



FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M. DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.

Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.

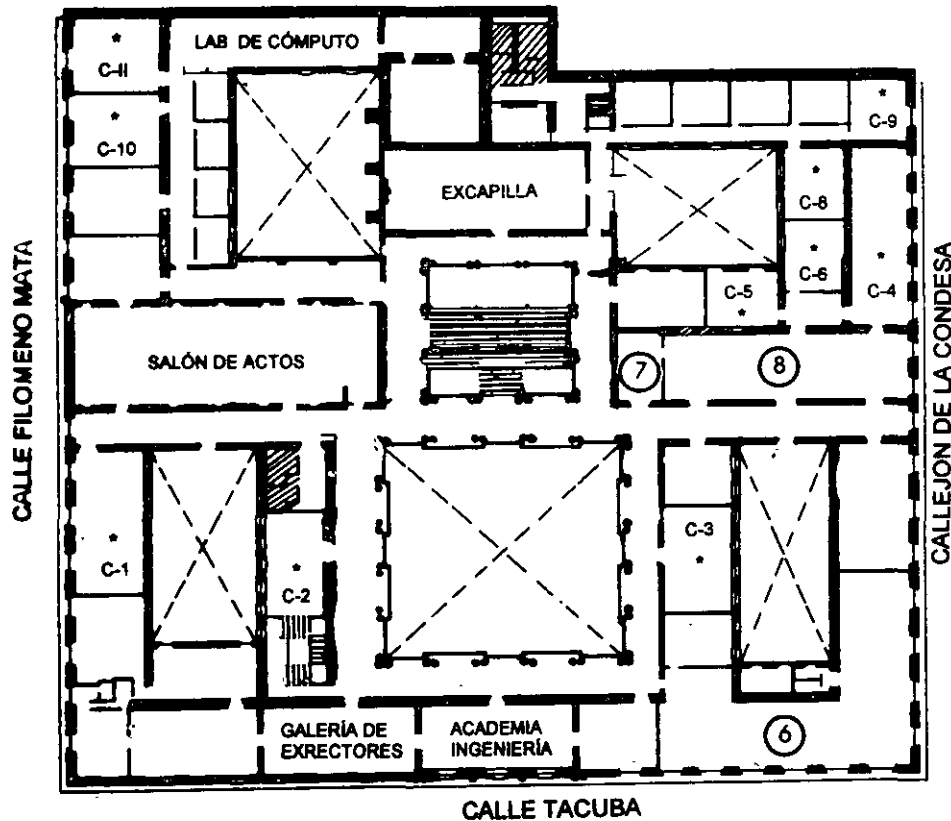
Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores imparten sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.

Atentamente

División de Educación Continua.

PALACIO DE MINERÍA



GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
3. LIBRERÍA UNAM
4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN "ING. BRUNO MASCANZONI"
5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
6. OFICINAS GENERALES
7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
8. SALA DE DESCANSO

SANITARIOS

* AULAS

1er. PISO

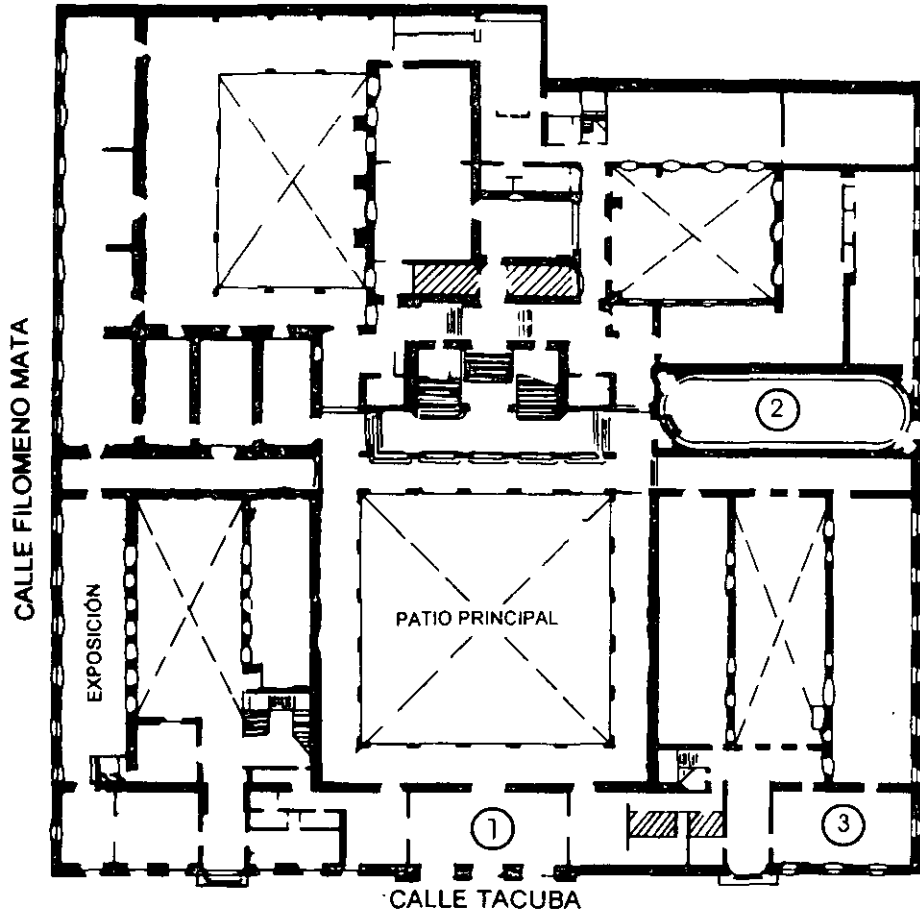


DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.
CURSOS ABIERTOS

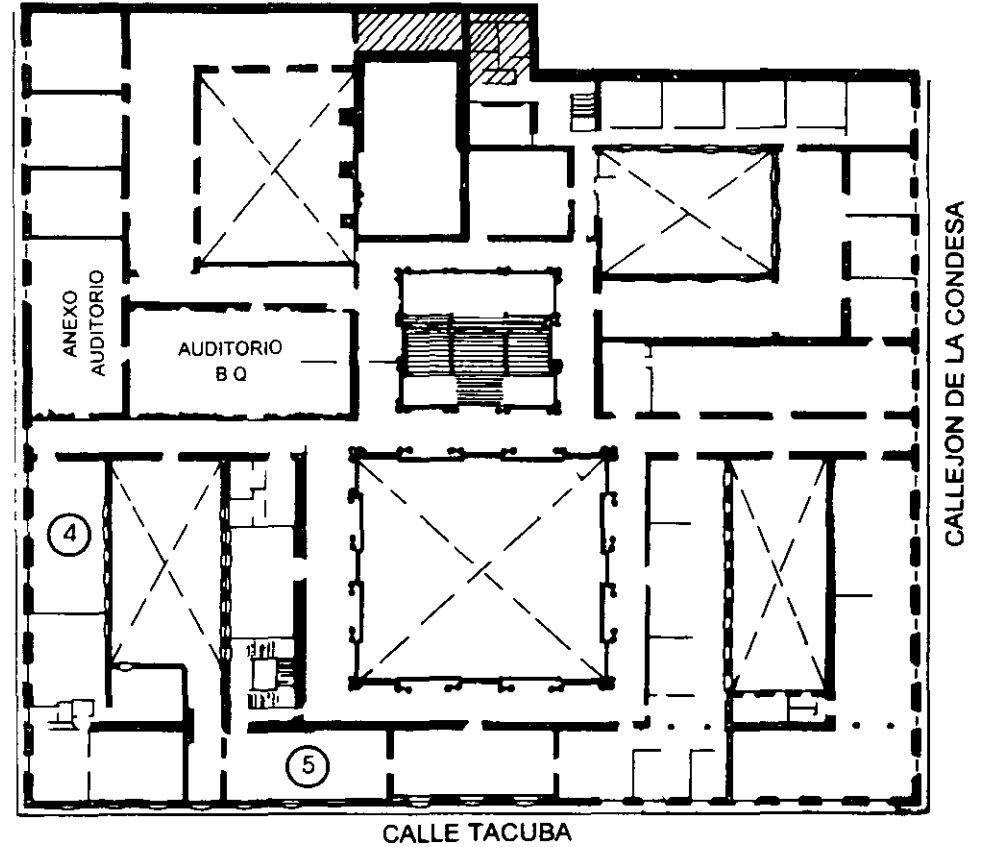
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



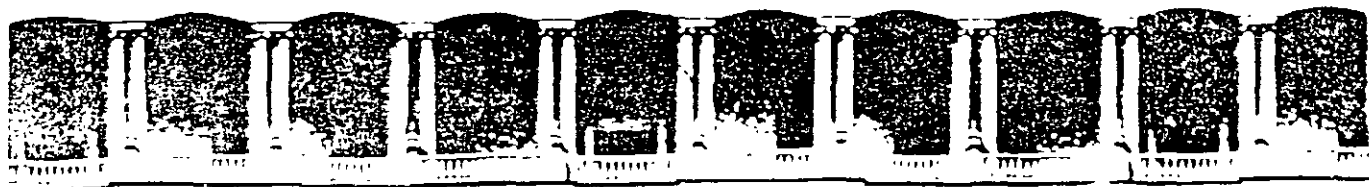
PALACIO DE MINERIA



PLANTA BAJA



MEZZANINNE



FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

CA31 SIMULADORES DE EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Julio del 2003

Tema

PRINCIPIOS GENERALES PARA LA EVALUACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN DIRECTA, EL ANÁLISIS DE SU RIESGO Y LA SIMULACIÓN DE SU COMPORTAMIENTO

EXPOSITOR: M. en I. ENRIQUE A. HERNÁNDEZ RUIZ
PALACIO DE MINERÍA
JULIO DEL 2003

PRINCIPIOS GENERALES PARA LA EVALUACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN DIRECTA, EL ANÁLISIS DE SU RIESGO Y LA SIMULACIÓN DE SU COMPORTAMIENTO

M. en I. Enrique Augustos Hernández-Ruiz

ECONOMÍA

La economía es la rama de las ciencias sociales que estudia el proceso de producción y distribución de los bienes y servicios que se generan en una sociedad. Organiza las actividades orientadas a definir qué bienes producir, cuántos, cómo y para quién producirlos, en un contexto de recursos limitados y necesidades ilimitadas.

Por un lado existen deseos o necesidades ilimitadas y por el otro existen recursos o satisfactores limitados que tienen usos alternativos. De la interacción de estos dos conceptos se origina la escasez, la cual surge cuando la cantidad de recursos no satisface las necesidades que existen a un precio igual a cero.

La escasez nos obliga a elegir alternativas con base en el criterio de la satisfacción; sin embargo, elegir significa hacer a un lado alternativas. Un postulado básico en economía sostiene que la toma de decisiones se realiza con base en los costos y beneficios de cada posible alternativa.

Cuando elegimos algo, estamos desechando otras alternativas. La mejor alternativa sacrificada es el costo de oportunidad. Una de las grandes "verdades" de la economía es que todo tiene costo de oportunidad.

Un supuesto clave en economía es que los agentes económicos (familias, empresas y gobierno) son racionales, es decir, tienen un objetivo y lo persiguen de una manera consistente. Las personas tienen como objetivo maximizar su utilidad sujetos a las restricciones que enfrentan, es decir, incrementar su patrimonio. En lo sucesivo se considerará que el concepto de utilidad es equivalente al concepto bienestar.

Así como el objetivo de las personas es maximizar su nivel de bienestar, el objetivo de las empresas es maximizar su utilidad o la riqueza de sus accionistas.

A escala interna de las economías nacionales, las unidades económicas básicas son: las unidades familiares, las empresas, el gobierno, las instituciones sin fines de lucro y el mercado.

El mercado es el espacio físico o virtual donde confluyen compradores y vendedores de bienes y servicios (productores y consumidores), intercambiándolos e interactuando a través del sistema de costos, valores y precios. Si alguno de estos agentes o de dicho sistema dejaran de existir, el mercado sería inexistente.

Cuando sea el caso que exista equivalencia entre los valores dispuestos a ser pagados por los compradores y los que están dispuestos a recibir los vendedores para intercambiar determinados bienes o servicios (demanda y oferta), se dirá que existe *equilibrio de mercado*. El mercado es el conjunto de mecanismos por medio del cual la sociedad resuelve la mayor parte de los problemas económicos (qué, cuánto, cómo y para quién producir)

CONCEPTO DE MERCADO “PERFECTO”

Para que exista competencia perfecta se requiere:

- a) Homogeneidad del producto.
- b) Movilidad de recursos sin costos.
- c) Gran número de compradores (demandantes) y productores (oferentes), de tal manera que ninguno de ellos tenga poder para modificar el precio.
- d) Información perfecta y sin costo.

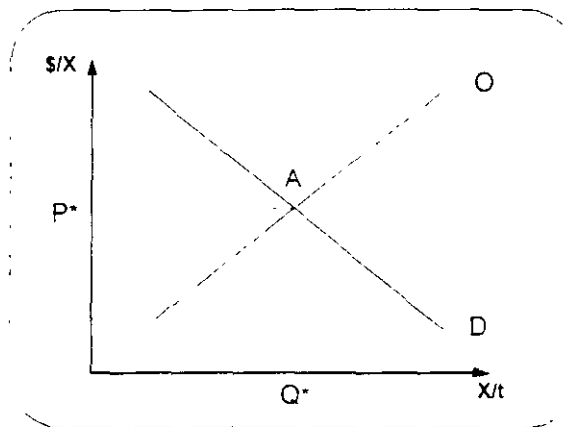
El concepto de mercado perfecto refiere que hay una óptima asignación de recursos, que existe equilibrio entre la oferta y la demanda, con base en que ni compradores ni vendedores pueden ejercer influencia alguna en el precio de los productos. Si los mercados son perfectos y no existe discrepancia entre valores sociales y privados, hay una solución óptima social, de otra manera, habrá distorsiones del mercado que pueden generar monopolios y monopsonios.

En el monopolio el vendedor puede manejar el precio y en el monopsonio es el comprador quien puede hacerlo.

Obsérvese la figura donde se han graficado las curvas de la oferta y la demanda. Si hablamos de la oferta, en el eje de las abscisas identificaremos los valores correspondientes al número de unidades producidas por cada oferente y en el eje de las ordenadas el precio que se pretende recibir por cada una de ellas; puede apreciarse que mientras más unidades produzcan y dispongan en el mercado, el precio buscado por cada una de ellas será mayor. En cambio, si hablamos de la demanda, en el eje horizontal ubicaremos los valores que corresponden al número de artículos demandados en un momento dado y en el eje vertical el costo que se está dispuesto a pagar por cada uno de ellos; del mismo modo, puede notarse que mientras más unidades se consuman por adquisición en el mercado, el precio que se desea pagar será menor en términos unitarios.

