

Cuaderno de ejercicios de RECTA Y PLANO

← **Juan Velázquez Torres**





Cuaderno de ejercicios de **RECTA Y PLANO**

Juan Velázquez Torres

Para una correcta visualización
del libro te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

VELÁZQUEZ TORRES, Juan
Cuaderno de ejercicios de recta y plano
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2026, 92 p.

Cuaderno de ejercicios de recta y plano

Primera edición electrónica
de un ejemplar (8 MB) Formato PDF
Publicado en línea en junio de 2026

D.R. © 2026, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional
Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total
o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita
del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL
Cuidado de la edición: Patricia Eugenia García Naranjo
Diseño y formación editorial: Nismet Díaz Ferro
Revisión técnica: Aida Pérez Sánchez

1-10

11-20

21-30

31-40

41-50

51-60

61-70

71-80

81-90

91-100



PRÓLOGO

El estudio de la recta y el plano en el espacio tridimensional constituye uno de los pilares fundamentales de la geometría analítica y de muchas áreas, como la ingeniería, la física, la arquitectura y las ciencias computacionales, entre otras. Comprender estos conceptos no sólo permite interpretar y modelar situaciones del mundo real, sino también desarrollar un pensamiento lógico y abstracto esencial en la formación de un ingeniero.

Este cuaderno, que contiene 100 ejercicios resueltos ha sido elaborado con el objetivo de complementar el desarrollo teórico relacionado con los temas de recta y plano en el espacio de tres dimensiones. Es un auxiliar didáctico que servirá, por un lado, para que los estudiantes comprendan la resolución de problemas de los temas citados y, por otro lado, será un material didáctico de gran utilidad para los docentes.

Este material no pretende sustituir a los textos teóricos, sino funcionar como un enlace entre la teoría y la práctica, facilitando el aprendizaje de los conceptos relacionados con la recta y el plano.

Los 100 ejercicios que se presentan abordan temas relevantes de recta y plano como son:

- La representación vectorial, paramétrica y cartesiana de rectas y planos.
- Las relaciones entre rectas, planos y puntos.
- El cálculo de distancias, ángulos y proyecciones.
- La resolución de problemas geométricos aplicados.

Todos los ejercicios de este cuaderno están pensados para consolidar los conocimientos adquiridos en clase, fomentar la autonomía en la resolución de problemas y preparar al estudiante para enfrentar con solidez académica las exigencias de cursos posteriores.

Agradezco el apoyo brindado por todo el personal que labora en la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM para que este cuaderno de ejercicios sea una obra escrita digna del acervo bibliográfico de esta facultad. Agradeceré todas las observaciones, sugerencias y comentarios que tengan a bien hacerme sobre el contenido de esta obra, con el objeto de actualizar y mejorar futuras ediciones.

JUAN VELÁZQUEZ TORRES

1. Determinar si los puntos $A(1,2,-1)$ y $B(6,3,-4)$ pertenecen a la recta L de la ecuación $\bar{p} = (2,-1,4) + \lambda(1,-1,2); \lambda \in \mathbb{R}$.

Solución

Si $A(1,2,-1) \in L$ debe de existir un $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisface la ecuación. En este caso $\bar{p} = (1,2,-1)$.

$$\begin{aligned} (1,2,-1) &= (2,-1,4) + \lambda(1,-1,2); \lambda \in \mathbb{R} \\ (1,2,-1) &= (2+\lambda, -1-\lambda, 4+2\lambda) \\ (1,2,-1) &= (2+\lambda, -1-\lambda, 4+2\lambda) \\ 1 &= 2+\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ 2 &= -1-\lambda \Rightarrow \lambda = -3 \\ -1 &= 4+2\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$A(1,2,-1) \notin L$ porque no se obtiene el mismo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $B(6,3,-4) \in L$ debe de existir un $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisface la ecuación. En este caso $\bar{p} = (6,3,-4)$.

$$\begin{aligned} (6,3,-4) &= (2,-1,4) + \lambda(1,-1,2); \lambda \in \mathbb{R} \\ (6,3,-4) &= (2+\lambda, -1-\lambda, 4+2\lambda) \\ (6,3,-4) &= (2+\lambda, -1-\lambda, 4+2\lambda) \\ 6 &= 2+\lambda \Rightarrow \lambda = 4 \\ 3 &= -1-\lambda \Rightarrow \lambda = -4 \\ -4 &= 4+2\lambda \Rightarrow \lambda = -4 \end{aligned}$$

$B(6,3,-4) \in L$ porque se obtiene el mismo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Determinar dos puntos A y B que pertenezcan a la recta T de ecuación:

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-8}{-2}$$

Solución

Para determinar puntos que pertenezcan a la recta T se igualan los tres términos que aparecen en la forma simétrica de la recta T a una constante $k \in \mathbb{R}$, es decir:

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-8}{-2} = k, k \in \mathbb{R}$$

Eligiendo $k = 6$ se puede escribir:

$$\frac{x-6}{2} = 6 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{y+3}{4} = 6 \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{z-8}{-2} = 6 \dots\dots\dots(3)$$

Despejando x de (1), y de (2) y z de (3) se obtiene:

$$x = 18, y = 21, z = -4$$

Por tanto, un punto que pertenece a la recta T es $A(18, 21, -4)$

Análogamente si $k = -2$ entonces:

$$\frac{x-6}{2} = -2 \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{y+3}{4} = -2 \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{z-8}{-2} = -2 \dots\dots\dots(6)$$

Resolviendo (4), (5) y (6) se obtiene $x = 2, y = -11, z = 12$, de modo que otro punto de la recta T es $B(2, -11, 12)$.

3. Determinar si el punto $P(11, -13, 2)$ pertenece a la recta S cuya ecuación en forma paramétrica es:

$$S: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 - 4t \\ z = -3 + 9t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Solución

Para determinar si el punto $P \in S$ se sustituye $x = 11, y = -13, z = 2$ en S y al despejar t se tiene que obtener el mismo valor de t .

$$\begin{aligned} 11 &= 1 + 2t \Rightarrow t = 5 \\ -13 &= 7 - 4t \Rightarrow t = 5 \\ 2 &= -3 + 9t \Rightarrow t = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Puede observarse que en las dos primeras ecuaciones se obtiene $t = 5$ pero en la tercera ecuación $t = \frac{5}{9}$, lo cual indica que $P \notin S$.

4. Sean las rectas R y S de ecuaciones:

$$R: \frac{x+16}{-5} = \frac{y-12}{6} = \frac{z+18}{-4}; \quad S: \begin{cases} x = -21 + 10t \\ y = 18 - 12t \\ z = -22 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Determinar si R y S representan la misma recta.

Solución

Para que R y S representen la misma recta es necesario que un punto de R también sea un punto de S ; además es necesario que un vector director R sea paralelo a un vector director de S .

Un punto de R es $Q(-16, 12, -18)$; para determinar si este punto pertenece a S se sustituye $x = -16, y = 12, z = -18$ en S y al despejar t debe obtenerse el mismo valor de t .

$$-16 = -21 + 10t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$12 = 18 - 12t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$-18 = -22 + 8t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Por lo que $Q(-16, 12, -18) \in S$.

Un vector director de R es $\bar{u} = (-5, 6, -4)$ mientras que un vector director de S es $\bar{v} = (10, -12, 8)$

Como $(10, -12, 8) = -2(-5, 6, -4)$ entonces $\bar{v} = -2\bar{u}$. Es decir $\bar{u} = (-5, 6, -4)$ y $\bar{v} = (10, -12, 8)$ son paralelos.

Por tanto R y S representan la misma recta.

5. Determinar una ecuación vectorial de la recta $T: \frac{-x+4}{23} = \frac{2y-10}{3} = z+1$.

Solución

Para obtener un punto y un vector director de T se expresa su ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{x-4}{-23} = \frac{y-5}{\frac{3}{2}} = \frac{z+1}{1}$$

Por lo que un punto de T es $A(4, 5, -1)$ y un vector director es $\bar{u} = \left(-23, \frac{3}{2}, 1\right)$. En consecuencia, la ecuación vectorial de T es:

$$\bar{p} = (4, 5, -1) + \lambda\left(-23, \frac{3}{2}, 1\right); \lambda \in \mathbb{R}$$

6. Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(6,1,-2)$.

Solución

Para obtener unas ecuaciones paramétricas de la recta tan sólo hay que determinar un vector director, ya que se tienen dos puntos de referencia.

Un vector de posición correspondiente al punto $A(1,0,-1)$ es $\bar{a} = (1,0,-1)$ y un vector de posición correspondiente al punto $B(6,1,-2)$ es $\bar{b} = (6,1,-2)$.

Un vector de posición es $\bar{u} = \bar{b} - \bar{a}$, por lo que $\bar{u} = (6,1,-2) - (1,0,-1) = (5,1,-1)$. Así, si se considera el punto $A(1,0,-1)$ unas ecuaciones paramétricas de la recta dada son:

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

7. Determinar una ecuación, en forma simétrica, de la recta que contiene al origen de coordenadas y al punto $C(-7,8,-10)$.

Solución

Como la recta contiene al origen, un vector de posición es $\bar{c} = (-7,8,-10)$. La ecuación de la recta en forma simétrica es:

$$\frac{x}{-7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-10}$$

8. Calcular la distancia del punto $Q(2,5,-3)$ a la recta L cuya ecuación es $\bar{p} = (6+t, -2-t, 3+t); t \in \mathbb{R}$.

Solución

Para calcular la distancia del punto $Q(2,5,-3)$ a la recta L se necesita un punto P y un vector director de L .

La ecuación $\bar{p} = (6+t, -2-t, 3+t); t \in \mathbb{R}$ puede expresarse como $\bar{p} = (6, -2, 3) + t(1, -1, 1); t \in \mathbb{R}$, de esta ecuación se deduce que un punto de L es $P(6, -2, 3)$ y un vector director de tal recta es $\bar{u} = (1, -1, 1)$.

En este caso $\bar{q} = (2, 5, -3)$ es el vector de posición asociado a $Q(2, 5, -3)$ y $\bar{p} = (6, -2, 3)$ es el vector asociado a $P(6, -2, 3)$. La distancia solicitada se calcula con la fórmula:

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} d &= \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}|}{|\bar{u}|} = \frac{|((2, 5, -3) - (6, -2, 3)) \cdot (1, -1, 1)|}{|(1, -1, 1)|} \\ d &= \frac{|(-4, 7, -6) \cdot (1, -1, 1)|}{|(1, -1, 1)|} = \frac{|(1, -2, -3)|}{|(1, -1, 1)|} \\ d &= \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \\ d &\approx 2.16 \end{aligned}$$

9. Calcular la distancia del origen de coordenadas a la recta T cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-5t, & t \in \mathbb{R} \\ z = 6t \end{cases}$$

Solución

Para calcular la distancia del punto $Q(0, 0, 0)$ a la recta T se necesita un punto P y un vector director de T .

De las ecuaciones paramétricas de la recta T se deduce que uno de sus puntos es $P(1, -2, 0)$ y un vector director es $\bar{u} = (1, -5, 6)$.

En este caso $\bar{q} = (0, 0, 0)$ es el vector asociado a $Q(0, 0, 0)$ y $\bar{p} = (1, -2, 0)$ es el vector asociado a $P(1, -2, 0)$. La distancia solicitada se calcula con la fórmula:

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

Sustituyendo

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}|}{|\bar{u}|} = \frac{|((0, 0, 0) - (1, -2, 0)) \cdot (1, -5, 6)|}{|(1, -5, 6)|}$$

$$d = \frac{|(-1, 2, 0) \cdot (1, -5, 6)|}{|(1, -5, 6)|} = \frac{|(12, 6, 3)|}{|(1, -5, 6)|}$$

$$d = \frac{\sqrt{189}}{\sqrt{62}}$$

$$d \approx 1.74$$

10. Calcular la distancia del punto $Q(-7, 6, 7)$ a la recta R cuyas ecuaciones son:

$$-x = 1 + y = z$$

Solución

Para calcular la distancia del punto $Q(-7, 6, 7)$ a la recta R se necesita un punto P y un vector director de R .

Para obtener un punto y un vector director de R se expresa su ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{x-0}{-1} = \frac{y-(-1)}{1} = \frac{z-0}{1}$$

Así, se deduce que un punto de R es $P(0, -1, 0)$ y un vector director es $\bar{u} = (-1, 1, 1)$. En este caso $\bar{q} = (-7, 6, 7)$ es el vector asociado a $Q(-7, 6, 7)$ y $\bar{p} = (0, -1, 0)$ es el vector asociado a $P(0, -1, 0)$. La distancia solicitada se calcula con la fórmula:

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p})x\bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

Sustituyendo

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p})x\bar{u}|}{|\bar{u}|} = \frac{|((-7, 6, 7) - (0, -1, 0))x(-1, 1, 1)|}{|(-1, 1, 1)|}$$

$$d = \frac{|(-7, 7, 7)x(-1, -1, 1)|}{|(-1, 1, 1)|} = \frac{|(0, 0, 0)|}{|(-1, 1, 1)|}$$

$$d = \frac{0}{\sqrt{3}}$$

$$d = 0$$

Como la distancia del punto $Q(-7, 6, 7)$ a la recta R resultó $d = 0$, significa que el punto $Q(-7, 6, 7)$ pertenece a la recta R . En efecto, el punto $Q(-7, 6, 7)$ satisface las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x &= 1 + y = z \\ -(-7) &= 1 + 6 = 7 \\ 7 &= 7 = 7 \end{aligned}$$

11. Sean las rectas:

$$L_1: \frac{2x-4}{6} = \frac{3y+12}{15} = \frac{-4-z}{2} \quad \text{y} \quad L_2: \bar{p} = (1-7t, 2+t, -3-8t); t \in \mathbb{R}$$

Determinar si las rectas dadas son perpendiculares.

Solución

Las ecuaciones de la recta L_1 pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+4}{-2}$$

por lo que un vector director de la recta L_1 es $\bar{u} = (3, 5, -2)$.

La ecuación de la recta L_2 pueden expresarse como:

$$\bar{p} = (1, 2 - 3) + t(-7, 1, -8); t \in \mathbb{R}$$

se deduce que un vector director de la recta L_2 es $\bar{v} = (-7, 1, -8)$.

Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

Realizando las operaciones:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (3, 5, -2) \cdot (-7, 1, -8)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (3)(-7) + (5)(1) + (-2)(-8)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = -21 + 5 + 16$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

Por tanto, las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares.

- 12.** Obtener las ecuaciones paramétricas de una recta T_1 que sea perpendicular a la recta:

$$T_2: \frac{8x+24}{16} = \frac{2y-2}{10} = \frac{-z-5}{10}$$

Solución

La ecuación de la recta T_2 puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{-10}$$

se observa que un vector director de la recta T_2 es $\bar{u} = (2, 5, -10)$. Para obtener las ecuaciones paramétricas de una recta T_1 que sea perpendicular a la recta T_2 tan sólo hay que determinar un vector que sea perpendicular al vector \bar{u} .

