



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Síntesis cinemática y estática de
prótesis de hombro empleando un
mecanismo esférico con engranes**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Pablo Antonio Gómez Valdez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Cuenca Jiménez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Agradecimientos

El presente trabajo de tesis se lo dedico a mis padres Marco e Irene y mis hermanos Aldo, Katia y Rodrigo por su constante apoyo a lo largo de estos años y quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a la conclusión de mis estudios de licenciatura. Gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y perseverancia.

Agradezco a mis amigas Mariana y Fernanda, ya que siempre fuimos un equipo a lo largo de la carrera, también a mis amigos Octavio, Rodrigo, Valeria, Sabrina, Omar, Danae, Carlos, Raul, Carlos J. y Alfonso que me han acompañado y brindado su apoyo siempre que me fue necesario.

Agradezco a mis docentes de la Facultad de Ingeniería, por haber compartido sus conocimientos a lo largo de la preparación de mi carrera, de manera especial, al Dr. Francisco Cuenca Jiménez tutor del presente trabajo de tesis quien me ha asesorado con paciencia y quien con su dirección, conocimiento y enseñanza permitió el desarrollo de este trabajo.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Antecedentes | 1 |
| 1.1. Introducción | 1 |
| 1.2. Justificación | 2 |
| 1.3. Objetivos | 2 |
| 1.4. Mecanismos eslabonados | 3 |
| 1.5. Trenes de engranajes planetarios | 5 |
| 1.6. El hombro humano | 9 |
| 1.6.1. El hombro | 9 |
| 1.6.2. Movimientos del hombro | 10 |
| 1.6.3. Prótesis de hombro | 17 |
| 1.6.4. Prótesis biónica de hombro | 19 |
| 1.7. Desarrollo de la configuración base | 20 |
| 2. Análisis cinemático | 27 |
| 2.1. Introducción | 27 |
| 2.2. Análisis de posición | 27 |
| 2.3. Análisis de velocidad | 32 |
| 2.4. Cinemática de los engranes | 38 |
| 3. Síntesis cinemática del mecanismo | 46 |
| 3.1. Introducción | 46 |
| 3.2. Transformaciones lineales | 47 |
| 3.2.1. Matrices de rotación espacial | 48 |
| 3.2.2. Matriz de rotación Phi | 48 |
| 3.2.3. Matriz homogénea | 49 |
| 3.2.4. Matriz de desplazamiento espacial | 51 |
| 3.3. Síntesis por método de matrices de desplazamiento | 52 |
| 3.3.1. Diagramas y ecuaciones de diseño | 53 |
| 3.3.2. Solución de las ecuaciones de diseño | 56 |
| 4. Síntesis estática del mecanismo | 61 |
| 4.1. Introducción | 61 |
| 4.2. Método de Trabajo Virtual | 61 |
| 4.3. Análisis estático del mecanismo esférico | 62 |
| 4.4. Síntesis estática | 69 |
| 4.5. Solución de la síntesis estática | 76 |

| | |
|--|------------|
| 5. Diseño del modelo CAD | 85 |
| 5.1. Consideraciones de diseño | 85 |
| 5.2. Modelos CAD | 89 |
| 5.2.1. Solución 1 | 89 |
| 5.2.2. Solución 2 | 90 |
| 5.2.3. Solución 3 | 91 |
| 5.2.4. Solución 4 | 92 |
| 5.3. Análisis de resultados | 98 |
| | |
| 6. Conclusiones | 101 |

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se justifica y plantea el proyecto, los objetivos de éste, se describen conceptos generales sobre mecanismos y prótesis mecánicas.

1.1. Introducción

Los mecanismos esféricos generalmente presentan un amplio rango de movimiento y se les puede dar aplicación cuando se busca desplazar y/o rotar un cuerpo sobre una superficie esférica, sin embargo, el uso de este tipo de mecanismos es inusual.

Por otro lado, comúnmente los mecanismos planteados para prótesis de hombros emplean trenes de engranajes alineados con un sistema de ejes coordenados ortogonal o una junta esférica con sistemas hidráulicos, en cualquiera de estos casos los actuadores resultan ser de grandes dimensiones y el empaquetamiento del sistema protésico es voluminoso.

Este proyecto ofrece una propuesta para el diseño de un mecanismo esférico de eslabones engranados, cuya finalidad es emular el movimiento de un hombro humano siendo capaz de soportar cargas por sí mismo.

El mecanismo cuenta con una base y una cadena cinemática esférica de cuatro brazos con engranajes cónicos planetarios, los cuales presentan tres grados de libertad.

En este trabajo de tesis se presentan las propuestas iniciales para el mecanismo y como fue planteada la configuración final, posteriormente se tomará la configuración final y se le someterá a un proceso de síntesis de optimización cinemática y estática empleando el método de matrices de desplazamiento. De la síntesis se obtendrán diferentes conjuntos de soluciones para las dimensiones geométricas que definirán la cinemática del mecanismo.

También se hará un análisis cinemático que nos permita obtener los coeficientes de influencia del mecanismo (estos establecen relaciones entre variables cinemáticas), posteriormente se tomarán estos coeficientes para aplicarlos en el análisis estático usando el método de “Trabajo virtual”.

Se emplearán las ecuaciones obtenidas tanto de la cinemática como de la estática para hacer una síntesis estática. La finalidad esta síntesis estática es obtener un nuevo mecanismo que requiera de actuadores de menor capacidad para soportar cargas en el extremo final del mecanismo.

Para resolver la síntesis del mecanismo se programará un algoritmo empleando el software "**Wolfram Mathematica**" que permitirá obtener valores de coordenadas para las juntas rotacionales del mecanismo, con dichas coordenadas se generará un modelo visual y se resolverá el análisis cinemático para observar las curvas de posición del mecanismo.

De este último mecanismo se generará un modelo CAD que cumpla con los valores geométricos de la síntesis y presente el menor rango de interferencia entre sus componentes.

1.2. Justificación

Este trabajo surge de la inquietud de buscar aplicaciones para los mecanismos esféricos y generar una prótesis mecánica de hombro capaz de soportar cargas relativamente elevadas, para llevar a cabo este proyecto se realizó un estudio sobre mecanismos tanto planos como espaciales y trenes de engranajes planetarios.

Las prótesis mecánicas son una solución para aquellas personas que han perdido una extremidad y desean recuperar las funciones de esta, es por esto que resulta necesario ahondar en el estudio de mecanismos que mejoren la utilidad y rendimiento de estos dispositivos.

1.3. Objetivos

El objetivo central de este trabajo es la síntesis de un mecanismo esférico de eslabones y engranes con tres grados de libertad que sea capaz de emular el movimiento del hombro humano.

1) Síntesis cinemática.

2) Análisis cinemático.

3) Síntesis estática, programar un algoritmo que permita calcular la síntesis del mecanismo cumpliendo con las condiciones de frontera (cargas estáticas) empleando el método del trabajo virtual

4) Análisis estático.

5) Generar el diseño de un mecanismo esférico que soporte 15 kg.

1.4. Mecanismos eslabonados

Un mecanismo es un dispositivo mecánico cuya finalidad es la de transferir/transformar movimiento y/o cargas por medio de cuerpos desde una entrada al sistema hasta una salida del mismo.

Los mecanismos eslabonados consisten en la unión de eslabones o barras por medio de juntas formando una cadena que permiten el movimiento relativo de estos eslabones entre sí (*Erdman, 1998*).

Mecanismo de Cuatro Barras

Es el mecanismo de eslabones más sencillo, cuenta con tres barras móviles y una fija unidas por cuatro juntas de revolución que permiten el movimiento relativo entre los eslabones (*Fig. 1.1*).

De la Figura 1.1, el cuerpo 1 representa la tierra, el cuerpo 2 funciona como balancín, el cuerpo 3 funciona como eslabón acoplador y el cuerpo 4 como manivela. Las trayectorias de la manivela (cuerpo 4) y del balancín (cuerpo 2) se muestran marcadas con una línea roja punteada.

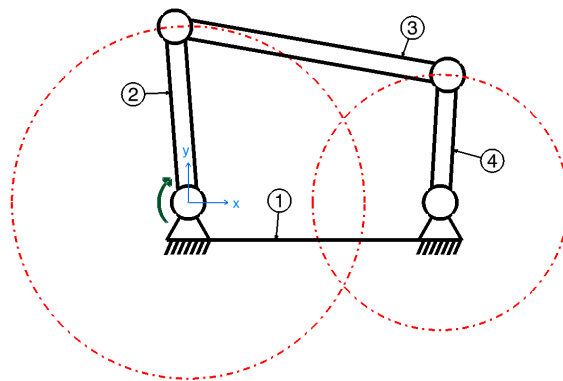


Figura 1.1: Mecanismo de cuatro barras

En este mecanismo

Mecanismo de Biela-Manivela-Corredera

Se trata de un mecanismo que por medio de un par de eslabones y un canal o guía fijo es capaz de transformar un movimiento rotacional continuo en un movimiento lineal con dirección alternante (*Fig. 1.2*).

De la Figura 1.2, el cuerpo 1 representa la tierra y la guía para la corredera, representada por el cuerpo 4, el cuerpo 2 funciona como manivela y el cuerpo 3 funciona como biela. Las trayectorias de la manivela (cuerpo 2) y de la corredera se muestran marcadas con una línea roja punteada.

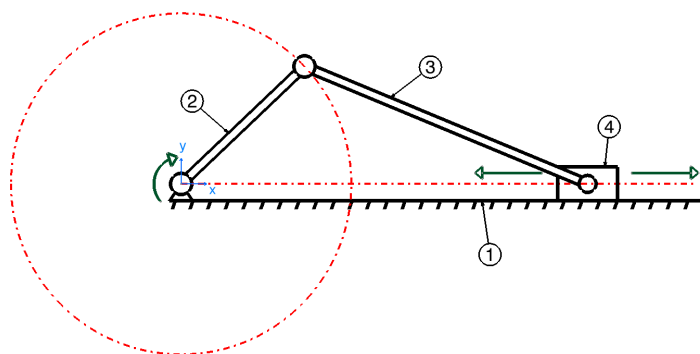


Figura 1.2: Mecanismo de biela manivela-corredera

En este mecanismo

Mecanismo de Cuatro Barras Esférico

Así como en el plano, este es un mecanismo espacial sencillo en el que los ejes de todas las juntas rotacionales son congruentes en el centro de una esfera, por lo que el movimiento de los eslabones y del efector final del mecanismo estarán contenidos en la superficie de dicha esfera o de cualquier otra esfera concéntrica con esta (*Fig. 1.3*).

De la Figura 1.3, los ángulos γ , α , η y β representan los ángulos de apertura de cada eslabón, θ es el ángulo de rotación del eslabón balancín y ψ el ángulo de rotación del eslabón manivela.

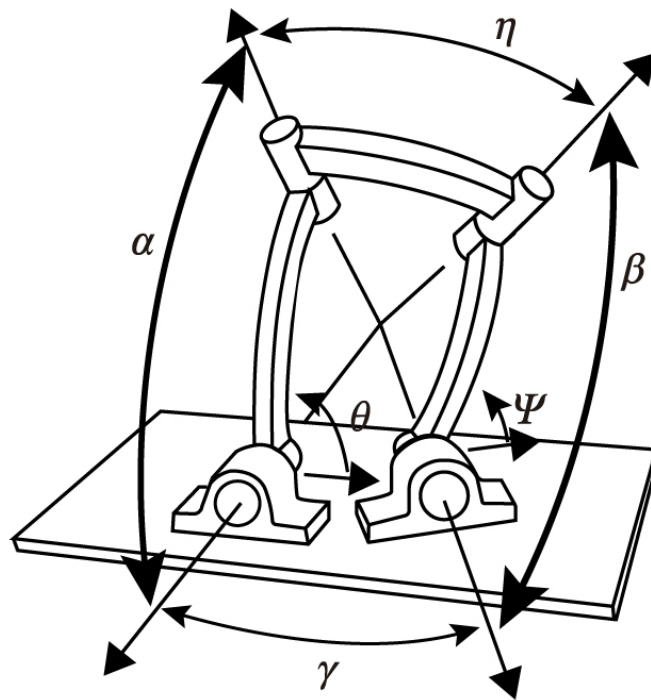


Figura 1.3: Mecanismo esférico de cuatro barras
Los ángulos γ , α , η y β representan los ángulos

1.5. Trenes de engranajes planetarios

También son llamados trenes de engranajes epicíclicos y presentan dos grados de libertad en su configuración básica, no obstante, se pueden conectar varios trenes de engranajes planetarios para obtener más grados de libertad.

En su configuración básica los dos grados de libertad que posee son útiles para combinar dos entradas en una sola salida y se componen por al menos un engranaje externo (Sol-Planeta) montados sobre un brazo móvil, sin embargo, también es posible montar un engranaje interno con un engrane corona (Planeta-Corona) (*Fig. 1.4*).

La aplicación de este tipo de engranajes es variada pues al tener dos grados de libertad se puede fijar alguno de los cuerpos para obtener resultados diferentes a la salida del sistema, siendo su uso más común en la industria automotriz como cajas de transmisión automáticas (*Fig. 1.5*) (*Erdman, 1998*).

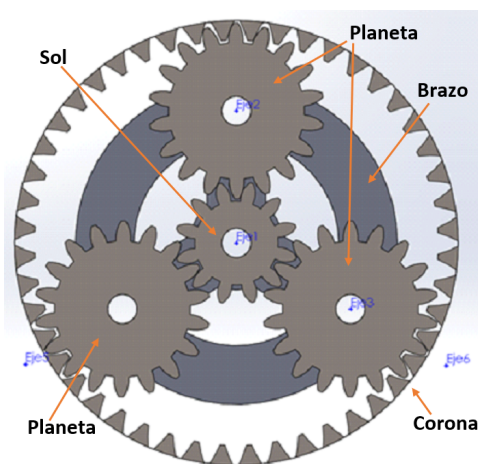


Figura 1.4: Sistema de engranajes planetarios

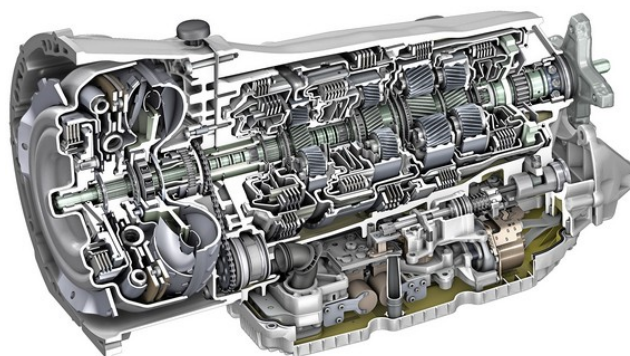


Figura 1.5: Transmisión automática
(*M&R, 2013*)

Engranaje Cónico Planetario

Los engranajes cónicos planetarios (*Fig. 1.6*) se componen por los mismos elementos que posee un engranaje planetario de engranes rectos, con la diferencia de que los ejes de rotación de todos los engranes cónicos del sistema deben coincidir en el mismo punto.

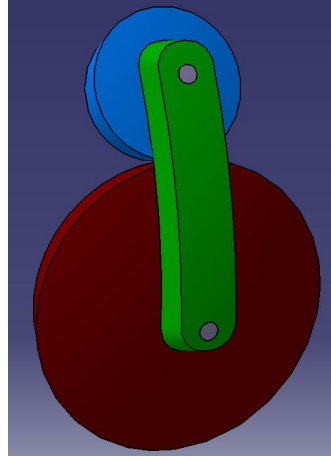


Figura 1.6: Representación de un engranaje cónico planetario

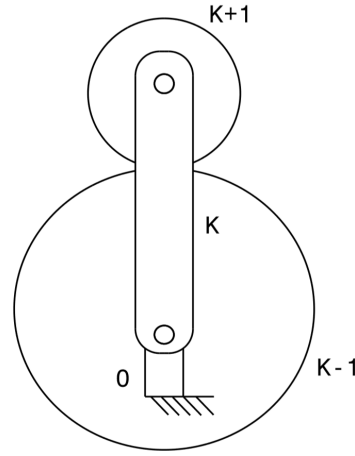


Figura 1.7: Cuerpos de un engranaje cónico planetario

Para el caso de los trenes de engranajes cónicos planetarios se puede emplear la siguiente relación de velocidades angulares para describir la interacción de los cuerpos involucrados en el sistema (*De Matias, 2015*):

$$\frac{\omega_{k+1,k}}{\omega_{k-1,k}} = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{k-1})}{\text{Sen}(\rho_{k+1})} \quad (1.5.1)$$

Donde $\omega_{k+1,k}$ representa la velocidad angular relativa del engrane $k + 1$ respecto al brazo k , $\omega_{k-1,k}$ representa la velocidad angular relativa del engrane $k - 1$ respecto al brazo k , N_{k+1} es el número de dientes del engrane $k + 1$, N_{k-1} es el número de dientes del engrane $k - 1$, además ρ_{k+1} y ρ_{k-1} son los ángulos de apertura del cono de los engranes $k + 1$ y $k - 1$ respectivamente (*Fig. 1.7*).

Es posible desglosar la ecuación (1.5.1) para obtener la relación de velocidades angulares en función de las velocidades angulares relativas a la tierra 0:

$$\frac{\omega_{k+1,k}}{\omega_{k-1,k}} = \frac{\omega_{k+1,0} - \omega_{k,0}}{\omega_{k-1,0} - \omega_{k,0}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{k-1})}{\text{Sen}(\rho_{k+1})} \quad (1.5.2)$$

Donde $\omega_{k+1,0}$, $\omega_{k-1,0}$ y $\omega_{k,0}$ representan las velocidades angulares absolutas de los engranes $k + 1$, $k - 1$ y el brazo k respecto a la tierra 0.

Además:

$$\omega_{k+1,0} = \omega_{k+1} \quad (1.5.3)$$

$$\omega_{k-1,0} = \omega_{k-1} \quad (1.5.4)$$

$$\omega_k = \omega_k \quad (1.5.5)$$

Por lo que:

$$\frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\omega_{k-1} - \omega_k} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{k-1})}{\text{Sen}(\rho_{k+1})} \quad (1.5.6)$$

Considerando que el movimiento de la tierra 0 es nulo y conociendo las velocidades angulares de dos de los cuerpos del sistema podemos determinar la velocidad angular del último cuerpo despejándola de la ecuación como se muestra a continuación para el engrane satélite $k + 1$:

$$\omega_{k+1} = -\frac{Sen(\rho_{k-1})}{Sen(\rho_{k+1})}(\omega_{k-1} - \omega_k) + \omega_k \quad (1.5.7)$$

Para determinar las posiciones angulares de los engranes, primero se deben expresar las velocidades angulares como desplazamientos angulares diferenciales de la siguiente manera:

$$\frac{d\theta_{k+1}}{dt} = -\frac{Sen(\rho_{k-1})}{Sen(\rho_{k+1})} \left(\frac{d\theta_{k-1}}{dt} - \frac{d\theta_k}{dt} \right) + \frac{d\theta_k}{dt} \quad (1.5.8)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (1.5.8) por el término dt se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$d\theta_{k+1} = -\frac{Sen(\rho_{k-1})}{Sen(\rho_{k+1})} (d\theta_{k-1} - d\theta_k) + d\theta_k \quad (1.5.9)$$

Después se integra la ecuación (1.5.9) desde la posición inicial i hasta la j -ésima posición de cada cuerpo para conocer la posición angular del engrane $k + 1$ en cualquier instante.

$$\int_{(\theta_{k+1})_i}^{(\theta_{k+1})_j} d\theta_{k+1} = -\frac{Sen(\rho_{k-1})}{Sen(\rho_{k+1})} \left(\int_{(\theta_{k-1})_i}^{(\theta_{k-1})_j} d\theta_{k-1} - \int_{(\theta_k)_i}^{(\theta_k)_j} d\theta_k \right) + \int_{(\theta_k)_i}^{(\theta_k)_j} d\theta_k \quad (1.5.10)$$

Al resolver la ecuación (1.5.10) se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} (\theta_{k+1})_j - (\theta_{k+1})_i &= -\frac{Sen(\rho_{k-1})}{Sen(\rho_{k+1})} \left[\left((\theta_{k-1})_j - (\theta_{k-1})_i \right) - \left((\theta_k)_j - (\theta_k)_i \right) \right] \\ &\quad + \left((\theta_k)_j - (\theta_k)_i \right) \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

La ecuación anterior se puede expresar con variaciones angulares de esta manera:

$$(\Delta\theta_{k+1})_{ij} = -\frac{Sen(\rho_{k-1})}{Sen(\rho_{k+1})} \left[(\Delta\theta_{k-1})_{ij} - (\Delta\theta_k)_{ij} \right] + (\Delta\theta_k)_{ij} \quad (1.5.12)$$

Y de la ecuación (1.5.12) se considera que los desplazamientos angulares iniciales son nulos, de esta manera se obtiene la ecuación que nos permite determinar la posición angular del engrane $k + 1$:

$$(\theta_{k+1})_{1j} = -\frac{Sen(\rho_{k-1})}{Sen(\rho_{k+1})} \left[(\theta_{k-1})_{1j} - (\theta_k)_{1j} \right] + (\theta_k)_{1j} \quad (1.5.13)$$

Donde:

$(\theta_{k+1})_{1j}$ es el ángulo es el ángulo del engrane $k + 1$ medido desde su posición inicial hasta su $j - \text{ésima}$ posición.

$(\theta_{k-1})_{1j}$ es el ángulo es el ángulo del engrane $k - 1$ medido desde su posición inicial hasta su $j - \text{ésima}$ posición.

$(\theta_k)_{1j}$ es el ángulo es el ángulo del brazo k medido desde su posición inicial hasta su $j - \text{ésima}$ posición.

Y la relación angular relativa al brazo es:

$$(\theta_{k+1})_{1j} - (\theta_k)_{1j} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{k-1})}{\text{Sen}(\rho_{k+1})} [(\theta_{k-1})_{1j} - (\theta_k)_{1j}] \quad (1.5.14)$$

$$\frac{(\theta_{k+1})_{1j} - (\theta_k)_{1j}}{(\theta_{k-1})_{1j} - (\theta_k)_{1j}} = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{k-1})}{\text{Sen}(\rho_{k+1})} \quad (1.5.15)$$

Mecanismo de Cinco Barras con Engranajes Planetarios.

Por otro lado, los mecanismos de eslabones engranados consisten en una cadena de eslabones cuyo movimiento está regido por la interacción de trenes de engranajes planetarios cuyos ejes de rotación coinciden con las juntas rotacionales de los eslabones.

Estos mecanismos son útiles para situaciones donde se requiere desarrollar movimientos complejos (*Fig. 1.8*).

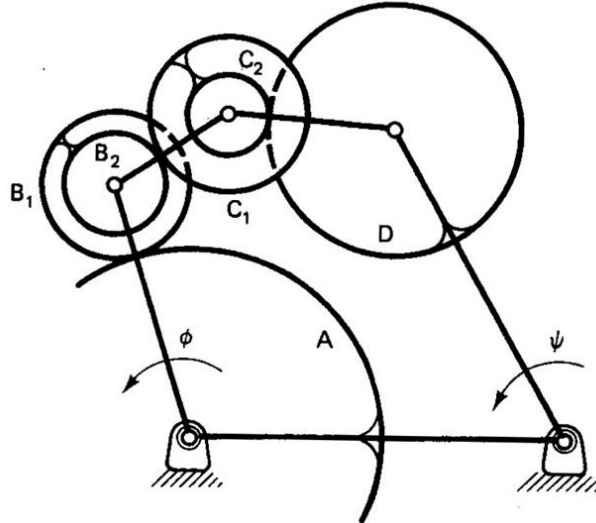


Figura 1.8: Mecanismo de cinco barras con engranajes planetarios

1.6. El hombro humano

1.6.1. El hombro

El hombro es una de las estructuras motrices más complejas del cuerpo humano, este está compuesto por tres huesos, la escápula, la clavícula, el húmero y tres articulaciones, la glenohumeral, la escapulo-torácica y la acromioclavicular (*Fig. 1.9 y 1.10*). La articulación glenohumeral se encarga de permitir 3 grados de libertad rotacionales al brazo al comportarse como una junta esférica, mientras que las otras dos pueden ser consideradas como juntas de deslizamiento, estas se encargan de facilitar el movimiento del hombro brindando estabilidad y aumentando su rango.

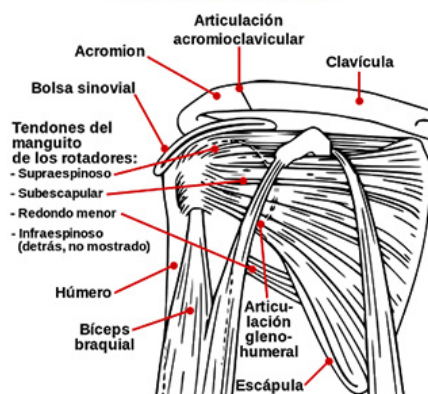


Figura 1.9: Componentes del hombro
(Aprende en Línea, 2016)

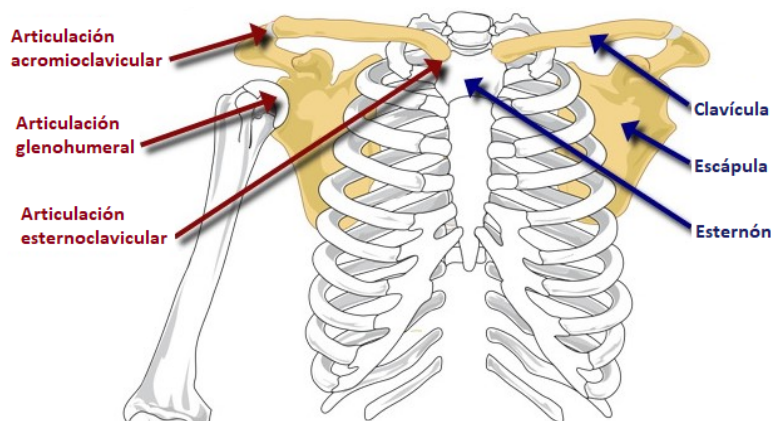


Figura 1.10: Articulaciones del hombro
(EUSTON, 2018)

1.6.2. Movimientos del hombro

El hombro humano tiene 6 movimientos principales y una serie de movimientos combinados de entre los cuales destaca el de circunducción.

Para describir correctamente los movimientos es necesario conocer primero los planos anatómicos (*Fig. 1.11*) y direcciones anatómicas (*Fig. 1.12*), ya que estos son un marco de referencia imaginario que permite expresar la ubicación y la dirección de estructuras en el cuerpo humano.

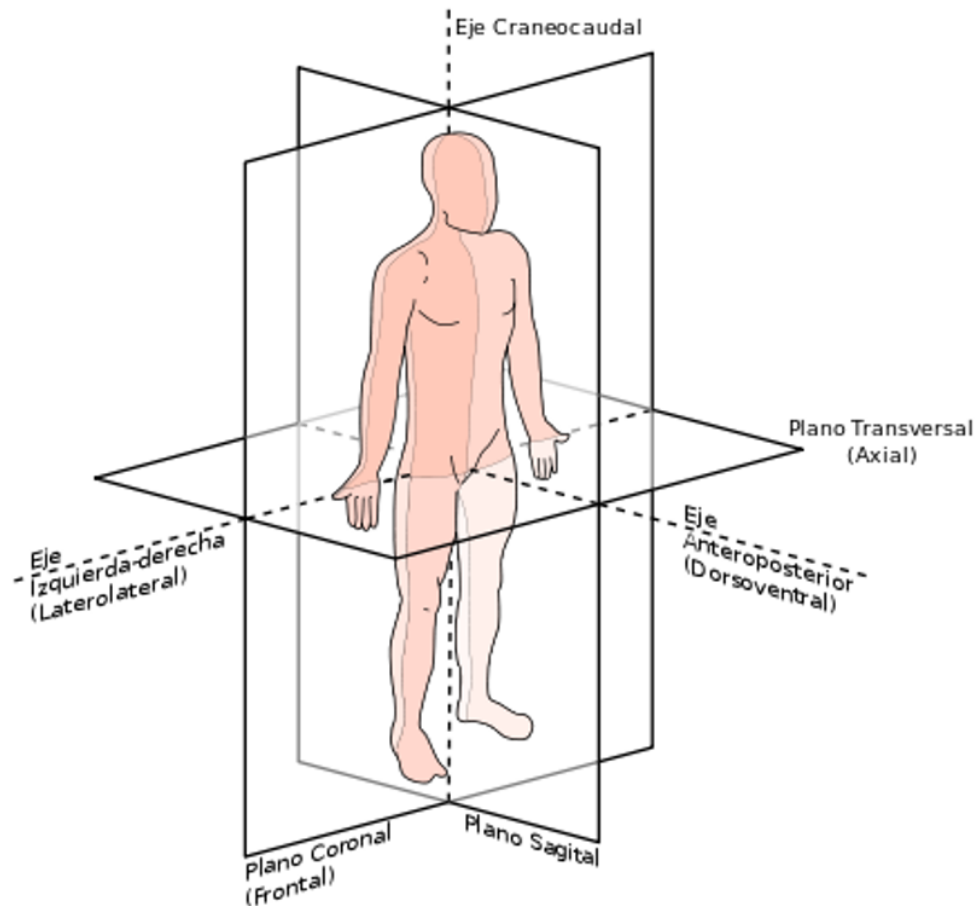


Figura 1.11: Planos anatómicos del cuerpo humano

(Albino N. 2014)

Los tres planos principales son:

Plano Sagital: también es llamado plano medial, longitudinal o anteposterior, este atraviesa el cuerpo humano por la mitad dividiéndolo en un lado izquierdo y un lado derecho.

Plano Coronal: también es llamado plano frontal, este atraviesa el cuerpo humano por la mitad dividiéndolo en una porción dorsal (posterior) y otra ventral (anterior o frontal).

Plano Transversal: también es llamado plano axial, lateral u horizontal, este atraviesa el cuerpo humano por la mitad dividiéndolo en una porción craneal (superior) y una caudal (inferior).

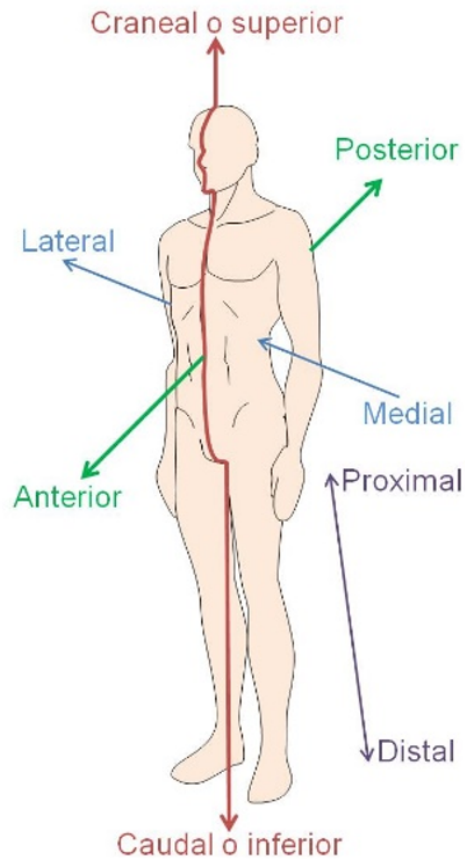


Figura 1.12: Direcciones anatómicas del cuerpo humano (*La Gaveta, 2013*)

Las ocho direcciones anatómicas son:

Dirección Craneal: también es llamada dirección superior, define una dirección desde el plano transversal hacia la parte superior de cuerpo.

Dirección Caudal: también es llamada dirección inferior, define una dirección desde el plano transversal hacia la parte inferior de cuerpo.

Dirección Anterior: también es llamada ventral o frontal, esta define una dirección desde el plano coronal hacia el exterior del cuerpo por la parte frontal.

Dirección Posterior: también es llamada dorsal, esta define una dirección desde el plano coronal hacia el exterior del cuerpo por la parte posterior.

Dirección Lateral: esta define una dirección paralela al plano coronal desde el plano sagital hacia el exterior del cuerpo.

Dirección Medial: esta define una dirección paralela al plano coronal desde el exterior del cuerpo hacia el plano sagital.

Dirección Proximal: esta se refiere a una dirección definida generalmente para extremidades como la dirección en la que una parte del cuerpo se aproxima más hacia el origen de dicha extremidad.

Dirección Distal: esta se refiere a una dirección definida generalmente para extremidades como la dirección en la que una parte del cuerpo se aleja más del origen de la extremidad.

Ya que se conocen los planos y direcciones anatómicas se podrán describir los movimientos del hombro (*Fig. 1.13*) por medio de ellos.

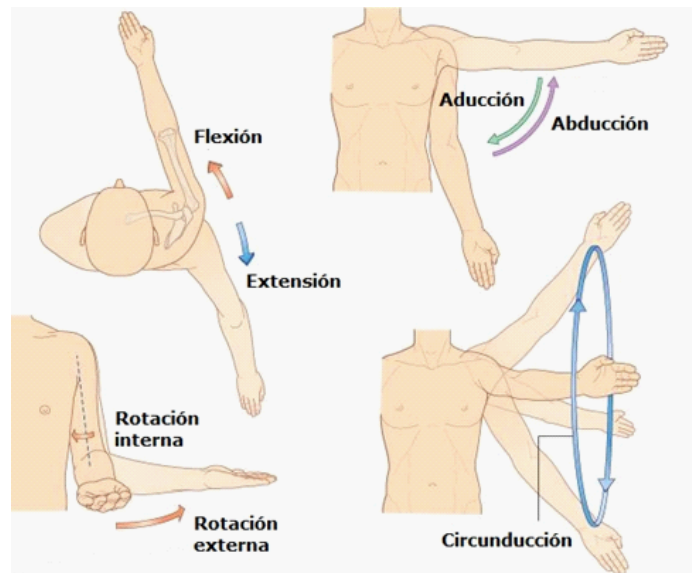


Figura 1.13: Movimientos del hombro

(Abril J. 2015)

Abducción: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo se desplaza alejándose del plano sagital en dirección lateral.

Para medirlo la palma de la mano debe orientarse en dirección medial, con el brazo extendido por completo en dirección caudal (*Fig. 1.14*), y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar en dirección craneal (*Fig. 1.15*).

Por lo general se alcanza un rango de 180°.



Figura 1.14: Posición de referencia del brazo (movimientos de abducción y aducción)

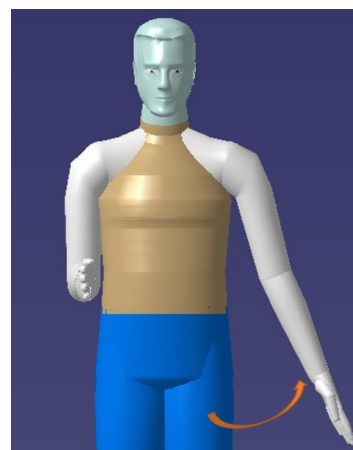


Figura 1.15: Abducción

Aducción: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo se desplaza acercándose al plano sagital en dirección medial.

Para medirlo la palma de la mano debe orientarse en dirección medial, con el brazo extendido por completo en dirección caudal (*Fig. 1.14*), y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar en dirección medial (*Fig. 1.16*).

Por lo general se alcanza un rango de 30° a 45° .



Figura 1.16: Aducción

Flexión: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo se desplaza alejándose del plano coronal en dirección ventral o anterior.

Para medirlo la palma de la mano debe orientarse en dirección medial, con el brazo extendido por completo en dirección caudal (*Fig. 1.17*), y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar en dirección craneal (*Fig. 1.18*).

Por lo general se alcanza un rango de 180° .

