



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Comparativa y análisis de los métodos
numéricos y analíticos para la solución
del flujo de fluidos en medios porosos
fracturados y su aplicación en
Yacimientos Mexicanos**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Petrolero

P R E S E N T A

Iván Solís Pérez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Víctor Leonardo Teja Juárez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado COMPARATIVA Y ANALISIS DE LOS METODOS NUMERICOS Y ANALITICOS PARA LA SOLUCION DEL FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS Y SU APLICACION EN YACIMIENTOS MEXICANOS que presenté para obtener el título de INGENIERO PETROLERO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

IVAN SOLIS PEREZ
Número de cuenta: 420053538

*He coleccionado tantos fracasos en mi vida
que podría poner un museo.
Pero siempre creo que lo mejor está por venir.
No deberías rendirte.
Juan Carlos de Bodoque y Vodoque,
31 minutos.*

A mi madre.

*Que estas páginas sean la prueba de los
sueños alcanzados y el esfuerzo compartido.*

Agradecimientos

A mi madre Eugenia Pérez Ortega, mi primer hogar, por enseñarme el valor del trabajo y el esfuerzo, por inculcarme el espíritu de aventura y el anhelo de descubrir el mundo; y cuando llegó el momento, por darme alas para volar, la fortaleza para el viaje, y un amor incondicional que me acompaña a dondequiera que vaya.

A mis grandes amigos, Mauricio “Fifi Bodoque” & Rodrigo “Students”, por ser compañeros de aventuras, contrincantes de videojuegos, confidentes de mis tragedias, amistades sinceras, y recordarme que las cosas que son más importantes que el objetivo final pueden estar ahí, a un lado del camino. Gracias a ustedes, la tesis llegó antes que la 33.

A las familias Pérez Ortega, Solís Baeza & Espinosa Fernández, por su cariño incondicional, los bellos recuerdos y la calidez con la que siempre me reciben en su hogar.

Al Dr. Víctor Leonardo Teja Juárez, por su confianza, asesoramiento, apoyo, tiempo, paciencia y motivación aún cuando quería abandonar el trabajo.

A la Facultad de Ingeniería, por haberme brindado las facilidades y el profesorado necesario para mi formación integral como ingeniero.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por permitirme estudiar en la máxima casa de estudios de la nación y brindarme no solo conocimientos, sino una travesía invaluable.

Resumen

Los yacimientos naturalmente fracturados, cuyas reservas representan un 50 % del hidrocarburo a nivel mundial, se encuentran localizados en regiones caracterizadas por una alta complejidad geológica. A diferencia de los yacimientos convencionales homogéneos, estos sistemas exhiben una dualidad estructural compuesta por una matriz porosa de baja permeabilidad y una red de fracturas de alta conductividad. Esta configuración particular da lugar a un comportamiento dinámico complejo en el flujo de fluidos, cuyo entendimiento resulta fundamental para su explotación óptima, la predicción de la producción y el diseño de estrategias eficientes de recuperación mejorada. Estudiar y comprender el fenómeno ocurrido en este tipo de medios no solo es relevante desde el punto de vista académico, sino que constituye un componente estratégico para la sostenibilidad energética y la toma de decisiones oportunas en la industria petrolera.

Uno de los aspectos fundamentales para la representación certera del flujo de fluidos dentro de un yacimiento naturalmente fracturado es la formulación empleada para modelar la transferencia de fluidos entre el medio poroso y el medio fracturado. En este trabajo se llevó a cabo una revisión de la literatura para conocer los modelos de simulación y soluciones más utilizados y relevantes, así como los diferentes problemas y limitantes que conlleva la representación e idealización matemática-computacional de los yacimientos naturalmente fracturados. Posteriormente, se desarrollaron los códigos computacionales necesarios para simular el flujo de un fluido en un yacimiento fracturado para geometría radial (1D). Una vez desarrollados y verificados los códigos, se realizó un análisis de sensibilidades variando parámetros según el rango de aplicación a fin de comparar su desempeño en la reproducción de los gráficos diagnóstico y determinando su rendimiento computacional. Finalmente, se proponen tres ejemplos para emplear los modelos en la caracterización del flujo de fluidos en yacimientos mexicanos, haciendo uso de la herramienta desarrollada durante la elaboración del trabajo.

Índice general

Resumen	I
Nomenclatura	IV
Lista de Figuras	IX
Lista de Tablas	X
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Objetivo general	6
1.4. Estructura	6
2. Yacimientos Naturalmente Fracturados en México	7
2.1. Panorama Nacional	7
2.2. Yacimientos Naturalmente Fracturados	13
2.3. Propiedades fundamentales del sistema roca-fluido	16
2.4. Ecuaciones de flujo y transporte en medios porosos	25
3. Simulación del flujo de fluidos en Yacimientos Fracturados	34
3.1. Soluciones analíticas	35
3.1.1. Warren y Root	35
3.1.2. Swaan	37
3.1.3. Najurieta	40
3.2. Soluciones semianalíticas	41
3.2.1. Modelo Mavor y Cinco Ley	42
3.2.2. Modelo Triple Porosidad	43
3.2.3. Modelo Fractal	46
3.3. Soluciones numéricas	50
3.3.1. Modelo Pseudoestacionario (PSS)	51

3.3.2. Modelo Transitorio (USS)	53
3.4. Análisis de sensibilidad	55
4. Desarrollo de la herramienta	57
4.1. Diseño de la interfaz gráfica de usuario	57
4.2. Descripción de la herramienta	59
5. Propuestas de aplicación	62
5.1. Metodología	62
5.2. Caso 1: Cuenca del Sureste	66
5.3. Caso 2: Cantarell	71
5.4. Caso 3: Triple porosidad Doble permeabilidad	76
Conclusiones y siguientes pasos	80
A. Método Stehfest	88
B. Desarrollo de los modelos numéricos	89

Nomenclatura

η_x	Difusividad hidráulica del medio	$[ft^2/day]$
γ_F	Densidad relativa del fluido	$[Adim]$
κ	Relación de permeabilidad	$[Adim]$
λ	Factor de flujo interporoso	$[Adim]$
μ_F	Viscosidad del fluido	$[cP]$
ω	Capacidad de almacenamiento	$[Adim]$
ϕ_t	Porosidad total	$[Adim]$
ϕ_x	Porosidad del medio	$[Adim]$
ρ_F	Densidad del fluido	$[kg/m^3]$
σ	Factor de forma	$[1/ft^2]$
τ	Función de transferencia interporosa	$[1/day]$
k	Permeabilidad efectiva del medio poroso	$[mD]$
k_F	Permeabilidad efectiva de la fase	$[mD]$
k_{rF}	Permeabilidad relativa de la fase	$[mD]$
B_F	Factor volumétrico del fluido	$[Adim]$
C	Coefficiente de almacenamiento del pozo	$[ft^3/psi]$
c_F	Compresibilidad del fluido	$[psi^{-1}]$
c_t	Compresibilidad total del sistema poroso	$[psi^{-1}]$
c_{tx}	Compresibilidad del medio	$[psi^{-1}]$
H	Espesor medio del bloque de matriz	$[ft]$
h	Espesor del yacimiento	$[ft]$
k_f	Permeabilidad de la fractura natural	$[mD]$
k_m	Permeabilidad de la matriz	$[mD]$
k_t	Permeabilidad total del medio	$[mD]$
$k_{f\text{eff}}$	Permeabilidad efectiva de la fractura natural	$[mD]$

$k_{f\ int}$	Permeabilidad intrínseca de la fractura natural	$[mD]$
L_x	Espaciamiento de la fractura en "X"	$[ft]$
L_y	Espaciamiento de la fractura en "Y"	$[ft]$
L_z	Espaciamiento de la fractura en "Z"	$[ft]$
M	Peso molecular del gas	$[kg/mol]$
m	Masa	$[kg]$
N	Número de capas	$[Adim]$
N_r	Número de nodos en la malla numérica	$[Adim]$
P	Presión absoluta	$[psi]$
q	Gasto del fluido	$[ft^3/day]$
r_e	Radio de drene	$[ft]$
r_w	Radio del pozo	$[ft]$
s	Variable de Laplace	$[Adim]$
S_F	Saturación del fluido	$[Adim]$
S_x	Factor de daño (<i>skin</i>) en el medio	$[Adim]$
S_{T_x}	Factor de almacenamiento del medio	$[ft/psi]$
S_T	Capacidad de almacenamiento total = $(\phi c_t)_{f+m+v}$	$[psi^{-1}]$
T	Temperatura absoluta	$[K]$
t	Tiempo	$[days]$
T_x	Transmisibilidad del medio	$[ft^3/psi\ day]$
V	Volumen	$[ft^3]$
V_p	Volumen poroso	$[ft^3]$
w_f	Espesor de la fractura	$[\mu m]$
z	Factor de compresibilidad del gas	$[Adim]$

Constantes

γ'	Constante exponencial de Euler-Mascheroni ≈ 1.781076 $[Adim]$
γ	Constante Euler-Mascheroni ≈ 0.57721 $[Adim]$
π	Constante pi ≈ 3.1416 $[Adim]$
g	Constante universal gravitacional ≈ 9.8 $[m/s^2]$
R	Constante universal de los gases ≈ 8.3144 $[J/mol\ K]$

Subíndices

F	Fluido (aceite, gas, agua)
o	<i>oil</i> , aceite

g	<i>gas</i> , gas natural
w	<i>water</i> , agua
x	medio poroso (matriz, fractura, vgulo)
m	matriz
f	fractura
v	vgulo
mf	matriz-fractura
mv	matriz-vgulo
fv	fractura-vgulo
D	Propiedad adimensional
e	Límite del yacimiento
i	Propiedad inicial
int	Propiedad intrínseca
w	<i>well</i> , pozo

Operadores

∇	Operador nabla o gradiente
∇^2	Operador Laplaciano
$K_v(x)$	Función Bessel modificada de segundo tipo de orden v
$E_i(x)$	Función integral exponencial
$I_v(x)$	Función Bessel modificada de primer tipo de orden v
$tanh(x)$	Tangente hiperbólica

Modelo fractal

α	Factor de forma para transferencia de fluidos de la matriz a la región 2	$[1/ft^2]$
ϕ_{fh}	Porosidad de la fractura hidráulica	$[Adim]$
θ	ndice de conectividad de la red de fracturas en la región 2	$[Adim]$
b_f	Apertura media de la fractura hidráulica	$[ft]$
c_{fh}	Compresibilidad total de la fractura hidráulica	$[psi^{-1}]$
D	Dimensión fractal	$[Adim]$
x	Distancia del yacimiento en dirección x	$[ft]$
x_f	Longitud de la fractura hidráulica	$[ft]$
y	Distancia del yacimiento en dirección y	$[ft]$

Lista de Figuras

1.1. Representación del medio poroso fracturado (modificado de Warren y Root, 1963).	1
1.2. Idealización del medio poroso fracturado (modificado de Warren y Root, 1963).	2
2.1. Subprovincias del Sureste (CNH, 2017)	7
2.2. Provincias Petroleras en México (modificado de SENER, 2016)	8
2.3. Producción promedio anual y Producción acumulada correspondiente al proyecto Cantarell.	10
2.4. Producción promedio anual y Producción acumulada correspondiente al proyecto Ku Maloob Zaap.	11
2.5. Producción promedio anual y Producción acumulada correspondiente al proyecto Ek Balam.	11
2.6. Ubicación de los principales proyectos conformados principalmente por formaciones naturalmente fracturadas.	12
2.7. Producción promedio anual y Producción acumulada estimada de YNF en México comparada con la producción nacional.	13
2.8. Dos muestras de núcleo tomadas de un yacimiento carbonatado. Izquierda: se observa una fractura altamente conductiva; derecha: vórgulos observados en la muestra (modificado de Lopes, Juliana et.al, 2023).	14
2.9. Clasificación de Nelson. (Modificada de Nelson, 2001).	16
2.10. Viscosidad de diversos fluidos al aumentar la temperatura (modificada de Song, 2018).	21
2.11. Comportamiento del gas natural al aumentar la presión y la temperatura (modificada de Banzer, 1996).	22
2.12. Propiedades del medio fracturado (modificado de Tiab, 2004).	24
2.13. Experimento de Darcy (modificado de Song, 2018).	26
2.14. Modelo discreto.	28
2.15. Representación conceptual de los modelos de doble porosidad.	29
2.16. Modelo de triple porosidad (modificada de Wu, 2016).	30

2.17. Modelo fractal 2D (izquierda) y 3D (derecha). (Sahimi, 2011).	30
2.18. Modelo MINC (modificado de Kazemi, 1993).	31
2.19. Modelo discreto.	32
2.20. (Izquierda) Modelo DFN compuesto por 257 fracturas. (Derecha). Modelo DFM. (Jeffrey Hyman et al., 2021).	32
2.21. Comparativa entre los diferentes modelos de simulación (modificado de Berre, 2018).	33
3.1. Modelo conceptual del yacimiento (modificado de Swaan, 1976).	34
3.2. Modelo de doble porosidad con geometría “cubos de azúcar” (modificado de Warren y Root, 1963).	35
3.3. Verificación del modelo de Warren y Root (modificado de Warren y Root, 1963).	37
3.4. Verificación del modelo de Swaan (modificado de Swaan, 1976).	40
3.5. Verificación del modelo de Najurieta (modificado de Swaan, 1976).	41
3.6. Verificación del modelo de Mavor - Cinco Ley (modificado de Mavor, 1979).	43
3.7. Verificación del modelo de triple porosidad - permeabilidad simple (modificado de Camacho, 2005).	46
3.8. Verificación del modelo de triple porosidad - doble permeabilidad (modificado de Camacho, 2005).	46
3.9. Esquematización de la geometría de flujo tri-lineal para un yacimiento con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado (modificado de Cedeño, 2022).	47
3.10. Verificación del modelo fractal (modificado de Cedeño, 2022).	50
3.11. Verificación del modelo numérico empleando ecuación de transferencia pseudoestacionaria (modificado de Teklu, 2013).	53
3.12. Verificación del modelo numérico empleando ecuación de transferencia transitoria (modificado de Teja, 2023).	55
4.1. Lienzo de Figma con el frame diseñado para la ventana principal.	58
4.2. GUI y parte del código correspondiente al programa <code>Tkinter Designer</code>	58
4.3. Ventana de presentación de la herramienta.	58
4.4. Ventana principal de la herramienta y sus partes.	59
4.5. Tiempo de ejecución de cada modelo al realizar la simulación correspondiente a los datos de la figura 4.4.	60
4.6. Izquierda: Mensaje de error al intentar ingresar un número flotante en una variable de tipo entero, por lo que no continuó con la simulación. Derecha: Mensaje de advertencia al ingresar un valor distinto a los recomendados, aún así realiza la simulación.	60
4.7. Especificaciones que debe cumplir el archivo con los datos de la prueba de presión.	60

4.8.	Gráfico generado correspondiente a la presión de fondo fluyendo.	61
4.9.	Gráfico diagnóstico.	61
5.1.	Valores de interés obtenidos del gráfico de presión de fondo fluyendo (Caso 0).	63
5.2.	Valores de interés obtenidos del gráfico diagnóstico. (Caso 0)	63
5.3.	Prueba de presión del pozo Caso 1.	66
5.4.	Gráfico diagnóstico del Caso 1.	67
5.5.	Presión de fondo fluyendo simulada del Caso 1.	68
5.6.	Gráfico diagnóstico simulado del Caso 1.	69
5.7.	Parámetros de entrada y Tiempo Computacional del Caso 1.	69
5.8.	Error por modelo del Caso 1.	70
5.9.	Presión de fondo fluyendo resultante tras considerar $C = 0[ft^3/psi]$ (Caso 1).	70
5.10.	Error por modelo tras considerar $C = 0[ft^3/psi]$ (Caso 1).	71
5.11.	Gráfica diagnóstico aproximada del Caso 2 (modificada de Posadas y Samaniego, 2015).	71
5.12.	Presión de fondo fluyendo resultante (Caso 2).	72
5.13.	Simulación de presión de fondo fluyendo del Caso 2.	74
5.14.	Gráfico diagnóstico obtenido de la simulación para el Caso 2.	74
5.15.	Parámetros de entrada y Tiempo Computacional del Caso 2.	75
5.16.	Presión de fondo fluyendo resultante tras considerar $C = 0[ft^3/psi]$ (Caso 2).	75
5.17.	Error por modelo del Caso 2.	76
5.18.	Error por modelo tras considerar $C = 0[ft^3/psi]$ (Caso 2).	76
5.19.	Gráfica diagnóstico del Caso 3.	77
5.20.	Simulación de presión de fondo fluyendo del Caso 3.	77
5.21.	Gráfico diagnóstico obtenido de la simulación del Caso 3.	78
5.22.	Parámetros de entrada y Tiempo Computacional del Caso 3.	78
5.23.	Error por modelo del Caso 3.	79
5.24.	Modelo de triple porosidad ajustado con la prueba de presión (Caso 3).	79
B.1.	Discretización para un modelo radial (modificado de Teja y Torres, 2023).	89
B.2.	Nomenclatura para los términos W, C & E.	94

Lista de Tablas

2.1. Clasificación de fluidos petroleros según su densidad (modificada de León, 2013)	19
3.1. Parámetros del caso 1 presentado por Kazemi (1969).	39
3.2. Datos empleados para verificar el modelo fractal.	50
3.3. Datos para verificar modelo numérico PSS	52
5.1. Datos de entrada para el Caso 0.	62
5.2. Datos obtenidos para el Caso 1.	66
5.3. Datos obtenidos para el Caso 3.	77

1. Introducción

Los yacimientos naturalmente fracturados (YNF) representan cerca del 50 % de las reservas globales de petróleo restantes (Abushaikha et al., 2010) y el 20 % de la producción mundial de aceite y gas. Por mencionar ejemplos, se tiene la formación Asmari en Irán, los yacimientos vulgares en el Golfo de México (Hawez et al., 2021), las calizas fracturadas en Medio Oriente, las dolomías fracturadas en la formación de San Andrés, así como los *chalks* fracturados en Texas y el Mar del Norte (Kazemi y Gilman, 1993).

Pese al valor económico que representan los recursos almacenados en estas formaciones, su caracterización, modelado y simulación son los mayores desafíos para la ingeniería de yacimientos. El motivo está en su propia naturaleza: para el estudio de un yacimiento convencional, este se idealiza como un medio homogéneo cuyas propiedades petrofísicas (dígase porosidad, permeabilidad, etc.) se describen mediante un valor promedio representativo para toda la formación. En contraste, un YNF presenta discrepancias y discontinuidades en toda su extensión al estar conformado por dos medios de porosidad interconectados siendo estos la matriz y la red de fracturas (véase figura 1.1)

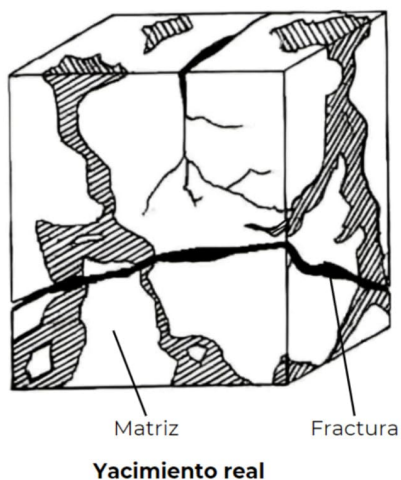


Figura 1.1: Representación del medio poroso fracturado (modificado de Warren y Root, 1963).

Por un lado, la matriz posee una alta capacidad de almacenamiento pero poca permeabilidad; por otro, la red fracturada posee una baja capacidad de almacenamiento pero alta permeabilidad. Este contraste tan marcado entre las propiedades de la matriz y la fractura, junto con una distribución incierta de las fracturas propician una alta heterogeneidad en el yacimiento, dificultando la simulación de un yacimiento naturalmente fracturado.

Con el objetivo de representar de mejor manera las características y el comportamiento del flujo de fluidos en estas condiciones de heterogeneidad, se han propuesto diversos modelos simplificados que conservan las propiedades específicas y la interacción entre ambos medios, como se expone a continuación.

1.1. Antecedentes

Los primeros estudios del flujo de fluidos en medios porosos fueron realizados por Barenblatt et al. (1960). En su trabajo abordaron el tema de flujo radial de un fluido ligeramente compresible en un yacimiento naturalmente fracturado considerando que el flujo ocurre únicamente a través de las fracturas, mientras que la matriz almacena y aporta dicho fluido a la fractura. Además, asumieron que la fuerza del flujo proveniente de la matriz es proporcional a la pérdida de presión local en la fractura y a la presión interna del bloque (Swan O., 1976).

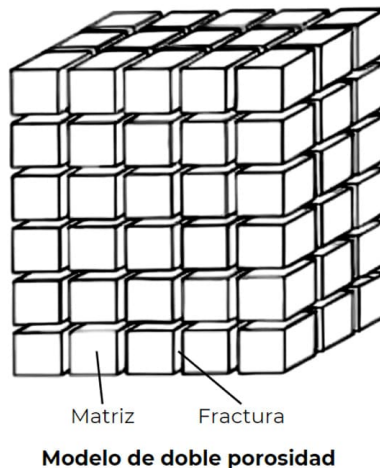


Figura 1.2: Idealización del medio poroso fracturado (modificado de Warren y Root, 1963).

En respuesta, Warren y Root (1963) propusieron una idealización del modelo original al representar el yacimiento fracturado como un sistema de doble porosidad formado por una red de fracturas regulares ortogonales completamente interconectadas, inmersa en una

matriz porosa formada por bloques paralelepípedos que almacenan el fluido (véase figura 1.2). Dado que los bloques están desconectados entre sí, el fluido se transfiere a la red de fracturas para después ser transportado al pozo. Esta interacción matriz fractura la expresan matemáticamente mediante una función de transferencia en condiciones de flujo pseudoestacionario (Sahimi, 2011).

A su vez, desarrollaron una solución analítica que al graficar muestra dos rectas semilogarítmicas paralelas cuya pendiente se relaciona con la capacidad de flujo de la formación (Cinco Ley y Samaniego Verduzco, 1982), estableciendo así la curva tipo de una prueba de presión en pozos naturalmente fracturados.

Al desarrollar la solución, identificaron la necesidad de implementar dos nuevas variables para caracterizar el medio fracturado: el factor de flujo interporoso (λ) y la capacidad de almacenamiento (ω). λ cuantifica el intercambio de fluidos entre las dos regiones, mientras que ω representa la fracción del volumen poroso total asociado a una región.

A partir de estos trabajos, el modelo de doble porosidad despertó un gran interés gracias a su capacidad para representar el flujo de fluidos en un YNF a un bajo costo computacional sin requerir una caracterización exhaustiva de la red de fracturas. Diversos autores desarrollaron sus propuestas para centrarse en diferentes fenómenos físicos, por ejemplo: variando la función de transmisibilidad, considerando las fuerzas capilares, efectos gravitacionales, el daño a la formación, y métodos para reflejar de mejor manera la heterogeneidad, entre otros aspectos. A continuación, se mencionan algunos ejemplos:

- ★ Odeh (1965), tras analizar distintas pruebas de presión en un YNF, concluyó que estas formaciones podrían describirse como un yacimiento fracturado homogéneo, por lo que desarrolló un modelo simplificado.
- ★ Kazemi (1969) conceptualizó el YNF como un sistema de capas horizontales (*slabs*) compuesto por capas delgadas y altamente conductivas que representan las fracturas, intercaladas con capas más gruesas de mayor capacidad de almacenamiento pero de menor conductividad que representan la matriz (Van Golf-Racht, 1982). Para el intercambio de fluidos en la interfaz matriz-fractura, consideró flujo transitorio obteniendo resultados similares a Warren y Root, con la diferencia de una zona de transición más suavizada debido al cambio en el régimen de flujo (Najurieta, 1980).
- ★ Kazemi, Seth et al. (1969) modificaron la teoría de Warren y Root para pruebas de interferencia, y concluyeron que a tiempos prolongados el yacimiento fracturado se comporta como uno homogéneo (Najurieta, 1980).

- ★ Kazemi, Merrill et al. (1976) extendieron las ecuaciones de Warren y Root al desarrollar un modelo bifásico (agua-aceite) de flujo pseudoestacionario. Consideraron las movilidades relativas de los fluidos, las fuerzas gravitacionales, de imbibición, la variación de las propiedades petrofísicas del yacimiento y la distribución de las fracturas.
- ★ Swaan O. (1976) desarrolló un modelo pseudoestacionario que describe la presión de un yacimiento infinito naturalmente fracturado a tiempos tempranos y tardíos, tomando en cuenta una matriz esférica o *slabs*. Asimismo, resaltó el factor de forma como una tercera variable necesaria para caracterizar de mejor manera el YNF.
- ★ Najurieta (1980) dio continuidad al trabajo de De Swaan presentando una solución analítica para describir el comportamiento de la presión en el yacimiento fracturado, demostrando que el comportamiento de la presión se puede describir mediante cinco parámetros (Cinco Ley y Samaniego Verduzco, 1982).
- ★ Streltsova (1983) analizó y caracterizó la curva tipo asociada al comportamiento de la presión de fondo fluyendo en un YNF al considerar una formulación transitoria entre la matriz y la fractura.

Pese a la gran cantidad de modelos desarrollados en torno a los yacimientos naturalmente fracturados, ningún modelo es capaz de simular adecuadamente todos los sistemas fracturados debido a la alta heterogeneidad y la variación de las propiedades de la matriz y fracturas entre distintos yacimientos.

1.2. Planteamiento del problema

La viabilidad económica de un proyecto petrolero depende en gran medida del comportamiento del yacimiento bajo las condiciones operativas estipuladas. A manera de predicción, se desarrolla un modelo capaz de replicar su comportamiento; con este, se evalúan los posibles escenarios de explotación, se determinan las ubicaciones para los pozos, se proponen proyectos de recuperación, etc.

Si el modelo es representativo, resulta en la optimización de los recursos, un aumento en la recuperación del hidrocarburo y la reducción de la incertidumbre con respecto al comportamiento del yacimiento. Por ello, es importante desarrollar el modelo de simulación tomando en cuenta las características geológicas y del sistema fracturado. Nelson (2001) establece que una representación incorrecta del yacimiento, o la omisión de las fracturas deriva en las siguientes problemáticas:

1. Disminución del factor de recuperación.

2. Generación de patrones primarios de recuperación complejos que dificultan un proyecto de recuperación secundaria.
3. Gasto extra de capital durante el desarrollo.
4. Perforación de pozos de bajo desempeño o secos.
5. Evaluación inadecuada de las opciones económicas.
6. Invasión de agua en etapas tempranas.
7. Estimación incorrecta de reservas.

Las principales problemáticas que ocasionan un mal desempeño de los modelos de simulación para yacimientos naturalmente fracturados son:

1. Conceptualización, entendimiento y descripción inadecuada del flujo de fluidos en las fracturas.
2. Incapacidad para representar el patrón complejo de la red de fracturas así como asignar valores petrofísicos acertados.
3. La representación errónea del intercambio de fluidos entre la fractura y el medio poroso

De todas las anteriores, Wu (2016) señala que el aspecto principal para simular el flujo de fluidos en un yacimiento fracturado es la función que representa la interacción matriz-fractura bajo distintas condiciones, puesto que este término distingue al modelo de doble porosidad del modelo convencional y rige la interacción entre ambos medios.

De acuerdo con Streltsova (1983), las dos formulaciones principales empleadas para modelar la transferencia de fluidos entre la fractura y la matriz son la pseudoestacionaria y la transitoria.

- ◇ La formulación pseudoestacionaria (Barenblatt et al., 1960; Warren y Root, 1963) considera que el flujo en la interfase es proporcional a la diferencia de presión entre la matriz y la fractura. Como ventaja, simplifica el análisis matemático del fenómeno; sin embargo, se considera que no representa correctamente el reajuste de la presión entre la matriz y la fractura durante el periodo de transición.
- ◇ La formulación transitoria (Kazemi, 1969; Najurieta, 1980; Streltsova, 1983), también conocida como modelo de gradiente de presión, considera que el flujo matriz-fractura está gobernado por un proceso de difusión lineal basado en la función de difusión de calor en sólidos. Si bien se complica la representación matemática del fenómeno, describe de mejor manera el equilibrio de presiones durante el periodo transicional.

1.3. Objetivo general

Implementar los métodos analíticos y numéricos de flujo interporoso matriz-factura existentes para comparar cualitativa y cuantitativamente las formulaciones de transferencia pseudoestacionaria (PSS) y transitoria (USS), con el objetivo de determinar los parámetros numéricos óptimos, rango de aplicación, facilitando el uso de cada algoritmo mediante una interfaz gráfica.

Objetivos particulares

- ✓ Revisar la literatura enfocada a la simulación numérica del flujo de fluidos en medios porosos fracturados.
- ✓ Contextualizar la relevancia a nivel nacional de los yacimientos naturalmente fracturados.
- ✓ Desarrollar un código numérico utilizando la técnica de flujo interporoso tipo PSS.
- ✓ Desarrollar un código numérico utilizando la técnica de flujo interporoso tipo USS.
- ✓ Desarrollar diferentes códigos con soluciones analíticas y semianalíticas para el flujo de fluidos en yacimientos fracturados.
- ✓ Acoplar los modelos computacionales a una interfaz gráfica e interactiva.
- ✓ Comparar el desempeño de los códigos desarrollados y analizar los resultados.
- ✓ Proponer la factibilidad teórica de su aplicación para caracterizar el flujo de fluidos en yacimientos mexicanos.

1.4. Estructura

El capítulo dos consta de una revisión bibliográfica acerca de los principales yacimientos fracturados en México, definiciones y propiedades petrofísicas básicas, así como los diferentes tipos de modelos empleados para simular este tipo de yacimientos. El tercer capítulo se enfoca en el desarrollo de las diferentes soluciones analíticas y numéricas recopiladas para la simulación del flujo de fluidos en un YNF, su comparación con los casos presentados en los trabajos originales y un análisis de sensibilidades para determinar las limitaciones de los modelos. Posteriormente, se describe el desarrollo de la herramienta computacional y las instrucciones básicas para su uso. A fin de verificar el uso de los modelos programados, en el capítulo cinco se realiza el acoplamiento de los modelos con un conjunto de pruebas de presión tomadas en campos mexicanos, haciendo uso de la herramienta desarrollada. Por último, se discute el desempeño de los modelos y se analiza la viabilidad de implementar los modelos estudiados como alternativa al modelo convencional de porosidad simple.

2. Yacimientos Naturalmente Fracturados en México

2.1. Panorama Nacional

En México se han identificado un total de 12 provincias petroleras de las cuales tres son productoras de aceite y gas asociado, otras tres de gas no asociado, y el resto tienen un potencial medio-bajo (véase figura 2.2). Las principales formaciones fracturadas se localizan en la Cuenca del Sureste, específicamente en la subprovincia de Pilar Reforma-Akal (véase figura 2.1). La alta concentración de yacimientos fracturados en esta zona se debe a los eventos geológicos ocurridos en la región, los cuales se describen a continuación.



Figura 2.1: Subprovincias del Sureste (CNH, 2017)

La evolución geológica del Sureste Mexicano comienza con la separación continental (*rifting*) durante el Triásico Tardío al Jurásico Medio, desencadenando la apertura del Golfo de México. Durante el Calloviano (a finales del Jurásico Medio), la entrada de agua de mar a la cuenca así como las condiciones de poca circulación, poco tirante de agua y

alta evaporación facilitaron la depositación de sal. Posteriormente, en el Titoniano (Jurásico Superior) se depositó una gran cantidad de roca rica en materia orgánica, dando pie a la principal roca generadora de hidrocarburos en la cuenca. A partir del Jurásico Tardío hasta el Cretácico Tardío se depositaron grandes extensiones de carbonatos, entre los cuales se encuentran algunas formaciones almacén.

El fin del Cretácico e inicio del Paleógeno está marcado por la caída de un meteorito en la zona de Chicxulub, en la Plataforma de Yucatán, cuya fuerza del impacto trituró la plataforma continental. Al borde de esta, parte de los fragmentos colapsaron y se depositaron en la zona de Pilar Reforma-Akal, formando una “brecha de impacto” de gran extensión cuyo espesor alcanza los 700 m. Esta brecha carbonatada corresponde a la principal roca almacén de los yacimientos Cantarell, Ku-Maloob-Zaap, y Ek-Balam.

Asimismo, desde finales del Cretácico hasta el Eoceno, la orogenia Laramide produjo el levantamiento de cadenas montañosas, incluyendo la Sierra Madre Oriental, cambiando la sedimentología de la cuenca (de carbonatos a clásticos).

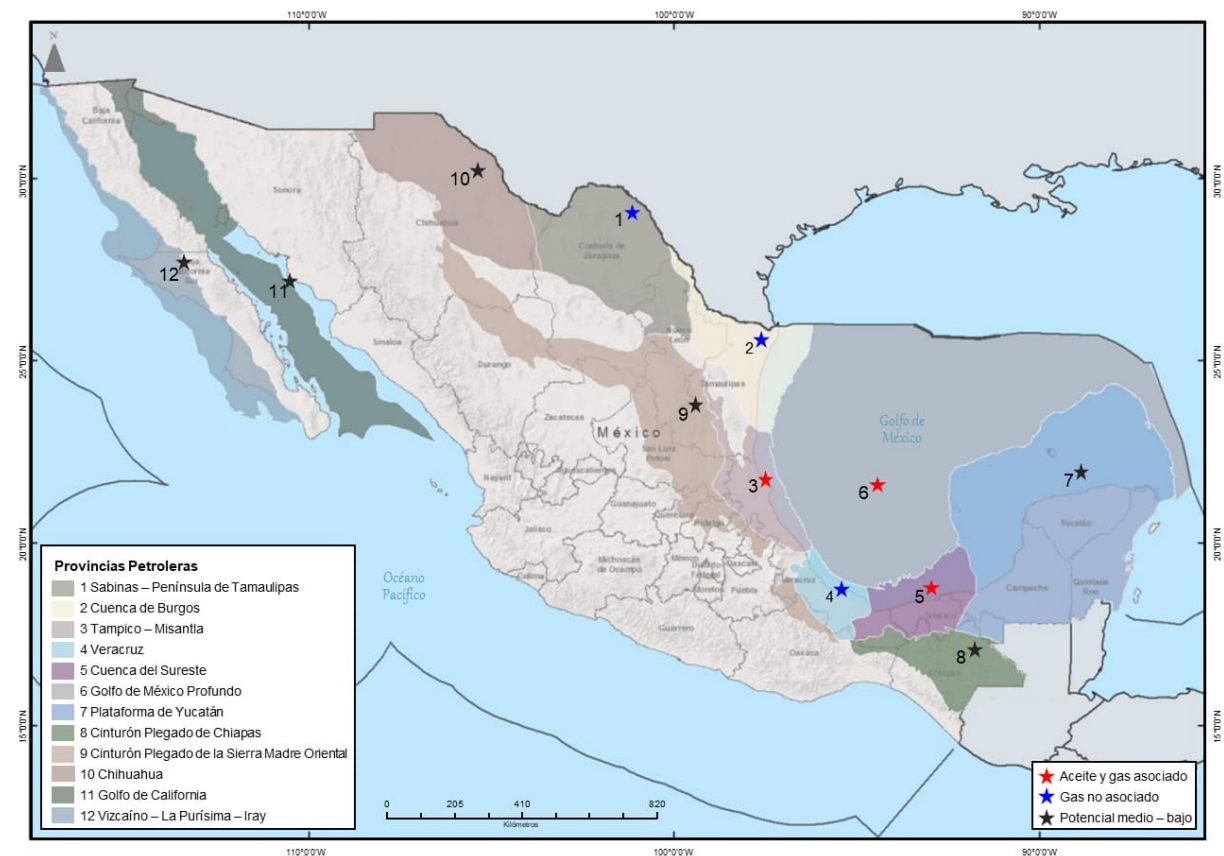


Figura 2.2: Provincias Petroleras en México (modificado de SENER, 2016)

Después, en el Oligoceno y Mioceno, los esfuerzos compresivos derivados del movimiento de las placas tectónicas de Cocos, del Caribe y Norteamericana deformaron los estratos de la cuenca, provocando pliegues, fracturas y cabalgaduras. Finalmente, durante el Neógeno ocurrieron intrusiones de sal y arcilla que provocaron fallas lítricas en la zona.

La información anterior se puede encontrar a mayor detalle en el “*Atlas Geológico Cuencas del Sureste - Cinturón Plegado de la Sierra de Chiapas*”, redactado por la Comisión Nacional de Hidrocarburos [CNH] (2017c).