Un vector perpendicular al vector \bar{u} es $\bar{v} = \left(\frac{5}{2}, 1, 1\right)$ ya que:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (2, 5, -10) \cdot \left(\frac{5}{2}, 1, 1\right)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (2) \left(\frac{5}{2}\right) + (5)(1) + (-10)(1)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 5 + 5 - 10$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

Como no se pide que la recta T_1 contenga algún punto en particular, entonces se puede proponer cualquier punto del espacio; puede ser $A(12, -1, 9)$. Así, unas ecuaciones paramétricas de la recta T_1 son:

$$\begin{cases} x = 12 + \frac{5}{2}t \\ y = -1 + t, & t \in \mathbb{R} \\ z = 9 + t \end{cases}$$

13. Obtener una ecuación, en forma vectorial, de una recta L_1 que contenga al origen de coordenadas y que sea perpendicular a la recta L_2 de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = t, & t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 4t \end{cases}$$

Solución

Un vector director de la recta L_2 es $\bar{u} = (-3, 1, 4)$; como se quiere que la recta L_1 sea perpendicular a la recta L_2 se busca un vector perpendicular a \bar{u} .

El vector $\vec{v} = \left(-1, 2, -\frac{5}{4}\right)$ es perpendicular al vector $\vec{u} = (-3, 1, 4)$ porque:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 1, 4) \cdot \left(-1, 2, -\frac{5}{4}\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3)(-1) + (1)(2) + (4)\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 2 - 5$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Por tanto, la ecuación, en forma vectorial, de una recta L_1 que contenga al origen de coordenadas y que sea perpendicular a la recta L_2 es:

$$\vec{p} = (0, 0, 0) + \lambda \left(-1, 2, -\frac{5}{4}\right); \lambda \in \mathbb{R}$$

o simplemente

$$\vec{p} = \lambda \left(-1, 2, -\frac{5}{4}\right); \lambda \in \mathbb{R}$$

14. Obtener las ecuaciones, en forma simétrica, de la recta L_1 que contenga al punto $B(-7, 5, 6)$ y que sea perpendicular a la recta L_2 que contiene a los puntos $C(-4, 3, -6)$ y $D(0, 0, 4)$.

Solución

Ya que la recta L_2 contiene a los puntos $C(-4, 3, -6)$ y $D(0, 0, 4)$ entonces un vector director de esta recta es:

$$\vec{u} = (0, 0, 4) - (-4, 3, -6)$$

$$\vec{u} = (4, -3, 10)$$

Un vector perpendicular a $\vec{u} = (4, -3, 10)$ es el vector $\vec{v} = (2, 6, 1)$ ya que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4, -3, 10) \cdot (2, 6, 1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4)(2) + (-3)(6) + (10)(1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 - 18 + 10$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

La ecuación cartesiana de la recta L_1 , en forma simétrica, es:

$$\frac{x+7}{2} = \frac{y-5}{6} = z-6$$

15. Sean las rectas:

$$L_1 : \bar{p} = (3-5t, -2+9t, -8-2t); t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{4x-16}{-8} = \frac{2y-2}{4} = \frac{5z+20}{25}$$

Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta L_3 que contiene al punto $P(1, 2, -6)$ y que es perpendicular a las rectas L_1 y L_2 .

Solución

La ecuación cartesiana, en forma simétrica, de la recta L_2 se puede expresar como:

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{5}$$

De la ecuación vectorial de la recta L_1 se deduce que un vector director de L_1 es $\bar{u} = (-5, 9, -2)$, y de la ecuación cartesiana, en forma simétrica, de la recta L_2 se deduce que $\bar{v} = (-2, 2, 5)$ es un vector director de L_2 .

Dado que la recta L_3 tiene que ser perpendicular a las rectas L_1 y L_2 , un vector director, \bar{w} , de L_3 se obtiene mediante el producto cruz de los vectores \bar{u} y \bar{v} , es decir:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \bar{u} \times \bar{v} \\ \bar{w} &= (-5, 9, -2) \times (-2, 2, 5) \\ \bar{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5 & 9 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ \bar{w} &= \hat{i}(45+4) - \hat{j}(-25-4) + \hat{k}(-10+18) \\ \bar{w} &= 49\hat{i} + 29\hat{j} + 8\hat{k} \\ \bar{w} &= (49, 29, 8) \end{aligned}$$

Como se pide que la recta L_3 contenga al punto $P(1,2,-6)$, entonces las ecuaciones paramétricas de L_3 son:

$$\begin{cases} x = 1 + 49t \\ y = 2 + 29t, & t \in \mathbb{R} \\ z = -6 + 8t \end{cases}$$

Puede verificarse que $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, por lo que L_3 es perpendicular a L_1 y que $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ de modo que L_3 es perpendicular a L_2 .

- 16.** Determinar una ecuación, en forma vectorial, de la recta que contiene al punto $P(0,0,0)$ y que es perpendicular a: a) los ejes X y Y , b) los ejes X y Z , c) los ejes Y y Z .

Solución

- a) Como la recta tiene que ser perpendicular a los ejes X y Y entonces un vector director es $\vec{u} = \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, por lo que la ecuación solicitada es:

$$\vec{p} = t\hat{k} ; t \in \mathbb{R}$$

que es la ecuación, en forma vectorial del eje Z .

- b) Como la recta tiene que ser perpendicular a los ejes X y Z entonces un vector director es $\vec{v} = \hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$, por lo que la ecuación solicitada es:

$$\vec{p} = t\hat{j} ; t \in \mathbb{R}$$

que es la ecuación, en forma vectorial del eje Y .

- c) Como la recta tiene que ser perpendicular a los ejes Y y Z entonces un vector director es $\vec{v} = \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, por lo que la ecuación solicitada es:

$$\vec{n} = t\hat{i} ; t \in \mathbb{R}$$

que es la ecuación, en forma vectorial del eje X .

17. Determinar una ecuación, en forma vectorial, de la recta R_1 que contiene al punto $A(-4, 2, -1)$ y que es paralela a la recta R_2 cuya ecuación, en forma vectorial, es $\vec{p} = (6t, 3t, -4-t); t \in \mathbb{R}$.

Solución

Como las rectas R_1 y R_2 deben ser paralelas, entonces un vector director de la recta R_1 es de la forma $\vec{u} = k(6, 3, -1), k \in \mathbb{R}$. Por tanto, si $k = 2$ un vector director de R_1 es $\vec{u} = (12, 6, -2)$.

La ecuación de la recta R_1 , en forma vectorial es:

$$\vec{p} = (-4 + 12t, 2 + 6t, -1 - 2t); t \in \mathbb{R}$$

18. Sean las rectas:

$$T_1: \vec{p} = (8 - 4t, 1 + 2t, 3 - 2t); t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad T_2: \begin{cases} x = 12 + 48t \\ y = 22 - 24t, \\ z = 26 + 24t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Determinar si las rectas T_1 y T_2 son paralelas.

Solución

Un vector director de la recta T_1 es $\vec{u} = (-4, 2, -2)$, mientras que un vector director de T_2 es $\vec{v} = (48, -24, 24)$. Para determinar si las rectas dadas son paralelas se tiene que investigar si los vectores \vec{u} y \vec{v} son paralelos, es decir habrá que determinar si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \lambda \vec{v} \\ (-4, 2, -2) &= \lambda(48, -24, 24) \\ (-4, 2, -2) &= (48\lambda, -24\lambda, 24\lambda) \\ -4 &= 48\lambda \quad \Rightarrow \lambda = -12 \\ 2 &= -24\lambda \quad \Rightarrow \lambda = -12 \\ -2 &= 24\lambda \quad \Rightarrow \lambda = -12 \end{aligned}$$

Dado que $\vec{u} = -12\vec{v}$ entonces los vectores \vec{u} y \vec{v} son paralelos. Se concluye que las rectas T_1 y T_2 son paralelas.

19. ¿Es posible escribir la ecuación cartesiana, en forma simétrica, del eje X ?

Solución

La ecuación cartesiana, en forma simétrica, de una recta es:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

donde $\bar{u} = (a, b, c); a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ es un vector director de la recta.

Un vector director del eje X es $\bar{v} = (0, 0, c); c \in \mathbb{R}$, de modo que $a = 0, b = 0$ en $\bar{u} = (a, b, c)$. Por tanto, no es posible escribir la ecuación cartesiana, en forma simétrica, del eje X ya que se tendrían cocientes que no existen.

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{c}$$

$\frac{x-x_0}{0}$ y $\frac{y-y_0}{0}$ son cocientes que no existen.

20. ¿Es posible escribir la ecuación cartesiana, en forma simétrica, de una recta perpendicular al eje Z ?

Solución

Si la recta es perpendicular al eje Z pero paralela al eje X un vector director de la recta es $\bar{v} = (a, 0, 0); a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, por lo que no es posible escribir la ecuación cartesiana, en forma simétrica, de dicha recta. Análogamente, si la recta es perpendicular al eje Z pero paralela al eje Y un vector director de la recta es $\bar{v} = (0, b, 0); b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, por lo que no es posible escribir la ecuación cartesiana, en forma simétrica, de dicha recta. En cualquier otro caso, tampoco es posible escribir la ecuación cartesiana, en forma simétrica, porque un vector director es $\bar{v} = (a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$.

21. Sean las rectas:

$$T_1: \bar{p} = (7-7m, 6m, 2+m); m \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad T_2: \begin{cases} x = 1+8t \\ y = 2-4t, \\ z = 6+2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Determinar si las rectas T_1 y T_2 se cortan o se cruzan.

Solución

Para determinar si las rectas T_1 y T_2 se cortan o se cruzan se procede de la siguiente manera:

Paso 1

Se expresan en forma paramétrica las rectas T_1 y T_2 .

$$T_1: \begin{cases} x = 7-7m \\ y = 6m, \\ z = 2+m \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad T_2: \begin{cases} x = 1+8t \\ y = 2-4t, \\ z = 6+2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Paso 2

Se hace $x=x$, $y=y$, $z=z$ utilizando las ecuaciones de las rectas T_1 y T_2 .

$$\begin{array}{ccc} x=x & y=y & z=z \\ 7-7m=1+8t & 6m=2-4t & 2+m=6+2t \end{array}$$

Paso 3

Se forma el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 7-7m=1+8t \\ 6m=2-4t \\ 2+m=6+2t \end{cases}$$

Paso 4

Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante. Para utilizar el método de Gauss, arreglamos el sistema de ecuaciones como sigue:

$$\begin{cases} 8t + 7m = 6 \\ 4t + 6m = 2 \\ 2t - m = -4 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 28 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible, lo cual indica que las rectas T_1 y T_2 no tienen algún punto en común. Por tanto, las rectas T_1 y T_2 se cruzan.

22. Sean las rectas:

$$R_1 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 - s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad R_2 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -5 + t \\ z = 4 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Determinar si las rectas R_1 y R_2 se cortan o se cruzan.

Se hace $x = x$, $y = y$, $z = z$ utilizando las ecuaciones de las rectas R_1 y R_2 .

$$\begin{array}{ccc} x = x & y = y & z = z \\ 1 + s = -2 + t & 1 + 2s = -5 + t & 1 - s = 4 + t \end{array}$$

Se forma el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 1 + s = -2 + t \\ 1 + 2s = -5 + t \\ 1 - s = 4 + t \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante. Para utilizar el método de Gauss, arreglamos el sistema de ecuaciones como sigue:

$$\begin{cases} s-t=-3 \\ 2s-t=-6 \\ -s-t=3 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} s-t=-3 \\ t=0 \end{cases}$$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$s=-3, t=0$$

Sustituyendo $s=-3$ en las ecuaciones paramétricas de R_1 se obtiene el punto $(-2, -5, 4)$.

Sustituyendo $t=0$ en las ecuaciones paramétricas de R_2 se obtiene el punto $(-2, -5, 4)$.

El punto $(-2, -5, 4)$ es el punto de intersección de las rectas R_1 y R_2 . Por tanto, las rectas dadas se cortan.

23. Sean las rectas:

$$L_1 : \begin{cases} x = 6 - 8s \\ y = -11 + 10s \\ z = 2 - 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 - 5t \\ z = -4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Determinar si las rectas L_1 y L_2 se cortan o se cruzan.

Solución

Se sigue el procedimiento descrito en el ejercicio anterior.

$$\begin{array}{ccc} x = x & y = y & z = z \\ 6 - 8s = -2 + 4t & -11 + 10s = -1 - 5t & 2 - 6s = -4 + 3t \end{array}$$

Sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 6 - 8s = -2 + 4t \\ -11 + 10s = -1 - 5t \\ 2 - 6s = -4 + 3t \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4t + 8s = 8 \\ 5t + 10s = 10 \\ 3t + 6s = 6 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 10 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado, su conjunto solución es:

$$\{(2 - 2k, k), k \in \mathbb{R}\}$$

Esto quiere decir que las rectas L_1 y L_2 coinciden, en otras palabras L_1 y L_2 son la misma recta. Por tanto las rectas dadas ni se cortan ni se cruzan.

24. Sean las rectas:

$$T_1: \bar{p} = (-1+t, t, 2+3t); t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad T_2: \bar{p} = (-1-s, 1, 6+s); s \in \mathbb{R}$$

Determinar la distancia entre el punto $A(3,1,-1)$ y el punto de intersección de las rectas T_1 y T_2 .

Solución

$$\begin{array}{lll} x = x & y = y & z = z \\ -1+t = -1-s & t = 1 & 2+3t = 6+s \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t + s = 0 \\ t = 1 \\ 3t - s = 4 \end{array} \right.$$

Solución del sistema de ecuaciones: $t = 1, s = -1$

Las rectas se cortan en el punto: $B(0,1,5)$

La distancia entre los puntos $A(3,1,-1)$ y $B(0,1,5)$ es:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(0-3)^2 + (1-1)^2 + (5-(-1))^2} \\ d &= \sqrt{9+36} \\ d &= \sqrt{45} \\ d &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

25. Sean las rectas:

$$T_1: \bar{p} = (-1+t, t, 2+3t); t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad T_2: \bar{p} = (-1-s, 1, 6+s); s \in \mathbb{R}$$

Determinar si las rectas T_1 y T_2 son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

La ecuación de la recta T_1 se puede escribir como:

$$T_1 : \bar{p} = (-1, 0, 2) + t(1, 1, 3); t \in \mathbb{R}$$

La ecuación de la recta T_2 se puede escribir como:

$$T_2 : \bar{p} = (-1, 1, 6) + s(-1, 0, 1); s \in \mathbb{R}$$

Un vector director de T_1 es $\bar{u} = (1, 1, 3)$

Un vector director de T_2 es $\bar{v} = (-1, 0, 1)$

Dado que $\bar{u} \neq \lambda \bar{v}$ y $\bar{u} \cdot \bar{v} \neq 0$ entonces las rectas son oblicuas.

26. Sean las rectas:

$$L_1 : \bar{p} = (2 + 3t, -1 + t, 4 + 5t); t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \bar{p} = (3 - 2s, 1 + s, 2 + 2s); s \in \mathbb{R}$$

Determinar el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 .

