

**UNAM**

**APUNTES DE INVESTIGACION**

**DE OPERACIONES I**

**ERA PARTE**

**Ing. Benito Marin Pinillos**

**SECCION DE ING. INDUSTRIAL**

Estado de ingeniería

Caja 129

3

601583

A-78

Caja 129  
3



## INVESTIGACION DE OPERACIONES.

G-601586

### Antecedentes.

Es por todo conocido el rápido desarrollo que han experimentado durante el presente siglo, el tamaño y la complejidad de las organizaciones humanas. Por ejemplo el tamaño de las empresas modernas implica que las decisiones administrativas pueden tener un efecto sobre grandes cantidades de capital y gran número de personas. Los errores pueden ser tremendamente costosos y una sola decisión equivocada puede requerir años para rectificarse.

El cambio revolucionario sufrido por las organizaciones humanas ha traído consigo la división del trabajo y la segmentación de las responsabilidades administrativas en estas organizaciones. Este crecimiento ha traído consigo la tendencia por parte de los muchos componentes de una organización a crecer dentro de un plan relativamente autónomo teniendo cada uno de ellos sus propias metas, perdiendo por lo tanto la visión de como sus actividades y objetivos se comparan con los de la organización. Lo que es bueno para un componente es perjudicial para el otro. Es así que en una empresa por ejemplo, existen las siguientes tendencias:

**Producción.-** Pocas líneas de productos y grandes corridas de producción (grandes inventarios).

**Ventas.-** Abundantes y variados inventarios.

**Finanzas.-** Minimizar inventarios.

**Personal.-** Producir inventarios solamente durante los períodos flojos (mantener producción constante).

¿Cuál es en realidad la mejor política para la organización?. Es aquí, donde entra en acción la investigación de operaciones.

La investigación de operaciones siempre toma el punto de vista general de la organización e intenta llegar a soluciones óptimas, esto es la mejor solución para la organización.

Esta solución no siempre es la óptima para sus componentes por separado.

La investigación de operaciones envuelve estudios de grupo i.e. agrupa a toda clase de expertos en sus estudios. Esto es debido al aspecto tan general que toma la misma y al hecho de que sería imposible que un especialista en investigación de operaciones supiese todo lo relativo a cada aspecto y es por esto que el especialista requiere de los demás expertos a quienes él coordina.

Otro de los aspectos que favoreció el desarrollo de la investigación de operaciones es el hecho de que el ritmo de la empresa moderna es tal que las decisiones se requieren más rápidamente; el posponer la acción puede poner en una decidida ventaja a un competidor.

No es sorprendente que el aumento en la dificultad de tomar las decisiones haya requerido de esfuerzos para dar a esta actividad una base más objetiva y rutinaria. La investigación de operaciones forma parte de este esfuerzo.

Desde el punto de vista de la investigación de operaciones una decisión es una recomendación de que se lleve a cabo un curso de acción particular que afecta al sistema. Quien toma la decisión intenta que el sistema sea más "efectivo" para alcanzar las metas de la organización.

La medida de efectividad generalmente tienen unidades características asociadas con ella (pesos, etc.) pero a veces son adimensionales (probabilidad de destruir un blanco durante un ataque aéreo).

Los orígenes de la investigación de operaciones datan de hace muchos años cuando se empezó el intento de usar un acercamiento científico en la administración de las organizaciones. Estos orígenes sin embargo fueron aislados y faltos de coordinación, no es sino hasta la segunda guerra mundial cuando la complejidad de las operaciones militares hizo surgir lo que hoy se conoce por investigación de operaciones. A causa de la guerra hubo la necesidad de distribuir en manera eficiente materiales escasos a las distintas operaciones milita-

res y dentro de éstas a las actividades que las componían. Para el efecto se reunió un  
a la hoja 3.....

gran número de científicos para que realizaran una investigación de las operaciones militares.

Debido al éxito logrado en el aspecto militar, la industria se fue interesando en este campo. Los investigadores descubrieron que la industria sufría de los mismos problemas básicos que los militares.

Una vez iniciadas las técnicas de la investigación de operaciones atrajeron la atención de numerosos investigadores los cuales lograron desarrollar las mismas a grandes pasos. Las técnicas desarrolladas contribuyeron a empujar la rápida carrera que llevara la investigación de operaciones, de aquí que para 1950 muchas de las técnicas hubieren alcanzado un grado de desarrollo extraordinario.

En la misma época en que se perfeccionaban las técnicas de la investigación de operaciones también se lograron grandes avances en el diseño de computadoras, lo que facilitó la utilización de las mismas debido a la gran cantidad de computación requerida por la investigación de operaciones.

Aunque no existe una definición correcta para la investigación de operaciones podemos decir que la investigación de operaciones se aplica a problemas que conciernen a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización.

La investigación de operaciones se aplica extensamente en el campo de los negocios, el militar, la industria, el gobierno, hospitales, comunicaciones, transporte, etc.

El método de análisis empleado es el del método científico, esto es, la investigación de operaciones introduce el razonamiento científico creativo dentro de las propiedades fundamentales de las operaciones.

La programación lineal ha sido usada con éxito en problemas de asignación de personal, mezclado de materiales, distribución y transportación, así como políticas de inversión.

La programación dinámica ha tenido éxito en la planeación de gastos de propaganda, distribución del esfuerzo de ventas y planeación de la producción.

Los fenómenos de espera se han aplicado a problemas de congestionamiento de tráfico, reparación de maquinaria, planeación de tráfico aéreo y diseño de presas.

Otras de las áreas de la investigación de operaciones son:

Teoría de juegos.

Simulación.

Teoría de inventarios.

En la actualidad existen dos organizaciones en Estados Unidos que agrupan gente interesada en la investigación de operaciones:

The Operations Research Society of America que edita la revista Operations Research.

The Institute of Management Science que edita la revista Management Science.

#### Metodología.-

Aunque no existe una secuencia fija de pasos a seguir en un estudio de investigación de operaciones, podemos analizar los pasos dentro de un problema típico.

a) Formulación del problema. En la práctica los problemas surgen de una manera vaga, razón por la cual es necesario estudiar el sistema bajo consideración y definir exactamente el problema, indicando claramente cuales son los objetivos, las restricciones y qué es lo que se puede hacer; interrelaciones existentes, alternativas posibles, limitación del tiempo, etc. Se ve que la formulación es crucial, pues es imposible obtener buenos resultados partiendo de un mal planteamiento. De aquí que en cuanto surjan nuevos aspectos durante el desarrollo del estudio, la formulación debe ser revisada para ver si no ha cambiado.

Aquí se debe tener cuidado ya que aunque dijimos que el objetivo principal era la solución óptima para toda la organización, existen casos en que el problema afecta a una sola sección y al incluir todas las demás complica terriblemente el problema.

b) Construcción del modelo matemático (muchas veces es éste el paso más sencillo).

Este paso consiste en la reformulación del problema de manera tal, que sea conveniente para analizarlo. En este paso representamos matemáticamente el sistema bajo estudio.