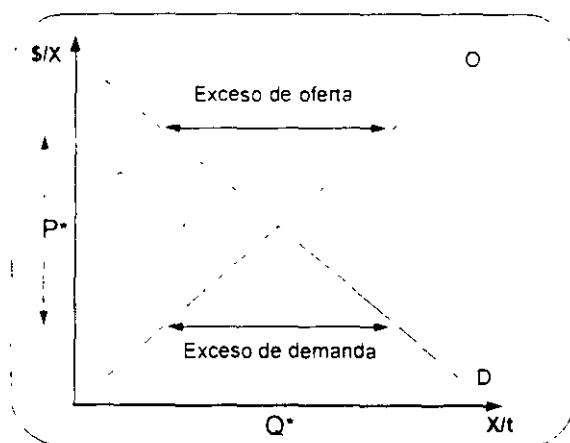
Las demandadas por cada individuo, según sea el caso de oferentes o demandantes, y sobre las ordenadas se ubicó el precio que están dispuestos a

pagar los demandantes por cada artículo (D). Se desea encontrar el precio y la cantidad de equilibrio. ¿Es P_1 el precio de equilibrio? En la gráfica siguiente se observa el equilibrio con " P^* " y " Q^* ". Si el precio se ubicará por debajo de " P^* ", la cantidad demandada es mayor que la cantidad ofrecida. Debido a este exceso de demanda, entonces el precio subirá hasta que se iguale la cantidad demandada con la ofertada.



Curvas de oferta y demanda

Deténgase un momento y piense ¿qué pasará si un precio se ubica por encima de " P^* "? La respuesta será que existirá un exceso de oferta, es decir, si el precio de un bien o servicio se encontrara por encima del de equilibrio, entonces la demanda disminuirá su consumo, y si la cantidad ofrecida es mayor a la cantidad demandada, entonces el precio disminuirá hasta que se equilibre la cantidad demandada y la cantidad ofrecida. Esto significa que los precios se ajustarán de acuerdo con el comportamiento del mercado. Esto puede apreciarse en la siguiente figura:



Exceso de oferta y exceso de demanda

COSTOS, VALORES Y PRECIOS

El valor de un bien puede ser apreciado bajo dos esquemas básicos:

1. Valor de uso, y
2. Valor de cambio.

El valor de uso es aquel que poseen los bienes por su capacidad de proporcionar una satisfacción. Este valor es asignado subjetivamente por cada individuo, dependiendo del grado de utilidad que recibe; por tanto, el grado de satisfacción será distinto de una persona a otra y su expresión objetiva puede ser que se establezca en términos distintos a los monetarios.

Por otra parte, el valor de cambio de los bienes, es aquel que toman en los mercados al momento de su intercambio, y se identifica a través del equilibrio de las funciones de oferta y demanda.

Cabe llamar la atención en el sentido de que el concepto de valor debe ser diferenciado de los de costo y precio, pues por **costo** entendemos que se trata de la *cuantía monetaria que debe erogar el productor de un bien y/o servicio para producirlo y ponerlo a disposición en el mercado; y por **precio** nos referimos a la cuantía también monetaria que pretende recibir dicho productor del bien y/o servicio por su venta, es decir, por su intercambio.*

Esto significa que el precio está formado por el costo más una cuantía monetaria adicional que es referida en términos contables como "utilidad", aunque en realidad puede ser entendida también como "plusvalía", la cual es originada por la existencia de ciertos factores que hacen atractivo el adquirir una cosa.

Lo anterior hace entender que las cuantías del valor, del costo y del precio son iguales únicamente al momento de llevar a cabo el intercambio del bien y/o servicio entre el oferente y el demandante del mismo, pues desde el momento en que una persona paga por adquirirlo, por esa simple acción, queda establecido su valor en un instante dado; después, por distintas circunstancias (inflación, cambio en las condiciones de mercado, oferta y demanda, etc.), éste puede cambiar, aunque el hecho histórico contable se conserva y mantiene el monto del precio y del costo para el vendedor y el comprador respectivamente.

No obstante, en momentos de recesión económica, el precio puede llegar a ser igual o menor que el costo, en la inteligencia que se tiene urgencia y premura por vender el bien, llevando esta situación a su remate.

Con base en lo anterior, se definirá al **valor** como *la cuantía económica, expresada en nuestra época en términos monetarios, dispuesta a ser cambiada*

por la posesión de una cosa: es decir, con la cual se llevan a cabo los intercambios de bienes y/o servicios entre los oferentes de los mismos y sus demandantes en mercados específicos.

Por su capacidad de conservar el valor, algunos bienes son mercancías acumuladoras de valor, es decir, tienen el potencial de conservarlo, y de incrementarlo en el tiempo en términos reales. Esta clase de bienes toma la forma de capital, destinado a la producción o como capital financiero.

Es importante considerar que el valor de los bienes son meras manifestaciones estadísticas de un componente intrínseco del bien que es expresado por el productor o productores del mismo (precio); de este modo podemos admitir que el valor es función de un precio potencial, o sea, el precio que podría alcanzar un bien en un determinado mercado y momento.

Si se atiende al comportamiento de los precios en el mercado, la predictibilidad aproximada de los precios se basa en principios que dan a tal pronóstico un fundamento científico; la ciencia resultante se llama timografía. La timografía se integra por cinco principios fundamentales: permanencia, coherencia, equivalencia, proporcionalidad y normalidad. Tales principios configuran un modelo que explica con aproximación satisfactoria la realidad.

Por el principio de permanencia sabemos que hay un lapso durante el cual los precios se mantienen; esto admite la variabilidad de los precios, pero siempre habrá un intervalo durante el cual el precio pronosticado tiene vigencia.

El principio de coherencia refiere las diversas manifestaciones del precio de un bien, las cuales guardan una relación lógica entre sí.

El principio de equivalencia sostiene que dos bienes equivalentes en mercados equivalentes tendrán el mismo precio.

El principio de proporcionalidad afirma que dos bienes semejantes en mercados semejantes tienen precios semejantes y que la diferencia de precios es proporcional a las diferencias entre sus características (de bienes y de mercados).

El principio de normalidad asegura que los pronósticos de precio obtenidos para un mismo bien en un mismo mercado tienen todos una distribución estadística llamada "distribución normal".

Los primeros cuatro principios timográficos inducen a la comparación como técnica para el pronóstico de los precios, en virtud de que el precio no se calcula, sino que se mide, y toda medición implica comparación.

Es necesario acotar que, al haber definido las ideas de costo, precio y valor, se ha

referido también el concepto de "unidades monetarias", las cuales pretenden ser el reflejo del valor de las cosas; sin embargo, dichas unidades monetarias pueden ser de dos tipos:

- constantes o reales, y
- corrientes o nominales.

Si hablamos de una serie de flujos de efectivo expresados en unidades monetarias constantes, significará que todos ellos están ligados a una misma fecha y que cada unidad monetaria expresada tendrá el mismo poder adquisitivo que las demás, entendiendo por poder adquisitivo el índice de la cantidad de bienes que se pueden intercambiar por una unidad monetaria. Si por el contrario, hablamos de flujos de efectivo expresados en unidades monetarias corrientes, se querrá decir que cada flujo de efectivo de un periodo específico estará afectado por una tasa inflacionaria y por una tasa de productividad efectiva respecto de los flujos anteriores o posteriores, por lo que cada unidad monetaria tendrá distinto poder adquisitivo de las otras.

INFLACIÓN Y PÉRDIDA DEL PODER ADQUISITIVO

En términos conceptuales macroeconómicos, la inflación es el aumento medido en términos porcentuales del nivel agregado de precios entre dos fechas determinadas en un mercado general, o bien, de bienes específicos; si por el contrario, entre dichas fechas correspondiera una disminución en lugar de un aumento, se dirá que ocurrió deflación. El nivel agregado de precios es la media de los precios de los bienes y/o servicios de la economía en relación con una fecha base dada.

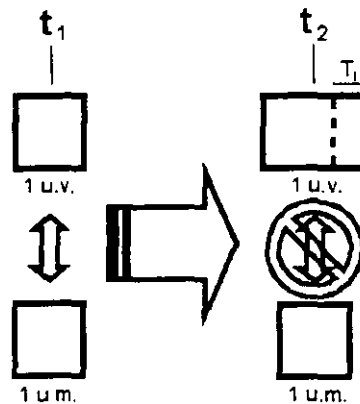
Es importante notar que la definición de inflación o deflación, según proceda, es relacionada con el precio y no con el valor, ya que si en términos de intercambio de bienes existiera aumento o disminución, se dirá que existe plusvalía (utilidad) o minusvalía (pérdida) correspondientemente.

Como ya fue explicado, los precios de mercado están ligados con la oferta y la demanda y, consecuentemente, la inflación o deflación dependerá de las reacciones del mercado ante los cambios en la oferta y la demanda.

Cuando en una economía se presenta inflación continua combinada con recesión o estancamiento de la actividad económica durante un periodo determinado, a dicho periodo se le llama "estanflación", situación que es frecuentemente vista en economías de tipo emergente.

Se mencionó que la inflación es medida como un porcentaje, misma que tiene como consecuencia inherente la pérdida del poder adquisitivo, concepto también macroeconómico que se define como la cantidad porcentual de bienes o servicios que una unidad monetaria deja de adquirir.

Debe entenderse que la inflación y la pérdida del poder adquisitivo son conceptos diferentes. la primera tiene como consecuencia la segunda, por lo que de ningún modo les corresponderá el mismo valor porcentual como medida de cada una de ellas. Como ejemplo, obsérvese la siguiente figura.



Esquema explicativo del concepto "pérdida del poder adquisitivo"

En la figura anterior, en una primera fecha (t_1) existe una debida correspondencia entre una unidad monetaria (moneda) y una unidad de valor (cantidad determinada de bienes y/o servicios), pero en otra posterior (t_2), el incremento en los precios hace que la misma unidad monetaria no pueda adquirir la unidad de valor que ha sufrido un incremento debido al alza de los precios en el mercado, alza que es denominada "inflación" y es expresada en términos porcentuales (T_1). Surgen entonces dos preguntas: ¿qué nueva porción de bienes y/o servicios adquiere en la segunda fecha la unidad monetaria? y, ¿cuánto deja de adquirir dicha unidad monetaria?

Se sabe que ahora el 100% de los bienes y/o servicios son ahora la unidad de valor más la tasa inflacionaria (T_1), la porción de estos bienes y/o servicios que adquiere la unidad monetaria se determinará planteando, en términos aritméticos, una relación directa de tres parámetros, es decir:

$$P = 1/(1+T_1);$$

consecuentemente, la cantidad porcentual de bienes y/o servicios que se dejan de adquirir será la diferencia de "P" con la unidad porcentual, o sea:

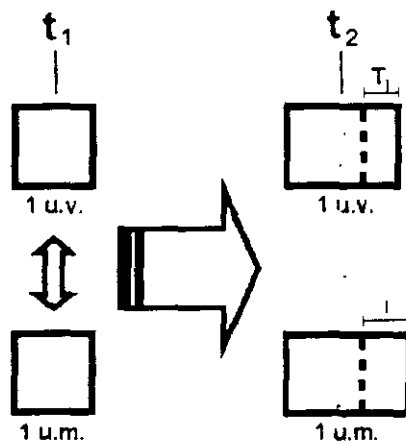
$$PPA = 1 - 1/(1+T_1).$$

Reduciendo la expresión anterior, puede afirmarse que la pérdida del poder adquisitivo (PPA) de la moneda es función de la tasa inflacionaria (T_i), misma que guarda la siguiente equivalencia:

$$PPA = T_i / (1 + T_i)$$

TASA DE CRECIMIENTO REAL DEL PATRIMONIO

Con base en lo expuesto en el punto inmediato anterior, surge ahora la interrogante ilustrada en la siguiente figura: si se considera que, además de existir inflación, la unidad monetaria es invertida en la fecha " t_1 " y produce para la segunda fecha " t_2 " un beneficio agregado, medido en términos porcentuales " i " (tasa efectiva del periodo definido entre las dos fechas), que hace a dicha unidad monetaria más grande, ¿en qué proporción es mayor o menor la nueva unidad monetaria respecto de la nueva unidad de valor?



Esquema explicativo del concepto "tasa de crecimiento real del patrimonio"

Para contestar esta pregunta debe medirse la proporción de cambio de la nueva unidad monetaria respecto de la nueva unidad de valor y, consecuentemente, la tasa de crecimiento real del patrimonio (unidad monetaria) corresponderá a la diferencia de esta proporción de cambio con la unidad, a saber:

$$1 + T_R = (1 + i) / (1 + T_i)$$

$$T_R = \left\{ (1 + i) / (1 + T_i) \right\} - 1.$$

A esta relación que vincula el rendimiento efectivo de un determinado periodo y a la inflación ocurrida dentro del mismo a través del concepto de la tasa de crecimiento real del patrimonio se le suele denominar "efecto de Fisher".

Por ejemplo, si la inflación de un periodo fuera del 14% y la tasa efectiva del mismo que gana una inversión fuera del 19%, de ninguna manera deberá decirse que la tasa de crecimiento real del patrimonio fue del 5% (19%-14%); esto sería falso. Dicha tasa sería equivalente al 4.39%:

$$T_R = \{(1 + 0.19) / (1 + 0.14)\} - 1$$

$$T_R = 0.04385 \approx 4.39\%.$$

Pero, ¿qué pasaría si la tasa inflacionaria fuera mayor que la tasa efectiva? Supóngase que los valores de estas tasas fueran 21% y 16% respectivamente. Entonces la tasa real sería negativa, a saber:

$$T_R = \{(1 + 0.16) / (1 + 0.21)\} - 1$$

$$T_R = 0.04132 \approx 4.13\%.$$

Esta situación resulta lógica de pensar si se toma en cuenta que la media del cambio en el nivel agregado de precios fuera mayor que los rendimientos otorgados por las inversiones. es decir, no solamente habría pérdida del poder adquisitivo como consecuencia inherente de la inflación, sino que además existiría una disminución real en el patrimonio. Casos como el descrito suelen verse frecuentemente en economías de tipo emergente

CONTABILIDAD FINANCIERA

La contabilidad es una técnica empleada para producir, sistemática y estructuradamente, información de orden cuantitativo respecto las transacciones que realiza una entidad económica (persona física o persona moral), dicha información es expresada en unidades monetarias corrientes y registrada con el objeto de facilitar la toma de decisiones a los interesados en relación con dicha entidad económica.

