



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

ANÁLISIS DE OBSERVABILIDAD Y DISEÑO DE ESQUEMAS  
CONTROLADOR – OBSERVADOR  
PARA EL MOTOR DE RELUCTANCIA CONMUTADA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
M.I. ALEJANDRA ICXIUH DE LA GUERRA CARRASCO

TUTOR PRINCIPAL  
Dr. PAUL R. MAYA ORTIZ, FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
COMITÉ TUTOR  
Dr. JAIME MORENO PÉREZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM  
Dr. GERARDO R. ESPINOSA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO. **JULIO** 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Vocal: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

1er. Suplente: Dr. Jaime A. Moreno Pérez

2o. Suplente: Dr. Ricardo Álvarez Salas

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Control, edificio Bernardo Quintana, Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, UNAM, Ciudad de México.

TUTOR DE TESIS:

---

Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México,  
al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología  
CVU/Becario: 332351/233799 y al Instituto de Inge-  
nería por otorgarme la facilidades para realizar esta  
tesis de doctorado.

# Índice General

<b>Índice General</b>	<b>i</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>2</b>
1.1 El motor de Reluctancia Conmutada . . . . .	2
1.1.1 Control de velocidad . . . . .	3
1.1.2 Control de velocidad sensorless . . . . .	4
1.2 Estado del arte . . . . .	5
1.2.1 Métodos de estimación de las variables mecánicas . . . . .	5
1.2.2 Observadores . . . . .	7
1.2.3 Observabilidad . . . . .	7
1.2.4 Síntesis del estado del arte . . . . .	8
1.3 Formulación del problema . . . . .	10
1.3.1 Hipótesis . . . . .	10
1.3.2 Problema . . . . .	11
1.3.3 Objetivos . . . . .	11
1.4 Productos del trabajo de tesis . . . . .	12
1.4.1 Aportaciones . . . . .	12
1.4.2 Artículos . . . . .	13
1.5 Organización de la tesis . . . . .	13
<b>2 Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1 Estructura del Motor de Reluctancia Conmutada . . . . .	15
2.2 Modelo matemático del MRC . . . . .	16
2.2.1 Modelo del MRC en función de los enlaces de flujo . . . . .	17
2.2.2 Modelo del MRC en función de las corrientes . . . . .	18
2.3 Operación del motor de Reluctancia Conmutada . . . . .	18
2.4 Conceptos de Observabilidad . . . . .	20
2.5 Observabilidad uniforme . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Análisis de observabilidad</b>	<b>26</b>
3.1	Análisis de observabilidad basado en la Dinámica Indistinguible . . . . .	27
3.1.1	Modelo del MRC en función de los enlaces de flujo . . . . .	27
3.1.2	Posición angular y paso polar de rotor . . . . .	29
3.1.3	Dinámica indistinguible explícita . . . . .	30
3.1.4	Propiedades de observabilidad . . . . .	32
3.1.5	Modelo del MRC en función de las corrientes . . . . .	33
3.1.6	Propiedades de observabilidad . . . . .	38
3.2	Ejemplos de trayectorias indistinguibles . . . . .	39
3.2.1	Entrada cero . . . . .	39
3.2.2	Periodicidad de las inductancias . . . . .	40
3.3	Análisis de observabilidad del MRC basado en la condición de rango . . . . .	42
3.3.1	Modelo del MRC en función de las corrientes . . . . .	42
3.3.2	Modelo del MRC en función de los enlaces de flujo . . . . .	44
3.4	Entradas Persistentes . . . . .	47
3.5	Discusión . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Control robusto sin medición de velocidad</b>	<b>52</b>
4.1	Control sin medición de velocidad . . . . .	52
4.1.1	Control de velocidad en cascada . . . . .	53
4.1.2	Lazo de control mecánico . . . . .	53
4.1.3	Lazo de control eléctrico . . . . .	57
4.2	Resultado . . . . .	59
4.3	Validación experimental . . . . .	62
4.3.1	Sintonización . . . . .	64
4.4	Discusión . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Sistemas Diferenciales Algebraicos</b>	<b>71</b>
A.1	DI del modelo del MRC en función de los enlaces de flujo . . . . .	72
A.2	DI del modelo del MRC en función de las corrientes . . . . .	73
	<b>Índice de Acrónimos</b>	<b>76</b>
	<b>Referencias</b>	<b>78</b>

# Índice de Figuras

1.1	Curva de magnetización, © Matlab, The MathWorks Inc. . . . .	5
1.2	Curva Par/Velocidad . . . . .	9
2.1	MRC de tres fases con 12/8 polos. . . . .	16
2.2	Formas de la inductancia, corriente y enlace de flujo de una fase, necesarias para producir par positivo. . . . .	19
3.1	Paso polar de rotor. . . . .	29
3.2	Inductancia $L_1$ (- - -) de una fase y su derivada $K_1$ (—) en una revolución. . . . .	40
3.3	Inductancia de una fase $L_1$ (- - -) y su derivada $K_1$ (—) en un paso polar de rotor, $\tau = \frac{2\pi}{N_r}$ . . . . .	41
3.4	Operación con la entrada $v_j(t) = v_0 + v_1 \cos(N_r \omega_r t - (j-1)\frac{2\pi}{m})$ . . . . .	47
3.5	Arriba: comparación de las salidas. Abajo: comparación de las posiciones. . . . .	49
3.6	Comparación de las posiciones. . . . .	50
4.1	Diagrama del esquema de control . . . . .	62
4.2	Experimento 1, Izq.: $x_3$ , Der.: $e_3$ GPI(—), PBC(⋯), PI2D(- - -) . . . . .	63
4.3	Experimento 2, Izq.: $x_3$ , Der.: $e_3$ GPI(—), PBC(⋯), PI2D(- - -) . . . . .	65

# Índice de Tablas

2.1	Combinaciones válidas más comunes de polos de rotor/estator. . . . .	16
4.1	Parámetros del MRC . . . . .	63
4.2	RMSE para los dos experimentos . . . . .	65

# Capítulo 1

## Introducción

En este Capítulo se presentan, en la Sección 1.1 la motivación detrás de esta Tesis de Doctorado, en la Sección 1.2 el estado del arte, en la Sección 1.3 el problema a resolver, los objetivos generales y particulares de la tesis y los conceptos básicos de la metodología utilizada, en la Sección 1.4 se enumeran las aportaciones de este trabajo y finalmente, en la Sección 1.5 se incluye la organización general del documento.

### 1.1 El motor de Reluctancia Conmutada

El avance de la electrónica de potencia en las últimas décadas del siglo XX facilitó el control de las máquinas eléctricas conmutadas, en particular, del Motor de Reluctancia Conmutada (MRC), debido a que, este motor requiere de un conmutador electrónico para excitar alternadamente las fases de estator y así generar movimiento continuo de la flecha del rotor. El alto costo de los conmutadores electrónicos y la complejidad del control del MRC, habían sido las principales causas de que se prefiriera utilizar este motor en aplicaciones de control de posición, tales como mover cargas grandes en pequeñas distancias, véase [Miller, 2001]. Aunado al desarrollo de los convertidores electrónicos, el interés en el estudio y aplicación del MRC ha aumentado en los últimos años debido a que:

- Es de construcción sencilla, ya que sólo tiene devanados en el estator, lo que implica que es de menor tamaño que otros motores para una misma potencia, [Fitzgerald et al., 2003].
- Los devanados de estator del MRC se construyen de tal forma que sean eléctrica y



magnéticamente independientes, lo que implica que este motor es robusto ante la pérdida de una fase, [Krishnan, 2001].

- Puede producir alto par a bajas velocidades, lo que elimina el uso de cajas reductoras.

Estas características convierten al MRC en una opción económica, altamente confiable y apta para aplicaciones de velocidad variable.

Asimismo, se ha mostrado que esta máquina eléctrica es una alternativa muy prometedora en aplicaciones vinculadas a las energías alternas, como en la construcción de transmisiones para vehículos eléctricos, [Debal et al., 2009, Takano et al., 2010] y en sistemas de generación eólicos, [Baker y Mueller, 2001, Nassereddine et al., 2008, Mueller, 2005, Darie et al., 2008].

En cuanto a los modelos matemáticos del MRC estos se pueden clasificar en dos tipos, los modelos que incluyen los efectos de saturación magnética en los devanados de fase, como los propuestos en Ilic'-Spong et al. [1987] y Vedagarbha et al. [1997], y el modelo de señal pequeña (donde se describe el comportamiento del motor para corrientes menores a la corriente de saturación y velocidades bajas), [Krishnan, 2001, Miller, 2001]. El modelo de señal pequeña ha sido el más utilizado en el diseño de esquemas de control de velocidad y diseño de observadores de estados para el MRC, ya que ofrece una buena relación entre la representación fiel del comportamiento del motor y la complejidad del modelo matemático.

### 1.1.1 Control de velocidad

Con el objetivo de controlar la velocidad angular de la flecha del rotor del MRC, se han empleado distintas técnicas de control. Entre los resultados clásicos (en este trabajo se hace énfasis en los diseños basados en modelo matemático), se encuentran el control por linealización exacta de Ilic'-Spong et al. [1987], el controlador de estructura variable de Buja et al. [1993], el control basado en pasividad de Espinosa-Pérez et al. [2004], entre otros. Sin embargo, estos trabajos no contemplan cambios drásticos de los parámetros o par de carga desconocido. En este sentido, en los últimos años se han propuesto esquemas robustos como el control por modos deslizantes de segundo orden de Rain et al. [2010], el control Proporcional Integral (PI) de ganancias programadas de Hannoun et al. [2011] (donde se compensa la variación del término de fuerza contraelectromotriz), el control Proporcional doble-Integral Derivativo (PI2D) de Loria et al. [2014], el control basado en pasividad presentado en Isfahani et al. [2011], los controladores difusos como los presentados en Tseng

et al. [2012] y Wang y Liu [2011]. En cuanto al control en un intervalo amplio de velocidades en Hannoun et al. [2010] se comparan dos esquemas de control de velocidad con distintos enfoques de control de par.

### 1.1.2 Control de velocidad sensorless

Además del objetivo de control de velocidad un problema de interés para máquinas eléctricas en general es prescindir del uso de sensores de posición/velocidad angular para la implantación del controlador. Este tipo de control se conoce en la literatura como control *sensorless* debido a que estos algoritmos de control sólo requieren la retroalimentación de las variables eléctricas. En esta categoría también se incluyen los controladores que usan algún método de estimación para recuperar la posición angular de rotor.

Algunas de las razones para prescindir de los sensores de las variables mecánicas son:

- No pueden ser usados en aplicaciones donde el rotor se encuentra dentro de un carcasa cerrada.
- Tampoco pueden usarse en aplicaciones donde el motor es operado en condiciones ambientales extremas o en las cuáles el motor debe estar sumergido en algún líquido como es el caso de algunas bombas.
- Además, al eliminar este tipo de sensores se reduce el tamaño del sistema de control y se requiere menos mantenimiento.

Adicionalmente, el diseño de estimadores también tiene justificación desde el punto de vista del monitoreo de fallas, donde pueden utilizarse junto con las mediciones de los sensores para obtener información redundante que pueda ayudar a registrar cambios en las variables monitoreadas.

En este trabajo adoptaremos el término operación Sin Sensores Mecánicos (SSM), tomado de Ibarra-Rojas [2005], para referirnos al modo de operación en el cuál se miden las variables eléctricas (ya sean los enlaces de flujo o las corrientes de fase en el estator) y no se miden ni la posición ni la velocidad angulares.

## 1.2 Estado del arte

### 1.2.1 Métodos de estimación de las variables mecánicas

Las técnicas de estimación en operación SSM para el MRC se basan en la suposición fundamental de que la posición angular puede obtenerse a partir del conocimiento de las características magnéticas del motor. La representación más común de ésta información para una máquina eléctrica son las curvas de magnetización del estator, mostradas en la Figura 1.1, donde cada curva está asociada a un valor de posición de rotor. Estas curvas cubren el intervalo de posición que comienza desde la posición relacionada con un polo de rotor totalmente alineado con un polo de estator (valor mayor de flujo) hasta la posición donde el polo de rotor está completamente desalineado (menor valor de flujo). Con base en esta información, que se adquiere a partir de mediciones fuera de línea, usando algún modelo de los enlaces de flujo, se puede obtener la posición del rotor.

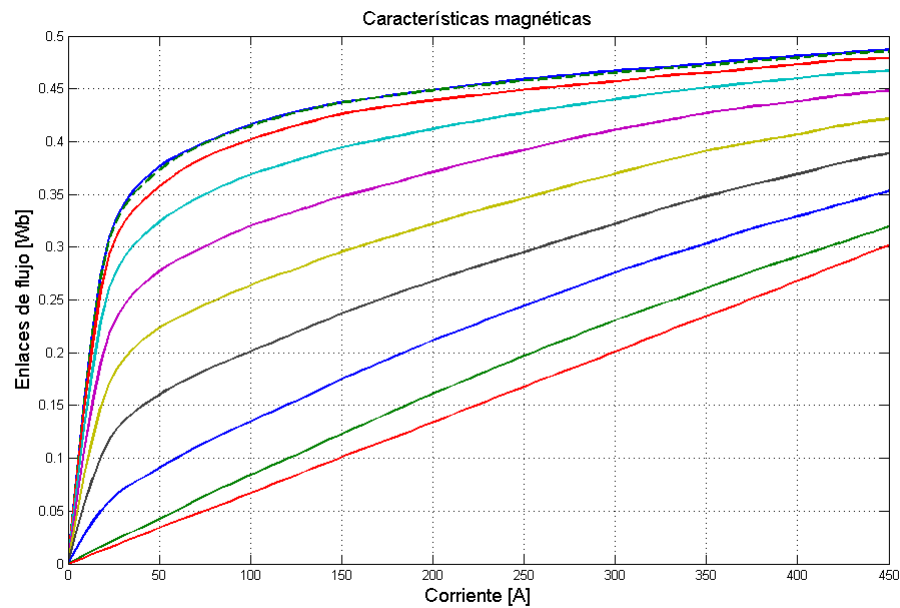


Figura 1.1: Curva de magnetización, © Matlab, The MathWorks Inc.

Las técnicas de estimación que se han propuesto, pueden clasificarse en dos tipos según Ehsani y Fahimi [2002]:

**No Invasivo** Este tipo de métodos usan el voltaje y la corriente de fase y sus derivadas,

para detectar la posición indirectamente. Entre estos métodos, se encuentran aquellos que estudian la forma de la señal de corriente para hacer un estimado de la posición, [Gallegos-Lopez et al., 1998]. También, en esta clasificación se encuentran aquellos métodos que reconstruyen los enlaces de flujo o la inductancia de fase cuando se alcanza un umbral que representa una posición de rotor. Cabe mencionar que, medir los enlaces de flujo es difícil y por eso en general son estimados. La reconstrucción de los enlaces de flujo se basa en la siguiente expresión,

$$\lambda_j(t) = \int_{t_0}^{t_1} (u_j(t) - r i_j(t)) dt, t_1 > t_0 \geq 0, \quad (1.1)$$

donde  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $m$  es el número de fases de estator,  $\lambda_j(t)$  son los enlaces de flujo de fase,  $i_j(t)$  es la corriente de fase de estator medida,  $u_j(t)$  es el voltaje de fase de estator medido,  $r$  es la resistencia del devanado de fase y se asume que  $\lambda_j(t_0) = 0$ .

También existen métodos que se basan en tablas de mediciones de los enlaces de flujo con las que se reconstruye la curva de flujo contra corriente de la Figura 1.1 para algunas posiciones de interés y los valores intermedios de posición se obtienen mediante interpolación. En esta clasificación también se incluyen los trabajos que utilizan redes neuronales y observadores de estado para reconstruir las variables no medibles.

La principal desventaja de la mayor parte de estos métodos es que la reconstrucción de los enlaces de flujo usando la expresión (1.1) se puede ver afectada por los errores debidos a la incertidumbre en el valor de la resistencia de fase  $r$  y en la condición inicial de los enlaces de flujo.

**Invasivo** En esta técnicas, distintos tipos de señales de prueba se inyectan en una fase de estator inactiva, *i.e.*, cuando no genera par. El principio de operación consiste en detectar los cambios en los enlaces de flujo o en la inductancia de fase debidos la señal inyectada. Las señales utilizadas deben ser de baja amplitud para

- minimizar la producción de par,
- evitar el efecto de saturación magnética,
- minimizar los efectos de la fuerza contraelectromotriz.

Los métodos que pertenecen a esta categoría son: inyección de señales moduladas, escaneo activo (*active probing* en inglés) y medición de la corriente de frenado, [Gao

et al., 2004, Suresh et al., 1999, Geldhof et al., 2010, Yoshida et al., 2005]. Sus principales desventajas son: a) a altas velocidades no se tiene suficiente tiempo para medir y procesar la señal de prueba y b) son muy sensibles al ruido de medición.

### 1.2.2 Observadores

Las ventajas de utilizar un observador de estados son: a) puede garantizar la convergencia del error de estimación a cero (o a un valor cercano a cero) y b) es una técnica confiable dado que se basa en un modelo matemático del sistema y en las mediciones de las señales de salida. Sin embargo, se pueden encontrar pocos ejemplos en la literatura de observadores para el MRC en operación SSM. Entre éstos, se pueden mencionar los observadores tipo–Luenberger de Lumsdaine y Lang [1990] y Elmas y Zelaya-De La Parra [1996]. Otro diseño representativo son los observadores de modos deslizantes diseñados por primera vez por McCann et al. [1997], McCann et al. [2001] y más recientemente retomados por Brandstetter y Krna [2013]. Por último, cabe mencionar la implantación de Brosse y Henneberger [1998] de un filtro de Kalman para estimar las variables mecánicas.

La característica principal de estos observadores es que la estimación de los enlaces de flujo, y por consiguiente de la posición angular, se basa en la ecuación (1.1) y en la definición de los enlaces de flujo dada por

$$\lambda_j(t) = L_{jj}(\theta)i_j(t), \quad (1.2)$$

donde  $\theta$  es la posición angular y  $L_{jj}(\theta)$  es la inductancia propia del devanado fase. Como se mencionó anteriormente, las incertidumbres paramétricas pueden afectar la estimación de los enlaces de flujo en la ecuación (1.1)<sup>1</sup>, lo que a su vez puede afectar la reconstrucción de la posición a partir de la ecuación (1.2). Cabe mencionar que en estos trabajos no suelen incluirse demostraciones de la convergencia del observador ni de la estabilidad del lazo cerrado (controlador–observador).

### 1.2.3 Observabilidad

Cuando se desea diseñar un observador de estados para un sistema no lineal, es recomendable que se realice un estudio de las propiedades de observabilidad de dicho sistema, a fin de conocer las condiciones en que este método puede garantizar una buena estimación de

---

<sup>1</sup>Sin embargo, en McCann et al. [1997] se asegura que el observador basado en modos deslizantes es robusto ante los errores en la estimación de los enlaces de flujo.

las variables no medibles. En este sentido la literatura sobre las propiedades de observabilidad de máquinas eléctricas se ha centrado en el estudio del Motor de Inducción (MI), y del Motor de Imán Permanente (MIP), con dos enfoques principales: el uso de la condición de rango de observabilidad [Hermann y Krener, 1977] y el análisis de la dinámica indistinguible, [Moreno et al., 2002]. Usando el primer método, en Zaltni et al. [2009] se concluye que el Motor de Imán Permanente con imanes internos en el rotor (MIPS) es no observable a velocidad cero, mientras que el Motor de Imán Permanente con imanes superficiales en el rotor (MIPI) es local y débilmente observable para todo el intervalo de velocidades incluyendo velocidad cero. Del mismo modo, en Canudas de Wit et al. [2000] se presenta un análisis de observabilidad local, donde se muestra que una condición suficiente para perder observabilidad en el MI, es que la entrada tenga frecuencia cero en la operación a velocidad constante. Los últimos análisis de observabilidad del MI, véase [Vaclavek et al., 2013, Koteich et al., 2015], extienden los resultados de Canudas de Wit et al. [2000] incluyendo la condición de que las corrientes deben ser distintas de cero para que el motor sea local y débilmente observable.

Por otro lado, a partir del análisis de la dinámica indistinguible del MI en operación SSM, en Ibarra-Rojas et al. [2004] se demuestra que este motor no es observable ni detectable, sin embargo en operación a velocidad constante con par de carga constante el motor es detectable, *i.e.*, se puede diseñar un observador para esta condición de operación. Además, en este trabajo se determinan todas las entradas que hacen que el MI sea no observable, conocidas como *bad inputs* o *singular inputs*, de las que se hablará en detalle en los siguientes Capítulos.

#### 1.2.4 Síntesis del estado del arte

En resumen, las técnicas de estimación que se han desarrollado hasta el momento, basadas o no en modelo, presentan las siguientes características:

- No se ha diseñado un método de estimación de las variables mecánicas que asegure convergencia en todo el intervalo de velocidades. Lo que ha motivado el diseño de técnicas de estimación para distintos intervalos de velocidad: velocidad baja<sup>2</sup> en Komatsuzaki et al. [2006], velocidades altas en Suresh et al. [1999] y funcionamiento en los cuatro cuadrantes en Fahimi et al. [2005], Hossain et al. [2003] y Uma y Jeevanandham [2013]. Estos últimos métodos usan distintos algoritmos para cada modo

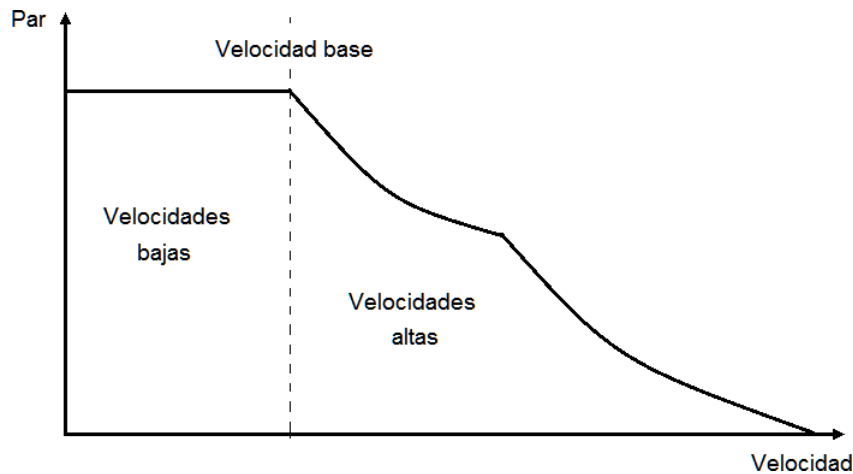


Figura 1.2: Curva Par/Velocidad

de operación que son activados y desactivados usando varios enfoques.

