



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN CHORRO DE AGUA
A ALTA VELOCIDAD EN UN PROCESO DE CORTE**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
LUIS ALBERTO HERRERA BONILLA

TUTOR
DR. MARTÍN SALINAS VÁZQUEZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA - UNAM

MÉXICO, CDMX, ENERO 2018

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Méndez Lavielle Federico

Secretario: Dr. Ascanio Gasca Gabriel

Vocal: Dr. Salinas Vázquez Martín

1^{er}. Suplente: Dr. Zenit Camacho José Roberto

2^{do}. Suplente: Dr. Vicente y Rodríguez William

Lugar donde se realizó la tesis: Instituto de Ingeniería UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. Salinas Vázquez Martín

FIRMA:

Resumen

La presente investigación consistió en el desarrollo de una herramienta numérica, utilizando la técnica de simulación de grandes escalas (LES), para la representación de un flujo que consiste en un chorro de agua enviado a alta velocidad hacia un ambiente de aire; bajo condiciones reales que corresponden a las de una máquina de corte por chorro de tipo comercial. La complejidad de este problema radica en reproducir correctamente tanto el comportamiento, como el desarrollo espacial y temporal de la interfase entre ambos fluidos. Esto con la finalidad de incluir en la solución, los efectos del movimiento de la fase líquida sobre la gaseosa; y de esta forma poder revelar el desarrollo de las inestabilidades hidrodinámicas y de pequeñas fluctuaciones en el chorro que pueden llegar a producir ondas de choque.

Los resultados obtenidos fueron: la validación de la funcionalidad de la herramienta numérica, la visualización del desarrollo de la superficie líquida del chorro en el tiempo; la caracterización hidrodinámica del chorro y análisis de los campos promediados de velocidades; el análisis de las estructuras turbulentas y su desarrollo a lo largo del chorro. Finalmente, se confirmó la presencia de ondas de choque generadas por la interacción entre ambas fases. Todo lo anterior forma un estudio completo e integral, con el que se logró comprender la dinámica de este flujo bifásico.

Índice general

Objetivos	7
1. Introducción	8
1.1. Trabajos previos	9
1.2. Clasificación de chorros	10
1.3. Generación del chorro en un proceso de corte	11
1.4. Características de flujos de chorros	12
1.4.1. Estructura de chorro continuo	12
1.4.2. Desarrollo de vórtices	13
1.4.3. Separación de energía	14
1.4.4. Coherencia y estabilidad del chorro	15
1.5. Identificación de vórtices y estructuras coherentes	16
1.5.1. Criterio Q	16
1.6. Técnica para mejorar el rendimiento de un chorro continuo	17
1.6.1. Generación de un chorro pulsante	17
2. Ecuaciones de Gobierno y Esquema Numérico	18
2.1. Ecuaciones de flujo	18
2.2. Modelo de turbulencia y esquema numérico	20
2.2.1. Simulación de Grandes Escalas (LES)	20
2.2.2. Ecuaciones generalizadas	21
2.2.3. Esquema numérico	22
2.2.4. Integración temporal	25
3. Interfase Líquido-Gas	26
3.1. Método <i>Level-Set</i>	27

3.1.1.	Reinicialización de la función <i>Level-Set</i>	27
3.2.	Esquemas de discretización	29
3.2.1.	Diferenciación <i>upwind</i>	29
3.2.2.	Esquemas ENO	30
3.2.3.	Esquemas WENO	31
3.2.4.	Integración temporal	33
3.3.	Condiciones de frontera en la interfase	33
3.3.1.	Tensión superficial	35
3.4.	Método <i>Ghost Fluid</i>	36
3.4.1.	Extrapolación de propiedades	37
4.	Dominio Computacional y Condiciones de Operación	39
4.1.	Condiciones de frontera	40
4.2.	Valores iniciales y estado estacionario	41
4.3.	Valores promedio	41
5.	Resultados	43
5.1.	Validación del código numérico	43
5.2.	Desarrollo de la superficie del chorro	45
5.3.	Caracterización del flujo	47
5.4.	Vórtices y estructuras coherentes	50
5.5.	Ondas de choque generadas	52
6.	Conclusiones	56
6.1.	Trabajos futuros	57

Índice de figuras

1.1. Clasificación de chorros de agua	10
1.2. Configuración de un cabezal de corte.	11
1.3. Estructura de un chorro de agua en aire.	12
1.4. Proceso de rompimiento de vórtices, según [Hussain, 1986].	13
1.5. Proceso de apareamiento de vórtices.	14
1.6. Esquema del sistema acústico generador de pulsos.	17
2.1. Coeficientes de los esquemas compactos y de los esquemas de filtrado.	23
2.2. Notación para la discretización 1-D, plantilla de cinco puntos para la derivada en los puntos interiores y plantillas para los puntos 1 y N.	24
3.1. Interfase representada por medio de la función Level-Set.	28
3.2. Condiciones de frontera en la interfase, las velocidades y esfuerzos cortantes son continuos.	34
3.3. Superficie del chorro coloreada con valores del número de Weber.	35
3.4. Dominio físico del método <i>Ghost Fluid</i>	36
3.5. Esquema del método <i>Ghost Fluid</i>	37
4.1. Configuración del dominio computacional.	39
4.2. Norma de la vorticidad local como función del tiempo adimensional, sobre todo el dominio computacional.	42
5.1. Perfiles de velocidad promedio a diferentes ubicaciones longitudinales.	44
5.2. Perfiles de u_{rms}/U_{max} para diferentes posiciones x/D	44
5.3. Desarrollo de la superficie del chorro en la etapa de transición (intervalo de tiempo de 27 ms).	45
5.4. (a)Superficie líquida del chorro completamente desarrollado. (b) Ligamentos y parcelas líquidas, formadas a lo largo de la superficie del chorro.	46

5.5. Probabilidad de presencia de líquido a partir del promedio de la función <i>Level-Set</i> (φ), sobre el eje.	46
5.6. (a) Decaimiento de la velocidad promedio en la línea central ($\frac{U}{U_{max}}$) y variación de la dispersión del chorro en la dirección del flujo ($\frac{U_{max}}{U_c}$). (b) Contorno de velocidad promedio en la dirección axial.	47
5.7. (a) Evolución de las intensidades de la turbulencia en la línea central del flujo en dirección longitudinal. (b) Contornos de intensidades de turbulencia.	48
5.8. (a) Perfiles de velocidad promedio a diferentes posiciones longitudinales. (b) Perfiles de intensidad de turbulencia para las tres componentes de velocidad.	49
5.9. Iso-superficies de criterio $Q\frac{U_{max}}{D} = 10$, al fondo contornos del campo de velocidad en dirección del flujo(intervalos de tiempo de 27 ms).	51
5.10. Líneas de magnitud de vorticidad, enrollamiento y apareamiento de vórtices.	51
5.11. Contornos de <i>Shadowgraph</i> y transición de la superficie del chorro ($\varphi = 0$) hasta un estado totalmente desarrollado.	53
5.12. Contornos de número de Mach para dos tiempos diferentes: transición y desarrollo completo del chorro. La interfase está indicada con la línea blanca.	54
5.13. Acercamiento en los contornos de número de Mach con vectores del campo de velocidad	55

Objetivos

1. Representar numéricamente el desarrollo de un chorro de agua sumergido en aire, bajo condiciones reales correspondientes a las de una máquina de corte por chorro comercial.
2. Validar la funcionalidad del código numérico.
3. Analizar la el comportamiento de la interfase entra ambos fluidos.
4. Estudiar la hidrodinámica del flujo.
5. Análizar los vórtices y estructuras turbulentas generadas en el flujo.
6. Estudiar las de ondas de choque.

Capítulo 1

Introducción

Los chorros de agua son una herramienta muy versátil ya que pueden ser utilizados en distintas aplicaciones tales como corte, taladrado, fresado, limpieza, granallado y remoción de material. De los usos anteriores, uno de los más comunes en la industria es el corte.

Las máquinas de corte por chorro son herramientas industriales capaces de seccionar una amplia variedad de materiales, empleando chorros de agua pura o en algunas ocasiones, una mezcla de agua con un material sólido abrasivo. Esta tecnología compite con las herramientas convencionales de corte, ya que es ambientalmente amigable, puede maquinarse casi cualquier material de manera precisa, con geometrías complejas y en el caso de los metales puede perforar piezas de más 100 mm de espesor. Además, los fragmentos cortados por este proceso no presentan efectos térmicos y los esfuerzos mecánicos en ellos son casi nulos. Asimismo la pérdida de material debido al corte es mínima. El corte por chorro es utilizado en un amplio rango de industrias como la automotriz, aeroespacial, médica y de alimentos.[Folkes, 2009]

Todas las máquinas de corte por chorro operan bajo el mismo principio, una bomba genera un flujo de agua altamente presurizada, en un rango de 400 a 600 MPa. Esta presión es convertida en velocidad mediante un orificio de diámetro milimétrico. Se crea un flujo de agua capaz de cortar materiales blandos y para aumentar la potencia del corte se utiliza un material sólido abrasivo.

A partir de la década de 1960, se han realizado diferentes investigaciones teóricas, experimentales y numéricas sobre la hidrodinámica e inestabilidades existentes en los chorros, con la finalidad de mejorar el rendimiento del fenómeno en sus diferentes aplicaciones. Basado en los estudios realizados hasta el momento, en el presente trabajo, se realizó el estudio numérico del chorro de agua de una máquina de corte comercial. El objetivo es revelar las inestabilidades hidrodinámicas, las estructuras turbulentas presentes y las perturbaciones, como las ondas de choque. Así como determinar las características del chorro.

1.1. Trabajos previos

Uno de los primeros estudios experimentales sobre chorros turbulentos, fue realizado por [Forthmann, 1936], quien mostró resultados para una boquilla rectangular. También estudió los perfiles de velocidad a diferentes distancias, para un chorro de aire con velocidad inicial de $35 \frac{m}{s}$. Obtuvo interesantes resultados al constatar que, graficando adimensionalmente, los perfiles de velocidad tienen casi la misma área. Más tarde, [Rajaratnam, 1976] obtuvo la solución analítica para chorros planos y redondos. Gracias a sus observaciones experimentales pudo identificar tres regiones en las que se divide el chorro a lo largo de su desarrollo. Finalmente, [Abramovich et al., 1984] determinó el vínculo entre el contorno del chorro y la relación de su densidad con la densidad del fluido que lo rodea. Además, estableció las características de un chorro supersónico.

Sobre el estudio hidrodinámico de chorros de agua a alta velocidad, uno de los primeros trabajos experimentales es el de [Smith et al., 1966]. En el cual, se estudió el efecto de la forma de la boquilla sobre la presión de impacto. Asimismo, observaron que el chorro consiste en un núcleo central, rodeado por una fina capa de gotas, creada por las inestabilidades en la interfase, las cuales propician la transferencia de calor, masa y cantidad de movimiento. Igualmente, confirmó que el núcleo es discontinuo, excepto cerca del extremo de la boquilla. Por otra parte, la distribución de agua a lo largo del eje de un chorro fue investigada por [Rajaratnam and Albers, 1998], con velocidades a la salida de la boquilla de un rango de 85 a $155 \frac{m}{s}$. También, midieron la acumulación de agua dentro del chorro, comprobando que el contenido de agua en la mezcla agua-aire, es de 20% aproximadamente, para una distancia de $\frac{x}{d} = 20$.

Desde el punto de vista de la *Dinámica de Fluidos Computacional*, los chorros de agua también han sido estudiados. Simulaciones numéricas de este problema han sido reportadas por [Liu et al., 2004]. A pesar de que sus resultados coincidieron parcialmente con la física real y con los experimentos de [Rajaratnam and Albers, 1998], evidenció la importancia que el núcleo potencial y la región de gotas de agua tienen en la industria de limpieza, debido a la cantidad de movimiento que existe en estas regiones favorece la limpieza de superficies. Posteriormente, [Guha et al., 2010] utilizó condiciones de flujo de [Rajaratnam et al., 1994] para simularlas por medio de un modelo multifásico euleriano y las ecuaciones $k - e$ para la turbulencia. Sus resultados numéricos para la línea central de velocidad y decaimiento de la fracción de volumen agua-aire, se aproximan bastante a los datos experimentales. Sin embargo, la distribución radial de la velocidad está ligeramente por debajo de la velocidad predicha lejos del eje central. Por otra parte, [Yang et al., 2008] presentaron simulaciones, comparando el efecto de la geometría de seis diferentes boquillas sobre el perfil de velocidad de chorros de agua con velocidad máxima de $900 \frac{m}{s}$.

1.2. Clasificación de chorros

Los chorros de agua de alta velocidad, utilizados en los procesos industriales, pueden ser clasificados de acuerdo al entorno que rodea el chorro, el tipo de fluido y el régimen del chorro. Las distintas categorías de chorros se pueden apreciar en la figura 1.2.

Conforme al primer criterio, los chorros de agua se clasifican en: chorros de agua en aire o sumergidos en otros fluidos. Los segundos, a su vez, se clasifican en chorros cavitantes o no cavitantes. Dependiendo del chorro y de la presión en el ambiente, la cavitación ocurre en la región de altos esfuerzos cortantes, en el límite entre el chorro y el fluido que lo rodea. Otra forma de clasificarlos es según el fluido con el que operen, se puede tratar de chorros de agua pura o chorros de agua con abrasivo. Simultáneamente, los últimos se clasifican de acuerdo a la forma en la que el abrasivo es agregado al flujo, ya sea inyectado o suspendido.

Con respecto al régimen del chorro, a pesar de que todos los chorros de agua de alta velocidad generan una fase discontinua durante el impacto, se considera como continuos a aquellos que lo hacen de manera natural y como discontinuos a los rompen de manera artificial por medio de mecanismos externos.

Las estructuras de los chorros y los mecanismos con los que remueven el material dependen de estos tres factores y de la geometría de la boquilla. Generalmente la geometría de la boquilla es circular aunque también existen cuadradas y rectangulares.[Shimizu, 2011]

Entorno del chorro

Chorros sumergidos en aire

Chorros sumergidos en agua $\left\{ \begin{array}{l} \text{Chorros cavitantes} \\ \text{Chorros no cavitantes} \end{array} \right.$

Tipo de fluido

Chorros de agua pura

Chorros de agua con abrasivo $\left\{ \begin{array}{l} \text{Chorros con abrasivo inyectado} \\ \text{Chorros con abrasivo suspendido} \end{array} \right.$

Régimen del chorro

Chorros continuos

Chorros discontinuos

Figura 1.1: Clasificación de chorros de agua

1.3. Generación del chorro en un proceso de corte

El proceso comienza extrayendo el líquido del suministro local, después es presurizado por una bomba de ultra alta presión, que generalmente es de accionamiento directo. En estas bombas, conocidas también como bombas triples, un motor eléctrico hace girar un cigüeñal acoplado a tres pistones para generar la ultra-alta presión de agua. El rango de presión que puede producir este tipo de turbomáquinas es de 415 a 650 MPa.

Posteriormente, el flujo de agua presurizada entra a un cabezal de corte, en donde es acelerada a través de un orificio. Para chorros de agua pura el orificio está hecho de rubí o zafiro. En el caso de chorros que utilizan abrasivo, el material del orificio es diamante y usualmente tiene un diámetro de entre 0.2 mm y 0.4 mm. Enseguida, el flujo de agua entra a una cámara en donde, de ser el caso, el abrasivo es agregado al flujo. Finalmente el líquido pasa a través de una boquilla hecha de carburo de tungsteno o carburo de boro que normalmente tiene un diámetro de entre 0.5 mm y 2 mm. Para el caso de chorros de agua pura, la cámara y boquilla no son necesarias. [Flo,] En la Figura 3.1. se pueden observar los elementos que conforman un cabezal de corte.

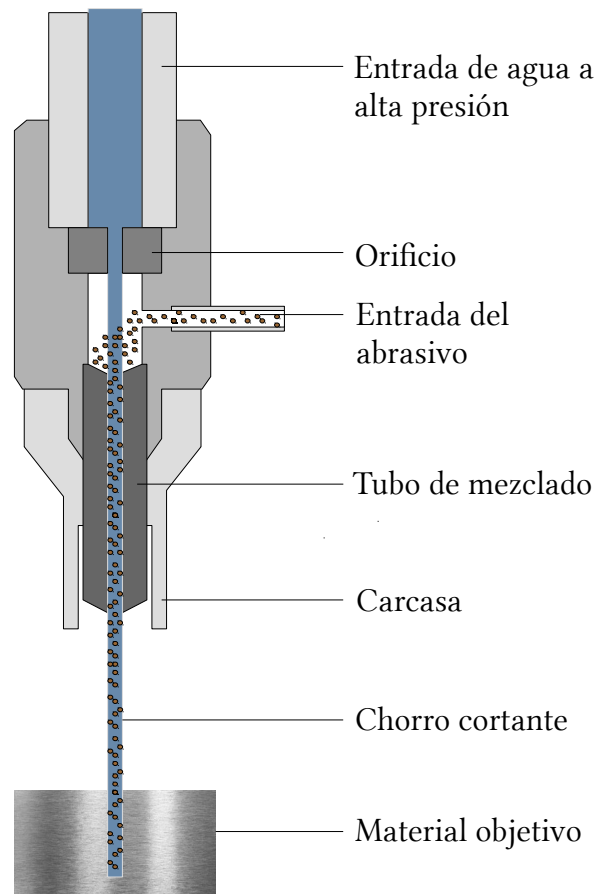


Figura 1.2: Configuración de un cabezal de corte.

1.4. Características de flujos de chorros

1.4.1. Estructura de chorro continuo

Como se ha mencionado anteriormente, [Rajaratnam, 1976] identificó tres regiones en las que se divide el chorro a lo largo de su desarrollo: región inicial, principal y final (Figura 1.3). En la región inicial se considera que la presión de estancamiento, provocada por el estrangulamiento de la boquilla, es la misma durante toda la región. La longitud de esta zona es obtenida a partir del decremento de dicha presión. Es en esta región donde también aparece el núcleo potencial, se trata de una zona en la que la componente principal de la velocidad es constante y termina cuando esta disminuye 1% de su valor original. Debido a la gran diferencia de velocidad entre el chorro y su entorno, se crea una delgada capa cortante donde a su vez, se forman inestabilidades en el flujo. Eventualmente estas inestabilidades crecerán continuamente aguas abajo. Este flujo cortante altamente turbulento hará que el chorro se mezcle con el aire que lo rodea.