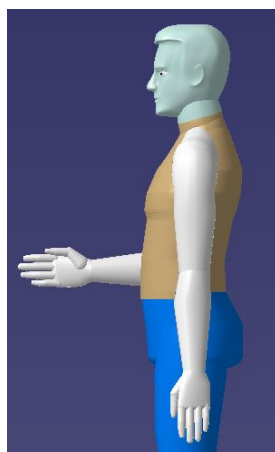


Figura 1.17: Posición de referencia del brazo (movimientos de flexión y extensión)

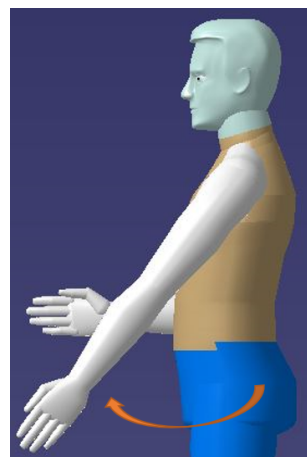


Figura 1.18: Flexión

Extensión: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo se desplaza alejándose del plano coronal en dirección dorsal o posterior.

Para medirlo la palma de la mano debe orientarse en dirección medial, con el brazo extendido por completo en dirección caudal, y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar en dirección dorsal (*Fig. 1.19*).

Por lo general se alcanza un rango de 45° a 60° .

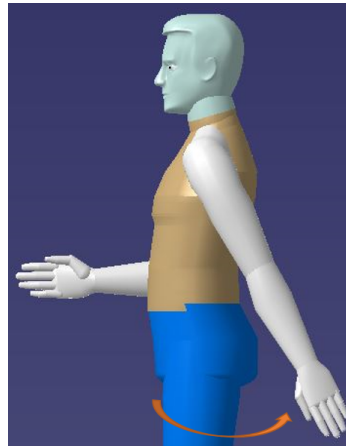


Figura 1.19: Extensión

Rotación Externa: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo rota sobre su propio eje con el codo a 90° alejando el antebrazo del plano sagital en dirección lateral.

Para medirlo el codo debe estar a 90° del plano sagital en dirección anterior y pegado al cuerpo con la palma de la mano orientada en dirección medial (*Fig. 1.20*), y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar rotando el antebrazo hacia la dirección lateral (*Fig. 1.21*).

Por lo general se alcanza un rango de 90° .

Este movimiento también puede ser realizado con el brazo levantado a 90° respecto al plano sagital (*Fig. 1.22 y 1.23*).

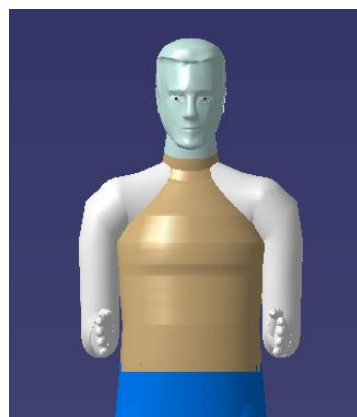


Figura 1.20: Posición de referencia del brazo (movimientos de rotación externa e interna)

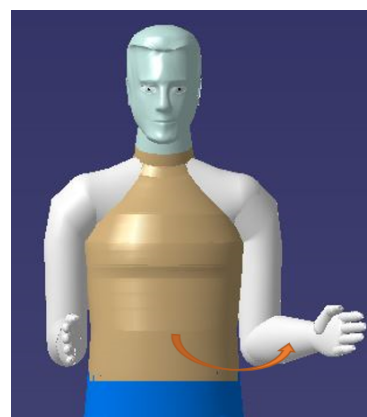


Figura 1.21: Rotación externa

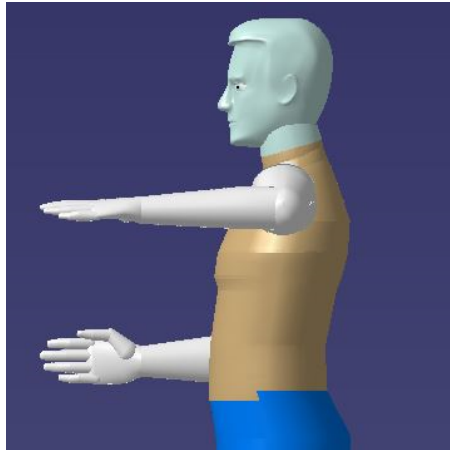


Figura 1.22: Posición de referencia del brazo con abducción a 90° (movimientos de rotación externa e interna)

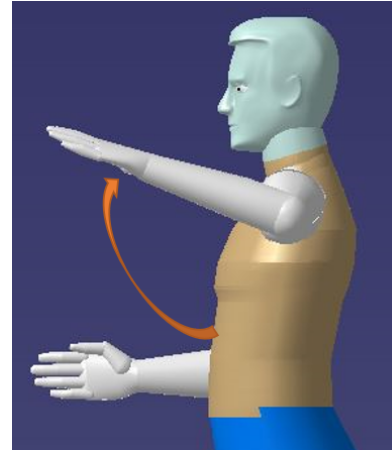


Figura 1.23: Rotación externa con abducción a 90°

Rotación Interna: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo rota sobre su propio eje con el codo a 90° acercando el antebrazo al plano sagital en dirección medial.

Para medirlo el codo debe estar a 90° del plano sagital en dirección anterior y pegado al cuerpo con la palma de la mano orientada en dirección medial (*Fig. 1.20.*), y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar rotando el antebrazo hacia la dirección medial (*Fig. 1.24.*).

Por lo general se alcanza un rango de 70° a 90° .

Este movimiento también puede ser realizado con el brazo levantado a 90° respecto al plano sagital (*Fig. 1.25.*).

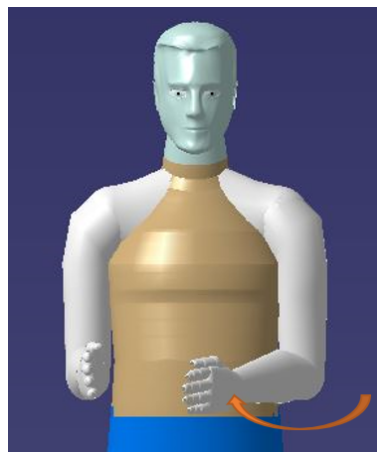


Figura 1.24: Rotación interna

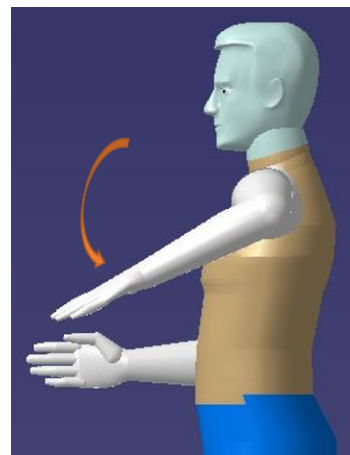


Figura 1.25: Rotación interna con abducción a 90°

Abducción horizontal: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo se desplaza alejándose del plano coronal en dirección medial-posterior.

Para medirlo la palma de la mano debe orientarse en dirección caudal con el brazo extendido por completo en dirección lateral (*Fig. 1.26*), y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar rotando el brazo hacia el plano sagital (*Fig. 1.27*).

Por lo general se alcanza un rango de 40° a 90° (*Fig. 1.35*).

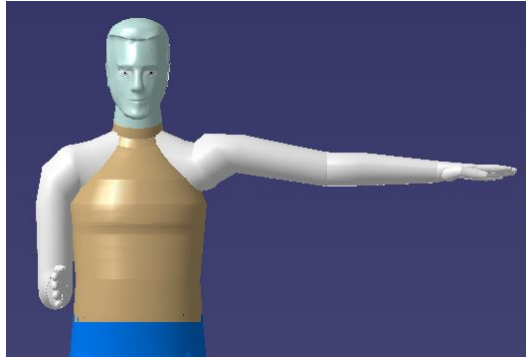


Figura 1.26: Posición de referencia del brazo (movimientos de abducción y aducción horizontal)

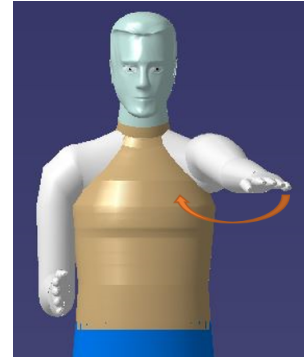


Figura 1.27: Abducción horizontal

Aducción horizontal: es el movimiento de rotación del hombro en el cual el brazo se desplaza alejándose del plano coronal en dirección medial-anterior.

Para medirlo la palma de la mano debe orientarse en dirección caudal con el brazo extendido por completo en dirección lateral (*Fig. 1.26*), y se mide desde esta posición hasta el punto máximo que se logre alcanzar rotando el brazo hacia el plano sagital (*Fig. 1.27*).

Por lo general se alcanza un rango de 130° (*Fig. 1.35*).

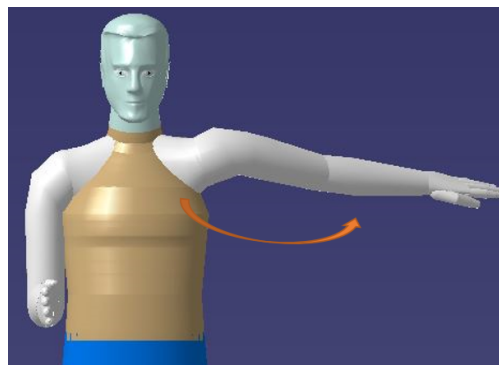


Figura 1.28: Aducción horizontal

Circunducción: es un movimiento que combina los movimientos de flexión, extensión, abducción y aducción del hombro. Este genera una superficie de cono con el barrido de la extensión completa del brazo, esto se logra al mantener estacionario el extremo proximal del brazo y rotar sobre este el extremo distal (*Manning, 2017*), (*Bialocerkowski, 2006*).

1.6.3. Prótesis de hombro

Las prótesis de hombro tradicionales son articulaciones glenohumorales artificiales que sustituyen parcial o totalmente la articulación natural del hombro.

Existen cuatro tipos de prótesis de hombro, los cuales se describen a continuación:

Prótesis humeral de superficie: Por lo general se emplean en pacientes con degeneración artrósica con buena calidad ósea ya que estas conservan el cuerpo óseo y parte de la cabeza del húmero, reemplazando únicamente la superficie articular del hueso y una porción de este para anclar la prótesis (*Valdés Casas J. C. 2018*).

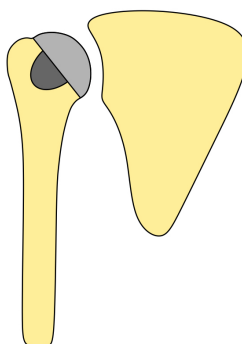


Figura 1.29: Prótesis humeral de superficie
(*Roza M. P. 2018*)

Prótesis total anatómica de hombro: Se emplea en pacientes con artrosis avanzada de hombro y mantienen el manguito de rotadores intacto (conjunto de músculos y tendones que generan las rotaciones del hombro), este tipo de prótesis reemplaza por completo la articulación glenohumeral con una cabeza humeral y un vástago que se insertan en el húmero desde la cabeza del hueso hasta la diáfisis de este y una glena que sustituye la cavidad glenoide de la escápula (*Valdés Casas J. C. 2018*).

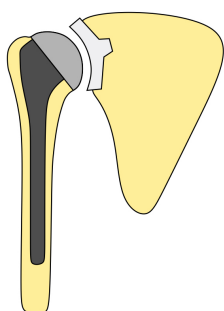


Figura 1.30: Prótesis anatómica total de hombro (*Roza M. P. 2018*)



Figura 1.31: Manguito de rotadores
(*Cortiñas A. B. 2015*)

Hemiartróplastía de hombro: Por lo general se emplean en pacientes con fractura en tres o cuatro fragmentos en la cabeza humeral o rotura en el manguito de rotadores, este tipo de prótesis únicamente sustituye la parte superior del húmero reemplazando por completo la superficie articular de la cabeza humeral sin alterar la cavidad glenoide (*Valdés Casas J. C. 2018*).

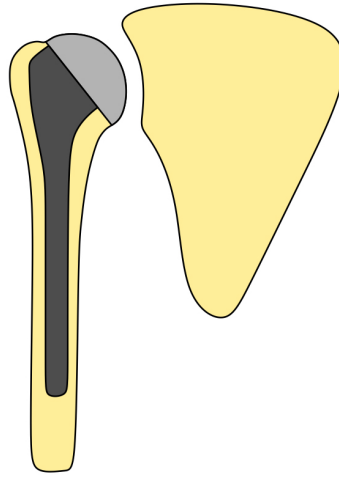


Figura 1.32: Hemiartróplastía de hombro
(*Roza M. P. 2018*)

Prótesis invertida de hombro: Por lo general se emplean en pacientes con daño severo del manguito de rotadores y artritis en el hombro e incapacitados para elevar el brazo, este tipo de prótesis altera la estructura natural de la articulación pues sustituye la cavidad glenoide por un elemento semiesférico llamado glenosfera, así mismo reemplaza la cabeza y parte de la diáfisis del húmero con una cavidad inversa a dicha glenosfera y un vástago anclado a lo largo del hueso (*Valdés Casas J. C. 2018*).

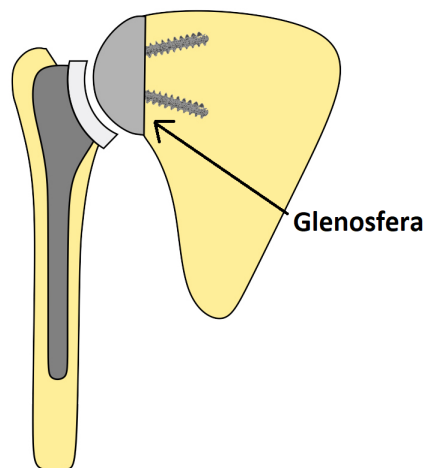


Figura 1.33: Prótesis invertida de hombro
(*Roza M. P. 2018*)

1.6.4. Prótesis biónica de hombro

El estudio y desarrollo de este tipo de sistemas protésicos busca dar solución a los problemas de la vida cotidiana de pacientes que han sufrido la amputación de alguna extremidad. En la actualidad existen ya varios prototipos funcionales para distintas extremidades, principalmente para miembros inferiores, dedos, y manos, sin embargo, el desarrollo de prótesis robóticas de hombro es un campo poco explorado.

En diciembre de 2014 Michael Mcloughlin de la Universidad Johns Hopkins en Baltimore dio a conocer su prototipo de prótesis robótica para ambos brazos (*Fig. 1.34*) controlada por medio de electrodos conectados al sistema nervioso en la zona pectoral del paciente. Este prototipo posee 22 GDL en total de los 30 GDL que posee el brazo humano, aunado a esto, su peso reducido de 4.5 Kg la convierten en la prótesis robótica más aproximada a un brazo real en la actualidad.

Al enfocarse en el hombro se puede observar que 3 GDL (grados de libertad) rotacionales en el hombro con lo que se logra emular el movimiento de una junta esférica, sin embargo, estas rotaciones no están concentradas en la zona del hombro, en cambio, se encuentran distribuidas en lo que sería la base del hombro, la segunda en lo que sería la cabeza humeral y la tercera a media diáfisis del húmero (*Rodríguez Gómez A. 2011*).



Figura 1.34: Prototipo de
prótesis completa de
brazo

(*Rodríguez Gómez A. 2011*)

1.7. Desarrollo de la configuración base

Antes de comenzar con el proceso de síntesis es necesario tener definida la estructura o configuración del mecanismo para que de esta se desarrollen las ecuaciones cinemáticas y estáticas que serán empleadas en la síntesis.

Al definir la configuración del mecanismo es necesario tener en cuenta el propósito para el cual será empleado, en este proyecto se busca emular el movimiento de un hombro humano dejando de lado la rotación del brazo sobre su propio eje, es decir dejando de lado la “Rotación interna” y la “Rotación externa”.

Por lo tanto, el proyecto se enfocará en la orientación del brazo por medio del hombro simulando los movimientos de: Aducción, Abducción, Flexión, Extensión y Circunducción (*Fig. 1.35*).

Movimientos del Hombro Humano

Tomando en cuenta los movimientos del hombro listados anteriormente podemos representar el hombro de manera sencilla como una junta esférica, la cual cuenta con 3 grados de libertad rotacionales sobre tres ejes ortogonales como se muestra en la imagen.

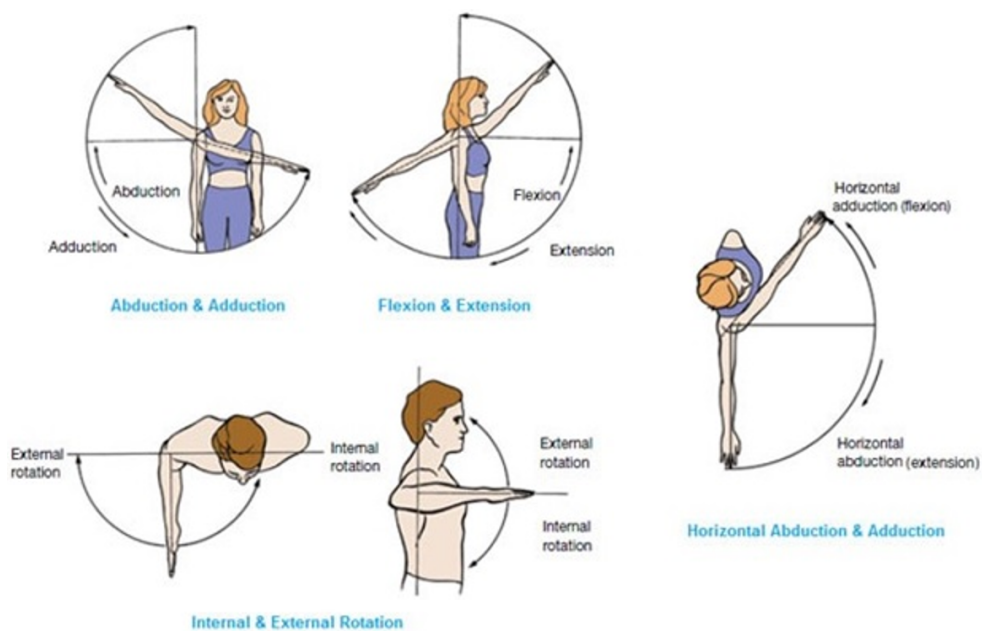


Figura 1.35: Movimientos de brazo
(*American Council on Exercise, 2017*)

Junta Esférica

Un par cinemático se puede definir como la unión entre dos sólidos rígidos que permiten uno o más movimientos relativos entre sí mientras restringen el resto, en el caso de una junta esférica se trata de un par cinemático de tres grados de libertad rotacionales en un sistema de ejes ortogonales.

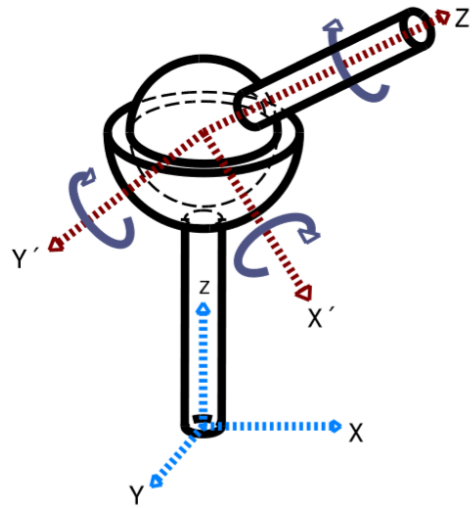


Figura 1.36: Junta esférica

Propuesta inicial:

En la propuesta inicial se contemplaba mantener los movimientos de rotación interna y rotación externa por lo que se buscaba controlar 3 grados de libertad aumentando el par de entrada del sistema. Con la finalidad de controlar el primer grado de libertad se empleó un tren de engranes rectos (Fig. 1.37), teniendo como salida el engrane corona.

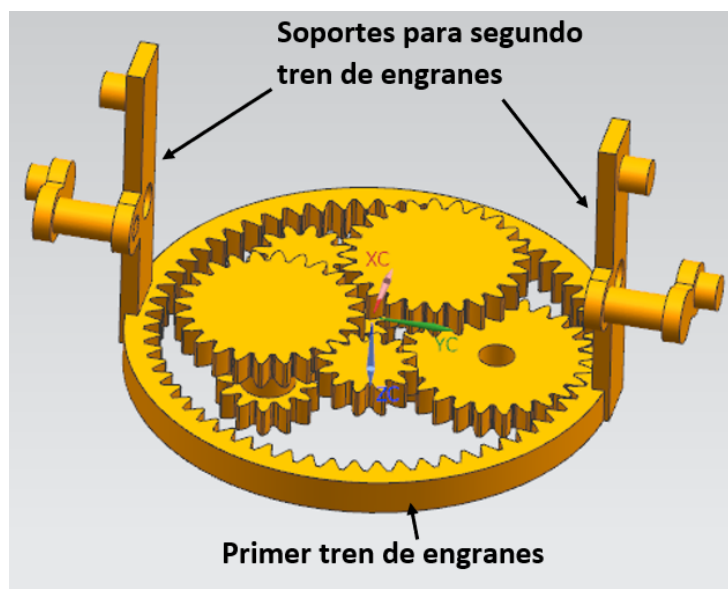


Figura 1.37: Tren de engranes rectos para controlar el primer grado de libertad

La corona del primer tren de engranes rectos está acoplada a dos nuevos trenes de engranes rectos (*Fig. 1.38*), estos trenes tienen como salida los engranes corona y controlan el segundo grado de libertad.

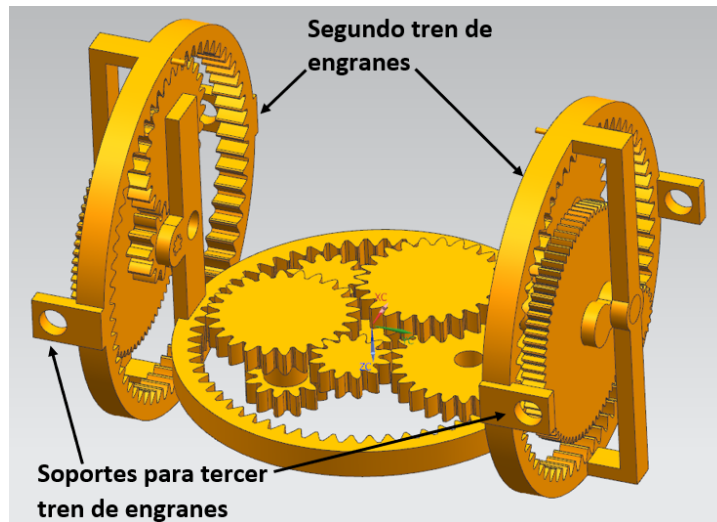


Figura 1.38: Tren de engranes rectos para controlar el segundo grado de libertad

Los engranes corona que son la salida del segundo sistema están acoplados a un brazo sobre el cual están montados dos trenes de engranajes rectos que controlan el tercer grado de libertad (*Fig. 1.39*).

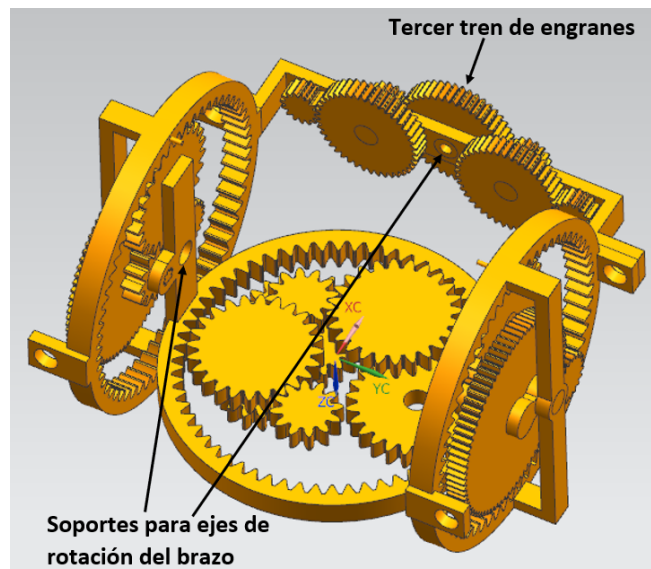


Figura 1.39: Tren de engranes rectos para controlar el tercer grado de libertad

Como se aprecia en la imagen (*Fig. 1.40*) los 3 grados de libertad rotacionales se efectúan sobre ejes ortogonales coincidentes en el centro del mecanismo y de esta manera se reproduce una junta esférica en ese punto.

Sin embargo, el espacio empleado por el mecanismo es muy amplio y el volumen vacío en su interior no puede ser empleado debido a los ejes que cruzan esa zona, otro inconveniente de este mecanismo es la dificultad que se presenta para posicionar los actuadores sin que interfieran con alguna de sus rotaciones.

Finalmente se muestra una vista isométrica del modelo CAD completo de la propuesta inicial (*Fig. 1.41*).

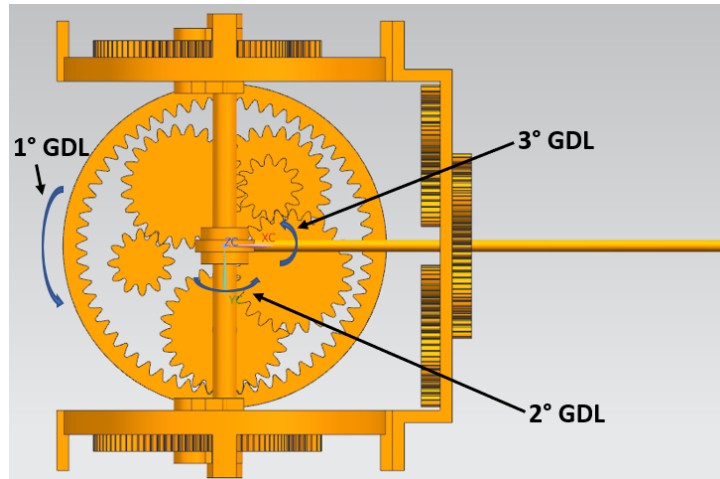


Figura 1.40: Los 3 GDL del mecanismo

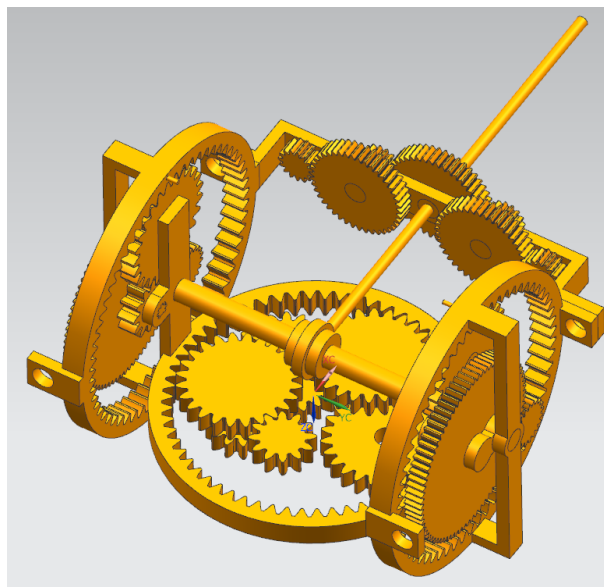


Figura 1.41: Propuesta inicial del mecanismo

Propuesta final:

Al estudiar mecanismos esféricos de cuatro barras se llegó a la conclusión de que al agregar un eslabón, se podían emular los movimientos del hombro exceptuando la rotación interna y externa.

Este eslabón nuevo (eslabón 4) se extiende desde el centro de la esfera que contiene al mecanismo hasta el extremo que sería la junta rotacional de alguna de los eslabones (balancín o manivela) del mecanismo de cuatro barras (*Fig. 1.42*)

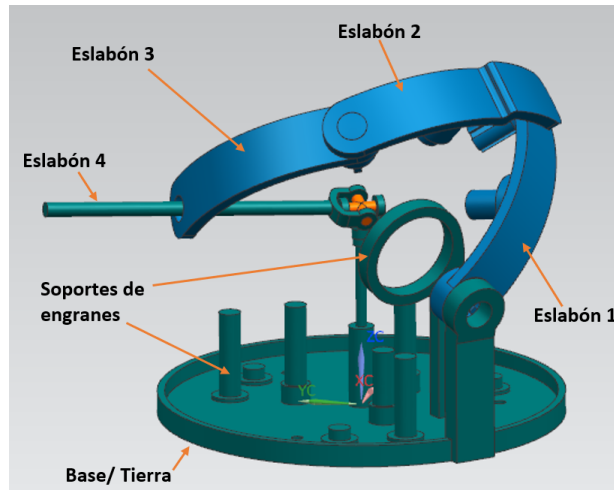


Figura 1.42: Eslabones del mecanismo de 5 barras esférico

En este mecanismo el eslabón 4 representa al brazo humano y la junta al centro de la esfera representa al hombro. De esta manera si se controlan los ángulos de rotación ϕ , η y μ (*Fig. 1.43*), correspondientes a las juntas del mecanismo de cuatro barras original, es posible orientar el brazo (eslabón 4).

Por otro lado, controlando los ángulos de rotación del brazo α y ψ (*Fig. 1.43*), se puede orientar a este buscando determinar los ángulos ϕ , η y μ .

Ya que los movimientos de rotación interna y externa no son considerados, el ángulo que actúa sobre el propio eje longitudinal del brazo no es tomado en cuenta.

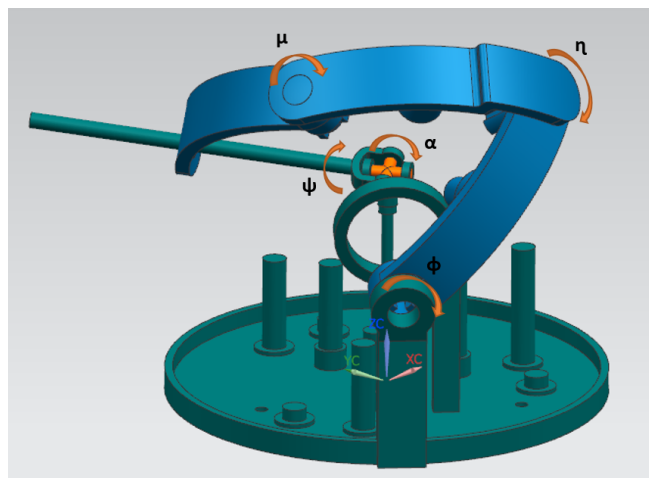


Figura 1.43: Rotaciones de los eslabones

Para lograr aumentar el par de salida se implementaron reducciones de engranes rectos para cada actuador (*Fig. 1.44*). La salida de cada reducción está acoplada a un sistema de engranajes planetarios cónicos correspondiente a cada eslabón del mecanismo de cuatro barras original (*Fig. 1.45*).

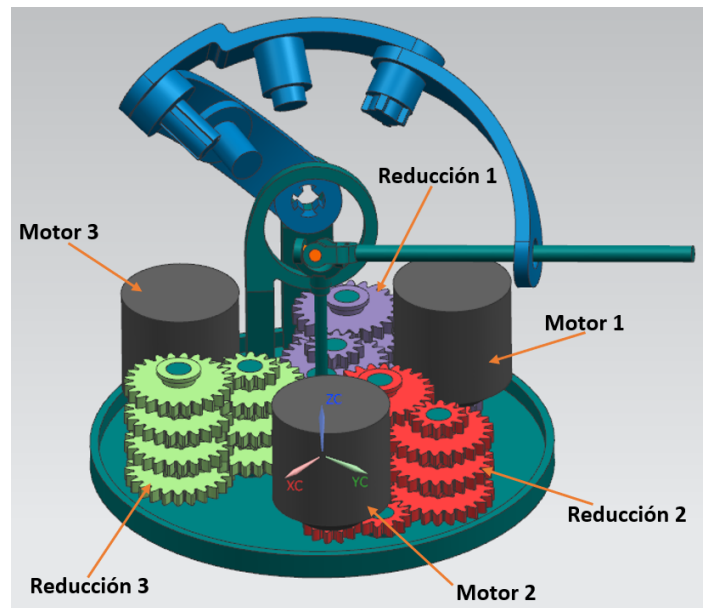


Figura 1.44: Motores y reducciones del mecanismo

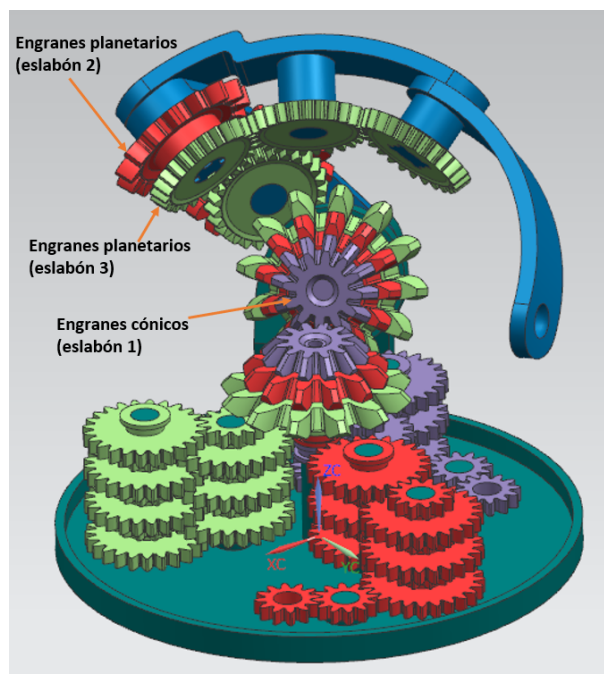


Figura 1.45: Engranajes de los eslabones

El resultado fue un mecanismo más compacto que permitía aumentar el par de salida, mantener un rango de movimiento amplio y con mayor facilidad para posicionar los actuadores (*Fig. 1.46*). Posteriormente se tomará esta configuración para obtener las ecuaciones cinemáticas y las ecuaciones estáticas por método de “Trabajo virtual” que serán empleadas en la síntesis del mecanismo.

Una vez resuelta la síntesis estática se podrá generar un modelo CAD con sus resultados, de tal manera que se presente la menor interferencia posible entre los elementos del mecanismo.

La propuesta final para la estructura del mecanismo a sintetizar se muestra en la Figura 1.30.

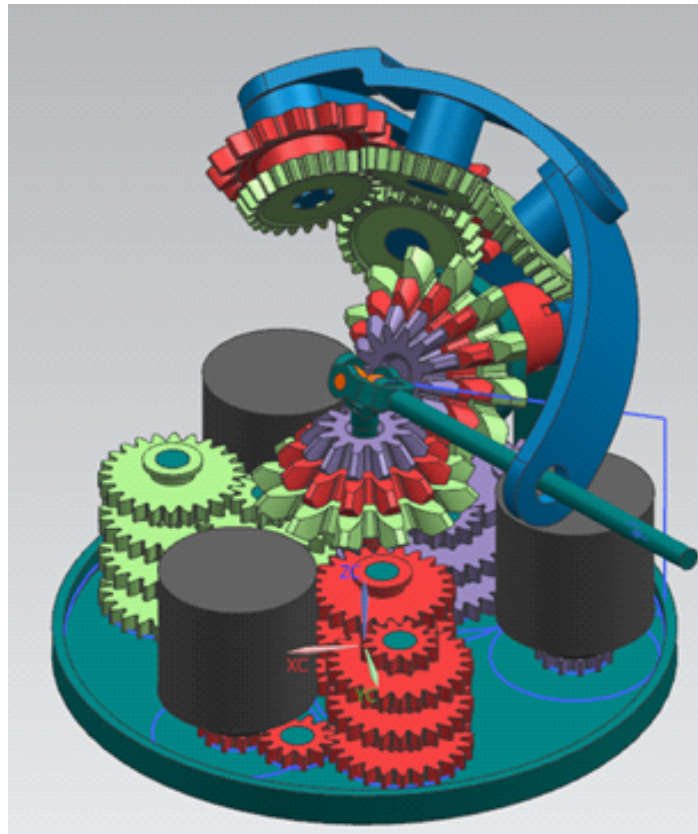


Figura 1.46: Mecanismo esférico de 5 barras con engranes cónicos planetarios

Capítulo 2

Análisis cinemático

2.1. Introducción

El análisis cinemático nos permite obtener los valores de posición, velocidad y aceleración de los eslabones en movimiento de un mecanismo.

Por lo general se tiene la finalidad de conocer las aceleraciones que permiten calcular las fuerzas y posteriormente los esfuerzos que se presentarán en los componentes del mecanismo.

