



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍA CIVIL Y GEOMÁTICA

LA EXPROPIACIÓN DE TIERRAS DE  
RÉGIMEN DE PROPIEDAD SOCIAL  
Y LA APLICACIÓN DE MÉTODOS  
TOPOGRÁFICOS Y GEODÉSICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO

TOPÓGRAFO Y GEODESTA

PRESENTA:

**JUAN GONZÁLEZ ROMERO**



DIRECTOR DE TESIS: ING. BARTOLO LARA ANDRADE

MÉXICO, D.F.

ABRIL 2015.



DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA  
COMITÉ DE TITULACIÓN  
FING/DICyG/SEAC/UTIT/085/15

Señor  
JUAN GONZÁLEZ ROMERO  
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor ING. BARTOLO LARA ANDRADE, que aprobó este Comité, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA.

**"LA EXPROPIACIÓN DE TIERRAS DE RÉGIMEN DE PROPIEDAD SOCIAL Y LA APLICACIÓN DE MÉTODOS TOPOGRÁFICOS Y GEODÉSICOS"**

- INTRODUCCIÓN
- I. EL RÉGIMEN DE PROPIEDAD DE LA TIERRA
  - II. EXPROPIACIÓN DE TIERRAS DEL RÉGIMEN DE PROPIEDAD SOCIAL
  - III. EL CATASTRO DE LA PROPIEDAD SOCIAL
  - IV. LOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL CATASTRO DE LA PROPIEDAD SOCIAL
  - V. LEVANTAMIENTOS CATASTRALES DE LA PROPIEDAD SOCIAL
  - VI. ERRORES EN LOS LEVANTAMIENTOS CATRASTALES DE LA PROPIEDAD SOCIAL
  - VII. DETERMINACIÓN DE LA SUPERFICIE DE GRANDES EXTENSIONES DE TIERRA
  - VIII. AJUSTE CON MÍNIMOS CUADRADOS DE LEVANTAMIENTOS CATASTRALES
  - IX. CONCLUSIONES
- ANEXOS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cd. Universitaria a 27 agosto 2015.  
EL PRESIDENTE

M.I. GERMÁN LÓPEZ RINCÓN

GLR/MTH\*gar.

*Pedro M* 7/sep/15  
Pedro Ramírez Manny

*9/sep/15*  
*8/09/2015*  
Ing. Ernesto Méndez H. INC AGUSTÍN FERNÁNDEZ ECU. ANZ  
4/sep/15  
*9/09/15*

DEDICADA

a mis padres  
por su amor y apoyo incondicional

## AGRADECIMIENTOS

A mis profesores de la Facultad de Ingeniería, por sus enseñanzas y apoyo.

Al Ing. Bartolo Lara Andrade, por compartir su conocimiento y brindarme su amistad.

A mis compañeros de la Secretaría de Desarrollo Agrario, Territorial y Urbano.

A mi familia, por su paciencia y amor.

	Pág.
ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS	
INTRODUCCIÓN.....	4
1. EL RÉGIMEN DE PROPIEDAD DE LA TIERRA.....	6
1.1. LA PROPIEDAD PRIVADA	
1.2. LA PROPIEDAD PÚBLICA	
1.3. LA PROPIEDAD SOCIAL	
1.4. CONCLUSIONES	
1.5. REFERENCIAS	
2. EXPROPIACIÓN DE TIERRAS DEL RÉGIMEN DE PROPIEDAD SOCIAL.....	12
2.1. DEFINICIONES	
2.2. FUNDAMENTO LEGAL	
2.3. EL TRÁMITE EXPROPIATORIO	
2.3.1. SOLICITUD	
2.3.2. INSTAURACIÓN	
2.3.3. TRABAJOS TÉCNICOS E INFORMATIVOS	
2.3.4. PUBLICACIÓN DEL DECRETO PRESIDENCIAL EXPROPIATORIO	
2.3.5. TRABAJOS DE EJECUCIÓN	
2.3.6. CARPETA BÁSICA	
2.4. CONCLUSIONES	
2.5. REFERENCIAS	
3. EL CATASTRO DE LA PROPIEDAD SOCIAL.....	19
3.1. EL ARCHIVO GENERAL AGRARIO	
3.2. LA DIRECCIÓN GENERAL DE CATASTRO RURAL	
3.3. PROCEDE	
3.4. REFERENCIAS	
4. LOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL CATASTRO DE LA PROPIEDAD SOCIAL.....	21
4.1. MÉTODOS TRADICIONALES	
4.2. PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS	
4.2.1. SISTEMA DE COORDENADAS UTM	
4.2.2. LA PROYECCIÓN TRANSVERSAL MODIFICADA EJIDAL	
4.3. LAS COORDENADAS GEODÉSICAS	
4.4. CONCLUSIONES	
4.5. REFERENCIAS	

# CONTENIDO

-continuación-

5. LEVANTAMIENTOS CATASTRALES DE LA PROPIEDAD SOCIAL.....	57
5.1. INTRODUCCIÓN	
5.2. LINEAMIENTOS OFICIALES	
5.3. DETERMINACIÓN DE SUPERFICIES	
5.4. MONUMENTACIÓN	
5.5. BÚSQUEDA DE DOCUMENTOS OFICIALES Y EL HISTORIAL AGRARIO	
5.6. CONCLUSIONES	
5.7. REFERENCIAS	
6. ERRORES EN LOS LEVANTAMIENTOS CATASTRALES DE LA PROPIEDAD SOCIAL.....	73
6.1. ERRORES EN EL PROYECTO	
6.2. REDUCCIONES GEODÉSICAS	
6.2.1. CORRECCIÓN POR NORMAL DESVIADA	
6.2.2. CORRECCIÓN POR DIFERENCIA ENTRE LA SECCIÓN NORMAL Y LA GEODÉSICA	
6.2.3. CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN DE LA VERTICAL	
6.2.4. REDUCCIÓN DE DISTANCIAS ESPACIALES	
6.3. GEOREFERENCIACIÓN	
6.4. CÁLCULO DE COORDENADAS GEODÉSICAS	
6.4.1. LATITUD	
6.4.2. LONGITUD	
6.4.3. CÁLCULO DE POSICIONES GEODÉSICAS EN TRES DIMENSIONES	
6.5. ERRORES EN LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS	
6.6. CONCLUSIONES	
6.7. REFERENCIAS	
7. DETERMINACIÓN DE LA SUPERFICIE DE GRANDES EXTENSIONES DE TIERRA.....	114
7.1. DETERMINACIÓN DE SUPERFICIES SOBRE EL ELIPSOIDE	
7.2. APROXIMACIÓN MEDIANTE REGIONES REGULARES	
7.3. POLINOMIO GENERALIZADO	
7.4. LA SUPERFICIE DE LA PROPIEDAD SOCIAL	
7.4.1. SUPERFICIES DE REFERENCIA PARA EL CÁLCULO DE ÁREAS	
7.5. CONCLUSIONES	
7.6. REFERENCIAS	

# CONTENIDO

-continuación-

8. AJUSTE CON MÍNIMOS CUADRADOS DE LEVANTAMIENTOS CATASTRALES.....	129
8.1. ERROR Y EQUIVOCACIÓN	
8.2. MÍNIMOS CUADRADOS	
8.3. AJUSTE DE UNA POLIGONAL CERRADA	
8.3.1. MÉTODO CONDICIONAL	
8.3.2. MÉTODO PARAMÉTRICO	
8.3.3. COMPARACIÓN ENTRE AJUSTES	
8.4. LINEARIZACIÓN DE ECUACIONES MEDIANTE LA SERIE DE TAYLOR	
8.5. ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT	
8.6. AJUSTE DE UNA RED DE NIVELACIÓN	
8.6.1. MÉTODO CONDICIONAL	
8.6.2. MÉTODO PARAMÉTRICO	
8.7. AJUSTE DE UNA MEDICIÓN CON GPS	
8.8. LA ELIPSE DE ERROR	
8.9. CONCLUSIONES	
8.10. REFERENCIAS	
9. CONCLUSIONES.....	177
10. ANEXOS.....	178

## ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

### CAPÍTULO 4

F 4.1	CONVERGENCIA DE MERIDIANOS	22
F 4.2	SISTEMA DE COORDENADAS LOCAL	23
F 4.3	PLANO DEFINITIVO DE AMPLIACIÓN	24
F 4.4	EXTENSIÓN DE LOS NÚCLEOS AGRARIOS	25
F 4.5	EJIDO REFORMA AGRARIA INTEGRAL	25
F 4.6	EL EJIDO REFORMA AGRARIA INTEGRAL Y EL DISTRITO FEDERAL	26
F 4.7	TAMAÑO DE LOS NÚCLEOS AGRARIOS POR GRUPOS	26
F 4.8	LAS ZONAS UTM EN MÉXICO	27
F 4.9	COORDENADAS EXTREMAS DE MÉXICO	28
<b>T 4.1</b>	PRECISIÓN EN LOS LEVANTAMIENTOS, FANAR	29
F 4.10	PLANO INTERNO	30
F 4.11	CUADRO DE DISTRIBUCIÓN DE SUPERFICIES	31
F 4.12	PUNTOS DE CONTROL	31
F 4.13	PLANO DE PARCELA INDIVIDUAL	32
F 4.14	CUADRO DE CONSTRUCCIÓN	32
F 4.15	CERTIFICADO PARCELARIO	33
F 4.16	NÚCLEO AGRARIO EN DOS ZONAS UTM	34
F 4.17	EJIDO RANCHO NUEVO NOPALTEPEC, EN DIFERENTES MERIDIANOS	35
F 4.18	VARIACIÓN EN SUPERFICIE EN EL SISTEMA UTM, PARALELO CONSTANTE	36
F 4.19	EJIDO RANCHO NUEVO NOPALTEPEC, EN DIFERENTES PARALELOS	37
F 4.20	VARIACIÓN EN SUPERFICIE EN EL SISTEMA UTM, MERIDIANO CONSTANTE	38
F 4.21	LONGITUD DE ARCO SOBRE EL MERIDIANO	39
F 4.22	VARIACIÓN EN SUPERFICIE EN EL SISTEMA UTM, EN VARIOS MERIDIANOS	40
F 4.23	VARIACIÓN EN SUPERFICIE PROYECCIÓN TME Y SISTEMA UTM, MERIDIANO CONSTANTE	41
F 4.24	VARIACIÓN EN SUPERFICIE PROYECCIÓN TME, PARALELO CONSTANTE	42
F 4.25	DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS SUPERFICIES DE PROPIEDAD SOCIAL TRAMITADAS EN EXPROPIACIÓN, AÑOS 2012, 2013 y 2014	44
F 4.26	VARIACIÓN EN SUPERFICIE SISTEMA UTM, MERIDIANO CONSTANTE	45
F 4.27	PORCENTAJE DE VARIACIÓN EN SUPERFICIE SISTEMA UTM MERIDIANO CONSTANTE	46
F 4.28	EXPROPIACIÓN DE UN DEREHO DE VIA AUTOPISTA EN DURANGO POLÍGONO UNO	48
F 4.29	EXPROPIACIÓN DE UN DEREHO DE VIA AUTOPISTA EN DURANGO POLÍGONO UNO, ACERCAMIENTO	48
F 4.30	EXPROPIACIÓN DE UN DEREHO DE VIA AUTOPISTA EN DURANGO POLÍGONO DOS	49



F 4.31	ALTURA ELIPSOIDAL	51
F 4.32	SUPERFICIES DE REFERENCIA	51

## CAPÍTULO 5

F 5.1	MOSAICO DESCRIPTIVO	59
F 5.2	POLÍGONO DE DOTACIÓN, IMAGEN ESCANEADA	60
F 5.3	MOSAICO DESCRIPTIVO VISUALIZADO EN IMÁGENES DE SÁTELITE DE GOOGLE EARTH	61
<b>T 5.1</b>	PRECISIÓN EN LOS LEVANTAMIENTOS, NORMAS TÉCNICAS EXPROPIACIÓN	63
F 5.4	ÍNDICE INDEMNIZATORIO DE EXPROPIACIÓN DECRETOS PUBLICADOS EN EL DIARIO OFICIAL DE LA FEDERACIÓN, AÑOS 2013 y 2014	65
F 5.5	TIPOS DE MONUMENTOS, UTILIZADOS EN LA CERTIFICACIÓN DEL FANAR	67, 68
F 5.6	PADRÓN E HISTORIAL DE NÚCLEOS AGRARIOS	70

## CAPÍTULO 6

F 6.1	DERECHO DE VIA MAL UBICADO	74
F 6.2	RADIO DE CURVATURA SOBRE EL MERIDIANO, EN EL ECUADOR Y EN EL POLO	80
F 6.3	CORRECCIÓN POR NORMAL DESVIADA	81
F 6.4	SECCIONES NORMALES DIRECTA E INVERSA	82
F 6.5	RADIO DE CURVATURA SOBRE EL PRIMER VERTICAL	83
<b>T 6.1</b>	REDUCCIONES GEODÉSICAS, POR EFECTO GEOMÉTRICO	84
F 6.6	CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN DE LA VERTICAL, ÁNGULOS HORIZONTALES	85
F 6.7	REDUCCIÓN DE DISTANCIAS ESPACIALES	86
F 6.8	POLÍGONO DE DOTACIÓN VECTORIZADO	88
F 6.9	MODELO GRAVIMÉTRICO DE DEFLEXIÓN DE LA VERTICAL	89
F 6.10	CONTINUO DE ELEVACIONES MEXICANO, EJIDO NAVAJAS	90
F 6.11	GEOIDE GRAVIMÉTRICO MEXICANO, DESCARGA DE DATOS	90
F 6.12	DISTANCIA ZENITAL	92
F 6.13	CERTIFICACIÓN vs DOTACIÓN, EJIDO NAVAJAS	93
F 6.14	CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN DE LA VERTICAL	94
F 6.15	DESVIACIÓN DE LA VERTICAL, SOBRE EL PRIMER VERTICAL	94
F 6.16	CORRECCIÓN POR REDUCCIÓN DE DISTANCIAS	95
F 6.17	DIFERENCIA RELATIVA, CORRECCIÓN POR REDUCCIÓN DE DISTANCIAS	95
F 6.18	VARIACIÓN EN ALTURAS ELIPSOIDALES	95
F 6.19	VARIACIÓN EN EL RADIO DE EULER	95
F 6.20	DETERMINACIÓN DE LA LATITUD, APROXIMACIÓN DE PUISSANT	96
F 6.21	DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD, APROXIMACIÓN DE PUISSANT	100
F 6.22	DOTACIÓN VS CERTIFICACIÓN, CON REDUCCIONES GEODÉSICAS	103

F 6.23	SISTEMAS GEODÉSICO Y GEODÉSICO LOCAL	104
F 6.24	SISTEMAS GEODÉSICO, COMPONENTES VECTORIALES TRIDIMENSIONALES	106
F 6.25	COORDENADAS CARTESIANAS A GEODÉSICAS	107
F 6.26	TRANSFORMACIÓN ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA, POLÍGONOS CON UN VÉRTICE EN COMÚN	110
F 6.27	TRANSFORMACIÓN ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA, POLÍGONOS ALINEADOS	111

## CAPÍTULO 7

F 7.1	ÁREA DIFERENCIAL, ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN	114
F 7.2	ÁREA EN PARTICIONES, SUMAS DE RIEMANN	116
F 7.3	ÁREA EN MALLA REGULAR	117
F 7.4	INTERPOLACIÓN DE ÁREA	119
<b>T 7.1</b>	SUPERFICIES CALCULADAS, SISTEMA UTM – ELIPSOIDE	121
F 7.5	APROXIMACIÓN MEDIANTE REGIONES	121
F 7.6	VARIACIÓN EN SUPERFICIE, ELIPSOIDE- SISTEMA UTM	122
<b>T 7.2</b>	ESTIMACIÓN DE SUPERFICIES, SOBRE EL ELIPSOIDE	124
F 7.7	PLANO DE REFERENCIA HORIZONTAL ARBITRARIO	126
F 7.8	PLANO DE REFERENCIA SOBRE EL ELIPSOIDE, ELIPSOIDE DE MEJOR AJUSTE	126
<b>T 7.3</b>	COMPARACIÓN ENTRE SUPERFICIES, EN DISTINTOS SISTEMAS DE REFERENCIA	128

## CAPÍTULO 8

F 8.1	POLIGONAL NO CERRADA	134
<b>T 8.1</b>	RELACIÓN ENTRE EL CUADRANTE, LA CONSTANTE, Y EL AZIMUT DE UNA LÍNEA	142
<b>T 8.2</b>	CIERRE ANGULAR	148
<b>T 8.3</b>	CÁLCULO DE RUMBOS	148
<b>T 8.4</b>	CÁLCULO DE COORDENADAS AJUSTADAS	148
<b>T 8.5</b>	COMPARACIÓN ENTRE AJUSTES, POLIGONAL CERRADA	149
F 8.2	APROXIMACIÓN A LA FUNCIÓN COS X	150
F 8.3	VECTORES ORTOGONALES	154
F 8.4	RED DE NIVELACIÓN	157
<b>T 8.6</b>	COMPARACIÓN ENTRE AJUSTES, RED DE NIVELACIÓN	168
F 8.5	MEDICIONES CON GPS	169
<b>T 8.7</b>	CUADRANTE DEL ÁNGULO DEL SEMIEJE MAYOR	176
F 8.6	ELIPSES DE ERROR, POLIGONAL CERRADA	178

## INTRODUCCION

En el desempeño profesional de muchas disciplinas, en ocasiones, se escuchan curiosas frases relativas al conocimiento adquirido en la época de formación académica. En concreto, es frecuente la idea de que en las Instituciones Académicas, ciertos temas de las ciencias son enseñados como mero requisito curricular; toda vez que, en la vida diaria y profesional no tienen una aplicación directa. Afortunadamente son pocas las personas que se atreven a realizar tales afirmaciones, ya que de hecho están muy alejadas de la realidad. Si bien es cierto que en el desarrollo de la vida profesional no siempre se realiza una aplicación directa y literal de los principios científicos, también es cierto que la mayoría de los procedimientos que seguimos (*sino es que todos*), conllevan una sólida fundamentación en las disciplinas que sustentan cada área específica.

En la práctica de la Topografía y la Geodesia, se puede identificar una constante búsqueda de la precisión y la exactitud en las mediciones que se realizan para determinar la forma, tamaño y ubicación espacial de elementos geográficos. En esa búsqueda por determinar el valor verdadero o valor más probable en las mediciones, inevitablemente nos tenemos que encontrar con la aparición de errores y equivocaciones. Como sabemos, muchos de esos errores, de hecho se atribuyen al factor humano. Es más, sin menospreciar otras fuentes de error, quizá el factor humano es el que más influye en el alcance de los objetivos de la Topografía y la Geodesia. Basta en considerar, que una interpretación inadecuada de la información nos puede alejar rápidamente de los objetivos que pretendemos alcanzar.

En nuestro país, más de la mitad de nuestro territorio forma parte de lo que llamamos Propiedad Social, de ahí que el conocimiento de cómo se administra y el aprovechamiento que se le da a ese territorio, se convierte en un asunto de interés y relevancia. En atención a esa idea, en el capítulo uno se desarrolla el concepto de Régimen de Propiedad de la Tierra y se citan algunas leyes que norman el aprovechamiento de uno de los recursos más valiosos de toda nación, su territorio.

Tomando en consideración el hecho de que la Expropiación de Tierras de Régimen de Propiedad Social, es un procedimiento administrativo muy significativo, ya que permite cambiar el régimen de propiedad a grandes extensiones de tierra en nuestro país; para profundizar un poco en el tema, en el capítulo dos, se hace una descripción del trámite expropiatorio.

Para poder llevar a cabo el análisis en el presente trabajo, es necesario acceder a la información de la Propiedad Social a través de las Instituciones Públicas que la administran. En el desarrollo del capítulo tres, se citarán las fuentes de información consultadas y sus características.

En el capítulo cuatro se hablará un poco acerca de los sistemas de coordenadas empleados en la representación de la propiedad social y el efecto directo en la determinación de las superficies.

En el capítulo cinco se hará una revisión de los procedimientos de medición usados tradicionalmente en el Catastro de la Propiedad Social, así como los lineamientos empleados en la actualidad en los levantamientos topográficos y geodésicos para el trámite expropiatorio.

Intentar fusionar, combinar o acoplar información proveniente de diversos métodos de medición, obtenidos en diferentes épocas, con instrumentos de diversas precisiones, en definitiva no es una tarea fácil; y si a eso le agregamos el hecho de que las superficies de los polígonos involucrados, llegan a alcanzar un par de cientos o miles de hectáreas, el asunto se complica aún más. El desarrollo de estos temas se abordará en el capítulo seis.

En el capítulo siete, se centra la atención en la determinación de superficies de Grandes Extensiones de Tierra. Tras una revisión de lo que versa en la literatura científica al respecto, se propone una metodología sencilla para determinar dichas superficies mediante la aplicación de principios de Topografía, Geodesia, Cálculo y Análisis Numérico.

Para terminar, mediante un enfoque matemático, en el capítulo ocho, se intenta minimizar el efecto de la aparición de errores en los levantamientos catastrales de la propiedad social.

En la vida profesional, en ocasiones no se tiene el tiempo o la curiosidad de realizar una cuantificación pormenorizada de los errores en los que se incurre al hacer simplificaciones en los cálculos o en los procedimientos. Se espera que con el presente trabajo, logremos tener una idea más clara de los errores que aparecen en la determinación del catastro de la propiedad social, asociada al trámite expropiatorio, y las implicaciones de los mismos.

# CAPÍTULO 1

## EL RÉGIMEN DE PROPIEDAD DE LA TIERRA

Si partimos del hecho de que por Régimen se entiende, el conjunto de disposiciones que dirigen o norman una cosa; y tomando en consideración que para el presente trabajo nos interesa la organización de la propiedad de la tierra en nuestro país; en primera instancia invariablemente tenemos que revisar lo que se ha escrito en tal rubro en nuestra legislación vigente. De manera inevitable, el primer documento que tenemos que consultar es la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos; en ella, dispersa en varios artículos se encuentra inmerso el concepto oficial de lo que se entiende como la propiedad de la tierra en nuestro país.

Quizá en nuestra Carta Magna o en las Leyes y Reglamentos que de ella emanan, esperaríamos tratar con definiciones claras que nos permitan identificar de manera inequívoca lo que entendemos por Propiedad, sus modalidades, clasificación, restricciones, sujetos de derecho, etc. Si bien es cierto que en algunos casos visualizamos párrafos que de manera explícita nos definen alguno de los tipos de propiedad y sus variantes; en lo general, es más frecuente tener que hacer una interpretación de lo que se asienta en nuestra legislación. Por tal razón, es frecuente encontrarnos que los conceptos no siempre se definen en toda su extensión. Más bien, la adecuada interpretación de lo que se asienta en nuestra legislación, es el resultado de la experiencia y pericia del lector. Aunque quizá este hecho a primera vista parezca una deficiencia en la redacción de nuestras leyes; más bien, en realidad es todo lo contrario. De una ley se espera el ser indicativa y no limitativa, como tan atinadamente lo señaló en su tiempo el Ing. Pastor Roauix “... en una ley es preferible abarcar globalmente los puntos que son su objeto y no citar nominalmente cada uno de ellos, porque cualquier omisión puede tener consecuencias peligrosas en el futuro.”<sup>1</sup>

Tomando en consideración lo anterior, en la tarea de definir la propiedad de la tierra, en primera instancia centraremos nuestra atención en lo que se señala en el artículo 27 Constitucional.

*“La propiedad de las tierras y aguas comprendidas dentro de los límites del territorio nacional, corresponde originariamente a la Nación, la cual ha tenido y tiene el derecho de transmitir el dominio de ellas a los particulares, constituyendo la propiedad privada.”<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Roauix, Pastor, Génesis de los Artículos 27 y 123 de la Constitución Política de 1917, p 185.

<sup>2</sup> Art. 27 Constitucional, Primer párrafo.

Del párrafo anterior se desprende que, de inicio se consideran dos tipos de propiedad, la Propiedad Pública y la Propiedad Privada.

El tercer tipo de propiedad que nos interesa, y que de hecho es la materia del presente trabajo, es la Propiedad Social; la cual debe su definición a lo señalado en varios párrafos del Art. 27 Constitucional. En ellos, se establece que la Nación tomará previsiones para formar la propiedad rural, tomando en consideración las modalidades que dicte el interés público.<sup>3</sup> Se reconoce a los núcleos agrarios y se protege su propiedad sobre la tierra.<sup>4</sup>

## 1.1 LA PROPIEDAD PRIVADA

Se podría hacer un análisis exhaustivo de lo que constituye en un amplio sentido el concepto Propiedad Privada; es más, incluso limitando un poco el campo de aplicación de esos términos y concentrando nuestra atención en la tierra, podemos encontrar una recopilación un tanto amplia de leyes, reglamentos, normas, lineamientos, etc., que regulan dicha propiedad. De antemano, basta con manifestar que no es el objetivo principal del presente escrito, embarcarse en la definición pormenorizada del concepto propiedad privada; más bien, acceder a una definición que nos permita entender con palabras sencillas, a qué llamamos en nuestro país propiedad privada de la tierra, e identificar la relación que guarda con los otros dos tipos de propiedad.

Si consideramos lo anterior, en la tarea de definir la propiedad privada parece suficiente, mencionar algo de lo señalado en nuestra legislación vigente.

En nuestra Carta Magna se reconoce que nadie puede ser privado de sus propiedades<sup>5</sup>, que de presentarse el caso es indispensable que sea mediante mandamiento escrito emitido por autoridades competentes.<sup>6</sup> Se definen de manera genérica, los objetos de apropiación<sup>7</sup> y se da protección jurídica a estos.<sup>8 10</sup> Además se hace una diferenciación entre los bienes públicos y los bienes particulares.<sup>9</sup>

No está por demás mencionar que, en ocasiones, las leyes que rigen a la Propiedad Privada se aplican de manera supletoria a la Propiedad Social;<sup>11</sup> es decir, los aspectos no contemplados en la Legislación Agraria, según corresponda, se pueden atender con fundamento en lo señalado en leyes complementarias o afines.

<sup>3</sup> Art. 27 Constitucional, *Tercer párrafo*.

<sup>4</sup> Art. 27 Constitucional, *Fracción VII*.

<sup>5</sup> Art. 14 Constitucional, *segundo párrafo*.

<sup>6</sup> Art. 16 Constitucional, *primer párrafo*.

<sup>7</sup> Art. 747 Código Civil Federal.

<sup>8</sup> Art. 749 Código Civil Federal.

<sup>9</sup> Art. 764 Código Civil Federal.

<sup>10</sup> Art. 772 Código Civil Federal.

<sup>11</sup> ejemplo: Art. 35 Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Certificación de Derechos Ejidales y Titulación de Solares.

## 1.2 LA PROPIEDAD PÚBLICA

Recordando lo que se mencionó en párrafos anteriores, hay ciertos preceptos que quedan descritos de manera explícita en nuestra Legislación. Tal es el caso de los Bienes Nacionales; para llegar a esa conclusión, basta con echar un vistazo a lo que se establece en el artículo 27 Constitucional. En el referido artículo, se define el concepto de “dominio directo” de la Nación o Propiedad de la Nación.<sup>12</sup>

Cabe señalar, que se citan nominalmente los elementos que serán considerados como Bienes Nacionales; pero además se deja la “*puerta abierta*” para que sean considerados a futuro, recursos que vayan cobrando importancia con el avance tecnológico o con el cambio progresivo de nuestro entorno.

Un aspecto importante en la definición del régimen de propiedad pública, es el uso y aprovechamiento que se le puede dar a los bienes de la Nación. Es preciso introducir dos conceptos que ayudarán a entender el uso que según nuestra legislación se le puede dar a los bienes nacionales.

En primer lugar, los bienes de uso común son: el espacio aéreo, las aguas marinas interiores, el mar territorial, las playas, los cauces, lagos, lagunas, caminos, monumentos arqueológicos, parques, plazas, etc.<sup>13</sup> El aprovechamiento de los bienes de uso común a grandes rasgos se deja sin más restricciones que, valga la redundancia, las que dicten el “*sentido común*” de los habitantes de la República Mexicana.<sup>14</sup>

En segundo lugar, los bienes de dominio público. Son todos aquellos enunciados en el artículo 27 Constitucional. El aprovechamiento de los bienes de dominio público queda restringido a lo señalado por la reglamentación correspondiente, según sea el caso.<sup>15</sup>

## 1.3 LA PROPIEDAD SOCIAL

En las páginas precedentes, se intentó ubicar el concepto de la propiedad social dentro de la legislación vigente. A pesar de que ya se había aclarado el hecho de que, literalmente nuestra legislación no siempre acostumbra dar definiciones explícitas de los conceptos que maneja en la redacción de los artículos de las leyes. Se puede notar que la definición de la propiedad social no quedó tan clara como la de la propiedad pública o la propiedad privada. Lo anterior no es un mero accidente, cuando tomamos en consideración que el texto actual de nuestra Constitución ha sufrido varias reformas a lo largo del tiempo. Si nos diéramos a la tarea de consultar el texto original publicado, encontraríamos que la definición de la propiedad social es más concreta.

<sup>12</sup> Art. 27 Constitucional párrafos cuatro y cinco.

<sup>13</sup> Art. 3 Ley General de Bienes Nacionales.

<sup>14</sup> Art. 8 Ley General de Bienes Nacionales, primer párrafo.

<sup>15</sup> Art. 15 Ley General de Bienes Nacionales, primer párrafo.

En el texto original del artículo 27 se establecen las condiciones que se deben de presentar para que sea repartida la tierra a grupos de campesinos carentes de ella; así como las características que se deben de cumplir para el reconocimiento y restitución de tierras a comunidades ancestrales; sirva de extracto:

*“.....para hacer una distribución equitativa de la riqueza pública y para cuidar de su conservación. Con este objeto se dictarán las medidas necesarias para el fraccionamiento de los latifundios; para el desarrollo de la pequeña propiedad; para la creación de nuevos centros de población agrícola con las tierras y aguas que les sean indispensables; para el fomento de la agricultura y para evitar la destrucción de los elementos naturales y los daños que la propiedad pueda sufrir en perjuicio de la sociedad. Los pueblos, rancherías y comunidades que carezcan de tierras y aguas, o no las tengan en cantidad suficiente para las necesidades de su población, tendrán derecho a que se les **dote** de ellas, tomándolas de las propiedades inmediatas, respetando siempre la pequeña propiedad.”*<sup>16</sup>

Una consecuencia directa de este tipo de reparto de tierras, es la actual clasificación de la propiedad social en nuestro país. Por un lado tenemos el Régimen de Propiedad Ejidal, constituido por los terrenos dotados, mediante Resolución Presidencial o de Tribunales Agrarios, a grupos de campesinos carentes de tierra. Por otro lado, tenemos al Régimen de Propiedad Comunal, el cual lo constituyen todos aquellos terrenos reconocidos o restituidos a grupos ancestrales.

Al igual que en el caso de la propiedad pública o privada, el uso y aprovechamiento de la propiedad social está regulada por una Legislación en la materia. Si bien es cierto que la Nación transmite el dominio de la tierra, también es cierto que se reserva el derecho de imponer a la propiedad privada y social las modalidades que dicte el interés público<sup>17</sup>.

<sup>16</sup> Art. 27 Constitucional Texto Original: -Tercer párrafo  
-Fracción VI  
-Noveno párrafo.

<sup>17</sup> Art. 27 Constitucional, Tercer párrafo.



## 1.4 CONCLUSIONES

Existe un campo amplio, en el que los conocimientos adquiridos de Topografía y Geodesia pueden ser aplicados. Podemos identificar que el desempeño de nuestra profesión, se caracteriza por un interés permanente en reducir los errores en las mediciones y en una aplicación directa o indirecta del método científico en la resolución de los problemas que se presentan en la vida profesional.

Pero cabe señalar, que también es necesario sensibilizarnos con la idea de que las decisiones que se toman en la vida profesional, tiene un impacto directo en el patrimonio de las personas; así mismo, poseen la fuerza necesaria para producir cambios importantes en el orden social, y en ocasiones, de manera indirecta pueden comprometer el respeto a las garantías individuales de los ciudadanos.

El conocer los lineamientos que definen los tipos de propiedad en el país, el intentar entender su fundamento, identificar los derechos y necesidades de los ciudadanos que atienden o descuidan; puede convertirse en un elemento muy útil, al momento de definir los criterios técnicos que se emplean para resolver los problemas cotidianos que se suscitan en el catastro de la propiedad social.

## 1.5 REFERENCIAS

- I. Roauix, Pastor, Génesis de los Artículos 27 y 123 de la Constitución Política de 1917, Biblioteca del Instituto Nacional de Estudios Históricos de la Revolución Mexicana, México 1959.
- II. Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, texto vigente, última reforma publicada DOF 10-02-2014.  
*Cámara de Diputados, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Leyes Federales y Estatales*  
<http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/index.htm>  
[http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/1\\_07072014.pdf](http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/1_07072014.pdf)
- III. Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, texto original, 5 de febrero de 1917.  
*Instituto de Investigaciones Jurídicas, UNAM, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Legislación y Jurisprudencia>Legislación Mexicana>Federal*  
<http://www.juridicas.unam.mx/infjur/leg/legmexfe.htm>  
<http://www.juridicas.unam.mx/infjur/leg/conshist/pdf/1917.pdf>
- IV. Código Civil Federal, texto vigente, Última reforma publicada DOF 24-12-2013.  
*Cámara de Diputados, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Leyes Federales y Estatales*  
[http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/2\\_241213.pdf](http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/2_241213.pdf)
- V. Ley General De Bienes Nacionales, texto vigente, Última reforma publicada DOF 7-06-2013.  
*Cámara de Diputados, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Leyes Federales y Estatales*  
<http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/267.pdf>
- VI. Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Certificación de Derechos Ejidales y Titulación de Solares, Última reforma publicada DOF 6-01-1993.  
*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*  
*Página de Inicio >Nuestro Sistema>Normateca>*  
*Normas Internas de Operación (Sustantivas)>Normas Técnicas*  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/marco-legal/Normateca---Marco-legal/orderby,2/page,2/>  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/marco-legal/func-startdown/96/>

# CAPÍTULO 2

## EXPROPIACIÓN DE TIERRAS DEL RÉGIMEN DE PROPIEDAD SOCIAL

### 2.1 DEFINICIONES

En el sentido más amplio, entendamos a la expropiación como un acto de la autoridad competente, mediante el cual se priva a una persona de su propiedad.

En particular, la expropiación de tierras ejidales y comunales, se entiende como la afectación y adjudicación de los bienes de un núcleo agrario por la Federación, los Estados o los Municipios, por Decreto Presidencial Expropiatorio, atendiendo causas de utilidad pública y mediante indemnización.<sup>21</sup>

Probablemente, la expropiación de tierras pertenecientes al régimen de propiedad social es un acto mediante el cual el Estado refuerza la idea de “propiedad originariamente de la Nación”.

Lo anterior en virtud de que, en algún tiempo se dispuso de una gran parte del territorio (*más de la mitad para ser un poco más preciso*) para entregar tierras a grupos de ciudadanos carentes de las mismas y con ellas formar los ejidos; para que posteriormente, y atendiendo al interés público, esos mismos grupos fuesen privados de parte de esas tierras, mediante el acto administrativo de la expropiación.

Cabe señalar que, no obstante que los particulares pueden promover la adquisición de tierras vía solicitud de expropiación; principalmente las instituciones públicas son las promoventes en las expropiaciones de tierras del régimen de propiedad social. Lo anterior conlleva, a que el Estado recupera la administración, control y disposición de los bienes expropiados, por supuesto sin descuidar el hecho de atender a las causas de utilidad pública que dieron origen a la expropiación.

<sup>21</sup> Glosario de Términos Jurídico-Agrarios, pág. 78.

## 2.2 FUNDAMENTO LEGAL

Como ya se ha venido comentando, de inicio la expropiación encuentra su fundamento en la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, particularmente en el artículo 27 en su párrafo segundo, en el que se establece que es requisito indispensable la satisfacción de la utilidad pública y a su vez se menciona la existencia de una indemnización como compensación a la privación de los bienes; y en su párrafo tercero, en el que entre otras cosas se introduce el concepto de imponer a la propiedad, las modalidades que dicte el interés público.

Concentrándonos en la propiedad de régimen social, la Ley que regula directamente el procedimiento administrativo para llevar a cabo la expropiación, es la Ley Agraria, particularmente en sus artículos del 93 al 97. En ella, en primera instancia, se enlistan las causas de utilidad pública que pueden invocar las promoventes del procedimiento expropiatorio.

Asimismo, en dichos artículos se establece que la Institución a cargo de llevar el trámite será la Secretaría de la Reforma Agraria (*hoy Secretaría de Desarrollo Agrario, Territorial y Urbano*), el instrumento a utilizar será el Decreto Presidencial Expropiatorio. La institución encargada de determinar el monto de la indemnización por la expropiación será la Comisión de Avalúos de Bienes Nacionales (*hoy Instituto de Administración y Avalúos de Bienes Nacionales*) y que es necesario se dé a conocer la voluntad del Titular del Ejecutivo mediante la publicación del Decreto Expropiatorio en el Diario Oficial de la Federación, así como notificando personalmente a cada uno de los afectados el contenido de dicho Decreto.

Es preciso señalar, que en el sentido amplio, el Decreto es un acuerdo o resolución, decisión o determinación del Ejecutivo Federal, de un Gobierno Estatal o de un Tribunal. Así también, en el ámbito administrativo, es la expresión jurídica de la voluntad del Poder Ejecutivo, mediante resoluciones en el ejercicio de sus atribuciones, sobre alguna especie particular de sus actividades públicas.<sup>22</sup>

En concreto, el Decreto Presidencial Expropiatorio es un Acto del Poder Ejecutivo por el cual impone, atendiendo al interés público, a los particulares la cesión de su propiedad para realizar obras a favor de la colectividad o de beneficio social.<sup>23</sup>

En ese mismo orden de ideas, nos encontramos el Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural; en lo concerniente al procedimiento expropiatorio, se establecen las características propias del trámite, mismas que serán desarrolladas brevemente en secciones posteriores, poniendo especial atención a las cuestiones técnicas del procedimiento.

Como complemento, adicionalmente se cuenta con el Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de Terrenos Ejidales y/o Comunales, que contiene de manera genérica los lineamientos a seguir en el procedimiento expropiatorio; en secciones posteriores se mencionarán los detalles técnicos más relevantes.

<sup>22</sup> Glosario de Términos Jurídico-Agrarios, pág. 64.

<sup>23</sup> Glosario de Términos Jurídico-Agrarios, pág. 65.

## 2.3 EL TRÁMITE EXPROPIATORIO

La Institución a cargo de llevar el trámite es la Secretaría de Desarrollo Agrario, Territorial y Urbano <sup>24</sup>, ante ella las Entidades de la Administración Pública Federal, Estatal o Municipal, así como las personas físicas o morales podrán promover la expropiación de tierras de régimen de propiedad social <sup>25</sup>, previa satisfacción de los requisitos establecidos para el trámite en la Legislación aplicable.

### 2.3.1 SOLICITUD

La solicitud de expropiación deberá presentarse mediante escrito libre ante el titular de la Secretaría de Desarrollo Agrario, Territorial y Urbano, en ella deberá señalarse claramente entre otras cosas, la superficie analítica solicitada en expropiación, lugar en el que se encuentra y el destino de la obra en cuestión.<sup>26</sup> Dicha información deberá ir acompañada de un plano informativo georreferenciado, en proyección UTM, en ITRF92 o WGS84, con cuadros de construcción, en el que se señale claramente la superficie solicitada.<sup>27</sup>

### 2.3.2 INSTAURACIÓN

Una vez satisfechos diversos requisitos administrativos y jurídicos, la Secretaría inicia formalmente el procedimiento expropiatorio mediante la elaboración de un acuerdo llamado Acuerdo de Instauración, mismo que es notificado a la promovente de la expropiación, así como a los afectados de manera individual.<sup>28</sup>

Con la información aportada por la promovente en su solicitud, la Secretaría solicita a su personal en el Estado, la realización de los Trabajos Técnicos e Informativos.<sup>29</sup>

### 2.3.3 TRABAJOS TÉCNICOS E INFORMATIVOS

Partiendo de los datos aportados por la promovente, el personal de la Secretaría en el Estado correspondiente, procede a ubicar los terrenos solicitados en expropiación.

Una de las tareas iniciales a realizar, es determinar si los terrenos solicitados en expropiación pertenecen al régimen de propiedad social; es decir, si el terreno solicitado pertenece a algún ejido o comunidad, y a cuál de ellos.

<sup>24</sup> Art. 94 Ley Agraria, primer párrafo.

<sup>25</sup> Art. 1 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, fracción IX.

<sup>26</sup> Art. 61 Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural.

<sup>27</sup> Art. 2 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, Inciso c.

<sup>28</sup> Art. 65 Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural, primer párrafo.

<sup>29</sup> Art. 67 Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural,

Art. 2 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales.

Para realizar tal tarea, el ingeniero a cargo, valiéndose de los Planos Oficiales que definen los límites de los ejidos y comunidades, elaborará un Mosaico Descriptivo<sup>30</sup> en coordenadas UTM de la zona de interés, mismo en el que representará la superficie solicitada por la promovente.

En la generalidad de los casos, la información aportada por la promovente difiere significativamente a lo que se encuentra físicamente en el terreno y en los Planos Oficiales; esto debido a que en ocasiones, la promovente representa equivocadamente los límites de los ejidos y comunidades implicados, o desconoce las partes de los mismos que mediante algún procedimiento administrativo se han desincorporado del régimen de propiedad social; aunado al hecho de que la superficie solicitada, a veces se encuentra en las proximidades de alguna otra obra o propiedad, que posee derecho de vía, o zona de protección.

Dejando un momento de lado aquellos casos, consideremos uno ideal en el que la superficie resultante de los Trabajos Técnicos e Informativos difiera poco a la solicitada por la promovente. Siendo este el caso, después de cumplir con toda una serie de cuestiones administrativas y jurídicas, se elaborará el Plano Proyecto que servirá de base para emitir el Decreto Presidencial Expropiatorio.

#### 2.3.4 PUBLICACIÓN DEL DECRETO PRESIDENCIAL EXPROPIATORIO

En esta etapa del procedimiento, y después de que el Titular del Ejecutivo manifiesta su voluntad mediante el Decreto Presidencial Expropiatorio, éste es publicado en el Diario Oficial de la Federación.<sup>31</sup>

El Decreto Presidencial Expropiatorio en sí, es un resumen de los aspectos más relevantes del procedimiento, en él se señala claramente la superficie expropiada, la beneficiaria de la expropiación, los afectados por la misma y el monto de indemnización a pagar.

Tras la publicación, la Secretaría comisionará personal de su adscripción para que de manera personal notifique a los afectados por el Decreto, la publicación del mismo.<sup>32</sup>

#### 2.3.5 TRABAJOS DE EJECUCIÓN

Contando con un Mandato Presidencial que cambia el régimen de la tierra en una parte de los ejidos o comunidades, personal de la Secretaría procede a elaborar el Plano Aprobado de Expropiación y documentación complementaria, que contiene la información técnica del polígono o los polígonos expropiados.

<sup>30</sup> Art. 7 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, Inciso e.

<sup>31</sup> Art. 94 Ley Agraria, primer párrafo.

<sup>32</sup> Art. 76 Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural.

Una vez que se verifica que la promovente de la expropiación ha cubierto en su totalidad y con las formalidades de Ley, el monto de la indemnización establecido en el propio Decreto Presidencial Expropiatorio,<sup>33</sup> además de no existir impedimento legal para su ejecución, se procede a comisionar personal que nuevamente verificará en campo, mediante un levantamiento topográfico y/o geodésico, que la superficie a expropiar señalada en el Plano Aprobado de Expropiación corresponde a la realidad física del terreno que pretende representar.<sup>34</sup>

Para realizar la entrega formal de los terrenos expropiados, es necesario citar a los representantes del núcleo agrario y al representante de la promovente de la expropiación.<sup>35</sup>

El acto de entrega consiste en un recorrido por los terrenos expropiados, a vértices y lados característicos del polígono o los polígonos que envuelven la propiedad. Se concluye mediante la firma de un Acta en la que se asienta claramente el Mandato Presidencial que se está materializando, los asistentes, una descripción en forma tabular de los vértices y lados del polígono o polígonos que envuelven los terrenos entregados, así como la superficie total entregada.<sup>36</sup>

Con la información recopilada en campo producto de los trabajos de ejecución, la Secretaría elabora el Plano Definitivo de Expropiación.

### 2.3.6 CARPETA BÁSICA

El Procedimiento Expropiatorio llega a su etapa final al elaborarse la Carpeta Básica de Expropiación, la cual se constituye con el Decreto Presidencial de Expropiación, el Acta de Posesión y Deslinde recién descrita y el Plano Definitivo de Expropiación; estos tres elementos juntos forman la Carpeta Básica de Expropiación, la cual a su vez constituye el título de propiedad de los terrenos expropiados.

El procedimiento culmina cuando la Secretaría realiza la inscripción al Registro Agrario Nacional de la Carpeta Básica<sup>37</sup> y en su posterior entrega a la promovente de la expropiación.

<sup>33</sup> Art. 85 Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural, primer párrafo.

<sup>34</sup> Art. 31 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales.

<sup>35</sup> Art. 29 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales.

<sup>36</sup> Art. 32 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales.

<sup>37</sup> Art. 152 Ley Agraria,

Art. 86 Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural.

## 2.4 CONCLUSIONES

La Topografía y la Geodesia, como ciencias o simplemente considerándolas como disciplinas, nos ofrecen el conjunto de procedimientos disponibles para atender las cuestiones que se presentan en la definición del catastro de la propiedad social.

Por otro lado, la expropiación de tierras del régimen de propiedad social, como procedimiento administrativo nos define los lineamientos a seguir, para desincorporar parte de la propiedad de un núcleo agrario del régimen social. En el que cuestiones técnicas de diversa índole tiene que ser atendidas en aras de una certeza jurídica en la tenencia de la tierra.

En la medida que se llegue a un buen entendimiento de los objetivos que pretende alcanzar la expropiación de tierras como un Acto del Poder Ejecutivo; se encontrará la manera de adecuar los métodos topográficos y geodésicos en la mejor resolución de los típicos problemas del Sector Agrario.



## 2.5 REFERENCIAS

- I. Glosario de términos jurídico-agrarios, Procuraduría Agraria, primera edición 2008, Primera reimpresión 2009.

*Procuraduría Agraria, Página Oficial.*

*Página de Inicio > Conoce la PA > Publicaciones*

<http://www.pa.gob.mx/pa/conoce/publicaciones.html>

<http://www.pa.gob.mx/pa/conoce/publicaciones/Glosario%202009/GLOSARIO%20DE%20T%C3%89RMINOS%20JUR%C3%8DDICO-AGRARIOS%202009.pdf>

- II. Ley Agraria, texto vigente, última reforma publicada DOF 9-04-2012.

*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*

*Página de Inicio > Nuestro Sistema > Normateca > Marco Legal*

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/marco-legal>

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/marco-legal/Normateca---Marco-legal/Ley-Agraria/>

- III. Reglamento de la Ley Agraria en Materia de Ordenamiento de la Propiedad Rural, texto vigente, última reforma publicada DOF 28-11-2012.

*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*

*Página de Inicio > Nuestro Sistema > Normateca > Marco Legal*

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/marco-legal/Normateca---Marco-legal/REGLAMENTO-DE-LA-LEY-AGRARIA-EN-MATERIA-DE-ORDENAMIENTO-DE-LA-PROPIEDAD-RURAL-%28Vigente%29/>

- IV. Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, texto vigente, última reforma publicada DOF 1-08-2012.

*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*

*Página de Inicio > Nuestro Sistema > Normateca >*

*Normas Internas de Operación (Sustantivas) > Normas Técnicas*

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Normas-Tecnicas/orderby,2/page,2/>

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Normas-Tecnicas/Normas-T%C3%A9cnicas-para-la-Elaboraci%C3%B3n-de-Trabajos-T%C3%A9cnicos-e-Informativos-de-Expropiaci%C3%B3n-y-Ejecuci%C3%B3n-de-Decretos-Presidenciales-de-Expropiaci%C3%B3n/>

# CAPÍTULO 3

## EL CATASTRO DE LA PROPIEDAD SOCIAL

### 3.1 EL ARCHIVO GENERAL AGRARIO

Es un Área del Registro Agrario Nacional en la que se resguardan los expedientes, planos y documentos que dan sustento a la propiedad social.<sup>38</sup> Se encarga de atender la demanda de consulta de documentos agrarios.<sup>39</sup> Sólo por mencionar algunas, entre sus funciones están el ordenar, clasificar, digitalizar los expedientes, planos y documentos de las acciones agrarias; así como administrar el préstamo y consulta de los materiales procurando su conservación.<sup>40</sup>

A pesar de que gran parte del acervo con el que cuenta el Archivo ya se encuentra digitalizado, el acceso a estos archivos digitales es únicamente mediante la visualización en pantalla en las salas de consulta del Registro Agrario Nacional; una vez que se identifica el o los documentos de interés, es posible adquirir copia simple o certificada de los mismos, mediante el pago de la cuota correspondiente.

Adicionalmente también se puede tener acceso directo a los documentos originales que integran los expedientes de cada acción agraria.

### 3.2 LA DIRECCIÓN GENERAL DE CATASTRO RURAL

Es un Área del Registro Agrario Nacional que tiene como funciones: elaborar los planos que delimiten los núcleos agrarios, revisar que los que se elaboren para tal fin cumplan con las Normas Técnicas vigentes, coordinar y ejecutar los Trabajos Técnicos que le corresponda hacer al Registro Agrario Nacional, el establecimiento de Normas Técnicas. Proponer y mantener las acciones necesarias para la Actualización del Catastro Rural Nacional,<sup>41</sup> entre otras.

<sup>38</sup> Reglas de los servicios del Archivo General Agrario.

<sup>39</sup> Art. 3 Reglas de los servicios del Archivo General Agrario.

<sup>40</sup> Registro Agrario Nacional, página oficial.

<sup>41</sup> Art. 21 Reglamento Interno del Registro Agrario Nacional.

### 3.3 PROCEDE<sup>42</sup>

En el año de 1992 se inicia el Programa de Certificación de Derechos Ejidales y Titulación de Solares Urbanos PROCEDE. Dicho programa tuvo el objetivo de dar certeza jurídica de la tierra a ejidatarios y comuneros, mediante la expedición de certificados y títulos correspondientes a los terrenos de propiedad social.

En el Programa intervinieron de manera coordinada diversas Instituciones Públicas, en las que se destacan por su participación: la Procuraduría Agraria PA, sensibilizando a los grupos de ejidatarios y comuneros de la importancia de participar en la regularización de la tenencia de la tierra; el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática INEGI, encargado de las mediciones de los terrenos de Propiedad Social; el Registro Agrario Nacional RAN, mediante el registro, control y expedición de Certificados Parcelarios y Títulos de Propiedad.

### 3.4 REFERENCIAS

- I. Reglas de los Servicios del Archivo General Agrario, texto vigente, última reforma publicada DOF 9-09-2008.

*Registro Agrario Nacional, página oficial.*

*Página de Inicio >Nuestro Sistema>Normateca>Normas Internas de Operación (Sustantivas)*

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Reglas-de-los-Servicios-del-AGA/REGLAS-DE-LOS-SERVICIOS-DEL-ARCHIVO-GENERAL-AGRARIO/>

- II. Qué es el Archivo General Agrario AGA.

*Registro Agrario Nacional, página oficial.*

*Página de inicio>Servicios>Archivo General Agrario(AGA)>¿Que es el AGA?*

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/servicios/aga/i-que-es-el-aga>

- III. Reglamento Interno del Registro Agrario Nacional, texto vigente, última reforma publicada DOF 11-10-2012.

*Registro Agrario Nacional, página oficial.*

*Página de Inicio >Nuestro Sistema>Normateca>Marco Legal*

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/marco-legal/Normateca---Marco-legal/Reglamento-interior-del-Registro-Agrario-Nacional-%28Vigente%29/>

<sup>42</sup> Instituto Nacional de Estadística y Geografía, página oficial.

# CAPÍTULO 4

## LOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL CATASTRO DE LA PROPIEDAD SOCIAL

### 4.1 MÉTODOS TRADICIONALES

Los levantamientos topográficos que se efectúen con motivo de asuntos agrarios, tienden fundamentalmente a la obtención de planos,<sup>43</sup> dependiendo de las características del terreno y la finalidad de los mismos, los métodos de medición empleados eran los métodos tradicionales de Topografía, como son: triangulación, poligonación y trilateración.

Las poligonales a utilizar pueden ser abiertas o cerradas, según convenga, y primarias y secundarias.<sup>44</sup> Las poligonales primarias se emplearon para levantar los linderos de propiedad social, de pequeñas propiedades (*propiedad privada*) y en general para todos aquellos detalles que fue necesario localizar con alta precisión; tales como: caminos importantes, vías férreas, líneas telefónicas, líneas de conducción, ríos, arroyos, canales, presas, acueductos y obras o accidentes naturales de relevancia.<sup>45</sup>

En particular, toda vez que las obras de infraestructura y los detalles relevantes del terreno son levantados con poligonales de precisión, este hecho constituye una herramienta muy útil al momento de realizar la ubicación de planos carentes de información específica, que permita ubicarlos geográficamente sin ambigüedades.

En la medida de lo posible, las poligonales que se levanten se ligarán con puntos geográficos que se encuentren en las cercanías, para que puedan servir de apoyo.<sup>46</sup>

Todo levantamiento topográfico que se practique, debe ser orientado astronómicamente, aunque apoye a trabajos anteriores ya orientados.<sup>47</sup>

<sup>43</sup> Regla 2, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 3.

<sup>44</sup> Regla 8, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 5.

<sup>45</sup> Regla 9, Instructivo para Trabajos Topográficos, págs. 5 y 6.

<sup>46</sup> Regla 15, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 7.

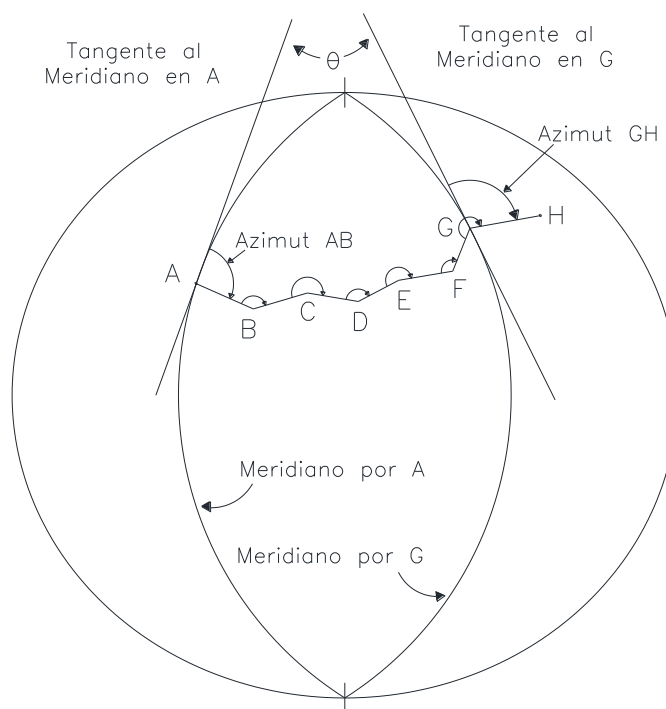
<sup>47</sup> Regla 31, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 11.

FIGURA 4.1  
CONVERGENCIA DE MERIDIANOS

En trabajos cuya extensión oriente-poniente (o *viceversa*) es de más de cuatro leguas (*poco más de 16 Kilómetros*) debe de considerarse la convergencia de los meridianos, en particular cuando se requiera localizar errores angulares o comprobar la bondad del levantamiento.

En poligonales abiertas es necesario realizar una orientación por lo menos cada 10 Km.<sup>48</sup>

En la figura 4.1 se muestra una representación de la convergencia de los meridianos, en ella las dimensiones se encuentran exageradas, con el fin de ilustrar con claridad este efecto.



En trabajos cuyas líneas de medición se extiendan hacia el oriente, es necesario sumar el ángulo de convergencia  $\theta$  para lograr el ajuste angular, caso contrario en líneas hacia el poniente, en donde es necesario restar dicho valor.

Para aquellas distancias cuyo ángulo vertical exceda a lo  $3^\circ$ , será necesario reducir al horizonte la distancia medida.<sup>49</sup> La tolerancia en medidas de ángulos hechas con tránsito de un minuto, para triangulaciones es de  $\pm 15$  segundos.<sup>50</sup>

En levantamientos con poligonales de primer orden, se espera un máximo error relativo en el cálculo analítico del área de  $\pm 0.002$ , y de  $\pm 0.004$  si las distancias se midieron con estadia. Se entiende por error relativo, el cociente que resulta de dividir, el error absoluto entre la magnitud que se trate.<sup>51</sup>

En la situación geográfica de puntos destinados a servir de apoyo, el máximo error probable que se admite, tanto en latitud como longitud, es de  $\pm 1$  segundo. Tomando como longitud de arco de 1 segundo el valor aproximado de 30 metros, el error absoluto resultante en la situación del punto es de  $\pm 42.43$  metros.<sup>52</sup>

<sup>48</sup> Regla 35, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 12.

<sup>49</sup> Regla 53, fracción IV, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 22.

<sup>50</sup> Regla 56, fracción IV, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 26.

<sup>51</sup> Regla 56, fracción VI, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 26.

<sup>52</sup> Regla 57, Instructivo para Trabajos Topográficos, pág. 27.

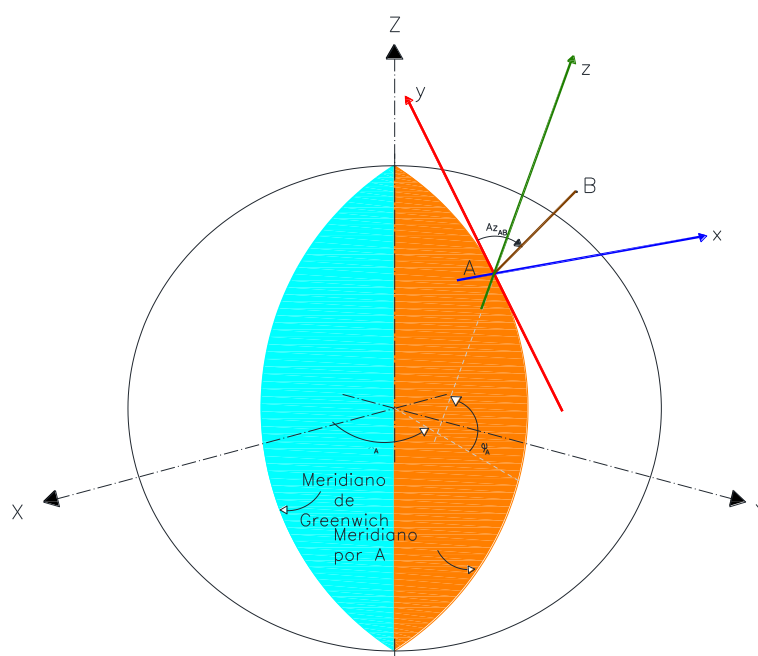
Una variación tan grande en la posición de puntos de referencia o puntos de control, necesariamente implica movimientos considerables en la ubicación de todo el núcleo agrario.

En ocasiones, la documentación que integra el expediente de la acción agraria, contiene el cálculo de la orientación astronómica de alguno de los lados de los polígonos del plano definitivo, pero en la mayoría de los casos dicha planilla de cálculo suele extraviarse con el paso de los años.

En atención a lo anterior, se puede mencionar que los Planos Definitivos (*Planos Oficiales*) se elaboran en un Sistema de Coordenadas Local (*figura 4.2*), en los que se presentan coordenadas cartesianas cuyo origen es arbitrario.

Asimismo se logra apreciar, que el valor nominal de la superficie indicada en los planos no debe presentar una variación significativa, únicamente a consecuencia de la tolerancia permitida en el cálculo analítico del área, o del criterio empleado para determinar la dimensión de las distancias inclinadas; así como tampoco por la tolerancia angular en la determinación de los rumbos de los lados en los polígonos representados en los planos definitivos.

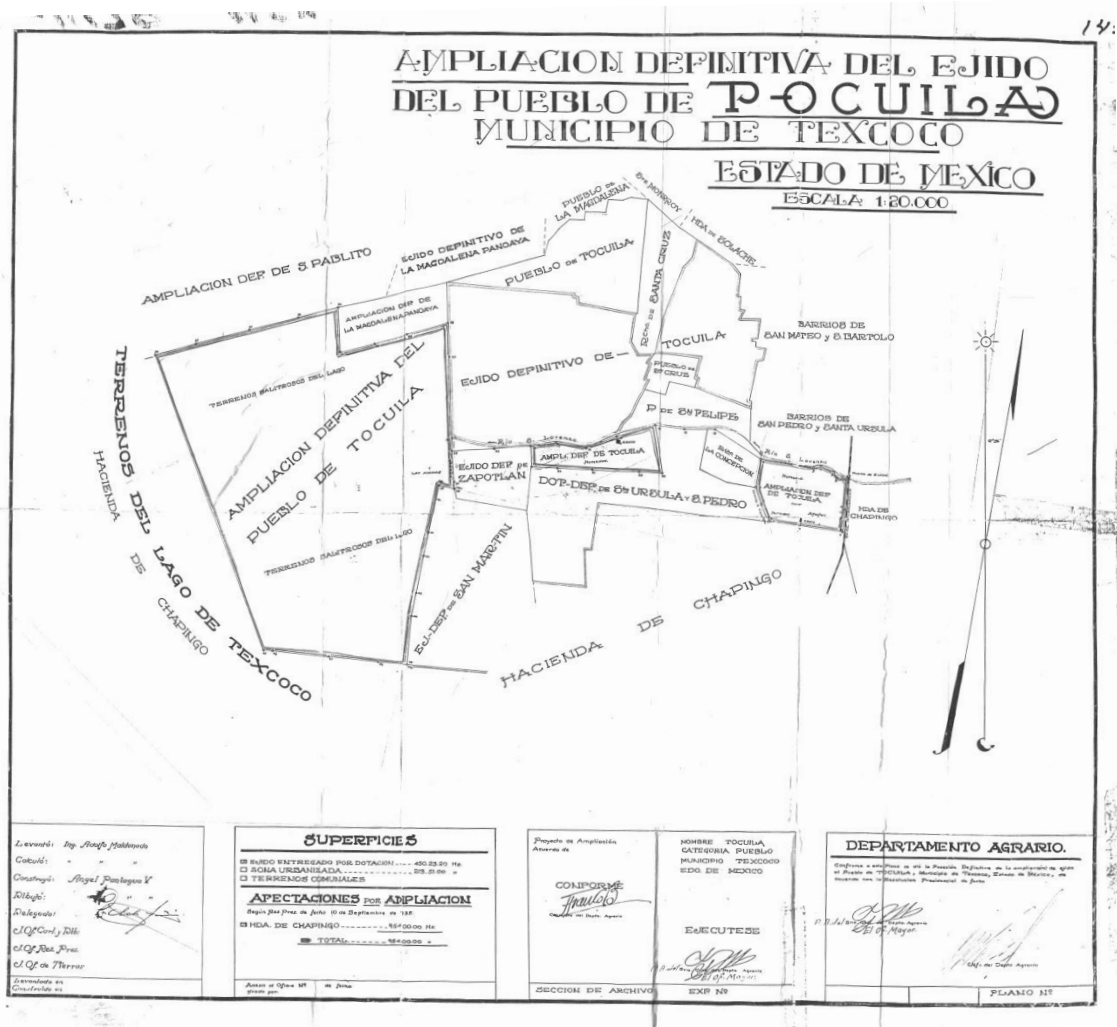
FIGURA 4.2  
SISTEMA DE COORDENADAS LOCAL  
(DE MANO DERECHA)



En ese orden de ideas, podemos esperar una variación en la posición del o los polígonos de poco más de cuarenta metros y un giro insignificante en su orientación astronómica.

En resumen, y asociado únicamente con los lineamientos con que fueron elaborados, el contar con planos definitivos de ejidos y comunidades, en los que se representen mediante polígonos el total o parte de su superficie, estos núcleos agrarios se pueden ubicar geográficamente, considerando la posibilidad de realizar pequeñas traslaciones, para que con ello coincidan mejor sus polígonos con los detalles del terreno que pretenden representar. Se considera invaluable el hecho de que en los planos definitivos, sean representados rasgos geográficos y obras de infraestructura que varían poco a lo largo del tiempo, ya que auxiliándose de estos, se logra una mejor ubicación de los polígonos empleados en la representación de la propiedad social.

