



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Implementación de un PLL de  
alta ganancia para convertidores  
monofásicos**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Eléctrico Electrónico**

**P R E S E N T A**

Erick Abram Contreras Flores

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Juan Gustavo Rueda Escobedo



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026**



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado IMPLEMENTACION DE UN PLL DE ALTA GANANCIA PARA CONVERTIDORES MONOFASICOS que presenté para obtener el título de INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

*E. Contreras*

ERICK ABRAM CONTRERAS FLORES

Número de cuenta: 317211252

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación	6
1.2. Estado del Arte	7
1.3. Contribución	9
1.4. Agradecimientos	9
<b>2. Antecedentes</b>	<b>11</b>
2.1. Inversores Monofásicos	11
2.1.1. Medio puente (Half-Bridge)	12
2.1.2. Puente Completo (Full-Bridge)	13
2.1.3. Modulación por ancho de pulso (PWM)	15
2.2. Sincronización de Inversores Monofásicos	18
2.2.1. Estructura Básica de un PLL Monofásico	19
2.2.2. PLL's Basados en Potencia (pPLL)	21
2.2.3. PLL's basados en la generación de señales en cuadratura (QSG-PLL)	23

---

2.2.4. PLL estándar de segundo orden basado en integrador generalizado (SOGI-PLL)	28
2.3. Control de Inversores Monofásicos	32
2.3.1. Estructura de control de convertidores	33
2.4. Funciones de Lyapunov y análisis de estabilidad	34
2.4.1. Estabilidad en términos de Lyapunov	35
2.4.2. Funciones de Lyapunov	35
2.5. Observadores para Sistemas Lineales	36
2.5.1. Observabilidad	36
2.5.2. Observadores de estado	39
2.6. Estabilidad de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo	42
2.6.1. Estabilidad BIBO	43
2.6.2. Caso MIMO	43
2.6.3. Representación en Espacio de Estados	43
2.6.4. Estabilidad Interna	44
2.6.5. Diferencia Fundamental entre LTI y LTV	44
2.6.6. Sistemas conmutados (Switched Systems)	45
<b>3. Generador de Cuadratura para Sistemas Monofásicos</b>	<b>49</b>
3.1. Modelo del Sistema	50
3.2. Estructura del Generador y su Conexión con los Observadores	52
3.3. Dinámica del Error de Estimación	54
3.3.1. Prueba de Estabilidad	55
3.3.2. Función de Lyapunov Conmutada	62
3.4. Sintonización del Generador de Cuadratura	68
3.5. Validación en Simulación y Comparación	70
3.5.1. Caso de estudio: perturbación de frecuencia mediante ecuación <i>swing</i>	70
3.5.2. Resultados numéricos	73

---

**4. Validación Experimental**

77

**5. Conclusiones**

81

*A mi familia, por creer siempre en mí y brindarme su apoyo incondicional a lo largo de este camino.*

*A mis amigos, por escucharme, acompañarme y compartir conmigo cada etapa de este proceso.*

*Y, en general, a todas las personas que estuvieron presentes y me brindaron su apoyo a lo largo de este camino. A todas ellas: gracias.*

## CAPÍTULO

# 1

# INTRODUCCIÓN

Según la Oficina de Referencia de Población (Population Reference Bureau), se prevé que la población mundial aumente de 7.8 mil millones en 2020 a 9.9 mil millones para 2050, lo que requerirá hasta un 80 % más de energía [1]. Sin embargo, la energía proveniente de combustibles fósiles contribuye significativamente al cambio climático global, donde más del 75 % de las emisiones globales son gases de efecto invernadero e incluso el 90 % de todas las emisiones son de dióxido de carbono [2]. Ante este panorama, distintos gobiernos han buscado estrategias para mitigar dichos efectos. Una de las alternativas más prometedoras para reducir las emisiones de gases de efecto invernadero es el aprovechamiento de fuentes de energía renovable [3].

La generación de energías renovables ha crecido de forma sostenida a una tasa aproximada del 5 % anual, hasta alcanzar el 12 % del total de la generación eléctrica global en 2023 [4]. Algunos países ya han mostrado avances significativos en la adopción de fuentes renovables, como es el caso de China, que en 2020 contaba con una capacidad instalada de 896,412 MW, y para 2025 se prevé que alcance los 1,817,956 MW [5]. En el caso de México, la participación de las energías renovables representa actualmente alrededor del 12.53 %. En 2020, la capacidad instalada de generación distribuida era de 1,540 MW; para 2024, esta cifra aumentó a 3,963 MW, y se estima que alcanzará los 14,555 MW en 2033 [6].

En este contexto, los convertidores de potencia juegan un papel fundamental para la integración de fuentes renovables como la fotovoltaica y la eólica, ya que permiten la interconexión entre diferentes fuentes y el sistema eléctrico [7], [8]. Actualmente, dichos convertidores deben ser capaces de realizar funciones avanzadas como el control dinámico de potencia activa y reactiva, operación estable dentro de un rango amplio de voltaje y frecuencia, tolerancia a caídas de voltaje, inyección de corriente reactiva durante fallas y participación en el equilibrio de la red, por ejemplo, mediante el control primario de frecuencia [8].

Uno de los principales retos en la operación de estos convertidores es mantener la sincronización con la red [8]. Esto se debe a que, en la transición de fuentes convencionales a renovables, aparecen problemas asociados con alta distorsión de las señales eléctricas y variaciones bruscas en la frecuencia [7]. Por esta razón, una parte esencial del control del convertidor es la unidad de sincronización, encargada de proporcionar información sobre desfase, frecuencia y amplitud [9].

Para estimar estos parámetros, una de las técnicas más utilizadas en inversores conectados a red es el lazo de seguimiento de fase (phase-locked loop), comúnmente abreviado como PLL, debido a su facilidad

de implementación y su robustez [10, 11]. Dado que el PLL es responsable de proporcionar al convertidor una referencia precisa de la fase del voltaje, un error en su salida puede provocar la inestabilidad de todo el sistema [12]. Por esta razón, se han desarrollado diversos métodos para el diseño del detector de fase dentro del PLL; entre ellos, el uso de generadores de señales ortogonales ha ganado popularidad, ya que ofrecen una implementación sencilla y un desempeño robusto [10].

El presente trabajo tiene como objetivo validar, mediante simulaciones y pruebas experimentales, un observador robusto y adaptable que genera señales de cuadratura para redes monofásicas de corriente alterna (CA).

## 1.1 Motivación

---

Las redes eléctricas constituyen sistemas complejos y dinámicos [8]. Debido a fallas o perturbaciones en el sistema, los equipos suelen enfrentarse a fenómenos como saltos de fase, caídas de voltaje, armónicos, picos, entre otras alteraciones de calidad de energía [13]. Cuando la potencia gestionada por un convertidor ya no puede considerarse despreciable en comparación con la potencia nominal de la red en el punto de conexión, las variables eléctricas del sistema pueden verse significativamente afectadas por la acción de dicho convertidor [8]. Por esta razón, las redes eléctricas deben cumplir con las especificaciones técnicas de forma rigurosa, con el fin de garantizar confiabilidad, accesibilidad y calidad del suministro [14].

En este contexto, la extracción precisa del ángulo de fase y de la frecuencia del voltaje de la red resulta esencial para garantizar el correcto funcionamiento de los convertidores de electrónica de potencia conectados a la red [10]. El elemento clave para lograrlo es el bucle de enganche de fase (PLL), ya que permite sincronizar e integrar adecuadamente los convertidores con la red eléctrica, aunque su implementación representa un desafío técnico [7]. Para obtener referencias de corriente confiables en estos sistemas, el diseño de los bloques funcionales del PLL debe alcanzar un equilibrio entre la calidad de la respuesta dinámica, el comportamiento en estado estacionario y la carga computacional requerida [15].

El desafío se intensifica en sistemas monofásicos, ya que, a diferencia de los trifásicos, dependen únicamente de una señal que puede estar distorsionada, presentar variaciones de amplitud o desviaciones de frecuencia [15]. Aunque en la literatura se han propuesto numerosos PLL, varios de ellos generan una componente de frecuencia doble respecto a la nominal, pero su eliminación provoca retrasos en su propia estimación [13].

Con el objetivo de mitigar estas limitaciones, se han propuesto técnicas adaptativas como el Integrador Generalizado de Segundo Orden (SOGI). Sin embargo, muchas de estas soluciones carecen de garantías formales de estabilidad o convergencia, especialmente en escenarios con variaciones abruptas de frecuencia [15]. Estas limitaciones ponen de manifiesto la necesidad de desarrollar esquemas más robustos para la generación de señales en cuadratura. En este contexto, en [16] se propone un generador de señales en cuadratura que presenta un mejor desempeño bajo condiciones adversas, tales como perturbaciones, variaciones en la señal de entrada o presencia de armónicos.

## 1.2 Estado del Arte

En electrónica de potencia, el PLL constituye un bloque fundamental en convertidores conectados a la red que operan bajo la estrategia *grid-following* (GFL) [17]. En este tipo de sistemas, el convertidor debe sincronizarse con la tensión de la red para poder inyectar corriente de manera adecuada [9, 8].

Para ello, el PLL estima el ángulo de fase y la frecuencia de la señal de la red, información que resulta indispensable para realizar la transformación al marco de referencia síncrono  $dq$ . Esta transformación permite desacoplar las componentes activa y reactiva de la corriente, facilitando el diseño de los lazos de control empleados en inversores fotovoltaicos, convertidores bidireccionales asociados a sistemas de almacenamiento de energía y rectificadores PWM conectados a la red [18, 19].

De manera general, independientemente de la arquitectura específica, un PLL puede describirse mediante tres componentes: i) un detector de fase (PD), ii) un filtro de lazo (LF), y iii) un oscilador controlado (VCO) encargado de generar la fase estimada [11, 9, 19]. En sistemas monofásicos, la principal dificultad radica en que se tiene solo una señal, lo cual limita la cantidad de información disponible y, a su vez, dificulta la obtención de frecuencia y fase [10, 9, 15].

En la literatura, los PLL monofásicos suelen agruparse en 2 familias principales: i) métodos basados en potencia (pPLLs), ii) métodos basados en generación de cuadratura (OSG/QSG-PLLs). En particular estos últimos suelen presentar unas variaciones las cuales son estructuras mejoradas o adaptativas, entre las que destacan los *Enhanced PLLs* (EPLLs) [10, 9, 19].

### 1) Métodos basados en potencia (pPLLs)

Los *power-based PLLs* (*pPLLs*) emplean un detector de fase basado en un multiplicador sinusoidal, análogo al cálculo de una potencia ficticia, lo que permite una implementación sencilla y de bajo costo computacional [9, 10, 20]. Sin embargo, esta estructura introduce de manera intrínseca una perturbación al doble de la frecuencia fundamental ( $2\omega$ ), generada como subproducto del multiplicador utilizado en el detector de fase. Esta componente provoca oscilaciones de doble frecuencia en las variables estimadas, produciendo rizado en el ángulo y la frecuencia estimados y pudiendo generar errores de compensación en estado estacionario [9, 10, 20].

Adicionalmente, el desempeño dinámico de los *pPLLs* depende directamente de la amplitud del voltaje de entrada. En presencia de perturbaciones en la red, como huecos de tensión, la respuesta transitoria puede degradarse significativamente e incluso comprometer la estabilidad del lazo si el margen de fase es reducido.

Con el fin de mitigar el efecto de la perturbación a  $2\omega$ , se han propuesto diversas variantes basadas en filtrado:

- **LPF-pPLL:** incorpora filtros pasabajos de mayor orden para atenuar el componente a  $2\omega$ ; sin embargo, esta solución introduce un retraso de fase considerable y reduce el ancho de banda del lazo, lo que resulta en una respuesta dinámica lenta [9].
- **NF-pPLL:** utiliza filtros *notch* para rechazar selectivamente la componente a  $2\omega$ . Este método presenta un buen desempeño cuando el sistema opera cerca de la frecuencia nominal, pero muestra sensibilidad ante variaciones significativas de frecuencia, perdiendo capacidad de atenuación a menos que se empleen estructuras adaptativas o filtros de mayor ancho de banda [9].

## 2) Métodos basados en generación de cuadratura (OSG/QSG-PLLs)

A diferencia de los métodos basados en potencia, estas estructuras pueden eliminar de forma natural el problema del rizado a doble frecuencia cuando la generación de cuadratura es adecuada [9, 18]. Sin embargo, su desempeño depende fuertemente de la estructura empleada para generar la señal ortogonal.

Entre los métodos más difundidos se encuentran:

- **TD-PLL (Transport Delay):** obtiene la señal en cuadratura mediante la aplicación de un retardo  $T/4$ . Esta técnica presenta una implementación simple y de bajo costo computacional; sin embargo, su exactitud se degrada cuando la frecuencia de la red se desvía de su valor nominal, ya que el retardo fijo deja de representar exactamente un desfase de  $90^\circ$  [10, 9, 15].
- **SOGI-PLL:** emplea un integrador generalizado de segundo orden (*Second-Order Generalized Integrator*, SOGI) que genera simultáneamente la señal en cuadratura y actúa como filtro selectivo alrededor de la frecuencia fundamental. Esta estructura ofrece un compromiso favorable entre rapidez de respuesta y capacidad de rechazo de armónicos [21, 10, 9, 15].

No obstante, en su configuración estándar presenta diversas limitaciones. En primer lugar, la presencia de una componente de continua (*DC offset*) en la señal de entrada puede inducir oscilaciones en la señal de error del PLL y deteriorar la estimación del ángulo [9, 15]. Las estrategias para mitigar este problema introducen nuevos compromisos de diseño: por ejemplo, la incorporación de filtros pasabajas para eliminar la componente DC reduce la capacidad del sistema para rechazar armónicos de alta frecuencia y deteriora su respuesta dinámica [9]. De hecho, se ha señalado que resulta difícil encontrar un equilibrio adecuado entre el grado de rechazo al DC y la velocidad de respuesta del sistema [21]. Adicionalmente, cuando el SOGI se implementa con una frecuencia de resonancia fija, la estructura puede volverse sensible a variaciones de la frecuencia de la red. En presencia de derivas de frecuencia, la señal generada en cuadratura deja de mantenerse estrictamente ortogonal a la señal de entrada, introduciendo errores de fase persistentes en la estimación del PLL [9, 15]. Finalmente, diversos estudios han mostrado que bajo perturbaciones severas de la red, como huecos de tensión, el SOGI-PLL puede presentar sobrepicos elevados en el error de fase y tiempos de establecimiento relativamente largos en comparación con otras estructuras de sincronización [15]. Asimismo, el desempeño del SOGI depende del ajuste del parámetro de ganancia  $k$ , el cual determina el ancho de banda del filtro y establece un compromiso entre rapidez de respuesta y capacidad de filtrado de perturbaciones [9].

### Enhanced PLLs (EPLLs)

Los EPLLs introducen un esquema adaptable capaz de estimar de manera simultánea la fase, la frecuencia y la amplitud de la componente fundamental, lo que los hace atractivos en escenarios con distorsión armónica y ruido [22, 9]. En particular, se reporta que esta familia evita el rizado a doble frecuencia característico de los pPLLs y resulta adecuada para aplicaciones de medición [22, 23]. Como contrapartida, su desempeño dinámico puede ser más lento que el de esquemas OSG/QSG avanzados y, además, el acoplamiento entre fase y frecuencia puede provocar transitorios pronunciados en la estimación de  $\hat{\omega}$  ante perturbaciones de fase [9, 18, 13].

En síntesis, el estado del arte muestra que el desempeño del PLL monofásico depende de manera crítica del método de generación de cuadratura y de la robustez del lazo ante perturbaciones típicas de red (armónicos, *DC offset* y desviaciones de frecuencia). En este contexto, las estructuras basadas en observadores resultan particularmente relevantes para aplicaciones en convertidores conectados a red, ya que integran filtrado y reconstrucción ortogonal dentro del propio mecanismo de sincronización [21, 10, 7].

---

## 1.3 Contribución

---

En el trabajo presente se propone el desarrollo e implementación de un observador adaptable de alta ganancia con el fin de generar las señales de cuadratura necesarias para implementar un QSG-PLL en sistemas monofásicos, lo cual resulta particularmente útil en aplicaciones de sincronización, estimación y control en sistemas eléctricos que usan convertidores.

La formulación propuesta se basa en un observador adaptable de alta ganancia que aprovecha la estructura matemática de una señal cosenoidal. Este tipo de observadores presenta diversas ventajas, entre las que destacan una rápida convergencia del error de estimación. Además, la frecuencia de la señal se modela como un parámetro incierto del sistema, el cual es estimado mediante un mecanismo de adaptación. De esta forma, el observador no solo permite generar con precisión la señal en cuadratura, sino que también proporciona una estimación dinámica de la frecuencia de la señal.

Finalmente, como parte de la contribución del presente trabajo, el observador propuesto es evaluado mediante simulación numérica y experimentación. La implementación experimental permite ofrecer una perspectiva más física y aplicada del método desarrollado, complementando el análisis teórico presentado previamente. De esta manera, los resultados experimentales no solo validan el desempeño del observador, sino que también proporcionan evidencia adicional sobre la viabilidad de su aplicación en sistemas reales.

---

## 1.4 Agradecimientos

---

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que contribuyeron al desarrollo y conclusión del presente trabajo.

En primer lugar, expreso mi profundo agradecimiento a mi asesor, el Dr. Juan Gustavo Rueda Escobedo, por su tiempo, dedicación y acompañamiento durante la realización de este trabajo. Su guía, disposición y constante motivación fueron fundamentales para el desarrollo y culminación de esta tesis.

Asimismo, agradezco al Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez por su tiempo y apoyo, así como al proyecto UNAM-PAPIIT IN113326, cuya aportación fue significativa para la conclusión de este trabajo.

De igual manera, agradezco al Dr. Juan Ramón, así como al proyecto PAPIIME PE105226, “*Apertura del Laboratorio de Electrónica de Potencia y Aplicaciones de la Facultad de Ingeniería*”, por el respaldo y los recursos brindados, los cuales resultaron de gran importancia para el desarrollo de esta etapa del trabajo.

Además, agradezco al M.I. Emilio de Jesús Rojas Hernández por su apoyo en el desarrollo experimental de este trabajo, así como por sus observaciones, consejos y orientación técnica. Su acompañamiento fue clave para la realización de los experimentos y para la conclusión satisfactoria de esta tesis.

Finalmente, agradezco el apoyo del proyecto PAPIIT IN114024, cuya contribución favoreció el desarrollo de las actividades de investigación asociadas a este trabajo.



## CAPÍTULO

# 2

# ANTECEDENTES

## 2.1 Inversores Monofásicos

---

Los convertidores de potencia han tenido una amplia trayectoria en aplicaciones domésticas, industriales y en sistemas computacionales [8, 18]. En los últimos años, su relevancia ha aumentado significativamente en el acondicionamiento, compensación y filtrado de energía, impulsada principalmente por los avances en los semiconductores [18].

Un convertidor de potencia puede definirse como un circuito de múltiples puertos compuesto por interruptores semiconductores (electrónicos), al que pueden incorporarse componentes auxiliares tales como capacitores, inductores y transformadores [18, 24]. Su función principal es facilitar el intercambio de energía entre dos o más subsistemas de manera controlada, de acuerdo con especificaciones de rendimiento previamente establecidas [8].

Dentro de los convertidores, aquellos circuitos destinados a transformar una señal de corriente directa (CD) en corriente alterna (CA) se conocen como inversores [8, 24]. Su función esencial es convertir un voltaje de CD en un voltaje de CA con una magnitud y frecuencia determinadas. Para obtener el voltaje deseado, se emplea comúnmente el control por modulación de ancho de pulso (PWM), mediante el cual se ajusta la ganancia del inversor, definida como la relación entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada [25, 18].

Idealmente, el voltaje de salida debería ser una señal senoidal; sin embargo, debido a la naturaleza propia del inversor —conformado por múltiples interruptores semiconductores— dicho voltaje presenta contenido armónico. Estos armónicos, especialmente críticos en aplicaciones de alta potencia, se reducen mediante técnicas de conmutación avanzadas [25, 14].

Existen diversas topologías de inversores, entre las que destacan el inversor de fuente de voltaje (VSI), el inversor de fuente de corriente (CSI) y el inversor de fuente de impedancia (ZSI), cuya principal diferencia radica en la variable eléctrica que gobierna su etapa de entrada [18, 24]. Entre las topologías derivadas de estas familias, una de las más empleadas es la del puente H (H-Bridge). Esta se basa en el VSI, y se distingue por su versatilidad, ya que puede operar tanto como rectificador (CA–CD) como inversor (CD–CA). Dependiendo de la aplicación, puede implementarse en configuración de medio puente o de puente completo, lo que permite optimizar el aprovechamiento de la energía y obtener un mejor control del voltaje o la corriente de salida [8, 18].

### 2.1.1. Medio puente (Half-Bridge)

El convertidor de medio puente se compone de dos dispositivos semiconductores de conmutación controlada, comúnmente implementados mediante IGBT o MOSFET, los cuales permiten el paso o bloqueo de corriente según la señal de control aplicada [18, 8]. El principio de operación consiste en la conmutación antiparalela de los interruptores  $S_1$  y  $S_2$ . De esta manera, se obtiene idealmente una señal cuadrada en el voltaje de salida, mientras que la corriente presenta un comportamiento de incremento y disminución de acuerdo con el ciclo de conmutación, tal como se ilustra en la figura 2.1 [25].

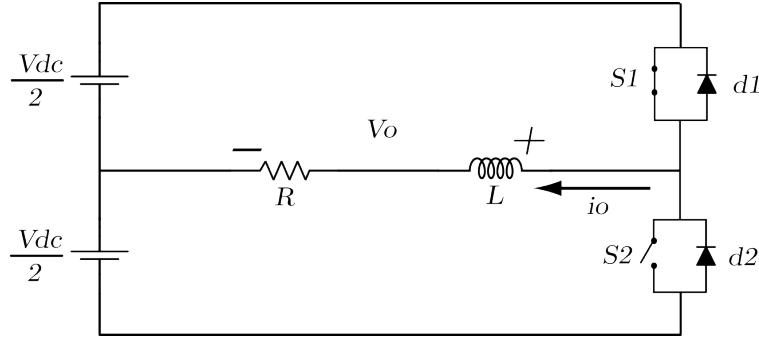


Figura 2.1: Convertidor de medio puente.

El control de encendido y apagado de  $S_1$  y  $S_2$  se realiza a través del ciclo de trabajo ( $d$ ), definido como la relación entre el tiempo de conducción ( $T_{on}$ ) y el período de la señal de conmutación ( $T_s$ ), expresado en porcentaje (0–100%) [25, 18].

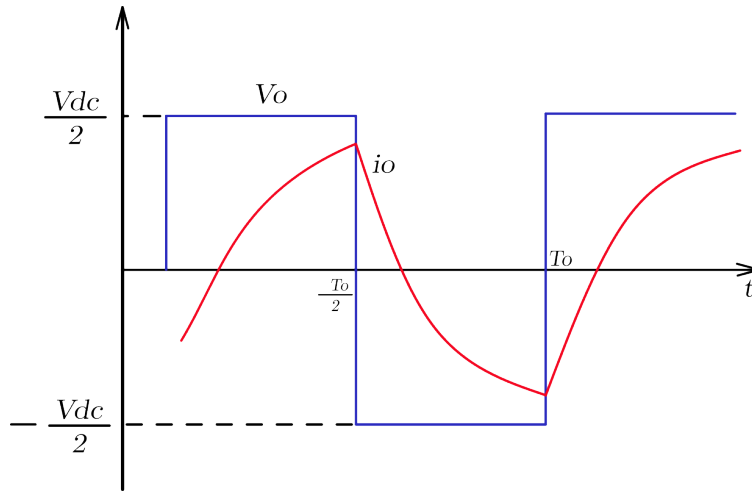


Figura 2.2: Voltaje y corriente de salida del convertidor de medio puente.