Existen dos enfoques distintos al plantear un análisis cinemático, el primero es llamado Cinemática directa se encarga de obtener las posibles posiciones, orientaciones y correspondientes derivadas del efector final del sistema. Para obtener esta información del análisis, se emplean las variables de las juntas y sus consecuentes derivadas con respecto al tiempo.

El segundo enfoque es llamado Cinemática inversa y se encarga de obtener los valores posibles de las variables en las juntas móviles y sus consecuentes derivadas en el tiempo. En este enfoque se emplean como datos de entrada las posiciones, velocidades y aceleraciones del efector final.

En este capítulo se empleará el enfoque de la cinemática inversa para realizar el análisis cinemático de posición y se planteará un análisis cinemático de velocidad para su uso ulterior en la síntesis estática, cabe destacar que no será necesario realizar un análisis de aceleración ya que se trata de resolver un problema estático.

2.2. Análisis de posición

Para abordar el problema de análisis por cinemática inversa emplearemos el método de lazo cerrado. Para este método, es necesario definir vectores representativos de cada eslabón.

Estos vectores formarán un lazo cerrado (modelo vectorial del mecanismo). De este lazo cerrado se obtendrá una ecuación vectorial llamada ecuación de lazo y debe ser igualada con el vector nulo ($\mathbf{0}$). Así mismo la ecuación de lazo estará puramente en función de los ángulos de rotación de cada eslabón.

La imagen (*Fig. 2.1*) muestra la construcción del lazo cerrado que representará al mecanismo de cinco barras:

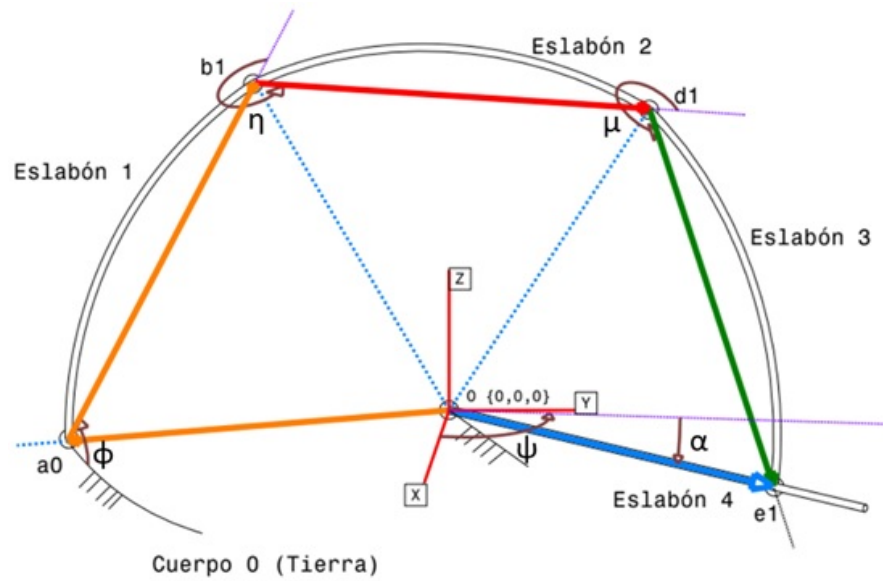


Figura 2.1: Mecanismo esférico de 5 barras

El resultado de esta construcción se muestra en la imagen (*Fig. 2.2*), donde se puede apreciar la congruencia de los ejes de rotación sobre el centro del sistema, los vectores de cada eslabón y sus correspondientes rotaciones.

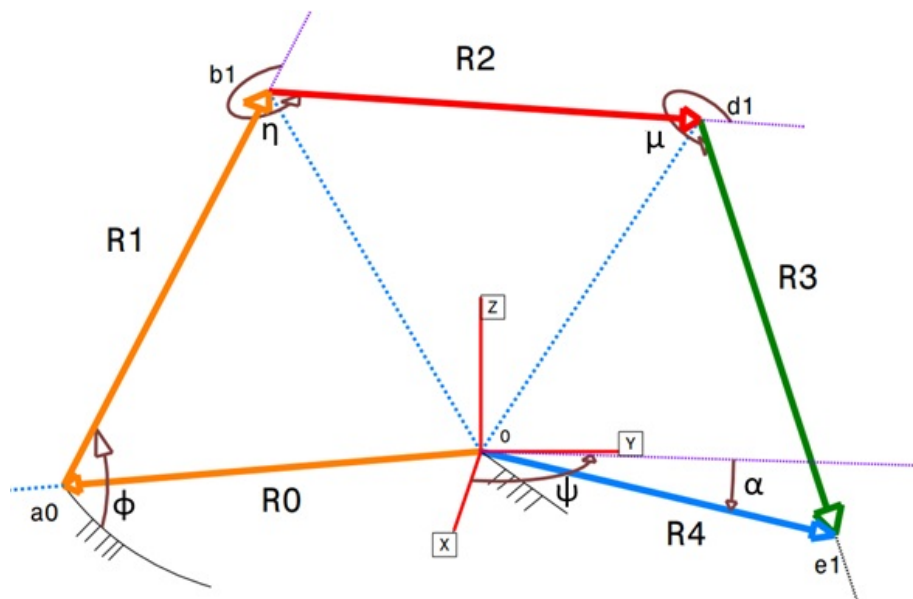


Figura 2.2: Diagrama de lazo vectorial

Considerando el diagrama del lazo cerrado (*Fig. 2.2*), podemos definir los vectores de los eslabones en su posición inicial como la resta de los puntos finales de cada vector menos los puntos iniciales correspondientes. Para determinar la posición j -ésima de los vectores es necesario aplicar las rotaciones pertinentes a cada uno de ellos (*Suh & Radcliffe, 1978*), (*Cuenca, 2015*).

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 = (\mathbf{a}_0 - \mathbf{0}) \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{R}_1 = [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] \mathbf{r}_1 = (\mathbf{b}_{1j} - \mathbf{a}_0) \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{R}_2 = [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] \mathbf{r}_2 = (\mathbf{d}_{1j} - \mathbf{b}_{1j}) \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{R}_3 = [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \mathbf{r}_3 = (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j}) \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{R}_4 = [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}] \mathbf{r}_4 = (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{0}) \quad (2.2.5)$$

Donde:

$$\mathbf{r}_0 = (\mathbf{a}_0 - \mathbf{0}) \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_0) \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{r}_2 = (\mathbf{d}_1 - \mathbf{b}_1) \quad (2.2.8)$$

$$\mathbf{r}_3 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1) \quad (2.2.9)$$

$$\mathbf{r}_4 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{0}) \quad (2.2.10)$$

Con estos vectores la ecuación de lazo queda construida como:

$$\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (2.2.11)$$

De la ecuación vectorial de lazo cerrado podemos obtener 3 ecuaciones escalares, no obstante, se tiene un total de 5 variables de las cuales daremos los valores de “ α ” y de “ ψ ” para obtener un sistema de ecuaciones cerrado de 3X3.

Sin embargo, con este modelo se obtienen jacobianos singulares que no permiten aplicar métodos numéricos para solucionar la cinemática del mecanismo.

Para describir el comportamiento del sistema de manera más precisa, se diseñó un nuevo modelo vectorial, en este modelo los eslabones 3 y 4 del modelo original son considerados como un cuerpo rígido que gira sobre un nuevo vector definido desde el origen hasta el punto \mathbf{d}_1 , la simplificación efectuada se aprecia en la siguiente imagen (*Fig. 2.3*), seguida del esquema del lazo vectorial del mecanismo (*Fig. 2.4*):

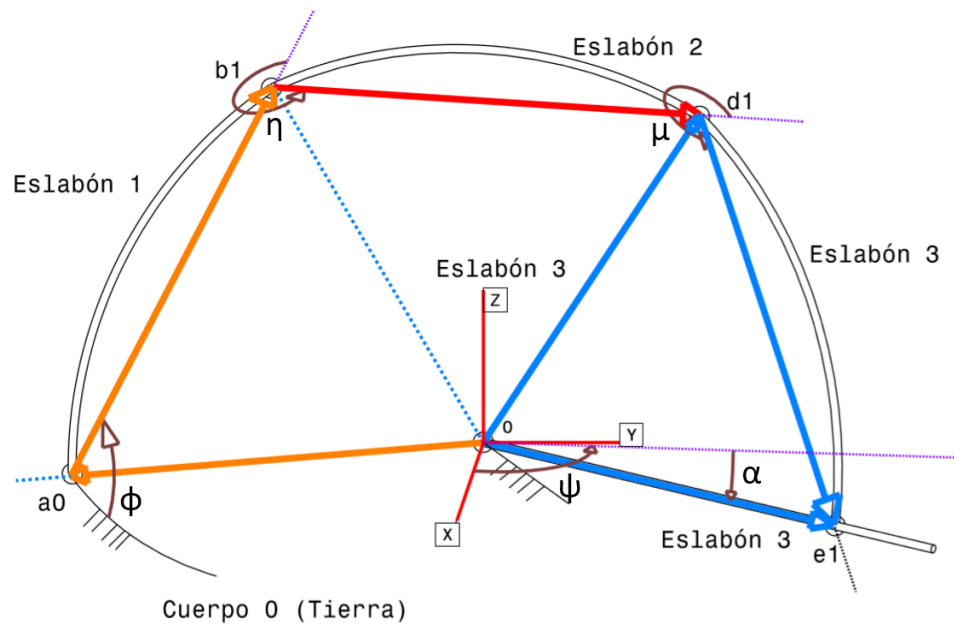


Figura 2.3: Mecanismo esférico de 4 barras

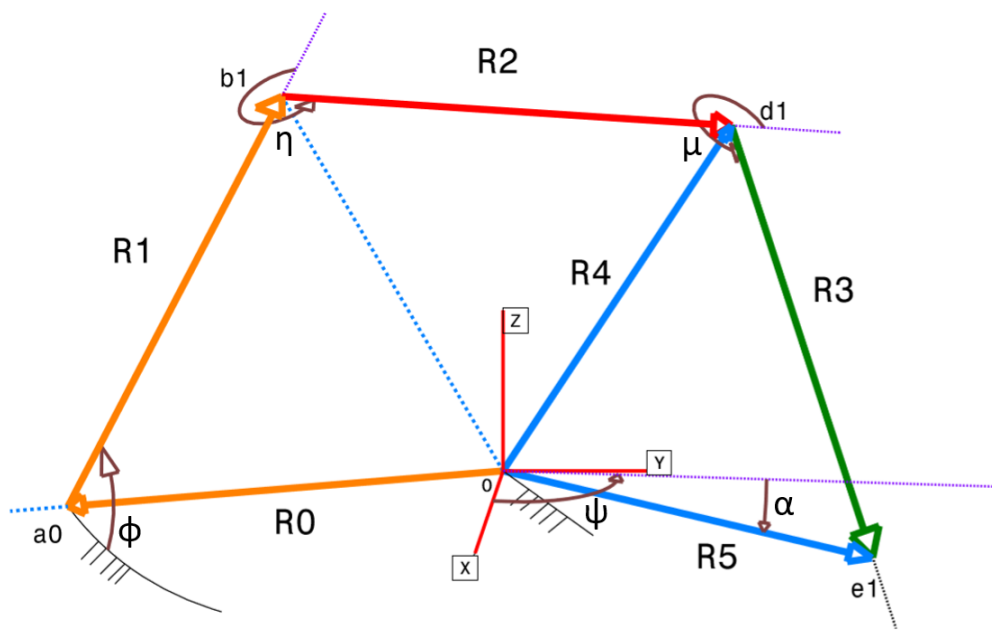


Figura 2.4: Diagrama de lazo vectorial

Con esto podemos obtener la ecuación de lazo vectorial:

$$\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \tag{2.2.12}$$

Donde:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 \quad (2.2.13)$$

$$\mathbf{R}_1 = [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] \mathbf{r}_1 \quad (2.2.14)$$

$$\mathbf{R}_2 = [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] \mathbf{r}_2 \quad (2.2.15)$$

$$\mathbf{R}_4 = [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}] \mathbf{r}_4 \quad (2.2.16)$$

Además:

$$\mathbf{r}_0 = (\mathbf{a}_0 - \mathbf{0}) \quad (2.2.17)$$

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_0) \quad (2.2.18)$$

$$\mathbf{r}_2 = (\mathbf{d}_1 - \mathbf{b}_1) \quad (2.2.19)$$

$$\mathbf{r}_4 = (\mathbf{d}_1 - \mathbf{0}) \quad (2.2.20)$$

Sin embargo, para recuperar el ángulo " μ " es necesario construir una segunda ecuación de lazo vectorial:

$$\mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_5 = \mathbf{0} \quad (2.2.21)$$

Donde:

$$\mathbf{R}_3 = [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \mathbf{r}_3 \quad (2.2.22)$$

$$\mathbf{R}_4 = [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}] \mathbf{r}_4 \quad (2.2.23)$$

$$\mathbf{R}_5 = [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}] \mathbf{r}_5 \quad (2.2.24)$$

Además:

$$\mathbf{r}_3 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1) \quad (2.2.25)$$

$$\mathbf{r}_4 = (\mathbf{d}_1 - \mathbf{0}) \quad (2.2.26)$$

$$\mathbf{r}_5 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{0}) \quad (2.2.27)$$

2.3. Análisis de velocidad

El objetivo de realizar este análisis de velocidad es obtener los coeficientes de influencia que nos permitirán obtener los valores de velocidad para las variables “ $\dot{\phi}$ ”, “ $\dot{\eta}$ ” y “ $\dot{\mu}$ ” en función de las velocidades “ $\dot{\alpha}$ ” y “ $\dot{\psi}$ ”. Estos coeficientes serán empleados al aplicar el método de Trabajo Virtual en la síntesis estática (*Suh & Radcliffe, 1978*), (*Cuenca, 2015*).

Para conocer las velocidades de cada eslabón del mecanismo esférico se suman las ecuaciones vectoriales de lazo (*Ecuaciones. 2.2.12 y 2.2.21*) y después el resultado se deriva con respecto al tiempo, de esta manera la ecuación vectorial de velocidad será:

$$\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_5 = \mathbf{0} \quad (2.3.1)$$

Se sabe que $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_5 = \mathbf{0} \quad (2.3.2)$$

Donde las velocidades de cada eslabón están dadas por:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{0} \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{V}_1 = [\mathbf{W}_{\dot{\phi}, \mathbf{a}_0}] \mathbf{R}_1 = \dot{\phi} [\mathbf{E}_1] \mathbf{R}_1 \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{V}_2 = [\mathbf{W}_2] \mathbf{R}_2 \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{V}_3 = [\mathbf{W}_3] \mathbf{R}_3 \quad (2.3.6)$$

$$\mathbf{V}_4 = [\mathbf{W}_4] \mathbf{R}_4 \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{V}_5 = [\mathbf{W}_5] \mathbf{R}_5 \quad (2.3.8)$$

Las matrices antisimétricas $[\mathbf{E}_n]$ se emplearán para desarrollar los términos $[\mathbf{W}_{\dot{\phi}, \mathbf{a}_0}]$, $[\mathbf{W}_2]$, $[\mathbf{W}_2]$, $[\mathbf{W}_2]$ y $[\mathbf{W}_2]$, estas están definidas como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_1] &= \begin{bmatrix} 0 & -a_{0z} & a_{0y} \\ a_{0z} & 0 & -a_{0x} \\ -a_{0y} & a_{0x} & 0 \end{bmatrix} & [\mathbf{E}_4] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{E}_2] &= \begin{bmatrix} 0 & -b_{1z} & b_{1y} \\ b_{1z} & 0 & -b_{1x} \\ -b_{1y} & b_{1x} & 0 \end{bmatrix} & [\mathbf{E}_5] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{E}_3] &= \begin{bmatrix} 0 & -d_{1z} & d_{1y} \\ d_{1z} & 0 & -d_{1x} \\ -d_{1y} & d_{1x} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Desarrollando los términos de los vectores de velocidad se obtiene:

De la ecuación (2.3.5):

$$[\mathbf{W}_2] = ([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}])^\bullet ([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}])^T \quad (2.3.10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} ([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}])^\bullet &= \left([\dot{\mathbf{R}}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] + [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\dot{\mathbf{R}}_{\eta, \mathbf{b}_1}] \right) \\ &= \dot{\phi} [\mathbf{E}_1] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] + \dot{\eta} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Y

$$([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}])^T = [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \quad (2.3.12)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3.10):

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_2] &= \left(\dot{\phi} [\mathbf{E}_1] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] + \dot{\eta} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] \right) [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \\ &= \dot{\phi} [\mathbf{E}_1] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T + \dot{\eta} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \\ &= \dot{\phi} [\mathbf{E}_1] + \dot{\eta} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Además de la ecuación (2.3.6):

$$[\mathbf{W}_3] = ([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}])^\bullet ([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}])^T \quad (2.3.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned} ([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}])^\bullet &= \left[\dot{\mathbf{R}}_{\phi, \mathbf{a}_0} \right] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] + [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] \left[\dot{\mathbf{R}}_{\eta, \mathbf{b}_1} \right] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \\ &\quad + [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] \left[\dot{\mathbf{R}}_{\mu, \mathbf{d}_1} \right] \\ &= \dot{\phi} [\mathbf{E}_1] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] + \dot{\eta} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \\ &\quad + \dot{\mu} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{E}_3] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Y

$$([\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}])^T = [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}]^T [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \quad (2.3.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3.14):

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_3] &= \dot{\phi} [\mathbf{E}_1] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \left([\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}]^T [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \right) + \\ &\quad \dot{\eta} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \left([\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}]^T [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \right) + \\ &\quad \dot{\mu} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{E}_3] [\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}] \left([\mathbf{R}_{\mu, \mathbf{d}_1}]^T [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \right) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

$$= \dot{\phi} [\mathbf{E}_1] + \dot{\eta} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T + \dot{\mu} [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{E}_3] [\mathbf{R}_{\eta, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T \quad (2.3.18)$$

También de la ecuación (2.3.7):

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_4] &= ([\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}])^\bullet ([\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}])^T \\ &\quad \left(\left[\dot{\mathbf{R}}_{\psi, \mathbf{z}} \right] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}] + [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] \left[\dot{\mathbf{R}}_{\alpha, \mathbf{y}} \right] \right) [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}]^T [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}]^T \\ &= \dot{\psi} [\mathbf{E}_4] [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}]^T [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}]^T + \dot{\alpha} [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{E}_5] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}]^T [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}]^T \\ &= \dot{\psi} [\mathbf{E}_4] + \dot{\alpha} [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{E}_5] [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}]^T \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_5] &= ([\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}])^\bullet ([\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{y}}])^T \\ &= \dot{\psi} [\mathbf{E}_4] + \dot{\alpha} [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}] [\mathbf{E}_5] [\mathbf{R}_{\psi, \mathbf{z}}]^T \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Al sustituir estos vectores en la ecuación vectorial de velocidad (2.3.2), separando los términos multiplicados por $\dot{\phi}$, $\dot{\eta}$ y $\dot{\mu}$ e igualando a cero la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & \dot{\phi}([\mathbf{E}_1]\mathbf{R}_1 + [\mathbf{E}_1]\mathbf{R}_2 + [\mathbf{E}_1]\mathbf{R}_3) + \\ & \dot{\eta}([\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}][\mathbf{E}_2][\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}]^T\mathbf{R}_2 + [\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}][\mathbf{E}_2][\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}]^T\mathbf{R}_3) + \\ & \dot{\mu}([\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}][\mathbf{R}_{\eta,\mathbf{b}_1}][\mathbf{E}_3][\mathbf{R}_{\eta,\mathbf{b}_1}]^T[\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}]^T\mathbf{R}_3) - \\ & (\dot{\psi}[\mathbf{E}_4]\mathbf{R}_5 + \dot{\alpha}[\mathbf{R}_{\psi,\mathbf{z}}][\mathbf{E}_5][\mathbf{R}_{\psi,\mathbf{z}}]^T\mathbf{R}_5) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Reorganizando la ecuación y abreviándola se obtiene:

$$\dot{\phi}\mathbf{U}_1 + \dot{\eta}\mathbf{U}_2 + \dot{\mu}\mathbf{U}_3 - \dot{\psi}\mathbf{U}_4 - \dot{\alpha}\mathbf{U}_5 = \mathbf{0} \quad (2.3.22)$$

$$\dot{\phi}\mathbf{U}_1 + \dot{\eta}\mathbf{U}_2 + \dot{\mu}\mathbf{U}_3 = \dot{\psi}\mathbf{U}_4 + \dot{\alpha}\mathbf{U}_5 \quad (2.3.23)$$

Añadiendo el término $\dot{\phi}\mathbf{A}$ a la ecuación (2.3.23) para completar el sistema, donde \mathbf{A} es un vector unitario:

$$\dot{\phi}\mathbf{U}_1 + \dot{\eta}\mathbf{U}_2 + \dot{\mu}\mathbf{U}_3 + \dot{\phi}\mathbf{A} = \dot{\psi}\mathbf{U}_4 + \dot{\alpha}\mathbf{U}_5 + \dot{\phi}\mathbf{A} \quad (2.3.24)$$

$$\dot{\phi}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{A}) + \dot{\eta}\mathbf{U}_2 + \dot{\mu}\mathbf{U}_3 = \dot{\psi}\mathbf{U}_4 + \dot{\alpha}\mathbf{U}_5 + \dot{\phi}\mathbf{A} \quad (2.3.25)$$

$$\dot{\phi}\mathbf{B} + \dot{\eta}\mathbf{U}_2 + \dot{\mu}\mathbf{U}_3 = \dot{\psi}\mathbf{U}_4 + \dot{\alpha}\mathbf{U}_5 + \dot{\phi}\mathbf{A} \quad (2.3.26)$$

Donde:

$$\mathbf{U}_1 = [\mathbf{E}_1]\mathbf{R}_1 + [\mathbf{E}_1]\mathbf{R}_2 + [\mathbf{E}_1]\mathbf{R}_3 \quad (2.3.27)$$

$$\mathbf{U}_2 = [\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}][\mathbf{E}_2][\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}]^T\mathbf{R}_2 + [\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}][\mathbf{E}_2][\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}]^T\mathbf{R}_3 \quad (2.3.28)$$

$$\mathbf{U}_3 = [\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}][\mathbf{R}_{\eta,\mathbf{b}_1}][\mathbf{E}_3][\mathbf{R}_{\eta,\mathbf{b}_1}]^T[\mathbf{R}_{\phi,\mathbf{a}_0}]^T\mathbf{R}_3 \quad (2.3.29)$$

$$\mathbf{U}_4 = [\mathbf{E}_4]\mathbf{R}_5 \quad (2.3.30)$$

$$\mathbf{U}_5 = [\mathbf{R}_{\psi,\mathbf{z}}][\mathbf{E}_5][\mathbf{R}_{\psi,\mathbf{z}}]^T\mathbf{R}_5 \quad (2.3.31)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_0 - \mathbf{0}) \quad (2.3.32)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{A} \quad (2.3.33)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = \dot{\psi}\mathbf{U}_4 + \dot{\alpha}\mathbf{U}_5 + \dot{\phi}\mathbf{A} \quad (2.3.34)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (2.3.35)$$

A las matrices de vectores \mathbf{U}_i le llamaremos:

$$[\mathbf{J}_1] = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \end{bmatrix} \quad (2.3.36)$$

$$[\mathbf{J}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.3.37)$$

Y a los vectores de velocidades angulares:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.3.38)$$

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (2.3.39)$$

Quedando reorganizada la ecuación (2.3.35) como:

$$[\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = [\mathbf{J}_2] \mathbf{q}_2 \quad (2.3.40)$$

Si se despeja el vector \mathbf{q}_2 :

$$\mathbf{q}_2 = [\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 \quad (2.3.41)$$

Esto implica que las ecuaciones para obtener las velocidades angulares $\dot{\psi}$ y $\dot{\alpha}$ en función de las velocidades angulares $\dot{\phi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\mu}$ serán:

$$\dot{\psi} = \mathbf{q}_2^T \mathbf{i} = \left([\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 \right)^T \mathbf{i} \quad (2.3.42)$$

$$\dot{\alpha} = \mathbf{q}_2^T \mathbf{j} = \left([\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 \right)^T \mathbf{j} \quad (2.3.43)$$

$$\dot{\phi} = \mathbf{q}_2^T \mathbf{k} = \left([\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 \right)^T \mathbf{k} \quad (2.3.44)$$

Donde:

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}(\dot{\phi}, \dot{\eta}, \dot{\mu}) \quad (2.3.45)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\dot{\phi}, \dot{\eta}, \dot{\mu}) \quad (2.3.46)$$

Desarrollando el segundo término de la ecuación (2.3.41):

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_5 & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.3.47)$$

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} U_{4x} & U_{5x} & A_x \\ U_{4y} & U_{5y} & A_y \\ U_{4z} & U_{5z} & A_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_x & U_{2x} & U_{3x} \\ B_y & U_{2y} & U_{3y} \\ B_z & U_{2z} & U_{3z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.3.48)$$

El determinante de $[\mathbf{J}_2]$ será:

$$\begin{aligned} Det[\mathbf{J}_2] &= (U_{4x}U_{5y}A_z + U_{5x}A_yU_{4z} + A_xU_{4y}U_{5z}) \\ &\quad - (U_{4z}U_{5y}A_x + U_{5z}A_yU_{4x} + A_zU_{4y}U_{5x}) \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Y la adjunta de $[\mathbf{J}_2]$ será la matriz traspuesta de la matriz de cofactores de $[\mathbf{J}_2]$:

$$adj[\mathbf{J}_2] = (cof[\mathbf{J}_2])^T \quad (2.3.50)$$

$$adj[\mathbf{J}_2] = (cof[\mathbf{J}_2])^T = \begin{bmatrix} U_{5y}A_z - U_{5z}A_y & U_{4z}A_y - U_{4y}A_z & U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y} \\ U_{5z}A_x - U_{5x}A_y & U_{4x}A_z - U_{4z}A_x & U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z} \\ U_{5x}A_y - U_{5y}A_x & U_{4y}A_x - U_{4x}A_y & U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x} \end{bmatrix}^T \quad (2.3.51)$$

Por lo que:

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} = \frac{1}{Det[\mathbf{J}_2]} \begin{bmatrix} U_{5y}A_z - U_{5z}A_y & U_{4z}A_y - U_{4y}A_z & U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y} \\ U_{5z}A_x - U_{5x}A_y & U_{4x}A_z - U_{4z}A_x & U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z} \\ U_{5x}A_y - U_{5y}A_x & U_{4y}A_x - U_{4x}A_y & U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x} \end{bmatrix}^T \quad (2.3.52)$$

Y sustituyendo en la ecuación (2.3.47) se tendrá:

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \frac{1}{Det[\mathbf{J}_2]} [\mathbf{C}] \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.3.53)$$

Donde:

$$[\mathbf{C}] = (cof[\mathbf{J}_2])^T [\mathbf{J}_1] \quad (2.3.54)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}] &= \begin{bmatrix} U_{5y}A_z - U_{5z}A_y & U_{4z}A_y - U_{4y}A_z & U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y} \\ U_{5z}A_x - U_{5x}A_y & U_{4x}A_z - U_{4z}A_x & U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z} \\ U_{5x}A_y - U_{5y}A_x & U_{4y}A_x - U_{4x}A_y & U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_x & U_{2x} & U_{3x} \\ B_y & U_{2y} & U_{3y} \\ B_z & U_{2z} & U_{3z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_{5y}A_z - U_{5z}A_y & U_{5z}A_x - U_{5x}A_y & U_{5x}A_y - U_{5y}A_x \\ U_{4z}A_y - U_{4y}A_z & U_{4x}A_z - U_{4z}A_x & U_{4y}A_x - U_{4x}A_y \\ U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y} & U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z} & U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x & U_{2x} & U_{3x} \\ B_y & U_{2y} & U_{3y} \\ B_z & U_{2z} & U_{3z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

$$C_{11} = B_x (U_{5y}A_z - U_{5z}A_y) + B_y (U_{5z}A_x - U_{5x}A_y) + B_z (U_{5x}A_y - U_{5y}A_x) \quad (2.3.56)$$

$$C_{12} = U_{2x} (U_{5y}A_z - U_{5z}A_y) + U_{2y} (U_{5z}A_x - U_{5x}A_y) + U_{2z} (U_{5x}A_y - U_{5y}A_x) \quad (2.3.57)$$

$$C_{13} = U_{3x} (U_{5y}A_z - U_{5z}A_y) + U_{3y} (U_{5z}A_x - U_{5x}A_y) + U_{3z} (U_{5x}A_y - U_{5y}A_x) \quad (2.3.58)$$

$$C_{21} = B_x (U_{4z}A_y - U_{4y}A_z) + B_y (U_{4x}A_z - U_{4z}A_x) + B_z (U_{4y}A_x - U_{4x}A_y) \quad (2.3.59)$$

$$C_{22} = U_{2x} (U_{4z}A_y - U_{4y}A_z) + U_{2y} (U_{4x}A_z - U_{4z}A_x) + U_{2z} (U_{4y}A_x - U_{4x}A_y) \quad (2.3.60)$$

$$C_{23} = U_{3x} (U_{4z}A_y - U_{4y}A_z) + U_{3y} (U_{4x}A_z - U_{4z}A_x) + U_{3z} (U_{4y}A_x - U_{4x}A_y) \quad (2.3.61)$$

$$C_{31} = B_x (U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y}) + B_y (U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z}) + B_z (U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x}) \quad (2.3.62)$$

$$C_{32} = U_{2x} (U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y}) + U_{2y} (U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z}) + U_{2z} (U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x}) \quad (2.3.63)$$

$$C_{33} = U_{3x} (U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y}) + U_{3y} (U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z}) + U_{3z} (U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x}) \quad (2.3.64)$$

Al multiplicar la matriz $[\mathbf{C}]$ por el vector \mathbf{q}_τ se obtiene:

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \frac{1}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.3.65)$$

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \frac{1}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \begin{pmatrix} C_{11}\dot{\phi} + C_{12}\dot{\eta} + C_{13}\dot{\mu} \\ C_{21}\dot{\phi} + C_{22}\dot{\eta} + C_{23}\dot{\mu} \\ C_{31}\dot{\phi} + C_{32}\dot{\eta} + C_{33}\dot{\mu} \end{pmatrix}^T \quad (2.3.66)$$

De manera que:

$$\dot{\psi}(\dot{\phi}, \dot{\eta}, \dot{\mu}) = \frac{1}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \begin{pmatrix} C_{11}\dot{\phi} + C_{12}\dot{\eta} + C_{13}\dot{\mu} \\ C_{21}\dot{\phi} + C_{22}\dot{\eta} + C_{23}\dot{\mu} \\ C_{31}\dot{\phi} + C_{32}\dot{\eta} + C_{33}\dot{\mu} \end{pmatrix}^T \mathbf{i} \quad (2.3.67)$$

$$= \frac{C_{11}\dot{\phi} + C_{12}\dot{\eta} + C_{13}\dot{\mu}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \quad (2.3.68)$$

$$\dot{\psi} = k_1\dot{\phi} + k_2\dot{\eta} + k_3\dot{\mu} \quad (2.3.69)$$

$$\dot{\alpha}(\dot{\phi}, \dot{\eta}, \dot{\mu}) = \frac{1}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \begin{pmatrix} C_{11}\dot{\phi} + C_{12}\dot{\eta} + C_{13}\dot{\mu} \\ C_{21}\dot{\phi} + C_{22}\dot{\eta} + C_{23}\dot{\mu} \\ C_{31}\dot{\phi} + C_{32}\dot{\eta} + C_{33}\dot{\mu} \end{pmatrix}^T \mathbf{j} \quad (2.3.70)$$

$$= \frac{C_{21}\dot{\phi} + C_{22}\dot{\eta} + C_{23}\dot{\mu}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \quad (2.3.71)$$

$$\dot{\alpha} = k_4\dot{\phi} + k_5\dot{\eta} + k_6\dot{\mu} \quad (2.3.72)$$

Y los coeficientes de influencia serán:

$$k_1 = \frac{C_{11}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \quad k_2 = \frac{C_{12}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \quad k_3 = \frac{C_{13}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \quad (2.3.73)$$

$$k_4 = \frac{C_{21}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \quad k_5 = \frac{C_{22}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]} \quad k_6 = \frac{C_{23}}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]}$$

2.4. Cinemática de los engranes

El diagrama de la imagen (*Fig. 2.5*) muestra una representación simplificada del mecanismo esférico con engranes cónicos. En este mecanismo el movimiento del eslabón **1** está determinado por la interacción de los engranes **A** y **B**. El movimiento del eslabón **2** está determinado por la interacción de los engranes **E**, **F1** y del eslabón **1** con los engranes **D2**, **G** y **H**, encontrándose **H** acoplado al eslabón **2** y siendo **F1** y **F2** un mismo cuerpo. Por último, el movimiento del eslabón **3** se determina con la interacción de los engranes **C**, **D1** y de los eslabones **1** y **2** con los engranes **F2**, **I**, **J**, **K** y **L**. Este último engrane (**L**) está acoplado al eslabón **3**. **D1** y **D2** son un mismo cuerpo.

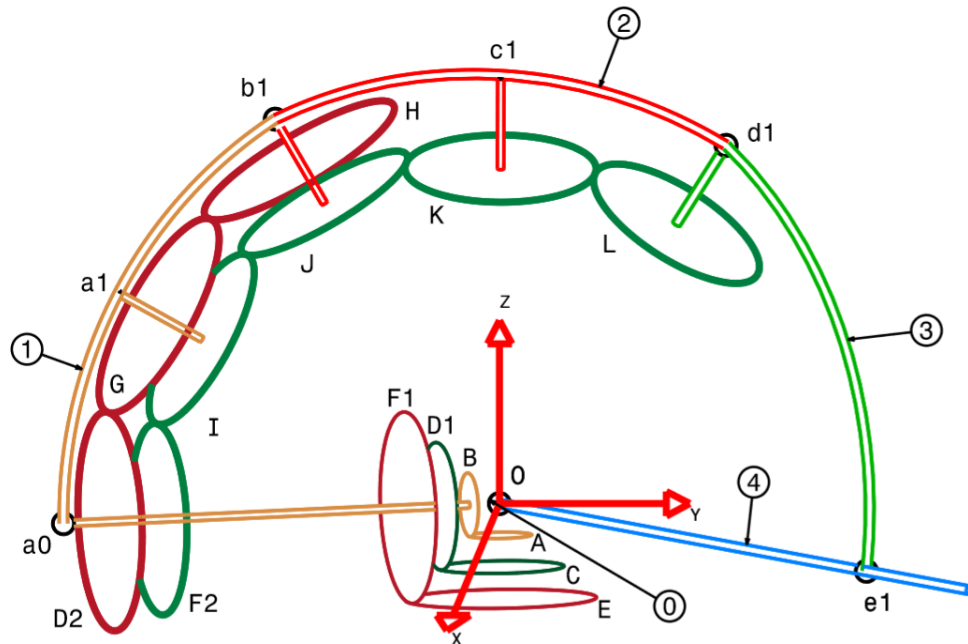


Figura 2.5: Mecanismo esférico de 5 barras con engranajes cónicos planetarios

En esta sección se determinan las rotaciones de los engranes **A**, **C**, **E** en función de los desplazamientos angulares conocidos de los eslabones **1**, **2**, **3**, los cuales se muestran en diagrama (*Fig. 2.5*). Los diagramas siguientes (*Fig. 2.7 y 2.8*) muestran los ángulos ρ_A , ρ_B , ρ_{D2} , ρ_{F2} , ρ_G , ρ_I , ρ_H , ρ_J , ρ_K y ρ_L , de las generatrices de los conos para los engranes cónicos.