En la región principal, la velocidad axial del agua se considera constante. También, la estructura continua del chorro se desintegra en el punto de ruptura y se convierte en un flujo de grumos de agua rodeados por gotas de mediano tamaño que a su vez lo rodean gotas finas. Las velocidades del chorro y de las capas de gotas permanecen constantes durante esta región. Por último, en la región final, existe un decremento considerable de la velocidad del flujo, el chorro se habrá dispersado por completo, el tamaño de las gotas ya es el mismo y la turbulencia se habrá desarrollado totalmente. [Shimizu, 2011]

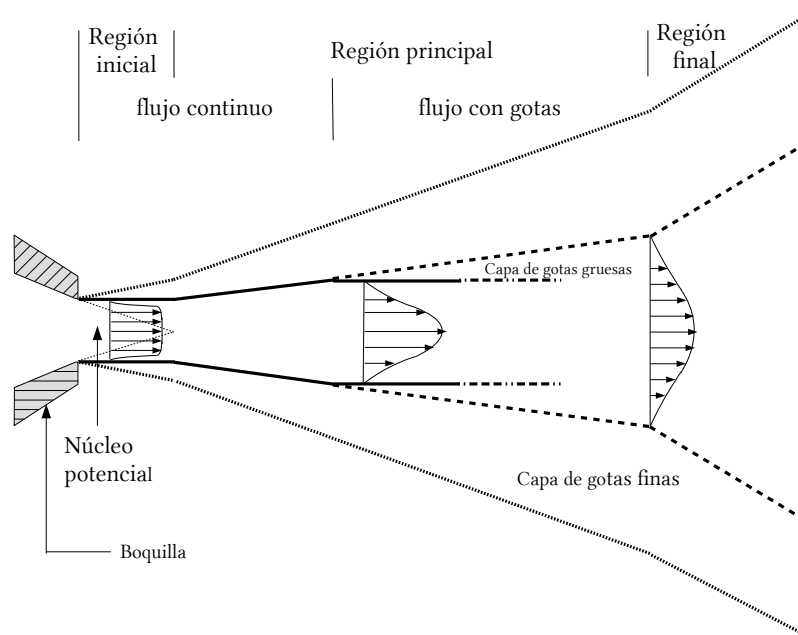


Figura 1.3: Estructura de un chorro de agua en aire.

1.4.2. Desarrollo de vórtices

Definir un vórtice es complicado, sin embargo, se puede entender como una región del flujo en la cual el fluido gira alrededor de un eje, que puede ser recto o curvo. En un chorro, los primeros vórtices se generan en la capa cortante, debido a las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz. A medida que los vórtices se mueven aguas abajo de la boquilla, cada uno de ellos puede *enrollarse* y convertirse en una estructura tridimensional, a causa de las inestabilidades secundarias. Estas inestabilidades pueden conducir al proceso de *corte y conexión* según lo descrito por [Hui et al., 1999] y [Hussain, 1986]. Los vórtices toroidales rompen en movimientos de escala más pequeños, generando alta turbulencia. Un esquema del proceso de descomposición de los vórtices toroidales en un chorro de aire se presenta en la Figura 1.4

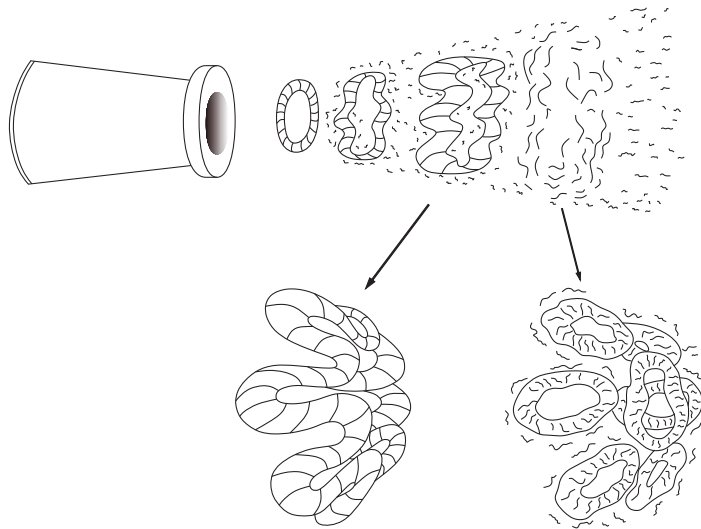


Figura 1.4: Proceso de rompimiento de vórtices, según [Hussain, 1986].

Los vórtices, dependiendo de su tamaño y fuerza, afectan la dispersión del chorro, la longitud del núcleo potencial y el arrastre del fluido ambiental. En ciertos casos, los vórtices de chorro pueden aparearse, formando vórtices más grandes pero más débiles. Durante su desplazamiento, los vórtices se descomponen en una turbulencia aleatoria a pequeña escala. En caso de existir apareamiento de vórtices, estos se inician en la capa cortante a una cierta frecuencia, moviéndose a la misma frecuencia que la frecuencia a la que se enrollan. En general, los chorros turbulentos tienen una frecuencia natural en la cual el proceso de apareamiento se estabiliza y esto está determinado por el nivel de turbulencia del chorro.

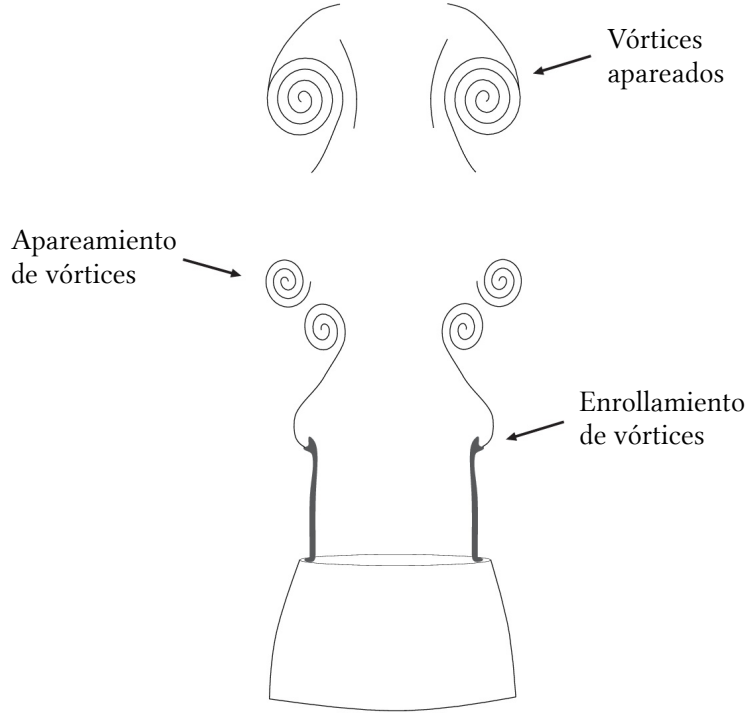


Figura 1.5: Proceso de apareamiento de vórtices.

[Fleischer et al., 2001] emplearon una técnica de hilo de humo para visualizar la iniciación y el desarrollo de vórtices en el flujo de un chorro impactante. Se investigó el efecto del número de Reynolds y el espacio entre el chorro y la superficie $\frac{H}{D}$ sobre la distancia de inicio del vórtice y la distancia de ruptura del mismo. La ubicación de ruptura del vórtice indica una transición a un flujo turbulento que no puede sostener estructuras de flujo a gran escala. Se identificaron dos métodos de ruptura de vórtices. Para valores grandes de $\frac{H}{D}$, los vórtices se rompen cuando alcanzan el final del núcleo potencial, antes de incidir en la superficie. Esto ocurre después de un proceso de fusión de vórtices donde el tamaño del vórtice aumenta pero la fuerza disminuye. Los vórtices se fusionan porque el vórtice no se mueve lo suficientemente rápido como para evitar ser arrastrado por el flujo. Para valores pequeños de $\frac{H}{D}$, la ruptura de los vórtices se da después del impacto, sobre la superficie en algún lugar radial. Se ha demostrado que el aumento del número de Reynolds disminuye el período de vórtice.

1.4.3. Separación de energía

Se sabe que los fluidos en movimiento se pueden separar en regiones de baja y alta temperatura a este fenómeno se le conoce como *separación de energía* e involucra una redistribución de la energía total de un flujo, sin la presencia de trabajo externo o calentamiento. La separación de energía comienza desde el interior de la boquilla y continua con el comienzo de los vórtices. Debido a esto, la naturaleza de las estructuras de vórtices de un chorro han

sido el foco de muchas investigaciones.

De acuerdo con [Han and Goldstein, 2003b], el proceso de separación de energía comienza a ser afectado por los vórtices a una distancia aproximada de $0.3D$ después de la boquilla. Al aumentar esta distancia, el área a través de la cual se ha medido la separación de energía aumenta a medida que aumenta el tamaño de las estructuras vorticales. La separación de energía alcanza un máximo a aproximadamente $\frac{H}{D} = 0.5$ donde la fuerza de los vórtices es máxima. Más allá de esto, a aproximadamente $\frac{H}{D} = 1$, la separación de energía máxima disminuye hasta que ya es despreciable en $\frac{H}{D} = 14$.

En la segunda parte de su trabajo [Han and Goldstein, 2003a], observaron que la separación de energía ocurre en la capa cortante del chorro con un valor máximo a distancias radiales más grandes que la distancia donde la intensidad de turbulencia es máxima. También determinaron que la separación de energía en el chorro es causada por el movimiento de estructuras vorticales coherentes en el flujo, ya que las frecuencias dominantes de fluctuación de temperatura total coinciden con las fluctuaciones de velocidad. Demostraron que la energía se distribuye de modo que el centro del vórtice tiene una energía mínima y, por lo tanto, es más frío.

Otro mecanismo de este fenómeno fue propuesto por [Eckert, 1987], quien afirma que la separación de energía es debido a la fluctuación de la presión dentro de un campo de flujo inestable. En situaciones de flujo como los chorros, donde existe una estructura coherente, la fluctuación de la presión es causada por el movimiento de los vórtices y es el principal mecanismo. Estudios recientes respaldan el modelo propuesto por [Eckert, 1987], sin embargo la dificultad para medir la velocidad, la presión y la temperatura rápidamente fluctuantes limita la comprensión de la separación de energía por este mecanismo.

1.4.4. Coherencia y estabilidad del chorro

La coherencia de un chorro se refiere a las características morfológicas de la estructura líquida: la alta coherencia indica un chorro de aspecto fino y vidrioso, cuyas partículas fluidas no son detectables sino que se juntan en un flujo compacto. Esta propiedad es fundamental porque permite que el diámetro del chorro tenga dimensiones parecidas al del diámetro capilar, que es siempre muy pequeño (de 0.05 a 0.15 mm en aplicaciones comunes de corte por chorro), para maximizar la energía específica por unidad de área disponible para el proceso de corte. [Annoni et al., 2014]

En cambio, la estabilidad del chorro se define como la capacidad de la estructura del mismo para alcanzar y mantener su nivel de coherencia durante su desarrollo. Esta característica es importante porque está directamente relacionada con la calidad de corte en términos de ancho de corte y rugosidad superficial. Resumiendo, se puede decir que la estabilidad se refiere al comportamiento del chorro en el tiempo, mientras que la coherencia trata de su comportamiento en el espacio.

1.5. Identificación de vórtices y estructuras coherentes

Para ambos conceptos, vórtices y estructuras coherentes, no existe una definición estricta. Sin embargo, cuando se habla de vórtices, se dice que se trata de la existencia de alguna forma de rotación de partículas comunes. Debido a la viscosidad, es difícil identificar donde empiezan y terminan los vórtices y es aún más complicado cuando interactúan varios de ellos. Por otro lado, una estructura coherente señala áreas del flujo donde hay menos mezcla o movimiento del que se esperaría, tomando en cuenta el campo de velocidad [Holmén, 2012]. Lo anterior significa que una sección del fluido permanece aproximadamente unida (coherente), mientras se mueve el líquido.

La identificación de vórtices es una herramienta que nos permite comprender la complejidad del flujo. Además es de suma importancia en la industria ya que el control de flujo requiere una comprensión adecuada de las estructuras presentes en el flujo. Existen diferentes métodos que han sido utilizados para identificar vórtices. En el presente trabajo se utilizó el método del criterio Q.

1.5.1. Criterio Q

El criterio Q corresponde al segundo invariante del tensor gradiente de velocidad. A partir de este criterio, se define un vórtice como una región de fluido conectada con un valor $Q > 0$. Este criterio también implica una condición de presión, requiere que sea menor que la presión del ambiente, dentro del vórtice. De acuerdo con su definición matemática, se puede decir que el criterio Q también representa las áreas donde la magnitud de la vorticidad es mayor que la magnitud del tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad \overline{D} se define como $D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Debido a que se trata de un tensor de segundo orden, puede ser descompuesto en dos partes, una simétrica y otra antisimétrica $D_{ij} = S_{ij} + \Omega_{ij}$. Donde $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ y $\Omega_{ij} = (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$. S_{ij} se conoce como el tensor rapidez de deformación y Ω_{ij} es el tensor de vorticidad.

La ecuación característica de $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ es: $\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R$. Donde P, Q y R son los tres invariantes del tensor rapidez de deformación. Utilizando la descomposición simétrica y antisimétrica, los invariantes se pueden expresar como: $P = -tr(\overline{D})$, $Q = \frac{1}{2}(\|\overline{\Omega}\|^2 - \|\overline{S}\|^2)$ y $R = det(\overline{D})$.

1.6. Técnica para mejorar el rendimiento de un chorro continuo

A pesar de los grandes avances realizados en el campo del corte por chorro, hoy en día aún se realiza investigación para mejorar esta tecnología. Un método obvio para hacerlo es generar chorros a ultra altas presiones, como se ha hecho hasta ahora. Sin embargo, una presión tan alta induce una tensión extrema en las partes del sistema, lo cual tiene un efecto adverso en la vida útil de dichas partes. Una alternativa para eliminar la necesidad de presiones tan altas es la generación de chorros pulsantes. La presión requerida para la generación de estos chorros es del orden de las decenas de MPa. La principal ventaja que tiene este tipo de chorro respecto a uno continuo es que la presión de impacto generada sobre la superficie del material, es varias veces mayor que la presión de estancamiento generada por la acción de un chorro continuo, bajo las mismas condiciones [Foldyna, 2012]. mencionados anteriormente.

1.6.1. Generación de un chorro pulsante

Para la generación de un chorro pulsante de alta velocidad Foldyna ha desarrollado un método especial, el cual ha sido ampliamente probado bajo condiciones de laboratorio. El método consiste en la generación y transmisión de ondas debidas a la acción de un transductor acústico sobre el líquido presurizado. El sistema consiste en una cámara cilíndrica conectada con una guía, la cual es alimentada con líquido presurizado para finalmente transportarlo hacia la boquilla, donde los pulsos de presión son transformados en pulsos de velocidad.[Foldyna, 2011]

Diferentes tipos de dispositivos han sido probados con el fin de generar chorros de agua pulsantes, tales como: moduladores mecánicos de flujo interno, Osciladores de Helmholtz, boquillas autoresonantes y boquillas ultrasónicas. Sin embargo, estos equipos tienen un tiempo de vida útil corto. El método de Foldyna también presenta problemas relacionados con la generación y propagación de pulsos de presión con frecuencias del orden de los kHz.

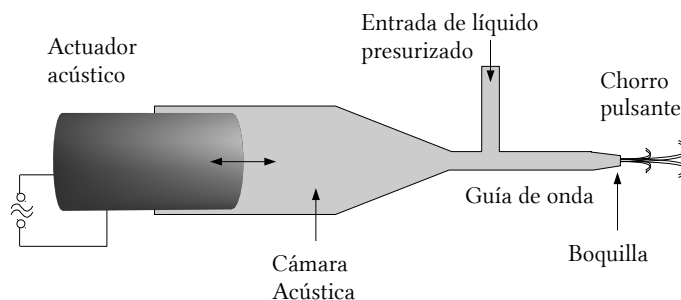


Figura 1.6: Esquema del sistema acústico generador de pulsos.

Capítulo 2

Ecuaciones de Gobierno y Esquema Numérico

2.1. Ecuaciones de flujo

Las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluidos son las ecuaciones de continuidad y de Navier Stokes, en el presente trabajo la ecuación de la energía también ha sido resuelta. Por facilidad de programación, dichas ecuaciones pueden ser escritas en su forma conservativa, como se muestra a continuación [Anderson, 1995]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \mathbf{S}_o \quad (2.1)$$

\mathbf{U} es conocido como el vector solución debido a que sus elementos son las variables dependientes que usualmente son obtenidas numéricamente en pasos de tiempo. El segundo término es la divergencia de los vectores de flujos en notación indicial $i = 1, 2, 3$. El vector \mathbf{S}_o corresponde a los términos fuente, el cual en el presente es cero ya que factores como las fuerzas de cuerpo o calentamiento volumétrico son despreciables. El vector \mathbf{U} está compuesto por las variables de flujo de ambos fluidos, agua y aire, se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{U} = (\rho^w, \rho u_1^w, \rho u_2^w, \rho u_3^w, \rho e^w, \rho^a, \rho u_1^a, \rho u_2^a, \rho u_3^a, \rho e^a)^T \quad (2.2)$$

Los superíndices w y a se refieren a las variables del agua y aire respectivamente, \mathbf{u}_i representa la componente de la velocidad en la i -ésima dirección, ρ la densidad y e la energía total específica para cada fluido:

$$(\rho(e - q))^w = \left[\frac{p + \gamma p_\infty}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \right]^w \quad (2.3)$$

$$(\rho e)^a = \left[\rho C_v T + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \right]^a \quad (2.4)$$

\mathbf{F}_i son los vectores de flujos en las tres direcciones espaciales y están expresados de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} (\rho u_1)^w \\ (\rho u_i u_1 + \frac{1}{\gamma M^2} p \delta_{i1} - \frac{\mu}{Re} S_{i1})^w \\ (\rho u_i u_2 + \frac{1}{\gamma M^2} p \delta_{i2} - \frac{\mu}{Re} S_{i2})^w \\ (\rho u_i u_3 + \frac{1}{\gamma M^2} p \delta_{i3} - \frac{\mu}{Re} S_{i3})^w \\ \left((\rho u_i u_1 + p) - \frac{\gamma M^2}{Re} \mu u_i S_{ij} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^w \\ (\rho u_1)^a \\ (\rho u_i u_1 + \frac{1}{\gamma M^2} p \delta_{i1} - \frac{\mu}{Re} S_{i1})^a \\ (\rho u_i u_2 + \frac{1}{\gamma M^2} p \delta_{i2} - \frac{\mu}{Re} S_{i2})^a \\ (\rho u_i u_3 + \frac{1}{\gamma M^2} p \delta_{i3} - \frac{\mu}{Re} S_{i3})^a \\ \left((\rho u_i u_1 + p) - \frac{\gamma M^2}{Re} \mu u_i S_{ij} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^a \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Donde los términos Re , Pr y M son los números adimensionales de Reynolds, Prandtl y Mach respectivamente. Estos valores se obtuvieron con las dimensiones de referencia: velocidad de salida U_j , diámetro de la boquilla D_j , temperatura atmosférica T_{atm} y densidad del agua ρ_w . Por otra parte, δ_{ij} es la delta de Kronecker y S_{ij} es la parte desviadora del tensor de deformación, expresado en notación indicial como:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) \delta_{ij} \right) \quad (2.6)$$

Debido a que se trabaja con dos fluidos en el sistema, dos ecuaciones de estado fueron empleadas. Para el aire se trabajó con la ecuación del gas ideal:

$$p = R \rho T \quad (2.7)$$

Siendo R la constante particular del gas ($\gamma = 1.4$ para el aire). Mientras que el agua líquida sigue la ecuación del gas endurecido (*Stiffened Gas Equation*):

$$p = \rho C_v (\gamma - 1) T - p_\infty \quad (2.8)$$

Donde C_v , γ , p_∞ y q (q de la ecuación 2.3) son constantes; p_∞ está dada por las propiedades *endurecidas* comparadas con las de los gases ideales, un valor grande implica un comportamiento cuasi-incompresible. Para este trabajo $p_\infty = 1 \times 10^9$ [Pa], $\gamma = 2.35$, $q = -1167$ [kJ/kg] y $C_v = 1816$ [J/kGK].