FIGURA 4.3 PLANO DEFINITIVO DE AMPLIACIÓN



En la figura 4.3 se puede apreciar un ejemplo de plano definitivo, correspondiente a la acción agraria “Ampliación”. Al igual que en el caso de la Expropiación, este plano forma parte de la Carpeta Básica del núcleo agrario. Es preciso señalar, que el sistema de coordenadas es arbitrario, no se encuentra representado el marco de referencia, se percibe una ligera distorsión a consecuencia de los dobleces del papel y a pesar de que es una copia heliográfica del original, presenta variaciones en tamaño, en virtud de que ha sido fotocopiado en reiteradas ocasiones. Otro detalle importante, es que carece de diagrama de localización.

En algunos planos definitivos originales, todavía se logra apreciar los límites de la propiedad social representada por un código de colores. En estos casos, en color rojo podemos encontrar los límites de ejidos y en amarillo los linderos de comunidades. En planos Proyecto, se representa de color verde los límites de una expropiación en trámite.



## 4.2 PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

Los Estados Unidos Mexicanos cuentan con una superficie terrestre de 196.4 millones de hectáreas,<sup>53</sup> de las cuales 100.2 millones de hectáreas corresponden a la superficie en régimen de propiedad social,<sup>54</sup> lo que representa el 51% del territorio nacional (figura 4.4).

FIGURA 4.4 EXTENSIÓN DE LOS NÚCLEOS AGRARIOS

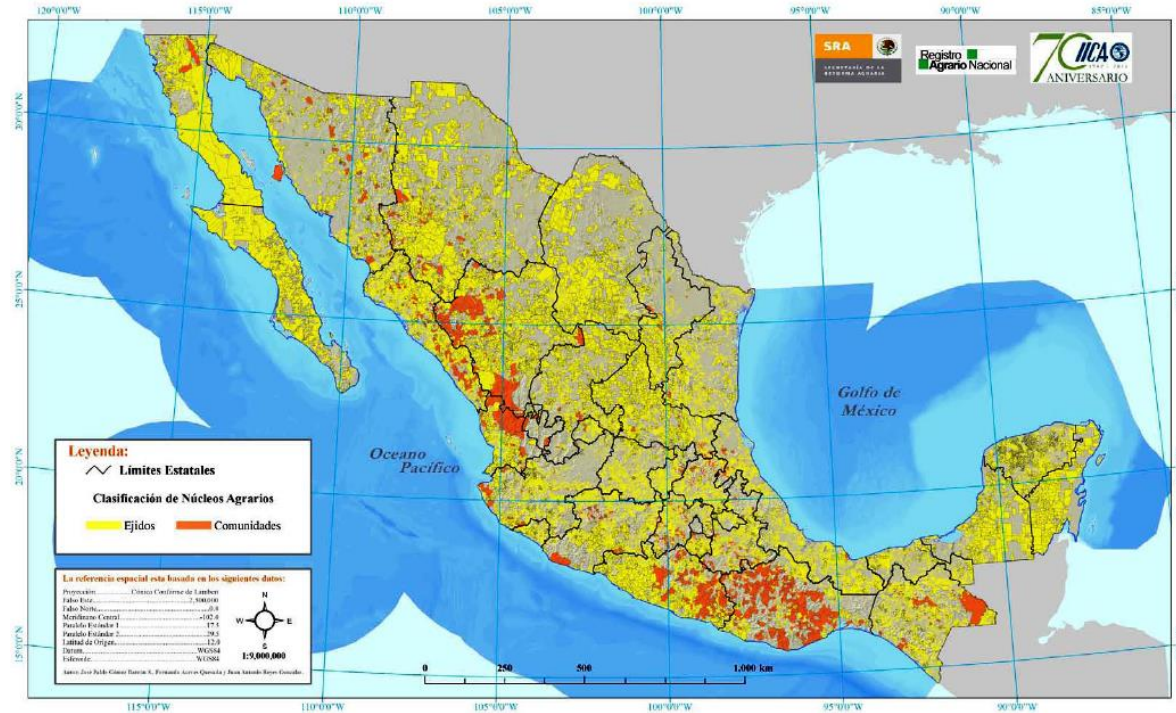
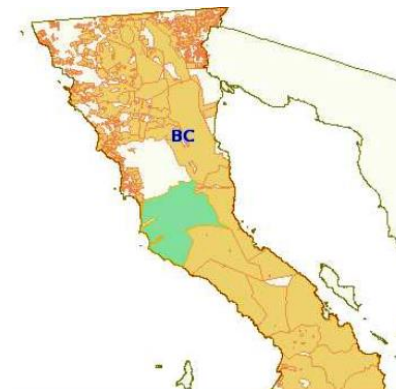


Imagen tomada del “Atlas de Servicios Ambientales y Propiedad Social en México”, pág. 23.

El tamaño de los ejidos y comunidades es diverso, desde menos de una hectárea hasta cerca de 610 mil hectáreas; tal es el caso del ejido Reforma Agraria Integral, localizado en el Municipio de Ensenada, en Baja California.<sup>55</sup>

En la figura 4.5, se muestra en color verde el ejido Reforma Agraria Integral y en color naranja el resto de la propiedad social en el Estado de Baja California.

FIGURA 4.5  
EJIDO REFORMA AGRARIA INTEGRAL



<sup>53</sup> Anuario Estadístico y Geográfico por Entidad Federativa 2013, INEGI, pág.42.

<sup>54</sup> Memoria Documental del Fondo de Apoyo para Núcleos Agrarios sin regularizar, FANAR, 2012, pág.31.

<sup>55</sup> Padrón e Historial de Núcleos Agrarios, PHINA.



Simplemente para el Estado de Baja California, casi tres cuartas partes del territorio pertenecen al régimen de propiedad social.

El Distrito Federal cuenta con una superficie aproximada de 149 mil hectáreas,<sup>56</sup> en la figura 4.6 se observa una comparación entre el tamaño relativo del D.F. y el ejido Reforma Agraria Integral.

FIGURA 4.6  
EL EJIDO REFORMA AGRARIA INTEGRAL  
Y EL DISTRITO FEDERAL

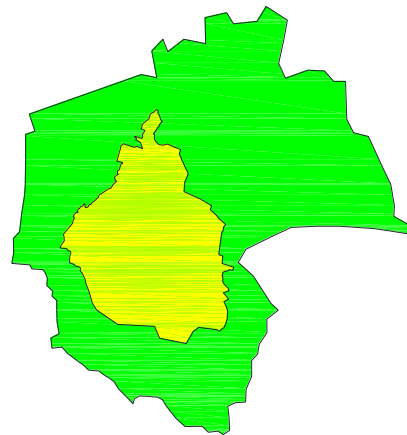
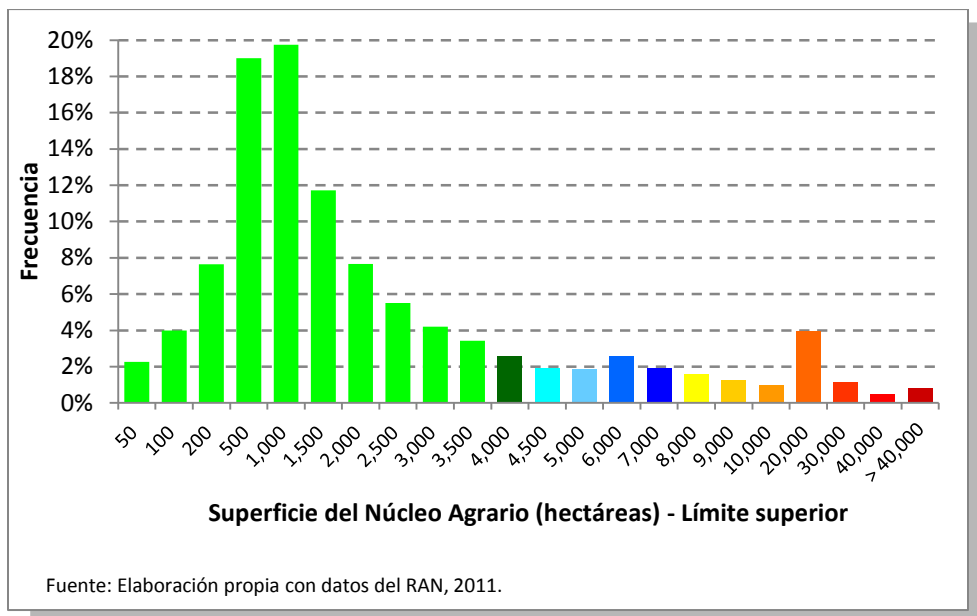


FIGURA 4.7 TAMAÑO DE LOS NÚCLEOS AGRARIOS POR GRUPOS



Información tomada del documento:  
“Potencial de Servicios Ambientales en la Propiedad Social en México”, pág. 22.

En la figura 4.7, en color verde se puede apreciar, que para aproximadamente el 80% de la propiedad social, el tamaño de los ejidos y comunidades oscila entre menos de una hectárea hasta 3,500 hectáreas. Adicionalmente, en promedio, la extensión territorial de cada núcleo agrario fácilmente supera las 50 hectáreas, lo cual conlleva a que su representación en el plano requiere el uso de proyecciones cartográficas.

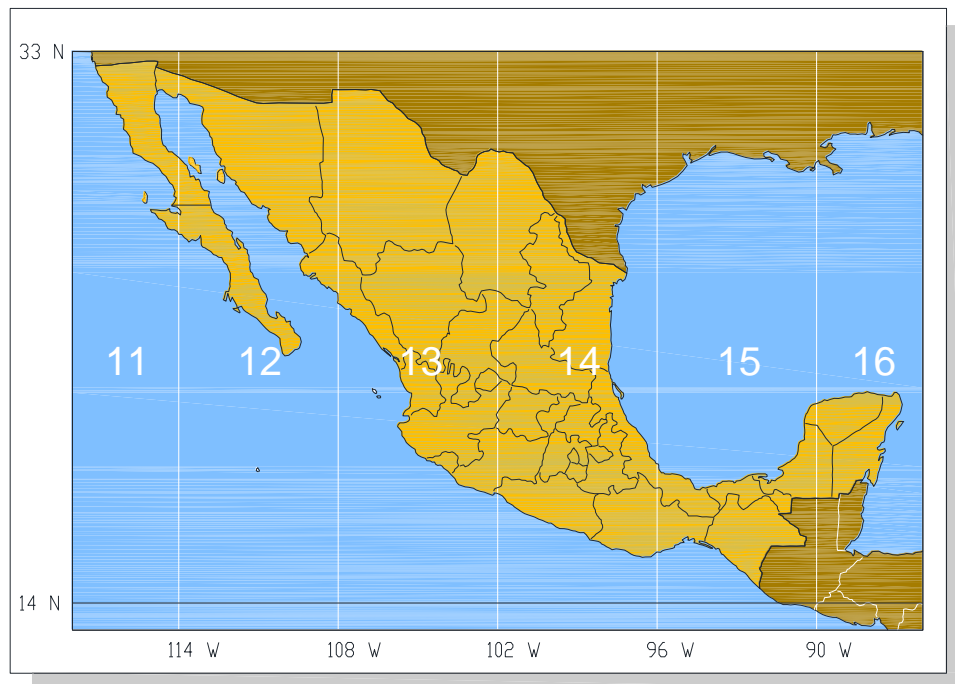
<sup>56</sup> Anuario Estadístico y Geográfico del Distrito Federal 2013, pág. 42.

Durante los trabajos de certificación del PROCEDE se concentró una gran cantidad de productos cartográficos, resultado de la obtención de coordenadas geodésicas de puntos representativos, correspondientes a los linderos de la propiedad social y a límites de la propiedad individual en el interior de los núcleos agrarios. Las mediciones se realizaron mediante el uso de equipo de alta tecnología, como Estaciones Totales y receptores del Sistema de Posicionamiento Global GPS (*Global Positioning System*).<sup>57</sup>

Los trabajos de medición realizados por el INEGI en el PROCEDE, se ligaron a la Red Geodésica Nacional Activa, lo cual permitió el establecimiento de puntos de control GPS en el interior de los núcleos agrarios mediante mojoneras.

La representación de la propiedad social en planos, se realizó mediante el empleo de la proyección Transversa Modificada Ejidal y del sistema de coordenadas UTM (*Universal Transverse Mercator*).

FIGURA 4.8  
LAS ZONAS UTM EN MÉXICO



En la figura 4.8 se observa la cobertura de las zonas UTM para nuestro territorio. La representación de algunos núcleos agrarios en la proyección Transversa Modificada Ejidal TME resulta particularmente útil, en especial para aquellos ejidos y comunidades que su ubicación geográfica coincide con el límite de alguna de las zonas UTM de nuestro país.

<sup>57</sup> Instituto Nacional de Estadística y Geografía, página oficial.

#### 4.2.1 SISTEMA DE COORDENADAS UTM

La superficie territorial de nuestro país abarca en la dirección Norte-Sur, desde el Monumento 206, límite México-Estados Unidos de América en el paralelo  $32^{\circ} 43' 06''$  Norte hasta la Desembocadura del río Suchiate en el paralelo  $14^{\circ} 32' 27''$  Norte; y en la dirección Este-Oeste, desde la Isla Mujeres en el meridiano  $86^{\circ} 42' 36''$  Oeste hasta la Isla Guadalupe (*Punta Roca Elefante*) en el meridiano  $118^{\circ} 22' 00''$  Oeste.<sup>58</sup> *(ver Anexo I)*

La altitud media de las principales ciudades oscila entre los 10 metros (*por ej. Campeche*) hasta los 2660 metros (*ciudad de Toluca*)<sup>59</sup> sobre el nivel del mar m.s.n.m. Cabe señalar, que es necesario considerar datos como éstos al realizar las reducciones de distancias y ángulos al elipsoide (*reducciones geodésicas*) y en el cálculo de superficies extensas.

FIGURA 4.9 COORDENADAS EXTREMAS DE MÉXICO

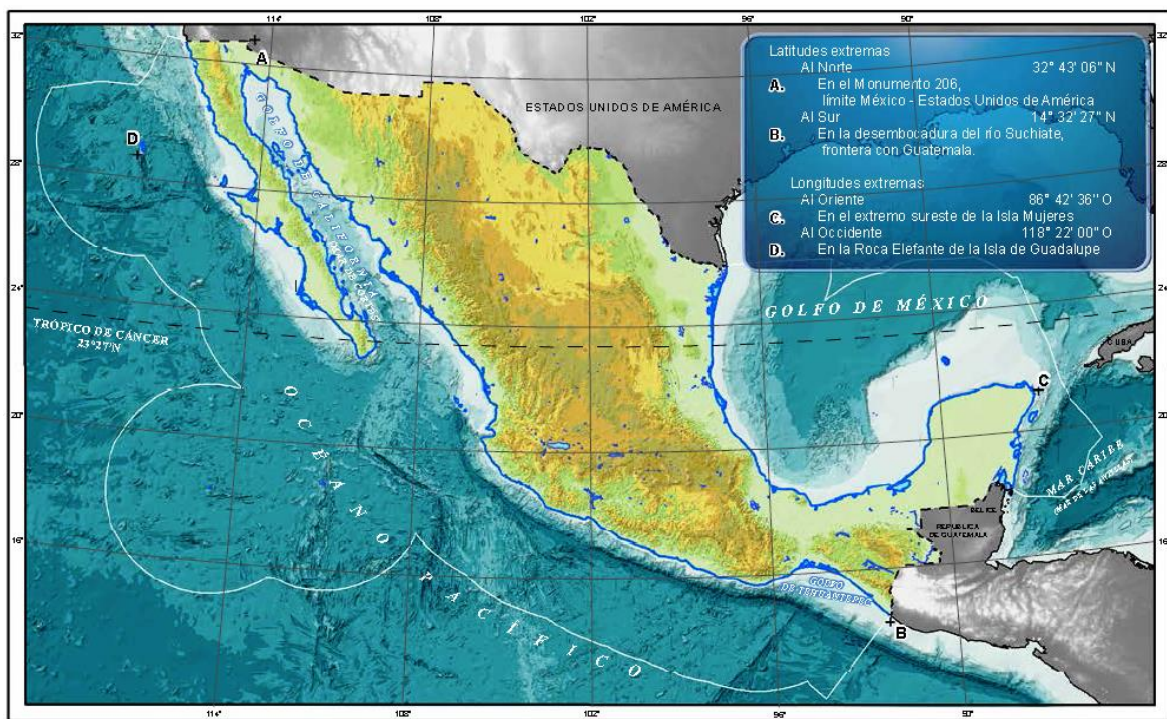


Imagen tomada del “Anuario Estadístico y Geográfico de los Estados Unidos Mexicanos 2013”, pág. 48.

En la figura 4.9 se muestra la ubicación de los puntos extremos que enmarcan el territorio nacional. Representada con color blanco y mediante una línea continua que se extiende por el Océano Pacífico y en el Golfo de México, se señalan los límites marítimos que le corresponden a los Estados Unidos Mexicanos.

<sup>58</sup> Anuario Estadístico y Geográfico de los Estados Unidos Mexicanos 2013, INEGI, pág. 46.

<sup>59</sup> Anuario Estadístico y Geográfico por Entidad Federativa 2013, INEGI, pág.51.

Mediante un acuerdo publicado en el Diario Oficial de la Federación, en el año de 2006 se declara la conclusión del PROCEDE. En 14 años de operación, el PROCEDE cerró con la regularización de más de 28 mil ejidos y comunidades, y se determinó la existencia de aproximadamente 2500 pendientes de regularizar, toda vez que no existieron las condiciones suficientes para su incorporación al programa. Con la finalidad de dar continuidad al ordenamiento y regularización de la propiedad social, en el 2007 se crea el programa federal Fondo de Apoyo para Núcleos Agrarios sin Regularizar FANAR.<sup>60</sup>

Los métodos de levantamiento empleados en la delimitación de las tierras pertenecientes a los núcleos agrarios en el programa del FANAR son:

- Método Geodésico Topográfico.
- Método Percepción Remota.

El método Geodésico Topográfico, implica la medición con apoyo satelital, mediante el Sistema GPS utilizando los métodos de levantamiento: estático, estático rápido, cinemático y en tiempo real RTK, así como procedimientos tradicionales de: poligonación, triangulación, trilateración, radiación o la combinación de éstos con equipos de medición de alta precisión.<sup>61</sup>

TABLA 4.1  
PRECISIÓN EN LOS LEVANTAMIENTOS, FANAR.<sup>62</sup>

Tipo de Levantamiento	Equipo utilizado		
	Estación Total	GPS	GPS Tiempo Real RTK
Establecimiento de los vértices geodésicos, para vincular a la Red Geodésica Nacional Activa	NA*	1:50 000	NA
Propagación de las coordenadas	1: 20, 000	Horizontal de 20 mm. + 1 ppm y en Vertical de 30 mm. + 1 ppm.	Horizontal de 25 mm. y en Vertical de 35 mm.
Mediciones al interior del Núcleo Agrario	1: 10, 000	Horizontal de 30 mm. + 1 ppm y en Vertical de 40 mm. + 1 ppm.	Horizontal de 35 mm. y en Vertical de 45 mm.
Percepción Remota	NA	Fotoidentificación de los vértices deberá ser de 0.2 mm., en relación a la escala del producto.	NA

\* NA = no aplica

<sup>60</sup> Memoria Documental del Fondo de Apoyo para Núcleos Agrarios sin regularizar, FANAR, 2012, pág.2 (5).

<sup>61</sup> Normas Técnicas para la Delimitación de las Tierras al Interior de los Núcleos Agrarios, Sección II, punto 1.1, pág. 3.

<sup>62</sup> Normas Técnicas para la Delimitación de las Tierras al Interior de los Núcleos Agrarios, Sección II, punto 4, pág. 11.



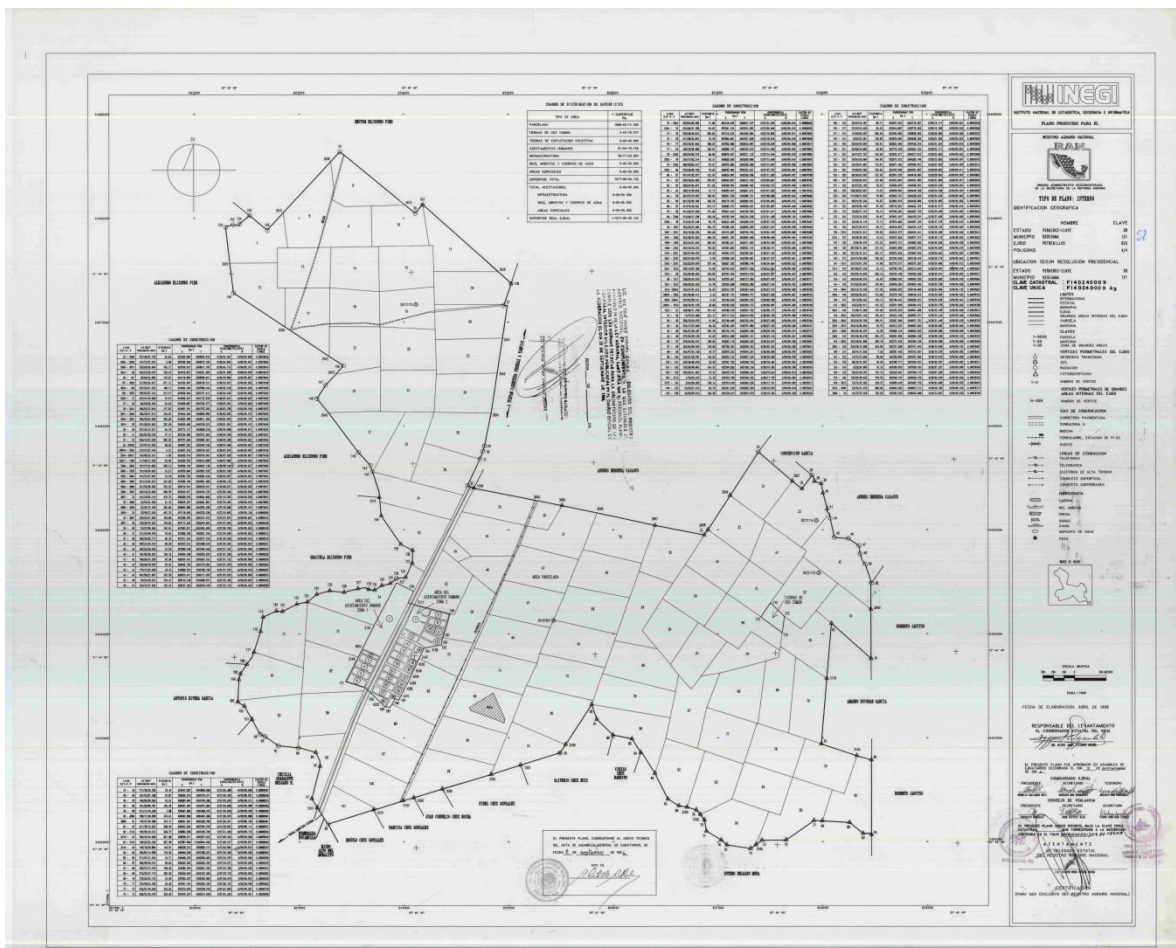
La representación cartográfica de los núcleos agrarios se realizó mediante la elaboración de diversos planos; en atención a las características que se quieren representar se tienen:

- Plano Interno.
- Plano de Tierras de Uso Común.
- Plano de Asentamiento Humano.
- Plano de parcela individual.
- Plano de solar urbano individual.

### Plano Interno

Representación del conjunto de tierras que conforman el núcleo agrario,<sup>63</sup> en él se señalan los límites de la propiedad con sistema de explotación individual (*parcela*), así como la zona de uso común y asentamientos humanos, en su caso.

FIGURA 4.10 PLANO INTERNO



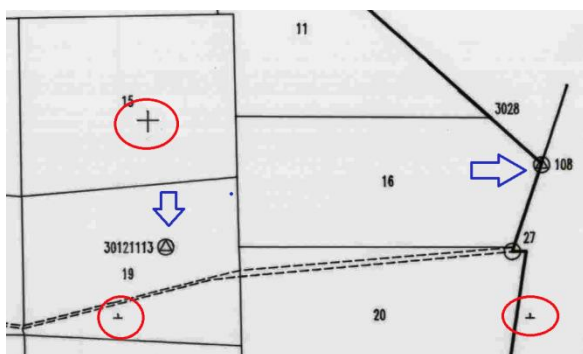
<sup>63</sup> Instituto Nacional de Estadística y Geografía, página oficial.

La figura 4.11 muestra un acercamiento al cuadro de distribución de superficies y un poco del cuadro de construcción. En la parte superior se logran apreciar las coordenadas UTM y las coordenadas geodésicas del marco de referencia.

En este tipo de planos se muestran simultáneamente las coordenadas geodésicas y el sistema de coordenadas UTM.

FIGURA 4.11  
CUADRO DE DISTRIBUCIÓN DE SUPERFICIES

FIGURA 4.12  
PUNTOS DE CONTROL



Continuando con el plano interno, en la figura número 4.12, ahora se observa un acercamiento a la parte norte; en color rojo se señalan un par de marcas de la retícula UTM y de la gradícula del sistema de coordenadas geodésico.

En color azul se muestran dos puntos de control GPS monumentados en campo. En la medida de lo posible, siempre se procura que haya inter-visibilidad entre ellos y así poder ser usados de base para trabajos posteriores, por ejemplo con Estación Total o Teodolito.

### Plano de Tierras de Uso Común<sup>63</sup>

Las tierras de uso común constituyen el sustento económico de la vida en comunidad del núcleo agrario y están conformadas por aquellas tierras que no hubieren sido reservadas por la Asamblea para el asentamiento del núcleo de población, ni sean tierras parceladas.

### Plano de Asentamiento Humano<sup>63</sup>

Tierras que integran el área necesaria para el desarrollo de la vida comunitaria del núcleo agrario; está compuesta por los terrenos ubicados en la zona de urbanización y su fundo legal.

El formato de impresión para los planos: Interno, de Tierras de Uso Común y del Asentamiento Humano, son hojas con dimensiones de 1.06 x 0.86 m.<sup>64</sup>

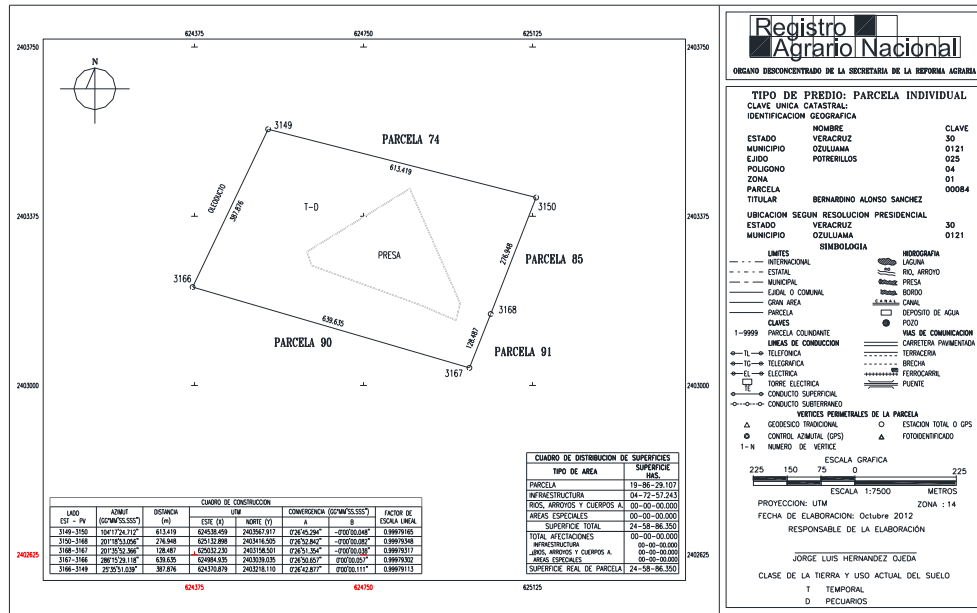
<sup>63</sup> Instituto Nacional de Estadística y Geografía, página oficial.

<sup>64</sup> Normas Técnicas para la Delimitación de las Tierras al Interior de los Núcleos Agrarios, Sección II, punto 9.1, inciso a, pág. 17.

Plano de parcela individual<sup>63</sup>

Porción de terreno, de extensión variable, destinada a la agricultura, la cual se asigna a cada uno de los miembros del ejido para su explotación en forma individual o colectiva. El formato de impresión de este tipo de planos es tamaño oficio. Este plano junto con el certificado parcelario, son parte de la documentación básica que se les entrega a los integrantes del núcleo agrario como producto de la certificación.

FIGURA 4.13 PLANO DE PARCELA INDIVIDUAL



En la figura 4.14 se muestra un acercamiento al cuadro de construcción del plano, el sistema de coordenadas empleado es UTM, la orientación de los lados se presenta mediante azimuts con tres cifras decimales de precisión. Para mayor claridad, en color rojo se resalta parte de la retícula UTM del marco de referencia. Así como en el resto de los planos de la certificación, en el pie de plano se indica el valor de la zona TME empleada, en su caso.

FIGURA 4.14 CUADRO DE CONSTRUCCIÓN

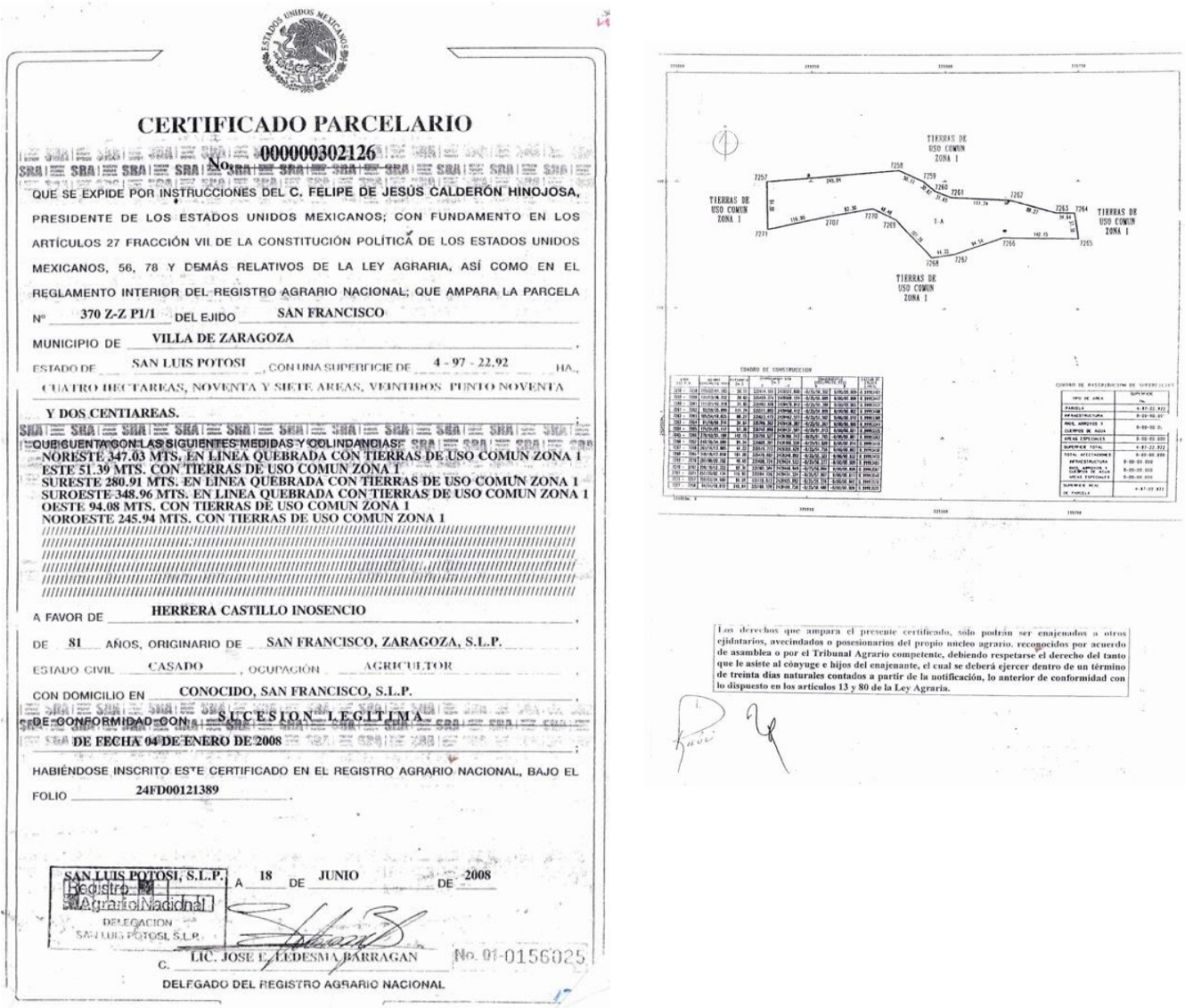
LADO EST - PV	AZIMUT (GG°MM'SS.SSS")	DISTANCIA (m)	UTM		CONVERGENCIA (GG°MM'SS.SSS")		FACTOR DE ESCALA LINEAL
			ESTE (X)	NORTE (Y)	A	B	
3149-3150	104°17'24.712"	613.419	624538.459	2403567.917	0°26'45.294"	-0°00'00.048"	0.99979165
3150-3168	201°18'53.056"	276.948	625132.898	2403416.505	0°26'52.842"	-0°00'00.082"	0.99979348
3168-3167	201°35'52.366"	128.487	625032.230	2403158.501	0°26'51.354"	-0°00'00.038"	0.99979317
3167-3166	286°15'29.118"	639.635	624984.935	2403039.035	0°26'50.657"	0°00'00.057"	0.99979302
3166-3149	25°35'51.039"	387.876	624370.879	2403218.110	0°26'42.877"	0°00'00.111"	0.99979113

<sup>63</sup> Instituto Nacional de Estadística y Geografía, página oficial.

Plano de solar urbano individual<sup>63</sup>

Representación cartográfica del predio que forma parte del asentamiento humano; sus fines pueden ser habitacional, comercial, industrial o de servicio público. Los solares son propiedad plena de sus titulares; es decir, pertenecen al régimen de propiedad privada.

FIGURA 4.15 CERTIFICADO PARCELARIO



En la figura 4.15, se muestra el anverso y reverso de un certificado parcelario. En el reverso, se alcanza a apreciar un plano de la parcela, mismo que incluye, cuadro de construcción, cuadro de distribución de superficies, sistema de coordenadas, colindantes, calidad de la tierra, sistema de proyección, entre otros datos básicos de identificación.



#### 4.2.2 LA PROYECCIÓN TRANSVERSA MODIFICADA EJIDAL

En los trabajos de certificación del PROCEDE se implementó la proyección Transversa Modificada Ejidal TME, con la finalidad de minimizar las distorsiones en el cálculo de superficies, provocadas por el uso de un sistema de coordenadas como la UTM.<sup>65</sup>

Recordando el hecho de que los núcleos agrarios abarcan grandes extensiones de tierra, que en ocasiones coinciden con los límites de zonas UTM y tomando en consideración las características del sistema de coordenadas UTM, es de esperarse que a los extremos de cada zona, sea mayor la distorsión de los polígonos empleados para la representación de ejidos y comunidades.

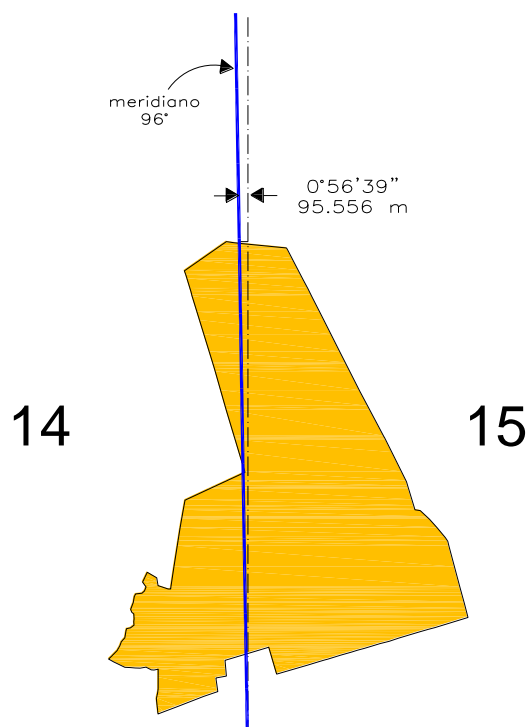
En ocasiones, al intentar representar en un sólo plano, la propiedad de un núcleo agrario que se encuentra en dos zonas UTM, nos encontramos ante dos situaciones: por una parte, el representar en un mismo plano, los marcos de referencia de dos zonas UTM, lo cual resta claridad, y acarrea dificultades para el cálculo analítico de la superficie.

Por otro lado, se puede representar dicha propiedad social, en el marco de referencia de la zona UTM que abarque la mayor parte del núcleo agrario. Pero como ya se mencionó, esto trae en consecuencia, que la región del ejido que se encuentra más distante al meridiano central de la zona UTM elegida, presente una distorsión muy grande.

En la figura 4.16, se muestra el ejido Rancho Nuevo Nopaltepec, Cosamaloapan, Ver; en color azul se encuentra representado el meridiano  $96^\circ$ , el cual es el límite entre las zonas UTM 14 y 15. En color negro y mediante línea punteada, se muestra una línea vertical de la retícula UTM.

Observando la región que abarca el núcleo agrario Rancho Nuevo Nopaltepec, aproximadamente del paralelo  $18^\circ 16' 20''$  al paralelo  $18^\circ 19' 30''$ , la separación angular entre estas dos líneas es de  $0^\circ 56' 39''$ . Tomando como referencia el punto más al norte del polígono que contiene al ejido, la separación lineal entre el meridiano  $96^\circ$  y la línea vertical de la retícula UTM es de 95.556 metros.

FIGURA 4.16  
NÚCLEO AGRARIO EN DOS ZONAS UTM



<sup>65</sup> Manual del programa de cálculo TMCalc, pág. 1.

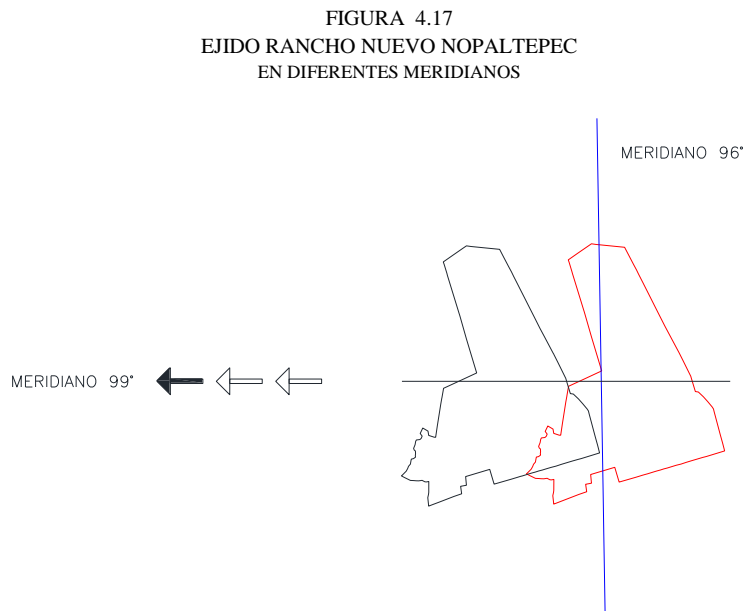
Es decir, para cada elemento geográfico que se quiera representar en el sistema UTM y que se ubique entre el meridiano central y el meridiano 96°, esperaríamos encontrar un desplazamiento lineal en dirección al meridiano central 99°, de a lo mucho 95.556 metros en la dirección del eje “x”, por supuesto para aquellos objetos que se localicen sobre el paralelo 18° 19’ 30” ó en las cercanías debajo de él.

Lo anterior es una cuestión importante a considerar cuando se pretenda realizar el acople de información, en particular en polígonos de gran superficie o de obras lineales de gran extensión. Se profundizará más en esta idea en secciones posteriores.

Una manera de cuantificar la distorsión que sufre un polígono, en diferentes zonas de una proyección cartográfica, es el empleo de la indicatriz de Tissot. Utilizando un artificio similar y mediante el traslado del polígono del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec a lo largo del digamos “paralelo medio” que atraviesa la propiedad y en dirección hacia el meridiano central de la zona UTM 14, ver figura 4.17, observamos que la superficie del ejido tiende a disminuir; es decir, la superficie de Rancho Nuevo Nopaltepec en el meridiano 96° es mayor a la calculada sobre el meridiano 99°.

Dicho de otra manera, el sistema de coordenadas UTM tiende a aumentar la superficie de los polígonos en la medida que estos se alejen más del meridiano central de la zona en cuestión.

El porcentaje de aumento dependerá del método de cálculo y del “paralelo medio” en el que se encuentre la propiedad.



Para llevar a cabo el traslado del polígono del ejido, se realizaron los cálculos en las coordenadas geodésicas de los vértices que componen la propiedad, una vez que se obtuvieron las nuevas coordenadas geodésicas del ejido, se realizó la proyección de las mismas al sistema de coordenadas UTM. Para la transformación de las coordenadas nos auxiliamos del programa elaborado por el INEGI, TMCALC.<sup>66</sup>

<sup>66</sup> TMCALC.

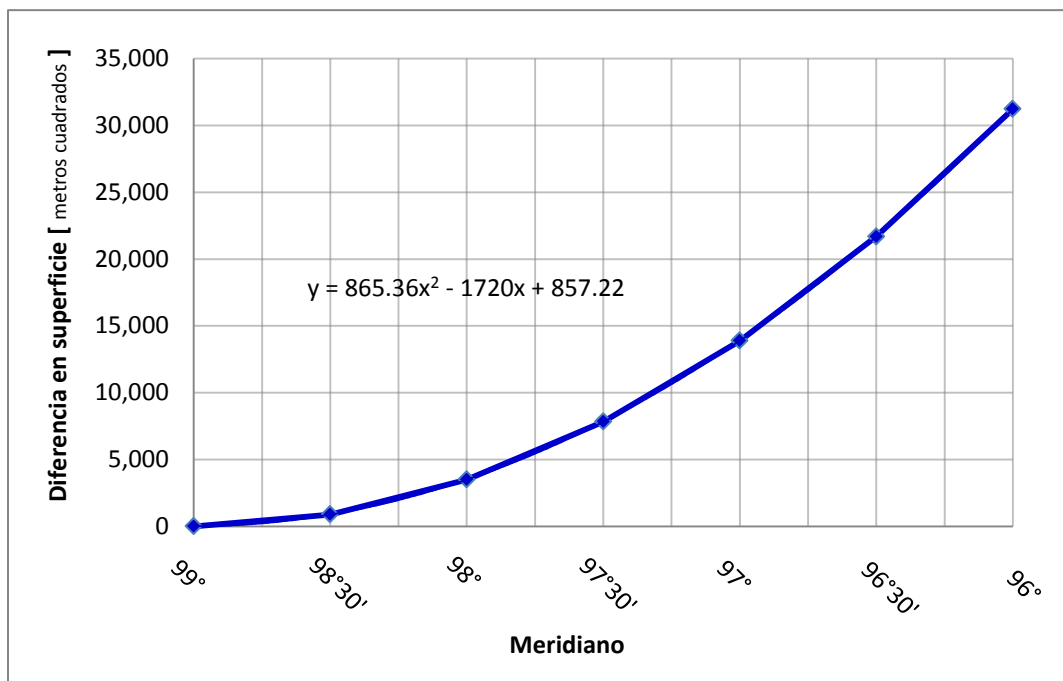
Tomando como base las coordenadas UTM del núcleo agrario y mediante el empleo de métodos planimétricos de Topografía, la superficie del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec en el meridiano 96° es de 1,252-63-67.252 Has., y en el meridiano 99° es de 1,249-56-91.254 Has., la diferencia entre ambas superficies es 3-06-76 Has., lo cual representa el 0.25 % de variación en superficie, asociado únicamente al sistema de coordenadas UTM empleado.

[ver Tabla 4.2](#)

En la figura 4.18, se muestra la tendencia en variación de superficie, del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec, que existe al alejarnos hacia la derecha del meridiano central de la zona UTM 14. Dada la simetría del sistema de coordenadas UTM, esperaríamos encontrar un comportamiento similar al alejarnos hacia el lado izquierdo del meridiano central.

Adicionalmente, en la gráfica se muestra la función polinómica de segundo grado que se ajusta a la distribución de los datos obtenidos.

FIGURA 4.18  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE EN EL SISTEMA UTM  
PARALELO CONSTANTE



[ver Tabla 4.2 de datos](#)

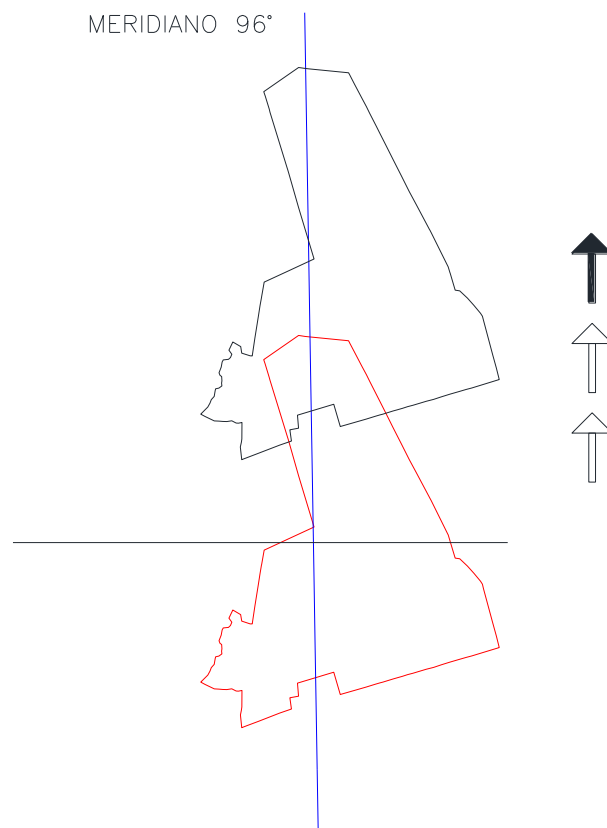
No obstante, que el núcleo agrario Rancho Nuevo Nopaltepec físicamente se encuentra en el paralelo 96°, la superficie de referencia que se tomó para calcular las diferencias, es la superficie del ejido calculada en el meridiano 99°. Lo anterior debido a que, los cálculos realizados con coordenadas UTM del ejido, en las cercanías del meridiano 96°, se encuentran ya influenciados por la distorsión asociada al sistema de coordenadas UTM.

Tomando en consideración las características geométricas del elipsoide de revolución al que se encuentran referidas las coordenadas geodésicas, el cálculo de características como superficie, perímetro, orientación de los lados, relación espacial entre los vértices, no debe variar a consecuencia de únicamente trasladar el polígono en la dirección Este-Oeste; es decir, moviéndolo a lo largo de un paralelo.

Al ser esto cierto, los resultados obtenidos para nuestro ejemplo en la zona UTM 14, son independientes de la zona UTM empleada; o dicho de otra forma, si en vez de realizar nuestro análisis en la zona UTM 14, lo hubiéramos hecho en otra zona UTM, los resultados serían los mismos.

Para lograr cuantificar la distorsión del polígono del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec asociada al sistema de coordenadas UTM en la dirección Norte-Sur, lo trasladamos ahora sobre el meridiano  $96^\circ$  hacia el Norte, ver figura 4.19.

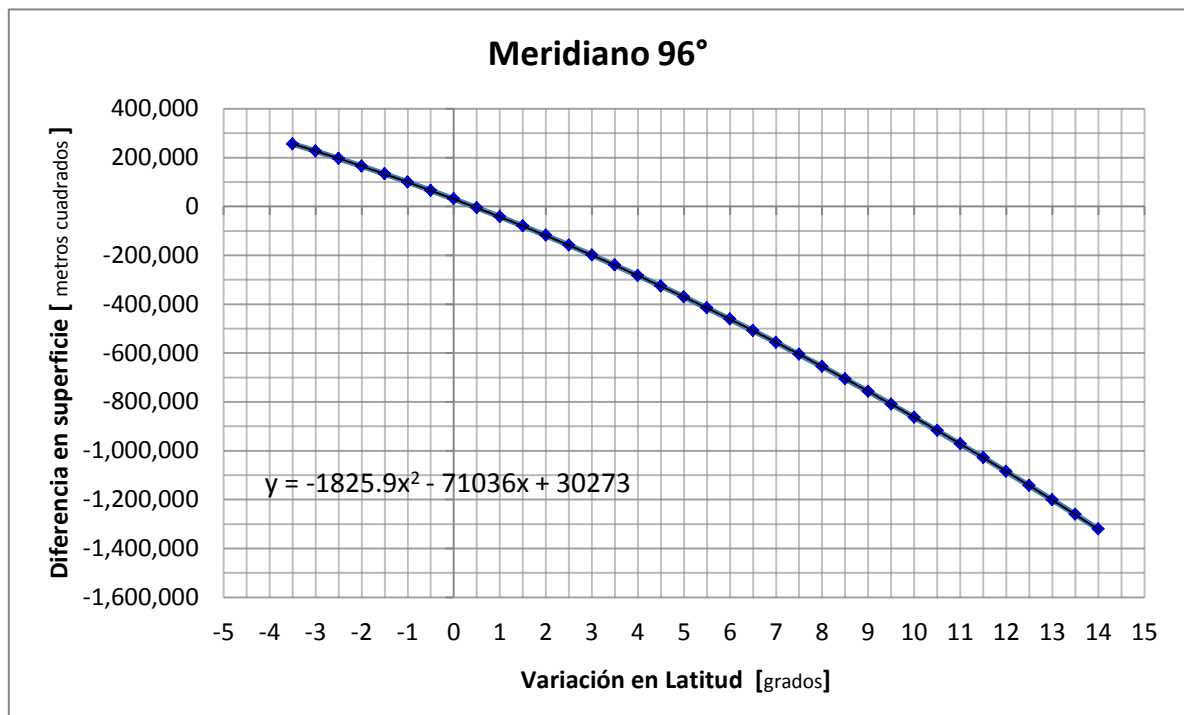
FIGURA 4.19  
EJIDO RANCHO NUEVO NOPALTEPEC  
EN DIFERENTES PARALELOS



En la figura 4.20, se muestra la variación en superficie encontrada al realizar este procedimiento. El sentido positivo en las unidades del eje horizontal de la gráfica, es empleado para aquellos polígonos que se encuentran hacia el Norte de la ubicación real del ejido, caso contrario para aquellos que se encuentran hacia el Sur, los cuales se presentan con signo negativo.

En la gráfica, nuevamente la superficie de referencia empleada para calcular las diferencias de superficie, es la calculada para el ejido en el meridiano 99°, recordando que las latitudes de sus vértices oscilan entre los paralelos 18° 16' 20" y 18° 19' 30".

FIGURA 4.20  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE EN EL SISTEMA UTM  
MÉRIDIANO CONSTANTE



[ver Tabla 4.3 de datos](#)

A consecuencia de lo dicho anteriormente, en la gráfica, al valor cero de las abscisas le corresponde el valor 3-06-76 Has. en las ordenadas, que es la diferencia en superficie existente entre el meridiano 96° y el 99° para el ejido en estudio. Toda vez, que el núcleo agrario se encuentra en dos zonas UTM, se desplazó el ejido unos cuantos segundos al Oeste al realizar los cálculos sobre el meridiano 96°. En la figura 4.17 se aprecia dicho desplazamiento, el polígono en color negro es el que realmente se trasladó al Norte y Sur, para obtener los datos de la gráfica de la figura 4.20.

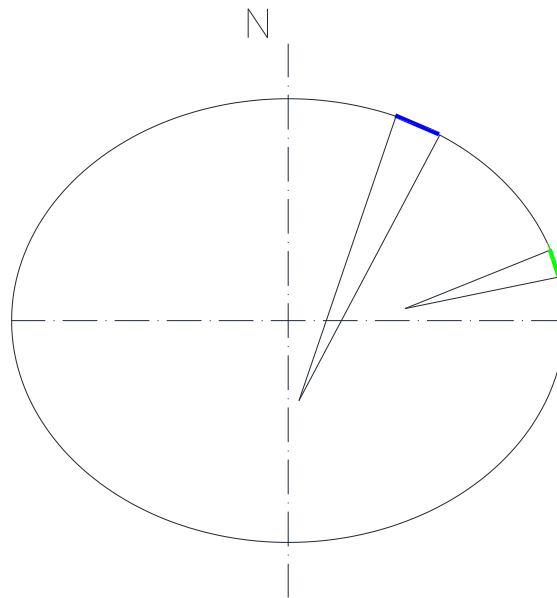
Al observar la gráfica de la figura 4.20, es claro el hecho de que al movernos en sentido Norte sobre un meridiano en el sistema de coordenadas UTM, la superficie de los polígonos disminuye. Considerando las coordenadas extremas de nuestro territorio, podemos encontrar una variación (*en menos*) de superficie de hasta 130 Has., aproximadamente, lo que representa poco más del 10%.

Para una elipse meridiana, la longitud de arco correspondiente a cada grado de latitud es una magnitud que va en aumento conforme nos acercamos hacia el polo Norte; es decir, un arco de un grado de latitud, cercano al Ecuador, es sensiblemente más pequeño que, un arco de un grado de latitud, cercano al polo Norte.

FIGURA 4.21  
LONGITUD DE ARCO SOBRE EL MERIDIANO

En la figura 4.21, se representa una elipse meridiana. En color verde se muestra un arco de meridiano medido cerca del Ecuador, en color azul, otro arco de meridiano medido cerca del polo Norte. En los dos arcos anteriores, el ángulo empleado es el mismo.

Así como en ocasiones anteriores, las dimensiones se encuentran exageradas un poco, con el fin de ilustrar con claridad el concepto.

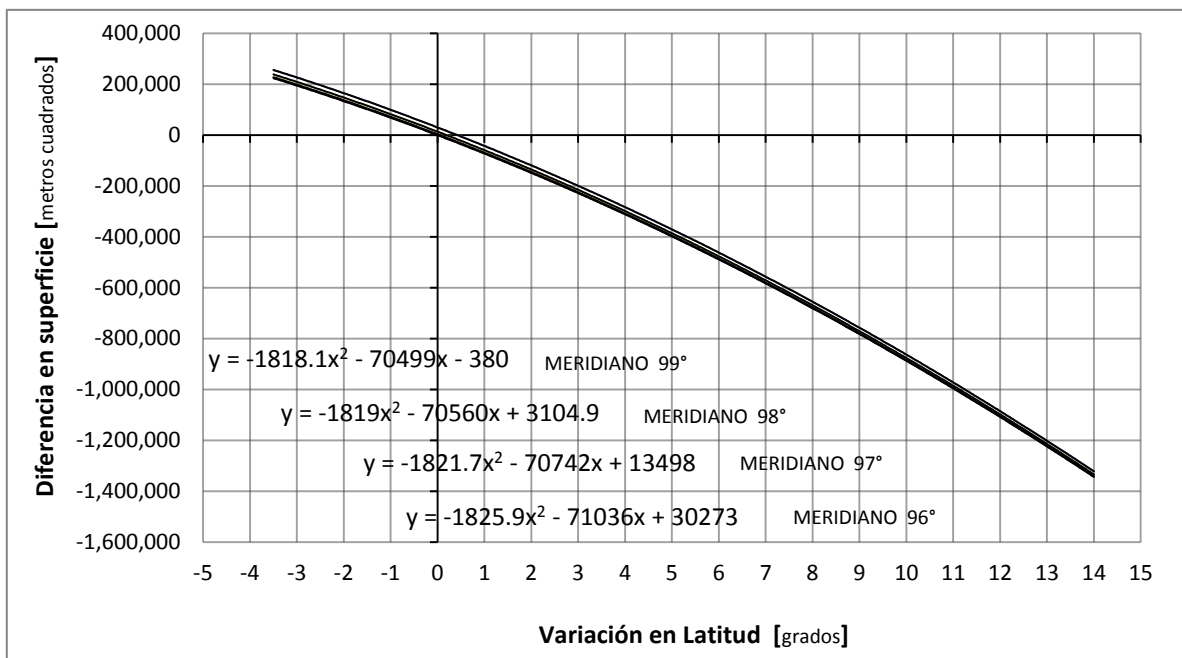


Tomando en consideración lo expuesto, al trasladar el polígono del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec hacia el Norte sobre el meridiano  $96^\circ$ , esperaríamos encontrar que la superficie es mayor a su contraparte cercana del Ecuador, pero como ya se mostró, es una situación que no sucede cuando se representa el núcleo agrario con el sistema de coordenadas UTM; es decir, se presenta el efecto inverso, la superficie se reduce significativamente.

Para complementar el análisis, se repitió el proceso en los meridianos  $97^\circ$ ,  $98^\circ$  y  $99^\circ$ . Para llevar a cabo esto, una vez más se trasladó el polígono del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec, empleando sus coordenadas geodésicas y realizando las respectivas transformaciones al sistema UTM. El área de estudio abarca las coordenadas extremas de nuestro territorio en la dirección Norte-Sur.

En la figura 4.22, se muestra la variación en superficie encontrada al realizar este análisis. Para elaborar la gráfica se calculó la superficie de 147 polígonos distribuidos aproximadamente entre los paralelos  $14^{\circ} 49' 00''$  y  $32^{\circ} 19' 30''$ , con un espaciamento entre ellos en la dirección Norte-Sur de 30 minutos, y en la dirección Este-Oeste de un grado. Nuevamente, el sentido positivo en las unidades del eje horizontal de la gráfica, es empleado para aquellos polígonos que se encuentran hacia el Norte de la ubicación real del ejido, y el signo negativo para aquellos que se encuentran hacia el Sur.

FIGURA 4.22  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE EN EL SISTEMA UTM  
EN VARIOS MERIDIANOS



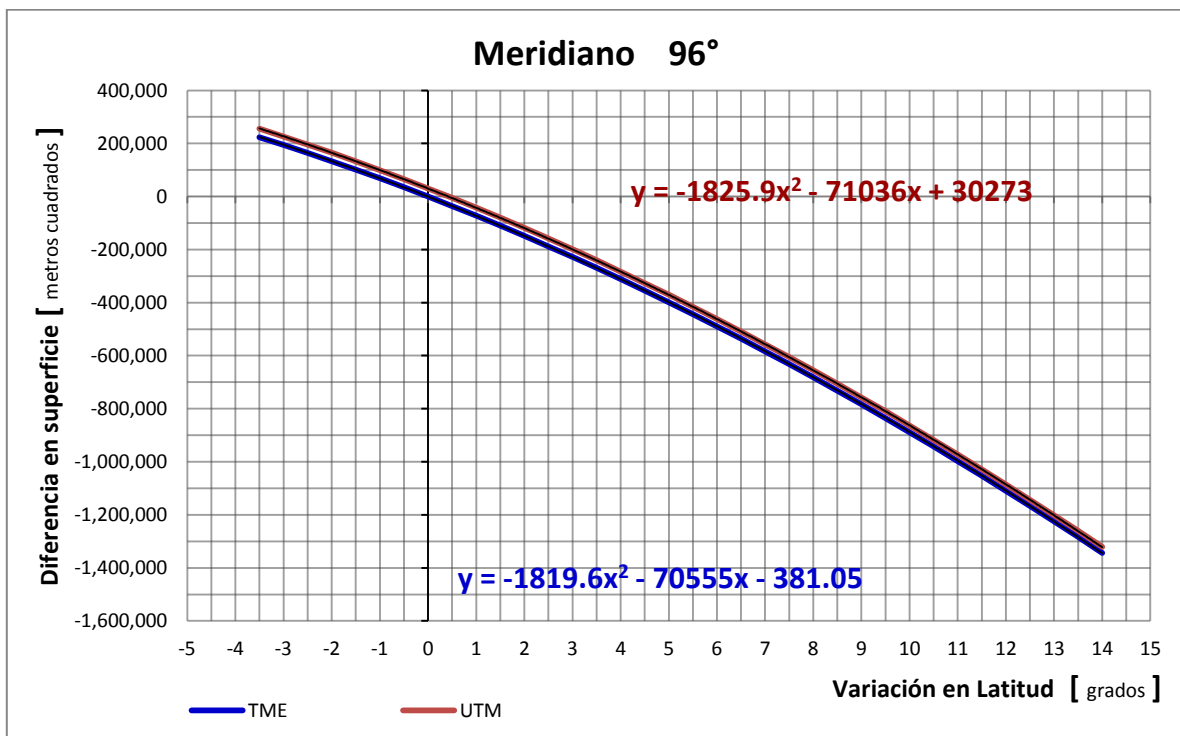
[ver Tabla 4.4 de datos](#)

Como se logra apreciar en las funciones polinómicas de segundo grado asociadas a los datos de cada uno de los meridianos, la superficie disminuye en cuanto los polígonos se alejan del Ecuador.

Al inicio de la sección, se mencionó que la proyección TME minimiza la distorsión en superficie, de los elementos geométricos que representa; analizaremos el comportamiento de la proyección TME para este mismo ejemplo.

En la figura 4.23, observamos la gráfica en la que se representa la variación en superficie al trasladar el polígono, del núcleo agrario en estudio, a lo largo del meridiano 96° pero ahora en la proyección TME. Al igual que en el sistema UTM, la superficie de los polígonos tiende a disminuir al alejarse del Ecuador.

FIGURA 4.23  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
PROYECCIÓN TME Y SISTEMA UTM  
MERIDIANO CONSTANTE



[ver Tabla 4.5 de datos](#)

Tomando en consideración la función polinómica de segundo grado asociada a los datos, no se percibe una mejora significativa en el empleo de la proyección TME, en lo que respecta a la variación en superficie a lo largo de un meridiano. En secciones posteriores se analizarán las posibles ventajas de esta proyección, en particular en la relación espacial que guardan entre sí, los vértices de cada polígono analizado.

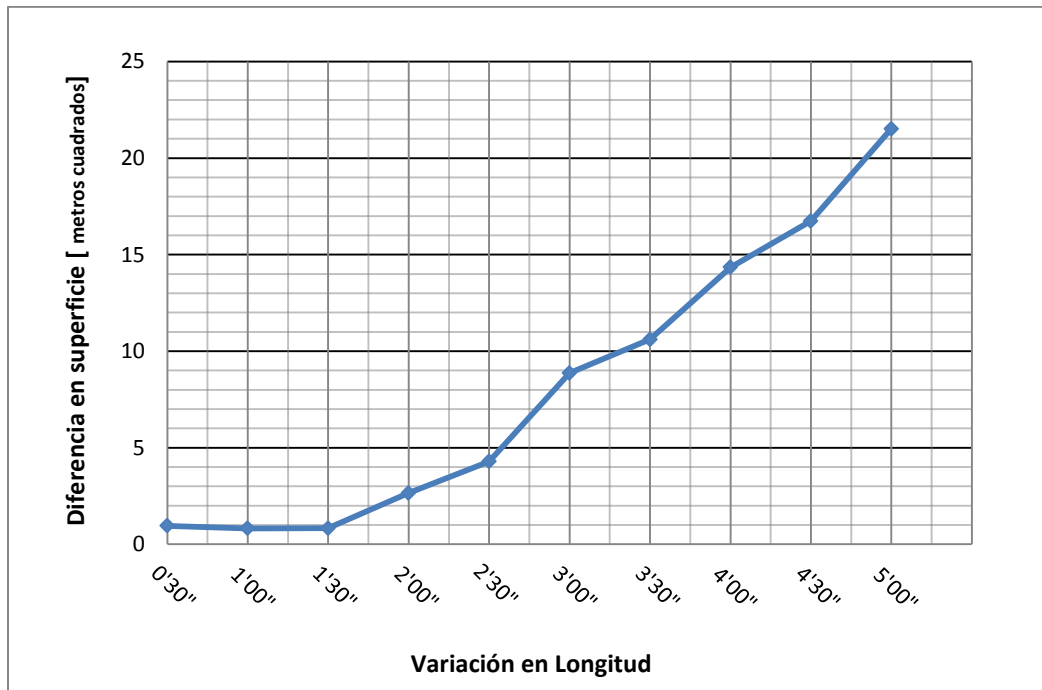
Por otro lado, se observa que para el núcleo agrario en estudio, la proyección TME representa el polígono con una superficie menor a la que ofrece el sistema de coordenadas UTM. Esto es, superficie en el sistema  $UTM_{MER96^\circ}$  1,252-63-67.252 Has., superficie en la proyección TME 1,250-56-96.019 Has., existiendo una diferencia entre ambas de 2-06-71.233 Has.



Cabe mencionar, que una diferencia importante entre la proyección TME y el sistema UTM, es el hecho de que la primera es una proyección tangente, mientras que el segundo es un sistema de coordenadas que emplea una proyección secante.

