



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERIA

**ORIGEN Y EVOLUCION DE MEANDROS
EN CORRIENTES NATURALES**

TESIS

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA CIVIL
INGENIERIA DE COSTAS Y RIOS**

P R E S E N T A :

CECILIO TOMAS SANCHEZ AVILA

**TUTOR:
DR. FRANCISCO JAVIER APARICIO MIJARES**



2007

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Moisés Berezowsky Verduzco

Secretario: M.I. Roberto Mejía Zermeño

Vocal: Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares

1er Suplente: Dr. Aldo Iván Ramírez Orozco

2do Suplente: Dra. Josefina Espinoza Ayala

Lugares donde se realizó la tesis:

- **DEPFI Campus Morelos**
- **Instituto Mexicano de Tecnología del Agua**

**TUTOR DE TESIS:
Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares**

FIRMA

ÍNDICE

<i>CAPITULO</i>	<i>Página</i>
Lista de variables	5
CAPITULO 1 Introducción	
1.1 Antecedentes	8
1.2 Objetivos	8
1.3 Definición del problema	9
1.4 Justificación	9
CAPITULO 2 Teorías sobre el origen y evolución de meandros	
2.1 Teorías del meandro	10
2.1.1 Relaciones empíricas aplicables a cauces meandreados	10
2.1.2 Teoría de la mínima variancia	12
2.1.3 Teoría de régimen	16
2.1.3.1 Relación $b-\lambda$	18
2.1.3.2 Relación $h/D - b/h$	19
2.1.4 Teoría de Fargue	21
2.2 Teorías que describen el movimiento transversal en una corriente meandreada	22
2.2.1 Teoría de las perturbaciones	22
2.2.2 Teoría de la corriente helicoidal	24
2.2.2.1 Naturaleza convectiva de las corrientes meandreadas	30
2.2.3 Teoría de Thomson	30
2.2.4 Teoría de la rotación de la Tierra	33

CAPITULO 3 Análisis crítico de las teorías sobre el origen y evolución de meandros	
3.1 Relaciones empíricas aplicables a cauces meandreantes	39
3.2 Teoría de la mínima variancia	42
3.3 Teoría de régimen	47
3.4 Teoría de Fargue	49
3.5 Teoría de las perturbaciones	50
3.6 Teoría de la corriente helicoidal	51
3.7 Teoría de Thomson	53
3.8 Teoría de la rotación de la Tierra	54
3.9 Propuestas para algunas mejoras en las teorías del meandro	60
CAPITULO 4 Aplicación de la teorías del meandro a dos ríos mexicanos.	
4.1 Análisis del río Papaloapan	63
4.2 Análisis del río Pánuco	72
4.3 Análisis e interpretación de resultados	78
4.4 Aplicación de la combinación de las teorías del meandro	84
4.5 Análisis del río Papaloapan	85
4.6 Análisis del río Pánuco	88
CAPITULO 5 Conclusiones y recomendaciones.	92
BIBLIOGRAFIA.	95

Lista de variables.

A área de la sección transversal de un cauce meandreante (m^2). Puntos correspondientes a ríos con barras alternadas graficados en la figura 2.2

a aceleración de Coriolis

α ángulo de inclinación de la superficie del agua con respecto al plano horizontal (radianes)

b ancho de cauce (m). Puntos correspondientes a ríos trenzados de laboratorio graficados en la figura 2.2

b_c ancho central del fondo del cauce donde los efectos de las márgenes son poco representativas (m)

B ancho de meandro (m). Puntos correspondientes a ríos trenzados graficados en la figura 2.2

β variable relacionada con la fricción en la frontera del cauce

C puntos correspondientes a ríos con barras múltiples graficados en la figura 2.2

C_m curvatura media de un cauce meandreante según Fargue

c coeficiente de Chézy $\left(m^{1/2}/s \right)$

D diámetro de sedimento representativo de un cauce meandreante (mm)

δ factor de reducción del esfuerzo cortante en el fondo

Δ semiamplitud de meandro (m)

Δh sobreelevación transversal de la superficie libre del agua (m)

E_1, E_2 funciones dependientes de η

F fuerza centrífuga por unidad de volumen utilizada en la teoría de la corriente helicoidal $\left(kg_f/m^3 \right)$

F_L fuerza de sustentación (kg_f)

F_T fuerza centrífuga según la teoría de Thomson (kg_f)

f factor de fricción de Darcy-Weissbach

ϕ latitud geográfica ($^\circ$)

g aceleración de la gravedad $\left(m/s^2 \right)$

h tirante de una corriente meandreante (m)

h_m tirante medio de un cauce meandreante según Fargue (m)

i constante de proporcionalidad en la expresión de Fargue.

$J_n(\theta_0)$ funciones de Bessel de primera especie y orden n de θ_0

j constante de integración en la expresión de Thomson

k constante adimensional producto de la aplicación del teorema de Buckingham

κ constante de Von Kármán

l_c coordenada longitudinal a lo largo del eje de la corriente meandreante (m)

\mathcal{L} recta que representa la frontera superior de los puntos A, M y R en la figura 2.2

\mathcal{L}_A recta que representa la frontera inferior de los puntos A, M y R en la figura 2.2
 \mathcal{L}_M recta que representa la frontera inferior de los puntos M y R en la figura 2.2
 L_m longitud de desarrollo media de un cauce meandreante según Fargue (m)
 L longitud de desarrollo del cauce meandreante (m)
 L_H longitud de desarrollo de los remolinos horizontales que se generan en una corriente (m)
 λ longitud de meandro (m)
 m puntos correspondientes a canales meandreantes de laboratorio graficados en la figura 2.2
 M puntos correspondientes a ríos meandreantes graficados en la figura 2.2
 N factor relacionado con el factor f ; $N = f^{-1/2}$
 n coeficiente de Manning
 η altura relativa $\frac{z}{h}$
 $\bar{\Omega}$ ángulo de desviación de las líneas de corriente respecto al eje del cauce (radianes)
 p presión hidrostática $\left(\frac{kg_f}{m^2}\right)$
 π_n números adimensionales n de acuerdo con el teorema de Buckingham
 Q gasto líquido $\left(\frac{m^3}{s}\right)$
 R radio hidráulico de la sección transversal de un cauce (m). Puntos correspondientes a ríos en régimen graficados en la figura 2.2
 r radio de curvatura de un cauce meandreante (m). Puntos correspondientes a canales en régimen de laboratorio graficados en la figura 2.2
 r_1 radio de curvatura de la margen interna de una curva de un meandro (m)
 r_2 radio de curvatura de la margen externa de una curva de un meandro (m)
 S pendiente de fondo de un cauce meandreante
 S_y pendiente transversal de la superficie libre del agua
 τ esfuerzo cortante radial $\left(\frac{kg_f}{m^2}\right)$
 τ_c esfuerzo cortante crítico con el cual inicia el movimiento de las partículas del fondo del cauce $\left(\frac{kg_f}{m^2}\right)$
 σ sinuosidad geométrica
 θ ángulo de desviación del eje del cauce con respecto a la coordenada horizontal. Angulo de deflexión con el cual se propagan los remolinos horizontales en una corriente (radianes)
 θ_0 ángulo de desviación del eje del cauce con respecto al eje horizontal en $l_c = 0$ (radianes)
 Θ ángulo comprendido entre dos tangentes extremas a la curva de un meandro y que se puede aceptar que es equivalente a $2\theta_0$ (radianes)
 \bar{u} velocidad media longitudinal $\left(\frac{m}{s}\right)$
 u_T velocidad longitudinal de la corriente en la superficie libre $\left(\frac{m}{s}\right)$
 \bar{v} velocidad transversal media del flujo $\left(\frac{m}{s}\right)$

W_T peso del volumen de agua contenido en la sección transversal de un cauce (kg_f)

W_{50} velocidad de caída (m/s)

ω velocidad angular de rotación de la Tierra (rad/s)

ψ sinuosidad hidráulica

x coordenada longitudinal (m)

y coordenada transversal (m)

z coordenada vertical respecto al fondo del cauce (m)

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN.

1.1 Antecedentes.

A lo largo de la historia se ha verificado que en un inicio el desarrollo de la humanidad ha sido inherente a los ríos, pues fue ahí donde se fundaron las primeras civilizaciones agrícolas de las cuales se tiene conocimiento: Egipto en las riberas del Nilo, Mesopotamia entre el Tigris y el Éufrates, India en la región del Indo y China en el Huang Ho y el Yang Tze Kiang.

A partir de entonces el hombre se ha visto ante la necesidad de aprender a convivir con los ríos. Esta convivencia se tradujo primeramente en obtener los recursos necesarios para la subsistencia de la población que conforme iba creciendo también lo hacían sus necesidades, por lo que requerían una mayor dosis de ingenio para implementar artificios que les permitiera obtener lo necesario de su entorno natural.

En este transitar por el tiempo al trasladarse al presente se percibe que las necesidades son extraordinariamente mayores y ahora gracias a las bondades de la naturaleza y asociadas al constante trabajo de investigación, un cauce natural puede ser la fuente de captación de agua para fines agrícolas, consumo humano, generación de energía e incluso para fines recreativos. La necesidad en el presente no representa únicamente su aprovechamiento como un recurso de la naturaleza, sino también se requiere estudiarlos debido a que en algunos casos representan un peligro latente para zonas urbanas y agrícolas expuestas a una posible inundación.

Una morfología típica en un río es la de un cauce sinuoso o con meandros. El cauce forma curvas, cuya ondulación en planta está asociada a una asimetría en las secciones transversales, ya que la profundidad del agua es mayor en la margen cóncava y menor en la convexa.

Los meandros presentan una evolución que consiste en una propagación hacia aguas abajo y un incremento en la profundidad a costa de las orillas.

La sinuosidad es un aspecto importante para un cauce que tiende a ser estable. El hecho fundamental es que los ríos en estado natural no son rectos. Un cauce rectilíneo o de pequeña curvatura en planta con fondo móvil, no es capaz de conducir la corriente en línea recta sino que desarrolla una inestabilidad lateral cuyas consecuencias son la formación de barras alternadas, el ataque de las orillas del cauce, etc., (Vide, 1997).

1.2 Objetivos.

A partir de las diversas teorías que explican el fenómeno del meandreo en ríos naturales, se pretende analizar y comparar tales teorías con condiciones reales y en función de la interpretación de los resultados obtenidos, proponer algunas mejoras para estas teorías del meandreo.

1.3 Definición del problema.

Un río presenta diversas etapas en su desarrollo; generalmente es trezado o meandreante y ocasionalmente en pequeños tramos es rectilíneo.

En su inicio (río de montaña), el río se caracteriza por poseer cierta diversidad de cauces con fuertes pendientes y constituidos de material gravoso o rocoso, esta diversidad de corrientes converge hacia una sola corriente conforme el río se va desarrollando hacia aguas abajo. Una vez que el río alcanza las planicies o valles, el cauce posee una pendiente más moderada, el gasto líquido se ha ido incrementando así como el sólido ha decrecido, todas estas condiciones son las propicias para que el río posea cierto trazo en planta que se caracteriza por serpentear, este fenómeno es conocido como meandro o sinuosidad.

1.4 Justificación.

Hoy en día los ríos siguen representando una rica fuente de beneficios para la humanidad. No obstante, ya se ha dicho que las necesidades y los riesgos han ido en aumento con la población.

El análisis del meandro obedece a la necesidad de entender el comportamiento de un río, sobre todo ante la presencia de eventos de precipitación extraordinarios que pueden concluir en inundaciones así como sobrepasar a las diversas obras hidráulicas que se localicen sobre el mismo. De esta manera, se aplicarán las teorías del meandro a dos ríos mexicanos que son el Pánuco y el Papaloapan.

En resumen el presente trabajo consiste en lo siguiente:

CAPÍTULO 2 Se hace una descripción de las teorías del meandro, las cuales involucran desde estudios empíricos hasta teorías basadas en hipótesis más complejas de la física de un río.

CAPÍTULO 3 Se realiza un análisis crítico de las teorías descritas en el capítulo anterior. En este capítulo se cuestionan los resultados que se obtienen mediante la aplicación de las teorías del meandro con valores típicos representativos de un río como datos, además se verifica que ciertas teorías no proporcionan resultados coherentes con respecto a lo que en un río meandreante se presenta.

Se proponen algunas mejoras en las teorías del meandro así como su combinación general, mismas que se verifican en el capítulo posterior.

CAPÍTULO 4 Se lleva a cabo la aplicación de las teorías del meandro así como la aplicación de las variantes propuestas en el capítulo tres, a los ríos mexicanos Papaloapan y Pánuco.

CAPÍTULO 2

TEORÍAS SOBRE EL ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE MEANDROS.

Se han llevado a cabo varios intentos por precisar las condiciones bajo las cuales se inicia el proceso del desarrollo de los meandros. Desafortunadamente ninguna de las teorías desarrolladas es capaz de proporcionar una explicación totalmente satisfactoria, (Garde y Ranga, 1985).

A continuación se realiza una descripción de las diversas teorías desarrolladas, de las cuales no todas son específicamente teorías del meandro, sino que algunas de estas teorías describen el movimiento transversal helicoidal que se presenta en una corriente natural.

2.1 Teorías del meandro.

En esta primera clasificación de las teorías asociadas al proceso meandreante, se tratará tanto con teorías empíricas como con teorías analíticas.

2.1.1 Relaciones empíricas aplicables a cauces meandreantes.

A lo largo de diversas épocas, investigadores de diferentes partes del mundo han obtenido expresiones de origen empírico que permiten evaluar ciertas características geométricas de los cauces meandreantes. Todo esto obedeció a la necesidad de contar con relaciones entre las principales características de un río y que mediante esto, fuera posible describir el comportamiento integral de un río en el tiempo. Dicho de otro modo, el objetivo de esos estudios ha consistido en tratar de circunscribir los ríos dentro de un patrón de comportamiento.

Cabe mencionar que las expresiones que se proporcionan en esta sección son sólo algunas de las muchas que existen, como la desarrollada por Werner (1951), Anderson (1967), Schumm (1960, 1968) y Hansen (1967), por citar algunos. Para esto se han seleccionado aquéllas que involucran las variables más representativas de un cauce meandreante natural (como lo son el gasto, ancho de cauce, longitud de onda y ancho de meandro) mismas que en su momento ha sido posible recopilar de los cauces que se analizarán en este trabajo.

En cuanto al origen de estas relaciones, se puede argumentar que son el producto de un tratamiento estadístico a una serie de datos correspondientes a las variables que describen la morfología y el flujo tanto en cauces naturales como de laboratorio (por cauces naturales, se comprenderán tanto a los aluviales como los ubicados en las regiones glaciares), teniendo como idea principal comparar la información obtenida de los cauces artificiales con lo que sucedía en las corrientes naturales, tratando con esto de validar los primeros.

De esta manera, Agarwal (1983) trabajó con datos de laboratorio y de campo, obteniendo expresiones válidas para cualquier gasto comprendido en el intervalo $9 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} < Q < 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$.

Inglis (1949), por su parte, trabajó con información de ríos con llanuras de inundación. Leopold y Wolman (1960), analizaron meandros del río Mississippi así como canales de laboratorio y

meandros sobre glaciares. Zeller (1967) utilizó información de meandros sobre hielo (Groenlandia), meandros en ríos aluviales, en roca sólida y roca caliza (ríos Suizos), complementando su información con datos de Leopold y Wolman. Altunin (1967) realizó sus investigaciones en ríos de Asia central. Ackers y Charlton (1970) utilizaron datos de laboratorio trabajando con diversos diámetros de sedimento comprendidos entre 0.15 y 0.7mm.

A continuación se muestran las relaciones empíricas que serán objeto de este análisis.

Tabla 2.1 Algunas relaciones funcionales empíricas.

Autor	Ecuación.	
Agarwal (1983)	$\lambda = 29.7Q^{0.32}$	Para $Q < 9 \text{ m}^3/\text{s}$
	$\lambda = 11.55Q^{0.75}$ $B = 0.476\lambda$	Para $Q > 9 \text{ m}^3/\text{s}$
Inglis (1949)	$\lambda = 6.6b$	
	$B = 17.38b$	
	$\lambda = 54Q^{0.5}$	
	$B = 153.4Q^{0.5}$	
Dury (1965)	$\lambda = 54.3Q^{0.5}$	
	$\lambda = 11b^{1.01}$	
Leopold y Wolman (1957-60)	$B = 2.7b^{1.1}$	
	$\lambda = 32.9Q^{0.55}$	
	$\lambda = 10b^{1.025}$	
Zeller (1967)	$B = 4.5b$	
Altunin (1967)	$\lambda = 12.15b$	
Ackers y Charlton (1970)	$\lambda = 12.13b^{1.09}$	

Donde:

λ : longitud de onda [L]

B : ancho de meandro [L]

b : ancho de cauce $[L]$
 Q : gasto dominante $[L^3/T]$

2.1.2 Teoría de la mínima variancia.

Langbein y Leopold (1966) desarrollaron la teoría de que en la formación de meandros regulares (aquellos que tiene radio y periodo aproximadamente constante); se minimiza la suma de los cuadrados de los cambios de dirección en cada unidad de distancia. Estos autores exponen que los meandros son el resultado del proceso erosión-depositación que tiende hacia la forma estable, con lo cual algunas características hidráulicas y geométricas del río no presentan grandes variaciones (velocidad, tirante, ancho de cauce y pendiente).

El ajuste de tales variables se debe no únicamente a la erosión y depositación, sino también a la variación de las formas de fondo, las cuales alteran la resistencia hidráulica.

Estos autores desarrollaron un modelo relativamente simple: un río tiene una probabilidad finita a desviarse un ángulo $d\theta$ en una distancia dL a lo largo de su trayectoria. La distribución de probabilidad como una función del ángulo de desviación es considerada normal.

De acuerdo con Von Schelling (1951), la condición general para tener la mínima variancia entre dos puntos de una curva continua está dada cuando:

$$\sum \frac{\Delta L}{r^2} = \text{mínima} \quad (2.1)$$

ΔL : distancia unitaria a lo largo del desarrollo del cauce.

r : radio de curvatura asociado a ΔL .

Por otro lado se tiene:

$$r = \frac{\Delta L}{\Delta\theta} \quad (2.2)$$

Donde:

$\Delta\theta$: ángulo de desviación del eje del cauce con respecto al eje horizontal x .

Sustituyendo (2.2) en (2.1):

$$\sum \frac{(\Delta\theta)^2}{\Delta L} = \text{mínima} \quad (2.3)$$

La ecuación 2.3 puede satisfacerse con diversos tipos de funciones. Langbein y Leopold (1966) sugirieron que una curva generada en función del seno es una buena aproximación para satisfacer la ecuación 2.3:

$$\theta = \theta_0 \text{sen} \left(2\pi \frac{l_c}{L} \right) \quad (2.4)$$

Donde θ_0 y θ son los ángulos de deflexión con respecto a un plano horizontal en $l_c = 0$ y en cualquier l_c respectivamente (figura 2.1), siendo l_c la coordenada longitudinal a lo largo del eje de

la corriente meandrente, y L la longitud de desarrollo del cauce meandrente medida a lo largo de l_c .

A partir de la expresión (2.4) se pueden obtener algunas características geométricas del cauce.

Sea

$$\varepsilon = 2\pi \frac{l_c}{L}$$

Por lo que

$$\theta = \theta_0 \text{sen} \varepsilon \quad (2.5)$$

Considerando que x es la coordenada longitudinal, y y la coordenada transversal correspondientes a la trayectoria longitudinal l_c asociada al ángulo θ , se tiene:

$$\cos \theta = \frac{dx}{dl_c}$$

$$\text{sen} \theta = \frac{dy}{dl_c}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta dl_c \\ dy &= \text{sen} \theta dl_c \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{Por lo que } dx = \frac{L}{2\pi} \cos(\theta_0 \text{sen} \varepsilon) d\varepsilon \quad (2.7)$$

Desarrollando el coseno en una serie de funciones de Bessel de primera especie y orden i , $J_i(\theta_0)$

$$\cos(\theta_0 \text{sen} \varepsilon) = J_0(\theta_0) + 2J_2(\theta_0) \cos 2\varepsilon + 2J_4(\theta_0) \cos 4\varepsilon + \dots \quad (2.8)$$

Con esto se tiene:

$$dx = \frac{L}{2\pi} [J_0(\theta_0) + 2J_2(\theta_0) \cos 2\varepsilon + 2J_4(\theta_0) \cos 4\varepsilon + \dots] d\varepsilon \quad (2.9)$$

Integrando dentro de los límites $[0; \varepsilon]$, se obtiene:

$$x = \frac{L}{2\pi} \left[J_0(\theta_0) \varepsilon + 2J_2(\theta_0) \frac{\text{sen} 2\varepsilon}{2} + 2J_4(\theta_0) \frac{\text{sen} 4\varepsilon}{4} + \dots \right] \quad (2.10)$$

Analizando el sentido y:

$$dy = \frac{L}{2\pi} \text{sen}(\theta_0 \text{sen} \varepsilon) d\varepsilon \quad (2.11)$$

$$\text{sen}(\theta_0 \text{sen} \varepsilon) = 2J_1(\theta_0) \text{sen} \varepsilon + 2J_3(\theta_0) \text{sen} 3\varepsilon + 2J_5(\theta_0) \text{sen} 5\varepsilon + \dots \quad (2.12)$$

$$y = \frac{L}{2\pi} \left[2J_1(\theta_0)(1 - \cos \varepsilon) + 2J_3(\theta_0) \frac{(1 - \cos 3\varepsilon)}{3} + 2J_5(\theta_0) \frac{(1 - \cos 5\varepsilon)}{5} + \dots \right] \quad (2.13)$$

De la expresión (2.13), para $\varepsilon = (2n + 1)\pi$ (valles), la ordenada y corresponde a la semiamplitud del meandro:

$$\Delta = \frac{2L}{\pi} \left[J_1(\theta_0) + \frac{J_3(\theta_0)}{3} + \frac{J_5(\theta_0)}{5} + \dots \right] \quad (2.14)$$

Las funciones de Bessel son constantes para un valor dado de θ_0 . Se utilizarán las funciones de Bessel hasta el quinto orden ya que para órdenes superiores el valor correspondiente es ínfimo.

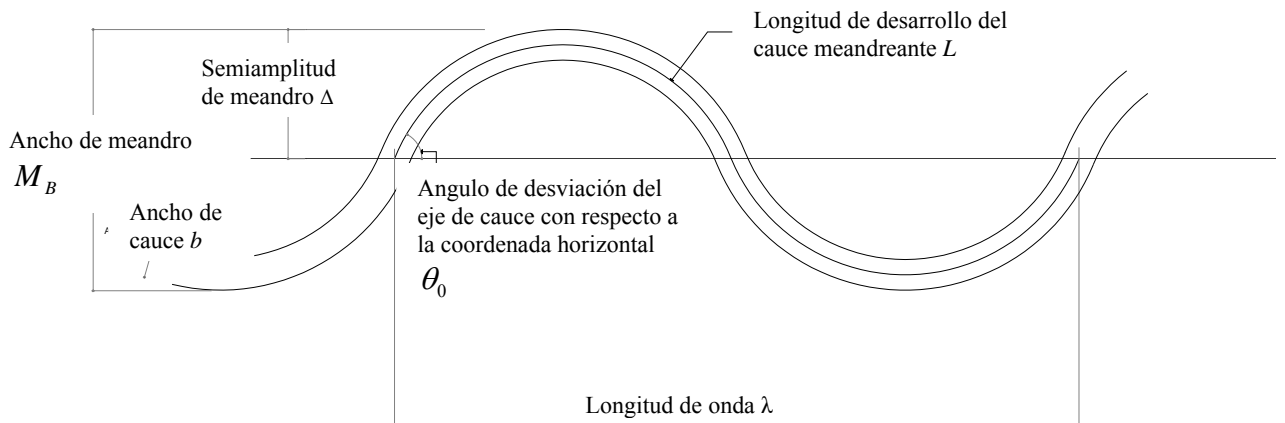


Figura 2.1 Idealización de una corriente meandreante mediante una función senoidal, Selim y Da Silva, 2001.

La curvatura $1/r$ del eje del cauce representado por la función senoidal generada está dada por:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\theta}{dl_c} = \frac{2\pi\theta_0}{L} \cos\left(2\pi \frac{l_c}{L}\right) \quad (2.15)$$

En la cual r es el radio de curvatura del eje del cauce meandreante.

Lo anterior indica que cuando $l_c = 0, L/2, L$, etc., (crestas y valles), entonces $\left|\frac{1}{r}\right| = \text{máx}$, y cuando

$l_c = L/4, 3L/4, 5L/4$, etc., (puntos de inflexión), entonces $\left|\frac{1}{r}\right| = 0$. Por lo tanto si se trata con una sola curva bastará con indicar $l_c = 0$ para hacer referencia a los valores de los puntos de valles y crestas, y $l_c = L/4$ para hacer referencia a los puntos de inflexión.

De acuerdo con (2.15), cuando $\cos\left(2\pi \frac{l_c}{L}\right) = 1$ (puntos cresta), $\frac{1}{r}$ adquiere su máximo valor, lo cual queda expresado como:

$$\frac{1}{r} = \frac{2\theta_0\pi}{L} \quad (2.16)$$

En el sentido de las abcisas, al aplicar la expresión (2.10) para $\varepsilon = 2\pi$ (punto de inflexión), se obtiene la longitud de onda:

$$\lambda = LJ_0(\theta_0) \quad (2.17)$$

Se observa que la longitud de desarrollo del cauce meandreante L y la longitud de onda λ están interrelacionadas por el ángulo de inclinación del eje del canal con respecto al plano horizontal θ_0 únicamente.

La sinuosidad es la relación de la longitud del cauce desarrollada dividida entre la longitud de onda respectiva:

$$\sigma = \frac{L}{\lambda} \quad (2.17 \text{ a})$$

Mediante este concepto y la expresión (2.17), se obtiene:

$$\sigma = \frac{1}{J_0(\theta_0)} \quad (2.18)$$

Donde $J_0(\theta_0)$ es la función de Bessel de primera especie y orden cero (de la variable θ_0).

De acuerdo con Leopold, Wolman y Miller (1964), si la sinuosidad es mayor a 1.5, se trata de un río meandreante, y de un río rectilíneo si ocurre lo contrario. Cuando $\theta_0 \approx 138^\circ$, entonces $J_0(\theta_0) = 0$, y por lo tanto, $\sigma \rightarrow \infty$. Sin embargo esto nunca puede ocurrir, porque cuando θ_0 alcanza el valor aproximado de 126° , las curvas del meandro entran en contacto con la otra y el patrón de flujo del meandro se destruye. De ahí $\theta_0 \approx 126^\circ$ proporciona una sinuosidad muy grande de $\sigma \approx 8.5$. La sinuosidad de los ríos naturales usualmente varía entre $1 < \sigma \leq 5$.

Según Langbein y Leopold (1966) el ángulo θ_0 es una función única de la sinuosidad:

$$\theta_0 = 2.2 \sqrt{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \text{ (radianes)} \quad (2.19)$$

La expresión (2.15) de la curvatura de un cauce meandreante generado en función del seno puede ser expresada en la forma adimensional, con la ayuda del ancho de la corriente b , *Selim y Da Silva, 2001*:

$$\frac{b}{r} = \theta_0 \frac{2\pi b}{L} \cos\left(2\pi \frac{l_c}{L}\right) \quad (2.20)$$

En relación a lo que se discutirá posteriormente en la teoría de régimen al tratar con cauces aluviales, se puede hacer uso de la expresión $\lambda \approx 6b \approx 2\pi b$, y gracias a que (2.18) se puede expresar como $\frac{\lambda}{L} = J_0(\theta_0)$, se tiene:

$$\frac{2\pi b}{L} \approx J_0(\theta_0) \quad (2.21)$$

La cual proporciona en conjunto con la expresión (2.20)

$$\frac{b}{r} = [\theta_0 J_0(\theta_0)] \cos\left(2\pi \frac{l_c}{L}\right) \quad (2.22)$$

Siendo en la sección de cresta:

$$\frac{b}{r} = \theta_0 J_0(\theta_0), \text{ es decir}$$

$$\frac{b}{r} = \frac{\theta_0}{\sigma} \quad (2.23)$$

Con esto se tiene que mediante la teoría de la mínima variancia es posible establecer expresiones para poder evaluar las características geométricas de un cauce meandreante. Nótese que esta metodología no proporciona parámetros hidráulicos.