2.2. Modelo de turbulencia y esquema numérico

2.2.1. Simulación de Grandes Escalas (LES)

La técnica LES consiste en intentar simular determinísticamente las grandes escalas del flujo; las pequeñas escalas son filtradas hacia afuera, sin embargo influyen estadísticamente en la escala grande de movimiento. Las ecuaciones LES se obtienen al aplicar un filtro espacial de bajo transcurso $\mathbf{G}_\Delta(x_i)$ de tamaño Δ en las ecuaciones de Navier-Stokes. Las escalas de movimiento más pequeñas que el tamaño del filtro espacial son eliminadas y se les conoce como escalas sub-malla [Vázquez and Métais, 2002]. Matemáticamente la operación de filtrado corresponde a la integral de convolución de alguna cantidad $f(x_i, t)$ del flujo, de la siguiente forma:

$$\bar{f}(x_i, t) = \int f(x_i, t) \mathbf{G}_\Delta(x_1 - x_2) dx_2 \quad (2.9)$$

La escala submalla es la desviación del flujo respecto a la variable instantánea, resultando:

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.10)$$

Aplicando el filtro a las ecuaciones 2.1 se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_3}{\partial x_3} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Los modelos submalla representan una interacción entre las grandes y pequeñas escalas, típicamente estos modelos se basan en la suposición de una viscosidad turbulenta, la cual cierra el sistema. El modelo submalla considerado para este trabajo es el modelo selectivo de

la función estructura, propuesto por [David, 1993], donde la viscosidad molecular turbulenta está dada por:

$$\nu_t(x_i, \Delta, t) = C_{ssf} \Delta \sqrt{\tilde{F}_2(x_i, \Delta, t)} \quad (2.12)$$

Donde C_{ssf} puede ser expresado como función de la constante de Kolmogorov C_K (ecuación 2.13), de tal forma que $C_{ssf} = 0.104$ cuando $C_K = 1.4$. Por otra parte, Δ se toma como $(\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$, donde Δx_1 , Δx_2 y Δx_3 son los tamaños de la malla locales en las tres direcciones espaciales.

$$C_{ssf} = f(C_K^{-3/2}) \quad (2.13)$$

$\tilde{F}_2(x_i, \Delta, t)$ es la función de estructura de segundo orden de la velocidad, construida a partir del campo \tilde{u}_i . $\tilde{F}_2(x_i, \Delta, t)$ es calculado en el punto x_i con un promedio estadístico local de las diferencias de la velocidad de cuadro de los seis puntos más cercanos que rodean al punto x_i en la malla computacional. La interpolación se basó sobre la ley de $\frac{2}{3}$ de Kolmogorov que se usa para la función estructura de la velocidad.

Según lo propuesto por [David, 1993], la viscosidad turbulenta se apaga cuando la turbulencia no es lo suficientemente tridimensional. El criterio para tres dimensiones es definido como sigue: considérese en un momento dado que el ángulo entre el vector de vorticidad en un punto dado de la malla y su medio aritmético de los seis puntos vecinos más cercanos. La viscosidad turbulenta se cancela en los puntos donde este ángulo es más pequeño que 20° .

2.2.2. Ecuaciones generalizadas

El código numérico trabaja con coordenadas generalizadas, la adaptación a estas coordenadas se efectua mediante la introducción de una matriz Jacobiana. Esta matriz transforma una geometría compleja, tal como una malla no uniforme o curvilínea, en un sistema de coordenadas Cartesiano (x_1, x_2, x_3) , dentro de una geometría ortogonal simple con malla uniforme en el sistema de coordenadas generalizadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Cada término de la matriz Jacobiana inversa (\mathbf{J}^{-1}) es expresado como una función analítica de las medidas $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_i}$. Tales medidas son computarizadas y calculadas por el esquema interno de primer orden y como consecuencia la matriz (\mathbf{J}) puede obtenerse directamente de (\mathbf{J}^{-1}).

Entonces, la ecuación 2.1 puede escribirse como:

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_3}{\partial \xi_3} = \widehat{\mathbf{0}} \quad (2.14)$$

Con:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}} &= \frac{\mathbf{u}}{J} \\ \widehat{\mathbf{F}}_1 &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \mathbf{F}_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \mathbf{F}_3 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \mathbf{F}_1 \right) \right] \\ \widehat{\mathbf{F}}_2 &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \mathbf{F}_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \mathbf{F}_3 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \mathbf{F}_1 \right) \right] \\ \widehat{\mathbf{F}}_3 &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \mathbf{F}_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \mathbf{F}_3 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \mathbf{F}_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Donde J es el determinante de la matriz \mathbf{J} y \mathbf{U} , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 son función de las coordenadas cartesianas y del tiempo.

2.2.3. Esquema numérico

Una vez obtenido el sistema en coordenadas generalizadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) se resuelve por medio de esquemas compactos, completamente implícitos, de sexto, cuarto y tercer orden en el espacio [Visbal and Gaitonde, 2002]. Para discretizar las ecuaciones 2.1 se empleó una aproximación de diferencias finitas. En ella, para cualquier cantidad discreta escalar ϕ , tal como una componente o variable de flujo, la derivada espacial ϕ' es obtenida en el plano transformado mediante la solución del siguiente sistema tridiagonal:

$$\alpha \phi'_{i-1} + \phi'_i + \alpha \phi'_{i+1} = b \frac{\phi_{i+2} - \phi_{i-2}}{4\Delta\xi} + a \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta\xi} \quad (2.16)$$

En donde α , a y b son constantes que determinan las propiedades espaciales del algoritmo. La ecuación 2.16 corresponde al *stencil* o plantilla utilizada para obtener la primera derivada en los nodos interiores del sistema. En los puntos de las fronteras, 1, 2, N-1 y N, se utilizaron ecuaciones que mantienen el mismo comportamiento tridiagonal que el interior del sistema. Para los puntos 2 y N-1 se optó por utilizar la misma plantilla que en el interior, pero con un grado de exactitud menor. Por último, para los puntos 1 y N, se utilizó la plantilla

de la ecuación 2.17, con grado tres de exactitud. Todas estas plantillas se pueden apreciar de manera esquemática en la Figura 2.2

$$\alpha\phi'_1 + \alpha_1\phi'_2 = \frac{1}{\Delta\xi}(a_1\phi_1 + b_1\phi_2 + c_1\phi_3 + d_1\phi_4 + e_1\phi_5) \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones abarcan una familia de esquemas variando la precisión a partir de los tres puntos estándar. Los coeficientes para los esquemas compactos utilizados en este trabajo se pueden observar en la Figura 2.1

Puntos	Esquema	α	a	b					
Interior	C6	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{1}{9}$					
2 y N-1	C4	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0					
		α_1	a_1	b_1	c_1				
1 y N	C3	2	$-\frac{5}{2}$	2	$\frac{1}{2}$				
		α_f	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Inteior	F10	0.4	$\frac{193+126\alpha_f}{256} +$	$\frac{105+302\alpha_f}{256}$	$\frac{15(-1+2\alpha_f)}{64}$	$\frac{45(1-2\alpha_f)}{512}$	$\frac{5(-1+2\alpha_f)}{256}$	$\frac{1-2\alpha_f}{512}$	
5 y N-4	F8	0.38	$\frac{93+70\alpha_f}{128} +$	$\frac{7+18\alpha_f}{16}$	$\frac{-7+14\alpha_f}{32}$	$\frac{1}{16} - \frac{\alpha_f}{8}$	$\frac{-1}{128} + \frac{\alpha_f}{64}$	0	
4 y N-3	F6	0.42	$\frac{11}{16} + \frac{5\alpha_f}{8}$	$\frac{15}{32} + \frac{17\alpha_f}{16}$	$\frac{-3}{16} + \frac{3\alpha_f}{8}$	$\frac{1}{32} - \frac{\alpha_f}{16}$	0	0	
3 y N-2	F4	0.46	$\frac{5}{8} + \frac{3\alpha_f}{4}$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	$\frac{-1}{8} + \frac{\alpha_f}{4}$	0	0	0	
2 y N-1	F2	0.485	$\frac{1}{2} + \alpha_1$	$\frac{1}{2} + \alpha_1$	0	0	0	0	
1 y N	Sin filtro								

Figura 2.1: Coeficientes de los esquemas compactos y de los esquemas de filtrado.

Este tipo de discretizaciones son no disipativas y por consecuencia, susceptibles a inestabilidades numéricas. Estas dificultades se originan principalmente por la no uniformidad de la malla, condiciones de frontera y características no lineales del flujo. Con la finalidad de evitar las inestabilidades y proporcionar mayor precisión al esquema, una técnica implícita de filtrado, con diversos ordenes de exactitud, fue incorporada. Si una componente del vector solución es denotada por ϕ , los valores filtrados $\hat{\phi}$ son obtenidos resolviendo el sistema tridiagonal:

$$\alpha_f \widehat{\phi}_{i-1} + \widehat{\phi}_i + \alpha_f \widehat{\phi}_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) \quad (2.18)$$

Los coeficientes $N+1$, a_0, a_1, \dots, a_N , se calculan en terminos de α_f , el cual es un parámetro libre que de acuerdo a una amplia experiencia numérica, valores entre 0.3 a 0.5 son apropiados. Se trabajó con la misma metodología que en los esquemas compactos, es decir, se fue degradando el esquema de filtrado en las fronteras. En la tabla de la Figura 2.1 se encuentran los valores de los coeficientes utilizados. Véase [Gaitonde and Visbal, 1998] para consultar las tablas completas de los coeficientes de filtrado y del esquema.

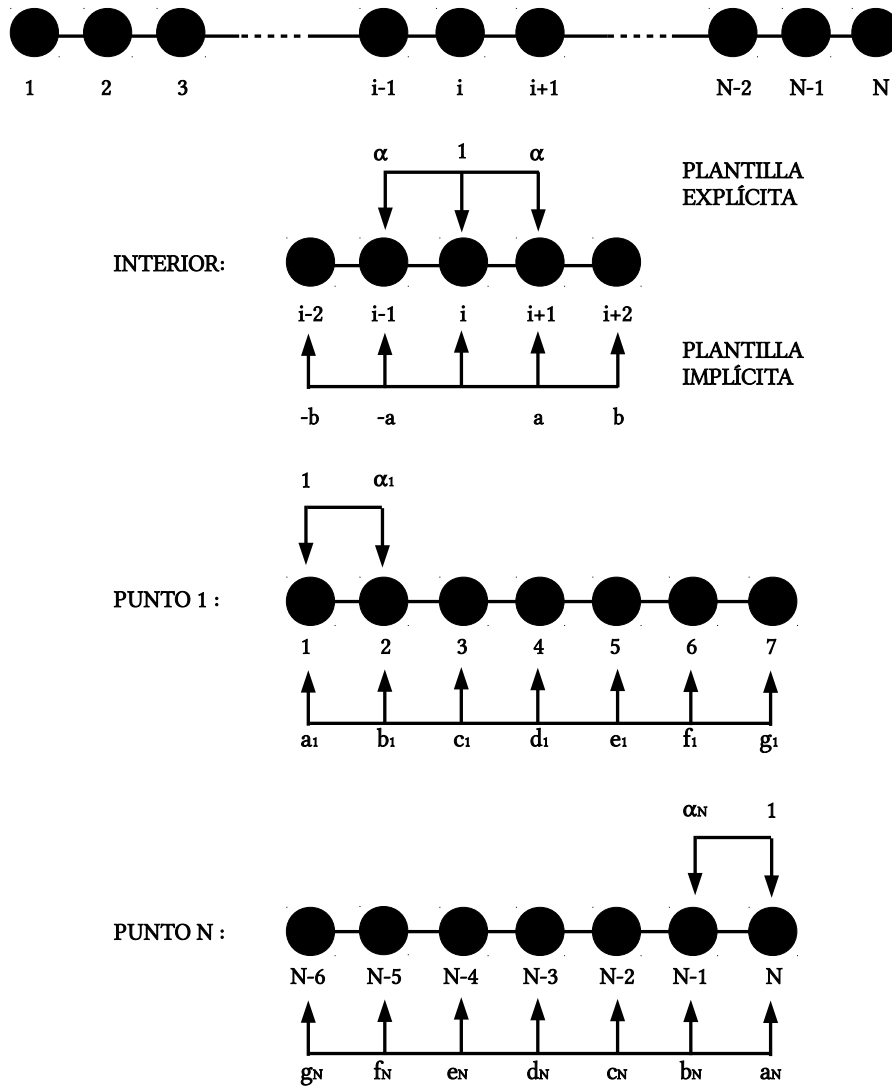


Figura 2.2: Notación para la discretización 1-D, plantilla de cinco puntos para la derivada en los puntos interiores y plantillas para los puntos 1 y N.

2.2.4. Integración temporal

Para la discretización temporal, tanto para los flujos (ecuación 2.1), como para la interfase, de la cual se hablará en el siguiente capítulo, se trabajó con un esquema de *Total Diminishing Variation Runge-Kutta* de tercer orden. Este método se basa en el *método de líneas*, en el cual se asume que la discretización espacial puede ser separada de la temporal de una manera semi-discreta. El primer paso del esquema corresponde al método descrito por Euler. El término advectivo se representa con el operador $L(\phi) = -(\frac{\partial u_i}{\partial x_i})\phi$. Con esto se logra obtener la solución para $t^n + \Delta t$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = L(\phi^n) \quad (2.19)$$

Seguido por un segundo paso de Euler con el que se llega a la aproximación para $t^n + 2\Delta t$,

$$\frac{\phi^{n+2} - \phi^{n+1}}{\Delta t} = L(\phi^{n+1}) \quad (2.20)$$

Después, un paso promediado para el tiempo $t^n + \frac{1}{2}\Delta t$,

$$\varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\varphi^n + \frac{1}{4}\varphi^{n+2} \quad (2.21)$$

Posteriormente otro paso de Euler en el tiempo $t^n + \frac{3}{2}\Delta t$,

$$\frac{\varphi^{n+\frac{3}{2}} - \varphi^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = L(\varphi^{n+\frac{1}{2}}) \quad (2.22)$$

Finalmente, un segundo paso promediado,

$$\varphi^{n+1} = \frac{3}{4}\varphi^n + \frac{2}{3}\varphi^{n+\frac{3}{2}} \quad (2.23)$$

Las ecuaciones 2.19 y 2.20 son los pasos de Euler y le dan al esquema el primer orden de precisión. Con los subsecuentes pasos de Euler y pasos promediados se logra el segundo y tercer grado de precisión TDV.

Capítulo 3

Interfase Líquido-Gas

En el flujo en estudio, se tiene una interfase bien definida entre un gas y un líquido, con una gran relación de densidades (agua-aire). Debido a las condiciones con las que el agua interactúa con el líquido, existe una capa cortante entre las paredes del chorro y el aire que lo rodea. En el núcleo potencial, región donde la turbulencia es considerablemente alta y la velocidad promedio es menor que que la velocidad de salida, la capa cortante arrastra el aire y provoca que el chorro se disperse radialmente. Más allá del núcleo potencial, la capa cortante ha penetrado hasta la línea central del chorro, provocando que la velocidad central del chorro disminuya.

Por todo lo anterior es importante representar correctamente el comportamiento de la interfase, ya que influye directamente en el desarrollo del chorro. Este problema se puede abordar como uno de frontera móvil, sin embargo esto implica ciertas complejidades en su solución. Las propiedades del flujo cambian según el movimiento de la interfase y a su vez, el movimiento de la interfase depende del flujo; por consecuencia, además de resolver las ecuaciones 2.1, es necesario añadir la interfase al algoritmo de solución. Para poder resolver este problema, los siguientes aspectos deben ser tomados en cuenta:

- La descripción espacial de la interfase.
- Su evolución temporal.
- El acoplamiento numérico de ambas fases (aplicación correcta de las condiciones de frontera).

Existen dos clasificaciones principales de los métodos para la solución de los primeros dos puntos: métodos de superficie, se basan en hacer un seguimiento de la interfase ya sea mediante una malla deformable o partículas marcadoras. También existen los métodos de volumen o captura de interfase, en los cuales se utiliza una función marcadora o partículas sin propiedades ni masa a lo largo del volumen de una de ambas fases. [Ramírez Cruz, 2015]

Para conocer la descripción espacial y evolución temporal de la interfase se utilizó el método *Level-Set*, mientras que el acoplamiento numérico de ambas fases se planteó mediante el método *Ghost Fluid*.

3.1. Método *Level-Set*

El método *Level-Set* fue ideado por [Osher and Sethian, 1988] como una herramienta simple y versátil para calcular y analizar el movimiento de una interfase Γ , en dos o tres dimensiones y que limita una región abierta Ω . El objetivo es predecir el movimiento subsecuente de Γ bajo un campo de velocidad u_i , el cual puede depender de la posición, tiempo, geometría de la interfase o a la física externa.

Para un tiempo diferente a cero, la interfase es capturada por la función $\varphi(x_i, t)$, $\Gamma(t) = \{x_i | \varphi(x_i, t) = 0\}$. φ es positiva dentro de Ω , negativa fuera de Ω y cero sobre $\Gamma(t)$. De las afirmaciones anteriores, se dice que la fase es:

líquida si $\varphi(x_i, t) > 0$

gaseosa si $\varphi(x_i, t) < 0$

Además de lo anteriormente expuesto, la función Level-Set en un tiempo t_0 se define como la distancia más corta desde algún punto x_i hasta la interfase $\Gamma(t_0)$, de modo que:

$$\varphi(x_i, t) = \pm d(x_i) \tag{3.1}$$

De esta forma se puede obtener de manera sencilla algunas propiedades geométricas como la curvatura o normal. Igualmente, una función distancia siempre satisface que $|\Delta d| = 1$. Esto resulta favorable al acoplar ambas fases, ya que facilita los cálculos geométricos.