- En los métodos basados en el modelo de señal pequeña se ha reportado pérdida de desempeño a bajas velocidades en los trabajos de Ehsani y Fahimi [2002], Fahimi et al. [2005], Mese et al. [2002] y Hossain et al. [2003].
- Además, se requiere conocer la posición inicial del rotor para arrancar apropiadamente el motor, [Miller, 2001, Krishnan, 2001]. Esto ha hecho necesario diseñar técnicas para velocidad cero como las reportadas en Bamba et al. [2007], Komatsuzaki et al. [2008] y Ahmed et al. [2009].
- En cuanto al análisis de observabilidad, se tiene el antecedente presentado en la Tesis de Maestría precedente, [De La Guerra, 2011], donde se analiza la observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC usando la condición de rango de observabilidad.
- No se ha presentado un esquema de control SSM donde se garantice la estabilidad del lazo cerrado (de la conexión observador-controlador).

<sup>2</sup>Los términos baja, media y alta velocidad se definen como intervalos de velocidad de cero a 1/3 de la velocidad base, de 1/3 de la velocidad base a velocidad base y más allá de la velocidad base respectivamente, ver Figura 1.2.

### 1.3 Formulación del problema

El problema a resolver en esta Tesis está relacionado con el problema de observabilidad definido a continuación:

**Problema de observabilidad, Besançon [2007]**

*Dado un sistema no lineal*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t)).\end{aligned}$$

donde  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in U \subset \mathbb{R}^p$  y  $y \in Y \subset \mathbb{R}^q$ ,  $f$  y  $g$  son  $C^\infty$ . Se asume que el sistema es completo.

Encontrar un estimado  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  de  $\mathbf{x}(t)$  a partir del conocimiento de  $\mathbf{u}(\tau)$ ,  $\mathbf{y}(\tau)$  en  $0 \leq \tau \leq t$ .

A fin de obtener un estimado  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  se puede utilizar un sistema dinámico auxiliar conocido como observador de la forma

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + k(t, h(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{y}(t)) \quad \text{con} \quad k(t, 0) = 0, \quad (1.3)$$

donde  $h(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{y}(t)$  es el error de medida.

A partir del problema de observabilidad y el análisis de la literatura se pueden plantear las siguientes:

#### 1.3.1 Hipótesis

- El modelo de señal pequeña representa la operación a velocidades bajas del MRC.
- El modelo de señal pequeña del MRC tiene problemas de observabilidad a bajas velocidades, incluyendo velocidad cero, en operación SSM.
- Las condiciones derivadas del análisis de observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC en operación SSM pueden ser de utilidad para definir las condiciones bajo las cuales se puede encontrar un estimado de las variables mecánicas.

A partir de las hipótesis se plantea el problema a resolver en esta tesis:



### 1.3.2 Problema

*Dado el modelo de señal pequeña del MRC en operación SSM definir las condiciones bajo las cuales es posible encontrar un estimado de la variables mecánicas a partir del conocimiento de  $u(\tau)$ ,  $y(\tau)$  en  $0 \leq \tau \leq t$ .*

### 1.3.3 Objetivos

#### Objetivos generales

1. Definir las condiciones bajo las cuales es posible encontrar un estimado de la variables mecánicas del MRC en operación SSM a partir del conocimiento de las entradas y salidas.
2. Diseñar, de ser posible, un esquema de control para el MRC basado en un observador de estados a partir de los resultados de observabilidad obtenidos.

Para poder plantear los objetivos específicos se presenta la metodología que se utilizará para realizar el análisis de observabilidad del MRC en operación SSM.

#### Metodología

En este trabajo se utilizan los métodos de investigación causal-comparativo/quasi experimental y experimental, [Picciano, 2004]. En el método causal-comparativo, se establecen las relaciones de causa-efecto entre las variables bajo estudio. A diferencia del método experimental, la variable independiente es identificada, más no manipulada, mientras se registran los efectos de ésta en la variable dependiente.

Para identificar las relaciones de causa-efecto, (en este caso se quiere saber si se pueden reconstruir las variables mecánicas, usando el modelo de señal pequeña del MRC, a partir de la medición de la entradas y salidas) se utilizará el método de análisis de observabilidad presentado en Moreno et al. [2002]. Este método, se basa en el concepto de *trayectorias indistinguibles i.e.*, trayectorias internas de un sistema que son diferentes bajo el mismo mapeo entrada-salida. Una vez establecidas las condiciones bajo las cuáles se tienen trayectorias indistinguibles en operación SSM, es posible definir la forma de observabilidad del modelo del MRC bajo estudio.

### Objetivos específicos

- Obtener la Dinámica Indistinguible (DI) del modelo de señal pequeña del MRC en operación SSM. Se definen dos tipos de operación SSM, a) cuando las salidas son los enlaces de flujo, b) cuando las salidas son las corrientes de fase.
- Definir las condiciones, a partir del análisis de la DI, bajo las cuales se puede encontrar un estimado de las variables mecánicas en los dos casos.
- Realizar un análisis de observabilidad basado en la condición de rango de observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC en operación SSM.
- Diseñar un observador de estados del MRC con base en las condiciones derivadas del análisis de observabilidad. Validar el observador propuesto mediante simulaciones numéricas y/o evaluaciones experimentales. Integrar el observador diseñado a un esquema de control de velocidad y demostrar la estabilidad en lazo cerrado de la conexión observador–controlador.

## 1.4 Productos del trabajo de tesis

### 1.4.1 Aportaciones

- Se presentan los resultados del primer análisis de las propiedades de observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC en operación SSM, usando la metodología presentada en Moreno et al. [2002].
- Además, se define la forma general que tienen las entradas singulares para los dos tipos de operación SSM definidos.
- Se presentan también, los resultados del primer análisis de observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC usando el criterio de rango cuando se considera el efecto de las entradas.
- Asimismo, se incluyen el diseño y la validación experimental de un esquema de control sin medición de velocidad del MRC robusto ante cambios en el par de carga.

### 1.4.2 Artículos

#### Artículo de Revista:

- A. De La Guerra, Marco A. Arteaga Pérez, Alejandro Gutiérrez-Giles, Paul Maya-Ortiz, *Speed-Sensorless Control of SR Motors based on GPI observers*, Control Engineering Practice, Volumen 46, Enero 2016, Páginas 115-128, ISSN 0967-0661.

#### Artículos de Congreso

- A. De La Guerra, Paul Maya-Ortiz, Gerardo Espinosa-Pérez *Global Observability analysis of the SR Motor under sensorless operation*, 54th IEEE Conference on Decision and Control, 15-18 de Diciembre 2015, Osaka, Japón.
- A. De La Guerra, Marco A. Arteaga Pérez, Alejandro Gutiérrez-Giles, Paul Maya-Ortiz, *Control basado en observadores GPI del Motor de Reluctancia Conmutada*, XVI Conferencia Latinoamericana de Control Automático, 14-17 Octubre 2014, Cancún, México.
- A. De La Guerra, Alejandro Gutiérrez-Giles, Marco A. Arteaga Pérez, Paul Maya-Ortiz, *Control de velocidad para el motor de Reluctancia Conmutada con par de carga desconocido*, Congreso AMCA 2013, Octubre 2013, Ensenada, Baja California, México.
- Paul Maya-Ortiz, A. De La Guerra, *Control sin medición de velocidad del MRC*, Congreso AMCA 2013, Octubre 2013, Ensenada, Baja California, México.
- Paul Maya-Ortiz, I. Pacheco-Tejada, A. De La Guerra, *Análisis de Observabilidad y Diseño de Observador para el Motor de Reluctancia Conmutada*, XV Conferencia Latinoamericana de Control Automático, 23-26 Octubre 2012, Lima, Perú.

## 1.5 Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se introducen el modelo matemático del MRC y los conceptos de observabilidad que fundamentan este trabajo de tesis. En el Capítulo 3 se presenta el resultado principal: el análisis de observabilidad del MRC en operación SSM. En seguida, en el Capítulo 4 se presenta un controlador sin medición de velocidad para el MRC junto con su

validación experimental. Después, en el Capítulo 5 se exponen las conclusiones del trabajo de tesis. Por último, en el Apéndice A se introduce la definición de sistema algebraico-diferencial que se utiliza en el Capítulo 3.

## Capítulo 2

# Preliminares

En este Capítulo se incluyen, en la Sección 2.1 la estructura del Motor de Reluctancia Conmutada, en la Sección 2.2 la representación matemática del MRC que se utilizará a lo largo de la tesis, en la Sección 2.3 el funcionamiento del motor, mientras, en las Secciones 2.4 y 2.5 se hace una compilación de los conceptos de observabilidad que serán empleados en el Capítulo 3.

### 2.1 Estructura del Motor de Reluctancia Conmutada

El MRC, como se muestra en la Figura 4.1, tiene polos salientes en el rotor y el estator, el número de polos de estator es  $N_s$  y el número de polos de rotor es  $N_r$ . Es importante notar que sólo hay devanados en el estator y que el rotor está hecho únicamente de laminaciones de acero.

Las fases del estator se forman al conectar dos o más devanados en serie, por ejemplo, en la Figura 2.1 la fase A está formada por la conexión en serie de cuatro devanados. Además, los devanados son del tipo concentrado lo que disminuye la aparición de inductancias mutuas entre las fases del estator.

La relación  $N_s/N_r$ , junto con el número de fases  $m$ , se usa comúnmente para identificar al motor en cuestión. Adicionalmente, se asume que  $N_s - N_r = 2n$  con  $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ , alternativamente  $N_r - N_s = 2n$ , para evitar las posiciones de par-cero, *i.e.*, dos o más fases de estator se encuentran en la posición de máxima o mínima inductancia simultáneamente, [Miller, 2001]. Tomando en consideración todo lo anterior, se tiene que existen combinaciones finitas para los números de polos de estator y rotor, entre las configuraciones más

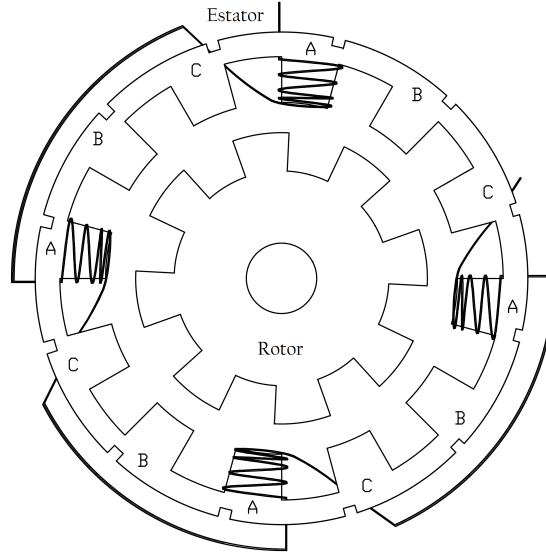


Figura 2.1: MRC de tres fases con 12/8 polos.

comunes se encuentran las recopiladas en la Tabla 2.1.

Número de fases ( $m$ )	$N_s$	$N_r$
3	6	4
3	6	8
3	12	8
4	8	6

Table 2.1: Combinaciones válidas más comunes de polos de rotor/estator.

## 2.2 Modelo matemático del MRC

Las suposiciones en las que se basa el modelo de señal pequeña del MRC son las siguientes, véase [Krishnan, 2001]:

- i) Las inductancias mutuas de los devanados se consideran despreciables *i.e.*, las fases están desacopladas eléctrica y magnéticamente.
- ii) La inductancia propia de los devanados se define como

$$L_{jj}(\theta) = l_0 - l_1 \cos \left( N_r \theta - (j - 1) \frac{2\pi}{m} \right), \quad (2.1)$$

donde  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , con  $m$  el número de fases de estator,  $\theta \in \mathbb{R}$  es la posición angular,  $l_0 > l_1 > 0$  son los coeficientes estáticos de la inductancia.

iii) El encadenamiento de flujo  $\lambda_j$  por fase se define como

$$\lambda_j = L_{jj}(\theta) i_j, \quad (2.2)$$

donde  $i_j$  es la corriente de fase, que se asume menor que la corriente de saturación magnética.

**Comentario 1.** *Es importante hacer notar que la Suposición ii), no incluye el efecto de la corriente de fase de estator en las inductancias de fase, mientras la Suposición iii) implica que el modelo no refleja los efectos de la saturación magnética mostrados en la Figuras 1.1 y 1.2.*

### 2.2.1 Modelo del MRC en función de los enlaces de flujo

Por lo tanto, el modelo matemático de un MRC de  $m$  fases está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{L}^{-1}(\theta)\boldsymbol{\lambda} \quad (2.3a)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.3b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J}\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{H}(\theta)\boldsymbol{\lambda} - \frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t), \quad (2.3c)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de enlaces de flujo,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de voltajes de fase,  $\tau_L(t) \in \mathbb{R}$  es el par de carga,  $\theta \in \mathbb{R}$  es la posición angular del eje del rotor,  $\omega \in \mathbb{R}$  es la velocidad angular,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$  es la matriz de resistencias de los devanados de fase con  $r_{ij} = 0$  si  $i \neq j \forall i, j \in 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $J \in \mathbb{R}_+$  es la inercia del rotor y  $d \in \mathbb{R}_+$  es el coeficiente de fricción viscosa.  $\mathbf{L}(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal que contiene las inductancias de fase definidas en (2.1). De igual forma,  $\mathbf{H}(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal de la forma

$$H_{jj}(\theta) = \frac{C_{jj}(\theta)}{L_{jj}^2(\theta)},$$

donde

$$C_{jj}(\theta) = N_r l_1 \sin \left( N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{m} \right). \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Modelo del MRC en función de las corrientes

Si se obtiene la primera derivada con respecto del tiempo de los enlaces de flujo definidos en (2.2), se obtiene el modelo de señal pequeña de corrientes

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{L}^{-1}(\theta) (\mathbf{u} - \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i}) \quad (2.5a)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.5b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L(t), \quad (2.5c)$$

donde  $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de corrientes de fase y  $\mathbf{C}(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal cuyos elementos están definidos por (2.4).

**Propiedad 1.** *La matriz de inductancias es simétrica y positiva definida,  $\mathbf{L}(\theta) = \mathbf{L}(\theta)^\top > 0$ .*

La matriz  $\mathbf{C}(\theta)$  pierde rango cuando las funciones  $C_{jj}(\theta) = 0$ . Además, como no existen posiciones de par-cero, *i.e.*, las columnas de la matriz  $\mathbf{C}(\theta)$  no pueden hacerse cero simultáneamente. Por lo tanto se puede definir la siguiente:

**Propiedad 2.** *La matriz  $\mathbf{C}(\theta)$  pierde rango cuando la posición es igual a  $\theta = k \frac{\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m}$   $j = 1, 2, 3, \dots, m, k \in \mathbb{Z}$ .*

**Comentario 2.** *Los modelos matemáticos del MRC, no pueden ser transformados a un marco de referencia estacionario de dos ejes equivalente, es decir, no son Blondel-Park transformables. Esto implica que no se puede eliminar la dependencia de las funciones de inductancia,  $L_{jj}(\theta), C_{jj}(\theta), H_{jj}(\theta)$ , de la posición angular,  $\theta$ , al contrario del caso de los motores de inducción y de imán permanente, donde el análisis de observabilidad se hace con modelos previamente transformados, lo que simplifica en gran manera las expresiones de la dinámica indistinguible y/o del mapeo de observabilidad.  $\triangle$*

## 2.3 Operacion del motor de Reluctancia Conmutada

En un MRC el par es producido por la tendencia del rotor a moverse a la posición donde la inductancia del estator es máxima, es decir, la reluctancia es mínima. El movimiento del rotor de un motor de reluctancia es producido por el mismo fenómeno que genera movimiento en una pieza ferromagnética al acercarla a un imán. En el caso del MRC, los polos del rotor son las piezas ferromagnéticas que son atraídas por el campo magnético generado por la corriente circulando en los devanados del estator.



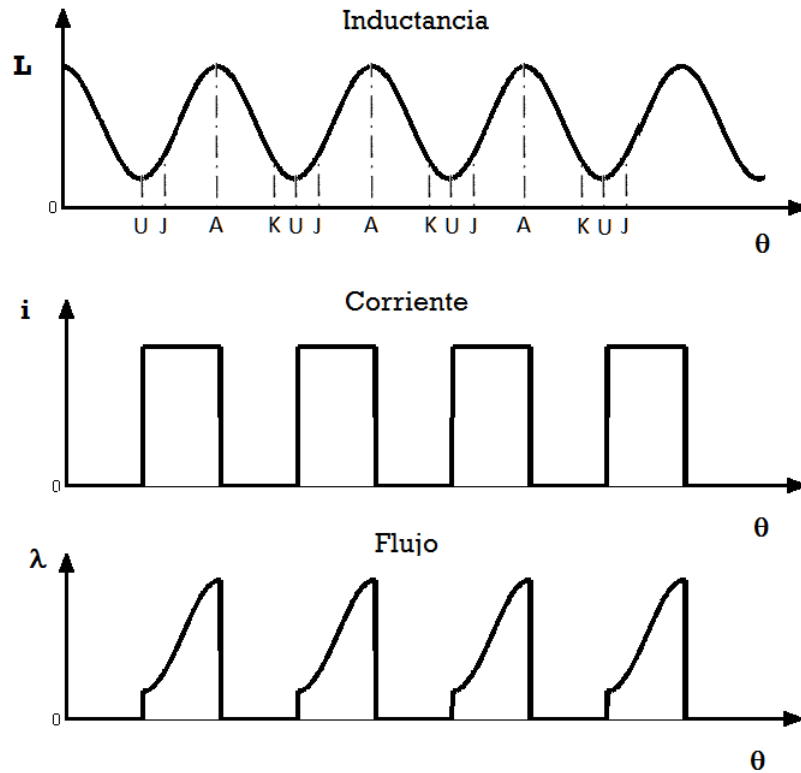


Figura 2.2: Formas de la inductancia, corriente y enlace de flujo de una fase, necesarias para producir par positivo.

Por lo tanto, para producir movimiento constante del rotor se deben encender las fases del estator alternadamente durante el intervalo creciente o decreciente de la inductancia de cada fase. De igual forma para obtener par en un mismo sentido se debe excitar cada fase durante un tiempo específico, correspondiente a los valores de inductancia entre un mínimo y un máximo, esto es, cuando la inductancia crece, intervalo  $JA$ , o cuando la inductancia decrece, intervalo  $AK$ , ver Figura 2.2. Dicho de otra manera, las fases deben activarse cuando las funciones  $C_{jj}(\theta) = 0$ . Si se excita una fase en un intervalo de posiciones correspondiente al periodo de operación de la fase siguiente, se producirá par en sentido contrario.

En consecuencia, para obtener par constante es necesario encender las fases en una secuencia donde los pares producidos por cada fase se sumen, evitando generar par en sentido contrario, pero maximizando el tiempo que una fase está encendida. Con respecto a la geometría de la máquina eléctrica, un parámetro que da una indicación de los intervalos de

operación de una fase dada es la zona de par absoluto,  $\tau_a$ , que se define como el intervalo en el cual una fase puede producir par distinto de cero en una dirección. Para un MRC con  $N_r$  polos de rotor la zona de par máximo es  $\tau_{max} = \frac{\pi}{N_r}$ .

Para el modelo de señal pequeña del MRC, el par promedio producido, [Miller, 2001], se obtiene al integrar el término

$$T_e \triangleq \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i}$$

a lo largo de un ciclo *i.e.*,  $\tau_r = \frac{2\pi}{N_r}$ , conocido como paso polar de rotor que define la distancia *mecánica* o angular entre los polos de rotor. De manera que, la matriz  $\mathbf{C}(\theta)$  agrupa los términos que determinan la constante de par del MRC dada en  $[Nm/A^2]$ . Es importante enfatizar que este término no es constante y que varía periódicamente en función de la posición, lo que implica que no se puede definir un circuito eléctrico equivalente en estado estacionario en el mismo sentido que por ejemplo, para un Motor de Corriente Directa (MCD).

Como se verá más adelante, el paso polar de rotor y los valores de la posición para los cuales las funciones  $C_{jj}(\theta)$  se hacen cero, juegan un papel importante en la observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC.

## 2.4 Conceptos de Observabilidad

En esta Sección se presentan los conceptos que servirán como guía para el análisis de observabilidad del siguiente Capítulo.

Dado un sistema no lineal de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in U \subset \mathbb{R}^p$  y  $y \in Y \subset \mathbb{R}^q$ ,  $f$  y  $g$  son  $C^\infty$ . Se asume que el sistema es completo. El objetivo es resolver el problema de observabilidad definido como:

*Encontrar un estimado  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  de  $\mathbf{x}(t)$  a partir del conocimiento de  $\mathbf{u}(\tau)$ ,  $\mathbf{y}(\tau)$  en  $0 \leq \tau \leq t$ .*

A fin de resolver esta cuestión, se utilizarán los conceptos de indistinguibilidad y observabilidad de sistema no lineales, cuyas definiciones, tomadas de Besançon [2007], se presentan a continuación:

**Definición 1.**

**Indistinguibilidad** Un par  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  es indistinguible para un sistema (2.6) si:

$$\forall u \in U, \forall t \geq 0, h(t, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}^0) = h(t, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}^1)$$

Un estado  $\mathbf{x}$  es indistinguible de  $\mathbf{x}^0$  si el par  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$  es indistinguible.

Es decir, dos estados  $\mathbf{x}^0$  y  $\mathbf{x}^1$  son distinguibles para una entrada dada  $\mathbf{u}(\cdot)$  si las salidas  $h(t, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}^0)$  y  $h(t, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}^1)$  son distintas para algún  $t \geq 0$ .

**Definición 2.**

**Observabilidad [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ]** Un sistema (2.6) es observable [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] si no admite ningún par indistinguible [ningún estado indistinguible de  $\mathbf{x}^0$ ] para  $\forall t \in [0, T), T > 0$ .

Un sistema como el descrito por (2.6) será observable si todo par  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1$  puede ser distinguido por alguna entrada  $\mathbf{u}(\cdot)$  para  $\forall t \in [0, T), T > 0$ . Lo que implica que la propiedad de observabilidad en general depende de la entrada.