Pasando con las formaciones fracturadas en México, a fin de brindar una mayor referencia sobre sus características técnicas y su significado económico, se presenta una descripción general de los principales yacimientos naturalmente fracturados a nivel nacional:

- ▷ Cantarell, el ejemplo por excelencia, ha sido el proyecto de mayor relevancia en la historia de la industria petrolera nacional desde su descubrimiento en 1976 con el campo Chac-1. Está conformado por los campos Akal, Chac, Ixtoc, Kambesah, Kutz, Nohoch, Sihil y Takín.

Las formaciones productoras constan de brecha calcárea dolomitizada del Cretácico, dolomías del Jurásico Superior Kimmeridgiano, y calcarenitas del Eoceno Medio, produciendo un aceite con una densidad que varía entre 14 y 31 ° API. La profundidad de los intervalos productores oscila entre los 1,000 y los 6,000 metros bajo el nivel del mar (mbnm).

El Volumen Original de Aceite (OOIP, por sus siglas en inglés) P10 correspondiente a los yacimientos operados en el complejo Cantarell es de 31,609.64 millones de barriles (MMb) de los cuales 27,778.28 MMb corresponden a Akal. La producción alcanzó su pico histórico en diciembre del 2003, con 2,192 miles de barriles diarios (Mbd). Según la plataforma “*Reservas de Hidrocarburos*” de la Comisión Nacional de Hidrocarburos (2024), la reserva remanente de petróleo se estima en 150 MMb (véase figura 2.3).

- ▷ El proyecto integral Ku Maloob Zaap está conformado por los yacimientos Ayatsil, Ku, Maloob y Zaap, entre otros. El aceite se encuentra almacenado en areniscas del Jurásico Superior Oxfordiano, dolomías del Jurásico Superior Kimmeridgiano, brecha calcárea dolomitizada del Cretácico, y calcarenitas del Eoceno Medio.

El fluido producido presenta una densidad que ronda entre los 11 y los 25 ° API. Las propiedades petrofísicas de los campos muestran valores de porosidad promedio de 19.91 %, y permeabilidades que alcanzan los 13,600 mD. La profundidad de las formaciones está entre los 2,570 y los 3,600 mbnm, con espesores de hasta 300 m.

Se estima que los cuatro campos principales en conjunto suman un Volumen Original de Aceite de 22,714 MMb; para el año 2024, la reserva remanente se estima en 1,686 MMb (véase figura 2.4).

- ▷ El proyecto Ek Balam, constituido por los campos Ek y Balam, presenta arenas productoras del Jurásico Superior Oxfordiano y brecha calcárea dolomitizada naturalmente fracturada del Cretácico Superior.

Centrándose en la formación fracturada, ésta produce un aceite pesado de 11° API a un rango de profundidad entre 2,900 y 3,280 mbnm. Sus propiedades petrofísicas rondan valores de 11 % de porosidad promedio, 308 mD de permeabilidad promedio y un espesor bruto de 142.24 m.

En conjunto, el proyecto reporta 1,974 MMb de Volumen Original de Aceite y 201 MMB de reservas remanentes (véase figura 2.5).

Adicionalmente, en la Cuenca del Sureste se desarrollan los proyectos Chuc, Tsimín-Xux, Yaxché-Xanab, Bellota-Chinchorro y Jujo-Tecominoacán, cuyas formaciones de interés constan principalmente de calizas y dolomías fracturadas del Jurásico y del Cretácico productoras de aceite. La ubicación aproximada de los campos se muestra en la figura 2.6.

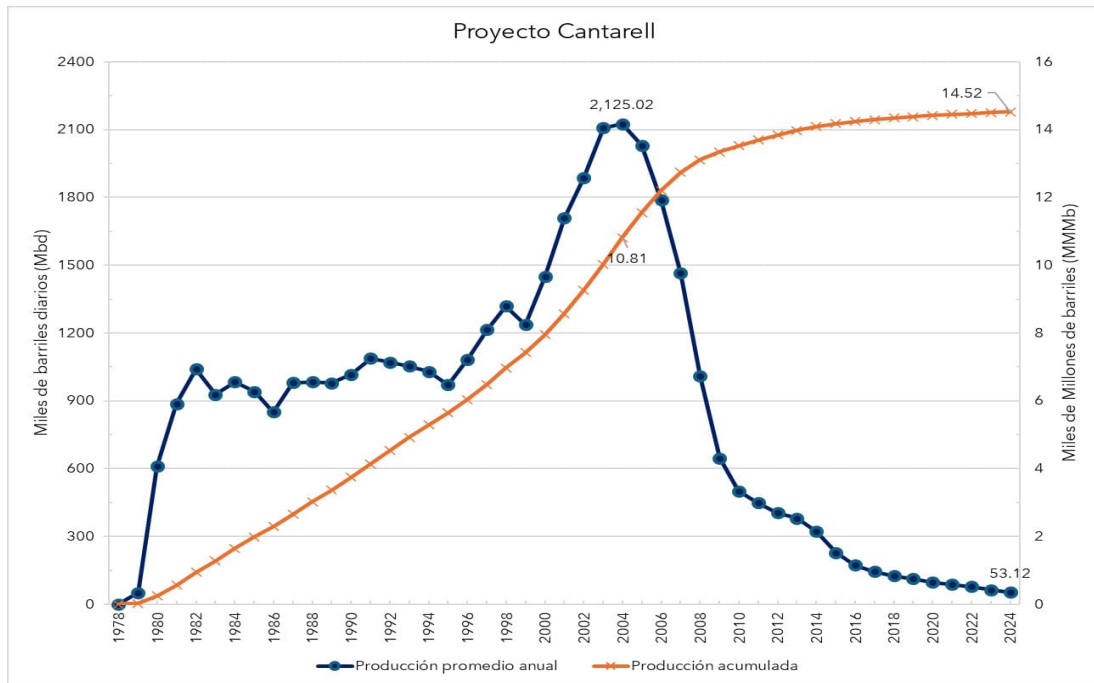


Figura 2.3: Producción promedio anual y Producción acumulada correspondiente al proyecto Cantarell.

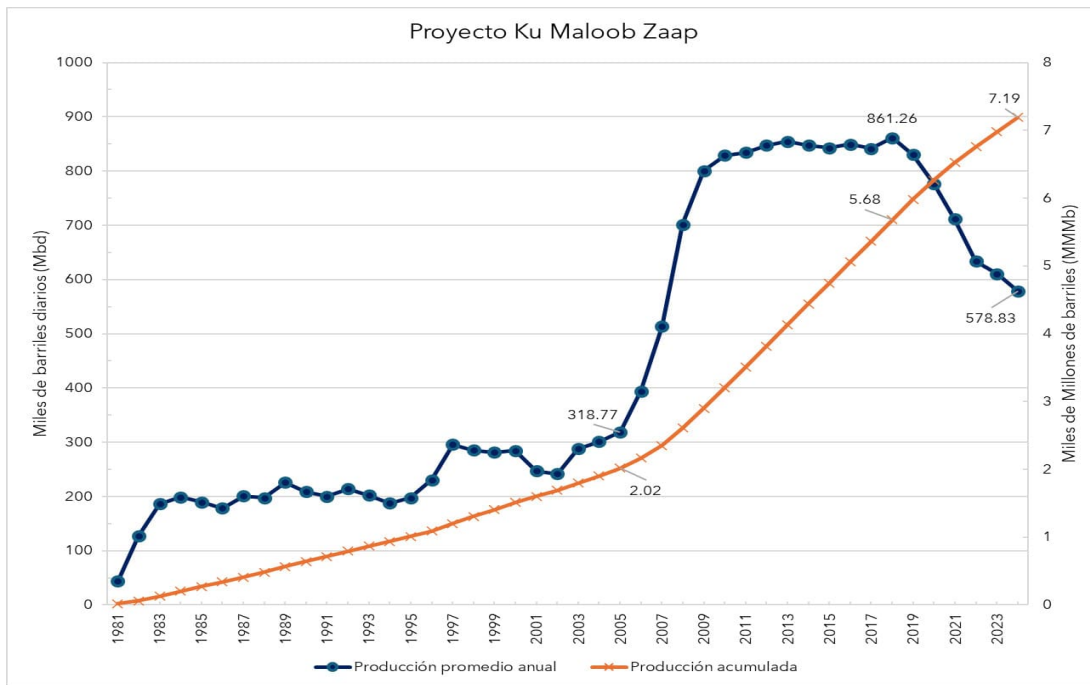


Figura 2.4: Producción promedio anual y Producción acumulada correspondiente al proyecto Ku Maloob Zaap.

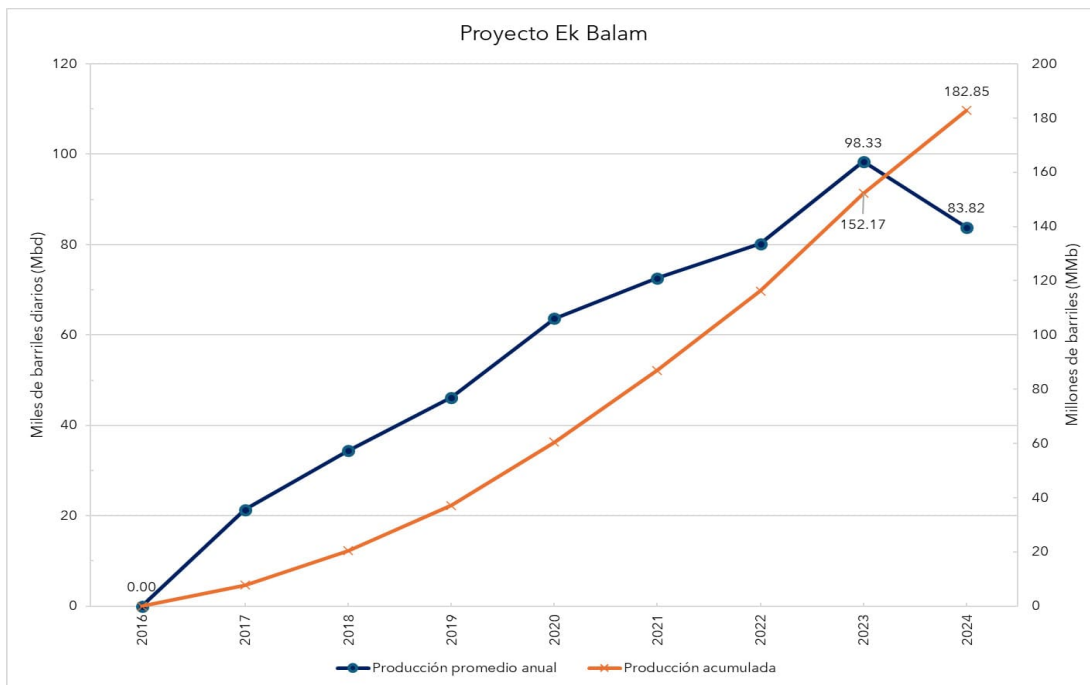


Figura 2.5: Producción promedio anual y Producción acumulada correspondiente al proyecto Ek Balam.



Figura 2.6: Ubicación de los principales proyectos conformados principalmente por formaciones naturalmente fracturadas.

Tras considerar que los campos anteriores representan la totalidad de los yacimientos naturalmente fracturados en México y contabilizar su producción, se estimó que en el periodo comprendido entre 1978 y 2024, el 73.45 % de la producción nacional provino este tipo de yacimientos (véase figura 2.7). En lo que respecta a reservas probadas, en el 2024 la reserva correspondiente a la cuenca del Sureste se calcula en 4,636.26 MMb; comparada con la reserva nacional de 5,978.16 MMb, representa el 77.55 %. (Comisión Nacional de Hidrocarburos [CNH], 2025).

Se advierte que estos datos son una aproximación, algunos de estos campos contienen areniscas productoras del Cenozoico cuya producción y reservas no se contabilizaron por separado. Adicionalmente, otras provincias también presentan formaciones fracturadas:

- ▷ La cuenca de Veracruz alberga la plataforma Mesozoica de Córdoba donde se produce gas húmedo amargo a partir de rocas carbonatadas fracturadas del Cretácico.
- ▷ La cuenca Sabinas reporta *plays* productores de gas seco cuya roca almacén consiste en carbonatos con porosidad secundaria asociada a fracturas.
- ▷ En la cuenca Tampico Misantla se han identificado las formaciones San Andrés, Tamaulipas Inferior y San Felipe-Agua Nueva como calizas fracturadas del Cretácico, productoras de aceites ligeros.

La información anterior se tomó del “*Libro Blanco de Producción de Hidrocarburos (2012 - 2018)*”, presentado por la Dirección General de Pemex Exploración y Producción Dirección General de Pemex Exploración y Producción, 2018; los dictámenes técnicos de cada campo, elaborados por la Comisión Nacional de Hidrocarburos (CNH); la Base Nacional de Campos Petroleros, gestionada por CNH, actualizada el 27 de febrero del 2025; así como el Tablero de Producción de la CNH.

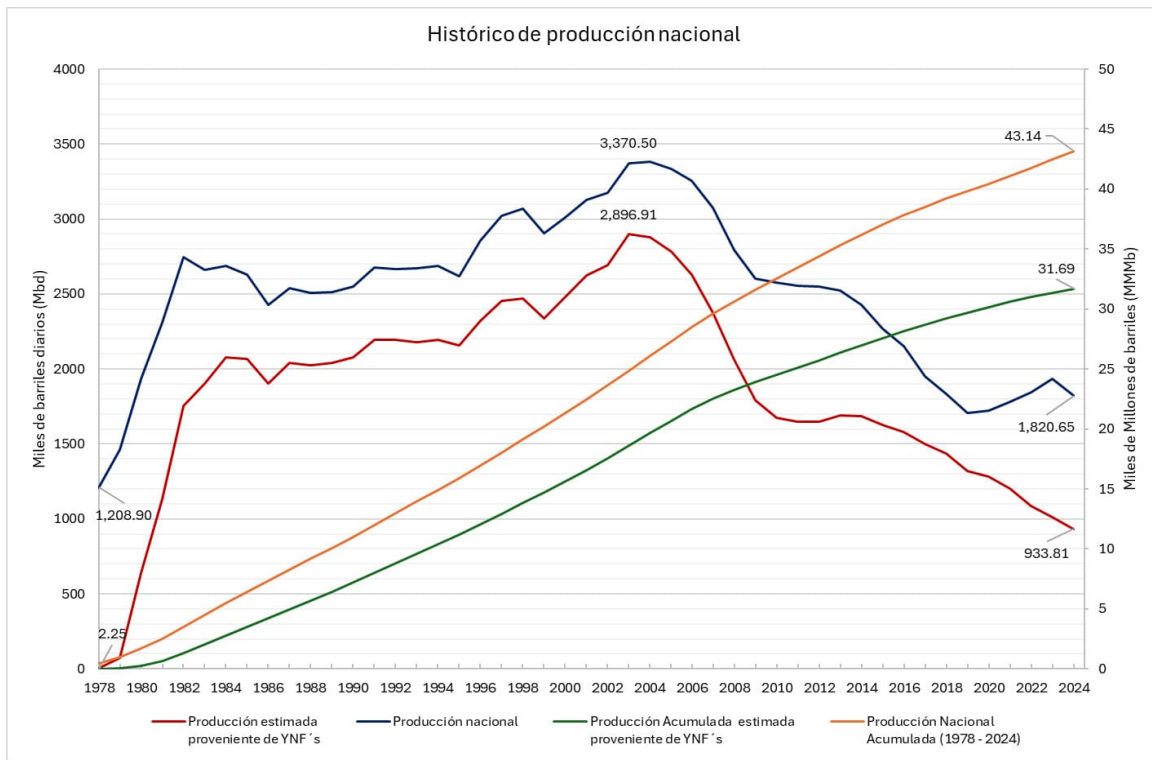


Figura 2.7: Producción promedio anual y Producción acumulada estimada de YNF en México comparada con la producción nacional.

2.2. Yacimientos Naturalmente Fracturados

Un yacimiento naturalmente fracturado es una formación almacenadora de hidrocarburos que presenta discontinuidades planares generadas por la actividad tectónica -como plegamiento y fallamiento- y/o por la contracción de la roca (Ordoñez, 2001). Estas fracturas se distribuyen como una red a lo largo del yacimiento y pueden alterar el flujo de fluidos al aumentar o disminuir la permeabilidad, el volumen de reservas y la anisotropía del medio (Nelson, 2001).

Pasando a las fracturas, estas se definen como discontinuidades en la roca que causan cambios abruptos en la secuencia natural de sus propiedades. Se forman a partir de la

falla mecánica de la roca ante diversos esfuerzos geológicos como movimientos tectónicos, variaciones en la presión litostática, efectos térmicos o la presión elevada del fluido contenido. Su extensión varía desde microfracturas con extensión de milímetros, hasta fracturas continentales que se propagan por cientos de kilómetros. Asimismo, pueden estar restringidas a una formación o propagarse por múltiples capas geológicas (Tiab y Donaldson, 2004) (véase figura 2.8).

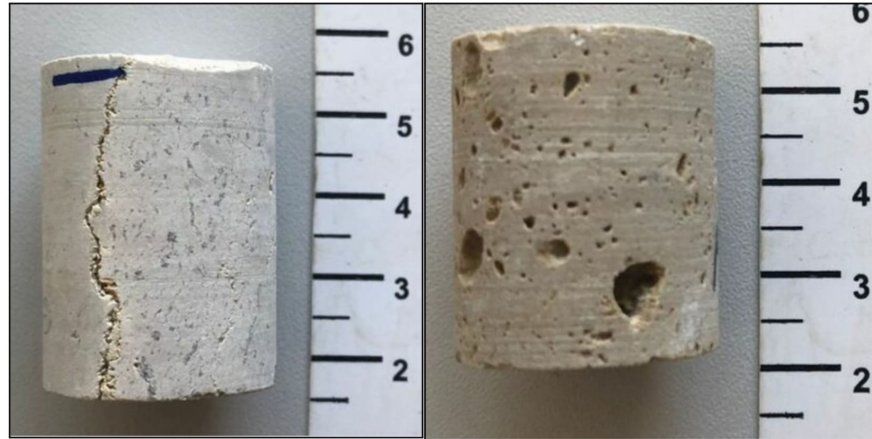


Figura 2.8: *Dos muestras de núcleo tomadas de un yacimiento carbonatado. Izquierda: se observa una fractura altamente conductiva; derecha: vóculos observados en la muestra (modificado de Lopes, Juliana et.al, 2023).*

Wu (2016) propuso una definición más enfocada al transporte de fluidos, en la que describe la fractura como una zona angosta, heterogénea y de alta permeabilidad (o bien, un medio laminar poroso especial) que se encuentra rodeado por una roca de baja permeabilidad, cuya conectividad provee canales para transportar la mayor parte del fluido a través de la formación.

Por su parte, los vóculos son una alteración de la matriz que rodea a la fractura formado cuando un fluido accede a una roca de baja permeabilidad a través de las fracturas y, al generar un desequilibrio químico con los minerales de la roca, comienza a disolver la matriz circundante. Este medio está asociado fuertemente a carbonatos, y su presencia tiene un impacto significativo en la capacidad de almacenamiento, aunque no siempre se encuentra interconectado con la red de fracturas, limitando su aporte a la producción (véase figura 2.8).

Una manera de comprender el impacto que tiene la red de fracturas en la formación es mediante la clasificación de YNF elaborada por Nelson (véase figura 2.9). Esta clasificación es ampliamente usada en el área de yacimientos y se basa en el impacto positivo o negativo

que tienen las fracturas sobre la porosidad y permeabilidad de la formación, constando de cuatro categorías:

- ▷ Tipo I: la fractura proporciona el total de la porosidad y permeabilidad del yacimiento. Los pozos perforados en estas formaciones abarcan grandes áreas de drene y presentan altas tasas de producción inicial; sin embargo, suelen mostrar una rápida declinación e invasión temprana de agua.
- ▷ Tipo II: la permeabilidad del yacimiento está principalmente dominada por la red de fracturas, mientras que la porosidad proviene de la matriz.
- ▷ Tipo III: la producción se encuentra controlada por las propiedades de la matriz, mientras que las fracturas aportan una permeabilidad adicional, mejorando el flujo de un medio que ya cuenta con una buena permeabilidad.
- ▷ Tipo IV: las fracturas se encuentran cerradas o selladas, formando barreras que limitan el flujo. Como consecuencia, aumentan la anisotropía, disminuyen la producción, el área de drene de los pozos y pueden provocar una compartimentalización del yacimiento.

En cuanto a la detección y evaluación de fracturas, diversos autores han propuesto indicadores y metodologías, de las cuales Tiab y Nelson destacan los siguientes:

- ▷ Pérdidas de circulación y aumento de la tasa de penetración durante la etapa de perforación.
- ▷ Anomalías en registros geofísicos-sónico, resistividad, calliper, densidad neutrón- asociadas con la presencia de fracturas.
- ▷ Uso de herramientas de imagen de pozo como *Formation MicroImager* o *Borehole Televiewer*.
- ▷ Índices de productividad mayores a 500 STD/D/psi.
- ▷ Identificación de curvas tipo asociadas a yacimientos fracturados al interpretar las pruebas de presión.
- ▷ Examinación de las fracturas y los canales de disolución presentes en núcleos, distinguiendo entre las fracturas naturales y las fracturas inducidas durante la toma de muestra.
- ▷ Incompatibilidad entre los valores de porosidad y permeabilidad estimados a partir de núcleos y los resultados de pruebas de presión.

Cabe aclarar que ningún método se considera concluyente por sí solo; la combinación de las técnicas es lo que permite determinar la presencia de fracturas en la formación.

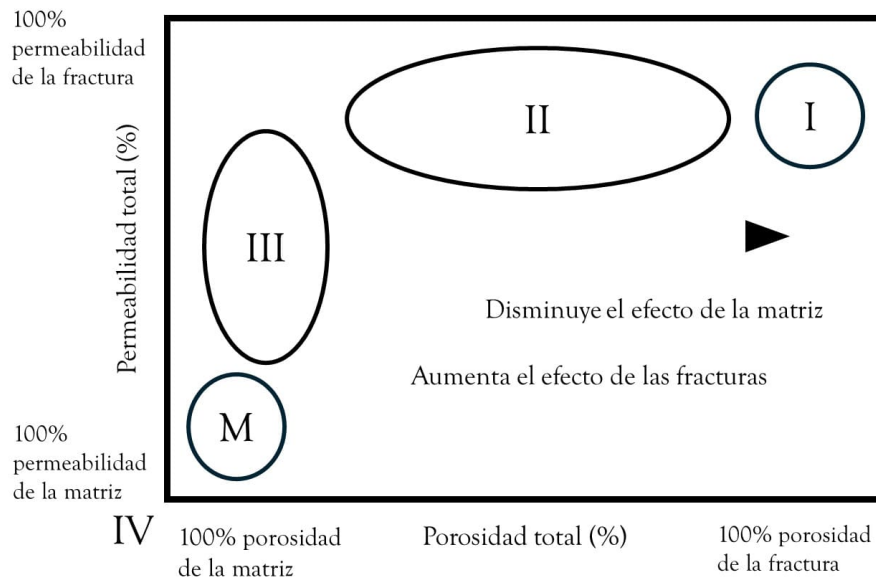


Figura 2.9: Clasificación de Nelson. (Modificada de Nelson, 2001).

2.3. Propiedades fundamentales del sistema roca-fluido

Porosidad

La porosidad es la fracción de volumen de un material que está ocupado por espacios vacíos o poros. Matemáticamente se define como:

$$\phi = \frac{V_{\text{poro}}}{V_{\text{total}}} \quad (2.1)$$

Esta propiedad determina la capacidad del material para almacenar fluidos. Existen diferentes tipos de porosidad, de las cuales las siguientes resultan de particular interés:

- ⇒ Porosidad primaria: corresponde a la porosidad desarrollada durante la depositación inicial del sedimento. También se entiende como porosidad intergranular.
- ⇒ Porosidad secundaria: se genera tras la depositación y litificación de la roca, como resultado de diversos procesos diagenéticos (por ejemplo: disolución, fracturamiento, dolomitización).
- ⇒ Porosidad de la fractura: tipo de porosidad secundaria asociada al espacio vacío entre los planos de la fractura. Según Ganat (2020), los valores típicos oscilan entre 0.1 y 5%, dependiendo del espaciamiento y espesor de la fractura. Para estimar la

porosidad de la fractura se puede emplear la siguiente ecuación (Teklu et al., 2013):

$$\phi_f = 3.2808 \times 10^{-6} \left(\frac{w_f}{L_x} + \frac{w_f}{L_y} + \frac{w_f}{L_z} \right) \quad (2.2)$$

⇒ Porosidad vugular: también clasificada como porosidad secundaria, caracterizada por la presencia de cavidades irregulares cavernosas dentro de la roca, formada por la disolución de minerales.

⇒ Porosidad total: suma de todas las porosidades presentes en la formación.

$$\phi_t = \phi_m + \phi_f + \phi_v \quad (2.3)$$

Permeabilidad

Esta propiedad describe la capacidad de un fluido para atravesar un material poroso. Su comportamiento está descrito por la ley de Darcy (1956), la cual se presenta en la siguiente sección. La permeabilidad constituye uno de los parámetros clave en la ingeniería de yacimientos al controlar la productividad de la formación, por ello se intenta estimar lo más preciso posible durante las etapas tempranas del desarrollo del campo. En general, el rango promedio oscila entre 0.01 a 1 Darcy (D), dependiendo del tipo de formación. Existen diferentes tipos de permeabilidad, siendo las más relevantes para este trabajo:

⇒ Permeabilidad relativa: en un medio ocupado por dos o más fluidos, la permeabilidad relativa se establece como la relación entre la permeabilidad de una fase en particular (permeabilidad efectiva) y la permeabilidad absoluta del medio poroso.

$$k_{ro} = \frac{k_o}{k} \quad k_{rw} = \frac{k_w}{k} \quad k_{rg} = \frac{k_g}{k} \quad (2.4)$$

Esta propiedad está influenciada por la saturación del fluido, pues a mayor saturación mayor es su permeabilidad efectiva. La relación se describe mediante una curva de permeabilidad relativa.

⇒ Permeabilidad de la fractura:

- Permeabilidad intrínseca: es la permeabilidad medida durante el flujo de fluidos a través de una fractura individual o una red de fracturas, considerando únicamente el área de flujo de la fractura (es decir, no se toma en cuenta el área de la matriz).
- Permeabilidad convencional (*bulk*): la medición incluye el área de la matriz que rodea la fractura o red de fracturas. Para estimar la permeabilidad de la

fractura se emplea la siguiente relación (Teklu et al., 2013):

$$k_{f\text{eff}} = k_f \phi_f \quad \text{donde} \quad k_f = 1013 \frac{w_f^2}{12} \quad (2.5)$$

Para relacionar la permeabilidad convencional con la permeabilidad intrínseca se considera la siguiente relación (Kazemi, 1969):

$$k_{f\text{int}} = \frac{k_{f\text{eff}} L_z - k_m (L_z - w_f)}{w_f} \quad (2.6)$$

⇒ Permeabilidad del sistema matriz-fractura (promedio): suma de la permeabilidad convencional de la fractura y de la matriz, refleja el comportamiento global del medio poroso compuesto.

$$k_t = k_f + k_m \quad (2.7)$$

Compresibilidad de la formación

Será la disminución del volumen poroso por unidad de volumen inicial al variar una unidad de presión a una temperatura dada. Matemáticamente:

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (2.8)$$

La compresibilidad se debe a la expansión del grano de la roca al vaciar el espacio poroso y disminuir la presión del fluido, así como a la compactación de la formación, resultando en una disminución de la porosidad. En un medio fracturado, la compresibilidad total de la formación se obtiene como:

$$c_t = \phi_m c_{tm} + \phi_f c_{tf} + \phi_v c_{tv} \quad (2.9)$$

Normalmente, la compresibilidad de los vórgulos se aproxima a tres veces la compresibilidad de la matriz (Tkhostov, 1970).

Saturación de un fluido

Hace alusión a la relación entre el volumen que ocupa determinado fluido en el medio poroso y el volumen de los poros de la roca. En otras palabras, es la proporción del medio lleno por un fluido específico. Considerando un medio saturado por las fases agua-aceite-gas, la saturación se expresa como:

$$S_w = \frac{V_w}{V_p} \quad S_o = \frac{V_o}{V_p} \quad S_g = \frac{V_g}{V_p} \quad (2.10)$$

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (2.11)$$

Densidad del fluido

Propiedad intensiva de la materia que indica la cantidad de masa presente por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.12)$$

Por su parte, la densidad relativa es el resultado de la densidad de un fluido entre una sustancia de referencia. Para los líquidos se emplea el agua, mientras que para los gases se emplea el aire.

$$\gamma_x = \frac{\rho_{fluido}}{\rho_{referencia}} \quad (2.13)$$

Comúnmente la densidad del petróleo se expresa en unidades API:

$$API = \frac{141.5}{\gamma_o} - 131.5 \quad (2.14)$$

Se puede clasificar el aceite de acuerdo con su densidad. Siguiendo la propuesta de León García et al. (2013), los fluidos se clasifican como se indica en la tabla 2.1:

Tabla 2.1: Clasificación de fluidos petroleros según su densidad
(modificada de León, 2013)

Clasificación	Aceite Negro	Aceite Ligero	Aceite Volátil	Gas y Condensado
Densidad [g/cm ³]	> 0.865	0.834–0.865	< 0.834	0.731–0.815
API	< 32	32–38	> 38	42–62

En cuanto al gas, se puede calcular su densidad mediante la ley de los gases ideales si se conoce su presión y temperatura:

$$\rho_g = \frac{PM}{zRT} \quad (2.15)$$

Estas propiedades están sujetas a las condiciones de presión y temperatura, por lo que se han definido condiciones estándar para su medición, siendo $T = 60^\circ F$ o $288.7 K$ y $P = 14.7 \text{ psi}$ o 1 atm .

Factor volumétrico del fluido

Establece la relación entre el volumen del fluido a condiciones del yacimiento (c.y.) y condiciones de superficie o estándar (c.e.).

$$B_f = \frac{V_{c.y.}}{V_{c.e.}} \quad (2.16)$$

En el caso del aceite, el factor refleja el encogimiento del crudo al llegar a superficie ocasionado por la liberación del gas disuelto conforme se reduce la presión. Por su parte, para el gas representa su expansión conforme se reduce la presión. A partir de la ley de gases ideales, el factor volumétrico del gas se define como:

$$B_g = \frac{zT_{c.y.}P_{c.e.}}{T_{c.e.}P_{c.y.}} \quad (2.17)$$

Viscosidad

Es el parámetro que mide la resistencia de un fluido a fluir. Se puede medir de dos maneras: viscosidad dinámica (o absoluta) y viscosidad cinemática. Para este trabajo se emplea la viscosidad dinámica. Esta propiedad depende de la presión, temperatura y composición del fluido.

La viscosidad del crudo aumenta con la presión y disminuye con el incremento de temperatura. En cuanto a su composición, a mayor cantidad de gas disuelto (es decir, más componentes ligeros) disminuye su viscosidad; conforme los componentes volátiles se separan y queda la fracción más pesada, aumenta la viscosidad.

En el caso del gas natural, a presiones altas la viscosidad tiende a aumentar. Bajo esta condición, el gas se comporta como un aceite: el aumento de la temperatura reduce la viscosidad, mientras que una mezcla con un mayor peso molecular incrementa la viscosidad (véase imagen 2.11). Por el contrario, a presiones bajas las variaciones se revierten: un aumento de la temperatura incrementa la viscosidad, mientras que un aumento del peso la disminuye.

A manera de referencia, la imagen 2.10 brinda una noción de los valores típicos para diferentes fluidos.

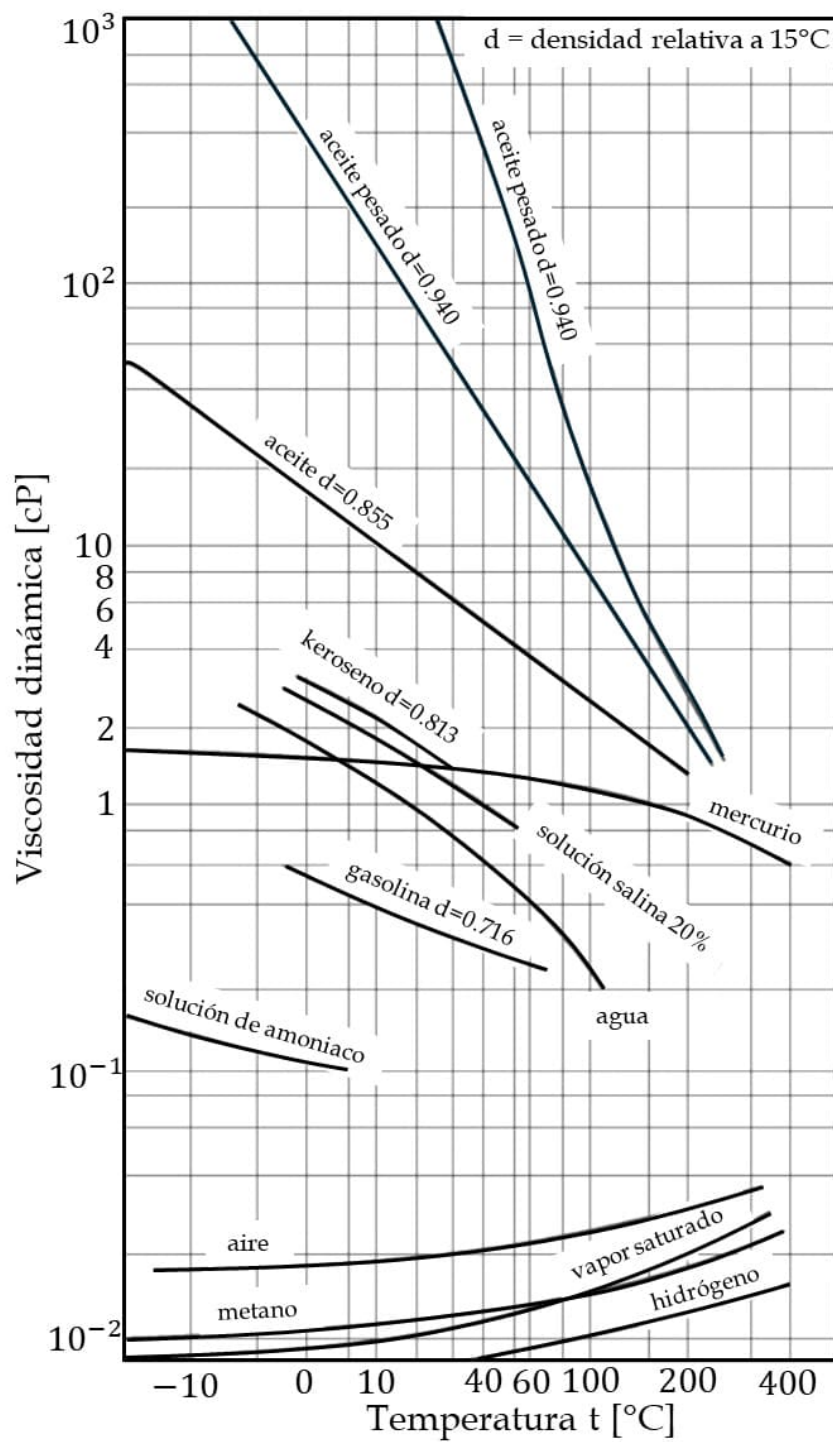


Figura 2.10: Viscosidad de diversos fluidos al aumentar la temperatura (modificada de Song, 2018).

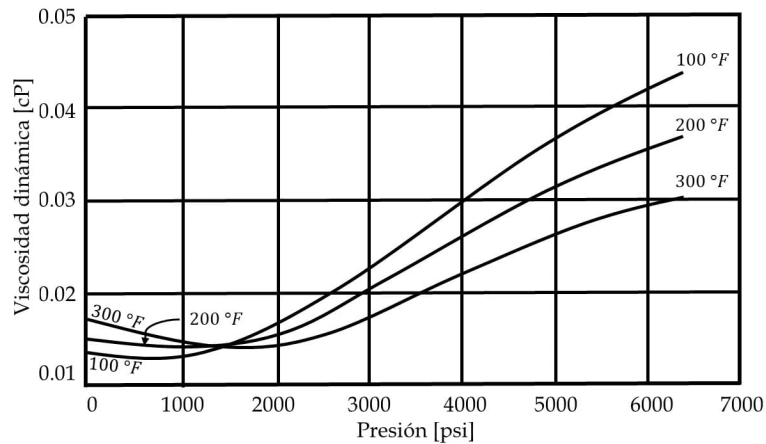


Figura 2.11: Comportamiento del gas natural al aumentar la presión y la temperatura (modificada de Banzer, 1996).