2.1.3 Teoría de régimen.

La teoría de régimen es el resultado de una recopilación de trabajos empíricos aplicables a la estabilidad de cauces con la presencia de sedimento. Su origen se remonta a la observación de canales de riego no revestidos en la India y Pakistán. La teoría involucra el equilibrio dinámico del gasto sólido, el gasto líquido y la geometría del cauce. Tal equilibrio se le conoce también como régimen.

Se dice entonces que un canal en régimen es aquel que se encuentra en equilibrio dinámico y que posee un ancho, tirante y pendiente adecuados para hacerlo estable, *Martin (1997)*.

La teoría de régimen puede ser aplicada de la siguiente manera:

1.- Como una orientación sobre las dimensiones y características geométricas que debe tener un cauce para que alcance el estado de régimen.

2.- Como una estimación de las tendencias de inestabilidad de un cauce existente comparando sus dimensiones con las proporcionadas por la teoría de régimen.

De este modo, si b , h y S correspondientes al estado de régimen son mayores que las que prevalecen en el río, la teoría indica que existe una tendencia del cauce hacia la erosión; de lo contrario, existirá una tendencia hacia la sedimentación.

De acuerdo con Leopold y Bull (1979), el ajuste hacia el equilibrio de una corriente es uno en el cual en un periodo de años, la pendiente, velocidad, profundidad, ancho, rugosidad, patrón de flujo y la morfología del cauce se ajustan mutuamente para proporcionar la potencia y eficiencia necesaria para transportar la carga suministrada por el drenado de la cuenca correspondiente, sin la presencia de la erosión o depositación del cauce, Bull (1991).

Según Cruickshank y Maza (1973), cuando no existe un equilibrio entre la pendiente del valle y la pendiente del cauce, puede ocurrir lo siguiente:

- Erosión en el fondo aguas arriba y depósito aguas abajo del tramo que está en equilibrio, que se presenta cuando las riberas del cauce son más resistentes a la erosión que el fondo.
- Incremento de la longitud del cauce y desarrollo de meandros lo cual puede ocurrir cuando el fondo y los taludes poseen una resistencia similar a la erosión.

Por otro lado, se presenta la teoría de régimen desarrollada por Lacey (1930), misma que obtuvo a partir de los estudios realizados previamente por Kennedy en 1895.

$$b = 4.831Q^{1/2} \quad (2.24)$$

$$h = \frac{0.128Q^{1/3}}{D_m^{1/6}} \quad (2.25)$$

$$S_0 = \frac{0.205D_m^{5/6}}{Q^{1/6}} \quad (2.26)$$

Siendo:

D_m diámetro medio de sedimento del fondo del cauce $[L]$

b ancho del cauce $[L]$

h tirante medio $\left(\frac{A}{b}\right) [L]$

A área de la sección transversal $[L^2]$

S pendiente de fondo

Q gasto dominante $\left[\frac{L^3}{T} \right]$

2.1.3.1 Relación b - λ

En las fronteras de la corriente aluvial donde los esfuerzos cortantes son grandes se originan remolinos los cuales se propagan aguas abajo por medio de la corriente. En este proceso los remolinos se difunden y se fusionan incrementando su tamaño mientras su número decrece. Los remolinos horizontales generados en las márgenes provocan una turbulencia horizontal y su tamaño puede ser tan grande como el ancho del cauce b . El tamaño de los remolinos horizontales se incrementa conforme se mueven hacia aguas abajo con un ángulo tal que $\tan \theta = \frac{b}{L_H}$, ya que la longitud de desarrollo del remolino horizontal L_H , es función del ancho del cauce b . θ es el ángulo de deflexión con el cual se propagan los remolinos horizontales.

De mediciones realizadas por Engels (1926), Hasegawa (1983) y Yen (1971), se obtiene que:

$$L_H = 6b \quad (2.27)$$

L_H - Longitud horizontal de los remolinos horizontales $[L]$

Por lo que el ángulo de propagación de los remolinos es $\tan \theta = \frac{1}{6}$. Cuando el tamaño de los remolinos es tan grande como b , se desintegran (término de la fase). Esto desencadena la generación de nuevos remolinos los cuales tienen el mismo ciclo y eventualmente generan otros nuevos remolinos y así sucesivamente. El hecho de que la desintegración de un remolino coincide (en el espacio y tiempo) con la generación del próximo, significa que se forme una secuencia de desencadenamiento a lo largo de la dirección x , originando como consecuencia la generación de las formas de fondo (aparición de barras alternadas cuya longitud es igual a $6b$). Leopold et al. (1964) obtuvieron una expresión equivalente mediante el análisis de datos de campo y laboratorio, mediante los cuales determinaron que el coeficiente 6 es un valor medio representativo. Y que L_H coincide con el valor de la longitud de onda, por lo que de acuerdo con esto, se puede expresar:

$$\lambda \approx 6b \quad (2.28)$$

Es decir, que la longitud de onda está en función del ancho del cauce y varía directamente proporcional con este. Posteriormente se hará el comparativo correspondiente de esta ecuación con las expresiones empíricas de la tabla 2.1.

Por otro lado, otros parámetros de interés de un cauce natural son el ancho de cauce (b), el tirante (h) y el diámetro representativo del material que constituye el fondo del cauce (D), mismos que a continuación se analiza su interrelación.

2.1.3.2 Relación $h/D - b/h$

Según Selim y Da Silva (2000), la configuración de las barras alternadas en una corriente en el plano horizontal, está determinada por la configuración del desencadenamiento de los remolinos horizontales los cuales están en función de la relación b/h y h/D . En la figura 2.2 se muestra un diagrama de dispersión en donde cada uno de los puntos se ubica en una zona que representa una configuración dada. Así, la zona A representa barras alternadas, la C barras múltiples, la B ríos trenzados, la b canales trenzados de laboratorio, la M ríos meandreados, la m canales meandreados de laboratorio, la R ríos en régimen y la r ríos en régimen de laboratorio. Los puntos graficados contienen información de varios ríos japoneses proporcionada por S. Ikeda (Tokyo Institute of Technology).

Se observa en la figura 2.2 que la línea \mathcal{L} no forma únicamente la frontera superior de A (barras alternadas), sino también lo es de M (ríos meandreados) y R (ríos en régimen), implicando:

$$\text{Si } \frac{h}{D} \leq 200, \text{ entonces } \left(\frac{b}{h}\right)_1 = 25 \left(\frac{h}{D}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.29)$$

$$\text{Si } \frac{h}{D} \geq 200, \text{ entonces } \left(\frac{b}{h}\right)_1 = 146 \approx 150$$

Donde $\left(\frac{b}{h}\right)_1$ son las ordenadas correspondientes a la línea \mathcal{L} .

Siendo:

h tirante [L]

D diámetro representativo del material que forma el cauce [L]

b ancho de cauce [L]

Similarmente para la frontera inferior, la línea \mathcal{L}_A se representa por la siguiente relación:

$$\text{Si } \frac{h}{D} \leq 100, \text{ entonces } \left(\frac{b}{h}\right)_0 = 0.25 \frac{h}{D} \quad (2.30)$$

$$\text{Si } \frac{h}{D} \geq 100, \text{ entonces } \left(\frac{b}{h}\right)_0 = 25$$

Donde $\left(\frac{b}{h}\right)_0$ son las ordenadas de la curva \mathcal{L}_A .

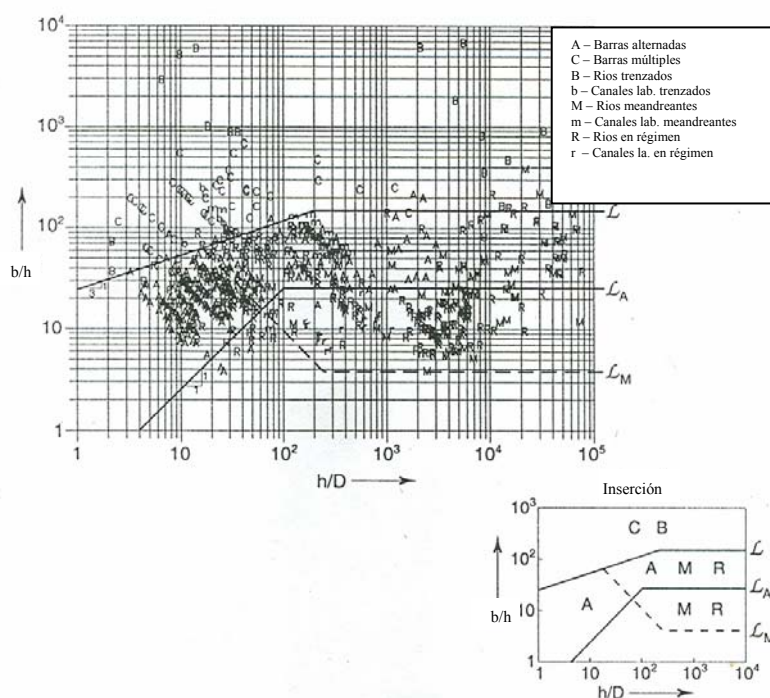


Figura 2.2 Relación h/D contra b/h según Selim y Da Silva, 2001.

De acuerdo con la figura 2.2, el hecho de que los puntos ubicados en las zonas A y M tengan el mismo límite superior \mathcal{L} implica que los meandros con barras alternadas ocurren en corrientes que tienen un desencadenamiento horizontal de remolinos.

Aunque la frontera superior común a los puntos A y M es la línea \mathcal{L} , sus límites inferiores son diferentes y pueden ser caracterizados por las líneas \mathcal{L}_A y \mathcal{L}_M . El área entre \mathcal{L}_A y \mathcal{L}_M sobre la parte derecha de la gráfica contiene casi exclusivamente puntos M, mientras los puntos A apenas están presentes. Este hecho se puede tomar como un indicio de que las barras alternadas no necesariamente son la causa exclusiva del meandro.

Se pueden presentar dos situaciones:

- 1) Si b/h es pequeña, entonces los remolinos horizontales no producen esfuerzos cortantes apreciables en el fondo y por lo tanto no producen formas de fondo (barras alternadas). No obstante, la secuencia de estos remolinos puede iniciar el meandro tanto por su impacto directo sobre las orillas como por la acción convectiva que genera, lo que ocurre entre las líneas \mathcal{L}_A y \mathcal{L}_M .
- 2) Si b/h es mayor que las ordenadas de \mathcal{L}_A , entonces los remolinos producen esfuerzos cortantes apreciables en el fondo y ello produce primero barras alternadas, las cuales actúan como aspas facilitando la deformación de las márgenes, lo que se presenta en la zona comprendida entre \mathcal{L} y \mathcal{L}_A .

2.1.4 Teoría de Fargue.

El ingeniero francés Fargue presentó en 1908 (Fargue 1908), los resultados de sus observaciones de campo acerca del comportamiento hidráulico del río Garona. Las conclusiones a las que arribó son frecuentemente referidas como las leyes de Fargue, las cuales posteriormente fueron verificadas en el río Sena. La principal aportación de Fargue consistió en hacer notar que existe una relación entre la curvatura en planta y la pendiente de fondo del río, ligando con esto dos grados de libertad, el horizontal y el vertical. Fargue apreció que el punto de inflexión entre dos curvas no corresponde exactamente con la profundidad mínima y que tampoco coincide el punto de máxima curvatura con la profundidad máxima. El desfase es de aproximadamente una octava parte de la longitud de onda, Martin (1997).

Producto de sus observaciones, Fargue estableció las siguientes leyes:

- 1) El *thalweg* que se define como la línea que une los puntos de profundidad máxima en el cauce, tiende a formarse en la margen cóncava por lo que en la convexa el sedimento se deposita en forma de playón.
- 2) La profundidad en la margen cóncava y el ancho del playón en la margen convexa se incrementan en la medida que aumenta la curvatura de las riberas.
- 3) La profundidad máxima y el ancho máximo del playón se localizan aguas abajo del punto de máxima curvatura. Lo mismo sucede entre el punto de inflexión y la cresta de la barra correspondiente.
- 4) Cambios bruscos en el radio de curvatura ocasionan cambios bruscos en la profundidad del flujo. Un cambio de curvatura gradual da un perfil de fondo continuo.
- 5) Estas leyes no son válidas para valores extremos de la relación ancho de cauce-longitud de onda b/λ . Por ejemplo, en el río Garona, que fue el sitio de donde estas leyes fueron obtenidas, el ancho del cauce osciló entre 150 y 200 m. Asimismo, la longitud de onda se encontró entre 925 y 1670 m, con lo que se tiene que los límites de aplicación para la relación mencionada están definidos por:

$$0.12 \leq b/\lambda \leq 0.16 \quad (2.31)$$

Para propósitos de una fácil aplicación e interpretación, estas leyes se pueden complementar con las siguientes reglas:

- 6) Para meandros de igual longitud, la profundidad media está en función del ángulo comprendido entre las dos tangentes extremas a la curva del meandro.
- 7) El perfil longitudinal del *Thalweg* y su pendiente, dependen de la variación de la curvatura en planta del meandro, Leliavsky (1955).

De esta manera Fargue, haciendo uso de la regla 6 ideó la expresión para el tirante medio del cauce meandreante en función de su curvatura media, Martin (1997).

$$C_m = \frac{\Theta}{L_m} \quad (2.32)$$

Donde:

C_m curvatura media del meandro

Θ ángulo comprendido entre las dos tangentes extremas a la curva del meandro

L_m longitud de desarrollo del meandro [L]

La relación empírica establecida por Fargue entre la curvatura media y el tirante medio h_m es la siguiente:

$$h_m = 1.5 \left(1 + \sqrt{C_m^2 + 1.711 C_m} \right) \quad (2.33)$$

En resumen, se tiene al final de este subtema la siguiente recapitulación.

- En lo referente a las *expresiones empíricas*, se han proporcionado algunas ecuaciones que hacen posible analizar ciertas características geométricas de cauces naturales.
- A partir de la *teoría de la mínima variancia* desarrollada por Langbein y Leopold (1966), se llega a obtener expresiones que hacen posible la determinación de las principales características geométricas de un cauce meandrente.
- La *teoría de régimen* toma como punto de partida el concepto de régimen de cauces, se plantean las ecuaciones desarrolladas por Lacey (1930) mismas que proporcionan b, h y S en función de Q y D . Así como también se proporciona la relación existente entre $\frac{h}{D} - \frac{b}{h}$ desarrollada por Selim y Da Silva (2000).
- En la *teoría de Fargue* se describen las principales aportaciones que hizo como resultado de sus observaciones de campo en el río Garona y posteriormente en el Sena. De esta forma, se muestran las ecuaciones empíricas que describen el comportamiento de la curvatura y tirante medios en función de Θ y L_m .

Con esto se concluye la descripción de la primera clasificación de las teorías del meandro en donde se ha podido verificar que algunas de estas teorías proporcionan parámetros geométricos de un cauce meandrente, así como algunas de las teorías proporcionan parámetros hidráulicos del mismo.

2.2 Teorías que describen el movimiento transversal en una corriente meandrente.

Este conjunto de teorías manifiesta las diversas formas mediante las cuales se puede originar una corriente helicoidal transversal en un cauce natural. Asimismo, estas teorías explican cómo una perturbación de este tipo puede repercutir en la estimulación del meandro.

2.2.1 Teoría de las perturbaciones.

Las perturbaciones en una corriente recta se propagan hacia aguas abajo provocando cambios en el patrón de flujo y como consecuencia la aparición de meandros. Las causas del origen de alguna perturbación son numerosas, y pueden ir desde el efecto de un tributario hasta la diferencia del material que constituye los taludes y el fondo del canal.

Según Griggs (1906), cuando existe una sobrecarga de sedimento en la corriente, parte de ella puede ser retenida por algún obstáculo y con esto causar asimetría en el flujo y consecuentemente el meandro.

De acuerdo con Hjulstrom (1957), las perturbaciones pueden ser causadas por oscilaciones transversales de la superficie del agua las cuales viajan aguas abajo causando una oscilación de la masa fluida la cual a su vez induce el meandro.

Werner (1951) lo explica de la siguiente manera: una vez que existe alguna perturbación y provoca una oscilación transversal en una corriente aluvial recta, la oscilación viaja chocando y erosionando de una orilla hacia la otra generando con esto una primera curva la cual representa una perturbación para la corriente aguas abajo del cauce, continuando con esto el proceso que concluye en la formación de meandros.

Friedkin (1945) realizó observaciones en pruebas de laboratorio y encontró que una vez que la corriente ha sido perturbada y se ha iniciado una oscilación, existe una tendencia marcada de la corriente a desarrollar una serie de curvas aguas abajo. Las pruebas consistieron en primer lugar en suministrar sedimento a un canal observando que la longitud y el ancho del meandro se incrementan gradualmente hacia aguas abajo. Posteriormente, suministró sedimento mezclado con agua donde el comportamiento observado fue que tanto la longitud como el ancho de meandro tendían a ser constantes. Encontró que la longitud y ancho del meandro están relacionados con el gasto y la pendiente. Observó que se produce un proceso natural de intercambio de sedimentos a partir de los taludes arribando a las barras en forma de carga de fondo y por otro lado erosionando agujeros bajo la ribera cóncava próxima aguas arriba. Este proceso da origen a una serie de curvas a lo largo de la corriente desarrollando un patrón meandreante.

Agarwal (1983) observó el comportamiento de una corriente con transporte de sedimento al introducir una perturbación cercana del fondo del cauce en el extremo de aguas arriba. El canal fue de sección rectangular, con taludes rígidos y la perturbación fue introducida mediante un alambre que oscilaba ubicado a una distancia pequeña del fondo y paralelo a éste con un ángulo de 30 grados respecto al flujo principal. La oscilación se efectuó a diferentes frecuencias. Considerando que en el inicio el fondo del canal era plano, se pudo observar que la introducción de la perturbación condujo a la formación de barras y depresiones alternadas para una frecuencia de oscilación del alambre mayor a 1.83 Hz. Una vez que se han formado rápidas y depresiones, se desencadena la propagación de tales formas en toda la longitud del canal aún cuando la perturbación ha sido retirada. Lo anterior indica que la presencia de perturbaciones que generan corrientes secundarias puede conducir al meandro.

Por otro lado, el proceso de meandro puede estar asociado con el contenido de energía en una corriente, es decir, la concentración de la erosión durante las avenidas sobre los taludes de las curvas y la potencia erosiva producida por el incremento en la turbulencia. Debido a esto, los márgenes de un río no siempre son lo suficientemente resistentes para soportar el exceso de energía turbulenta provocada por el incremento en el gasto a consecuencia de un escurrimiento producido por una precipitación importante, lo que hace común que muchas de las migraciones de los meandros aguas abajo se presenten durante la época de avenidas. Tal proceso explica el movimiento natural de una corriente meandreante y el movimiento continuo hacia aguas abajo, Sparks (1986).

Según Schoklitsch, la formación de meandros podría ser una consecuencia de que la pendiente en ese tramo es demasiado grande y no está en equilibrio con el diámetro del sedimento del fondo. La pendiente en cualquier sección de un canal aluvial es función del diámetro del material que constituye dicha sección. Si la pendiente es menor que la pendiente media de la superficie del valle en la cual el canal es erosionado, el río inicia a meandrear hasta desarrollar la longitud de su curva de pendiente máxima y hacer ambas pendientes iguales, Leliavsky (1955).

Sin embargo, Leopold et al., 1964, encontraron que el patrón de meandros en cauces sobre glaciares tienen semejanza con la geometría de meandros en ríos aluviales, pero con la diferencia de que los canales meandreantes sobre hielo se han formado sin arrastre de sedimento o por la formación de

barras por depositación. Por lo tanto, es factible que el exceso en la carga de sedimento no sea la única causa del meandro.

Algunos ingenieros hindúes como Joglekar (1971), principalmente, confirman que el origen de los meandros se debe al exceso de carga de sedimento durante las avenidas. Cuando la carga de sedimentos excede el requerido para que prevalezca el equilibrio, se forma en el cauce una pendiente pronunciada por depositación del sedimento excedente en el fondo. Al incrementarse la pendiente, el tirante disminuye y el ancho se incrementa si los taludes no son resistentes a la acción de la corriente.

De este modo, el meandro es promovido por los grandes gastos asociados con pendientes moderadas y pequeñas cargas de fondo, (Sparks, 1986).

2.2.2 Teoría de la corriente helicoidal.

Einstein y Li (1958) definieron la corriente o circulación secundaria también llamada flujo secundario o flujo transversal, como la corriente que posee una rotación alrededor de un eje paralelo a la corriente principal, transformándose en un flujo helicoidal (Garde y Ranga, 1985).

El flujo transversal en el fondo desde la margen cóncava hasta la convexa es complementado por un flujo de retorno en dirección opuesta a la de la superficie. El movimiento no es perpendicular a la corriente, sino que posee aguas abajo una componente que varía con la velocidad de la corriente. El resultado es un movimiento helicoidal cuya primera acción consiste en remover el material de la margen cóncava de la corriente transportando el material erosionado a través del canal y depositándolo posteriormente en la margen convexa, intensificándose de esta forma la tendencia hacia el meandro, Sparks (1986).

Existen diversos criterios acerca de la concepción de los patrones de circulación secundaria, como una consecuencia de los estudios efectuadas por algunos investigadores entre los que destacan: Moller, Sterns, Gibson, Terada y Nemenyi, entre otros. Dicho sea de paso, las corrientes tienen influencia en la distribución y depósito del sedimento en suspensión, así como en la formación de barras en el fondo del cauce, Garde y Ranga, 1985. Esto es, las intensas corrientes transversales próximas al fondo en una curva pueden transportar cantidades considerables de material del fondo hacia la margen convexa. Esto es parte del mecanismo de la formación de las barras.

La circulación helicoidal puede explicar la forma de la sección transversal en un meandro, el patrón de erosión y depositación y la migración hacia la parte baja del valle, pero ello no es suficiente para explicar las dimensiones características y proporciones de cauces con meandros, Leopold et al., 1964.

Prus-Chacinski (1954) realizó algunas pruebas induciendo una corriente secundaria en una curva, obteniendo varios patrones de circulación secundaria en la siguiente curva la cual a su vez afecta la circulación en la próxima curva y así sucesivamente.

El meandro incluso se puede desarrollar con un patrón de flujo secundario simétrico cuando las características de resistencia del material que constituyen el fondo y los taludes del cauce cambian a lo largo de su desarrollo. Si la rugosidad de las paredes es mayor que la del fondo, la corriente secundaria puede ser más fuerte y provocar la formación de agujeros alternados en el cauce recto, Shen (1971).

Las corrientes secundarias pueden presentarse aún en cauces rectos con o sin movimiento de sedimentos. Aún en una corriente con márgenes rectas, la línea de máxima velocidad no es recta,

sino se mueve de un estanque hacia otro. Si los estanques se ubican en lados opuestos del cauce, entonces resulta predecible que se pueda desarrollar una sinuosidad en el cauce recto, Sparks, 1986.

En lo que sigue se analizará la sección transversal de una corriente meandreante. Para ello se considera que la sección es rectangular y erosionable, y el ancho de la superficie del agua es b . Además, se hace referencia al ancho del fondo de la sección transversal de la corriente b_c , donde los efectos de las márgenes son poco representativos sobre el patrón de flujo, ya que de acuerdo con Odgaard (1986), usualmente, las márgenes afectan el patrón de flujo a una distancia de aproximadamente un tirante, esto, en el sentido transversal del cauce.

Por otro lado, se supondrá que el radio de curvatura de las líneas de corriente en cualquier ubicación dentro de b_c es aproximadamente igual a la curvatura del canal r en esa ubicación. Si el eje z se ubica de una forma arbitraria dentro de b_c , la ubicación de un punto de la sección transversal con respecto al eje z se encuentra representada por r ; se aceptará que $z = 0$ en el fondo. La fuerza de inercia centrífuga actúa a lo largo de r sobre un volumen de fluido unitario situado sobre el eje z y puede ser expresada de la siguiente manera según Falcón y Kennedy (1983):

$$F = \frac{\gamma \bar{u}^2}{gr} \quad (2.34)$$

Donde

F fuerza centrífuga por unidad de volumen $[F/L^3]$

\bar{u} velocidad media longitudinal $[L/T]$

γ peso específico del fluido $[F/L^3]$

r radio de curvatura de la corriente meandreante $[L]$

g aceleración gravitatoria $[LT^{-2}]$

De acuerdo con Falcón y Kennedy (1983), aplicando la ecuación de momentum a un volumen de control para un valor constante del radio de curvatura y considerando que en la región central de la sección transversal es razonable aceptar que la distribución vertical de la presión es hidrostática, se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \gamma \frac{\partial h}{\partial r}$$

O bien:

$$p' = \gamma h' \quad (2.35)$$

Yen (1971) simplificó la ecuación de momentum radial para el flujo en canales abiertos curvos, obteniendo:

$$gh' - \frac{u^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (2.36)$$

Siendo:

τ esfuerzo cortante radial $\left[\frac{F}{L^2} \right]$

z elevación con respecto al fondo del cauce $[L]$

u velocidad longitudinal a la elevación z $\left[\frac{L}{T} \right]$

O bien, sustituyendo 2.34 y 2.35 en 2.36 se tiene:

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = p' - F \quad (2.37)$$

La velocidad del flujo principal u se expresa como:

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{N+1}{N} \eta^{1/N} \quad (2.38)$$

Donde:

$$\eta = \frac{z}{h}$$

\bar{u} velocidad media longitudinal $\left[\frac{L}{T} \right]$

η altura adimensional

h tirante $[L]$

N parámetro de fricción que se relaciona con el factor de fricción de Darcy-Weisbach f y el coeficiente de Chezy, según Zimmerman y Kennedy (1978) como:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{8} f \right)^{1/2}$$

Siendo κ la constante de Von Kármán.

Si $\kappa = 0.354$ (Nunner, 1956), se tiene:

$$N = f^{-1/2} \quad (2.39)$$

Sustituyendo 2.38 en 2.36 e integrando la expresión resulta:

$$\tau_{zr}(r, \eta) = \gamma h \left[h'(\eta - 1) - \frac{\bar{u}^2}{rg} \frac{(N+1)^2}{N(N+2)} \left(\eta^{(2+N)/N} - 1 \right) \right] \quad (2.40)$$

Según Falcón y Kennedy (1983), la velocidad radial v y el esfuerzo cortante τ están relacionados por:

$$\tau_{rz}(r, \eta) = \frac{\rho \varepsilon}{h} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (2.41)$$

Siendo

$$\varepsilon = \frac{\delta g h^2 S}{\nu} \frac{N^2}{N+1} (1-\eta) \eta^{(N-1)/N} \quad (2.42)$$

$$\delta = \frac{\tau_{0\theta}}{\gamma h S}$$

Donde:

δ factor de reducción del esfuerzo cortante en el fondo, el cual toma en cuenta el momentum del flujo principal fuera de la región central del cauce.