**Ejemplo 1.** Considerese el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= \sin(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde la salida  $y$  no puede distinguir entre  $x^0$  y  $x^0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , por lo tanto el sistema es no observable. Nótese, sin embargo, que es posible distinguir estados en el intervalo abierto  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Para definir observabilidad entre estados vecinos se introducen las siguientes definiciones

**Definición 3.**

**Observabilidad débil [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ]** Un sistema (2.6) es débilmente observable [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] si existe una vecindad  $U_x$  para cualquier estado  $\mathbf{x}$  [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] tal que no existen estados indistinguibles de  $\mathbf{x}$  [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] en  $U_x$ .

**Ejemplo 2.** Considerese de nuevo el sistema (2.7), si se restringe el estado al conjunto  $U_x = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ , entonces no existen estados indistinguibles de  $x$  en  $U_x$ . Por lo tanto el sistema es débilmente observable.

**Definición 4.**

**Observabilidad local y débil [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ]** Un sistema (2.6) es local y débilmente observable [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] si existe una vecindad  $U_x$  para cualquier estado  $\mathbf{x}$  [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] tal que para cualquier vecindad  $V_x$  de  $\mathbf{x}$  [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] contenida en  $U_x$ , no existen estados indistinguibles de  $\mathbf{x}$  [con resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] en  $V_x$  cuando se consideran intervalos de tiempo,  $\forall t \in [0, T), T > 0$ , en los que las trayectorias permanecen en  $V_x$ .

Esta última definición está relacionada con la condición de rango de observabilidad que está basada en los siguientes conceptos:

**Definición 5.**

**Espacio de observación** El espacio de observación,  $\mathcal{O}(h)$ , de un sistema no lineal (2.6), se define como el espacio lineal más pequeño de funciones  $C^\infty$  que contiene los componentes de  $h$  y cerrada con respecto a la diferenciación de Lie a lo largo del campo vectorial  $f_u \triangleq f(\cdot, u)$  para toda  $u \in \mathbb{R}^p$  constante.

**Definición 6.**

**Condición de rango de observabilidad [resp. a  $\mathbf{x}^0$ ]** Un sistema no lineal (2.6) satisface la condición de rango de observabilidad [resp. a  $\mathbf{x}^0$ ] si:

$$\forall \mathbf{x}, \quad \dim(d\mathcal{O}(h)|_{\mathbf{x}}) = n \text{ [resp. a } \dim(d\mathcal{O}(h)|_{\mathbf{x}^0}) = n]$$

donde  $d\mathcal{O}(h)|_{\mathbf{x}}$  denota las diferenciales de  $\mathcal{O}(h)$ .

La relación de esta condición con las definiciones de observabilidad anteriores se define en el siguiente:

**Teorema 2.4.1.** Si el sistema (2.6) satisface la condición de rango de observabilidad en  $\mathbf{x}^0$ , entonces es local y débilmente observable en  $\mathbf{x}^0$ . Más aún, si el sistema (2.6) satisface la condición de rango de observabilidad, entonces es local y débilmente observable. Inversamente, un sistema (2.6) local y débilmente observable satisface la condición de rango de observabilidad en un conjunto abierto y denso de  $X$ .

**Ejemplo 3.** Considérese de nuevo el sistema (2.7), donde las diferenciales del espacio de observación son

$$d\mathcal{O}(h) = \text{span}[\cos(x)dx, \sin(x)dx] \tag{2.8}$$

por lo tanto  $\dim(d\mathcal{O}(h)) = 1$ , lo que implica que el sistema es local y débilmente observable para todo  $\mathbf{x}^0$ . Es decir, se puede distinguir entre estados vecinos dentro de un conjunto  $U_x \subset X \subset \mathbb{R}$  para  $\forall t \in [0, T), T > 0$ .

Como se mencionó en el Capítulo anterior, el estimado del estado se puede reconstruir con un observador, cuya definición presenta a continuación:

**Definición 7.**

**Observador** Un observador de (2.6) es un sistema auxiliar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \hat{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)), \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}(t) &= \hat{h}(\mathbf{X}(t)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

tal que

- i)  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t), \forall t \geq 0$ ;
- ii)  $\|e\| = \|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow \infty$ ;

Si se cumple ii) para todo  $\hat{\mathbf{x}}(0), \mathbf{x}(0)$ , el observador es global.

Si se cumple ii) con convergencia exponencial, el observador es exponencial.

Si se cumple ii) y la convergencia puede sintonizarse, el observador es sintonizable.

El tipo de observador de estados que puede diseñarse para un sistema dado dependerá no solo de las propiedades de observabilidad del sistema en cuestión, también de la forma específica del modelo *e.g.*, si es un sistema afín en las entradas, si es un sistema variante o invariante en el tiempo, entre otros.

Es interesante mencionar que se puede diseñar un observador no sintonizable si el sistema no lineal es no observable, pero cumple con la propiedad de detectabilidad, definida a continuación:

**Definición 8.**

**Detectabilidad** El sistema (2.6) es detectable si para todo par  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)$  y toda  $u(\cdot)$  se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \mathbf{x}^0, u(\cdot)) - x(t, \mathbf{x}^1, u(\cdot))\| = 0.$$

donde  $x(t, \mathbf{x}^0, u(\cdot))$  denota la trayectoria debida a  $\mathbf{x}^0$  y  $u(\cdot)$ .

## 2.5 Observabilidad uniforme

Además, pueden existir entradas que influyan en la observabilidad de los sistemas no lineales. Por lo cual, se definen dos tipos de entradas, a) entradas universales, que son aquellas que permiten distinguir entre trayectorias generadas por distintas condiciones iniciales y b) entradas singulares, que no permiten distinguir entre estas trayectorias. La definición formal de estas entradas, y la forma de observabilidad asociada, se presentan a continuación.

### Definición 9.

**Entradas universales** Una entrada  $u(\cdot)$  es universal para un sistema no lineal (2.6), si  $\forall x^0 \neq x^1$ , se satisface que  $y(t, x^0, u(\cdot)) \neq y(t, x^1, u(\cdot))$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ . Una entrada  $u_s(\cdot)$  es singular si no es universal.

### Definición 10.

**Sistemas uniformemente observables** El sistema no lineal (2.6) será uniformemente observable si todas sus entradas son universales. Un sistema será uniformemente observable de manera local, si todas sus entradas son universales en  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ .

**Ejemplo 4.** Un sistema no lineal será no uniformemente observable, si tiene al menos una entrada singular. Por ejemplo, para el sistema, [Besançon, 1999]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{2.10}$$

la entrada  $u \equiv 0$  i.e.,  $u$  idénticamente cero, hace indistinguible todo par  $(x_1, x_2)^\top \neq (x_1, \bar{x}_2)^\top$ . Por lo tanto, esta entrada es singular y el sistema es no uniformemente observable

En este caso, los observadores que se pueden diseñar para el sistema (2.10) serán, en general, dependientes de la entrada.

**Comentario 3.** Si el sistema es uniformemente observable, quiere decir que se pueden diseñar para él observadores que sean independientes de la entrada. Esto es una condición necesaria para el diseño de observadores de alta ganancia, observadores caracterizados porque la ganancia es independiente de la entrada, para sistemas no lineales. [Fossard y Normand-Cyrot, 2012]. △

**Comentario 4.** *En particular, para los sistemas lineales invariantes en el tiempo las distintas formas de observabilidad son equivalentes y por lo tanto siempre se pueden diseñar observadores independientes de la entrada, [Hermann y Krener, 1977].*  $\triangle$

En el siguiente Capítulo se hace el análisis de observabilidad del modelo del Motor de Reluctancia Conmutada presentado en la Sección 2.2, en los dos tipos de operación SSM, a) cuando se miden los enlaces de flujo y b) cuando se miden las corrientes de fase, con base en el análisis de la dinámica indistinguible y usando la condición de rango de observabilidad.

## Capítulo 3

# Análisis de observabilidad

En este Capítulo se hace el análisis de observabilidad del modelo matemático del MRC presentado en el Capítulo 2. En todos los casos se asume que los parámetros del modelo son conocidos y que sólo se miden las variables eléctricas.

En la Sección 3.1, se presenta el análisis de observabilidad de los dos modos de operación SSM, basado en la metodología de Moreno et al. [2002], cuyo primer paso es definir la dinámica indistinguible, que es un Sistema de Ecuaciones Algebraico–Diferencial (SAD). Posteriormente, se estudian las soluciones de este SAD para determinar la propiedades de observabilidad del modelo matemático estudiado, usando los conceptos de observabilidad de la Sección 2.4. Ejemplos de algunas trayectorias indistinguibles se presentan en la Sección 3.2.

En la Sección 3.3, se utiliza el criterio del rango de observabilidad para determinar las propiedades de observabilidad del modelo del MRC en los dos tipos de operación SSM.

A continuación, en la Sección 3.4 se presenta el análisis de las propiedades de una entrada senoidal dependiente del tiempo, para el modelo del MRC en términos de las corrientes. Por último, en la Sección 3.5 se hace una breve discusión de los resultados del Capítulo.



### 3.1 Análisis de observabilidad basado en la Dinámica Indistinguible

#### 3.1.1 Modelo del MRC en función de los enlaces de flujo

La siguiente Proposición presenta el sistema de ecuaciones que describe la dinámica indistinguible DI del modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo en operación SSM.

#### Dinámica indistinguible

**Proposición 1.** *Dado el modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo (2.3) en operación SSM (se miden los enlaces de flujo  $\lambda$ ), supóngase que se conocen el vector de entradas  $\mathbf{u}$ , el par de carga,  $\tau_L(t)$  y los parámetros del modelo. Considérese el siguiente SAD*

$$\dot{\lambda} = \mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{L}^{-1}(\theta)\lambda \quad (3.1a)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3.1b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J}\lambda^\top \mathbf{H}(\theta)\lambda - \frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t) \quad (3.1c)$$

$$\dot{e}_\theta = e_\omega \quad (3.1d)$$

$$\dot{e}_\omega = \frac{1}{2J}\lambda^\top (\mathbf{H}(e_\theta, \theta) - \mathbf{H}(\theta))\lambda - \frac{d}{J}e_\omega \quad (3.1e)$$

$$0 = \mathbf{R}\mathbf{N}(e_\theta, \theta)\lambda, \quad (3.1f)$$

donde

$$e_\omega = \omega_a - \omega_b$$

$$e_\theta = \theta_a - \theta_b$$

$$\mathbf{N}(e_\theta, \theta) = \mathbf{L}^{-1}(e_\theta + \theta) - \mathbf{L}^{-1}(\theta),$$

y  $\theta_a, \theta_b, \omega_a, \omega_b$  son condiciones iniciales arbitrarias de posición y velocidad. Las soluciones (si existen) del sistema de ecuaciones algebraico diferenciales (3.1) corresponden con las trayectorias indistinguibles (si existen) del modelo del MRC (2.3) en operación SSM para  $\forall t \in [0, T], T > 0$ .

**Demostración 1.** *Considérense dos MRC idénticos, con las mismas entradas  $u = [\mathbf{u}, \tau_L]^\top$ ,*

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}}_a &= \mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{L}^{-1}(\theta_a)\boldsymbol{\lambda}_a \\ \dot{\theta}_a &= \omega_a \\ \dot{\omega}_a &= \frac{1}{2J}\boldsymbol{\lambda}_a^\top \mathbf{H}(\theta_a)\boldsymbol{\lambda}_a - \frac{d}{J}\omega_a - \frac{1}{J}\tau_L(t),\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}}_b &= \mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{L}^{-1}(\theta_b)\boldsymbol{\lambda}_b \\ \dot{\theta}_b &= \omega_b \\ \dot{\omega}_b &= \frac{1}{2J}\boldsymbol{\lambda}_b^\top \mathbf{H}(\theta_b)\boldsymbol{\lambda}_b - \frac{d}{J}\omega_b - \frac{1}{J}\tau_L(t),\end{aligned}\quad (3.3)$$

si se definen los errores de desviación

$$\begin{aligned}e_\omega &\triangleq \omega_a - \omega_b \\ e_\theta &\triangleq \theta_a - \theta_b \\ \mathbf{e}_\lambda &\triangleq \boldsymbol{\lambda}_a - \boldsymbol{\lambda}_b\end{aligned}$$

la comparación entre los sistemas (3.2) y (3.3) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{e}_\theta &= e_\omega \\ \dot{e}_\omega &= \frac{1}{2J}(\boldsymbol{\lambda}_a^\top \mathbf{H}(\theta_a)\boldsymbol{\lambda}_a - \boldsymbol{\lambda}_b^\top \mathbf{H}(\theta_b)\boldsymbol{\lambda}_b) - \frac{d}{J}e_\omega \\ \dot{\mathbf{e}}_\lambda &= \mathbf{R}(\mathbf{L}^{-1}(\theta_a)\boldsymbol{\lambda}_a - \mathbf{L}^{-1}(\theta_b)\boldsymbol{\lambda}_b).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Sustituyendo la condición de indistinguibilidad, i.e.,  $\mathbf{e}_\lambda$  y todas sus derivadas son iguales a cero para  $\forall t \in [0, T], T > 0$ , en las ecuaciones (3.4) y usando las definiciones del error para eliminar los sub-índices, se obtiene el sistema extendido

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{L}^{-1}(\theta)\boldsymbol{\lambda} \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{2J}\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{H}(\theta)\boldsymbol{\lambda} - \frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t) \\ \dot{e}_\theta &= e_\omega \\ \dot{e}_\omega &= \frac{1}{2J}\boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{H}(e_\theta, \theta) - \mathbf{H}(\theta))\boldsymbol{\lambda} - \frac{d}{J}e_\omega \\ 0 &= \mathbf{R}\mathbf{N}(e_\theta, \theta)\boldsymbol{\lambda},\end{aligned}\quad (3.5)$$

este sistema, idéntico al presentado en la Proposición 1, es la Dinámica Indistinguible del modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo en operación SSM.  $\triangle$

### 3.1.2 Posición angular y paso polar de rotor

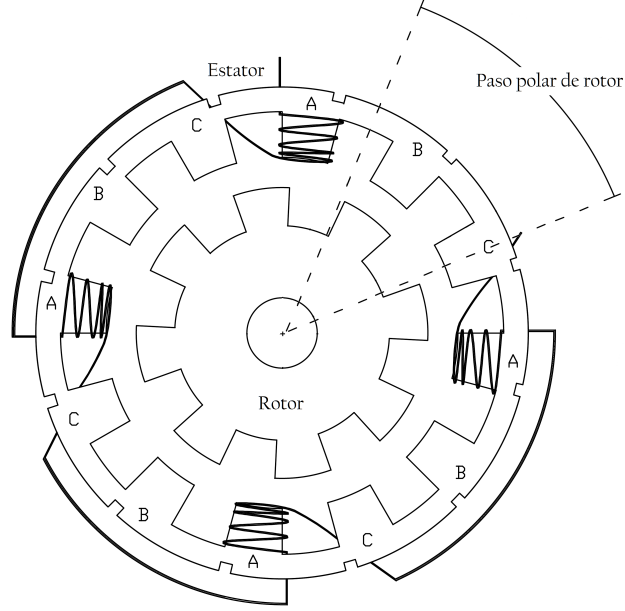


Figura 3.1: Paso polar de rotor.

La matriz

$$\mathbf{N}(e_\theta, \theta) = \mathbf{L}^{-1}(e_\theta + \theta) - \mathbf{L}^{-1}(\theta),$$

pierde rango en los puntos donde

$$e_\theta = k \frac{2\pi}{N_r} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Es decir, de la definición de  $e_\theta$ ,  $\theta_a = \theta_b$  modulo  $\frac{2\pi}{N_r}$ . Este valor, ver Figura 3.1, está relacionado con el paso polar de rotor  $\tau_r = \frac{2\pi}{N_r}$  que, como se mencionó en la Sección 2.2.2, define los ciclos de producción de par mecánico del MRC. De tal forma que la posición de rotor puede dividirse en  $N_r$  *cuadrantes* para evitar las condiciones iniciales indistinguibles repetidas. De ahí que el desplazamiento angular entre fases vecinas puede definirse como

$$\begin{aligned} \theta_p &= \frac{2\pi}{N_r} \\ \theta_j &= \theta_{j-1} - \theta_p. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para futuras referencias, en esta tesis, la posición de 0 [rad] corresponde a un mínimo de la inductancia de fase (máximo valor de reluctancia, mínimo valor de enlace de flujo de

fase, posición no alineada), mientras la posición  $\frac{2\pi}{N_r}$  [rad] corresponde con un máximo de la inductancia de fase (mínimo valor de reluctancia, máximo valor de enlace de flujo, posición alineada).

Por lo tanto, se pueden restringir los valores de la posición angular, de forma similar al Ejemplo 1 de la Sección 2.4, al conjunto

$$W_\theta = \left\{ (\boldsymbol{\lambda}, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid \theta = \left[ 0, \frac{2\pi}{N_r} \right) \right\} ,$$

para disminuir el número de pares de estados indistinguibles del modelo (2.3) (y de los sistemas (3.2) y (3.3)). Lo que implica que el error de posición también se restringe al intervalo  $e_\theta = \left[ 0, \frac{2\pi}{N_r} \right)$  y sólo se conserva una singularidad *i.e.*,  $e_\theta = 0$ .

### 3.1.3 Dinámica indistinguible explícita

Con el propósito de establecer la naturaleza de las soluciones de la DI, el sistema de ecuaciones (3.1) se estudia bajo las definiciones de Rianza et al. [2000] para obtener un sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este sistema de ecuaciones, definido en la siguiente proposición, es una representación explícita de la DI del MRC.

**Proposición 2** (Dinámica Indistinguible explícita). *Las soluciones del sistema SAD (3.1) son equivalentes a las soluciones del Sistema de Ecuaciones Diferencial Ordinario (SEDO)<sup>1</sup>*

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t) \\ \dot{e}_\theta &= e_\omega \\ \dot{e}_\omega &= -\frac{d}{J}e_\omega \end{aligned} \tag{3.8}$$

en la variedad

$$\mathcal{M}_\lambda = \{ (\boldsymbol{\lambda}, \theta, \omega, e_\omega, e_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} \mid \boldsymbol{\lambda} = 0 \} ,$$

y en el conjunto singular

$$\mathcal{S}_\lambda = \{ (\lambda, \theta, \omega, e_\omega, e_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} \mid e_\theta = 0 \} .$$

<sup>1</sup>En el Apéndice A se explica el procedimiento completo.

para  $\forall t \in [0, T), T > 0$ . Las trayectorias en el conjunto solución  $\mathcal{M}_\lambda$  están dadas por las condiciones iniciales que satisfacen  $e_{\theta 0} \neq 0$  y  $\lambda_0 = 0$  con  $\mathbf{u} \equiv 0$ , simultáneamente. Mientras los puntos definidos por el conjunto singular satisfacen  $e_{\theta 0} = 0$ .

**Demostración 2.** Con respecto a las soluciones en el conjunto  $\mathcal{M}_\lambda$ , supóngase que  $e_\theta \neq 0$  entonces, de la Sección 3.1.2,  $\mathbf{N}(e_\theta, \theta)$  es no singular. En consecuencia, y de las propiedades del modelo (2.3), la matriz  $\mathbf{RN}(e_\theta, \theta)$  es no singular por lo tanto la única solución de la restricción

$$\mathbf{RN}(e_\theta, \theta)\boldsymbol{\lambda} = 0$$

es  $\boldsymbol{\lambda} = 0$ . Para que los enlaces de flujo sean iguales a cero en el intervalo  $t \in [0, T), T > 0$ , es decir, forzar a las trayectorias a permanecer en el conjunto  $\mathcal{M}_\lambda$  en el intervalo  $t \in [0, T), T > 0$ , es necesario que la entrada sea igual a

$$\mathbf{u}(t) = 0, \forall t \in [0, T), T > 0.$$

Adicionalmente, debido a que en el sistema (3.8) la dinámica de las variables mecánicas del MRC en términos de los enlaces de flujo, está desacoplada de la dinámica del error, entonces, las soluciones de la dinámica del error se pueden estudiar de forma independiente. Estas soluciones están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} e_\theta &= e_{\theta 0} + \frac{J}{d} e_{\omega 0} (1 - e^{-\frac{d}{J}t}) \quad \forall t > t_0 \\ e_\omega &= e_{\omega 0} e^{-\frac{d}{J}t}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por otra parte, con respecto a los puntos en el conjunto singular, si  $e_\theta = 0$  entonces  $\mathbf{N}(e_\theta, \theta)$  es singular. Lo que implica que cualquier valor del vector de enlaces de flujos  $\boldsymbol{\lambda}$ , satisface la restricción algebraica (3.1f). Es decir, si la condición inicial del error de posición es cero, sin importar el valor de la entrada y de los enlaces de flujos, de (3.9) las trayectorias del error tienden al sub-espacio de equilibrio  $e_\omega = 0$ .

Pero, si las condiciones iniciales de los errores son iguales a  $e_{\theta 0} = 0$  y  $e_{\omega 0} = 0$  entonces la solución (3.9) se queda en el punto  $(e_\theta, e_\omega) = (0, 0)$ , lo que quiere decir que estas condiciones iniciales de la DI son distinguibles.

La obtención del sistema equivalente (3.8) con base en el análisis del SAD se puede encontrar en la Sección A.1 del Apéndice A. △

### 3.1.4 Propiedades de observabilidad

Con base en las Proposiciones 1, 2 y las Definiciones 1, 2, 3 y 10 del Capítulo anterior, se presentan las propiedades de observabilidad del modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo.

**Proposición 3** (Observabilidad Uniforme). *El modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo (2.3), para cualquier par de carga, en operación SSM es no uniformemente observable.*

**Demostración 3.** *De forma similar a la demostración de la Proposición 2, para que los enlaces de flujo sean iguales a cero en el intervalo  $t \in [0, T), T > 0$ , es decir, forzar a las trayectorias a permanecer en el conjunto  $\mathcal{M}_\lambda$  en el intervalo  $t \in [0, T), T > 0$ , es necesario que la entrada sea igual a*

$$\mathbf{u}(t) = 0, \forall t \in [0, T), T > 0.$$

*Por lo tanto,  $\mathbf{u}(t) = 0$ , es una entrada singular y de las Definiciones 9 y 10, el modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo en operación SSM es no uniformemente observable*

Sin embargo, si se restringen las condiciones iniciales del modelo del MRC (2.3), tal que no se cumpla la condición de indistinguibilidad, entonces el sistema puede ser débilmente observable.