Compresibilidad del fluido

Similar a la compresibilidad de la formación, es la variación del volumen de un fluido por unidad de volumen inicial al variar una unidad de presión.

$$c_f = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (2.18)$$

Para un gas:

$$c_g = \frac{1}{P} - \frac{1}{z} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.19)$$

Relación de solubilidad

Se refiere al volumen de gas natural que puede ser disuelto en una unidad de volumen de aceite (medidos a condiciones estándar) cuando esta mezcla se realiza a condiciones del yacimiento. En otras palabras:

$$R_s = \frac{\text{Volumen del gas disuelto @c.y. [scf]}}{\text{Volumen de aceite muerto @c.y. [STB]}} \quad (2.20)$$

Tensión interfacial

Al poner en contacto dos fluidos inmiscibles, las moléculas ubicadas en la interfase experimentan un desequilibrio de fuerzas que las mantiene dentro de su propia fase, (evitando su mezcla con la otra fase). Esta energía que mantiene la superficie de separación es conocida como tensión superficial. Si alguna de las dos fases es un gas (generalmente

aire), se denomina tensión superficial.

Mojabilidad

Cuando dos fluidos inmiscibles (agua y aceite) entran en contacto con una superficie sólida, uno de ellos tiende a extenderse sobre dicha superficie. La preferencia del sólido a estar en contacto con una de las fases se conoce como mojabilidad. En el yacimiento, la roca puede ser mojada por la fase acuosa, por aceite, o tener una mojabilidad mixta. Esta propiedad influye directamente en la permeabilidad relativa, los perfiles de saturación, el avance del acuífero y los procesos de recuperación secundaria y mejorada.

Presión capilar

Las fuerzas superficiales e interfaciales ocasionadas por los fluidos almacenados en el yacimiento, la forma y el tamaño del poro, así como la mojabilidad generan una diferencia de presión en la interfase que separa los fluidos inmiscibles, a lo cual se le denomina presión capilar (véase Ganat, 2020).

Este fenómeno afecta la capacidad de la formación para liberar y movilizar el hidrocarburo. Una manera de medir su impacto es mediante el número capilar, el cual expresa la relación entre las fuerzas viscosas y las fuerzas capilares que permite evaluar la eficiencia de los procesos de desplazamiento.

Propiedades adicionales del medio fracturado

Tamaño de la fractura: es la distancia total que penetra la fractura en la formación medida a partir del pozo.

Apertura de la fractura: es la distancia perpendicular entre las dos paredes que comprende la fractura. Este valor oscila entre los 1×10^{-3} cm hasta 5×10^{-1} cm (Nelson, 2001).

Espaciamiento de la fractura: es la distancia promedio entre dos planos de fractura paralelos medida perpendicularmente.

Densidad de fracturas: también denominado como intensidad de fracturamiento, se toma como la cantidad promedio de fracturas en un volumen determinado.

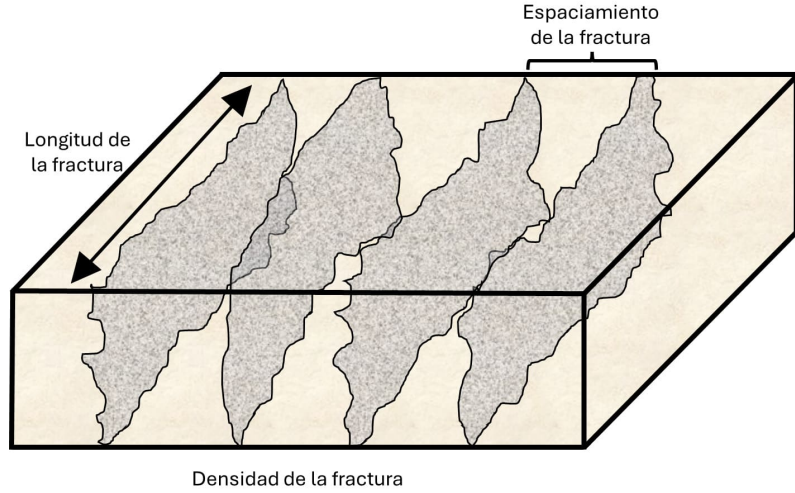


Figura 2.12: *Propiedades del medio fracturado (modificado de Tiab, 2004).*

Factor de forma

En la ecuación de transferencia, el factor de forma (*shape factor*) es el término empleado para reflejar la geometría de los bloques de matriz, e influye en el flujo interporoso entre las dos regiones. Warren y Root propusieron la fórmula:

$$\sigma = \frac{4n(n+2)}{l^2} \quad (2.21)$$

donde n representa el número de conjuntos de fracturas ortogonales, y l es la longitud característica del bloque de matriz (Teklu et al., 2013). Para un conjunto de fracturas horizontales (*slabs*), Streltsova (1983) propuso:

$$\sigma = \frac{1}{H^2} \quad (2.22)$$

donde $H = L_z/2$.

Factor de flujo interporoso

λ cuantifica la capacidad de transferencia del fluido de la matriz a la fractura y viceversa.

$$\lambda = \sigma \frac{k_m r_w^2}{k_f} \quad (2.23)$$

Si $\lambda = 1$, se interpreta como una ausencia de fracturas, lo que implica que el yacimiento fracturado se comporta como un medio homogéneo (a causa de una alta densidad de fracturamiento), o que la fractura y la matriz tienen propiedades similares. Regularmente,

estas formaciones exhiben valores de aproximadamente 10^{-3} . Valores mayores a 10^{-5} indican una buena interconectividad; por el contrario, valores menores a 10^{-8} sugieren que las fracturas están pobremente interconectadas o parcialmente selladas.

Capacidad de almacenamiento

ω es la proporción del fluido almacenado en las fracturas con respecto a todo el fluido presente en el yacimiento.

$$\omega = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_t} = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m} \quad (2.24)$$

Un valor aproximado a 1 indica que el fluido está almacenado en la fractura, mientras que un valor aproximado a cero indica que el fluido está almacenado en la matriz.

2.4. Ecuaciones de flujo y transporte en medios porosos

Ecuación de Darcy

Definida en 1856 por Henry Darcy, expresa matemáticamente el flujo laminar a través del medio poroso. A partir de una serie de experimentos en los que hizo pasar un flujo constante de agua a través de una columna de arena, Darcy observó una relación proporcional entre el volumen de descarga Q y gradiente hidráulico $\Delta h/\Delta l$ obteniendo:

$$Q = -AK \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (2.25)$$

donde A es la sección transversal de la columna por la cual fluye el fluido, Δh la carga hidráulica, y Δl la distancia entre los puntos de medición (véase figura 2.10). Sea

$$Q = \vec{v}_i A \quad (2.26)$$

Sustituyendo Q en 2.25 y simplificando:

$$\vec{v}_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.27)$$

La conductividad hidráulica se define como:

$$K_i = \frac{\rho g k_i}{\mu} \quad (2.28)$$

donde ρ es la densidad, g la constante de aceleración gravitacional, k_{ij} el tensor de la permeabilidad correspondiente al medio poroso y μ la viscosidad. Con el objetivo de utilizar la nomenclatura estandar encontrada en ingeniería petrolera, se cambia la definición de carga hidráulica por potencial, después de unos pasos algebraicos se llega a:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2.29)$$

sustituyendo 2.29 en 2.27 y haciendo el álgebra correspondiente se tiene:

$$\vec{v}_i = -\frac{k_i}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (2.30)$$

Despreciando los efectos gravitacionales resulta:

$$\vec{v}_i = -\frac{k_i}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \quad (2.31)$$

En su forma vectorial:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (2.32)$$

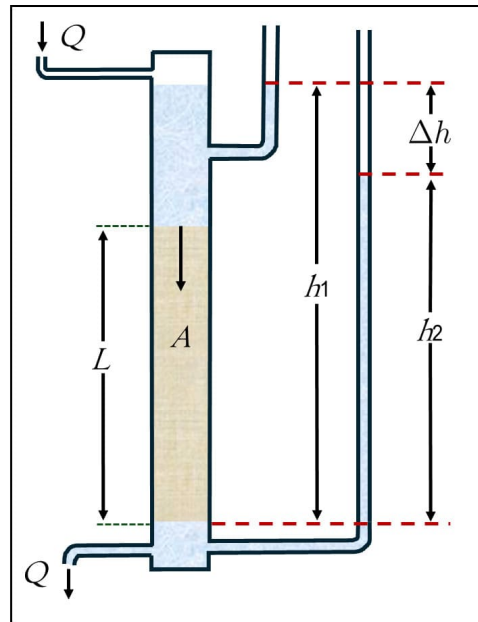


Figura 2.13: Experimento de Darcy (modificado de Song, 2018).

Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad se basa en el principio de conservación de masa, y establece que el cambio temporal de masa dentro de un volumen de control es igual a la suma de los flujos de masa a través de los límites del volumen más el flujo de masa provenientes de fuentes y sumideros. Matemáticamente se expresa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}_i) + q_s \quad (2.33)$$

donde ∇ es el operador nabla, y q_s el término fuente y sumidero (por ejemplo: un pozo perforado en el medio poroso). Considerando $q_s = 0$ y el medio poroso como el volumen de control:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -\nabla(\rho\vec{v}_i) \quad (2.34)$$

donde ϕ es la porosidad total.

Ecuación de Difusión

Se obtiene tras la sustitución y desarrollo de la ecuación 2.32 en 2.34:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -\nabla\left(\rho\left(-\frac{k}{\mu}\nabla p\right)\right) \quad (2.35)$$

Considerando un proceso isotérmico en un medio homogéneo isotrópico, un fluido de viscosidad constante ligeramente compresible, gradientes de presión pequeños y efectos gravitacionales despreciables se obtiene:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi\mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.36)$$

Para flujo lineal:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi\mu c_t}{k_i} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.37)$$

(véase Dietrich et al., 2005; Sahimi, 2011).

Modelos de simulación

La gran complejidad del sistema poroso fracturado junto a los múltiples fenómenos físicos asociados al transporte y flujo de fluidos impiden una representación detallada del yacimiento. Para poder modelar su naturaleza, se emplea un modelo conceptual, es decir, una representación simplificada del mismo mediante parámetros que emulan las propiedades principales y su comportamiento general. Posteriormente, el modelo conceptual se

traslada a un modelo matemático mediante ecuaciones capaces de describir el comportamiento del sistema considerando las relaciones cuantitativas entre sus variables.

Existen diferentes modelos matemáticos que tratan el problema del transporte de fluidos en medios porosos fracturados bajo sus propias consideraciones. A continuación se presentan algunos de ellos.

Modelos continuos

Este tipo de modelos conceptualizan los diferentes medios presentes en el yacimiento (matriz, fractura, vórgulos) como espacios continuos separados que se extienden por toda la formación. Las propiedades petrofísicas de cada medio están representadas por valores efectivos, y el intercambio de fluidos entre ellos se modela mediante una ecuación de transferencia (véase figura 2.14). Se pueden considerar como modelos “simplificados” ya que no describen a detalle las propiedades geométricas ni la distribución espacial de las fracturas.

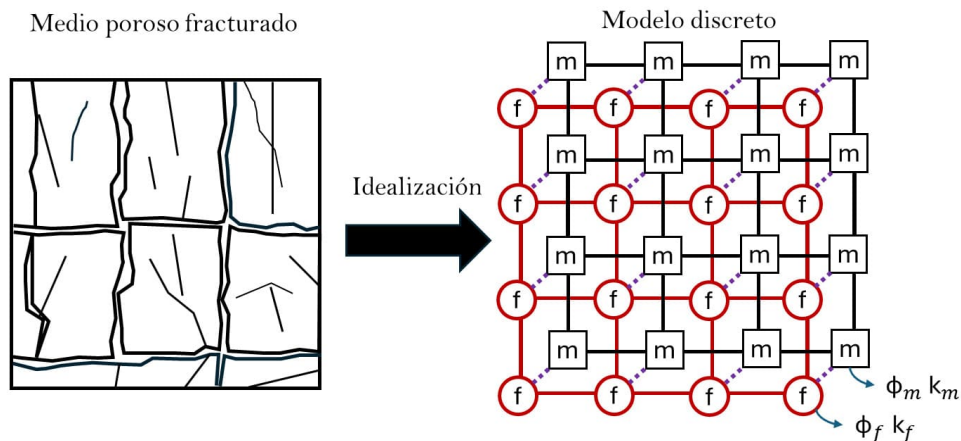


Figura 2.14: Modelo discreto.

Ejemplos de estos modelos son:

- ⇒ **Modelo continuo efectivo:** la fractura y la matriz se integran en un único dominio, por lo que las propiedades del modelo representan ambos medios. Estos modelos son de bajo costo computacional y de baja complejidad al no necesitar términos ni parámetros adicionales a las de un modelo convencional. Su implementación se considera válida cuando la red de fracturas es extremadamente densa e interconectada por lo que el yacimiento se comporta como un medio homogéneo, o si hay poca diferencia entre las permeabilidades de la fractura y la matriz (Wu, 2016).

⇒ **Modelo de doble porosidad:** representa la interacción entre dos tipos de porosidad con propiedades contrastantes. Por un lado está la fractura con una baja capacidad de almacenamiento pero alta transmisibilidad; por el otro, la matriz que posee una alta capacidad de almacenamiento y baja transmisibilidad. Esta clase de modelos asume que el fluido contenido en la matriz se transfiere a la fractura, la cual lo transporta hasta el pozo, sin considerar flujo entre bloques de matriz. Los resultados más confiables se obtienen cuando la red de fracturas exhibe una geometría regular y bien definida, o la formación no contiene fracturas altamente conductivas que alteren notablemente el patrón de flujo (véase figura 2.15).

⇒ **Modelo de doble porosidad-doble permeabilidad:** al igual que los modelos anteriores representa la matriz y la fractura en su respectivo dominio, con la diferencia en que en estos modelos sí se contempla el flujo a través de las conexiones matriz - matriz (véase figura 2.15).

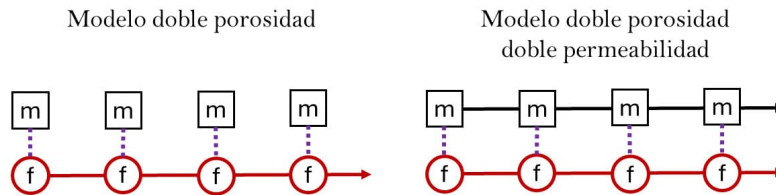


Figura 2.15: Representación conceptual de los modelos de doble porosidad.

⇒ **Modelo de triple porosidad:** algunas pruebas de presión tomadas en yacimientos fracturados mostraban un comportamiento anómalo en la zona de transición al formar una tercera pendiente en la gráfica de presión. Para explicar este fenómeno, se propuso la presencia de un tercer medio poroso en la formación que podía estar conformado por una serie de fracturas pequeñas que interconectan la matriz con las fracturas mayores, o por espacios cavernosos originados por la disolución de la roca (vúgulos), formulando así los modelos de triple porosidad (Jalali y Ershaghi, 1987; Camacho Velázquez et al., 2005) (véase figura 2.16). Su desarrollo ha generado gran interés para su implementación en formaciones carbonatadas donde la presencia de vúgulos es frecuente y tiene un impacto significativo en la cantidad de reservas. Previo a estos modelos, para estudiar el efecto de los vúgulos se integraban los vúgulos conectados a la red de fracturas como parte de la misma, mientras que los vúgulos aislados se asociaban a la matriz, reduciendo el problema a un modelo de doble porosidad. No obstante, esta simplificación resulta insuficiente, ya que asociar parte de los vúgulos al sistema de fracturas conduce a una subestimación de las reservas debido a la diferencia significativa entre sus porosidades. Además, la disparidad de

permeabilidades en los sistemas porosos ocasiona que uno de los medios controle el flujo de fluidos a diferentes tiempos de producción, resultando en 3 rectas distintas.

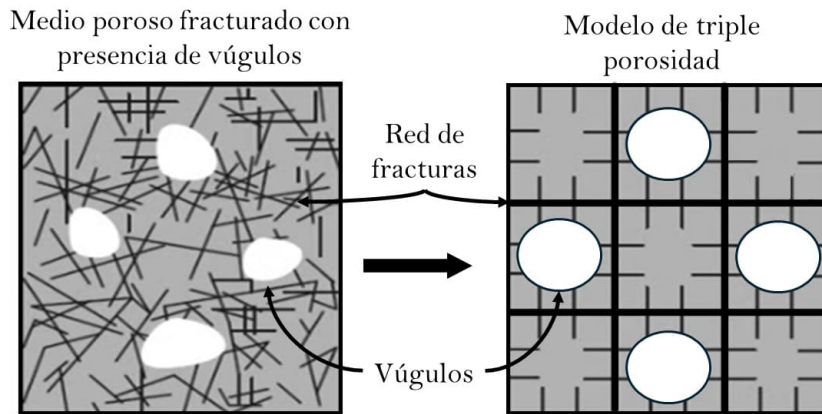


Figura 2.16: Modelo de triple porosidad (modificada de Wu, 2016).

⇒ **Modelos fractales:** se han observado que los patrones de fracturamiento sufridos por la roca pueden ser descritos por medio de una ley de potencias, lo que sugiere que la geometría de una red de fracturas puede ser representadas mediante un patrón inicial que se replica a escalas menores (Acuña et al., 1995) (véase figura 2.17). Con base en lo anterior, diversos autores han propuesto modelos para describir el flujo de fluidos en yacimientos fracturados considerando que las propiedades del medio exhiben una relación fractal.

Sin embargo, su viabilidad ha sido cuestionada. Sahimi (2011) explica que el modelo cuenta con múltiples parámetros los cuales aún no se tiene claro cómo estimar, incluso si se conociera el patrón de fracturas. Adicionalmente afirma que el hecho que se pueda crear un patrón geométrico similar al de la formación no garantiza que sus propiedades de flujo y transporte sean similares entre sí.

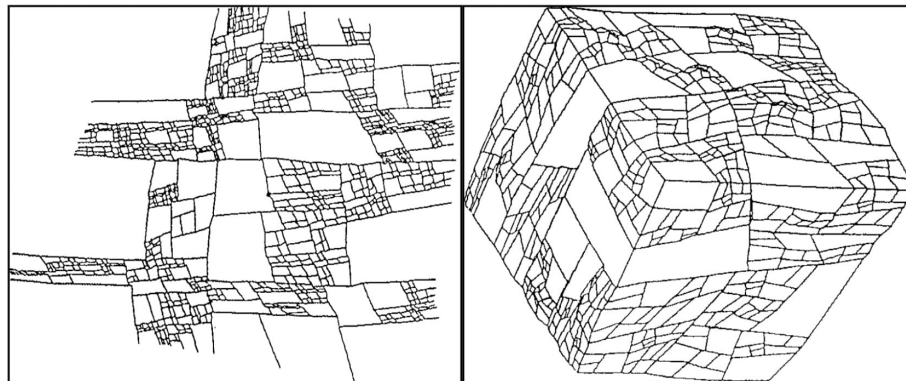


Figura 2.17: Modelo fractal 2D (izquierda) y 3D (derecha). (Sahimi, 2011).

⇒ **Modelo MINC**: por sus siglas en inglés (*Multiple-Interacting Continua*), se caracterizan por la subdivisión de las celdas correspondientes a la matriz en múltiples subdominios concéntricos que interactúan entre sí, cada una con sus propiedades petrofísicas (véase figura 2.18). Este enfoque asume que los cambios de presión, temperatura o concentración se propagan rápidamente a través del sistema de fracturas, mientras que en el interior de la matriz los cambios se reflejan más lento. El flujo dentro la matriz tiene un régimen transitorio, y está controlado principalmente por la distancia a la fractura. El principal interés en esta clase de modelos está en simular procesos de recuperación con fluidos miscibles e inmiscibles, y métodos térmicos.

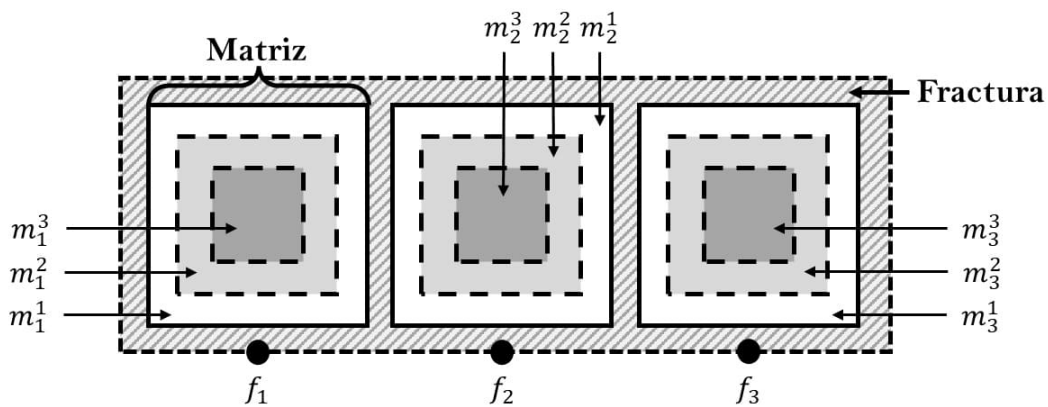


Figura 2.18: Modelo MINC (modificado de Kazemi, 1993).

La aplicación de los modelos continuos muestra mejores resultados en yacimientos cuyas fracturas (y vórgulos si aplica) presentan una distribución relativamente uniforme y homogénea. Por el contrario, presentan limitaciones bajo las siguientes condiciones (Sahimi, 2011):

- ⇒ Las fracturas son discretas, es decir, no forman una red interconectada.
- ⇒ El flujo de fluidos está dominado por unas pocas fracturas de gran tamaño con una capacidad de flujo significativamente mayor.
- ⇒ No se intuye claramente qué ecuación de transferencia es la más adecuada para describir la interacción matriz-fractura.

Modelos discretos

En lugar de representar la red de fracturas como un dominio continuo que abarca todo el yacimiento, los modelos discretos trabajan con una malla que especifica la ubicación, geometría y distribución de las fracturas en el yacimiento (véase figura 2.19).

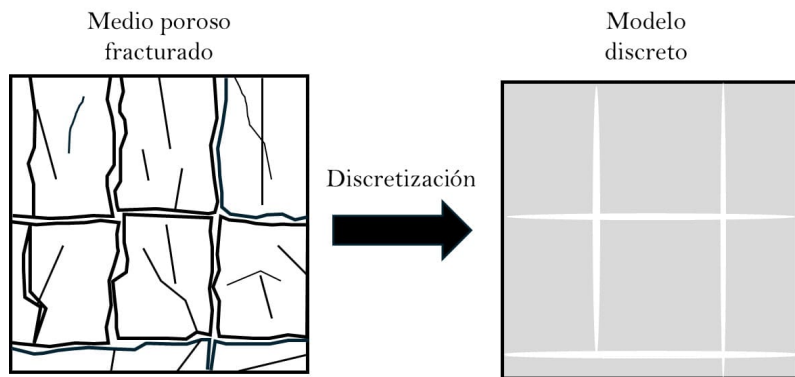


Figura 2.19: Modelo discreto.

⇒ **Modelo de red de fracturas discretas (DFN)**: la premisa principal consiste en asumir que el almacenamiento y transporte del fluido ocurre principalmente en las fracturas, mientras que el material poroso que la rodea es impermeable. Por ello se representa únicamente la red de fracturas sin considerar la matriz (véase figura 2.20). Estos modelos se consideran apropiados para formaciones cuya porosidad y permeabilidad recaen en la red de fracturas. Para su implementación se requiere conocer a detalle las propiedades de las fracturas, así como su geometría y distribución espacial.

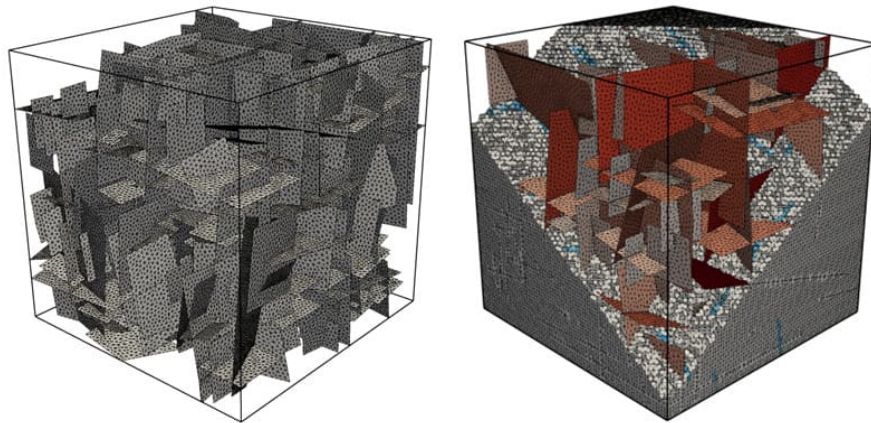


Figura 2.20: (Izquierda) Modelo DFN compuesto por 257 fracturas. (Derecha). Modelo DFM. (Jeffrey Hyman et al., 2021).

⇒ **Modelo de matriz de fractura discreto (DFM)**: a diferencia del anterior, admite que el fluido se encuentra contenido en las fracturas y en la matriz, por lo que contempla adicionalmente la interacción matriz-fractura (véase figura 2.20). Este modelo es apropiado para modelar yacimientos que presenten fracturas cuya estructura afecta directamente el patrón de flujo. Debido a la alta complejidad que conlleva

modelar todas las fracturas, sólo se conservan aquellas con mayor impacto; el resto se unifica con el medio poroso. Requiere un conocimiento detallado de la geometría y distribución espacial de la fractura, así como las propiedades de ambos medios.

En la práctica, rara vez se conoce a gran detalle la geometría de la red de fracturas, limitando la aplicación de los modelos discretos.

Finalmente, es recomendable seleccionar el modelo adecuado considerando la información geológica disponible, el conocimiento técnico, los recursos computacionales y los costos de desarrollo. Además, dependiendo de las características propias del yacimiento o los requerimientos del proyecto, puede ser necesario priorizar la precisión en la representación de la red de fracturas que la matriz, o viceversa. Por consecuencia, la elección correcta del modelo impactará en la calidad de las predicciones y en la toma de decisiones para el desarrollo del campo (véase figura 2.21).

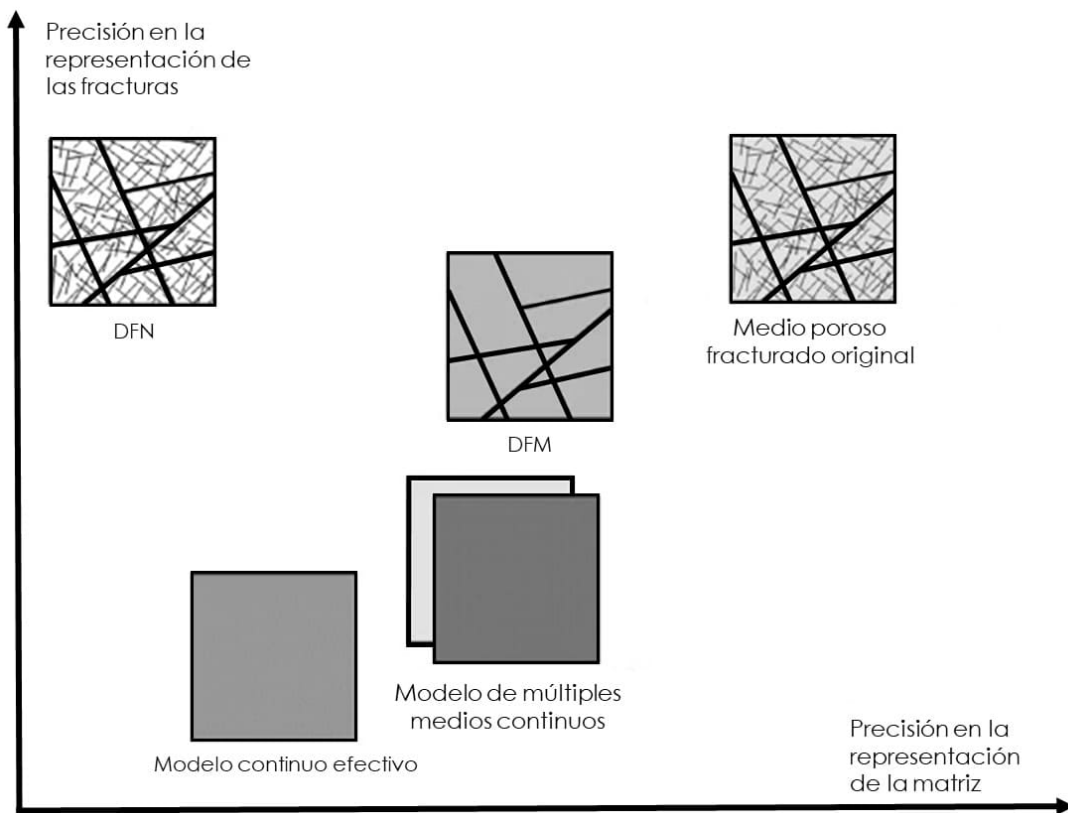


Figura 2.21: Comparativa entre los diferentes modelos de simulación (modificado de Berre, 2018).

3. Simulación del flujo de fluidos en Yacimientos Fracturados

Las soluciones presentadas a continuación tienen por objetivo describir el flujo de fluidos a través de un yacimiento fracturado. Las consideraciones generales son:

- Flujo radial monofásico ligeramente compresible e isotérmico.
- El yacimiento está conformado por dos medios porosos: matriz y fractura.
- Ambos medios son homogéneos e isotrópicos.
- Elemento repetitivo consta de bloques de matriz con forma de *slabs* intercalada por fracturas horizontales (véase figura 3.1).
- El fluido va de la matriz a las fracturas y de las fracturas al pozo.
- No existe flujo entre los bloques de matriz.
- Parámetros -como viscosidad del fluido, compresibilidad y porosidad del medio- se consideran constantes e independientes de la presión.

Se advierte que en algunos modelos se realizan algunas suposiciones diferentes las cuales se irán especificando conforme se describa el mismo.

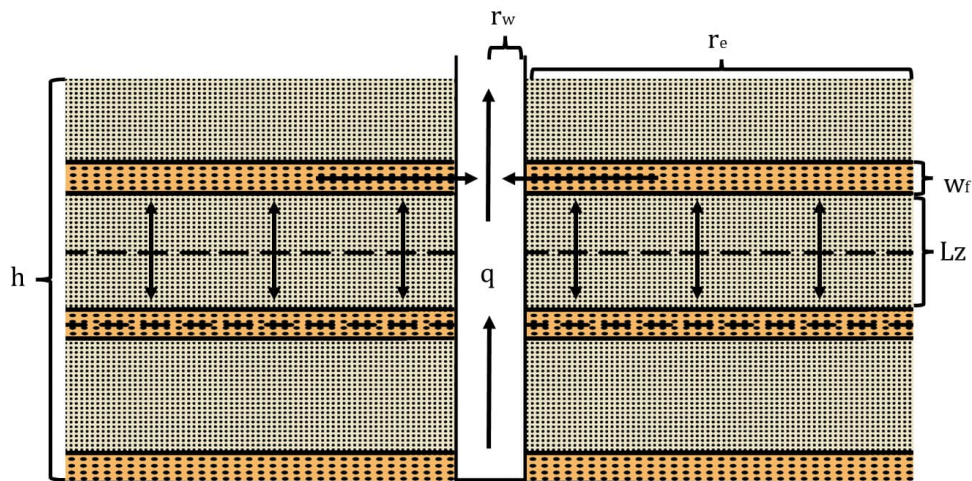


Figura 3.1: Modelo conceptual del yacimiento (modificado de Swaan, 1976).

3.1. Soluciones analíticas

3.1.1. Warren y Root

En el trabajo titulado “*The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs*”, Warren y Root (1963) desarrollaron un modelo de doble porosidad el cual considera un flujo radial de un fluido monofásico ligeramente compresible en un medio homogéneo anisotrópico, con un régimen de flujo pseudoestacionario para el intercambio de fluidos en la interfase matriz-fractura. La conceptualización original de este modelo se muestra en la figura 3.2.

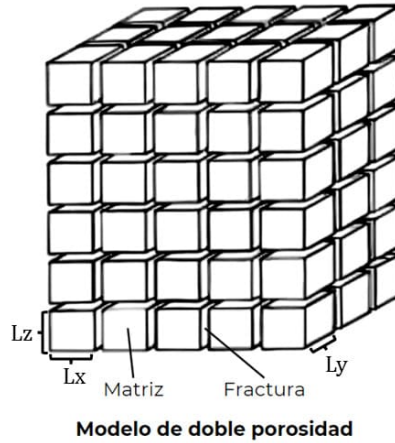


Figura 3.2: Modelo de doble porosidad con geometría “cubos de azúcar” (modificado de Warren y Root, 1963).

El modelo parte de las ecuaciones de difusión para la fractura y la matriz:

$$\frac{k_f}{\mu} \nabla^2 p_f = [\phi c_t]_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - q \quad \text{Fractura} \quad (3.1)$$

$$\frac{k_m}{\mu} \nabla^2 p_m = [\phi c_t]_m \frac{\partial p_m}{\partial t} - q \quad \text{Matriz} \quad (3.2)$$

Resolviendo las ecuaciones para q e igualando resulta:

$$\frac{k_f}{\mu} \nabla^2 p_f + \frac{k_m}{\mu} \nabla^2 p_m = [\phi c_t]_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + [\phi c_t]_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (3.3)$$

Asumiendo un comportamiento pseudoestacionario en los bloques de matriz, el flujo proveniente del bloque está dado por:

$$q = -[\phi c_t]_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (3.4)$$

Para describir la caída de presión en la interfase se tiene la ecuación de transferencia:

$$\tau = \frac{\sigma k_m}{\mu} (p_m - p_f) \quad (3.5)$$

Tras las sustituciones correspondientes, aplicar la transformada de Laplace y realizar la inversión analítica, la solución viene dada por:

$$P_{Df}(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{4}{e^{2\gamma} r_D^2} \right) + \ln(e^\gamma t_D) - E_i \left(\frac{\lambda}{\omega(1-\omega)} t_D \right) + E_i \left(\frac{\lambda}{(1-\omega)} t_D \right) \right] \quad (3.6)$$

Para considerar el daño a la formación:

$$P_{wD_S} = \frac{1}{2} \left[\ln(t_D) + 0.80908 + E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right) - E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{1-\omega} \right) \right] + S \quad (3.7)$$

Retomando el factor de forma σ , para la geometría original de cubos de azúcar resulta:

$$\sigma = 4 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \quad (3.8)$$

Sin embargo, para la geometría mostrada en la figura 3.1, se retoma el factor de forma propuesto por Streltsova (1983) (ecuación 2.22):

$$\sigma = \frac{1}{(L_z/2)^2} \quad (3.9)$$

Finalmente:

$$P_{wD_S} = \frac{1}{2} \left[\ln(t_D) + 0.80908 + E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right) - E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{1-\omega} \right) \right] + S \quad (3.8)$$

$$\omega = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_m + (\phi c_t)_f} \quad (3.10)$$

$$\lambda = \sigma \frac{k_m}{k_{f\text{eff}}} r_w^2 \quad (3.11)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3.12)$$

$$t_D = \frac{k_{f\text{eff}}}{\mu([\phi c_t]_f + [\phi c_t]_m) r_w^2} t \quad (3.13)$$

$$p_D = \frac{2\pi k_{f\text{eff}} h}{qB\mu} (p_i - p) \quad (3.14)$$

$$C_D = \frac{C_{\text{of alm}}}{2\pi(\phi_f c_{tf} + \phi_m c_{tm}) h r_w^2} \quad (3.15)$$

Verificación del modelo

El código computacional se verificó al replicar la figura 5 del documento original de Warren y Root. Puesto que el ejemplo maneja valores adimensionales, únicamente se varió el valor de λ y ω (véase figura 3.3).