Los casos de operación más relevantes son los siguientes [8, 18]:

- Caso  $S_1$  y  $S_2$  opuestos ( $d = 0.5$ ): Cuando  $d = \frac{T_{on}}{T_s} = 0.5$ , se obtiene una señal cuadrada en la salida como se muestra en la figura 2.2, donde el semiciclo positivo corresponde a  $\frac{+V_{dc}}{2}$  y el semiciclo negativo a  $\frac{-V_{dc}}{2}$ .
- Caso  $S_1$  y  $S_2$  cerrados simultáneamente ( $d = 1$ ): Si ambos interruptores permanecen cerrados, se produce una condición de cortocircuito directo de la fuente de CD. Esta situación puede dañar gravemente los dispositivos, por lo que resulta indispensable considerar un tiempo muerto adecuado, definido por las características del interruptor empleado.

- Caso  $S_1$  y  $S_2$  abiertos simultáneamente ( $d = 0$ ): En este caso el circuito permanece inactivo y la fuente de CD queda aislada de la carga en CA.

Por lo tanto, para el caso donde  $d = 0.5$  (figura 2.2) podemos obtener el voltaje a la salida mediante una representación en serie de Fourier la cual es [25]:

$$v_{a0} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{V_{dc}}{2} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right] \quad (2.1)$$

Este desarrollo en serie de Fourier muestra que la forma de onda del voltaje contiene, además de la componente fundamental, una serie infinita de armónicos impares. La presencia de estos armónicos distorsiona la señal de salida, degradando la calidad de potencia y pudiendo generar calentamiento, vibraciones o pérdidas adicionales en los sistemas conectados [25, 8].

### 2.1.2. Puente Completo (Full-Bridge)

El puente completo puede interpretarse como la interconexión de dos convertidores en medio puente, como se muestra en la figura 2.3, dispuestos de forma simétrica. Su principal ventaja radica en el mejor aprovechamiento de la tensión del bus de corriente continua, lo que permite obtener en la salida una amplitud de voltaje doble respecto a la obtenida en el medio puente [8, 18].

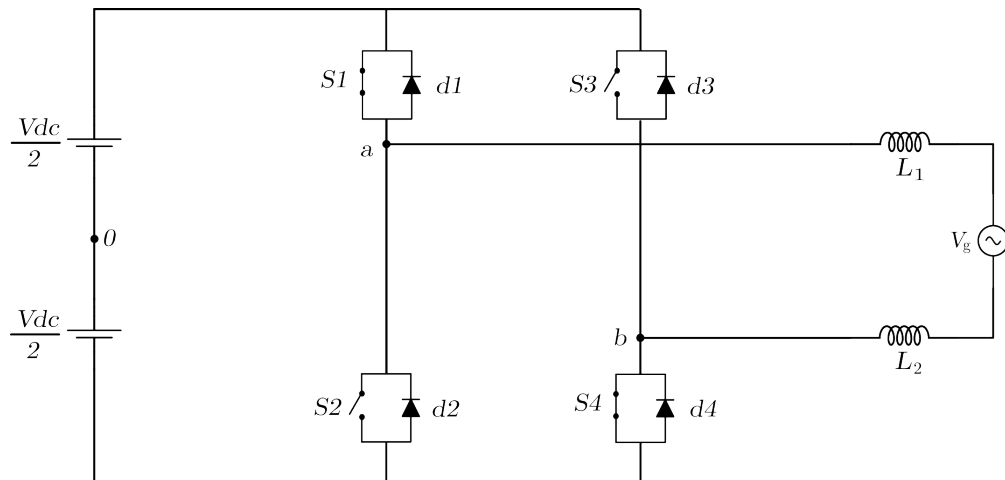


Figura 2.3: Convertidor de puente completo.

El principio de funcionamiento se basa en la conmutación controlada de los interruptores semiconductores que conforman las dos ramas del puente. Mediante distintas secuencias de activación, el circuito puede operar en diferentes modos de conducción, generando una forma de onda cuadrada en la salida cuya amplitud depende directamente de la tensión de la fuente de CD [25, 8]. Esta característica permite al puente completo suministrar mayor potencia a la carga y lograr una conversión más eficiente.

Los casos de operación más relevantes se describen a continuación:

- Conmutación alternada de los interruptores: cuando los pares de interruptores conducen de manera alternada, se obtiene una señal cuadrada con niveles de  $+V_{dc}$  y  $-V_{dc}$  en la salida, como se muestra en la figura 2.4 [25].
- Conmutación simultánea indebida: en caso de que interruptores de la misma rama conduzcan al mismo tiempo, se genera una condición de cortocircuito que puede dañar los dispositivos. Para evitarlo, se debe garantizar un tiempo muerto adecuado [18].

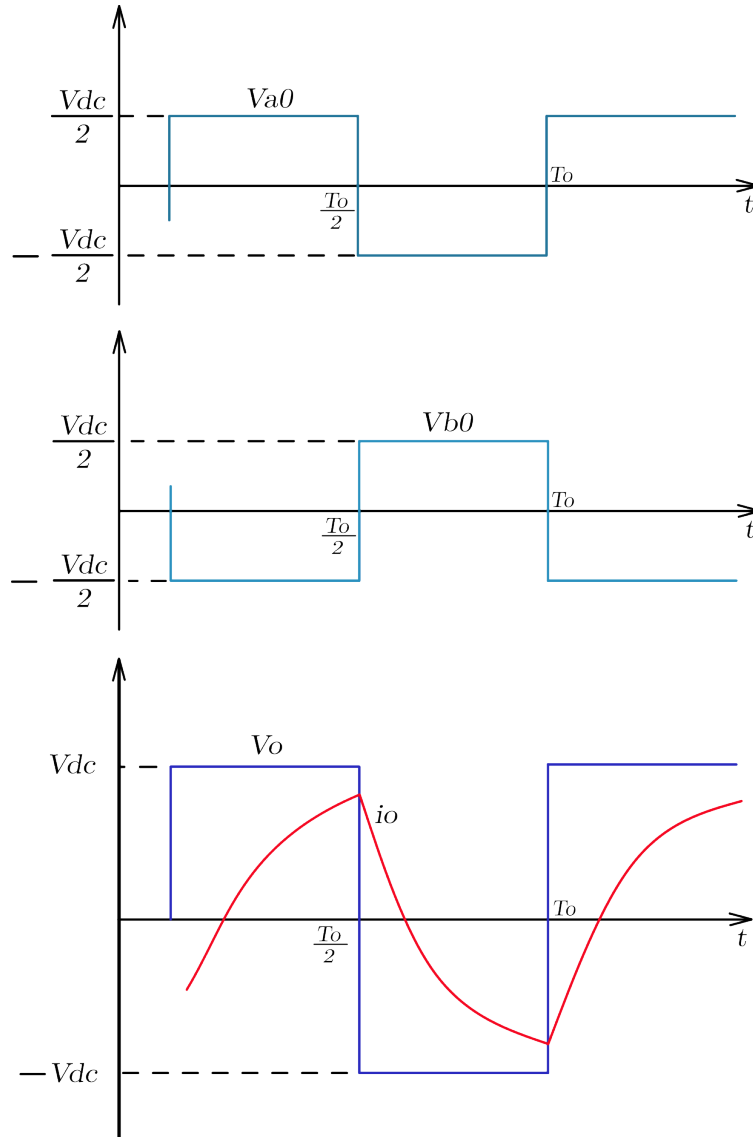


Figura 2.4: Voltaje y corriente de salida del convertidor de puente completo.

- Interruptores abiertos simultáneamente: cuando todos los interruptores permanecen abiertos, la carga queda desconectada de la fuente de alimentación.

De manera análoga al caso del medio puente, el voltaje de salida del convertidor en puente completo puede expresarse como [25]:

$$v_{ab} = \frac{4}{\pi} V_{dc} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right] \quad (2.2)$$

En esta expresión se observa que el voltaje de salida contiene, además de la componente fundamental, múltiples armónicos impares originados por la conmutación de los interruptores. Si bien la amplitud fundamental es el doble de la obtenida en el medio puente, la forma de onda cuadrada resultante presenta un alto contenido armónico, lo cual deteriora la calidad de la energía entregada a la carga [25] [8].

Para mitigar estos efectos, se emplean técnicas avanzadas de modulación por ancho de pulso (PWM) y etapas de filtrado, cuyo propósito es desplazar las componentes armónicas hacia frecuencias más altas y obtener una forma de onda senoidal más pura en la salida del inversor [25] [18].

### 2.1.3. Modulación por ancho de pulso (PWM)

Con el objetivo de reducir el contenido armónico presente en el voltaje de salida, se emplea la técnica de modulación por ancho de pulso (PWM), mediante la cual se controla el estado de los interruptores de potencia del inversor [25, 18]. Estos dispositivos operan como interruptores electrónicos que solo pueden asumir dos estados lógicos: conducción (1) o bloqueo (0) [8, 18].

Para el desarrollo del modelo y el análisis del convertidor, se adoptan las siguientes hipótesis simplificadoras [25, 8]:

- Cada transistor o diodo se comporta como un cortocircuito en su estado de conducción.
- Cada transistor o diodo se comporta como un circuito abierto en su estado de bloqueo.
- Los transistores no presentan cola de corriente durante el proceso de apagado.
- Los diodos no presentan corriente de recuperación inversa.
- Las transiciones entre conducción y bloqueo se consideran instantáneas.
- La corriente del lado de CA ( $i$ ) se asume continua y con ondulación despreciable.

El control del voltaje de salida en inversores monofásicos resulta necesario para compensar variaciones en la tensión del bus de corriente continua, regular la amplitud del voltaje entregado a la carga y mantener condiciones adecuadas de operación en términos de frecuencia y magnitud. Para este propósito se utilizan diversas variantes de modulación PWM, entre las cuales destacan [25, 18]:

- Modulación por ancho de pulso único.
- Modulación por ancho de pulsos múltiples.
- Modulación por ancho de pulso senoidal (SPWM).
- Modulación por ancho de pulso senoidal modificada.

En un inversor con conmutación cuadrada (por ejemplo, con ciclo de trabajo  $d = 0.5$ ), la señal de salida es sencilla de implementar, pero no corresponde a la forma de onda deseada y presenta un elevado contenido armónico. Para mejorar este comportamiento y desplazar dichos armónicos hacia frecuencias más altas (donde su atenuación mediante filtros resulta más sencilla), se emplea la modulación senoidal por ancho de pulso (SPWM), la cual introduce una variación sinusoidal del ciclo de trabajo dentro de cada período de conmutación  $T_s$  [25].

La SPWM se obtiene comparando una señal portadora triangular de frecuencia  $f_c$  con una señal moduladora senoidal de frecuencia  $f_m$ , como se puede observar en la Figura 2.5. En dicha figura, la señal roja corresponde a la señal moduladora senoidal, la cual define la forma de onda fundamental deseada. La señal azul representa la señal portadora triangular de alta frecuencia utilizada para realizar el proceso de comparación. Finalmente, la señal verde corresponde a la señal PWM resultante, generada a partir de la comparación entre ambas señales, donde los instantes en que la señal senoidal supera a la triangular producen pulsos de nivel alto y, en caso contrario, pulsos de nivel bajo [25, 18].

Los armónicos de la salida aparecen alrededor del índice de modulación de frecuencia  $m_f = \frac{f_c}{f_m}$ , siendo especialmente relevante que los armónicos más significativos se concentran cerca de la fundamental, lo que dificulta su filtrado si no se emplea esta técnica. Además del índice de frecuencia, se define el índice de modulación de amplitud, que relaciona la amplitud de la señal moduladora con la de la portadora. De este parámetro depende la amplitud del voltaje fundamental generado en la salida [25, 18].

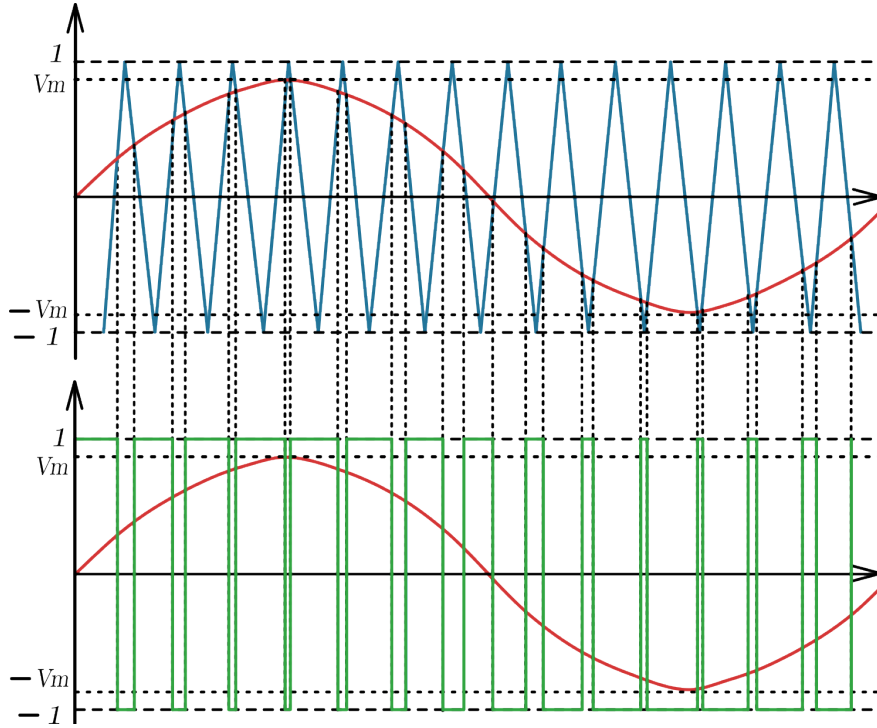


Figura 2.5: Proceso de modulación SPWM.

### Índice de modulación de frecuencia y amplitud

El índice de modulación de amplitud se define como [25, 18]:

$$m_a = \frac{V_m}{V_c}, \quad (2.3)$$

donde:

- $m_a$ : índice de modulación de amplitud.
- $V_m$ : amplitud pico de la señal moduladora senoidal.
- $V_c$ : amplitud pico de la señal portadora triangular.

Este parámetro determina la amplitud de la componente fundamental de la tensión de salida del inversor. En la región lineal se cumple  $0 < m_a \leq 1$  [25].

### Amplitud de la fundamental en SPWM

Para un inversor con modulación senoidal por ancho de pulso (SPWM), la amplitud de la componente fundamental de la tensión de salida depende de la topología [25, 8]:

$$\hat{V}_{o1, \text{medio}} = m_a \cdot \frac{V_{dc}}{2}, \quad (2.4)$$

$$\hat{V}_{o1, \text{completo}} = m_a \cdot V_{dc}, \quad (2.5)$$

donde:

- $\hat{V}_{o1, \text{medio}}$ : amplitud pico de la componente fundamental en un inversor de medio puente.
- $\hat{V}_{o1, \text{completo}}$ : amplitud pico de la componente fundamental en un inversor de puente completo.
- $V_{dc}$ : tensión total del bus de continua.
- $m_a$ : índice de modulación de amplitud definido anteriormente.

En ambos casos, la amplitud de la componente fundamental aumenta de forma lineal con el índice de modulación  $m_a$  dentro de la región de submodulación ( $m_a \leq 1$ ). No obstante, el inversor de puente completo aprovecha completamente el voltaje del bus de continua, mientras que el inversor de medio puente solo utiliza la mitad de dicho voltaje. Como resultado, el puente completo puede entregar una amplitud fundamental aproximadamente el doble de la obtenida con la topología de medio puente [25, 8, 18].

### Submodulación y Sobremodulación

En la **submodulación**, cuando el índice de modulación de amplitud cumple

$$0 < m_a \leq 1, \quad (2.6)$$

la amplitud fundamental de salida crece de manera proporcional a  $m_a$ . En esta región la forma de onda se aproxima correctamente a la referencia senoidal, presentando buena calidad de onda y un bajo contenido armónico. Por esta razón, la submodulación es el modo de operación más común en aplicaciones de inversores [25, 18].

En contraste, la **sobremodulación** aparece cuando

$$m_a > 1, \quad (2.7)$$

es decir, cuando la señal moduladora senoidal sobrepasa a la portadora triangular. En este caso, algunos pulsos desaparecen y la señal de salida adopta una forma más cuadrada. Esto permite incrementar la amplitud de la componente fundamental, cuyo valor máximo está limitado por [25, 18]

$$V_{1, \text{máx}} = \frac{4}{\pi} V_{dc} \approx 1.273 V_{dc}, \quad (2.8)$$

donde  $V_s$  corresponde a la amplitud fundamental en el límite lineal ( $m_a = 1$ ). Sin embargo, este aumento en la amplitud fundamental se logra a costa de introducir más armónicos de bajo orden y, por lo tanto, una mayor distorsión. Debido a ello, la sobremodulación suele evitarse en aplicaciones que requieren baja distorsión [25, 14].

### PWM en puente completo

En el caso de un inversor en puente completo, el PWM puede aplicarse en diferentes esquemas [25, 18, 8]:

#### 1. Modulación bipolar

- Los interruptores se activan de manera diagonal (S1 con S4 y S2 con S3).
- La tensión de salida  $v_{ab}$  alterna directamente entre  $+V_{dc}$  y  $-V_{dc}$ .
- Ventajas:
  - ◊ La tensión de salida respecto a tierra ( $V_{PE}$ ) solo contiene la componente fundamental de red, sin componentes de alta frecuencia.
- Desventajas:

- ◊ Alta ondulación de corriente, con armónicos dominantes a la frecuencia de conmutación.
- ◊ Requiere filtros más grandes.
- ◊ El filtro ve saltos directos de  $+V_{dc}$  a  $-V_{dc}$ , lo que incrementa las pérdidas en el núcleo de inductores y transformadores.
- ◊ Menor eficiencia ( $\sim 96.5\%$ ) debido a pérdidas de conmutación y de potencia reactiva entre inductores y el condensador del bus de CD.

## 2. Modulación unipolar

- Cada brazo del inversor conmuta con su propia referencia senoidal, desfasada respecto a la otra.
- La tensión de salida  $v_{ab}$  puede tomar valores intermedios:  $+V_{dc}$ , 0 y  $-V_{dc}$ .
- Ventajas:
  - ◊ El rizado de corriente aparece a  $2f_c$ , lo que permite usar filtros más pequeños.
  - ◊ Menores pérdidas en el filtro, ya que los saltos de tensión son más suaves.
  - ◊ Mayor eficiencia ( $\sim 98\%$ ), al existir intervalos de conducción libre (0 V) que reducen pérdidas de conmutación.
- Desventajas:
  - ◊  $V_{PE}$  presenta componentes de alta frecuencia.
  - ◊ En aplicaciones fotovoltaicas sin transformador, aumenta la corriente de fuga capacitiva hacia tierra.

## 3. Modulación híbrida

- Un brazo conmuta a frecuencia de red, mientras que el otro lo hace a alta frecuencia mediante PWM.
- La tensión de salida sigue siendo senoidal, con estados intermedios de 0 V.
- Ventajas:
  - ◊ Menores pérdidas en el filtro, debido a transiciones más suaves.
  - ◊ Alta eficiencia ( $98\%$ ), al reducir las pérdidas de conmutación en uno de los brazos.
- Desventajas:
  - ◊ Limitada a operación en dos cuadrantes.
  - ◊ El rizado de corriente es comparable al de la modulación bipolar.

En esta sección se revisaron las estructuras más representativas de inversores de potencia: el medio puente y el puente completo. Estas topologías se han convertido en referentes dentro de la literatura académica debido a su simplicidad, facilidad de análisis y porque constituyen la base a partir de la cual se derivan la mayoría de configuraciones modernas [25, 8, 18].

Cabe señalar que, si bien en la práctica industrial existen topologías más avanzadas como los inversores multinivel, Z-source o NPC, éstas pueden interpretarse como evoluciones directas del puente completo, diseñadas para atender aplicaciones de mayor tensión, eficiencia o requisitos específicos de la red [18, 8].

De esta forma, el estudio del medio puente y del puente completo no solo constituye un caso base en el análisis de convertidores, sino también un punto de partida indispensable para comprender y evaluar configuraciones más complejas, tanto en la investigación académica como en el desarrollo industrial [25, 18].

## 2.2 Sincronización de Inversores Monofásicos

---

Una de las estrategias más simples para estimar la frecuencia de la red es el método de cruces por cero (Zero-Crossing) [8]. Esta técnica emplea comparadores para detectar el cambio de polaridad de la señal; a

partir del tiempo transcurrido entre dos cruces consecutivos es posible determinar el período y, por ende, la frecuencia fundamental.

Sin embargo, la presencia de armónicos y ruido en la señal de red puede generar errores en la detección del cruce, reduciendo considerablemente su exactitud [8]. Para mitigar esta limitación se han propuesto diversas variantes, aunque suelen derivar en soluciones relativamente complejas y con un desempeño insatisfactorio en condiciones de red distorsionada [18].

Otra técnica consiste en el uso de la serie de Fourier, mediante la cual se busca extraer la componente fundamental de la señal. Para ello, se emplea un filtro adaptable basado en la descomposición en serie de Fourier, como se muestra en la figura 2.6 [8].

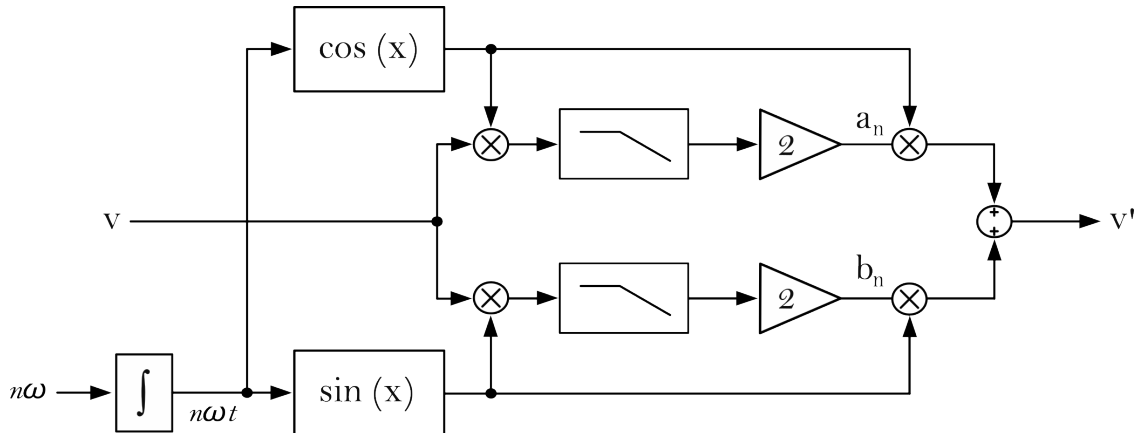


Figura 2.6: Filtro adaptable basado en SF.

Una variante computacional de este enfoque es la Serie de Fourier Discreta Recursiva (RDFS), que se implementa mediante la transformada-Z. No obstante, estas técnicas presentan limitaciones importantes: requieren una ventana de observación suficientemente amplia y, junto con el filtrado aplicado, introducen una respuesta lenta, lo cual impide un correcto seguimiento dinámico ante variaciones rápidas de la frecuencia [8].

