pixel que pertenece a un borde, se hace un barrido para el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ y se obtiene r .
- Para cada par (r, θ) obtenido del barrido, se incrementa en uno la correspondiente celda en la *matriz de registros de acumulación*.
- En la *matriz de registros de acumulación* resultante, se aplica un umbral de tal manera que los valores superiores a ese umbral permanecen, identificando así los valores máximos locales.
- Se localizan esos máximos locales en la imagen considerando una determinada vecindad. Los máximos locales (r, θ) definen a las líneas identificadas en la imagen.

En la siguiente sección se mostrará cómo se aplica la *Transformada de Hough* para identificar ciertas características presentes en la *WD* que nos permitirán identificar y clasificar el tipo de chirp presente en la señal óptica.

4.2.3. Aplicación de la *Transformada de Hough* para la Caracterización del Chirp

Se ha definido ya el funcionamiento de la *Transformada de Hough* y su aplicación para la identificación de líneas presentes en una imagen. Igualmente, a partir de las figuras 4.14 y 4.15 se ha hecho un análisis de las principales características observadas cuando Γ modifica su valor.

El objetivo de esta sección es demostrar cómo, mediante el uso de la *Transformada de Hough*, es posible identificar y diferenciar entre cada *WD*, tomando como punto de partida las características observadas previamente.

Mediante el uso de las funciones `hough`, `houghpeaks` y `houghlines` de MATLAB se realiza la identificación de líneas horizontales para cada imagen de una *WD*. En las figuras 4.18 y 4.19 se muestra la aplicación del algoritmo para el caso del *Laser1* y *Laser2* con un factor de confinamiento óptico Γ variable.

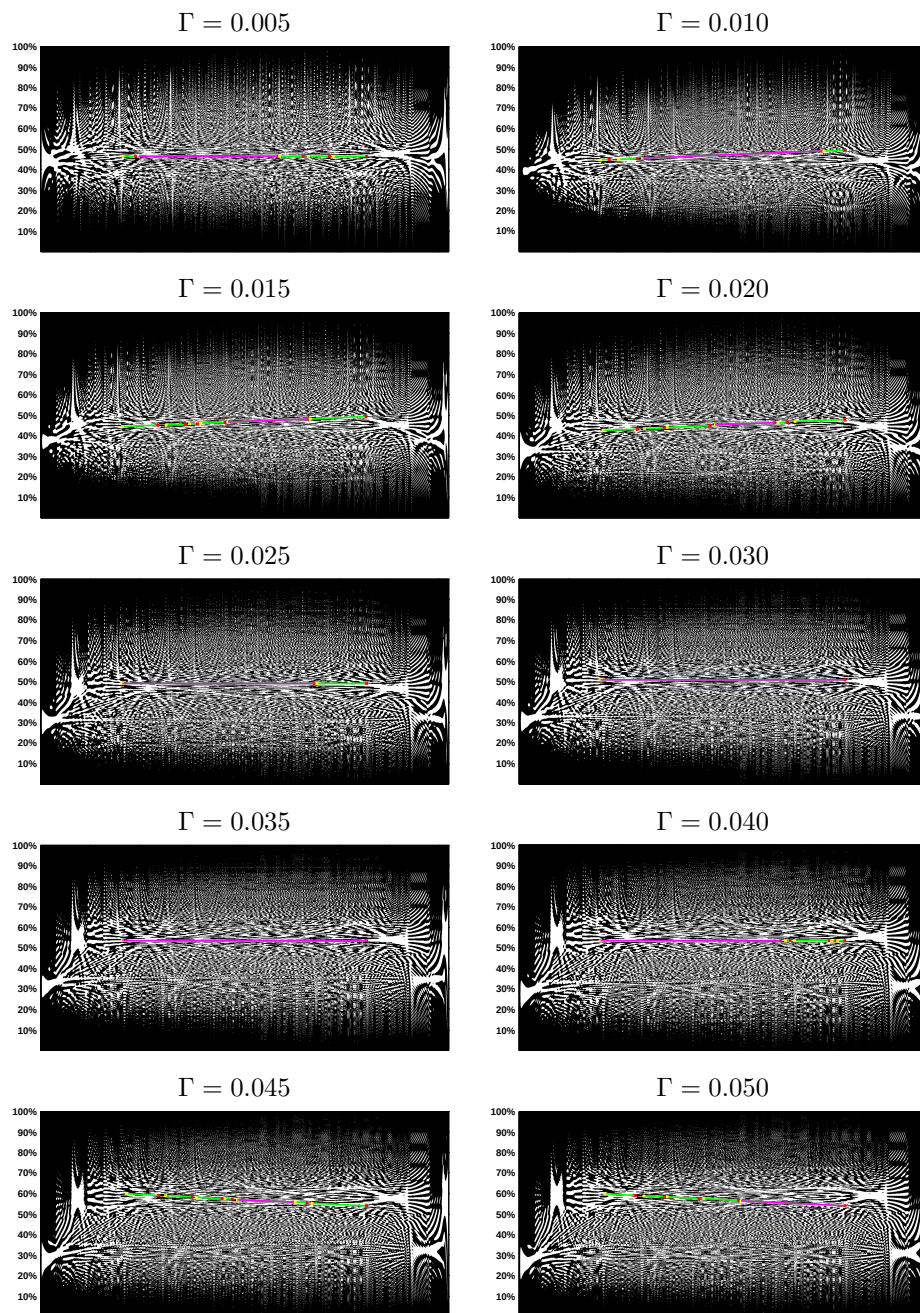


Figura 4.18: Resultados del algoritmo de clasificación utilizando la *Transformada de Hough* para el *Laser1* con un factor de confinamiento variable

