

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

SIMULACION NUMERICA DE FLUJO COMPRESIBLE EN ALABES DE TURBINA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERIA

INGENIERIA MECANICA - TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A :

Ing. ANGELICA MEMBRILLO ROSETE



TUTOR:

Dr. RUBEN AVILA RODRIGUEZ

2006

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Jaime Cervantes de Gortari
Secretario:	Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz
Vocal:	Dr. Rubén Avila Rodríguez
1er. Suplente:	Dr. Alejandro Rodríguez Valdez
2do. Suplente:	Dr. William Vicente y Rodríguez

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

DEPARTAMENTO DE TERMOFLUIDOS, DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS DE COMPUTO ACADEMICO (DGSCA)

TUTOR DE TESIS:

Dr. RUBEN AVILA RODRIGUEZ

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor

Dr. Rubén Avila Rodríguez

A mis padres

Lic. J. Trinidad Membrillo Eslava y Angela Rosete Ordoñez

A mis hermanas

Marisol, Noelia y Rosalinda

A todas y cada una de las siguientes entidades

A la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico DGSCA.

En particular a

M. en C. José Luis Gordillo Ruiz (Jefe del Departamento de Supercómputo)

a L.I. Lourdes Yolanda Flores Salgado, por todo el apoyo brindado.

Al Dr. Luis Miguel de la Cruz Salas (Jefe del Departamento de Visualización).

Al Departamento de Termofluidos de la Facultad de Ingeniería.

En memoria de

Mis queridos abuelos

Ing. César A. Cuesta Escobar

Melano

Índice general

Nomenclatura **x**

1. Introducción **1**

1.1. Motivación 1

1.2. Características de los flujos presentes en Turbomaquinaria. 3

1.2.1. Características del flujo a través de un compresor axial. 4

1.2.2. Características del flujo a través de una turbina axial. 4

1.3. La CFD como herramienta para el análisis del flujo en Turbomaquinaria. 6

1.3.1. Modelos matemáticos. 7

1.3.2. Métodos de discretización y técnicas numéricas de solución. 12

1.3.3. Método de las Diferencias Finitas (FDM). 13

1.3.4. Método de Elemento Finito (FEM). 13

1.3.5. Método Espectral o de Elementos Espectrales. 13

1.4. Análisis en 2D del flujo en una turbomáquina. 14

1.5. Objetivo general 18

1.5.1. Objetivos particulares 18

2. Características del flujo compresible. **20**

2.1. Definición 20

2.2. Onda de presión en el aire y la velocidad del sonido. 21

2.3. Ondas de compresión y expansión 26

2.4. Ecuaciones de gobierno para el análisis del flujo compresible. 29

2.5. El flujo alrededor de un perfil. 31

2.5.1. Las fuerzas aerodinámicas sobre un perfil. 32

2.6. Entrada en pérdida de sustentación de un perfil. 35
2.6.1. Entrada en pérdida del perfil estática. 36
2.6.2. Entrada en pérdida del perfil dinámica. 38
2.7. El flujo compresible sobre superficies aerodinámicas 40

3. Descripción del método **43**
3.1. Método de elementos espectrales/hp 43
3.2. Discretización espacial de alto orden. 44
3.3. Formulación Numérica 46
3.4. Validación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr. 51
3.5. Cálculo del coeficiente de resistencia al avance y el coeficiente de sustentación en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr. 56
3.6. Cálculo de la entropía en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr. 59

4. Simulaciones **62**
4.1. Perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$) flujo compresible viscoso. 62
4.1.1. Comparaciones cualitativas con otras simulaciones. 83
4.2. Perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^0$) flujo compresible no viscoso 86
4.3. Cascada de 5 álabes con un M=0.3 92
4.3.1. Comparaciones cualitativas con otros resultados. 134
4.4. Conclusiones 136

A. General **138**
A.1. Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes 138
A.2. Obtención de la presión y la entalpía como función de la energía. 141
A.3. Características aerodinámicas del Perfil NACA4420 (condición del perfil estática). 143

Bibliografía **145**

Resumen

El comportamiento de un flujo de fluido que atraviesa una o más superficies aerodinámicas en el interior de una turbomáquina es un importante problema de ingeniería que se caracteriza por ser de los flujos más complejos presentes en la dinámica de fluidos. Esta complejidad se debe entre otras cosas a la geometría de los elementos y a la influencia sobre el campo de flujo de las propiedades del fluido como la viscosidad y la compresiblidad. Este trabajo de tesis está enfocado a resolver las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un flujo compresible viscoso que se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes, con el fin de simular su comportamiento al recorrer los pasajes de una cascada de álabes de una turbina en dos dimensiones. Las ecuaciones se resuelven utilizando el código computacional llamado N$\varepsilon\kappa$Tαr, el cual fue desarrollado por el Dr. George Karnidadakis y el grupo The Crunch en la Universidad de Brown. El código N$\varepsilon\kappa$Tαr emplea el método de elementos espectrales/hp para resolver las ecuaciones de gobierno, este método es de alto orden de precisión comparado con métodos como las diferencias finitas, volumen finito o elemento finito. Como resultado de la aplicación existosa del código N$\varepsilon\kappa$Tαr se obtuvieron simulaciones de ejemplos de flujos viscosos y no viscosos que se desplazan sobre perfiles aerodinámicos particularmente el NACA0012 y el NACA4420 en regímenes subsónicos, estos resultados son incluidos para validar y evaluar la precisión y factibilidad del código; y se comparan con simulaciones obtenidas previamente con otros métodos. Posteriormente se obtiene la simulación del flujo subsónico al atravesar parte de una cascada de una turbina compuesta por cinco álabes, la calidad numérica de la simulación muestra una gran precisión al ser comparada cualitativamente con otros resultados. Con este estudio se pretende demostrar la capacidad del método de solución y del código computacional en análisis de flujos complejos sobre geometrías aerodinámicas. Una simulación y el análisis del campo de flujo en los alrededores de un componente de una turbomáquina permite no solo observar y entender su comportamiento sino que además contribuye a optimizar su funcionamiento.

Abstract

The behavior of a flow that crosses one or more aerodynamic surfaces inside a turbomachinery is an important problem of engineering that is characterized to be of the flows most complex presents in the dynamics of fluids. This complexity must among other things to the geometry of the elements and the influence on the field of flow of the properties of the fluid like viscosity and the compresibility. This thesis work is focused to solve the equations that govern the compressible behavior of a viscous flow which they are derived from the equations of Navier-Stokes, with the purpose of simulate the behavior of flow when it crosses the passages of a cascade of blades of a turbine in two dimensions. The equations are solved using the computacional code called N$\varepsilon\kappa$Tαr, which was developed by the Dr. George Karnidadakis and the group The Crunch in the University of Brown. N$\varepsilon\kappa$Tαr code uses the spectral/hp element method to solve the government equations, this method is of high order of precision compared with methods like the finite differences, finite volume or finite element. The execution of the nektar code was successful and several examples of viscous and nonviscous flows were obtained that move on aerofoil profiles particularly the NACA0012 and the NACA4420 in subsonic regimes, these results are including to validate and to evaluate the precision and feasibility of the code, and they are compared with simulations obtained previously with other methods. Later the simulation of the subsonic flow is obtained when it crosses part of a cascade of a turbine composed by five blades, the numerical quality of the simulation qualitatively shows high accuracy the being compared with other results. With this study it is tried to demonstrate the capacity of the method of solution and the computacional code in analysis of complex flows on aerodynamic geometries. A simulation and analysis of the field of flow of a component of a turbomachinery allow, nonsingle to observe and to understand its behavior but that in addition it contributes to optimize his operation.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los flujos en turbomaquinaria son unos de los más complejos que pueden encontrarse en la práctica en dinámica de fluidos, ya que tanto la descripción geométrica del dominio del fluido así como el proceso físico presente es extremadamente complejo. En muchos de estos casos, los flujos son tridimensionales, compresibles o incompresibles, con regímenes de flujo subsónico transónico o supersónico los cuales pueden presentarse simultáneamente en diferentes regiones. Además, el fluido de trabajo puede ser de una sola fase (líquida o gas), ó de 2 fases (líquido-sólido), (gas-sólido) ó (líquido-gas).
Entre las características principales de los flujos dentro de una turbomáquina están las siguientes: son predominantemente viscosos y turbulentos, aunque pueden existir en algunas regiones flujos laminares y de transición. La turbulencia dentro del campo de flujo puede presentarse en la zona de capa límite o en la corriente libre, donde el nivel de turbulencia puede variar dependiendo de las condiciones previas que presente la corriente de flujo. Esfuerzos complejos y pérdidas en el desempeño son consecuencia de la influencia de la viscosidad en este tipo de flujos, entre los fenómenos que deben también su influencia a la viscosidad y que pueden estar presentes se encuentran las interacciones entre capas límites en los pasajes formados por los álabes y las paredes que los contienen, la separación del flujo debido a la presencia de vórtices sobre los álabes, los vórtices generados en las puntas de los álabes, etc. Por otro lado los efectos térmicos y la transferencia de calor también influyen en el desempeño en estos aparatos y pueden ser factores importantes particularmente en la corriente de flujo a la salida de la cámara de combustión y que se dirige hacia la turbina sometiendo a sus elementos a considerables gradientes de temperatura.
Mucha de la complejidad de los campos de flujo en la turbomaquinaria es consecuencia directa de la trayectoria que recorre el fluido y de la geometría de sus componentes (álabes). Las consideraciones geométricas incluyen la curvatura y forma de los álabes así como de las paredes que los cercan, el espacio entre álabes y entre las filas de álabes y algunos otros detalles relativos a los perfiles de los álabes como el espesor del perfil, el torcimiento, la relación de aspecto, etc. Por ello obtener un análisis del comportamiento del flujo en el interior de estos aparatos resulta complicado.

La necesidad de estudiar los fenómenos físicos que se presentan en el interior de estos aparatos está justificado por la amplia variedad de aplicaciones, entre las cuales destacan:

- *Aplicaciones en vehículos aeroespaciales.* Compresores y turbinas son utilizados para la propulsión de aviones, helicópteros, vehículos aerospaciales no tripulados, misiles, entre otros.
- *Aplicaciones en vehículos marinos.* Los componentes de turbomaquinaria se utilizan tanto en plantas de generación eléctrica para los submarinos, naves navales, aerodeslizadores, así como en el elemento propulsor de barcos (las propelas).

- *Aplicaciones en vehículos terrestres.* La turbomaquinaria es un importante componente en las turbinas de gas que utilizan camiones, automóviles, y algunos sistemas de trenes de alta velocidad.
- *Aplicación en la generación de energía.* Las turbinas de vapor son un componente indispensable en las plantas nucleoeléctricas, termoeléctricas y de carbón; por el contrario las turbinas hidraúlicas son utilizadas en centrales hidroeléctricas.
- *Aplicaciones industriales.* Compresores y bombas se utilizan en la transmisión de gas o petróleo. Maquinaria de bombeo se utiliza en la extinción de fuego, en la purificación de agua y en las plantas de bombeo; compresores son usados en plantas de refrigeración, etc.
- *Misceláneos.* Bombas son utilizadas en albercas, frenos hidraúlicos, convertidores de par, etc. Una interesante aplicación de la turbomaquinaria en el campo médico es la creación de una bomba artifical para el corazón.

Esto deja claro el amplio rango de aplicaciones donde la turbomaquinaria está presente, la gran variedad de aplicaciones ha generado a su vez una gran diversidad en el campo de la investigación para analizar los flujos de gas y líquidos en su interior. Uno de estos campos de estudio que se deriva de las aplicaciones aeroespaciales es específicamente la propulsión áerea, campo que ha motivado el desarrollo de este trabajo de tesis por causas que a continuación se describirán.

Desde la construcción de la primera turbina de gas por Frank Whittle en 1937 hasta la fecha, la industria aeronáutica continúa trabajando en el mejoramiento del desempeño de cada uno de las fuentes de potencia que utilizan las aeronaves. Estas en su mayoría son; turbinas de gas, turbohélices, turbofans, turborreactores, etc. Es común que las turbomáquinas destinadas al transporte áereo operen dentro de rangos de velocidad muy altos, en los cuales los efectos de la compresibilidad son sustanciales. Estos efectos se ven reflejados en el cambio de la densidad del fluido de trabajo. Algunos dispositivos como el turbofan (que utilizan las aeronaves de líneas áereas como su planta generadora de empuje), consigue velocidades de crucero cercanas a los 1000 km/hr (cerca del Mach 0.9). La ventaja de tener un número de Mach alto de operación garantiza que tanto el flujo másico por unidad de área que entra a la máquina así como la relación de compresión que alcanza el fluido a través de las diferentes etapas del compresor sean grandes, lo que da como resultado una planta de propulsión más compacta y más eficiente, sin embargo el que exista un número de mach alto de operación en una turbomáquina conduce a la formación de ondas de choque entre los conductos que forman los álabes, las cuales en su mayoría conllevan a pérdidas en el desempeño general de ésta. Existen además sustanciales gradientes de presión en cualquier dirección y no hay que olvidar la rotación a la que están sometidas las cascadas de álabes y que es un factor muy importante en el comportamiento del flujo.

Uno de los grandes retos que en la actualidad concierne al desarrollo de la propulsión áerea es el lograr un análisis completo del comportamiento del flujo (sí esto es posible) en el interior de turbinas y compresores, lo cual además de permitir entender la naturaleza de los fenómenos complejos que en el interior de estos aparatos se presentan, pueda traer grandes beneficios que contribuyan a optimizar su funcionamiento. Un ejemplo específico de estos beneficios corresponde al diseño óptimo del sistema de refrigeración para un componente esencial como lo es la turbina; se conoce que la turbina trabaja a altas temperaturas y para la precisa elección de la técnica adecuada de refrigeración debe precederle un análisis completo del comportamiento del flujo, y una adecuada regriferación corresponde a una mejora en el desempeño general de la turbina [Lakshminarayana, 1996], pues permite un incremento de la temperatura del fluido a la entrada de la misma y por tanto un incremento en el empuje reduciendo así el consumo específico de combustible; lo cual conduce a un diseño más compacto de la planta de potencia. Es importante resaltar que en la industria aeronáutica se persigue siempre un diseño compacto para el caso de los motores propulsores; que permita en un principio reducir el área frontal de la aeronave, reduciendo así la resistencia al avance y al mismo tiempo mejorar la relación (peso/empuje). Otro beneficio corresponde al diseño y estructura de los álabes de la turbina, pues una vez conocido el comportamiento del campo de flujo, es posible mediante un análisis de dinámica de fluidos y termoelasticidad modelar geometrías que permitan incrementar la resistencia estructural de los álabes y la eficiencia de los mismos.

Los trabajos de investigación desarrollados hasta ahora referente a los fenómenos presentes en turbomaquinaria y cuyos resultados han proporcionado numerosos avances en su diseño, han sido el resultado de un trabajo conjunto de diversas disciplinas entre las que destacan: la acústica, las matemáticas aplicadas, la ciencia de los materiales, la mecánica de sólidos, la termodinámica y obviamente la mecánica de fluidos entre otras. Todas estas disciplinas han estado en la continúa búsqueda de instrumentos y herramientas que contribuyan al desarrollo y optimización de estas máquinas. La mecánica de fluidos específicamente cuenta con una herramienta muy eficaz la cual es la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) que en la última década ha evolucionado de tal manera que el día de hoy es posible realizar simulaciones numéricas adecuadas de diversos tipos de flujo entre ellos los flujos en turbomáquinas y cuyos resultados han permitido conocer y entender el comportamiento de éste y muchos otros tipos de flujos los cuales en su mayoría son difíciles de analizar con métodos convencionales.

1.2. Características de los flujos presentes en Turbomaquinaria.

Los campos de flujo en la turbomaquinaria utilizada para la propulsión aérea son como ya se ha mencionado, altamente complejos y tridimensionales por naturaleza, en muchos de los casos los flujos son compresibles y presentan varios regímenes de flujo. Ondas de choque pueden estar presentes en el camino del flujo e interaccionar con las capas límite lo que induce pérdidas en el desempeño de sus elementos. Gradientes de presión substanciales pueden existir en cualquier dirección y por supuesto no hay que olvidar la influencia de la rotación sobre el comportamiento del flujo.

Los flujos en el interior de una turbomáquina son predominantemente viscosos y turbulentos, aunque se presentan también regiones dónde el flujo es laminar así como también zonas de transición. La turbulencia dentro del campo de flujo puede ocurrir en las capas límite y en la corriente libre, donde el grado o nivel de turbulencia dependerá de las condiciones que tenga la corriente aguas arriba. Por ejemplo, la corriente de flujo a la salida del sistema de combustión o a la salida de un compresor de etapas múltiples puede presentar un mayor nivel de turbulencia que el flujo que va a entrar a una cascada direccionadora de flujo. Esfuerzos complejos y pérdidas de eficiencia de los elementos resultan de los fenómenos generados como consecuencia de la viscosidad, tales como la existencia de capas límite tridimensionales, las interacción entre capas límite, la separación del flujo, los vórtices generados en la puntas de los álabes, el desprendimiento de vórtices en los bordes de salida de los álabes, las estelas, la compresibilidad del flujo, etc.

En la mayoría de los casos el flujo es no permanente como consecuencia de la variación de las condiciones aguas arriba de la corriente que puede deberse por ejemplo, a la propagación de los vórtices que se separan de los bordes de salida de los álabes y a las interacciones de las filas de álabes (cascada de álabes) entre las que rotan y la que permanecen estáticas.

Las turbomáquinas que son utilizadas como planta de potencia para uso aeronáutico como: los turbofán, el turbohélice y la turbina de gas, tienen entre muchos otros componentes, tres componentes básicos para su funcionamiento que son: el compresor, el sistema de combustión y la turbina. Cada uno de estos elementos realizan una función específica dentro del motor y por lo tanto existen diferencias en la geometría, en su diseño y en su funcionamiento, lo cual implica que los fenómenos y patrones de flujo en el interior de cada uno de estos componentes sean diferentes. Además cada uno de estos componentes ya sea el compresor o la turbina se clasifican dependiendo de la dirección de la trayectoria que siga el flujo al atravesar el elemento. Existen entonces compresores de flujo axial y de flujo radial, lo mismo ocurre con las turbinas; las hay de flujo axial o radial. Esto viene a remarcar aún más las diferencias en los campos de flujo entre los componentes de la planta de potencia.

A continuación se describirán brevemente algunos de los fenómenos característicos que se presentan en el interior de los componentes de un compresor y una turbina de una turbomáquina de flujo axial, por ser éstas las más favorecidas para su aplicación en las plantas de potencia de aeronaves. Por lo tanto no se tratará en este trabajo de tesis los flujos dentro de las turbomáquinas de flujo radial (compresor y turbina cetrífugos) que son descritos apropiadamente por [Lakshminarayana, 1996] ni tampoco se describirán los fenómenos

que se presentan en el interior del sistema de combustión debido a su complejidad, que incluyen reacciones químicas y que quedan fuera del alcance de este trabajo.

1.2.1. Características del flujo a través de un compresor axial.

Los compresores axiales son máquinas utilizadas para comprimir al fluido, con la entrada y salida del flujo predominantemente en la dirección axial. Los compresores axiales típicamente producen grandes incrementos de presión por etapa y emplean múltiples etapas. La longitud de los álabes de estos compresores son cortas de la raíz a la punta, así como también la longitud de las cuerdas de sus perfiles. El desempeño de los sistemas de compresión axial están afectados por fenómenos típicos como los que se muestran en la figura 1.1 y que se describen brevemente a continuación:

- La rotación, la curvatura y los gradientes de presión radial influencian a las capas límite de los álabes del rotor. Por ejemplo, las capas límite de los álabes cercanas a su base son más delgadas, que en la punta de los álabes donde son más gruesas.
- Separación de la capa límite inducida por los fuertes gradientes de presión, esta separación dependiendo de las condiciones de la corriente y de la geometría de los álabes, así como del ángulo de ataque de éstas, se presentará en forma temprana o retardada. Es decir, la separación ocurrirá antes de la mitad de la longitud de la cuerda del perfil de la pala en algunos casos y en otros se presentará hasta casi el borde de salida.
- La afectación de la filtración de flujo o también llamado escurrimiento del flujo a través de los pequeños espacios que existen entre las puntas de los álabes y las paredes que las contienen generan vórtices, que tienden a mezclarse con las capas límite de la pared anular y además también se ven influenciados por el flujo secundario, generándose entonces patrones de flujo sumamente complejos.
- En el caso de un compresor transónico, la existencia de ondas de choque que pueden existir a la entrada de los pasajes que forman los perfiles, en el interior de los pasajes y también a la salida de estos, provoca cambios en el régimen del flujo a lo largo de la altura de los álabes.
- La existencia de flujos secundarios en la base y en la puntas de los álabes.
- El flujo secundario en la pared de la base de los álabes combinado con la existencia de gradientes de presión adversos dentro de la capa límite de la pared provocan la separación del flujo en las esquinas de la base de los álabes.

1.2.2. Características del flujo a través de un turbina axial.

El sistema de expansión en una turbomáquina recibe el nombre de turbina y consiste generalmente de una o más etapas. En aplicaciones aéreas las turbinas axiales son las que predominan. El flujo en el interior de las turbinas se caracteriza por la existencia de largos gradientes de presión favorables y altos rangos de transferencia de calor, como resultado de los gases calientes que expulsa el sistema de combustión. La composición de estos gases resulta ser una combinación de productos del proceso de combustión. Debido a las altas temperaturas a las que las turbinas y todos sus elementos están expuestos, debe contarse con un eficiente sistema de enfriamiento que proteja los componentes para evitar algún daño térmico.

Las turbinas axiales requieren de una o más etapas de estatores y rotores para expander el flujo que expulsa el sistema de combustión. Las turbinas operan a velocidades de rotación altas y pueden existir en su interior diferentes regímenes de flujo. Los álabes de una turbina axial frecuentemente tienen una relación de aspecto relativamente bajo y un gran torcimiento comparadas con los álabes de un compresor. Los álabes son en su mayoría típicamente delgados con sus bordes principales redondeados.

Como la turbina opera en un ambiente donde está sujeta a fuertes gradientes de temperatura, la transferencia y disipación de calor son de las principales preocupaciones del diseño. Las primeras etapas de la

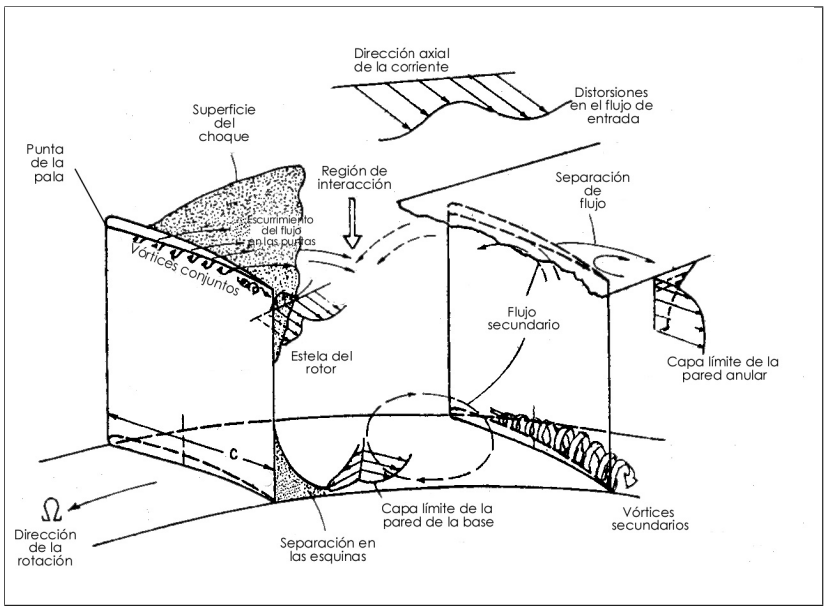


Figura 1.1: Naturaleza del flujo en el interior de un pasaje formado por dos o más álabes de un compresor de flujo axial. Reproducido de [Lakshminarayana, 1996].

turbina son las partes más expuestas a los gradientes de temperatura por lo que requieren de una mayor protección térmica para evitar que los álabes sufran daños estructurales.

El desempeño de una turbina axial es afectada por una gran variedad de fenómenos de flujo complejos como los que se observan en la figura 1.2, entender la estructura del campo de flujo así como las características del proceso de transferencia de calor resulta supremo para el mejoramiento del diseño. A continuación se describirán algunos de los fenómenos representativos presentes en este tipo de máquinas.

- Como el flujo dentro de los pasajes se acelera, el flujo puede alcanzar regímenes de flujo de transición, es decir que el número de mach de la corriente puede ser cercano a la unidad aún cuando el mach de la corriente a la entrada sea subsónico.

- El flujo en las regiones cercanas a las raíces de los álabes resulta muy complejo debido al gran torcimiento que tienen estos, lo que trae como consecuencia la aparición del llamado flujo secundario en las puntas y las bases de los álabes que cubre la mayor parte de su envergadura.

- Debido a que los bordes de entrada de los álabes no son son delgados, la presencia de las capas límite en las esquinas que forman la pala y su base (pared) inducen la formación de vórtices llamados "vórtices de herradura" los cuales tienden a dividirse en dos, ver figura 1.2, los cuales se transportan a lo largo de los pasajes.

- En las turbinas se presentan complicaciones adicionales debido a los efectos que provocan los sistemas de enfriamiento. El enfriamiento por inyección también llamado de "película" tiene efectos sustanciales en la aerodinámica del perfil y reduce la eficiencia de las mismas como consecuencia de la inyección de aire que se le hace al flujo a través de pequeños orificios localizados en las superficies de los álabes.

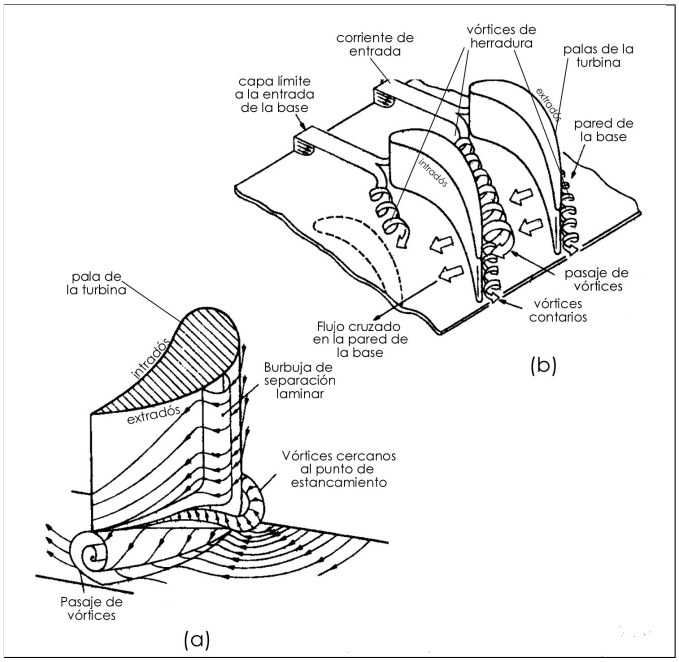


Figura 1.2: Modelos de algunos de los fenómenos presentes en la base y en el interior de un pasaje de una turbina de flujo axial.Reproducido de [Lakshminarayana, 1996].

1.3. La CFD como herramienta para el análisis del flujo en Turbomaquinaria.

La Dinámica de Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics) ha impulsado el desarrollo y al mismo tiempo ha unificado el análisis de los campos de flujo presentes en una turbomaquinaria con el continuo mejoramiento del diseño de la misma. El objetivo del diseño aerodinámico para uno o más componentes de una turbomáquina es minimizar las pérdidas y maximizar el desempeño aerodinámico considerando las reestricciones geométricas físicas a las que se encuentre sometido el componente. En la literatura relativa al estudio y análisis de las turbomáquinas y sus componentes para cumplir este objetivo se presentan dos formas de analizar un problema. La primera vertiente corresponde a un análisis preeliminar, el cual evalúa las características totales del componente de tal forma que los resultados deben satisfacer los requerimientos y las reestricciones que demanda el conjunto total. En contraste, el realizar un análisis detallado está enfocado generalmente a una región de un elemento específico de forma tal que los resultados de este análisis ayude a predecir la forma más realista posible, aquellas características del flujo que resultan determinantes (críticas) en el desempeño aerodinámico del componente de la turbomáquina que es analizado. Estas características son indudablemente los fenómenos físicos tales como la separación de flujo, las ondas de choque, la interacción de las capas límite, etc. Por lo tanto el grado de detalle de los resultados que se obtengan estarán determinados por la elección del tipo de análisis que se desee realizar. Durante un análisis preeliminar algunas simplificaciones pueden hacerse de tal manera que permitan modelar al flujo con menor detalle. Pero en un análisis detallado es necesario utilizar todas las capacidades y herramientas disponibles que nos proporciona en este caso la Dinámica de Fluidos Computacional. El grado de precisión que puede ofrecer un programa de CFD y que hace que funcione adecuadamente como una herramienta de análisis de un flujo depende de importantes consideraciones que a continuación se describen.

- El modelo matemático del flujo, el cual debe ser lo suficientemente preciso de tal forma que represente aquellos aspectos del flujo que impactarán en el desempeño aerodinámico. La decuada especificación de las condiciones de frontera para las ecuaciones de gobierno.

- Sí ha de considerarse la existencia de turbulencia en el campo de flujo debe elegirse el modelo de turbulencia más adecuado que tomen en consideración las características típicas del flujo.
- La elección de la técnica númerica de solución, la cual puede resultar determinante en el resultado del análisis, esto incluye la discretización de las ecuaciones de gobierno.
- La representación de la configuración geométrica de la región de análisis, es decir la construcción de dicha región por medio de una malla la cual deberá reflejar lo más próximo a la realidad física. La malla debe ser capaz de reproducir las formas complejas de los elementos que componen la región de análisis con gran detalle. Por ello existen distintos tipos de mallas las cuales satisfacen los requerimientos que cada análisis demande. La adecuada selección de la malla es esencial para asegurar la precisión tanto de la modelación geométrica como la del análisis del flujo.
- El desempeño del programa también debe tomarse en cuenta para análisis detallados, ya que dada la naturaleza compleja de las ecuaciones a resolver, el software puede tomar varios días de tiempo de cómputo para obtener la solución. Por lo tanto la optimización del software mediante el uso de paralelización debe considerarse.
- El procesamiento y el postprocesamiento debe considerarse también debido a la cantidad significativa de tiempo que debe invertirse en preparar el archivo de entrada (input) para el análisis y la interpretación de los resultados una vez terminada la ejecución del programa.

1.3.1. Modelos matemáticos.

Para representar de manera precisa a través de una simulación numérica las características de un flujo que se encuentra en el interior de un componente de una planta de potencia de una aeronave es primordial que el modelo de flujo seleccionado sea el adecuado. En el caso de los flujos en turbomáquinas existen algunos modelos que se han utilizado generalmente para analizar este tipo de flujos, sin embargo la elección de alguno de estos modelos depende principalmente de la precisión que se desee obtener y de la región que se pretende analizar. Los modelos matemáticos hasta ahora utilizados para describir la física de un flujo dentro de geometrías complejas como lo es una turbomaquinaria son:

Las **ecuaciones de Navier-Stokes**[1] en conjunto con la ecuación de continuidad, la ecuación de la energía y la ecuación de estado térmico son empleadas para conocer los campos de presión, temperatura, densidad, velocidad, etc., y su variación en el tiempo. La ecuación de gobierno que resulta de la aplicación del principio físico de la conservación de la masa, recibe el nombre de *ecuación de continuidad*, que en su forma vectorial se expresa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{1.1}$$

Al aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento, la ecuación de gobierno que resulta son las *ecuaciones de Navier-Stokes* cuya forma vectorial es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_{ij}) + \rho \mathbf{f} \tag{1.2}$$

El principio físico de la conservación de la energía, no es más que la primera Ley de la termodinámica, que expresada también en forma vectorial resulta en la *ecuación de la energía*:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{V}) = \rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\tau_{ij}\mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \tag{1.3}$$

donde E representa la energía total del flujo. Hasta ahora las ecuaciones que se han planteado aplican no importa el tipo de gas que se esté considerando, sin embargo asumiendo que el gas utilizado sea un gas

[1] En algunos textos modernos de Dinámica de Fluidos Computacional por simplicidad otorgan el nombre de ecuaciones de Navier-Stokes completas, al conjunto que forman las ecuaciones de continuidad, Navier-Stokes y energía, ver [Anderson, 1995].

perfecto, inmediatamente surge la siguiente relación termodinámica que es utilizada acertadamente en las aplicaciones de ingeniería conocida con el nombre de *ecuación de estado térmico*.

$$p = \rho RT \tag{1.4}$$

donde R es la constante específica del gas y T es la temperatura del fluido.
Las ecuaciones hasta ahora planteadas pueden encontrarse en diversas fuentes y en sus diferentes formas que incluyen la literatura referente a la mecánica o dinámica de fluidos, dinámica de fluidos computacional, aerodinámica, entre los cuales se encuentran: [Anderson, 1995], [Anderson, 1990], [White, 1991], [Schreier, 1982], [Schlichting and Gersten, 2000], etc.
Por otro lado, examinando las ecuaciones anteriores 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, destaca el hecho de que se tienen más variables que ecuaciones para obtener los campos correspondientes a la densidad (ρ), presión (p), velocidad ($\mathbf{V}$) y temperatura (T) del flujo; no es suficiente con las ecuaciones de Navier-Stokes, se requiere además de ecuaciones que relacionen entre sí las variables desconocidas, estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones constitutivas*. Las ecuaciones constitutivas que generalmente se utilizan son:
Coeficiente de viscosidad (μ), en general el primer coeficiente de viscosidad o también llamado viscosidad dinámica es una propiedad termodinámica del fluido la cual depende fuertemente de la temperatura y es modelada utilizando la Ley de Sutherland

$$\mu = \mu_{ref}\left[\frac{T}{T_{ref}}\right]^{\frac{3}{2}}\left[\frac{T_{ref}+T_s}{T+T_s}\right] \tag{1.5}$$

donde T_s es la constante de Sutherland y T_{ref} y μ_{ref} corresponden a la temperatura y viscosidad de referencia, respectivamente. Para el caso del aire T_s toma el valor de 110.6K, la T_{ref}=273.15K y $\mu_{ref} = 1.716x10^{-5}$ kg/(m-s) ver [White, 1991].
Ley de Fourier, la que describe la relación entre el vector de flujo de calor ($\mathbf{q}$) con el campo de temperatura (T). A esta relación se le conoce también como ecuación de conducción de calor.

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T \tag{1.6}$$

donde κ es la conductividad térmica del fluido
Conductividad térmica (κ), la cual está determinada al asumir un número de Prandtl (Pr) constante, el número de Prandtl se define como

$$Pr = \frac{c_p\mu}{\kappa}$$

donde c_p es el calor específico a presión constante, generalmente para el caso del aire ($Pr = 0.72$)

Las siguientes ecuaciones utilizadas como modelo matemático son las **ecuaciones de Reynolds** denominadas **RANS** por su siglas en inglés; este conjunto de ecuaciones son las más utilizadas en análisis tridimensionales donde la mayoría de los flujos son turbulentos.
En los enfoques de Reynolds para turbulencia las propiedades se promedian en el tiempo, esto significa que toda inestabilidad es considerada como parte de la turbulencia. Al promediar las ecuaciones de Navier-Stokes sus términos no lineales dan origen al término de esfuerzos de Reynolds. Para este método, el campo de velocidad medio puede ser definido promediando en el tiempo ó en el espacio. La disipación de energía y el transporte de masa, momentum y energía normal a las líneas de corriente son todas perturbadas por la viscosidad, así que es natural asumir que el efecto de la turbulencia puede ser representado como un incremento de viscosidad.
El conjunto de ecuaciones lo componen las ecuaciones de conservación de la masa, la de conservación de la cantidad de movimiento y la ecuación de la conservación de la energía todas ellas promediadas en el tiempo. A continuación se presenta las ecuaciones
Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{\rho u_i}}{\partial x_i} = 0 \tag{1.7}$$

Ecuación de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u_i u_j}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho} \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} + \rho \overline{g_i} \tag{1.8}$$

donde $-\overline{\rho}\overline{u_i' u_j'}$ es el tensor de los esfuerzos de Reynolds

Ecuación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho} c_p \overline{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho} c_p \overline{u_j}\,\overline{T}) = \overline{u_j}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} - \frac{\partial \overline{q_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho} c_p \overline{u_j' T'}) + \overline{\tau_{ij}}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \tag{1.9}$$

donde $(\overline{u})$ es la velocidad promediada en el tiempo y (u') representa una fluctuación de velocidad, siendo la velocidad (u) la suma de ambas y que corresponde a la velocidad instantánea, por lo tanto $u = \overline{u} + u'$; lo mismo ocurre para las otras propiedades como la presión y la temperatura, etc.
La clausura o cierre de los términos de los esfuerzos turbulentos y los términos de flujo de calor se alcanza por medio de los modelos de turbulencia que son descritos con mayor precisión en [Lakshminarayana, 1996] y [Hah, 1997].
La complejidad de la turbulencia hace improbable que exista un único modelo capaz de representar todos los flujos turbulentos. Por ello, los modelos de turbulencia deben ser considerados como correlaciones de ingeniería o aproximaciones; esta interpretación permite obtener modelos afinados para aspectos particulares que pueden provenir de flujos turbulentos individuales.

Ecuaciones de Euler[2] : estas ecuaciones se utilizan para el análisis del flujo compresible no viscoso y se derivan de las ecuaciones de continuidad, Navier-Stokes y energía, (ecs. 1.1, 1.2 y 1.3, respectivamente). Un flujo no viscoso es, por definición, un flujo donde la disipación, los efectos de la viscosidad, la difusión de masa y la conductividad térmica no son considerados. Aplicando estas consideraciones las ecuaciones que se ven afectadas son la correspondiente a la conservación de la cantidad de movimiento ec. 1.2 y la ecuación de la energía ec.1.3, las cuales al modificarse quedan de la siguiente forma. Como la ecuación de continuidad ec. 1.1 no sufre alguna modificación no será necesario reescribirla.

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \tag{1.10}$$

Ecuación de la energía

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{V}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \tag{1.11}$$

Ecuación del Potencial
La ecuación del potencial conjunta las ecuaciones de continuidad, momentum y energía en una sola ecuación con una nueva y única variable definida como el potencial de velocidad $\mathbf{\Phi}$. Para ver su derivación consutar [Anderson, 1990].

[2] Al igual que sucede con las ecuaciones de Navier-Stokes, en la literatura de la Dinámica de Fluidos Computacional, al conjunto que forman las ecuaciones de continuidad, momentum y energía para un flujo compresible no viscoso reciben el nombre de ecuaciones de Euler, ver [Anderson, 1995].

Entonces la ecuación del potencial se expresa como:

$$\left(1-\frac{{\Phi_x}^2}{{a_0}^2-\frac{\gamma-1}{2}({\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2+{\Phi_z}^2)^2}\right)\Phi_{xx}+\left(1-\frac{{\Phi_y}^2}{{a_0}^2-\frac{\gamma-1}{2}({\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2+{\Phi_z}^2)^2}\right)\Phi_{yy}$$
$$+\left(1-\frac{{\Phi_z}^2}{{a_0}^2-\frac{\gamma-1}{2}({\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2+{\Phi_z}^2)^2}\right)\Phi_{zz}-\frac{2\Phi_x\Phi_y}{{a_0}^2-\frac{\gamma-1}{2}({\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2+{\Phi_z}^2)^2}\Phi_{xy} \tag{1.12}$$
$$-\frac{2\Phi_x\Phi_z}{{a_0}^2-\frac{\gamma-1}{2}({\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2+{\Phi_z}^2)^2}\Phi_{xz}-\frac{2\Phi_y\Phi_z}{{a_0}^2-\frac{\gamma-1}{2}({\Phi_x}^2+{\Phi_y}^2+{\Phi_z}^2)^2}\Phi_{yz}=0$$

donde Φ es la velocidad potencial o potencial de velocidad, a_0 es la velocidad del sonido y las Φ con subíndices son las derivadas respectivas. La ecuación de la velocidad potencial ec.(1.12), es una ecuación diferencial parcial no lineal, y aplica para cualquier flujo irrotacional, isoentrópico en los diferentes regímenes previamente descritos, para resolver esta ecuación se busca reducirla a una ecuación diferencial parcial lineal mediante técnicas matemáticas. Las ecuaciones linearizadas se obtienen siempre al considerar que existen pequeñas perturbaciones en un flujo uniforme, un ejemplo corresponde a un perfil delgado inmerso en una corriente de aire, lo suficientemente delgado para generar muy pequeñas perturbaciones que en consecuencia inducen pequeñas desviaciones en la dirección del flujo con respecto a su estado original. Al análisis de estos flujos usualmente se le conoce como teorías de las pequeñas perturbaciones y cuya aplicación permite obtener las siguientes expresiones para un flujo bidimensional.
Para un flujo subsónico

$$[1-{M_\infty}^2]\phi_{xx}+\phi_{yy}=0 \tag{1.13}$$

donde ϕ es la velocidad potencial de perturbación y el M_∞ es el mach de la corriente libre.
Para un flujo supersónico

$$[{M_\infty}^2-1]\phi_{xx}+\phi_{yy}=0 \tag{1.14}$$

Es importante no perder de vista que las ecuaciones obtenidas de aplicar la linearización son aproximaciones que son restrictivas en algunos aspectos, tales como el hecho de considerar perturbaciones muy pequeñas y por lo tanto distan mucho de representar la física exacta del flujo compresible en análisis. [Anderson, 1990] demuestra que las ecuaciones obtenidas de la linearización de la ecuación potencial (1.13) y (1.14) tienden a ser relativamente válidas para los flujos subsónicos y supersónicos, a diferencia de los flujos transónicos e hipersónicos que no pueden ser linearizados, incluso asumiendo perturbaciones muy pequeñas. Esto se debe principalmente a los fenómenos físicos que se presentan en estos regímenes de flujo, tales como la existencia de regiones con mezcla de regímenes (subsónico-supersónico), regiones con posibles choques, extrema sensibilidad del flujo subsónico a los cambios de geometría, etc. Por lo que desde el punto de vista físico, los flujos compresibles deben analizarse en la medida de lo posible considerando su inherente no linealidad. En resumen los modelos matemáticos que se han utilizado para simular un flujo que circula a través de uno o más elementos de una turbomáquina como lo es un compresor, turbina, fan, etc., cuya geometría resulta compleja son; dependiendo del caso y la complejidad requerida

- Ecuaciones de Navier-Stokes
- Ecuaciones de Navier-Stokes promedio de Reynolds
- Ecuaciones de Euler
- Ecuación del Potencial

Es importante ahora mencionar que la solución de las ecuaciones de gobierno se realiza sobre un espacio finito definido determinado por la malla computacional, por lo que para obtener un resultado apropiado de la física del flujo para un modelo matemático determinado dentro de el espacio computacional, es importante establecer un conjunto de condiciones de frontera específicas para las ecuaciones de gobierno. Tres diferentes tipos de fronteras espaciales son las que generalmente están presentes en los componentes de una turbomáquina las cuales son:

- Fronteras sólidas: consisten en todas las paredes sólidas como las superficies de los álabes o palas, y todos aquellos pasajes donde se encuentren elementos sólidos. Para este tipo de fronteras es apropiado establecer la condición de no deslizamiento, es decir el elemento sólido tiene una velocidad relativa igual con cero.
- Fronteras de entrada y salida de flujo: consisten en especificar las propiedades y características del flujo a la entrada y salida de la corriente, tales como: la velocidad y dirección del flujo, la presión y temperatura, etc. Es importante mencionar que las fronteras de entrada y salida del flujo deben estar lo suficientemente alejadas de los álabes o de la cascada de álabes de tal forma que su presencia no influyan sobre los elementos a analizar. Esto se consigue posicionando las fronteras de entrada y salida a una distancia de por lo menos la distancia de la cuerda de la pala hacia delante y hacia atrás de la cascada de álabes.
- Fronteras períodicas: las fronteras períodicas son utilizadas para modelar tal y como su nombre lo expresa, la naturaleza repetitiva de un flujo.

No hay que olvidar las condiciones iniciales para las variables dependientes ya sea se analice un flujo permanente o no permanente. Las condiciones iniciales difieren de las condiciones de frontera porque no se mantienen fijas a través de la solución. Por el contrario son las encargadas de proveer un punto de inicio para todo el campo de flujo a partir del cual la solución comienza a variar. Es suficiente con establecer el conjunto de ecuaciones de gobierno y haber identificado las condiciones de frontera necesarias que deben especificarse asociadas a estas ecuaciones junto con las condiciones iniciales, sin embargo para el caso de un flujo turbulento debe aún seleccionarse el modelo apropiado de turbulencia que cerrará las ecuaciones RANS.

Una vez que se conocen los modelos matemáticos apropiados que describen el comportamiento físico del flujo principalmente en turbomaquinaria, [Lakshminarayana, 1991] recopila y presenta una serie de observaciones que pueden ayudar a facilitar la elección del modelo matemático que se va a utilizar. Estas observaciones se han agrupado de acuerdo a las aproximaciones físicas que se toman en consideración:

1. *Flujo No Viscoso*: Los términos viscosos que aparecen en las ecuaciones que gobiernan al flujo se desprecian. Para flujos en los que se tienen números de Reynolds suficientemente grandes y en los que el desprendimiento de la capa límite no es considerable y puede despreciase, la viscosidad y los efectos de transferencia de calor pueden confinarse a regiones específicas muy cerca de las superficies de los álabes. Bajo estas circunstancias las ecuaciones de Euler proporcionan una buena aproximación.

2.- *Aproximaciones de Capa Límite*: En la mayoría de las turbomáquinas, las capas límite son delgadas comparadas con el espacio de separación entre los álabes por lo que no es necesario resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en todas las regiones del flujo. Lo que se hace en estos casos es asumir los datos de un campo de presiones o una distribución de velocidades obtenidos generalmente de un código que resuelve flujo no viscoso y a partir de ahí pueden estimarse los campos de velocidad y temperatura. En este caso, los términos difusivos en la dirección de la corriente se desprecian, se asume que el campo de presión esta determinado por la capa límite (es decir el gradiente de presión normal a la pala es cero). Esta técnica no aplica en las regiones con presencia de vórtices o separación de la capa límite.

3.- *Las ecuación de Navier-Stokes Parabólicas (PNS Parabolic Navier Stokes)*: Las suposiciones hechas en esta técnica son similares a las establecidas en la aproximación de capa límite, se utilizan para analizar aquellos flujos para los que una aproximacion de capa límite no es válida pero sin llegar a ser un flujo complejo que requiera el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes completas. Como por ejemplo el flujo turbulento que atraviesa por un difusor con capas límite de considerable espesor. Este tipo de flujo puede manejarse y modelarse por medio de la reducción de las ecuaciones de Navier-Stokes a su forma parabólica y encontrar una solución apropiada y muy parecida a la que se encontraría con las ecuaciones completas. A diferencia de la aproximación de la capa límite, en estas ecuaciones se supone que los gradientes de presión en la ecuación de concervación de cantidad de movimiento no se consideran despreciables . Esta ecuación tiene su aplicación generalmente en la simulación de flujos internos tales como los pasajes formados entre el estator y el rotor, es decir el espacio entre cada etapa [Lakshminarayana and Yu, 1995].

4.- *Navier-Stokes Capa delgada (Thin Layer Navier Stokes)/Navier-Stokes Reducida (Reduced Navier Stokes)*: En el caso de TLNS, los términos de difusión viscosa y turbulenta en la dirección de la corriente

principal no se consideran, lo cual es válido para capas límite viscosas sobre un cuerpo asumiendo que éstas son delgadas comparadas con la longitud característica (sea la cuerda o la longitud de la pala). En el modelo RNS se desprecian los términos viscosos en la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección normal al cuerpo, estas ecuaciones son producto de una análisis de orden de magnitud que se aplica a las ecuaciones de Navier-Stokes aplicable para un flujo con altos números de Reynolds en una dirección predominante.

5.- *Solución de las ecuaciones completas de Navier-Stokes*: Las ecuaciones se resuelven completas para flujo permanente o transitorio. Esta técnica se recomienda para analizar flujos subsónicos transónicos y supersónicos en los que las regiones son dominadas por la viscosidad y además los efectos de la compresibilidad del fluido induzcan ondas de choque e interactúen con la capa límite. [Dorney and Verdon, 1994] utilizan esta técnica para realizar su simulación de una cascada de álabes en 2D. En este caso, la precisión de los resultados que se obtienen al resolver las ecuaciones completas dependerá entonces de el método de discretización que se utilice para resolverlas.

El uso de la Dinámica de Fluidos Computacional se ha incrementado en la última década que combinado con mediciones experimentales constituye una gran herramienta para el diseño y optimización en turbomaquinaria, ya que hace posible el obtener análisis de flujos complejos tridimensionales hasta hace poco inaccesibles en el campo de la ingeniería. En muchos casos la simulación que proporciona la Dinámica de Fluidos Computacional provee la única información disponible y detallada del campo de flujo, ya que el realizar pruebas para obtener mediciones detalladas en los pasajes que forman los álabes y que además están rotando resulta muchas veces incómodo, no es barato, y en otros casos inaccesible.

1.3.2. Métodos de discretización y técnicas numéricas de solución.

El proceso que generalmente se sigue para obtener una solución computacional de un problema determinado, consiste básicamente de dos etapas. La primera etapa consiste en transformar las ecuaciones de gobierno en su forma diferencial o integral y las condiciones de frontera e iniciales en un sistema discreto de ecuaciones algebraicas las cuales se aplican en puntos discretos o celdas de la malla computacional, a esta primera etapa se le conoce como discretización. La siguiente etapa consiste en el reeemplazo de los términos diferenciales presentes en las ecuaciones de gobierno, por las expresiones algebraicas obtenidas de la discretización para formar un sistema algebraico de ecuaciones. El sistema algebraico de ecuaciones que se obtiene de la discretización se resuelven mediante técnicas de solución numéricas las cuales permiten generar algoritmos de cómputo y así obtener la solución aproximada. Entre los métodos de discretización destacan:

- El método de diferencias finitas (FDM)
- El método de volumen finito (FVM)
- El método de elemento finito (FEM)
- El método de elementos espectrales (SEM)

Dependiendo de la formulación de las ecuaciones de gobierno (forma integral o diferencial) éstas pueden discretizarse utilizando los métodos anteriores.

A continuación se describirá brevemente algunas de las características destacables de cada uno de estos métodos de discretización, sin embargo para una mayor descripción de cada uno de estos métodos de discretización existe una gran variedad de textos entre los que se encuentran: ver[Hirsch, 1988], el cual presenta una descripción detallada de cada uno.

El método de las diferencias finitas aproxima las derivadas que se encuentran en las ecuaciones diferenciales de gobierno por expresiones en diferencias formuladas en los puntos de discretización del espacio computacional.

En los métodos de volumen finito se discretizan las ecuaciones de gobierno en su forma integral, estas ecuaciones se aplican a pequeños volúmenes de control alrededor de cada punto de la malla computacional. Esta aproximación asegura que la masa, la cantidad de movimiento y la energía se conserven en cada formulación, algo semejante ocurre en el método de elemento finito.

Hasta hace poco el método de elemento finito había sido más popular en aplicaciones mecánicas pero recientemente han despertado el interés para su aplicación en la aerodinámica, la dinámica de gases, la aeroacústica, la turbomaquinaria, en los flujos turbulentos, etc., debido a su precisión. Sin embargo en gran parte de los análisis hasta ahora realizados en flujos en turbomáquinas, son los esquemas de volumen finito los más ampliamente utilizados comparados con las diferencias finitas, esto se debe a la flexibilidad de utilizar mallas no estructuradas, contrario a las diferencias finitas que deben utilizar mallas estructuradas. A su vez, cada uno de estos métodos de discretización presentan un gran variedad de técnicas de solución númericas para resolver las ecuaciones algebraicas que se obtienen de la discretización.

1.3.3. Método de las Diferencias Finitas (FDM).

La filosofía de las soluciones vía las diferencias finitas es reemplazar las derivadas que aparecen en las ecuaciones de conservación sea Navier-Stokes, Euler, etc., por cocientes de diferencias algebraicas que generan ecuaciones para las variables del campo de flujo en puntos específicos de la malla. El tipo de diferencia finita que se utiliza para reemplazar las derivadas parciales pueden seleccionarse de un gran número de formas distintas, las cuales dependen de la exactitud que se desee para la solución, de la convergencia, de la estabilidad y de la conveniencia; por ejemplo, para las ecuaciones de Euler vía el método de diferencias finitas, los esquemas de solución pueden agruparse en tres grandes categorías como lo muestra [Chung, 2002]

- Esquemas centrales
- Esquemas de primer orden
- Esquemas de segundo orden

Para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes vía el método de las diferencias finitas los esquemas de solución incluyen, esquemas explícitos como el método de DuFort-Frankel, el de Lax-Wendroff, el de McCormack, entre otros; así como también esquemas implícitos como Briley y McDonald, y Mccormack.

1.3.4. Método de Elemento Finito (FEM).

Los métodos de elemento finito se introdujeron en la mecánica de fluidos a finales de los años 70's y fueron implementados en códigos computacionales para realizar simulaciones hasta casi los años 80's. El método de elemento finito desde su creación ha sido enfocado al análisis de problemas en la mecánica estructural, sin embargo se han utilizado existosamente en aplicaciones de la dinámica de fluidos aún cuando su desarrollo inicial no contemplaba a ésta área como objetivo de aplicación. La razón se debía principalmente a las dificultades de los términos no lineales en las ecuaciones de Navier-Stokes. Entre los esquemas de solución de los flujos compresibles vía los métodos de elemento finito son: lo métodos Taylor-Galerkin (TGM), los métodos generalizados de Galerkin (GGM), el generalizado Petrov-Galerkin (GPG), los métodos de Galerkin característicos (CGM) y los métodos discontinuos de Galerkin(DGM). En los métodos de elemento finito al igual que en los otros métodos siempre se ha buscado desarrollar un esquema que sea útil para resolver todos los regímenes del flujo y sea capaz de tratar el flujo compresible y el flujo incompresible como un todo. Una característica importante que deben tener estos esquemas numéricos para el cálculo del flujo compresible es la habilidad de resolver las discontinuidades que puedan estar presentes.

1.3.5. Método Espectral o de Elementos Espectrales.

El método de elementos espectrales recibe también el nombre de método de elementos globales o método de elementos espectrales. La esencia de los métodos espectrales se basa en aplicar expansiones separadas sobre una serie de subdominios (elementos), los cuales son entonces acoplados y juntos condensan una solución global, en lugar de utilizar una sola serie para aproximar la solución sobre el dominio entero. Para acoplar y conjuntar los elementos generalmente se emplea el método de los residuos pesados o los métodos de variación.

En la discretización espectral se utiliza una representación simple de una función $u(x)$ a través de todo el dominio, esta función es una expansión en serie de la forma

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \widehat{u_n}\phi_n \tag{1.15}$$

en donde ϕ_n son las funciones base y generalmente se utilizan los polinomios de Chebyshev, Jacobi o de Legendre
Esta serie se sustituye en la ecuación diferencial o integral con la idea de hacer que la función residual sea mínima.
El método con el nombre de método de elementos globales fue desarrollado y aplicado por L. Michael Delves y sus colaboradores en la Universidad de Liverpool a finales de los años 70s y principios de los 80's [Delves and Hall, 1979], [Delves and Phillips, 1980] y [Mckerrel et al., 1981]. Sin embargo es [Patera, 1984] el que sin duda construye y establece el nombre al método de elementos espectrales actual.
Los métodos espectrales se clasifican en dos categorías:

- Pseudoespectral o los llamados métodos de colocación, los cuales están asociados con la malla (con nodos establecidos) llamados por ello a veces *métodos nodales*. Los coeficientes desconocidos $\widehat{u}$ se obtienen al requerir que la función residual sea exactamente cero en los nodos establecidos.
- Modal ó Galerkin el cual está asociado con el métodos de los residuos pesados.

En el método discontinuo de Galerkin fragmentos de aproximaciones continuas son usadas para representar soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales. Existen tres aproximaciones que implementa este método

- *versión/h* permite que el tamaño de la malla *(h)* sea reducido con el fin de alcanzar la convergencia.
- *versión/p* permite que el orden de la base polinómica *(p)* en cada elemento pueda incrementarse, mientras que los elementos de la malla se mantienen sin cambio alguno.
- *versión/hp* es una combinación de los dos anteriores, por lo tanto permite incrementar el orden de la base polinómica y al mismo tiempo disminuir el tamaño de la malla. Por esta razón esta aproximación ofrece una mejor precisión de la solución.

En el capítulo 3 se describe más detalladamente el método de elementos espectrales, pues es éste el método que se utiliza para resolver las ecuaciones que gobiernan al flujo compresible y obtener así las simulaciones de este tipo de flujo sobre geometrías complejas.

1.4. Análisis en 2D del flujo en una turbomáquina.

Los análisis y principalmente las simulaciones de los patrones de un flujo en el interior de un componente sea turbina o compresor en 3D requieren según lo antes descrito de una serie de requisitos que van desde elegir o proponer un modelo matemático adecuado hasta la facilidad de contar con una computadora suficientemente eficaz que pueda realizar las operaciones que se requieren para resolver las ecuaciones que el modelo matemático propone, en un tiempo conveniente. Como estos no son requisitos fáciles de cubrir, siempre se han buscado opciones que faciliten el estudio, la visualización y compresión de los fenómenos del flujo que se presentan en estas máquinas.
En estos tiempos, debido a los avances tecnológicos y el rápido desarrollo de la Dinámica de Fluidos Computacional, puede ser posible contemplar la idea de un proceso de diseño para una turbomáquina totalmente computarizado, el cual ofrezca grandes aproximaciones con respecto a la representación de flujos no permanentes, viscosos y tridimensionales. Sin embargo el tiempo para este tipo de desarrollo no ha llegado aún debido a un número importante de problemas físicos que no se han resuelto aún, como por ejemplo; el proceso

de transición de la capa límite, su extensión y comportamiento en general para un flujo turbulento.
El desarrollo moderno de las turbomáquinas, en especial las turbinas de flujo axial ha dependido de la descomposición en dos planos de la máquina en cuestión para sus análisis. Los planos de análisis son el plano meridional y el plano de la cascada. Los primeros análisis realizados fueron utilizando un plano bidimensional, el plano de la cascada (plano xy) el cual consiste en una o más filas de perfiles que tienen los álabes ya sea que pertenezcan a la turbina o al compresor, tal y como se ilustra en la figura 1.3. Los resultados de estos análisis proporcionaron en su momento datos notables para el diseño de la máquina, y hasta la fecha es así. El análisis del flujo separado en dos planos aún es una opción para los diseñadores, porque hace más eficiente el proceso de diseño.

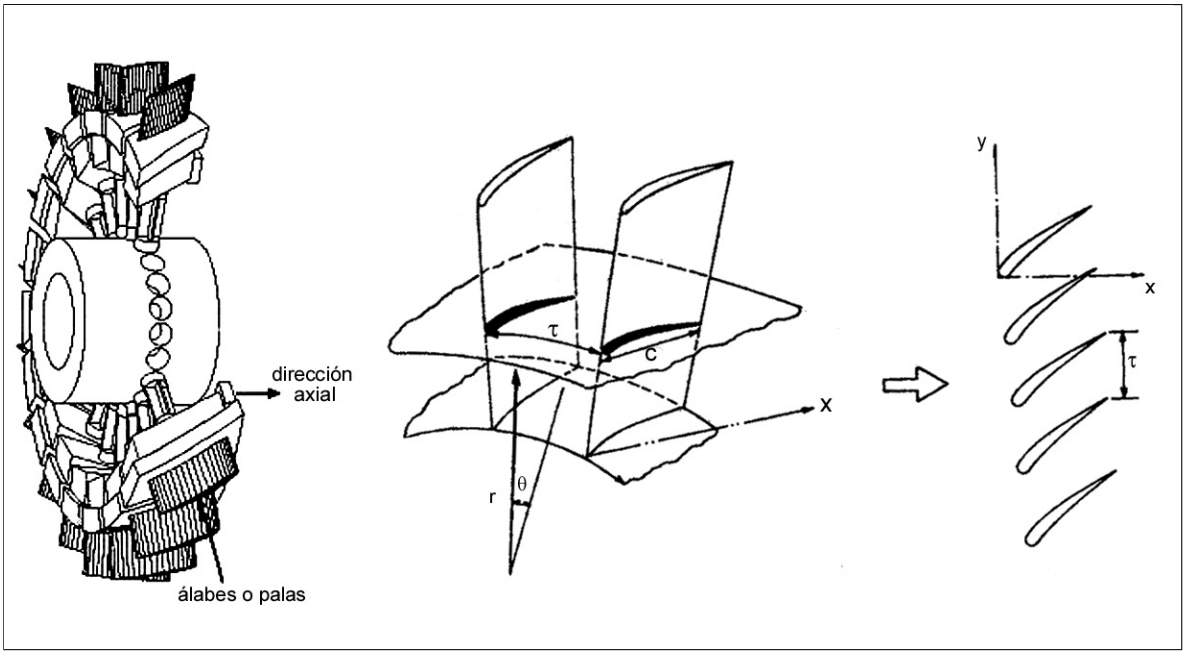


Figura 1.3: Esquema de una cascada en 3D reducida para su estudio en una fila de álabes en 2D.

Los álabes de una turbomáquina usualmente tienen un borde de salida muy delgado lo cual hace que el comportamiento del flujo en esas regiones sea aún difícil de predecir, las interacciones no permanentes especialmente el desplazamiento de las estelas de una cascada hacia el comienzo de otra, son fenómenos complejos que requieren de atención y estudio. Estos son algunos de los problemas del flujo en dos dimensiones alrededor de un perfil de una o más álabes de una turbomáquina que aún no se han resuelto satisfactoriamente y que aún encierran mucha de la física del flujo que no ha sido estudiada [Hah, 1997].
Hasta ahora los avances continúan dirigidos hacia la implementación de un análisis tridimensional en el diseño de una turbomáquina con modelos matemáticos complejos que incluyan la mayor variedad de términos posibles, sin embargo es importante detenerse y hacer una pausa para examinar sí la mayor parte de la física básica del flujo, la que generalmente tiene lugar en el plano bidimensional de la cascada esta adecuadamente descrita, sí es que se pretende realizar un análisis tridimensional. Esto debería ser siempre un caso obligatorio de prueba, ya que sí el código utilizado para el análisis del flujo no puede predecir adecuadamente el comportamiento de éste al atravesar una cascada en 2D; entoces fallará al intentar predecir un flujo tridimensional. El propósito de esta sección es mostrar algunos de los problemas físicos que envuelven a los flujos en dos dimensiones (bidimensionales, 2D) sobre todo en el plano de la cascada y que permanecen aún sin resolver, tal y como lo describe [Hah, 1997]. La figura 1.4 muestra una pala representativa de un compresor vista desde el plano de la cascada, y a su vez enlista algunas de las interrogantes no resueltas que ocurren en diferentes locaciones alrededor de la superficie de la pala las cuales se describen brevemente a continuación.

- **Vorticidad**; sobre el intradós o parte interna de la pala debido a la curvatura cóncava, se presentan efectos desestabilizadores que afectan al flujo y que inducen a la formación de vorticidades conocidas como vórtices de Görtler, estos vórtices afectan la transferencia de calor lo cual dificulta el lograr predecir las características del campo de flujo dentro de la capa límite. En el borde de salida de los perfiles, fenómenos tales como la formación de cadenas o trenes de vórtices junto con las estelas resultan dominantes en estas regiones, sin embargo su importancia radica en que éstas condiciones del patrón de flujo a la salida de los perfiles, serán las condiciones de entrada para la siguiente fila de perfiles a la que afectarán en forma directa. Un vórtice que se ha desprendido de un perfil de una cascada y se dirige hacia la siguiente fila de perfiles puede desvanecerse al aproximarse en el interior de los pasajes a un extradós, lo que resulta en un caótico y poco predecible campo de flujo en el interior de este pasaje.
- **Ondas de choque**; fenómenos y efectos significativos se presentan en el flujo localizado por delante de los álabes, los cuales crecen y se hacen más evidentes conforme el número de mach de la corriente se incrementa. Por ejemplo, en una pala de un compresor sobre la que atraviesa una corriente de flujo con un número de mach supersónico, induce la formación de una onda de choque curva, es decir con forma de arco; localizada en el campo de flujo aguas arriba del perfil. En el caso de existir una fila de perfiles (cascada), cada perfil generará una onda de choque, estas ondas de choque tienden a conjuntarse entre sí lo que generará ruido y en consecuencia vibración en los álabes. De ahí la importancia en la cuestión de diseño asociada a la forma geométrica aguda que deben tener los bordes de entrada de los perfiles, lo que en la mayoría de los casos determina la distancia de separación entre la onda de choque curva y la pala. No hay que olvidar que la presencia de las ondas de choque desprendidas de los bordes de entrada de los perfiles de la cascada también afectarán directamente el volumen de flujo que entra a los pasajes formados por éstos. Entonces, un desafío para el diseño de los perfiles consiste en encontrar la geometría adecuada que retenga lo más cercano al perfil el desprendimiento del choque, de ahí que la mayoría de los perfiles de los álabes utilizados para flujos supersónicos presentan geometrías muy delgadas y con bordes de entrada muy agudos.
- **Burbujas de separación**; el desempeño total de una pala al paso del flujo está determinado en la mayoría de los casos por lo que sucede sobre el extradós del perfil ya sea que se tenga una corriente laminar o turbulenta. El borde de entrada del perfil, así como su forma y agudeza determinan en algunos casos sí existirá una burbuja de separación en esta región para el caso de un flujo laminar. Las burbujas de separación que se presentan en el borde de entrada del perfil son físicamente pequeñas lo que dificulta medirlas experimentalmente, pero estas burbujas han capturado la atención debido a su efecto e influencia sobre la predicción de la sustentación (levantamiento), de la resistencia al avance y de la transferencia de calor en el perfil. Además cualquier burbuja existente sobre el perfil cercano al borde de ataque puede inducir tempranamente la transición del flujo laminar a turbulento. La aparición de burbujas de separación sobre los perfiles no sólo en las cercanías del borde de entrada del perfil tal y como ya se describió previamente, prevalence en los compresores y turbinas; especialmente a números de Reynolds típicos de altitudes de vuelo y para los álabes de las primeras etapas de una turbina a la altitud del nivel del mar. La existencia de las burbujas de separación y su extensión son moderadas por los efectos de interacción de las estelas previas por lo que en su mayoría su aparición es periódica y por lo tanto dependiente del tiempo [Roberts, 1980]. Aunque existen correlaciones para predecir su aparición para ciertos tiempos, generalmente no es posible evaluar dichas burbujas. La incapacidad de predecir la separación y en consecuencia el patrón de flujo causado por la separación de una burbuja ha limitado la predicción del comportamiento de los flujos en turbomaquinaria en las condiciones de diseño.
- **Rugosidad de la superficie**; la rugosidad de la superficie del perfil es otro parámetro que puede afectar el desempeño de la pala y en consecuencia el campo de flujo, especialmente los efectos que tiene sobre la capa límite laminar y su transición a la turbulencia. Los diseñadores necesitan información sobre el comienzo de la transición para un amplio rango de gradientes de presión y bajo condiciones

de alta y variable turbulencia que se presenta generalmente en los flujos en turbomaquinaria, además solicitan cálculos precisos sobre el espesor de desplazamiento en las regiones de menor área entre los pasajes que forman los perfiles (gargantas) para establecer así la capacidad del flujo que los atraviesa.

- **Estelas**; la influencia de las estelas producidas por los perfiles de una cascada previa inmediata sobre los pasajes de la cascada en el análisis es muy importante, recientemente han sido apreciados los efectos remanentes de turbulencia que llevan las estelas, y que se dirigen hacia la regiones aparentemente en calma de la siguiente fila de álabes.

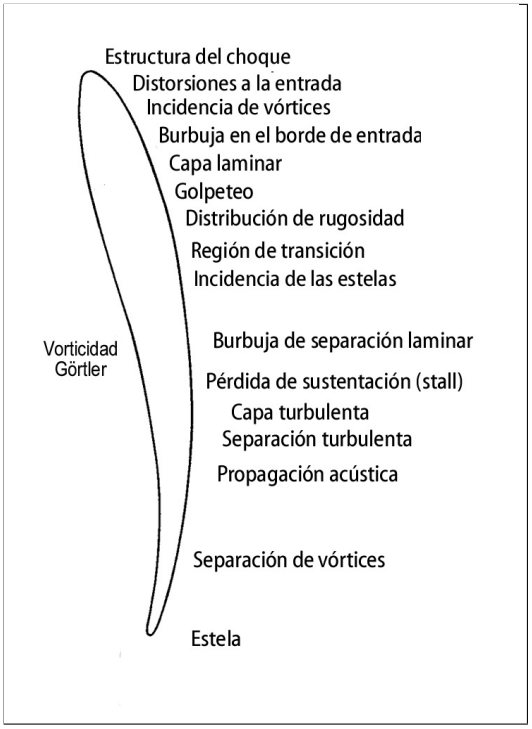


Figura 1.4: Esquema de los problemas presentes alrededor de la geometría de una pala de un compresor o turbina.