Es así que el PLL se ha consolidado como la técnica más empleada para la sincronización de convertidores conectados a red [9, 19, 7]. Si bien su origen se remonta a aplicaciones en sistemas de comunicaciones, la creciente penetración de fuentes renovables y la necesidad de una sincronización robusta frente a condiciones adversas de red han impulsado su adopción en electrónica de potencia [11, 8]. El PLL ofrece un equilibrio adecuado entre precisión, velocidad de respuesta y robustez, lo que lo ha posicionado como el estándar de facto en aplicaciones de conversión de energía eléctrica [10, 9, 19].

### 2.2.1. Estructura Básica de un PLL Monofásico

A continuación se presenta el diagrama de bloques de un PLL elemental, donde se muestran los componentes básicos que conforman su estructura funcional [8, 11, 9]:

- **Detector de fase (Phase Detector, PD)**. Este bloque genera una señal de salida proporcional a la diferencia de fase ( $e_{pd}$ ) entre la señal de entrada  $v$  y la señal producida por el oscilador interno del PLL que es  $v'$ .
- **Filtro de lazo (Loop Filter, LF)**. Este bloque presenta un comportamiento de filtrado pasa-bajas, cuyo propósito es atenuar las componentes de alta frecuencia presentes en la salida del detector de fase ( $v_{lf}$ ).
- **Oscilador controlado por voltaje (Voltage-Controlled Oscillator, VCO)**. Este bloque es el encargado de generar una señal de CA, la cual tiene una frecuencia que se desvía respecto a la frecuencia

nominal en función de la señal suministrada por el filtro de lazo. De esta forma, el VCO ajusta dinámicamente su frecuencia para sincronizarse con la señal de entrada, cerrando el lazo de control de fase del PLL.

El funcionamiento fundamental del PLL puede describirse mediante su diagrama de bloques elementales que se pueden visualizar en la figura 2.7 en el cual se identifican a mayor detalle los bloques principales responsables de la detección de fase, el filtrado de la señal de error y la generación de la frecuencia controlada [8, 11, 9].

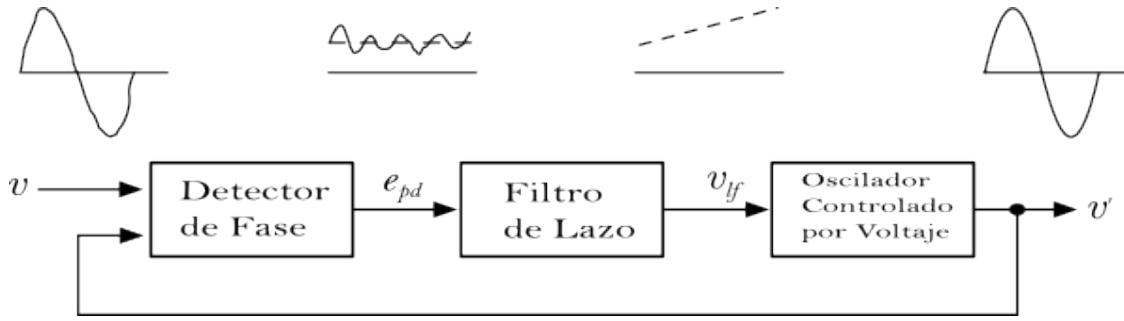


Figura 2.7: Componentes básicos del PLL.

### Ecuaciones básicas del PLL

A continuación se abordarán las ecuaciones fundamentales que describen el principio de funcionamiento de un PLL. La mayoría de sus variantes parten de esta base teórica, modificando alguno de los bloques del lazo pero conservando la misma estructura general que se ven en la figura 2.8 [8, 9, 18].

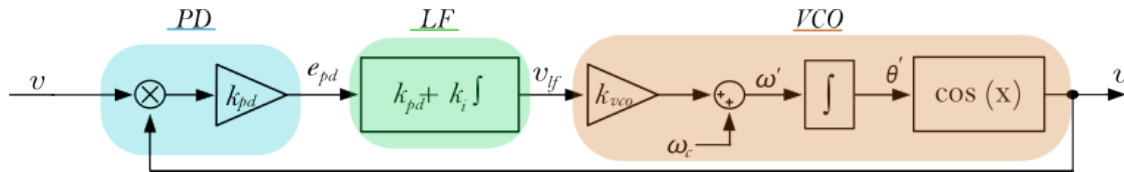


Figura 2.8: Estructura base del PLL.

De manera inicial, la señal de entrada del PLL, a partir de la cual se desea estimar la frecuencia, puede modelarse como [8]:

$$v = V \sin(\theta) = V \sin(\omega t + \phi) \quad (2.9)$$

Asimismo, la señal generada por el VCO está dada por:

$$v' = \cos(\theta') = \cos(\omega' t + \phi') \quad (2.10)$$

A la salida del detector de fase se obtiene la señal de error:

$$e_{pd} = V k_{pd} \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega' t + \phi') \quad (2.11)$$

Aplicando la identidad trigonométrica de producto a suma, se obtiene:

$$e_{pd} = \frac{V k_{pd}}{2} \left[ \underbrace{\sin((\omega - \omega')t + (\phi - \phi'))}_{\text{término de baja frecuencia}} + \underbrace{\sin((\omega + \omega')t + (\phi + \phi'))}_{\text{término de alta frecuencia}} \right] \quad (2.12)$$

Después del filtro de lazo, el término de alta frecuencia es atenuado, por lo que la señal resultante puede expresarse como:

$$\bar{\varepsilon}_{pd} = \frac{Vk_{pd}}{2} \sin(\phi - \phi') \quad (2.13)$$

Esta ecuación muestra que el detector de fase de tipo multiplicador produce una detección de fase no lineal, debido a la presencia de la función sinusoidal [8].

Sin embargo, cuando el error de fase es muy pequeño, es decir, cuando  $\phi \approx \phi'$ , el detector de fase puede ser linealizado en las cercanías de dicho punto de operación. Dado que  $\sin(\phi - \phi') \approx \sin(\theta - \theta') \approx (\theta - \theta')$  para ángulos pequeños, la expresión del error de fase se simplifica a:

$$\bar{\varepsilon}_{pd} = \frac{Vk_{pd}}{2} (\theta - \theta') \quad (2.14)$$

Por lo tanto, una vez que el PLL se encuentra bloqueado, la salida del detector de fase puede considerarse proporcional a la diferencia instantánea de fase entre la señal de entrada y la señal generada por el VCO [8].

$$e_{pd} = \frac{Vk_{pd}}{2} (\theta - \theta') \quad (2.15)$$

Esta ecuación puede utilizarse para implementar un modelo linealizado de pequeña señal del detector de fase tipo multiplicador [8]. Por su parte, la frecuencia promedio del VCO se determina mediante [8]:

$$\omega' = (\omega_c + \Delta\omega') = (\omega_c + k_{vco}v_{lf}) \quad (2.16)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia central del VCO, la cual se suministra al PLL como un parámetro de referencia dependiente del rango de frecuencias a detectar. Por lo tanto, las pequeñas variaciones en la frecuencia del VCO pueden expresarse como:

$$\omega' = k_{vco}v_{lf} \quad (2.17)$$

y las variaciones en el ángulo de fase detectadas por el PLL se escriben como:

$$\theta'(t) = \int \omega' dt = \int k_{vco}v_{lf} dt \quad (2.18)$$

Debido a la relevancia que el PLL ha adquirido a lo largo de los años, se han desarrollado múltiples configuraciones y arquitecturas. En términos generales, pueden clasificarse en dos grandes grupos: los PLL basados en potencia (*power-based PLLs*) y los PLL en cuadratura (*quadrature PLLs*), cada uno de los cuales presenta diferentes subtipos y adaptaciones según la aplicación específica [9, 19].

### 2.2.2. PLL's Basados en Potencia (pPLL)

Los detectores de fase en los PLLs basados en potencia (pPLLs) están fundamentados en la teoría de potencia instantánea (p-q), y por tanto están concebidos originalmente para sistemas trifásicos ( $\alpha - \beta$ ) [21, 9]. El esquema básico del *single-phase pPLL* se fundamenta en un detector de fase (PD) que emula una unidad de cálculo de potencia activa [20, 10].

#### Principio de funcionamiento del pPLL monofásico

Se asume que la señal de entrada  $v_i$  corresponde a una onda senoidal pura, la cual puede expresarse como [20, 21]:

$$v_i = V \cos(\theta) \quad (2.19)$$

donde  $V$  representa la amplitud de la señal y  $\theta = \omega t + \phi$  el ángulo instantáneo de la señal de entrada. El bloque del PD se implementa mediante un multiplicador sinusoidal seguido de un filtro pasa-bajas (LPF) como se observa en la figura 2.9, esto es muy parecido a la forma base del PLL con la diferencia que en este se busca un enfoque en potencia [20, 9]. Si la potencia activa promedio ( $\bar{p}$ ) es nula, la tensión  $v_i$  y la corriente sintética  $i_s$  estarán en cuadratura, es decir, desfasadas  $90^\circ$ . En esta condición, el ángulo estimado  $\hat{\theta}$  coincide con el valor real  $\theta$ , indicando que el lazo se encuentra bloqueado [20].

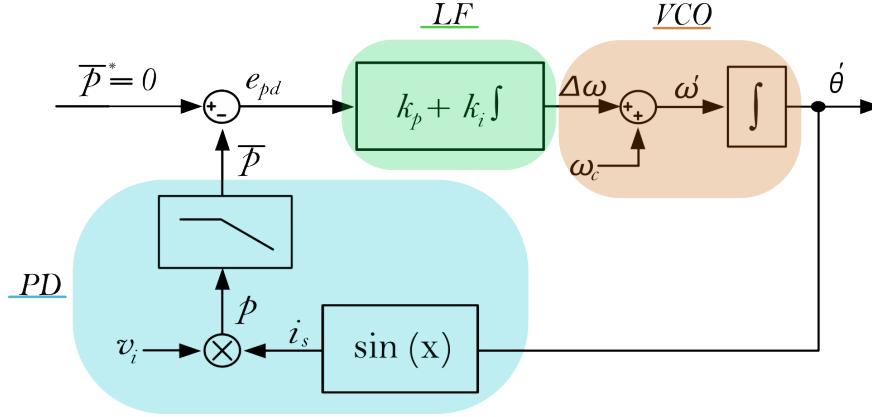


Figura 2.9: Estructura base de pPLL.

Basándose en este principio, la potencia ficticia  $p$  se define como el producto entre la tensión de entrada y la corriente sintética [20]:

$$p = v_i i_s = V \cos \theta \sin \hat{\theta} \quad (2.20)$$

Aplicando identidad trigonométrica, se obtiene:

$$p = \frac{V}{2} \sin(\hat{\theta} - \theta) + \frac{V}{2} \sin(\hat{\theta} + \theta) \quad (2.21)$$

El primer término representa el componente de baja frecuencia, que contiene la información del error de fase, mientras que el segundo término corresponde a la componente de doble frecuencia ( $2\omega$ ), la cual es eliminada mediante el filtro de lazo [20, 21]. Cuando el lazo se encuentra bloqueado ( $\hat{\theta} \approx \theta$ ), el término de baja frecuencia tiende a cero, indicando la sincronización del sistema [20].

### PLLs basados en filtro Notch (NF-pPLLs)

Otra forma de mitigar la componente de doble frecuencia ( $2\omega$ ) presente en la señal del detector de fase consiste en utilizar un *filtro Notch* que se puede observar en la figura 2.10. Este tipo de filtro está diseñado para atenuar selectivamente una frecuencia específica sin afectar significativamente las demás componentes del espectro. La implementación de un filtro Notch en el lazo del pPLL mejora la capacidad de rechazo de la componente no deseada en comparación con el uso de un filtro pasa-bajas (LPF) [13, 21]. Sin embargo, su desempeño depende de que la frecuencia del sistema permanezca dentro del rango nominal de diseño, ya que variaciones considerables pueden desplazar la frecuencia del armónico y reducir la efectividad de la supresión de la componente de doble frecuencia [13, 15].

Los PLL basados en potencia se distinguen por presentar, a la salida del detector de fase (PD), una componente oscilante de doble frecuencia nominal ( $2\omega$ ) producto del método de multiplicación empleado para calcular la potencia instantánea [20, 10]. Esta característica constituye una limitación inherente de la técnica, ya que dicha componente de alta frecuencia puede provocar oscilaciones en la señal de error de fase y afectar la estabilidad del lazo [21, 7]. Por ello, las distintas variantes dentro de esta familia —como los pPLLs con

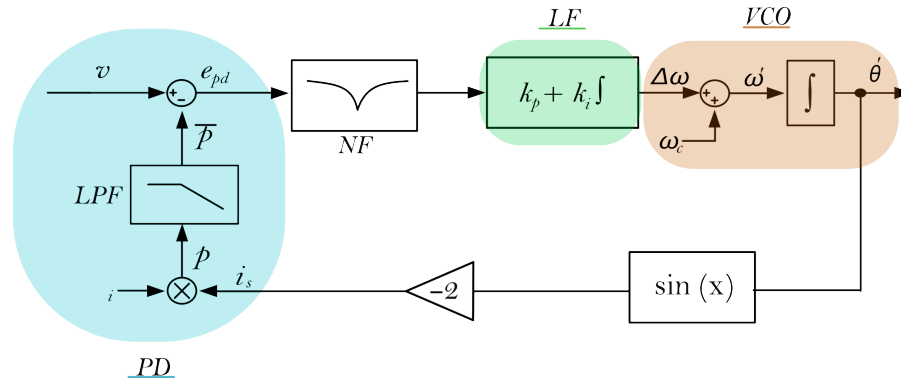


Figura 2.10: Estructura del NF-pPLLs.

filtro pasa-bajas, con filtro Notch o con estructuras híbridas— han sido desarrolladas con el objetivo de suprimir la doble frecuencia; sin embargo, estas soluciones suelen comprometer la respuesta dinámica del sistema y reducir la precisión en la estimación de fase y frecuencia [21, 9, 19].

### 2.2.3. PLL's basados en la generación de señales en cuadratura (QSG-PLL)

Entre las diversas estructuras desarrolladas, el PLL en marco de referencia síncrono (SRF-PLL, Synchronous Reference Frame PLL) se ha consolidado como uno de los esquemas más robustos y extendidos en sistemas trifásicos, debido a su capacidad de seguir la fase y frecuencia de una señal fundamental incluso bajo condiciones de perturbaciones armónicas o desbalances [10, 9].

Sin embargo, en sistemas monofásicos, la implementación directa del SRF-PLL presenta una limitación fundamental: la imposibilidad de generar internamente las dos componentes ortogonales necesarias ( $\alpha$  y  $\beta$ ) para realizar la transformación al marco síncrono (dq). Para superar esta restricción, se han desarrollado variantes denominadas QSG-PLLs (Quadrature Signal Generator PLLs), las cuales incorporan un módulo generador de señal en cuadratura (QSG) capaz de sintetizar una señal ficticia de  $90^\circ$  desfasada respecto a la señal original. Este bloque adicional permite emular el comportamiento del SRF-PLL trifásico en un entorno monofásico, habilitando así la estimación precisa de la fase, frecuencia e incluso la amplitud de la señal de entrada [10, 15, 19].

En esencia, un QSG-PLL puede interpretarse como una versión del sistema trifásico a la que se añade un circuito, filtro o algoritmo encargado de generar una señal ficticia en cuadratura con la señal original. Esta señal ortogonal es necesaria para realizar la transformación al marco de referencia síncrono  $dq$ , permitiendo así la estimación precisa de la fase y la frecuencia en sistemas monofásicos [10, 15, 9].

#### Transformación de Clarke y Park

Una de las bases más importantes para comprender el funcionamiento de los métodos QSG-PLL son las transformaciones de Clarke y Park, las cuales permiten representar las magnitudes eléctricas en diferentes marcos de referencia, facilitando el análisis y control de sistemas eléctricos [8].

La transformación de Clarke constituye un cambio de base que proyecta las tres componentes del sistema trifásico ( $a, b, c$ ) sobre un nuevo plano bidimensional ( $\alpha, \beta$ ). Dicho plano, conocido como plano estacionario  $\alpha\beta$ , busca preservar la información fundamental del sistema pero eliminando la redundancia presente en el espacio tridimensional original, una representación gráfica es la Figura 2.11, [8, 18].

De esta manera, la transformación de Clarke permite representar el sistema en un plano ortogonal donde las variables eléctricas pueden analizarse de forma vectorial, simplificando la implementación de algoritmos de

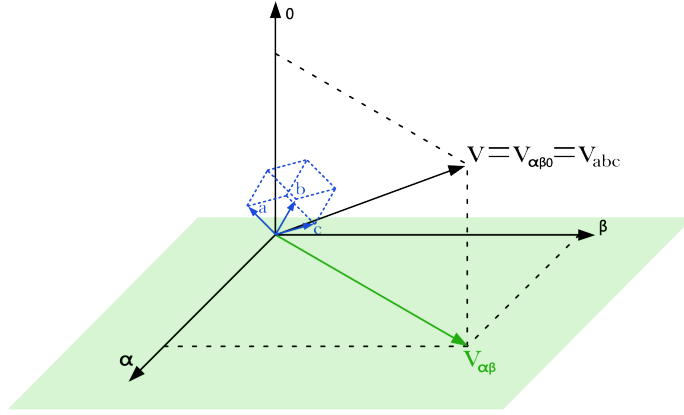


Figura 2.11: Representación de la transformada de Clarke.

sincronización y control [8].

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Posteriormente, la transformación de Park realiza una rotación del sistema de coordenadas  $(\alpha, \beta)$  hacia un marco de referencia síncrono  $(d, q)$  y se puede ver una representación en la figura 2.12, que gira a la misma velocidad angular que la señal fundamental [8, 18].

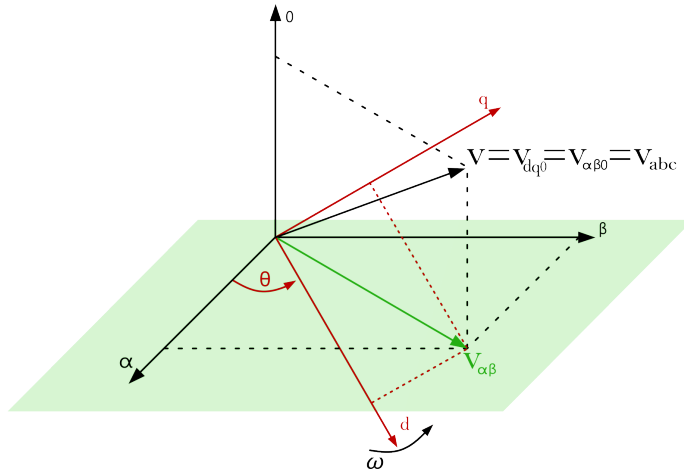


Figura 2.12: Representación de la transformada de Park.

Esta transformación convierte las variables alternas en componentes continuas, como señales de CD, bajo condiciones de régimen estacionario, lo que facilita de manera significativa el diseño de controladores y la extracción de la información de fase [8].

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Esto es especialmente útil, ya que al trabajar con magnitudes continuas es más fácil ejercer control, lo que permite lograr una mejor estabilidad, rapidez y precisión en el seguimiento de la señal de referencia. Por ello, esta transformación es una herramienta esencial [8, 18].

### Principio de funcionamiento del QSG-PLL monofásico

Al igual que los diferentes métodos de pPLL que derivan de una estructura base común, los esquemas QSG-PLL también parten de un modelo ideal que sirve como referencia teórica para su análisis. Este modelo permite comprender los fundamentos de los distintos métodos que conforman esta familia, ya que todos comparten el mismo principio de funcionamiento: generar una señal en cuadratura respecto a la señal original y, a partir de esta representación ortogonal, proyectar las variables en un marco de referencia rotante dq, lo que permite obtener una estimación precisa, estable y libre de oscilaciones de la fase, frecuencia y amplitud de la señal de entrada [9, 15, 19].

Podemos analizar el QSG-PLL usando una forma simplificada como la de la figura 2.13, donde se observa que el *detector de fase* (PD) ahora incorpora el *generador de señal en cuadratura* (QSG) para obtener las componentes ortogonales necesarias, mientras que el *oscilador controlado por voltaje* (VCO) emplea las funciones  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  para generar las señales con las que podemos obtener el error de fase  $e_{pd}$  [8, 10, 9].

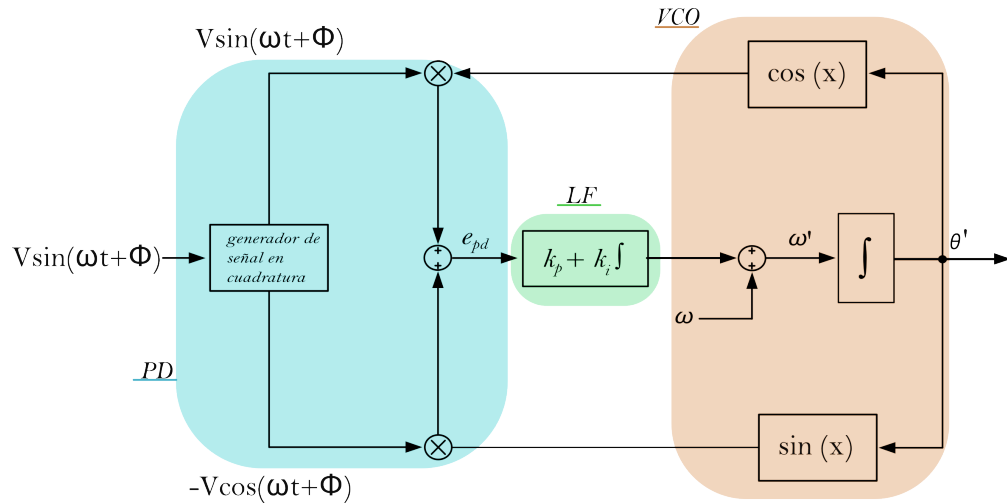


Figura 2.13: Forma simplificada del QSG-PLL.

A partir del esquema del sistema, es posible derivar la ecuación que modela el error de fase  $e_{pd}$ , el cual representa la señal generada por el detector de fase (PD) y describe la diferencia angular entre la señal de entrada y la estimada por el lazo PLL [8, 15]:

$$\begin{aligned} e_{pd} &= V \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega' t + \phi') - V \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega' t + \phi') \\ &= V \sin((\omega - \omega')t + (\phi - \phi')) = V \sin(\theta - \theta') \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como se puede observar, se llega a la misma ecuación utilizada en el modelo base del PLL convencional, lo que confirma que el principio de operación del lazo se mantiene inalterado. En otras palabras, la incorporación del *generador de señal en cuadratura* (QSG) no modifica la dinámica fundamental del sistema, sino que permite la generación artificial de la componente ortogonal necesaria para el procesamiento en el marco de referencia síncrono [9, 19].

De este modo, el *error de fase*  $e_{pd}$  conserva su misma interpretación, siendo esta señal la responsable de ajustar la frecuencia y fase estimadas hasta lograr la sincronización, es decir, cuando  $\theta \approx \theta'$  y  $\omega \approx \omega'$  [8]. Sin embargo, es posible apreciar de forma directa la importancia que tienen las funciones  $\sin(x)$  y  $-\cos(x)$  dentro del modelo del sistema, lo cual puede obtenerse de la siguiente forma:

Si tenemos una señal de entrada de amplitud  $V$  y ángulo instantáneo  $\theta$  [8]:

$$v(t) = V \sin(\theta) \quad (2.25)$$

El generador de señal en cuadratura (QSG) produce las componentes ortogonales en el plano estacionario  $\alpha\beta$  como [8]:

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \sin(\theta) \\ -V \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ahora usando la transformación de Park que se define como [8]:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

donde  $\theta'$  representa el ángulo estimado por el lazo PLL.