Solución

La ecuación de la recta L_1 puede expresarse como:

$$L_1 : \bar{p} = (2, -1, 4) + t(3, 1, 5); t \in \mathbb{R}$$

La ecuación de la recta L_2 puede expresarse como:

$$L_2 : \bar{p} = (3, 1, 2) + s(-2, 1, 2); s \in \mathbb{R}$$

Un vector director de L_1 es $\bar{u} = (3, 1, 5)$

Un vector director de L_2 es $\bar{v} = (-2, 1, 2)$

Para obtener el ángulo entre las dos rectas se utiliza la fórmula:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Sustituyendo los vectores $\vec{u} = (3, 1, 5)$ y $\vec{v} = (-2, 1, 2)$ en la fórmula anterior:

$$\cos\theta = \frac{(3, 1, 5) \cdot (-2, 1, 2)}{\|(3, 1, 5)\| \|(-2, 1, 2)\|}$$

Realizando las operaciones:

$$\cos\theta = \frac{-6 - 1 + 10}{\sqrt{35}(3)}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{35}(3)}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$\theta = \text{angcos}\left(\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$$

$$\theta = 80.27^\circ$$

27. Determinar el ángulo entre una recta paralela al eje X y una recta que tiene como un vector director a $\vec{v} = \hat{i} x \hat{j}$.

Solución

Una recta paralela al eje X tiene como un vector director al vector \hat{i} . Por otro lado, dado que $\hat{i} x \hat{j} = \hat{k}$ entonces se trata de una recta paralela al eje Z .

El coseno del ángulo entre las dos rectas es:

$$\cos\theta = \frac{\hat{i} \cdot \hat{k}}{\|\hat{i}\| \|\hat{k}\|}$$

$$\cos\theta = \frac{0}{(1)(1)}$$

$$\cos\theta = 0$$

Por tanto, en ángulo entre las dos rectas es: $\theta = \text{angcos}(0) = 90^\circ$

28. Sean las rectas R y T de ecuaciones:

$$R: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-4}; \quad T: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Determinar si R y T son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

Para determinar si R y T son paralelas, perpendiculares u oblicuas se calcula el ángulo entre las dos rectas. Si el ángulo entre las rectas es 0° o 180° son paralelas, si es 90° son perpendiculares y si es diferente de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ son oblicuas.

Un vector director de la recta R es $\vec{u} = (-2, 4, -4)$.

Un vector director de la recta T es $\vec{v} = (6, -2, 7)$.

Se calcula el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (-2, 4, -4)$ y $\vec{v} = (6, -2, 7)$.

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \\ \cos\theta &= \frac{(-2, 4, -4) \cdot (6, -2, 7)}{\|(-2, 4, -4)\| \|(6, -2, 7)\|} \\ \cos\theta &= \frac{-12 - 8 - 28}{\sqrt{36} \sqrt{89}} \\ \cos\theta &= -0.8479 \\ \theta &= \text{angcos}(-0.8479) \\ \theta &= 147.9^\circ \end{aligned}$$

Por tanto, las rectas R y T son oblicuas.

29. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $A=(1,1,1)$ y que forme 60° con la recta $S: \bar{p}=(2,-1,2)+t\hat{k}; t \in \mathbb{R}$

Solución

Un vector director de S es $\hat{k}=(0,0,1)$.

Se tiene que obtener un vector \bar{u} que forme un ángulo de 60° con el vector $\bar{v}=(3,3,8)$. Sin pérdida de generalidad se puede imponer la condición de que el vector \bar{u} sea unitario, es decir $\|\bar{u}\|=1$.

Si $\theta = 60^\circ$ y $\bar{u}=(a,b,c)$ entonces:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|} \\ \cos 60^\circ &= \frac{(a,b,c) \cdot (0,0,1)}{(1)(1)} \\ \frac{1}{2} &= c \end{aligned}$$

De $\|\bar{u}\|=1$ se tiene que:

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Con $c = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{4}} &= 1 \\ a^2 + b^2 + \frac{1}{4} &= 1 \\ a^2 + b^2 &= \frac{3}{4} \\ b^2 &= \frac{3}{4} - a^2 \\ b &= \pm \sqrt{\frac{3}{4} - a^2} \end{aligned}$$

Con $a = 0$

$$b = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Un vector que forma 60° con el vector $\hat{k} = (0, 0, 1)$ es $\bar{u} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por tanto, la ecuación de la recta contiene al punto $A = (1, 1, 1)$ y que forma 60° con la recta $S: \bar{p} = (2, -1, 2) + t\hat{k}; t \in \mathbb{R}$, es:

$$\bar{p} = (1, 1, 1) + t \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right); t \in \mathbb{R}$$

30. Calcular en ángulo entre las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo cuyos vértices son $A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(1, 2, 0)$ y $D(0, 2, 0)$.

Solución

Un vector director de la recta que contiene a la diagonal \overline{AC} es $\bar{u} = (1, 2, -1)$

Un vector director de la recta que contiene a la diagonal \overline{BD} es $\bar{v} = (-1, 2, 0)$

Se calcula el ángulo entre los vectores $\bar{u} = (1, 2, -1)$ y $\bar{v} = (-1, 2, 0)$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \\ \cos\theta &= \frac{(1, 2, -1) \cdot (-1, 2, 0)}{\|(1, 2, -1)\| \|(-1, 2, 0)\|} \\ \cos\theta &= \frac{-1 + 4}{\sqrt{6}\sqrt{5}} \\ \cos\theta &= 0.5477 \\ \theta &= \text{angcos}(0.5477) \\ \theta &= 56.8^\circ\end{aligned}$$

El ángulo pedido es $\theta = 56.8^\circ$

31. Determinar una ecuación vectorial del plano XY .

La ecuación vectorial de un plano es:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \lambda\bar{u} + \beta\bar{v}; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

En este caso se requiere de un punto que esté en el plano XY y dos vectores cuyo producto cruz sea diferente del vector cero y paralelos a dicho plano.

Un vector es paralelo al plano XY si su tercera componente es igual a cero, de modo tal que los vectores $\bar{u} = (2, -1, 0)$ y $\bar{v} = (5, -2, 0)$ son paralelos al plano XY ; se puede verificar que $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{0}$. Además, un punto contenido en el plano XY es $P(1, -1, 0)$, por lo que $\bar{p}_0 = (1, -1, 0)$. Así, una ecuación vectorial del plano XY es:

$$\bar{p} = (1, -1, 0) + \lambda(2, -1, 0) + \beta(5, -2, 0); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

32. Determinar una ecuación vectorial del plano XZ .

La ecuación vectorial de un plano es:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \lambda\bar{u} + \beta\bar{v}; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

En este caso se requiere de un punto que esté en el plano XZ y dos vectores cuyo producto cruz sea diferente del vector cero y paralelos a dicho plano.

Un vector es paralelo al plano XZ si su segunda componente es igual a cero, de modo tal que los vectores $\bar{u} = (1, 0, 1)$ y $\bar{v} = (-1, 0, 1)$ son paralelos al plano XZ ; se puede verificar que $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{0}$. Además, un punto contenido en el plano XZ es $P(1, 0, 0)$, por lo que $\bar{p}_0 = (1, 0, 0)$. Así, una ecuación vectorial del plano XZ es:

$$\bar{p} = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \beta(-1, 0, 1); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

33. Determinar una ecuación vectorial del plano YZ .

La ecuación vectorial de un plano es:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \lambda\bar{u} + \beta\bar{v}; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

En este caso se requiere de un punto que esté en el plano YZ y dos vectores cuyo producto cruz sea diferente del vector cero y paralelos a dicho plano.

Un vector es paralelo al plano YZ si su primera componente es igual a cero, de modo tal que los vectores $\bar{u} = (0, 0, 1)$ y $\bar{v} = (0, 1, 1)$ son paralelos al plano YZ ; se puede verificar que $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{0}$. Además, un punto contenido en el plano YZ es $P(0, 1, 2)$, por lo que $\bar{p}_0 = (0, 1, 2)$. Así, una ecuación vectorial del plano YZ es:

$$\bar{p} = (0, 1, 2) + \lambda(0, 0, 1) + \beta(0, 1, 1); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

34. Determinar unas ecuaciones paramétricas del plano que contiene a los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 2)$ y $C(2, -2, 1)$.

Solución

Las ecuaciones paramétricas de un plano son:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \beta v_3 \end{cases}; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Con los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 2)$ y $C(2, -2, 1)$ se pueden establecer los vectores de posición $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{b} = (2, 1, 2)$ y $\bar{c} = (2, -2, 1)$.

Dos vectores directores del plano son $\bar{u} = \bar{b} - \bar{a}$ y $\bar{v} = \bar{c} - \bar{a}$.

Se calculan ambos vectores:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{b} - \bar{a} \\ \bar{u} &= (2, 1, 2) - (1, 1, 1) \\ \bar{u} &= (1, 0, 1) \\ \bar{v} &= \bar{c} - \bar{a} \\ \bar{v} &= (2, -2, 1) - (1, 1, 1) \\ \bar{v} &= (1, -3, 0) \end{aligned}$$

En este caso dado que se sabe que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 2)$ y $C(2, -2, 1)$ pertenecen al plano, se elige sólo uno para las ecuaciones paramétricas. Eligiendo $C(2, -2, 1)$, se obtienen las ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + \beta \\ y = -2 + \quad - 3\beta \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

35. Determinar dos puntos que pertenezcan al plano π que tiene como una ecuación vectorial a $\bar{p} = (2, -3, 2) + \lambda(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1)$; $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución

Para determinar un punto que pertenezca al plano dado, sólo hay que asignar valores a los parámetros λ y β .

Si $\lambda = 2$ y $\beta = -3$ se obtiene el siguiente vector de posición:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (2, -3, 2) + 2(1, 0, 1) - 3(1, 1, 1) \\ \bar{p} &= (2, -3, 2) + (2, 0, 2) + (-3, -3, -3) \\ \bar{p} &= (1, -6, 1) \end{aligned}$$

Por lo que un punto del plano π es $A(1, -6, 1)$.

Para determinar otro punto que pertenezca al plano π , hay que asignar otros valores a los parámetros λ y β .

Si $\lambda = 14$ y $\beta = 5$ se obtiene el siguiente vector de posición:

$$\bar{p} = (2, -3, 2) + 14(1, 0, 1) + 5(1, 1, 1)$$

$$\bar{p} = (2, -3, 2) + (14, 0, 14) + (5, 5, 5)$$

$$\bar{p} = (21, 2, 21)$$

Por lo que otro punto del plano π es $B(21, 2, 21)$.

36. Determinar si el punto $P(3, -7, 6)$ pertenece al plano π_1 que tiene como una ecuación vectorial a $\bar{p} = (1, -4, 8) + \lambda(3, 4, 5) + \beta(2, -9, 1)$; $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución

El vector de posición asociado al punto $P(3, -7, 6)$ es $\bar{p} = (3, -7, 6)$. Para determinar si el punto P pertenece al plano π_1 habrá que investigar si existen valores de λ y β tales que al sustituirlos en la ecuación vectorial del plano π_1 se obtenga el vector \bar{p} , para ello se sustituye el vector $\bar{p} = (3, -7, 6)$ en la ecuación del plano π_1 .

$$\bar{p} = (1, -4, 8) + \lambda(3, 4, 5) + \beta(2, -9, 1)$$

$$(3, -7, 6) = (1, -4, 8) + \lambda(3, 4, 5) + \beta(2, -9, 1)$$

Se desarrolla el lado derecho de esta última ecuación,

$$(3, -7, 6) = (1 + 3\lambda + 2\beta, -4 + 4\lambda - 9\beta, 8 + 5\lambda + \beta)$$

Con lo que se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$1 + 3\lambda + 2\beta = 3$$

$$-4 + 4\lambda - 9\beta = -7$$

$$8 + 5\lambda + \beta = 6$$

que puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}3\lambda + 2\beta &= 2 \\4\lambda - 9\beta &= -3 \\5\lambda + \beta &= -2\end{aligned}$$

Se resuelve este sistema de ecuaciones y si es compatible determinado el punto P pertenece al plano, en caso contrario no está en π_1 . Una forma de resolver este sistema es considerar dos de las tres ecuaciones y resolverlo para λ y β , después sustituir estos valores en la tercera ecuación y si la satisfacen los valores de λ y β obtenidos son la solución de dicho sistema, en caso de no satisfacerla el sistema es incompatible.

Considerando las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned}3\lambda + 2\beta &= 2 \\4\lambda - 9\beta &= -3\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema, por ejemplo, por suma o resta se obtiene:

$$\begin{aligned}3\lambda + 2\beta &= 2 \\4\lambda - 9\beta &= -3\end{aligned}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + 2\beta = 2 \\ 4\lambda - 9\beta = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12\lambda + 24\beta = 24 \\ 12\lambda - 27\beta = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow 51\beta = 33 \Rightarrow \beta = \frac{33}{51}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación,

$$3\lambda + 2\left(\frac{33}{51}\right) = 2 \Rightarrow 3\lambda + \frac{66}{51} = 2 \Rightarrow 3\lambda = \frac{36}{51} \Rightarrow \lambda = \frac{36}{153}$$
$$\lambda = \frac{36}{153}, \beta = \frac{33}{51}$$

Ahora se determina si estos valores satisfacen la ecuación $5\lambda + \beta = -2$

$$5\left(\frac{36}{153}\right) + \left(\frac{33}{51}\right) = \frac{180}{153} + \frac{33}{51} = \frac{31}{17} \neq -2$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones es incompatible y el punto P no pertenece al plano π_1 .

37. Determinar si el punto $A(-7,-10,16)$ pertenece al plano π_2 cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda - 4\beta \\ y &= 2 - 3\lambda - 2\beta \\ z &= 3 + 5\lambda + \beta \end{aligned} ; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Solución

Para que un punto $P(x,y,z)$ pertenezca al plano π deben existir α y $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumplan las ecuaciones paramétricas.

Sustituyendo las coordenadas del punto $A(-7,-10,16)$ en las ecuaciones paramétricas del plano π_2 , se obtiene:

$$\begin{aligned} -7 &= 1 + 2\lambda - 4\beta \\ -10 &= 2 - 3\lambda - 2\beta \\ 16 &= 3 + 5\lambda + \beta \end{aligned}$$

el cual se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} 2\lambda - 4\beta &= -8 \\ -3\lambda - 2\beta &= -12 \\ 5\lambda + \beta &= 13 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -3 & -2 & -12 \\ 5 & 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_1 \\ \\ 5R_1 + R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -20 \\ -3 & -2 & -12 \\ 5 & 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3R_1 + R_2 \\ \\ 5R_1 + R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -20 \\ 0 & 16 & 48 \\ 0 & -29 & -87 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{16}R_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -20 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -29 & -87 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 29R_2 + R_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -20 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} -\lambda - 6\beta = -20 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow -\lambda - 6(3) = -20 \Rightarrow -\lambda - 18 = -20 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\lambda = 2, \beta = 3$$

Por tanto, el punto $A(-7, -10, 16)$ pertenece al plano π_2 .