Para definir la interacción de un sistema de engranajes planetarios (*Fig. 2.6*) se puede emplear la siguiente expresión (*Cuenca, 2015*):

$$\frac{\dot{\theta}_{k+1} - \dot{\theta}_k}{\dot{\theta}_{k-1} - \dot{\theta}_k} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{k-1})}{\text{Sen}(\rho_{k+1})} \quad (2.4.1)$$

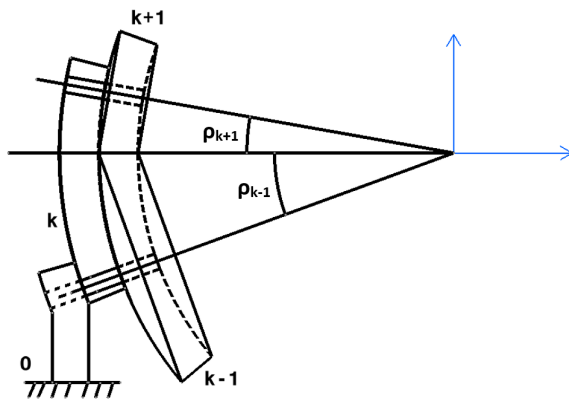


Figura 2.6: Ángulos ρ de un sistema de engranes cónicos

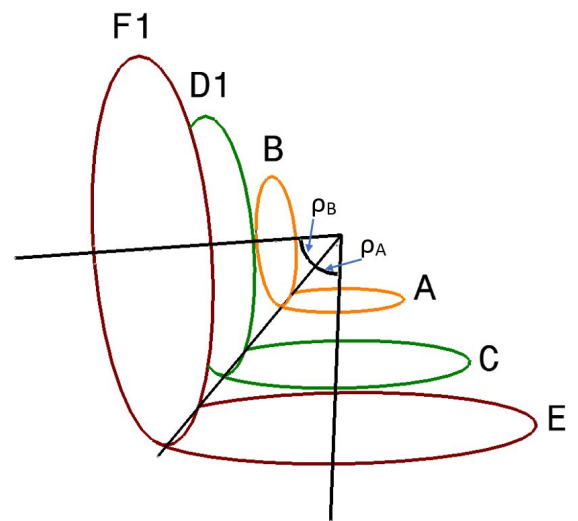


Figura 2.7: Ángulos ρ de engranes cónicos A y B

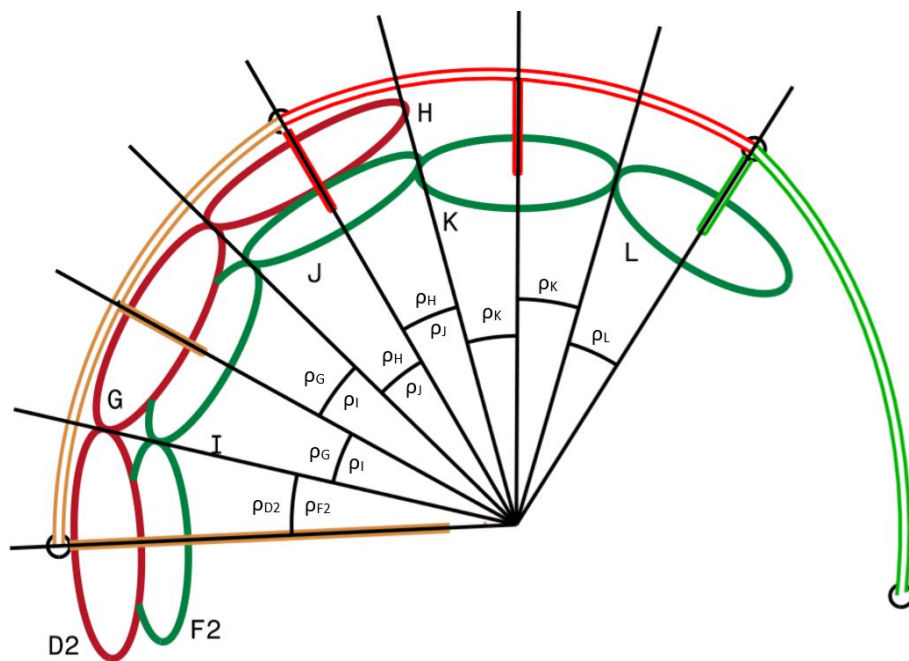


Figura 2.8: Ángulos ρ de engranes cónicos acoplados a eslabones

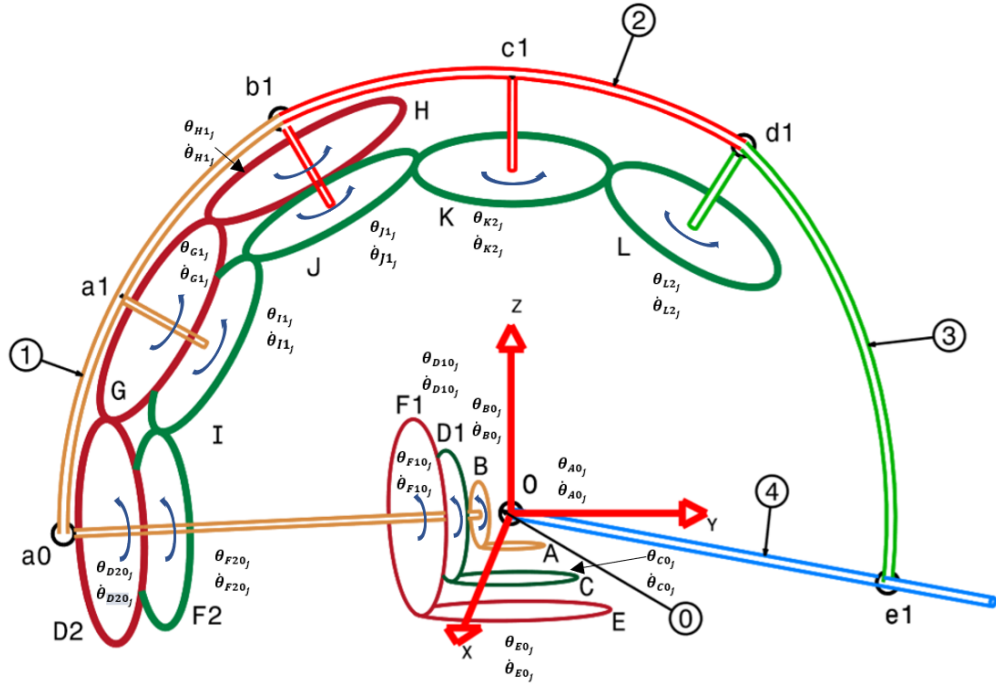


Figura 2.9: Desplazamientos y velocidades angulares de los engranes

Para el eslabón **1** se puede aplicar directamente la ecuación anterior para determinar la velocidad angular $\dot{\theta}_{A0}$:

$$\frac{\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_0}{\dot{\theta}_A - \dot{\theta}_0} = \frac{\dot{\theta}_{B0}}{\dot{\theta}_{A0}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_A)}{\text{Sen}(\rho_B)} \quad (2.4.2)$$

Donde:

$$\dot{\theta}_B = \dot{\phi} \quad (2.4.3)$$

$$\rho_A = \rho_B \quad (2.4.4)$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (2.4.5)$$

Por lo que:

$$\dot{\theta}_A = -\dot{\phi} \quad (2.4.6)$$

Para el eslabón **2** se define primero la ecuación que determina la relación entre los engranes **D2** y **G**:

$$\frac{\dot{\theta}_G - \dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_{D2} - \dot{\theta}_1} = \frac{\dot{\theta}_{G1}}{\dot{\theta}_{D21}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{D2})}{\text{Sen}(\rho_G)} = -R_{n1} \quad (2.4.7)$$

Y la ecuación de coaxialidad en **a0**:

$$\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{1D2} + \dot{\theta}_{D20} \quad (2.4.8)$$

Donde:

$$\dot{\theta}_{D21} = -\dot{\theta}_{1D2} \quad (2.4.9)$$

Con esto podemos despejar $\dot{\theta}_{D21}$:

$$\dot{\theta}_{D21} = \dot{\theta}_{D20} - \dot{\theta}_{10} \quad (2.4.10)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.10) en la ecuación inicial (2.4.7) y despejando obtenemos:

$$\frac{\dot{\theta}_{G1}}{\dot{\theta}_{D20} - \dot{\theta}_{10}} = -R_{n1} \quad (2.4.11)$$

$$\dot{\theta}_{G1} = -R_{n1} (\dot{\theta}_{D20} - \dot{\theta}_{10}) \quad (2.4.12)$$

La siguiente ecuación determina la relación entre los engranes **G** y **H**:

$$\frac{\dot{\theta}_{H1}}{\dot{\theta}_{G1}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_G)}{\text{Sen}(\rho_H)} = -R_{n2} \quad (2.4.13)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.12) en la ecuación (2.4.13) y despejando $\dot{\theta}_{H1}$:

$$\frac{\dot{\theta}_{H1}}{-R_{n1} (\dot{\theta}_{D20} - \dot{\theta}_{10})} = -R_{n2} \quad (2.4.14)$$

$$\dot{\theta}_{H1} = R_{n1}R_{n2} (\dot{\theta}_{D20} - \dot{\theta}_{10}) \quad (2.4.15)$$

Se sabe que:

$$\dot{\theta}_{H1} = \dot{\eta} \quad (2.4.16)$$

$$\dot{\theta}_{10} = \dot{\phi} \quad (2.4.17)$$

Por lo que se despeja $\dot{\theta}_{D20}$ de la ecuación (2.4.15):

$$\dot{\theta}_{D20} = \frac{\dot{\eta}}{R_{n1}R_{n2}} + \dot{\phi} \quad (2.4.18)$$

Como $\dot{\theta}_{D20} = \dot{\theta}_{D10}$ la relación para obtener $\dot{\theta}_{C0}$ es la siguiente:

$$\frac{\dot{\theta}_{D10}}{\dot{\theta}_{C0}} = \frac{\dot{\theta}_{D1} - \dot{\theta}_0}{\dot{\theta}_C - \dot{\theta}_0} = -\frac{\text{Sen}(\rho_C)}{\text{Sen}(\rho_{D1})} \quad (2.4.19)$$

Donde:

$$\rho_C = \rho_{D1} \quad (2.4.20)$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (2.4.21)$$

Por lo que:

$$\dot{\theta}_{C0} = -\dot{\theta}_{D10} \quad (2.4.22)$$

$$\dot{\theta}_{C0} = -\left(\frac{\dot{\eta}}{R_{n1}R_{n2}} + \dot{\phi} \right) \quad (2.4.23)$$

$$\dot{\theta}_C - \dot{\theta}_0 = -\left(\frac{\dot{\eta}}{R_{n1}R_{n2}} + \dot{\phi} \right) \quad (2.4.24)$$

$$\dot{\theta}_C = -\left(\frac{\dot{\eta}}{R_{n1}R_{n2}} + \dot{\phi} \right) \quad (2.4.25)$$

Para el eslabón **3** se define primero la ecuación que determina la relación entre los engranes **F2** e **I**:

$$\frac{\dot{\theta}_I - \dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_{F2} - \dot{\theta}_1} = \frac{\dot{\theta}_{I1}}{\dot{\theta}_{F21}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_{F2})}{\text{Sen}(\rho_I)} = -R_{n3} \quad (2.4.26)$$

Y la ecuación de coaxialidad en **a0**:

$$\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{1F_2} + \dot{\theta}_{F_20} \quad (2.4.27)$$

Donde:

$$\dot{\theta}_{F_21} = -\dot{\theta}_{1F_2} \quad (2.4.28)$$

Con esto podemos despejar $\dot{\theta}_{D_21}$:

$$\dot{\theta}_{F_21} = \dot{\theta}_{F_20} - \dot{\theta}_{10} \quad (2.4.29)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.29) en la ecuación (2.4.26) y despejando obtenemos:

$$\frac{\dot{\theta}_{I1}}{\dot{\theta}_{F_20} - \dot{\theta}_{10}} = -R_{n3} \quad (2.4.30)$$

$$\dot{\theta}_{I1} = -R_{n3} (\dot{\theta}_{F_20} - \dot{\theta}_{10}) \quad (2.4.31)$$

La siguiente ecuación determina la relación entre los engranes **I** y **J**:

$$\frac{\dot{\theta}_{J1}}{\dot{\theta}_{I1}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_I)}{\text{Sen}(\rho_J)} = -R_{n4} \quad (2.4.32)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.31) en la ecuación (2.4.32) y despejando $\dot{\theta}_{J1}$:

$$\frac{\dot{\theta}_{J1}}{-R_{n3} (\dot{\theta}_{F_20} - \dot{\theta}_{10})} = -R_{n4} \quad (2.4.33)$$

$$\dot{\theta}_{J1} = R_{n3}R_{n4} (\dot{\theta}_{F_20} - \dot{\theta}_{10}) \quad (2.4.34)$$

Con la siguiente ecuación se determina la relación entre los engranes **J** y **K**:

$$\frac{\dot{\theta}_{K2}}{\dot{\theta}_{J2}} = -\frac{\text{Sen}(\rho_J)}{\text{Sen}(\rho_K)} = -R_{n5} \quad (2.4.35)$$

Y se define la ecuación de coaxialidad en **b1**:

$$\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{2J} + \dot{\theta}_{J1} \quad (2.4.36)$$

Donde:

$$\dot{\theta}_{2J} = -\dot{\theta}_{J2} \quad (2.4.37)$$

$$\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{H1} \quad (2.4.38)$$

Con se puede despejar $\dot{\theta}_{J2}$:

$$\dot{\theta}_{J2} = \dot{\theta}_{J1} - \dot{\theta}_{H1} \quad (2.4.39)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.39) en la ecuación (2.4.35) y despejando obtenemos:

$$\frac{\dot{\theta}_{K2}}{\dot{\theta}_{J1} - \dot{\theta}_{H1}} = -R_{n5} \quad (2.4.40)$$

$$\dot{\theta}_{K2} = -R_{n5} (\dot{\theta}_{J1} - \dot{\theta}_{H1}) \quad (2.4.41)$$

Con la siguiente ecuación podemos definir la relación de los engranes **K** y **L**:

$$\frac{\dot{\theta}_{L2}}{\dot{\theta}_{K2}} = -\frac{Sen(\rho_K)}{Sen(\rho_L)} = -R_{n6} \quad (2.4.42)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.41) en la ecuación (2.4.42) y despejando obtenemos:

$$\frac{\dot{\theta}_{L2}}{-R_{n5}(\dot{\theta}_{J1} - \dot{\theta}_{H1})} = -R_{n6} \quad (2.4.43)$$

$$\dot{\theta}_{L2} = R_{n5}R_{n6}(\dot{\theta}_{J1} - \dot{\theta}_{H1}) \quad (2.4.44)$$

Ahora se puede sustituir la ecuación (2.4.34) en la ecuación anterior para obtener:

$$\dot{\theta}_{L2} = R_{n5}R_{n6}(R_{n3}R_{n4}(\dot{\theta}_{F20} - \dot{\theta}_{10}) - \dot{\theta}_{H1}) \quad (2.4.45)$$

$$\dot{\theta}_{L2} = R_{n3}R_{n4}R_{n5}R_{n6}\dot{\theta}_{F20} - R_{n3}R_{n4}R_{n5}R_{n6}\dot{\theta}_{10} - R_{n5}R_{n6}\dot{\theta}_{H1} \quad (2.4.46)$$

El paso siguiente es despejar $\dot{\theta}_{F20}$:

$$\dot{\theta}_{F20} = \frac{\dot{\theta}_{L2}}{R_{n3}R_{n4}R_{n5}R_{n6}} + \frac{\dot{\theta}_{H1}}{R_{n3}R_{n4}} + \dot{\theta}_{10} \quad (2.4.47)$$

Donde:

$$\dot{\theta}_{10} = \dot{\phi} \quad (2.4.48)$$

$$\dot{\theta}_{H1} = \dot{\eta} \quad (2.4.49)$$

$$\dot{\theta}_{L2} = \dot{\mu} \quad (2.4.50)$$

$$R_{31} = R_{n3}R_{n4}R_{n5}R_{n6} \quad (2.4.51)$$

$$R_{32} = R_{n3}R_{n4} \quad (2.4.52)$$

Por lo que:

$$\dot{\theta}_{F20} = \frac{\dot{\mu}}{R_{31}} + \frac{\dot{\eta}}{R_{32}} + \dot{\phi} \quad (2.4.53)$$

Como $\dot{\theta}_{F20} = \dot{\theta}_{F10}$ la relación para obtener $\dot{\theta}_{E0}$ es la siguiente:

$$\frac{\dot{\theta}_{F10}}{\dot{\theta}_{E0}} = \frac{\dot{\theta}_{F1} - \dot{\theta}_0}{\dot{\theta}_E - \dot{\theta}_0} = -\frac{Sen(\rho_E)}{Sen(\rho_{F1})} \quad (2.4.54)$$

Donde:

$$\rho_E = \rho_{F1} \quad (2.4.55)$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (2.4.56)$$

Por lo que:

$$\dot{\theta}_{E0} = -\dot{\theta}_{F_10} \quad (2.4.57)$$

$$\dot{\theta}_{E0} = -\left(\frac{\dot{\mu}}{R_{31}} + \frac{\dot{\eta}}{R_{32}} + \dot{\phi}\right) \quad (2.4.58)$$

$$\dot{\theta}_E - \dot{\theta}_0 = -\left(\frac{\dot{\mu}}{R_{31}} + \frac{\dot{\eta}}{R_{32}} + \dot{\phi}\right) \quad (2.4.59)$$

$$\dot{\theta}_E = -\left(\frac{\dot{\mu}}{R_{31}} + \frac{\dot{\eta}}{R_{32}} + \dot{\phi}\right) \quad (2.4.60)$$

Ya que se tiene las ecuaciones diferenciales de los desplazamientos angulares $\dot{\theta}_A$, $\dot{\theta}_C$, $\dot{\theta}_E$, es posible integrarlas para obtener los desplazamientos angulares θ_A , θ_C , θ_E , considerando que los desplazamientos angulares iniciales son nulos.

Para el engrane **A**:

$$\frac{d\theta_A}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.4.61)$$

$$d\theta_A = -d\phi \quad (2.4.62)$$

$$\int_{\theta_{A_0}}^{\theta_{A_j}} d\theta_A = -\int_{\phi_0}^{\phi_j} d\phi \quad (2.4.63)$$

$$\theta_{A_j} - \theta_{A_0} = -\phi_j + \phi_0 \quad (2.4.64)$$

Donde:

$$\theta_{A_0} = 0[\text{rad}] \quad (2.4.65)$$

$$\phi_0 = 0[\text{rad}] \quad (2.4.66)$$

Por lo que:

$$\theta_{A_j} = -\phi_j \quad (2.4.67)$$

Para el engrane **C**:

$$\frac{d\theta_C}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{R_{n1}R_{n2}} + \phi\right) \quad (2.4.68)$$

$$d\theta_C = -\frac{1}{R_{n1}R_{n2}}\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\phi}{dt} \quad (2.4.69)$$

$$\int_{\theta_{C_0}}^{\theta_{C_j}} d\theta_C = -\frac{1}{R_{n1}R_{n2}}\int_{\eta_0}^{\eta_j} d\eta - \int_{\phi_0}^{\phi_j} d\phi \quad (2.4.70)$$

$$\theta_{C_j} - \theta_{C_0} = -\frac{1}{R_{n1}R_{n2}}(\eta_j - \eta_0) + (-\phi_j + \phi_0) \quad (2.4.71)$$

Donde:

$$\theta_{C_0} = 0[\text{rad}] \quad (2.4.72)$$

$$\phi_0 = 0[\text{rad}] \quad (2.4.73)$$

$$\eta_0 = 0[\text{rad}] \quad (2.4.74)$$

Por lo que:

$$\theta_{C_j} = -\frac{\eta}{R_{n1}R_{n2}} - \phi_j \quad (2.4.75)$$

Para el engrane **E**:

$$\frac{d\theta_E}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{R_{31}} + \frac{\eta}{R_{32}} + \phi \right) \quad (2.4.76)$$

$$d\theta_E = -\frac{1}{R_{31}} \frac{d\mu}{dt} - \frac{1}{R_{32}} \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\phi}{dt} \quad (2.4.77)$$

$$\int_{\theta_{E_0}}^{\theta_{E_j}} d\theta_E = -\frac{1}{R_{31}} \int_{\mu_0}^{\mu_j} d\mu - \frac{1}{R_{32}} \int_{\eta_0}^{\eta_j} d\eta - \int_{\phi_0}^{\phi_j} d\phi \quad (2.4.78)$$

$$\theta_{E_j} - \theta_{E_0} = -\frac{1}{R_{31}}(\mu_j - \mu_0) - \frac{1}{R_{32}}(\eta_j - \eta_0) + (-\phi_j + \phi_0) \quad (2.4.79)$$

Donde:

$$\theta_{E_0} = 0[rad] \quad (2.4.80)$$

$$\phi_0 = 0[rad] \quad (2.4.81)$$

$$\eta_0 = 0[rad] \quad (2.4.82)$$

$$\mu_0 = 0[rad] \quad (2.4.83)$$

Por lo que:

$$\theta_{E_j} = -\frac{\mu_j}{R_{31}} - \frac{\eta_j}{R_{32}} - \phi_j \quad (2.4.84)$$

De esta misma manera pueden obtenerse los desplazamientos angulares θ_{B_0} , $\theta_{F_{10}}$, $\theta_{D_{10}}$, θ_{G_1} , θ_{I_1} , θ_{J_1} y θ_{K_2} , correspondientes al resto de los engranes:

$$\theta_{B_{0j}} = \phi_j \quad (2.4.85)$$

$$\theta_{D_{10j}} = \frac{\eta_j}{R_{n1}R_{n2}} + \phi_j \quad (2.4.86)$$

$$\theta_{F_{10j}} = \frac{\mu_j}{R_{31}} + \frac{\eta_j}{R_{32}} + \phi_j \quad (2.4.87)$$

$$\theta_{G_1} = -R_{n1}(\theta_{D_{10j}} - \phi_j) \quad (2.4.88)$$

$$\theta_{I_1} = -R_{n3}(\theta_{F_{10j}} - \phi_j) \quad (2.4.89)$$

$$\theta_{J_1} = R_{n3}R_{n4}(\theta_{F_{10j}} - \phi_j) \quad (2.4.90)$$

$$\theta_{K_2} = -R_{n5}(R_{n3}R_{n4}(\theta_{F_{10j}} - \phi_j) - \eta_j) \quad (2.4.91)$$

Finalmente se obtienen los desplazamientos angulares θ_{G_1} , θ_{I_1} , θ_{J_1} y θ_{K_2} en función de los desplazamientos angulares de los eslabones η_j y μ_j .

$$\theta_{G_1} = -R_{n1} \left(\frac{\eta_j}{R_{n1}R_{n2}} \right) \quad (2.4.92)$$

$$\theta_{I_1} = -R_{n3} \left(\frac{\mu_j}{R_{31}} + \frac{\eta_j}{R_{32}} \right) \quad (2.4.93)$$

$$\theta_{J_1} = R_{n3}R_{n4} \left(\frac{\mu_j}{R_{31}} + \frac{\eta_j}{R_{32}} \right) \quad (2.4.94)$$

$$\theta_{K_2} = -R_{n5} \left(R_{n3}R_{n4} \left(\frac{\mu_j}{R_{31}} + \frac{\eta_j}{R_{32}} \right) - \eta_j \right) \quad (2.4.95)$$

Capítulo 3

Síntesis cinemática del mecanismo

3.1. Introducción

En un mecanismo plano todos los ejes de rotación de sus eslabones son estrictamente normales al plano que contiene al mecanismo, de manera análoga en un mecanismo esférico los ejes de rotación de los eslabones deben ser estrictamente normales a la superficie de la esfera que contiene al mecanismo y por esto mismo serán congruentes en el centro de esta. En el siguiente diagrama (*Fig. 3.1*) se aprecia la congruencia de los ejes de rotación en el centro de la esfera (*McCarthy & Soh, 2011*).

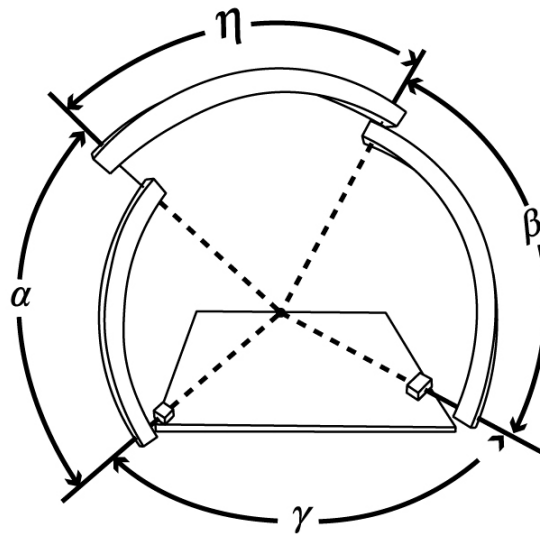


Figura 3.1: Ejes de rotación de un mecanismo esférico

Para efectuar la síntesis cinemática del mecanismo se aplicará el método de conducción de cuerpo rígido, el cual requiere de una sucesión de puntos llamados puntos de precisión. La finalidad de la síntesis será que el extremo de interés del mecanismo (efecto final) sea capaz de pasar a través de todos los puntos de precisión.

3.2. Transformaciones lineales

Una transformación lineal es una función cuyo dominio y codominio son espacios vectoriales, y nos lleva de uno al otro, sin embargo, para que una función sea una transformación lineal, esta debe cumplir con la siguiente condición:

$F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ será una transformación lineal si:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.2.1)$$

y

$$\mathbf{F}(k, \mathbf{v}) = k * \mathbf{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall k \in \mathbb{R} \quad (3.2.2)$$

Además, las propiedades de las transformaciones lineales son:

1-Debe existir un vector nulo tal que:

$$\mathbf{T}(0\mathbf{v}) = \mathbf{0}_w \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{T}(0\mathbf{v}) = \mathbf{T}(0 * \mathbf{v}) = 0 * \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_w \quad (3.2.4)$$

2-La imagen del negativo de un vector debe ser igual al opuesto del mismo vector:

$$\mathbf{T}(-\mathbf{v}) = -\mathbf{T}(\mathbf{v}) \quad (3.2.5)$$

3-Transporta combinaciones lineales de un espacio vectorial a otro sin modificar las magnitudes escalares de la combinación lineal. Considerando "n" vectores del espacio vectorial " \mathbf{V} ":

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V} \quad (3.2.6)$$

Se puede efectuar una combinación lineal:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad (3.2.7)$$

Donde:

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (3.2.8)$$

Y al aplicar la transformación lineal "F" se debe cumplir que:

$$\mathbf{F}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 \mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 \mathbf{F}(\mathbf{v}_2) + \dots + \alpha_n \mathbf{F}(\mathbf{v}_n) \quad (3.2.9)$$

3.2.1. Matrices de rotación espacial

Estas matrices representan las rotaciones básicas de un vector sobre los tres ejes coordenados y nos permiten orientar el vector por medio de una sucesión de estas, la posición final del vector estará determinada por el orden de α , β , γ de las rotaciones (*Suh&Radcliffe, 1978*).

$$[\mathbf{R}_{\alpha, \mathbf{z}}] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sen}(\alpha) & 0 \\ \text{Sen}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

$$[\mathbf{R}_{\beta, \mathbf{y}}] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta) & 0 & \text{Sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\beta) & 0 & \text{Cos}(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

$$[\mathbf{R}_{\gamma, \mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\gamma) & -\text{Sen}(\gamma) \\ 0 & \text{Sen}(\gamma) & \text{Cos}(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

3.2.2. Matriz de rotación Phi

Esta es una matriz de rotación que actúa con un ángulo “ ϕ ” sobre un eje cualquiera “ \mathbf{u} ”, el cual es un vector unitario de componentes (u_x , u_y , u_z).

$$[\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} u_x^2 V\phi + c\phi & u_x u_y V\phi - u_z s\phi & u_x u_z V\phi + u_y s\phi \\ u_x u_y V\phi + u_z s\phi & u_y^2 V\phi + c\phi & u_y u_z V\phi - u_x s\phi \\ u_x u_z V\phi - u_y s\phi & u_y u_z V\phi + u_x s\phi & u_z^2 V\phi + c\phi \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

Donde:

$$V\phi = \text{vers}\phi = 1 - \text{Cos}\phi \quad (3.2.14)$$

$$s\phi = \text{Sen}\phi \quad (3.2.15)$$

$$c\phi = \text{Cos}\phi \quad (3.2.16)$$

3.2.3. Matriz homogénea

Una transformación homogénea es una matriz de dimensión 4X4 que se utiliza para representar tanto la posición como la orientación de un sistema trasladado y rotado con respecto a un sistema inercial, esta transforma un vector de componentes variables y su representación en el sistema inercial.

La matriz está formada por un término de traslación \mathbf{P}_{3X1} , uno de rotación \mathbf{R}_{3X3} , uno de escalamiento \mathbf{W}_{1X1} y uno de perspectiva \mathbf{F}_{1X3} .

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \textit{Rotación} & \textit{Traslación} \\ \textit{Perspectiva} & \textit{Escala} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & \mathbf{P}_{3x3} \\ \mathbf{F}_{1x3} & W_{1x1} \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

Para el uso de matrices homogéneas en el estudio de mecanismos, generalmente se tiene:

$$\mathbf{F}_{1x3} = [0, 0, 0] \quad y \quad W_{1x1} = 1 \quad (3.2.18)$$

La traslación puede ser definida como:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

Siendo:

$$p = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \quad y \quad \mathbf{T}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

Las rotaciones sobre los ejes coordenados del sistema inercial O_{xyz} se definen como:

$$[\mathbf{T}_{\alpha,z}] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sen}(\alpha) & 0 & 0 \\ \text{Sen}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

$$[\mathbf{T}_{\beta,y}] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta) & 0 & \text{Sen}(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{Sen}(\beta) & 0 & \text{Cos}(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

$$[\mathbf{T}_{\gamma,x}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\gamma) & -\text{Sen}(\gamma) & 0 \\ 0 & \text{Sen}(\gamma) & \text{Cos}(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

(3.1)

Sin embargo, la matriz Phi también puede ser empleada de la siguiente manera:

$$[\mathbf{T}_{\phi,\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} u_x^2 V\phi + c\phi & u_x u_y V\phi - u_z s\phi & u_x u_z V\phi + u_y s\phi & 0 \\ u_x u_y V\phi + u_z s\phi & u_y^2 V\phi + c\phi & u_y u_z V\phi - u_x s\phi & 0 \\ u_x u_z V\phi - u_y s\phi & u_y u_z V\phi + u_x s\phi & u_z^2 V\phi + c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.24)$$

3.2.4. Matriz de desplazamiento espacial

Partiendo del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio se puede escribir (*Suh & Radcliffe, 1978*):

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2) &= [\mathbf{R}](\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) \\ \mathbf{q}_2 &= [\mathbf{R}]\mathbf{q}_1 + (\mathbf{p}_2 - [\mathbf{R}]\mathbf{p}_1) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}] & (\mathbf{p}_2 - [\mathbf{R}]\mathbf{p}_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

$$\begin{bmatrix} q_{2x} \\ q_{2y} \\ q_{2z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.27)$$

$$(\mathbf{q}_2) = [\mathbf{D}_{12}](\mathbf{q}_1) \quad (3.2.28)$$

Para este caso los componentes a_{ij} representan los componentes de la matriz Phi o cualquier otra matriz de rotación.

La ecuación 3.2.28 representa la posición relativa del cuerpo 2 respecto del cuerpo 1, reescribiendo esta ecuación para la j -ésima posición quedaría como:

$$(\mathbf{q}_j) = [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{q}_j) \quad (3.2.29)$$

El diagrama siguiente (*Fig. 3.2*) ejemplifica el efecto de una matriz de desplazamiento sobre un cuerpo rígido en el plano.

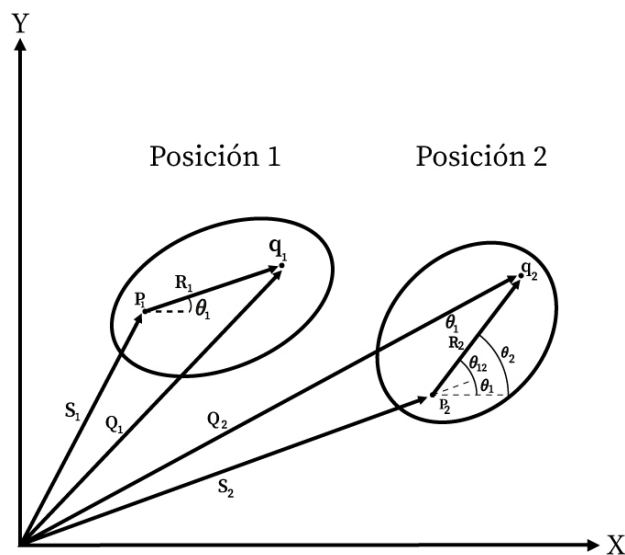


Figura 3.2: Desplazamiento plano de un cuerpo rígido

3.3. Síntesis por método de matrices de desplazamiento

La síntesis de **Conducción de Cuerpo Rígido** o de **Generación de Movimiento** consiste en hacer que un cuerpo acoplado sobre algún eslabón del mecanismo (este no debe estar unido a la tierra del mecanismo) pase por puntos específicos llamados puntos de precisión con una orientación específica. Para mecanismos esféricos esto implica la determinación de la primera posición de los posibles ejes de los eslabones en movimiento, estos eslabones deben pasar a través de un arco circular contenido en la superficie de una esfera.

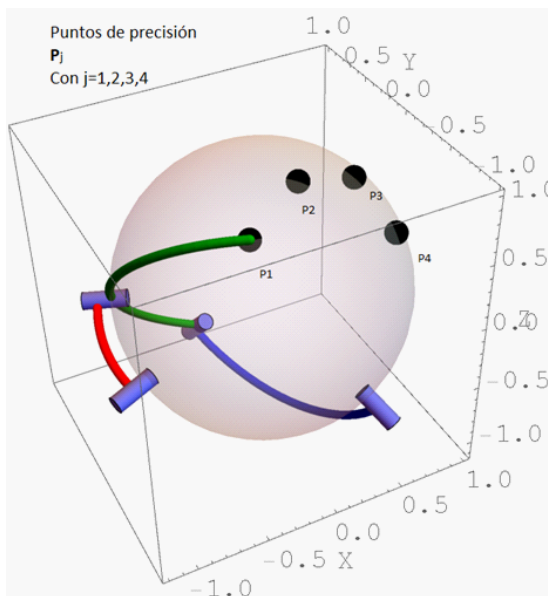


Figura 3.3: Puntos de precisión para síntesis de conducción de cuerpo rígido (Cuenca, 2015)

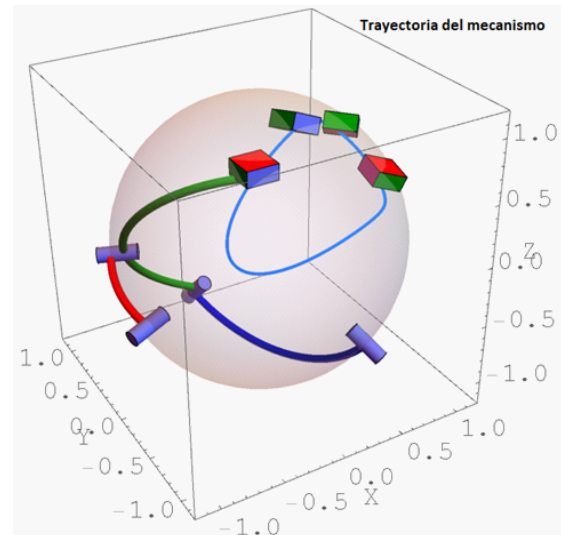


Figura 3.4: Trayectoria obtenida con síntesis de conducción de cuerpo rígido (Cuenca, 2015)

Los modelos anteriores (*Fig. 3.3 y 3.4*) son el resultado de una síntesis de conducción de cuerpo rígido de un mecanismo de cuatro barras esférico con cuatro puntos de precisión.

3.3.1. Diagramas y ecuaciones de diseño

Para formar un eslabón en un mecanismo esférico se requiere de un punto en movimiento (puntos del círculo esférico) y un punto fijo correspondiente (puntos del centro esférico), estos puntos se encuentran sobre ejes que pasan por el origen y el centro de los arcos circulares, su finalidad es la de desplazar el cuerpo en movimiento a través de una serie de posiciones determinadas. La construcción de estos eslabones se ejemplifica con el diagrama siguiente (*Fig. 3.5*).