S la pendiente hidráulica

$\tau_{0\theta}$ esfuerzo cortante longitudinal actuando en el fondo del cauce

Sustituyendo 2.40 en 2.41 se obtiene:

$$\frac{v}{\bar{u}} = \frac{1}{\delta S} \frac{N+1}{N^2} \int_0^\eta \left[-h' \eta^{(1-N)/N} - \frac{\bar{u}^{-2} (N+1)^2}{rg N(N+2)} \frac{\eta^{3/N} - \eta^{(1-N)/N}}{1-\eta} \right] d\eta \quad (2.43)$$

Para flujo uniforme, v debe satisfacer:

$$h'_v = \int_0^1 v(\eta) d\eta \quad (2.44)$$

$$h'_v(r) = T \frac{N+1}{N} \frac{u^2}{rg} \quad (2.45)$$

Siendo:

$$T = \frac{h'_v}{h'}$$

$$h' = \frac{N+1}{N} \frac{\bar{u}^{-2}}{rg}$$

Sustituyendo 2.43 y 2.45 en 2.44, utilizando la expansión $\frac{1}{1-\eta} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j$; $\eta < 1$ e integrando se tiene:

$$\frac{v}{\bar{u}} = \frac{1}{\delta S} \frac{\bar{u}^2}{gr} \left(\frac{N+1}{N} \right)^3 \left[-T \eta^{1/N} - \frac{1}{N+2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\eta^{3/N+1+j}}{3/N+1+j} - \frac{\eta^{1/N+j}}{1/N+j} \right) \right] \quad (2.46)$$

De acuerdo con Falcón y Kennedy (1983), la ecuación 2.44 se satisface si T está dada por:

$$T(N) = -\frac{N+1}{N^2(N+2)} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{3}{N+2+j} \right) \left(\frac{3}{N+1+j} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{1}{N+1+j} \right) \left(\frac{1}{N+j} \right)} \right] \quad (2.47)$$

Por otro lado, de acuerdo con las siguientes definiciones teóricas se tiene:

$$u_* = \bar{u} \sqrt{\frac{f}{8}}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Siendo:

$$u_* \text{ velocidad al cortante } \left[\frac{L}{T} \right]$$

$$\rho \text{ densidad del fluido } \left[\frac{FL^2}{T^4} \right]$$

Con lo cual:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8\tau}{\rho f}} = \sqrt{\frac{8Sg \delta h}{f}}$$

O bien:

$$\bar{u} = \left(\frac{8Sg \rho h}{f} \right)^{1/2} = (8Sg \delta h)^{1/2} N$$

Sustituyendo esta expresión de la velocidad media, junto con la expresión 2.39 y 2.47 en 2.46, se tiene:

$$\frac{v}{\bar{u}} = \frac{8Sg \delta h N^2}{\delta Sgr} \left(\frac{N+1}{N} \right)^3 \left\{ - \left[-\frac{N!}{N^2(N+2)} \sum_{j=0}^{\infty} X \right] \eta^{1/N} - \frac{1}{N+2} \sum_{j=0}^{\infty} Y \right\}$$

Siendo

$$X = \frac{1}{\left(\frac{3}{N} + 2 + j\right)\left(\frac{3}{N} + 1 + j\right)} - \frac{1}{\left(\frac{1}{N} + 1 + j\right)\left(\frac{1}{N} + j\right)}$$

$$Y = \frac{\eta^{\frac{3}{N} + 1 + j}}{\left(\frac{3}{N} + 1 + j\right)} - \frac{\eta^{\frac{1}{N} + j}}{\left(\frac{1}{N} + j\right)}$$

Reduciendo términos se tiene:

$$\frac{v}{\bar{u}} = \frac{8h}{r} \left(\frac{N+1}{N}\right)^3 \left[\frac{N+1}{N^2(N+2)} \sum_{j=0}^{\infty} X \right] \eta^{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+2} \sum_{j=0}^{\infty} Y$$

O bien:

$$\frac{vr}{\bar{u}h} = 8 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(N+1)^4}{N^3(N+2)} X \eta^{\frac{1}{N}} - \frac{(N+1)^3}{N(N+2)} Y \right] \quad (2.48)$$

Esta ecuación se encuentra representada por la figura 2.3 en donde se nota que existen curvas para diferentes valores del parámetro N , mediante los cuales, asociados con el valor de la profundidad relativa, es posible conocer el valor correspondiente de $\frac{vr}{\bar{u}h}$.

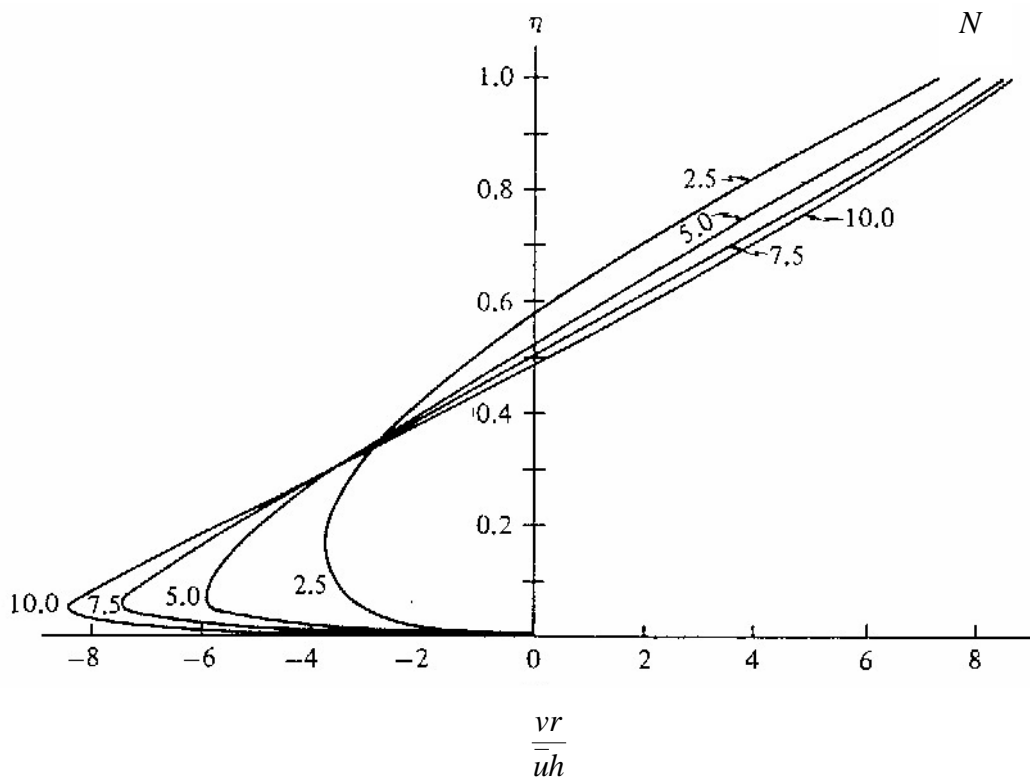


Figura 2.3 Distribución radial de la velocidad secundaria del flujo según Falcon-Ascanio (1983).

En resumen, lo obtenido hasta ahora en esta teoría resulta útil para determinar la velocidad transversal v de la corriente meandante, en donde tal velocidad sirve para determinar el ángulo de desviación longitudinal entre las líneas de corriente y el eje del cauce $\bar{\Omega}$. Esto es posible conseguirlo por medio de la expresión 2.49 que se muestra en el subtema siguiente.

2.2.2.1 Naturaleza convectiva de las corrientes meandantes.

De acuerdo con Selim y Da Silva (2001), mediante la experimentación se ha mostrado que la corriente transversal en un canal meandante ancho tiene un comportamiento “convectivo”, es decir, que existe una desviación longitudinal entre las líneas de corriente y el eje del cauce. El ángulo de dicha desviación $\bar{\Omega}$ se encuentra representado por la siguiente expresión (Selim y Da Silva, 2001):

$$\tan \bar{\Omega} = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \quad (2.49)$$

Dónde:

$\bar{\Omega}$ es el ángulo de desviación longitudinal entre las líneas de corriente y el eje del cauce.

$\frac{\bar{v}}{\bar{u}}$ relación de velocidad transversal media entre la velocidad longitudinal media.

2.2.3 Teoría de Thomson.

Esta teoría, basada en el efecto de la corriente helicoidal secundaria, primeramente fue sugerida por James Thomson (1876) y desarrollada posteriormente por Engels y Schocklitsch, entre otros.

La teoría considera que el punto de partida es un curso recto y que por algún motivo el cauce ha sido modificado debiéndose tal modificación a un depósito o a una erosión. Esto lleva a que las líneas de corriente sean forzadas a desviarse de su curso recto original recorriendo trayectorias curvas y desarrollando con esto una fuerza centrífuga. Según dicha teoría, tal efecto centrífugo es visualizado como el principio fundamental de la teoría del meandro. La fuerza centrífuga representa la causa principal del cruce helicoidal de la corriente que erosiona la margen cóncava, transportando el material erosionado hasta la margen convexa, Leliavsky (1955). La pendiente transversal de la superficie del agua resultante de este efecto centrífugo, es otro factor importante.

En la sección transversal actúan principalmente dos fuerzas: el peso (W) debido al volumen de agua contenido en la sección transversal y que actúa en la vertical, y la centrífuga, que actúa perpendicularmente a W . Analizando la sección transversal de un cauce en un curva de un meandro, la fuerza centrífuga que actúa en la superficie del agua será:

Fuerza centrífuga

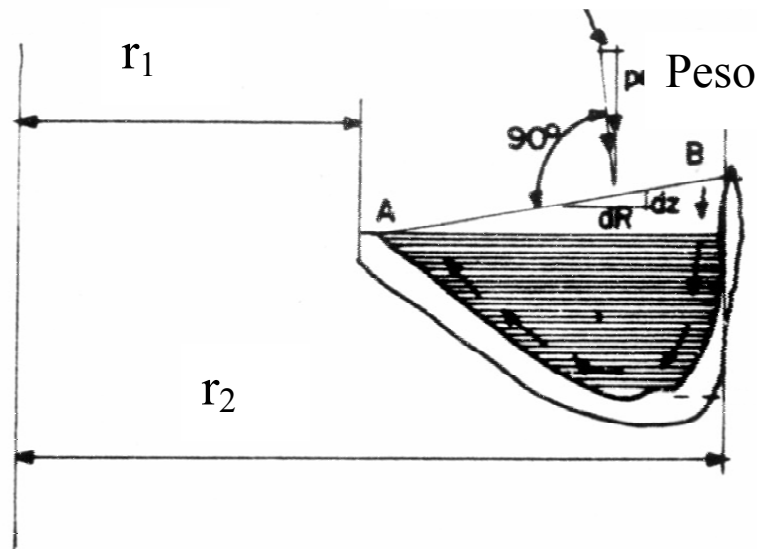


Figura 2.4 Fuerzas que actúan en la sección transversal de un cauce sinuoso, según Leliavsky (1955).

$$F_T = \frac{W_T}{g} \frac{u_T^2}{r} \quad (2.50)$$

Donde:

F_T : fuerza centrífuga $[F]$

W_T : peso debido al volumen de agua contenido en la sección transversal $[F]$

u_T : velocidad longitudinal de la corriente en la superficie $[L/T]$

r : radio de curvatura del cauce $[L]$

g : aceleración de la gravedad $[L/T^2]$

Resulta interesante verificar que existe un vínculo entre la expresión 2.50 y la 2.34. Partiendo del concepto de aceleración centrífuga (Alonso y Finn, 1986):

$$a = \frac{u^2}{r} \quad (2.50 \text{ a})$$

Recurriendo a la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

Por lo tanto.

$$F = m \frac{u^2}{r} = \frac{W}{g} \frac{u^2}{r}; \text{ Que es la expresión 2.50.}$$

Considerando la expresión anterior por cada unidad de volumen se tiene:

$$F = \frac{W}{Vg} \frac{u^2}{r} = \frac{\gamma}{g} \frac{u^2}{r}; \text{ Que es la expresión 2.34}$$

Con esto se verifica que la expresión 2.34 representa la fuerza centrífuga por unidad de volumen. De acuerdo con la figura 2.4, la resultante debida a F y W actúa normalmente a la superficie del agua y con esto:

$$\frac{dh}{F_T} = \frac{dr}{W_T}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{F_T}{W_T}$$

Sustituyendo el valor de F_T se tiene:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{1}{g} \frac{u_T^2}{r} \tag{2.51}$$

La cual representa la variación transversal de la superficie libre del agua debido al efecto de la fuerza centrífuga. Integrando la ecuación anterior suponiendo que u_T no varía con r se obtiene:

$$h = \frac{u_T^2}{g} \ln r + j$$

Siendo j la constante de integración.

En la margen interna del cauce se designará al radio de curvatura como r_1 . En este punto, la sobreelevación de la superficie del agua es nula, por lo que se toma como una condición de frontera para determinar la constante de integración j y con ello se llega a:

$$h = \frac{u_T^2}{g} \ln \frac{r}{r_1} \tag{2.52}$$

Para $r_1 \leq r \leq r_2$, siendo r_2 el radio de curvatura de la margen externa donde la sobreelevación de la superficie del agua es máxima

Si se reemplaza en la ecuación anterior $r = r_2$, se obtiene la diferencia de niveles de la superficie del agua.

$$\Delta h = \frac{u_T^2}{g} \ln \frac{r_2}{r_1} \tag{2.53}$$

De esta manera se ha obtenido una forma de cuantificar la sobreelevación de la superficie libre del agua en un cauce meandreante debido al efecto de la fuerza centrífuga.

2.2.4 Teoría de la rotación de la Tierra.

La fuerza de Coriolis es la fuerza aparente transversal a la trayectoria que experimenta un cuerpo en movimiento sobre la superficie de la Tierra y representa su resistencia a participar en el movimiento rotacional del planeta. De acuerdo con Neu (1967), la magnitud de esta fuerza es directamente proporcional a la velocidad del objeto en movimiento, siendo mayor en la proximidad de los polos y decrece conforme se aproxima hacia el ecuador.

La aceleración debida al efecto de Coriolis el cual actúa perpendicularmente al movimiento de un objeto o una partícula de materia moviéndose sobre la Tierra, está dada por la siguiente expresión, Neu (1967):

$$a = 2\omega u \cos \phi \quad (2.54)$$

Siendo:

ω velocidad angular de rotación de la Tierra $\left[\frac{L}{T} \right]$

a aceleración de Coriolis en el plano horizontal $\left[\frac{L}{T^2} \right]$

ϕ latitud geográfica.

u velocidad horizontal de la partícula de agua $\left[\frac{L}{T} \right]$

Cualitativamente Faller y von Arx (1959) describen la fuerza de Coriolis con respecto a los planos norte-sur y este-oeste en el hemisferio norte como sigue:

Para una partícula moviéndose en la dirección norte-sur, el movimiento hacia la derecha es una manifestación de la conservación del momentum angular: $\omega^2 r = Constante$

En la cual ω es la velocidad angular absoluta de la partícula y r es el radio del eje de rotación.

De este modo, si r decrece como en el caso del movimiento hacia el norte, ω se incrementa y se percibe una componente de movimiento hacia el este. Cuando ocurre lo contrario, se tiene un movimiento hacia el oeste.

En 1938 Wittman y Boss, mientras realizaban estudios de la dinámica de flujos en curvas, demostraron que en curvas de canales aluviales se presentaba una circulación transversal iniciada por la diferencia entre las fuerzas centrífugas en las capas superior e inferior del flujo, causando la deformación del fondo y de las márgenes.

Considerando que la distribución de la velocidad longitudinal es parabólica y que existe una distribución lineal de la presión en la vertical (presión hidrostática), en la superficie la fuerza de Coriolis por unidad de masa ($2\omega u$) es mayor que la fuerza debida a la presión hidrostática (considerada nula en la superficie). En contraparte, cerca del fondo la fuerza debida a la presión es mayor que la fuerza de Coriolis, ya que cerca del fondo la velocidad del flujo es mínima. Esta diferencia de fuerzas crea un desequilibrio y a la vez una corriente transversal.

La pendiente transversal de la superficie del agua se expresa como:

$$S_y = \beta \tan \alpha \quad (2.55)$$

Donde:

S_y pendiente transversal de la superficie del agua.

α ángulo de inclinación de la superficie del agua con respecto al plano horizontal, definido como:

$$\tan \alpha = \frac{dh}{dr} = \frac{1}{g} \frac{u^2}{r}$$

De acuerdo con 2.51 se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{1}{g} \frac{u^2}{r}$$

Pero de acuerdo con (2.50 a) y (2.54) es posible expresarlo como:

$$\tan \alpha = \frac{1}{g} \frac{2\omega \cos \phi u^2}{u}$$

Reduciendo términos se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{2\omega \cos \phi u}{g} \quad (2.56)$$

$\beta > 1$ es un número relacionado con la fricción en la frontera, y según Rozovskii (1955), está dado por:

$$\beta = 1 + \frac{g}{\kappa^2 c^2} \quad (2.56a)$$

Donde:

κ constante de von Kármán

c coeficiente de Chézy $\left[\frac{L^{1/2}}{T} \right]$

Retomando el concepto de aceleración centrífuga (ecuación 2.50 a) se tiene que el radio de curvatura queda como:

$$r = \frac{u^2}{a}$$

Sustituyendo a (expresión 2.54) se llega a:

$$r = \frac{\bar{u}}{2\omega \cos \phi} \quad (2.57)$$

Rozovskii (1955) se dio a la tarea de obtener las expresiones que describen el flujo axial y transversal de la corriente mediante una aproximación logarítmica. La componente axial de la velocidad está expresada de la siguiente manera según este autor:

$$u(\eta) = \bar{u} \left[1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa c} (1 + \ln \eta) \right] \quad (2.58)$$

Donde $\eta = \frac{z}{h}$

η altura adimensional o relativa.

z coordenada vertical respecto al fondo [L]

h tirante [L]

La componente transversal de la velocidad es:

$$v(\eta) = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\bar{u} h}{r} \left[E_1(\eta) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa c} E_2(\eta) \right] \quad (2.59)$$

En la cual (ver figura 2.5)

$$E_1(\eta) = \int \frac{2 \ln \eta}{\eta - 1} d\eta \quad (2.60)$$

$$E_2(\eta) = \int \frac{\ln^2 \eta d\eta}{\eta - 1}$$

Los valores numéricos de estas funciones pueden ser obtenidos mediante las curvas de la figura 2.5. El ángulo Ω de desviación de las líneas de corriente con respecto al eje longitudinal del cauce se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$\tan \Omega = \frac{v(\eta)}{u(\eta)} \quad (2.61)$$

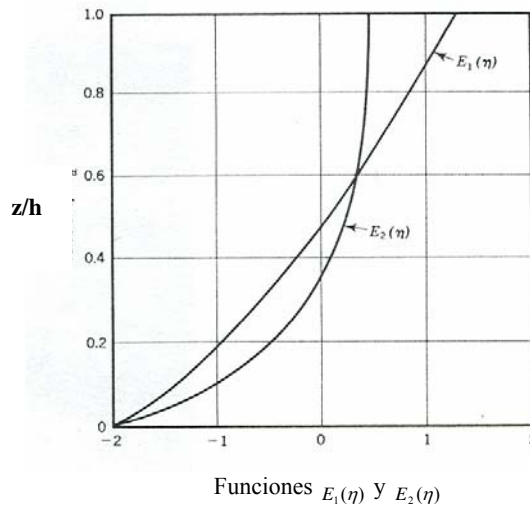


Figura 2.5 Funciones $E_1(\eta)$ y $E_2(\eta)$ según Neu, 1967.

En resumen, esta teoría tiene como objetivo principal analizar la aparición de una corriente transversal en un cauce natural debido al efecto de la rotación de la Tierra al cual está expuesto de manera permanente.

Recapitulando se tiene lo siguiente:

- En la *teoría de las perturbaciones* se lleva a cabo una descripción de las causas principales que pueden representar en su momento una perturbación y que a su vez influye directamente en la generación o estimulación del meandreo en cauces naturales.
- Considerando las variables principales que intervienen en la mecánica de un fluido, por medio de la teoría de la *corriente helicoidal* se llega a obtener la velocidad transversal de una corriente meandreante y con ello el ángulo de desviación longitudinal entre las líneas de corriente y el eje del cauce.
- La *teoría de Thomson* hace énfasis en el efecto que ejerce la fuerza centrífuga hacia una corriente meandreante, se presenta una expresión útil para determinar la sobre elevación transversal de la superficie libre del agua.
- La *teoría de la rotación de la Tierra* muestra una serie de análisis en torno a la importancia que tiene el efecto de Coriolis sobre un cauce natural, llegando a desarrollar expresiones que hacen posible cuantificar r , u , v y Ω .

Una vez que se han descrito las diversas teorías que tratan de justificar el comportamiento de los cauces meandreantes naturales desde diversas perspectivas, existen algunos factores básicos que controlan el proceso de meandreo independientemente del método que se quiera aplicar para el estudio de un río. Estos factores se pueden resumir en los siguientes:

- El gasto y su variación en el tiempo si es transitorio.
- La pendiente del valle que contiene a la corriente.
- La cantidad de transporte de sedimento.
- La resistencia a la erosión del fondo y de las riberas, lo cual está en función del diámetro de las partículas, densidad relativa y fuerza de cohesión.

- La viscosidad y densidad del líquido.
- La generación de remolinos horizontales.
- El flujo transversal.
- Aceleración centrífuga.
- Perturbaciones.
- Formas de fondo.

Una vez que se han descrito las teorías asociadas al meandro en cauces naturales, en el siguiente capítulo se procederá a realizar un análisis exhaustivo de las mismas con el objetivo de tener una mejor interpretación de cada una de las metodologías.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS CRÍTICO DE LAS TEORÍAS SOBRE EL ORIGEN Y EVOLUCION DE MEANDROS.

En el capítulo precedente se ha realizado una descripción de las teorías existentes que tratan de explicar el origen y comportamiento en el tiempo de las corrientes naturales meandreantes.

A continuación se hace una recapitulación de las teorías del meandro analizadas en el capítulo anterior.

- En el subcapítulo 2.1.1 se muestran las relaciones funcionales empíricas obtenidas por diversos autores entre los que destacan Leopold y Wolman, Inglis, Agarwal, Dury, Zeller y Altunin. Dichas expresiones son de origen empírico producto de observaciones en ríos de la India, Pakistán y Estados Unidos principalmente.
- *La teoría de la mínima variancia* parte de la consideración de que el meandro está asociado al proceso erosión-depositación y que en tales circunstancias el río tiende hacia un estado permanente. Asimismo, se ajusta el cauce a una función senoidal.
- *La teoría de régimen* proporciona las características de un cauce en estado de equilibrio (b, h, S), además de asociar el meandro con el desencadenamiento horizontal de remolinos.
- *Fargue* mediante sus observaciones, empíricamente estableció una serie de leyes las cuales asocian el alineamiento horizontal y vertical.
- *La teoría de las perturbaciones* menciona las diversas causas que pueden dar origen a una perturbación en una corriente natural, lo cual concluye en la generación o estimulación del meandro.
- *En la teoría de la corriente helicoidal* se hace hincapié en que la existencia de una corriente secundaria incide en la formación de meandros. Se analizan las fuerzas de inercia y de presión como las principales fuerzas que intervienen para generar la circulación transversal aunada al comportamiento “convectivo” de la corriente.
- *Thomson* manifiesta que es la fuerza centrífuga la causa principal que genera un cruce helicoidal en la corriente, desarrollando una expresión de tipo logarítmico para evaluar la sobre elevación de la superficie del agua.
- *La teoría de la rotación de la Tierra* toma a la fuerza de Coriolis como el principal factor que influye en el comportamiento de una corriente meandreante. Por medio de esta teoría es posible cuantificar las velocidades longitudinal y transversal de la corriente así como el ángulo de desviación del cauce y de la corriente.

Como en cualquier otro fenómeno natural, el hombre trata de representar tal proceso mediante un patrón racional sujeto a ciertas idealizaciones, de tal suerte que le sea posible conocer las condiciones bajo las cuales se genera una corriente meandreante, en este caso, anticipar su comportamiento y poder describir su geometría.

A continuación se llevará a cabo un análisis de sensibilidad utilizando las expresiones obtenidas en la sección anterior.

3.1 Relaciones empíricas aplicables a corrientes naturales.

Se cuenta con una serie de expresiones empíricas desarrolladas por diversos autores, las cuales se han mostrado en la tabla 2.1 Estas expresiones representan relaciones funcionales entre longitud de meandro (y en algunos casos también el ancho de meandro) y el gasto que circula por el cauce. Como se puede apreciar en cada una de las fórmulas, es suficiente conocer el gasto para poder determinar la longitud y el ancho del meandro.

Dado que las relaciones empíricas mostradas en la tabla 2.1 son funciones dependientes del gasto o del ancho del cauce, se considera necesario evaluar cada una de ellas para valores arbitrarios de ancho de cauce comprendidos entre 0-1000m, y para el gasto entre 1-10000 m^3/s , con lo que se pretende verificar qué tanto discrepan numéricamente una teoría de otra conforme se evalúen para valores mayores del gasto o ancho de cauce según corresponda.

En las figuras 3.1 a 3.4 se muestran los resultados de lo recién expuesto. De estas figuras se pueden obtener las siguientes conclusiones:

En la figura 3.1 se puede apreciar que para grandes valores del gasto ($\geq 1000 m^3/s$), los métodos de Inglis, Dury y Leopold-Wolman proporcionan resultados de la longitud de onda (λ) muy parecidos, a diferencia del método de Agarwal que proporciona valores superiores.

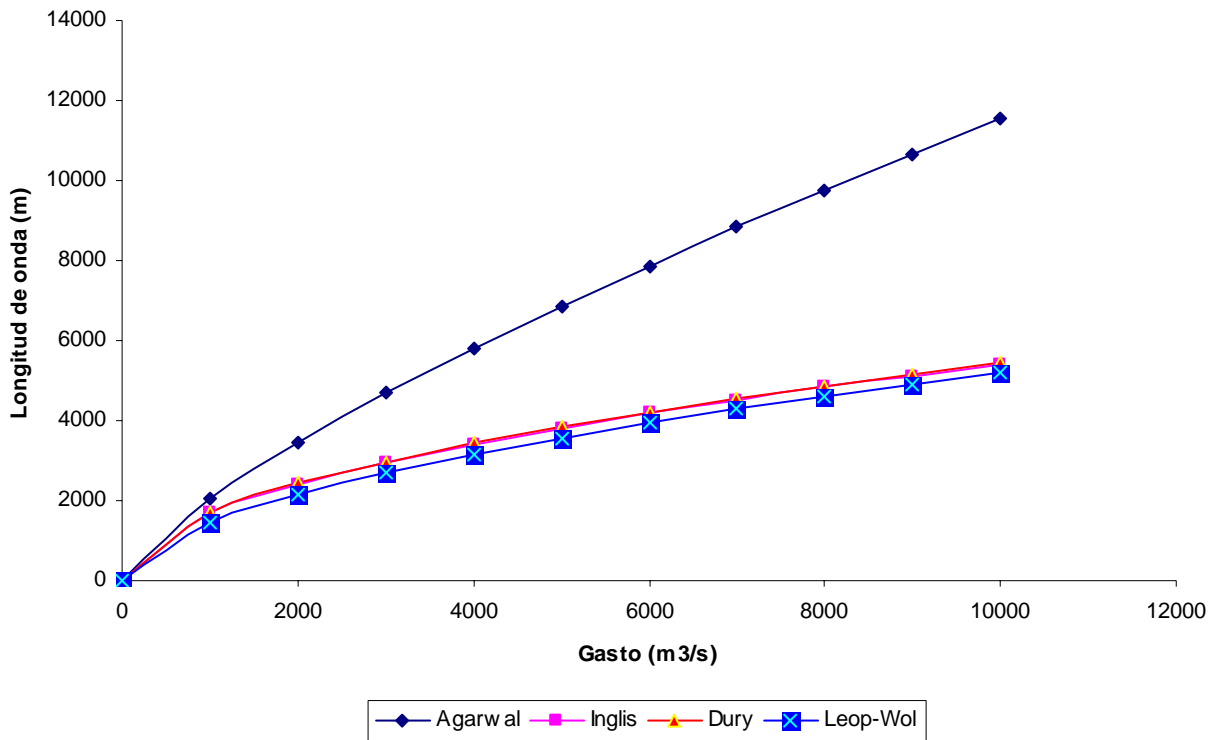


Figura 3.1 Relaciones funcionales gasto-longitud de onda del meandro de acuerdo con Agarwal, Inglis, Dury y Leopold-Wolman.

En la figura 3.2 se aprecia algo similar al caso anterior en el sentido de que a mayores valores del ancho de cauce, se incrementa la diferencia del valor de la longitud de onda para los métodos aplicados. Leopold-Wolman, Zeller y Altunin proporcionan valores semejantes; por otro lado, Inglis (al igual que la teoría de régimen y de la mínima variancia) y Ackers-Charlton presentan resultados extremos con respecto a los mencionados. Por ejemplo, para un ancho de cauce de 600m, según los tres primeros mencionados la longitud de onda es de 700 m mientras que para Inglis y Ackers-Charlton la longitud de onda es de 1300 m.