38. Determinar si el punto $B(2, 2, -3)$ pertenece al plano π_2 unas de cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda - 4\beta \\ y &= 2 - 3\lambda - 2\beta \quad ; \lambda, \beta \in \mathbb{R} \\ z &= 3 + 5\lambda + \beta \end{aligned}$$

Solución

Para determinar si el punto $B(2, 2, -3)$ pertenece al plano π_2 se procede como en el problema 37.

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 2\lambda - 4\beta \\ 2 &= 2 - 3\lambda - 2\beta \\ -3 &= 3 + 5\lambda + \beta \end{aligned}$$

el cual se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} 2\lambda - 4\beta &= 1 \\ -3\lambda - 2\beta &= 0 \\ 5\lambda + \beta &= -6 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} R_2 + R_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} -3R_1 + R_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -20 \\ 0 & 16 & -3 \\ 0 & -29 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{16}R_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -20 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{16} \\ 0 & -29 & -87 \end{pmatrix}$$

$$29R_2 + R_3 \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -20 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1479}{16} \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente:

$$\begin{aligned} -\lambda - 6\beta &= -20 \\ \beta &= 3 \\ 0\lambda + 0\beta &= -\frac{1479}{16} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones es incompatible (no tiene solución), por lo que el punto $B(2, 2, -3)$ no pertenece al plano π_2 .

39. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene a los puntos $D(2, 0, -1)$, $E(1, 1, -1)$ y $F(0, -3, 2)$.

Solución

La ecuación cartesiana de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B y C son las componentes de un vector normal al plano. Para obtener un vector normal al plano se necesitan dos vectores no paralelos que estén contenidos en el plano, posteriormente se realiza el producto cruz de estos dos vectores y el vector resultante es el vector normal buscado.

Dado que los puntos $D(2, 0, -1)$, $E(1, 1, -1)$ y $F(0, -3, 2)$ están contenidos en el plano se pueden formar los siguientes vectores de posición:

Vector de posición asociado al punto $D(2,0,-1)$: $\vec{d} = (2,0,-1)$

Vector de posición asociado al punto $E(1,1,-1)$: $\vec{e} = (1,1,-1)$

Vector de posición asociado al punto $F(0,-3,2)$: $\vec{f} = (0,-3,2)$

Se determinan los vectores $\vec{p} = \vec{d} - \vec{e}$ y $\vec{q} = \vec{f} - \vec{e}$

$$\vec{p} = \vec{d} - \vec{e} = (2,0,-1) - (1,1,-1) = (1,-1,0)$$

$$\vec{q} = \vec{f} - \vec{e} = (0,-3,2) - (1,1,-1) = (-1,-4,3)$$

Un vector normal al plano es $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{q}$

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{q}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = \hat{i}(-3) - \hat{j}(3) + \hat{k}(-5)$$

$$\vec{N} = (-3,-3,-5)$$

Hasta este momento la ecuación cartesiana del plano queda como:

$$-3x - 3y - 5z + D = 0$$

Para determinar la constante D se sustituyen las coordenadas de cualquiera de los puntos $D(2,0,-1)$, $E(1,1,-1)$ y $F(0,-3,2)$ en la ecuación anterior, eligiendo $F(0,-3,2)$:

$$-3(0) - 3(-3) - 5(2) + D = 0$$

$$D = 1$$

Por tanto, la ecuación cartesiana del plano que contiene a los puntos $D(2,0,-1)$, $E(1,1,-1)$ y $F(0,-3,2)$ es:

$$-3x - 3y - 5z + 1 = 0$$

El lector puede verificar que los puntos $D(2,0,-1)$, $E(1,1,-1)$ y $F(0,-3,2)$ satisfacen la ecuación obtenida.

40. Determinar un punto que pertenezca y otro que no pertenezca al plano de ecuación vectorial $7x + 2y - z + 5 = 0$.

Solución

Para determinar un punto del plano, simplemente hay que despejar alguna de las variables x, y, z y asignar valores cualesquiera a las otras dos variables.

Despejando z

$$z = 7x + 2y + 5$$

Asignando $x = 4$, $y = -6$

$$z = 7(4) + 2(-6) + 5$$

$$z = 21$$

El punto $(4, -6, 21)$ pertenece al plano de la ecuación $7x + 2y - z + 5 = 0$.

Para determinar un punto que no pertenezca al plano sólo se elige un valor de z diferente a 21 conservando $x = 4$, $y = -6$, por lo que el punto $(4, -6, 2)$ no pertenece al plano por no satisfacer la ecuación $7x + 2y - z + 5 = 0$.

41. Sea el plano π cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}x &= 3 + 4\lambda + 4\beta \\y &= -6 - 2\lambda + 7\beta \quad ; \lambda, \beta \in \mathbb{R} \\z &= -1 + 9\lambda - 2\beta\end{aligned}$$

Expresar la ecuación del plano π en forma cartesiana.

Solución

La ecuación cartesiana de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B y C son las componentes de un vector normal al plano. De las ecuaciones paramétricas

del plano, se deduce que dos vectores directores del plano son $\bar{u} = (4, -2, 9)$ y $\bar{v} = (4, 7, -2)$, por lo que un vector normal es $\bar{N} = \bar{u} \times \bar{v}$.

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \bar{u} \times \bar{v} \\ \bar{N} &= (4, -2, 9) \times (4, 7, -2) \\ \bar{N} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -2 & 9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} \\ \bar{N} &= \hat{i}(-59) - \hat{j}(-44) + \hat{k}(36) \\ \bar{N} &= (-59, 44, 36)\end{aligned}$$

La ecuación cartesiana del plano π es:

$$-59x + 44y + 36z + D = 0$$

Asimismo, de las ecuaciones paramétricas del plano π se tiene que el punto $A(3, -6, -1)$ está en dicho plano. Para calcular la constante D se sustituyen las coordenadas del punto $A(3, -6, -1)$ en la ecuación del plano.

$$\begin{aligned}-59(3) + 44(-6) + 36(-1) + D &= 0 \\ -177 - 264 - 36 + D &= 0 \\ D &= 477\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación del plano π en forma cartesiana es:

$$-59x + 44y + 36z + 477 = 0$$

42. Determinar una ecuación vectorial del plano T cuya ecuación cartesiana es:

$$x + y - z + 1 = 0.$$

Solución

Para determinar una ecuación vectorial de un plano se requiere de dos vectores directores y un punto. Si se obtienen tres puntos del plano T se pueden deducir unos vectores directores.

Al despejar z de la ecuación $x + y - z + 1 = 0$, se obtiene $z = x + y + 1$. Asignando valores x y a y se obtienen los puntos del plano que se deseen.

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow P(0, 0, 1) \in T$$

$$x = 1, y = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow Q(1, 0, 2) \in T$$

$$x = 0, y = 1 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow R(0, 1, 2) \in T$$

Vector de posición asociado al punto $P(0, 0, 1)$: $\bar{p} = (0, 0, 1)$

Vector de posición asociado al punto $Q(1, 0, 2)$: $\bar{q} = (1, 0, 2)$

Vector de posición asociado al punto $R(0, 1, 2)$: $\bar{r} = (0, 1, 2)$

Un vector director es: $\bar{u} = \bar{p} - \bar{q} = (0, 0, 1) - (1, 0, 2) = (-1, 0, -1)$

Otro vector director es: $\bar{v} = \bar{r} - \bar{q} = (0, 1, 2) - (1, 0, 2) = (-1, 1, 0)$

Así, una ecuación vectorial del plano T es:

$$\bar{p} = \bar{q} + \lambda \bar{u} + \beta \bar{v}; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\bar{p} = (1, 0, 2) + \lambda(-1, 0, -1) + \beta(-1, 1, 0); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Nota:

Observe que $\bar{u} \times \bar{v}$ da por resultado el vector normal del plano T .

$$\bar{N} = \bar{u} \times \bar{v}$$

$$\bar{N} = (-1, 0, -1) \times (-1, 1, 0)$$

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N} = \hat{i}(1) - \hat{j}(-1) + \hat{k}(-1)$$

$$\bar{N} = (1, 1, -1)$$

43. Determinar la distancia del punto $B(2, -3, 5)$ al plano π cuya ecuación cartesiana es $x - 2y - 4z + 3 = 0$.

Solución

Para calcular la distancia de un punto a un plano se hace uso de la siguiente fórmula:

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

donde \vec{b} es el vector de posición asociado al punto del cual se quiere obtener la distancia, \vec{a} es el vector de posición correspondiente a un punto del plano y \vec{N} es un vector normal del plano.

En este ejercicio $\vec{b} = (2, -3, 5)$ y $\vec{N} = (1, -2, -4)$. Para determinar al vector \vec{a} se obtiene un punto del plano π , uno de ellos es $A(-3, 0, 0)$, por lo que $\vec{a} = (-3, 0, 0)$. Así, la distancia es:

$$d = \frac{|((2, -3, 5) - (-3, 0, 0)) \cdot (1, -2, -4)|}{|(1, -2, -4)|}$$

$$d = \frac{|(5, -3, -5) \cdot (1, -2, -4)|}{\sqrt{21}}$$

$$d = \frac{|31|}{\sqrt{21}}$$

$$d = \frac{31}{\sqrt{21}}$$

$$d \approx 6.76$$

44. Determinar la distancia del punto $B(5, 4, -7)$ al plano π cuya ecuación cartesiana es $z = 0$.

Solución

En este caso como el plano $z=0$ es el plano XY entonces la distancia es simplemente el valor absoluto de la coordenada z del punto $B(5, 4, -7)$, es decir:

$$d = |-7|$$

$$d = 7$$

- **45.** Determinar la distancia del punto $B(\pi, 4\sqrt{3}, -7\pi)$ al plano π cuya ecuación cartesiana es $y = 0$.

Solución

En este caso como el plano $y=0$ es el plano XZ entonces la distancia es simplemente el valor absoluto de la coordenada y del punto $B(\pi, 4\sqrt{3}, -7\pi)$, es decir:

$$d = |4\sqrt{3}|$$

$$d = 4\sqrt{3}$$

- **46.** Determinar la distancia del punto $B(-\sqrt{93}, -\pi, -e)$ al plano π cuya ecuación cartesiana es $x = 0$.

Solución

En este caso como el plano $x=0$ es el plano YZ entonces la distancia es simplemente el valor absoluto de la coordenada x del punto $B(-\sqrt{93}, -\pi, -e)$, es decir:

$$d = |-\sqrt{93}|$$

$$d = \sqrt{93}$$

47. Determinar la distancia del punto $B(8, 4\sqrt{17}, -5)$ al plano π cuya ecuación cartesiana es $x + z - 3 = 0$.

Solución

La distancia de $B(8, 4\sqrt{17}, -5)$ a π se obtiene con siguiente fórmula:

$$d = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$$

Aquí $\bar{b} = (8, 4\sqrt{17}, -5)$ y $\bar{N} = (1, 0, 1)$. Para determinar al vector \bar{a} se obtiene un punto del plano π , uno de ellos es $A(4, 0, -1)$, por lo que $\bar{a} = (4, 0, -1)$, note que a la coordenada y se le puede asignar cualquier valor dado que en la ecuación del plano no está involucrada esta variable. Así, la distancia es:

$$d = \frac{|((8, 4\sqrt{17}, -5) - (4, 0, -1)) \cdot (1, 0, 1)|}{|(1, 0, 1)|}$$

$$d = \frac{|(4, 4\sqrt{17}, -4) \cdot (1, 0, 1)|}{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{|4 - 4|}{\sqrt{21}}$$

$$d = \frac{|0|}{\sqrt{21}}$$

$$d = 0$$

La distancia resultó ser cero porque el punto $B(8, 4\sqrt{17}, -5)$ está contenido en el plano π .

El punto $B(8, 4\sqrt{17}, -5)$ satisface la ecuación $x + z - 3 = 0$.

$$x + z - 3 = 0$$

$$8 - 5 - 3 = 0$$

48. Determinar la distancia del punto $B(0, -1, 2)$ al plano π cuya ecuación cartesiana es $2x - y - 4 = 0$.

Solución

Vector de posición asociado al punto $B(0, -1, 2)$: $\bar{b} = (0, -1, 2)$

En este caso como la ecuación $2x - y - 4 = 0$ no contiene a z entonces para determinar un punto del plano se le puede asignar a z cualquier valor.

Un punto del plano es $A(0, -4, 6)$ y el vector asociado a este punto es $\bar{a} = (0, -4, 6)$.

Un vector normal al plano π es $\bar{N} = (2, -1, 0)$.

La distancia de B a π se calcula con la fórmula $d = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$.

$$d = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$$

$$d = \frac{|((0, -1, 2) - (0, -4, 6)) \cdot (2, -1, 0)|}{|(2, -1, 0)|}$$

$$d = \frac{|(0, 3, -4) \cdot (2, -1, 0)|}{\sqrt{10}}$$

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{10}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$d \approx 0.95$$

49. Deducir la fórmula para calcular la distancia del origen de coordenadas a un plano de ecuación cartesiana $Ax + By + Cz + D = 0$.

Solución

Como se ha mencionado en ejercicios anteriores, para calcular la distancia de un punto a un plano se utiliza la fórmula:

$$d = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$$

Dado que el punto del cual se quiere obtener la distancia es el origen de coordenadas entonces $\bar{b} = (0, 0, 0)$, $\bar{a} = (x, y, z)$ es el vector de posición correspondiente a un punto $A(x, y, z)$ del plano y $\bar{N} = (A, B, C)$ es un vector normal del plano. Sustituyendo en la fórmula de la distancia

$$d = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$$

$$d = \frac{|((0, 0, 0) - (x, y, z)) \cdot (A, B, C)|}{|\bar{N}|}$$

$$d = \frac{|(-x, -y, -z) \cdot (A, B, C)|}{|\bar{N}|}$$

$$d = \frac{|-Ax - By - Cz|}{|\bar{N}|}$$

De la ecuación del plano $Ax + By + Cz + D = 0$ se tiene que $D = -Ax - By - Cz$, por tanto:

$$d = \frac{|D|}{|\bar{N}|}$$

50. Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π cuya ecuación cartesiana es $7x - 2y - 4z - 12 = 0$.

Solución

Como en este ejercicio el punto del cual se pide la distancia al plano π es el origen de coordenadas, entonces la fórmula que se utiliza para calcular tal distancia es:

$$d = \frac{|D|}{|\vec{N}|}$$

donde D es el término independiente de la ecuación del plano π , en este caso $D = -12$. Por tanto:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|D|}{|\vec{N}|} \\ d &= \frac{|-12|}{|(7, -2, -4)|} \\ d &= \frac{12}{|(7, -2, -4)|} \\ d &= \frac{12}{\sqrt{69}} \\ d &\approx 1.44 \end{aligned}$$

51. Calcular el ángulo entre el plano XZ y plano π cuya ecuación cartesiana es $-x - 4y + z = 10$.

Solución

Para calcular el ángulo entre los planos dados se utiliza la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$$

donde \vec{N}_1 es un vector normal del plano XZ y \vec{N}_2 es un vector normal del plano π .