Podemos decir entonces que es un medio con el cual se puede medir la situación financiera de la entidad en un momento determinado, pero para comparar situaciones específicas correspondientes a distintos puntos del tiempo habrá que utilizar conceptos de la matemática financiera y análisis de inversiones, los cuales se abordarán más adelante. Sin embargo, la contabilidad integra tres objetivos generales:

1. Proporcionar información útil para las actuales y prospectivas inversiones que deban realizarse.
2. Preparar información que ayude a los usuarios a determinar los montos, la oportunidad y la incertidumbre de los proyectos asociados con la realización de inversiones dentro de la entidad económica.
3. Informar acerca de los recursos de una entidad económica, los derechos sobre de éstos, los efectos de las transacciones y los acontecimientos que cambian esos recursos y los derechos sobre aquellos.

Como es de entenderse, en cada tipo de negocio existen intereses distintos, siendo necesario preparar y presentar diferentes tipos de información que satisfagan tales necesidades, destacando la contabilidad financiera, cuyo objetivo es presentar información financiera de propósito general para audiencia y usos externos. La función práctica de la contabilidad financiera está orientada a presentar la información de la entidad mediante cuatro formas básicas denominadas "Estados Financieros", mismos que son:

- a) Estados de situación financiera.
- b) Estados de resultados de operación
- c) Estados de cambios en la situación financiera.
- d) Estados de cambios en la inversión de los propietarios.

Para fines de evaluación de proyectos nos referiremos a los estados de resultados de operación (Estado de Resultados) y a los estados de cambios en la situación financiera.

El "Estado de Resultados" o "Estado de Pérdidas y Ganancias" seguirá el planteamiento a continuación enunciado:

	Ventas
menos	Devoluciones sobre ventas
menos	Rebajas sobre ventas
igual	Ventas netas
menos	Inventario inicial
menos	Compras
mas	Devoluciones sobre compras
mas	Rebajas sobre compras
mas	Inventario final
igual	<u>Utilidad Bruta</u>
menos	Gastos de venta
igual	<u>Utilidad sobre ventas</u>
menos	Gastos de administración
igual	<u>Utilidad mercantil</u>
menos	Gastos operativos
igual	<u>Utilidad operativa</u>
menos	Gastos financieros
mas	Productos financieros
igual	<u>Utilidad financiera</u>
menos	Otros gastos
mas	Otros productos
igual	<u>Utilidad antes de impuestos</u>
menos	Impuesto sobre la renta (ISR)
menos	Impuesto al activo fijo (IMPAC)
menos	Impuesto sobre nóminas (ISN)

menos	Impuestos sobre adquisición de activos (ISAAC)
menos	Cuotas patronales al IMSS
menos	Cuotas patronales al INFONAVIT
menos	Cuotas patronales al Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR)
igual	<u>Utilidad para reparto</u>
menos	Participación a los trabajadores sobre utilidades (PTU)
igual	<u>Utilidad o Pérdida Neta</u>

Cabe señalar que las cantidades de las cuentas "inventario inicial", "compras", "devoluciones sobre compras", "rebajas sobre compras" e "inventario final" pueden ser sustituidas por la cantidad contenida en cuenta "costo de lo vendido", la cual se restará de las "ventas netas" para obtener la "utilidad bruta". Esta sustitución es posible realizarla dado que se establece que:

	Inventario inicial
mas	Compras
menos	Devoluciones sobre compras
menos	Rebajas sobre compras
menos	Inventario final
igual	<u>Costo de lo vendido</u>

Eventualmente, al ser proyectado periódicamente este estado financiero, el rubro correspondiente a las ventas podrá modelarse a través de la siguiente ecuación:

$$V_j = V_E [1 - n / c(100(j/n) + 1)]$$

donde:

- V_j: Ventas en el j-ésimo año de estudio.
- V_E: Ventas esperadas según estudio de mercado.
- n: Horizonte de estudio del proyecto expresado en unidades de tiempo.
- c: Coeficiente de calibración.
- j: Tiempo en que se determina el monto de las ventas.

El coeficiente de calibración puede establecerse con base en el porcentaje de ventas que pudiera lograrse en el "tiempo inicial" de operación, el cual se esperaría fuera inferior que la unidad, calculándose del siguiente modo:

$$c = n / (1 - \%V_0)$$

Esto haría que la ecuación anteriormente expresada se aplicara de la siguiente forma:

$$V_j = V_E [1 - (1 - \%V_0) / (100(j/n) + 1)]$$

donde.

- V_j . Ventas en el j-ésimo año de estudio.
- V_E . Ventas esperadas según estudio de mercado.
- $\%V_0$. Porcentaje de las ventas esperadas que pudieran alcanzarse en el tiempo inicial de operación.
- j . Tiempo en que se determina el monto de las ventas.
- n . Horizonte de estudio del proyecto expresado en unidades de tiempo.

Si se conoce que las ventas esperadas serían son sujetas a cambios en cuanto a un determinado coeficiente de variación, es posible establecer dos escenarios con base en las siguientes expresiones:

$$V_j = V_E [1 - (1 - \%V_0) / (100(j / n) + 1) + v \text{sen}(j\pi / 2)]$$

$$V_j = V_E [1 - (1 - \%V_0) / (100(j / n) + 1) + v \text{cos}(j\pi / 2)]$$

donde.

- V_j : Ventas en el j-ésimo año de estudio.
- V_E : Ventas esperadas según estudio de mercado.
- $\%V_0$: Porcentaje de las ventas esperadas que pudieran alcanzarse en el tiempo inicial de operación
- j : Tiempo en que se determina el monto de las ventas.
- n : Horizonte de estudio del proyecto expresado en unidades de tiempo.
- v : Coeficiente de variación de las ventas esperadas.
- sen : Función trigonométrica seno operada con base en radianes.
- cos : Función trigonométrica coseno operada con base en radianes.
- π : Valor de 3.1415926535897932384626433832795.

Por otra parte, el "Estado de Cambios en la Situación Financiera de la Entidad", se integra con la siguiente estructura básica:

Orígenes o fuentes:

mas Utilidad neta del ejercicio
mas Depreciaciones del periodo
más Amortizaciones del periodo
mas Aportaciones de capital
mas Financiamiento

igual **Suma de los orígenes o fuentes**

Destinos o aplicaciones:

mas Pérdida neta del ejercicio
mas Inversión en activo fijo
mas Otras inversiones imprevistas
mas Pago de pasivo a corto plazo
igual

Suma de los destinos o aplicaciones

TEORÍA DEL INTERÉS

Los movimientos económicos existentes en la sociedad en general han creado desde hace mucho tiempo el concepto de préstamo o "mutuo". Un préstamo es la facilitación que una persona con excedentes de recursos económicos hace a otra para quien esos recursos son escasos, a cambio de la reintegración de ese mismo recurso económico más un "interés" en un momento posterior.

El "interés" es la cantidad o cuantía monetaria que se debe pagar, en el momento establecido, por el uso del recurso económico ajeno referido, sin menoscabo de su reintegración a quien lo prestó. A este recurso económico prestado se le denomina "suerte principal".

Como es lógico de pensar, un préstamo es regido por usos y costumbres de índole comercial, por lo que será necesario definir fundamentos que servirán de principio para el desarrollo de la "teoría del interés" y de la "teoría del descuento".

Se comenzará por denominar al recurso económico prestado como "suerte principal"; se llamará "plazo" al tiempo total en que debe ser reintegrado el préstamo y su interés generado, y "periodo" al tiempo que transcurre entre la aplicación de un interés y otro. Debe tenerse presente que el plazo y el periodo no necesariamente son equivalentes, es más, puede decirse que el plazo es el conjunto de periodos que transcurren para la reintegración de la suerte principal y su interés generado.

Sin embargo, existen lapsos menores al periodo en que suele calcularse el interés que corresponde para integrarlo a la suerte principal, de tal manera que ésta será mayor la siguiente vez que vuelva a calcularse el interés respectivo. A esta forma de generación de intereses se le conoce como "interés compuesto", y a los lapsos referidos en esta idea se le conocen como "subperiodos". Habrá que entender que un conjunto de subperiodos formará un periodo, y como anteriormente se dijo, un conjunto de periodos formarán el plazo.

Para efectos de nomenclatura, se designará a cada subperiodo con la literal "m", a cada periodo con la literal "n", y el plazo quedará referido consecuentemente con el producto "mn". La suerte principal se denotará con la sigla " C_0 ", y el monto que se debe reintegrar en un momento determinado se entenderá como " $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{mn}$ ", el cual será equivalente a la suerte principal original, más los intereses generados al momento; lo anterior significa que "m" se variará desde la unidad y hasta el número total de subperiodos que tenga cada periodo, y de manera

análoga. "n" se variará también desde la unidad y hasta el número total de periodos que tenga el plazo.

Con lo anterior se deduce que, siempre y cuando el interés sea diferente de cero, las cantidades en el tiempo serán diferentes entre sí, es decir que:

$$C_0 \neq C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq \dots \neq C_{mn},$$

y por esta razón se afirma que un recurso económico tiene valor en el tiempo, denominando a la cantidad de la extrema izquierda como "valor presente" respecto de los valores a su derecha, y a la cantidad de la extrema derecha como "valor futuro" respecto de los que están a su izquierda.

El interés que se pacta pagar por el préstamo en cada subperiodo se establecerá como una proporción de la suerte principal, es decir, se calculará mediante el producto de la misma por una "tasa" expresada en términos porcentuales, y denotada como "i'"; con lo cual se obtiene que:

$$I' = C_0 (i'),$$

y si se desea conocer la "tasa de interés nominal del periodo", entonces bastará con multiplicar el número total de subperiodos de cada periodo por la tasa de cada subperiodo, es decir:

$$i_{(m)} = m i',$$

donde "m" es el número de subperiodos que tiene cada periodo, "i'" es la tasa de interés aplicable en cada subperiodo para el cálculo del interés, y la tasa de interés nominal del periodo " $i_{(m)}$ " se conocerá simplemente con el nombre de "tasa nominal de interés".

Con esto, es posible definir la tasa de interés aplicable en cada subperiodo de la siguiente manera:

$$i' = i_{(m)} / m.$$

Ahora bien, si nos referimos a los montos " $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{mn}$ " indicados anteriormente, esta tasa tiene la siguiente equivalencia:

$$i' = (C_{k+1} - C_k) / C_k,$$

donde el subíndice "k" señala el monto de un subperiodo específico, y variará desde cero, haciendo referencia a la suerte principal, hasta el valor del producto "mn".

La teoría del interés parte de esta última expresión, en la cual la tasa de interés es vista como un cociente o razón de cambio de la diferencia entre el monto siguiente y el anterior, respecto del monto anterior.

Ahora se puede deducir otra expresión que calcule el siguiente monto a pagar con fundamento en lo anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_k(i) &= C_{k+1} - C_k \\ C_{k+1} &= C_k + C_k(i) \\ C_{k+1} &= C_k(1 + i) \end{aligned}$$

Sin embargo, habrá que considerar la idea del interés compuesto introducida anteriormente, pues cuando un interés no es pagado en el subperiodo correspondiente, es costumbre que éste se adicione a la suerte principal; y con este nuevo monto incrementado, se calculará el interés del siguiente subperiodo.

Si esta situación se repite, aplicando la misma tasa en cada subperiodo, se aplicará la misma mecánica, generalizándola de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0(1 + i) \\ C_2 &= C_1(1 + i) \\ C_2 &= C_0(1 + i)(1 + i) \\ C_2 &= C_0(1 + i)^2 \\ C_3 &= C_2(1 + i) \\ C_3 &= C_0(1 + i)^2(1 + i) \\ C_3 &= C_0(1 + i)^3 \\ &\vdots \\ C_4 &= C_3(1 + i) \\ C_4 &= C_0(1 + i)^3(1 + i) \\ C_4 &= C_0(1 + i)^4 \\ C_5 &= C_4(1 + i) \\ C_5 &= C_0(1 + i)^4(1 + i) \\ C_5 &= C_0(1 + i)^5 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ C_k &= C_{k-1}(1 + i) \\ C_k &= C_0(1 + i)^{k-1}(1 + i) \\ C_k &= C_0(1 + i)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{k+1} &= C_k (1 + i') \\
 C_{k+1} &= C_0 (1 + i')^k (1 + i') \\
 C_{k+1} &= C_0 (1 + i')^{k+1},
 \end{aligned}$$

con lo cual se da lugar a la expresión general del interés compuesto:

$$C_k = C_0 (1 + i')^k$$

Si se restringe el valor del subíndice "k" desde cero hasta el número de subperiodos que tiene cada periodo, la diferencia entre "C_k" y "C₀" es el interés total que "efectivamente" se generó durante los "m" subperiodos por el préstamo del recurso ajeno, desprendiéndose de esta situación el concepto de "tasa efectiva de interés del periodo", que será distinguida con la literal simple "i", y que tendrá la siguiente equivalencia:

$$i = (C_m - C_0) / C_0,$$

de donde se desprende que:

$$C_m = C_0 + C_0 (i)$$

Sustituyendo el valor de "C_m" en la expresión general del interés compuesto, y teniendo presente que "k" tomará el valor de "m", se llega a que:

$$C_0 + C_0 (i) = C_0 (1 + i')^m$$

Si se divide lo anterior entre el término "C₀" se obtiene la expresión que relaciona a la tasa efectiva con la tasa de interés aplicable en cada subperiodo, que es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 1 + i &= (1 + i')^m \\
 i &= (1 + i')^m - 1
 \end{aligned}$$

El valor de "i" y de "i_(m)" son referidos a una misma amplitud de tiempo: el periodo; pero la primera es de índole efectivo y la otra de índole nominal.

Para obtener la relación de la tasa efectiva de interés con la tasa nominal de interés, ambas referidas al periodo como se ha mencionado, se sustituye el valor de la tasa de interés aplicable a cada subperiodo por la equivalencia correspondiente, quedando:

$$i = (1 + i_{(m)}/m)^m - 1$$

Despejando de lo anterior a la tasa nominal de interés se obtiene que:

$$i_{(m)} = m \{ (1 + i)^{1/m} - 1 \}$$

En términos de la tasa de interés aplicable en cada subperiodo, esta expresión se transforma a lo siguiente.

$$i' = (1 + i)^{1/m} - 1$$

Tomando la expresión general del interés compuesto, y considerando que "k" puede ser variada desde cero hasta el valor del producto "mn", se tendrá lo siguiente:

$$C_{mn} = C_0 (1 + i')^{mn},$$

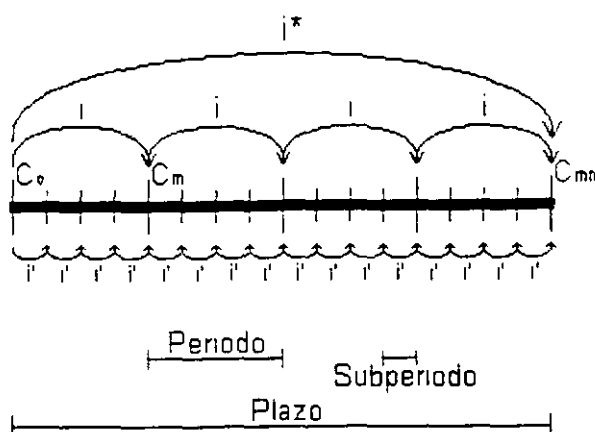
o bien, si se considera la tasa efectiva del periodo:

$$C_{mn} = C_0 (1 + i)^n$$

donde "m" es el número de subperiodos que tiene cada periodo, y "n" el número de periodos que tiene el plazo.