Un modelo matemático es una representación idealizada expresada en términos de símbolos matemáticos.

Por ejemplo en programación lineal podemos representar las  $n$  variables de decisión, cuyo valor se va a determinar, como  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

La medida compuesta de efectividad ( llamada función objetiva ) (ganancia) - se expresa entonces como una función matemática como :

$$P = 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \dots + 2x_n.$$

Las restricciones a las variables de decisión también se expresan matemáticamente, por ejemplo:  $3x_1 + 8x_2 + \dots - 3x_n \leq 100$ .

El modelo matemático quedaría en este caso como escoger los valores de las variables de decisión tales que maximicen la función objetiva, siempre y cuando se cumplan las restricciones.

El modelo matemático ayuda a revelar relaciones importantes de causa y efecto, señalando de esta forma cualquier dato adicional que pudiera ser de importancia para el estudio.

Debe tenerse en cuenta que el modelo matemático es una abstracción de la realidad y como tal no puede incluir hasta el más mínimo detalle, lo cual complicaría innecesariamente el problema. Por otro lado, el excluir efectos colaterales que está fuertemente correlacionados con la decisión por efectuarse afecta grandemente el resultado.

Un buen modelo es aquel que predice los efectos de las diferentes alternativas con suficiente exactitud como para poder realizar una buena decisión.

Cuando exista más de una función objetiva, éstas deberán transformarse y combinarse en una sola función objetiva compuesta. El costo del estudio y el retraso-  
deben también ser considerados.

c) Obtener una Solución del Modelo.- Aquí debemos aclarar que aunque --  
existen modelos matemáticos que conducen a una solución óptima dicha solución es  
sólo óptima con respecto al modelo empleado y es posible que esta solución no sea  
la mejor posible para el problema real. De aquí que si el modelo está bien formu-  
lado la solución obtenida deberá ser una buena aproximación a la solución del pro-  
blema real.

Muchas veces la solución obtenida se emplea como datos para formular nueva-  
mente el problema y así mediante una serie de ciclos se obtiene una mejor solución.

d) Probar el Modelo y su Solución.- No importa cuan bueno parezca nuestro  
modelo siempre se debe probar. El primer paso es checar errores obvios o detalles-  
pasados por alto.

Prueba Retrospectiva.- Cuando es aplicable, consiste en mirar la historia de -  
la compañía y encontrar qué hubiese pasado de haberse aplicado este modelo. Este  
método puede mostrar fallas en el modelo y así modificarlo. Una gran desventaja-  
de este método consiste en que utiliza los mismos datos con ayuda de los cuales se  
desarrolló el modelo. Otra falla es que las condiciones pueden haber cambiado y  
que los datos pasados ya no representen las condiciones futuras.

Otra prueba es decir que no se aplique el modelo hasta dentro de seis meses-  
y observar qué hubiese pasado en este lapso de haberse aplicado el modelo.

e) Establecer Control Sobre la Solución.- Este paso se usa sólo cuando el mo-  
delo desarrollado se va a usar repetidamente debido a que las condiciones (datos) -  
pueden estar variando constantemente.

Este paso puede envolver el descubrir los parámetros críticos (aquellos cuyo --

a la hoja 7....

cambio puede afectar significativamente la solución). Esto se efectúa mediante el -- análisis de sensibilidad.

Una vez descubiertos los parámetros críticos se puede establecer un método estadístico para detectar cambios significativos en los mismos.

Cuando se descubre un cambio en un parámetro crítico, es necesario ajustar la solución al nuevo valor.

f) Implementación.- El grupo de investigadores debe participar activamente en esta fase, con objeto de supervisar que la solución obtenida sea convertida con exactitud en un procedimiento operativo.

Los pasos a seguir son:

- 1) Se comunica a la administración de la solución obtenida.
- 2) Tanto la administración como los investigadores comparten -- la responsabilidad de poner esta solución en operación.
- 3) Adiestramiento del personal involucrado en la solución.
- 4) Retroalimentación.

... en consecuencia, el análisis de los datos debe ser realizado de manera que se permita la interpretación de los resultados en términos de la hipótesis de partida.

... Los resultados de la investigación deben ser presentados de manera clara y concisa, utilizando un lenguaje sencillo y evitando el uso de tecnicismos innecesarios.

... El presente trabajo tiene como objetivo principal analizar el impacto de la implementación de un nuevo sistema de gestión en una empresa.

... En primer lugar, se describirá el contexto de la empresa y el sistema de gestión que se implementó.

... Posteriormente, se presentarán los resultados de la investigación, organizados en tres apartados principales.

... Finalmente, se concluirá con una serie de recomendaciones basadas en los hallazgos de la investigación.

... El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se describe el contexto de la empresa y el sistema de gestión que se implementó.

... Posteriormente, se presentarán los resultados de la investigación, organizados en tres apartados principales.

... Finalmente, se concluirá con una serie de recomendaciones basadas en los hallazgos de la investigación.

... El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se describe el contexto de la empresa y el sistema de gestión que se implementó.

... Posteriormente, se presentarán los resultados de la investigación, organizados en tres apartados principales.

... Finalmente, se concluirá con una serie de recomendaciones basadas en los hallazgos de la investigación.

... El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se describe el contexto de la empresa y el sistema de gestión que se implementó.

## II.- MATRICES.

### Definición. II-1.-

Una matriz es un arreglo rectangular de números escalares.

Denominaremos por m el número de renglones y por n el número de columnas de una matriz.

Una matriz con m renglones y n columnas, se conoce como una matriz  $m \times n$ .

Una matriz  $m \times n$  se dice que es de orden n.

Tenemos entonces que:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 14 \\ 1 & 5 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz  $3 \times 4$  y

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

es una matriz  $3 \times 2$ .

A los números que integran el arreglo rectangular, se les denomina "elementos de la matriz". Es así que los números 4, 3, 1, 7, 2, 5, 8, 6, 12, 1, 14, 3, son los elementos de la matriz A, mientras que 4, 8, 7, 5, 3, 9, son los elementos de la matriz B.

Las matrices las denominaremos con letras mayúsculas.

Los elementos correspondientes de la matriz los denominaremos con la misma letra pero minúscula, seguida de dos sufijos, el primero de los cuales - representa el renglón al que el elemento corresponde, mientras que el segundo indica la columna.

Es así que los elementos de la matriz A serán  $a_{ij}$  por ejemplo:

$$a_{13} = 8;$$

$$a_{24} = 14;$$

$$a_{33} = 12;$$

En términos generales podemos representar una matriz como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Algunos autores utilizan  $A = [a_{ij}] = \left\| a_{ij} \right\| = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$

Debe notarse que la letra particular que aparece como sub-índice es indiferente, es la posición lo que es importante.

Con las anteriores convenciones  $a_{ij}$  es un escalar y  $\left\| a_{ij} \right\|$  es una matriz. Nótese que mientras los elementos  $a_{ij}$  y  $a_{kl}$  pueden no ser iguales, se considera que las matrices  $\left\| a_{ij} \right\|$  y  $\left\| a_{kl} \right\|$  son idénticas.