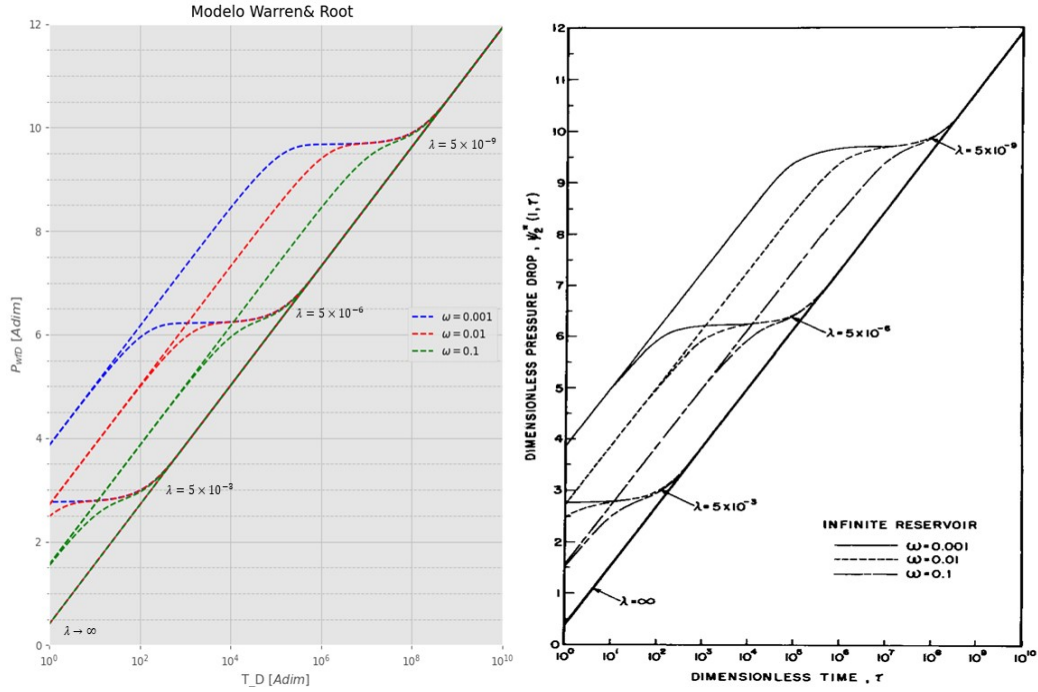


Figura 3.3: Verificación del modelo de Warren y Root (modificado de Warren y Root, 1963).

3.1.2. Swaan

En su artículo “*Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing*”, Swaan O. (1976) teorizó un modelo considerando flujo transitorio para describir la respuesta de un yacimiento naturalmente fracturado de extensión infinita.

Para su solución, consideró que a tiempos tempranos el flujo ocurre únicamente a través de la fractura y se puede describir a con la solución para un yacimiento infinito en geometría radial empleando las propiedades de la fractura:

$$\Delta p_f = \frac{q_w B \mu}{4 \pi \omega_f k_f} \ln \left(\frac{4 \eta_f}{\gamma' r_w^2} t \right) \quad (3.16)$$

donde

$$\eta_f = \frac{k_f}{\phi_f c_{t f} \mu} \quad (3.17)$$

Para tiempos tardíos asumió que los bloques de matriz tienen una forma regular, por lo

que la distribución de la presión dentro del bloque (y por ende el aporte de fluidos a la fractura) se puede describir a partir de la teoría de transferencia de calor en sólidos. Finalmente:

$$\Delta p_f = \frac{q_w B \mu}{4\pi w_f k_f} \ln\left(\frac{4\eta_{sl} t}{\gamma' r_w^2}\right) \quad (3.18)$$

A diferencia de la ecuación 3.16, emplea la constante de difusividad hidráulica correspondiente a una geometría de tipo *slabs*:

$$\eta_{sl} = 1/\left(\frac{1}{\eta_f} + \frac{k_m h}{k_f h_f} \frac{1}{\eta_m}\right) \quad (3.19)$$

donde

$$\eta_m = \frac{k_m}{\phi_m c_{tm} \mu} \quad (3.20)$$

Se debe remarcar que el modelo no describe el comportamiento en la zona de transición ni da un estimado de tiempo a partir del cual el flujo es dominado por la matriz. Para su implementación en este trabajo se realizaron las siguientes adecuaciones:

- La formulación contempla que el espesor de la matriz es igual al espesor del yacimiento ($h = L_z$), mientras que los demás modelos diferencian estos dos parámetros. Para solucionarlo, hace uso del parámetro N propuesto por Najurieta el cual representa número de fracturas horizontales conectadas al pozo:

$$N = \frac{h}{L_z} \quad (3.21)$$

Las ecuaciones quedan:

$$\Delta p_f = \frac{q_w B \mu}{4\pi N w_f k_f} \ln\left(\frac{4\eta_f t}{\gamma' r_w^2}\right) \quad (3.22)$$

y

$$\Delta p_f = \frac{q_w B \mu}{4\pi N w_f k_f} \ln\left(\frac{4\eta_{sl} t}{\gamma' r_w^2}\right) \quad (3.23)$$

- El modelo originalmente se desarrolló empleando permeabilidad y porosidad intrínseca. Retomando la ecuación 2.6:

$$k_{f\,int} = \frac{k_{f\,eff} L_z - k_m (L_z - w_f)}{w_f} \quad (2.6)$$

De manera similar, para las porosidades:

$$\phi_{f\,int} = \frac{\phi_f L_z}{w_f} \quad (3.24)$$

$$\phi_{m\ int} = \frac{\phi_m L_z}{L_z - w_f} \quad (3.25)$$

Estas fórmulas pueden ser encontradas en Kazemi (1969).

- También es posible considerar el daño en la formación al sumar:

$$\Delta p_{f\ s} = \frac{qB\mu}{2\pi h k_{f\ eff}} \quad (3.26)$$

A manera de resumen, a tiempos cortos:

$$\Delta p_f = \frac{q_w \mu}{4\pi N w_f k_{f\ int}} \ln\left(\frac{4\eta_f}{\gamma' r_w^2} t\right) + \frac{q\mu}{2\pi h k_{f\ eff}} \quad (3.27)$$

A tiempos largos:

$$\Delta p_f = \frac{q_w \mu}{4\pi N w_f k_{f\ int}} \ln\left(\frac{4\eta_{sl}}{\gamma' r_w^2} t\right) + \frac{q\mu}{2\pi h k_{f\ eff}} \quad (3.28)$$

donde

$$\eta_{sl} = 1 / \left(\frac{1}{\eta_f} + \frac{k_m L_z}{k_{f\ int} w_f \eta_m} \right) \quad (3.19)$$

$$\eta_f = \frac{k_{f\ int}}{\phi_{f\ int} C_{tf} \mu} \quad (3.17)$$

$$\eta_m = \frac{k_m}{\phi_{m\ int} C_{tm} \mu} \quad (3.20)$$

$$N = \frac{h}{L_z} \quad (3.21)$$

Verificación del modelo

Se empleó la figura 1 del documento de Swaan, cuyos valores equivalen al caso 1 planteado por Kazemi (1969) (véase tabla 3.1). La comparativa se muestra en la figura 3.4.

Tabla 3.1: Parámetros del caso 1 presentado por Kazemi (1969).

Datos de entrada		
$\phi_{m\ int} = 0.05$	$\phi_{f\ int} = 0.45$	$h = 9.05$ ft
$w_f = 0.025$ ft	$k_m = 0.01$ mD	$k_{f\ int} = 7236.39$ mD
$c_{tm} = 1 \times 10^{-5}$ psi ⁻¹	$c_{tf} = 1 \times 10^{-5}$ psi ⁻¹	$P_i = 4000.0$ psi
$q = 90.5$ STB/day	$\mu = 1.0$ cP	$B = 1.0$
$r_e = 5280.0$ ft	$r_w = 0.375$ ft	

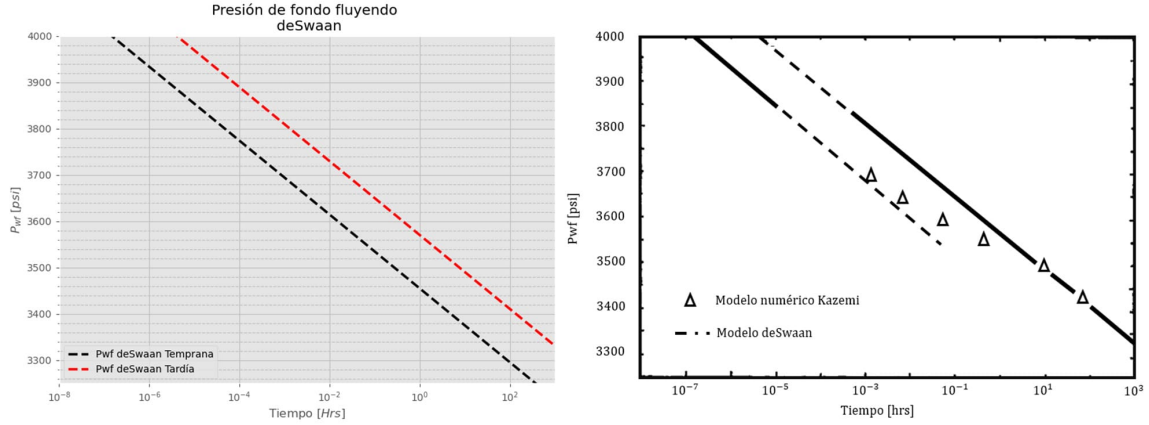


Figura 3.4: Verificación del modelo de Swaan (modificado de Swaan, 1976).

3.1.3. Najurieta

Najurieta (1980) en su trabajo “*A Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs*” presentó una solución de fuente lineal aproximada a la teoría de Swaan la cual representa la zona de transición y flujo transitorio:

$$\Delta p_f = \frac{qB}{4\pi NT_f} E_i\left(-\frac{r^2}{4\eta_{co}t}\right) \quad (3.29)$$

donde el coeficiente de difusividad hidráulica para el sistema compuesto es igual a

$$\eta_{co} = \frac{T_f}{S_{T_f} + S_{T_m} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \tanh \sqrt{\frac{\tau}{t}}} \quad (3.30)$$

en la cual T es la transmisibilidad del medio:

$$T_f = \frac{k_f \text{int} w_f}{\mu} \quad (3.31)$$

S_T es el factor de almacenamiento del medio:

$$S_{T_f} = \phi_f \text{int} c_{tf} w_f \quad (3.32)$$

$$S_{T_m} = \phi_m \text{int} c_{tm} L_z \quad (3.33)$$

y τ es un parámetro definido por Najurieta como

$$\tau = \frac{L_z^2}{4\gamma\eta_m} \quad (3.34)$$

donde

$$\eta_m = \frac{k_m}{\phi_m \text{int } c_{tm} \mu} \quad (3.35)$$

Para considerar múltiples capas de matriz intercaladas por el medio fracturado, el autor propone el término N como el número de fracturas horizontales conectadas al pozo:

$$N = \frac{h}{L_z} \quad (3.36)$$

Puesto que el modelo se deriva de la teoría de Swaan, emplea propiedades intrínsecas, por lo que tendrá que considerarse las fórmulas 2.6, 3.24 y 3.25. Nuevamente se puede emplear la ecuación 3.26 para considerar el daño a la formación.

Verificación del modelo

En el documento original de Najurieta se puede observar que los resultados obtenidos con su modelo equivalen a los resultados obtenidos con el modelo numérico de Kazemi. Por ello, nuevamente se emplearon los datos de la tabla 3.1 (véase figura 3.5).

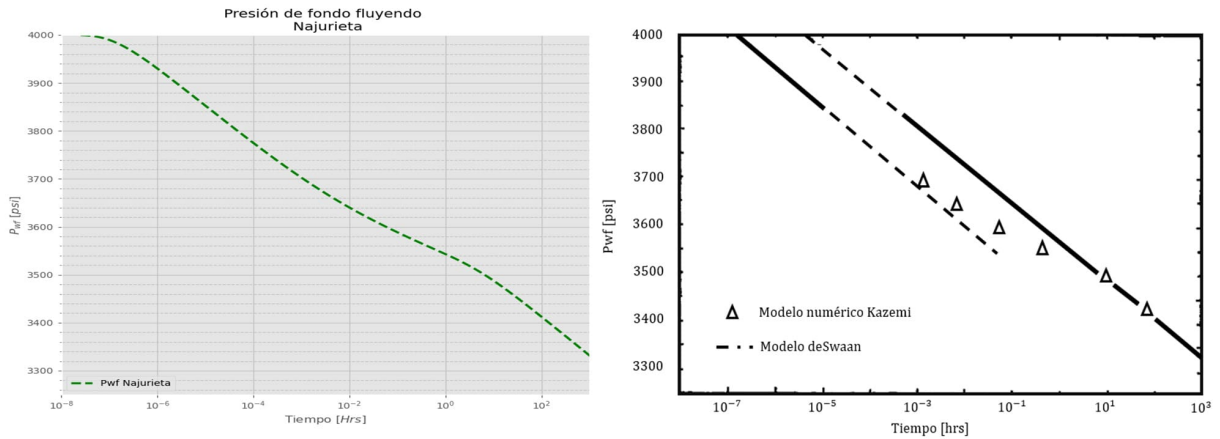


Figura 3.5: Verificación del modelo de Najurieta (modificado de Swaan, 1976).

3.2. Soluciones semianalíticas

Los siguientes modelos no cuentan con una solución analítica al no poder realizar la inversión de la transformada de Laplace. En su lugar, se recurre al método de Stehfest, algoritmo numérico que permite obtener la solución en el dominio temporal a partir del espacio de Laplace (véase anexo A).

3.2.1. Modelo Mavor y Cinco Ley

En el trabajo titulado “*Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs*”, Mavor y Cinco-Ley (1979) presentaron una solución a la formulación de Warren y Root en el espacio de Laplace considerando los efectos de almacenamiento y daño en la formación.

Tras resolver la ecuación de flujo de fluidos en medios porosos considerando una formulación de transferencia pseudoestacionaria en el espacio de Laplace y considerar los fenómenos mencionados determinaron que:

$$p_{wD} = \frac{K_0(\sqrt{sf}) + S\sqrt{sf} K_1(\sqrt{sf})}{s \left[\sqrt{sf} K_1(\sqrt{sf}) + sC_D(K_0(\sqrt{sf}) + S\sqrt{sf} K_1(\sqrt{sf})) \right]} \quad (3.37)$$

donde

$$f = \frac{\omega(1 - \omega)s + \lambda}{(1 - \omega)s + \lambda} \quad (3.38)$$

Las variables adimensionales quedan definidas como:

$$\omega = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m} \quad (3.39)$$

$$\lambda = \sigma \frac{k_m}{k_{feff}} r_w^2 \quad (3.40)$$

$$P_D = \frac{2\pi k_{feff} h (P_i - P)}{q\mu B} \quad (3.41)$$

$$t_D = \frac{k_{feff} t}{(\phi_m c_{tm} + \phi_f c_{tf}) \mu r_w^2} \quad (3.42)$$

$$C_D = \frac{C_{oeff alm}}{2\pi (\phi_m c_{tm} + \phi_f c_{tf}) h r_w^2} \quad (3.43)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3.44)$$

Verificación del modelo

Para este caso se replicó la figura 3 del artículo original, en el cual consideran $\omega = 1 \times 10^{-3}$, $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ y $S = 10$ (véase figura 3.6).

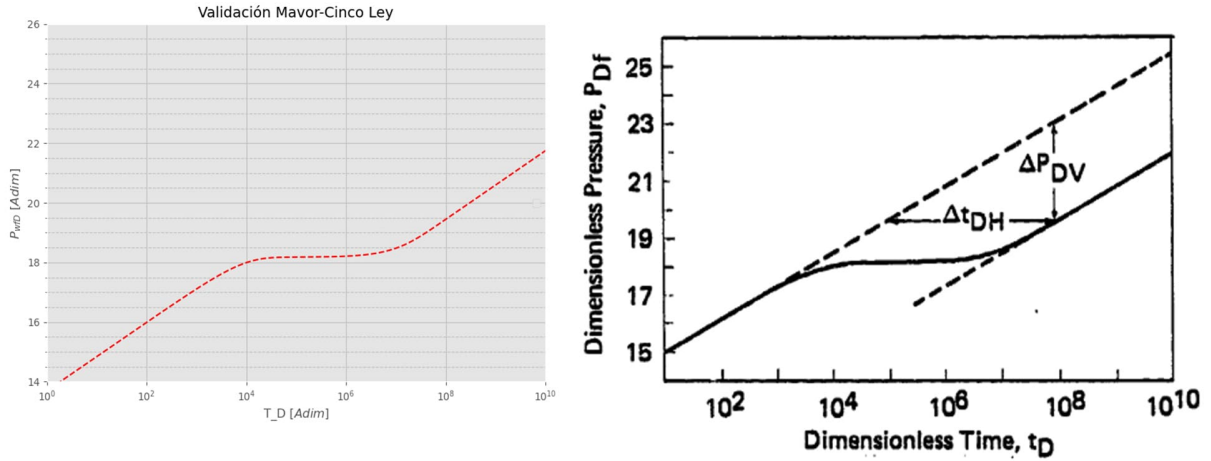


Figura 3.6: Verificación del modelo de Mavor - Cinco Ley (modificado de Mavor, 1979).

3.2.2. Modelo Triple Porosidad

Camacho Velázquez et al. (2005), en “*Pressure-Transient and Decline-Curve Behavior in Naturally Fractured Vuggy Carbonate Reservoirs*”, propusieron un modelo de triple porosidad para yacimientos carbonatados vugulares. Esta formulación considera flujo pseudoestacionario interporoso y admite la posibilidad de que el flujo de fluidos hacia el pozo ocurra a través del sistema de vugulos, resultando en un comportamiento de doble permeabilidad.

El modelo parte de la ecuación diferencial para las fracturas:

$$\kappa \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) + \lambda_{mf}(p_{Dm} - p_{Df}) + \lambda_{vf}(p_{Dv} - p_{Df}) = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \quad (3.45)$$

Para la matriz:

$$-\lambda_{mv}(p_{Dm} - p_{Dv}) - \lambda_{mf}(p_{Dm} - p_{Df}) = (1 - \omega_f - \omega_v) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \quad (3.46)$$

Y para los vugulos:

$$(1 - \kappa) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) + \lambda_{mv}(p_{Dm} - p_{Dv}) - \lambda_{vf}(p_{Dv} - p_{Df}) = \omega_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_d} \quad (3.47)$$

El parámetro κ equivale la razón de permeabilidad entre el sistema de fracturas y vugulos. Si $\kappa = 1$ el flujo hacia el pozo está controlado por las fracturas, si $0 < \kappa < 1$ se presenta un comportamiento de doble permeabilidad, y si $\kappa = 0$ el flujo ocurre a través de los vugulos. Para $0 < \kappa < 1$, la solución en el espacio de Laplace considerando los fenómenos de almacenamiento en el pozo y daño a la formación resultan:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{1}{s^2 C_D + 1/\bar{p}_{wD}|_{C_D=0}} \quad (3.48)$$

donde

$$\bar{p}_{wD}|_{C_D=0} = C_1 K_0(\alpha_1) + C_2 K_0(\alpha_2) + S_v [C_1 \alpha_1 K_1(\alpha_1) + C_2 \alpha_2 K_1(\alpha_2)] \quad (3.49)$$

$$C_1 = \frac{1}{s} \left\{ \frac{\alpha_1 K_1(\alpha_1)(\kappa A_1 + 1 - \kappa) + \alpha_2 K_1(\alpha_2)(\kappa A_2 + 1 - \kappa)}{\left[\frac{K_0(\alpha_1)(A_1 - 1) + K_1(\alpha_1)\alpha_1(S_f A_1 - S_v)}{K_0(\alpha_2)(1 - A_2) + K_1(\alpha_2)\alpha_2(S_v - S_f A_2)} \right]} \right\}^{-1} \quad (3.50)$$

$$C_2 = \frac{1}{s} \left\{ \frac{\left[\frac{K_0(\alpha_2)(1 - A_2) + K_1(\alpha_2)\alpha_2(S_v - S_f A_2)}{K_0(\alpha_1)(A_1 - 1) + K_1(\alpha_1)\alpha_1(S_f A_1 - S_v)} \right]^*}{\alpha_1 K_1(\alpha_1)(\kappa A_1 + 1 - \kappa) + \alpha_2 K_1(\alpha_2)(\kappa A_2 + 1 - \kappa)} \right\}^{-1} \quad (3.51)$$

$$A_1 = -[(1 - \kappa)\alpha_1^2 - m_2(u)]/m \quad (3.52)$$

$$A_2 = -[(1 - \kappa)\alpha_2^2 - m_2(u)]/m \quad (3.53)$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\kappa m_2 + (1 - \kappa)m_1}{2\kappa(1 - \kappa)} + \frac{\sqrt{[\kappa m_2 + (1 - \kappa)m_1]^2 + 4(m^2 - m_1 m_2)\kappa(1 - \kappa)}}{2\kappa(1 - \kappa)} \quad (3.54)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{\kappa m_2 + (1 - \kappa)m_1}{2\kappa(1 - \kappa)} - \frac{\sqrt{[\kappa m_2 + (1 - \kappa)m_1]^2 + 4(m^2 - m_1 m_2)\kappa(1 - \kappa)}}{2\kappa(1 - \kappa)} \quad (3.55)$$

$$m = \frac{\lambda_{mf}\lambda_{mv}}{\lambda_{mv} + \lambda_{mf} + s(1 - \omega_f - \omega_v)} + \lambda_{vf} \quad (3.56)$$

$$m_1 = - \left[\frac{\lambda_{mf}^2}{\lambda_{mv} + \lambda_{mf} + s(1 - \omega_f - \omega_v)} - \lambda_{mf} - \lambda_{vf} - \omega_f s \right] \quad (3.57)$$

$$m_1 = - \left[\frac{\lambda_{mv}^2}{\lambda_{mv} + \lambda_{mf} + s(1 - \omega_f - \omega_v)} - \lambda_{mv} - \lambda_{vf} - \omega_v s \right] \quad (3.58)$$

Para el caso particular de triple porosidad única permeabilidad donde $\kappa = 1$ la solución se simplifica a:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_0[\sqrt{g(s)}] + s\sqrt{g(s)}K_1[\sqrt{g(s)}]}{s \left(\sqrt{g(s)}K_1[\sqrt{g(s)}] + C_D s \left[K_0[\sqrt{g(s)}] + s\sqrt{g(s)}K_1[\sqrt{g(s)}] \right] \right)} \quad (3.59)$$

donde

$$g(s) = m_1 - m^2/m_2 \quad (3.60)$$

Los nuevos parámetros propuestos por el autor se muestran a continuación:

$$\kappa = k_f / (k_f + k_v) \quad (3.61)$$

$$\lambda_{mf} = \sigma_{mf} k_m r_w^2 / (k_f + k_v) \quad (3.62)$$

$$\lambda_{mv} = \sigma_{mv} k_m r_w^2 / (k_f + k_v) \quad (3.63)$$

$$\lambda_{vf} = \sigma_{vf} k_v r_w^2 / (k_f + k_v) \quad (3.64)$$

$$\omega_f = \phi_f c_f / (\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v) \quad (3.65)$$

$$\omega_v = \phi_v c_v / (\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v) \quad (3.66)$$

Mientras que las variables adimensionales son:

$$p_{Dx} = 2\pi(k_v + k_f)h(p_i - p_j) / (q\mu B_o) \quad (3.67)$$

donde $j = f$ o v (fracturas o vóculos)

$$t_D = (k_f + k_v)t / [(\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v)\mu r_w^2] \quad (3.68)$$

$$q_{wD} = q\mu B / [2\pi(k_f + k_v)h(p_i - p_{wf})] \quad (3.69)$$

$$C_D = \frac{C_{oe\ f\ alm}}{2\pi(\phi_v c_v + \phi_m c_m + \phi_f c_f)h r_w^2} \quad (3.70)$$

Verificación del modelo

Para verificar la funcionalidad del algoritmo empleado en el caso de permeabilidad simple ($\kappa = 1$) se tomó la figura 1 del trabajo original; los resultados se muestran en la figura 3.7. Obsérvese la disparidad a tiempos tempranos entre el modelo de Warren y Root obtenido en este trabajo y el original. La causa se origina en el modelo empleado para generar la curva: en el trabajo original se configuró el código para replicar un yacimiento de doble porosidad; en cambio, en este ejemplo se empleó la solución analítica de Warren y Root, la cual produce errores a tiempos cortos. Para las fórmulas de triple porosidad - doble permeabilidad se retomaron los casos exhibidos en la figura 8 (véase figura 3.8).

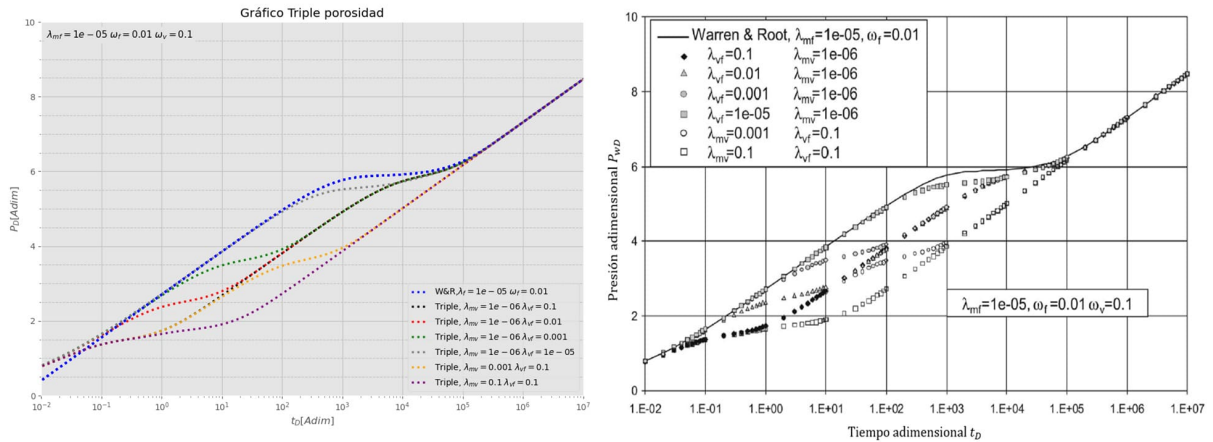


Figura 3.7: Verificación del modelo de triple porosidad - permeabilidad simple (modificado de Camacho, 2005).

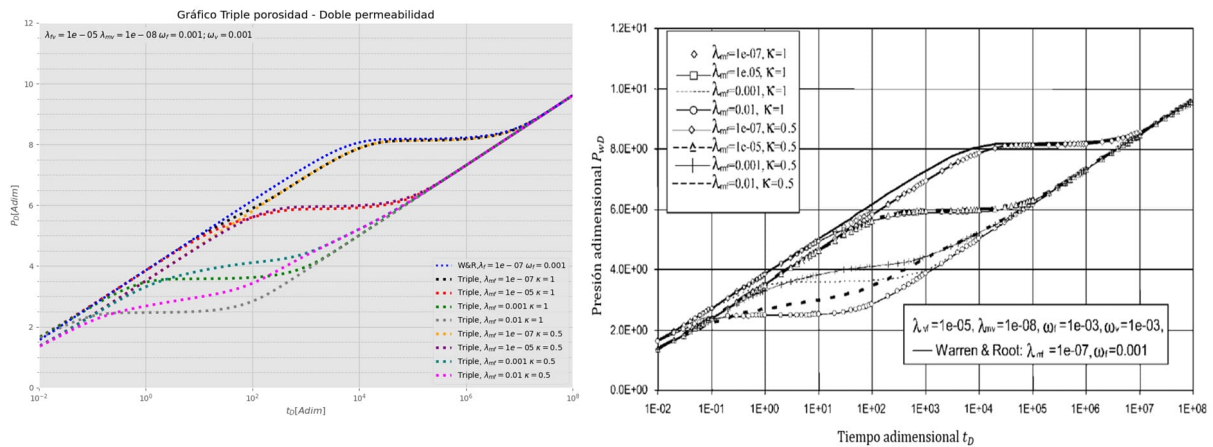


Figura 3.8: Verificación del modelo de triple porosidad - doble permeabilidad (modificado de Camacho, 2005).

3.2.3. Modelo Fractal

En el artículo “A semi-analytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells” presentado por Wang et al. (2015) se plantea un modelo que describe el flujo de fluidos provenientes de un yacimiento *tight* (compacto) perforado por un pozo horizontal y estimulado mediante fracturamiento hidráulico multietapa.

En la figura 3.9 se muestra la conceptualización física del modelo compuesto por tres regiones de flujo: la región externa sin alterar (región 3), la región estimulada por el fracturamiento (región 2), y la región que comprende la fractura hidráulica (región 1).

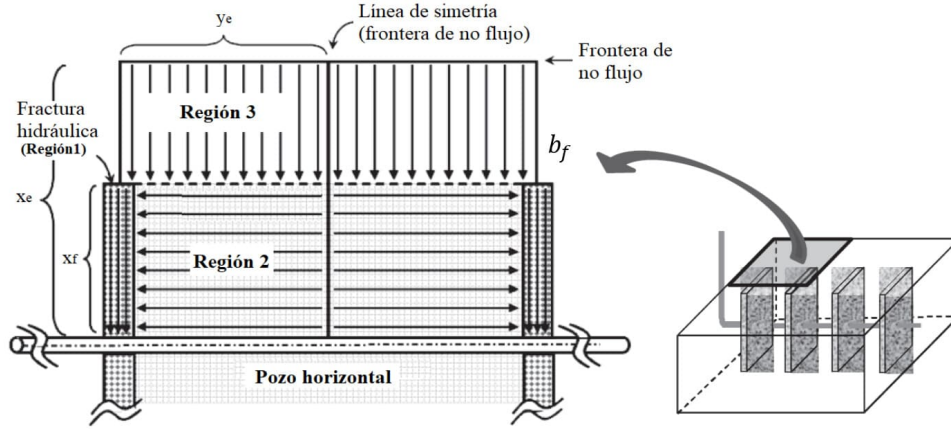


Figura 3.9: Esquemización de la geometría de flujo tri-lineal para un yacimiento con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado (modificado de Cedeño, 2022).

En la región 3 se contempla flujo lineal en dirección x , y como la zona no presenta fracturamiento, se emplea la ecuación de difusividad 1D:

$$\frac{k_m}{\mu} \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} = \phi_m c_{tm} \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (3.71)$$

La condición de frontera externa:

$$\left. \frac{\partial p_3}{\partial x} \right|_{x=x_e} = 0 \quad (3.72)$$

Frontera interna:

$$p_3|_{x=x_f} = p_2|_{x=x_f} \quad (3.73)$$

Para la región 2 se formulación similar a los modelos de doble permeabilidad, considerando que las propiedades están definidas por una relación fractal. La ecuación que rige el flujo lineal en dirección y dentro de la red de fracturas es:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(y)}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) + q_{mf} + q_{32} = c_{tf} \phi(y) \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (3.74)$$

El flujo proveniente de la matriz fracturada está dado por:

$$q_{mf} = \frac{\alpha k_m}{\mu} (p_m - p_2) \left(\frac{y}{b_f} \right)^{D-2} \quad (3.75)$$

Mientras que el flujo proveniente de la región 3 se define como:

$$q_{32} = \frac{k_m}{\mu} \frac{1}{x_f} \left. \frac{\partial p_3}{\partial x} \right|_{x=x_f} \left(\frac{y}{b_f} \right)^{D-2} \quad (3.76)$$

Las ecuaciones que describen la porosidad y la permeabilidad en un medio fractal son:

$$k(y) = k_f \left(\frac{y}{b_f} \right)^{D-2-\theta} \quad (3.77)$$

$$\phi(y) = \phi_f \left(\frac{y}{b_f} \right)^{D-2} \quad (3.78)$$

La condición de frontera interna está dada por:

$$p_2|_{y=b_f} = p_1|_{y=b_f} \quad (3.79)$$

Por su parte, la condición de frontera externa se determina con la condición de no flujo atribuida a la simetría de las etapas de fracturamiento.

$$\left. \frac{\partial p_2}{\partial y} \right|_{y=y_e} = 0 \quad (3.80)$$

Finalmente, la ecuación de difusividad linear en dirección x para la fractura hidráulica en la región 1 es:

$$\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + q_{21} = \phi_1 c_{t1} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (3.81)$$

q_{21} es el aporte de flujo proveniente de la región 2. La condición de frontera interna representa al pozo, contemplando el almacenamiento y daño en la fractura:

$$\left. \frac{\partial p_{1d}}{\partial x_d} \right|_{x_d=0} = c_1 \left(1 - C_{df} \frac{\partial p_{wd}}{\partial t_d} \right) \quad (3.82)$$

Para la frontera externa se considera nuevamente una condición de no flujo:

$$\left. \frac{\partial p_{1d}}{\partial x_d} \right|_{x_d=1} = 0 \quad (3.83)$$

Tras aplicar la transformada de Laplace y obtener la solución para cada región, resulta:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{\frac{\psi}{s\sqrt{\delta}\tanh(\sqrt{\delta})} + S\frac{\psi}{s}}{\left(\frac{\psi}{s\sqrt{\delta}\tanh(\sqrt{\delta})} + S\frac{\psi}{s} \right) s^2 C_{df} - 1} \quad (3.84)$$

donde

$$\psi = -\frac{\pi k_f x_f}{k_1 b_f} \quad (3.85)$$

$$\delta = sb_1 - a_1 s_4 \quad (3.86)$$

$$a_1 = \frac{k_f x_f^2}{k_1 b_f^2} \quad b_1 = \frac{\phi_1 c_{t1} k_f}{(c_{t2} \phi_2) k_1} \quad (3.87)$$

$$s_4 = \sqrt{-s_2} \frac{I_{n_2-1}(\beta_2) K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed}^{\gamma_2}) - I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed}^{\gamma_2}) K_{n_2-1}(\beta_2)}{I_{n_2}(\beta_2) K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed}^{\gamma_2}) + I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed}^{\gamma_2}) K_{n_2}(\beta_2)} \quad (3.88)$$

$$\beta_2 = \frac{2\sqrt{-s_2}}{2+\theta} \quad \gamma_2 = \frac{2+\theta}{2} \quad n_2 = \frac{3-D+\theta}{2+\theta} \quad (3.89)$$

$$s_2 = \left(\lambda b_d^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda + (1-\omega)s} - 1 \right) + b_d^2 \frac{k_m}{k_f} s_3 - \omega s b_d^2 \right) \quad (3.90)$$

$$a_3 = \frac{\phi_m c_{tm} k_f}{\phi_2 c_{t2} k_m} s \quad s_3 = \sqrt{a_3} (\tanh(\sqrt{a_3} - \sqrt{a_3} x_{ed})) \quad (3.91)$$

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} x_f^2 \quad \omega = \frac{c_{tf} \phi_f}{(c_{t2} \phi_2)} \quad (3.92)$$

$$c_{t2} \phi_2 = c_{tf} \phi_f + c_{tm} \phi_m \quad (3.93)$$

Los términos adimensionales están dados por:

$$t_d = \frac{k_f t}{(c_{t2} \phi_2) \mu_o x_f^2} \quad (3.94)$$

$$p_d = \frac{k_f h (p_i - p)}{q B \mu} \quad (3.95)$$

$$x_d = \frac{x}{x_f} \quad y_d = \frac{y}{b_f} \quad b_d = \frac{b_f}{x_f} \quad (3.96)$$

$$x_{ed} = \frac{x_e}{x_f} \quad y_{ed} = \frac{y_e}{b_f} \quad (3.97)$$

$$C_{df} = \frac{C_{oef alm}}{2\pi(\phi_1 c_{t1} + \phi_2 c_{t2} + \phi_m c_{tm}) h x_f^2} \quad (3.98)$$

El desarrollo de la solución se encuentra en el propio artículo, o en la tesis “*Implementación de soluciones analíticas aplicables en yacimientos no convencionales: flujo a través de nanoporos y descripción fractal de redes de fracturas complejas*” de Cedeño Estrada (2022).

Verificación del modelo

Para la comparativa se emplearon los datos de la tabla 3.2, provenientes de la figura 9 del capítulo 3 del trabajo de Cedeño. La imagen 3.10 corresponde a la figura 10 del capítulo 2 del mismo trabajo.