**Proposición 4** (Observabilidad débil). *El modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo (2.3) en operación SSM, para cualquier par de carga, será débilmente observable con la entrada  $\mathbf{u}(t) \neq 0, \forall t \in [0, T), T > 0$  con*

$$W_x = \left\{ (\boldsymbol{\lambda}, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid \theta = \left[ 0, \frac{2\pi}{N_r} \right), \boldsymbol{\lambda} \neq 0 \right\}$$

*para  $x \in W_x, \forall t \in [0, T), T > 0$ .*

**Demostración 4.** *Si las condiciones iniciales se restringen al conjunto  $W_x$  i.e.,  $\boldsymbol{\lambda}(0) \neq 0$ ,  $\mathbf{u}(t) \neq 0$  y  $0 \leq \theta(0) < \frac{2\pi}{N_r}$  para  $\forall t \in [0, T), T > 0$ , entonces, de la Proposición 2, no se satisface la restricción algebraica (3.1f). Si no se satisface la restricción (3.1f) entonces no existen estados indistinguibles. Por lo tanto, de la Definición 3, el modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo es débilmente observable para toda  $x \in W_x, \mathbf{u}(t) \neq 0, \forall t \in [0, T), T > 0$ . △*

**Comentario 5.** Usando el modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo en operación SSM se puede encontrar un estimado de las variables mecánicas, siempre que se cumplan las condiciones de la Proposición 4. No obstante, como se explicó en la Sección 1.2, no es sencillo medir los enlaces de flujo directamente, por lo tanto éstos suelen ser estimados a partir de las mediciones de voltaje y corriente de fase, donde, debido a las incertidumbres mencionadas en esa misma Sección, se puede obtener una estimación errónea de los enlaces de flujo.  $\triangle$

### 3.1.5 Modelo del MRC en función de las corrientes

Como en la Sección anterior, a continuación se define la dinámica indistinguible y las propiedades de observabilidad del modelo del MRC en términos de las corrientes (2.5).

#### Dinámica indistinguible

**Proposición 5.** Dado el modelo del MRC en términos de las corriente en operación SSM (se miden las corrientes  $\mathbf{i}$ ), supóngase que se conocen el vector de entradas  $\mathbf{u}$ , el par de carga,  $\tau_L(t)$  y los parámetros del modelo. Considérese el siguiente SAD

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{L}^{-1}(\theta) (\mathbf{u} - \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i}) \quad (3.10a)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3.10b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L(t), \quad (3.10c)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\omega \quad (3.10d)$$

$$\dot{\varepsilon}_\omega = \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top (\mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{C}(\theta)) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \varepsilon_\omega \quad (3.10e)$$

$$0 = ((\varepsilon_\omega + \omega) \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \omega \mathbf{M}(\theta)) \mathbf{i} + \mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta) (\mathbf{u} - \mathbf{R} \mathbf{i}), \quad (3.10f)$$

donde

$$\varepsilon_\omega = \omega_a - \omega_b$$

$$\varepsilon_\theta = \theta_a - \theta_b$$

$$\mathbf{M}(\cdot) = \mathbf{L}^{-1}(\cdot) \mathbf{C}(\cdot)$$

y  $\theta_a, \theta_b, \omega_a, \omega_b$  son condiciones iniciales arbitrarias de posición y velocidad. Las soluciones (si existen) del sistema de ecuaciones algebraico diferenciales (3.10) corresponden con las

trayectorias indistinguibles (si existen) de modelo del MRC en términos de las corrientes en operación SSM para  $\forall t \in [0, T], T > 0$ .

**Demostración 5.** La demostración es similar a la presentada para la Proposición 1. Considérense dos MRC idénticos con entradas iguales  $u = [\mathbf{u}, \tau_L]^\top$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}_a}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}(\theta_a) (\mathbf{u} - \omega_a \mathbf{C}(\theta_a) \mathbf{i}_a - \mathbf{R} \mathbf{i}_a) \\ \dot{\theta}_a &= \omega_a \\ \dot{\omega}_a &= \frac{1}{2J} \mathbf{i}_a^\top \mathbf{C}(\theta_a) \mathbf{i}_a - \frac{d}{J} \omega_a - \frac{1}{J} \tau_L(t),\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}_b}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}(\theta_b) (\mathbf{u} - \omega_b \mathbf{C}(\theta_b) \mathbf{i}_b - \mathbf{R} \mathbf{i}_b) \\ \dot{\theta}_b &= \omega_b \\ \dot{\omega}_b &= \frac{1}{2J} \mathbf{i}_b^\top \mathbf{C}(\theta_b) \mathbf{i}_b - \frac{d}{J} \omega_b - \frac{1}{J} \tau_L(t),\end{aligned}\quad (3.12)$$

si se definen los errores de desviación,

$$\begin{aligned}\varepsilon_\omega &\triangleq \omega_a - \omega_b \\ \varepsilon_\theta &\triangleq \theta_a - \theta_b \\ \varepsilon_i &\triangleq \mathbf{i}_a - \mathbf{i}_b,\end{aligned}$$

la comparación entre los sistemas (3.11) y (3.12) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\omega \\ \dot{\varepsilon}_\omega &= -\frac{d}{J} \varepsilon_\omega + \frac{1}{2J} (\mathbf{i}_a^\top \mathbf{C}(\theta_a) \mathbf{i}_a - \mathbf{i}_b^\top \mathbf{C}(\theta_b) \mathbf{i}_b) \\ \dot{\varepsilon}_i &= -(\omega_a \mathbf{L}^{-1}(\theta_a) \mathbf{C}(\theta_a) \mathbf{i}_a - \omega_b \mathbf{L}^{-1}(\theta_b) \mathbf{C}(\theta_b) \mathbf{i}_b) \\ &\quad + (\mathbf{L}^{-1}(\theta_a) - \mathbf{L}^{-1}(\theta_b)) \mathbf{u} - \mathbf{R} (\mathbf{L}^{-1}(\theta_a) \mathbf{i}_a - \mathbf{L}^{-1}(\theta_b) \mathbf{i}_b).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Al sustituir la condición de indistinguibilidad i.e.,  $\varepsilon_i$  y todas sus derivadas son iguales a cero para todo  $t \in [0, T], T > 0$ , en (3.13) se obtiene el SAD



$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}(\theta_b) (\mathbf{u} - \omega_b \mathbf{C}(\theta_b) \mathbf{i}_b - \mathbf{R} \mathbf{i}_b) \\
 \dot{\theta}_b &= \omega_b \\
 \dot{\omega}_b &= \frac{1}{2\mathbf{J}} \mathbf{i}_b^\top \mathbf{C}(\theta_b) \mathbf{i}_b - \frac{d}{J} \omega_b - \frac{1}{J} \tau_L(t) \\
 \dot{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\omega \\
 \dot{\varepsilon}_\omega &= -\frac{d}{J} \varepsilon_\omega + \frac{1}{2\mathbf{J}} \mathbf{i}^\top (\mathbf{C}(\theta_a) - \mathbf{C}(\theta_b)) \mathbf{i} \\
 0 &= -(\omega_a \mathbf{M}(\theta_a) - \omega_b \mathbf{M}(\theta_b)) \mathbf{i} + \mathbf{N}(\theta_a, \theta_b) (\mathbf{u} - \mathbf{R} \mathbf{i}). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

A continuación, sustituyendo  $\theta_a = \theta_b + \varepsilon_\theta$  y  $\omega_a = \omega_b + \varepsilon_\omega$  en el sistema (3.14), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}(\theta) (\mathbf{u} - \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i}) \\
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= \frac{1}{2\mathbf{J}} \mathbf{i}^\top \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L(t) \\
 \dot{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\omega \\
 \dot{\varepsilon}_\omega &= \frac{1}{2\mathbf{J}} \mathbf{i}^\top (\mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{C}(\theta)) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \varepsilon_\omega \\
 0 &= -((\varepsilon_\omega + \omega) \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \omega \mathbf{M}(\theta)) \mathbf{i} + \mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta) (\mathbf{u} - \mathbf{R} \mathbf{i}), \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

este sistema de ecuaciones, idéntico al presentado en la Proposición 5, es la Dinámica Indistinguible del modelo del MRC en términos de las corrientes en operación SSM.  $\triangle$

**Comentario 6.** La matriz

$$\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta) = \mathbf{L}^{-1}(\varepsilon_\theta + \theta) - \mathbf{L}^{-1}(\theta),$$

pierde rango en los puntos donde

$$\varepsilon_\theta = k \frac{2\pi}{N_r} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

Por lo cual, se restringen los valores de la posición angular, de forma similar al caso anterior, al conjunto

$$W'_\theta = \left\{ (\mathbf{i}, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid \theta = \left[ 0, \frac{2\pi}{N_r} \right) \right\},$$

para disminuir el número de pares de estados indistinguibles del modelo(2.5) (y de los sistemas (3.11) y (3.12)). De tal forma que el error de posición también se restringe al intervalo  $\varepsilon_\theta = \left[ 0, \frac{2\pi}{N_r} \right)$  y sólo se conserva una singularidad i.e.,  $\varepsilon_\theta = 0$ .  $\triangle$

### Dinámica Indistinguible explícita

La siguiente proposición define la forma explícita de la DI del modelo del MRC en términos de las corrientes.

**Proposición 6** (Dinámica Indistinguible explícita). *Las soluciones del SAD (3.10) son equivalentes a las soluciones del SEDO*

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{L}^{-1}(\theta) (\mathbf{u} - \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i}) \quad (3.17a)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3.17b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L(t), \quad (3.17c)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\omega \quad (3.17d)$$

$$\dot{\varepsilon}_\omega = \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top (\mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{C}(\theta)) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \varepsilon_\omega \quad (3.17e)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}^{-1}(\varepsilon_\theta, \theta) (\varepsilon_\omega \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) + \omega (\mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\theta))) \mathbf{i} \\ &+ \mathbf{R} \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (3.17f)$$

en el conjunto solución

$$\mathcal{M}_i = \{(\mathbf{i}, \theta, \omega, \varepsilon_\omega, \varepsilon_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} | \varepsilon_\theta \neq 0\},$$

y las soluciones en el conjunto singular

$$\mathcal{S}_i = \{(\mathbf{i}, \theta, \omega, \varepsilon_\omega, \varepsilon_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} | \varepsilon_\theta = 0\}.$$

para  $\forall t \in [0, T), T > 0$ .

**Demostración 6.** *Supóngase que  $\varepsilon_\theta \neq 0$  entonces  $\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta)$  es no singular. En consecuencia, si  $\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta)$  es no singular, entonces, de la restricción (3.10f) se puede obtener una expresión de la entrada igual a*

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{-1}(\varepsilon_\theta, \theta) (\varepsilon_\omega \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) + \omega (\mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\theta))) \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i}. \quad (3.18)$$

De la Definición 5, la entrada (3.18) es singular, porque no permite distinguir entre las condiciones iniciales con  $\varepsilon_\theta \neq 0$ , a partir de la comparación de las salidas.

Por otro lado, si  $\varepsilon_\theta = 0$ , entonces, la restricción algebraica toma la forma

$$0 = \omega \mathbf{M}(\theta) \mathbf{i},$$

donde, usando la definición de la matriz  $\mathbf{M}(\theta)$  y la Propiedad 1 de la Sección 2.2.2, se obtiene

$$0 = \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i}. \quad (3.19)$$

Si se asume que la velocidad es distinta de cero la DI (3.17) toma la forma

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{L}^{-1}(\theta) (\mathbf{u} - \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i}) \quad (3.20a)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3.20b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2\mathbf{J}} \mathbf{i}^T \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \frac{d}{\mathbf{J}} \omega - \frac{1}{\mathbf{J}} \tau_L(t), \quad (3.20c)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\omega \quad (3.20d)$$

$$\dot{\varepsilon}_\omega = -\frac{d}{\mathbf{J}} \varepsilon_\omega \quad (3.20e)$$

$$0 = \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i}, \quad (3.20f)$$

donde la solución de la restricción algebraica (3.20f) depende del comportamiento de la matriz  $\mathbf{C}(\theta)$ . De la Propiedad 2 de la Sección 2.2.2, se tienen dos casos, a) Si  $\theta = k \frac{\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m}$ , entonces la matriz  $\mathbf{C}(\theta)$  es singular y cualquier valor de las corrientes de fase satisface la restricción (3.20f) (en este caso de (3.20d) y (3.20e) se puede ver que el error de posición no se puede mantener en cero y por lo tanto las trayectorias solo atraviesan el conjunto singular  $\mathcal{S}_i$ ) y b) Si  $\theta \neq k \frac{\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m}$ , entonces la matriz  $\mathbf{C}(\theta)$  es no singular, de donde se sigue que, la solución de (3.20f) es  $\mathbf{i} = 0$  y por lo tanto la DI toma la forma

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3.21a)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{d}{\mathbf{J}} \omega - \frac{1}{\mathbf{J}} \tau_L(t), \quad (3.21b)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\omega \quad (3.21c)$$

$$\dot{\varepsilon}_\omega = -\frac{d}{\mathbf{J}} \varepsilon_\omega \quad (3.21d)$$

$$(3.21e)$$

donde, para que las corrientes sean iguales a cero en un intervalo  $t \in [0, T), T > 0$ , es decir, forzar a las trayectorias a permanecer en el conjunto singular  $\mathcal{S}_i$  en el intervalo  $t \in [0, T), T > 0$ , es necesario que la entrada sea igual a

$$\mathbf{u}(t) = 0, \forall t \in [0, T), T > 0,$$

en este caso las trayectorias del error tienden al sub-espacio de equilibrio  $\varepsilon_\omega = 0$ .

Por el contrario, si la entrada es distinta de cero, el error de posición no se puede mantener en cero y por lo tanto las trayectorias solo atraviesan el conjunto singular  $\mathcal{S}_i$ .

La demostración en términos de las definiciones de Riaza et al. [2000], se puede encontrar en la Sección A.2 del Apéndice A.  $\triangle$

**Comentario 7.** El análisis anterior es similar al problema de hacer cero la salida para un sistema no lineal [Isidori, 2013], es decir, se identifican pares de estados iniciales,  $\mathbf{x}_0$ , y entradas,  $\mathbf{u}(\cdot)$ , tales que la salida,  $\mathbf{y}$ , sea idénticamente cero. En otras palabras, para que el error de corrientes,  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  sea idénticamente cero, la entrada debe ser necesariamente igual a (3.18). Por lo tanto, esta expresión representa a todas las entradas singulares del modelo del MRC en términos de las corrientes en operación SSM (tómese en consideración que esta expresión incluye el caso  $u \equiv 0$  cuando las corrientes son  $i \equiv 0$  para  $\forall t \in [0, T), T > 0$ ).  $\triangle$

### 3.1.6 Propiedades de observabilidad

**Proposición 7** (Observabilidad uniforme). *El modelo del MRC en términos de las corrientes en operación SSM, para cualquier par de carga, es no uniformemente observable.*

**Demostración 7.** Si  $\varepsilon_\theta \neq 0$  entonces, la matriz  $\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta)$  es no singular y por lo tanto se puede despejar la entrada (3.18) de la restricción algebraica (3.10f). Esto implica que, existen entradas singulares para cada conjunto de condiciones iniciales con  $\varepsilon_\theta \neq 0$  y en consecuencia, de la Definición 10, el modelo del MRC en términos de las corrientes es no uniformemente observable. Si  $\varepsilon_\theta = 0$  sólo se tienen trayectorias indistinguibles cuando  $\theta \neq k\frac{\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m}$ ,  $\mathbf{i} \equiv 0$  y  $\mathbf{u}(t) \equiv 0, \forall t \in [0, T), T > 0$ . En estas condiciones, también existen entradas singulares para cada conjunto de condiciones iniciales con  $\varepsilon_\theta = 0$ . En consecuencia, de la Definición 10, el modelo del MRC en términos de las corrientes es no uniformemente observable para cualquier valor de  $\varepsilon_\theta$ .

**Comentario 8.** Existen múltiples trayectorias indistinguibles para el modelo del MRC en términos de las corrientes, por lo tanto es imposible construir un observador global i.e., que converja para toda condición inicial.  $\triangle$

**Comentario 9.** A partir de la ecuaciones dinámicas del error (3.4) se puede ver que si la salida fueran las corrientes de estator y la posición angular, es decir, el único estado que

no se mide es la velocidad angular, entonces la DI en estas condiciones se puede escribir como

$$\varepsilon_\theta = 0, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = 0 \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_\omega = 0, \quad \dot{\varepsilon}_\omega = 0 \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_i = 0, \quad \dot{\varepsilon}_i = 0 \quad \forall t > t_0. \quad (3.24)$$

Esto quiere decir que el modelo del MRC en términos de las corrientes (y también el modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo) cuando la salida son las corrientes de fase y la posición angular es observable. Este modo de operación se conoce en la literatura como *speed-sensorless control*, [Loria et al., 2012], [Loria et al., 2013], [Loria et al., 2014] y [De La Guerra et al., 2016].  $\triangle$

## 3.2 Ejemplos de trayectorias indistinguibles

En esta Sección se incluyen dos ejemplos de trayectorias indistinguibles del modelo del MRC (2.3). No obstante, se puede mostrar que existen condiciones similares de operación para el modelo del MRC en función de las corrientes.

### 3.2.1 Entrada cero

Es bien conocido que a rotor parado, el MRC es no observable [Ehsani y Fahimi, 2002]. Supóngase que la entrada para el modelo del MRC en función de los enlaces de flujo es  $\mathbf{u} \equiv 0$  y que  $e_\theta \neq 0$ , entonces las soluciones de la dinámica del error dadas por

$$\begin{aligned} e_\theta &= e_{\theta 0} + \frac{J}{d} e_{\omega 0} (1 - e^{-\frac{d}{J}t}) \\ e_\omega &= e_{\omega 0} e^{-\frac{d}{J}t}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde, con base en la Definición 8, estas trayectorias son no detectables.

Con respecto al comportamiento de la máquina, si se aplica un par externo  $\tau_L$  en el rotor cuando el voltaje de estator es  $\mathbf{u} \equiv 0$  el sistema mecánico no podrá producir par debido a que no existe flujo magnético en el entre-hierro (de la construcción de la máquina el rotor no tiene imanes permanentes ni devanados como se mencionó en la sección 2.1 del Capítulo 2). Este caso es opuesto al de algunos motores de imán permanente, como el MIPI, que es local y débilmente observable, véase Zaltni et al. [2009], en condiciones de operación similares.

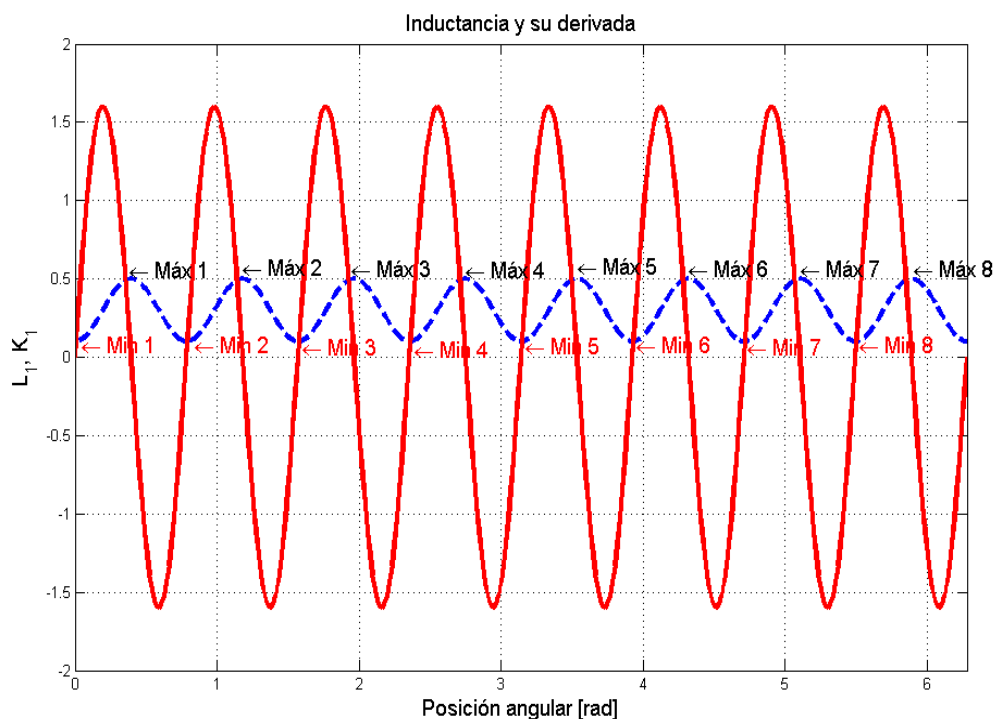


Figura 3.2: Inductancia  $L_1$  (---) de una fase y su derivada  $K_1$  (—) en una revolución.

### 3.2.2 Periodicidad de las inductancias

En el MRC, la inductancia varía con la posición angular en forma periódica, por lo tanto, en una revolución, una fase de estator puede alinearse (desalinearse) varias veces, dependiendo del número de polos de rotor. Esto implica que a un valor de inductancia corresponden diversas posiciones de rotor en una revolución. Por ejemplo, para el MRC de la Figura 3.1, en una revolución existen tantos máximos (mínimos) de inductancia como polos de rotor, en este caso  $N_r = 8$ , como se muestra en la Figura 3.2. Sin embargo, como se mencionó en el Comentario 3.1.2, el intervalo de operación de cada fase se restringió a un paso polar de rotor por lo tanto, se disminuyeron el número de posiciones para las cuales se tiene un punto de inflexión y para los cuales  $e_\theta = 0$ , como se muestra en la Figura 3.3. Si además se

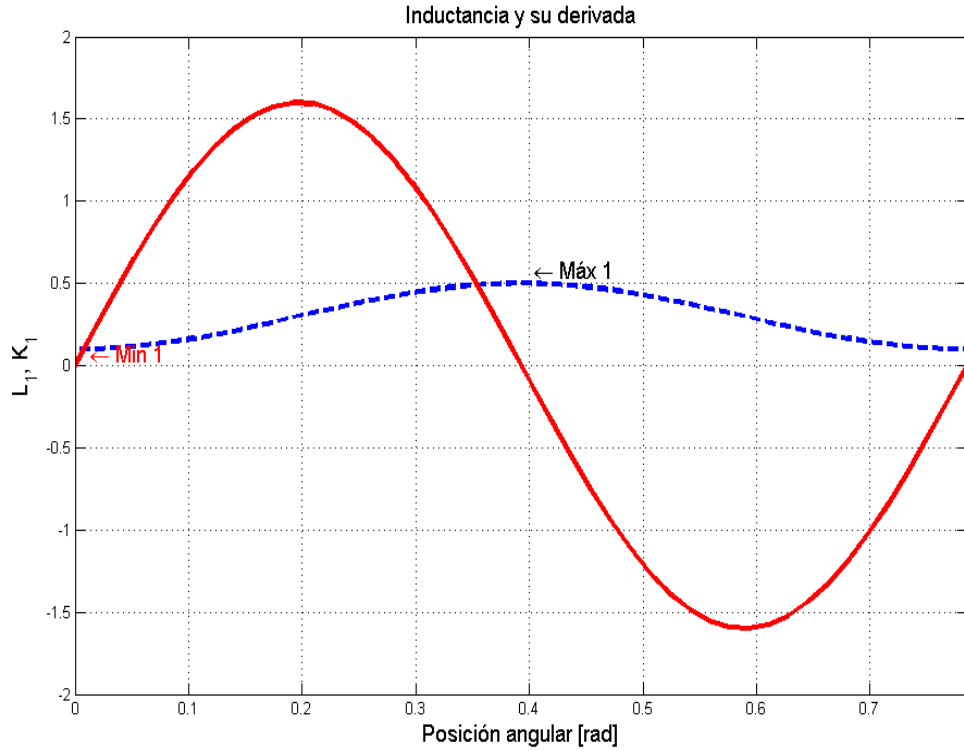


Figura 3.3: Inductancia de una fase  $L_1$  (---) y su derivada  $K_1$  (—) en un paso polar de rotor,  $\tau = \frac{2\pi}{N_r}$ .

asume que  $\dot{e}_\theta = 0$  en un intervalo de tiempo, la dinámica del error se puede expresar como

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta &= 0 \\ \dot{e}_\omega &= -\frac{d}{J}e_\omega, \end{aligned}$$

consecuentemente de la Definición 8 estas trayectorias son detectables, en otras palabras, las posiciones angulares asociadas al mismo valor de inductancia generan la misma trayectoria. Como en el caso anterior, se puede mostrar que esto se cumple también para el modelo del MRC en función de las corrientes en operación SSM.