Una matriz no posee ningún valor numérico (a diferencia de su determinante).

Sin embargo es conveniente realizar ciertas manipulaciones con -

los arreglos de números; es así que se han desarrollado reglas que permiten realizar operaciones con matrices, las cuales son análogas a las operaciones aritméticas.

Definición. II - 2.-

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$$

dos matrices. Se dice que A y B son "iguales" esto es  $A=B$  si y sólo si todos y cada uno de los elementos correspondientes son iguales. Es decir A y B tienen exactamente los mismos componentes  $(a_{ij}) = (b_{ij})$  para todos los valores de i y de j).

De lo anterior es claro que para que  $A=B$  es necesario que ambas matrices tengan el mismo número de renglones, así como el mismo número de columnas entre sí.

Definición II = 3.-

La diagonal principal de una matriz  $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$  es el conjunto de elementos  $\{a_{11}, \dots, a_{tt}\}$  donde  $t = \min\{m, n\}$ .

Definición. II - 4.-

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada de orden n, en la cual los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son cero.

Las matrices pueden ser usadas para representar una gran variedad de diferentes conceptos matemáticos. La manera como una matriz es manipulada, depende de los objetos que la misma representa.

Considerando la gran variedad de situaciones en las cuales las matrices han encontrado aplicación, existe una asombrosa similitud en las operaciones realizadas sobre las matrices en estas condiciones, existen diferencias - también y es por esto que para entender esas diferencias, uno debe de entender el objeto representado y que información puede esperarse manipulando las matrices (p. ej. procesos estocásticos, transf. lineales, que es como nosotros las usaremos, etc.)

#### Definición. II-5.

La operación de multiplicar una matriz por un número  $k$  se efectúa multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por  $k$ .

Así pues:

$$kA = \left\| ka_{ij} \right\| = \begin{bmatrix} a_{11} k & a_{12} k & \dots & a_{1n} k \\ a_{21} k & a_{22} k & \dots & a_{2n} k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} k & a_{m2} k & \dots & a_{mn} k \end{bmatrix}$$

donde  $A$  puede tener cualquier disposición de sus elementos.

#### Ejemplo. II-1.

$$5 \begin{bmatrix} 8 & 4 & 63 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 315 & 35 \\ 5 & 0 & 45 & 10 \end{bmatrix}$$

#### Definición. II-6.

Para "sumar" dos matrices  $A$  y  $B$  (que deben tener el mismo número - de hileras y de columnas entre sí), solamente es necesario sumar los elementos - correspondientes de ambas, lo cual puede quedar representado en la siguiente - forma:

$$A + B = \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|$$

Ejemplo. II-2.-

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 3 & 7 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Definición. II-7.-

La resta de dos matrices A y B podemos interpretarla como la suma de la matriz A con la matriz C donde  $C = k B = (-1) B$ . Así pues tenemos:

$$A - B = A + C = A + (-1) B = \left\| a_{ij} - b_{ij} \right\|$$

nuevamente A y B deben de tener el mismo número de renglones y columnas entre sí.

Ejemplo. II-3.-

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 3 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -13 \\ -10 & -6 & 12 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Definición. II-8: (multiplicación)

Para encontrar el elemento  $c_{ij}$  en el renglón i y la columna j de la matriz resultante de multiplicar A por B, es necesario multiplicar cada elemento del renglón i de A por el elemento correspondiente de la columna j de B y sumar estos productos; observamos que la multiplicación de dos matrices está definida si y sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, (nótese que el número de renglones de A y de columnas de B puede ser cualquiera.)

En general si:

$$\left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} \text{ y } \left\| b_{ij} \right\|_{n \times r}$$

su producto será:

$$A B = \left\| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right\|_{m \times r}$$

Ejemplo. II-4.-

$$A B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La operación de multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir:

$$A B \neq B A$$

Ejemplo. II-5.-

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$$

En la mayoría de los casos en que  $A B$  esté definida,  $B A$  no lo está.

b) La multiplicación  $BA$  de las matrices del ejemplo II-4 no está definida.

Nota. II-1.-

La división entre matrices no está definida.

Definición. II-9.-

Se llama matriz cero o nula a aquella matriz de cualquier orden cuyos elementos son todos "cero"; se representa por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Ejercicio II -1.-

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.-  $A=D$  porque  $a_{11} = d_{11} = 3$ ;  $a_{12} = d_{12} = 4$ ;  $a_{13} = d_{13} = 4$ ; etc.

2.-  $B \neq C$  porque  $b_{ij} \neq c_{ij}$

3.- La diagonal principal de A es  $\{3, 6, 3\}$

La diagonal principal de B es  $\{5, 2, 2\}$

4.- A es una matriz de orden 3.

5.- B es una matriz  $3 \times 4$ .

C es una matriz  $4 \times 3$ .

6.- E es una matriz diagonal.

7.-  $K B = 3 B = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 9 & 18 \\ 21 & 6 & 15 & 3 \\ 3 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

8.-  $A + D = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 12 & 14 \\ 14 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$A + B$  no está definida.

$$9.- A - E = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A - C no está definida.

$$10.- B C = \begin{bmatrix} 104 & 43 & 43 \\ 79 & 24 & 40 \\ 29 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

B F no está definida.

$$11.- C B = \begin{bmatrix} 47 & 37 & 34 & 38 \\ 29 & 32 & 23 & 30 \\ 29 & 24 & 21 & 25 \\ 21 & 41 & 48 & 47 \end{bmatrix}$$

Vemos que  $B C \neq C B$

Las matrices satisfacen las siguientes leyes:

$$1.- O A = O$$

$$2.- I A = A$$

$$3.- A + O = A$$

$$4.- A - A = O$$

$$5.- A + B = B + A$$

$$6.- A (B + C) = AB + AC$$

$$7.- (A + B) C = AC + BC$$

$$8.- (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$9.- A (B C) = (A B) C$$

leyes que se satisfacen siempre y cuando las operaciones propuestas están bien definidas.

Definición II - 10.-

Dada la matriz  $A$ , la matriz  $A^T$ , obtenida de  $A$  intercambiando las hileras por las columnas en  $A$ , se llama la matriz transpuesta de  $A$ . Si  $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$  el elemento  $a'_{ij}$  que aparece en la hilera  $i$  columna  $j$  de  $A^T$  es el elemento  $a_{ji}$  que aparece en la hilera  $j$  columna  $i$  de  $A$ .

Ejemplo II - 6.-

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la transpuesta de una matriz, no es necesario que ésta sea cuadrada.

Propiedades de la matriz transpuesta:

$$\begin{aligned} (A^T B^T)^T &= B A \\ (A + B)^T &= A^T + B^T \end{aligned}$$

Definición II - 11.-

La matriz adjunta es aquella matriz cuadrada formada por los menores de la transpuesta de la matriz cuadrada dada.