Con las bases ya planteadas, si deseamos en un plazo de cinco años generar intereses doce veces al año (serán cinco periodos con duración cada uno de un año y se tendrán en cada periodo doce subperiodos con duración cada uno de un mes), el exponente al que habrá que elevar el binomio "(1 + i)" será igual a sesenta, cantidad proveniente de multiplicar doce por cinco, es decir, el valor aplicable de "m" en este caso es de doce, y el de "n" igual a cinco. Cabe mencionar con este ejemplo, que al proceso de generar intereses en cada subperiodo, se le denomina como "capitalización de la tasa".

Con base en lo hasta ahora explicado, es posible realizar un esquema con los conceptos planteados de tasas efectivas referidas a los subperiodos, periodos y plazo de la operación, así como las cuantías de valor involucradas en cada punto de la barra del tiempo como se esquematiza en la figura siguiente, donde "i" es la tasa efectiva del subperiodo y servirá como base para determinar el valor de "i'", misma que es la tasa efectiva del periodo y que se empleará para determinar a "i*", que es la tasa efectiva del plazo.



Esquemmatización del concepto de plazo, periodo y subperiodo

Estas tres tasas están relacionadas entre si mediante las siguientes expresiones matemáticas:

$$\begin{aligned}
 i &= (1 + i')^m - 1 \\
 i^* &= (1 + i)^n - 1 \\
 i^* &= (1 + i')^{mn} - 1
 \end{aligned}$$

Consecuentemente, las relaciones de capital serán las siguientes:

$$\begin{aligned}
 C_m &= C_0 (1 + i')^m \\
 C_{mn} &= C_0 (1 + i)^n \\
 C_{mn} &= C_0 (1 + i')^{mn}
 \end{aligned}$$

Es muy importante destacar que, no obstante todo lo anterior, el producto "mn" puede inclusive ser definido en el campo de los número reales, es decir, puede tener valores numéricos con cifras decimales, sin embargo, esta idea será discutida más adelante.

Es prudente aclarar que "i*" es la tasa de interés que será pagada al transcurrir todo el tiempo que durará la operación comercial, y puede ser calculada también de la siguiente manera:

$$i^* = (C_{mn} - C_0) / C_0.$$

Pero enfoquemos ahora nuestra atención en la fórmula antes vista que relaciona una tasa efectiva de interés con una nominal:

$$i_{(m)} = m \{ (1 + i)^{1/m} - 1 \},$$

ambas tasas son referidas a una misma amplitud de tiempo como se ha venido reiterando, es decir, si una es expresada en términos anuales, la otra será referida también a un año, por ejemplo.

Planteado este caso, ¿qué ocurriría si, manteniendo constante el valor de la tasa efectiva de interés, esta proviniera de la capitalización semestral de una tasa nominal de interés?. La respuesta es la siguiente.

$$i_{(2)} = 2 \{ (1 + i)^{1/2} - 1 \}.$$

Si proviniera de una capitalización trimestral, se tendría que:

$$i_{(4)} = 4 \{ (1 + i)^{1/4} - 1 \};$$

si se tratara de una capitalización bimestral, procedería lo siguiente:

$$i_{(6)} = 6 \{ (1 + i)^{1/6} - 1 \};$$

si la capitalización se realizara de forma mensual, se llegaría a que:

$$i_{(12)} = 12 \{ (1 + i)^{1/12} - 1 \};$$

si existiese una capitalización diaria, la expresión aplicable sería la indicada a continuación:

$$i_{(365)} = 365 \{ (1 + i)^{1/365} - 1 \};$$

y así, es factible proseguir, hasta llegar al caso de tratar con una "capitalización instantánea", es decir, una en la que "m" tuviera un valor sumamente grande.

Continuando con la emulación de este procedimiento, se definirá el concepto denominado "fuerza de interés", el cual es representado con la sigla "δ". Este valor puede ser definido con los principios de límite expresados por el cálculo diferencial, como a continuación se muestra.

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i_{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} m \{ (1 + i)^{1/m} - 1 \}$$

Para encontrar este límite, es necesario hacer el siguiente cambio de variable:

Si $x = 1/m$:

$$\delta = \lim_{x \rightarrow 0} i_{(1/x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1 + i)^x - 1 \} / x.$$

Aplicando el Teorema de L'hospital nos queda:

$$\delta = \lim_{x \rightarrow 0} i_{(m)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + i)^x \text{Ln}(1 + i)$$

$$\delta = \text{Ln}(1 + i)$$

Si se desea despejar de aquí la tasa efectiva de interés del periodo, queda lo siguiente:

$$e^{\delta} = 1 + i$$
$$i = e^{\delta} - 1$$

Como ya fue expresado, existe la siguiente relación entre la tasa efectiva de interés y la tasa de interés aplicable a cada subperiodo:

$$1 + i = (1 + i')^m,$$

por lo que es válida la siguiente expresión:

$$e^{\delta} = (1 + i')^m$$
$$e^{\delta n} = (1 + i')^{mn},$$

lo cual significa que la expresión del interés compuesto antes vista:

$$C_{mn} = C_0 (1 + i')^{mn}$$

puede escribirse también como:

$$C_{mn} = C_0 e^{(\delta n)}$$

Para ejemplificar lo anterior, supongamos que deseamos determinar la tasa nominal de interés que corresponde a una efectiva de interés del 13.8%, para distintos subperiodos de capitalización:

Si $m=1$:

$$i_{(1)} = 1 \{ (1 + 0.138)^{1/1} - 1 \}$$
$$i_{(1)} = 13.8\%$$

Si $m=2$:

$$i_{(2)} = 2 \{ (1 + 0.138)^{1/2} - 1 \}$$
$$i_{(2)} = 13.3542\%$$

Si $m=3$:

$$i_{(3)} = 3 \{ (1 + 0.138)^{1/3} - 1 \}$$
$$i_{(3)} = 13.2098\%$$

Si $m=4$:

$$i_{(4)} = 4 \{ (1 + 0.138)^{1/4} - 1 \}$$
$$i_{(4)} = 13.1384\%$$

Si $m=6$:

$$i_{(6)} = 6 \{ (1 + 0.138)^{1/6} - 1 \}$$
$$i_{(6)} = 13.0675\%$$

Si $m=12$:

$$i_{(12)} = 12 \{ (1 + 0.138)^{1/12} - 1 \}$$
$$i_{(12)} = 12.9971\%$$

Si $m=24$:

$$i_{(24)} = 24 \{ (1 + 0.138)^{1/24} - 1 \}$$
$$i_{(24)} = 12.9621\%$$

Si $m=52$:

$$i_{(52)} = 52 \{ (1 + 0.138)^{1/52} - 1 \}$$
$$i_{(52)} = 12.9433\%$$

Si $m=365$:

$$i_{(365)} = 365 \{ (1 + 0.138)^{1/365} - 1 \}$$
$$i_{(365)} = 12.9295\%$$

Si $m=8,760$:

$$i_{(8\,760)} = 8,760 \{ (1 + 0.138)^{1/8,760} - 1 \}$$
$$i_{(8\,760)} = 12.9273\%$$

Si $m=525,600$:

$$i_{(525\,600)} = 525,600 \{ (1 + 0.138)^{1/525,600} - 1 \}$$
$$i_{(525\,600)} = 12.9272\%$$

Como puede observarse, a medida que crece "m", " $i_{(m)}$ " concurre a un valor que puede determinarse mediante la expresión de la "fuerza del interés":

$$\delta = \text{Ln}(1 + i)$$
$$\delta = \text{Ln}(1 + 0.138)$$
$$\delta = 12.9272\%$$

Esto quiere decir que " δ " tiene un significado análogo al de " $i_{(\infty)}$ ", con lo cual se concluye que, dada una tasa efectiva de interés, no existirá tasa nominal de

interés alguna que sea menor que la efectiva, ni mayor que la fuerza del interés, es decir:

$$\delta \leq i_{(m)} \leq i.$$

Por otro lado, en materia de comprobación, la validez de la expresión general del interés compuesto puede verificarse, para el conjunto de los números naturales, por el método de Inducción Matemática de la siguiente manera:

Si $mn = 0$:

$$\begin{aligned} C_0 &= C_0 (1 + i)^0 \\ C_0 &= C_0 \end{aligned}$$

Si $mn = 1$:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 (1 + i) \\ C_1 &= C_0 (1 + i) \end{aligned}$$

Si $mn = k$:

$$C_k = C_0 (1 + i)^k$$

Si $mn = k+1$:

$$C_{k+1} = C_0 (1 + i)^{k+1}$$

o bien,

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= C_0 (1 + i)^k (1 + i) \\ C_{k+1} &= C_0 (1 + i)^{k+1} \end{aligned}$$

El ser las dos expresiones idénticas y equivalentes, queda demostrada la validez de la expresión general para el conjunto de los números naturales.

Así mismo, la expresión puede verificarse también para el conjunto de los números reales, como fue mencionado con anterioridad; pero hay que considerar que el incremento en " C_k " estará dado por el número real " $1/m$ ", el cual representa a cada subperíodo en que es capitalizada la tasa; situación que dirige al siguiente análisis:

$$i' = i_{(m)} / m = (C_{k+1/m} - C_k) / C_k$$

Si " m " tiende al infinito, puede observarse que la diferencia de " $C_{k+1/m}$ " y " C_k " es tendiente a cero por su parte, lo que es equivalente a tener:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i' = \lim_{m \rightarrow \infty} i_{(m)} / m = \delta / m$$

$$\delta / m = \lim_{m \rightarrow \infty} (C_{k+1/m} - C_k) / C_k$$

Haciendo el siguiente cambio de variable se tiene:

Si $\Delta m = 1/m$:

$$i' = (C_{k+\Delta m} - C_k) / C_k = (\Delta m) i_{(m)},$$

y despejando " $i_{(m)}$ " se obtiene:

$$i_{(m)} = (1 / C_k) (C_{k+\Delta m} - C_k) / \Delta m$$

El límite de esta función cuando "m" tiende al infinito, es equivalente a aplicar el límite de la función cuando " Δm " tiende a cero; pero, si se observa el segundo cociente de la expresión, se notará que al aplicar este límite se tratará con el teorema fundamental del cálculo diferencial, por lo que se obtiene que:

$$\delta = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} i_{(m)} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} (1/C_k) (C_{k+\Delta m} - C_k) / \Delta m$$

$$\delta = C_k' / C_k.$$

La sigla " C_k ", representa la derivada de la función " C_k ".

No obstante lo anterior, se necesita conocer el valor de la función y no el de su derivada, por lo que debe integrarse la afirmación anterior, y para ello es necesario hacer lo siguiente:

Si $C_k = C_\tau$:

$$\delta = C_\tau' / C_\tau$$

Multiplicando ambos términos por " $d\tau$ " se obtendrá que:

$$\delta(d\tau) = (C_\tau' / C_\tau) d\tau.$$

Se debe tener presente que se ha partido de la expresión fundamentada en la tasa efectiva de interés al hacer tender a la literal "m" al infinito, es decir, la amplitud del subperiodo es equivalente a la del periodo, y consecuentemente ambos resultan ser iguales (cada periodo solamente tendrá un subperiodo), por lo que sólo en este caso, bajo esa condición se tiene que:

$$i = i' = i_{(m)}.$$

Al integrar definitivamente la última expresión, donde se obtuvo la relación de " $\delta(d\tau)$ ", desde "0" hasta "n", que es el intervalo de interés en virtud de lo anterior, y recordando el principio del cálculo integral que afirma que la integración del cociente de la derivada de una función entre dicha función es equivalente al logaritmo natural de la misma más una constante de integración, se tiene:

$$\int_0^n \delta(d\tau) = \int_0^n (C_\tau' / C_\tau) d\tau$$

$$\delta n = \text{Ln } C_{mn} - \text{Ln } C_0$$

$$\delta n = \text{Ln } (C_{mn} / C_0)$$

$$e^{(\delta n)} = C_{mn} / C_0$$

$$C_{mn} = C_0 e^{(\delta n)},$$

pero se sabe que.

$$e^{\delta n} = (1 + i)^{mn}$$

$$C_{mn} = C_0 (1 + i)^{mn}$$

Con lo cual, queda demostrado que la expresión es válida también para el conjunto de los números reales.

Habrá que hacer notar, que al efectuar la integral de la demostración anterior, el término " C_{mn} " aparece debido a que la amplitud del subperiodo es equivalente a la del periodo como se mencionó, y se trató con una expresión donde se involucra la tasa efectiva de interés "i", por lo que " C_τ " en realidad equivale a " C_m ", que al integrarse genera a " C_{mn} ".

Un concepto más que debe abordarse dentro del tratado de la matemática financiera es el de "amortización", misma que se define como el elemento de un conjunto de pagos iguales, realizados a intervalos iguales de tiempo para liquidar una cuantía monetaria. La amortización suele conocerse también con el nombre de "anualidad", pero a pesar de este nombre, no necesariamente los pagos deben ser hechos anualmente.

La amortización es el procedimiento con el que se salda gradualmente una deuda por medio de una serie de pagos que, generalmente, son iguales y se realizan en periodos equivalentes como ya se mencionó.

En el cálculo del monto de estos pagos, infiere también la teoría del interés, y se relaciona con el concepto matemático de las progresiones geométricas.

Para conocer el valor presente de una serie de ingresos periódicos, referidos subsecuentemente con la literal "a", se generaría la siguiente sumatoria:

$$C_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + \dots + a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-n}$$

La expresión corresponde evidentemente a una progresión geométrica, que se define como una serie de cantidades que guardan entre sí una relación constante, donde para determinar el siguiente término de la serie, deberá multiplicarse el elemento anterior por la razón conocida "r", que para este caso específico resulta ser equivalente a "(1+i)".

Cabe destacar que, tanto el ingreso periódico "a" como la tasa de interés "i", son referidos a la misma amplitud de tiempo, es decir, el subperiodo es equivalente al periodo. En caso de que ambos no coincidan, habrá que aplicar la tasa de interés del subperiodo "i'" que corresponda, y la literal "n" será sustituida por el término "mn", así como la amortización será entonces "a'".