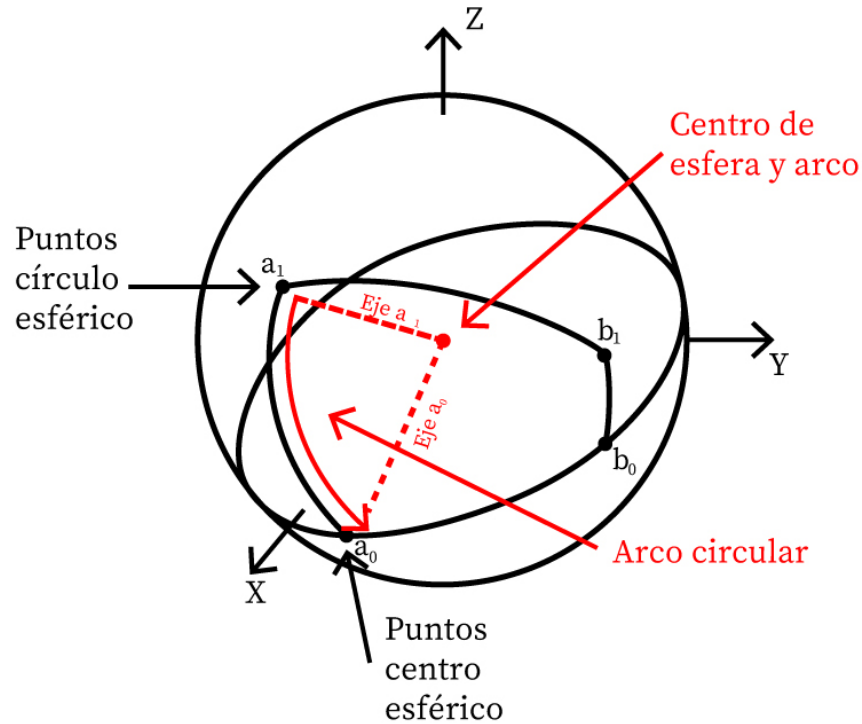


Figura 3.5: Construcción de eslabones para mecanismos esféricos

En resumen, se requiere de tres puntos, el primer punto es necesariamente el centro de la esfera, el segundo punto (punto de centro esférico) se encuentra sobre la superficie de la esfera y será el punto cuyo vector de posición representa el eje sobre el que gira el eslabón, el tercer punto (punto de círculo esférico) también se encuentra sobre la superficie de la esfera y su vector de posición representa otro eje de rotación.

Los eslabones del mecanismo esférico se obtienen de la solución iterativa de un conjunto de ecuaciones de diseño algebraicas no lineales simultáneas.

En el diagrama siguiente (*Fig. 3.6*) se muestran los eslabones del mecanismo y los puntos de sus ejes de rotación, necesarios para realizar la síntesis.

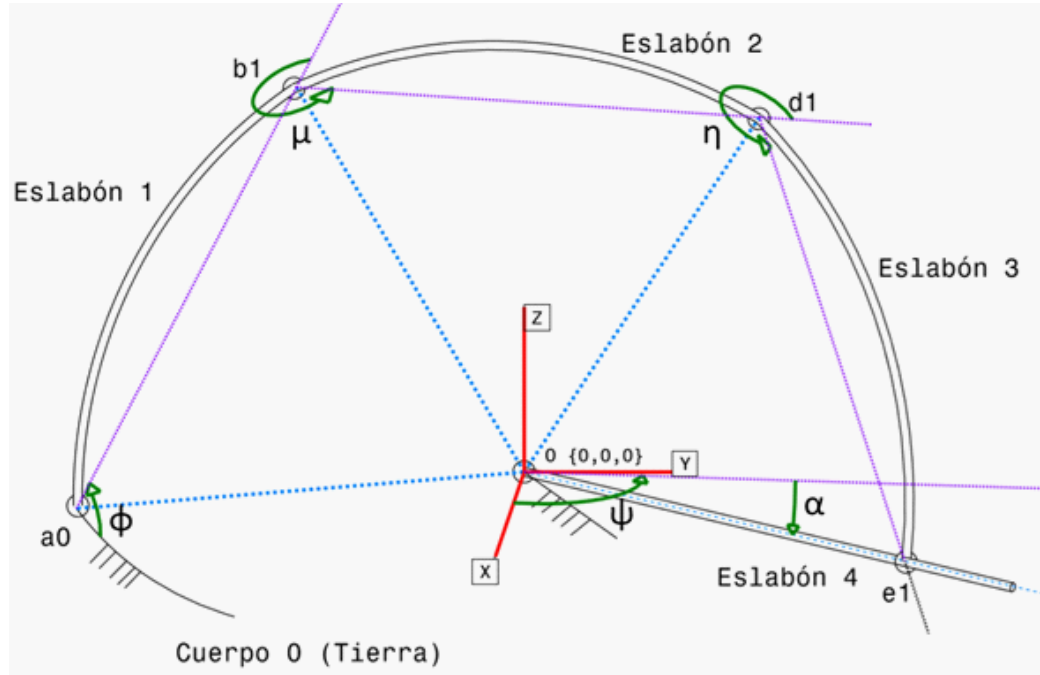


Figura 3.6: Puntos y rotaciones para ecuaciones de diseño

En este diagrama (*Fig. 3.6*) los puntos mostrados representan la posición inicial del mecanismo. Los puntos de precisión empleados fueron obtenidos de las máximas rotaciones promedio de los movimientos de Aducción, Abducción, Flexión, Extensión y Aducción horizontal del hombro humano de tal modo que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 &= [\mathbf{R}_{182^\circ, \mathbf{j}}] \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -0.034899 & 0 & -0.999391 \end{pmatrix} \textit{Posición Inicial} \\
 \mathbf{e}_{12} &= [\mathbf{R}_{-178^\circ, \mathbf{k}}] \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0.034899 & -0.999391 & 0 \end{pmatrix} \textit{Abducción} \\
 \mathbf{e}_{13} &= [\mathbf{R}_{-30^\circ, \mathbf{i}}] \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0.866025 & -0.5 \end{pmatrix} \textit{Aducción} \\
 \mathbf{e}_{14} &= [\mathbf{R}_{178^\circ, \mathbf{k}}] \mathbf{i} = \begin{pmatrix} -0.999391 & 0.034899 & 0 \end{pmatrix} \textit{Flexión} \\
 \mathbf{e}_{15} &= [\mathbf{R}_{40^\circ, \mathbf{j}}] \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0.766044 & 0 & -0.642788 \end{pmatrix} \textit{Extensión} \\
 \mathbf{e}_{16} &= [\mathbf{R}_{130^\circ, \mathbf{j}}] \mathbf{i} = \begin{pmatrix} -0.642788 & 0 & -0.766044 \end{pmatrix} \textit{Media Flexión} \\
 \mathbf{e}_{17} &= [\mathbf{R}_{130^\circ, \mathbf{k}}] \mathbf{j} = \begin{pmatrix} -0.766044 & -0.642788 & 0 \end{pmatrix} \textit{Aducción Horizontal}
 \end{aligned}$$

Con estos puntos las ecuaciones de diseño serán (*Suh & Radcliffe, 1978*):

$$(\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})^T (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j}) = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1)^T (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1) \quad (3.3.1)$$

Donde:

$$(\mathbf{b}_{1j}) = [\mathbf{D}_{1j}] (\mathbf{b}_1) \quad (3.3.2)$$

$$(\mathbf{d}_{1j}) = [\mathbf{E}_{1j}] (\mathbf{d}_1) \quad (3.3.3)$$

y:

$$(\mathbf{b}_1) = (b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}, 1) \quad (3.3.4)$$

$$(\mathbf{d}_1) = (d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}, 1) \quad (3.3.5)$$

$$(\mathbf{e}_{1j}) = (e_{1xj}, e_{1yj}, e_{1zj}, 1) \quad (3.3.6)$$

$$= (\mathbf{e}_{1j}, 1) \quad (3.3.7)$$

$$\mathbf{b}_1 = (b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}) \quad (3.3.8)$$

$$\mathbf{d}_1 = (d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}) \quad (3.3.9)$$

Con estos puntos podemos construir las matrices de desplazamiento siguientes:

$$[\mathbf{D}_{1j}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\phi_{1j}, \mathbf{a}_0}] & (\mathbf{a}_0 - [\mathbf{R}_{\phi_{1j}, \mathbf{a}_0}] \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

$$[\mathbf{E}_{1j}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\eta_{1j}, \mathbf{b}_{1j}}] & (\mathbf{b}_{1j} - [\mathbf{R}_{\eta_{1j}, \mathbf{b}_{1j}}] \mathbf{b}_1) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

Y las ecuaciones de esfera unitaria, las cuales fuerzan a los vectores de posición a tener una magnitud de 1 serán:

$$\mathbf{b}_{1j}^T \mathbf{b}_{1j} = 1 \quad (3.3.12)$$

$$\mathbf{d}_{1j}^T \mathbf{d}_{1j} = 1 \quad (3.3.13)$$

3.3.2. Solución de las ecuaciones de diseño

Las ecuaciones de diseño se construyen con el objetivo de que los vectores que representan a los eslabones del mecanismo mantengan una magnitud constante. Las ecuaciones de diseño se obtienen desde la segunda posición hasta la j -ésima, es decir, para $j = 2, 3, \dots, n$. Donde “ n ” es el número de posiciones para las que se realizará la síntesis y debe coincidir con la cantidad de puntos de precisión. También considerando el número de ecuaciones de diseño “ md ” que se obtienen para $j = 2, 3, \dots, n$, y de ecuaciones de esfera unitaria “ mu ” obtenidas para $j = 1, 2, \dots, n$, podemos saber cuántas ecuaciones “ ns ” tenemos disponibles para realizar la síntesis si se efectúa la siguiente operación:

$$“ns = (md) * (n - 1) + mu * n”.$$

Siendo $md = 1$, y $mu = 2$ y $n = 7$ el número de ecuaciones disponible ns es entonces:

$$\begin{aligned} ns &= (1) * (7 - 1) + 2(7) \\ ns &= 20 \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Tomando en cuenta que las componentes de \mathbf{a}_0 (a_{0x}, a_{0y}, a_{0z}) serán parámetros determinados y que las posiciones de \mathbf{e}_j para $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ serán coincidentes con los puntos de precisión, se tendrá un total de 18 incógnitas:

$$b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}, d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}, \phi_{12}, \phi_{13}, \phi_{14}, \phi_{15}, \phi_{16}, \phi_{17}, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}, \eta_{15}, \eta_{16}, \eta_{17}.$$

Aun así esto resulta un sistema con un total de 20 ecuaciones y 18 incógnitas.

Como el sistema obtenido tiene un mayor número de ecuaciones que de incógnitas, las síntesis puede llevarse a cabo por métodos de optimización (*Suh&Radcliffe, 1978*).

En este proyecto se empleó el comando “**FindMinimum**” de “**Wolfram Mathematica**”. Este comando ofrece una solución buscando un mínimo local para la función “**f**” alrededor del valor determinado de una serie de variables.

Al emplear métodos de optimización se debe definir una función objetivo “**FO(X)**”. Donde $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ y “ n ” es el número de variables independientes para el que existe uno o más puntos \mathbf{X}^* en los que la función es un mínimo. A estos **mínimos locales** les corresponde un conjunto óptimo de variables de diseño y al mínimo local de menor valor se le llamará **mínimo global**.

Para realizar esta síntesis, la primera parte de la función objetivo “ $\mathbf{f}_1(\mathbf{X})$ ” puede ser formada como la suma de los cuadrados del error estructural en la magnitud del eslabón que se extiende desde \mathbf{d}_j hasta \mathbf{e}_j con

$j = 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\mathbf{f}_1 = \sum_{j=2}^7 ((\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})^T (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j}) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1)^T (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1))^2 \quad (3.3.15)$$

La segunda parte de la función objetivo “ $\mathbf{f}_2(\mathbf{X})$ ” puede ser formada como la suma de los cuadrados del error estructural en la magnitud de los vectores de posición de \mathbf{b}_j con $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\mathbf{f}_2 = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{b}_{1j}^T \mathbf{b}_{1j} - 1)^2 \quad (3.3.16)$$

La tercera parte de la función objetivo “ $\mathbf{f}_3(\mathbf{X})$ ” puede ser formada como la suma de los cuadrados del error estructural en la magnitud de los vectores de posición de \mathbf{d}_j con $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\mathbf{f}_3 = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{d}_{1j}^T \mathbf{d}_{1j} - 1)^2 \quad (3.3.17)$$

Finalmente, la función objetivo $\mathbf{FO}(\mathbf{X})$ queda expresada como:

$$\mathbf{FO} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \quad (3.3.18)$$

A continuación, se muestran algunas soluciones obtenidas para la síntesis cinemática:

Solución 1:

$$\begin{array}{lll}
 a_0x = 0.965926 & a_0y = 0 & a_0z = 0.258819 \\
 \\
 b_{1x} = 0.596453 & b_{1y} = 0.415912 & b_{1z} = -0.686484 \\
 d_{1x} = -0.668431 & d_{1y} = -0.00691 & d_{1z} = -0.743742 \\
 \phi_{12} = 0.103466 & \phi_{13} = 0.762497 & \phi_{14} = 1.504361 \\
 \phi_{15} = 0.499897 & \phi_{16} = 0.477501 & \phi_{17} = 1.375927 \\
 \eta_{12} = -1.804412 & \eta_{13} = -0.725671 & \eta_{14} = -0.112568 \\
 \eta_{15} = -1.040816 & \eta_{16} = -0.837723 & \eta_{17} = 0.736064
 \end{array}$$

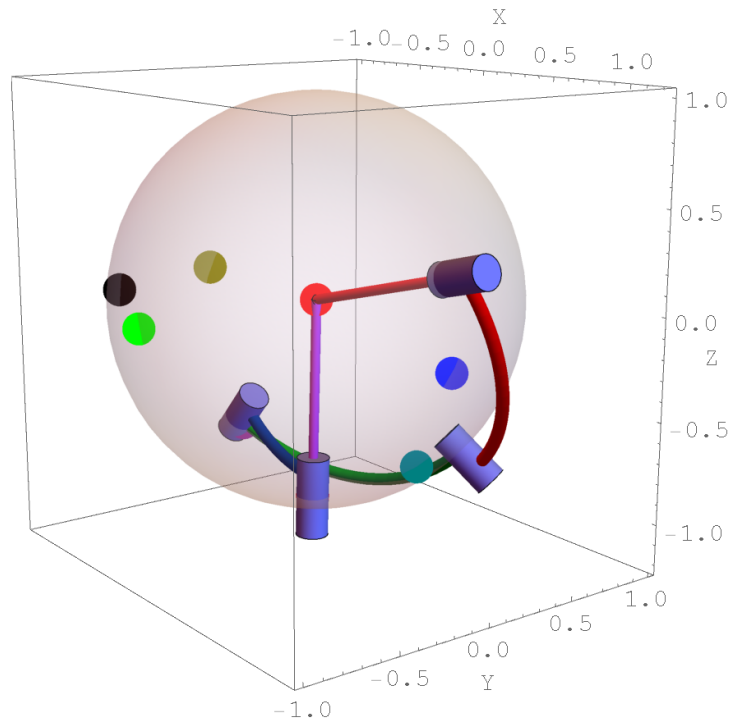


Figura 3.7: Solución 1

Solución 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_{0x} = 0.965926 & a_{0y} = 0 & a_{0z} = 0.258819 \\
 \\
 b_{1x} = 0.270322 & b_{1y} = 0.606780 & b_{1z} = -0.747492 \\
 d_{1x} = 0.780462 & d_{1y} = 0.614343 & d_{1z} = 0.115992 \\
 \phi_{12} = 0.804397 & \phi_{13} = -0.343971 & \phi_{14} = 0.915195 \\
 \phi_{15} = 0.722797 & \phi_{16} = 0.081388 & \phi_{17} = 0.826248 \\
 \eta_{12} = -0.813358 & \eta_{13} = 0.797499 & \eta_{14} = 1.237613 \\
 \eta_{15} = -0.505416 & \eta_{16} = -1.130593 & \eta_{17} = -1.114555
 \end{array}$$

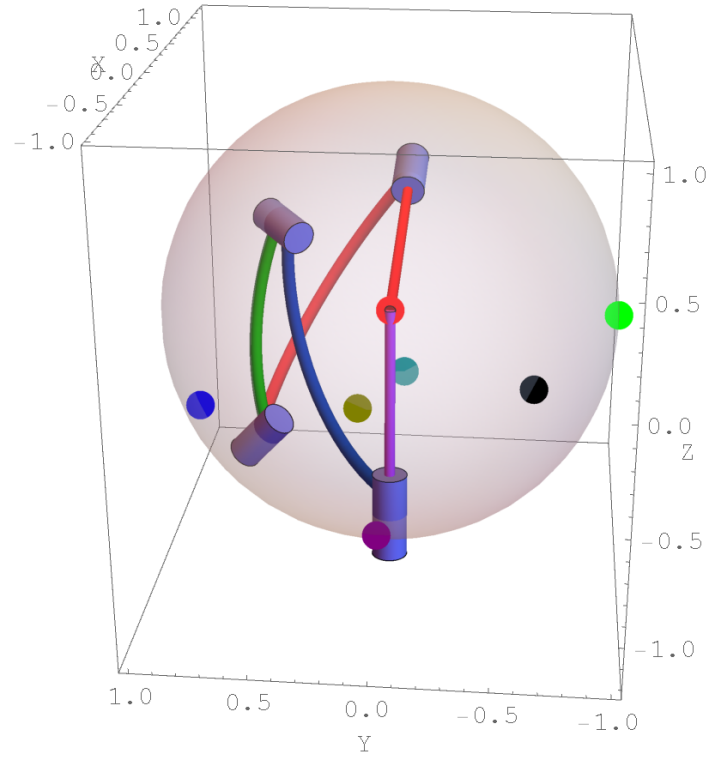


Figura 3.8: Solución 2

Solución 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_0x = 0.965926 & a_0y = 0 & a_0z = 0.258819 \\
 \\
 b_{1x} = 0.763949 & b_{1y} = -0.050479 & b_{1z} = -0.643299 \\
 d_{1x} = 0.034866 & d_{1y} = 0.961351 & d_{1z} = -0.273107 \\
 \phi_{12} = -1.296834 & \phi_{13} = 0.699133 & \phi_{14} = -1.331542 \\
 \phi_{15} = -0.156023 & \phi_{16} = 0.234445 & \phi_{17} = -0.390517 \\
 \eta_{12} = -0.660627 & \eta_{13} = 0.600767 & \eta_{14} = -0.967646 \\
 \eta_{15} = 0.795002 & \eta_{16} = -0.235484 & \eta_{17} = -0.948526
 \end{array}$$

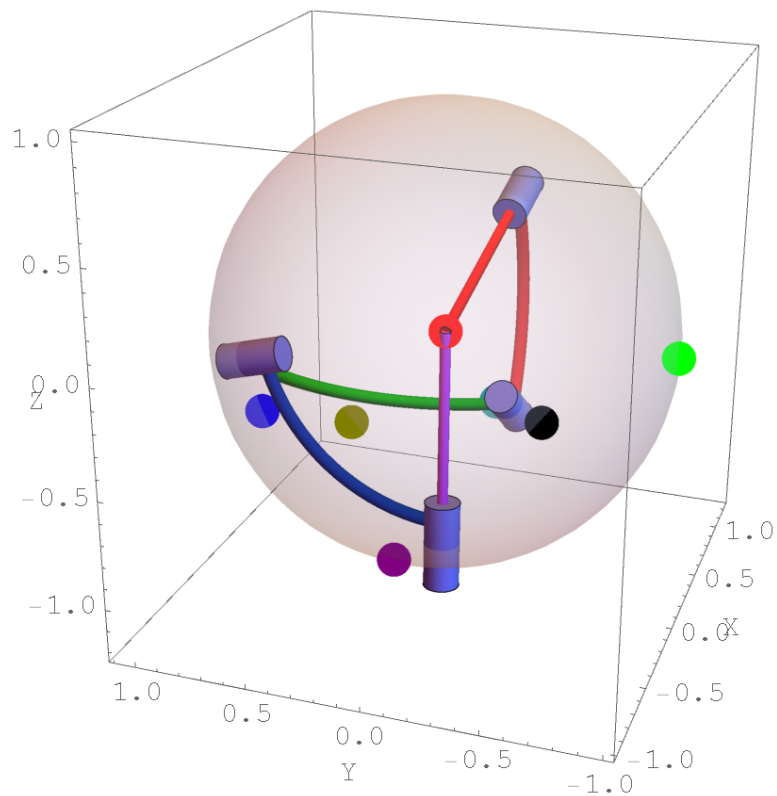


Figura 3.9: Solución 3

Capítulo 4

Síntesis estática del mecanismo

4.1. Introducción

Al diseñar un mecanismo cuya finalidad es la conducción de un cuerpo rígido, es importante mantener este cuerpo en equilibrio, en este trabajo se busca mantener dicho cuerpo en equilibrio estático en posiciones determinadas, para lograr esto se emplea el método de trabajo virtual para realizar una síntesis estática del mecanismo esférico.

4.2. Método de Trabajo Virtual

El principio de “**Trabajo Virtual**” establece que un sistema se encontrará en equilibrio estático si el trabajo virtual total realizado por una carga externa durante un desplazamiento virtual es igual a cero (*Greenwood, 1998*).

Este método puede usarse para resolver problemas de equilibrio de múltiples cuerpos conectados si se conoce el número de grados de libertad y las coordenadas que definen la configuración y posición del sistema. Cuando se tiene un sistema de “n” grados de libertad se tendrán “n” ecuaciones independientes de trabajo virtual.

La ventaja de usar este método es que no requiere considerar las fuerzas de reacción, en cambio requiere únicamente de cantidades de trabajo escalar para construir las ecuaciones estáticas y dinámicas.

El desplazamiento virtual se define como un desplazamiento infinitesimal que es congruente con las restricciones cinemáticas del sistema, a estos se les llama “virtuales” debido a que se asume que suceden mientras el tiempo no transcurre.

La ecuación de trabajo virtual de equilibrio estático para un sistema de cuerpos es:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{R}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^T \delta \varphi_i = 0 \quad (4.2.1)$$

4.3. Análisis estático del mecanismo esférico

En el hombro humano se presentan una condición de carga máxima cuando el brazo se encuentra completamente extendido en paralelo al plano transversal y sosteniendo algún peso, así que para fines prácticos la carga aplicada al mecanismo será constante y se efectuará sobre el efector final únicamente en la dirección “z” negativa, como se muestra en el diagrama siguiente (*Fig. 4.1*), por lo tanto, la ecuación de trabajo virtual aplicada al mecanismo se escribe como:

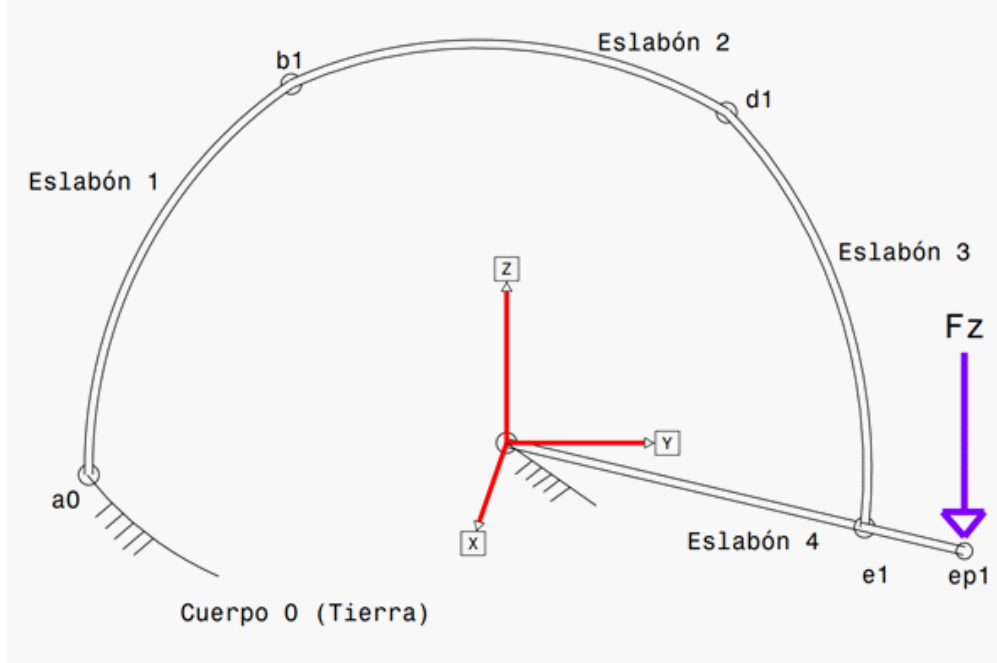


Figura 4.1: Fuerza Externa Aplicada al Mecanismo de 5 Barras

$$\delta W_j = \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{W}_{m_j}^T \delta \mathbf{R}_{m_j} + \mathbf{T}_{A_j}^T \delta \varphi_{A_j} + \mathbf{T}_{C_j}^T \delta \varphi_{C_j} + \mathbf{T}_{E_j}^T \delta \varphi_{E_j} \right) = 0 \quad (4.3.1)$$

$$\delta W_j = 0 \quad (4.3.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{m_j}^T & \quad \text{Carga externa} \\ \mathbf{T}_{A_j}^T, \mathbf{T}_{C_j}^T, \mathbf{T}_{E_j}^T & \quad \text{Torques de los actuadores} \end{aligned}$$

Y los desplazamientos virtuales son:

$$\mathbf{R}_{m_j} = [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \mathbf{r}_m \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{m_j} &= \left(\delta [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] + [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] \delta [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \right) \mathbf{r}_m \\ &= \left([\mathbf{E}_{\mathbf{k}}] [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \delta \psi_j + [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{E}_{\mathbf{j}}] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \delta \alpha_j \right) \mathbf{r}_m \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Donde:

$$\delta [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] = \frac{\partial [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}]}{\partial \psi_j} \delta \psi_j = [\mathbf{E}_{\mathbf{k}}] [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] \delta \psi_j \quad (4.3.5)$$

$$\delta [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] = \frac{\partial [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}]}{\partial \alpha_j} \delta \alpha_j = [\mathbf{E}_{\mathbf{j}}] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \delta \alpha_j \quad (4.3.6)$$

Donde:

$$[\mathbf{E}_k] = [\mathbf{E}_4]$$

$$[\mathbf{E}_j] = [\mathbf{E}_5]$$

$$[\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] = \begin{bmatrix} c\psi_j & -s\psi_j & 0 \\ s\psi_j & c\psi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}]}{\partial \psi_j} = [\mathbf{E}_4] [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] \quad (4.3.7)$$

$$[\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] = \begin{bmatrix} c\alpha_j & 0 & s\alpha_j \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\alpha_j & 0 & c\alpha_j \end{bmatrix} \quad \delta [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] = [\mathbf{E}_5] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}]$$

A partir de la definición de desplazamientos virtuales angulares dada en (*Greenwood, 1998*):

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \quad (4.3.8)$$

Para el torque A, C, E:

$$\boldsymbol{\omega}_{A_j} = \dot{\theta}_{A_j} \mathbf{k} \quad (4.3.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{C_j} = \dot{\theta}_{C_j} \mathbf{k} \quad (4.3.10)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{E_j} = \dot{\theta}_{E_j} \mathbf{k} \quad (4.3.11)$$

$$\delta \varphi_{A_j} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{A_j}}{\partial \dot{\theta}_{A_j}} \delta \theta_{A_j} = \frac{\partial (\dot{\theta}_{A_j} \mathbf{k})}{\partial \dot{\theta}_{A_j}} \delta \theta_{A_j} = \mathbf{k} \delta \theta_{A_j} \quad (4.3.12)$$

$$\delta \varphi_{C_j} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{C_j}}{\partial \dot{\theta}_{C_j}} \delta \theta_{C_j} = \frac{\partial (\dot{\theta}_{C_j} \mathbf{k})}{\partial \dot{\theta}_{C_j}} \delta \theta_{C_j} = \mathbf{k} \delta \theta_{C_j} \quad (4.3.13)$$

$$\delta \varphi_{E_j} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{E_j}}{\partial \dot{\theta}_{E_j}} \delta \theta_{E_j} = \frac{\partial (\dot{\theta}_{E_j} \mathbf{k})}{\partial \dot{\theta}_{E_j}} \delta \theta_{E_j} = \mathbf{k} \delta \theta_{E_j} \quad (4.3.14)$$

Sustituyendo en la ecuación de trabajo virtual:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{W}_{m_j}^T \left([\mathbf{E}_4] [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \delta \psi_j + [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{E}_5] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \delta \alpha_j \right) \mathbf{r}_m \right] + \\ & \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{T}_{A_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{A_j}) + \mathbf{T}_{C_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{C_j}) + \mathbf{T}_{E_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{E_j}) \right] = 0 \\ & \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{W}_{m_j}^T \left([\mathbf{F}] \delta \psi_j + [\mathbf{G}] \delta \alpha_j \right) \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{A_j}) + \mathbf{T}_{C_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{C_j}) + \mathbf{T}_{E_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{E_j}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Donde:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{E}_4] [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \quad (4.3.16)$$

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{E}_5] [\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}}] \quad (4.3.17)$$

De (*Chang*, 1998):

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\delta\phi}{\delta t} \quad (4.3.18)$$

$$\delta\phi = \dot{\phi}\delta t \quad (4.3.19)$$

Además de las ecuaciones (2.3.69) y (2.3.72) se tiene:

$$\dot{\psi} = k_1\dot{\phi} + k_2\dot{\eta} + k_3\dot{\mu} \quad (4.3.20)$$

$$\dot{\alpha} = k_4\dot{\phi} + k_5\dot{\eta} + k_6\dot{\mu} \quad (4.3.21)$$

Como desplazamientos virtuales:

$$\dot{\psi}\delta t = k_1\dot{\phi}\delta t + k_2\dot{\eta}\delta t + k_3\dot{\mu}\delta t \quad (4.3.22)$$

$$\dot{\alpha}\delta t = k_4\dot{\phi}\delta t + k_5\dot{\eta}\delta t + k_6\dot{\mu}\delta t \quad (4.3.23)$$

$$\delta\psi = k_1\delta\phi + k_2\delta\eta + k_3\delta\mu \quad (4.3.24)$$

$$\delta\alpha = k_4\delta\phi + k_5\delta\eta + k_6\delta\mu \quad (4.3.26)$$

Además de las ecuaciones (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14) se tiene que:

$$\dot{\theta}_{A_{1j}} = -\dot{\phi}_{1j} \quad (4.3.27)$$

$$\dot{\theta}_{C_{1j}} = -\frac{\dot{\eta}_{1j}}{R_{n1}R_{n2}} - \dot{\phi}_{1j} \quad (4.3.28)$$

$$\dot{\theta}_{E_{ij}} = -\frac{\dot{\mu}_{1j}}{R_{31}} - \frac{\dot{\eta}_{ij}}{R_{32}} - \dot{\phi}_{1j} \quad (4.3.29)$$

Y expresados como desplazamientos virtuales:

$$\delta\theta_{A_j} = -\delta\phi_j \quad (4.3.30)$$

$$\delta\theta_{C_j} = -\frac{\delta\eta_j}{R_{n1}R_{n2}} - \delta\phi_j \quad (4.3.31)$$

$$\delta\theta_{E_j} = -\frac{\delta\mu_j}{R_{31}} - \frac{\delta\eta_j}{R_{32}} - \delta\phi_j \quad (4.3.32)$$

Despejando:

$$\delta\phi_j = -\delta\theta_{A_j} \quad (4.3.33)$$

$$\delta\eta_j = R_{n1}R_{n2}(\delta\theta_{A_j} - \delta\theta_{C_j}) \quad (4.3.34)$$

$$\delta\mu_j = R_{31}\left(\delta\theta_{A_j} - \left(\frac{R_{n1}R_{n2}}{R_{32}}(\delta\theta_{A_j} - \delta\theta_{C_j}) + \delta\theta_{E_j}\right)\right) \quad (4.3.35)$$

Por lo que:

$$\sum_{j=1}^n \left[\mathbf{W}_{m_j}^T ([\mathbf{F}](k_1\delta\phi + k_2\delta\eta + k_3\delta\mu) + [\mathbf{G}](k_4\delta\phi + k_5\delta\eta + k_6\delta\mu)) \right] \mathbf{r}_m + \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{T}_{A_j}^T (\mathbf{k}\delta\theta_{A_j}) + \mathbf{T}_{C_j}^T (\mathbf{k}\delta\theta_{C_j}) + \mathbf{T}_{E_j}^T (\mathbf{k}\delta\theta_{E_j}) \right] = 0 \quad (4.3.36)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] (-k_1 \delta \theta_{A_j} + k_2 R_{n1} R_{n2} (\delta \theta_{A_j} - \delta \theta_{C_j})) \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \left(k_3 R_{31} \left(\delta \theta_{A_j} - \left(\frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} (\delta \theta_{A_j} - \delta \theta_{C_j}) + \delta \theta_{E_j} \right) \right) \right) \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] (-k_4 \delta \theta_{A_j} + k_5 R_{n1} R_{n2} (\delta \theta_{A_j} - \delta \theta_{C_j})) \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \left(k_6 R_{31} \left(\delta \theta_{A_j} - \left(\frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} (\delta \theta_{A_j} - \delta \theta_{C_j}) + \delta \theta_{E_j} \right) \right) \right) \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{T}_{A_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{A_j}) + \mathbf{T}_{C_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{C_j}) + \mathbf{T}_{E_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{E_j}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Desarrollando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n (-k_1 \delta \theta_{A_j} + k_2 R_{n1} R_{n2} \delta \theta_{A_j} - k_2 R_{n1} R_{n2} \delta \theta_{C_j} + k_3 R_{31} \delta \theta_{A_j}) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n \left(-k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta \theta_{A_j} + k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta \theta_{C_j} - k_3 R_{31} \delta \theta_{E_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n (-k_4 \delta \theta_{A_j} + k_5 R_{n1} R_{n2} \delta \theta_{A_j} - k_5 R_{n1} R_{n2} \delta \theta_{C_j} + k_6 R_{31} \delta \theta_{A_j}) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n \left(-k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta \theta_{A_j} + k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta \theta_{C_j} - k_6 R_{31} \delta \theta_{E_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \\
& \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{T}_{A_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{A_j}) + \mathbf{T}_{C_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{C_j}) + \mathbf{T}_{E_j}^T (\mathbf{k} \delta \theta_{E_j}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

Reordenando y agrupando términos se tiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \left[\left(-k_1 \delta\theta_{A_j} + k_2 R_{n1} R_{n2} \delta\theta_{A_j} + k_3 R_{31} \delta\theta_{A_j} - k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta\theta_{A_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \right. \\
& \left(-k_4 \delta\theta_{A_j} + k_5 R_{n1} R_{n2} \delta\theta_{A_j} + k_6 R_{31} \delta\theta_{A_j} - k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta\theta_{A_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T (\mathbf{k} \delta\theta_{A_j}) + \\
& \left(-k_2 R_{n1} R_{n2} \delta\theta_{C_j} + k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta\theta_{C_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \\
& \left(-k_5 R_{n1} R_{n2} \delta\theta_{C_j} + k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \delta\theta_{C_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_j}^T (\mathbf{k} \delta\theta_{C_j}) + \\
& \left. \left(-k_3 R_{31} \delta\theta_{E_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \left(-k_6 R_{31} \delta\theta_{E_j} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_j}^T (\mathbf{k} \delta\theta_{E_j}) \right] = 0 \quad (4.3.39)
\end{aligned}$$

Factorizando los términos $\delta\theta_{A_j}$, $\delta\theta_{C_j}$, $\delta\theta_{E_j}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n [\delta\theta_{A_j} \left[\left(-k_1 + k_2 R_{n1} R_{n2} + k_3 R_{31} - k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \right. \\
& \left. \left(-k_4 + k_5 R_{n1} R_{n2} + k_6 R_{31} - k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T \mathbf{k} \right] + \\
& \delta\theta_{C_j} \left[\left(-k_2 R_{n1} R_{n2} + k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \right. \\
& \left. \left(-k_5 R_{n1} R_{n2} + k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_j}^T \mathbf{k} \right] + \\
& \delta\theta_{E_j} \left[\left(-k_3 R_{31} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + \left(-k_6 R_{31} \right) \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_j}^T \mathbf{k} \right] = 0 \quad (4.3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n [\delta\theta_{A_j} \left(k_7 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_8 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T \mathbf{k} \right) + \\
& \delta\theta_{C_j} \left(k_9 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{10} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_j}^T \mathbf{k} \right) + \\
& \delta\theta_{E_j} \left(k_{11} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{12} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_j}^T \mathbf{k} \right)] = 0 \quad (4.3.41)
\end{aligned}$$

Donde:

$$k_7 = -k_1 + k_2 R_{n1} R_{n2} + k_3 R_{31} - k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \quad (4.3.42)$$

$$k_8 = -k_4 + k_5 R_{n1} R_{n2} + k_6 R_{31} - k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \quad (4.3.43)$$

$$k_9 = -k_2 R_{n1} R_{n2} + k_3 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \quad (4.3.44)$$

$$k_{10} = -k_5 R_{n1} R_{n2} + k_6 R_{31} \frac{R_{n1} R_{n2}}{R_{32}} \quad (4.3.45)$$

$$k_{11} = -k_3 R_{31} \quad (4.3.46)$$

$$k_{12} = -k_6 R_{31} \quad (4.3.47)$$

Ya que la ecuación (4.3.41) debe ser efectivamente igual a 0, y con la condición de que $\delta\theta_{A_j}$, $\delta\theta_{C_j}$, $\delta\theta_{E_j}$ sean diferentes de 0, se pueden obtener 3 ecuaciones independientes.