Se escribe  $A^{-1}$

Ejemplo II - 7.-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_A = \left[ \begin{array}{c|c|c} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 12 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

Definición II - 12.-

La matriz identidad (I) es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son todos unos.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad tiene las siguientes propiedades:

$$IA = A = AI$$

donde I tiene el número apropiado de renglones y columnas en cada caso de forma tal que la operación de multiplicación quede definida.

Definición II - 13.-

Cuando una matriz la subdividimos en varias matrices más pequeñas, a éstas se les conoce con el nombre de "submatrices"

Ejemplo II - 8.-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde:

$$1) a_{11} = a_{11}$$

$$2) A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$3) A_{21} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$4) A_{22} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Es posible el realizar las operaciones usando las submatrices en lugar de hacerlo elemento por elemento. Debe estar claro que esto es solamente posible en el caso en que la subdivisión sea tal que las operaciones estén definidas, en caso contrario no se logrará nada con subdividir la matriz.

Ejemplo. II - 9.-

Sea:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$A B = \begin{bmatrix} a & b & + & A & B \\ 11 & 1 & & 12 & ? \\ A & b & + & A & B \\ 21 & 1 & & 22 & ? \end{bmatrix}$$

Una clase de matrices que tienen un papel muy importante es aquella que cuenta con un solo renglón o con una sola columna. Tales matrices se conocen con el nombre de vectores.

$$A = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ 1 & 2 & & n \end{bmatrix} \text{ (es un vector renglón)}$$

$$B = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ b \\ ? \\ \cdot \\ \cdot \\ b \\ n \end{bmatrix}$$

es un vector columna y lo denominaremos:

$$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

Los vectores son importantes en la teoría de matrices debido a que cualquier matriz  $m \times n$  puede ser subdividida ya sea en  $m$  vectores renglón o en  $n$  vectores columna, con lo cual se pueden analizar importantes propiedades de las matrices.

Si tenemos que:

$$\beta = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_m x_m = \sum_{k=1}^m C_k x_k$$

donde las  $C_i$  son constantes, se dice que  $\beta$  es una combinación lineal de las  $x_i$ . También decimos que  $\beta$  es linealmente dependiente de las  $x_i$  si  $\beta$  puede ser expresado como una combinación lineal de las  $x_i$ .

Una expresión de la forma  $\sum C_i x_i = 0$  se llama una relación lineal entre las  $x_i$ . Una relación donde todas las  $C_i = 0$  se conoce como una relación lineal tri-



vial; una relación en la cual cuando menos uno de los coeficientes es diferente de cero, se conoce como una relación lineal no trivial.

Definición II - 14.-

Un conjunto de vectores se dice que son linealmente dependientes si existe una relación lineal no trivial entre ellos. En caso contrario el conjunto es linealmente independiente. Debe notarse que cualquier conjunto de vectores que incluya el vector cero es linealmente independiente.

Si un conjunto  $\{x_i\}$  de vectores es linealmente dependiente, entonces existe una relación lineal no trivial de la forma  $\sum_i C_i x_i = 0$  (no necesariamente única). En la relación anterior, existe cuando menos un coeficiente diferente de cero, sea éste  $C_k$ , entonces:

$$x_k = \sum_{i \neq k}^{-1} \left( -\frac{a_{ki}}{a_{ki}} \right) x_i$$

que es uno de los vectores del conjunto  $\{x_i\}$  es una combinación lineal de los otros.

Si un conjunto  $\{x_i\}$  de vectores se sabe que es linealmente independiente y se obtiene una relación lineal  $\sum_i c_i x_i = 0$ , podemos entonces concluir que todas las  $c_i = 0$ .

Es claro que el concepto de independencia lineal de un conjunto no tendría sentido si un vector del conjunto pudiera incluirse un número arbitrario de veces en una posible relación.

Si un conjunto de vectores es dado sin embargo, diferenciando los vectores en el conjunto, es una inconveniencia el insistir en que todos los vectores listados sean distintos. La carga de contar el número de veces que un vector puede aparecer en una relación es transferida al conjunto de sub-índices. Por cada sub-índice

en el conjunto de sub-índices requerimos que uno y solo uno de los vectores sea listado por cada subíndice del conjunto de subíndices. Permitimos pues la posibilidad de que varios subíndices sean utilizados para identificar el mismo vector. Así pues el conjunto:

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \right\} \quad \text{en donde} \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} = x$$

es linealmente dependiente. Tenemos entonces que el concepto de independencia lineal de un conjunto es más bien una propiedad de la forma de poner los subíndices en el conjunto que del conjunto mismo. Deberíamos referirnos a la dependencia lineal de un conjunto numerado en lugar de a la dependencia lineal de un conjunto.

#### Ejemplo. II - 10.-

Sea:

$$X = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\}$$

donde:

$$x_1 = (1, 1, 0)$$

$$x_2 = (1, 0, 1)$$

$$x_3 = (0, 1, 1)$$

$$x_4 = (1, 1, 1)$$

entonces el conjunto X es linealmente dependiente ya que:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3 - 2x_4}{2}$$

Sin embargo cualquier subconjunto de tres de los cuatro vectores es linealmente independiente.

Ejemplo. II- 11.-

Sea:

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

donde:

$$y_1 = (1, 1, 0, 1)$$

$$y_2 = (1, -1, 1, 1)$$

$$y_3 = (2, 2, 1, 2)$$

$$y_4 = (0, 1, 0, 0)$$

Para encontrar la dependencia o independencia lineal del conjunto, formamos la relación:

$$a(1, 1, 0, 1) + b(1, -1, 1, 1) + c(2, 2, 1, 2) + d(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Se busca si la relación es trivial o no ( si  $a, b, c, d$  es  $\neq 0$ , los vectores son dependientes ).

$$a + b + 2c = 0 \dots (1)$$

$$a - b + 2c + d = 0 \dots (2)$$

$$b + c = 0 \dots (3)$$

$$a + b + 2c = 0 \dots (4)$$

de (3)  $b = -c$

en (1)  $a + b - 2b = 0$  de donde  $a = b$

en (2)  $a - a - 2a + d = 0$  de donde  $d = 2a$ .

Si hacemos  $a = 1$  (valor arbitrario) obtenemos:

$$(1, 1, 0, 1) + (1, -1, 1, 1) - (2, 2, 1, 2) + 2(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

de donde el conjunto  $Y$  es linealmente dependiente.

Ejemplo II - 12.-

$$w = (1, 0, 0, 1)$$

1

$$w = (0, 1, 0, 1)$$

2

$$w = (0, 0, 1, 1)$$

3

$$w = (1, 1, 1, 1)$$

4

$$a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) + d(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$a + d = 0 \dots\dots (1)$$

$$b + d = 0 \dots\dots (2)$$

$$c + d = 0 \dots\dots (3)$$

$$a + b + c + d = 0 \dots\dots (4)$$

$$\text{de (1) } a = -d$$

$$\text{de (2) } b = -d$$

$$\text{de (3) } c = -d$$

$$\text{de (4) } -d - d - d + d = 0 \quad -2d = 0 \text{ de donde } d = 0$$

de donde el conjunto de vectores es linealmente independiente.

