FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

MOISES MENDOZA LINARES

FUNDAMENTOS DE MECANICA DE SOLIDOS

DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

C O N T E N I D O

CAPITULO:

CAPITULO I

INTRODUCCION

La mecánica de los Sólidos Deformable, constituye una rama de la mecánica que estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a diversos tipos de cargas.

El objetivo primordial de estas notas es proporcionar al estudiante de ingenieria un medio que le ayude a asimilar de manera sencilla los fundamentos de la mecánica de materiales.

Como es sabido, en todo diseño de ingeniería se requiere definir el tamaño físico de diferentes partes estructurales o partes componentes de maquinaria. Un conocimiento profundo del comportamiento mecánico es fundamental para un diseño confiable de cualquier estructura, como edificios o puentes, maquinaria y motores, submarinos y barcos o aviones y antenas.

En la mecánica de materiales, es conveniente considerar los esfuerzos y las deformaciones que presentan los cuerpos cuando están sometidos a la acción de cargas.

En el desarrollo de los temas que integran las presentes notas, se utilizan las propiedades de los cuerpos que se determinaron tanto experimental como teóricamente, así como leyes y conceptos técnicos que se han demostrado en otros cursos o que son fáciles de determinar con conocimimientos básicos de ingeniería. Se introducen hipótesis simplificadoras para facilitar la solución de gran número de problemas técnicamente de gran importancia, ya que la mecánica de los sólidos deformables interviene de manera destacada en todas las ramas de ingeniería, razón por la cual forma parte de las asignaturas fundamentales de un plan de estudios de ingeniería.

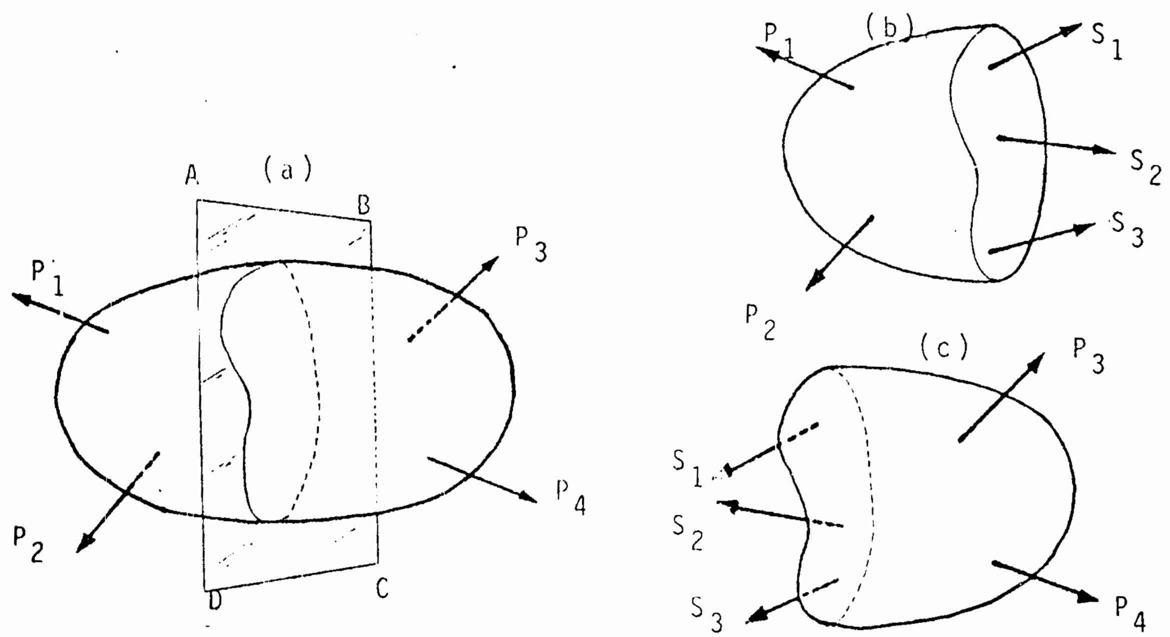
Las notas se limitarán a estudiar los temas más sencillos de la materia, puesto que es de carácter introductorio. Sin embargo, a pesar de la relativa sencillez de los métodos empleados, las técnicas resultantes son notablemente útiles.

Debido a que el principal problema del estudiante es la solución de problemas, estas notas proporcionan una parte teórica concisa la cual no contiene un número considerable de fórmulas, además se proporcionan ejemplos resueltos y algunos ejercicios con respuesta para que el alumno pueda comprobar los resultados obtenidos, aunados a los ejemplos que se solucionen durante el desarrollo de las clases.

Ya que la mecánica de materiales solo puede asimilarse resolviendo muchos problemas, el alumno tendrá la responsabilidad de ejercitar los conceptos que aquí se mencionan para poder obtener los conocimientos necesarios.

Ya que el principal problema de la mecánica de sólidos es determinar la resistencia interna y la deformación de un cuerpo sólido sometido a la acción de cargas, se requiera de un estudio de la naturaleza de las fuerzas que se generan dentro del cuerpo las cuales equilibran el efecto provocado por las fuerzas aplicadas externamente. Para tal estudio se trazará el diagrama de cuerpo libre del elemento en estudio. Tomemos en cuenta que como el cuerpo con las fuerzas actuando en él está en equilibrio, estas satisfacen las ecuaciones de equilibrio estático.

Una vez trazado de manera completa el d.c.l, se hace pasar un plano de corte a través de él, separandolo en dos partes, como se puede observar en la siguiente figura.



El proceso ilustrado en la figura anterior, se le denomina Método de Secciones. Se considera además que si el cuerpo como un todo está en equilibrio, cualquier parte componente del mismo, también lo estará. Para satisfacer esta condición, se requiere que en cada parte, en la sección de corte actue una fuerza resultante que logre dicha finalidad.

Lo anterior nos lleva a concluir que las fuerzas externas son equilibradas por las fuerzas internas generadas en la sección de corte. Es importante mencionar que para simplificar el cálculo de las fuerzas internas, el plano de corte deberá orientarse en general para quedar perpendicular al eje longitudinal del cuerpo.

Es sugerible seguir una secuencia en la solución de problemas de mecánica de materiales y aquí se da una.

a) Aislar el cuerpo en estudio y trazar su correspondiente diagrama de cuerpo libre.

b) Aplicando las ecuaciones de equilibrio, para determinar el valor de las reacciones correspondientes

c) En el punto o zona donde se desea determinar la deformación o el valor del esfuerzo, se hace pasar un plano de corte separando ambas partes resultantes.

d) Determinar el sistema de fuerzas internas para mantener el equilibrio de la parte aislada. Dicho sistema está constituido por una fuerza axial, una fuerza cortante, un momento flector y un momento torsor. Estas cantidades se obtienen considerando parte del elemento como cuerpo libre.

e) Una vez determinado el valor de las fuerzas internas, la fórmulas establecidas permitirán determinar el valor del esfuerzo o de la deformación requeridos.

CAPITULO II

DIAGRAMAS DE FUERZA AXIAL, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE.

II.1. VIGAS, APOYOS Y CARGAS.

II.2. FUERZA CORTANTE, FUERZA AXIAL Y MOMENTO FLEXIONANTE.

II.3. DIAGRAMAS.

II.4. RELACIONES ENTRE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR

CAPITULO II

DIAGRAMAS DE FUERZA AXIAL, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE

OBJETIVO:

i) El objetivo fundamental de este capítulo es establecer procedimientos para determinar las fuerzas que existen en una sección transversal de una viga. Al terminar esta sección, usted deberá ser capaz de:

ii) Evaluar la fuerza cortante y el momento flector que actuan en cualquier sección de una viga estáticamente determinada.

iii) Construir los diagramas correspondientes de fuerza cortante y momento flector de vigas sujetas a diversas combinaciones de carga.

I N T R O D U C C I O N

El problema fundamental de la Mecânica de Sólidos es determinar la relación que existe entre los esfuerzos y deformaciones producidas por cargas aplicadas externamente a un elemento o una estructura, este análisis es relativamente complicado debido a que los efectos de las cargas aplicadas son variables de una a otra sección del elemento o estructura en estudio.

En este capítulo estudiaremos la distribución y câlculo de las fuerzas axial y cortante y del momento flexionante en vigas sometidas a distintas combinaciones de cargas en diferentes condiciones de sujección o apoyo y, concretamente, la determinación de sus valores máximos.

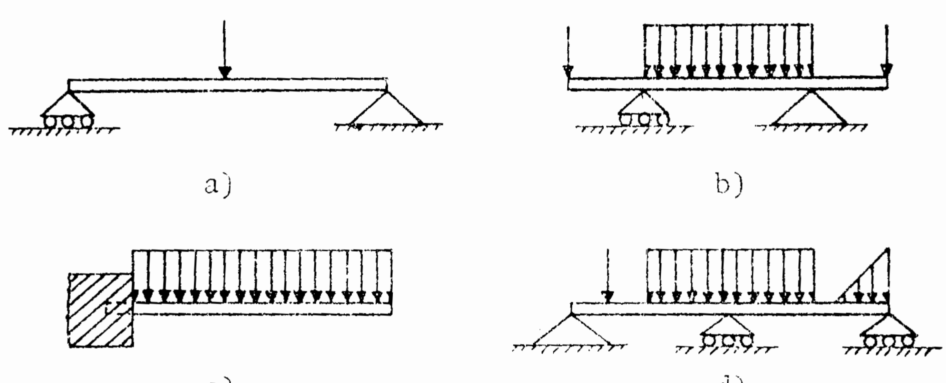
El análisis de una viga se empieza trazando el Diagrama de Cuerpo Libre de dicho elemento, y las reacciones se calculan después; el estudio se limita a vigas estáticamente determinadas o isostáticas, luego se utiliza repetidamente el concepto de que sí un cuerpo en conjunto está en equilibrio cualquier parte de él lo estará también.

En general, en una sección cualquiera, se necesita una fuerza vertical, una fuerza horizontal y un momento para mantener dicha sección del elemento en equilibrio.

2.1 VIGAS, APOYOS Y CARGAS.

Las vigas son elementos estructurales cuyo principal objetivo es soportar cargas transversales. La mayor parte de ellas soporta cargas pequeñas en dirección axial, o cargas torsionales en adición a las cargas transversales durante su servicio, cuando estas cargas alcanzan cierta magnitud, los efectos axiales y torsionales deberán superponerse al efecto flexionante.

En la figura 2.1 se muestran varios tipos de vigas con distintas condiciones de sujección. Una viga simplemente apoyada en sus extremos, tiene una articulación en un extremo y un apoyo móvil sobre rodillos en el otro. Una viga en voladizo, o ménsula, se sujeta en un solo extremo, en un empotramiento que impide el giro en dicho extremo. Una viga apoyada con voladizos está soportada mediante una articulación y apoyo de rodillos, pero uno o los dos extremos sobresalen de los soportes. Todas estas vigas son estáticamente determinadas, ya que sus reacciones pueden determinarse directamente mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático.



a) b) c) d)

FIGURA 2.1

En la figura 2.2 se muestran otras vigas con otras condiciones de sujeción como son la viga empotrada apoyada, la viga doblemente empotrada y la viga continua. Todas ellas tienen como mínimo una reacción más de las estrictamente necesarias para su sustentación y son por tanto estáticamente indeterminadas o hiperestáticas.

En estas notas nos ocuparemos únicamente del análisis de vigas estáticamente determinadas.

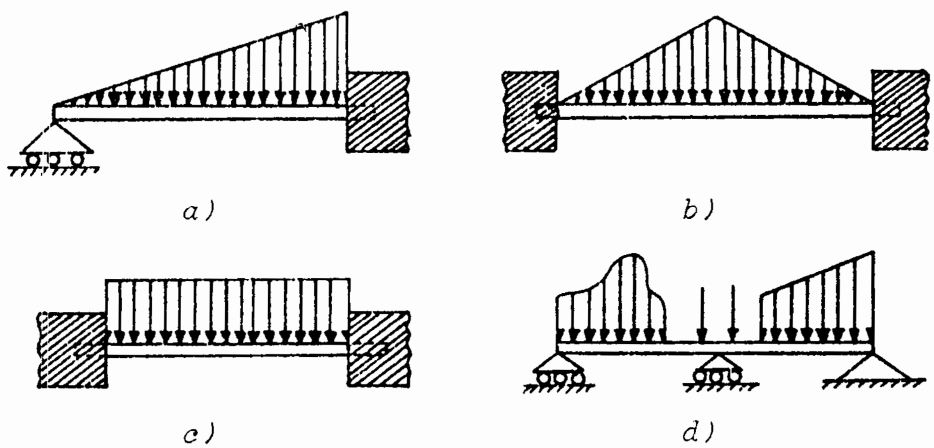


FIGURA 2.2

En el ejercicio de la ingeniería las cargas que actúan sobre un elemento o una estructura son representadas por vectores. La representación de estas fuerzas por vectores es una idealización que facilita el análisis de dichos elementos. En la figura 2.3 ilustramos esta idealización, por ejemplo, la carga concentrada en la viga de la figura 2.3 no está realmente concentrada en un punto, está distribuida sobre un área finita que tiene las dimensiones w y d. Si la distancia d fuera mayor y nuestro análisis requiriera de mayor precisión la representación debería ser como la mostrada en la figura 2.4 a y si $d=\ell$, deberíamos representarla como se muestra en la figura 2.4 b.

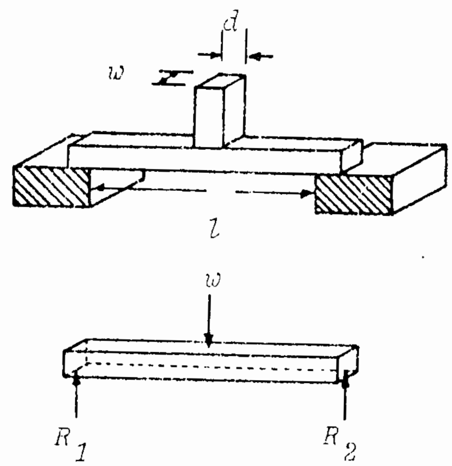


FIGURA 2.3

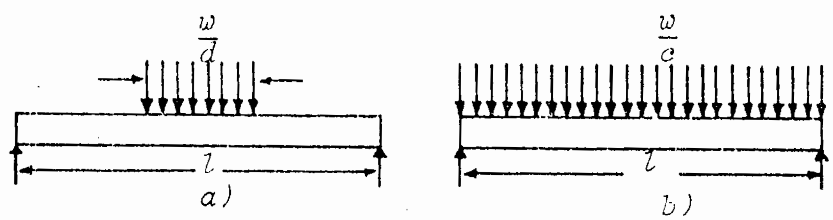


FIGURA 2.4

En general para representar una carga debemos tomar en cuenta las siguientes consideraciones: Una carga concentrada o puntual es la que actúa sobre una longitud tan pequeña de la viga que puede suponerse que lo hace sobre un punto, como se observa en la figura 2.1 a. Por el contrario una carga distribuida es la que actúa sobre una longitud finita de la viga. Puede ser uniformemente distribuida en toda su longitud, como en la figura 2.1 c, o sobre una parte de ella, como en la figura 2.1 b. Las cargas repartidas también pueden ser variables uniformemente o no. En una carga uniformemente variable su intensidad crece o decrece en una proporción constante como en las figuras 2.2 a y 2.2 b.

Un ejemplo de cargas de esta clase es la presión del agua contra las paredes de una presa, o el empuje de la arena. La carga también puede variar de forma arbitraria, como en el tramo izquierdo de la figura 2.2 d. Este tipo de carga puede producirse, por ejemplo, en el apilado de sacos, figura 2.5.

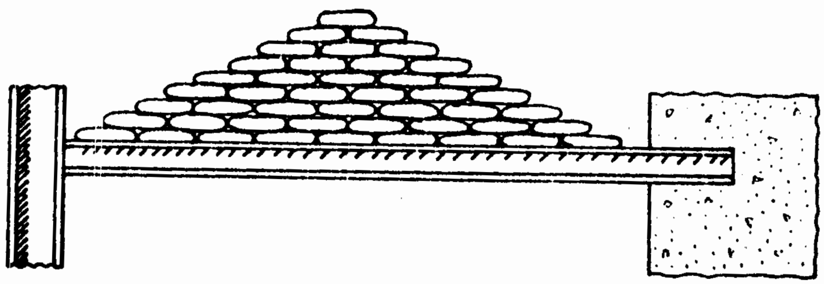


FIGURA 2.5

Aquí hemos considerado cargas transmitidas por contacto directo de un cuerpo actuando sobre otro, sin embargo también existen otros tipos de cargas que no se transmiten por contacto entre cuerpos. Las más importantes de estos tipos son las cargas gravitacional, de inercia, magnéticas e incluso cargas térmicas, sin embargo el estudio de estos tipos de cargas queda fuera de los alcances de este capítulo.

2.2 FUERZA CORTANTE FUERZA AXIAL Y MOMENTO FLEXIONANTE.

2.2.1 Fuerza Cortante.

Para mantener en equilibrio un segmento de viga sobre el cual actúan cargas verticalmente, debe haber una fuerza vertical interna en la sección para satisfacer la ecuación $\Sigma f_y = 0$.

Esta fuerza interna V, que actúa perpendicularmente al eje de la viga, se llama fuerza cortante. Tal fuerza es numéricamente igual a la suma algebraica de todas las componentes verticales de las fuerzas externas que actúan sobre el elemento aislado, pero tiene sentido contrario.

Al calcular V, las fuerzas que actúan hacia arriba se consideran positivas y negativas las que actúan hacia abajo, ver figura 2.6.

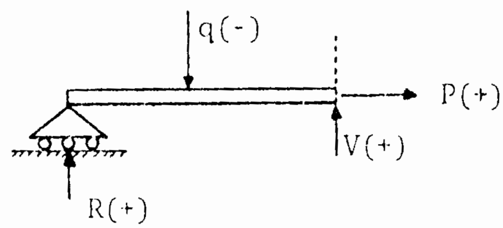


FIGURA 2.6

2.2.2 Fuerza Axial.

Además de una fuerza cortante V, una fuerza horizontal P puede ser necesaria en una sección transversal de una viga para satisfacer las condiciones de equilibrio. La magnitud y el sentido de esta fuerza se deducen de la solución de la ecuación $\Sigma F_x=0$.

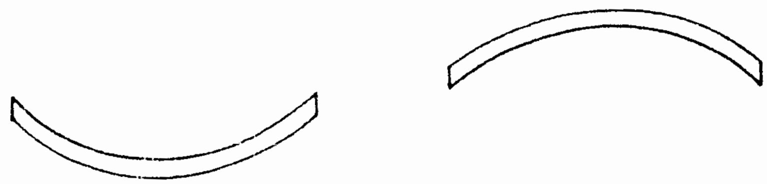
Si la fuerza horizontal P actúa hacia la sección recibe el nombre de fuerza de compresión, considerandosele negativa y si actúa alejándose de -- ella se le llama fuerza de tensión y se considera positiva, esto se ilustra en la figura 2.6.

La línea de acción de una fuerza axial pasa siempre por el centroide del área transversal de la viga.

2.2.3 Momento Flexionante.

La existencia de una fuerza cortante y una fuerza axial en una sección transversal de una viga aseguran la satisfacción de las ecuaciones $\Sigma F_y=0$ y $\Sigma F_x=0$. La condición restante de equilibrio estático para un problema planar es $\Sigma M_z=0$. Esta se satisface sólo si se desarrolla un par o momento resistente interno en el área transversal de la sección para contrarrestrar el momento originado por las fuerzas externas.

El momento resistente interno debe actuar en sentido contrario al momento externo para satisfacer la ecuación de $\Sigma M_z = 0$. Estos momentos tienden a flexionar la viga en el plano de las cargas y se denominan momentos flexionantes. El criterio más extendido es que el momento flector es positivo si la flexión que produce en la viga presenta la concavidad hacia arriba y negativa en sentido contrario. Esto se ilustra en la figura 2.7.



FLEXION POSITIVA FLEXION NEGATIVA

FIGURA 2.7

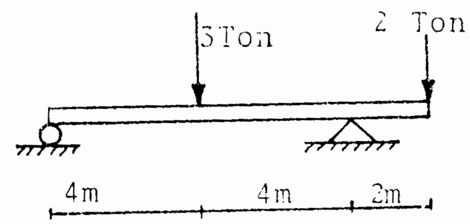
2.3. DIAGRAMAS DE FUERZA AXIAL, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE.

Una vez determinada la magnitud y sentido de la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante se pueden trazar gráficas de sus funciones en diagramas separados. En tales diagramas, desde una línea base igual a la longitud de la viga, se llevan ordenadas iguales a los valores de las cantidades calculadas. Cuando los puntos así determinados se unen por líneas, se obtiene una representación gráfica de la función.

Los diagramas de fuerza axial no se emplean con tanta frecuencia como los de fuerza cortante y momento flexionante, porque la mayoría de las vigas que se estudian en la práctica están cargadas por fuerzas que actúan perpendicularmente al eje de la viga. Para tales cargas no existe fuerza axial en ninguna sección de la viga.

EJEMPLO 2.1

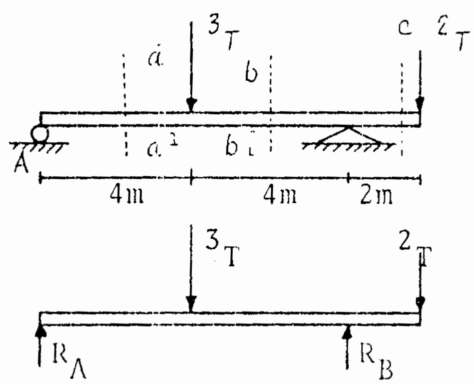
Para la viga mostrada trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante utilizando el método de las secciones.



SOLUCION:

El primer paso para solucionar nuestro problema consiste en trazar el D.C.L. y a continuación se procede a calcular las reacciones satisfaciendo las ecuaciones de equilibrio estático:

$$\Sigma F_x = 0 \quad , \quad \Sigma F_y = 0 \quad , \quad \Sigma M_z = 0$$



$\Sigma F_y = 0$

$R_A + R_B - 5 = 0$

$R_A + R_B = 5$ Ton - - - - - - (1)

$\Sigma M_A = 0 +$

$-3(4) - 2(10) + R_B(8) = 0$ - - - (2)

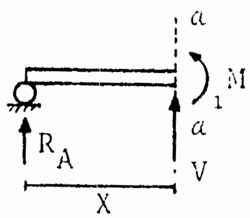
$R_B = \dfrac{32}{8}$, $R_B = 4$ Ton

Sustituyendo en (1):

$R_A = 1$ Ton

Ahora se aplica el concepto de que si un cuerpo en conjunto está en equilibrio, cualquier parte de él lo estará también. Procedamos a analizar las secciones en que se ha dividido la viga (nótese que siempre se secciona entre 2 cargas):

Analizando la sección $a\text{-}a^1$



$\Sigma F_y = 0$

$R_A + V = 0$

$V = -R_A$

$V = -1 \text{ Ton}$ --- (3)

$\Sigma M = 0 +\circlearrowright$

$M - R_A(x) = 0$

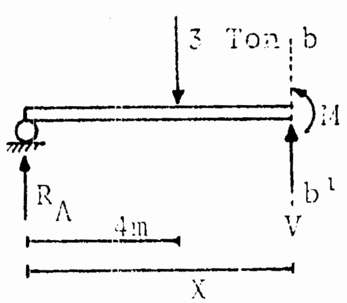
$M = R_A(x)$

$M = x$ TON. m --(4)

$0 \leq x < 4m$

Estos límites indican el intervalo de la viga en que son válidas las ecs. (3) y (4)

Analizando la sección $b\text{-}b^1$



$\Sigma F_y = 0$

$V + R_A - 3 = 0$

$V = 3 - 1$

$V = 2$ Ton---(5)

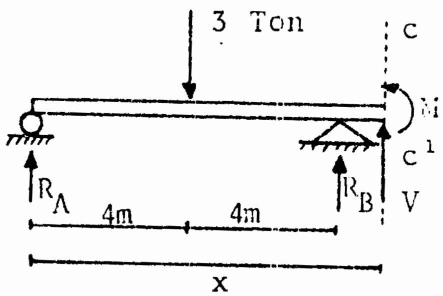
$\Sigma M = 0 +\circlearrowright$

$M - R_A(x) + 3(x - 4) = 0$

$M = -2x + 12$ ---(6)

$4 < x < 8$

Analizando la sección c-c'



$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B + V - 3 = 0$$

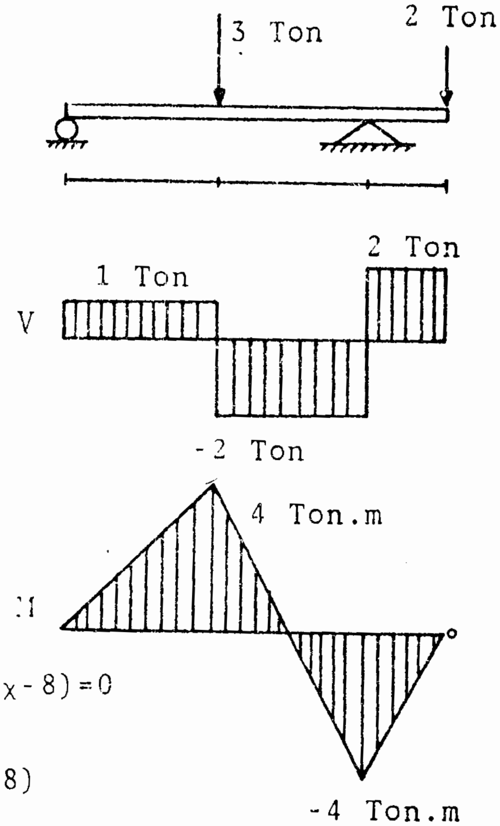
$$V = 3 - 1 - 4$$

$$V = -2T \quad --- \quad (7)$$

$$\Sigma M = 0 +\circlearrowright$$

$$M - x + 3(x-4) - 4(x-8) = 0$$

$$M = 2x - 20 \quad --- \quad (8)$$

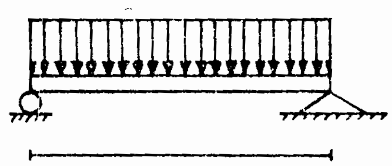


$$8 < x \leq 10$$

Ahora procedemos a trazar los diagramas utilizando las ecuaciones (3), (4), (5), (6), (7), (8) previamente evaluadas en los límites correspondientes. El resultado se muestra en la figura.

EJEMPLO 2.2

Para la viga mostrada trace los diagramas de la fuerza cortante y momento flexionante utilizando el método de las secciones:



$\Sigma F_y = 0$

$R_A + R_B - 12 = 0$

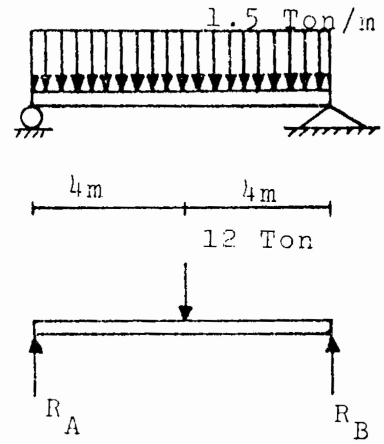
$R_A + R_B = 12$

$\Sigma M_A = 0 +$

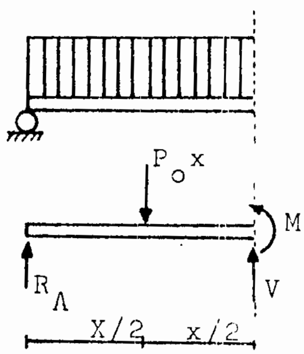
$R_A(8) - 12(4) = 0$

$R_B = 6$ Ton

$R_A = 6$ Ton



Como se puede ver la viga sólo tiene un corte. Procedamos a analizarlo:



$\Sigma F_y = 0$

$R_A + V - P_o(x) = 0$

$V = P_o x - P_A$

$V = 1.5x - 6$ -- (1)

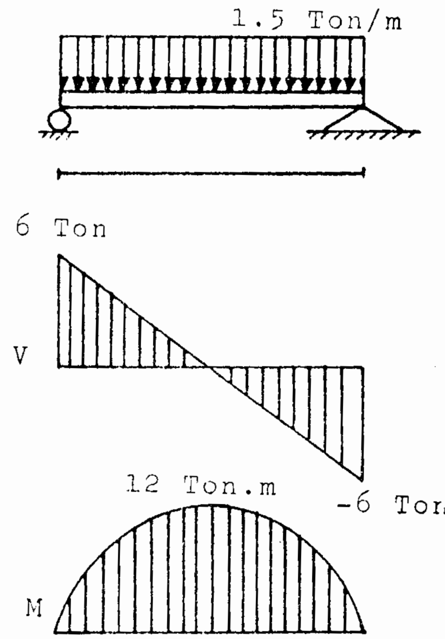
$\Sigma M = 0 +$

$M - R_A(x) - \frac{1}{2} P_o x^2 = 0$

$M = R_A x - \frac{1}{2} P_o x^2$

$M = 6x - \frac{1}{2}(1.5)x^2$

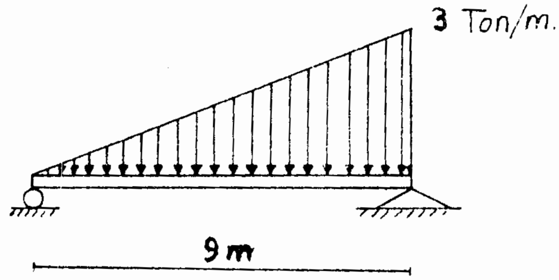
$0 \leq x \leq (8)$



Graficando nuestros resultados obtendremos la figura mostrada.

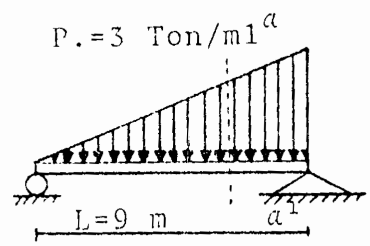
EJEMPLO 2.3

La figura muestra una viga con carga uniformemente variada. Determine sus diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flexionante correspondientes.



Solución:

Una vez trazado el D.C.L pro cememos a calcular las reacciones.

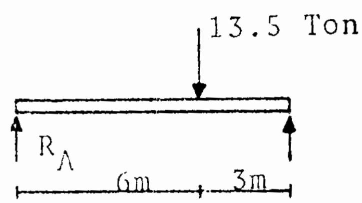


$\Sigma F_y=0$

$R_A+R_B-13.5=0$

$\Sigma M_A=0+$

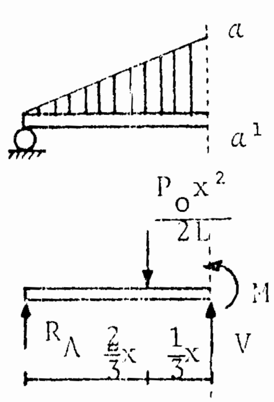
$-13.5(6)+R_B(9)=0$



$R_B=9$ Ton

$R_A=4.5$ Ton

Analizando la sección $a-a^1$:



$\Sigma F_y=0$

$R_A+V-\dfrac{P_o\,x^2}{2L}$

$V=\dfrac{3x^2}{18}-4.5 \quad --(1)$

$\Sigma M=0+$

$M-R_A x-\dfrac{P_o x^2}{2L}\,\dfrac{x}{3}=0$

$M=4.5\,x-\dfrac{3x^3}{54}$

$0\leq x\leq 9$

El resultado se muestra en la figura.

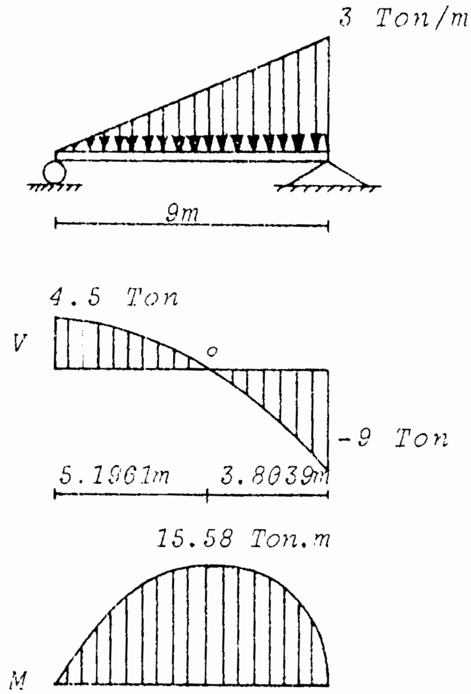
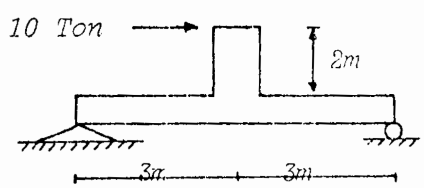


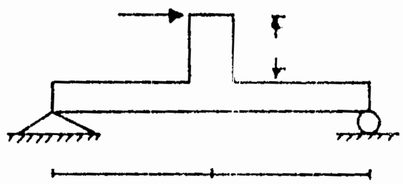
FIGURA 2.10

EJEMPLO 2.4

Para la viga mostrada en la figura, trace los diagramas de carga axial, fuerza cortante y momento flector empleando el método de las secciones.