Si se formula la solución a este problema con fundamento al concepto matemático de la suma de una progresión geométrica se llega al siguiente desarrollo

$$C_0 = a'(1+i')^{-1} + a'(1+i')^{-2} + a'(1+i')^{-3} + \dots + a'(1+i')^{-(mn-1)} + a'(1+i')^{-(mn)}$$

Si se multiplica la expresión anterior por el término "-(1+i')^{mn}" se llega a que

$$- C_0 (1+i')^{mn} = - a'(1+i')^{mn-1} - a'(1+i')^{mn-2} - a'(1+i')^{mn-3} - \dots - a'(1+i') - a'$$

Multiplicando esta ecuación por la razón negativa de interés "-(1+i)" se obtiene:

$$C_0 (1+i')^{mn+1} = a'(1+i')^{mn} + a'(1+i')^{mn-1} + a'(1+i')^{mn-2} + \dots + a'(1+i')^2 + a'(1+i')$$

Ahora, se sumarán ambas ecuaciones anteriores, generando lo siguiente:

$$\begin{aligned} C_0 (1+i')^{mn+1} - C_0 (1+i')^{mn} &= a'(1+i')^{mn} - a' \\ C_0 (1+i')^{mn} (1+i'-1) &= a' [(1+i')^{mn} - 1] \\ C_0 &= [a' / i'] [1 - (1+i')^{-mn}] \end{aligned}$$

Donde "C₀" corresponde a la suerte principal y "a'" el monto del pago periódico que amortizará una deuda considerando el esquema del interés.

De la expresión anterior puede despejarse fácilmente el pago periódico "a" de la siguiente manera:

$$a' = C_0 (i') / [1 - (1+i')^{-mn}],$$

Debe hacerse hincapié en que con esto se ha considerado un esquema de pagos vencidos, es decir, el primer pago se liquidará una vez transcurrido el primer subperiodo, el segundo al final del siguiente, y así sucesivamente.

Relacionando las expresiones anteriores con el monto, es decir, con el valor futuro de una suerte principal se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= [a' / i'] [(1 + i')^{mn} - 1] ; \\ a' &= C_{mn} (i') / [(1 + i')^{mn} - 1] . \end{aligned}$$

donde las literales "a" e "i" corresponden al pago periódico y a la tasa de interés aplicables en cada subperiodo respectivamente.

No obstante lo anterior, en finanzas existen casos en los cuales se efectúan amortizaciones de "suertes principales" mediante la aportación de pagos constantes que duran un periodo muy grande, que incluso puede considerarse como indefinido; dando lugar de este modo al concepto de "amortizaciones perpetuas", las cuales son pagos constantes que se realizan a lo largo de un tiempo muy amplio para igualar un valor presente.

En matemáticas, esto se traduce a lo consideración de un plazo tan grande que tiende al "infinito"; es decir, el número de periodos son tantos, que hacen que el plazo se vuelva en un valor sumamente grande.

Siguiendo las ideas planteadas por el concepto de amortización, es posible determinar valores presentes y futuros con esta nueva condición, efectuando el siguiente límite:

$$C_0 = \lim_{mn \rightarrow \infty} [a' / i'] [1 - (1+i')^{-mn}] ,$$

evidentemente el término "(1+i')^{-mn}" tenderá al valor de cero al aplicar las sustituciones correspondientes, quedando la siguiente expresión:

$$C_0 = a' / i' ,$$

misma que resulta ser la equivalencia de un valor presente con una sucesión de amortizaciones perpetuas.

Sin embargo, este proceso sólo es aplicable de manera práctica hacia un valor presente, no así para un valor futuro, pues como puede observarse, si se aplica el límite a la expresión que liga a una amortización con un valor futuro, éste generará un valor tan grande, comparable solamente con el del "infinito".

ANÁLISIS DE INVERSIONES

Es sabido que el objetivo preciso de un inversionista es incrementar su patrimonio, y por eso necesita una base sólida sobre la cual fundamente la toma de una buena decisión respecto de qué alternativa elegir con tal efecto; es decir, el inversionista debe determinar y comparar parámetros e indicadores que le permitan eliminar de inmediato las alternativas no viables según la rentabilidad que cada alternativa le aporte a él.

Para lograr este objetivo, es conveniente y necesario seguir los lineamientos de un proceso estructurado, en el cual se distinguen cuatro etapas fundamentales:

- 1) Identificación de la necesidad de una decisión o de una oportunidad de inversión.
- 2) Formulación de alternativas de acción para satisfacer la necesidad, o bien para aprovechar la oportunidad que se presenta (proyectos de inversión).
- 3) Evaluación de las alternativas de inversión en términos de su contribución para el alcance de las metas.
- 4) Selección de una o varias alternativas de inversión para su implantación.

Habiendo identificado una necesidad de inversión, el paso a seguir es la formulación de alternativas de acción, y en ese sentido debe señalarse que para tomar la mejor decisión es fundamental tratar de agotar las diferentes alternativas que "a priori" cumplen con las restricciones establecidas para cada caso específico; es decir, se definirá el mejor esquema preoperativo y operativo para el diseño, desarrollo y comercialización del proyecto o negocio, conformando un plan de ventas y estrategias de comercialización adecuadas, que otorguen el mejor desempeño financiero del mismo.

Una vez determinados los "proyectos de inversión", se procederá en consecuencia a la evaluación determinística (condiciones de certidumbre) y jerarquización de los mismos para determinar la contribución o utilidad de cada uno de ellos al logro de las metas establecidas por el inversionista. Generalmente la contribución de los proyectos se expresa en términos de retornos monetarios como base de comparación entre cada acción a emprender.

Con base en los resultados obtenidos en la evaluación y considerando que la pretensión es maximizar la utilidad susceptible de ser generada, se seleccionará la mejor alternativa de inversión, y para ello se deberá seleccionar el, o los subconjuntos de proyectos que maximicen la utilidad global respectiva, toda vez

que cumplan con las restricciones de tipo tecnológico, económico y de financiamiento que en su caso procedan.

Suponiendo la certeza de las características cuantitativas de un proyecto, se presentan tres criterios que permiten clasificar las inversiones en favorables (rentables) o desfavorables (no rentables) en términos del crecimiento patrimonial del inversionista.

Para efectos de la exposición de estos criterios, la notación utilizada para la definición de un proyecto será el siguiente:

- C_0 Inversión inicial requerida.
- B_t Beneficio generado por el proyecto durante el periodo "t".
- C_t Costo causado por el proyecto en el periodo "t".
- FEN_t Flujo de Efectivo Neto del periodo "t".
- n Horizonte de la inversión dividido en periodos.

Debe señalarse que el Flujo de Efectivo Neto del periodo "t" (FEN_t) será determinado calculando la diferencia que exista entre los ingresos generados menos las erogaciones causadas en el mismo periodo; pero cuando a esta diferencia le corresponda un signo negativo, el Flujo de Efectivo Neto será entendido como el "déficit" o costo neto incurrido en el punto "t" del tiempo (C_t), mientras que si su signo es positivo será referido como un "superávit" o beneficio neto (B_t) a favor del proyecto o negocio en marcha, según sea el caso

En este contexto, para efectos de egresos monetarios se utilizarán las estimaciones de las inversiones, costos de operación, comisiones, infraestructura general considerada, etc., y por otra parte, se hará lo propio para el cálculo de los ingresos con base en tarifas, demanda y beneficios generales de tipo financiero.

Con estos elementos descritos serán calculados los indicadores con los cuales se establecerá la conveniencia o inconveniencia de realizar una inversión, o bien, en caso de analizar un conjunto de alternativas de inversión, cuáles son las más adecuadas para incrementar el patrimonio del inversionista, y cuáles no. Dichos indicadores son los siguientes:

1. Periodo de Pago (PP),
2. Valor Presente Neto (VPN),
3. Tasa Interna de Retorno (TIR),
4. Relación Beneficio/Costo (B/C),
5. Índice de Rentabilidad de la Inversión (IRI),
6. Tasa de Rentabilidad Inmediata (TRI),
7. Pago Anual Equivalente (PAE) y,
8. Tasa de Rentabilidad Equivalente (TRE).

Los Flujos de Efectivo Neto forman el conjunto básico y fundamental que deberá determinarse para proceder con el cálculo de estos indicadores, sin ellos es imposible efectuar el análisis de una inversión o de varias. Primeramente habrá que conocer la utilidad o la pérdida neta integrando una proyección "proforma" de los Estados de Resultados que se esperan obtener a lo largo del plazo u horizonte de vida del proyecto de inversión, periodo por periodo con base en elementos contables que fueron abordados en el apartado inmediato anterior

Como siguiente paso se elaborará una proforma denominada "Origen y Aplicación de Recursos" o "Fuentes y Destinos de Recursos", misma que corresponde al concepto contable de "estado de cambios en la situación financiera" ya expuesto anteriormete. Esta pro forma, al igual que los Estados de Resultados, contendrá los mismos periodos proyectados.

La diferencia que exista entre la suma de los orígenes y la suma de los destinos representará a la cuantía monetaria que existirá como fondo de recursos líquidos en la entidad, es decir, será el flujo de efectivo neto propiamente dicho que mantendrán sus arcas (chequeras, cajas, etc.). Dicha cuantía necesariamente será igual o mayor que cero en cada lapso de análisis del horizonte de planeación y, con esta base, puede identificarse que la suma por periodo de las aportaciones de capital que deberán hacer los socios del proyecto y del financiamiento que deberá ser conseguido para que éste sea llevado al cabo quedará determinada con la siguiente expresión:

$$ACyF \geq IAF + OI - UN + PN - D - A.$$

donde, por cada periodo del horizonte de planeación analizado:

- ACyF Es la suma de la aportación de capital y del financiamiento requerido por el proyecto (monto de los recursos líquidos necesarios exhibidos como aportación de capital).
- IAF Es la inversión en activo fijo,
- OI Son los recursos que se destinarán a otras inversiones,
- UN Es la utilidad,
- PN Corresponde a la pérdida neta.
- D Es la depreciación de los bienes que forman parte del activo fijo y,
- A Son las amortizaciones de los servicios y derechos que se integraron al activo fijo del proyecto.

Cabe señalar que el monto de inversión y de financiamiento está imposibilitado a ser negativo; además, cuando dicho monto sea equivalente a cero y el flujo de efectivo del proyecto (considerando el pago de intereses por concepto de financiamiento) sea mayor que cero, podrá considerarse destinar dicho flujo de

efectivo al pago de dividendos a los inversionistas del proyecto en cuestión, o bien, al apoyo de otros proyectos de la entidad.

Con la finalidad de verificar la validez de los cálculos efectuados en los pasos anteriores, habrá que establecer una proforma de "Balance General", considerando como cuenta de Activo Circulante a la diferencia de la suma de los orígenes y la suma de los destinos (efectivo en caja y bancos), como cuentas de Activo Fijo a las inversiones correspondientes (inversión en activo fijo y recursos que se destinarán a otras inversiones) y a la acumulación de sus depreciaciones y/o amortizaciones que se calcularon en la proforma de los Estados de Resultados, como cuenta de Pasivo al financiamiento requerido (aportación de capital mediante préstamo) y, finalmente, como cuentas de Capital Contable al capital social exhibido (inversión de accionistas correspondiente como aportación de capital), al resultado del ejercicio (utilidad o pérdida neta, según sea el caso), y a la acumulación de los resultado de ejercicios anteriores.

Hay que recordar que, en el Balance General, la suma de los Activos debe ser igual a la suma de los Pasivos más la suma del Capital Contable; así mismo, es importante considerar que, para fines valuatorios, conviene utilizar unidades monetarias constantes y tasas reales de deflactación, ambos elementos referidos a un período determinado de planeación; sin embargo, haciendo las consideraciones adecuadamente pertinentes se podrán usar unidades monetarias corrientes y tasas efectivas de deflactación

El Flujo de Efectivo Neto para Evaluación de cada periodo que se empleará para evaluar el proyecto se obtendrá de la proforma de "Origen y Aplicación de Recursos" o "Fuentes y Destinos de Recursos", y será igual a la suma de los orígenes menos la suma de los destinos menos las aportaciones de capital que correspondan igualmente en cada periodo. En esta evaluación se integrará el pago de intereses por los financiamientos que sean necesarios para dar marcha al proyecto, pero se excluirá el pago de dividendos a los inversionistas y el apoyo a otros proyectos.

Con esta información adecuadamente integrada, se propondrá y justificará un costo de capital central, con el cual será posible calcular los indicadores de rentabilidad de la inversión, mismos que ya fueron enunciados y se definirán por separado en su punto respectivo que a continuación se expone.

PERIODO DE PAGO (PP)

Este método consiste en cuantificar el período en que será recuperada la inversión inicial " C_0 ", tomando como parámetro principal el costo total del proyecto (inversión

total), respecto de los ingresos obtenidos anualmente durante el horizonte de inversión del mismo.

El periodo de recuperación de una inversión puede ser definido como el tiempo requerido para que el flujo de ingresos producido por una inversión sea igual al desembolso original; con lo cual es posible medir la liquidez del proyecto, la recuperación de su aportación de capital y su ganancia o utilidad.

Para determinar el periodo de pago de una inversión se debe establecer la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^{PP} FEN_t (1 + i)^{-t} = C_0,$$

donde el valor de "t" será variado desde uno y hasta el valor del periodo de recuperación de la inversión, mismo que es la incógnita a resolver mediante tanteos, por aproximaciones sucesivas o mediante la aplicación de un método numérico.

Para calcular este indicador es recomendable acumular en cada periodo los Flujos de Efectivo Neto de manera deflactada, es decir, el Flujo de Efectivo Neto Acumulado Deflactado en cualquier periodo será igual a su Flujo de Efectivo Neto referido en valor presente más el Flujo de Efectivo Neto Acumulado Deflactado del periodo inmediato anterior, encontrándose el Periodo de Pago (PP) entre los dos periodos que presenten un cambio de signo en sus Flujos de Efectivo Neto Acumulados Deflactados.

Bajo el criterio del Periodo de Pago se considerará que una inversión es rentable si el periodo de recuperación de la misma es menor o igual que el horizonte o plazo de ejecución del proyecto o periodo de vida del negocio en marcha; es decir:

$$PP \leq mn,$$

y será considerada como no rentable en caso que esto no ocurra

Es importante decir que este método es conocido también con el nombre de "periodo de recuperación de la inversión" o "periodo de recuperación actualizado".

VALOR PRESENTE NETO (VPN)

El método del Valor Presente Neto es uno de los criterios financieros más ampliamente utilizado en el Análisis de Inversiones. Para entender su conceptualización, y también posteriormente el de Tasa Interna de Retorno, consideremos el siguiente esquema mostrado en la figura que recibe el nombre de Diagrama de Flujo de Efectivo. en el cual se representan, como su nombre lo indica, los flujos de efectivo para una inversión.