Definición. II - 15.-

El mayor número de vectores linealmente independientes que puede ser encontrado dentro de un conjunto de vectores se conoce como el rango del conjunto.

Ejemplo. II- 13.-

En el ejemplo II - 10 el rango del conjunto de vectores

$$\left\{ \begin{matrix} x & x & x & x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \right\} \text{ es } (3), \text{ pues } \left\{ \begin{matrix} x & x & x \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} x & x & x \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} x & x & x \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{matrix} x & x & x \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \right\}$$

son linealmente independientes.

En el ejemplo II-11.- el rango del conjunto de vectores  $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

es tres, pues  $\{y_1, y_2, y_4\}$  es linealmente independiente.

En el ejemplo II-12.- el rango del conjunto  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  es cuatro.

Para encontrar el rango de un conjunto de vectores, se hace la prueba de dependencia lineal y si el conjunto resulta linealmente independiente entonces el rango es igual al número de vectores considerados. Si resulta linealmente dependiente, eliminamos cualquiera de los vectores que en el paso anterior hubiera resultado con un coeficiente diferente de 0 y se vuelve a repetir la prueba de dependencia lineal, volviendo a iniciar el ciclo anterior.

Denominaremos por  $\rho$  al rango de una matriz.

Teorema. II-1.-

Cualesquiera  $n+1$  vectores en un espacio vectorial de  $n$  dimensiones son linealmente dependientes.

Ejemplo. II-14.-

El caso visto en el ejemplo II-10.- anterior.

Definición. II-16.-

Se dice que un subconjunto de vectores linealmente independientes es la base del conjunto de vectores a que el mismo pertenece, cuando todos y cada uno de los vectores del conjunto original son una combinación lineal de los vectores en este subconjunto. Una base no necesariamente es única.

Ejemplo. II-15.-

En el primer ejemplo el subconjunto  $\{x_1, x_2, x_3\}$  es una base del conjunto  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  ya que:

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = \frac{(1,1,0) + (1,0,1) + (0,1,1)}{2} = (1,1,1)$$

y además el subconjunto es linealmente independiente.

Así mismo  $\{x_1, x_2, x_4\}$  es otra base de dicho conjunto ya que:

$$x_3 = 2x_4 - x_2 - x_1 = (2,2,2) - (1,0,1) - (1,1,0) = (0,1,1)$$

#### Ejemplo II-16.-

En el segundo ejemplo  $\{y_1, y_2, y_4\}$  es una base del conjunto:

$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  ya que:

$$y_3 = y_1 + y_2 + 2y_4 = (1,1,0,1) + (1,-1,1,1) + (0,2,0,0) = (2,2,1,2)$$

#### Teorema II-2.-

Un subconjunto de  $r$  vectores linealmente independientes, tomados de un conjunto de vectores, es una base del mismo si y sólo si el conjunto tiene rango  $r$ .

Demostración intuitiva:

$\Rightarrow$  Si el conjunto tiene rango  $r$ , por definición un subconjunto de  $r$  vectores linealmente independientes tiene que ser una base, ya que  $r$  es el máximo número de vectores linealmente independientes y todos los demás serán combinaciones de estos.

$\Leftarrow$  Supongamos que el conjunto tiene rango  $r+1$ , esto implica que existen  $r+1$  vectores linealmente independientes en el conjunto; de donde  $r$  vectores no bastan para formar el  $r+1$ avo vector mediante combinaciones lineales; y por lo tanto tenemos una contradicción.

#### Teorema II-3.-

Si un conjunto de  $r$  vectores tienen una base con un número finito de elementos, entonces todas las demás bases, en caso de existir, son finitas y cuen-

tan con el mismo número de elementos.

Teorema II-4.-

Un conjunto de  $n$  vectores en un espacio vectorial de  $n$  dimensiones es una base si y sólo si es linealmente independiente.

Definición II-17.-

El rango de las hileras de una matriz, es el rango del conjunto de sus vectores renglón. El rango de las columnas de una matriz es el rango del conjunto de sus vectores columna.

Ejemplo. II-17.-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho_r = 3$  (ver ejemplo II-11)  
 $\rho_c = 3$  (a simple vista se ve la dependencia entre las columnas 1 y 4)

Teorema II-5.-

El rango de las hileras y el rango de las columnas de una matriz son iguales. Es por esto que solamente se habla del rango  $\rho$  de una matriz.

Dada una matriz  $A$  diferente de la matriz cero, ¿cuándo existe una matriz  $A^{-1}$  llamada al inverso de  $A$ , tal que:  $A A^{-1} = A^{-1} A = I$ ?

Si  $A$  no es una matriz cuadrada entonces nunca existe tal matriz  $A^{-1}$  de donde sólo una matriz cuadrada puede tener inverso. Esto es debido a que  $A$  debería tener diferente número de renglones en cada caso para que los productos  $A \cdot A^{-1}$  y  $A^{-1} \cdot A$  estuviesen definidos.

Si  $A$  es una matriz cuadrada entonces existen ocasiones en que esta matriz tiene inverso.

Definición. II-18.-

Una matriz se llama no singular si su rango iguala tanto el número de sus renglones como el número de sus columnas, en caso contrario se llama singular. De aquí que solo las matrices cuadradas puedan ser no singulares.

Definición. II-19.-

Una matriz  $m \times m$  se llama no singular si sus vectores columna son linealmente independientes.

Una matriz es no singular si y sólo si su determinante es diferente de cero.

Teorema. II-6.-

a) Si  $A$  es no singular, existe una matriz no singular  $A^{-1}$ , llamada inverso de  $A$ , tal que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

b) Si  $A$  es no singular y  $B$  es una matriz para la cual ya sea  $AB = I$  o  $BA = I$ , entonces  $B = A^{-1}$ .

c) Sólo las matrices no singulares tienen inversos.

Teorema. II-7.-

Si  $A$  y  $B$  son no singulares entonces:

a)  $AB$  es no singular.

b)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c)  $A^{-1}$  es no singular.

d)  $(A^{-1})^{-1} = A$

e) Para  $a \neq 0$ ,  $(aA)$  es no singular y  $(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}$

Teorema. 11-8.-

El rango de una matriz ( no necesariamente cuadrada ) no se altera si ésta se multiplica por una matriz no singular.

Ejemplo. 11-18.-

Si :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación :

$$A A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Existen varios métodos para invertir una matriz:

Método 1.-

a) Obtener el valor del determinante de la matriz.

b) Obtenerse los valores de los menores de la matriz.

c) Dividir los valores de los menores entre el valor del determinante.

d) Colóquese el valor obtenido en (c) en la posición transpuesta del menor correspondiente.