En la figura 4.24, tenemos la representación de la variación de superficie encontrada al trasladar, el polígono del ejido en estudio, en la dirección Oeste de su posición real. Se identifica que la superficie del núcleo agrario tiende a aumentar al alejarse del meridiano central de la proyección TME, que para este caso es de  $96^\circ$ . Por cada 30 segundos que nos desplazamos a la izquierda del meridiano central  $96^\circ$ , linealmente nos separamos alrededor de 900 metros, y para un valor angular de 5 minutos, tenemos el equivalente de poco más de 9 kilómetros lineales.

FIGURA 4.24  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
PROYECCIÓN TME  
PARALELO CONSTANTE



[ver Tabla 4.6 de datos](#)

De la gráfica anterior, se observa que al utilizar la proyección TME, la variación que existe al desplazar un polígono en la dirección Este–Oeste, es decir a lo largo de un paralelo y sin variar la latitud, arroja cifras pequeñas en diferencias de superficie.

En el procedimiento expropiatorio, es poco frecuente el tener que representar en la proyección TME, polígonos que se encuentren muy distantes del meridiano central respectivo, pero de presentarse el caso, como se observa en la gráfica de la figura 4.24, por lo menos la diferencia en superficie sería pequeña.

Es preciso señalar que, tomando en consideración las especificaciones de la proyección TME, el meridiano central se elige de tal manera que este sea el promedio de las longitudes de cada uno de los vértices del polígono ejidal o comunal a representar, o dicho de otra manera, el meridiano central elegido tiende a dividir el polígono del núcleo agrario aproximadamente en dos partes iguales.<sup>67</sup>

En ocasiones, dada la variedad de polígonos que componen a algunos núcleos agrarios, es necesario representar un ejido o comunidad mediante el empleo de planos internos referidos a varios meridianos centrales. Situaciones como esta son frecuentes en aquellos núcleos agrarios que han sufrido a lo largo del tiempo varias expropiaciones, y que posteriormente a ellas fueron certificados, ya sea por el PROCEDE o el FANAR.

Cuando se presenta una situación así, y además coincide que la ubicación geográfica del núcleo agrario requiere el empleo de la proyección TME, es común encontrar que el ejido o comunidad cuentan con varios planos internos referidos a distintos meridianos centrales, en los que inclusive el valor del meridiano central, varía sólo unos cuantos minutos.

En los procedimientos expropiatorios de obras lineales extensas (*ej. carreteras, ductos, líneas de conducción, canales*), suelen presentarse casos como estos, y dependiendo la escala a la que se elijan elaborar los planos definitivos y proyectos, se puede optar por transformar todos los polígonos involucrados a una proyección TME cuyo meridiano central se encuentre en el promedio de longitudes de los vértices involucrados o, representar en el plano varios marcos de referencia correspondientes a varios meridianos centrales, por supuesto se elige la opción que ofrezca mayor claridad y sencillez.

En el desarrollo del presente trabajo se irán comentando las particularidades del sistema UTM y la proyección TME en la representación del Catastro de la Propiedad Social, enfocadas al procedimiento expropiatorio.

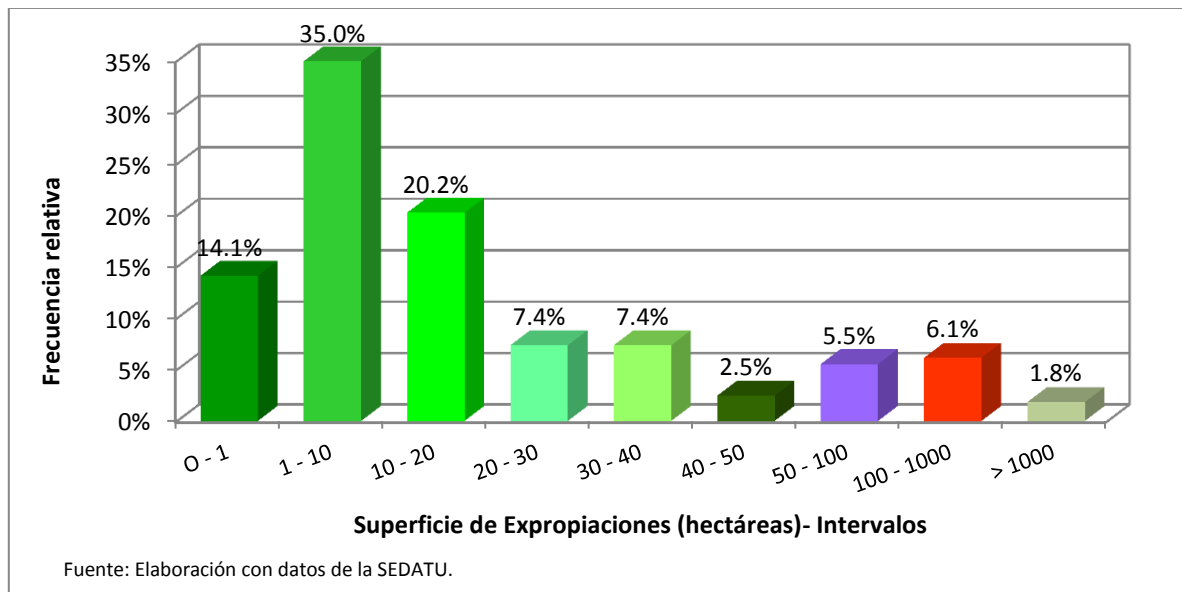
Para ilustrar las características de la proyección TME y el sistema UTM, nos valimos de la propiedad de un núcleo agrario, que cuenta con una superficie cercana a las 1,300 Has. Como se comentó al inicio del presente capítulo, la propiedad social cuenta con ejidos y comunidades que poseen grandes extensiones de tierra, y no obstante que en ocasiones se inicia el trámite de expropiación de núcleos agrarios completos, en promedio, las superficies tramitadas en expropiación abarcan sólo unas cuantas decenas de hectáreas.

Es de esperarse que al reducir la superficie del polígono de interés, las diferencias absolutas en superficie se vuelvan pequeñas. Un elemento importante a considerar, para definir si las variaciones en superficie son significativas, es revisar el costo por metro cuadrado que llegan a alcanzar este tipo de propiedades.

<sup>67</sup> Manual del programa de cálculo TMCalc, pág. 29.

En la figura 4.25 se muestra la distribución de frecuencias de superficies tramitadas por la SEDATU en los últimos tres años. Como muestra, se tomaron 163 trámites expropiatorios que abarcan una superficie de 9,886-48-13.315 Has., y que contemplan diversos Estados de la República Mexicana.

FIGURA 4.25  
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS  
SUPERFICIES DE PROPIEDAD SOCIAL  
TRAMITADAS EN EXPROPIACIÓN  
AÑOS 2012, 2013 y 2014



[ver Tabla 4.7 de datos](#)

En la gráfica, se logra apreciar en color verde, que en el 86.5 % de los procedimientos tramitados, la superficie involucrada oscila entre 0 y 50 Has. Adicionalmente, se percibe que los trámites expropiatorios de superficies menores a 10 Has. son los más recurrentes, constituyendo el 49.1 % de los casos.

A continuación se analiza un ejemplo en el que la superficie tramitada en expropiación se encuentra alrededor de las 10 Has.

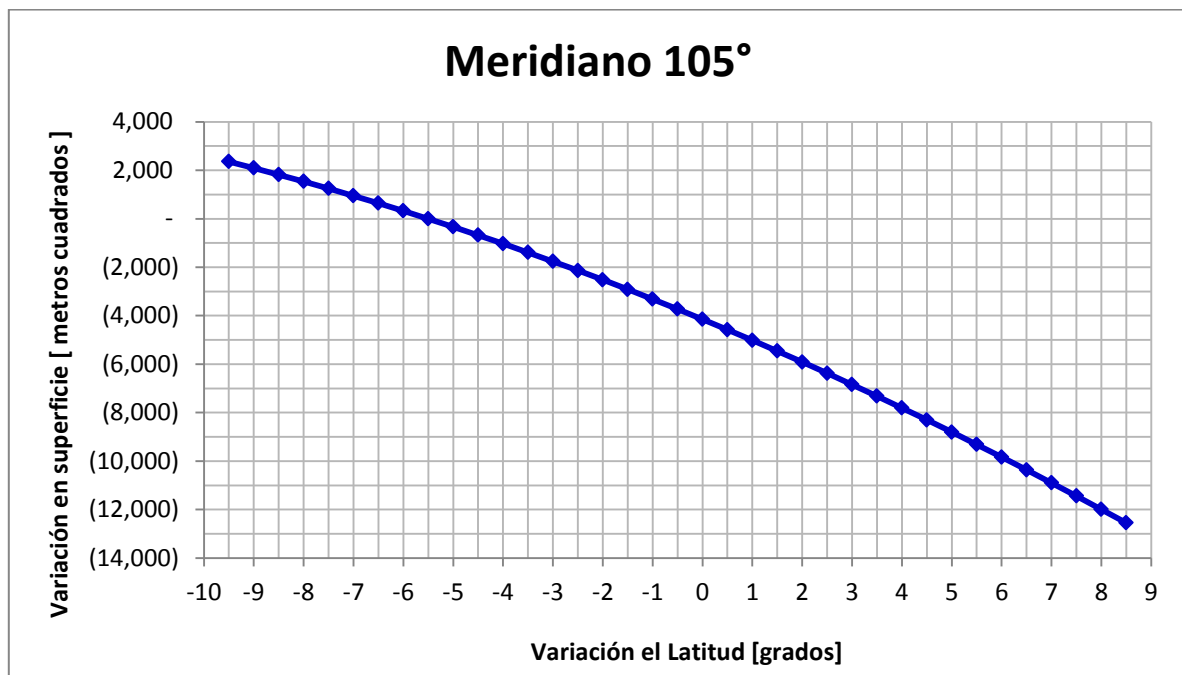
Para realizar comparaciones en los resultados obtenidos, probablemente lo ideal es analizar el ejemplo de una expropiación que se encuentre dentro del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec o en sus cercanías. Sin perjuicio de lo anterior, se optó por utilizar los datos técnicos de una expropiación ubicada en otra zona UTM y a una latitud diferente, por dos razones en particular; la primera, mostrar que los resultados obtenidos son independientes de la zona UTM elegida, como ya se ha venido mencionando; en segundo lugar, se eligió este trámite expropiatorio debido a un par de detalles técnicos interesantes, mismos que serán comentados al final de esta sección.

Los datos empleados corresponden al trámite expropiatorio de una superficie ubicada en el Estado de Durango, relativa al derecho de vía de una autopista cercana a la Capital del Estado.

En concordancia con el análisis realizado para el ejido Rancho Nuevo Nopaltepec, para nuestro ejemplo del derecho de vía de la carretera, se determinaron las coordenadas geodésicas del polígono de expropiación, se trasladó el polígono a lo largo del meridiano central de la zona UTM 13, meridiano 105°, se realizaron las transformaciones de coordenadas correspondientes y por último se calculó la superficie del polígono mediante métodos planimétricos.

En la figura 4.26, se muestra la variación en superficie encontrada al trasladar el polígono a lo largo del meridiano 105°, con la intención de realizar comparaciones, en esta ocasión la superficie de referencia empleada para calcular las diferencias de superficie; es la superficie calculada del polígono a expropiar sobre el meridiano 105° pero en las cercanías del paralelo 18° 30' 00". Como recordaremos, en nuestro ejemplo anterior, el ejido Rancho Nuevo Nopaltepec se encontraba alrededor del paralelo 18° 19' 30".

FIGURA 4.26  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
SISTEMA UTM  
MERIDIANO CONSTANTE



[ver Tabla 4.8 de datos](#)

Como en ocasiones anteriores, el signo negativo en el eje de las ordenadas, se encuentra reservado para aquellos polígonos que se ubican por debajo de la posición real del polígono a expropiar, caso contrario para el signo positivo.

En la figura 4.26, podemos observar que al trasladar el polígono a expropiar al meridiano central de la zona UTM 13, valor cero en las ordenadas, la superficie es menor a la calculada para su contraparte 5° 30' más al sur. Este resultado, ya se había previsto en el ejemplo en el que trasladamos a todo el ejido Rancho Nuevo Nopaltepec. Con los resultados obtenidos, en el sistema de coordenadas UTM, el polígono a expropiar es cerca de 4 mil metros cuadrados más pequeño, debido únicamente al sistema de coordenadas elegido. [ver Tabla 4.8](#)

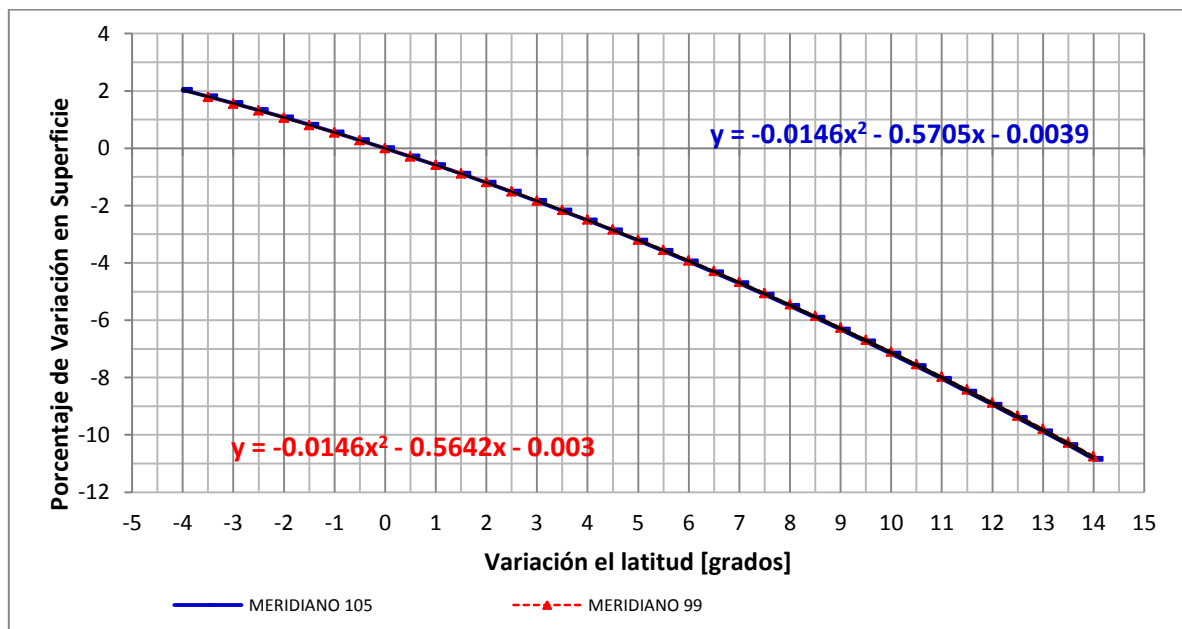
Para poder realizar una mejor comparación entre los resultados obtenidos para el ejido Rancho Nuevo Nopaltepec y los obtenidos para el polígono a expropiar del derecho de vía de nuestra autopista en Durango, utilizaremos ahora lo que llamaremos Porcentaje de Variación de Superficie PVS, esto es:

$$PVS = \frac{(S_i - S_R)}{S_R} \cdot 100$$

En donde PVS [%], Superficie i-ésima  $S_i$  [ $m^2$ ], Superficie de Referencia  $S_R$  [ $m^2$ ].

En la figura 4.27, se muestra el comportamiento en variación de superficie que presentan ambos polígonos. En los dos casos analizados, en síntesis lo que se hizo, fue obtener las coordenadas geodésicas de los polígonos, trasladarlos hacia el meridiano central de la zona UTM que les correspondía y posteriormente ambos se desplazaron en sentido Norte-Sur dejando un espaciamiento de 30 minutos.

FIGURA 4.27  
PORCENTAJE DE VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
SISTEMA UTM  
MERIDIANO CONSTANTE



[ver Tabla 4.9 de datos](#)

Revisando la gráfica de la figura 4.27 y los datos asociados a la misma, podemos observar que nuevamente la variación en superficie, para polígonos que se encuentran cerca del límite Norte de nuestro territorio, es de alrededor del 10% en menos.

Resultado por demás significativo, porque con ello se vislumbra la idea de que la variación en superficie es independiente del tamaño de los polígonos analizados.

Aunque en esta ocasión sólo se elaboraron cálculos para el polígono en el sistema UTM, son de esperarse resultados similares para la proyección TME, utilizada en la certificación de los núcleos agrarios.

Es preciso señalar, que hasta este momento, las superficies de referencia empleadas para los cálculos, han sido las obtenidas sobre el meridiano central de las zonas UTM, y en la latitud promedio de la ubicación real del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec.

Tomando en consideración los datos manejados y los resultados obtenidos en esta sección, podemos darnos cuenta que en el sistema UTM, para un polígono de ciertas coordenadas geodésicas, la superficie máxima se obtiene trasladándolo al Ecuador.

En este punto del análisis, se identifica, que independientemente de la superficie de referencia elegida, el representar los núcleos agrarios (*o porciones de ellos*) en el sistema UTM, conlleva que los polígonos que se ubican en la región Norte de nuestro país parezcan más pequeños que sus homólogos en la zona Sur, lo que nos puede conducir a serios problemas económicos y sociales.

Con los resultados obtenidos, se puso en evidencia que dadas las características geométricas del elipsoide de revolución, de los sistemas de proyección TME y del sistema de coordenadas UTM, se pueden realizar comparaciones interesantes de los polígonos representados, y así mismo se observa que los resultados alcanzados son independientes de la zona UTM elegida.

Existen un par de detalles interesantes, relativos al ejemplo desarrollado de la expropiación del derecho de vía de la carretera en Durango, mismos que serán comentados a continuación.

Dicho de paso, la expropiación de derechos de vía para la construcción de carreteras, es uno de los trámites más recurrentes en el procedimiento expropiatorio; y a su vez, es materia de análisis muy interesantes debido a las características técnicas de este tipo de obras de utilidad pública.



En la figura 4.28, se muestra en una imagen de satélite la expropiación referida en nuestro ejemplo anterior. En color verde, como es costumbre, se representa el polígono a expropiar; se alcanza a apreciar que el polígono a expropiar llega hasta el límite del núcleo agrario, la diferencia en las tonalidades del terreno pone en evidencia los linderos ejidales.

FIGURA 4.28  
EXPROPIACIÓN DE UN DEREHO DE VIA  
AUTOPISTA EN DURANGO  
POLÍGONO UNO



En la figura 4.29, se presenta un acercamiento a la porción Oeste la expropiación, no obstante que parece que el polígono no llega al lindero ejidal, lo cual es debido únicamente a imprecisiones de la imagen de satélite de libre acceso, de hecho la expropiación toca dos linderos del núcleo agrario. Este derecho de vía posee la característica de que el eje de trazo no pasa por su parte media. Con una longitud de 60 metros, este derecho de vía es asimétrico, en algunas secciones presenta 40 metros a la derecha contra 20 a la izquierda y viceversa.

Debido a inconsistencias (*el polígono a expropiar, mostraba un desfase importante en relación a los detalles del terreno*) detectadas en un trabajo preliminar, se tomó la decisión de acudir a campo a realizar una verificación. Mediante un levantamiento geodésico se determinó la posición real que ocupa el derecho de vía de la autopista.

FIGURA 4.29  
EXPROPIACIÓN DE UN DEREHO DE VIA  
AUTOPISTA EN DURANGO  
POLÍGONO UNO  
- ACERCAMIENTO -

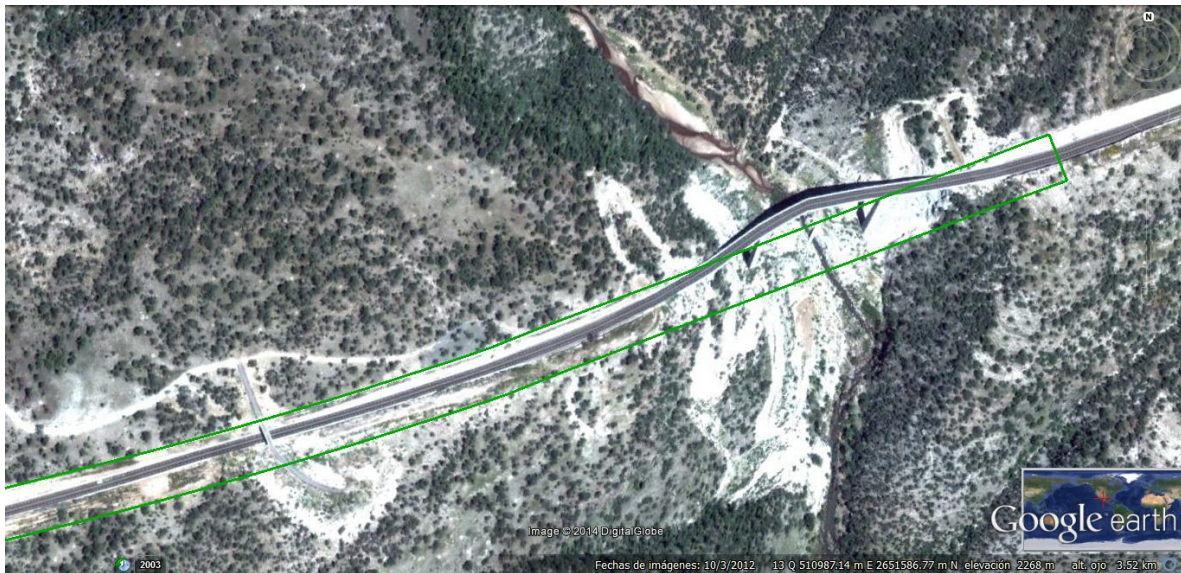


Adicionalmente, en la parte central de la imagen se observa un puente; no obstante que parece que existe una curva en el trazo, de hecho corresponde a un tramo recto, la curva observada es a consecuencia de la perspectiva de la imagen. El puente es empleado para librar un río intermitente, en su parte más profunda, debe encontrarse a una altura cercana a los 100 metros.



En la figura 4.30, se observa otro polígono correspondiente a la misma autopista, nuevamente se aprecia una aparente curva en la imagen debido al puente que se encuentra en ella. En esta imagen, observando el polígono a expropiar en color verde, se pone en evidencia que se trata de un tramo recto de la carretera. Aunque se detecta que la carpeta asfáltica se encuentra ligeramente “*cargada*” hacia la porción Norte del derecho de vía de la carretera, esto es sólo un efecto de la imagen de satélite de libre acceso; en campo se verificó que la carpeta asfáltica en realidad se encuentra en una sección que presenta eje de trazo con 40 metros al Sur y 20 metros al Norte.

FIGURA 4.30  
EXPROPIACIÓN DE UN DERECHO DE VIA  
AUTOPISTA EN DURANGO  
POLÍGONO DOS



En el análisis preliminar de este trámite expropiatorio, y mediante el empleo de imágenes de satélite de la zona, se identificó que el plano informativo enviado por el personal de la Entidad Federativa, presentaba un polígono a expropiar que no correspondía a los detalles del terreno observados en la imagen de satélite.

Al realizar una revisión al expediente se encontró que el polígono enviado correspondía al trazo original o trazo de proyecto aportado por la promovente, en este caso SCT, pero que en campo, la autopista se construyó realizando pequeñas modificaciones al trazo. Por esta razón el plano informativo aportado por el personal de Durango presentaba estas inconsistencias.

### 4.3 LAS COORDENADAS GEODÉSICAS

En las secciones precedentes de este capítulo se señaló, que para la representación de la propiedad social en medios impresos, son empleados el sistema UTM y la proyección TME en la elaboración de los planos oficiales, llámense planos internos del RAN, o planos definitivos y proyectos elaborados por la SEDATU.

El conjunto de planos así elaborados, forman parte de los expedientes integrados en los procedimientos expropiatorios, de las carpetas básicas de los núcleos agrarios y de los títulos de propiedad entregados a los sujetos de derecho (*ejidatarios y comuneros*).

La utilización de un sistema de proyección para representar la propiedad social, es un medio necesario para asentar en documentos oficiales, las dimensiones y ubicación de las propiedades que integran el catastro de la propiedad social, aunado al hecho de que al contar con un material impreso, los sujetos de derecho sienten una mayor certeza y entendimiento de la propiedad que poseen.

Es necesario tener presente, que las proyecciones cartográficas empleadas son una representación bidimensional de objetos y lugares tridimensionales, que nos sirven por un lado, para visualizar de una manera sencilla las características geométricas de los objetos que representan, y por otro lado, permiten determinar sus dimensiones con relativa facilidad.

En la época actual, la obtención de la posición y dimensiones de una propiedad, es realizada mediante el empleo de equipos de medición de alta precisión como el Sistema de Posicionamiento Global GPS, el cual como sabemos, nos proporciona las coordenadas tridimensionales de los vértices que componen la propiedad, referidas a un elipsoide geocéntrico, ya sea en coordenadas cartesianas o coordenadas curvilíneas.

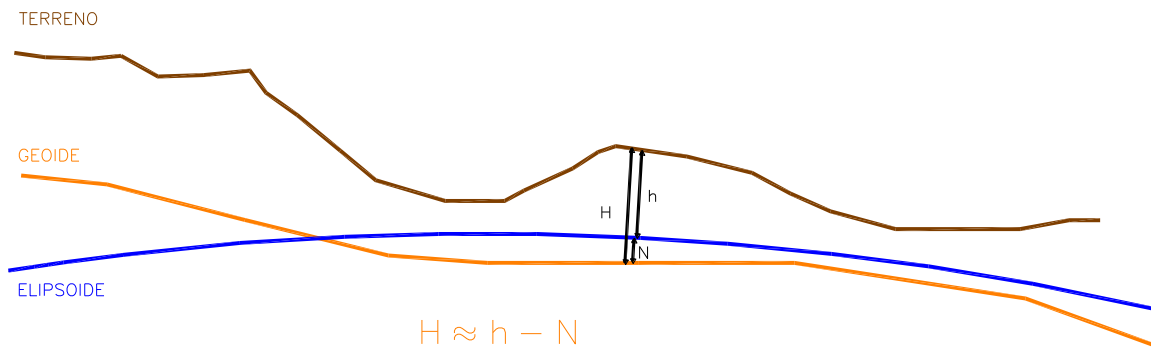
Al realizar el cálculo de superficie de una propiedad con el empleo de una proyección cartográfica, en sí la superficie calculada atiende más a las características geométricas de la región del elipsoide que contiene la propiedad social de interés, y no tanto a la porción (*en campo*) del núcleo agrario del que realmente nos interesa conocer sus dimensiones.

Cuando la porción de terreno a medir, se encuentra más próxima al elipsoide de revolución empleado en el Sistema GPS, la superficie determinada sobre el elipsoide se acercará más a su contraparte medida sobre el terreno. Caso inverso, cuando la porción del núcleo agrario a medir se encuentre más alejada del elipsoide de revolución, la superficie calculada sobre el elipsoide empezará a presentar diferencias significativas en el valor de la superficie.

Hay que recordar que la distancia que existe entre el elipsoide de revolución y el terreno es una cantidad a la que le llamamos altura Elipsoidal y es representada por la letra *h*.

En la figura 4.31 se representan esquemáticamente las superficies de referencia mencionadas, así como la relación que guardan entre sí.

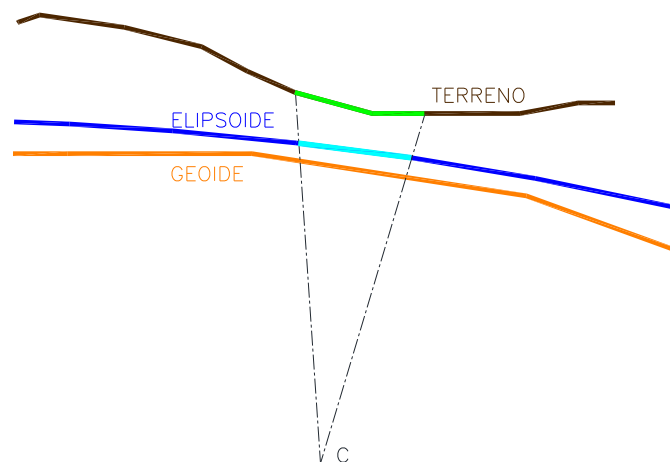
FIGURA 4.31  
ALTURA ELIPSOIDAL



En la figura anterior, en color naranja observamos al Geoide, superficie equipotencial del campo de gravedad de la Tierra, en color azul el Elipsoide, figura matemática de la Tierra empleada como base en diferentes marcos de referencia terrestre, en color café, el perfil de una sección del terreno. Adicionalmente se señala la relación matemática que guardan las distancias entre estas tres superficies de referencia. La letra N, se asigna a la altura Geoidal (*positiva sobre el elipsoide, negativa debajo de él*), y la altura Ortométrica (*distancia que existe entre el geoide y el terreno*) es designada con la letra H.

En la figura 4.32, se muestra una representación del efecto de medir superficies, de objetos en el terreno, sobre el elipsoide de revolución. En color verde, esquemáticamente se representa una porción de un núcleo agrario, en color azul claro su contraparte medida sobre el elipsoide; nuevamente las dimensiones han sido exageradas para ofrecer mayor claridad al concepto.

FIGURA 4.32  
SUPERFICIES DE REFERENCIA



Tomando en consideración lo expuesto, cuando iniciamos la tarea de determinar la superficie de una porción de un núcleo agrario de dimensiones considerables, nos podemos encontrar en la inquietud de elegir la superficie de referencia adecuada.

Por un lado, podemos optar por fijar un plano de referencia que se encuentre en el promedio de las elevaciones de los vértices que componen el polígono que envuelve la propiedad. Para lo cual un instrumento como la Estación Total, nos brinda un gran servicio para obtener el valor de la superficie.

Otra opción, es elegir realizar el levantamiento con el empleo de un Sistema GPS, con lo que obtenemos las coordenadas geodésicas de los vértices de la propiedad; y valiéndonos de estas, obtenemos la superficie calculándola directamente sobre el elipsoide de revolución o proyectando las coordenadas geodésicas, ya sea a un sistema de coordenadas UTM, una proyección TME, o por qué no, si así conviene, a una proyección cónica.

Para una porción de terreno dada, el valor obtenido de la superficie dependerá de la superficie de referencia elegida; y en el caso de cálculos sobre el elipsoide, también dependerá del procedimiento matemático empleado.

La elección del método más apropiado para determinar la superficie de una porción del terreno, en donde el efecto de la curvatura terrestre entra en escena, dependerá de la finalidad del levantamiento, el valor comercial de la propiedad, y por supuesto que el método elegido sea práctico.

Es deseable que las dimensiones obtenidas de una propiedad, se ajusten a la realidad física que se encuentra en campo; ya sea en consideración al valor comercial que llegan a alcanzar algunas propiedades, o al hecho de que este tema también se torna de interés público. Por supuesto, se deben tener muy presentes los elementos jurídicos y sociales relacionados con este tema, puesto que llegan a tener un peso relevante, a la hora de toma de decisiones.

En la sección 4.2.2 se puso en evidencia las diferencias de superficie que se logran presentar asociadas únicamente al sistema de coordenadas elegido. Por simplicidad, quizá nos convenga optar por un sistema como el UTM o la proyección TME, en la representación de los núcleos agrarios o de alguna porción de ellos; pero para asentar las dimensiones de los mismos en documentos oficiales, en los que cada metro cuadrado reviste un importante valor económico, probablemente es necesario tomar consideraciones adicionales para que las dimensiones de las propiedades, asentadas en títulos de propiedad, sean más fieles a lo que físicamente se encuentra en campo.

Las coordenadas geodésicas obtenidas de un levantamiento en el que se emplea un sistema GPS, ofrecen una invaluable fuente de información de la porción de terreno levantada, porque permiten obtener una visión tridimensional de la situación que prevalece en campo y ofrecen de origen, la compatibilidad de ser representadas en distintos sistemas de coordenadas, mediante la conversión o la transformación de las mismas a otros marcos de referencia.

Con coordenadas geodésicas como insumos, es posible determinar la superficie de una porción de un núcleo agrario en una o varias superficies de referencia; inclusive si se desea, se puede elegir proponer un elipsoide de revolución que se ajuste a la elevación promedio que presentan los vértices de un determinado polígono.

Aunado a lo anterior, es necesario señalar que actualmente en el Mapa Digital, que el INEGI pone a disposición del público en general, las coordenadas que se visualizan en pantalla son geodésicas. Cuando necesitamos representar grandes extensiones de tierra, inevitablemente identificamos que un sistema de coordenadas como el UTM, no es el más adecuado por la distorsión asociada al mismo y por las dificultades encontradas al incorporar información de otras zonas UTM.

En particular para algunas de las típicas obras de utilidad pública de desarrollo lineal tramitadas en la SEDATU, cuya extensión fácilmente abarca varios Estados de la República Mexicana, el empleo de un sistema de coordenadas geodésico se identifica como el más adecuado, por la facilidad que presenta al incorporar información de diferentes latitudes y longitudes.

Es preciso recordar, que como se mencionó en la sección 4.2.1, los planos internos de los núcleos agrarios, en su versión impresa en papel, proporcionan las coordenadas geodésicas mediante la impresión de marcas de la gradícula (*mediante cruces*). El marco de referencia empleado en este tipo de planos, es el Marco de Referencia Terrestre Internacional ITRF92, época 1988.<sup>68</sup>

Para concluir, hoy en día, el RAN cuenta con un Sistema de Información Geográfica SIGRAN, en el que permanentemente se están incorporando las modificaciones que se presentan en el catastro de la propiedad social en México, y dicho de paso, también este Sistema de Información Geográfica SIG que se visualiza por internet, presenta la información geográfica en coordenadas geodésicas. A pesar de ser un sistema de uso restringido, al que únicamente tiene acceso el personal del Órgano Desconcentrado, en definitiva es un paso adelante en la administración de la información geográfica de nuestro territorio, en el rubro de propiedad social.

<sup>68</sup> Memoria Documental del Fondo de Apoyo para Núcleos Agrarios sin regularizar, FANAR, 2012, pág.13 (16).

#### 4.4 CONCLUSIONES

La representación gráfica de núcleos agrarios (*o parte de ellos*) en medios impresos, bien puede valerse de proyecciones cartográficas como la empleada en el sistema de coordenadas UTM o su variante, implementada por el INEGI, la proyección TME.

Es necesario señalar, que si queremos asentar las dimensiones (*en concreto el área que ocupa*) de una propiedad en un núcleo agrario en documentos oficiales, se deben definir criterios técnicos que garanticen, que el valor de superficie asignado representa fielmente las características geométricas de la propiedad que refiere.

El hecho de que, por ejemplo, la proyección UTM aumenta el tamaño de los polígonos que se encuentran alejados del meridiano central de la Zona UTM; y en contraparte, disminuya significativamente el valor calculado de la superficie de aquellos que se encuentran alejados del Ecuador. Es una cuestión digna de atención; en virtud de que el valor final de una propiedad, queda definido por el valor asignado por metro cuadrado a los terrenos de la propiedad social y también por la superficie final determinada por los trabajos técnicos e informativos de expropiación.



## 4.5 REFERENCIAS

- I. Instructivo para Trabajos Topográficos.  
Oficina de Planeación, Programa y Divulgación, Taller de impresiones del Departamento de Asuntos Agrarios y Colonización, México, 1965.
- II. Anuario Estadístico y Geográfico por Entidad Federativa 2013, INEGI.  
*INEGI, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Productos y Servicios>Productos>Consulta>Recomendaciones*  
<http://www3.inegi.org.mx/sistemas/productos/default.aspx?c=265&s=inegi&upc=702825054021&pf=Prod&ef=&f=2&cl=0&tg=8&pg=0>
- III. Memoria Documental del Fondo de Apoyo para Núcleos Agrarios sin regularizar, FANAR, 2012, Registro Agrario Nacional.  
*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*  
*Página de Inicio >Transparencia>Rendición de Cuentas*  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/transparencia/rendicion-de-cuentas>
- IV. Atlas de Servicios Ambientales y Propiedad Social en México, Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura IICA, 2012, Registro Agrario Nacional.  
*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*  
*Página de Inicio >Sala de Prensa>Biblioteca Virtual*  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/atlas-de-propiedad-social-y-servicios-ambientales-en-mexico>
- V. Padrón e Historial de Núcleos Agrarios, PHINA.  
<http://phina.ran.gob.mx/phina2/>
- VI. Anuario Estadístico y Geográfico del Distrito Federal 2013, INEGI.  
*INEGI, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Productos y Servicios>Productos>Consulta>Entidad Federativa*  
<http://www3.inegi.org.mx/sistemas/productos/default.aspx?c=265&s=inegi&upc=702825054014&pf=Prod&ef=&f=2&cl=0&tg=7&pg=0&ct=106010000>
- VII. Potencial de Servicios Ambientales en la Propiedad Social en México, Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura IICA, 2012, Registro Agrario Nacional.  
*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*  
*Página de Inicio >Sala de Prensa>Biblioteca Virtual*  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/iicapotencial-serv-amb>



VIII. Instituto Nacional de Estadística y Geografía, página oficial.

*Tema: Catastro de la Propiedad Social > Trabajos técnicos-operativos > Medición de las tierras*

*Tema: Catastro de la Propiedad Social > Productos Básicos*

<http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/catastro/presentacionpropiedadsocial.aspx>

IX. Anuario Estadístico y Geográfico de los Estados Unidos Mexicanos 2013.

*INEGI, Página Oficial.*

*Página de Inicio > De interés*

[http://www.inegi.org.mx/prod\\_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/integracion/pais/aeum/2013/AEGEUM2013.pdf](http://www.inegi.org.mx/prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/integracion/pais/aeum/2013/AEGEUM2013.pdf)

X. Normas Técnicas para la Delimitación de las Tierras al Interior de los Núcleos Agrarios, Registro Agrario Nacional.

*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*

*Página de Inicio > Nuestro Sistema > Normateca >*

*Normas Internas de Operación (Sustantivas) > Normas Técnicas*

<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Normas-Tecnicas/NT-DELIMITACION-DE-TIERRAS-AL-INTERIOR-DE-LOS-NUCLEOS-AGRARIOS/>

XI. TMCalc

Manual y software

*INEGI, Página Oficial.*

*Página de Inicio > Geografía > Temas > Catastro > Productos y Servicios >*

*Consulta en Línea > Conversión de Coordenadas entre las proyecciones TM y Geodésicas TMCalc*

[http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/catastro/tm\\_presentacion.aspx](http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/catastro/tm_presentacion.aspx)

# CAPÍTULO 5

## LEVANTAMIENTOS CATASTRALES DE LA PROPIEDAD SOCIAL

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En la sección 4.1 se realizó una breve descripción de los procedimientos que tradicionalmente se utilizaron en la determinación del catastro de la propiedad social, mencionando algunas de las especificaciones técnicas señaladas en la normatividad aplicable hasta aproximadamente los años noventa.

Con la reforma al artículo 27 Constitucional, y la publicación de la Ley Agraria en el año de 1992, se da por concluido el *Reparto Agrario* iniciado con nuestra Carta Magna de 1917. Para todos aquellos asuntos en trámite o pendientes de materializar, se nombró como autoridad sustituta al Tribunal Superior Agrario<sup>69</sup>, facultado para resolver los expedientes del llamado *Rezago Agrario*<sup>70</sup> en términos de las disposiciones transitorias del Decreto que reformó el artículo 27 Constitucional<sup>69</sup> y de la recién creada Ley Agraria.

Podemos considerar como *Rezago Agrario*, todos aquellos asuntos o casos no resueltos en materia de: Dotación, Ampliación, Nuevos Centros de Población Ejidal, Restitución, Reconocimiento y Titulación de Bienes Comunes; que se encontraban en trámite al tiempo de las modificaciones a la legislación y en los cuales no se habían dictado resoluciones definitivas; o también a aquellos expedientes que contando con resolución definitiva, ésta no había sido cumplimentada en sus términos. Para asuntos que se encontraban en estos casos, la Secretaría de la Reforma Agraria hoy SEDATU, quedó a cargo de integrar y poner en estado de resolución, todos los expedientes de las acciones agrarias iniciadas al amparo de la legislación anterior.<sup>70</sup>

En la legislación agraria y reglamentación complementaria, se contemplan diversas acciones que dan pie al inicio de procedimientos administrativos que modifican el catastro de la propiedad social. En el presente trabajo, se mencionarán únicamente los lineamientos oficiales vigentes, en materia de expropiación de tierras del régimen de propiedad social.

<sup>69</sup> Diario Oficial de la Federación, Lunes 6 de enero de 1992, Transitorios, Artículo Tercero, párrafos I y II, pág.2.

<sup>70</sup> Glosario de Términos Jurídico-Agrarios, págs. 63 y 137.

## 5.2 LINEAMIENTOS OFICIALES

En el capítulo 2, se relata brevemente el procedimiento administrativo en la expropiación de bienes de régimen de propiedad social, poniendo especial atención en los aspectos técnicos del trámite expropiatorio.

Como ya se mencionó, una de las primeras tareas del personal de la SEDATU en la Entidad en la que se encuentre la propiedad solicitada en expropiación, es realizar una recopilación de los documentos oficiales en los que se defina la propiedad ejidal o comunal que contengan la obra pública en cuestión.

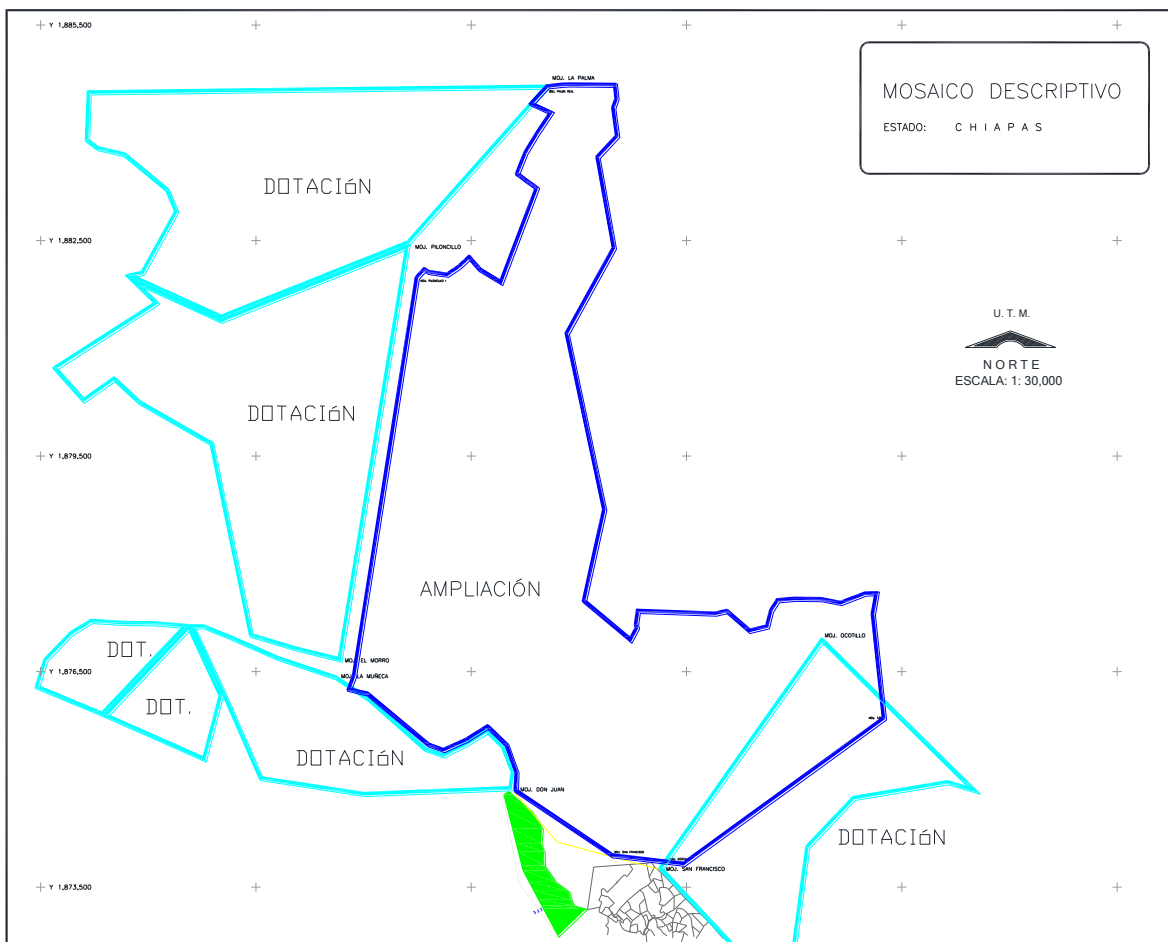
Tales documentos como: Resoluciones presidenciales que conceden o segregan tierras, Actas de ejecución, Planos definitivos, Actas de delimitación, destino y asignación de tierras, Planos internos, Certificados parcelarios, Planos individuales de las parcelas afectadas, Títulos de propiedad, Planillas de cálculo y construcción; forman parte del soporte documental de los cambios que se suscitan en el catastro de la propiedad social. El ingeniero comisionado, extrae de esos documentos, la información técnica necesaria para elaborar el ya mencionado Mosaico Descriptivo.

De las Resoluciones presidenciales se recaba entre otras cosas, la superficie concedida o segregada de la propiedad; de los Planos definitivos, la forma, tamaño, y ubicación de las propiedades, las relaciones que guardan con los colindantes, así como datos importantes de los detalles del terreno; de las Actas, características de posición de los vértices y las mojoneras, y detalles descriptivos del lugar. Así también, en el plano interno, se analizan los límites de la propiedad identificados en la certificación del núcleo agrario.

En la elaboración del Mosaico Descriptivo se realiza una fusión de: la información dispersa en los documentos oficiales, los datos recabados en campo y también, en caso de requerirse, de la información aportada por los representantes del núcleo agrario (*Comisariado Ejidal o Comisariado de Bienes Comunales*).

Lo anterior no es una labor sencilla, de inicio la recopilación documental puede tardar un par de semanas o incluso meses. En ocasiones, los documentos no se encuentran en la Entidad Federativa en la que se ubica la expropiación, sino en las oficinas centrales del RAN, en el Distrito Federal. Los recorridos en campo para realizar las mediciones, se extenderán en tiempo, dependiendo de los accidentes topográficos y la extensión superficial del núcleo agrario. Los recorridos con los representantes del ejido o comunidad, suelen realizarse previa aprobación de una Asamblea, la cual en ocasiones simplemente lleva semanas organizar.

No obstante lo anterior, el Mosaico Descriptivo es un elemento fundamental en el trámite expropiatorio, su correcta elaboración puede evitar encontrarse a futuro, con prolongados procedimientos jurídicos relacionados con cuestiones técnicas mal atendidas.

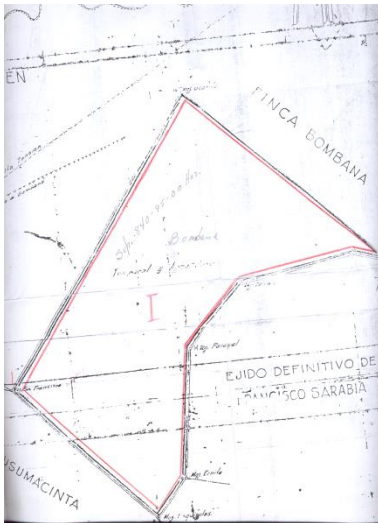
FIGURA 5.1  
MOSAICO DESCRIPTIVO

En la figura 5.1, se observa parte de un Mosaico Descriptivo elaborado en un trámite expropiatorio en el Estado de Chiapas, en color azul claro, se muestra los límites de la acción agraria Dotación; en color azul marino, la acción agraria Ampliación; en color verde, una superficie solicitada en expropiación; en color gris y ubicado en la parte inferior, se encuentra una porción del plano interno del núcleo agrario colindante. Las coordenadas empleadas son UTM. Adicionalmente se percibe una sobreposición entre el polígono de Ampliación y uno de los polígonos de Dotación. Algunos vértices importantes de la Dotación, presentan nombres característicos que los distinguen, dichos puntos son llamados mojoneras ejidales o comunales, según corresponda.

En la elaboración de los polígonos correspondientes a las acciones agrarias, se utilizan las planillas de cálculo y construcción que se encuentran en los expedientes de los procedimientos administrativos llevados a cabo para cada acción; también se extrae información muy útil de los planos definitivos correspondientes.

En el caso de que ya no existan las planillas de cálculo y construcción, de que no sea posible extraer información clara de ellas o de que se encuentren inconsistencias al ser comparadas con el plano definitivo respectivo; este último será el que se tome de base para elaborar el polígono de la acción agraria (*Dotación o Ampliación*). Lo anterior, debido en parte, a que administrativa y jurídicamente, el plano definitivo reviste una importancia mayor en el procedimiento. En ocasiones, incluso existen planos definitivos que se encuentran firmados por el Presidente de la República, una razón más que les agrega importancia a este tipo de planos.

FIGURA 5.2  
POLÍGONO DE DOTACIÓN  
IMAGEN ESCANEADA



En la figura 5.2, se observa una imagen escaneada de un polígono del plano definitivo de Dotación del núcleo agrario; en color rojo se muestra el límite de la propiedad. Mediante el empleo de imágenes escaneadas y de programas de dibujo asistido por computadora, se extrae el tamaño, forma y posición de los polígonos que componen la propiedad del núcleo agrario. Por supuesto, es necesario previamente realizar el análisis respectivo para identificar la escala del polígono extraído e identificar su orientación.

Con los polígonos construidos de esta forma y apoyándonos en datos de campo, posteriormente se procede a georreferenciarlos, y así nos encontramos en la posibilidad de incorporarlos al Mosaico Descriptivo.

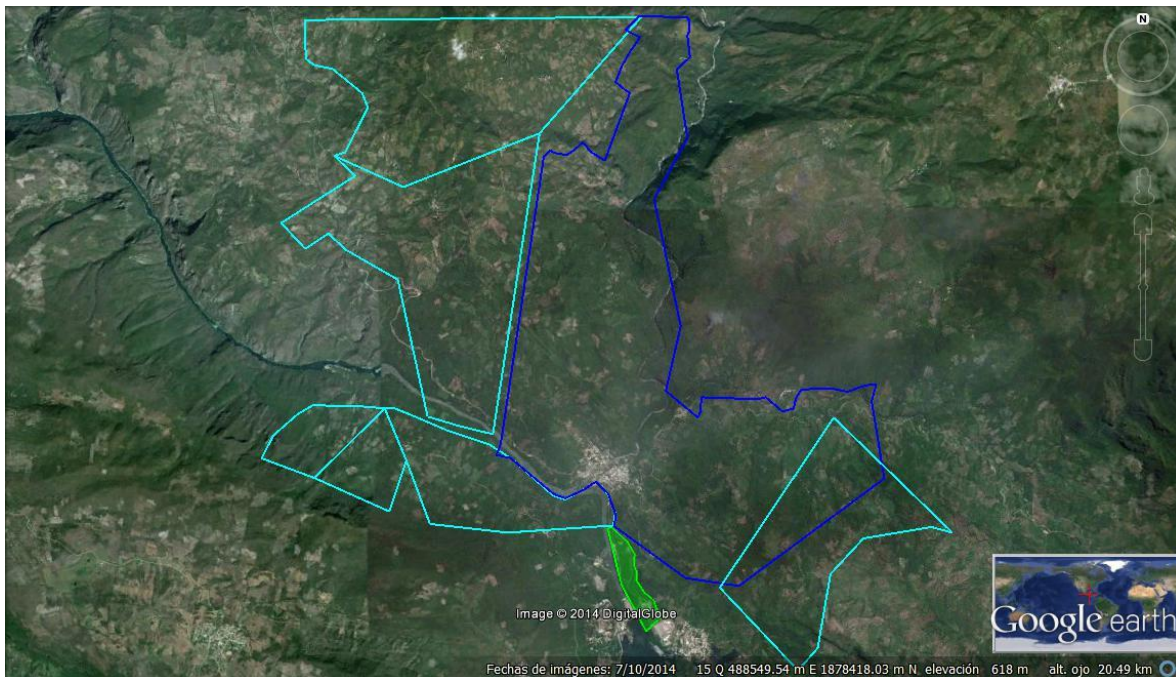
Dejando por un momento de lado, los errores e imprecisiones inherentes en un procedimiento como este, los cuales se comentarán en los capítulos subsecuentes; como resultado obtenemos concentrado en un mismo plano, información relativa a las propiedades cercanas a la expropiación en trámite. Hasta este punto, se está en la posibilidad de identificar si el total o parte de la expropiación solicitada, se encuentra dentro del núcleo agrario y con ello empezar a definir si es o no procedente el trámite expropiatorio, en la comunidad o el ejido solicitado.

Una vez contando con un Mosaico Descriptivo de la zona de interés en coordenadas UTM, como complemento, podemos visualizarlo en imágenes de satélite de libre acceso por internet, mediante programas de computadora (*software*) para tal fin, como por ejemplo GOOGLE EARTH.



En la figura 5.3, se muestra el Mosaico Descriptivo creado; para poder visualizarlo así, adicionalmente se requiere del empleo de algún software que convierta nuestro plano de coordenadas UTM, el cual como recordaremos se encuentra en archivo de formato CAD, al formato de archivo empleado en GOOGLE EARTH. Podemos llevar a cabo esta tarea utilizando programas como ARCMAP o GLOBAL MAPPER.

FIGURA 5.3  
MOSAICO DESCRIPTIVO  
VISUALIZADO EN IMÁGENES DE SÁTELITE DE GOOGLE EARTH



En ocasiones el trámite expropiatorio se inicia cuando la obra de utilidad pública ya se encuentra totalmente construida o se está construyendo; para tales casos, al visualizar el Mosaico Descriptivo en imágenes de satélite recientes, podemos identificar si existen discrepancias entre la superficie solicitada en expropiación y la superficie que realmente se encuentra ocupada en campo por las obras de las promoventes.

El empleo de imágenes de satélite de libre acceso, es una herramienta para identificar posibles inconsistencias entre la información aportada por las promoventes y la realidad que prevalece en campo; de ninguna manera, pueden emplearse como prueba de que existen errores en la información aportada por la promovente, pero sí crea la suficiente duda razonable para ordenar una verificación en campo, y así aclarar tal situación.

De igual forma se puede observar, que los límites de la propiedad social obtenidos en el Mosaico Descriptivo, no corresponden al cien por ciento con los detalles del terreno que pretenden representar. Lo anterior, bien puede deberse a que de origen, los documentos oficiales de los núcleos agrarios contienen información técnica que no corresponde a la realidad física de las propiedades sociales; o a que el método mediante el cual se construyó el Mosaico Descriptivo contiene errores importantes. Otra alternativa es que ambos supuestos se presenten de manera simultánea.

Con la información recabada en campo y empleando los datos obtenidos de la recopilación documental (*historial agrario*), el ingeniero comisionado elabora un informe en el que se asienta claramente la superficie total a expropiar; el núcleo agrario en el que se encuentra la obra<sup>71</sup>; el sistema de explotación<sup>72</sup> (*uso común, uso individual*), especificando claramente la superficie correspondiente al uso común y la calidad de la tierra<sup>73</sup> (*agostadero, temporal, riego*) que le corresponde; y también en caso de existir, la superficie correspondiente a parcelas (*uso individual*) y las calidades de la tierra que les corresponden. Datos como sistema de explotación y calidad de la tierra, son en particular importantes, ya que con ellos se determinan el costo por hectárea (*o por metro cuadrado*) y la persona o grupo de personas a la que se destinará la indemnización por expropiación de tierras.

En el expediente que se elabore para tal fin, se anexarán las memorias de los cálculos individuales de cada parcela afectada parcialmente<sup>74</sup> y polígonos de superficies de uso común; así como las memorias de los polígonos envolventes.

Con la información técnica recabada en campo, se elabora el plano informativo de expropiación<sup>75</sup> en el sistema de coordenadas empleado en la certificación; o en su caso, el sistema coordinado que presente el plano definitivo de la acción agraria en la que recae la obra en cuestión.

Para aquellos núcleos agrarios que no cuenten con certificación o que parte de sus tierras quedaron indebidamente fuera de estas, se procede a localizar la superficie por expropiar dentro del plano definitivo de la acción agraria que se afecta, realizando las observaciones pertinentes dentro del informe.<sup>75</sup>

Sin perjuicio de lo que se estableció en el párrafo anterior y no obstante que el plano definitivo, es el sustento legal que ampara la titularidad de los terrenos pertenecientes al núcleo agrario;<sup>76</sup> en ocasiones se elige referenciar la expropiación primero a los linderos ejidales o comunales, y posteriormente georreferenciar las mojoneras que los definen, para con ello obtener un plano informativo de expropiación, referido a los actuales sistemas de coordenadas como el UTM o la proyección TME, en Datum ITR92.<sup>77</sup>

<sup>71</sup> Art. 8 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales.

<sup>72</sup> Art. 19 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, primer párrafo.

<sup>73</sup> Art. 17 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, inciso 4, segundo párrafo.

<sup>74</sup> Art. 19 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, inciso d, segundo párrafo.

<sup>75</sup> Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, Disposiciones Generales en el Ámbito Técnico, párrafo cuarto.

<sup>76</sup> Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, Disposiciones Generales en el Ámbito Técnico, párrafo tercero.

<sup>77</sup> Art. 19 Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, inciso d, párrafo tercero.



Sin importar que se trate de un núcleo agrario certificado o sin certificar, los polígonos a expropiar se deberán referenciar a los linderos ejidales o comunales mediante sus mojoneras.<sup>76</sup>

Todos los trabajos técnicos que se realicen para los trámites de expropiación, deberán estar ligados a la Red Geodésica Nacional.<sup>78</sup> Los métodos de levantamiento utilizados serán estático, estático rápido, cinemático, cinemático en tiempo real RTK, en el caso de emplearse el sistema GPS. Así también, se podrán emplear los métodos de levantamiento de poligonación, triangulación, trilateración, radiación o combinación de estos, con equipos de alta precisión como la Estación Total.<sup>79</sup>

La finalidad de los levantamientos será la obtención de las coordenadas geodésicas de los vértices perimetrales de la expropiación; ya sea mediante la propagación del control horizontal valiéndose de los vértices monumentados en campo (*núcleos agrarios certificados*) o mediante el establecimiento de una línea de control azimutal, elaborada para tal fin.

TABLA 5.1  
PRECISIÓN EN LOS LEVANTAMIENTOS<sup>80</sup>  
NORMAS TÉCNICAS EXPROPIACIÓN

Tipo de Levantamiento	Equipo utilizado		
	Estación Total	GPS	GPS Tiempo Real RTK
Propagación de las coordenadas	1: 20, 000	Horizontal de 20 mm. + 1 ppm y en Vertical de 30 mm. + 1 ppm.	Horizontal de 25 mm. y en Vertical de 35 mm.
Línea de Control Azimutal	NA	1:50 000 Longitud mínima 500 m	NA

\* NA = no aplica

En la tabla 5.1, se muestran las especificaciones de precisión en los levantamientos establecidas en las Normas Técnicas para la Elaboración de Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación, expedidas por el RAN.

<sup>78</sup> Normas Técnicas para la Elaboración de Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación, Sección VII, punto 1.

<sup>79</sup> Normas Técnicas para la Elaboración de Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación, Sección VIII, punto 2.

<sup>80</sup> Normas Técnicas para la Elaboración de Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación, Sección X, puntos 1,3 y 4.

### 5.3 DETERMINACIÓN DE SUPERFICIES

En la sección 4.1, se mencionó que para la época del *Reparto Agrario*, en los levantamientos topográficos que se efectuaron con motivo de asuntos agrarios, se emplearon los métodos tradicionales de Topografía; quedando de manera implícita, el hecho de que el cálculo de superficies en la propiedad social, se realizaba mediante los métodos planimétricos utilizados en dicha ciencia. En virtud de que, tras la lectura de aquellos lineamientos o reglas, no se identifica algún enunciado que de manera directa defina el procedimiento matemático para la obtención de superficies.

En el caso de la reglamentación vigente en nuestros días, se encuentra una situación similar, por lo menos en lo que respecta a la determinación de superficies en ejidos y comunidades no certificados, o en aquellos en los que una porción ha quedado indebidamente fuera de la certificación. Se establece que para el cálculo analítico de la superficie se tomará de base, la memoria técnica (*planillas de cálculo y construcción*), respetando las coordenadas que dieron origen al plano definitivo correspondiente.<sup>81</sup>

En los núcleos agrarios certificados, el cálculo analítico de la superficie se realiza utilizando el sistema UTM<sup>82</sup> o proyección TME, empleada en la certificación; quedando implícita la idea de que se utilizarán los métodos planimétricos de Topografía.

En ese orden de ideas, retomando el tema de la diferencia de superficie asociada al sistema de proyección empleado; recordamos que es posible encontrarse trámites expropiatorios ubicados al Norte de nuestro territorio, en los que la superficie a expropiar se reducirá hasta en un 10 % a consecuencia del sistema de coordenadas empleado. Lo anterior conlleva a que puede existir una disminución significativa del monto de la indemnización entregada a los propietarios afectados por el trámite expropiatorio.

Es por situaciones como estas, que el contar con un método para determinar la superficie de grandes extensiones de tierras del régimen de propiedad social, se considera necesario por las implicaciones económicas y sociales inherentes a este tema.

<sup>81</sup> Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, Disposiciones Generales en el Ámbito Técnico, tercer párrafo.

<sup>82</sup> Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, Disposiciones Generales en el Ámbito Técnico, segundo párrafo.

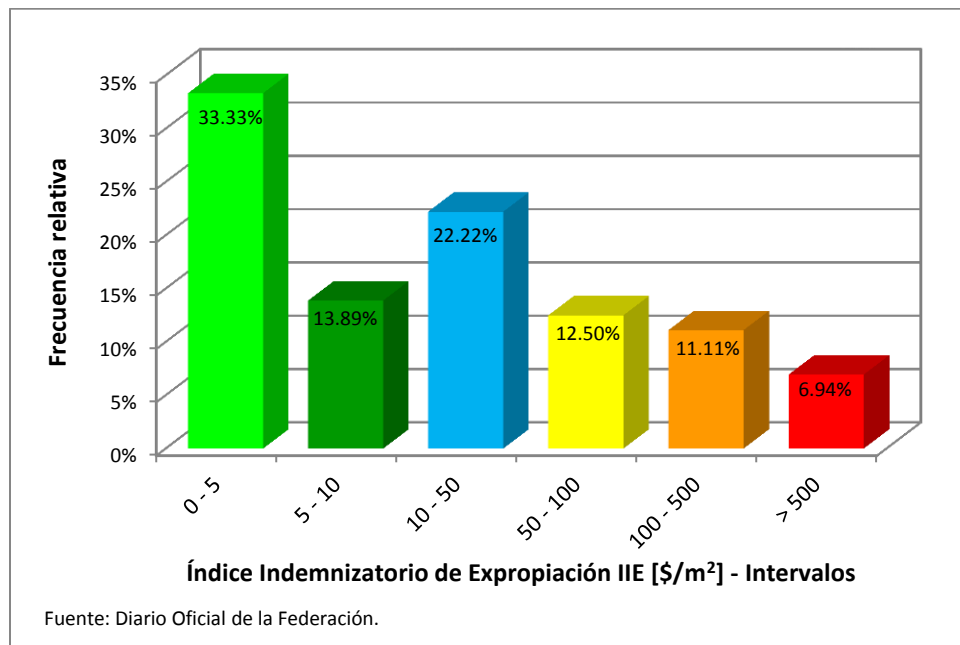
En la figura 5.4, se muestra la distribución de frecuencias del Índice Indemnizatorio de Expropiación IIE, calculado para cada uno de los Decretos expropiatorios publicados en el Diario Oficial de la Federación en los últimos dos años. Para realizar la gráfica, se tomó una muestra de 72 Decretos correspondientes a 19 Entidades Federativas de nuestro país.

Con la finalidad de realizar una referencia rápida, en este texto llamaremos Índice Indemnizatorio de Expropiación IIE, a la relación que existe entre la cantidad que tiene que cubrir la promovente por concepto de indemnización MI y la superficie expropiada SE, es decir:

$$IIE = \frac{MI}{SE}$$

MI [pesos]  
SE [m<sup>2</sup>]  
IIE [\$/m<sup>2</sup>]

FIGURA 5.4  
ÍNDICE INDEMNIZATORIO DE EXPROPIACIÓN  
DECRETOS PUBLICADOS EN EL  
DIARIO OFICIAL DE LA FEDERACIÓN  
AÑOS 2013 y 2014



[ver Tabla 5.2.2 de datos](#)

En la figura 5.4, se observa que para los Decretos expropiatorios publicados en los últimos dos años, en el 33.33% de los casos, el precio pagado por las superficies expropiadas se encuentra entre menos de 1 peso por metro cuadrado hasta 5 pesos por metro cuadrado, lo cual ocurrió en 24 de los 72 casos analizados.

El precio mínimo que se pagó, el cual asciende a 17.4 centavos por metro cuadrado, corresponde a una propiedad en el Municipio de Durango, Dgo.; y en contraparte, dos de los precios pagados más altos: \$747.07 y \$1,408 por metro cuadrado, corresponden a una Delegación en el Distrito Federal y al Municipio de Veracruz, Ver., respectivamente.