Solución

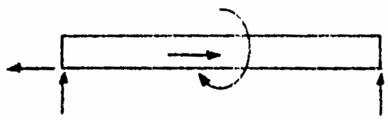


$\Sigma F_x = 0$

$-R_{Ax} + 10 = 0$

$\therefore \underline{R_{Ax} = 10}$

$\Sigma F_y = 0$

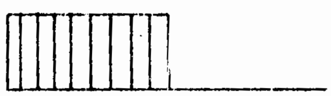


$R_{Ay} + R_{oy} = 0$

$R_{Ay} = -R_{oy}$

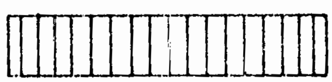
$\Sigma M_A = 0 +\circlearrowright$

$-20 + R_{oy}(6) = 0$

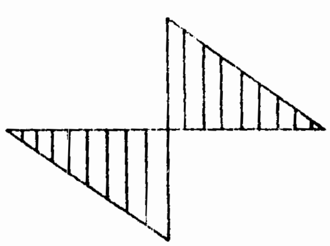


$R_{oy} = \frac{20}{6} \quad . \underline{R_{oy} = 3.33}$

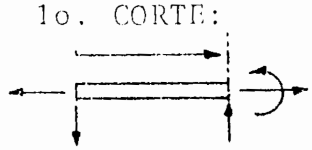
$\therefore \underline{R_{Ay} = -3.33}$



El signo negativo indica que supusimos en dirección opuesta a R_{Ay}, no quiere decir que la reacción sea negativa. (La dirección correcta se indica al costado izquierdo)



1o. CORTE:



$0 < x < 3$

$\Sigma F_x = 0$

$-R_{Ax} + P = 0 \qquad P = R_{Ax}$

$\underline{\underline{P = 10}}$

$\Sigma F_y = 0$

$-R_{Ay} + V = 0$

$V = R_{Ay}$

$\underline{\underline{V = 3.33}}$

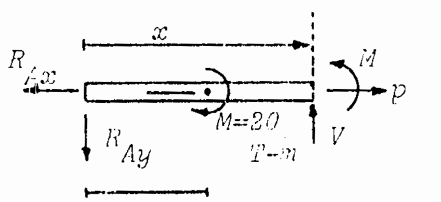
$\Sigma M=0+\circlearrowright$

$M+R_{Ay}(x)=0$

$M=-R_{Ay}x$ $\qquad M_o=0$

$\underline{\underline{M=-3.33x}}$ $\qquad M_3=-10$

2o. CORTE: $\qquad 3<x<6$



$\Sigma F_x=0$

$-R_{Ax}+10+P=0$

$-10+10+P=0$

$\underline{\underline{P=0}}$

$\Sigma Fy=0$

$-R_{Ay}+v=0$

$\underline{\underline{v-3.333}}$

$\Sigma M=0+\circlearrowright$

$M-20+R_{Ay}(x)=0$

$M-20+3.33(x)=0$

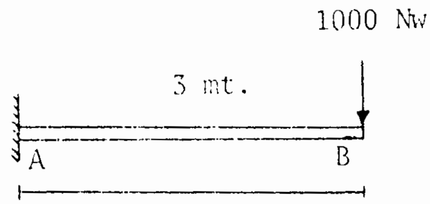
$\underline{\underline{M=20-3.33(x)}}$

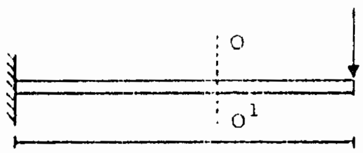
$M_3=10$

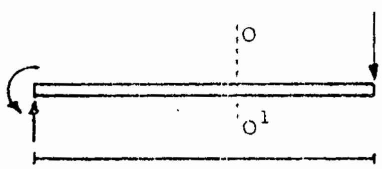
$M_6=0$

EJEMPLO 2.5

Para la viga mostrada en la figura trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector







Solución:

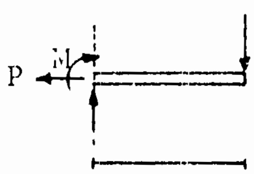
$\Sigma M = 0$

$M = 3(-1000\ Nw)$

$\underline{M = -3000\ Nw}$

$\underline{R_{Ay} = 1000\ Nw}$

Analizando la parte "derecha" de la sección 00'



$\Sigma F_y = 0$

$-v - 1000$

$v + 1000 = 0$

$\underline{\underline{v = -1000}}$

$\Sigma F_x = 0$

$P = 0$

$\Sigma M = 0$

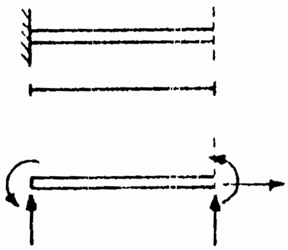
$M + 1000(x) = 0$

$\underline{\underline{M = -1000\ x}}$

$0 \leq x \leq 3$

Analizando la parte "izquierda" de la sección oo'.

$$M = -3000$$



$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

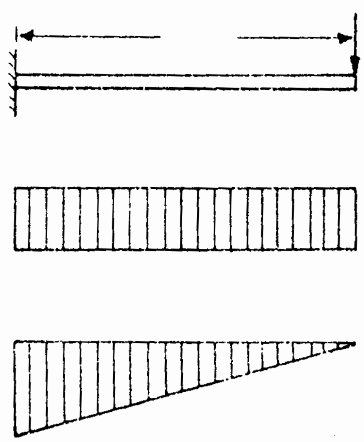
$$P = 0 \qquad R_A + v = 0 \qquad M - (-3000) - R_A(x) = 0$$

$$v = -R_A \qquad M + 3000 - R_A x = 0$$

$$\underline{\underline{v = -1000}} \qquad \underline{\underline{M = -3000 - 1000x}}$$

$$0 \leq x \leq 3$$

El resultado se muestra en la figura



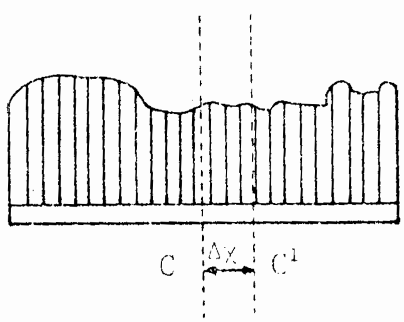
2.4 RELACIONES ENTRE LA DISTRIBUCION DE LA CARGA, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR.

Hasta ahora hemos observado que la fuerza cortante v y el momento flector M, en general, varían con la distancia x que define la localización de la sección bajo análisis.

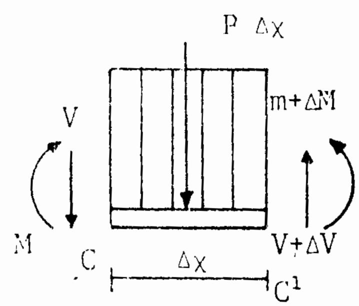
En la mayor parte de los problemas, nuestro interés principal se centrará en la obtención de la fuerza cortante máxima y del mayor momento flexionante. ¿Cómo podemos obtener estos máximos?, ¿Debemos analizar un gran número de secciones hasta encontrarlos?.

Es evidente que este procedimiento llevaría mucho tiempo e involucraría muchos cálculos; sin embargo, las relaciones entre la distribución de carga, la fuerza cortante y el momento flector nos simplifican enormemente este análisis.

Considere un elemento de viga con una longitud Δx separado por dos secciones próximas perpendiculares a su eje, figura 2.8a. Todas las fuerzas que actúan sobre este elemento se indican en la figura 2.8b. Como la fuerza cortante y el momento flexionante pueden cambiar de una sección a la siguiente, observe que para el lado derecho del elemento, tales cantidades se designan como $v+\Delta v$ y $M+\Delta M$ respectivamente.



a)



b)

De la figura 2.8b se tiene:

$$\Sigma Fy=0$$

$$v+P\Delta x-v-\Delta v=0$$

$$-P = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \longrightarrow 0$ se tiene:

$$\lim_{\Delta\chi \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta \chi} = \frac{dv}{d\chi} = -p$$

$$dv = -P \ d\chi$$

Integrando a ambos lados de la ecuación

$$v = - \int P \ d\chi + C_1 \ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\Sigma M_d = 0 \ +\curvearrowleft$$

También

$$M + \Delta M + P \ \Delta\chi \ \left(\frac{\Delta\chi}{2} \right) - M + v \ \Delta\chi = 0$$

Tomando en cuenta que el tercer sumando contiene el cuadrado de una diferencial, es decir, es un diferencial de segundo orden que se puede despreciar frente a los de primer orden, la ecuación anterior se puede escribir en la forma:

$$\Delta M + v \Delta\chi = 0$$

$$- v = \frac{\Delta M}{\Delta \chi}$$

Cuando $\Delta\chi \to 0$ se tiene: $\lim_{\Delta\chi \, 0} = \frac{\Delta M}{\Delta\chi} = \frac{dM}{d\chi} = - v$

$$dM = - v \cdot d \ \chi$$

Integrando a ambos lados de la ecuación

$$M = - \int v d\chi + c_2 \ldots\ldots\ldots (B)$$

Las expresiones A y B proporcionan un método interesante para calcular la variación de v y M y, por lo tanto, su valor numérico en cualquier sección, como verá en próximos ejercicios.

RESUMEN DEL CAPITULO

Cuando uno se ha familiarizado con la forma que deben tomar los diagramas de corte y momentos por el tipo de carga que actúa sobre cada tramo de la viga, es posible prescindir del uso de ecuaciones y efectuar el trazo aplicando únicamente principios generales.

Para obtener el diagrama de momentos se hace uso de la relación $M=-\int V\ dx$, lo cual indica que la ordenada del diagrama de momentos para una sección es igual al área neta acumulada del diagrama de corte entre el origen y esa sección.

Los principios generales antes mencionados son:

- Para una viga simplemente apoyada el momento flector inicia en cero y termina en cero.

- En el punto donde la fuerza cortante es nula se presenta un valor máximo del momento flector.

- El valor del momento para una viga empotrada es máximo en el empotramiento.

- La integral de una función escalón es una rampa.

- La integral de una función rampa es una parábola.

- La integral de una parábola es una parábola cúbica.

CAPITULO III

CONCEPTO DE ESFUERZO.

III.1. CONCEPTO PRELIMINARES.

III.2. CARGA AXIAL, ESFUERZO NORMAL.

III.3. ESFUERZO CORTANTE.

III.4. ESFUERZO DE APLASTAMIENTO.

III.5. ESFUERZOS PERMISIBLES Y CARGAS PERMISIBLES.

III.6. CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS.

CAPITULO III

CONCEPTO DE ESFUERZO

OBJETIVO:

Al terminar el estudio de esta sección el alumno deberá ser capaz de:

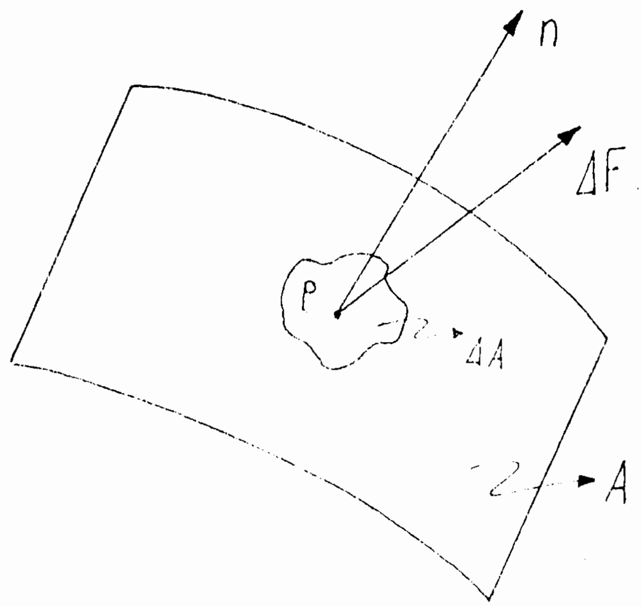
1. Definir esfuerzo normal y esfuerzo cortante indicando la diferencia entre ellos.

2. Analizar sistemas sencillos calculando los esfuerzos que se indican en sus diferentes componentes.

INTRODUCCION:

Básicamente dos tipos de fuerzas actúan sobre un cuerpo, las cuales le producen esfuerzo; un tipo de fuerzas es llamdo "fuerzas de superficie", por la simple razón de que actúan sobre la superficie del cuerpo. Estas son generalmente ejercidas cuando un cuerpo se encuentra en contacto con otro. Las fuerzas del segundo tipo son llamadas "fuerzas de cuerpo" puesto que actúan sobre cada elemento del mismo. Las fuerzas en un cuerpo son comunmente producidas por la gravedad u otras fuerzas de campo; la fuerza que más comunmente se presenta en un cuerpo es la gravitacional y ésta presenta en algún grado en casí todos los casos. Para muchas aplicaciones prácticas, sin embargo, son tan pequeñas comparadas con las furzas de superficie presentes que pueden ser despreciadas sin que esto presente serios errores. Las fuerzas en el cuerpo son incluidas en el siguiente análisis para visualizarlas más completamente.

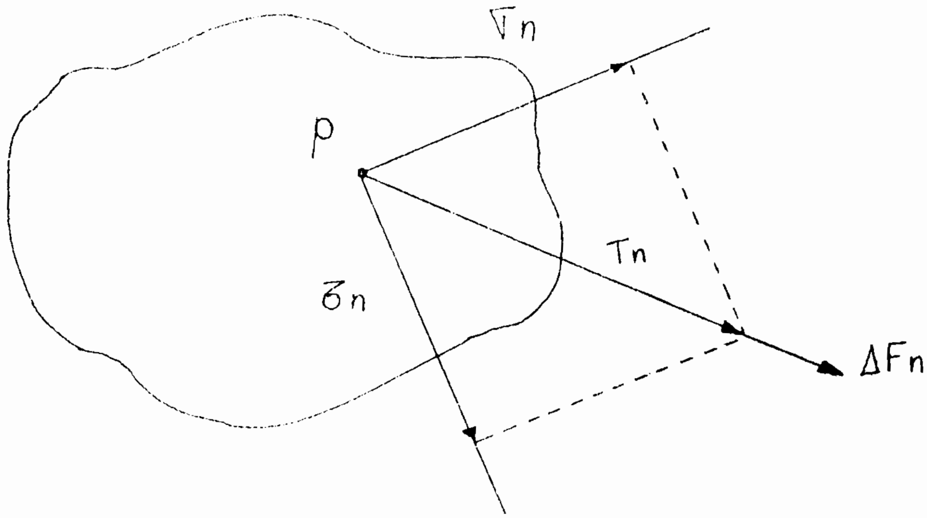
Considerar una superficie arbitraria interna o externa la cual puede ser plana o curvilínea, como se presenta en la figura 1.



Para una pequeña área Δ A de ésta superficie en el entorno de un punto P arbitrario, un sistema de fuerzas actúa, el cual tiene una resultante representada por vector Δ Fn en la figura. Puede notarse que la línea de acción de el vector de la fuerza resultante Δ Fn no necesariamente coincide con la normal N asociada con el elemento de área ΔA. Si la resultante de todas las fuerzas ΔFn es dividido por el incremento de área ΔA, obtendremos el esfuerzo promedio que actúa sobre el área. En el límite cuando ΔA tiende a cero, una cantidad definida como la resultante de esfuerzo Tn actuando en el punto P es obtenido. Este procedimiento de límite es ilustrado en la siguiente ecuación:

$$T_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

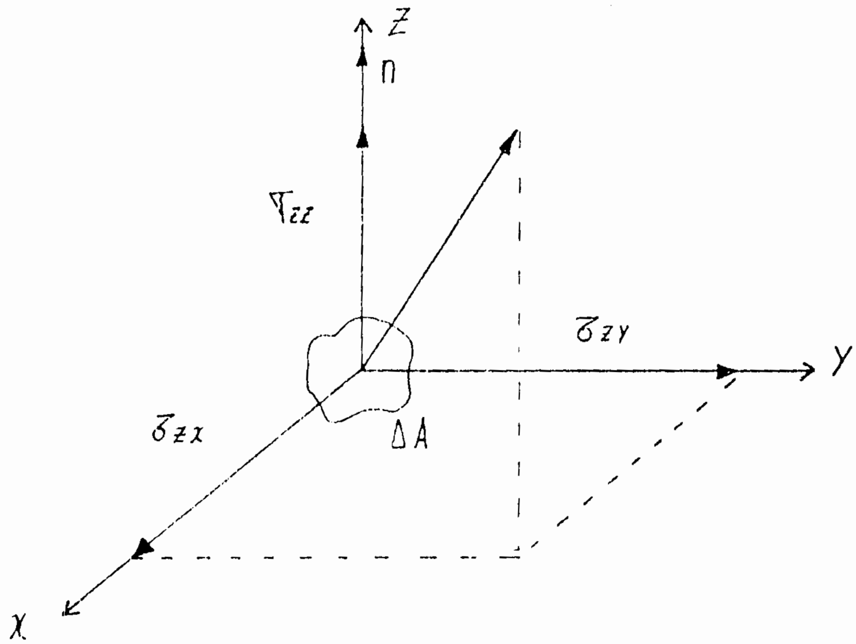
La línea de acción de este esfuerzo resultante Tn coincide con la línea de acción de la resultante de fuerza ΔFn, como se ilustra en la figura 2. Es importante notar que el esfuerzo resultante en este punto, Tn es una función de ambos; la posición del punto P en el cuerpo y la orientación de el plano por el que pasa a través del punto es identificado por la normal N.



En un cuerpo sujeto a un sistema arbitrario de cargas, tanto la magnitud como la dirección del esfuerzo resultante Tn en algún punto P cambia, así cambie la orientación del plano.

Como se ilustra en la figura 2, es posible proyectar Tn en dos componentes: una normal n a la superficie que es conocida como el esfuerzo normal resultante, mientras que la componente n es conocida como el esfuerzo cortante resultante.

Las componentes cartesianas de esfuerzo para algún sistema coordenado pueden también ser obtenidas a partir del esfuerzo resultante. Considerando primero una superficie cuya normal está en la dirección de Z positivo, como se muestra en la figura 3.



Si el esfuerzo resultante Tn asociado con esta superficie particular es proyectada en las componentes a lo largo del eje x,y,z; las componentes cartesianas del esfuerzo serán τ_{zx}, τ_{zy}, σ_{zz}.

Las componentes τ_{zx} y τ_{zy} son esfuerzos cortantes ya que actúan tangentes a la superficie considerada, la componente σ_{zz} es un esfuerzo normal ya que actúa normal a la superficie.

Si es seguido el mismo procedimiento empleado las superficies cuyas normales están en las direcciones x,y positivas: dos conjuntos más son determinadas; τ_{xy}, τ_{xz}, σ_{xx}, τ_{yx}, τ_{yz}, σ_{yy} respectivamente.

El juego de las tres diferentes componentes cartesianas para las tres selecciones pueden ser representadas en siguiente arreglo llamado tensor de esfuerzos.

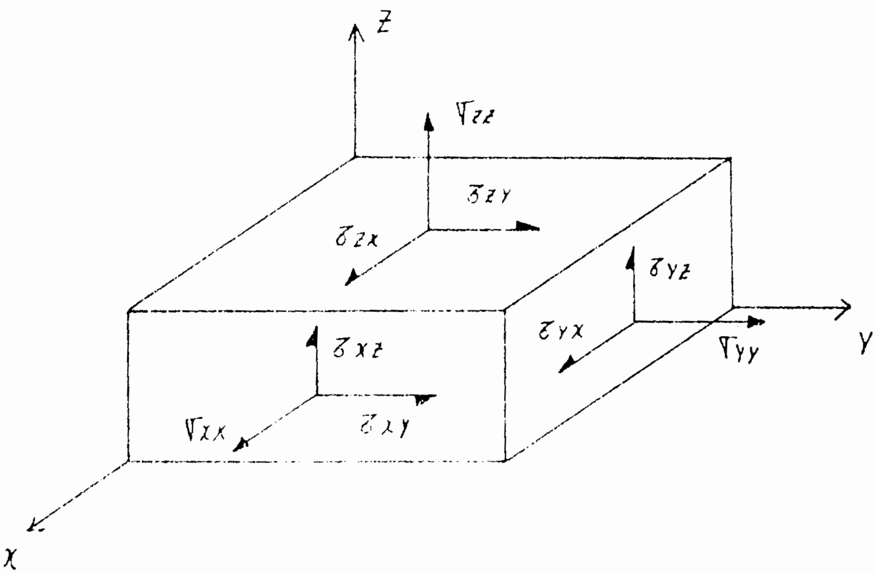
$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Estas componentes pueden ser arregladas sobre las caras de un pequeño elemento cúbico como se ilustra en la figura 4. En ella se ilustra el estado general de esfuerzo tridimensional a que está sometido un cuerpo; se muestran tres esfuerzos normales σ_x, σ_y, σ_z; todos positivos;

y seis esfuerzos cortantes τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx}, también positivos. El elemento está en equilibrio estático y por lo tanto:

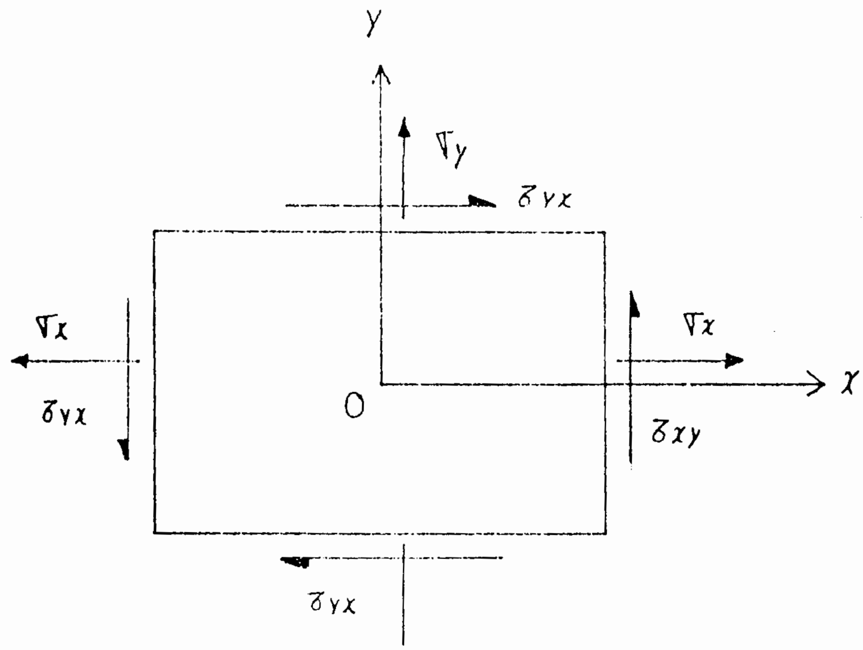
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Los esfuerzos normales dirigidos hacia afuera del elemento se consideran positivos y son de tensión. Los cortantes son positivos si actúan en la dirección positiva de un eje de referencia.



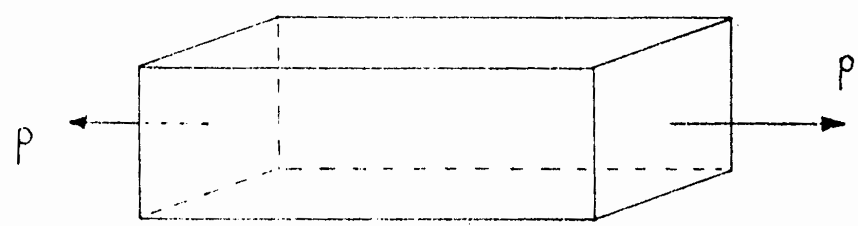
El primer subíndice de una componente de esfuerzo cortante indica el eje coordenado, que es perpendicular a la cara del elemento; el segundo, el eje de coordenadas paralelo a dicho componente. Las caras negativas del elemento tendrán esfuerzos cortantes que actúan en dirección opuesta, pero también se les considera positivos.

La figura 5 muestra un estado de esfuerzo plano o biaxial, que es lo más usual. En este caso sólo los esfuerzos normales se tratarán como positivos o negativos. El sentido de las componentes de un esfuerzo cortante se especificará, por convención, de acuerdo con el sentido en que giran las manecillas del reloj.

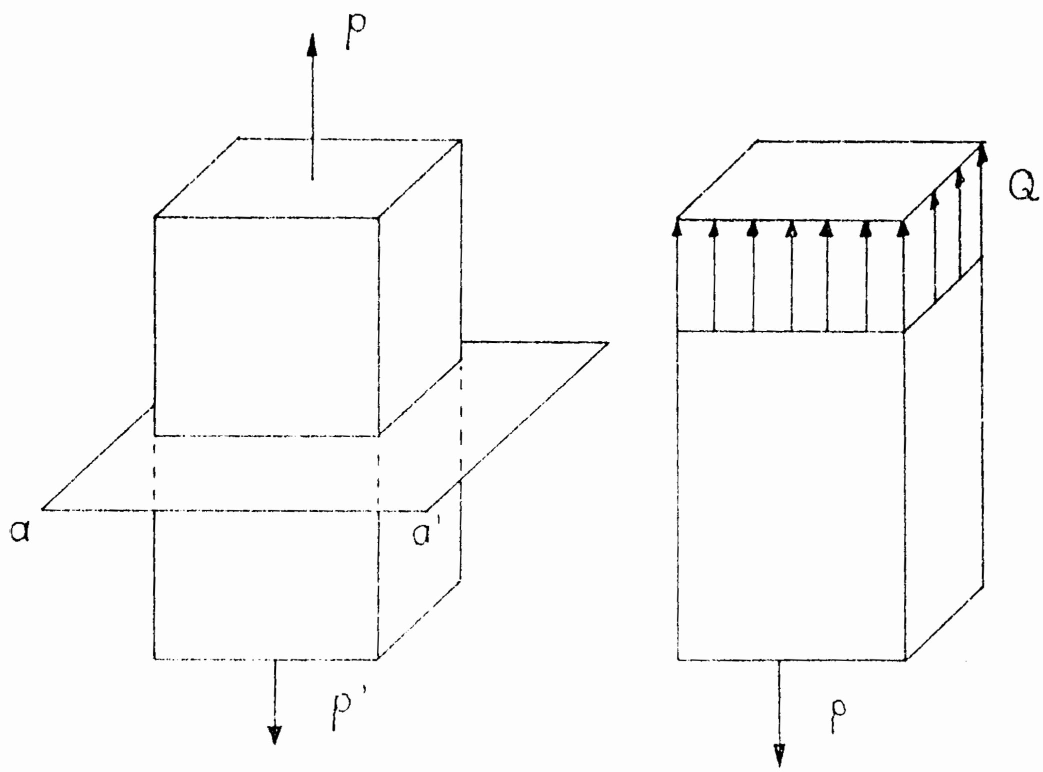


3.2 CARGA AXIAL: ESFUERZO NORMAL.

Considerando la barra BC; que es un elemento sujeto a dos fuerzas P y P' actuando en los extremos BC están dirigidos a lo largo del eje de la varilla. Decimos entonces que la varilla está cargada axialmente.



Veamos lo que acontece en el interior de la barra mostrada en la figura anterior, efectuando un corte en la sección a-a' se hace visible la fuerza interna P que impide la separación de la barra al ser solicitada por la fuerza externa P, figuras 7.1 y 7.2. Por equilibrio estático las fuerzas P y Q son iguales en magnitud.



En este caso, la fuerza interna Q se distribuye uniformemente debido a las siguientes consideraciones:

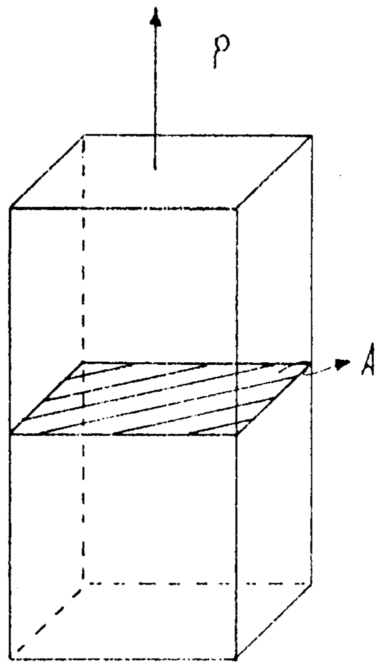
i) La sección está suficientemente alejada del punto de aplicación de la fuerza P.

ii) La resultante de la fuerza interna Q pasa a través del centroide del área de la sección.

iii) El material es Homogéneo.

iv) No hay cambios de sección a lo largo de la barra.

Ahora bien, a la fuerza por unidad de área, o intensidad de las fuerzas distribuidas sobre la sección, se conoce como esfuerzo y se le denota por la letra griega (sigma). El esfuerzo en una elemento de sección transversal de área A sometido a una carga axial P se obtiene dividiendo la magnitud P de la carga por el área A.



En el sistema métrico SI, P se expresa en Newtons (N) y A en metros cuadrados (m^2), el esfuerzo quedará en N/m^2 o Pascal.

En la práctica, se utilizan múltiplos del pascal como el Kilopascal (KPa), el megapascal (MPa) y el gigapascal (GPa). Tenemos:

$$1\ KPa = 10^3\ Pa = 10^3\ N/m^2$$

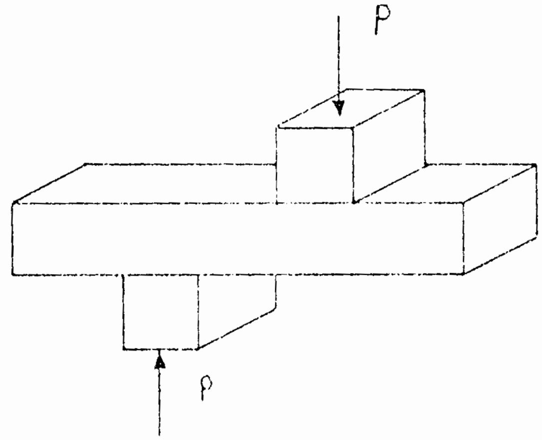
$$1\ MPa = 10^6\ Pa = 10^6\ N/m^2$$

$$1\ GPa = 10^9\ Pa = 10^9\ N/m^2$$

En el sistema inglés, la fuerza P se expresa en libras (lb) o kilolibras (Klb) y el área de la sección transversal A en pulgadas cuadradas ($pulg^2$). El esfuerzo se expresa entonces en libras por pulgada cuadrada ($lb/pulg^2$) o en kilolibras por pulgada cuadrada ($Klb/pulg^2$)

3.3.- ESFUERZO CORTANTE.

Las fuerzas internas estudiadas en la sección anterior y los esfuerzos correspondientes eran perpendiculares a la sección considerada. Se obtiene un tipo muy diferente de esfuerzo cuando se aplican fuerzas transversales P y P al elemento AB, figura 8.

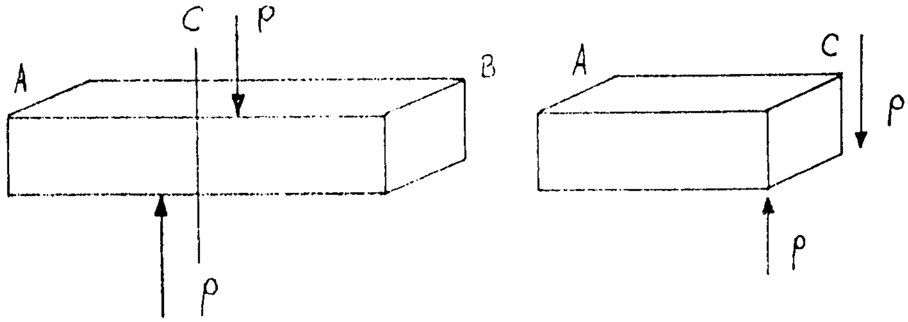


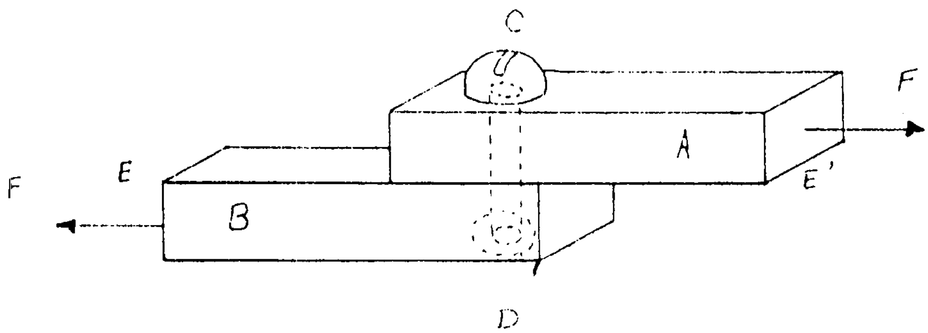
Cortando en C. entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas (figura 9a) obtenemos el diagrama de la porción AC que se muestra en la figura 9b. Concluimos que deben existir fuerzas internas en el plano de la sección y que su resultante debe ser igual a P. Estas fuerzas internas elementales se llaman fuerzas cortantes y la magnitud P de su resultante es el cortante de la sección.

Dividiendo la fuerza cortante P por el área A de la sección, obtenemos el esfuerzo cortante. Designando el esfuerzo cortante por la letra griega (tau) escribimos:

$$\tau = P / A, \text{ siendo A paralela a la fuerza P}$$

Los esfuerzos cortantes se presentan normalmente en pernos, pasadores y remaches utilizados para conectar varios miembros estructurales y componentes de máquinas. Sean, por ejemplo, las dos platinas A y B que están conectadas por un remache CD (figura 10).

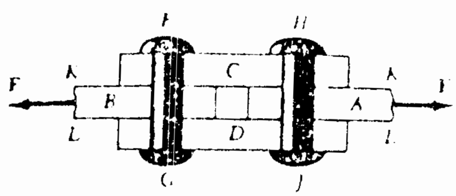


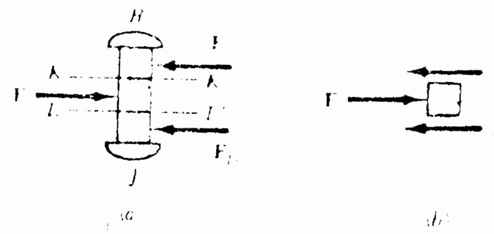


Si las placas están sometidas a fuerzas de tensión de magnitud F, se desarrollarán esfuerzos cortantes en la sección del remache correspondiente al plano EE'.

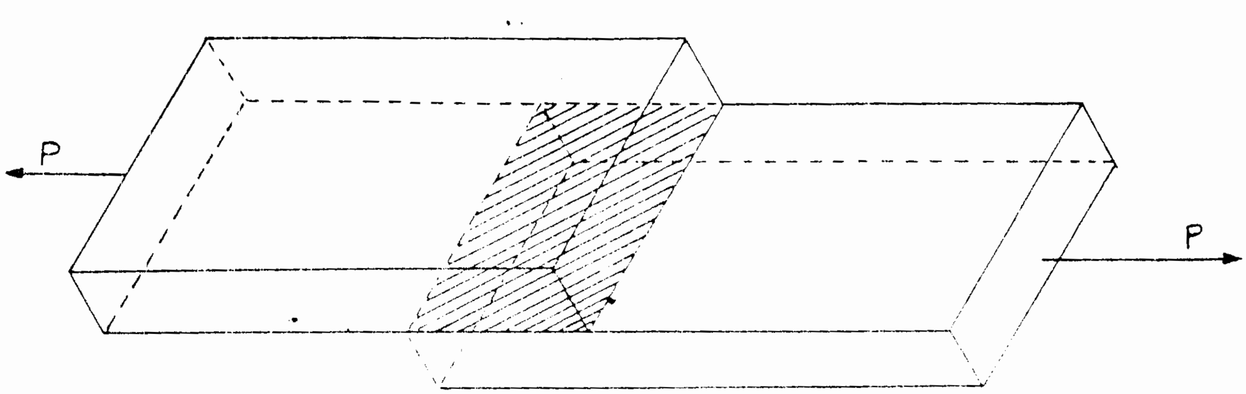
Trazando los diagramas del remache y de la porción localizada por encima del plano EE' (figura 11), concluimos que la fuerza cortante P en la sección es igual a F. El esfuerzo cortante se obtiene de acuerdo a la relación ya conocida = P/A; como la sección transversal del remache es circular, tenemos que $A = d^2/4$. El remache considerado trabaja cortante simple.