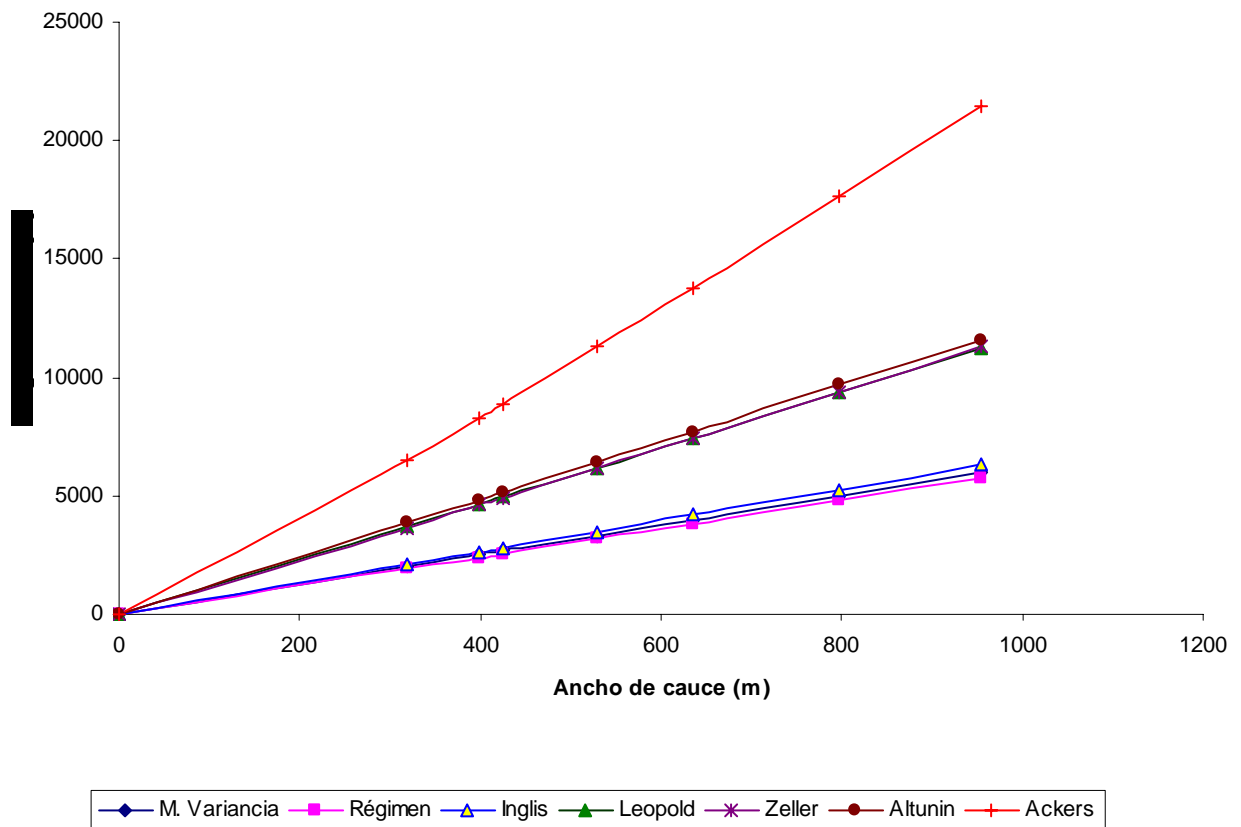


Figura 3.2 Relaciones funcionales ancho del cauce-longitud de onda del meandro de acuerdo con Inglis, Leopold-Wolman, Zeller, Altunin y Ackers-Charlton.

En la figura 3.3 intervienen los métodos proporcionados por Leopold-Wolman, Agarwal e Inglis. De acuerdo con el método de Inglis se tiene que $B \approx 3\lambda$, para Agarwal, $B \approx 0.5\lambda$ y considerando un ancho de cauce arbitrario (200m), $B \approx 0.4\lambda$ según Leopold-Wolman, valor semejante al obtenido por Agarwal. De acuerdo con esto, para un valor dado de longitud de onda, de acuerdo con Inglis el ancho del meandro es mayor que el resultante de la fórmula de Agarwal o Leopold-Wolman. Se tiene entonces que la longitud de desarrollo del cauce es mayor para Inglis que para Agarwal y Leopold-Wolman.

Asociando lo anterior con la sinuosidad; considerando $\lambda = cte.$, así como L_1 la longitud de desarrollo del cauce en un meandro según Inglis y L_2 la longitud de desarrollo del cauce en un meandro según Agarwal o Leopold-Wolman (ya que son semejantes numéricamente), se obtiene lo siguiente:

Se tendrá presente que se ha dicho que $L_1 > L_2$; si $\sigma = \frac{L}{\lambda}$, la sinuosidad según Inglis $\sigma_1 = \frac{L_1}{\lambda}$ será mayor que la obtenida por Agarwal y Leopold-Wolman $\sigma_2 = \frac{L_2}{\lambda}$. Por lo tanto, $\sigma_1 > \sigma_2$ lo cual indica que el método de Inglis está asociado a mayores sinuosidades.

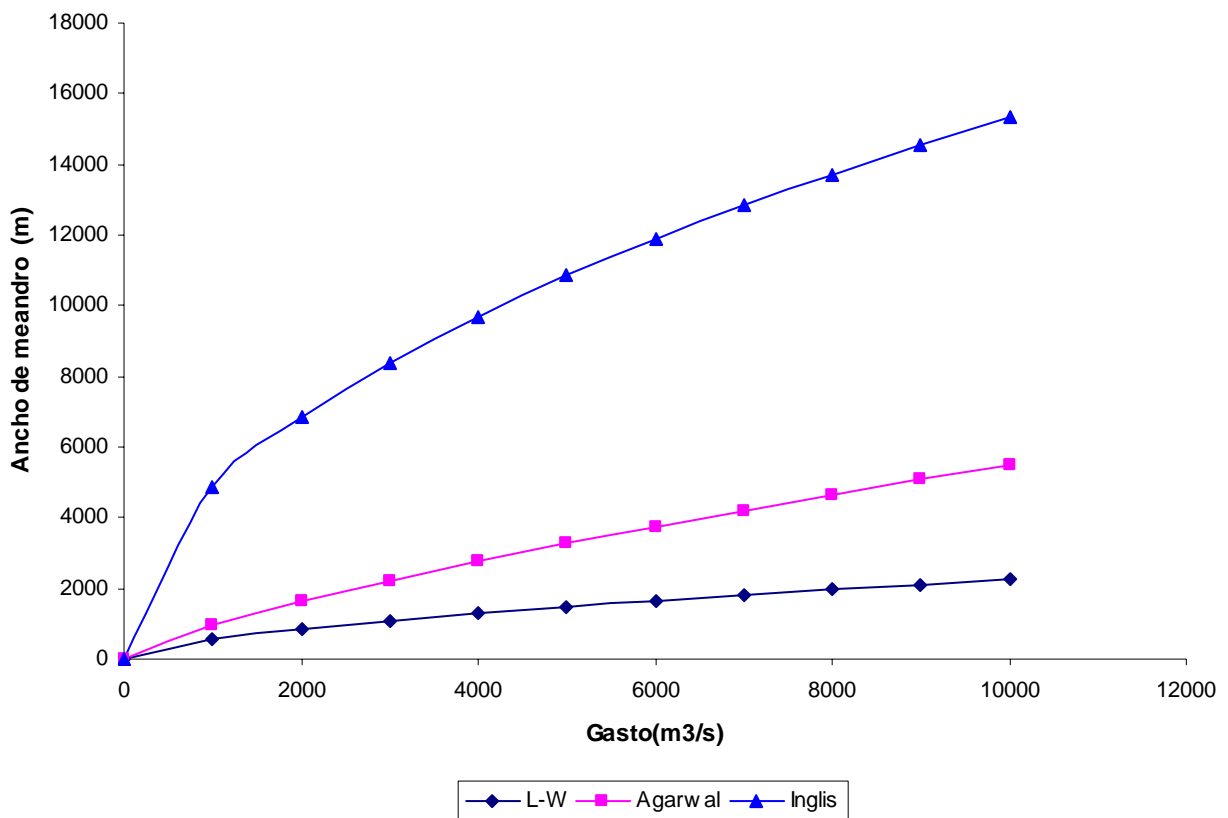


Figura 3.3 Relaciones funcionales gasto-ancho de meandro, de acuerdo con Leopold-Wolman, Agarwal e Inglis.

En la figura 3.4, se nota que en los métodos de Leopold-Wolman y Zeller aplicados para determinar el ancho del meandro (B) en función del ancho del cauce, se tiene prácticamente el mismo comportamiento; por mínima variancia se aprecia que no presenta un comportamiento lineal, ya que presenta máximos y mínimos para valores ascendentes del ancho del cauce; mientras que la expresión de Inglis proporciona valores muy superiores de B , que para cauces muy anchos pueden ser 400% mayores que los dados por los otros métodos,

Asociando esta gráfica con la obtenida en la figura 3.2, se obtendrá la asociación que existe entre B y λ por los métodos de Inglis, Zeller y Leopold-Wolman.

De acuerdo con cada uno de estos autores:

Inglis $\frac{B}{\lambda} \approx 3 \Rightarrow B \approx 3\lambda$

Leopold-Wolman $\frac{B}{\lambda} \approx 0.25 \Rightarrow B \approx 0.25\lambda$

Zeller $\frac{B}{\lambda} \approx 0.4 \Rightarrow B \approx 0.4\lambda$

Esto refuerza la idea de que el método de Inglis está asociado a una mayor sinuosidad, por lo que se le puede catalogar como un método un tanto “conservador” con respecto a los demás, debido a que según éste, un cauce natural experimenta un desplazamiento lateral muy grande con lo que la superficie que invadirá será de magnitudes relativamente importantes.

Por ahora únicamente se ha evaluado el comportamiento relativo de las ecuaciones empíricas. En el siguiente capítulo se aplicarán dichas ecuaciones a una corriente natural para determinar qué tan representativa es cada una de ellas en ese caso.

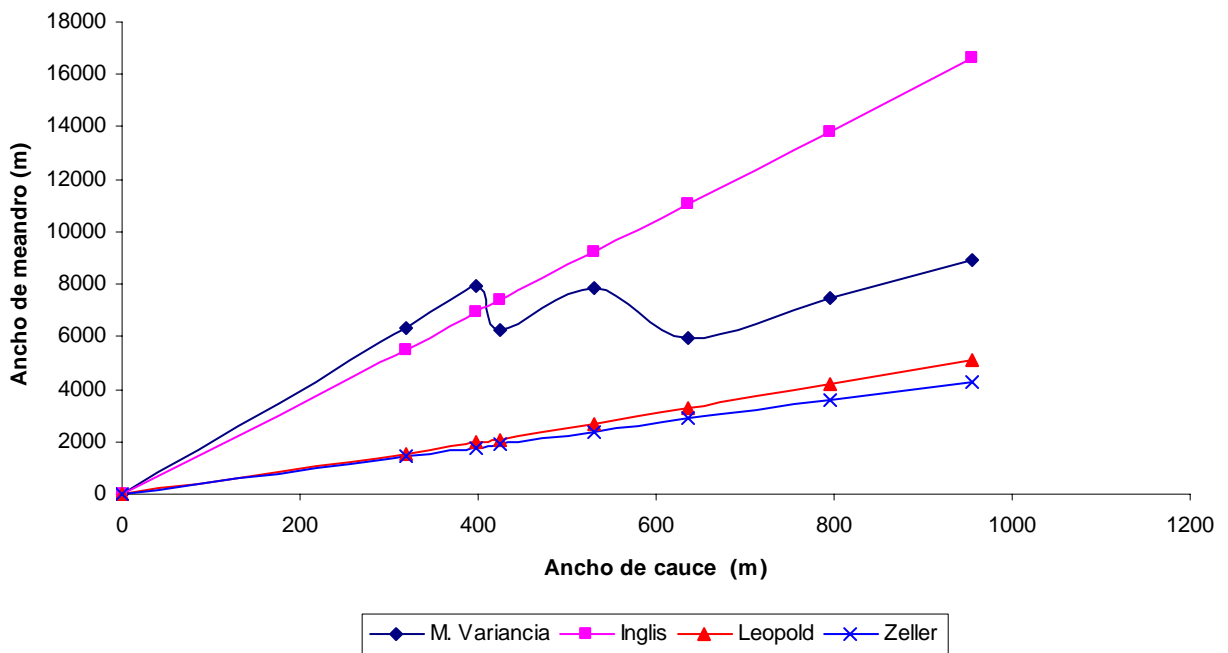


Figura 3.4 Relaciones funcionales ancho de cauce-ancho de meandro de acuerdo con Inglis, Leopold-Wolman y Zeller.

3.2 Teoría de la mínima variancia.

Mediante esta teoría se propone un modelo por medio del cual las características geométricas del cauce meandreante se ajustan a una función senoidal. Se describe la variación de los parámetros geométricos, tales como longitud, amplitud, curvatura y posición en planta, en función del ángulo de desviación del cauce θ_0 .

Se hará un análisis de sensibilidad de esta teoría proponiendo valores razonables de algunas variables. A continuación se presenta un ejemplo del cálculo

Sea un cauce natural con $\sigma = 3 = cte$ y $L=8000 m$

Mediante 2.19 se tiene:

$$\theta_0 = 2.2 \sqrt{\frac{3-1}{3}} = 1.8 \text{ radianes} = 103^\circ$$

Aplicando 2.17 a:

$$\lambda = \frac{8000}{3} = 2667m$$

De 2.14 se tiene que la semiamplitud de meandro es:

$$\Delta = \frac{2(8000)}{\pi} \left(0.5815 + \frac{9.88 \times 10^{-2}}{3} + \frac{4.29 \times 10^{-3}}{5} \right) = 3133m$$

Ahora se puede conocer la amplitud de meandro definido como:

$$B = 2\Delta = 2(3133) = 6266m$$

Aplicando 2.16 se puede conocer el radio de curvatura del cauce:

$$\frac{1}{r} = \frac{2(1.8)\pi}{8000}$$

Por lo tanto:

$$r = 707 m.$$

Mediante 2.23 se calcula el ancho de cauce:

$$b = \frac{707(1.8)}{3} = 424m$$

Algo evidente es que para que la sinuosidad permanezca constante, la longitud de meandro así como la longitud de desarrollo del cauce, el ancho de meandro y el radio de curvatura deberán tener una variación proporcional, lo que se puede apreciar en la tabla 3.1.

Se aprecia que para una sinuosidad constante y la longitud L variable, λ, Δ, B, r, b , cada una de estas presenta una variación lineal.

Tabla 3.1 Evaluación de las características geométricas de un cauce meandreante para sinuosidades constantes (3 y 2) haciendo variable la longitud de desarrollo del cauce (L).

σ	L (m)	λ (m) (2.17 a)	Δ (m) 2.14	B=2 Δ (m)	r (m) 2.16	b (m) 2.23
3	8000	2667	3130	6260	707	424
	10000	3333	3914	7828	884	530
	12000	4000	4697	9394	1061	637
2	8000	4000	2980	5960	816	636
	10000	5000	3725	7450	1020	796
	12000	6000	4470	8940	1224	955

En la tabla 3.2 se muestra el resumen de un análisis similar al anterior, con la variante de que la longitud de desarrollo del cauce es constante y la sinuosidad es variable.

Para que se presente la anterior situación, la variación de la longitud debe ser inversamente proporcional a la sinuosidad.

Tabla 3.2 Evaluación de las características geométricas de un cauce meandreante para una longitud de desarrollo del cauce (L) constante, haciendo variable la sinuosidad.

L (m)	σ	θ_0 (rad.) Ec. 2.19	λ (m) Ec. 2.17a	Δ (m) Ec. 2.14	B=2 Δ	r (m) Ec. 2.16	b (m) Ec. 2.23
8000	2	1.56	4000	2980	5960	816	636
	3	1.80	2667	3130	6260	707	424
	4	1.90	2000	3158	6316	670	318
10000	2	1.56	5000	3725	7450	1020	796
	3	1.80	3333	3914	7828	884	530
	4	1.90	2500	3948	7896	838	398

σ sinuosidad; L longitud de desarrollo del cauce meandreante; λ longitud de onda; B ancho de meandro; r radio de curvatura del cauce meandreante; b ancho del cauce.

Por otro lado, la forma en la que interactúan las variables geométricas de un meandro es la siguiente:

- Aún permaneciendo el mismo valor de L, tanto λ como Δ pueden variar, por lo que $\sigma \neq cte$
- Aún siendo $\lambda = cte$, L y Δ pueden variar, por lo que $\sigma \neq cte$
- Tanto L como λ varían proporcionalmente y por lo tanto también Δ , implicando que $\sigma = cte$

La semiapertura Δ juega un papel importante en la geometría de un meandro y es por ello que se piensa que debe intervenir de manera directa en la evaluación de la sinuosidad de un río, se propondrá más adelante.

La aplicabilidad práctica que se le puede asignar a este método es que, conocido el valor que puede adoptar θ_0 , y dado que se acepta que el eje del cauce tiene una geometría con una función conocida (senoidal), se pueden conocer las dimensiones geométricas correspondientes que se pueden presentar y con ello es posible predecir las zonas que puedan ser afectadas en el momento que ocurra un evento de escurrimiento extraordinario. No obstante, habrá que tener presente que los resultados de esta teoría serán tan buenos en la medida que sean aplicables a meandros que tiendan a ser regulares en cuanto a su trazo en planta. Considerando que un meandro regular es aquel que está constituido por curvas con aproximadamente el mismo radio de curvatura y frecuencia, Chitale (1970).

El ángulo θ_0 es un parámetro importante en la geometría de un cauce meandreante; tan es así, que puede representar una alternativa adicional para asignar el grado de sinuosidad que posee una corriente natural.

Cuando exista algún evento hidrológico extraordinario, θ_0 sufrirá modificaciones mismas que por pequeñas que sean puede tener como consecuencia una gran variación en la longitud de desarrollo del cauce, ver tabla 3.2.

Retomando el concepto de sinuosidad $\sigma = \frac{L}{\lambda}$, dicho concepto se encuentra ligado con el ángulo de deflexión de la corriente meandreante (θ_0). El rango de valores que puede adoptar la sinuosidad teórica de un cauce es el siguiente:

Si $\theta_0 \rightarrow 0$ la sinuosidad adquiere su mínimo valor ya que $\lambda \rightarrow L$ y esto implica que $\sigma \rightarrow 1$.

Si θ_0 adquiere un valor grande, la sinuosidad adquiere su máximo valor teórico, ya que $\lambda \rightarrow 0$, por lo tanto $\sigma \rightarrow \infty$.

Con esto queda definido el intervalo teórico de la sinuosidad: $1 \leq \sigma < \infty$.

De acuerdo con la ecuación 2.17 a, $\sigma = 0$ no se puede presentar.

Enseguida se obtendrá una expresión de la sinuosidad que involucre la amplitud de la onda del meandro (Δ) y no sólo la longitud de desarrollo del río.

Haciendo uso del análisis dimensional, mediante la aplicación del teorema de Buckingham (Vergara, 1993), se considera que el comportamiento de un meandro en el tiempo se encuentra regido principalmente por las siguientes variables.

L Longitud de desarrollo del cauce.

Δ Semiapertura del meandro.

Q Gasto que circula por el cauce.

S Pendiente de fondo.

τ_c Esfuerzo cortante crítico con el cual inicia el movimiento de las partículas del fondo del cauce, expresada como: $\tau_c = c(\gamma_s - \gamma)D_{50}$

W potencia erosiva de la corriente, expresada como: $W = F_D u$, donde F_D es la fuerza de arrastre y u la velocidad del flujo.

F_L Fuerza de sustentación igual a: $F_L = c_L \rho A \frac{v^2}{2}$

Así, la ecuación que relaciona dichas variables se puede escribir como:

$$f(L, \Delta, Q, S, \tau_c, W, F_L) = 0 \quad (3.1)$$

Usando el sistema gravitacional de unidades (F, L, T), las dimensiones de las variables mencionadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} [L] &= [L] \\ [\Delta] &= [L] \\ [Q] &= [L^3 T^{-1}] \\ [S] &= ADM \\ [\tau_c] &= [FL^{-2}] \\ [W] &= [FLT^{-1}] \\ [F_L] &= [F] \end{aligned}$$

Variables físicas que intervienen = 7

Magnitudes fundamentales que intervienen = 3

Número de parámetros adimensionales = 4

De acuerdo con el teorema π , Vergara (1993):

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

Cada grupo π queda estructurado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= L^x W^y F_L^z \Delta \\ \pi_2 &= L^{x_1} W^{y_1} F_L^{z_1} \tau_c \\ \pi_3 &= L^{x_2} W^{y_2} F_L^{z_2} Q \\ \pi_4 &= S \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se llega a obtener:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\Delta}{L} \\ \pi_2 &= \frac{L^2 \tau_c}{F_L} \\ \pi_3 &= \frac{F_L Q}{WL^2} \\ \pi_4 &= S \end{aligned}$$

Con lo que se tiene:

$$f\left(\frac{\Delta}{L}, \frac{L^2 \tau_c}{F_L}, \frac{F_L Q}{WL^2}, S\right) = 0$$

O bien:

$$\frac{\Delta}{L} = f\left(\frac{L^2 \tau_c}{F_L}, \frac{F_L Q}{WL^2}, S\right)$$

$$\text{Sea } k = f\left(\frac{L^2 \tau_c}{F_L}, \frac{F_L Q}{WL^2}, S\right)$$

$$L = \frac{\Delta}{k}$$

Sabiendo que $\sigma = \frac{L}{\lambda}$, se tiene:

$$\sigma = \frac{\Delta}{k\lambda}$$

Aceptando que $k = 1$

$$\sigma = \frac{\Delta}{\lambda} \tag{3.2}$$

De este modo, si $\Delta = 0$, implica que $\sigma = 0$, lo cual representa un cauce rectilíneo.

En conclusión, mediante las evaluaciones mostradas en las tablas 3.1 y 3.2, algunas variables (L, σ) oscilan proporcionalmente a las demás (λ, Δ, r, b), hecho que respalda la teoría de que un conjunto de meandros puede alcanzar un equilibrio dinámico para las diversas condiciones que se presentan en una corriente natural.

3.3 Teoría de régimen.

Esta teoría proporciona los parámetros hidráulicos y geométricos de cauces en estado de equilibrio, involucrando las propiedades del material que constituye el fondo del mismo río.

A continuación se presenta un ejemplo con datos hipotéticos con la finalidad de comparar los resultados obtenidos con los de otros métodos además de mostrar el orden de magnitud que adquieren las variables que intervienen.

De acuerdo con la teoría de Lacey expresada mediante las expresiones 2.24-2.26, y considerando que:

$$Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D_m = 2 \text{ mm}$$

Aplicando 2.28-2.30:

$$b = 4.831(200)^{1/2} = 68m$$

$$h = \frac{0.128(200)^{1/3}}{(0.002)^{1/6}} = 2.1m$$

$$S = \frac{0.205(0.002)^{5/6}}{(200)^{1/6}} = 4.77 \times 10^{-4}$$

$$\bar{u} = \frac{200}{68 * 2.1} = 1.4 m/s$$

Mediante esta metodología se podrá delimitar el intervalo en el cual se ubican los ríos meandrentes en régimen, esto con la ayuda de la figura 2.2 equivalente a las expresiones 2.29 y 2.30, mismas que se aplican a continuación.

$$\left(\frac{h}{D}\right) = \frac{2.1}{0.002} = 1050 > 200, \text{ por lo tanto, } \left(\frac{b}{h}\right)_1 = 150, \text{ esto implica que, } b_1 = 150(2.1) = 315m$$

$$\left(\frac{h}{D}\right) = \frac{2.1}{0.002} = 1050 > 100, \text{ por lo tanto, } \left(\frac{b}{h}\right)_0 = 25, \text{ esto implica que, } b_0 = 25(2.1) = 52.5m$$

Lo que indica que el cauce deberá tener un ancho comprendido entre $52.5 \leq b \leq 315m$ para que se encuentre en estado de régimen, con aparición de barras alternadas y sea meandrente.

Se nota que el valor de ancho de cauce calculado por Lacey se encuentra dentro de este intervalo, indicativo de que el cauce se encuentre en estado de régimen.

Cabe mencionar que si se toman los valores de b y S obtenidos por Lacey así como $Q = 200 m^3/s$ para obtener el tirante correspondiente por el método de Cruickshank-Maza, Maza (1987), se obtuvo que $h = 2.02m$, que comparado con lo obtenido por Lacey es prácticamente idéntico.

Esto se puede analizar mejor en la figura 2.2, que como ya se ha dicho en el capítulo 2, cuando el río se encuentra en la zona delimitada por $L-L_A$, son cauces que pueden presentar meandro con barras alternadas y se encuentran en régimen (generalmente son cauces asociados a valores de $\frac{b}{h} \geq 25$ y $\frac{b}{h} \geq 150$ así como $\frac{h}{D} \geq 100$), aunque los ríos también pueden ser meandrentes, sin la

presencia de barras y en régimen cuando $\frac{b}{h} \leq 25$ y $\frac{h}{D} \geq 100$.

Según 2.28:

$$\lambda_0 = 52.5(6) = 315m$$

$$\lambda_1 = 315(6) = 1890m$$

Por lo que $315 \leq \lambda \leq 1890m$

Esta teoría manifiesta la importancia directa que tiene el gasto líquido con las características geométricas de un meandro.

3.4 Teoría de Fargue.

Fargue observa que la profundidad en la parte cóncava de la curva así como el ancho de la playa formada en la margen convexa se incrementan proporcionalmente con la curvatura de las riberas.

Habría que tener presente que esta teoría se cimentó en el empirismo con fines prácticos hacia el diseño de cauces para la navegación.

Enseguida se aplicarán las expresiones 2.32 y 2.33 para una longitud de desarrollo del cauce $L = 8000m$.

De acuerdo con 2.32 se tiene que $C_m = \frac{\Theta}{L_m}$. Si se retoma el concepto de que Θ es el ángulo comprendido entre las tangentes extremas a la curva de un meandro, es factible aceptar que $\Theta = 2\theta_0$, (ver figura 3.5).

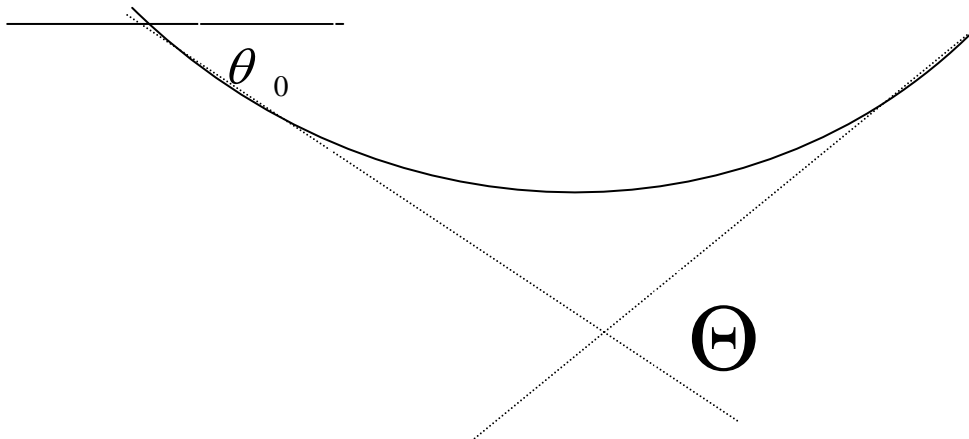


Figura 3.5 Relación entre Θ y θ_0 , según Martin (1997).

Si $\theta_0 = 0^\circ$ se trata de un cauce rectilíneo. En ese caso $C_m = 0$ y $r \rightarrow \infty$, por lo tanto, $h_m = 1.5m$.

Si $\theta_0 = 1.8rad$, correspondiente a una sinuosidad $\sigma = 3$, se tiene:

$$C_a = \frac{2(1.8)}{8000} = 4.5 \times 10^{-4}$$

$$r = \frac{1}{4.5 \times 10^{-4}} = 2222m$$

$$h_m = 1.5 \left(1 + \sqrt{(4.5 \times 10^{-4})^2 + 1.711(4.5 \times 10^{-4})} \right) = 1.542m$$

De acuerdo con lo anterior, esta teoría proporciona un tirante medio mínimo de 1.5m que corresponde a un cauce rectilíneo. Para $\theta_0 = 1.8rad$ se obtuvo un incremento en el tirante de 3% (4.6 cm), lo que numéricamente no es significativo.

De esto se observa que independientemente del valor de la sinuosidad, la profundidad media de la corriente es prácticamente la misma.

3.5 Teoría de las perturbaciones.

A grandes rasgos, esta teoría se enfoca más hacia el análisis de las diversas causas que pueden iniciar el desajuste de un cauce inicialmente rectilíneo, es decir, la forma en que interactúan con las condiciones iniciales existentes en las corrientes, para que una vez que se genera un desajuste, éste sea el detonante para estimular el desencadenamiento de los meandros a lo largo de la longitud del río.

Los mecanismos que pueden conducir hacia una perturbación en un cauce natural son numerosos, desde la más general que es la debida a la rotación de la Tierra hasta la aparentemente más insignificante (diferencia de rugosidades, un obstáculo, etc.) que finalmente terminan por imponer una tendencia hacia el proceso de erosión-depositación que repercute en el comportamiento de los meandros.