Para el término $\delta\theta_{A_j}$ se tiene la ecuación 4.3.48, de donde se sabe que $\delta\theta_{A_j}$ es distinto de cero, por lo tanto, se obtiene la ecuación 4.3.49 al dividir ambos lados de la ecuación con el término $\delta\theta_{A_j}$.

$$\sum_{j=1}^n \left[\delta\theta_{A_j} \left(k_7 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_8 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T \mathbf{k} \right) \right] = 0 \quad (4.3.48)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[k_7 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_8 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T \mathbf{k} \right] = 0 \quad (4.3.49)$$

Para el término $\delta\theta_{C_j}$ se tiene la ecuación 4.3.48, de donde se sabe que $\delta\theta_{C_j}$ es distinto de cero, por lo tanto, se obtiene la ecuación 4.3.51 al dividir ambos lados de la ecuación con el término $\delta\theta_{C_j}$.

$$\sum_{j=1}^n \left[\delta\theta_{C_j} \left(k_9 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{10} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_j}^T \mathbf{k} \right) \right] = 0 \quad (4.3.50)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[k_9 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{10} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_j}^T \mathbf{k} \right] = 0 \quad (4.3.51)$$

Para el término $\delta\theta_{E_j}$ se tiene la ecuación 4.3.48, de donde se sabe que $\delta\theta_{E_j}$ es distinto de cero, por lo tanto, se obtiene la ecuación 4.3.53 al dividir ambos lados de la ecuación con el término $\delta\theta_{E_j}$.

$$\sum_{j=1}^n \delta\theta_{E_j} \left(k_{11} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{12} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_j}^T \mathbf{k} \right) = 0 \quad (4.3.52)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[k_{11} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{12} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_j}^T \mathbf{k} \right] = 0 \quad (4.3.53)$$

Finalmente, para relacionar las ecuaciones de trabajo virtual con las de síntesis de posición se redefinirán los vectores de posición como:

$$\mathbf{R}_{0_j} = \mathbf{r}_0 = (\mathbf{a}_{0_j} - \mathbf{0}) \quad (4.3.54)$$

$$\mathbf{R}_{1_j} = \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right] \mathbf{r}_1 = (\mathbf{b}_{1_j} - \mathbf{a}_{0_j}) \quad (4.3.55)$$

$$\mathbf{R}_{2_j} = \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right] \left[\mathbf{R}_{\eta_j, \mathbf{b}_1} \right] \mathbf{r}_2 = (\mathbf{d}_{1_j} - \mathbf{b}_{1_j}) \quad (4.3.56)$$

$$\mathbf{R}_{3_j} = \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right] \left[\mathbf{R}_{\eta_j, \mathbf{b}_1} \right] \left[\mathbf{R}_{\mu_j, \mathbf{d}_1} \right] \mathbf{r}_3 = (\mathbf{e}_{1_j} - \mathbf{d}_{1_j}) \quad (4.3.57)$$

$$\mathbf{R}_{4_j} = \left[\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}} \right] \left[\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}} \right] \mathbf{r}_4 = (\mathbf{d}_{1_j} - \mathbf{0}) \quad (4.3.58)$$

$$\mathbf{R}_{5_j} = \left[\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}} \right] \left[\mathbf{R}_{\alpha_j, \mathbf{j}} \right] \mathbf{r}_5 = (\mathbf{e}_{1_j} - \mathbf{0}) \quad (4.3.59)$$

Estos vectores deberán ser sustituidos en las ecuaciones (2.3.27) a (2.3.33) que definen a los vectores $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4, \mathbf{U}_5, \mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\mathbf{U}_{1_j} = [\mathbf{E}_1](\mathbf{b}_{1_j} - \mathbf{a}_{0_j}) + [\mathbf{E}_1](\mathbf{d}_{1_j} - \mathbf{b}_{1_j}) + [\mathbf{E}_1](\mathbf{e}_{1_j} - \mathbf{d}_{1_j}) \quad (4.3.60)$$

$$\mathbf{U}_{2_j} = \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right] [\mathbf{E}_2] \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right]^T (\mathbf{d}_{1_j} - \mathbf{b}_{1_j}) + \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right] [\mathbf{E}_2] \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right]^T (\mathbf{e}_{1_j} - \mathbf{d}_{1_j}) \quad (4.3.61)$$

$$\mathbf{U}_{3_j} = \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right] \left[\mathbf{R}_{\eta_j, \mathbf{b}_1} \right] [\mathbf{E}_3] \left[\mathbf{R}_{\eta_j, \mathbf{b}_1} \right]^T \left[\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0} \right]^T (\mathbf{e}_{1_j} - \mathbf{d}_{1_j}) \quad (4.3.62)$$

$$\mathbf{U}_{4_j} = [\mathbf{E}_4](\mathbf{e}_{1_j} - \mathbf{0}) \quad (4.3.63)$$

$$\mathbf{U}_{5_j} = \left[\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}} \right] [\mathbf{E}_5] \left[\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}} \right]^T (\mathbf{e}_{1_j} - \mathbf{0}) \quad (4.3.64)$$

$$\mathbf{A}_j = (\mathbf{a}_0 - \mathbf{0}) \quad (4.3.65)$$

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{U}_{1_j} - \mathbf{A}_j \quad (4.3.66)$$

4.4. Síntesis estática

Para resolver la síntesis estática del mecanismo se emplearán las ecuaciones (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3) de la síntesis cinemática y las ecuaciones (4.3.49), (4.3.51) y (4.3.53) obtenidas del método de Trabajo Virtual.

Sin embargo, las ecuaciones de diseño de la síntesis cinemática trabajan sobre una esfera unitaria y se busca obtener un mecanismo contenido en una esfera de radio de 0.055[m], por lo que un factor de escala (1:0.055) deberá ser aplicado. Existen dos opciones para escalar el sistema, la primera consiste en escalar las fuerzas y torques reales involucrados en las ecuaciones de Trabajo Virtual para que se ajusten al tamaño del modelo unitario, la segunda opción consiste en aplicar el factor de escala geométrico directamente a los términos geométricos de las ecuaciones de diseño y de trabajo virtual, es decir escalar a tamaño real los puntos \mathbf{a}_0 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{d}_1 , \mathbf{e}_1 .

Escalando fuerzas y torques:

El factor de escala para las fuerzas y torques será una función del factor de escala geométrico s

$$s = \frac{1}{0.055} \quad (4.4.1)$$

El factor de escala para la fuerza estática que representa el peso de un objeto cuya masa es de 15 Kg será:

$$F_r = m_r a_r \quad \text{Fuerza real} \quad (4.4.2)$$

$$F_e = m_e a_e \quad \text{Fuerza escalada} \quad (4.4.3)$$

Para esto la masa se escala a partir de la densidad que se mantiene constante y el volumen que cambia con el factor de escala geométrico elevado al cubo (*Amitaba G. & Chakraborty S.*, 2011):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m_r}{v_r} = \frac{m_e}{v_e} \quad [=] \frac{M}{L^3} & \rho &= cte \\ m_r &= \rho v_r & v_e &= s^3 v_r \\ m_e &= \rho v_e = \rho s^3 v_r & m_e &= \rho s^3 v_r \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$m_e = s^3 m_r \quad (4.4.5)$$

Esto se debe a que la cantidad de masa de un cuerpo rígido está condicionada por las dimensiones de dicho cuerpo, por lo que la masa tendrá el mismo factor de escala que el volumen.

La aceleración se escala con el mismo factor de escala que los parámetros geométricos ya que el tiempo es completamente independiente del sistema (problema estático) y en la definición dimensional de la aceleración solo está presente un parámetro de longitud. No obstante, asumiendo que el campo gravitacional presente es el mismo para el caso real y para el caso escalado, se tiene:

$$a = \frac{d}{t^2} \quad [=] \frac{L}{T^2} \quad (4.4.6)$$

$$a_e = s^0 a_r \quad (4.4.7)$$

De este modo la fuerza o peso escalado se puede expresar como:

$$F_e = s^3 m_r a_r = s^3 F_r \quad (4.4.8)$$

Aplicando este mismo procedimiento para un torque se tiene:

$$T_r = F_r l_r \text{sen}(\theta) = F_r b_r \quad \text{Torque real} \quad (4.4.9)$$

$$T_e = F_e l_e \text{sen}(\theta) = F_e b_e \quad \text{Torque escalado} \quad (4.4.10)$$

Tomando en cuenta que la escala para dimensiones angulares es de 1:1:

$$b_e = s b_r \quad (4.4.11)$$

$$F_e = s^3 F_r \quad (4.4.12)$$

Por lo tanto:

$$T_e = s^3 F_r s b_r \quad (4.4.13)$$

$$T_e = s^4 T_r \quad (4.4.14)$$

Escalando parámetros geométricos:

Por otro lado, es posible aplicar el factor de escala para llevar al tamaño real las dimensiones geométricas en las ecuaciones de trabajo virtual y las ecuaciones de diseño. En las ecuaciones de diseño es evidente que el factor de escala se aplica a todos los términos de la ecuación, por lo que este puede ser factorizado y eliminado de la misma, esto es posible ya que las ecuaciones de diseño son igualadas a cero

$$(s(\mathbf{e}_{1j}) - s(\mathbf{d}_{1j}))^T (s(\mathbf{e}_{1j}) - s(\mathbf{d}_{1j})) - (s(\mathbf{e}_1) - s(\mathbf{d}_1))^T (s(\mathbf{e}_1) - s(\mathbf{d}_1)) = 0 \quad (4.4.15)$$

$$s((\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})^T (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j}) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1)^T (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1)) = 0 \quad (4.4.16)$$

$$(\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})^T (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j}) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1)^T (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1) = 0 \quad (4.4.17)$$

Así mismo se puede descartar el factor de escala en las ecuaciones que controlan la magnitud de los puntos para las juntas:

$$\sqrt[2]{s\mathbf{b}_{1j}^T s\mathbf{b}_{1j}} - \sqrt[2]{s^2 1} = 0 \quad (4.4.18)$$

$$\sqrt[2]{s^2} \sqrt[2]{\mathbf{b}_{1j}^T \mathbf{b}_{1j}} - \sqrt[2]{s^2} = 0 \quad (4.4.19)$$

$$\mathbf{b}_{1j}^T \mathbf{b}_{1j} - 1 = 0 \quad (4.4.20)$$

$$\sqrt[2]{s\mathbf{d}_{1j}^T s\mathbf{d}_{1j}} - \sqrt[2]{s^2 1} = 0 \quad (4.4.21)$$

$$\sqrt[2]{s^2} \sqrt[2]{\mathbf{d}_{1j}^T \mathbf{d}_{1j}} - \sqrt[2]{s^2} = 0 \quad (4.4.22)$$

$$\mathbf{d}_{1j}^T \mathbf{d}_{1j} - 1 = 0 \quad (4.4.23)$$

Los parámetros geométricos de las ecuaciones de trabajo virtual están presentes en los vectores \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 , \mathbf{U}_3 , \mathbf{U}_4 , \mathbf{U}_5 , \mathbf{A} , \mathbf{B} , por lo que estos se tendrán que expresar como:

$$s\mathbf{U}_{1j} = s([\mathbf{E}_1](\mathbf{b}_{1j} - \mathbf{a}_{0j}) + [\mathbf{E}_1](\mathbf{d}_{1j} - \mathbf{b}_{1j}) + [\mathbf{E}_1](\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})) \quad (4.4.24)$$

$$s\mathbf{U}_{2j} = s\left([\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T (\mathbf{d}_{1j} - \mathbf{b}_{1j}) + [\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{E}_2] [\mathbf{R}_{\phi, \mathbf{a}_0}]^T (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})\right) \quad (4.4.25)$$

$$s\mathbf{U}_{3j} = s\left([\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0}] [\mathbf{R}_{\eta_j, \mathbf{b}_1}] [\mathbf{E}_3] [\mathbf{R}_{\eta_j, \mathbf{b}_1}]^T [\mathbf{R}_{\phi_j, \mathbf{a}_0}]^T (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})\right) \quad (4.4.26)$$

$$s\mathbf{U}_{4j} = s([\mathbf{E}_4](\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{0})) \quad (4.4.27)$$

$$s\mathbf{U}_{5j} = s\left([\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}] [\mathbf{E}_5] [\mathbf{R}_{\psi_j, \mathbf{k}}]^T (\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{0})\right) \quad (4.4.28)$$

$$s\mathbf{A}_j = s(\mathbf{a}_0 - \mathbf{0}) \quad (4.4.29)$$

$$s\mathbf{B}_j = s\mathbf{U}_{1j} - s\mathbf{A}_j \quad (4.4.30)$$

Del desarrollo de los coeficientes de influencia:

$$\mathbf{q}_2 = [\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 \quad (4.4.31)$$

Desarrollando el segundo término de la ecuación (4.4.31) y factorizando el factor de escala:

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} s\mathbf{U}_4 & s\mathbf{U}_5 & s\mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s\mathbf{B} & s\mathbf{U}_2 & s\mathbf{U}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (4.4.32)$$

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} sU_{4x} & sU_{5x} & sA_x \\ sU_{4y} & sU_{5y} & sA_y \\ sU_{4z} & sU_{5z} & sA_z \end{bmatrix}^{-1} s \begin{bmatrix} B_x & U_{2x} & U_{3x} \\ B_y & U_{2y} & U_{3y} \\ B_z & U_{2z} & U_{3z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (4.4.33)$$

El determinante de $[\mathbf{J}_2]$ contendrá un factor de escala s^{-3} :

$$\begin{aligned} Det [\mathbf{J}_2] &= s^3 (U_{4x}U_{5y}A_z + U_{5x}A_yU_{4z} + A_xU_{4y}U_{5z}) \\ &\quad - s^3 (U_{4z}U_{5y}A_x + U_{5z}A_yU_{4x} + A_zU_{4y}U_{5x}) \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

Y la adjunta de $[\mathbf{J}_2]$ será la matriz traspuesta de la matriz de cofactores de $[\mathbf{J}_2]$, con un factor de escala s^2 :

$$adj [\mathbf{J}_2] = (cof [\mathbf{J}_2])^T \quad (4.4.35)$$

$$adj [\mathbf{J}_2] = (cof [\mathbf{J}_2])^T = s^2 \begin{bmatrix} U_{5y}A_z - U_{5z}A_y & U_{4z}A_y - U_{4y}A_z & U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y} \\ U_{5z}A_x - U_{5x}A_y & U_{4x}A_z - U_{4z}A_x & U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z} \\ U_{5x}A_y - U_{5y}A_x & U_{4y}A_x - U_{4x}A_y & U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x} \end{bmatrix}^T \quad (4.4.36)$$

Por lo que la matriz inversa de $[\mathbf{J}_2]$ será:

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} = \frac{s^2}{Det [\mathbf{J}_2]} \begin{bmatrix} U_{5y}A_z - U_{5z}A_y & U_{4z}A_y - U_{4y}A_z & U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y} \\ U_{5z}A_x - U_{5x}A_y & U_{4x}A_z - U_{4z}A_x & U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z} \\ U_{5x}A_y - U_{5y}A_x & U_{4y}A_x - U_{4x}A_y & U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x} \end{bmatrix}^T \quad (4.4.37)$$

Y sustituyendo en la ecuación (4.4.33) se tendrá:

$$[\mathbf{J}_2]^{-1} [\mathbf{J}_1] \mathbf{q}_1 = \frac{1}{Det [\mathbf{J}_2]} [\mathbf{C}] \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} \quad (4.4.38)$$

Donde:

$$[\mathbf{C}] = (cof [\mathbf{J}_2])^T [\mathbf{J}_1] \quad (4.4.39)$$

$$[\mathbf{C}] = s^2 \begin{bmatrix} U_{5y}A_z - U_{5z}A_y & U_{4z}A_y - U_{4y}A_z & U_{4y}U_{5z} - U_{4z}U_{5y} \\ U_{5z}A_x - U_{5x}A_y & U_{4x}A_z - U_{4z}A_x & U_{4z}U_{5x} - U_{4x}U_{5z} \\ U_{5x}A_y - U_{5y}A_x & U_{4y}A_x - U_{4x}A_y & U_{4x}U_{5y} - U_{4y}U_{5x} \end{bmatrix}^T s \begin{bmatrix} B_x & U_{2x} & U_{3x} \\ B_y & U_{2y} & U_{3y} \\ B_z & U_{2z} & U_{3z} \end{bmatrix} \quad (4.4.40)$$

$$[\mathbf{C}] = s^3 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (4.4.41)$$

Finalmente como la matriz $[\mathbf{C}]$ contiene un factor de escala s^3 y el determinante $[\mathbf{J}_2]$ también contiene un factor de escala s^3 , este queda eliminado de la ecuación al desarrollar el cociente $\frac{[\mathbf{C}]}{\text{Det}[\mathbf{J}_2]}$.

Con este último procedimiento se aprecia que el factor de escala geométrico también desaparece de las ecuaciones de Trabajo virtual.

En la síntesis estática se simplificará la Función Objetivo tomando las ecuaciones (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3) de la síntesis cinemática para las posiciones $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y las ecuaciones (4.3.49), (4.3.51) y (4.3.53) del método de Trabajo Virtual para ciertas posiciones.

Las ecuaciones de Trabajo Virtual serán las de aquellas posiciones en las que el efector final se encuentra paralelo al plano horizontal formado un ángulo de 90° con el vector de la carga $\mathbf{W}_{m_j}^T$.

Estas posiciones representan al brazo extendido de manera horizontal soportando un peso determinado.

Para esto el valor de $\mathbf{W}_{m_j}^T$ será nulo en las siguientes posiciones $j = 1, 5, 6, 7$, anulando así los valores de los torques $\mathbf{T}_{A_j}^T$, $\mathbf{T}_{C_j}^T$ y $\mathbf{T}_{E_j}^T$, para dichas posiciones.

Como ejemplo, para la posición $j = 1$, sí $\mathbf{W}_{m_j}^T = \mathbf{0}^T$ y sabiendo que $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} [k_7 \mathbf{0}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_8 \mathbf{0}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_1}^T \mathbf{k}] &= 0 \\ \mathbf{T}_{A_1}^T (0, 0, 1) &= 0 \\ \mathbf{T}_{A_1}^T &= (0, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

$$\begin{aligned} [k_9 \mathbf{0}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{10} \mathbf{0}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_1}^T \mathbf{k}] &= 0 \\ \mathbf{T}_{C_1}^T (0, 0, 1) &= 0 \\ \mathbf{T}_{C_1}^T &= (0, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

$$\begin{aligned} [k_{11} \mathbf{0}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{12} \mathbf{0}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_1}^T \mathbf{k}] &= 0 \\ \mathbf{T}_{E_1}^T (0, 0, 1) &= 0 \\ \mathbf{T}_{E_1}^T &= (0, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.4.45)$$

Por lo tanto, las ecuaciones a emplear para construir la Función Objetivo para la síntesis estática serán:

$$(\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})^T(\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j}) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1)^T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1) = 0 \quad j = 2, 3, 4, 5 \quad (4.4.46)$$

$$\mathbf{b}_{1j}^T \mathbf{b}_{1j} - 1 = 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4.4.47)$$

$$\mathbf{d}_{1j}^T \mathbf{d}_{1j} - 1 = 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4.4.48)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[k_7 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_8 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T \mathbf{k} \right] = 0 \quad j = 2, 3, 4 \quad (4.4.49)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[k_9 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{10} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_j}^T \mathbf{k} \right] = 0 \quad j = 2, 3, 4 \quad (4.4.50)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[k_{11} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{12} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_j}^T \mathbf{k} \right] = 0 \quad j = 2, 3, 4 \quad (4.4.51)$$

$$\mathbf{f}_1 = \sum_{j=2}^5 ((\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j})^T(\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{d}_{1j}) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1)^T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1))^2 \quad (4.4.52)$$

$$\mathbf{f}_2 = \sum_{j=1}^5 (\mathbf{b}_{1j}^T \mathbf{b}_{1j} - 1)^2 \quad (4.4.53)$$

$$\mathbf{f}_3 = \sum_{j=1}^5 (\mathbf{d}_{1j}^T \mathbf{d}_{1j} - 1)^2 \quad (4.4.54)$$

$$\mathbf{f}_4 = \sum_{j=2}^4 \left[k_7 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_8 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{A_j}^T \mathbf{k} \right]^2 = 0 \quad (4.4.55)$$

$$\mathbf{f}_5 = \sum_{j=2}^4 \left[k_9 \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{10} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{C_j}^T \mathbf{k} \right]^2 = 0 \quad (4.4.56)$$

$$\mathbf{f}_6 = \sum_{j=2}^4 \left[k_{11} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{F}] \mathbf{r}_m + k_{12} \mathbf{W}_{m_j}^T [\mathbf{G}] \mathbf{r}_m + \mathbf{T}_{E_j}^T \mathbf{k} \right]^2 = 0 \quad (4.4.57)$$

Y la Función Objetivo será:

$$\mathbf{FO} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 + \mathbf{f}_6 \quad (4.4.58)$$

Esta ecuación será resuelta con el comando **FindMinimum** de **Mathematica** dando los valores de los torques $\mathbf{T}_{A_j}^T$, $\mathbf{T}_{C_j}^T$ y $\mathbf{T}_{E_j}^T$, el peso $\mathbf{W}_{m_j}^T$, los valores de las coordenadas de \mathbf{a}_0 y los puntos de precisión \mathbf{e}_{1j} para $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Esto permitirá calcular un total de 30 incógnitas: $b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}, d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{14}, \psi_{15}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}, \theta_{A_{12}}, \theta_{A_{13}}, \theta_{A_{14}}, \theta_{A_{15}}, \theta_{C_{12}}, \theta_{C_{13}}, \theta_{C_{14}}, \theta_{C_{15}}, \theta_{E_{12}}, \theta_{E_{13}}, \theta_{E_{14}}, \theta_{E_{15}}, R_{n1}, R_{n2}, R_{n5}, R_{n6}$.

El paso siguiente será usar este mismo comando para obtener los ángulos de la generatriz del cono primitivo de los engranes.

Para obtener los ángulos de apertura de los eslabones ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 , basta con efectuar el Arco Coseno del producto punto entre los puntos \mathbf{a}_0 , \mathbf{b}_{1j} , \mathbf{d}_{1j} y \mathbf{e}_{1j} , en su posición inicial:

$$\rho_1 = \text{ArcCos} [\mathbf{a}_0^T \mathbf{b}_1] \quad (4.4.59)$$

$$\rho_2 = \text{ArcCos} [\mathbf{b}_1^T \mathbf{d}_1] \quad (4.4.60)$$

$$\rho_3 = \text{ArcCos} [\mathbf{d}_1^T \mathbf{e}_1] \quad (4.4.61)$$

A partir de estos ángulos es posible construir las ecuaciones que relacionan los ángulos de los engranes con el eslabón que los soporta:

$$\rho_{D_2} + 2\rho_G + \rho_H = \rho_1 \quad (4.4.62)$$

$$\rho_J + 2\rho_K + \rho_L = \rho_2 \quad (4.4.63)$$

Además, como la solución de la Función FO de la síntesis estática incluye los valores de R_{n1} , R_{n2} , R_{n5} , R_{n6} . Se tendrán las ecuaciones:

$$\begin{aligned} R_{n1} &= \frac{\text{Sen}(\rho_{D_2})}{\text{Sen}(\rho_G)} \\ R_{n2} &= \frac{\text{Sen}(\rho_G)}{\text{Sen}(\rho_H)} \\ R_{n3} &= R_{n1} \\ R_{n4} &= R_{n2} \\ R_{n5} &= \frac{\text{Sen}(\rho_J)}{\text{Sen}(\rho_K)} \\ R_{n6} &= \frac{\text{Sen}(\rho_K)}{\text{Sen}(\rho_L)} \end{aligned} \quad (4.4.64)$$

Con estas ecuaciones se pueden formular dos nuevas funciones objetivo $FOG1$ y $FOG2$, cuyas soluciones ofrecen los valores para ρ_{D_2} , ρ_G , ρ_H , ρ_J , ρ_K y ρ_L :

$$FOG1 = (\rho_{D_2} + 2\rho_G + \rho_H - \rho_1)^2 + \left(R_{n1} - \frac{\text{Sen}(\rho_{D_2})}{\text{Sen}(\rho_G)} \right)^2 + \left(R_{n2} - \frac{\text{Sen}(\rho_G)}{\text{Sen}(\rho_H)} \right)^2 \quad (4.4.65)$$

$$FOG2 = (\rho_J + 2\rho_K + \rho_L - \rho_2)^2 + \left(R_{n5} - \frac{\text{Sen}(\rho_J)}{\text{Sen}(\rho_K)} \right)^2 + \left(R_{n6} - \frac{\text{Sen}(\rho_K)}{\text{Sen}(\rho_L)} \right)^2 \quad (4.4.66)$$

4.5. Solución de la síntesis estática

Los datos empleados para resolver la síntesis estática y obtener los ángulos de los engranes son:

$$\begin{array}{lll}
 a0x = 0.965926 & a0y = 0 & a0z = 0.258819 \\
 \mathbf{T}_{A_j} = (0, 0, 0.01) [Nm] & \mathbf{T}_{C_j} = (0, 0, 0.01) [Nm] & \mathbf{T}_{E_j} = (0, 0, 0.01) [Nm] \\
 m = 15 [Kg] & g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right] & \mathbf{W}_{m_1} = (0, 0, 0) [N] \\
 \mathbf{W}_{m_2} = (0, 0, m * g) [N] & \mathbf{W}_{m_3} = (0, 0, m * g) [N] & \mathbf{W}_{m_4} = (0, 0, m * g) [N] \\
 \mathbf{W}_{m_5} = (0, 0, 0) [N] & \mathbf{W}_{m_6} = (0, 0, 0) [N] & \mathbf{W}_{m_7} = (0, 0, 0) [N] \\
 l = 0.80 [m] & s = \frac{1}{0.055} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (\mathbf{e}_{11}) = ([\mathbf{R}_{182^\circ}, \mathbf{j}] \mathbf{k}, 1) = \begin{pmatrix} -0.034899 & 0 & -0.999391 & 1 \end{pmatrix} \textit{Posición Inicial} \\
 (\mathbf{e}_{12}) = ([\mathbf{R}_{-178^\circ}, \mathbf{k}] \mathbf{j}, 1) = \begin{pmatrix} 0.034899 & -0.999391 & 0 & 1 \end{pmatrix} \textit{Abducción} \\
 (\mathbf{e}_{13}) = ([\mathbf{R}_{-30^\circ}, \mathbf{i}] \mathbf{j}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0.866025 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \textit{Aducción} \\
 (\mathbf{e}_{14}) = ([\mathbf{R}_{178^\circ}, \mathbf{k}] \mathbf{i}, 1) = \begin{pmatrix} -0.999391 & 0.034899 & 0 & 1 \end{pmatrix} \textit{Flexión} \\
 (\mathbf{e}_{15}) = ([\mathbf{R}_{40^\circ}, \mathbf{j}] \mathbf{i}, 1) = \begin{pmatrix} 0.766044 & 0 & -0.642788 & 1 \end{pmatrix} \textit{Extensión}
 \end{array}$$

Siendo s el factor de escala para llevar la longitud de un brazo humano de $l = 0,8[m]$ de largo a las proporciones del modelo unitario de la síntesis:

$$\mathbf{r}_m = s * l(\mathbf{e}_{1j} - \mathbf{0}) \quad (4.5.1)$$

El valor de torque para los motores empleado es el de un motor a pasos compacto ROB-10551, $\tau = 0.01[Nm]$.

A continuación, se presentan tres soluciones obtenidas con “**Wolfram Mathematica**”:

Solución 1:

$$\begin{array}{llll}
 b_{1x} = 0.400934 & b_{1y} = -0.115261 & b_{1z} = -0.908827 & \\
 d_{1x} = -0.693489 & d_{1y} = -0.125242 & d_{1z} = -0.709498 & \\
 \psi_{12} = -1.210786 & \psi_{13} = 1.193888 & \psi_{14} = -0.084858 & \psi_{15} = 0.714322 \\
 \alpha_{12} = -0.034894 & \alpha_{13} = -0.034909 & \alpha_{14} = -0.034905 & \alpha_{15} = -0.008033 \\
 \theta_{A_{12}} = -0.244469 & \theta_{A_{13}} = -0.723278 & \theta_{A_{14}} = -0.329681 & \theta_{A_{15}} = -0.133712 \\
 \theta_{C_{12}} = 1.127408 & \theta_{C_{13}} = 0.154615 & \theta_{C_{14}} = -0.394773 & \theta_{C_{15}} = 1.969996 \\
 \theta_{E_{12}} = -0.303741 & \theta_{E_{13}} = -0.202938 & \theta_{E_{14}} = -0.348679 & \theta_{E_{15}} = 0.149630 \\
 R_{n1} = 1.020206 & R_{n2} = 1.160881 & R_{n5} = 0.581163 & R_{n6} = 0.603098 \\
 \rho_1 = 81.254221^\circ & \rho_2 = 67.591785^\circ & \rho_1 = 42.838941^\circ & \\
 \rho_{D2} = 21.399587^\circ & \rho_G = 20.955555^\circ & \rho_H = 17.943529^\circ & \\
 \rho_J = 9.111091^\circ & \rho_K = 15.811271^\circ & \rho_L = 26.858153^\circ &
 \end{array}$$

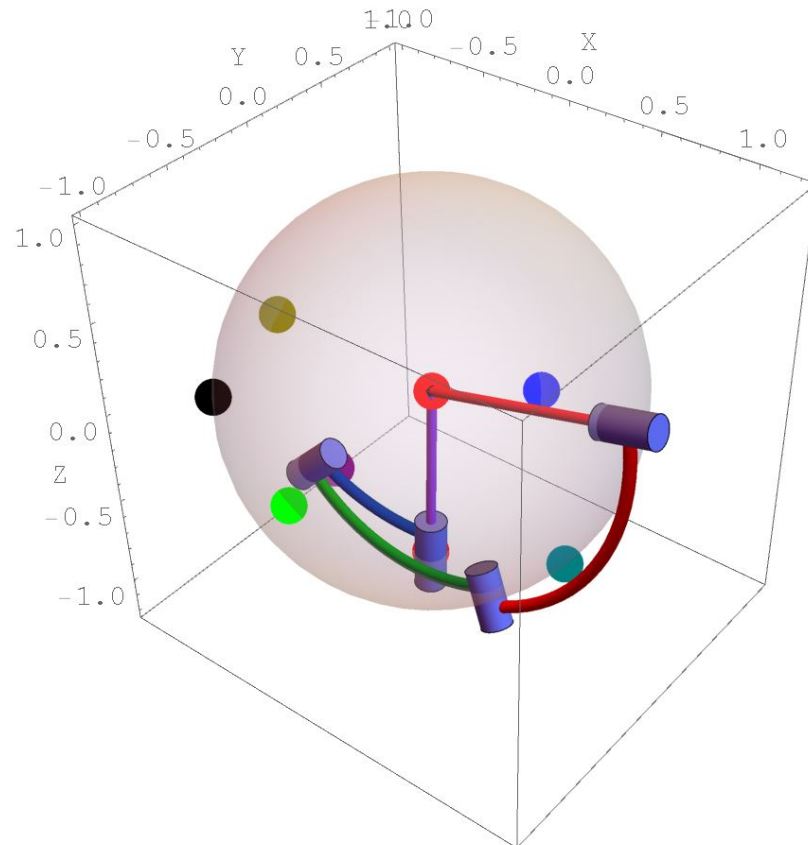
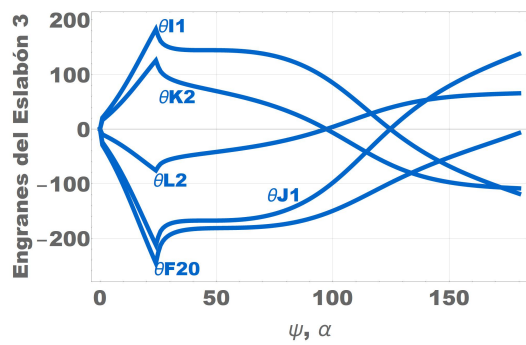
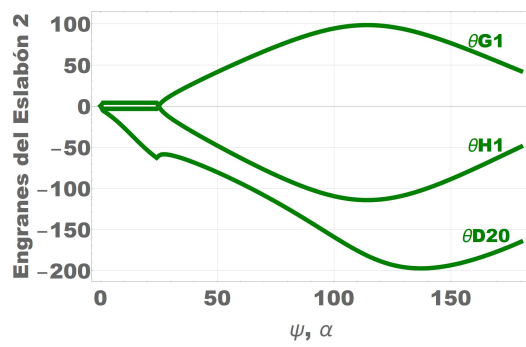
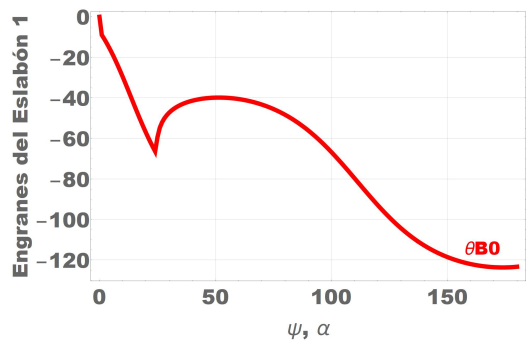
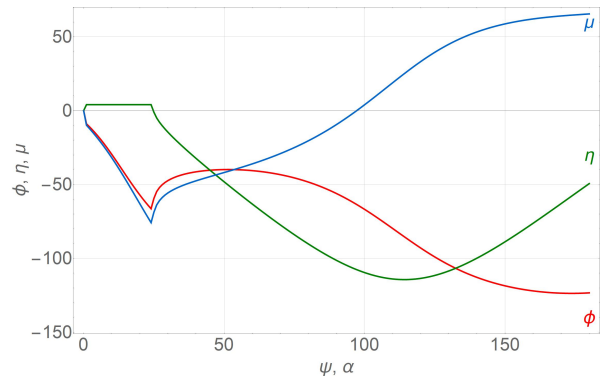


Figura 4.2: Solución 1

A continuación, se muestran las curvas obtenidas con el análisis cinemático para los ángulos del mecanismo sintetizado. Estas curvas nos indican si el movimiento del mecanismo es suave. Los valores de las gráficas se muestran en grados ($^\circ$).