Sin embargo, pueden presentarse otros casos de carga, por ejemplo, si se usan las placas de separación C y D para conectar las placas A y B (figura 12), el cortante ocurrirá en cada uno de los planos KK' y LL' del remache HJ. Se dice que los remaches trabajan a cortante doble, trazando el diagrama de cuerpo libre del remache HJ y de la porción de remache localizada entre los dos planos (figura 13). Observando que la fuerza cortante P en cada sección vale P = F/2, concluimos que el esfuerzo cortante es



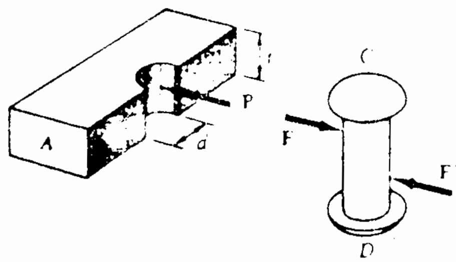


También se presenta esfuerzo cortante en elementos pegados como se presenta en la figura 14.



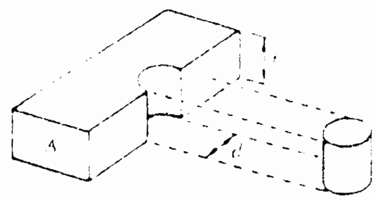
3.4-ESFUERZO DE APLASTAMIENTO.

Los pernos, pasadores y remaches crean esfuerzos en los elementos que conectan, a lo largo de la superficie de apoyo o superficie de contacto. Considerando nuevamente las dos platinas A y B conectadas por el remache CD. El remache ejerce en la placa A una fuerza P igual y opuesta a la fuerza F ejercida por la placa en el remache (figura 15)



La fuerza P representa la resultante de las fuerzas elementales distribuidas en el interior del medio cilindro de diámetro D y de longitud t igual al espesor de la placa. La distribución de estas fuerzas y de los esfuerzos correspondientes es muy complicada, en la práctica se utiliza un valor promedio nominal b del esfuerzo, llamado esfuerzo de aplastamiento o de apoyo, que se obtiene dividiendo la carga P por el área del rectángulo que representa la proyección del remache en la sección de la placa (figura 16).

Como esta área es igual a td, siendo t el espesor y D el diámetro del remache, tenemos



3.5.- ESFUERZOS PERMISIBLES Y CARGAS PERMISIBLES.

Una importante consideración en el diseño de ingeniería es la capacidad del objeto que se diseña para resistir o transmitir cargas. Entre los objetos que deben soportar cargas se incluyen estructuras de edificios, maquinaria, aeronaves, vehículos y muchos más que ha realizado el hombre. Por sencillez, nos referiremos a tales objetos como estructuras; por tanto, una estructura es cualquier objeto que debe resistir o transmitir cargas.

Si se desea evitar la falla de una estructura, las cargas que la misma puede realmente soportar deben ser mayores que las cargas que requerirá sostener cuando esté en servicio. La capacidad de una estructura para soportar cargas se denomina resistencia.

Lo anterior también se puede expresar como sigue: La resistencia real de una estructura debe rebasar la resistencia requerida, la relación entre la resistencia real y la resistencia requerida se denomina factor de seguridad n:

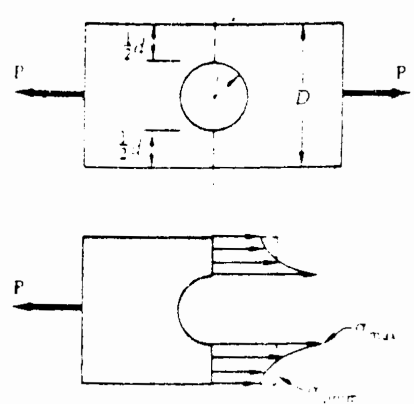
$$\text{Factor de seguridad } n = \frac{\text{resistencia real}}{\text{resistencia requerida}}$$

El factor de seguridad debe ser mayor que 1 si se desea impedir la falla del material. De acuerdo con las circunstancias, se emplean factores de seguridad desde un poco más de 1 hasta 10.

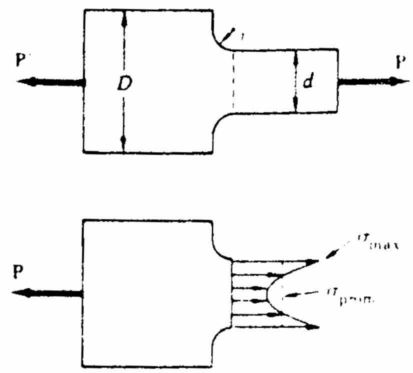
La inclusión de factores de seguridad en el diseño no es un asunto sencillo ya que la resistencia y la falla del material denotan conceptos distintos. La falla del material o simplemente la falla, significa la ruptura o el colapso completo de una estructura (Para mayor información consulte el texto Mecánica de Materiales de Stephen P.T moshenko).

3.6.- CONCENTRACION DE ESFUERZOS.

Los esfuerzos cerca de los puntos de aplicación de cargas concentradas pueden alcanzar valores mucho mayores que el valor promedio del esfuerzo en el elemento. Cuando un elemento estructural contiene una discontinuidad, tal como un agujero o un cambio súbito de sección, generalmente se presentan grandes esfuerzos cerca de las discontinuidades. La figura 18 se refiere a una barra plana con un agujero y muestra la distribución de esfuerzos en un corte hecho por el centro del agujero.

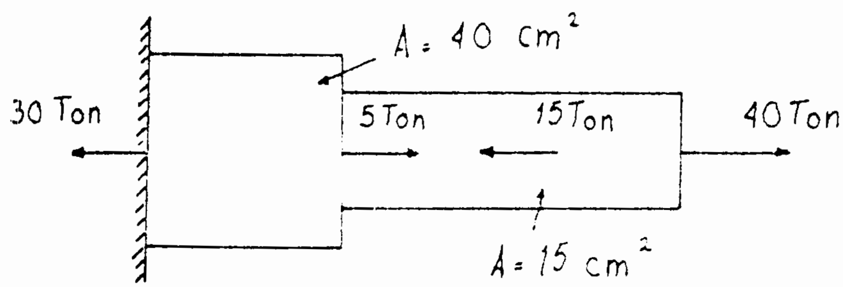


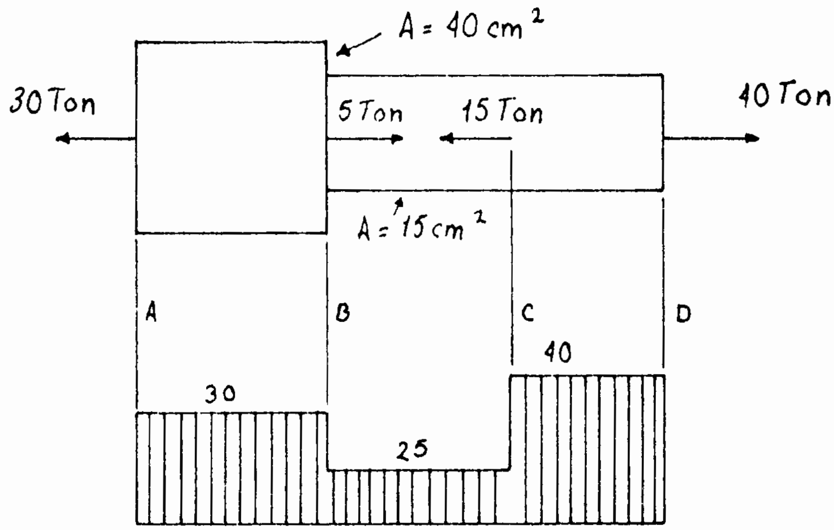
La figura 19 se refiere a una barra plana que consta de dos porciones con diferentes anchuras conectadas con filetes (chaflanes) muestra la distribución de esfuerzos en la parte más angosta de la sección, en donde se presentan los mayores esfuerzos.



Una barra de sección transversal variable es empotrada en uno de sus extremos y está sometida a la acción de fuerzas axiales, como se ilustra en la figura.

Determine el esfuerzo normal máximo.





$$\nabla_{AB} = \frac{30\ 000}{40\ cm^2} = 750\ kg/cm^2$$

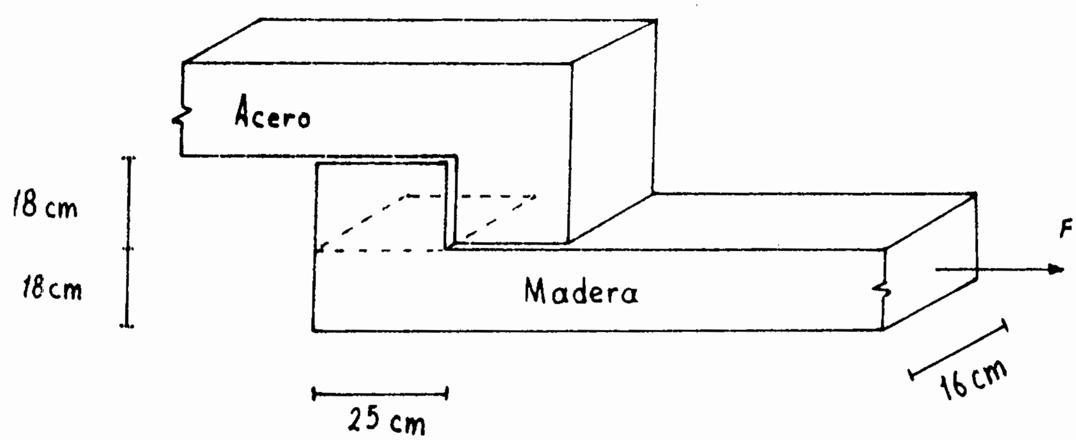
$$\nabla_{BC} = \frac{25\ 000\ kg}{15\ cm^2} = 1666.667\ kg/cm^2$$

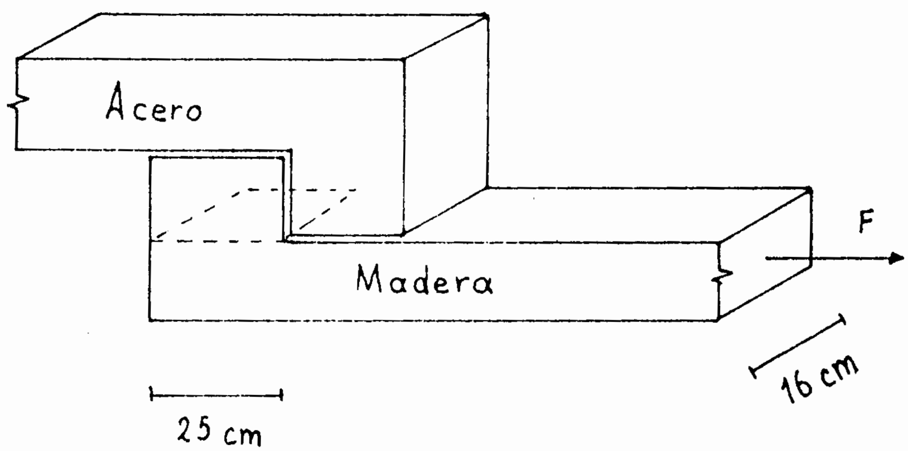
$$\nabla_{CD} = \frac{40\ 000\ kg}{15\ cm^2} = 2666.667\ kg/cm^2$$

El esfuerzo máximo se localiza en la porción CD

$$\nabla_{mAx} = \nabla_{CD} = 2666.667\ kg/cm^2$$

Determine el valor de la fuerza F, la cual hace que la madera se rompa por la línea punteada cuando alcanza el esfuerzo cortante $\tau = 5000\ kg/cm^2$. Considerense las dimensiones indicadas en la figura





$\tau = 500 \quad kg/cm^2$

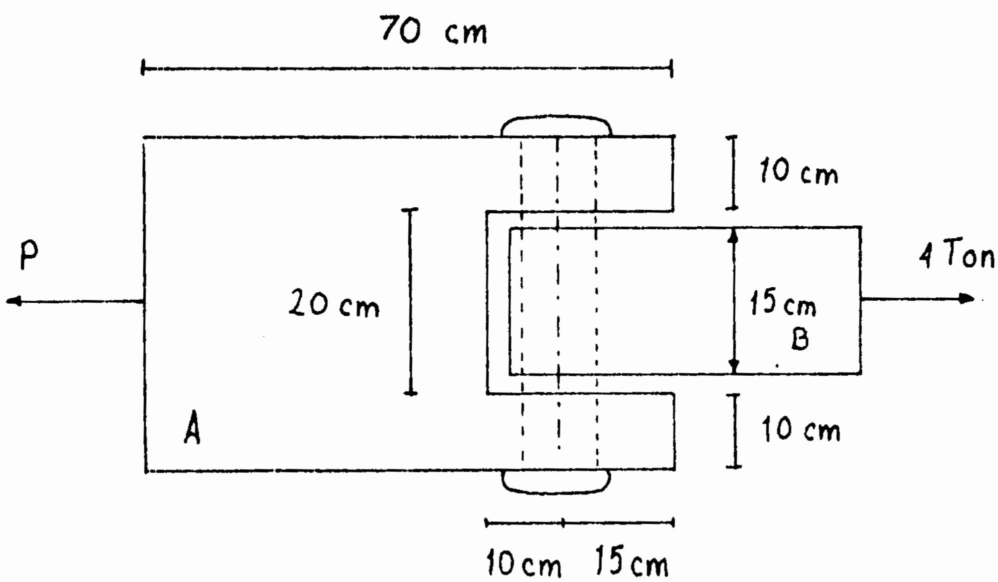
$\tau = \dfrac{F}{A_c}$ $\qquad A_c = (25\ cm)\ (16\ cm)$

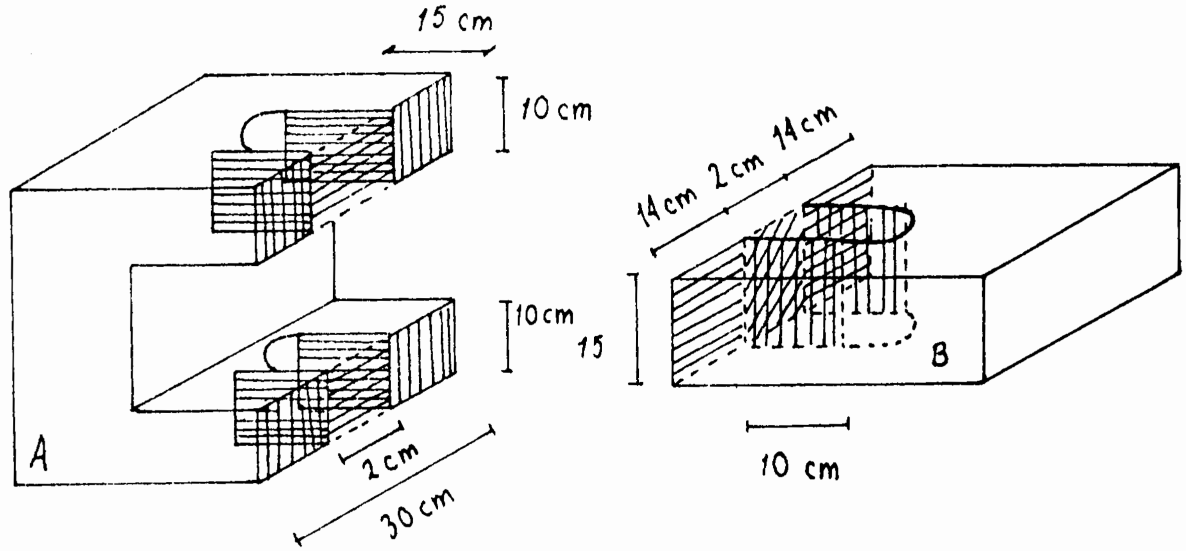
$F = \tau\ A_c$ $\qquad F = (5000\ kg/cm^2)\ (25)\ (16)\ cm^2$

$F = 2000\ 000\ kg$ $\qquad F = 2000$ Toneladas

Dos placas con un ancho de 30 cm se unen mediante un remache como se ilustra en la figura

Determine el esfuerzo cortante en el perno, el máximo esfuerzo axial en cada una de las placas, el esfuerzo de aplastamiento y el esfuerzo cortante en cada placa.





$$\tau_{perno}: \frac{4000 \text{ kg}}{2\frac{(\pi(2)^2)}{4}} = 636.619 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$\tau_{mAX\ A} = \frac{4000 \text{ kg}}{2(10)(28)} = 7.142 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nabla_{MAX\ B} = \frac{4000 \text{ kg}}{15\ (28)} = 9.523 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$\nabla_{A\ A} = \frac{4000 \text{ kg}}{2(2)(10)} = 100 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$\nabla_{AB} = \frac{4000 \text{ kg}}{15\ (2)} = 133.333 \text{ kg/cm}^2$$

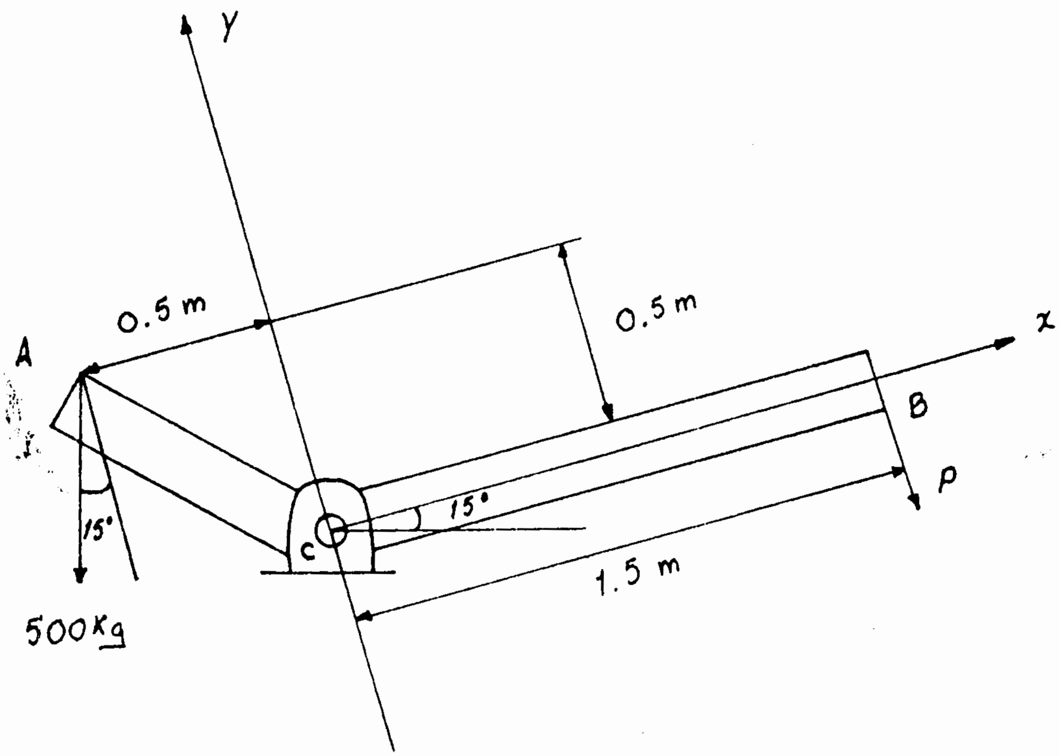
$$\tau_{placa\ A} = \frac{4000 \text{ kg}}{4(10)(15)} = 6.666 \quad \text{kg/cm}^2$$

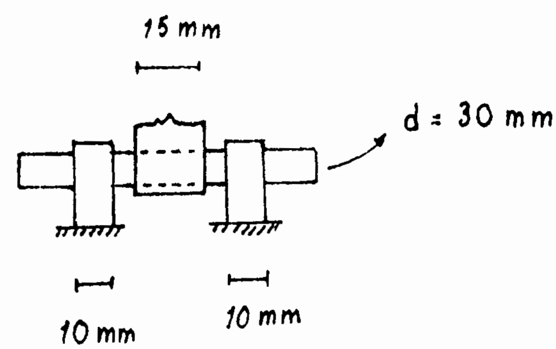
$$\tau_{placa\ B} = \frac{4000 \text{ kg}}{2(10)(15)} = 13.333 \text{ kg/cm}^2$$

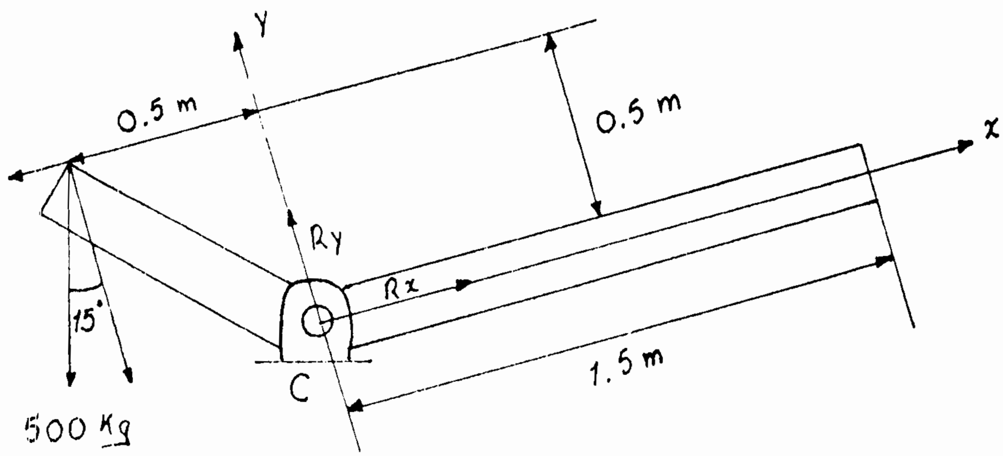
La figura ilustra un pedal en uno de cuyos extremos se aplica una carga P y en el otro puede levantar hasta 500 Kg.

a) Determine el esfuerzo cortante en el perno ubicado en el punto c,b) determine también el esfuerzo de aplastamiento en los soportes y del esfuerzo de aplastamiento en la placa.

Considere las dimensiones que se ilustra en la figura.







$\Sigma F_x = 0$; $R_x - 500 \text{ sen } 15° = 0 \quad R_x 129.41 \text{ kg}$

$\Sigma F_y = 0$; $R_y - P - 500 \cos 15° = 0$

$\Sigma M_c = 0+$; $-P(1.5) + 500 \cos 15°(0.5) + 500 \text{ sen } (a5°) = 0$

$$P = \frac{500 \cos 15° \text{ co}.5) + 500 \text{ sen } 15°(0.5)}{1.5} \qquad P = 204.12 \text{ kg}$$

$$R_y - 204.12 - 500 \cos 15° = 0 \qquad R_y = 687.16 \text{ kg}$$

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} \qquad R = \sqrt{(129.41^2 + (687.16)^2}$$

$R = 699.22$ kg

a) $\tau_c = \dfrac{F}{Ac} \qquad \tau_c = \dfrac{699.22 \text{ kg}}{2\left(\dfrac{\pi(3)^2}{4}\right)} \qquad \tau_c = 49.45 \text{ kg/cm}^2$

b) $\nabla_A = \dfrac{F}{A_A} \qquad \nabla = \dfrac{699.22 \text{ kg}}{2(3)(1)} \qquad \nabla_A = 116.536 \text{ kg/cm}^2$

c) $\nabla_{APLACA} = \dfrac{F}{td} \quad \nabla_{Ap} = \dfrac{699.22 \text{ kg}}{(1.5)(3)} \qquad \nabla_{Ap} = 155.38 \text{ kg/cm}^2$

CAPITULO IV

DEFORMACION

IV.1. DEFINICIÓN DE DESPLAZAMIENTO Y DEFORMACIÓN.

IV.2. DIAGRAMA ESFUERZO DEFORMACIÓN.

IV.3. COMPORTAMIENTO ELÁSTICO Y PLÁSTICO.

IV.4. LEY DE HOOKE.

IV.5. LEY DE HOOKE GENERALIZADA.

IV.6. DEFORMACIONES TÉRMICAS.

IV.7. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA.

CAPITULO IV

D E F O R M A C I O N

OBJETIVO:

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno será capaz de:

i) Enunciar la Ley de Hooke y asentar las condiciones que deben cumplirse para su aplicación.

ii) Analizar sistemas cuyos componentes obedezcan a la Ley de Hooke.

iii) Determinar las deformaciones qu se producen en los elementos por la acción de cargas externas.

INTRODUCCION:

En la sección anterior vimos la forma de calcular los esfuerzos normales y cortantes en diversas piezas sometidas a cargas externas.

Ahora se hace un breve análisis de cuánta deformación se produce en un elemento sujeto a un determinado esfuerzo, así como si una determinada sección es suficiente para soportar una carga propuesta.

Se discuten básicamente dos tipos de deformación : la normal y la cortante.

4.1 DEFINICION DE DESPLAZAMIENTO Y DEFORMACION.

Si un cuerpo es sometido a la acción de un sistema de fuerzas, puntos individuales del cuerpo podrán en general moverse.

El movimiento de un punto arbitrario es una cantidad vectorial llamada DESPLAZAMIENTO.

El movimiento de un cuerpo puede ser considerado como la suma de dos partes:

1. Una translación y/o rotación del cuerpo como un todo, también conocido como movimiento de cuerpo rígido, el cual puede ser grande o pequeño y

2. El movimiento de los puntos del cuerpo con respecto a otros del mismo cuerpo; en cuyo caso se dice que este movimiento es una DEFORMACION; ésta para problemas de ingeniería y dentro del rango elástico es siempre pequeña, excepto para algunos materiales como el caucho, el acero para resortes, etc.

La deformación es una cantidad geométrica que depende del movimiento relativo entre dos o mas puntos del cuerpo. Aquí discutiremos básicamente dos tipos de deformación : la normal y la cortante.

4.1.1 DEFORMACION NORMAL.

Podemos definir a la deformación normal como el cambio de longitud de un segmento de recta, dividido entre la longitud inicial del segmento rectilíneo:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\ell_o} = \frac{\Delta\ell}{\ell_o} = \frac{\ell_f - \ell_o}{\ell_o} \quad [\frac{L}{L}] \quad \ldots\ldots\ldots (4.1)$$

donde δ es la variación total en longitud.

Esta deformación es también conocida como deformación unitaria.

La deformación real puede definirse como el cambio en la dimensión lineal, dividido entre el valor instantáneo de la dimensión.

$$\varepsilon = \int_{\ell_0}^{\ell_\delta} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_\delta}{L_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.2)$$

Es importante hacer notar que para deformaciones pequeñas las ecuaciones (4.1) y (4.2) son válidas.

Cabe mencionar que la anisotropía en materiales policristalinos, la presencia de más de una fase, el descentramiento de las cargas y la forma no recta de la barra, entre otras causas, llegan a provocar que las deformaciones no sean uniformes en el elemento estudiado, sin embargo para propósitos ingenieriles se considera que si lo son.

4.1.2 DEFORMACION CORTANTE.

Al cambio angular entre dos segmentos rectilíneos que inicialmente formaban un ángulo de 90° se le conoce como deformación cortante.

Considere el elemento mostrado en la figura 4.1, en el cual las fuerzas cortantes tienden a distorsionarlo.

a) Elemento sin carga　　　b) Elemento cargado

FIGURA 4.1

Durante el cargado el elemento podrá moverse a una nueva posición y podrá también distorsionarse, como se muestra en la figura 4.2.

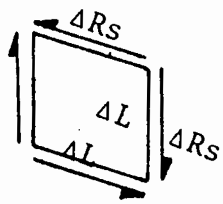


FIGURA 4.3

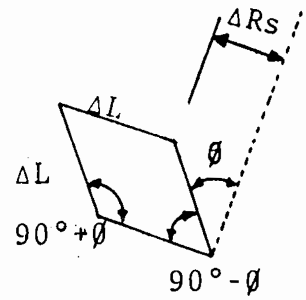


FIGURA 4.4

En la figura 4.3 se ilustra el ángulo de distorsión ϕ y la deformación Δe_s, ambos se muestran exageradamente grandes. El ángulo de distorsión es simplemente el cambio angular de los ángulos inicialmente rectos, por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \emptyset = \frac{\Delta e_s}{\Delta L}$$

En aplicaciones de ingeniería Ø podrá ser tan pequeño que puede considerarse, sin involucrar gran error, que:

$$\emptyset \approx \operatorname{sen} \emptyset = \frac{\Delta e_s}{\Delta L}$$

donde Ø está expresado en radianes.

La deformación cortante en un punto, denotada por γ, queda entonces definida por:

$$\lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta e_s}{\Delta L} = \frac{de_s}{dL} = \gamma$$

y puede interpretarse físicamente como un cambio angular ocurrido sobre un elemento infinitesimal.

La relación entre el esfuerzo cortante y la deformación cortante puede ser obtenida a partir de una gráfica Par - torsor-Angulo de torsión sobre un cilindro circular. La conversión de la curva Par Torsor-Angulo de torsión a una curva Esfuerzo cortante-Deformación cortante (τ-γ) puede encontrarse en la referencia (1).

$$\Delta \tau \propto \Delta \gamma$$

$$G = \frac{\Delta \tau}{\Delta \gamma} \qquad \begin{array}{l} \tau \leqq \tau yp \\ \gamma \leqq \gamma yp \end{array}$$

G= Módulo de elasticidad al corte o módulo de rigidez

4.2 DIAGRAMA ESFUERZO DEFORMACION.

Es necesario recurrir al estudio de las propiedades mecánicas de los materiales para visualizar la relación que guardan los esfuerzos aplicados con las deformaciones producidas.

Las propiedades mecánicas más usadas, aunque no necesariamente las más relevantes, se determinan mediante un ensayo de tracción del cual se da una breve descripción:

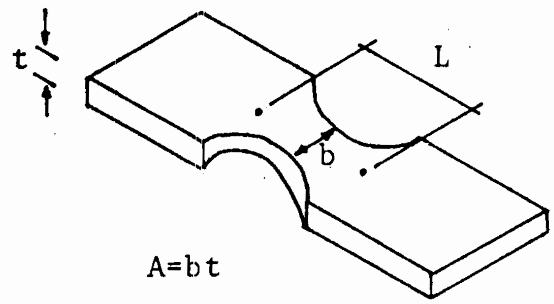
ENSAYO DE TRACCION.

Para efectuarlo se emplea la máquina Universal. Consiste en aplicar a una probeta de dimensiones estándares una carga axial que se incrementa gradualmente anotando las lecturas de los valores de las cargas y de las deformaciones correspondientes hasta que se produce la fractura.

Inicialmente se colocan dos marcas sobre la superficie de la probeta antes de ser sometida a la carga, siendo L la longitud entre las mismas. Al aplicarse la carga P se inicia un alargamiento en la dirección de la aplicación de la carga mientras que el espesor simultáneamente decrece.

Los esfuerzos se calculan dividiendo la carga entre el área de sección transversal de la probeta.

La deformación se obtiene midiendo el incremento de la longitud entre las marcas previamente hechas en la probeta (en la dirección axial). Los resultados de un ensayo de tracción se muestran en la tabla siguiente:



F	δ	σ	ε
0	0	0	0
100	0.002	180	0.0004
200	0.004	360	0.0008
300	0.006	540	0.00012

Después de realizar un ensayo de tracción se puede trazar un diagrama de esfuerzo contra deformación de una prueba particular. Tal diagrama esfuerzo-deformación es característico del material y proporciona información importante acerca de las propiedades mecánicas y el comportamiento típico del material. Para la mayor parte de los fines prácticos, tales diagramas se suponen independientes del tamaño de la probeta empleada y de su longitud de medición.

Los diagramas esfuerzo-deformación que se determinan en forma práctica difieren mucho según los distintos materiales, aún para el mismo material difiere según la temperatura a que se efectúe el ensayo, la velocidad de la prueba y algunas otras variables. Sin embargo, de los experimentos realizados a temperatura constante con materiales que no presenten dependencia del tiempo resultan, por lo general, dos tipos de diagramas.

Un tipo, característico del acero dulce (también conocido como acero estructural o acero de bajo carbono) y de algunos otros materiales se muestra en la figura 4.4.a

Los otros tipos que son típicos de numerosos materiales se muestran en la figura 4.4.b.

El acero dulce es uno de los metales de más amplio uso pues se utiliza en edificios, puentes, torres y muchos otros tipos de construcciones.

Analicemos el diagrama representativo esfuerzo-deformación del acero dulce mostrado en la figura 4.4.a. El diagrama empieza con una línea recta desde 0 hasta A, en esta región el esfuerzo y la deformación son directamente proporcionales, y se dice que el material se comporta linealmente. Después del punto A ya no existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, por lo cual el punto A se conoce como límite de proporcionalidad. La pendiente de la recta de 0 hasta A es el módulo elástico E que físicamente representa la rigídez del material a una carga impuesta.

Al acrecentar la carga más alla del límite de proporcionalidad, la deformación empieza a aumentar más rápidamente para cada incremento de esfuerzo. La curva esfuerzo-deformación asume luego una pendiente cada vez más pequeña hasta que en el punto B la pendiente se vuelve casí horizontal. A partir de este punto se presenta un alargamiento considerable, con un incremento casí inapreciable en la fuerza de tensión (desde B hasta C en el diagrama). Este fenómeno se conoce como cedencia o fluencia material, y el esfuerzo en el punto B se denomina esfuerzo de cedencia o punto de cedencia (o bien, esfuerzo de fluencia o punto de fluencia).

En la región desde B hasta C, el material se vuelve perfectamente plástico, es decir, puede deformarse sin un incremento en la carga aplicada. Después de sufrir las grandes deformaciones que se presentan durante la fluencia, el acero empieza a mostrar un endurecimiento por deformación. Durante este proceso, el material sufre cambios en sus estructuras cristalina y atómica, lo que origina un incremento en la resistencia del material a futuras deformaciones, razón por lo cual, un alargamiento adicional requiere de un incremento en la carga y el diagrama esfuerzo-deformación toma una pendiente positiva desde C hasta D. Finalmente, la carga alcanza su valor máximo y el esfuerzo correspondiente (en el punto D) se denomina esfuerzo último. El alargamiento posterior de la barra se acompaña de una reducción de la carga y finalmente se presenta la fractura en el punto E.