Un vector normal del plano XZ es $\bar{N}_1 = \hat{j} = (0,1,0)$, mientras que un vector normal del plano π es $\bar{N}_2 = (-1,-4,1)$, por lo que:

$$\cos \theta = \frac{(0,1,0) \cdot (-1,-4,1)}{|(0,1,0)| |(-1,-4,1)|}$$

$$\cos \theta = \frac{-4}{(1)(\sqrt{18})}$$

$$\theta = \text{ang} \cos \left(\frac{-4}{(1)(\sqrt{18})} \right)$$

$$\theta = 160.5^\circ$$

52. Calcular el ángulo entre el plano π_1 unas de cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= 2 + \lambda + 2\beta \\ y &= -1 + 4\lambda + \beta \\ z &= -1 - 2\lambda + 3\beta \end{aligned} ; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

y plano π_2 cuya ecuación cartesiana es $2y + 2z - 7 = 0$.

Solución

Un vector normal del plano π_1 es:

$$\bar{N}_1 = (1, 4, -2) \times (2, 1, 3)$$

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_1 = 14\hat{i} - 7\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\bar{N}_1 = (14, -7, -7)$$

Un vector normal del plano π_2 es:

$$\bar{N}_2 = (2, 2, -7)$$

Por tanto:

$$\cos \theta = \frac{(14, -7, -7) \cdot (2, 2, -7)}{|(14, -7, -7)| |(2, 2, -7)|}$$

$$\cos \theta = \frac{63}{\sqrt{294}(\sqrt{57})}$$

$$\theta = \text{ang} \cos \left(\frac{63}{(\sqrt{294})(\sqrt{57})} \right)$$

$$\theta = 60.8^\circ$$

Note que otro vector normal del plano π_1 es:

$$\bar{N}_3 = (2, -1, -1)$$

de modo que:

$$\cos \theta = \frac{(2, -1, -1) \cdot (2, 2, -7)}{|(2, -1, -1)| |(2, 2, -7)|}$$

$$\cos \theta = \frac{9}{\sqrt{6}(\sqrt{57})}$$

$$\theta = \text{ang} \cos \left(\frac{9}{\sqrt{6}(\sqrt{57})} \right)$$

$$\theta = 60.8^\circ$$

53. Sean el plano π_1 una de cuyas ecuaciones vectoriales es:

$$\bar{p} = (0, 0, -2) + \lambda(3, 1, -1) + \beta(4, 0, 1); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

y plano π_2 que tiene como vector normal a $N_2 = (1, b, 0)$. Obtener el valor o , los valores de $b \in \mathbb{R}$, tal que el ángulo entre los planos π_1 y π_2 sea 45° .

Solución

Un vector normal del plano π_1 es:

$$\vec{N}_1 = (3, 1, -1) \times (4, 0, 1)$$

$$\vec{N}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N}_1 = \hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{N}_1 = (1, -7, -4)$$

Como $\theta = 45^\circ$ entonces $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Al sustituir en la fórmula $\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$ se obtiene:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1, -7, -4) \cdot (1, b, 0)}{\sqrt{66} \sqrt{1+b^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{66} \sqrt{1+b^2}}{2} = 1 - 7b$$

$$\frac{(2)(66)(1+b^2)}{4} = (1-7b)^2$$

$$33(1+b^2) = (1-7b)^2$$

$$33 + 33b^2 = 1 - 14b + 49b^2$$

$$16b^2 - 14b - 32 = 0$$

$$b = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4(16)(-32)}}{32}$$

$$b = \frac{14 \pm \sqrt{2244}}{32}$$

$$b = \frac{7}{16} \pm \frac{\sqrt{561}}{16}$$

$$b_1 = \frac{7}{16} - \frac{\sqrt{561}}{16}$$

$$b_2 = \frac{7}{16} + \frac{\sqrt{561}}{16}$$

54. Sean A la familia de planos de la $x+y=k, k \in \mathbb{R}$ ecuación y B la ecuación familia de planos de $x-z=\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ la ecuación . Determinar el ángulo entre un plano de la familia A y uno de la familia B .

Solución

Sea $x+y=1$ la ecuación de un plano de la familia A y sea $x-z=-1$ la ecuación de un plano de la familia B . El ángulo entre estos dos planos viene dado por la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| |\bar{N}_2|}$$

donde $\bar{N}_1 = (1,1,0)$ y $\bar{N}_2 = (1,0,-1)$. De modo que:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| |\bar{N}_2|} \\ \cos \theta &= \frac{(1,1,0) \cdot (1,0,-1)}{|(1,1,0)| |(1,0,-1)|} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \text{angsen} \left(\frac{1}{2} \right) \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$

Como se puede observar, para el cálculo del ángulo no intervino ninguna de las constantes $k, \lambda \in \mathbb{R}$, por lo que se puede concluir que el ángulo entre cualquier plano de la familia A y cualquier plano de la familia B es $\theta = 30^\circ$.

55. Sea P el plano de la ecuación cartesiana $z=0$. Determinar la ecuación cartesiana de tres planos que formen un ángulo de 90° con el plano P .

Solución

Un vector normal del plano P es $\bar{N}_1 = (0, 0, 1)$. Para resolver el ejercicio es necesario encontrar tres vectores que formen un ángulo de 90° con \bar{N}_1 ; simplemente hay que obtener tres vectores que cumplan con $(0, 0, 1) \cdot (a, b, c) = 0$.

Como $(0, 0, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow c = 0$ entonces tres vectores que cumplen con la condición dada son:

$$\bar{N}_2 = (5, 8, 0)$$

$$\bar{N}_3 = (-2, 5, 0)$$

$$\bar{N}_4 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$$

Por tanto, tres planos que forman un ángulo de 90° con el plano P son:

- i) $5x + 8y = 0$
- ii) $-2x + 5y = 0$
- iii) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$

56. Sea π_1 el plano de ecuación cartesiana $2x - y - z + 1 = 0$ y π_2 el plano de ecuación cartesiana $-3x + y + z - 4 = 0$. Determinar la ecuación cartesiana del plano π_3 que es perpendicular tanto a π_1 como a π_2 y que contiene al punto $H(-2, 6, 3)$.

Solución

Un vector normal de π_1 es $\bar{N}_1 = (2, -1, -1)$ y un vector normal de π_2 es $\bar{N}_2 = (-3, 1, 1)$.

La ecuación cartesiana de π_3 es $Ax + By + Cz + D = 0$ y uno de sus vectores normales es $\bar{N}_3 = (A, B, C)$.

Como se pide que π_3 sea perpendicular a π_1 y a π_2 entonces $\bar{N}_3 = (A, B, C)$ tiene que ser igual al producto cruz de los vectores \bar{N}_1 y \bar{N}_2 , es decir:

$$\bar{N}_3 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$$

Se procede a calcular \bar{N}_3

$$\bar{N}_3 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$$

$$\bar{N}_3 = (2, -1, -1) \times (-3, 1, 1)$$

$$\bar{N}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_3 = \hat{j} - \hat{k}$$

$$\bar{N}_3 = (0, 1, -1)$$

De modo que la ecuación cartesiana de π_3 es $y - z + D = 0$. Finalmente, para obtener la constante D se sustituye $H(-2, 6, 3)$ en la ecuación de π_3 .

$$6 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

La ecuación cartesiana de π_3 es $y - z - 3 = 0$

57. Determinar si el plano P cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned} x &= 5 + 3\lambda - \beta \\ y &= -4 + 2\lambda + \beta \\ z &= 8 - 4\lambda - 5\beta \end{aligned} ; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

es paralelo al plano Q de la ecuación vectorial

$$\bar{p} = (2, 3, 2) + \lambda(-1, 5, 2) + \beta(5, 3, 4); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Solución

Obtener un vector normal de P .

$$\bar{N}_1 = (3, 2, -4) \times (1, 1, -5)$$

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_1 = -6\hat{i} + 11\hat{j} + \hat{k}$$

$$\bar{N}_1 = (-6, 11, 1)$$

Obtener un vector normal de Q .

$$\bar{N}_2 = (3, 2, -4) \times (1, 1, -5)$$

$$\bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_2 = 14\hat{i} + 14\hat{j} - 28\hat{k}$$

$$\bar{N}_2 = (14, 14, -28)$$

Por definición dos planos son paralelos si $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \bar{0}$. En este ejercicio:

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (-6, 11, 1) \times (14, 14, -28)$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & 11 & 1 \\ 14 & 14 & -28 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = -322\hat{i} - 154\hat{j} - 238\hat{k}$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (-322, -154, -238)$$

Como $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (-322, -154, -238) \neq (0, 0, 0)$ entonces los planos P y Q no son paralelos.

58. Determinar la ecuación cartesiana del plano π_1 que contiene al punto $A(5, -6, 1)$ y es paralelo al plano π_2 cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3\lambda + 2\beta \\ y &= 1 - 6\lambda - \beta \\ z &= 2 - 2\lambda - \beta ; \lambda, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Solución

Para resolver este problema se tiene que obtener primero un vector que sea paralelo a un vector normal del plano π_2 .

Se procede a calcular un vector normal del plano π_2 .

$$\bar{N}_2 = (3, -6, -2) \times (2, -1, -1)$$

$$\bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_2 = 4\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$$

$$\bar{N}_2 = (4, -1, 9)$$

Un vector paralelo al vector $\bar{N}_2 = (4, -1, 9)$ es de la forma $\lambda\bar{N}_2 = \lambda(4, -1, 9)$, $\lambda \neq 0$. Con $\lambda = 2$ se obtiene el vector $\bar{N}_1 = 2\bar{N}_2 = 2(4, -1, 9) = (8, -2, 18)$. Este será un vector normal de π_1 , por lo que su ecuación en forma cartesiana es $8x - 2y + 18z + D = 0$. Además, se pide que π_1 contenga al punto $A(5, -6, 1)$ de modo que $8(5) - 2(-6) + 18(1) + D = 0$, de aquí $D = -70$.

Por tanto, la ecuación cartesiana del plano π_1 es $8x - 2y + 18z - 70 = 0$.

59. ¿Es posible que un plano sea paralelo a otro plano y simultáneamente ser perpendicular a otros dos?

Solución

La respuesta es sí. Por ejemplo, un plano que es paralelo al plano XY es perpendicular tanto al plano XZ como al plano YZ .

60. Determinar la ecuación cartesiana del plano P que es paralelo al plano T de la ecuación $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z - 1 = 0$ y contiene al punto de intersección entre el eje Z y la recta L cuya ecuación en forma simétrica es:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z + \frac{3}{2}}{\frac{2}{5}}$$

Solución

La ecuación en forma simétrica de L se puede escribir como $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+9}{\frac{12}{5}}$. De

aquí es claro que el punto de intersección entre el eje Z y la recta L es $(0, 0, -9)$.

Un vector normal del plano T es $\vec{N} = (1, 1, -2)$; dado que P y T deben ser paralelos la ecuación cartesiana del plano P es $x + y - 2z + D = 0$. Como $(0, 0, -9)$ pertenece P entonces $D = -18$.

La ecuación cartesiana del plano P es $x + y - 2z - 18 = 0$.

61. Sean el plano P que contiene a los puntos $A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(0, 2, 3)$ y el plano Q que contiene a los puntos $D(1, 1, -3), E(-1, 0, -2), F(0, 1, -2)$.

Determinar si los planos P y Q son paralelos.

Solución

Este ejercicio exige obtener un vector normal de cada uno de los planos, con ellos se puede determinar si son o no paralelos.

Para el plano P

Vector de posición asociado al punto $A(1,0,0)$: $\vec{a} = (1,0,0)$

Vector de posición asociado al punto $B(2,1,0)$: $\vec{b} = (2,1,0)$

Vector de posición asociado al punto $C(0,2,3)$: $\vec{c} = (0,2,3)$

Un vector director es: $\vec{u}_p = \vec{b} - \vec{a} = (2,1,0) - (1,0,0) = (1,1,0)$

Otro vector director es: $\vec{v}_p = \vec{c} - \vec{a} = (0,2,3) - (1,0,0) = (-1,2,3)$

Un vector normal es $\vec{N}_p = \vec{u}_p \times \vec{v}_p$

$$\vec{N}_p = \vec{u}_p \times \vec{v}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N}_p = \vec{u}_p \times \vec{v}_p = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{N}_p = \vec{u}_p \times \vec{v}_p = (3, -3, 3)$$

Para el plano Q

Vector de posición asociado al punto $D(1,1,-3)$: $\vec{d} = (1,1,-3)$

Vector de posición asociado al punto $E(-1,0,-2)$: $\vec{e} = (-1,0,-2)$

Vector de posición asociado al punto $F(0,1,-2)$: $\vec{f} = (0,1,-2)$

Un vector director es: $\vec{u}_q = \vec{e} - \vec{d} = (-1,0,-2) - (1,1,-3) = (-2,-1,1)$

Otro vector director es: $\bar{v}_Q = \bar{f} - \bar{d} = (0, 1, -2) - (1, 1, -3) = (-1, 0, 1)$

Un vector normal es $\bar{u}_Q \times \bar{v}_Q$

$$\bar{N}_Q = \bar{u}_Q \times \bar{v}_Q = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_Q = \bar{u}_Q \times \bar{v}_Q = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\bar{N}_Q = \bar{u}_Q \times \bar{v}_Q = (-1, 1, -1)$$

Puede observarse que

$$\bar{N}_P = (3, -3, 3) = -3(-1, 1, -1) = -3\bar{N}_Q$$

Por tanto, los planos P y Q son paralelos.

62. Determinar la distancia entre los siguientes dos planos paralelos:

$$\pi_1 : 5x - 2y + 2z + 7 = 0$$

$$\pi_2 : -5x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Solución

Para calcular la distancia entre dos planos paralelos se utiliza la fórmula de distancia de un punto a un plano.

$$d = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$$

Simplemente hay que dar un punto de alguno de los planos y determinar la distancia de este punto al otro plano.

Primero se obtiene un punto de alguno de los planos, considerar el plano π_1 .

$$\pi_1 : 5x - 2y + 2z + 7 = 0$$

Para $x=1, y=0$ resulta $z=-6$, entonces el punto $A(1,0,-6)$ pertenece al plano π_1 .

A continuación, se determina un punto del plano π_2 . De la ecuación de $\pi_2: -5x+2y-2z+3=0$, asignando $x=1, y=1$ se tiene que $z=0$, un punto de π_2 es $B(1,1,0)$.

Sea $\vec{a}=(1,0,-6)$ el vector de posición asociado al punto $A(1,0,-6)$ y sea $\vec{b}=(1,1,0)$ el vector de posición asociado al punto $B(1,1,0)$.

Dado que los planos son paralelos se puede utilizar, en la fórmula de un punto a un plano, cualquier vector normal ya sea de π_1 o de π_2 . Considerando $\vec{N}=(5,-2,2)$ la distancia entre los planos paralelos dados es:

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

$$d = \frac{|((1,1,0) - (1,0,-6)) \cdot (5,-2,2)|}{|(5,-2,2)|}$$

$$d = \frac{|(0,1,6) \cdot (5,-2,2)|}{\sqrt{33}}$$

$$d = \frac{|4|}{\sqrt{33}}$$

$$d = \frac{4}{\sqrt{33}}$$

$$d = 0.696$$

63. Sean los planos π_1 y π_2 con vectores normales \vec{N}_1 y \vec{N}_2 , respectivamente. Demostrar que si π_1 y π_2 son paralelos entonces $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0}$.