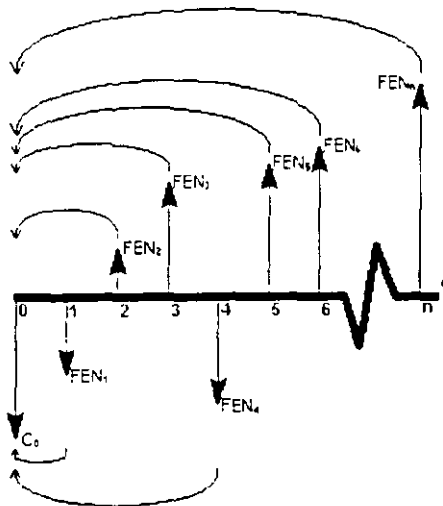


Diagrama de Flujo de Efectivo

En este proyecto de inversión se requiere de un desembolso inicial de efectivo " C_0 ", con lo que se generarán una sucesión de Flujos de Efectivo Neto al paso del tiempo. desde el primer periodo y hasta el horizonte de la inversión donde se presenta el flujo de efectivo final, quedando éstos representados como " FEN_1 ", " FEN_2 ", " FEN_3 ", ..., " FEN_n ". Los subíndices colocados corresponden a la variación del contador "t", el cual representa al t-ésimo periodo.

En la figura anterior, la inversión inicial es denotada con la sigla " C_0 " y se representa gráficamente con una flecha hacia abajo de la línea de tiempo, lo cual significa que es una erogación de efectivo. Los flujos de efectivo " FEN_1 " y " FEN_4 " también son hacia abajo en la línea de tiempo y representan flujos de efectivo negativos, es decir, son erogaciones proyectadas. Los flujos positivos son representados con flechas hacia arriba y representan ingresos o beneficios que el proyecto le aporta al inversionista.

El valor presente neto se calcula sumando la inversión inicial al valor actualizado de los Flujos de Efectivo Neto futuros; es decir, a la inversión inicial (representada por un flujo de efectivo negativo) se le suman algebraicamente los Flujos de Efectivo Neto traídos a valor presente mediante una "tasa" con la aplicación de la

teoría del interés, tratada ya anteriormente. Dicha tasa será conocida como Tasa de Rendimiento Mínima Aceptable (TREMA).

La Tasa de Rendimiento Mínima Aceptable (TREMA) es una tasa de interés que indica el rendimiento mínimo que se espera tenga el proyecto o negocio en marcha.

En resumen, el método del Valor Presente Neto (VPN) consiste en actualizar los flujos de efectivo a través de una tasa de interés y compararlos con la inversión inicial mediante la siguiente relación:

$$VPN_i = C_0 + \sum_{t=1}^n FEN_t (1 + i)^{-t}$$

Se considerará que la inversión es rentable si el Valor Presente Neto tiene un valor positivo, y en caso contrario será no rentable; por lo que se deduce entonces que el resultado que se obtiene refleja si el proyecto será capaz de generar utilidades o pérdidas respectivamente.

Este método tiene las ventajas que a continuación se numeran:

1. Considera el valor del dinero en el tiempo mediante la aplicación de la teoría del interés.
2. Existe verdadera facilidad para calcularlo.
3. Tiene solución única por cada tasa de interés que se aplique.

Sin embargo, la desventaja es que el resultado obtenido depende de la tasa de interés para deflactación que sea utilizada

En lo sucesivo, se entenderá por deflactación al procedimiento mediante el cual un Valor Futuro es transformado en un Valor Presente. Al proceso inverso se le conocerá como reflactación.

TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)

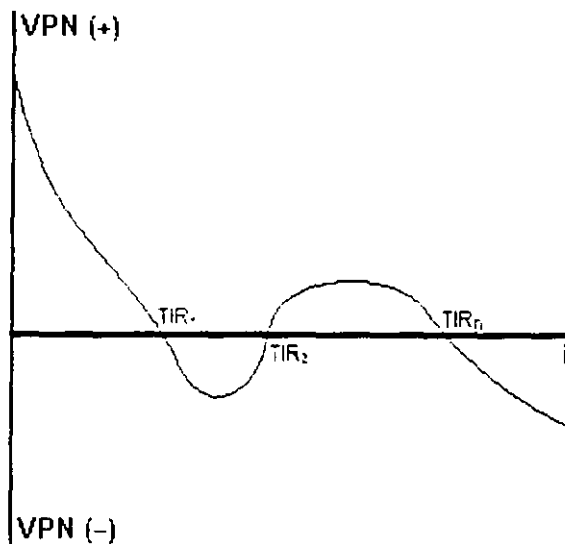
La Tasa Interna de Retorno (TIR), considerada también como tasa interna de rendimiento financiero, se define como la tasa de interés de deflactación que hace que el Valor Presente Neto de todos los Flujos de Efectivo Neto de una inversión o proyecto, sea igual a cero, satisfaciendo la siguiente ecuación:

$$f(\text{TIR}) = C_0 + \sum_{t=1}^n \text{FEN}_t (1+\text{TIR})^{-t} = 0,$$

donde la Tasa Interna de Retorno (TIR) es la solución o raíz de dicha ecuación. Es necesario observar que la ecuación anterior representa el desarrollo de un polinomio de grado "t".

Este método tiene una desventaja, la cual radica en el hecho que, la anterior es una ecuación de grado "t", como ya se mencionó, la cual tendrá hasta "t" raíces o soluciones; una o más comprendidas en el campo de los números reales, y el resto existirán, por pares conjugados, en el campo de los números complejos.

Lo anterior significa que, cuando existe uno o más Flujos de Efectivo Neto negativos, pueden traer como resultado la obtención de Tasas Internas de Retorno múltiples; en otras palabras, cuando tratamos casos con características no típicas, pueden obtenerse varias soluciones (Tasas Internas de Retorno) que hacen que el Valor Presente Neto de una inversión sea igual a cero, por lo que para tomar una decisión, es necesario apoyarse en un mecanismo gráfico como el que se ilustra a continuación en la siguiente figura:



Representación gráfica del polinomio del VPN

Las soluciones o raíces del polinomio que representa el comportamiento del Valor Presente Neto, pueden encontrarse mediante la aplicación de algún método numérico, como puede ser el "Método de Newton". Para resolver la ecuación representativa del Valor Presente Neto, el Método de Newton resulta ser eficaz y eficiente, siempre y cuando existan soluciones pertenecientes al campo de los números reales, por tal razón es uno de los métodos numéricos más ampliamente

utilizados para resolver polinomios, de hecho, es un método que converge más rápidamente que cualquiera otro (de manera cuadrática en términos del error obtenido en cada paso).

Este método es de aproximaciones sucesivas, es decir, se obtendrá una mejor solución mientras más iteraciones se realicen. Se aplicará comenzando a partir de una estimación inicial que esté cercana a la raíz, extrapolando a lo largo de la tangente del polinomio en cuestión hasta su intersección con el eje de las abscisas y se le tomará a ese valor como la siguiente aproximación, continuando así hasta que los valores sucesivos de la solución que se esté buscando se encuentren lo suficientemente cercanos entre ellos, o bien, el valor de la función sea lo suficientemente próximo a cero.

La expresión postulada por el método, adaptada para encontrar el valor de la Tasa Interna de Retorno (TIR) es la siguiente:

$$TIR_{k+1} = TIR_k - [f(TIR_k) / f'(TIR_k)]$$

En términos prácticos, habrá que obtener la primera derivada de la función particular que represente al Valor Presente Neto (VPN), partir de un valor supuesto para la Tasa Interna de Retorno (cero, por ejemplo), y sustituir dicho valor en la función y en su derivada como lo indica la expresión anterior. El nuevo valor obtenido servirá para que, de nueva cuenta, se sustituya en la función y en su derivada y, con este procedimiento iterativo, se obtenga a cada paso un mejor valor que se aproxime al verdadero de la Tasa Interna de Retorno.

RELACIÓN BENEFICIO/COSTO (B/C)

Este indicador se define como la relación entre los Beneficios (Flujos de Efectivo Neto positivos) y los Costos (Flujos de Efectivo Neto negativos) de un proyecto a valores actuales (Valor Presente). Si la relación $B/C > 1$ el proyecto deberá aceptarse pues indica que sus beneficios son mayores que sus costos, y por lo tanto es conveniente para el o los inversionistas (inversión rentable). Si por el contrario, $B/C < 1$, se debe rechazar el proyecto pues indica que sus costos son mayores a sus beneficios y por lo tanto el proyecto no es rentable.

La relación B/C se calculará aplicando la siguiente relación:

$$(B/C)_i = \sum_{t=1}^n B_t (1+i)^{-t} / [C_0 + \sum_{t=1}^n C_t (1+i)^{-t}]$$

ÍNDICE DE RENTABILIDAD DE LA INVERSIÓN (IRI)

Este índice será calculado con la siguiente ecuación:

$$IRI_i = VPN_i / [C_0 + \sum_{t=1}^n C_t (1+i)^{-t}]$$

Se considerará como rentable un proyecto cuyo Índice de Rentabilidad de Inversión sea positivo; y como no rentable el caso negativo.

TASA DE RENTABILIDAD INMEDIATA (TRI)

Habrà que considerar únicamente el Flujo de Efectivo Neto del primer año en que éste sea positivo, determinándose esta tasa a través del cociente que resulte de dividir dicho Flujo de Efectivo Neto positivo entre la sumatoria del valor presente de cada uno de los Costos (Flujos de Efectivo Neto negativos) del proyecto, esto es:

$$TRI_i = B_k (1+i)^{-k} / [C_0 + \sum_{t=1}^n C_t (1+i)^{-t}]$$

PAGO PERIÓDICO EQUIVALENTE (PPE)

Con el método del Pago Periódico Equivalente (PPE), todos los ingresos y gastos que ocurran dentro del tiempo analizado son convertidos a una cantidad periódica equivalente (uniforme). Cuando dicha cantidad periódica es positiva, el proyecto generará utilidades y es conveniente llevarlo a cabo; si es negativo ocurre lo inverso.

El Pago Periódico Equivalente (PPE) será determinado con la expresión siguiente y con base en el número de intervalos uniformes en el que será dividido el

horizonte de inversión analizado ("mn"), mismos que constituirán los periodos de distribución del Valor Presente Neto (VPN):

$$PAE_i = VPN_i (i) / [1 - (1 + i)^{-mn}]$$

TASA DE RENTABILIDAD EQUIVALENTE (TRE)

habiendo calculado el Pago Periódico Equivalente (PPE), se hará la suposición que éste es el valor presente de una renta periódica, la cual es generada por la inversión en el proyecto de los Flujos de Efectivo Neto negativos (Costos) en Valor Presente, por lo que el cálculo de esta tasa se realizará de la siguiente manera:

$$TRE_i = PAE_i / [C_0 + \sum_{t=1}^n C_t (1+i)^{-t}]$$

ANÁLISIS DE RIESGO

Dos problemas fundamentales están presentes en toda propuesta de inversión: el primero se refiere a la conversión de los flujos de efectivo futuros de acuerdo a cualquiera de los criterios económicos ampliamente utilizados (PP, VPN, TIR, etc.), y el segundo al entendimiento y evaluación de la incertidumbre. En ese sentido, el segundo nivel de una evaluación se referirá al tratamiento del riesgo para el indispensable apoyo al análisis determinístico y a la toma de decisiones; esto es, incorporando el hecho de que los flujos de efectivo son variables aleatorias, tal como se expondrá más adelante.

El segundo punto referido es a menudo de mayor importancia, pero desafortunadamente ha recibido menos atención que el primero, por consiguiente, cuando una propuesta de inversión es analizada, se recomienda, incluir en el análisis alguna variable o medida que considere el riesgo inherente de la propuesta evaluada. Lo anterior es muy aconsejable, puesto que una inversión razonablemente segura con un rendimiento determinado, puede ser preferida a una inversión más riesgosa con un rendimiento esperado mayor.

La consideración del riesgo en la evaluación de una propuesta de inversión se puede definir como el proceso de desarrollar la distribución de probabilidad de alguno de los criterios económicos ya conocidos. Las distribuciones de probabilidad que comúnmente se obtienen en una evaluación corresponden al VPN, TIR y PPE; sin embargo, para determinar las distribuciones de probabilidad de estas bases de comparación se requiere conocer las distribuciones de probabilidad de los elementos inciertos del proyecto como son la vida del mismo, los precios de venta, el tamaño, la porción y la razón de crecimiento del mercado, la inversión requerida, las tasas de inflación, las tasas impositivas (impuestos), gastos de operación, gastos fijos, las tasas de interés involucradas, los cambios de paridad monetaria, valores de rescate de los activos, etc.

En otras palabras, en los estudios de inversión generalmente la información utilizada es determinística; sin embargo, debe reconocerse que por lo regular este no es el caso, ya que los flujos de efectivo que ocurren en un periodo determinado son a menudo una función de un gran número de variables y la información contiene incertidumbre que debe tomarse en cuenta en la valuación de inversiones, proyectos o negocios.

El análisis de inversiones consiste en identificar la "mejor" alternativa de inversión entre un grupo de contendientes. Para ello, es necesario cuantificar los costos y

beneficios que se derivan de cada una de las alternativas en cuestión y compararlas de acuerdo con algún criterio de evaluación.

Para la estimación de costos y beneficios se puede recurrir, por ejemplo, a comparaciones con proyectos similares, al análisis de información proporcionada por posibles proveedores o consumidores potenciales, o bien, a la elaboración de estudios de producción o de mercado; no obstante, resulta evidente que las estimaciones serán inciertas en mayor o menor grado y que servirán únicamente como guías generales y no como estimaciones firmes. Posteriormente, el analista al reconocer esta incertidumbre y apoyándose en su experiencia, modificará la información con que se alimenta al modelo de evaluación.

Este procedimiento bosquejado generalmente conduce a resultados satisfactorios, pero no permite cuantificar la incertidumbre asociada con la bondad de las alternativas, lo cual puede necesitarse en algunos casos; en particular, en aquellos en que el proyecto, o las condiciones del mismo, se alejen de los cánones convencionales, o en los cuales el analista no se encuentre suficientemente familiarizado con el problema bajo estudio. En otras palabras, los valores asignados a las variables que intervienen en los modelos de evaluación son inciertos en mayor o menor grado y, en muchos casos, dichos valores deben de servir únicamente como indicaciones de las tendencias de sus comportamientos y no como estimaciones firmes.

Será necesario recurrir a un análisis más formal en el cual se tome en cuenta, de manera explícita, el efecto de la incertidumbre de cada una de las componentes del problema y se cuantifique la variabilidad en la eficiencia de las alternativas. Asimismo, deberá ser posible identificar a las variables más importantes, desde el punto de vista del análisis de incertidumbre, lo cual servirá para interpretar los resultados de la evaluación y para reconocer los aspectos más relevantes del problema.

ENFOQUE BAYESIANO

Para esto se presenta un modelo probabilístico en el cual las variables aleatorias se caracterizan por sus valores esperados y sus covarianzas. De hecho, no es necesario especificar las funciones de densidad de cada una de las variables en cuestión.