Se presenta una contracción lateral de la muestra cuando se alarga, lo que origina una reducción en el área de la sección transversal, esta reducción es muy pequeña como para tener un efecto apreciable en el valor de los esfuerzos calculados antes del punto C, pero más alla de este punto la reducción empieza a modificar el perfil del diagrama. Obviamente el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo nominal debido a que se calcula con un área menor. En la cercanía del esfuerzo último, la disminución del área se aprecia claramente y ocurre un estrechamiento pronunciado de la probeta conocido como estricción. Si para el cálculo del esfuerzo se emplea el área de la sección transversal en la parte estrecha del cuello ocasionado por la estricción, la curva real esfuerzo-deformación seguirá la línea punteada CE′en la figura 4.4.a.

Los materiales que soportan grandes deformaciones plásticas antes de su falla se clasifican como dúctiles. Una ventaja de la ductilidad es que pueden presentarse deformaciones visibles si las cargas se vuelven muy grandes, lo que permiten tomar una acción correctiva antes de que ocurra la fractura. También los materiales dúctiles son capaces de absorver grandes cantidades de energía antes de que acontezca la fractura. Los materiales dúctiles incluyen al acero dulce, aluminio y algunas de sus aleaciones, cobre, magnesio, plomo, molibdeno, níquel, latón, bronce, metal monel, teflón y muchos otros.

Los materiales frágiles son aquellos que fallan en tensión a valores relativamente bajos de deformación. Algunos ejemplos de estos materiales son: concreto, piedra, hierro fundido, vidrio, materiales cerámicos y muchas aleaciones metálicas comunes.

4.3 COMPORTAMIENTO ELASTICO Y PLASTICO.

La experiencia muestra que todos los materiales sólidos pueden ser deformados cuando se someten a la acción de cargas externas. Se ha encontrado que hasta cierto límite de carga el sólido puede recuperar sus dimensiones originales al ser retirada dicha carga. A este fenómeno se le conoce como comportamiento elástico, la carga límite a la cual esto sucede se le llama límite elástico.

Al ser excedido el límite elástico el cuerpo experimentará una deformación permanente aún cuando la carga sea retirada, presentandose en el cuerpo la llamada deformación plástica.

Para muchos materiales, así como la carga no exceda el limi te elástico, la deformación es proporcional a la carga. Esta relación es conocida como Ley de Hooke y es frecuentemente establecida como: "El esfuerzo es proporcional a la deformación". La Ley de Hooke requiere que la relación carga-deformación sea lineal. Sin embargo no todos los materiales que tienen comportamiento elástico tienen relaciones esfuerzo-deformación lineales, como por ejemplo el hule.

La deformación elástica en los metales es muy pequeña por lo que se requiere de instrumentos muy sensitivos para su medición. Instrumentos ultrasensitivos han mostrado que el límite elástico en metales es mucho más bajo de los valores que se miden en ensayos de ingeniería. Mientras más sensitivo sea el aparato de medición, menor será el límite elástico, de tal forma que para muchos metales existe sólo un pequeño rango de cargas para el que se cumple la Ley de Hooke, sin embargo ésta es muy válida para fines de diseño en ingeniería.

4.4. LEY DE HOOKE.

La ecuación que gobierna el comportamiento de un material en su región lineal se conoce como Ley de Hooke (Sir Robert Hooke, 1678), es decir, la relación lineal entre el esfuerzo y la deformación para una barra de sección uniforme sometida a tensión o compresión simple puede expresarse mediante la ecuación:

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad \ldots\ldots (4.3)$$

Dondé E es el módulo de elasticidad del material. Las unidades de E son las mismas que las unidades de esfuerzo ya que la deformación es adimensional. Esta ecuación es válida para $\sigma < \sigma_{yp}$ y $\varepsilon < \varepsilon_{yp}$ definidas con anterioridad en el diagrama esfuerzo-deformación.

La ecuación (4.3) se aplica únicamente a tensión y compresión simples, para estados de esfuerzo más complicados, se requiere de una generalización de la Ley de Hooke.

Empleando las ecuaciones para el esfuerzo (4.3) y para la deformación unitaria (4.1) definidas con anterioridad, tenemos:

$$\sigma = E \frac{\delta}{L}, \text{como } \sigma = \frac{P}{A}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.4)$$

donde δ indica la deformación total sufrida por el elemento . La ecuación (4.4) es aplicable sí:

- La fuerza P es axial
- El material es isotrópico y homogéneo

4.4.1 RELACION DE POISSON

Se ha observado experimentalmente que en un material isotrópico y homogéneo sujeto a un estado uniaxial de esfuerzo la deformación transversal resultante es proporcional a la deformación axial en la dirección de la carga para esfuerzos abajo del límite de propocionalidad, es decir:

$$\varepsilon_{tr} \propto \varepsilon_{ax}$$

$$\varepsilon_{tr} = k\, \varepsilon_{ax} \quad \text{con k=constante}$$

La razón de la magnitud de la deformación transversal a la magnitud de la deformación axial es llamada Relación de Poisson y se denota por:

$$\gamma = - \frac{\text{deformación transversal}}{\text{deformación axial}} = \frac{|\varepsilon_{tr}|}{|\varepsilon_{ax}|}$$

la cual permanece constante para cualquier dirección perpendicular al eje de la barra o elemento de que se trate.

Para una barra a tensión la deformación transversal representa una reducción en la anchura y la deformación axial representa un aumento en la longitud. Para la compresión ocurre el caso contrario, la barra se acorta y se ensancha. Por lo tanto, la relación de Poisson tiene un valor positivo para muchos materiales.

Mediante cálculos recientes basados en un modelo de estructura atómica se ha determinado el valor de γ para algunos materiales y se han obtenido los siguientes resultados: $\gamma=0.25$ para materiales isotrópicos y $\gamma = 1/3$ para materiales metálicos.

Para muchos fines prácticos, el valor de γ puede considerarse el mismo, tanto para tensión como para compresión.

4.4.2 RELACION ENTRE LAS CONSTANTES ELASTICAS.

E, G, y γ

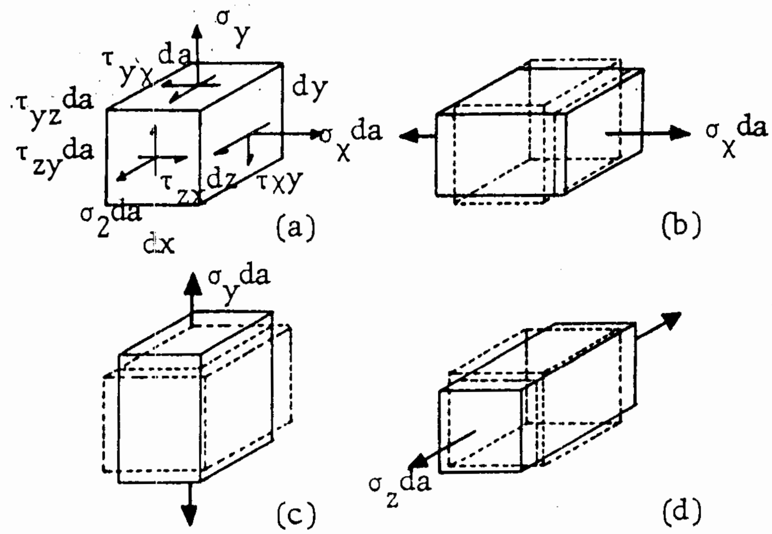
La ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1+\gamma)} \qquad \ldots\ldots\ (4.5)$$

muestra que las constantes elásticas no son independientes una de otra y se ha demostrado experimentalmente que esta relación es válida.

4.5 LEY DE HOOKE GENERALIZADA.

Consideremos un estado triaxial de esfuerzos como se ilustra:



Para analizar los efectos deformacionales producidos por las fuerzas consideremos el efecto de una fuerza axial cada vez.

El elemento sin deformar se presenta con líneas punteadas.

La figura (b) muestra que la fuerza $\sigma_x dA$ causa incremento en la dirección X y decremento en las direcciones Y y Z por el efecto de Poisson, ya que la figura representa un estado uniaxial de esfuerzo en la dirección X, las deformaciones unitarias en X, Y y Z pueden escribirse como:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\gamma\ \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_z = -\ \gamma\ \varepsilon_x$$

Las deformaciones totales entonces serán

$$\delta_x = \varepsilon_x\ d_x$$

$$\delta_y = -\gamma \varepsilon_x \, dy$$

$$\delta_z = -\gamma \varepsilon_x \, d_z$$

de manera similar, para las direcciones Y y Z serán:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad\qquad \delta_y = \varepsilon_y \, dy$$

$$\varepsilon_x = -\gamma \varepsilon_y \qquad\qquad \delta_x = -\gamma \varepsilon_y \, d_x$$

$$\varepsilon_z = -\gamma \varepsilon_y \qquad\qquad \delta_z = -\gamma \varepsilon_y \, d_z$$

y

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \qquad\qquad \delta_y = \varepsilon_z \, d_z$$

$$\varepsilon_x = -\gamma \varepsilon_z \qquad\qquad \delta_x = -\gamma \varepsilon_z \, d_x$$

$$\varepsilon_y = -\gamma \varepsilon_z \qquad\qquad \delta_y = -\gamma \varepsilon_z \, dy$$

Entonces, la deformación unitaria total es la suma de las deformaciones que resultan de cada fuerza individual.

$$\delta_{x\,tot} = \frac{\sigma_x}{E} \, dx - \gamma \frac{\sigma_y}{E} \, dx - \gamma \frac{\sigma_z}{E} \, dx$$

$$\frac{\delta_x \text{ tot}}{dx} = \varepsilon_{x\,tot} = \frac{\sigma_x}{E} - \gamma \frac{\sigma_y}{E} - \gamma \frac{\sigma_z}{E} \qquad \text{.............(4.6)}$$

De manera similar:

$$\varepsilon_{ytot} = -\gamma \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \gamma \frac{\sigma_z}{E} \quad \ldots\ldots\ldots (4.7)$$

$$\varepsilon_{ztot} = -\gamma \frac{\sigma_x}{E} - \gamma \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad \ldots\ldots\ldots (4.8)$$

En el análisis anterior las fuerzas cortantes no fueron consideradas, ya que puede demostrarse (referencia 2) que los esfuerzos cortantes no influyen en las deformaciones axiales, por lo que se puede escribir la Ley de Hooke para τ y γ como sigue:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.9)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.11)$$

Las seis ecuaciones anteriores son llamadas Ley de Hooke Generalizada y son válidas para materiales homogéneos, isotrópicos, linealmente elásticos.

4.6 DEFORMACIONES TERMICAS.

Los cambios de temperatura producen deformación en los materiales, para materiales isotrópicos homogéneos un cambio de temperatura producirá deformación lineal uniforme en todas direcciones, expresada en una sola ecuación:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha\, \delta T$$

donde:

α: es el coeficiente de dilatación térmica propia de cada material, expresada en (cm/cm.°C).

Los cambios de temperatura no producen deformaciones cortantes.

4.7 ENERGIA DE DEFORMACION ELASTICA.

El concepto de energía de deformación es de fundamental importancia en la mecánica aplicada, y los principios de la energía de deformación se utilizan ampliamente para determinar la respuesta de maquinaria y estructuras a cargas estáticas y dinámicas.

En mecánica, la energía se define como la capacidad de realizar trabajo, y este, es igual al producto de una fuerza por la distancia recorrida en la dirección de la misma; en los cuerpos sólidos deformables los esfuerzos multiplicados por sus áreas nos dan fuerzas y las deformaciones son distancias recorridas.

El producto de esas dos cantidades es el trabajo interno en un cuerpo por fuerzas aplicadas externamente. El trabajo interno se almacena en un cuerpo como energía de deformación elástica, es decir, no se disipa energía, o sea es recuperable.

Si a un elemento libre de esfuerzo, como el mostrado en la figura se le aplica un esfuerzo σ_x, la fuerza media que actúa es $\sigma_x\, d_y\, d_x/2$, ésta al multiplicarse por la distancia en que actúan es el trabajo realizado en el elemento, entonces, la energía elástica interna U se obtiene mediante:

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_x\, dy\, d_z \cdot \varepsilon_x\, d_x$$

donde: $\frac{1}{2}\sigma_x\, d_y\, d_z$ representa la fuerza y

$\varepsilon_x\, d_x$ es la distancia recorrida y el producto de ambos es el trabajo, por lo tanto.

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x d_x \, dy \, d_z = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV$$

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.12)$$

La ecuación anterior (4.12) representa la energía de deformación elástica por unidad de volumen.

U puede escribirse también como:

$$U = \int \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x V$$

pero de la Ley de Hooke sabemos que: $\sigma_x = E \varepsilon_x$, $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

por lo tanto:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} V$$

ó
$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} AL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.13)$$

De manera análoga se obtiene la energía de deformación elástica para esfuerzos cortantes mediante la expresión:

$$dU \text{ cort} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \, d_x \, d_z \, \gamma_{xy} \, d_y$$

$$dU \text{ cort} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} \, dV$$

Para un estado multiaxial de esfuerzo donde actuen tanto esfuerzos cortantes como axiales Uo se puede obtener como:

$$U_o = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

CAPITULO V

TORSION

V.1. CONSIDERACIONES BÁSICAS.

V.2. OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA DE LA TORSIÓN.

V.3. ANGULO DE TORSIÓN EN BARRAS CIRCULARES.

V.4. TORSIÓN EN ELEMENTOS DE SECCIÓN NO CIRCULAR.

V.5. TUBOS DE PARED DELGADA.

CAPITULO V

T O R S I O N

OBJETIVO:

Al concluir el estudio de este tema, el estudiante debe ser capaz de:

i) Determinar los esfuerzos cortantes a que se encuentra sometido un eje de sección circular tanto sólida o hueca; dadas las dimensiones de la barra y los pares torsores que actúan.

ii) Calcular las dimensiones de un eje, conociendo los pares aplicados, características del material y restricciones (si las hay).

iii) Obtener el ángulo de torsión para los elementos antes mencionados.

iv) Analizar y diseñar ejes cuyas condiciones de apoyo las conviertan en hiperestáticas.

v) Solucionar algunos problemas de ejes de sección transversal no circular sometidos a torsión.

vi) Determinar el valor del esfuerzo cortante para tubos o recipientes de pared delgada sometidos a torsión.

INTRODUCCION.

En secciones anteriores se analizaron características y comportamiento en general de materiales cuando son sometidos a la acción de cartas axiales, así como también las diversas deformaciones que dichos elementos sufren.

En este capítulo se establecen relaciones para determinar el efecto que produce un par torsor sobre un elemento específico.

Las flechas o ejes circulares son los miembros más comunmente asociados con cargas de torsión y presentan mu

chas aplicaciones prácticas en el campo de diseño de má-
quinas. Como ejemplo tenemos los ejes de transmisión de potencia o resortes helicoidales entre otros.

La mayor parte de este tema se relaciona a elementos de sección circular, ya que son los de mayor aplicación, sin embargo, se hace un breve análisis para elementos de sección no circular, elementos de pared delgada y torsión en elementos hiperestáticos.

5.1 CONSIDERACIONES BASICAS:

i) Homogeneidad en el material.
ii) Isotropia de los elementos.
iii) Planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje longitudinal del elemento permanecen en la misma forma después de que son aplicados los momentos torsores como se representa en la figura 5.1.

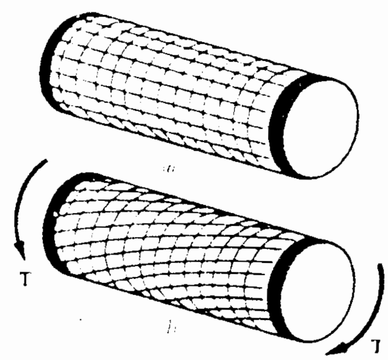


Fig. 5.1. Representación de una barra circular antes y después de ser sometida a la acción de un momento torsor

iv) Es un elemento de sección circular que se somete a torsión, presenta una deformación angular la cual varía linealmente desde su eje longitudinal, figura 5.2.

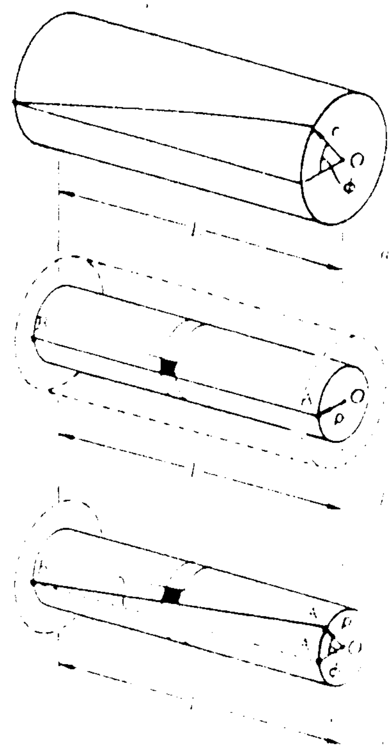


Fig. 5.2 Representación de la variación angular .

v) La longitud del elemento permanece invariable.

vi) Los esfuerzos que se producen por la aplicación de las cargas externas son cortantes y estos son directamente proporcionales a las deformaciones por lo que se cumple cabalmente la ley de Hooke.

vii) Los pares se aplican sin impacto.

Puede afirmarse que la deformación o comportamiento del material dependen de la geometría del mismo y de la forma de aplicación de las cargas.

5.2. OBTENCION DE LA FORMULA DE LA TORSION.

Como fácilmente se puede entender, a mayor deformación, existirá mayor esfuerzo, entonces, podemos afirmar que el máximo esfuerzo cortante se genera en los puntos más alejados de eje longitudinal del elemento como se ilustra en la figura 5.3.

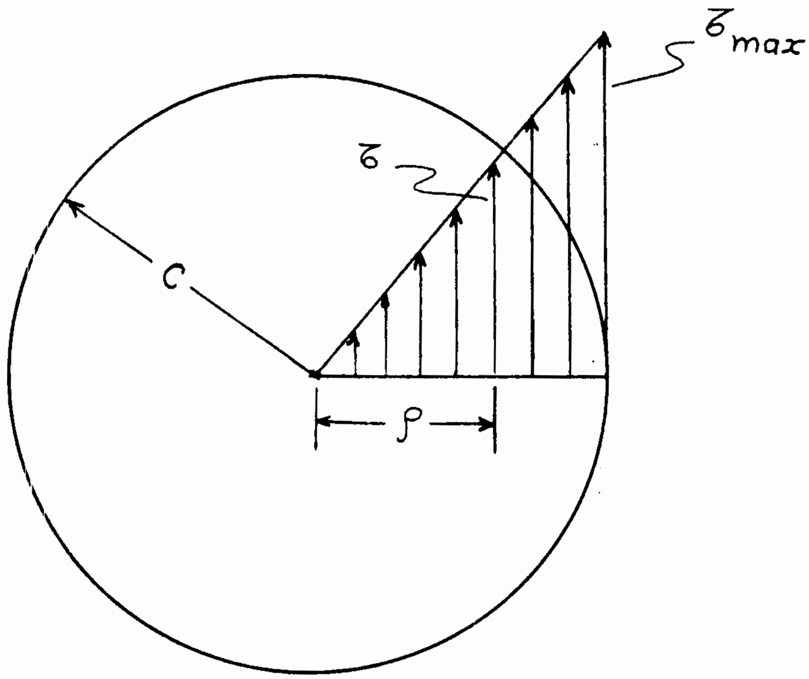


Fig. 5.3. Distribución de esfuerzos de un elemento de sección circular sometido a torsión.

De la figura anterior se puede deducir que se cumple la siguiente relación.

$$\frac{\tau max}{C} = \frac{\tau}{\rho} \tag{5.1}$$

Por lo que el esfuerzo en cualquier punto estará dado por:

$$\tau = \frac{\rho}{C} \tau \; max. \tag{5.2}$$

Tomando en cuenta que el momento externo es igual al momento interno resistente.

Consideremos un elemento de sección circular, sometido a sendos momentos torsores de igual magnitud pero de sentidos opuestos. Hagamos pasar un plano de corte y separemos ambas secciones trazando el correspondiente diagrama de cuerpo libre de una de las porciones separadas. Fig. 5.4

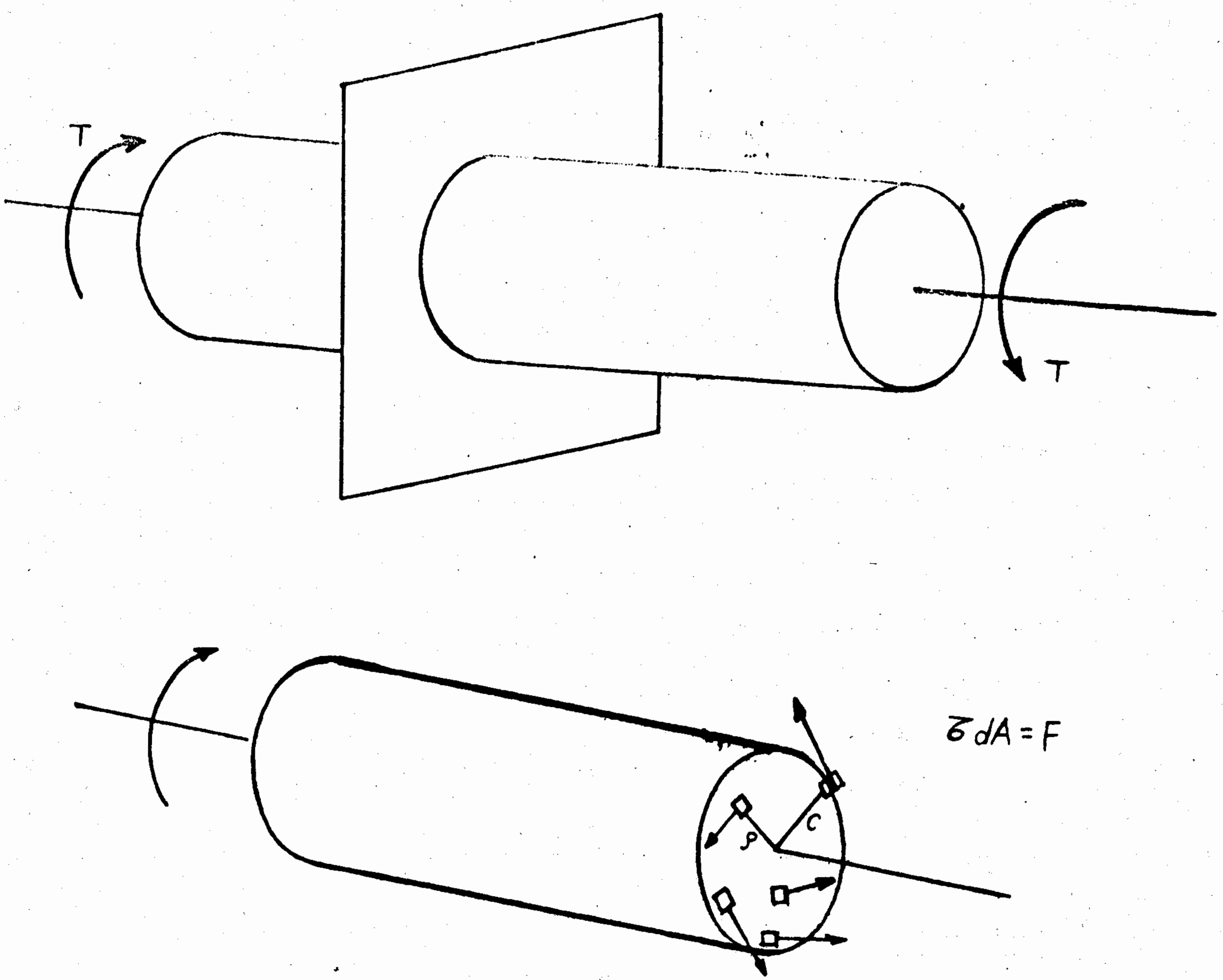


Fig. 5.4.

De la figura 5.4 se obtiene: $T_i = \Sigma \tau da\ \rho$ (5.3)

Pero de la ecuación 5.2 tomamos el valor de τ y lo sustituimos en la ecuación 5.3 quedando:

$$T_i = \int \tau_{max} \frac{\rho}{c}\ dA\ \rho \tag{5.4}$$

Sabemos que $T = T_i$

Por lo que la ecuación 5.4 puede escribirse como:

$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2\, dA$ pero $\int \rho^2 dA = J$ (momento polar de inercia) por lo que la ecuación para determinar el esfuerzo cortante máximo será:

$$\tau_{max} = \frac{T\ C}{J} \qquad \text{FORMULA DE TORSION} \qquad (5.5)$$

Considerese un elemento de sección transversal circular sólida al cual se le determinará el momento polar de inercia.

El área será:

$$A = \pi\ \rho^2 \text{ por lo que } dA = 2\pi\rho d\rho$$

por lo que $J = \int_A \rho^2 dA =$

$$J = 2\ \pi\ \frac{\rho^4}{4}\Big|_o^r$$

$$J = \frac{\pi r^4}{2} \quad \text{o bien} \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

De manera análoga para un cilindro hueco J se puede determinar quedando:

$$J = \frac{\pi(de^4 - di^4)}{32}$$

Para cilindros huecos de pared delgada donde la relación entre el espesor y el diámetro interno del cilindro sea menor a 1/20.

$$J = 2\pi r^3 t \quad \text{siendo } r = \text{radio medio}$$

5.3 ANGULO DE TORSION EN BARRAS CIRCULARES.

En base a las condiciones establecidas anteriormente y tomando en cuenta que el análisis para el desarrollo de la fórmula de la torsión se realiza dentro del rango elástico y por consecuencia la variación del esfuerzo con respecto a la deformación es proporcional, es decir se cumple la ley de Hooke.

Tomemos la figura 5.5. para representar algunos de los parámetros empleados en la deducción de la fórmula del ángulo de torsión.

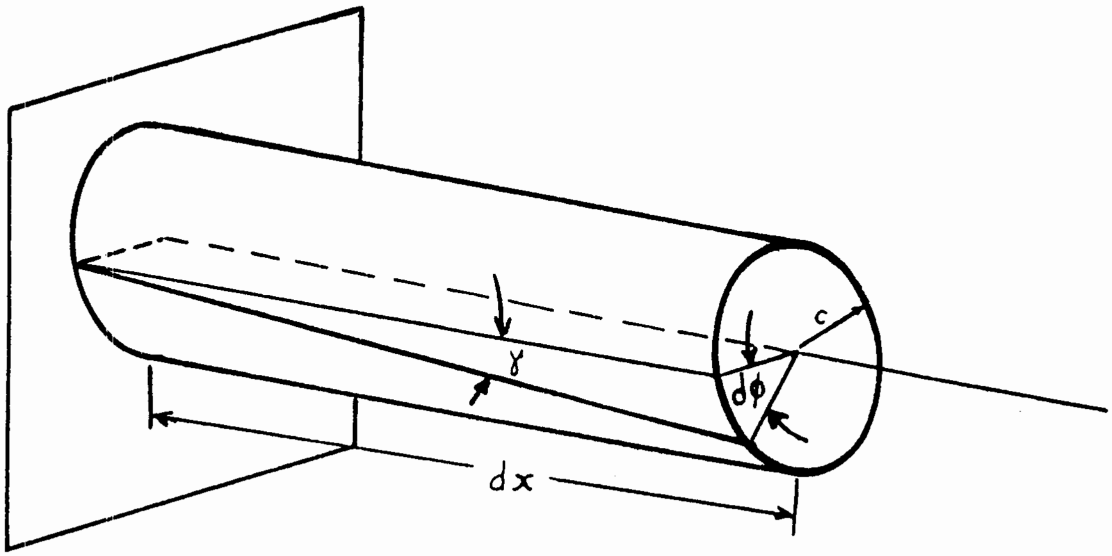


Fig. 5.5 Elemento de una barra circular sometida a torsión.

En la figura anterior se puede observar que:

$\widehat{CC'} = \gamma\, dx$, también se cumple $\widehat{CC'} = d\phi\ C$

por lo que podemos igualar las dos expresiones anteriores.

$$\gamma\, dx = d\phi\ C \tag{5.6}$$

además como la ley de Hooke se cumple podemos sustituir la expresión $\gamma = \tau/G$ así como la fórmula de la torsión $\tau = TC/J$ y simplificando los términos correspondientes, podemos escribir la expresión que al ser integrada en ambos miembros de la igualdad, nos dará la fórmula para determinar el ángulo de torsión de barras de sección circular.

$$\phi = TL/GJ \tag{5.7}$$

Ecuación que puede escribirse de manera general para elementos de sección circular variable, sometida a diferentes pares de torsión y de diversos materiales quedando:

$$\varnothing = \int \frac{T(x)}{G(x)\ J(x)}\, dx \qquad (5.8)$$

$\varnothing$ se expresa en radianes

G: es el módulo de rigídez propio de cada material.

5.4 TORSION EN ELEMENTOS DE SECCION NO CIRCULAR.

Las fórmulas obtenidas para determinar el esfuerzo cortante y el ángulo de torsión de elementos de sección circular no tienen validez para otro tipo de secciones. Lo anterior se afirma ya que las consideraciones antes utilizadas no se cumplen para estos elementos; es decir las secciones inicialmente planas y perpendiculares al eje longitudinal, sufren en general distorsiones. Debido a que con frecuencia el ingeniero en la práctica se encuentra con elementos que actúan como ejes (barras de torsión), cuyas secciones no son circulares. Es necesario entonces desarrollar nuevas ecuaciones que nos sirvan para determinar los esfuerzos y las deformaciones inducidas en estas secciones no circulares tanto sólidas como huecas.

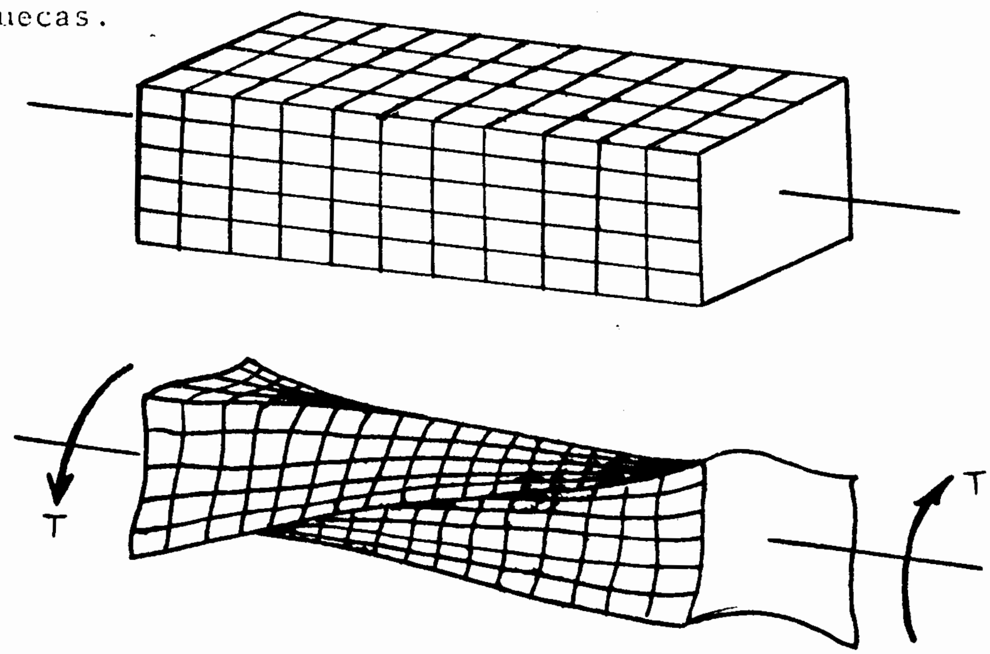


Fig. 5.6

Mediante la teoría matemática de la elasticidad es posible obtener las expresiones que en estas notas únicamente se transcriben para su utilización.

En 1885 Saint Venant investigó el fenómeno para una barra de sección rectangular, de cuyos resultados se establece que el esfuerzo cortante máximo ocurre en el punto central del lado más largo del elemento de sección rectangular y a diferencia de los elementos de sección circular, en los puntos más alejados que son los vértices, es esfuerzo contante es nulo.

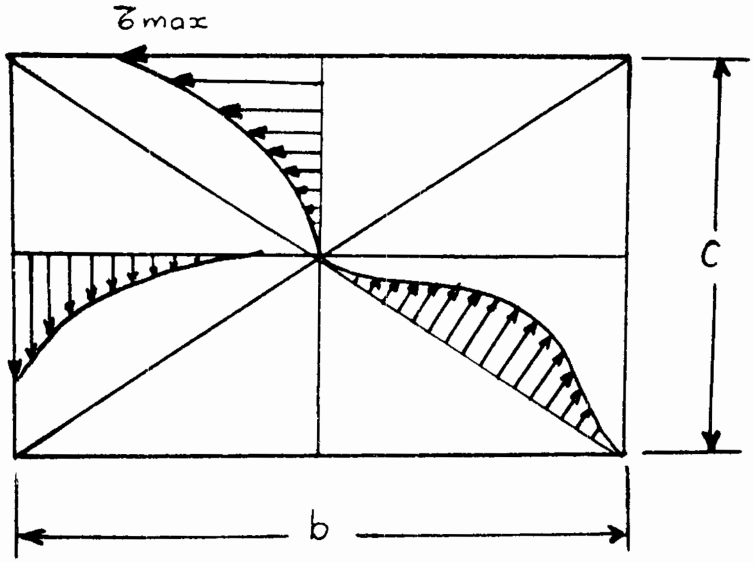


Fig. 5.7 Distribución de esfuerzos cortantes para viga de sección rectangular.

El valor del esfuerzo cortante máximo lo podemos determinar por medio de la ecuación:

$$\tau_{max} = T/\alpha b\ c^2 \quad y \tag{5.9}$$

y el ángulo de torsión se obtiene mediante la expresión:

$$\phi = TL/\beta\ G\ b\ c^3 \tag{5.10}$$

siendo α y β constantes que dependen de la relación entre el lado mayor (b) y el lado menor (c) del rectángulo que forma la sección transversal del elemento. Los valores de dichas constantes se dan en la siguiente tabla:

Tabla 5.1	COEFICIENTES PARA BARRAS RECTANGULARES								
b/C	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	00
α	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.291	0.312	0.333
β	0.1406	0.1661	0.1958	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333

El valor de τ_{max} también puede determinarse usando la si_ guiente ecuación aproximada:

$$\tau_{max} = (15\ b + 9c)\ T/5\ b^2\ c^2 \qquad (5.11)$$

válida para elementos de sección rectangular.

La figura (5.8) muestra la distribución de esfuerzos a lo largo de los ejes principales de una barra de sección trans_ versal elíptica somedita a torsión, los valores se determi- nan con la siguiente relación:

$$\tau_{max} = 2T/\pi b\ C^2 \qquad (5.12)$$

De manera similar para un elemento con sección transversal en forma de triángulo equilátero con lado b, el esfuerzo cortante máximo ocurre en la parte media de cada lado y puede calcularse mediante la ecuación:

$$\tau_{max} = 20\ T/b^3 \qquad (5.13)$$

Las dos expresiones anteriores no dependen de constantes empíricas ya que fueron obtenidas analíticamente.