Los fenómenos presentes no sólo en las cascadas de los perfiles, sino en los propios perfiles en solitario, marcan una línea de investigación atractiva la cual se ha venido desarrollando para el mejoramiento no sólo de las turbomáquinas sino de todos aquellos aparatos que presenten patrones de flujo complejos y que presenten geometrías parecidas.

1.5. Objetivo general

El objetivo principal de este trabajo es obtener una simulación numérica del comportamiento de un flujo subsónico compresible y viscoso a su paso por superficies aerodinámicas como lo es un perfil o una fila de perfiles en un plano bidimensional, para lo cual se utilizará como herramienta de análisis la Dinámica de Fluidos Computacional.

1.5.1. Objetivos particulares

- Reproducir los fenómenos que se presentan alrededor de las superficies aerodinámicas como resultado del paso del flujo sobre éstas con el fin de comprender y visualizar los complejos patrones del flujo presentes alrededor de estas geometrías complejas.
- Verificar y mostrar la influencia de la compresibilidad y viscosidad del fluido en la obtención de una simulación numérica más precisa de un flujo que atraviesa superficies aerodinámicas.
- Comprobar la viabilidad de utilizar un método de alto orden como lo es el método de elementos espectrales para analizar flujos subsónicos que circulan sobre geometrías aerodinámicas con el fin de capturar de manera más precisa los fenómenos que se presenten.
- Confirmar el uso del código N$\varepsilon\kappa$Tαr como una herramienta útil y flexible en el análisis de flujos compresibles que circulan a diferentes regímenes de flujo sobre geometrías aerodinámicas.

Con el fin de generar una idea integral de la información que se ofrece en este trabajo a continuación se describe brevemente lo que encontrará el lector en los capitulos siguientes:

En el capítulo 2 se describirá al flujo compresible, sus características y su naturaleza física, se detallan además los fenómenos que se presentan como consecuencia del paso de un flujo compresible sobre un perfil y la influencia que tiene éste sobre las características aerodinámicas del propio perfil, como lo es la sustentación y la resistencia al avance principalmente. También se describe el fenómeno conocido entrada en pérdida del perfil. La razón por la cual se aborda este tema se debe principalmente a que en la turbomaquinaria, la mayor parte de los perfiles trabajan u operan en esta condición, de ahí su importancia. Y al final de este capítulo se presentan las ecuaciones que gobiernan al flujo compresible en su forma adimensional.

En el capítulo 3, se describirá el método de elementos espectrales el cual es el utilizado para discretizar las ecuaciones de gobierno del flujo establecidas en el capítulo 2. A su vez se proporciona una breve descripción del código N$\varepsilon\kappa$Tαr, el cual es el código que conjunta en un algoritmo computacional el método de elementos espectrales. Este código es utilizado en este trabajo de tesis para analizar el flujo compresible que circula a través de las superficies aerodinámicas. Conjuntamente se presenta la validación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr utilizando una geometría comúnmente utilizada como lo es un perfil NACA0012 y cuyo regímen de flujo es subsónico.
Finalmente, en el capítulo 4 se presentarán los resultados de las simulaciones obtenidas al utilizar el código N$\varepsilon\kappa$Tαr. Tres son los casos que se analizarán, los cuales son:

- El primer caso corresponde a la simulación del flujo compresible sobre un perfil NACA4420 con un ángulo de ataque grande ($\alpha = 20^o$) con el propósito de simular la condición de entrada en pérdida del perfil. Pues tal y como se ha mencionado anteriormente, ésta es una condición bajo la cual están sometidas la mayor parte de los álabes de una turbomáquina. La condición de pérdida en un perfil así como la estructura del flujo sobre el mismo resulta suficientemente complejo, se generan vórtices y otros fenómenos no permanentes los cuales se pretenden describir, analizar y visualizar a través de la simulación.

- El segundo caso es la simulación del flujo compresible viscoso sobre el perfil NACA4420 al mismo ángulo de ataque que el caso anterior, solo que se consideró al flujo no viscoso.
- Finalmente el tercer caso corresponde a la simulación del flujo compresible viscoso sobre una fila de 5 perfiles que pretenden emular una parte de una cascada de álabes de una turbina. La geometría de los perfiles de la cascada corresponden a la geometría de una turbina transónica. En este caso se pretende observar el comportamiento del flujo al atravesar los pasajes que forman entre sí los perfiles y los fenómenos que se presentan a la entrada y a la salida de la cascada como resultado de la influencia de la viscosidad y la compresibilidad del fluido.

Capítulo 2

Características del flujo compresible.

Dado que el objetivo principal de este trabajo de tesis es obtener una simulación de un flujo compresible que circula por una o más superficies aerodinámicas, es importante repasar las características propias de este tipo de flujo. Por ello en este capítulo se recapitularán algunas de sus características principales, comenzando por ofrecer una definición del concepto de compresibilidad y su aplicación al caso de un flujo de fluido, a su vez se expone la importancia del número de mach como parámetro fundamental en el análisis de un flujo compresible. Por otro lado, los fenómenos presentes en un flujo al circular a través de una superficie aerodinámica dependiendo del número de mach de la corriente, tienden a generar fenómenos complejos que se describen brevemente en este capítulo, no sin antes describir del mismo modo las propiedades aerodinámicas de estas superficies, con el fin de conocer la influencia que ejerce su geometría sobre el comportamiento del flujo que circula en sus alrededores. Como la simulación que se pretende obtener para el caso del perfil NACA4420 corresponde a una condición crítica desde el punto de vista aerodinámico, es importante describir con mayor detalle esta condición; con el fin de conocer la física que envuelve al fenómeno y así evaluar posteriormente sí existe concordancia entre la simulación resultante y lo reportado en la literatura. Además se presentan las ecuaciones que gobiernan al flujo compresible en dos dimensiones en su forma adimensional, las cuales serán resueltas mediante la aplicación del método de elementos espectrales que se describirá en el próximo capítulo.

2.1. Definición

Un flujo compresible se define en su foma general como aquel movimiento del fluido en el cual la densidad de las partículas fluidas es variable; en contraste con un flujo incompresible, en el que se supone que el valor de la densidad de las partículas fluidas siempre permanece constante. En la vida real cualquier fluido y en consecuencia cualquier flujo de fluido es compresible en mayor o en menor grado, dado que la compresiblidad es una propiedad intrínseca de todo fluido. Considérese un volumen finito de fluido como el que se muestra en la figura 2.1, sobre el cual actúa la presión (p) ejercida sobre todas las caras del elemento (aún cuando en la figura 2.1 únicamente se ejemplifique en una sola cara); si existe un incremento infinitesimal de la presión ∂p en todas las caras del elemento, entonces el volumen del elemento inicial (v) se comprimirá cierta cantidad ∂v. Como el volumen inicial del elemento (v) se reduce, ∂v es considerada una cantidad negativa. De ahí que la compresibilidad del fluido se defina como la relación entre el cambio gradual en el volumen del elemento de fluido y el cambio en la presión ejercida sobre éste. En los fluidos, son los líquidos los que presentan valores más bajos de compresibilidad, mientras que los gases se caracterizan por ser altamente compresibles. La compresibilidad como propiedad de un fluido se define entonces por la siguiente expresión

$$\beta = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{T,s} \tag{2.1}$$

donde β es la compresibilidad del fluido, v es el volumen específico del fluido y p es la presión del fluido
Los subíndices de la expresión (2.1) se refieren, para el caso de la (T) a una compresión isotérmica y para el subíndice (s) a una compresión isoentrópica. Hasta este punto únicamente se ha considerado el fluido por sí mismo en reposo y a la compresibilidad como una propiedad de éste. Lo mismo ocurre si el fluido está en movimiento es decir sí existe un flujo de fluido, como sabemos un flujo puede ser causado por diferencias de presión o por lo menos al existir un flujo éste siempre va acompañado por cambios en la presión. En particular sí la velocidad del flujo es alta, los gradientes de presión involucrados no pueden pasar desapercibidos y por lo tanto no puede considerarse al flujo como un flujo incompresible.
Puede entonces parecer extraño definir un fluido como el aire o el agua en un sentido estricto como lo es un fluido incompresible, pero lo que ésto significa es que en ciertas circunstancias en un fluido no confinado o en movimiento lento las moléculas que constituyen al fluido no son apreciablemente comprimidas hacia volúmenes menores. Un fluido incompresible por lo tanto es una ficción matemática, una idealización de un fluido real

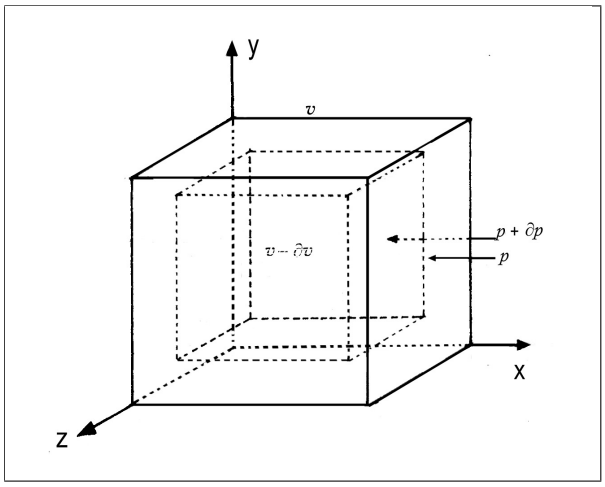


Figura 2.1: Descripción de la compresiblidad como propiedad en un volumen finito de fluido.

en el cual los cambios de densidad causados por el movimiento son muy pequeños y pueden desestimarse, por lo que la afirmación de un flujo incompresible resulta es este caso razonablemente precisa. Sin embargo en muchos problemas de ingeniería existen también fenómenos donde la variación de las propiedades del fluido con respecto al tiempo (incluida la densidad) resultan ser determinantes en el comportamiento del fenómeno que se pretende analizar, tal es el caso de algunos de los flujos presentes en las turbomáquinas. Las variaciones en la densidad que generalmente están presentes en el interior de alguno de sus elementos (turbina o compresor), son generados por cambios que ocurren en la vecindad de los álabes o palas en movimiento a alta velocidad, ó que están sujetos a una gran aceleración. Para obtener una simulación numérica lo suficientemente precisa de algun fenómeno presente en las turbomáquinas, es necesario considerar los cambios en la densidad del fluido que se manifiesten.
El considerar la variación no sólo de la densidad sino de alguna otra de las propiedades del fluido con respecto al tiempo implica una gran complejidad en el análisis, por ello es necesario establecer primero algunos criterios que serán útiles para comprender el comportamiento de un flujo compresible y los fenómenos físicos característicos que bajo ciertas condiciones en éste se presentan.

2.2. Onda de presión en el aire y la velocidad del sonido.

Según nuestra experiencia en la mecánica de fluidos, hemos aceptado el hecho de que el movimiento o vibración de un cuerpo provoca cambios de presión en el fluido que lo rodea debido precisamente a las propiedades elásticas del fluido, sin embargo es importante ahora recordar cómo se transmiten esos cambios

desde las proximidades del cuerpo al resto del fluido.
Cualquier cambio en la presión por pequeño que sea, se propaga a través del fluido en forma de una onda; de acuerdo con la física moderna una onda es simplemente una perturbación que se propaga de un lugar a otro a una velocidad característica y estimable[1] , por lo tanto aplicar el término onda de presión para estos casos resulta válido. El comportamiento de estas pequeñas perturbaciones o también llamadas ondas de presión puede abreviarse de la siguiente manera: *todos los pequeños cambios de presión de un fluido, sean o no audibles, se propagan a través del fluido en forma de ondas de igual velocidad, llamada velocidad del sonido en el medio*. Recibe el nombre de velocidad del sonido, porque al pasar la onda de presión a través del fluido induce un cambio en el movimiento vibratorio de las moléculas vecinas y es justamente este movimiento, el que produce lo que conocemos como sonido. Cabe destacar que el término sonido tiene un doble sentido: por un lado se emplea en sentido subjetivo para designar la sensación que experimenta una persona cuando las terminaciones de su nervio auditivo reciben un estímulo, pero también se emplea en sentido objetivo para describir las ondas producidas por compresión del aire que pueden estimular el nervio auditivo de un observador; sin embargo no todas las ondas de presión son audibles.
La primera estimación del valor de la velocidad del sonido en el aire fue dado por Isaac Newton en su texto *Principia*, estableciendo que la velocidad de propagación de las pequeñas ondas de presión es igual a la raíz cuadrada del cociente de la presión (p) y la densidad del medio (ρ), sin embargo esta expresión no resultó muy precisa ya que el valor de la velocidad del sonido que se obtiene con esta expresión, resulta 15 por ciento más bajo que el valor obtenido mediante un método experimental. Posteriormente, el matemático francés Pierre Simon Laplace en 1816 es el primero en demostrar por qué la teoría de movimiento vibratorio de Newton da un valor incorrecto a la velocidad del sonido. Ello es consecuencia del calor desarrollado por la compresión súbita del aire que aumenta su elasticidad y por tanto la velocidad de transmisión del sonido es mayor de la que calculó Newton. La expresión establecidad por Laplace lleva a expresar la velocidad del sonido mediante la siguiente ecuación

$$a = \sqrt{\gamma RT} \tag{2.2}$$

Esta expresión es válida para gases térmicamente perfectos y para gases calóricamente perfectos, sin embargo pierde validez cuando se trata al fluido como un gas real. Lo más destacable de la expresión (2.2) es que la velocidad del sonido depende de la temperatura del medio. Como ejemplo, al considerar el aire en la atmósfera como el medio donde se propagan las pequeñas ondas de presión, el valor de la velocidad del sonido en la atmosféra no es un valor constante, pues la temperatura varía dependiendo no solo de las condiciones atmosféricas prevalecientes sino también de la ubicación y altitud del lugar. Como una referencia, el valor de la velocidad del sonido para el aire en condiciones estándard[2] es de $340.9\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
Con información precisa del valor de la velocidad de propagación de las compresiones y expansiones de pequeña intensidad en un fluido, estamos en condiciones de examinar cómo se difunden estos cambios de presión en todo el campo de flujo y cómo pueden ser determinantes en el comportamiento de un flujo a alta velocidad.
Considerando un móvil, inicialmente estacionario que emite sucesivamente pequeños impulsos de presión y que se encuentra inmerso en un fluido como lo es el aire, tal como se aprecia en la figura 2.2. En este caso los impulsos generados por el móvil (representado por el punto A) se desplazan a través del medio con la velocidad del sonido (a) y se difunden uniformemente en todas direcciones. Al tiempo $t_0 = 0$ se genera la perturbación en el punto A después, al tiempo $t_1 = 1$s la perturbación inicial se habrá desplazado una distancia (x) en todas direcciones, y por lo tanto al tiempo $t_2 = 2$s la perturbación estará una distancia igual a ($2x$) del punto A como se observa en la figura 2.2.
Si ahora se considera que el móvil (punto A) no permanece en reposo y por el contrario comienza a desplazarse con una velocidad V_A, cuyo valor en este caso es menor que el valor de la velocidad del sonido (a) tal como se observa en la figura **??**.
Inicialmente al $t_0 = 0$ el móvil ocupa la posición A_0, transcurrido 1s se habrá desplazado una distancia (m)

[1] Debe tenerse en cuenta que, en la propagación de una perturbación elástica no son las partículas del medio las que se propagan desplazándose de un lugar a otro. Lo que se propaga en una onda es el estado de movimiento o, más bien, la energía y la cantidad de movimiento del foco o fuente de perturbación, que se comunican a las demás partículas del medio.
[2] Las condiciones estándar de presión y temperatura son $p = 1.01325 \times 10^5\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ y $T = 288.150\mathrm{K}$ respectivamente

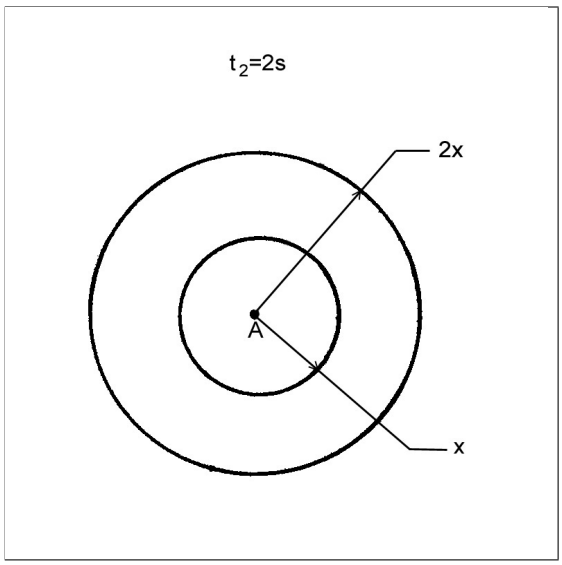


Figura 2.2: Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente estacionaria en el aire.

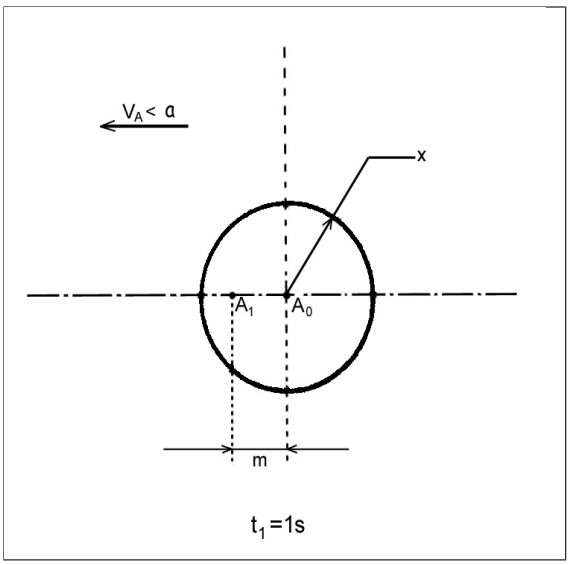


Figura 2.3: Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una velocidad menor que la velocidad del sonido, $V_{\mathrm{A}} < a$ a un $t_1 = 1$s.

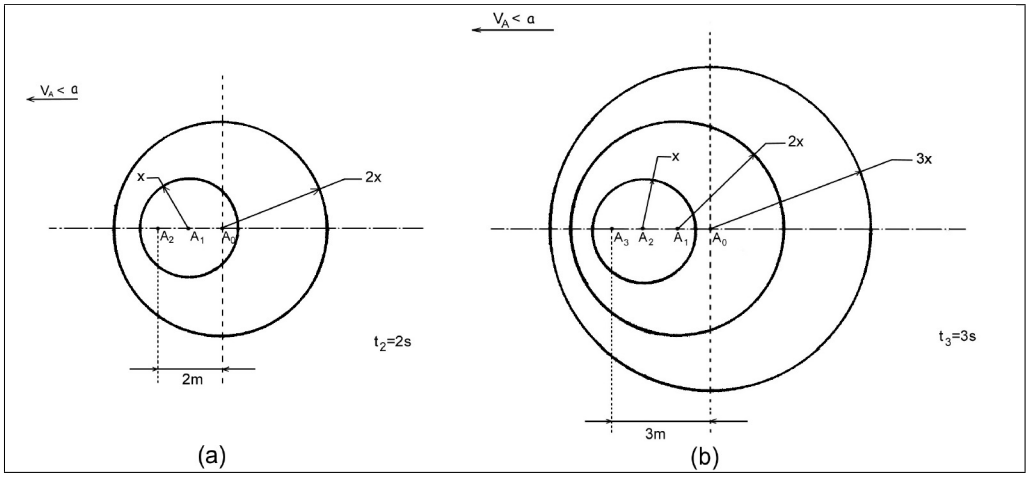


Figura 2.4: Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una velocidad menor que la velocidad del sonido, $V_{\mathrm{A}} < a$ a un $t_2 = 2$s y $t_3 = 3$s respectivamente.

hasta la posición A_1. Mientras que la perturbación originada por el móvil cuando este se localizaba en la posición A_0, se habrá propagado con la velocidad del sonido (a) en todas direcciones una distancia (x). Para un tiempo $t_2 = 2$s ver figura 2.4(a), el móvil se habrá desplazado hasta ocupar la posición A_2, entonces la distancia entre A_0 y A_2 es ahora de 2m. Al mismo tiempo, la perturbación generada por el móvil estando en el punto A_0 se habrá propagado una distancia ($2x$) y la nueva perturbación originada cuando la fuente estaba en A_1 se habrá propagado una distancia (x), y así sucesivamente para cada segundo conforme la fuente se desplaza. Por lo tanto en un tiempo $t_3 = 3$s se oberva un patrón de ondas definido, ver figura 2.4(b) consecuencia de que las perturbaciones se desplazan con mayor velocidad comparada con la velocidad con la que el móvil se translada. Por lo que el aire que está por delante del móvil es advertido de la presencia de éste antes de que se aproxime, concediéndole tiempo suficiente de adaptarse a la nueva situación.
Un fenómeno curioso se presenta cuando la velocidad de desplazamiento del móvil V_A es igual que el valor de la velocidad con la que se propagan las perturbaciones, es decir la velocidad del sonido (a). En este caso considerando la figura 2.5, al $t_0 = 0$s el móvil se localiza en el punto A_0 y comienza a desplazarse, generando a su vez una perturbación; para el $t_1 = 1$s la perturbación se habrá desplazado una distancia (x) y el móvil una distancia (m) hasta el punto A_1. Para un tiempo $t_2 = 2$s la primera perturbación se habrá desplazado a una distancia ($2x$) desde el punto A_0, al mismo tiempo la perturbación generada por el móvil localizado en el punto A_1 se habrá propagado una distancia (x). Es importante destacar el fenómeno presente en este caso, pues tal como lo muestra la figura el hecho de que la velocidad del móvil sea igual a la velocidad del sonido provoca que el aire que está por delante del móvil no advierta la presencia de éste hasta que se topa con él, pues las perturbaciones quienes son las encargadas de prevenir al fluido de la presencia del cuerpo son prácticamente confinadas por detrás del móvil siendo incapaces de prevenirlo. Las ondas individuales se van combinando formando un frente común, en el que las ondas se refuerzan unas con otras generando una nueva, mucho más intensa y que es la tangente común a todas ellas. La línea tangente imaginaria a esta onda vigorosa recibe el nombre de *línea de mach* y en consecuencia a la zona de aire frente a esta línea recibe el nombre de zona de silencio. Recibe el nombre de zona de silencio porque en toda esta región el fluido no se ha enterado de la presencia de un móvil que se desplaza a una gran velocidad.

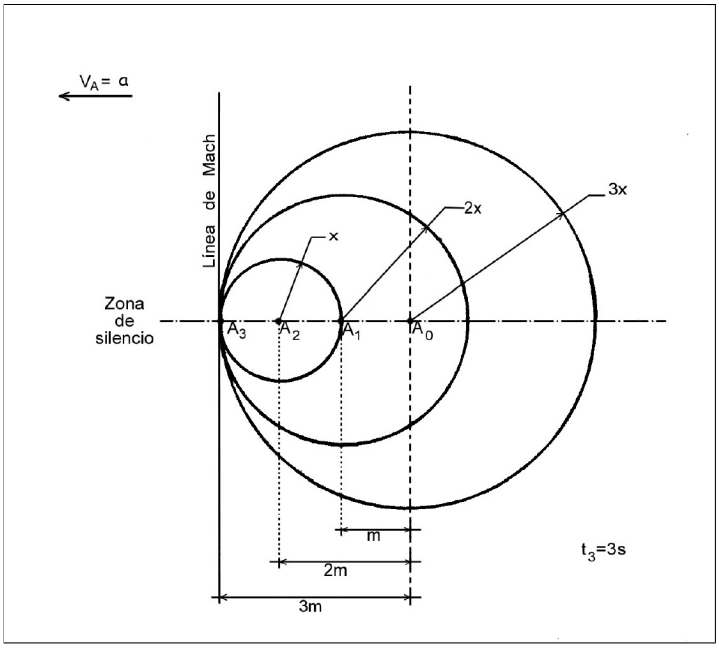


Figura 2.5: Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una magnitud de velocidad igual que la velocidad del sonido, $V_A = a$.

Cuando la velocidad del móvil es mayor que la velocidad de propagación de las perturbaciones (velocidad del

sonido) se presenta un fenómeno parecido al caso anterior sin embargo debido a la diferencia en magnitud entre la velocidad del sonido (a) y la velocidad del móvil V_{A} ($V_{\mathrm{A}} > a$), existe entonces un retraso de la propagación de las perturbaciones con respecto al avance del cuerpo, causando con ello que se forme un patrón de ondas individuales que se muestra en la figura 2.6. En este caso la línea imaginaria de mach no es una recta como lo mostrado en la figura 2.5 sino una intersección entre las líneas de mach que son tangentes a las ondas individuales, a esta región limitada por las líneas de mach se le conoce como cono de mach. En un plano (flujo en dos dimensiones) cada una de estas líneas forma un ángulo con respecto a la dirección de la corriente. Generalmente en el tratamiento matemático de los flujos a alta velocidad y que se describirá más adelante, las líneas de mach reciben el nombre de líneas características. Puede observarse entonces que, la zona de silencio para este caso es una región mucho mayor comparada con el caso en el que la $V_{\mathrm{A}} = a$.

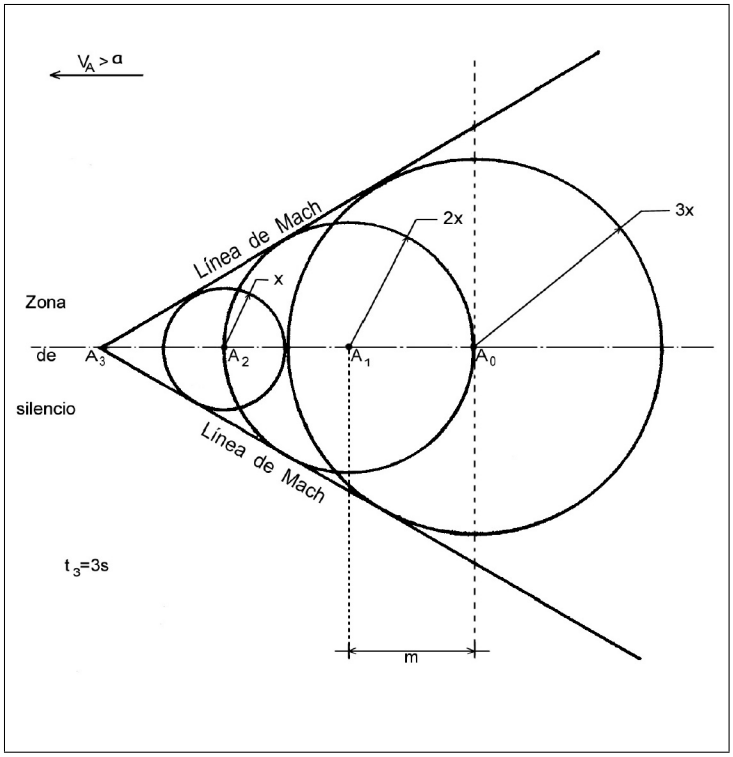


Figura 2.6: Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una velocidad mayor que la velocidad del sonido, $V_{\mathrm{A}} > a$.

Conviene mencionar que las ondas de presión a las que se hace referencia en todos los casos anteriores son perturbaciones débiles. No debe existir entonces confusión en la descripción de las figuras 2.5 y 2.6, ya que la perturbación u onda de presión que genera dichos patrones de ondas más fuertes, es también una perturbación débil. Y la causa de la existencia o generación de las ondas de presión vigorosas concentradas en las líneas de mach son consecuencia de la gran velocidad con la que se desplaza el móvil.
De ahí que no puede pasar inadvertida la importancia de la relación entre la velocidad del fluido en cada punto del campo (V) y, la velocidad del sonido (a) local cuando se está analizando un flujo a alta velocidad. A la relación entre ambas velocidades se le denomina número de Mach (M), definido por la siguiente expresión

$$M = \frac{V}{a} \tag{2.3}$$

De acuerdo con la ecuación (2.3) el número de Mach es una medida dinámica de la compresibilidad del fluido. El número de Mach es entonces, una cantidad adimensional cuya importancia para el análisis de flujos

compresibles resulta comparable con la del número de Reynolds, también puede considerarse como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas elásticas del fluido. El número de Mach además, permite clasificar al flujo en sus diferentes regímenes los cuales son:
Flujo subsónico.
Es por definición el flujo en el que el número de mach (M_∞) en cada punto del campo es menor que la unidad $M_\infty \leqslant 0.8$; lo que significa que la velocidad del flujo (V) es menor que la velocidad del sonido (a).
Flujo supersónico.
El campo de flujo donde el número de mach (M_∞) es mayor que la unidad, pero menor de cinco, es decir $1 < M_\infty < 5$ en cualquier punto del campo, es definido como flujo supersónico. En este caso la velocidad de sonido local (a) es menor que la velocidad del flujo (V).
Flujo transónico.
Si el número de mach local (M_∞) permanece subsónico, pero es muy cercano a la unidad suficiente como para producir una región local supersónica en el campo de flujo, tenemos entonces un caso en el que no se tiene un número de mach local semejante en todo el campo. Este tipo de flujo recibe el nombre de flujo transónico y puede considerarse como el flujo en el cual el número de mach local varía entre el siguiente rango $0.8 \leqslant M_\infty \leqslant 1.2$. En este caso no puede establecerse si la velocidad del sonido local es mayor o menor que la velocidad del flujo, pues es precisamente la transición entre una velocidad del sonido local menor a una mayor la que representa este tipo de flujo.
Flujo hipersónico.
El flujo en el cual el numéro de mach es mayor a cinco ($M_\infty > 5$) en todo el campo de flujo recibe el nombre de flujo hipersónico. A causa de la gran velocidad del flujo, se presenta un gran incremento en la temperatura del mismo; lo suficiente para disociar o incluso ionizar el gas en ciertas regiones del campo de flujo. Dado que el gas tiende a reaccionar químicamente, no resulta sencillo analizar a este tipo de flujo.

2.3. Ondas de compresión y expansión

En la sección previa se supuso que los cambios de presión que acompañan el movimiento de un cuerpo en el aire son extremadamente pequeños ó débiles (ondas infinitesimales); lo que en la realidad, no siempre es así. Las variaciones de presión causadas por la palabra o la música se tratan generalmente como ondas de amplitud infinitesimal y tienen la particularidad de mantener su forma al mismo tiempo que se desplazan. Por ejemplo, sí se emite un sonido cuya forma de onda es senoidal (o una combinación de ondas senoidales), esta forma se mantiene hasta su extinción. No ocurre lo mismo con las grandes perturbaciones de presión, es decir cuando existe una diferencia de presión suficientemente intensa. En este caso la forma de la onda se modifica a medida que se desplaza y puede conducir a la formación de lo que se conoce como onda de choque. Es importante ahora recordar que estas grandes perturbaciones de presión tal como se mencionó anteriormente no son más que diferencias de presión dentro del campo de flujo, estas diferencias pueden ser incrementos o decrementos de presión. A la presencia de una diferencia de presión en incremento através del flujo se le conoce como *onda de compresión*, ya que al desplazarse este incremento a lo largo del campo inducirá en consecuencia un aumento en la presión de sus vecindades. De igual forma, a la presencia de una diferencia de presión en decremento desplazándose através del flujo se obtendrá una disminución de la presión en sus alrededores, de esta manera recibe el nombre de *onda de expansión.*
Para describir el mecanismo de formación de una onda de compresión se empleará como modelo un pistón que se desplaza dentro de un ducto en el cual se encuentra confinado un gas en reposo y cuya longitud del ducto se supondrá infinita, tal como se muestra en la figura (2.7). El pistón se desplazará hacia la derecha a lo largo del ducto recorriendo cierta distancia y comprimiendo al gas hasta que el pistón alcance una velocidad V. Considerando que la velocidad del pistón se va incrementando como resultado de una serie de pequeños pero instantáneos incrementos, cada uno de magnitud dV. En el primer incremento de velocidad dV como resultado de un movimiento del pistón, una onda de presión débil es generada y viaja por delante del pistón con una velocidad a_1 como se aprecia en la figura 2.7(a), causando un pequeño incremento en la presión y temperatura del gas . El gas detrás de la onda de presión es puesto en movimiento al paso de ésta, en la

misma dirección y con la velocidad del pistón dV.
Cuando el pistón incrementa por segunda vez su velocidad ver figura 2.7(b), una segunda onda de presión viaja a través del gas. Esta onda viaja a una velocidad a_2 cuya magnitud es mayor que la velocidad de la primera onda a_1, porque el gas en el que se desplaza la segunda onda tiene una temperatura mayor como resultado del paso de la primera onda. El gas por delante de la segunda onda se está desplazando ya con velocidad dV, y como la velocidad de desplazamiento de una onda de presión tal como se describió en la sección anterior depende de las propiedades del gas dentro del cual la onda viaje, por lo tanto la segunda onda tiene una velocidad absoluta mayor que la primera onda ($a_2 > a_1$).

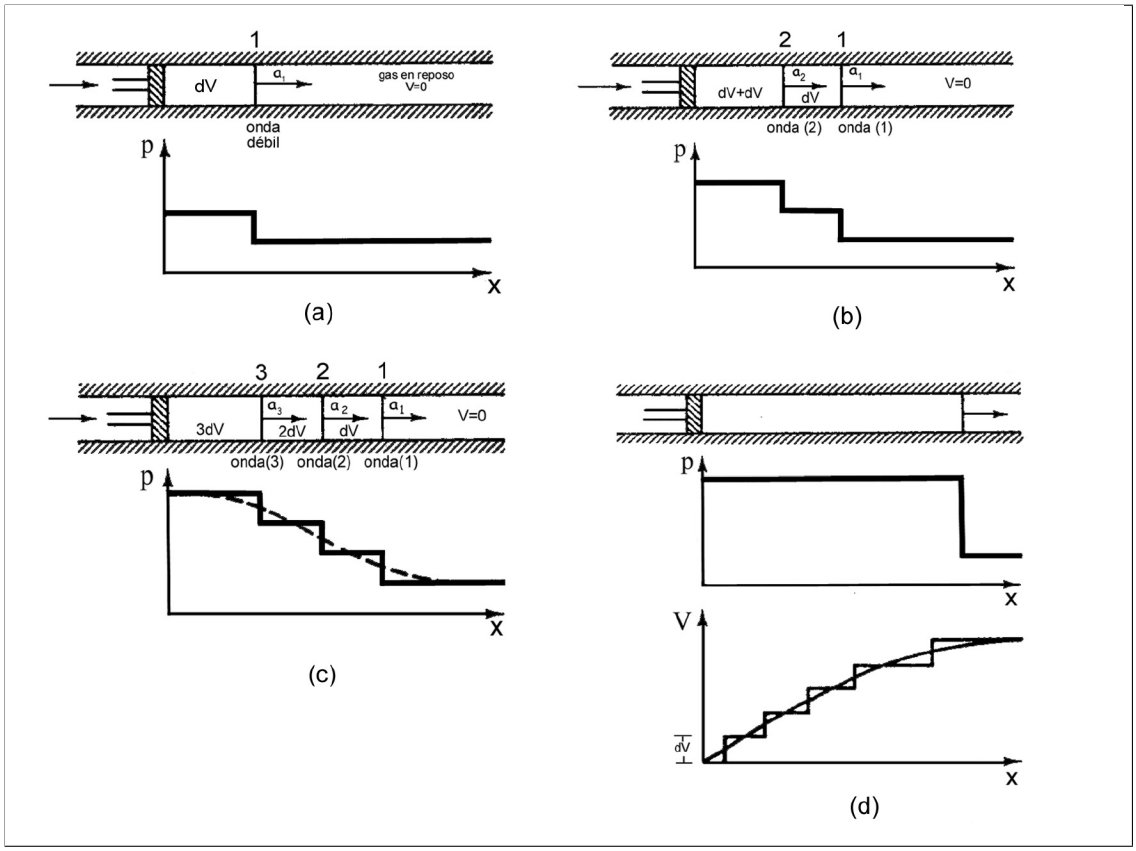


Figura 2.7: Descripción de la formación de una onda de compresión.

Para un tercer incremento dV en velocidad, el proceso se repite y la onda de presión que se genera tiende a alcanzar a las otras dos, tal como se aprecia en la figura 2.7(c). Esto debido a que las dos pequeñas y débiles ondas de presión generadas por las previas aceleraciones sucesivas modifican al flujo a su paso, induciendo a su vez un incremento en la velocidad de propagación de la onda subsiguiente, obeniendo como resultado que ($a_3 > a_2 > a_1$). Esto trae como consecuencia que exista un incremento considerable en la presión, por lo que el pistón al alcanzar la velocidad (V) mediante pequeños incrementos dV, habrá generado una onda de presión considerable como se aprecia en la figura 2.7(d). En este caso podría intuirse que la velocidad de propagación de cada onda generada puede incrementarse indiscriminadamente a razón de cada impulso del pistón, sin embargo la viscosidad y la transferencia de calor tiende a limitar este efecto. Pero lo que sí puede suceder es que las ondas de presión que se desplazan con una velocidad mayor tiendan a alcanzar a las previas y de esta manera reforzarlas, creando entonces una onda de compresión vigorosa de forma constante pero de espesor finito que recibe el nombre de onda de choque.
La formación de una onda de expansión puede exponerse utilizando el mismo modelo que para el caso de las

ondas de compresión. Cuando el pistón mostrado en la figura 2.8 se desplaza a la izquierda a una velocidad dV una onda de presión débil se desplaza através del gas en dirección a la derecha con una velocidad a_1. El gas detrás de la onda de presión es puesto en movimiento con dirección hacia la izquierda y con una velocidad dV (la misma velocidad que el pistón). Debido a la expansión, el gas detrás de la onda tiene una temperatura y presión menor que el gas que está por delante de la onda. Un segundo incremento en la velocidad del pistón genera nuevamente otra expansión (onda de presión) débil la cual viaja hacia la derecha con una velocidad menor que la primera onda, entonces ($a_2 < a_1$). La reducción en la velocidad es consecuencia de la expansión y el descenso de temperatura experimentado por el gas como resultado del paso de la primera onda.La segunda onda viaja más lentamente comparada con la primera y retrasándose con respecto a ésta. Como se observa en la figura 2.8, cada onda de expansión es menos abrupta que su precursora y a diferencia de las ondas de compresión, el gas y las ondas de expansión se mueven en direcciones opuestas. Por lo tanto las ondas sucesivas de expansión no tienden a reforzarse lo cual impide la formación de ondas más fuertes.

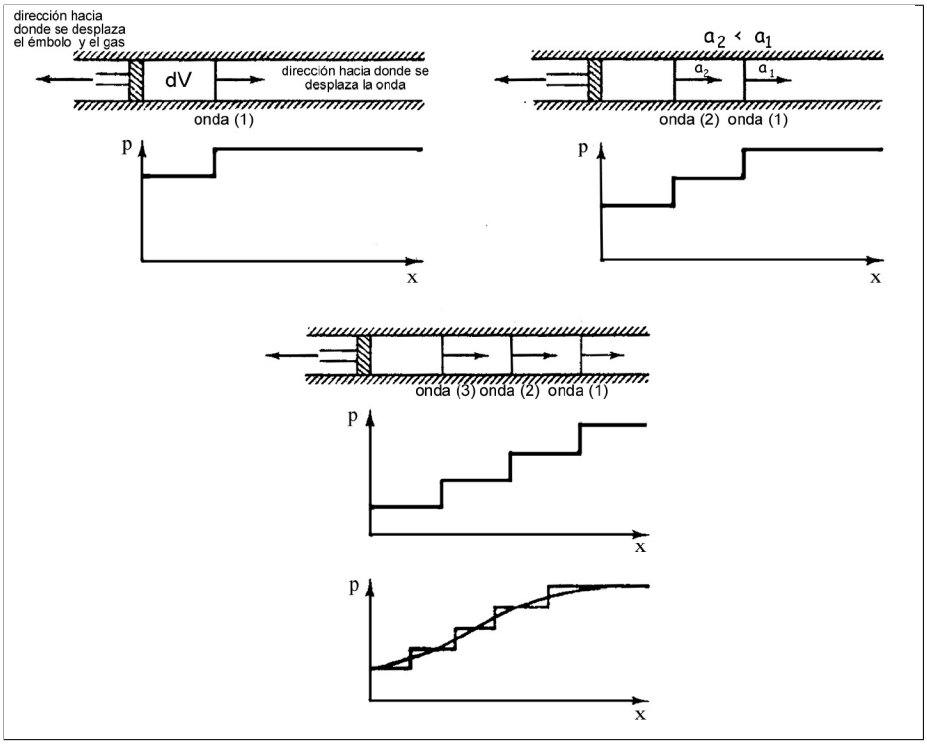


Figura 2.8: Descripción de la formación de una onda de expansión.

En conclusión existen notorias diferencias entre una onda de compresión y una onda de expansión entre las que destacan las siguientes:

- Las ondas de compresión tienden a viajar más rápidamente comparadas con las ondas de expansión dada su naturaleza física.
- Las ondas de compresión sucesivas tienden a formar ondas más fuertes (ondas de choque), no así las ondas de expansión, por lo que el término onda de choque está ligado únicamente a las ondas de compresión.

En consecuencia la definición de una onda de choque puede establecerse claramente como una onda de compresión de gran amplitud donde existen súbitos cambios en las propiedades del gas, tales como: velocidad, presión y temperatura.

2.4. Ecuaciones de gobierno para el análisis del flujo compresible.

Las ecuaciones de Navier-Stokes en conjunto con las ecuaciones de continuidad, momentum, energía y la ecuación de estado; son las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido y son las ecuaciones fundamentales en la dinámica de fluidos. Reescribiendo las ecuaciones de continuidad ec. 1.1, cantidad de movimiento ec. 1.2 y energía ec. 1.3 en su forma vectorial nuevamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_{ij}) + \rho \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{V}) = \rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\tau_{ij}\mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}$$

Sin embargo, para el análisis que se realiza en esta tesis correspondiente a la simulación de un flujo compresible viscoso que fluye através de geometrías aerodinámicas (como lo es un perfil), es necesario establecer ciertas consideraciones que influyen directamente en el comportamiento del flujo que se desea analizar. En este caso se establece que

- No existe ninguna fuerza de cuerpo que afecte al fluido.
- No exste un calentamiento volumétrico producto de una absorción, emisión o radiación de calor en el fluido.

Al aplicar estas consideraciones a las ecuaciones para flujo compresible 1.1, 1.2 y 1.3 , el término $\rho\mathbf{f}$ de la ecuación de momentum y los términos $\rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}$ y $\rho\mathbf{q}$ en la ecuación de la energía no serán considerados. Además como el análisis que se realiza en este trabajo de tesis es bidimensional (plano xy), entonces los términos asociados al eje z no se será útiles, finalmente las ecuaciones que se utilizan para el nálisis de un flujo compresible viscoso son las siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_{ij}) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\tau_{ij}\mathbf{V}) \tag{2.5}$$

Expresando las ecuaciones para cada dirección del plano bidimensional x y y respectivamente
Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

Conservación de la cantidad de movimiento
En la dirección de (x)

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{2.7}$$

En la dirección de (y)

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \tag{2.8}$$

Ecuación de la energía

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho e_t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho e_t u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho e_t v)=-\frac{\partial up}{\partial x}-\frac{\partial vp}{\partial y}+\\&\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

Considerando además al fluido (en este caso el aire) un gas perfecto, lo que hace posible utilizar la ecuación de estado térmico 1.4 y no hay que olvidar la importancia de las relaciones constitutivas que fueron descritas en el capítulo 1. De éstas expresiones es posible relacionar la presión estática termodinámica (p) con la energía total, tal y como se demuestra en el apéndice A.2.
Considerando para el caso bidimensional $V = u^2 + v^2$ y ustituyendo en la ecuación A.11, la presión estática termodinámica (p) puede relacionarse con la energía total como sigue

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \rho\frac{u^2+v^2}{2}\right) \tag{2.10}$$

donde $E = \rho e_t$, ver [Anderson, 1995]. Entonces la entalpía total (H) através de la expresión A.10 puede expresarse como

$$H = E + \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2+v^2}{2} \tag{2.11}$$

de la ecuación (2.2), la velocidad del sonido puede expresarse también como

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \tag{2.12}$$

Agrupando las ecuaciones (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) en su forma conservativa[3] .

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (E+p)u\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ (E+p)v\end{bmatrix}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)u+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)v+\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\end{bmatrix}\\&+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}0\\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)v+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)u+\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Con el fin de mantener las ecuaciones en la misma forma independientemente del uso de las unidades, todas las variables en las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía son adecuadamente adimesionalizadas con respecto a valores de referencia denotados por el subíndice (∞). La adimensionalización de las ecuaciones se realiza con los respectivos valores de referencia, listados en la tabla 2.1. El procedimiento de la adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes se presenta en el apéndice A.1

[3] La literatura de la Dinámica de Fluidos Computacional establece el termino ecuaciones en su forma conservativa, a las ecuaciones que se derivan de considerar el modelo de flujo en un sistema de referencia euleriano. En la formulacin euleriana se toma como referencia una región fija del espacio y se estudia lo que ahí sucede al transcurrir el tiempo, ver [Anderson, 1995].

Longitud (x)	$x^* = \frac{x}{L}$	Presión	$p^* = \frac{p}{p_\infty}$
Densidad	$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}$	Energía	$E^* = \frac{E}{\rho {V_\infty}^2}$
Viscosidad	$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}$	Conductividad térmica	$\kappa^* = \frac{\kappa}{\mu_\infty / c_p}$
Velocidad	$V^* = \frac{V}{\sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}}$	Temperatura	$T^* = \frac{T}{{V_\infty}^2 \gamma / c_p}$
Tiempo	$t^* = \frac{t}{L}\sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}$	Tensor de esfuerzos	${\tau_{ij}}^* = \frac{\tau_{ij}}{\left(\frac{\mu_\infty V_\infty}{L}\right)}$

Tabla 2.1: Relaciones utilizadas para la adimensionalización de las ecuaciones.

Con estos parámetros se adimensionalizan las ecuaciones que gobiernan al flujo compresible (continuidad, momentum y energía).
Finalmente las ecuaciones adimensionalizadas agrupadas en su forma conservativa para el análisis en dos dimensiones de un flujo compresible son:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t^*}\begin{pmatrix}\rho^*\\ \rho^* u^*\\ \rho^* v^*\\ E^*\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^*}\begin{pmatrix}\rho^* u^*\\ \rho^* {u^*}^2 + p^*\\ \rho^* u^* v^*\\ (E^* + p^*)u^*\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y^*}\begin{pmatrix}\rho^* v^*\\ \rho^* v^* u^*\\ \rho^* {v^*}^2 + p^*\\ (E^* + p^*)v^*\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{Re_\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial x^*}\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\mu^*\left(2\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)\\ \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\\ \frac{2}{3}\mu^*\left(2\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)u^* + \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)v^* + \kappa^*\frac{\gamma}{Pr_\infty}\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\end{pmatrix}\right.\\
&\left. + \frac{\partial}{\partial y^*}\begin{pmatrix}0\\ \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\\ \frac{2}{3}\mu^*\left(2\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)\\ \frac{2}{3}\mu^*\left(2\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)v^* + \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)u^* + \kappa^*\frac{\gamma}{Pr_\infty}\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Y estas son las ecuaciones adimensionalizadas que gobiernan al flujo compresible, que se utilizarán para realizar el análisis del flujo compresible sobre superficies aerodinámicas, pues son estas ecuaciones las que maneja el código N$\varepsilon\kappa$Tαr, ver [B. Cockburn and C.Shu, 2000]. Antes de continuar, es importante tener una descripción del comportamiento de un perfil o superficie aerodinámica inmersos en un flujo, así como también de los fenómenos que se presentan en el campo de flujo que rodean al mismo perfil al paso de la corriente. Por esta razón a continuación se ofrece una breve descripción de éstos fenómenos aerodinámicos.

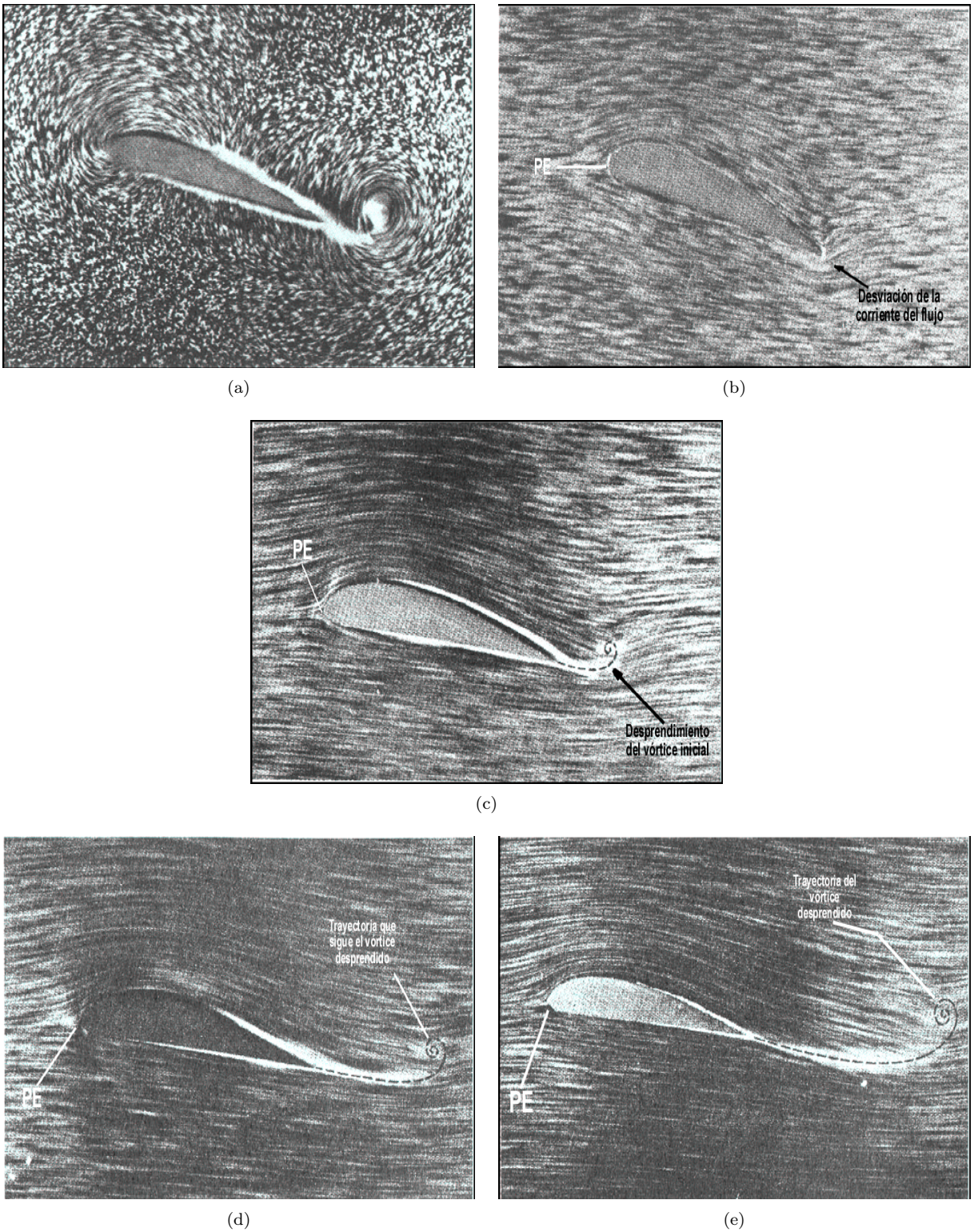
2.5. El flujo alrededor de un perfil.

En el momento que un flujo de fluido se desplaza sobre un perfil se desarrollan inmediatamente las capas límite sobre su superficie. El comportamiento del flujo en las capas límite es muy importante porque puede influir sobre todo el campo de flujo así como sobre el perfil mismo. Un parámetro importante en aerodinámica

es el ángulo de ataque, el flujo que se mueve alrededor del perfil es fuertemente influenciado por éste. Cuando el ángulo de ataque del perfil llega a ser grande, el flujo tiende a separarse de la superficie de éste, cuando el flujo se separa en una gran porción del extradós del perfil recibe el nombre de **stall** o entrada en pérdida del perfil.
Siempre que un flujo se mueva sobre un perfil con un cierto ángulo de ataque o cuando el ángulo de ataque del perfil cambie de cero grados a otro valor que no sea cero, exite una secuencia de fenómenos alrededor del campo de flujo que rodea al perfil y sobre el propio perfil. Esta secuencia de eventos se describen brevemente a continuación.
Primeramente, debido a la influencia de la viscosidad se forma un vórtice inicial inmediatamente despúes de que el perfil modifica su ángulo de ataque de cero grados a un ángulo mayor. Debido al afilado borde de salida que presenta la geometría del perfil, el flujo no puede mantenerse adherido a la superficie del mismo. En su lugar, el flujo se desprende en el borde de salida y por lo tanto un vórtice inicial tiende a formarse tal y como se observa en las figuras 2.9(a), 2.9(b) y 2.9(c). Por lo establecido en el teorema de la circulación de Kelvin donde la circulación a lo largo de una curva cerrada en un fluido ideal debería permanecer constante, parece verificarse en un flujo viscoso. La circulación alrededor del perfil provoca además que el punto de estancamiento trasero se recorra ligeramente atrás del borde de salida. El vórtice inicial entonces se desprende del perfil y se desplaza lejos del borde de salida, ver figura 2.9(d) y 2.9(e). La circulación alrededor del perfil también desplaza el punto de estancamiento delantero ligeramente aguas abajo, lejos de el borde de entrada a una posición debajo de la nariz del perfil, lo que ocasiona un incremento considerable de la velocidad en el fluido cercano a este punto. La velocidad del flujo cercano a la nariz del perfil puede aumentar hasta alcanzar un valor cinco veces mayor del valor de la velocidad de la corriente libre. El fluido que se desplaza sobre el extradós del perfil es acelerado debido a que tiene que desplazarse además alrededor del borde de entrada o nariz del perfil, en el intradós del perfil el flujo se desacelera. La velocidad del flujo sobre el perfil es como ya se mencionó anteriormente mucho mayor que la velocidad de la corriente libre y por lo tanto la presión en esta región es menor que la presión en el punto de estancamiento cuyo valor es aproximadamente igual a la presión de la corriente libre. El valor mínimo de presión se localiza entonces en la nariz del perfil y este valor será mayor conforme el ángulo de ataque del perfil se incremente. La distribución de presión sobre la superficies del perfil está determinada por el comportamiento del flujo externo, por lo que los efectos de la viscosidad presentes en la capa límite no presentan gran influencia sobre la presión. Aparentemente la distribución de la presión en la capa límite es similar a la distribución de la corriente libre. El gradiente de la presión que es la derivada de la distribución de la presión con respecto a la coordenada en la dirección de la corriente $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ tienen una considerable influencia en el flujo de la capa límite. Debido a este gradiente de presión, el fluido en la capa límite experimenta una fuerza en dirección de la corriente o en dirección opuesta a ésta, dependiendo del signo del gradiente. El gradiente de presión es favorable en la región del perfil hasta antes del punto dónde se localiza el valor mínimo de presión y en el cual el gradiente alcanza su valor máximo porque la presión es menor en la dirección de la corriente y como resultado la capa límite experimenta una fuerza en ésta dirección. En la región por detrás del punto dónde se localiza el valor mínimo de presión, existe un gradiente de presión adverso. La presión se incrementa en la dirección de la corriente y por lo tanto el fluido experimenta una fuerza en dirección opuesta a la dirección de la corriente libre. En una región con gradientes de presión adversos puede ocurrir una separación del flujo, tal y como se describirá más adelante.
Un perfil experimenta una fuerza neta como resultado de la diferencia de presión entre el extradós e intradós y debido también a los esfuerzos cortantes. La componente de la fuerza neta perpendicular a la corriente libre recibe el nombre de fuerza de sustentación (L). La componente paralela a la corriente libre recibe el nombre de fuerza de resistencia al avance (D). Las fuerzas de sustentación y de resistencia al avance son generalmente expresadas por medio de los coeficientes adimensionales (Cl) y (Cd) respectivamente.

2.5.1. Las fuerzas aerodinámicas sobre un perfil.

El cálculo de las fuerzas aerodinámicas siempre resulta indispensable en la dinámica de fluidos, principalmente en el contexto del flujo compresible, ya que es precisamente este tipo de flujo el que gobierna la fuerza de sustentación y la fuerza de resistencia al avance sobre un cuerpo en flujo a altas velocidades subsónico,



(a) (b)

(c)

(d) (e)

Figura 2.9: Visualización de la formación y comportamiento del vórtice inicial en el tiempo, en un perfil cuyo ángulo de ataque es mayor que cero grados.: (a) Instantńea del vórtice inicial formado sobre un perfil, en la figura la cámara está en reposo con respecto al flujo no perturbado. Reproducido de [Graaf, 2002]; (b) Desviación del flujo cercano al borde de salida hacia la parte superior del perfil; (c) Desprendimiento del vórtice inicial del borde de salida del perfil; (d) Desplazamiento del vórtice inicial; y, (e) Alejamiento y debilitamiento del vórtice inicial desprendido.

transónico, supersónico e hipersónico.
El mecanismo mediante el cual la naturaleza transmite una fuerza aerodinámica a una superficie es directo. Esta fuerza proviene solamente de dos fuerzas básicas: la presión sobre la superficie y los esfuerzos cortantes sobre la superficie. Por ejemplo considerando un ala cuya longitud de la envergadura sea la unidad. Sea (s) la distancia medida a lo largo de la superficie del ala desde el borde de ataque y como la presión y la distribución de los esfuerzos cortantes son función de (s); entonces estas distribuciones son el único mecanismo que la naturaleza tiene para comunicar una fuerza aerodinámica al ala. Siendo más específicos, considerando una pequeña parte de área elemental (dS) sobre la cual se ejerce una presión (p) que actúa en dirección normal a dS y un esfuerzo cortante τ que actúa tangencialmente con respecto a dS, tal como lo muestra la figura 2.10. Siendo $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$ los vectores unitarios perpendicular y paralelo respectivamente al elemento dS. A continuación es conveniente definir un vector $d\mathbf{S}\equiv\mathbf{n}dS$; donde $d\mathbf{S}$ sea un vector normal a la superficie con una magnitud dS. Por lo tanto de la figura 2.10, la fuerza elemental d$\mathbf{F}$ actuando sobre dS resulta

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dS + \tau\mathbf{m}dS = -pd\mathbf{S} + \tau\mathbf{m}dS \tag{2.15}$$

De la figura cabe destacar que la presión p, actúa en dirección hacia la superficie, mientras que $d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS$ se dirige lejos de la superficie, de ahí el signo negativo en la ecuación 2.15. Por lo tanto la fuerza total aerodinámica $\mathbf{F}$ que actúa sobre todo el cuerpo es la suma de todas las fuerzas elementales que están actuando sobre todas las áreas elementales. Esto puede expresarse en forma matemática mediante una integral de superficie, de la ecuación 2.15 se tiene

$$\mathbf{F} = \oiint d\mathbf{F} = -\oiint pd\mathbf{S} + \oiint \tau\mathbf{m}dS \tag{2.16}$$

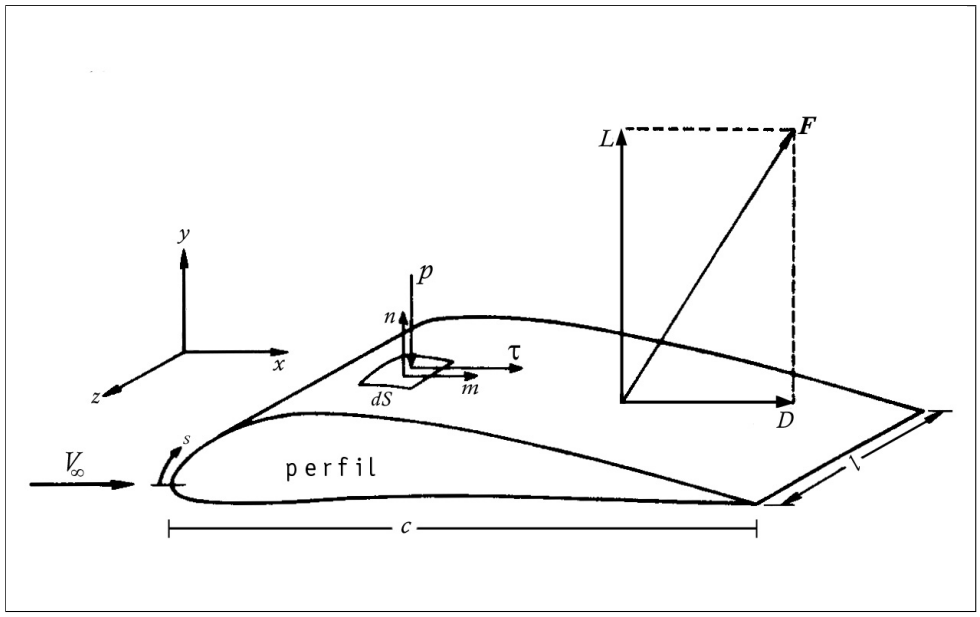


Figura 2.10: Descripción de las fuerzas elementales que actúan sobre la superficie aerodinámica.

El significado físico de los términos del lado derecho de la ecuación 2.16 es el siguiente: la primera integral es la fuerza de presión sobre el cuerpo, y la segunda integral es la fuerza de fricción. Las integrales son tomadas sobre la superficie completa del cuerpo. Considerando x, y, z coordenadas ortogonales tal y como se muestra en la figura 2.10 entonces la velocidad de la corriente libre V_∞ es paralela a x y perpendicular a y. Ahora

bien, sí **F** es la fuerza neta aerodinámica en la ecuación 2.16, entonces la sustentación (L) y la resistencia al avance (D) se definen como las componentes de **F** en las direcciones y y x respectivamente. Por lo tanto de la ecuación 2.16 la fuerza de sustentación corresponde a

$$L = componente(y)\underbrace{\left[-\oiint p d\mathbf{S}\right]}_{1} + componente(y)\underbrace{\left[\oiint \tau \mathbf{m} dS\right]}_{2} \tag{2.17}$$

donde

1. es la contribución a la sustentación de las fuerzas de presión
2. es la contribución a la sustentación de los esfuerzos cortantes (fuerzas viscosas ó de fricción)

Considerando ahora la resistencia al avance, de la ecuación 2.16 y la figura 2.10

$$D = componente(x)\underbrace{\left[-\oiint p d\mathbf{S}\right]}_{1} + componente(x)\underbrace{\left[\oiint \tau \mathbf{m} dS\right]}_{2} \tag{2.18}$$

donde

1. es la contribución a la resistencia al avance de las fuerzas de presión
2. es la contribución a la resistencia al avance de los esfuerzos cortantes (fuerzas viscosas ó de fricción)

En el caso particular de un flujo compresible sobre uno o más perfiles aerodinámicos en dos dimensiones. El cálculo correspondiente al coeficiente de sustentación (Cl) y resistencia al avance (Cd) se describe en siguiente capítulo 3.5.

2.6. Entrada en pérdida de sustentación de un perfil.

Tal y como se mencionó al principio de esta sección, el ángulo de ataque del perfil tiene una gran influencia sobre el comportamiento del flujo, sobre todo en la fuerza de sustentación, traducido al coeficiente de sustentación. En general para cualquier perfil, la variación del Cl con respecto al ángulo de ataque obtenido de manera experimental es lineal hasta cierto ángulo, ver figura 2.11, el cual es nombrado como ángulo de ataque crítico del perfil (α_{crit})[4] . La violación de la dependencia lineal entre el coeficiente de sustentación y el ángulo de ataque un poco antes de alcanzar el perfil el ángulo crítico y posteriormente, certifica el surgimiento del régimen de separación de la capa límite. El coeficiente de la fuerza de sustentación correspondiente al punto A, está condicionado por la aparición de una zona de desprendimiento de la capa límite sobre el extradós del perfil, debido a lo cual puede existir un momento de alabeo (sí el perfil mueve la nariz hacia arriba el momento es positivo, por otro lado sí la nariz del perfil se desplaza hacia abajo el momento es negativo). Para ángulos mayores que el crítico (α_{crit}), el desprendimiento del flujo se propaga por la mayor parte de la superficie del perfil y el coeficiente de la fuerza de sustentación disminuye, de ahí que el fenómeno sea llamado entrada en pérdida del perfil, la pérdida se refiere precisamente a la pérdida de sustentación. El ángulo crítico es fijo y distinto para cada perfil y depende principalmente de la geometría y del número de Reynolds. Es de subrayarse además que el ángulo crítico estático de un perfil no es igual para el mismo perfil sí se toma en cuenta ahora la influencia de las vibraciones traducidas en desplazamientos del perfil durante la entrada

[4] Es importante mencionar que el ángulo crítico recibe también el nombre de ángulo crítico estático y se obtiene de manera experimental, evitando durante las mediciones que el perfil se vea afectado por las fuerzas que actúan sobre él y que se traducen en vibraciones que modifique su ángulo de ataque al momento de tomar las lecturas.

en pérdida. Generalmente el fenómeno de entrada en pérdida de un perfil se retrasa al sobrepasar el ángulo crítico estático esto a causa del movimiento del perfil. El fenómeno de la entrada en pérdida de un perfil puede ser estática o dinámica. Estos dos tipos de entrada en pérdida se describen a continuación.

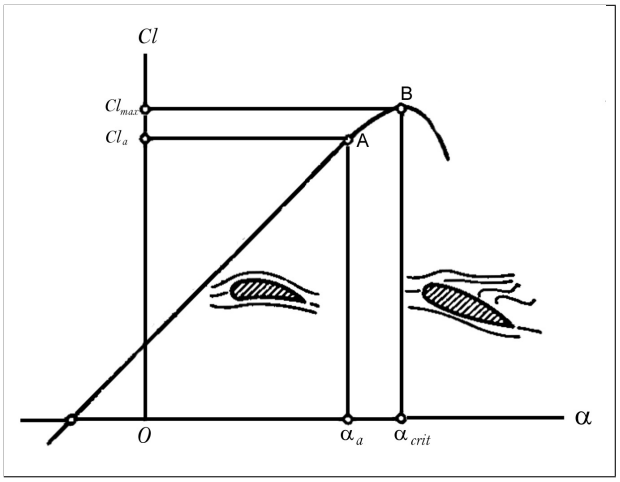


Figura 2.11: Comportamiento del coeficiente de la fuerza de sustentación en un perfil al variar el ángulo de ataque.

2.6.1. Entrada en pérdida del perfil estática.

Tal y como se ha descrito cuando el perfil presenta un ángulo de ataque grande, el flujo es incapaz de seguir el contorno del perfil y ocurre entonces la separación de la capa límite sobre una gran porción del extradós del perfil. A la entrada en pérdida de sustentación de un perfil generalmente la acompaña un decremento de la sustentación así como un incremento de la resistencia al avance. Existen cuatro patrones dominantes del comportamiento del flujo que difieren entre sí de la entrada en pérdida estática de un perfil, el comportamiento de la entrada en pérdida de un perfil depende de la geometría del perfil, especialmente de la curvatura del borde de ataque y del número de Reynolds. Los cuatro patrones de la entrada en pérdida estática se describen a continuación.

1. La entrada en pérdida en perfiles delgados.
2. La entrada en pérdida en el borde de entrada
3. La entrada en pérdida combinada (en el borde de entrada y en el borde de salida)
4. La entrada en pérdida en el borde de salida

La entrada en pérdida en perfiles delgados.
Ocurre cuando el número de Reynolds es relativamente bajo y además el perfil tiene un espesor de aproximadamente 10 % de la cuerda. Antes de presentarse la entrada en pérdida de sustentación, una burbuja de separación se presentan en el borde de entrada. Dentro de la pequeña burbuja laminar, la capa límite laminar se separa, se hace turbulenta y se adhiere nuevamente después de la transición. Conforme el ángulo de ataque se incrementa, el borde de entrada delgado induce un pico de succión debido al incremento de la velocidad, pasando este punto se tiene entonces un gradiente de presión adverso, ver figura 2.12(A1). Cuando el gradiente de presión adverso llega a ser lo suficientemente grande, éste retrasa el reacoplamiento de la capa límite turbulenta de la superficie del perfil. Debido al desarrollo lento de la transición y el reacoplamiento turbulento, el flujo se separa sobre la mayor parte del extradós del perfil antes de que las capas de flujo sean

capaces de adherirse nuevamente al perfil, ver figura 2.12(B1, C1). En consecuencia el punto de readhesión del flujo sobre el perfil se recorre hacia el borde de salida. El crecimiento de la pequeña burbuja recibe el nombre de expansión de la burbuja. La sustentación comienza a decrecer cuando el reacoplamiento ocurre al 50 % de la cuerda del perfil.

La entrada en pérdida en el borde de entrada

En la pequeña burbuja laminar de la figura 2.12(A2), la capa límite se separa bajo la influencia del gradiente de presión adverso. Debido a este gradiente de presión adverso, el flujo laminar se vuelve inestable y transiciona a la turbulencia, después de la cual el flujo de readhiere a la superficie del perfil. En el caso de una entrada en pérdida por el borde de ataque, el gradiente de presión adverso llega a ser lo suficientemente fuerte que impide la readhesión del flujo turbulento. La separación de la burbuja laminar de repente es muy grande, ver figura 2.12(C2). El flujo en este caso se readhiere cerca del borde de salida del perfil ó de la estela. En consecuencia, el máximo valor del coeficiente de sustentación Cl coincide con el estallamiento de la pequeña burbuja. Este tipo de entrada en pérdida es similar a la entrada en pérdida en perfiles delgados aunque ésta separación ocurre a un gran ángulo de ataque y existe un descenso repentino en la sustentación en lugar de un cambio gradual.