Según Langbein y Leopold (1966), el equilibrio morfodinámico se presenta cuando las características en planta y la sección transversal de un meandro experimentan cambios mínimos. Sin embargo, dicho meandro continúa propagándose hacia aguas abajo a una velocidad dada en función del proceso erosión-depositación.

En función de esto, se propone una esquematización mediante la cual se muestra cómo a partir de un estado de equilibrio inicial, un fenómeno transitorio puede dar lugar a un nuevo estado de equilibrio.

El concepto de estabilidad dinámica proporcionado por Inglis (1949) establece que un cauce natural posee dicha estabilidad cuando las variaciones del gasto, el material que constituye el canal así como el transporte de sedimentos, han formado una pendiente de fondo y sección transversal que no tienen grandes variaciones al final de un ciclo completo, por lo que las condiciones permanecen prácticamente iguales.

Una vez que la corriente ha conseguido su estado de equilibrio morfodinámico 1, puede suponerse que la profundidad y la velocidad del flujo no varían drásticamente en el tiempo y el conjunto de meandros iniciará su viaje hacia aguas abajo.

De acuerdo con el esquema de la figura 3.6, un estado de equilibrio morfodinámico 1 (*inicial*) puede estar representado por un sistema fluvial en equilibrio dinámico ya sea mediante un cauce rectilíneo o bien mediante uno meandreante.

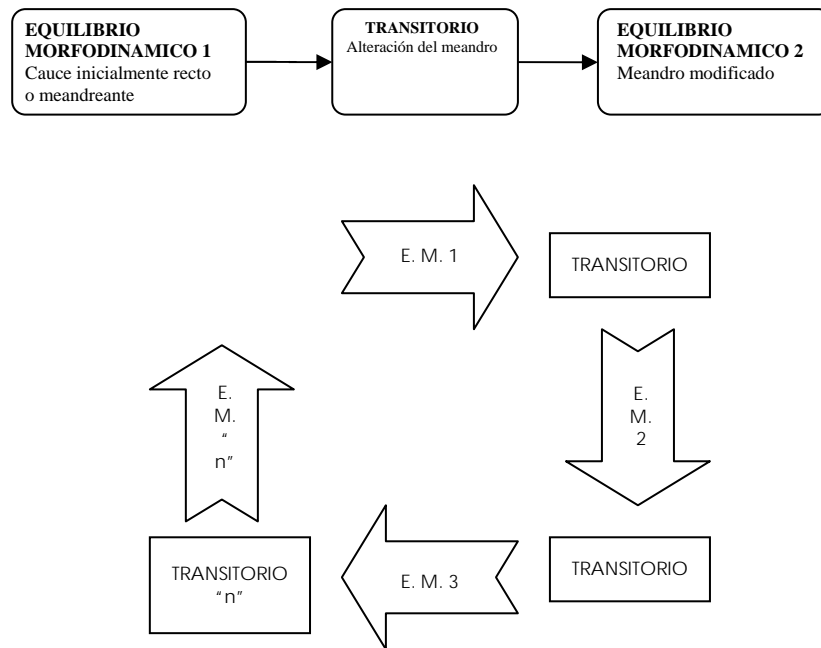


Figura 3.6. Esquematación del proceso de meandro como parte de un transitorio.

Una vez que se presenta un incremento drástico en el gasto, en el sistema se inicia un fenómeno transitorio mediante el cual una corriente rectilínea iniciará a meandrear, o bien si la corriente en un inicio ya era sinuosa, incrementará aun más su sinuosidad.

En función de la magnitud del desajuste existente entre las características geomorfológicas que ofrecen el cauce y las que demanda la corriente para alcanzar el equilibrio, será el tiempo de duración del transitorio.

En la medida que el transitorio se aproxime a su parte final, establecerá un nuevo estado de equilibrio morfodinámico 2 sujeto a nuevas variables hidráulicas en cuanto a magnitud, las cuales prevalecerán mientras no intervengan nuevas perturbaciones en el sistema.

Habrá que acotar que conceptualmente el equilibrio morfodinámico 1 es igual al equilibrio morfodinámico n , la diferencia radica en la parte cuantitativa de las variables que intervienen en el proceso meandreante.

3.6 Teoría de la corriente helicoidal.

Mediante la aplicación de esta teoría es posible conocer la magnitud de la velocidad transversal de la corriente.

Sea un cauce arenoso con las siguientes características hipotéticas:

$$Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$S = 7.5 \times 10^{-4}$$

$$D_{50} = 2.3 \text{ mm}$$

$$D_{84} = 4.14 \text{ mm}$$

Para conocer la velocidad transversal será suficiente con obtener la relación $\frac{vr}{uh}$ y el coeficiente N' , de esta manera, mediante la figura 2.3 se obtendrán los valores correspondientes. Como primer paso, se calcula la velocidad media mediante el método de resistencia al flujo de Cruickshank-Maza, Maza (1987):

$$\frac{\bar{u}}{W_{50}} = 7.58 \left(\frac{h}{D_{84}} \right)^{0.634} \left(\frac{S}{1.65} \right)^{0.456}, \text{ siempre y cuando, } \frac{1}{S} \geq 83.5 \left(\frac{h}{1.65D_{84}} \right)^{0.35}$$

$$\text{Siendo } W_{50} = \left(\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36v^2}{1.65gD_{50}^3}} - \sqrt{\frac{36v^2}{1.65gD_{50}^3}} \right) \sqrt{1.65gD_{50}}$$

Evaluando los valores correspondientes se obtiene una velocidad de caída $W_{50} = 0.155 \frac{m}{s}$

Por lo que el tirante obtenido es: $h = 1.41m$

Con esto se puede verificar la condición:

$$\frac{1}{S} = 1333, \text{ así como } 83.5 \left(\frac{h}{1.65D_{84}} \right)^{0.35} = 539, \text{ la cual se cumple.}$$

Por último, mediante la ecuación de continuidad se conocerá la velocidad media longitudinal:

$$\bar{u} = \frac{Q}{bh} = \frac{200}{100(1.41)} = 1.42 \frac{m}{s}$$

Ahora, para conocer el factor N se requiere el coeficiente de Darcy-Weissbach; para calcularlo, se partirá del coeficiente de Manning.

$$n = \frac{(1.41)^{2/3} (7.5 \times 10^{-4})^{1/2}}{1.42} = 0.024$$

Por lo tanto, el coeficiente de Darcy-Weissbach es:

$$f = \frac{8(9.81)(0.024)^2}{(1.41)^{1/3}} = 0.04$$

El factor N resulta:

$$N = f^{-1/2} = (0.04)^{-1/2} = 5$$

Se propone calcular la velocidad transversal en la superficie, en $\eta = 1$ ya que es cerca de la superficie donde se presentan las mayores velocidades del flujo.

Ahora se tiene lo necesario para que mediante la figura 2.3 se conozca que $\frac{\bar{v}r}{uh} \approx 8$, por lo que la velocidad transversal es:

$$\bar{v} = \frac{8(1.42)(1.41)}{707} = 0.023 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación 2.49 para determinar la desviación longitudinal de las líneas de corriente con respecto al eje del cauce.

$$\tan \bar{\Omega} = \frac{\bar{v}}{u}, \text{ se obtiene que}$$

$\bar{\Omega} = 0.56^\circ$, que es el ángulo de deflexión longitudinal de las líneas de corriente con respecto al cauce.

Para este caso supuesto se encontró que cuantitativamente la velocidad transversal y la deflexión de la corriente $\bar{\Omega}$ son relativamente pequeñas. Por el momento no se puede descartar la efectividad de este método, ya que más adelante se tendrán más argumentos para tener una conclusión al respecto.

3.7 Teoría de Thomson.

Thomson atribuye a la fuerza centrífuga gran parte del efecto erosivo que se puede presentar en una corriente.

Sea un cauce hipotético con:

$$\bar{u} = 1.42 \text{ m/s}$$

$$r = 707 \text{ m}$$

$$b = 100 \text{ m}$$

Si el radio de curvatura está referido al eje del cauce, aplicando 2.53.

$$r_1 = 707 - \frac{100}{2} = 657 \text{ m}$$

$$r_2 = 707 + \frac{100}{2} = 757 \text{ m}$$

$$\Delta h = \frac{1.42^2}{9.81} (2.3) \log \frac{757}{657} = 0.03 \text{ m}$$

Considerando que las velocidades en una corriente meandreante natural no tienen un gran intervalo de variación (1.5-3 m/s), la expresión de Thomson muestra que el valor de la sobre elevación

depende más de la relación $\frac{u^2}{g}$.

A mayor radio de curvatura, el cauce tiende a ser rectilíneo, por lo que existirá una menor sobreelevación de la superficie del agua por el efecto de la fuerza centrífuga que en un cauce con radio de curvatura pequeño. Considerando un valor de la velocidad media longitudinal $\bar{u} = 2.5 \text{ m/s}$, según 2.53,

$$\text{Si } \frac{r_2}{r_1} = 1.1 \Rightarrow \Delta h = 0.06 \text{ m}$$

$$\text{Si } \frac{r_2}{r_1} = 1.5 \Rightarrow \Delta h = 0.25 \text{ m}$$

Esto confirma lo dicho con anterioridad en el sentido de que la velocidad longitudinal juega un papel preponderante en la magnitud de la sobreelevación transversal de la superficie libre del agua.

Para grandes valores del radio de curvatura, $\frac{r_2}{r_1} \rightarrow 1$, por lo que $\Delta h \rightarrow 0$, lo cual representa un cauce rectilíneo.

En resumen, de acuerdo con este método, a mayor radio de curvatura, Δh disminuye aún con anchos de cauce de orden de 600-800m. Para valores relativamente pequeños del radio (del orden de 100m), para pequeños incrementos del ancho del cauce (80-100m) se tienen Δh importantes. En resumen, el método consiste en que, para una sección transversal dada, se puede obtener la velocidad máxima y con ello la sobreelevación máxima de la superficie del agua que se puede presentar sin que se demanden cambios en la sección transversal.

3.8 Teoría de la rotación de la Tierra.

Los parámetros principales que es posible obtener mediante esta teoría, resultan ser las velocidades transversal y longitudinal, así como la desviación transversal que experimenta la corriente debido al efecto de la rotación de la Tierra. Esto se puede evaluar de la siguiente manera:

Sea un cauce arenoso hipotético con las siguientes características.

$$h = 1.41 \text{ m}$$

$$b = 100 \text{ m}$$

$$\bar{u} = 1.42 \text{ m/s}$$

$$\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\phi = 20^\circ$$

$$k \approx 0.4$$

$$n = 0.024$$

Con esto se estima el coeficiente de Chezy como: $c = \frac{h^{1/6}}{n}$, con lo que se tiene que:

$$c = 44 \text{ m}^{1/2} / \text{s}$$

Para obtener la pendiente transversal de la superficie del agua mediante la expresión 2.56 a, se procede de la siguiente manera:

$$\beta = 1 + \frac{9.81}{(0.4 * 44)^2} = 1.032$$

$$\tan \alpha = \frac{2(7.27 \times 10^{-5})(1.42)(\cos 20)}{9.81} = 1.98 \times 10^{-5}$$

Con lo cual, la pendiente transversal de la superficie del agua es:

$$S_y = 1.032(1.98 \times 10^{-5}) = 2.04 \times 10^{-5}$$

Siendo la sobreelevación máxima:

$$\Delta h = 2.04 \times 10^{-5} (100) = 0.002m$$

Ahora se calcularán las componentes longitudinal y transversal de la velocidad a partir de las expresiones 2.58 y 2.59.

- Se propone realizar el análisis en la superficie del agua $\eta = 1$:

$$u(1) = 1.42 \left[1 + \frac{\sqrt{9.81}}{0.4(44)} \right] = 1.67 \text{ m/s}$$

El cual es un valor razonable de acuerdo a lo que se puede presentar en un cauce natural meandreante, lo que indica que el método es consistente al evaluar la velocidad longitudinal del flujo.

- En la superficie $\eta = 1$, se presenta la mayor diferencia entre $E_1(\eta)$ y $E_2(\eta)$ de acuerdo con la figura 2.5.

$$E_1(\eta) = 1.33$$

$$E_2(\eta) = 0.47$$

$$r = \frac{1.42}{2(7.27 \times 10^{-5})(\cos 20)} = 10393m$$

Por lo tanto

$$v(1) = \frac{1.42(1.41)}{10393(0.4^2)} \left[1.33 - \frac{0.47\sqrt{9.81}}{0.4(44)} \right] = 0.0015 \text{ m/s}$$

Valor muy pequeño, prácticamente nulo.

El ángulo de desviación de las líneas de corriente aplicando 2.61:

$\Omega = (8.98 \times 10^{-4})^\circ$, prácticamente inexistente (cauce rectilíneo).

Estos datos, a pesar de ser cuantitativamente pequeños, tienen cierta coherencia, ya que al ser prácticamente cero la desviación de la corriente con respecto al cauce, también lo es la velocidad transversal.

De la figura 2.5, para valores de $\eta < 0.6$, la velocidad es negativa, por ejemplo, para $\eta = 0.4$, $v(0.4) = -1.64 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, lo cual describe la circulación transversal del flujo helicoidal.

Resulta necesario determinar bajo qué condiciones estas variables recién obtenidas resultarán numéricamente significativas, para esto se realiza el siguiente análisis.

Partiendo de los datos del problema anterior se tiene:

$$Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$b = 100 \text{ m}$$

$$\bar{u} = 1.42 \text{ m/s}$$

$$\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/seg}$$

$$\phi = 20^\circ$$

$$\kappa = 0.4$$

$$n = 0.024$$

Ahora bien, a continuación se muestra una tabla que contiene el resumen de haber aplicado la misma secuencia de cálculo para diversos valores del coeficiente de Chézy, esto bajo la consideración de que al variar el coeficiente c también variarán en cierta proporción el tirante y la velocidad media longitudinal.

Tabla 3.3 Evaluación de los parámetros principales en función de diferentes valores arbitrarios del coeficiente de Chézy.

Coeficiente c	h	\bar{u}	β	u	v	Ω
44	1.4	1.43	1.032	1.67	0.0015	0.000897
50	3.0	0.67	1.025	0.77	0.0032	0.004100
55	5.3	0.38	1.020	0.43	0.0057	0.013000
60	8.9	0.22	1.017	0.25	0.0096	0.039000
65	14.4	0.14	1.015	0.16	0.0160	0.100000
70	22.5	0.09	1.013	0.10	0.0250	0.250000

Como se puede apreciar en la tabla 3.3, los valores que adopta β son muy pequeños, ya que según esto, debido al efecto de Coriolis existirá un incremento en la pendiente transversal de la corriente, entre el 1% y 3% (ya que β oscila entre 1.01 y 1.03), lo cual se considera poco importante. Se observa que la velocidad transversal y con ello también Ω son prácticamente nulos.

En función de esto, es conveniente evaluar el comportamiento de las variables más representativas en la medida que β adopta valores numéricos mayores. Para ello se realiza el siguiente análisis:

Si $\beta = 1.05$, entonces, $c = \sqrt{\frac{9.81}{0.05 * 0.4^2}} = 35.02 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, y por ende, para $h=2\text{m}$, $n = \frac{2^{1/6}}{35.02} = 0.032$.

A continuación se muestra una tabla que contiene los resultados de haber aplicado la misma secuencia de cálculo para diversos valores de β y h .

Tabla 3.4 Evaluación del coeficiente de Manning (n) para diversos valores de β en función del tirante (h).

β	Coeficiente c	Valores del coeficiente n para diferentes tirantes.				
		$h=2 \text{ m}$	$h=4 \text{ m}$	$h=6 \text{ m}$	$h=8 \text{ m}$	$h=10 \text{ m}$
1.05	35.02	0.032	0.036	0.038	0.040	0.042
1.10	24.76	0.045	0.051	0.054	0.057	0.059
1.15	20.22	0.056	0.062	0.067	0.070	0.073
1.20	17.51	0.064	0.072	0.077	0.081	0.084
1.25	15.66	0.072	0.080	0.086	0.090	0.094
1.30	14.30	0.078	0.088	0.094	0.099	0.103

Por medio de la tabla 3.4 se puede corroborar que β y c varían inversamente proporcional, lo cual indica que para que β sea numéricamente representativa, c debe adoptar valores del orden de $30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ o menores. Por otra parte, se observa que los valores del coeficiente de Manning obtenidos y que pueden ser comparados con datos probables de campo ($n \leq 0.06$), corresponden a valores de β entre 1.05 y 1.15 y de c entre 35 y $20 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$.

En función de esto, resulta conveniente evaluar el comportamiento del tirante en función del coeficiente de Chézy para diversos valores del coeficiente de Manning.

Tabla 3.5 Valores del tirante en función del coeficiente c para valores arbitrarios del coeficiente n .

Coeficiente c	Valores del tirante para diferentes coeficientes n				
	$n=.024$	$n=0.04$	$n=0.06$	$n=0.08$	0.10
35.00	0.3500	7.55	86.06	484.00	1845.00
24.70	0.0440	0.94	10.75	60.40	230.40
20.22	0.0130	0.28	3.19	17.92	68.34
17.51	0.0055	0.12	1.34	7.56	28.82
15.66	0.0028	0.06	0.69	3.87	14.75
14.30	0.0016	0.04	0.40	2.24	8.55

Mediante la tabla anterior, se aprecian algunos valores fuera de lo real del tirante, tanto muy grandes como prácticamente nulos, pero también se notan valores aceptables en lo que se puede presentar en un río natural, esto se da en la medida que el coeficiente n adquiere valores ascendentes.

- Analizando ahora $\tan \alpha$, de la ecuación 2.56 considerando el valor de la aceleración de la gravedad así como el de la velocidad angular de la Tierra se tiene:

$$\tan \alpha = 1.48 \times 10^{-5} \bar{u} \cos \phi \quad (3.4)$$

Además se propone para este ejemplo un valor de la sobreelevación transversal de la superficie del agua de 10cm. Asimismo, el ancho del cauce se supondrá de 100m, con lo cual se determina que:

$$S_y = \beta \tan \alpha = \frac{\Delta h}{b} = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

Retomando el valor de $\beta = 1.017$ determinado en el punto anterior (para $c = 60 \frac{m^{1/2}}{s}$) se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{S_y}{\beta} = \frac{0.001}{1.017} = 9.833 \times 10^{-4}$$

Ahora, aplicando lo anterior en 3.4 y despejando se llega a:

$$\bar{u} \cos \phi = \frac{9.83 \times 10^{-4}}{1.48 \times 10^{-5}} = 66.4 \quad (3.5)$$

Proponiendo el valor de $\phi = 20^\circ$ para un río en México, y aplicando de nueva cuenta la ecuación 3.5

$$\bar{u} = \frac{66.4}{\cos 20} = 70.7 \frac{m}{s}$$

Cuantitativamente hablando este valor no es representativo de un cauce natural meandreante.

- De 2.34, si $\phi = 20^\circ$ se tiene

$$\bar{u} = \frac{9.09 \times 10^{-4}}{1.48 \times 10^{-5} (\cos 20)} = 65.4 \text{ m/s}$$

Por otro lado, resulta de interés investigar qué relación se obtendrá para la sobreelevación Δh considerando $\beta = 1$

Recordando que $S_y = \beta \frac{2\omega \bar{u} \cos \phi}{g}$, la cual se puede expresar en términos del radio r ya que

$$r = \frac{\bar{u}}{2\omega \cos \phi}, \text{ por lo que } \frac{r}{u} = \frac{1}{2\omega \cos \phi}, \text{ aplicado a la expresión 2.55 se tiene:}$$

$$S_y = \frac{(\bar{u})^2}{gr} = \frac{\Delta h}{b}, \text{ siendo por lo tanto:}$$

$$\Delta h = \frac{(\bar{u})^2}{g} \frac{b}{r} \tag{3.6}$$

Misma que como se podrá verificar en el capítulo 4 (ver tablas 4.7 y 4.14), proporciona valores semejantes a los obtenidos por el método de Thomson (ver tablas 4.6 y 4.13).

Mediante este análisis se han podido detectar ciertas deficiencias de la teoría de la rotación de la Tierra. No obstante, la teoría se aplicará a los ríos Pánuco y Papaloapan para analizar con más detalle los resultados de esta teoría.

De los cálculos obtenidos mediante las teorías analizadas a partir de datos supuestos, se pueden hacer algunas observaciones:

- En el análisis de las ecuaciones empíricas se observó que la relación ancho-longitud de meandro propuesta por Inglis (1949) $B/\lambda = 3$ es similar a la que resulta del método de mínima variancia $B/\lambda = 2.4$. Que el de Leopold-Wolman $B/\lambda = 0.25$ y Zeller $B/\lambda = 0.4$
- Los métodos que proporcionan el radio de curvatura del cauce para los ejemplos realizados muestran valores que difieren en gran medida, ya que con mínima variancia da $r=707 \text{ m}$, con Fargue $r=2222 \text{ m}$ y mediante la teoría de la rotación de la Tierra $r=10697 \text{ m}$, para los mismos valores de las variables de partida.
- En la teoría de la corriente helicoidal se obtuvo que la velocidad transversal es prácticamente igual a la evaluada por la teoría de la rotación de la Tierra, aunque en ambos casos el valor es muy bajo, del orden de 2 cm/s , con esto resulta claro que el ángulo de desviación de las líneas de corriente con respecto al cauce es cercano a cero en los ejemplos realizados, ya que dicho ángulo es directamente proporcional a la velocidad transversal.
- Se verificó que el valor del tirante calculado con la teoría de régimen propuesta por Lacey (1930), es cercano al calculado por el método de resistencia al flujo de Cruickshank-Maza, Maza (1987).

- La sobreelevación transversal de la superficie del agua calculada por los métodos de Thomson y rotación de la Tierra, en ambos casos es insignificante (menor a 5cm).

3.9 Propuestas para algunas mejoras en las teorías del meandro.

Mediante el análisis de sensibilidad efectuado se ha podido apreciar que en algunas de las teorías (tal es el caso de la teoría de la rotación de la Tierra), ciertas variables han sido bien cuantificadas, pero algunas otras proporcionan valores fuera de los parámetros reales que se pueden presentar en un río en condiciones naturales.

De esto se desprende la necesidad de considerar de cada una de las teorías los parámetros que presentan un mejor comportamiento, proponiendo además algunas mejoras.

- Se propone una combinación general de las teorías del meandro, tomando de cada una de las teorías lo necesario para complementarse entre sí.
- Se desarrollarán algunas expresiones para aquellos parámetros que no sean apropiadamente estimados por ninguna de las teorías analizadas. Dichas expresiones serán el producto de un análisis de correlación que involucre la información de campo con que se cuenta.
- Se plantea una nueva variable adimensional denominada sinuosidad hidráulica ψ , la cual se define a continuación.

$$\psi = \sigma \left(\frac{\Omega + \theta_0}{\theta_0} \right) \quad \begin{array}{l} \theta_0 > 0 \\ \Omega \geq 0 \end{array} \quad (3.7)$$

Este parámetro es una medida que la corriente posee para acrecentar o mantener el meandro en un río.

Donde:

σ sinuosidad geométrica.

ψ sinuosidad hidráulica.

Ω ángulo de desviación longitudinal de las líneas de corriente con respecto al cauce.

θ_0 ángulo de desviación longitudinal del cauce.

Es conveniente comentar la relación entre σ y ψ . σ evalúa los efectos presentes en el tiempo t como producto de la acción continua de la corriente hacia el cauce que la contiene durante el tiempo $t - \Delta t$. σ no puede ser vista como una medida de las características hidráulicas en el presente, sino es el resultado de la acción de las mismas tiempo atrás, debido a que el meandro es un proceso que involucra grandes intervalos de tiempo, a excepción de casos extraordinarios. Por otra parte, ψ evalúa la acción de la corriente disponible en el tiempo t que repercutirán en los efectos que presente el cauce en el tiempo $t + \Delta t$, o lo que es lo mismo, repercutirá en σ en el tiempo $t + \Delta t$. En resumen, σ es una variable dependiente de ψ . Cuando $\psi \rightarrow \sigma$, significa que $\Omega \rightarrow 0$, por lo que la corriente tiende a ser paralela a las márgenes del cauce, amortiguándose con esto el crecimiento de los meandros mas no su propagación. En otras palabras, aún siendo el cauce sinuoso, no existen las condiciones para que la sinuosidad geométrica aumente.

Las condiciones necesarias para que $\Omega \rightarrow 0$ son: que exista una diferencia cuantitativa notable entre las velocidades longitudinal y transversal para una misma elevación, es decir, que para un mismo punto y en el mismo tiempo, la velocidad longitudinal adquiera valores mayores y la

velocidad transversal disminuya. De ahí que, a medida que Ω incrementa (y con ello ψ), el no paralelismo de la corriente con el cauce aumentará acrecentándose con ello la intensidad de la acción del flujo contra los taludes del río lo cual se traduce en el proceso erosión-depositación y con esto el desarrollo o propagación de los meandros.

Si las sinuosidades hidráulica y geométrica son iguales ($\psi = \sigma$), existe un “equilibrio morfodinámico”, y la sinuosidad geométrica tiende a ser constante puesto que no existe una aportación de sinuosidad hidráulica para modificarla.

La situación $\psi \gg \sigma$, indica que las condiciones existentes resultan ser suficientes para estimular el meandro a una velocidad tal que depende principalmente del gasto líquido, del material que constituye el cauce y pendiente de fondo.

Una vez concluido el análisis crítico de las diversas teorías del meandro descritas en el capítulo 2, se han hecho notar en cada una de estas teorías los principales aciertos y desaciertos, destacado el hecho de que ninguna teoría por sí sola es capaz de proporcionar el comportamiento integral de un meandro.

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DE LAS TEORIAS DEL MEANDREO A DOS RIOS MEXICANOS.

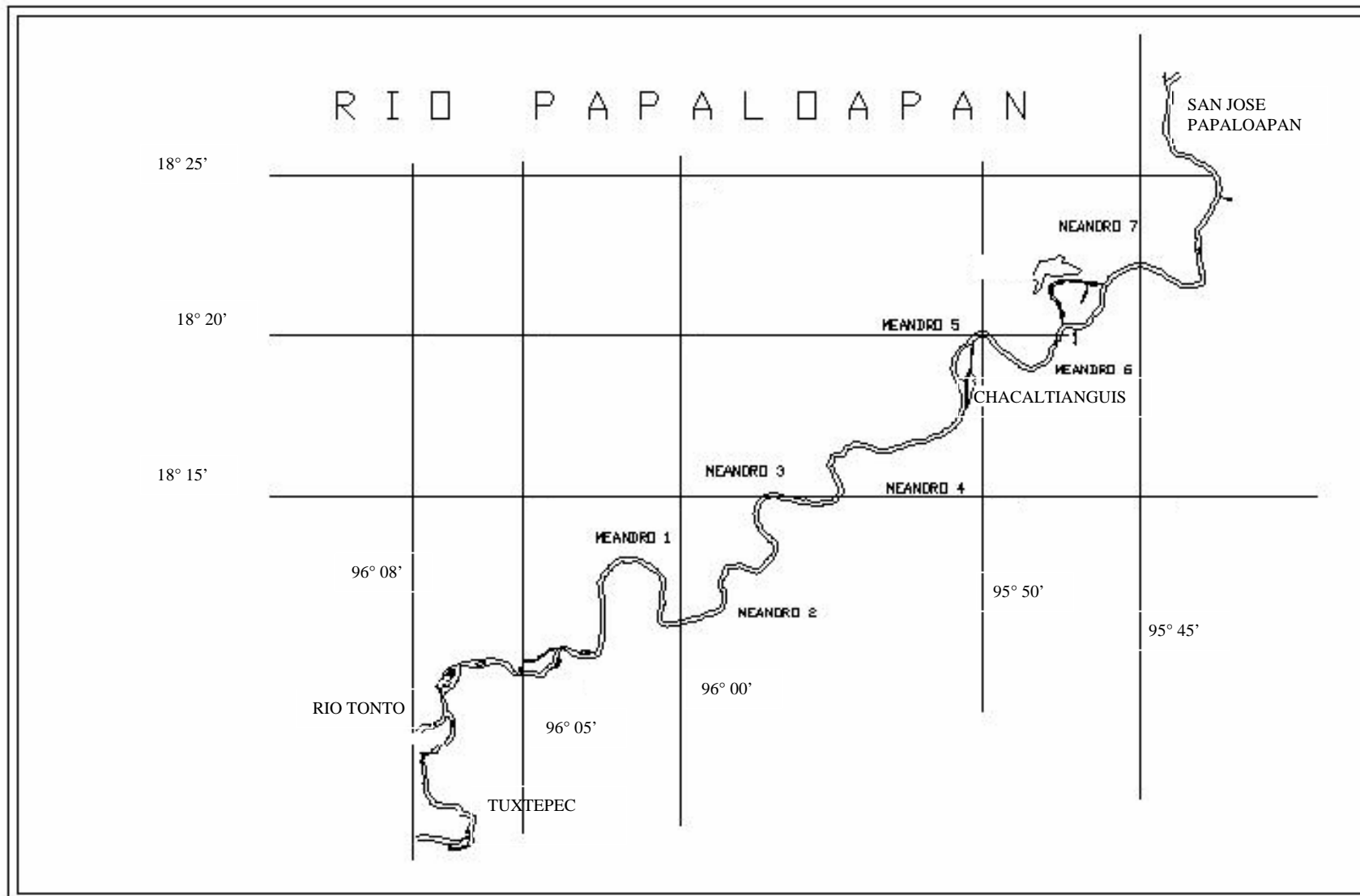
En este capítulo se aplicará lo descrito en los capítulos anteriores a dos ríos mexicanos en su zona sinuosa. El primero es el bajo Papaloapan a partir de la confluencia con el río Tonto hasta San José Papaloapan. En este tramo fue posible analizar un conjunto de siete meandros y gracias a la información hidrométrica complementaria recopilada de la estación Chacaltianguis por el personal del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.