El modelo se apoya en un marco bayesiano, lo cual permite cuantificar, con base en consideraciones racionales y de carácter subjetivo, la variabilidad de los flujos de efectivo para evaluación y la interrelación estocástica de los mismos. Se requiere, desde luego, de las estimaciones de los coeficientes de variación y de

los coeficientes de correlación (matriz de covarianza), para lo cual es de suma importancia entender tanto las relaciones existentes entre las variables como los mecanismos que las generan.

En el modelo propuesto, cada uno de los flujos de efectivo para evaluación constituyen variables consideradas aleatorias. Debe tenerse presente que el valor esperado de cada variable aleatoria será el calculado de manera determinística, recordando lo siguiente.

$$\sigma_x = (v_x) (\mu_x)$$

$$\text{Cov}(x, Y) = (\rho) (\sigma_x) (\sigma_Y)$$

donde:

- $\sigma_{x,Y}$: Desviación estándar de una variable aleatoria.
- v_x : Coeficiente de variación de una variable aleatoria.
- μ_x : Valor esperado o media de una variable aleatoria.
- $\text{Cov}(x, Y)$: Covarianza entre dos variables aleatorias.
- ρ : Coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias.

La covarianza de "x" y "Y" se determinará aplicando la siguiente expresión.

$$\text{Cov}(x, Y) = 1/N \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x) (Y_i - \mu_Y)$$

donde.

- x_i : cada uno de los valores experimentales de la primera variable aleatoria.
- Y_i : cada uno de los valores de la segunda variable aleatoria.
- N : número de pares de datos (primera y segunda variables aleatorias)
- μ_x : media de los valores de la primera variable aleatoria.
- μ_Y : media de los valores de la segunda variable aleatoria.

El coeficiente de correlación es un indicador que establece, en términos porcentuales, una medida de la relación existente entre dos variables aleatorias. Si el valor de este coeficiente fuera igual a cero, indicará que las variables aleatorias "x" y "y" son estocástica o estadísticamente independientes, es decir, no existe una relación entre ellas; si por el contrario, el valor absoluto de éste fuera equivalente a la unidad, indicará que ambas variables están perfectamente relacionadas.

La existencia de un signo negativo en el valor del coeficiente de correlación establece que las variables aleatorias "x" y "y" mantienen una correlación inversa, es decir, cuando una crece la otra disminuye y viceversa. Si en contrapunto, el signo que se presentara fuera positivo, indica que la correlación es de tipo directo, es decir, ambas crecen simultáneamente y viceversa.

De lo anteriormente expresado se entenderá que:

$$-1 < \rho < 1$$

Al cuadrado del coeficiente de correlación (ρ^2) se le conocerá con el nombre de coeficiente de determinación, el cual mide en qué porcentaje el comportamiento de una de las variables explica el comportamiento de la otra; por ejemplo, si el coeficiente de correlación de dos variables fuera de 0.96, consecuentemente el coeficiente de determinación sería equivalente a 0.9216, lo cual significaría que el valor de la primera variable explica en un 92.16% el valor de la segunda variable

En concreto, se deberá determinar la probabilidad de que el VPN no sea menor que algún número no negativo "s" ($P\{VPN \geq s\}$), en donde $s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y \mathbb{R}^+ es el conjunto de los números reales positivos). Para cada instancia, se debe proponer con sustento el rango de "s" y las distribuciones probabilísticas utilizadas; asimismo, no se aconseja hacer hipótesis simplistas de independencia estocástica ni de desarrollos polinomiales para ignorar *a priori* términos de segundo o tercer grado en adelante, tal como es el enfoque probabilístico de primer grado. Como ejemplo de esto se puede citar el caso de trabajar el VPN con el costo de capital (tasa de deflactación) como variable aleatoria, en la que dicha variable queda integrada con un polinomio de grado "n", donde "n" equivale al número de periodos analizados como horizonte de inversión.

La característica fundamental de un enfoque probabilístico de primer orden es que, cuando se tengan funciones no lineales de las variables aleatorias, primero habrá que eliminar la "no linealidad" de dichas funciones por medio de expansiones en series de Taylor, las cuales no es el objetivo desarrollarias en este texto; dicha expansión se hace alrededor del valor esperado de la variable aleatoria mediante la inclusión de la derivada de la función con respecto a la variable evaluada en el valor esperado de la misma, y una vez linealizada la función, se conservan únicamente los términos lineales (términos de primer orden) y se procede a calcular la esperanza y la varianza de la expresión resultante por medio de métodos conocidos.

Las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias generalmente se desarrollan con base en probabilidades subjetivas. Típicamente, entre más alejado del presente esté un evento, más incertidumbre habrá con respecto al resultado del mismo y, por consiguiente, si la varianza es una medida de la incertidumbre,

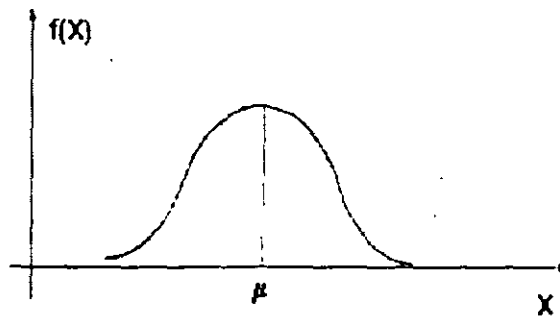
es lógico esperar que las variancias de las distribuciones de probabilidad crezcan con el tiempo.

Entre las distribuciones de probabilidad teóricas más comúnmente utilizadas en análisis de riesgo se pueden mencionar: la distribución normal y las distribuciones triangulares.

La distribución normal es, en muchos aspectos, la piedra angular de la teoría estadística. Una variable aleatoria "X" se dice que tiene una distribución normal con parámetros $(-\infty < \mu < \infty)$ y $\sigma^2 > 0$ si tiene la función densidad dada por la ecuación siguiente e ilustrada en la Figura siguiente:

$$f(X) = [\sigma(2\pi)^{1/2}]^{-1} e^{-[1/2][(X-\mu)/\sigma]^2}$$

$$-\infty < X < \infty$$



Densidad de probabilidad normal

La distribución normal es tan utilizada que una notación simplificada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ es comúnmente usada para indicar que una variable aleatoria "X" es distribuida normalmente con parámetros μ y σ^2 . Algunas propiedades de la distribución normal son:

- a) $f(X) \geq 0 \forall X$
- b) $\lim_{m \rightarrow \infty} f(X) = 0$ y $\lim_{m \rightarrow -\infty} f(X) = 0$
- c) $f(\{x+\mu\}) = f(-\{x-\mu\})$

La propiedad a) es requerida por todas las densidades de probabilidad y la propiedad c) indica que la densidad es simétrica sobre μ . Por otra parte, la media y la variancia de la distribución normal son:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x [\sigma(2\pi)^{1/2}]^{-1} e^{-[1/2][(X-\mu)/\sigma]^2} \delta x = \mu$$

$$\text{VAR}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x-\mu]^2 [\sigma(2\pi)^{1/2}]^{-1} e^{-[1/2][(x-\mu)/\sigma]^2} \delta x = \sigma^2$$

Puesto que la distribución normal solamente se puede integrar por métodos numéricos, es conveniente hacer un cambio de variable que facilite los cálculos de probabilidad. Dicho cambio de variable es:

$$Z = (X - \mu) / \sigma$$

Esta transformación hace que la evaluación de probabilidades sea independiente de μ y de σ . Con esta transformación, la distribución normal original se convierte en:

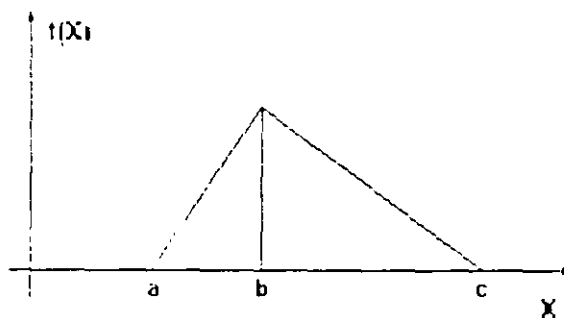
$$\phi(Z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-Z^2/2}$$

$$-\infty < Z < \infty$$

la cual tiene una media de 0 y una variancia de 1. esto es, $Z \sim N(0,1)$. y esta variable se dice que sigue una distribución normal estándar. La ventaja de esta distribución es que ha sido tabulada y sus resultados se encuentran disponibles en cualquier libro de estadística.

La distribución triangular, por su parte, al igual que la distribución β son ampliamente utilizadas al introducir riesgo en proyectos de inversión o negocios en marcha. Ambas distribuciones se basan en una estimación pesimista, una más probable, y una optimista. Sin embargo, la distribución triangular, por su sencillez, es más fácilmente comprendida por el analista y por las personas encargadas de interpretar los resultados del estudio de riesgo. La distribución triangular estará definida por la expresión siguiente que es ilustrada en la figura que a continuación se muestra:

$$f(X) = 2 [(c-a)(b-a)]^{-1} [x-a] \quad \forall a \leq x \leq b, \quad -2 [(c-a)(c-b)]^{-1} [x-c] \quad \forall b \leq x \leq c$$



Densidad de probabilidad triangular

Puesto que la distribución triangular se va a utilizar ampliamente en los ejemplos que se presentarán en las secciones subsiguientes, a continuación se muestra el procedimiento utilizado para evaluar su media y su variancia:

$$E(X) = \int_a^b [2x(x-a)] [(c-a)(b-a)]^{-1} \delta x + \int_b^c [-2x(x-c)] [(c-a)(c-b)]^{-1} \delta x$$

$$E(X) = 1/3 (a + b + c)$$

$$VAR(X) = \int_a^b [2x^2(x-a)] [(c-a)(b-a)]^{-1} \delta x + \int_b^c [-2x^2(x-c)] [(c-a)(c-b)]^{-1} \delta x - [1/3 (a + b + c)]^2$$

$$VAR(X) = 1/18 (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

es obvio que cuando la distribución triangular es simétrica, es decir, $b = (a + c)/2$ las formulas anteriores se transforman en:

$$E(X) = (a + c) / 2 = b$$

$$VAR(X) = 1/24 (c - a)^2$$

El valor presente neto de una propuesta de inversión, sin considerar inflación, se calcula de acuerdo a la siguiente expresión:

$$VPN = \sum_{j=0}^n X_j (1 + i)^{-j}$$

donde X_j ahora es una variable aleatoria que represente el flujo de efectivo neto del periodo j y cuya media y variancia son μ_j y σ_j^2 respectivamente. La fórmula anterior también puede ser expresada como:

$$VPN = -X_0 + X_1 (1 + i)^{-1} + X_2 (1 + i)^{-2} + \dots + X_n (1 + i)^{-n}$$

Donde si se considera que el término $(1+i)^{-j}=C_j$, entonces la ecuación se transforma en:

$$VPN = \sum_{j=0}^n C_j X_j$$

De acuerdo con las ecuaciones anteriores, es evidente que el valor presente neto es una variable aleatoria en lugar de ser una constante, por consiguiente, para

propósitos de evaluar un proyecto, el procedimiento usual sería determinar la media y la variancia del valor presente neto.

Dado que el valor esperado de una suma de variables aleatorias es dado por la suma de valores esperados de cada variable, entonces, el valor esperado del valor presente vendría dado por:

$$E(\text{VPN}) = \sum_{j=0}^n C_j E(X_j) = \sum_{j=0}^n C_j \mu_j$$

A la expresión anterior generalmente se le considera como el valor presente neto, sin embargo, es necesario aclarar que aun cuando el valor esperado del valor presente neto sea positivo, existe cierta probabilidad de que el valor presente sea negativo. Por consiguiente, es posible que ciertos proyectos sean rechazados aunque el valor esperado de sus valores presente sean positivos, por otra parte, es conveniente mencionar que generalmente al comparar alternativas mutuamente exclusivas, se tiende a seleccionar aquellas alternativas para la cual el valor esperado del valor presente es máximo. Sin embargo, este criterio de decisión no es válido universalmente, es decir, no todos los tomadores de decisiones tienen el mismo comportamiento hacia el riesgo. Algunas personas prefieren sacrificar utilidades a cambio de reducir el riesgo del proyecto.

Para determinar la variancia del valor presente, es necesario considerar primero que X_0, X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, consecuentemente, bajo este supuesto y de acuerdo al teorema del límite central, el VPN está normalmente distribuido, donde la media está dada por la ecuación anteriormente expresada y la variancia por:

$$\text{VAR}(\text{VPN}) = \sum_{j=0}^n C_j^2 \sigma_j^2$$

antes de ilustrar el uso de esta información, se considera el caso de que las variables aleatorias X_j no son independientes (los flujos de efectivo de un periodo a otro están correlacionados). Para esta nueva situación, la ecuación anterior se transforma en:

$$\text{VAR}(\text{VPN}) = \sum_{j=0}^n C_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n C_j C_k \text{Cov}(X_j, X_k)$$

El valor esperado del valor presente sigue siendo dado por la ecuación:

$$E(\text{VPN}) = \sum_{j=0}^n C_j E(X_j) = \sum_{j=0}^n C_j \mu_j$$

El "Teorema del Límite Central" establece que, si una variable aleatoria "Y" puede ser representada como la suma de "n" variables aleatorias independientes que satisfacen ciertas condiciones, entonces para una "n" suficientemente grande, "Y" sigue aproximadamente una distribución normal. Lo anterior expresado en forma de teorema sería: X_0, X_1, \dots, X_n es una secuencia de "n" variables aleatorias estocásticamente dependientes con $E(X_j)=\mu_j$ y $\text{VAR}(X_j)=\sigma^2$ (ambas finitas) y $Y=C_0X_0+C_1X_1+\dots+C_nX_n$, entonces bajo ciertas condiciones generales:

$$Z = [s - \sum_{j=0}^n C_j \mu_j] / [\sum_{j=0}^n C_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=0}^n \sum_{k=j+1}^n C_j C_k \text{Cov}(X_j, X_k)]^{1/2}$$

o bien:

$$Z = [s - E(\text{VPN})] / [\text{VAR}(\text{VPN})]^{1/2}$$

donde "Z" tiene una distribución $N(0,1)$ a medida que "n" se aproxima a infinito, aunque tratándose de variables aleatorias independientes la expresión aplicable es:

$$Z = [s - \sum_{j=0}^n C_j \mu_j] / [\sum_{j=0}^n C_j^2 \sigma_j^2]^{1/2}$$

La demostración de este teorema, así como la discusión rigurosa de las suposiciones que soportan este teorema, están más allá del alcance de esta presentación. Lo importante es el hecho de que "Y" sigue aproximadamente una distribución normal, independientemente del tipo de distribuciones que tengan cada una de las "X_js".

Puesto que el teorema establece que "Y" está normalmente distribuida cuando "n" se aproxima a infinito, la pregunta que surge en la práctica sería: ¿Qué tan grande debe ser "n" de modo que la distribución obtenida para "Y" sea bastante parecida a la distribución normal?