Gráficas de posición:



Solución 2:

| | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $b_{1x} = 0.340290$ | $b_{1y} = -0.935606$ | $b_{1z} = 0.094045$ | |
| $d_{1x} = -0.341722$ | $d_{1y} = -0.935606$ | $d_{1z} = -0.088700$ | |
| $\psi_{12} = -1.407008$ | $\psi_{13} = 1.221771$ | $\psi_{14} = -0.218605$ | $\psi_{15} = 0.838274$ |
| $\alpha_{12} = -0.034902$ | $\alpha_{13} = -0.034911$ | $\alpha_{14} = -0.034904$ | $\alpha_{15} = -0.773634$ |
| $\theta_{A_{12}} = 0.801937$ | $\theta_{A_{13}} = 1.192304$ | $\theta_{A_{14}} = -0.636572$ | $\theta_{A_{15}} = -0.309838$ |
| $\theta_{C_{12}} = 0.172149$ | $\theta_{C_{13}} = -0.800518$ | $\theta_{C_{14}} = 0.257247$ | $\theta_{C_{15}} = 0.666738$ |
| $\theta_{E_{12}} = 0.520422$ | $\theta_{E_{13}} = -0.425171$ | $\theta_{E_{14}} = 0.016658$ | $\theta_{E_{15}} = -0.592693$ |
| $R_{n1} = 0.255623$ | $R_{n2} = 0.816804$ | $R_{n5} = 0.545999$ | $R_{n6} = 0.371382$ |
| $\rho_1 = 69.326912^\circ$ | $\rho_2 = 41.346177^\circ$ | $\rho_1 = 84.227895^\circ$ | |
| $\rho_{D2} = 4.985188^\circ$ | $\rho_G = 19.873665^\circ$ | $\rho_H = 24.594394^\circ$ | |
| $\rho_J = 4.255793^\circ$ | $\rho_K = 7.811521^\circ$ | $\rho_L = 21.467341^\circ$ | |

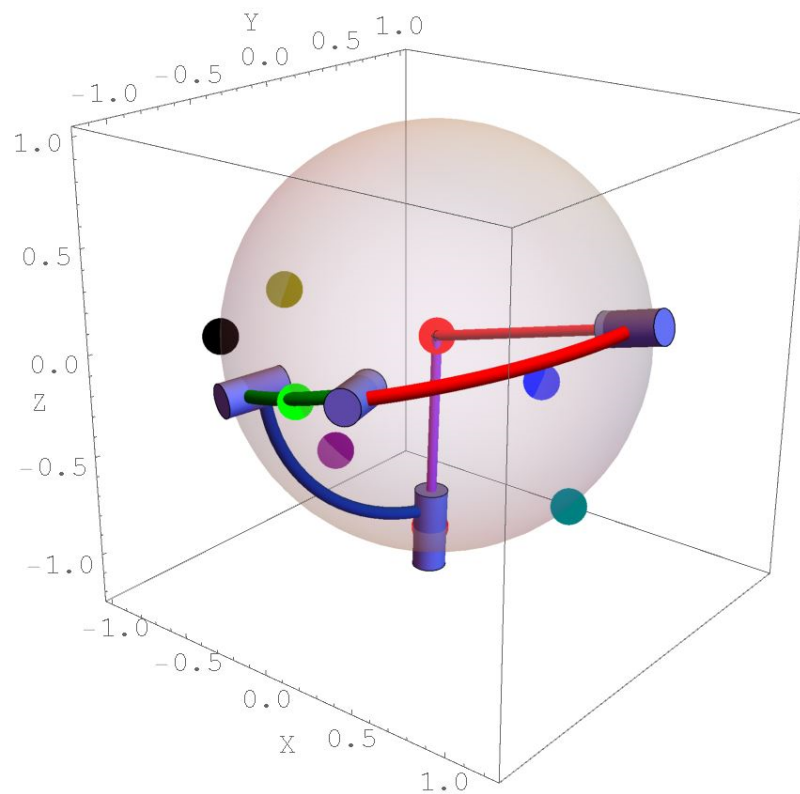
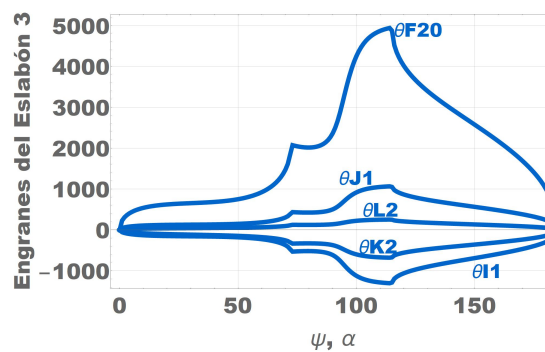
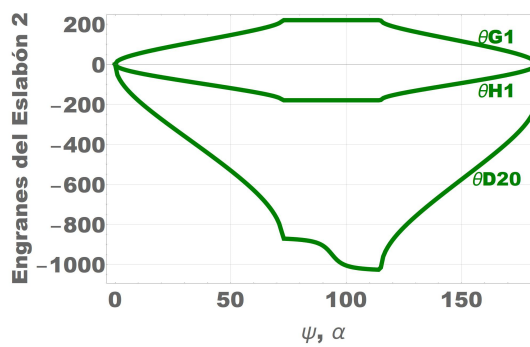
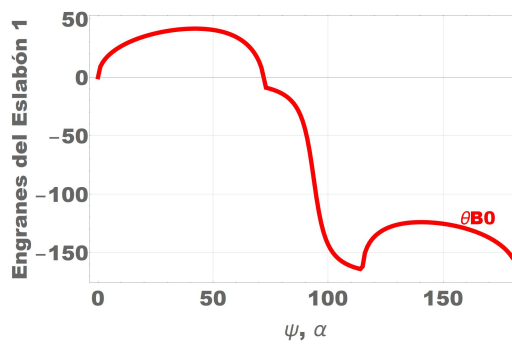
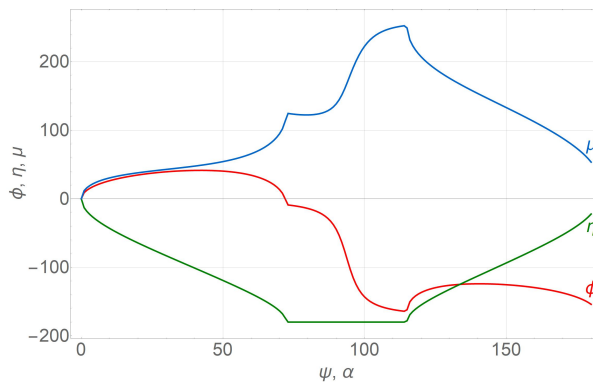


Figura 4.3: Solución 2

A continuación, se muestran las curvas obtenidas con el análisis cinemático para los ángulos del mecanismo sintetizado, los valores de las gráficas se muestran en grados ($^\circ$).

Gráficas de posición:



Solución 3:

| | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| $b_{1x} = 0.136823$ | $b_{1y} = -0.498479$ | $b_{1z} = -0.856036$ | |
| $d_{1x} = -0.728845$ | $d_{1y} = -0.361881$ | $d_{1z} = -0.581229$ | |
| $\psi_{12} = 1.115115$ | $\psi_{13} = -1.606508$ | $\psi_{14} = -0.877107$ | $\psi_{15} = -0.887371$ |
| $\alpha_{12} = -0.034908$ | $\alpha_{13} = -0.034902$ | $\alpha_{14} = -0.034906$ | $\alpha_{15} = -0.193251$ |
| $\theta_{A_{12}} = 0.078043$ | $\theta_{A_{13}} = -0.776775$ | $\theta_{A_{14}} = 0.191376$ | $\theta_{A_{15}} = -0.596912$ |
| $\theta_{C_{12}} = 0.419166$ | $\theta_{C_{13}} = 0.167699$ | $\theta_{C_{14}} = 0.762283$ | $\theta_{C_{15}} = 1.089005$ |
| $\theta_{E_{12}} = -0.322629$ | $\theta_{E_{13}} = -0.597221$ | $\theta_{E_{14}} = 0.776335$ | $\theta_{E_{15}} = -0.737626$ |
| $R_{n1} = 1.363673$ | $R_{n2} = 0.659352$ | $R_{n5} = 0.493535$ | $R_{n6} = 0.505871$ |
| $\rho_1 = 95.128963^\circ$ | $\rho_2 = 54.674496^\circ$ | $\rho_1 = 52.676737^\circ$ | |
| $\rho_{D2} = 26.691957^\circ$ | $\rho_G = 19.232355^\circ$ | $\rho_H = 29.972296^\circ$ | |
| $\rho_J = 5.944067^\circ$ | $\rho_K = 12.112289^\circ$ | $\rho_L = 4.505851^\circ$ | |

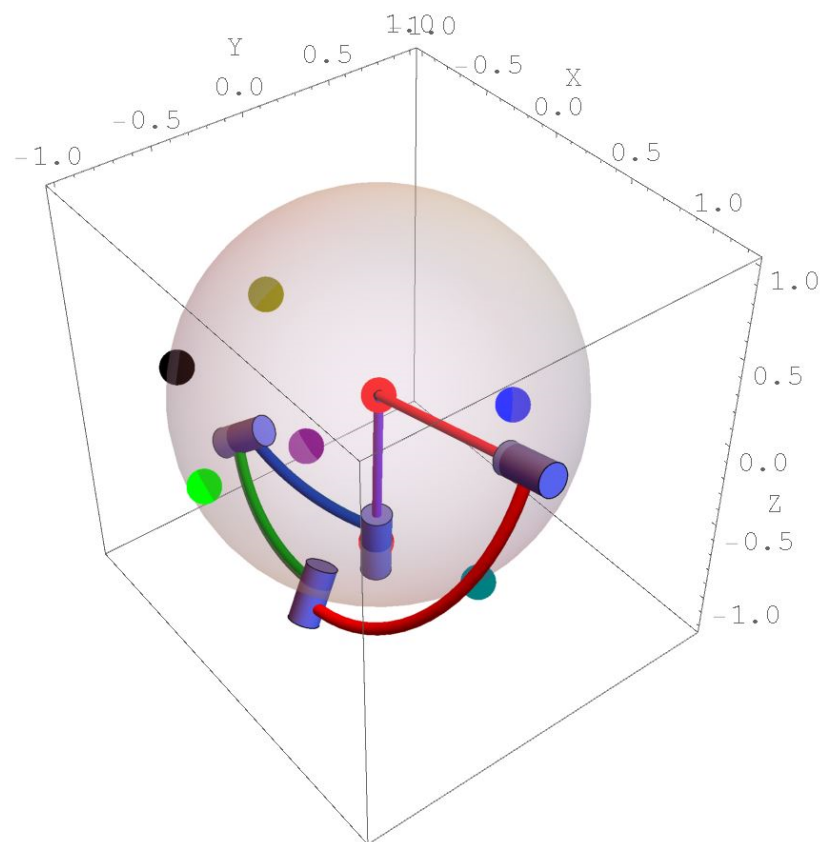
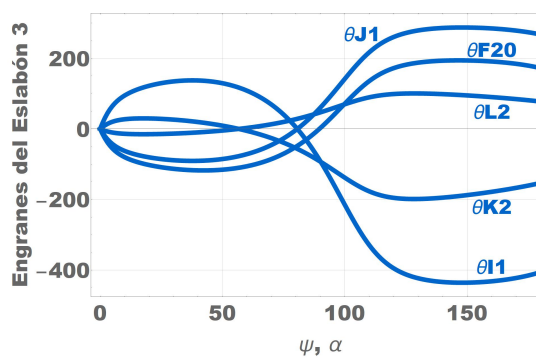
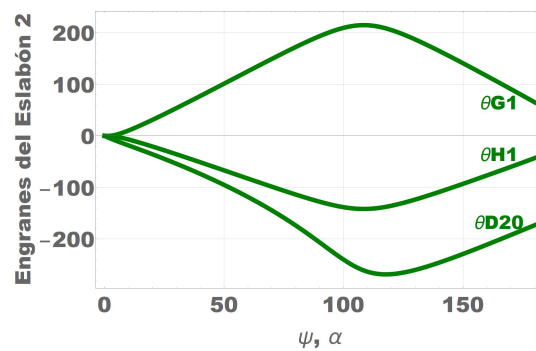
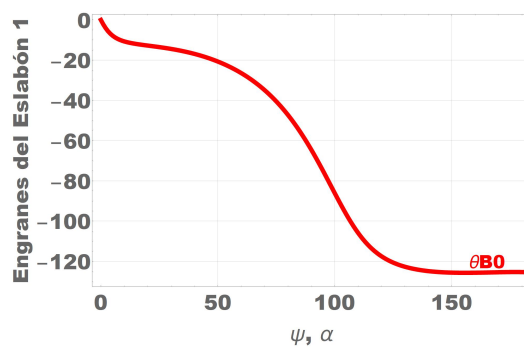
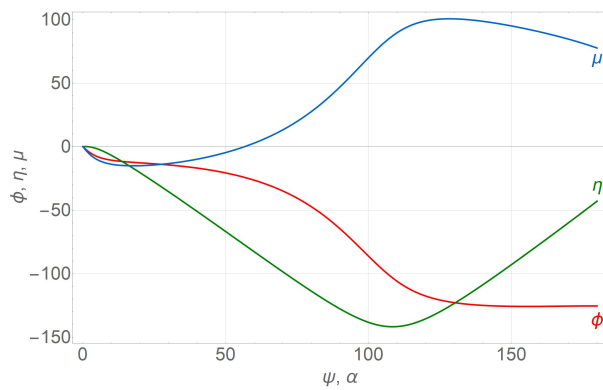


Figura 4.4: Solución 3

A continuación, se muestran las curvas obtenidas con el análisis cinemático para los ángulos del mecanismo sintetizado, los valores de las gráficas se muestran en grados ($^\circ$).

Gráficas de posición:



Adicionalmente se presenta una solución con eslabones de 90° de apertura que permita que los engranes cónicos de los eslabones sean iguales, en busca de que el espacio que engloba el mecanismo se aproveche de mejor manera, para lograr esto se agregan tres ecuaciones a la función objetivo como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f}_7 = \sum_{j=1}^5 \left(\text{ArcCos} \left(\frac{\mathbf{a}_0^T \mathbf{b}_{1j}}{|\mathbf{a}_0| |\mathbf{b}_{1j}|} \right) - \frac{90^\circ \pi}{180^\circ} \right)^2 \quad (4.5.2)$$

$$\mathbf{f}_8 = \sum_{j=1}^5 \left(\text{ArcCos} \left(\frac{\mathbf{b}_{1j}^T \mathbf{d}_{1j}}{|\mathbf{b}_{1j}| |\mathbf{d}_{1j}|} \right) - \frac{90^\circ \pi}{180^\circ} \right)^2 \quad (4.5.3)$$

$$\mathbf{f}_9 = \sum_{j=1}^5 \left(\text{ArcCos} \left(\frac{\mathbf{d}_{1j}^T \mathbf{e}_{1j}}{|\mathbf{d}_{1j}| |\mathbf{e}_{1j}|} \right) - \frac{90^\circ \pi}{180^\circ} \right)^2 \quad (4.5.4)$$

$$\mathbf{FO} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 + \mathbf{f}_6 + \mathbf{f}_7 + \mathbf{f}_8 + \mathbf{f}_9 \quad (4.5.5)$$

Solución 4:

| | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $b_{1x} = -0.258491$ | $b_{1y} = 0.050322$ | $b_{1z} = 0.964702$ | |
| $d_{1x} = -0.169729$ | $d_{1y} = -0.985473$ | $d_{1z} = 0.005927$ | |
| $\psi_{12} = 34.309126$ | $\psi_{13} = -0.334902$ | $\psi_{14} = 1.683317$ | $\psi_{15} = -0.345997$ |
| $\alpha_{12} = -0.034907$ | $\alpha_{13} = -0.034906$ | $\alpha_{14} = -0.034921$ | $\alpha_{15} = -0.353398$ |
| $\theta_{A_{12}} = 2.104363$ | $\theta_{A_{13}} = 1.659725$ | $\theta_{A_{14}} = -0.000599$ | $\theta_{A_{15}} = -4.725754$ |
| $\theta_{C_{12}} = 1.373887$ | $\theta_{C_{13}} = -1.878441$ | $\theta_{C_{14}} = -0.140223$ | $\theta_{C_{15}} = 30.028605$ |
| $\theta_{E_{12}} = 0.771119$ | $\theta_{E_{13}} = -0.551373$ | $\theta_{E_{14}} = 0.959439$ | $\theta_{E_{15}} = -0.787676$ |
| $R_{n1} = 1$ | $R_{n2} = 1$ | $R_{n5} = 1$ | $R_{n6} = 1$ |
| $\rho_1 = 90^\circ$ | $\rho_2 = 90^\circ$ | $\rho_1 = 90^\circ$ | |
| $\rho_{D2} = 22.5^\circ$ | $\rho_G = 22.5^\circ$ | $\rho_H = 22.5^\circ$ | |
| $\rho_J = 22.5^\circ$ | $\rho_K = 22.5^\circ$ | $\rho_L = 22.5^\circ$ | |

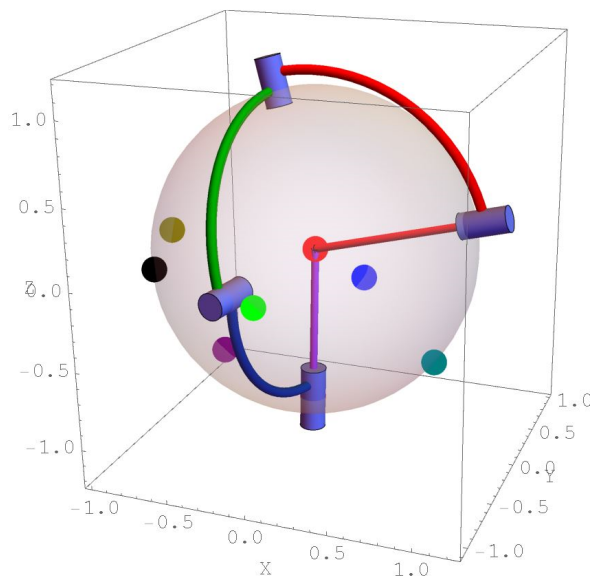
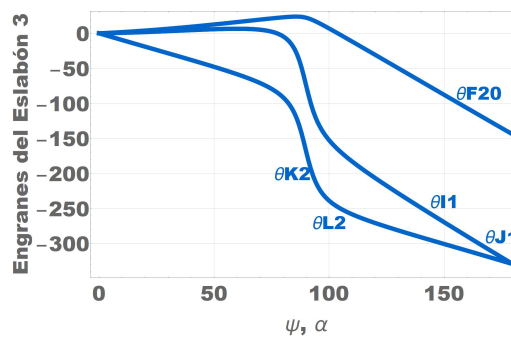
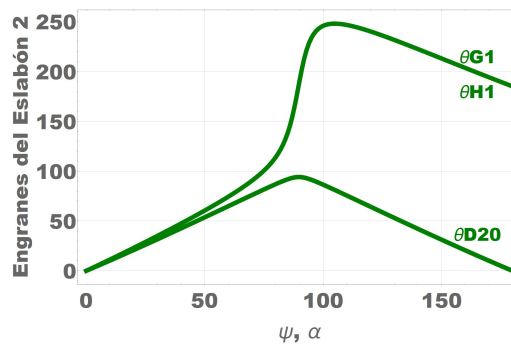
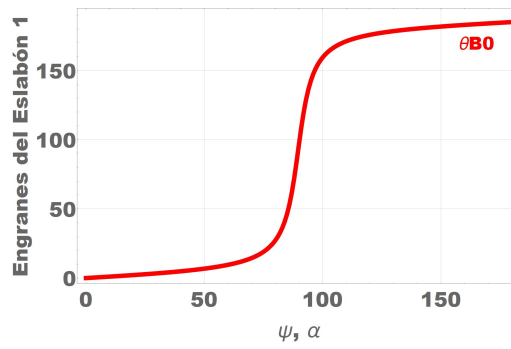
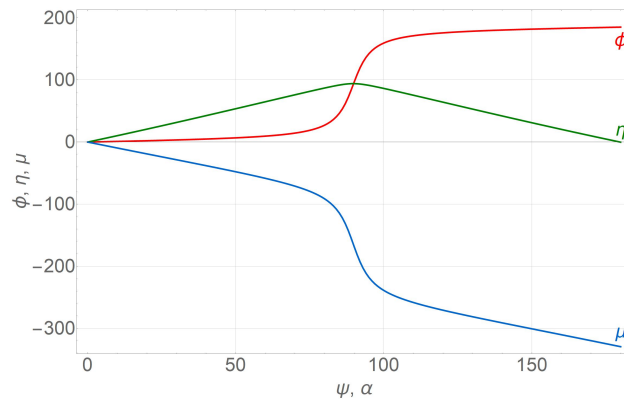


Figura 4.5: Solución 4

A continuación, se muestran las curvas obtenidas con el análisis cinemático para los ángulos del mecanismo sintetizado, los valores de las gráficas se muestran en grados ($^\circ$).

Gráficas de posición:



Capítulo 5

Diseño del modelo CAD

5.1. Consideraciones de diseño

Al plantear la geometría del mecanismo para un modelo real se tomó como principal consideración evitar la interferencia entre eslabones, por lo que se generó un modelo por niveles en los que cada eslabón y tren de engranes se encuentran sobre esferas de distintos radios (*Fig. 5.1.1 y 5.1.2*).

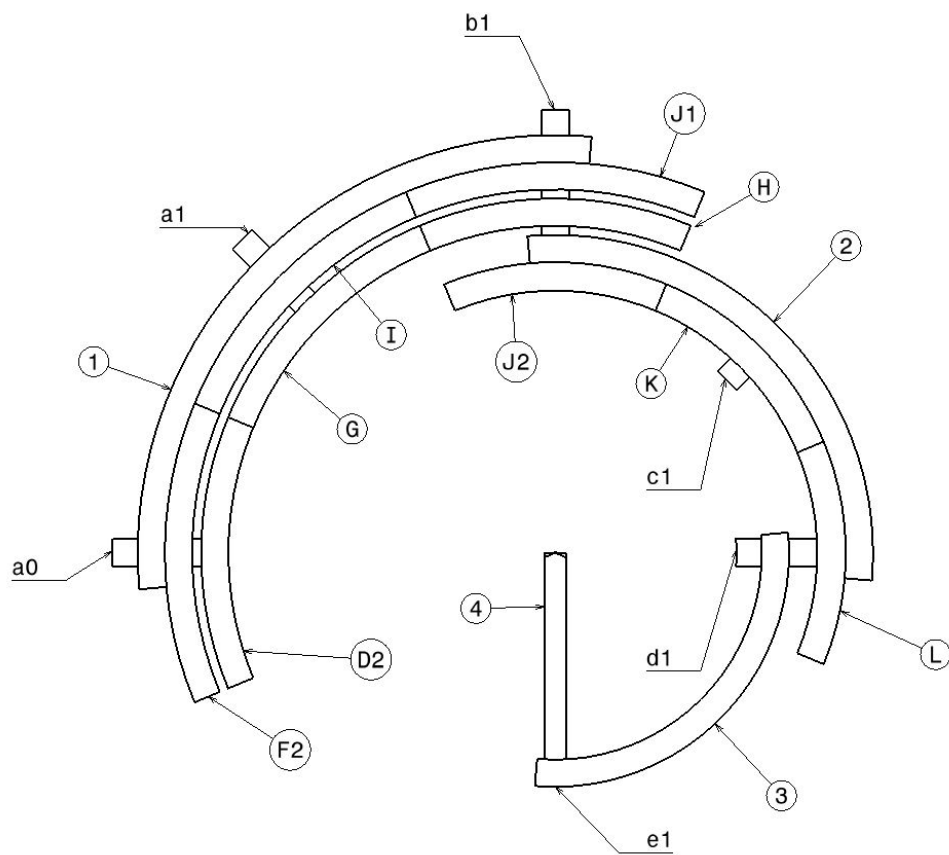


Figura 5.1.1: Eslabones esféricos y engranes cónicos del mecanismo

- R1: Sujeción del Eslabón 3
- R2: Radio interno del Eslabón 3
- R3: Radio externo del Eslabón 3
- R4: Sujeción del Engrane K
- R5: Radio interno de los Engranes J2, K, L
- R6: Radio interno del Eslabón 2
- R7: Radio externo del Eslabón 2
- R8: Radio interno de los Engranes D2, G, H
- R9: Radio externo de los Engranes D2, G, H
- R10: Radio interno de los Engranes F2, I, J1
- R11: Radio interno del Eslabón 1
- R12: Radio externo del Eslabón 1
- R13: Sujeción de los Eslabones 1 y 2.

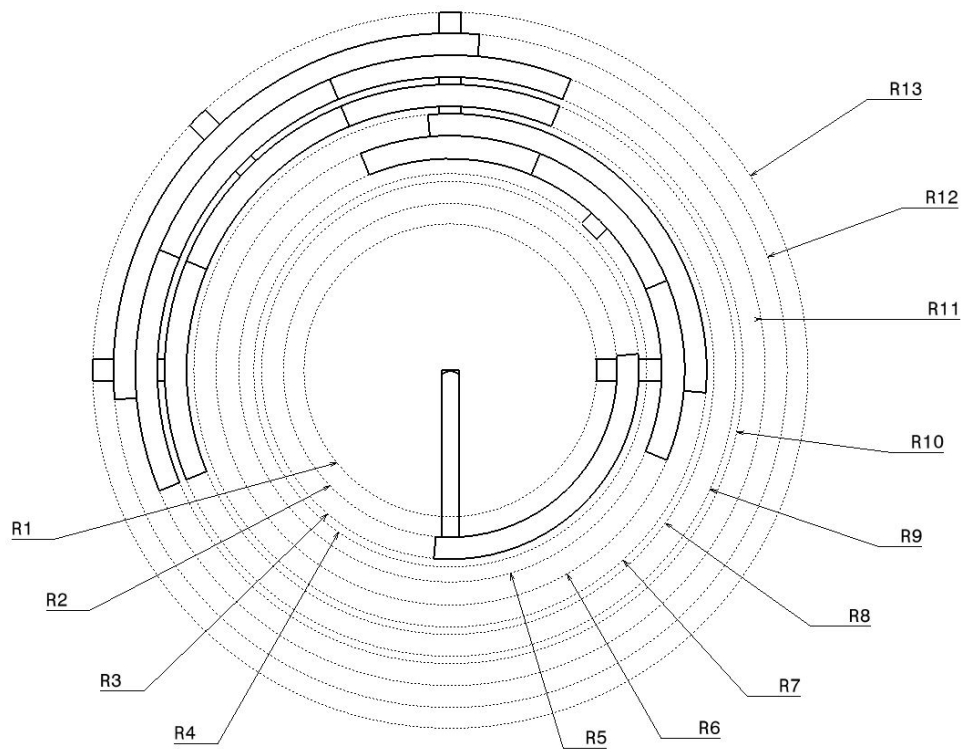


Figura 5.1.2: Niveles de posición para los cuerpos del mecanismo

Ya que los engranes montados sobre el Eslabón 1 (D2, G, H, F2, I, J1, J2) son coaxiales se propusieron las siguientes geometrías (*Fig.* 5.1.3, 5.1.4 y 5.1.5) para que no se generaran interferencias entre ellos:

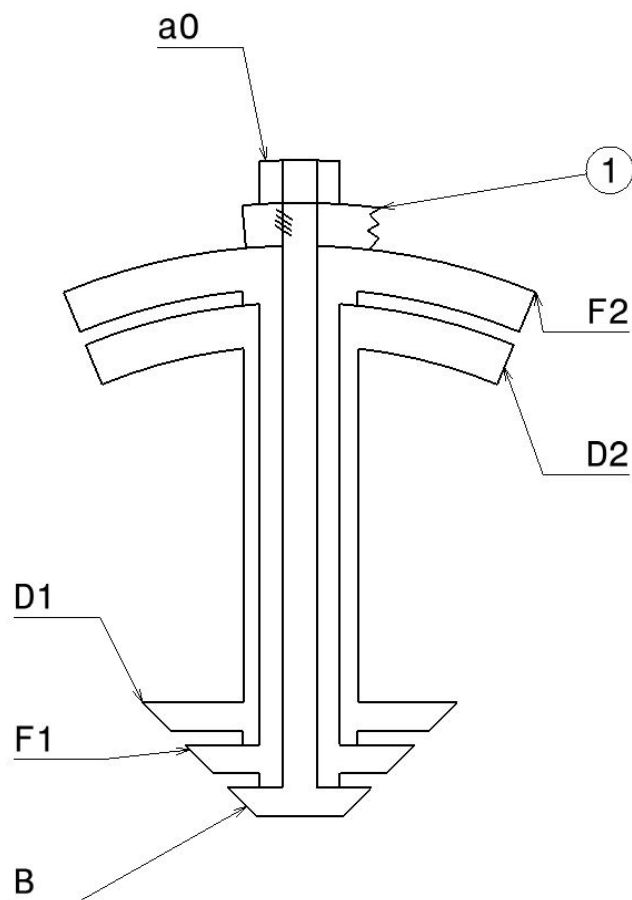


Figura 5.1.3: Ensamble B-F1-D1

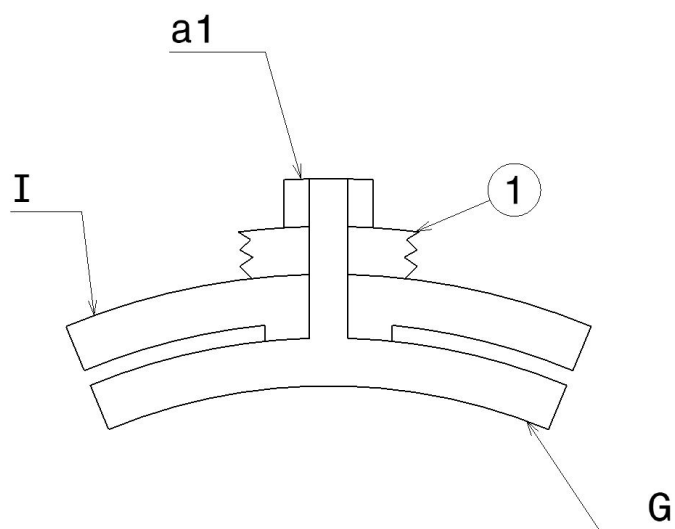


Figura 5.1.4: Ensamble Eslabón1-I-G

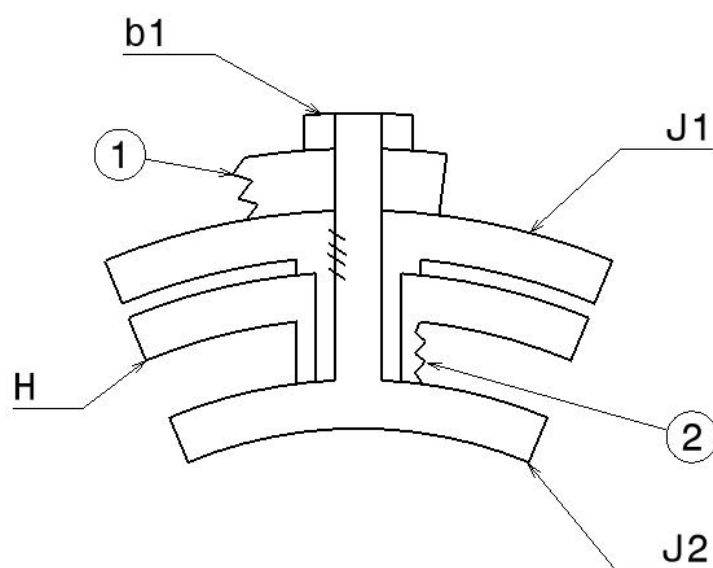


Figura 5.1.5: Ensamble Eslabón1-J1-H-J2

5.2. Modelos CAD

A continuación, se muestran los modelos CAD obtenidos para las 4 soluciones de la síntesis estática.