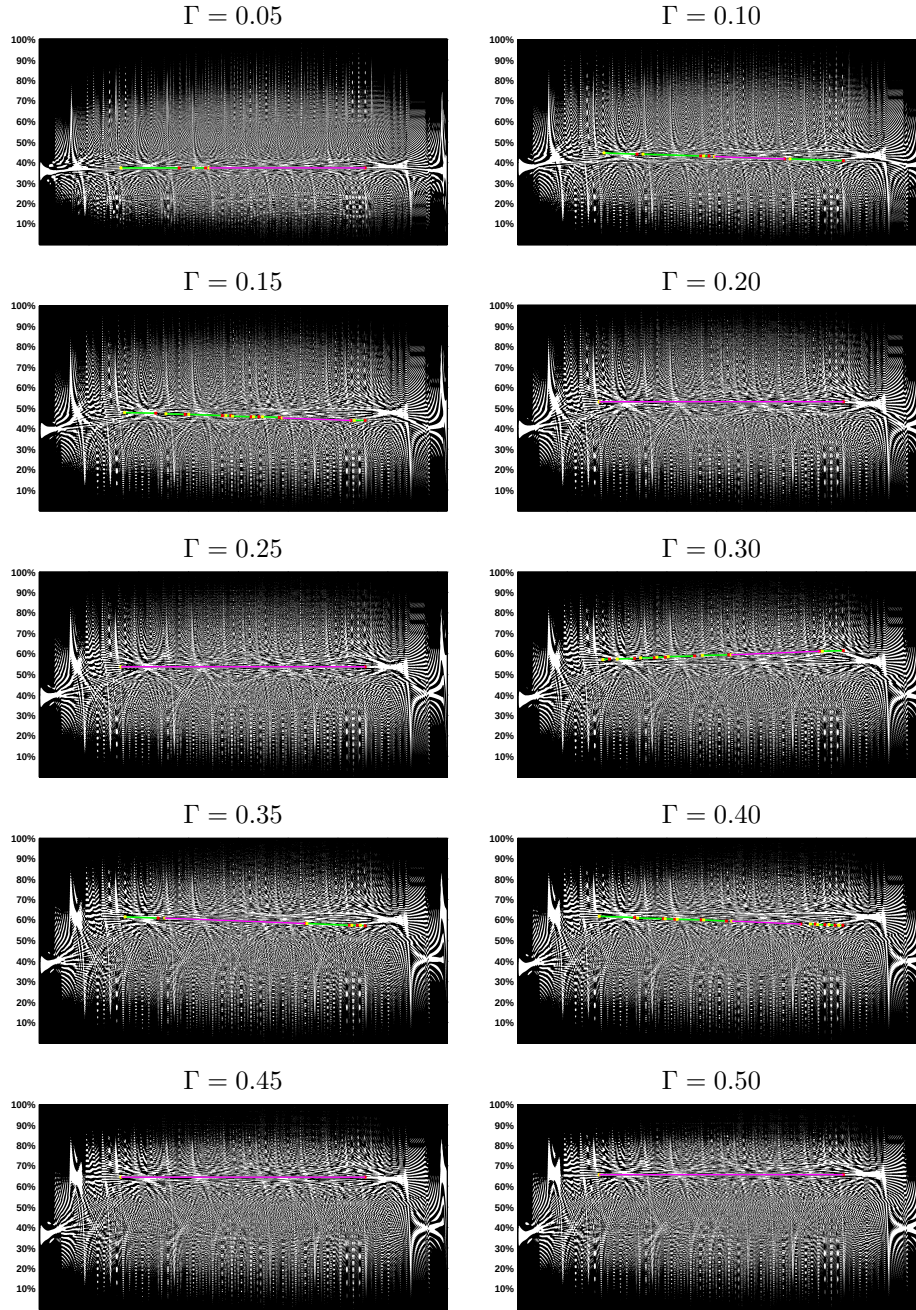


Figura 4.19: Resultados del algoritmo de clasificación utilizando la *Transformada de Hough* para el **Laser2** con un factor de confinamiento variable

La *Transformada de Hough* nos presenta diferentes segmentos de línea identificados en la imagen, donde el segmento de mayor longitud es el identificado con color rosa, los segmentos restantes (de menor longitud) se identifican con el color verde. Los puntos iniciales y finales de cada segmento se identifican con los colores amarillo y rojo respectivamente.

