Apéndice

II

Teorema de Helmoltz.

Dado un campo vectorial, puede calcularse tanto su divergencia como su rotacional [45]. Se dice que un campo vectorial **A** es solenoidal o sin divergencia, si:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad (\mathrm{II.}\,1)$$

Por lo cual, **A** siempre puede expresarse en términos de otro campo vectorial **F**, es decir:

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (\mathrm{II.}\,2)$$

Se dice que un campo vectorial **A** es irrotacional, campo potencial o campo conservativo, siempre y cuando:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (\mathrm{II.}\,3)$$

Entonces:

$$\mathbf{A} = -\nabla \mathrm{T} \qquad (\mathrm{II.}\,4)$$

Donde T es conocido como el potencial escalar de $\mathbf{A}$. Ahora bien, un campo vectorial **A** es caracterizado inequívocamente y clasificado, en términos de su tendencia o no tendencia a cero de su divergencia y su rotacional [45]:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_V \qquad \text{(II.5a)}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}_S \qquad \text{(II.5b)}$$

ρ_V puede considerarse como la densidad de origen de $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{\rho}_S$ como su densidad de circulación. Todo vector **A** que satisfaga el par de ecuaciones II.5, y que tanto ρ_V como $\boldsymbol{\rho}_S$ tiendan a cero en el infinito, **A** puede expresarse como la suma de dos vectores: uno irrotacional (de rotacional cero) y otro solenoidal (de divergencia cero), esto es conocido como el *Teorema de Helmoltz.* Por esa razón cuando se especifica la fuerza de la fuente de flujo y la fuerza de vórtice, es de esperar que el campo vectorial estará determinado [46].

Para representar el *Teorema de Helmoltz* de forma matemática, vamos a utilizar un campo escalar $D = D(\boldsymbol{r})$ y un campo vectorial solenoidal $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(r)$, que tienden a cero en el infinito, existirá un único campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{r})$ que tendrá que satisfacer la siguiente tercia de condiciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{D}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(II.6a)}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(II.6b)}$$

$$\lim_{|\boldsymbol{r}| \to \infty} \mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{(II.6c)}$$

Si consideramos que $\mathbf{A}(\boldsymbol{r})$ se puede descomponer en un campo irrotacional y en un solenoidal, esto arroja la siguiente ecuación:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_s \qquad \text{(II.7)}$$

donde:

$\mathbf{A}_i$: campo irrotacional.
$\mathbf{A}_s$: campo solenoidal.

Finalmente utilizamos las propiedades II.2 y II.4:

$$\mathbf{A} = -\nabla \mathrm{T}(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \mathbf{F}(\boldsymbol{r}) \qquad (\mathrm{II}.8)$$

donde:

$$\mathrm{T}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau'} \frac{D(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} d\tau'$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau'} \frac{C(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} d\tau'$$

τ' : región del espacio infinito.
$\boldsymbol{r}$: vector de posición.