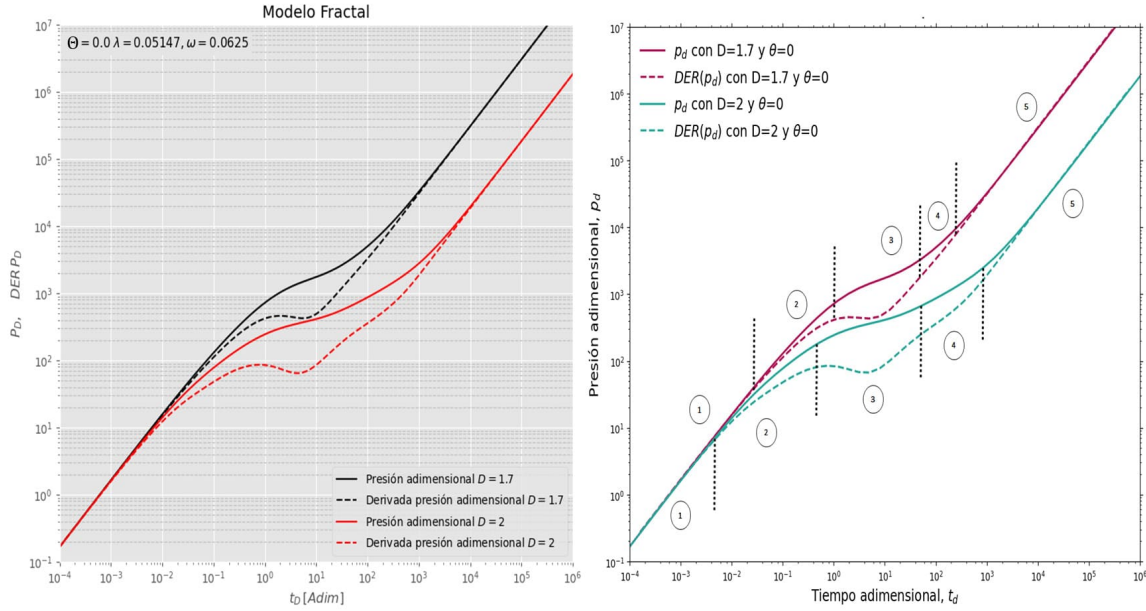


Figura 3.10: Verificación del modelo fractal (modificado de Cedeño, 2022).

Tabla 3.2: Datos empleados para verificar el modelo fractal.

Datos de entrada		
$b_f = 1.6 \times 10^{-2}$ ft	$c_{tf} = 2.58 \times 10^{-4}$ psi $^{-1}$	$c_{tm} = 2.58 \times 10^{-6}$ psi $^{-1}$
$c_{t1} = 2.58 \times 10^{-5}$ psi $^{-1}$	$h = 6.23 \times 10^1$ ft	$k_f = 1 \times 10^2$ mD
$k_m = 2.3 \times 10^{-1}$ mD	$k_1 = 5 \times 10^3$ mD	$x_f = 6.56 \times 10^2$ ft
$x_e = 1.15 \times 10^3$ ft	$y_e = 6.56 \times 10^2$ ft	$\alpha = 5.2 \times 10^{-5}$ ft $^{-2}$
$\mu = 1.06$ cP	$\phi_f = 2 \times 10^{-4}$	$\phi_m = 3 \times 10^{-1}$
$\phi_1 = 4.5 \times 10^{-1}$	$B = 1.0$	

3.3. Soluciones numéricas

El desarrollo de las soluciones numéricas parte de la ecuación de difusión empleada en los modelos de doble porosidad que describe el flujo monofásico de un fluido ligeramente compresible en el medio naturalmente fracturado:

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{k_{f,eff}}{\mu} \right) \nabla (\Delta p_f) \right] + \tau = (\phi c_t)_f \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} \quad (3.99)$$

donde

$$\Delta p_f = p_i - p_{wf} \quad (3.100)$$

Aunado a esta, la ecuación de continuidad en la matriz es:

$$\tau = (\phi c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (3.101)$$

De acuerdo con el modelo a emplear (PSS o USS) es la ecuación de transferencia a implementar. Para el modelo pseudoestacionario (Warren y Root, 1963):

$$\tau_{PSS} = \sigma \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) \quad (3.102)$$

Del mismo modo, para el modelo USS (Streltsova, 1983):

$$\tau_{USS} = (\phi c_t)_m H \frac{\partial \Delta P_m}{\partial t} \quad (3.103)$$

$$\Delta P_m = \Delta P_f \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t\right) \right] \quad (3.104)$$

Estas ecuaciones se pueden encontrar en Torcuk, Kurtoglu, Fakcharoenphol et al. (2013).

3.3.1. Modelo Pseudoestacionario (PSS)

Para dar solución al problema de flujo de fluidos en medios fracturados se parte de la ecuación de difusión en el medio fracturado para coordenadas radiales:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_{f,eff}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) + \hat{q} + \tau = (\phi c_t)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} \quad (3.105)$$

Retomando la ecuación que describe el flujo en la matriz:

$$\tau = (\phi c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (3.101)$$

Y la ecuación de transferencia:

$$\tau_{PSS} = \sigma \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) \quad (3.102)$$

Tras realizar la discretización y linealización del modelo matemático se obtiene:

$$E P_{f_{i+1}}^{n+1} + C P_{f_i}^{n+1} + W P_{f_{i-1}}^{n+1} + WI P_{wf_i}^{n+1} = B \quad (3.106)$$

$$D P_{wf_i}^{n+1} - WI P_{f_i}^{n+1} = B_{well} \quad (3.107)$$

donde

$$E = T_{i+\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (3.108)$$

$$W = T_{i-\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (3.109)$$

$$C = - \left[E + W + \left(\alpha \sigma V_r \frac{k_m}{\mu} \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) + WI - \left(\frac{\alpha^2 \sigma^2 k_m^2 V_{r_i} \Delta t}{\alpha \sigma \mu k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu^2} \right) \right] \quad (3.110)$$

$$B = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(\frac{\alpha \sigma \phi_m c_{t_m} k_m V_{r_i}}{\alpha \sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n + WI \frac{qB\mu S}{2\pi k_{f,eff} h} \quad (3.111)$$

$$D = \left(WI + \frac{C_{oefalm}}{\Delta t} \right) \quad (3.112)$$

$$B_{well} = qB + \frac{C_{oefalm}}{\Delta t} P_{wfi}^n - WI \frac{qB\mu S}{2\pi k_{f,eff} h} \quad (3.113)$$

$$WI = \alpha \frac{2\pi k_{f,eff} h}{\mu \ln\left(\frac{r_1}{r_w}\right)} \quad (3.114)$$

El proceso de discretización se puede revisar en el Apéndice B.

Verificación del modelo

La verificación del código computacional se realizó con el ejercicio propuesto por Teklu et al. (2013) el cual consta de un pozo que penetra completamente una formación naturalmente fracturada productora de gas. Los datos se muestran a continuación:

Tabla 3.3: Datos para verificar modelo numérico PSS

Datos de entrada		
$P_{yac} = 5000$ psia	$\mu_g = 0.02$ cP	$L_x = L_y = L_z = 1$ ft
$\Delta z = h = 20$ ft	$w_f = 10$ μ m	$c_{t_f} = 5 \times 10^{-4}$ psi ⁻¹
$c_{t_m} = 1 \times 10^{-4}$ psi ⁻¹	$\phi_m = 0.2$	$r_w = 0.25$ ft
$r_e = 2640$ ft	$q = 1000$ rcf/day	$C_D = 0$
$N_t = 600$	$N_r = 13$	$B = 1.0$

Para este ejercicio emplea el factor de forma propuesto por Kazemi:

$$\sigma = 4 \left[\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right] \quad (3.115)$$

Finalmente, los resultados se muestran en la figura 3.11.

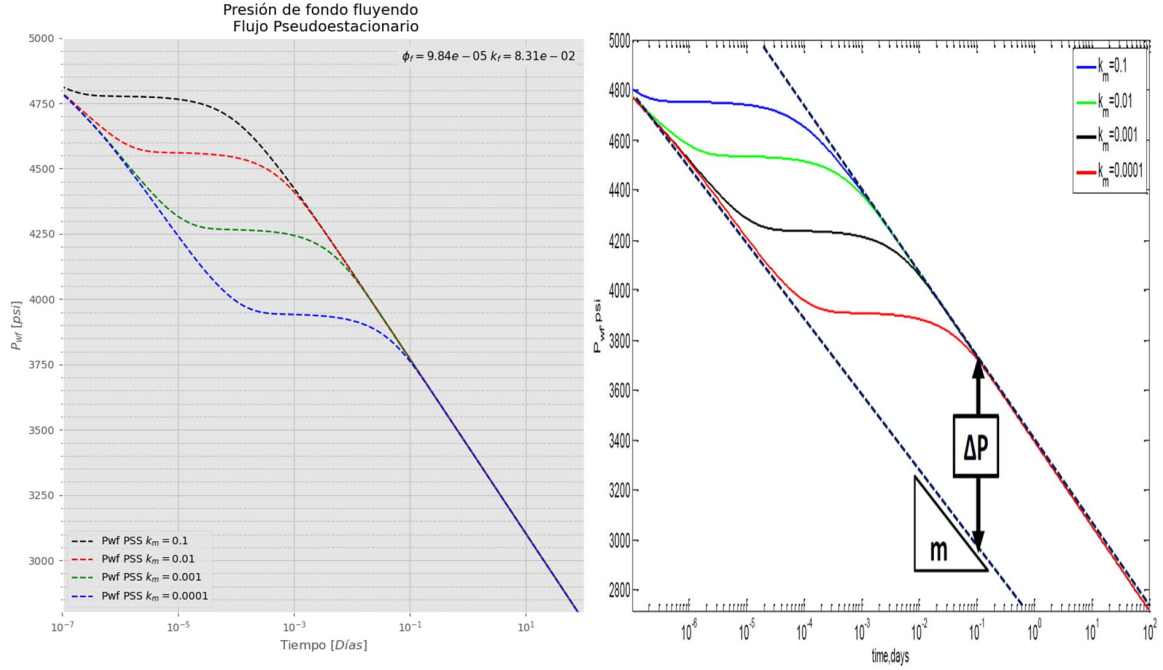


Figura 3.11: Verificación del modelo numérico empleando ecuación de transferencia pseudoestacionaria (modificado de Teklu, 2013).

3.3.2. Modelo Transitorio (USS)

Recuperando la ecuación de difusión en el medio fracturado para coordenadas radiales:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_{f,eff}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) + \hat{q} + \tau = (\phi c_t)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} \quad (3.105)$$

La ecuación de difusión en la matriz:

$$\tau = (\phi c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (3.101)$$

Ahora, la ecuación de transferencia cambia a:

$$\tau_{USS} = (\phi c_t)_m H \frac{\partial \Delta P_m}{\partial t} \quad (3.103)$$

donde

$$\Delta P_m = \Delta P_f \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right] \quad (3.104)$$

La discretización y linealización de las ecuaciones resulta en:

$$E P_{f_{i+1}}^{n+1} + C P_{f_i}^{n+1} + W P_{f_{i-1}}^{n+1} + WI P_{wf_i}^{n+1} = B \quad (3.116)$$

$$D P_{wf_i}^{n+1} - WI P_{f_i}^{n+1} = B_{well} \quad (3.117)$$

donde

$$E = T_{i+\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (3.118)$$

$$W = T_{i-\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (3.119)$$

$$C = - \left[E + W + WI - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (a-1) \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) \right] \quad (3.120)$$

$$B = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (1-b) \right) P_{f_i}^n \\ - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (b-a) \right) P_{ini} + WI \frac{qB\mu S}{2\pi k_{f,eff} h} \quad (3.121)$$

$$a = \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^{n+1} \right) \right] \quad (3.122)$$

$$b = \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^n \right) \right] \quad (3.123)$$

$$D = \left(WI + \frac{C_{oe f a l m}}{\Delta t} \right) \quad (3.124)$$

$$B_{well} = qB + \frac{C_{oe f a l m}}{\Delta t} P_{wf_i}^n + WI \frac{qB\mu S}{2\pi k_{f,eff} h} \quad (3.125)$$

$$WI = \alpha \frac{2\pi k_{f,eff} h}{\mu \ln \left(\frac{r_1}{r_w} \right)} \quad (3.163)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta_m}{H^2} \quad (3.126)$$

$$\eta_m = \alpha \frac{k_m}{(\phi \mu c_t)_m} \quad (3.127)$$

$$H = \frac{L_z}{2} \quad (3.128)$$

El proceso de discretización se puede revisar en el Apéndice B.

Verificación del modelo

Para verificar el código se recurrió al documento desarrollado por Teja Juárez y Torres López (2023), específicamente al “Ejercicio flujo radial 1D (Streltsova USS)”. Los datos de entrada son equivalentes a la tabla 3.3 (véase figura 3.12).

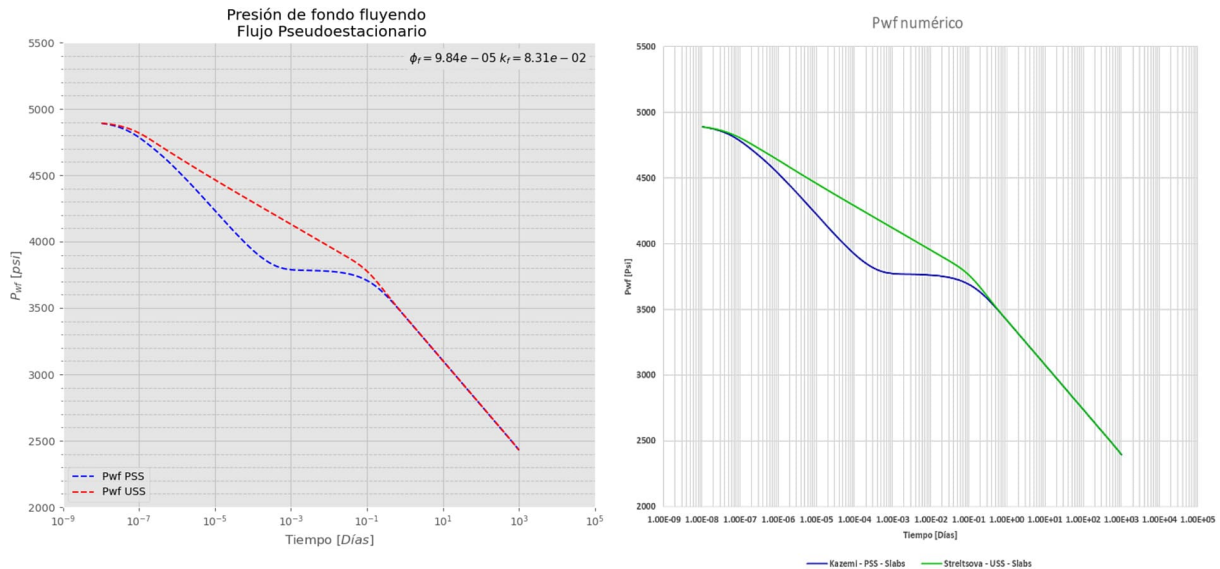


Figura 3.12: Verificación del modelo numérico empleando ecuación de transferencia transitoria (modificado de Teja, 2023).

3.4. Análisis de sensibilidad

Tras analizar el comportamiento de los ocho modelos desarrollados al variar sus parámetros, se identificaron las siguientes limitaciones:

1. Un escenario que combine daño negativo con coeficiente de almacenamiento del pozo positivo genera divergencia en las propuestas semianalíticas (Mavor, Triple porosidad y Fractal). La causa está en la formulación de los modelos: si se analizan con detenimiento las fórmulas 3.37, 3.48 y 3.84, al introducir $S < 0$ y $C > 0$ en algún tiempo se indetermina la presión adimensional, generando la divergencia. Este fenómeno se observa en los casos 1 y 2 (véase figura 5.5 y 5.13).
2. Conforme la permeabilidad de la matriz k_m se aproxima a la permeabilidad efectiva de la fractura $k_{f,eff}$, los modelos de Najurieta y Swaan muestran valores inconsistentes. Se determinó que debe de existir al menos una orden de una magnitud de diferencia entre ambas permeabilidades ($k_{f,eff} > 10k_m$).
3. Algunas combinaciones de parámetros pueden generar ligera divergencia en el modelo

de triple porosidad, requiriendo ajustar el parámetro $N_{Stehfest}$. Por mencionar un ejemplo, si a los valores predeterminados del programa desarrollado (véase figura 4.4) se modifican $\phi_v = 0.1$ y $\kappa = 0.9$, se presentará este comportamiento.

Por otra parte, para representar un yacimiento de doble porosidad se puede ingresar $\phi_v = 0, \kappa = 1, \lambda_{mv} = 0$ y $\lambda_{fv} \rightarrow 0$.

4. En el caso de los modelos numéricos, fue necesario incrementar el número de nodos en la malla para que sus resultados coincidieran con las demás formulaciones. Se determinó que un mínimo de 40 nodos es requerido.
5. El modelo fractal muestra una alta sensibilidad: prácticamente cualquier variación en los parámetros puede desajustar su curva. Para su ajuste se recomienda variar los parámetros k_{fh} , b_f , θ y D , ya que son los que ejercen mayor influencia en el modelo. Idealmente, k_{fh} y b_f podría estimarse a partir de la operación de fracturamiento hidráulico.

En cuanto al desempeño computacional, los modelos analíticos demostraron ser más eficientes, al no involucrar la solución de sistemas numéricos. En segundo lugar estarían los modelos semianalíticos, que presentan menor demanda computacional al evitar el cálculo en cada nodo de la malla numérica. Finalmente restarían los modelos numéricos, de los cuales destaca el modelo transitorio al tomar mayor tiempo de ejecución, debido a la resolución de las ecuaciones 3.122 y 3.123.

4. Desarrollo de la herramienta

A fin de emplear los códigos computacionales desarrollados a partir de los métodos descritos en el capítulo anterior, fue necesario unificarlos en una sola herramienta que facilitara su uso, análisis y visualización. Para ello, se desarrolló una aplicación interactiva en lenguaje Python®.

Antes de explicar dicha herramienta, se describe brevemente el proceso de diseño de la interfaz gráfica de usuario (*GUI*, *Graphical User Interface*).

4.1. Diseño de la interfaz gráfica de usuario

La librería empleada para el diseño de la interfaz fue `Tkinter`. El diseño preliminar de las ventanas se llevó a cabo en dos etapas principales:

1. Dibujado de las ventanas: mediante la plataforma *Figma* se diseñaron las diferentes ventanas que componen la herramienta (véase figura 4.1). En esta etapa se definió la distribución de los elementos (cuadros de texto, figuras, imágenes y *widgets*) sin programar aún su funcionalidad.
2. Una vez establecido el diseño final, se utilizó la aplicación `Tkinter Designer` desarrollada por Parth Jadhav (2021) (véase figura 4.2). Esta herramienta convierte un diseño realizado en *Figma* en una interfaz basada en `Tkinter`. A partir del *Token ID* y la *URL* del proyecto en la plataforma web, el programa recupera el *frame* y su contenido para generar una serie de carpetas que incluyen las imágenes de los elementos utilizados, así como un archivo en Python para generar la interfaz gráfica.

Cabe aclarar que el código resultante únicamente posiciona los *widgets* según el diseño del lienzo, mas no asigna una funcionalidad. A partir de este archivo se completó la herramienta mediante la incorporación de las funciones necesarias y los códigos del capítulo anterior.

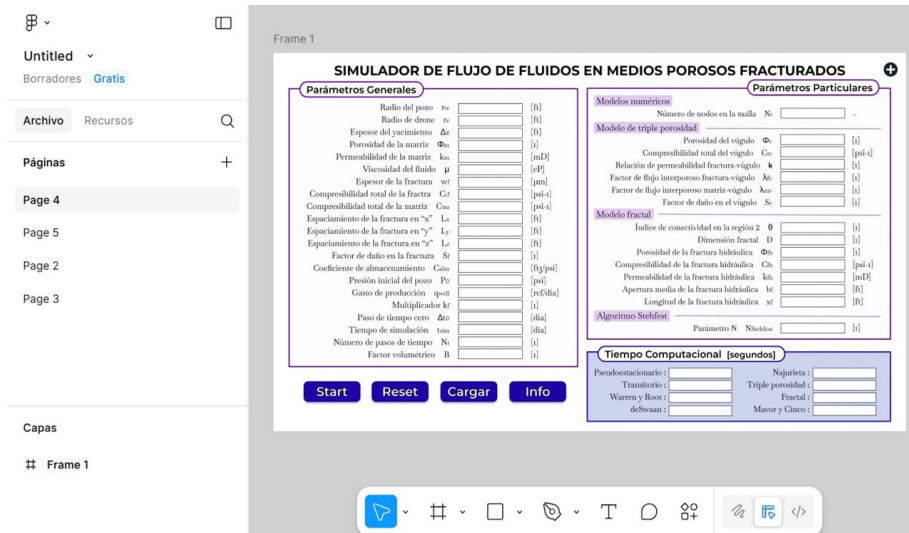


Figura 4.1: Lienzo de Figma con el frame diseñado para la ventana principal.

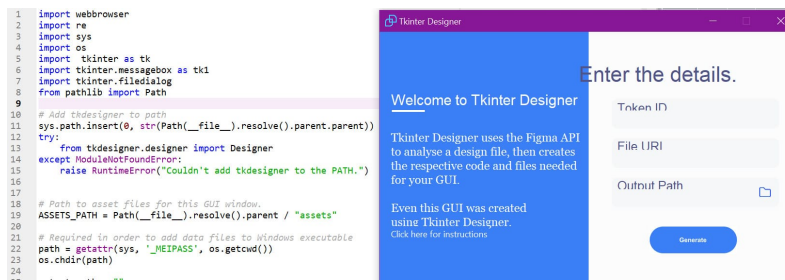


Figura 4.2: GUI y parte del código correspondiente al programa Tkinter Designer.

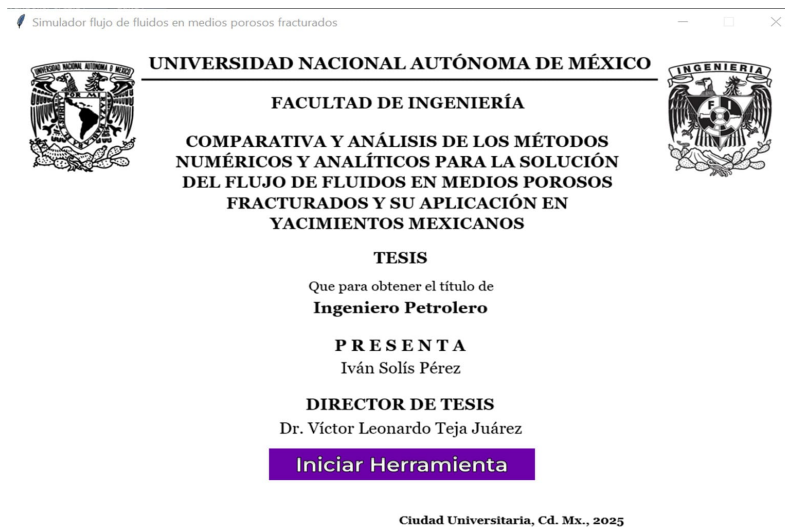


Figura 4.3: Ventana de presentación de la herramienta.

4.2. Descripción de la herramienta

Una vez iniciado el programa se visualiza la ventana de presentación (véase figura 4.3). Con el botón **Iniciar** se abre la ventana principal mostrada en la figura 4.4. A continuación se describen sus elementos:

1. **Parámetros Generales:** variables compartidas por la mayoría de los modelos. Los valores ingresados deben corresponder a las unidades señaladas.
2. **Tiempo Computacional:** al finalizar las simulaciones, en esta sección se muestra el tiempo empleado por cada algoritmo (véase figura 4.5).
3. **Parámetros Particulares:** variables específicas empleadas únicamente en ciertos modelos. Los valores ingresados deben corresponder a las unidades señaladas.
4. **Start:** Ejecuta la simulación con los parámetros ingresados. Si se detecta alguna anomalía, se genera un mensaje de error o advertencia (véase figura 4.6).
5. **Reset:** permite restablecer los valores predeterminados.
6. **Cargar:** permite cargar un archivo en formato `.xlsx`, `.xls` o `.txt` correspondiente a una prueba de presión conforme a las especificaciones señaladas en la figura 4.7.
7. **Info:** explica brevemente cómo emplear el programa.
8. **Más información:** acerca del desarrollador, director y agradecimientos correspondientes.

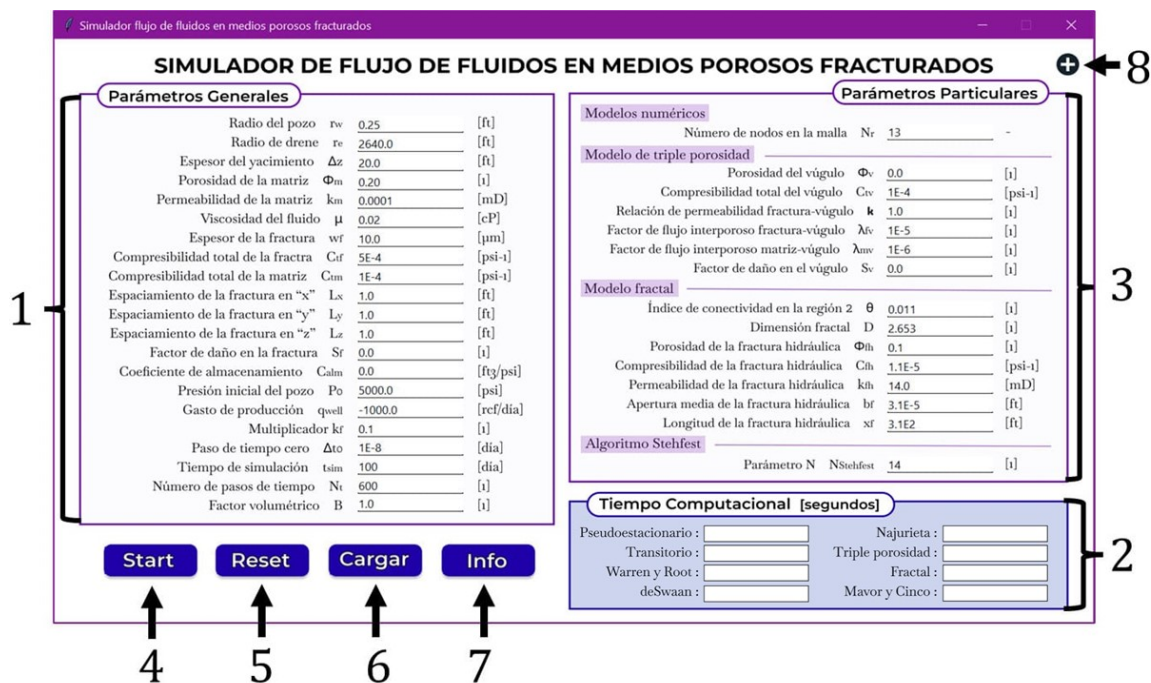


Figura 4.4: Ventana principal de la herramienta y sus partes.

Tiempo Computacional [segundos]			
Pseudoestacionario :	0.14351153373	Najurieta :	0.00200033187
Transitorio :	0.36100029945	Triple porosidad :	0.09099960327
Warren y Root :	0.00399923324	Fractal :	0.13648915290
deSwaan :	0.00300025939	Mavor y Cinco :	0.08100128173

Figura 4.5: Tiempo de ejecución de cada modelo al realizar la simulación correspondiente a los datos de la figura 4.4.

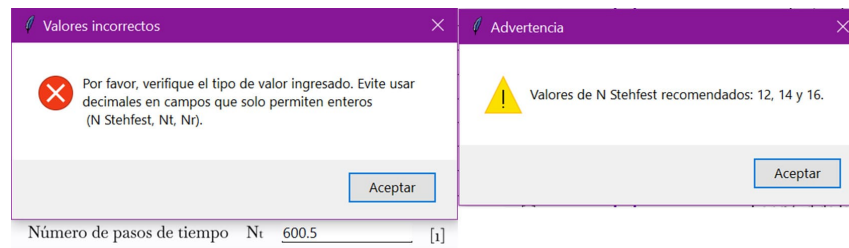


Figura 4.6: Izquierda: Mensaje de error al intentar ingresar un número flotante en una variable de tipo entero, por lo que no continuó con la simulación. Derecha: Mensaje de advertencia al ingresar un valor distinto a los recomendados, aún así realiza la simulación.

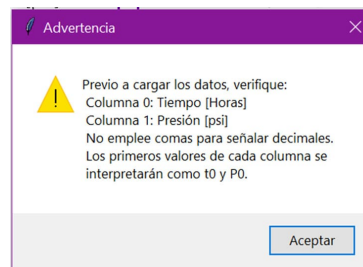


Figura 4.7: Especificaciones que debe cumplir el archivo con los datos de la prueba de presión.

Una vez concluida la simulación, el programa grafica las curvas de presión generadas por los diferentes modelos (véase figura 4.8) así como las gráficas diagnóstico que incluye ΔP y su derivada (véase figura 4.9). En la parte inferior de ambas ventanas se incluyen botones que permiten desactivar o activar las curvas, con el propósito de facilitar la comparación entre modelos. Adicionalmente, si se cargaron los datos de una prueba de presión, sus tiempos de medición serán empleados para calcular la presión a ese tiempo, a fin de presentar una tabla con el error cuadrático medio y el error de porcentaje medio absoluto por modelo (exceptuando el modelo de Swaan) comparando la presión medida y la calculada.

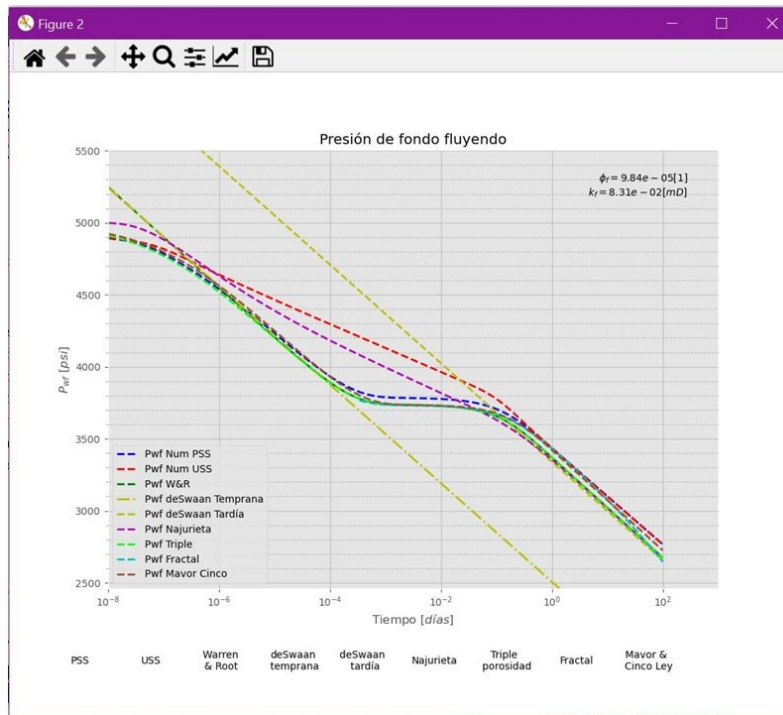


Figura 4.8: Gráfico generado correspondiente a la presión de fondo fluyendo.

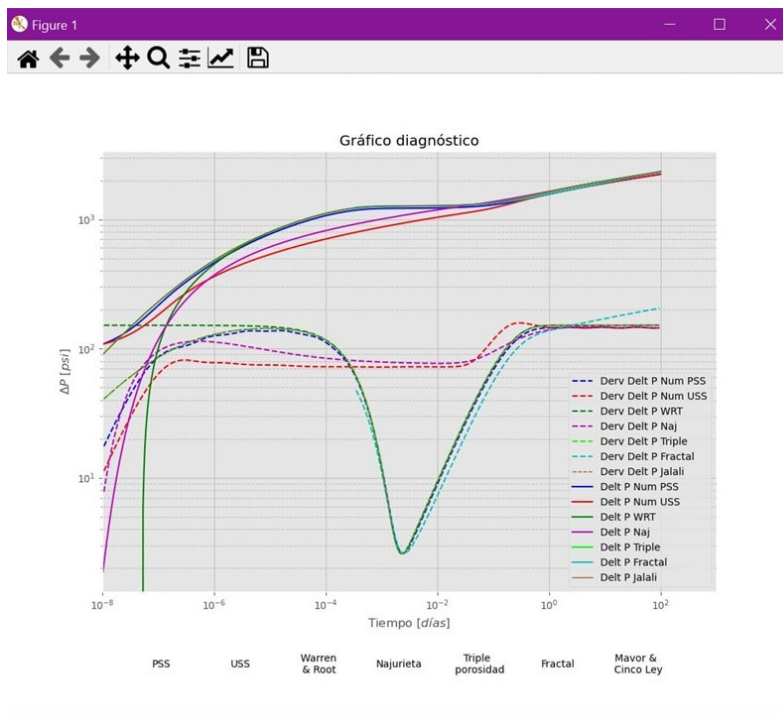


Figura 4.9: Gráfico diagnóstico.

5. Propuestas de aplicación

A fin de comprobar la aplicación de los modelos presentados, se proponen tres casos de estudio basados en pruebas de presión tomadas en yacimientos mexicanos naturalmente fracturados. Previamente, se describe la metodología a emplear.

5.1. Metodología

El procedimiento presentado a continuación se basa en los trabajos de Engler y Tiab (1996) y Tiab y Donaldson (2004). Como ejemplo ilustrativo, se presenta la metodología empleando un “Caso 0” modificado del ejercicio propuesto por Teklu et al. (2013) cuyos parámetros son conocidos con antelación (véase tabla 5.1).

Esta metodología fue desarrollada para una formulación pseudoestacionaria, por lo que se emplearon las curvas generadas mediante el modelo numérico PSS. Los puntos de interés identificados en el gráfico de presión de fondo fluyendo y el gráfico diagnóstico se muestran en las figuras 5.1 y 5.2, respectivamente.

Tabla 5.1: Datos de entrada para el Caso 0.

Datos de entrada		
$P_{yac} = 5000$ psia	$\mu_g = 0.02$ cP	$L_x = L_y = L_z = 1$ ft
$h = 20$ ft	$w_f = 10$ μ m	$c_{tf} = 5 \times 10^{-4}$ psi $^{-1}$
$c_{tm} = 1 \times 10^{-4}$ psi $^{-1}$	$\phi_m = 0.2$	$r_w = 0.25$ ft
$r_e = 2640$ ft	$q = 1000$ rcf/day	$C = 5 \times 10^{-6}$ [ft 3 /psi]
$N_t = 600$	$N_r = 50$	$B = 1.0$
$S = 1$		

Los parámetros a comprobar son:

- Permeabilidad efectiva de la fractura: $k_{f\text{eff}} = 0.00831[mD]$
- Coeficiente de almacenamiento del pozo: $C = 5 \times 10^{-6}$ [ft 3 /psi]
- Capacidad de almacenamiento de la fractura: $\omega = 2.45 \times 10^{-3}$

- Factor de flujo interporoso: $\lambda = 3.01 \times 10^{-4}$
- Daño a la formación: $S = 1$

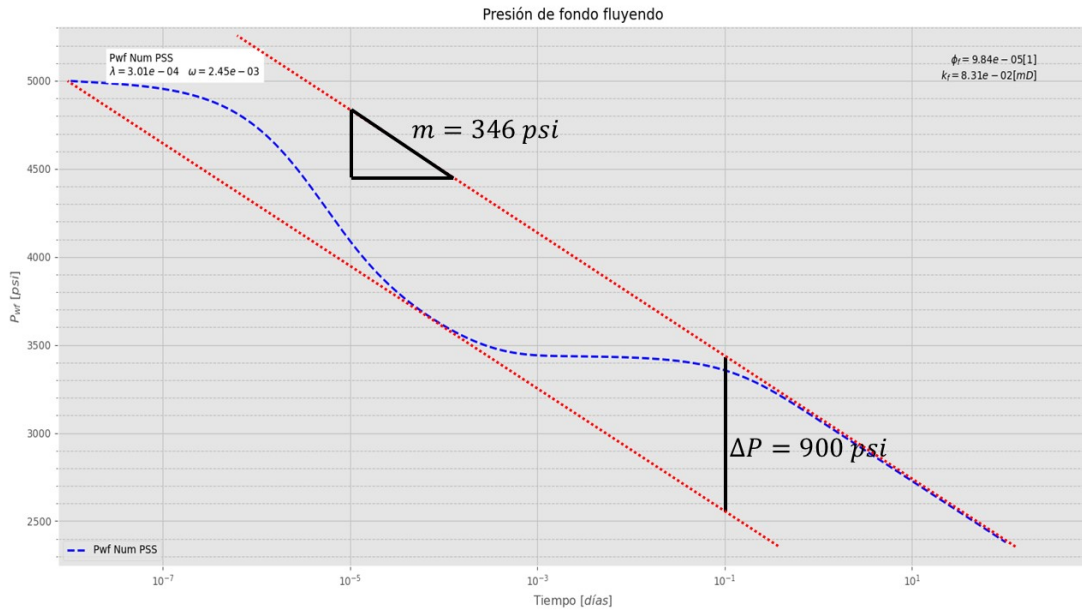


Figura 5.1: Valores de interés obtenidos del gráfico de presión de fondo fluyendo (Caso 0).