De las figuras 4.18 y 4.19 se puede observar que, dada la clasificación visual hecha del chirp en las tablas 3.5 a 3.13, cuando se incrementa el valor de Γ provocando la transición del láser de adiabático a transitorio, la identificación de los segmentos de mayor longitud se modifica de tal manera que el punto medio del segmento se detecta a una mayor altura de la imagen. Es decir, para el caso del **Laser1**, el punto medio del segmento de mayor longitud se localiza aproximadamente a una altura de 50 % cuando $\Gamma = 0.005$, y este aumenta al mismo tiempo que se incrementa el valor de Γ de tal forma que para $\Gamma = 0.050$ la altura del punto medio es aproximadamente del 60 %. Para el caso del **Laser2**, cuando $\Gamma = 0.05$ el punto medio se localiza a una altura aproximada del 40 % y para cuando $\Gamma = 0.50$ se localiza a una altura del 70 % aproximadamente.

A partir de estas observaciones y de las pruebas realizadas con el conjunto ampliado de prueba, se establece un umbral de clasificación a partir de la ubicación del punto medio del segmento de mayor longitud. El valor establecido como umbral de clasificación es de 53.4 %, valor en el cual, se detectó la transición de chirp.

De esta manera, el algoritmo propuesto en esta tesis establece que cualquier láser cuya *WD* analizada como imagen mediante el uso de la *Transformada de Hough*, y cuyo punto medio del segmento de mayor longitud, se localice por debajo del umbral de 53.4 % será clasificado como *predominantemente adiabático*, en caso contrario, si el punto medio se localiza por arriba del umbral, será clasificado como *predominantemente transitorio*.

4.2.4. Validación del Algoritmo Utilizando la *Transformada de Hough*

En la figura 4.20 se muestra el resultado de la aplicación de la *Transformada de Hough* para la imagen binarizada del conjunto de prueba.

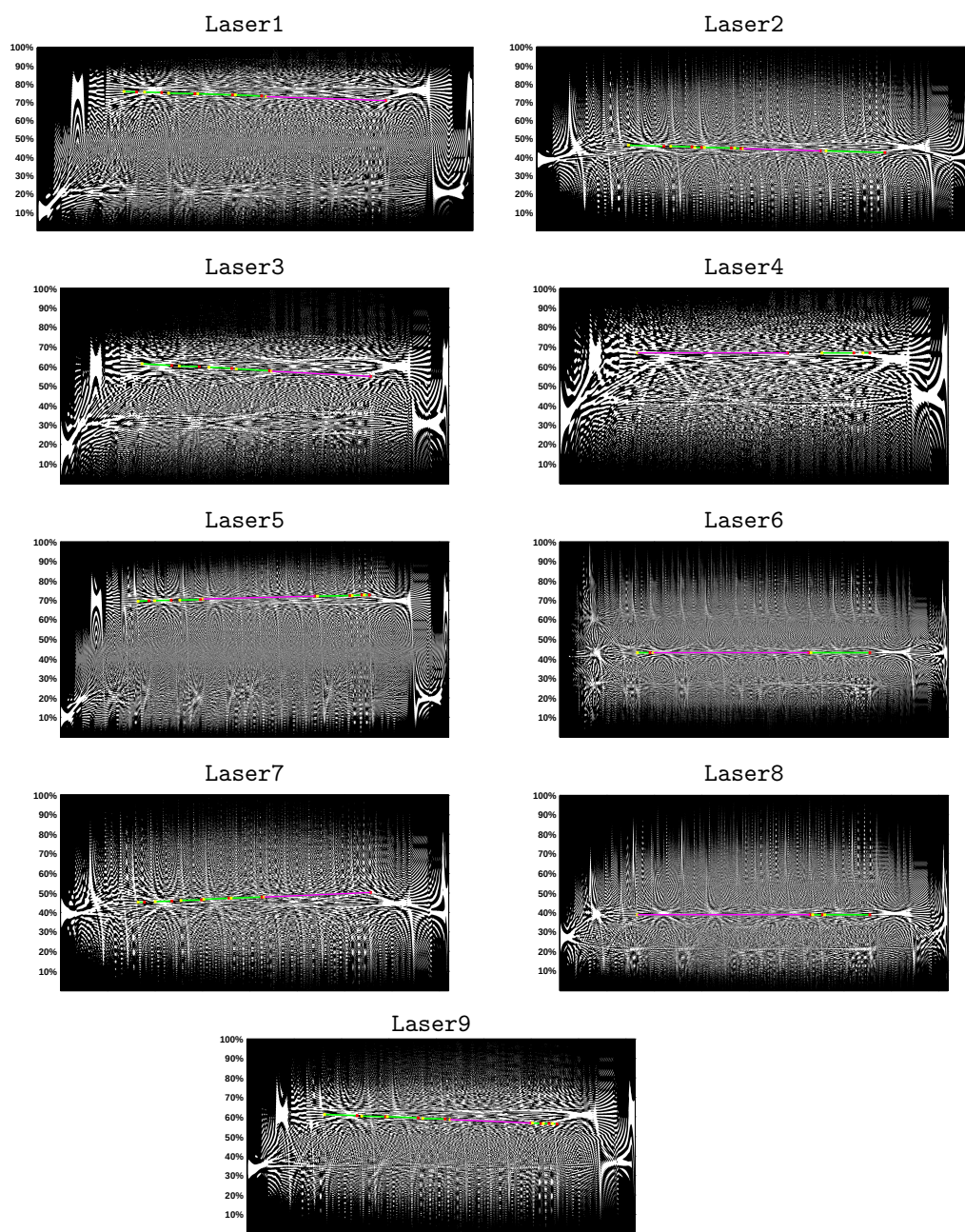


Figura 4.20: Resultados del algoritmo de clasificación utilizando la *Transformada de Hough* aplicado a la cartera de láseres de prueba disponible