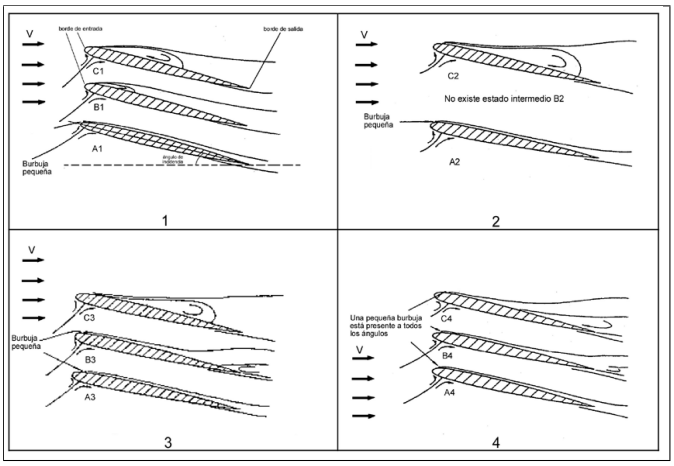


Figura 2.12: Patrones del desarrollo de la entrada en pérdida estática de un perfil típico.

La entrada en pérdida combinada

Una burbuja de separación laminar puede exisitir cerca del borde de entrada del perfil y al mismo tiempo puede ocurrir la separación en el borde de salida, ver figura 2.12(A3). Una vez que el perfil rebasa el ángulo de ataque crítico, el flujo se separa del borde de salida antes del estallamiento de la burbuja, ver figura 2.12(B3). La separación en el borde de salida actúa de forma tal que el flujo asume que el perfil presenta ahora una curvatura negativa la cual incrementa el valor máximo de succión que se tiene en el borde de entrada, ver figura 2.12(B3). Mientras se da la separación de la capa límite en el borde de salida, el gradiente de presión adverso en el borde de entrada puede llegar a ser lo suficientemente fuerte que incluso previene la capa límite turbulenta en el borde de entrada reacoplando al flujo y reduciendo el grado de estallamiento de la burbuja, ver figura 2.12(C3). El Cl máximo depende ya sea por el estallamiento de la burbuja laminar o por la pérdida de sustentación debido a la separación en el borde de salida. Generalmente en estos casos el estallamiento de la burbuja ocurre al ángulo crítico.

La entrada en pérdida en el borde de salida

A grades números de Reynolds la transición del flujo laminar a turbulento ocurre inmediatamente después o antes de que el flujo dentro de la capa límite laminar se separe. La pequeña burbuja laminar llega a ser tan pequeña que su papel cambia al de un punto de transición, ver figura 2.12(A4). El flujo aguas abajo del punto donde existe la mayor succión (menor presión) es turbulento y la separación en el borde de entrada es la que domina el comportamiento de la entrada en pérdida del perfil permanente. En la entrada en pérdida

del borde de salida, el punto de separación se desplaza aguas arriba sobre el extradós en dirección al borde de entrada del perfil, ver figura 2.12(B4,C4) sí existe un incremento en el ángulo de ataque. Cuando el punto de separación se desplaza rápidamente hacia adelante, una rápida separación de la capa límite ocurre en el borde de salida. Por el contrario, sí el desplazamiento del punto de separación ocurre gradualmente entonces la separación ocurre de forma sutil. Una vez que un perfil experimenta la entrada en pérdida por el borde de salida y se incrementa el número de Reynolds entonces la capa límite se torna más activa lo cual retrasa la separación.
Este tipo de separación se da generalmente cuando el perfil es sometido a bajos ángulos de ataque o cuando el perfil alcanza un ángulo de ataque grande (menor al ángulo crítico) pero mediante un proceso gradual, es decir a cada paso de tiempo se va incrementando el ángulo de ataque muy suavemente con respecto a la corriente de flujo, que tiene una velocidad ya establecida V. En este caso las fuerzas que actúan sobre el perfil (principalmente la sustentación y la resistencia al avance) no perturban súbitamente al perfil, induciendo o provocándole a éste un desplazamiento en alguna dirección debido al aumento gradual del ángulo de ataque; y es por esta razón que el ángulo de ataque del perfil puede considerarse fijo.
Existe otro caso para en el que el incremento del ángulo de ataque del perfil no es gradual y como consecuencia del drámatico cambio en la dirección del flujo éste se separa de la superficie del perfil, por lo que el patrón del flujo ya no es consistente y comienzan a presentarse fenómenos transitorios. En este caso el término cuasiestático o entrada en ṕerdida cuasiestática aplica bien ya que a pesar de seguir considerándose al perfil estático, es decir fijo a un gran ángulo de ataque; en el campo de flujo que rodea al perfil se presentan fenómenos transitorios muy semejantes a los que se aparecen cuando el perfil se encuentra en pérdida dinámica y cuyas características se describirán en la siguiente sección. Por lo tanto las simulaciones obtenidas para el perfil NACA4420 en este trabajo de tesis y que se mostrarán en el capítulo 4 corresponden entonces al tipo de entrada en pérdida cuasiestática, ya que se considera que el ángulo de ataque del perfil es fijo, pero también se demostrará con los resultados de la simulación que los patrones de flujo son muy semejantes a los que se presentan cuando el perfil no se considera fijo (pérdida dinámica) tal y como lo reporta [Johansen, 1999].

2.6.2. Entrada en pérdida del perfil dinámica.

Un cierto grado de inconstancia siempre acompaña a un flujo sobre un perfil con un gran ángulo de ataque. La entrada en pérdida del perfil dinámica ocurre en las palas del rotor de un helicóptero, en las palas de las turbomáquinas, en turbinas de viento ó en el ala de una aeronave de combate. La entrada en pérdida dinámica de un perfil puede definirse como el desprendimiento de vórtices concentrados desde el borde de entrada del perfil y que son desplazados a lo largo de todo su extradós. Estas vorticidades crecen hasta alcanzar un tamaño considerable y son empujados aguas abajo del perfil, formando un patrón de flujo que recibe el nombre de vórtices de la entrada en pérdida del perfil dinámica. Este fenómeno induce fluctuaciones en el campo de presión sobre todo en el extradós del perfil, además la succión inducida por los vórtices sobre el extradós afecta también la sustentación y se desplaza con éstos. El patrón del flujo de los vórtices no es estable, y las vorticidades son desplazadas sobre el perfil. Cuando las vorticidades se localizan en el extradós detrás de aproximadamente la mitad de la longitud de la cuerda del perfil, se produce un momento de alabeo en el perfil (la nariz del perfil desciende). El fenómeno de entrada en pérdida del perfil dinámica no está aún totalmente entendido, ha sido y es objeto de continua investigación, y dada la complejidad de la física involucrada, su comportamiento puede únicamente ser modelado por medio de la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes o mediante un análisis experimental.
El proceso y comportamiento de la entrada en pérdida dinámica de un perfil es similar para todos los perfiles, éste proceso generalmente puede describirse en etapas, tal y como se muestra en la figura 2.13 describiéndose a continuación cada una.

a) Para un incremento ligero y gradual del ángulo de ataque en un perfil, se ha observado en los experimentos utilizando un túnel de viento que el flujo o las capas de fluido permanecen atadas o adheridas al extradós del perfil. La sustentación y el momento de alabeo siguen aproximadamente la tendencia marcada por la teoría de perfiles delgados no permanente y lineal, es decir la capa límite permanece delgada sin evidencia alguna de la existencia de un flujo opuesto sobre la superficie.

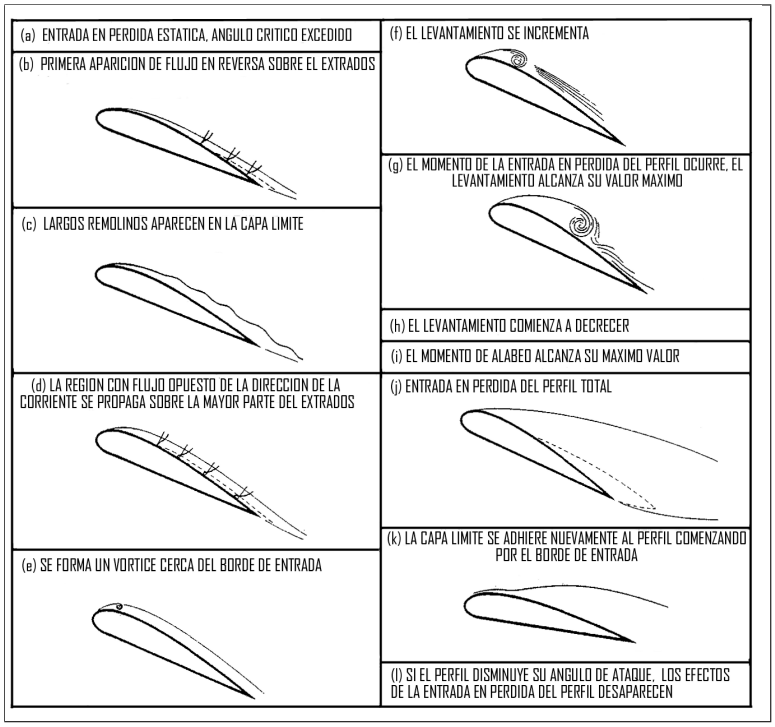


Figura 2.13: Descripción de las características principales de las etapas del desarrollo de la entrada en pérdida dinámica de un perfil típico, NACA0012. Reproducido de [Johansen, 1999].

b) Una vez que el ángulo de ataque es grande, se forma una capa delgada de flujo que se desplaza contrariamente a la dirección de la corriente libre, es decir en reversa que se desarrolla en la parte trasera de la capa límite. En algunos perfiles, la entrada en pérdida puede comenzar por el borde de salida del perfil, para estos casos la región de flujo en reversa se localiza en el borde de salida del perfil y progresivamente ésta se adelanta hacia la región del borde de entrada. Los perfiles en los cuales la entrada en pérdida comienza por el borde de entrada, presentan la existencia de una burbuja de separación que se localiza precisamente en el borde de entrada del perfil. Al estallar esta burbuja resulta una región de flujo en reversa que rápidamente se extiende sobre el extrdós.

c, d) La región cuya dirección del flujo es contraria a la dirección de la corriente libre se extiende sobre todo el extradós del perfil, se tiene entonces una capa límite que presenta una región con una gran perturbación.

e, f) Cuando la región de flujo en reversa alcanza el borde de entrada, una perturbación vortical se forma precisamente en ese punto. La evidencia experimental sugiere la formación de una capa donde los efectos de la viscosidad son muy grandes y se localiza justamente detrás del borde de entrada, como consecuencia de los efectos viscosos las capas de flujo en esta región se enrrollan rápidamente y forman la perturbación. La complejidad en la física del flujo que envuelve a la formación y comportamiento de éste vórtice no se describe aquí, pues requeriría de todo un capítulo aparte, sin embargo [Johansen, 1999] ofrecen una descripción más detallada de este fenómeno en particular. Un poco después de la formación de la perturbación vortical, ésta se desprende del borde de entrada y comienza a desplazarse sobre la superficie superior del perfil (extradós). Experimentos muestran que el vórtice o los vórtices se desplazan con una velocidad de aproximadamente el 30 % y 40 % de la velocidad de la corriente libre.

g) El momento de la entrada en pérdida del perfil comienza cuando el vórtice crece en tamaño y comienza

a desplazarse sobre el perfil, la sustentación sufre un ligero incremento, el cual va acompañado por un fuerte momento de alabeo.

h) Conforme el vórtice se aproxima al borde de salida, la sustentación y la resistencia al vance alcanzan su valor máximo, aunque no lo hacen simultáneamente. Es en esta etapa en la que la sustentación comenzará a decrecer.

i) El núcleo del vórtice ha pasado ya el borde de salida del perfil. El momento de alabeo alcanza su valor máximo, después del cual continúa decreciendo.

j) Después de que el vórtice ha pasado el borde de salida y se convierte en una estela turbulenta del perfil, el flujo sobre la superficie del extradós se encamina al estado de separación total. Vórtices secundarios y terciarios que aún existen producen fluctuaciones adicionales, pero en niveles menores. Una vez que el estado de separación total es alcanzado, el flujo es similar al estado permanente de la entrada en pérdida de un perfil.

k) El flujo se adhiere nuevamente al perfil, esto se da siempre y cuando el ángulo de ataque disminuya. La adhesión del flujo comienza en el borde de entrada, al punto sobre el extradós donde el flujo comienza a adherirse nuevamente recibe el nombre de punto de readhesión.

l) Si el ángulo de ataque no disminuye, el desplazamiento del flujo sobre el perfil continúa formando patrones de flujo complejos.

2.7. El flujo compresible sobre superficies aerodinámicas

Hasta ahora únicamente se ha descrito el comportamiento y fenómenos que se presentan en los flujos que se desplazan a altas velocidades sin considerar la existencia de un objeto o superficie dentro del campo de flujo. Sin embargo uno de los objetivos de esta tesis es el análisis en dos dimensiones del comportamiento del flujo a su paso por una o más superficies aerodinámicas tal es el caso de un perfil o de una cascada de perfiles. Tal y como se definió en el capítulo 1 sección 1.3.1, el número de mach (M) corresponde a un parámetro adimensional que permite clasificar a los flujos dependiendo de su velocidad de desplazamiento en ciertos regímenes: subsónico, transónico y supersónico, los cuales fueron definidos previamente. Es importante recordar ahora que la aerodinámica, es la rama de la mecánica de fluidos encargada de analizar el comportamiento y fenómenos que se presentan sobre los perfiles cuando éstos se encuentran inmersos dentro de un flujo de fluido sea cual sea su velocidad de desplazamiento. No obstante los fenómenos que se presentan sobre un sólo perfil varían según el régimen de flujo en el que se encuentre inmerso ya que la influencia de la compresibilidad del fluido es más evidente conforme se incrementa la velocidad de la corriente tal y como se describe a continuación.
En el caso de un flujo subsónico ver figura 2.14, las ondas de sonido viajan más rápido que la velocidad del flujo que circula através del perfil por lo que éstas previenen a las partículas de fluido que avanzan en dirección al perfil de su presencia y por lo tanto las líneas de corriente de flujo se ajustan suavemente evitando colisionar con el cuerpo, es decir las partículas de fluido tienden a desviarse tal y como se muestra en la figura 2.14. Esto permite que las propiedades del campo de flujo influenciadas por la existencia del perfil se modifiquen gradualmente y de manera continua.

Si la velocidad del flujo se incrementa pero mantiene al mismo tiempo un regímen subsónico muy próximo a alcanzar un ($M = 1$), la geometría del perfil puede inducir un incremento de velocidad de la corriente precisamente en algunas regiones sobre el extradós tal y como se muestra en la figura 2.15. La velocidad sobre el extradós del perfil aumenta considerablemente como consecuencia del cambio pronunciado en la geometría del perfil, en algunos casos sí la velocidad de la corriente de flujo supera a la velocidad del sonido entonces se tiene sobre el extradós del perfil principalmente en la parte de mayor curvatura una limitada región de muy alta velocidad ($M > 1$) que induce la formación de una onda de choque sobre el extradós.

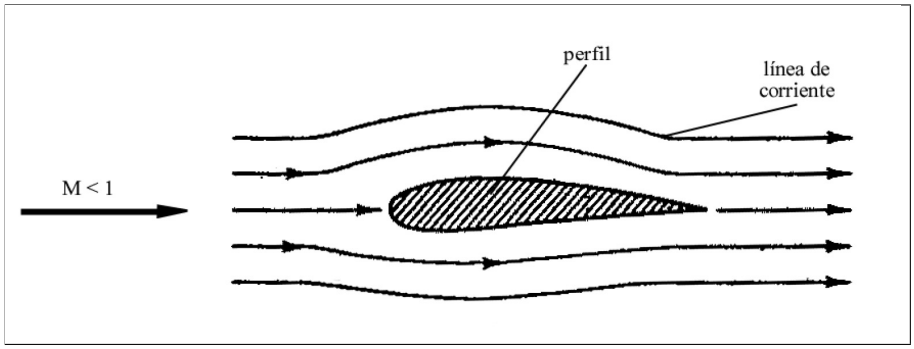


Figura 2.14: Flujo subsónico $M_\infty < 0{,}8$ alrededor de un perfil.

Esta onda de choque limita por un lado la región de flujo que tiene un mach mayor a la unidad y al mismo tiempo la onda de choque provoca la desaceleración del fluido hacia la salida del perfil. Por lo tanto en un perfil inmerso en una corriente de flujo cuyo régimen sea subsónico pueden exisitir pequeñas regiones de flujo cuyo régimen sea supersónico, por esta razón recibe el nombre de flujo transónico aún cuando la mayor parte del campo de flujo sea eminentemente subsónico.

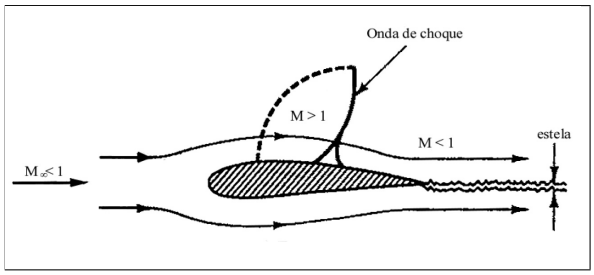


Figura 2.15: Ilustración de los fenómenos que se presentan alrededor de un perfil inmerso en un flujo transónico.

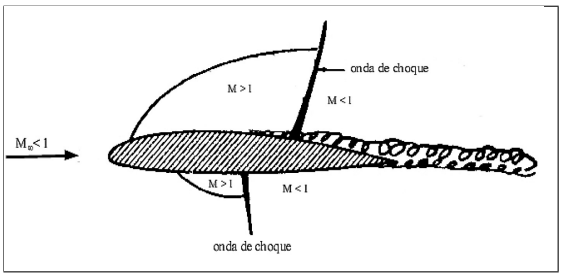


Figura 2.16: Ilustración de la evolución de los fenómenos que se presentan alrededor de un perfil inmerso en un flujo transónico.

Sí, la velocidad del flujo en la figura 2.15 continúa incrementándose aún cuando el incremento sea pequeño y el mach de la corriente sea ligeramente menor a la unidad, puede ocurrir que sobre el extradós del perfil la onda de choque que se había generado previamente tienda a recorrerse hacia el borde de salida del perfil, pero ahora no sólo sobre el extradós se presenta este fenómeno sino también sobre el intradós del perfil se crea una onda de choque que a su vez también se irá desplazando hacia el borde de salida conforme la velocidad del flujo continúe incrementándose, ver figura 2.16. Es importante destacar que la zona de alta velocidad presente sobre el extradós del perfil incrementa su extensión y pueden llegar a cubrir una parte considerable tal y como se aprecia en la figura 2.16.
Una vez que la corriente entrante hacia el perfil presente un número de mach mayor a la unidad tal y como se observa en la figura 2.17, no sólo se aprecian las ondas de choque sobre ambas superficies del perfil (extradós e intradós) las cuales se han recorrido hasta casi llegar al borde de salida del perfil sino que además se forma una onda de choque justamente delante de perfil, la cual obviamente influirá significativamente sobre el comportamiento del flujo que se aproxima al perfil. Inicialmente el régimen de la corriente de flujo es supersónico pero la existencia del perfil induce la formación de una onda de choque que precede al perfil por lo tanto la corriente supersónica al atravesar la onda de choque disminuye su régimen a subsónico por lo que el frente del perfil no percibirá la existencia de un flujo supersónico por el contrario en este caso percibirá una corriente de flujo con régimen subsónico que al recorrer la geometría del perfil se acelera nuevamente alcanzando un régimen supersónico. Esta corriente supersónica induce además la formación de

ondas de choque a la salida del perfil que provocan un cambio de régimen en la corriente nuevamente.
Estos fenómenos que se han descrito son consecuencia de los cambios en la densidad del fluido según se

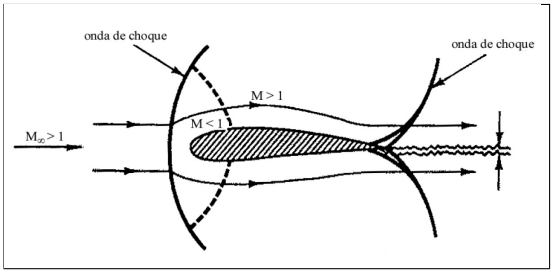


Figura 2.17: Fenómenos presentes en un flujo supersónico alrededor de un perfil.

incrementa la velocidad de desplazamiento del fluido. Con el reciente desarrollo de la Dinámica de Fluidos Computacional se han logrado obtener algunas simulaciones de los fenómenos presentes sobre superficies aerodinámicas pero dada la complejidad de las ecuaciones y el costo en tiempo de cómputo, la mayoría de éstos análisis utiliza modelos de flujo como las ecuaciones de Euler, de ahí que disminuya la precisión de estas simulaciones al momento de querer representar los fenómenos de un flujo compresible de una manera más aproximada a lo que sucede en la realidad.

Capítulo 3

Descripción del método

En este capítulo se describe de forma general el método de elementos espectrales/*hp* el cual se utiliza para resolver las ecuaciones adimesionalizadas que gobiernan a un flujo compresible en dos dimensiones, las cuales fueron establecidas en el capítulo anterior. El método está implementado en un algoritmo computacional llamado código N$\varepsilon\kappa$Tαr, este código fue desarrollado por el grupo ***"The Crunch"***, el cual es un grupo de la División de Matemáticas Aplicadas perteneciente a la Universidad de Brown. El código N$\varepsilon\kappa$Tαr, es un código que el Dr. G.E. Karniadakis comenzó a desarrollar desde 1983 cuando era estudiante del MIT. El código que se utilizó para obtener las simulaciones es una versión adaptada del código original, pues fue modificado para poder realizar análisis en flujos compresibles con mallas no estructuradas en dos dimensiones.
Una vez que se describe el método que utiliza el código, resulta fundamental validarlo, es decir demostrar que los resultados que ofrece son apropiados y precisos, por ello en una sección de este capítulo se presenta la validación del código con el fin de mostrar su viabilidad en el análisis de flujos compresible. Para su validación se consideró un caso bien documentado que corresponde a un perfil NACA0012 cuya geometría es ampliamente utilizada para validar códigos computacionales, de igual forma se describe la evaluación del coeficiente de sustentación, de resistencia al avance y de la entropía.

3.1. Método de elementos espectrales/*hp*

El método de elementos espectrales (SEM) es un método reciente, producto del desarrollo y combinación de los métodos espectrales clásicos y del método de elemento finito (FEM), de ahí el origen del término "*elemento espectral*". El término "*espectral*" implica una función especial. Ejemplos de estas funciones pueden ser los polinomios de Chebyshev, Legendre, Laguerre, Jacobi, etc. Estas funciones se utilizan esperando captar los fenómenos físicos de una forma más realista y detallada que con otras funciones cuyo orden es menor comparadas con éstas, y por lo tanto la solución es más precisa [Chung, 2002]. El método (SEM) permite el uso de geometrías irregulares y ofrece una alta precisión debido a la posibilidad de variar el orden de los polinomios dentro de los elementos que forman la malla computacional, sean éstos triángulos, cuadrados tetraedros, etc. La diferencia principal entre el método de elemento finito (FEM) y el (SEM) radica en el tipo de funciones base que se utilizan para aproximar la solución de las ecuaciones de gobierno. Es importante destacar que las funciones base están relacionadas con la forma de los elementos en los que se divide el dominio en su forma computacional.
El primer desarrollo del método de elementos espectrales (SEM) tal cual hoy se conoce ocurre a principios de los años 80's con [Patera, 1984]. Tiempo después [Sherwin and Karniadakis, 1995b] reportan la aplicación de los métodos de elementos espectrales utilizando elementos finitos triangulares.

El interés principal en analizar un flujo compresible vía la aplicación del (SEM) se basa en el hecho de que los flujos presentes en aerodinámica como en turbomaquinaria involucran geometrías complejas (perfiles y álabes principalmente), y a pesar de los grandes esfuerzos por obtener resultados satisfactorios analizando

a estos flujos por medio del método de elemento finito (FEM) y el método de volumen finito (FVM), éstos métodos no resultan tan precisos. La causa se debe principalmente a que estos métodos depende directamente de la calidad de la malla computacional. Particularmente para mallas altamente deformadas (es decir los elementos no conservan una gran uniformidad) la convergencia de la solución es cuestionable.
Los métodos de elementos espectrales se han venido desarrollado en los últimos años, primeramente para las ecuaciones de Navier-Stokes en dos y tres dimensiones para un flujo incompresible, no permanente sobre mallas no estructuradas [Sherwin and Karniadakis, 1995b] y [Sherwin and Karniadakis, 1996] utilizan la formulación de Galerkin para tratar las ecuaciones. En estos casos la discretización de los elementos consiste en dividir el dominio de estudio en triángulos que tienen forma arbitraria. En cada triángulo ó tetraedro (según la dimensión que se trate) se utiliza una base de expansión espectral continua C^0 la cual consiste en polinomios de Jacobi de peso variable que se ajustan a una cuadratura numérica exacta. Sin embargo el uso de una base C^0 ocasiona una pérdida parcial de ortogonalidad, lo cual complica la obtención de la solución. Para el caso del flujo compresible, en un trabajo previo [I. Lomtev and Karniadakis, 1998] utilizan una formulación de Galerkin discontinua para tratar las contribuciones hiperbólicas y una formulación combinada Galerkin continua-discontinua para el tratamiento de las contribuciones difusivas. En consecuencia se utilizan dos tipos de funciones base: la primera es una base ortogonal discontinua propuesta por [Dubiner, 1991]; y la segunda es una base semi ortogonal continua C^0 utilizada anteriormente por [Sherwin and Karniadakis, 1995b]. La conservación de la solución se mantiene automáticamente por la formulación de Galerkin discontinua, mientras que la periodicidad se controla básicamente variando el orden de las expansiones espectrales alrededor de las discontinuidades.
En este trabajo de tesis para resolver las ecuaciones para un flujo compresible (ecuaciones de Navier-Stokes reducidas), se emplea la misma discretización de elementos espectrales/hp de alto orden, pero con una nueva formulación que permite el uso de una base ortogonal. El método es eficiente porque utiliza una base espectral jerárquica. Se utilizan generalmente polinomios de Jacobi para formar la base espectral, escritos en un nuevo y definido sistema de coordenadas. La base discontinua es además ortogonal y mantiene las propiedades del producto tensorial. A diferencia de lo reportado previamente por [I. Lomtev and Karniadakis, 1998], el método que se utiliza en este trabajo de tesis fue recientemente desarrollado por [Lomtev and Karniadakis, 1999] y se basa en la formulación discontinua de Galerkin que se aplica a la contribución difusiva y a la contribución de advección presentes en las ecuaciones para un flujo compresible, ecuaciones 3.1, tal y como se describe a continuación.

3.2. Discretización espacial de alto orden.

El método de elementos espectrales/hp es el método que se emplea en el algoritmo que en la siguiente sección se describe para discretizar espacialmente las ecuaciones de gobierno para flujo compresible. En esta discretización, el dominio computacional se divide en subdominios o elementos, si el análisis que se realiza es en dos dimensiones entonces los elementos pueden ser triángulos o cuadriláteros, por el contrario si el análisis que se desea realizar es en tres dimensiones, entonces los elementos que se usarán serán tetraedros, hexaedros, prismas y pirámides, ó combinaciones de éstos de tal manera que aún para una geometría compleja pueda construirse a partir de estos elementos. Posteriormente se expanden las variables y datos dentro de cada uno de estos elementos en términos de una base polinómica apropiada $\phi(x)$ utilizando un sistema de coordenadas local (ξ_1, ξ_2) asociada con cada elemento. Por ejemplo. la función $f(x, y)$ puede aproximarse como

$$f(x, y) \approx \sum_p \sum_q a_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$$

donde a_{pq} son los coeficientes desconocidos o coeficientes de expansión (llamados *modos*) correspondientes a los polinomios ϕ_{pq}, ϕ_{pq} son las funciones base modal y (ξ_1, ξ_2) son las coordenadas locales dentro del elemento, para nuestro caso todos los elementos son triángulos. Entonces nos referiremos a $f(x, y)$ como representante de una variable del espacio físico y a a_{pq} como ésta en el espacio transformado o modal.
El valor máximo de los índices p y q es el orden del polinomio de expansión y al cual nos referiremos como

orden-p y que se denota con la letra N. De manera que para alcanzar la convergencia se tienen dos opciones: ya sea que se mantenga fijo el *orden-p* y se incremente el número de elementos (que normalmente recibe el nombre de *refinamiento-h*) o que se mantenga fijo el número de elementos y se incremente el orden del polinomio *orden-p* (llamado *refinamiento-p*)

El índice de convergencia correspondiente a la primera opción es algebraico pero exponencial en la última opción. La convergencia exponencial implica que doblando el número de grados de libertad el error decaerá por por lo menos dos órdenes de magnitud mientras que la convergencia algebraica implica que el error se decaerá por un factor algebraico [Warburton and Karniadakis, 1999] lo prueban teóricamente. Ádemás de la discretización en elementos se requiere de un conjunto de puntos donde se evalúen todas las integrales, por ejemplo los productos internos en la formulación Discontinua de Galerkin (la cual se describe en la siguiente sección). Este conjunto de puntos forman también una malla llamada malla de cuadratura que se muestra en la figura 3.2 para nuestra simulación del perfil NACA4420; el número de puntos de cuadratura (por ejemplo, el orden de cuadratura) está relacionado con el orden espectral y se elige de modo que la cuadratura sea exacta, ver [Warburton and Karniadakis, 1999].

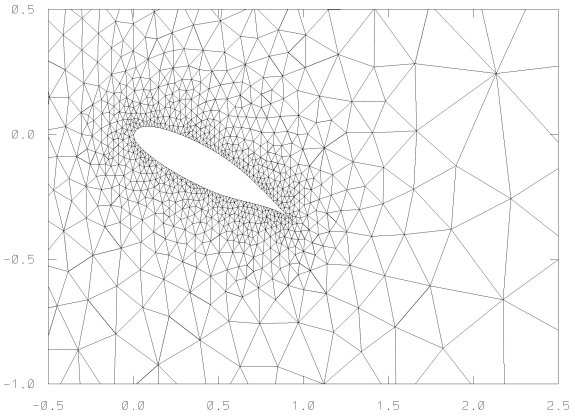


Figura 3.1: Discretización triangular para el perfil NACA4420.

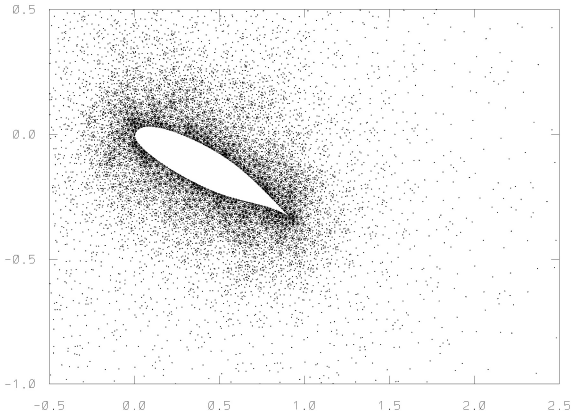


Figura 3.2: Malla de cuadratura para el perfil NACA4420.

Regresando nuevamente a la construcción de una base apropiada $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$, es de nuestro interés desarrollar una expansión de alto orden eficiente computacionalmente, que demuestre características numéricas atractivas. Por lo tanto un punto de inicio en el desarrollo de las expansiones multi-dimensionales es construir un conjunto de expansiones polinómicas las cuales son ortogonales en el producto interno de Legendre sobre cada región no estructurada. La siguiente expansión fue propuesta en dos dimensiones por [Dubiner, 1991] y [Sherwin and Karniadakis, 1995a] lo amplian para tres dimensiones. A continuación se presenta la forma general de la base ortogonal para elementos triangulares

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\psi}^a_p(\eta_1)\tilde{\psi}^b_{pq}(\eta_2)$$

donde las coordenadas ξ_1, ξ_2 son coordenadas cartesianas mientras que η_1, η_2 no son coordenadas cartesianas y se definen posteriormente. La figura 3.3 muestra la construcción de la expansión modal en dos dimensiones usando esta forma general. Para generar cada modo la función $\tilde{\psi}^a_p(\eta_1)$ se combina con $\tilde{\psi}^b_{pq}(\eta_2)$. Sin embargo, a diferencia de la expansión para un cuadrilátero, $\tilde{\psi}^b_{pq}(\eta_2)$ tiene diferente forma para cada valor de p de la función principal $\tilde{\psi}^a_p(\eta_1)$.

Siguiendo la notación establecida por [Karniadakis and Sherwin, 1999], la función ${P_N}^{\alpha,\beta}(z)$ representa un polinomio de Jacobi the orden-p, entonces las funciones principales $\tilde{\psi}^a_i(z)$ y $\tilde{\psi}^b_{ij}(z)$, para expansiones ortogo-

nales, ver [Warburton and Karniadakis, 1999] son:

$$\tilde{\psi}_i^a(z) = P_i^{0,0}(z), \qquad \tilde{\psi}_{ij}^b(z) = \left(\frac{1-z}{2}\right)^i P_j^{2i+1,0}(z),$$

En consecuencia las expansiones bidimensionales en términos de las funciones principales se definen como

$$\begin{aligned} &\text{expansión cuadrilátera,} \qquad \phi_{pq}(\xi_1,\xi_2) = \tilde{\psi}_p^a(\xi_1) = \tilde{\psi}_q^a(\xi_2) \\ &\text{expansión triangular,} \qquad \phi_{pq}(\xi_1,\xi_2) = \tilde{\psi}_p^a(\eta_1) = \tilde{\psi}_{pq}^b(\eta_2) \end{aligned}$$

donde

$$\eta_1 = \frac{2(1+\xi_1)}{(1-\xi_2)} - 1\ , \qquad \eta_2 = \xi_2$$

La forma de todos los modos triangulares para una expansión polinómica de cuarto-orden se muestran en la figura 3.3, de forma similar se obtienen las expansiones para tres dimensiones.
Estas expansiones son todos polinomios en términos de ambos sistemas de coordenadas, el sistema de coordenadas local colapsado (η_1, η_2) *y el sistema cartesiano* (ξ_1, ξ_2). La ortogonalidad de las expansiones previas es

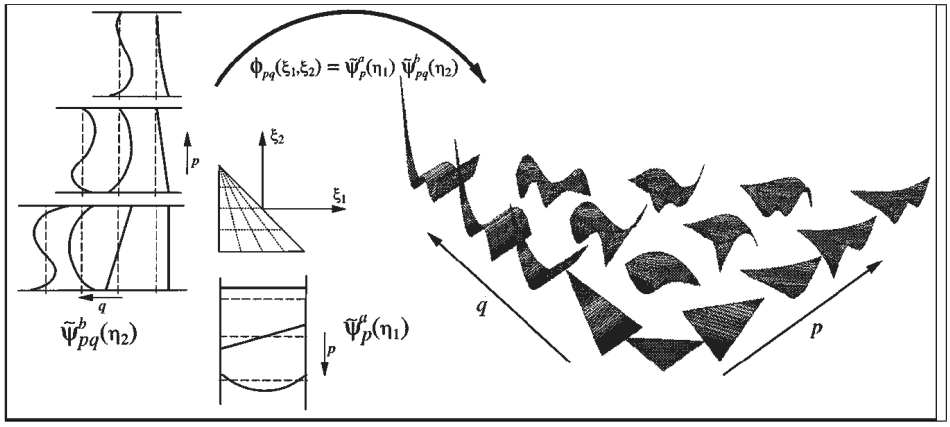


Figura 3.3: Construcción bidimensional de los modos de expansión $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ dentro de una región triangular usando el producto de un tensor unidimensional $\tilde{\psi}_p^a(\eta_1)$ y un tensor bidimensional $\tilde{\psi}_{pq}^b(\eta_2)$. Figura reproducida de [Karniadakis and Sherwin, 1999]

importante, pero es necesario tener una forma de imponer las condiciones de frontera y probar la expansión en múltiples dominios mientras se mantiene el grado de continuidad en la expansión global. Aunque es posible ensamblar las expansiones ortogonales dentro de regiones múltiples forzando un cierto grado de continuidad, este ensamble tiende a destruir la ortogonalidad de la expansión global. Una forma alternativa para forzar la continuidad C^0 es modificar la expansión ortogonal, descomponiéndola en contribuciones interiores y de las fronteras. Los modos interiores se definen con valor cero sobre las fronteras del dominio local, ver figura 3.4. La legitimidad de la expansión está entonces asegurada por la suma de los modos de las fronteras que consisten de los vértices, bordes y la contribución de las caras (si se refiere a un elemento en tres dimensiones). En el caso de los modos de los vértices, éstos tiene como valor la unidad en un vértice y decaen a cero en los otros vértices; los modos de los bordes tienen ayuda local a lo largo de un borde y son cero en el resto de los bordes y en los vértices tal y como se aprecia en la figura 3.4; lo mismo ocurre con los modos de las caras.

3.3. Formulación Numérica

Como la formulación del método es generalizada, las ecuaciones que gobiernan al flujo compresible, deben presentarse considerando todas las componentes de los tres ejes del plano cartesiano $(x, y\ \mathrm{y} z)$ Entonces las

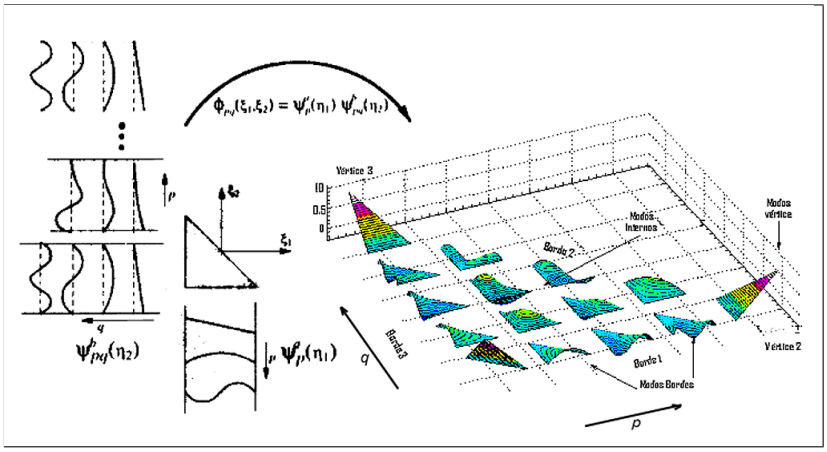


Figura 3.4: Construcción de cuarto orden ($P = 4$) expansiones triangulares utilizando el producto de las dos funciones principales modificadas $\psi_p{}^a(\eta_1)\ \psi_{pq}{}^b(\eta_2)$. Comparando con las expansiones ortogonales mostradas en la figura 3.3, los modos están divididos en contribuciones interiores y de frontera donde los modos de frontera tienen formas similares a lo largo de cada borde.

ecuaciones agrupadas en su forma adimensionalizada que gobiernan a los flujos compresibles derivadas de las ecuaciones de continuidad, Navier-Stokes y la energía son el conjunto de ecuaciones 3.1:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t^*}\begin{pmatrix}\rho^*\\ \rho^*u^*\\ \rho^*v^*\\ \rho^*w^*\\ E^*\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x^*}\begin{pmatrix}\rho^*u^*\\ \rho^*{u^*}^2+p^*\\ \rho^*u^*v^*\\ \rho^*u^*w^*\\ (E^*+p^*)u^*\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial y^*}\begin{pmatrix}\rho^*v^*\\ \rho^*v^*u^*\\ \rho^*{v^*}^2+p^*\\ \rho^*v^*w^*\\ (E^*+p^*)v^*\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial z^*}\begin{pmatrix}\rho^*w^*\\ \rho^*w^*u^*\\ \rho^*w^*v^*\\ \rho^*{w^*}^2+p^*\\ (E^*+p^*)w^*\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{Re_\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial x^*}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\mu^*\left(4\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}+\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)\\ \mu^*\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\\ \mu^*\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)\\ \frac{2}{3}\mu^*\left(2\frac{\partial u^*}{\partial x^*}-\frac{\partial v^*}{\partial y^*}-\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)u^*+\mu^*\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)v^*+\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*}+\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)w^*+\kappa^*\frac{\gamma}{Pr_\infty}\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\end{pmatrix}\right.\\
&+\frac{\partial}{\partial y^*}\begin{pmatrix}0\\ \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)\\ \frac{1}{3}\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+4\frac{\partial v^*}{\partial y^*}+\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)\\ \mu^*\left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right)\\ \mu^*\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)u^*+\frac{2}{3}\mu^*\left(2\frac{\partial v^*}{\partial y^*}-\frac{\partial u^*}{\partial x^*}-\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)v^*+\mu^*\left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v^*}{\partial z^*}\right)w^*+\kappa^*\frac{\gamma}{Pr_\infty}\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\end{pmatrix}\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial z^*}\begin{pmatrix}0\\ \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)\\ \mu^*\left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*}\right)\\ \frac{1}{3}\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}+4\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)\\ \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*}+\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)u^*+\mu^*\left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v^*}{\partial z^*}\right)v^*+\frac{2}{3}\mu^*\left(2\frac{\partial w^*}{\partial z^*}-\frac{\partial u^*}{\partial x^*}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)w^*+\kappa^*\frac{\gamma}{Pr_\infty}\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

estas ecuaciones puede escribirse en su forma compacta como

$$\vec{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = {Re_\infty}^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}^\nu \tag{3.2}$$

Esta forma de expresar el conjunto de ecuaciones que gobiernan al flujo compresible (forma conservativa), resulta útil ya que de manera inherente se observa una clara separación entre las contribuciones del flujo debido a la viscosidad y que se denotan como $\mathbf{F}^\nu$ y a las contribuciones que no se deben a la viscosidad denotadas por $\mathbf{F}$, esta misma notación es la utilizada por [B. Cockburn and C.Shu, 2000].
Donde $\vec{U}_t = \left[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E\right]^t$ donde (u, v, w) son las velocidades locales en cada una de las direcciones de los tres ejes (x, y y z) respectivamente, ρ es la densidad del fluido y E es la energía interna total. La razón de separar las contribuciones viscosas de las no viscosas se debe básicamente a que presentan cada una propiedades matemáticas diferentes. La descripción de la formulación discontinua de Galerkin que se presenta a continuación es breve. Un análisis más riguroso del operador advección lo presentan [I. Lomtev and Karniadakis, 1998], donde una formulación mixta o combinada fue utilizada para tratar los términos de difusión.

Formulación Galerkin Discontinuo para la Advección.

Para explicar la formulación, considérese la ecuación lineal para la advección o transporte de una cantidad para el vector de estado $\mathbf{v}$.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathrm{v}) = 0 \tag{3.3}$$

donde $\mathbf{F}(\mathrm{v}) = (F^x(x), F^y(y), F^z(z))$ es el vector de flujo que define el transporte de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Por lo que la expresión 3.3 puede escribirse también como se muestra a continuación.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} + \frac{\partial F^z}{\partial z} = 0 \tag{3.4}$$

En la formulación discontinua de Galerkin se considera un espacio de aproximación (S), el cual tiene como característica principal el que pueda contener funciones discontinuas. El espacio discreto denominado como (S^δ) relativo a los elementos de la malla, contiene polinomios dentro de cada elemento, pero se hacen cero al evaluarse fuera de éstos. En este caso los elementos pueden ser triángulos, cuadriláteros, tetraedros, prismas, etc., y se denotan como E_i. Aquí el elemento E_i es una parte individual que pertenece a la malla o dominio computacional (Ω). Entonces, sí el dominio computacional es $\Omega = \bigcup_i E_i$, y E_i, E_j coinciden únicamente en los bordes. Lo que sugiere que cada elemento E_i se trate de forma separada, aplicando el principio variacional se obtiene

$$\frac{\partial(\mathrm{w}, \mathbf{v})_{E_i}}{\partial t} = -\left(\mathrm{w}, \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} + \frac{\partial F^z}{\partial z}\right)_{E_i} - \left(\mathrm{w}, (\tilde{F}^x - F^x)n_x + (\tilde{F}^y - F^y)n_y + (\tilde{F}^z - F^z)n_z\right)_{\partial E_i} \tag{3.5}$$

donde w es una función de prueba y además $\mathrm{w} \in \mathrm{S}^\delta$. La evaluación en cada elemento se realiza de forma separada, y la conección entre elementos es el resultado de la forma en que las condiciones de frontera sean aplicadas. El valor de $\tilde{F}$ se evalúa en la frontera adyacente que comparte en este caso el elemento E con otro elemento de la misma malla y se calcula utilizando el valor que se le haya dado a (v) a cualquiera de los dos elementos. Estos dos posibles valores se designan como ($\mathrm{v_i}$) en el interior del elemento de referencia y ($\mathrm{v_e}$) en el exterior del elemento (que corresponde al interior del elemento adyacente al elemento de referencia), tal y como se muestra en la figura 3.5. Entonces aquí, las condiciones de frontera son forzadas vía el flujo numérico de la superficie $\tilde{F}(\mathrm{v_i}, \mathrm{v_e})$, término que aparece en la expresión 3.5.
Generalmente el flujo numérico se determina basándose en consideraciones *upwinding* (marcha hacia adelante) y para el caso de tener un sistema de ecuaciones del tipo hiperbólico (ecuaciones no lineales) usualmente

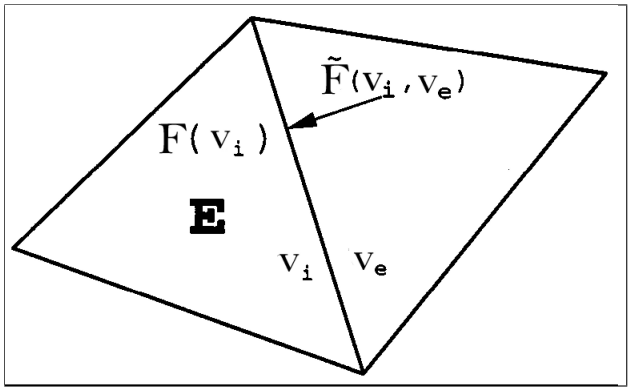


Figura 3.5: Condiciones de interface entre dos elementos triangulares adyacentes.

se utiliza la aproximación de Riemmann para calcular el valor de (F^x, F^y, F^z) basándose en $(\mathrm{v_i})$ y $(\mathrm{v_e})$. Específicamente para los resultados presentados en este texto, el flujo $\tilde{F}(\mathrm{v_i}, \mathrm{v_e})$ se calcula utilizando un esquema de partición del tipo Roe estándar que [Lomtev and Karniadakis, 1999] y [B. Cockburn and C.Shu, 2000] describe detalladamente.

Formulación Galerkin Discontinuo para la Difusión.

Considerando como ecuación modelo a la ecuación parabolica con el coeficiente variable ν para demostrar el tratamiento de la contribución de los términos viscosos.

$$u_t = \nabla \cdot (\nu \nabla u) + f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u \in L^2(\Omega) \tag{3.6}$$
$$u = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

Introduciendo la variable de flujo

$$\mathbf{q} = -\nu \nabla u$$

con $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, y rescribiendo la ecuación parabólica 3.6 en términos de $\mathbf{q}$ se tiene

$$u_t = -\nabla \cdot \mathbf{q} + f \quad \text{en} \quad \Omega$$
$$\frac{1}{\nu \mathbf{q}} = -\nabla u, \quad \text{en} \quad \Omega$$
$$u = g(\mathbf{x}, t), \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega$$

La formulación de variación del problema es entonces: Encontrar $(\mathbf{q}, u) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de tal forma que

$$(u_t, w)_E = (\mathbf{q}, \nabla w)_E - \langle w, \mathbf{q}_b \cdot \mathbf{n} \rangle_E + (f, w)_E \quad \forall w \in L^2(\Omega)$$
$$\frac{1}{\nu}(\mathbf{q}^m, \mathbf{v})_E = (u, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\mathrm{E}} - \langle \mathrm{u_b}, \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathrm{E}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$$
$$u = g(\mathbf{x}, t), \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega$$

donde los parentesis denotan el producto interno estándar en el elemento (E) y los paréntesis angulados denotan los terminos de frontera sobre cada lemento, con n denotando el vector unitario normal en dirección hacia afuera. Los términos de superficie contienen los valores de frontera pesados de v_b, q_b, los cuales pueden elegirse como el valor promedio de los valores de los dos lados de la frontera, por ejemplo $v_b = 0{,}5(v_i + v_e)$ y $q_b = 0{,}5(q_i + q_e)$.

Integrando por partes una vez más, se obtienen una formulación equivalente la cual es más fácil de implementar y que es la que actualmente está incorporada al código computacional. Entonces el nuevo problema variacional es

$$
\begin{aligned}
&(u_t, w)_E = (-\nabla \cdot \mathbf{q}, w)_E - \langle w, (\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_i) \cdot \mathbf{n} \rangle_E + (f, w)_E \quad \forall w \in L^2(\Omega) \\
&\frac{1}{\nu}(\mathbf{q}^m, \mathbf{v})_E = (-\nabla u, \mathbf{v})_{\mathrm{E}} - \langle \mathrm{u_b} - \mathrm{u_i}, \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathrm{E}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\
&u = g(\mathbf{x}, t), \quad \text{en} \quad \partial\Omega
\end{aligned}
$$

donde el subíndice i denota la contribucion evaluada en el lado interno de la frontera.

3.4. Validación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr.

Para validar el código N$\varepsilon\kappa$Tαr se utilizó el perfil NACA0012 con un $M = 0.8$ y Re=500, las características geométricas del perfil se describen en la tabla 3.1. Este perfil es un caso típico de prueba para validar un código que analiza flujos compresibles tal y como se describe en la literatura. La malla computacional para modelar la geometría del perfil NACA0012 se muestra en la figura 3.6 cuyo dominio es un rectángulo que comprende $[-2, 5]$X$[-2, 2]$, ver figura 3.7; el número de elementos (todos triángulos) es de 1475 y el ángulo de ataque que en este caso tendrá el perfil es de $\alpha = 10^o$. Las condiciones de frontera y las condiciones iniciales se describen a continuación:

Dimensión	$2D$
Longitud de la cuerda (c)	1
Espesor máximo relativo del perfil (t_{rel})	12
Angúlo de ataque (α)	10^o

Tabla 3.1: Datos geométricos del perfil NACA0012.

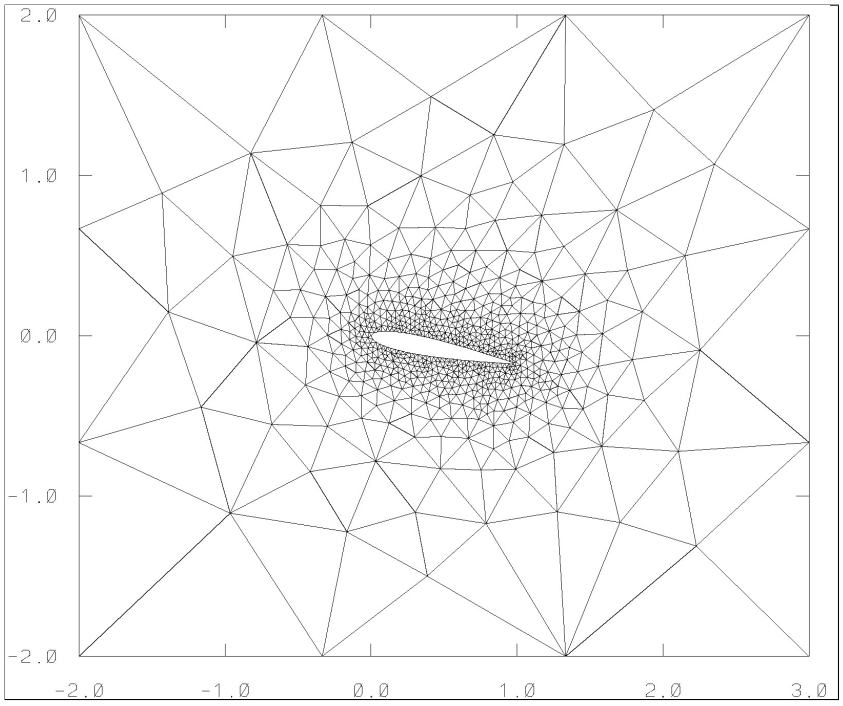


Figura 3.6: Malla del perfil NACA0012 para la simulación en 2D.

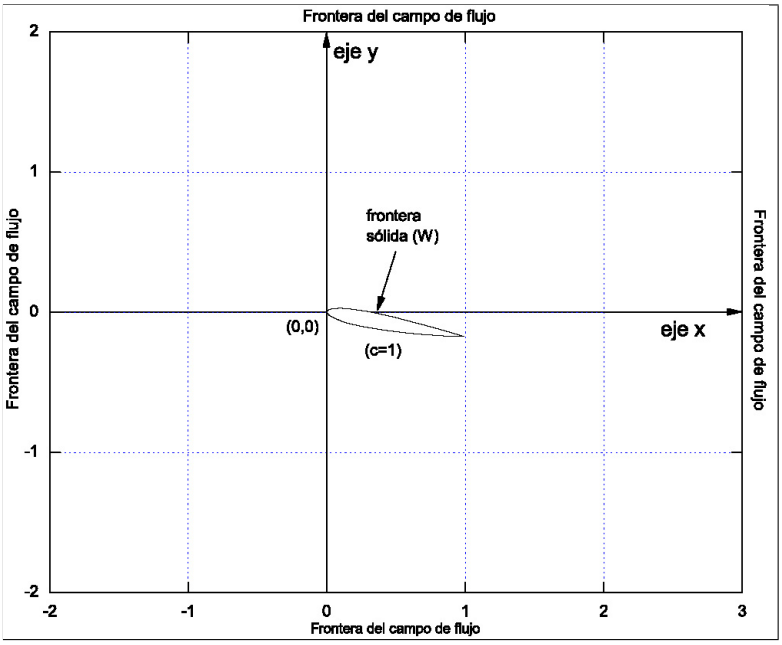


Figura 3.7: Dominio y condiciones de frontera establecidos para la simulación en 2D del perfil NACA0012.

Condiciones de frontera

Para el campo de flujo del dominio de estudio, las condiciones de frontera corresponden a las del tipo *corriente libre*, éstas condiciones son las que utilizan la mayor parte de códigos comerciales que analizan flujos compresibles tales como FLUENT y Wind-US, ver sus manuales [Flu, 2000] y [Bush et al., 2005] respectivamente.
Este tipo de condiciones se establecen utilizando la teoría unidimensional característica para un gas politrópico ideal para establecer las condiciones del campo de flujo [B. Cockburn and C.Shu, 2000]. Por lo tanto las variables primarias en la corriente libre son, en su forma adimensional:

$$\begin{aligned} &\rho = 1 \\ &u = M\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad\qquad v = 0 \\ &E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{(u^2+v^2)}{2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

El perfil tiene fronteras de pared (`W`), es decir el perfil se encuentra fijo y por lo tanto sus fronteras tendrán la condición de no deslizamiento y su temperatura (T) está determinada por la corriente de flujo que lo rodea de tal forma que:

$$\begin{aligned} &u = 0 \qquad\qquad v = 0 \\ &T = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Condiciones iniciales

Una vez que se han establecido las condiciones de frontera para el perfil y para el campo de flujo, deben establecerse ahora las condiciones iniciales. En este caso las condiciones iniciales para la simulación del perfil NACA0012 son: un número de mach ($M = 0.8$) y un número de Reynolds ($Re = 500$), los restantes parámetros de simulación se enlistan en la tabla 3.2. El número de mach (M) y el número de Reynolds (Re) se seleccionaron basados en la literatura existente correspondiente a la simulación numérica de un flujo compresible alrededor de un perfil aerodinámico NACA0012 y cuyos resultados fueron obtenidos y publicados por [Hafez and Guo, 1999], [Hafez and Wahba, 2005], [Hafez and Wahba, 2005], [Tang and Hafez, 2001], entre otros.
Con el número de mach (M) y el (Re) definido, las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} &\rho(t=0) = 1 \\ &u(t=0) = 1 \qquad\qquad v(t=0) = 0 \\ &E(t=0) = 3.29 \\ &P(t=0) = 1.116 \end{aligned} \tag{3.9}$$

El valor de la presión en su forma adimensional se obtiene por medio de la ecuación 2.3 que define el número de mach y de la expresión 2.12 que expresa la velocidad del sonido tal y como se demuestra a continuación

$$M = \frac{V}{a} \quad \longrightarrow \quad M = \frac{u^2+v^2}{a} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{u^2+v^2}{M} \quad \longrightarrow \quad a^2 = \frac{(u^2+v^2)^2}{M^2}$$
$$a^2 = \gamma\frac{p}{\rho} \longrightarrow \gamma\frac{p}{\rho} = \frac{(u^2+v^2)^2}{M^2}$$

finalmente la presión se obtiene al utilizar la siguiente expresión:

$$p = \frac{\rho(u^2+v^2)^2}{M^2\gamma} \tag{3.10}$$

esta forma de establecer las condiciones iniciales, es la forma que utilizan [B. Cockburn and C.Shu, 2000].

Dimensión	2D
Re	500 basado en la longitud de (c)
Mach	0.8
Temperatura en la pared del perfil	2.79
Δt	0.0000075
Número de elementos de la malla	1475

Tabla 3.2: Parámetros de simulación para un flujo compresible alrededor del perfil NACA0012.

Resultados

La simulación obtenida para el perfil NACA0012 corresponde al caso de un flujo laminar sobre un perfil, este caso tal y como lo describe [Bonhaus, 1998] representa una prueba relativamente severa para la validación de un código computacional ya que mucho del flujo sobre la superficie superior del perfil se separa, tal y como puede apreciarse en la figura 3.14. Sin embargo al comparar los resultados obtenidos mediante el código N$\varepsilon\kappa$Tαr y los resultados obtenidos previamente existe una buena simulitud entre ambas soluciones numéricas, tal y como puede apreciarse al observar los contornos de mach de la figura 3.14 y los obtenidos

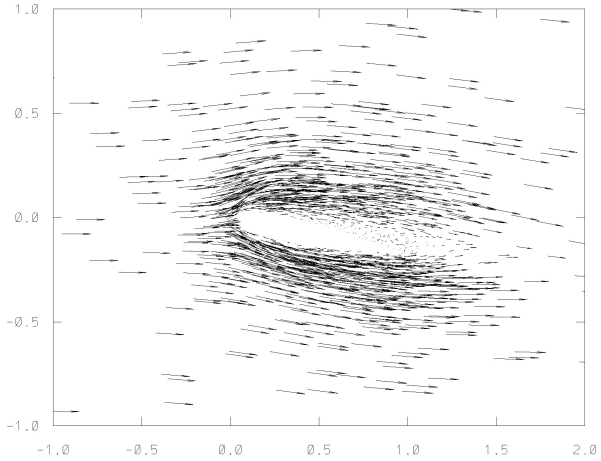


Figura 3.8: Campo de velocidad obtenido mediante la aplicación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ al tiempo t=6.75s, tiempo en el que el perfil alcanza el estado estacionario.

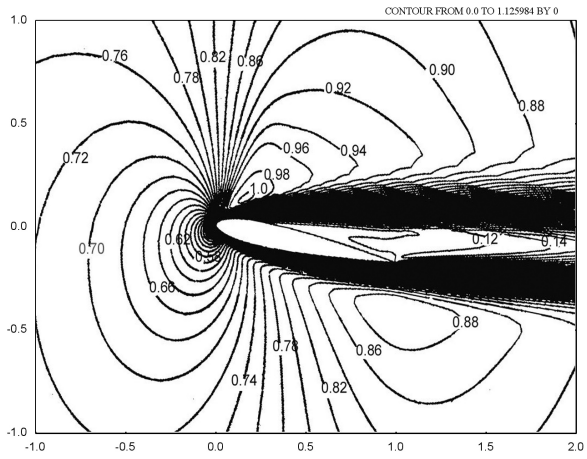


Figura 3.9: Isocontornos de mach obtenidos mediante la aplicación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ al tiempo t=6.75s, tiempo en el que el perfil alcanza el estado estacionario.

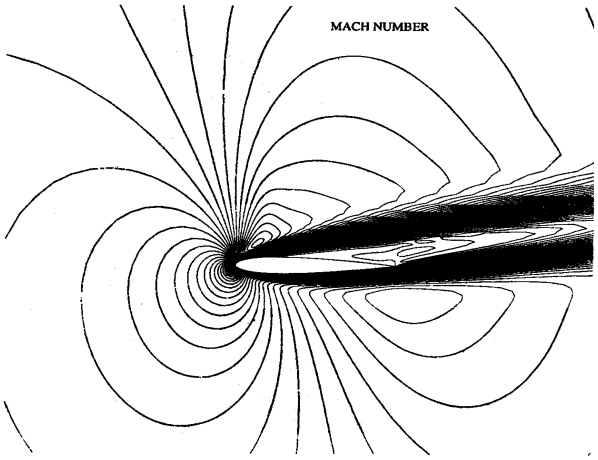


Figura 3.10: Isocontornos de mach del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ estado estacionario,resultados obtenidos por [Tang and Hafez, 2001].

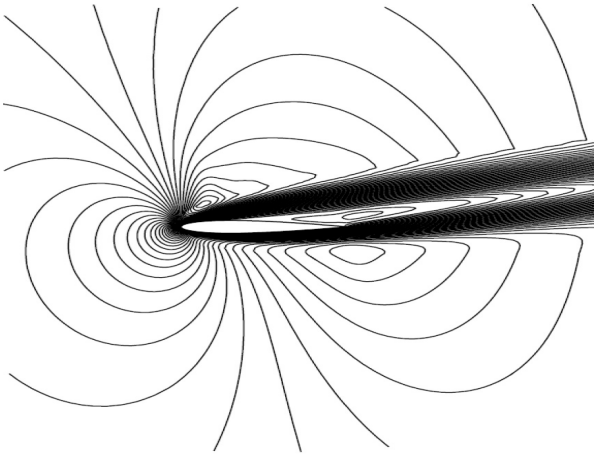


Figura 3.11: Isocontornos de mach del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ estado estacionario,resultados obtenidos por [Hafez and Wahba, 2005].

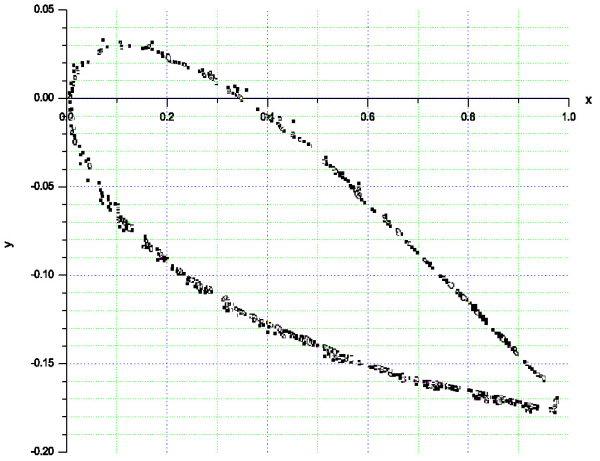


Figura 3.12: Puntos sobre la superficie del perfil NACA0012 donde se evalúa el coeficiente de presión.

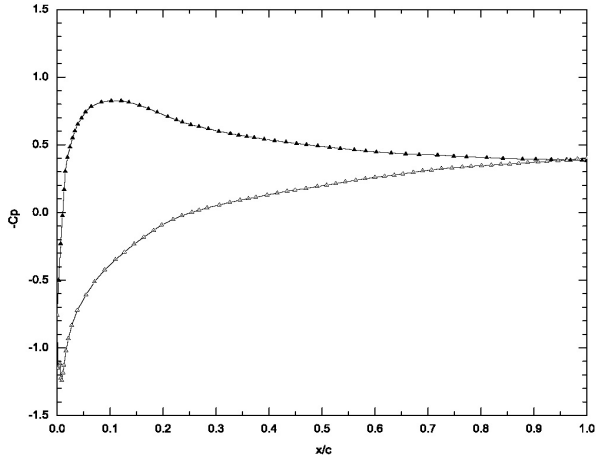


Figura 3.13: Comportamiento del coeficiente de presión Cp para el perfil NACA0012, obtenido mediante el uso del código N$\varepsilon\kappa$Tαr resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes para un $M = 0.8$, Re=500 y $\alpha = 10^o$.

por [Tang and Hafez, 2001] y [Hafez and Wahba, 2005] para las mismas condiciones, ver figura 3.15.

En la literatura consultada, se presenta además la evaluación del coeficiente de presión (Cp) sobre la superficie del perfil una vez que el flujo alcanza el estado estacionario, de esta manera se procedió a evaluar el coeficiente de presión sobre la superficie del perfil con los resultados obtenidos correspondientes al campo de presión mediante el código N$\varepsilon\kappa$Tαr. Los resultados proporcionados por el código corresponde a los valores de la presión en el campo de flujo evaluados en los puntos de colocación derivados de la malla computacional, ver figura 3.12. Para calcular el Cp sobre la superficie del perfil se utilizó la siguiente expresión

$$Cp(x,y) = \frac{p(x,y) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty {U_\infty}^2} \tag{3.11}$$

esta ecuación es la expresión que se utiliza generalmente para evaluar el coeficiente de presión a lo largo de la superficie del perfil en un régimen subsónico. Los puntos donde se evalúa el Cp son aquellos que se localizan sobre la superficie del perfil NACA0012, de ahí que la presión (p) de la expresión 3.11 dependa de las coordenadas x y y. Los resultados de esta evaluación se muestran en la figura 3.13, estos resultados tienen una gran similitud al compararlos con los resultados obtenidos previamente por [Hollanders and Ravasalon, 1986] (puntos huecos) y que son comparados con los resultados obtenidos por [Tang and Hafez, 2001] (línea continua), ambos mostrados en la figura 3.14. Al mismo tiempo [Tang and Hafez, 2001] realizaron un análisis con el mismo perfil NACA0012 y con las mismas condiciones de flujo, sólo que en este caso dividieron las regiones de análisis por zonas, teniendo una zona cercana al perfil dónde el flujo se considera viscoso rotacional y otra zona lejana a la superficie del flujo en la que se considera que el campo de flujo es no viscoso e irrotacional, finalmente se empalman ambas soluciones y el coeficiente de presión se evalúa mediante la expresión 3.11, estos resultados se presentan en la figura 3.14.

Existen sin embargo resultados similares correspondientes a los contornos de mach y al cálculo del coeficiente de presión que pueden compararse con los obtenidos y expuestos en esta sección mediante la aplicación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr, esos resultados son presentados por [Hafez and Guo, 1999], [Hafez and Wahba, 2005], [Hafez and Wahba, 2005] y [Bonhaus, 1998].

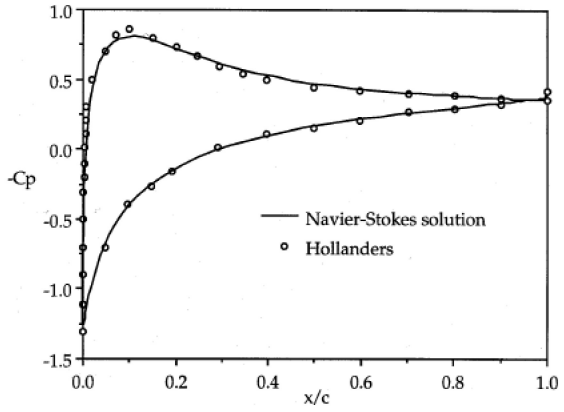


Figura 3.14: Comportamiento del coeficiente de presión Cp para el perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 10^o$, $M = 0.8$ y Re=500. La línea continua representa los resultados obtenidos por [Tang and Hafez, 2001] y los puntos huecos representan el resultado obtenido por [Hollanders and Ravasalon, 1986].

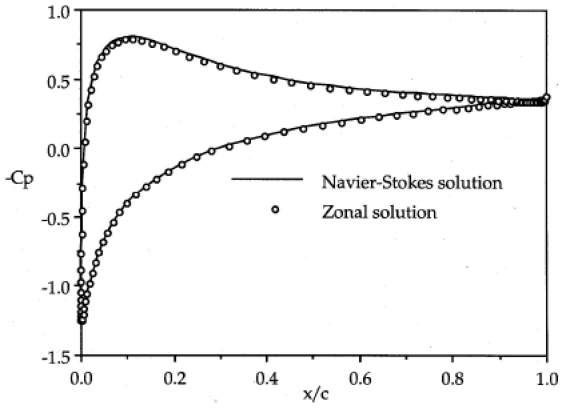


Figura 3.15: Comportamiento del coeficiente de presión Cp para el perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 10^o$, M=0.8 y Re=500. La línea continua representa los resultados obtenidos por [Tang and Hafez, 2001] y los puntos huecos representan el resultado obtenido mediante un análisis zonal descrito también en [Tang and Hafez, 2001].

3.5. Cálculo del coeficiente de resistencia al avance y el coeficiente de sustentación en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr.