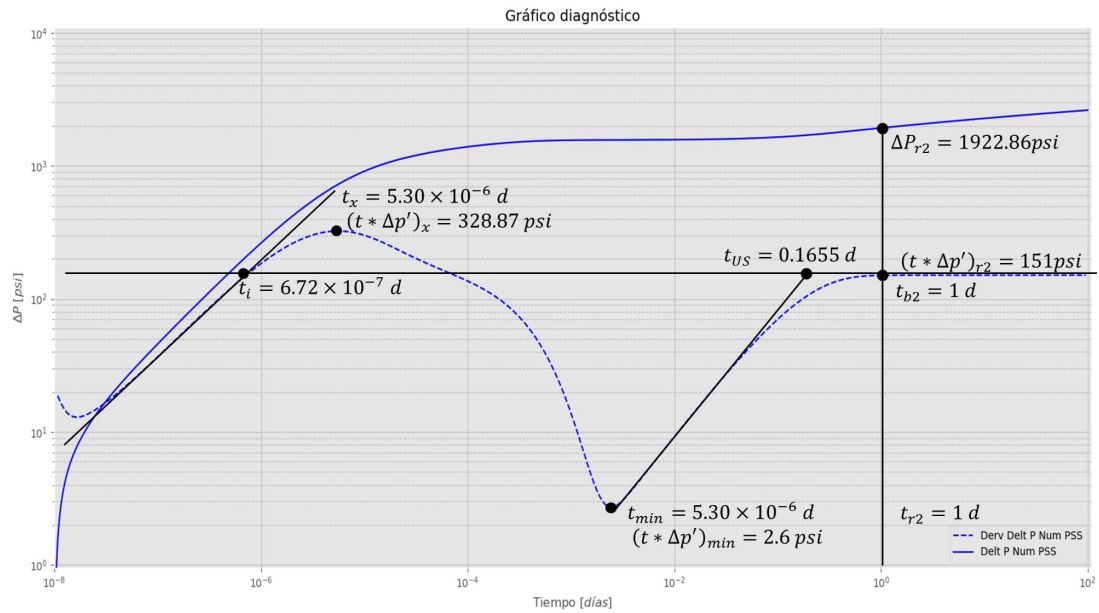


Figura 5.2: Valores de interés obtenidos del gráfico diagnóstico. (Caso 0)

Para $k_{f\text{eff}}$:

$$\begin{aligned}
 k_{f\text{eff}} &= \frac{28.9607 q\mu B}{mh} & (5.1) \\
 &= \frac{28.9607 \cdot 1000[ft^3/day] \cdot 0.02[cP] \cdot 1}{346psi \cdot 20ft} \\
 &= 0.0837[mD]
 \end{aligned}$$

Como alternativa, se puede emplear la fórmula:

$$k_{f\text{eff}} = \frac{12.5745 qB\mu}{h(t * \Delta p')_{r_2}} \quad (5.2)$$

Para calcular C , a partir de la curva de la derivada se traza una recta proyectada a partir del tiempo en que el yacimiento actúa como homogéneo, así como la recta correspondiente a los tiempos iniciales (asociada a los efectos de almacenamiento). Su intersección resulta en el valor t_i , el cual se utiliza en la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{12.578 k_{f\text{eff}} h t_i}{\mu} & (5.3) \\
 &= \frac{12.578 \cdot 0.0837[mD] \cdot 20[ft] \cdot 7 \times 10^{-7}[days]}{0.02[cP]} \\
 &= 4.62 \times 10^{-6}[ft^3/psi]
 \end{aligned}$$

Como alternativa se puede emplear las siguientes ecuaciones:

$$C = \frac{0.06412 q B t_x}{(t * p')_x + 0.84(t * \Delta p')_r} \quad (5.4)$$

$$C = \frac{q B t_i}{5.6145(t * \Delta p')_r} \quad (5.5)$$

El factor de almacenamiento se determina utilizando el valor de presión en el punto mínimo así como la presión cuando el yacimiento se comporta como un medio homogéneo en la curva de la derivada.

$$\begin{aligned}
 \omega &= 0.15866 \left(\frac{(t * \Delta p')_{min}}{(t * \Delta p')_{r_2}} \right) + 0.54653 \left(\frac{(t * \Delta p')_{min}}{(t * \Delta p')_{r_2}} \right)^2 & (5.6) \\
 &= 0.15866 \left(\frac{2.6[psi]}{151.509[psi]} \right) + 0.54653 \left(\frac{2.6[psi]}{151.509[psi]} \right)^2 \\
 &= 2.8 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Como alternativa se tiene la siguiente formulación:

$$\omega = Exp\left(-2.303\frac{m}{\Delta P}\right) \quad (5.7)$$

Para el factor daño, se toman los valores de la derivada y el cambio de la presión en cualquier tiempo a partir del cual el yacimiento se comporta como homogéneo.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta P}{t * \Delta p'} \right)_{r_2} - \ln \left(\frac{24 k_{f\text{eff}} t_{r_2}}{S_T \mu r_w^2} \frac{1}{\omega} \right) + 7.43 \right] \quad (5.8) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1945.6[psi]}{151.5[psi]} \right) - \ln \left(\frac{24 \cdot 0.0831[mD] \cdot 1[day]}{2 \times 10^{-5}[psi^{-1}] \cdot 0.02[cP] \cdot 0.25[ft]^2} \frac{1}{2.45 \times 10^{-3}} \right) + 7.43 \right] \\ &= 1.04[Adim] \end{aligned}$$

Finalmente, el coeficiente de flujo interporoso se obtiene a partir del tiempo en el que se intersecta la recta que representa el flujo homogéneo y la recta proyectada desde la fase de transición posterior al punto mínimo en la curva derivada de presión.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{S_T \mu r_w^2}{0.006329 k_{f\text{eff}} t_{US}} \frac{1}{\omega} \quad (5.9) \\ &= \frac{2 \times 10^{-5}[psi^{-1}] \cdot 0.02[cP] \cdot 0.25[ft]^2}{0.006329 \cdot 0.0831[mD]} \frac{1}{0.1655[days]} \\ &= 2.86 \times 10^{-4}[Adim] \end{aligned}$$

Como alternativa se tiene:

$$\lambda = \frac{(1 - \omega) k_{f\text{eff}}}{18202.6685 t_{b2} S_T \mu r_w^2} \quad (5.10)$$

$$\lambda = \frac{9.9423 h S_T r_w^2 (t * \Delta p')_{min}}{q B t_{min}} \quad (5.11)$$

Cabe destacar que en el trabajo de Engler y Tiab (1996) se presentan diversas alternativas, cada una con su correspondiente rango de aplicación; sin embargo, solo se ejemplificaron aquellas que mostraron un menor error en relación con los casos empleados en este trabajo. Asimismo las expresiones fueron modificadas para asegurar la consistencia entre unidades. Vale la pena mencionar que el autor analiza el escenario en el cual el coeficiente de almacenamiento del pozo es tan elevado que altera los puntos de interés de la gráfica derivada, por lo que propone una metodología para su interpretación. Finalmente, a partir de las fórmulas descritas en los capítulos anteriores se infieren los parámetros adicionales del yacimiento:

$$\phi_f = \left(\frac{\omega}{1 - \omega} \right) \frac{c_{tm}}{c_{tf}} \phi_m \quad (5.12)$$

$$L_z = \sqrt{\frac{4 k_m r_w^2}{\lambda k_{f\text{eff}}}} \quad (5.13)$$

$$w_f = \sqrt{\frac{12 k_{f\text{eff}}}{1013 \phi_f \text{Multi} k_f}} \quad (5.14)$$

5.2. Caso 1: Cuenca del Sureste

El pozo empleado en el Caso 1 es un pozo terrestre productor de aceite ligero ubicado dentro de la Cuenca del Sureste. Para su estudio se cuenta con la gráfica de presión de fondo fluyendo y su gráfica diagnóstica (véase figura 5.3 y 5.4 respectivamente) obtenidas tras una prueba de decremento de presión, así como los datos de la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Datos obtenidos para el Caso 1.

<i>“Caso-1”</i>		
$r_w = 0.27 \text{ ft}$	$\phi = 0.06$	$h = 700 \text{ ft}$
$B_o = 1.764$	$c_{tm} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$	$\mu = 0.45 \text{ cP}$
$Q_o = 5300 \text{ bpd}$		

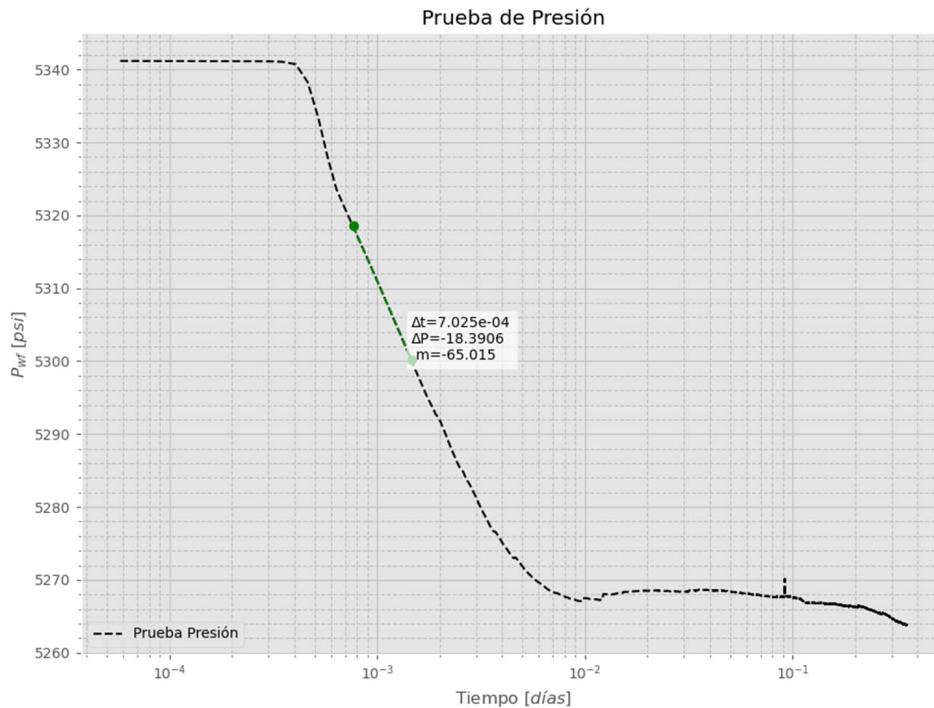


Figura 5.3: Prueba de presión del pozo Caso 1.

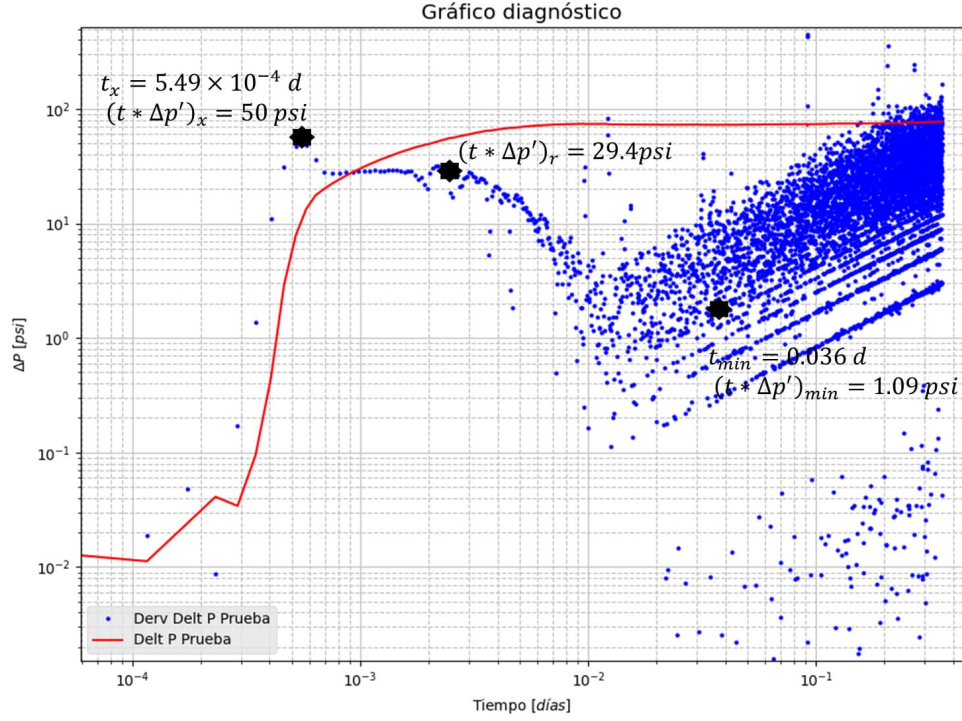


Figura 5.4: Gráfico diagnóstico del Caso 1.

Debido a la gran cantidad de ruido reflejado en la prueba diagnóstico, los puntos se fueron modificando hasta obtener resultados satisfactorios. En cuanto a ΔP , al conocer la forma característica de la curva tipo para una prueba en un yacimiento de doble porosidad, se proyectó la segunda pendiente en la figura 5.3, dando un valor de $\Delta P = 148 [psi]$. Haciendo los cálculos correspondientes:

$$k_{f\text{eff}} = \frac{28.9607 \cdot 29756.85 [ft^3/d] \cdot 0.45 [cP] \cdot 1.764}{65.03 [psi] \cdot 700 [ft]} = 15.028 [mD] \quad (5.15)$$

$$C = \frac{0.06412 \cdot 29756.85 [ft^3/d] \cdot 1.764 \cdot 5.49 \times 10^{-4}}{50 [psi] + (0.84 \cdot 132 [psi])} = 2.47 \times 10^{-2} \quad (5.16)$$

$$\omega = \text{Exp}\left(-2.303 \frac{65.03 [psi]}{148 [psi]}\right) = 0.0053 [Adim] \quad (5.17)$$

$$\lambda = \frac{9.9423 \cdot 700 [ft] \cdot 9.05 \times 10^{-8} [psi^{-1}] \cdot 0.27 [ft]^2 \cdot 1.09 [psi]}{29756.85 [ft^3/d] \cdot 1.764 \cdot 0.036 [d]} = 2.65 \times 10^{-8} [Adim] \quad (5.18)$$

En cuanto al daño en la formación, al no formarse la segunda pendiente (y nuevamente la gran cantidad de ruido en el gráfico diagnóstico) no fue posible obtenerlo mediante las fórmulas; para su obtención se fue aproximando en la simulación hasta obtener un valor adecuado. Los resultados se muestran a continuación:

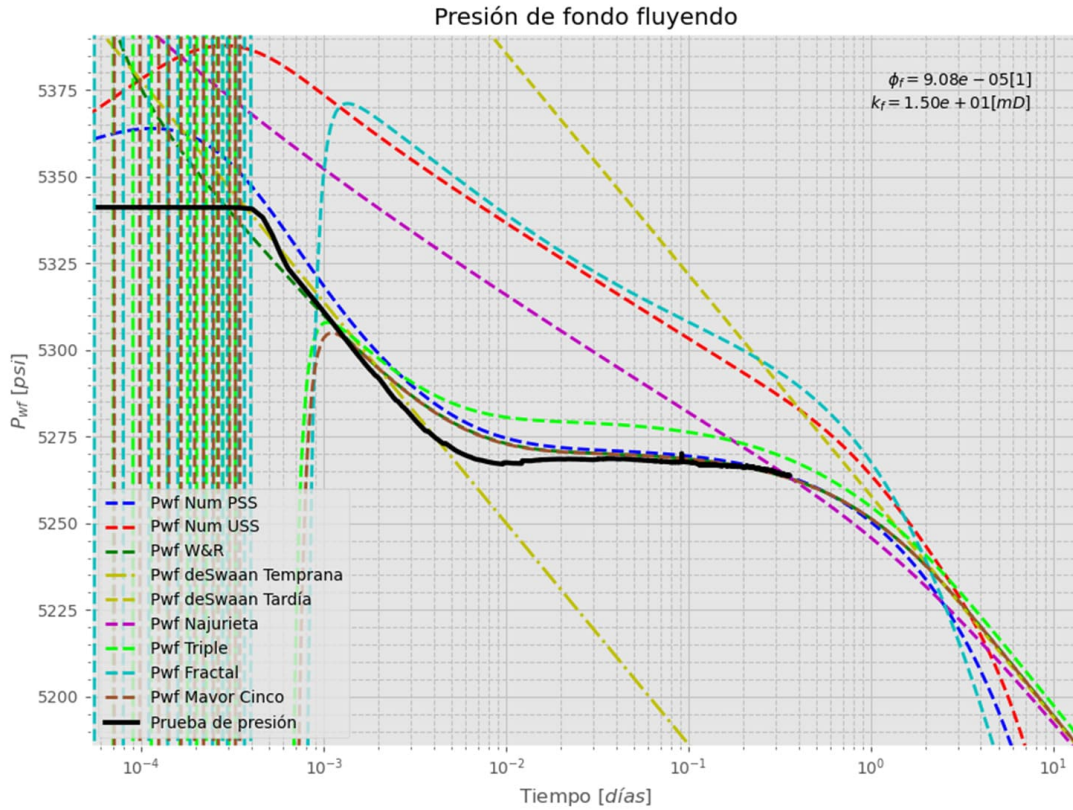


Figura 5.5: Presión de fondo fluyendo simulada del Caso 1.

En la figura 5.6 se puede distinguir la forma que tendría la derivada de la presión sin el ruido asociado a la realización de la prueba. En cuanto al tiempo empleado por la prueba, la figura 5.7 muestra tiempos relativamente altos, debido a la gran cantidad de mediciones por parte de la prueba de presión (6165 tiempos). Si bien los métodos no demoran estos tiempos, sirve para inferir cuáles soluciones demandan un mayor recurso computacional, siendo los numéricos (especialmente el transitorio) los que más tiempo demoran. En contraparte, las soluciones analíticas requieren el menor tiempo. El error asociado a cada modelo se muestra en la figura 5.8.

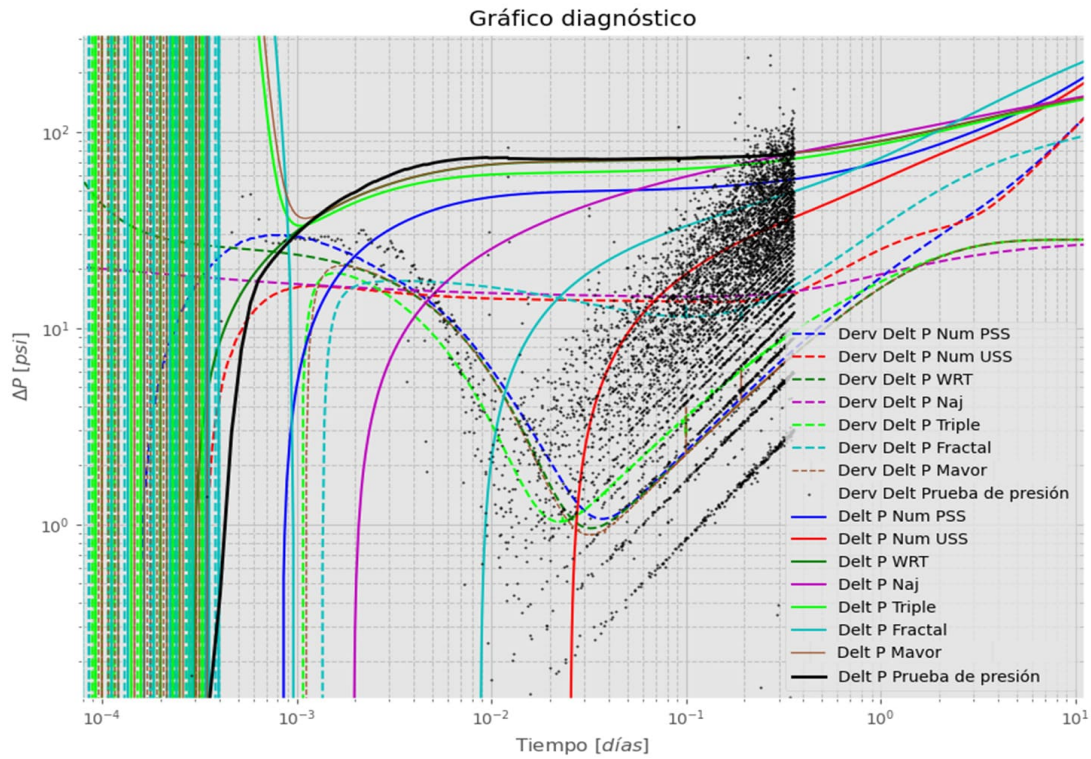


Figura 5.6: Gráfico diagnóstico simulado del Caso 1.

SIMULADOR DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS

Parámetros Generales

Radio del pozo	r_w	0.27	[ft]
Radio de drenaje	r_e	5000	[ft]
Espesor del yacimiento	Δz	700	[ft]
Porosidad de la matriz	Φ_m	0.06	[i]
Permeabilidad de la matriz	k_m	0.01	[mD]
Viscosidad del fluido	μ	0.45	[cP]
Espesor de la fractura	w_f	140	[μm]
Compresibilidad total de la fractura	C_{if}	5E-6	[psi-1]
Compresibilidad total de la matriz	C_{im}	1.5E-6	[psi-1]
Espaciamiento de la fractura en "x"	L_x	10.5	[ft]
Espaciamiento de la fractura en "y"	L_y	11.0	[ft]
Espaciamiento de la fractura en "z"	L_z	86.4	[ft]
Factor de daño en la fractura	S_f	-7.6	[i]
Coefficiente de almacenamiento	C_{alm}	0.0247	[ftg/psi]
Presión inicial del pozo	P_o	5341.2	[psi]
Gasto de producción	q_{well}	-29756.85	[ref/día]
Multiplicador k_f		0.1	[i]
Paso de tiempo cero	Δt_o	1E-8	[día]
Tiempo de simulación	t_{sim}	100	[día]
Número de pasos de tiempo	N_t	600	[i]
Factor volumétrico	B	1.764	[i]

Parámetros Particulares

Modelos numéricos

Número de nodos en la malla N_r 50

Modelo de triple porosidad

Porosidad del vóculo Φ_v 0.0001 [i]

Compresibilidad total del vóculo C_{tv} 1E-4 [psi-1]

Relación de permeabilidad fractura-vóculo k 1.0 [i]

Factor de flujo interporoso fractura-vóculo λ_{fv} 1E-8 [i]

Factor de flujo interporoso matriz-vóculo λ_{mv} 0.0 [i]

Factor de daño en el vóculo S_v 0.0 [i]

Modelo fractal

Índice de conectividad en la región 2 θ 0.4 [i]

Dimensión fractal D 2.55 [i]

Porosidad de la fractura hidráulica Φ_{fh} 0.002 [i]

Compresibilidad de la fractura hidráulica C_{fh} 1.1E-8 [psi-1]

Permeabilidad de la fractura hidráulica k_{fh} 100000 [mD]

Apertura media de la fractura hidráulica b_f 0.41 [ft]

Longitud de la fractura hidráulica x_f 230 [ft]

Algoritmo Stehfest

Parámetro N $N_{Stehfest}$ 14 [i]

Tiempo Computacional [segundos]

Pseudoestacionario	3.55771970748	Najurieta	0.02092981338
Transitorio	5.96213817596	Triple porosidad	1.00464057922
Warren y Root	0.04186010360	Fractal	1.48508858680
deSwaan	0.02990031242	Mavor y Cinco	0.90696716308

Start **Reset** **Cargar** **Info**

Figura 5.7: Parámetros de entrada y Tiempo Computacional del Caso 1.

Modelo	RMSE → 0.0	MAPE → 0.0%
PSS	2.209	0.026 %
USS	34.750	0.620 %
WRT	1.772	0.019 %
Najurieta	16.594	0.214 %
Triple	1029150790.435	295069.934 %
Mavor	586432790.530	227803.361 %
Fractal	651523547.997	250444.968 %

Figura 5.8: Error por modelo del Caso 1.

Retomando la figura 5.5, como se discutió en el análisis de sensibilidades, punto 1, a tiempos tempranos se observa divergencia en los modelos semianalíticos (Mavor, Triple porosidad y Fractal) por emplear daño $S < 0$ y $C > 0$. Una solución parcial está en realizar nuevamente la solución con $C = 0 [ft^3/psi]$ como se muestra en la figura 5.9. De igual forma, el error asociado a los modelos semianalíticos se reduce (véase figura 5.10).

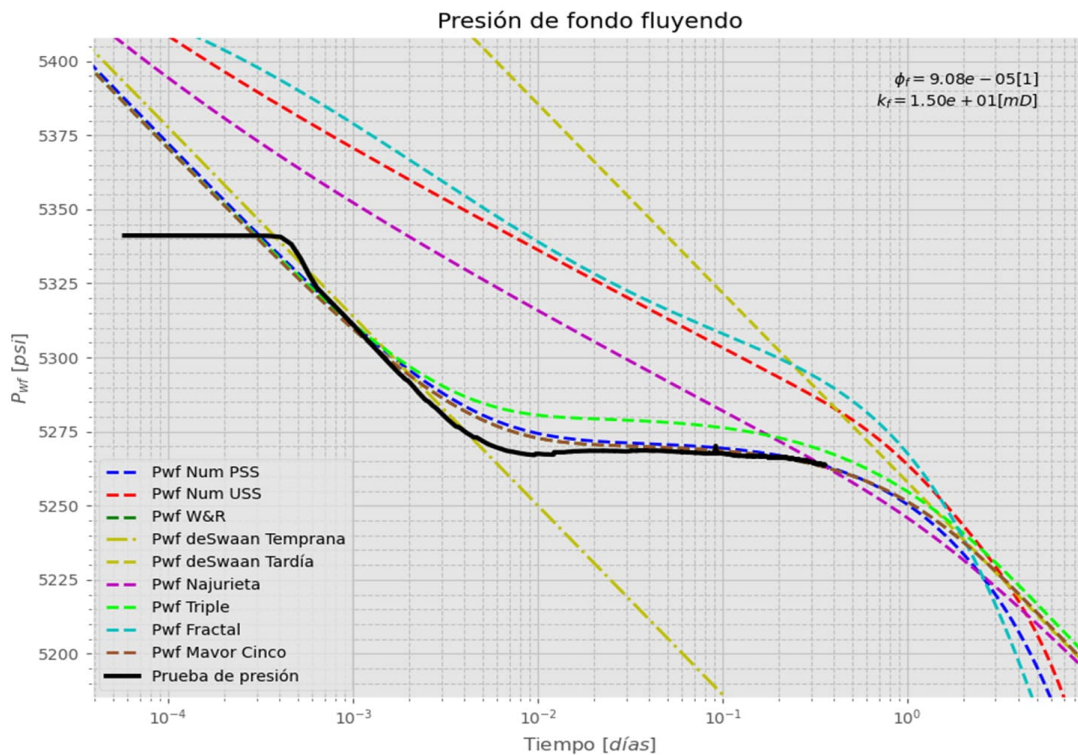


Figura 5.9: Presión de fondo fluyendo resultante tras considerar $C = 0 [ft^3/psi]$ (Caso 1).

Modelo	RMSE → 0.0	MAPE → 0.0%
PSS	2.128	0.025 %
USS	34.681	0.619 %
WRT	1.573	0.018 %
Najurieta	16.594	0.214 %
Triple	7.718	0.141 %
Mavor	1.573	0.018 %
Fractal	33.458	0.598 %

Figura 5.10: Error por modelo tras considerar $C = 0 [ft^3/psi]$ (Caso 1).

5.3. Caso 2: Cantarell

Para este segundo caso digitalizó la figura 8 presentada en Posadas M. y Samaniego V. (2015), correspondiente a una prueba de presión en el Activo de Producción Cantarell (véase gráfico 5.11).

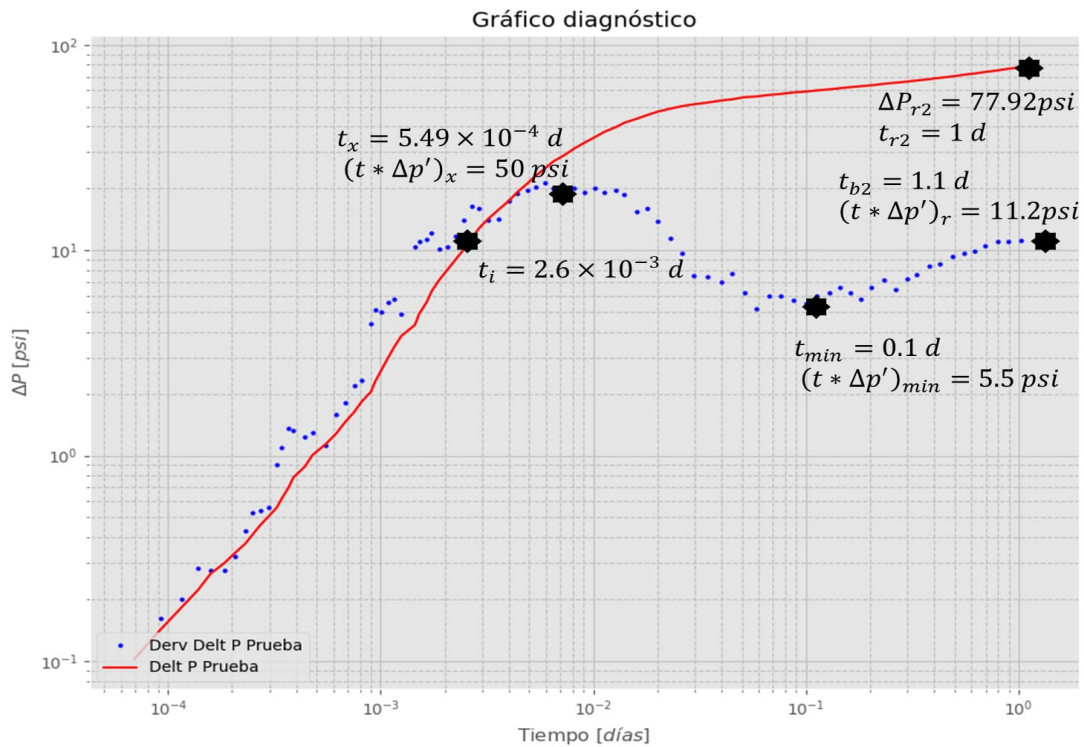


Figura 5.11: Gráfica diagnóstico aproximada del Caso 2 (modificada de Posadas y Samaniego, 2015).

Su trabajo está enfocado en el estudio del comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados con efectos de fronteras por fallas sellantes. Con su formulación, los autores determinaron que, debido a una falla paralela al pozo localizada a $876[ft]$ los parámetros del yacimiento son los siguientes:

- Permeabilidad efectiva de la fractura: $k_{f\text{eff}} = 328[mD]$
- Daño a la formación: $S = -4.1$
- Capacidad de almacenamiento de la fractura: $\omega = 0.4$
- Factor de flujo interporoso: $\lambda = 1 \times 10^{-8}$

En cuanto a los valores iniciales, el artículo no proporciona información al respecto. Por tal motivo, para el desarrollo del ejercicio se propusieron parámetros físicamente factibles que, al ser utilizados en la simulación resultara en los parámetros estimados a continuación.

La gráfica de presión de fondo fluyendo se puede trazar a partir de los valores estimados de la curva ΔP_{prueba} ; suponiendo una $P_0 = 5000[psi]$ se obtiene la figura 5.12.

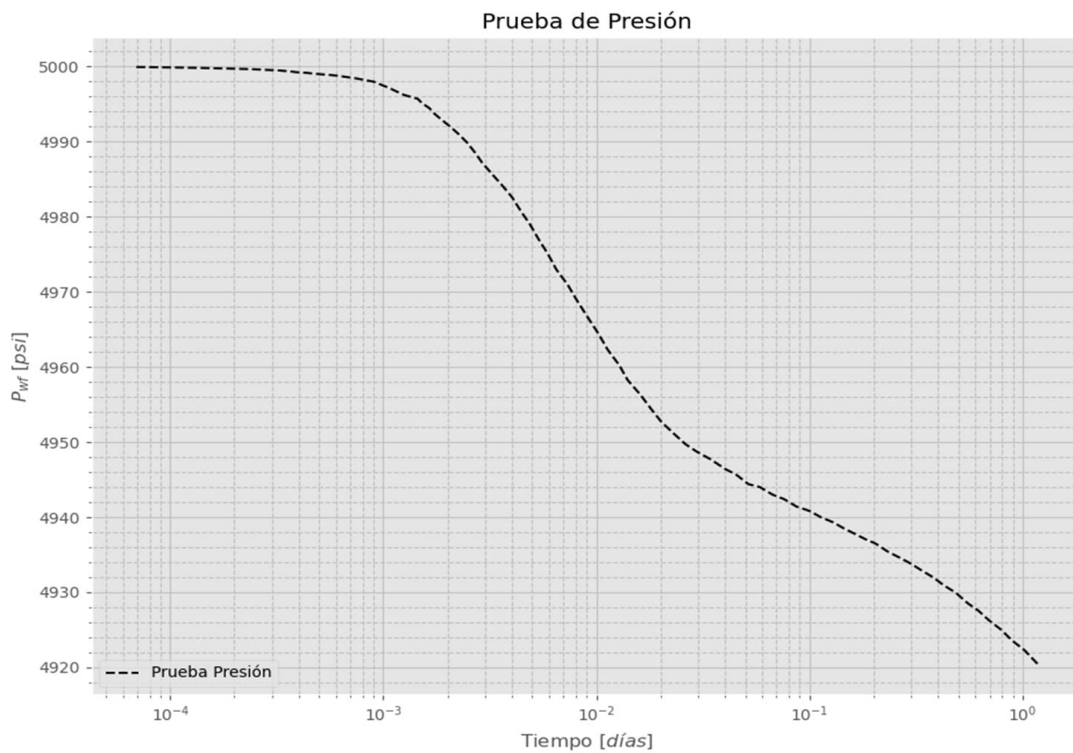


Figura 5.12: Presión de fondo fluyendo resultante (Caso 2).

Comenzando por la permeabilidad, se asumirá que el valor propuesto es el correcto, Resta encontrar valores apropiados de q , μ y B para aproximar $k_{f\text{eff}}$:

$$\begin{aligned}
k_{f\,eff} &= \frac{12.5745 \cdot 3700[ft^3/d] \cdot 1.304 \cdot 8[cP]}{132[ft] \cdot 11.2[psi]} \\
&= 327[mD]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Calculando ω :

$$\begin{aligned}
\omega &= 0.15866 \left(\frac{5.5[psi]}{11.21[psi]} \right) + 0.54653 \left(\frac{5.5[psi]}{11.21[psi]} \right)^2 \\
&= 0.209[Adim]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Nótese la diferencia entre el valor original y el obtenido con la metodología propuesta. Esta discrepancia puede atribuirse a la diferencia entre los modelos aplicados o diferencias sutiles al momento de digitalizar la gráfica. Una vez obtenido ω se pueden suponer valores para ϕ y c_t , resultando $\phi_m = 0.1$, $\phi_f = 0.0218$, $c_{t_m} = 3.3 \times 10^{-4}[psi^{-1}]$ y $c_{t_f} = 4 \times 10^{-4}[psi^{-1}]$, lo que equivale a $S_T = 4.17 \times 10^{-5}[psi^{-1}]$.

$$\begin{aligned}
C &= \frac{3700[ft^3/d] \cdot 1.304 \cdot 0.0026[d]}{11.21[psi]} \\
&= 0.199[ft^3psi]
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \left[\frac{77.92[psi]}{11.22[psi]} - \ln \left(\frac{24 \cdot 328[mD] \cdot 1[d]}{4.17 \times 10^{-5}[psi^{-1}] \cdot 8[cP] \cdot 0.29[ft]^2} \right) + 7.43 \right] \\
&= -2.538[Adim]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(1 - 0.209) \cdot 328[mD]}{18202.6685 \cdot 1.1[d] \cdot 4.17 \times 10^{-5}[psi^{-1}] \cdot 8[cP] \cdot 0.29[ft]^2} \\
&= 4.86 \times 10^{-5}[Adim]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Como resultado se obtuvieron las figuras 5.13 y 5.14. Nuevamente, la combinación de $S < 0$ y $C > 0$ provoca divergencia a tiempos tempranos. Los parámetros de entrada finales se muestran en la figura 5.15, y el error en la figura 5.17. Nótese que el modelo con menor error nuevamente es el numérico PSS. Finalmente, se muestra la simulación considerando $C = 0[ft^3/psi]$ (véase figuras 5.16 y 5.18).