De la figura 4.20, se observa que los láseres clasificados visualmente como adiabáticos en las tablas 3.5 a 3.13, es decir los láseres **Laser1**, **Laser3**, **Laser4**, **Laser5** y **Laser9**, presentan un segmento de longitud mayor cuyo punto medio se mantiene por arriba del 60 %, y para el caso de los láseres **Laser2**, **Laser6**, **Laser7** y **Laser8**, clasificados como transitorios, el mismo punto se mantiene por debajo del 50 %.

En la tabla 4.12 se presentan los resultados de clasificación obtenidos para el conjunto de prueba. La primera columna muestra el nombre del conjunto de prueba utilizado, la segunda columna muestra la clasificación visual que se hizo en la tabla 3.4, la tercera columna muestra el resultado obtenido con el primer algoritmo de clasificación propuesto en la sección 4.1, la cuarta columna muestra la localización del punto medio del segmento de mayor longitud utilizando la *Transformada de Hough*, por último, la quinta columna muestra el resultado de clasificación del segundo algoritmo propuesto. Cabe destacar que los resultados que se muestran en esta tesis son obtenidos con utilizando la misma secuencia PRBS.

Laser	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
Laser1	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	72.0998	<i>Adiabático</i>
Laser2	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	44.1771	<i>Transitorio</i>
Laser3	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	56.3338	<i>Adiabático</i>
Laser4	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	67.0082	<i>Adiabático</i>
Laser5	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	71.2527	<i>Adiabático</i>
Laser6	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	43.0848	<i>Transitorio</i>
Laser7	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	49.105	<i>Transitorio</i>
Laser8	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	38.8402	<i>Transitorio</i>
Laser9	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	57.8736	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.12: Comparación de resultados para el conjunto de prueba

Dados los resultados obtenidos de la clasificación utilizando el segundo algoritmo propuesto y haciendo una comparación con las dos clasificaciones previamente realizadas, se corrobora el buen desempeño del segundo algoritmo propuesto ya que arroja los resultados esperados. A continuación se presentan los resultados obtenidos para el conjunto ampliado de prueba para los mismos intervalos de valores de Γ presentados en las tablas 3.5 a 3.13 y mostrando los resultados obtenidos para las tres clasificaciones hechas.

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.005	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	46.5086	<i>Transitorio</i>
0.01	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	47.2067	<i>Transitorio</i>
0.015	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	47.3868	<i>Transitorio</i>
0.02	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	45.7692	<i>Transitorio</i>
0.025	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	48.9451	<i>Transitorio</i>
0.03	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	50.8219	<i>Transitorio</i>
0.035	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	53.4722	<i>Adiabático</i>
0.04	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	53.4328	<i>Adiabático</i>
0.045	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	56.4085	<i>Adiabático</i>
0.05	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	55.1821	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.13: Comparación de resultados para el **Laser1**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.05	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	37.2635	<i>Transitorio</i>
0.10	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	42.3358	<i>Transitorio</i>
0.15	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	44.7419	<i>Transitorio</i>
0.20	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	53.0675	<i>Transitorio</i>
0.25	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	53.7864	<i>Adiabático</i>
0.30	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	60.4424	<i>Adiabático</i>
0.35	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	59.6491	<i>Adiabático</i>
0.40	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	58.8295	<i>Adiabático</i>
0.45	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	64.4935	<i>Adiabático</i>
0.50	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	65.5819	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.14: Comparación de resultados para el **Laser2**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.025	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	46.0954	<i>Transitorio</i>
0.050	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	56.8716	<i>Adiabático</i>
0.075	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	48.0769	<i>Transitorio</i>
0.100	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	47.1003	<i>Transitorio</i>
0.125	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	56.1856	<i>Adiabático</i>
0.150	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	55.7093	<i>Adiabático</i>
0.175	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	56.0976	<i>Adiabático</i>
0.200	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	55.1282	<i>Adiabático</i>
0.225	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	62.6332	<i>Adiabático</i>
0.250	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	56.3338	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.15: Comparación de resultados para el **Laser3**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.01	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	48.7961	<i>Transitorio</i>
0.03	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	48.3245	<i>Transitorio</i>
0.04	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	50	<i>Transitorio</i>
0.05	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	62.9363	<i>Adiabático</i>
0.06	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	63.9198	<i>Adiabático</i>
0.08	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	56.1587	<i>Adiabático</i>
0.09	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	62.3173	<i>Adiabático</i>
0.10	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	63.2696	<i>Adiabático</i>
0.11	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	58.2974	<i>Adiabático</i>
0.13	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	66.4596	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.16: Comparación de resultados para el **Laser4**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.03	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	41.7092	<i>Transitorio</i>
0.08	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	46.0265	<i>Transitorio</i>
0.13	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	45.5342	<i>Transitorio</i>
0.18	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	48.3387	<i>Transitorio</i>
0.23	<i>Adiabático</i>	<i>Transitorio</i>	52.2605	<i>Transitorio</i>
0.28	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	59.4014	<i>Adiabático</i>
0.33	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	63.148	<i>Adiabático</i>
0.38	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	67.2502	<i>Adiabático</i>
0.43	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	75.994	<i>Adiabático</i>
0.48	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	76.0931	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.17: Comparación de resultados para el **Laser5**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.1	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	51.8555	<i>Transitorio</i>
0.2	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	44.8693	<i>Transitorio</i>
0.3	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	44.1954	<i>Transitorio</i>
0.4	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	43.0848	<i>Transitorio</i>
0.5	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	44.923	<i>Transitorio</i>
0.6	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	45.9416	<i>Transitorio</i>
0.7	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	47.0623	<i>Transitorio</i>
0.8	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	44.8827	<i>Transitorio</i>
0.9	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	45.6051	<i>Transitorio</i>
1	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	45.7288	<i>Transitorio</i>