La respuesta a esta pregunta no es tan sencilla puesto que la respuesta dependerá de las características de las distribuciones de las "X_js", así como del

significado de "resultados razonables". Desde un punto de vista práctico, se puede decir que el valor de "n" depende del tipo de distribución de las " X_j 's". Por ejemplo, si las " X_j 's" siguen distribuciones simétricas, el valor de n debe ser mayor o igual a 4; por el contrario, si las " X_j 's" siguen distribuciones uniformes, el valor de "n" debe ser mayor o igual a 12. No obstante, se recomienda que $n \geq 100$ si las distribuciones de las " X_j 's" son irregulares.

Desafortunadamente en la práctica es mayormente asumida la independencia entre las variables aleatorias. Las razones son dos: 1) la falta de información histórica de las variables aleatorias (flujos de efectivo) dificulta significativamente el cálculo de los coeficientes de correlación " ρ " y, por ende, la evaluación de la matriz de covariancias; y 2) no se puede determinar con precisión la distribución de probabilidad del valor presente, por lo que evaluaciones de probabilidades en forma exacta no pueden ser hechas. Para estos casos, la única alternativa de evaluar un proyecto o comparar varios, es usar la desigualdad de Tchebycheff.

En adición a lo expuesto, conviene decir que las fórmulas anteriores relativas al valor presente neto fueron obtenidas sin tomar en cuenta la inflación, si una tasa inflacionaria " T_i " es introducida, las ecuaciones expuestas siguen siendo válidas, sólo que $(1+i)^{-j}(1+T_i)^{-j} = C_j$.

El tratamiento del riesgo en estos términos deberá ser explicado de manera formal, pero también dentro de un marco pragmático que con facilidad permita su interpretación en el contexto de fortalecer los resultados determinísticos de rentabilidad financiera y, por ende, la toma de decisiones.

La estimación de las tendencias centrales y de las incertidumbres de las variables en cuestión no presenta dificultad, lo que en algunas ocasiones puede resultar un poco más difícil es la estimación de los coeficientes de correlación. Para esto, será importante entender los fenómenos que controlan las relaciones entre las variables y, en última instancia, invocar hipótesis de independencia o de correlación perfecta según sea el caso, lo cual significa considerar al coeficiente de correlación equivalente a cero o a la unidad respectivamente; sin embargo, aunque sea de manera aproximada, la correlación entre las variables debe de incluirse en el análisis.

En algunas ocasiones será razonable aceptar la hipótesis de independencia probabilística para algunas de las variables en un momento dado, pero en general no será posible argumentar esta hipótesis para los costos o beneficios incurridos en varios periodos de tiempo, es decir, debido a que estas cantidades pueden ser funciones de las mismas variables durante diferentes periodos, en general esta correlación será alta y su ignorancia puede conducir a una variabilidad del VPN mucho menor que la verdadera y, por lo tanto, del lado de la inseguridad.

Es importante reconocer que en muchos casos la esperanza de la efectividad de las inversiones se puede incrementar a expensas de los riesgos inherentes en su adopción, lo que quiere decir que puede presentarse un conflicto entre la esperanza y la variabilidad de las inversiones. En este caso, la selección de alternativas de inversión debe de tomar en cuenta las actitudes del decisor con respecto a la incertidumbre y al riesgo.

La metodología aquí propuesta es útil no sólo en el proceso de selección de alternativas sino también en la cuantificación de la bondad del proyecto en general, ya que es posible calcular la probabilidad de que el VPN sea menor de cero si se supone una ley de probabilidades y se estiman las esperanzas y las covarianzas de las variables aleatorias en cuestión (flujos de efectivo para evaluación).

Vale la pena mencionar que los resultados obtenidos con este, y con otros tipos de análisis, constituyen tan solo aproximaciones a las soluciones exactas, esto debido a que el número de flujos de efectivo para evaluación con los que se determina el VPN es finito, no obstante lo sostenido por el teorema del límite central. El grado de aproximación dependerá de los supuestos que sean considerados para establecer los valores de los coeficientes de variación y de los coeficientes de correlación, mismos que dependerán de la experiencia y sensibilidad que el analista posea, o bien del estudio que pueda establecerse a partir de registros históricos de negocios comparables al evaluado en materia de sus flujos de efectivo.

Sin embargo y a pesar de lo anterior, el enfoque empleado es sencillo, pero al mismo tiempo incorpora de manera racional los efectos de la incertidumbre en los análisis de inversión y, por este motivo, los modelos de este tipo han encontrado una gran aceptación en muchas industrias, las cuales lo han empleado regularmente y lo consideran en la evaluación de nuevas propuestas de inversión y en la planeación estratégica de corto, mediano y largo.

ENFOQUE DE SIMULACIÓN

A la par con el gran desarrollo tecnológico de las computadoras, muchos investigadores han desarrollado y perfeccionado un gran número de técnicas útiles para tratar el riesgo y la incertidumbre. Estas técnicas van de las más simples a las altamente sofisticadas, aunque no han recibido una amplia aceptación por parte de ejecutivos y administradores; las razones son que el problema debe ser especialmente formulado para que se ajuste al modelo y un alto entendimiento de la teoría de probabilidad es requerido.

A diferencia de los métodos probabilísticos, los cuales tienden a ser difíciles de entender, la simulación puede ser fácilmente entendida después de un pequeño esfuerzo; sin embargo, su realización requiere del empleo de una computadora. Desde sus inicios, durante la Segunda Guerra Mundial, la simulación ha sido una técnica muy valiosa para analizar problemas que involucran incertidumbre y relaciones complejas entre sus variables aleatorias.

Es posible que los valores de las variables aleatorias sean independientes o estén correlacionados y, eventualmente, el desarrollo analítico de la distribución de probabilidad del criterio económico utilizado generalmente no es fácil modelarlo respecto de las situaciones del mundo real. Para estas situaciones es recomendado el enfoque de simulación.

Este hecho es el que hace que las cosas difieran de lo que se supuso en el análisis determinístico, ya que la ocurrencia de eventos es una cuestión aleatoria, es decir, puede depender del azar; por esta razón es recomendable prepararse para las mejores y las peores condiciones, formulando las condiciones más probables que constituirán un escenario optimista, un escenario pesimista y un escenario esperado.

El escenario ~~optimista~~ optimista se formulará con la determinación de las mejores condiciones que pueden desarrollarse en el negocio o proyecto, o sea, se considerarán los menores egresos y los mayores beneficios, esto bajo mínimas duraciones de las actividades y también con la mayor disposición de recursos económicos (materiales, financieros y humanos); por el contrario, el escenario pesimista se formará determinando la ocurrencia de las peores condiciones de trabajo en el proyecto o negocio, es decir, se supondrá que se alcanzarán las mayores erogaciones y los menores beneficios.

El escenario esperado resulta ser uno intermedio de los dos anteriores obviamente, pero de no necesariamente a la mitad de ambos; su generación se logra simulando el acontecimiento de las situaciones más probables que pueden ocurrir en el futuro, por eso mismo es que este escenario también puede ser llamado "escenario más probable". Un método de simulación muy empleado para este fin es el denominado *Monte Carlo*.

El modelo de Monte Carlo, llamado también método de ensayos estadísticos, es una técnica de simulación de situaciones inciertas que permite definir valores esperados para variables no controlables mediante la selección aleatoria de valores, donde la probabilidad de elegir entre todos los resultados posibles está en estricta relación con sus respectivas distribuciones de probabilidad.

El mecanismo a seguir para realizar tales ensayos estadísticos obedece a estos pasos:

1. Seleccionar un conjunto representativo de proyectos ya realizados para tomar de ellos los parámetros que nos interesan simular en la creación del escenario más probable del proyecto que se pretende realizar.
2. Se formarán clases estadísticas con los datos elegidos, estableciendo un intervalo o amplitud que sea conveniente en las mismas; posteriormente se calculará el valor medio en cada clase, la frecuencia con que se presentó cada clase en el conjunto seleccionado, la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada, tal como se ejemplifica en la siguiente tabla:

Valor Medio del Estrato de la Variable "X"	Frecuencia	Frecuencia Relativa P(X)	Frecuencia Relativa Acumulada
200	11	0.1058	0.1058
250	27	0.2596	0.3654
300	34	0.3269	0.6923
350	16	0.1538	0.8462
400	9	0.0865	0.9327
450	5	0.0481	0.9808
500	2	0.0192	1.0000
Suma	104	1.0000	

La frecuencia, frecuencia relativa y frecuencia relativa acumulada deberán cumplir las siguientes condiciones:

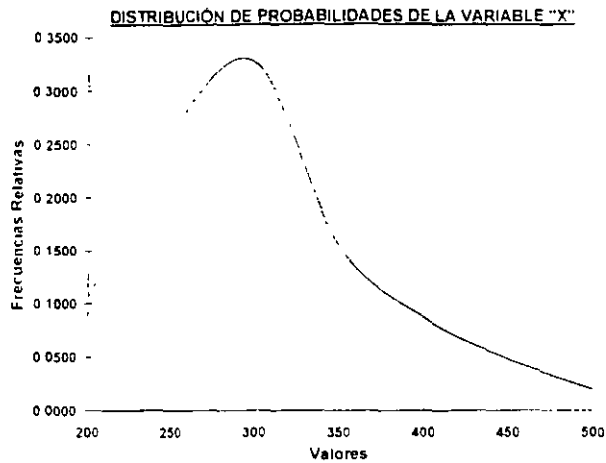
$$n = \sum_{i=1}^k f_i,$$

$$fr_i = f_i / n,$$

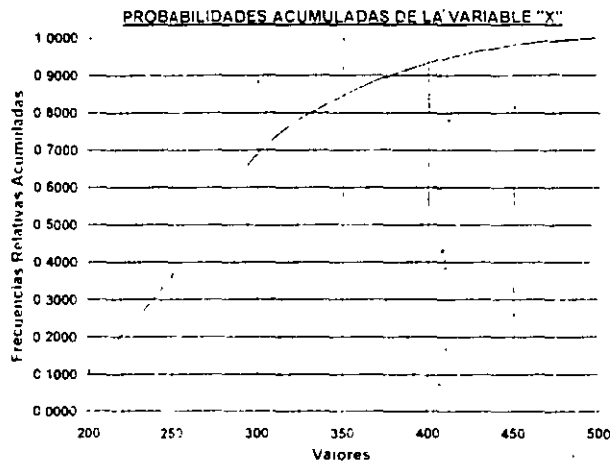
$$fra_i = \sum_{k=1}^i fr_k,$$

donde "n" es el número de elementos que integra el conjunto en estudio, "f_i" el número de elementos del conjunto en estudio que incurren en el estrato "i", "fr_i" y "fra_i" la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada que corresponden al estrato "i".

3. Con la frecuencia relativa calculada puede conocerse la distribución de probabilidades de los parámetros tratados, la cual se apreciará en una gráfica como la siguiente:



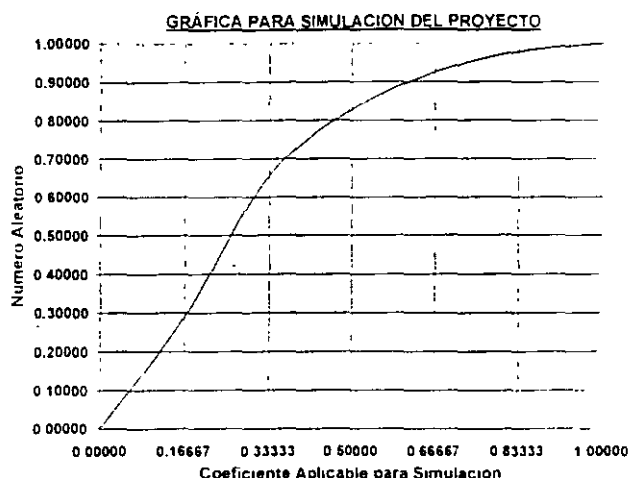
4. La distribución de los datos puede estar concentrada alrededor de cualquier abscisa y para que el proceso de simulación la respete será necesario construir la siguiente gráfica con la frecuencia relativa acumulada que se calculó en la tabla anterior del paso 2:



5. Como paso inmediato se procederá a "normalizar" el rango empleado en los ejes de las abscisas y de las ordenadas, es decir, a convertir su amplitud de cero a uno con la expresión siguiente:

$$C_j = (V_j - V_{\min}) / (V_{\max} - V_{\min}),$$

donde "V" refiere los valores ubicados en cada eje de la gráfica anterior y "C_i" es cada uno de los valores de los ejes con los que se creará una gráfica "normalizada" como la que se muestra en esta figura:



- Por último, se generará una serie de números aleatorios que sea lo suficientemente grande para que ésta sea considerada representativa del proyecto en cuanto a su comportamiento; dichos números aleatorios se comprenderán entre el cero y la unidad, y serán ubicados en el eje de las ordenadas de esta última gráfica y se obtendrá el coeficiente que les corresponda sobre las abscisas. Con el coeficiente aplicable para la simulación se aplicará la siguiente expresión, con la cual se calcularán los parámetros buscados con la simulación:

$$S_{Ei} = P_{\min} + C_{Ai} (P_{\max} - P_{\min}),$$

donde "C_{Ai}" es cada coeficiente corregido por la correlación normalizada que se aplicó para el caso específico de cada número aleatorio de la serie generada, "P" corresponde a los valores de los parámetros que se tomaron como base para efectuar el ordenamiento estadístico con que partió el proceso de simulación y S_{Ei} es cada valor resultado de la aplicación de cada "C_{Ai}".

Cabe señalar que en caso de no contar con los datos indicados en el primer paso, los números aleatorios pueden ser aplicados directamente en la expresión del último punto.

Existe la posibilidad de que la cantidad de números aleatorios que se generarán sea determinada mediante la aplicación de conceptos de muestreo aleatorio; incluso estos conceptos pueden apoyar para generar varios escenarios que son

posibles y tomar de ellos el más representativo para catalogarlo como el más probable de presentarse en la realidad.

Finalmente, es importante mencionar que muchas compañías han reconocido la necesidad de incluir el factor riesgo en los estudios económicos y han destinado recursos al desarrollo de programas donde la técnica de simulación sea aplicada al análisis de sus problemas. No obstante y a pesar de la relativa facilidad de comprender esta técnica, se ha encontrado que muchos ejecutivos y administradores se muestran escépticos en los grandes beneficios que se pueden obtener al utilizarla en la toma de decisiones. Hay dos razones aparentes que explican esta situación. En primer lugar la simulación adolece en menor proporción de la misma desventaja de los modelos probabilísticos, en el sentido de que los ejecutivos no comprenden completamente los aspectos técnicos de la simulación, el otro problema es la inversión requerida en equipo y personal especializado para aplicar esta técnica.