El movimiento de la interfase se analiza por la advección de los valores de φ con el campo campo de velocidad del flujo u_i [Osher and Fedkiw, 2001]. Por medio de la ecuación:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_i \cdot \nabla \varphi = 0 \tag{3.2}$$

3.1.1. Reinicialización de la función *Level-Set*

Si bien es cierto que en un tiempo inicial la función *Level-Set* se define como una función distancia (ecuación 3.1), con el paso del tiempo y advecciones, φ comienza a perder esta propiedad. Por otra parte, únicamente $\varphi = 0$ tiene algún significado físico, por lo tanto, es

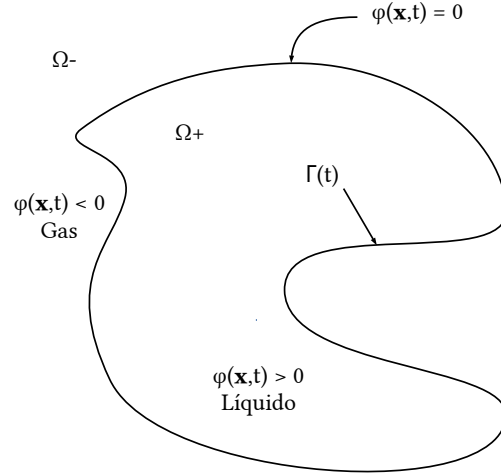


Figura 3.1: Interfase representada por medio de la función Level-Set.

posible detener el cálculo en cierto tiempo y reajustar los otros isocontornos, de este modo, φ es nuevamente iniciada como una función distancia.

Para la realización de lo anterior, $\varphi(x_i, t)$ es remplazada por $d(x_i)$, cuyo nivel cero es el mismo para ambas sin embargo la segunda función cumple que $|\Delta d| = 1$. En un inicio el método propuesto parte de la ecuación:

$$\varphi_t + |\nabla\varphi| = f(x_i) \quad (3.3)$$

Esta ecuación se deriva del movimiento de una interfase, el cual se da en dirección normal, bajo una velocidad generada internamente. En el caso en que $f(x_i) = 1$ y $\varphi_t = 0$ (estado estacionario), la solución de φ es una función distancia.

Finalmente, la ecuación de reinicialización se define como:

$$\frac{\partial d}{\partial \tau_p} + \mathbb{S}(\varphi)(|\nabla\varphi| - 1) = 0 \quad (3.4)$$

donde:

$$\mathbb{S}(\varphi) = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2 \Delta h^2}} \quad (3.5)$$

Con el uso de la ecuación 3.4 no es necesario reiniciar los puntos adyacentes a la interfase. $\Delta h = \min(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ de esta forma la información se propaga desde los valores pequeños de φ hasta los más grandes.

$$\frac{\partial d}{\partial \tau_p} = CFL \cdot \Delta h \quad (3.6)$$

Esta ecuación corresponde a un pseudo-paso de tiempo y CFL es el número de Courant-Friedrich-Levy, para la presente investigación su valor es de 0.5. La reinicialización se llevó a cabo cada 10 pasos de tiempo.

3.2. Esquemas de discretización

Essentially Non-Oscillatory ENO y *Weighted* ENO son esquemas de diferencias finitas de alto orden creados para resolver ecuaciones de conservación (flujos) de tipo hiperbólicas. El primer esquema ENO fue construido por Harten en 1987, introduciendo la idea de la interpolación polinomial de la información para una solución numérica. Por otro lado, el primer esquema WENO fue construido en 1994 por Liu, Osher y Chan en una versión de tercer orden de volúmenes finitos. Finalmente, en 1996, esquemas de tercero y quinto orden fueron creados por Jiang and Shu.

Los esquemas ENO y WENO están diseñados para problemas con soluciones suaves con regiones que contienen discontinuidades. La idea principal de estos esquemas consiste en obtener, por medio de una combinación de flujos de bajo orden, una aproximación de alto orden. Ambos esquemas utilizan el concepto de plantillas adaptativas, por medio de un procedimiento no lineal adaptativo se selecciona la plantilla localmente más suave. De esta forma, se evita el cruce con discontinuidades y se alcanza automáticamente la precisión de orden alto y la propiedad no oscilatoria cerca de las discontinuidades.

3.2.1. Diferenciación *upwind*

Los esquemas de diferenciación *upwind* también son métodos de discretización para la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólicas. Se caracterizan por ofrecer una solución adaptativa o sensible a la dirección de propagación de la información en un campo de flujo. Estos esquemas intentan discretizar las ecuaciones en la dirección determinada por el signo de la velocidad característica.

Tomando como ejemplo la ecuación 3.2 y discretizando el término temporal:

$$\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} + (u_i)_j^n (\varphi_{xi})_j^n = 0 \quad (3.7)$$

Donde $(\varphi_{xi})_j^n$ denota la derivada espacial de φ en el punto j de la malla, en el momento n . El signo de u_i indica la dirección de movimiento de φ . Es decir, si $u_i > 0$ los valores de φ se mueven de izquierda a derecha y el *método de las características*¹ nos dice que se tomen los valores a la izquierda de x_i para determinar que valor de φ aterrizará en el punto x_i al final de un paso de tiempo.

En resumen, si $u_i > 0$ se aproxima a φ_{xi} con φ_{xi}^- . En caso contrario, si $u_i < 0$ se aproxima a φ_{xi} con φ_{xi}^+ . Donde:

$$\varphi_{xi}^+ = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \approx \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\Delta x_i} \quad (3.8)$$

$$\varphi_{xi}^- = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \approx \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{\Delta x_i} \quad (3.9)$$

3.2.2. Esquemas ENO

Por otra parte, los esquemas ENO son una versión mejorada de los esquemas *upwind*, gracias a una aproximación más exacta de φ_{xi}^+ y φ_{xi}^- . Como se mencionó anteriormente, la idea principal de los esquemas ENO es calcular los flujos utilizando interpolaciones polinomiales lo más suaves posibles para encontrar φ y después diferenciar para obtener φ_{xi} . La estructura del polinomio utilizado, para x_1 , es la siguiente:

$$\varphi(x_1) = Q_0(x_1) + Q_1(x_1) + Q_2(x_1) + Q_3(x_1) \quad (3.10)$$

Después de diferenciar y evaluar en x_i para encontrar φ_{xi}^+ y φ_{xi}^- , se obtiene:

$$\varphi(x_i) = Q'_1(x_i) + Q'_2(x_i) + Q'_3(x_i) \quad (3.11)$$

¹El método de las características es una técnica para reducir una ecuación diferencial parcial en una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias, con las cuales la solución puede integrarse a partir de algunos datos iniciales que se proporcionan.

Después de la diferenciación, la constante $Q_0(x_1)$ desaparece. El primer término $Q'_1(x_i)$ tiene una precisión de primer orden, como el esquema *upwind*. Las mejoras se obtienen con los términos $Q'_2(x_i)$ y $Q'_3(x_i)$, logrando una precisión de segundo y tercer orden respectivamente.

Cuando se calcula φ_{xi}^- , el esquema ENO utiliza un subconjunto de $\{\varphi_{i-3}, \varphi_{i-2}, \varphi_{i-1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}\}$ que depende de como se escoja la plantilla. De hecho, existen exactamente tres posibles aproximaciones para calcular φ_{xi}^- . Definiendo $v_1 = \frac{\varphi_{i-2} - \varphi_{i-3}}{\Delta x_i}$, $v_2 = \frac{\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}}{\Delta x_i}$, $v_3 = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta x_i}$, $v_4 = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x_i}$ y $v_5 = \frac{\varphi_{i+2} - \varphi_{i+1}}{\Delta x_i}$, nos lleva a escribir:

$$\varphi_x^1 = \frac{v_1}{3} - \frac{7v_2}{6} + \frac{11v_3}{6} \quad (3.12)$$

$$\varphi_x^2 = -\frac{v_2}{6} + \frac{5v_3}{6} + \frac{v_4}{3} \quad (3.13)$$

y

$$\varphi_x^3 = \frac{v_3}{3} + \frac{5v_4}{6} - \frac{v_5}{6} \quad (3.14)$$

En la siguiente sección se explicará la forma en la que estas tres aproximaciones son utilizadas por los esquemas WENO.

3.2.3. Esquemas WENO

La filosofía de los esquemas ENO, de elegir exactamente una de las tres plantillas candidatas en regiones donde la solución es suave, resulta exagerada. Como consecuencia, los esquemas *weighted* ENO o WENO, ocupan una combinación convexa de las tres aproximaciones ENO. Por supuesto, si alguna de ellas cruza con una discontinuidad, se le da un peso mínimo en la combinación convexa, con el fin de minimizar su contribución y errores resultantes. El uso de estos esquemas resulta una óptima herramienta para resolver la ecuación 3.2 ya que reduce los errores en un orden de magnitud, gracias a su nivel de precisión de quinto orden.

La combinación convexa de las ecuaciones 3.12, 3.13 y 3.14 está dada por:

$$\varphi_{xi} = \omega_1 \varphi_x^1 + \omega_2 \varphi_x^2 + \omega_3 \varphi_x^3 \quad (3.15)$$

Donde $0 \leq \omega_k \leq 1$ son los pesos y siempre se cumple que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Para lograr el alto orden de precisión en las regiones lisas, los valores recomendados son $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.6$ y $\omega_3 = 0.3$. Las funciones peso pueden cumplir la condición anterior si se definen de la siguiente manera:

$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad (3.16)$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad (3.17)$$

$$\omega_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \quad (3.18)$$

A su vez, α_k es definida como:

$$\alpha_1 = \frac{0.1}{(S_1 + \epsilon)^2}, \quad (3.19)$$

$$\alpha_2 = \frac{0.6}{(S_2 + \epsilon)^2}, \quad (3.20)$$

$$\alpha_3 = \frac{0.3}{(S_3 + \epsilon)^2}, \quad (3.21)$$

Donde S_k son estimaciones para regiones no suaves, de las ecuaciones 3.12, 3.13 y 3.14 y se definen como:

$$S_1 = \frac{13}{12}(v_1 - 2v_2 + v_3)^2 + \frac{1}{4}(v_1 - 4v_2 + 3v_3)^2, \quad (3.22)$$

$$S_2 = \frac{13}{12}(v_2 - 2v_3 + v_4)^2 + \frac{1}{4}(v_2 - v_4)^2, \quad (3.23)$$

$$S_3 = \frac{13}{12}(v_3 - 2v_4 + v_5)^2 + \frac{1}{4}(3v_3 - 4v_4 + v_5)^2 \quad (3.24)$$

con

$$\epsilon = 10^{-6} \max \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\} + 10^{-99} \quad (3.25)$$

Una solución suave tiene una pequeña variación que conlleva a un valor pequeño de S_k . Si S_k es lo suficientemente pequeño, comparado con ϵ , entonces las ecuaciones 3.19, 3.20 y 3.21 dan como resultado $\alpha_1 \approx 0.1\epsilon^{-2}$, $\alpha_2 \approx 0.6\epsilon^{-2}$ y $\alpha_3 \approx 0.3\epsilon^{-2}$. Exibiendo la propiedad de garantizar la precisión de quinto orden.

3.2.4. Integración temporal

Con el uso de los esquemas ENO y WENO se pudo discretizar, con un alto grado de precisión, los términos espaciales de la ecuación 3.2. Por otra parte, el término temporal también debe ser discretizado con precisión adecuada, en [Shu and Osher, 1988] se propone el método Total Disminución de Variación (TDV) Runge-Kutta, de tercer orden.

3.3. Condiciones de frontera en la interfase

Como se mencionó anteriormente, el método *Level-Set* es un método de captura de interfase en el cual se utilizan partículas marcadoras que no contienen masa y como consecuencia, no pueden almacenar cantidad de movimiento. Por otro lado, los dos fluidos en interacción son fluidos viscosos, de tal forma que, tanto las velocidades, como el esfuerzo cortante, deben ser continuos a través de la interfase, lo cual se ve reflejado en la definición de las condiciones de frontera:

$$u_w(\Gamma(t), t) = u_a(\Gamma(t), t) \quad (3.26)$$

$$\tau_w(\Gamma(t), t) = \tau_a(\Gamma(t), t) \quad (3.27)$$

Siendo $\Gamma(t)$ la posición de la interfase en el tiempo t . Los subíndices w y a de nuevo se refieren a las variables del agua y aire respectivamente. Proyectando el esfuerzo cortante tangencialmente a la superficie y calculando el gradiente respecto a la dirección normal, se obtiene:

$$\mu_w \frac{\partial u_{T_w}}{\partial \mathbf{N}} = \mu_a \frac{\partial u_{T_a}}{\partial \mathbf{N}} \quad (3.28)$$

Siendo μ la viscosidad dinámica de cada fluido. Dividiendo ambos lados de la igualdad por la viscosidad del agua, se obtiene en la interfase:

$$\frac{\partial u_{T_w}}{\partial \mathbf{N}} = \frac{\mu_a}{\mu_w} \frac{\partial u_{T_a}}{\partial \mathbf{N}} \quad (3.29)$$

Debido a que la viscosidad del aire es pequeña comparada con la del agua, el lado derecho de la ecuación se puede considerar despreciable, lo que nos lleva a:

$$\frac{\partial u_{T_w}}{\partial \mathbf{N}} \approx 0 \quad (3.30)$$

A veces, esta condición se representa como la tensión de corte nula en una superficie líquida libre. Debe tomarse en cuenta que esta aproximación, del esfuerzo tangencial, puede usarse solo cuando el movimiento es del líquido y no del gas. Cuando un gas arrastra un líquido, como es el caso del viento que causa movimiento en un charco de agua, se debe usar la condición de frontera correcta que iguale los esfuerzos tangenciales.

Cuando un fluido es expulsado de un ducto o un espacio confinado, hacia un ambiente atmosférico, la superficie libre es expuesta también a esa atmósfera. Por lo tanto, la condición de frontera para la presión también se considera continua. Únicamente dos factores pueden provocar una diferencia de presión a través de una interfase. El primero de ellos es la tensión superficial, la cual en este caso se puede despreciar ya que los efectos inerciales son mayores que la tensión superficial. El segundo de ellos es el flujo supersónico, el cual a través de compresión o expansión de ondas puede provocar una diferencia de presión.

$$P_w(\Gamma(t), t) = P_a(\Gamma(t), t) \quad (3.31)$$

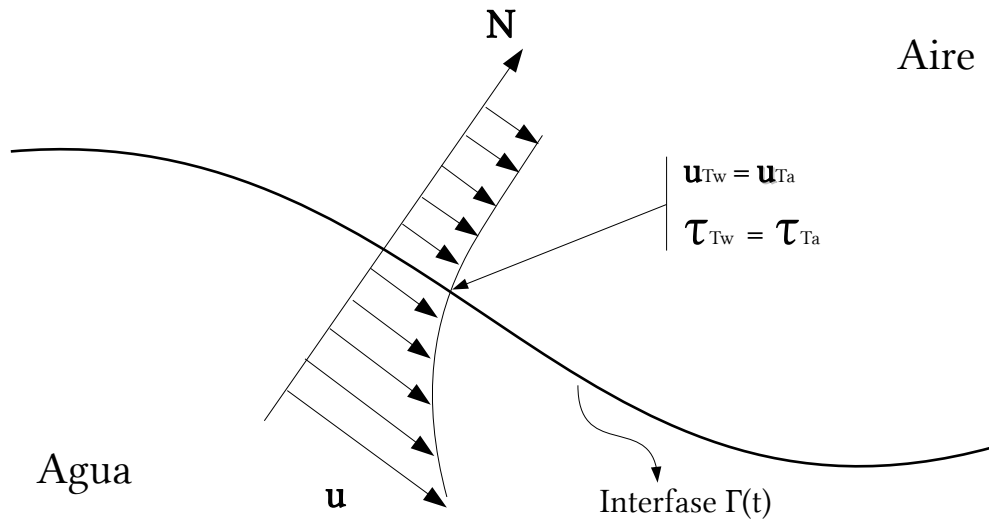


Figura 3.2: Condiciones de frontera en la interfase, las velocidades y esfuerzos cortantes son continuos.

La condición cinemática (ecuación 3.30) es el gradiente de la velocidad en la dirección normal de la superficie, siendo de tipo *Von Neuman*. Por otra parte, la condición de presión (ecuación 3.31) corresponde a una de tipo *Dirichlet*, ya que se impone un valor constante en la frontera. En la Figura 3.2 se aprecia el planteamiento de las condiciones.

3.3.1. Tensión superficial

En la frontera entre dos fluidos, es decir la interfase, se generan fenómenos físicos exclusivos de esa región, como la formación de gotas y capilaridad. Esto se debe a que en esa región los fluidos tienen propiedades diferentes que por separado. Una de esas propiedades es la tensión superficial, la cual es una tensión en la superficie generada por las fuerzas de atracción entre las moléculas del fluido. El parámetro adimensional que relaciona la fuerza de inercia del fluido con la tensión superficial, es el número de Weber, que se define como:

$$We = \frac{\rho u^2 L}{\sigma} \quad (3.32)$$

Donde u es la velocidad y ρ es la densidad del fluido, L es una longitud característica, que en el caso de los chorros se puede utilizar el diámetro inicial del mismo. Por último, σ es el coeficiente de tensión superficial, que para el agua es de $\sigma = 0.0728 \left[\frac{N}{m}\right]$.

El número de Weber es un parámetro importante para determinar la manera en la que el chorro rompe, es decir, el momento en que la estructura líquida del chorro se desintegra. Por ejemplo, en el proceso de atomización se generan gotas de cierto tamaño, distribución y velocidad. Este mecanismo de rompimiento se da cuando $We > 40.3$. Algunos investigadores aseguran que la formación de gotas es el resultado del desarrollo de las ondas sobre la superficie del chorro. En el caso de los chorros de alta velocidad, se pueden despreciar los efectos de la tensión superficial ya que como se puede observar en la Figura 3.32, el número de Weber en la superficie del chorro es extremadamente alto, lo cual implica que el efecto de las fuerzas inerciales superan por mucho a la tensión superficial.

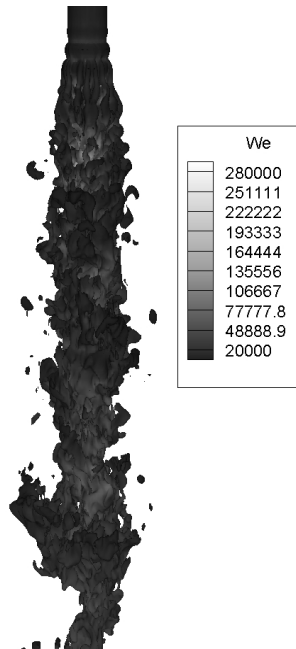


Figura 3.3: Superficie del chorro coloreada con valores del número de Weber.

Si fuera necesario calcular la tensión superficial, el método que se adapta a este trabajo, es el propuesto por [Herrmann, 2013]. En su investigación, dedujo que a partir de la ecuación 3.2 se puede obtener la posición en la interfase:

$$\delta(X_i - x_i) = \delta(\varphi)|\varphi| \quad (3.33)$$

En donde δ es la delta de Dirac. También, el vector normal de la interfase \mathbf{n} y la curvatura de la interfase \mathbf{k} , se pueden expresar en terminos de la función *Level-Set* como:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{k} = \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.35)$$

Con las ecuaciones 3.33, 3.34 y 3.36 se puede obtener la tensión superficial T_σ :

$$T_\sigma(x_i) = \sigma \mathbf{k} \delta_h(X_i - x_i) \mathbf{n} = \sigma \mathbf{k} \delta_h(\varphi) |\nabla\varphi| \mathbf{n} \quad (3.36)$$

Siendo σ el coeficiente de tensión superficial y δ_h es la posición en la interfase en función del espesor de la misma, h .