Solución

Si los planos π_1 y π_2 son paralelos entonces los vectores \vec{N}_1 y \vec{N}_2 también son paralelos, es decir $\vec{N}_1 = \lambda \vec{N}_2$.

Para $\bar{N}_2 = (a, b, c)$ se tiene que $\bar{N}_1 = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ y el producto cruz de \bar{N}_1 y \bar{N}_2 es:

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (\lambda bc - \lambda bc)\hat{i} - (\lambda ac - \lambda ac)\hat{j} + (\lambda ab - \lambda ab)\hat{k}$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (0, 0, 0)$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \bar{0}$$

64. Determinar la distancia del plano que contiene al origen de coordenadas y es paralelo a un plano que tiene como un vector normal a $\bar{N} = (7, -5, 8)$ y contiene al punto $A(-4, -3, 2)$.

Solución

La distancia solicitada se obtiene, calculando la distancia del origen de coordenadas al plano dado mediante la fórmula:

$$d = \frac{|D|}{|\bar{N}|}$$

Para obtener el valor de la constante D se debe tener presente que el vector $\bar{N} = (7, -5, 8)$ es un vector normal del plano que contiene al punto $A(-4, -3, 2)$. La ecuación cartesiana de este plano resulta ser:

$$7x - 5y + 8z + D = 0$$

Al sustituir las coordenadas del punto $A(-4, -3, 2)$ en la ecuación del plano y despejar D se obtiene $D = -3$. Por tanto, la distancia que se pide en este problema es:

$$d = \frac{|-3|}{|(7, -5, 8)|}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{138}}$$

$$d = 0.255$$

65. Determinar la distancia entre el plano YZ y el plano de la ecuación cartesiana $\frac{\sqrt{3}}{5}y + \frac{9\sqrt{3}}{20} = 0$.

Solución

La ecuación $\frac{\sqrt{3}}{5}y + \frac{9\sqrt{3}}{20} = 0$ se puede escribir como $y = -\frac{9}{4}$. Con esto se puede deducir que el plano de la ecuación cartesiana $y = -\frac{9}{4}$ es paralelo al plano YZ y dista de él $\frac{9}{4}$ unidades.

66. Determinar una ecuación de la recta, en forma vectorial, que es la intersección de los planos π_1 cuya ecuación cartesiana es $x - 3y + z - 1 = 0$ y π_2 cuya ecuación cartesiana es $-x + y + 2z = 1$.

Solución

Método 1

Para determinar la ecuación de la recta intersección se necesita un punto y un vector director. Una forma de obtener un punto de la recta es asignarle un valor, ya sea a x , a y o a z , sustituirlo en la ecuación de cada plano y resolver el sistema de 2×2 que se obtiene.

Sea $z = 0$.

$$z = 0 \Rightarrow x - 3y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x - 3y = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow -x + y + 2(0) = 1 \Rightarrow -x + y = 1$$

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

Al sumar estas ecuaciones se obtiene el valor de y .

$$\begin{array}{r} x - 3y = 1 \dots (1) \\ + \\ -x + y = 1 \dots (2) \\ \hline -2y = 2 \\ y = -1 \end{array}$$

Al despejar x de (1) y sustituir el valor y de se obtiene el valor de x .

$$\begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ x = 1 + 3y \\ x = 1 + 3(-1) \\ x = -2 \end{array}$$

Luego, un punto de la recta es $P_0(-2, -1, 0)$ y el vector de posición asociado al punto P_0 es $\vec{p}_0 = (-2, -1, 0)$. Se puede comprobar fácilmente que este punto satisface las ecuaciones de los planos dados.

Para calcular un vector director se considera que cualquier vector director es perpendicular tanto a un vector normal del plano π_1 como a un vector normal del plano π_2 , es decir:

$$\vec{u} = N_1 \times N_2$$

donde \vec{u} es un vector director de la recta intersección, N_1 es un vector normal del plano π_1 y N_2 es un vector normal del plano π_2 .

De la ecuación de π_1 se deduce que $N_1 = (1, -3, 1)$, mientras que la ecuación de π_2 se infiere que $N_2 = (-1, 1, 2)$. El vector director \vec{u} es:

$$\begin{array}{l} \vec{u} = N_1 \times N_2 \\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \vec{u} = (-7, -3, -2) \end{array}$$

Finalmente, la recta solicitada es:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{p}_0 + \lambda \bar{u}, \lambda \in \mathbb{R} \\ \bar{p} &= (-2, -1, 0) + \lambda(-7, -3, -2)\end{aligned}$$

67. Determinar una ecuación de la recta, en forma vectorial, que es la intersección de los planos π_1 cuya ecuación cartesiana es $x - 3y + z - 1 = 0$ y π_2 cuya ecuación cartesiana es $-x + y + 2z = 1$.

Solución

Método 2

Escribir las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 como un sistema de ecuaciones de 2×3 y resolverlo.

$$\begin{aligned}x - 3y + z - 1 &= 0 \\ -x + y + 2z &= 1\end{aligned}$$

Se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}x - 3y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 1\end{aligned}$$

Se puede resolver, haciendo uso del método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente:

$$x - 3y + z = 1 \dots (1)$$

$$-2y + 3z = 2 \dots (2)$$

(2) \rightarrow

$$z = k, k \in \mathbb{R} \Rightarrow 2y = 3z - 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}z - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}k - 1$$

(1) \rightarrow

$$x - 3y + z = 1$$

$$x - 3\left(\frac{3}{2}k - 1\right) + k = 1$$

$$x - \frac{9}{2}k + 3 + k = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{2}k - 2$$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$P\left(\frac{7}{2}k - 2, \frac{3}{2}k - 1, k\right)$$

Asociando el vector de posición \vec{p} a $P\left(\frac{7}{2}k - 2, \frac{3}{2}k - 1, k\right)$ a P se tiene:

$$\vec{p} = \left(\frac{7}{2}k - 2, \frac{3}{2}k - 1, k\right), k \in \mathbb{R}$$

Este vector se puede reescribir como:

$$\vec{p} = \left(\frac{7}{2}k - 2, \frac{3}{2}k - 1, k\right), k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{p} = (-2, -1, 0) + k\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 1\right), k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{p} = (-2, -1, 0) + \left(-\frac{1}{2}k\right)(-7, -3, -2), k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{p} = (-2, -1, 0) + \lambda(-7, -3, -2), \lambda = -\frac{1}{2}k \in \mathbb{R}$$

Se observa que es la misma ecuación obtenida en el problema 66.

68. Determinar una ecuación de la recta, en forma vectorial, que es la intersección de los planos π_1 cuya ecuación cartesiana es $x-3y+z-1=0$ y π_2 cuya ecuación cartesiana es $-x+y+2z=1$.

Solución

Método 3

La idea de este método es obtener dos puntos de la recta y con ellos formar un vector director y considerar cualquiera de los dos puntos.

Sea $z = 0$.

$$z = 0 \Rightarrow x - 3y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x - 3y = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow -x + y + 2(0) = 1 \Rightarrow -x + y = 1$$

Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

se obtiene:

$$x = -2, y = -1$$

Luego, un punto de la recta es $P_0(-2, -1, 0)$ y el vector de posición asociado al punto P_0 es $\vec{p}_0 = (-2, -1, 0)$.

De manera análoga, se da un valor ahora para x . Con $x = 1$ se tiene:

$$x = 1 \Rightarrow 1 - 3y + z - 1 = 0 \Rightarrow -3y + z = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow -1 + y + 2z = 1 \Rightarrow y + 2z = 2$$

Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -3y + z &= 0 \\ y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

se obtiene $y = \frac{2}{7}, z = \frac{6}{7}$

Otro punto de la recta intersección es $Q\left(1, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$ y el vector de posición asociado al punto Q es $\bar{q} = \left(1, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

Un vector director de la recta intersección es:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{p}_0 - \bar{q} \\ \bar{u} &= (-2, -1, 0) - \left(1, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right) \\ \bar{u} &= \left(-3, -\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}\right)\end{aligned}$$

La ecuación de la recta intersección es:

$$\bar{p} = (-2, -1, 0) + \alpha \left(-3, -\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}\right), \alpha \in \mathbb{R}$$

Esta ecuación se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= (-2, -1, 0) + \frac{3}{7}\alpha(-7, -3, -2), \alpha \in \mathbb{R} \\ \bar{p} &= (-2, -1, 0) + \lambda(-7, -3, -2), \lambda = \frac{3}{7}\alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Que es la ecuación obtenida en los dos ejercicios anteriores.

- 69.** Determinar una ecuación cartesiana de la recta que es la intersección de los planos π_1 cuya ecuación cartesiana es $5x + 23y + 12z = 2$ y π_2 cuya ecuación cartesiana es $-2x - 45y + 22z = 14$.

Solución

La forma cartesiana de una recta es:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación cartesiana de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 es:

$$\begin{cases} 5x + 23y + 12z - 2 = 0 \\ -2x - 45y + 22z - 14 = 0 \end{cases}$$

70. Determinar si el punto $P(1,1,1)$ pertenece a la recta de ecuación cartesiana

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 6 = 0 \\ -2x - 4y + z + 6 = 0 \end{cases}$$

Solución

El punto $P(1,1,1)$ pertenece a la recta si satisface la ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$ y la ecuación $-2x - 4y + z + 6 = 0$.

El punto $P(1,1,1)$ satisface la ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z - 6 &= 0 \\ 2(1) + (1) + 3(1) - 6 &= 0 \\ 6 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

El punto $P(1,1,1)$ no satisface la ecuación $-2x - 4y + z + 6 = 0$

$$\begin{aligned} -2x - 4y + z + 6 &= 0 \\ -2(1) - 4(1) + (1) + 6 &= -2(1) - 4(1) + (1) + 6 = -6 + 1 + 6 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

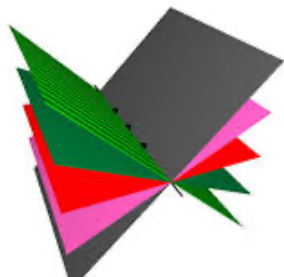
Se concluye que el punto $P(1,1,1)$ no pertenece a la recta de ecuación cartesiana

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 6 = 0 \\ -2x - 4y + z + 6 = 0 \end{cases}$$

71. ¿Es posible que dos o más planos se intersequen en una misma recta?

Solución

Sí, la siguiente figura ilustra claramente que dos o más planos se pueden intersecar en una misma recta.



72. Demostrar que los siguientes tres planos se intersecan en una recta.

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 2 \\ \pi_2: -x - y + z = -1 \\ \pi_3: x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución

Las ecuaciones de los planos conforman un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto por el método de Gauss.

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 2 \\ \pi_2: -x - y + z = -1 \\ \pi_3: x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ \\ -R_1 + R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2 + R_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2z &= 1 \end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{2} &\Rightarrow x + y = \frac{3}{2} \\ x = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} &\Rightarrow y = \frac{3}{2} - \lambda \end{aligned}$$

El conjunto solución del sistema de ecuaciones es:

$$\left\{ \left(\lambda, \frac{3}{2} - \lambda, \frac{1}{2} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Este conjunto se puede reescribir como:

$$\left\{ \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \lambda(1, -1, 0), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

La ecuación de la recta intersección de los tres planos es:

$$\bar{p} = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \lambda(1, -1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Para comprobar se dan dos puntos de la recta intersección y se verifica que estos dos puntos pertenecen a los tres planos.

Dos puntos de la recta son $A\left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ambos satisfacen las ecuaciones de los planos dados.

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 2 \\ \pi_2: -x - y + z = -1 \\ \pi_3: x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$A\left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x + y + z = 2 \Rightarrow 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$-x - y + z = -1 \Rightarrow -0 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

$$x + y + 3z = 3 \Rightarrow 0 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

$$B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x + y + z = 2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$-x - y + z = -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

$$x + y + 3z = 3 \Rightarrow -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

73. Dar cinco planos que se intersequen en una recta.

Solución

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + 3y + 2z = 5 \\ \pi_2 : 4x - 2y + 2z = 1 \\ \pi_3 : 2x - 5y = -4 \\ \pi_4 : 10x + 7y + 8z = 16 \\ \pi_5 : -2x - 11y - 4z = -14 \end{array} \right.$$

La técnica para diseñar los planos consiste en dar dos planos que no sean paralelos y generar los siguientes con combinaciones de estos. Para este problema las combinaciones son:

Plano π_3

$$\begin{array}{r} -1(2x + 3y + 2z = 5) \\ + \\ 4x - 2y + 2z = 1 \\ \hline 2x - 5y = -4 \end{array}$$

Plano π_4

$$\begin{array}{r} 3(2x + 3y + 2z = 5) \\ + \\ 4x - 2y + 2z = 1 \\ \hline 10x + 7y + 8z = 16 \end{array}$$

Plano π_5

$$\begin{array}{r} -3(2x + 3y + 2z = 5) \\ + \\ 4x - 2y + 2z = 1 \\ \hline -2x - 11y - 4z = -14 \end{array}$$

Procediendo como en el problema anterior, el lector puede determinar la recta intersección.

74. Dar cuatro planos que se intersequen en un punto.

Solución

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : x = 0 \text{ (plano } yz) \\ \pi_2 : y = 0 \text{ (plano } xz) \\ \pi_3 : z = 0 \text{ (plano } xy) \\ \pi_4 : x + y + z = 0 \end{array} \right.$$

Los cuatro planos se intersecan en el punto $(0, 0, 0)$.

75. Determinar la ecuación de la recta que es la intersección del plano π_1 unas de cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{array}{r} x = 3 + 4\lambda + 4\beta \\ y = -6 - 2\lambda + 7\beta \\ z = -1 + 9\lambda - 2\beta \end{array} ; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

y el plano π_2 una de cuyas ecuaciones vectoriales es:

$$\bar{p} = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) + \beta(2, 1, 1), \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Solución

Un vector normal del plano π_1 es:

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_1 = (1, 5, 3)$$

La ecuación cartesiana del plano π_1 es:

$$x + 5y + 3z + D_1 = 0$$

Como el punto $(3, -6, -1)$ pertenece al plano π_1 entonces $D_1 = 30$.

La ecuación cartesiana del plano π_1 es:

$$x + 5y + 3z + 30 = 0$$

Un vector normal del plano π_2 es:

$$\bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N}_2 = (1, 1, -3)$$

La ecuación cartesiana del plano π_2 es:

$$x + y - 3z + D_2 = 0$$

Como el punto $(1, 0, 1)$ pertenece al plano π_2 entonces $D_2 = 2$.

La ecuación cartesiana del plano π_1 es:

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

Para determinar un punto de la recta considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + 5y + 3z + 30 &= 0 \\x + y - 3z + 2 &= 0\end{aligned}$$

Al hacer $z = 0$ se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + 5y &= -30 \\x + y &= -2\end{aligned}$$

Al resolver este sistema se obtiene $x = 5, y = -7$

Un punto de la recta es $(5, -7, 0)$.