Es preciso señalar, que para determinar el precio por metro cuadrado (*o por hectárea*) de una superficie a expropiar, es necesario tomar en cuenta diversos factores, entre ellos: ubicación geográfica, calidad de la tierra, servicios e infraestructura cercana, sólo por mencionar algunos.

Utilizando los datos de la gráfica de la figura 5.4, y recordando la información manejada en nuestro ejemplo del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec, en el sistema UTM, encontramos que para una diferencia de alrededor del 10% de superficie (*en menos*), esto es 1,321,101.51 metros cuadrados y tomando un precio de 17.4 centavos/metro cuadrado, la diferencia en el monto a indemnizar asciende aproximadamente a \$ 229,321; cifra por demás significativa en términos económicos. Al realizar este ejercicio con el precio máximo para los datos de la gráfica anterior, el cual asciende a 1,408 pesos/metro cuadrado, el monto a indemnizar fácilmente alcanza una cifra de miles de millones de pesos; incluso con el valor promedio encontrado de 94.23 pesos/metro cuadrado, el monto es considerable.

[ver tabla 5.2.1 de datos](#)

Los procedimientos administrativos en los que se expropia una gran extensión territorial son poco frecuentes, pero de existir por lo regular se encuentran asociados a obras de utilidad pública como: Áreas Naturales Protegidas, Embalses y sus zonas de protección, regularización de Asentamientos Humanos, sólo por mencionar algunos.

La determinación de superficies de grandes extensiones de tierra es un tema de gran importancia en el catastro de la propiedad social; los procedimientos matemáticos para determinar dichas superficies pueden volverse relativamente complejos, dependiendo del enfoque que se le dé al problema, las superficies de referencia empleadas, y el rigor matemático aplicado.

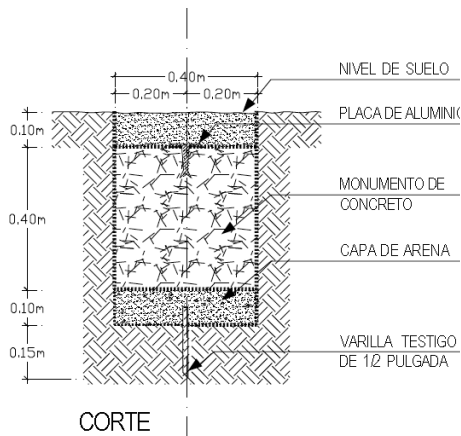
En el presente texto se desarrollan un par de procedimientos matemáticos que nos permiten obtener superficies extensas; la metodología empleada procura ser conceptualmente sencilla, de aplicación práctica y a su vez que represente lo mejor posible las características físicas de las propiedades sociales analizadas.

## 5.4 MONUMENTACIÓN

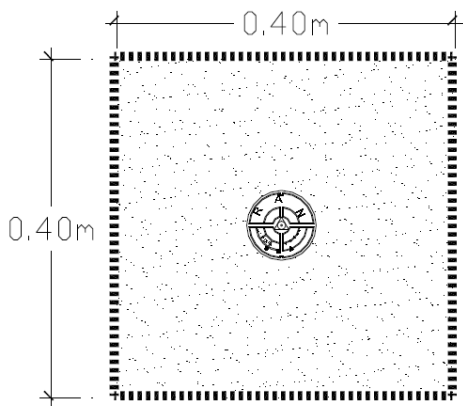
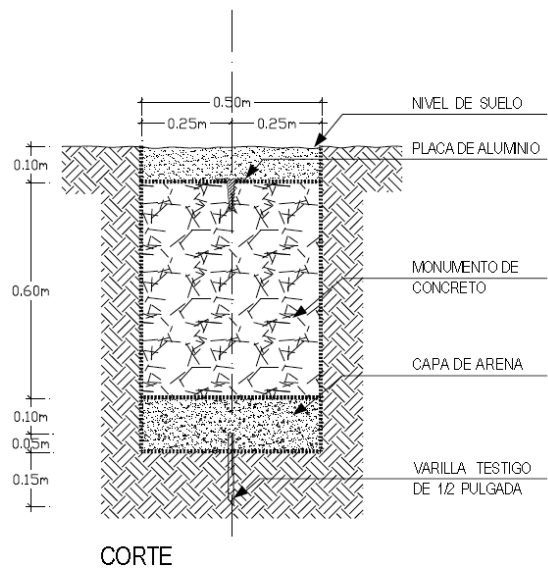
Durante el proceso de certificación de los núcleos agrarios se realizó el establecimiento de vértices geodésicos, mediante la utilización de equipo GPS, mismos que se definieron físicamente en el terreno con monumentos construidos con características que disminuyen la posibilidad de su pérdida o destrucción.

FIGURA 5.5  
TIPOS DE MONUMENTOS  
UTILIZADOS EN LA CERTIFICACIÓN DEL FANAR

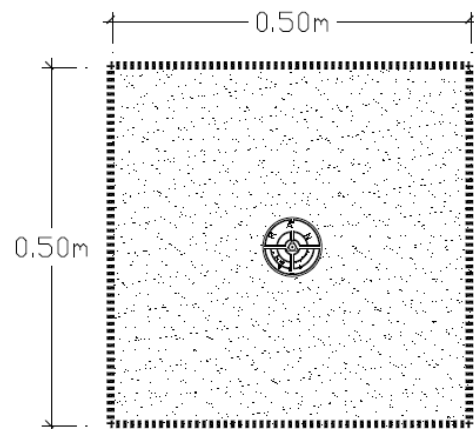
### MONUMENTO PARA TERRENO COMPACTO



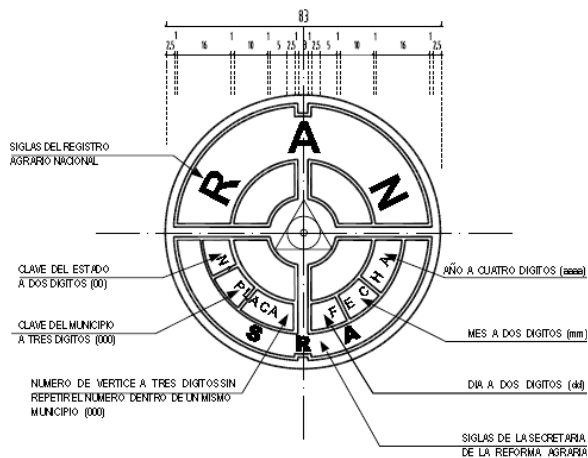
### MONUMENTO PARA TERRENO BLANDO



### PLANTA

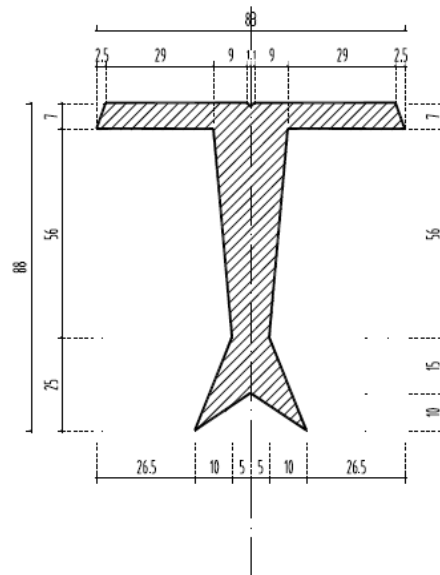


### PLANTA

FIGURA 5.5  
TIPOS DE MONUMENTOS  
- CONTINUACIÓN -DIMENSIONES DE PLACA DE ALUMINIO  
(VISTA DE PLANTA)

LAS UNIDADES ESTAN EN MILIMETROS

NOTA.- LA FECHA SE REFIERE AL DIA EN QUE SE GEOREFERENCIÓ LA MOJONERA

DIMENSIONES DE PLACA DE ALUMINIO  
(CORTE)

LAS UNIDADES ESTAN EN MILIMETROS

Imágenes tomadas de las  
“Normas Técnicas para la Delimitación de las Tierras al Interior de los Núcleos Agrarios”  
Sección II, punto 3.1.4, Anexo de Monumentación, págs. 6-9.

La cantidad y la ubicación de los puntos geodésicos de control, depende de las características geográficas del núcleo agrario; extensión territorial, forma, división interna. Los vértices geodésicos sirven como puntos de liga entre los levantamientos del catastro de la propiedad social y la Red Geodésica Nacional, establecida por el INEGI. Como regla general, en cada núcleo agrario se colocan estratégicamente estos vértices de apoyo, para que puedan ser utilizados como línea de control acimutal en levantamientos posteriores a la certificación.

El RAN en un futuro próximo, espera contar con un sistema de información geográfica confiable, en el que se encuentre concentrada toda la información de la propiedad social de nuestro país; y en definitiva, la certificación de los núcleos agrarios y el establecimiento de monumentos permanentes en los mismos, son pasos adelante para el alcance de ese objetivo.

## 5.5 BÚSQUEDA DE DOCUMENTOS OFICIALES Y EL HISTORIAL AGRARIO

La recopilación de la documentación que constituye el historial agrario, es una tarea fundamental al inicio de varios procedimientos administrativos de la propiedad social. Los documentos que son el sustento legal y que amparan la titularidad de los terrenos pertenecientes a los núcleos agrarios, siempre deben ser los primeros que se tomen de base para incorporar o desincorporar porciones de terreno en los ejidos y comunidades.

Desafortunadamente, dichos documentos no se encuentran todos exclusivamente en un sólo lugar. En particular, centrandó nuestra atención en aquellos que contienen información técnica, tales como:

- Planos (*Definitivos, Proyecto, Informativos, Internos, Individuales, de Solares urbanos*).
- Actas (*de Ejecución, de Posesión y deslinde, de Posesión*), Hojas y Pliegos Aclaratorios.
- Títulos de Propiedad (*sólo en pocas ocasiones*)

Para estos documentos, a veces las instituciones públicas no cuentan en su acervo, con el original o por lo menos con copia simple.

En el caso específico del procedimiento expropiatorio, la documentación (*con datos técnicos*) necesaria para el trámite puede encontrarse en una o varias de las siguientes personas u oficinas de la Administración Pública:

- Secretaría de Desarrollo Agrario, Territorial y Urbano SEDATU: Oficinas Centrales, Delegaciones Estatales.
- Procuraduría Agraria: Delegaciones Estatales, Residencias.
- Registro Agrario Nacional RAN: Oficinas Centrales, Archivo General Agrario AGA, Delegaciones Estatales.
- Instituto Nacional de Administración y Avalúos de Bienes Nacionales INDAABIN.
- Registro Público de la Propiedad, en la Entidad correspondiente.
- Promoventes (*instituciones públicas o privadas*)
- Particulares

Concentrándonos en aquellos casos en los que sí se cuenta con el historial agrario de los ejidos y comunidades; los documentos oficiales se encuentran resguardados por el RAN, institución que los pone a disposición del público en general para su consulta o la adquisición de copias simples o certificadas.

Adicionalmente, el RAN cuenta con una base de datos de libre acceso\* por internet, el Padrón e Historial de Núcleos Agrarios PHINA, en la que se encuentra sintetizada en orden cronológico, información relevante de las acciones agrarias de los ejidos y comunidades.



En la figura 5.6, se muestra el entorno típico que aparece al utilizar este programa de libre acceso. En esta base de datos, se enlistan las acciones agrarias llevadas a cabo en el núcleo agrario, las fechas en las que se suscitaron, las superficies involucradas, y en su caso, la institución pública que las promovió.

FIGURA 5.6  
PADRÓN E HISTORIAL DE NÚCLEOS AGRARIOS

Acción	Fecha de Publicación	Fecha de Asamblea	Fecha de Escritura	Fecha Res. Pres. Decreto o Sentencia	Superficie en Has.	Beneficiados	Fecha de Ejecución	Fecha de Inscripción	Superficie Ejecutada	Promoviente	Incluida en procede	Clasificación	Observaciones
DOTACION	17/10/1970	-	-	22/09/1970	612832.000000	143	18/11/1970	16/06/1987	612832.000000	NINGUNA	-	-	-
EXPROPIACION	10/11/1988	-	-	04/11/1988	263.890300	0	-	-	263.890300	SCF	-	DECRETO PRESIDENCIAL SIN EJECUTAR	-
PROCEDE DOMINIO PLENO	-	03/11/2002	-	-	0.000000	0	-	17/01/2003	0.000000	NINGUNA	-	-	-
					0.000000	0			22393.465737	NINGUNA	-	-	-

Esta base de datos puede servir de guía para identificar las acciones agrarias que concedieron o segregaron porciones de tierra a los núcleos agrarios; y con ello solicitar la consulta al RAN, de los expedientes integrados para cada acción agraria y poder así extraer información útil de nuestro interés.

En ocasiones, en los documentos que son el sustento legal y que amparan la titularidad de los terrenos pertenecientes a los núcleos agrarios, se llegan a identificar inconsistencias o incluso información contradictoria, de ahí estriba la importancia de contar con todos los documentos oficiales de un ejido o comunidad, para analizar en conjunto la información e identificar el lugar en el que se suscitó el error, y de ser posible encontrar la manera de corregirlo, compensarlo, y en ocasiones eliminarlo, según corresponda.

\* Únicamente se requiere registrarse en el Sistema y, crear un Usuario y Contraseña.

## 5.6 CONCLUSIONES

La incorporación de datos técnicos de acciones agrarias llevadas a cabo bajo la luz de lineamientos oficiales de diferentes épocas, conduce a la aparición de problemas técnicos complejos. Si a eso le agregamos el hecho de que los métodos de medición han ido perfeccionándose a lo largo del tiempo, se complica aún más la situación.

La inconsistencia e incongruencia entre los datos técnicos que aparecen en los documentos antiguos y que son el sustento legal de las propiedades sociales, es una constante que se presenta y que no podemos eliminar o alterar.

Del soporte documental que integra la información técnica básica de los núcleos agrarios, se debe recopilar y organizar todos aquellos datos, que de manera constructiva ayuden a definir de la forma más clara posible, la situación geográfica de los límites de las propiedades sociales.

## 5.7 REFERENCIAS

- I. Diario Oficial de la Federación, Lunes 6 de enero de 1992.  
*Diario Oficial de la Federación, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Consulta por fecha>6>enero>1992>Única Sección>Poder Ejecutivo>Secretaría de Gobernación>Decreto por el que se reforma el artículo 27 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos*  
[http://www.dof.gob.mx/nota\\_detalle.php?codigo=4643312&fecha=06/01/1992](http://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=4643312&fecha=06/01/1992)
  
- II. Glosario de términos jurídico-agrarios, Procuraduría Agraria, primera edición 2008, Primera reimpresión 2009.  
*Procuraduría Agraria, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Conoce la PA>Publicaciones*  
<http://www.pa.gob.mx/pa/conoce/publicaciones.html>  
<http://www.pa.gob.mx/pa/conoce/publicaciones/Glosario%202009/GLOSARIO%20DE%20T%C3%89RMINOS%20JUR%C3%8DDICO-AGRARIOS%202009.pdf>
  
- III. Instructivo para realizar Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación, y la Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación de terrenos ejidales y/o comunales, texto vigente, última reforma publicada DOF 1-08-2012.  
*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*  
*Página de Inicio >Nuestro Sistema>Normateca>*  
*Normas Internas de Operación (Sustantivas)>Normas Técnicas*  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Normas-Tecnicas/orderby,2/page,2/>  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Normas-Tecnicas/Normas-T%C3%A9cnicas-para-la-Elaboraci%C3%B3n-de-Trabajos-T%C3%A9cnicos-e-Informativos-de-Expropiaci%C3%B3n-y-Ejecuci%C3%B3n-de-Decretos-Presidenciales-de-Expropiaci%C3%B3n/>
  
- IV. Normas Técnicas para la Elaboración de Trabajos Técnicos e Informativos de Expropiación y Ejecución de Decretos Presidenciales de Expropiación.  
*Registro Agrario Nacional, Página Oficial.*  
*Página de Inicio >Nuestro Sistema>Normateca>*  
*Normas Internas de Operación (Sustantivas)>Normas Técnicas*  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Normas-Tecnicas/orderby,2/page,2/>  
<http://www.ran.gob.mx/ran/index.php/nuestros-sistemas/normateca/normas-internas-de-operacion-sustantivas/Normateca---Normas-internas-de-operacion-%28sustantivas%29/Normas-Tecnicas/Normas-T%C3%A9cnicas-para-la-Elaboraci%C3%B3n-de-Trabajos-T%C3%A9cnicos-e-Informativos-de-Expropiaci%C3%B3n-y-Ejecuci%C3%B3n-de-Decretos-Presidenciales-de-Expropiaci%C3%B3n/>

# CAPÍTULO 6

## ERRORES EN LOS LEVANTAMIENTOS CATASTRALES DE LA PROPIEDAD SOCIAL

Al realizar la aplicación de métodos topográficos y geodésicos en la determinación de las características geográficas (*tamaño, forma, orientación, ubicación*) de una propiedad, no podemos evitar la aparición de errores y equivocaciones; los cuales corresponden al equipo de medición empleado, a los métodos de medición aplicados, al descuido o falta de destreza de los operadores de los equipos de medición; y por supuesto, a lo que conocemos como errores aleatorios.

En el desarrollo del capítulo ocho del presente trabajo; se intentará reducir el efecto de la aparición de errores aleatorios mediante la aplicación de métodos matemáticos que se basan en las leyes de la probabilidad.

A continuación se realiza la descripción de algunos de los errores típicos que se presentan en el procedimiento expropiatorio.

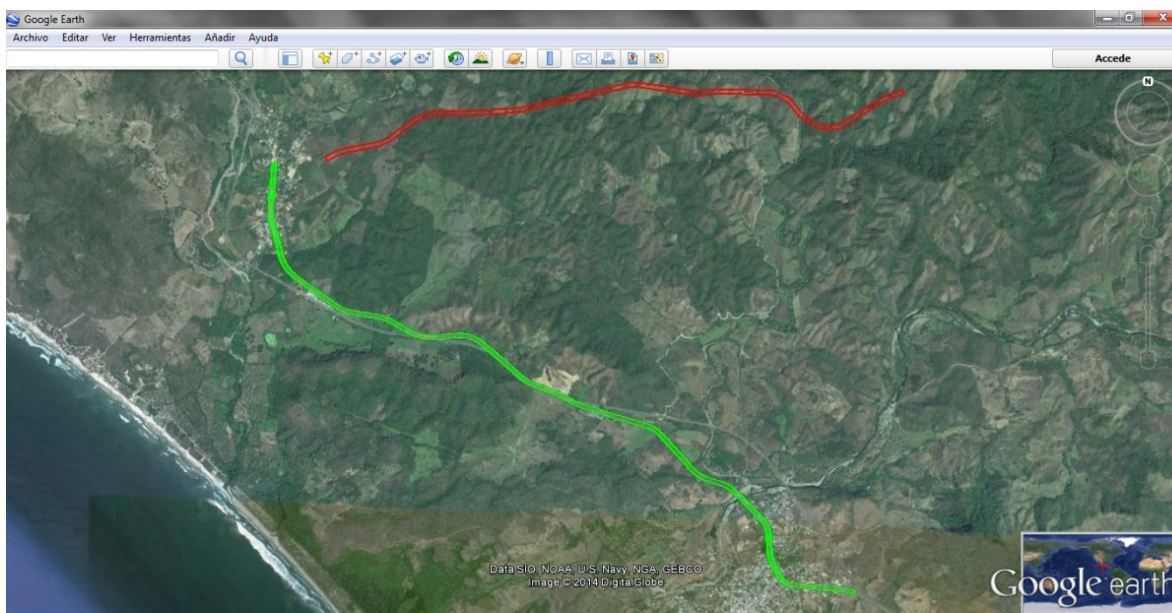
### 6.1 ERRORES EN EL PROYECTO

Como lo hemos venido comentando, las instituciones públicas o privadas, promoventes de la expropiación del total o una porción de tierra de los núcleos agrarios, deben anexar a su solicitud de expropiación, un plano informativo en el que claramente se indique la superficie solicitada, mismo que deberá ir acompañado de la información técnica mínima, para que pueda determinarse el tamaño, la forma y ubicación geográfica de los terrenos a expropiar.

En la actualidad, en la generalidad de los casos, las promoventes se valen de los modernos equipos de medición, tales como Estación Total y equipos GPS, para la obtención de las coordenadas geodésicas, y/o coordenadas UTM, de los vértices del polígono o los polígonos que envuelven la superficie solicitada en expropiación.

No obstante que estos modernos equipos nos brindan la posibilidad de realizar los levantamientos topográficos y/o geodésicos con una gran precisión; una inadecuada interpretación de los datos obtenidos, fácilmente nos puede llevar al desarrollo de equivocaciones, que de no ser corregidas a tiempo, pueden conducir al trámite de superficies que no corresponden a la obra de utilidad pública invocada en el respectivo Decreto expropiatorio.

FIGURA 6.1  
DERECHO DE VIA MAL UBICADO



En la figura 6.1, se muestra el derecho de vía de una carretera en el Estado de Guerrero, en color rojo observamos el polígono solicitado en expropiación por la promovente; en color verde, la superficie que realmente ocupa el derecho de vía de la carretera. La solicitud de expropiación fue ingresada en el 2005; para llegar a la conclusión de que el polígono en color verde es la superficie que en realidad necesitaba la promovente, fue necesario analizar a detalle la información complementaria anexada con la solicitud; es decir, kilometraje, tipo de camino, si es un nuevo proyecto o simplemente es la regularización de uno ya existente, poblaciones que conecta, amplitud de derecho de vía, destino de la expropiación, la red carretera existente, etc.

El polígono en color rojo corresponde satisfactoriamente en forma y tamaño, al derecho de vía real de la carretera, al parecer el problema de origen son los puntos de partida; es decir, la línea base que se tomó para propagar el control horizontal. Se deduce, que quizá el levantamiento fue realizado con una Estación Total, en el que la línea de control azimutal de partida presentaba datos incorrectos.

Desafortunadamente es común encontrar, en planos informativos aportados por las promoventes, derechos de vía que presentan algún tipo de traslación, rotación, o ambas; por lo regular, correspondientes a decenas o cientos de metros y con ángulos de rotación de un par de grados. La imagen anterior es relativa a un caso extremo en donde el polígono solicitado fue representado a kilómetro y medio de su posición real, y con un importante ángulo de giro en su orientación.

Cuando se trata de derechos de vía correspondientes a obras que ya se encuentran en el terreno o en plena construcción, nos valemos de imágenes elaboradas de acuerdo a lo expuesto en la sección 5.2. Cuando se trata de obras nuevas, se requiere una cuidadosa interpretación de los datos técnicos del proyecto, rigurosas verificaciones en campo de los linderos, de los ejes de trazo, de los derechos de vía de los proyectos, según corresponda; así como una estrecha coordinación y colaboración con el personal de las promoventes, para que con ello se pueda realizar el trámite correcto de la superficie solicitada en expropiación.

Otra equivocación grave que es recurrente por parte de la promovente, es una interpretación incorrecta de los límites de aquellas propiedades que fueron adquiridas por la institución pública o privada, en procedimientos expropiatorios previos. Si bien es cierto, que en la mayoría de los casos se tienen plenamente identificados en campo los límites de una propiedad pública o privada que fue adquirida mediante algún procedimiento expropiatorio; no lo es tanto, en los documentos oficiales que dan el sustento legal de la propiedad.

En ocasiones, un promovente puede incurrir en la solicitud, trámite e incluso pago indemnizatorio de una porción de superficie que previamente ya había adquirido en otro procedimiento expropiatorio. Por supuesto, con las indeseables negativas implicaciones económicas; que para el caso de instituciones públicas, corren a cargo del erario. Esto se da, debido a que tradicionalmente, los planos definitivos de expropiación se encontraban elaborados en coordenadas arbitrarias; en los que la ubicación geográfica precisa es difícil, y se presta a múltiples interpretaciones dependientes del personal que se encuentre analizándolas.

Este tipo de situaciones son las que se busca eliminar mediante la representación de las propiedades en sistemas de coordenadas como el UTM. Para el caso de ejidos certificados, como sabemos, se cuentan con marcas permanentes en el terreno (*mojoneras, puntos geodésicos*) que permiten ubicar dichas propiedades geográficamente sin ambigüedades.

Por otro lado, la identificación de los límites del núcleo agrario realizada por los promoventes, ya sea correspondiente al polígono envolvente, o al interior del mismo; por lo regular es realizada de manera incorrecta, lo que conlleva a que la superficie solicitada en expropiación aumente o disminuya, e incluso llegue a cambiar significativamente en forma y tamaño.



Es preciso señalar, que el trámite expropiatorio, no es el único procedimiento mediante el cual una porción de los núcleos agrarios cambia de régimen de propiedad. Cuando por alguna razón, una porción de los ejidos y comunidades deja de pertenecer al régimen de propiedad social, en ocasiones deja huecos dentro del polígono envolvente del núcleo agrario, que pasan a constituir propiedad pública o propiedad privada.

Como consecuencia de lo anterior, en algunas solicitudes de expropiación la promovente requiere terrenos que pertenecen a otro régimen, y por ende tienen que ser excluidos del trámite expropiatorio de propiedad social.

En el caso de que aún se requiera para la obra pública en cuestión, una porción de propiedad privada, esta es expropiada por la Secretaría de Estado que sea Cabeza de Sector; misma que se define dependiendo del tipo de obra involucrada. Por ejemplo, para una carretera, la cabeza de sector es la Secretaría de Comunicaciones y Transportes; para una línea de conducción de hidrocarburos, la cabeza de sector es la Secretaría de Energía.

En ese orden de ideas, por ejemplo, si para el cumplimiento de una utilidad pública, una Paraestatal requiere la propiedad de una Secretaría de Estado; mediante la celebración de convenios y acuerdos entre las instituciones públicas involucradas, se puede hacer uso compartido de dicha superficie. Es común encontrar que en los derechos de vía de carreteras corra paralela una línea de conducción de algún hidrocarburo, o líneas de transmisión de energía eléctrica.

Aunado a las ambigüedades encontradas al determinar la posición de polígonos relativos a expropiaciones representadas en coordenadas arbitrarias, se encuentra la determinación de la ubicación correcta de los límites de los núcleos agrarios colindantes. Como se comentó en la sección 5.2, para realizar el Mosaico Descriptivo en el que se representan los límites de las propiedades involucradas en la expropiación; es necesario determinar la ubicación de los límites de cada acción agraria.

En la figura 5.1 de la sección 5.2, se observó la aparente sobreposición de uno de los polígonos de Ampliación con el polígono de Dotación, correspondiente a un ejido en el Estado de Chiapas. Para este caso en concreto, en teoría, dado que la Dotación cronológicamente es anterior a la Ampliación, y tomando en consideración que ambas acciones agrarias son colindantes; para elaborar el polígono de Ampliación, necesariamente se tuvieron que tomar como puntos de partida las mojoneras ejidales de la Dotación. Por lo tanto, a pesar de estar representados ambos planos en coordenadas arbitrarias, deberían ser congruentes entre sí, por lo que la coincidencia en términos generales se esperaba mucho mejor a la encontrada.



Existen varios factores, que definitivamente influyen, para que se presenten este tipo de situaciones, esperando no omitir alguno, los más recurrentes son:

- En algún momento, las marcas en el terreno (*ej. mojoneras*) fueron movidas.
- De origen el levantamiento realizado para determinar el polígono de la acción agraria, presentaba errores y equivocaciones graves que no fueron identificados, y por lo tanto, tampoco corregidos.
- En los planos, existe la combinación errónea de datos topográficos y geodésicos.
- Los diversos datos técnicos asentados en los documentos oficiales, correspondientes a cada una de las acciones agrarias involucradas, son incongruentes entre sí; aunado al hecho de que pudieron ser interpretados de manera incorrecta.

Desafortunadamente, a nivel nacional, existen muchos planos definitivos de acciones agrarias que presentan inconsistencias como las descritas. De inmediato se pensaría que la solución es analizar uno por uno, realizar verificaciones en campo empleando los equipos de medición modernos y ajustar los datos obtenidos mediante rigurosos métodos matemáticos. Por supuesto es deseable actualizar toda esa información y corregir las inconsistencias encontradas; pero las implicaciones económicas, la cantidad de tiempo necesaria, los problemas sociales subyacentes en la redefinición de límites de propiedades; son factores que en definitiva hacen de esto una tarea delicada.

Un intento de actualizar toda esta documentación oficial se realizó mediante la aplicación del programa federal PROCEDE y posteriormente con el FANAR. Sin menos preciar los esfuerzos realizados en dichos programas llevados a cabo a lo largo de varios años, se debe tener presente la complejidad inherente en este tipo de procedimientos, y no descartar la posibilidad de encontrar errores y equivocaciones importantes en ellos.

Como referencia rápida, y tomando los datos de los años 2013 y 2014, en un procedimiento expropiatorio, para realizar el trámite de sólo una porción de un núcleo agrario, se requiere en promedio alrededor de cinco años para atender todas las cuestiones administrativas, jurídicas, técnicas y por supuesto sociales implicadas en este tipo de asuntos.

[ver Tabla 5.2.1](#)

Sólo por mencionar algunas, llámense, flujo de oficios entre las instituciones públicas involucradas, inscripciones en los Registros Públicos correspondientes, emisión de copias simples y certificadas, aprobación de las autoridades competentes, garantías de audiencia a los afectados, notificaciones, verificaciones en campo, trabajos de gabinete, elaboración de planos oficiales, celebración de asambleas, elaboración de actas circunstanciadas, actas de conformidad de linderos, recorridos en campo, actos de entrega material, investigación documental, entre otros.

Tomando en consideración lo anterior, para núcleos agrarios que abarcan cientos o miles de hectáreas la cantidad de tiempo necesaria para minimizar errores, equivocaciones y afectaciones importantes, en consecuencia también necesita ser considerable.

El catastro de la propiedad social actualizado con los programas de certificación, en definitiva es un enorme esfuerzo a nivel nacional por compensar, en algunos casos corregir, en otros simplemente organizar; tanto la situación que prevalece en campo de los núcleos agrarios, como los datos asentados en la documentación oficial que le da sustento a la propiedad social.

Es preciso señalar, que los documentos oficiales tales como Decretos y Resoluciones presidenciales, planos definitivos, actas de posesión y deslinde, jurídicamente cuentan con un mayor peso e importancia.

Entiéndase la certificación como la representación organizada de la situación que prevalece en la propiedad social en México; de ninguna forma los documentos producto de la certificación sustituyen a la documentación contenida en las carpetas básicas de cada acción agraria; dicho de otra manera, las certificaciones no dotan o segregan tierras a los núcleos agrarios.

En otras etapas del trámite expropiatorio, la correcta aplicación de procedimientos administrativos, el desarrollo adecuado de levantamientos topográficos y/o geodésicos, son suficientes para atender las incongruencias o inconsistencias encontradas en la expropiación de tierras de propiedad social.

Se pone un especial énfasis en este tema, debido a la complejidad inherente al mismo, quizá la interpretación adecuada del historial agrario, es la tarea en la cual se ocupan ampliamente, las habilidades de los ingenieros de utilizar a la ciencia como un instrumento para encontrar la mejor solución a los problemas típicos en la propiedad social.

El objetivo por supuesto, es encontrar la mayor cantidad de argumentos técnicos y científicos que permitan que la toma de decisiones no se realice únicamente con el auxilio de cuestiones subjetivas o puntos de apreciación de las partes.

## 6.2 REDUCCIONES GEODÉSICAS

Tomando en consideración los lineamientos mencionados en la sección 4.1, los levantamientos realizados para representar las acciones agrarias en planos, consistían en levantamientos topográficos en los que la curvatura de la Tierra sólo era considerada para comparar el cierre angular en líneas de extensión Este–Oeste considerables; por lo que no era tomada en cuenta la curvatura de la Tierra para el cálculo de las reducciones geodésicas de distancias y ángulos involucrados.

En concreto, para el caso de la interpretación de la información indicada en la documentación oficial (*carpetas básicas*) de los núcleos agrarios, podemos llevar a cabo los siguientes procedimientos:

- I. Obtener las coordenadas geodésicas de cada uno de los vértices de la poligonal partiendo de las coordenadas geodésicas conocidas de uno de sus vértices y empleando los ángulos y distancias medidas, problema geodésico directo. Posteriormente proyectarlas a un sistema UTM, y con ello incorporarlas al Mosaico Descriptivo.
- II. No tomar en cuenta, que en los polígonos involucrados son necesarias reducciones geodésicas, y simplemente transformar las coordenadas arbitrarias locales a un sistema geodésico. Después proyectarlas a un sistema UTM, y posteriormente incorporarlas al Mosaico Descriptivo.

Para el punto número I, empleando los datos técnicos de los planos definitivos, por supuesto es necesario calcular las distancias entre vértices y ángulos entre los lados de la poligonal y aplicar reducciones geodésicas a ellos, toda vez que las dimensiones involucradas son considerables.

Llevando a cabo cualquiera de los dos procedimientos anteriores construiremos polígonos que pueden ser comparados con los obtenidos durante la certificación del núcleo agrario en cuestión, y con ello realizar los comentarios pertinentes.

En lo que respecta a las reducciones geodésicas necesarias, podemos considerar dos conjuntos de efectos: los efectos geométricos y los efectos gravimétricos.

Los geométricos, son a consecuencia de las características geométricas del elipsoide de revolución; para la medición de ángulos, las reducciones asociadas a estos efectos son: la reducción por normal desviada y la reducción debida a la diferencia entre la sección normal y la geodésica.

### 6.2.1 CORRECCIÓN POR NORMAL DESVIADA

Denotada por  $\delta h$ , dados dos puntos sobre el elipsoide, A y B, esta corrección es debido a la separación angular que existe entre el plano que pasa por la normal al elipsoide en el punto A y que a su vez contiene al punto B, y la normal al punto B. Para la condición general, en la que el punto B se encuentra a una distancia  $h_B$  sobre el elipsoide, este efecto se incrementa en razón de la separación lineal entre el elipsoide de referencia y el punto sobre el terreno.

La expresión para calcularla es:

$$\delta h = \frac{h_B e^2 \sin 2\alpha_{AB} \cos^2 \phi_m}{2M_m}$$

En donde  $h_B$  es la altura elipsoidal en el punto B,  $e$  es la primera excentricidad,  $\alpha_{AB}$  es el azimut de la línea A-B,  $\phi_m$  la latitud media entre el punto A y el punto B,  $M_m$  el radio de curvatura sobre el meridiano en la latitud media  $\phi_m$ . Al azimut medido  $\alpha_{AB}$  previamente es necesario aplicar la corrección por desviación de la vertical, mencionada más adelante.

Para calcular el radio de curvatura sobre el meridiano, utilizaremos la expresión:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{[1 - e^2 \sin^2 \varphi]^{3/2}}$$

En donde  $a$  es la longitud del semieje mayor del elipsoide de referencia,  $e$  es la primera excentricidad,  $\varphi$  la latitud en el punto deseado.

En la figura 6.2, tenemos la representación esquemática del radio de curvatura sobre un meridiano. Para el caso del elipsoide GRS80, a las distancias  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  les corresponden los valores de 42,697.67 m y 42,841.31 m, respectivamente.

FIGURA 6.2  
RADIO DE CURVATURA SOBRE EL MERIDIANO  
EN EL ECUADOR Y EN EL POLO

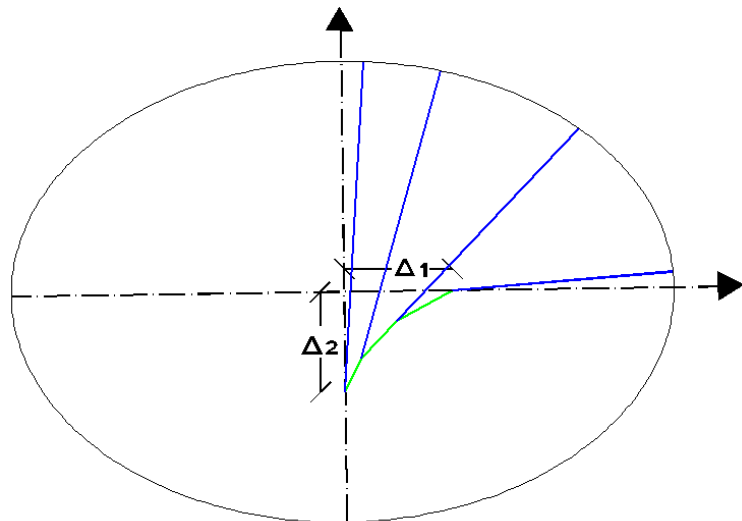


Imagen elaborada en base a "Geometric Geodesy", pág. 31.

FIGURA 6.3  
CORRECCIÓN POR NORMAL DESVIADA

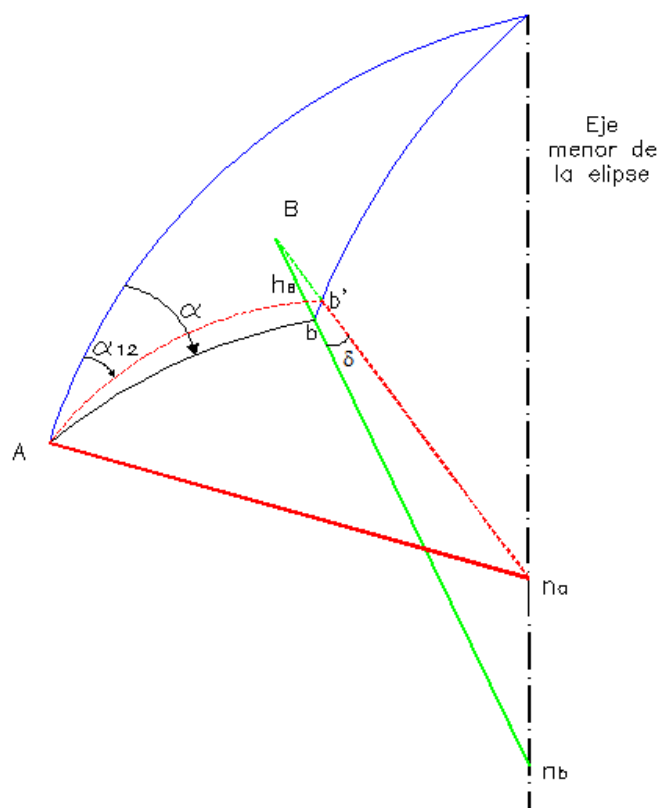


Imagen elaborada en base a “Geometric Geodesy”, pág. 62.

En la figura 6.3, se observa la representación gráfica de la corrección  $\delta h$ . El azimut buscado es  $\alpha$ . En color rojo se presenta la sección normal en el punto A; el punto B se encuentra a una distancia  $h_B$  por encima del elipsoide; no obstante que el punto A se encuentra sobre el elipsoide, la expresión anterior para calcular la corrección  $\delta h$ , es independiente de la distancia del punto A por encima o debajo del elipsoide de referencia; lo anterior debido en parte a que, previamente se realiza la corrección por desviación de la vertical del azimut  $\alpha_{AB}$ . Nuevamente las dimensiones se encuentran exageradas para mostrar con claridad los conceptos; toda vez que, la separación entre  $n_a$  y  $n_b$  es una distancia relativamente pequeña, en el elipsoide del GRS80, alrededor de 5 m, para una latitud de  $45^\circ$  y una distancia cercana a 1 kilómetro sobre el elipsoide.<sup>83</sup>

En la figura anterior, la separación angular  $\delta$ , formada por la normal al elipsoide en un punto sobre la superficie y la normal al elipsoide de un punto por encima del elipsoide (*ej. en una montaña, o simplemente un punto de altitud considerable*), es una magnitud pequeña, y en consecuencia la corrección  $\delta h$  pocas veces es calculada; pero en ocasiones es necesaria para cálculos geodésicos rigurosos.

<sup>83</sup> Geometric Geodesy, pág. 50.

### 6.2.2 CORRECCIÓN POR DIFERENCIA ENTRE LA SECCIÓN NORMAL Y LA GEODÉSICA

Denotada por  $\delta g$ , dados dos puntos sobre el elipsoide,  $p_1$  y  $p_2$ , que se encuentran sobre meridianos diferentes y a una latitud diferente; es posible definir dos secciones normales entre ellos, sección normal directa y sección normal inversa. En la figura 6.4, se representa la relación que guardan estas secciones.

En un punto dado, entiéndase por sección normal, a la intersección de un plano normal con la superficie del elipsoide. Recordando que el plano normal a un punto, es aquel plano que contiene la normal al elipsoide en dicho punto.

FIGURA 6.4  
SECCIONES NORMALES DIRECTA E INVERSA

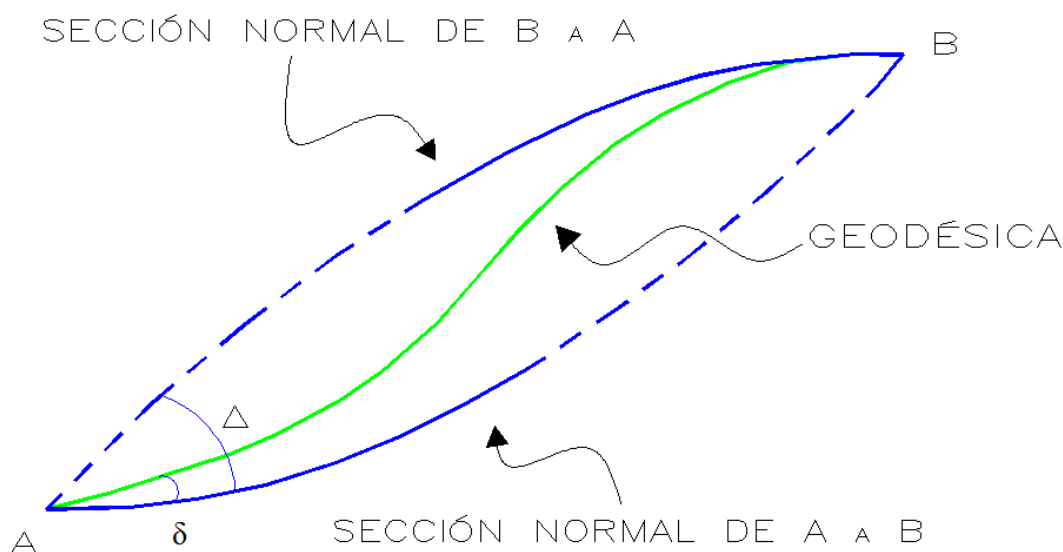


Imagen elaborada en base a “Geometric Geodesy”, pág. 72.

La geodésica o línea geodésica entre dos puntos sobre el elipsoide, es la curva sobre el elipsoide que presenta la menor distancia entre dichos puntos. La diferencia en longitud entre una sección normal y la geodésica es una cantidad muy pequeña; y de hecho a una longitud de arco de 1,600 Km, apenas le corresponde una diferencia en longitud de 1 mm.<sup>84</sup>

En la figura 6.4, se representa la relación que guarda la geodésica con las secciones normales. Denotado con la letra  $\Delta$  se muestra la separación angular entre secciones normales y con la letra  $\delta$ , el ángulo entre la geodésica y la sección normal. El ángulo  $\delta$  es el empleado para realizar la corrección  $\delta g$  a los azimuts o ángulos observados.

<sup>84</sup> Geometric Geodesy, pág. 86.

La expresión para calcular la corrección debida al ángulo que forman la sección normal y la geodésica es la siguiente:

$$\delta g = \frac{e^2}{12} \left( \frac{s}{N_A} \right)^2 \cos^2 \varphi_m \sin 2\alpha_{AB}$$

En donde **S** es la longitud de arco en la sección normal, **N<sub>A</sub>** es radio de curvatura en el punto A, **e** es la primera excentricidad, **α<sub>AB</sub>** es el azimut de la línea A-B, **φ<sub>m</sub>** la latitud media entre el punto A y el punto B.

Si necesitáramos calcular el ángulo Δ, señalado en la figura 6.4, bastaría con multiplicar la ecuación anterior por tres; ya que de hecho, δ es la tercera parte de Δ.

Para calcular el radio de curvatura sobre el primer vertical, utilizaremos la expresión:

$$N = \frac{a}{[1 - e^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}}$$

En donde **a** es la longitud del semieje mayor del elipsoide de referencia, **e** es la primera excentricidad, **φ** la latitud en el punto deseado.

De la fórmula se aprecia que en el Ecuador (φ=0), N tiene un valor igual a la longitud del semieje mayor; y para el Polo (φ =90°), N tiene un valor igual a M. Para un punto dado, el radio de curvatura, ya sea de M o N, aumenta al alejarse del Ecuador.

FIGURA 6.5  
RADIO DE CURVATURA SOBRE EL PRIMER VERTICAL

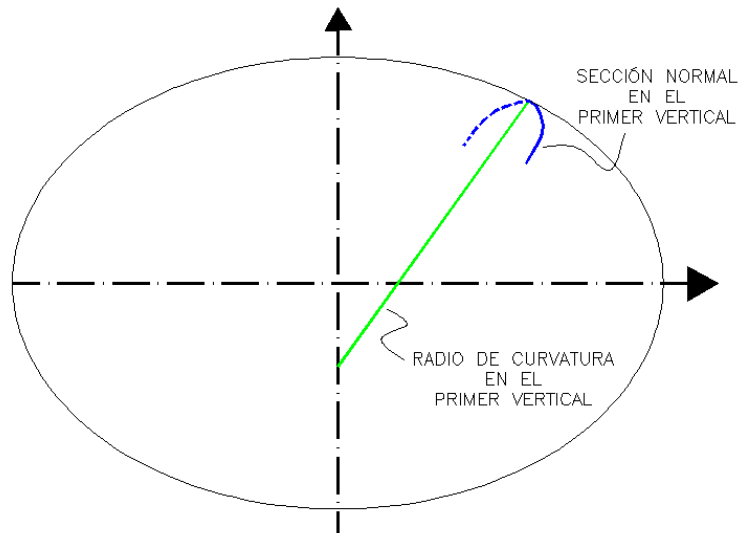


Imagen elaborada en base a “Geometric Geodesy”, pág. 32.

Como referencia, en la tabla 6.1, se citan algunos valores numéricos de estas dos reducciones geodésicas. Debido a las pequeñas cantidades involucradas, expresadas en fracciones de segundo, este tipo de correcciones por lo regular sólo se aplican a cálculos geodésicos de primer orden de líneas muy largas.



TABLA 6.1  
REDUCCIONES GEODÉSICAS  
POR EFECTO GEOMÉTRICO <sup>85 86</sup>

LATITUD PUNTO INICIAL $\phi_1$ [°]	AZIMUT DE LA LÍNEA $\alpha_{12}$ [°]	LONGITUD DE ARCO S [Km]	REDUCCIÓN POR DIFERENCIA NORMAL-GEODÉSICA $\Delta g$ [“]
0	45	200	0.113
0	45	100	0.028
0	45	50	0.007

DIFERENCIA DE LATITUD $\phi_m$ [°]	ALTURA ELIPSOIDAL h [m]	REDUCCIÓN POR NORMAL DESVIADA $\Delta h$ [“]
45	1,000	0.05
45	200	0.008

Tomando en consideración el tamaño de los lados en las poligonales de los núcleos agrarios, los cuales se encuentran alrededor de a lo mucho una decena de kilómetros (*Ejido Reforma Agraria Integral, alrededor de 30 Km, en su lado más largo*), así como los datos de la tabla 6.1, estas dos últimas reducciones no serán tomadas en cuenta.

### 6.2.3 CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN DE LA VERTICAL

En lo que respecta a los efectos gravimétricos, es preciso mencionar que las mediciones sobre la superficie de la tierra se realizan con respecto a la vertical del lugar (*vector de gravedad o línea de la plomada*) y no a la normal elipsoidal; por lo tanto, para ángulos horizontales es necesario realizar una corrección debida a la desviación de la vertical. La fórmula para calcular dicha corrección es:

$$\delta_{\theta} = -(\xi_A \sin \alpha_{AB} - \eta_A \cos \alpha_{AB}) \cot Z_B$$

En donde  $\xi_A$  es la componente meridiana, de la desviación de la vertical en el punto A (*instrumento estacionado*);  $\eta_A$  es la componente en el primer vertical, de la desviación de la vertical en el punto A; y  $Z_B$  es la distancia cenital del punto B, medida desde el punto A;  $\alpha_{AB}$  es el azimut observado de la línea A-B. Por ejemplo, para un ángulo horizontal  $\theta$  formado por los vértices B-A-C; con la expresión anterior, primero se calcula la corrección del lado A-B, después la corrección del lado A-C; la resta de ambas correcciones, es la corrección buscada  $\delta\theta$ .

<sup>85</sup> Geometric Geodesy, pág. 59.

<sup>86</sup> Geometric Geodesy, pág. 64.

FIGURA 6.6  
CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN DE LA VERTICAL  
ÁNGULOS HORIZONTALES

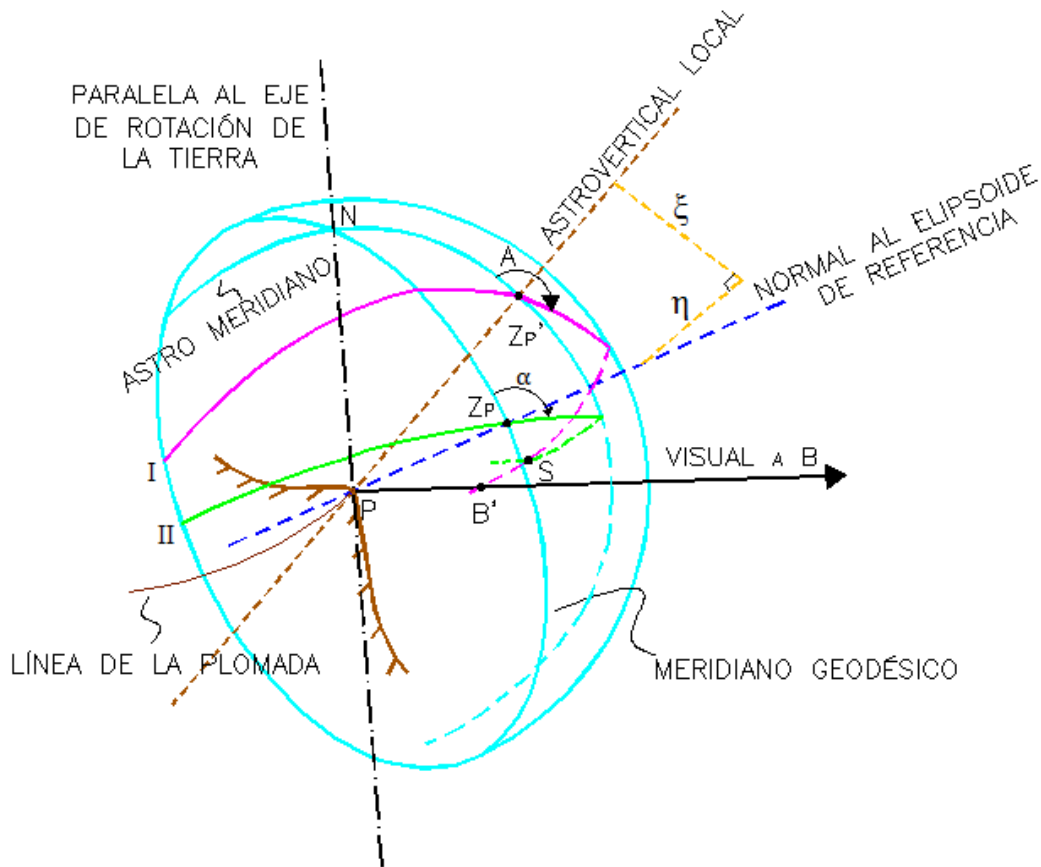


Imagen elaborada en base a "Physical Geodesy I", pág. 147.

En la figura 6.6, observamos en color azul claro una esfera unitaria centrada en el punto P sobre el terreno;  $Z_P$  es el zenit elipsoidal en P;  $Z_{P'}$  el zenit astronómico local; N la imagen del polo norte, es decir, la intersección de la parte norte de la línea paralela al eje de rotación de la Tierra, yendo a través de P, con la esfera unitaria; B' proyección del punto B sobre la esfera; S la intersección sobre la esfera, de los planos I y II. La distancia zenital Z es la distancia entre el punto  $Z_{P'}$  y el punto S, a lo largo de la curva mostrada en color rosa.

Es preciso señalar, que la expresión dada para calcular  $\delta\theta$  es un caso especial de la aplicación de la Ecuación de Laplace a cada uno de los lados que forman el ángulo medido en el terreno.

En donde  $A$  es el azimut astronómico;  $\alpha$  es el azimut geodésico;  $\varphi$  es la latitud geodésica o Astronómica  $\phi$  en el punto A.

$$A - \alpha = \eta \tan \varphi + (\xi_A \sin \alpha_{AB} - \eta_A \cos \alpha_{AB}) \cot Z_B$$

### 6.2.4 REDUCCIÓN DE DISTANCIAS ESPACIALES

Por último, para poder obtener las coordenadas geodésicas de puntos sobre la superficie terrestre, necesitamos reducir las distancias medidas sobre el terreno a distancias sobre la superficie del elipsoide; lo anterior se logra mediante las expresiones:

$$R_{\alpha} = \frac{MN}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha}$$

Como recordaremos,  $R_{\alpha}$  es conocido como el radio de curvatura de Euler; en donde para un punto sobre el elipsoide,  $M$  es el radio de curvatura sobre el meridiano,  $N$  es el radio de curvatura sobre el primer vertical,  $\alpha$  es un azimut dado.

En donde  $l_0$  es la longitud de cuerda entre los puntos A y B sobre el elipsoide de referencia,  $\Delta h$  es la diferencia entre alturas elipsoidales de los puntos A' y B',  $h_A$  es la altura elipsoidal en A,  $h_B$  es la altura elipsoidal en B,  $R_m$  es el radio medio, de curvatura de Euler, entre los puntos A y B.

$$l_0 = \left[ \frac{l^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_A}{R_m}\right) \left(1 + \frac{h_B}{R_m}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$S_0 = 2R_m \sin^{-1} \frac{l_0}{2R_m}$$

En donde  $S_0$  es la distancia reducida al elipsoide buscada.

En la figura 6.7, se muestran, en color azul la distancia  $l$  medida en el terreno; en color rojo,  $S_0$  la cual a su vez, es la distancia equivalente medida sobre el elipsoide.

Como sabemos, en estricto sentido las normales en los puntos A y B no se encuentran en un mismo plano; pero aun así la expresión dada para calcular  $S_0$  ofrece una muy buena aproximación para el tipo de cálculos que nos ocupan.

FIGURA 6.7  
REDUCCIÓN DE DISTANCIAS ESPACIALES

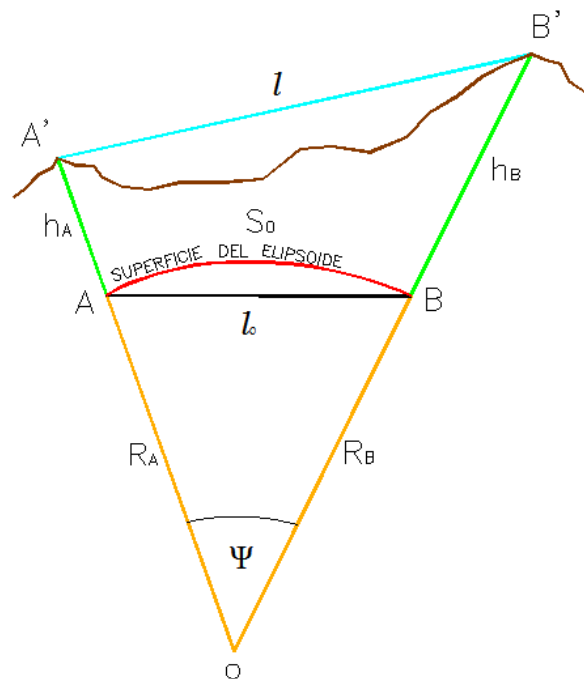


Imagen elaborada en base a "Geodetic Position Computations", pág. 39.

### 6.3 GEOREFERENCIACIÓN

En la interpretación de los planos definitivos para la representación de los núcleos agrarios en los Mosaicos Descriptivos podemos encontrarnos con la aparición de tres situaciones o en su caso, quizá la combinación de dos de ellas:

- I. El polígono del núcleo agrario, presenta una superficie *menor* a la que se determinó al realizar un levantamiento reciente.
- II. El polígono del núcleo agrario, presenta una superficie *mayor* a la que se determinó al realizar un levantamiento reciente.
- III. El polígono del núcleo agrario, presenta una forma “*ligeramente*” diferente a la que se determinó al realizar un levantamiento reciente.

En el desarrollo de los trabajos de certificación, se contemplaban dos situaciones:

- De presentarse el caso I anterior, los terrenos que se encuentran fuera de los linderos del núcleo agrario, señalados en el plano definitivo, pero dentro de la poligonal actual, se consideran como una Excedencia.<sup>87</sup>
- Cuando se presentaba el supuesto del caso II anterior, los terrenos fuera de los linderos del núcleo agrario, recién levantados, pero que se encuentran dentro de los límites señalados en el plano definitivo correspondiente, constituyen lo que se define como Demasía.<sup>88</sup>

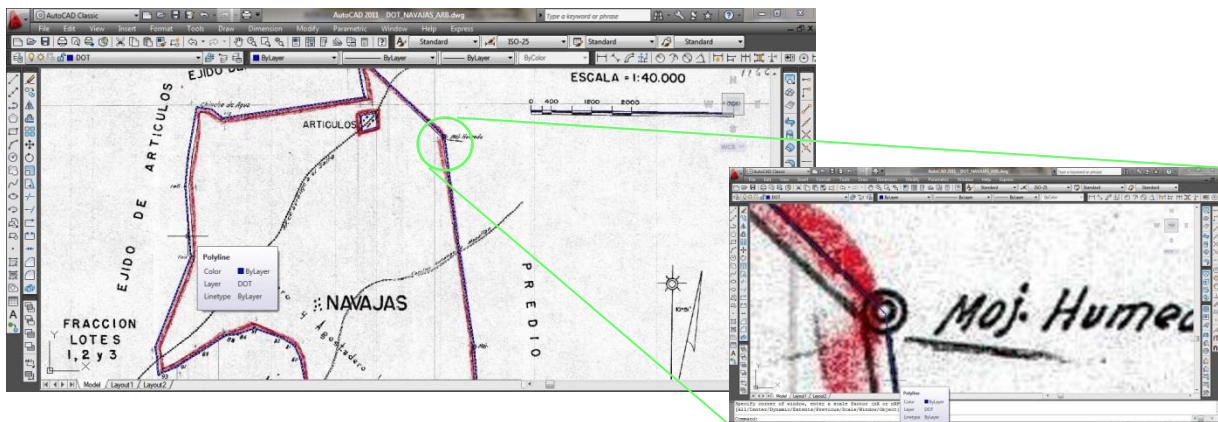
Tomando en consideración lo expuesto en las secciones precedentes en este capítulo, esbozemos el procedimiento a seguir, en un caso ideal, en el que las inconsistencias entre los datos asentados en las carpetas básicas de los ejidos y comunidades, difieran poco a la situación que prevalece en campo.

Con la intención de aterrizar las ideas expuestas, como ejemplo, iniciamos utilizando el polígono de Dotación del ejido Navajas, Municipio de Durango, Estado de Durango. Lo primero que haremos será extraer las coordenadas de sus vértices directamente de su plano definitivo. Para lograr esto, escaneamos el plano, obtenemos la poligonal utilizando el programa AUTOCAD, determinamos la escala y orientación del polígono analizando los datos técnicos del plano. Como complemento del análisis, interpretamos la información asentada en la Resolución Presidencial de Dotación, en el Acta de Posesión y Deslinde respectiva, y la comparamos con el polígono creado. Desafortunadamente, no se contaba a la mano con las planillas de cálculo y construcción del polígono de Dotación del núcleo agrario; pero para las ocasiones en las que sí existan y se pueda extraer información útil de ellas, por supuesto se incorporan al análisis.

<sup>87</sup> Glosario de Términos Jurídico-Agrarios, pág. 77.

<sup>88</sup> Glosario de Términos Jurídico-Agrarios, pág. 66.

FIGURA 6.8  
POLÍGONO DE DOTACIÓN VECTORIZADO



En la figura 6.8, se muestra el polígono creado con el procedimiento descrito; en la parte derecha observamos un acercamiento a una mojonera ejidal, en el que se procura colocar la polilínea (*color azul*) al centro del lindero ejidal. Para este caso, el Acta de Posesión y Deslinde se elaboró en el año 1951, la descripción del polígono en ella se da mediante distancias y rumbos generales; dada la fecha de elaboración y el deterioro del documento, los datos asentados en la misma son difíciles de leer pues se encuentran borrosos.

El obtener los polígonos de acciones agrarias mediante el procedimiento descrito, por supuesto de origen presenta imprecisiones. En primera instancia, el propio procedimiento de escaneo y la calidad de la imagen, temas que en ocasiones son atendidos en textos de fotogrametría por ejemplo.

También nos encontramos, que en la colocación de las polilíneas sobre la imagen de los linderos del ejido; no obstante que nos auxiliamos de la herramienta de acercamiento del programa de diseño asistido por computadora CAD, para establecer la polilínea en la parte media de la línea del lindero del núcleo agrario. Identificamos que la variación en posición de los vértices del ejido va de la mano de la escala a la que está elaborado el plano definitivo. Por ejemplo, una variación de medio milímetro a escala 1:50 000, le corresponde una diferencia de 25 metros en la posición de una mojonera del núcleo agrario.

Por otra parte, no hay que olvidar las características particulares de los planos definitivos de la propiedad social. En la mayoría de los casos, tenemos que trabajar sobre copias heliográficas de los originales, ya sea porque el plano original ya no existe, porque se encuentra en tales condiciones físicas que no es posible su manipulación, o simplemente porque es la información con la que se cuenta a la mano.

En consecuencia, las copias de planos definitivos que se manejan en los procedimientos administrativos, por lo regular presentan pequeñas distorsiones, torceduras inherentes al proceso de fotocopiado, o al hecho de que se trabaja con la copia, de la copia del original.

Por último, considerando lo expuesto anteriormente, no hay que olvidar un hecho importante; podemos identificar que de origen, los planos definitivos en muchos casos no representaban la realidad en campo de los límites de los núcleos agrarios, o de las expropiaciones tramitadas, por lo menos en los procedimientos administrativos realizados hasta cerca de los años noventa.

Dicho lo anterior, a partir de las coordenadas arbitrarias de los vértices, procedemos a calcular las distancias entre los mismos y los azimuts de los lados del polígono.

Para las distancias empleamos la expresión:

$$l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

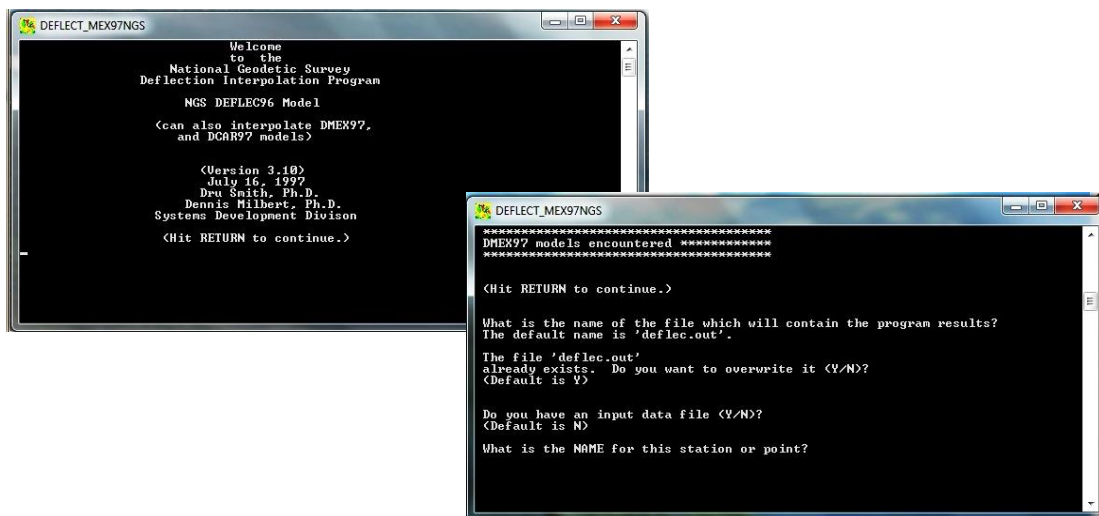
En donde  $l$  es la distancia buscada;  $x$  y  $y$  son las coordenadas de los puntos A y B.

Para los azimuts, necesitamos la expresión:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \right)$$

Las componentes de la desviación de la vertical  $\xi$  y  $\eta$  las obtendremos del modelo gravimétrico de deflexión de la vertical DMEX97, proporcionado por la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica NOAA, por sus siglas en ingles.