Por otro lado, en el bajo río Pánuco se eligió la región a partir de la confluencia con el río Moctezuma hasta la laguna del Caracol, donde se analizaron diez meandros representativos. La información hidrométrica fue adquirida mediante algunos estudios realizados previamente por la Secretaría de Marina y la información cartográfica con la que se contó fue recopilada mediante cartas topográficas escala 1:50000 proporcionadas del INEGI.

Contando con la información necesaria, se procedió a determinar las características geométricas de cada uno de los meandros que constituyen el tramo del río en estudio, que son $L, B, \lambda, b, \theta_0$ y r , con estas características geométricas y la información hidrométrica recopilada se tienen los elementos suficientes para realizar el análisis.

En ambos casos se aceptará que el gasto corresponde a un periodo de retorno de 1.4 años de acuerdo a lo propuesto por Leopold y Maddok.

4.1 Análisis del río Papaloapan.



Mapa.1 Localización de los meandros analizados del río Papaloapan.

Los datos generales con los que se cuenta son los siguientes:

$$Q = 1712 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$S = 0.000115$$

$$\kappa = 0.4$$

$$D_{50} = 0.27 \text{ mm}$$

$$D_{84} = 0.36 \text{ mm}$$

$$D_m = 0.25 \text{ mm}$$

$$\phi = 18.3^\circ$$

$$\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\gamma_s = 2650 \text{ kgf/m}^3$$

$$\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$$

En la tabla 4.1 se muestran los datos particulares para cada uno de los siete meandros analizados.

Tabla 4.1 Información de la geometría del río Papaloapan.

Meandro	b (m)	B (m)	L (m)	λ (m)	σ	θ_0 (rad)	r (m)
1	300	4700	12900	6150	2.10	1.31	4350
2	225	1700	7000	5650	1.24	0.96	1087
3	200	3200	8400	5000	1.68	1.57	2850
4	175	2400	9500	7100	1.34	0.45	2162
5	275	3700	10700	6300	1.70	0.70	3312
6	200	2500	8400	6250	1.34	0.93	1950
7	250	1600	6500	5600	1.16	0.66	1075

La velocidad media longitudinal para cada meandro se obtuvo mediante la aplicación del método de resistencia al flujo de Cruickshank-Maza, aplicando el mismo procedimiento ilustrado en el capítulo anterior.

En todos los casos, se presentará el detalle de cálculo para el primer meandro solamente, pues el procedimiento será el mismo para los demás.

Analizando para el meandro 1:

El coeficiente de Manning:

$$n = \frac{(4.27)^{2/3} (0.00015)^{1/2}}{1.34} = 0.0211$$

A su vez, el coeficiente de Darcy-Weissbach.

$$f = \frac{8(9.81)(0.0211)^2}{(4.27)^{1/3}} = 0.022$$

Y el coeficiente de Chezy

$$c = \frac{(4.27)^{1/6}}{0.0211} = 60.31 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

En la tabla 4.2 se muestra el cálculo para los siete meandros.

Tabla 4.2 Cálculo de las propiedades hidráulicas y geométricas.

Meandro	h (m)	\bar{u} (m/s)	n	f	c $\left(\frac{\text{m}^{1/2}}{\text{s}} \right)$
1	4.27	1.34	0.0211	0.022	60.31
2	5.09	1.5	0.0212	0.021	61.79
3	5.47	1.56	0.0213	0.020	62.39
5	4.5	1.38	0.0211	0.021	60.81
6	5.47	1.56	0.0213	0.020	62.39
7	4.77	1.43	0.0212	0.021	61.30

- Teoría de la mínima variancia.

$$\theta_0 = 2.2 \sqrt{\frac{2.1-1}{2.1}} = 1.59 \text{radianes}$$

$$r = \frac{300(2.1)}{1.59} = 396 \text{m}$$

$$L = 2\pi(1.59)(396) = 3958 \text{m}$$

$$\lambda = \frac{3958}{2.1} = 1885m$$

$$\Delta = \frac{2(3958)}{\pi} \left[J_1(1.59) + \frac{J_3(1.59)}{3} \right] = 1497m$$

$$B = 2(1497) = 2995m$$

En la tabla 4.4 se presentan los resultados para todos los meandros analizados.

- Teoría de la corriente helicoidal.

$$\tan \bar{\Omega} = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \text{ para } \eta = 1$$

$$\bar{u} = 1.34 m/s$$

$$h = 4.27m$$

$$r = 4350m$$

Por lo que el factor N

$$N = (0.022)^{-1/2} \approx 7$$

Con esto, mediante la gráfica 2.3 se tiene:

$$\frac{\bar{v}r}{\bar{u}h} \approx 7.8, \text{ con lo que}$$

$$\bar{v} = \frac{7.8(1.34)(4.27)}{4350} = 0.01 m/s$$

Por lo tanto

$$\bar{\Omega} = 0.43^\circ$$

La tabla 4.5 contiene el cálculo para el resto de los meandros.

- Teoría de régimen.

Según Lacey (Ecs. 2.24-2.26):

$$b = 4.831(1712)^{0.5} = 200m$$

$$h_0 = \frac{0.128(1712)^{1/3}}{(2.5 \times 10^{-4})^{1/6}} = 6.1m$$

$$\bar{u} = \frac{1712}{200 * 6.1} = 1.4 m/s$$

$$S_0 = \frac{0.205(2.5 \times 10^{-4})^{5/6}}{1712^{1/6}} = 5.9 \times 10^{-5}$$

Determinando el intervalo en el cual el cauce está en estado de régimen, mediante 2.29 y 2.30:

$$\frac{h}{D} = \frac{6.1}{2.5 \times 10^{-4}} = 2400$$

Siendo $\frac{h}{D} > 100$, por lo tanto:

$$\left(\frac{b}{h}\right)_0 = 25, \text{ por lo que } b_0 = (6.1)(25) = 152m$$

Siendo $\frac{h}{D} > 200$, por lo tanto:

$$\left(\frac{b}{h}\right)_1 = 150, \text{ por lo que } b_1 = (6.1)(150) = 915m$$

Con lo cual se obtiene que: $152 \leq b \leq 915 m$

Ahora es posible conocer el intervalo para λ mediante 2.28:

$912 \leq \lambda \leq 5490 m$, es decir, el intervalo asociado al equilibrio del cauce es $\lambda_0 = 6 * 152 = 912m$ y $\lambda_1 = 6 * 915 = 5490m$

Estos valores serán constantes para todos los meandros del mismo río, considerando que el gasto y el diámetro representativo del material que constituye el cauce son constantes.

- Teoría de Fargue, de 2.32 y 2.33.

Si $\theta_0 = 1.31rad$.

$$C_m = \frac{2(1.31)}{12900} = 2.03 \times 10^{-4}$$

$$r_m = \frac{1}{C_a} = 4924m$$

$$h_m = 1.5 \left(1 + \sqrt{(2.03 \times 10^{-4}) + 1.711(2.03 \times 10^{-4})} \right) = 1.528m$$

La tabla 4.6 contiene el resumen de los resultados de esta teoría para cada meandro.

- Teoría de Thomson, aplicando 2.53.

$$r_2 = 4350 + \frac{300}{2} = 4500m$$

$$r_1 = 4350 - \frac{300}{2} = 4200m$$

$$\Delta h = \frac{1.51^2}{9.81} \ln \frac{4500}{4200} = 0.016m$$

En la tabla 4.6 se resumen los resultados obtenidos para los demás meandros.

- Teoría de la rotación de la Tierra.

$$r = \frac{1.34}{2(7.27 \times 10^{-5}) \cos 18.3} = 9706m$$

De la figura 2.5, evaluando en la superficie del agua:

$$\eta = 1$$

$$E_1(\eta) = 1.33$$

$$E_2(\eta) = 0.47$$

$$v = \frac{1.34(4.27)}{29351(0.4^2)} [1.27] = 0.0015 m/s$$

$$u = 1.34[1.13] = 1.51 \frac{m}{s}$$

$$\tan \Omega = \frac{0.0015}{1.51} = 9.93 \times 10^{-4}$$

$$\Omega = 0.057^\circ$$

$$\Delta h = b S_y$$

$$S_y = \beta \tan \delta$$

$$\beta = 1 + \frac{9.81}{(0.4^2 * 60.37)^2} = 1.017$$

$$\tan \delta = \frac{2(7.27 \times 10^{-5})(1.34) \cos 18.3}{9.81} = 1.88 \times 10^{-5}$$

$$S_y = 1.017(1.88 \times 10^{-5}) = 1.92 \times 10^{-5}$$

$$\Delta h = 300(1.92 \times 10^{-5}) = 0.0058m$$

Aplicando la expresión 3.6 para calcular Δh correspondiente a un valor de $\beta = 1$

$$\Delta h = \frac{1.34^2}{9.81} \frac{300}{4350} = 0.013m$$

Los resultados de esta teoría para todos los meandros se muestran en la tabla 4.7.

Tabla 4.3 Resumen de la evaluación de las expresiones empíricas.

Meandro	Inglis		Leopold-Wolman		Zeller		Altunin λ (m)	Ackers-Charlton λ (m)
	λ (m)	B (m)	λ (m)	B (m)	λ (m)	B (m)		
1	1870	5270	3462	1433	3460	1350	3645	6080
2	1407	3965	2589	1044	2576	1013	2734	4444
3	1252	3528	2300	917	2283	900	2430	3908
4	1097	3091	2010	792	1991	788	2126	3379
5	1716	4836	3171	1302	3165	1238	3341	5530
6	1252	3528	2300	917	2283	900	2430	3908
7	1561	4400	2880	1172	2870	1125	3038	4984

En lo que respecta a las ecuaciones de Agarwal y Dury, cada una proporciona valores constantes para todos los meandros, ya que en esas ecuaciones la longitud de meandro está sólo en función del gasto:

- Agarwal:

$$\lambda = 11.55(1712)^{0.75} = 3074m$$

$$B = 0.476(3074) = 1463m$$

- Dury:

$$\lambda = 54.3(1712)^{0.5} = 2247m$$

Tabla 4.4 Resultados de la aplicación de la teoría de la mínima variancia.

Meandro	θ_0 (radianes)	r (m)	L (m)	λ (m)	B (m)
1	1.59	396	3958	1885	2995
2	0.97	288	1753	1414	973
3	1.4	240	2111	1257	1497
4	1.11	212	1473	1100	898
5	1.41	331	2937	1728	2083
6	1.11	242	1684	1257	1026
7	0.82	355	1822	1571	859

Tabla 4.5 Resumen de datos obtenidos de la teoría de la corriente helicoidal.

Meandro	\bar{u} (m/s)	Factor N	$\frac{\bar{vr}}{\bar{uh}}$	\bar{v} (m/s)	$\bar{\Omega}$ Grados
1	1.34	7	7.8	0.010	0.43
2	1.50	7	7.8	0.050	1.91
3	1.56	7	7.8	0.023	0.84
4	1.65	7	7.8	0.036	1.25
5	1.38	7	7.8	0.015	0.62
6	1.56	7	7.8	0.034	1.25
7	1.43	7	7.8	0.050	2.00

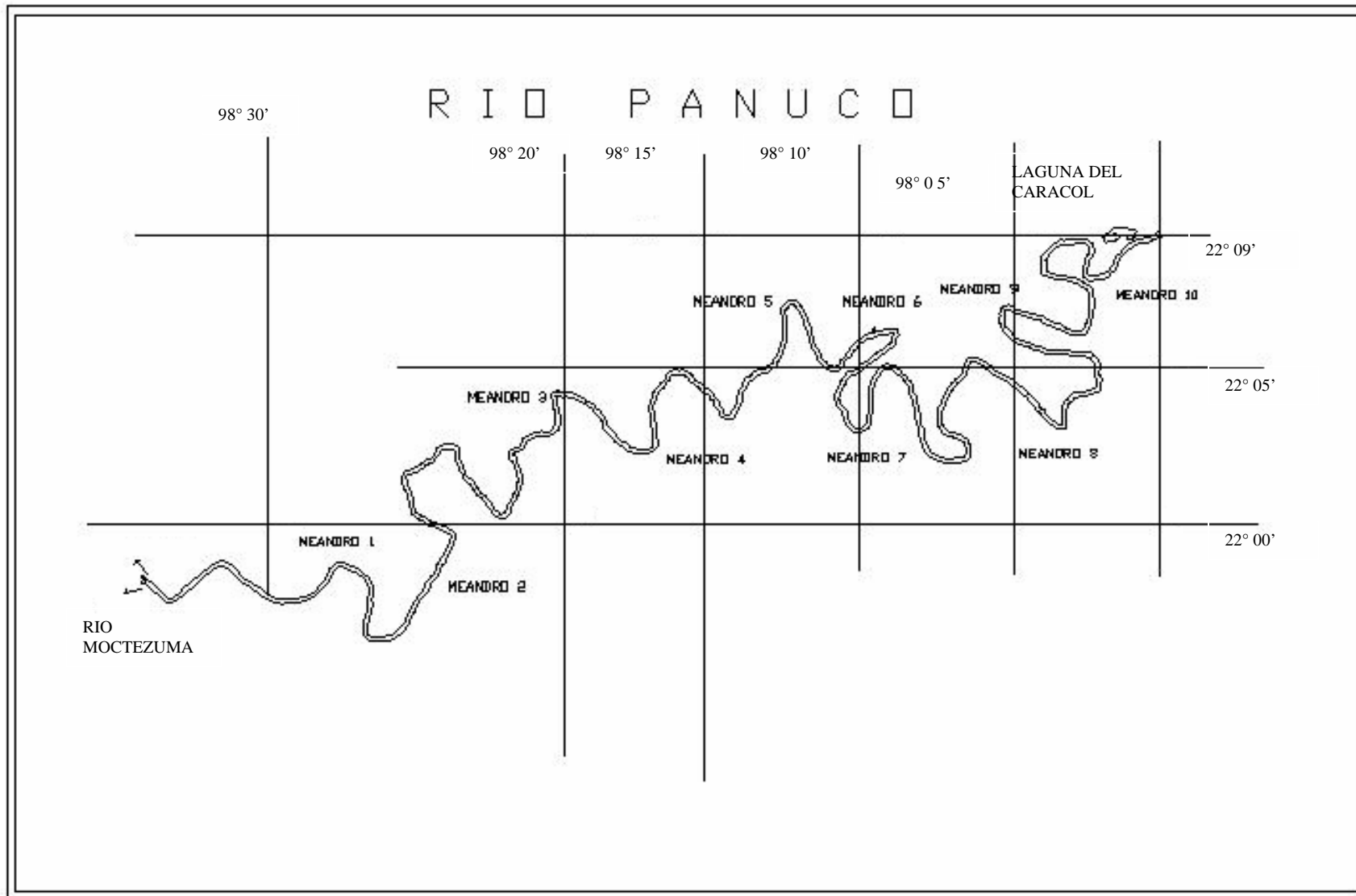
Tabla 4.6 Resumen de la aplicación de las teorías de Fargue y Thomson.

Meandro	Fargue		Thomson
	r (m)	h_a (m)	Δh (m)
1	4923	1.528	0.016
2	3645	1.532	0.060
3	2675	1.538	0.022
4	10556	1.519	0.028
5	7642	1.522	0.021
6	4516	1.529	0.032
7	4924	1.528	0.062

Tabla 4.7 Aplicación de la teoría de la rotación de la Tierra.

Meandro	r (m)	$\eta = 1$		Ω Grados	Δh m	Δh Para $\beta = 1$
		u (m/s)	v (m/s)			
1	9706	1.51	0.0015	0.059	0.0058	0.013
2	10866	1.69	0.0018	0.063	0.0048	0.047
3	11300	1.76	0.0020	0.063	0.0045	0.017
4	11952	1.86	0.0022	0.069	0.0041	0.022
5	9996	1.56	0.0016	0.059	0.0054	0.016
6	11300	1.76	0.0020	0.063	0.0045	0.025
7	10359	1.61	0.0017	0.063	0.0051	0.048

4.2 Análisis del río Pánuco.



Mapa 2 Localización de los meandros analizados del río Pánuco.

La información con la que se cuenta es la siguiente (Secretaría de Marina, 1961):

$$Q = 5000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$S = 0.000096$$

$$\kappa = 0.4$$

$$D_{50} = 0.5 \text{ mm}$$

$$D_{84} = 0.9 \text{ mm}$$

$$D_m = 0.5 \text{ mm}$$

$$\phi = 22^\circ$$

$$\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad}/\text{s}$$

$$\gamma_s = 2650 \text{ kgf}/\text{m}^3$$

$$\gamma = 1000 \text{ kgf}/\text{m}^3$$

Tabla 4.8 Información de la geometría del río Pánuco.

Meandro	b (m)	B (m)	L (m)	λ (m)	σ	θ_0 Radianes	r (m)
1	175	3500	10100	5800	1.74	1.36	3162
2	250	6300	21000	10000	2.10	1.83	5625
3	200	5300	15800	9000	1.76	0.94	5150
4	100	3800	9500	5200	1.83	1.40	3600
5	125	4700	12800	6500	1.97	0.75	4487
6	200	4300	10500	2200	4.77	2.36	4000
7	200	4300	13300	6800	1.96	1.92	3350
8	250	5900	18000	9400	1.91	2.27	4675
9	200	5300	14000	3900	3.59	1.33	4750
10	200	3700	11500	2900	3.97	1.57	3500

Tabla 4.9 Calculo de las propiedades hidráulicas y geométricas.

Meandro	h (m)	\bar{u} (m/s)	n	f	c ($m^{0.5}/s$)
1	12.30	2.32	0.0225	0.017	67.6
2	9.90	2.02	0.0224	0.018	65.53
3	11.34	2.20	0.0224	0.018	66.82
4	17.30	2.90	0.0227	0.016	70.92
5	15.10	2.65	0.0226	0.016	69.58
6	11.34	2.20	0.0224	0.018	66.82
7	11.34	2.20	0.0224	0.018	66.82
8	9.90	2.02	0.0224	0.018	65.53
9	11.34	2.20	0.0224	0.018	66.82
10	11.34	2.20	0.0224	0.018	66.82

Tabla 4.10 Resumen de la evaluación de las expresiones empíricas.

Meandro	Inglis		Leopold-Wolman		Zeller		Altunin	Ackers-Charlton
	λ (m)	B (m)	λ (m)	B (m)	λ (m)	B (m)	λ (m)	λ (m)
1	1097	3091	2009	792	1991	788	2126	3379
2	1561	4400	2880	1172	2870	1125	3038	4984
3	1252	3528	2300	917	2283	900	2430	3908
4	630	1776	1141	428	1122	450	1215	1836
5	786	2215	1430	547	1410	563	1519	2341
6	1252	3528	2300	917	2283	900	2430	3908
7	1252	3528	2300	917	2283	900	2430	3908
8	1561	4400	2880	1172	2870	1125	3038	4984
9	1252	3528	2300	917	2283	900	2430	3908
10	1252	3528	2300	917	2283	900	2430	3908

En lo que respecta a las ecuaciones de Agarwal y Dury, cada una proporciona valores constantes para todos los meandros, ya que en esas ecuaciones la longitud de meandro está sólo en función del gasto:

- Agarwal:

$$\lambda = 11.55(5000)^{0.75} = 6868m$$

$$B = 0.476(6868) = 3270m$$

- Dury:

$$\lambda = 54.3(5000)^{0.5} = 3840m$$

Tabla 4.11 Resultados de la aplicación de la teoría de la mínima variancia.

<i>Meandro</i>	θ_0 <i>Radianes</i>	<i>r (m)</i>	<i>L (m)</i>	λ (<i>m</i>)	<i>B (m)</i>
1	1.43	212	1913	1100	1357
2	1.60	330	3300	1570	2496
3	1.45	244	2212	1257	1615
4	1.48	124	1150	628	835
5	1.54	160	1547	785	1147
6	1.96	488	5994	1257	4721
7	1.54	255	2463	1257	1857
8	1.52	314	3000	1571	2218
9	1.87	384	4511	1257	3528
10	1.90	417	4990	1257	3932

Tabla 4.12 Resumen de datos obtenidos de la teoría de la corriente helicoidal.

<i>Meandro</i>	\bar{u} <i>(m/s)</i>	<i>Factor</i> <i>N</i>	$\frac{\bar{vr}}{\bar{uh}}$	\bar{v} <i>(m/s)</i>	$\bar{\Omega}$ <i>Grados</i>
1	2.32	7.5	8	0.07	1.70
2	2.02	7.5	8	0.03	0.85
3	2.20	7.5	8	0.04	1.04
4	2.90	8	8.2	0.11	2.17
5	2.65	8	8.2	0.07	1.51
6	2.20	7.5	8	0.05	1.30
7	2.20	7.5	8	0.06	1.56
8	2.02	7.5	8	0.03	0.85
9	2.20	7.5	8	0.04	1.04
10	2.20	7.5	8	0.06	1.56

- Teoría de régimen.

Según Lacey (2.24-2.26):

$$b = 4.831(5000)^{0.5} = 342m$$

$$h_0 = \frac{0.128(5000)^{1/3}}{(5 \times 10^{-4})^{1/6}} = 7.8m$$

$$\bar{u} = \frac{5000}{342 * 7.8} = 1.9m/s$$

$$S_0 = \frac{0.205(5 \times 10^{-4})^{5/6}}{5000^{1/6}} = 8.8 \times 10^{-5}$$

Determinando el intervalo en el cual el cauce está en estado de régimen, aplicando 2.29 y 2.30:

$$\frac{h}{D} = \frac{7.8}{5 \times 10^{-4}} = 15540$$

Siendo $\frac{h}{D} > 100$, por lo tanto:

$$\left(\frac{b}{h}\right)_0 = 25, \text{ por lo que } b_0 = (7.8)(25) = 194m$$

Siendo $\frac{h}{D} > 200$, por lo tanto:

$$\left(\frac{b}{h}\right)_1 = 150, \text{ por lo que } b_1 = (7.8)(150) = 1165m$$

Con lo cual se obtiene que: $194 \leq b \leq 1165 m$

Ahora es posible conocer el intervalo para λ mediante 2.28:

$1164 \leq \lambda \leq 6990$, es decir, el intervalo asociado al equilibrio del cauce es $\lambda_0 = 6 * 194 = 1164m$ y $\lambda_1 = 6 * 1165 = 6990m$

Se observa en la tabla 4.8 que la mayoría de los meandros poseen una longitud de meandro dentro de este intervalo.

Tabla 4.13 Resumen de la aplicación de las teorías de Fargue y Thomson.

Meandro	Fargue		Thomson
	r (m)	h_a (m)	Δh (m)
1	3713	1.532	0.038
2	5738	1.526	0.023
3	8404	1.521	0.024
4	3393	1.534	0.029
5	8533	1.521	0.025
6	2225	1.542	0.031
7	3464	1.533	0.037
8	3965	1.531	0.028
9	5263	1.527	0.026
10	3662	1.532	0.035

Tabla 4.14 Aplicación de la Teoría de la rotación de la Tierra.

Meandro	r (m)	$\eta = 1$		Ω Grados	Δh (m)	Δh (m) Para $\beta = 1$
		u (m/s)	v (m/s)			
1	17209	2.59	0.0053	0.12	0.0057	0.038
2	14984	2.26	0.0043	0.109	0.0070	0.023
3	16319	2.46	0.0049	0.115	0.0061	0.024
4	21511	3.22	0.0075	0.132	0.0040	0.029
5	19657	2.95	0.0066	0.126	0.0046	0.025
6	16319	2.46	0.0049	0.115	0.0061	0.031
7	16319	2.46	0.0049	0.115	0.0061	0.037
8	14984	2.26	0.0043	0.109	0.0070	0.028
9	16319	2.46	0.0049	0.115	0.0061	0.026
10	16319	2.46	0.0049	0.115	0.0061	0.035

4.3 Análisis e interpretación de resultados.

En función de lo ya cuantificado, se pueden realizar análisis comparativos de los parámetros reales y los calculados. Las figuras 4.1 a 4.6 muestran tales comparaciones.

Como se nota en el diagrama mostrado en la figura 4.1, la expresión de Ackers-Charlton proporciona una estimación aceptable con respecto a los valores reales de longitud de onda de meandro medidos del Pánuco y Papaloapan. En contraparte, las demás teorías presentan una correspondencia menos aceptable en relación a λ real. Habrá que mencionar que los métodos de Inglis, Mínima Variancia y Régimen proporcionan valores numéricos semejantes entre sí, no obstante, no presentan una buena correspondencia con los datos de los ríos analizados. Algo semejante ocurre con las teorías de Leopold-Wolman, Zeller y Altunin.

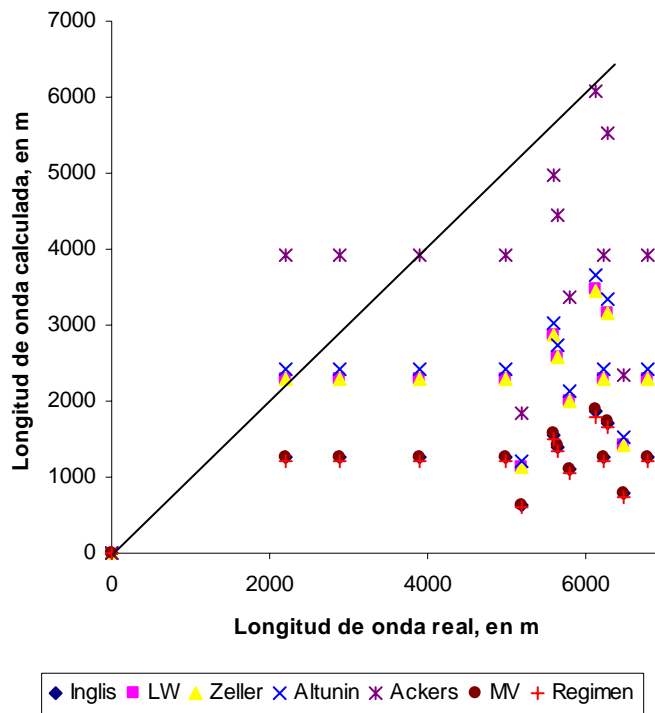


Figura 4.1 Comparación de longitud de onda real y calculada según Inglis, Leopold-Wolman, Zeller, Altunin, Ackers-Charlton, Mínima Variancia y Régimen.

Al comparar el ancho de meandro real contra el calculado, mediante la figura 4.2, se observa que el método de Inglis es el que proporciona valores más cercanos a los valores reales de los ríos correspondientes. Los otros métodos arrojan valores menores que los reales.