3.4. Método *Ghost Fluid*

Una vez definidas las condiciones de frontera en la interfase, se utilizó el algoritmo de acomplamiento *Ghost Fluid* propuesto por [Fedkiw et al., 1999]. Este método ofrece una manera de capturar interfaces evitando grandes oscilaciones no físicas. La idea principal del método es introducir dos *sets* de variables y ecuaciones, para cada una de las fases, (ecuaciones 2.1 a 2.5). Estos *sets* de ecuaciones se resuelven de manera independiente y el valor cero de la función *Level-Set* separa las regiones reales de las *fantasma*. Siendo estas dos regiones contrarias para cada una de las fases y el dominio físico del problema resulta de la unión de las dos regiones reales de cada fase (Figura 3.4).

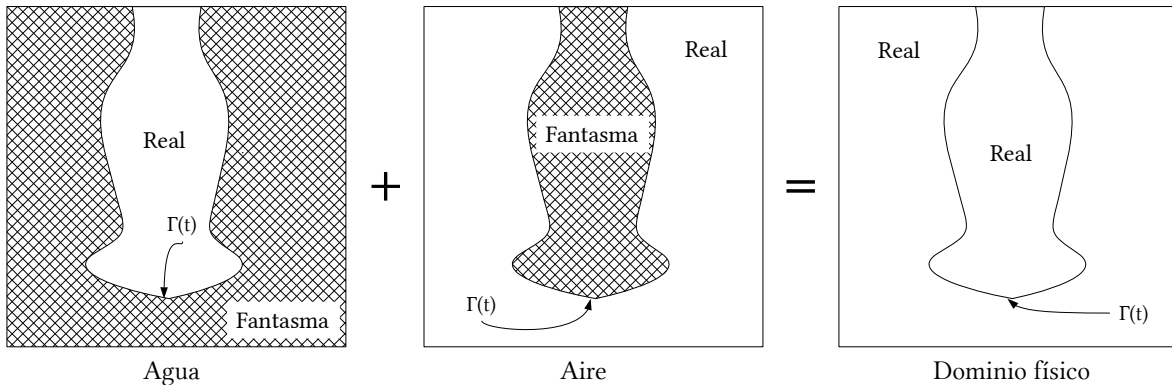


Figura 3.4: Dominio físico del método *Ghost Fluid*.

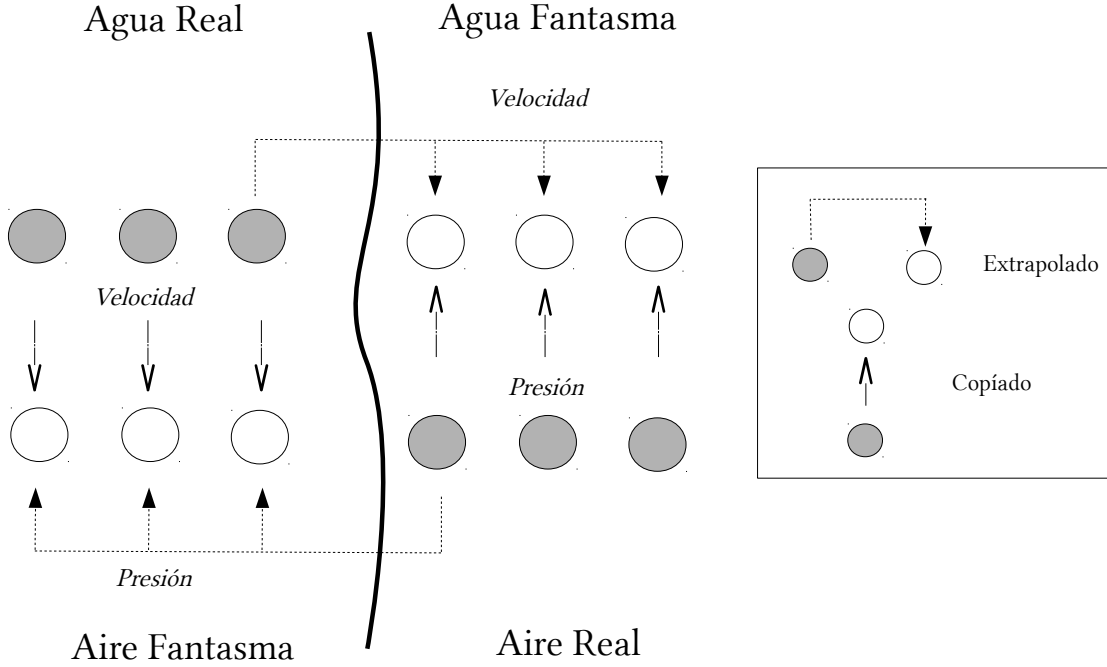


Figura 3.5: Esquema del método *Ghost Fluid*.

En este enfoque, en las regiones de fluido fantasma, las variables discontinuas a través de la interfase se obtienen realizando una extrapolación de lado a lado. Por otro parte, las variables continuas se copian del fluido real al fantasma, nodo por nodo. [Cubos-Ramírez et al., 2016]

Como se observa en la Figura 3.5, la velocidad del agua y la presión del aire, en las regiones de fluido *fantasma*, son extrapoladas a partir de sus respectivas regiones de fluido real. Mientras que la presión del agua y la velocidad del aire, en la región *fantasma*, son copiadas de sus regiones reales.

3.4.1. Extrapolación de propiedades

La extrapolación se entiende como el transporte de una variable o propiedad en dirección normal que en este caso, se realiza desde los nodos reales, adyacentes a la interfase, hacia la región *fantasma* y se logra mediante el método propuesto por [Nourgaliev et al., 2004], resolviendo la ecuación 3.37 de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau_p} + \underbrace{[\mathbf{Q}(\varphi) \cdot \mathbf{N}]}_{\mathcal{H}_g(\nabla \Psi, x_i, t)} \cdot \nabla \Psi = 0 \quad (3.37)$$

Siendo Ψ la propiedad a extrapolar y \mathbb{Q} determina la forma en la que se lleva acabo la extrapolación:

$$\begin{aligned} \text{Se extrapola del lado positivo } \varphi \geq 0 \quad \mathbb{Q}(\varphi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \leq 0 \\ +1 & \text{si } \varphi \geq 0 \end{cases} \\ \text{Se extrapola del lado negativo } \varphi < 0 \quad \mathbb{Q}(\varphi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \geq 0 \\ -1 & \text{si } \varphi \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.38)$$

También, \mathbf{N} es el vector normal a la interfase y se puede calcular por medio de la función *Level-Set* como:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad (3.39)$$

Si φ es una función distancia, se cumple que $|\nabla\varphi| = 1$, por lo tanto:

$$\mathbf{N} = \nabla\varphi \quad (3.40)$$

Por último, el Hamiltoniano $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ de la ecuación 3.37 es calculado usando un esquema *upwind* de primer orden:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{J}}|_{i,j,k} &= \max(\mathbb{Q}_{i,j,k}\mathbf{N}_{i,j,k}^{(x1),0}) \frac{\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i-1,j,k}}{\delta x_1} \\ &+ \min(\mathbb{Q}_{i,j,k}\mathbf{N}_{i,j,k}^{(x1),0}) \frac{\Psi_{i+1,j,k} - \Psi_{i,j,k}}{\delta x_1} \\ &\max(\mathbb{Q}_{i,j,k}\mathbf{N}_{i,j,k}^{(x2),0}) \frac{\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i,j-1,k}}{\delta x_2} \\ &+ \min(\mathbb{Q}_{i,j,k}\mathbf{N}_{i,j,k}^{(x2),0}) \frac{\Psi_{i,j+1,k} - \Psi_{i,j,k}}{\delta x_2} \\ &\max(\mathbb{Q}_{i,j,k}\mathbf{N}_{i,j,k}^{(x3),0}) \frac{\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i,j,k-1}}{\delta x_3} \\ &+ \min(\mathbb{Q}_{i,j,k}\mathbf{N}_{i,j,k}^{(x3),0}) \frac{\Psi_{i,j,k+1} - \Psi_{i,j,k}}{\delta x_3} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Capítulo 4

Dominio Computacional y Condiciones de Operación

En la Figura 4.1 se aprecia el dominio computacional con la siguientes dimensiones: $16.5D \times 8D \times 8D$ ($210 \times 129 \times 129$ nodos), a lo largo de x_1 (dirección del flujo), x_2 y x_3 (direcciones transversales) respectivamente. Para un total de 3 494 610 nodos.

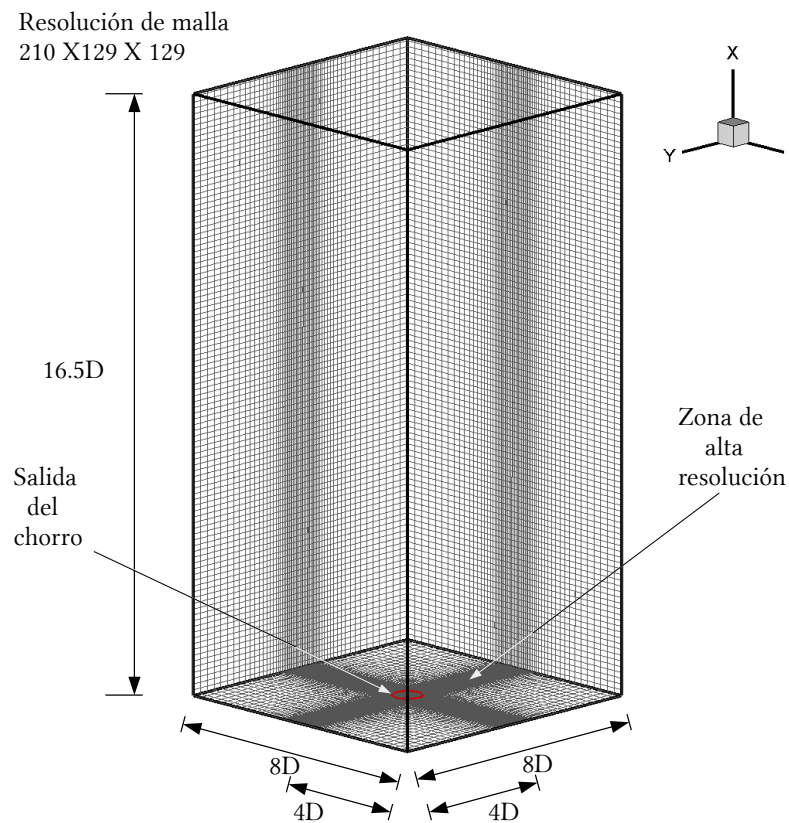


Figura 4.1: Configuración del dominio computacional.

Con la finalidad de respresentar correctamente la región de la capa cortante, se utilizó una malla no uniforme en las direcciones transversales, donde la discretización es identica. El refinamiento de la malla se llevo a cabo mediante la función tangente hiperbólica. En la dirección longitudinal, el espaciamiento entre nodos es constante de valor $\Delta x_1 = 0.0789D$ (≈ 0.08 [mm]). En cambio, en las direcciones transversales (x_2, x_3), la distancia es irregular, refinada en la zona del chorro, con valores maximo y mínimo de: $\Delta_{max} = 0.133D$ (≈ 0.14 [mm]) y $\Delta_{min} = 0.023D$ (≈ 0.024 [mm]). Además, se realizó un análisis de independencia de malla para determinar la resolución y dimensiones optimas del dominio computacional, obteniendo resultados de calidad y tiempo de cálculo económico.

4.1. Condiciones de frontera

Además de ser fundamentales en el cálculo de las ecuaciones de gobierno, la condiciones de frontera también influyen en la estabilidad del algoritmo numérico. Estas condiciones se pueden clasificar como físicas y numéricas. Las condiciones de frontera físicas son aquellas que especifican el comportamiento físico de las variables dependientes. Por ejemplo, la imposición de la magnitud de la velocidad en la entrada. Una vez establecidas las condiciones físicas de frontera, algunas veces resultan insuficientes para resolver numéricamente el problema. Por lo tanto, es necesario utilizar condiciones que no estén intrínsecamente ligadas a las imposiciones físicas del problema, pero si al método numérico. Estas son las condiciones numéricas de frontera y se les debe dar un trato especial, ya que evitan la intervención de falsos cálculos y permiten apreciar los efectos acusticos.

Las condiciones de frontera para las direcciones trasversales se asumen como paredes adiabáticas y deslizantes. En $\frac{x_1}{D} = 0$ (entrada), se impuso una condición subsónica para el agua y supersónica para el aire. Para ambos casos, la condición de entrada de temperatura es constante, igual al valor de referencia. El perfil de velocidad a la salida de la boquilla es determinado por la geometría de la misma. En la dirección del flujo (u_1), el perfil está basado en la función error, alcanzando un valor máximo U_{max} , el cual es utilizado como valor de referencia y su valor mínimo es utilizado para el flujo de aire. Las componentes de la velocidad transversales (u_2 y u_3) son cero.

En una simulación numérica, el ambiente en el cual el chorro es descargado, se considera ideal ya que no existen perturbaciones que alteren al flujo y que ayudan al desarrollo turbulento del mismo. Estas perturbaciones son difíciles de manipular, incluso en ambientes controlados. Una solución práctica a este problema, es incorporar a cada una de las componentes de la velocidad una fluctuación o *ruido* que simule las perturbaciones en ambientes reales. Esto se logra sumando valores aleatorios entre -0.5 y 0.5 , multiplicados por el 5% de la velocidad máxima del chorro, a la región principal de la capa cortante.

En $\frac{x_1}{D} = 16.5$ (salida), se impuso para ambos fluidos una condición de frontera híbrida subsónica/supersónica. Todas las condiciones de frontera de este trabajo, corresponden a las planteadas por [Poinsot and Lele, 1992].

4.2. Valores iniciales y estado estacionario

Todos los parámetros adimensionales de este trabajo, están referidos a los valores utilizados experimentalmente en [Salinas-Vázquez et al., 2017], que corresponden a una máquina de corte comercial. El diámetro de la boquilla y diámetro inicial del chorro $D_j = 1.02$ [mm], las variables termodinámicas del ambiente, $p = 1 \times 10^5$ [Pa], $T = 303$ [K] y la velocidad máxima del chorro $U_{max} = 580$ [$\frac{m}{s}$]. Bajo estas condiciones, se tienen números de Mach, para el aire $M^a = 1.7$ y para el agua de $M^w = 0.4$.

El análisis del chorro se realizó cuando el flujo turbulento se encuentra totalmente desarrollado. Para garantizar esta condición, se monitoreo la norma de la vorticidad, a lo largo de todo el dominio computacional, como se observa en la Figura 4.3. Esta vorticidad se define como:

$$\omega_T(t) = \frac{1}{V_{TOTAL}} \int_V \omega_N(x_i, t) dV \quad (4.1)$$

$$\omega_N(x_i, t) = \sqrt{\bar{\omega}_{x_1}^2(x_i) + \bar{\omega}_{x_2}^2(x_i) + \bar{\omega}_{x_3}^2(x_i)} \quad (4.2)$$

Siendo ω_N la norma de la vorticidad local, dV un diferencial de volumen (dx_1, dx_2, dx_3) y V_{TOTAL} el volumen total de dominio computacional.

4.3. Valores promedio

Los resultados estadísticos presentados fueron promediados en un lapso de tiempo equivalente a $t(\frac{U_{max}}{D}) = 130$ de la siguiente manera:

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{t_{tot}} \int_0^{t_{tot}} \Phi(x_i, t) dt \quad (4.3)$$

Siendo Φ la variable promediada en el tiempo total. Obteniendo como resultados las variables promedio para cada una de las fases $(U, V, W, P, T)^w$ y $(U, V, W, P, T)^a$, normalizadas con U_{max} para las velocidades, p_{ref} y T_{ref} para la presión y temperatura.

Además, a partir de las variables promediadas se calcularon las variables estadísticas :

$$U_{rms} = \sqrt{\overline{u_1^2} - \overline{u_1}^2} \quad (4.4)$$

$$V_{rms} = \sqrt{\overline{u_2^2} - \overline{u_2}^2} \quad (4.5)$$

$$W_{rms} = \sqrt{\overline{u_3^2} - \overline{u_3}^2} \quad (4.6)$$

Las ecuaciones 4.4, 4.5 y 4.6 corresponden a los valores medios cuadráticos de las componentes del campo de velocidad.

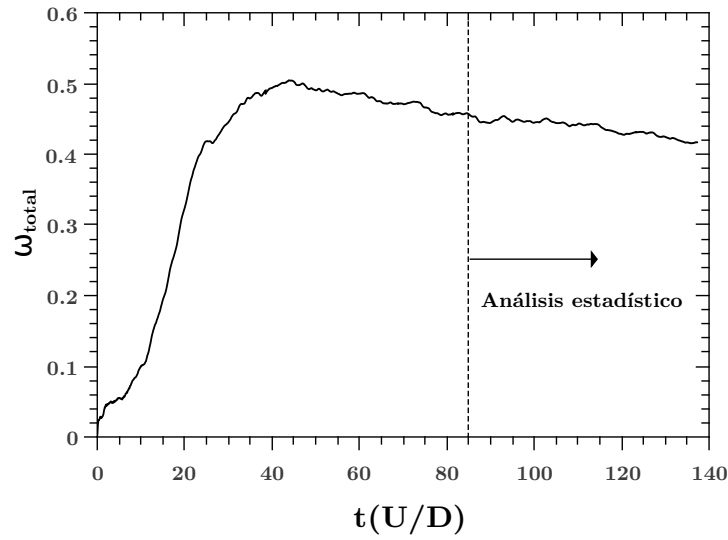


Figura 4.2: Norma de la vorticidad local como función del tiempo adimensional, sobre todo el dominio computacional.