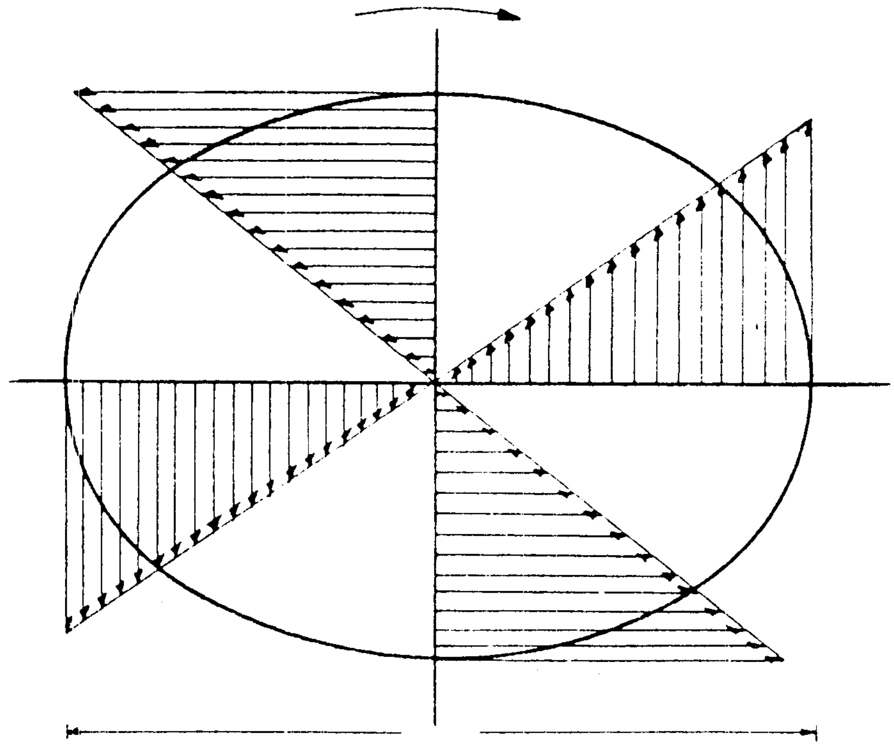


Fig. 5.8 Distribución de esfuerzos para sección transversal elíptica.

5.5 TUBOS DE PARED DELGADA.

En algunas estructuras ligeras tales como aeronaves y naves espaciales, se requiere de miembros tubulares de pared delgada y de formas no circulares para soportar torsión. Para obtener las fórmulas que sean aplicables a diversas formas de sección transversal, consideremos un tubo de pared delgada de sección transversal arbitraria pero constante en toda la longitud, el cual está sometido a sendos pares torsores en los extremos de magnitud T. El espesor t de la pared puede variar alrededor de la sección transversal, pero se asume que t es pequeño comparado con las dimensiones de la sección transversal del tubo. La figura 5.9 ilustra un tubo de pared delgada que tomaremos como referencia para el análisis de esta sección.

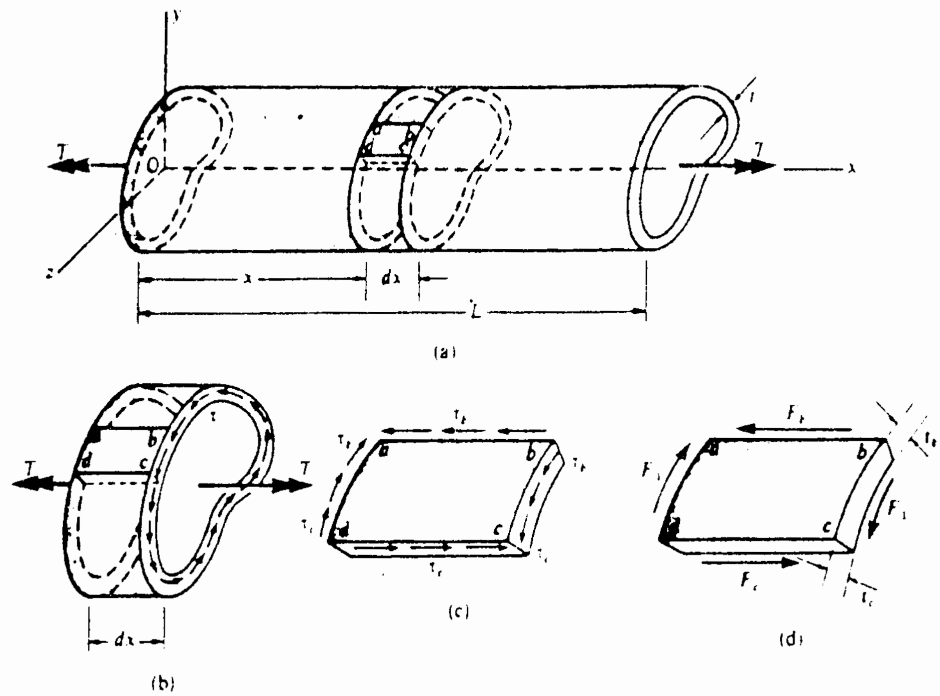


Fig. 5.9 Tubo de pared delgada con sección transversal arbitraria.

La figura 5.9.b ilustra los esfuerzos cortantes que actúan sobre las secciones transversales, dichos esfuerzos actúan paralelamente a la sección y "fluyen" alrededor del tubo. La intensidad de los esfuerzos varía muy poco a través del espesor del tubo debido a que este es muy delgado, por lo que se considera que τ es constante a través del espesor.

Para determinar la magnitud de los esfuerzos cortantes, considerese un elemento rectangular obtenido al efectuar dos cortes longitudinales ab y cd (fig. 5.9 a y b). Este elemento se separa como un cuerpo libre en la fig. 5.9 c. Sobre la cara de la sección transversal bc actúan los esfuerzos cortantes mostrados en la fig. 5.9 b. Se supone que estos esfuerzos pueden variar en intensidad conforme se trasladan a lo largo de la sección transversal desde b hasta c. Sea τ el que actúa en el punto b y llamemos τ al que actúa en c. En la sección transversal ad, actúan esfuerzos idénticos en magnitud pero de dirección opuesta. Sobre las caras longitudinales ab y cd actuarán esfuerzos de las mismas magnitudes que los de las secciones transversales, ya que como se mencionó en otra sección, los esfuerzos que actúan en planos perpendiculares, son de igual magnitud.

Los esfuerzos cortantes que actúan en las caras longitudinales producen las fuerzas Fb y Fc (fig. 5.9 d), que pueden determinarse multiplicando los esfuerzos por las áreas correspondientes; así,

$$Fb = \tau_b t_b \, dx \qquad \text{y} \qquad Fc = \tau_c t_c dx$$

en las t_b y t_c representan los espesores del tubo en b y c respectivamente. Se producen otras fuerzas F_1 en las caras transversales que no se incluyen en el estudio.

De condiciones de equilibrio se establece que

$$F_b = F_c \quad \text{o bien} \quad \tau_b t_b = \tau_c t_c$$

Dado que la localización de los cortes longitudinales se realizaron arbitrariamente, se puede apreciar en la ecuación anterior que el producto del esfuerzo cortante y el espesor del tubo t, es el mismo en cada punto de la sección transversal. Este producto se le conoce como Flujo Cortante y lo denotamos por la letra $f=\tau t$=constante. Entonces el esfuerzo será mayor cuando el espesor del tubo sea menor y viceversa. También se satisface que a espesor constante se tiene esfuerzo constante.

Relacionemos ahora al flujo y esfuerzo cortante con el par aplicado T que actúa sobre el tubo. Considerese un elemento de área, de longitud ds en la sección transversal como se ilustra en la figura 5.10. La distancia s se mide a lo largo de la línea media de la sección transversal indicada con línea punteada en la figura.

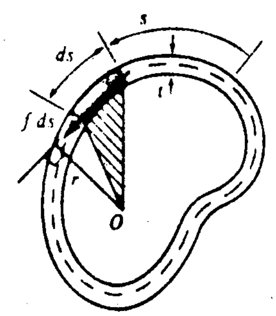


Fig. 5.10 Sección transversal de un tubo de pared delgada.

La fuerza cortante total que actúa en el elemento de área es f ds y el momento de esta fuerza alrededor de cualquier punto 0 es:

$$dT = r\ f\ ds$$

donde r es la distancia perpendicular desde 0 hasta la línea de acción de la fuerza. Esta última es tangente a la línea media de la sección transversal en el elemento ds. El par total T producido por los esfuerzos cortantes se obtiene al integrar a lo largo de toda la longitud L_m de la línea media de la sección transversal.

$$T = f \int_0^{Lm} r\ ds \qquad (5.14)$$

La integral en esta expresión tiene una interpretación geométrica simple. La cantidad $r\ ds$ representa el doble del área del triángulo sombreado que se indica en la figura 5.10, por lo que la integral representa el doble del área A_m limitada por la línea punteada de la sección transversal; así,

$$T = 2\ f\ A_m \tag{5.15}$$

por lo que podemos escribir lo siguiente:

$$f = \tau t = \frac{T}{2A_m} \qquad \tau = \frac{T}{2\ t\ A_m} \tag{5.16}$$

A partir de estas ecuaciones pueden calcularse el flujo cortante y los esfuerzos cortantes para cualquier tubo de pared delgada.

Para un material linealmente elástico, el ángulo de torsión se puede determinar aplicando el principio de conservación de energía.

La energía de deformación de un tubo de pared delgada en donde se toma en cuenta el flujo cortante como constante, el espesor del tubo variable y siendo L la longitud del tubo, puede escribirse así:

$$U = \frac{T^2\ L}{8G\ A_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \tag{5.17}$$

Incluyendo a la CONSTANTE DE TORSION $J' = \dfrac{4A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}}$

pudiendo expresarse la energía de deformación como se indica a continuación:

$$U = \frac{T^2\ L}{2\ G\ J'} \tag{5.18}$$

En el caso especial de una sección transversal de espesor constante, puede escribirse la constante del resorte como:

$$J' = \frac{4tA^2{}_m}{L_m} \tag{5.19}$$

Finalmente el ángulo de torsión $\emptyset$ para un tubo de pared delgada puede determinarse al igualar el trabajo realizado por los pares aplicados con la energía de deformación de la barra quedando determinada la expresión:

$$\emptyset = \frac{TL}{GJ'} \tag{5.20}$$

Para un tubo circular de espesor t se tiene:

$$L_m \quad L_m = 2\pi r \qquad A_m = \pi r^2 \qquad y \qquad J' = 2\pi r^3 t \tag{5.21}$$

Mientras que para un elemento de sección rectangular con espesores t_1 y t_2 en sus paredes paralelas y sean h y b el ancho y altura medias respectivamente, podemos escribir:

$$L_m = 2\ (b + h) \quad A_m = bh \quad y \quad J' = \frac{2b^2h^2 11\ t2}{bt_1 + ht_2} \tag{5.22}$$

CAPITULO VI

FLEXION EN VIGAS

VI.1. ANTECEDENTES.

VI.2. FÓRMULA DE LA FLEXIÓN ELÁSTICA.

VI.3. FÓRMULA DEL ESFUERZO EN VIGAS CURVAS.

CAPITULO VI

FLEXION EN VIGAS

OBJETIVOS:

Al concluir el estudio de esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

i) Determinar los esfuerzos normales inducidos en cualquier punto de una viga sometida a flexión.

ii) Seleccionar el perfil adecuado de la viga cuando se conocen la carga, la resistencia del material y el factor de seguridad.

iii) Dibujar diagramas de la distribución de esfuerzos para vigas de sección transversal conocida.

iv) Identificar el punto o zona en la que la viga en estudio presenta tanto el mayor esfuerzo como la más grande deformación.

v) Comparar los esfuerzos provocados en vigas curvas o en vigas rectas provocados por momentos flexionantes.

vi) Establecer la relación que existe entre el momento flector que actúa en una viga y la distribución de esfuerzos que produce.

INTRODUCCION.

Las vigas se encuentran comúnmente formando parte de estructuras y máquinas, por lo que el análisis de esfuerzos en este tipo de elementos constituye una de las facetas más interesantes en la mecánica de sólidos.

Como se mencionó en el Capítulo II, cuando una viga se somete a un sistema de cargas, ésta se flexiona produciéndose en cada una de sus secciones transversales una distribución no uniforme de esfuerzos normales, que dan como resultado la generación de un momento resistente interno, que junto con la fuerza cortante, mantienen en equilibrio al tramo correspondiente.

El objetivo fundamental de este capítulo es hallar la relación existente entre el momento flector que actúa en una sección de la viga y la distribución de esfuerzos normales que produce.

La teoría que en esta sección se desarrolla se basa en algunas consideraciones que a continuación se anotan:

1. El material del cual están construidas las vigas es homogéneo, isotrópico y elástico, es decir satisface la Ley de Hooke.

2. Para tensión o compresión se emplea el mismo módulo de elasticidad.

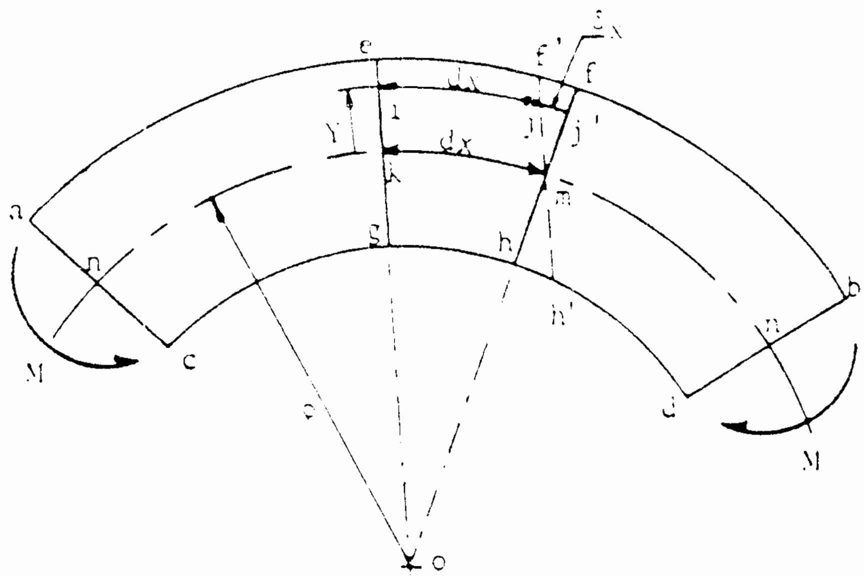


Figura 6.1 Viga sometida a flexión

En la figura anterior podemos observar que la sección fh que originalmente se encontraba paralela a la eg se ha rotado hasta tomar su nueva posición. También observamos que una de las fibras externas de la viga, (ab) se ha elongado con la deflexión, mientras que la otra (cd), se ha contraido, lo cual nos lleva a pensar que estas deformaciones son producto de esfuerzos de tensión para ab y de compresión para cd.

Es decir conforme avanzamos de a hacia c las fibras se enlongan o comprimen en alguna proporción, excepto una de ellas que permanece con su longitud original, es esta fibra la marca el cambio entre las que se elongan y las que se comprimen. A esta fibra que no sufre alteración se le denomina eje neutro y en la figura 6.1 se encuentra indicada con las letras n-n.

Para determinar las deformaciones que sufren los diferentes elementos conforme nos alejamos del eje neutro, observamos que la línea f'h' se ha trazado paralela a la línea eg, interesectando a la sección fh en el punto m del eje neutro.

Analicemos la fibra ij alejada una distancia Y del eje neutro; de la figura podemos ver que esta fibra sufre una deformación jj' a la cual denominamos δ_x, la deformación unitaria de esta fibra es por lo tanto:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{d_x} \qquad (6.1)$$

donde dx es la longitud original de dicha fibra.

Como los triangulos jj'm y okm son semejantes podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{\delta_x}{Y}$$

Por lo que la relación entre la deformación δ_x y la lon gitud original dx es igual a y/ρ, por lo que la ecuación (6.1) se convierte en:

$$\varepsilon_x = \frac{Y}{\rho} \tag{6.2}$$

donde ρ es el radio de curvatura de la viga flexionada a la altura de su eje neutro.

De la Ley de Hooke tenemos:

$$\sigma = E\varepsilon_x$$

Por lo tanto:

$$\sigma = \frac{E\,Y}{\rho} \tag{6.3}$$

La ecuación anterior nos indica que el esfuerzo normal provocado en un punto de la sección transversal de una viga sometida a flexión pura, varia linealmente con la posición del punto respecto al eje neutro.

Ahora consideremos el tramo de viga mostrado en la figura 6.2, el cual se obtiene al hacer un corte en la sección FH de la viga original, dibujando la distribución de esfuerzos de acuerdo a la ecuación 6.3.

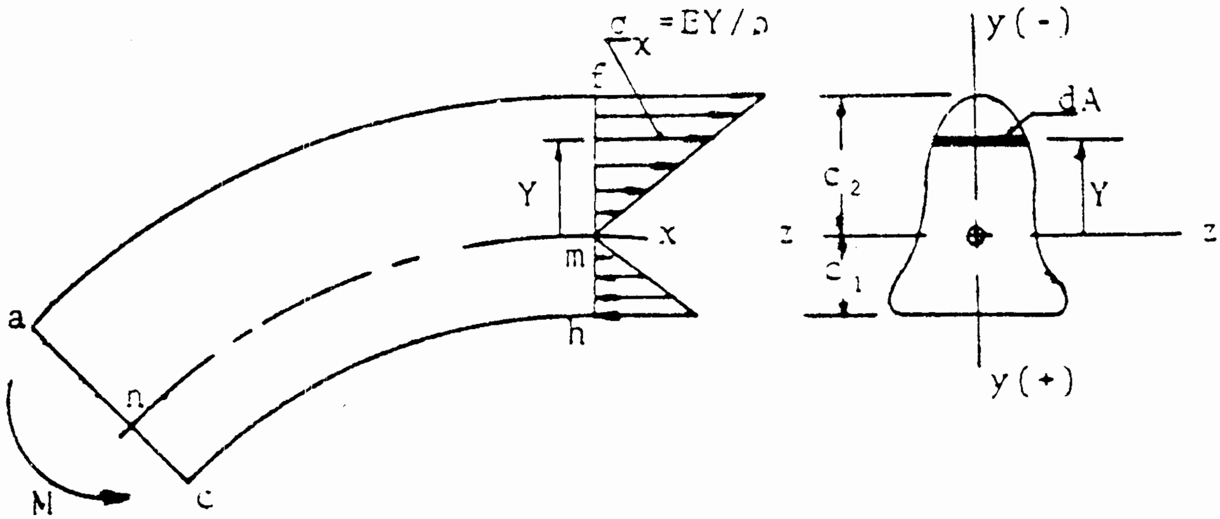


Figura 6.2

Aplicando las ecuaciones de equilibrio estático al tramo afhc de la figura anterior, tenemos:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\sigma_x \, dA = \frac{E}{\rho} \int Y \, dA = 0$$

como E/ρ es distinto de cero, entonces:

$$\int Y dA = 0$$

La integral anterior corresponde al momento estático del área de la sección transversal y como su valor es cero podemos concluir que el eje neutro pasa por el centroide de la sección. En consecuencia, el eje neutro se puede determinar con facilidad para cualquier viga hallando simplemente el centroide de su área transversal.

Usando ahora la otra condición de equilibrio estático, tenemos:

$$\Sigma M = 0 \quad +\curvearrowright$$

$$M = \int \sigma_x \, (dA) \, Y$$

$$M = \frac{E}{\rho} \int Y^2 \, dA$$

La última integral es el segundo momento del área llamado comunmente momento de inercia de la sección, respecto del eje neutro.

Cuando esta integral es sustituida por el símbolo I podemos escribir la ecuación anterior como:

$$M = \frac{E\ I}{\rho} \tag{6.4}$$

sustituyendo la ecuación (6.4) en la (6.3), tenemos:

$$\sigma = \frac{M\ Y}{I} \tag{6.5}$$

donde σ es el esfuerzo normal a una distancia Y del eje neutro y M es el momento resistivo que actúa en la sección analizada.

EJEMPLO:

6.2 FORMULA DEL ESFUERZO EN VIGAS CURVAS.

Los elementos curvos sometidos a flexión se presentan frecuentemente en el diseño de cuerpos de prensas, ganchos para levantamiento de cargas pesadas, etc.

Cuando este tipo de elementos son sometidos a la acción de momentos flectores puede demostrarse que la superficie neutra no coincide con el eje centroidal, como en el caso de las vigas rectas, sino que se encuentra desplazada hacia el centro de curvatura y por lo tanto las ecuaciones obtenidas para vigas rectas no pueden ser aplicadas. Además la distribucion de esfuerzos sobre una sección no es lineal y se incrementa muy rápidamente en la parte interior. Para realizar el análisis se supone que las secciones planas perpendiculares a la superficie neutra permanecen planas después de que la flexión ocurre y, por lo tanto, las deformaciones varían en forma proporcional a la distancia medida desde el eje neutro.

Consideremos la figura 6.3 la cual muestra una parte de viga curva sometida a flexión bajo la acción de momentos flectores aplicados en sus extremos.

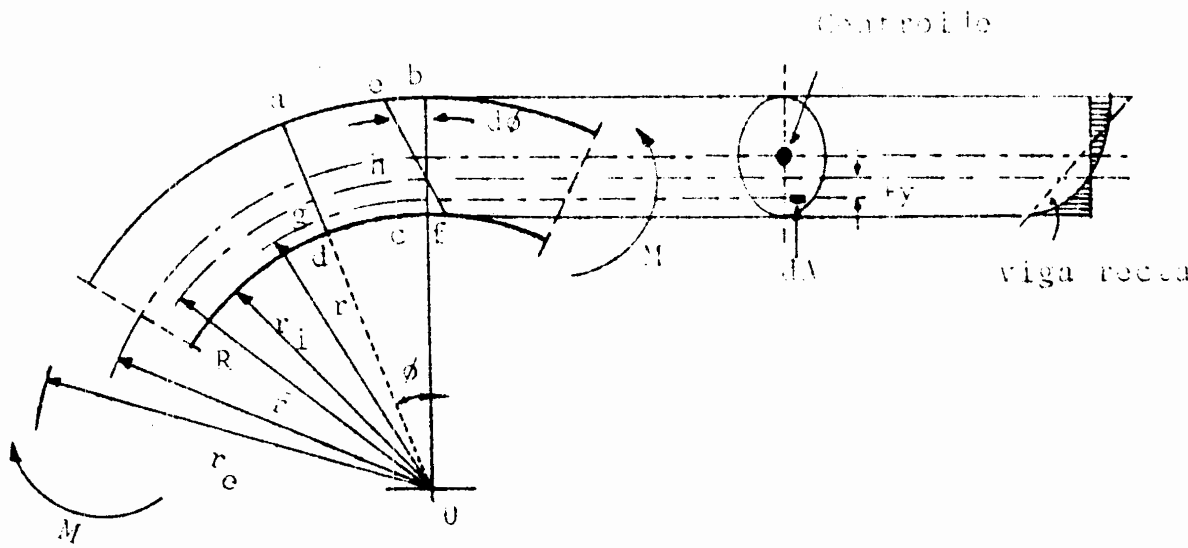


Figura 6.3 Viga Curva Sometida a Flexión Pura

Aunque la hipótesis básica de la deformación es la misma que para vigas rectas y, por la ley de Hooke, el esfuerzo normal $\sigma=E\varepsilon$, se observa que la longitud inicial de una fibra de viga como gh depende de la distancia r al centro de curvatura. Por tanto, aunque la deformación total de las fibras deuna viga (descritas cpor el ángulo $d\emptyset$) sigue una ley lineal, con las deformaciones no sucede esto. El alargamiento de una fibra típica gh es $(R-r)d\emptyset$, donde R es la distancia desde 0 hasta la superficie neutra (aún desconocida) y su longitud inicial es $r\emptyset$. La deformación ε de cualquier fibra es:

$$\sigma = E\varepsilon = E\,\frac{(R-r)d\phi}{r\phi} \qquad (1)$$

Obsérvese también que: $\dfrac{\sigma r}{R-r} = \dfrac{E d\phi}{\phi}$ (2)

La localización del eje neutro se obtiene de la condición de que la suma de fuerzas que actúan perpendicularmente a la sección debe ser igual a cero, esto es:

$$\Sigma F_n=0 \qquad \int_A \sigma\, dA = \int_A \frac{E(R-r)d\phi}{r\phi}\, dA = 0$$

pero E, R, $\emptyset$ y $d\emptyset$ = ctes. :

$$\frac{E d\phi}{\phi}\int_A \frac{R-r}{r}\, dA = \frac{E d\phi}{\phi}\left[R\int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA\right] = 0$$

$$R = \frac{A}{\int_A dA/r}$$

donde A es el área transversal de la viga y R localiza su eje neutro, obsérvese que el eje que así se halla no coincide con el centroidal.

Una vez conocida la localización del eje neutro, la ecuación para la distribución de esfuerzos se obtiene igualando el momento aplicado externo al momento resistente interno originado por los esfuerzos dados por la ec. (1). La suma de momento se toma con respecto al eje z, que es normal al plano de la figura.

$$\Sigma M_z = 0 \quad M = \int_A \underbrace{\sigma\, dA}_{Fza} \; \underbrace{(R-r)}_{brazo} = \int_A \frac{E(R-r)^2 d\phi}{r\phi}\, dA$$

recordando que E, R, ϕ y $d\phi$ = ctes. y empleando la ec. (2) :

$$M = \frac{E d\phi}{\phi} \int_A \frac{(R-r)^2}{r}\, dA = \frac{\phi r}{R-r} \int_A \frac{(R-r)^2}{r}\, dA$$

$$= \frac{\phi r}{R-r} \int_A \frac{R^2 - Rr - Rr + r^2}{r}\, dA$$

$$= \frac{\phi r}{R-r} \left[R^2 \int_A \frac{dA}{r} - R \int_A dA - R \int_A dA + \int_A r\, dA \right]$$

como R es constante, las 2 primeras integrales se anulan, la tercera es A y la última es por definición, $\bar{r}A$, por lo tanto:

$$M = \frac{\phi r}{R-r} \left(\bar{r}A - RA \right)$$

de donde el esfuerzo normal que actúa en una viga curva a una distancia r del centro de curvatura es:

$$\phi = \frac{M(R-r)}{rA(\bar{r}-R)}$$

CAPITULO VII

ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS

CAPITULO VII

ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS

OBJETIVO:

Al terminar el estudio de esta sección el alumno deberá ser capaz de:

i) Evaluar el esfuerzo de corte transversal en cualquier punto de una viga sometida a flexión por carga transversal.

ii) Dibujar la distribución de esfuerzos cortantes en el perfil de la sección.

iii) Determinar el espaciamiento que deben tener los pernos o remaches en vigas unidas por ese medio.

I N T R O D U C C I O N

Cuando una viga se somete a cargas que actúan transversalmente a su eje longitudinal se originan en ella reacciones internas en forma de fuerzas cortantes y momentos flexionantes; en el capítulo anterior analizamos el efecto que producen los momentos flexionantes en la viga, en este capítulo analizaremos la distribución de esfuerzos cortantes asociados con las fuerzas cortantes.

Aunque el esfuerzo de corte transversal por sí mismo no es causa de falla en las vigas cuya longitud es grande comparada con su sección transversal, en algunos casos combinando el efecto del esfuerzo normal y el cortante, puede provocarse un tipo de falla, en ciertos perfiles de vigas.

En vigas cuya longitud es pequeña, el esfuerzo de corte transversal sí es capaz por sí mismo de producir falla, aunque en estos casos ya no podemos hablar propiamente de vigas, sino que se trata de elementos sometidos a corte directo.

7.1 ANALISIS DEL EFECTO DE FLEXION.

Cuando una viga se somete a cargas que actúan transversalmente a su eje longitudinal, es posible construir un diagrama de fuerza cortante y calcular el valor de dicha fuerza en cualquier sección. Esta fuerza tiende a producir un deslizamiento relativo entre secciones verticales adyacentes de la viga.

Considere el caso de dos vigas de sección rectangular que descansan una sobre otra y que están simplemente apoyadas, como se muestra en la figura 7.1. Si se aplica alguna carga vertical, las vigas se deformarán como se muestra en la figura 7.2.

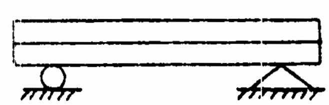


FIGURA 7.1

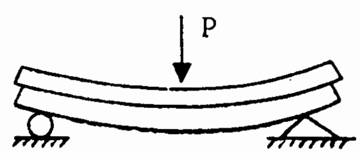


FIGURA 7.2

Es decir, si la fricción entre las superficies de contacto de las vigas es despreciable, cada viga se flexionará independientemente de la otra, y como resultado, la superficie inferior de la viga superior se deslizará con respecto a la superficie superior de la viga inferior.

Una viga formada de esta manera es mucho menos resistente que una viga única de las mismas dimensiones totales.

La figura 7.4 ayuda a comprender mejor el efecto antes explicado, representa la distribución de las tensiones normales de flexión sobre la porción de viga a la izquierda de la sección a-a' del elemento mostrado en la figura 7.3.

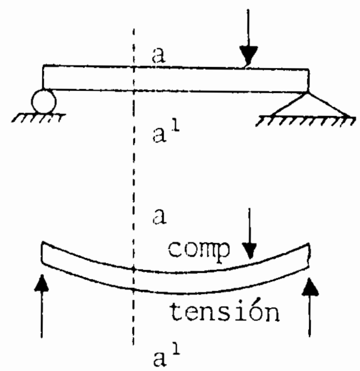


FIGURA 7.3

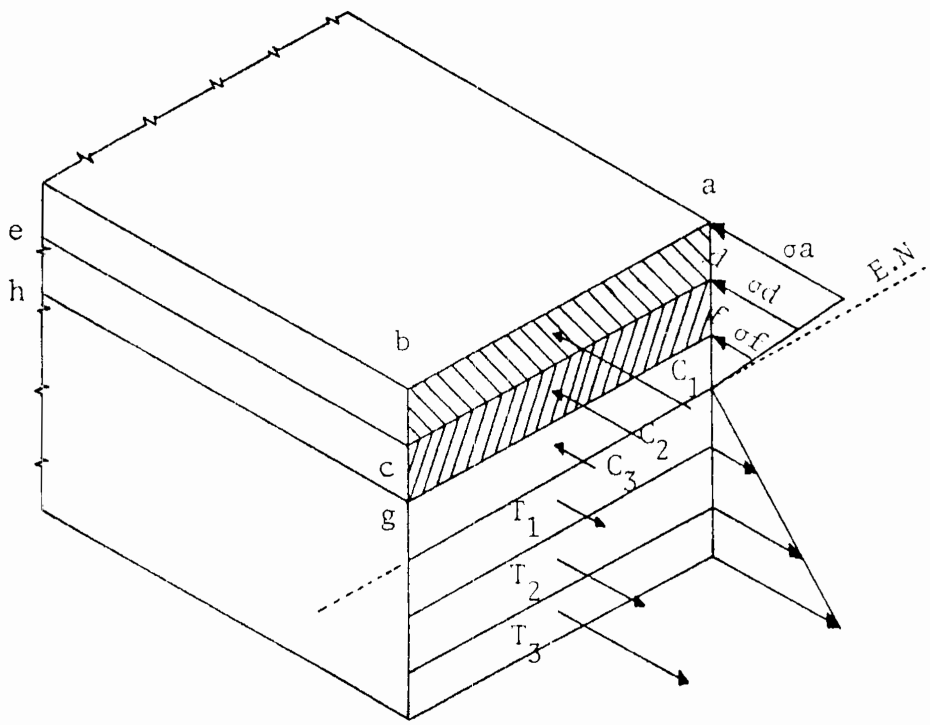


FIGURA 7.4

Para satisfacer la ecuación $\Sigma Fx=0$ debemos sumar las fuerzas horizontales que actuan en toda la altura de la sección y por tanto las fuerzas de tensión quedan equilibradas con las fuerzas de compresión.

Sin embargo, sumando las fuerzas horizontales que actuan en el área abcd, tenemos que la fuerza de compresión C_1 es igual al valor medio del esfuerzo por el área abcd y sólo puede equilibrarse mediante una fuerza cortante que debe desarrollarse en el plano horizontal cde. Esta fuerza cortante o resistencia a la cortadura puede producirse en una viga maciza, pero no en una formada por capas independientes.

Si se extiende la sumatoria de fuerzas horizontales hasta el plano fg, tenemos que ahora la fuerza de compresión es C_1+C_2, donde C_2 es el valor medio de los esfuerzos σ_d y σ_f por el área cdgf, por lo tanto como ahora la fuerza total de compresión es C_1+C_2 tendrá que haber una mayor resistencia a la cortadura en el plano horizontal fgh que en el plano cde.

Este procedimiento nos da una idea de cómo el incremento de la fuerza de compresión va siendo cada vez menor conforme se desciende a intervalos iguales desde la parte superior de de la sección hasta la parte inferior, aunque la fuerza de compesión total va aumentando hasta que llega al eje neutro donde el incremento de la fuerza de compresión es nulo pero esta fuerza de compresión ha alcanzado su máximo valor.

Este análisis nos muestra que el máximo esfuerzo cortante tiene lugar precisamente en el eje neutro y va reduciendo gradualmente su valor hasta ser nulo en los extremos de la sección transversal del elemento.

También debe notarse que las capas o planos equidistantes del eje neutro están sometidas al mismo esfuerzo cortante, en secciones transversales simétricas. Esto se ilustra en la figura 7.4.a.

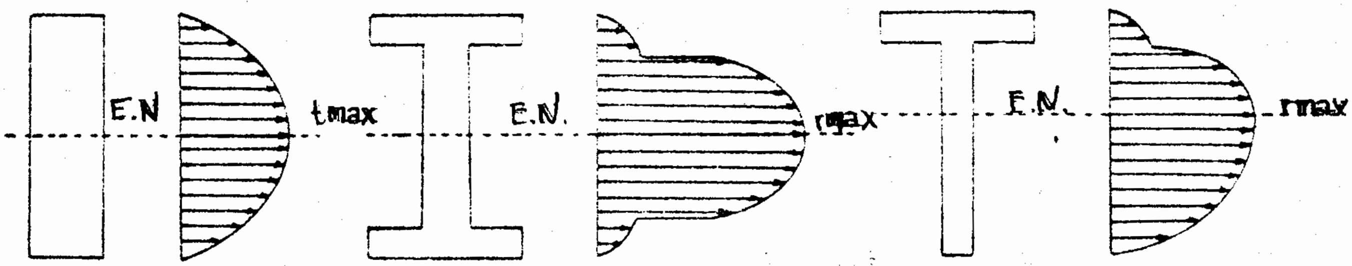


FIGURA 7.4.a

7.2 DEDUCCION DE LA FORMULA DE ESFUERZO CORTANTE.

Considere un elemento sometido a las condiciones de carga que se muestran en la figura 7.5, analicemos la sección AB la cual se muestra en la figura 7.6.