Sustituyendo (2.26) en (2.27) se obtiene:

$$v_d = \cos \theta' (V \sin \theta) + \sin \theta' (-V \cos \theta) = V (\sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta') = V \sin(\theta - \theta'), \quad (2.28)$$

$$v_q = -\sin \theta' (V \sin \theta) + \cos \theta' (-V \cos \theta) = -V (\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta') = -V \cos(\theta - \theta'). \quad (2.29)$$

Por lo tanto, el vector de tensión en el marco síncrono ( $dq$ ) se expresa como:

$$\mathbf{v}_{(dq)} = \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \sin(\theta - \theta') \\ -\cos(\theta - \theta') \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

A partir de la expresión anterior puede observarse que las componentes del vector de tensión en el marco síncrono dependen del error angular entre el ángulo real de la señal de entrada  $\theta$  y el ángulo estimado por el PLL  $\theta'$ . En particular, cuando el lazo del PLL alcanza la sincronización, es decir, cuando  $\theta \approx \theta'$ , se obtiene  $v_d \approx 0$  y  $v_q \approx -V$ . Esto indica que uno de los ejes del marco de referencia  $dq$  queda alineado con el vector de tensión de entrada  $\mathbf{v}$  [8].

Esta propiedad es fundamental para el funcionamiento del PLL, ya que el error de fase puede evaluarse directamente a partir de las componentes en el marco síncrono, permitiendo que el lazo de control ajuste la frecuencia y el ángulo estimado hasta lograr la sincronización con la señal de entrada [10, 9].

Este aspecto constituye un punto clave en la regulación de la potencia activa y reactiva que el convertidor entrega a la red. Dependiendo de la posición del vector  $\mathbf{v}$  en el marco de referencia  $dq$ , el sistema puede controlar la contribución de cada componente: la potencia activa está asociada al eje  $d$ , mientras que la potencia reactiva depende del eje  $q$ . Por lo tanto, la orientación del vector  $\mathbf{v}$  determina directamente la proporción de potencia activa y reactiva intercambiada con la red. De esta forma, en la Figura 2.14 se presenta la estructura base del QSG-PLL, a partir de la cual se derivan diversas variantes utilizadas en diferentes estrategias de control [8, 18, 10].

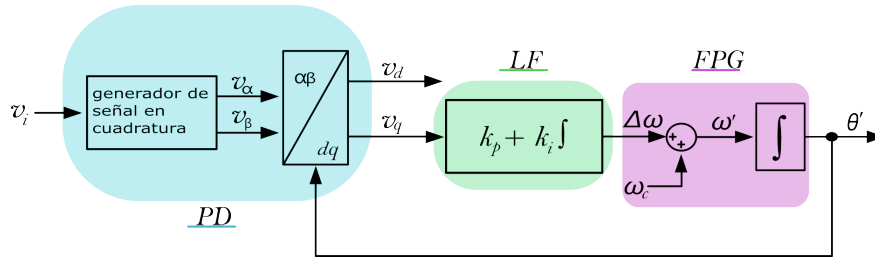


Figura 2.14: Estructura base del QSG-PLL.

### PLLs basados en retardo de señal (TD-PLLs)

Una de las formas más sencillas de generar la señal en cuadratura necesaria para el funcionamiento de un QSG-PLL consiste en aplicar un *retardo de señal* equivalente a un cuarto de periodo ( $T/4$ ) a la señal de

entrada [8, 13, 10]. Si se modela la señal monofásica como una función senoidal, por ejemplo  $v(t) = V \sin(\omega t)$ , al introducir un retardo de  $T/4$  se obtiene:

$$v_d(t) = V \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V \cos(\omega t)$$

De esta forma, se genera una señal ortogonal o en cuadratura respecto a la señal original, es decir, desplazada  $90^\circ$  en fase [10, 15]. Con ambas componentes (sin y cos) es posible construir el par de señales  $\alpha$ - $\beta$  que permite realizar la transformación al marco de referencia síncrono y, por consiguiente, estimar el ángulo de fase del sistema mediante el algoritmo base del PLL, el diagrama se puede apreciar en la figura 2.15 [8, 10].

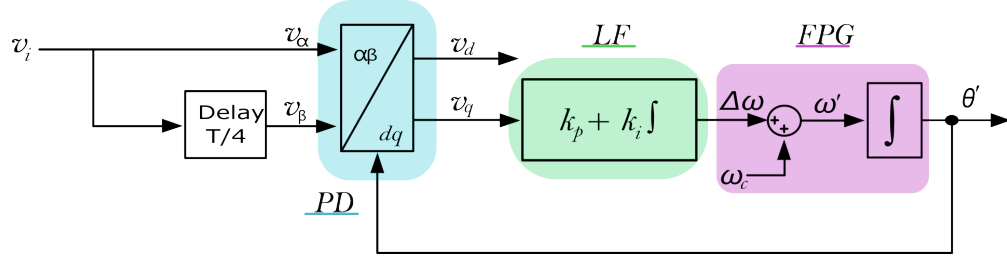


Figura 2.15: Estructura del TD-PLLs.

No obstante, esta técnica presenta una limitación importante: el retardo  $T/4$  está definido para una frecuencia nominal fija [13, 15]. Por tanto, si la frecuencia de la señal de entrada varía de manera significativa, el desfase deja de ser exactamente de  $90^\circ$ , lo que introduce errores en la estimación del ángulo y afecta la precisión del lazo de enganche de fase [10, 15].

### PLLs basados en la transformación de Park inversa (IPT-PLL)

El principio de operación del PLL basado en la *transformación inversa de Park* se fundamenta en la generación de una señal en cuadratura a partir de la propia estructura del lazo. Esto se logra mediante la incorporación de un filtro dentro de una secuencia de transformaciones directa e inversa de Park, como se muestra en la figura 2.16 [8, 9].

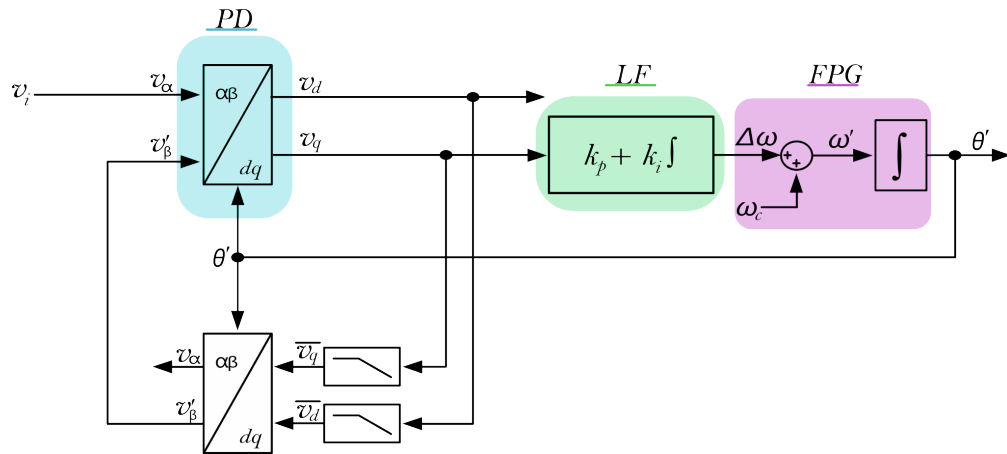


Figura 2.16: Estructura del IPT-PLL

Bajo condiciones de sincronización adecuadas, si las señales  $v_\alpha$  y  $v_\beta$  no se encuentran en cuadratura, el vector de entrada virtual  $\mathbf{v}$  presentará variaciones en su amplitud y velocidad de rotación, lo que se traduce en oscilaciones en las componentes  $v_d$  y  $v_q$  obtenidas tras la transformación de Park [8].

Estas oscilaciones son atenuadas por un filtro pasa bajas (LPF), generando las señales  $\bar{v}_d$  y  $\bar{v}_q$ . Posteriormente, la aplicación de la *transformación inversa de Park* a dichas señales produce nuevas componentes  $v'_\alpha$  y  $v'_\beta$  que se encuentran en cuadratura [8, 15].

Finalmente, cuando el lazo PLL alcanza el bloqueo de fase, la señal  $v'_\alpha$  queda en fase con la señal de entrada  $v_\alpha$ , mientras que  $v'_\beta$  es su componente ortogonal. De esta manera, el PLL obtiene internamente las señales en cuadratura necesarias para operar en el marco de referencia  $dq$ , sin requerir un generador de cuadratura externo [8, 9, 18].

No obstante, a pesar de sus ventajas en términos de simplicidad estructural y de la eliminación de bloques adicionales, este enfoque presenta ciertas limitaciones prácticas. En primer lugar, la calidad de la señal en cuadratura depende directamente del diseño del filtro pasabajas (LPF), el cual introduce un retardo que puede afectar la respuesta dinámica del lazo ante variaciones de frecuencia o fase [15, 9].

Adicionalmente, existe un compromiso inherente entre la *precisión de detección* y la *rapidez de respuesta*: un filtrado más agresivo mejora la ortogonalidad de las señales, pero incrementa el retardo de fase introducido por el sistema. Esta condición, junto con la necesidad de realizar transformaciones trigonométricas directas e inversas, puede incrementar la carga computacional del algoritmo de sincronización [10, 15].

Por otra parte, el esquema es sensible a la presencia de armónicos y ruido en la señal de entrada, dado que el filtrado ocurre dentro del lazo principal. Finalmente, la interacción entre los parámetros del LPF y del regulador PI puede dificultar el proceso de sintonización, lo cual limita la robustez del sistema en condiciones de operación no ideales [9, 19].

#### 2.2.4. PLL estándar de segundo orden basado en integrador generalizado (SOGI-PLL)

El *Integrador Generalizado de Segundo Orden* (SOGI, *Second-Order Generalized Integrator*) es una de las estructuras más empleadas para la generación de señales en cuadratura dentro de sistemas *Phase-Locked Loop* (PLL) monofásicos [8, 9, 15]. Además de producir la componente ficticia en cuadratura requerida por el lazo PLL, el SOGI actúa como un filtro pasabanda resonante centrado en la frecuencia fundamental. Esto implica que su salida no solo se encuentra en cuadratura, sino también libre de armónicos y ruido de alta frecuencia, proporcionando una señal más limpia y estable para la detección de fase [8, 15].

Gracias a estas características, el SOGI se ha consolidado como una solución eficiente y de bajo costo computacional en aplicaciones monofásicas, al combinar en un mismo bloque las funciones de *generador de cuadratura* y *filtro armónico* [9, 19].

#### PLLs basados en integradores generalizados (GI-PLLs)

Uno de los principios fundamentales para comprender el funcionamiento de los SOGI-PLLs es analizar su estructura base, conocida como *PLL basado en integradores generalizados* (GI-PLL). El núcleo de este tipo de sistema (GI) se muestra en la figura 2.17 [8, 15].

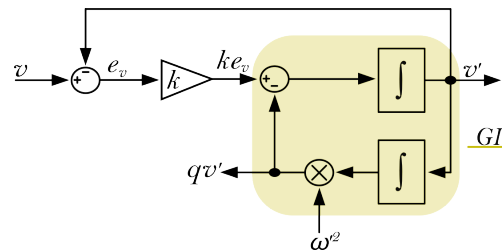


Figura 2.17: Estructura de GI.

El principio del integrador generalizado (GI) consiste en generar una señal resonante mediante un integrador

de segundo orden, el cual, además de producir un desfase de  $90^\circ$  entre sus salidas, actúa como un filtro adaptable. De esta forma, el GI permite extraer la componente fundamental de una señal monofásica y simultáneamente crear su versión en cuadratura, requisito indispensable para la transformación al marco síncrono  $dq$  utilizada en los lazos PLL [8].

Matemáticamente, el comportamiento del GI se describe por la siguiente función de transferencia:

$$GI(s) = \frac{v'(s)}{ke_v(s)} = \frac{s}{s^2 + \omega'^2},$$

la cual puede interpretarse como un integrador resonante centrado en la frecuencia  $\omega'$ . A diferencia de un integrador ideal, el GI incorpora una dependencia explícita con la frecuencia estimada, lo que le permite realizar un filtrado selectivo y adaptable alrededor de la componente fundamental.

Las salidas del GI, correspondientes a la señal filtrada  $v'$  y su componente ortogonal  $qv'$ , se obtienen a partir de las siguientes funciones de transferencia [8]:

$$D(s) = \frac{v'(s)}{v(s)} = \frac{ks}{s^2 + ks + \omega'^2},$$

$$Q(s) = \frac{qv'(s)}{v(s)} = \frac{k\omega'^2}{s^2 + ks + \omega'^2}.$$

Estas expresiones muestran que la función de transferencia  $D(s)$  actúa como un filtro pasa-banda, encargado de aislar la componente fundamental de la señal de entrada en torno a la frecuencia nominal  $\omega'$ . Una vez obtenida esta componente, la función  $Q(s)$ , que opera como un filtro pasa-bajas, introduce un desfase de  $90^\circ$  con respecto a la salida de  $D(s)$ .

De esta manera, el par de funciones  $D(s)$  y  $Q(s)$  permite obtener dos señales senoidales ortogonales a partir de una sola entrada monofásica: la primera correspondiente a la componente en fase y la segunda a la componente en cuadratura. Si se modela una señal de entrada senoidal  $v(t) = V \sin(\omega't)$ , las salidas en régimen estacionario serán:

$$v'(t) = V \sin(\omega't), \quad qv'(t) = -V \cos(\omega't),$$

lo que demuestra que las funciones  $D(s)$  y  $Q(s)$  generan dos señales desfasadas  $90^\circ$ , equivalentes a un par seno-coseno. Esta propiedad es fundamental para los sistemas PLL monofásicos, ya que permite reconstruir el plano  $\alpha\beta$  necesario para la transformación al marco síncrono  $dq$  y, por ende, para la estimación precisa de la fase y frecuencia de la señal de entrada [8].

Aquí la función de transferencia  $GI(s)$  describe la dinámica del integrador generalizado en función del error  $e_v$ . En particular, esta función caracteriza el comportamiento resonante del sistema encargado de generar la señal filtrada  $v'$  y es por eso que lleva el nombre de GI-PLL.

Por otro lado, las funciones  $D(s)$  y  $Q(s)$  representan las relaciones de transferencia entre la señal de entrada  $v$  y las salidas del sistema. La función  $D(s)$  describe la relación entre la señal de entrada y la componente filtrada  $v'$ , mientras que  $Q(s)$  corresponde a la relación entre la señal de entrada y la componente en cuadratura  $qv'$ , la cual presenta un desfase de  $90^\circ$  respecto a la señal original [8].

El principal inconveniente del integrador generalizado (GI) radica en que la ganancia estática de la función  $Q(s)$  depende tanto del parámetro de ganancia  $k$  como de la frecuencia central  $\omega'$ . Esta dependencia provoca que, ante variaciones en la frecuencia de entrada, la respuesta del filtro se vea afectada, modificando su comportamiento dinámico y pudiendo atenuar o amplificar de forma incorrecta la componente fundamental. Este fenómeno se vuelve especialmente problemático en sistemas complejos o de frecuencia variable, como los PLL, donde la estabilidad del filtrado resulta esencial para un correcto seguimiento de fase [8]. A diferencia de un integrador ideal, el GI incorpora una dependencia explícita con la frecuencia estimada, lo que le permite realizar un filtrado selectivo y adaptable alrededor de la componente fundamental [8].

### Integrador Generalizado de Segundo Orden (SOGI)

Con el fin de superar las limitaciones del integrador generalizado (GI), se desarrolló el *Second-Order Generalized Integrator* (SOGI), cuya estructura es conceptualmente similar al GI, pero incorpora una realimentación adicional que modifica su dinámica y elimina la dependencia directa entre la ganancia y la frecuencia de sintonía  $\omega'$ . De este modo, el SOGI mantiene las ventajas de generación en cuadratura y filtrado selectivo, pero con una respuesta más estable frente a variaciones de frecuencia [8, 15, 9].

La estructura general del SOGI se muestra en la figura 2.18, y su comportamiento puede describirse mediante las siguientes funciones de transferencia, que reemplazan a las del GI convencional [8]:

$$D(s) = \frac{k\omega' s}{s^2 + k\omega' s + \omega'^2}, \quad Q(s) = \frac{k\omega'^2}{s^2 + k\omega' s + \omega'^2}.$$

La incorporación del término amortiguador  $k\omega' s$  en el denominador otorga al sistema una naturaleza resonante de segundo orden con control de ancho de banda, lo que permite mantener un desfase de  $90^\circ$  entre las señales  $v'(t)$  y  $qv'(t)$ , independientemente de pequeñas variaciones en  $\omega'$ . En consecuencia, el SOGI constituye una versión mejorada del GI, capaz de generar señales ortogonales estables y filtradas [8].

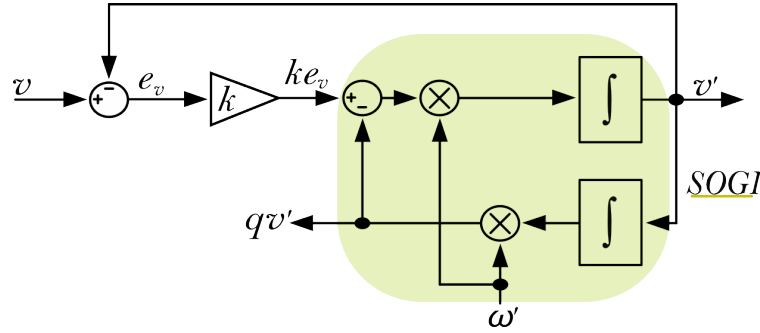


Figura 2.18: Estructura de SOGI-PLL.

Esto se puede ver mejor si comparamos las dos estructuras: En la estructura del integrador generalizado (GI), las funciones de transferencia del filtro pasa-banda  $D(s)$  y del pasa-bajas  $Q(s)$  se definen como [8]:

$$D_{GI}(s) = \frac{ks}{s^2 + ks + \omega'^2}, \quad Q_{GI}(s) = \frac{k\omega'^2}{s^2 + ks + \omega'^2}.$$

$$\text{Ecuación característica: } s^2 + ks + \omega'^2 = 0.$$

Comparando con la forma canónica de un sistema de segundo orden,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

donde:

- $\omega_n$ : frecuencia natural del sistema.
- $\zeta$ : factor de amortiguamiento.
- $2\zeta\omega_n$ : coeficiente asociado al término de amortiguamiento.
- $\omega_n^2$ : término asociado a la dinámica natural del sistema.

se obtiene que:

$$\omega_n = \omega', \quad 2\zeta\omega_n = k \Rightarrow \zeta = \frac{k}{2\omega'}$$

Por lo tanto, ante cambios en la frecuencia de la señal de entrada la respuesta dinámica del GI se modifica, afectando la ganancia estática, el ancho de banda y el desfase entre las señales en cuadratura [8].

Esta limitación se soluciona en el *Second-Order Generalized Integrator* (SOGI), el cual redefine el término de amortiguamiento como  $k\omega'$  [8]:

$$D_{\text{SOGI}}(s) = \frac{k\omega' s}{s^2 + k\omega' s + \omega'^2}, \quad Q_{\text{SOGI}}(s) = \frac{k\omega'^2}{s^2 + k\omega' s + \omega'^2}$$

$$\text{Ecuación característica: } s^2 + k\omega' s + \omega'^2 = 0.$$

Comparando nuevamente con la forma estándar,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

se obtiene:

$$\omega_n = \omega', \quad 2\zeta\omega_n = k\omega' \Rightarrow \zeta = \frac{k}{2}$$

De esta manera, el factor de amortiguamiento deja de depender de la frecuencia de entrada. Con ello, el SOGI mantiene un comportamiento dinámico prácticamente invariante ante variaciones de frecuencia, resultando más adecuado para aplicaciones de PLL monofásicos y FLL adaptables [8, 15, 19].

La estructura final se muestra en la figura 2.19, correspondiente al esquema *PLL-SOGI*. A pesar de sus ventajas en simplicidad, estabilidad y calidad de filtrado, el uso del *Second-Order Generalized Integrator* (SOGI) presenta diversas limitaciones prácticas que deben considerarse en su diseño e implementación [8, 9].

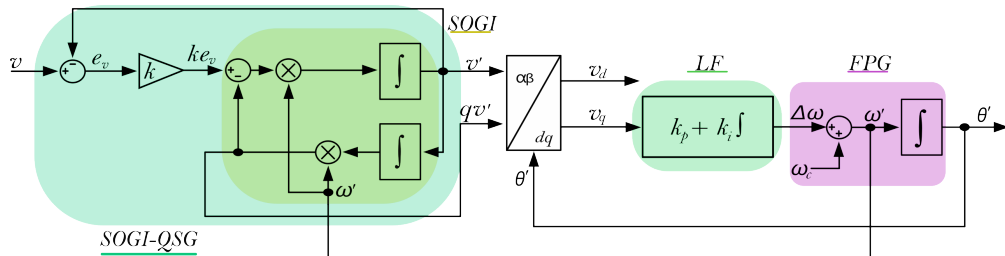


Figura 2.19: Estructura del PLL-SOGI.

En primer lugar, la estructura del SOGI es altamente sensible a las oscilaciones de frecuencia introducidas por el propio lazo PLL, especialmente debido a la interacción entre el *Phase Detector* (PD) y el *Loop Filter* (LF). Esta sensibilidad puede provocar variaciones transitorias en amplitud y fase cuando la frecuencia estimada difiere de la frecuencia real de la señal de entrada [8, 7].

## 2.3 Control de Inversores Monofásicos

Los convertidores electrónicos, además de depender del diseño del hardware, requieren de un sistema de control adecuado para garantizar un funcionamiento correcto en términos de respuesta dinámica, robustez y eficiencia [18, 24]. Un control bien diseñado permite consolidar un sistema autónomo confiable y estable [26, 18]. Algunos de los principales beneficios y requisitos que debe cumplir un sistema de control aplicado a convertidores de potencia son los siguientes:

- **Limitar o mantener constante la frecuencia de conmutación:** esta característica permite predecir las pérdidas por conmutación, lo que facilita el diseño térmico y mejora la eficiencia del convertidor. Asimismo, una frecuencia fija concentra el espectro armónico en bandas específicas, permitiendo diseñar filtros más pequeños y efectivos [25, 18].
- **Reducción del rizo (*ripple*):** mediante estrategias de control adecuadas, como el ajuste de la frecuencia de conmutación o técnicas de modulación avanzadas, es posible disminuir el rizo de corriente o voltaje. Una menor ondulación reduce las exigencias de almacenamiento de energía, lo que permite emplear componentes pasivos (inductores y capacitores) de menor tamaño [25, 8].
- **Respuesta dinámica rápida:** los convertidores suelen formar parte de sistemas más complejos (rectificadores activos, inversores, accionamientos eléctricos, entre otros), donde es indispensable responder rápidamente a cambios en carga, referencia o perturbaciones. Por ello, el sistema de control debe asegurar una dinámica suficientemente rápida para satisfacer los requerimientos del sistema superior [26, 18].
- **Capacidad de seguimiento de señales de corriente alterna:** aunque muchos sistemas de control se diseñan inicialmente para referencias constantes (DC), en el caso de los convertidores que interactúan con señales AC es fundamental seguir con precisión referencias sinusoidales. Si el controlador no logra mantener el voltaje o la corriente deseada, pueden generarse problemas como inyección inadecuada de energía activa o reactiva hacia la red, distorsión armónica o desbalance de fases [8, 24].