Capítulo 5

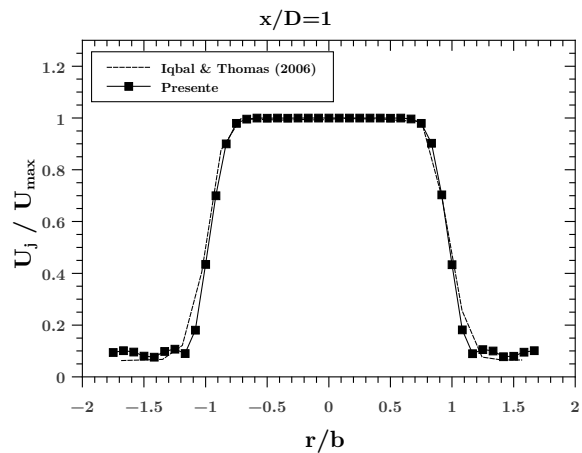
Resultados

5.1. Validación del código numérico

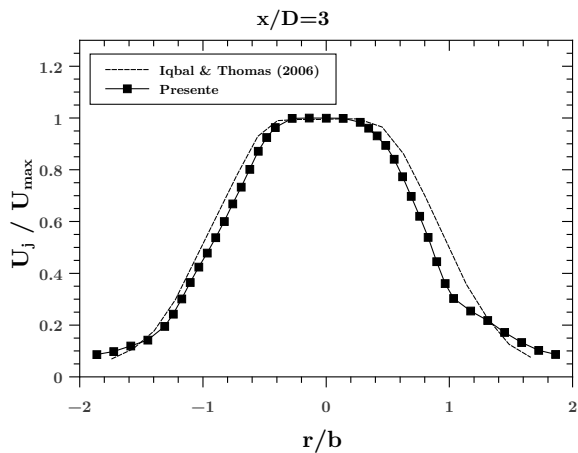
Esta etapa del trabajo consistió en comparar los resultados numéricos del presente con los obtenidos experimentalmente por [Iqbal and Thomas, 2006]. En su investigación, obtuvieron la estructura coherente de un chorro turbulento axisimétrico con parámetros adimensionales de $Re = 3.8 \times 10^5$ y $Ma = 0.3$, mediante una implementación vectorial de la descomposición ortogonal adecuada, POD por sus siglas en inglés, utilizando las tres componentes de la velocidad con sus respectivas fluctuaciones.

Los resultados que se muestran a continuación, corresponden a los perfiles de la velocidad promedio U , normalizada por la velocidad máxima local $U_{max}(x/D)$ y graficados contra la dirección radial r , normalizada por la amplitud media de la velocidad promedio local, b. La amplitud media se define como la ubicación radial en la cual la velocidad promedio local cae a la mitad de su valor en la línea central del flujo. En la Figura 5.1 se observa una buena relación de los perfiles obtenidos numéricamente, con las mediciones presentadas por Iqbal y Thomas en su estudio. También se puede apreciar que en ambos casos se tienen un perfil inicial con forma *top-hat* (Figura 5.1a), lo cual indica la formación de un núcleo potencial uniforme rodeado por una delgada capa cortante.

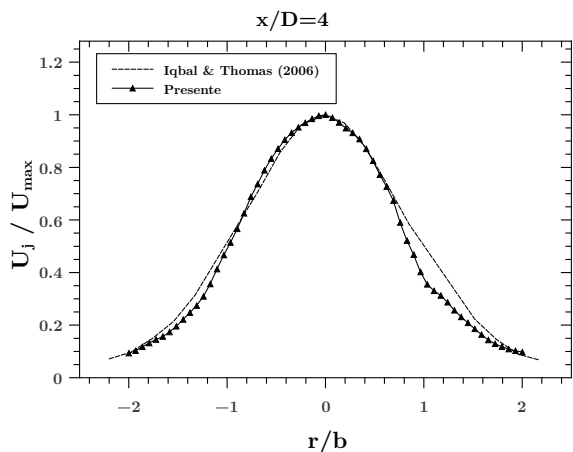
Posteriormente, en la Figura 5.1 se presentan dos perfiles de la intensidad de turbulencia, en la dirección del flujo, por medio de las velocidades rms. Si bien existe relación entre ambos casos en cuanto a forma y orden de magnitud, hay ciertas diferencias en la zona de la capa cortante. Lo anterior se debe a que en el trabajo de Iqbal y Thomas se estudió un chorro de aire y los esfuerzos cortantes en la interfase son menores, por consecuencia, la intensidad de la turbulencia es menor en esa zona.



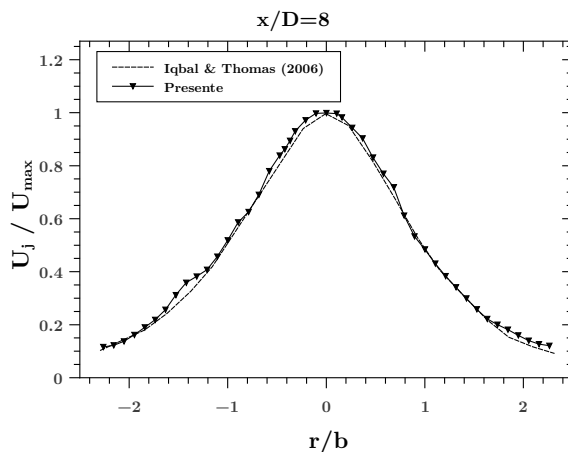
(a)



(b)

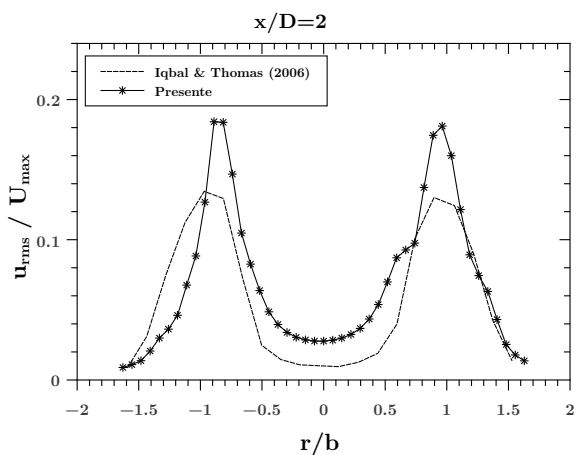


(c)

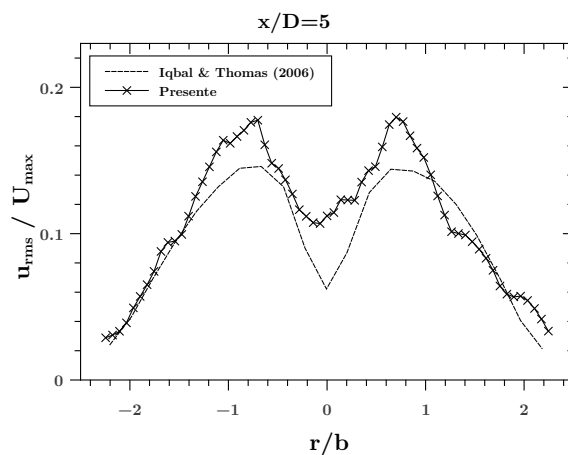


(d)

Figura 5.1: Perfiles de velocidad promedio a diferentes ubicaciones longitudinales.



(a)



(b)

Figura 5.2: Perfiles de u_{rms}/U_{max} para diferentes posiciones x/D .

5.2. Desarrollo de la superficie del chorro

En la Figura 5.3 se puede visualizar la evolución espacial y temporal de la interfase entre el agua del chorro y el aire. Es decir, se muestran algunas iso-superficies del valor cero de la función *Level-Set*, que corresponden a diferentes instantes. Asimismo, se puede observar que la primeras gotas se generan debajo del frente del chorro, con forma de hongo. También, en la Figura 5.4(a) se presenta la superficie del chorro cuando este se encuentra totalmente desarrollado, en donde se puede observar la zona de rompimiento, cerca de la boquilla. Igualmente se observan las ondas que se generan sobre la superficie del chorro, muy cerca de la salida de la boquilla. Estas inestabilidades superficiales son de gran importancia para la atomización del chorro. Como se aprecia en la Figura 5.4(b), *pellizcos* en la interfase pueden producir filamentos líquidos, los cuales se desprenden para formar gotas o parcelas líquidas de diferentes tamaños.

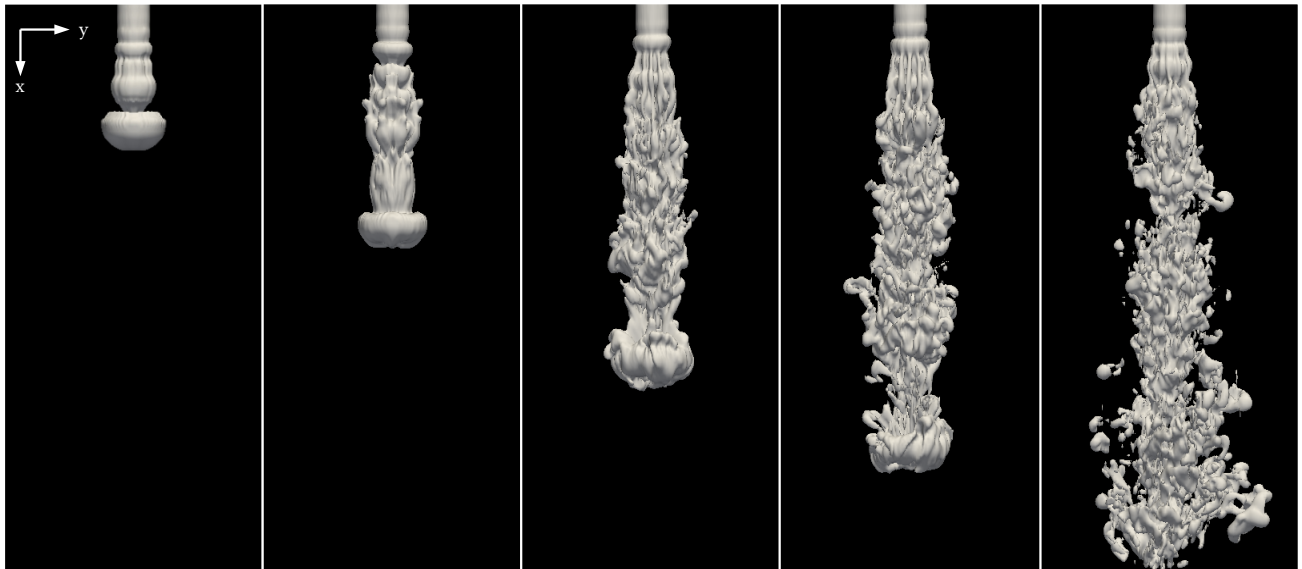


Figura 5.3: Desarrollo de la superficie del chorro en la etapa de transición (intervalo de tiempo de 27 ms).

Por otra parte, la probabilidad de presencia de líquido a lo largo de la dirección longitudinal, fue obtenida extrayendo la parte continua de la fase líquida, por medio de la función *Level-Set*. Aunado a lo anterior, se realizó un promediado estadístico con el cual se obtuvo la gráfica de la Figura 5.2. En ella, se encontró que la longitud del núcleo líquido es de aproximadamente siete veces el diámetro de la boquilla del chorro, lo cual concuerda con el trabajo de [Ménard et al., 2007].



(a)

(b)

Figura 5.4: (a)Superficie líquida del chorro completamente desarrollado. (b) Ligamentos y parcelas líquidas, formadas a lo largo de la superficie del chorro.

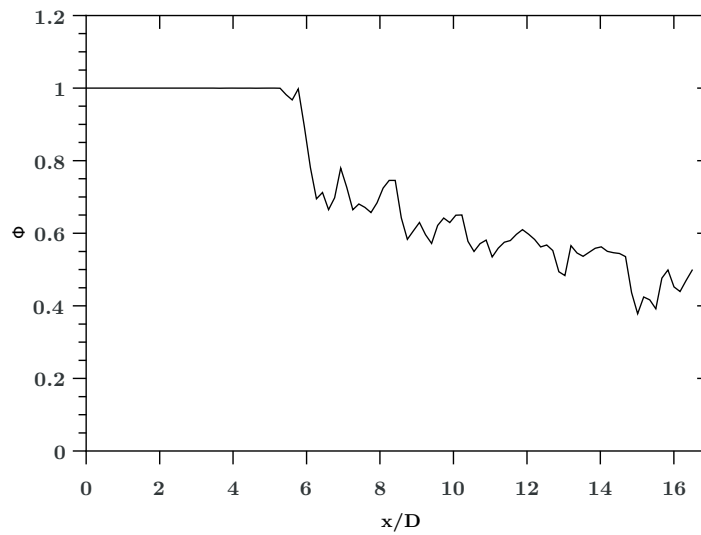


Figura 5.5: Probabilidad de presencia de líquido a partir del promedio de la función *Level-Set* (φ), sobre el eje.

5.3. Caracterización del flujo

Una vez comprobado que la herramienta numérica representa correctamente el fenómeno físico, se procedió a caracterizar el flujo. Cabe mencionar que esta es una tarea compleja e incluso hoy en día no existe una caracterización veraz de este tipo de flujo. En el trabajo de [Ball et al., 2012] se realizó una revisión crítica de estudios tanto experimentales como computacionales, con la cuál se constató que los resultados obtenidos en la presente investigación, son congruentes.

La Figura 5.6(a) sintetiza la evolución en la dirección del flujo de la velocidad promedio central y de la dispersión de la velocidad del chorro. La velocidad central del chorro es casi constante hasta el final del núcleo potencial, lo cual concuerda con la teoría, hasta una distancia de aproximadamente $x/D = 5$, pero decae rápidamente aguas abajo. En el caso de la dispersión de la velocidad, esta también permanece constante durante el núcleo potencial pero aumenta rápidamente debido a la pérdida de cantidad de movimiento y el desarrollo del chorro. Ambas descripciones se pueden visualizar en la Figura 5.6(b) la cual corresponde al contorno de velocidad promedio U/U_{max} , en donde también se pueden apreciar las tres regiones que conforman a un chorro. Región inicial $\approx 0 \geq x/D \leq 5$, región principal $\approx 5 > x/D \leq 9$ y región final $\approx 9 > x/D$.

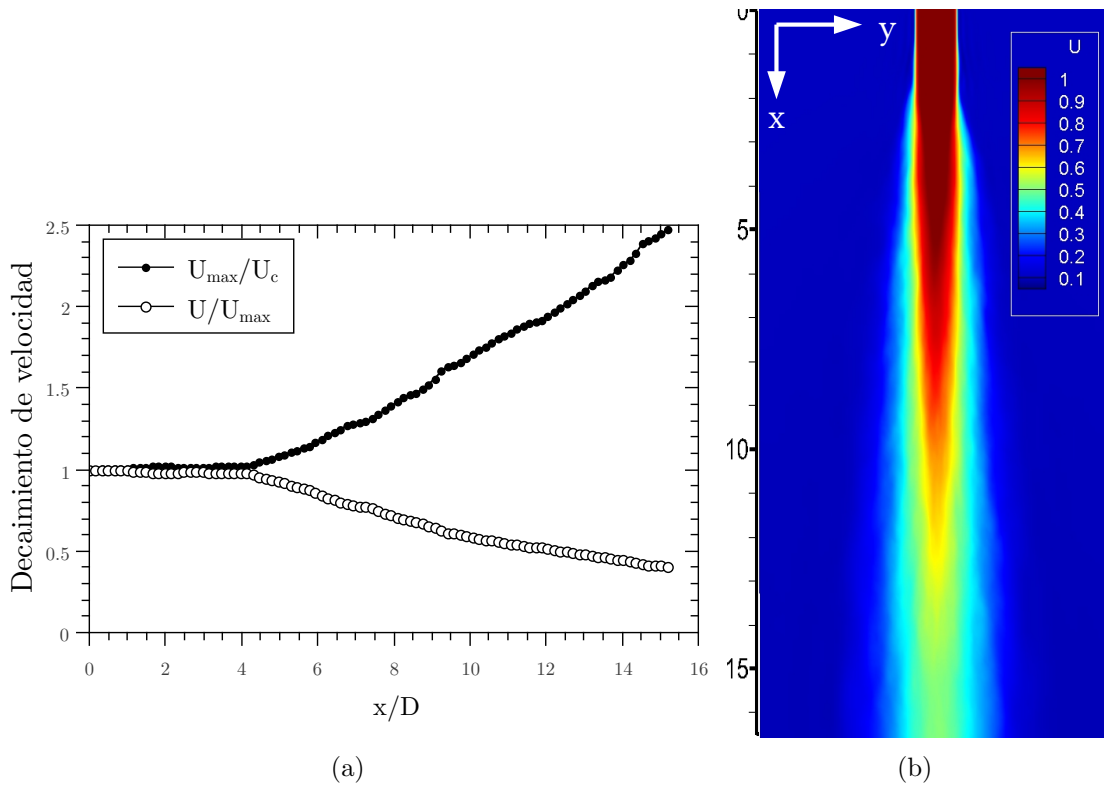
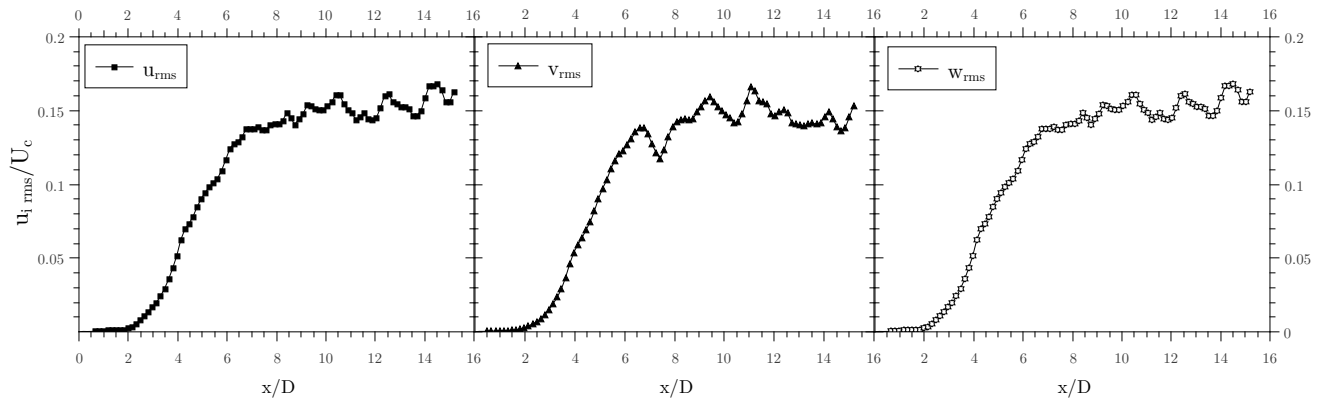
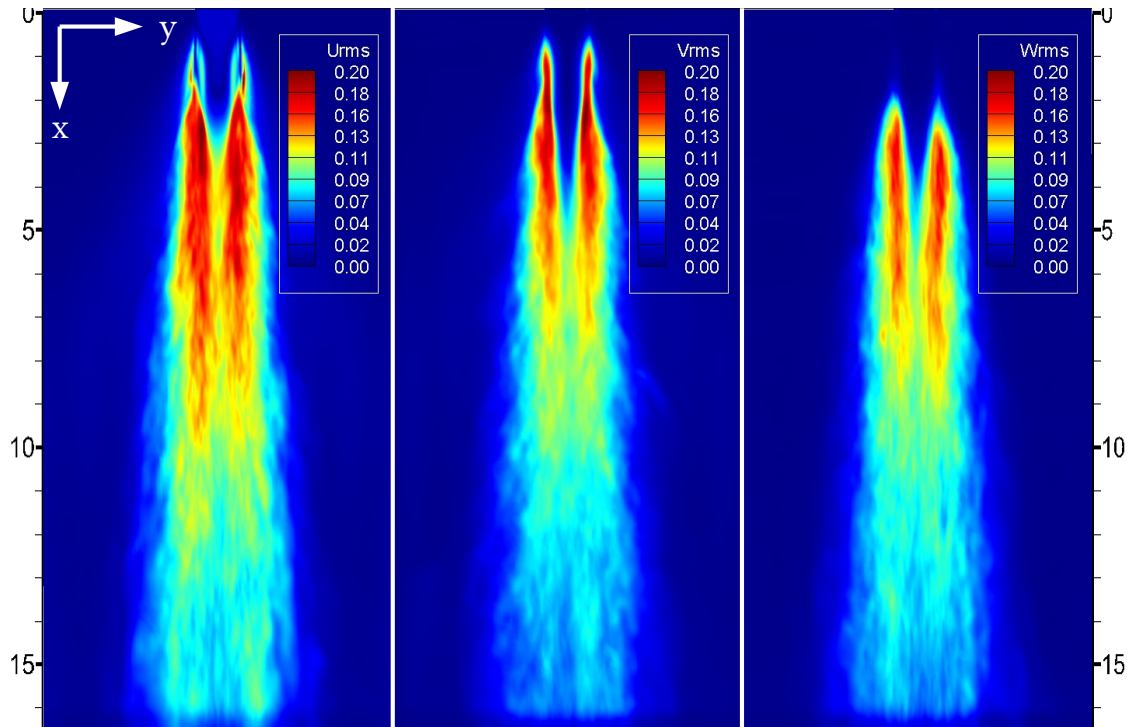


Figura 5.6: (a) Decaimiento de la velocidad promedio en la línea central ($\frac{U}{U_{max}}$) y variación de la dispersión del chorro en la dirección del flujo ($\frac{U_{max}}{U_c}$). (b) Contorno de velocidad promedio en la dirección axial.