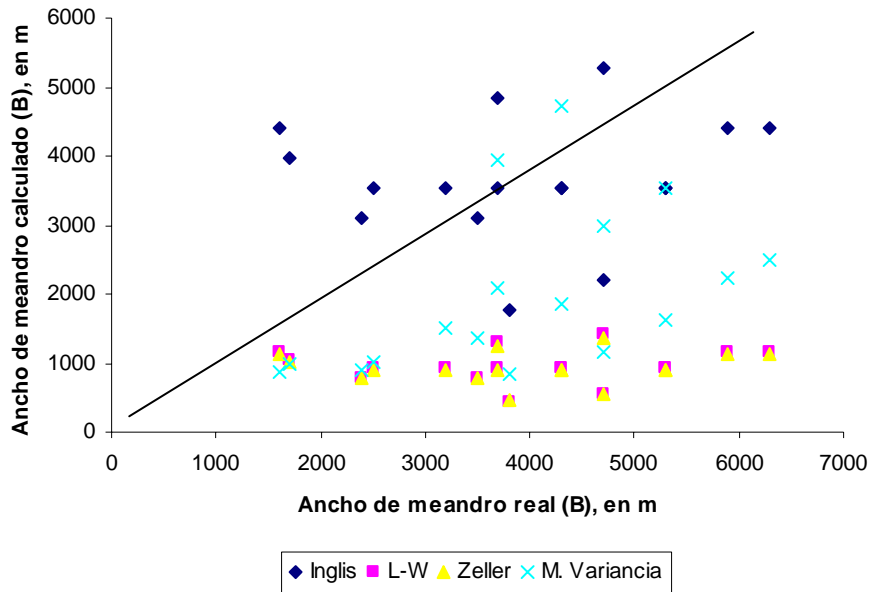


Figura 4.2 Comparación del ancho de meandro real y calculado según Inglis, Leopold-Wolman, Zeller y mínima variancia.

En lo que respecta al ángulo de desviación del eje del cauce θ_0 se ha calculado sólo con el método de la mínima variancia. Por medio de la figura 4.3 se tiene el respaldo para decir que esta teoría calcula el ángulo θ_0 con una buena aproximación en relación al valor real de los meandros analizados.

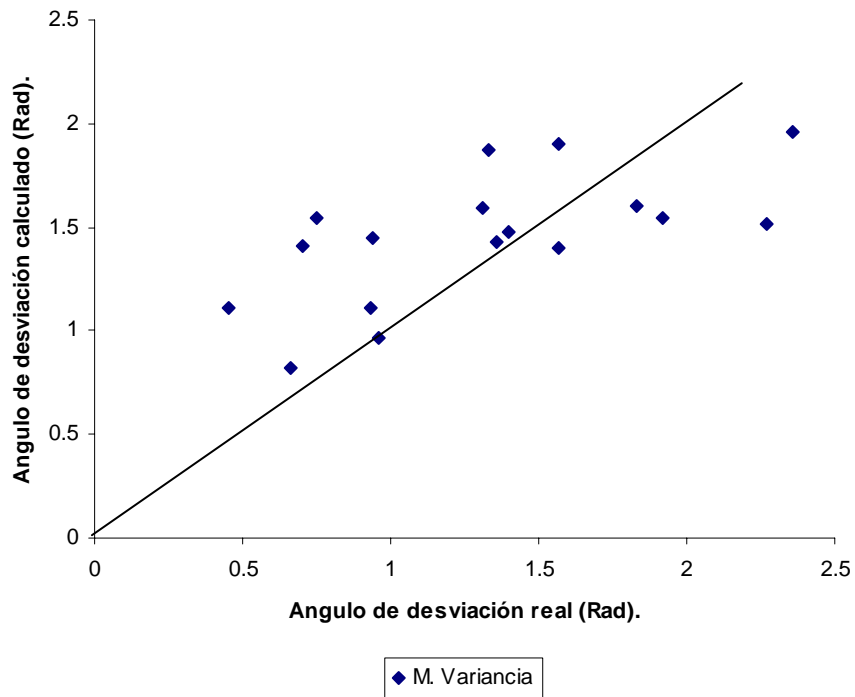


Figura 4.3 Comparación del ángulo de desviación del eje del cauce real y calculado por el método de la mínima variancia.

Del conjunto de teorías que se han estudiado para estimar el radio de curvatura, mediante el método de Fargue se puede obtener la mejor aproximación del valor del radio de curvatura del eje del cauce meandreante. Apoyándose en la figura 4.4 se verifica la discrepancia entre la teoría de la rotación de la Tierra y mínima variancia. El método de rotación de la Tierra y el de la mínima variancia dan estimaciones demasiado bajas y demasiado altas respectivamente.

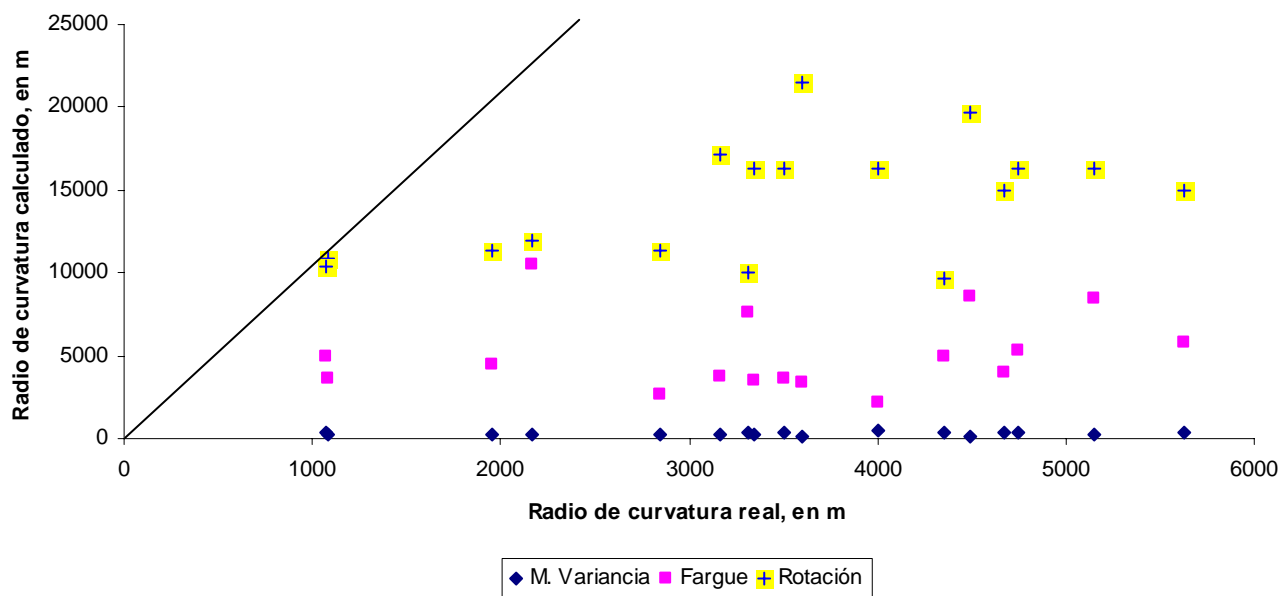


Figura 4.4 Comparación del radio de curvatura real del eje del cauce y el calculado por mínima variancia, Fargue y teoría de rotación de la Tierra.

Con la figura 4.5, que representa la relación de la longitud de desarrollo del cauce real y la calculada por Mínima Variancia, se observa que todos los valores calculados son considerablemente menores a los reales.

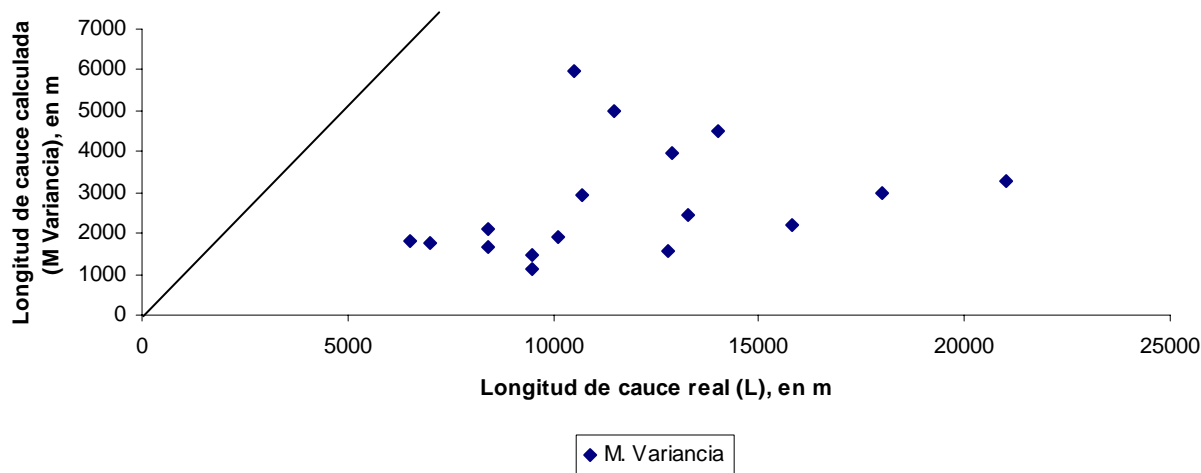


Figura 4.5 Comparación de la longitud de desarrollo del cauce real y la calculada por el método de la mínima variancia.

Al hablar del tirante real se hace referencia al parámetro obtenido mediante algún método de resistencia al flujo, el de Cruickshank-Maza en este caso. Ahora bien, el tirante calculado con la teoría de régimen de Lacey (1930) coincide en pocos casos con los datos del río Papaloapan, pero al aplicarlo al río Pánuco la diferencia es mayor.

Por su parte, el tirante evaluado por Fargue se encuentra muy lejos del real; se obtuvo un valor medio aproximadamente constante (1.5m) mismo que resulta ser menor al que se tiene en todos los meandros, ver figura 4.6. Producto de este análisis, se aprecia que la teoría de Fargue está enfocada a diseñar cauces con un tirante que sufre pequeñas modificaciones, haciendo variar el radio de curvatura del cauce de acuerdo al valor de θ_0 , ya que varían inversamente proporcional, considerando que $r_m = C_m^{-1}$, así como la expresión 2.32. Numéricamente esto se puede apreciar por medio de las tablas 4.6 y 4.13.

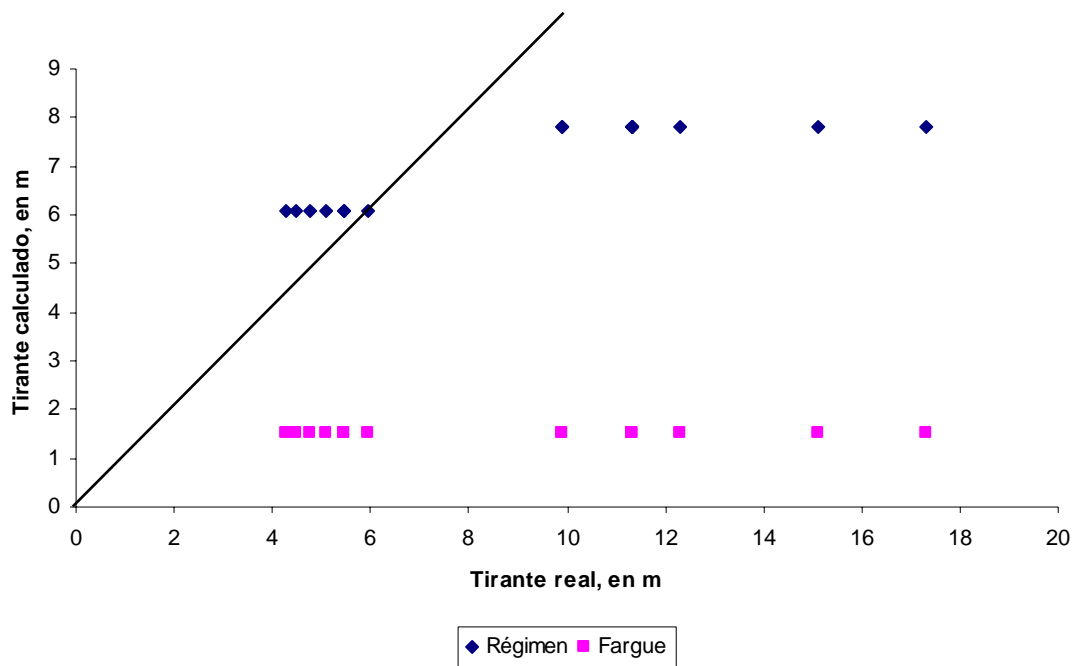


Figura 4.6 Comparación del tirante real y el evaluado aplicando la teoría de régimen y Fargue.

Continuando con la teoría de régimen, en el río Papaloapan los valores calculados de ancho de cauce, tirante y velocidad media están dentro de los intervalos de los valores observados, asimismo, una vez conocido el intervalo de b , el cual indica los límites del estado de régimen, se tiene que el río está dentro de los límites por lo cual se encuentra en estado de régimen. En el caso del río Pánuco se obtuvo que igualmente se encuentra en estado de régimen.

No se dispone de la información de campo necesaria para comparar lo obtenido al haber aplicado la teoría de la corriente helicoidal a los ríos en estudio (v, Ω) . Esto no impide comentar los resultados enlistados en las tablas 4.5 y 4.12 en donde se puede ver que el ángulo de desviación de la corriente Ω con respecto al cauce, adquiere valores dentro de un rango entre 0.5° y 2° ; en lo concerniente a la velocidad transversal, los valores que adopta se encuentran en un intervalo de 0.01-0.1 m/s. Estos parámetros obtenidos por medio de la teoría de la rotación de la Tierra adquieren valores prácticamente de las mismas proporciones, Ω comprendido entre 0.06 y 0.12 y la velocidad transversal entre 0.0015 y 0.0075 m/s, valores poco significativos numéricamente hablando. Con

esto se verifica en ambas teorías que el efecto de la corriente transversal no adopta un papel importante.

En lo que se refiere a la sobreelevación transversal de la superficie del agua Δh , los resultados oscilan entre 0.004 y 0.007m, pero haciendo el análisis para un valor de $\beta = 1$ como se ha propuesto en el capítulo anterior mediante la ecuación 3.6, se obtienen valores de Δh iguales a los resultados mostrados por la teoría de Thomson, es decir en el rango de 0.016-0.06 m, en general se obtuvieron valores muy pequeños de la sobreelevación de la superficie del agua en todos los meandros.

Ante la necesidad manifestada en párrafos anteriores de contar con algunas relaciones que vinculen algunas de las principales características de una corriente meandreante, mismas que hasta el momento no ha sido posible evaluar correctamente (B , r y L principalmente), se propone correlacionar algunos de los parámetros obtenidos por las diferentes teorías que han arrojado valores cercanos a los parámetros de campo de los ríos Papaloapan y Pánuco.

Se llevaron a cabo varios intentos por asociar algunas de las características singulares de un río meandreante, pero para fines prácticos a continuación sólo se analizarán a detalle aquellos casos en los cuales se obtuvo una buena correlación de parámetros.

Para la relación θ_0 calculada por mínima variancia y el ancho de meandro real B mostrada en la figura 4.7, se obtiene una relación de primer grado como el mejor ajuste para el diagrama de dispersión obtenido. A su vez, el coeficiente de correlación obtenido es $R=0.82$ y la ecuación correspondiente tiene la siguiente forma:

$$B = 2775.9\theta_0 \quad (4.1)$$

Al considerar que el ángulo de desviación del cauce es bien cuantificado por la teoría de la mínima variancia a partir de la sinuosidad, se podrá comprobar en el subcapítulo 4.2 si el ancho del meandro calculado mediante la ecuación 4.1, también es un buena aproximación.

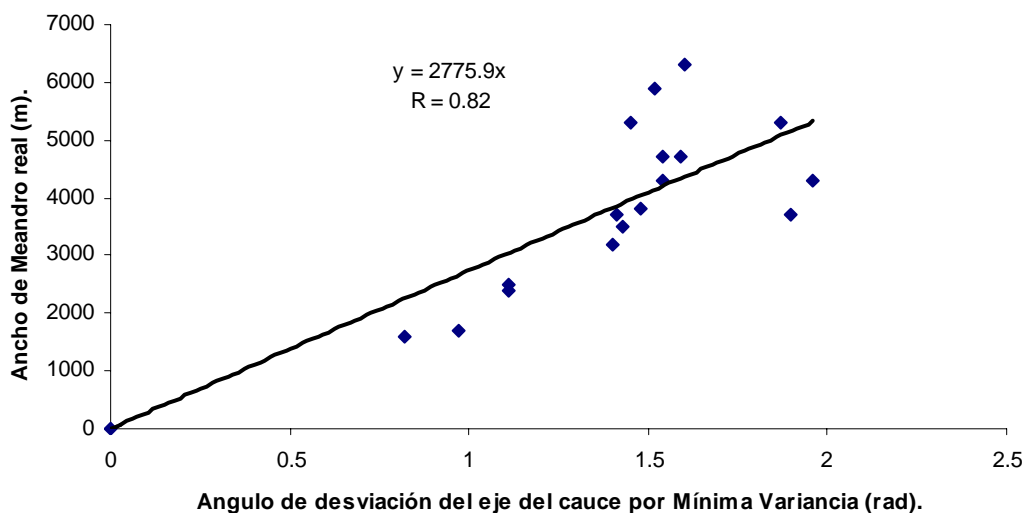


Figura 4.7 Correlación del ángulo de desviación del eje del cauce calculado por el método de la mínima variancia contra el ancho de meandro real.

Un parámetro de interés y que no ha podido ser bien evaluado por los métodos estudiados es el radio de curvatura del cauce. Aquí se propone calcularlo en función del ancho del meandro mediante un análisis de correlación, mismo que se ilustra en la figura 4.8. El producto de esto muestra que la curva que mejor se ajusta al diagrama de dispersión resulta ser una ecuación de primer grado la cual tiene la siguiente forma:

$$r = 0.89B \quad (4.2)$$

El coeficiente de correlación correspondiente es $R=0.98$ lo que indica que es un buen ajuste al diagrama de dispersión.

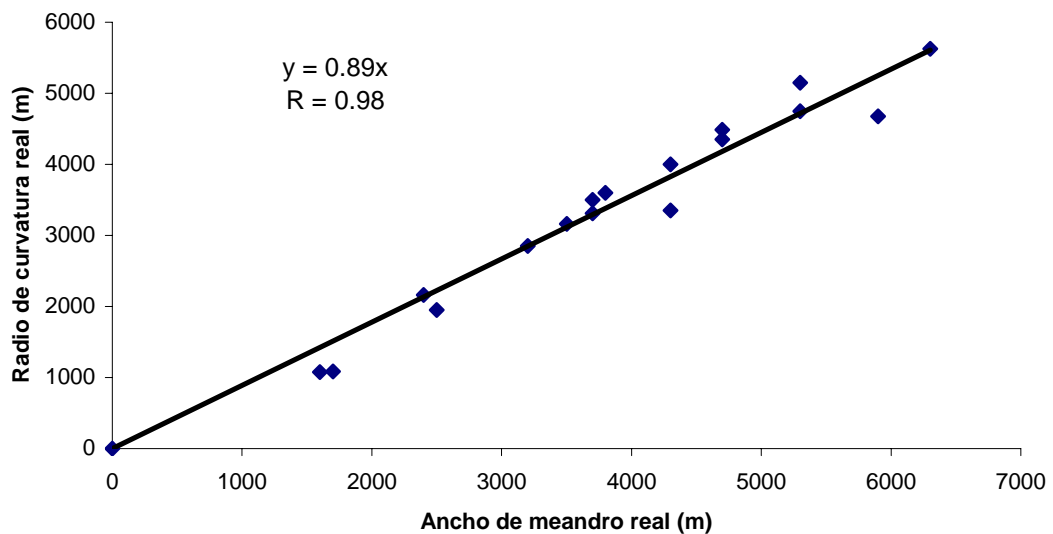


Figura 4.8 Correlación del ancho de meandro real contra radio de curvatura real.

Por otro lado, se analiza la relación que puede existir entre (B) y $(L-\lambda)$ para intentar obtener una expresión por medio de la cual calcular L . En la figura 4.9 se obtuvo un diagrama de dispersión al cual le ha sido asignada una curva de ajuste de segundo grado como sigue:

$$(L-\lambda) = 1.5B \quad (4.3)$$

El coeficiente de correlación en este caso es $R=0.90$

Si $L-\lambda = 0$ implica que $L = \lambda$ y por lo tanto el ancho de meandro $B=0$, lo que indica que se trata de un cauce rectilíneo.

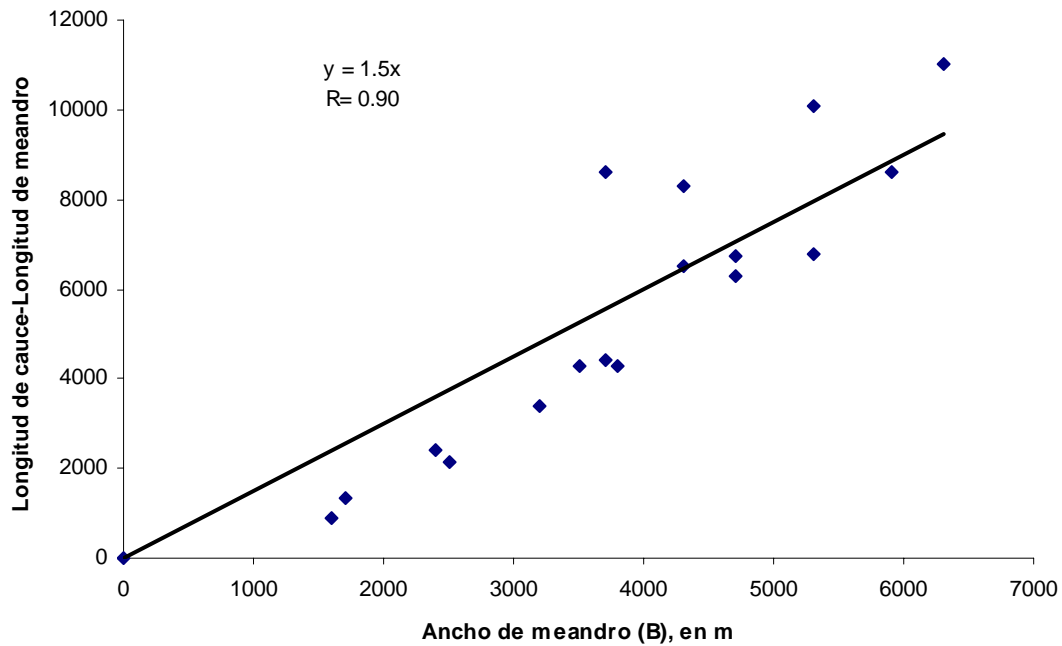


Figura 4.9 Correlación entre el ancho de meandro (B) y la diferencia entre longitud de desarrollo del cauce y la longitud de onda del meandro ($L - \lambda$).

Otras opciones fueron propuestas para su análisis pero no presentaron una relación relevante para ser consideradas y como ejemplo se citan algunos casos:

- La relación $(L - \lambda) - (b)$: aquel ajuste que proporcionó un mayor coeficiente de correlación fue mediante una curva de tercer grado y un $R=0.26$.
- Al tratar de relacionar las variables $B-b$, se ajustaron los datos a una ecuación cuadrática de la cual se obtuvo un coeficiente de correlación de 0.4.
- No fue posible encontrar una buena correlación entre $b - \lambda$. El coeficiente de correlación más alto fue de 0.6 y corresponde a una ecuación de tercer grado. Aplicando una correlación lineal se obtuvo que el coeficiente $R=0.48$.
- Al analizar la relación de $\theta_0 - L$, se encontró que mediante una ecuación de tercer grado se obtuvo el mejor coeficiente de correlación $R=0.49$.

Por lo anterior, no se encontró un patrón de comportamiento que vincule a λ y b así como a B y b por lo menos para el conjunto de datos con los que se ha trabajado.

Toda esta secuencia de análisis da la pauta para ratificar la idea de que es necesaria una combinación general de las teorías del meandro para sustraer de cada una de estas los parámetros mejor cuantificados y haciendo modificaciones de ser necesario.

4.4 Aplicación de la combinación de las teorías del meandro.

Partiendo de la información necesaria (σ, Q, S, D) , se propone la siguiente metodología de análisis:

- A partir del valor de la sinuosidad y aplicando la teoría de la mínima variancia, es posible conocer el ángulo de desviación del cauce θ_0 (ecuación 2.19).

- Se calcula B, r y L aplicando las expresiones recién obtenidas (4.1, 4.2 y 4.3).
- La longitud de meandro se calcula aplicando el concepto tradicional de sinuosidad (ecuación 2.17 a).
- De requerirse el valor de la velocidad longitudinal a cualquier profundidad, se aplicará la teoría de la rotación de la Tierra.
- La velocidad transversal de la corriente es evaluada aplicando la teoría de la corriente helicoidal.
- El cálculo de la desviación de las líneas de corriente respecto al eje del cauce se hará mediante la teoría de la rotación de la Tierra.

$$\tan \Omega = \frac{v}{u}$$

- A su vez se puede conocer la velocidad media longitudinal mediante la aplicación de un método de resistencia al flujo tal como el de Cruickshank-Maza.
- Evaluar la sinuosidad hidráulica ψ (ecuación 3.7).
- En lo que respecta a la teoría de régimen, se recurre a ella como una medida del equilibrio. Conociendo las características hidráulico-geométricas del río, se puede conocer qué tan alejado se encuentra del equilibrio de acuerdo a lo que proporciona esta teoría.

La teoría de régimen es aplicada como un análisis de sensibilidad y mediante ésta se puede estimar la diferencia con respecto a lo dictado por el equilibrio que a su vez será el reflejo de los cambios que el cauce experimentará para alcanzarlo.

- Por medio de la teoría de Thomson se evalúa la sobreelevación transversal de la corriente en función del radio de curvatura y la velocidad longitudinal.

Desde luego que esto tiene una aplicabilidad práctica, dado que será útil poder conocer la sobre elevación de la corriente bajo ciertas características con lo cual se puede conocer el margen de seguridad que proporciona el cauce de acuerdo a la magnitud del bordo libre que tenga.

A continuación se aplicará tal metodología a los ríos Papaloapan y Pánuco.

4.5 Análisis del río Papaloapan.

Para llevar a cabo esta secuencia de cálculo se requiere contar con la siguiente información:

Tabla 4.15 Información correspondiente al río Papaloapan.

Meandro	σ	h (m)	\bar{u} (m/s)	$C \text{ m}^{1/2}/s$
1	2.10	4.27	1.34	60.31
2	1.24	5.09	1.50	61.79
3	1.68	5.47	1.56	62.39
4	1.34	5.94	1.65	63.01
5	1.70	4.50	1.38	60.81
6	1.34	5.47	1.56	62.39
7	1.16	4.77	1.43	61.30

Análisis para el meandro 1.

En primer lugar se evalúa el ángulo de desviación del cauce a partir del valor medido de la sinuosidad del cauce mediante la teoría de la mínima variancia (ecuación 2.19).

$$\theta_o = 2.2 \sqrt{\frac{2.1-1}{2.1}} = 1.59 \text{radianes.}$$

Haciendo uso de la ecuación 4.1 obtenida en la sección anterior para el cálculo del ancho de meandro se tiene:

$$B = 2775.9(1.6) = 4442m$$

Recurriendo a la expresión 4.2 para estimar el radio de curvatura del cauce:

$$r = 0.89(4442) = 3953m$$

Por otro lado, de la ecuación 4.3 se sabe que $(L - \lambda) = f(B)$; si se aplica el nuevo concepto de sinuosidad (ec. 3.2) y considerando que $\Delta = \frac{B}{2}$, se tiene que:

$$\lambda = \frac{\Delta}{\sigma}$$

$$(L - \lambda) = L - \frac{\Delta}{\sigma}$$

$$L - \frac{\Delta}{\sigma} = f(B)$$

$$L = f(B) + \frac{\Delta}{\sigma}$$

Sustituyendo el valor de Δ , la ecuación 4.3 adquiere la siguiente forma:

$$L = 1.5B + \frac{B}{2\sigma}$$

$$L = B \left(1.5 + \frac{1}{2\sigma} \right) \quad (4.3 \text{ a})$$

Sustituyendo el valor correspondiente de B se tiene:

$$L = 4336 \left(1.5 + \frac{1}{2(2.1)} \right) = 7536m$$

Ahora, evaluando la longitud de meandro mediante la expresión 3.2:

$$\lambda = \frac{B}{2\sigma} = \frac{4336}{2 * 2.1} = 1033m$$

A su vez, la desviación de la corriente Ω se calcula aplicando la teoría de la rotación de la Tierra, para lo cual se requiere conocer las velocidades longitudinal y transversal a cualquier profundidad de la corriente que se requiera. Mediante la teoría de la rotación de la Tierra se estimará la velocidad longitudinal, que en la superficie libre ($\eta = 1$) es:

$$u = 1.34 \left[1 + \frac{\sqrt{9.81}}{0.4 * 60.31} \right] = 1.51 m/s$$

En lo que respecta a la velocidad transversal, se calcula mediante la teoría de la corriente helicoidal, para lo que se requiere:

$$n = \frac{(4.27)^{2/3} (0.000115)^{1/2}}{1.51} = 0.019$$

$$f = \frac{8(9.81)(0.019)^2}{(4.27)^{1/3}} = 0.017$$

Esto implica que el coeficiente N sea:

$$N = (0.017)^{-1/2} = 7.7$$

Ahora, acudiendo a la gráfica 2.3 se obtiene:

$$\frac{vr}{uh} \approx 8.2$$

$$v = \frac{8.2(1.51)(4.27)}{3883} = 0.014 m/s$$

Por lo tanto, la desviación de las líneas de corriente con respecto al cauce queda como:

$$\Omega = \tan^{-1} \frac{0.014}{1.51} = 0.52^\circ$$

Ahora es posible conocer el valor de la sinuosidad hidráulica mediante 3.7.

$$\psi = 2.1 \left(\frac{0.009 + 1.59}{1.59} \right) = 2.11$$

Se sabe que la sinuosidad geométrica para el meandro 1 es $\sigma = 2.1$, por lo que:

$$\psi > \sigma$$

Interpretándose con esto que existirá una ligera tendencia hacia el incremento de la sinuosidad geométrica dado que se presenta una pequeña aportación por parte de la sinuosidad hidráulica para acrecentarlo.