Comúnmente, en la literatura de electrónica de potencia se distinguen tres tipos de estrategias generales de control para gobernar convertidores [18, 24]:

- **A) Controladores basados en modulación :** en este enfoque, el controlador lineal genera una señal de control continua  $\bar{u}$ , usualmente interpretada como un ciclo de trabajo  $d$ . El modulador asociado (por ejemplo, PWM basado en portadora) sintetiza dicha señal en una señal de conmutación  $S_w$ , la cual activa o desactiva los interruptores del convertidor. Bajo este esquema, la frecuencia de conmutación es fija y las dinámicas del lazo pueden analizarse mediante modelos promedio [25, 18].
- **B) Controladores sin modulador :** en esta estrategia, el controlador genera directamente las señales de disparo  $S_w$ . Es decir, decide explícitamente cuándo encender o apagar los interruptores, sin emplear un PWM tradicional. Esto conlleva una frecuencia de conmutación variable, que depende del estado del sistema y del error instantáneo. Técnica representativa incluyen el control por histéresis [18, 26].
- **C) Controladores con modulador embebido :** en este caso, el algoritmo de control incorpora explícitamente el modelo del modulador dentro de su estructura matemática. El controlador determina directamente los estados de los interruptores, pero lo hace respetando una frecuencia de conmutación fija o calculada, así como restricciones propias del modulador [18, 24].

En este trabajo se empleará la estrategia del tipo **A**, ya que es la metodología estándar y ampliamente aceptada para el gobierno de convertidores de potencia, además de permitir una descripción promedio del sistema compatible con el diseño de controladores lineales [25, 18].

### 2.3.1. Estructura de control de convertidores

La estructura general de control de los convertidores en modo *grid-following* se basa en el uso de un PLL. El PLL es el responsable de estimar y rastrear en tiempo real la frecuencia ( $\omega$ ) y el ángulo de fase ( $\theta$ ) de la tensión de la red eléctrica en el punto de acoplamiento [24]. Este ángulo de sincronización es indispensable para aplicar las transformadas de Park y poder operar las variables de control en el marco síncrono rotatorio  $dq$  [18]. En este marco de referencia bidimensional, se establecen las consignas deseadas de potencia activa ( $P_{ref}$ ) y reactiva ( $Q_{ref}$ ), las cuales se traducen en corrientes de referencia para el control:  $i_{d_{ref}}$  para la corriente activa e  $i_{q_{ref}}$  para la corriente reactiva [8].

La relación matemática que define cómo las corrientes y voltajes en el marco  $dq$  generan la potencia activa y reactiva se fundamenta en la teoría de la potencia instantánea [27]:

$$P = \frac{3}{2}(v_d i_d + v_q i_q) \quad (2.31)$$

$$Q = \frac{3}{2}(-v_d i_q + v_q i_d) \quad (2.32)$$

Asumiendo que el PLL se encuentra sincronizado y alinea perfectamente el eje  $d$  con el vector de voltaje de la red, la componente de tensión en cuadratura se hace nula ( $v_q = 0$ ). Esta condición simplifica el sistema y permite un control desacoplado, donde la potencia activa inyectada depende directamente de  $i_d$  y la potencia reactiva depende de  $i_q$  [24] [27].

En el lazo de control de corriente, se comparan las corrientes medidas de la red transformadas al marco  $dq$  ( $i_d, i_q$ ) con sus respectivas referencias ( $i_{d_{ref}}, i_{q_{ref}}$ ). El error resultante es procesado por algoritmos de control, típicamente mediante compensadores [8]. Para mejorar la respuesta dinámica y eliminar el acoplamiento cruzado natural de los ejes  $d$  y  $q$  introducido por las inductancias del filtro acoplado a la red, se añaden términos de desacoplo ( $\omega L$ ) y una alimentación anticipada (*feed-forward*) de los voltajes de la red medidos ( $v_d, v_q$ ). El cálculo del voltaje de referencia que el convertidor debe sintetizar ( $v_d^*, v_q^*$ ) se rige por las siguientes ecuaciones [27]:

$$v_d^* = \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right) (i_{d_{ref}} - i_d) - \omega L i_q + v_d \quad (2.33)$$

$$v_q^* = \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right) (i_{q_{ref}} - i_q) + \omega L i_d + v_q \quad (2.34)$$

Una vez obtenidas, las señales de voltaje calculadas en el marco  $dq$  se transforman de regreso al marco estacionario utilizando la Transformada Inversa de Park. En el caso de un convertidor trifásico, esta transformación produce directamente las señales de referencia para las tres fases ( $v_a^*, v_b^*, v_c^*$ ) [27].

#### Variación para sistemas monofásicos

La aplicación de este control en un convertidor monofásico requiere un paso adicional, ya que la transformada de Park necesita un sistema bidimensional y el sistema monofásico solo cuenta con una magnitud escalar de voltaje y corriente [18]. Para resolver esto, se utiliza el PLL-QSG que crea un sistema bifásico ficticio  $\alpha\beta$ . A partir de la señal original medida (considerada el eje  $\alpha$ ), el QSG genera matemáticamente una componente imaginaria (eje  $\beta$ ) desplazada 90 grados en el tiempo [18] [8].

Con estas dos componentes ortogonales  $\alpha\beta$ , se aplica la Transformada de Park para pasar al marco síncrono  $dq$  y ejecutar el mismo lazo de control interno descrito. De manera homóloga, la transformada inversa de Park devuelve voltajes de referencia  $v_\alpha^*$  y  $v_\beta^*$ , empleándose exclusivamente la componente real  $v_\alpha^*$  como señal de modulación para la red [18].

A manera de resumen, el esquema completo de este proceso se ilustra en la Figura 2.20. En primer lugar, por medio del lazo de seguimiento de fase (PLL) se estima en tiempo real la fase ( $\theta$ ) y la frecuencia de la red

eléctrica, información que resulta indispensable para sincronizar el sistema y realizar la transformación de las variables medidas al marco de referencia síncrono rotatorio  $dq$  [8, 18]. En este marco, la potencia activa ( $P$ ) y reactiva ( $Q$ ) instantáneas son calculadas y posteriormente, estas variables son procesadas en el control de potencia. En esta etapa se genera una señal de error al comparar la potencia calculada con las deseadas ( $P^*$  y  $Q^*$ ), lo cual permite que los controladores estimen y dicten las corrientes de referencia necesarias ( $i_d^*$  e  $i_q^*$ ) para alcanzar el objetivo de energía [18].

Dichas corrientes pasan entonces al control de corriente, el cual evalúa el error respecto a las corrientes inyectadas reales. La acción de este controlador calcula los voltajes de referencia finales en el marco  $dq$  ( $v_d^*$  y  $v_q^*$ ) que el inversor debe sintetizar para anular dicho error [18].

Finalmente, tras aplicar la transformación inversa para regresar al marco estacionario, estas señales de voltaje entran al bloque del Modulador por Ancho de Pulsos (PWM). Este bloque se encarga de comparar la señal moduladora (la referencia) con una onda portadora de alta frecuencia, creando así los patrones de pulsos de conmutación necesarios para gobernar los transistores del convertidor [25, 18].

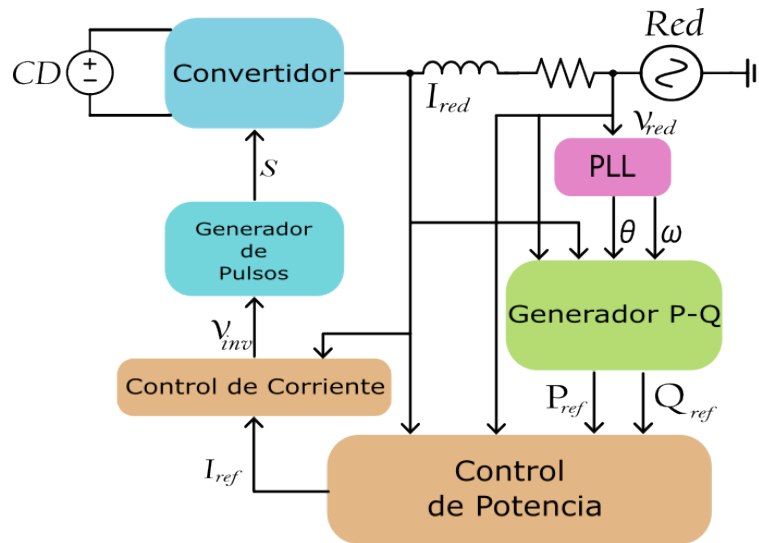


Figura 2.20: Modelo base del control de un convertidor.

## 2.4 Funciones de Lyapunov y análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad es un aspecto fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos, ya que permite determinar el comportamiento de las trayectorias del sistema ante pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales [28]. En particular, resulta de interés establecer si las soluciones del sistema permanecen cercanas a un punto de equilibrio o si, por el contrario, se alejan de él a medida que evoluciona el tiempo [28].

Uno de los enfoques más importantes para estudiar este problema es el método directo de Lyapunov, el cual permite analizar la estabilidad de un sistema sin necesidad de obtener explícitamente la solución de las ecuaciones diferenciales que describen su dinámica [28]. Este método se basa en la construcción de una función escalar adecuada, denominada *función de Lyapunov*, cuya evolución a lo largo de las trayectorias del sistema proporciona información sobre la estabilidad del punto de equilibrio [28].

En esta sección se presentan los conceptos fundamentales asociados a las funciones de Lyapunov y se discuten los principales resultados que permiten utilizar este enfoque para el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos [28].

### 2.4.1. Estabilidad en términos de Lyapunov

Considérese el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.35)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función localmente Lipschitz definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Supóngase que el sistema posee un punto de equilibrio en el origen, es decir,

$$f(0) = 0.$$

El objetivo es caracterizar y estudiar la estabilidad de este punto de equilibrio.

**Definición 1.** *El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema anterior se dice [28]:*

- **Estable** si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

- **Inestable** si no es estable.

- **Asintóticamente estable** si es estable y además existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

### 2.4.2. Funciones de Lyapunov

Las definiciones de estabilidad presentadas anteriormente establecen condiciones sobre el comportamiento de las trayectorias del sistema a lo largo del tiempo. Sin embargo, verificar directamente estas condiciones a partir de la solución explícita del sistema suele ser difícil o incluso imposible para sistemas no lineales. Por esta razón, el método de Lyapunov proporciona una herramienta alternativa para analizar la estabilidad de un punto de equilibrio sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales del sistema [28].

La idea fundamental consiste en construir una función escalar  $V(x)$ , denominada *función de Lyapunov*, que puede interpretarse como una medida de energía o de distancia del estado del sistema respecto al punto de equilibrio. Si esta función es positiva y decrece a lo largo de las trayectorias del sistema, entonces el estado del sistema tiende a permanecer cercano al equilibrio o a converger hacia él [28].

El resultado fundamental que formaliza esta idea se presenta en el siguiente teorema [28].

**Teorema 1.** *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema autónomo*

$$\dot{x} = f(x)$$

*y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen. Supóngase que existe una función  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , continuamente diferenciable, tal que*

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \text{para } x \in D - \{0\} \quad (2.36)$$

*y*

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{para } x \in D. \quad (2.37)$$

Entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  es estable.

Además, si se cumple que

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{para } x \in D - \{0\}, \quad (2.38)$$

entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  es asintóticamente estable.

Este teorema es crucial ya que establece que la estabilidad del sistema puede determinarse mediante el análisis de una función adecuada. Si la función  $V(x)$  es positiva definida y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es negativa o no positiva, entonces las trayectorias del sistema permanecen acotadas alrededor del equilibrio lo que se puede también llamar como punto de equilibrio estable. En particular, cuando la derivada es estrictamente negativa, la función  $V(x)$  decrece continuamente, lo que implica que el estado del sistema converge hacia el punto de equilibrio o también se le conoce como asintóticamente estable [28].

## 2.5 Observadores para Sistemas Lineales

En el área de control, resulta fundamental poder influir en el comportamiento de un sistema con el propósito de llevarlo hacia un estado deseado [26, 29]. Para lograrlo, se recurre generalmente al uso de sensores, los cuales proporcionan la información necesaria para el funcionamiento adecuado del sistema de control. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, las señales medidas por los sensores suelen presentar limitaciones que degradan el desempeño del sistema de control [29].

Estas limitaciones pueden ser de naturaleza física o económica. En muchos casos, las mediciones se ven afectadas por ruido y perturbaciones, o existen variables que resultan inaccesibles de manera física. Además, el costo de sensores con alta precisión y fiabilidad puede ser costosos, lo que dificulta su implementación en determinados entornos [26, 29].

Ante estas dificultades, una alternativa ampliamente utilizada en el ámbito del control es el uso de observadores. En términos generales, los observadores emplean la información del modelo dinámico del sistema y de las variables medibles para estimar el estado de aquellas que no pueden medirse directamente. De esta forma, permiten conocer variables internas del sistema y, con ello, mejorar el diseño y desempeño de la señal de control [29, 26].

### 2.5.1. Observabilidad

En el área de control, la **observabilidad** se refiere a la capacidad de inferir o estimar el estado interno  $x(t)$  de un sistema a partir de las mediciones disponibles de su salida  $y(t)$  y del conocimiento de la entrada aplicada al sistema [29].

#### Definición de observabilidad

Formalmente, Chen establece en [29] que:

*“un sistema descrito mediante un modelo en espacio de estados es **observable** si, para cualquier estado inicial desconocido  $x(0)$ , existe un tiempo finito  $t_1 > 0$  tal que el conocimiento de la entrada  $u(t)$  y de la salida  $y(t)$  en el intervalo  $[0, t_1]$  permite determinar de manera única dicho estado inicial  $x(0)$ . En caso contrario, el sistema se considera **no observable**.”*

Para analizar esta propiedad, se considera el modelo lineal en espacio de estados del sistema, el cual puede expresarse mediante las ecuaciones [29]

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.39)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.40)$$

donde **A**, **B**, **C** y **D** son matrices de dimensiones  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $q \times n$  y  $q \times p$ , respectivamente. A partir del modelo en espacio de estados presentado en (2.40), es posible obtener una expresión explícita para la salida del sistema. Dicha solución depende de la evolución del estado inicial, de la entrada aplicada al sistema y de la dinámica propia del sistema [29].

En esta expresión aparece la *matriz de transición de estados*, denotada por  $\Phi(t, t_0)$ , la cual describe cómo evoluciona el estado del sistema desde un instante inicial  $t_0$  hasta un instante posterior  $t$ , considerando únicamente la dinámica interna del sistema [29].

Bajo esta formulación, la salida del sistema puede expresarse como [29]

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau + D(t)u(t) \quad (2.41)$$

donde el primer término representa la contribución del estado inicial, el segundo término corresponde al efecto acumulado de la entrada aplicada al sistema a lo largo del tiempo, y el último término representa el efecto directo de la entrada sobre la salida. Dado que  $u(t)$  y  $y(t)$  son conocidas en el estudio de la observabilidad, se puede considerar únicamente la parte de la ecuación dependiente del estado inicial:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) \quad (2.42)$$

El gramiano de observabilidad permite cuantificar la información contenida en la salida del sistema respecto a sus estados internos [29]. Intuitivamente, si dos estados iniciales distintos producen exactamente la misma salida  $y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_f]$ , entonces no es posible distinguirlos mediante las mediciones, lo que implica que el sistema no es observable. La matriz de Gram de observabilidad, de dimensión  $n \times n$ , se define como [29]:

$$\mathbf{W}_o(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (2.43)$$

Premultiplicando por  $\Phi^T(t, t_0)C^T(t)$  e integrando en ambos lados del signo de igualdad, y sustituyendo (2.43) en (2.42), se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt = \mathbf{W}_o(t_0, t_f) \mathbf{x}_0 \quad (2.44)$$

Por lo tanto, el modelo lineal de estado es observable si y solo si la matriz cuadrática  $\mathbf{W}_o(t_0, t_f)$  es *regular* (es decir, invertible). En ese caso, el estado inicial puede determinarse como [29]:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_o^{-1}(t_0, t_f) \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt \quad (2.45)$$

Para sistemas LTI (Lineales e Invariantes en el Tiempo) se tiene que  $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ , y para  $t_0 = 0$ , el gramiano de observabilidad se expresa como [29]:

$$\mathbf{W}_o(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (2.46)$$

La matriz de Gram de observabilidad permite cuantificar la información contenida en la salida del sistema respecto a sus estados internos. En otras palabras, mide qué tan bien pueden distinguirse los diferentes

estados del sistema a partir de las mediciones disponibles en un intervalo de tiempo dado. El gramiano de observabilidad resume esta información en una matriz que acumula el efecto de la dinámica del sistema y de la matriz de salida a lo largo del tiempo [29]. Desde el punto de vista del análisis del sistema, el gramiano cumple un papel fundamental: si la matriz  $\mathbf{W}_o(t_0, t_f)$  es invertible, entonces existe suficiente información en la salida del sistema para reconstruir de manera única el estado inicial  $x_0$ . En cambio, si el gramiano es singular, significa que existen combinaciones de estados que no afectan la salida medida, por lo que dichos estados no pueden determinarse a partir de las mediciones disponibles [29]. En consecuencia, la condición de invertibilidad de el gramiano constituye un criterio formal para verificar la observabilidad del sistema [29].

### Matriz de observabilidad

Otra forma de analizar observabilidad para un sistema lineal es haciendo uso de la *matriz de observabilidad*, considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo representado en espacio de estados [29]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.47)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.48)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t)$  es la entrada del sistema y  $y(t)$  corresponde al vector de salida. Para analizar esta propiedad, considérese primero el sistema en ausencia de entrada. En este caso, la salida del sistema está dada por [29]

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \quad (2.49)$$

La matriz exponencial puede expresarse como una combinación finita de potencias de la matriz  $A$  [29],

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \quad (2.50)$$

donde  $n$  es el orden del sistema y  $\alpha_k(t)$  son funciones escalares dependientes del tiempo. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de salida se obtiene

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0) \quad (2.51)$$

De esta expresión se observa que la información sobre el estado inicial  $x(0)$  está contenida en las matrices  $C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}$ . Por lo tanto, el estado inicial podrá determinarse de manera única si dichas matrices proporcionan información linealmente independiente [29].

Con base en lo anterior, se define la *matriz de observabilidad* como [29]

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

La condición de observabilidad completa del sistema se establece de la siguiente manera: el sistema es completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad tiene rango completo, es decir [29]

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n \quad (2.53)$$

Cuando esta condición se satisface, el estado inicial  $x(0)$  puede determinarse de forma única a partir de las mediciones de la salida del sistema en un intervalo de tiempo finito [29].

### 2.5.2. Observadores de estado

Una vez establecido el concepto de observabilidad, resulta natural introducir el concepto de observadores de estado. Mientras que la observabilidad es una propiedad teórica del sistema que indica si es posible reconstruir sus estados internos a partir de las señales de entrada y salida, los observadores constituyen herramientas prácticas que permiten realizar dicha estimación en tiempo real [29, 26].

#### Observador de Luenberger

Considérese el sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) descrito en espacio de estados [29]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.54)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.55)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  la entrada, y  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  la salida.

El objetivo de un observador de estado es reconstruir  $x(t)$  a partir de las señales disponibles  $u(t)$  y  $y(t)$  [29].

#### Estimador a lazo abierto

Una primera aproximación consiste en utilizar un modelo en paralelo del sistema [29]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (2.56)$$

Definiendo el error de estimación como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.57)$$

su dinámica se obtiene restando ambos sistemas:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - (A\hat{x}(t) + Bu(t)) \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) \end{aligned}$$

$$\dot{e}(t) = Ae(t). \quad (2.58)$$

Por lo tanto, la convergencia del error depende exclusivamente de los autovalores de  $A$ . Si  $A$  es Hurwitz, entonces:

$$e(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

Sin embargo, si el sistema no es estable, el error no converge y este estimador resulta inadecuado [29, 26].

### Observador en lazo cerrado

Para mejorar el desempeño del estimador, se introduce una corrección basada en el error de salida [29]:

$$\tilde{y}(t) = \hat{y}(t) - y(t) = C\hat{x}(t) - Cx(t) = C(\hat{x}(t) - x(t)). \quad (2.60)$$

Se define entonces el observador de Luenberger como [29, 26]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (2.61)$$

donde  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de ganancia del observador.

La dinámica del error resulta:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})) \\ &= Ae - L(Cx - C\hat{x}) \\ &= Ae - LCe \end{aligned} \quad (2.62)$$

De esta forma, la convergencia del error depende ahora de los autovalores de la matriz  $A - LC$ .

Si el par  $(A, C)$  es observable, es posible elegir  $L$  tal que  $A - LC$  sea Hurwitz [29]. En consecuencia:

$$e(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty \quad (2.63)$$

lo que garantiza la convergencia asintótica del estado estimado hacia el estado real [29, 26].

### Observadores de Alta Ganancia

Los observadores de alta ganancia (*High-Gain Observers*) se emplean comúnmente en el análisis y diseño de sistemas no lineales. Sin embargo, su uso no se limita exclusivamente a este tipo de sistemas, ya que los sistemas lineales pueden considerarse como un caso particular dentro de la clase general de sistemas no lineales. Por esta razón, la metodología asociada a los observadores de alta ganancia también puede aplicarse al estudio de sistemas lineales, proporcionando un marco unificado para el diseño de estimadores de estado [28].

Para ilustrar su formulación, considérese el siguiente sistema no lineal de segundo orden [28]:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.64)$$

$$\dot{x}_2 = \phi(x, u) \quad (2.65)$$

$$y = x_1 \quad (2.66)$$

donde  $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$  es el estado,  $u$  es la entrada y la única salida medida es  $y = x_1$ . Se asume que la función no lineal  $\phi(x, u)$  es localmente Lipschitz respecto a  $x$  y que tanto  $x(t)$  como  $u(t)$  permanecen acotados.

El objetivo consiste en estimar el estado completo  $x$  a partir de la medición  $y$ .

### Estructura del observador

Se propone el siguiente observador [28]:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + h_1(y - \hat{x}_1) \quad (2.67)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \phi_0(\hat{x}, u) + h_2(y - \hat{x}_1) \quad (2.68)$$

donde  $\hat{x} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T$  es el estado estimado,  $h_1, h_2 > 0$  son las ganancias del observador y  $\phi_0(\hat{x}, u)$  representa un modelo nominal de la dinámica no lineal.

Definiendo el error de estimación como

$$\tilde{x} = x - \hat{x},$$

su dinámica puede escribirse como

$$\dot{\tilde{x}} = A_0 \tilde{x} + B \delta(x, \tilde{x}, u),$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -h_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y el término de perturbación

$$\delta(x, \tilde{x}, u) = \phi(x, u) - \phi_0(\hat{x}, u)$$

representa la incertidumbre del modelo.

En el caso ideal  $\delta \equiv 0$ , la convergencia del error depende exclusivamente de los autovalores de la matriz  $A_0$  [28].

### Escalamiento de alta ganancia

Para inducir una convergencia rápida, se introduce un parámetro pequeño  $\varepsilon \in (0, 1]$  y se seleccionan las ganancias como [28]:

$$h_1 = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \quad h_2 = \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2},$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  se eligen de modo que la matriz

$$F = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}$$

sea Hurwitz.

Con el cambio de variables

$$\eta_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\varepsilon}, \quad \eta_2 = \tilde{x}_2,$$

la dinámica del error puede reescribirse como

$$\varepsilon \dot{\eta} = F\eta + \varepsilon B \delta(x, \tilde{x}, u).$$

Esta expresión muestra explícitamente la presencia de una separación de escalas: para valores pequeños de  $\varepsilon$ , la dinámica dominante del error está gobernada por el sistema lineal rápido

$$\varepsilon \dot{\eta} = F\eta,$$

cuya estabilidad está garantizada por la elección de  $\alpha_1, \alpha_2$  [28].