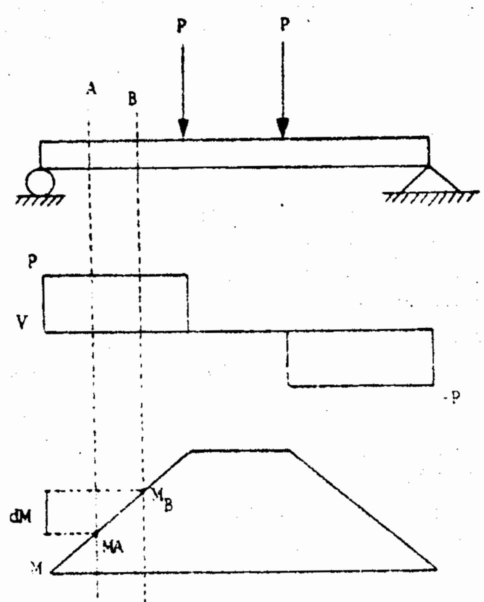


FIGURA 7.5

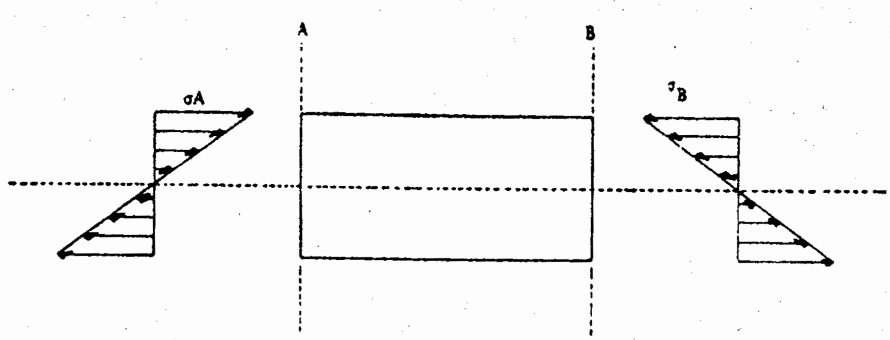


FIGURA 7.6.

La figura 7.6 nos muestra que en la sección AB del elemento en cuestión se producen esfuerzos por flexión que actúan normalmente a su sección transversal y que varían linealmente a partir del eje neutro y son:

$$\sigma_A = -\frac{M_A\, y}{I} \quad \text{para el extremo A}$$

$$\sigma_B = -\frac{M_B\, y}{I} \quad \text{para el extremo B}$$

Como el esfuerzo por área da una fuerza, podemos determinar las fuerzas que actúan perpendicularmente a los extremos A y B integrando el esfuerzo en el área que actúa, esto es:

$$F_A = \int \sigma_A \, dA$$

$$F_B = \int \sigma_B \, dA$$

Sustituyendo los valores correspondientes de A y B tenemos:

$$F_A = \int -\frac{M_A\, y}{I} \, dA$$

$$F_B = \int -\frac{M_B y}{I} \, dA$$

Si obtenemos la variación de F_B y F_A entonces:

$$F_A - F_B = -\int \frac{M_B\, y}{I} \, dA + \int \frac{M_A y}{I} \, dA$$

Pero de la figura 7.5 observamos que:

$$dM = M_B - M_A$$

y

$$M_B = M_A + dM$$

por lo tanto:

$$F_A - F_B = -\int \frac{M_A y}{I}\, dA - \int \frac{dM\ y}{I}\, dA + \int \frac{M_A y}{I}\, dA$$

$$F_A - F_B = -\frac{dMy}{I}\, dA = -\frac{dM}{I}\int y\, dA \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.1)$$

$\int y\, dA$ representa el momento estático o primer momento del área considerada con respecto al eje neutro y se representa por Q, es decir:

$$\int y\, dA = A\,\bar{y} = Q$$

donde por definición $\bar{y}$ es la distancia desde el eje neutro hasta el centroide del área considerada. Por lo tanto podemos expresar la ecuación (7.1) de la siguiente manera:

$$F_A - F_B = -\frac{dM}{I}\, Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.2)$$

Si consideramos que F_A y F_B varían en una fuerza infinitesimal, o sea $F_A - F_B = dF$, la cual se desarrolla en una distancia dx, es más conveniente trabajar con una fuerza por unidad de longitud de la viga, y ésta la obtenemos dividiendo dF entre dx, por lo tanto la expresión (7.2) se reduce a:

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{dM}{dx}\,\frac{Q}{I}$$

Sabemos que $dM = -V\,dx$ por lo tanto $V = -\frac{dM}{dx}$, entonces:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I} \qquad \text{................} \qquad (7.3)$$

Físicamente la cantidad $\frac{dF}{dx}$ representa la variación de la fuerza cortante por unidad de longitud a lo largo de la viga, se le conoce como Flujo Cortante y se le designa generalmente por q. Entonces la ecuación (7.3) se convierte en:

$$q = \frac{VQ}{I} \qquad \text{..................} \qquad (7.4)$$

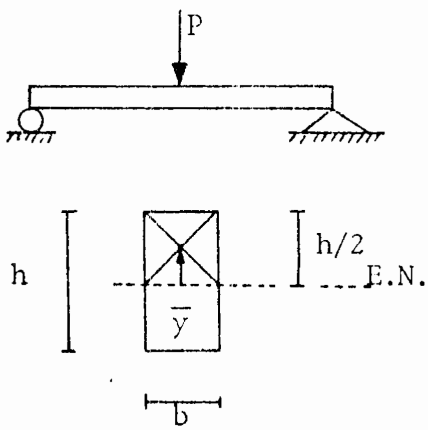
La fórmula para el flujo cortante q no se limita a vigas de sección transversal rectangular, sino que es válida para cualquier viga que tenga una sección transversal simétrica respecto del eje y y está expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud (N/m, Kg/cm, Ton/cm, etc.)

La fórmula para calcular el esfuerzo cortante lo podemos obtener a partir de la fórmula de flujo cortante si consideramos que el esfuerzo está distribuido uniformemente a través de la sección de anchura b, este se logra dividiendo el flujo cortante entre dicha anchura, es decir:

$$\tau = \frac{q}{b} = \frac{VQ}{Ib} \qquad \text{........................} \qquad (7.5)$$

7.2.1 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE SECCION RECTANGULAR

Considerando una viga de sección rectangular, como la mostrada, y aplicando la fórmula (7.5) tenemos:



$$\tau = \frac{V\ Q}{I\ b}$$

$$Q = y\ A$$

$$y = \frac{h}{4}$$

$$A = \frac{h}{2}\ b$$

$$Q = \frac{h}{4}\ \frac{h}{2}\ b = \frac{h}{8}\ b$$

$$I = \frac{1}{12}\ b\ h$$

$$\tau = \frac{\frac{V\ h\ b}{8}}{\frac{b\ h}{12}\ b} = \frac{12\ V\ h}{8\ b\ h} = \frac{12}{8}\ \frac{V}{bh}$$

$$\tau max = \frac{3}{2}\ \frac{V}{A_T}\ \ldots\ldots\ (7.5.1)$$

La ecuación (7.5.1) nos indica que el esfuerzo cortante máximo es 50% mayor que el esfuerzo cortante medio dado por V/A_T.

La fórmula para el esfuerzo cortante en vigas rectangulares es válida para vigas de proporciones usuales y únicamente para vigas de material linealmente elástico con deflexiones pequeñas.

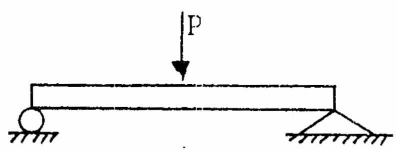
La fórmula puede considerarse exacta para vigas delgadas, es decir b mucho menor que h, pero se vuelve menos precisa cuando b se incrementa con respecto a h y cuando b=h el verdadero cortante máximo es alrededor del 13% mayor que el valor dado por la ecuación (7.5.1).

7.2.2 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR.

Considerando la figura mostra y utilizando la ecuación (7.5) tenemos:

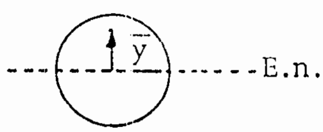
$$\tau = \frac{V\,Q}{I\,b}$$

$$Q = y\,A$$



$$\bar{y} = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}\;\frac{4}{6}\,\frac{d}{\pi}$$

$$A = \frac{\pi d}{8}$$



$$Q = \frac{4}{6}\,\frac{d}{\pi}\,\frac{\pi d^2}{8} = \frac{4d^3}{48}$$

$$I = \frac{d\pi}{64}\,, \quad b = d$$

$$\tau = \frac{\dfrac{4\,V\,d^3}{48}}{\dfrac{\pi\,d^5}{64}} = \frac{\dfrac{4\,V\,d^3}{48}}{\dfrac{\pi\,d^5}{(16)4}} = \frac{(16)(4)V}{(16)\;(3)\pi\,\dfrac{d^2}{4}}$$

$$\tau = \frac{4}{3}\,\frac{V}{A_T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.5.2)$$

La expresión (7.5.2) establece que el esfuerzo cortante máximo en una viga de sección transversal circular es 4/3 el esfuerzo cortante medio V/A.

La fórmula que aquí hemos obtenido proporciona resultados razonablemente exactos para los esfuerzos cortantes en una viga circular maciza. Los resultados exactos obtenidos por la teoría de la elasticidad muestran que los esfuerzos no son constantes a lo largo del eje neutro, sin embargo, los esfuerzos determinados por la fórmula (7.5.2) sólo presentan un pequeño porcentaje de error.

7.3 VIGAS COMPUESTAS.

Una viga armada o compuesta está constituida por dos o más piezas del mismo material unidas para integrar una viga entera, este tipo de vigas puede construirse en una gran variedad de perfiles para satisfacer una necesidad en especial o bien para proporcionar una sección transversal mayor que las disponibles.

En la figura 7.7 se muestran algunas secciones transversales características de este tipo de vigas.

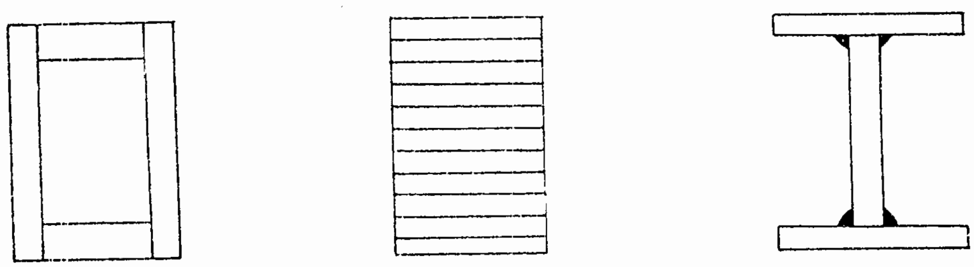


FIGURA 7.7

La parte (a) de la figura muestra una viga cajón de madera construida con dos tablones que sirven como patines, unidos mediante almas de madera laminada. Las piezas se unen con clavos, tornillos o pegamento.

El segundo ejemplo es una viga laminar pegada; llamada comunmente viga aglomerada, hecha de tablas pegadas entre sí para obtenerse una viga de mucho mayor sección transversal que las comunmente disponibles.

El último ejemplo es una trabe de acero soldada, constituida por 3 placas unidas mediante cordones de soldadura.

Una viga armada se diseña generalmente con la suposición de que las partes se unirán adecuadamente y en forma tal que la viga se comparte como un miembro entero. Los cálculos de diseño implican dos fases, primero la viga se dimensiona como una viga maciza y se toman en cuenta los esfuerzos por flexión y los esfuerzos cortantes. En la segunda fase se diseñan los elementos de conexión (clavos, soldadura, tornillos, adhesivo, etc.) para precisar que la viga se comporte como una viga entera.

7.4 ESPACIAMIENTO DE PERNOS O REMACHES EN VIGAS COMPUESTAS.

En el análisis de los efectos de la flexión se mencionó que los distintos elementos que constituyen una viga compuesta tienden a deslizarse unos sobre otros. En esta sección se va a estudiar las dimensiones y separación o espaciamiento de los pernos o remaches que unen los elementos de una viga compuesta para que resistan esta acción de deslizamiento.

El primer paso a seguir es determinar la fuerza que han de resistir tales pernos o remaches:

Considere la figura 7.8, la cual representa una viga compuesta formada por tres elementos unidos mediante dos filas de remaches espaciados a una distancia S.

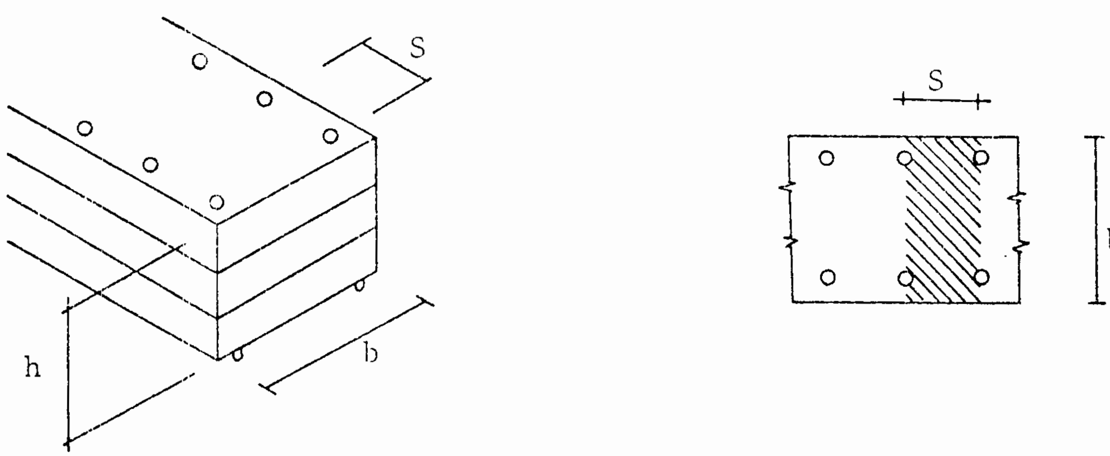


FIGURA 7.8

La ecuación (7.5) da el esfuerzo cortante en la superficie de contacto entre los dos elementos superiores, multiplicando este esfuerzo por el área sombreada S b se obtiene la fuerza a resistir en la longitud S, este es:

$$F = S\,b = \frac{V\,Q}{I\,b}\,S\,b$$

$$F = \frac{V\,S\,Q}{I}$$

pero sabemos que el flujo cortante está definido por $q = \frac{VQ}{I}$, por lo tanto:

$$F = S\,q$$

$$S = \frac{F}{q} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (7.6)$$

CAPITULO VIII.

ESFUERZOS COMBINADOS

VIII.1. INTRODUCCIÓN.

VIII.2. LA SUPERPOSICIÓN Y SUS LIMITACIONES.

VIII.3. FLEXIÓN ASIMÉTRICA.

VIII.4. CARGA AXIAL EXCÉNTRICA.

VIII.5. SUPERPOSICIÓN DE ESFUERZOS CORTANTES.

VIII.6. ESFUERZOS EN RESORTES HEILICOIDALES

CAPITULO VIII

ESFUERZOS COMBINADOS

OBJETIVO:

i) Al concluir este capítulo, el alumno debe ser capaz de determinar el valor de los esfuerzos provocados por la acción de una fuerza o un sistema de fuerzas que actua simultáneamente en una sección transversal de un cuerpo.

ii) Determinar los esfuerzos máximos y las deflexiones que sufre un sistema formado por uno o varios resortes cuando se conocen tanto las cargas que actuan, como el material y la geometria de las componentes

iii) Calcular las dimensiones básicas de un resorte helicoidal para que cumpla con las especificaciones de carga y deformación prefijadas.

8.1 INTRODUCCION.

En secciones anteriores se analizó que la distribución de esfuerzos en la sección transversal de un elemento bajo carga axial puede suponerse uniforme únicamente si la línea de acción de las cargas pasa por el centroide. En esta sección analizaremos los esfuerzos normales que provienen de la acción simultánea de una fuerza axial y de un momento flexionante, seguiremos con el estudio de problemas en los cuales se presentan simultáneamente esfuerzos cortantes debidos a torsión y corte directo y por último, se estudiarán los resortes helicoidales enrollados estrechamente o sea con sus espiras próximas.

8.2 LA SUPERPOSICION Y SUS LIMITACIONES.

La superposición de los efectos de fuerzas aplicadas por separado es aplicable en tanto que las deformaciones totales producidas son pequeñas, condición que se cumple cabalmente en problemas comprendidos dentro del rango elástico.

La figura 8.1 ilustra el efecto provocado por una carga axial y una transversal, puede observarse que se provoca una deflexión V lo que implica la aparición de un momento flector adicional PV el cual se considera despleciable porque las deformaciones son pequeñas.

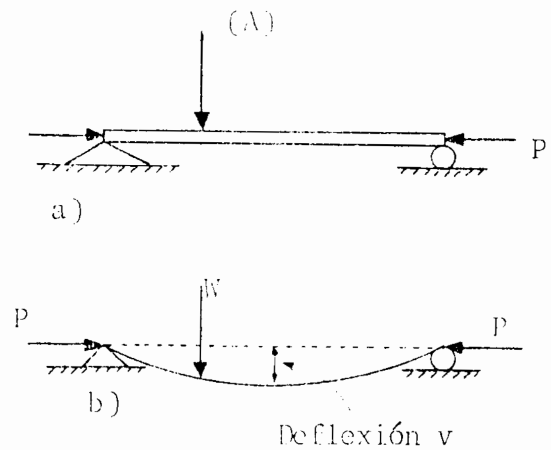


FIG. 8.1 Las deflexiones en vigas comprimidas axialmente producen aumento en los momentos flexionantes.

Consideremos un elemento sometido simultáneamente a la sección de una fuerza axial y un momento flexionante, la superposición de las deformaciones se indica esquemáticamente en la figura siguiente:

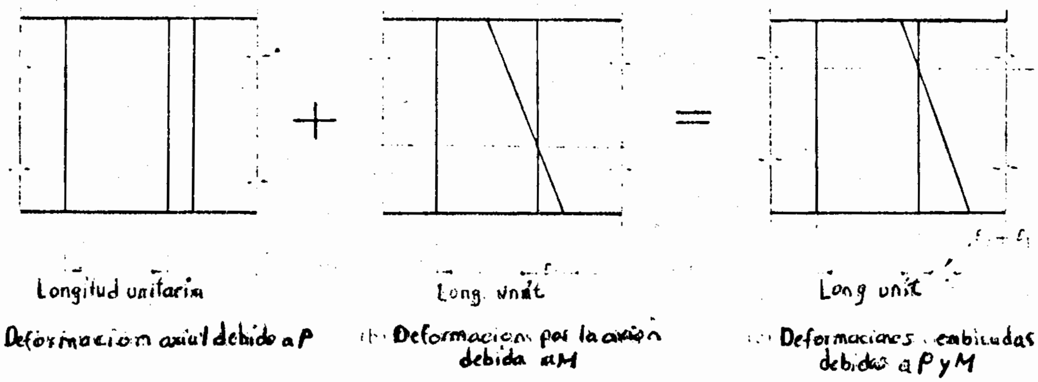


Fig. 8.2. Deformaciones lineales combinadas

Puede observarse que la carga axial provoca que una sección plana perpendicular al eje de la viga se mueva a lo largo de éste paralelamente a sí mismo fig. 8.2 (a). El momento flector aplicado con respecto a uno de los ejes principales, provocará que una sección plana sufra una rotación, fig. 8.2 (b). La superposición de las correspondientes deformaciones se ilustra en la fig. 8.2 (c).

Tanto para el estudio de esfuerzos axiales combinados como para esfuerzos cortantes combinados, el presente tema se limitará a los casos linealmente elásticos, ya que en estos existe una relación lineal entre el esfuerz o y la deformación, esto nos lleva a considerar que no sólo los esfuerzos se superponen sino que también lo hacen las deformaciones.

De lo anterior se puede concluir que si en el mismo elemento y para el mismo sistema de coordenadas se conocen dos sistemas de esfuerzos, es posible la suma algebraica de las componentes del tensor esfuerzo, como lo es para el caso de las componentes de un vector.

Ejemplo: Un eslabón de una cadena está construido por una varilla de una pulgada de diámetro y tiene la forma que se ilustra en la figura. Considerando las dimensiones ilustradas; determine el valor de la fuerza P que puede aplicarse, si el esfuerzo permisible es de 10 000 lb/pul^2. Efectue sus calculos en la sección A-B

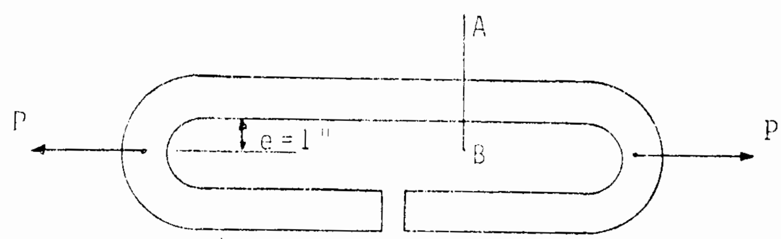


Fig. 8.3

Solución: Primero se toma como cuerpo libre un segmento de la barra como se indica en la fig. 8.4 (a). En la sección A-B se ubican la fuerza axial aplicada en el centroide de la sección y el momento flexionante necesarios para mantener el equilibrio. Los esfuerzos provocados se determinan mediante las expresiones:

$$\sigma = P/A \qquad y \qquad \sigma = MC/I$$

$$I = \frac{\pi\, d^4}{64} = 0.049 \text{ pul}^4$$

$$10\ 000 = \frac{P}{\frac{\pi\, d^2}{4}} \pm \frac{1.5P(0.5)}{0.049} = P\left(\frac{4}{\pi\ (1)^2} \pm \frac{0.75}{0.049}\right)$$

$$P_1 = \frac{10\ 000}{15.577} = 603.15 \qquad P_2 = -712.6$$

Tomamos el valor absoluto menor y con él determinamos los valores de los esfuerzos resultantes en la sección A-B.

Debido a la carga axial, los esfuerzos en toda la sección son iguales,

$$\sigma = \frac{603.15}{\frac{\pi(1)^2}{4}} = 768 \text{ lb/pul}^2$$

Provocados por la flexión los esfuerzos correspondientes serán

$$\sigma_A = \frac{904.7\text{x}0.5}{0.049} = 9232 \text{ lb/pul}^2$$

Los diagramas correspondientes de la distribución de esfuerzos se representan a continuación indicandose también la superposición resultante.

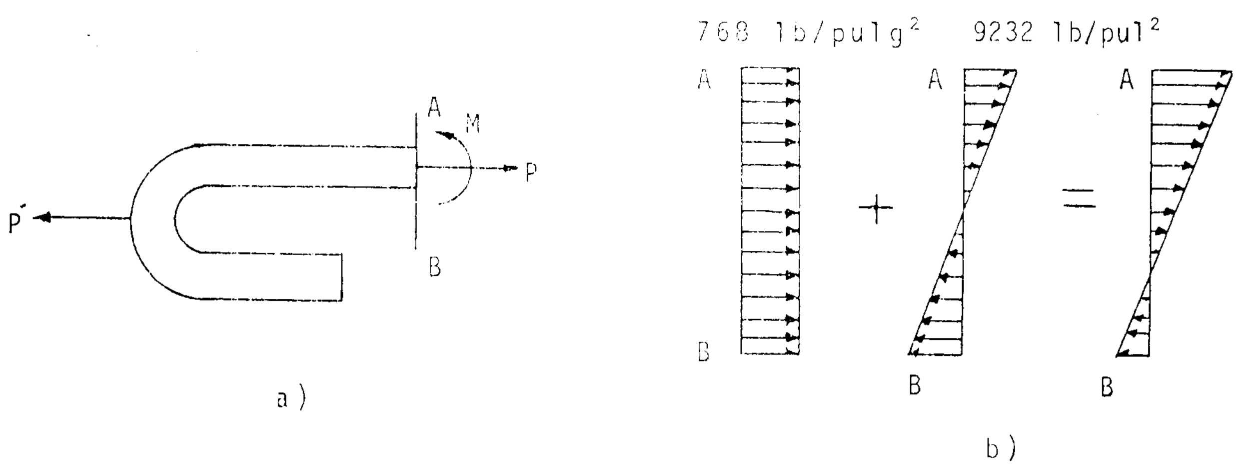


FIG. 8.4 Representación de la distribución y superposición de esfuerzos.

Los esfuerzos cortantes no existen ya que ninguna fuerza cortante es necesaria para mantener el equilibrio.

8.3 FLEXION ASIMETRICA:

La expresión desarrollada en el capítulo 6, no es aplicable en el caso de que la flexión ocurra fuera del eje de simetría de la sección transversal de la viga

Consideremos la figura siguiente en donde se puede considerar que el plano donde actua el momento flector, está inclinado con relación a los ejes principales un ángulo α, el cual es considerado positivo cuando se mide del eje Y hacia el Z en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

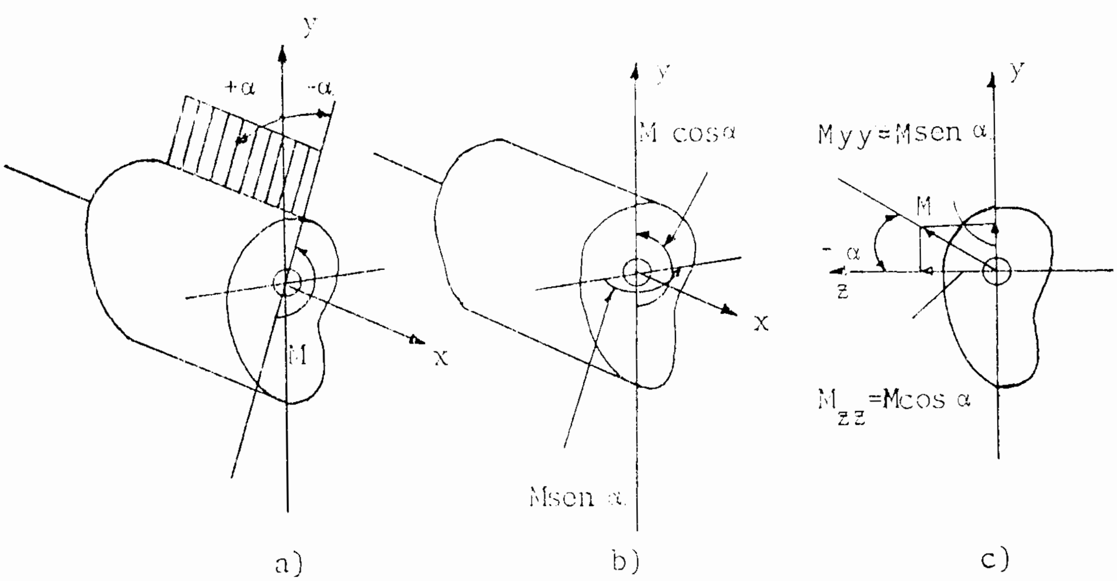


Fig. 8.5 Momento Flexionante que no pasa por ningún eje principal y sus correspondientes componentes proyectadas sobre los ejes principales.

Para la solución de este tipo de problemas, el momento aplicado M se descompone en sus dos componentes que actuan en los planos de los ejes principales. Para el ángulo negativo representado en la fig. 8.7.a, la componente que actua con respecto al eje Z es M_{zz}=M cos α

y la que lo hace respecto al eje Y M_{yy}=M sen α

Una vez obtenidas dichas componentes, la fórmula de la flexión deducida anteriormente, se puede aplicar a cada una de las componentes de momento que actuan respecto a un eje principal, y el esfuerzo combinado se obtiene por superposición. La figura siguiente ilustra estos resultados; por simplicidad se toma una sección rectangular.

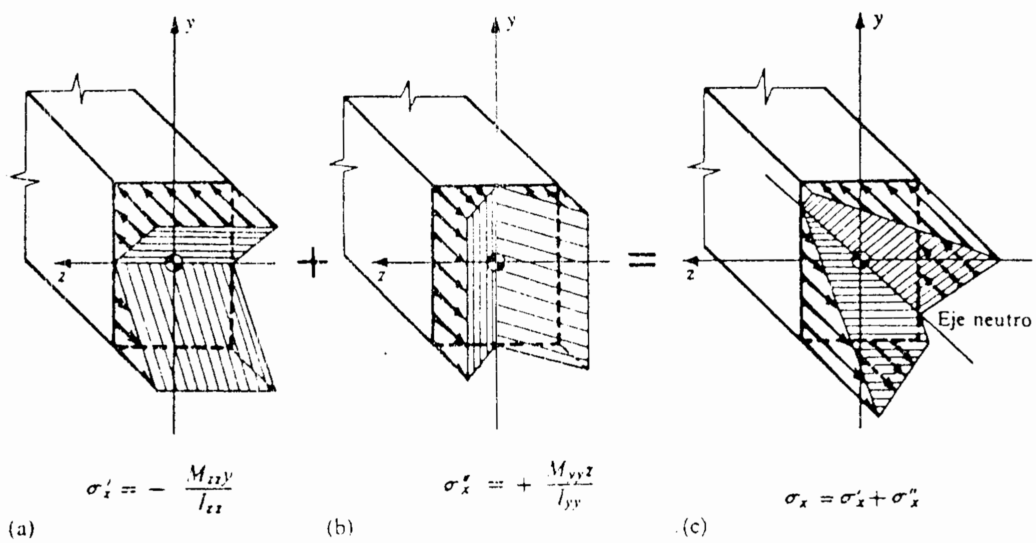


Fig. 8.6 Superposición de esfuerzos por flexión elástica.

Nótese que dichos esfuerzos se determinan mediante la ecuación

$$\sigma_X = -\frac{M_z Y}{I_z} + \frac{M_y Z}{Iy} \qquad (8.1)$$

donde se puede observar que es negativo el primer término del lado derecho de la igualdad, que da los esfuerzos causados alrededor del eje Z, en cambio el segundo termino es positivo para tener la correspondecia de signos entre los esfuerzos normales y el sentido del momento positivo que actua con respecto a los ejes.

En base a lo anterior, en la aplicación de la ecuación (8.1) si signos positivos están asociados a todas las cantidades de conformidad con los ejes coordenados, resultados positivos indicarán esfuerzos de tensión, y los negativos, esfuerzos de compresión. Al igual que en los problemas de flexión simétrica se puede asignar los signos por inspección visual.

En general, si el momento aplicado M actua en un plano que forma un ángulo positivo α con el eje Y, las componentes del momento flexionante son

$M_{yy} = - M \operatorname{sen} \alpha$ y $M_{zz} = M \cos\alpha$, y la ecuación (8.1)

se puede expresar así

$$\sigma_x = - M\left(\frac{Y}{I_{zz}} \cos \alpha + \frac{Z}{I_{yy}} \operatorname{sen} \alpha\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8.2)$$

De esta relación se puede hallar una ecuación que sitúe al eje neutro $\sigma_x=0$: Esto da

$$Y = - Z(I_{zz}/I_{yy}) \tan \alpha) \qquad (8.3)$$

Un estudio de esta ecuación por medio de la geometría analítica demuestra que para el caso de flexión biaxial, a menos que $I_{zz}=I_{yy}$ el eje neutro no es perpendicular al plano del momento aplicado.

Es conveniente enfatizar que en la flexión asimétrica el eje neutro no coincide con ninguno de los ejes principales, y no es perpendicular al plano de flexión.

Cuando la flexión asimétrica es causada por la aplicación de cargas transversales, estas se descomponen en sus componentes paralelas a los ejes principales, luego se calculan los momentos flexionantes originados respecto a dichos ejes para posteriormente aplicar la fórmula de la flexión; es importante hacer notar que para evitar esfuerzos por torsión, las fuerzas aplicadas deben pasar por el centro de corte o torsión. En el caso de que no sea así, deben calcularse además de los esfuerzos por flexión, los de torsión

Ejemplo

8.4 CARGA AXIAL EXCENTRICA.

Un caso de importante interes práctico ocurre cuando una barra se somete a una carga axial aplicada excentricamente como se ilustra en la fig. (8.8). La carga de tensión actua en un plano perpendicular a la sección transversal extrema a una distancia e desde el eje Z que es un eje principal que pasa por el centroide C. La carga P es estáticamente equivalente a una fuerza P aplicada en el centroide más un par Pe. Por lo tanto el esfuerzo normal en cualquier punto será dado por

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P e Y}{I}$$

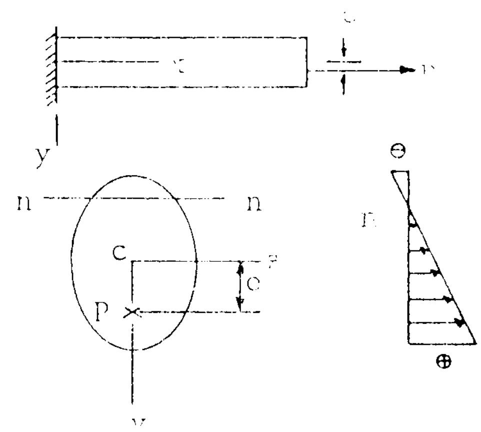


Fig. (8.8) Barra sujeta a una carga axial excéntrica

En la figura se ilustra la distribución de esfuerzos y la ubicación del eje neutro. Para determinar su ubicación basta que se igualen los esfuerzos axiales con cero quedando

$$Y = -\frac{I}{Ae} \qquad \ldots(8.4)$$

Esta ecuación define a una recta paralela al eje Z.

El signo menos muestra que el eje neutro queda encima del eje Z cuando la carga axial actúa por debajo del eje Z. Nótese que e es positiva cuando la carga actúa debajo del eje Z. Si la excentricidad e se incrementa, el eje neutro se acercará al centroide; si e se reduce, el eje neutro se alejará del centroide. Por supuesto que el eje neutro puede quedar fuera de la sección transversal.

Cuando el punto de aplicación de la fuerza excéntrica P no se presenta sobre alguno de los ejes principales de la sección transversal, ocurrirá flexión simultáneamente respecto de ambos ejes centroidales principales.