Un vector director es:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 \\ \bar{u} &= (1, 5, 3) \times (1, 1, -3) \\ \bar{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\ \bar{u} &= (-18, 6, -4)\end{aligned}$$

La ecuación de la recta intersección de los planos es:

$$\bar{p} = (5, -7, 0) + \lambda(-18, 6, -4), \lambda \in \mathbb{R}$$

76. Determinar el ángulo entre la recta L una de cuyas ecuaciones vectoriales es $\bar{p} = (2, 4, -1) + \lambda(2, 1, -2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el plano π una de cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2\lambda + 3\beta \\ y &= -1 - 4\lambda - 1\beta ; \lambda, \beta \in \mathbb{R} \\ z &= -6 - 2\lambda - 4\beta\end{aligned}$$

Solución

El ángulo entre una recta y un plano se calcula mediante la fórmula:

$$\theta = \text{angsen} \frac{\vec{N} \cdot \vec{u}}{|\vec{N}| |\vec{u}|}$$

donde \vec{N} es un vector normal al plano π y \vec{u} es un vector director de la recta L .

En este caso, el vector $\vec{u} = (2, 1, -2)$ es un vector director de la recta L mientras que un vector normal del plano π está dado por:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & -1 \\ -6 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = (14, 14, -28) = 14(1, 1, -2)$$

También se puede tomar como vector normal al vector $(1, 1, -2)$.

El ángulo entre L y π es:

$$\theta = \text{angsen} \frac{\vec{N} \cdot \vec{u}}{|\vec{N}| |\vec{u}|}$$

$$\theta = \text{angsen} \frac{(1, 1, -2) \cdot (2, 1, -2)}{|(1, 1, -2)| |(2, 1, -2)|}$$

$$\theta = \text{angsen} \frac{7}{\sqrt{6} (3)}$$

$$\theta = \text{angsen}(0.9525)$$

$$\theta = 72.27^\circ$$

77. Determinar el ángulo entre la recta $L: \begin{cases} x=2 \\ z=5 \end{cases}$ y el plano $\pi: \vec{p} = (-5, 0, -8) + \lambda(1, -1, -4) + \beta(0, 3, 2); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución

Un vector normal del plano π es:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{N} = (10, -2, 3)$$

Dado que la recta L es paralela al eje Y uno de sus vectores directores es:

$$\bar{u} = (0, 1, 0)$$

Por tanto, el ángulo entre la recta y el plano dados es:

$$\theta = \text{angsen} \frac{\bar{N} \cdot \bar{u}}{|\bar{N}| |\bar{u}|}$$

$$\theta = \text{angsen} \frac{(10, -2, 3) \cdot (0, 1, 0)}{|(10, -2, 3)| |(0, 1, 0)|}$$

$$\theta = \text{angsen} \frac{-2}{\sqrt{113} (1)}$$

$$\theta = \text{angsen}(-0.1881)$$

$$\theta = 169.15^\circ$$

78. Determinar el ángulo entre la recta que contiene a los puntos $A(4, 5, -1)$ y $B(-2, 2, 1)$, y el plano que contiene a los puntos $C(4, 0, -1)$, $D(3, 2, 0)$ y $E(4, -1, 2)$.

Solución

Un vector director de la recta que contiene a los puntos $A(4, 5, -1)$ y $B(-2, 2, 1)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\bar{u} = (-2, 2, 1) - (4, 5, -1)$$

$$\bar{u} = (-6, -3, 2)$$

Para obtener un vector normal del plano que contiene a los puntos $C(4,0,-1)$, $D(3,2,0)$ y $E(4,-1,2)$, se calculan primero los vectores \overline{DC} y \overline{DE} :

$$\overline{DC} = (4,0,-1) - (3,2,0)$$

$$\overline{DC} = (1,-2,-1)$$

$$\overline{DE} = (4,-1,2) - (3,2,0)$$

$$\overline{DE} = (1,-3,2)$$

Un vector normal del plano es:

$$\vec{N} = \overline{DC} \times \overline{DE}$$

$$\vec{N} = \overline{DC} \times \overline{DE}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = (-7, -3, -1)$$

Por consiguiente, el ángulo solicitado es:

$$\theta = \text{angsen} \frac{\vec{N} \cdot \vec{u}}{|\vec{N}| |\vec{u}|}$$

$$\theta = \text{angsen} \frac{(-7, -3, -1) \cdot (-6, -3, 2)}{|(-7, -3, -1)| |(-6, -3, 2)|}$$

$$\theta = \text{angsen} \frac{49}{\sqrt{59} (7)}$$

$$\theta = \text{angsen} \frac{7}{\sqrt{59}}$$

$$\theta = \text{angsen}(0.9113)$$

$$\theta = 65.68^\circ$$

79. Determinar el ángulo entre la recta L una de cuyas ecuaciones vectoriales es $\bar{p} = (0, 0, 6) + \lambda(1, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el plano π unas de cuyas ecuaciones vectoriales es $\bar{p} = (1, 1, 1) + \lambda(0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0)$; $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución

La recta L es paralela al eje X porque tiene como un vector director al vector \hat{i} , mientras que el plano π es paralelo al plano YZ porque uno de sus vectores directores es:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= (0, 0, 1) \times (0, 1, 0) \\ \bar{N} &= -\hat{i} \end{aligned}$$

Por tanto, el ángulo entre L y π es $\theta = 90^\circ$.

80. Determinar la ecuación de un plano que forme 45° con la recta $L: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Solución

La recta $L: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ es una recta que contiene al origen y tiene como un vector director al vector \hat{i} , en realidad es el eje x . Esto es fácil de verificar ya que un vector normal del plano $y = 0$ es $\bar{N}_1 = \hat{j} = (0, 1, 0)$ mientras que un vector normal del plano $z = 0$ es el vector $\bar{N}_2 = \hat{k} = (0, 0, 1)$ así, un vector director de la recta L

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 \\ \bar{u} &= \hat{j} \times \hat{k} \\ \text{es: } \bar{u} &= (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) \\ \bar{u} &= (1, 0, 0) \\ \bar{u} &= \hat{i} \end{aligned}$$

Además, el origen de coordenadas está contenido en la recta L .

Para determinar un plano que forme 45° con la recta $L: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ tan sólo hay que

buscar un vector que forme 45° con el vector \hat{i} . Por geometría, se deduce que el vector $(1,1,0)$ forma 45° con el vector \hat{i} ya que se encuentra en una bisectriz del plano XY . De esta manera se puede considerar al vector $(1,1,0)$ como un vector normal del plano que se está buscando y si además se pide que contenga al origen de coordenadas, la ecuación del plano es $x + y = 0$.

81. Obtener el ángulo que forma la recta que tiene como una ecuación vectorial a $L: \vec{p} = (2,1,-4) + \lambda(6,-3,7), \lambda \in \mathbb{R}$ con cada uno de los planos coordenados.

Solución

Ángulo entre la recta L con el plano XY .

Un vector director de la recta L es $\vec{u} = (6,-3,7)$ y un vector normal del plano XY es $\vec{N} = \hat{k}$. El ángulo entre la recta L y el plano XY es:

$$\begin{aligned} \theta &= \text{angsen} \frac{\vec{N} \cdot \vec{u}}{|\vec{N}| |\vec{u}|} \\ \theta &= \text{angsen} \frac{(0,0,1) \cdot (6,-3,7)}{|(0,0,1)| |(6,-3,7)|} \\ \theta &= \text{angsen} \frac{7}{(1)\sqrt{94}} \\ \theta &= \text{angsen}(0.7219) \\ \theta &= 46.21^\circ \end{aligned}$$

Ángulo entre la recta L con el plano XZ .

Un vector director de la recta L es $\vec{u} = (6,-3,7)$ y un vector normal del plano XZ es $\vec{N} = \hat{j}$. El ángulo entre la recta L y el plano XZ es:

$$\begin{aligned}\theta &= \text{angsen} \frac{\bar{N} \cdot \bar{u}}{|\bar{N}| |\bar{u}|} \\ \theta &= \text{angsen} \frac{(0,1,0) \cdot (6,-3,7)}{|(0,1,0)| |(6,-3,7)|} \\ \theta &= \text{angsen} \frac{-3}{(1)\sqrt{94}} \\ \theta &= \text{angsen}(-0.3094) \\ \theta &= 161.97^\circ\end{aligned}$$

Ángulo entre la recta L con el plano YZ .

Un vector director de la recta L es $\bar{u} = (6, -3, 7)$ y un vector normal del plano YZ es $\bar{N} = \hat{i}$. El ángulo entre la recta L y el plano YZ es:

$$\begin{aligned}\theta &= \text{angsen} \frac{\bar{N} \cdot \bar{u}}{|\bar{N}| |\bar{u}|} \\ \theta &= \text{angsen} \frac{(1,0,0) \cdot (6,-3,7)}{|(1,0,0)| |(6,-3,7)|} \\ \theta &= \text{angsen} \frac{6}{(1)\sqrt{94}} \\ \theta &= \text{angsen}(0.6188) \\ \theta &= 38.22^\circ\end{aligned}$$

82. Determinar la ecuación de una recta L que forme 0° con el plano $\pi: x - y + 2z - 9 = 0$.

Solución

Como un vector normal del plano π es $\bar{N} = (1, -1, 2)$ entonces se tiene que buscar un vector que sea perpendicular al vector \bar{N} . Para esto, se propone un vector $\bar{u} = (x, 1, 4)$ y se calcula x de modo que $\bar{N} \cdot \bar{u} = 0$.

$$\begin{aligned}\bar{N} \cdot \bar{u} &= 0 \\ \bar{N} \cdot \bar{u} &= (1, -1, 2) \cdot (x, 1, 4) \\ (1, -1, 2) \cdot (x, 1, 4) &= 0 \\ x - 1 + 8 &= 0 \\ x &= -7\end{aligned}$$

Los vectores $\bar{u} = (-7, 1, 4)$ y $\bar{N} = (1, -1, 2)$ son perpendiculares. El vector $\bar{u} = (-7, 1, 4)$ se toma como un vector director de la recta L , por tanto, la ecuación de una recta que forma 90° con el plano π es $\bar{p} = (9, 3, 6) + \lambda(-7, 1, 4), \lambda \in \mathbb{R}$.

83. Determinar la ecuación de una recta L que forme 90° con el plano $\pi: 5x + 3y + 6z - 11 = 0$.

Solución

Como la recta L y el plano π han de ser perpendiculares, un vector normal del plano π puede ser un vector director de la recta L . Es decir $\bar{u} = \bar{N} = (5, 3, 6)$, por lo que una recta L que forma 90° con el plano π es la que tiene como una ecuación vectorial a $\bar{p} = \lambda(5, 3, 6), \lambda \in \mathbb{R}$.

84. Determinar si la recta $L: \begin{cases} 3x - 3y - 2z - 5 = 0 \\ 2x + 4y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$ es perpendicular al plano $\pi: 34x + 10y + 36z - 16 = 0$.

Solución

La recta L es perpendicular al plano π si $\bar{N} = \lambda\bar{u}; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ donde \bar{N} es un vector normal del plano π y \bar{u} es un vector director de la recta L .

Un vector normal del plano $\pi: 34x + 10y + 36z - 16 = 0$ es $\bar{N} = (34, 10, 36)$ y un vector director de la recta L es $\bar{u} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$ donde $\bar{N}_1 = (3, -3, -2)$ y $\bar{N}_2 = (2, 4, -3)$, así:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (3, -3, 2) \times (2, 4, -3) \\ \bar{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \\ \bar{u} &= (17, 5, 18) \end{aligned}$$

Ya que $\bar{N} = (34, 10, 36) = 2(17, 5, 18) = 2\bar{u}$ se concluye que la recta L es perpendicular al plano π .

85. Demostrar que la recta $L: \frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{12} = \frac{2-z}{20}$ es perpendicular al plano

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\beta \\ y = -2\lambda + \beta \\ z = -1 + \lambda + \beta \end{cases}; \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solución

Nuevamente, como en el ejercicio anterior la recta L es perpendicular al plano π si $\bar{N} = \lambda\bar{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ donde \bar{N} es un vector normal del plano π y \bar{u} es un vector director de la recta L .

Un vector normal del plano π es $\bar{N} = \bar{u}_1 \times \bar{u}_2$ donde $\bar{u}_1 = (1, -2, -1)$ y $\bar{u}_2 = (2, 1, 1)$, y un vector director de la recta L es $\bar{u} = (4, 12, -20)$.

Obteniendo el vector $\bar{N} = \bar{u}_1 \times \bar{u}_2$

$$\begin{aligned} \bar{N} &= (1, -2, -1) \times (2, 1, 1) \\ \bar{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \bar{u} &= (1, -3, 5) \end{aligned}$$

Se observa que:

$$\begin{aligned}\bar{N} &= (-1, -3, 5) \\ \bar{N} &= -\frac{1}{4}(4, 12, -20) \\ \bar{N} &= -\frac{1}{4}\bar{u}\end{aligned}$$

Por tanto, la recta L es perpendicular al plano π .

86. Sea la recta $L: \bar{p} = \left(\sqrt{2}, 3, \frac{1}{4}\right) + \lambda(2, -2, k); \lambda \in \mathbb{R}$ y sea el plano $\pi: 6x - 6y + 21z - 12 = 0$. Si L y π son perpendiculares, obtener el valor de $k \in \mathbb{R}$.

Solución

Como L y π son perpendiculares entonces $\bar{N}x\bar{u} = \bar{0}$ donde \bar{N} es un vector normal del plano π y \bar{u} es un vector director de la recta L . En este caso, $\bar{N} = (6, -6, 21)$ y $\bar{u} = (2, -2, k)$, por lo que:

$$\begin{aligned}\bar{N}x\bar{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -6 & 21 \\ 2 & -2 & k \end{vmatrix} \\ \bar{N}x\bar{u} &= (-6k + 42, -6k + 42, 0) \\ (-6k + 42, -6k + 42, 0) &= (0, 0, 0) \\ -6k + 42 = 0 &\Rightarrow k = 7\end{aligned}$$

Para $k = 7$, L es perpendicular a π .

87. Obtener una recta L que contenga al punto $A(1, 2, 3)$ y que sea paralela al plano $\pi: \bar{p} = (7, 4, 3) + \lambda(1, -4, 2) + \beta(0, 3, 1); \lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución

Una recta L es paralela a un plano π si un vector director \bar{u} de L es perpendicular a un vector normal \bar{N} del plano π ; es decir $\bar{u} \cdot \bar{N} = 0$.