En la escala de tiempo rápida  $t_f = t/\varepsilon$ , el error converge exponencialmente hacia una vecindad del origen antes de que la dinámica lenta del sistema original evolucione significativamente.

Además, el término de incertidumbre aparece multiplicado por  $\varepsilon$ , lo que reduce su influencia en la dinámica escalada y explica la capacidad del observador para tolerar perturbaciones moderadas del modelo [28].

### Relación de observador de Luenberger y alta ganancia

La estructura del observador de alta ganancia es conceptualmente hablando similar al observador de Luenberger [29, 28]:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}),$$

cuya dinámica del error es

$$\dot{e} = (A - LC)e.$$

En ambos casos se identifican tres elementos fundamentales:

- Un modelo dinámico del sistema.
- Un término de corrección proporcional al error de salida.
- Un diseño de ganancias que garantiza estabilidad del error.

La diferencia esencial radica en el mecanismo de diseño. En el caso lineal, la convergencia se logra mediante la asignación directa de polos de  $A - LC$ . En el caso no lineal, la convergencia se obtiene introduciendo un escalamiento  $1/\varepsilon$  que genera una dinámica rápida capaz de dominar localmente las no linealidades.

En este sentido, el observador de alta ganancia puede interpretarse como una extensión no lineal del observador de Luenberger [28].

## 2.6 Estabilidad de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo

---

En muchos problemas de control, los modelos dinámicos del sistema no permanecen constantes a lo largo del tiempo. En estos casos, las matrices que describen la dinámica del sistema dependen explícitamente del tiempo, dando lugar a los denominados *sistemas lineales variantes en el tiempo* (LTV, por sus siglas en inglés *Linear Time-Varying*) [29].

Considérese un sistema lineal variante en el tiempo (LTV) en su forma entrada-salida descrito por

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.69)$$

donde  $g(t, \tau)$  representa la respuesta impulso dependiente del tiempo. A diferencia del caso invariante en el tiempo (LTI), la respuesta impulso depende explícitamente de dos variables temporales, reflejando la naturaleza variante del sistema [29].

### 2.6.1. Estabilidad BIBO

El sistema se dice *Bounded-Input Bounded-Output* (BIBO) estable si toda entrada acotada genera una salida acotada, es decir [29, 26]:

$$|u(t)| \leq U < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < \infty.$$

Para el sistema descrito en (2.69), una condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO es que exista una constante finita  $M$  tal que [29]

$$\int_{t_0}^t |g(t, \tau)| d\tau \leq M < \infty \quad (2.70)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Esta condición garantiza que la “ganancia acumulada” del sistema en el tiempo permanece acotada. Si la integral anterior diverge, una entrada acotada podría generar una salida no acotada [29].

### 2.6.2. Caso MIMO

Para el caso multivariable, el sistema se expresa como

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.71)$$

donde  $G(t, \tau)$  es la matriz de respuesta impulso. En este caso, la condición de estabilidad BIBO puede expresarse en términos de normas matriciales. Utilizando, por ejemplo, la norma infinito, la condición se establece como [29]

$$\int_{t_0}^t \|G(t, \tau)\| d\tau \leq M < \infty \quad (2.72)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

### 2.6.3. Representación en Espacio de Estados

Considérese ahora el sistema LTV en representación de espacio de estados [29]

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.73)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.74)$$

La matriz de respuesta impulso está dada por [29]

$$G(t, \tau) = C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) \quad (2.75)$$

donde  $\Phi(t, \tau)$  es la matriz de transición de estados, solución de

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I.$$

La matriz de transición de estados  $\Phi(t, \tau)$  describe cómo evoluciona el estado del sistema desde un instante inicial  $\tau$  hasta un tiempo posterior  $t$ , considerando la dinámica variable del sistema. A partir de esta matriz es posible expresar la respuesta completa del sistema en función de las condiciones iniciales y de la entrada aplicada [29].

En consecuencia, la representación en espacio de estados proporciona una herramienta fundamental para el análisis de sistemas lineales variantes en el tiempo, permitiendo estudiar propiedades como estabilidad, controlabilidad y observabilidad, así como el diseño de controladores y observadores [29].

#### 2.6.4. Estabilidad Interna

La dinámica interna del sistema está gobernada por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (2.76)$$

La solución viene dada por [29]

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0). \quad (2.77)$$

##### Estabilidad Marginal

El sistema se dice marginalmente estable si existe una constante finita  $M$  tal que [29]

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M < \infty \quad (2.78)$$

para todo  $t \geq t_0$ . Esto implica que toda condición inicial finita genera una trayectoria acotada.

##### Estabilidad Asintótica

El sistema es asintóticamente estable si, además de (2.78), se cumple [29, 28]

$$\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.79)$$

En este caso, toda condición inicial converge al origen conforme el tiempo tiende a infinito.

#### 2.6.5. Diferencia Fundamental entre LTI y LTV

En sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), la estabilidad asintótica de

$$\dot{x} = Ax$$

está completamente caracterizada por la ubicación de los valores propios de  $A$ . En particular, el sistema es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa [29, 26].

Sin embargo, en sistemas LTV esta condición no es suficiente. Aun cuando los valores propios instantáneos de  $A(t)$  posean parte real negativa para todo  $t$ , el sistema puede no ser estable. En consecuencia, el análisis de estabilidad en sistemas LTV requiere estudiar directamente la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$  o emplear funciones de Lyapunov adecuadas [29, 28].

### 2.6.6. Sistemas conmutados (Switched Systems)

Los sistemas conmutados constituyen una clase particular de sistemas híbridos caracterizados por la interacción entre una dinámica continua y eventos discretos de conmutación [30].

Desde el punto de vista adoptado por Liberzon, el énfasis no se coloca en el modelado detallado del comportamiento discreto, sino en el análisis de estabilidad y síntesis de control del estado continuo bajo diferentes patrones de conmutación [30].

Un sistema conmutado en tiempo continuo puede representarse como:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad (2.80)$$

donde:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado continuo,
- $\sigma(t)$  es la señal de conmutación,
- $f_i(\cdot)$  representa la dinámica asociada al modo  $i$ .

La señal  $\sigma(t)$  toma valores en un conjunto finito de índices que identifican los distintos subsistemas. Cada vez que  $\sigma(t)$  cambia de valor, la dinámica del sistema cambia abruptamente [30].

Un aspecto fundamental es que el análisis no se centra en la lógica discreta en sí misma, sino en el comportamiento del sistema continuo bajo todas las señales de conmutación pertenecientes a una clase determinada. En este sentido, los sistemas conmutados pueden verse como sistemas continuos sujetos a cambios estructurales aislados en el tiempo [30].

#### Sistemas conmutados dependientes del estado (State-dependent switching)

En los sistemas conmutados dependientes del estado (state-dependent switching), la señal de conmutación no es arbitraria ni independiente del estado, sino que depende explícitamente de la trayectoria del sistema [30].

En este caso, la dinámica puede describirse como:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(x(t))}(x(t)), \quad (2.81)$$

donde la ley de conmutación viene dada por

$$\sigma(t) = \phi(x(t)), \quad (2.82)$$

con  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}$  una función que asigna a cada región del espacio de estados un modo dinámico particular.

### Interpretación geométrica

La conmutación ocurre cuando la trayectoria cruza superficies de conmutación definidas típicamente como:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}. \quad (2.83)$$

Cada región del espacio de estados induce una dinámica distinta. Por lo tanto, la evolución del sistema depende no sólo del tiempo, sino también de la región del espacio en la que se encuentra el estado [30].

### Implicaciones en estabilidad

Un punto esencial es que la estabilidad del sistema conmutado no está determinada únicamente por la estabilidad individual de cada subsistema.

Incluso si cada dinámica  $f_i(x)$  es globalmente asintóticamente estable, la interacción entre regiones puede generar comportamientos no deseados como ciclos límite, oscilaciones o inestabilidad [30].

Por ello, el análisis requiere herramientas adicionales, entre las que destacan:

- Funciones de Lyapunov comunes.
- Funciones de Lyapunov múltiples.

### Funciones de Lyapunov múltiples

Cuando no existe una función de Lyapunov común que decrezca para todas las dinámicas, se recurre al enfoque de funciones de Lyapunov múltiples [30].

Considérese el sistema:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad \sigma(t) \in \{1, 2\}. \quad (2.84)$$

Supóngase que cada subsistema individual

$$\dot{x} = f_i(x), \quad i = 1, 2,$$

es globalmente asintóticamente estable.

A cada modo se le asocia una función de Lyapunov distinta:

$$V_i(x), \quad i = 1, 2.$$

De esta forma, cuando  $\sigma(t) = i$ , se considera la función

$$V_{\sigma(t)}(x(t)).$$

### Condición dentro de cada modo

Se requiere que para cada subsistema se cumpla:

$$\dot{V}_i(x) < 0,$$

lo que garantiza que mientras el sistema permanece dentro de una función, la función de Lyapunov decrece [30].

### Comportamiento en los instantes de conmutación

Sea  $t_k$  un instante de conmutación. La estabilidad global depende críticamente de lo que ocurra en estos instantes.

Si la función es continua en el cambio de modo, es decir,

$$V_{\sigma(t_k^-)}(x(t_k)) = V_{\sigma(t_k^+)}(x(t_k)),$$

entonces el decrecimiento puede preservarse.

Sin embargo, si en el instante de conmutación se cumple que

$$V_j(x(t_k)) > V_i(x(t_k)),$$

donde el sistema cambia de modo  $i$  a modo  $j$ , se produce un incremento en la función de Lyapunov. Incrementos repetidos pueden contrarrestar el decrecimiento dentro de cada modo y destruir la convergencia, aun cuando cada subsistema individual sea estable [30].

La estabilidad del sistema conmutado depende de varios factores fundamentales:

- El decrecimiento de cada función de Lyapunov  $V_i(x)$  dentro de su modo dinámico correspondiente.
- El comportamiento de  $V_i(x)$  en los momentos de conmutación entre cambios de función.
- Las propiedades de la señal de conmutación, como su frecuencia y el patrón de conmutación.

En consecuencia, el análisis de estabilidad debe garantizar que cualquier posible incremento de la función de Lyapunov en los instantes de conmutación sea compensado por su decrecimiento durante la evolución continua dentro de cada modo de operación [30]. Este comportamiento se ilustra en la Figura 2.21

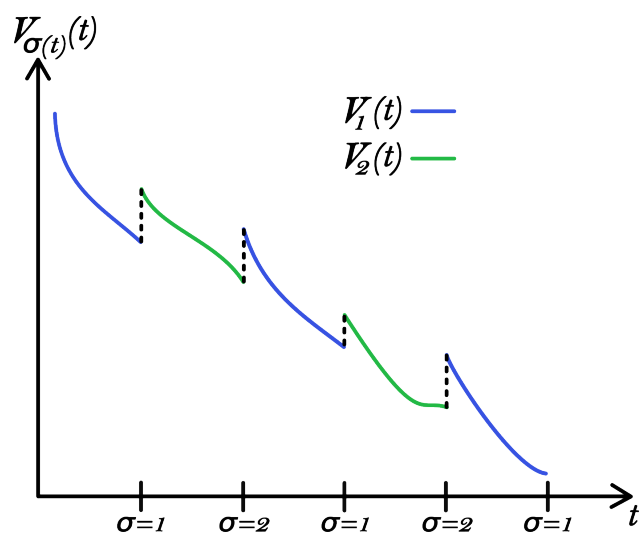


Figura 2.21: Comportamiento de funciones de Lyapunov múltiples en un sistema conmutado.

## CAPÍTULO

### 3

# GENERADOR DE CUADRATURA PARA SISTEMAS MONOFÁSICOS

En aplicaciones de electrónica de potencia y control de convertidores conectados a red, la correcta estimación de la fase y frecuencia de la señal de entrada constituye un elemento fundamental para garantizar una sincronización adecuada y un desempeño dinámico satisfactorio [9, 19]. Tradicionalmente, esta tarea se realiza mediante técnicas basadas en PLL. No obstante, dependiendo de su implementación, dichas técnicas pueden introducir errores, retardos dinámicos o problemas de robustez ante perturbaciones y variaciones paramétricas [10, 7].

A diferencia de los sistemas trifásicos, los sistemas monofásicos presentan una limitación inherente: la disponibilidad reducida de información instantánea. Mientras que en un sistema trifásico es posible obtener directamente componentes ortogonales que facilitan la aplicación de transformaciones como Clarke y Park, en el caso monofásico únicamente se dispone de una señal variante en el tiempo. Esta carencia dificulta la construcción de un marco de referencia síncrono y, por tanto, el diseño de estrategias de control en coordenadas constantes [10, 15].

Para suplir esta falta de información, es común emplear generadores de cuadratura asociados a un PLL, cuyo objetivo es estimar la fase y frecuencia de la señal, así como reconstruir una señal ortogonal artificial. De esta manera, es posible transformar el sistema desde un dominio alterno (CA) hacia un dominio equivalente en corriente directa (CD), donde el diseño y análisis del control resultan considerablemente más sencillos [10, 15, 9].

En este capítulo se desarrolla el fundamento matemático de un enfoque basado en la teoría de observadores. En particular, se analiza la formulación de un observador empleado para la estimación de la fase y la frecuencia en un sistema monofásico, cuya convergencia se sustenta en el uso de una estructura de alta ganancia. Este tipo de observador permite mejorar la velocidad de convergencia y aumentar la robustez frente a perturbaciones externas y variaciones en la señal de entrada [16].

Adicionalmente, considerando la naturaleza oscilatoria entre los valores positivos y negativos de las funciones seno y coseno, el análisis se desarrollará mediante la descomposición del comportamiento en dos subsistemas equivalentes. Esta formulación facilita el estudio de estabilidad y permite establecer condiciones formales de convergencia para el observador, dichas condiciones se sustentan en [16].

### 3.1 Modelo del Sistema

Se considera una señal monofásica de la forma

$$y(t) = A \cos(\phi(t) + \delta), \quad (3.1)$$

donde:  $A \in \mathbb{R}_{>0}$  es la amplitud de la señal, la cual se asume constante.

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es el ángulo de fase, modelado como

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

donde  $\omega(t) \in \mathbb{R}_{>0}$  representa la frecuencia angular instantánea de la señal.

$\delta \in [-\pi, \pi]$  es una constante que representa la condición inicial de fase, es decir,

$$\phi(t_0) = \delta. \quad (3.3)$$

A partir de esta expresión, se busca obtener un modelo dinámico que permita representar esta clase de señales.

Para ello, se definen las variables de estado como

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t). \quad (3.4)$$

Con estas definiciones, la dinámica del sistema queda dada por

$$\dot{x}_1(t) = -\omega(t)A \sin(\phi(t) + \delta) = x_2(t), \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega^2(t)A \cos(\phi(t) + \delta) - \dot{\omega}(t)A \sin(\phi(t) + \delta). \quad (3.6)$$

Reescribiendo la ecuación anterior en función de las variables de estado, se obtiene

$$\dot{x}_2(t) = -\omega^2(t)x_1(t) + \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}x_2(t). \quad (3.7)$$

Por lo tanto, el modelo dinámico en representación de espacio de estados puede expresarse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

con la ecuación de salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Es importante notar que el modelo dinámico obtenido corresponde a un sistema lineal en los estados, pero dependiente del tiempo, cuya dinámica está gobernada por la frecuencia instantánea  $\omega(t)$  y su derivada temporal  $\dot{\omega}(t)$ . En particular, la presencia del término  $\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}$  introduce una dependencia explícita con la variación de la frecuencia, lo cual refleja el carácter no estacionario de la señal analizada.

No obstante, esta generalidad implica también un incremento en la complejidad del análisis. En particular, el sistema resultante es lineal variante en el tiempo (LTV, por sus siglas en inglés), lo cual dificulta la obtención de soluciones analíticas.

Adicionalmente, el término  $\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}$  puede llegar a introducir efectos en la dinámica cuando  $\omega(t)$  toma valores pequeños o presenta variaciones abruptas, lo cual puede comprometer la estabilidad al momento de implementar.

### Modelado de la incertidumbre en frecuencia

Por esta razón, en el presente trabajo se asumirá que la frecuencia de la señal es constante y positiva, es decir,

$$\omega(t) = \omega > 0, \quad \dot{\omega}(t) = 0. \quad (3.10)$$

Bajo esta hipótesis, la frecuencia de la señal se modela como

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \quad (3.11)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia nominal, asumida conocida, y  $\Delta\omega \in \mathbb{R}$  representa la desviación respecto a dicho valor nominal, cumpliendo además que  $|\Delta\omega| < \omega_0$ . En consecuencia, se tiene que

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2. \quad (3.12)$$

Cabe señalar que, aunque la frecuencia se considere constante, ello no implica que la cantidad  $\Delta\omega$  sea conocida. Por el contrario, esta magnitud se interpreta como una incertidumbre paramétrica del modelo, asociada a la diferencia entre la frecuencia real de la señal y su valor nominal.

Sustituyendo esta expresión en la dinámica del sistema, se obtiene

$$\dot{x}_2 = -(\omega_0 + \Delta\omega)^2 x_1, \quad (3.13)$$

$$= -(\omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2)x_1. \quad (3.14)$$

Definiendo el parámetro incierto

$$\theta = 2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2, \quad (3.15)$$

la dinámica puede reescribirse como

$$\dot{x}_2 = -(\omega_0^2 + \underbrace{2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2}_{\theta})x_1 \quad (3.16)$$

$$= (-\omega_0^2 - \theta)x_1 \quad (3.17)$$

Por lo tanto, el sistema completo queda descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.18)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - \theta x_1. \quad (3.19)$$

Con lo anterior, el modelo puede expresarse de manera compacta mediante la siguiente estructura general:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F_0 x(t) + G_0 y(t)\theta, \\ y(t) &= H_0 x(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad H_0 = [1 \quad 0].$$

Aquí,  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  representa el vector de estados del sistema, definido como

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}.$$

La matriz  $F_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  describe la dinámica del oscilador armónico asociado a la frecuencia  $\omega_0$ . Sus valores propios están dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0,$$

lo que indica que el sistema es marginalmente estable y presenta trayectorias periódicas cerradas en el plano de estados. Esta característica refleja la naturaleza del oscilador ideal.

Por su parte, la matriz  $G_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  define la estructura mediante la cual el parámetro incierto  $\theta$  afecta la dinámica del sistema.

Finalmente, la matriz  $H_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  define la ecuación de salida y establece que únicamente el primer estado es directamente medible.

## 3.2 Estructura del Generador y su Conexión con los Observadores

Resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) = 0,$$

se obtiene

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad (3.21)$$

donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  dependen de las condiciones iniciales. Imponiendo  $x_1(0)$  y  $x_2(0) = \dot{x}_1(0)$ , se obtiene

$$x_1(t) = x_1(0) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} x_2(0) \sin(\omega t), \quad (3.22)$$

$$x_2(t) = x_2(0) \cos(\omega t) - \omega x_1(0) \sin(\omega t). \quad (3.23)$$

Obsérvese que  $x_1(t)$  es una combinación lineal de seno y coseno con la misma frecuencia  $\omega$ . Cualquier combinación de este tipo puede reescribirse como una única función coseno con amplitud y fase desplazada, utilizando la identidad trigonométrica de suma de ángulos

$$\cos(\omega t + \delta) = \cos \delta \cos(\omega t) - \sin \delta \sin(\omega t).$$

Agrupando términos, se obtiene

$$A \cos(\omega t + \delta) = (A \cos \delta) \cos(\omega t) + (-A \sin \delta) \sin(\omega t).$$

Comparando coeficientes con la expresión de  $x_1(t)$ , se identifican las relaciones

$$A \cos \delta = x_1(0), \quad (3.24)$$

$$-A \sin \delta = \frac{1}{\omega} x_2(0). \quad (3.25)$$

De estas expresiones se deduce

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{x_1^2(0) + x_2^2(0)}, \quad (3.26)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{-x_2(0)}{\omega x_1(0)}\right). \quad (3.27)$$

En consecuencia, la solución puede escribirse como

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad (3.28)$$

$$x_2(t) = -\omega A \sin(\omega t + \delta), \quad (3.29)$$

lo que muestra que las trayectorias del sistema tienen como amplitud constante  $A$  y una fase  $\delta$  determinada por las condiciones iniciales.

Además recordando que el generador de cuadratura tiene como objetivo reconstruir dos señales ortogonales a partir de la medición monofásica  $y(t)$ .

$$v_d(t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad (3.30)$$

$$v_q(t) = A \sin(\omega t + \delta), \quad (3.31)$$

Por lo que se identifica directamente que

$$v_d(t) = y(t) = x_1(t), \quad v_q(t) = -\frac{x_2(t)}{\omega}. \quad (3.32)$$

Dado que  $y(t)$  es medible, la reconstrucción de  $v_q(t)$  requiere estimar tanto  $x_2(t)$  como la frecuencia  $\omega$ .

Para ello, se introduce el sistema aumentado considerando  $\dot{\theta} = 0$  y se propone el siguiente observador adaptable:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & G_0 y(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} - K(t)(H_0 \hat{x}(t) - y(t)), \quad (3.33)$$

donde  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}$  y  $K(t) \in \mathbb{R}^3$  es una ganancia variante en el tiempo diseñada para garantizar convergencia del error de estimación.

La estructura de la ganancia se define como

$$K^\top(t) = [Lk_1, |y(t)|L^2k_2 - \omega_0^2, -y(t)L^3k_3], \quad (3.34)$$

donde  $L > 0$  es un parámetro de alta ganancia y  $k_1, k_2, k_3$  son constantes positivas seleccionadas para asegurar convergencia del observador.

Finalmente, a partir de las estimaciones obtenidas, se reconstruyen

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{\omega_0^2 + \hat{\theta}(t)}, \quad \hat{v}_q(t) = -\frac{\hat{x}_2(t)}{\hat{\omega}(t)}, \quad (3.35)$$

asumiendo  $\omega_0^2 + \hat{\theta}(t) > 0$ .

En síntesis, el observador propuesto se construye a partir de una réplica del modelo dinámico nominal, a la cual se incorpora un término de corrección basado en el error de salida. Esta estructura permite que, a partir de la comparación entre la salida medida y la estimada, se introduzca una realimentación que ajusta de manera simultánea tanto las variables de estado como el parámetro desconocido asociado a la frecuencia.

Asimismo, al modelar dicho parámetro como constante, es posible tratar la incertidumbre de manera explícita dentro del esquema de estimación, lo que resulta particularmente conveniente para su identificación. A su vez la inclusión alta ganancia, favorece una convergencia rápida del error de estimación, aunque introduce un compromiso con la sensibilidad al ruido de medición.

En conjunto, esta formulación permite obtener un esquema de estimación robusto y adecuado para señales monofásicas con frecuencia desconocida, sentando las bases para la reconstrucción precisa tanto de la dinámica del sistema como de la desviación respecto a la frecuencia nominal.