El desarrollo de las intensidades turbulentas a lo largo del eje del chorro, es presentado en la Figura 5.7. Donde se puede percibir que en la región inicial las intensidades incrementan rápidamente, gracias al movimiento turbulento de gran escala, que se lleva a cabo en la capa cortante (Figura 5.7(b)). Este movimiento tiene como resultado una influencia sobre las intensidades en la línea central del chorro, las cuales progresan a lo largo del núcleo potencial y eventualmente coalescen y se mantienen constantes $\approx x/D > 8.5$ (Figura 5.7(a)).



(a)



(b)

Figura 5.7: (a) Evolución de las intensidades de la turbulencia en la línea central del flujo en dirección longitudinal. (b) Contornos de intensidades de turbulencia.

En los contornos de intensidades de turbulencia también se puede observar que, durante el desarrollo del chorro, la magnitud de v_{rms} y w_{rms} es siempre menor que la de u_{rms} . Cabe mencionar que, lo anterior concuerda con la revisión hecha en el trabajo de [Ball et al., 2012], en el cual se sugiere que el efecto de las condiciones iniciales no afecta el desarrollo de la intensidad de la turbulencia, sin embargo, si provocan una modificación considerable en la forma del chorro, su rompimiento y los vórtices de grandes escalas.

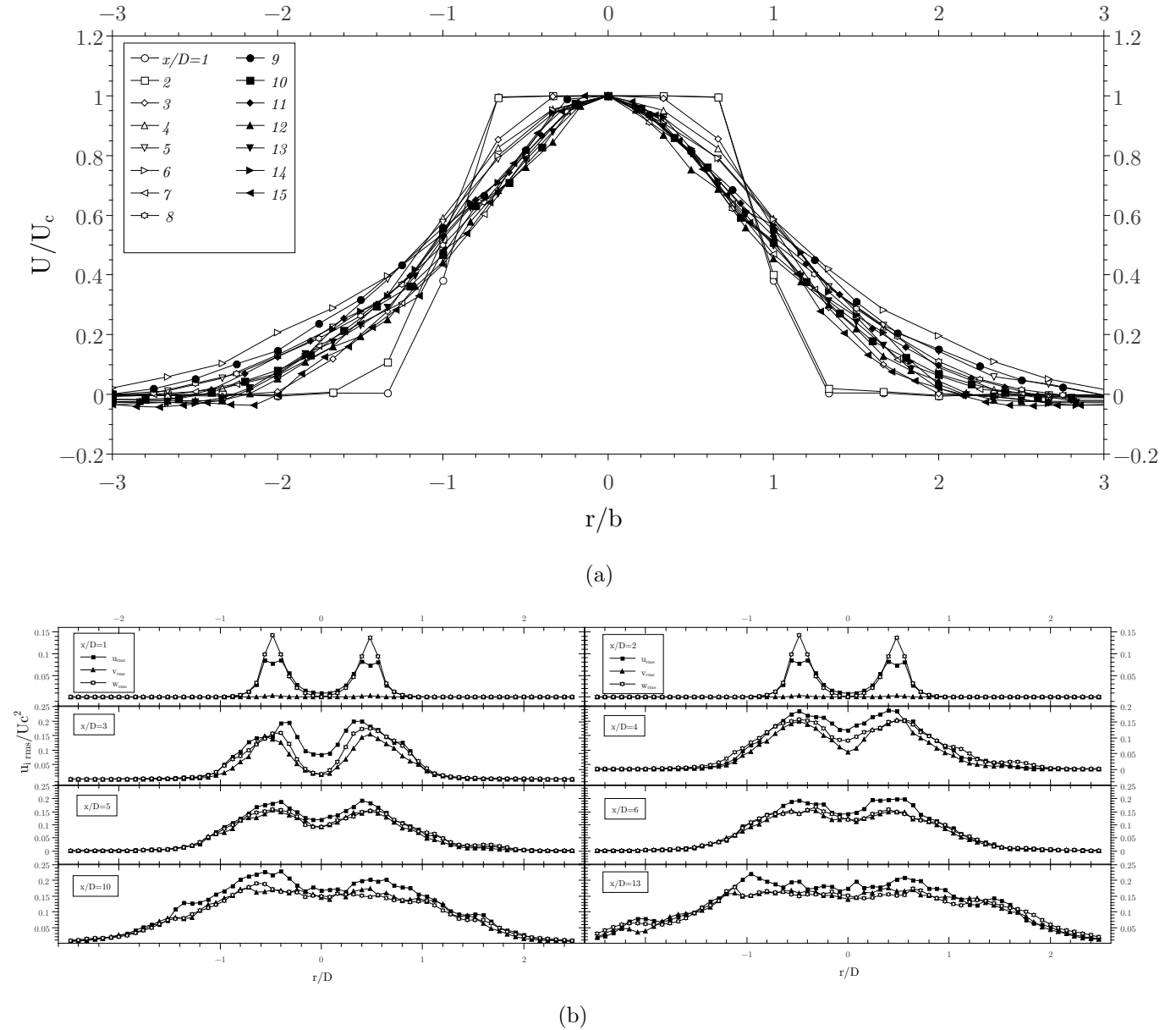


Figura 5.8: (a) Perfiles de velocidad promedio a diferentes posiciones longitudinales. (b) Perfiles de intensidad de turbulencia para las tres componentes de velocidad.

En la Figura 5.8(a) se graficaron diferentes perfiles de velocidad promedio a distintas posiciones longitudinales, normalizados por la velocidad promedio en la línea central U_c , contra la dirección radial r , a su vez, esta es normalizada por la amplitud media b (véase sección 5.1). En los perfiles se puede apreciar que conforme aumenta la distancia aguas abajo, la velocidad promedio U alcanza un estado de similaridad ($\approx x/D > 10$). Lo anterior es una vez más confirmado por la teoría. Hoy en día se desconoce si este comportamiento asintótico es influenciado directamente por las condiciones iniciales del flujo.

Finalmente en la Figura 5.8(b) se exponen los perfiles de intensidad turbulenta en dirección transversal, normalizados también por la velocidad central U_c . Generalmente la intensidad turbulenta axial u_{rms}/U_c es mayor que las intensidades transversales v_{rms}/U_c y w_{rms}/U_c , sin embargo, las gráficas muestran que no es así en este caso. Esto se debe a que las estructuras grandes de turbulencia tienen direcciones preferenciales en la región principal del chorro. Además, el campo turbulento no se puede asumir como isotrópico en esta región. Por otro lado, se observa que los perfiles de intensidad turbulenta necesitan una mayor distancia axial para poder llegar a un estado de auto-semejanza. En algunos textos se afirma que esta distancia es de aproximadamente 20 veces el diámetro de referencia.

5.4. Vórtices y estructuras coherentes

Como se mencionó en la sección 1.5.1, el método que se utilizó para la identificación de vórtices es el del criterio Q . En éste método, los valores positivos de Q aíslan las áreas donde la fuerza de rotación supera la tensión, lo que hace que esas superficies sean elegibles como vórtices. Para este análisis se utilizaron los campos de flujo instantáneos, ya que incluyen las fluctuaciones responsables del desarrollo de las inestabilidades.

La Figura 5.9 muestra la secuencia de las estructuras turbulentas en el chorro: en la región inmediata al orificio, gracias a las inestabilidades generadas en la capa cortante, se forman estructuras en forma de anillo. Estas estructuras indican la formación de vórtices que transportan líquido del chorro hacia el aire irrotacional que lo rodea y viceversa. Las estructuras evolucionan aguas abajo para formar una *calle* periódica de anillos, algunos investigadores afirman que este mecanismo es similar al de enrollamiento de vórtices. Posteriormente, el movimiento inducido en el fluido por cada vórtice, afecta a otros vórtices, de tal forma que los vórtices adyacentes se aparean, tal como se observa en la Figura 5.10, la cual corresponde al desarrollo de la magnitud de vorticidad a lo largo del chorro.

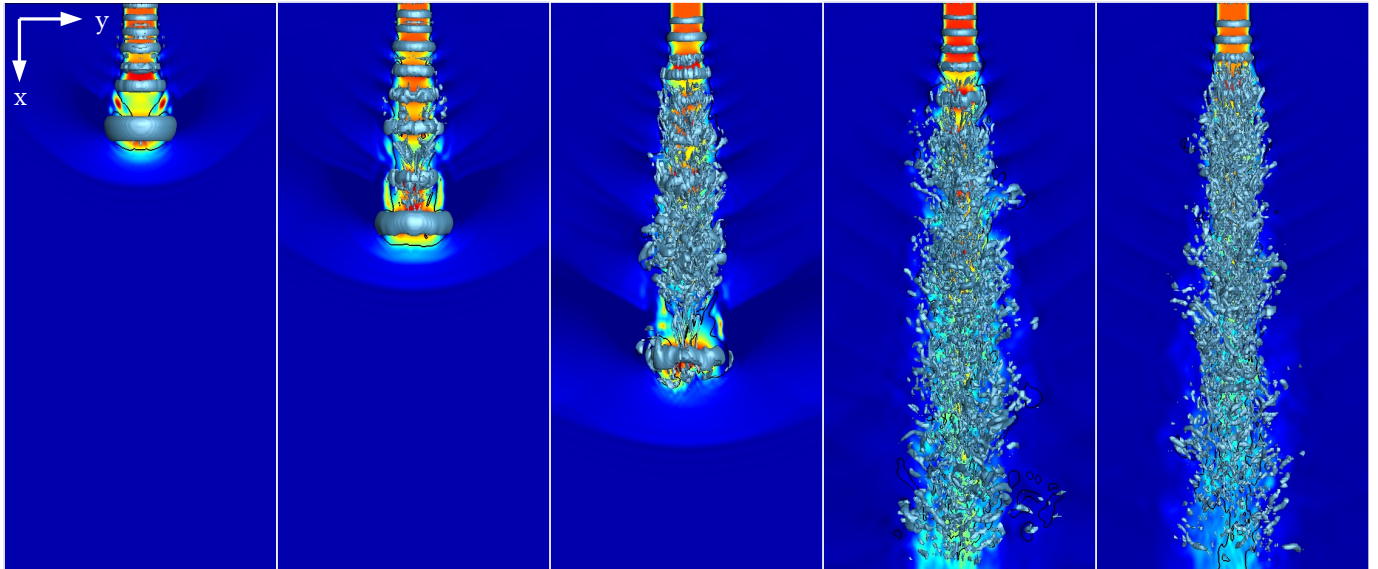


Figura 5.9: Iso-superficies de criterio $Q \frac{U_{max}}{D} = 10$, al fondo contornos del campo de velocidad en dirección del flujo (intervalos de tiempo de 27 ms).

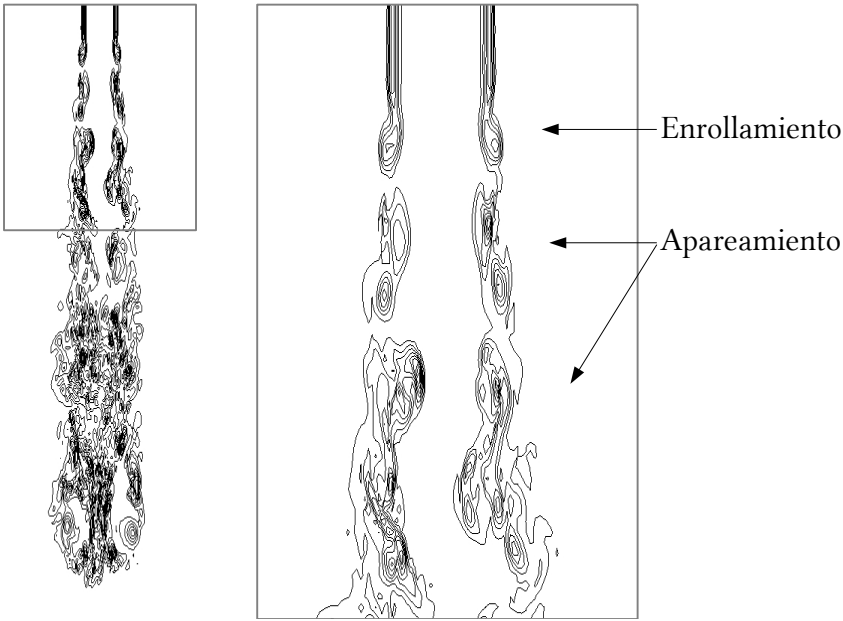


Figura 5.10: Líneas de magnitud de vorticidad, enrollamiento y apareamiento de vórtices.

Por último, el movimiento de los vórtices provoca una segunda inestabilidad circunferencial, la cual es responsable del rompimiento de los vórtices. Lo mismo sucede con las estructuras de anillo, estas evolucionan aguas abajo para pasar a estructuras de tipo helicoidal y doble helicoidal. Dichas estructuras se observan en la Figura 5.9, en un estado donde la turbulencia se encuentra totalmente desarrollada.

5.5. Ondas de choque generadas

Experimentalmente, la presencia de ondas de choque en este flujo ya fue revelada en el trabajo de [Salinas-Vázquez et al., 2017], por medio de una técnica de visualización de flujos *Shadowgraph*. El cual es un método óptico que revela no uniformidades en medios transparentes como el aire. Gracias a esta técnica se pueden apreciar discontinuidades como ondas de choque, ya que estas refractan los rayos de la fuente de luz, por lo que pueden proyectar sombras. Después de aplicar esta técnica se obtiene un diagrama de sombras, en el cual, las diferencias en la intensidad de la luz son proporcionales a la segunda derivada espacial del índice de refracción en el medio transparente que se estudia. Para medios transparentes, el índice de refracción está relacionado con la densidad, a partir de la ecuación de Lorentz-Lorenz:

$$\frac{n^2 - 1}{\rho(n^2 + 2)} \quad (5.1)$$

Si el fluido es un gas, la segunda derivada (laplaciano) del índice de refracción, en una dirección, se puede expresar en términos de la densidad:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} = \frac{\rho_0}{n_0 - 1} \frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} \quad (5.2)$$

Su investigación consistió en el análisis experimental del chorro de una máquina de corte (4F MACH de la marca Flow International Corporation). Para la visualización del flujo se utilizó un haz paralelo *Shadowgraph* y una cámara Phantom con la cual se grabó el flujo para un periodo de 0.129 s. A partir de las imágenes de la grabación se encontró que el chorro de agua comienza ser estable hidrodinámicamente después de 210 ms. Otro importante resultado fue la detección de ondas de choque a intervalos irregulares de tiempo, comenzando a los 66 ms. Con la finalidad de obtener la velocidad de las fluctuaciones, se utilizó la ecuación del ángulo de Mach:

$$\sin\theta = \frac{1}{M} \quad (5.3)$$

Esta ecuación relaciona el número de Mach de la onda, como consecuencia también su velocidad, con el ángulo formado entre la onda y la superficie del flujo. Los ángulos medidos fueron de un rango de 34° - 47° con números de Mach entre 1.38 y 1.78.

Numéricamente se obtuvieron los contornos *Shadowgraph* a partir del Laplaciano de la densidad, similar a la implementación experimental. En la Figura 5.11 se encuentran los resultados numéricos, contornos de *Shadowgraph* con superficies del chorro para diferentes instantes. Se pueden observar las fluctuaciones generadas por ondas de choque, ya que como se mencionó anteriormente, las sombras indican discontinuidades en la densidad del aire. Se estimaron los ángulos entre las fluctuaciones y la superficie, se puede apreciar una similitud con los resultados obtenidos en [Salinas-Vázquez et al., 2017]. También, se observa que cuando el chorro se ha desarrollado por completo, las ondas de choque son más largas que al inicio pero con un ángulo menor y consecuentemente, Mach y velocidad menor. Por otro lado, se encontró que a un tiempo mayor se detectaron menos ondas de choque.

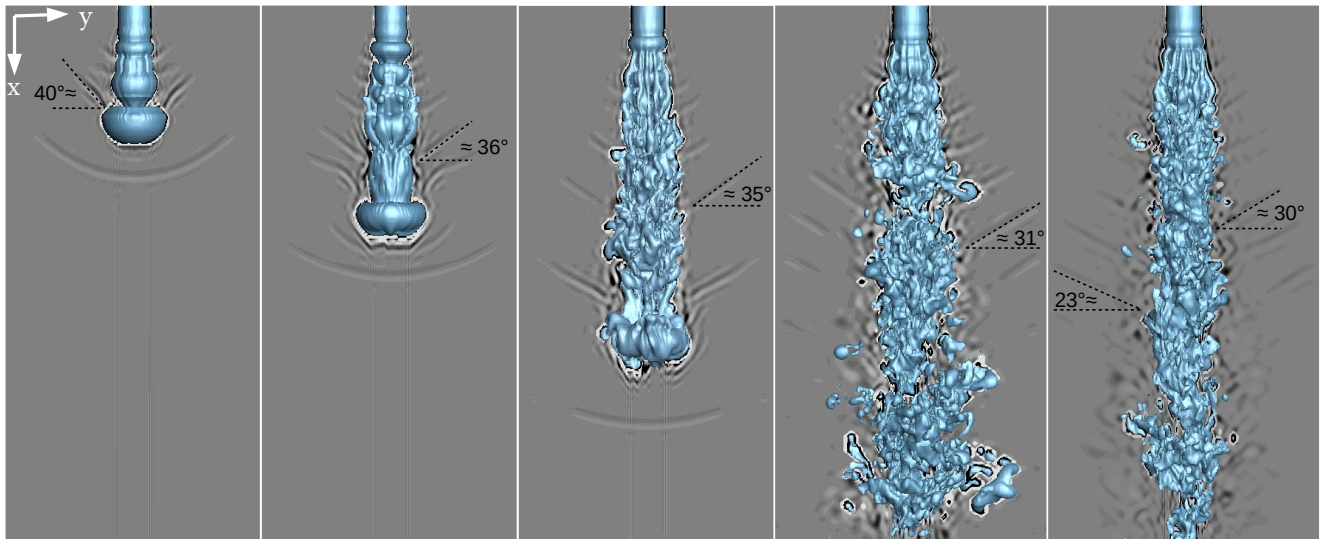


Figura 5.11: Contornos de *Shadowgraph* y transición de la superficie del chorro ($\varphi = 0$) hasta un estado totalmente desarrollado.