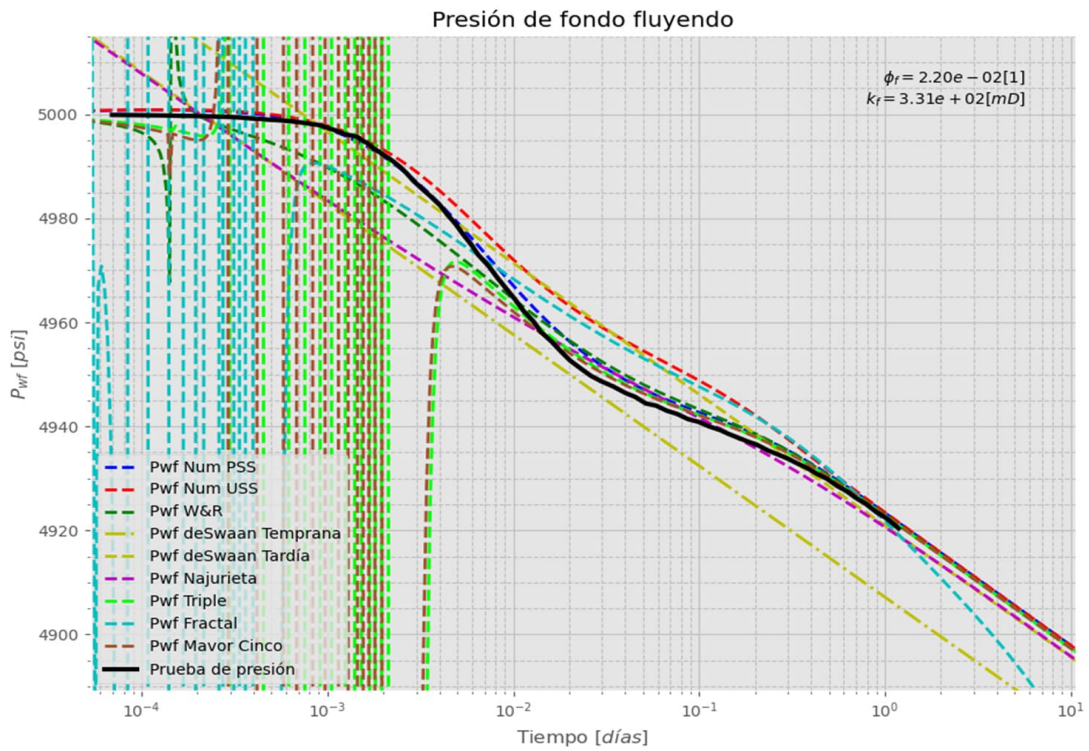


Figura 5.13: Simulación de presión de fondo fluyendo del Caso 2.

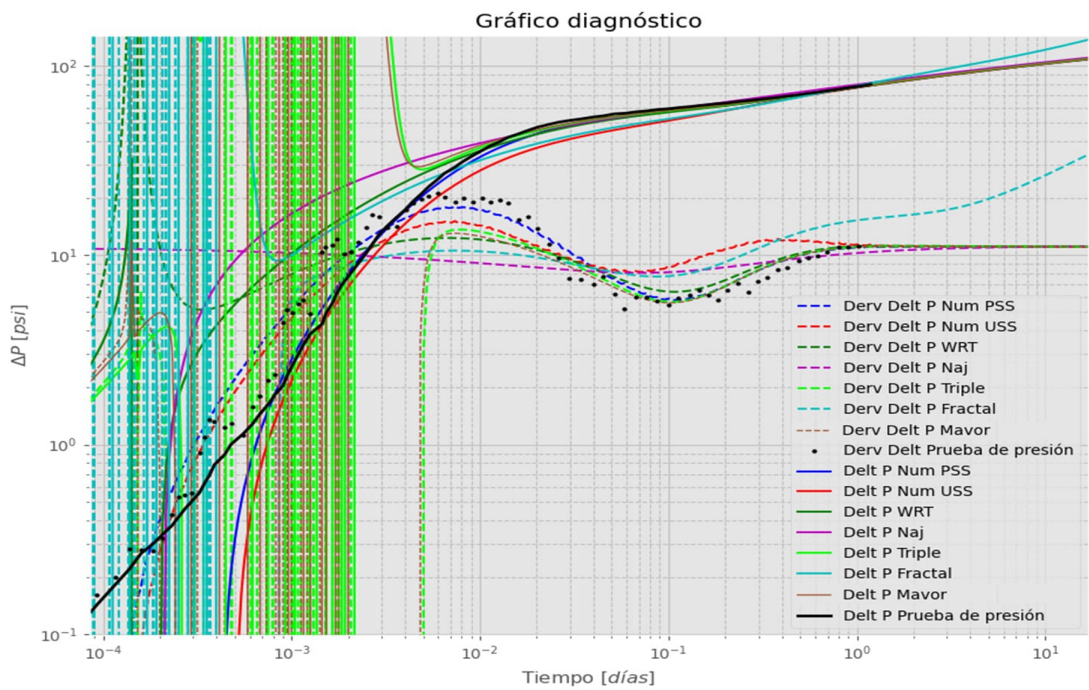


Figura 5.14: Gráfico diagnóstico obtenido de la simulación para el Caso 2.

SIMULADOR DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS

Parámetros Generales

Radio del pozo	r_w	0.29	[ft]
Radio de drenaje	r_e	3000.0	[ft]
Espesor del yacimiento	Δz	132	[ft]
Porosidad de la matriz	Φ_m	0.1	[i]
Permeabilidad de la matriz	k_m	3.1	[mD]
Viscosidad del fluido	μ	8	[cP]
Espesor de la fractura	w_f	42.2	[μ m]
Compresibilidad total de la fractura	C_{if}	4E-4	[psi ⁻¹]
Compresibilidad total de la matriz	C_{tm}	3.3E-4	[psi ⁻¹]
Espaciamiento de la fractura en "x"	L_x	0.017	[ft]
Espaciamiento de la fractura en "y"	L_y	0.01	[ft]
Espaciamiento de la fractura en "z"	L_z	8.09	[ft]
Factor de daño en la fractura	S_f	-2.53	[i]
Coefficiente de almacenamiento	C_{alm}	0.2	[ft ³ /psi]
Presión inicial del pozo	P_o	5000.0	[psi]
Gasto de producción	q_{well}	-3700.0	[ref/día]
Multiplificador	k_r	0.1	[i]
Paso de tiempo cero	Δt_o	1E-8	[día]
Tiempo de simulación	t_{sim}	100	[día]
Número de pasos de tiempo	N_t	600	[i]
Factor volumétrico	B	1.3	[i]

Parámetros Particulares

Modelos numéricos
Número de nodos en la malla N_r : 50

Modelo de triple porosidad
Porosidad del vóculo Φ_v : 0.0
Compresibilidad total del vóculo C_{tv} : 1E-6
Relación de permeabilidad fractura-vóculo k : 1.0
Factor de flujo interporoso fractura-vóculo λ_{fv} : 9.28E-9
Factor de flujo interporoso matriz-vóculo λ_{mv} : 0.0
Factor de daño en el vóculo S_v : 0.0

Modelo fractal
Índice de conectividad en la región 2 θ : -0.7
Dimensión fractal D : 2.05
Porosidad de la fractura hidráulica Φ_{fh} : 0.02
Compresibilidad de la fractura hidráulica C_{fh} : 1.0E-6
Permeabilidad de la fractura hidráulica k_{fh} : 100000
Apertura media de la fractura hidráulica bf : 6.1E-1
Longitud de la fractura hidráulica xf : 9.0

Algoritmo Stehfest
Parámetro N $N_{Stehfest}$: 14

Tiempo Computacional [segundos]

Pseudoestacionario	: 0.36915516853	Najurieta	: 0.00199604034
Transitorio	: 0.60178947448	Triple porosidad	: 0.10899972915
Warren y Root	: 0.00400924682	Fractal	: 0.15600061416
deSwaan	: 0.00301265716	Mavor y Cinco	: 0.09599947929

Start **Reset** **Cargar** **Info**

Figura 5.15: Parámetros de entrada y Tiempo Computacional del Caso 2.

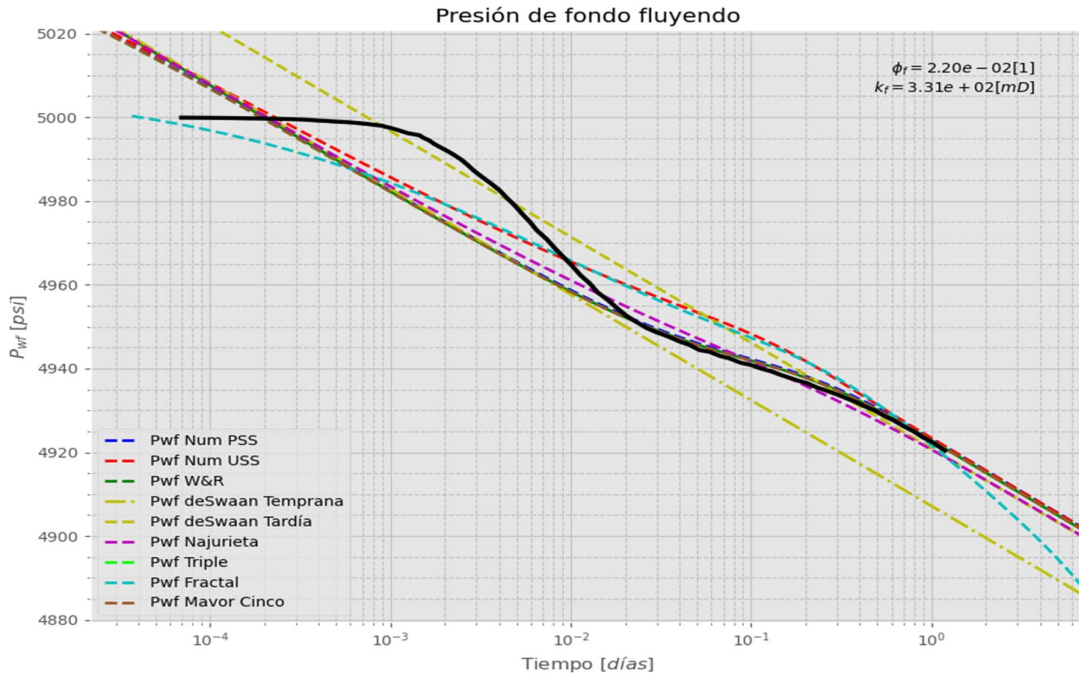


Figura 5.16: Presión de fondo fluyendo resultante tras considerar $C = 0 [ft^3/psi]$ (Caso 2).

Modelo	RMSE → 0.0	MAPE → 0.0%
PSS	1.595	0.026 %
USS	5.136	0.076 %
WRT	5.193	0.082 %
Najurieta	8.341	0.125 %
Triple	2861802308.517	6896286.421 %
Mavor	253213849.791	1393667.099 %
Fractal	88369840.729	327506.799 %

Figura 5.17: Error por modelo del Caso 2.

Modelo	RMSE → 0.0	MAPE → 0.0%
PSS	9.172	0.134 %
USS	7.686	0.132 %
WRT	9.329	0.135 %
Najurieta	8.386	0.126 %
Triple	9.362	0.135 %
Mavor	9.362	0.135 %
Fractal	8.107	0.142 %

Figura 5.18: Error por modelo tras considerar $C = 0[ft^3/psi]$ (Caso 2).

5.4. Caso 3: Triple porosidad Doble permeabilidad

Para el último caso, los datos provienen de un yacimiento naturalmente fracturado vulgar operado en el complejo Cantarell del cual se conocen buena parte de los parámetros de entrada (véase tabla 5.3). Nuevamente se ingresarán los valores de manera que reproduzcan los parámetros conocidos.

El gráfico diagnóstico original se muestra en la figura 5.19, mientras que la presión de fondo simulada y el gráfico diagnóstico en las figuras 5.20 y 5.21. Los parámetros de entrada se muestran en la figura 5.22. Por último, el error asociado a cada modelo (véase figura 5.23) muestra que el modelo de triple porosidad reproduce de mejor manera la prueba (véase figura 5.24).

Tabla 5.3: Datos obtenidos para el Caso 3.

Triple porosidad - Doble permeabilidad		
$C = 0.05 \text{ ft}^3/\text{psi}$	$S = 0.0$	$k_f = 40 \text{ mD}$
$k_v = 4 \text{ mD}$	$\omega_v = 0.2128$	$\omega_f = 0.0426$
$\lambda_{mv} = 1 \times 10^{-5}$	$\lambda_{vf} = 1 \times 10^{-4}$	$\lambda_{mf} = 1 \times 10^{-6}$
$r_e = 2000 \text{ ft}$	$c_{tf} = 1 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$	$c_{tv} = 2 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$
$P_0 = 9000 \text{ [psi]}$		

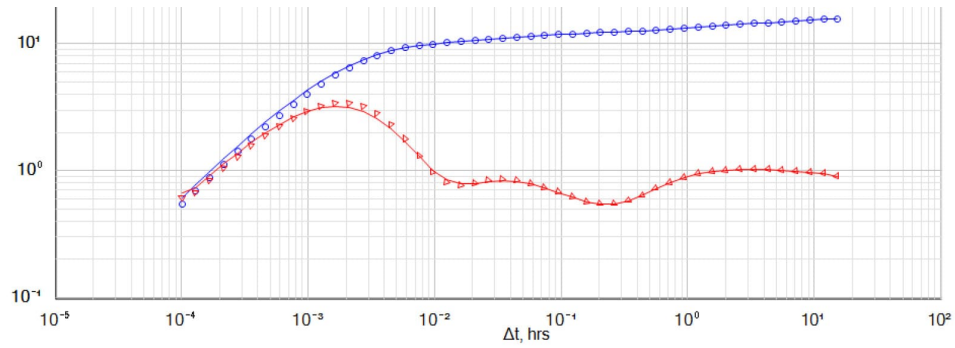


Figura 5.19: Gráfica diagnóstico del Caso 3.

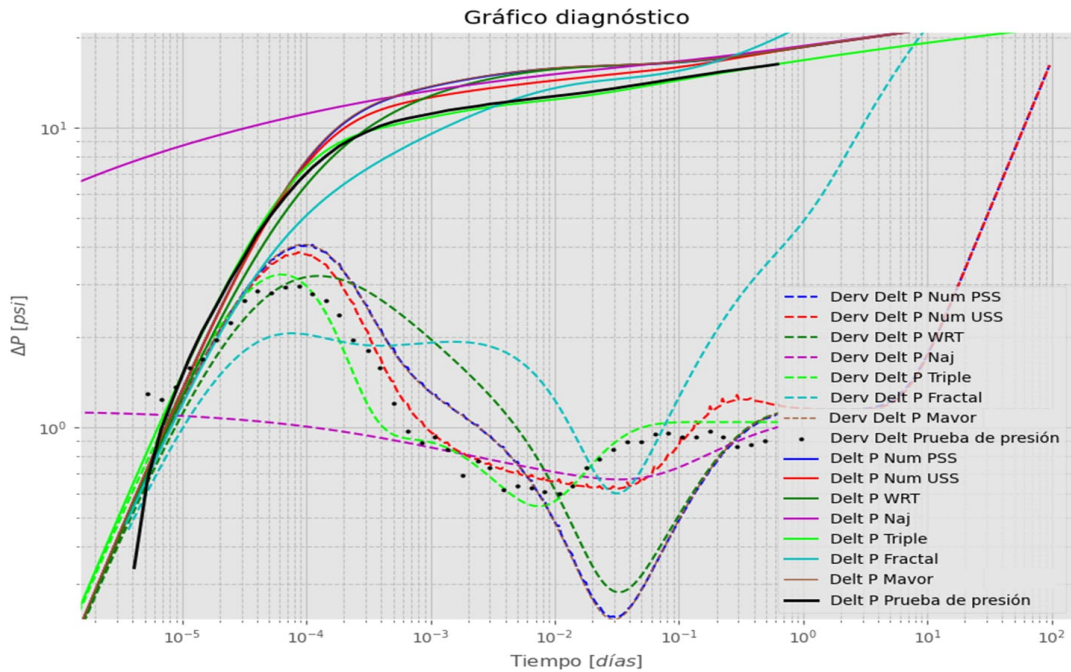


Figura 5.20: Simulación de presión de fondo fluyendo del Caso 3.

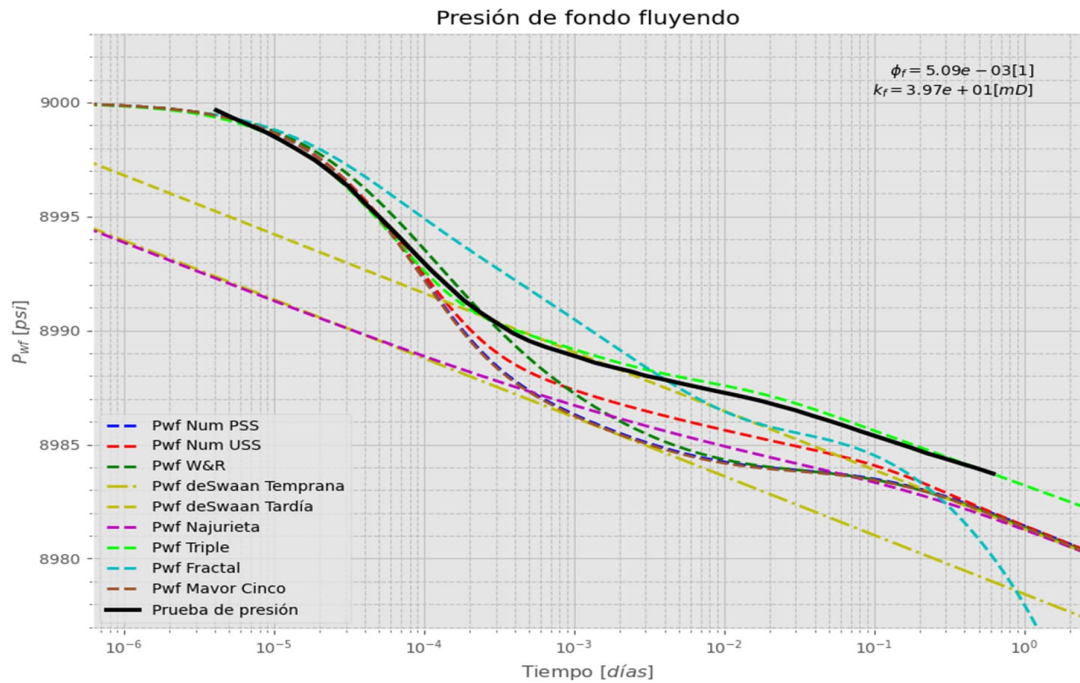


Figura 5.21: Gráfico diagnóstico obtenido de la simulación del Caso 3.

SIMULADOR DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS

Parámetros Generales

Radio del pozo	r _w	0.25	[ft]
Radio de drenaje	r _e	3000	[ft]
Espesor del yacimiento	Δz	980	[ft]
Porosidad de la matriz	Φ _m	0.03	[1]
Permeabilidad de la matriz	k _m	0.00016	[mD]
Viscosidad del fluido	μ	0.8	[cP]
Espesor de la fractura	w _f	30.4	[μm]
Compresibilidad total de la fractura	C _f	1E-5	[psi ⁻¹]
Compresibilidad total de la matriz	C _m	3E-5	[psi ⁻¹]
Espaciamiento de la fractura en "x"	L _x	0.04	[ft]
Espaciamiento de la fractura en "y"	L _y	0.04	[ft]
Espaciamiento de la fractura en "z"	L _z	1.0	[ft]
Factor de daño en la fractura	S _f	0.0	[1]
Coefficiente de almacenamiento	C _{alm}	0.03	[ft ³ /psi]
Presión inicial del pozo	P _o	9000	[psi]
Gasto de producción	q _{well}	-2947.65	[rcf/día]
Multiplicador	k _f	0.1	[1]
Paso de tiempo cero	Δt _o	1E-8	[día]
Tiempo de simulación	t _{sim}	100	[día]
Número de pasos de tiempo	N _t	600	[1]
Factor volumétrico	B	1.5	[1]

Parámetros Particulares

Modelos numéricos

Número de nodos en la malla N_r: 50 [1]

Modelo de triple porosidad

Porosidad del vóculo Φ_v: 0.01286 [1]

Compresibilidad total del vóculo C_{tv}: 2E-5 [psi⁻¹]

Relación de permeabilidad fractura-vóculo k: 0.909090909 [1]

Factor de flujo interporoso fractura-vóculo λ_{fv}: 1E-4 [1]

Factor de flujo interporoso matriz-vóculo λ_{mv}: 1E-5 [1]

Factor de daño en el vóculo S_v: 0.0 [1]

Modelo fractal

Índice de conectividad en la región 2 θ: -0.2 [1]

Dimensión fractal D: 2.1 [1]

Porosidad de la fractura hidráulica Φ_{fh}: 0.001 [1]

Compresibilidad de la fractura hidráulica C_{fh}: 1.1E-5 [psi⁻¹]

Permeabilidad de la fractura hidráulica k_{fh}: 15000 [mD]

Apertura media de la fractura hidráulica b_f: 3.1E-2 [ft]

Longitud de la fractura hidráulica x_f: 3.5E2 [ft]

Algoritmo Stehfest

Parámetro N N_{Stehfest}: 14 [1]

Tiempo Computacional [segundos]

Pseudoestacionario	: 0.50002598762	Najurieta	: 0.00303792953
Transitorio	: 0.72056174278	Triple porosidad	: 0.37089681625
Warren y Root	: 0.00593066215	Fractal	: 0.23374629020
deSwaan	: 0.00299668312	Mavor y Cinco	: 0.12988972663

Start Reset Cargar Info

Figura 5.22: Parámetros de entrada y Tiempo Computacional del Caso 3.

Modelo	RMSE→ 0.0	MAPE→ 0.0%
PSS	1.995	0.019 %
USS	1.242	0.012 %
WRT	1.756	0.016 %
Najurieta	3.927	0.038 %
Triple	0.232	0.002 %
Mavor	2.041	0.019 %
Fractal	1.496	0.014 %

Figura 5.23: Error por modelo del Caso 3.

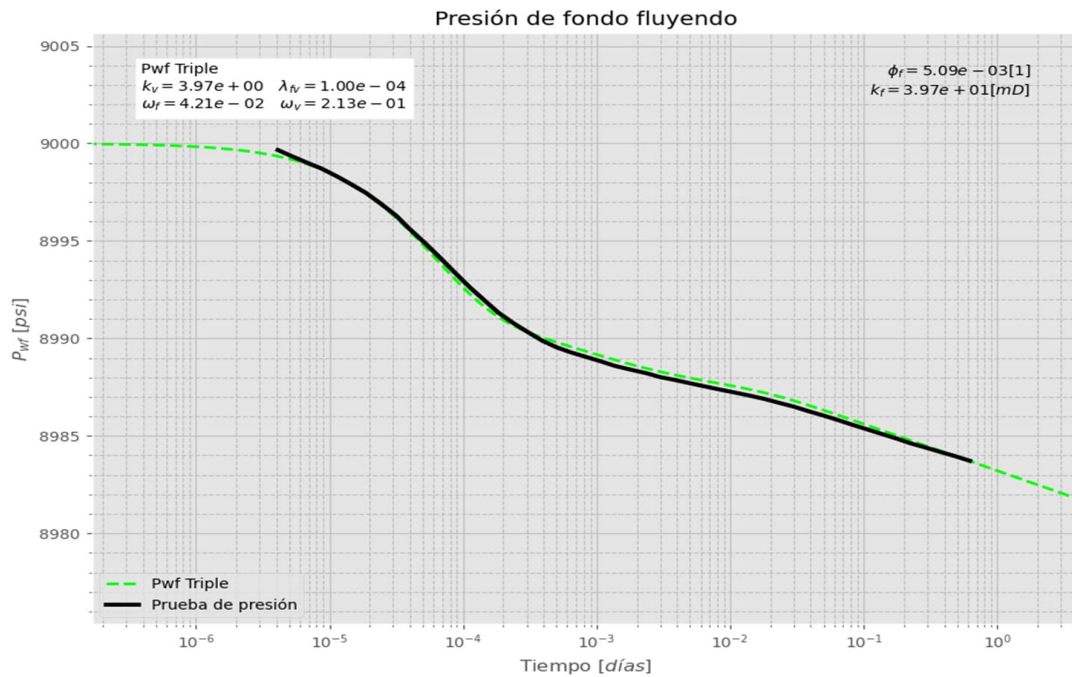


Figura 5.24: Modelo de triple porosidad ajustado con la prueba de presión (Caso 3).

Tras haber simulado el ejercicio, se intentó reproducir algún parámetro. Más allá de obtener el valor de $k_{feff} = 4.04[mD]$ a partir de la pendiente de la presión de fondo fluyendo (ecuación 5.1), no se obtuvo otro parámetro, como era de esperar. Esto se debe a que la mayoría de las fórmulas propuestas se basan en la solución del flujo de fluidos en medios porosos fracturados de doble permeabilidad considerando flujo pseudoestacionario. Se tiene un área de oportunidad en los modelos de triple porosidad para extraer los valores de interés partiendo del análisis de la gráfica diagnóstica.

Conclusiones y siguientes pasos

Conclusiones

- ⌘ Los modelos desarrollados en este trabajo en conjunto con la metodología propuesta permiten una caracterización certera de yacimientos naturalmente fracturados mexicanos a partir de una prueba de decremento de presión si se cuentan con los datos necesarios. En comparación con un modelo de porosidad simple, se tendrá un mayor entendimiento de la formación, lo que implica una mejora en la administración del yacimiento.
- ⌘ La herramienta desarrollada para este trabajo resulta tener una aplicabilidad versátil en el área de simulación de yacimientos fracturados. Si bien está limitada a flujo radial monofásico, se comprobó su viabilidad de su uso en yacimientos mexicanos. No obstante, se requiere tener un conocimiento sustancial de los diversos modelos para comprender su comportamiento al variar los parámetros, así como una noción de cual modelo tendrá los mejores resultados para lograr un mejor ajuste entre simulación y datos medidos. Del mismo modo, puede ser de gran utilidad al estudiar el comportamiento de la presión en fondo fluyendo conforme se cambian sus datos de entrada.
- ⌘ Resulta necesario contar con diversas alternativas para determinar los parámetros de interés de un yacimiento fracturado. Como se demostró en los casos aplicados, según el escenario habrán formulaciones que tengan un mayor grado de exactitud, ya sea por el rango de aplicación de la fórmula, valores distorsionados por ruido asociado a la toma de datos, variaciones de la geometría típica de las curvas ocasionadas por el daño y el efecto de almacenamiento del pozo, o no se cuenta con alguna de las curvas.
- ⌘ Ambos modelos numéricos resultan adecuados para la simulación de yacimientos naturalmente fracturados; sin embargo, para un mejor resultado es preferible identificar previamente la ecuación de transferencia adecuada a partir de la geometría de los gráficos de presión de fondo fluyendo y diagnóstico. Cabe mencionar que estas

formulaciones demandan una mayor cantidad de recurso computacional (como se vio en el Caso 1). Si bien la formulación desarrollada fue en geometría radial 1D, el tiempo necesario puede ir aumentando conforme se lleve a 3D, especialmente el modelo transitorio.

- ⌘ Se debe tener precaución con los modelos semianalíticos por la limitante de aplicabilidad cuando $S < 0$ y $C > 0$.
 - * El modelo de Mavor resulta ser una opción más rápida al requerir un menor recurso computacional a comparación con los modelos numéricos.
 - * Si bien el modelo de triple porosidad está enfocado en el estudio de una tercera porosidad (vugular), su uso correcto puede conllevar a un método flexible y práctico al poder simular yacimientos de doble porosidad y permeabilidad simple.
 - * Usar la formulación fractal resulta compleja, si bien puede que los parámetros de entrada referentes a la fractura hidráulica dependan del proceso de fracturamiento hidráulico y puedan ser obtenidos a partir de esa operación, los valores asociados al comportamiento fractal (θ y D) resultan complejos de determinar, en gran parte debido a la carencia de una metodología.

Adicionalmente, para que estos métodos reflejen los efectos de frontera, será necesario acoplarlos a un método numérico.

- ⌘ Al igual que las soluciones semianalíticas, las soluciones analíticas requerirían ser modificadas para contemplar la frontera del yacimiento. Adicionalmente, no contemplan los efectos de almacenamiento del pozo. Vale la pena mencionar al modelo de Swaan, si bien son dos rectas las cuales no reflejan la zona de transición, sirven de referencia para vislumbrar la recta asociada a la fractura, la cual suele estar distorsionada por efectos de almacenamiento del pozo o no se forma a tiempos tan cortos debido a que la resolución de la herramienta no la alcanza a reflejar.

Siguientes pasos

- ⊗ La herramienta podría modificarse de diferentes maneras. Basándose en las dificultades ocurridas durante su aplicación se mencionan las siguientes opciones:
 - ‡ Registrar una primera versión de la herramienta computacional diseñada ante INDAUTOR, con la proyección de incorporar en futuras versiones modelos 2D y 3D, según sea requerido.

- # Permitir la opción de aceptar como parámetros de entrada λ y ω en caso que se conociera su valor.
 - # Agregar la interpretación automática del gráfico diagnóstico por los métodos tradicionales.
 - # Habilitar distintas geometrías del bloque de matriz para estudiar sus efectos.
 - # Investigar la posibilidad de aplicar algún filtro de ruido para tratar las pruebas de presión.
 - # Proponer el uso de una IA para identificar los puntos de interés en los gráficos de presión de fondo fluyendo y diagnóstico.
 - # Diseñar un algoritmo para llevar a cabo el proceso de ajuste entre los datos estimados y reales.
 - # Integrar una función para estimar los valores de interés con las diversas formulaciones propuestas.
- ⊗ Profundizar en el modelo fractal y de triple porosidad con el propósito de identificar una metodología factible para determinar los parámetros de interés.

Bibliografía

- Abushaikha, Ahmed, LaForce, T., Blunt, M., El Sheikh, A., Gomes, J. y Pain, C. (2010). «Numerical methods in modeling and simulating fluid flow in heterogeneous and naturally fractured hydrocarbon reservoirs». En: -. DOI: doi.org/10.5339/qfarf.2010.EEPS4.
- Acuña, J. A., Ershaghi, I. y Yortsos, Y. C. (1995). «Practical Application of Fractal Pressure-Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs». En: *SPE Formation Evaluation* 10.03, págs. 173-179. DOI: [10.2118/24705-PA](https://doi.org/10.2118/24705-PA).
- Bánzer S., Carlos (1996). *Correlaciones Numéricas P.V.T.*. Venezuela: Universidad del Zulia, Instituto de Investigaciones Petroleras, Fundación Laboratorio de Servicios Técnicos Petroleros.
- Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. y Kochina, I.N. (1960). «Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks». En: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 24, págs. 1286-1303. DOI: [10.1016/0021-8928\(60\)90107-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6).
- Berre, I., Doster, F. y Keilegavlen, E. (2019). «Flow in Fractured Porous Media: A Review of Conceptual Models and Discretization Approaches». En: *Transport in Porous Media* 130, págs. 215-236. DOI: [10.1007/s11242-018-1171-6](https://doi.org/10.1007/s11242-018-1171-6).
- Camacho Velázquez, R., Vásquez Cruz, M., Castrejón Aivar, R. y Arana Ortiz, V. (2005). «Pressure-transient and decline-curve behavior in naturally fractured vuggy carbonate reservoirs». En: *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 8.02, págs. 95-112. ISSN: 1094-6470. DOI: [10.2118/77689-PA](https://doi.org/10.2118/77689-PA).
- Cedeño Estrada, Virginia Arlette (2022). «Implementación de soluciones analíticas aplicables en yacimientos no convencionales: flujo a través de nanoporos y descripción fractal de redes de fracturas complejas». Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Facultad de Ingeniería.
- Cinco Ley, H. y Samaniego Verduzco, F. (1982). «Pressure transient analysis for naturally fractured reservoirs». En: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. DOI: [10.2118/11026-MS](https://doi.org/10.2118/11026-MS).

- Coats, K.H., George, W.D., Chu, C. y Marcum, B.E. (1974). «Three-Dimensional Simulation of Steamflooding». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 14.06, págs. 573-592. ISSN: 0197-7520. DOI: 10.2118/4500-PA.
- Comisión Nacional de Hidrocarburos [CNH] (2017a). *Atlas Geológico Cuenca de Veracruz*. Atlas.
- (2017b). *Atlas Geológico Cuenca Tampico-Misantla*. Atlas.
- (2017c). *Atlas Geológico Cuencas del Sureste - Cinturón Plegado de la Sierra de Chiapas*. Atlas.
- (2017d). *Atlas Geológico Cuencas Sabinas-Burgos*. Atlas.
- (2025). *Reservas de Hidrocarburos*. Actualizado el 27 de febrero de 2025. URL: <https://reservas-hidrocarburos.energia.gob.mx/> (visitado 04-04-2025).
- Dietrich, P., Helmig, R., Sauter, M. y Hötzl, H. (2005). *Flow and Transport in Fractured Porous Media*. Germany: Springer.
- Dirección General de Pemex Exploración y Producción (2018). *Producción de hidrocarburos Periodo: 2012-2018*. Libro Blanco.
- Engler, T. y Tiab, D. (1996). «Analysis of pressure and pressure derivative without type curve matching, 4. Naturally fractured reservoirs». En: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 15.2, págs. 127-138. ISSN: 0920-4105. DOI: [doi.org/10.1016/0920-4105\(95\)00064-X](https://doi.org/10.1016/0920-4105(95)00064-X).
- Ganat, Tarek A. (2020). *Fundamentals of Reservoir Rock Properties*. Switzerland: Springer.
- Hawez, H., Reza, S. y Haque Faisal, N. (2021). «A critical review on coupled geomechanics and fluid flow in naturally fractured reservoirs». En: *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 95, pág. 104150. ISSN: 1875-5100. DOI: [10.1016/j.jngse.2021.104150](https://doi.org/10.1016/j.jngse.2021.104150).
- Hyman, J., Sweeney, M., Carl Gable, C., Svyatsky, D., Lipnikov, K. y Moulton, D. (2022). «Flow and transport in three-dimensional discrete fracture matrix models using mimetic finite difference on a conforming multi-dimensional mesh». En: *Journal of Computational Physics* 466, pág. 111396. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111396>.
- Jalali, Y. y Ershaghi, I. (1987). «Pressure Transient Analysis of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs». En: SPE Western Regional Meeting SPE California Regional Meeting, SPE-16341-MS. DOI: 10.2118/16341-MS.

- Kazemi, H. (1969). «Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 9.04, págs. 451-462. ISSN: 0197-7520. DOI: 10.2118/2156-A.
- Kazemi, H. y Gilman, J.R. (1993). «6 - Multiphase Flow in Fractured Petroleum Reservoirs». En: *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*. Ed. por Bear, Jacob, Tsang, Chin-Fu y de Marsily, Ghislain. Oxford: Academic Press, págs. 267-323. ISBN: 978-0-12-083980-3. DOI: doi.org/10.1016/B978-0-12-083980-3.50010-3.
- Kazemi, H., Merrill L.S., Jr., Porterfield, K.L. y Zeman, P.R. (1976). «Numerical Simulation of Water-Oil Flow in Naturally Fractured Reservoirs». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 16.6, págs. 317-326. ISSN: 0197-7520. DOI: 10.2118/5719-PA.
- Kazemi, H., Seth, M.S. y Thomas, G.W. (1969). «The Interpretation of Interference Tests in Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 9.04, págs. 463-472. ISSN: 0197-7520. DOI: 10.2118/2156-B.
- León García, A., Alamilla Carrillo, N. y García Hernández, F. (2013). «Clasificación de los yacimientos en México: Un nuevo enfoque». En: *Ingeniería Petrolera* 53.7, págs. 388-409.
- Mavor M.J. y Cinco Ley, H. (1979). «Transient Pressure Behavior Of Naturally Fractured Reservoirs». En: SPE Western Regional Meeting SPE California Regional Meeting, SPE-7977-MS. DOI: 10.2118/7977-MS.
- Najurieta, Humberto L. (1980). «A theory for pressure transient analysis in naturally fractured reservoirs». En: *Journal of Petroleum Technology* 32.07, págs. 1241-1250. ISSN: 0149-2136. DOI: 10.2118/6017-PA.
- Nelson, Ronald A. (2001). *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*. Vol. 1. USA: Gulf Publishing Company, Book Division.
- Odeh, A.S. (1965). «Unsteady-State Behavior of Naturally Fractured Reservoirs». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 5.01, págs. 60-66. ISSN: 0197-7520. DOI: 10.2118/966-PA.
- Ordoñez, A. (2001). «Recent advances in naturally fractured reservoir modeling». En: *CT&F - Ciencia, Tecnología y Futuro* 2.2, págs. 51-64. DOI: 10.29047/01225383.550.
- Posadas M., R. y Samaniego V., F. (2015). «Comportamiento de la presión en pozos de yacimientos naturalmente fracturados con efectos de fronteras, mediante pozos imagen». En: *UNAM, Ingeniería Petrolera* 55, págs. 278-293. ISSN: 0185-3899.