Para el plano $\pi: \bar{p} = (7, 4, 3) + \lambda(1, -4, 2) + \beta(0, 3, 1)$; $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, un vector normal es:

$$\begin{aligned}\bar{N} &= (1, -4, 2) \times (0, 3, 1) \\ \bar{N} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \bar{N} &= (-10, -1, 3)\end{aligned}$$

Ahora, habrá que buscar un vector que sea perpendicular a $\bar{N} = (-10, -1, 3)$. Se pueden determinar vectores que sean perpendiculares a $\bar{N} = (-10, -1, 3)$, proponiendo, por ejemplo, $\bar{u} = (1, 1, z)$; para obtener z se realiza $\bar{u} \cdot \bar{N} = 0$.

$$\begin{aligned}\bar{u} \cdot \bar{N} &= 0 \\ (1, 1, z) \cdot (-10, -1, 3) &= 0 \\ -10 - 1 + 3z &= 0 \\ 3z &= 11 \\ z &= \frac{11}{3}\end{aligned}$$

El vector $\bar{u} = \left(1, 1, \frac{11}{3}\right)$ es perpendicular al vector $\bar{N} = (-10, -1, 3)$ ya que $\bar{u} \cdot \bar{N} = 0$.

De esta forma, una recta que sea paralela al plano π y que contenga al punto $A(1, 2, 3)$ es:

$$L: \bar{p} = (1, 2, 3) + \lambda \left(1, 1, \frac{11}{3}\right); \lambda \in \mathbb{R}$$

88. Determinar si la recta que contiene a los puntos $A(0,0,1)$ y $B(3,1,1)$ es paralela al plano que contiene a los puntos $C(5,2,1)$, $D(-4,0,2)$ y $E(0,-2,1)$.

Solución

El vector de posición asociado al punto $A(0,0,1)$ es $\bar{a} = (0,0,1)$.

El vector de posición asociado al punto $B(3,1,1)$ es $\bar{b} = (3,1,1)$.

El vector de posición asociado al punto $C(5,2,1)$ es $\bar{c} = (5,2,1)$.

El vector de posición asociado al punto $D(-4,0,2)$ es $\bar{d} = (-4,0,2)$.

El vector de posición asociado al punto $E(0,-2,1)$ es $\bar{e} = (0,-2,1)$.

Un vector normal al plano es:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \overline{CD} \times \overline{CE} \\ \bar{N} &= (\bar{d} - \bar{c}) \times (\bar{e} - \bar{c}) \\ \bar{N} &= ((-4,0,2) - (5,2,1)) \times ((0,-2,1) - (5,2,1)) \\ \bar{N} &= (-9,-2,1) \times (-5,-4,0) \\ \bar{N} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -9 & -2 & 1 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\ \bar{N} &= (4,5,26) \end{aligned}$$

Un vector director de la recta es:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{b} - \bar{a} \\ \bar{u} &= (3,1,1) - (0,0,1) \\ \bar{u} &= (3,1,0) \end{aligned}$$

Al hacer el producto punto de los vectores \bar{u} y \bar{N} , se obtiene:

$$\bar{u} \cdot \bar{N} = (3, 1, 0) \cdot (4, 5, 26)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{N} = 12 + 5$$

$$\bar{u} \cdot \bar{N} = 17$$

Los vectores \bar{u} y \bar{N} no son perpendiculares, por tanto, la recta no es paralela al plano.

89. Determinar todas las rectas que son perpendiculares al plano XY .

Solución

En este caso, simplemente son las rectas que contienen algún punto $A(a, b, c)$ del espacio y tienen como un vector director al vector $\hat{k} = (0, 0, 1)$; es decir:

$$\bar{p} = (a, b, c) + \lambda \bar{k}, \lambda \in \mathbb{R}$$

90. Determinar todas las rectas que son paralelas al plano YZ .

Solución

Las rectas que son paralelas al plano YZ son las que contienen algún punto $A(a, b, c)$ del espacio y tienen como un vector director a un vector que sea perpendicular a $\hat{i} = (1, 0, 0)$; es decir $\bar{u} = (0, d, e)$, $\bar{u} \neq \bar{0}$. Por tanto:

$$\bar{p} = (a, b, c) + \lambda(0, d, e), \lambda \in \mathbb{R}$$

91. Determinar la intersección entre la recta L que contiene al punto $A(-2, 0, 1)$ y tiene como un vector director a $\bar{v} = (1, 1, 2)$, y el plano $\pi: \bar{p} = (0, 0, 3) + \lambda(1, -1, 2) + \beta(3, 0, 1)$; $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución

Para obtener la intersección entre la recta L y el plano π se obtienen, primero, unas ecuaciones paramétricas de la recta dada. En este problema son:

$$\begin{aligned} x &= -2 + \lambda \\ y &= 0 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= 1 + 2\lambda \end{aligned}$$

A continuación, se expresa la ecuación del plano en forma cartesiana, para esto se obtiene un vector normal del plano:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= (1, -1, 2) \times (3, 0, 1) \\ \bar{N} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \bar{N} &= (-1, 5, 3) \end{aligned}$$

La ecuación cartesiana de π es $-x + 5y + 3z + D = 0$, el valor de la constante D se obtiene sustituyendo $x = 0, y = 0, z = 3$:

$$\begin{aligned} -x + 5y + 3z + D &= 0 \\ -0 + 5(0) + 3(3) + D &= 0 \\ D &= -9 \end{aligned}$$

La ecuación del plano queda $-x + 5y + 3z - 9 = 0$, ahora se sustituyen las ecuaciones paramétricas de L en esta ecuación y, de ser posible se despeja λ :

$$\begin{aligned} -x + 5y + 3z - 9 &= 0 \\ 2 - \lambda + 5\lambda + 3 + 6\lambda - 9 &= 0 \\ 10\lambda - 4 &= 0 \\ \lambda &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Como existe un solo valor de λ la recta L y el plano π se intersecan en un punto, el cual se calcula sustituyendo $\lambda = \frac{2}{5}$ en las ecuaciones paramétricas de L ,

$$\begin{aligned} x &= -2 + \frac{2}{5} = -\frac{8}{5} \\ y &= \frac{2}{5} \\ z &= 1 + 2\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

La recta L y el plano π se intersecan en el punto $P\left(-\frac{8}{5}, \frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

92. Determinar la intersección entre la recta $L: \bar{p} = (1 + \lambda, 4 - \lambda, -4 + 5\lambda); \lambda \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi: 3x - 2y - z + 1 = 0$.

Solución

Como en el problema anterior se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 4 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= -4 - 5\lambda \end{aligned}$$

Ahora se sustituyen estas ecuaciones en la ecuación del plano y de ser posible se despeja λ :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z + 1 &= 0 \\ 3(1 + \lambda) - 2(4 - \lambda) - (-4 + 5\lambda) + 1 &= 0 \\ 3 + 3\lambda - 8 + 2\lambda + 4 - 5\lambda + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Esto significa que todos los puntos de la recta están contenidos en el plano π . Por tanto, la intersección entre la recta L y el plano π es la recta L .

93. Determinar la intersección entre la recta $L: \bar{p} = (3, 2, 1) + \lambda(3, 2, -1); \lambda \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi: x - y + z + 2 = 0$.

Solución

Se procede como en el problema anterior. Se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L

$$\begin{aligned} x &= 3 + 3\lambda \\ y &= 2 + 2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= 1 - \lambda \end{aligned}$$

Se sustituyen estas ecuaciones en la ecuación del plano y de ser posible se despeja λ :

$$\begin{aligned} x - y + z + 2 &= 0 \\ 3 + 3\lambda - (2 + 2\lambda) + 1 - \lambda + 2 &= 0 \\ 3 + 3\lambda - 2 - 2\lambda + 1 - \lambda + 2 &= 0 \\ 4 &= 0 \end{aligned}$$

En este caso se llega a una contradicción, lo cual indica que ningún punto de la recta L está contenido en el plano π . Por tanto, la intersección entre la recta L y el plano π es el conjunto vacío; se dice con frecuencia que no existe intersección entre la recta L y el plano π .

94. Sean la recta L y el plano π unas de cuyas ecuaciones paramétricas son, respectivamente:

$$\begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi: \begin{cases} x = 2 - 2\beta + \gamma \\ y = 1 + \beta - \gamma \\ z = 2 - \beta + \gamma \end{cases}; \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Obtener la intersección entre ambos lugares geométricos.

Solución

Se parte de la suposición de que existe intersección entre L y π , por lo que se hace:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z$$

$$-2 - \lambda = 2 - 2\beta + \gamma \Rightarrow -2\beta + \gamma + \lambda = -4$$

$$1 + 2\lambda = 1 + \beta - \gamma \Rightarrow \beta - \gamma - 2\lambda = 0$$

$$3 - \lambda = 2 - \beta + \gamma \Rightarrow -\beta + \gamma + \lambda = 1$$

Se resuelve este último sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente

$$\beta - \gamma - 2\lambda = 0$$

$$-\gamma + 3\lambda = 4$$

$$-\lambda = 1$$

De aquí:

$$\beta = 5, \quad \gamma = 7, \quad \lambda = -1$$

La recta L y el plano π se intersecan en el punto $P(5, 7, -1)$.

95. Sean la recta L y el plano π unas de cuyas ecuaciones paramétricas son, respectivamente

$$\begin{cases} x = 2 + \gamma \\ y = -3 + \gamma \\ z = 3 - 3\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \beta \\ y = 1 + \lambda - 3\beta \\ z = -1 + \lambda + \beta \end{cases}; \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

Obtener la intersección entre L y π .

Solución

Se parte de la suposición de que existe intersección entre L y π , por lo que se hace:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z$$

$$\begin{aligned} 2 + \gamma &= 2 - \lambda + \beta \Rightarrow -\lambda + \beta - \gamma = 0 \\ -3 + \gamma &= 1 + \lambda - 3\beta \Rightarrow \lambda - 3\beta - \gamma = -4 \\ 3 - 3\gamma &= -1 + \lambda + \beta \Rightarrow \lambda + \beta + 3\gamma = 4 \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente

$$\begin{aligned} -\lambda + \beta - \gamma &= 0 \\ \beta + \lambda &= 2 \end{aligned}$$

Como el sistema equivalente es compatible indeterminado, entonces todos los puntos de la recta L pertenecen al plano π , en consecuencia, la intersección entre la recta y el plano dados es la recta L .

96. Sean la recta L y el plano π unas de cuyas ecuaciones paramétricas son, respectivamente

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \pi: \begin{cases} x = 2 - 2\beta + \gamma \\ y = 1 + \beta - \gamma \\ z = 2 - \beta + \gamma \end{cases}; \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Obtener la intersección entre L y π .

Solución

Como en los dos problemas anteriores, se parte de la suposición de que existe intersección entre L y π , por lo que se hace:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z$$

$$\begin{aligned} 1 + \lambda = 2 - 2\beta + \gamma &\Rightarrow -2\beta + \gamma - \lambda = -1 \\ -1 - \lambda = 1 + \beta - \gamma &\Rightarrow \beta - \gamma + \lambda = -2 \\ \lambda = 2 - \beta + \gamma &\Rightarrow -\beta + \gamma - \lambda = -2 \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Como el sistema equivalente es incompatible, entonces la intersección entre la recta L y plano π , es el conjunto vacío.

97. Determinar si la recta $L: \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$ cruza al plano $\pi: x + y + z - 2 = 0$.

Solución

Para determinar si la recta cruza al plano, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones que se forma con las ecuaciones de los planos contenidos en L y la del plano π .

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -y + z &= -5 \\ -2z &= -1 \end{aligned}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{5}{6}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{2}$.

La recta L cruza al plano π en el punto $\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

98. Sean la recta $L: \begin{cases} x = 3 + 2\gamma \\ y = -2 + 2\gamma \\ z = -6\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 4$.

Obtener la distancia entre L y π .

Solución

Un vector director de la recta L es $\vec{u} = (2, 2, -6)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{N} = (2, 1, 1)$.

Como $\vec{u} \cdot \vec{N} = (2, 2, -6) \cdot (2, 1, 1) = 0$ entonces la recta es paralela al plano. Para obtener la distancia entre ambos lugares geométricos se da un punto de la recta y se calcula la distancia de este punto al plano mediante la fórmula de distancia de un punto a un plano.

$$d = \frac{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|}$$

donde \vec{N} es un vector normal al plano dado, \vec{a} es un vector de posición correspondiente a un punto del plano y \vec{b} es un vector de posición correspondiente a un punto de la recta.

En este problema $\vec{N} = (2, 1, 1)$, $\vec{a} = (3, -2, 0)$ y $\vec{b} = (1, 1, 1)$. La distancia entre la recta y el plano es:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|} \\ d &= \frac{|((1, 1, 1) - (3, -2, 0)) \cdot (2, 1, 1)|}{|(2, 1, 1)|} \\ d &= \frac{|(-2, 3, 1) \cdot (2, 1, 1)|}{\sqrt{6}} \\ d &= \frac{|-4 + 3 + 1|}{\sqrt{6}} \\ d &= 0 \end{aligned}$$

99. Sean la recta $L: \vec{p} = (1, 2, 2) + \lambda(1, 2, -3); \lambda \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi: x + y + z = 1$.

Obtener la distancia entre L y π .

Solución

Nuevamente L y π son paralelos porque $\vec{u} \cdot \vec{N} = (1, 2, -3) \cdot (1, 1, 1) = 0$

Para este problema $\vec{N} = (1, 1, 1)$, $\vec{a} = (2, 1, -2)$ y $\vec{b} = (1, 2, -3)$. La distancia entre la recta y el plano es:

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

$$d = \frac{|((1, 2, -3) - (2, 1, -2)) \cdot (1, 1, 1)|}{|(1, 1, 1)|}$$

$$d = \frac{|(-1, 1, -1) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{|-1+1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d \approx 0.577$$

100. Determinar si la recta $L: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ está contenida en el plano $\pi: 5x + 2y + 2z = 0$. Obtener la distancia entre L y π .

Solución

La recta está contenida en el plano si la distancia entre L y π es igual a cero.

Un vector normal del plano $x - y - z = 0$ es $\vec{N}_1 = (1, -1, -1)$.

Un vector normal del plano $x + y + z = 2$ es $\vec{N}_2 = (1, 1, 1)$.

Un vector director de la recta L es $\vec{u} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 \\ \bar{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \bar{u} &= (0, -2, 2)\end{aligned}$$

Un vector normal del plano $5x + 2y + 2z = 0$ es $\bar{N} = (5, 2, 2)$.

La recta L es paralela al plano π porque $\bar{N} \cdot \bar{u} = (5, 2, 2) \cdot (0, -2, 2) = 0$

En este problema $\bar{a} = (0, 0, 0)$, $\bar{b} = (1, 1, 0)$ y $\bar{N} = (5, 2, 2)$, por lo que la distancia entre L y π es:

$$\begin{aligned}d &= \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|} \\ d &= \frac{|((1, 1, 0) - (0, 0, 0)) \cdot (5, 2, 2)|}{|(5, 2, 2)|} \\ d &= \frac{|(1, 1, 0) \cdot (5, 2, 2)|}{\sqrt{33}} \\ d &= \frac{|5 + 2|}{\sqrt{33}} = \frac{7}{\sqrt{33}}\end{aligned}$$

La recta L no está contenida en el plano π porque la distancia es diferente de cero.



UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuaderno de ejercicios de recta y plano

Se publicó la primera edición electrónica de un ejemplar (8 MB) en formato PDF en junio de 2026, en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Cambria para texto y Rubik para titulares.