La ecuación de la cantidad de movimiento, representa tal y como se describe en el apéndice A.1 un balance de fuerzas, por esta razón en las expresiones de cada componente (dirección del eje x y el eje y) que corresponden a la ecuación de la cantidad de movimiento, están incluidos los términos que determinan las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el perfil; que son las presión (p) y los esfuerzos (τ) tal y como se describió en el capítulo 2 en la sección 2.5.1.
Nuevamente rescribiendo la expresión 2.7 de la componente en la dirección del eje x de la ecuación de la cantidad de movimiento

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{Presión} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}}_{Esfuerzos}$$

La presión en este caso que se ejerce sobre el contorno del perfil o los perfiles se evalúa por medio de la expresión que se determinó con anterioridad 2.10.

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \rho\frac{u^2 + v^2}{2}\right)$$

En el caso de los esfuerzos τ_{xx} y τ_{yx}, éstos se evalúan utilizando las siguientes expresiones basadas en la relación establecida por Newton entre los esfuerzos y la rapidez de deformación, ver [Schlichting and Gersten, 2000]. Por lo tanto los esfuerzos de la ecuación 2.7 se evalúan como sigue

$$\tau_{xx} = \lambda\left(\nabla \cdot \mathbf{V}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

Desarrollando cada expresión y haciendo uso además de la relación entre los coeficientes de viscosidad nombrada como la hipótesis de Stokes, ver [Schlichting and Gersten, 2000]. Las expresiones anteriores quedan como

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.12}$$

$$\tau_{xy} = \mu\frac{\partial v}{\partial x} + \mu\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.13}$$

Para el caso de la evaluación de la presión y los esfuerzos en la expresión de la componente en la dirección de y de la ecuación de la cantidad de movimiento, expresión 2.8 se aplica el mismo análisis

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$$

en donde la presión se evalúa por medio de la expresión 2.10 y los esfuerzos como a continuación se muestra

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \tag{3.14}$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.15}$$

Comparando las expresiones que hasta ahora se han obtenido para el cálculo de los esfuerzos con lo establecido en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr ver figura 3.16, donde los esfuerzos son evaluados como

$$\text{SigXX+} = 4./3. * \text{MU} * \text{Ux} - 2./3. * \text{MU} * \text{Vy} \tag{3.16}$$

$$\text{SigXY+} = \text{MU} * \text{Vx} + \text{MU} * \text{Uy} \tag{3.17}$$

$$\text{SigYY+} = 4./3. * \text{MU} * \text{Vy} - 2./3. * \text{MU} * \text{Ux} \tag{3.18}$$

donde la notación utilizada en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr equivale a la notación utilizada en este texto como se muestra a continuación

$$\text{SigXX} \equiv \tau_{\text{xx}} \quad \text{SigXY} = \text{SigYX} \equiv \tau_{\text{xy}} = \tau_{\text{yx}} \quad \text{SigYY} \equiv \tau_{\text{yy}} \quad \text{MU} \equiv \mu \quad \text{Ux} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{Vy} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por lo tanto las expresiones 3.12, 3.13 y 3.15 equivalen a las expresiones 3.16, 3.17 y 3.18 respectivamente. En consecuencia para la evaluación de la fuerza de sustentación (L) y la fuerza de resistencia al avance (D) sobre el perfil se integran las siguientes expresiones en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr, ver figura 3.16

$$\begin{aligned} &\text{drag+} = \text{SigXX} * \text{nx} + \text{SigXY} * \text{ny} \\ &\text{drag_pr} = (\text{p}, \qquad 'x', \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} &\text{lift+} = \text{SigXY} * \text{nx} + \text{SigYY} * \text{ny} \\ &\text{lift_pr} = (\text{p}, \qquad 'y', \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde drag equivale a la fuerza de resistencia al avance causada por los esfuerzos, drag_pr equivale a la fuerza de resistencia al avance a causa de la presión, lift equivale a la fuerza de sustentación causada por los esfuerzos y lift_pr equivale a la fuerza de sustentación a causa de la presión. Por lo tanto las ecuaciones 3.19 y 3.20 presentes en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr para calcular la fuerza de resistencia al avance (D) y la fuerza de sustentación (L) expresan lo ya definido previamente en el capítulo 2 sección 2.5.1 mediante las expresiones 2.17 y 2.18, sólo que las fuerzas que calcula el código N$\varepsilon\kappa$Tαr son fuerzas adimensionalizadas con el número de Reynolds.

```
/* computes lift and drag, initial data is in Omega->Us (ph.) */
void Comp_Forces (Domain *Omega, double *lift_v, double *drag_v, double
*lift_pr, double *drag_pr)
{
  Bndry *Ubs;
  double *SigXX, *SigXY, *SigYY, *work, *p;

  SigXX = dvector (0, QGmax-1);
  SigXY = dvector (0, QGmax-1);
  SigYY = dvector (0, QGmax-1);
  p     = dvector (0, QGmax-1);
  work  = dvector (0, QGmax-1);

  *lift_v=*drag_v=*lift_pr=*drag_pr=0.;
  /* just go through the boundaries and compute the corresponding
     integrals : */
  for (Ubs=Omega->Ubc[0]; Ubs; Ubs=Ubs->next)
  if (Ubs->type=='O') /* wall b.c. */
  {
     /* compute elements of the stress tensor on the boundary */
     Comp_Sig (Omega, SigXX, SigXY, SigYY, p, Ubs->elmt->id, Ubs->face);

     /* drag += SigXX*nx + SigXY*ny */
     *drag_v += Bound_Integral (SigXX, 'x', Ubs, work);
     *drag_v += Bound_Integral (SigXY, 'y', Ubs, work);
     *drag_pr+= Bound_Integral (p,     'x', Ubs, work);

     /* lift += SigXY*nx + SigYY*ny */
     *lift_v += Bound_Integral (SigXY, 'x', Ubs, work);
     *lift_v += Bound_Integral (SigYY, 'y', Ubs, work);
     *lift_pr+= Bound_Integral (p,     'y', Ubs, work);
  }
  free (SigXX); free (SigXY); free (SigYY); free(p); free (work);
  return;
/* compute pressure - only on the boundary p = (gamma-1)*(E-
0.5*rho*(u^2+v^2)) */

  dsmul (qn, 4./3.*MU, wk+QGmax, 1, SigXX, 1);   /* SigXX +=  4./3.*MU*Ux
*/
  dsmul (qn, 4./3.*MU, wk+QGmax*2, 1, SigYY, 1); /* SigYY +=  4./3.*MU*Vy
*/
  dsmul (qn, MU, wk+QGmax*4, 1, SigXY, 1);       /* SigXY +=   MU*Uy */

  daxpy (qn, -2./3.*MU, wk+QGmax*2, 1,SigXX, 1); /* SigXX += -2./3.*MU*Vy
*/
  daxpy (qn, -2./3.*MU, wk+QGmax,   1,SigYY, 1); /* SigYY += -2./3.*MU*Ux
*/
  daxpy (qn,  MU      , wk+QGmax*3, 1,SigXY, 1); /* SigXY += MU*Vx */

  /* divide by the Reynolds number */
  Re inv = dparam("KINVIS");
```

Figura 3.16: Reproducción parcial de parte del código NεκTαr referente al cálculo de la fuerza de sustentación (L) y de resistencia al avance (D).

3.6. Cálculo de la entropía en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr.

La evaluación de la entropía permite verificar que efectivamente los resultados obtenidos para las propiedades del fluido una vez que se resuelven las ecuaciones que gobiernan al flujo compresible y que se utilizarán para realizar la simulación numérica son correctos en el sentido físico, es decir que la simulación obtenida cumple la segunda ley de la Termodinámica y que los resultados presentados ofrecen una aproximación de la realidad.
La evaluación de la entropía en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr se lleva a cabo mediante la siguiente expresión:

$$(\mathrm{S2}-\mathrm{S1})/\mathrm{cv} = \mathrm{gamma} * \ln(\mathrm{rho1}) - \ln(\mathrm{p1}) + \ln(\mathrm{p2}) - \mathrm{gamma} * \ln(\mathrm{rho2}) \tag{3.21}$$

donde las equivalencias entre la notación utilizada en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr y la notación utilizada en este texto son las siguientes: $\mathrm{S2}-\mathrm{S1} \equiv s_2 - s_1$, $\mathrm{cv} \equiv c_v$, $\mathrm{gamma} \equiv \gamma$, $\mathrm{rho} \equiv \rho$ y $\mathrm{p} \equiv p$
Esta expresión se deriva de las siguientes expresiones

$$s - s_0 = c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \tag{3.22}$$

$$s - s_0 = c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{3.23}$$

donde c_p y c_v corresponden a los calores específicos a presión y a volumen constante respectivamente. A la relación entre ambos conocida como relación de calores especificos se le denota como $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, para el caso del aire generalmente el valor que le corresponde es de γ= 1.4 las siguientes relaciones que serán de gran utilidad como se verá más adelante.

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{R\gamma}{(\gamma-1)} \\ c_v &= \frac{R}{(\gamma-1)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

De la expresión 3.23 se despeja a $\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$ obteniendo

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{(s_2 - s_1)}{c_p} + \frac{R}{c_p} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

y se sustituye en la ecuación 3.22, de tal forma que:

$$\begin{aligned} (s_2 - s_1) &= c_v \left[\frac{(s_2 - s_1)}{c_p} + \frac{R}{c_p} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right] + R \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\ (s_2 - s_1) &= \frac{c_v}{c_p}(s_2 - s_1) + \frac{c_v}{c_p} R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + R \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\ (s_2 - s_1) &= \frac{(s_2 - s_1)}{\gamma} + \frac{R}{\gamma} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + R \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\ (s_2 - s_1) - \frac{(s_2 - s_1)}{\gamma} &= \frac{R}{\gamma} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + R \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\ (s_2 - s_1)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) &= \frac{R}{\gamma} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + R \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \end{aligned}$$

$$(s_2 - s_1) = \frac{\cancel{\gamma}}{(\gamma - 1)} \frac{R}{\cancel{\gamma}} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} R \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

utilizando ahora la relación de los calores especificos y la ecs. 3.24, la expresión anterior se reduce a

$$(s_2 - s_1) = c_v \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + c_v \gamma \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$
$$\frac{(s_2 - s_1)}{c_v} = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \gamma \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

reacomodando los términos de la última expresión, finalmente se obtiene la siguiente expresión final

$$(s_2 - s_1)/c_v = \gamma \ln(\rho_1) - \ln p_1 + \ln p_2 - \gamma \ln(\rho_2) \tag{3.25}$$

finalmente esta última expresión es equivalente a la expresión utilizada en el código N$\varepsilon\kappa$Tαr ec. 3.21 y es la expresión que evalúa el cálculo de la entropía.

```
/* This function computes entropy S, initial data - state vector is in U,
   the output is put to S, reference value is taken to be the first col.
   point of the first element.
  The formula is: (S2-S1)/cv= ln(rho1^(gamma)/p1) + ln(p2/rho2^(gamma))

/*        (S2-S1)/cv = gamma*ln(rho1) - ln(p1) + ln(p2) - gamma*ln(rho2)
*/

void  Comp_Entropy (Element_List **U, Element_List *S){
  double *u2, *v2, *p2;
  int i, k, qt, nel = S->nel;
  double p1,r1,ln1,u1,v1;

  u2 = dvector (0,3*QGmax*QGmax-1);
  v2 = u2 + QGmax*QGmax;
  p2 = v2 + QGmax*QGmax;

  /* compute reference values ln(rho1^(gamma)/p1) first */
  r1 = U[0]->flist[0]->h[0][0];
  u1 = U[1]->flist[0]->h[0][0]/r1;
  v1 = U[2]->flist[0]->h[0][0]/r1;
  p1 = (Gamma-1)*(U[3]->flist[0]->h[0][0]-
        0.5*(u1*U[1]->flist[0]->h[0][0]+v1*U[2]->flist[0]->h[0][0]));
  ln1= Gamma*log(r1)-log(p1);

  for (k = 0; k < nel; ++k){
    qt = S->flist[k]->qtot;

    /* u2 = U[1]/U[0]       */
    dvdiv (qt,U[1]->flist[k]->h[0],1,U[0]->flist[k]->h[0],1,u2,1);
    /* v2 = U[2]/U[0]       */
    dvdiv (qt,U[2]->flist[k]->h[0],1,U[0]->flist[k]->h[0],1,v2,1);
    /* u2 = u*u*rho         */
    dvmul (qt,U[1]->flist[k]->h[0],1,u2,1,u2,1);
    /* v2 = v*v*rho         */
    dvmul (qt,U[2]->flist[k]->h[0],1,v2,1,v2,1);
    /* v2=-0.5*(u2+v2)      */
    dsvvpt(qt,-0.5,u2,1,v2,1,v2,1);
    /* p2=(Gamma-1)*(v2+E) */
    dsvvpt(qt,Gamma-1,v2,1,U[3]->flist[k]->h[0],1,p2,1);

    for (i = 0; i < qt; ++i){
      p2[i]=log(p2[i]);
      u2[i]=log(U[0]->flist[k]->h[0][i]);
    }
    /* p2 = p2 - Gamma*u2   */
    daxpy (qt,-Gamma,u2,1,p2,1);
    /* S=ln1+p2             */
    dsadd (qt,ln1,p2,1,S->flist[k]->h[0],1);
    S->flist[k]->state='p';
  }

  free(u2);
}
```

Figura 3.17: Reproducción parcial de parte del código NεκTαr referente al cálculo de la entropía.

Capítulo 4

Simulaciones

En este capítulo se presentan los resultados y las simulaciones que fueron obtenidas mediante el uso del código N$\varepsilon\kappa$Tαr. Las geometrías que aquí se presentan fueron creadas por medio del programa EMC2 ver [Saltel and Hecht, 1995], el cual es un generador de mallas para geometrías complejas necesario para construir los perfiles de los álabes, elementos de la turbina. El perfil utilizado en las primeras simulaciones corresponde al perfil presentado por [I. Lomtev and Karniadakis, 1998], el cual es un perfil NACA4420 con un ángulo de ataque de 20^o y la cascada utilizada para la simulación corresponde a una cascada estándar de una turbina de gas axial.
Los casos de simulación son los siguientes:

- Caso 1. Perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$) y un M=0.2, viscoso.
- Caso 2. Perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$) y un M=0.2, no viscoso.
- Caso 3. Cascada de 5 álabes con un M=0.3, viscoso.

Para todos los casos los tiempos de simulación alcanzados no son los mismos, esto debido a diferentes causas, como por ejemplo: el número de elementos de las mallas, la disponibilidad del tiempo de cómputo, así como de la capacidad de la supercomputadora en la cual se ejecutó el código. Sin embargo tal y como se verá en los resultados, los tiempos de simulación son suficientes para mostrar el comportamiento aerodinámico de los perfiles.
Los resultados son a su vez comparados cualitativamente con simulaciones obtenidas previamente reportadas en la literatura, ya que no existen en la literatura resultados semejantes para estas geometrías con las condiciones de flujo compresible establecidas aquí. Sin embargo los resultados cualitativos representan un gran soporte sobre todo desde el punto de vista físico para la comparación de resultados.

4.1. Perfil NACA4420 con un ángulo de ataque $(\alpha = 20^o)$ flujo compresible viscoso.

El problema considerado aquí es un flujo subsónico que pasa sobre un perfil el cual presenta un ángulo de ataque (α) de 20^o con respecto a la corriente de flujo. Es importante recordar ahora, que son las ecuaciones de gobierno para flujo compresible en su forma adimensional obtenidas en el capítulo 2, las que se resuelven con el fin de obtener la simulación.
Tal y como se ha descrito anteriormente el número de Reynolds es un parámetro adimensional que se define como $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ ó $Re = \frac{UL}{\nu}$, donde L es la longitud característica y que para este caso específico corresponde a la longitud de la cuerda del perfil cuyo valor es la unidad. $\mathbf{V}$ es el vector velocidad de la corriente libre y que corresponde en este caso por tratarse de un análisis bidimensional a la suma de ambas componentes de V de tal forma que $\mathbf{V} = u^2 + v^2$ donde u y v son las componentes de la velocidad en la dirección del eje x y

del eje y respectivamente. Para esta simulación, el número de Reynolds (Re) propuesto es de $Re = 68493$ y el número de mach también propuesto es de M=0.2.
El perfil de esta simulación es el NACA4420 cuyas características geométricas se presentan en la tabla 4.1.

Dimensión	$2D$
Longitud de la cuerda (c)	1
Espesor máximo relativo del perfil (t_{rel})	20
Angulo de ataque (α)	20^o

Tabla 4.1: Datos geométricos del perfil NACA4420

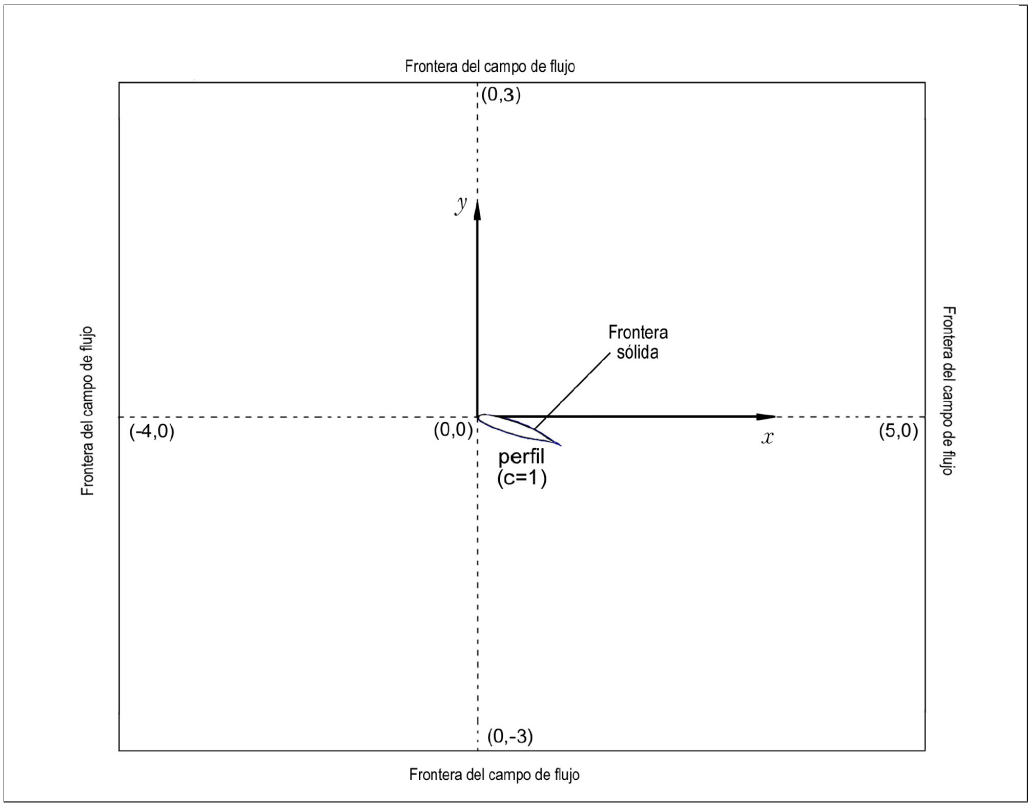


Figura 4.1: Dominio considerado para la simulación de un sólo álabe en 2D.

Para este caso el dominio de estudio que rodea al perfil es un rectángulo $[-4, 5]$X$[-3, 3]$ tal como se muestra en la figura 4.1. La malla utilizada para el perfil es la mostrada en la figura 4.5, donde todos los elementos son triángulos. La malla final (figura 4.5) fue la seleccionada después de realizar diversas pruebas con mallas de distinto refinamiento, ya que lo que se comprobó al ejecutar el código es que la discretización de la malla afecta en forma directa el tiempo de ejecución del programa, sí la malla es fina entonces el tiempo de ejecución es mayor. Por ejemplo en la figura 4.2 se muestra el archivo de salida del código para el perfil NACA0012 cuyo número de elementos es de 1849 y en la figura4.3 se muestra el archivo de salida de la cascada de perfiles cuyo número de elementos es de 18388 en ambas figuras se observa que el tiempo de ejecución (`Exec. time`) para cada paso de tiempo es distinto aún cuando el paso de tiempo (Δt) es el mismo para ambas, mientras que para el perfil cada paso se ejecuta en aproximadamente 4s, la cascada requiere de por lo menos 45s para realizar un solo paso de tiempo, lo cual muestra la diferencia entre tener una malla refinada y otra de menor

refinamiento.

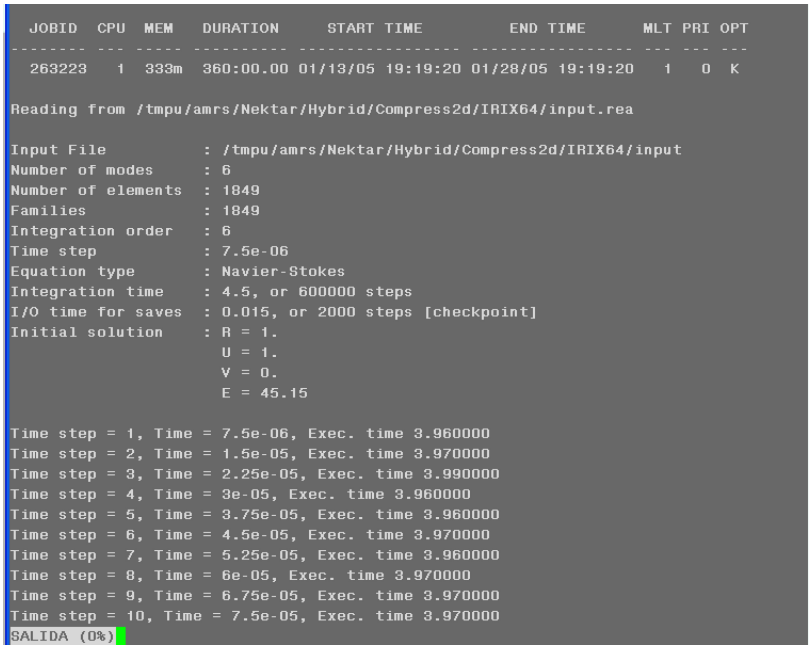


Figura 4.2: Archivo de salida en el cual se muestra el tiempo de ejecución de cada paso de tiempo al utilizar el código NεκTαr en la malla para el perfil NACA0012 con un número de elementos de 1849.

Es cierto que lo ideal sería obtener una malla lo suficientemente fina en todo el dominio computacional con el fin de captar con mayor efectividad los cambios que se presentan en el campo de flujo, sin embargo dada la disponibilidad del tiempo de cómputo y de la capacidad de la Supercomputadora Origin 2000 en la cual el código fue instalado y ejecutado, fue necesario optimizar la malla con el fin de captar con precisión la mayor cantidad de fenómenos que se presentan en las cercanías del perfil, por ello la malla presenta una mayor resolución tanto en el borde de entrada, en el borde de salida del perfil y sobre su perifieria donde los efectos propios de la viscosidad son más evidentes. Sin embargo esto no representa en ningún momento una considerable disminución en la precisión de la solución, por el contrario el código permite obtener resultados de gran precisión con mallas no muy finas al permitir variar el orden de integración (parámetro `INTYPE`), lo cual representa una ventaja del método de elementos espectrales y su aplicación en el análisis de flujos, tal y como se describió en el capítulo anterior.

En la figura 4.4 se muestra un ejemplo del campo de densidad obtenido con una malla de prueba de 4976 elementos pero con un orden de integración de 2 y al comparar los resultados con los obtenidos con la malla final propuesta, ver figura 4.7(c) éstos no presentan una considerable variación. Por esta razón se decidió trabajar con la malla de menor número de elementos pero con un mayor orden de integración.

Condiciones de frontera

Tal y como se describió en la sección 3.4, las condiciones de frontera del campo de flujo se presentan en su forma adimensional y son semejantes a las descritas en esa sección, la condició de frontera del perfil corresponden a la condición de no deslizamiento y su temperatura está determinada por la corriente del flujo que lo rodea.

```
Miser Job Successfully Scheduled:

  JOBID  CPU  MEM   DURATION     START TIME         END TIME      MLT PRI OPT
-------- --- ----- ---------- ----------------- ----------------- --- --- ---
  434615   2  666m  720:00.00 01/20/05 21:15:40 02/04/05 21:15:40   1   0  K

Reading from /tmpu/amrs/Nektar/Hybrid/Compress2d/IRIX64/zxnektar03/input.rea

Input File          : /tmpu/amrs/Nektar/Hybrid/Compress2d/IRIX64/zxnektar03/input
Number of modes     : 6
Number of elements  : 18388
Families            : 18388
Integration order   : 5
Time step           : 7.5e-06
Equation type       : Navier-Stokes
Integration time    : 4.5, or 600000 steps
I/O time for saves  : 0.00375, or 500 steps [checkpoint]
Initial solution    : R = 1
                      U = 1
                      V = 0
                      E = 20.34

Time step = 1, Time = 7.5e-06, Exec. time 45.360000
Time step = 2, Time = 1.5e-05, Exec. time 45.110000
Time step = 3, Time = 2.25e-05, Exec. time 45.180000
Time step = 4, Time = 3e-05, Exec. time 45.150000
Time step = 5, Time = 3.75e-05, Exec. time 45.200000
Time step = 6, Time = 4.5e-05, Exec. time 45.280000
Time step = 7, Time = 5.25e-05, Exec. time 45.120000
Time step = 8, Time = 6e-05, Exec. time 44.990000
SALIDA (0%)
```

Figura 4.3: Archivo de salida en el cual se muestra el tiempo de ejecución de cada paso de tiempo al utilizar el código NεκTαr en la cascada de perfiles cuyo número de elementos de 18388.

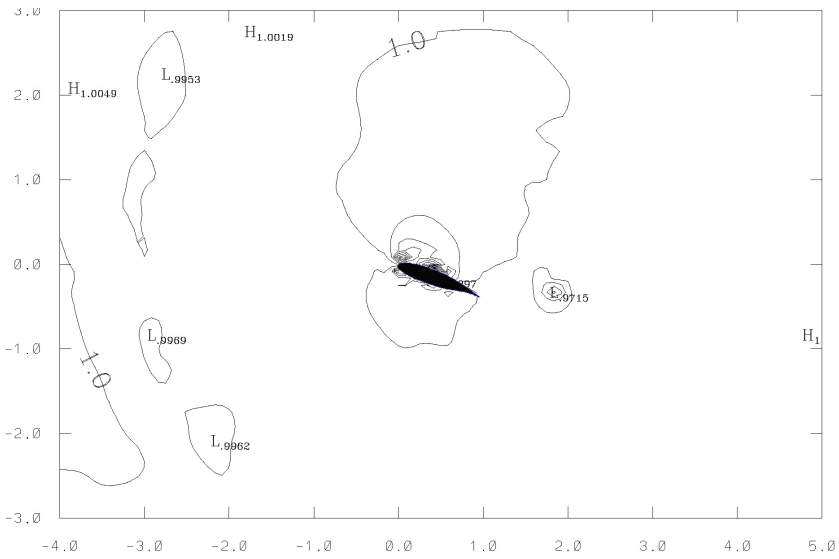


Figura 4.4: Isocontornos de densidad obtenidos con una malla de 4976 elementos para el tiempo t=1.08s del perfil NACA4420.

Condiciones iniciales

Una vez habiendo establecido los valores del número de mach ($M = 0.2$) y el número de Reynolds ($Re = 68493$) para la simulación. Entonces las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} &\rho(t=0) = 1 \\ &u(t=0) = 1 \qquad\qquad v(t=0) = 0 \\ &E(t=0) = 45.15 \\ &P(t=0) = 17.86 \end{aligned} \tag{4.1}$$

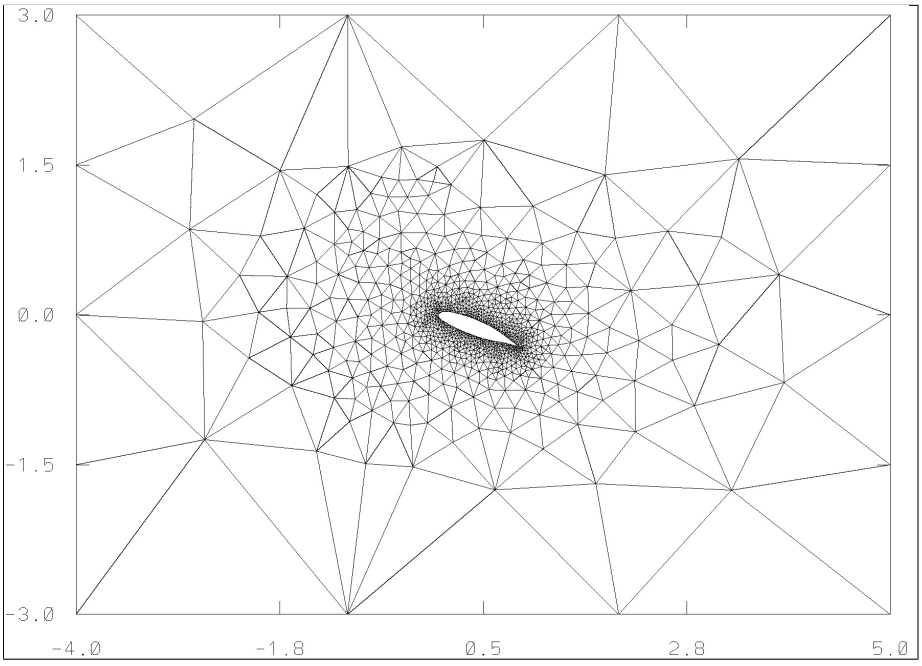


Figura 4.5: Malla del perfil NACA4420 para la simulación en 2D.

Los parámetros utilizados para esta simulación están en la tabla 4.2, las condiciones de frontera consideradas para esta simulación se han descrito ya.
Específicamente, para este caso se realizaron 2 simulaciones conjuntas, la malla del perfil NACA4420 fue utilizada para obtener una primera simulación del flujo subsónico compresible viscoso alrededor del perfil mediante el código N$\varepsilon\kappa$Tαr, pero al mismo tiempo se realizó una simulación paralela utilizando la misma malla de la figura 4.5, sólo que a diferencia de la primera simulación, el flujo esta vez se consideró compresible no viscoso. Esto se hizo con la finalidad de obtener una comparación entre ambos resultados y señalar la influencia de la viscosidad al realizar análisis en geometrías complejas mediante el uso de los métodos espectrales.

Resultados

Las simulaciones que a continuación se presentan describen fenómenos característicos propios del flujo compresible viscoso, para apreciarlos con mayor detalle se realizarón acercamientos directos con el fin de captar las vorticidades cercanas a la superficie, por lo tanto en los campos resultantes que se presentan a continuación no se presenta todo el campo de flujo definido por el dominio de la figura 4.1, sino sólo las regiones más

Dimensión	2D
Re	68493 basado en la longitud de (c)
Mach	0.2
Temperatura en la pared del perfil	44.65
Δt	0.0000075
Número de elementos de la malla	1849
Tiempo de simulación	8.97s

Tabla 4.2: Parámetros de simulación para flujo compresible alrededor del perfil NACA4420

cercanas al perfil. El tiempo de simulación total fue de 8.97s y los campos obtenidos son de cada 2000 pasos de tiempo, logrando conjuntar 598 resultados. Del total de estos resultados fueron seleccionados 9 diferentes tiempos los cuales describen el comportamiento del flujo compresible viscoso alrededor de un perfil en su condición crítica de entrada en pérdida. Los resultados que se presentan además del campo de velocidad son los isocontornos de la densidad, la presión, la temperatura y la entropía.
Inicialmente la velocidad de la corriente es constante en todo el dominio, conforme el tiempo de simulación transcurre se observa que después del primer paso de tiempo (Δt=0.0000075) figura 4.6, el campo de velocidad que se tiene alrededor del perfil percibe la presencia de éste y se ve influenciado, mientras que el campo restante permanece inalterado. El incremento de la velocidad de la corriente del flujo sobre el extradós es consecuencia de su geometría así como del gran ángulo de ataque, y es la diferencia de velocidad entre el intradós y el extradós lo que da lugar al desprendimiento de la capa límite cercana al borde de salida, formándose un remolino que es y será conducido por la corriente aguas abajo del perfil conforme el tiempo de simulación transcurre, ver figura 4.7. A este vórtice se le conoce como vórtice inicial o de arranque. Este vórtice es el que comúnmente se forma en cualquier perfil tal y como se describió en el capítulo 2 sección 2.5 y que es similar al compararlo con la figura 2.9(b), a pesar de que los perfiles presentan geometrías disitintas.

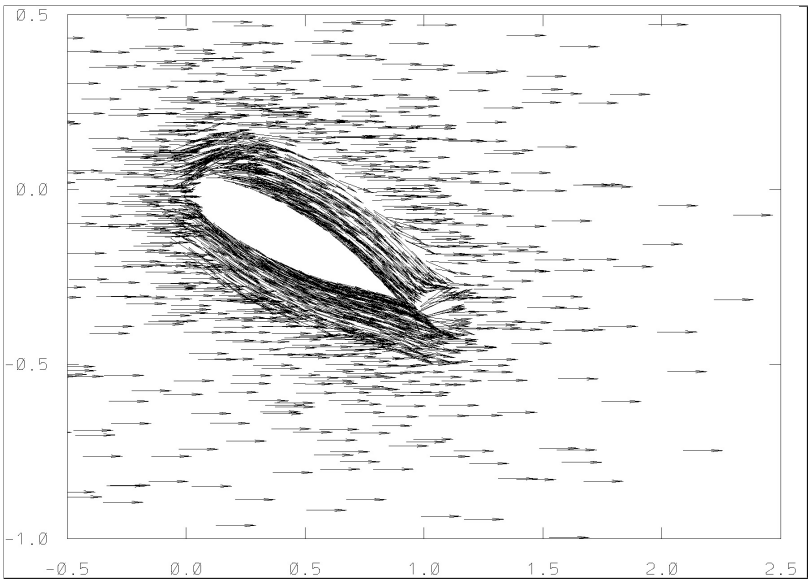


Figura 4.6: Simulación del flujo compresible viscoso t=0.0000075s, perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$).

Para un t=1.08s observamos que la región del campo de flujo influenciada por la presencia del perfil es mayor, además del esperado incremento de la velocidad sobre el extradós ver figura 4.7(b), comienza a distinguirse la formación de un vórtice muy próximo al borde de entrada ver figura 4.7(a) en donde se grafica el número

de mach, este vórtice es en parte resultado del ángulo de ataque que induce una baja de la presión sobre el extradós del perfil y un incremento en la presión en el intradós, considerando que la presión inicial del campo de flujo es de $p = 17.86$ como se aprecia en la figura 4.7(d), sin embargo a pesar de que en el campo que muestra los vectores velocidad únicamente se aprecia un sólo vórtice, en los contornos de densidad y presión figuras 4.7(c) y 4.7(d) respectivamente, se observan a lo largo del extradós otras pequeñas regiones donde los gradientes de la presión y la densidad son considerables cercanos a la superficie. En el caso de la temperatura, figura 4.7(e) ésta es menor en la región cercana al borde de ataque sobre el extradós justamente en la región dónde comienza a formarse un vórtice, debido al movimiento acelerado del flujo éste induce una mayor disipación del calor y esto causa que la temperatura disminuya. La formación de los vórtices cercanos a la superficie del extradós comienzan a evidenciar los efectos viscosos mismos que han arrastrado el vórtice de arranque aproximadamente a una unidad más allá del borde de salida del perfil, lo cual se aprecia en la figura 4.7. Aún en este tiempo las capas del flujo sobre el extradós se mantiene adheridas próximas a la superficie, por lo que el perfil aún produce sustentación.
Las fluctuaciones que se presentan en las isolíneas de los campos presentados son producto de diversas influencias tales como:el método matricial utilizado para generar los isocontornos, la discretización de la malla; cuyos efectos se ven amplificados conforme se alejan del perfil.
Conforme el tiempo de simulación se va incrementando el patrón de flujo cambia drásticamente, de la aparición de un sólo vórtice ahora para el tiempo t=2.49s sobre el extradós del perfil notamos la existencia de 5 vórtices bien definidos, los cercanos al borde de entrada presentan velocidades grandes comparadas con los vórtices cercanos al borde de salida como se aprecia en la figura 4.8(a), no obstante aún se puede apreciar que las capas de fluido sobre el extradós se mantienen conjuntas sobre los vórtices presentes, pero se advierte ya una zona cercana al borde de salida del perfil donde el flujo de aire tiene mayor dificultad para seguir cercano al contorno del perfil debido al intenso cambio de dirección del fluido. La velocidad y vorticidad sobre el extradós es grande pero tal como se ve en la figura 4.8(b) los dos pequeños vórtices sobre el extradós cercanos al borde de salida han reducido su velocidad. Los vórtices que se forman sobre el extradós tienden a desplazarse sobre éste y tienden a desprenderse al aproximarse al borde de salida, y posteriormente seguirán aguas abajo desplazándose, sin embargo cabe destacar que también algunos vórtices comienza a desprenderse ligeramente del extradós mucho antes de llegar al borde de salida aproximadamente al 50 % de la cuerda del perfil, tal como se observa en la figura 4.8(b).
La densidad disminuye en las regiones que corresponden a los centros de los vórtices como lo demuestra la figura 4.8(c), lo mismo sucede con la presión, ver figura 4.8(d). El campo de temperatura presenta también una concentración de gradientes que corresponden a las regiones de los vórtices ver figura 4.8(e), en los centros de cada vórtice la temperatura es menor comparada con la temperatura que se tenía en el tiempo anterior sobre el extradós, ver figura 4.7(e). La causa es la gran vorticidad que se tiene sobre el extradós, como sabemos los vórtices no sólo transportan fluido sino también cantidad de movimiento y conformen van creciendo requieren de una mayor cantidad de energía para desplazarse absorbiendo o tomándola de sus alrededores, por esta razón la temperatura disminuye. Por otra parte la entropía comienza a aumentar específicamente sobre el extradós del perfil, en la regiones de vorticidad. Ya se ha comentado que la temperatura disminuye en los vórtices por lo tanto si la temperatura decreció es que debió existir un proceso de transferencia de calor através de las capas de fluido, lo que ocasionó el correspondiente aumento de la entropía en esta región, ver figura 4.8(f).

Al siguiente tiempo t=3.495s los vórtices han crecido en tamaño y en número, ver figura 4.9(a) además las capas de fluido que se mantenían para el tiempo anterior aún un poco cercanas a la superficie del extradós se han alejado completamente. El número de mach detrás del perfil presenta gradientes considerables, sobre la región cercana al borde de ataque del extradós se tienen grandes velocidades pero al mismo tiempo en la región cercana al borde de salida se presenta una zona de proporción considerable en donde la velocidad del fluido es por lo menos la mitad del régimen inicial, es decir el fluido comienza a estancarse en esa región como se ve en la figura 4.9(b).
Esta zona de estancamiento induce en consecuencia gradientes adversos de presión lo que provoca que los vórtices sobre el extradós se desprendan antes de llegar al borde de salida del perfil, estos se desprenden casi

al alcanzar el 50 % de la longitud de la cuerda del perfil lo cual se verifica al observar la figura 4.9(d). Al mismo tiempo el fluido se va comprimiendo como consecuencia de la aparición de los vórtices pues es en estas regiones dónde se presentan los mayores gradientes de la densidad, tal como se aprecia en la figura 4.9(c). En el caso del campo de temperatura los isocontornos de la figura 4.9(e) al igual que para los otros campos están regidos por la aparición de los vórtices pues son estos los contribuyen a la baja de temperatura en esta región. Este hecho induce que la entropıa en este tiempo haya aumentado también considerablemente en las regiones de vorticidad tal como se ve en la figura 4.9(f).

Para el tiempo t=4.485s los vórtices continúan generándose sobre el extradós disminuyendo en magnitud comparados con el tiempo anterior (t=3.495s), la zona de separación del fluido sin embargo se ha incrementado un poco más tal como se ve en la figura 4.10(a), los vórtices continúan desprendiéndose y la zona de baja velocidad del fluido cercana al borde de salida ha disminuido en proporción al tiempo anterior ver figura 4.10(b), la densidad, la presión, la temperatura al igual que la entropía mantienen un patrón similar a los tiempos previos que hasta ahora se han descrito, es decir que los gradientes mayores se presentan en los vórtices principalmente, ver figura 4.10. Es importante mencionar que hasta este tiempo t=4.485s el patrón del campo de flujo ha estado regido por el desprendimiento y generación de los vórtices, y que los gradientes a su vez se concentran en esas zonas, sin embargo hasta ahora poco se ha mencionado de lo que ocurre en el intradós del perfil ya que los fenómenos que ocurren sobre el extradós son más evidentes, pero para el tiempo t=4.5s, es decir que 0.015s después del tiempo anterior se observa un desprendimiento de la capa límite en esta superficie tal como se muestra en la figura 4.12, en esta figura se muestra un mayor acercamiento del campo de flujo cercano al intradós del perfil, comparando esta figura con la del tiempo anterior con la misma resolución, ver figura 4.11 se percibe este fenómeno con mayor claridad.

Este desprendimiento de la capa límite en el intradós del perfil modifica abruptamente el campo de flujo y sus propiedades y es consecuencia de la aparición de pequeños vórtices cercanos al intradós del perfil como consecuencia de los efectos viscosos que para este tiempo son más evidentes en esta región. En el caso de la velocidad, alrededor del perfil se presenta una zona de baja velocidad, esta zona es delgada para el intradós y la ya conformada área que había aparecido tiempos anteriores sobre el extradós, muy cerca del borde de salida ver figura 4.13(b). El número de mach en ambas regiones ha disminuido a casi la mitad de su valor inicial, no obstante sobre el extradós y encima de esta delgada zona de baja velocidad aún se presentan zonas de alta velocidad consecuencia de las vorticidades, los vórtices que se desprendían en tiempos previos y que eran arrastrados aguas abajo del perfil aún están presentes, pero los ya desprendidos y que están localizados aguas abajo del perfil parecen estar en proceso de disiparse, de ahí que los isocontornos de las propiedades del flujo no estén totalmente definidos, ver figura 4.13. Los gradientes de presión a su vez no están muy definidos aguas abajo del perfil, pero sobre el extradós como se observa en la figura 4.13(d), áun se aprecia las zonas de vorticidad claramente, y lo mismo ocurre para los otros isocontornos que demuestran la existencia de una pequeña zona de vorticidad en el intradós.

Al t=5.34s el campo de velocidad sufre nuevamente un cambio significativo pues los vórtices que hasta ahora se habían presentado sobre el extradós se han mitigado y únicamente puede distinguirse en la figura 4.14(a) la existencia de 2 vórtices sobre el extradós; uno pequeño muy cerca del borde de salida y cuya intensidad está muy por debajo de los vórtices mostrados en los tiempos previos y al mismo tiempo se observa el comienzo de la formación de un vórtice mucho menor muy cercano al borde de entrada del perfil. El área de despredimiento de flujo por detrás del perfil ha disminuido en velocidad y sólo una región cercana al borde de entrada presenta regiones de mayor velocidad. considerando que la zona de desaceleración del flujo detrás del perfil y tambikén la zona del intradós han aumentado ligeramente, ver figura 4.14(b). Los isocontornos de la densidad, figura 4.14(c) presentan regiones de compresión sobre la mayor parte del extradós particularmente en la región cercana al borde de ataque del perfil y la presión a su vez presenta una zona de baja presión sobre el extradós como es común, pero sobre el intradós la zona de alta presión o de expansión envuelve a toda la parte superior del perfil, pero también a parte del intradós muy cerca del borde de salida, lo cual indica que

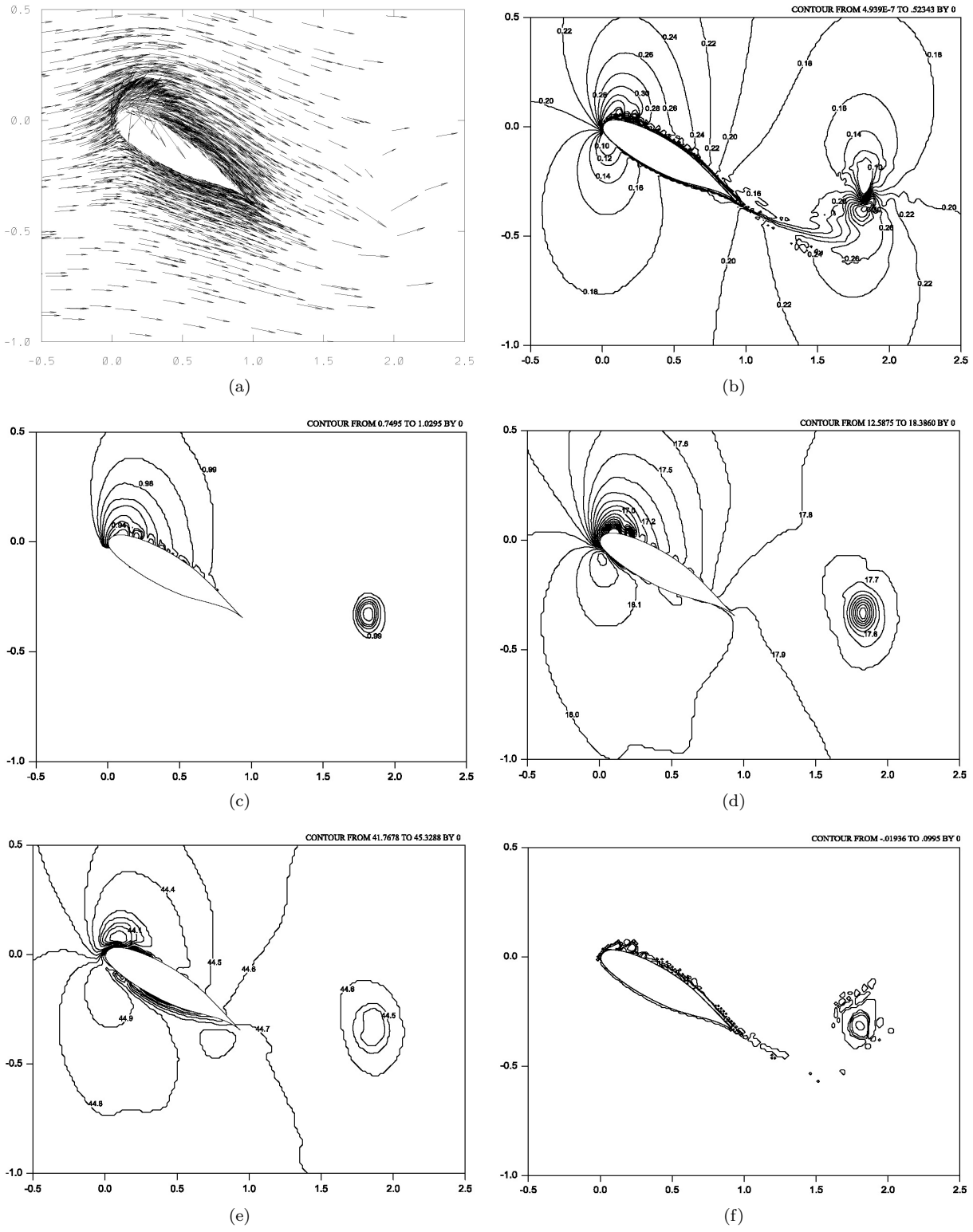


Figura 4.7: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=1.08s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

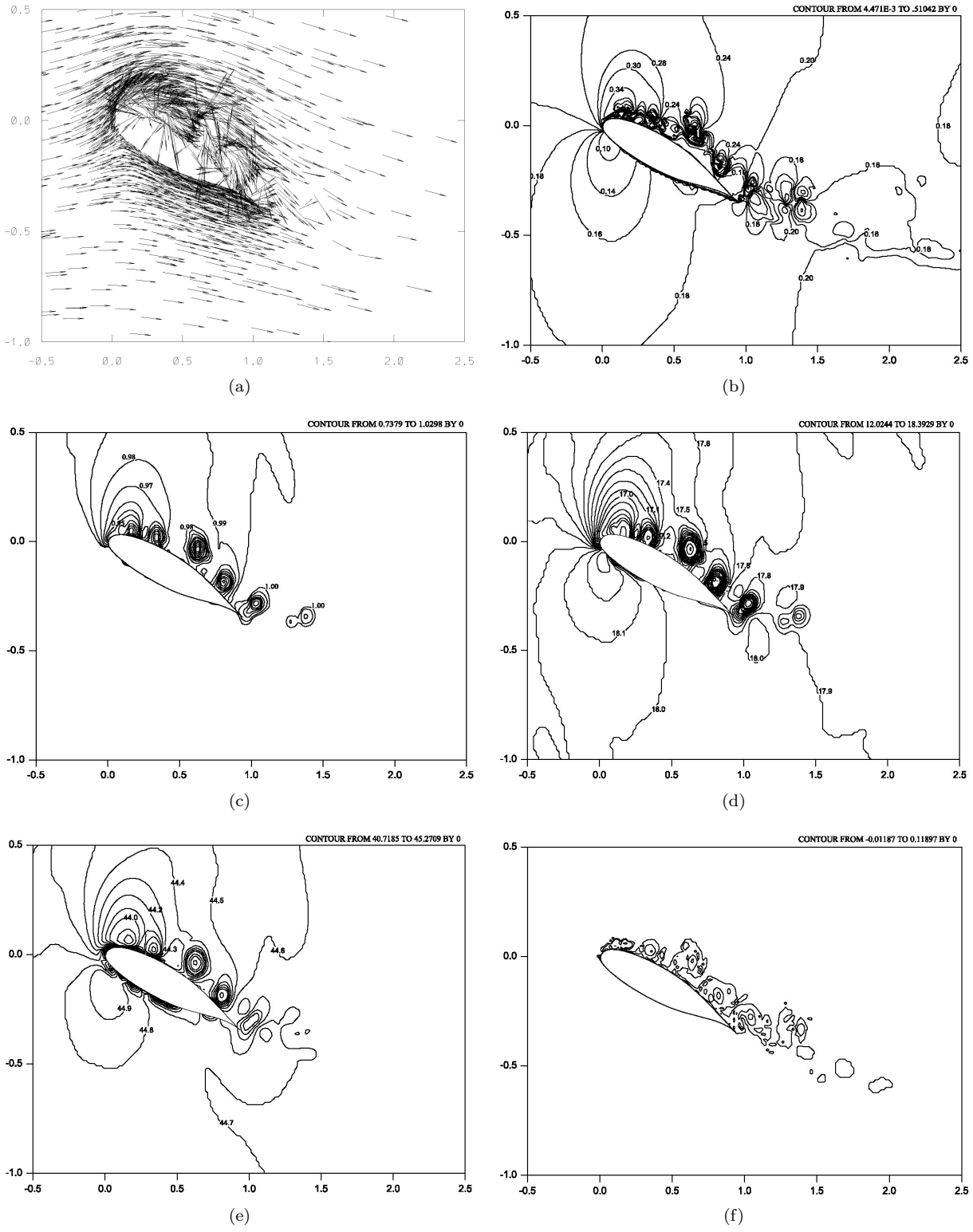


Figura 4.8: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=2.49s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

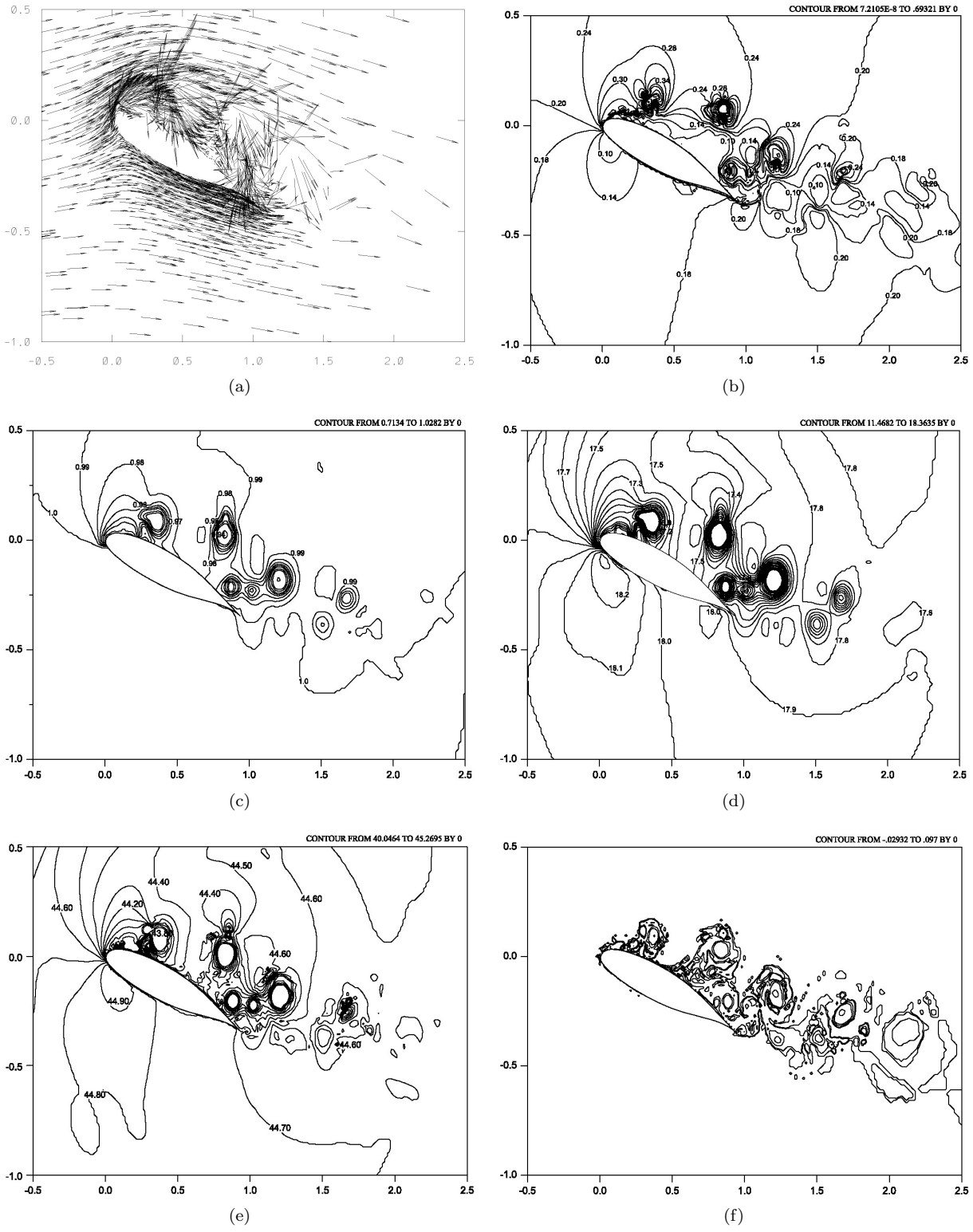


Figura 4.9: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=3.495s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

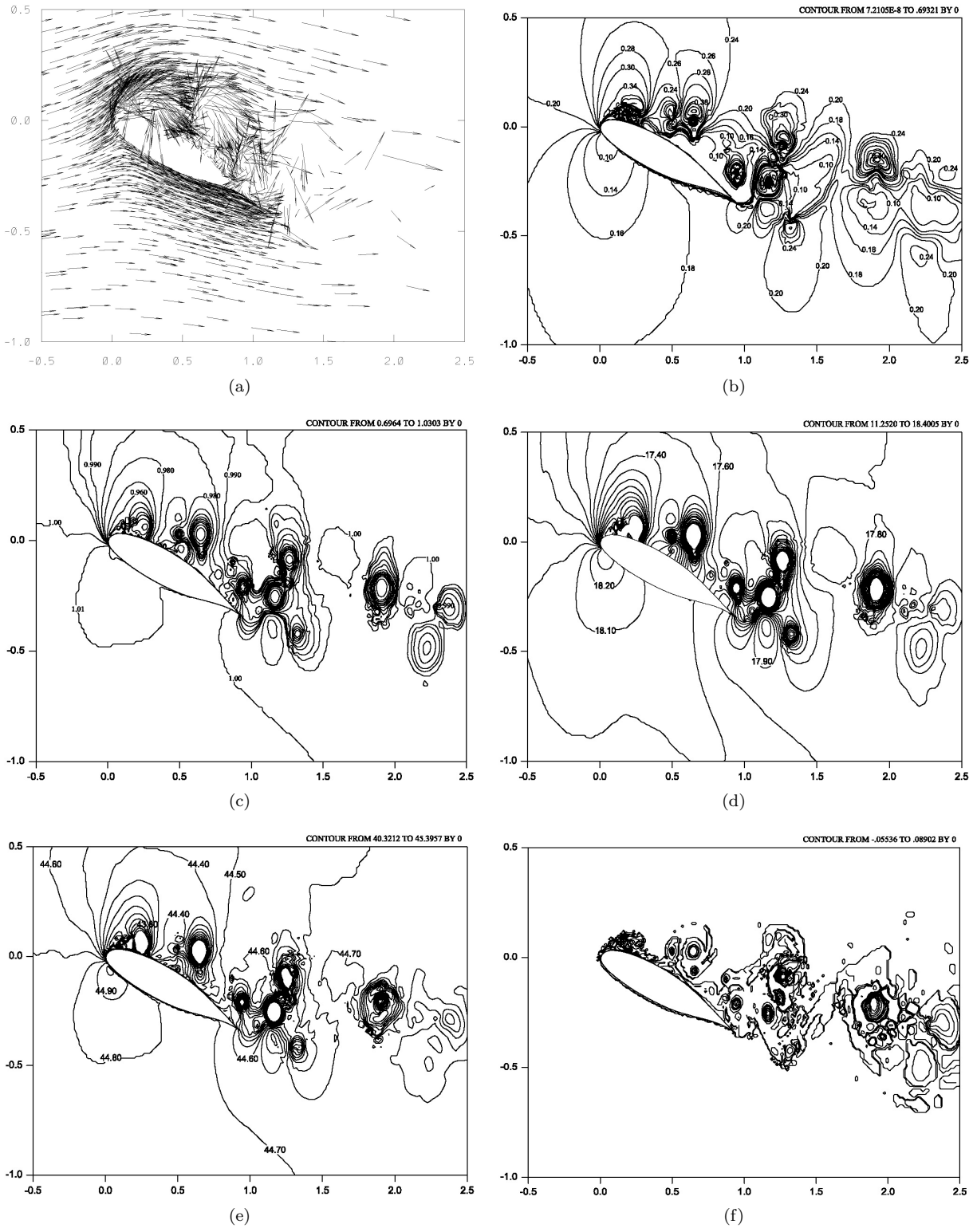


Figura 4.10: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=4.485s.: (a) Velocidad; (b) Densidad; (c) Mach; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

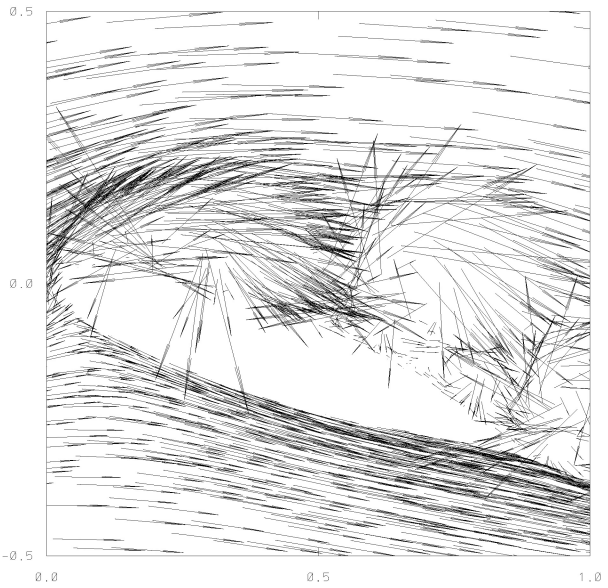


Figura 4.11: Acercamiento del campo de vectores velocidad al t=4.485s, perfil NACA4420 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$.

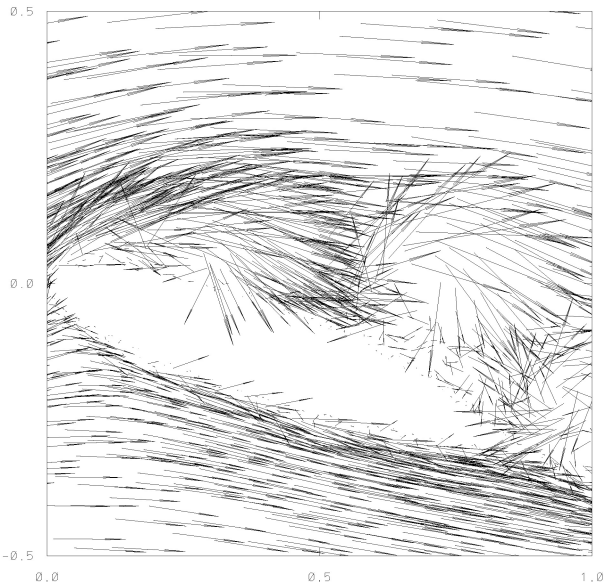


Figura 4.12: Acercamiento del campo de vectores velocidad al t=4.5s, perfil NACA4420.

la zona de alta presión que abarcaba toda la superficie del intradós comienza a reducirse influenciada por la baja presión que hay en la superficie opuesta del perfil.
Las capas del fluido no muy lejanas del extradós se han acercado nuevamente a una distancia considerable, prácticamente sobre el vórtice de baja velocidad que en este tiempo existe sobre el extradós muy cerca del borde de salida ver figura 4.14(b). La figura 4.14 muestra además que los gradientes de presión adversos sobre las superficies del perfil se mantienen, y con la influencia de la viscosidad hacen que una vez más se generen vórtices sobre el extradós ahora con una velocidad menor que los anteriores. Por lo que respecta a la temperatura, los isocontornos muestran que las menores temperaturas están localizadas muy cerca de ambas superficies (extradós e intradós) y en una pequeña región cercana al borde de ataque del perfil por encima de este, sin olvidar el vórtice localizado en el borde de salida. La entropía continúa aumentando ya no sólo en la región superior del perfil sino que ahora el aumento también involucra los alrededores cercanos por debajo de la frontera inferior del perfil.

Para el tiempo t=6.54s el campo de velocidad figura 4.15 revela el crecimiento considerable del pequeño vórtice presente al tiempo anterior y que ahora cubre la mayor parte de la longitud del extradós, el vórtice que en el tiempo anterior t=5.34s (figura 4.14(a)) apenas se distinguía, ahora ha crecido y además comienza a tener una mayor velocidad en la región cercana al borde de salida. Muy cerca del borde de entrada del perfil sobre el extradós aún se encuentra la zona de mayor compresión como hasta ahora se ha observado para los diferentes tiempos. La presión es menor sobre el extradós teniendo su menor valor cerca del borde de ataque, no obstante la zona de baja presión que existe por detrás del perfil continúa influenciando al intradós logrando que la zona de alta presión que en un principio comprendía toda esta superficie ahora sólo se extienda hasta casi el 70 % de la cuerda. La temperatura del campo alrededor del perfil es menor ahora tal como se ve en la figura 4.15.

Para los dos últimos tiempos t=7.815s y t=8.97s los campos de velocidad figura 4.16 y 4.17 se observa que el vórtice que podía observarse sobre el extradós en un tiempo previo ahora se ha dividido en dos y parece desprenderse hacia el borde de salida, la velocidad de la corriente por aguas abajo del perfil ha disminuido su velocidad, tal y como se muestra en la figura 4.16(b) como consecuencia de la disminución de la vorticidad, los otros campos (presión, temperatura y entropía) tienden a adoptar las condiciones iniciales, ver figura 4.16.