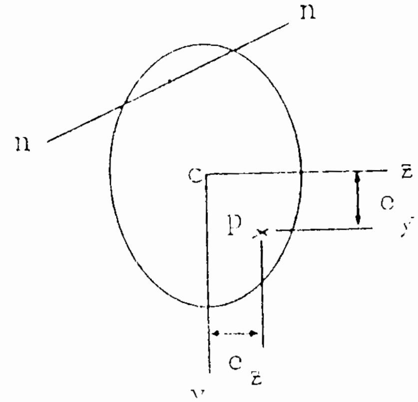


Fig. 8.9 Fuerza axial excéntrica P que produce flexión respecto a ambos ejes centroidales principales

De la figura se observa que los momentos flexionantes respecto de los ejes Y y Z son numéricamente iguales a: Pe_y y Pe_z, respectivamente.

Por tanto, el esfuerzo σ resultante en cualquier punto de la sección transversal será:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z Z}{I_y} + \frac{Pe_y Y}{I_z} \qquad \ldots\ldots (8.5)$$

La ecuación del eje neutro puede determinarse al igualar σ a cero, de este modo

$$\frac{A\,e_y}{I_z} + \frac{A\,e_z}{I_y} + 1 = 0 \qquad \ldots . \; (8.6)$$

El eje neutro puede o no cortar la sección transversal, lo que depende de la forma de esta y de la posición del punto de aplicación de la fuerza axial P.

Existe una relación importante entre el punto de aplicación de la fuerza axial excéntrica y el eje neutro. Si la fuerza P se translada a lo largo de cualquier recta mm, el eje neutro gira alrededor de un punto fijo R Fig. (8.10). Para demostrar este hecho, observemos primero que la fuerza P puede descomponerse en dos componentes paralelas a los ejes principales. La componente en P_1 actua en un plano de flexión principal, en consecuencia, la línea de esfuerzo nulo se localiza a una distancia $S_1 = I_z/A\,e_1$ desde el eje Z. De igual modo, la componente en P_2 produce flexión alrededor del eje Y y la línea de esfuerzo nulo se localiza a una distancia $S_2 = I_y/A\,e_2$ desde el eje Y.

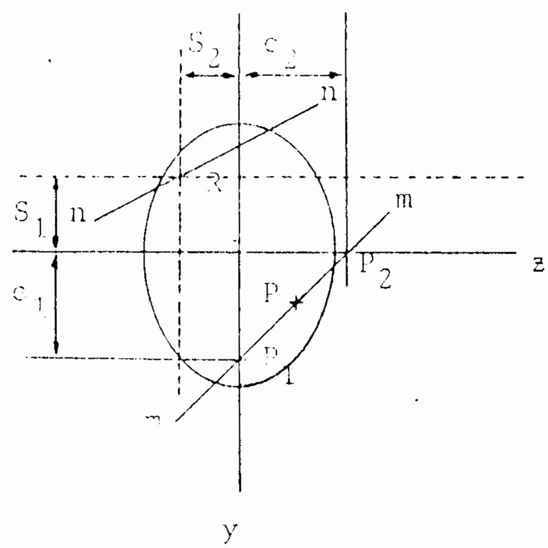


Fig. 8.10 Relación entre la carga P y el eje neutro

El punto R, en la intersección de las dos líneas punteadas en la figura, estará siempre sobre el eje neutro nn cuando actúan simultáneamente ambas componentes de carga. Por lo que, según la carga P se trasla da a lo largo de la línea mm, el punto R permanece fijo en esa posición, y el eje neutro pasa a través de él.

8.5 SUPERPOSICION DE ESFUERZOS CORTANTES

En problemas en que se pueden determinar tanto los esfuerzos cortantes directos como los torcionantes elásticos, el esfuerzo cortante compuesto, también se puede hallar por superposición. Mediante un ejemplo ilustraremos este comportamiento.

Ejemplo:

Determínese el esfuerzo cortante máximo debido a las fuerzas aplicadas en el plano A-B de la barra eje de alta resistencia de 1.25 cm. de diámetro mostrado en la figura

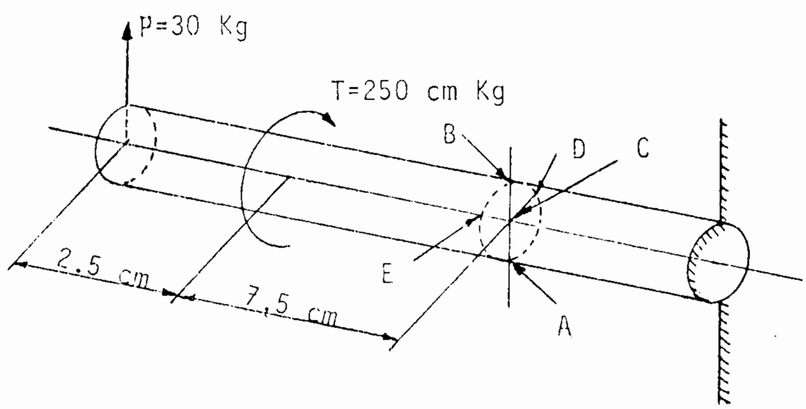


Fig. 8.11

Solución:

Trazamos el diagrama de cuerpo libre de la sección que se analiza, en el cual se indican las fuerzas correspondientes que hacen que el elemento este en equilibrio.

Los esfuerzos cortantes debidos a torsión son máximos en la periferia y se determinan mediante la expresión.

$$\tau_{max} = T\ C\ /\ J \quad ; \quad \tau_{max} = 652\ Kg/cm^2$$

y cuyo sentido coincide con el del momento torsor reactivo, se indican en los puntos A, B, D y E fig. (8.12.c)

Los esfuerzos cortantes causados por la fuerza cortante V se obtienen mediante la ecuación.

$$\tau = V\ Q/I\ b$$

resultando nulos los de los puntos A y B por su ubicación respecto al eje neutro, mientras que en los puntos E y D resultan ser méximos

$$\tau = \frac{4}{3}\ \frac{V}{A} = 32{,}6\ kg/cm^2$$

dichos esfuerzos se muestran orientados en la misma dirección de la fuerza cortante reactiva como se puede ver en la figura (8.12.d).

Para hallar el esfuerzo cortante combinado máximo, se superponen los esfuerzos indicados en las figuras 8.12.C y 8.12.d donde se puede observar que el punto más esforzado es E ya que en ese punto los esfuerzos tienen la misma dirección,

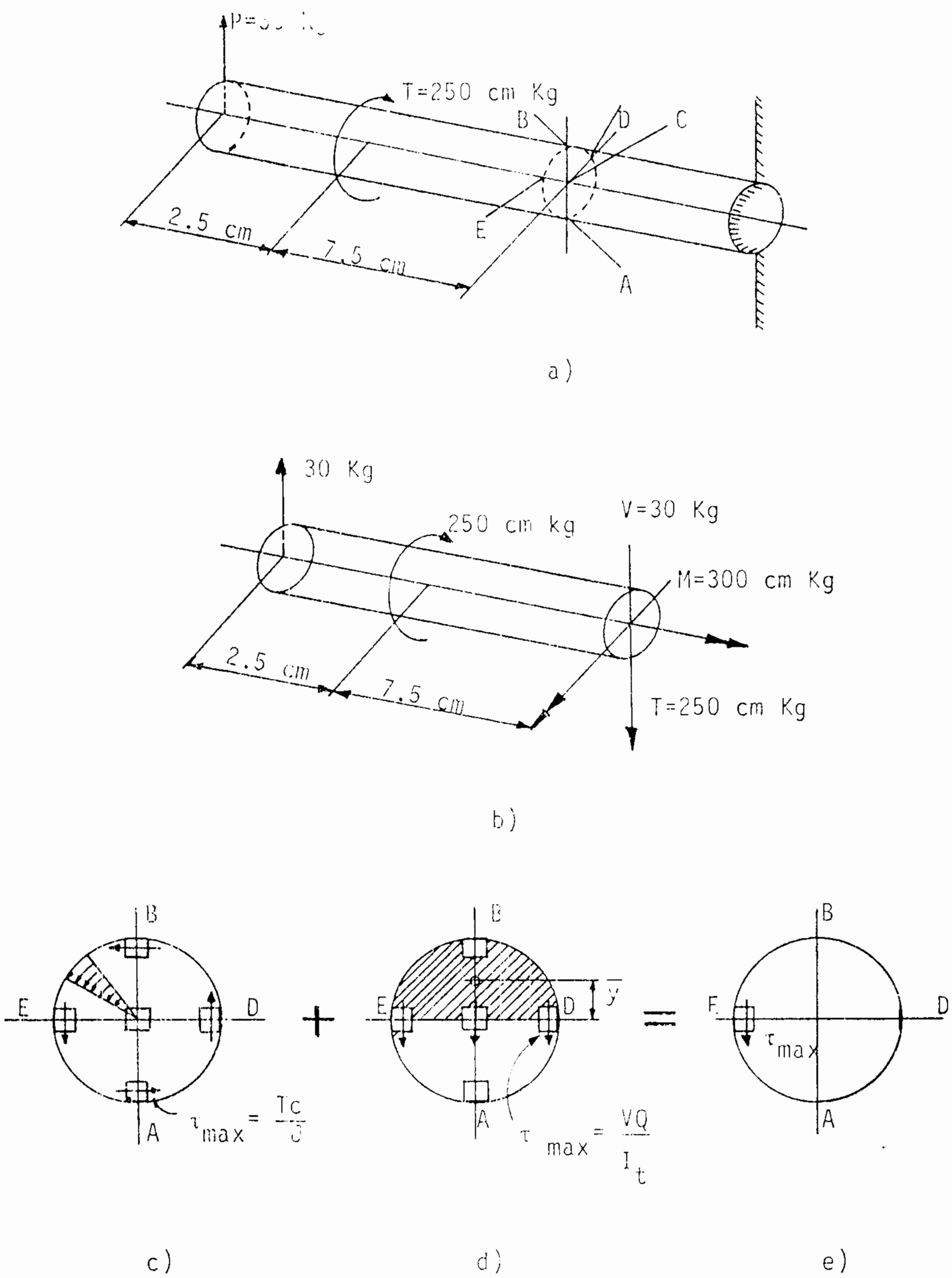

T=250 cm Kg
B
D
C
E
A
2.5 cm
7.5 cm
a)
30 Kg
250 cm kg
V=30 Kg
M=300 cm Kg
2.5 cm
7.5 cm
T=250 cm Kg
b)
B
E
D
A
$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$
B
E
D
$\bar{y}$
A
$\tau_{max} = \frac{VQ}{I_t}$
B
F
D
τ_{max}
A
c)
d)
e)

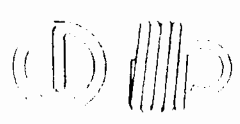
Figura 8.12

8.6 ESFUERZOS EN RESORTES HELICOIDADES.

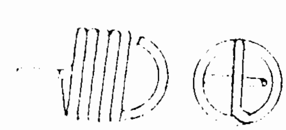
Los resortes son elementos flexibles que ejercen fuerzas pares o absorven energía cuando una carga se aplica en forma gradual o súbita. Algunas veces, la energía es almacenada por largo tiempo como en el caso de un resorte colocado en el ensamble de un tornillo para producir una precarga cuando la tuerca se apriete. En otros casos la energía puede ser almacenada y liberada muy rápidamente como en el caso de resortes colodos en las válvulas de los motores de combustión interna

El campo de aplicación de los resortes es increiblemente grande y variadas las formas que estos pueden tomar para el desarrollo apropiado de su función. Por ejemplo una simple laminilla de acero doblada puede servir como resorte en algún mecanismo de juguetería, placas de acero ligeramente curvadas, sirven como resortes de hoja en la industria automotriz, o el más conocido resorte helicoidal formado con alambre de sección circular puede servir como mecanismo de retorno en los bolígrafos cuando se hace muy delgado, o para soportar grandes cargas en la suspensión de vagones de ferrocarril cuando el alambre es suficientemente grueso.

En esta sección se desarrollarán las ecuaciones que rigen el comportamiento bajo carga estática de los resortes helicoidales formados con alambre de sección circular.



Lazo pequeño al centro



Lazo y gancho en ángulo recto

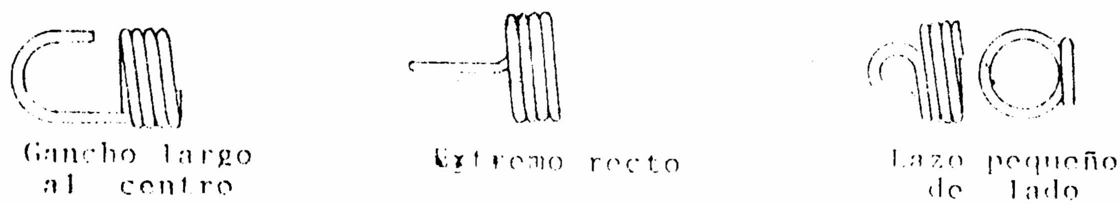


Fig. 8.13

8.6.1 Resortes Heliçoidales.

Este tipo de resortes está formado con alambre de sección circular o rectangular, enrollando en forma de hélice y acabado en sus extremos de manera tal que la carga pueda aplicarse tanto a tensión como a compresión. La figura (8.14) muestra resortes típicos para cargas de tensión y compresión. La diferencia fundamental, aparte de la forma de sus extremos consiste en el caso de los resortes a tensión que las espiras deben ir juntas una con otra, mientras que en el caso de los de compresión es necesario que hélice tenga un ángulo adecuado para que al aplicarse la carga o el resorte sufra la deflexión correspondiente sin que las espiras se junten una con otra.

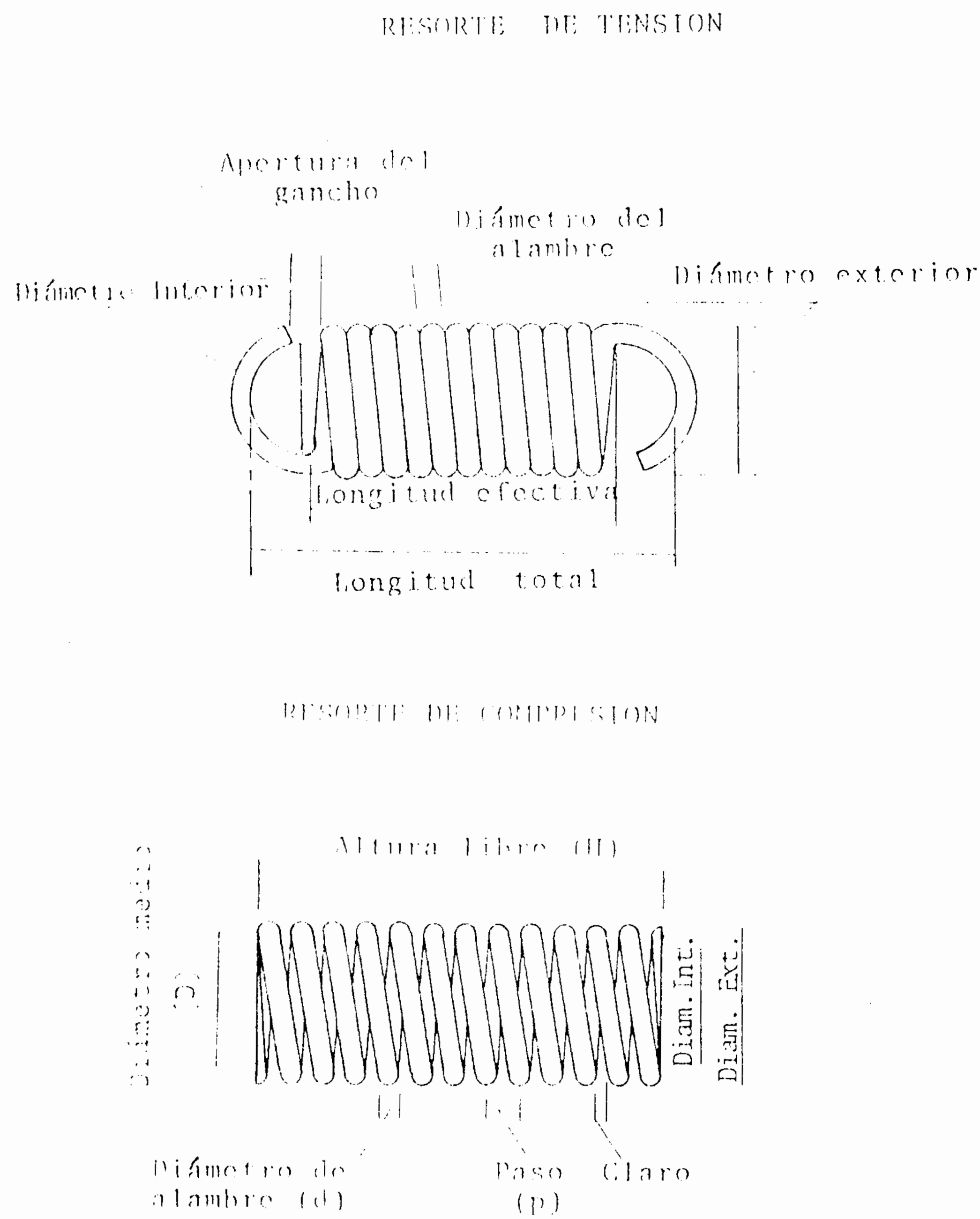
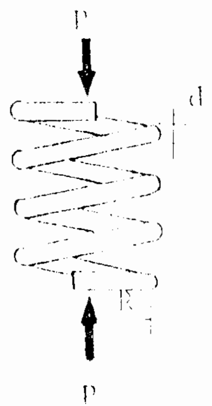


Fig. 8.14 Resortes típicos para cargas de tensión y compresión.

8.6.2 Análisis de esfuerzos en los resortes.

Consideremos el resorte mostrado en la figura (8.15) en cuyos extremos actúa una carga de compresión P, en ella se indican las dimensiones principales del resorte:



R: radio medio de la hélice
d: es el diámetro del alambre
p: es el paso entre espiras
N: es el número de vueltas

(2R+d) : es el diámetro exterior que aunque no es una medida básica en los cálculos, debe tomarse en consideración en el diseño para evitar problemas de ensamble por falta de espacio.

Fig. 8.15

Debido a la geometría y simetría de este resorte, cualquiera de las secciones transversales del alambre estará sometida al mismo estado de esfuerzos. Escojamos pues la sección A-A para su análisis y hagamos un corte quedandonos con la parte superior como se muestra en la figura (8.16). Para mantener el equilibrio estático es necesario que la sección A-A desarrolle un par T = P R una fuerza P.

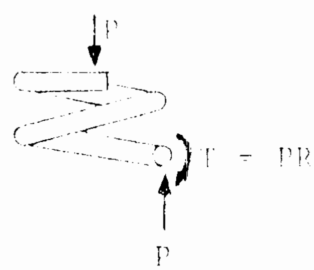


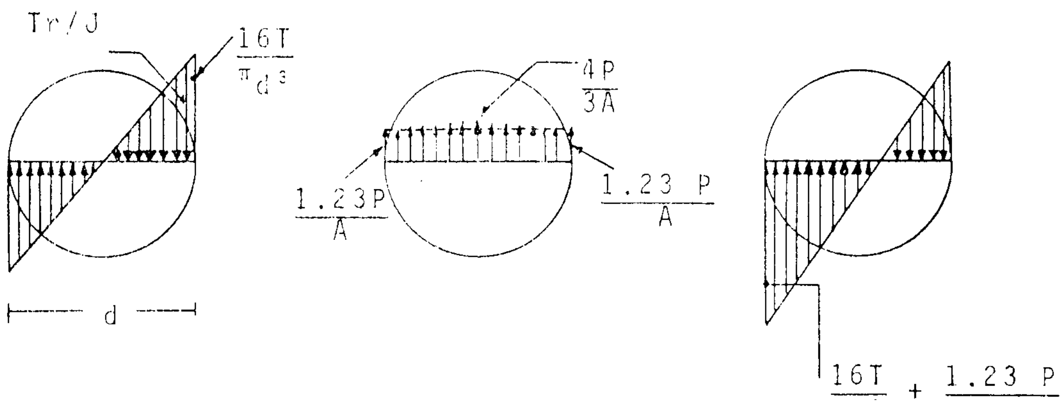
Figura 8.16

Como se pudo analizar en las secciones correspondientes, los esfuerzos producidos por torsión y por corte directo se determinan mediante las ecuaciones

$$\tau = Tc/J \quad y \quad \tau = VQ/I\ b$$

En este caso es necesario superponer los efectos del par torsor y la fuerza cortante. La figura (8.17) muestra los efectos por separado y el total para una línea perpendicular a la fuerza P que pasa por el centroide.

Un análisis minucioso indica que el valor del esfuerzo cortante vale 4V / 3A en el centroide, mientras que en los extremos del eje neutro adquiera un valor de 123 V/A.



a) Torsión b) Carga cirecta c) Total

Fig. 8.17

De la figura (8.17) concluimos que el punto más esforzado es el exterior izquierdo para el cual:

$$\tau = \tau t + \tau v = 16T/\pi d^3 + 1.23P/A$$

$$\tau = 16PR\ /\pi d^3 + (1.23P)/(\pi d^2/4)$$

multiplicando y dividiendo po 4R/d el segundo miembro de la ecuación anterior, es posible factorizar en la forma siguiente:

$$\tau = \frac{16\ PR}{\pi\ d^3}\left(1 + \frac{0.615}{c}\right) \quad . \ . \ . \ . \quad (8.7)$$

En la expresión anterior el término C=2R/d se conoce como índice del resorte y nos indica la relación entre el diámetro medio de la espira y el diámetro del alambre. Es una medida de la "robustez" del resorte y en aplicaciones prácticas fluctua entre 4 y 12 aunque la mayor parte de ellos anda alrededor de 6.

Para un resorte helicoidal en tensión la ecuación (8.7) es aplicable ya que si se analiza la figura 8.16, vemos que la carga de tensión solo invierte el sentido del par y de la fuerza.

Para el caso en el cual se involucran concentraciones de esfuerzos en los resortes hilicoidales de sección circular, la expresión (8.7) se modifica al involucar una constante K la cual está en función del índice del resorte, dicha constante es un factor de concentración de esfuerzos. En el caso de resortes gruesos el índice del resorte es pequeño y el factor de concentración de esfuerzos K llega a ser muy importante. La fórmula quedará entonces:

$$\tau = K\ (16PR/\pi d^3) \qquad k = \frac{4c - 1}{4c-4} \qquad (8.8)$$

8.6.3 Análisis de la deflexión de un resorte helicoidal

Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo y el esfuerzo inducido en el material queda por debajo del límite elástico, el cuerpo no sufre deformación permanente después de retirar la fuerza. Esto significa que el trabajo desarrollado por las fuerzas externas aplicadas, se almacenó en forma de energía potencial y cuando se retiran estas, el trabajo es recuperado.

El trabajo realizado por la fuerza P para deflexionar el resorte una distancia δ es entonces $P\delta/2$. Sólo tomaremos en consideración el trabajo hecho por el par torsional, ya que el producido por la fuerza de corte es muy pequeño comparado con el anterior. El trabajo realizado por el par torsional es igual al producto del mismo por el ángulo girado por el alambre a través de toda la longitud dividido entre dos es decir $T\phi/2$. Por lo tanto.

$$P\delta/2 = T\phi/2 \qquad (8.9)$$

Recordando la fórmula del ángulo de torsión y sustituyendo el valor del momento polar de inercia tenemos:

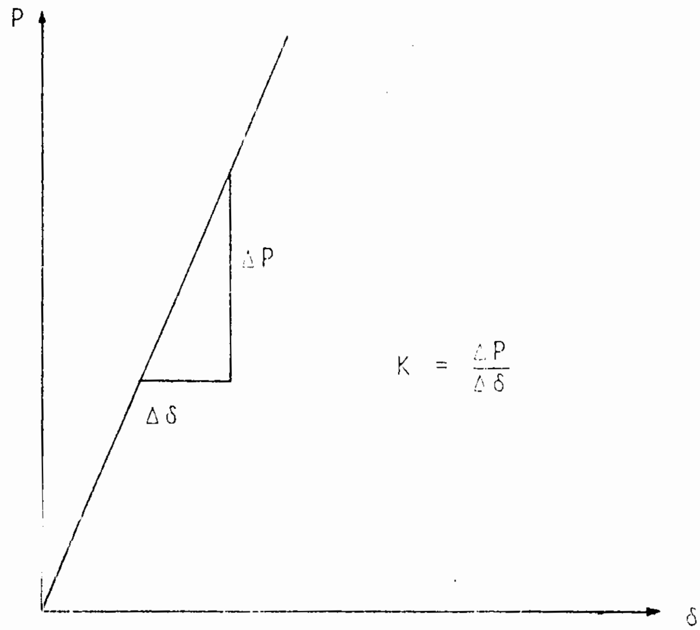
$$\phi = TL/GJ = PR(2\pi RN) / G(\pi d^4/32)$$

Combinando las dos expresiones anteriores podemos obtener la expresión que nos proporcione la deflexión buscada

$$\delta = 64\ PR^3N/Gd^4 \qquad (8.10)$$

Si graficamos la ecuación anterior en ejes P-δ obtendremos una recta como se ilustra a continuación. Siendo la ecuación de la recta $P=K\delta$, donde K es la constante de proporcionalidad y pendiente de la recta. El valor de K se conoce como la constante del Resorte, la cual puede determinarse a partir de la ecuación (8.10) espejando la relación P/δ como sigue:

$$K = P/\delta = d^4G/64\ R^3N \qquad (8.11)$$


P
ΔP
$K = \frac{\Delta P}{\Delta \delta}$
Δδ
δ

Ejemplos.

CAPITULO IX

ANALISIS DE ESFUERZOS, CIRCULO DE MOHR

CAPITULO IX

ANALISIS DE ESFUERZOS

CIRCULO DE MOHR

OBJETIVOS:

Al finalizar esta sección el estudiante deberá ser capaz de:

i) Determinar analíticamente los esfuerzos $\sigma_x{}'$ y $\tau_x{}''$ inducidos en un plano inclinado cualquiera a partir de los esfuerzos que actúan en las caras de un elemento diferencial.

ii) Determinar las deformaciones unitarias en las direcciones principales de un elemento.

iii) Trazar el Círculo de Mohr a partir de los esfuerzos que actúan sobre un elemento.

iv) Determinar a partir del Círculo de Mohr, el estado de esfuerzos que se induce en los planos de un elemento orientado θ grados respecto del original, aislar y dibujar el elemento correctamente orientado, mostrando los que actuan en él.

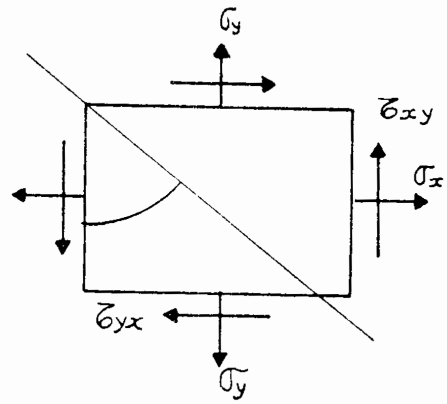
9.1 INTRODUCCION.

La experiencia ha demostrado que los materiales dúctiles (acero bajo carbón, cobre, aluminio, etc.), fallan debido a que el esfuerzo de corte excede la resistencia del material en un plano de su punto más crítico. Por otra parte los materiales frágiles (la fundición gris, el concreto, etc.) fallan por tensión (esfuerzos normales) al excederse en algún plano el límite de su resistencia, por lo tanto es de gran importancia determinar los valores de los esfuerzos tanto normales como cortantes que se inducen en planos oblícuos cualesquiera, orientados θ grados respecto a un plano principal de referencia.

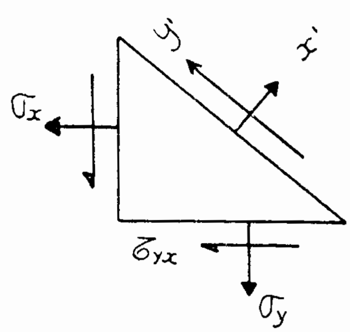
9.2 CONCEPTOS PRELIMINARES.

Los esfuerzos simples se hallan en planos normales o paralelos a la línea de acción de las fuerzas. Sin embargo, los esfuerzos normales así como los de corte, pueden existir en otras direcciones.

Una partícula de un miembro con carga contendrá esfuerzos normales y de corte como se ilustra en la figura 1; se puede observar que los cuatro esfuerzos cortantes deben ser de la misma magnitud sí se va a satisfacer el equilibrio.



Con un corte según el plano AA, el equilibrio revelará que, en general los esfuerzos normales así como los de corte actúan sobre el plano AC; figura 2.



El esfuerzo normal sobre el plano AC se identifica como σ_x' y el de corte como τ'_{xy}. La aplicación de equilibrio da:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\ \text{sen}\ 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\ \text{sen}\ 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Debe usarse una convención de signos. Un esfuerzo de tracción es positiva, mientras que una de compresión es negativa; un esfuerzo de corte es negativo cuando está dirigido como sobre el plano AB de la figura 2, es decir, cuando los esfuerzos de corte sobre los planos verticales forman una pareja con el sentido opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj, es esfuerzo es positivo. Cuando un elemento se orienta según los ejes principales, los esfuerzos normales son máximos, mientras que los cortantes son nulos.

Los planos principales contienen los esfuerzos principales

normales máximos y mínimos, que están dados por la relación.

$$\sigma_{\substack{\text{máx.}\\ \text{min.}}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

El radical de la ecuación anterior da los esfuerzos máximos y mínimos de corte que actúan sobre los planos

$$\text{Tan}\ 2\theta = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\ ;$$ que nos define los

dos valores de 2θ, en los que el esfuerzo cortante τ alcanza un valor máximo.

Por lo tanto los esfuerzos cortantes máximo y mínimo estarán dados por:

$$\tau_{\substack{máx. \\ min.}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Los esfuerzos normales que actúan en las caras del elemento de corte máximo son iguales.

9.3 DESARROLLO ANALITICO.

Un estudio detallado de las ecuaciones anteriormente vistas.

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

revelará que representan una circunferencia en forma parametrica. Tal representación se puede ver con más claridad escribiendolas en la forma siguiente;

$$\sigma'_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau'_x = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones, sumandolas y simplificando, tenemos

$$\left(\sigma'_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{x'y'} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}$$

En todo problema dado; σ_x, σ_y, τ_{xy} son las tres constantes conocidas y σ'_x, $\tau_{x'y'}$ son las variables. En consecuencia la ecuación inmediata anterior se puede escribir en forma más compacta como:

$$(\sigma'_x - a)^2 + \tau^2_{x'y'} = b^2$$

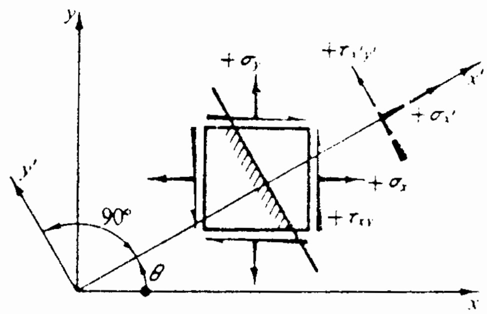
donde a y b son constantes y están dadas por:

$$a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad y \qquad b^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy}^2$$

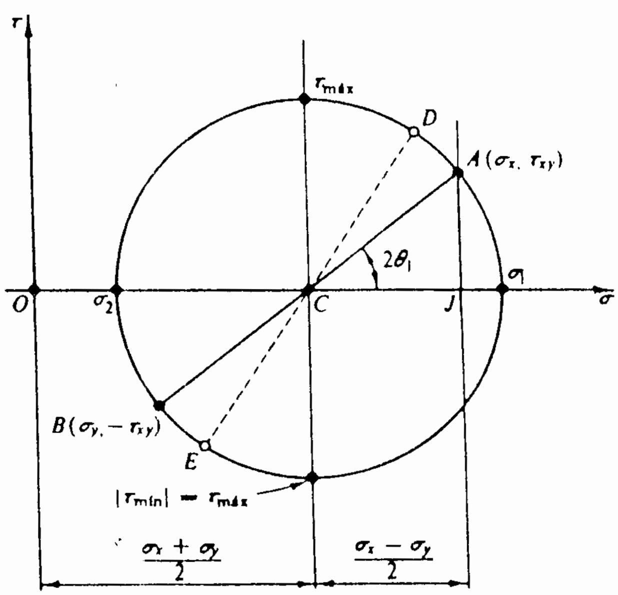
Esta ecuación es la expresión familiar de geometría analítica $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ para una circunferencia de radio b son su centro en (a,0). Por tanto si se traza la circunferencia que corresponde a esta ecuación, las coordenadas de un punto de tal circunferencia corresponden a σ_x, y $\sigma_{x'y'}$, para una orientación de un plano inclinado.

La ordenada de un punto de la circunferencia es el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$, y su obscisa el esfuerzo normal σ'_x. La circunferencia así construida se llama Círculo de Mohr para esfuerzos, o simplemente círculo de esfuerzos.

Un círculo de Mohr basado en la información anterior y en el estado de esfuerzos de la siguiente figura 3



Lo podemos apreciar en el esquema 4



Círculo de Mohr para esfuerzos.

9.4 CIRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS PLANOS.

Este es un método gráfico para expresar las relaciones obtenidas y se denominará "diagrama del Círculo de Mohr" el cual es un medio muy eficaz para visualizar el estado de esfuerzo en un punto y tener en cuenta la dirección de los diversos componentes asociados al esfuerzo plano.

En la figura 5 se establece un sistema de coordenadas, en el que los esfuerzos normales se presentan como bscisas y los cortantes como ordenadas.

En el eje de bscisas, los esfuerzos normales de tensión (positivos) se marcan a la derecha del origen 0, y los esfuerzos normales de compresión (negativos) a la izquierda. En el eje de ordenadas los esfuerzos cortantes en el sentido del reloj se trazan hacia arriba, y los esfuerzos cortantes en sentido contrario al del reloj se trazan hacia abajo.

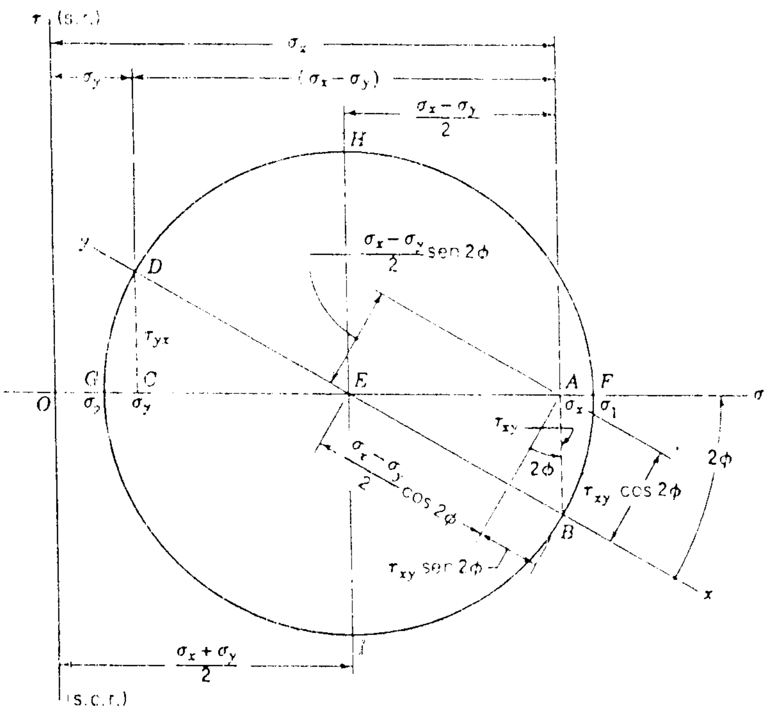


Diagrama del círculo de Mohr.