Ejemplo. 11-19.-

En el ejemplo anterior :

$$A = 18 + 24 + 24 - 27 - 16 - 24 = -1$$

dado que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} + \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & + \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} \\ - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-1} \\ + \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} & - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} & + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18 - 16}{-1} & \frac{12 - 12}{-1} & \frac{8 - 9}{-1} \\ \frac{12 - 12}{-1} & \frac{6 - 6}{-1} & \frac{4 - 6}{-1} \\ \frac{8 - 9}{-1} & \frac{4 - 6}{-1} & \frac{3 - 4}{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. II-20.-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad |A| = -5 + 4 = -1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} +\frac{-1}{-1} & -\frac{-4}{-1} \\ -\frac{-1}{-1} & +\frac{5}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

**Método 2.**

Este método es básicamente el mismo que el anterior, solamente difiere en la secuencia de pasos y en la forma de ataque y dice así :

La inversa de una matriz puede escribirse :

$$A^{-1} = \frac{A^T}{|A|}$$

Ejemplo. II-21.-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ -10 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 - 24 - 6 - 0 - 60 - 6 = -96$$

Nótese que :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-96} \begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/16 & -1/8 \\ 5/48 & -1/32 & 11/48 \\ -1/16 & 7/32 & 1/16 \end{bmatrix}$$

Los dos métodos anteriores resultan demasiado complicados para hacerlos a mano cuando el número de elementos de la matriz se incrementa.

### Método 3.

Este método proporciona el inverso de una matriz cuando ésta es no singular, en caso de que la matriz sea singular este método proporciona lo que se conoce como matriz en forma Hermite Normal. Describiremos el método con la ayuda de un ejemplo:

a) Se pone una matriz  $I$  después de  $A$ .

$$[A \ I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se busca dejar el primer vector columna como un vector  $(1,0,0)$ , mediante operaciones elementales de las matrices, esto es:

- 1.- Multiplicar un renglón de  $A$  por un escalar  $\neq 0$
- 2.- Sumar el múltiplo de una hilera a otra.
- 3.- Intercambiar dos hileras.

Así pues obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Se busca dejar el segundo vector columna como (0, 1, 0) mediante operaciones elementales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Hacer lo mismo para el tercer vector columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Se elimina la matriz  $I$  que ocupa el lado izquierdo quedando así la matriz inversa.

Así pues :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación :

$$A A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema. II-9.-

El inverso de una matriz es único.

Sin entrar en detalles ni forma de obtenerla, describiremos a continuación lo que se conoce como la Forma Hermite de una matriz.

Sea  $\rho$  el rango de una matriz  $A$  (singular) donde el conjunto de vectores que la componen es mayor que  $\rho$ .

Denominaremos por  $k_1, k_2, \dots, k_\rho$  los subíndices de los vectores que forman la base.

Se dice que la matriz  $A$  está en forma Hermite  $A' = K^{-1} A$ , (donde  $K^{-1}$  no es el inverso de  $A$ ) cuando tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} \text{Col. } k_1 & & \text{Col. } k_2 & & \\ 0 \dots 0 & 1 & a'_{1, k_1 + 1} \dots 0 & a'_{1, k_2 + 1} \dots & \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 1 & a'_{2, k_2 + 1} \dots & \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots \end{bmatrix}$$

La cual satisface las siguientes condiciones:

a) Existe cuando menos un elemento diferente de 0 en cada uno de los primeros  $\rho$  renglones de  $A'$  y los elementos en los restantes  $(m - \rho)$  renglones son cero.

b) El primer elemento diferente de cero que aparece en el renglón  $i$  ( $i \leq \rho$ ) es un uno que aparece en la columna  $k_i$  donde  $k_1 < k_2 < \dots < k_\rho$

c) En la columna  $k_i$  el único elemento  $\neq 0$  es un uno en el renglón  $i$ .

## ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS.

Son las siguientes ecuaciones con tres variables :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \dots (\alpha)$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \dots (\beta)$$

El conjunto ordenado de valores  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$  se dice que es una solución de  $\alpha$  ( ó de  $\beta$  ) debido a que si se sustituyen estos valores en lugar de  $x_1, x_2, x_3$  en la primera ecuación ( ó en la segunda ) se produce la identidad  $2 = 2$  ( ó  $7 = 7$  ). La solución ( 3, 2, 1 ) se dice que satisface la ecuación  $\alpha$  (  $\beta$  )

Supongamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3$$

$$\dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_n$$

Este sistema de ecuaciones también puede ser representado en forma compacta así :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \text{ para } ( i = 1, \dots, m )$$

ó en forma matricial :

$$A X = B$$

en donde :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

de donde cualquier observación que hagamos respecto a las matrices, corresponderá también al sistema de ecs. lin., ya que aquellas son únicamente su representación.

#### Definición II-20.-

Una solución para la i-ava ecuación, es un conjunto ordenado de números  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  tal que:

$$a_{i1} x'_1 + a_{i2} x'_2 + \dots + a_{in} x'_n = b_i$$

#### Definición II-21.-

Un conjunto ordenado de números se dice que es una solución de un sistema de ecuaciones si y solo si es una solución para todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

#### Definición II-22.-

Dadas las matrices A y B, la matriz aumentada A, B de un sistema de ecuaciones lineales se define como:

$$A, B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Hemos hablado de una solución al sistema de ecuaciones debido a que - éste puede no poseer una solución única, así como no tener ninguna en absoluto.

Definición II-23.-

Un sistema de ecuaciones que tenga solución (única o no) se llama con sistente. En caso contrario es inconsistente.

Definición II-24.-

Si en un sistema de ecuaciones una ecuación es una combinación lineal de las otras, se dice que esta última es dependiente de las otras. La ecuación dependiente se llama redundante.

Definición II-25.-

Un sistema que no contiene redundancias se llama independiente.

Un sistema lineal es claramente inconsistente si es posible el encontrar - una combinación lineal de las ecuaciones del sistema que tenga la siguiente forma :

$$0 x_1 + 0 x_2 + \dots + 0 x_n = d \text{ donde } d \neq 0$$

Definición II-26.-

Un sistema canónico con un subconjunto ordenado de variables llamadas básicas, es un sistema tal que para cada  $i$ , la  $i$ -ava variable básica tiene un coeficiente unitario en la  $i$ -ava ecuación, y un coeficiente cero en todas las demás.

Definición II-27.-

Dos sistemas se llaman equivalentes si un sistema puede ser derivado del otro insertando o eliminando ecuaciones redundantes.

Teorema II-10.-

Sistemas equivalentes tienen el mismo conjunto de soluciones.

Teorema II-11.-

El sistema de ecuaciones lineales simultáneas  $A X = B$  tiene solución --  
(una o varias) si y solo si el rango de A es igual al rango de la matriz aumen-  
tada A,B. Siempre que una solución exista, todas las soluciones pueden ser ex-  
presadas en términos de :  $\nu = n - \rho$  parámetros independientes donde  $\rho$  es el -  
rango de A.

Justificación (no demostración).

Dado que :

$$\rho_{[A,B]} < \rho_{[A]}$$

es imposible

entonces :

$$\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} + 1$$

es la única otra posibilidad ya que solo aumentamos un nuevo vector. En caso -  
de ser cierta esta igualdad, esto significa que el vector B es linealmente indepen-  
diente de los vectores columna de A ; pero esta independencia lineal es imposi -  
ble debido a que B es una combinación lineal A X de los mismos.