### 3.3 Dinámica del Error de Estimación

El objetivo del observador (3.33) es estimar el vector de estado  $x(t)$  y el parámetro incierto  $\theta$ , garantizando que

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t), \quad \hat{\theta}(t) \rightarrow \theta, \quad t \rightarrow \infty.$$

Para analizar dicha convergencia, se estudia la dinámica del error de estimación asociado al estado extendido

$$\chi^\top(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \theta], \quad \hat{\chi}^\top(t) = [\hat{x}_1(t) \ \hat{x}_2(t) \ \hat{\theta}(t)].$$

Donde el error se define como

$$e(t) = \hat{\chi}(t) - \chi(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}, \quad e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t). \quad (3.36)$$

#### Dinámica del error

Derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{\chi}}(t) - \dot{\chi}(t). \quad (3.37)$$

A partir del sistema aumentado (3.20) y del observador (3.33), la dinámica puede escribirse como

$$\dot{\chi}(t) = A(t)\chi(t), \quad \dot{\hat{\chi}}(t) = A(t)\hat{\chi}(t) - K(t)(H\hat{\chi}(t) - y(t)),$$

donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} F_0 & G_0 y(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0 \ 0].$$

Notando que  $H\hat{\chi}(t) = \hat{x}_1(t)$  y  $y(t) = x_1(t)$ , se tiene

$$He(t) = H\hat{\chi}(t) - y(t) = e_1(t)$$

Sustituyendo en la expresión (3.36) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= A(t)\hat{\chi}(t) - A(t)\chi(t) - K(t)e_1(t) \\
&= A(t)(\hat{\chi}(t) - \chi(t)) - K(t)He(t) \\
&= (A(t) - K(t)H)e(t).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

### Forma explícita

Expresando  $A(t)$  y  $K(t)$  de manera explícita, con

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

se obtiene

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & -y(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$K^\top(t) = [Lk_1, |y(t)|L^2k_2 - \omega_0^2, -y(t)L^3k_3].$$

Calculando el producto  $K(t)H$ , resulta

$$K(t)H = \begin{bmatrix} Lk_1 & 0 & 0 \\ |y(t)|L^2k_2 - \omega_0^2 & 0 & 0 \\ -y(t)L^3k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, la dinámica del error queda dada por

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} -Lk_1 & 1 & 0 \\ -|y(t)|L^2k_2 & 0 & -y(t) \\ y(t)L^3k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t). \tag{3.39}$$

El sistema (3.39) puede escribirse como

$$\dot{e}(t) = F(t)e(t), \quad F(t) = \begin{bmatrix} -Lk_1 & 1 & 0 \\ -|y(t)|L^2k_2 & 0 & -y(t) \\ y(t)L^3k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

La ecuación (3.39) describe un sistema lineal variante en el tiempo, cuya dinámica depende explícitamente de la señal medida  $y(t)$ . El análisis de estabilidad de este sistema se abordará a partir de los resultados presentados en [16], donde se establecen condiciones de estabilidad. Con base en este marco teórico, se procede a estudiar la convergencia del observador propuesto.

#### 3.3.1. Prueba de Estabilidad

Para facilitar el análisis de estabilidad, se introduce a continuación un cambio de coordenadas que permite normalizar la dinámica del sistema y hacer explícito el efecto del parámetro de alta ganancia  $L$ . Esta transformación resulta útil para estudiar las propiedades de convergencia del error de estimación.

### Cambio de coordenadas

Para facilitar el análisis, se introduce la transformación lineal

$$z(t) = T_1 e(t), \quad T_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L^2 k_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L^3 k_2} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

De esta definición se obtiene

$$e(t) = T_1^{-1} z(t), \quad T_1^{-1} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L^2 k_1 & 0 \\ 0 & 0 & L^3 k_2 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Derivando,

$$\dot{z}(t) = T_1 \dot{e}(t) = T_1 F(t) e(t) = T_1 F(t) T_1^{-1} z(t). \quad (3.43)$$

Calculando el producto matricial se obtiene

$$T_1 F(t) T_1^{-1} = L \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 & 0 \\ -\tilde{k}_2 |y(t)| & 0 & -\tilde{k}_2 y(t) \\ \tilde{k}_3 y(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

donde se definen los parámetros normalizados como

$$\tilde{k}_2 = \frac{k_2}{k_1}, \quad \tilde{k}_3 = \frac{k_3}{k_2}. \quad (3.45)$$

En consecuencia, la dinámica en las nuevas coordenadas queda dada por

$$\dot{z}(t) = L \bar{F}(t) z(t), \quad \bar{F}(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 & 0 \\ -\tilde{k}_2 |y(t)| & 0 & -\tilde{k}_2 y(t) \\ \tilde{k}_3 y(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

La transformación lineal  $z(t) = T_1 e(t)$  permite normalizar la dinámica del sistema al separar explícitamente el efecto de la ganancia  $L$ . En esta nueva representación, se hace evidente el carácter de alta ganancia del observador, ya que  $L$  aparece como un multiplicador global que regula la velocidad de convergencia, mientras que la estructura dinámica fundamental queda contenida en la matriz  $\bar{F}(t)$ . Esta separación facilita el análisis de estabilidad, el cual se realizará de manera seccionada considerando los casos  $y(t) \geq 0$  y  $y(t) < 0$ , aprovechando así la naturaleza conmutada del sistema normalizado.

#### Caso 1 — $y(t) \geq 0$

Dado que  $|y(t)| = y(t)$  cuando  $y(t) \geq 0$ , y considerando la transformación lineal

$$\zeta_+(t) = T_2^+ z(t), \quad T_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

la nueva dinámica se obtiene como

$$\dot{\zeta}_+(t) = T_2^+ \dot{z}(t) = T_2^+ L \bar{F}(t) z(t) = T_2^+ L \bar{F}(t) (T_2^+)^{-1} \zeta_+(t).$$

Después de efectuar la multiplicación matricial se obtiene

$$\dot{\zeta}_+(t) = L \left( k_1 E_1^+ + y(t) \tilde{k}_2 E_2^+ + y(t) \tilde{k}_3 E_3^+ \right) \zeta_+(t), \quad (3.48)$$

donde

$$E_1^+ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que la dinámica del error queda expresada como combinación lineal de matrices constantes por  $k_i$  y por  $y(t)$ .

### **Función de Lyapunov**

Con el fin de analizar la estabilidad del sistema [3.48](#), se propone una función de Lyapunov cuadrática con el objetivo de comprobar la estabilidad del sistema.

$$V_+(\zeta_+) = \zeta_+^\top P \zeta_+, \quad P = \text{diag}(p_1, p_2, p_3), \quad p_i > 0.$$

Su derivada temporal es

$$\dot{V}_+ = \dot{\zeta}_+^\top P \zeta_+ + \zeta_+^\top P \dot{\zeta}_+.$$

Usando [3.48](#) y la propiedad  $(AB)^\top = B^\top A^\top$  se obtiene

$$\dot{V}_+(t) = L \zeta_+^\top (A^\top P + PA) \zeta_+,$$

donde

$$A = k_1 E_1^+ + y(t) \tilde{k}_2 E_2^+ + y(t) \tilde{k}_3 E_3^+.$$

Se obtiene

$$PA + A^\top P = k_1 S_1 + y(t) \tilde{k}_2 S_2 + y(t) \tilde{k}_3 S_3,$$

donde

$$S_i = P E_i^+ + E_i^{+\top} P.$$

### **Acotación del término dominante**

Dado que  $P$  es diagonal y  $E_1^+$  tiene únicamente un elemento negativo en la posición  $(1, 1)$ , se verifica que

$$S_1 \preceq 0.$$

Supóngase además que la señal medida está acotada, es decir,

$$|y(t)| \leq A_{\text{máx}}.$$

Para garantizar que el término proporcional  $k_1$  domine la contribución dependiente de  $y(t)$ , se impone la condición

$$k_1 > \tilde{k}_1 A_{\text{máx}}. \quad (3.49)$$

Bajo esta hipótesis, para todo  $y(t) \geq 0$  se tiene

$$y(t)\tilde{k}_1 \leq \tilde{k}_1 A_{\text{máx}} < k_1.$$

Dado que  $S_1 \preceq 0$ , al multiplicar por una constante mayor se obtiene una matriz más negativa. En consecuencia,

$$k_1 S_1 \preceq y(t)\tilde{k}_1 S_1.$$

Esto permite obtener una cota superior para la derivada de la función de Lyapunov, lo cual facilita el análisis de su signo. En las nuevas coordenadas, definidas mediante el cambio de variable  $\zeta_+(t) = T_2^+ z(t)$ , la derivada de Lyapunov puede acotarse como

$$\dot{V}_+(t) \leq y(t)L\zeta_+^\top (PR_+ + R_+^\top P)\zeta_+,$$

donde

$$R_+ = \tilde{k}_1 E_1^+ + \tilde{k}_2 E_2^+ + \tilde{k}_3 E_3^+.$$

Obsérvese que  $\zeta_+(t)$  corresponde únicamente a una representación del estado en un sistema de coordenadas transformado. Además, el parámetro  $L$  es una ganancia positiva del observador ( $L > 0$ ) y, en el caso considerado, se cumple  $y(t) \geq 0$ . Por lo tanto, el signo de  $\dot{V}_+(t)$  queda determinado únicamente por la matriz simétrica

$$PR_+ + R_+^\top P.$$

El cambio de coordenadas definido por  $\zeta_+(t) = T_2^+ z(t)$  no altera la dinámica del sistema, sino que permite reorganizar su estructura de forma conveniente para el análisis de estabilidad. En particular, esta transformación induce una descomposición de la dinámica en términos que dependen linealmente de los parámetros  $k_i$  y de la señal  $y(t)$ .

Esto facilita la construcción de la función de Lyapunov, ya que permite separar un término dominante asociado a  $k_1$ , cuya contribución es negativa definida, de términos adicionales dependientes de  $y(t)$ , los cuales pueden ser acotados bajo la hipótesis de señal limitada. De este modo, el cambio de coordenadas resulta fundamental para establecer condiciones suficientes de estabilidad mediante desigualdades matriciales más manejables.

### Condición de estabilidad

En consecuencia, se garantiza

$$\dot{V}_+(t) \leq 0$$

si

$$PR_+ + R_+^\top P < 0.$$

Equivalentemente,

$$-PR_+ - R_+^\top P > 0.$$

La matriz resultante es

$$-PR_+ - R_+^\top P = \begin{bmatrix} 2p_1(\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2) & -p_1\tilde{k}_2 + p_2(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_3) & -p_3\tilde{k}_3 \\ * & 2p_2(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_3) & (p_2 - p_3)\tilde{k}_3 \\ * & * & 2p_3\tilde{k}_3 \end{bmatrix}.$$

De esta forma se obtienen las condiciones

$$\tilde{k}_3 > 0,$$

$$\tilde{k}_2 > \frac{(p_2 + p_3)^2}{4p_2p_3} \tilde{k}_3,$$

y

$$\tilde{k}_1 > \frac{p_1p_2(p_2\tilde{k}_3 + p_3(\tilde{k}_3 - 2\tilde{k}_2)) + p_2^2p_3(\tilde{k}_3 - \tilde{k}_2) - p_1^2p_3\tilde{k}_2}{\tilde{k}_3(p_2^2 + p_3^2) + 2p_2p_3(\tilde{k}_3 - 2\tilde{k}_2)} \cdot \frac{\tilde{k}_2}{p_1}.$$

Estas desigualdades establecen restricciones sobre los parámetros del observador que garantizan que la matriz simétrica

$$PR_+ + R_+^\top P$$

sea negativa definida. En consecuencia, bajo dichas condiciones se obtiene  $\dot{V}_+(t) \leq 0$ , lo que asegura que la función de Lyapunov no aumenta con el tiempo y permite demostrar la estabilidad del sistema de error.

Desde el punto de vista del diseño del observador, estas condiciones determinan relaciones entre las ganancias normalizadas  $\tilde{k}_1$ ,  $\tilde{k}_2$  y  $\tilde{k}_3$  que estabilidad asintótica.

Estas condiciones coinciden con las presentadas en [16]. En la Sección 3.4 se presenta un procedimiento algorítmico para su selección sistemática.

### Caso 2 — $y(t) < 0$

Para el caso en que  $y(t) < 0$ , se tiene  $|y(t)| = -y(t)$ . Repitiendo el análisis anterior, se introduce ahora la transformación lineal

$$\zeta_-(t) = T_2^- z(t), \quad T_2^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Derivando,

$$\dot{\zeta}_-(t) = T_2^- \dot{z}(t) = T_2^- L\bar{F}(t)z(t) = T_2^- L\bar{F}(t)(T_2^-)^{-1}\zeta_-(t).$$

Después de efectuar la multiplicación matricial se obtiene

$$\dot{\zeta}_-(t) = L \left( k_1 E_1^- + |y(t)| \tilde{k}_2 E_2^- + |y(t)| \tilde{k}_3 E_3^- \right) \zeta_-(t), \quad (3.51)$$

donde

$$E_1^- = E_1^+, \quad E_2^- = E_2^+, \quad E_3^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que nuevamente la dinámica queda expresada como combinación lineal de matrices constantes, ponderadas por  $k_i$  y por  $|y(t)|$ .

### Función de Lyapunov

Se propone la misma función de Lyapunov cuadrática utilizada en el caso anterior, por lo que

$$V_-(\zeta_-) = \zeta_-^\top P \zeta_-, \quad P = \text{diag}(p_1, p_2, p_3), \quad p_i > 0.$$

Dado que  $P$  es una matriz diagonal definida positiva, la función  $V_-$  es positiva definida y constituye una medida asociada al error en las coordenadas transformadas  $\zeta_-$ .

Su derivada temporal es

$$\dot{V}_- = \dot{\zeta}_-^\top P \zeta_- + \zeta_-^\top P \dot{\zeta}_-.$$

Usando (3.51) y la propiedad  $(AB)^\top = B^\top A^\top$  se obtiene

$$\dot{V}_-(t) = L \zeta_-^\top (A^\top P + PA) \zeta_-,$$

donde ahora

$$A = k_1 E_1^- + |y(t)| \tilde{k}_2 E_2^- + |y(t)| \tilde{k}_3 E_3^-.$$

Se obtiene

$$PA + A^\top P = k_1 S_1^- + |y(t)| \tilde{k}_2 S_2^- + |y(t)| \tilde{k}_3 S_3^-,$$

donde

$$S_i^- = P E_i^- + E_i^{-\top} P.$$

### Acotación dominante

Como en el caso anterior, dado que  $P$  es diagonal y  $E_1^- = E_1^+$ , se verifica que

$$S_1^- \preceq 0.$$

Supóngase nuevamente que la señal medida está acotada:

$$|y(t)| \leq A_{\text{máx}}.$$

Imponiendo la condición

$$k_1 > \tilde{k}_1 A_{\text{máx}}, \tag{3.52}$$

se tiene

$$|y(t)|\tilde{k}_1 \leq \tilde{k}_1 A_{\text{máx}} < k_1.$$

Dado que  $S_1^- \preceq 0$ , se obtiene

$$k_1 S_1^- \preceq |y(t)|\tilde{k}_1 S_1^-.$$

Por lo tanto, la derivada de la función de Lyapunov puede acotarse como

$$\dot{V}_-(t) \leq |y(t)|L\zeta_-^\top (PR_- + R_-^\top P)\zeta_-, \quad (3.53)$$

donde

$$R_- = \tilde{k}_1 E_1^- + \tilde{k}_2 E_2^- + \tilde{k}_3 E_3^-.$$

En este caso, el cambio de coordenadas  $\zeta_-(t) = T_2^- z(t)$  corresponde a la dinámica asociada al modo  $y(t) < 0$ . Dado que  $L > 0$  y  $|y(t)| \geq 0$ , el signo de  $\dot{V}_-(t)$  queda determinado por la matriz simétrica  $PR_- + R_-^\top P$ .

### Condición de estabilidad

En consecuencia, se tiene

$$\dot{V}_-(t) \leq 0$$

si

$$PR_- + R_-^\top P < 0,$$

o equivalentemente,

$$-PR_- - R_-^\top P > 0.$$

La matriz resultante se obtiene como

$$-PR_- - R_-^\top P = \begin{bmatrix} 2p_1(\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2) & -p_1\tilde{k}_2 + p_2(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_3) & p_3\tilde{k}_3 \\ * & 2p_2(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_3) & (p_3 - p_2)\tilde{k}_3 \\ * & * & 2p_3\tilde{k}_3 \end{bmatrix}.$$

El análisis de positividad de esta matriz conduce exactamente a las mismas condiciones sobre  $\tilde{k}_1$ ,  $\tilde{k}_2$  y  $\tilde{k}_3$  obtenidas previamente para el caso  $y(t) \geq 0$ .

En consecuencia, al seleccionar los parámetros del observador de acuerdo con dichas desigualdades, se garantiza que

$$\dot{V}_-(t) \leq 0 \quad \text{y} \quad \dot{V}_+(t) \leq 0,$$

Lo anterior garantiza, en principio, que cada función de Lyapunov cumple su propósito de estabilidad dentro del subsistema para el cual fue diseñada. Sin embargo, esta propiedad no se conserva necesariamente al considerar el sistema completo, en el que dichas dinámicas interactúan de manera conjunta. Por esta razón, resulta necesario analizar la estabilidad global mediante el enfoque de funciones de Lyapunov conmutables, el cual permite estudiar el comportamiento del sistema bajo la interacción y conmutación entre diferentes dinámicas.

### 3.3.2. Función de Lyapunov Conmutada

Recordemos que el sistema normalizado (3.46) es equivalente al sistema original (3.39). En consecuencia, demostrar la estabilidad asintótica uniforme del origen para el sistema en coordenadas  $z$  implica la estabilidad asintótica uniforme del sistema original.

Dado que la dinámica depende del signo de  $y(t)$ , se introduce una función de Lyapunov conmutada definida como

$$V(z) = \begin{cases} z^\top P_+ z, & \text{si } y(t) \geq 0, \\ z^\top P_- z, & \text{si } y(t) < 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

donde

$$P_+ = (T_2^+)^{\top} P T_2^+, \quad P_- = (T_2^-)^{\top} P T_2^-. \quad (3.55)$$

Estas matrices corresponden a la representación en el espacio  $z$  de las funciones cuadráticas previamente analizadas en coordenadas  $\zeta$ . Por construcción,  $P_+$  y  $P_-$  son simétricas definidas positivas.

Obsérvese que la función  $V(z)$  depende del tiempo únicamente a través de la trayectoria  $z(t)$  y del signo de  $y(t)$ .

#### Derivada temporal entre conmutaciones

De los análisis desarrollados en los casos  $y(t) \geq 0$  y  $y(t) < 0$ , se obtiene que la derivada temporal satisface

$$\dot{V}(t) \leq \begin{cases} y(t) L z^\top(t) Q z(t), & \text{si } y(t) \geq 0, \\ |y(t)| L z^\top(t) Q z(t), & \text{si } y(t) < 0, \end{cases} \quad (3.56)$$

donde

$$Q = (T_2^+)^{\top} (P R_+ + R_+^{\top} P) T_2^+ = (T_2^-)^{\top} (P R_- + R_-^{\top} P) T_2^- < 0. \quad (3.57)$$

Dado que el sistema conmutado emplea dos funciones de Lyapunov (una por cada modo), no es suficiente verificar por separado la disminución de cada una en su respectivo intervalo de validez. Para concluir estabilidad asintótica uniforme del origen bajo conmutación, es necesario verificar las condiciones establecidas en [16], las cuales se resumen como:

1. **Decrecimiento entre conmutaciones:** demostrar que, en cada intervalo donde  $y(t)$  no cambia de signo, la función  $V(t)$  decrece y obtener una cota explícita de dicha disminución.
2. **Efecto de la conmutación:** acotar el posible incremento de  $V(t)$  en los instantes de conmutación, asociado al cambio de función de Lyapunov.
3. **Dominancia del decrecimiento:** establecer condiciones sobre el parámetro de alta ganancia  $L$  que garanticen que el decrecimiento acumulado entre conmutaciones domina el incremento inducido por las conmutaciones.

Para comenzar, se analiza el cumplimiento de la primera condición.

Con el objetivo de analizar la forma cuadrática asociada a la función de Lyapunov, considérese la expresión

$$x^\top P x,$$

donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica definida positiva.

Se introduce el cambio de coordenadas

$$z = Tx, \quad \Rightarrow \quad x = T^\top z, \quad (3.58)$$

donde  $T$  es una matriz ortogonal, es decir,  $T^\top T = I$ .

Sustituyendo en la forma cuadrática se obtiene

$$x^\top Px = (T^\top z)^\top P(T^\top z) \quad (3.59)$$

$$= z^\top TPT^\top z, \quad (3.60)$$

donde se ha utilizado la propiedad  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .

Dado que  $P$  es simétrica, sus valores propios satisfacen  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . Además, al ser definida positiva, todos sus valores propios son estrictamente positivos. En consecuencia,  $P$  es diagonalizable mediante una transformación ortogonal; es decir, existe una matriz ortogonal  $T$  tal que

$$T^\top PT = D, \quad (3.61)$$

donde

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i > 0.$$

Por lo tanto,

$$x^\top Px = z^\top Dz. \quad (3.62)$$

Expresando explícitamente la forma cuadrática, se tiene

$$z^\top Dz = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

lo cual conduce a

$$z^\top Dz = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2. \quad (3.64)$$

De esta forma, se obtiene una expresión desacoplada que permite analizar la contribución de cada componente del estado de manera independiente.

En particular, se obtiene que

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq x^\top Px \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2, \quad (3.65)$$

resultado que será fundamental para establecer cotas explícitas sobre el decrecimiento de la función de Lyapunov.

De manera análoga, considerando las matrices  $P_+$  y  $P_-$  definidas en (3.55), y dado que ambas son simétricas definidas positivas, se cumple que para  $i \in \{+, -\}$  existen constantes positivas  $\lambda_{\min}(P_i)$  y  $\lambda_{\max}(P_i)$  tales que

$$\lambda_{\min}(P_i) \|z\|^2 \leq z^\top P_i z \leq \lambda_{\max}(P_i) \|z\|^2. \quad (3.66)$$

Estas desigualdades permiten relacionar directamente la función de Lyapunov con la norma del estado, lo cual será clave para cuantificar tanto el decrecimiento continuo como el posible incremento debido a la conmutación.

Ahora bien, a partir de la expresión de la derivada temporal de la función de Lyapunov, se tiene

$$\dot{V}(t) \leq \begin{cases} y(t) L z^\top(t) Q z(t), & \text{si } y(t) \geq 0, \\ |y(t)| L z^\top(t) Q z(t), & \text{si } y(t) < 0, \end{cases} \quad (3.67)$$

como se indicó previamente.

Dado que la matriz  $Q$  es simétrica definida negativa, sus valores propios satisfacen

$$\lambda_{\min}(Q) \leq \lambda_i(Q) \leq \lambda_{\max}(Q) < 0.$$

En consecuencia, para todo  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  se cumple la cota cuadrática

$$\lambda_{\min}(Q) \|z(t)\|^2 \leq z^\top(t) Q z(t) \leq \lambda_{\max}(Q) \|z(t)\|^2. \quad (3.68)$$

Multiplicando (3.68) por el escalar no negativo  $L|y(t)| \geq 0$ , el orden de las desigualdades se preserva y se obtiene

$$L|y(t)| \lambda_{\min}(Q) \|z(t)\|^2 \leq L|y(t)| z^\top(t) Q z(t) \leq L|y(t)| \lambda_{\max}(Q) \|z(t)\|^2.$$

Por otra parte, de (3.67) se tiene que

$$\dot{V}(t) \leq L|y(t)| z^\top(t) Q z(t).$$

Combinando ambas relaciones y recordando que los valores propios de  $Q$  son negativos, se concluye que

$$-L|y(t)| \lambda_{\min}(Q) \|z(t)\|^2 \geq \dot{V}(t) \geq -L|y(t)| \lambda_{\max}(Q) \|z(t)\|^2. \quad (3.69)$$

Usando la cota superior de la función de Lyapunov vista en 3.66,

$$V(z) = z^\top P_i z \leq \lambda_{\max}(P_i) \|z\|^2, \quad (3.70)$$

se deduce que

$$\|z\|^2 \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(P_i)} V(z). \quad (3.71)$$

Por lo tanto,

$$-\|z\|^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(P_i)} V(z). \quad (3.72)$$

Usando la cota superior obtenida en (3.69),

$$\dot{V}(t) \leq -L|y(t)| \lambda_{\min}(Q) \|z(t)\|^2, \quad (3.73)$$

y substituyendo la relación dada en (3.72), se obtiene finalmente la siguiente cota diferencial

$$\dot{V}(t) \leq -L |y(t)| \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P_i)} V(t), \quad (3.74)$$

La desigualdad diferencial obtenida en (3.74) describe la evolución temporal de la función de Lyapunov  $V(t)$ . Con el fin de obtener una cota explícita para  $V(t)$ , se procede a integrar dicha desigualdad.