En la tabla 4.16 se muestran los resultados para todos los meandros del río Papaloapan.

Tabla 4.16 Resumen de datos obtenidos de la combinación general de las teorías del meandro, río Papaloapan.

Meandro	θ_0	$B(m)$	$r(m)$	$L(m)$ Ec. 4.3 a	$\lambda(m)$ Ec. 3.2	$\eta = 1$		Ω Grados.	ψ Sinuos. Hca.
	Radianes					$u(m/s)$	$v(m/s)$		
1	1.59	4442	3953	7536	1033	1.51	0.014	0.52	2.11
2	0.97	2692	2396	5059	1072	1.69	0.030	1.01	1.26
3	1.40	3886	3459	6876	1138	1.76	0.023	0.75	1.70
4	1.11	3080	2742	5692	1134	1.86	0.034	1.03	1.36
5	1.41	3914	3483	6922	1135	1.56	0.017	0.62	1.71
6	1.11	3080	2742	5692	1134	1.76	0.029	0.95	1.36
7	0.82	2276	2026	4340	969	1.61	0.031	1.12	1.19

4.6 Análisis del río Pánuco.

La información necesaria correspondiente el río Pánuco se presenta en la tabla 4.17:

Tabla 4.17 Información correspondiente al río Pánuco.

Meandro	σ	$h(m)$	$\bar{u}(m/s)$	$c m^{1/2}/s$
1	1.74	12.30	2.32	67.60
2	2.10	9.90	2.02	65.53
3	1.76	11.34	2.20	66.82
4	1.83	17.30	2.90	70.92
5	1.97	15.10	2.65	69.58
6	4.77	11.34	2.20	66.82
7	1.96	11.34	2.20	66.82
8	1.91	9.90	2.02	65.53
9	3.59	11.34	2.20	66.82
10	3.97	11.34	2.20	66.82

Realizando la misma secuencia de cálculo que se indicó para el río Papaloapan, se tienen los resultados resumidos en la tabla 4.18

Tabla 4.18 Resumen de datos obtenidos de la aplicación de la combinación general de la teorías del meandro.

Meandro	θ_0	B(m)	r (m)	L(m) Ec. 4.3 a	λ (m) Ec. 3.2	$\eta = 1$		Ω Grados.	ψ Sinuos. Hca.
	Radianes					u (m/s)	v (m/s)		
1	1.43	3970	3533	7006	1126	2.59	0.075	1.66	1.78
2	1.60	4442	3953	7547	1034	2.26	0.047	1.20	2.13
3	1.45	4025	3582	7045	1122	2.46	0.065	1.52	1.80
4	1.48	4108	3656	7174	1105	3.22	0.130	2.26	1.88
5	1.54	4275	3804	7387	1069	2.95	0.097	1.90	2.01
6	1.96	5440	4842	8525	557	2.46	0.048	1.13	4.82
7	1.54	4275	3804	7373	1072	2.46	0.061	1.42	2.00
8	1.52	4219	3755	7303	1085	2.26	0.050	1.26	1.94
9	1.87	5190	4619	8328	708	2.46	0.050	1.18	3.63
10	1.90	5274	4694	8408	651	2.46	0.050	1.16	4.01

Hay que recordar que la teoría de régimen está en función del diámetro representativo del material que constituye el cauce así como del gasto líquido que transita, motivo por el cual esta teoría no sufre modificación alguna en esta propuesta de combinación general de las teorías y se le continua considerando apropiada para evaluar el estado de equilibrio o estado de régimen.

Al comparar los datos obtenidos que se resumen en las tablas 4.16 y 4.18 con la información correspondiente a los datos de campo contenidos en las tablas 4.1 y 4.8, se aprecia una concordancia razonable, hecho que se puede constatar por medio de las figuras 4.10 a 4.13.

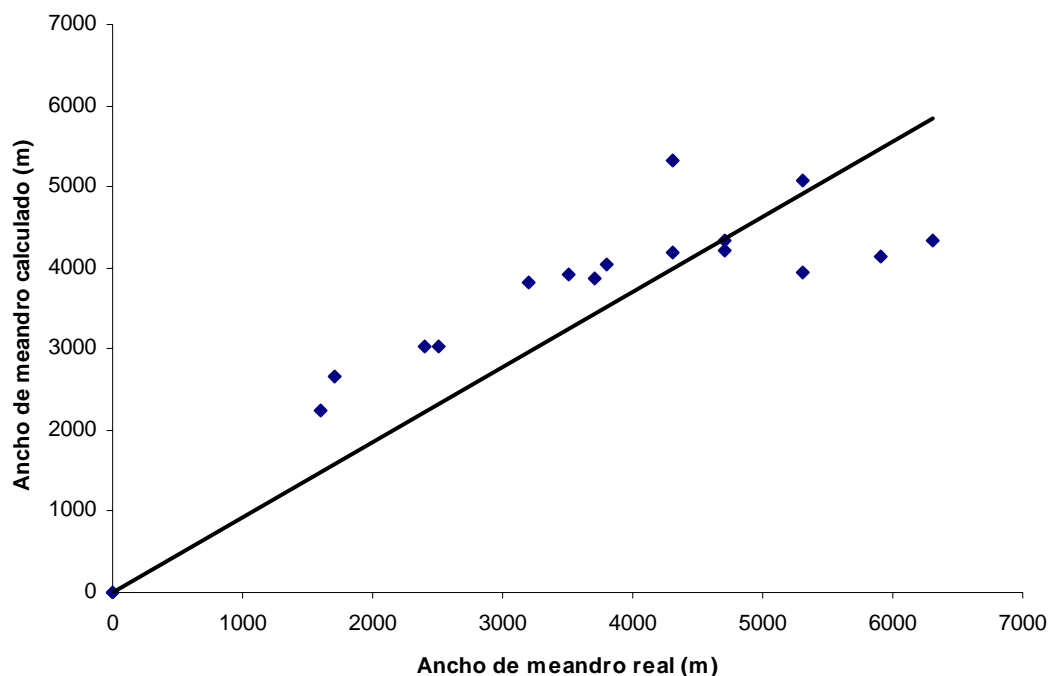


Figura 4.10 Ancho de meandro real contra ancho de meandro calculado por medio de la combinación general de las teorías del meandro.

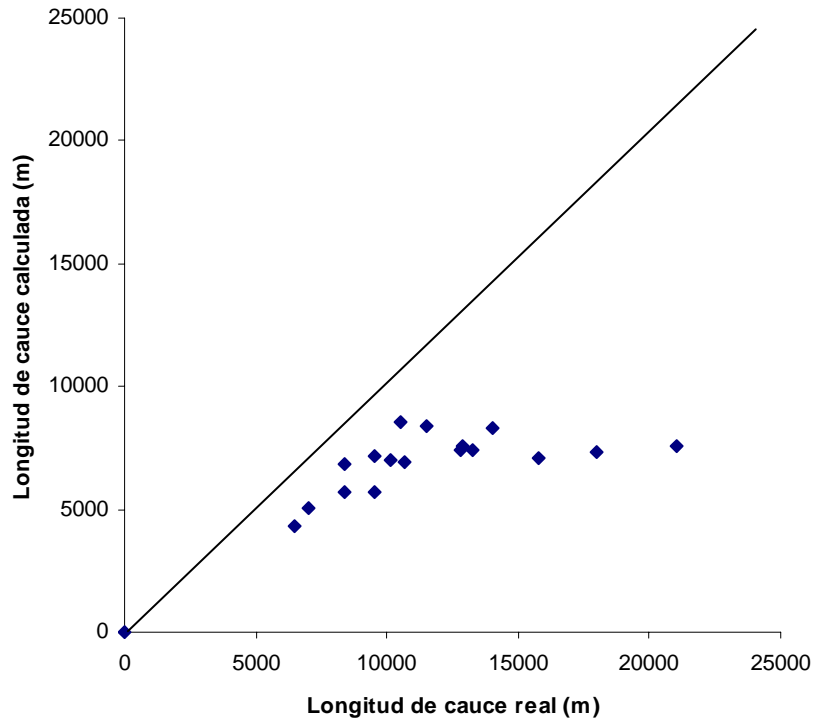


Figura 4.11 Longitud de cauce real contra longitud de cauce calculada por medio de la combinación general de las teorías del meandro.

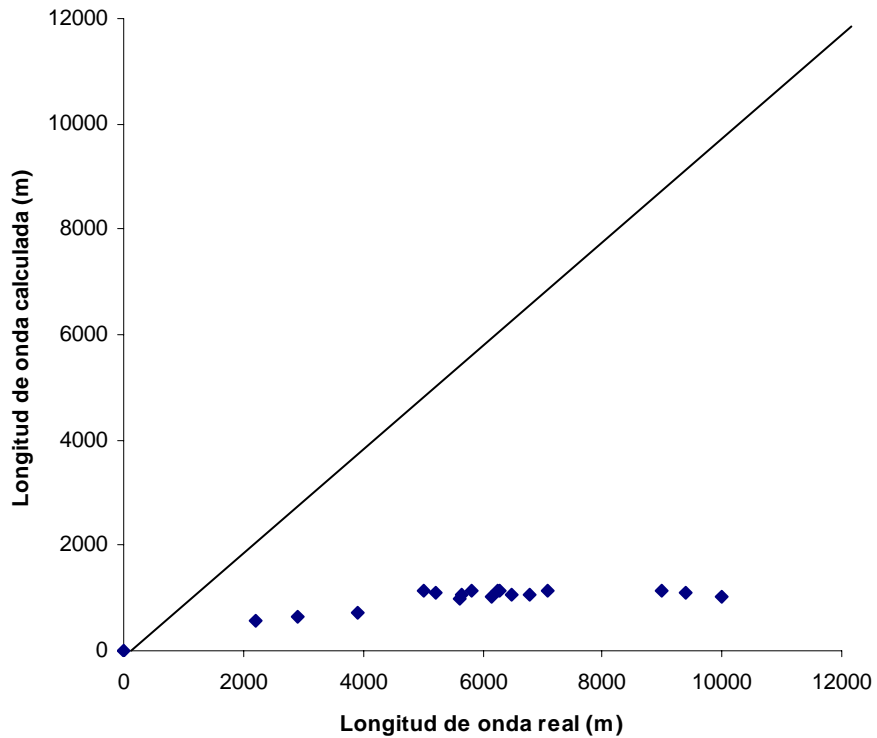


Figura 4.12 Longitud de onda real contra longitud de onda calculada por medio de la combinación general de las teorías del meandro.

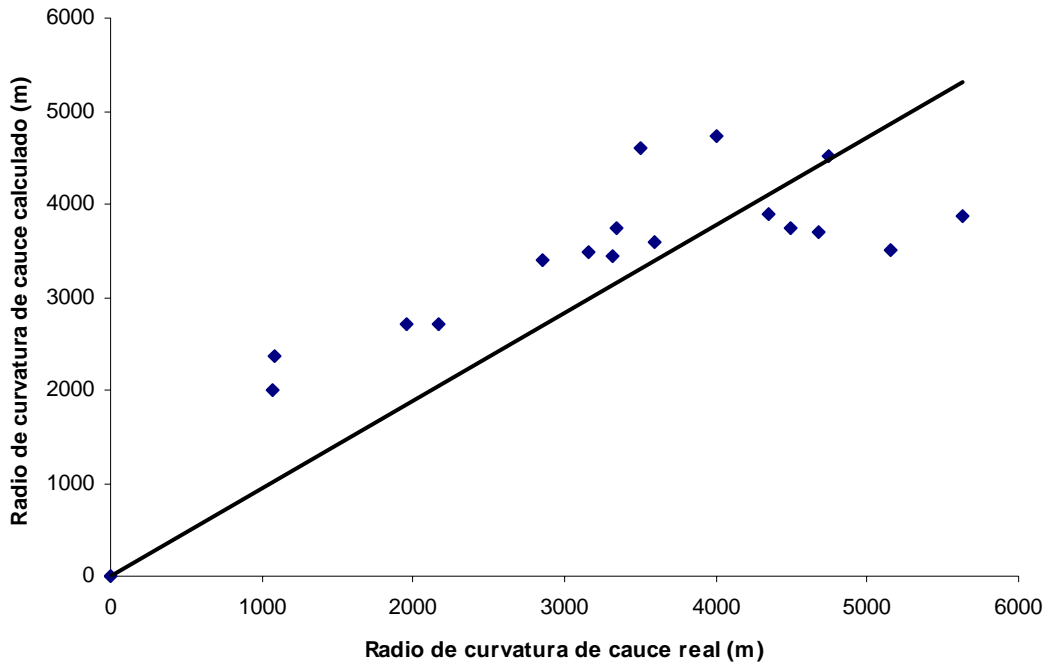


Figura 4.13 Radio de curvatura de cauce real contra radio de curvatura de cauce calculada por medio de la combinación general de las teorías del meandro.

Los valores calculados del ancho de meandro por medio de la ecuación 4.1 han resultado razonablemente aproximados a los datos reales. Algo semejante ocurre con el radio de curvatura del cauce determinado por la ecuación 4.2. Por su parte los valores obtenidos de λ oscilan entre el 10 y 22% de los valores reales, en cuanto a la longitud de desarrollo del cauce calculada, en 6 de los 7 meandros analizados tienen una aproximación entre el 60 y 70% de los valores reales.

En lo concerniente a la velocidad transversal, esta adquiere valores pequeños y debido a esto sucede lo mismo con el ángulo de deflexión de la corriente con respecto al cauce Ω , cuyo máximo valor es del orden de 2.5° , con lo cual se interpreta que la corriente circula prácticamente paralela al cauce.

Lo anterior implica que la sinuosidad hidráulica ψ es ligeramente mayor que la sinuosidad geométrica σ , con lo que existirá una leve tendencia a incrementar la sinuosidad geométrica producto de la diferencia entre ambas $\psi - \sigma$. En el entendido de que en la medida de que ambas sinuosidades sean iguales, el paralelismo de la corriente con respecto al cauce será mayor por lo que la diferencia entre ambas sinuosidades tenderá a ser nula.

No hay que dejar de considerar que u, v y Ω es posible evaluarlos para cualquier profundidad relativa (η) comprendida en el intervalo $0 < \eta \leq 1$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Conclusiones.

Mediante lo analizado en el capítulo anterior, se ha obtenido una mejoría en el cálculo de algunos de los parámetros geométricos de los meandros estudiados, una vez que se ha llevado a cabo la combinación de las teorías descritas a lo largo de este trabajo. La mejoría cuantitativa es con respecto a la aplicación individual de cada una de las teorías mencionadas.

- Se consiguió una buena aproximación del ángulo de desviación del cauce.
- Al haber sido θ_0 el único parámetro bien estimado del método de la mínima variancia, se observa que los meandros estudiados no se asemejan a meandros regulares ideales en cuanto a geometría se refiere.
- Se ha comprobado que existe un comportamiento lineal entre el ancho de meandro y el radio de curvatura del mismo (B, r)

Aunque el valor del radio de curvatura es una de las variables que mejor se ha estimado en función del ancho de meandro, vale la pena mencionar que los valores medios del radio de curvatura obtenidos por la teoría de Fargue representan una aproximación relativamente buena con respecto a los valores de radio de curvatura que presentan los meandros estudiados (en 9 de los 17 meandros analizados el margen de error oscila entre $\pm 15\%$).

- Se encontró que el ángulo de desviación del cauce y el ancho de meandro $(\theta_0 - B)$ tienen una fuerte correlación mediante una ecuación cuadrática.
- Se verificó para los datos de los meandros que se tienen, que no existe una relación de importancia entre el ancho del cauce y el ancho de meandro $(b - B)$, entre la longitud de meandro y el ancho de cauce $(\lambda - b)$, así como entre el ángulo de desviación del cauce y la longitud de desarrollo del mismo $(\theta_0 - L)$.
- Algunas de las ecuaciones empíricas analizadas proporcionan resultados muy semejantes entre sí, de tal suerte que al validar o descalificar alguna de ellas, lo mismo sucede con las demás, tal es el caso de las fórmulas de Altunin, Leopold-Wolman y Zeller al estimar la longitud de meandro en función del ancho del cauce, que dicho sea de paso arrojaron valores con una mala aproximación.

Se ha observado la misma situación con los métodos de la mínima variancia e Inglis, aunque la expresión de Ackers-Charlton es la que mejor comportamiento registra al aproximarse medianamente bien a los valores de longitud de meandro de campo (en 6 de los 17 meandros estudiados se subestimaron). La ecuación de Inglis es la que mejor cuantifica el ancho de meandro.

- La longitud de desarrollo del cauce (L) inicialmente fue calculada por el método de la mínima variancia obteniendo valores muy por debajo de los reales. Posteriormente, al haber aplicado la

expresión 4.3 para evaluar L en función del ancho de meandro (B) se obtuvo una buena aproximación con respecto a los valores de campo de los ríos en estudio.

- De igual forma se ha conseguido evaluar de forma aceptable la longitud de onda λ por medio del nuevo concepto de sinuosidad que se ha planteado por medio de la expresión 3.2 (ver figura 4.12).
- Se encontró que se correlacionan la longitud de desarrollo del cauce con el ancho de meandro B por medio de una ecuación de primer grado esto, según la ecuación 4.3 a, misma que proporciona una buena estimación de L con respecto a los datos de campo (ver figura 4.11).
- Se verificó que la teoría de régimen representa un buen sensor para el estado de equilibrio de un cauce, ya que al ser aplicada a los ríos en estudio, se tiene que: para el río Papaloapan prácticamente todos los parámetros que proporciona esta teoría (b, h y u) han sido una buena aproximación, siendo la pendiente S la única variable que no ha sido estimada del todo bien; para el río Pánuco, la velocidad y la pendiente presentan una buena aproximación cuantitativa, mientras el ancho de cauce ha sido mal estimado ya que en 2 de 10 meandros se sobrevaluó en 37% mientras en el resto hubo sobreestimaciones del orden de 200%; en lo que respecta al tirante, en 7 de 10 meandros se tiene una aproximación entre 70 y 80% de los valores reales.
- De acuerdo con la interpretación de los resultados, se constata el hecho de que aunque la circulación transversal exista, sus efectos directos son mínimos, lo cual se refleja en el hecho de que las sinuosidades hidráulica y geométrica son muy parecidas cuantitativamente, es decir, que la circulación secundaria en este caso no produce grandes distorsiones. La magnitud de la velocidad transversal finalmente se refleja en la sinuosidad hidráulica, ya que si dicha velocidad aumenta, también lo hace el ángulo de desviación de la corriente Ω y con ello ψ .

Recomendaciones.

- Para un análisis a detalle de un río, se requiere la información granulométrica del material que constituye el cauce, el gasto líquido y el sólido, la pendiente, además de la información de la geometría del río como la que se ha manejado en este trabajo.
- Resulta necesario analizar el comportamiento de un río tanto en época de estiaje como en la temporada de avenidas, con la finalidad de conocer la respuesta del cauce en condiciones extremas.
- Las teorías proporcionadas no se deben aplicar dando por hecho que los resultados serán lo suficientemente confiables como en su momento se ha verificado en el presente trabajo. Es decir, lo obtenido aquí no necesariamente representa un traje a la medida para cualquier río, para la aplicación de esta metodología se sugiere validarla con información de años atrás para compararla con lo que actualmente se tiene en un río determinado.
- La combinación de las teorías del meandro descrita en el subcapítulo 4.2 pueden ser aplicadas a criterio, es decir, de acuerdo a qué variables se les considere de partida (conocidas) y en función de ellas poder calcular los demás parámetros restantes. A manera de ejemplo se enuncian algunos casos:
 1. Conocido el valor de la sinuosidad de un río, es factible conocer las variables asociadas a ésta que son $\theta_0, B, r, L, \lambda$. De hecho, este caso ha sido el que se ha analizado, cuyos resultados se han mostrado en las tablas 4.16 y 4.18.
 2. Sin duda, cualquier metodología que intente representar un fenómeno natural será tan útil como ésta sea capaz de predecir situaciones futuras. En nuestro caso, existe la necesidad de saber qué sucederá con el comportamiento de un río meandreante si tal o cual variable adopta ciertos valores, por lo que se requiere saber la repercusión en las demás variables, tal es el caso de

plantear que el ancho de meandro B puede adoptar un valor máximo determinado ya que el sobrepasarlo significa invadir zonas urbanas o agrícolas. En función de este valor de B hipotético se aplica la combinación de las teorías para determinar las demás componentes que describen la morfología de un río $(\sigma, \theta_0, r, L, \lambda)$.

BIBLIOGRAFÍA.

Ackers, P., and Charlton, F.G. 1970. The geometry of small meandering streams. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Supplement XII.

Agarwal, V.C. 1983. Studies on the characteristics of meandering streams. Ph.D. Thesis.

Alonso Marcelo, Finn Edward J. 1986. Physical. Wilmington, Delaware. U.S.A. Addison-Wesley Iberoamericana.

Anderson, A.G. 1967. On development of stream meanders. 12th Congress I.A.H.R. Fort Collins. Vol. 1.

Berezowsky, V.M., Vilchis, V.R. 2000. Protección y control de cauces. México, CNA-IMTA.

Bull William B. 1991. Geomorphic responses to climatic change. New York Oxford. Oxford University Press.

Chitale, S.V. 1970. River channel patterns. IHD, Proc. ASCE, Vol.96. No. HY-1.

Chorley, R.J., Schumm, S.A., and Sugden, D.E. 1984. Geomorphology. London.

Dury, G.H. 1965. Theoretical implications of underfit streams, U.S. Geol. Survey Prof.

Engels, H. 1926. Movement of sedimentary materials in river bends. In Hydraulic Laboratory Practice, J.R. Freeman ed. New York.

Einstein, H.A., and Li, Huan. 1958. Secondary currents in straight channels. Transactions, American Geophysical Union. Vol. 39.

Falcón-Ascanio, M, Kennedy, J.F. 1983. Flow in alluvial-river curves. J. Fluid Mechanics. Vol. 133.

Faller, A.J., and von Arx, W.S. 1959. The modelling of fluid flow on a planetary scale. Woods Hole Oceanographic Institution.

Fargue, O. 1908. La forme du lit des rivières a fond mobile.

Friedkin, J.F. 1945. A laboratory study of the meandering of alluvial rivers. United States Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss.

Garde R., Ranga Raju. 1985. Mechanics of sediment transportation and stream problems. Second edition. Wiley Eastern limited.

Graf W. H. 1971. Hydraulics of sediment transport. McGraw Hill.

- Griggs, R.F. 1906. The Buffalo river. An Interesting Meandering Stream. Bull. Geo. S.A., Vol.38, No.3.
- Hansen, E. 1967. On the formation of meanders as a stability problem. Coastal Engineering Hyd. Lab., Tech. Univ. of Denmark, Basic Research-Progress Report No. 13.
- Hasegawa, K. 1983. A study on flows and bed topographies in meandering channels. Proc. JSCE. No.338
- Hey R.D., Bathurst J.C., Thome C.R. 1982. Fluvial processes, engineering and management. John Wiley and Sons.
- Hjulstrom, F. 1957. A study of the meander problem. Instituto of Hydraulics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Bulletin No. 51.
- Inglis, C.C. 1949. The behaviour and control of rivers and canals. Pt.I, CWINRS, Research publication No. 13.
- Joglekar, D.V. 1971. Manual on river behaviour and control and trainig. Central Board of Irrigation on Power. New Delhi.
- Lacey, G. 1930. Stable channels in alluvium. Paper No. 4736, Min. Proc. ICE (London), Vol. 229.
- Lacey, G. 1958. Flow in alluvial channels with sand mobile beds. Proc. Inst. Civ. Eng., London.
- Lane, E.W. 1955. The importance of fluvial morphology in hydraulic engineering. Am. Soc. Civil Engineers Proc.
- Langbein W.B., Leopold L.B. 1966. River meanders-Theory of minimum variance. U.S. Geological Survey. Washington, D.C.
- Leliavsky Serge. 1955. An introduction to fluvial hydraulics. Constable and company LTD, London.
- Leopold L.B., and M.G. Wolman. 1960. River meanders. Bull. Geo, S.A.; Vol.71.
- Leopold L.B., Gordon Wolman M., P. Miller John. 1964. Fluvial processes in geomorphology. W.H. Freeman and Company.
- Martin Vide J.P. 1997. Ingeniería fluvial. España. Ediciones UPC, Universidad Politécnica de Catalunya.
- Maza Alvarez J.A. 1987. Introduction to river engineering. Università Italiana per Stranieri Advanced Course on Resources Management. Perugia Italia.
- Maza Alvarez J.A. y Cruickshank V.C. 1973. Canales estables en corrientes aluviales. México. Recursos hidráulicos. Vol. II, No.2.
- Neu, H.A. 1967. Transverse flow in a river due to earth's rotation. Journal of the Hydraulics Division. HY5, pp. 149-165.

- Nunner, W. 1956. Wärmeübergang und Druckabfall in rauhen Rohren. VDI. Forschungsheft 455.
- Odgaard, A.J. 1986. Meander flow model I. Development. J. Hydraul. Engrg., ASCE, 112 (12).
- Prus-Chacinski, T. 1954. Patterns of motion in open channel bends. Proc. Int. Assoc. Sci. Hydrol.
- Raudkivi A.J. 1990. Loose boundary hydraulics. Third edition. Pergamon Press.
- Rozovskii, I.L. 1957. Flow of water in bends of open channels. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, USSR.
- Schumm, S.A. 1960. The shape of alluvial channels in relation to sediment type: U.S. Geol. Survey Prof. Paper 352-B.
- Schumm, S.A. 1968. River adjustment to altered hydrologic regimen-Murrumbidgee River and paleochannels, Australia: U.S. Geol. Survey Prof. Paper 598.
- Secretaría de Marina. Dirección general de obras marítimas. Departamento de ingeniería de costas y riberas. Memoria 15. Río Pánuco. Estudio de estabilidad del régimen fluvial en el bajo Pánuco. México. 1961.
- Selim Yalin M., Ferreira Da Silva A.M. 2001. Fluvial Processes. I.A.H.R. Queen's University, Kingston. Canada.
- Shen H.W. 1971. River Mechanics. Vol.I. Colorado: Fort Collins.
- Sparks B. W. 1986. Geomorphology. Longman Scientific and Technical. Third edition.
- Thomson, J. 1876. On the origin of windings of rivers in alluvial plains. Proc. R. Soc.
- Vergara Sánchez M.A. 1993. Técnicas de modelación en hidráulica. Alfaomega. México.
- Von Schelling, Hermann. 1951. Most frequent particle paths in a plane. Am. Geophys. Union Trans.
- Wittman, H., and Boss, P. 1938. Wasser-und Geschiebebewegung in gekrummten Fluss-trecken. Berlin, Germany.
- Werner, P.W. 1951. On the origin of river meanders. Trans. AGU, Vol.32. No.6
- Yen, C.L., Yen, B.C. 1971. Water surface configuration in channel bends. J. Hydr. Div., ASCE. Vol.97, No.HY2.
- Zeller, J.1967. Meandering channels in Switzerland. Report Nr.74. Mitteilung der Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau, Technische. Hochschule, Zurich.
- Zimmerman, C., and Kennedy, J.F. 1978. Transverse bed slopes in curved alluvial streams. J. Hydraul. Div. ASCE, 104 (HY1).