Es por esto que debemos de tener :  $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]}$ .

Dado que  $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]}$ , existen dos posibilidades :

1.-  $\rho_{[A]} = n$  ó sea su valor máximo (aquí  $m \geq n$  forzosamente). En -  
este caso el sistema de ecuaciones tendrá exactamente una solución.

Recordamos que  $A X = B$  y que  $\rho_{[A]} = n$ , por lo que vemos que nues-  
tro conjunto de vectores es una base (tme.II-2) del sistema, por lo que A es no -  
singular, por lo tanto :

$$\begin{aligned} A^{-1} A X &= A^{-1} B \\ X &= B' \end{aligned}$$

con lo cual  $X_i$  aparece sólo en la i-ava ecuación igualada al valor de su so-  
lución, que en este caso es única.

Recordamos que  $AX = B$  y que  $n = n$ , por lo que vemos que nuestro conjunto de vectores es una base (  $m = n$  ) del sistema por lo que  $A$  es no singular, por lo tanto:

$$\begin{array}{c} -1 \\ A \quad AX = A \quad B \\ \quad \quad \quad 1 \\ \quad \quad \quad X = B \end{array}$$

con lo cual  $X$  aparece sólo en la  $i$ -ava ecuación igualada al valor de su solución, en este caso es único.

2.  $r < n$  Aquí existirán  $r$  vectores independientes y  $n - r$  vectores dependientes ( o parámetros independientes ) a los cuales puede ser asignado cualquier valor arbitrario sin que el valor escogido impida que exista una solución para los vectores en la base, de aquí que en esta situación existan una infinidad de soluciones para el sistema de ecuaciones.

Esto es debido a que  $A' X = B'$  es tal que  $A'$  está en forma Hermite y recordamos que  $x_{ki}$  aparecen sólo en la  $i$ -ava ecuación, además coeficientes diferentes de cero aparecen sólo en las primeras  $r$  ecuaciones. Dado que  $x_{ki}$  aparece en una sola ecuación con coeficiente uno, a las restantes  $n - r$  incógnitas se les puede dar valores arbitrarios para obtener los valores de  $x_{ki}$  correspondientes.

Es importante el hacer notar que cuando  $r_{[A,B]} = r_{[A]} = r$  donde  $r < m$  entonces tenemos que  $(m - r)$  de nuestras ecuaciones deberán ser combinaciones lineales de las otras  $r$ . De aquí que  $(m - r)$  ecuaciones redundantes puedan ser eliminadas sin que esto afecte a las soluciones.

Métodos de solución:-

Caso 1.-  $m = n$  y  $A$  no es singular (solución única)

$$A) \quad r_{[A,B]} = r_{[A]}$$

En este caso empleamos el método de eliminación de Gauss Jordan para el cual se procede como sigue para obtener dicha solución:

Elimínese la primera variable de todas las ecuaciones menos de una (que usualmente es la primera), esto se efectúa sumando algebraicamente un múltiplo adecuado en cada caso de esta ecuación a cada una de las demás ecuaciones, eliminando la ecuación original y considerando en su lugar la ecuación que resultó de sumar algebraicamente el múltiplo de la ecuación con la variable en turno a la ecuación eliminada. La ecuación que quedó con la primera variable debe dividirse entre el coeficiente de ésta con el objeto de que la misma quede con coeficiente uno; a continuación procede en forma análoga con el objeto de eliminar la segunda variable de todas las ecuaciones menos una (usualmente la segunda).

Repítase la operación hasta que las <sup>n</sup> variables aparezcan en solo una de las ecuaciones; al llegar a este paso, cada una de las n ecuaciones debe contener exactamente una de estas variables ya que:

$A^{-1} A X = A^{-1} B$ , de donde  $X = B'$ . La solución deseada se lee directamente en las ecuaciones resultantes.

$$b) P[AB] = P[A] + 1$$

En este caso el sistema de ecuaciones no tiene ninguna solución debido a que el sistema es inconsistente.

### Ejemplo II-22.-

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 22 \dots\dots (1) \\ -x_1 + 3x_2 & = & 9 \dots\dots (2) \\ 4x_2 - x_3 & = & 10 \dots\dots (3) \end{array}$$

Eliminamos  $x_1$  de todas las ecuaciones menos de la primera. Esto se logra sumando  $(1/2)$  veces la ecuación (1) a la ecuación (2) y sustituyendo la ecuación obtenida (2') en lugar de la ecuación original (2). A continuación dividimos la ecuación (1) entre el coefi -

ciente de  $x_1$  para obtener la ecuación (1'). La ecuación (3) queda igual pues no contiene  $x_1$ .

Obtenemos pues:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 11 \dots (1) & \text{donde ec. (1')} &= 1/2 \text{ ec. (1)} \\ 2x_2 + 2x_3 &= 20 \dots (2) & \text{donde ec. (2')} &= 1/2 \text{ ec. (1)} + \text{ec. (2)} \\ 4x_2 - x_3 &= 10 \dots (3) & \text{donde ec. (3')} &= \text{ec. (3)} \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en eliminar  $x_2$  de todas menos de la segunda ecuación. Empezamos por dividir entre dos la segunda ecuación para obtener  $x_2$  con coeficiente unitario.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 11 \dots (1') \\ x_2 + x_3 &= 10 \dots (2') \\ 4x_2 - x_3 &= 10 \dots (3') \end{aligned}$$

hacemos ahora que  $x_2$  solo aparezca en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 21 \dots (1'') & \text{donde ec. (1'')} &= \text{ec. (1')} + \text{ec. (2')} = \text{ec. (1')} + 1/2 \text{ ec. (2')} \\ x_2 + x_3 &= 10 \dots (2'') & \text{donde ec. (2'')} &= 1/2 \text{ ec. (2')} \\ -5x_3 &= -30 \dots (3'') & \text{donde ec. (3'')} &= \text{ec. (3')} - 4 \text{ ec. (2'')} = \text{ec. (3')} - 4/2 \text{ ec. (2')} \end{aligned}$$

Finalmente eliminamos  $x_3$  de todas las ecuaciones menos de la tercera. Para esto hacemos primero que el coeficiente de  $x_3$  en la ecuación (3'') sea unitario dividiendo dicha ecuación entre (-5).