Tabla 4.18: Comparación de resultados para el **Laser6**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.1	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	41.4579	<i>Transitorio</i>
0.2	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	49.1039	<i>Transitorio</i>
0.3	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	50.3181	<i>Transitorio</i>
0.4	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	57.3653	<i>Adiabático</i>
0.5	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	60.0746	<i>Adiabático</i>
0.6	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	67.744	<i>Adiabático</i>
0.7	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	69.8163	<i>Adiabático</i>
0.8	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	74.328	<i>Adiabático</i>
0.9	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	71.4625	<i>Adiabático</i>
1	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	74.5763	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.19: Comparación de resultados para el **Laser7**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.50	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	40.1823	<i>Transitorio</i>
0.55	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	42.4688	<i>Transitorio</i>
0.60	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	47.4615	<i>Transitorio</i>
0.65	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	48.6384	<i>Transitorio</i>
0.70	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	50.078	<i>Transitorio</i>
0.75	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	53.2702	<i>Transitorio</i>
0.80	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	58.2982	<i>Adiabático</i>
0.85	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	59.4881	<i>Adiabático</i>
0.90	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	59.1491	<i>Adiabático</i>
0.95	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	64.7577	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.20: Comparación de resultados para el **Laser8**

Γ	Clasif. visual	Algoritmo 1	Pto. Medio [%]	Algoritmo 2
0.03	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	40.6336	<i>Transitorio</i>
0.04	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	40.9633	<i>Transitorio</i>
0.05	<i>Transitorio</i>	<i>Transitorio</i>	43.4166	<i>Transitorio</i>
0.06	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	49.9443	<i>Transitorio</i>
0.08	<i>Mixto</i>	<i>Transitorio</i>	53.8976	<i>Adiabático</i>
0.09	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	53.9928	<i>Adiabático</i>
0.10	<i>Mixto</i>	<i>Adiabático</i>	61.0918	<i>Adiabático</i>
0.11	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	56.6434	<i>Adiabático</i>
0.13	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	64.5274	<i>Adiabático</i>
0.14	<i>Adiabático</i>	<i>Adiabático</i>	62.975	<i>Adiabático</i>

Tabla 4.21: Comparación de resultados para el **Laser9**

En las tablas 4.13 a 4.21 se resumen los resultados que se han obtenido a partir de la aplicación del segundo algoritmo de clasificación. En la primera columna, correspondiente al valor del factor de confinamiento óptico Γ , utilizado para ese caso en particular, se muestra un intervalo de valores que varía en cada tabla. Esto se debe a dos razones principales, la primera se refiere al hecho de que el intervalo mostrado fue seleccionado con base en el valor del Γ donde se presentó la transición de chirp predominante de transitorio a adiabático. La segunda razón es que, con el propósito de presentar únicamente diez diferentes casos con un valor de Γ variable tomando como base el valor aproximado de transición de chirp predominante, se determinó un mínimo de dos casos en el que el chirp fuera clasificado visualmente como mixto, para de esta manera, comprobar los resultados obtenidos a partir de los dos algoritmos de prueba, aún cuando visualmente no es claro clasificar el tipo de chirp predominante en la señal óptica.

En la segunda columna se presenta la clasificación visual realizada para cada caso, donde, como se mencionó en el párrafo anterior, se presentan intencionalmente, un mínimo de dos casos de clasificación de chirp predominante mixto. Estos resultados son los mismos presentados en las tablas 4.3 a 4.11 y se presentan nuevamente con el fin de facilitarle al lector la comparación de resultados.