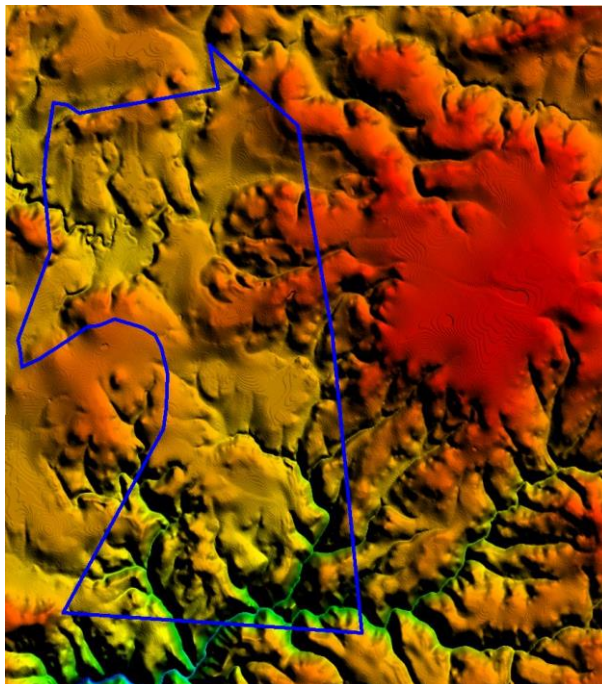
FIGURA 6.9  
MODELO GRAVIMÉTRICO DE  
DEFLEXIÓN DE LA VERTICAL



Las alturas ortométricas  $H$  las obtenemos del Continuo de Elevaciones Mexicano CEM3.0; las alturas geoidales  $N$ , del Geoide Gravimétrico Mexicano. Ambos se tomarán de la página oficial del INEGI. Las alturas elipsoidales  $h$ , se calculan en base a estas dos.



FIGURA 6.10  
CONTINUO DE ELEVACIONES MEXICANO  
EJIDO NAVAJAS



En la figura 6.10, se muestra la imagen Raster que abarca la región ocupada por el ejido Navajas (*polígono en color azul*). El perfil del terreno en el lindero ejidal, se obtuvo mediante el uso del programa GLOBAL MAPPER.

FIGURA 6.11  
GEOIDE GRAVIMÉTRICO MEXICANO  
DESCARGA DE DATOS

**INEGI INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA**

Inicio | Contacto | INEGI Móvil | Síguenos: [Social Media Icons]

Inicio > Geografía > Geodesia >

### Geodesia

#### Cálculo de alturas geoidales

**Cálculo Puntual**

Esta herramienta permite calcular la altura geoidal del modelo GGM10 para uno o varios puntos capturando sus coordenadas. En caso de que se conozca su valor de la altura geodésica (también llamada elipsoidal), puede capturarla para obtener un valor de altura ortométrica calculado.

Datos de Entrada	Altura Geodésica(Elipsoidal)	Resultados
<input checked="" type="radio"/> Formato (Grados, minutos y segundos) <input type="radio"/> Formato (Grados)	<input type="checkbox"/> Obtener la Altura Ortométrica	<input type="button" value="Calcular"/>
Latitud norte: [ ]° [ ]' [ ]" Longitud oeste: [ ]° [ ]' [ ]"		Altura Geoidal :

En la figura 6.11, observamos el entorno típico que se presenta al descargar los datos de alturas geoidales de la página oficial del INEGI.



La distancia zenital la calculamos en base a las alturas elipsoidales; mediante la expresión:

$$Z = 90^\circ + \sin^{-1} \left( \frac{\Delta h}{l} \right)$$

En donde  $l$  es la distancia inclinada entre los puntos A y B;  $\Delta h$  la diferencia en alturas elipsoidales para esos mismos puntos.

Como podemos observar en la figura 6.12, a la altura elipsoidal de B, denotada como  $h_B$ , adicionalmente le tenemos que corregir el efecto debido a la separación angular  $\psi$  entre las normales de A y B. El ángulo  $\psi$  se calcula mediante la expresión:

$$\psi = 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{\frac{1}{2}l}{R_{GAUSS}} \right)$$

En donde  $l$  es la distancia inclinada entre los puntos A y B,

$R_{GAUSS}$  es el radio medio de Gauss, definido como:

$$R_{GAUSS} = \sqrt{MN}$$

En donde M y N, son los radios de curvatura sobre el meridiano y sobre el primer vertical, respectivamente.

La corrección buscada, debida a este ángulo central  $\psi$ , se obtiene mediante la expresión:

$$dh_\psi = h_B - \frac{h_B}{\cos(\psi)}$$

También es necesaria, una corrección por la separación angular entre la tangente en el punto A, y la sección normal de A hacia B;

Esta separación angular la calculamos mediante la expresión:

$$\mu = \frac{S}{2N_A} (1 + n_A^2 \cdot \cos^2 \alpha_{AB}) - \frac{S^2}{2N_A^2} \cdot n_A^2 \cdot t_A \cdot \cos \alpha_{AB}$$

En donde  $S$  es la distancia de arco sobre el elipsoide entre A y B;  $\alpha_{AB}$  el azimut del punto A al B;  $N_A$  el radio de curvatura sobre el primer vertical en A;  $n_A$  y  $t_A$  se obtienen mediante las expresiones:

$$n_A^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi_A$$

$$t_A = \tan \varphi_A$$

En donde  $e'$  corresponde a la segunda excentricidad;  $\varphi_A$  la latitud en el punto A.

La segunda corrección buscada debida a la separación a la tangente, se obtiene mediante la expresión:

$$dh_\mu = l \cdot \sin \mu$$

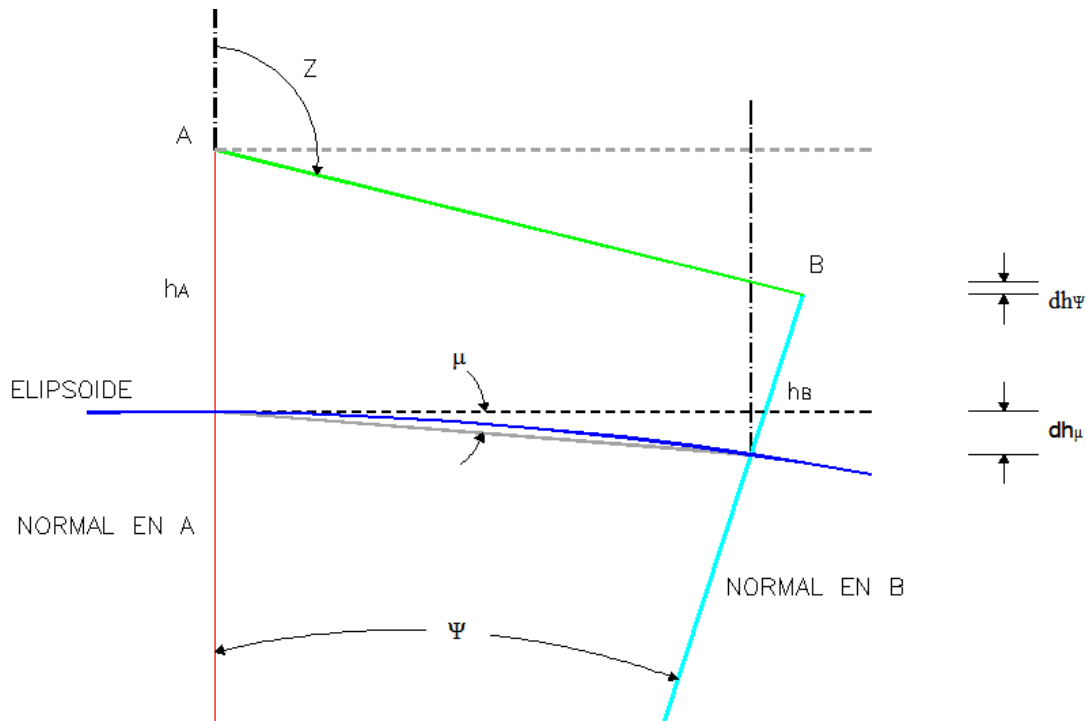
Aplicando estas dos correcciones, para calcular  $\Delta h$ , tenemos:

$$\Delta h = [(h_B + dh_\mu + dh_\psi) - h_A]$$

Cabe señalar, que las correcciones  $dh_{\mu}$  y  $dh_{\psi}$  son pequeñas; y de hecho, a una línea de 6 km le corresponden los valores de 2.84 m y 1.07 milímetros, respectivamente. Pero de hecho se requieren para que en base a ellas, se pueda calcular la cotangente de la distancia zenital  $Z$ , necesaria para la corrección de ángulos horizontales por el efecto de la desviación de la vertical.

Adicionalmente, también se calculó la distancia zenital  $Z$  utilizando directamente la diferencia en alturas ortométricas  $H$ ; el nuevo valor  $\delta\theta$  obtenido de esta manera, tan sólo difirió en 0.01 segundos, para algunos lados del polígono ejidal de Navajas.

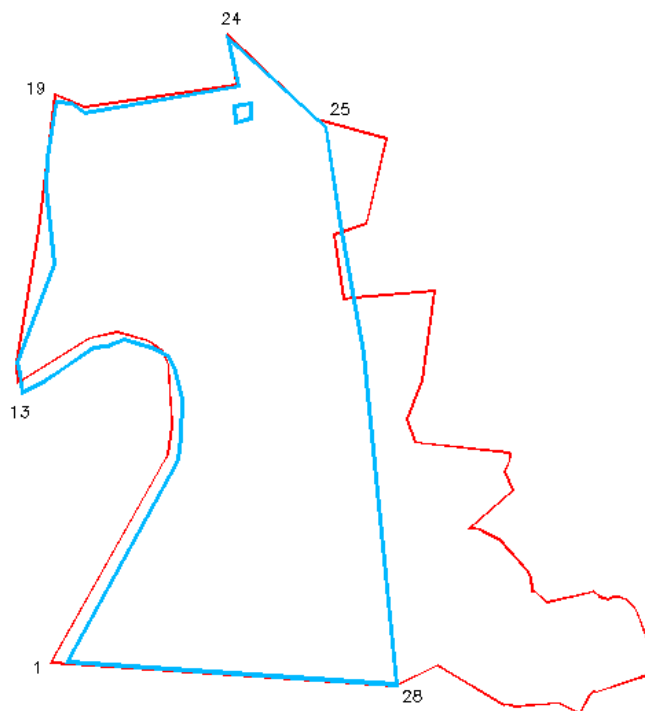
FIGURA 6.12  
DISTANCIA ZENITAL



En la figura 6.12, podemos observar una representación de las variables involucradas para calcular la distancia zenital  $Z$ ; nuevamente para calcular el ángulo  $\psi$ , consideramos que las líneas normales en los puntos A y B se encuentran contenidas en un mismo plano.

Como podrá advertirse, hasta este punto, las latitudes y longitudes geodésicas requeridas en esta sección, todavía no se obtienen. Como aproximación inicial, se optó por alinear uno de los lados más largos del polígono del plano de Dotación, con su homólogo del plano interno, y además desplazarlo como se muestra en la figura 6.13. Hay que recordar que los polígonos de la certificación se encuentran en coordenadas UTM y TME, en su caso.

FIGURA 6.13  
CERTIFICACIÓN vs DOTACIÓN  
EJIDO NAVAJAS



En la figura 6.13, se observa el acople mencionado; en color rojo, tenemos el lindero ejidal producto de la certificación; en color azul, el lindero ejidal construido por medio del plano definitivo de Dotación.

A la derecha, el resto de la superficie que no abarca el polígono de Dotación de Navajas, aproximadamente corresponde al polígono de Ampliación del núcleo agrario.

Adicionalmente, el pequeño rectángulo al Norte es una propiedad privada dentro del ejido.

En términos generales, el polígono construido en base al plano de Dotación y el polígono de la certificación, presentan forma y tamaño similares; asimismo, es común que el polígono de la certificación cuente con un número mayor de vértices. La separación máxima entre puntos “homólogos”, se encuentra cerca de los 300 metros (*ej. punto 1 y 13*).

Con los datos obtenidos hasta ahora, posteriormente aplicaremos la corrección por desviación de la vertical a los azimuts, a cada uno de los lados del polígono.

FIGURA 6.14  
CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN DE LA VERTICAL

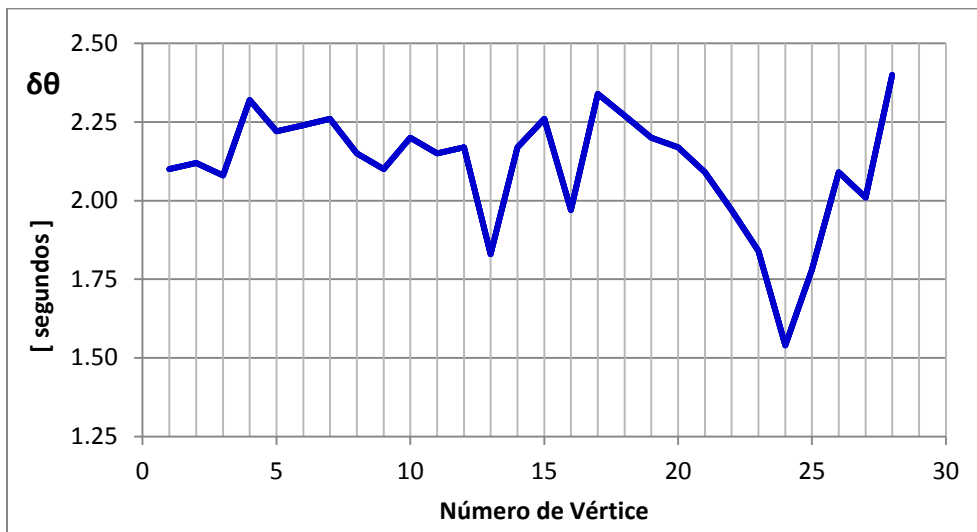
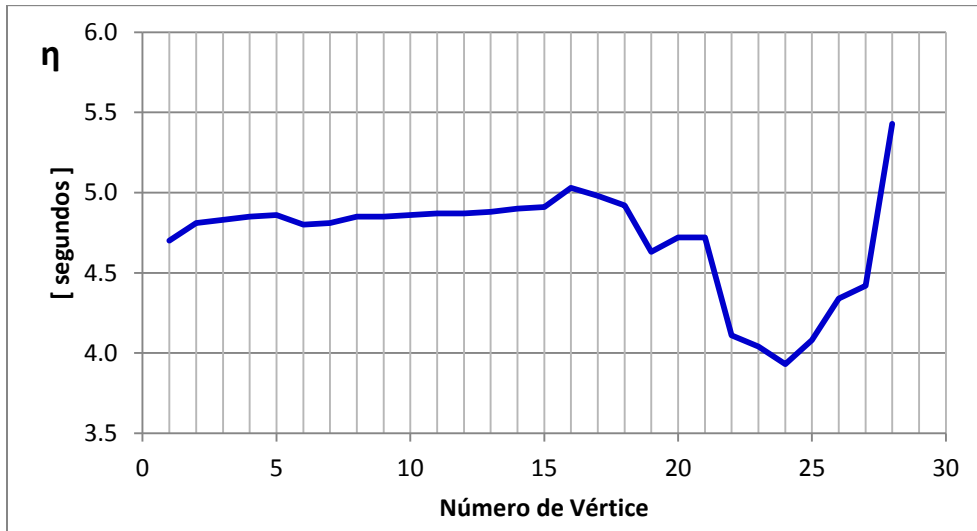


FIGURA 6.15  
DESVIACIÓN DE LA VERTICAL  
SOBRE EL PRIMER VERTICAL



[ver Tabla 6.2](#)

Analizando las gráficas de las figuras 6.14 y 6.15, podemos notar la influencia que tiene la variación en la componente de la desviación de la vertical sobre el primer vertical  $\eta$ , en el valor de la corrección  $\delta\theta$ , que aplicaremos a los azimuts. Para mayor claridad, en las gráficas anteriores, se muestran los valores absolutos de ambas variables.

A continuación reducimos las distancias sobre el terreno a distancias sobre el elipsoide, también a cada uno de los lados del polígono.

FIGURA 6.16  
CORRECCIÓN POR REDUCCIÓN DE DISTANCIAS

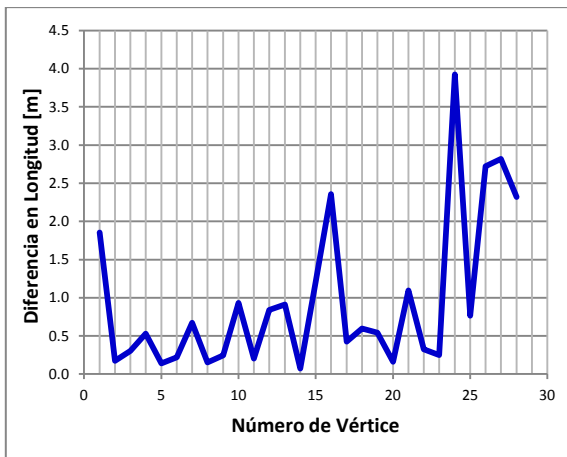
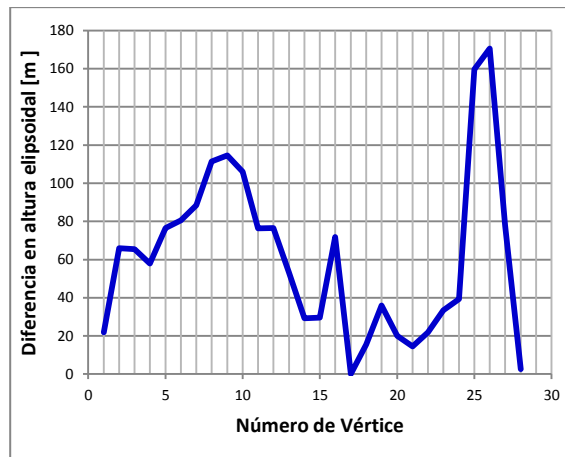


FIGURA 6.18  
VARIACIÓN EN ALTURAS ELIPSOIDALES



[ver Tabla 6.2](#)

FIGURA 6.17  
DIFERENCIA RELATIVA  
CORRECCIÓN POR REDUCCIÓN DE DISTANCIAS

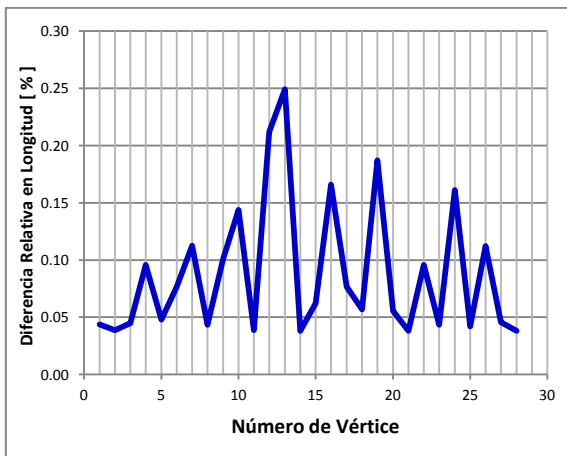
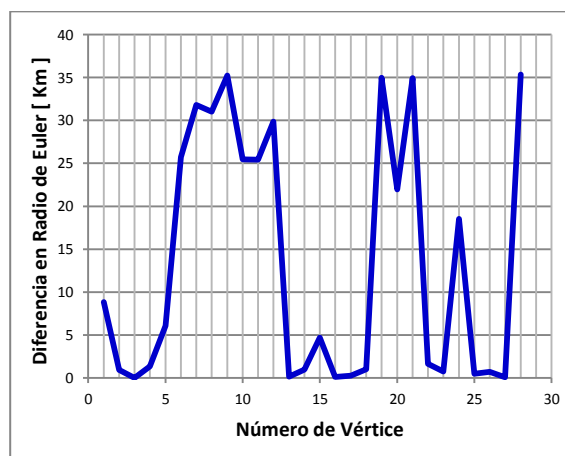


FIGURA 6.19  
VARIACIÓN EN EL RADIO DE EULER



En la figura 6.16, se muestran las cantidades que se le tienen que restar a las distancias medidas en terreno, para poder reducirlas al elipsoide. En la figura 6.17, se muestran esos mismos valores, pero divididos entre la longitud del lado respectivo.

Cabe resaltar, que los lados que presentan una mayor diferencia relativa (*lados 13-14, 16-17 y 24-25*), además cuentan con radios medios de Euler pequeños o diferencias en alturas elipsoidales grandes, figura 6.19. Lo anterior puede sugerir una influencia importante de este radio de curvatura, en el valor de la reducción de distancias al elipsoide.

## 6.4 CÁLCULO DE COORDENADAS GEODÉSICAS

Para calcular las coordenadas geodésicas de puntos sobre el elipsoide, partimos de las coordenadas latitud  $\varphi_A$  y longitud  $\lambda_A$  correspondientes al punto A; y de la distancia sobre el elipsoide  $S$ , así como del azimut  $\alpha_{AB}$  de A hacia B. Lo que se desea, es conocer las coordenadas geodésicas latitud  $\varphi_B$  y longitud  $\lambda_B$  del punto B. Procedimiento que es conocido como Problema Geodésico Directo.

Tomando en consideración las distancias involucradas en los núcleos agrarios, que como se mencionó alcanzan a lo más 30 Km; los cálculos a desarrollar serán en base a las fórmulas de líneas cortas, en particular las Fórmulas de Puissant.

### 6.4.1 LATITUD

Iniciamos considerando una esfera de radio  $N_A$ , tangente al paralelo que pasa a través del punto A. Para distancias cortas, esta esfera será aproximadamente coincidente con el punto B. Por supuesto, también tenemos que asumir que el azimut  $\alpha_{AB}$  y la distancia  $S$  son los mismos sobre dicha esfera y sobre el elipsoide de referencia. El arreglo así formado, se presenta en la figura 6.20.

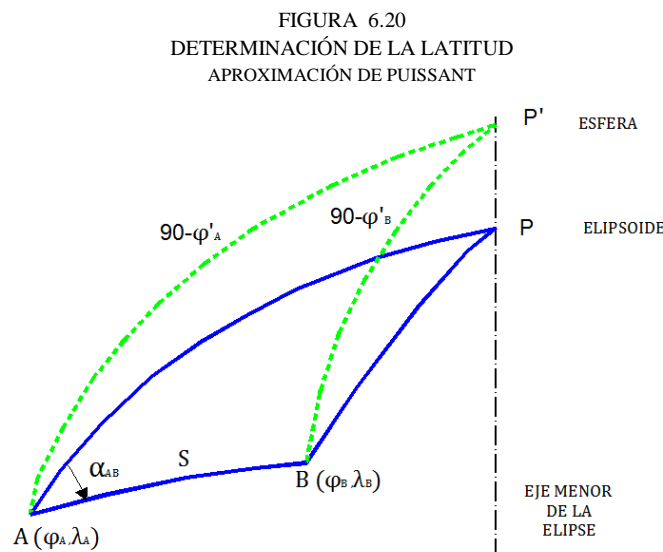


Imagen elaborada en base a “Geometric Geodesy”, pág. 104.

Ley de los cosenos para un triángulo esférico cualquiera

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(A)$$

Para el triángulo AP'B, tenemos

$$\cos(90 - \varphi'_B) = \cos(90 - \varphi_A) \cdot \cos(\theta) + \sin(90 - \varphi_A) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\alpha_{AB})$$

Recordando que

$$\cos(90 - X) = \sin(X)$$

Reduciendo términos

$$\sin(\varphi'_B) = \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\theta) + \cos(\varphi_A) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\alpha_{AB})$$

Considerando

$$\varphi'_B = \varphi_A + \Delta\varphi'$$

Sustituyendo, tenemos

$$\sin(\varphi_A + \Delta\varphi') = \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\theta) + \cos(\varphi_A) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\alpha_{AB})$$

Desarrollando la expresión anterior, nos da

$$\sin(\varphi_A) \cdot \cos(\Delta\varphi') + \cos(\varphi_A) \cdot \sin(\Delta\varphi') = \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\theta) + \cos(\varphi_A) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \quad (6.1)$$

Utilizando el desarrollo en serie de las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin(\Delta\varphi') &= \Delta\varphi' - \frac{\Delta\varphi'^3}{6} + \dots \\ \cos(\Delta\varphi') &= 1 - \frac{\Delta\varphi'^2}{2} + \dots \\ \sin(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots \\ \cos(\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Al aplicarlas a la expresión (6.1), tenemos

$$\sin(\varphi_A) \cdot \left(1 - \frac{\Delta\varphi'^2}{2}\right) + \cos(\varphi_A) \cdot \left(\Delta\varphi' - \frac{\Delta\varphi'^3}{6}\right) = \sin(\varphi_A) \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \cos(\varphi_A) \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) \cdot \cos(\alpha_{AB})$$

Desarrollando y reordenando términos

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_A) \cdot \Delta\varphi' &= \sin(\varphi_A) \cdot \left(\frac{\Delta\varphi'^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}\right) + \cos(\varphi_A) \cdot \frac{\Delta\varphi'^3}{6} + \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot \theta + \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot \frac{\theta^3}{6} \\ \Delta\varphi' &= \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\Delta\varphi'^2}{2}\right) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{\theta^3}{6} \cdot \cos(\alpha_{AB}) + \frac{\Delta\varphi'^3}{6} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Utilizando como primera aproximación

$$\Delta\varphi' = \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) \quad (6.3)$$

Sustituyendo (6.3) en (6.2), pero despreciando el tercer y cuarto términos del lado derecho

$$\Delta\varphi' = \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{(\theta \cdot \cos \alpha_{AB})^2}{2}\right) \cdot \tan(\varphi_A)$$



Desarrollando y simplificando

$$\begin{aligned}\Delta\varphi' &= \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2}\theta \cdot (1 - \cos^2 \alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) \\ \Delta\varphi' &= \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2}\theta \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A)\end{aligned}\quad (6.4)$$

Utilizando (6.4) como segunda aproximación, la sustituimos en el segundo término de (6.2) y a su vez, sustituimos (6.3) en el cuarto término de (6.2); lo que nos da

$$\Delta\varphi' = \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \left( \frac{\theta^2}{2} - \frac{[\theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2}\theta \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A)]^2}{2} \right) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{\theta^3}{6} \cdot \cos(\alpha_{AB}) + \frac{[\theta \cdot \cos(\alpha_{AB})]^3}{6}$$

Desarrollando el binomio (*color azul*) y despreciando su término elevado a la cuarta potencia, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta\varphi' &= \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2}[\theta^2 - \theta^2 \cdot \cos^2(\alpha_{AB}) + \theta^3 \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A)] \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{\theta^3}{6} \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot [1 - \cos^2(\alpha_{AB})] \\ \Delta\varphi' &= \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2}[\theta^2 \cdot \sin(\alpha_{AB}) + \theta^3 \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A)] \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{\theta^3}{6} \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \\ \Delta\varphi' &= \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2}\theta^2 \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) - \theta^3 \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot \left[ \frac{1}{2} \tan \varphi_A + \frac{1}{6} \right] \\ \Delta\varphi' &= \theta \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2}\theta^2 \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{1}{6}\theta^3 \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot [1 + 3 \tan \varphi_A]\end{aligned}\quad (6.5)$$

Ahora, consideremos que el arco  $\theta$ , este dado por la relación

$$\theta = \frac{S}{N_A}\quad (6.6)$$

Pero recordando la figura 6.20, la magnitud buscada, de hecho es  $\Delta\varphi$ ; la cual presenta la siguiente relación

$$N_A \Delta\varphi' = M_M \Delta\varphi\quad (6.7)$$

En donde  $M_M$  es el radio de curvatura medio sobre el meridiano, entre los puntos A y B, expresado como

$$M_M = \frac{M_A + M_B}{2}$$

En donde  $M_A$  y  $M_B$  son los radios de curvatura sobre el meridiano, en los puntos A y B, respectivamente. Pero, debido a que se desconoce la latitud del punto B, la expresión para aproximar  $M_M$  está dada por

$$\begin{aligned}M_M &= M_A + \frac{3}{2} M_A \frac{e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \delta\varphi \\ M_M &= M_A \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \delta\varphi \right]\end{aligned}\quad (6.8)$$

Sustituyendo (6.8) en (6.7), y reordenando términos

$$\begin{aligned}
 N_A \Delta\varphi' &= M_A \left[ 1 + \frac{3 e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{2 (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \delta\varphi \right] \Delta\varphi \\
 \frac{N_A}{M_A} \Delta\varphi' &= \left[ 1 + \frac{3 e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{2 (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \delta\varphi \right] \Delta\varphi \\
 \frac{N_A}{M_A} \Delta\varphi' - \left[ \frac{3 e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{2 (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \delta\varphi \right] \Delta\varphi &= \Delta\varphi \\
 \Delta\varphi &= \frac{N_A}{M_A} \Delta\varphi' - \left[ \frac{3 e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{2 (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \delta\varphi \right] \Delta\varphi
 \end{aligned}$$

En donde al término  $\frac{N_A}{M_A} \Delta\varphi'$  lo denotamos como  $\delta\varphi$ ; adicionalmente, debido a que la diferencia  $(\delta\varphi - \Delta\varphi)$  es pequeña, hagamos  $(\delta\varphi)(\Delta\varphi)$  igual a  $(\delta\varphi)^2$ ; lo que nos da

$$\Delta\varphi = \delta\varphi - \left[ \frac{3 e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{2 (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \right] (\delta\varphi)^2 \quad (6.9)$$

Ahora, sustituyendo las expresiones (6.5) y (6.6) en la (6.8), tenemos

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi &= \left\{ \frac{N_A S}{M_A N_A} \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2} \frac{N_A}{M_A} \left( \frac{S}{N_A} \right)^2 \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{1}{6} \frac{N_A}{M_A} \left( \frac{S}{N_A} \right)^3 \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot [1 + 3 \tan \varphi_A] \right\} \\
 &\quad - \left\{ \left[ \frac{3 e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{2 (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \right] \left[ \frac{N_A S}{M_A N_A} \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2} \frac{N_A}{M_A} \left( \frac{S}{N_A} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{1}{6} \frac{N_A}{M_A} \left( \frac{S}{N_A} \right)^3 \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot [1 + 3 \tan \varphi_A] \right]^2 \right\} \\
 \Delta\varphi &= \left\{ \frac{S}{M_A} \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2} \frac{S^2}{M_A N_A} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{1}{6} \frac{S^3}{M_A N_A^2} \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot [1 + 3 \tan \varphi_A] \right\} \\
 &\quad - \left\{ \left[ \frac{3 e^2 \sin(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_A)}{2 (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_A))} \right] \left[ \frac{N_A S}{M_A N_A} \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2} \frac{N_A}{M_A} \left( \frac{S}{N_A} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{1}{6} \frac{N_A}{M_A} \left( \frac{S}{N_A} \right)^3 \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot [1 + 3 \tan \varphi_A] \right]^2 \right\}
 \end{aligned}$$

En donde el término en color naranja suele despreciarse (*aprox. diezmilésimas de segundo de arco*). Por lo que nuestra expresión queda como

$$\Delta\varphi = \left\{ \frac{S}{M_A} \cdot \cos(\alpha_{AB}) - \frac{1}{2} \frac{S^2}{M_A N_A} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \tan(\varphi_A) - \frac{1}{6} \frac{S^3}{M_A N_A^2} \cdot \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \cdot [1 + 3 \tan \varphi_A] \right\}$$

Que suele reescribirse como

$$\Delta\varphi = B \cdot S \cdot \cos(\alpha_{AB}) - C \cdot S^2 \cdot \sin(\alpha_{AB}) + E \cdot P \cdot S^2 \cdot \sin^2(\alpha_{AB})$$

En donde,  $\Delta\varphi$  se obtiene en segundos de arco; y además

$$B = \frac{1}{M_A \sin(1'')} \quad C = \frac{\tan(\varphi_A)}{2M_A N_A \sin(1'')} \quad E = \frac{1+3 \tan^2(\varphi_A)}{6N_A^2} \quad P = B \cdot S \cdot \cos(\alpha_{AB})$$

La latitud buscada, está dada por la expresión

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi$$

#### 6.4.2 LONGITUD

Con el objetivo de determinar la longitud del punto B, consideremos una esfera de radio  $N_B$  tangente al paralelo que pasa a través de B. Demos por hecho, que esta esfera pasa tan cerca del punto A, de tal forma que el azimut y la distancia sobre el elipsoide de referencia y la esfera son las mismas. En la figura 6.21, se muestra el arreglo referido.

FIGURA 6.21  
DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD  
APROXIMACIÓN DE PUISSANT

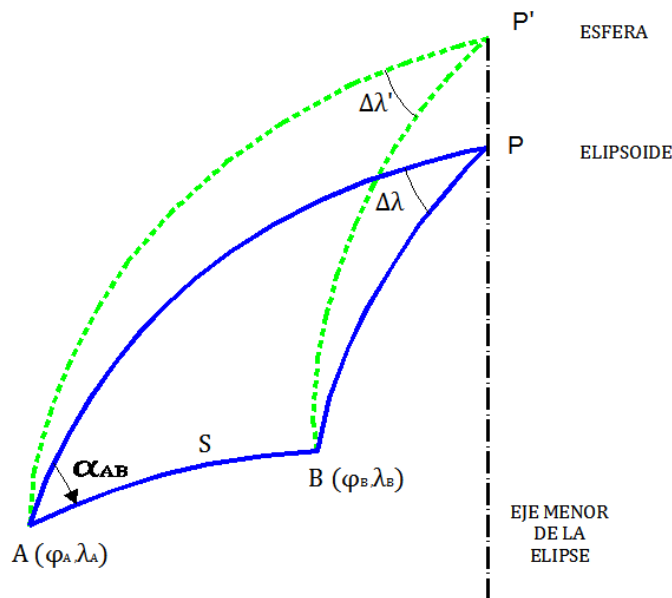


Imagen elaborada en base a “Geometric Geodesy”, pág. 107.

La ley del seno para el triángulo esférico

$$\frac{\sin(A)}{\sin(a)} = \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)}$$

Para el triángulo esférico ABP

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\Delta\lambda)}{\sin(\theta)} &= \frac{\sin(\alpha_{AB})}{\sin(90 - \varphi_B)} \\ \sin(\Delta\lambda) &= \sin(\theta) \cdot \frac{\sin(\alpha_{AB})}{\cos(\varphi_B)}\end{aligned}\quad (6.9)$$

Recordando el desarrollo en serie de las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\sin(\Delta\lambda) &= \Delta\lambda - \frac{\Delta\lambda^3}{6} + \dots \\ \sin(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\end{aligned}$$

Utilizamos el primer término del lado izquierdo de ambas funciones en (6.9), obtenemos la primera aproximación de  $\Delta\lambda$ .

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \theta \cdot \frac{\sin(\alpha_{AB})}{\cos(\varphi_B)} \\ \Delta\lambda &= \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B)\end{aligned}\quad (6.10)$$

Aplicando ahora los dos primeros términos, del desarrollo en serie, a la expresión (6.9), tenemos

$$\Delta\lambda - \frac{\Delta\lambda^3}{6} = \left[ \theta - \frac{\theta^3}{6} \right] \cdot \frac{\sin(\alpha_{AB})}{\cos(\varphi_B)}\quad (6.11)$$

Sustituyendo únicamente en el segundo término del lado izquierdo, de la ecuación (6.11), la primera aproximación dada por (6.10)

$$\begin{aligned}\Delta\lambda - \frac{[\theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B)]^3}{6} &= \left[ \theta - \frac{\theta^3}{6} \right] \cdot \frac{\sin(\alpha_{AB})}{\cos(\varphi_B)} \\ \Delta\lambda &= \frac{1}{6} [\theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B)]^3 + \left[ \theta - \frac{\theta^3}{6} \right] \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) \\ \Delta\lambda &= \frac{\theta^3}{6} \cdot \sin^3(\alpha_{AB}) \cdot \sec^3(\varphi_B) - \frac{\theta^3}{6} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) + \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) \\ \Delta\lambda &= \theta \left\{ -\frac{\theta^2}{6} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) [-\sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \sec^2(\varphi_B) + 1] \right\} + \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) \\ \Delta\lambda &= \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) + \theta \left\{ -\frac{\theta^2}{6} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) [-\sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \sec^2(\varphi_B) + 1] \right\} \\ \Delta\lambda &= \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) + \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) \left\{ -\frac{\theta^2}{6} \cdot [1 - \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \sec^2(\varphi_B)] \right\} \\ \Delta\lambda &= \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) \left[ 1 - \frac{\theta^2}{6} [1 - \sin^2(\alpha_{AB}) \cdot \sec^2(\varphi_B)] \right]\end{aligned}$$

En donde el término en color naranja suele desprejarse por ser una cantidad pequeña (*diezmilésimas de segundo de arco*); por lo que, simplificando nos da

$$\Delta\lambda = \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) \left[ 1 - \frac{\theta^2}{6} \right]$$

$$\Delta\lambda = \theta \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) - \frac{\theta^3}{6} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B)$$

Considerando el valor de  $\theta$ , como

$$\theta = \frac{S}{N_B}$$

Expresada  $\Delta\lambda$  en segundos, nos queda

$$\Delta\lambda = \frac{S}{N_B \sin(1'')} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B) - \frac{S^3}{6N_B^3 \sin(1'')} \cdot \sin(\alpha_{AB}) \cdot \sec(\varphi_B)$$

Y finalmente, la longitud buscada, está dada por la expresión

$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda$$

Una vez que tenemos las coordenadas geodésicas de los vértices que delimitan el ejido, las transformamos al sistema de coordenadas UTM, mediante el empleo del programa TMCALC para con ello incorporarlas al Mosaico Descriptivo.

Probablemente, hasta esta etapa, hay dos situaciones que pueden crear un poco de “*ruido*” al procedimiento llevado a cabo; a saber:

- I. En primer lugar, la elección un tanto arbitraria de las coordenadas geodésicas iniciales utilizadas para calcular las alturas geodésicas, las deflexiones de la vertical, las reducciones geodésicas aplicadas, etc.; mismas que fueron obtenidas mediante el arreglo presentado en la figura 6.13, en las que se alineó el polígono de dotación, originalmente en coordenadas arbitrarias, con el polígono producto de la certificación.
- II. En segundo lugar, la elección arbitraria del punto de partida para calcular las coordenadas geodésicas, mediante el procedimiento del Problema Geodésico Directo.

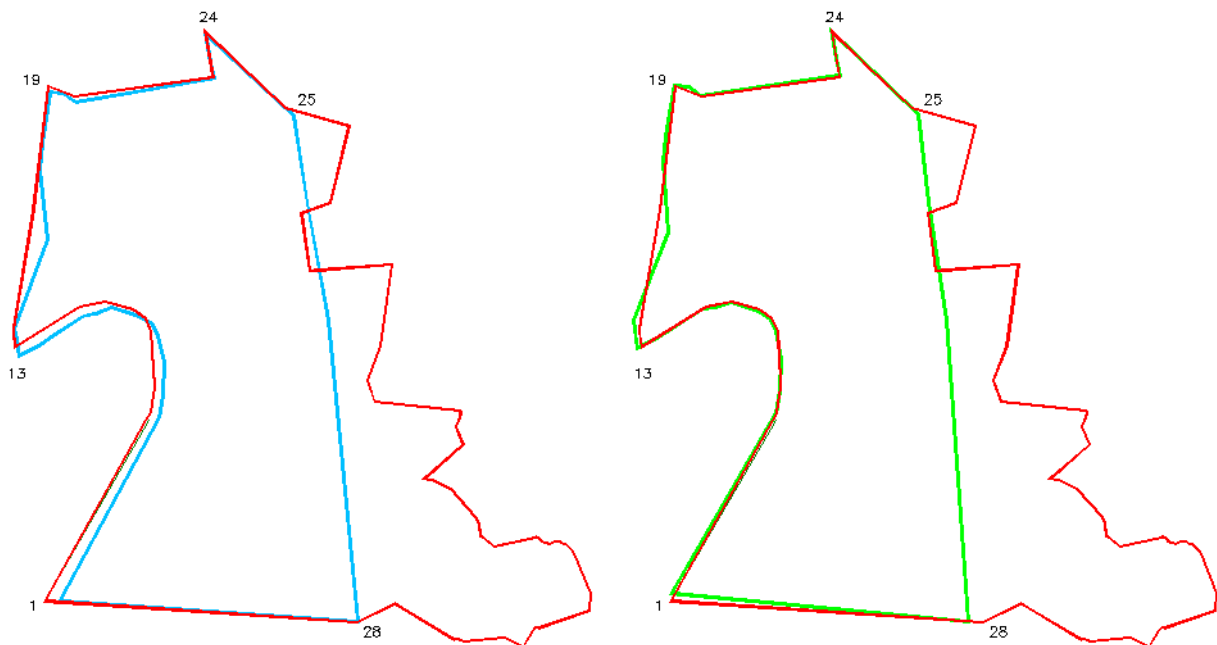
Para atender el punto número I, ahora se coloca el polígono de Dotación de tal manera que el lado 1-2 se ajusta mejor a su homólogo de la certificación. Como recordaremos, en la configuración mostrada en la figura 6.13, el lado 1-2 presentaba una variación en posición de casi 300 m con respecto a la certificación. Con esta nueva configuración, recalculamos todas las variables para estos dos vértices, con la finalidad de comparar resultados.

La variación encontrada aplicando este último arreglo es pequeña, realizando la prueba al lado 1-2, cuya longitud es de poco más de 4 Km, existe una diferencia de 12.5 cm en longitud del lado 1-2 y en azimut de tan sólo 4.3 segundos de arco; lo anterior sugiere el hecho de que es posible darse la libertad de una centena de metros en la elección de valores iniciales para el cálculo de reducciones geodésicas.

Para atender el punto número II, se recalculan todas las coordenadas geodésicas de cada uno de los vértices del polígono, a partir de las coordenadas conocidas de los vértices 1 y 24; aprovechando el hecho de que se estos se encuentran en puntos extremos en la dirección Norte-Sur, ver figura 6.22.

Al calcular la diferencia en superficie resultante entre estos dos nuevos polígonos así creados, la variación en superficie encontrada es de poco menos de 3 Has; tomando en consideración la superficie total del ejido, la cual es cercana a las 5,200 Has., en proporción la variación encontrada es insignificante. Lo anterior, por supuesto indica cierta independencia en la elección del punto de partida para calcular las coordenadas geodésicas.

FIGURA 6.22  
DOTACIÓN VS CERTIFICACIÓN  
CON REDUCCIONES GEODÉSICAS



En la figura 6.22, del lado derecho y mediante color verde, observamos el polígono de Dotación después de que se le aplican las reducciones geodésicas; a la izquierda el polígono de Dotación simplemente alineado con la certificación mediante el lado 1-28. Nuevamente la certificación se muestra en color rojo. La mejoría en el ajuste alcanzado es notable, la separación lineal entre puntos homólogos se volvió menor; y en términos generales ambas figuras coinciden satisfactoriamente.

### 6.4.3 CÁLCULO DE POSICIONES GEODÉSICAS EN TRES DIMENSIONES

En esta sección, partiendo de la información extraída del plano definitivo del poblado Navajas, calculamos las coordenadas geodésicas de cada uno de los vértices que componen el lindero ejidal, sin aplicar reducciones geodésicas a los valores medidos en campo.

Como recordaremos, uno de los objetivos es lograr representar el polígono del núcleo agrario en el Mosaico Descriptivo y con ello poder compararlo con el respectivo de la certificación.

Para llevar a cabo esto, en esta ocasión utilizamos álgebra vectorial y la aplicación de matrices para realizar las rotaciones necesarias. El objetivo es transformar las coordenadas de un sistema de coordenadas local a un sistema de coordenadas geocéntrico.

FIGURA 6.23  
SISTEMAS GEODÉSICO Y GEODÉSICO LOCAL

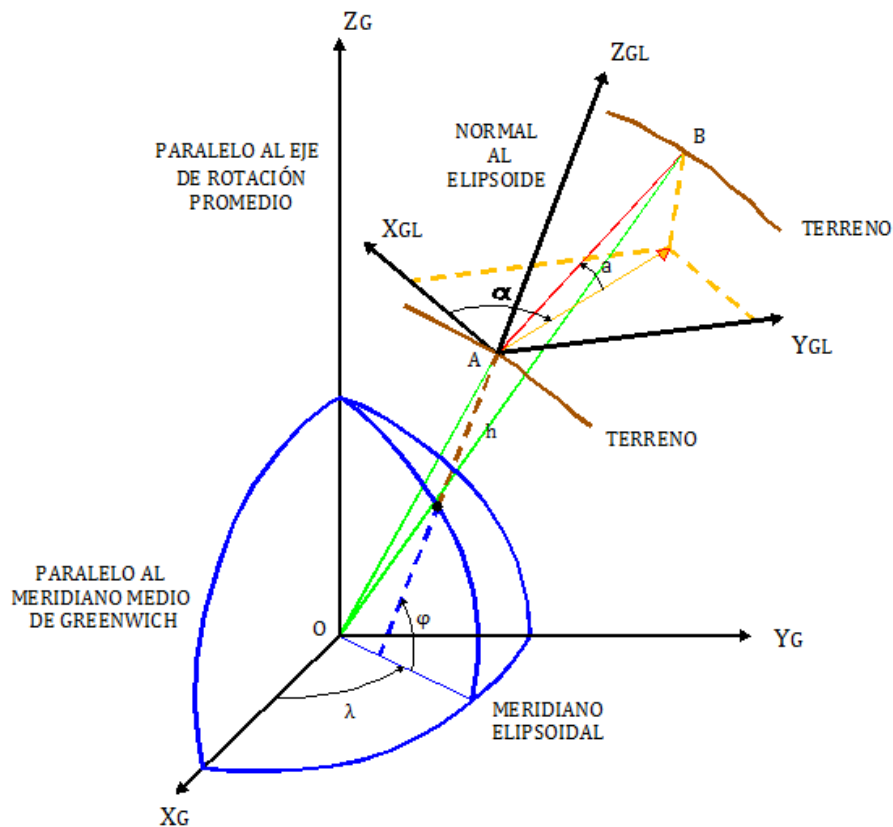


Imagen elaborada en base a “Coordinate Systems in Geodesy”, pág. 51.



La expresión matricial para transformar las coordenadas de un punto del sistema Astronómico Local al sistema Geodésico, es la siguiente:

$$(\vec{r}_{AB})_G = R_Z(180^\circ - \lambda_A) \cdot R_Y(90^\circ - \varphi_A) \cdot P_Y R_Z(A_{AB} - \alpha_{AB}) \cdot R_Y(-\xi_A) \cdot R_X(\eta_A) \cdot (\vec{r}_{AB})_{AL}$$

En donde  $(\vec{r}_{AB})_G$  es el vector que va del punto A al B en el sistema de coordenadas geodésicas;  $\lambda_A$  y  $\varphi_A$  son la longitud y la latitud del punto A, respectivamente;  $A_{AB}$  es el azimut astronómico de la línea A-B;  $\alpha_{AB}$  es el azimut geodésico de la línea A-B;  $\xi_A$  es la componente meridiana de la desviación de la vertical en el punto A;  $\eta_A$  la componente en el primer vertical de la desviación de la vertical en el punto A;  $(\vec{r}_{AB})_{AL}$  es el vector que va del punto A al B en el sistema de coordenadas Astronómico Local;  $R_X$ ,  $R_Y$ ,  $R_Z$  las matrices de rotación en los ejes X, Y y Z, respectivamente;  $P_Y$  la matriz de reflexión en el eje Y.

Los términos en color rojo, de hecho corresponden a la transformación del sistema Astronómico Local al Geodésico Local.

Pero como ya se dijo, partiremos de un enfoque *simplista*, en el que a las mediciones de campo no se les aplicarán reducciones geodésicas. Nótese que esto equivale a considerar las mediciones realizadas con la vertical del lugar, como geodésicas. Por lo que, la expresión anterior se simplifica, y en su lugar tenemos:

$$(\vec{r}_{AB})_G = R_Z(180^\circ - \lambda_A) \cdot R_Y(90^\circ - \varphi_A) \cdot P_Y \cdot (\vec{r}_{AB})_{GL}$$

En donde las coordenadas cartesianas de  $(\vec{r}_{AB})_{GL}$  en el sistema Geodésico Local están dadas por:

$$(\vec{r}_{AB})_{GL} = \begin{bmatrix} \overline{AB} \cos(a_{AB}) \cdot \cos(\alpha_{AB}) \\ \overline{AB} \cos(a_{AB}) \cdot \sin(\alpha_{AB}) \\ \overline{AB} \sin(a_{AB}) \end{bmatrix}$$

En donde  $\overline{AB}$  es la distancia inclinada entre A y B;  $a_{AB}$  es la altura del punto B, medida desde el punto A;  $\alpha_{AB}$  es el azimut de la línea AB. En la figura 6.23, en color rojo se representa el vector  $(\vec{r}_{AB})$ , así como las variables referidas.

Adicionalmente, las matrices utilizadas se definen como:

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_Y(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de posición de B en el sistema Geodésico, ver figura 6.24, está dado por la expresión

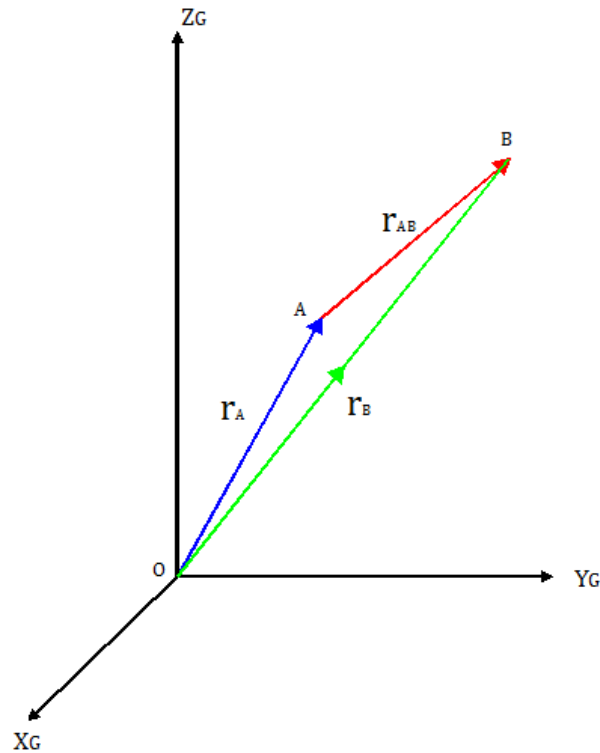
$$(\vec{r}_B)_G = (\vec{r}_A)_G + (\vec{r}_{AB})_G$$

El vector de posición de A, está dado por

$$(\vec{r}_A)_G = \begin{bmatrix} (N_A + h_A) \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\lambda_A) \\ (N_A + h_A) \cos(\varphi_A) \cdot \sin(\lambda_A) \\ [N_A(1 - e^2) + h_A] \sin(\varphi_A) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

En donde  $N_A$  y  $h_A$ , corresponden al radio de curvatura sobre el primer vertical y altura elipsoidal para el punto A, respectivamente;  $e$  nuevamente es la primera excentricidad del elipsoide de referencia.

FIGURA 6.24  
SISTEMAS GEODÉSICO  
COMPONENTES VECTORIALES TRIDIMENSIONALES



Una vez que tenemos el vector  $(\vec{r}_B)_G$  en coordenadas cartesianas, podemos convertirlas a sus equivalentes curvilíneas, mediante las expresiones

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (6.13)$$

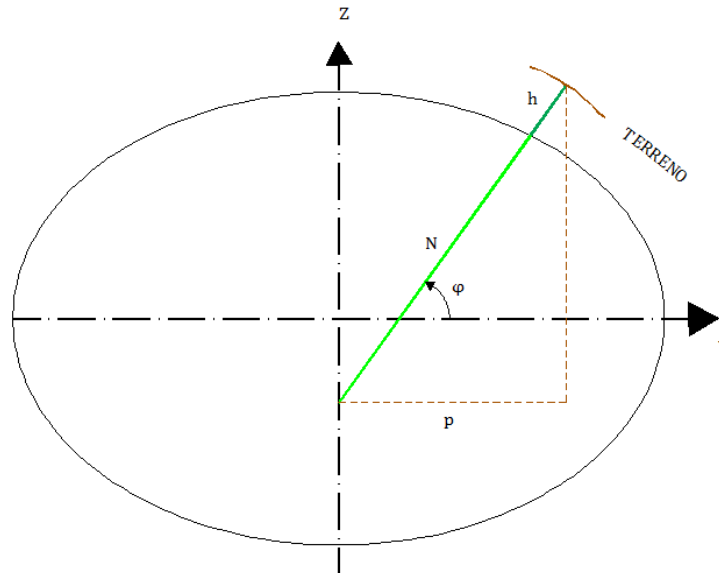
Retomando la definición de las coordenadas cartesianas en el sistema Geodésico, tenemos

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = [N(1 - e^2) + h] \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = [N + h - e^2N] \cdot \sin(\varphi)$$

FIGURA 6.25  
COORDENADAS CARTESIANAS A GEODÉSICAS



Además de la figura 6.25, podemos formar la función

$$\cos(\varphi) = \frac{p}{N + h}$$

$$p = (N + h) \cdot \cos(\varphi)$$

$$h = \frac{p}{\cos(\varphi)} - N \tag{6.14}$$

Ahora, formando la relación

$$\frac{z}{p} = \frac{[N + h - e^2N] \cdot \sin(\varphi)}{(N + h) \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\frac{z}{p} = \tan(\varphi) \cdot \left[ 1 - \frac{e^2N}{N + h} \right]$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{z}{p \left( 1 - \frac{e^2N}{N + h} \right)} \right] \tag{6.15}$$

Recordando el hecho de que el radio de curvatura sobre el primer vertical es función de la latitud; para calcular la latitud y la altura elipsoidal es necesario realizar un proceso iterativo.

Iniciamos considerando la altura elipsoidal  $h$ , con un valor igual a cero en la ecuación (6.15), lo que nos da

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left[ \frac{z}{p(1 - e^2)} \right]$$

Utilizamos este valor, en la ya conocida expresión para calcular el radio de curvatura sobre el primer vertical

$$N_0 = \frac{a}{[1 - e^2 \sin^2 \varphi_0]^{1/2}}$$

A continuación, sustituimos este valor en la expresión (6.14), para obtener la altura elipsoidal

$$h_0 = \frac{p}{\cos(\varphi_0)} - N_0$$

Con esta primera aproximación de  $h$  y  $N$ , recalculamos  $\varphi$  empleando (6.15), lo que nos da

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{z}{p \left( 1 - \frac{e^2 N_0}{N_0 + h_0} \right)} \right]$$

Con este nuevo valor de  $\varphi$ , recalculamos  $N$

$$N_1 = \frac{a}{[1 - e^2 \sin^2 \varphi_1]^{1/2}}$$

Y por supuesto, también encontramos el nuevo valor de  $h$  utilizando (6.14), con esto tenemos

$$h_1 = \frac{p}{\cos(\varphi_1)} - N_1$$

Se repite el proceso por lo menos una vez más, para verificar que la diferencia entre los valores iterados de  $\varphi$  y  $h$ , respectivamente, son despreciables.

Aplicando este proceso iterativo a cada uno de los vértices de nuestra poligonal, obtenemos las coordenadas geodésicas curvilíneas del núcleo agrario. Posteriormente, utilizando el programa TMCALC, las transformamos al sistema de coordenadas UTM para poder incorporarlas al Mosaico Descriptivo, y con esto realizar la comparación de los dos procedimientos planteados.

Para lograr la representación de los límites de un núcleo agrario en un Mosaico Descriptivo con coordenadas UTM, al inicio de la sección 6.2 se propusieron dos procedimientos a seguir; básicamente, un camino era considerar reducciones geodésicas y otro era no considerarlas. Para el primer caso, se obtuvo la configuración representada en la figura 6.22, en la que se logró un ajuste satisfactorio del polígono de Dotación a su parte homóloga del plano interno del núcleo agrario.

Para el segundo caso, y siguiendo el procedimiento descrito en la sección 6.4.3, en esencia se obtuvo la configuración mostrada en la figura 6.13. Es decir, después de aplicar las matrices de rotación bajo las condiciones descritas, el polígono de Dotación sufrió modificaciones mínimas en posición, y una ligera disminución en tamaño, del orden de 8 Hectáreas.

Revisando la figura 6.22 podemos notar la influencia que tienen las reducciones geodésicas sobre la forma, tamaño y posición de los polígonos empleados para representar la propiedad social. Así mismo, analizando las gráficas de la 6.14 a la 6.19, en el valor de las correcciones aplicadas, se identificó la dependencia a variables como altura elipsoidal, latitud, desviación de la vertical y la longitud de los lados del polígono.

## 6.5 ERRORES EN LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

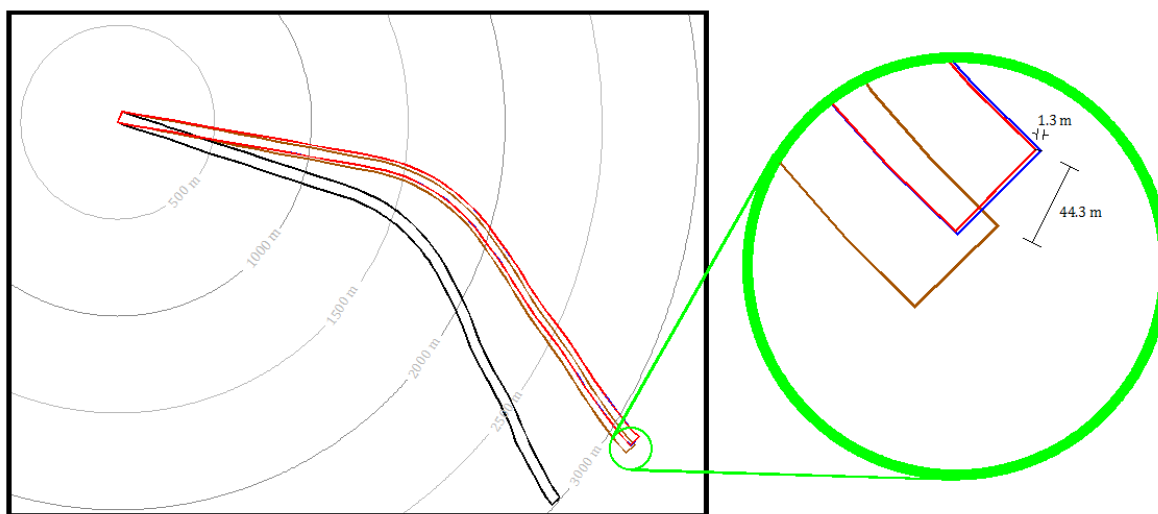
En la sección 4.2.2, al trasladar el polígono del ejido Rancho Nuevo Nopaltepec a lo largo de diferentes regiones de una zona UTM, se logró apreciar una variación de superficie asociada a la posición relativa del polígono con respecto al meridiano central y al Ecuador.

Para el ejido en estudio, analizando la variación en perímetro señalado en las tablas 4.2 a 4.8; podemos identificar que además de la variación en superficie, existe también una distorsión o variación en la forma del polígono.

De hecho esto ya se podía anticipar, al observar en la figura 4.13 la posición relativa del meridiano  $96^\circ$  con respecto a la línea vertical de la retícula UTM. En ella se aprecia como el meridiano  $96^\circ$  se tiende a “*curvear*” hacia el meridiano central de la zona UTM.

En las figuras 6.26 y 6.27, se muestran en varios sistemas de referencia, el polígono del derecho de vía de una carretera en el Estado de Guerrero. En color café se observa el polígono construido con las coordenadas UTM; en color azul en coordenadas TME; en color rojo en coordenadas UTM pero después de trasladarlo al meridiano central de la zona UTM; en color negro en coordenadas arbitrarias (*Sistema Astronómico Local*).

FIGURA 6.26  
TRANSFORMACIÓN ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA  
POLÍGONOS CON UN VÉRTICE EN COMÚN



En esta figura, los polígonos se unieron haciéndolos coincidir en un mismo punto inicial; adicionalmente se respetó la orientación y el tamaño de los mismos.

Para un derecho de vía de poco más de 3 km y casi 20 Has. En la figura 6.26, al observar el polígono en color café, podemos notar un cambio significativo en la orientación de los lados del polígono, además del cambio de superficie comentado en secciones precedentes.

Quizá para algunas aplicaciones en las que la superficie involucrada sea grande, el cambio en la posición de los vértices, de alrededor de un par de metros, no sea tan significativa; pero en definitiva, no es el caso en aquellos polígonos que componen un derecho de vía.

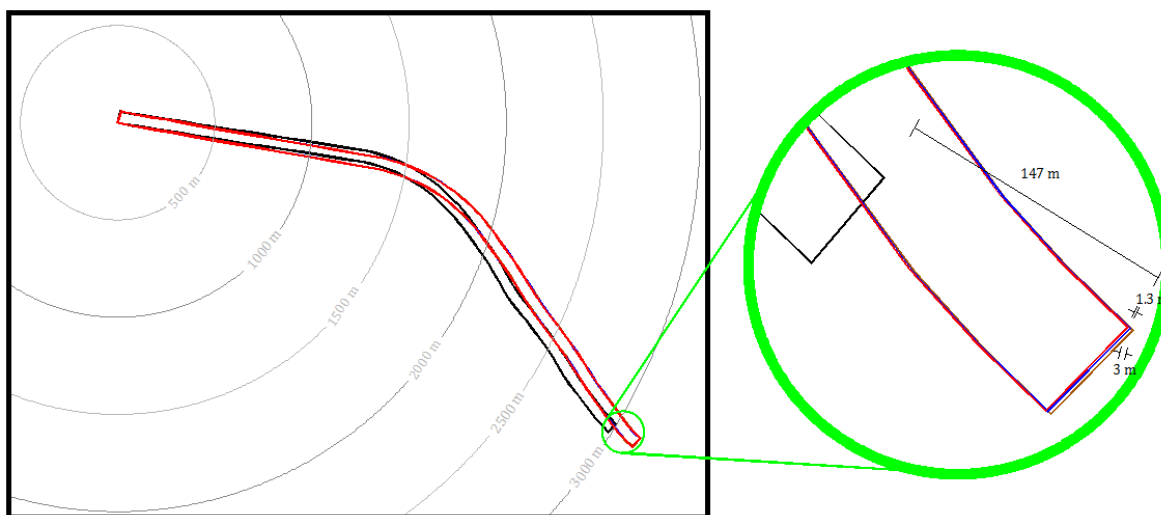
La separación tan marcada del polígono en color negro con respecto al resto, pone en evidencia el problema (*en tamaño y orientación*) asociado al incorporar información de campo (*por ejemplo recabada con una Estación Total*), sin antes realizar las transformaciones de coordenadas pertinentes.

En este trabajo llamaremos Conversión de coordenadas, a la presentación de un par o terna de valores numéricos, en otros valores números equivalentes. Por ejemplo, conversión de coordenadas cartesianas a polares; a coordenadas cilíndricas, o quizá a coordenadas curvilíneas, respectivamente, dependiendo si se trata de un par o una terna de valores.

En ese orden de ideas, llamaremos Transformación de coordenadas, a la representación de un par o terna de valores numéricos, en otros sistemas coordenados de referencia. Por ejemplo, la transformación de coordenadas geodésicas cartesianas, a coordenadas locales, o a coordenadas planas producto de un sistema de proyección (p.ej. *UTM*, *TME*). También a Transformaciones de un sistema Geodésico a un sistema Geocéntrico, o de un sistema Geodésico a un sistema Astronómico.

En este texto, salvo que se indique lo contrario, a partir de esta sección al hablar de un sistema de coordenadas Geodésico, nos referimos a un sistema Geodésico-Geocéntrico como el WGS84.

FIGURA 6.27  
TRANSFORMACIÓN ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA  
POLÍGONOS ALINEADOS



En esta otra figura, para poder comparar simultáneamente los polígonos analizados, arbitrariamente se procuró sobreponerlos, intentando alinearlos entre sí lo mejor posible; nuevamente se respetó el tamaño y la forma de ellos.

En la figura 6.27, se observa que a pesar de alinearlos entre sí, las coordenadas arbitrarias (*Sistema Astronómico Local*) con respecto a las coordenadas proyectadas, presentan una importante reducción en tamaño. En este arreglo, la separación lineal entre vértices homólogos correspondientes a los sistemas  $UTM_{MC}$  y TME es a lo más del orden de 1.3 m; y de 3 m entre los sistemas UTM y  $UTM_{MC}$ .



## 6.6. CONCLUSIONES

En la actualidad, contamos con valiosos instrumentos de medición que nos permiten definir de manera relativamente rápida y sencilla, las características geométricas de las propiedades sociales; pero estos instrumentos por sí solos, no son *mágicos*. La información recabada en campo debe ser sometida a un tratamiento o interpretación que se encuentran definidos en función de la naturaleza específica del problema y de los métodos de medición empleados.

Las reducciones geodésicas y transformaciones de coordenadas, son procedimientos que siempre que sean necesarios, deben ser aplicados a los datos recabados en campo, para un correcto manejo de la información.