### 3.3 Análisis de observabilidad del MRC basado en la condición de rango

#### 3.3.1 Modelo del MRC en función de las corrientes

En esta Sección se analiza la observabilidad del modelo del MRC en términos de las corrientes usando la condición de rango de observabilidad definida en el Capítulo 2. El siguiente resultado indica que si se evitan los puntos en los que las salidas y las funciones  $C_{jj}(\theta)$  son iguales a cero, con entrada distinta de cero, el modelo de señal pequeña del MRC puede ser local y débilmente observable.

**Proposición 8** (Observabilidad local y débil). *El modelo del MRC en términos de las corrientes en operación SSM, para cualquier par de carga, es local y débilmente observable, si los estados pertenecen al conjunto,*

$$W_i = \left\{ (i_j, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid i_j \neq 0, -\frac{k\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m} < \theta < \frac{k\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m} \right\} \forall k \in \mathbb{Z}$$

donde  $N_r$  el número de polos de rotor y  $m$  el número de fases de estator.

**Demostración 8.** *Para mostrar que el modelo del MRC en términos de las corrientes satisface la condición de rango, primero éste se escribe en su forma afín en las entradas*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f_0(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= h_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{x} = [i \quad \theta \quad \omega]$ , las funciones  $h_j$  son las corrientes de fase,  $h_j = i_j$ , y los campos vectoriales libre y forzado,  $f_0$  y  $f_1$  respectivamente, son iguales a

$$\begin{aligned} f_0 &= \left[ -\omega \frac{C_{11}(\theta)}{L_{11}(\theta)} i_1 - r i_1 \quad -\omega \frac{C_{22}(\theta)}{L_{22}(\theta)} i_2 - r i_2 \quad \dots \quad -\omega \frac{C_{mm}(\theta)}{L_{mm}(\theta)} i_m - r i_m \quad \omega \quad T_e - \frac{d}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L(t) \right] \\ f_1 &= \left[ \frac{1}{L_{11}(\theta)} \quad \frac{1}{L_{22}(\theta)} \quad \dots \quad \frac{1}{L_{mm}(\theta)} \quad 0 \quad 0 \right]. \end{aligned}$$

donde  $r$  representa la inductancia del devanado de estator. El espacio de observación,  $\mathcal{O}$ , que se forma con las derivadas de Lie de los campos vectoriales  $f_0$  y  $f_1$  para cada una de



las fases es

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \\ L_{f_1} h_1 \\ L_{f_0} h_1 \\ L_{f_1} h_2 \\ L_{f_0} h_2 \\ \vdots \\ L_{f_1} h_m \\ L_{f_0} h_m \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Para mostrar que se satisface la condición de rango de observabilidad en el punto  $x^0$  se debe verificar que

$$\dim(d\mathcal{O}(h)|_{x^0}) = m + 2. \quad (3.28)$$

Para encontrar los puntos en lo que se satisface la expresión (3.28), se utilizará la derivada de Lie de la primera fase de estator,  $h_1 = i_1$ , por lo tanto, la matriz  $d\mathcal{O}(h)$  se puede escribir como

$$d\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial i_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial i_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial i_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial L_{f_1} h_1}{\partial \theta} & 0 \\ \frac{\partial L_{f_0} h_1}{\partial i_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial L_{f_0} h_1}{\partial \theta} & \frac{\partial L_{f_0} h_1}{\partial \omega} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Si la derivada de Lie de los campos libre y forzado para la fase  $j$ -ésima es

$$\begin{aligned} L_{f_0} h_j &= -\omega \frac{C_{jj}(\theta)}{L_{jj}(\theta)} i_j - r i_j \\ L_{f_1} h_j &= \frac{1}{L_{jj}(\theta)}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

en consecuencia, la matriz  $d\mathcal{O}$  se puede reescribir como

$$d\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{C_{11}(\theta)}{L_{11}^2(\theta)} & 0 \\ -\omega \frac{C_{11}(\theta)}{L_{11}^2(\theta)} - r & 0 & \dots & 0 & -\vartheta_1 i_1 & -\frac{C_{11}(\theta) i_1}{L_{11}^2(\theta)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\text{con } \vartheta_1 = \left( \frac{\bar{L}_{11}(\theta)}{L_{11}(\theta)} + \frac{C_{11}^2(\theta)}{L_{11}^2(\theta)} \right).$$

De tal manera que la condición de rango se cumple si el determinante de la matriz  $d\mathcal{O}$  satisface

$$\det(d\mathcal{O}) = -\frac{C_{11}^2(\theta) i_1}{L_{11}^4(\theta)} \neq 0. \quad (3.32)$$

De la Propiedad 1 de la Sección 2.2.2, los elementos de la matriz  $\mathbf{L}^{-1}(\theta)$  son distintos de cero para todos los valores de la posición angular y de la Propiedad 2, de la misma Sección, las funciones  $C_{jj}(\theta)$  son iguales a cero si  $\theta = k \frac{\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m}$ . De manera que, si  $i_1 \neq 0$  y  $\theta \neq k \frac{\pi}{N_r}$  se cumplen simultáneamente, entonces la matriz  $d\mathcal{O}$  tendrá rango completo, lo que implica que se satisface la condición de rango de observabilidad para el modelo del MRC en función de las corrientes. Se puede mostrar que se obtienen las mismas condiciones para cualquier fase  $j$  i.e.,  $i_j \neq 0$  y  $\theta \neq k \frac{\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m}$ , de donde se siguen las condiciones de la Proposición 8.  $\triangle$

### 3.3.2 Modelo del MRC en función de los enlaces de flujo

A continuación, se muestra el resultado de aplicar la condición de rango para el modelo del MRC en función de los enlaces de flujo en operación SSM.

**Proposición 9.** *El modelo del MRC definido por el sistema de ecuaciones (2.3) cuando la salida es el enlace de flujo,  $\boldsymbol{\lambda}$ , es local y débilmente observable si se cumple que los estados se encuentran en el sub-espacio,*

$$W_{\boldsymbol{\lambda}} = \left\{ (\lambda_j, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid \boldsymbol{\lambda} \neq 0, -\frac{k\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m} < \theta < \frac{k\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m} \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

con  $N_r$  el número de polos de rotor y  $m$  el número de fases de estator.

**Demostración 9.** *Esta demostración es similar a la presentada para la Proposición 8. Primero, se escribe el modelo (2.3) en su forma afín en las entradas,*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f_0(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= h_0(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{3.33}$$

donde  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\lambda} \quad \theta \quad \omega]$ , las funciones  $h_j$  son los enlaces de flujo de fase,  $h_j = \lambda_j$  y los campos libre y forzado,  $f_0$  y  $f_1$  respectivamente, son iguales a

$$\begin{aligned}f_0 &= [-rL_{11}^{-1}(\theta)\lambda_1 \quad -rL_{22}^{-1}(\theta)\lambda_2 \quad \dots \quad -rL_{mm}^{-1}(\theta)\lambda_m \quad \omega \quad T_e - \frac{d}{j}\omega - \frac{1}{j}\tau_L(t)] \\ f_1 &= \left[\frac{1}{L_{11}(\theta)} \quad \frac{1}{L_{22}(\theta)} \quad \dots \quad \frac{1}{L_{mm}(\theta)} \quad 0 \quad 0\right].\end{aligned}$$

Después, se define el espacio de observación del modelo (2.3), tomando la primera derivada de Lie de cada una de las fases,

$$\mathcal{O}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ L_{f_1}h_1 \\ L_{f_0}h_1 \\ L_{f_1}h_2 \\ L_{f_0}h_2 \\ \vdots \\ L_{f_1}h_m \\ L_{f_0}h_m \end{bmatrix},\tag{3.34}$$

En este caso, usando la derivada de Lie de la primera fase de estator, la matriz  $d\mathcal{O}_\lambda$  es

igual a

$$d\mathcal{O}_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \lambda_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial \lambda_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial L_{f_1} h_1}{\partial \theta} & 0 \\ \frac{\partial L_{f_0} h_1}{\partial \lambda_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial L_{f_0} h_1}{\partial \theta} & \frac{\partial L_{f_1} h_1}{\partial \omega} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$= \begin{bmatrix} & 1 & & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \dots & 0 & -\frac{RC_{11}(\theta)}{L_{11}^2(\theta)}\lambda_1 & 0 \\ \frac{R}{L_{11}^2(\theta)}(R - N_r\omega C_{11}(\theta)) & 0 & \dots & 0 & & \psi_1 & & \frac{RN_r C_{11}(\theta)}{L_{11}^2(\theta)}\lambda_1 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

con  $\psi_1 = -\frac{RC_{11}(\theta)}{L_{11}^2(\theta)}u_1 + \frac{2R^2 L_{11}(\theta)C_{11}(\theta)}{L_{11}^4(\theta)}\lambda_1 - \frac{RN_r C_{11}^2(\theta)L_{11}(\theta)}{L_{11}^4(\theta)}\lambda_1$ .

La matriz  $d\mathcal{O}_\lambda$  pierde rango si su determinante satisface la expresión,

$$\det(d\mathcal{O}_\lambda) = \frac{R^2 N_r C_{jj}^2(\theta)}{L_{jj}^4(\theta)}\lambda_j^2 = 0.$$

Con base en las Propiedades 1 y 2, para que el modelo del MRC en función de los enlaces de flujo sea local y débilmente observable, se debe satisfacer simultáneamente que  $\lambda_j \neq 0$  y  $\theta \neq \frac{\pi}{N_r} \frac{(j-1)}{m}$ , como se indica en la Proposición 9.  $\triangle$

**Comentario 10.** Con la condición de rango de observabilidad se puede determinar bajo que condiciones el modelo del MRC en términos de las corrientes (en términos de los enlaces de flujo) es local y débilmente observable. En este caso se deben evitar los puntos en los cuáles la derivada de la inductancias con respecto a la posición se hace cero. Esta condición tiene una relación directa con la forma en que se conmutan las fases del MRC para generar movimiento continuo de la flecha, debido a que son precisamente los cruces por cero de las funciones  $C_{jj}(\theta)$  los que determinan los instantes de conmutación de la fase  $j$ -ésima. Otra forma de interpretar este resultado es, que las variables mecánicas se pueden reconstruir con la suma de las aportaciones de cada fase en un ciclo de generación de energía, en un cuadrante (véase la Sección 3.1.2).  $\triangle$

La siguiente sección trata el tema de las condiciones necesarias para diseñar un observador de alta ganancia para sistemas local y débilmente observables en  $\mathbf{x}^0$ .

### 3.4 Entradas Persistentes

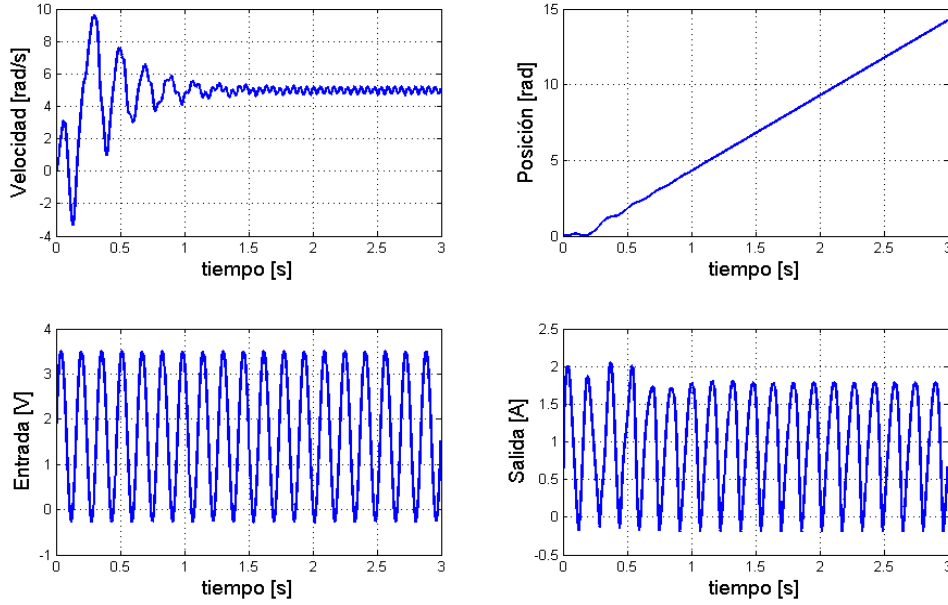


Figura 3.4: Operación con la entrada  $v_j(t) = v_0 + v_1 \cos(N_r \omega_r t - (j-1) \frac{2\pi}{m})$ .

Para diseñar un observador como los presentados en Besançon y Ticlea [2007] y Torres et al. [2012] por ejemplo, donde se asume que el sistema no lineal es local y débilmente observable, antes se debe definir una entrada que cumpla ciertas condiciones de *persistencia*<sup>2</sup>.

**Definición 11. Entradas Persistentes** [Besançon, 2007] Dado un sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t)), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  son los estados,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  es la entrada,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  es la salida y los mapeos  $f$  y  $h$  son suficientemente suaves.

<sup>2</sup>Como se mencionó en el Comentario 3 del Capítulo 2 los observadores de alta ganancia requieren que se garantice que el sistema es uniformemente observable

Una entrada  $u$  del sistema (3.37) es persistente, si se cumple que

$$\begin{aligned} \exists t_0, T : \forall t \geq t_0, \forall \mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^1, \\ \int_t^{t+T} \|h(\tau, \mathbf{x}^0, u) - h(\tau, \mathbf{x}^1, u)\|^2 d\tau \geq 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Es decir, este tipo de entradas permiten detectar diferencias entre las trayectorias generadas por condiciones iniciales distintas a partir de la comparación de la salidas en un intervalo de tiempo.

Por otra parte, en las secciones 3.1.1 y 3.1.5, dos MRC idénticos son comparados usando la condición de indistinguibilidad, *i.e.*, las salidas son iguales lo que implica que las entradas en ese caso son no persistentes en un intervalo de tiempo dado. Para mostrar que características deben tener las entradas del modelo del MRC, para poder distinguir las trayectorias de condiciones iniciales indistinguibles, se propone el siguiente ejercicio:

*Para una entrada dada  $v(t)$  y distintas condiciones iniciales de la posición angular, se compararán las salidas para encontrar si se satisface la condición (3.38), *i.e.*, mostrar que en un intervalo de tiempo las salidas son distintas usando la entrada  $v(t)$ .*

Para desarrollar este *ejercicio*, se propone una entrada de tipo sinusoidal de la forma

$$v_j(t) = v_0 + v_1 \cos \left( N_r \omega_r t - (j-1) \frac{2\pi}{m} \right), \quad (3.39)$$

donde, con la apropiada elección de los parámetros  $v_0$ ,  $v_1$  y  $\omega_r$ , el modelo del MRC en términos de las corrientes puede alcanzar una velocidad constante  $\omega_r$  en estado estacionario. El comportamiento de los estados del modelo del MRC (2.5) usando la entrada (3.39) se muestra en la Figura 3.4, la entrada, la corriente de una fase (la salida en este caso) <sup>3</sup> y el comportamiento de las variables mecánicas. Los parámetros usados para esta simulación son  $N_r = 8$ ,  $J = 0.001$  [Kgm<sup>2</sup>],  $d = 0.001$  [Kgm<sup>2</sup>/s],  $r = 1.7$  [ $\Omega$ ],  $l_0 = 0.0121$  [H] y  $l_1 = 0.0115$  [H]. Los parámetros de la entrada son  $v_0 = 1.6$ ,  $v_1 = 1.888$  y  $\omega_r = 5$  [rad/s].

La comparación entre las corrientes de una fase de estator para distintas posiciones iniciales en un paso polar de rotor,  $\frac{2\pi}{N_r} = 45^\circ$ , se muestran en la Figura 3.5. La figura superior muestra que las salidas son diferentes durante el transitorio. Mientras, en la figura inferior,

<sup>3</sup>Se analiza únicamente el modelo en función de las corrientes porque en este caso sí se pueden medir las variables eléctricas en operación SSM.

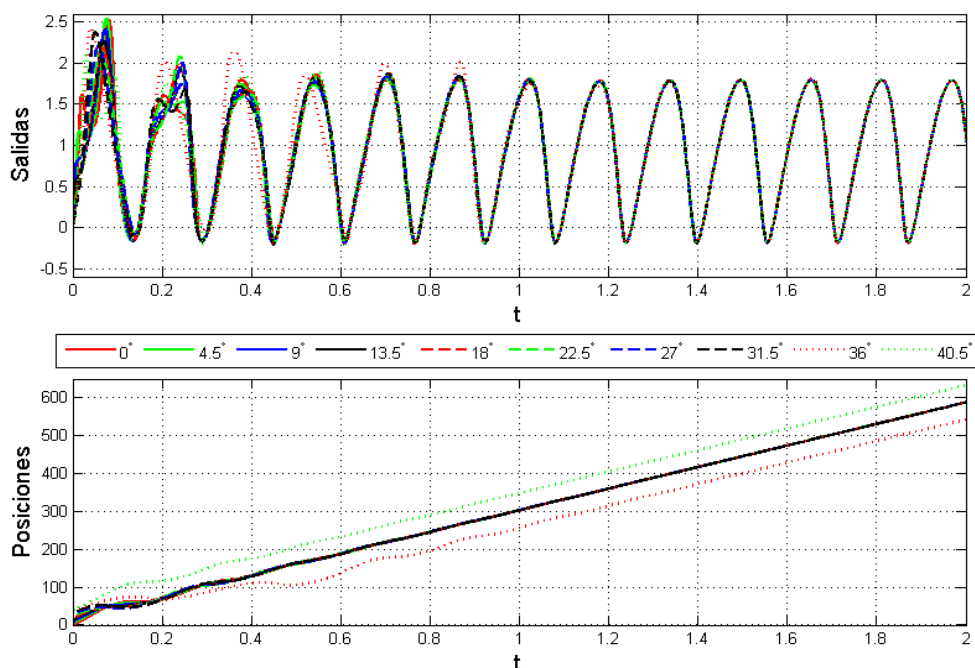


Figura 3.5: Arriba: comparación de las salidas. Abajo: comparación de las posiciones.

se muestra que las trayectorias de posición tienden a tres valores distintos. En la Figura. 3.6, a cada trayectoria de posición se le ha restado la trayectoria para la condición inicial de  $0^\circ$ , por lo que se obtiene la relación entre las tres posiciones finales, que es de  $0^\circ$  ó  $\pm 45^\circ$ . Lo que significa que estas trayectorias son equivalentes, es decir, son trayectorias detectables <sup>4</sup>. El ejemplo también muestra que la entrada (3.39) es persistente durante el transitorio. En relación con la Definición 7, después de  $0.8[s]$ , la salidas relacionadas con posiciones equivalentes tienden a ser iguales, lo que implica que las diferencias entra las trayectorias de los estados también tienden a cero.

Aunque la entrada no es de utilidad para el control de velocidad del MRC, este ejemplo muestra el tipo de propiedades que deben tener las entradas de interés del MRC para poder distinguir entre condiciones iniciales indistinguibles: la entrada no depende de la condición inicial de posición, la frecuencia de la entrada es función de la velocidad deseada y el número

<sup>4</sup>Estos valores de posición son equivalentes porque corresponden al mismo valor de inductancias, como se mencionó en la Sección 3.2.2.

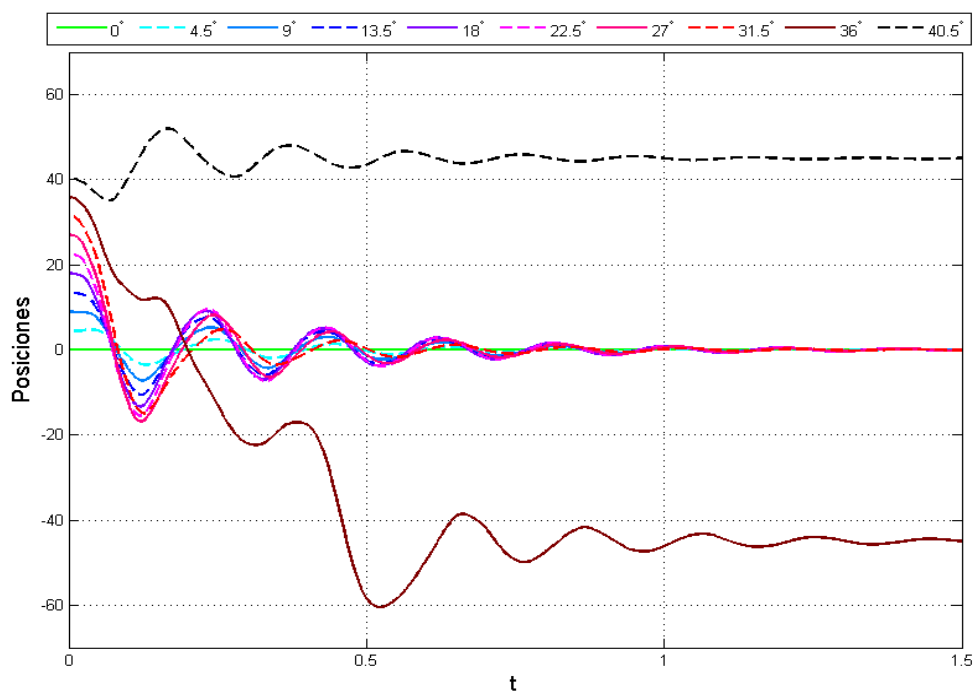


Figura 3.6: Comparación de las posiciones.

de polos de rotor.