5.2.1. Solución 1

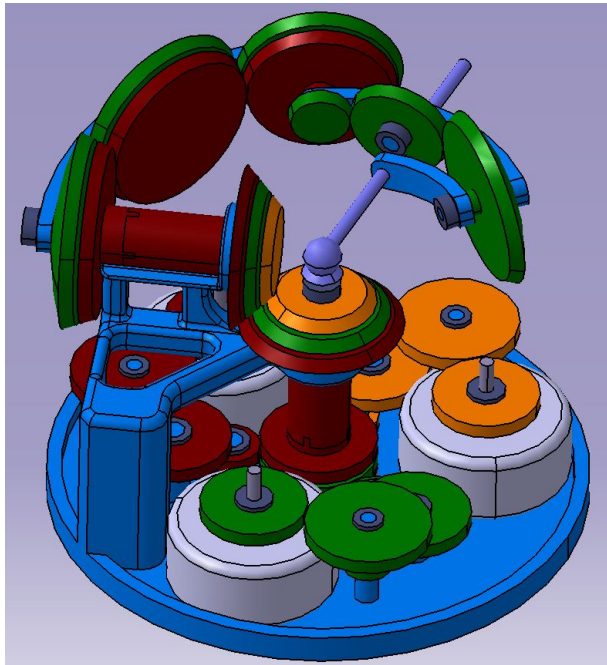


Figura 5.2.1.1: Vista isométrica de la solución 1

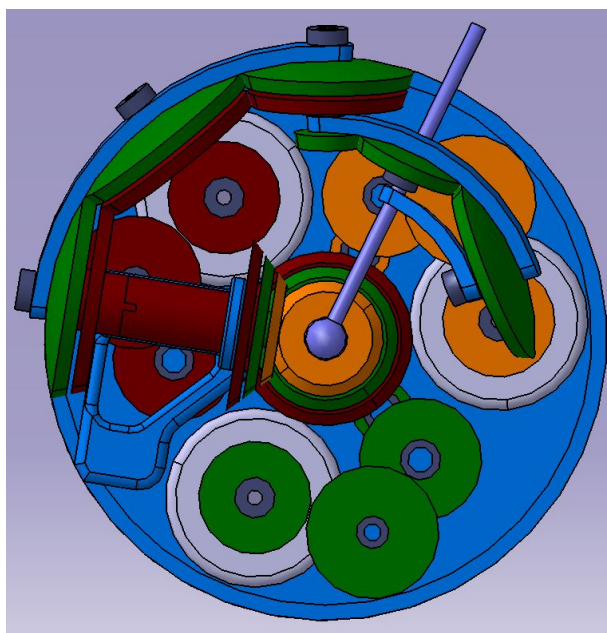


Figura 5.2.1.2: Vista superior de la solución 1

5.2.2. Solución 2

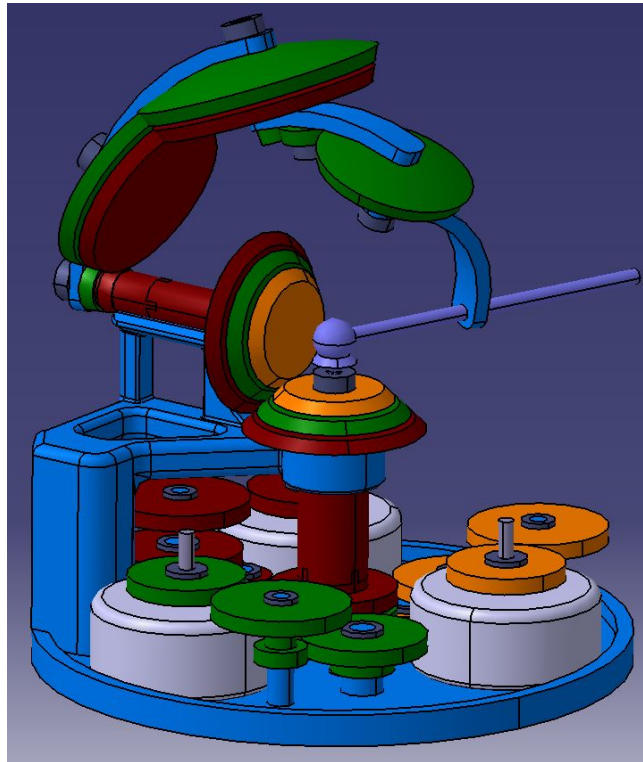


Figura 5.2.2.1: Vista isométrica de la solución 2

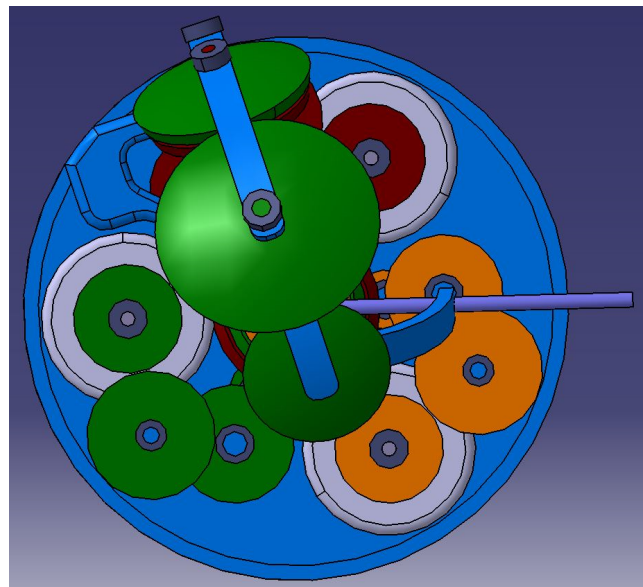


Figura 5.2.2.2: Vista superior de la solución 2

5.2.3. Solución 3

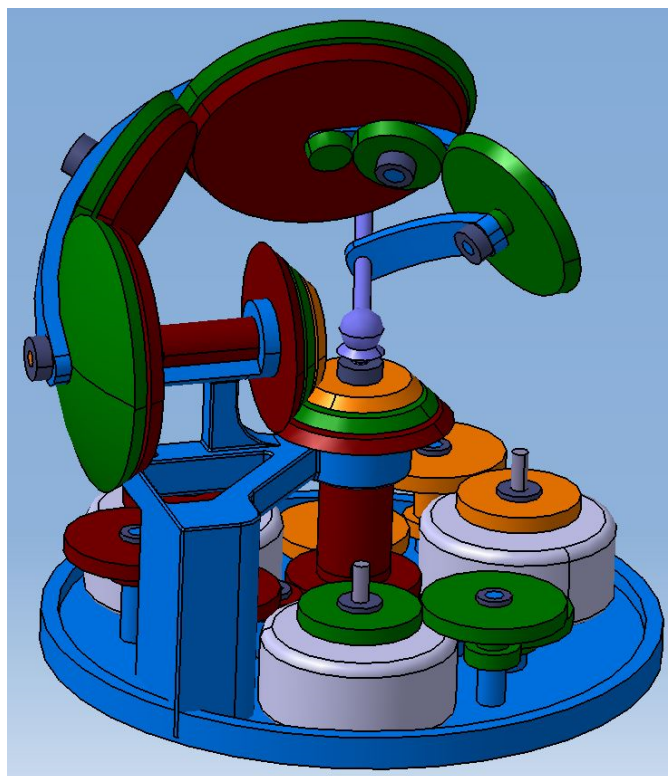


Figura 5.2.3.1: Vista isométrica de la solución 3



Figura 5.2.3.2: Vista superior de la solución 3

5.2.4. Solución 4

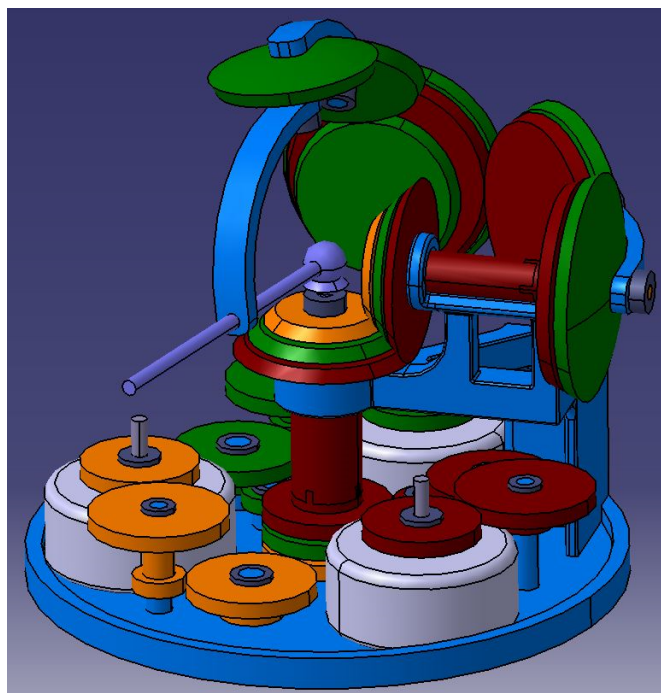


Figura 5.2.4.1: Vista isométrica de la solución 4

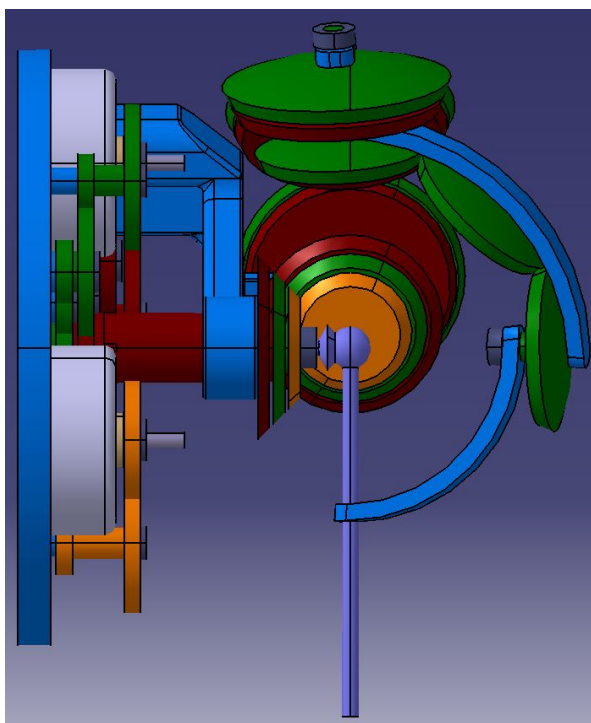


Figura 5.2.4.2: Vista frontal de la solución 4

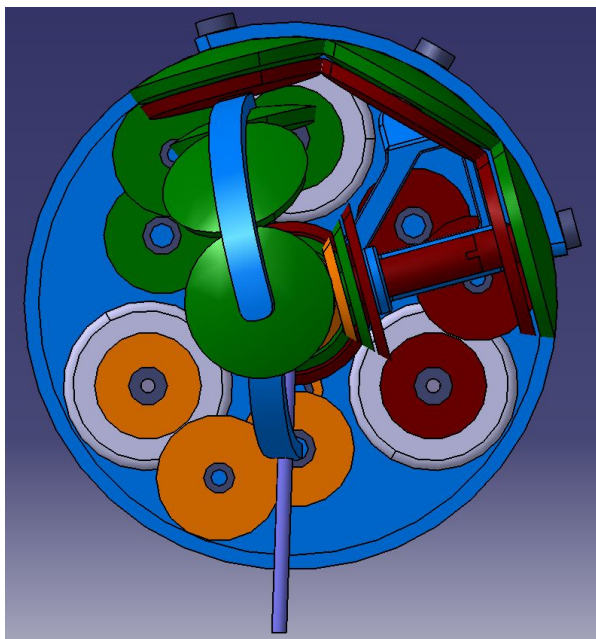


Figura 5.2.4.3: Vista lateral izquierda de la solución 4

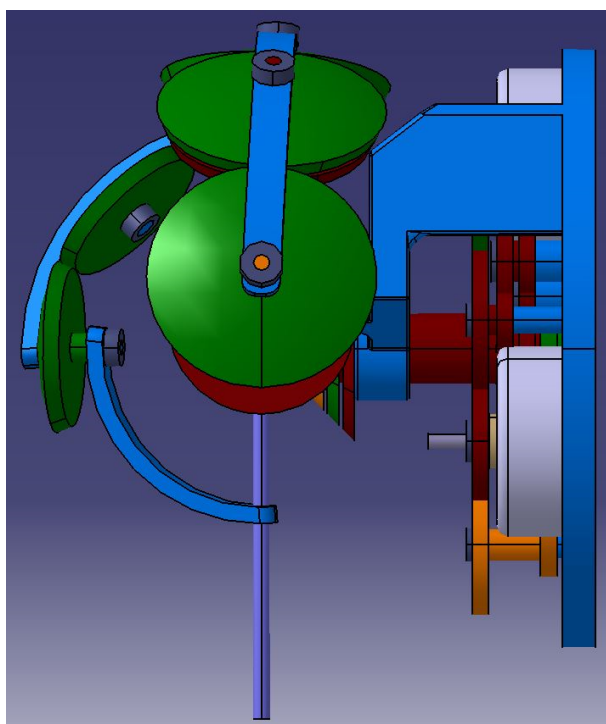


Figura 5.2.4.4: Vista posterior de la solución 4

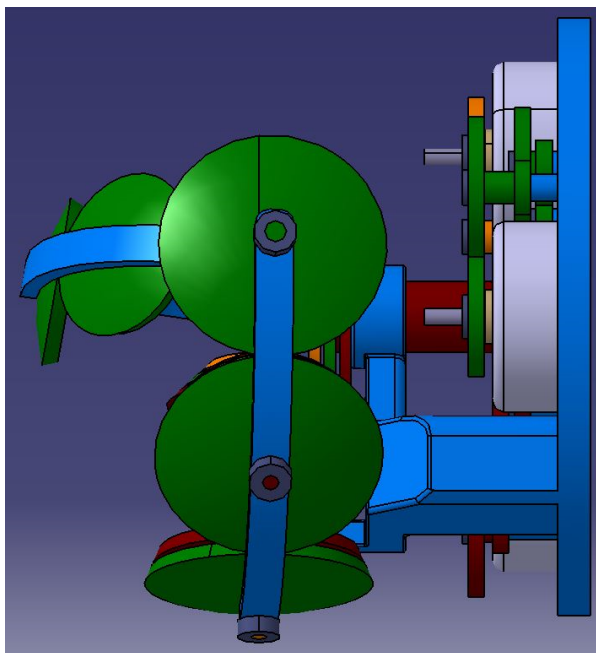


Figura 5.2.4.5: Vista superior de la solución 4

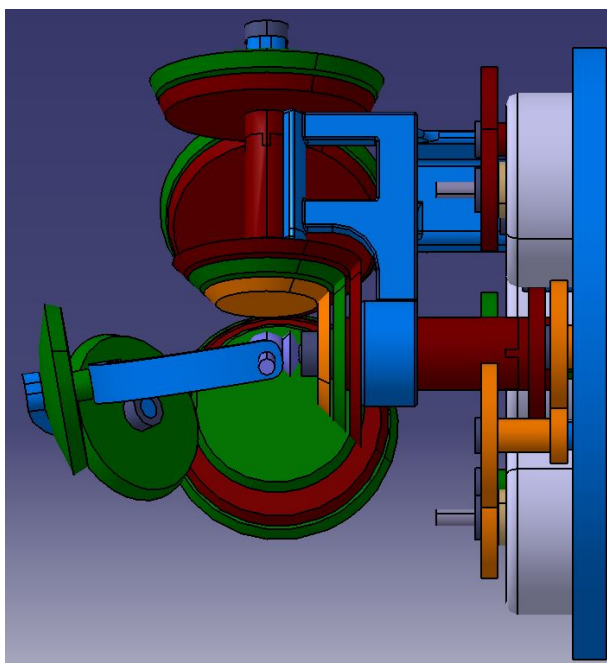


Figura 5.2.4.6: Vista inferior de la solución 4

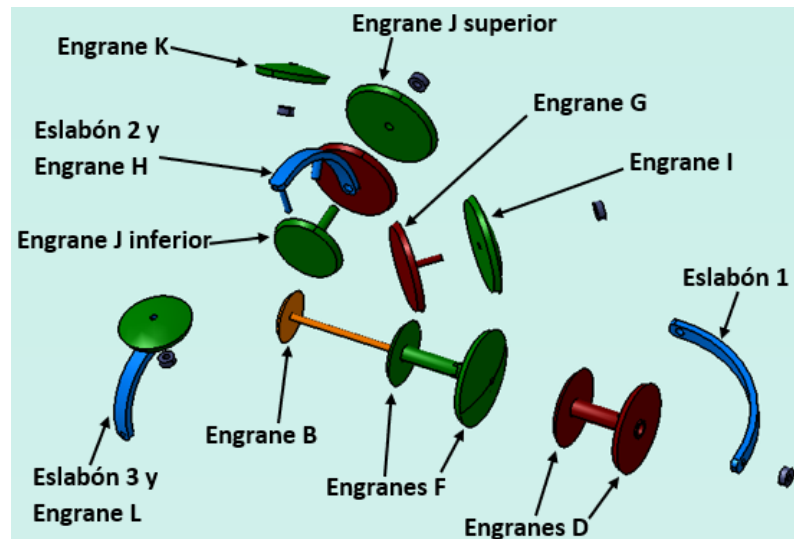


Figura 5.2.4.7: Vista explosiva de la solución 4, zona superior

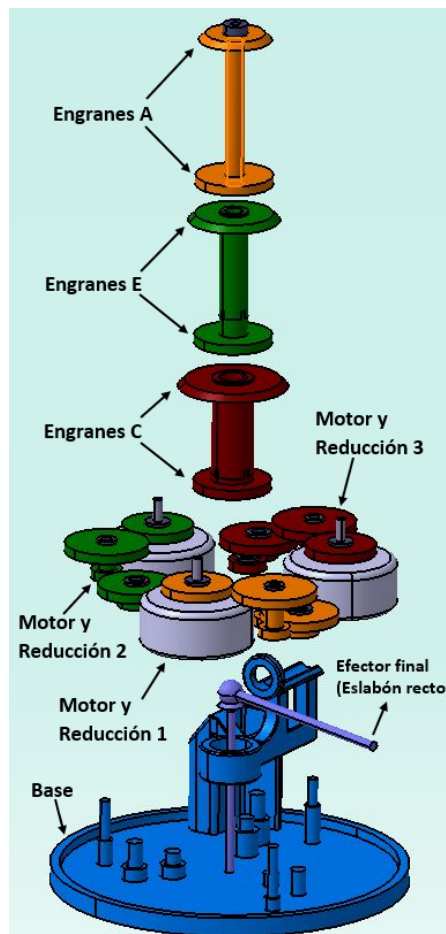


Figura 5.2.4.8: Vista explosiva de la solución 4, zona inferior

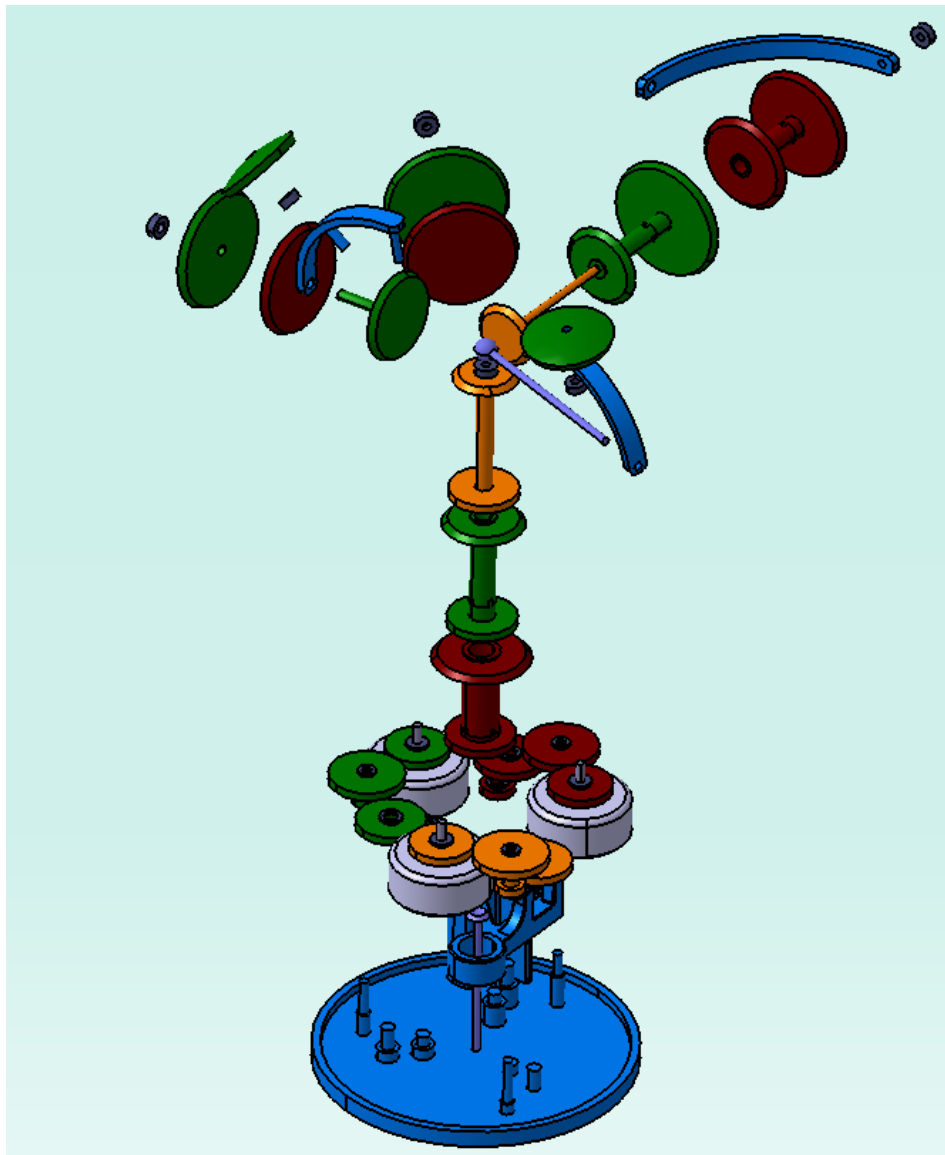


Figura 5.2.4.9: Vista explosiva completa de la solución 4

Considerando que la base de los modelos CAD, está hecha con el único propósito de sostener el mecanismo, sin tomar en cuenta la superficie en la que será fijada y que así mismo el modelo CAD empleado (solución 4) no fue creado con las dimensiones del maniquí utilizado, el posicionamiento aproximado del prototipo sería el mostrado representaciones siguientes (*Fig. 5.2.4.10 y 5.2.4.11*).



Figura 5.2.4.10: Vista frontal de la solución 4 en su posición aproximada



Figura 5.2.4.11: Vista posterior de la solución 4 en su posición aproximada

5.3. Análisis de resultados

Puede apreciarse que la primera y segunda solución de la síntesis estática presentan curvas de posición en extremo accidentadas. Tener curvas de posición poco suaves convierte a estas soluciones en opciones poco viables para ser usadas en una prótesis ya que el movimiento de los eslabones sería brusco e incómodo para el usuario.

La tercera y cuarta solución presentan curvas de posición más suaves. Sin embargo, al observar la irregularidad en el tamaño de los engranes cónicos de la solución 3, se puede apreciar que si los engranes son demasiado grandes, estos pueden reducir las posiciones que puede tomar el efector final, ya sea porque estos engranes entran en contacto directo con el efector final o porque los elementos de la base limitan el desplazamiento del eslabón al que están acoplados dichos engranes.

Por otro lado, si algún engrane es demasiado pequeño sería necesario emplear un tamaño de diente pequeño, incluso si el engrane siguiente con el que interactúe sea de mayor tamaño. Consecuentemente emplear dientes pequeños reduce la resistencia mecánica de los engranes, esto representa un mayor problema considerando que se busca amplificar el torque de salida de los actuadores.

Aunado a esto se presenta el problema de empatar las dimensiones de más de dos engranes cónicos para evitar interferencias.

Es por eso que se propuso obtener una apertura angular de engranes cónicos (ρ_{ec}) igual para todos los engranes. Esto se logra dividiendo la apertura angular de cada eslabón ρ_n ($n = 1, 2, 3$, número de eslabón) entre la cantidad de aperturas angulares de los engranes cónicos que sostiene cada eslabón. Así, si un eslabón soporta los ejes para 3 engranes cónicos, la apertura angular del eslabón se dividirá en 1 apertura angular de engrane cónico para cada engrane en los extremos y 2 aperturas angulares para el engrane interno, sumando un total de 4:

$$\rho_{ec} = \frac{\rho_n}{4} \quad (5.3.1)$$

De manera general, si algún eslabón tuviera más de 3 ejes (n_e , número de ejes) para engranes cónicos, la relación para obtener una apertura angular de engranes cónicos (ρ_{ec}) igual para todos los engranes sería:

$$\rho_{ec} = \frac{\rho_n}{2n_e - 2} \quad (5.3.2)$$

La solución 4 se generó siguiendo el lineamiento anterior obteniendo una relación de transmisión de 1 a 1 para los engranes cónicos.

Esta solución presenta curvas de posición suaves con engranes cónicos de tamaño medio que no requieren de un diseño tan específico para dimensionar los dientes, sin embargo, la relación de transmisión de los engranes cónicos no amplifica el par de salida de los motores, por lo que esta solución requiere que las transmisiones de engranes rectos que va de los motores a los engranes cónicos funcionen como reductor de velocidad, con esto se logra entregar un par mayor a los engranes cónicos.

La idea de generar una solución con eslabones de 90° surgió de la estructura de un giroscopio 3 ejes (*Fig. 5.3.1*) y se puede decir que el rango y las características del movimiento de esta solución son similares a las de las de dicho giroscopio.

Debido a la semejanza de la configuración de la solución 4 con un giroscopio, cuando se busca colocar el efector final en alguna posición determinada o que este siga una trayectoria específica, se debe tener especial cuidado con la singularidad llamada “Gimbal lock” (*Fig. 5.3.2 y Fig. 5.3.3*).

En esta singularidad se pierde uno de los grados de libertad del mecanismo cuando los ejes de rotación de dos de los eslabones se superponen o entran en una condición de paralelismo.

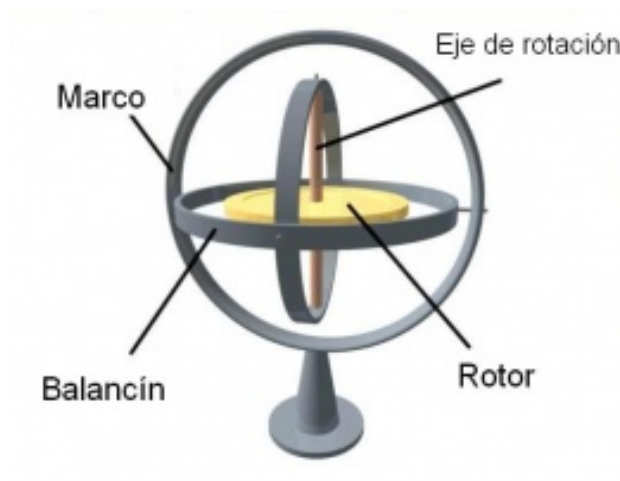


Figura 5.3.1: Giroscopio
(EcuRed, 2011)

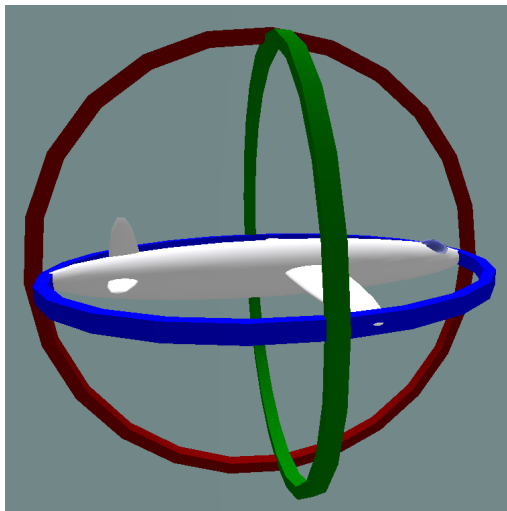


Figura 5.3.2: Sistema giroscópico
con tres grados de libertad
independientes
(Wikipedia, 2018)

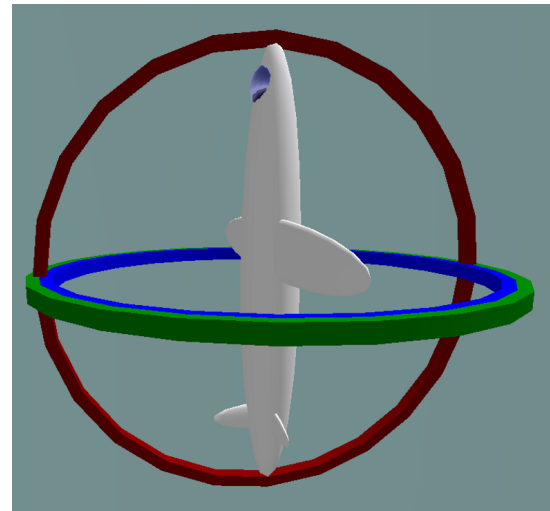


Figura 5.3.3: Sistema giroscópico
con dos ejes de rotación paralelos,
se pierde un grado de libertad
(Wikipedia, 2018)

Actualmente la diversidad de opciones para prótesis robóticas de hombro es reducida y en su mayoría las propuestas de mecanismos que emulen el movimiento de un hombro humano tienen aplicación para robots autónomos. En el caso de los robots autónomos no es necesario adecuar la sujeción del mecanismo a las geometrías irregulares del cuerpo humano y tampoco es mayor problema seleccionar motores más grandes, por lo que resulta útil explorar nuevas propuestas para modelos de prótesis robóticas de hombro.

La base fue diseñada únicamente para soportar el mecanismo, sin embargo, lo ideal sería hacer un estudio ergonómico para adecuar este soporte a la superficie del usuario donde se colocará la prótesis. También para generar los modelos CAD de las soluciones de la síntesis estática, se alineó por conveniencia el eje de rotación de los engranes cónicos A, C, E con el plano transversal en dirección lateral, pero esto no es realmente necesario e incluso se puede buscar una posición distinta, que se adecue más al usuario y que a la vez permita aprovechar mejor el espacio haciendo más compacto al empaquetamiento de la base.

Capítulo 6

Conclusiones

De la síntesis estática se obtuvieron varias configuraciones distintas para el mecanismo esférico de cinco barras con engranes, cada una con diferentes dimensiones y relaciones de engranajes, sin embargo, se observó que es más práctico emplear eslabones con la misma longitud a 90° de apertura, ya que esto simplifica las ecuaciones cinemáticas y ofrece un movimiento más suave.

Se comprobó que no cualquier configuración cumple con todas las restricciones estáticas y cinemáticas impuestas al mecanismo, por lo que es necesario un proceso iterativo para encontrar soluciones adecuadas.

Estas soluciones se deben evaluar con criterios como los de apertura y longitud de arco de los eslabones (preferentemente mayor a 45° y menor a 90°), longitud de arco total sumando las longitudes de arco de todos los eslabones (preferentemente que sea menor a $3/4$ del perímetro de la circunferencia de la esfera que contiene al mecanismo), apertura angular de las generatrices para los conos que contienen a los engranes cónicos (preferentemente debe ser un valor medio lo suficientemente grande para poder generar el engrane cónico, pero no tan grande como para disminuir significativamente las dimensiones de los otros engranes con los que interactúa), etc. Cumplir con estos criterios permiten que sea más factible emplear el mecanismo sintetizado en el diseño de un modelo CAD.

Se observó que la aplicación directa del método de lazo cerrado para resolver la cinemática del mecanismo arroja resultados insatisfactorios, por lo que es necesario modelar un sistema equivalente que se pueda resolver con este método.

Para evitar interferencias en el modelo CAD, los eslabones y engranes del mecanismo deben ser organizados por niveles de manera que los engranes acoplados a un eslabón no sean capaces de interactuar con los engranes de alguno de los otros dos eslabones, esto significa que los radios internos de los eslabones deben ser diferentes, siendo el radio externo del primero menor al radio interno del segundo, y el radio externo del segundo menor al radio interno del tercero.

Cuando se tienen sistemas de ecuaciones con mayor número de incógnitas que de ecuaciones es posible especificar algunas de las incógnitas del sistema para tratar de obtener un sistema cerrado, pero resulta más útil emplear métodos de optimización, que además son útiles para mejorar el empaquetamiento del mecanismo. No obstante, al usar una función objetivo para minimizar (la cual debe ser función de todas las incógnitas presentes en el sistema), los métodos de optimización pueden arrojar soluciones matemáticamente correctas pero cuya factibilidad para ser aplicadas en la práctica es pobre o incluso nula.

También debe considerarse que los valores iniciales y restricciones aplicadas a la función objetivo influyen sustancialmente para obtener soluciones adecuadas con el método numérico.

Al construir la función objetivo para la síntesis estática es posible seleccionar a placer las ecuaciones de diseño y ecuaciones de trabajo virtual, pero se debe tener en cuenta que las ecuaciones de trabajo virtual que se seleccionen deben coincidir con las posiciones seleccionadas de las ecuaciones de diseño, es decir que si se seleccionan las ecuaciones de diseño para la posición $j = 2, 3, \dots, n$, se podrán seleccionar las ecuaciones de trabajo virtual para la posición $j = 2, 3, \dots, n - m$. Donde m puede tomar valores de: $0 \leq m < n$.

Así mismo las ecuaciones de magnitud de los vectores de posición de los puntos para las juntas del mecanismo deben coincidir con las posiciones de las ecuaciones de diseño.

Para el mecanismo sintetizado no es necesario escalar las fuerzas y los torques ya que el sistema es independiente de la escala geométrica, siempre y cuando se respeten las relaciones y proporciones geométricas entre sus cuerpos.

Esta propuesta para prótesis de hombro presenta las ventajas de amplificar el par de salida de los actuadores, esto permite soportar cargas mayores empleando motores pequeños, también tiene un empaquetamiento reducido con gran movilidad y ya que el diseño es independiente de la escala (a excepción de los motores), este puede ser personalizado con las dimensiones del usuario.

Trabajo futuro

- Para mejorar el diseño de la prótesis se debe tomar el modelo CAD y generar un mapa de las posiciones que puede tomar el efector final sin que se presenten interferencias con los elementos de la base, los eslabones y los engranes, una vez hecho esto se podrá rediseñar el modelo para disminuir las interferencias que se puedan presentar.
- El mecanismo sintetizado es capaz de reproducir dos de los tres grados de libertad del hombro humano, para conseguir el movimiento completo de un hombro se debe añadir un grado de libertad en el efector final para que el mecanismo pueda generar los movimientos de rotación interna y rotación externa del hombro.
- El problema de la base se puede resolver con un algoritmo que ofrezca propuestas compactas para que el sistema de transmisión de los motores hacia los engranes cónicos, amplifique el par de salida de los engranes rectos y permitan adecuar la base de la prótesis al usuario. Como se tienen varias consideraciones para lograr que la base sea útil se pueden usar métodos como el de algoritmos genéticos para encontrar soluciones que satisfagan las restricciones que se le quieran imponer al diseño.
- Tomando en cuenta que el mecanismo sintetizado tiene como finalidad fungir como prótesis biónica, es necesario crear un controlador que pueda nutrirse de las señales del cuerpo humano, interpretarlas y ofrecer una respuesta para que los motores posicionen el efector final justo como el usuario lo desee, así mismo, se requiere seleccionar una fuente de alimentación para los motores e incluirla en la construcción del modelo CAD.
- Realizar el diseño de detalle de la prótesis completa considerando los esfuerzos que se presentan en el dispositivo al ser empleado.

Bibliografía

- [1] Cuenca J. Francisco, 2015, Notas Síntesis de Mecanismos Esféricos.
- [2] Suh & Radcliffe, 1978, Kinematics and Mechanisms Design, John Wiley & Sons.
- [3] J. M. MacCarthy & G. S. Soh, 2011, Geometric Design of linkages, Springer.
- [4] Donald T. Greenwood, 1998, Principles of Dynamics, Prentice Hall.
- [5] Chang D. Y. 1998 Kinematic and Static Analysis of 4C Spatial -Mechanisms, Tesis de Maestría, Universidad de California, Irvine.
- [6] Erdman A. G., 1998, Diseño de Mecanismos: Análisis y Síntesis, Prentice Hall.
- [7] Amitaba G. & Chakraborty S., 2011, Mechanics Over Micro and Nano Scales, Chapter 2, Springer.
- [8] De Matias A. Francisco, 2015, Síntesis de Posición de mecanismos espaciales con eslabones y engranes, Tesis de Maestría, UNAM.

Mesografía :

- La Gaveta. (2013). *Referencias anatómicas para describir el cuerpo*. Consultado el 28 de Agosto del 2018. Recuperado de <http://gavetasdemiescriptorio.blogspot.com/2013/03/referencias-anatomicas-para-describir.html>
- Albino N. (2014). *Conceptos básicos de anatomía*. Consultado el 28 de Agosto de 2018. Recuperado de <https://anatomiahumisabelprimera.wordpress.com/2014/12/08/conceptos-basicos-de-anatomia/>
- Valdés Casas J. C. (2018). *Prótesis de hombro*. Consultado el 29 de Agosto de 2018. Recuperado de <http://www.teknon.es/es/especialidades/valdes-casas-jose-carlos/protesis-hombro>
- Roza M. P. (2018). *Tipos de prótesis de hombro*. Consultado el 29 de Agosto de 2018. Recuperado de <http://www.mba.eu/blog/tipos-de-protesis-de-hombro/>
- Rodríguez Gómez A. (2011). *Desarrollan extremidades robóticas controladas por la mente*. Consultado el 30 de Agosto de 2018. Recuperado de https://www.tendencias21.net/Desarrollan-extremidades-roboticas-controladas-por-la-mente_a6414.html
- Fernandez Cortiñas A. B. (2015). *Cómo es un hombro normal*. Consultado el 29 de Agosto del 2018. Recuperado de <http://www.traumatologa.com/es/como-es-un-hombro-normal/>
- American Council on Exercise. (2017). *Muscles that move the arm*. Consultado el 15 de Agosto de 2018. Recuperado de <https://www.acefitness.org/fitness-certifications/resource-center/exam-preparation-blog/3535/muscles-that-move-the-arm>
- Abril J. (2015). *Musculatura de la cintura escapular*. Consultado el 15 de Agosto de 2018. Recuperado de <http://toraxsalud.blogspot.com/2015/12/redactado-por-judith-abril-musculatura.html>
- Manning R. (2017). *¿Cuál es el rango de movilidad normal del hombro?* Consultado el 15 de Agosto de 2018. Recuperado de https://muyfitness.com/rango-movilidad-normal-sobre_21715/
- Bialocerkowski A. E. (2006). *Comparison of visual and objective quantification of elbow and shoulder movement in children with obstetric brachial plexus palsy*. Consultado el 15 de Agosto de 2018. Recuperado de <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1713230/>
- Motor & Racing. (2013). *Transmisión automática de 9 relaciones para Mercedes*. Consultado el 9 de Agosto de 2018. Recuperado de <https://www.motoryracing.com/coches/noticias/transmision-automatica-9-relaciones-para-mercedes/>
- Aprende en línea (2016). *Biomecánica del hombro*. Consultado el 15 de Agosto de 2018. Recuperado de <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/mod/page/view.php?id=164180>
- EUSTON (2018). *Cintura escapular*. Consultado el Consultado el 15 de Agosto de 2018. Recuperado de <https://www.cirugiadelhombro.es/articulacion-escapulotoracica/>
- EcuRed (2011). *Giroscopio*. Consultado el 13 de Enero de 2019. Recuperado de: <https://www.ecured.cu/Giroscopio>
- Wikipedia (2018). *Gimbal lock*. Consultado el 15 de Enero de 2019. Recueperado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal_lock