La tercera columna muestra el resultado de clasificación obtenido para el correspondiente valor de Γ a partir de la aplicación del primer algoritmo basado en la función de correlación y presentado en la sección 4.1 de esta tesis. Esta columna, al igual que la anterior, presenta los mismos resultados que se presentaron anteriormente en las tablas 4.3 a 4.11.

La cuarta columna corresponde al valor en el cual se presentó, para cada caso, el punto medio del segmento de mayor longitud después de la aplicación de la *Transformada de Hough*.

Finalmente, en la quinta y última columna, se presenta el resultado obtenido a partir de la aplicación del segundo algoritmo propuesto en esta tesis, basado en la *Transformada de Hough*, y que ha sido diseñado para emplear únicamente la *Distribución de Wigner* de la señal analizada como entrada. De esta última columna, se puede apreciar que, para siete de los nueve conjuntos ampliados de prueba, la transición de chirp predominante se da siempre dentro del intervalo clasificado visualmente como mixto, según la segunda columna de cada tabla, a excepción del **Laser5** y **Laser6** (ver tablas 4.17 y 4.18). Respecto al **Laser5**, se observa que el último caso de resultado de clasificación de chirp predominantemente transitorio, según el resultado del segundo algoritmo, se presenta para un caso en el que el chirp ha sido clasificado visualmente como adiabático, y no como mixto, como en el resto de los conjuntos de prueba. Sobre el **Laser6**, para cualquier clasificación, ya sea visual o resultante de alguno de los dos algoritmos propuestos, resulta siempre ser como predominantemente transitorio para todo

el intervalo de valores de Γ , tal cual se describió para la figura 4.10. Esto, como se mencionó en la sección 3.3, se debe a la relación $\alpha : \kappa$ en la que el valor de α es considerablemente mayor que κ para cualquier valor de Γ (ver tabla 3.10).

Para el caso del **Laser3** existe un caso de discrepancia en los resultados para un valor de $\Gamma = 0.050$ en el que se presenta un resultado no esperado. Esto se debe a que no es identificable para el algoritmo propuesto, a partir de la *WD*, la zona de concentración de mayor energía. En la sección 1.1.7 cuando se presentó la ecuación de estado de densidad de fotones (véase ecuación (1.8)), se explicó que para algunos valores de Γ el láser es físicamente imposible⁶. Recordemos que la finalidad de utilizar estos valores de Γ es la de controlar la transición del tipo de chirp predominante independientemente de que corresponda a casos físicamente posibles. Tal es el caso del **Laser3** con un valor de $\Gamma = 0.050$ por lo que el resultado no esperado se genera para un caso que quedaría fuera de la realidad.

Por otro lado, de la tabla 4.12 se ha hecho mención de que los resultados obtenidos cuando se aplica este segundo algoritmo al conjunto de láseres de prueba, (y el cual hemos dicho contiene conjuntos de parámetros láser medidos experimentalmente y extraídos de bibliografía especializada) son los esperados debido a que coinciden completamente tanto con la clasificación visual como la arrojada por el primer algoritmo propuesto. Esto es prueba de que el algoritmo que se presenta en esta sección, basado en la *Transformada de Hough*, cumple con los objetivos planteados para láseres reales, o físicamente posibles.

⁶Cuando el valor de Γ es muy pequeño, la densidad de portadores N puede tomar valores negativos. O bien, cuando Γ es muy grande, implicaría que una mayor cantidad de potencia óptica se transmite por la región activa

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de cuatro capítulos se han presentado tres temas importantes para el desarrollo de esta tesis: las bases teóricas que definen el funcionamiento de un láser de semiconductor, el marco teórico en el cual se basa la función de *Distribución de Wigner* y dos propuestas de algoritmo de clasificación basados en la *WD* para el tipo de chirp que presenta el láser de semiconductor.

La importancia de clasificar el tipo de chirp predominante en una señal óptica radica en las ventajas que conllevaría al gestionar el chirp con respecto a la dispersión (fibra óptica de dispersión positiva o negativa). Por ejemplo, para el caso del chirp transitorio, al combinarse con dispersión negativa se genera una compresión de pulsos ópticos, lo cual implica la capacidad de incrementar la distancia de transmisión sin necesidad de regenerar la señal.

A continuación se presentan los logros más importantes que se alcanzaron con la realización de esta tesis, y que prueban que los objetivos planteados al inicio de este trabajo han sido alcanzados satisfactoriamente.

- Se hizo una descripción del funcionamiento de un láser de semiconductor DFB, así como de la teoría que explica tal funcionamiento y la cual se basa en tres ecuaciones llamadas ecuaciones de estado.
- La resolución de las ecuaciones de estado permitió simular el láser DFB, para, de esta manera, manipular su comportamiento mediante la modificación de sus parámetros, a fin de variar la relación $\alpha : \kappa$ y así alterar el tipo de chirp predominante en la señal óptica induciendo su comportamiento como transitorio o adiabático.
- Se propuso, como primer algoritmo de clasificación, la utilización de la función de correlación cruzada entre la potencia y el chirp, lo cual permitió conocer mediante el correlograma la relación de similitud que guardan

las dos señales y a partir de esto y del establecimiento de un umbral clasificar el láser.