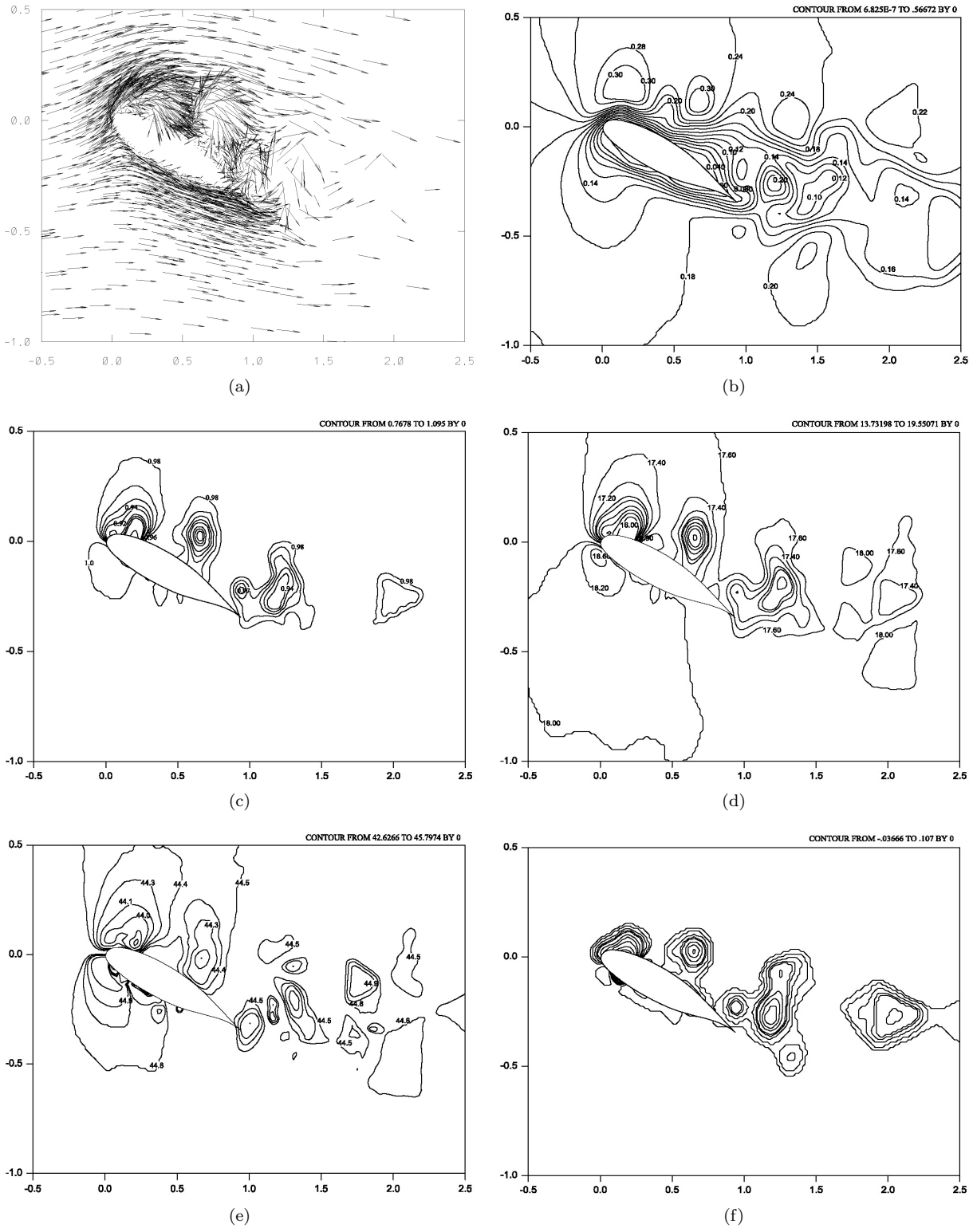


Figura 4.13: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=4.5s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

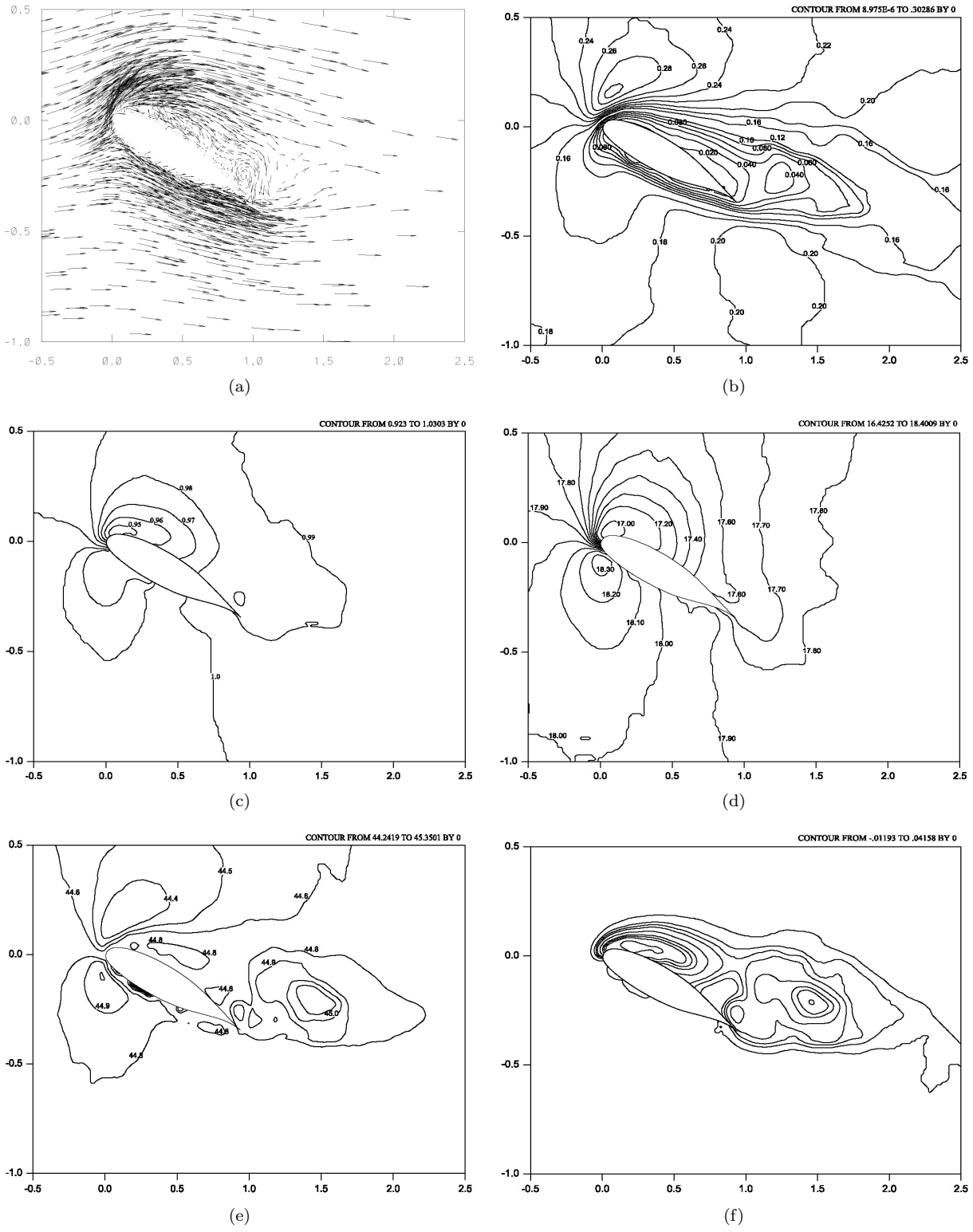


Figura 4.14: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=5.34s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

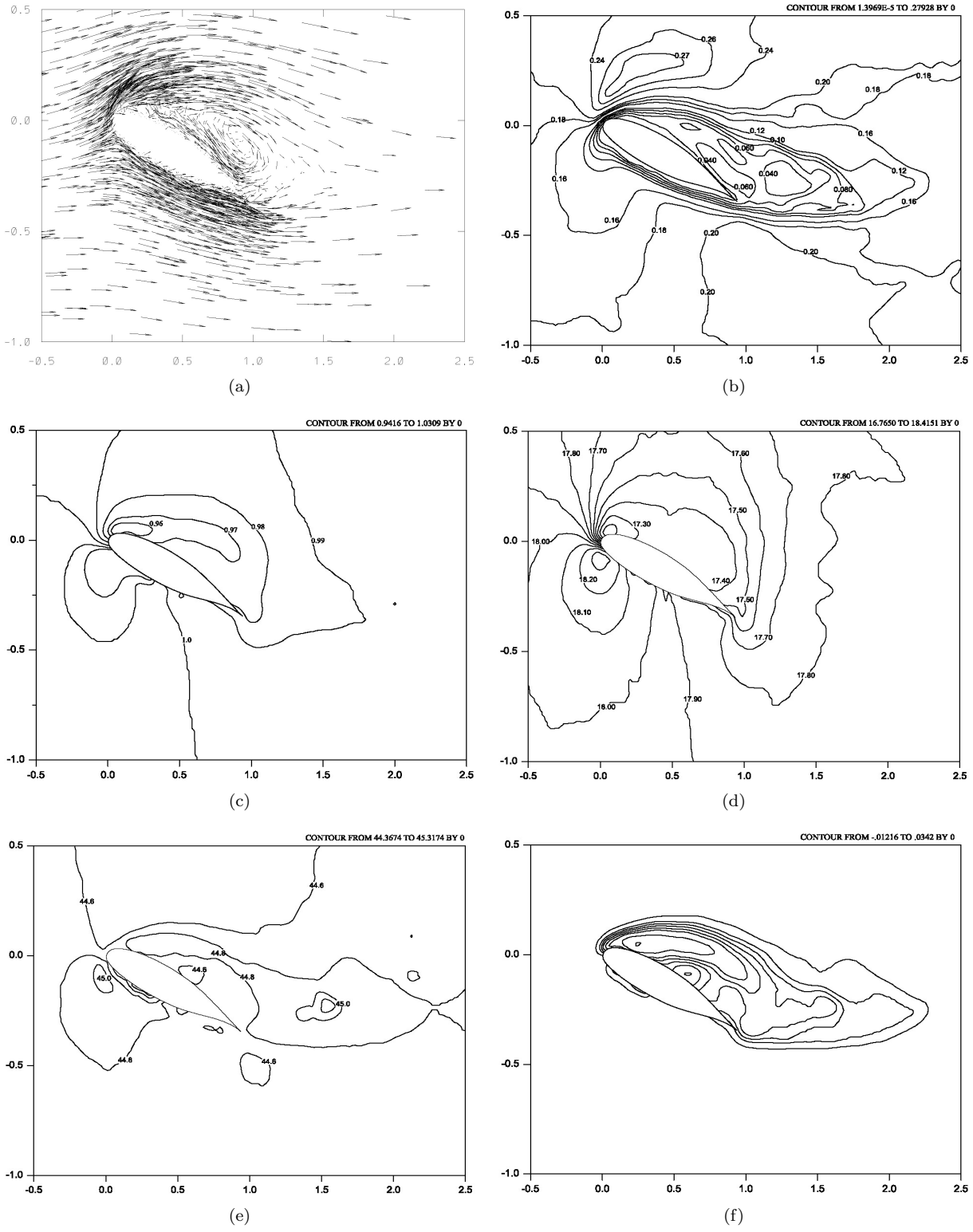


Figura 4.15: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=6.54s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

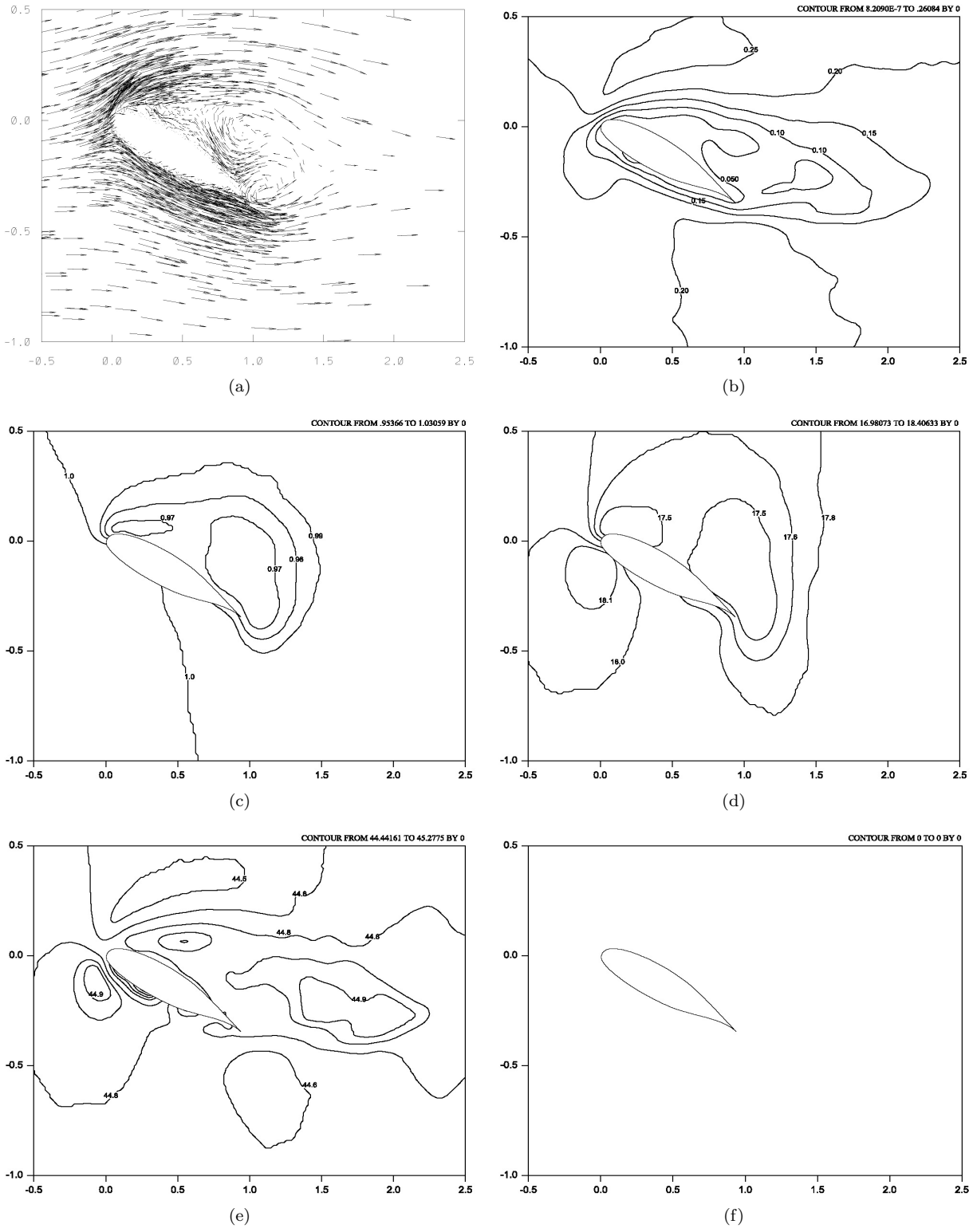


Figura 4.16: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=7.815s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

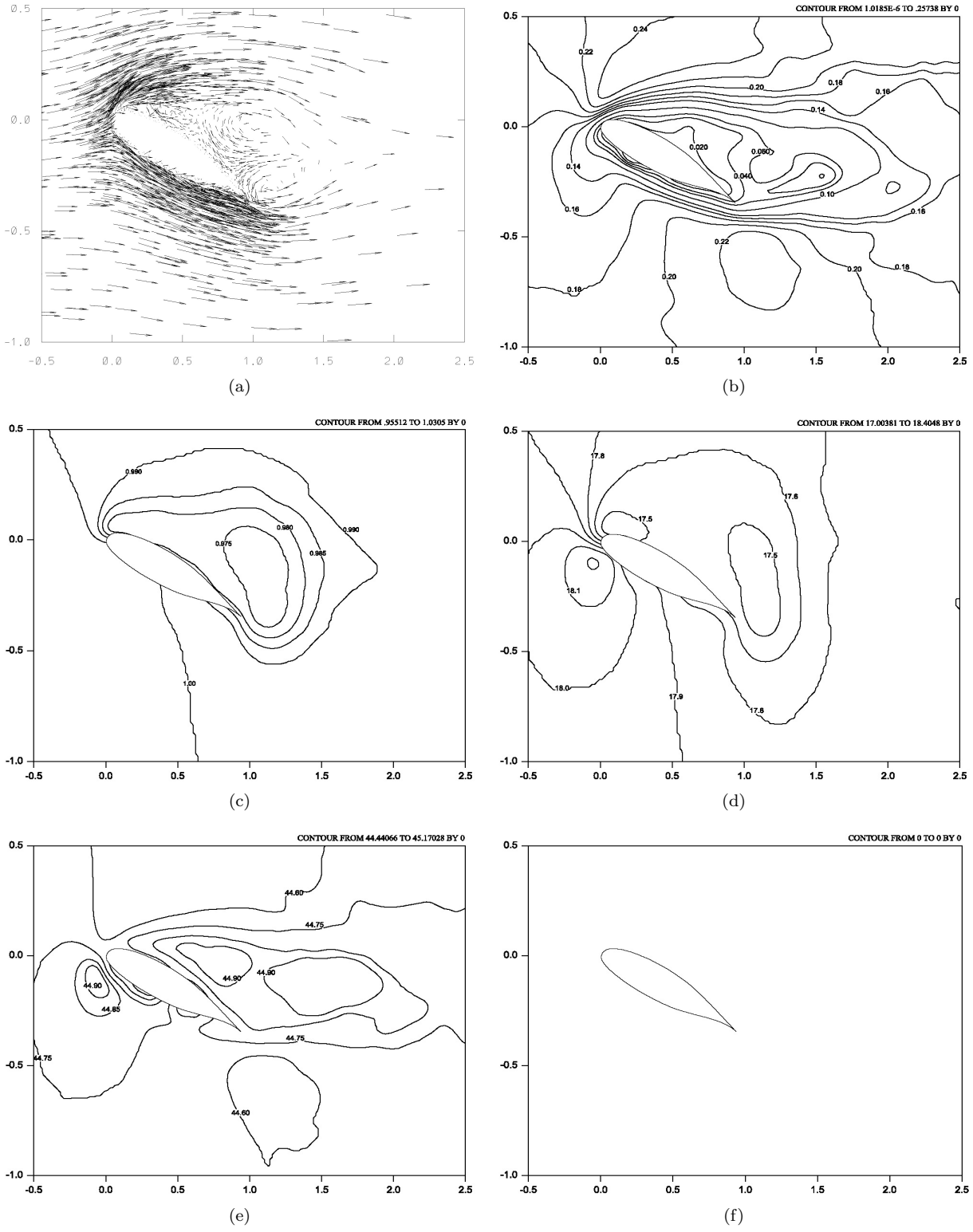


Figura 4.17: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=8.97s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

Para el último tiempo de simulación t=8.97s, los dos vórtices cuya dirección de giro es opuesta, tienden a perder aún velocidad y tienden a disiparse siguiendo la dirección del flujo, ver figura 4.17. Para este tiempo los isocontornos de las otras propiedades tienden a adquirir su condición inicial.

Efectivamente, por medio de los isocontornos y de los campos de los vectores velocidad se tiene una aproximación del comportamiento del fluido através de una superficie aerodinámica como lo es el perfil, al paso del tiempo. La elección de someter al perfil con un gran ángulo de ataque a la corriente de fluido no sólo ha permitido observar los efectos de la viscosidad y la compresibilidad del fluido al pasar sobre una superficie de este tipo sino que además hace posible observar los movimientos y manifestaciones del flujo en todo el campo. Al mismo tiempo las fuerzas que se generan como consecuencia del movimiento del flujo al pasar por el perfil se hacen presentes, pero hasta ahora no se ha mencionado nada al respecto.
Como se mencionó al principio de los resultados, la simulación que se ha presentado corresponde al fenómeno conocido en la aerodinámica como la entrada en pérdida del perfil ó por su nombre en inglés, stall. Como sabemos este efecto debe su nombre a la incapacidad del perfil para seguir produciendo más sustentación, recordando que la sustentación se produce por la diferencia de presiones entre las partes superior (extradós) e inferior (intradós) del perfil, más la reacción hacia arriba que produce la acción del flujo de aire deflectado hacia abajo en el borde de salida del perfil. La sustentación depende fuertemente del ángulo de ataque del perfil ya que a medida que este se incrementa la diferencia de presiones entre ambas superficies es mayor debido a que presentamos a la corriente de aire una mayor curvatura en el extradós, por lo tanto si el ángulo de ataque aumenta, la sustentación también aumenta. Este proceso no es infinito y es precisamente al alcanzar el perfil el ángulo crítico, cuando se alcanza el coeficiente máximo de sustentación; una vez alcanzado este ángulo lo que sucede es que comienza a disminuir la sustentación hasta producirse la entrada en pérdida del perfil, lo cual no significa que la sustentación sea cero sino que a partir de este punto la sustentación no se incrementará más y comenzará a decrecer dramáticamente.

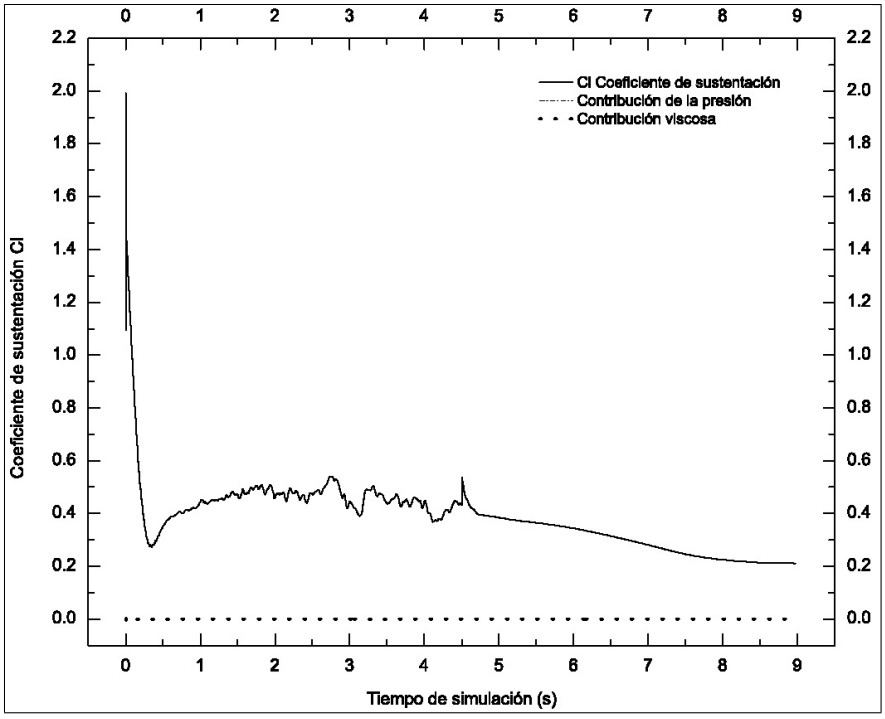


Figura 4.18: Coeficiente de sustentación (Cl) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$), flujo compresible viscoso.

En este caso el ángulo crítico de perfil NACA4420 según [Bollech, 1948] le corresponde un valor de $\alpha_{crit} = 17^o$ aproximadamente, por lo tanto en la simulación del perfil NACA4420 obtenida con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$, el perfil está desde el comienzo predispuesto a la condición de pérdida y así lo han reflejado hasta el momento los resultados, pues el ángulo del perfil es mayor que el ángulo crítico. Sin embargo esto no significa que el perfil no produzca sustentación, sino que por el contrario tal y como se describió en el capítulo 2 una vez que el perfil sobrepasa el ángulo crítico la sustentación comienza a decrecer rápidamente, y si el perfil no disminuye su ángulo de ataque la disminución de la sustentación continúa. Lo anterior puede comprobarse al observar la gráfica que corresponde al coeficiente de sustentación del perfil (Cl) en función del tiempo de simulación, ver figura 4.18. En esta grafica además se presentan por separado las contribuciones tanto de la presión como de las fuerzas viscosas al coeficiente de sustentación. En el comportamiento del Cl se prueba lo escrito anteriomente, ya que sobresale el hecho de que en un corto rango de tiempo ($\approx$ t=0.0015) el perfil a pesar de tener un ángulo de ataque superior al crítico produce sustentación, de ahí que el eje x de la grafica correspondiente al tiempo se presente en escala logarítmica y de esta forma observar claramente este comportamiento. La sustentación no sólo aumenta de forma gradual y disminuye de igual manera hasta el tiempo t=0.0015 sino que nuevamente aumenta sin llegar al máximo anterior y posteriormente disminuye ligeramente para volver a incrementarse muy poco y nuevamente disminuir dramáticamente hasta alcanzar un valor de $\approx$0.27303, esto ocurre casi al tiempo t=0.375s. Pasado este tiempo nuevamente se presenta un muy ligero incremento y de ahí en adelante el valor del coeficiente de sustentación estará fluctuando aproximadamente entre 0.35 y 0.55, ver figura 4.18. Estas fluctuaciones son resultado del desprendimiento de los vórtices generados sobre el extradós del perfil que inducen el comportamiento errático de la presión. Finalmente para los últimos tiempos de simulación exactamente después de 4.5s cuando Cl=0.55 comienza a decrecer su valor gradualmente sin volver a tener un incremento. De la figura 4.18 la amplitud del coeficiente de sustentación de pico a pico es de 1.78, sin embargo es importante destacar que la mayor parte del tiempo el valor del Cl se mantiene fluctuante por lo tanto el valor real del Cl debe ser el valor máximo menos el valor promedio, por lo tanto **Cl=1.4**, lo cual se aproxima a lo calculado y a lo experimental reportado por [Bollech, 1948], en el que el valor del coeficiente de sustentación para un ángulo de 20^o de un ala con un perfil NACA4420 es **Cl=1.47**, ver figuraA.1 del apéndice A.

El coeficiente del sustentación (Cl) como sabemos no sólo depende de la presión sino que también depende de las fuerzas viscosas siendo éstas últimas las que contribuyen muy poco a la generación de la sustentación del perfil como se ve en la figura 4.18. En esta figura es claro que la mayor contribución la hace las fuerzas de presión (línea entrecortada) comparada con la contribución viscosa (línea punteada), obviamente la línea entrecortada está cubierta por la línea continua que representa la suma de ambas contribuciones y por ello no se aprecia en la figura 4.18. Sin embargo esto no significa que los valores que corresponden a la línea punteada sean cero, sino que los valores son muy pequeños.

Analizando ahora el coeficiente de resistencia al avance, la figura 4.19 destaca también la contribución de las fuerzas de presión por encima de la contribución de las fuerzas viscosas. Desde el comienzo de la simulación hasta aproximadamente al tiempo t=0.375 el coeficiente de resistencia al avance va descendiendo hasta alcanzar su valor mínimo a este tiempo, pasado este punto y conforme pasa el tiempo vuelve a incrementarse ligeramente y una vez a partir del tiempo t=0.75s comienza a fluctuar su valor en el rango de [0.05 a 0.15], una vez más al tiempo t=4.5s alcanza un valor de Cd=0.16 y comienza a decrecer hasta mantenerse casi constante en un valor de Cd=0.12, ver figura 4.19. Por lo tanto el valor promedio del Cd es 0.105 valor que no se aleja del valor reportado por [Bollech, 1948] que es de 0.10, ver figura A.1 del apéndice A.

De ambas graficas Cl y Cd para el perfil NACA4420 es posible concluir lo siguiente:

- Existe un periodo de tiempo (0s-0.375s) durante el cual el perfil presenta grandes fluctuaciones en ambos coeficientes producto de los efectos aerodinámicos que se presentan en este tipo de superficies, generación de la sustentación y resistencia al avance.

- Un segundo periodo de tiempo (0.375s-4.5s) durante el cual se observan menores fluctuaciones en ambos coeficientes las cuales son producto de los fenómenos que se presentan principalmente sobre el extradós del perfil, pues es este periodo de tiempo en el que comienzan a desarrollarse los vórtices y también comienza el desprendimiento intermitente de estos, lo que induce la separación del flujo del perfil,

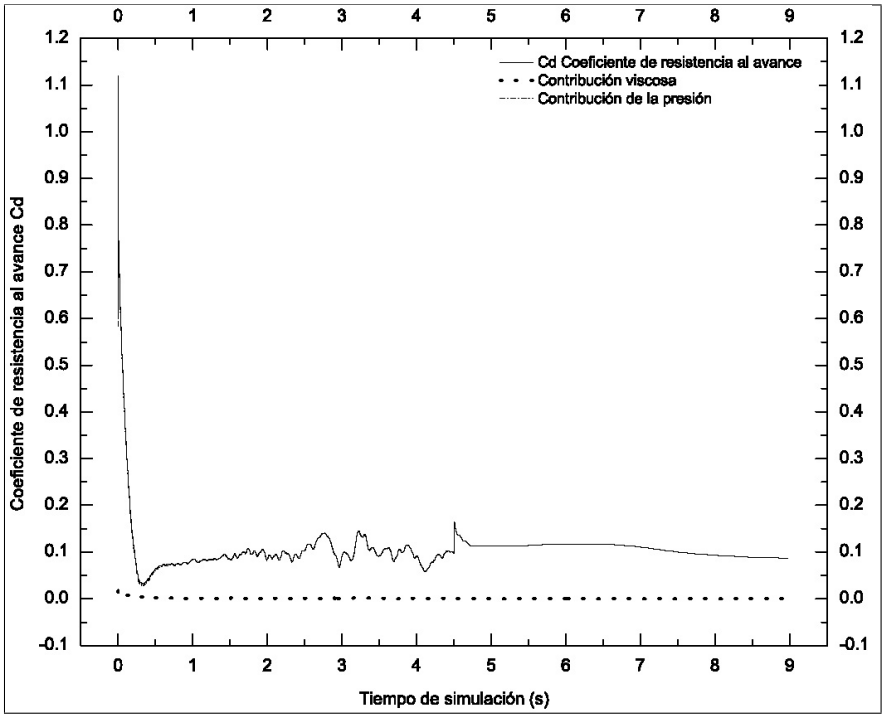


Figura 4.19: Coeficiente de resistencia al avance (Cd) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$), flujo compresible viscoso.

finalmente los vórtices se amortiguan para dar paso a la siguiente condición.

- El tercer periodo de tiempo comprende (4.5s-6.735s), periodo durante el cual las fluctuaciones han disminuido y ambos coeficientes (Cl) y (Cd) tienen finalmente un comportamiento definido, mientras que el Cl tiende a cero, el Cd tiende a mantenerse en un valor constante. Los grandes y fuertes vórtices han desaparecido y únicamente queda un gran vórtice de baja velocidad que comprende la mayor parte del extradós del perfil.

- En el cuarto y último periodo de tiempo (6.74s-8.97), el coeficiente de sustentación tienden a disminuir nuevamente hasta tener un valor de aproximadamente 0.2 y lo mismo ocurre con el coeficiente de resistencia al avance Cd cuyo valor también decrece hasta alcanzar un valor menor a 0.1 para el último tiempo de simulación.

El tiempo de simulación hasta ahora obtenido no resulta lo suficientemente extenso para poder establecer una aproximación certera del comportamiento que tendría el campo de flujo sí la simulación se prolongase a un tiempo posterior sin embargo [Weber and Platzer, 2000] muestran los resultados de la simulación que obtuvieron para el perfil NLR 7301 en la cóndición de entrada en pérdida cuasiestátita y también dinámica. Estos resultados muestran que los fenómenos y vórtices presentes sobre el perfil con un gran ángulo de ataque tienden a ser recurrentes pero también tienden a amortiguarse sin dejar a un lado su periodicidad. Finalmente tal y como lo demuestran los patrones de flujo obtenidos para el perfil NACA4420 a distintos tiempos de la simulación, el comportamiento cuasi estático de la pérdida de sustentación sobre el perfil NACA4420 expone un comportamiento muy semejante a las etapas de la entrada en pérdida dinámica descritas en el capítulo 2, ver figura 2.13.
A continuación en la figura 4.20 se muestra un número determinado de campos correspondientes a los vectores velocidad para diferentes tiempos de simulación con el fin de observar el desarrollo y comportamiento del

flujo al pasar sobre el perfil NACA4420 cuando éste sobrepasa su ángulo crítico y entra en la condición de entrada en pérdida.

En la siguiente sección se muestran algunos resultados de simulaciones obtenidas para otros perfiles sometidos a la condición de entrada en pérdida con el fin de realizar algunas comparaciones cualitativas entre éstos resultados y los obtenidos haciendo uso del código N$\varepsilon\kappa$Tαr y un perfil NACA4420.

4.1.1. Comparaciones cualitativas con otras simulaciones.

La simulación obtenida de un flujo compresible desplazándose sobre un perfil NACA4420 con un gran ángulo de ataque no puede compararse cuantitativamente con alguna otra simulación obtenida para este perfil porque no hay resultados previos reportados en la literatura. Sin embargo tal y como se describió en el capítulo 2 la entrada en pérdida cuasi estática de un perfil independientemente de su geometría sigue una serie de etapas semejantes a las que se presentan en la entrada en pérdida dinámica, sobre todo en el desarrollo y desplazamiento de los vórtices sobre el extradós lo cual se confirma con los resultados siguientes.

Perfil NACA0012

Los resultados mostrados en la figura 4.21 corresponden a las etapas del desarrollo de la entrada en pérdida de un ala sumergida en agua cuyo perfil es el NACA0012 con un ángulo de ataque de 30^o, estos resultados son presentados por [Shih et al., 1992]. Los resultados fueron obtenidos utilizando la técnica experimental conocida como PIDV (Particle Image Displacement Velocimetry) al mismo tiempo realizaron una simulación numérica utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes. En la figura 4.21; las líneas de corriente corresponden a los resultados de la simulación numérica y, la distribución de puntos claros y obscuros[1] corresponde a lo obtenido experimentalmente. En estas imágenes se aprecia la gran similitud de los patrones del flujo que se presentan sobre el extradós con respecto a la simulación numérica obtenida previamente para el perfil NACA4420. Realizando una comparación cualitativa entre ambos resultados es posible establecer que existe una gran semejanza entre los patrones de flujo entre un perfil y otro tal y como se describe a continuación:

- La figura 4.21(a) se asemeja al campo de flujo del perfil NACA4420 al t=2.49s, figura 4.8
- La figura 4.21(b) se asemeja al campo de flujo del perfil NACA4420 al t=3.495s, figura 4.9
- La figura 4.21(c) se asemeja al campo de flujo del perfil NACA4420 al t=4.485s, figura 4.10
- La figura 4.21(d) se asemeja al campo de flujo del perfil NACA4420 al t=5.34s, figura 4.14
- La figura 4.21(e) se asemeja al campo de flujo del perfil NACA4420 al t=6.54s, figura 4.15

[Mittal and Saxena, 2000] obtienen la simulación del perfil NACA0012 utilizando el modelos de ecuaciones RANS considerando al flujo incompresible, el modelo de turbulencia utilizado es el de Baldwin Lomax. En este caso los resultados fueron obtenidos al considerar que el ángulo de ataque del perfil se incrementa de forma gradual y una vez que el perfil rebasa su ángulo crítico estático, se presentan los ya conocidos patrones del flujo sobre el extradós del perfil. También hacen referencia al comportamiento no permanente del coeficiente de sustentación como consecuencia de la parición de vórticidades sobre el extradós del perfil.

Perfil NLR 7301

[Weber and Platzer, 2000] realizan una simulación del perfil NLR 7301 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$, un $Re = 4 \times 10^{-6}$ y un número de mach $M = 0.3$, el flujo se considera viscoso y compresible. El análisis es en dos dimensiones, el código utilizado resuelve las ecuaciones RANS para un flujo compresible, se probaron dos modelos de turbulencia Baldwin-Lomax (BL) y el de Baldwin-Barth (BB). En la figura 4.23 se muestran el

[1] la diferencia entre el color de los puntos (claros u obscuros) depende de la direción de la rotación de las partículas

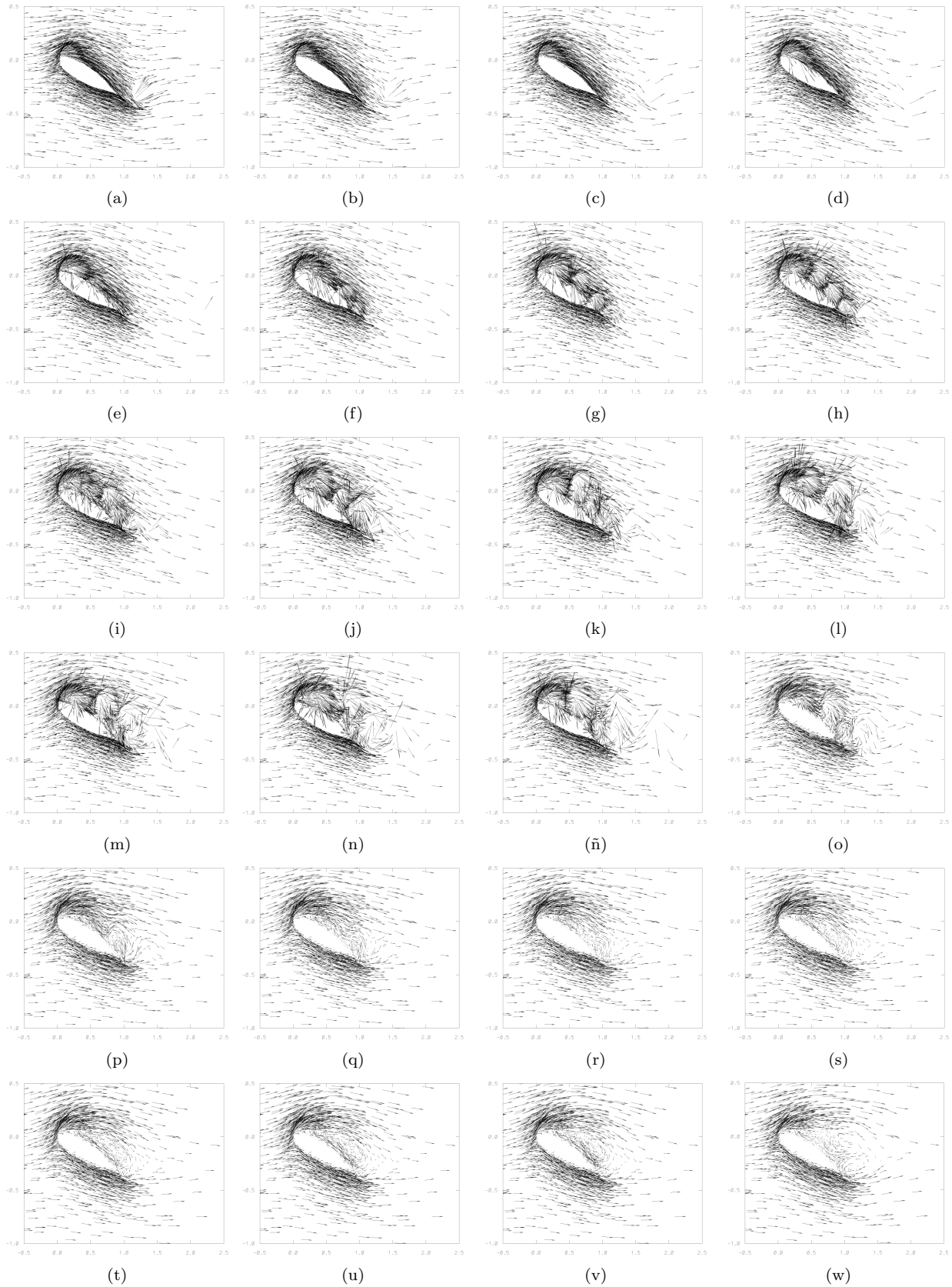
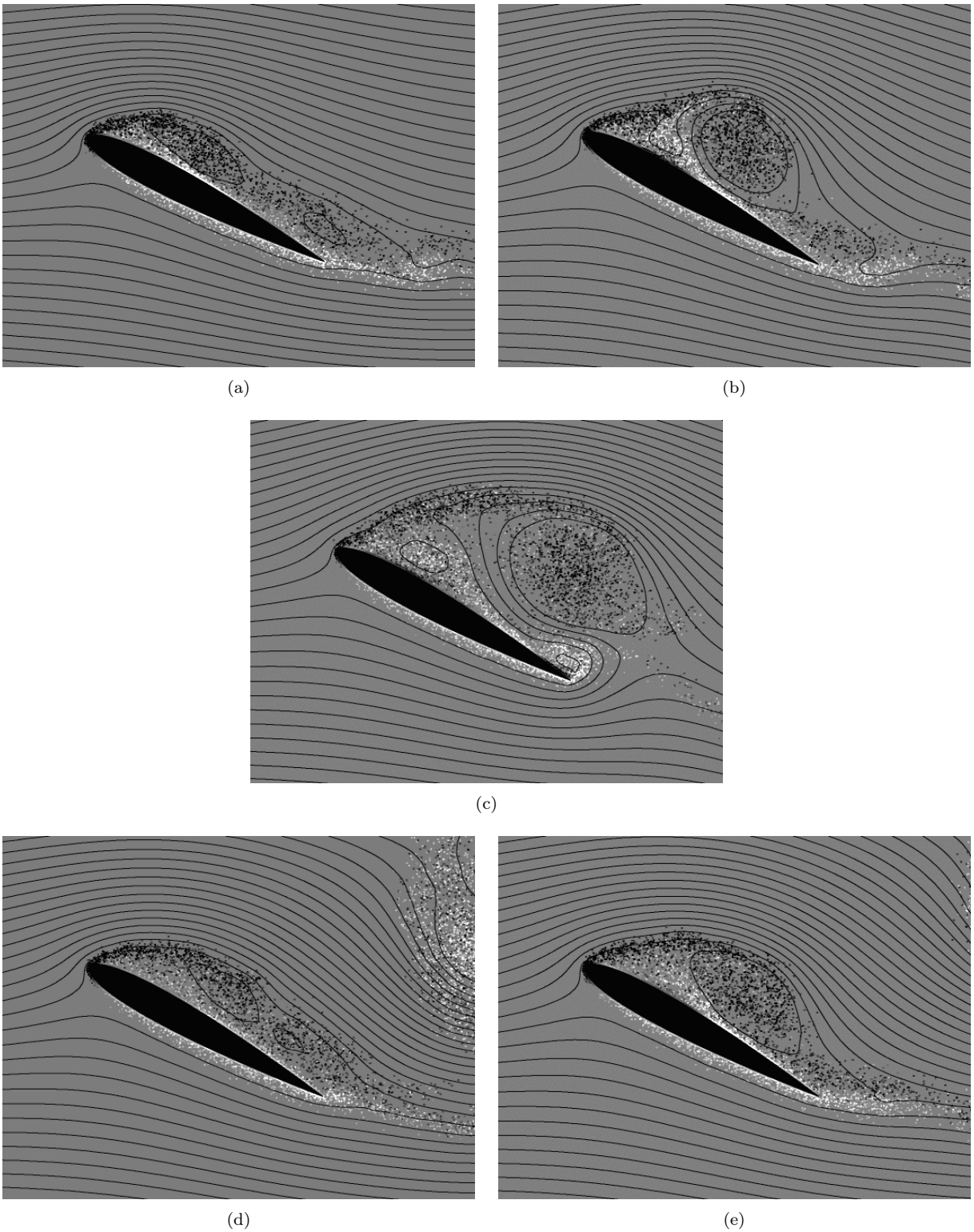


Figura 4.20: Campos de velocidad del perfil NACA0012 para diferentes tiempos con el fin de observar el desarrollo de los fenómenos que acompañan la entrada en pérdida del perfil. Flujo compresible viscoso.: (a) t=0.285s; (b) t=0.57s; (c) t=0.855s; (d) t=1.14s; (e) t=1.425s; (f) t=1.785s; (g) t=1.995s; (h) t=2.28s; (i) t=2.565s; (j) t=2.85s; (k) t=3.135s; (l) t=3.42s; (m) t=3.705s; (n) t=3.99s; (ñ) t=4.275s; (o) t=4.56s; (p) t=4.845s; (q) t=5.13s; (r) t=5.415s; (s) t=5.7s; (t) t=5.985s; (u) t=6.27s; (v) t=6.555s;y, (w) t=8.97s



(a) (b)

(c)

(d) (e)

Figura 4.21: Visualización de las etapas del desarrollo de la entrada en pérdida del perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 30^o$ a diferentes tiempos. Reproducida de [Graaf, 2002].: (a) t=4.25s; (b) t=5s; (c) t=6s; (d) t=8.5s; y, (e) t=9s.

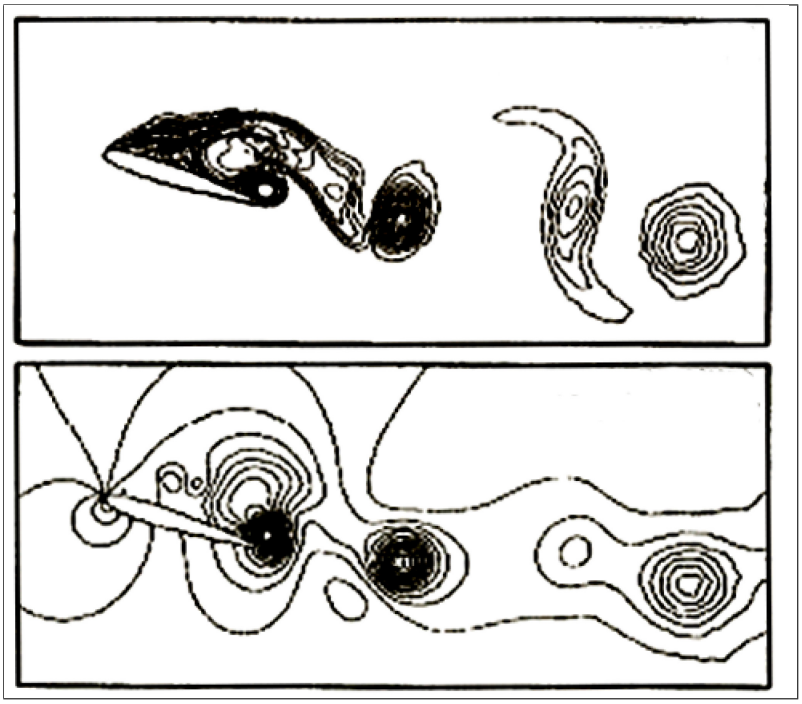


Figura 4.22: Isocontornos de vorticidad (superior) y presión (inferior) respectivamente para el perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 18^o$, $Re = 10^6$. Reproducido de [Mittal and Saxena, 2000].

comportamiento del valor del coeficiente de sustentación, la línea discontinúa corresponde al modelo de (BL) y la línea continúa es utilizando el modelo (BB), éste último resulta ser más preciso según los autores. El comportamiento del coeficiente de sustentación figura 4.23, es cualitativamente semejante al comportamiento de la simulación correspondiente al perfil NACA4420 figura 4.18, ambos coeficientes fueron obtenidos al considerar el ángulo de ataque fijo en el perfil. Sin embargo, el coeficiente de sustentación para ambos perfiles muestra un comportamiento fluctuante lo cual comprueba una vez más que en la entrada en pérdida cuasi estática de un perfil se observan fenómenos transitorios semejantes a los que se presentan en la entrada en pérdida del perfil dinámica, tal vez éstos no tengan la misma intensidad pero los patrones del flujo son muy parecidos.

Hasta ahora se ha mencionado que los patrones de flujo de la entrada en un perfil cuasi estática son semejantes a los que se presentan cuando el perfil se encuentra en pérdida dinámica, es decir el perfil presenta movimiento en alguna o en todas las direcciones, este movimiento generalmente es oscilatorio. Dependiendo del grado de oscilación que tenga el perfil, los campos de flujo se verán más afectados. Si la frecuencia de oscilación de un perfil es relativamente baja, entonces puede considerarse que el perfil está en la condición de pérdida cuasi estática.

4.2. Perfil NACA4420 con un ángulo de ataque $(\alpha = 20^0)$ flujo compresible no viscoso

Si bien es cierto que la influencia de las fuerzas viscosas sobre el comportamiento del flujo puede parecer insignificante comparada con la influencia de las fuerzas de presión para el análisis del flujo alrededor del perfil; no deben sin embargo subestimarse sus efectos. Tal es así que despreciando los efectos viscosos y únicamente considerando los efectos de compresibilidad del fluido no sería posible obtener una simulación del comportamiento del flujo certera. Prueba de ello es que fue sometida la misma malla de la figura 4.1 con las

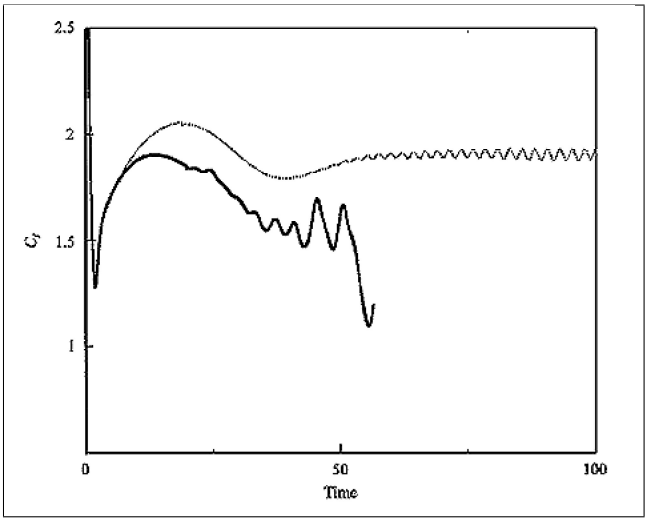


Figura 4.23: Comportamiento del Coeficiente de Levantamiento (Cl) del perfil NLR 7301 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$. Reproducido de [Weber and Platzer, 2000].

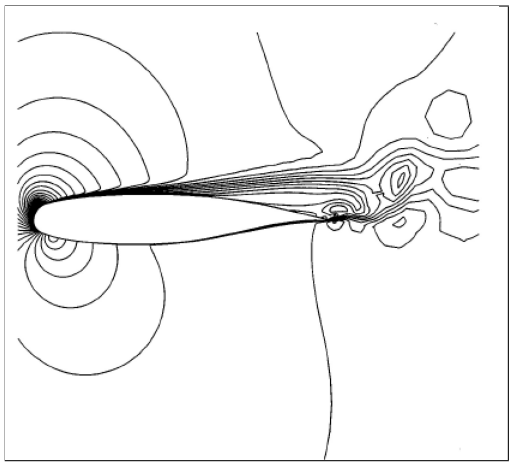


Figura 4.24: Isocontornos de Mach, resultado de la simulación del perfil NLR 7301 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$, flujo compresible utilizando el modelo (BL). Reproducido de [Weber and Platzer, 2000].

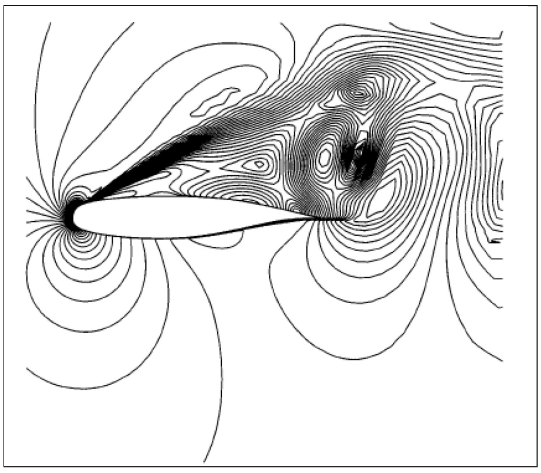


Figura 4.25: Isocontornos de Mach, resultado de la simulación del perfil NLR 7301 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$, flujo compresible utilizando el modelo (BB). Reproducido de [Weber and Platzer, 2000].

mismas condiciones iniciales y de frontera que las utilizadas para el flujo viscoso manteniendo el mismo delta de tiempo (Δt=0.0000075), sólo que esta vez se despreciaron los términos viscosos.

Los resultados que a continuación se presentan únicamente corresponde a dos tiempos específicos determinados (t=1.08, y t= 5.34s), para poder compararlos con los resultados obtenidos de la simulación viscosa previa, estas dos comparaciones serán suficientes para observar y destacar las diferencias entre ambas. Observando los resultados de ambas simulaciones; viscosa y no viscosa para el tiempo t=1.08s figuras 4.7 y 4.26 respectivamente, se hacen evidentes las diferencias entre ambas. Los gradientes en todos los isocontornos no son claros para mostrar los fenómenos que le suceden al fluido al pasar por el perfil, es claro que la existencia de vórtices en alguna parte del campo de flujo no se aprecian, sin embargo comparando valores entre los campos de flujo para la simulación viscosa con la simulación no viscosa se estima una buena aproximación. El campo de los vectores velocidad figura 4.26(a) hasta ahora no difiere mucho de la simulación viscosa con excepción de que en este caso no se aprecia la desviación o incremento en su magnitud de los vectores velocidad en las regiones dónde se sabe de la existencia de éstos.

Para el tiempo t=4.485 las diferencias son mayores, por ejemplo en el campo de los vectores velocidad comparando la figura 4.27(a) con la simulación viscosa de la figura 4.10(a), no tienen mucho en común, sobre todo en el extradós del perfil ya que sólo puede notarse una región cercana al borde de salida en la cual la magnitud de los vectores ha disminuido y las capas de flujo antes cercanas al extradós se han separado notablemente. Por otro lado en lo que respecta a los demás isocontornos (mach, densidad, presión, temperatura y entropía) la aproximación es adecuada pero no precisa como es de imaginar para el caso de los gradientes que corresponde a las vorticidades.

Una vez comparados los isocontornos y campos de vectores velocidad entre la simulación no viscosa y la viscosa sólo queda comparar el comportamiento de los coeficientes (Cl) y (Cd). En la figura 4.28 se encuentran graficados los resultados para ambas simulaciones; el comportamiento entre ambos es muy parecido hasta aproximadamente t=0.75s una vez pasado este tiempo, en la simulación no viscosa el coeficiente de sustentación se mantiene casi constante y por debajo en valor comparado con el (Cl) correspondiente a la simulación viscosa y no existe además ninguna fluctuación en este.

Por lo que respecta al coeficiente de resistencia al avance (Cd) tal como se aprecia en la figura 4.29 durante un corto periodo de tiempo al principio de la simulación el comportamiento del Cd correspondiente a la simulación no viscosa es muy parecido, pero al alcanzar el tiempo 0.375s su comportamiento comienza a variar, mostrando valores ligeramente mayores que los obtenidos en la simulación viscosa, sin embargo la tendencia de su comportamiento es constante sobre todo pasando el tiempo t=1.5s, a diferencia de las oscilaciones presentes en la simulación viscosa.

Los resultados muestran que las aproximaciones tanto en las propiedades del flujo así como en los coeficientes de resistencia al avance y sustentación, las diferencias son mayores cuando la viscosidad influye en mayor grado sobre los fenómenos presentes al paso del flujo sobre el perfil. En este caso por tener el perfil un gran ángulo de ataque los efectos viscosos son evidentes una vez que comienza la separación de la capa límite como consecuencia de la formación y desprendimiento de los vórtices.
Finalmente la obtención de una simulación más aproximada a la realidad cómo se ha descrito y observado, depende de la adecuada modelación del fenómeno a analizar, del método que se utilice para resolver las ecuaciones que gobiernan al flujo y de las ecuaciones que se vayan a utilizar (Navier-Stokes ó Euler). En este caso el análisis va enfocado a la simulación del flujo através de los álabes de una turbina, el hecho de haber seleccionado el perfil NACA4420 con un ángulo de ataque pronunciado y mostrarlo como primer ejemplo de este capítulo nos ha permitido comprobar que el código es lo suficientemente preciso para simular efectos importantes como desprendimiento de capa límite, vorticidad y compresibilidad del fluido. Fenómenos que son muy importantes en el análisis de un flujo en turbomaquinaria pues generalmente como se ha descrito en el capítulo 1, estos están siempre presentes.

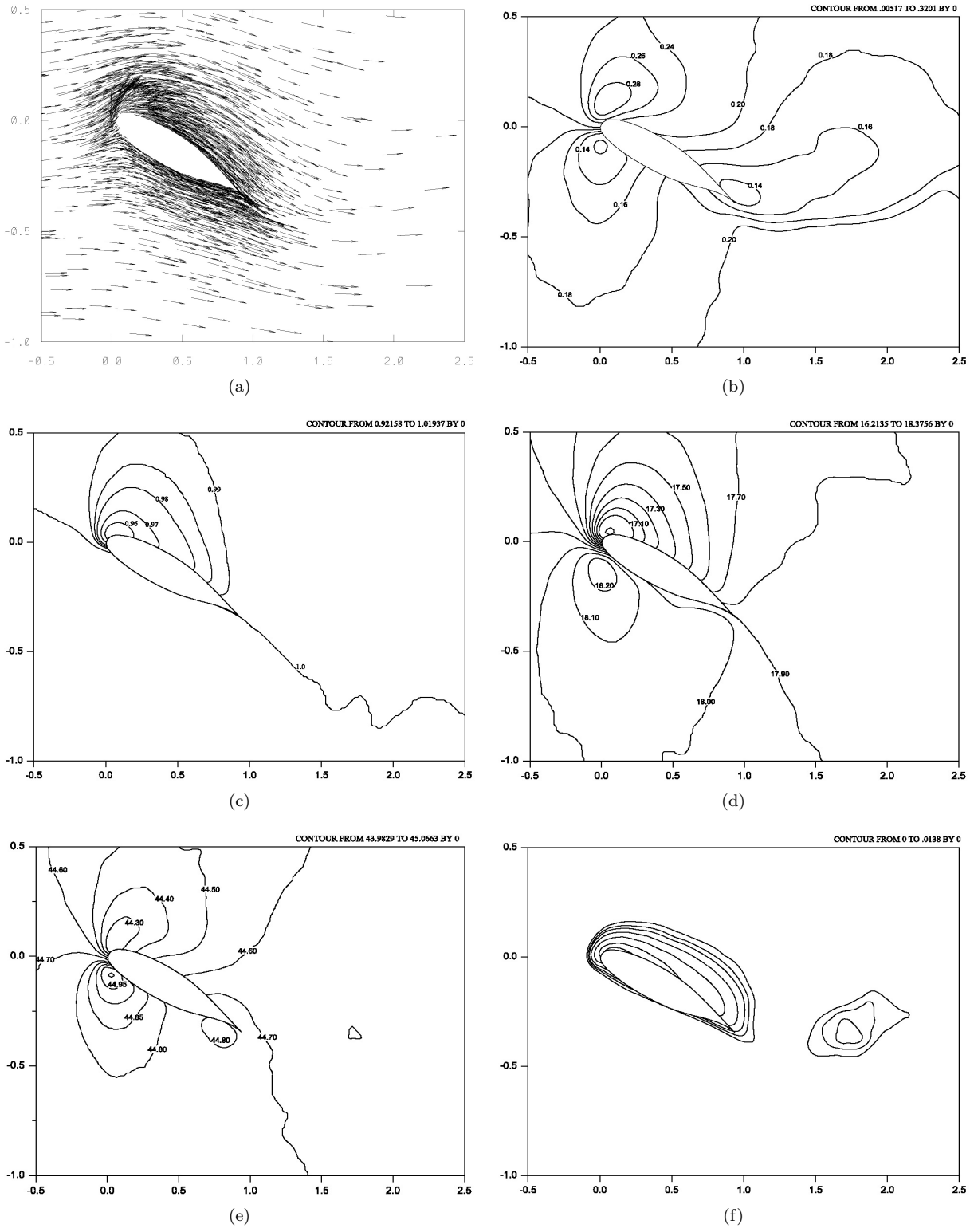


Figura 4.26: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible no viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=1.08s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

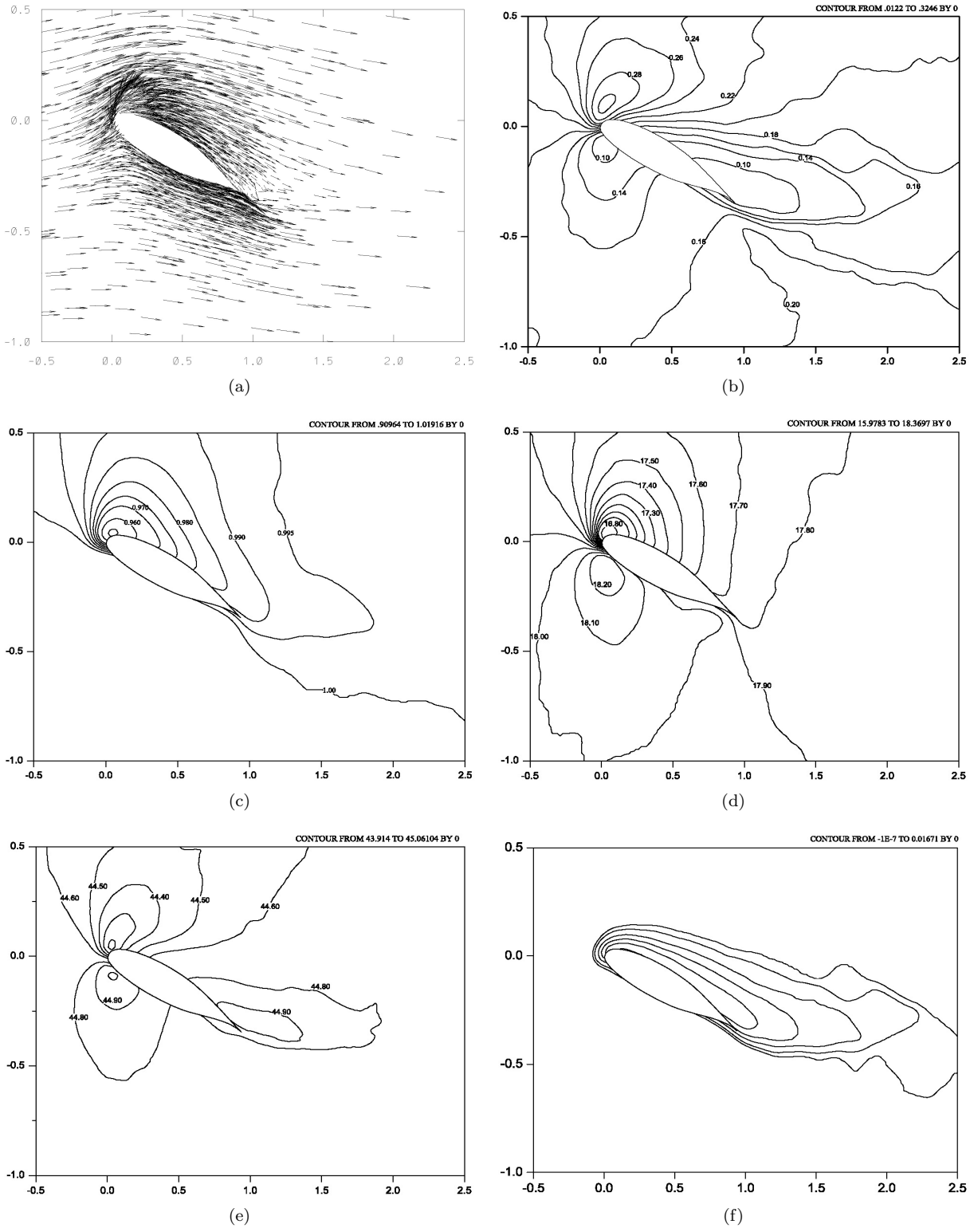


Figura 4.27: Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible no viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=4.485s.: (a) Velocidad; (b) Mach; (c) Densidad; (d) Presión; (e) Temperatura; y, (f) Entropía.

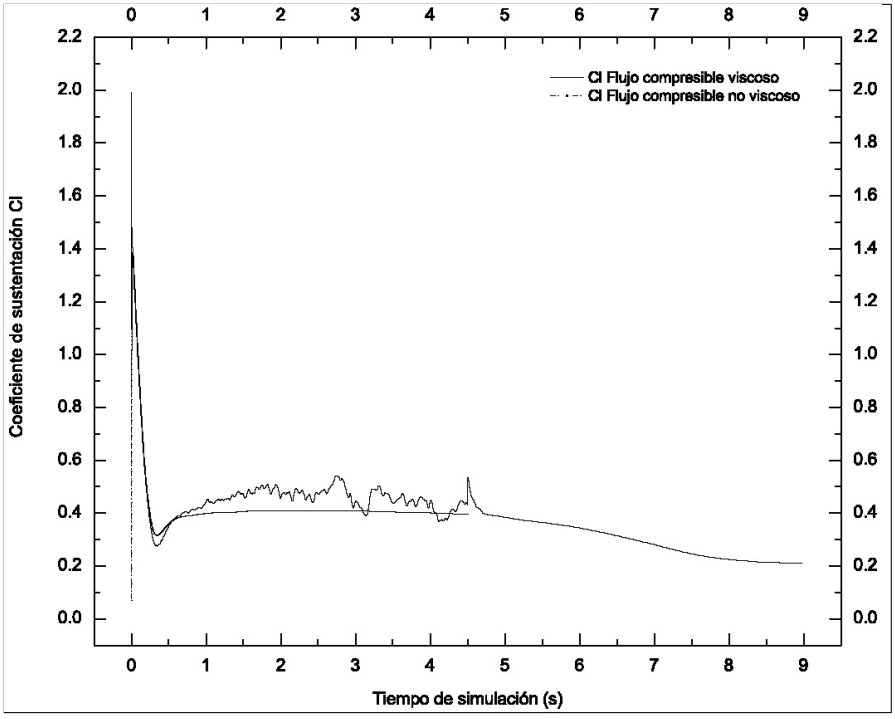


Figura 4.28: Comparación entre el coeficiente de sustentación (Cl) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420, para un flujo compresible viscoso y no viscoso.

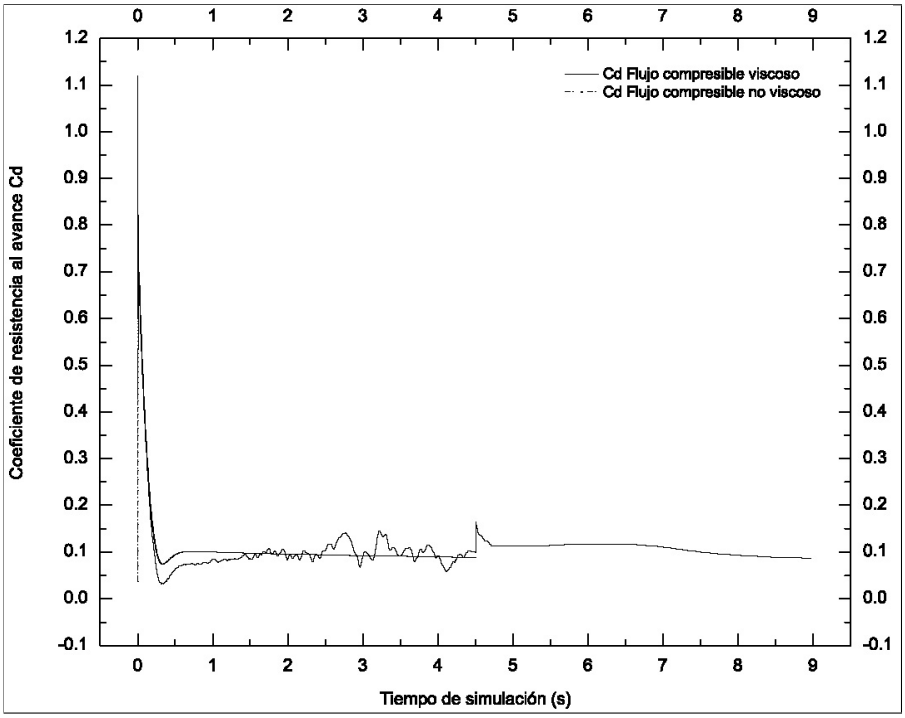


Figura 4.29: Comparación entre el coeficiente de resistencia al avance (Cd) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420, para un flujo compresible viscoso y no viscoso.

4.3. Cascada de 5 álabes con un M=0.3

Desde 1980 con motivo de la realización del ***"Symposium on Aeroelasticity in Turbomachines"***, realizado en Lausanne, Suiza. Diferentes instituciones dedicados a la investigación para el desarrollo de las turbomáquinas convinieron en iniciar un taller[2] que les permitiera analizar diferentes y específicas configuraciones de cascadas de álabes de turbinas con la finalidad de facilitar la comparación entre los resultados obtenidos, pues la gran variedad de configuraciones geométricas impedía obtener resultados concluyentes. Las configuraciones estándar que se seleccionaron han servido como ensayo para probar diferentes modelos matemáticos y poder predecir principalmente fenómenos aeroelásticos presentes en las cascadas de una turbomáquina en la última decáda. Los participantes de este taller han sido: la Universidad de Tokyo, la Escuela Federal Politécnica de Lausanne, el Laboratorio Aeroespacial Nacional de Tokyo, la Oficina Nacional de Estudios e Investigaciones Aeroespaciales (ONERA) y el Centro de Investigación Lewis de la NASA, entre otros. Las configuraciones de las cascadas y la forma de estudio o evaluación de cada configuración fue determinada por cada institución dependiendo de las facilidades con la que cada institución contase. Son nueve las configuraciones estándar establecidas según lo señalan [Bölcs and Fransson, 1986] en su primer reporte cuyo régimen de flujo va desde el flujo subsónico hasta el supersónico.
Es precisamente la cuarta configuración estándar establecida y definida como una cascada transónica en los reportes de [Bölcs and Fransson, 1986] y [Fransson and Verdon, 1991] la seleccionada para analizar de forma númerica en este trabajo. Esta configuración es de interés porque para algunas condiciones subsónicas a la entrada del pasaje de la cascada se obtiene a la salida un número de Mach mayor a 1 ($M > 1$), lo cual indica el desarrollo de un flujo transónico a la salida de cada pasaje entre pala y pala.
Antes de establecer la geometría de la cascada es importante definir la nomenclatura que se utilizará para la descripción geométrica de la misma, dicha nomenclatura es la utilizada por [Bölcs and Fransson, 1986], [Fransson and Verdon, 1991] y se muestra en la figura 4.30.
Las características geométricas y la geometría de la cascada están dadas en la tabla 4.3 y figura 4.31 respectivamente, el tipo de perfil utilizado tienen un espesor y curvatura relativamente altos, es este caso sólo se representó una cuarta parte de la cascada real cuya configuración consiste de 20 álabes cada una con una cuerda ($c = 0.0744$m) y una distancia entre la raíz y la punta de los álabes de (0.040m), el ángulo de etapa ($\gamma = 56.6^o$) y como separación entre álabes se eligió la distancia (τ) que se tiene exactamente a la mitad de la pala desde la raíz y que es de (0.056544m).
Para poder obtener la simulación de esta cascada fue necesario primeramente adimensionalizar todas las distancias de la geometría inicial con respecto a la cuerda (c) del perfil, esta geometría final es la que se muestra en la figura 4.31 y el dominio elegido fue un rectángulo de $[-4, 6]$X$[-4, 4]$. Una vez obtenida la geometría adimensionalizada se le realizó una modificación respetando todos los parámetros geométricos de forma tal que permitiera obtener una geometría útil que reconociera el código N$\varepsilon\kappa$Tαr una vez generada la malla, como una óptima malla de entrada.

Característica geométrica	Real	Adimensional
Dimensión	$2D$	$2D$
Longitud de la cuerda (c)	0.0744 m	1
Espesor relativo del perfil	0.17	0.17
Angulo de la etapa (γ)	$56{,}6^o$	56.6^o
Angulo de entrada del flujo (β_1)	44.1^o	44.1^o
Paso entre pala y pala (τ)	0.056544 m	0.76

Tabla 4.3: Datos geométricos de la configuración de la cascada de la turbina.

La malla generada se aprecia en la 4.32, esta malla es una malla no estructurada al igual que la obtenida para el perfil NACA4420 y debió optimizarse para disminuir al máximo el tiempo de ejecución para cada paso de tiempo. La densidad de la malla es mayor en las fronteras de los perfiles y va disminuyendo conforme

[2] El taller recibió el nombre de "Standar Configurations for Aeroelasticity in Turbomachine Cascades"

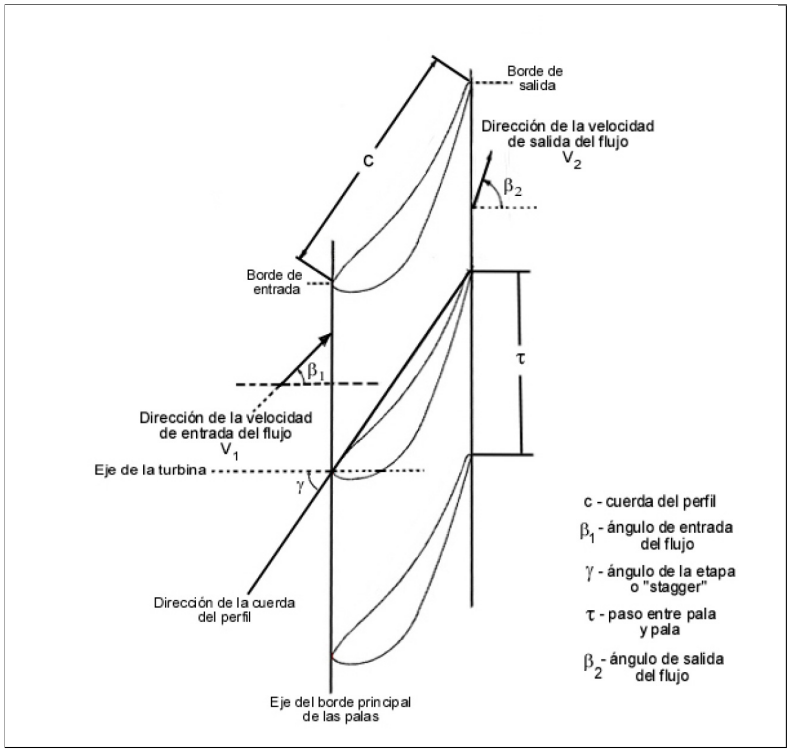


Figura 4.30: Nomenclatura utilizada para describir la geometría de una cascada de una turbina en 2D.

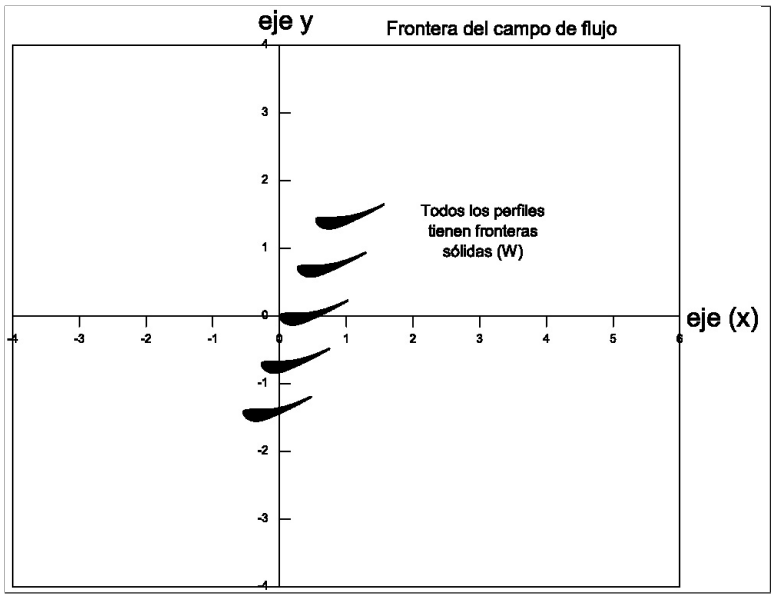


Figura 4.31: Dominio de la configuración estándar propuesta por [Bölcs and Fransson, 1986], cascada de 5 álabes.

se acerca a las fronteras del dominio y todos los elementos que la componen son triángulos.