En la Figura 5.12 se muestran contornos de número de Mach, para dos tiempos diferentes uno cuando el chorro se encuentra en transición y el otro cuando está totalmente desarrollado. La línea blanca en ambos contornos indica la interfase entre ambos fluidos. Se observa que cuando el chorro está en transición, el aire es acelerado principalmente en la punta del chorro.

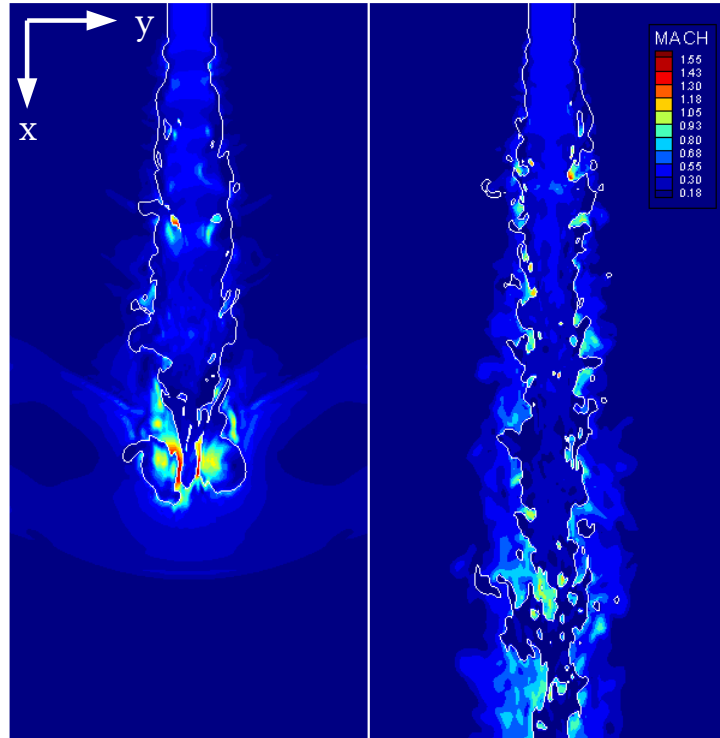


Figura 5.12: Contornos de número de Mach para dos tiempos diferentes: transición y desarrollo completo del chorro. La interfase está indicada con la línea blanca.

De acuerdo con la teoría de flujo compresible [White, 1979] se pueden identificar tres tipos de flujos, según el número de Mach: flujo subsónico ($0.3 < M < 0.8$) donde comienzan a haber cambios importantes en las propiedades, como la densidad, pero sin la presencia de ondas de choque. Flujo transónico ($0.8 < M < 0.12$) en el cual aparecen por primera vez ondas de choque que separan regiones subsónicas de las supersónicas dentro del flujo. Por último, se tiene en menor medida el flujo supersónico ($1.2 < M < 3.0$) donde existen ondas de choque pero ya no regiones subsónicas.

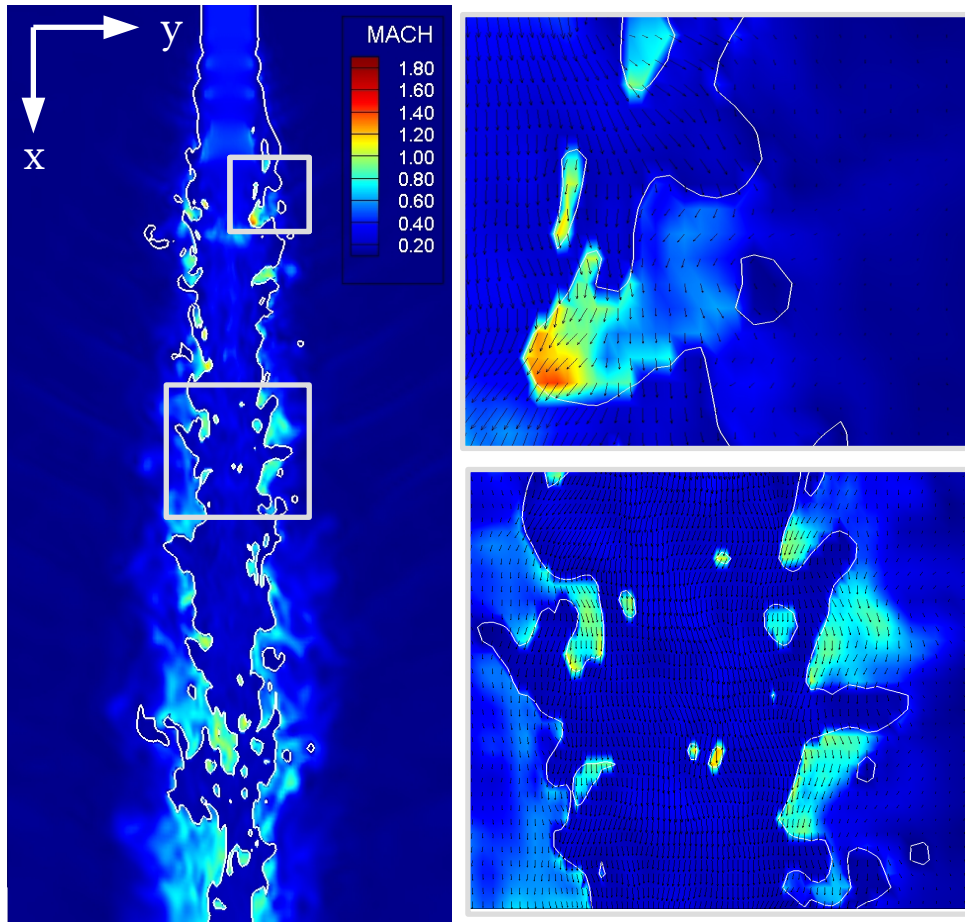


Figura 5.13: Acercamiento en los contornos de número de Mach con vectores del campo de velocidad

Analizando a detalle, en la Figura 5.13, se puede observar como el aire es arrastrado y acelerado, algunas veces a velocidades mayores que la del sonido, provocando ondas de choque. La línea blanca muestra la interfase entre los dos fluidos y los vectores en negro corresponden a los del campo de velocidad. Con ellos se puede confirmar que cerca de la interfase la velocidad es muy parecida entre ambos fluidos y lejos de ella, la velocidad del aire disminuye considerablemente de forma radial.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo, se desarrolló una herramienta numérica para la representación del flujo de un chorro de alta velocidad en condiciones de operación de una máquina de corte. En términos generales, se puede afirmar que el código numérico, con la metodología seleccionada, representa correctamente y de manera aproximada la física del problema, la cual había sido reportada anteriormente en algunos trabajos.

El cumplimiento de las técnicas *Level-Set* y *Ghost Fluid*, como mecanismo para la solución de la interfase, fue adecuada. Esta técnica mostró ser útil ya que se logró representar correctamente el desarrollo de la superficie, logrando describir de forma adecuada los fenómenos que ocurren en ella, como el arraste del aire, las inestabilidades formadas, la evolución de vórtices y estructuras coherentes y ondas de choque. Además, con el uso de la función *Level-Set* resulta sencillo obtener las propiedades geométricas de la interfase como el vector normal o la curvatura. Sin embargo existen áreas de oportunidad para mejorar esta técnica, para lograr cubrir totalmente las necesidades que tiene la solución de este flujo. Se pudo identificar la necesidad de una interacción mayor entre estudios experimentales y numéricos, con el fin de establecer correctamente las condiciones que represente todos los fenómenos involucrados en este tipo de flujo.

Se logró una caracterización adecuada del flujo, obteniendo perfiles de velocidad y de intensidad turbulenta, que nos permiten identificar propiedades del flujo como la longitud del núcleo potencial ($x/D \approx 4$), del estructura líquida del chorro ($x/D \approx 6$). Asimismo se constató la formación de la zona de autosemejanza, que de acuerdo con la literatura, es de aproximadamente $x/D = 7$. Por otra parte, se observó e identificó el desarrollo de las estructuras coherentes y vórtices, por medio del método del criterio Q. Se puede concluir que las estructuras establecen la evolución del flujo.

Finalmente, se estudió la formación de ondas de choque debido al arrastre del aire cercano a la superficie líquida del chorro, acelerándolo a una velocidad algunas veces mayor que la del sonido. Se validaron los resultados numéricos con un trabajo experimental, en el cual la ecuación del ángulo de Mach fue utilizada para determinar la velocidad de la

fluctuación y el ángulo formado entre la onda y la superficie del chorro. Los datos obtenidos con la simulación demuestran buena similitud con los experimentales.

6.1. Trabajos futuros

1. Realizar simulaciones utilizando un acoplamiento de los métodos *Level-Set*, VOF y *Ghost Fluid*. Con ello se aprovecharán las propiedades conservativas del método VOF, dándole mayor precisión a la solución del flujo.
2. Considerar, de manera local, en las ecuaciones de gobierno los términos de la tensión superficial. Con ello se logrará observar de forma más precisa el mecanismo de rompimiento del chorro.
3. Evaluar a detalle el funcionamiento de la ecuación de estado seleccionada para la fase líquida (*Stiffened Gas Equation*) y considerar reemplazarla de ser necesario.

Bibliografía

- [Flo,] Flow international corporation. 1.3
- [Abramovich et al., 1984] Abramovich, G. N., Girshovich, T., Krasheninnikov, S. I., Sekundov, A., and Smirnova, I. (1984). The theory of turbulent jets. *Moscow Izdatel Nauka*. 1.1
- [Anderson, 1995] Anderson, J. D. (1995). *Computational Fluid Dynamics-The basics with applications*. McGraw-Hill. 2.1
- [Annoni et al., 2014] Annoni, M., Arleo, F., and Malmassari, C. (2014). Cfd aided design and experimental validation of an innovative air assisted pure water jet cutting system. *Journal of Materials Processing Technology*, 214(8):1647–1657. 1.4.4
- [Ball et al., 2012] Ball, C., Fellouah, H., and Pollard, A. (2012). The flow field in turbulent round free jets. *Progress in Aerospace Sciences*, 50:1–26. 5.3, 5.3
- [Chorin, 1967] Chorin, A. J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*, 2(1):12–26.
- [Cubos-Ramírez et al., 2016] Cubos-Ramírez, J., Ramírez-Cruz, J., Salinas-Vázquez, M., Vicente-Rodríguez, W., Martínez-Espinosa, E., and Lagarza-Cortes, C. (2016). Efficient two-phase mass-conserving level set method for simulation of incompressible turbulent free surface flows with large density ratio. *Computers & Fluids*, 136:212–227. 3.4
- [David, 1993] David, E. (1993). *Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques: une approche instationnaire*. PhD thesis. 2.2.1, 2.2.1
- [Eckert, 1987] Eckert, E. (1987). Cross transport of energy in fluid streams. *Wärme-und Stoffübertragung*, 21(2-3):73–81. 1.4.3
- [Fedkiw et al., 1999] Fedkiw, R. P., Aslam, T., Merriman, B., and Osher, S. (1999). A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of computational physics*, 152(2):457–492. 3.4
- [Fleischer et al., 2001] Fleischer, A., Kramer, K., and Goldstein, R. (2001). Dynamics of the vortex structure of a jet impinging on a convex surface. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 24(3):169–175. 1.4.2

- [Foldyna, 2011] Foldyna, J. (2011). Use of acoustic waves for pulsating water jet generation. *Acoustic Waves - From Microdevices to Helioseismology*, (14):323–342. 1.6.1
- [Foldyna, 2012] Foldyna, Josef ; Říha, Z. (2012). Ultrasonic pulsations of pressure in a water jet cutting tool. *Tehnički vjesnik*, 19(3):487–491. 1.6
- [Folkes, 2009] Folkes, J. (2009). Waterjet—an innovative tool for manufacturing. *Journal of Materials Processing Technology*, 209(20):6181–6189. 1
- [Forthmann, 1936] Forthmann, E. (1936). *Turbulent jet expansion*. National Advisory Committee for Aeronautics. 1.1
- [Gaitonde and Visbal, 1998] Gaitonde, D. V. and Visbal, M. R. (1998). High-order schemes for navier-stokes equations: algorithm and implementation into fdl3di. Technical report, Air Force Research Lab Wright-Patterson AFB OH Air Vehicles Directorate. 2.2.3
- [Guha et al., 2010] Guha, A., Barron, R. M., and Balachandar, R. (2010). Numerical simulation of high-speed turbulent water jets in air. *Journal of Hydraulic Research*, 48(1):119–124. 1.1
- [Han and Goldstein, 2003a] Han, B. and Goldstein, R. (2003a). Instantaneous energy separation in a free jet—part ii. total temperature measurement. *International journal of heat and mass transfer*, 46(21):3983–3990. 1.4.3
- [Han and Goldstein, 2003b] Han, B. and Goldstein, R. (2003b). Instantaneous energy separation in a free jet. part i. flow measurement and visualization. *International journal of heat and mass transfer*, 46(21):3975–3981. 1.4.3
- [Herrmann, 2013] Herrmann, M. (2013). A sub-grid surface dynamics model for sub-filter surface tension induced interface dynamics. *Computers & Fluids*, 87:92–101. 3.3.1
- [Holmén, 2012] Holmén, V. (2012). Methods for vortex identification. *Master’s Theses in Mathematical Sciences*. 1.5
- [Hui et al., 1999] Hui, H., Kobayashi, T., Wu, S., and Shen, G. (1999). Changes to the vortical and turbulent structure of jet flows due to mechanical tabs. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 213(4):321–329. 1.4.2
- [Hussain, 1986] Hussain, A. F. (1986). Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173:303–356. (document), 1.4.2, 1.4
- [Iqbal and Thomas, 2006] Iqbal, M. and Thomas, F. (2006). Coherent structure in a turbulent jet via a vector implementation of the proper orthogonal decomposition. *Journal of Fluid Mechanics*, 571:281–326. 5.1
- [Lesieur and Metais, 1996] Lesieur, M. and Metais, O. (1996). New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annual review of fluid mechanics*, 28(1):45–82.

- [Liu et al., 2004] Liu, H., Wang, J., Kelson, N., and Brown, R. J. (2004). A study of abrasive waterjet characteristics by cfd simulation. *Journal of Materials Processing Technology*, 153:488–493. 1.1
- [Ménard et al., 2007] Ménard, T., Tanguy, S., and Berlemont, A. (2007). Coupling level set/vof/ghost fluid methods: Validation and application to 3d simulation of the primary break-up of a liquid jet. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(5):510–524. 5.2
- [Nourgaliev et al., 2004] Nourgaliev, R., Dinh, T.-N., and Theofanous, T. (2004). A pseudocompressibility method for the numerical simulation of incompressible multifluid flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 30(7):901–937. 3.4.1
- [O’Donovan, 2005] O’Donovan, T. S. (2005). Fluid flow and heat transfer of an impinging air jet. *Department of Mechanical and Manufacturing Engineering*, page 145.
- [Osher and Fedkiw, 2001] Osher, S. and Fedkiw, R. P. (2001). Level set methods: an overview and some recent results. *Journal of Computational physics*, 169(2):463–502. 3.1
- [Osher and Sethian, 1988] Osher, S. and Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1):12–49. 3.1
- [Perrin and Hu, 2006] Perrin, A. and Hu, H. H. (2006). An explicit finite-difference scheme for simulation of moving particles. *Journal of Computational Physics*, 212(1):166–187.
- [Poinsot and Lele, 1992] Poinsot, T. J. and Lele, S. (1992). Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of computational physics*, 101(1):104–129. 4.1
- [Rajaratnam, 1976] Rajaratnam, N. (1976). *Turbulent jets*, volume 5. Elsevier. 1.1, 1.4.1
- [Rajaratnam and Albers, 1998] Rajaratnam, N. and Albers, C. (1998). Water distribution in very high velocity water jets in air. *Journal of hydraulic engineering*, 124(6):647–650. 1.1
- [Rajaratnam et al., 1994] Rajaratnam, N., Rizvi, S., Steffler, P., and Smy, P. (1994). An experimental study of very high velocity circular water jets in air. *Journal of Hydraulic Research*, 32(3):461–470. 1.1
- [Ramírez Cruz, 2015] Ramírez Cruz, J. (2015). *Estudio numérico del flujo con superficie libre en un tanque agitado mediante un impulsor plano*. Universidad Nacional Autónoma de México. 3
- [Salinas-Vázquez et al., 2017] Salinas-Vázquez, M., Echeverría, C., Porta, D., Stern, C., Ascanio, G., Vicente, W., and Aguayo, J. (2017). Shock waves generated by sudden expansions of a water jet. *Shock Waves*, pages 1–5. 4.2, 5.5, 5.5
- [Shimizu, 2011] Shimizu, S. (2011). *Tribology in water jet processes*. INTECH Open Access Publisher. 1.2, 1.4.1

- [Shu and Osher, 1988] Shu, C.-W. and Osher, S. (1988). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2):439–471. 3.2.4
- [Smith et al., 1966] Smith, A., Leach, S., Walker, G., Farmer, I., and Taylor, G. (1966). Some aspects of rock cutting by high speed water jets: Discussion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 260:309–310. 1.1
- [Vázquez and Métais, 2002] Vázquez, M. S. and Métais, O. (2002). Large-eddy simulation of the turbulent flow through a heated square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 453:201–238. 2.2.1
- [Visbal and Gaitonde, 2002] Visbal, M. R. and Gaitonde, D. V. (2002). On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes. *Journal of Computational Physics*, 181(1):155–185. 2.2.3
- [White, 1979] White, F. M. (1979). Fluid mechanics, 1999. *McGraw-Hill, New York, NY, USA*, pages 3–225. 5.5
- [Yang et al., 2008] Yang, F.-C., Shiah, S.-W., Heh, T.-Y., Jen, C.-Y., and Chang, W.-I. (2008). Study of numerical simulation applying to the design of an orifice with high-velocity waterjet. *Tamkan Journal of Science and Engineering*, 11(2):145–154. 1.1
- [Zelenak et al., 2015] Zelenak, M., Foldyna, J., Scucka, J., Hloch, S., and Riha, Z. (2015). Visualisation and measurement of high-speed pulsating and continuous water jets. *Measurement*, 72:1–8.