Un tratamiento inadecuado de la información, fácilmente nos lleva a realizar aseveraciones que se podrían encontrar muy alejadas de la realidad que prevalece en campo.

La correcta identificación de los errores en los que se incurren en el desahogo de los procedimientos administrativos expropiatorios (*por supuesto enfocándonos a cuestiones técnicas*), es el producto de una acertada interpretación de la legislación en la materia, de una adecuación sistemática de métodos topográficos y geodésicos, así como de un buen conocimiento y entendimiento de los objetivos que pretende alcanzar el procedimiento expropiatorio.

## 6.7. REFERENCIAS

- I. Richard H. Rapp, Geometric Geodesy Part I, The Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, 1958 Neil Avenue, Columbus, Ohio 43210, April 1991.
- II. Petr Vanicek, Physical Geodesy I, Lecture Notes N. 21, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P.O. Box 4400, Fredericton, N.B., Canada. 1971.
- III. E. J. Krakiwsky, D. B. Thomson, Geodetic Position Computations, Lecture Notes N. 39, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P.O. Box 4400, Fredericton, N.B., Canada. February 1974.
- IV. Glosario de términos jurídico-agrarios, Procuraduría Agraria, primera edición 2008, Primera reimpresión 2009.  
Procuraduría Agraria, Página Oficial.  
*Página de Inicio>Conoce la PA>Publicaciones*  
<http://www.pa.gob.mx/pa/conoce/publicaciones.html>  
  
<http://www.pa.gob.mx/pa/conoce/publicaciones/Glosario%202009/GLOSARIO%20DE%20T%C3%89RMINOS%20JUR%C3%8DDICO-AGRARIOS%202009.pdf>
- V. Continuo de Elevaciones Mexicano CEM 3.0.  
*INEGI, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Geografía>Temas>Datos del Relieve>Continental*  
*>Continuo de Elevaciones Mexicano CEM 3.0>Descargar*  
<http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/datosrelieve/continental/descarga.aspx>
- VI. Geoide Gravimétrico Mexicano GGM 10  
*INEGI, Página Oficial.*  
*Página de Inicio>Geografía>Temas>Geodesia>Cálculo de alturas geoidales*  
*>Herramientas para la obtención de alturas geoidales*  
*>Consulta de valores puntuales*  
[http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/geodesia/altura\\_puntual.aspx](http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/geodesia/altura_puntual.aspx)
- V. E. J. Krakiwsky, D. E. Wells, Coordinate Systems in Geodesy, Lecture Notes N. 16, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P.O. Box 4400, Fredericton, N.B., Canada. May 1971.

# CAPÍTULO 7

## DETERMINACIÓN DE LA SUPERFICIE DE GRANDES EXTENSIONES DE TIERRA

### 7.1 DETERMINACIÓN DE SUPERFICIES SOBRE EL ELIPSOIDE

Iniciamos considerando el área sobre el elipsoide limitada por un par dado de meridianos y paralelos. De la figura 7.1, observamos que:

$$AB = CD = Md\varphi$$

$$AD = BC = N \cos(\varphi)d\lambda$$

En donde, M y N corresponden a los radios de curvatura sobre el meridiano y el primer vertical, respectivamente;  $\varphi$  y  $\lambda$ , son la latitud y longitud de los vértices mostrados en la figura.

FIGURA 7.1  
ÁREA DIFERENCIAL  
ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN

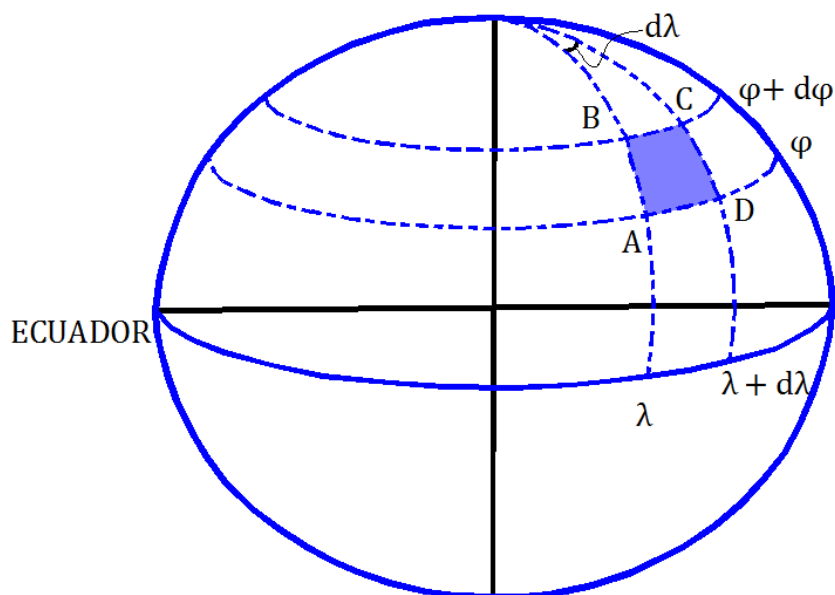


Imagen elaborada en base a "Geometric Geodesy", pág. 41.

Considerando la diferencial de área  $dZ$ , definida por:

$$dZ = AD \cdot AB = MN \cos(\varphi) d\varphi d\lambda$$

La superficie que se encuentra definida por los meridianos en  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , y los paralelos correspondientes a  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , la obtenemos mediante la expresión:

$$Z = \int dZ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} MN \cos(\varphi) d\varphi d\lambda$$

Integrando con respecto a la longitud  $\lambda$ , tenemos:

$$Z = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} MN \cos(\varphi) d\varphi$$

Con la finalidad de evaluar esta integral, sustituimos las expresiones para M y N dadas en la sección 6.2, y con ello podemos escribir:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} MN \cos(\varphi) d\varphi = b^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos(\varphi)}{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^2} d\varphi$$

Para lo cual hay que recordar la relación que existe entre la primera excentricidad y los semiejes de la elipse a y b.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

despejando, tenemos:

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

La integral resultante, se puede dar en su forma definida como:

$$b^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos(\varphi)}{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^2} d\varphi = \frac{b^2}{2} \left[ \frac{\sin(\varphi)}{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \cdot \sin(\varphi)}{1 - e \cdot \sin(\varphi)} \right] \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$Z = \frac{b^2(\lambda_2 - \lambda_1)}{2} \left[ \frac{\sin(\varphi)}{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \cdot \sin(\varphi)}{1 - e \cdot \sin(\varphi)} \right] \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (7.1)$$

que es la expresión para obtener la superficie buscada.

Otra opción, es realizar la integral con respecto a la latitud  $\varphi$ , empleando la expansión de Kernel en serie e integrar término a término. Iniciamos escribiendo:

$$\frac{\cos(\varphi)}{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^2} = \cos(\varphi) + 2e^2 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) + 3e^4 \cos(\varphi) \sin^4(\varphi) + 4e^6 \cos(\varphi) \sin^6(\varphi) + \dots$$

Al sustituir ésta en la expresión para calcular la superficie, tenemos:

$$Z = b^2(\lambda_2 - \lambda_1) \left[ \sin(\varphi) + \frac{2}{3}e^2 \sin^3(\varphi) + \frac{3}{5}e^4 \sin^5(\varphi) + \frac{4}{7}e^6 \sin^7(\varphi) + \dots \right] \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (7.2)$$

Como se podrá apreciar, estas expresiones son muy útiles cuando la superficie buscada es una región regular; es decir, que presenta una forma geométrica tal que es susceptible de definir mediante intervalos de latitud y longitud sencillos.

Si recordamos la forma de los núcleos agrarios, estos presentan linderos cuyas líneas se caracterizan por trazos irregulares de longitud variable y geometría compleja.

Para poder aplicar la expresión anterior, un camino sería dividir la superficie deseada en particiones tales, que permitan descomponer dicha superficie compleja en elementos más sencillos. Por ejemplo, tal vez haciendo una analogía a las particiones que se llevan a cabo en las sumas de Riemann, ver figura 7.2.

FIGURA 7.2  
ÁREA EN PARTICIONES  
SUMAS DE RIEMANN

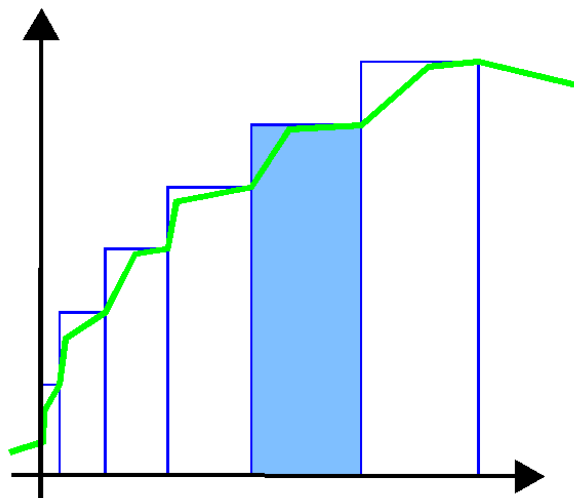


Imagen elaborada en base a “Cálculo y Geometría Analítica”, pág. 304.

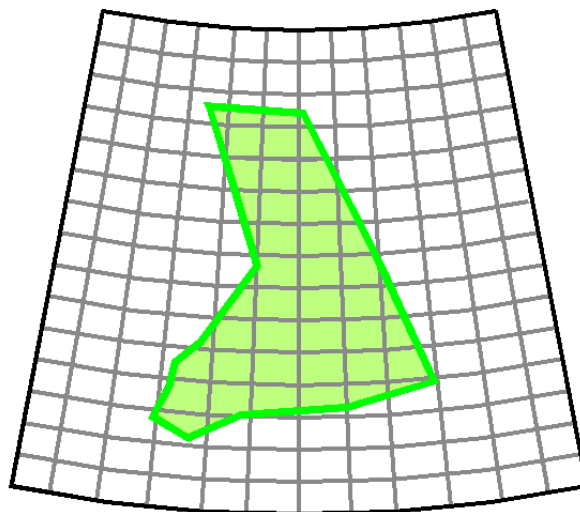
La desventaja en esto, es que no contamos con una o varias funciones continuas que nos definan los linderos del núcleo agrario, y el simple hecho de aventurarse en la definición de dichas funciones, rápidamente volvería el problema más complejo en lugar de solucionarlo.

Otro camino sería sobreponer a la superficie deseada, una malla regular de *cuadrados\** y calcular el área total, como la suma de las partes, ver figura 7.3. Por supuesto en el mejor de los casos, en las cercanías de los linderos, de hecho se formarían una infinidad de triángulos esféricos, cuya superficie habría que calcularse también.

Dicho de paso, en dos dimensiones, este método tradicional fue uno de los procedimientos que se emplearon para determinar aproximadamente y de manera gráfica, la superficie de propiedades sociales.

Por supuesto, aunque conceptualmente es un procedimiento sencillo, la cantidad de trabajo “*manual*” necesario es considerable; ya que implica el análisis y cuantificación detallada de las figuras geométricas formadas en las cercanías a los linderos de la propiedad.

FIGURA 7.3  
ÁREA EN MALLA REGULAR



En secciones anteriores, se planteó la necesidad de definir un procedimiento de cálculo de superficies extensas, que tuviera la característica de ser conceptualmente sencillo y que a su vez se identificará por lo práctico en su aplicación.

Lo anterior en atención a dos ideas: número uno, que la determinación de la superficie por dicho método esté al alcance y entendimiento de personal con conocimientos técnicos “*muy básicos*” en Topografía y Geodesia.

Número dos, que los cálculos subyacentes no incrementen significativamente la cantidad de tiempo necesaria en el desahogo de los procedimientos administrativos que les dieron origen.

\* En estricto sentido no serían cuadrados, hay que recordar que se trata de superficies tridimensionales.

Como ya se mencionó, esto es de vital importancia debido a que los procedimientos administrativos como la expropiación de tierras del régimen de propiedad social, fácilmente alcanzan a concluirse en periodos de tiempo del orden de un par de años; toda vez que las cuestiones económicas, sociales, técnicas, administrativas e incluso políticas inherentes suelen ser complejas.

Una alternativa que se propone para determinar la superficie de grandes extensiones de tierra, es hacer uso de la correspondencia que existe entre la superficie calculada sobre el elipsoide y la respectiva sobre un sistema de coordenadas (*p. ej. UTM*) que emplea una proyección cartográfica.

Teniendo como datos de entrada las coordenadas geodésicas de los vértices que componen un núcleo agrario, o una porción de él. El procedimiento a seguir sería el siguiente:

- I. Se identifican los límites Norte y Sur de las coordenadas extremas de la propiedad; es decir, se definen la latitud máxima y mínima en las que se encuentra la propiedad. Ver figura 7.4.
- II. Se identifican los límites Este y Oeste de las coordenadas extremas de la propiedad; es decir, se definen la longitud máxima y mínima en las que se encuentra la propiedad.
- III. Con los datos de los puntos I y II, se define la región sobre el elipsoide que contiene la propiedad.
- IV. Se transforman las coordenadas de los cuatro vértices, que componen la región, al sistema de coordenadas UTM.
- V. Se calcula la superficie de la región, definida en el punto IV, empleando métodos planimétricos de Topografía.
- VI. Se define una segunda región reduciendo equitativamente las coordenadas extremas de la región uno; es decir, por ejemplo, se le restan 30 min de arco a la latitud máxima y se le suman 30 min de arco a la latitud mínima; de manera análoga, se le restan 30 min de arco a la longitud máxima y se le suman 30 min de arco a la longitud mínima.
- VII. Se define una tercera región pero ahora con el doble del incremento empleado en el punto VI.
- VIII. Se define una cuarta región pero ahora con el triple del incremento empleado en el punto VI.
- IX. De manera subsecuente, se definen regiones análogas siguiendo la dinámica planteada, tantas como las características geométricas específicas del problema lo requieran.
- X. Se transforman las coordenadas de los vértices, que componen las regiones así creadas, al sistema de coordenadas UTM.
- XI. Se calculan las superficies de las regiones formadas empleando métodos planimétricos de Topografía.
- XII. Se transforman las coordenadas de los vértices, que componen la propiedad, al sistema de coordenadas UTM.
- XIII. Se calcula la superficie de la propiedad empleando métodos planimétricos de Topografía.

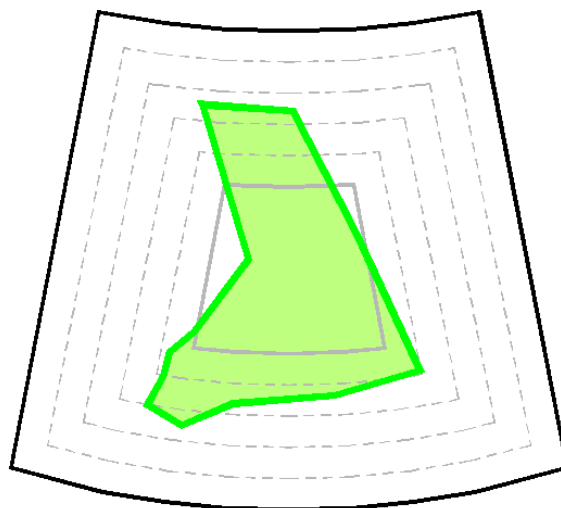


- XIV. Se calculan las superficies sobre el elipsoide para cada región, mediante el empleo de la fórmula 7.2.
- XV. Se grafican los resultados obtenidos; en las ordenadas la superficie calculada sobre el elipsoide; en las abscisas la superficie calculada sobre el sistema de coordenadas UTM.
- XVI. La distribución de los datos de superficie deberá ser tal, que aproximadamente existan la misma cantidad de datos de superficie de regiones que son más grandes que la superficie de la propiedad social, así como datos de superficie de regiones que son más pequeñas. De requerirse, se calcularan las regiones necesarias para que se cumpla dicha condición.
- XVII. Mediante el empleo del polinomio generalizado, se obtiene la función polinómica que represente el comportamiento identificado en la gráfica del punto número XIV.
- XVIII. Una vez que se obtiene la función polinómica, se emplea para estimar el valor de la superficie de la propiedad social sobre el elipsoide.

Se logra apreciar, que en esencia el procedimiento descrito utiliza una interpolación mediante el empleo de un polinomio. Las regiones empleadas tienen la característica de que ofrecen un conjunto regular de datos distribuidos de manera uniforme alrededor del valor de la superficie buscada.

Como podrá advertirse, los incrementos empleados para definir las regiones necesarias, se establecerán en función de las características geométricas específicas del problema.

FIGURA 7.4  
INTERPOLACIÓN DE ÁREA



En la figura 7.4 se muestra una representación esquemática de un núcleo agrario y las regiones empleadas en el procedimiento descrito anteriormente. Por supuesto, la convergencia de meridianos mostrada se encuentra exagerada un poco, con la finalidad de hacer énfasis, en el hecho de que las regiones empleadas corresponden a elementos geométricos tridimensionales que asemejan la forma de cuadrados.

## 7.2 APROXIMACIÓN MEDIANTE REGIONES REGULARES

Para aterrizar las ideas expuestas en la sección anterior, utilizaremos los datos del ejemplo manejado en la sección 6.5, en la que se trabajó con un polígono correspondiente a la superficie de poco más de 20 has. de un derecho de vía en el Estado de Guerrero.

Procedimiento:

- I. Se identifican como límites extremos del polígono del derecho de vía, en latitud Norte,  $\varphi_1 = 17^\circ 44' 24.17''$  y  $\varphi_2 = 17^\circ 45' 20.21''$
- II. Los extremos en longitud Oeste son:  $\lambda_1 = 101^\circ 37' 35.91''$  y  $\lambda_2 = 101^\circ 39' 7.24''$
- III. Se establece una región amplia que de manera sobrada contiene la superficie del derecho de vía de la carretera, con la finalidad de identificar la tendencia de variación en superficie en las cercanías de la superficie buscada. La región entonces se define por los meridianos  $17^\circ 44'$  y  $17^\circ 46'$ ; y por los paralelos  $101^\circ 37'$  y  $101^\circ 39' 30''$ .
- IV. Se transforman las coordenadas extremas al sistema UTM.
- V. La superficie de esta región, 1,632-08-79.670 has., supera por mucho la superficie del derecho de vía, la cual asciende a 20-15-62.210 has.
- VI. Se definen 16 regiones, doce de ellas separadas entre sí por 5 segundos de arco; y en las cercanías al valor numérico de la superficie buscada, se establecen cuatro regiones espaciadas por 1 segundo de arco. Se enumeran las regiones, de la más pequeña en superficie a la más grande. Ver figura 7.5.

Con lo anterior se desarrollan los puntos del VI al IX.

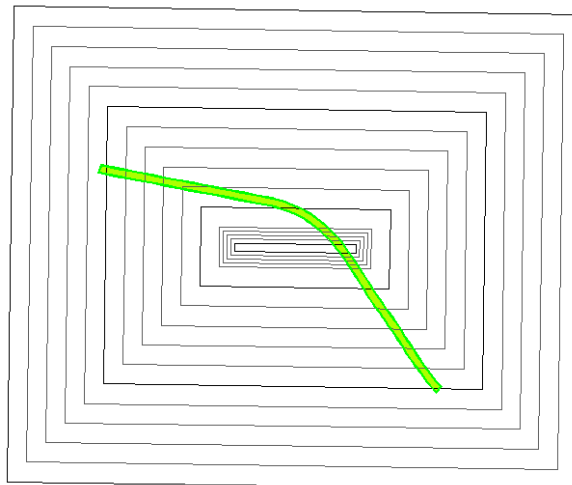
- X. Se transforman al sistema UTM, las coordenadas extremas de las 16 regiones creadas.
- XI. Se calculan las respectivas superficies, valiéndose de las coordenadas proyectadas y mediante métodos planimétricos. Con lo que se obtiene la tabla 7.1 de valores de superficie.
- XII. Se transforman las coordenadas geodésicas del derecho de vía al sistema UTM.
- XIII. Se obtiene la superficie del derecho de vía, mediante sus coordenadas en el sistema UTM, lo que nos da 20-15-62.210 has.
- XIV. Los valores de superficie obtenidos, también se muestran en la tabla 7.1.
- XV. La gráfica elaborada, es la mostrada en la figura 7.6.
- XVI. En la gráfica de la figura 7.6, intencionalmente la distribución de datos de superficie, muestra un exceso de información, en lo que respecta a regiones cuyas superficies son mayores a la del derecho de vía de la carretera.

TABLA 7.1  
SUPERFICIES CALCULADAS  
SISTEMA UTM - ELIPSOIDE

REGIÓN	SUPERFICIE	
	UTM	GEO
	Has.	Has.
1	5-80-29.9	5-79-64.0
2	12-33-13.1	12-31-73.5
3	19-58-50.5	19-56-28.5
4	27-56-41.6	27-53-29.0
5	36-26-86.6	36-22-75.0
6	90-67-14.7	90-56-87.5
7	163-20-86.6	163-02-37.5
8	253-88-02.6	253-59-25.0
9	362-68-62.0	362-27-50.0
10	489-62-62.8	489-07-12.6
11	634-70-07.2	633-98-12.6
12	797-90-93.2	797-00-50.1
13	979-25-23.5	978-14-25.1
14	1178-73-00.7	1177-39-37.6
15	1396-34-17.7	1394-75-87.6
16	1632-08-79.7	1630-23-75.0

En la figura 7.5, se muestran las regiones creadas mediante el procedimiento descrito. No obstante que los intervalos de latitud y longitud que abarca el polígono son amplios; en contraparte, la superficie involucrada relativamente es pequeña.

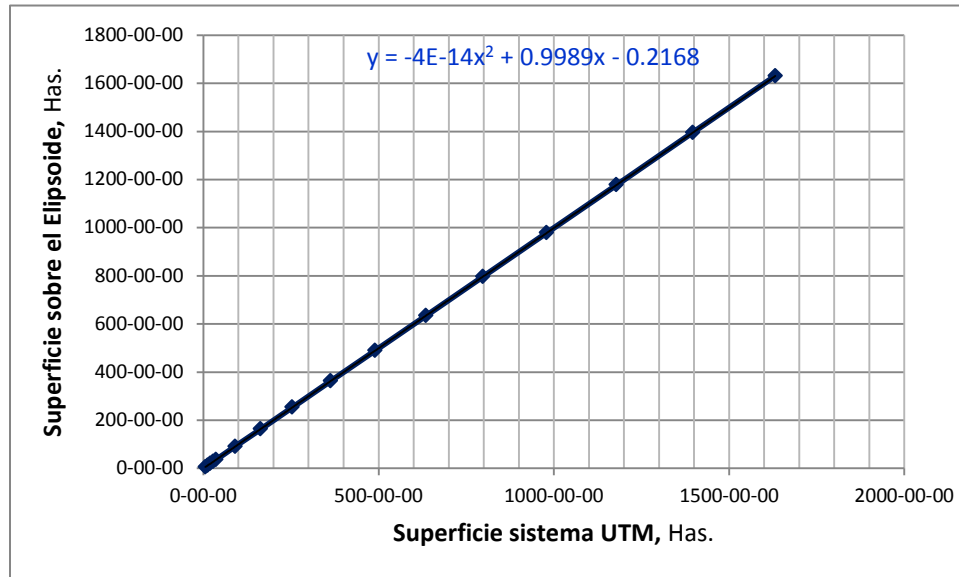
FIGURA 7.5  
APROXIMACIÓN MEDIANTE REGIONES



Nótese la pequeña inclinación hacia la derecha que guardan las 16 regiones creadas. Esto pone en evidencia que el meridiano central, de la zona UTM en la que se encuentra el derecho de vía, está del lado derecho; y a consecuencia de lo anterior, el sistema UTM tiende a *curvar* los polígonos hacia dicho meridiano.

En la figura 7.6, se muestra la relación que existe entre la superficie medida sobre el elipsoide y la correspondiente en el sistema UTM, para las 16 regiones creadas y para el polígono del derecho de vía de la carretera. Adicionalmente, se presenta en el gráfico la función polinómica de segundo grado asociada a los datos, que se obtiene directamente de las herramientas de EXCEL.

FIGURA 7.6  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
ELIPSOIDE- SISTEMA UTM



### 7.3 POLINOMIO GENERALIZADO

Para estar en posibilidad de atender los puntos XVII y XVIII, ajustaremos mediante el empleo del polinomio generalizado, los datos de superficie calculados previamente.

La expresión general a utilizar es:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

La finalidad de este método, es encontrar los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , ... que definen la función polinómica que mejor se ajusta al conjunto de datos dado.

Para lograrlo, sustituimos los datos que deseamos ajustar en la expresión:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = f(x)$$

Y así se forma el sistema de ecuaciones lineales, en el que las incógnitas precisamente son los coeficientes del polinomio que mejor se ajusta a los datos. Para este ejemplo se utilizó un polinomio de segundo grado. Esto se debe, a que analizando los datos de la figura 7.6, se observa que la distribución de los mismos asemeja la forma de una parábola.

Al sustituir los datos de la tabla 7.1, el sistema lineal queda definido como:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(58029.931) + a_2(58029.931)^2 &= 57964.000 \\ a_0 + a_1(123313.148) + a_2(123313.148)^2 &= 123173.502 \\ a_0 + a_1(195850.464) + a_2(195850.464)^2 &= 195628.503 \\ a_0 + a_1(275641.566) + a_2(275641.566)^2 &= 275329.004 \\ a_0 + a_1(362686.550) + a_2(362686.550)^2 &= 362275.005 \\ a_0 + a_1(906714.680) + a_2(906714.680)^2 &= 905687.514 \end{aligned}$$

Nótese que únicamente se utilizan 6 de los 16 datos de superficie, mismos que corresponden a tres datos por debajo de la superficie buscada y tres datos de superficie por encima de ella.

Para resolver el sistema anterior, por conveniencia utilizamos métodos matriciales. Llamando A, a la matriz de coeficientes del sistema, tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 58029.931 & 3367472892 \\ 1 & 123313.148 & 15206132470 \\ 1 & 195850.464 & 38357404249 \\ 1 & 275641.566 & 75978272907 \\ 1 & 362686.55 & 1.31542 \times 10^{11} \\ 1 & 906714.68 & 8.22132 \times 10^{11} \end{bmatrix}_{6 \times 3} \quad X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 57964.000 \\ 123173.502 \\ 195628.503 \\ 275329.004 \\ 362275.005 \\ 905687.514 \end{bmatrix}$$

Las expresiones matriciales a utilizar son:

$$\begin{aligned} AX &= Y \\ A^T AX &= A^T Y \\ (A^T A)^{-1} (A^T A) X &= (A^T A)^{-1} A^T Y \\ X &= (A^T A)^{-1} A^T Y \end{aligned}$$

En las que, Y es la matriz columna de datos que corresponden a la variable dependiente y X es la matriz de coeficientes que deseamos determinar.

Sustituyendo los datos según corresponda, tenemos que:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.249712 & -6.8 \times 10^{-6} & 6.0 \times 10^{-12} \\ -6.8 \times 10^{-6} & 4.5 \times 10^{-11} & -4.3 \times 10^{-17} \\ 6.0 \times 10^{-12} & -4.3 \times 10^{-17} & 4.2 \times 10^{-23} \end{bmatrix}$$

$$A^T Y = \begin{bmatrix} 1920057.5 \\ 1.08x10^{12} \\ 8.22x10^{17} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.179549 \\ 0.998864 \\ 2.8x10^{-12} \end{bmatrix}$$

La función que mejor se ajusta a los datos queda definida como:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = f(x)$$

$$0.179549 + 0.998864x + (2.8x10^{-12})x^2 = f(x)$$

Al sustituir en la función anterior el valor de superficie (*calculado en el sistema UTM*) del derecho de vía de la carretera, podemos aproximar el valor de superficie sobre el elipsoide que le corresponde a dicho polígono.

$$f(x) = 0.179549 + 0.998864x + (2.8x10^{-12})x^2$$

$$f(x) = 0.179549 + 0.998864(201562.2108) + (2.8x10^{-12})(201562.2108)^2$$

$$f(x) = 201333.602$$

Es preciso hacer notar, la similitud entre las ecuaciones que encontramos al ajustar los datos, así como la cercanía entre los valores encontrados. En la tabla 7.2, se presenta un resumen de lo obtenido.

TABLA 7.2  
ESTIMACIÓN DE SUPERFICIES  
SOBRE EL ELIPSOIDE

		EXCEL	POLINOMIO GENERALIZADO	
			EMPLEANDO 6 DATOS	EMPLEANDO 16 DATOS
		HAS.	HAS.	HAS.
SUPERFICIE	EN EL SISTEMA UTM	20-15-62.211	20-15-62.211	20-15-62.211
	SOBRE EL ELIPSOIDE	20-13-33.590	20-13-33.602	20-13-33.590
	ECUACIÓN	$y = -4x10^{-14}x^2 + 0.9989x - 0.2168$	$y = 2.858x10^{-12}x^2 + 0.998864x + 0.179549$	$y = -3.727x10^{-14}x^2 + 0.998866x - 0.216789$

## 7.4 LA SUPERFICIE DE LA PROPIEDAD SOCIAL

Una idea recurrente que se ha comentado a lo largo del presente trabajo, es la de presentar las dimensiones de un núcleo agrario (*o una porción de él*) de tal manera que se apeguen lo mejor posible a la realidad que encontramos en campo.

Como sabemos, cuando queremos representar una propiedad social en medios impresos, el uso de aquellos sistemas de coordenadas que emplean una proyección cartográfica se identifica como el más adecuado.

En ese orden de ideas, no obstante que en ocasiones, el precio por metro cuadrado de las propiedades sociales suele ser bajo, el hecho de que dichas propiedades lleguen a alcanzar superficies extensas, hace que el valor final de la propiedad se eleve y en consecuencia también se convierta en un asunto de interés económico.

Si recordamos lo ya señalado en otras secciones, entendemos que existen diferentes superficies que son susceptibles de tomarse de referencia, para calcular el área que ocupa una propiedad social específica. La elección de una u otra, por supuesto repercute de manera directa sobre la determinación del tamaño final de una propiedad, y por ende también en su valor económico.

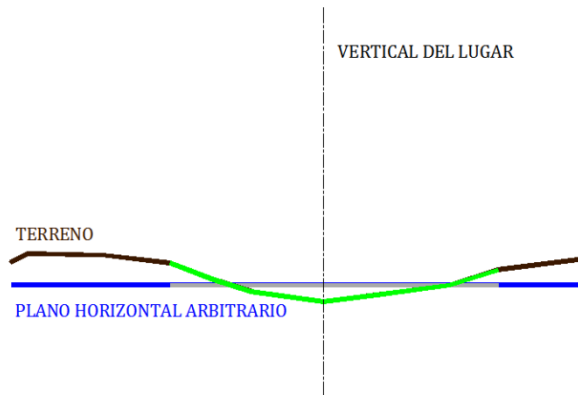
Esperando no omitir alguna, las superficies de referencia más significativas son:

- I. Un plano horizontal que atravesase por el promedio de las elevaciones conocidas de cada vértice. Ver figura 7.7.  
Posteriormente se puede determinar la superficie deseada por métodos planimétricos. Una estación total nos serviría muy bien para esta tarea.
- II. El plano de referencia de una proyección cartográfica.  
Para valernos de él, podemos obtener las coordenadas geodésicas de cada vértice del polígono y después proyectarlas a un sistema plano como el UTM, TME o quizá a una variante como las descritas en el capítulo 4. Por supuesto, después se calcularía la superficie por métodos planimétricos. Por ejemplo, para llevar a cabo esto, podemos usar un equipo GPS y/o una Estación Total.
- III. La superficie de un elipsoide de revolución, como el del WGS84. Ver figura 7.8.  
Contando ya con las coordenadas geodésicas de los vértices del polígono, se puede emplear alguno de los procedimientos comentados en la sección 7.1, una variante de ellos o quizá algún procedimiento más elaborado.



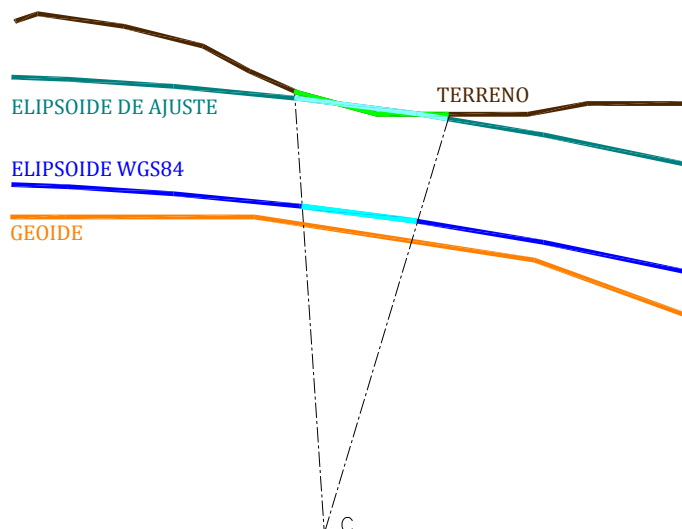
IV. Establecer un elipsoide de revolución que atraviese por las cercanías de la región sobre el terreno que ocupa la propiedad social. Basta con mencionar que el desarrollo de esta opción queda fuera de los alcances del presente trabajo, ya que se considera un tema interesante, digno de desarrollarse en un escrito especialmente elaborado para tal fin.

FIGURA 7.7  
PLANO DE REFERENCIA HORIZONTAL ARBITRARIO



En la figura 7.7, se muestra la vista de perfil de un plano horizontal que atraviesa en el promedio de las elevaciones de los vértices de un polígono. En color verde se representa la propiedad social. En color gris, la proyección de la superficie del terreno sobre el plano de referencia.

FIGURA 7.8  
PLANO DE REFERENCIA SOBRE EL ELIPSOIDE  
ELIPSOIDE DE MEJOR AJUSTE



En la figura 7.8, se observa la representación esquemática de una vista de perfil, en la que se presentan las superficies de referencia elipsoidales. Como en otras ocasiones, las dimensiones se encuentran exageradas para ilustrar claramente las ideas expuestas.

#### 7.4.1 SUPERFICIES DE REFERENCIA PARA EL CÁLCULO DE ÁREAS

En la sección 6.5, tomamos el polígono del derecho de vía de una carretera en el Estado de Guerrero y lo utilizamos para identificar las distorsiones que sufría el mismo, al representarlo en diferentes sistemas de referencia.

Como recordaremos, de inicio contamos con las coordenadas geodésicas de los vértices que componen el polígono del derecho de vía de la carretera. A partir de estas y mediante el empleo del programa TMCALC, transformamos dichas coordenadas al sistema UTM, y a la proyección TME.

Adicionalmente, usando las coordenadas geodésicas de los vértices que componen el polígono del derecho de vía, trasladamos el polígono a las cercanías del meridiano central definido en la proyección TME citada en el párrafo anterior; con esto, las coordenadas geodésicas así obtenidas, también se transformaron al sistema UTM y se incorporaron al análisis de aquella sección.

Detallando un poco más, para poder obtener el polígono en el Sistema Astronómico Local, nos valimos de las transformaciones de coordenadas siguientes:

$$(\vec{r}_{AB})_{GL} = P_Y \cdot R_Y(\varphi_A - 90^\circ) \cdot R_Z(\lambda_A - 180^\circ) \cdot (\vec{r}_{AB})_G$$

$$(\vec{r}_{AB})_{AL} = R_Z(\eta_A \tan \varphi_A) \cdot R_Y(-\xi_A) \cdot R_X(\eta_A) \cdot (\vec{r}_{AB})_{GL}$$

En las que por supuesto, el punto A se refiere al punto origen del sistema local. El resto de los términos, se definieron previamente en la sección 6.4.3.

Siguiendo estos pasos, se obtuvieron cuatro polígonos, establecidos en cuatro sistemas de referencia para posteriormente hacer los comentarios pertinentes.

Ahora, para complementar el análisis, en esta sección se presenta la variación en superficie encontrada, asociada directamente al sistema de referencia elegido para calcular el área de una propiedad social.

Con los resultados obtenidos en la sección 7.3, podemos incorporar al análisis, la superficie de un quinto polígono que representa el derecho de vía de la carretera en estudio.

En la tabla 7.3, se presentan a manera de resumen, las superficies calculadas de los cinco polígonos descritos.

TABLA 7.3  
COMPARACIÓN ENTRE SUPERFICIES  
EN DISTINTOS SISTEMAS DE REFERENCIA

SISTEMA DE REFERENCIA	SUPERFICIE CALCULADA
	HAS.
LOCAL	18-60-06.37
UTM <sub>MC</sub>	20-11-72.97
TME	20-13-33.49
ELIPSOIDE	20-13-33.60
UTM	20-15-62.21

En la tabla 7.3, la etiqueta LOCAL se refiere a la superficie calculada en el Sistema Astronómico Local; la UTM<sub>MC</sub> corresponde a la superficie que se obtuvo al trasladar el polígono del derecho de vía al meridiano central de la zona TME elegida; la TME es la superficie obtenida después transformar las coordenadas geodésicas mediante el uso del programa TMCALC; ELIPSOIDE corresponde a la superficie calculada valiéndonos de la aproximación desarrollada en la sección 7.2; y UTM corresponde al cálculo de superficie obtenido al transformar las coordenadas geodésicas directamente con el programa TMCALC del INEGI.

Nótese el ya comentado aumento en el valor del área, asociado a la elección del sistema de referencia UTM para calcular la superficie de esa propiedad social. El polígono del derecho de vía se encuentra a casi 300 km del meridiano central de la zona UTM 14.

## 7.5 CONCLUSIONES

El establecimiento de una superficie de referencia, para la determinación del área que ocupa una propiedad social, es un elemento de gran importancia que define de manera directa el tamaño de las propiedades, y por ende el valor económico de las mismas; así como la complejidad de los métodos de cálculo a aplicar.

## 7.6 REFERENCIAS

- I. Richard H. Rapp, Geometric Geodesy Part I, The Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, 1958 Neil Avenue, Columbus, Ohio 43210, April 1991.
- II. Roland E. Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards, Cálculo y Geometría Analítica, McGraw-Hill, 1999.

# CAPÍTULO 8

## AJUSTE CON MÍNIMOS CUADRADOS DE LEVANTAMIENTOS CATASTRALES

### 8.1 ERROR Y EQUIVOCACIÓN <sup>89</sup>

Las equivocaciones se tratan de yerros del observador cometidos generalmente por tener un concepto erróneo del problema, por descuido, fatiga, error de comunicación o una apreciación equivocada; como ejemplos de esto tenemos:

- Transposición de números
- Lectura incorrecta
- Visualización de un objeto erróneo

Las equivocaciones se detectan mediante un análisis sistemático de todo el trabajo, para evitar considerarlas incorrectamente como errores.

Existen tres causas por las cuales se cometen errores al efectuar mediciones, y se clasifican de la siguiente manera:

- Errores naturales, causados por variaciones del viento, la temperatura, la humedad, la presión atmosférica, la refracción atmosférica, la gravedad y la declinación magnética.
- Errores instrumentales, se deben a imperfecciones en la construcción o ajuste de los instrumentos y del movimiento de sus partes individuales.
- Errores personales, tienen su origen principalmente en las limitaciones propias de los sentidos humanos, tales como la vista y el tacto.

Los errores de medición son de dos tipos: sistemáticos y aleatorios.

Los errores sistemáticos, también conocidos como sesgos, resultan de factores que comprenden el sistema de medición e incluyen el medio ambiente, los instrumentos y el observador. Las condiciones que ocasionan errores sistemáticos se deben a leyes físicas que se pueden representar matemáticamente. Por tanto, si se conocen las condiciones y se pueden medir, es posible calcular una corrección y aplicarla a los valores observados.

<sup>89</sup> Topografía, págs. 46 y 47.

Un ejemplo típico de error sistemático variable, es el cambio de longitud de una cinta de acero como resultado de diferencias de temperatura que ocurren durante el tiempo de su utilización.

Los errores aleatorios son los que quedan después de haber eliminado los errores sistemáticos. Son ocasionados por factores que quedan fuera del control del observador, obedecen las leyes de la probabilidad y se les llama también errores accidentales. Estos errores están presentes en todas las mediciones topográficas.

## 8.2 MÍNIMOS CUADRADOS

Una vez que eliminamos las equivocaciones y realizamos las correcciones debidas a los errores sistemáticos, podemos identificar la presencia de errores aleatorios cuando intentamos que los valores medidos cumplan ciertas condiciones geométricas inherentes a la naturaleza específica del problema. Por ejemplo, errores de cierre angular en poligonales cerradas, o errores de cierre en circuitos de nivelación.

El método de los mínimos cuadrados ofrece un ajuste riguroso a los valores medidos para producir las condiciones geométricas buscadas.

De un grupo de mediciones, el método proporciona un conjunto de residuos, que tiene la probabilidad más alta de ocurrir.

Recordando que el residuo es la diferencia que existe entre el valor medido de una magnitud y su valor más probable. Nos referimos a valor más probable, debido a que conceptualmente, en una medición, el “*valor verdadero*” es una cantidad que jamás conoceremos.

La condición fundamental del método, es que la suma de los cuadrados de los residuos sea un mínimo; es decir:

$$\sum_{i=1}^m w_i v_i^2 = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + w_3 v_3^2 + \dots + w_m v_m^2 \rightarrow \text{mínimo}$$

En donde  $v_i$  es el residuo  $i$ -ésimo;  $w_i$  es el peso  $i$ -ésimo asignado a las observaciones individuales, el cual representa el grado de confianza en cada medición.

El método en esencia contempla la premisa de que los errores presentan una Distribución de Probabilidad Normal, y en particular ofrece muy buenos resultados cuando se cuenta con un número redundante de observaciones.

Para utilizar la expresión anterior, primero se plantean las ecuaciones de observación, y se le asigna a cada valor observado un residuo; considerando el hecho que de origen cada medición presentará un error. Se hace esto para cada uno de los valores medidos.

En segundo lugar, se identifica la o las relaciones geométricas que guardan los datos medidos, para poder plantear las ecuaciones de condición.

En tercer lugar, se sustituyen en las ecuaciones de condición, los valores asignados en las ecuaciones de observación; para posteriormente identificar las variables independientes (*residuos*) cuyo valor se desea conocer, y con ello sustituirlas en la sumatoria anterior.

A continuación, para minimizar la sumatoria, se obtienen las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables desconocidas y posteriormente se igualan a cero; con lo que se forman un conjunto de ecuaciones que llamamos normales. Al resolver estas ecuaciones se obtienen los valores más probables de las incógnitas.

Existen tres métodos o enfoques a escoger para ajustar los datos observados. La elección se basará en las características especiales de cada problema, y en la habilidad de plantear las ecuaciones de condición necesarias.

Estos tres métodos son: el método Condicional, el método Paramétrico y el método Combinado.

En el método condicional, se identifican las relaciones geométricas que guardan las mediciones y en base a ellas se formulan todas las ecuaciones de condición que tienen que cumplir los datos observados.

En el método paramétrico, se identifican las relaciones geométricas en las que intervienen las variables o parámetros desconocidos, así como la relación que guardan con los datos observados, para que con ello se formulen las ecuaciones de condición que tienen que cumplir los parámetros desconocidos.

En el método combinado, de manera simultánea se consideran los datos observados y las variables desconocidas y se plantea la relación matemática que guardan entre sí, considerando a su vez, las relaciones geométricas subyacentes; para que con ello se puedan formular las ecuaciones de condición que ambos, variables y datos observados tienen que cumplir.

Considerando la cantidad de cálculos involucrados, en el ajuste por mínimos cuadrados se prefiere la utilización de métodos matriciales.

Las *expresiones matriciales*<sup>90</sup> necesarias para la aplicación de los tres métodos son las siguientes:

$$\begin{aligned}\hat{X} &= X^0 + \hat{\delta} \\ \hat{l} &= l^0 + \hat{r} \\ A\hat{\delta} + B\hat{r} + W &= 0\end{aligned}$$

En donde  $X^0$  es el vector de valores iniciales (*valores aproximados*) de los parámetros desconocidos;  $\hat{\delta}$  es la cantidad que se le tiene que sumar a  $X^0$  para aproximarla a su valor más probable  $\hat{X}$ ;  $l^0$  el vector de las observaciones (*valores medidos*);  $\hat{r}$  es la cantidad que se le tiene que sumar a  $l^0$  para aproximarla a su valor más probable  $\hat{l}$ ; A es la matriz formada con las derivadas parciales de las ecuaciones de condición, con respecto a cada una de las incógnitas (*parámetros desconocidos*); B es la matriz formada con las derivadas parciales de las ecuaciones de condición con respecto a cada uno de los observables (*mediciones*).

$$\begin{aligned}M &= (BC_rB^T)^{-1} \\ C_r &= P^{-1} \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{r}^T P \hat{r}}{v}\end{aligned}$$

En donde P es la matriz de pesos asignados a cada una de las observaciones, y  $v$  es el número de grados de libertad.

MÉTODO COMBINADO	MÉTODO PARAMÉTRICO	MÉTODO CONDICIONAL
$\hat{\delta} = -(A^TMA)^{-1}A^T MW$	$\hat{\delta} = -(A^TPA)^{-1}A^T PW$	
$\hat{k} = M(A\hat{\delta} + W)$	$\hat{k} = P(A\hat{\delta} + W)$	$\hat{k} = MW$
$\hat{r} = -C_rB^T\hat{k}$	$\hat{r} = (A\hat{\delta} + W)$	$\hat{r} = -C_rB^T\hat{k}$
$N = (A^TMA)$		
$C_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2N^{-1}$	$C_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2(A^TPA)^{-1}$	$C_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}BP^{-1}$
$C_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2P^{-1}B^T LBP^{-1}$	$C_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2(P^{-1} - A(A^TPA)^{-1}A^T)$	
$C_{\hat{l}} = C_r - C_{\hat{r}}$		
$L = (MAN^{-1}A^T M - M)$		

En donde W es el vector de los residuos, el cual se obtiene al sustituir los valores iniciales, de los parámetros desconocidos y los valores observados, en las ecuaciones de condición.

<sup>90</sup> The Method of Least Squares, Secciones 7.4 y 7.5, págs. 115 a 120.



Por ejemplo, para un problema en el que existan dos parámetros desconocidos  $X_1, X_2$ ; tres mediciones  $l_1, l_2, l_3$ ; y además nos encontremos en la posibilidad de establecer dos ecuaciones de condición  $F_1$  y  $F_2$ ; las matrices  $A$  y  $B$  quedarían:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial l_1} & \frac{\partial F_1}{\partial l_2} & \frac{\partial F_1}{\partial l_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial l_1} & \frac{\partial F_2}{\partial l_2} & \frac{\partial F_2}{\partial l_3} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

En las que es necesario, evaluar las derivadas parciales en los valores iniciales:

$$X^0 = \begin{bmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{bmatrix} \quad l^0 = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

y para aquellos casos en los que se conozcan las desviaciones estándar de los valores medidos, tenemos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3^2} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

A su vez, el vector  $W$  queda formado por:

$$w = \begin{bmatrix} F_1(X_1^0, X_2^0, l_1, l_2, l_3) \\ F_2(X_1^0, X_2^0, l_1, l_2, l_3) \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

### 8.3 AJUSTE DE UNA POLIGONAL CERRADA

Con la finalidad de aterrizar las ideas expuestas, desarrollemos un problema recurrente en Topografía, el ajuste de una poligonal cerrada.

En trabajos de campo, lo común es partir de un punto de coordenadas conocidas y una línea de azimut o rumbo definido. A continuación se calculan las distancias entre vértices y los ángulos interiores del polígono. Lo que se busca es ajustar las distancias y ángulos a sus valores más probables y con ello, a partir de un punto de coordenadas conocidas, obtener las coordenadas de los vértices restantes.

En la figura 8.1, observamos el polígono del cual se desea conocer las coordenadas de sus vértices y obtener los valores ajustados de las cantidades medidas. De la línea formada por los vértices A y B se conocen las coordenadas y azimut; y para este ejemplo se consideran libres de error. Es una situación común partir de puntos de referencia conocidos, a los que mediante un trabajo previo, se les determinan con precisión sus coordenadas.

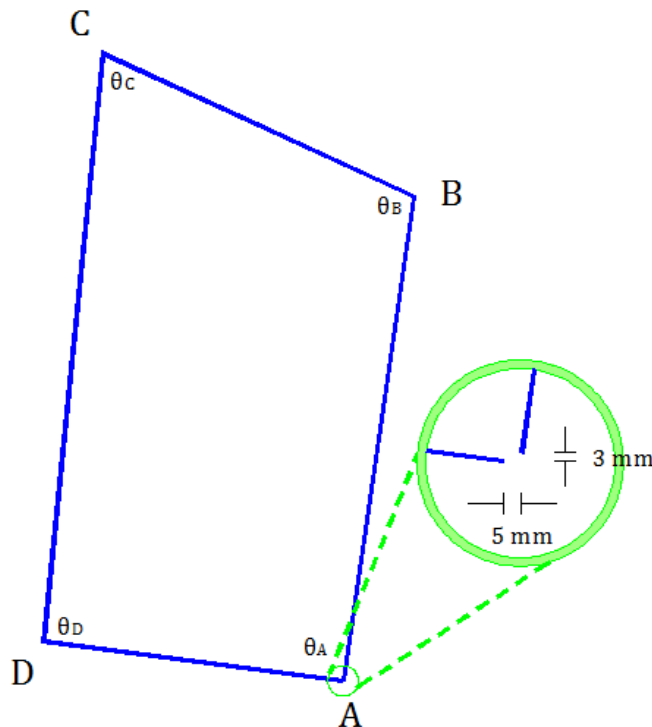
Deseamos conocer las coordenadas ajustadas de los vértices C y D, y los valores ajustados de las distancias de las líneas B-C, C-D, D-A; y los ángulos interiores A, B, C y D.

Los datos medidos en campo son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} D_{BC} = 9.934 \text{ m} & \theta_B = 106^\circ 25' 11'' \\ D_{CD} = 17.200 \text{ m} & \theta_C = 71^\circ 03' 54'' \\ D_{DA} = 8.770 \text{ m} & \theta_D = 91^\circ 39' 54'' \\ & \theta_A = 90^\circ 51' 17'' \end{array}$$

Como podemos observar en la figura 8.1, con los valores medidos en campo, se construye una poligonal no cerrada, debido a los errores de cierre angular y lineal inherentes a los valores medidos.

FIGURA 8.1  
POLIGONAL NO CERRADA



### 8.3.1 MÉTODO CONDICIONAL

Un método comúnmente usado para ajustar poligonales es el de la regla de la brújula (o *método de Bowditch*), esta regla ajusta las proyecciones de los lados de la poligonal, en proporción a sus longitudes. Utiliza la condición geométrica de que la suma de las proyecciones Norte-Sur y la suma de las proyecciones Este-Oeste deben ser cero, respectivamente. La corrección calculada se aplica en razón de la magnitud del lado respectivo. Previamente para aplicar esta regla se debe de cumplir una segunda condición geométrica, la suma de los ángulos interiores de la poligonal debe ser igual a  $(n-2) \times 180^\circ$ .

Considerando estas dos condiciones geométricas, planteamos las ecuaciones de condición, para ajustar la poligonal mediante el método condicional de mínimos cuadrados.

Las condiciones geométricas son:

$$\begin{aligned}\sum P_X &= 0 \\ \sum P_Y &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i &= 360^\circ\end{aligned}$$

Desarrollando las proyecciones en Y, tenemos:

$$\sum P_Y : \quad D_{AB} \cdot \cos(R_{AB}) + D_{BC} \cdot \cos(R_{BC}) - D_{CD} \cdot \cos(R_{CD}) - D_{DA} \cdot \cos(R_{DA}) = 0$$

Definimos que la distancia  $D_{AB}$  y el rumbo  $R_{AB}$ , para este ejemplo, se considerarán libres de error por pertenecer a la línea base de partida. Pero los rumbos de las otras tres líneas se encuentran en función de los ángulos interiores  $\theta_B$ ,  $\theta_C$  y  $\theta_D$ , desarrollando:

$$R_{BC} = 180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)$$

$$R_{CD} = \theta_C - R_{BC}$$

$$R_{CD} = \theta_C - [180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)]$$

$$R_{CD} = \theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ$$

$$R_{DA} = 180^\circ - (R_{CD} + \theta_D)$$

$$R_{DA} = 180^\circ - [(\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ) + \theta_D]$$

$$R_{DA} = 360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})$$

Sustituyendo estas tres expresiones en la sumatoria de proyecciones en Y, tenemos nuestra primera ecuación de condición F<sub>1</sub>:

$$\sum P_Y : \quad D_{AB} \cdot \cos(R_{AB}) + D_{BC} \cdot \cos[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] - D_{CD} \cdot \cos[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ] \\ - D_{DA} \cdot \cos[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})] = 0$$

Desarrollando la expresión para las proyecciones en X, nos da:

$$D_{AB} \cdot \cos(R_{AB}) + D_{BC} \cdot \cos(R_{BC}) + D_{CD} \cdot \cos(R_{CD}) + D_{DA} \cdot \cos(R_{DA}) = 0$$

Haciendo lo propio para la sumatoria de proyecciones en X, nos queda nuestra segunda ecuación de condición F<sub>2</sub>:

$$\sum P_X : \quad D_{AB} \cdot \sin(R_{AB}) - D_{BC} \cdot \sin[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] - D_{CD} \cdot \sin[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ] \\ + D_{DA} \cdot \sin[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})] = 0$$

Para formar la tercera ecuación de condición F<sub>3</sub> desarrollamos la expresión:

$$\sum_{i=1}^4 \theta_i : \quad \theta_A + \theta_B + \theta_C + \theta_D = 360^\circ$$

Ahora para formar la matriz B, obtenemos las derivadas parciales de las ecuaciones F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub> y F<sub>3</sub> con respecto a los valores medidos.

#### Ecuación de condición F<sub>1</sub>

$$\frac{\partial F_1}{\partial D_{BC}} = \cos[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial D_{CD}} = -\cos[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial D_{DA}} = -\cos[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_A} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_B} = D_{BC} \cdot \sin[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] + D_{CD} \cdot \sin[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ] + D_{DA} \cdot \sin[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_C} = D_{CD} \cdot \sin[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ] + D_{DA} \cdot \sin[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_D} = D_{DA} \cdot \sin[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

Ecuación de condición F<sub>2</sub>

$$\frac{\partial F_2}{\partial D_{BC}} = -\sin[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial D_{CD}} = -\sin[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial D_{DA}} = \sin[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_A} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_B} = D_{BC} \cdot \cos[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] - D_{CD} \cdot \cos[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ] + D_{DA} \cdot \cos[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_C} = -D_{CD} \cdot \cos[\theta_B + \theta_C + R_{AB} - 180^\circ] + D_{DA} \cdot \cos[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_D} = D_{DA} \cdot \cos[360^\circ - (\theta_B + \theta_C + \theta_D + R_{AB})]$$

Ecuación de condición F<sub>3</sub>

$$\frac{\partial F_3}{\partial D_{BC}} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \theta_B} = 1$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial D_{CD}} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \theta_C} = 1$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial D_{DA}} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \theta_D} = 1$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \theta_A} = 1$$

Sustituyendo los valores iniciales en las derivadas parciales, nos encontramos en la posibilidad de formar la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0.418 & -0.995 & -0.129 & 0 & 19.451 & 10.427 & 8.696 \\ -0.908 & -0.101 & 0.992 & 0 & -11.825 & -15.977 & 1.136 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 7}$$

Cabe señalar que es indispensable que la matriz B y W sean congruentes respecto a las filas en las que se coloquen los valores correspondientes a cada ecuación de condición; es decir, si en la matriz B se asigna la fila dos a la ecuación de condición dos, en ese mismo número de fila deberá aparecer en la matriz W.

Para formar la matriz W, se requiere sustituir los valores iniciales en las tres ecuaciones de condición.

$$W = \begin{bmatrix} -0.00247 \\ -0.00540 \\ 0.00008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ rad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00247 \\ -0.00540 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ \text{° ' ''} \end{bmatrix}$$

Aplicando las expresiones matriciales, correspondientes al método condicional, tenemos:

$$M = (BB^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0087 & 0.0051 & -0.0496 \\ 0.0051 & 0.0076 & 0.0010 \\ -0.0496 & 0.0010 & 0.7348 \end{bmatrix}$$

$$\hat{k} = MW = \begin{bmatrix} -0.00005 \\ -0.00005 \\ 0.00017 \end{bmatrix}$$

$$\hat{r} = -B^T \hat{k} = \begin{bmatrix} -0.00003 \\ -0.00006 \\ 0.00005 \\ -0.00017 \\ 0.00022 \\ -0.00047 \\ 0.00035 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ rad \\ rad \\ rad \\ rad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00003 \\ -0.00006 \\ 0.00005 \\ 0 & 0 & -35.90 \\ 0 & 0 & 46.30 \\ 0 & -1 & -37.95 \\ 0 & 1 & 11.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \end{bmatrix}$$

$$\hat{l} = l^0 + \hat{r} = \begin{bmatrix} 9.934 \\ 17.200 \\ 8.770 \\ 90 & 50 & 41.10 \\ 106 & 25 & 57.30 \\ 71 & 02 & 16.05 \\ 91 & 41 & 05.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \end{bmatrix}$$

En la matriz  $\hat{r}$  nótese la variación mínima en los valores de las longitudes de los lados; la variación más significativa se encuentra en el valor de los ángulos internos del polígono.

Factor de varianza a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{r^T r}{v} = \frac{0.000000433}{1}$$

Matriz de varianzas-covarianzas

$$C_r = \hat{\sigma}_0^2 B^T (BB^T)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1.7 \times 10^{-9} & 6.4 \times 10^{-10} & -2.0 \times 10^{-9} & -9.0 \times 10^{-9} & 6.2 \times 10^{-9} & 1.9 \times 10^{-8} & -2.0 \times 10^{-8} \\ 6.4 \times 10^{-10} & 4.2 \times 10^{-9} & -2.0 \times 10^{-9} & 2.1 \times 10^{-8} & -3.0 \times 10^{-8} & 2.0 \times 10^{-8} & -2.0 \times 10^{-8} \\ -2.0 \times 10^{-9} & -2.0 \times 10^{-9} & 2.7 \times 10^{-9} & 3.2 \times 10^{-9} & 1.5 \times 10^{-9} & -3.0 \times 10^{-8} & 2.1 \times 10^{-8} \\ -9.0 \times 10^{-9} & 2.1 \times 10^{-8} & 3.2 \times 10^{-9} & 3.2 \times 10^{-7} & -1.0 \times 10^{-7} & 8.7 \times 10^{-8} & 1.3 \times 10^{-7} \\ 6.2 \times 10^{-9} & -3.0 \times 10^{-8} & 1.5 \times 10^{-9} & -1.0 \times 10^{-7} & 3.3 \times 10^{-7} & 8.3 \times 10^{-8} & 1.2 \times 10^{-7} \\ 1.9 \times 10^{-8} & 2.0 \times 10^{-8} & -3.0 \times 10^{-8} & 8.7 \times 10^{-8} & 8.3 \times 10^{-8} & 3.6 \times 10^{-7} & -1.0 \times 10^{-7} \\ -2.0 \times 10^{-8} & -2.0 \times 10^{-8} & 2.1 \times 10^{-8} & 1.3 \times 10^{-7} & 1.2 \times 10^{-7} & -1.0 \times 10^{-7} & 2.8 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Calculando la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, obtenemos las desviaciones estándar de cada una de las mediciones

$$\sigma_{\hat{l}} = \begin{bmatrix} 0.00004 & & & & & & \\ & 0.00006 & & & & & \\ & & 0.00005 & & & & \\ & & & 0.00056 & & & \\ & & & & 0.00058 & & \\ & & & & & 0.00060 & \\ & & & & & & 0.00053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ rad \\ rad \\ rad \\ rad \end{bmatrix}$$

Al sustituir en nuestras tres ecuaciones de condición estos primeros valores aproximados, encontramos que se cumple la condición de cierre angular, pero la suma de proyecciones en el eje Y presenta un residuo de 1.68 mm, y en el eje X de 2.2 décimas de milímetro. Por supuesto, estas cantidades, aunque son pequeñas, se presentarán como error de cierre al calcular las coordenadas de los vértices de la poligonal.

Como sabemos, en el método de la regla de la brújula, se obtienen las correcciones respectivas y se obliga a que los valores medidos cumplan las restricciones geométricas impuestas.

De inicio, puede parecer que el método condicional presenta cierta desventaja frente al método de la regla de la brújula. Pero, es preciso tomar en cuenta dos hechos; primero la naturaleza arbitraria en el ajuste de cierre angular necesaria para aplicar la regla de la brújula. En segundo lugar, que como ya se mencionó, el método de mínimos cuadrados ofrece mejores resultados cuando se cuenta con medidas redundantes.

Por ejemplo, si en vez de tener una poligonal cerrada, contamos con una red de mediciones que incluya los vértices cuyas coordenadas deseamos conocer, el método de los mínimos cuadrados ofrece la posibilidad de considerar simultáneamente todos los valores medidos, proporcionando un ajuste más riguroso de las variables involucradas.

Aplicando el método condicional, obtenemos los valores más probables de los valores medidos y sus desviaciones estándar; pero si queremos conocer las coordenadas de los vértices de la poligonal es necesario realizar cálculos adicionales.

$$\begin{aligned} X_C &= X_B - D_{BC} \cdot \sin(R_{BC}) & X_D &= X_A - D_{DA} \cdot \sin(R_{AD}) \\ Y_C &= Y_B + D_{BC} \cdot \cos(R_{BC}) & Y_D &= Y_A + D_{DA} \cdot \cos(R_{AD}) \end{aligned}$$

Reescribiendo las ecuaciones en función de los valores medidos, tenemos:

$$\begin{aligned} X_C &= X_B - D_{BC} \cdot \sin[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] & X_D &= X_A - D_{DA} \cdot \sin(\theta_A - R_{AB}) \\ Y_C &= Y_B + D_{BC} \cdot \cos[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] & Y_D &= Y_A + D_{DA} \cdot \cos(\theta_A - R_{AB}) \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores correspondientes, tenemos:

$$\begin{aligned} X_C &= 93.029541 \text{ m} & X_D &= 91.303893 \text{ m} \\ Y_C &= 118.247637 \text{ m} & Y_D &= 101.136412 \text{ m} \end{aligned}$$

Pero como deseamos calcular las coordenadas de C y D, en base a datos que presentan desviaciones estándar; adicionalmente aplicamos la Ley Especial de Propagación de las Varianzas SLOPOV, por sus siglas en inglés.



Para el punto C

$$C_{X_C Y_C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_C}{\partial D_{BC}} & \frac{\partial X_C}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial Y_C}{\partial D_{BC}} & \frac{\partial Y_C}{\partial \theta_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{D_{BC}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta_B}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_C}{\partial D_{BC}} & \frac{\partial X_C}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial Y_C}{\partial D_{BC}} & \frac{\partial Y_C}{\partial \theta_B} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial X_C}{\partial D_{BC}} = -\sin[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] \quad \frac{\partial X_C}{\partial \theta_B} = D_{BC} \cdot \cos[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)]$$

$$\frac{\partial Y_C}{\partial D_{BC}} = \cos[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)] \quad \frac{\partial Y_C}{\partial \theta_B} = D_{BC} \cdot \sin[180^\circ - (R_{AB} + \theta_B)]$$

$$C_{X_C Y_C} = \begin{bmatrix} 0.908 & -4.155 \\ 0.418 & 9.023 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 3.3 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.908 & 0.418 \\ -4.155 & 9.023 \end{bmatrix}$$

$$C_{X_C Y_C} = \begin{bmatrix} 0.000006 & -0.000012 \\ -0.000012 & 0.000027 \end{bmatrix}$$

Calculando la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, obtenemos las desviaciones estándar de cada una de las coordenadas ajustadas.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X_C} \\ \sigma_{Y_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002395 & \\ & 0.005202 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}$$

Para el punto D

$$C_{X_D Y_D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_D}{\partial D_{DA}} & \frac{\partial X_D}{\partial \theta_A} \\ \frac{\partial Y_D}{\partial D_{DA}} & \frac{\partial Y_D}{\partial \theta_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{D_{DA}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta_A}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_D}{\partial D_{DA}} & \frac{\partial X_D}{\partial \theta_A} \\ \frac{\partial Y_D}{\partial D_{DA}} & \frac{\partial Y_D}{\partial \theta_A} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial X_D}{\partial D_{DA}} = -\sin(\theta_A - R_{AB}) \quad \frac{\partial X_D}{\partial \theta_A} = -\cos(\theta_A - R_{AB})$$

$$\frac{\partial Y_D}{\partial D_{DA}} = \cos(\theta_A - R_{AB}) \quad \frac{\partial Y_D}{\partial \theta_A} = -\sin(\theta_A - R_{AB})$$

$$C_{X_D Y_D} = \begin{bmatrix} 0.992 & 1.136 \\ 0.130 & -8.696 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 3.2 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.992 & 0.130 \\ 1.136 & -8.696 \end{bmatrix}$$

$$C_{X_D Y_D} = \begin{bmatrix} 0.0000004 & -0.0000031 \\ -0.0000031 & 0.0000240 \end{bmatrix}$$

Nuevamente de la diagonal principal, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X_D} \\ \sigma_{Y_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000643 & \\ & 0.004903 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}$$

## 8.3.2 MÉTODO PARAMÉTRICO

Para nuestra poligonal cerrada y empleando los valores medidos en campo, el método paramétrico nos ofrece la posibilidad de obtener de una manera más directa las coordenadas ajustadas de los vértices.