- Como segundo algoritmo de clasificación, se propuso el uso de la *Distribución de Wigner* como imagen, de la cual se detectaron y extrajeron características particulares de cada tipo de chirp de tal manera que mediante el uso de la *Transformada de Hough* y del establecimiento de un umbral, es posible hacer una clasificación del tipo de chirp predominante en la señal.
- Los dos métodos de clasificación aquí propuestos han sido validados para nueve conjuntos de parámetros láser que fueron medidos experimentalmente y que han sido extraídos de bibliografía especializada [6]. Cada conjunto se analizó con más de 40 distintos valores de Γ , lo que da un total aproximado de 400 láseres de prueba diferentes. Esto permitió validar de manera confiable los dos algoritmos de clasificación.
- Los resultados obtenidos de los dos algoritmos de clasificación son los esperados debido a que ambos coinciden completamente con la clasificación visual, lo que confirma que ambos algoritmos propuestos operan correctamente.
- La utilización de cualquiera de los dos algoritmos aquí propuestos ayudará a los fabricantes de estos dispositivos a proponer nuevos diseños en láseres de semiconductor. Asimismo, permitirá llevar a cabo pruebas de clasificación automatizadas.

Trabajo Futuro

Una vez sentadas las bases teóricas que definen la *Distribución de Wigner*, y de proponer dos algoritmos que utilizan fundamentalmente la teoría de esta distribución mediante el uso de señales ópticas simuladas, un siguiente paso que se propone como trabajo futuro es la implementación física de la *WD*. Para lo cual en [21][22][23][24][25][26] se proponen esquemas de configuración de sistemas ópticos para la obtención de la *WD* utilizando elementos ópticos comunes.

Igualmente, utilizando las bases teóricas que se han presentado aquí sobre el funcionamiento de la *WD*, se propone como línea de investigación alterna la búsqueda y/o mejora sobre las varias aplicaciones que tiene esta distribución en los diferentes campos en los que se ha explorado anteriormente, como lo son el procesamiento de señales [27], óptica [28][29] y medicina [30].

Apéndice A

Señal Analítica

Sabemos que el espectro de una señal real es siempre simétrico lo cual implica que solo la mitad del espectro contiene información, este inconveniente es eliminado con el uso de la señal analítica [16].

Se conoce como señal analítica a aquella que permite calcular la frecuencia instantánea de la señal para un instante determinado en una señal no estacionaria cuya frecuencia varía rápidamente respecto al tiempo [15].

Sea una señal $s(t)$ de amplitud a y frecuencia ω_0 definida por:

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t) \quad (\text{A.1})$$

La frecuencia de la señal se determina derivando su argumento:

$$\omega = \frac{d}{dt} \omega_0 t = \omega_0 \quad (\text{A.2})$$

La señal A.1 se puede interpretar como la parte real de una exponencial compleja con módulo constante como se muestra en la ecuación A.3:

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t) = \text{Re} \{ a e^{j\omega_0 t} \} \quad (\text{A.3})$$

Asociando a la señal real $s(t)$ su parte compleja $\hat{s}(t)$ (deducida a partir de la parte real con un desfase de $\frac{\pi}{2}$)¹ se define la señal analítica $\Psi_s(t)$ de la siguiente forma:

$$\Psi_s(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \quad (\text{A.4})$$

¹La parte real e imaginaria están en cuadratura (el desfase entre una senoidal y una cosenoidal es $\frac{\pi}{2}$)

Se calcula la amplitud y la frecuencia instantánea de una señal analítica como sigue [15]:

$$a_s(t) = |\Psi_s(t)| \quad (\text{A.5})$$

$$\omega_s = \frac{d}{dt} \arg \Psi_s(t) \quad (\text{A.6})$$

La derivada de la señal analítica es un buen estimador de la frecuencia instantánea [15]. La ecuación A.4 en su forma polar quedaría como:

$$\Psi_s(t) = a e^{j\omega_0 t} \quad (\text{A.7})$$

Cuyo módulo es constante, es decir, tiene una amplitud constante al igual que su frecuencia ω_0 . En cambio, si ω_0 es variable y dependiente del tiempo, entonces podemos hablar de una frecuencia instantánea y podemos representar a la fase dependiente del tiempo como $\varphi(t)$. Reescribiendo:

$$\Psi_s(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} \quad (\text{A.8})$$

Que no es más que una señal analítica en su forma polar.

Derivado del presente trabajo, se realizó una publicación en colaboración con el Dr. Ramón Gutiérrez Castrejón y Alonso Millán Mejía, titulada *Automatic classification of the frequency chirp in directly modulated lasers using cross-correlation*. La publicación fue presentada en el *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV)* como parte de la edición número 9 del evento *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2012)* [31].