### 3.5 Discusión

Las Proposiciones 8 y 9 indican que se puede obtener un estimado de las variables mecánicas a partir de las mediciones de las entradas y las salidas con el modelo de señal pequeña del MRC si las salidas son distintas de cero y se consideran condiciones iniciales de posición pertenecientes a un mismo *cuadrante* o paso polar de rotor. Además, es importante notar que, para los dos casos de operación SSM, las entradas  $u_j$ , deben ser distintas de cero.

Por otro lado, para el modelo del MRC en términos de las corrientes, se tiene de la Proposición 7, que existe un conjunto de entradas singulares, que incluye a  $\mathbf{u} \equiv 0$ , por lo cual este modelo en operación SSM es no uniformemente observable.



Sin embargo, existe la posibilidad de proponer una entrada, con las propiedades de persistencia adecuadas, que pueda distinguir los estados indistinguibles. Con esta entrada, posiblemente se pueda diseñar un observador dependiente de la entrada para el modelo del MRC en términos de las corrientes en operación SSM, similar al diseño presentado en Besançon y Ticlea [2007], donde se hace una transformación de coordenadas basada en el mapeo de observabilidad del modelo del sistema no lineal.

## Capítulo 4

# Control robusto sin medición de velocidad

En este Capítulo se incluyen, en la Sección 4.1 la definición del control sin medición de velocidad, en la Sección 4.2 se enuncia el resultado principal de este Capítulo, en la Sección 4.3 se presenta la validación experimental del controlador propuesto y en la Sección 4.4 se hace una breve discusión de los resultados.

### 4.1 Control sin medición de velocidad

En general, cuando se mide la posición angular del eje del rotor de una máquina eléctrica, usando potenciómetros o codificadores rotatorios (conocidos como *encoders*), la velocidad angular se obtiene a partir de la diferenciación numérica de la posición medida, lo cual puede dar lugar a amplificación del ruido de medición. Para solucionar este inconveniente, una alternativa confiable es el uso de un observador de estados. En este Capítulo se presenta un esquema de control sin medición de velocidad para el modelo MRC en función de las corrientes de estator, que hace uso de un observador sintonizable que aprovecha la propiedad de observabilidad descrita en el Comentario 9 del Capítulo 3, es decir, se miden las corrientes de fase y la posición angular.

En particular, se propone un Observador Proporcional Integral Generalizado (GPIO), presentado por primera vez en Sira-Ramírez et al. [2010]. El GPIO se define como un Observador de Espacio Extendido (ESO) [Radke y Gao, 2006]. Este tipo de esquemas de estimación dependen de un modelo simplificado del sistema y un modelo aproximado, de-

pendiente del tiempo, de la perturbación (en éste caso se usa una aproximación polinomial), lo que resulta en un diseño simplificado del esquema de control. Este método ha sido utilizado también para controlar la velocidad angular del MI con par de carga desconocido en Sira-Ramírez et al. [2013].

#### 4.1.1 Control de velocidad en cascada

En Espinosa-Pérez et al. [2004] se propone un control de velocidad en cascada donde, a partir de la referencia de velocidad  $x_{3d}$ , el lazo de control externo (lazo mecánico) calcula el par deseado correspondiente  $\tau_d$ , que a su vez define la forma de las corrientes deseadas  $\mathbf{x}_{1d}$  a partir de una inversión del sistema. En el lazo de control interno (lazo eléctrico), un controlador basado en las propiedades de pasividad de la maquina, calcula el voltaje de fase  $\mathbf{u}$  a partir de las corrientes deseadas.

En el controlador propuesto aquí, se preserva la estructura en cascada de Espinosa-Pérez et al. [2004], pero se reemplaza el controlador de lazo de control externo por un GPIO. El GPIO permite reconstruir las dinámicas desconocidas *i.e.*, el par de carga  $\tau_L$ , la fricción, entre otras perturbaciones, usando una aproximación de los términos desconocidos basada en un polinomio dependiente del tiempo. Adicionalmente, se estima la velocidad que es utilizada para calcular la entrada de control del lazo eléctrico,  $\mathbf{u}$ .

#### 4.1.2 Lazo de control mecánico

Si se define el vector de estados  $\mathbf{x}$  tal que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

el modelo del MRC en términos de las corrientes, presentado en el Capítulo anterior, puede reescribirse como

$$\mathbf{L}(x_2)\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{u} - x_3\mathbf{C}(x_2)\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}\mathbf{x}_1 \quad (4.2a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (4.2b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{J}\tau - \frac{d}{J}x_3 - \frac{1}{J}\tau_L(t), \quad (4.2c)$$

donde

$$\tau = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1^T\mathbf{C}(x_2)\mathbf{x}_1. \quad (4.3)$$

El objetivo del lazo de control mecánico es que la velocidad del motor siga una referencia de velocidad, es decir,  $x_3 \rightarrow x_{3d}$ , con este fin se definen los siguiente errores mecánicos

$$e_2 \triangleq x_2 - x_{2d} \quad (4.4)$$

$$e_3 \triangleq x_3 - x_{3d}, \quad (4.5)$$

donde

$$x_{2d} \triangleq \int_0^t x_{3d}(\vartheta) d\vartheta, \quad x_{2d}(0) = x_2(0). \quad (4.6)$$

Sustituyendo estas definiciones en la dinámica mecánica (4.2b) y (4.2c) se obtiene

$$\dot{e}_2 = e_3 \quad (4.7)$$

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{J}\tau + z_1(t), \quad (4.8)$$

donde  $z_1(t)$  se define como

$$z_1(t) \cong -\frac{d}{J}x_3(t) - \frac{1}{J}\tau_L(t) - \dot{x}_{3d}(t). \quad (4.9)$$

Para usar esta aproximación como un modelo interno de la dinámica mecánica, se hacen las siguientes suposiciones [Sira-Ramírez et al., 2010].

**Suposición 1.** *La señal  $z_1(t)$  puede escribirse como un polinomio de Taylor de grado fijo*

$$z_1(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i t^i + r(t), \quad (4.10)$$

donde  $i = 1, \dots, p$ , y  $a_i$  son coeficientes constantes. △

**Suposición 2.** *Al menos las primeras  $p$  derivadas del termino residual  $r(t)$  existen, i.e., hasta  $r^{(p)}(t)$ .* △

**Comentario 11.** *La suposición 1 teóricamente reduce el tipo de referencias de velocidad que pueden usarse (referencias con derivadas acotadas). Sin embargo, en la práctica, los controladores basados en GPIO funcionan adecuadamente con referencias que tiene cambios abruptos, tales como referencias escalonadas. Además, se ha mostrado en Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles [2014] que éstos observadores son capaces de compensar fenómenos tales como la fricción de Coulomb.* △

A partir de la suposición 1, el modelo de  $z_i(t)$ , con  $i = 1, \dots, p$ , puede escribirse como

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (4.11a)$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \quad (4.11b)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{p-1} = z_p \quad (4.11c)$$

$$\dot{z}_p = r^{(p)}(t). \quad (4.11d)$$

Para estimar la velocidad y a  $z_i(t)$ , se propone el siguiente observador lineal:

$$\dot{\hat{e}}_2 = \hat{e}_3 + \lambda_{p+1} \tilde{e}_2 \quad (4.12a)$$

$$\dot{\hat{e}}_3 = \frac{1}{J} \tau + \hat{z}_1 + \lambda_p \tilde{e}_2 \quad (4.12b)$$

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + \lambda_{p-1} \tilde{e}_2 \quad (4.12c)$$

$$\dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 + \lambda_{p-2} \tilde{e}_2 \quad (4.12d)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{z}}_{p-1} = \hat{z}_p + \lambda_1 \tilde{e}_2 \quad (4.12e)$$

$$\dot{\hat{z}}_p = \lambda_0 \tilde{e}_2, \quad (4.12f)$$

donde  $\tilde{e}_2 \triangleq e_2 - \hat{e}_2$ ,  $\tilde{e}_3 \triangleq e_3 - \hat{e}_3$  y  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p+1}$  son los coeficientes del polinomio característico

$$s^{p+2} + \lambda_{p+1}s^{p+1} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0 = 0. \quad (4.13)$$

Finalmente, usando los estimados del observador (4.12), se propone la siguiente ley de control mecánica

$$\tau_d = J(-\Lambda_{m2} e_2 - \Lambda_{m3} \hat{e}_3 - \hat{z}_1), \quad (4.14)$$

donde  $\Lambda_{m2} > 0$  and  $\Lambda_{m3} > 0$  son ganancias constantes. Entonces, la dinámica del error mecánico puede obtenerse al sustituir (4.14) en (4.8)

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{J}(\tau - \tau_d) - \Lambda_{m2} e_2 - \Lambda_{m3} e_3 + \Lambda_{m3} \tilde{e}_3 + \tilde{z}_1. \quad (4.15)$$

Para representar de una forma compacta estas expresiones, se define el vector

$$\mathbf{e}_{23} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

por lo tanto, la dinámica del error puede reescribirse como

$$\dot{e}_{23} = \mathbf{A}_m e_{23} + \mathbf{B}_m \bar{r}_1, \quad (4.17a)$$

donde

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Lambda_{m2} & -\Lambda_{m3} \end{bmatrix} \quad (4.17b)$$

y

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}}_1 = \frac{1}{J}(\tau - \tau_d) + \Lambda_{m3} \tilde{e}_3 + \tilde{z}_1. \quad (4.17c)$$

De forma similar, el sistema mecánico (4.7)–(4.8) y (4.11) en lazo cerrado con el observador (4.12) puede escribirse como

$$\dot{\tilde{e}}_2 = \tilde{e}_3 - \lambda_{p+1} \tilde{e}_2 \quad (4.18a)$$

$$\dot{\tilde{e}}_3 = \tilde{z}_1 - \lambda_p \tilde{e}_2 \quad (4.18b)$$

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2 - \lambda_{p-1} \tilde{e}_2 \quad (4.18c)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = \tilde{z}_3 - \lambda_{p-2} \tilde{e}_2 \quad (4.18d)$$

⋮

$$\dot{\tilde{z}}_{p-1} = \tilde{z}_p - \lambda_1 \tilde{e}_2 \quad (4.18e)$$

$$\dot{\tilde{z}}_p = r^{(p)} - \lambda_0 \tilde{e}_2, \quad (4.18f)$$

donde  $\tilde{z}_i \triangleq z_i - \hat{z}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Al sustituir (4.18a) en (4.18b), se puede obtener

$$\ddot{\tilde{e}}_2 + \lambda_{p+1} \dot{\tilde{e}}_2 + \lambda_p \tilde{e}_2 = \tilde{z}_1, \quad (4.19)$$

siguiendo la misma lógica, de (4.18c) y (4.19) se tiene

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2 - \lambda_{p-1} \tilde{e}_2 \quad (4.20)$$

$$= \tilde{e}_2^{(3)} + \lambda_{p+1} \ddot{\tilde{e}}_2 + \lambda_p \dot{\tilde{e}}_2. \quad (4.21)$$

De la misma forma, usando (4.18a)–(4.18f) en un proceso iterativo se puede encontrar que

$$\tilde{e}_2^{(p+2)} + \lambda_{p+1} \tilde{e}_2^{(p+1)} + \dots + \lambda_1 \dot{\tilde{e}}_2 + \lambda_0 \tilde{e}_2 = r^{(p)}(t). \quad (4.22)$$

Como en el caso de lazo de control mecánico, si se define el vector

$$\tilde{\mathbf{e}}_o = \begin{bmatrix} \tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{e}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{e}_2^{(p+1)} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

la ecuación (4.22) puede reescribirse como

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_o = \mathbf{A}_o \tilde{\mathbf{e}}_o + \mathbf{B}_o \bar{r}_2, \quad (4.24a)$$

donde

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_{p-1} \end{bmatrix} \quad (4.24b)$$

$$\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.24c)$$

con  $\bar{r}_2 = r^{(p)}$ , y  $\mathbf{A}_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{B}_o \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ . Donde,  $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{p+1}\}$  debe escogerse de tal forma que el polinomio (4.13) de grado  $p + 2$  sea Hurwitz.

### 4.1.3 Lazo de control eléctrico

Para alcanzar el objetivo de control del lazo eléctrico, es decir,  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_{1d}$ , se empleó la ley de control propuesta en Espinosa-Pérez et al. [2004], donde en lugar de la velocidad medida, se utilizó su estimado dado por  $\hat{x}_3$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}(x_2) \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{1d} + \hat{x}_3 \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_{1d} + \mathbf{R} \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{K}_v \mathbf{e}_1 \quad (4.25)$$

donde

$$\hat{x}_3 \triangleq \hat{e}_3 + x_{3d}, \quad (4.26)$$

$\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz de ganancias,  $\mathbf{e}_1 \triangleq \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1d}$  es el error eléctrico.

Asimismo, las corrientes deseadas y sus derivadas con respecto al tiempo están dadas por

$$x_{1dj} \triangleq \begin{cases} \sqrt{\frac{2m_j(x_2)\tau_d}{C_j(x_2)}} & \text{if } C_j(x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}, \quad (4.27)$$

$$\dot{\hat{x}}_{1dj} \triangleq \begin{cases} \bar{a}_j \hat{x}_3 + b_j & \text{if } C_j(x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}, \quad (4.28)$$

$$\bar{a}_j = \frac{1}{\sqrt{x_{1dj}}} \left( \frac{\tau_d \left( \frac{\partial m_j(x_2)}{\partial x_2} C_j(x_2) - m_j(x_2) \frac{\partial C_j(x_2)}{\partial x_2} \right)}{C_j^2(x_2)} \right), \quad (4.29)$$

$$b_j = \frac{1}{\sqrt{x_{1dj}}} \left( m_j(x_2) C_j(x_2) \dot{\hat{\tau}}_d \right), \quad (4.30)$$

$$\dot{\hat{\tau}}_d = \mathbf{J} \left( -\Lambda_{m2} \hat{e}_3 - \Lambda_{m3} \dot{\hat{e}}_3 - \dot{\hat{z}}_1 \right), \quad (4.31)$$

donde  $C_j(x_2) \triangleq \frac{\partial D_j(\theta)}{\partial \theta}$  y  $m_j(x_2)$  son las funciones de par compartido [Taylor, 1992], que definen la conmutación de las fases del estator, minimizando el rizo en el par/velocidad. Se resalta que  $x_{1d}$  es función del par deseado  $\tau_d$  en (4.14). Además, nótese el ligero abuso de notación en la definición de  $\dot{\hat{x}}_{1dj}$  en (4.28) y  $\dot{\hat{\tau}}_d$  en (4.31).

Usando la definición del error eléctrico, la expresión de la ley de control (4.25), y la dinámica eléctrica (4.2a), se obtiene la dinámica del error de seguimiento de corrientes

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= -\mathbf{L}(x_2)^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{K}_v + x_3 \mathbf{C}(x_2)) \mathbf{e}_1 \\ &\quad - \tilde{e}_3 \mathbf{L}(x_2)^{-1} \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_{1d} + \tilde{e}_3 a_j, \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde

$$a_j = \bar{a}_j - \frac{1}{\sqrt{x_{1dj}}} m_j C_j(x_2) \mathbf{J} \Lambda_{m2}. \quad (4.33)$$

La ecuación (4.32) puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{A}_e(t) \mathbf{e}_1 + \mathbf{B}_e(t). \quad (4.34a)$$

donde

$$\mathbf{A}_e(t) = -\mathbf{L}(x_2)^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{K}_v + x_3 \mathbf{C}(x_2)) \quad (4.34b)$$

$$\mathbf{B}_e(t) = -\tilde{e}_3 \mathbf{L}(x_2)^{-1} \mathbf{C}(x_2) \mathbf{x}_{1d} + \tilde{e}_3 a_j. \quad (4.34c)$$

La dinámica en lazo cerrado de la conexión en cascada de los lazos de control está descrita por las ecuaciones (4.17), (4.24) y (4.34), cuyo vector de estados es

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_{23} \\ \tilde{\mathbf{e}}_o \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$



De donde se sigue que

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}(t), \quad (4.36a)$$

con

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e(t) & O & O \\ O & \mathbf{A}_m & O \\ O & O & \mathbf{A}_o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e \\ \mathbf{B}_m \bar{r}_1 \\ \mathbf{B}_o \bar{r}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.36b)$$

## 4.2 Resultado

Este resultado se resume en la siguiente

**Proposición 10.** *Considérese el MRC dado por (4.2) en lazo cerrado con la ley de control*

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}(x_2)\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{1d} + \hat{x}_3\mathbf{C}(x_2)\mathbf{x}_{1d} + \mathbf{R}\mathbf{x}_{1d} - \mathbf{K}_v\mathbf{e}_1,$$

con  $\hat{x}_3 \triangleq \hat{e}_3 + x_{3d}$ , donde el error  $\hat{e}_3$  es estimado usando observador (4.12) y la corriente deseada por fase  $\mathbf{x}_{1d}$  se calcula usando

$$x_{1dj} \triangleq \begin{cases} \sqrt{\frac{2m_j(x_2)\tau_d}{C_j(x_2)}} & \text{if } C_j(x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}, \quad (4.37)$$

con  $\tau_d$  dado por (4.14). Se define una región  $\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{p+1}$  como

$$\mathfrak{D} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{p+1} \mid \|\mathbf{y}\| \leq y_{\max}\} \quad (4.38)$$

donde  $y_{\max}$  es una constante positiva arbitrariamente grande. Si la trayectoria deseada  $x_{3d}$  y el par de carga  $\tau_L$  están acotados y tienen al menos  $p$  derivadas con respecto al tiempo acotadas, entonces, siempre se puede encontrar una combinación de raíces del polinomio (4.13) tal que los errores de seguimiento ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) y los errores de observación ( $\tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_p$ ), estén acotados siempre y cuando la condición inicial  $\mathbf{y}(t_0)$  en el subconjunto  $\mathfrak{D}$  sea suficientemente pequeña para evitar que su trayectoria  $\mathbf{y}(t)$  abandone  $\mathfrak{D}$  durante el transitorio. Si además, los polos de (4.13) se escogen suficientemente alejados del eje imaginario en el semi-plano izquierdo, entonces  $\mathbf{y}(t)$  es finalmente acotada con cota final arbitrariamente pequeña. Adicionalmente, el estimado de  $\hat{z}_1$  tenderá a un valor arbitrariamente cercano al valor real de  $z_1$ .  $\triangle$

**Demostración 10.** La demostración completa de la Proposición 10 puede consultarse en [De La Guerra et al., 2016], por lo cual aquí se incluye solo un esbozo.

Es importante mencionar que, se hace un análisis de estabilidad local, válido solamente en la región  $\mathfrak{D}$ . La demostración consta de tres pasos: 1) Ya que no se puede garantizar a priori que todas las señales de interés (incluyendo  $\tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_p, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) están acotadas para toda trayectoria  $\mathbf{y} \in \mathfrak{D}$ , el primer paso es mostrar que estas señales están acotadas. 2) Una vez que se ha demostrado que las señales de interés están acotada en  $\mathfrak{D}$ , se debe mostrar que el estado  $\mathbf{y}$  está finalmente acotado, esto se hace proponiendo funciones candidatas de Lyapunov para cada uno de los subsistemas:  $V_1$ , para la dinámica del error de estimación,  $V_2$ , para la dinámica del error de seguimiento mecánico y  $V_e$  para la dinámica del seguimiento del error eléctrico. 3) Sumando  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_e$ , se puede obtener una función candidata de Lyapunov para el sistema (4.36) dada por

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{y}) &= V_1 + V_2 + V_e \\
 &= \tilde{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{e}}_0 + \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{e}_{23} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{L}(x_2) \mathbf{e}_1 \\
 &= \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{L}(x_2) \end{bmatrix} \mathbf{y} \\
 &\triangleq \mathbf{y}^T \mathbf{M}(x_2) \mathbf{y},
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde, deben existir dos constantes positivas  $\lambda_m$  y  $\lambda_M$  tal que

$$\lambda_m \|\mathbf{y}\|^2 \leq V(\mathbf{y}) \leq \lambda_M \|\mathbf{y}\|^2. \tag{4.40}$$

La derivada de la función  $V(\mathbf{y})$  a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\lambda_{m1}(\mathbf{Q}_1) \|\tilde{\mathbf{e}}_0\| \left( \|\tilde{\mathbf{e}}_0\| - 2 \frac{\lambda_{M1}(\mathbf{P}_1)}{\lambda_{m1}(\mathbf{Q}_1)} \|\mathbf{B}_0\| r_{2M} \right) \\
 &\quad - \lambda_{m2}(\mathbf{Q}_2) \|\mathbf{e}_{23}\| \left( \|\mathbf{e}_{23}\| - 2 \frac{\lambda_{M2}(\mathbf{P}_2)}{\lambda_{m2}(\mathbf{Q}_2)} \|\mathbf{B}_m\| r_{1M} \right) \\
 &\quad - \frac{k_v}{4} \|\mathbf{e}_1\|^2 - \frac{k_v}{4} \|\mathbf{e}_1\| (\|\mathbf{e}_1\| - (c_1 r_f x_{1M} + d_1 x_{1Mp})).
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

donde se demostró en el paso 1) que  $|\tilde{e}_3| \leq r_f$  y  $\|\mathbf{x}_{1d}\| \leq x_{1M}$ ,  $\|a_j\| \leq x_{1Mp}$  están acotadas en  $\mathfrak{D}$ .