En la aplicación de este método, primero planteamos las ecuaciones de condición en las que intervienen las incógnitas (*parámetros desconocidos*) y los valores medidos.

Se parte del enfoque de que un ángulo interior de la poligonal se puede expresar en términos de los azimuts de los lados que lo forman; y a su vez, los azimuts se encuentran definidos por las coordenadas de los vértices involucrados. Aplicando este criterio a nuestros cuatro ángulos internos de la poligonal, tenemos:

$$\theta_A = \{360^\circ - Az_{AD}\} + Az_{AB}$$

$$\theta_A = \left\{ 360^\circ - \left[ 360^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_D - X_A}{Y_D - Y_A} \right) \right] \right\} + \tan^{-1} \left( \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} \right)$$

$$F_1 : \quad -\tan^{-1} \left( \frac{X_D - X_A}{Y_D - Y_A} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} \right) - \theta_A = 0$$

$$\theta_B = Az_{BC} - Az_{BA}$$

$$\theta_B = \left[ 360^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B} \right) \right] - \left[ 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_A - X_B}{Y_A - Y_B} \right) \right]$$

$$F_2 : \quad 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{X_A - X_B}{Y_A - Y_B} \right) - \theta_B = 0$$

$$\theta_C = Az_{CD} - Az_{CB}$$

$$\theta_C = \left[ 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C} \right) \right] - \left[ 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_B - X_C}{Y_B - Y_C} \right) \right]$$

$$F_3 : \quad \tan^{-1} \left( \frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{X_B - X_C}{Y_B - Y_C} \right) - \theta_C = 0$$

$$\theta_D = Az_{DA} - Az_{DC}$$

$$\theta_D = \left[ 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_A - X_D}{Y_A - Y_D} \right) \right] - \left[ \tan^{-1} \left( \frac{X_C - X_D}{Y_C - Y_D} \right) \right]$$

$$F_4 : \quad 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_A - X_D}{Y_A - Y_D} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{X_C - X_D}{Y_C - Y_D} \right) - \theta_D = 0$$

Para formular las ecuaciones de condición para ángulos, se debe poner un especial cuidado en la interpretación de los azimuts y analizar el cuadrante en el que se encuentran cada uno de los lados que forman el ángulo interno respectivo; para que con ello se logre identificar la constante que es necesario aplicar, ver tabla 8.1.

TABLA 8.1  
RELACIÓN ENTRE EL CUADRANTE,  
LA CONSTANTE, Y EL AZIMUT DE UNA LÍNEA

CUADRANTE	SIGNO ( X <sub>r</sub> - X <sub>i</sub> )	SIGNO ( Y <sub>r</sub> - Y <sub>i</sub> )	SIGNO α	CONSTANTE	AZIMUT
I	+	+	+	0	α
II	+	-	-	180°	α + 180°
III	-	-	+	180°	α + 180°
IV	-	+	-	360°	α + 360°

Tabla 15.1, "Adjustment Computations", pág. 256.

Ecuaciones de condición respecto a las distancias

$$F_5 : \quad \begin{aligned} D_{BC} &= [(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2]^{\frac{1}{2}} \\ [(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2]^{\frac{1}{2}} - D_{BC} &= 0 \end{aligned}$$

$$F_6 : \quad \begin{aligned} D_{CD} &= [(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2]^{\frac{1}{2}} \\ [(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2]^{\frac{1}{2}} - D_{CD} &= 0 \end{aligned}$$

$$F_7 : \quad \begin{aligned} D_{DA} &= [(X_A - X_D)^2 + (Y_A - Y_D)^2]^{\frac{1}{2}} \\ [(X_A - X_D)^2 + (Y_A - Y_D)^2]^{\frac{1}{2}} - D_{DA} &= 0 \end{aligned}$$

Para utilizar las expresiones matriciales, correspondientes al método paramétrico, nuevamente es necesario obtener las derivadas parciales de las ecuaciones de condición, pero ahora con respecto a los parámetros desconocidos.

Para lo cual, requerimos utilizar las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx} \left[ \frac{u}{v} \right] = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \frac{d}{dx} [u^n] = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

Aplicándolas, según corresponda, a cada una de las siete ecuaciones de condición y derivando respecto a los cuatro parámetros desconocidos X<sub>C</sub>, Y<sub>C</sub>, X<sub>D</sub>, Y<sub>D</sub>, tenemos:

### Ecuación de condición F<sub>1</sub>

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_C} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Y_C} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_D} = \frac{1}{1 + \left[\frac{X_D - X_A}{Y_D - Y_A}\right]^2} \cdot \frac{1}{(Y_D - Y_A)}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Y_D} = -\frac{1}{1 + \left[\frac{X_D - X_A}{Y_D - Y_A}\right]^2} \cdot \frac{-(X_D - X_A)}{(Y_D - Y_A)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_D} = -\frac{(Y_D - Y_A)}{(X_D - X_A)^2 + (Y_D - Y_A)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Y_D} = \frac{(X_D - X_A)}{(X_D - X_A)^2 + (Y_D - Y_A)^2}$$

### Ecuación de condición F<sub>2</sub>

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_C} = \frac{(Y_C - Y_B)}{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y_C} = -\frac{(X_C - X_B)}{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_D} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y_D} = 0$$

### Ecuación de condición F<sub>3</sub>

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_C} = \frac{-(Y_D - Y_C)}{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2} + \frac{(Y_B - Y_C)}{(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Y_C} = \frac{(X_D - X_C)}{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2} - \frac{(X_B - X_C)}{(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_D} = \frac{(Y_D - Y_C)}{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Y_D} = -\frac{(X_D - X_C)}{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2}$$

### Ecuación de condición F<sub>4</sub>

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_C} = -\frac{(Y_C - Y_D)}{(X_C - X_D)^2 + (Y_C - Y_D)^2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Y_C} = \frac{(X_C - X_D)}{(X_C - X_D)^2 + (Y_C - Y_D)^2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_D} = \frac{-(Y_A - Y_D)}{(X_A - X_D)^2 + (Y_A - Y_D)^2} + \frac{(Y_C - Y_D)}{(X_C - X_D)^2 + (Y_C - Y_D)^2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Y_D} = \frac{(X_A - X_D)}{(X_A - X_D)^2 + (Y_A - Y_D)^2} - \frac{(X_C - X_D)}{(X_C - X_D)^2 + (Y_C - Y_D)^2}$$

### Ecuación de condición F<sub>5</sub>

$$\frac{\partial F_5}{\partial X_C} = \frac{1}{2} \cdot [(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2 \cdot (X_C - X_B) \cdot (1)]$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial Y_C} = \frac{1}{2} \cdot [(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2 \cdot (Y_C - Y_B) \cdot (1)]$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial X_C} = \frac{(X_C - X_B)}{[(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial Y_C} = \frac{(Y_C - Y_B)}{[(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial X_D} = 0$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial Y_D} = 0$$

Ecuación de condición F<sub>6</sub>

$$\frac{\partial F_6}{\partial X_C} = -\frac{(X_D - X_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial Y_C} = -\frac{(Y_D - Y_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial X_D} = \frac{(X_D - X_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial Y_D} = \frac{(Y_D - Y_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Ecuación de condición F<sub>7</sub>

$$\frac{\partial F_7}{\partial X_C} = 0$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial X_D} = -\frac{(X_A - X_D)}{[(X_A - X_D)^2 + (Y_A - Y_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial Y_C} = 0$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial Y_D} = -\frac{(Y_A - Y_D)}{[(X_A - X_D)^2 + (Y_A - Y_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Para establecer los valores iniciales para los parámetros desconocidos, se propone calcular las coordenadas de los vértices C y D, en base a los valores medidos de las distancias D<sub>BC</sub>, D<sub>CD</sub> y D<sub>DA</sub>; así como los ángulos interiores A, B, C y D.

Esto es, calculamos las proyecciones N, S, E y W de cada lado; y partiendo de las coordenadas fijas del vértice A (100,100), obtenemos las coordenadas del resto de los vértices.

En esta ocasión realizamos el cálculo en sentido horario y en sentido anti-horario. Con esto, obtenemos un par de valores de las coordenadas (X, Y), de los vértices C y D, respectivamente; posteriormente se calcula el promedio, y con ello obtenemos los valores iniciales requeridos. Las expresiones son:

$$X_C^0 = \frac{X_{C\text{horario}} + X_{C\text{anti-horario}}}{2}$$

$$X_D^0 = \frac{X_{D\text{horario}} + X_{D\text{anti-horario}}}{2}$$

$$Y_C^0 = \frac{Y_{C\text{horario}} + Y_{C\text{anti-horario}}}{2}$$

$$Y_D^0 = \frac{Y_{D\text{horario}} + Y_{D\text{anti-horario}}}{2}$$

En la medida en la que los valores iniciales se encuentren cercanos a los valores más probables de los parámetros desconocidos, el método tiende a converger más rápidamente a la solución buscada.

Los valores iniciales fijos y calculados, son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} X_A = 100 \text{ m} & Y_A = 100 \text{ m} \\ X_B = 102.053 \text{ m} & Y_B = 114.093 \text{ m} \\ X_C = 93.0315 \text{ m} & Y_C = 118.2465 \text{ m} \\ X_D = 91.3015 \text{ m} & Y_D = 101.1335 \text{ m} \end{array}$$

Sustituyendo los valores iniciales en las derivadas parciales, nos encontramos en la posibilidad de formar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.015 & -0.113 \\ 0.042 & 0.091 & 0 & 0 \\ 0.016 & -0.097 & -0.058 & 0.006 \\ -0.058 & 0.006 & 0.073 & 0.107 \\ -0.908 & 0.418 & 0 & 0 \\ 0.101 & 0.995 & -0.101 & -0.995 \\ 0 & 0 & -0.992 & 0.129 \end{bmatrix}_{7 \times 4}$$

Nuevamente para formar la matriz W, se requiere sustituir los valores iniciales en las ahora siete ecuaciones de condición.

$$W = \begin{bmatrix} 0.000160 \\ 0.000233 \\ -0.000240 \\ -0.000231 \\ -0.002282 \\ 0.000223 \\ 0.002042 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ rad \\ rad \\ m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 33.05 \\ 0 & 0 & 48.09 \\ 0 & 0 & -49.59 \\ 0 & 0 & -47.55 \\ -0.002282 \\ 0.000223 \\ 0.002042 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

Aplicando las expresiones matriciales correspondientes al método paramétrico, tenemos:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6.019 & 10.459 & 1.275 & 10.686 \\ 10.459 & 22.726 & 2.725 & 22.498 \\ 1.275 & 2.725 & 1.325 & 2.772 \\ 10.686 & 22.498 & 2.772 & 24.155 \end{bmatrix}$$

$$A^T W = \begin{bmatrix} 0.002115 \\ -0.000689 \\ -0.002053 \\ -0.000002 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = -(A^T A)^{-1} A^T W = \begin{bmatrix} -0.002881 \\ -0.000813 \\ 0.001908 \\ -0.001041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ X_D \\ Y_D \end{bmatrix} = X^0 + \hat{\delta} = \begin{bmatrix} 93.029 \\ 118.246 \\ 91.303 \\ 101.132 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

Al realizar la segunda iteración, el método nos da valores para  $\hat{\delta}$  del orden de micras; por lo que es suficiente la primera iteración, para obtener los valores más probables de las coordenadas de C y D con cifras al milímetro.

En este caso, se da que:

$$\hat{k} = \hat{r} = (A\hat{\delta} + W) = \begin{bmatrix} 0.000250 \\ 0.000037 \\ -0.000323 \\ -0.000042 \\ -0.000005 \\ -0.000033 \\ 0.000015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ rad \\ rad \\ m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 51.51 \\ 0 & 0 & 7.72 \\ 0 & -1 & -6.64 \\ 0 & 0 & -8.59 \\ -0.000005 \\ -0.000033 \\ 0.000015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ \circ & ' & '' \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

La matriz  $\hat{r}$  nos proporciona una aproximación a los valores de los residuos que encontraríamos al sustituir los valores ajustados  $\hat{X}$  en las ecuaciones de condición.

Sustituyendo los valores calculados de la matriz  $\hat{X}$  en las ecuaciones de condición y comparándolos con los valores de  $\hat{r}$  encontramos que, respectivamente, las diferencias entre los mismos se encuentran en el orden de milésimas de segundo para el caso de los ángulos y de décimas de micra para las distancias.

En cierta forma, esto nos da una idea de la exactitud del método, en lo que respecta a aproximar las funciones no lineales mediante el uso de la serie de Taylor. En la siguiente sección se hablará un poco más de esto.

Como se podrá haber notado, en estos dos ejemplos no conocemos el peso de cada una de las mediciones, por lo tanto la matriz P se omite en los cálculos.

Factor de varianza a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{r^T r}{v} = \frac{0.000\ 000\ 1712}{3}$$

En donde, v es el número de grados de libertad, y se calcula como:

$$v = n - u$$

En donde, n es el número de observables (*ecuaciones de condición formuladas*); u es el número de incógnitas (*parámetros desconocidos*), que para nuestro caso son las coordenadas (X, Y), de los vértices C y D.

Para obtener las desviaciones estándar de las coordenadas, calculamos la matriz

$$C_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3.44 \times 10^{-7} & 5.97 \times 10^{-7} & 7.28 \times 10^{-8} & 6.10 \times 10^{-7} \\ 5.97 \times 10^{-7} & 1.30 \times 10^{-6} & 1.56 \times 10^{-7} & 1.31 \times 10^{-6} \\ 7.28 \times 10^{-8} & 1.56 \times 10^{-7} & 7.56 \times 10^{-8} & 1.58 \times 10^{-7} \\ 6.10 \times 10^{-7} & 1.31 \times 10^{-6} & 1.58 \times 10^{-7} & 1.38 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

La raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, nos proporciona las desviaciones estándar de las coordenadas de los puntos C y D.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X_C} & & & \\ & \sigma_{Y_C} & & \\ & & \sigma_{X_D} & \\ & & & \sigma_{Y_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000586 & & & \\ & 0.001139 & & \\ & & 0.000275 & \\ & & & 0.001174 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

Para obtener las desviaciones estándar de los valores medidos, calculamos la matriz

$$\hat{\sigma}_0^2 [A(A^T A)^{-1} A^T] = \begin{bmatrix} 1.8x10^{-8} & -1.7x10^{-8} & 1.4x10^{-8} & -1.5x10^{-8} & 7.2x10^{-10} & 2.7x10^{-9} & -1.6x10^{-9} \\ -1.7x10^{-8} & 1.6x10^{-8} & -1.3x10^{-8} & 1.4x10^{-8} & -2.6x10^{-9} & 3.5x10^{-9} & 1.7x10^{-9} \\ 1.4x10^{-8} & -1.3x10^{-8} & 1.1x10^{-8} & -1.2x10^{-8} & -9.8x10^{-10} & -2.8x10^{-9} & 1.9x10^{-9} \\ -1.5x10^{-8} & 1.4x10^{-8} & -1.2x10^{-8} & 1.3x10^{-8} & 2.9x10^{-9} & -3.3x10^{-9} & -2.0x10^{-9} \\ 7.2x10^{-10} & -2.6x10^{-9} & -9.8x10^{-10} & 2.9x10^{-9} & 5.7x10^{-8} & 2.5x10^{-10} & 2.3x10^{-10} \\ 2.7x10^{-9} & 3.5x10^{-9} & -2.8x10^{-9} & -3.3x10^{-9} & 2.5x10^{-10} & 5.6x10^{-8} & -4.9x10^{-11} \\ -1.6x10^{-9} & 1.7x10^{-9} & 1.9x10^{-9} & -2.0x10^{-9} & 2.3x10^{-10} & -4.9x10^{-11} & 5.7x10^{-8} \end{bmatrix}$$

La raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, nos proporciona las desviaciones estándar de los valores medidos; es decir, de los ángulos interiores A, B, C y D; así como de las distancias D<sub>BC</sub>, D<sub>CD</sub> y D<sub>DA</sub>.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta_A} & & & & & & & & & & \\ & \sigma_{\theta_B} & & & & & & & & & \\ & & \sigma_{\theta_C} & & & & & & & & \\ & & & \sigma_{\theta_D} & & & & & & & \\ & & & & D_{BC} & & & & & & \\ & & & & & D_{CD} & & & & & \\ & & & & & & D_{DA} & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000135 & & & & & & & & & & \\ & 0.000127 & & & & & & & & & \\ & & 0.000105 & & & & & & & & \\ & & & 0.000114 & & & & & & & \\ & & & & 0.000238 & & & & & & \\ & & & & & 0.000237 & & & & & \\ & & & & & & 0.000238 & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ rad \\ rad \\ rad \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

Nótese la cantidad de cálculos involucrados, ya sea en el método condicional o en el paramétrico. Cabe recordar, que nuestro ejemplo de poligonal cerrada consta sólo de dos vértices de los cuales se desconocen sus coordenadas; en la medida que aumente el número de vértices involucrados, los cálculos subyacentes también aumentarán considerablemente.

Esta es una de las razones por las que, no obstante que el método de los mínimos cuadrados se descubrió hace un par de siglos, su aplicación no fue tan generalizada hasta el advenimiento de las computadoras.

La multiplicación, transposición e inversión de matrices, fácilmente puede llevarse a cabo mediante el uso de hojas de cálculo como EXCEL; o mediante la creación de algoritmos en lenguajes de programación como C o FORTRAN, por ejemplo.

La cantidad de tiempo invertido en la aplicación del método de mínimos cuadrados para ajustar los datos medidos, está plenamente justificada si tomamos en consideración los resultados obtenidos y el tratamiento estadístico a la información recabada en campo.



### 8.3.3 COMPARACIÓN ENTRE AJUSTES

Otro método usado para ajustar poligonales es el de la regla del tránsito. En esta regla, se calculan las correcciones a las proyecciones de los lados de la poligonal, en proporción a la longitud de las mismas. También en esta regla se utiliza la condición geométrica, de que la suma de las proyecciones Norte-Sur y la suma de las proyecciones Este-Oeste deben ser cero, respectivamente; y por supuesto que la suma de los ángulos interiores de la poligonal debe ser igual a  $(n-2) \times 180^\circ$ .

Para garantizar el cierre angular, de modo empírico, la regla del tránsito emplea repartir de manera equitativa el error de cierre angular a cada uno de los ángulos interiores medidos.

TABLA 8.2  
CIERRE ANGULAR

EST	ÁNGULO INTERNO $i$			$C_i$	ÁNGULO INTERNO $i$ CORREGIDO		
	°	'	"		°	'	"
A	90	51	17	-4	90	51	13
B	106	25	11	-4	106	25	7
C	71	3	54	-4	71	3	50
D	91	39	54	-4	91	39	50
$\Sigma$	360	0	16	-16	360	0	0

Esto equivale a asignar el mismo peso o grado de confianza a cada una de las mediciones de ángulos.

TABLA 8.3  
CÁLCULO DE RUMBOS

Con los ángulos internos ajustados, se calculan los rumbos de los lados de la poligonal cerrada.

EST	P.V	Distancia m	ÁNGULO INTERNO $i$			RUMBOS			
			°	'	"	°	'	"	
A	B	14.242	90	51	13	NE	8	17	24
B	C	9.934	106	25	7	NW	65	17	29
C	D	17.200	71	3	50	SW	5	46	21
D	A	8.770	91	39	50	SE	82	33	49
$\Sigma$		50.146	360	0	0				

Una vez que se cumplen el cierre angular y lineal, se calculan las coordenadas ajustadas de los vértices de la poligonal.

TABLA 8.4  
CÁLCULO DE COORDENADAS AJUSTADAS

Proyecciones sin corregir				Corrección		Proyecciones corregidas				P	Coordenadas		
N	S	E	W	Y	X	N	S	E	W		Y	X	
14.093	-	2.053	-	0.001159	0.000477	14.094	-	2.053	-	A	100	100	
4.152	-	-	9.024	0.000341	-0.002098	4.152	-	-	9.022	B	114.094	102.053	
-	17.113	-	1.730	-0.001407	-0.000402	-	17.112	-	1.730	C	118.246	93.032	
-	1.135	8.696	-	-0.000093	0.002022	-	1.135	8.698	-	D	101.135	91.302	
$\Sigma$	18.245	18.248	10.749	10.754	-0.0000002	-0.000001	18.246	18.246	10.751	10.751	A	100.0	100.0
$\Sigma N - \Sigma S$		$\Sigma E - \Sigma W$											
-0.0030		-0.0050											
$\Sigma N + \Sigma S$		$\Sigma E + \Sigma W$											
36.493		21.503											
$k_{NS}$		$k_{EW}$											
0.000082208		0.000232526											

En la tabla 8.5, se muestran los resultados obtenidos aplicando la regla del tránsito a la poligonal cerrada de nuestro ejemplo de cuatro vértices. Así mismo, se muestran los valores obtenidos por el ajuste con mínimos cuadrados mediante los métodos: condicional y paramétrico.

TABLA 8.5  
COMPARACIÓN ENTRE AJUSTES  
POLIGONAL CERRADA

REGLA TRANSITO				
COORDENADAS	X <sub>c</sub>	93.031576	m	
	Y <sub>c</sub>	118.246500	m	
	X <sub>b</sub>	91.301978	m	
	Y <sub>b</sub>	101.134907	m	
DISTANCIA	A-B	14.242	m	
	B-C	9.934	m	
	C-D	17.200	m	
	D-A	8.770	m	
ÁNGULO INTERNO		°	'	"
	A	90	51	13.00
	B	106	25	7.00
	C	71	3	50.00
	D	91	39	50.00

MÉTODO CONDICIONAL					MÉTODO PARAMÉTRICO				
COORDENADAS	X <sub>c</sub>	93.029541	m		COORDENADAS	X <sub>c</sub>	93.028619	m	
	Y <sub>c</sub>	118.247637	m			Y <sub>c</sub>	118.245687	m	
	X <sub>b</sub>	91.303893	m			X <sub>b</sub>	91.303408	m	
	Y <sub>b</sub>	101.136412	m			Y <sub>b</sub>	101.132459	m	
DISTANCIA	A-B	14.242	m		DISTANCIA	A-B	14.242	m	
	B-C	9.933974	m			B-C	9.933995	m	
	C-D	17.199942	m			C-D	17.199967	m	
	D-A	8.770046	m			D-A	8.770015	m	
ÁNGULO INTERNO		°	'	"	ÁNGULO INTERNO		°	'	"
	A	90	50	41.099		A	90	52	8.513
	B	106	25	57.300		B	106	25	18.719
	C	71	2	16.051		C	71	2	47.360
	D	91	41	5.550		D	91	39	45.409

σ		σ	
	mm		mm
2.395	mm	0.586	mm
5.202	mm	1.139	mm
0.643	mm	0.275	mm
4.903	mm	1.174	mm

σ		σ	
	mm		mm
0.041	mm	0.238	mm
0.065	mm	0.237	mm
0.052	mm	0.238	mm

En los valores mostrados en la tabla 8.5, nótese que los valores más probables del método condicional junto con sus desviaciones estándar definen los intervalos que a su vez contienen los valores más probables señalados por el método paramétrico; así mismo, en lo que respecta a los valores ajustados de las distancias, se observa que hay coincidencia al milímetro entre los valores correspondientes de ambos métodos.

El ajuste por mínimos cuadrados, proporciona no sólo los valores más probables de las coordenadas buscadas, sino también los valores ajustados de las mediciones realizadas; proporcionando como complemento las desviaciones estándar de ambos, coordenadas y valores medidos.

## 8.4 LINEARIZACIÓN DE ECUACIONES MEDIANTE LA SERIE DE TAYLOR

Si deseamos representar la función no lineal  $f(x) = \cos x$ , mediante una función lineal (*una función polinómica*); podemos emplear la Serie de Taylor, definida como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!} (x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!} (x - c)^3 + \dots$$

El método se basa en hallar una función polinómica que aproxime a la función deseada en la cercanía de un punto de interés  $c$ .

En la figura 8.2, se muestra en color verde, la función  $\cos(x)$  y en color azul el polinomio aproximante de grado 6, centrado en el punto  $c = 0$ .

Esto es:

$$P_6(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

FIGURA 8.2  
APROXIMACIÓN A LA FUNCIÓN  $\cos x$

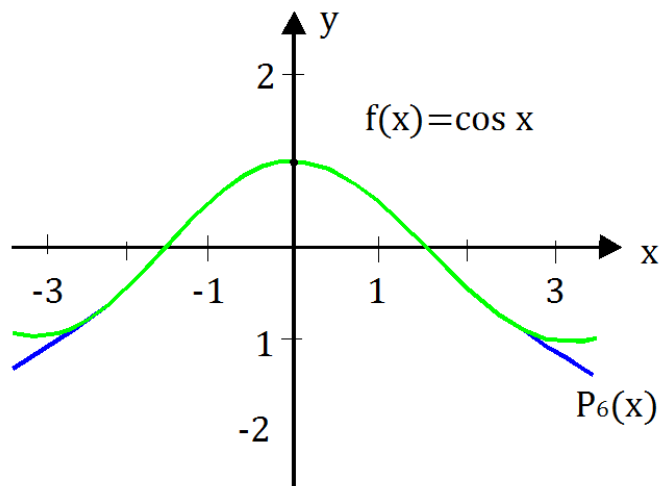


Imagen elaborada en base a "Cálculo y Geometría Analítica", pág. 681.

Por ejemplo, si queremos aproximar la función  $f(x) = \cos x$ , con la serie de Taylor centrada en el punto  $c = 60^\circ$ ; necesitamos las derivadas parciales de  $f(x)$ , evaluadas en dicho punto.

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$f'(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\cos(x)$$

$$f''(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \sin(x)$$

$$f'''(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

$$f^{(4)}(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin(x)$$

$$f^{(5)}(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si lo que se desea es conocer el valor de la función en el digamos punto  $x = 61^\circ$ ; mediante la serie de Taylor de orden 5, tenemos:

$$\begin{aligned}\cos(x) \doteq & \cos(c) - \frac{\sin(c)}{1!} \cdot (x - c) - \frac{\cos(c)}{2!} \cdot (x - c)^2 + \frac{\sin(c)}{3!} \cdot (x - c)^3 \\ & + \frac{\cos(c)}{4!} (x - c)^4 - \frac{\sin(c)}{5!} \cdot (x - c)^5\end{aligned}$$

Sustituyendo y simplificando un poco

$$0.484\ 809\ 620\ 2463 \doteq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (61^\circ - 60) - \frac{1}{4} \cdot (1^\circ)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (1^\circ)^3 + \frac{1}{48} (1^\circ)^4 - \frac{\sqrt{3}}{240} \cdot (1^\circ)^5$$

Considerando que es necesario obtener el equivalente en radianes de los términos que incluyen grados sexagesimales y realizando las operaciones indicadas, tenemos:

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^5 \frac{f^n(c)}{n!}$$

$$0.484\ 809\ 620\ 2463 \doteq 0.484\ 809\ 620\ 2464$$

Con esto, la serie de Taylor de orden 5 aproxima la función  $f(x) = \cos x$ , hasta doce cifras después del punto decimal.

Si en vez de utilizar la serie de Taylor de orden 5, únicamente empleamos la serie hasta la primera derivada parcial, tenemos:

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^1 \frac{f^n(c)}{n!}$$

$$\cos(x) \doteq \cos(c) - \frac{\sin(c)}{1!} \cdot (x - c)$$

$$0.484809 \doteq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (61^\circ - 60)$$

$$0.484809 \doteq 0.484885$$

Con esto, la serie de Taylor aproxima la función  $f(x) = \cos x$ , hasta las primeras cuatro cifras después del punto decimal; lo cual también es una buena aproximación.

En ese orden de ideas, y recordando la función de dos variables usada en la sección 8.3.2 para obtener el azimut del lado B-C

$$AZ_{BC} : \quad F(X_C, Y_C) = 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B} \right)$$

Como ejemplo, ahora aproximamos la función F; las coordenadas del punto B se tomarán como constantes, los datos a considerar son:

$$\begin{aligned} X_B &= 102.053 \text{ m} & Y_B &= 114.093 \text{ m} \\ X_C^0 &= 93.0315 \text{ m} & Y_C^0 &= 118.2465 \text{ m} \\ X_C &= 93.028619 \text{ m} & Y_C &= 118.245687 \text{ m} \end{aligned}$$

En donde  $X_C^0$  y  $Y_C^0$  son los valores iniciales de las coordenadas del punto C, y  $X_C$  y  $Y_C$  son las coordenadas ajustadas, obtenidas del método paramétrico.

Requerimos las derivadas parciales de  $F(X_C, Y_C)$  con respecto a  $X_C$  y  $Y_C$ , evaluadas en los puntos iniciales  $X_C^0$  y  $Y_C^0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_C} &= \frac{(Y_C - Y_B)}{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2} & \frac{\partial F}{\partial X_C} &= 0.042108 \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y_C} &= -\frac{(X_C - X_B)}{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_C} &= 0.091460 \end{aligned}$$

La expresión a utilizar es:

$$F(X_C, Y_C) \doteq \sum_{n=0}^1 \frac{f^n(c)}{n!}$$

$$F(X_C, Y_C) = F(X_C^0, Y_C^0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_C} \right|_{(X_C^0, Y_C^0)} \cdot (X_C - X_C^0) + \left. \frac{\partial F_2}{\partial Y_C} \right|_{(X_C^0, Y_C^0)} \cdot (Y_C - Y_C^0)$$

El primer término del lado derecho del signo igual, no es más que la función original evaluada en los valores iniciales  $X_C^0$  y  $Y_C^0$ ; es decir, los valores en los que se centrará la función aproximante. El lado izquierdo del segundo término, es la derivada parcial de la función evaluada en los puntos iniciales  $X_C^0$  y  $Y_C^0$ ; El lado derecho del segundo término,  $(X_C^0 - X_C)$ , es el primer elemento de la matriz  $\hat{\delta}$  obtenida en el método paramétrico. El tercer término, es análogo al segundo pero correspondiente a la coordenada Y.

Sustituyendo los elementos correspondientes, tenemos:

$$180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B} \right) \doteq \left[ 180^\circ + \tan^{-1} \left( \frac{X_C^0 - X_B}{Y_C^0 - Y_B} \right) \right] + \left[ \frac{(Y_C^0 - Y_B)}{(X_C^0 - X_B)^2 + (Y_C^0 - Y_B)^2} \cdot (X_C - X_C^0) \right] - \left[ \frac{(X_C^0 - X_B)}{(X_C^0 - X_B)^2 + (Y_C^0 - Y_B)^2} \cdot (Y_C - Y_C^0) \right]$$

Evaluando la expresión, nos da:

$$\begin{aligned} \pi - 1.139523 &\doteq [\pi - 1.139327] + [0.042108 \cdot (-0.002881)] - [0.091460 \cdot (-0.000813)] \\ &2.002070 \text{ rad} \doteq 2.002218 \text{ rad} \\ &114^\circ 42' 36.503'' \doteq 114^\circ 43' 7.180'' \end{aligned}$$

Ahora, podemos retomar la expresión dada en la sección 8.2, cuando se indicaron las fórmulas matriciales a utilizar para aplicar el ajuste de mínimos cuadrados. Nótese la correspondencia entre los términos.

$$A\hat{\delta} + B\hat{r} + W \doteq 0$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^0} \cdot (X - X^0) + \left. \frac{\partial F}{\partial l} \right|_{l^0} \cdot (l - l^0) + F(X^0, l^0) \doteq 0$$

Para el caso paramétrico, recordando la matriz  $\hat{r}$  de la sección 8.3, definida como:

$$\hat{r} = A\hat{\delta} + W$$

Ahora es más evidente la relación:

$$\begin{bmatrix} F_1(X_C, Y_C) \\ F_2(X_D, Y_D) \\ F_3(X_C, Y_C, X_D, Y_D) \\ F_4(X_C, Y_C, X_D, Y_D) \\ F_5(X_C, Y_C) \\ F_6(X_C, Y_C, X_D, Y_D) \\ F_7(X_D, Y_D) \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_C^0} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_C^0} & \frac{\partial F_1}{\partial X_D^0} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_D^0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_C^0} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_C^0} & \frac{\partial F_2}{\partial X_D^0} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_D^0} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_C^0} & \frac{\partial F_3}{\partial Y_C^0} & \frac{\partial F_3}{\partial X_D^0} & \frac{\partial F_3}{\partial Y_D^0} \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_C^0} & \frac{\partial F_4}{\partial Y_C^0} & \frac{\partial F_4}{\partial X_D^0} & \frac{\partial F_4}{\partial Y_D^0} \\ \frac{\partial F_5}{\partial X_C^0} & \frac{\partial F_5}{\partial Y_C^0} & \frac{\partial F_5}{\partial X_D^0} & \frac{\partial F_5}{\partial Y_D^0} \\ \frac{\partial F_6}{\partial X_C^0} & \frac{\partial F_6}{\partial Y_C^0} & \frac{\partial F_6}{\partial X_D^0} & \frac{\partial F_6}{\partial Y_D^0} \\ \frac{\partial F_7}{\partial X_C^0} & \frac{\partial F_7}{\partial Y_C^0} & \frac{\partial F_7}{\partial X_D^0} & \frac{\partial F_7}{\partial Y_D^0} \end{bmatrix}_{7 \times 4} \begin{bmatrix} X_C - X_C^0 \\ Y_C - Y_C^0 \\ X_D - X_D^0 \\ Y_D - Y_D^0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} + \begin{bmatrix} F_1(X_C^0, Y_C^0) \\ F_2(X_D^0, Y_D^0) \\ F_3(X_C^0, Y_C^0, X_D^0, Y_D^0) \\ F_4(X_C^0, Y_C^0, X_D^0, Y_D^0) \\ F_5(X_C^0, Y_C^0) \\ F_6(X_C^0, Y_C^0, X_D^0, Y_D^0) \\ F_7(X_D^0, Y_D^0) \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$F(\hat{X}) = A\hat{\delta} + W$$

Que para nuestro ejemplo de la poligonal cerrada, en donde la matriz P es la matriz identidad; es decir, mediciones igualmente ponderadas, nos queda:

$$F(\hat{X}) = \hat{r}$$

Lo cual, como se comentó, nos da una idea de la precisión con la que la serie de Taylor aproxima las ecuaciones no lineales manejadas en nuestro ejemplo del ajuste de la poligonal cerrada.

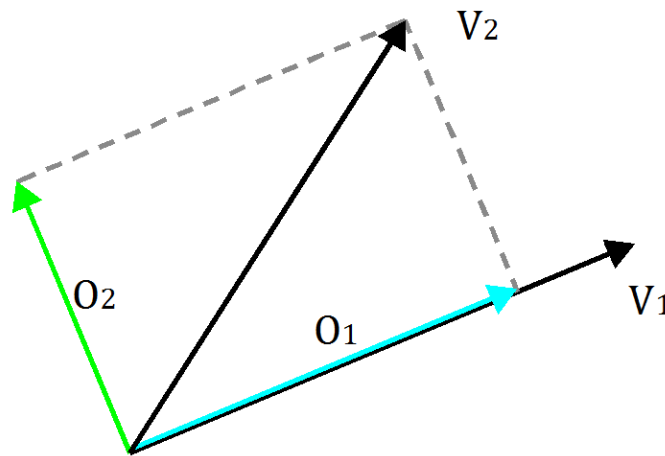
La aproximación mediante la serie de Taylor en gran parte debe su precisión a la elección adecuada de valores iniciales. En el caso de que con la primera iteración no se obtengan las precisiones requeridas, se repite el procedimiento hasta que los valores ajustados difieran poco entre sí, respectivamente.

## 8.5 ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

Revisando las expresiones matriciales para realizar el ajuste por mínimos cuadrados se identifica la necesidad de invertir matrices. Como recordaremos, es requisito que los renglones de las matrices cuya inversa deseamos obtener, sean linealmente independientes entre sí; es decir, que un renglón dado no sea una combinación lineal de los restantes.

El procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt, es un algoritmo que permite encontrar de un conjunto de vectores, otro conjunto de vectores linealmente independientes.

FIGURA 8.3  
VECTORES ORTOGONALES



Las expresiones necesarias, son las siguientes:

$$O_1 = V_1$$

$$O_2 = V_2 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_2 \right] O_1$$

$$O_3 = V_3 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_3 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_3 \right] O_2$$

$$O_4 = V_4 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_4 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_4 \right] O_2 - \left[ \frac{O_3}{\|O_3\|^2} \circ V_4 \right] O_3$$

y generalizando, tenemos:

$$O_j = V_j - \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \frac{O_i}{\|O_i\|^2} \circ V_j \right] O_i$$

Para el caso de un vector de tres elementos, recordamos que el producto punto se define como:

$$A \circ B = [a_1 \ a_2 \ a_3] \circ [b_1 \ b_2 \ b_3]$$

$$A \circ B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

y que la norma de un vector está dada por:

$$\|A\| = \sqrt{a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3}$$

Por ejemplo, dada la base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores ortogonales se calculan como:

$$O_1 = V_1$$

$$O_1 = [1 \ 0 \ -1]$$

$$O_2 = V_2 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_2 \right] O_1$$

$$O_2 = [0 \ 1 \ -1] - \left[ \frac{[1 \ 0 \ -1]}{\|[1 \ 0 \ -1]\|^2} \circ [0 \ 1 \ -1] \right] [1 \ 0 \ -1]$$

$$O_2 = [0 \ 1 \ -1] - \left( \frac{1}{2} \right) [1 \ 0 \ -1]$$

$$O_2 = \left[ -\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2} \right]$$

$$O_3 = V_3 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_3 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_3 \right] O_2$$

$$O_3 = [1 \ -1 \ 0] - \left[ \frac{[1 \ 0 \ -1]}{\|[1 \ 0 \ -1]\|^2} \circ [1 \ -1 \ 0] \right] [1 \ 0 \ -1]$$

$$- \left[ \frac{\left[ -\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2} \right]}{\left\| \left[ -\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2} \right] \right\|^2} \circ [1 \ -1 \ 0] \right] \left[ -\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2} \right]$$

$$O_3 = [1 \ -1 \ 0] - \left( \frac{1}{2} \right) [1 \ 0 \ -1] - (-1) \left[ -\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2} \right]$$

$$O_3 = [0 \ 0 \ 0]$$



$$\begin{aligned}
 O_4 &= V_4 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_4 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_4 \right] O_2 - \left[ \frac{O_3}{\|O_3\|^2} \circ V_4 \right] O_3 \\
 O_4 &= [1 \ 0 \ 0] - \left[ \frac{[1 \ 0 \ -1]}{\|[1 \ 0 \ -1]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 0] \right] [1 \ 0 \ -1] \\
 &\quad - \left[ \frac{\left[-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2}\right]}{\left\| \left[-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2}\right] \right\|^2} \circ [1 \ 0 \ 0] \right] \left[-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2}\right] \\
 &\quad - \left[ \frac{[0 \ 0 \ 0]}{\|[0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 0] \right] [0 \ 0 \ 0] \\
 O_4 &= [1 \ 0 \ 0] - \left(\frac{1}{2}\right)[1 \ 0 \ -1] - \left(\frac{-1}{3}\right)\left[-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2}\right] - [0 \ 0 \ 0] \\
 O_4 &= \left[ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \right]
 \end{aligned}$$

Para comprobar que los vectores obtenidos son linealmente independientes, basta con obtener el producto punto entre ellos.

$$\begin{aligned}
 O_1 \circ O_2 &= [1 \ 0 \ -1] \circ \left[-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2}\right] & O_1 \circ O_4 &= [1 \ 0 \ -1] \circ \left[\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right] \\
 O_1 \circ O_2 &= [0 \ 0 \ 0] & O_1 \circ O_4 &= [0 \ 0 \ 0]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_2 \circ O_4 &= \left[-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2}\right] \circ \left[\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right] \\
 O_2 \circ O_4 &= [0 \ 0 \ 0]
 \end{aligned}$$

Con lo que nuestro nuevo conjunto de vectores linealmente independientes queda como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

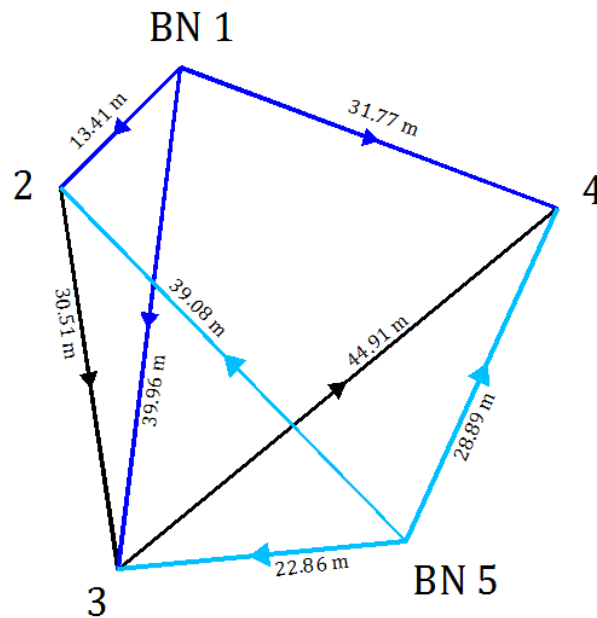
En el método condicional de los mínimos cuadrados, la ortogonalización de los vectores que forman parte de los renglones de la matriz de diseño B, es un paso previo a la utilización de las expresiones matriciales señaladas en la sección 8.2.

## 8.6 AJUSTE DE UNA RED DE NIVELACIÓN

En esta sección abordamos otro problema frecuente en Topografía, el ajuste de una red de nivelación.

Consideremos las mediciones realizadas en una red de nivelación que consta de cinco puntos, dos de ellos de elevaciones conocidas (*bancos de nivel*); ver figura 8.4. Lo que se busca es conocer los valores más probables de las elevaciones de los tres puntos desconocidos y los valores ajustados de las diferencias de elevación medidas.

FIGURA 8.4  
RED DE NIVELACIÓN



Las mediciones en campo son las siguientes:

$i$	INICIAL	FINAL	$\delta$	DIST.	PESO
			m	m	
1	BN1	2	10.1789	13.41	0.075
2	1	3	4.9813	39.96	0.025
3	1	4	-3.2492	31.77	0.031
4	2	3	-5.1981	30.51	0.033
5	3	4	-8.2312	44.91	0.022
6	BN5	2	-11.1069	39.08	0.026
7	BN5	3	-16.3045	22.86	0.044
8	BN5	4	-24.5316	28.89	0.035

Los pesos en la nivelación diferencial con frecuencia se toman como el inverso de la longitud de cada línea.

## 8.6.1 MÉTODO CONDICIONAL

Iniciamos formulando todas las ecuaciones de condición.

$$\begin{aligned}\delta_1 - \delta_4 - \delta_2 &= 0 \\ \delta_2 - \delta_5 + \delta_3 &= 0 \\ -\delta_8 + \delta_5 + \delta_7 &= 0 \\ -\delta_4 + \delta_7 - \delta_6 &= 0 \\ \delta_1 - \delta_4 + \delta_7 - \delta_8 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_1 - \delta_4 - \delta_5 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_2 + \delta_7 - \delta_8 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_1 + \delta_6 - \delta_8 + \delta_3 &= 0\end{aligned}$$

Para formar la matriz B, obtenemos las derivadas parciales de las ocho ecuaciones con respecto a todos los valores medidos.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora verificamos la independencia lineal entre los vectores que forman la matriz de diseño B. Debido a que se trata de una matriz de 8 vectores que a su vez contienen 8 elementos cada uno, aplicamos el procedimiento de Gram-Schmidt para identificar los vectores linealmente independientes.

$$O_1 = V_1$$

$$O_1 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$O_2 = V_2 - \left[ \frac{O_1 \cdot V_2}{\|O_1\|^2} \right] O_1$$

$$O_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$- \left[ \frac{[1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]}{\|[1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\|^2} \cdot [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \right] [1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$O_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - \left( \frac{-1}{3} \right) [1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$O_2 = \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad -\frac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$O_3 = V_3 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_3 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_3 \right] O_2$$

$$O_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \|^2} \circ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1] \right] [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \|^2} \circ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1] \right] \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$$

$$O_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1] - (0)[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] - \left( \frac{-3}{8} \right) \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$$

$$O_3 = \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right]$$

$$O_4 = V_4 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_4 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_4 \right] O_2 - \left[ \frac{O_3}{\|O_3\|^2} \circ V_4 \right] O_3$$

$$O_4 = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \|^2} \circ [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0] \right] [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \|^2} \circ [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0] \right] \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \|^2} \circ [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0] \right] \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right]$$

$$O_4 = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0] - \left( \frac{1}{3} \right) [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] - \left( \frac{1}{8} \right) \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$$

$$- \left( \frac{9}{21} \right) \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right]$$

$$O_4 = \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right]$$

$$O_5 = V_5 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_5 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_5 \right] O_2 - \left[ \frac{O_3}{\|O_3\|^2} \circ V_5 \right] O_3 - \left[ \frac{O_4}{\|O_4\|^2} \circ V_5 \right] O_4$$

$$O_5 = [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right]$$

$$- \left[ \frac{\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -1 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -1 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -1 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right]$$

$$O_5 = [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] - \left( \frac{2}{3} \right) [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] - \left( \frac{5}{8} \right) \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$$

$$- (1) \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] - (0) \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right]$$

$$O_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$O_6 = V_6 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_6 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_6 \right] O_2 - \left[ \frac{O_3}{\|O_3\|^2} \circ V_6 \right] O_3 - \left[ \frac{O_4}{\|O_4\|^2} \circ V_6 \right] O_4 - \left[ \frac{O_5}{\|O_5\|^2} \circ V_6 \right] O_5$$

$$\begin{aligned} O_6 = & [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] - \left[ \frac{[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] \right] [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ & - \left[ \frac{[\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] \right] \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ & - \left[ \frac{[\frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1]}{\|[\frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] \right] \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] \\ & - \left[ \frac{[-\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7}]}{\|[-\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7}]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] \right] \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] \\ & - \left[ \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] \right] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_6 = & [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] - \left(\frac{2}{3}\right)[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] - (1)\left[\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0\right] \\ & - (0)\left[\frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1\right] - (0)\left[-\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7}\right] - (0)[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$O_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$O_7 = V_7 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_7 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_7 \right] O_2 - \left[ \frac{O_3}{\|O_3\|^2} \circ V_7 \right] O_3 - \left[ \frac{O_4}{\|O_4\|^2} \circ V_7 \right] O_4 - \left[ \frac{O_5}{\|O_5\|^2} \circ V_7 \right] O_5 - \left[ \frac{O_6}{\|O_6\|^2} \circ V_7 \right] O_6$$

$$\begin{aligned} O_7 = & [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] - \left[ \frac{[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ & - \left[ \frac{[\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ & - \left[ \frac{[\frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1]}{\|[\frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1]\|^2} \circ [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] \\ & - \left[ \frac{[-\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7}]}{\|[-\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7}]\|^2} \circ [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] \\ & - \left[ \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ & - \left[ \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \right] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_7 = & [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] - \left(\frac{-1}{3}\right)[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] - \left(\frac{5}{8}\right)\left[\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0\right] \\ & - (1)\left[\frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1\right] - (0)\left[-\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7}\right] - (0)[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ & - (0)[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$O_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$O_8 = V_8 - \left[ \frac{O_1}{\|O_1\|^2} \circ V_8 \right] O_1 - \left[ \frac{O_2}{\|O_2\|^2} \circ V_8 \right] O_2 - \left[ \frac{O_3}{\|O_3\|^2} \circ V_8 \right] O_3 - \left[ \frac{O_4}{\|O_4\|^2} \circ V_8 \right] O_4 - \left[ \frac{O_5}{\|O_5\|^2} \circ V_8 \right] O_5 - \left[ \frac{O_6}{\|O_6\|^2} \circ V_8 \right] O_6 - \left[ \frac{O_7}{\|O_7\|^2} \circ V_8 \right] O_7$$

$$\begin{aligned} O_8 &= [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] - \left[ \frac{[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] \right] [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ &\quad - \left[ \frac{\left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right]}{\left\| \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \right\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] \right] \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ &\quad - \left[ \frac{\left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right]}{\left\| \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] \right\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] \right] \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] \\ &\quad - \left[ \frac{\left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right]}{\left\| \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] \right\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] \right] \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] \right] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ &\quad - \left[ \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] \right] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ &\quad - \left[ \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}{\|[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\|^2} \circ [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] \right] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ O_8 &= [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1] - \left( \frac{1}{3} \right) [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] - \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ &\quad - \left( \frac{4}{7} \right) \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] - (-1) \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] - (0) [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ &\quad - (0) [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] - (0) [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ O_8 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

Nuevamente, para comprobar que los vectores obtenidos son linealmente independientes, se obtiene el producto punto entre ellos.

$$\begin{aligned} O_1 \circ O_2 &= [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \circ \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ O_1 \circ O_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_1 \circ O_3 &= [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \circ \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] \\ O_1 \circ O_3 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_1 \circ O_4 &= [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \circ \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] \\ O_1 \circ O_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_2 \circ O_3 &= \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \circ \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] \\ O_2 \circ O_3 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_2 \circ O_4 &= \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \circ \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] \\ O_2 \circ O_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_3 \circ O_4 &= \left[ \frac{1}{8} \ \frac{2}{8} \ \frac{3}{8} \ -\frac{1}{8} \ \frac{5}{8} \ 0 \ 1 \ -1 \right] \circ \left[ -\frac{3}{7} \ \frac{1}{7} \ -\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{1}{7} \ -1 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right] \\ O_3 \circ O_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

Tras la aplicación del algoritmo de Ortogonalización de Gram-Schmidt a nuestro ejemplo de red de nivelación, identificamos que las cuatro primeras filas de nuestra matriz de diseño  $B$  son linealmente independientes; es decir, las últimas cuatro ecuaciones de condición se pueden obtener mediante una combinación lineal de las cuatro primeras.

Tomando en consideración lo anterior, nuestra matriz  $B$  debe quedar como:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 8}$$

La matriz  $W$  la formamos sustituyendo los valores iniciales de las diferencias de elevación en las cuatro ecuaciones de condición.

$$W = \begin{bmatrix} -0.0005 \\ -0.0007 \\ 0.0041 \\ -0.0005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

En esta ocasión conocemos los pesos de cada medición, por lo que la matriz de pesos queda definida como:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{13.41} & & & & & & & & \\ & \frac{1}{39.96} & & & & & & & \\ & & \frac{1}{31.77} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{30.51} & & & & & \\ & & & & \frac{1}{44.91} & & & & \\ & & & & & \frac{1}{39.08} & & & \\ & & & & & & \frac{1}{22.86} & & \\ & & & & & & & \frac{1}{28.89} & \end{bmatrix}$$

Con los elementos fuera de la diagonal principal siendo ceros.

Si recordamos la relación:

$$C_r = P^{-1}$$

tenemos la matriz:

$$C_r = \begin{bmatrix} 13.41 & & & & & & & & \\ & 39.96 & & & & & & & \\ & & 31.77 & & & & & & \\ & & & 30.51 & & & & & \\ & & & & 44.91 & & & & \\ & & & & & 39.08 & & & \\ & & & & & & 22.86 & & \\ & & & & & & & 28.89 & \end{bmatrix}$$

En la que también los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

Ahora, aplicamos a nuestro ejemplo las expresiones matriciales del método condicional.

$$M = (BC_r B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0188 & 0.0087 & 0.0058 & -0.0077 \\ 0.0087 & 0.0146 & 0.0079 & -0.0048 \\ 0.0058 & 0.0079 & 0.0153 & -0.0057 \\ -0.0077 & -0.0048 & -0.0057 & 0.0147 \end{bmatrix}$$

$$\hat{k} = MW = \begin{bmatrix} 0.000012 \\ 0.000020 \\ 0.000057 \\ -0.000024 \end{bmatrix}$$

$$\hat{r} = -C_r B^T \hat{k} = \begin{bmatrix} -0.0002 \\ -0.0003 \\ -0.0006 \\ -0.0003 \\ -0.0017 \\ -0.0009 \\ -0.0008 \\ 0.0166 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

$$l = l^0 + \hat{r} = \begin{bmatrix} 10.1787 \\ 4.9810 \\ -3.2498 \\ -5.1984 \\ -8.2329 \\ -11.1078 \\ -16.3053 \\ -24.5299 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

De haber dejado las ocho filas de la matriz formada con las ocho ecuaciones de condición, no habría sido posible invertir la matriz  $BC_r B^T$ .

El factor de varianza a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{r^T P r}{v} = \frac{0.000000227}{1}$$

La matriz de varianzas-covarianzas

$$C_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} B^T (B P^{-1} B^T)^{-1} B P^{-1} = \begin{bmatrix} 7.7x10^{-7} & -1.2x10^{-6} & 8.4x10^{-7} & -1.0x10^{-6} & -3.9x10^{-7} & 9.1x10^{-7} & -1.3x10^{-7} & -5.2x10^{-7} \\ -1.2x10^{-6} & 5.8x10^{-6} & 1.7x10^{-6} & 2.0x10^{-6} & -1.6x10^{-6} & -1.0x10^{-6} & 1.0x10^{-6} & -5.4x10^{-7} \\ 8.4x10^{-7} & 1.7x10^{-6} & 3.4x10^{-6} & -8.5x10^{-7} & -2.2x10^{-6} & 1.4x10^{-6} & 5.1x10^{-7} & -1.7x10^{-6} \\ -1.0x10^{-6} & 2.0x10^{-6} & -8.5x10^{-7} & 3.9x10^{-6} & 1.2x10^{-6} & 1.9x10^{-6} & -1.1x10^{-6} & 2.5x10^{-8} \\ -3.9x10^{-7} & -1.6x10^{-6} & -2.2x10^{-6} & 1.2x10^{-6} & 6.5x10^{-6} & 3.6x10^{-7} & 1.5x10^{-6} & -2.2x10^{-6} \\ 9.1x10^{-7} & -1.0x10^{-6} & 1.4x10^{-6} & 1.9x10^{-6} & 3.6x10^{-7} & 5.1x10^{-6} & -1.8x10^{-6} & -1.5x10^{-6} \\ -1.3x10^{-7} & 1.0x10^{-6} & 5.1x10^{-7} & -1.1x10^{-6} & 1.5x10^{-6} & -1.8x10^{-6} & 2.2x10^{-6} & -1.4x10^{-6} \\ -5.2x10^{-7} & -5.4x10^{-7} & -1.7x10^{-6} & 2.5x10^{-8} & -2.2x10^{-6} & -1.5x10^{-6} & -1.4x10^{-6} & 2.9x10^{-6} \end{bmatrix}$$

Las desviaciones estándar de cada una de las diferencias de elevación medidas

$$\sigma_l = \begin{bmatrix} 0.00088 & & & & & & & & \\ & 0.00241 & & & & & & & \\ & & 0.00183 & & & & & & \\ & & & 0.00197 & & & & & \\ & & & & 0.00254 & & & & \\ & & & & & 0.00226 & & & \\ & & & & & & 0.00149 & & \\ & & & & & & & 0.00171 & \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$



Para calcular las elevaciones desconocidas, utilizamos las expresiones:

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 + \delta_1 \\ h_3 &= h_1 + \delta_2 \\ h_4 &= h_1 + \delta_3 \end{aligned}$$

o también podemos emplear:

$$\begin{aligned} h_2 &= h_5 + \delta_6 \\ h_3 &= h_5 + \delta_7 \\ h_4 &= h_5 + \delta_8 \end{aligned}$$

Las variaciones entre la elección de unas u otras son milimétricas.

Optando por las tres primeras y sustituyendo los valores correspondientes, tenemos:

$$\begin{aligned} h_2 &= 1,217.8248 \text{ m} \\ h_3 &= 1,212.6271 \text{ m} \\ h_4 &= 1,204.3963 \text{ m} \end{aligned}$$

Aplicando la Ley Especial de Propagación de las Varianzas:

$$C_{h_2 h_3 h_4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial \delta_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial h_2}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial \delta_1} & \frac{\partial h_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial h_3}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial h_4}{\partial \delta_1} & \frac{\partial h_4}{\partial \delta_2} & \frac{\partial h_4}{\partial \delta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\delta_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta_3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial \delta_1} & \frac{\partial h_3}{\partial \delta_1} & \frac{\partial h_4}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial h_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial h_4}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial h_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial h_4}{\partial \delta_3} \end{bmatrix}$$

$$C_{h_2 h_3 h_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.7 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 5.8 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 3.4 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{h_2 h_3 h_4} = \begin{bmatrix} 7.7 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 5.8 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 3.4 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Calculando la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, obtenemos las desviaciones estándar de cada una de las elevaciones.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{h_2} & & \\ & \sigma_{h_3} & \\ & & \sigma_{h_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000878 & & \\ & 0.002412 & \\ & & 0.001831 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

## 8.6.2 MÉTODO PARAMÉTRICO

Para comenzar, necesitamos los valores iniciales (*valores aproximados*) de los parámetros desconocidos (*elevaciones de los vértices*). Por ejemplo, estas elevaciones iniciales pueden obtenerse del control horizontal, mediante el empleo de una Estación Total.

Los valores iniciales son:

v	h
	m
1	1,207.6461
2	1,217.8255
3	1,212.6279
4	1,204.3962
5	1,228.9329

Ahora formulamos las ocho ecuaciones de condición, en las que intervienen los tres parámetros desconocidos y los dos valores fijos (*bancos de nivel*).

$$\begin{aligned}
 h_2 - h_1 &= 10.1789 \\
 h_3 - h_1 &= 4.9813 \\
 h_4 - h_1 &= -3.2492 \\
 h_3 - h_2 &= -5.1981 \\
 h_4 - h_3 &= -8.2312 \\
 h_2 - h_5 &= -11.1069 \\
 h_3 - h_5 &= -16.3045 \\
 h_4 - h_5 &= -24.5316
 \end{aligned}$$

Nótese que los términos constantes en las ecuaciones de condición, corresponden a los valores medidos en campo.

Para formar la matriz de diseño A, obtenemos las derivadas parciales de las ocho ecuaciones de condición con respecto a los tres parámetros desconocidos ( $h_2$ ,  $h_3$  y  $h_4$ ).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 3}$$

Para la matriz  $W$ , sustituimos los valores de los parámetros desconocidos, en las ocho ecuaciones de condición.

$$W = \begin{bmatrix} 0.00050 \\ 0.00050 \\ -0.00070 \\ 0.00050 \\ -0.00050 \\ -0.00050 \\ -0.00050 \\ -0.00051 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

Aplicando las expresiones matriciales correspondientes al método paramétrico, tenemos:

$$(A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} 8.074 & 2.239 & 0.564 \\ 2.239 & 9.081 & 2.288 \\ 0.564 & 2.288 & 11.894 \end{bmatrix}$$

$$A^T P W = \begin{bmatrix} 0.000008 \\ 0.000018 \\ -0.000210 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = -(A^T P A)^{-1} A^T P W = \begin{bmatrix} 0.000012 \\ 0.000297 \\ 0.002448 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = X^0 + \hat{\delta} = \begin{bmatrix} 1,217.8255 \\ 1,212.6282 \\ 1,204.3986 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \end{matrix}$$

Al realizar la segunda iteración, el método nos da valores para  $\hat{\delta}$  del orden de picómetros; por lo que es suficiente la primera iteración, para obtener los valores más probables de las elevaciones de  $h_2$ ,  $h_3$  y  $h_4$ , con cifras al milímetro.

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} 0.00004 \\ 0.00002 \\ 0.00006 \\ 0.00003 \\ 0.00004 \\ -0.00001 \\ -0.00009 \\ -0.00009 \end{bmatrix}$$

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} 0.00051 \\ 0.00080 \\ 0.00175 \\ 0.00078 \\ 0.00165 \\ -0.00049 \\ -0.00020 \\ -0.00265 \end{bmatrix}$$

El factor de varianza a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{r^T P r}{v} = \frac{0.000\ 004\ 639}{5}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.000\ 000\ 093$$

En donde:

$$v = n - u$$

$$v = 8 - 3$$

$$v = 5$$

Es decir, ocho ecuaciones de condición y tres incógnitas (*parámetros desconocidos*).

Para obtener las desviaciones estándar de las elevaciones calculadas, formamos la matriz:

$$C_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00000075 & 0.00000021 & 0.00000052 \\ 0.00000021 & 0.00000084 & 0.00000021 \\ 0.00000052 & 0.00000021 & 0.00000110 \end{bmatrix}$$

La raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, nos proporcionan las desviaciones estándar de las elevaciones calculadas  $h_2$ ,  $h_3$  y  $h_4$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_{h_2} & & & & & & & & & \\ & \sigma_{h_3} & & & & & & & & \\ & & \sigma_{h_4} & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000\ 865 & & & & & & & & & \\ & 0.000\ 918 & & & & & & & & \\ & & 0.001\ 050 & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

Para obtener las desviaciones estándar de los valores ajustados de las mediciones, formamos la matriz:

$$\hat{\sigma}_0^2 [A(A^T P A)^{-1} A^T] = \begin{bmatrix} 7.5 & 2.1 & 0.52 & -5.4 & -1.6 & 7.5 & 2.1 & 0.52 \\ 2.1 & 8.4 & 2.1 & 6.3 & -6.3 & 2.1 & 8.4 & 2.1 \\ 0.52 & 2.1 & 11 & 1.6 & 8.9 & 0.52 & 2.1 & 11 \\ -5.4 & 6.3 & 1.6 & 1.2 & -4.7 & -5.4 & 6.3 & 1.6 \\ -1.6 & -6.3 & 8.9 & -4.7 & 15 & -1.6 & -6.3 & 8.9 \\ 7.5 & 2.1 & 0.52 & -5.4 & -1.6 & 7.5 & 2.1 & 0.52 \\ 2.1 & 8.4 & 2.1 & 6.3 & -6.3 & 2.1 & 8.4 & 2.1 \\ 0.52 & 2.1 & 11 & 1.6 & 8.9 & 0.52 & 2.1 & 11 \end{bmatrix} \times 10^{-7}$$

La raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, nos proporciona las desviaciones estándar de los valores ajustados de las mediciones,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ ,  $\delta_4$ ,  $\delta_5$ ,  $\delta_6$ ,  $\delta_7$  y  $\delta_8$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\delta_1} & & & & & & & & & \\ & \sigma_{\delta_2} & & & & & & & & \\ & & \sigma_{\delta_3} & & & & & & & \\ & & & \sigma_{\delta_4} & & & & & & \\ & & & & \sigma_{\delta_5} & & & & & \\ & & & & & \sigma_{\delta_6} & & & & \\ & & & & & & \sigma_{\delta_7} & & & \\ & & & & & & & \sigma_{\delta_8} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000865 & & & & & & & & & \\ & 0.000918 & & & & & & & & \\ & & 0.001050 & & & & & & & \\ & & & 0.001084 & & & & & & \\ & & & & 0.001233 & & & & & \\ & & & & & 0.000865 & & & & \\ & & & & & & 0.000918 & & & \\ & & & & & & & 0.001050 & & \end{bmatrix}$$

En la tabla 8.6, se muestra una comparación entre la aplicación de los métodos paramétrico y condicional, a nuestro ejemplo de ajuste de una red de nivelación de cinco puntos.

TABLA 8.6  
COMPARACIÓN ENTRE AJUSTES  
RED DE NIVELACIÓN

MÉTODO CONDICIONAL						MÉTODO PARAMÉTRICO					
ELEVACIONES	$h_2$	1,217.8248	m	$\sigma$	mm	ELEVACIONES	$h_2$	1,217.8255	m	$\sigma$	mm
	$h_3$	1,212.6271	m				$h_3$	1,212.6282	m		
	$h_4$	1,204.3963	m				$h_4$	1,204.3986	m		
DIFERENCIAS DE ELEVACIÓN	$\delta_1$	10.178734	m	0.878	mm	DIFERENCIAS DE ELEVACIÓN	$\delta_1$	10.179412	m	0.865	mm
	$\delta_2$	4.980980	m	2.412	mm		$\delta_2$	4.982097	m	0.918	mm
	$\delta_3$	-3.249847	m	1.831	mm		$\delta_3$	-3.247452	m	1.050	mm
	$\delta_4$	-5.198446	m				$\delta_4$	-5.197315	m	1.084	mm
	$\delta_5$	-8.232867	m				$\delta_5$	-8.229549	m	1.233	mm
	$\delta_6$	-11.107826	m				$\delta_6$	-11.107388	m	0.865	mm
	$\delta_7$	-16.305272	m				$\delta_7$	-16.304703	m	0.918	mm
	$\delta_8$	-24.529939	m				$\delta_8$	-24.534252	m	1.050	mm

En los valores mostrados en la tabla 8.6, para casi todos los valores ajustados, nótese que los valores más probables del método condicional junto con sus desviaciones estándar definen los intervalos que a su vez contienen los valores más probables señalados por el método paramétrico; así mismo, en lo que respecta a los valores ajustados de las elevaciones, se observa que hay coincidencia al centímetro entre los valores correspondientes de ambos métodos.