Se trazará el círculo de Mohr marcando σ_x como 0 ,

τ_{xy} como B, τ_y como OC y τ_{yx} como CD. La recta DEB es el diámetro del círculo con centro en E sobre el eje σ. El punto B representa las coordenadas de esfuerzo σ_x τ_{yx} en las caras Y. Por lo tanto EB corresponde al eje x y ED al eje Y.

El ángulo 2θ que se en sentido contrario al del reloj desde EB hasta Ed es igual a 180° que corresponde a $\theta=9\overline{0}°$; midiendose de X hasta Y en sentido antihorario.

El esfuerzo normal principal máximo σ_1 se tiene en F y el normal principal mínimo σ_2 en G. Los dos esfuerzos cortantes de valor extremo, uno en sentido del reloj y otro en sentido contrario, se presentan en H e I respectivamente.

Finalmente pueden deducirse las siguientes conclusiones importantes relativas al estado de esfuerzo en un punto:

1) El mayor esfuerzo normal posible es σ_1, el menor es σ_2. No existen esfuerzos cortantes junto con uno u otro de estos esfuerzos principales.

2) El mayor esfuerzo cortante τ máx, numéricamente igual al radio del círculo, es $(\sigma_1-\sigma_2)/2$. Un esfuerzo normal igual a $(\sigma_1+\sigma_2)/2$ actúa en cada uno de los planos de esfuerzo cortante máximo.

3) Si $\sigma_1 = \sigma_2$, el círculo de Mohr degenera en un punto y ningún esfuerzo cortante se desarrolla en absoluto en el plano XY.

4) Si $\sigma_x + \sigma_y = 0$, el centro del círculo de Mohr coincide con el origen de los ejes σ y τ, existe así el estado de esfuerzo cortante puro.

5) La suma de los esfuerzos normales en dos planos mútuamente perpendiculares es invariante, esto es:

$$\sigma_x+\sigma_y = \sigma_1+\sigma_2 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \text{constante}$$

9.5 CIRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIONES.

Las dos ecuaciones básicas para la transformación de deformaciones, se asemejan matemáticamente a las ecuaciones para la transformación de esfuerzos.

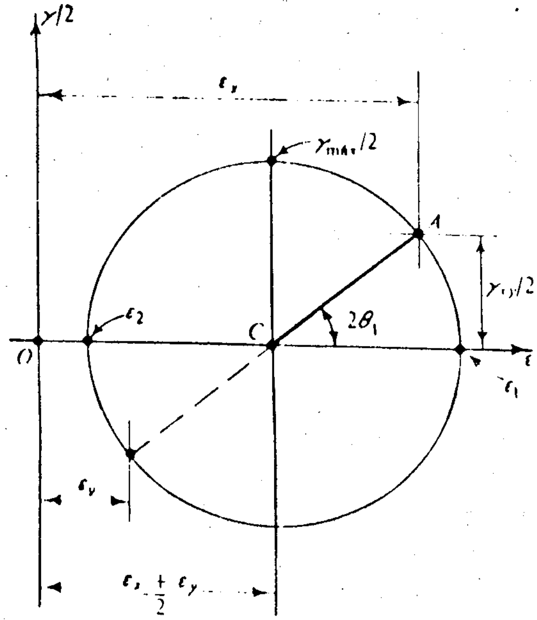
$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma}{2}{}_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\frac{\gamma}{2}{}_{x'y'} = - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma}{2}{}_{xy} \cos 2\theta$$

Puesto que las ecuaciones de transformación de deformaciones que contienen a las deformaciones por corte divididas por dos, son matemáticamente iguales a las ecuaciones de transformación de esfuerzos; se puede construir fácilmente su círculo de Mohr. En esta construcción todo punto en la circunferencia da dos valores; una para la deformación lineal y el otro para la deformación por corte dividida por dos.

Las deformaciones correspondientes o alargamientos son positivas y para los acortamientos son negativos. Las deformaciones por corte positivos junto con las negativas pueden trazarse en un círculo, los ejes positivos se toman de la manera usual, hacia arriba y hacia la derecha. En el eje vertical se mide $\gamma/2$

Como una ilustración del círculo de Mohr para deformaciones considérese la siguiente figura.



En la que ε_x, ε_y y γ_{xy} son datos; entonces sobre los ejes ε y $\gamma/2$ dela figura, el centro del círculo C está en $[(\varepsilon_x+\varepsilon_y)/2,0]$ y por los datos, el punto A en el círculo estará en - - $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$. Observando la figura anterior llegaremos a conclusiones análogas a las obtenidas para el círculo de esfuerzos.

1) La deformación lineal máxima es ε_1 y la mínima ε_2. Estas son las deformaciones principales y no tienen deformaciones por corte asociados. Los sentidos de las deformaciones lineales coinciden con los esfuerzos principales. Como puede deducirse del círculo, la expresión analítica para las deformaciones principales es:

$$\varepsilon'_{x\,\substack{\text{máx.}\\ \text{mín.}}} = \varepsilon_1 \text{ ó } 2 = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2_{xy}}{2}}$$

donde el signo positivo antes del radical corresponde a ε_1, la deformación principal máxima en sentido algebraico. El negativo se emplea para ε_2, la deformación principal mínima. Los planos en que actúan las deformaciones principales pueden definirse analíticamente a partir de la siguiente ecuación.

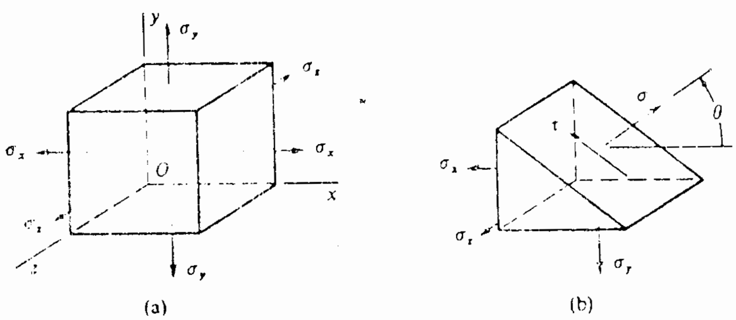
$$\text{Tan } 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

2) La mayor deformación por corte γ máx. es igual a dos veces el radio del círculo. Deformaciones lineales de $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$, en dos direcciones mútuamente perpendiculares, están asociadas a la deformación máxima angular o por corte.

3) La suma de deformaciones lineales en dos direcciones mútuamente perpendiculares es invariante, esta es, $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon_x+\varepsilon_y=$ constante. Otras propiedades de las deformaciones en un punto se pueden establecer estudiando el círculo más a fondo.

9.6 ESFUERZO TRIAXIAL.

Un elemento de material sometido a esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z que actúan en direcciones perpendiculares se dice que está en un estado de esfuerzo triaxial. Obsérvese que no actúan esfuerzos cortantes sobre las caras x, y, z del elemento, por lo que esta condición de esfuerzo no es el caso más general de esfuerzo tridimensional. La ausencia de esfuerzos cortantes muestra que los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z son los esfuerzos principales para el elemento



Elemento en esfuerzo triaxial

Si a través del elemento se pasa un plano inclinado paralelo al eje z como se muestra en la figura de la derecha, los únicos esfuerzos sobre la cara inclinada son el esfuerzo normal σ y el esfuerzo cortante τ que actúan en el plano xy, por lo que estos esfuerzos son los mismos que los esfuerzos σ_x y τ_{x1y1}. Es posible utilizar las ecuaciones de esfuerzo plano, así como el círculo de Mohr, cuando se determinen los esfuerzos σ y τ.

Se sabe que los esfuerzos cortantes máximos ocurren sobre planos orientados a 45° de los planos principales. Para obtener estos planos para un elemento de esfuerzo triaxial, se gira el elemento a través de ángulos de 45° respecto a los ejes x, y, z. Por ejemplo, consideremos una rotación de 45° alrededor del eje z, entonces los esfuerzos cortantes máximos que actúan sobre este elemento son.

$$\tau \text{ máx}_{z} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

En forma similar, si se gira el elemento respecto al eje x un ángulo de 45°, se obtienen los siguientes esfuerzos cortantes máximos.

$$\tau \text{ máx.} = \pm \frac{\sigma \quad \sigma}{2}$$

Finalmente, al girar el elemento alrededor del eje y en un ángulo de 45° se obtienen los esfuerzos:

$$\tau \text{ más}_{y} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$$

El "esfuerzo cortante máximo absoluto" es el algebraicamente máximo de los esfuerzos determinados a partir de lasecuaciones inmediatas anteriores. Este esfuerzo es igual a la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo algebraicos de los tres esfuerzos principales.

Los esfuerzos que actúan sobre elementos girados alrededor de los ejes x, y, z pueden apreciarse con la ayuda de los círculos de Mohr.

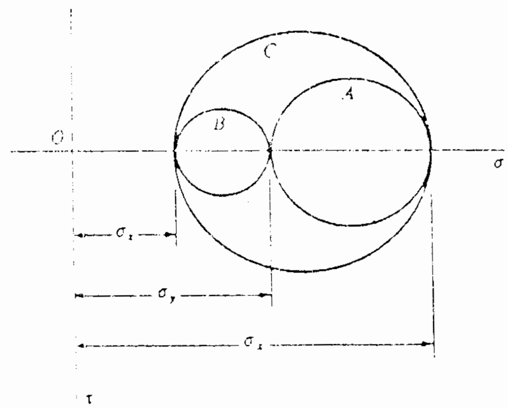


Fig. 5-36 Círculos de Mohr para un elemento en esfuerzo triaxial

Para los elementos obtenidos mediante la rotación respecto al eje z, el círculo correspondiente está marcado con una A en la figura inmediata anterior; este círculo está dibujado para el caso en que $_{x} > \sigma_y$ y ambos son esfuerzos de tensión. En forma similar podemos construir los círculos B y C para elementos obtenidos mediante rotaciones respecto a los X y Y respectivamente. Los radios de los círculos representan los esfuerzos cortantes máximos dados por las ecuaciones anteriormente vistas, y el esfuerzo cortante máximo absoluto es igual al radio del círculo mayor. Los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de esfuerzo cortante máximo tienen magnitudes determinadas por las abscisas de los centros de los círculos.

CAPITULO X

DEFLEXIONES EN VIGAS

X.1. RELACIONES ENTRE CURVATURA Y DEFORMACIÓN Y ENTRE CURVATURA Y MOMENTO FLEXIONANTE.

X.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA LA DEFORMACIÓN DE VIGAS ELÁSTICAS.

X.3. ECUACIONES DIFERENCIALES ALTERNATIVAS DE VIGAS ELÁSTICAS.

X.4. OBTENCIÓN DE LA DEFLEXIÓN MEDIANTE MÉTODOS DE INTEGRACIÓN DIRECTA.

X.5. MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS.

CAPITULO X

DEFLEXIONES EN VIGAS

OBJETIVOS:

Al finalizar el estudio de esta sección el estudiante deberá ser capaz de:

i) Establecer y resolver la ecuación diferencial básica de la curva elástica o de deflexión de una viga cuanco se encuentra bajo la acción de cargas versales.

ii) Determinar las pendientes y las deflexiones en cualquier punto de la curva elástica.

iii) Calcular la deflexión máxima de una viga y el punto donde ocurra.

iv) Seleccionar la sección apropiada de la viga cuando se tiene restricciones para la máxima deflexión.

INTRODUCCION:

Con frecuencia el diseño o selección de una viga, está gobernada por la deflexión que sufre y no por su resistencia. Por la acción de las fuerzas aplicadas el eje de una viga se flexiona desde su posición original. Esta deformación producida depende de las magnitudes de las cargas, del material y forma de las secciones transversales de los ejes. Es indeseable la deflexión por ejemplo en techos en donde si es excesiva podría ocasionar grietas, los elementos de las máquinas se diseñan no sólo con base a su resistencia sino que deben tomarse en cuenta las deformaciones que sufren, puesto que se pueden producir distorsiones por la acción delas fuerzas que propicien inexactitud de dichas máquinas.

La información de las características de deformación de miembros, es esencial en el estudio de vibraciones tanto de máquinas como en estructuras estacionarias y en vehículos aéreos.

En este tema sólo estudiaremos las deflexiones causadas por las fuerzas que actúan perpendiculares al eje de la viga.

Las deflexiones estudiadas son pequeñas con relación a la longitud del claro. En este tema nos limitaremos a estudiar dos métodos: el de integración y el de área de momento.

10.1 RELACIONES ENTRE CURVATURA Y DEFORMACION Y ENTRE CURVATURA Y MOMENTO FLEXIONANTE.

La hipótesis cinemática fundamental de que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, proporciona la base de la teoría. En este análisis se desprecia la deformación por corte de una viga.

Considerese un elemento inicialmente recto, ahora sometido a la acción de momentos flectores como se ilustra en la figura 10.1a. En donde se ilustra el eje flexionado de la viga es decir, la "curva elástica" con una curvatura de radio ρ. El centro de curvatura 0 se determina prolongando hasta su intersección dos secciones consecutivas. De momento consideremos que la flexión ocurre alrededor de uno de los ejes principales de la sección transversal.

En la vista amplificada del elemento A'B'C'D' de la figura 10.1b se observa que en la viga flexionada, el ángulo que forman dos secciones consecutivas $\Delta\theta$; si las distancias Y desde las superficies neutras hasta las fibras deformadas se miden de manera usual como positiva hacia arriba; además la deformación total Δu de una fibra se puede expresar como:

$$\Delta u = - Y\Delta\theta \qquad (10.1)$$

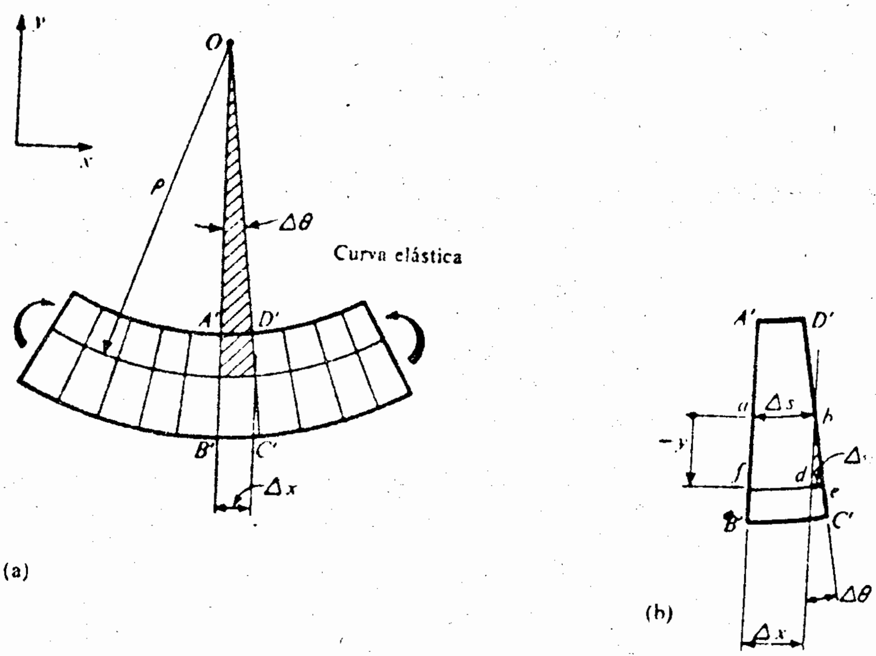


Fig. 10.1 Deformación de un segmento de viga en flexión.

La longitud del arco s corresponde a la longitud inicial de todas las fibras ya que se ubica en el plano neutro. Dividiendo la ecuación 10.1 entre s se pueden formar las relaciones siguientes:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \quad \text{o} \quad \frac{du}{ds} = \frac{-y\, d\theta}{ds} \qquad (10.2)$$

Recordemos que $du/ds = \varepsilon$ es una deformación lineal, mientras que el término $d\theta / ds$ tiene un significado geométrico claro. de la figura 10.1a se observa que:

$$\Delta s = \rho \Delta \theta \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = K$$

es la definición de la curvatura K.

Relacionando las expresiones anteriores, se puede obtener una expresión fundamental entre la curvatura de la clástica y la deformación lineal como sigue:

$$\frac{1}{\rho} = K = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{10.3}$$

La expresión anterior es aplicable tanto a problemas elásticos como inelásticos. Para el rango elástico se cumple.

$$\varepsilon = \frac{\sigma x}{E} \qquad \sigma x = -\frac{M\ Y}{I}$$

por lo quepcdemos obtener la expresión que relaciona al momento flector, al momento de inercia y la curvatura quedando:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\ I} \tag{10.4}$$

10.2 ECUACION DIFERENCIAL PARA LA DEFORMACION DE VIGAS ELASTICAS.

Del cálculo elemental puede demostrarse que la curvatura de una curva plana en un punto puede expresarse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{[1+(\frac{dv}{dx})^2]^{3/2}} = \frac{v''}{[1+(v')^2]^{3/2}} \tag{10.5}$$

donde x y v son las coordenadas de un punto de ésta. En el problema que se analiza, la distancia x localiza un punto en la elástica de un viga flexionada y v es la deflexión o sea la desviación del punto con respecto a su posición inicial.

Si la ecuación 10.5 se sustituyera en la ecuación 5.3 ó 5.4, resultaría la ecuación diferencial exacta de la elástica, cuya solución en general es muy compleja. Sin embargo, puesto que las deflexiones aceptadas son muy pequeñas en la gran mayoría de las estructuras de ingeniería, también lo es la pendiente dv/dx de la elástica. En consecuencia el cuadrado de la curva v' es una cantidad despreciable comparada con la unidad, por lo que la ecuación 10.5 se simplifica quedando:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 \bar{v}}{d\chi^2} \qquad (10.6)$$

por tanto la ecuación diferencial correspondiente a la deflexión de una viga elástica se determina de la ecuación 10.4 y es:

$$\frac{d^2 v}{d\chi^2} = \frac{M}{EI} \qquad (10.7)$$

Donde, $M = M_z$ e $I = I_z$ además el sistema de referencia empleado es el xy.

10.3 ECUACIONES DIFERENCIALES ALTERNATIVAS DE VIGAS ELASTICAS.

Se puede combinar la ecuación 10.7 con las ecuaciones que relacionan la fuerza cortante, el momento flector o la distribución de carga, para obtener otras relaciones útiles en el análisis de la deflexión en vigas.

v = deflexión de la elástica.

$\theta = \frac{dv}{dx} = v'$ = pendiente de la elástica

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\,v'' \qquad (10.8)$$

$$V = -\frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx}(EI\,v'') = -(EIv'')'$$

$$P = -\frac{dv}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = (EIv'')''$$

Para vigas con rigidez a la flexión EI constante, las ecuaciones anteriores se simplifican en tres ecuaciones alternativas para determinar la elástica de una viga cargada.

$$EI\frac{d^2v}{d\chi^2} = M(x)$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -V(x) \qquad (10.9)$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = P(x)$$

La elección de una ecuación para un caso dado depende de la facilidad con que se puede formular una expresión para la carga, la fuerza cortante o el momento flector.

10.3.1 CONDICIONES DE FRONTERA.

Para la solución de problemas de deflexiones de vigas, además de las ecuaciones diferenciales, se deben establecer condiciones de frontera. Las siguientes son algunos tipos de condiciones de frontera homogénea.

a) Empotramiento: En este caso se deben anular el desplazamiento o deflexión v y la pendiente dv/dx. Por tanto, en el extremo que se considera, donde x=a.

$$v(a)=0, \quad v'(a) = 0$$

b) Articulación: En el extremo que se considera no existe la deflexión v ni el momento M, por lo tanto:

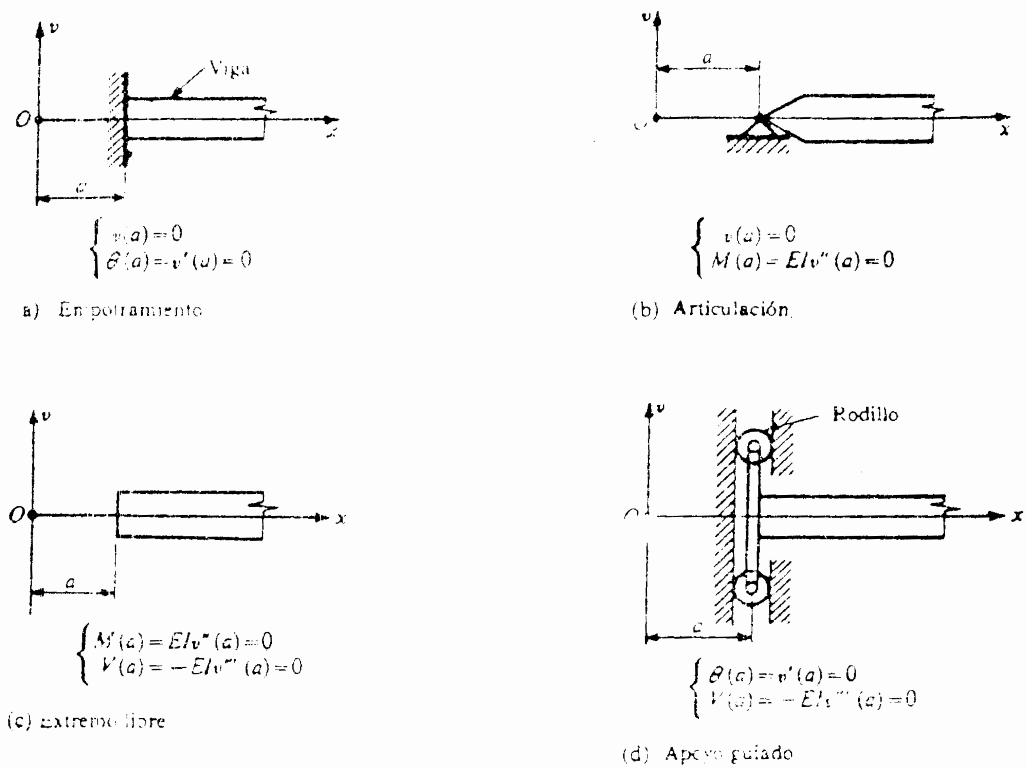
$$v(a)=0, \; M(a)=EIv''(a)=0$$

c) Extremo Libre: Tal extremo está libre de momento flexionante y la fuerza cortante, por lo tanto:

$$M(a)=EIv''(a)=0 \quad V(a)=-(EIv'')'=0$$

d) Apoyo Guiado: En este caso se permite el movimiento vertical libre pero se impide la rotación del extremo. El apoyo no es capaz de resistir una fuerza cortante, por lo tanto:

$$v'(a)=0 \quad V(a)=-(EIv'')'=0$$



$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ \theta(a) = v'(a) = 0 \end{cases}$$

a) Empotramiento

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ M(a) = EIv''(a) = 0 \end{cases}$$

(b) Articulación

$$\begin{cases} M(a) = EIv''(a) = 0 \\ V(a) = -EIv'''(a) = 0 \end{cases}$$

(c) Extremo libre

$$\begin{cases} \theta(a) = v'(a) = 0 \\ V(a) = -EIv'''(a) = 0 \end{cases}$$

(d) Apoyo guiado

Figura 10.2

Nótense los dos tipos de condiciones de frontera. Algunas pertenecen a las cantidades relacionadas con fuerzas y se dice que son condiciones de frontera estáticas. Otras describen el comportamiento geométrico o de deformación de un extremo y se llaman condiciones de frontera cinemáticas.

En las condiciones de frontera no homogéneas, donde se prescriben una fuerza cortante, un momento, una rotación o un desplazamiento en la frontera, también se presentan en las diferentes aplicaciones. En tales casos, los ceros de las ecuaciones anteriores se sustituyen por la cantidad especificada. En cualquier junta o unión de dos zonas o regiones de una viga deben ser iguales a la deflexión y la tangente a la elástica, sin que importe la dirección en que se considera el punto común.

10.4 OBTENCION DE LA DEFLEXION MEDIANTE METODOS DE INTEGRACION DIRECTA.

La ecuación de la deflexión en términos del momento flector puede integrarse para obtener la deflexión v como una función de x. Y como es de segundo orden, se requieren dos integraciones. El primer paso es obtener la ecuación de momento flector mediante los métodos empleados en el capítulo dos. Para la o las expresiones resultantes, se sustituye la expresión de M en la ecuación diferencial. Entonces la ecuación puede integrarse para obtener la pendiente v' introduciendose una constante de integración mediante este proceso. Una segunda integración proporciona la deflexión v introduciendose otra constante de integración. En consecuencia hay dos constantes de integración para cada porción de la viga, las cuales pueden evaluarse mediante condiciones de frontera para v y v' en los apoyos de la viga y mediante condiciones de continuidad sobre v y v' en los puntos donde coinciden las regiones de integración. Como el número de condiciones siempre coincide con el número de constantes siempre es posible resolverlas. Entonces, las constantes evaluadas pueden sustituirse en las expresiones para v, obteniendose las expresiones finales de la curva de deflexión. Este método es conocido como método de integraciones sucesivas.

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga simplemente apoyada que soporta una carga uniformemente distribuida de intensidad q (fig. 10). Calcule además la deflexión máxima δ a la mitad del claro y los ángulos de rotación θ_o y θ_b en los apoyos.

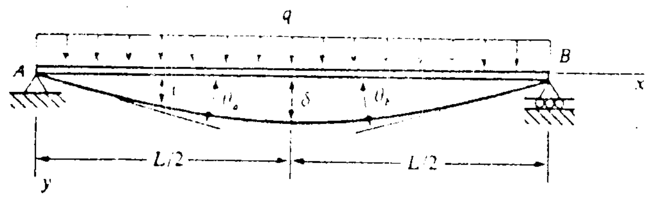


Fig. 10.3 Viga simple con carga uniforme

Tomando como origen coordenado el apoyo izquierdo, la ecuación para el momento flector resulta ser:

$$m = \frac{q\ L\ x}{2} - \frac{q\ x^2}{2}$$

Así, la ecuación diferencial de segundo orden resulta.

$$E\ I\ v'' = -\frac{q\ L\ x}{2} + \frac{q\ \ x^2}{2}$$

Multiplicando por dx e integrando se obtiene:

$$EIv' = -\frac{q\ Lx^2}{4} + \frac{q\ x^3}{6} + C_1 \qquad \text{(a)}$$

Por simetría, la pendiente v' de la curva de deflexión a la mitad del claro es cero. Por lo que tenemos la condición.

$$v' = 0 \text{ cuando } x = \frac{L}{2}$$

o sea $v'(L/2) = 0$. Aplicando esta condición a la ecuación (a) se obtiene

$$C_1 = \frac{q\,L^3}{24}$$

que al ser sustituida en la ecuación (a) resulta:

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{q\,x^3}{6} + \frac{q\,L^3}{24}$$

Multiplicando nuevamente por dx e integrando obtenemos

$$EIv = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{24} + C_2 \qquad \text{(b)}$$

C_2 puede evaluarse a partir de la condición que $v=0$ cuando $x = 0$, es decir $v(0) = 0$. Aplicando esta condición a la ecuación (b) resulta $C_2=0$, por lo que la curva de la deflexión es:

$$v = \frac{qx}{24EI}\left(L^3 - 2Lx^2 + x^3\right)$$

Esta ecuación proporciona la deflexión en cualquier punto a lo largo de la viga, siendo la deflexión máxima.

$$\delta = v_{max} = \frac{5}{384}\frac{q\,L^4}{EI}$$

Los ángulos de rotación máximos ocurren en los apoyos de la viga, siendo θ_a igual a la pendiente v'. Sustituyendo $x=0$ en la ecuación 10.   , se obtiene.

$$\theta_a = v'(0) = \frac{q\,L^3}{384\,EI}$$

De manera análoga se obtiene θ_b en el otro extremo.

$$\theta_b = -v'(L) = \frac{qL^3}{24EI}$$

Ejemplo:

10.5) METODO DEL AREA DE MOMENTOS

En este método se utilizan las propiedades del área del diagrama de momento flexionante. El método es adecuado cuando se requiere únicamente la deflexión o el ángulo de rotación en un punto de la viga, porque es posible determinar tales cantidades sin encontrar primero la ecuación completa de la curva de la deflexión.

Este método está basado en una interpretación geométrica de integrales definidas.

Recordando la ecuación.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \text{curvatura}$$

Reescribiendo esta ecuación en la forma:

$$d\theta = \frac{1}{\rho}\, dl = \frac{M}{EI}\, dl \qquad (10.10)$$

Donde $d\theta$ es el cambio infinitesimal en la pendiente de la curva de deflexión ocurrida en una longitud infinitesimal dl. Nótese que $(M/EI)\, dl$ puede ser interpretada como un área infinitesimal como se representa en la figura 10.b. Cada curvatura del diagrama podrá ser obtenida a partir del diagrama de momento flector, dividiendo el valor de este entre EI. Si la viga es homogénea y tiene una sección transversal constante, los diagramas de momento y la curvatura podrán tener la misma forma general como se puede ver en las figuras 10. a y 10. b.

El cambio finito entre dos distintos puntos de la viga puede ser obtenido integrando la ecuación (10.10) entre los correspondientes límites.

$$\Delta\theta_{AB} = \int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI}\, dl \qquad (10.11)$$

De lo anterior podemos ver que la integral definida de la expresión anterior puede ser interpretada como el área bajo la curva de la curvatura entre los puntos A y B.

Areas positivas o aquellas arriba del eje x indican incremento en la pendiente mientras que áreas negativas o abajo del eje X indicaran decremento de la pendiente. Por lo que podemos afirmar que la integral representa el cambio en la pendiente y no la pendiente misma.

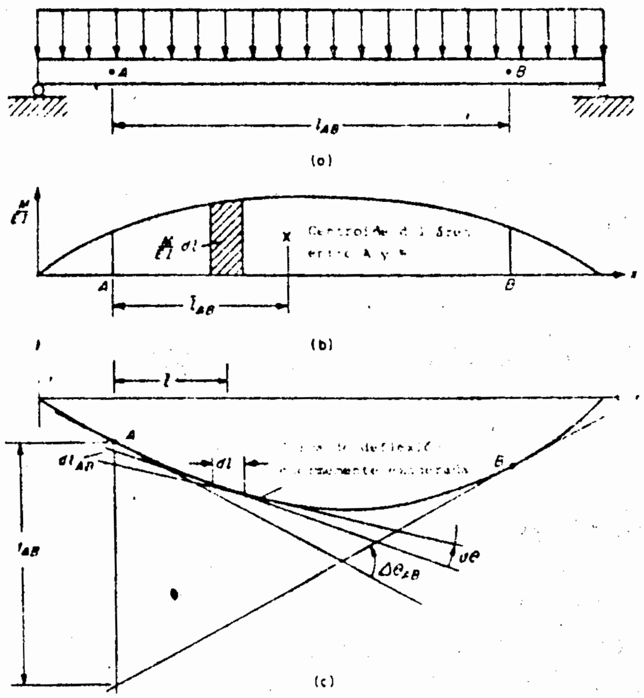


Fig. 10.4

La deflexión de la viga puede ser obtenida indirectamente por medio de la Desviación Tangencial (t_{AB}) definida como la distancia, medida perpendicularmente al eje neutro, entre el punto A en la curva de deflexión y una línea tangente a la curva de la deflexión que pasé por el punto B como se puede ver en la fig. (10.4 c). En la figura anterior en donde tanto la deflexión como la pendiente son grandemente exageradas, podemos ver que:

$$dt_{AB} = x\,d\theta$$

Entonces

$$t_{AB} = \int_{B}^{B} x\, d\theta = \int_{A}^{B} x\,\frac{M}{EI}\, dx \qquad (10.12)$$

$$t_{AB} = \bar{x}_{AB}\; a$$

donde $\bar{x}_{AB}$ es la distancia horizontal desde el punto A al centroide del área a entre los puntos A y B en el diagrama de curvatura. Por tanto, el área del momento en el diagra de la curvatura es siempre tomado alrededor del punto para el cual la desviación tangencial está siendo determinada.

La ecuación (10.12) representa el primer momento de área y de esto se toma el nombre del método.

Ya que $\bar{x}_{AB}$ es necesariamente un número positivo, t_{AB} podrá ser positivo cuando la correspondiente área (a) de la curvatura sea positiva y negativa cuando el área es negativa. Un valor positivo para t_{AB} indica que el punto A cae encima de la línea tangente trazada desde el punto B, y el punto B, y el punto A cae abajo esta la tangente si t_{AB} es negativo.

Es importante para su realización que t_{AB} no es la deflexión de los puntos A o B. Sin embargo mediante el siguiente ejemplo se ilustrará que la desviación tangencial podrá ser empleada para obtener la deflexión.

Ejemplo.

BIBLIOGRAFIA

1. Resistencia de materiales
   Singer F. León
   Harper and How Latinoamericana

2. Cernica John N.
   Resistencia de los materiales
   Compañía editorial continental S. A.

3. Arges K Pete
   Mecánica de materiales
   Compañía editorial continental

4. Parker Harry
   Texto simplificado de mecánica y resistencia de materiales
   Editorial Limusa-Wiley S. A.

5. Kerguignas Marcel
   Resistencia de materiales
   Editorial Reverté S. A.

6. Byars Edward Ford
   Mecánica de cuerpos deformables
   Representaciones y servicios de Ingeniería S. A.

7. Lafita Felipe Babio
   Los teoremas fundamentales de la resistencia de materiales
   y sus aplicaciones.

8. Beer and Johnston, Jr.
   Mecánica de Materiales
   Editorial Mc Graw Hill

. . .

9. GERE - TIMOSHENKO
MECÁNICA DE MATERIALES
GRUPO EDITORIAL IBEROAMÉRICA

10. EGOR P. POPOV
INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE SÓLIDOS
EDITORIAL LIMUSA

11. DIAZ, ZAPATA
RESISTENCIA DE MATERIALES
EDITORIAL LIMUSA

Impreso por la
Coordinación de Servicios Generales
a través de la Unidad de Difusión,
Departamento de Impresión.
El tiraje consta de 500 ejemplares
y se terminó de imprimir
en el mes de febrero de 1991.