Bibliografía

- [1] Alonso Jesús Millán Mejía. Simulación de un láser DFB para un sistema de comunicaciones ópticas de alta velocidad. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010.
- [2] Govind P. Agrawal and Niloy K. Dutta. *Semiconductor Lasers*. 2a edition, 1993.
- [3] Joseph T. Verdeyen. *Laser Electronics*. Prentice Hall, 3a edition, 1995.
- [4] Verónica Rivera Silva. Apuntes de la clase de Física de Semiconductores con el Dr. Julio Tinoco Magaña. Posgrado, UNAM, 2011.
- [5] Donald C. O'Shea. *Introduction to Lasers and their Applications*. Addison-Wesley.
- [6] Ioannis Tomkos, Ioannis Roudas, Robert Hesse, Neophytos Antoniadis, Aleksandra Boskovic, and Richard Vodhanel. Extraction of laser rate equations parameters for representative simulations of metropolitan-area transmission systems and networks. *Photonics Research and Test Center*, pages 109–129, 4 April 2001.
- [7] Kerry Hinton. Estimating the output field of a directly modulated laser diode. (8):1427–1431, 1996.
- [8] John C. Cartledge and R.C. Srinivasan. Extraction of DFB laser rate equation parameters for system simulations purposes. *Journal Lightwave Technology*, 1997.
- [9] José A. P. Morgado and Adolfo V.T. Castaxo. Directly modulated laser parameters optimization for metropolitan area networks utilizing negative dispersion fibers. *Quantum Electronics*, 2003.
- [10] I. Tomkos, D. Chowdhury, J. Conradi, D. Culverhouse, K. Ennser, C. Giroux, B. Hallock, T. Kennedy, A.Kruse, S. Kumar, N. Lascar, I. Roudas, M. Sharma, R. S. Vodhanel, , and C. C. Wang. Demonstration of negative dispersion bers for DWDM metropolitan area networks. *Quantum Electronics*, Mayo 2001.

- [11] Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III, and Richard L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Cengage Learning, 7a edition, 2008.
- [12] Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, and Sharon L. Myers. *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Prentice Hall, México, 6a edition, 1999.
- [13] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and S. Hamid Nawab. *Señales y Sistemas*. Pearson Education, 2a edition, 1999.
- [14] Michael J. Roberts. *Signals and Systems*. Mc Graw Hill, 2005.
- [15] Corlay Trujillo Monica María. Estudio comparativo e implementación de metodos tiempo frecuencia. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 1996.
- [16] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbräuker. The wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis. *Philips J. Res.* 35, (1, Continuous-Time Signals):217–249, 1980.
- [17] Daniele Paolo Scarpazza. A brief introduction to the wigner distribution. *Politecnico di Milano*, pages 1–5, Agosto, 2003.
- [18] Leon Cohen. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall.
- [19] Francois Auger, Patrick Flandrin, Paulo Goncalves, and Olivier Lemoine. *Time-Frequency ToolBox, for use with MATLAB*, 1995-1996.
- [20] Erik Cuevas, Daniel Zaldívar, and Marco Perez. *Procesamiento Digital de Imágenes con MATLAB y Simulink*. Alfaomega, 2010.
- [21] C. K. H. Brenner and A. W. Lohmann. Wigner distribution function display of complex 1d signals. *App. Opt.* 42, pages 310–314, 1982.
- [22] Roberto Ortega-Martínez and Carlos J. Román-Moreno. The wigner function in paraxial optics i. matrix methods in fourier optics. *Revista Mexicana de Física* 48, pages 565–574, 2002.
- [23] Roberto Ortega-Martínez and Carlos J. Román-Moreno. The wigner function in paraxial optics ii. optical diffraction pattern. *Revista Mexicana de Física* 49, pages 290–295, 2002.
- [24] H. O. Bartelt, K. H. Brenner, and A. W. Lohmann. *The Wigner Distribution Function and its Optical Production*. Physikalisches Institut der Universität, Germany, 1979.
- [25] C. Gonzalo, J. Bescós, Berriel-Valdós, and P. Artal. Optical-digital implementation of the wigner distribution function: Use in space variant filtering of real images. *App. Opt.* 29, pages 2569–2575, 1990.

- [26] Gabriel Cristobal, Consuelo Gonzalo, and Julian Bescos. *Advances in Electronics and Electron Physics Series*. Academic Press, Orlando, Florida, 1990.
- [27] Daniela Dragoman. *Applications of the Wigner Distribution Function in Signal Processing*. Faculty of Physics, University of Bucharest, 2004.
- [28] Martin Bastiaans. *The Wigner Distribution Function Applied to Optical Signals and Systems*. Eindhoven University of Technology, Department of Electrical Engineering, 1978.
- [29] Zhengyun Zhang and Marc Levoy. The wigner function in paraxial optics ii. optical diffraction pattern. *Stanford University, IEEE*, 2009.
- [30] Xu Jingping, Durand Luis-Gilles, and Pibarot Phillippe. Nonlinear transient chirp signal modeling of the aortic and pulmonary components of the second heart sound. *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, pages 1328–1335, 7 July 2000.
- [31] Verónica Rivera Silva, Ramón Gutiérrez Castrejón, and Alonso Jesús Millán Mejía. Automatic classification of the frequency chirp in directly modulated lasers using cross-correlation. *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control CCE*, 2012.