En términos generales, se percibe que en comparación con el método condicional, el método paramétrico proporciona valores de desviación estándar más pequeños, lo que conduce a establecer intervalos más cortos en los que se encontrarán los valores más probables de las cantidades ajustadas.

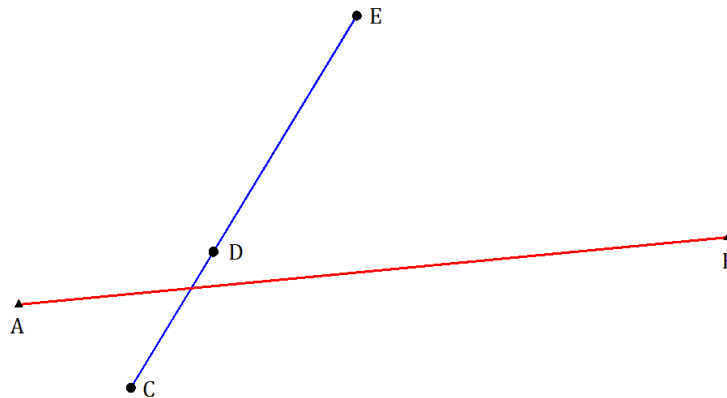
## 8.7 AJUSTE DE UNA MEDICIÓN CON GPS

Tomando en consideración el uso frecuente de los equipos GPS para realizar levantamientos, en esta sección ajustaremos con el método de mínimos cuadrados los datos recabados en campo en este tipo de mediciones.

Los datos a considerar, consisten en las coordenadas geodésicas medidas de cinco vértices, dos de ellos considerados puntos de control, ver figura 8.5. Lo que se busca es obtener de los puntos C, D y E, las coordenadas ajustadas, así como sus desviaciones estándar.

Los puntos de control utilizados, corresponden a dos vértices de la Red Geodésica Nacional, que por conveniencia denotaremos como A y B, respectivamente.

FIGURA 8.5  
MEDICIONES CON GPS



Las coordenadas medidas de los cinco puntos, y las coordenadas fijas de los dos vértices de la Red Geodésica Nacional son los siguientes:

V	X	Y	Z
	m	m	m
A	- 959,819.85	- 5,944,550.45	2,102,507.89
B	- 957,526.47	- 5,944,848.06	2,102,719.53
C	- 959,474.31	- 5,944,701.62	2,102,255.04
D	- 959,186.81	- 5,944,600.39	2,102,672.67
E	- 958,682.94	- 5,944,415.24	2,103,396.64

V	X	Y	Z
	m	m	m
A	- 959,818.88	- 5,944,550.86	2,102,507.84
B	- 957,522.34	- 5,944,835.25	2,102,712.37

En esta ocasión se ajustan los datos medidos en campo mediante el método paramétrico.

Como valores iniciales de las coordenadas de los vértices C, D y E, se tomarán directamente los datos obtenidos con el equipo GPS.

Para comenzar, formulamos las diecinueve ecuaciones de condición.

$$\begin{aligned} X_C &= X_A + \Delta X_{AC} \\ Y_C &= Y_A + \Delta Y_{AC} \\ Z_C &= Z_A + \Delta Z_{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_C &= X_B + \Delta X_{BC} \\ Y_C &= Y_B + \Delta Y_{BC} \\ Z_C &= Z_B + \Delta Z_{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_D &= X_A + \Delta X_{AD} \\ Y_D &= Y_A + \Delta Y_{AD} \\ Z_D &= Z_A + \Delta Z_{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_D &= X_B + \Delta X_{BD} \\ Y_D &= Y_B + \Delta Y_{BD} \\ Z_D &= Z_B + \Delta Z_{BD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_E &= X_A + \Delta X_{AE} \\ Y_E &= Y_A + \Delta Y_{AE} \\ Z_E &= Z_A + \Delta Z_{AE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_E &= X_B + \Delta X_{BE} \\ Y_E &= Y_B + \Delta Y_{BE} \\ Z_E &= Z_B + \Delta Z_{BE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{\frac{1}{2}} + [(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ (X_E^0 - X_C^0)^2 + (Y_E^0 - Y_C^0)^2 + (Z_E^0 - Z_C^0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por ejemplo, para la primera ecuación de condición, tenemos:

$$\Delta X_{AC} = X_C^0 - X_A^0$$

La  $X_C^0$  corresponde al valor inicial de  $X_C$  (valor que por cierto deseamos ajustar); y  $X_A^0$  al valor medido de  $X_A$ .

$$F_1 : \quad \begin{aligned} X_C &= X_A + (X_C^0 - X_A^0) \\ X_C - X_A - (X_C^0 - X_A^0) &= 0 \end{aligned}$$

Para formar la matriz A, es necesario obtener las derivadas parciales de las ecuaciones de condición con respecto a los parámetros desconocidos. En expresión matricial, de forma simplificada tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_C} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_C} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_C} & \frac{\partial F_1}{\partial X_D} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_D} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_D} & \frac{\partial F_1}{\partial X_E} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_E} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_E} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{19}}{\partial X_C} & \frac{\partial F_{19}}{\partial Y_C} & \frac{\partial F_{19}}{\partial Z_C} & \frac{\partial F_{19}}{\partial X_D} & \frac{\partial F_{19}}{\partial Y_D} & \frac{\partial F_{19}}{\partial Z_D} & \frac{\partial F_{19}}{\partial X_E} & \frac{\partial F_{19}}{\partial Y_E} & \frac{\partial F_{19}}{\partial Z_E} \end{bmatrix}_{19 \times 9}$$

Evaluando las derivadas parciales en los valores iniciales y sustituyendo los valores medidos, nos da:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{19 \times 9}$$

En donde:

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial X_D} = \frac{1}{2} \cdot [(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2 \cdot (X_D - X_C) \cdot (1)]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot [(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2 \cdot (X_E - X_D) \cdot (1)]$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial X_D} = \frac{(X_D - X_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(X_E - X_D)}{[(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial Y_D} = \frac{(Y_D - Y_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(Y_E - Y_D)}{[(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial Z_D} = \frac{(Z_D - Z_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(Z_E - Z_D)}{[(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial X_E} = \frac{(X_E - X_D)}{[(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial X_C} = - \frac{(X_D - X_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial Y_E} = \frac{(Y_E - Y_D)}{[(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial Y_C} = - \frac{(Y_D - Y_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial Z_E} = \frac{(Z_E - Z_D)}{[(X_E - X_D)^2 + (Y_E - Y_D)^2 + (Z_E - Z_D)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_{19}}{\partial Z_C} = - \frac{(Z_D - Z_C)}{[(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2]^{\frac{1}{2}}}$$



Para formar la matriz  $W$ , se requiere sustituir los valores iniciales de los parámetros desconocidos y los valores medidos, en las diecinueve ecuaciones de condición.

$$W = \begin{bmatrix} -0.964 \\ 0.402 \\ 0.046 \\ -0.964 \\ 0.402 \\ 0.046 \\ -0.964 \\ 0.402 \\ 0.046 \\ -4.132 \\ -12.810 \\ 7.162 \\ -4.132 \\ -12.810 \\ 7.162 \\ -4.132 \\ -12.810 \\ 7.162 \\ 0.020 \end{bmatrix}_{19 \times 1}$$

Aplicando las expresiones matriciales correspondientes al método paramétrico, tenemos:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4614 & -0.0136 & -0.0561 & -0.0002 & -0.0007 & 0.0003 & 0.0389 & 0.0143 & 0.0558 \\ -0.0136 & 0.4952 & -0.0198 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0001 & 0.0137 & 0.0050 & 0.0197 \\ -0.0561 & -0.0198 & 0.4184 & -0.0003 & -0.0010 & 0.0005 & 0.0564 & 0.0207 & 0.0811 \\ -0.0002 & -0.0001 & -0.0003 & 0.5000 & -3.6 \times 10^{-6} & 1.7 \times 10^{-6} & 0.0002 & 0.0001 & 0.0003 \\ -0.0007 & -0.0002 & -0.0010 & -3.6 \times 10^{-6} & 0.5000 & 5.4 \times 10^{-6} & 0.0007 & 0.0002 & 0.0010 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0005 & 1.7 \times 10^{-6} & 5.4 \times 10^{-6} & 0.5000 & -0.0003 & -0.0001 & -0.0004 \\ 0.0389 & 0.0137 & 0.0564 & 0.0002 & 0.0007 & -0.0003 & 0.4609 & -0.0144 & -0.0561 \\ 0.0143 & 0.0050 & 0.0207 & 0.0001 & 0.0002 & -0.0001 & -0.0144 & 0.4947 & -0.0206 \\ 0.0558 & 0.0197 & 0.0811 & 0.0003 & 0.0010 & -0.0004 & -0.0561 & -0.0206 & 0.4193 \end{bmatrix}$$

$$A^T W = \begin{bmatrix} -5.107 \\ -12.412 \\ 7.191 \\ -5.096 \\ -12.408 \\ 7.208 \\ -5.085 \\ -12.404 \\ 7.224 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = -(A^T A)^{-1} A^T W = \begin{bmatrix} 2.551 \\ 6.205 \\ -3.600 \\ 2.548 \\ 6.204 \\ -3.604 \\ 2.545 \\ 6.203 \\ -3.608 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ X_D \\ Y_D \\ Z_D \\ X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} = X^0 + \hat{\delta} = \begin{bmatrix} -959,471.758 \\ -5,944,695.411 \\ 2,102,251.442 \\ -959,184.259 \\ -5,944,594.183 \\ 2,102,669.068 \\ -958,680.391 \\ -5,944,409.037 \\ 2,103,393.034 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

Al realizar la segunda iteración, el método nos da valores para  $\hat{\delta}$  del orden de nanómetros; por lo que es suficiente la primera iteración, para obtener los valores más probables de las coordenadas de C, D y E con cifras al milímetro.

En este caso, considerando que la matriz de pesos es la matriz identidad, también se da que:

$$\hat{k} = \hat{r} = (A\hat{\delta} + W) = \begin{bmatrix} 1.587 \\ 6.607 \\ -3.554 \\ 1.584 \\ 6.606 \\ -3.558 \\ 1.581 \\ 6.605 \\ -3.562 \\ -1.581 \\ -6.605 \\ 3.562 \\ -1.584 \\ -6.606 \\ 3.588 \\ -1.587 \\ -6.607 \\ 3.554 \\ 0.010 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

Esta matriz contiene las cantidades que se le tienen que sumar a las distancias que existen de los vértices A, B a los vértices C, D y E, respectivamente, pero referidas a los tres ejes coordenados X, Y y Z.

Una vez que se encuentran los valores ajustados de aquellas distancias, se pueden sustituir estos en las primeras dieciocho ecuaciones de condición, para que con ello se calculen los valores ajustados de las coordenadas medidas de los vértices A y B; lo cual nos da cierta idea de la bondad del ajuste.

Factor de varianza a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{r^T r}{v} = \frac{352.818}{10}$$

Para obtener las desviaciones estándar de las coordenadas, calculamos la matriz

$$C_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 16.277 & -0.480 & -1.981 & -0.007 & -0.024 & 0.011 & 1.371 & 0.504 & 1.970 \\ -0.480 & 17.472 & -0.697 & -0.003 & -0.008 & 0.004 & 0.483 & 0.177 & 0.694 \\ -1.981 & -0.697 & 14.764 & -0.011 & -0.034 & 0.016 & 1.992 & 0.732 & 2.861 \\ -0.007 & -0.003 & -0.011 & 17.641 & -1.3x10^{-4} & 5.9x10^{-5} & 0.007 & 0.003 & 0.011 \\ -0.024 & -0.008 & -0.034 & -1.3x10^{-4} & 17.640 & 1.9x10^{-4} & 0.024 & 0.009 & 0.034 \\ 0.011 & 0.004 & 0.016 & 5.9x10^{-5} & 1.9x10^{-4} & 17.641 & -0.011 & -0.004 & -0.016 \\ 1.371 & 0.483 & 1.992 & 0.007 & 0.024 & -0.011 & 16.263 & -0.506 & -1.980 \\ 0.504 & 0.177 & 0.732 & 0.003 & 0.009 & -0.004 & -0.506 & 17.455 & -0.728 \\ 1.970 & 0.694 & 2.861 & 0.011 & 0.034 & -0.016 & -1.980 & -0.728 & 14.795 \end{bmatrix}$$

La raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal, nos proporciona las desviaciones estándar de las coordenadas de los puntos C, D y E.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X_C} & & & & & & & & & & \\ & \sigma_{Y_C} & & & & & & & & & \\ & & \sigma_{Z_C} & & & & & & & & \\ & & & \sigma_{X_D} & & & & & & & \\ & & & & \sigma_{Y_D} & & & & & & \\ & & & & & \sigma_{Z_D} & & & & & \\ & & & & & & \sigma_{X_E} & & & & \\ & & & & & & & \sigma_{Y_E} & & & \\ & & & & & & & & \sigma_{Z_E} & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.035 & & & & & & & & & & \\ & 4.180 & & & & & & & & & \\ & & 3.842 & & & & & & & & \\ & & & 4.200 & & & & & & & \\ & & & & 4.200 & & & & & & \\ & & & & & 4.200 & & & & & \\ & & & & & & 4.200 & & & & \\ & & & & & & & 4.033 & & & \\ & & & & & & & & 4.178 & & \\ & & & & & & & & & 4.178 & \\ & & & & & & & & & & 3.846 \end{bmatrix}$$

Para obtener las desviaciones estándar de las distancias entre vértices, calculamos la matriz

$$\hat{\sigma}_0^2 [A(A^T A)^{-1} A^T]$$

La cual tomando en consideración que es una matriz de 19 filas por 19 columnas, por simplicidad omitimos escribir. La raíz cuadrada de la diagonal principal proporciona las desviaciones estándar de las distancias ajustadas entre vértices; y por claridad, en esta ocasión se presenta en forma de vector columna.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X_{AC}} \\ \sigma_{\Delta Y_{AC}} \\ \sigma_{\Delta Z_{AC}} \\ \sigma_{\Delta X_{AD}} \\ \sigma_{\Delta Y_{AD}} \\ \sigma_{\Delta Z_{AD}} \\ \sigma_{\Delta X_{AE}} \\ \sigma_{\Delta Y_{AE}} \\ \sigma_{\Delta Z_{AE}} \\ \sigma_{\Delta X_{BC}} \\ \sigma_{\Delta Y_{BC}} \\ \sigma_{\Delta Z_{BC}} \\ \sigma_{\Delta X_{BD}} \\ \sigma_{\Delta Y_{BD}} \\ \sigma_{\Delta Z_{BD}} \\ \sigma_{\Delta X_{BE}} \\ \sigma_{\Delta Y_{BE}} \\ \sigma_{\Delta Z_{BE}} \\ \sigma_{\Delta D_{CE}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.035 \\ 4.180 \\ 3.842 \\ 4.200 \\ 4.200 \\ 4.200 \\ 4.033 \\ 4.178 \\ 3.846 \\ 4.035 \\ 4.180 \\ 3.842 \\ 4.200 \\ 4.200 \\ 4.200 \\ 4.033 \\ 4.178 \\ 3.846 \\ 4.200 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{\Delta D_{CE}}$  → corresponde a la desviación estándar de la distancia entre los vértices C y E.

Nótese los valores grandes en las desviaciones estándar de las coordenadas ajustadas y de las distancias entre vértices.

Las mediciones con GPS utilizadas, corresponden a datos de campo recabados con un navegador GPS de la marca GARMIN.

La idea que se maneja en este ejemplo, es que no obstante que los datos utilizados provienen de un equipo de medición de baja precisión, las mediciones realizadas se encuentran influenciadas básicamente por los mismos errores, toda vez que fueron recabadas en condiciones similares.

El período de tiempo entre mediciones fue corto, las condiciones atmosféricas son similares, la distancia entre vértices es pequeña, los puntos de control se encuentran a corta distancia.

Las coordenadas medidas de los vértices de control A y B, presentan desviaciones de un par de metros al compararse con las coordenadas conocidas de los dos vértices de la Red Geodésica Nacional; por lo que se encontró una desviación similar en los tres vértices restantes C, D y E.

Lo que se esperaba al inicio del análisis de este ejemplo, es que si bien los cinco puntos medidos presentan desviaciones de un par de metros en sus coordenadas, por lo menos la posición relativa entre ellos tendría que ser buena.

Para obtener las coordenadas geodésicas cartesianas tridimensionales de los cinco vértices medidos en campo con el navegador, es necesario aplicar la ecuación 6.12 señalada en la sección 6.4.3. Una vez que se obtienen las coordenadas ajustadas de los vértices tras el empleo del método paramétrico, con la aplicación de manera iterativa de las ecuaciones 6.13 y 6.15, podemos obtener las coordenadas geodésicas curvilíneas  $\varphi$  y  $\lambda$ , de los vértices C, D y E.

Cabe mencionar, que la ecuación de condición número 19, supone que los tres puntos son co-lineales, y que además la diferencia entre distancia horizontal y distancia inclinada es despreciable entre los puntos C, D y E.

En esta sección se desarrolló un ejemplo en el que se buscaba encontrar el valor más probable de las coordenadas de tres vértices apoyándonos en dos puntos de control; las operaciones realizadas incluyen matrices que contenían 9 incógnitas y 19 ecuaciones de condición. A pesar de que se trataba de un ejemplo sencillo, la cantidad de cálculos necesarios fue considerable.

Se identifica que para problemas más complejos, el tamaño de las matrices implicadas será grande; por lo que se vislumbra necesaria la utilización de algún lenguaje de programación para el desarrollo de las operaciones matriciales y para el procesamiento de la gran cantidad de datos involucrados.

## 8.8 LA ELIPSE DE ERROR

Las elipses de error nos brindan una representación gráfica en dos dimensiones de las incertidumbres de las coordenadas ajustadas de los vértices tras la aplicación del ajuste de mínimos cuadrados.

Cuando se representan a escala ampliada, directamente en los diagramas del levantamiento horizontal, nos brindan la posibilidad de realizar rápidamente un análisis visual de la precisión general de todos los vértices ajustados.

Las expresiones<sup>91</sup> para calcular los elementos de dichas elipses, son las siguientes:

$$\tan(2t) = \frac{2q_{xy}}{q_{xy} - q_{xx}}$$

$$\sigma_U = \sigma_0 \sqrt{q_{xx} \sin^2(t) + 2q_{xy} \cos(t) \sin(t) + q_{yy} \cos^2(t)}$$

$$\sigma_V = \sigma_0 \sqrt{q_{xx} \cos^2(t) - 2q_{xy} \cos(t) \sin(t) + q_{yy} \sin^2(t)}$$

En donde,  $t$  se refiere al ángulo de rotación del semieje mayor de la elipse, con respecto al eje Y;  $\sigma_0$  es el factor de varianza a posteriori;  $q_{xx}$  es el elemento de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza que corresponde al elemento (*parámetro*) cuya elipse queremos calcular;  $q_{xy}$  es el elemento fuera de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza del elemento cuya elipse queremos calcular. Por supuesto,  $\sigma_U$  y  $\sigma_V$  son los semiejes mayor y menor, respectivamente, de la elipse de error.

Al calcular  $t$ , es necesario establecer el cuadrante antes de dividir entre dos, mediante la aplicación de la tabla siguiente:

TABLA 8.7  
CUADRANTE DEL ÁNGULO DEL SEMIEJE MAYOR

CUADRANTE	seno (2t)	cos (2t)
I	+	+
II	+	-
III	-	-
IV	-	+

Tabla 19.1, "Adjustment Computations", pág. 374.

<sup>91</sup> Adjustment Computations, Secciones 19.1 y 19.2, pág. 369 a 376.

Por ejemplo, al aplicar las expresiones anteriores a nuestro ajuste de poligonal cerrada de la sección 8.3.2, tenemos:

Matriz de varianzas-covarianzas

$$Q_{XX} = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6.019 & 10.459 & 1.275 & 10.686 \\ 10.459 & 22.726 & 2.725 & 22.498 \\ 1.275 & 2.725 & 1.325 & 2.772 \\ 10.686 & 22.498 & 2.772 & 24.155 \end{bmatrix}$$

Para el punto C

$$q_{xx} = 6.019 \quad q_{xy} = 10.459 \quad q_{yy} = 22.726$$

$$\tan(2t) = \frac{20.92}{4.44}$$

$$t = 39.008^\circ$$

$$\sigma_U = 0.001226$$

$$\sigma_V = 0.000370$$

Para el punto D

$$q_{xx} = 1.325 \quad q_{xy} = 2.772 \quad q_{yy} = 24.155$$

$$\tan(2t) = \frac{5.54}{1.45}$$

$$t = 37.69^\circ$$

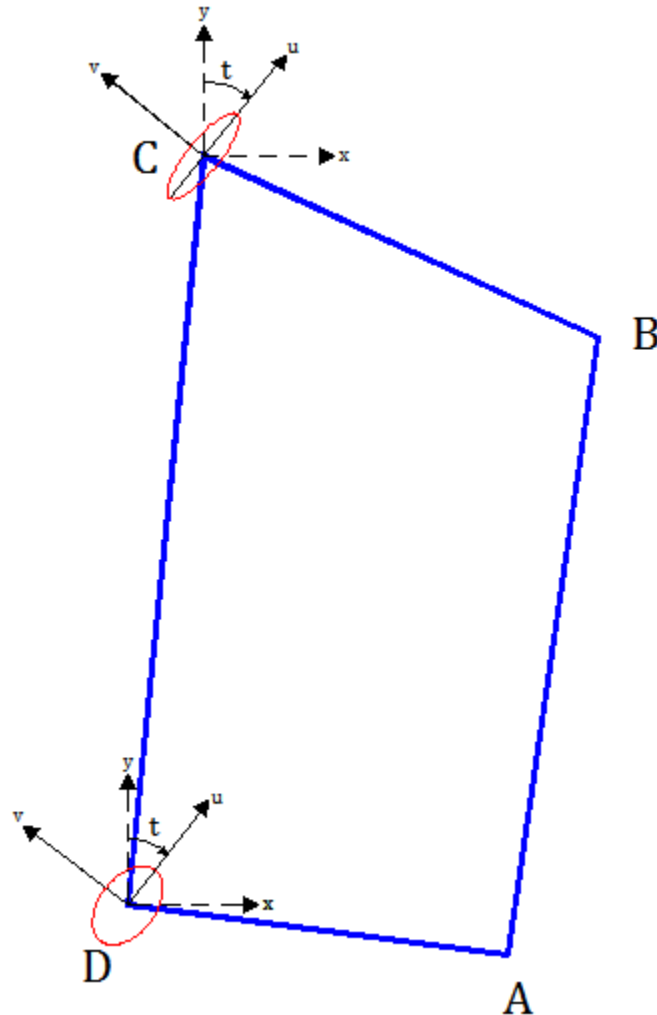
$$\sigma_U = 0.001022$$

$$\sigma_V = 0.000639$$

En la figura 8.6, se muestra la representación de las elipses de error para los vértices C y D de nuestro ejemplo de poligonal cerrada de la sección 8.3.2. Por supuesto, fue necesario amplificar hasta 1000 veces, las dimensiones de los semiejes de las elipses para que pudieran ser visualizados.

En aquellos casos en los que los valores de los semiejes a y b de la elipse de error son casi iguales; es decir, la elipse de error asemeja a un círculo, esto indica que ese punto tiene una precisión aproximadamente igual en todas direcciones.

En la figura, se muestran simultáneamente los ejes coordenados X, Y; y los ejes U, V correspondientes a la direcciones de los semiejes de la elipses de error.

FIGURA 8.6  
ELIPSES DE ERROR  
POLIGONAL CERRADA

En la figura 8.6, nótese que las direcciones de los ejes menores de las elipses de error, se encuentran apuntando hacia los puntos de control establecidos en el planteamiento del problema; es decir, hacia los puntos A y B.

Para cada punto ajustado, la dirección con precisión más alta es marcada justamente por la dirección del semieje menor de la elipse de error del punto. En contraparte las direcciones con precisiones más bajas, se encuentran señaladas por los semiejes mayores de las elipses de error.

Otro detalle que puede observarse, es que el vértice que se encuentra más alejado de los puntos, en este caso C, presenta la incertidumbre más grande.

En una red de medición más compleja, la orientación y dimensiones de las elipses de error, nos señalan aquellos sitios en los que es necesario agregar un control horizontal adicional para mejorar la precisión en las mediciones realizadas.

## 8.9 CONCLUSIONES

La aplicación del método de mínimos cuadrados a los datos recabados en campo, nos permite dar un adecuado tratamiento estadístico a la información; nos brinda una idea del grado de confiabilidad del método de medición empleado, la situación final de los vértices medidos, así como la posibilidad de analizar simultáneamente toda la información recabada del polígono analizado.

## 8.10 REFERENCIAS

- I. Paul R. Wolf, Charles D. Ghilani, Topografía Alfaomega, Diciembre de 2008.
- II. D. E. Wells, E. J. Krakiwsky, The Method of Least Squares, Lecture Notes N. 18, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P.O. Box 4400, Fredericton, N.B., Canada, May 1971.
- III. Charles D. Ghilani, Ph.D., Paul R. Wolf, Ph.D., Adjustment Computations, Spatial Data Analysis, Fourth Edition, Wiley, 2006.
- IV. Roland E. Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards, Cálculo y Geometría Analítica, McGraw-Hill, 1999.



## 9. CONCLUSIONES

En virtud que características como área de la propiedad y ubicación de sus linderos; son elementos que revisten gran importancia en el catastro de la propiedad social y en particular en el procedimiento expropiatorio. En el desarrollo del presente trabajo, entre otras cosas, se analizaron los datos técnicos de tres propiedades sociales de diferente forma, tamaño y ubicación geográfica.

A los datos procesados se les sometió a diversas transformaciones de coordenadas y reducciones geodésicas, con la finalidad de analizar la variación en tamaño de los polígonos involucrados, así como la variación en posición de los vértices que los componen.

Así mismo, se identificaron las variaciones en posición relativa (*de los vértices*), en forma y en superficie sufridas por los polígonos analizados, y la relación directa que guardan con características como: posición que ocupan en la zona UTM, alturas geodésicas (*altura Ortométrica, Geoidal, Elipsoidal*), radio de curvatura, desviación de la vertical, latitud, superficie de referencia (*para medir el área*).

Del análisis de los resultados obtenidos, se pueden señalar tres cuestiones importantes:

- I. Es necesario realizar siempre un tratamiento e interpretación correcta de los datos recabados en campo, así como aplicar las correspondientes transformaciones de coordenadas en función del instrumento de medición empleado. La información complementaria que se incorpore a los Mosaicos Descriptivos, será interpretada y tratada de manera homóloga antes de ser adicionada.
- II. Realizar las reducciones geodésicas a la información obtenida en campo, siempre que sean necesarias.
- III. Se identifica la necesidad de modernizar los lineamientos actuales para determinar las superficies de grandes extensiones de tierra, para que el valor calculado represente mejor las características geométricas de los polígonos de la propiedad social.

## 10. ANEXOS

## ANEXO 1

## UBICACIÓN DE PUNTOS EXTREMOS DE MÉXICO

La Isla Guadalupe (*Punta Roca Elefante*) en el meridiano  $118^{\circ} 22' 00''$  Oeste.



Acercamiento a la parte Norte de la Isla.



Monumento 206, límite México-Estados Unidos de América, en el paralelo  $32^{\circ} 43' 06''$ .



Vista del Monumento 206.



FUENTE:

<https://es.foursquare.com/v/monumento-206-winterhaven-ca/4f41814de4b029502a42386f>

## ANEXO 2\*

## Tablas de Datos Capítulo 4

TABLA 4.1  
PRECISIÓN EN LOS LEVANTAMIENTOS, FANAR.<sup>62</sup>

Tipo de Levantamiento	Equipo utilizado		
	Estación Total	GPS	GPS Tiempo Real RTK
Establecimiento de los vértices geodésicos, para vincular a la Red Geodésica Nacional Activa	NA*	1:50 000	NA
Propagación de las coordenadas	1: 20, 000	Horizontal de 20 mm. + 1 ppm y en Vertical de 30 mm. + 1 ppm.	Horizontal de 25 mm. y en Vertical de 35 mm.
Mediciones al interior del Núcleo Agrario	1: 10, 000	Horizontal de 30 mm. + 1 ppm y en Vertical de 40 mm. + 1 ppm.	Horizontal de 35 mm. y en Vertical de 45 mm.
Percepción Remota	NA	Fotoidentificación de los vértices deberá ser de 0.2 mm., en relación a la escala del producto.	NA

TABLA 4.2  
EJIDO RANCHO NUEVO NOPALTEPEC  
EN DIFERENTES MERIDIANOS Y EN UN SÓLO PARALELO

MERIDIANO	ID	SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	PERÍMETRO [m]	UTM <sub>i</sub> - UTM <sub>99A</sub>		PORCENTAJE DE VARIACIÓN EN SUPERFICIE %
				DIFERENCIA SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	DIFERENCIA PERÍMETRO [m]	
99°	<b>UTM 99 A</b>	<b>12,495,691.254</b>	18,574.410	-	-	-
98° 30'	UTM B	12,496,572.079	18,575.055	880.83	0.64	0.01
98°	UTM C	12,499,179.518	18,576.989	3,488.26	2.58	0.03
97° 30'	UTM D	12,503,514.510	18,580.202	7,823.26	5.79	0.06
97°	UTM E	12,509,579.658	18,584.701	13,888.40	10.29	0.11
96° 30'	UTM F	12,517,377.690	18,590.488	21,686.44	16.08	0.17
96°	<b>UTM 96 G</b>	<b>12,526,367.252</b>	18,597.163	30,676.00	22.75	<b>0.25</b>

\* Mediante números resaltados en color, se indican los datos directamente citados en el capítulo correspondiente.



TABLA 4.3  
EJIDO RANCHO NUEVO NOPALTEPEC  
EN DIFERENTES PARALELOS, MERIDIANO 96°  
SISTEMA UTM

PARALELO	ID	SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	PERÍMETRO [m]	VARIACIÓN EN LATITUD [GRADOS]	UTM <sub>i</sub> - UTM <sub>99A</sub>		PORCENTAJE DE VARIACIÓN EN SUPERFICIE [%]
					DIFERENCIA SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	DIFERENCIA PERÍMETRO [m]	
14° 49' 30"	UTM G1	12,751,313.758	18,740.133	-3.5	255,622.50	165.72	2.05
15° 19' 30"	UTM G2	12,722,032.249	18,721.479	-3	226,340.99	147.07	1.81
15° 49' 30"	UTM G3	12,691,793.896	18,702.237	-2.5	196,102.64	127.83	1.57
16° 19' 30"	UTM G4	12,660,604.787	18,682.401	-2	164,913.53	107.99	1.32
16° 49' 30"	UTM G5	12,628,465.016	18,661.970	-1.5	132,773.76	87.56	1.06
17° 19' 30"	UTM G6	12,595,377.095	18,640.949	-1	99,685.84	66.54	0.80
17° 49' 30"	UTM G7	12,561,344.477	18,619.346	-0.5	65,653.22	44.94	0.53
18° 19' 30"	UTM G8	<b>12,526,367.252</b>	18,597.163	0	<b>30,676.00</b>	22.75	<b>0.25</b>
18° 49' 30"	UTM G9	12,490,449.666	18,574.395	0.5	- 5,241.59	- 0.02	-0.04
19° 19' 30"	UTM G10	12,453,591.036	18,551.047	1	- 42,100.22	- 23.36	-0.34
19° 49' 30"	UTM G11	12,415,795.172	18,527.131	1.5	- 79,896.08	- 47.28	-0.64
20° 19' 30"	UTM G12	12,377,066.332	18,502.639	2	- 118,624.92	- 71.77	-0.95
20° 49' 30"	UTM G13	12,337,405.910	18,477.579	2.5	- 158,285.34	- 96.83	-1.27
21° 19' 30"	UTM G14	12,296,814.208	18,451.953	3	- 198,877.05	- 122.46	-1.59
21° 49' 30"	UTM G15	12,255,297.437	18,425.767	3.5	- 240,393.82	- 148.64	-1.92
22° 19' 30"	UTM G16	12,212,854.351	18,399.024	4	- 282,836.90	- 175.39	-2.26
22° 49' 30"	UTM G17	12,169,492.235	18,371.721	4.5	- 326,199.02	- 202.69	-2.61
23° 19' 30"	UTM G18	12,125,208.872	18,343.867	5	- 370,482.38	- 230.54	-2.96
23° 49' 30"	UTM G19	12,080,011.615	18,315.463	5.5	- 415,679.64	- 258.95	-3.33
24° 19' 30"	UTM G20	12,033,899.366	18,286.522	6	- 461,791.89	- 287.89	-3.70
24° 49' 30"	UTM G21	11,986,878.948	18,257.032	6.5	- 508,812.31	- 317.38	-4.07
25° 19' 30"	UTM G22	11,938,950.954	18,227.008	7	- 556,740.30	- 347.40	-4.46
25° 49' 30"	UTM G23	11,890,119.436	18,196.447	7.5	- 605,571.82	- 377.96	-4.85
26° 19' 30"	UTM G24	11,840,385.225	18,165.365	8	- 655,306.03	- 409.05	-5.24
26° 49' 30"	UTM G25	11,789,757.102	18,133.749	8.5	- 705,934.15	- 440.66	-5.65
27° 19' 30"	UTM G26	11,738,232.149	18,101.615	9	- 757,459.11	- 472.80	-6.06
27° 49' 30"	UTM G27	11,685,817.703	18,068.962	9.5	- 809,873.55	- 505.45	-6.48
28° 19' 30"	UTM G28	11,632,515.287	18,035.803	10	- 863,175.97	- 538.61	-6.91
28° 49' 30"	UTM G29	11,578,329.811	18,002.127	10.5	- 917,361.44	- 572.28	-7.34
29° 19' 30"	UTM G30	11,523,263.775	17,967.950	11	- 972,427.48	- 606.46	-7.78
29° 49' 30"	UTM G31	11,467,321.073	17,933.275	11.5	- 1,028,370.18	- 641.14	-8.23
30° 19' 30"	UTM G32	11,410,504.690	17,898.103	12	- 1,085,186.56	- 676.31	-8.68
30° 49' 30"	UTM G33	11,352,820.501	17,862.442	12.5	- 1,142,870.75	- 711.97	-9.15
31° 19' 30"	UTM G34	11,294,269.698	17,826.291	13	- 1,201,421.56	- 748.12	-9.61
31° 49' 30"	UTM G35	11,234,859.619	17,789.669	13.5	- 1,260,831.64	- 784.74	-10.09
32° 19' 30"	UTM G36	11,174,589.742	17,752.563	14	<b>- 1,321,101.51</b>	- 821.85	<b>-10.57</b>

TABLA 4.4  
EJIDO RANCHO NUEVO NOPALTEPEC  
EN DIFERENTES MERIDIANOS Y VARIANDO LA LATITUD  
SISTEMA UTM

Variación en Latitud [grados]	DIFERENCIA EN SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]			
	Meridiano 99°	Meridiano 98°	Meridiano 97°	Meridiano 96°
-3.5	223,235.99	226,918.53	237,897.77	255,622.50
-3	194,178.63	197,834.49	208,739.94	226,340.99
-2.5	164,174.20	167,804.26	178,628.59	196,102.64
-2	133,222.69	136,827.13	147,569.70	164,913.53
-1.5	101,327.66	104,902.76	115,565.43	132,773.76
-1	68,491.88	72,037.69	82,615.07	99,685.84
-0.5	34,715.82	38,232.32	48,721.46	65,653.22
0	-	3,488.26	13,888.40	30,676.00
0.5	- 35,650.01	- 32,193.44	- 21,884.83	- 5,241.59
1	- 72,235.76	- 68,809.28	- 58,593.65	- 42,100.22
1.5	- 109,752.57	- 106,356.80	- 96,234.10	- 79,896.08
2	- 148,198.61	- 144,835.72	- 134,809.37	- 118,624.92
2.5	- 187,570.42	- 184,242.42	- 174,311.61	- 158,285.34
3	- 227,868.98	- 224,573.11	- 214,743.84	- 198,877.05
3.5	- 269,090.11	- 265,827.71	- 256,098.14	- 240,393.82
4	- 311,228.82	- 308,001.17	- 298,373.80	- 282,836.90
4.5	- 354,286.87	- 351,094.63	- 341,571.43	- 326,199.02
5	- 398,258.58	- 395,100.77	- 385,683.05	- 370,482.38
5.5	- 443,141.76	- 440,020.42	- 430,707.92	- 415,679.64
6	- 488,935.28	- 485,849.59	- 476,645.51	- 461,791.89
6.5	- 535,634.76	- 532,585.32	- 523,490.46	- 508,812.31
7	- 583,236.88	- 580,225.55	- 571,239.80	- 556,740.30
7.5	- 631,740.48	- 628,764.38	- 619,892.53	- 605,571.82
8	- 681,141.54	- 678,203.78	- 669,441.99	- 655,306.03
8.5	- 731,435.53	- 728,536.28	- 719,889.89	- 705,934.15
9	- 782,621.44	- 779,760.22	- 771,228.64	- 757,459.11
9.5	- 834,695.96	- 831,872.75	- 823,455.91	- 809,873.55
10	- 887,654.83	- 884,871.24	- 876,569.96	- 863,175.97
10.5	- 941,496.06	- 938,750.32	- 930,567.61	- 917,361.44
11	- 996,214.15	- 993,509.89	- 985,442.45	- 972,427.48
11.5	-1,051,806.80	-1,049,142.21	-1,041,195.32	-1,028,370.18
12	-1,108,271.73	-1,105,647.11	-1,097,817.60	-1,085,186.56
12.5	-1,165,603.50	-1,163,016.96	-1,155,308.66	-1,142,870.75
13	-1,223,797.70	-1,221,252.50	-1,213,663.76	-1,201,421.56
13.5	-1,282,853.99	-1,280,347.61	-1,272,880.98	-1,260,831.64
14	-1,342,765.75	-1,340,300.76	-1,332,954.47	<b>-1,321,101.51</b>

TABLA 4.5  
EJIDO RANCHO NUEVO NOPALTEPEC  
MERIDIANO CENTRAL 96°  
PROYECCIÓN TME

PARALELO	ID	SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	PERÍMETRO [m]	VARIACIÓN EN LATITUD [GRADOS]	TME <sub>i</sub> - TME <sub>G8</sub>	
					DIFERENCIA SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	DIFERENCIA PERÍMETRO [m]
14° 49' 30"	TME G1	12,729,109.726	18,723.834	-3.5	223,413.706	141.994
15° 19' 30"	TME G2	12,700,029.906	18,705.317	-3	194,333.887	123.477
15° 49' 30"	TME G3	12,670,001.016	18,686.204	-2.5	164,304.996	104.363
16° 19' 30"	TME G4	12,639,026.362	18,666.504	-2	133,330.342	84.664
16° 49' 30"	TME G5	12,607,105.149	18,646.212	-1.5	101,409.130	64.372
17° 19' 30"	TME G6	12,574,242.587	18,625.335	-1	68,546.568	43.495
17° 49' 30"	TME G7	12,540,438.033	18,603.877	-0.5	34,742.014	22.036
18° 19' 30"	TME G8	12,505,696.019	18,581.841	0	-	-
18° 49' 30"	TME G9	12,470,015.345	18,559.226	0.5	- 35,680.675	- 22.614
19° 19' 30"	TME G10	12,433,402.360	18,536.036	1	- 72,293.660	- 45.805
19° 49' 30"	TME G11	12,395,854.942	18,512.278	1.5	- 109,841.077	- 69.562
20° 19' 30"	TME G12	12,357,377.999	18,487.944	2	- 148,318.020	- 93.897
20° 49' 30"	TME G13	12,317,974.240	18,463.055	2.5	- 187,721.780	- 118.786
21° 19' 30"	TME G14	12,277,643.043	18,437.593	3	- 228,052.977	- 144.247
21° 49' 30"	TME G15	12,236,388.918	18,411.578	3.5	- 269,307.101	- 170.262
22° 19' 30"	TME G16	12,194,216.326	18,385.007	4	- 311,479.694	- 196.833
22° 49' 30"	TME G17	12,151,124.752	18,357.883	4.5	- 354,571.267	- 223.957
23° 19' 30"	TME G18	12,107,117.986	18,330.206	5	- 398,578.034	- 251.634
23° 49' 30"	TME G19	12,062,197.719	18,301.986	5.5	- 443,498.300	- 279.855
24° 19' 30"	TME G20	12,016,368.295	18,273.223	6	- 489,327.724	- 308.617
24° 49' 30"	TME G21	11,969,630.490	18,243.921	6.5	- 536,065.530	- 337.920
25° 19' 30"	TME G22	11,921,991.090	18,214.085	7	- 583,704.929	- 367.756
25° 49' 30"	TME G23	11,873,448.214	18,183.719	7.5	- 632,247.806	- 398.122
26° 19' 30"	TME G24	11,824,009.130	18,152.823	8	- 681,686.890	- 429.018
26° 49' 30"	TME G25	11,773,673.919	18,121.407	8.5	- 732,022.101	- 460.434
27° 19' 30"	TME G26	11,722,447.542	18,089.463	9	- 783,248.478	- 492.377
27° 49' 30"	TME G27	11,670,330.767	18,057.018	9.5	- 835,365.253	- 524.823
28° 19' 30"	TME G28	11,617,328.757	18,024.049	10	- 888,367.263	- 557.792
28° 49' 30"	TME G29	11,563,444.635	17,990.580	10.5	- 942,251.385	- 591.261
29° 19' 30"	TME G30	11,508,683.422	17,956.601	11	- 997,012.598	- 625.239
29° 49' 30"	TME G31	11,453,046.374	17,922.136	11.5	- 1,052,649.646	- 659.704
30° 19' 30"	TME G32	11,396,536.866	17,887.169	12	- 1,109,159.154	- 694.672
30° 49' 30"	TME G33	11,339,159.444	17,851.715	12.5	- 1,166,536.576	- 730.125
31° 19' 30"	TME G34	11,280,917.155	17,815.778	13	- 1,224,778.865	- 766.063
31° 49' 30"	TME G35	11,221,815.212	17,779.357	13.5	- 1,283,880.808	- 802.483
32° 19' 30"	TME G36	11,161,855.067	17,742.467	14	- 1,343,840.952	- 839.373

TABLA 4.6  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
PROYECCIÓN TME  
PARALELO CONSTANTE

ID	SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	PERÍMETRO [m]	VARIACIÓN EN LONGITUD	TME <sub>i</sub> - TME <sub>96</sub>	
				DIFERENCIA SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	DIFERENCIA PERÍMETRO [m]
TME 96	12,505,693.661	18,581.838	-	-	-
IZQ 0 30	12,505,694.618	18,581.836	0'30"	0.957	- 0.0021
IZQ 1 00	12,505,694.488	18,581.837	1'00"	0.827	- 0.0010
IZQ 1 30	12,505,694.490	18,581.841	1'30"	0.828	0.0022
IZQ 2 00	12,505,696.316	18,581.845	2'00"	2.655	0.0065
IZQ 2 30	12,505,697.951	18,581.843	2'30"	4.290	0.0045
IZQ 3 00	12,505,702.527	18,581.844	3'00"	8.866	0.0056
IZQ 3 30	12,505,704.274	18,581.846	3'30"	10.613	0.0072
IZQ 4 00	12,505,708.010	18,581.853	4'00"	14.348	0.0150
IZQ 4 30	12,505,710.398	18,581.853	4'30"	16.737	0.0148
IZQ 5 00	12,505,715.173	18,581.859	5'00"	21.511	0.020

TABLA 4.7  
DISTRIBUCIÓN DE SUPERFICIES DE PROPIEDAD SOCIAL  
TRAMITADAS EN EXPROPIACIÓN  
AÑOS 2012, 2013 y 2014

INTERVALO [HAS]	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA
0 - 1	23	14.1 %
1 - 10	57	35.0 %
10 - 20	33	20.2 %
20 - 30	12	7.4 %
30 - 40	12	7.4 %
40 - 50	4	2.5 %
50 - 100	9	5.5 %
100 - 1000	10	6.1 %
> 1000	3	1.8 %
	163	100%



TABLA 4.8  
VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
SISTEMA UTM  
MERIDIANO CONSTANTE  
MERIDIANO 105°

PARALELO	ID	SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	PERÍMETRO [m]	VARIACIÓN EN LATITUD [GRADOS]	UTM <sub>i</sub> - UTM <sub>105A</sub>	
					DIFERENCIA SUPERFICIE [m <sup>2</sup> ]	DIFERENCIA PERÍMETRO [m]
14 ° 30 ' 00 "	UTM A1	118,142.112	4,059.288	-9.5	2,359.21	66.20
15 ° 00 ' 00 "	UTM A2	117,877.854	4,051.857	-9	2,094.95	58.77
15 ° 30 ' 00 "	UTM A3	117,604.828	4,044.183	-8.5	1,821.93	51.10
16 ° 00 ' 00 "	UTM A4	117,323.149	4,036.267	-8	1,540.25	43.18
16 ° 30 ' 00 "	UTM A5	117,032.339	4,028.108	-7.5	1,249.44	35.02
17 ° 00 ' 00 "	UTM A6	116,732.924	4,019.711	-7	950.02	26.63
17 ° 30 ' 00 "	UTM A7	116,424.956	4,011.074	-6.5	642.06	17.99
18 ° 00 ' 00 "	UTM A8	116,108.146	4,002.199	-6	325.25	9.11
<b>18 ° 30 ' 00 "</b>	<b>UTM A9</b>	<b>115,782.900</b>	<b>3,993.086</b>	<b>-5.5</b>	-	-
19 ° 00 ' 00 "	UTM A10	115,448.032	3,983.736	-5	- 334.87	- 9.35
19 ° 30 ' 00 "	UTM A11	115,105.805	3,974.153	-4.5	- 677.09	- 18.93
20 ° 00 ' 00 "	UTM A12	114,754.049	3,964.338	-4	- 1,028.85	- 28.75
20 ° 30 ' 00 "	UTM A13	114,394.280	3,954.287	-3.5	- 1,388.62	- 38.80
21 ° 00 ' 00 "	UTM A14	114,025.355	3,944.006	-3	- 1,757.54	- 49.08
21 ° 30 ' 00 "	UTM A15	113,647.689	3,933.495	-2.5	- 2,135.21	- 59.59
22 ° 00 ' 00 "	UTM A16	113,262.491	3,922.757	-2	- 2,520.41	- 70.33
22 ° 30 ' 00 "	UTM A17	112,868.458	3,911.789	-1.5	- 2,914.44	- 81.30
23 ° 00 ' 00 "	UTM A18	112,465.214	3,900.596	-1	- 3,317.69	- 92.49
23 ° 30 ' 00 "	UTM A19	112,053.665	3,889.179	-0.5	- 3,729.23	- 103.91
<b>24 ° 00 ' 00 "</b>	<b>UTM A20</b>	<b>111,633.911</b>	<b>3,877.537</b>	<b>0</b>	<b>- 4,148.99</b>	<b>- 115.55</b>
24 ° 30 ' 00 "	UTM A21	111,206.210	3,865.677	0.5	- 4,576.69	- 127.41
25 ° 00 ' 00 "	UTM A22	110,769.533	3,853.595	1	- 5,013.37	- 139.49
25 ° 30 ' 00 "	UTM A23	110,324.338	3,841.293	1.5	- 5,458.56	- 151.79
26 ° 00 ' 00 "	UTM A24	109,870.991	3,828.775	2	- 5,911.91	- 164.31
26 ° 30 ' 00 "	UTM A25	109,409.248	3,816.040	2.5	- 6,373.65	- 177.05
27 ° 00 ' 00 "	UTM A26	108,939.824	3,803.094	3	- 6,843.08	- 189.99
27 ° 30 ' 00 "	UTM A27	108,461.824	3,789.936	3.5	- 7,321.08	- 203.15
28 ° 00 ' 00 "	UTM A28	107,975.183	3,776.567	4	- 7,807.72	- 216.52
28 ° 30 ' 00 "	UTM A29	107,480.551	3,762.989	4.5	- 8,302.35	- 230.10
29 ° 00 ' 00 "	UTM A30	106,977.562	3,749.204	5	- 8,805.34	- 243.88
29 ° 30 ' 00 "	UTM A31	106,467.552	3,735.216	5.5	- 9,315.35	- 257.87
30 ° 00 ' 00 "	UTM A32	105,948.247	3,721.023	6	- 9,834.65	- 272.06
30 ° 30 ' 00 "	UTM A33	105,421.007	3,706.631	6.5	- 10,361.89	- 286.46
31 ° 00 ' 00 "	UTM A34	104,886.134	3,692.039	7	- 10,896.77	- 301.05
31 ° 30 ' 00 "	UTM A35	104,342.546	3,677.250	7.5	- 11,440.35	- 315.84
32 ° 00 ' 00 "	UTM A36	103,792.046	3,662.266	8	- 11,990.85	- 330.82
32 ° 30 ' 00 "	UTM A37	103,232.858	3,647.089	8.5	- 12,550.04	-345.9961

TABLA 4.9  
PORCENTAJE DE VARIACIÓN EN SUPERFICIE  
SISTEMA UTM  
MERIDIANO CONSTANTE

PARALELO	VARIACIÓN EN LATITUD [GRADOS]	MERIDIANO 105	MERIDIANO 99°
		PORCENTAJE MERIDIANO 105° %	PORCENTAJE MERIDIANO 99° %
14 ° 30 ' 00 "	-4.0	2.038	
15 ° 00 ' 00 "	-3.5	1.809	1.787
15 ° 30 ' 00 "	-3.0	1.574	1.554
16 ° 00 ' 00 "	-2.5	1.330	1.314
16 ° 30 ' 00 "	-2.0	1.079	1.066
17 ° 00 ' 00 "	-1.5	0.821	0.811
17 ° 30 ' 00 "	-1.0	0.555	0.548
18 ° 00 ' 00 "	-0.5	0.281	0.278
<b>18 ° 30 ' 00 "</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
19 ° 00 ' 00 "	0.5	-0.289	-0.285
19 ° 30 ' 00 "	1.0	-0.585	-0.578
20 ° 00 ' 00 "	1.5	-0.889	-0.878
20 ° 30 ' 00 "	2.0	-1.199	-1.186
21 ° 00 ' 00 "	2.5	-1.518	-1.501
21 ° 30 ' 00 "	3.0	-1.844	-1.824
22 ° 00 ' 00 "	3.5	-2.177	-2.153
22 ° 30 ' 00 "	4.0	-2.517	-2.491
23 ° 00 ' 00 "	4.5	-2.865	-2.835
23 ° 30 ' 00 "	5.0	-3.221	-3.187
<b>24 ° 00 ' 00 "</b>	<b>5.5</b>	<b>-3.583</b>	<b>-3.546</b>
24 ° 30 ' 00 "	6.0	-3.953	-3.913
25 ° 00 ' 00 "	6.5	-4.330	-4.287
25 ° 30 ' 00 "	7.0	-4.714	-4.668
26 ° 00 ' 00 "	7.5	-5.106	-5.056
26 ° 30 ' 00 "	8.0	-5.505	-5.451
27 ° 00 ' 00 "	8.5	-5.910	-5.854
27 ° 30 ' 00 "	9.0	-6.323	-6.263
28 ° 00 ' 00 "	9.5	-6.743	-6.680
28 ° 30 ' 00 "	10.0	-7.171	-7.104
29 ° 00 ' 00 "	10.5	-7.605	-7.535
29 ° 30 ' 00 "	11.0	-8.046	-7.972
30 ° 00 ' 00 "	11.5	-8.494	-8.417
30 ° 30 ' 00 "	12.0	-8.949	-8.869
31 ° 00 ' 00 "	12.5	-9.411	-9.328
31 ° 30 ' 00 "	13.0	-9.881	-9.794
32 ° 00 ' 00 "	13.5	-10.356	-10.266
32 ° 30 ' 00 "	14.0	<b>-10.839</b>	<b>-10.746</b>

## Tablas de Datos Capítulo 5

TABLA 5.2.1  
DECRETOS EXPROPIATORIOS  
PUBLICADOS EN EL D.O.F.  
AÑOS 2013 y 2014

#	ESTADO	FECHA DE SOLICITUD	FECHA DE PUBLICACIÓN EN EL D.O.F.	SUPERFICIE [ HAS ]	INDEMNIZACION [ PESOS ]	TRÁMITE		IEE [ \$/m <sup>2</sup> ]
						AÑOS	DÍAS	
1	DGO	24/02/2012	17/12/2013	35-61-67.00	61,824.60	1	297	0.174
2	SLP	03/02/2012	23/09/2014	39-66-00.00	146,689.00	2	233	0.370
3	DGO	18/08/2008	24/01/2014	35-78-92.00	279,377.00	5	160	0.781
4	DGO	08/11/2011	21/05/2014	64-92-39.00	506,808.00	2	195	0.781
5	DGO	08/11/2011	20/12/2013	60-61-63.00	473,183.00	2	43	0.781
6	DGO	08/11/2011	18/12/2013	20-66-68.00	188,612.00	2	41	0.913
7	DGO	14/10/2008	02/06/2014	08-27-74.00	83,175.00	5	232	1.005
8	DGO	28/08/2008	19/12/2013	16-88-34.00	196,270.00	5	114	1.163
9	DGO	09/10/2008	20/12/2013	21-31-10.00	303,682.00	5	73	1.425
10	DGO	15/02/2012	02/05/2014	08-69-30.00	127,160.00	2	77	1.463
11	COAH	18/07/2011	24/06/2014	29-97-79.00	513,092.81	2	342	1.712
12	DGO	18/08/2008	14/08/2014	07-15-21.00	125,240.00	5	362	1.751
13	TLAX	20/04/2012	20/06/2014	02-90-12.00	89,889.79	2	61	3.098
14	BC	31/01/2012	22/04/2013	564-25-95.00	20,526,270.96	1	82	3.638
15	HGO	04/12/2013	30/04/2014	43-07-41.00	1,575,815.55	0	147	3.658
16	HGO	05/01/2011	30/04/2014	51-44-77.00	1,919,258.51	3	116	3.731
17	GTO	07/01/2011	25/09/2014	43-91-15.00	1,648,518.95	3	262	3.754
18	MOR	04/12/2013	02/06/2014	32-58-62.07	1,272,430.10	0	180	3.905
19	NAY	23/06/2003	23/06/2014	12-22-13.00	505,131.00	11	3	4.133
20	SLP	07/06/2012	18/12/2013	35-67-12.00	1,605,204.00	1	194	4.500
21	SLP	07/06/2012	19/12/2013	17-07-74.00	768,483.00	1	195	4.500
22	SLP	08/06/2012	19/12/2013	01-76-38.00	79,371.00	1	194	4.500
23	HGO	04/11/2013	23/12/2013	03-42-19.00	155,979.08	0	49	4.558
24	TLAX	04/12/2013	24/06/2014	00-82-50.00	38,208.19	0	202	4.631
25	NAY	23/06/2003	17/10/2014	19-65-87.00	1,002,728.00	11	119	5.101
26	NAY	07/10/1993	06/06/2014	47-63-33.00	2,459,260.00	20	247	5.163
27	NAY	24/05/1995	17/10/2014	01-47-08.00	88,110.00	19	151	5.991
28	NAY	31/10/2003	20/06/2014	00-92-15.00	63,074.00	10	235	6.845
29	VER	20/07/2011	01/03/2013	53-03-00.00	3,844,728.00	1	225	7.250
30	PUE	19/07/1993	10/07/2014	36-64-21.00	2,955,682.00	20	361	8.066
31	OAX	07/11/2013	28/05/2014	09-42-19.00	773,918.00	0	202	8.214
32	GRO	04/06/1999	20/06/2014	18-83-16.00	1,577,956.00	15	20	8.379
33	MÉX	07/11/2011	10/05/2013	27-41-10.00	2,610,127.10	1	185	9.522
34	SLP	23/05/2012	20/12/2013	43-49-23.00	4,239,526.50	1	211	9.748
35	VER	17/01/2001	05/06/2014	76-87-38.00	8,162,306.00	13	142	10.618
36	SLP	07/06/2012	23/12/2013	18-86-64.93	2,091,870.00	1	199	11.088
37	SLP	21/06/2012	17/12/2013	15-17-29.00	1,692,392.00	1	179	11.154
38	GRO	07/05/2010	20/06/2014	12-04-85.00	1,499,074.00	4	45	12.442
39	GTO	27/10/2006	09/07/2014	44-82-72.00	10,688,530.00	7	257	23.844
40	SLP	22/11/2010	02/05/2014	02-03-71.00	501,290.00	3	162	24.608

TABLA 5.2.1  
DECRETOS EXPROPIATORIOS  
PUBLICADOS EN EL D.O.F.

- CONTINUACIÓN -

#	ESTADO	FECHA DE SOLICITUD	FECHA DE PUBLICACIÓN EN EL D.O.F.	SUPERFICIE [ HAS ]	INDEMNIZACION [ PESOS ]	TRÁMITE		IEE [ \$/m <sup>2</sup> ]
						AÑOS	DIAS	
41	SLP	22/11/2010	24/06/2014	07-86-87.00	1,959,306.00	3	215	24.900
42	NAY	30/11/2011	23/06/2014	17-03-44.00	4,370,194.00	2	206	25.655
43	AGS	10/07/1998	23/06/2014	00-31-00.00	81,930.00	15	352	26.429
44	SLP	18/08/2003	06/06/2014	00-11-09.00	29,943.00	10	295	27.000
45	NAY	20/11/2011	17/10/2014	30-73-47.00	8,754,904.00	2	332	28.485
46	NAY	09/07/2008	22/07/2014	10-05-69.00	2,939,833.00	6	14	29.232
47	SLP	08/10/2003	18/09/2014	12-51-93.00	3,901,849.00	10	348	31.167
48	NAY	30/11/2011	23/06/2014	17-48-52.00	5,483,884.00	2	206	31.363
49	GTO	06/06/2006	13/02/2014	60-73-47.00	23,677,098.00	7	254	38.984
50	TAMPS	15/04/2010	17/12/2013	08-08-29.00	3,165,803.00	3	247	39.167
51	SLP	11/11/2004	22/07/2014	00-46-85.00	261,648.00	9	255	55.848
52	MÉX	20/02/2014	06/06/2014	12-25-58.00	7,638,646.00	0	106	62.327
53	NAY	04/07/2006	09/07/2014	04-99-63.00	3,458,463.00	8	7	69.220
54	HGO	20/09/2011	25/09/2014	00-65-31.00	508,093.00	3	6	77.797
55	HGO	08/11/2001	25/09/2014	00-41-79.00	366,891.00	12	324	87.794
56	GRO	26/05/2008	13/06/2014	29-02-95.00	25,895,400.00	6	19	89.204
57	SLP	07/09/2010	02/05/2014	02-32-51.00	2,238,097.00	3	238	96.258
58	MÉX	20/02/2014	28/05/2014	03-37-72.00	3,263,523.00	0	97	96.634
59	MÉX	20/02/2014	29/05/2014	06-93-87.00	6,705,143.00	0	98	96.634
60	NAY	30/11/2011	07/07/2014	07-11-01.00	7,492,448.00	2	220	105.378
61	MÉX	20/02/2014	06/06/2014	04-17-00.00	5,909,949.00	0	106	141.725
62	NAY	30/11/2011	17/10/2014	15-69-40.00	23,074,230.00	2	322	147.026
63	CAMP	27/08/1998	18/09/2014	13-51-44.00	23,756,250.00	16	26	175.785
64	MÉX	20/02/2014	06/06/2014	04-21-38.00	7,638,646.00	0	106	181.277
65	VER	05/10/2004	18/12/2013	06-54-05.00	16,325,415.00	9	76	249.605
66	VER	05/10/2004	18/12/2013	06-54-05.00	16,325,415.00	9	76	249.605
67	MOR	06/07/2006	25/09/2014	01-19-53.00	4,234,528.00	8	83	354.265
68	DF	31/01/2012	22/04/2013	00-19-68.00	1,074,390.24	1	82	545.930
69	QRO	06/11/2007	05/06/2014	04-28-72.00	25,092,982.00	6	213	585.300
70	QRO	06/11/2007	02/05/2014	07-23-48.00	45,634,707.00	6	179	630.767
71	D.F.	26/05/2010	26/02/2014	00-55-94.00	4,179,109.58	3	277	747.070
72	VER	01/11/2011	05/06/2014	01-02-77.00	14,470,016.00	2	217	1,408.000
<b>Total</b>				<b>1884-75-19.99</b>	<b>377,348,978.96</b>	<b>Promedios</b>		
						<b>5</b>	<b>136.681</b>	<b>94.233</b>

TABLA 5.2.2  
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS  
INDICE INDEMNIZATORIO DE EXPROPIACIÓN

INTERVALO [HAS]	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA
0 - 5	24	33.3 %
5 - 10	10	13.9 %
10 - 50	16	22.2 %
50 - 100	9	12.5 %
100 - 500	8	11.1 %
> 500	5	6.9 %
	<b>72</b>	<b>100%</b>

TABLA 6.2  
CORRECCIONES GEODÉSICAS \*

EST.	P.V	$l-S_0$ [m]	$(l-S_0)/l$ [m]	$\delta\theta$ ["]	$\eta$ ["]	$h$ [m]	Dif. $h$ [m]	$R\alpha$ [m]	Dif. $R\alpha$ [Km]
1	2	1.855	0.044	-2.10	-4.70	2,410.11	21.918	6,354,787.81	8.83
2	3	0.172	0.039	-2.12	-4.81	2,454.09	65.899	6,346,918.22	0.96
3	4	0.303	0.045	-2.08	-4.83	2,453.68	65.485	6,345,960.55	0
4	5	0.529	0.096	-2.32	-4.85	2,446.12	57.928	6,347,309.31	1.35
5	6	0.139	0.048	-2.22	-4.86	2,464.78	76.589	6,352,063.70	6.10
6	7	0.221	0.077	-2.24	-4.80	2,468.69	80.503	6,371,683.64	25.72
7	8	0.671	0.112	-2.26	-4.81	2,476.64	88.444	6,377,763.58	31.80
8	9	0.151	0.043	-2.15	-4.85	2,499.51	111.322	6,376,977.29	31.02
9	10	0.245	0.101	-2.10	-4.85	2,502.72	114.529	6,381,181.44	35.22
10	11	0.932	0.144	-2.20	-4.86	2,494.20	106.011	6,371,423.38	25.46
11	12	0.201	0.039	-2.15	-4.87	2,464.53	76.339	6,371,387.14	25.43
12	13	0.842	0.212	-2.17	-4.87	2,464.65	76.46	6,375,802.55	29.84
13	14	0.912	0.249	-1.83	-4.88	2,441.26	53.066	6,346,127.04	0.17
14	15	0.072	0.038	-2.17	-4.90	2,417.48	29.292	6,346,942.08	0.98
15	16	1.205	0.062	-2.26	-4.91	2,417.70	29.509	6,350,654.90	4.69
16	17	2.355	0.166	-1.97	-5.03	2,459.97	71.776	6,346,105.72	0.15
17	18	0.427	0.077	-2.34	-4.98	2,388.19	0	6,346,223.69	0.26
18	19	0.596	0.057	-2.27	-4.92	2,403.73	15.537	6,346,990.32	1.03
19	20	0.543	0.187	-2.20	-4.63	2,424.08	35.889	6,380,931.55	34.97
20	21	0.162	0.056	-2.17	-4.72	2,408.23	20.034	6,367,914.67	21.95
21	22	1.094	0.038	-2.09	-4.72	2,402.71	14.519	6,380,869.09	34.91
22	23	0.324	0.096	-1.97	-4.11	2,410.13	21.937	6,347,621.97	1.66
23	24	0.248	0.044	-1.84	-4.04	2,421.63	33.434	6,346,723.54	0.76
24	25	3.924	0.161	-1.54	-3.93	2,427.50	39.312	6,364,490.32	18.53
25	26	0.763	0.042	-1.78	-4.08	2,547.83	159.637	6,346,466.83	0.51
26	27	2.721	0.112	-2.09	-4.34	2,558.75	170.559	6,346,701.01	0.74
27	28	2.819	0.046	-2.01	-4.42	2,466.29	78.103	6,346,065.47	0.10
28	1	2.321	0.038	-2.40	-5.43	2,390.73	2.541	6,381,310.90	35.35

\* En color azul, se resaltan los valores que se tomaron como referencia para calcular las diferencias respectivas.