Condiciones de frontera

Para el campo de flujo del dominio de estudio, las condiciones de frontera corresponden a las del tipo *corriente libre*, y utilizadas para el análisis del perfil NACA4420
Recordando que este tipo de condiciones se establecen utilizando la teoría unidimensional característica para un gas politrópico ideal. Por lo tanto las variables primarias en la corriente libre son, en su forma adimensional:

$$\begin{aligned} &\rho = 1 \\ &u = M\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad\qquad v = 0 \\ &E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

En este caso todos los perfiles tiene fronteras de pared (`W`), es decir los perfiles se encuentra fijos y por lo tanto sus fronteras tendrán la condición de no deslizamiento y su temperatura (T) está determinada por la corriente de flujo que los rodea de tal forma que:

$$\begin{aligned} &u = 0 \qquad\qquad v = 0 \\ &T = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Condiciones iniciales

Una vez habiendo establecido el número de mach que en este caso es de ($M = 0.3$) y el número de Reynolds ($Re = 68493$) para la simulación. Entonces las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} &\rho(t=0) = 1 \\ &u(t=0) = 1 \qquad\qquad v(t=0) = 0 \\ &E(t=0) = 20.34 \\ &P(t=0) = 7.93 \\ &T(t=0) = 19.84 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Los parámetros determinados en la tabla 4.4 son los utilizados para la generación de la simulación de la cascada de 5 álabes. Las condiciones de frontera para la simulación se pueden obervar en la figura 4.31.

Dimensión	2D
Re	68,493 basado en la longitud de (c)
Mach	0.3
Temperatura en la pared de los perfiles	19.84
Δt	0.0000075
Número de triángulos	18388

Tabla 4.4: Parámetros de simulación para la cascada de 5 álabes de una turbina en 2D.

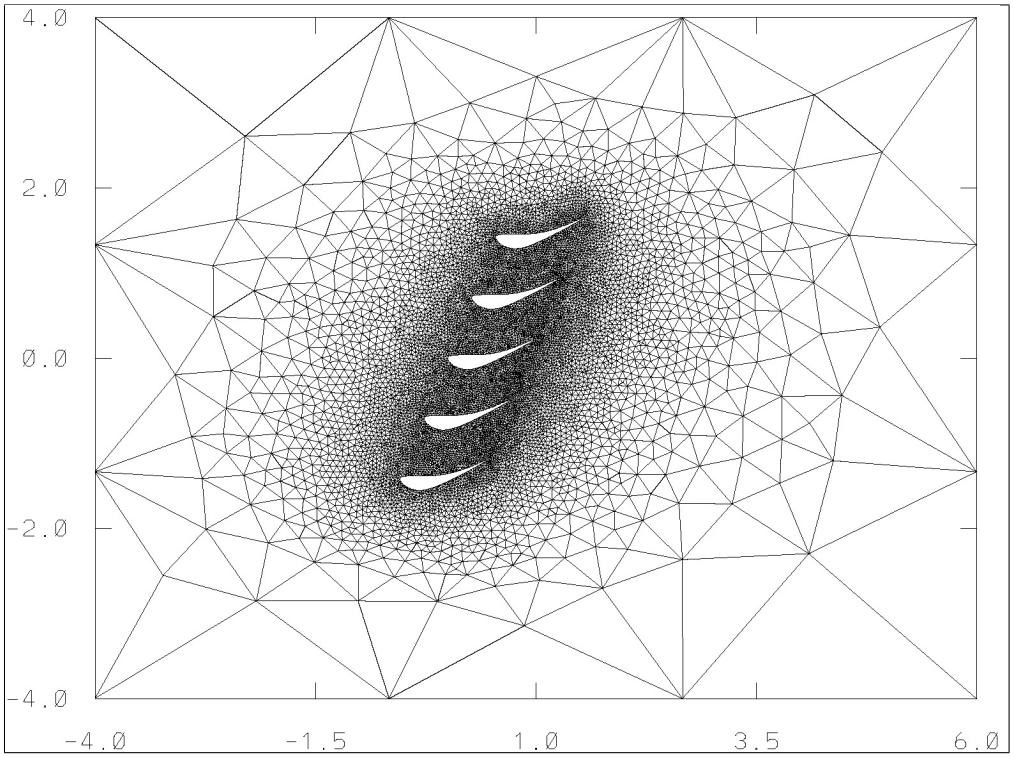


Figura 4.32: Malla del perfil NACA4420 para la simulación en 2D.

Resultados.

Los campos e isocontornos resultantes que a continuación se presentan son producto de la simulación numérica realizada a la cascada de álabes propuesta por [Bölcs and Fransson, 1986], el delta de tiempo utilizado fue (Δt=0.0000075), sin embargo el tiempo de ejecución para cada paso de tiempo se incrementó 15 veces comparado con el tiempo de ejecución de la simulación del perfil NACA4420. Por ello el tiempo de simulación total obtenida fue de 2.21625s obteniendo 591 resultados que fueron analizados y los más representativos serán presentados a continuación, en los cuales será posible obervar el comportamiento de la cascada de álabes al paso por ella de un flujo subsónico (M=0.3). En este caso al igual que para el caso de la simulación del perfil NACA4420 las figuras de los isocontornos y campos de los vectores velocidad que se presentan no mostrarán la descripción de todo el dominio completo que fue definido en la figura 4.31, la razón por la cual fue necesario realizar acercamientos a los perfiles fue para observar con mayor precisión el comportamiento de cada una de las propiedades del flujo al paso por los claros entre álabe y álabe, ya que presentando toda la cascada compuesta por los 5 perfiles en una sola figura evitaría poder distinguir fenómenos importantes que suceden cercanos a las superficies de los perfiles.
Por lo tanto la representación de la cascada de 5 perfiles será dividida en 3 partes para su análisis (superior, media e inferior) y así se presentará para cada campo resultante y para cada tiempo. La parte superior de la cascada comprende el primer pasaje formado por el perfil 1 y 2, la parte media corresponde a los pasajes intermedios formados por los perfiles 2, 3 y 4, por último la parte inferior la componen el pasaje formado por los perfiles 4 y 5. Los tiempos seleccionados para describir el comportamiento de la cascada de álabes son cinco: t=0.2625s, t=0.56625s, t=1.51125s, t=1.79625s y t=2.21625s; para cada uno de estos tiempos se mostrarán los isocontornos correspondientes a la densidad, presión, número de mach, temperatura y entropía, sin olvidar el campo de vectores velocidad.
Inicialmente para el primer tiempo t=0.2625s, los campos presentan un curioso comportamiento ya que una

vez iniciada la simulación las propiedades del fluido al pasar entre los álabes son modificadas considerablemente. Considerando que el número de mach inicial tiene un valor de 0.3, en la figura 4.33 observamos que en las regiones cercanas a las entradas de los pasajes entre perfil y perfil se presenta un descenso en la velocidad, de hecho en las regiones cercanas a los bordes de entrada de los perfiles la velocidad disminuye ligeramente pero conforme va avanzando el flujo através de los álabes va aumentando su velocidad. El descenso de la velocidad previo a la entrada de los pasajes se debe a que la velocidad del sonido en todo el campo es superior en todo momento con respecto a la velocidad de desplazamiento del fluido, es decir el M es menor a 1 en todo el campo. Por lo tanto el flujo antes de llegar a los perfiles es prevenido de la existencia de éstos lo cual permite que evite chocar y se desvíe antes de llegar hasta ellos, por ello reduce su velocidad. Para las regiones de los intradós cercanas a los bordes de ataque de los perfiles y hasta aproximadamente el 25 % de la cuerda, el flujo sí disminuye su velocidad,sin embargo al alcanzar el 50 % de la cuerda, el flujo se ve fuertemente influenciado por la aceleración de las capas de flujo que están por encima de este y en consecuencia comienza el flujo a incrementar su velocidad conforme se aproxima a los bordes de salida. Es importante destacar que esta influencia o arrastre entre capas de fluido es el resultado de la acción de la viscosidad y de la presión. Por la condición de no deslizamiento impuesta para el caso de los álabes, la velocidad cambia en forma drástica en las cercanías de sus superficies y son estas regiones las que en mayor grado se resisten al paso del flujo de aire.

Las diferencias de velocidad y presión presentes hacia la salida de los perfiles es consecuencia del efecto aerodinámico de cada una de las superficies (el extradós acelera al fluido y el intradós lo frena) en conjunto con las fuerzas viscosas propician la formación y desprendimiento de vorticidades que serán arrastradas aguas abajo de la cascada, lo cual es evidente en las figuras 4.33, 4.33, 4.34, 4.35, 4.36, 4.37 y 4.38. Observando todos los pasajes de la cascada, figura 4.33 se aprecia que todos los pasajes tienen un comportamiento semejante, cabe destacar que el incremento de la velocidad atravś de los pasajes no solo es consecuencia del efecto de los extradós sino del conjunto intradós-extradós que los constituyen, una clara demostración de lo anterior se observa en la figura 4.33, en la cual el desempeño individual del extradós e intradós se muestra. En la figura 4.33(a) el intradós cumple con su función de desacelerar al fluido en la mayor parte de su superficie y acelerarlo mientras se aproxima hacia el borde de salida, por su parte en extradós figura 4.33(c) acelera al fluido en la primera mitad de su superficie y en la otra mitad hacia el borde de salida el fluido tiende a desacelerarse. Es importante recordar que nuestro interés principal está enfocado a la descripción y análisis de los fenómenos que suceden principalmente dentro de los pasajes de forman entre sí los perfiles, ya que esta simulación pretende representar el comportamiento de una cascada de álabes de una turbina en 2D, por ello los efectos del intradós correspondiente a perfil 1 y el extradós del perfil 5 resultan interesantes pero no son trascendentes en el análisis en general ya que no es posible ahora analizar por separado los efectos de cada una de estas superfices. Si bien de forma individual cada una actúa de acuerdo a lo ya descrito, en conjunto ambas superficies (extradós e intradós) deben poder interactuar combinando sus efectos, de ahí que los isocontornos de cada una de las propiedades del fluido para este tiempo t=0.2625s que es casi inmediatamente del comienzo de la simulación presenten un comportamiento no muy claro. Como se describirá más adelante, el efecto de un aparente choque entre los efectos de ambas superficies (extradós e intradós) dentro de los pasajes se amortiguará y todos los isocontornos junto con los campos de vectores velocidad será uniformes en los pasajes. Por lo que respecta al comportamiento de la densidad se observa que dentro de los pasajes en las regiones cercanas a los extradós casi a la mitad de sus superficies es donde se localizan los mayores gradientes de la densidad, es decir que en estas regiones el fluido sufre una compresión al igual que en las regiones de los intradós cercanos a los bordes de salida tal y como se muestra en la figura 4.33 donde ambas regiones tienden a juntarse, por lo que puede predecirse que con el paso del tiempo ambas regiones llegarán a unirse para formar una región mayor dónde al pasar el fluido por esta zona sufra una compresión.

En los isocontornos de presión figura 4.35 son más evidentes las diferencias e interacciones que causa la unión de dos superficies distintas (extradós e intradós) para formar un pasaje en la cascada de álabes de turbina. Tal y como se mencionó cada superficie al paso del fluido tiende a realizar su función para la cual fue diseñada, la cual inevitablemente provoca que en una cierta región dentro de los pasajes los efectos se encuentren, por ello en las figuras de los isocontornos dentro de los pasajes se aprecian ciertas líneas cuyo significado no es otro que ser los límites de acción dónde los efectos de cada una de estas superficies compiten.

El comportamiento de la temperatura por lo tanto indudablemente está influenciado por todos estos efectos, ver figura 4.36 de tal forma que las zonas de mayor compresión son las zonas en las que la temperatura es menor de todo el campo. Por su parte la entropía tiende a incrementarse en las regiones de vorticidad, las cuales están localizadas sobre las superficies de los perfiles y a la salida de estos.
El campo de vectores velocidad 4.40 permite apreciar las vorticidades a la salida de los perfiles, así como el incremento de velocidad que sufre la corriente a su paso por los pasajes , realizando una ampliación a la parte media de la cascada se distingue los efectos de la competencia en los pasajes de ambas superficies, al sobreponer sobre la figura 4.40 el campo de presión ampliado para esta misma región figura 4.39 se observa que en las líneas que dividen los efectos de los extradós e intradós el flujo tiende a desviarse según la influencia predominante, por lo que el fluido para este punto al pasar através de los pasajes no tiene una dirección precisa.
En el tiempo t=0.56625s la velocidad de la corriente dentro de los pasajes se ha modificado figura 4.41, hacia la entrada de los pasajes la velocidad de la corriente que para el tiempo anterior era menor ahora se ha incrementado. Por lo tanto ahora sí, el flujo entra por lo pasajes de la cascada con un número de mach de 0.3 lo que no ocurría en el tiempo anterior, ya que la corriente de flujo alcanzaba el M=0.3 pasando el primer tercio de la longitud de los pasajes aproximadamente. Sin embargo al comparar los resultados con el tiempo anterior el área que comprendía las regiones de gran velocidad se han reducido, de hecho para este tiempo t=0.56625s las regiones de mayor velocidad sólo se concentran cercanas a los extradós casi desde el borde de ataque hasta la mitad de sus superficie aproximadamente y después comienza a reducirse nuevamente. Las regiones de los intradós cercanas a los bordes de salida sí incrementan su velocidad pero no llegan en algún momento a igualar en magnitud a las velocidades alcanzadas sobre los extradós. Además para el tiempo anterior el comportamiento de los isocontornos de velocidad en todos los pasajes era muy parecido (no igual) sin embargo para este tiempo comienzan a notarse claras diferencias entre cada uno de los pasajes. En la parte media de la cascada figura 4.41(b) ambos pasajes no presentan grandes diferencias entre sí, pero al observar la parte superior de la cascada 4.41(a) el pasaje ha comenzado a parecerse menos a los otros, pues es éste pasaje el que presenta el mayor decremento de velocidad de la corriente. No así en el último pasaje figura 4.41(c), que preserva aún la similitud con respecto a los pasajes de la parte media de la cascada.
Las diferencias en el comportamiento de los pasajes entre la parte superior y la inferior con respecto a la parte media y a su vez entre ellos, depende de que al pasaje superior lo componen un perfil cuyo intradós está expuesto totalmente a la corriente libre sin que exista ninguna superficie o pared en sus cercanías, algo parecido ocurre con el pasaje inferior el cual lo constituyen un perfil cuyo extradós está también expuesto de la misma manera. Por lo tanto podemos esperar que los campos e isocontornos obtenidos para los pasajes superior e inferior se vean influenciados por el hecho de que su otra superficie no forme parte de otro pasaje y presente diferencias con respecto a los pasajes de la parte media de la cascada. Estas diferencias no sólo aplicarán a los isocontornos de mach sino a todas las otras propiedades del fluido incluyendo a los campos de vectores velocidad. Como la velocidad de la corriente con respecto al tiempo anterior ha disminuido ligeramente dentro de los pasajes, la densidad experimenta también una ligera disminución en el grado de compresión del fluido através de su paso por cada uno de los pasajes de la cascada, figura 4.42.
Los isocontornos de la presión al igual que lo descrito en el tiempo anterior, son el campo en el cual pueden apreciarse mejor los efectos que sufre el fluido al paso por los pasajes de la cascada, ver figura 4.43. Si para el tiempo anterior los efectos de los extradós dominaban el comportamiento y la dirección del flujo en el interior de los pasajes, para este tiempo t=0.56625s los efectos de los intradós no han disminuido, por el contrario han atenuado los efectos de los extradós. Como consecuencia está la disminución de la velocidad dentro de los pasajes que se observó en un principio, por lo tanto es de esperarse que en los siguientes tiempos el patrón de flujo que se obtenga sea más uniforme que el que hasta ahora se ha presentado.
Por otro lado la temperatura que depende fuertemente de la densidad modifica su comportamiento según ésta se altere por ello la temperatura que era menor para el tiempo anterior en las regiones de mayor compresión y por lo tanto menor densidad dentro de los pasajes ahora presentan un ligero aumento ver figura 4.44, originando que los gradientes comiencen a suavizarse para lograr en un tiempo posterior una temperatura más homogénea dentro de los pasajes de la cascada. Y la entropía experimenta a su vez un incremento principalmente alrededor de los perfiles, ver figura 4.45.

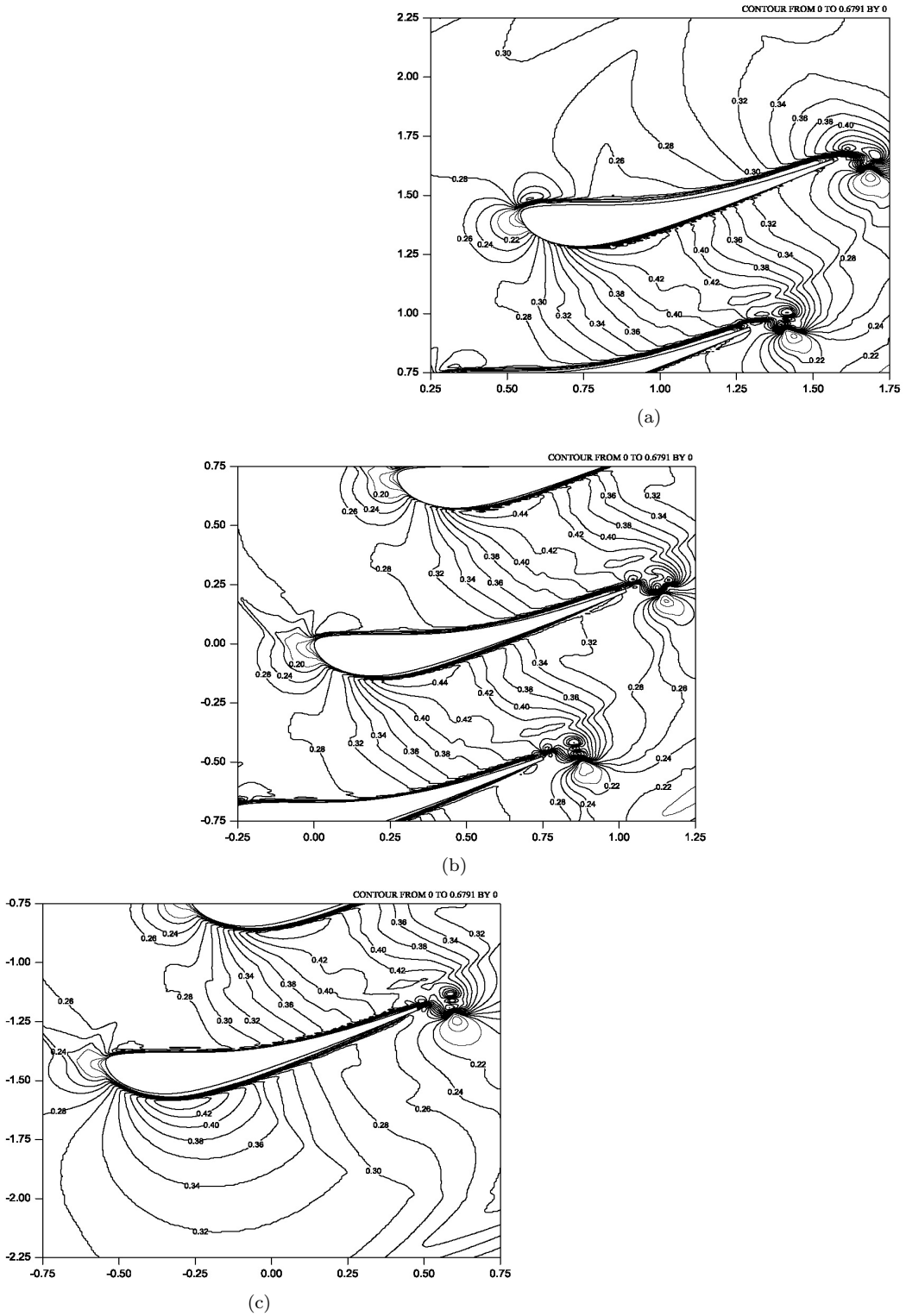


Figura 4.33: Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

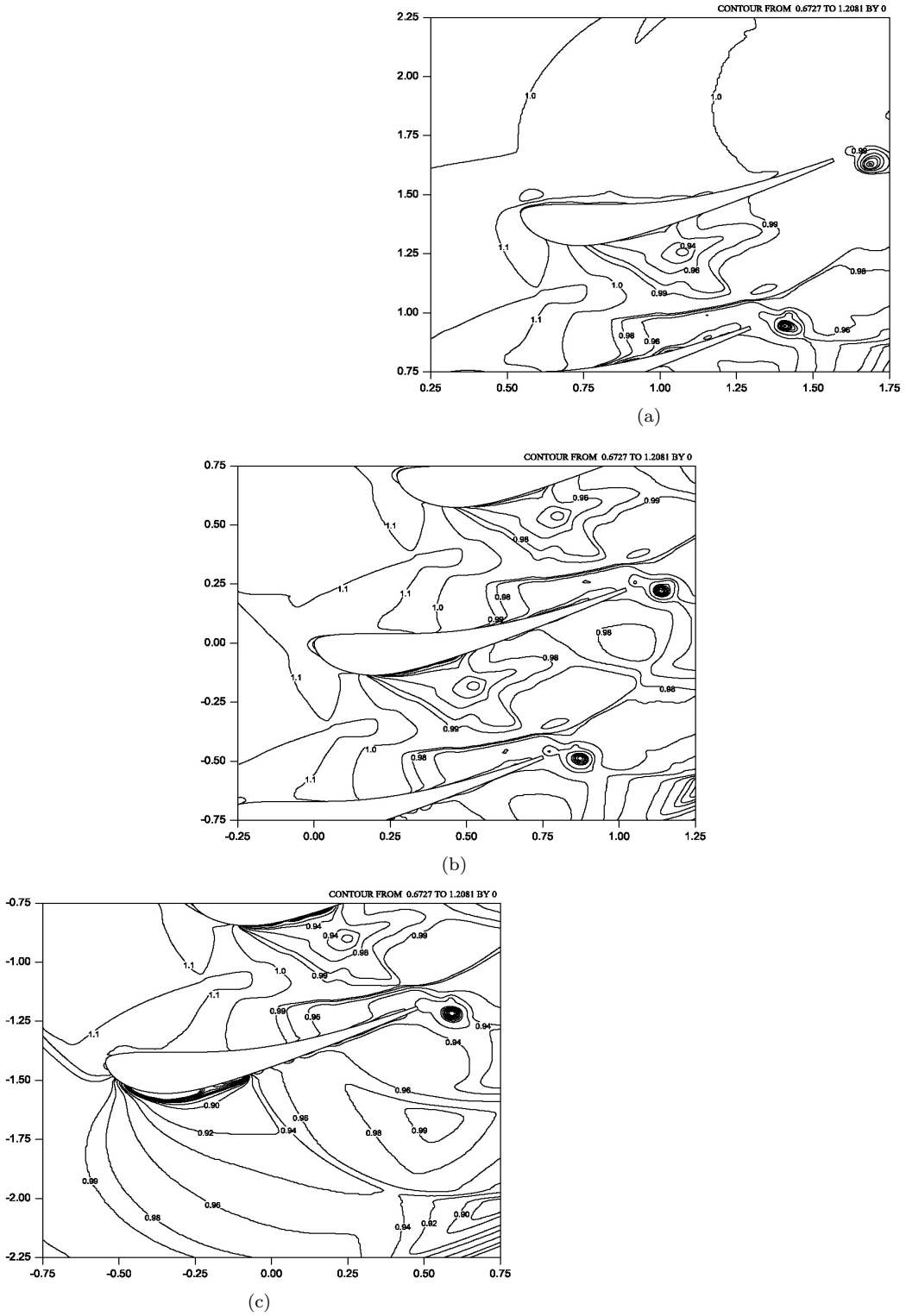


Figura 4.34: Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

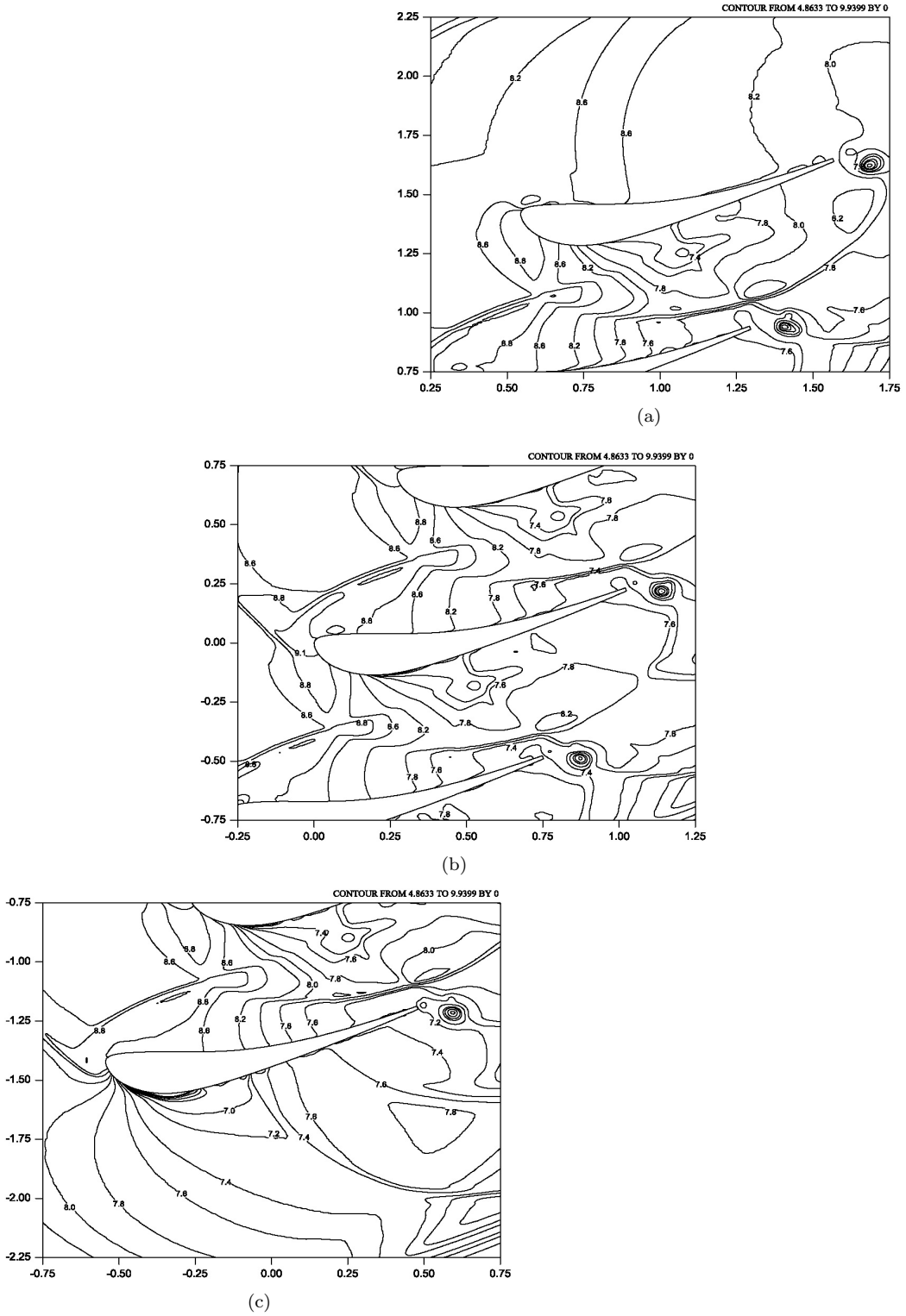


Figura 4.35: Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

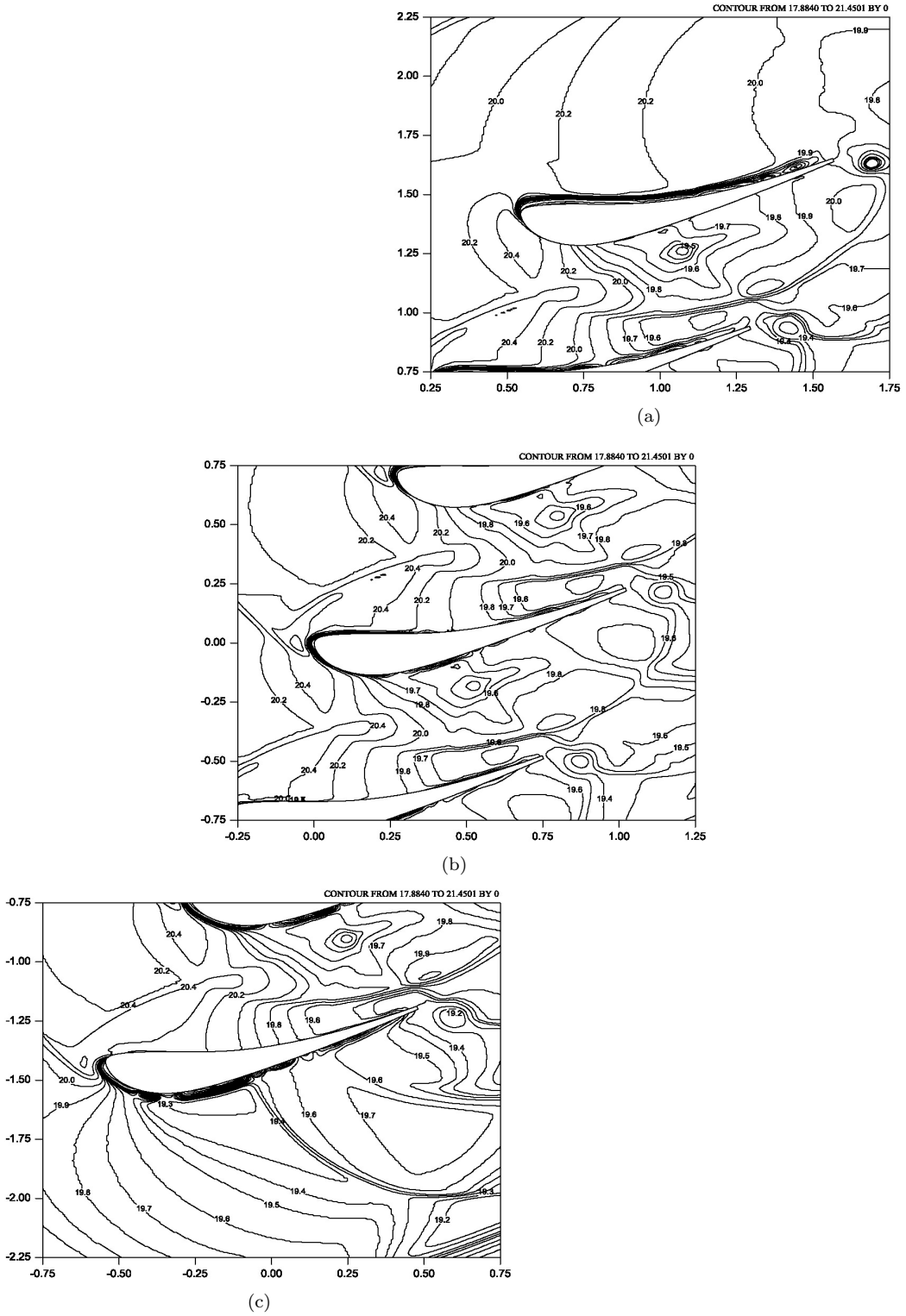


Figura 4.36: Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

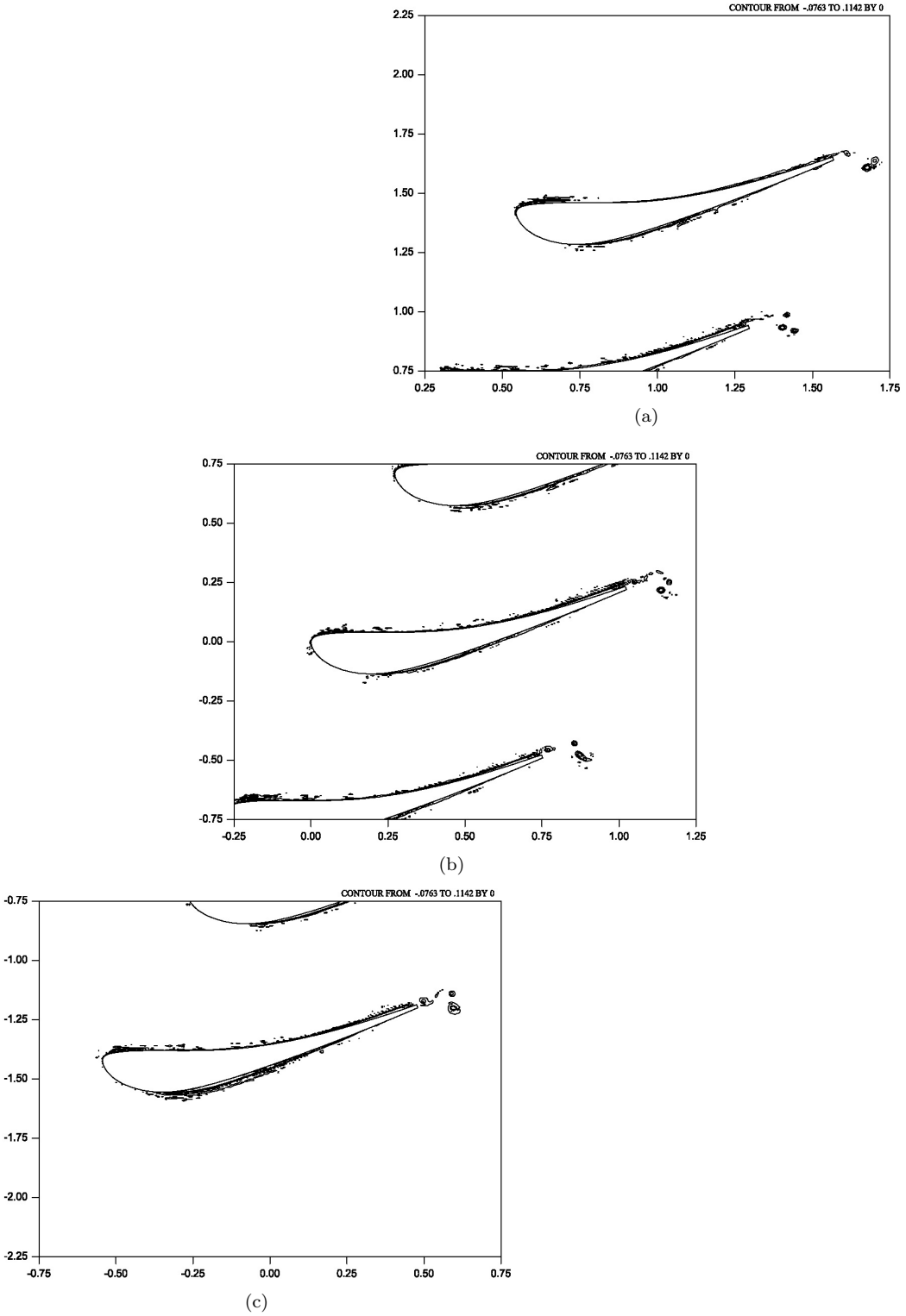


Figura 4.37: Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

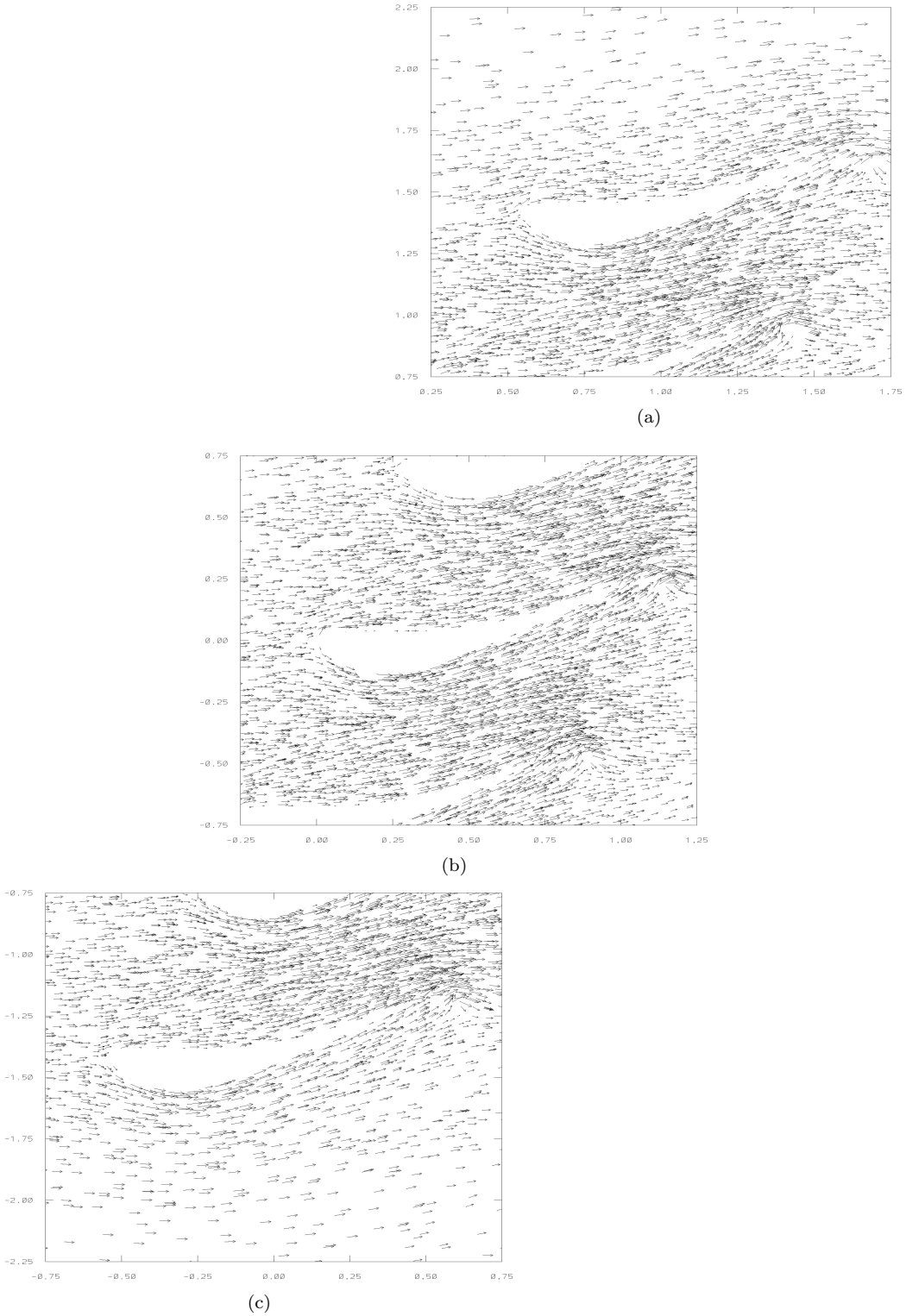


Figura 4.38: Campo de vectores velocidad para la cascada al tiempo t=0.2625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

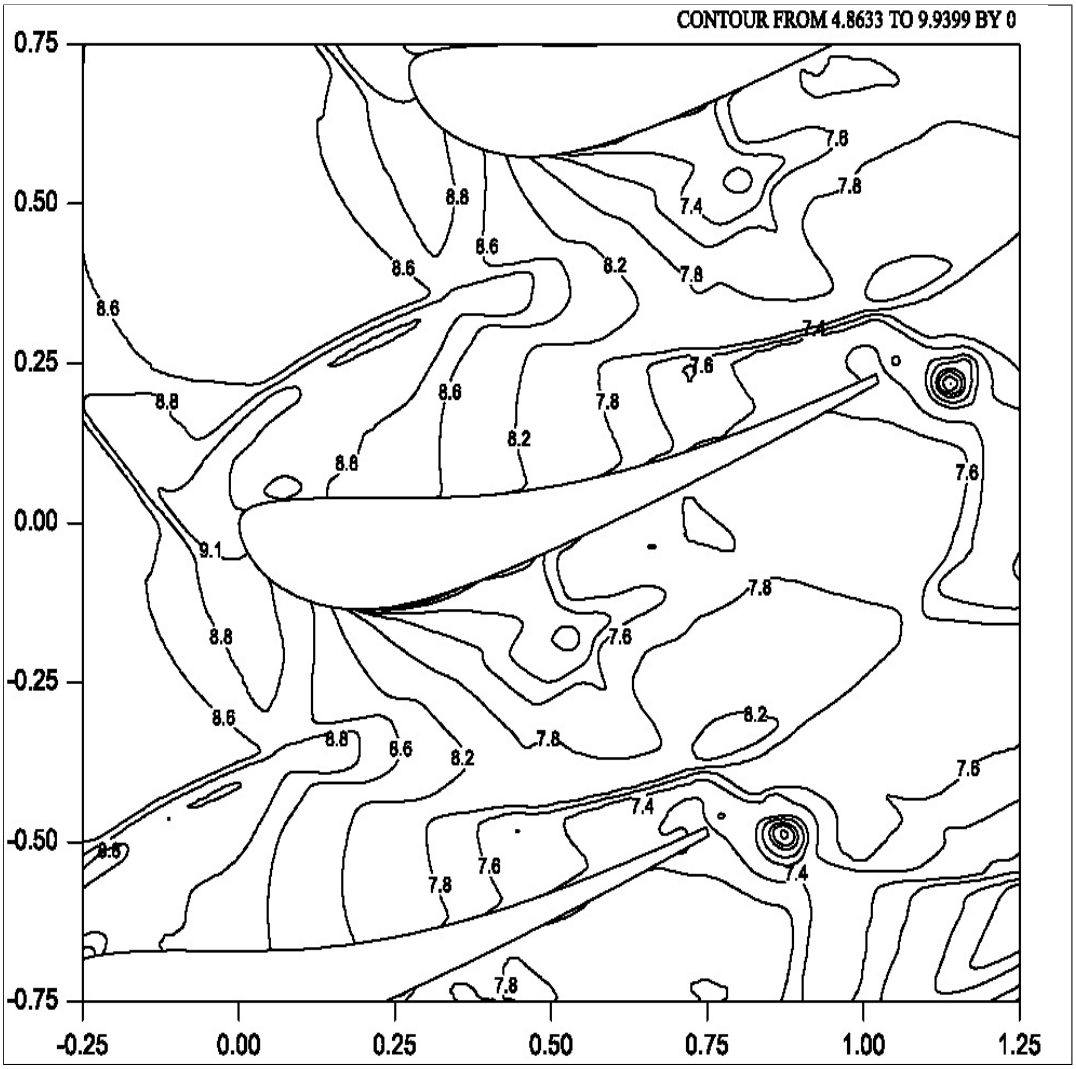


Figura 4.39: Ampliación de los isocontornos de presión correspondiente a la parte media de la cascada de álabes para el tiempo t= 0.2625s.

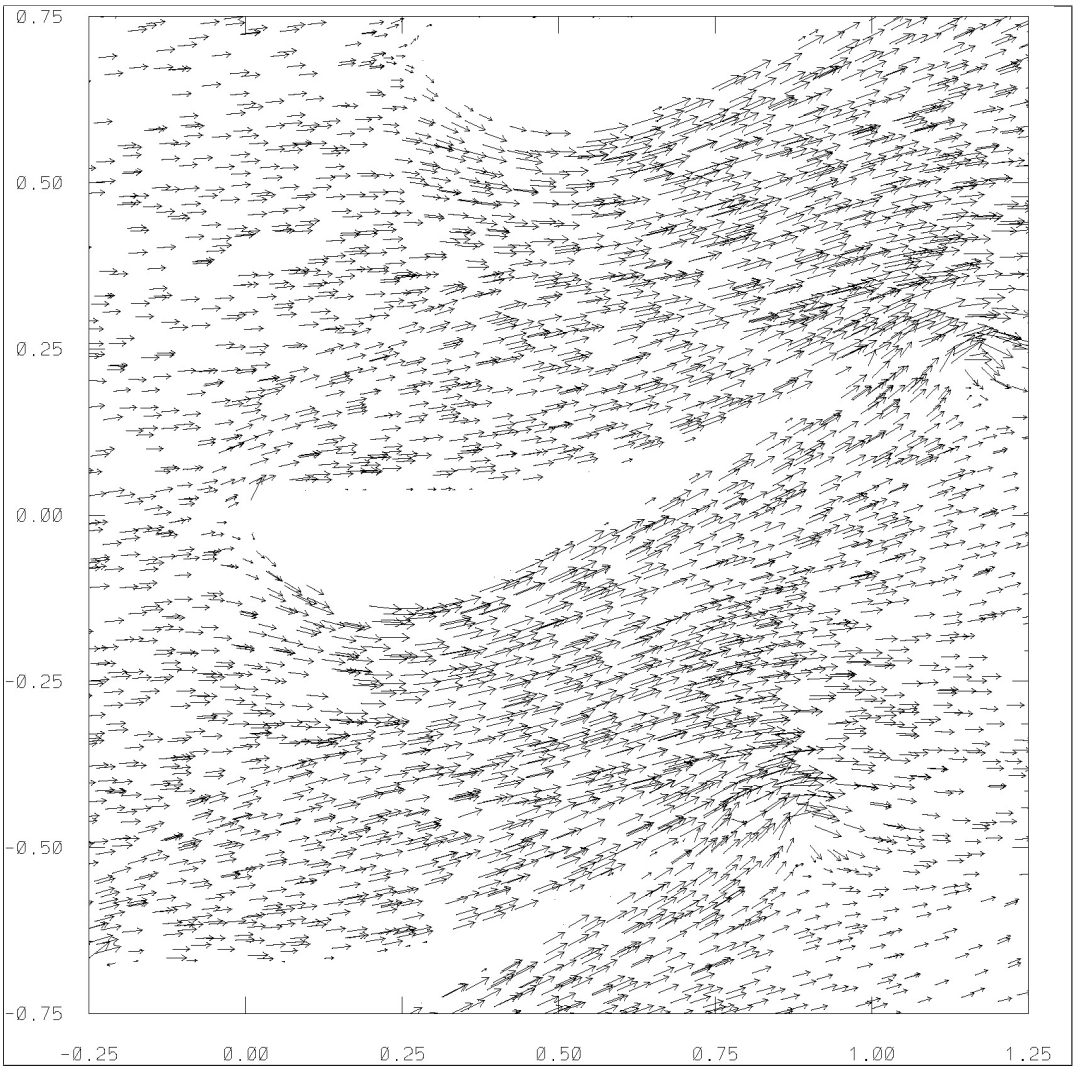


Figura 4.40: Ampliación del campo de vectores velocidad correspondiente a la parte media de la cascada de álabes para el tiempo t= 0.2625s.

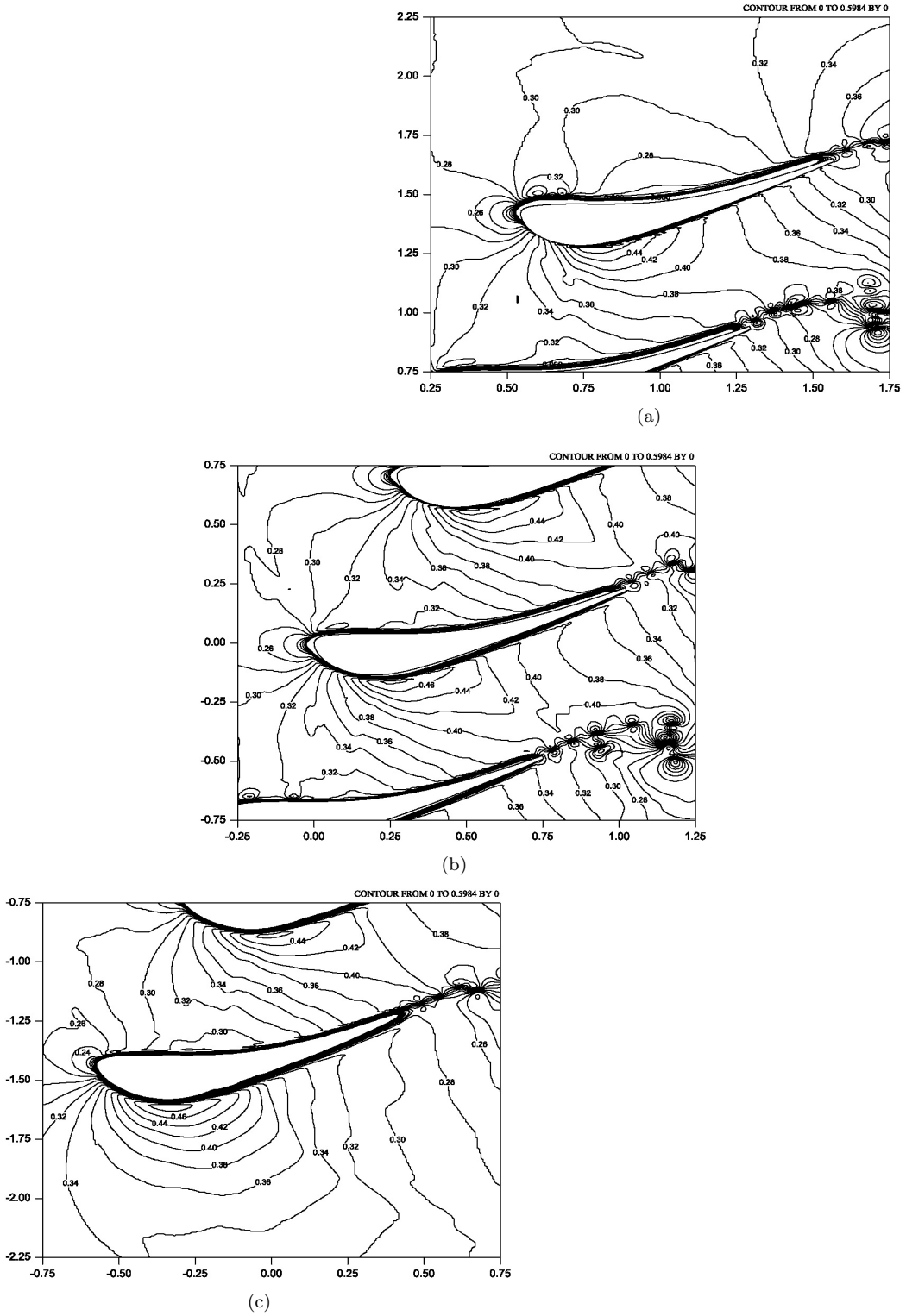


Figura 4.41: Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

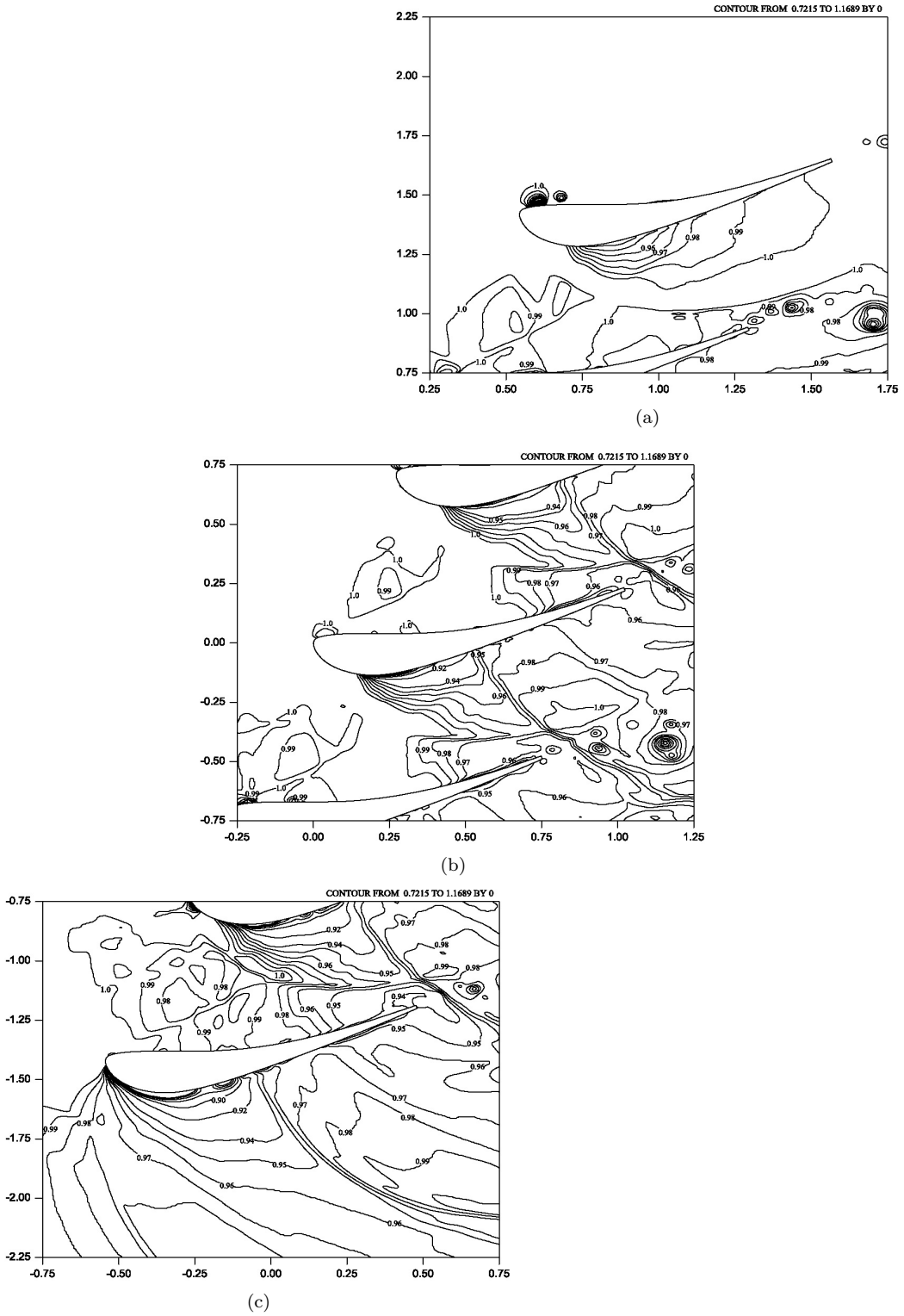


Figura 4.42: Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

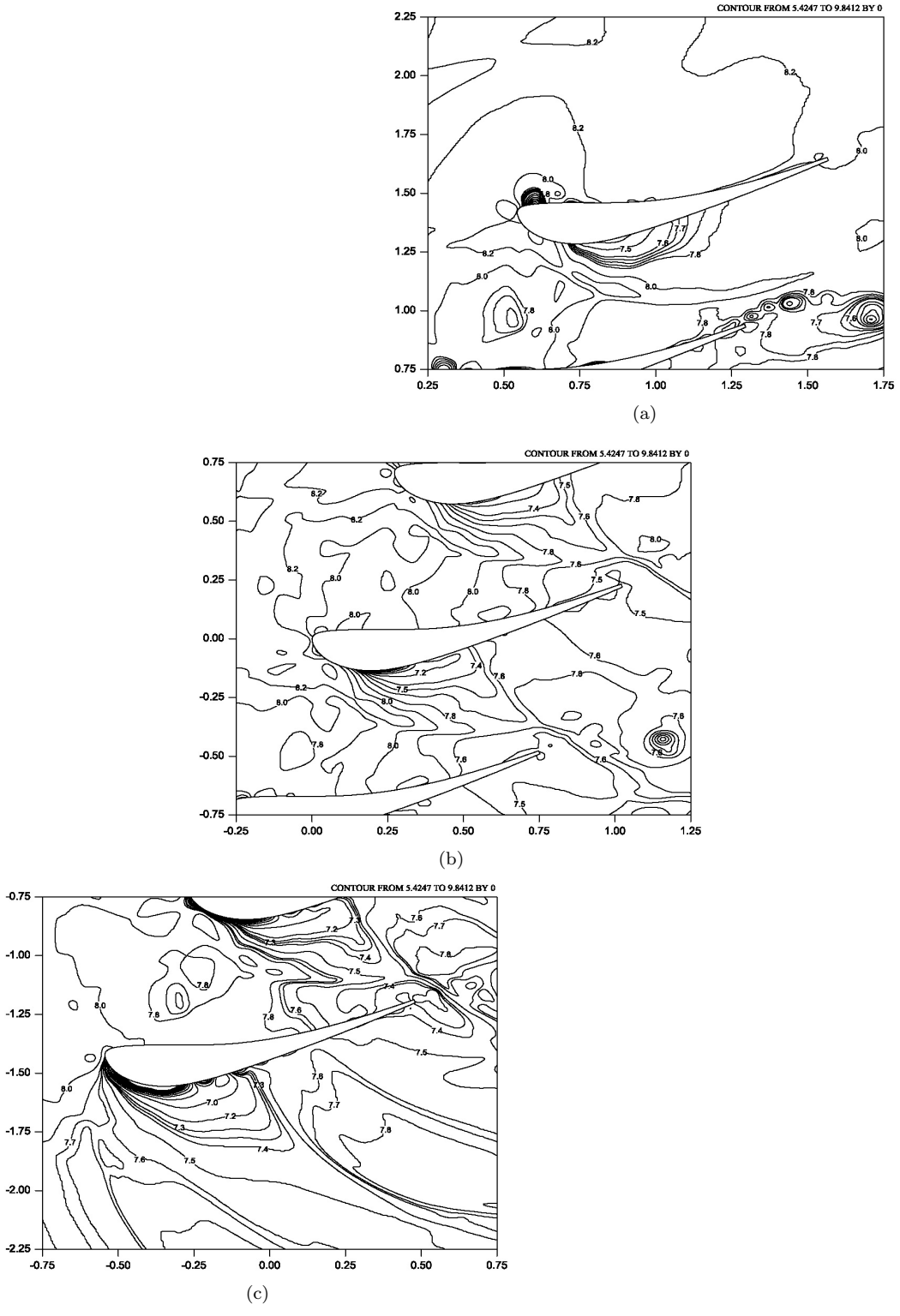


Figura 4.43: Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

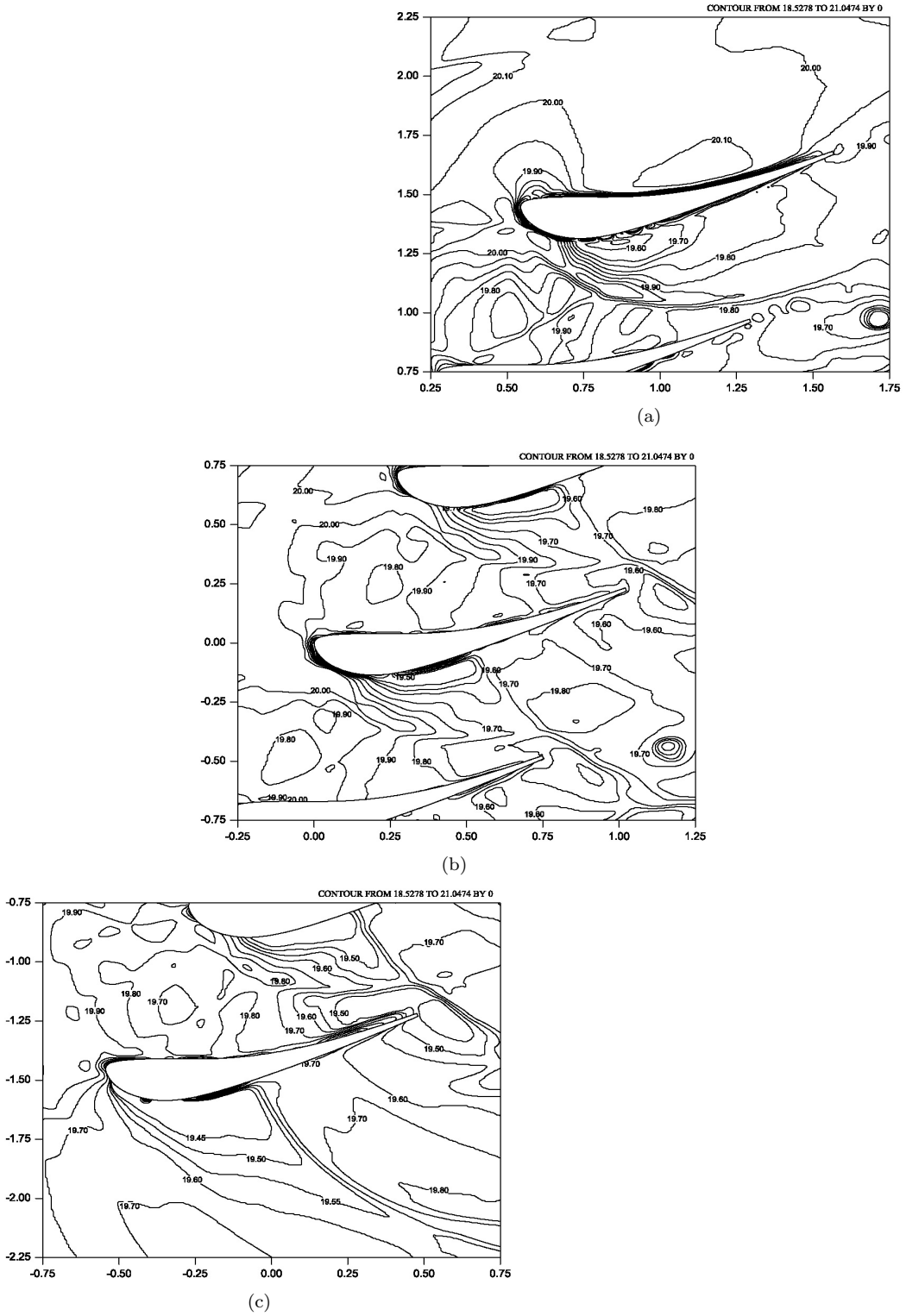


Figura 4.44: Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

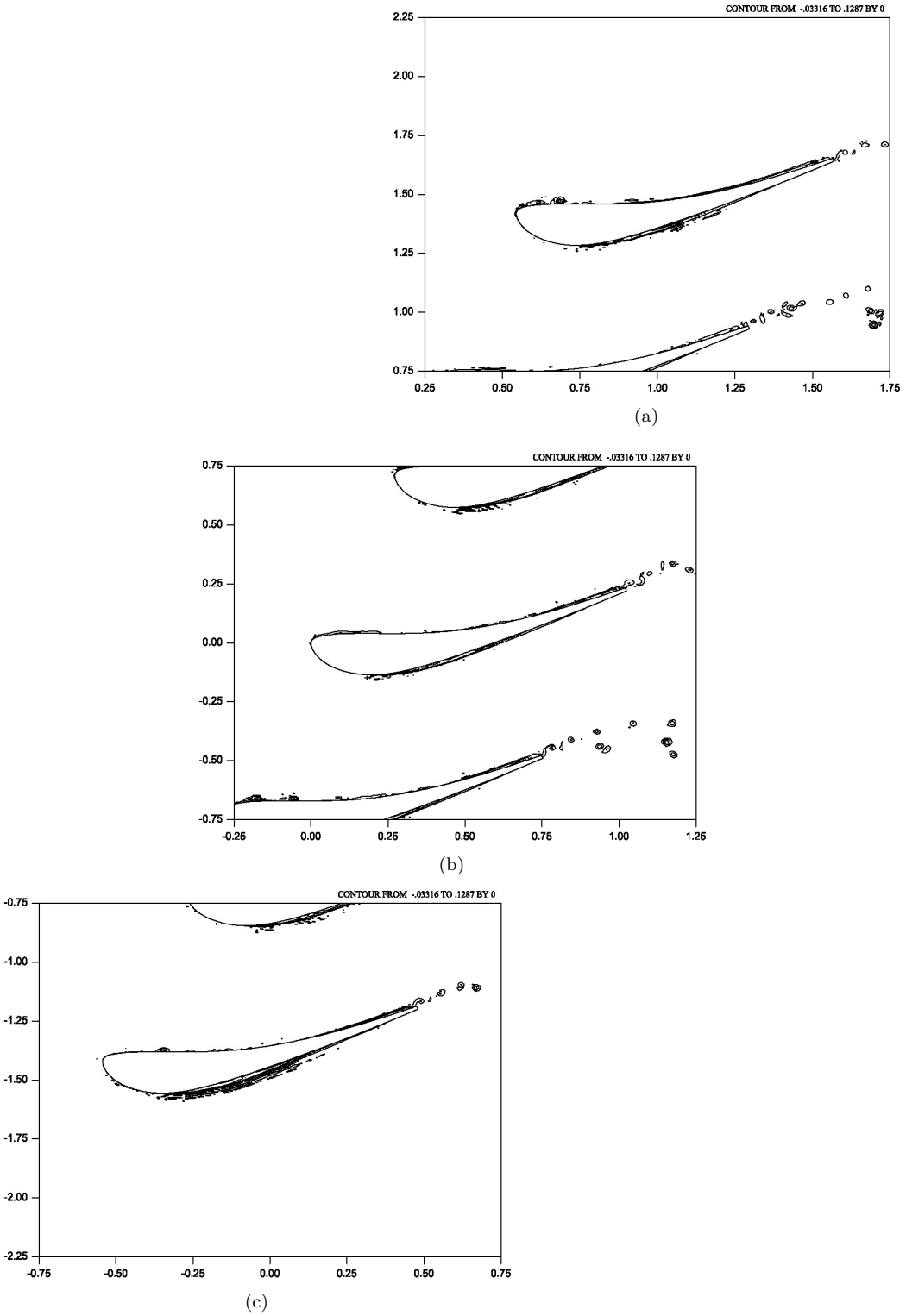


Figura 4.45: Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

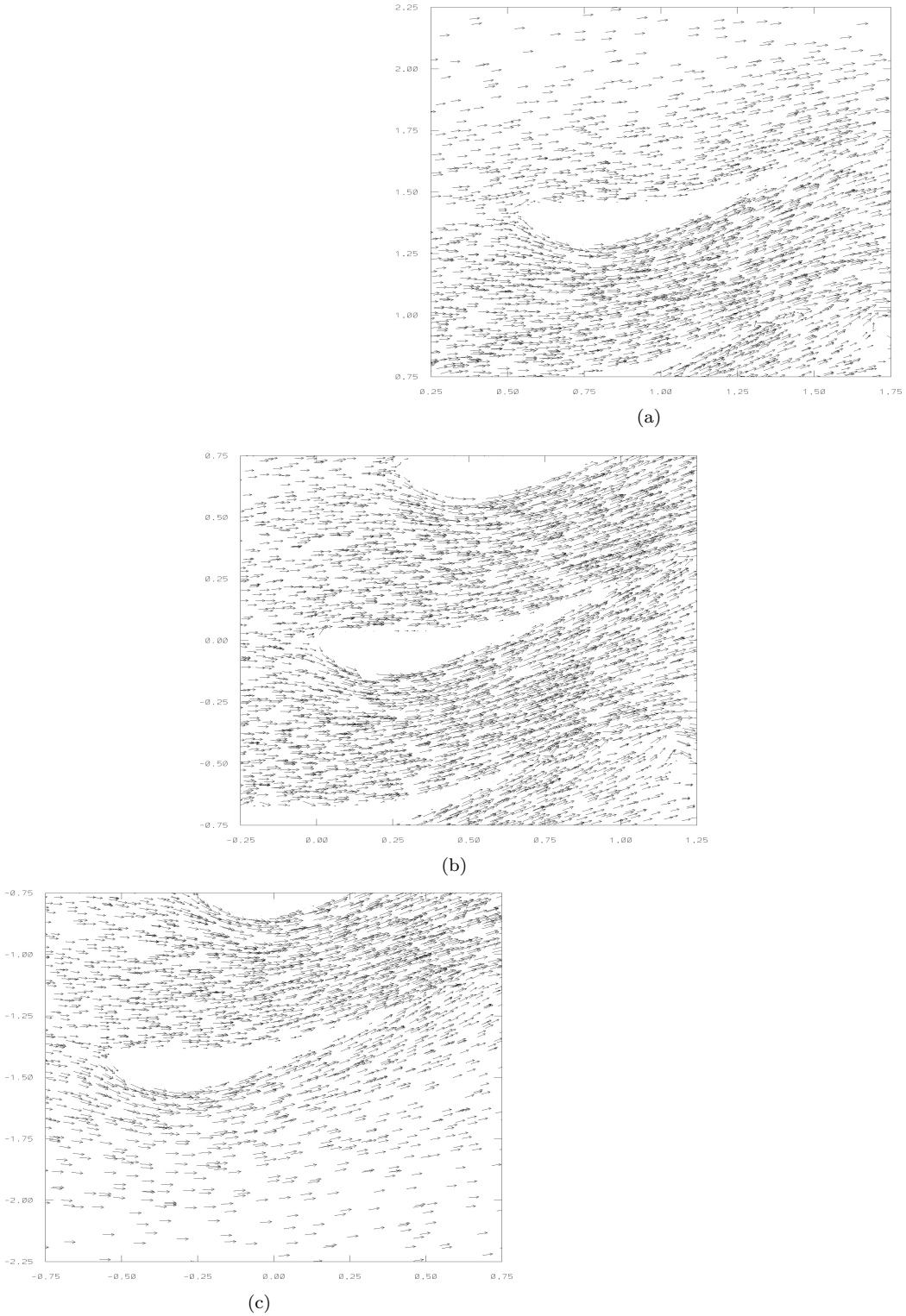


Figura 4.46: Campo de vectores velocidad para la cascada al tiempo t=0.56625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

Nuevamente para el tiempo t=1.51125s los isocontornos correspondientes al número de mach figura 4.47nos muestran que la velocidad de la corriente hasta un poco antes de la entrada a los pasajes de la cascada ve reducida nuevamente su magnitud alcanzando el M=0.3 una vez dentro, conforme el fluido se desplaza por el interior de los pasajes se va acelerando de una forma más gradual que en tiempos previos. Para este tiempo la disputa por dominar el comportamiento de la corriente de flujo através de los pasajes entre los intradós y los extradós se ha definido finalmente y son los efectos de los extradós los que determinan el comportamiento del flujo en la mayor parte de los pasajes logrando así la uniformidad de la aceleración del fluido en todas las cavidades por lo tanto también los gradientes de presión se han suavizado dando como resultados isocontornos más definidos con los cuales se aprecia los cambios de presión gradual que se tiene dentro de las cavidades tal y como se muestra en la figura 4.49. Esta uniformidad en la aceleración de la corriente logra mantener unidos a los vórtices que se desprenden de los bordes de salida de los perfiles induciendo la formación de en apariencia una cadena de vórtices los cuales mantienen la dirección de salida de la corriente y además una magnitud semejante. Las vorticidades no solo están presentes a la salida de los perfiles sino también comienzan a ser más evidentes alrededor de sus perímetros. El número de mach dentro de la mayor parte de los pasajes mantiene un rango que oscila entre M= 0.28 y M=0.36, y si bien no existe un exacto parecido entre los isocontornos de cada cavidad, el rango de velocidad en las tres últimas cavidades se mantiene.
En la parte superior de la cascada figura 4.47(a), observamos que en el intradós del primer perfil las vorticidades sobre éste son mayores localizándose principalmente en la región de mayor curvatura, lo cual provoca que la velocidad de la corriente sobre el intradós se reduzca lo que a su vez afecta el desprendimiento de las vorticidades hacia el borde de salida del perfil causando que éstas no tengan la fuerza suficiente para mantenerse unidas tal y como sucede en los otros perfiles. Algo similar ocurre en la parte inferior de la cascada figura 4.47(c), ahí el extradós de último perfil presenta un incremento de velocidad mayor que en los tiempos previos a lo largo de la primera mitad de su longitud y en la otra mitad disminuye fuertemente como consecuencia de los gradientes de presión adversos que se tienen precisamente en este punto, ver figura 4.49(c) por lo que hacia la salida del perfil la velocidad es menor comparada con la velocidad que se tiene sobre los vórtices, es decir la velocidad a la salida del último pasaje lo que provoca que los vórtices no se mantengan tan unidos y evita además que formen un patron de cadena compacto como lo que sucede en los otros tres perfiles. Se observa entonces que las altas velocidades a la salida de los pasajes intermedios de la cascada son los que mantienen las vorticidades que de ellos se desprenden conjuntos y en la dirección de la corriente marcada por la curvatura de los perfiles.
Los isocontornos de la densidad dentro de los pasajes aún no muestran para este tiempo una completa uniformidad como en el caso de los isocontornos de mach, sin embargo lo que sí es evidente en las figuras 4.48(a), 4.48(b) y 4.48(c) es la compresión que sufre el fluido al pasar através de las cavidades de la cascada, pero esta compresión no es de la misma magnitud en todas las cavidades obviamente porque la velocidad de la corriente no es la misma en todas ellas como se describió anteriormente. Por lo que el campo de densidad debió verse afectado principalmente en las regiones y sus alrededores dónde se presenta dicho decremento de velocidad, lo cual se comprueba al observar la figura 4.48(a) en donde la región dentro del pasaje en la que se presenta la compresión es la parte de mayor curvatura sobre el extradós, no obstante la compresión no resulta ser lo suficientemente considerable y mantener su influencia en todo el pasaje, como resultado se tiene que a la salida de la cavidad el fluido se recupera y su densidad vuelve a ser la que tenía a la entrada del pasaje. De tal forma que este pasaje no es efectivo para este tiempo ya que la función para la cual fue diseñado que es comprimir al fluido no se llevó a cabo. No debemos excluir sin duda el hecho de que la falta de efectividad de este pasaje (pasaje superior) no es sino el resultado de la influencia de tener al intradós del primer perfil aislado de la influencia de alguna otra superficie. El régimen de compresión que presentan el fluido dentro de los siguientes 2 pasajes (pasajes medios) ver figura 4.48(b) es muy parecido entre ellos, no así el último pasaje que presentan también sus diferencias. Al observar la figura 4.48(c) se estima que el fluido aquí sufre la mayor compresión de este tiempo la cual se mantiene uniforme en casi todo el pasaje lo que no sucede en ninguna de las otras cavidades, siendo este el resultado de la influencia del solitario extradós que se tiene al final de la cascada. Finalmente los isocontornos correspondientes a la temperatura también se han afinado comportándose dentro de los pasajes según el comportamiendo de la densidad descrito anteriormente. Las zonas de mayor compresión presentan menor temperatura por lo tanto el último pasaje de la cascada es el que

presenta los mayores gradientes de temperatura y en consecuencia el más frío, mientras que para el primer pasaje aún cuando éste se consideró ineficaz en su función de comprimir al fluido, la temperatura sí disminuye al pasar por el interior tal y como se observa en la figura 4.50(c). La entropía continúa aumentando sobre todo alrededor de los perfiles y a la salida de estos, con lo cual cabe destacar que la entropía aumenta conforme la vorticidad crece tal y como se advierte en la figura 4.51.