Al escoger los valores propios de  $\mathbf{A}_o$  y de  $\mathbf{A}_m$  con parte real negativa y suficientemente grande, y al definir  $k_v$  suficientemente grande, los términos

$$2 \frac{\lambda_{M1}(\mathbf{P}_1)}{\lambda_{m1}(\mathbf{Q}_1)}, \quad 2 \frac{\lambda_{M2}(\mathbf{P}_2)}{\lambda_{m2}(\mathbf{Q}_2)}, \quad \frac{1}{k_v}, \tag{4.42}$$

pueden hacerse arbitrariamente pequeños. En consecuencia, se cumple que

$$V(\mathbf{y}) \leq 0 \quad \text{si} \quad \|\mathbf{y}\| \geq \mu, \quad (4.43)$$

donde

$$\mu = \max \left\{ \frac{2\lambda_{M1}(\mathbf{P}_1)\|\mathbf{B}_o\|r_{2M}}{\lambda_m}, \frac{2\lambda_{M2}(\mathbf{P}_2)\|\mathbf{B}_m\|r_{\max}}{\lambda_m}, \frac{4(c_1r_{fx1M} + d_1x_{1Mp})}{\lambda_m} \right\},$$

con

$$\lambda_m = \min \{ \lambda_{m1}(\mathbf{Q}_1), \lambda_{m2}(\mathbf{Q}_2), k_v \}. \quad (4.44)$$

Por lo tanto,  $\mu$  puede hacerse arbitrariamente pequeña. A partir de (4.40), se tiene que  $\mathbf{y}$  debe estar finalmente acotada por

$$\|\mathbf{y}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \mu \triangleq b. \quad (4.45)$$

Adicionalmente, es necesario tener  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\max}$  para que el estado permanezca en  $\mathfrak{D}$  para todo tiempo. Esto puede garantizarse si la condición inicial satisface

$$\|\mathbf{y}(t_0)\| < \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_M}} y_{\max}. \quad (4.46)$$

Finalmente, las trayectorias del sistema (4.36) están finalmente acotadas, con cota final dada por (4.45). Lo que significa que, los elementos del vector  $\mathbf{y}$  pueden hacerse arbitrariamente pequeños, lo que implica a su vez que, los errores de seguimiento y estimación son cercanos a cero y de la primera parte de la demostración todas la señales de interés están acotadas, lo que concluye la demostración.  $\triangle$

**Comentario 12.** Como en Arteaga-Pérez y Gutiérrez-Giles [2014] no se asume a priori el acotamiento de  $r^{(p)}(t)$ .  $\triangle$

**Comentario 13.** A partir de la definición de  $\tau_d$  en (4.14), el objetivo de control puede cambiarse de seguimiento de velocidad a seguimiento de posición con solo modificar la expresión (4.6) tal que

$$x_{3d} \triangleq \dot{x}_{2d}. \quad (4.47)$$

$\triangle$

### 4.3 Validación experimental

#### Plataforma experimental

Se realizó una validación experimental del esquema de control propuesto, en la plataforma de la Figura 4.1. El controlador se implementó en Matlab Simulink Real-Time con un periodo de muestreo de  $T = 0.5$  [ms]. En el Procesador Digital de Señales (DSP) dSPACE DS1104 R&D se hizo la adquisición de las señales de los sensores de posición y corrientes, y se obtuvieron las señales de Modulación por Ancho de Pulso (PWM), con una frecuencia de 20[kHz], que alimentaron al convertidor electrónico. El convertidor electrónico es un puente asimétrico con un voltaje de bus de 45[V]. El sensor de posición tiene una resolución de 1024[pulses/rev]. Un MCD con una relación par/corriente de  $K_\tau = 1.5556$  [Nm/A], es usado para simular el par de carga para el MRC. Los parámetros del MRC se muestran en la Tabla 4.1.

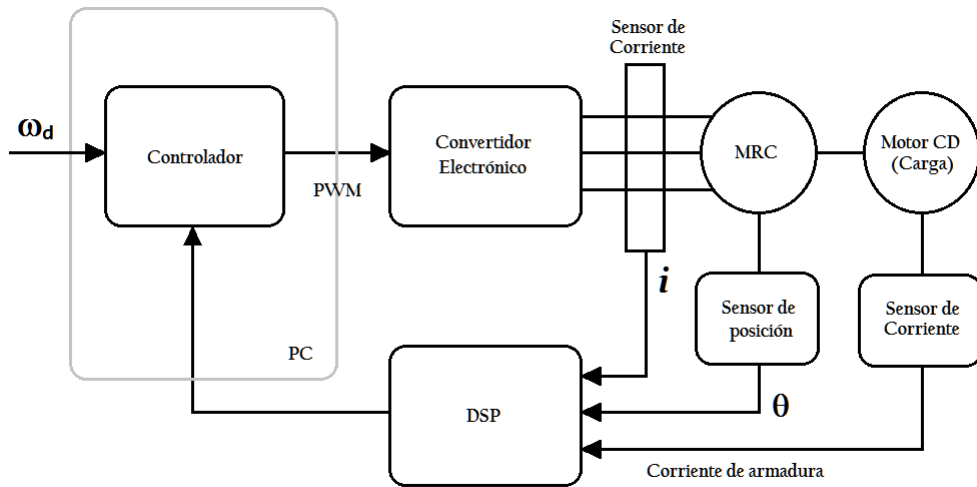


Figura 4.1: Diagrama del esquema de control

#### Resultados experimentales

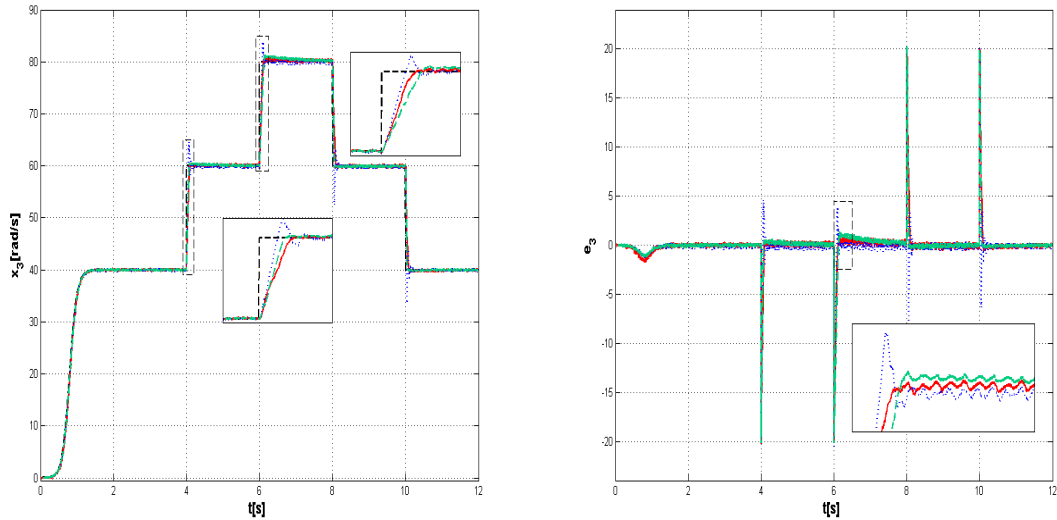
El controlador GPI se comparó con el controlador PI2D de Loria et al. [2014] y con el Control Basado en Pasividad (PBC) reportado en Espinosa-Pérez et al. [2004].

Para el controlador PBC se usaron las ganancias eléctricas  $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{30, 30, 30\}$  y las ganancias mecánicas  $a = 36, b = 40$ . Para el controlador GPI, se usaron las ganancias

<b>Parámetros geométricos</b>	
Número de polos de rotor	8
Número de polos de estator	12
Número de fases	3
<b>Parámetros eléctricos</b>	
Voltaje máximo	$V_{\max} = 120 \text{ V}$
Corriente máxima	$i_{\max} = 4 \text{ A}$
Resistencia del devanado	$r = 1.6 \Omega$
<b>Coefficientes de la inductancia de devanado</b>	
	$l_0 = 0.05 \text{ mH}$
	$l_1 = 0.008 \text{ mH}$
<b>Parámetros mecánicos</b>	
Inercia del rotor	$J = 0.0016 \text{ Kgm}^2$

Table 4.1: Parámetros del MRC

eléctricas  $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{30, 30, 30\}$ , las ganancias mecánicas  $\Lambda_{m2} = 40$ ,  $\Lambda_{m3} = 100$  y para el observador (4.12) se uso  $\lambda_0 = 750$ ,  $\lambda_1 = 2.25 \times 10^5$ ,  $\lambda_2 = 3.375 \times 10^7$ ,  $\lambda_3 = 2.5313 \times 10^9$ ,  $\lambda_4 = 7.5938 \times 10^{10}$  (*i.e.*, los polos se fijaron como  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = -150$ ). Mientras tanto, para el controlador PI2D, las ganancias del lazo mecánico fueron  $k_d = 150$ ,  $k_p = 300$ ,  $k_i = 0.1$ ,  $a = 320$ ,  $b = 661$ , y para el lazo eléctrico  $\mathbf{K}_{px} = \text{diag}\{60, 60, 60\}$ .


 Figura 4.2: Experimento 1, Izq.:  $x_3$ , Der.:  $e_3$  GPI(—), PBC(⋯), PI2D(- - -)

Se presentan dos experimentos, el primero sin par de carga y el segundo con un par de carga constante.

### Variación de la consigna

En este experimento se sigue una referencia de consigna variable, sin par de carga, *i.e.*,  $\tau_L = 0$ , en el intervalo  $0 - 80$  [rad/s], (para velocidades menores a la velocidad base  $100$  [rad/s]). En la Figura 4.2 se muestran, el seguimiento de velocidad y el error de seguimiento de velocidad para los tres controladores, donde el desempeño de los controladores GPI y PI2D es similar. Esto se puede apreciar mejor en los cambios de la consigna de velocidad, de  $40$  a  $60$  [rad/s] y de  $60$  a  $80$  [rad/s] donde las diferencias en respuesta para estos controladores son mínimas. Por el contrario, el controlador PBC presenta sobrepaso y tiempos de levantamiento más grandes.

### Par de carga constante

En el segundo experimento se sigue la referencia de velocidad dada por

$$x_{3d} = 40(1 + \tanh(5(t - 0.8))) \quad [\text{rad/s}], \quad (4.48)$$

con par de carga igual a  $\tau_L = 0.85$  [Nm] aplicado a partir del tiempo  $0.8$  [s]. Un par constante simula el manejo de objetos de peso constante. El seguimiento de velocidad y el error de seguimiento se muestran en la Figura 4.3, donde es claro que los controladores GPI y PI2D pueden compensar el par de carga.

#### 4.3.1 Sintonización

La sintonización del esquema GPI es sencilla si se siguen las siguientes recomendaciones:

- En el lazo de control eléctrico se tiene una ganancia proporcional, por lo tanto esta ganancia se debe incrementar para reducir el error de seguimiento de corrientes.
- Para el lazo de control mecánico, las ganancias  $\Lambda_{m2}$ ,  $\Lambda_{m3}$ , definen un controlador PI, éstas deben sintonizarse para obtener un comportamiento estable.
- Mientras más alto sea el grado  $p$  del polinomio en (4.10) mejor será la aproximación de las dinámicas desconocidas. Sin embargo, en la práctica, después de un cierto grado no existe ventaja en aumentar el grado del polinomio, mientras la carga computacional

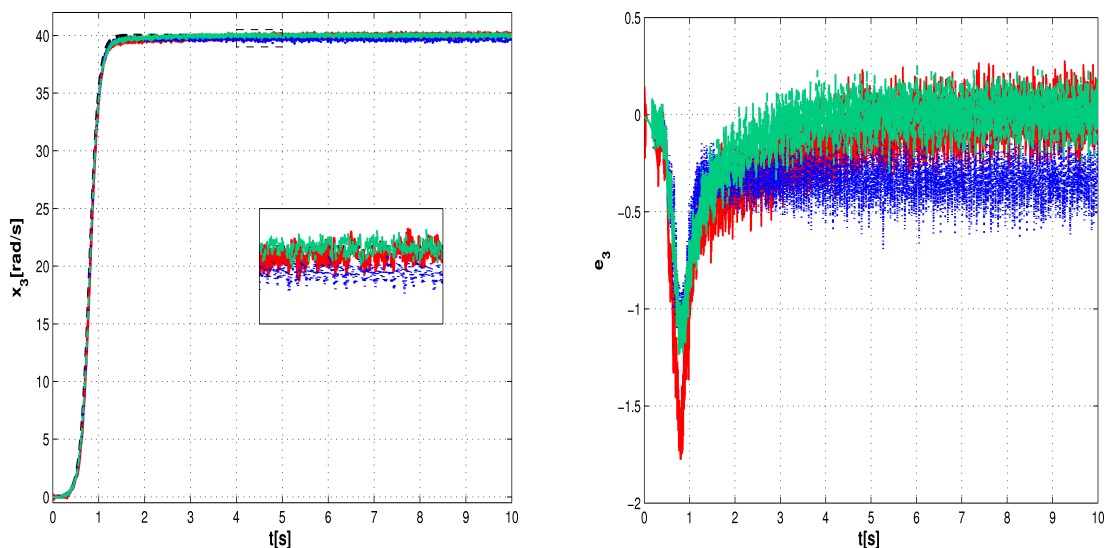


Figura 4.3: Experimento 2, Izq.:  $x_3$ , Der.:  $e_3$  GPI(—), PBC(···), PI2D(- - -)

aumenta. En general, escoger  $p = 3$  es una buena elección y por lo tanto es el valor que se ha escogido en este trabajo.

- Finalmente, los polos del observador deben elegirse tan lejos en el semi-plano izquierdo del plano complejo como lo permita el ancho de banda del sistema.

Controlador	RMSE de $e_1$	RMSE de $e_3$
<b>Variación de la consigna</b>		
GPI	0.7125	3.8159
PI2D	0.9959	17.7647
PBC	0.9531	14.4264
<b>Par de carga constante</b>		
GPI	0.5946	13.6498
PI2D	1.4673	15.1473
PBC	0.9814	14.4434

Table 4.2: RMSE para los dos experimentos

## 4.4 Discusión

Para determinar que controlador tuvo un mejor desempeño en los experimentos presentados, dado que los controladores GPI y PI2D tuvieron un comportamiento similar, se calculó el

valor RMS de los errores de seguimiento, como en Arteaga-Pérez et al. [2015],

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2}, \quad (4.49)$$

donde  $i$  es la muestra actual,  $e_i$  es el error correspondiente y  $n$  es el número total de muestras. Los resultados de la Tabla 4.2 dejan claro que el controlador GPI es mejor en los dos casos, sobretodo en el caso del cambio de consigna. Adicionalmente, vale la pena mencionar que el método propuesto es mucho más fácil de sintonizar que el controlador PI2D.



## Capítulo 5

# Conclusiones

En esta tesis se estudiaron las propiedades de observabilidad del modelo de señal pequeña del motor de reluctancia conmutada, cuando se miden solamente las variables eléctricas en dos modos de operación, a) cuando se miden los enlaces de flujo, b) cuando se miden las corrientes de fase.

### **Método basado en la dinámica indistinguible**

Para realizar el análisis de observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC, se utilizaron dos métodos, en cuanto a los resultados obtenidos con el análisis basado en el concepto de trayectorias indistinguibles de Moreno et al. [2002], se pudo mostrar que: el modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo en operación SSM es no uniformemente observable porque existe una entrada singular, *i.e.*  $\mathbf{u} \equiv 0$ . Además, se pudo demostrar que, si la entrada es  $\mathbf{u} \neq 0$ , el modelo del MRC en términos de los enlaces de flujo en operación SSM es débilmente observable si se cumplen las condiciones de la Proposición 4.

Este resultado explica porqué se ha utilizado este modelo para el diseño de observadores de las variables mecánicas. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, ésto no se considera recomendable debido a que los enlaces de flujo no se miden directamente y la estimación (usualmente basada en la integración de las corrientes y los voltajes de fase como se explica en el Capítulo 1, Sección 1.2) de éstos suele verse afectada por incertidumbre paramétrica.

En cuanto al modelo del MRC en términos de las corrientes, utilizando el análisis de la DI se pudo determinar que en operación SSM el MRC es no uniformemente observable. En este caso la entrada singular esta definida por la expresión (3.18) cuando el error de posición es distinto de cero y  $\mathbf{u} \equiv 0$ .

Adicionalmente, el método de Moreno et al. [2002] fue de utilidad para identificar dos casos de trayectorias indistinguibles del MRC: el primero relacionado con la entrada singular  $\mathbf{u} \equiv 0$  y el segundo relacionado con la periodicidad de las funciones de la inductancia.

En resumen, los resultados obtenidos demuestran que el método basado en el análisis de la dinámica indistinguible, es de gran utilidad para comprender las formas en que un sistema no lineal pierde observabilidad. Aunque, en el caso del modelo del MRC en términos de las corrientes la expresión de la restricción algebraica es bastante más compleja que en el caso en el que se miden los enlaces de flujo, lo que hace mucho más difícil la obtención de resultados similares a los de la Proposición 4.

### **Método basado en la condición de rango**

Con respecto al método basado en la condición de rango de observabilidad, se replanteó el análisis de observabilidad presentado en De La Guerra [2011], ya que se considero el papel de la entrada, al incorporar el campo vectorial forzado en la formación del mapeo de observabilidad. Con base en este análisis se determinó que en ambos casos, cuando se miden los enlaces de flujo y cuando se miden las corrientes de fase, el modelo es local y débilmente observable si se cumplen las condiciones de las Proposiciones 9 y 8, respectivamente. La condición sobre las entradas es que deben ser distintas de cero para todo tiempo.

En síntesis, las condiciones de las Proposiciones 4, 8 y 9 indican que se puede obtener un estimado de los estados usando el modelo de señal pequeña del MRC en operación SSM, **siempre que las salidas y las entradas sean distintas de cero y se consideren condiciones iniciales pertenecientes a un cuadrante o paso polar de rotor.**

Nótese que, la observabilidad débil (Proposición 4) y la observabilidad local y débil (Proposiciones 8 y 9) son dos tipos de observabilidad que permiten distinguir estados *vecinos*, es

decir, se define una vecindad del punto  $\boldsymbol{x}^0$  en la cual no existen estados indistinguibles de ese punto. Los intervalos de la posición definidos para cada método (para el método basado en la DI el intervalo de posiciones este intervalo se define en la Sección 3.1.2 y el Comentario 6 para los modelos en términos de los enlaces de flujo y en términos de las corrientes, respectivamente) son equivalentes si se igualan las referencias con respecto al mínimo valor de inductancia (valor máximo de reluctancia).

En cuanto a la comparación entre los dos métodos de análisis, el método basado en el estudio de la dinámica indistinguible permite no solo definir las propiedades de observabilidad del sistema, también es útil para identificar trayectorias indistinguibles y entradas singulares de un sistema no lineal.

Finalmente, es posible que usando una entrada apropiada *i.e.*, una entrada capaz de distinguir las trayectorias indistinguibles del MRC en operación SSM, se pueda diseñar un observador de alta ganancia que tome en cuenta las condiciones de las Proposiciones 8 y 9.

### **Interpretación física de los resultados de observabilidad**

Una forma de relacionar las condiciones de observabilidad obtenidas con el funcionamiento de la máquina eléctrica es: las variables mecánicas se pueden reconstruir con la suma de las aportaciones de cada fase en un ciclo de generación de energía, es decir, en un paso polar de rotor, siempre que la corriente de fase de estator (alternativamente el enlace de flujo) sea distinta de cero. Este resultado está en concordancia con el funcionamiento del MRC, ya que para generar par mecánico, es necesario que se cumplan dos condiciones para una fase dada, a) que la fase se encuentre en la región de inductancia creciente o decreciente, es decir, en la región comprendida entre un mínimo(máximo) y un máximo(mínimo) de inductancia (condición sobre  $\theta$ ) y b) que la corriente o el enlace de flujo sean distintos de cero (condición sobre las salidas). Mientras, la interpretación física de los *cuadrantes* es: si se divide la posición angular de rotor en  $N_r$  *cuadrantes*, es posible distinguir entre las posiciones dentro de cada uno de éstos mientras las entradas, salidas y la velocidad sean distintos de cero. Para distinguir entre cuadrantes se puede utilizar una rutina de arranque independiente de la posición angular, véase Ahmed et al. [2009], para definir una posición de máxima inductancia para una fase de estator dada, que será la referencia de posición

absoluta.

### **Control robusto sin medición de velocidad**

En cuanto al diseño de observadores, debido a que, el modelo del MRC en términos de las corrientes es (globalmente) uniformemente observable cuando se miden las corrientes de estator y la posición angular, como se muestra en el Comentario 9 del Capítulo 3, se puede obtener un estimado de los estados, en particular de la velocidad angular. Aprovechando ésta propiedad, así como el hecho de que el modelo se puede escribir en una forma conveniente para el diseño del observador, se propuso un esquema de control robusto basado en un observador de espacio extendido de alta ganancia, que tiene un buen desempeño con par de carga desconocido y variable. Este esquema de control es producto de la búsqueda de un controlador sin medición de velocidad robusto ante variaciones del par de carga. De hecho, es el resultado del trabajo comenzado en la tesis precedente [De La Guerra, 2011], donde se presentó un observador de velocidad de orden reducido. Buscando mejorar este diseño, es decir, hacerlo menos dependiente de los parámetros, se propuso un observador de espacio extendido y alta ganancia, cuya versión más reciente se incluye en este trabajo de tesis. El controlador sin medición de velocidad propuesto fue evaluado experimentalmente, junto con un esquema de control sin medición de velocidad similar [Loria et al., 2014], para mostrar que: es fácil de implementar, sintonizar y que puede compensar par de carga variable en presencia de ruido de medición y sin conocer exactamente los parámetros.

## Apéndice A

# Sistemas Diferenciales Algebraicos

La DI del MRC es un SAD, que se puede interpretar como un SEDO definido sobre una variedad. La variedad solución,  $\mathcal{M}$ , se puede obtener por medio de distintos procedimientos, por ejemplo el método utilizado en [Ibarra-Rojas et al., 2004] tomado de Rheinboldt [1984]. En este trabajo de tesis, se utiliza la taxonomía tomada de Riaza et al. [2000], que se centra en el estudio de SAD singulares semi-implícitos de índice-1 de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ 0 &= g(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f$  y  $g$  son mapeos suficientemente suaves.

El índice de un SAD, en este contexto, se define como el mínimo número de diferenciaciones de la restricción algebraica  $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$ , necesarias para reducir el sistema (A.1) a un SEDO explícito de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ g_u(\mathbf{x}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} &= g_x(\mathbf{x}, \mathbf{u})f(\mathbf{x}, \mathbf{u}).\end{aligned}\tag{A.2}$$

donde  $g_u(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$  y  $g_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}$ . El conjunto solución del sistema (A.2) se define como el conjunto de puntos para los cuales  $\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}$  es invertible, mientras el conjunto singular está definido por los puntos en los cuales se cumple que

$$\mathcal{S} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \det \left( \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right) = 0 \right\}.$$

Los SAD implícitos que pueden ser (localmente) reducidos a su forma de SEDO explícito mediante manipulaciones algebraicas tienen índice-0.