- Sahimi, Muhammad (2011). *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*. 2nd. Germany: Wiley-VCH.
- Secretaría de Energía (2016). *Programa Quinquenal de Licitaciones para la Exploración y Extracción de Hidrocarburos 2015-2019*. Reporte.
- Song, Hongqing (2018). *Engineering Fluid Mechanics*. Germany: Springer.
- Stehfest, H. (1970). «Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms». En: *Communications of the ACM* 13.1, págs. 47-49. DOI: 10.1145/361953.361969.
- Streltsova, Tatiana D. (1983). «Well Pressure Behavior of a Naturally Fractured Reservoir». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 23.5, págs. 769-780. ISSN: 0197-7520. DOI: 10.2118/10782-PA.
- Swaan O., A. de (1976). «Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 16.3, págs. 117-122. DOI: 10.2118/5346-PA.
- Teja Juárez, V.L. y Torres López, J.A. (2023). *Apuntes de simulación numérica de yacimientos naturalmente fracturados: Simulación 1D Radial (PSS y USS)*. Material didáctico. Ciudad de México (CDMX).
- Teklu, T., Akinboyewa, J., Alharthy, N., Torcuk, M., AlSumaiti, A., Kazemi, H. y Graves, R. (2013). «Pressure and Rate Analysis of Fractured Low Permeability Gas Reservoirs: Numerical and Analytical Dual-Porosity Models». En: SPE Middle East Unconventional Resources Conference and Exhibition SPE Unconventional Gas Conference and Exhibition. DOI: 10.2118/163967-MS.
- Tiab, D. y Donaldson, E. C. (2004). «Naturally Fractured Reservoirs». En: *Petrophysics*. 2.^a ed. USA: Gulf Professional Publishing, págs. 488-553.
- Tkhostov, B. (1970). «Oil in Fractured Reservoirs». En: Leningrad: Izd. Nedra, págs. 173-197.
- Torcuk, M. A., Kurtoglu, B., Alharthy, N. y Kazemi, H. (2013). «Analytical Solutions for Multiple Matrix in Fractured Reservoirs: Application to Conventional and Unconventional Reservoirs». En: *SPE Journal* 18.05, págs. 969-981. ISSN: 1086-055X. DOI: 10.2118/164528-PA.
- Torcuk, M. A., Kurtoglu, B., Fakcharoenphol, P. y Kazemi, H. (2013). «Theory and application of pressure and rate transient analysis in unconventional reservoirs». En: DOI: 10.2118/166147-MS.
- Van Golf-Racht, T.D. (1982). *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering*. Norway: Elsevier Scientific Publishing Company.

- Wang, W., Shahvali, M. y Su, Y. (2015). «A semi-analytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells». En: *Fuel* 158, págs. 612-618. ISSN: 0016-2361. DOI: 10.1016/j.fuel.2015.06.008.
- Warren, J.E. y Root, P.J. (1963). «The behavior of naturally fractured reservoirs». En: *Society of Petroleum Engineers Journal* 3.03, págs. 245-255. ISSN: 0197-7520. DOI: 10.2118/426-PA.
- Wu, Yu-Shu (2016). «Multiphase Flow in Fractured Porous Media». En: *Multiphase Fluid Flow in Porous and Fractured Reservoirs*. USA: Gulf Professional Publishing, págs. 207-250.
- Yang, Shenglai (2017). *Fundamentals of Petrophysics*. Germany: Springer.

A. Método Stehfest

Normalmente, para obtener el valor de una función $\bar{f}(s)$ se realiza la inversión de la transformada de Laplace para obtener su expresión explícita en el dominio del tiempo. No obstante, algunas funciones no se pueden invertir directamente ni se dispone de una aproximación analítica. Como alternativa se puede emplear el método numérico de Stehfest (1970), el cual permite aproximar la solución en el dominio temporal $f(t)$ a partir de su formulación en Laplace $\bar{f}(s)$. Sea $\bar{f}(s)$ la transformada de Laplace de una función existente, el algoritmo proporciona un valor aproximado fa de la transformada inversa $f(t)$ a un tiempo t dado:

$$fa(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \bar{f}\left(\frac{\ln 2}{t} i\right) \quad (\text{A.1})$$

donde

$$V_i = (-1)^{i+n} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i,n)} \frac{k^{n+1}(2k)!}{(n-k)!k!(k-1)!(i-k)!(2k-i)!} \quad (\text{A.2})$$

$$N = 2n \quad (\text{A.3})$$

N debe ser un número entero múltiplo de dos, mientras que k debe truncarse para que sea siempre un número real. Teóricamente, fa se vuelve más preciso conforme N incrementa; sin embargo, en la práctica se debe tener cuidado puesto que el método es sensible a errores numéricos ocasionados por truncamiento conforme N aumenta. Resultados aceptables se obtienen cuando $12 < N < 20$.

B. Desarrollo de los modelos numéricos

Pseudoestacionario (PSS)

Retomando el modelo matemático mostrado en la sección 3.3:

Ecuación de difusión radial en el medio fracturado

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_{f,eff}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) + \hat{q} + \tau = (\phi c_t)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} \quad (3.105)$$

Ecuación de difusión en la matriz

$$\tau = (\phi c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (3.101)$$

Ecuación de transferencia PSS

$$\tau_{PSS} = \sigma \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) \quad (3.102)$$

Comenzando con la discretización implícita de la ecuación 3.105; para la notación, se hace uso del siguiente diagrama:

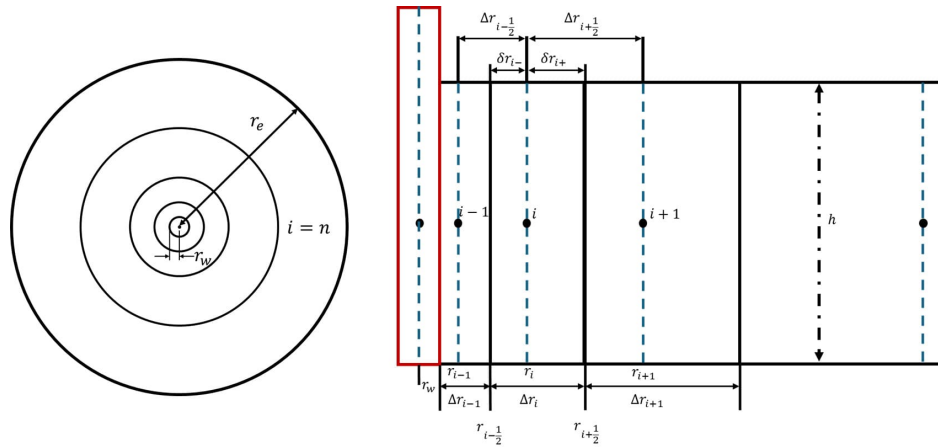


Figura B.1: Discretización para un modelo radial (modificado de Teja y Torres, 2023).

$$\left[\left[\frac{1}{r\Delta r} \right]_i \left[\left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n (P_{f_{i+1}}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) - \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_{i-1}}^{n+1}) \right] \right. \\ \left. + (\beta\hat{q})_i^{n+1} + (\tau)_i^{n+1} = \left(\frac{\phi_f C_{t_f}}{\Delta t} \right) (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_i}^n) \right] [V_r]_i \quad (B.1)$$

Desarrollando la multiplicación:

$$\left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n (P_{f_{i+1}}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) - \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_{i-1}}^{n+1}) \\ + (\beta q)_i^{n+1} + V_{r_i}(\tau)_i^{n+1} = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f C_{t_f}}{\Delta t} \right) (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_i}^n) \quad (B.2)$$

El término gasto en superficie (q) para un modelo radial se define como:

$q =$ Aporte de la formación + Gasto por efecto de almacenamiento

$$q = q_{sf} + q_{ws} \\ q = -\frac{2\pi r h k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + C_{oe f alm} \frac{\partial P_{wf}}{\partial t} \quad (B.3)$$

Centrándonos en el flujo producido por el yacimiento, se desprecia el efecto de almacenamiento Coats et al., 1974, por lo tanto:

$$q = -\frac{2\pi r h k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + \cancel{C_{oe f alm}} \frac{\partial P_{wf}}{\partial t} \rightarrow 0 \\ \therefore q = -\frac{2\pi r h k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (B.4)$$

La ecuación del gasto en un modelo radial discretizada resulta:

$$q = -WI(P_{f_i} - P_{wf_i}) \quad (B.5)$$

donde

$$WI = \alpha \frac{2\pi k h}{\mu \ln\left(\frac{r_1}{r_w}\right)} \quad (B.6)$$

Por su parte, la discretización de la ecuación de transferencia (3.102) resulta:

$$\tau = \left(\alpha \sigma \frac{k_m}{\mu} \right) (P_{m_i}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) \quad (B.7)$$

Sustituyendo la ecuación B.4 y B.7 en B.2:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n (P_{f_{i+1}}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) - \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_{i-1}}^{n+1}) \\
& + \left(-WI(P_{f_i}^{n+1} - P_{w_{f_i}}^{n+1}) \right) + V_{r_i} \left(\alpha \sigma \frac{k_m}{\mu} (P_{m_i}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) \right) \\
& = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_i}^n)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Desarrollando las multiplicaciones de las diferencias de presión queda:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& - \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\
& - \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& - WI P_{f_i}^{n+1} \\
& + WI P_{w_{f_i}}^{n+1} \\
& + \left(\alpha \sigma V_{r_i} \frac{k_m}{\mu} \right) P_{m_i}^{n+1} \\
& - \left(\alpha \sigma V_{r_i} \frac{k_m}{\mu} \right) P_{f_i}^{n+1} \\
& = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^{n+1} - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Para sustituir los términos de la presión en la matriz Pm se procede a discretizar la ecuación de continuidad en la matriz. Retomando la ecuación 3.101:

$$-\tau = (\phi c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t}$$

Sustituyendo el término de transferencia (eq. 3.102):

$$\left[- \left(\alpha \sigma \frac{k_m}{\mu} \right) (P_m - P_f) = (\phi c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \right] [V_r]_i \tag{B.10}$$

Discretizando y desarrollando:

$$-\left(\alpha\sigma V_r \frac{k_m}{\mu}\right) P_{m_i}^{n+1} + \left(\alpha\sigma V_r \frac{k_m}{\mu}\right) P_{f_i}^{n+1} = \left(V_r \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t}\right) P_{m_i}^{n+1} - \left(V_r \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t}\right) P_{m_i}^n \quad (\text{B.11})$$

Despejando $P_{m_i}^{n+1}$

$$\left[-\left(\alpha\sigma V_r \frac{k_m}{\mu}\right) - \left(V_r \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t}\right) \right] P_{m_i}^{n+1} = -\left(\alpha\sigma V_r \frac{k_m}{\mu}\right) P_{f_i}^{n+1} - \left(V_r \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t}\right) P_{m_i}^n \quad (-1)$$

$$P_{m_i}^{n+1} = \frac{\left(\alpha\sigma V_r \frac{k_m}{\mu}\right) P_{f_i}^{n+1} + \left(V_r \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t}\right) P_{m_i}^n}{\left[\left(\alpha\sigma V_r \frac{k_m}{\mu}\right) + \left(V_r \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t}\right) \right]}$$

$$P_{m_i}^{n+1} = \frac{\left[\frac{(\alpha\sigma V_r k_m P_{f_i}^{n+1})(\Delta t) + (V_r \phi_m c_{t_m} P_{m_i}^n)(\mu)}{\mu \Delta t} \right]}{\left[\frac{(\alpha\sigma V_r k_m)(\Delta t) + (V_r \phi_m c_{t_m})(\mu)}{\mu \Delta t} \right]}$$

$$P_{m_i}^{n+1} = \frac{\overset{1}{V_r} (\alpha\sigma k_m P_{f_i}^{n+1} \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu P_{m_i}^n) \left(\frac{1}{\cancel{\mu \Delta t}} \right)}{\overset{1}{V_r} (\alpha\sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu) \left(\frac{1}{\cancel{\mu \Delta t}} \right)}$$

$$P_{m_i}^{n+1} = \left(\frac{\alpha\sigma k_m \Delta t}{\alpha\sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{f_i}^{n+1} + \left(\frac{\phi_m c_{t_m} \mu}{\alpha\sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n \quad (\text{B.12})$$

Una vez discretizada la ecuación de continuidad en la matriz, se sustituye en la ecuación B.9:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& - \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\
& - \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& - WI P_{f_i}^{n+1} \\
& + WI P_{wf_i}^{n+1} \\
& + \left(\alpha\sigma V_{r_i} \frac{k_m}{\mu} \right) \left[\left(\frac{\alpha\sigma k_m \Delta t}{\alpha\sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{f_i}^{n+1} + \left(\frac{\phi_m c_{t_m} \mu}{\alpha\sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n \right] \\
& - \left(\alpha\sigma V_{r_i} \frac{k_m}{\mu} \right) P_{f_i}^{n+1} \\
& = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^{n+1} - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n
\end{aligned}$$

Tras desarrollar la ecuación del término sustituido queda:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& - \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\
& - \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& - WI P_{f_i}^{n+1} \\
& + WI P_{wf_i}^{n+1} \\
& + \left(\frac{\alpha^2 \sigma^2 k_m^2 V_{r_i} \Delta t}{\alpha\sigma \mu k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu^2} \right) P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left(\frac{\alpha\sigma \phi_m c_{t_m} k_m V_{r_i}}{\alpha\sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n \\
& - \left(\alpha\sigma V_{r_i} \frac{k_m}{\mu} \right) P_{f_i}^{n+1} \\
& = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^{n+1} - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n
\end{aligned}$$

Tras agrupar los términos según la presión correspondiente, la ecuación resulta:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& - \left[\begin{aligned} & \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n + \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \\ & + \left(\alpha \sigma V_r \frac{k_m}{\mu} \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) + WI - \left(\frac{\alpha^2 \sigma^2 k_m^2 V_{r_i} \Delta t}{\alpha \sigma \mu k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu^2} \right) \end{aligned} \right] P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left[\frac{V_{r_i}}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& + WI P_{w_{f_i}}^{n+1} \\
& = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(\frac{\alpha \sigma \phi_m c_{t_m} k_m V_{r_i}}{\alpha \sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Empleando las referencias ilustradas en la figura B.2 se redefinen los términos de transmisibilidad como:

$$E = T_{i+\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \tag{B.14}$$

$$W = T_{i-\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \tag{B.15}$$

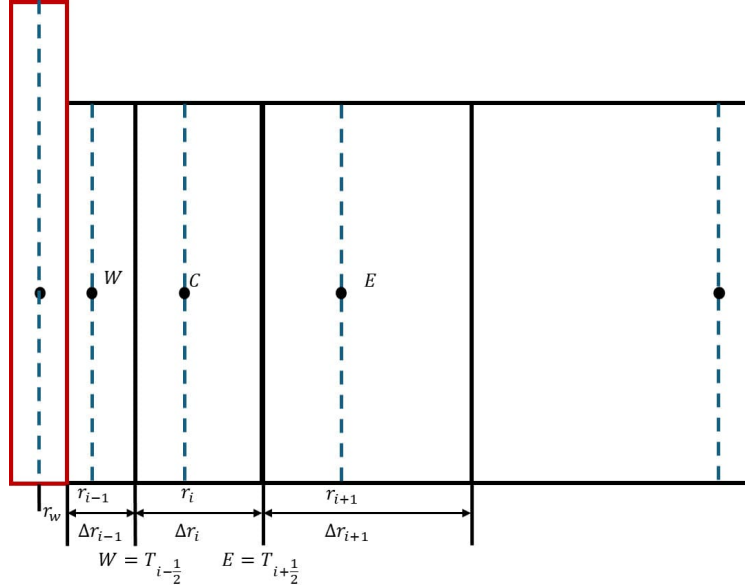


Figura B.2: Nomenclatura para los términos W , C & E .

Sustituyendo en B.13:

$$\begin{aligned}
& E P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& - \left[E + W + \left(\alpha \sigma V_r \frac{k_m}{\mu} \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) + WI - \left(\frac{\alpha^2 \sigma^2 k_m^2 V_{r_i} \Delta t}{\alpha \sigma \mu k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu^2} \right) \right] P_{f_i}^{n+1} \\
& + W P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& + WI P_{wf_i}^{n+1} \\
& = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(\frac{\alpha \sigma \phi_m c_{t_m} k_m V_{r_i}}{\alpha \sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Si se desea considerar en nuestra formulación el daño sufrido por la formación, se puede empezar por definir la presión de fondo en el pozo como:

$$p_{wfS} = p_{wf} - \Delta p_{skin} \tag{B.17}$$

$$= p_{wf} - \frac{SqB\mu}{kh} \tag{B.18}$$

Sustituyendo P_{wf_i} en B.16:

$$\begin{aligned}
& E P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& - \left[E + W + \left(\alpha \sigma V_r \frac{k_m}{\mu} \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) + WI - \left(\frac{\alpha^2 \sigma^2 k_m^2 V_{r_i} \Delta t}{\alpha \sigma \mu k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu^2} \right) \right] P_{f_i}^{n+1} \\
& + W P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& + WI \left(P_{wf_i}^{n+1} - \frac{SqB\mu}{kh} \right) \\
& = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(\frac{\alpha \sigma \phi_m c_{t_m} k_m V_{r_i}}{\alpha \sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Para manejar de una manera más práctica la ecuación se define:

$$C = - \left[E + W + \left(\alpha \sigma V_r \frac{k_m}{\mu} \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) + WI - \left(\frac{\alpha^2 \sigma^2 k_m^2 V_{r_i} \Delta t}{\alpha \sigma \mu k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu^2} \right) \right] \tag{B.20}$$

$$B = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(\frac{\alpha \sigma \phi_m c_{t_m} k_m V_{r_i}}{\alpha \sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh} \tag{B.21}$$

Sustituyendo:

$$E P_{f_{i+1}}^{n+1} + C P_{f_i}^{n+1} + W P_{f_{i-1}}^{n+1} + WI P_{wf_i}^{n+1} = B \tag{B.22}$$

Esta ecuación representa el flujo de fluidos en el yacimiento. Para su resolución, se requiere

una ecuación auxiliar que representará el pozo. Retomando la ecuación B.3:

$$q = -\frac{2\pi r h k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + C_{oef\ alm} \frac{\partial P_{wf}}{\partial t} \quad (B.3)$$

Al centrarse en los fenómenos dentro del pozo, se discretiza considerando el almacenamiento. Además, para contemplar el cambio volumétrico de la producción se multiplica el gasto por el factor volumétrico B . La discretización resulta similar a la ecuación B.5:

$$qB = -WI(P_{f_i} - P_{w_{f_i}})^{n+1} + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t}(P_{w_{f_i}}^{n+1} - P_{w_{f_i}}^n) \quad (B.23)$$

Nuevamente se sustituye la ecuación B.18 para considerar el daño en la formación:

$$qB = -WI \left(P_{f_i} - \left(P_{w_{f_i}} - \frac{SqB\mu}{kh} \right) \right)^{n+1} + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} \left(\left(P_{w_{f_i}} - \frac{SqB\mu}{kh} \right)^{n+1} - \left(P_{w_{f_i}} - \frac{SqB\mu}{kh} \right)^n \right) \quad (B.24)$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$qB = -WI P_{f_i}^{n+1} + WI P_{w_{f_i}}^{n+1} - WI \frac{SqB\mu}{kh} + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} P_{w_{f_i}}^{n+1} - \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} P_{w_{f_i}}^n + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} \left(\frac{SqB\mu}{kh} - \frac{SqB\mu}{kh} \right)^0$$

$$WI P_{w_{f_i}}^{n+1} + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} P_{w_{f_i}}^{n+1} - WI P_{f_i}^{n+1} = qB + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} P_{w_{f_i}}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh}$$

Resulta

$$\left(WI + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} \right) P_{w_{f_i}}^{n+1} - WI P_{f_i}^{n+1} = qB + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} P_{w_{f_i}}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh} \quad (B.25)$$

Definiendo:

$$D = \left(WI + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} \right) \quad (B.26)$$

$$B_{well} = qB + \frac{C_{oef\ alm}}{\Delta t} P_{w_{f_i}}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh} \quad (B.27)$$

Reescribiendo B.25:

$$D P_{w_{f_i}}^{n+1} - WI P_{f_i}^{n+1} = B_{well} \quad (B.28)$$

Finalmente queda el sistema de ecuaciones que modelan el flujo de un fluido monofásico ligeramente compresible a través de la fractura natural y el pozo, en coordenadas radiales, considerando la función de transferencia matriz-fractura tipo PSS:

$$E P_{f_{i+1}}^{n+1} + C P_{f_i}^{n+1} + W P_{f_{i-1}}^{n+1} + WI P_{w_{f_i}}^{n+1} = B \quad (\text{B.22})$$

$$D P_{w_{f_i}}^{n+1} - WI P_{f_i}^{n+1} = B_{well} \quad (\text{B.28})$$

donde:

$$E = T_{i+\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (\text{B.14})$$

$$W = T_{i-\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (\text{B.15})$$

$$C = - \left[E + W + \left(\alpha \sigma V_r \frac{k_m}{\mu} \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) + WI - \left(\frac{\alpha^2 \sigma^2 k_m^2 V_{r_i} \Delta t}{\alpha \sigma \mu k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu^2} \right) \right] \quad (\text{B.20})$$

$$B = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(\frac{\alpha \sigma \phi_m c_{t_m} k_m V_{r_i}}{\alpha \sigma k_m \Delta t + \phi_m c_{t_m} \mu} \right) P_{m_i}^n + WI \frac{qB\mu S}{2\pi k_{f,eff} h} \quad (\text{B.21})$$

$$D = \left(WI + \frac{C_{oe f alm}}{\Delta t} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$B_{well} = qB + \frac{C_{oe f alm}}{\Delta t} P_{w_{f_i}}^n - WI \frac{qB\mu S}{2\pi k_{f,eff} h} \quad (\text{B.27})$$

$$WI = \alpha \frac{2\pi k_{f,eff} h}{\mu \ln \left(\frac{r_1}{r_w} \right)} \quad (\text{B.6})$$

Transitorio (USS)

Recordando el modelo matemático para 1D: Ecuación de difusión en el medio fracturado

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_{f,eff}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) + \hat{q} + \tau = (\phi c_t)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} \quad (3.105)$$

Ecuación de difusión en la matriz:

$$\tau = (\phi c_t)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (3.101)$$

Ecuación de transferencia USS:

$$\tau_{USS} = (\phi c_t)_m H \frac{\partial \Delta P_m}{\partial t} \quad (3.103)$$

donde

$$\Delta P_m = \Delta P_f \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right] \quad (3.104)$$

El procedimiento para desarrollar el modelo numérico comienza de la misma manera que el modelo PSS, discretizando la ecuación 3.154:

$$\begin{aligned} \left[\frac{V_r}{r \Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu \Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n (P_{f_{i+1}}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) - \left[\frac{V_r}{r \Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu \Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_{i-1}}^{n+1}) \\ + (\beta q)_i^{n+1} + V_{r_i} (\tau)_i^{n+1} = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_i}^n) \end{aligned} \quad (B.29)$$

Para el gasto del pozo, se emplea la ecuación B.5:

$$q = -WI(P_{f_i} - P_{wf_i}) \quad (B.5)$$

donde:

$$WI = \alpha \frac{2\pi kh}{\mu \ln \left(\frac{r_1}{r_w} \right)} \quad (B.6)$$

Reemplazando B.5 en B.29:

$$\begin{aligned} \left[\frac{V_r}{r \Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu \Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n (P_{f_{i+1}}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) - \left[\frac{V_r}{r \Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu \Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_{i-1}}^{n+1}) \\ + \left(-WI(P_{f_i} - P_{wf_i}) \right)^{n+1} + V_{r_i} (\tau)_i^{n+1} = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_i}^n) \end{aligned} \quad (B.30)$$

Para el paso siguiente se debe sustituir el término de transferencia, por lo que se procede

a discretizar la ecuación 3.103. Realizando diferencias finitas regresivas en el tiempo:

$$\frac{\partial \Delta P_m}{\partial t} = \frac{\Delta P_m^{n+1} - \Delta P_m^n}{\Delta t} \quad (\text{B.31})$$

Sustituyendo en la ecuación 3.103:

$$\tau_{USS} = (\phi c_t)_m H \frac{\Delta P_m^{n+1} - \Delta P_m^n}{\Delta t} \quad (\text{B.32})$$

Reemplazando los términos ΔP_m con la ecuación 3.104:

$$\tau_{USS} = \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left(\left(\Delta P_f \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right] \right)^{n+1} - \left(\Delta P_f \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right] \right)^n \right) \quad (\text{B.33})$$

Considerando que $\Delta P_f = P_{ini} - P_f$, se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\tau_{USS} = \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left(\left((P_{ini} - P_f) \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right] \right)^{n+1} - \left((P_{ini} - P_f) \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right] \right)^n \right) \quad (\text{B.34})$$

Desarrollando la multiplicación:

$$\tau_{USS} = \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left(\left((P_{ini} - P_f - (P_{ini} - P_f) \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right])^{n+1} - \left((P_{ini} - P_f - (P_{ini} - P_f) \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t \right) \right])^n \right) \right) \right.$$

$$\left. \left(\left(P_{ini} - P_f^{n+1} - \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^{n+1} \right) \right] P_{ini} \right) + \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^{n+1} \right) \right] P_f^{n+1} \right) - \left(P_{ini} - P_f^n - \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^n \right) \right] P_{ini} \right) + \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^n \right) \right] P_f^n \right) \right)$$

$$\tau_{USS} = \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \begin{pmatrix} P_{ini} - P_f^{n+1} - \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^{n+1}\right) \right] P_{ini} \\ + \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^{n+1}\right) \right] P_f^{n+1} \\ - P_{ini} + P_f^n + \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^n\right) \right] P_{ini} \\ - \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^n\right) \right] P_f^n \end{pmatrix}$$

Agrupando términos:

$$\tau_{USS} = \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \begin{pmatrix} \left(\left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^{n+1}\right) \right] - 1 \right) P_f^{n+1} \\ + \left(1 - \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^n\right) \right] \right) P_f^n \\ + \left(\left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^n\right) \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^{n+1}\right) \right] \right) P_{ini} \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

Definiendo

$$a = \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^{n+1}\right) \right] \quad (\text{B.36})$$

$$b = \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \varepsilon t^n\right) \right] \quad (\text{B.37})$$

Resulta:

$$\tau_{USS} = \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left[(a - 1)P_f^{n+1} + (1 - b)P_f^n + (b - a)P_{ini} \right] \quad (\text{B.38})$$

Recordando la definición de función de transferencia: "flujo de la matriz hacia la fractura natural en volumen L^3 por unidad de área L^{-2} por unidad de tiempo t^{-1} , por lo tanto $\frac{L^3}{L^2 t} = \frac{L}{t}$ "; sin embargo, se está trabajando con las dimensiones t^{-1} , por lo que se dividirá entre H para resolver esta disparidad.

$$\tau_{USS} = \left(\frac{1}{H} \right) \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left[(a - 1)P_f^{n+1} + (1 - b)P_f^n + (b - a)P_{ini} \right]$$

Finalmente:

$$\tau_{USS} = \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} \left[(a-1)P_f^{n+1} + (1-b)P_f^n + (b-a)P_{ini} \right] \quad (\text{B.39})$$

Sustituyendo en la ecuación B.30:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n (P_{f_{i+1}}^{n+1} - P_{f_i}^{n+1}) \\ & - \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_{i-1}}^{n+1}) \\ & + \left(-WI(P_{f_i} - P_{w_{f_i}}) \right)^{n+1} \\ & + V_{r_i} \left(\frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} \left[(a-1)P_f^{n+1} + (1-b)P_f^n + (b-a)P_{ini} \right] \right)_i^{n+1} \\ & = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_i}^n) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Desarrollando las multiplicaciones:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_{i+1}}^{n+1} \\ & - \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\ & - \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_i}^{n+1} \\ & + \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_{i-1}}^{n+1} \\ & - WI P_{f_i}^{n+1} \\ & + WI P_{w_{f_i}}^{n+1} \\ & + \left(\frac{V_{r_i}(\phi C_t)_m}{\Delta t} (a-1) \right) P_{f_i}^{n+1} \\ & + \left(\frac{V_{r_i}(\phi C_t)_m}{\Delta t} (1-b) \right) P_{f_i}^n \\ & + \left(\frac{V_{r_i}(\phi C_t)_m}{\Delta t} (b-a) \right) P_{ini} \\ & = \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) (P_{f_i}^{n+1} - P_{f_i}^n) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Tras agrupar términos:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& + \left(- \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n + \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n + WI \right) \\
& \quad \left(- \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (a-1) \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) \right) P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& + WI P_{wf_i}^{n+1} \\
& = - \left(V_{r_i} \frac{ph_{i_f} c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (1-b) \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (b-a) \right) P_{ini}
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Definiendo:

$$E = T_{i+\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \tag{B.43}$$

$$W = T_{i-\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \tag{B.44}$$

Resulta:

$$\begin{aligned}
& EP_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& - \left[E + W + WI - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (a-1) \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_f c_{t_f}}{\Delta t} \right) \right] P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& + WI P_{wf_i}^{n+1} \\
& = - \left(V_{r_i} \frac{ph_{i_f} c_{t_f}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (1-b) \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (b-a) \right) P_{ini}
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Nuevamente, para considerar el daño en la formación:

$$p_{wfS} = p_{wf} - \Delta p_{skin} \tag{B.17}$$

$$= p_{wf} - \frac{SqB\mu}{kh} \tag{B.18}$$

Sustituyendo P_{wf_i} :

$$\begin{aligned}
& E P_{f_{i+1}}^{n+1} \\
& + \left(- \left[E + W + WI - \left(V_{r_i} \frac{(\phi_{ct})_m}{\Delta t} (a - 1) \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_{fc_{t_f}}}{\Delta t} \right) \right] \right) P_{f_i}^{n+1} \\
& + \left[\frac{V_r}{r \Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu \Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}} P_{f_{i-1}}^{n+1} \\
& + WI \left(P_{wf_i}^{n+1} - \frac{SqB\mu}{kh} \right) \\
& = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_{fc_{t_f}}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi_{ct})_m}{\Delta t} (1 - b) \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi_{ct})_m}{\Delta t} (b - a) \right) P_{ini} \tag{B.46}
\end{aligned}$$

Sea:

$$C = - \left[E + W + WI - \left(V_{r_i} \frac{(\phi_{ct})_m}{\Delta t} (a - 1) \right) + \left(V_{r_i} \frac{\phi_{fc_{t_f}}}{\Delta t} \right) \right] \tag{B.47}$$

$$B = - \left(V_{r_i} \frac{\phi_{fc_{t_f}}}{\Delta t} \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi_{ct})_m}{\Delta t} (1 - b) \right) P_{f_i}^n - \left(V_{r_i} \frac{(\phi_{ct})_m}{\Delta t} (b - a) \right) P_{ini} + WI \frac{SqB\mu}{kh} \tag{B.48}$$

Resulta:

$$E P_{f_{i+1}}^{n+1} + C P_{f_i}^{n+1} + W P_{f_{i-1}}^{n+1} + WI P_{wf_i}^{n+1} = B \tag{B.49}$$

Una vez representado el flujo en el yacimiento, se debe complementar con una ecuación para el pozo. El procedimiento es el mismo que el modelo anterior. Retomando la ecuación B.3:

$$q = - \frac{2\pi r h k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + C_{oe f a l m} \frac{\partial P_{wf}}{\partial t} \tag{B.3}$$

Tras discretizar la ecuación B.3 considerando B.18 para el factor daño y factor volumétrico:

$$\begin{aligned}
qB & = -WI \left(P_{f_i} - \left(P_{wf_i} - \frac{SqB\mu}{kh} \right) \right)^{n+1} \\
& + \frac{C_{oe f a l m}}{\Delta t} \left(\left(P_{wf_i} - \frac{SqB\mu}{kh} \right)^{n+1} - \left(P_{wf_i} - \frac{SqB\mu}{kh} \right)^n \right) \tag{B.50}
\end{aligned}$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$\begin{aligned}
qB & = -WI P_{f_i}^{n+1} + WI P_{wf_i}^{n+1} - WI \frac{SqB\mu}{kh} + \frac{C_{oe f a l m}}{\Delta t} P_{wf_i}^{n+1} - \frac{C_{oe f a l m}}{\Delta t} P_{wf_i}^n \\
& + \frac{C_{oe f a l m}}{\Delta t} \left(\frac{SqB\mu}{kh} - \frac{SqB\mu}{kh} \right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
WI P_{wfi}^{n+1} + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} P_{wfi}^{n+1} - WI P_{fi}^{n+1} &= qB + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} P_{wfi}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh} \\
\left(WI + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} \right) P_{wfi}^{n+1} - WI P_{fi}^{n+1} &= qB + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} P_{wfi}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh}
\end{aligned} \tag{B.51}$$

Definiendo:

$$D = \left(WI + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} \right) \tag{B.52}$$

$$B_{well} = qB + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} P_{wfi}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh} \tag{B.53}$$

Resulta:

$$D P_{wfi}^{n+1} - WI P_{fi}^{n+1} = B_{well} \tag{B.54}$$

Finalmente queda el sistema de ecuaciones que modelan el flujo de un fluido monofásico ligeramente compresible a través de la fractura natural y el pozo, en coordenadas radiales, considerando la función de transferencia matriz-fractura tipo USS:

$$E P_{fi+1}^{n+1} + C P_{fi}^{n+1} + W P_{fi-1}^{n+1} + WI P_{wfi}^{n+1} = B \tag{B.49}$$

$$D P_{wfi}^{n+1} - WI P_{fi}^{n+1} = B_{well} \tag{B.54}$$

Donde

$$E = T_{i+\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \tag{B.43}$$

$$W = T_{i-\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{V_r}{r\Delta r} \right]_i \left(\alpha r \frac{k_{f,eff}}{\mu\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \tag{B.44}$$

$$C = - \left[E + W + WI - \left(V_{ri} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (a-1) \right) + \left(V_{ri} \frac{\phi_f c_{tf}}{\Delta t} \right) \right] \tag{B.47}$$

$$B = - \left(V_{ri} \frac{\phi_f c_{tf}}{\Delta t} \right) P_{fi}^n - \left(V_{ri} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (1-b) \right) P_{fi}^n - \left(V_{ri} \frac{(\phi c_t)_m}{\Delta t} (b-a) \right) P_{ini} + WI \frac{SqB\mu}{kh} \tag{B.48}$$

$$a = \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^{n+1} \right) \right] \tag{B.36}$$

$$b = \left[\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} e \left(- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \varepsilon t^n \right) \right] \tag{B.37}$$

$$D = \left(WI + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} \right) \tag{B.52}$$

$$B_{well} = qB + \frac{C_{oef alm}}{\Delta t} P_{wfi}^n + WI \frac{SqB\mu}{kh} \tag{B.53}$$

$$WI = \alpha \frac{2\pi kh}{\mu \ln\left(\frac{r_1}{r_w}\right)} \quad (\text{B.6})$$

$$\varepsilon = \frac{\eta_m}{H^2} \quad (\text{B.55})$$

$$\eta_m = \alpha \frac{k_m}{(\phi\mu c_t)_m} \quad (\text{B.56})$$

$$H = \frac{L_z}{2} \quad (\text{B.57})$$

$$\sigma = \frac{1}{H^2} \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left(e^{-\varepsilon t^{n+1}} - 1 \right) P_f^{n+1} \\ & + \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left(1 - e^{-\varepsilon t^n} \right) P_f^n + \frac{(\phi c_t)_m H}{\Delta t} \left(e^{-\varepsilon t^n} - e^{-\varepsilon t^{n+1}} \right) P_{ini} \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Ambas formulaciones fueron modificadas a partir de Teja Juárez y Torres López (2023).