Para el siguiente tiempo t=1.79625s, la velocidad sobre la primera mitad del intradós del primer perfil disminuye ligeramente y en la segúnda mitad hacia el borde de salida la velocidad aumenta lo que causa que la cadena de vórtices que se desprende de él se vuelva más compacta como la del segundo perfil, ver figura 4.53(a). El tercer y cuarto pasaje también sufren un ligero decremento en la velocidad hacia la salida de las cavidades lo que indica que la presión que mantenía en un tiempo previo a los vórtices conjuntos y con una misma magnitud ha disminuido por lo que ahora los vórtices tienden a dispersarse, ver figura 4.53(b). Para la última parte de la casacada, figura 4.53(c) no existen cambios considerables dentro del pasaje con respecto al tiempo anterior, no así el extradós del último perfil que presenta el desprendimiento de un vórtice mayor sobre el extradós del último perfil cercano al borde de salida, causado por la existencia de un gradiente de presión adverso que para un tiempo anterior ya denotaba su presencia, ver figura **??**. Además para este tiempo los iscontornos de presión dentro de las cavidades se han afinado y los incrementos en el interior son graduales tal y como lo demuestra la figura 4.55. Los isocontornos de la densidad para el caso de la parte superior figura 4.54(a) de la cascada sufren una modificación, se había descrito que para el tiempo anterior el primer pasaje de la cascada era ineficaz y continúa siendólo en este tiempo sólo que mientras que en el tiempo previo la zona de compresión del flujo se extendía desde el extradós hacia el intradós, es decir todo el pasaje, ahora los efectos del extradós son mucho menores provocando que sólo una pequeña región localizada sobre su máxima curvatura presente una disminución en su densidad, pero no lo suficiente fuerte como para influir toda la cavidad, por lo que para el tiempo t=1.79625s el flujo no presenta ninguna compresión considerable al atravesar el pasaje. Los pasajes localizados en la parte media figura 4.54(b)de la cascada continúan realizando la función de comprimir al fluido a su paso através de ellos como en el tiempo anterior, y los cambios que se presentan resultan poco considerables de un tiempo a otro, solo un muy ligero decremento. Por otro lado en la parte inferior de la cascada la compresión ha disminuido ligeramente y sobre el extradós del último perfil se aprecia con mayor claridad la existencia del vórtice mayor que está presente ya cercano al borde de salida del perfil, ver figura 4.53(c). En el caso de los isocontornos de la temperatura figura 4.56, reflejan con mayor efectividad los cambios que se llevan a cabo dentro de los pasajes de la cascada ya que muestran un incremento de temperatura dentro de todas las cavidades, lo cual indica que la compresión del fluido ha disminuido en su interior como resultado del decremento en la velocidad de la corriente de flujo que previamente se describió. La entropía para este tiempo ha disminuido ligeramente sobre todo en las zonas donde están localizadas las vorticidades consecuencia de la baja de temperatura a la salida de los pasajes con excepción del último extradós, parte inferior de la cascada figura 4.57(c), la cual muestra el incremento de la entropía sobre la superficie como consecuencia del desprendimiento del vórtice mayor sobre ésta. Los isocontornos de la entropía además permiten apreciar la influencia del decremento de la velocidad dentro y a la salida de todos los pasajes de la cascada através de la entropía generada por la existencia de las vorticidades hacia los bordes de salida de los perfiles. En la parte superior de la cascada figura 4.57(a) es decir los 2 primeros perfiles la entropía en los vórtices es menor comparada con la parte media, figura 4.57(c) que muestran los vórtices generados por los perfiles 3 y 4, y finalmente en la parte inferior es decir en el último perfil la entropía en los vórtices es mayor que las otras dos partes, ver figura 4.57(c). Por lo tanto para este tiempo de simulación t=1.79625s la velocidad en el interior de los pasajes va en aumento desde la parte superior a la parte inferior de la cascada. Las diferencia existentes entre los campos de los vectores velocidad entre un tiempo previo y este tiempo son casi imperceptibles para las dos primeras partes de la cascada la cuales como se ha mencionado presentan un muy ligero decremento en la velocidad, sin embargo en la parte inferior de la cascada es posible comprobar la existencia e influencia de este decremento en la velocidad si bien no dentro de la cavidad sí en el extradós del último perfil, en el cual se aprecia la existencia de los 2 vórtices; uno pequeño localizado casi a la mitad de la superficie y un segundo vórtice de mayor tamaño hacia el borde de salida, figura 4.57(c).

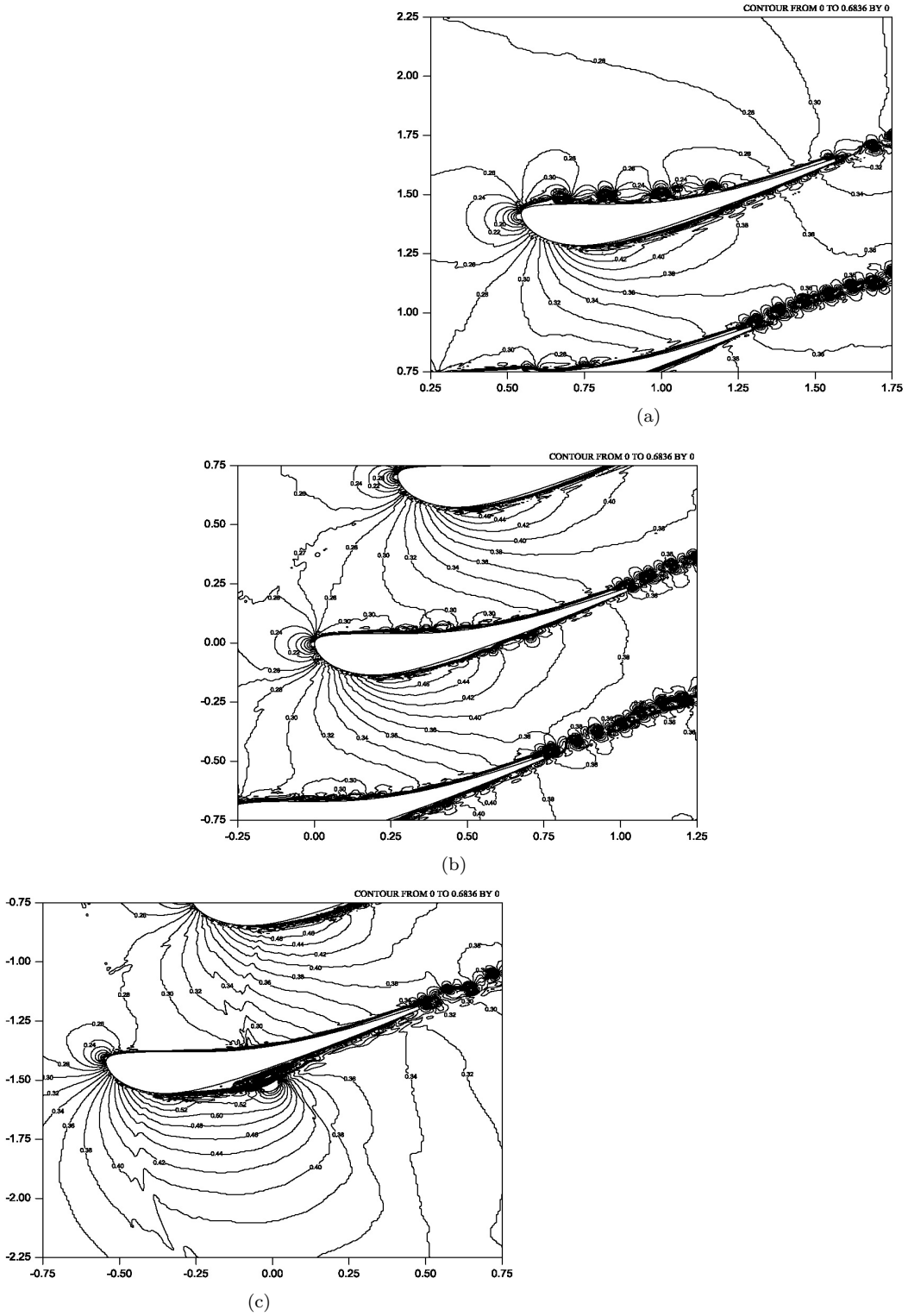


Figura 4.47: Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

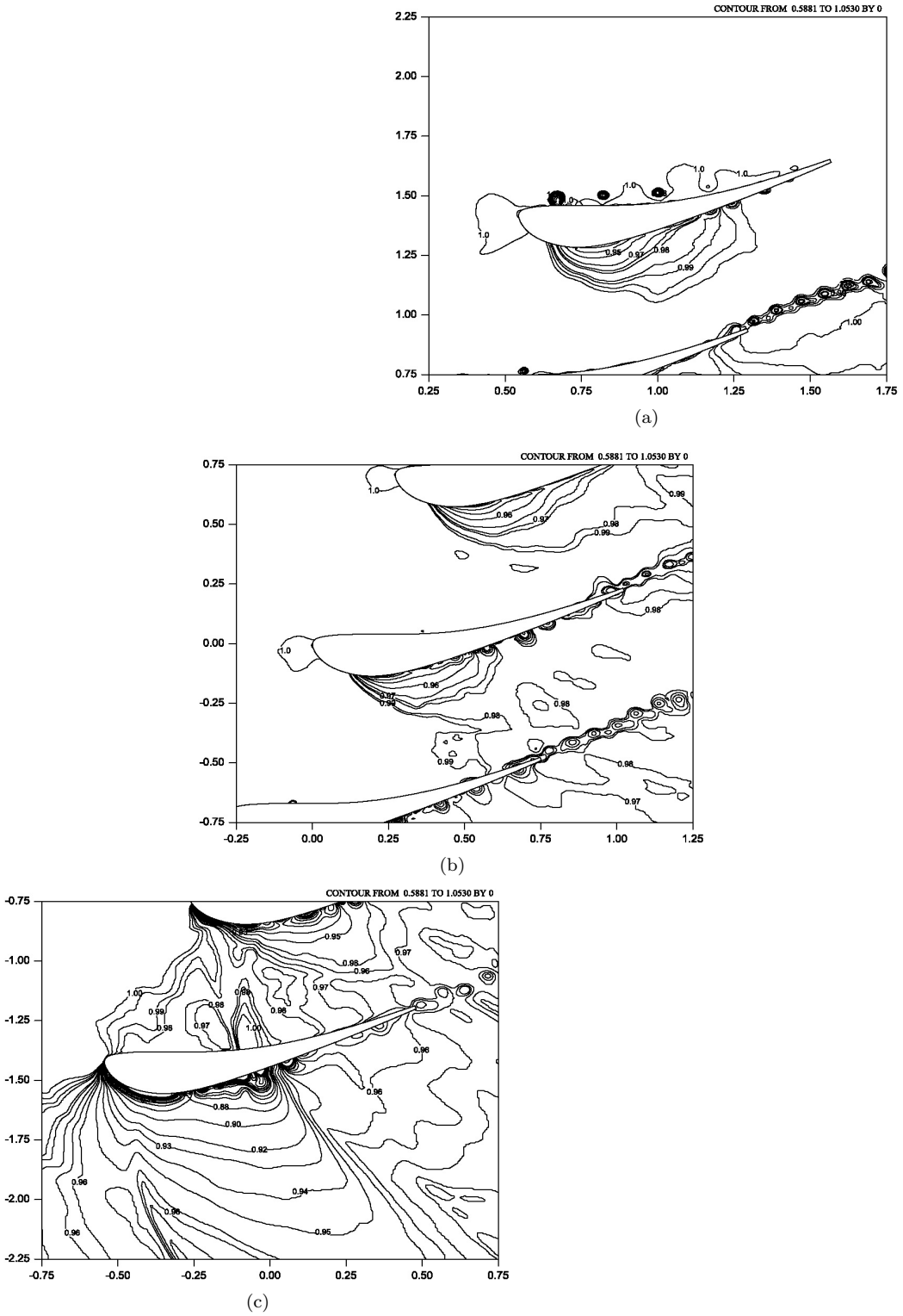


Figura 4.48: Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

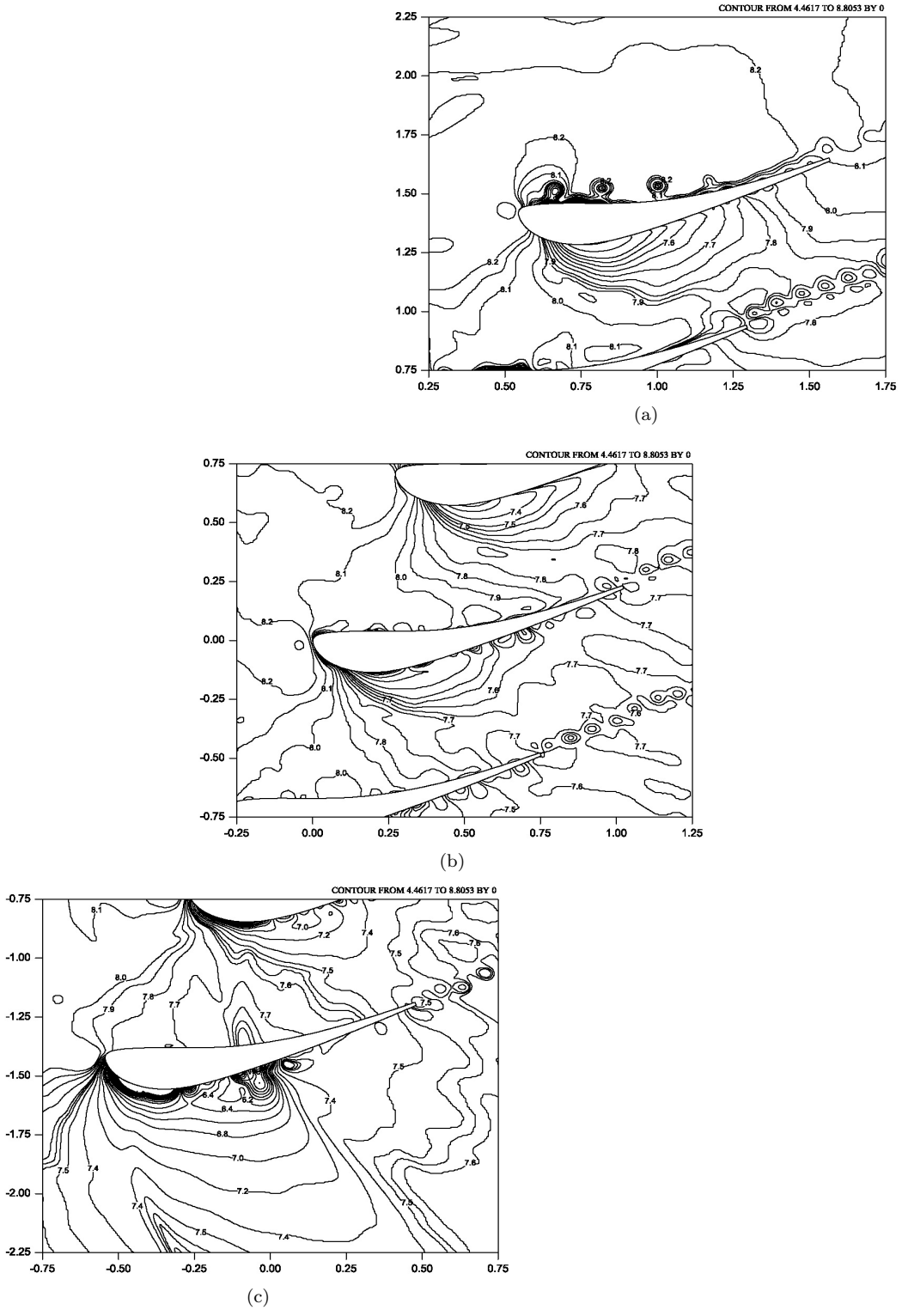


Figura 4.49: Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

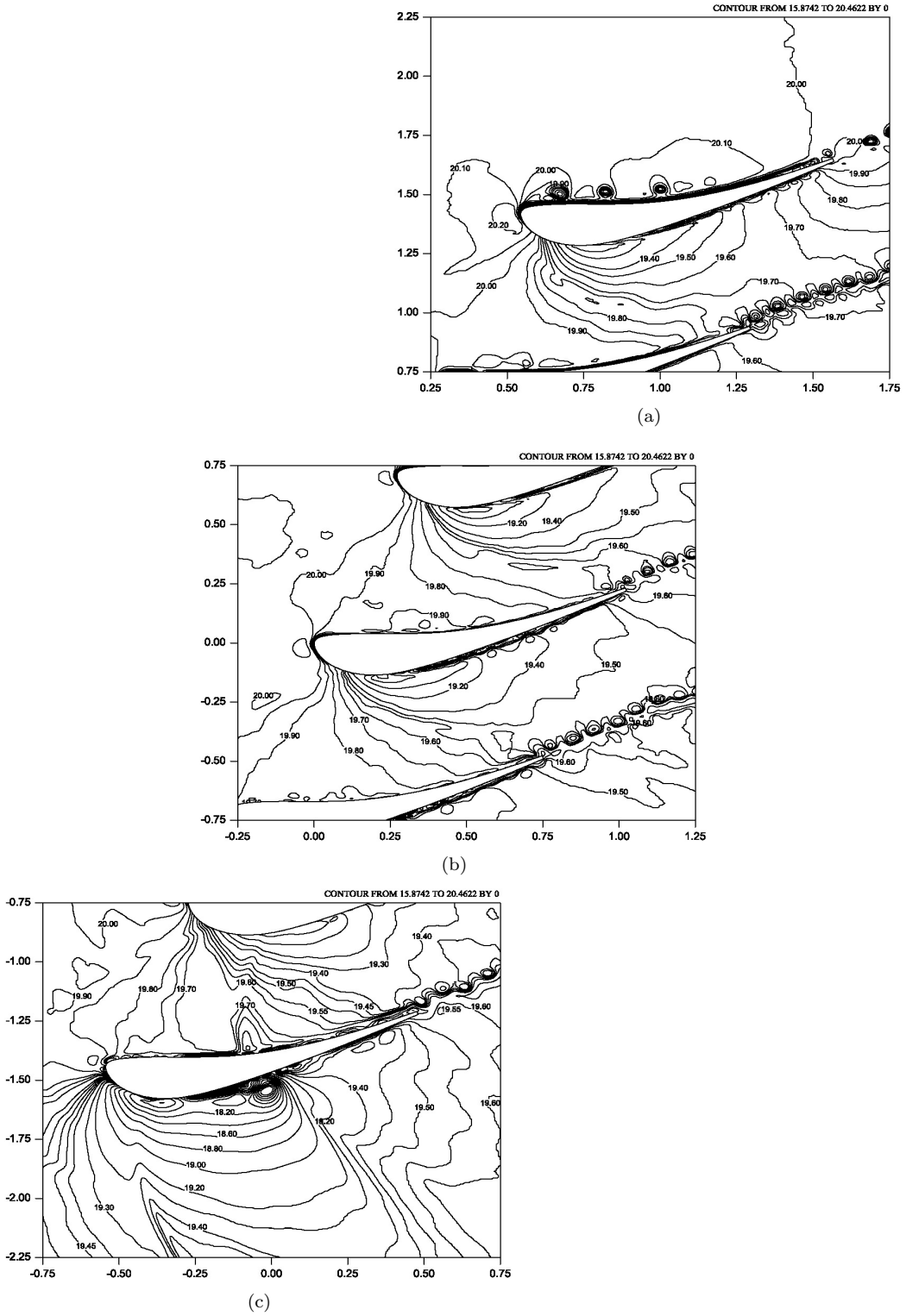


Figura 4.50: Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

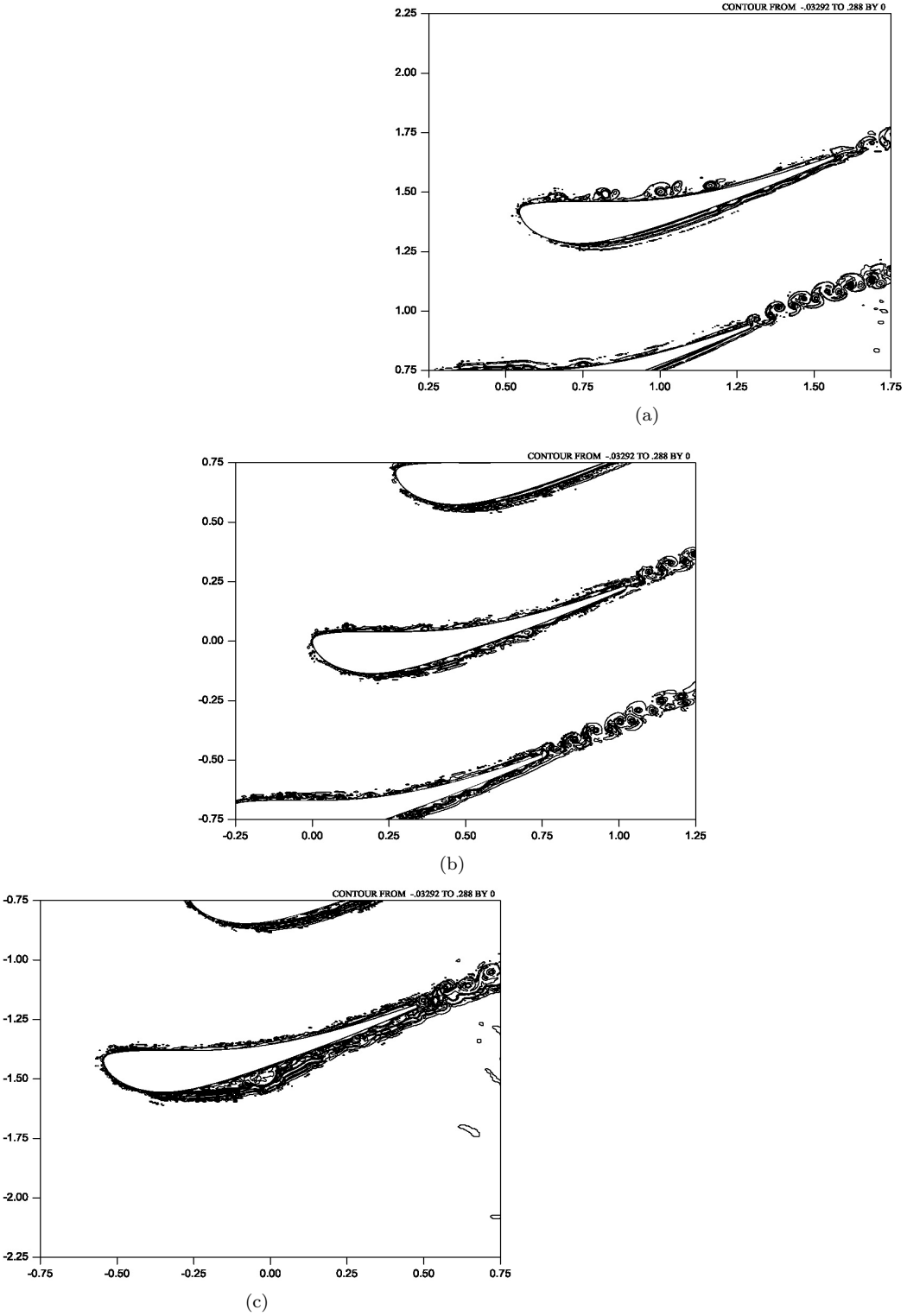


Figura 4.51: Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

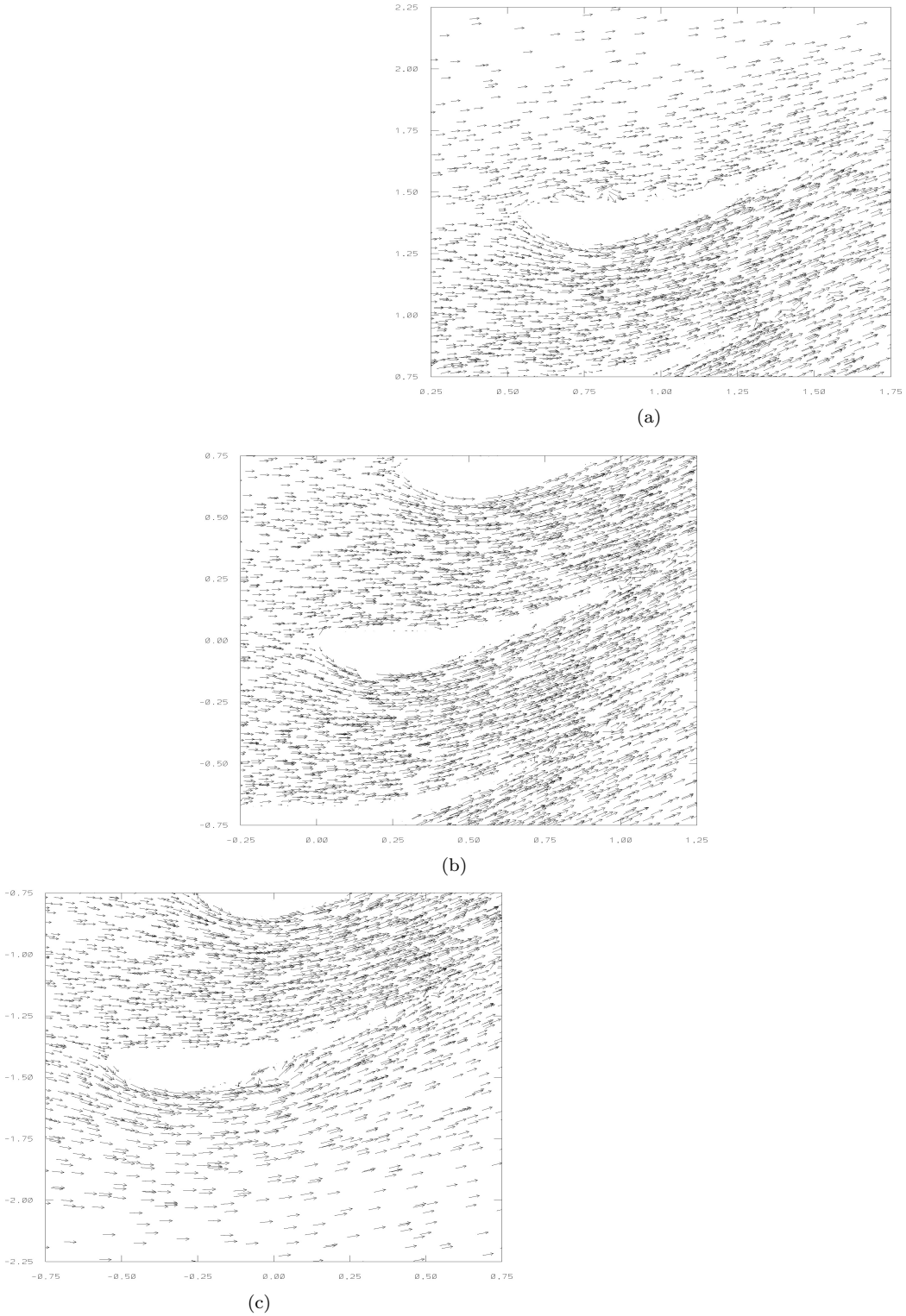


Figura 4.52: Campo de vectores velocidad para la cascada al tiempo t=1.51125s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

Hasta ahora el flujo a su paso por la cascada ha mostrado un comportamiento que va desde una gran compresión en los primeros segundos de simulación, un siguiente período donde la compresión dentro de los pasajes se mantiene casi sin variación y tiempo después comienza la etapa en la que la efectividad de los pasajes al comprimir el fluido comienza a descender, y continúa así. Esto sucede para el tiempo t=2.21625s en el que los isocontornos de mach vuelven a mostrar un nuevo descenso en la magnitud de la velocidad y como consecuencia un incremento en la presión en el interior de todos los pasajes, ver figuras 4.59 y 4.61 comparados con el tiempo anterior. Esto puede verificarse al observar el comportamiento de los vórtices que se desprenden de los perfiles, en el tiempo anterior ya comenzaban a dispersarse con excepción de los que se desprendían del segundo perfil y que aún se mantenían conjuntos, para este tiempo todas las cadenas de vórtices muestran dispersión, la cual se aprecia mejor en la figura 4.59. El cambio en la densidad es casi imperceptible los isocontornos figrua 4.60 muestran pocas diferencias entre un tiempo y otro, lo mismo que los isocontornos de la temperatura figura 4.62 cuya variación también es mínima y en consecuencia la entropía también disminuye ligeramente, ver figura 4.63. Los cambios sin embargo son notorios sobre todo en las figuras de los isocontornos correspondientes a la parte inferior de la cascada principalmente, el extradós del último perfil muestra los efectos de los pequeños cambios en la velocidad del campo mostrando el desprendimiento de los vórtices generados sobre su superficie que han aumentado en número y que además se aprecian claramente en el campo de los vectores velocidad figura 4.64(c) donde se ve cómo sobre el extradós existe una serie de vórtices distribuidos desde la parte media hacia el borde de salida del último perfil. Los campos de vectores velocidad correspondientes a las otras dos partes de la cascada (media y superior) que también sufren una ligera modificación no resulta tan perceptible a simple vista, sin embargo através de los isocontornos de las propiedades del fluido es posible notar esos cambios.

Finalmente también para esta simulación al igual que la obtenida para el perfil NACA4420 se obtuvieron los resultados de los coeficientes de resistencia al avance (Cd) y el coeficiente de sustentación (Cl), pero en este caso a diferencia de tener un solo perfil, la cascada la componen 5 perfiles, por lo tanto ambos coeficientes (Cd y Cl) obtenidos para este simulación son coeficientes promedio correspondiente a un solo perfil de las cascada. El objetivo de mostrar el comportamiento de cada uno de estos coeficientes promedio durante el tiempo de simulación permitirá evaluar la influencia de las fuerzas presentes (fuerzas de presión y fuerzas viscosas) que actúan directamente sobre los perfiles.

El coeficiente promedio de resistencia al avance (Cd) figura 4.65 presenta en general un comportamiento períodico que es más pronunciado en los primeros tiempos de simulación y que tiende a amortiguarse conforme el tiempo transcurre, oscilando su magnitud para los últimos tiempos en el rango de [0.04 a 0.098]. La figura 4.65 muestra además que la contribución de las fuerzas de presión (línea segmentada) sobre los perfiles son las que determinan el comportamiento del coeficiente global durante el tiempo total de simulación ya que la contribución de las fuerzas viscosas (línea punteada) es menor. Sin embargo mientras que el comportamiento de la contribución de las fuerzas de presión en la magnitud del coeficiente de resistencia al avance es fluctuante, el comportamiento de la contribución viscosa es más regular presentándose el mayor valor el cual es .014 en los primeros tiempos y va decreciendo gradualmente al paso del tiempo sin llegar a ser cero sino que tiende a mantenerse constante en el valor de 0.003, por lo tanto el valor del coeficiente de resistencia al avance promedio de cada perfil de la cascada resulta ser de 0.10139.

Analizando ahora el comportamiento del coeficiente de sustentación figura 4.65 en la cual además se presentan las influencia de cada una de las fuerzas (presión y viscosidad) y su aportación directa sobre la magnitud final del coeficiente de sustentación. En esta figura sobresale claramente que la magnitud y comportamiento del coeficiente global de sustentación depende de la contribución de las fuerzas de presión y que al igual que el Cd, su magnitud también fluctúa según transcurre el tiempo de simulación. Presentándose grandes fluctuaciones en los primeros milisegundos y estabilizándose una vez pasado el tiempo t=0.01s, durante este tiempo el coeficiente de sustentación mantiene un valor casi constante de aproximadamente -0.6, pero a partir del tiempo 0.125s el Cl disminuye a valores que oscilan en el rango de [-4.2 a -2], sin embargo al observar la figura 4.65 destaca el hecho de que el comportamiento del coeficiente sustentación también tiende a amortiguarse pero sin disminuir en magnitud, por el contrario tendiendo a mantenerse constante en una magnitud de aproximadamente -0.33. Por lo que el coeficiente de sustentación promedio de cada perfil de la

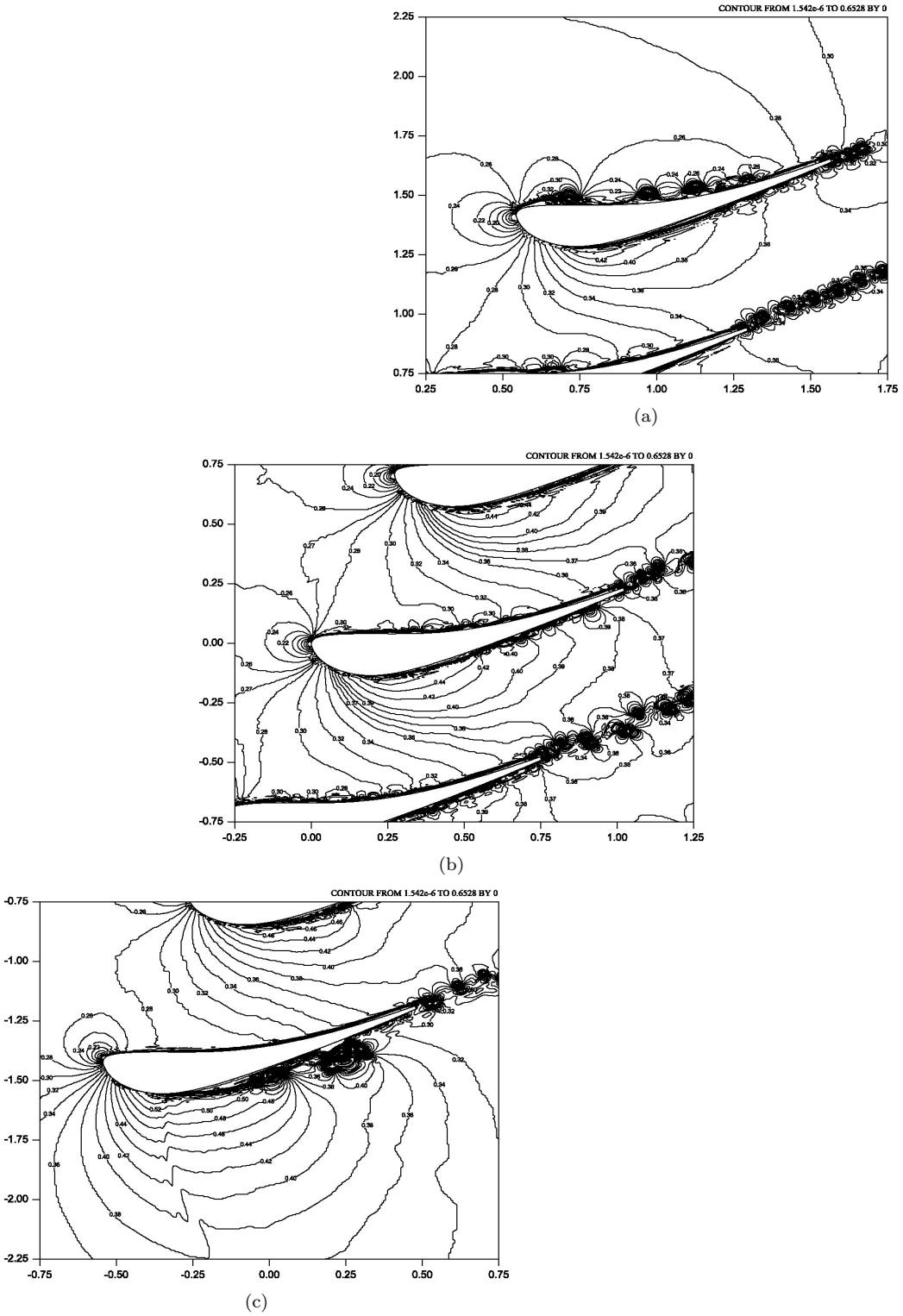


Figura 4.53: Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

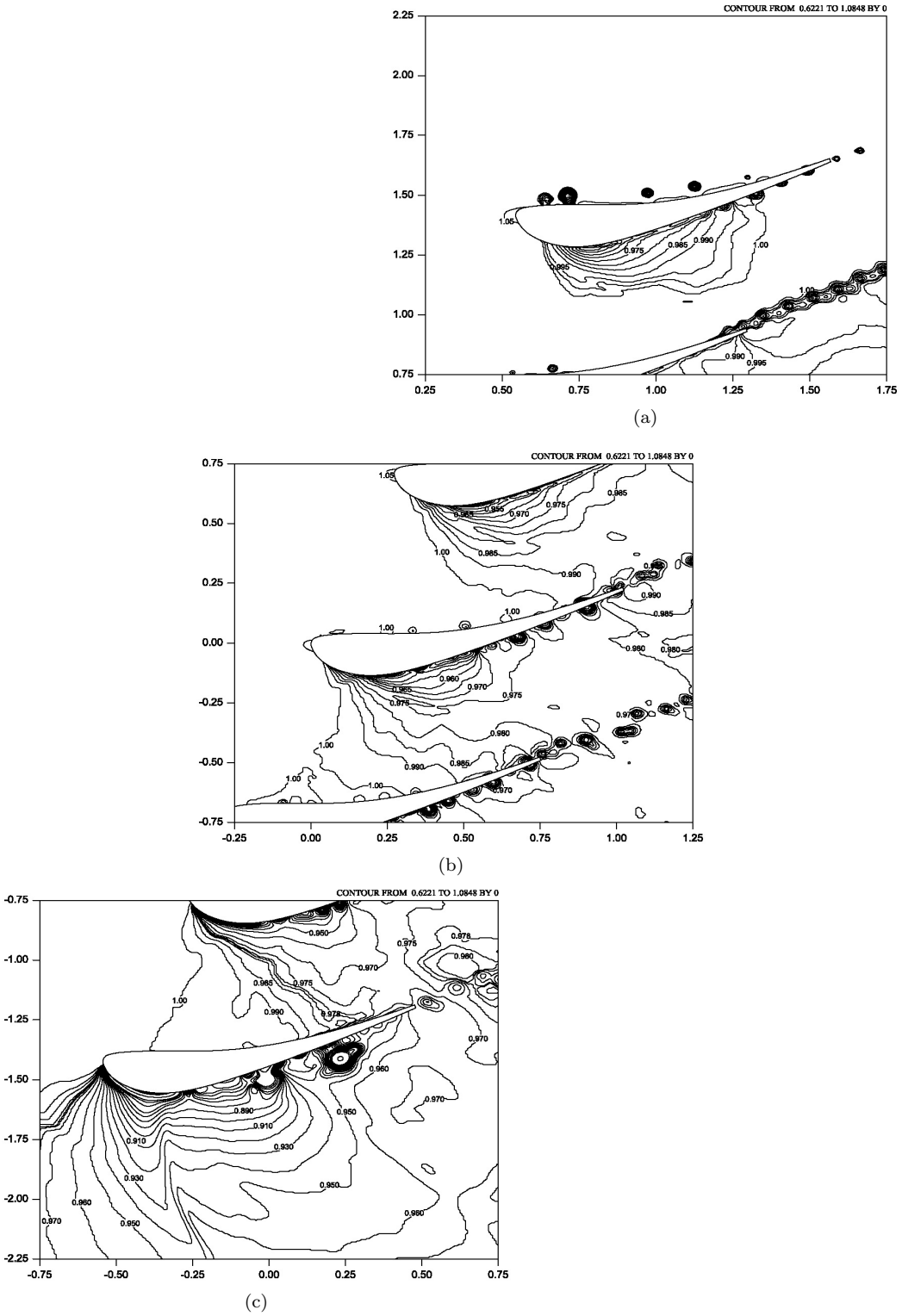


Figura 4.54: Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

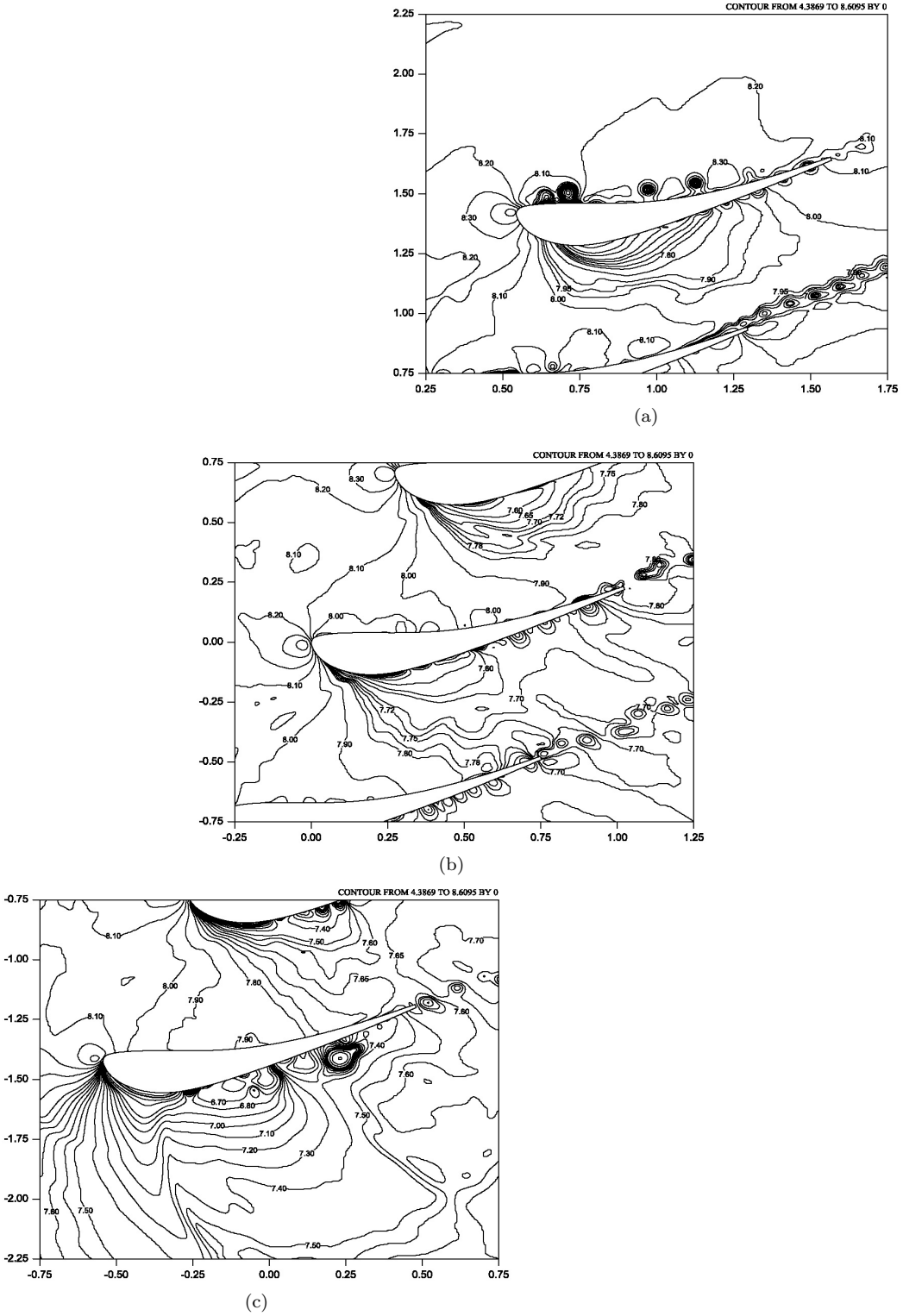


Figura 4.55: Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

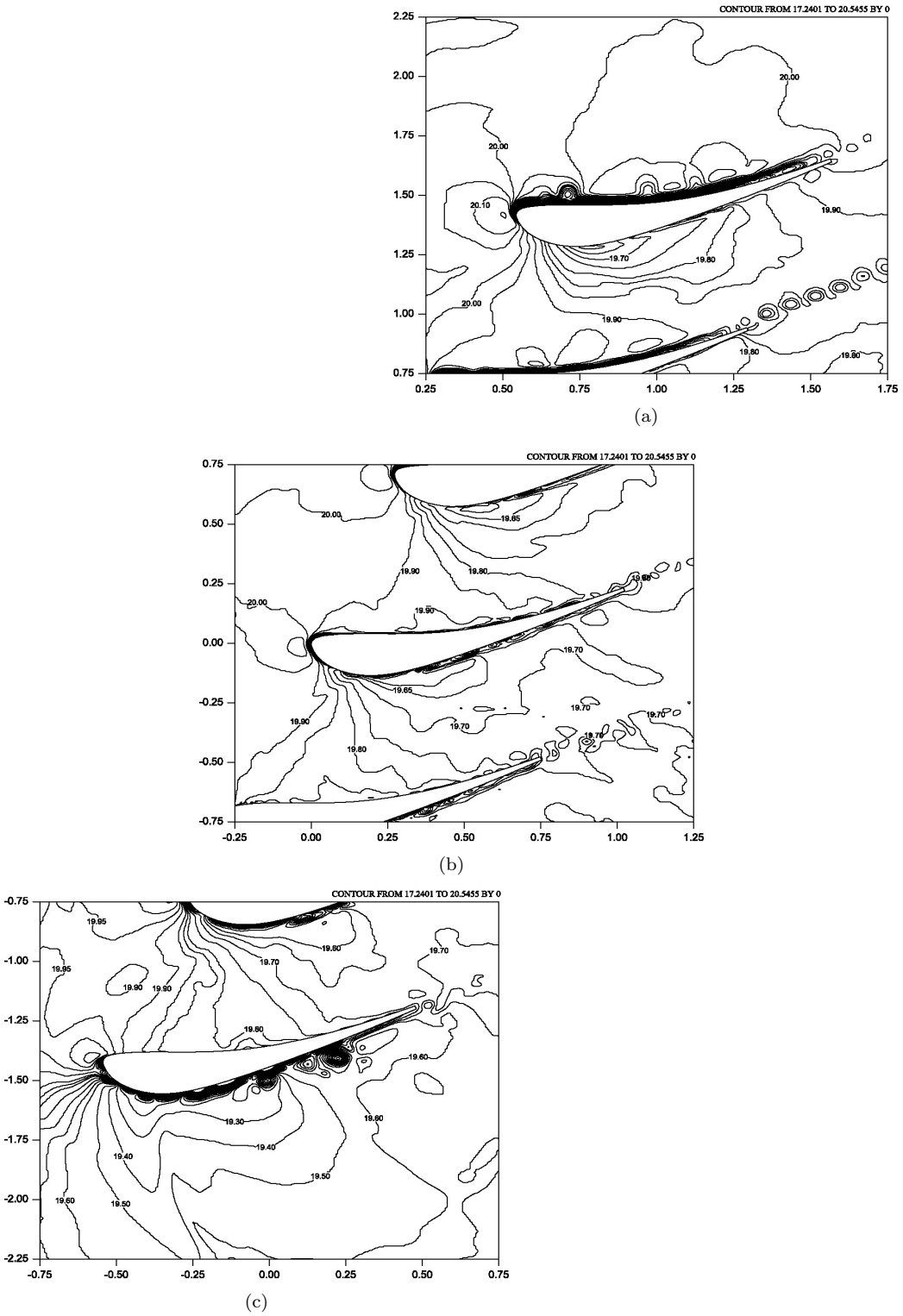


Figura 4.56: Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

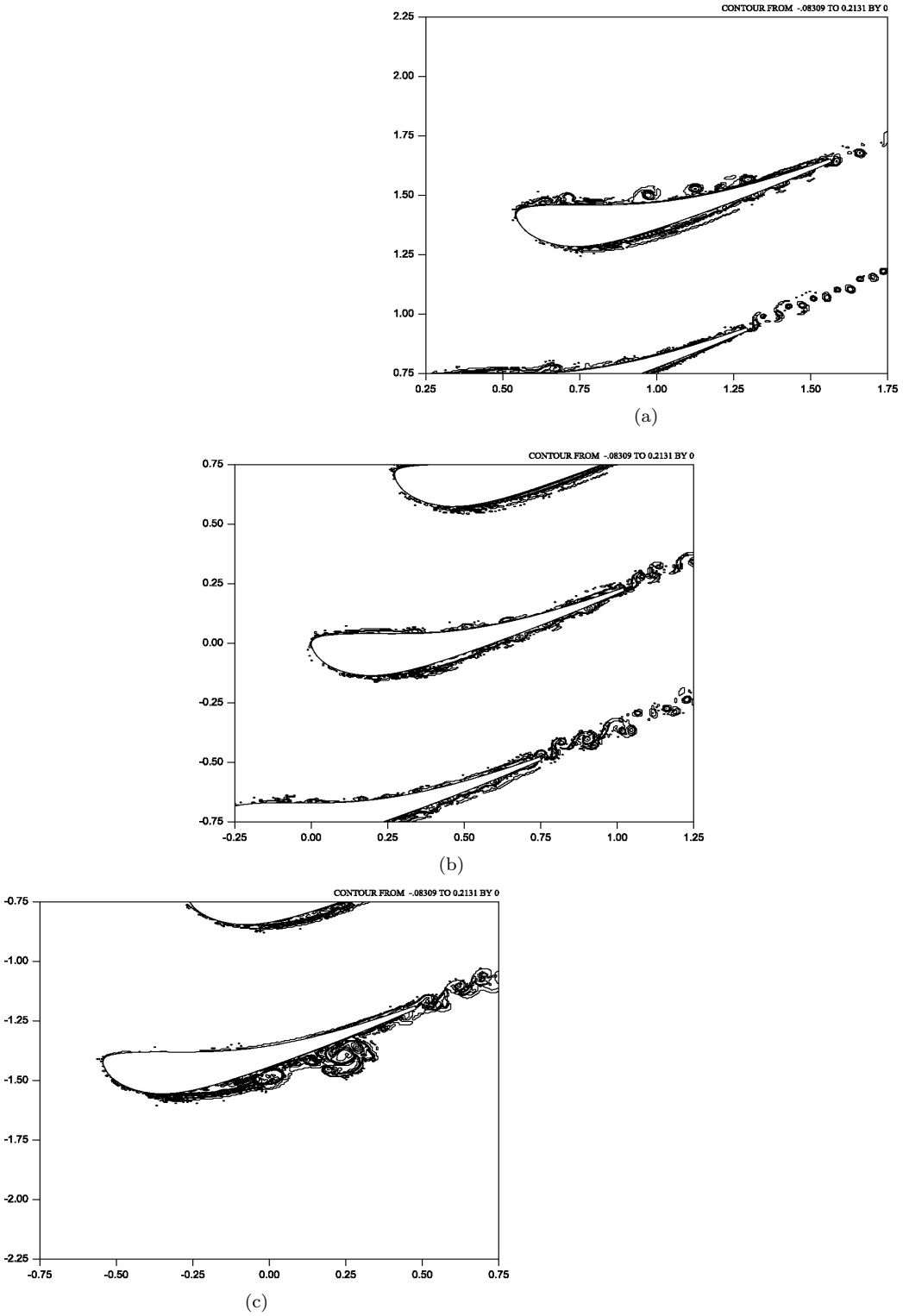


Figura 4.57: Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

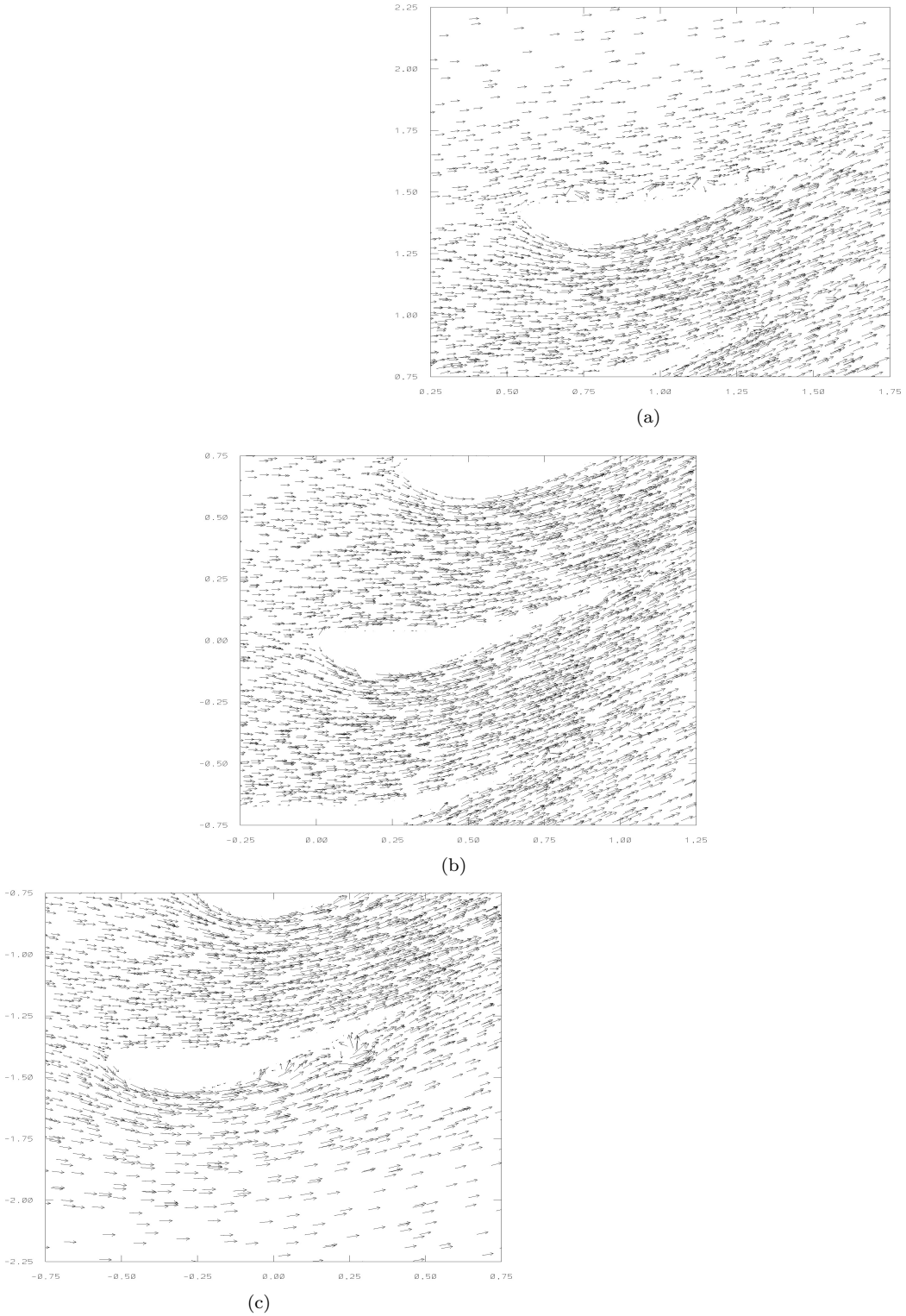


Figura 4.58: Campo de vectores velocidad para la cascada al tiempo t=1.79625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