Entonces, en el caso de los SAD estudiados en el Capítulo 3, se tiene que la DI del modelo del MRC en términos de los enlaces de flujos (3.1) es un SAD con índice-1, mientras la DI del MRC en términos de las corrientes (3.10) es un SAD con índice-0.

## A.1 DI del modelo del MRC en función de los enlaces de flujo

De la Proposición 1 del Capítulo 3, la DI del MRC en términos de los enlaces de flujos es igual a

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{u} - \mathbf{RL}^{-1}(\theta)\boldsymbol{\lambda} \quad (\text{A.3a})$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (\text{A.3b})$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J}\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{H}(\theta)\boldsymbol{\lambda} - \frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t) \quad (\text{A.3c})$$

$$\dot{e}_\theta = e_\omega \quad (\text{A.3d})$$

$$\dot{e}_\omega = \frac{1}{2J}\boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{H}(e_\theta, \theta) - \mathbf{H}(\theta))\boldsymbol{\lambda} - \frac{d}{J}e_\omega \quad (\text{A.3e})$$

$$0 = \mathbf{RN}(e_\theta, \theta)\boldsymbol{\lambda}. \quad (\text{A.3f})$$

El sistema (A.3) puede escribirse en la forma (A.1) con  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\lambda} \ \theta \ \omega \ e_\theta \ e_\omega]$ ,  $\mathbf{u}$  la variable algebraica y  $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{RN}(e_\theta, \theta)\boldsymbol{\lambda} = 0$ . Como se menciona en el Comentario 3.1.2 del Capítulo 3, la matriz  $\mathbf{N}(e_\theta, \theta)$  es no singular si  $e_\theta \neq 0$ , por lo tanto, la única solución de la restricción algebraica (A.3f) es  $\boldsymbol{\lambda} = 0$ .

Por otra parte, si se diferencia la restricción algebraica (A.3f) una vez con respecto al tiempo, se obtiene el SEDO subyacente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ 0 &= -\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$-\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{N}(e_\theta, \theta)(\mathbf{u} - \mathbf{RL}^{-1}(\theta)\boldsymbol{\lambda}) - ((e_\omega + \omega)\mathbf{H}(e_\theta, \theta) - \omega\mathbf{H}(\theta))\boldsymbol{\lambda} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A partir de la expresión (A.6) se puede obtener una expresión para la entrada, si y sólo si

la matriz  $\mathbf{N}(e_\theta, \theta)$  es no singular, de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{RL}^{-1}(\theta)\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{N}(e_\theta, \theta)^{-1}((e_\omega + \omega)\mathbf{H}(e_\theta, \theta) - \omega\mathbf{H}(\theta))\boldsymbol{\lambda}.$$

Por lo tanto, de la solución de la restricción algebraica (A.3f) se tiene

$$\boldsymbol{\lambda} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0.$$

De manera que, el SEDO equivalente (A.4) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= 0 \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t) \\ \dot{e}_\theta &= e_\omega \\ \dot{e}_\omega &= -\frac{d}{J}e_\omega \end{aligned} \tag{A.7}$$

cuyas soluciones regulares viven en la variedad

$$\mathcal{M}_\lambda = \{(\boldsymbol{\lambda}, \theta, \omega, e_\omega, e_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} | \boldsymbol{\lambda} = 0\}.$$

Al contrario, si  $\mathbf{N}(e_\theta, \theta)$  es singular, *i.e.*,  $e_\theta = 0$ , de la restricción algebraica, cualquier valor del vector de encadenamientos de flujos  $\boldsymbol{\lambda}$ , satisface la restricción algebraica (A.3f), es decir, estas soluciones pertenecen al conjunto singular

$$\mathcal{S}_\lambda = \{(\boldsymbol{\lambda}, \theta, \omega, e_\omega, e_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} | e_\theta = 0\}.$$

## A.2 DI del modelo del MRC en función de las corrientes

De la Proposición 5 del Capítulo 3, la DI del MRC en términos de las corrientes es igual a

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{L}^{-1}(\theta)(\mathbf{u} - \omega\mathbf{C}(\theta)\mathbf{i} - \mathbf{R}\mathbf{i}) \tag{A.8a}$$

$$\dot{\theta} = \omega \tag{A.8b}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2J}\mathbf{i}^\top\mathbf{C}(\theta)\mathbf{i} - \frac{d}{J}\omega - \frac{1}{J}\tau_L(t), \tag{A.8c}$$

$$\dot{e}_\theta = \varepsilon_\omega \tag{A.8d}$$

$$\dot{e}_\omega = \frac{1}{2J}\mathbf{i}^\top(\mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{C}(\theta))\mathbf{i} - \frac{d}{J}\varepsilon_\omega \tag{A.8e}$$

$$0 = -((\varepsilon_\omega + \omega)\mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \omega\mathbf{M}(\theta))\mathbf{i} + \mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta)(\mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{i}). \tag{A.8f}$$

Para este SAD, se puede obtener una expresión para la entrada a partir de la restricción algebraica (A.8f), si y sólo si la matriz  $\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta)$  es no singular, de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{N}^{-1}(\varepsilon_\theta, \theta) (\varepsilon_\omega \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) + \omega(\mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\theta))) \mathbf{i}. \quad (\text{A.9})$$

Por otra parte, si se diferencia la restricción algebraica una vez con respecto a tiempo, se puede obtener la siguiente expresión de la derivada de la entrada,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta) \dot{\mathbf{u}} &= -(\varepsilon_\omega (\mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta)) + \omega(\mathbf{K}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\theta)) - \mathbf{R}\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta)) \bar{\mathbf{u}} \\ &+ \left( \left( \tau_e(\varepsilon_\theta, \theta) - \frac{d}{J}(\varepsilon_\omega + \omega) - \frac{\tau_L}{J} \right) \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) + \varepsilon_\omega^2 \mathbf{P}(\varepsilon_\theta, \theta) \right) \mathbf{i} \\ &+ (\omega^2 (\mathbf{P}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{P}(\theta)) - \omega \mathbf{M}(\theta)) \mathbf{i} \\ &- \omega \mathbf{C}(\theta) (\varepsilon_\omega \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) + \omega(\mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\theta))) \mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta) \mathbf{i}. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} - \mathbf{R}\mathbf{i} \\ \bar{\mathbf{L}}(\varepsilon_\theta, \theta) &= \frac{\partial \mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta)}{\partial \varepsilon_\theta} \\ \mathbf{P}(\varepsilon_\theta, \theta) &= \mathbf{L}^{-1}(\varepsilon_\theta, \theta) \bar{\mathbf{L}}(\varepsilon_\theta, \theta) + \mathbf{C}^2(\varepsilon_\theta, \theta) \\ \mathbf{K}(\varepsilon_\theta, \theta) &= \mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{C}(\theta) \\ \tau_e(\varepsilon_\theta, \theta) &= \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top \mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) \mathbf{i} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Por lo tanto el SEDO equivalente de la DI del MRC en términos de las corrientes en operación SSM es,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}(\theta) (\mathbf{u} - \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R}\mathbf{i}) \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L(t), \\ \dot{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\omega \\ \dot{\varepsilon}_\omega &= \frac{1}{2J} \mathbf{i}^\top (\mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{C}(\theta)) \mathbf{i} - \frac{d}{J} \varepsilon_\omega \\ \mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta) \dot{\mathbf{u}} &= -(\varepsilon_\omega (\mathbf{C}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta)) + \omega(\mathbf{K}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\theta)) - \mathbf{R}\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta)) \bar{\mathbf{u}} \\ &+ \left( \left( \tau_e(\varepsilon_\theta, \theta) - \frac{d}{J}(\varepsilon_\omega + \omega) - \frac{\tau_L}{J} \right) \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) + \varepsilon_\omega^2 \mathbf{P}(\varepsilon_\theta, \theta) \right) \mathbf{i} \\ &+ (\omega^2 (\mathbf{P}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{P}(\theta)) - \omega \mathbf{M}(\theta)) \mathbf{i} \\ &- \omega \mathbf{C}(\theta) (\varepsilon_\omega \mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) + \omega(\mathbf{M}(\varepsilon_\theta, \theta) - \mathbf{M}(\theta))) \mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{N}(\varepsilon_\theta, \theta) \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$



cuyas soluciones regulares viven en el conjunto solución

$$\mathcal{M}_i = \{(\mathbf{i}, \theta, \omega, \varepsilon_\omega, \varepsilon_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} | \varepsilon_\theta \neq 0\}$$

y las soluciones singulares pertenecen al conjunto

$$\mathcal{S}_i = \{(\mathbf{i}, \theta, \omega, \varepsilon_\omega, \varepsilon_\theta) \in \mathbb{R}^{m+4} | \varepsilon_\theta = 0\}.$$

# Índice de Acrónimos

<b>MRC</b> Motor de Reluctancia Conmutada .....	2
<b>PI</b> Proporcional Integral .....	3
<b>PI2D</b> Proporcional doble-Integral Derivativo .....	3
<b>SSM</b> Sin Sensores Mecánicos .....	4
<b>MIP</b> Motor de Imán Permanente .....	8
<b>MIPI</b> Motor de Imán Permanente con imanes superficiales en el rotor .....	8
<b>MIPS</b> Motor de Imán Permanente con imanes internos en el rotor .....	8
<b>MI</b> Motor de Inducción .....	8
<b>DI</b> Dinámica Indistinguible .....	12
<b>MCD</b> Motor de Corriente Directa .....	20

<b>SAD</b> Sistema de Ecuaciones Algebraico–Diferencial .....	26
<b>SEDO</b> Sistema de Ecuaciones Diferencial Ordinario.....	30
<b>GPIO</b> Observador Proporcional Integral Generalizado .....	52
<b>ESO</b> Observador de Espacio Extendido .....	52
<b>PBC</b> Control Basado en Pasividad.....	62
<b>DSP</b> Procesador Digital de Señales .....	62
<b>PWM</b> Modulación por Ancho de Pulso .....	62

# Referencias

- Ahmed, O., Ohyama, K., Narumoto, Y., Fujii, H. y Uehara, H. (2009). Sensorless operation of srm drives from starting to steady state. In *Industrial Electronics, ISIE 2009. IEEE International Symposium on*, páginas 1269–1274. IEEE.
- Arteaga-Pérez, M. A. y Gutiérrez-Giles, A. (2014). On the GPI approach with unknown inertia matrix in robot manipulators. *International Journal of Control*, 87(4):844–860.
- Arteaga-Pérez, M. A., Gutiérrez-Giles, A. y Weist, J. (2015). On the observability and the observer design of differential pneumatic pistons. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(8):081006.
- Baker, N. y Mueller, M. (2001). Direct drive wave energy converters. *Rev. Energ. Ren. Power Engineering*, páginas 1–7.
- Bamba, T., Komatsuzaki, A. y Miki, I. (2007). Estimation of rotor position for Switched Reluctance Motor at Standstill. In *Power Conversion Conference, PCC, Nagoya*, páginas 259–263.
- Besaçon, G. (1999). A viewpoint on observability and observer design for nonlinear systems. In *New Directions in nonlinear observer design*, páginas 3–22. Springer.
- Besaçon, G. (2007). *Nonlinear observers and applications*, volume 363. Springer.
- Besaçon, G. y Ticlea, A. (2007). An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1):83–88.
- Brandstetter, P. y Krna, P. (2013). Sensorless control of switched reluctance motor using sliding mode observer. In *International Conference on Applied Electronics AE*, páginas 1–4. IEEE.

- Brosse, A. y Henneberger, G. (1998). Different models of the SRM in state space format for the sensorless control using a Kalman filter. In *IEEE Conference Publication*, páginas 269–274. IEEE.
- Buja, G. S., Menis, R. y Valla, M. I. (1993). Variable structure control of an SRM drive. *IEEE, Transactions on Industrial Electronics*, 40(1):56–63.
- Canudas de Wit, C., Youssef, A., Barbot, J. P., Martin, P. y Malrait, F. (2000). Observability conditions of induction motors at low frequencies. In *IEEE Proceedings Conference on Decision and Control*, páginas 2044–2049.
- Darie, E., Cepisca, C. y Darie, I. (2008). The use of switched reluctance generator in wind energy applications. In *13th Power Electronics and Motion Control Conference, Poznan*, páginas 1963–1966.
- De La Guerra, A. (2011). Observabilidad de motores de reluctancia conmutada. Master's thesis, UNAM, México, D.F.
- De La Guerra, A., Arteaga-Pérez, M. A., Gutiérrez-Giles, A. y Maya-Ortiz, P. (2016). Speed-sensorless control of SR motors based on GPI observers. *Control Engineering Practice*, 46:115–128.
- Debal, P., Faid, S., Bervoets, S., Tricoche, L. y Pauwels, B. (2009). Development of a post-transmission hybrid powertrain. In *EVS24 International battery, hybrid and fuel cell Electric Vehicle Symposium, Norway*.
- Ehsani, M. y Fahimi, B. (2002). Elimination of position sensors in Switched Reluctance Motor Drives: State of the art and future trends. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49:40.
- Elmas, C. y Zelaya-De La Parra, H. (1996). Application of a full-order extended luenberger observer for a position sensorless operation of a Switched Reluctance Motor Drive. In *IEEE Proc. Control Theory and Applications*, páginas 401–408.
- Espinosa-Pérez, G., Maya-Ortiz, P., Velasco-Villa, M. y Sira-Ramírez, H. (2004). Passivity-based control of Switched Reluctance Motors with nonlinear magnetics circuits. *IEEE Transaction in Control Systems Technology*, 12:439–448.

- Fahimi, B., Emadi, A. y Sepe, R. (2005). Four-quadrant position sensorless control in SRM drives over the entire speed range. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 20(1):154–163.
- Fitzgerald, A. E., Kingsley, C., Umans, S. D., Fitzgerald, A. E., Fitzgerald, A. E. y Engineer, E. (2003). *Electric machinery*, volume 5. McGraw-Hill New York.
- Fossard, A. y Normand-Cyrot, D. (2012). *Nonlinear Systems: Modeling and Estimation*. Springer US.
- Gallegos-Lopez, G., Kjaer, P. C. y Miller, T. J. E. (1998). A new sensorless method for Switched Reluctance Motor Drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 34(4):832–840.
- Gao, H., Salmasi, F. R. y Ehsani, M. (2004). Inductance model-based sensorless control of the Switched Reluctance Motor Drive at low speed. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 19(6):1568–1573.
- Geldhof, K. R., Van den Bossche, A. P., Melkebeek, J. y others (2010). Rotor-position estimation of Switched Reluctance Motors based on damped voltage resonance. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(9):2954–2960.
- Hannoun, H., Hilairet, M. y Marchand, C. (2010). Design of an SRM speed control strategy for a wide range of operating speeds. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(9):2911–2921.
- Hannoun, H., Hilairet, M. y Marchand, C. (2011). High performance current control of a Switched Reluctance Machine based on a Gain-Scheduling PI controller. *Control Engineering Practice*, 19(11):1377–1386.
- Hermann, R. y Krener, A. J. (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22:728–740.
- Hossain, S., Husain, I., Klode, H., Lequesne, B., Omekanda, A. M., Gopalakrishnan, S. y others (2003). Four-quadrant and zero-speed sensorless control of a switched reluctance motor. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 39(5):1343–1349.
- Ibarra-Rojas, S. (2005). *Análisis and diseño de observadores para el motor de inducción sin sensores mecánicos*. PhD thesis, UNAM, México, D.F.

- Ibarra-Rojas, S., Moreno, J. y Espinosa-Pérez, G. (2004). Global observability analysis of sensorless induction motors. *Automatica*, 40:1079–1085.
- Ilic'-Spong, M., Marino, R., Peresada, S. y Taylor, D. (1987). Feedback linearizing control of Switched Reluctance Motors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(5):371–379.
- Isfahani, M., Saghaian-Nejad, S., Rashidi, A. y Zarchi, H. (2011). Passivity-based adaptive sliding mode speed control of Switched Reluctance Motor Drive considering torque ripple reduction. In *International Electric Machines Drives Conference, IEMDC*, páginas 1480–1485. IEEE.
- Isidori, A. (2013). *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media.
- Komatsuzaki, A., Bamba, T. y Miki, I. (2008). A position estimation for switched reluctance motor at standstill. In *International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, SPEEDAM 2008.*, páginas 290–295.
- Komatsuzaki, A., Yoshida, K. y Miki, I. (2006). A Position Sensorless Drive Technique for Switched Reluctance Motor with consideration of magnetic saturation at low and medium speeds. In *Industry Applications Conference, 2006. 41st IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2006 IEEE*, volume 4, páginas 1995–2000.
- Koteich, M., Maloum, A., Duc, G. y Sandou, G. (2015). Observability analysis of sensorless synchronous machine drives. In *European Control Conference (ECC)*, páginas 3560–3565. IEEE.
- Krishnan, R. (2001). *Switched Reluctance Motor drives: modeling, simulation, analysis, design and applications*. Industrial Electronics series, CRC Press.
- Loria, A., Espinosa-Pérez, G. y Chumacero, E. (2012). A novel PID-based control approach for switched-reluctance motors. *IEEE Proceedings Conference on Decision and Control*, páginas 7626–7631.
- Loria, A., Espinosa-Pérez, G. y Chumacero, E. (2013). Exponential Stabilization of Switched Reluctance Motors Via Speed-Sensorless Feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(3):1224–1232.

- 
- Loria, A., Espinosa-Pérez, G. y Chumacero, E. (2014). Exponential stabilization of switched-reluctance motors via speed-sensorless feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(3):1224–1232.
- Lumsdaine, A. y Lang, J. (1990). State observers for variable-reluctance motors. *IEEE Transactions Industrial Electronics*, 37:133–142.
- McCann, R., Husain, I. y others (1997). Application of a sliding mode observer for Switched Reluctance Motor Drives. In *Conference Record of the Industry Applications Conference, IAS'97.*, volume 1, páginas 525–532. IEEE.
- McCann, R. A., Mohammad, S. I. y Husain, I. (2001). Application of a sliding-mode observer for position and speed estimation in Switched Reluctance Motor drives. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 37:51–58.
- Mese, E., Torrey, D. y others (2002). An approach for sensorless position estimation for Switched Reluctance Motors using artificial neural networks. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 17(1):66–75.
- Miller, T. (2001). *Electronic Control of Switched Reluctance Machines*. Newnes Publishers, Oxford, UK.
- Moreno, J., Espinosa-Pérez, G. y Ibarra-Rojas, S. (2002). Global observability analysis of induction motors under sensorless conditions. In *Preprints of the 15th IFAC world congress. Barcelona, Spain*, volume 2339. Elsevier.
- Mueller, M. (2005). Design and performance of a 20 kW, 100 RPM, switched reluctance generator for a direct drive wind energy converter. In *IEEE International Conference on Electric Machines and Drives*, páginas 56–63. IEEE.
- Nassereddine, M., Rizk, J. y Nagrial, M. (2008). Switched Reluctance Generator for Wind Power Applications. *Proceedings World Academy of Science*, 31:126–130.
- Picciano, A. (2004). *Educational research primer*. A&C Black.
- Radke, A. y Gao, Z. (2006). A survey of state and disturbance observers for practitioners. In *Proceedings of the American Control Conference*, página 6. IEEE.



- 
- Rain, X., Hilaiet, M. y Talj, R. (2010). Second order sliding mode current controller for the Switched Reluctance Machine. In *36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society IECON*, páginas 3301–3306. IEEE.
- Rheinboldt, W. C. (1984). Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds. *Mathematics of Computation*, 43(168):473–482.
- Riaza, R., Campbell, S. L. y Marszalek, W. (2000). On singular equilibria of index-1 DAEs. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 19:131–157.
- Sira-Ramírez, H., Gonzalez-Montanez, F., Cortés-Romero, J. A. y Luviano-Juárez, A. (2013). A Robust Linear Field-Oriented Voltage Control for the Induction motor: Experimental results. *IEEE, Transactions on Industrial Electronics*, 60(8):3025–3033.
- Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M. y others (2010). On the linear control of nonlinear mechanical systems. In *IEEE Proceedings Conference on Decision and Control*, páginas 1999–2004. IEEE.
- Suresh, G., Fahimi, B., Rahman, K. y Ehsani, M. (1999). Inductance based position encoding for sensorless SRM drives. In *30th Annual Power Electronics Specialists Conference, PESC 99*, volume 2, páginas 832–837. IEEE.
- Takano, Y., Takeno, M., Hoshi, N., Chiba, A., Takemoto, M., Ogasawara, S. y Rahman, M. A. (2010). Design and analysis of a switched reluctance motor for next generation hybrid vehicle without PM materials. *International Power Electronics Conference IPEC*, páginas 1801–1806.
- Taylor, D. G. (1992). Pulse-width modulated control of electromechanical systems. *Transactions on Automatic Control*, 37(4):524–528.
- Torres, L., Besançon, G. y Georges, D. (2012). EKF-like observer with stability for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6):1570–1574.
- Tseng, C.-L., Wang, S.-Y., Chien, S.-C. y Chang, C.-Y. (2012). Development of a Self-Tuning TSK-fuzzy speed control strategy for Switched Reluctance Motor. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 27(4):2141–2152.

- Uma, J. y Jeevanandham, A. (2013). Sensorless control in Switched Reluctance Motor drives for four quadrant operation. In *International Multi-Conference on Automation, Computing, Communication, Control and Compressed Sensing iMac4s*, páginas 420–424.
- Vaclavek, P., Blaha, P. y Herman, I. (2013). Ac drive observability analysis. *IEEE, Transactions on Industrial Electronics*, 60(8):3047–3059.
- Vedagarbha, P., Dawson, D. M. y Rhodes, W. (1997). An adaptive controller for a general class of Switched Reluctance Motor models. *Automatica*, 33(9):1647–1655.
- Wang, S.-C. y Liu, Y.-H. (2011). A modified PI-Like Fuzzy Logic Controller for Switched Reluctance Motor drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(5):1812–1825.
- Yoshida, K., Komatuzaki, A. y Miki, I. (2005). A novel sensorless control method for switched reluctance motor. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Electrical Machines and Systems, 2005. ICEMS 2005.*, volume 1, páginas 538–542. IEEE.
- Zaltni, D., Abdelkrim, M., Ghanes, M. y Barbot, J. P. (2009). Observability analysis of PMSM. In *Proc. SCS Signals, Circuits and Systems*, páginas 1–6.