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 21 \dots (1'') \\ x_2 + x_3 &= 10 \dots (2'') \\ x_3 &= 6 \dots (3''') \end{aligned}$$

y ahora eliminamos  $x_3$  de (1'') y (2'')

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \dots (1''') \text{ donde } ec.(1''') = ec.(1'') - 3 \cdot ec.(3'') = ec.(1'') + 3/5 ec.(3'') \\ x_2 &= 4 \dots (2''') \text{ donde } ec.(2''') = ec.(2'') - ec.(3'') = ec.(2'') + 1/5 ec.(3'') \\ x_3 &= 6 \dots (3''') \text{ donde } ec.(3''') = -1/5 ec.(3'') \end{aligned}$$

de donde vemos que la solución buscada será:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 & x_2 &= 4 & x_3 &= 6 \end{aligned}$$

o en forma vectorial:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 6)$$

Otra alternativa es la de resolver el sistema de ecuaciones utilizando las ma-

trices. En este caso tendríamos:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= B' \end{aligned}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 16 + 2 = -20$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-20} & \frac{14}{-20} & \frac{-12}{-20} \\ \frac{-1}{-20} & \frac{-2}{-20} & \frac{-4}{-20} \\ \frac{-4}{-20} & \frac{-8}{-20} & \frac{4}{-20} \end{bmatrix}$$

$$B' = A^{-1} B = \begin{bmatrix} 3/20 & -14/20 & 12/20 \\ 1/20 & 2/20 & 4/20 \\ 4/20 & 8/20 & -4/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66/20 & -126/20 & 120/20 \\ 22/20 & 18/20 & 40/20 \\ 88/20 & 72/20 & 40/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

y  $X=B'$  será :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Caso 2. - (cuando  $m \neq n$  y/o  $A$  es singular)

$$A) \rho_{[A, B]} = \rho_{[A]} + 1$$

Ya vimos que en este caso no hay solución. Cuando se aplica el método de Gauss-Jordan se obtendrá una ecuación en la cual el lado izquierdo se habrá hecho cero mientras que el derecho será diferente de cero, es decir nuestro sistema lineal es inconsistente.

$$b) \rho_{[A, B]} = \rho_{[A]} = n$$

Aquí:  $m \geq n$  (puesto que  $\rho = n$ )

Si  $m = n$  llegamos al caso tratado con anterioridad (caso 1).

Si  $m > n$  en este caso tenemos  $(m - n)$  ecuaciones redundantes las cuales serán totalmente eliminadas por el método de Gauss-Jordan, de forma tal que la solución única será identificada igual que antes (caso 1a.)

$$c) \rho_{[A, B]} = \rho_{[A]} = r < n.$$

En este caso existen un número infinito de soluciones y cuando el método de Gauss-Jordan ha sido completado habremos obtenido una matriz de coeficientes en forma Hermite, es decir cada una de las  $r$  variables habrá que-

dado en sólo una de las ecuaciones y cada una de las  $r$  ecuaciones contendrá exactamente una de estas variables. Sin embargo cada una de las otras  $(n-r)$  variables se habrán desvanecido o permanecerán en algunas de las ecuaciones. Es así que cualquier solución obtenida asignando valores arbitrarios a las  $(n-r)$  variables y después identificando los vectores correspondientes a las otras  $r$  variables sea una solución al sistema de ecuaciones.

La transferencia de estas  $(n-r)$  variables al lado derecho dejará las  $r$  variables como una función de los parámetros independientes.

Ejemplo II-23.- (caso 2 (a)) (ejemplo II-12).-

$$x_1 = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$x_2 = 1 \dots\dots\dots (2)$$

$$x_3 = 1 \dots\dots\dots (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \dots\dots\dots (A)$$

eliminando  $x_1$  de (2), (3), y (4)

$$x_1 = 1 \dots\dots\dots (1')$$

$$x_2 = 1 \dots\dots\dots (2')$$

$$x_3 = 1 \dots\dots\dots (3')$$

$$x_2 + x_3 = 0 \dots\dots\dots (4')$$

eliminando  $x_2$  de (1'), (3'), y (4')

$$x_1 = 1 \dots\dots\dots (1'')$$

$$x_2 = 1 \dots\dots\dots (2'')$$

$$x_3 = -1 \dots\dots\dots (3'')$$

$$x_3 = 1 \dots\dots\dots (4'')$$

eliminando  $x_3$  de (4'')

$$\begin{array}{rcl} 3 & x & = 1 \dots\dots\dots (1''') \\ & 1 & \\ & x & = 1 \dots\dots\dots (2''') \\ & 2 & \\ & x & = 1 \dots\dots\dots (3''') \\ & 3 & \\ 0 & = -2 & \dots\dots\dots (4''') \end{array}$$

La ecuación (4''') es la ecuación mencionada que hace que nuestro sistema lineal sea inconsistente.

Ejemplo II-24.- (caso 2 (b) ) ( ejemplo II-11.-)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = 1 \dots\dots\dots (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \dots\dots\dots (2) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \dots\dots\dots (3) \\ x_2 & = 0 \dots\dots\dots (4) \end{array}$$

eliminando  $x_1$  de (2) y (3)

$$\begin{array}{rcl} 1 & x_1 + x_2 & = 1 \dots\dots\dots (1') \\ 1 & x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \dots\dots\dots (2') \\ 2 & -2x_2 + x_3 & = 0 \dots\dots\dots (3') \\ 3 & x_3 & = 0 \dots\dots\dots (4') \\ 2 & x_2 & = 0 \dots\dots\dots (4'') \end{array}$$

eliminando  $x_2$  de (1') y (4')

$$\begin{array}{rcl} 2 & x_1 + 1/2 x_3 & = 1 \dots\dots\dots (1'') \\ 1 & x_1 - 1/2 x_3 & = 0 \dots\dots\dots (2'') \\ 2 & x_3 & = 0 \dots\dots\dots (3'') \\ 3 & 1/2 x_3 & = 0 \dots\dots\dots (4'') \end{array}$$

eliminando  $x_1$  de (1''), (2'') y (4'')

$$\begin{array}{rcl} 3 & x_1 & = 1 \\ 1 & x_1 & = 0 \\ 2 & x_1 & = 0 \\ 3 & x_1 & = 0 \\ 0 & & = 0 \text{ ecuación redundante mencionada.} \end{array}$$

Ejemplo II-25.-( Caso 2 (c) ).-

$$\begin{array}{rrrrr} 4x & + & 4x & + & 4x & & = & 0 \\ 1 & & 2 & & 3 & & & \\ 5x & + & 4x & + & 3x & - & x & = & 4 \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \\ -2x & - & 2x & - & x & + & 2x & = & -3 \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \\ 11x & + & 6x & + & 4x & + & x & = & 11 \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array}$$

La matriz aumentada será :

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{array} \right]$$

Multiplicando el renglón por  $(1/4)$  y sumando múltiplos de este renglón a las demás ecuaciones tendremos:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & 1 & 11 \end{array} \right]$$

Multiplicando el renglón 2 por  $(-1)$  y sumando múltiplos adecuados a este renglón a los demás

llegamos a:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -9 \end{array} \right]$$

Finalmente obtenemos:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como obtuvimos toda una hilera de ceros la ecuación (4) era redundante, de donde el sistema de ecuaciones correspondientes es:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + x_4 & = 1 \\ x_2 & - 3x_4 & = 2 \\ x_3 + 2x_4 & & = -3 \end{array}$$

o bien:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - x_4 \\ x_2 & = & 2 + 3x_4 \\ x_3 & = & -3 - 2x_4 \\ x_4 & = & x_4 \end{array}$$

donde  $x_4$  es el parámetro independiente.

y

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

será la solución expresada en forma vectorial.

601586



CAJA 129

601586







coordinacion de servicios academicos