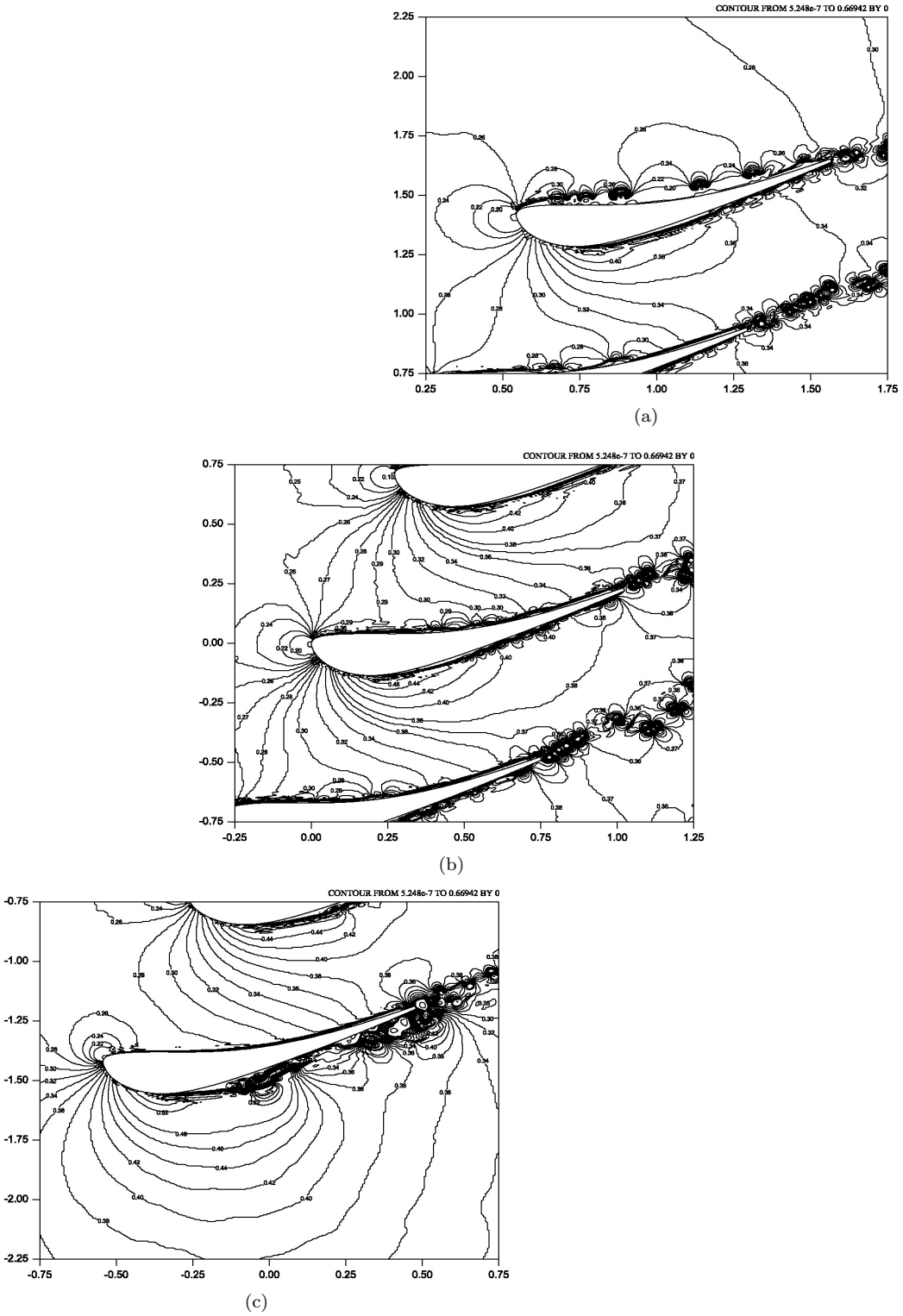


Figura 4.59: Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

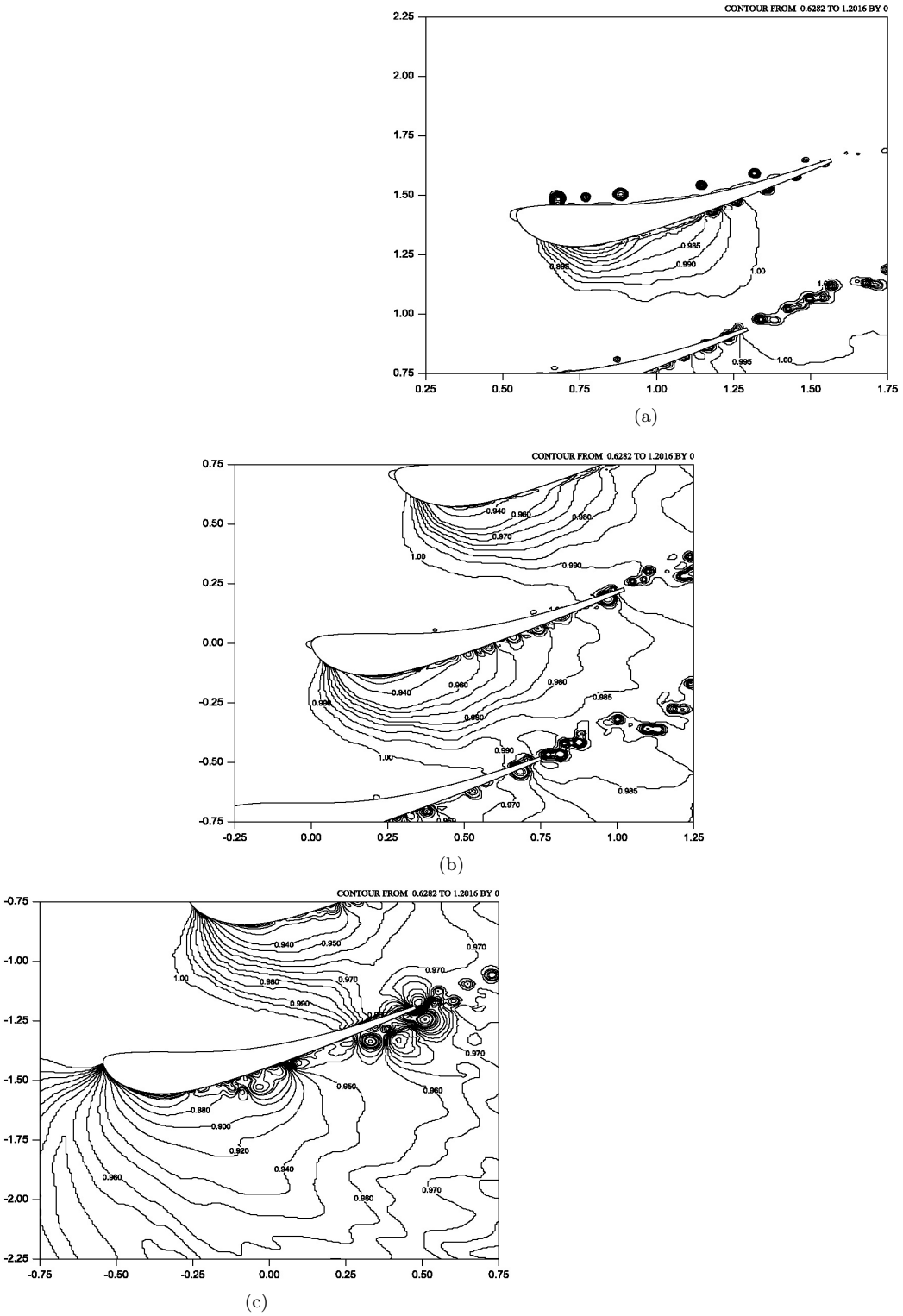


Figura 4.60: Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

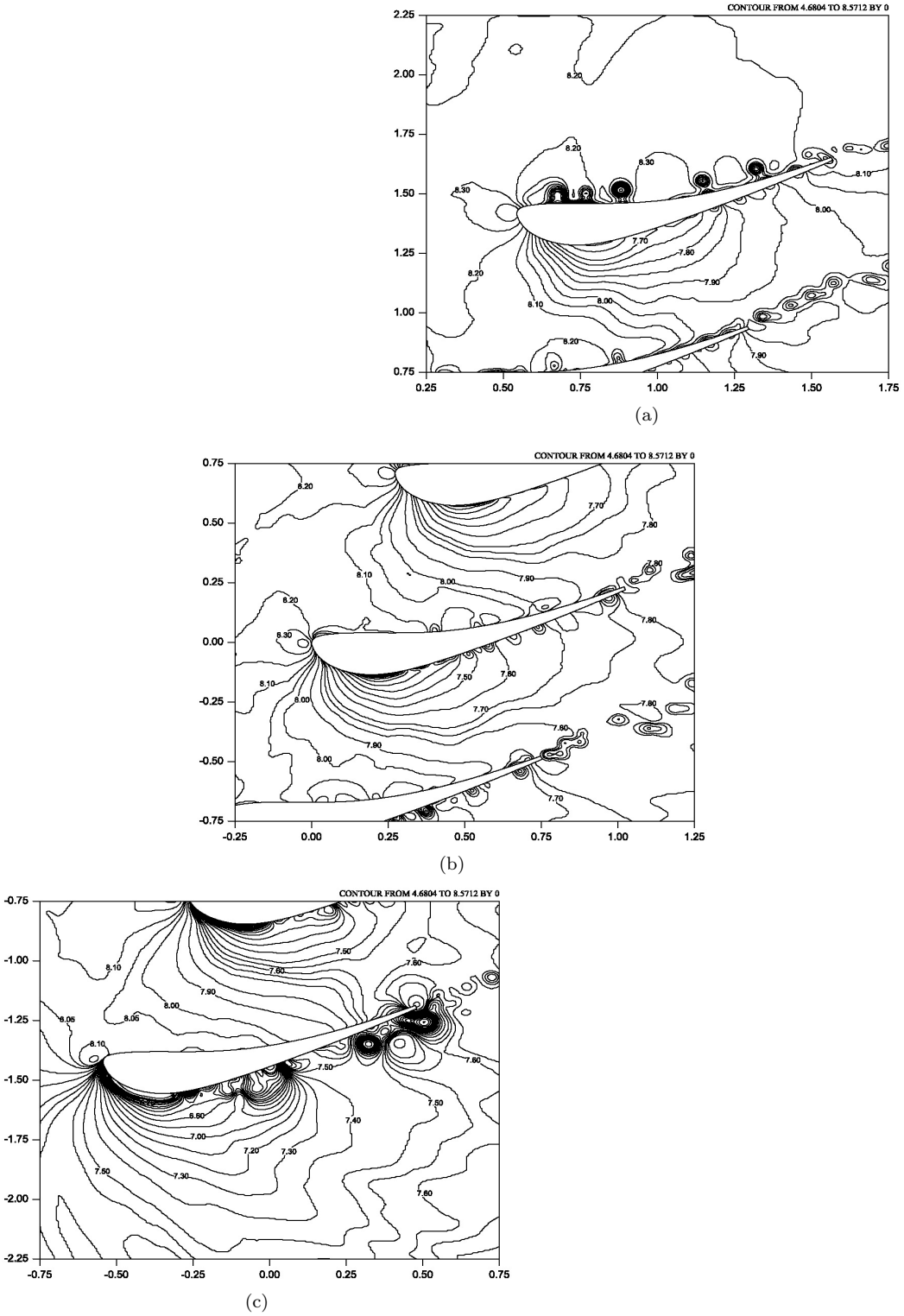


Figura 4.61: Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

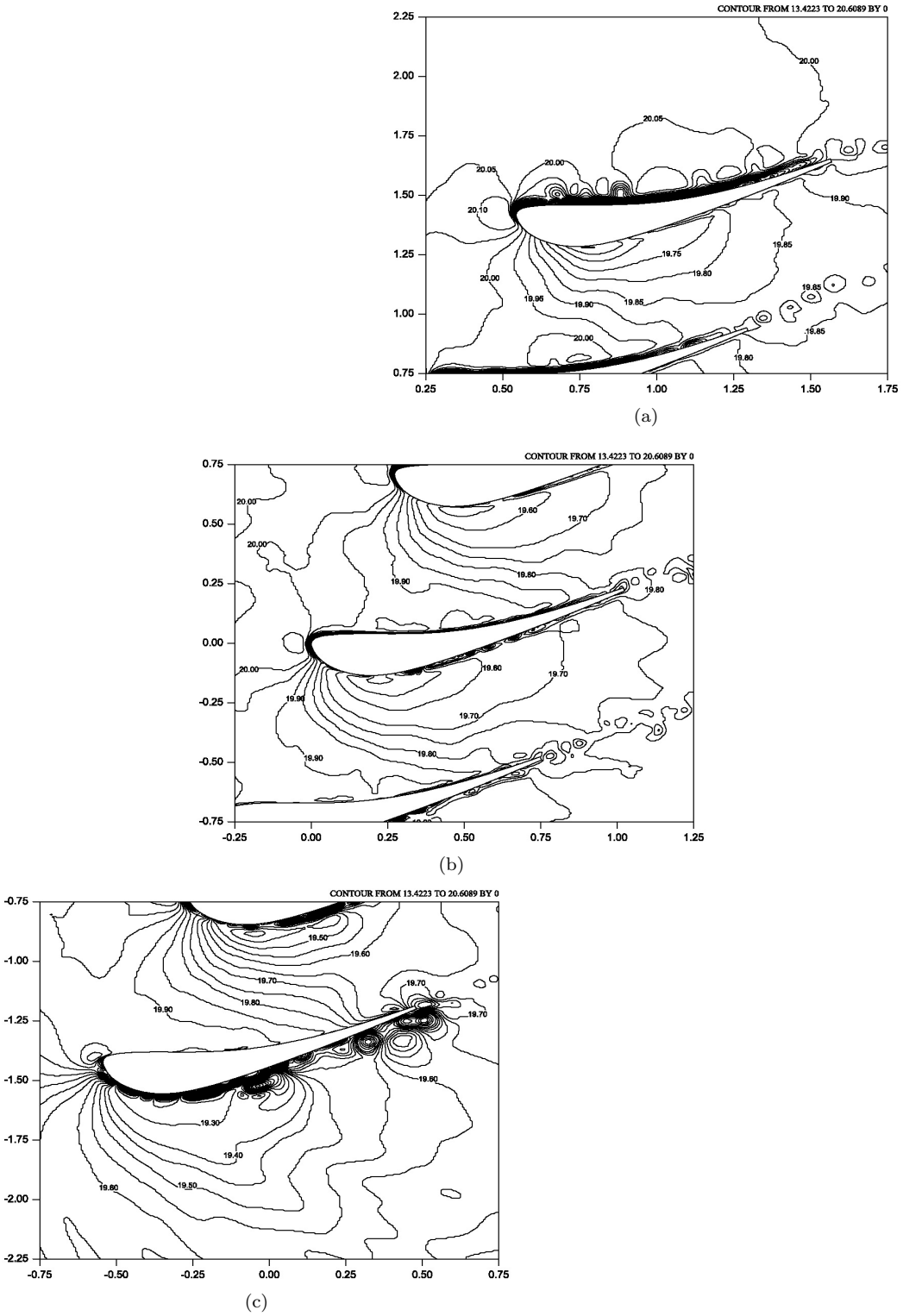


Figura 4.62: Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

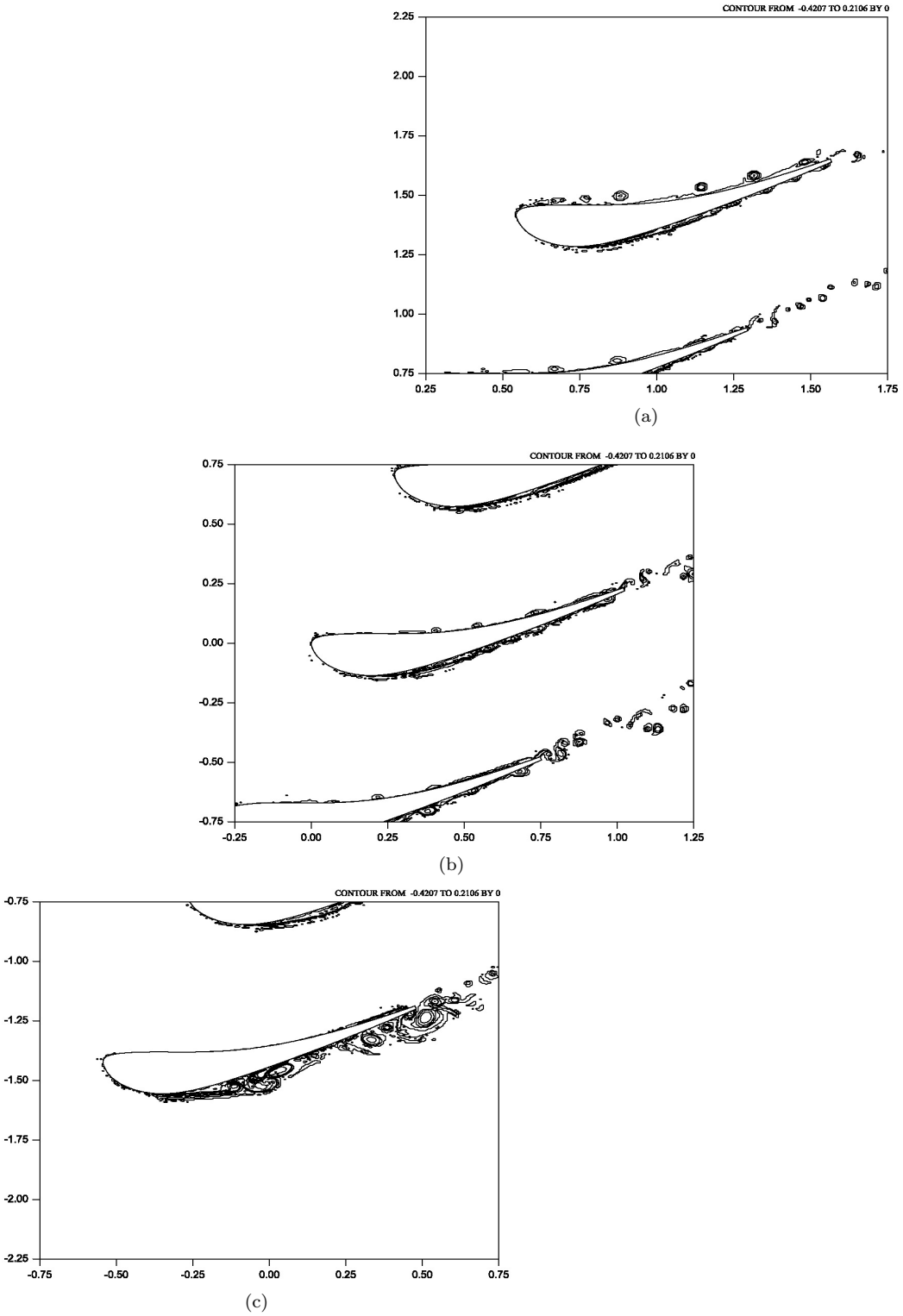


Figura 4.63: Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

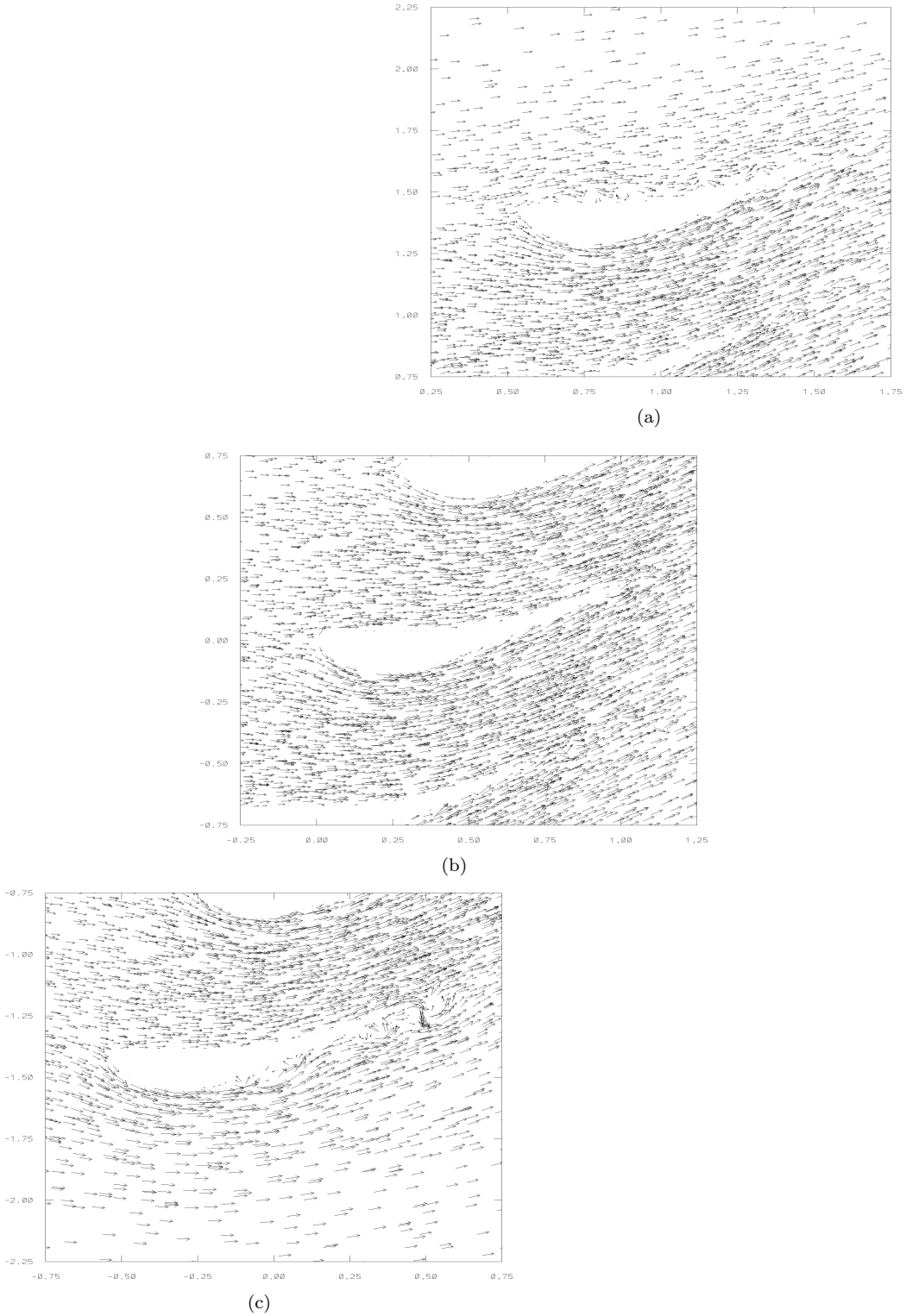


Figura 4.64: Campo de vectores velocidad para la cascada al tiempo t=2.21625s.: (a) Parte superior; (b) Parte media; y, (c) Parte inferior.

cascada tiene como valor 0.50104.

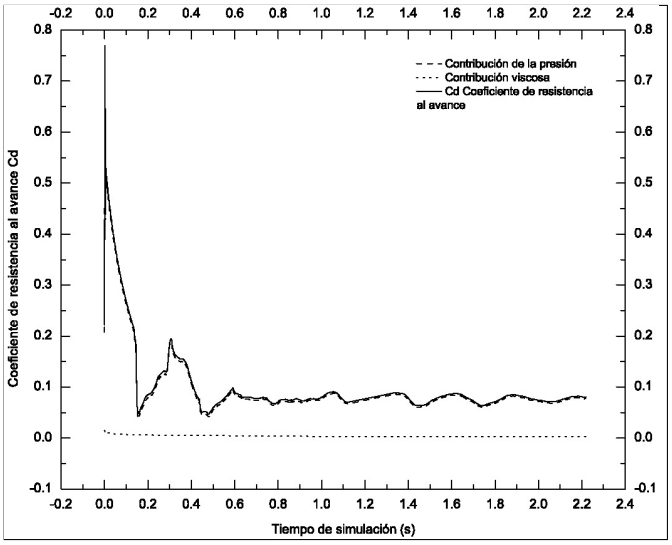


Figura 4.65: Comportamiento del coeficiente global de resistencia al avance durante el tiempo de simulación para la cascada de álabes.

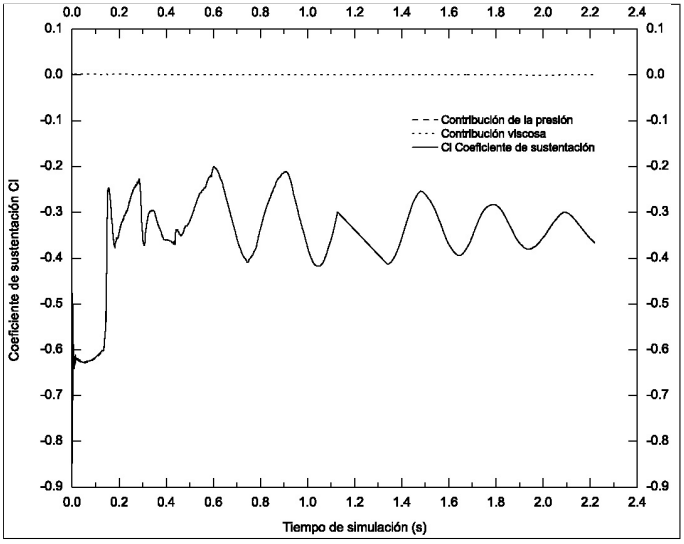


Figura 4.66: Comportamiento del coeficiente global de sustentación durante el tiempo de simulación para la cascada de álabes.

4.3.1. Comparaciones cualitativas con otros resultados.

Los resultados obenidos en este trabajo de tesis correspondientes a la simulación de un flujo compresible subsónico através de una cascada de álabes se compararán cualitativamente con otros resultados obtenidos previamente.
[P. Cinnella et al.,] analiza una cascada transónica, la misma cascada experimental (cuarta configuración estándar) propuesta por [Fransson and Verdon, 1991], sin embargo los parámetros de simulación difieren de los propuestos en este trabajo de tesis. [P. Cinnella et al.,] plantea que los perfiles se encuentran oscilando, el flujo es subsónico no viscoso, el ángulo de entrada del flujo es de 45^o, el número de Reynolds basado en la cuerda de los perfiles es igual a $Re = 8.2 \times 10^5$ y se establece que el número de Mach a la salida de la cascada debe ser $M = 0{,}9$. Las ecuaciones que se resuelven para obtener los resultados anteriores son las ecuaciones RANS junto con el modelo de turbulencia (Balwin-Lomax). A pesar de establecer un número de mach cercano a la unidad en la salida de la cascada, no se reporta la presencia de ondas de choque o discontinuidades en el interior de los pasajes, por lo menos al ángulo propuesto por [P. Cinnella et al.,], tal y como lo muestran los contornos de presión de la figura 4.67. En este caso no se aprecian las vorticidades que se observan en nuestros resultados figura 4.68, porque el análisis considera al flujo no viscoso.

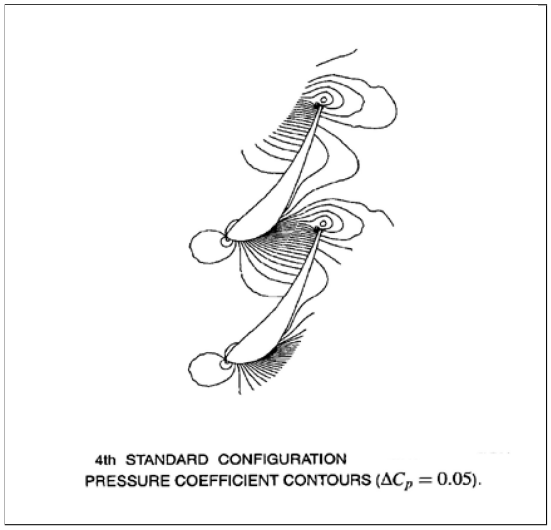


Figura 4.67: Isocontornos de presión para la cascada experimental propuesta por [Fransson and Verdon, 1991] (cuarta configuración estándar). Flujo compresible no viscoso (ecuaciones RANS). Reproducido de [P. Cinnella et al.,]

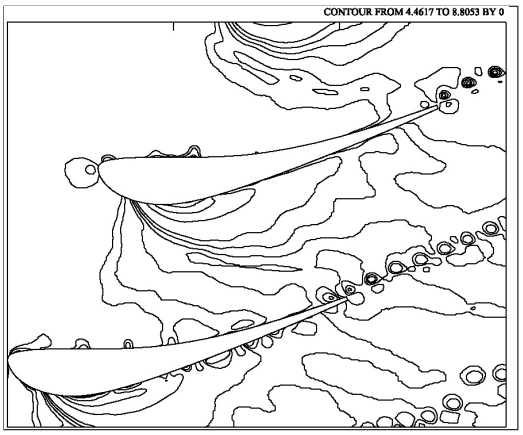


Figura 4.68: Isocontornos de presión para para las cascada experimental propuesta por [Fransson and Verdon, 1991] (cuarta configuración estándar). Flujo compresible viscoso. Simulación obtenida mediante el código N$\varepsilon\kappa$Tαr.

Por otro lado [Bassi and Rebay, 2002] presentan los isocontornos de mach para una cascada de una turbina, entre los parámetros destacan: el ángulo de entrada del flujo es de 0^o, el $Re = 0.966 \times 10^6$ y un M=0.68. La geometría de los perfiles de esta cascada no es la misma que se analizó en este trabajo. En el artículo los autores realizan una comparación entre dos métodos de discretización de los términos viscosos de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible, por esta razón se presentan dos figuras que corresponden cada una a un método de discretización distinto, ver [Bassi and Rebay, 2002] para una mayor descripción. Sin embargo a pesar de que la cascada tiene una geometría distinta corresponde a una turbina, su régimen es subsónico y el comportamiento cualitativo de en este caso el número de Mach, ver figuras 4.69 y 4.70 son cualitativamente parecidas a los isocontornos de mach de la cascada propuesta por [Fransson and Verdon, 1991] analizada mediante el uso del código N$\varepsilon\kappa$Tαr y con un régimen subsónico también. Finalmente en la figura 4.71 se observa un visualización clara de la segregación de vórtices a la salida de los álabes, los cuales son

cualitativamente parecidos a los observados a diferentes tiempos en la simulación obtenida con el código N$\varepsilon\kappa$Tαr.

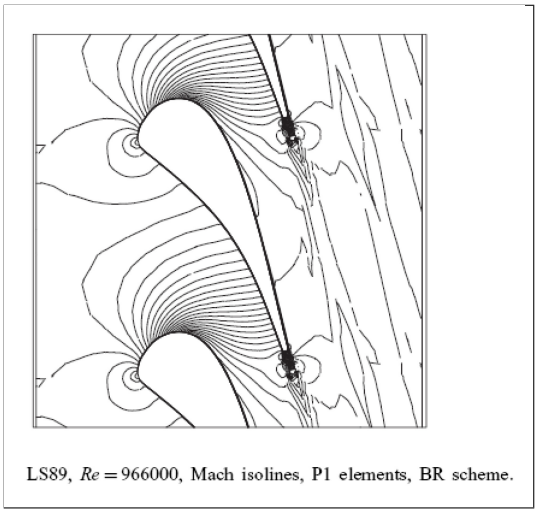


Figura 4.69: Isocontornos de Mach, resultado de la simulación de la cascada con un Re=0.966x10^6 y un $\alpha = 0^o$. Reproducido de [Bassi and Rebay, 2002].

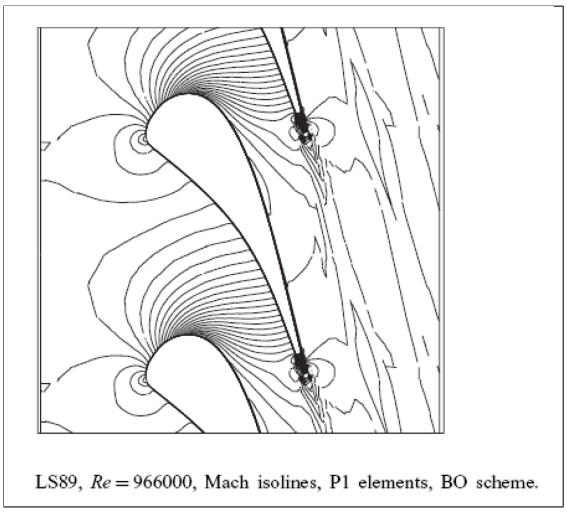


Figura 4.70: Isocontornos de Mach, resultado de la simulación de la cascada, esquema Boumann Oden (BO). Reproducido de [Bassi and Rebay, 2002].

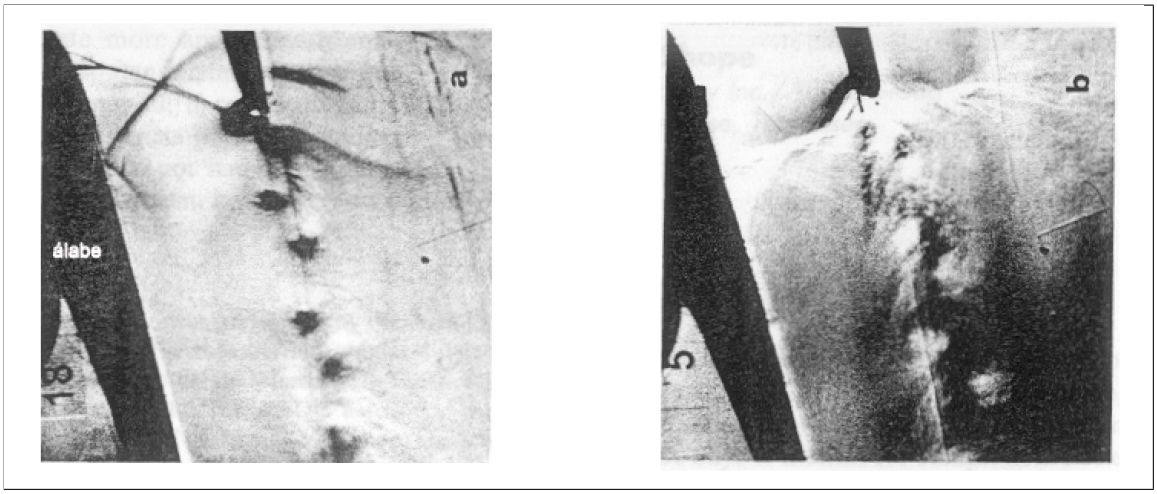


Figura 4.71: Visualización de la segregación de vórtices formados en los bordes de salida de los álabes de un álabe de una turbina en un regímen de flujo subsónico. Reproducido de [Hah, 1997].

4.4. Conclusiones

La simulación cuasiestática obtenida para el perfil NACA4420 del fenómeno conocido como entrada en pérdida del perfil demuestra la gran similitud que tiene ésta condición con las características que se presentan también en un perfil cuando éste se encuentra bajo la condición de entrada en pérdida dinámica, la cual fue descrita en el capítulo 2. Esta semejanza se debe principalmente a la acción de la viscosidad sobre la superficie del perfil y a la geometría del mismo que combinados con un gran ángulo de ataque por parte del perfil generan fenómenos complejos sobre todo en el extradós del perfil y que claramente pueden apreciarse en los resultados de la simulación.

Si bien los efectos de los esfuerzos viscosos sobre las características aerodinámicas del perfil sobre todo al observar el comportamiento del coeficiente de sustentación y del coeficiente de resistencia al avance Cl y Cd respectivamente, son destacablemente significativos; éstos resultan ser determinantes en el comportamiento del campo de flujo según lo muestra la simulación del perfil NACA4420 flujo viscoso. Las vorticidades y todos aquellos fenómenos presentes sobre el perfil no sería posible visualizarlos sí la viscosidad del fluido fuese despreciada, tal y como se comprobó al someter al perfil NACA4420 a las mismas condiciones de flujo despreciando los efectos viscosos y cuyos resultados no permiten establecer en forma precisa el comportamiento que tiene el fluido al desplazarse sobre un perfil en una condición crítica como lo es: la entrada en pérdida de sustentación.

Según la secuencia de eventos que siguen al inicio de la entrada en pérdida cuasiestática del perfil demuestran una gran variedad de fenómenos complejos presentes en los alrededores del perfil y las estructuras del campo de flujo que acompañan a la entrada en pérdida se presentan en períodos de tiempo muy cortos. Sin embargo debido a la precisión del método que utiliza en código N$\varepsilon\kappa$Tαr para resolver las ecuaciones que gobiernan al flujo compresible viscoso, es posible capturar significativamente el comportamiento de la capa límite sobre el perfil según transcurre el tiempo de simulación, así como la formación y desplazamiento de las vorticidades que se generan sobre el perfil y más allá del borde de salida.

No sólo los efectos viscosos pueden llegar a ser determinantes en el comportamiento del fluido a su paso por un perfil con un gran ángulo de ataque, sino también la influencia de la compresibilidad del fluido puede ser definitiva aún cuando el régimen de flujo sea subsónico tal y como se aprecia en las simulaciones del perfil NACA4420 flujo compresible viscoso. La compresibilidad del flujo (cercana al 30 %)[3] sobre todo en pequeñas regiones sobre el extradós del perfil, contribuye también a la formación de las estructuras complejas presentes en la simulación.

Los efectos de la compresibilidad del fluido son apreciados con mayor precisión en la simulación correspondiente a la cascada de álabes definida en el capítulo 4, aún cuando el régimen inicial de flujo en el que la cascada esta inmersa es subsónico (M =0.3) los vórtices presentes principalmente sobre los extradós de los perfiles en un determinado tiempo y dadas las condiciones del flujo que los rodean reducen la densidad del fluido en sus centros hasta en un 40 %[4] aún cuando no son regiones de gran extensión, si se presentan sobre la mayor parte del extradós del perfil.

Tal y como se mecionó en su momento los álabes de una turbina en algún momento estarán sometidas a condiciones de stall y en consecuencia el comportamiento del campo de flujo estará dominado por los resultados obtenidos con estas condiciones, además no debe olvidarse que los álabes ya en conjunto formando una cascada también se ven influenciadas por las fronteras cercanas de los álabes vecinos, por lo que en estos casos no es posible ignorar los efectos viscosos y de compresibilidad del fluido que se presentan en el interior de la misma.

[3] Considerando que la densidad inicial del campo de flujo tiene como valor la unidad y sobre el extradós del perfil existen valores mínimos de densidad de hasta 0.6909, ver figura 4.10(c).

[4] Considerando que la densidad inicial del campo de flujo tiene como valor la unidad y sobre los extradós de los perfiles existen valores mínimos de densidad de hasta 0.5881, ver figura 4.48(b).

Aún cuando las simulaciones correspondientes a un flujo viscoso compresible subsónico obtenidas en este trabajo de tesis sobre superficies aerodinámicas no presentan aún una mayor complejidad como resultaría la presencia de una discontinuidad en el campo de flujo, es importante destacar que en la validación del código sobre el perfil NACA0012 con un régimen subsónico inicial $M = 0.8$, pero en el que después de cierto tiempo de simulación se comienza a presentar una región pequeña cercana al borde de ataque del perfil cuyo número de mach es mayor a la unidad, demuestra el buen manejo que tiene el código para resolver las discontinuidades presentes en el tratamiento de las ecuaciones de gobierno del flujo compresible viscoso, y aún más en un caso como éste que representa un caso transónico.

La importancia en obtener una buena aproximación del comportamiento del campo de flujo compresible viscoso que rodea a geometrías aerodinámicas resulta útil no sólo para comprender la física del flujo presente en estos elementos, sino también para comprender el comportamiento del flujo en elementos más complejos como resulta ser una cascada de un turbina en un plano bidimensional. Cabe destacar que un análisis del comportamiento del flujo en uno o varios elementos que componen a una turbomáquina resulta imprescindible para realizar otros análisis como pueden ser; análisis estructurales de la pala misma, de transferencia de calor, etc., encaminados todos a la optimización de su funcionamiento.

Apéndice A

General

A.1. Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Nuevamente reeecribiendo los parámetros adimensionales listados en el capítulo 2 en la tabla 2.1

Longitud (x)	$x^* = \frac{x}{L}$	Presión	$p^* = \frac{p}{p_\infty}$
Densidad	$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}$	Energía	$E^* = \frac{E}{\rho {V_\infty}^2}$
Viscosidad	$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}$	Conductividad térmica	$\kappa^* = \frac{\kappa}{\mu_\infty / c_p}$
Velocidad	$V^* = \frac{V}{\sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}}$	Temperatura	$T^* = \frac{T}{{V_\infty}^2 \gamma / c_p}$
Tiempo	$t^* = \frac{t}{L}\sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}$	Tensor de esfuerzos	${\tau_{ij}}^* = \frac{\tau_{ij}}{\left(\frac{\mu_\infty V_\infty}{L}\right)}$

Para adimensionalizar las ecuaciones se sustituyen los parámetros adimensionales en las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de energía y se reducen los términos comunes, tal y como se muestra a continuación.

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{1}{\left(\frac{L}{\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}}\right)} \rho_\infty \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{1}{L} \nabla^* \cdot \left(\rho^* \rho_\infty \mathbf{V}^* \sqrt{p_\infty/\rho_\infty}\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}}{L} \rho_\infty \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{1}{L} \sqrt{p_\infty/\rho_\infty}\ \rho_\infty \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) = 0$$

$$\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}}{L} \rho_\infty \left[\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*)\right] = 0$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) = 0 \tag{A.1}$$

Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_{ij})$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación

$$\frac{1}{\left(\frac{L}{\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}}\right)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho^* \rho V^* \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}) + \frac{1}{L}\nabla^* \cdot \left(\rho^* \rho V^* \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}} V^* \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}\right) = -\frac{1}{L}\nabla^* p^* p_\infty + \frac{1}{L}\nabla^* \cdot \left({\tau_{ij}}^* \frac{\mu_\infty V_\infty}{L}\right)$$

$$\frac{p_\infty}{\cancel{\rho_\infty}} \frac{\cancel{\rho_\infty}}{L} \frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* V^*) + \frac{p_\infty}{L}\nabla^* \cdot (\rho^* V^* V^*) = -\frac{p_\infty}{L}\nabla^* p^* + \frac{1}{L}\frac{\mu_\infty V_\infty}{L}\nabla^* \cdot {\tau_{ij}}^*$$

$$\frac{p_\infty}{L}\left[\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* V^*) + \nabla^* \cdot (\rho^* V^* V^*)\right] = -\frac{p_\infty}{L}\nabla^* p^* + \frac{1}{L}\frac{\mu_\infty V_\infty}{L}\nabla^* \cdot {\tau_{ij}}^*$$

$$\frac{p_\infty}{L}\left[\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* V^*) + \nabla^* \cdot (\rho^* V^* V^*) + \nabla^* p^*\right] = \frac{1}{L}\frac{\mu_\infty V_\infty}{L}\nabla^* \cdot {\tau_{ij}}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* V^*) + \nabla^* \cdot (\rho^* V^* V^*) + \nabla^* p^* = \frac{\cancel{L}}{p_\infty}\frac{1}{\cancel{L}}\frac{\mu_\infty V_\infty}{L}\nabla^* \cdot {\tau_{ij}}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* V^*) + \nabla^* \cdot (\rho^* V^* V^*) + \nabla^* p^* = \frac{\mu_\infty \cancel{V_\infty}}{\cancel{V_\infty} V_\infty \rho_\infty L}\nabla^* \cdot {\tau_{ij}}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* V^*) + \nabla^* \cdot (\rho^* V^* V^*) + \nabla^* p^* = \underbrace{\left[\frac{\mu_\infty}{V_\infty \rho_\infty L}\right]}_{\frac{1}{Re}} + \nabla^* \cdot {\tau_{ij}}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* V^*) + \nabla^* \cdot (\rho^* V^* V^*) + \nabla^* p^* = \frac{1}{Re} + \nabla^* \cdot {\tau_{ij}}^* \tag{A.2}$$

Ecuación de la Energía

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E + p)\mathbf{V} = \nabla \cdot (\tau_{ij}\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \frac{1}{\left(\frac{L}{\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}}\right)} E^* \rho_\infty V_\infty V_\infty + \frac{1}{L}\nabla^* \cdot (E^* \rho_\infty V_\infty V_\infty + p^* p_\infty) V^* \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}} =$$

$$\frac{1}{L}\nabla^* \cdot \left({\tau_{ij}}^* \frac{\mu_\infty V_\infty}{L} V^* \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}\right) + \frac{1}{LL}\nabla^* \cdot \left(\kappa^* \kappa_\infty \nabla^* T^* \frac{\gamma V_\infty V_\infty}{c_p}\right)$$

$$\frac{V_\infty}{L}\rho_\infty V_\infty V_\infty \left[\frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \nabla^*(E^* + p^*)V^*\right] = \frac{1}{LL}\mu_\infty V_\infty V_\infty \nabla^* \cdot ({\tau_{ij}}^* V^*) + \frac{\kappa_\infty V_\infty V_\infty \gamma}{LLc_p}\kappa^* {\nabla^*}^2 T^*$$

$$\frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \nabla^*(E^* + p^*)V^* = \frac{\cancel{L}}{V_\infty \rho_\infty \cancel{V_\infty}^2}\left[\frac{1}{\cancel{L}L}\mu_\infty \cancel{V_\infty}^2 \nabla^* \cdot ({\tau_{ij}}^* V^*)\right] + \frac{\cancel{L}}{V_\infty \rho_\infty \cancel{V_\infty}^2}\left[\frac{\kappa_\infty \cancel{V_\infty}^2 \gamma}{\cancel{L}Lc_p}\kappa^* {\nabla^*}^2 T^*\right]$$

$$\frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \nabla^*(E^* + p^*)V^* = \underbrace{\left[\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L}\right]}_{\frac{1}{Re}} \nabla^* \cdot ({\tau_{ij}}^* V^*) + \underbrace{\left[\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L}\right]}_{\frac{1}{Re}} \underbrace{\left[\frac{\kappa_\infty}{c_p \mu_\infty}\right]}_{\frac{1}{Pr}} \gamma \kappa^* {\nabla^*}^2 T^*$$

$$\frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \nabla^*(E^* + p^*)V^* = \frac{1}{Re_\infty}\nabla^* \cdot ({\tau_{ij}}^* V^*) + \frac{1}{Re_\infty}\frac{\gamma}{Pr}\kappa^* {\nabla^*}^2 T^* \tag{A.3}$$

A.2. Obtención de la presión y la entalpía como función de la energía.

Se parte de considerar al aire como un gas perfecto (el cual obedece a la ecuación de estado ec. 1.4), y para el que la siguiente relación termodinámica se cumple, ver [Anderson, 1990].

$$e = e(T) \tag{A.4}$$

donde la energía es función únicamente de la temperatura . Un gas perfecto se distingue de un gas ideal porque, un gas ideal se define sencillamente como un gas cuya viscosidad dinámica (μ) es cero.
Entonces para un gas perfecto según (A.4), se tiene que

$$e = c_v T \tag{A.5}$$

De forma similar para el calor específico a presión constante (c_p):

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \tag{A.6}$$

donde h es la entalpía específica la cual se define como

$$h = e + \frac{p}{\rho} \tag{A.7}$$

para un gas perfecto se tiene que, $h = h(T)$ entonces

$$c_p = \frac{dh}{dT} = \frac{de}{dT} + R = c_v + R \tag{A.8}$$

De la ecuación A.7 que define la entalpía específica puede definirse entonces:

$$H = \frac{E + P}{\rho} \tag{A.9}$$

$$H = \frac{E}{\rho} + \frac{p}{\rho} \longrightarrow H = e_t + \frac{p}{\rho}$$

si $e_t = e + \frac{V^2}{2}$ según lo establecido al derivar la ecuación de la energía y además utilizando la ecuación de estado 1.4, $p/\rho = RT$ y sustituyendo en la expresión anterior se obtiene

$$H = (e + \frac{V^2}{2}) + \frac{p}{\rho} \longrightarrow H = c_v T + \frac{V^2}{2} + RT \longrightarrow H = (c_v + R)T + \frac{V^2}{2}$$

utilizando ahora las ecuaciones A.8 y 3.24 la expresión anterior puede expresarse como

$$H = c_p T + \frac{V^2}{2} = \frac{R\gamma}{(\gamma - 1)}T + \frac{V^2}{2} \longrightarrow H = \frac{\gamma RT}{(\gamma - 1)} + \frac{V^2}{2}$$

finalmente utilizando la ecuación de la velocidad del sonido 2.2, la entalpía puede expresarse también como

$$H = \frac{a^2}{(\gamma - 1)} + \frac{V^2}{2} \tag{A.10}$$

Para obtener ahora la expresión para la presión en función de la energía, de la ecuación A.5 se tiene que

$u = c_v T$, nuevamente sí $e_t = e + \frac{V^2}{2}$ entonces $e = e_t - \frac{V^2}{2}$. Con ayuda de la ecuación de estado 1.4 y de la relación 3.24 se tiene que:

$$e = c_v T \longrightarrow e = \frac{R}{(\gamma - 1)} T \longrightarrow e_t - \frac{V^2}{2} = \frac{RT}{(\gamma - 1)} \longrightarrow e_t - \frac{V^2}{2} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

finalmente

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \rho\frac{V^2}{2}\right) \tag{A.11}$$

A.3. Características aerodinámicas del Perfil NACA4420 (condición del perfil estática).

Polar del perfil NACA4420

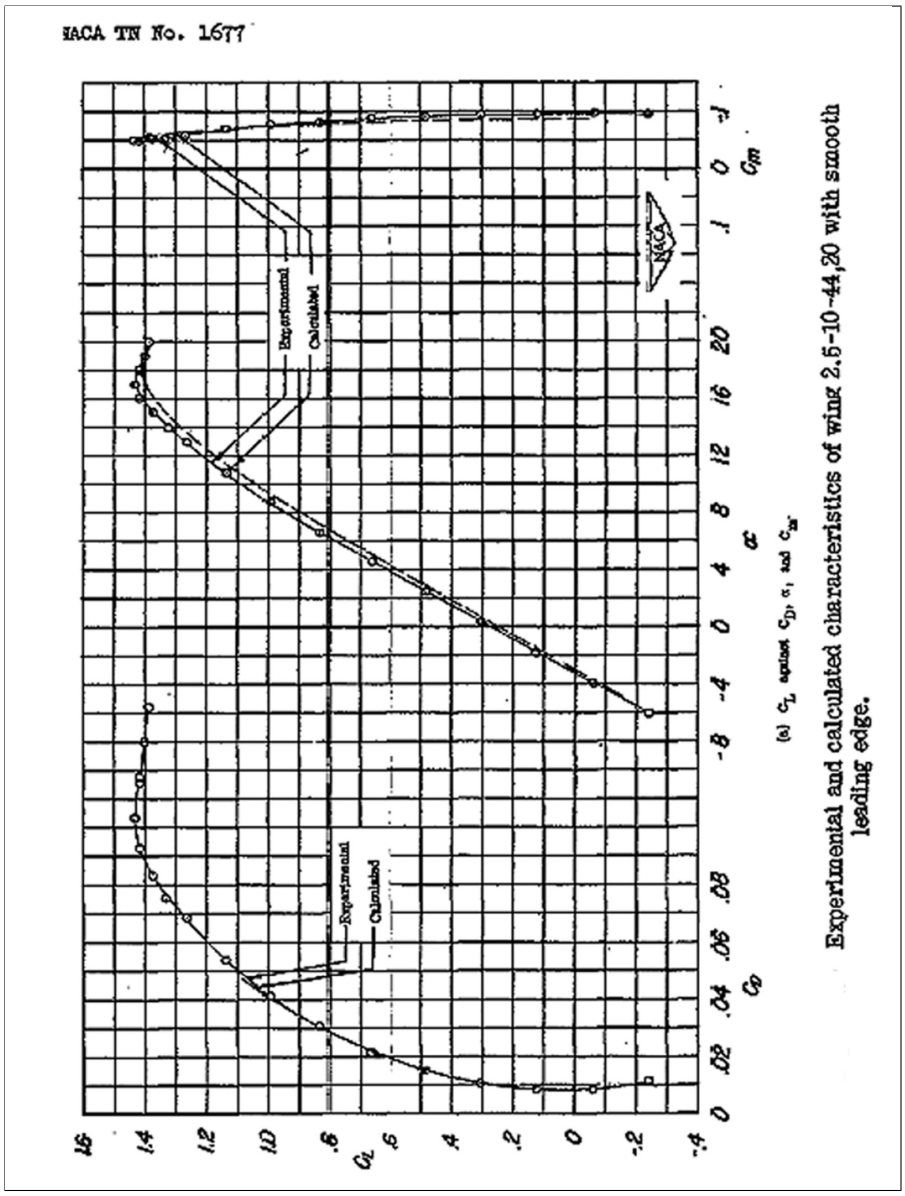


Figura A.1: Características aerodinámicas (Cd y Cl) calculadas y obtenidas experimentalmente para el perfil NACA4420 con un mach de $M = 0.2$. Reproducido de [Bollech, 1948].

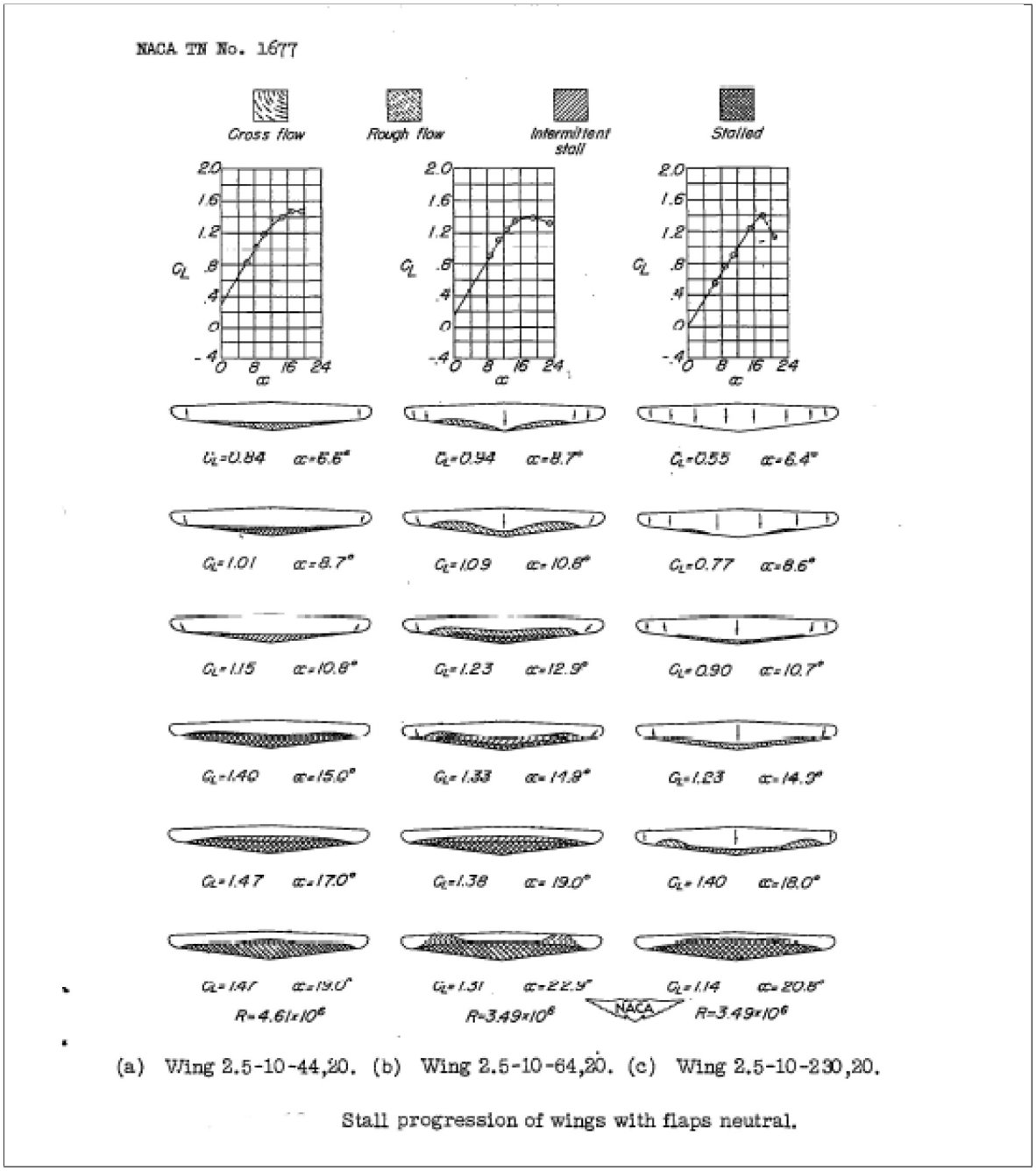


Figura A.2: Desarrollo de la entrada en pérdida del perfil sobre un ala con un perfil NACA4420 con un mach de $M = 0.2$. Reproducido de [Bollech, 1948].

Bibliografía

[Flu, 2000] (2000). *FLUENT 5 UDF User Guide*. E. I. du Pont de Nemours and Company.

[Anderson, 1990] Anderson, J. (1990). *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*. New York, McGraw-Hill.

[Anderson, 1995] Anderson, J. (1995). *Computational fluid dynamics the basics with applications.* New York, McGraw-Hill.

[B. Cockburn and C.Shu, 2000] B. Cockburn, G. E. K. and C.Shu (2000). *Discountinous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*. New York, Springer.

[Bassi and Rebay, 2002] Bassi and Rebay (2002). Numerical Evaluation of two Discontinuous Galerkin Methods for the Compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40:197–207.

[Bölcs and Fransson, 1986] Bölcs, A. and Fransson, T. (1986). Aeroelasticity in Turbomachines Comparison of Theoretical and Experimental Cascade Results. Technical report, De L'école Polytechnique Fédérale de Lausanne.

[Bollech, 1948] Bollech, T. (1948). Experimental and Calculated Characteristics of Several High-aspect-ratio Tapered Wings Incorporating NACA 44-Series, 230-Series, and Low-drag. Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics.

[Bonhaus, 1998] Bonhaus, D. (1998). *A Higher Order Accurate Finite Element Method for Viscous Compressible Flows.* PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University .

[Bush et al., 2005] Bush, R., Mani, M., Michal, T., and Romer, W. (2005). *Wind-US User Guide*. NASA Glenn Research Center and USAF Arnolds Engineering Development Center.

[Chung, 2002] Chung, T. (2002). *Computational Fluid Dynamics*. UK, Cambridge University Press.

[Delves and Hall, 1979] Delves, L. and Hall, C. (1979). An Implicit Matching Principle for Global Element Calculations. *Journal Institute of Mathematics and its Aplications*, 23:223–224.

[Delves and Phillips, 1980] Delves, L. and Phillips, C. (1980). A Fast Implementation of the Global Element Calculations. *Journal of the Institute of Mathematics and its Aplications*, 25:177–197.

[Dorney and Verdon, 1994] Dorney, D. and Verdon, J. M. (1994). Numerical Simulations of Unsteady Cascade Flows. *ASME Journal of Turbomachinery*, 116:665–675.

[Dubiner, 1991] Dubiner, M. (1991). Spectral methods on triangles and other domains. *Journal of Scientific Computing*, 6:345–390.

[Fransson and Verdon, 1991] Fransson, T. and Verdon, J. (1991). Update Report on Standard Configurations for Unsteady Flow Through Vibrating Axial Flow Turbomachine Cascades. Technical report, Swiss Federal Institute of Technology in Lausanne.

[Graaf, 2002] Graaf, S. D. (2002). Dynamic stall incompressible unsteady airfoil flow. Master's thesis, Delft University of Technology.

[Hafez and Guo, 1999] Hafez and Guo (1999). Simulation of steady compressible flows based on Cauchy Riemann equations and Croccos relations. Part II Viscous Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31:325–343.

[Hafez and Wahba, 2005] Hafez and Wahba (2005). Numerical Simulations of Transonic Aerodynamic Fluids Based on a Hierarchical Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47:491–516.

[Hah, 1997] Hah, C. (1997). *Turbomachinery Fluid Dynamics and Heat Transfer*. New York, Marcel Dekker, Inc.

[Hirsch, 1988] Hirsch, C. (1988). *Numerical computation of internal and external flows*. UK, John Wiley & Sons.

[Hollanders and Ravasalon, 1986] Hollanders, H. and Ravasalon, W. (1986). Resolution des equations de Navier-Stokes en fluids compressible par methods implicite. *La Recherche Aerospatiale*, 1:23–46.

[I. Lomtev and Karniadakis, 1998] I. Lomtev, C. Q. and Karniadakis, G. (1998). Spectral/hp Methods for Viscous Compressible Flows on Unstructures 2D Meshes. *Journal of Computational Physics*, 144:325–357.

[Johansen, 1999] Johansen, J. (1999). Unsteady Airfoil Flows with Application to Aeroelastic Stability. Technical report, Riso National Laboratory Roskilde Denmark.

[Karniadakis and Sherwin, 1999] Karniadakis, G. and Sherwin, S. (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*. USA, Oxford University Press.

[Lakshminarayana, 1991] Lakshminarayana, B. (1991). An Assessment of Computational Fluid Dynamic Techniques in the Analysis and Design of Turbomachinery. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 113:315–352.

[Lakshminarayana, 1996] Lakshminarayana, B. (1996). *Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*. New York, John Wiley & Sons.

[Lakshminarayana and Yu, 1995] Lakshminarayana, B. and Yu, W. S. (1995). Numerical Simulation of the Effects o Rotor-Stator Spacing and Wake/Blade Count Ratio on Turbomachinery Unsteady Flows. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 117:639–646.

[Lomtev and Karniadakis, 1999] Lomtev, I. and Karniadakis, G. (1999). A Discontinuos Galerkin Method for the Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29:587–603.

[Mckerrel et al., 1981] Mckerrel, A., Phillips, A., and Delves, L. (1981). Chebyshev Expansion Methods for the Solution of Eiilptic Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, 41:444–452.

[Mittal and Saxena, 2000] Mittal and Saxena (2000). Prediction of hysteresis associated with the static stall of an airfoil. *AIAA Journal*, 38:933–935.

[P. Cinnella et al.,] P. Cinnella, P. DePalma, G. Pascazio, and M.Napolitano. A Numerical Method for Turbomachinery Aeroelasticity. ASME Turbo Expo.

[Patera, 1984] Patera, A. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468–488.

[Roberts, 1980] Roberts, W. (1980). Calculation of Laminar Separation Bubbles and Their Effect on Airfoil Performance. *AIAA Journal*, 18:25–31.

[Saltel and Hecht, 1995] Saltel, E. and Hecht, F. (1995). EMC2 Wysiwyg 2D finite elements mesh generator. Technical report, Institut National de Recherche en informatique et en automatique.

[Schlichting and Gersten, 2000] Schlichting, H. and Gersten, K. (2000). *Boundary Layer Theory*. Berlin, Springer.

[Schreier, 1982] Schreier, S. (1982). *Compressible Flow* . USA, John Wiley & Sons.

[Sherwin and Karniadakis, 1995a] Sherwin, S. and Karniadakis, G. (1995a). A new triangular and tetrahedral basis for high-order finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3775–3802.

[Sherwin and Karniadakis, 1995b] Sherwin, S. and Karniadakis, G. (1995b). A triangular spectral element method; applications to the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 123:189–229.

[Sherwin and Karniadakis, 1996] Sherwin, S. and Karniadakis, G. (1996). Tetrahedral hp Finite Elements:Algorithms and Flow Simulations. *Journal of Computational Physics*, 124:14–45.

[Shih et al., 1992] Shih, C., Lourenco, L., vanDommelen, and Krothapalli (1992). Unsteady Flow Past an Airfoil Pitching at a Constant Rate. *AIAA Journal*, 30:1153–1161.

[Tang and Hafez, 2001] Tang and Hafez (2001). Numerical Simulation of Steady Compressible Flows Using a Zonal Formulation. Part II Viscous Flows. *Computers & Fluids*, 30:1003–1016.

[Warburton and Karniadakis, 1999] Warburton, T. and Karniadakis, G. (1999). A Discontinuous Galerkin Method for the Viscous MHD Equations. *Journal of Computational Physics*, 152:608–641.

[Weber and Platzer, 2000] Weber, S. and Platzer, M. (2000). Computational Simulation of Dynamic Stall on the NLR 7301 Airfoil. *Journal of Fluids and Structures*, 14:779–798.

[White, 1991] White, F. (1991). *Viscous Fluid Flow*. New York, McGraw-Hill.

Índice de Tablas

2.1. Relaciones utilizadas para la adimensionalización de las ecuaciones. 31

3.1. Datos geométricos del perfil NACA0012. 51

3.2. Parámetros de simulación para un flujo compresible alrededor del perfil NACA0012. 53

4.1. Datos geométricos del perfil NACA4420 63

4.2. Parámetros de simulación para flujo compresible alrededor del perfil NACA4420 67

4.3. Datos geométricos de la configuración de la cascada de la turbina. 92

4.4. Parámetros de simulación para la cascada de 5 álabes de una turbina en 2D. 94

Índice de figuras

1.1. Naturaleza del flujo en el interior de un pasaje formado por dos o más álabes de un compresor de flujo axial. Reproducido de [Lakshminarayana, 1996]. 5

1.2. Modelos de algunos de los fenómenos presentes en la base y en el interior de un pasaje de una turbina de flujo axial.Reproducido de [Lakshminarayana, 1996]. 6

1.3. Esquema de una cascada en 3D reducida para su estudio en una fila de álabes en 2D. 15

1.4. Esquema de los problemas presentes alrededor de la geometría de una pala de un compresor o turbina. . . . 17

2.1. Descripción de la compresiblidad como propiedad en un volumen finito de fluido. 21

2.2. Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente estacionaria en el aire. 23

2.3. Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una velocidad menor que la velocidad del sonido, $V_A < a$ a un $t_1 = 1$s. 23

2.4. Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una velocidad menor que la velocidad del sonido, $V_A < a$ a un $t_2 = 2$s y $t_3 = 3$s respectivamente. 23

2.5. Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una magnitud de velocidad igual que la velocidad del sonido, $V_A = a$. 24

2.6. Descripción de la propagación de una onda de presión generada por una fuente que se desplaza con una velocidad mayor que la velocidad del sonido, $V_A > a$. 25

2.7. Descripción de la formación de una onda de compresión. 27

2.8. Descripción de la formación de una onda de expansión. 28

2.9. Visualización de la formación y desarrollo del vórtice inicial en el tiempo, en un perfil cuyo ángulo de ataque es mayor que cero grados. 33

2.10. Descripción de las fuerzas elementales que actúan sobre la superficie aerodinámica. 34

2.11. Comportamiento del coeficiente de la fuerza de sustentación en un perfil al variar el ángulo de ataque. 36

2.12. Patrones del desarrollo de la entrada en pérdida estática de un perfil típico. 37

2.13. Descripción de las características principales de las etapas del desarrollo de la entrada en pérdida dinámica de un perfil típico, NACA0012. Reproducido de [Johansen, 1999]. 39

2.14. Flujo subsónico $M_\infty < 0{,}8$ alrededor de un perfil. 41

2.15. Ilustración de los fenómenos que se presentan alrededor de un perfil inmerso en un flujo transónico. 41

2.16. Ilustración de la evolución de los fenómenos que se presentan alrededor de un perfil inmerso en un flujo transónico. 41

2.17. Fenómenos presentes en un flujo supersónico alrededor de un perfil. 42

3.1. Discretización triangular para el perfil NACA4420. 45

3.2. Malla de cuadratura para el perfil NACA4420. 45

3.3. Construcción bidimensional de los modos de expansión $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ dentro de una región triangular usando el producto de un tensor unidimensional $\tilde{\psi}^a_p(\eta_1)$ y un tensor bidimensional $\tilde{\psi}^b_{pq}(\eta_2)$. Figura reproducida de [Karniadakis and Sherwin, 1999] 46

3.4. Construcción de cuarto orden ($P = 4$) expansiones triangulares utilizando el producto de las dos funciones principales modificadas ${\psi_p}^a(\eta_1)\ {\psi_{pq}}^b(\eta_2)$. Comparando con las expansiones ortogonales mostradas en la figura 3.3, los modos están divididos en contribuciones interiores y de frontera donde los modos de frontera tienen formas similares a lo largo de cada borde. 47

3.5. Condiciones de interface entre dos elementos triangulares adyacentes. 49

3.6. Malla del perfil NACA0012 para la simulación en 2D. 51

3.7. Dominio y condiciones de frontera establecidos para la simulación en 2D del perfil NACA0012. 52

3.8. Campo de velocidad obtenido mediante la aplicación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ al tiempo t=6.75s, tiempo en el que el perfil alcanza el estado estacionario. 54

3.9. Isocontornos de mach obtenidos mediante la aplicación del código N$\varepsilon\kappa$Tαr del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ al tiempo t=6.75s, tiempo en el que el perfil alcanza el estado estacionario. . . 54

3.10. Isocontornos de mach del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ estado estacionario,resultados obtenidos por [Tang and Hafez, 2001]. 54

3.11. Isocontornos de mach del perfil NACA0012 para un $M = 0.8$, $Re = 500$ y $\alpha = 10^o$ estado estacionario,resultados obtenidos por [Hafez and Wahba, 2005]. 54

3.12. Puntos sobre la superficie del perfil NACA0012 donde se evalúa el coeficiente de presión. 55

3.13. Comportamiento del coeficiente de presión Cp para el perfil NACA0012, obtenido mediante el uso del código N$\varepsilon\kappa$Tαr resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes para un $M = 0.8$, Re=500 y $\alpha = 10^o$. 55

3.14. Comportamiento del coeficiente de presión Cp para el perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 10^o$, $M = 0.8$ y Re=500. La línea continua representa los resultados obtenidos por [Tang and Hafez, 2001] y los puntos huecos representan el resultado obtenido por [Hollanders and Ravasalon, 1986]. 56

3.15. Comportamiento del coeficiente de presión Cp para el perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 10^o$, M=0.8 y Re=500. La línea continua representa los resultados obtenidos por [Tang and Hafez, 2001] y los puntos huecos representan el resultado obtenido mediante un análisis zonal descrito también en [Tang and Hafez, 2001]. 56

3.16. Reproducción parcial de parte del código N$\varepsilon\kappa$Tαr referente al cálculo de la fuerza de sustentación (L) y de resistencia al avance (D). 58

3.17. Reproducción parcial de parte del código N$\varepsilon\kappa$Tαr referente al cálculo de la entropía. 61

4.1. Dominio considerado para la simulación de un sólo álabe en 2D. 63

4.2. Archivo de salida en el cual se muestra el tiempo de ejecución de cada paso de tiempo al utilizar el código N$\varepsilon\kappa$Tαr en la malla para el perfil NACA0012 con un número de elementos de 1849. 64

4.3. Archivo de salida en el cual se muestra el tiempo de ejecución de cada paso de tiempo al utilizar el código N$\varepsilon\kappa$Tαr en la cascada de perfiles cuyo número de elementos de 18388. 65

4.4. Isocontornos de densidad obtenidos con una malla de 4976 elementos para el tiempo t=1.08s del perfil NACA4420. 65

4.5. Malla del perfil NACA4420 para la simulación en 2D. 66

4.6. Simulación del flujo compresible viscoso t=0.0000075s, perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$). . 67

4.7. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=1.08s. 70

4.8. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=2.49s. 71

4.9. Campo de velocidad y contornos de densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=3.495s. 72

4.10. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=4.485s. 73

4.11. Acercamiento del campo de vectores velocidad al t=4.485s, perfil NACA4420 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$. 74

4.12. Acercamiento del campo de vectores velocidad al t=4.5s, perfil NACA4420. 74

4.13. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=4.5s. 75

4.14. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=5.34s. 76

4.15. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=6.54s. 77

4.16. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=7.815s. 78

4.17. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=8.97s. 79

4.18. Coeficiente de sustentación (Cl) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$), flujo compresible viscoso. 80

4.19. Coeficiente de resistencia al avance (Cd) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420 con un ángulo de ataque ($\alpha = 20^o$), flujo compresible viscoso. 82

4.20. Campos de velocidad del perfil NACA0012 para diferentes tiempos con el fin de observar el desarrollo de los fenómenos que acompañan la entrada en pérdida del perfil. Flujo compresible viscoso. 84

4.21. Visualización de las etapas del desarrollo de la entrada en pérdida del perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 30^o$ a diferentes tiempos 85

4.22. Isocontornos de vorticidad (superior) y presión (inferior) respectivamente para el perfil NACA0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 18^o$, $Re = 10^6$. Reproducido de [Mittal and Saxena, 2000]. 86

4.23. Comportamiento del Coeficiente de Levantamiento (Cl) del perfil NLR 7301 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$. Reproducido de [Weber and Platzer, 2000]. 87

4.24. Isocontornos de Mach, resultado de la simulación del perfil NLR 7301 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$, flujo compresible utilizando el modelo (BL). Reproducido de [Weber and Platzer, 2000]. 87

4.25. Isocontornos de Mach, resultado de la simulación del perfil NLR 7301 con un ángulo de ataque $\alpha = 20^o$, flujo compresible utilizando el modelo (BB). Reproducido de [Weber and Platzer, 2000]. 87

4.26. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible no viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=1.08s. 89

4.27. Campo de velocidad y contornos de mach, densidad, presión, temperatura y entropía, para el flujo compresible no viscoso alrededor del perfil NACA4420 al tiempo t=4.485s. 90

4.28. Comparación entre el coeficiente de sustentación (Cl) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420, para un flujo compresible viscoso y no viscoso. 91

4.29. Comparación entre el coeficiente de resistencia al avance (Cd) como función del tiempo sobre el perfil NACA4420, para un flujo compresible viscoso y no viscoso. 91
4.30. Nomenclatura utilizada para describir la geometría de una cascada de una turbina en 2D. 93
4.31. Dominio de la configuración estándar propuesta por [Bölcs and Fransson, 1986], cascada de 5 álabes. 93
4.32. Malla del perfil NACA4420 para la simulación en 2D. 95
4.33. Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s. 98
4.34. Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s. 99
4.35. Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s. 100
4.36. Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s. 101
4.37. Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=0.2625s. 102
4.38. Campo de vectores velocidad conjuntos para la cascada al tiempo t=0.2625s. 103
4.39. Ampliación de los isocontornos de presión correspondiente a la parte media de la cascada de álabes para el tiempo t= 0.2625s. 104
4.40. Ampliación del campo de vectores velocidad correspondiente a la parte media de la cascada de álabes para el tiempo t= 0.2625s. 105
4.41. Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s. 106
4.42. Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s. 107
4.43. Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s. 108
4.44. Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s. 109
4.45. Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=0.56625s. 110
4.46. Campo de vectores velocidad conjuntos para la cascada al tiempo t=0.56625s. 111
4.47. Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s. 114
4.48. Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s. 115
4.49. Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s. 116
4.50. Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s. 117
4.51. Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=1.51125s. 118
4.52. Campo de vectores velocidad conjuntos para la cascada al tiempo t=1.51125s. 119
4.53. Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s. 121
4.54. Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s. 122
4.55. Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s. 123
4.56. Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s. 124

4.57. Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=1.79625s. 125
4.58. Campo de vectores velocidad conjuntos para la cascada al tiempo t=1.79625s. 126
4.59. Isocontornos de mach para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s. 127
4.60. Isocontornos de la densidad para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s. 128
4.61. Isocontornos de la presión para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s. 129
4.62. Isocontornos de la temperatura para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s. 130
4.63. Isocontornos de la entropía para la cascada de álabes al tiempo t=2.21625s. 131
4.64. Campo de vectores velocidad conjuntos para la cascada al tiempo t=2.21625s. 132
4.65. Comportamiento del coeficiente global de resistencia al avance durante el tiempo de simulación para la cascada de álabes. 133
4.66. Comportamiento del coeficiente global de sustentación durante el tiempo de simulación para la cascada de álabes. 133
4.67. Isocontornos de presión para la cascada experimental propuesta por [Fransson and Verdon, 1991] (cuarta configuración estándar). Flujo compresible no viscoso (ecuaciones RANS). Reproducido de [P. Cinnella et al.,] 134
4.68. Isocontornos de presión para para las cascada experimental propuesta por [Fransson and Verdon, 1991] (cuarta configuración estándar). Flujo compresible viscoso. Simulación obtenida mediante el código N$\varepsilon\kappa$Tαr. 134
4.69. Isocontornos de Mach, resultado de la simulación de la cascada con un Re=0.966x10^6 y un $\alpha = 0^o$. Reproducido de [Bassi and Rebay, 2002]. 135
4.70. Isocontornos de Mach, resultado de la simulación de la cascada, esquema Boumann Oden (BO). Reproducido de [Bassi and Rebay, 2002]. 135
4.71. Visualización de la segregación de vórtices formados en los bordes de salida de los álabes de un álabe de una turbina en un regímen de flujo subsónico. Reproducido de [Hah, 1997]. 135

A.1. Características aerodinámicas (Cd y Cl) calculadas y obtenidas experimentalmente para el perfil NACA4420 con un mach de $M = 0.2$. Reproducido de [Bollech, 1948]. 143
A.2. Desarrollo de la entrada en pérdida del perfil sobre un ala con un perfil NACA4420 con un mach de $M = 0.2$. Reproducido de [Bollech, 1948]. 144

Nomenclatura

$-\overline{\rho}\overline{u_i' u_j'}$ Esfuerzos de Reynolds

β Compresibilidad del fluido

δ_{ij} Delta de Kronecker

κ Conductividad térmica

λ Segundo coeficiente de viscosidad

$\mathbf{\Phi}$ Potencia de velocidad

$\mathbf{V}$ Velocidad

μ Viscosidad dinámica

∇ Operador nabla

$\overline{u}$ Velocidad promediada en el tiempo

ϕ Velocidad potencial de perturbación

ρ Densidad del fluido

τ_{ij} Tensor de los esfuerzos viscosos

a Velocidad del sonido

e Energía interna específica

e_t Energía total específica

h Entalpía específica

M Número de Mach

p Presión

Pr Número de Prandtl

R Constante de los gases

$RANS$ Reynolds Averaged Navier Stokes

T Temperatura

u Velocidad instantánea

u' Fluctuación de velocidad

$\mathbf{q}$ Flujo de calor

Cd Coeficiente de resistencia al avance

Cl Coeficiente de sustentación

Cp Coeficiente de Presión

NACA National Advisory Committee for Aeronautics