Observando que la expresión involucra simultáneamente  $V(t)$  y su derivada  $\dot{V}(t)$ , se aplica el método de separación de variables. Para ello se divide ambos lados de la desigualdad por  $V(t)$ , lo cual es válido debido a que la función de Lyapunov es positiva definida ( $V(t) > 0$  para  $z(t) \neq 0$ ). De esta forma se obtiene

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \leq -L \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P_i)} |y(t)|.$$

Nótese que el término del lado izquierdo corresponde a la derivada temporal del logaritmo natural de  $V(t)$ , es decir,

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)} = \frac{d}{dt} (\ln V(t)).$$

Por lo tanto, integrando ambos lados de la desigualdad en un intervalo  $[t_0, t]$  en el cual la señal  $y(t)$  no cambia de signo, se obtiene

$$V(t) \leq V(t_0) \exp\left(-L \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P_i)} \int_{t_0}^t |y(\tau)| d\tau\right). \quad (3.75)$$

Supóngase ahora que, para todo intervalo  $[\tau_i, \tau_i + h]$  en el cual  $y(t)$  no cambia de signo, se satisface la condición de excitación promedio

$$\int_{\tau_i}^{\tau_i+h} |y(\tau)| d\tau \geq \alpha h, \quad \alpha > 0. \quad (3.76)$$

La condición dada en (3.76) establece que, en todo intervalo de longitud  $h$  en el cual la señal  $y(t)$  conserva su signo, el valor absoluto de dicha señal posee una excitación promedio mínima acotada inferiormente por  $\alpha$ . En este contexto, el parámetro  $h > 0$  define la longitud de la ventana temporal sobre la cual se evalúa la información aportada por la señal, mientras que  $\alpha > 0$  representa el nivel mínimo promedio de excitación requerido en dicha ventana.

Desde un punto de vista interpretativo, esta hipótesis evita que la señal  $y(t)$  permanezca arbitrariamente cercana a cero durante intervalos prolongados, ya que ello reduciría la información disponible para el mecanismo de corrección del observador. En consecuencia, la desigualdad (3.76) garantiza que, en promedio, la salida aporte suficiente contenido informativo para sostener el proceso de estimación.

Esta propiedad puede entenderse como una condición de excitación persistente en promedio sobre cada intervalo  $[\tau_i, \tau_i + h]$  sin cambio de signo. Aunque no se exige necesariamente que la señal sea constantemente grande en todo instante, sí se requiere que su contribución acumulada en cada ventana temporal sea suficientemente significativa. Tal condición resulta fundamental para establecer cotas de decrecimiento de la función de Lyapunov y, por ende, para demostrar convergencia del error de estimación.

Ahora substituyendo (3.76) en (3.75), se obtiene la cota exponencial

$$V(t) \leq V(t_0) \exp\left(-L \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P_i)} \alpha h\right). \quad (3.77)$$

Definiendo la constante positiva

$$\rho_1 \triangleq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P_i)} \alpha,$$

la desigualdad anterior puede escribirse de forma más compacta como

$$V(\tau_i + h) \leq V(\tau_i) e^{-L \rho_1 h}. \quad (3.78)$$

La expresión (3.78) demuestra que, entre eventos de conmutación, la función de Lyapunov decrece exponencialmente con una tasa proporcional a  $L$ . En particular, un incremento en  $L$  acelera el ritmo de convergencia del sistema durante los intervalos en los cuales la dinámica es continua.

Para el análisis de la segunda condición, se considera ahora un instante de conmutación  $\tau_i$ . En dicho instante existen los límites laterales  $\tau_i^-$  y  $\tau_i^+$ , correspondientes a los valores inmediatamente antes y después del cambio de signo de  $y(t)$ .

Nótese que el estado del sistema es continuo. En efecto, la dinámica del sistema es lineal y no contiene discontinuidades directas en el estado, por lo que la solución del sistema diferencial satisface

$$z(\tau_i^-) = z(\tau_i^+) = z(\tau_i). \quad (3.79)$$

Sin embargo, la función de Lyapunov considerada es de tipo conmutado, ya que depende del signo de la señal  $y(t)$ , la cual está directamente relacionada con el estado del sistema. En este sentido, la conmutación es inherentemente dependiente del estado. No obstante, para efectos de análisis, se consideran intervalos de tiempo en los cuales el signo de  $y(t)$  permanece constante, lo que permite modelar el sistema como conmutado en el tiempo. En consecuencia, la función candidata de Lyapunov no es continua, sino que se define a tramos como

$$V(z, t) = \begin{cases} z^\top P^+ z, & \text{si } y(t) \geq 0, \\ z^\top P^- z, & \text{si } y(t) < 0. \end{cases} \quad (3.80)$$

Por lo tanto, cualquier variación instantánea en la función de Lyapunov en los instantes de conmutación no se debe a discontinuidades en el estado, sino al cambio en la matriz que define la función candidata activa en cada región.

Recordando que, para toda matriz simétrica definida positiva  $P$ , se satisface la desigualdad

$$\lambda_{\min}(P) \|z\|^2 \leq z^\top P z \leq \lambda_{\max}(P) \|z\|^2, \quad (3.81)$$

se procede a evaluar la función de Lyapunov inmediatamente antes y después del instante  $\tau_i$ .

Antes de la conmutación se tiene

$$\lambda_{\min}(P_-) \|z\|^2 \leq V(z_{\tau_i^-}) \leq \lambda_{\max}(P_-) \|z\|^2, \quad (3.82)$$

mientras que después de la conmutación se cumple

$$\lambda_{\min}(P_+) \|z\|^2 \leq V(z_{\tau_i^+}) \leq \lambda_{\max}(P_+) \|z\|^2. \quad (3.83)$$

A partir de estas expresiones se obtiene

$$\|z\|^2 \leq \frac{V(z_{\tau_i^-})}{\lambda_{\min}(P_-)} \quad \text{y} \quad \|z\|^2 \geq \frac{V(z_{\tau_i^+})}{\lambda_{\max}(P_+)}, \quad (3.84)$$

lo cual implica

$$\frac{V(z_{\tau_i^-})}{\lambda_{\min}(P_-)} \geq \|z\|^2 \geq \frac{V(z_{\tau_i^+})}{\lambda_{\max}(P_+)}. \quad (3.85)$$

De esta doble desigualdad se deduce inmediatamente que

$$\frac{\lambda_{\max}(P_+)}{\lambda_{\min}(P_-)} \geq \frac{V(z_{\tau_i^+})}{V(z_{\tau_i^-})}. \quad (3.86)$$

Definiendo la constante positiva

$$\rho_2 \triangleq \frac{\lambda_{\max}(P_+)}{\lambda_{\min}(P_-)}, \quad (3.87)$$

La constante  $\rho_2$  definida en (3.104) permite cuantificar el posible incremento de la función de Lyapunov en los instantes de conmutación. En efecto, dado que el estado  $z(t)$  es continuo, pero la función de Lyapunov cambia su definición al variar el signo de  $y(t)$ , puede presentarse un salto en su valor.

La razón entre el valor propio máximo de  $P_+$  y el valor propio mínimo de  $P_-$  proporciona una cota superior para este salto, garantizando que

$$V(z_{\tau_i^+}) \leq \rho_2 V(z_{\tau_i^-}), \quad (3.88)$$

Se puede apreciar que  $\rho_2$  mide la discrepancia entre las funciones cuadráticas asociadas a cada modo del sistema. En particular, valores de  $\rho_2$  cercanos a la unidad indican una mayor compatibilidad entre ambas funciones de Lyapunov, mientras que valores grandes pueden generar incrementos significativos en los instantes de conmutación.

Por lo tanto, esta constante juega un papel fundamental en el análisis de estabilidad del sistema conmutado, ya que permite evaluar si la disminución de la función de Lyapunov entre intervalos compensa los posibles incrementos instantáneos.

Para concluir el análisis, se considera la evolución de la función de Lyapunov entre instantes de conmutación y el salto asociado al cambio de función.

Entre conmutaciones se tiene

$$V(z_{\tau_i^-}) \leq e^{-\rho_1 Lh} V(z_{\tau_{i-1}^+}), \quad (3.89)$$

donde  $\rho_1 > 0$  es la constante obtenida del análisis continuo.

En el instante de conmutación se cumple

$$V(z_{\tau_i^+}) \leq \rho_2 V(z_{\tau_i^-}), \quad (3.90)$$

donde  $\rho_2 > 0$  cuantifica el posible incremento debido al cambio de matriz  $P$ .

Combinando (3.89) y (3.90), se obtiene

$$V(z_{\tau_i^+}) \leq \rho_2 e^{-\rho_1 L h} V(z_{\tau_{i-1}^+}). \quad (3.91)$$

Por lo tanto, la estabilidad asintótica uniforme del sistema conmutado queda garantizada siempre que

$$\rho_2 e^{-\rho_1 L h} < 1. \quad (3.92)$$

Equivalentemente, esta condición puede expresarse como

$$L > \frac{1}{\rho_1 h} \ln(\rho_2). \quad (3.93)$$

Esta desigualdad establece una cota inferior para el parámetro  $L$ , la cual depende de las constantes positivas  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y del tiempo mínimo de permanencia  $h$  asociado a la señal de conmutación. En particular, si  $L$  se elige suficientemente grande para satisfacer la condición anterior, se garantiza que la función de Lyapunov decrece exponencialmente a lo largo de las trayectorias del sistema.

Por lo tanto, bajo esta condición, el origen del sistema conmutado no sólo es estable en el sentido de Lyapunov, sino que es uniformemente asintóticamente estable. Más aún, debido a la naturaleza exponencial del decrecimiento, se concluye que la estabilidad es de tipo exponencial.

## 3.4 Sintonización del Generador de Cuadratura

Con el objetivo de garantizar la convergencia del observador y, por consiguiente, la correcta generación de la señal en cuadratura, se presenta a continuación el procedimiento sistemático de sintonización basado en el resultado principal del artículo [\[16\]](#).

El diseño se fundamenta en el análisis de estabilidad del sistema conmutado desarrollado en la sección anterior, particularmente en la condición final

$$\rho_2 e^{-\rho_1 L h} < 1, \quad (3.94)$$

la cual garantiza estabilidad asintótica uniforme del origen.

### Suposiciones

Para poder aplicar el procedimiento de sintonización, se requieren las siguientes consideraciones:

1. Se conoce una cota superior  $A_{\text{máx}} > 0$  tal que

$$|y(t)| \leq A_{\text{máx}}, \quad \forall t \geq t_0.$$

2. Se conoce una cota inferior  $h > 0$  para el tiempo entre cambios de signo de  $y(t)$ .
3. Existe una constante  $\alpha > 0$  tal que, para todo intervalo  $[\tau, \tau + h]$  donde  $y(t)$  no cambia de signo,

$$\frac{1}{h} \int_{\tau}^{\tau+h} |y(t)| dt \geq \alpha. \quad (3.95)$$

Las hipótesis anteriores son necesarias para garantizar que el sistema posee suficiente nivel de excitación y que la conmutación no ocurre con frecuencia arbitrariamente alta. En particular, la condición [\(3.95\)](#) es análoga a una condición de persistencia de excitación, la cual resulta fundamental para asegurar convergencia en presencia de parámetros desconocidos.

### Procedimiento de Sintonización

**Paso 1.** Seleccionar tres constantes positivas

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_3 > 0. \quad (3.96)$$

Estas constantes definen la matriz diagonal  $P$  utilizada en la función de Lyapunov  $V(z) = z^\top Pz$ .

**Paso 2.** Diseñar tres constantes positivas normalizadas  $\tilde{k}_1$ ,  $\tilde{k}_2$  y  $\tilde{k}_3$  tales que:

$$\tilde{k}_3 > 0, \quad (3.97)$$

$$\tilde{k}_2 > \frac{(p_2 + p_3)^2}{4p_2p_3} \tilde{k}_3, \quad (3.98)$$

$$\tilde{k}_1 > \frac{p_1p_2(p_2\tilde{k}_3 + p_3(\tilde{k}_3 - 2\tilde{k}_2)) + p_2^2p_3(\tilde{k}_3 - \tilde{k}_2) - p_1^2p_3\tilde{k}_2}{\tilde{k}_3(p_2^2 + p_3^2) + 2p_2p_3(\tilde{k}_3 - 2\tilde{k}_2)} \cdot \frac{\tilde{k}_2}{p_1}. \quad (3.99)$$

**Paso 3.** Una vez definidos los parámetros normalizados, se seleccionan las ganancias reales del observador como

$$k_1 > \tilde{k}_1 A_{\text{máx}}, \quad k_2 = k_1 \tilde{k}_2, \quad k_3 = k_2 \tilde{k}_3. \quad (3.100)$$

**Paso 4.** Construir las matrices simétricas

$$P_+ = (T_2^+)^{\top} P T_2^+, \quad P_- = (T_2^-)^{\top} P T_2^-. \quad (3.101)$$

**Paso 5.** Calcular la matriz simétrica

$$Q = P R_{\pm} + R_{\pm}^{\top} P, \quad (3.102)$$

**Paso 6.** Calcular las constantes

$$\rho_1 = \text{máx} \left\{ \frac{\lambda_{\text{máx}}(Q)}{\lambda_{\text{máx}}(P_+)}, \frac{\lambda_{\text{máx}}(Q)}{\lambda_{\text{máx}}(P_-)} \right\}, \quad (3.103)$$

$$\rho_2 = \text{máx} \left\{ \frac{\lambda_{\text{máx}}(P_+)}{\lambda_{\text{mín}}(P_-)}, \frac{\lambda_{\text{máx}}(P_-)}{\lambda_{\text{mín}}(P_+)} \right\}. \quad (3.104)$$

**Paso 7.** Seleccionar  $L > 0$  tal que

$$L > \frac{\ln(\rho_2)}{\alpha h \rho_1}. \quad (3.105)$$

Si los parámetros del observador se seleccionan conforme al procedimiento anterior, se garantiza que

$$\rho_2 e^{-\rho_1 L h} < 1,$$

lo cual implica que la función de Lyapunov decrece geoméricamente en cada intervalo de conmutación. En consecuencia, el generador de cuadratura converge uniformemente al valor real de la señal y del parámetro incierto.

## 3.5 Validación en Simulación y Comparación

### 3.5.1. Caso de estudio: perturbación de frecuencia mediante ecuación *swing*

Con el objetivo de evaluar el desempeño dinámico de los diferentes algoritmos de sincronización, se plantea un caso de estudio donde se introduce una perturbación de frecuencia en el sistema eléctrico. Para generar dicha perturbación se emplea un modelo simplificado basado en la ecuación de oscilación (*swing equation*), la cual representa el comportamiento de la frecuencia cuando existe un desbalance entre la potencia generada y la potencia demandada en la red.

La ecuación utilizada en la simulación corresponde a la forma amortiguada de la ecuación *swing*:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{2H} (\Delta P - D(\omega - \omega_0)) \quad (3.106)$$

donde  $\omega$  representa la frecuencia angular del sistema,  $\omega_0$  es la frecuencia angular nominal,  $H$  es la constante de inercia equivalente,  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\Delta P$  representa el desbalance de potencia en el sistema [24].

Para la simulación se consideran los siguientes parámetros del modelo [31]:

- Constante de inercia:  $H = 3 \text{ s}$
- Coeficiente de amortiguamiento:  $D = 0.9$

Inicialmente el sistema opera en condición de régimen permanente con  $\Delta P = 0$ , por lo que la frecuencia permanece en su valor nominal. Una vez que los algoritmos de sincronización han alcanzado convergencia, en  $t = 1 \text{ s}$  se introduce una perturbación de potencia  $\Delta P = -3$ . Esta perturbación genera una desviación transitoria de la frecuencia del sistema, permitiendo analizar la capacidad de seguimiento dinámico de los diferentes métodos de estimación de fase y frecuencia.

Las variaciones de frecuencia en un sistema eléctrico pueden originarse por diversos eventos operativos. Entre los más comunes se encuentran:

- Conexión o desconexión de cargas de gran potencia.
- Variaciones rápidas de generación renovable (por ejemplo, cambios de irradiancia en sistemas fotovoltaicos).
- Desconexión de unidades generadoras o perturbaciones en microredes con baja inercia.
- Eventos severos del sistema eléctrico como fallas en líneas de transmisión o separación de áreas del sistema.

El objetivo de este caso de estudio es comparar el comportamiento de los diferentes métodos de sincronización considerados en este trabajo, particularmente el observador propuesto, el SOGI-PLL y el pPLL basado en un filtro *notch*.

#### Modelo de red

Para evaluar el desempeño de los algoritmos de sincronización considerados en este trabajo, se implementa un modelo simplificado de la red eléctrica en el entorno de simulación. El sistema se modela como una fuente de tensión sinusoidal cuya frecuencia puede variar dinámicamente en función de perturbaciones de potencia que se modela mediante la ecuación *swing*.

Este modelo permite generar desviaciones de frecuencia realistas, similares a las que ocurren en sistemas eléctricos ante perturbaciones de carga o generación. La frecuencia obtenida mediante esta ecuación se utiliza posteriormente para generar la señal sinusoidal de la red que será empleada como entrada para los distintos algoritmos de sincronización analizados.

### Implementación de los algoritmos de sincronización

Para analizar el desempeño del método propuesto, se implementan tres algoritmos de sincronización utilizados en convertidores conectados a red:

- PLL basado en filtro *notch* (pPLL).
- SOGI-PLL (Second Order Generalized Integrator PLL).
- Observador de fase propuesto en este trabajo.

Cada uno de estos métodos recibe como entrada la misma señal de tensión de red generada a partir del modelo descrito en la subsección anterior. El objetivo de los algoritmos es estimar en tiempo real la fase y frecuencia de la señal de red.

### Escenario de perturbación de frecuencia

El caso de estudio considerado consiste en analizar la respuesta dinámica de los distintos algoritmos de sincronización ante una perturbación de frecuencia generada mediante el modelo basado en la ecuación *swing*.

Inicialmente el sistema opera en condición de régimen permanente, por lo que el desbalance de potencia se establece como

$$\Delta P = 0$$

lo que mantiene la frecuencia del sistema en su valor nominal. Durante este periodo los algoritmos de sincronización convergen hacia la frecuencia de la red.

Posteriormente, en el instante  $t = 1$  s, se introduce una perturbación de potencia definida como

$$\Delta P = -3$$

lo cual produce una desviación transitoria de la frecuencia del sistema. Esta perturbación permite evaluar la capacidad de seguimiento dinámico de cada método de sincronización ante variaciones rápidas de frecuencia.

El experimento reproduce condiciones típicas de operación de sistemas eléctricos donde ocurren cambios de frecuencia debido a variaciones de carga o generación, permitiendo comparar el desempeño de los algoritmos bajo un escenario realista.

### Criterios de evaluación

El desempeño de los algoritmos de sincronización se evalúa mediante los siguientes indicadores:

- Tiempo de convergencia de la estimación de frecuencia.
- Error de seguimiento de frecuencia respecto a la frecuencia real del sistema.
- Comportamiento durante el transitorio provocado por la perturbación de potencia.

- Estabilidad y amortiguamiento de la respuesta dinámica.

Estos indicadores permiten comparar de manera objetiva la capacidad de cada método para estimar correctamente la frecuencia de la red bajo condiciones dinámicas.

### 3.5.2. Resultados numéricos

#### Respuesta del observador propuesto

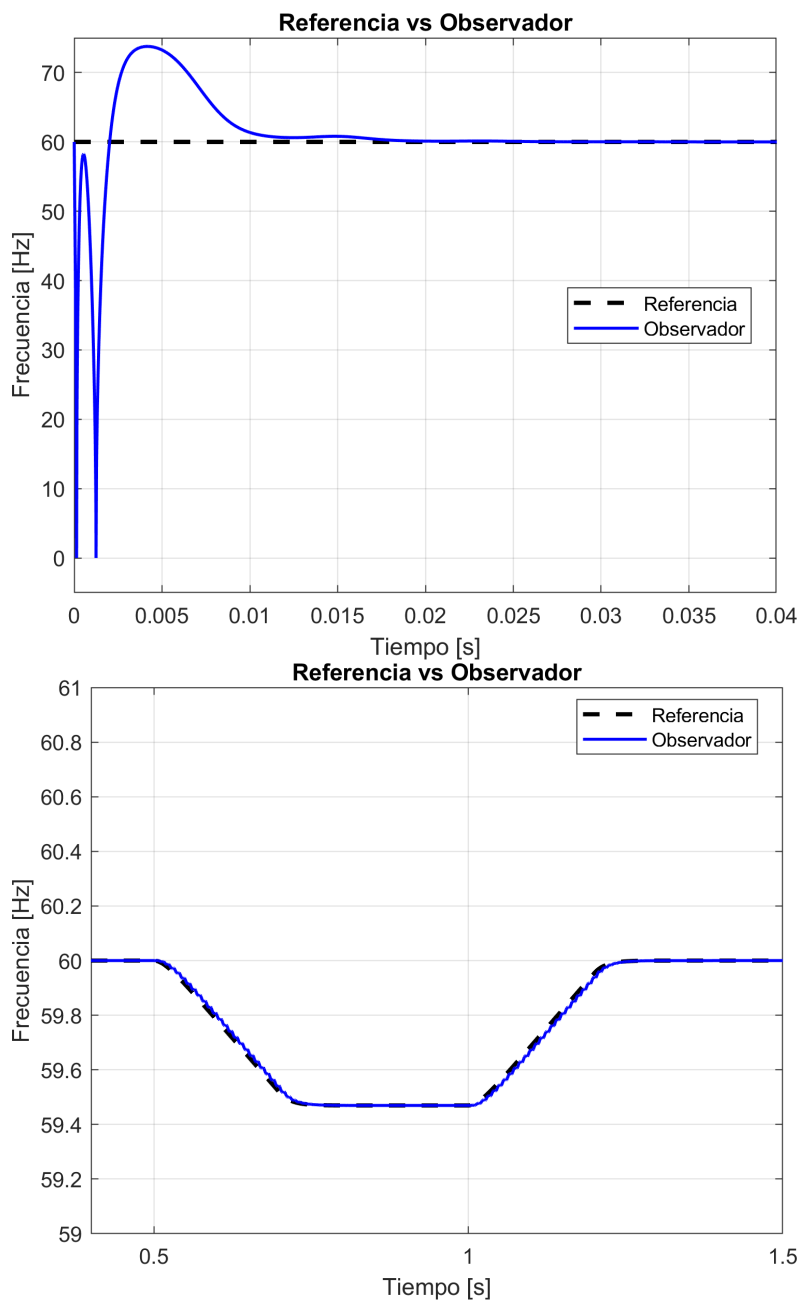


Figura 3.1: Comparación de resultados del observador

Como puede observarse en las simulaciones, el observador es capaz de seguir la frecuencia incluso ante variaciones en ésta. Si bien al inicio de la respuesta se presenta el fenómeno de *peaking*, esto no representa necesariamente un inconveniente práctico, ya que comúnmente durante el arranque de los convertidores no se transfiere potencia. En este contexto, el aspecto de mayor interés es el desempeño del observador durante los cambios de frecuencia una vez que el convertidor ha entrado en operación.

### Errores de frecuencia

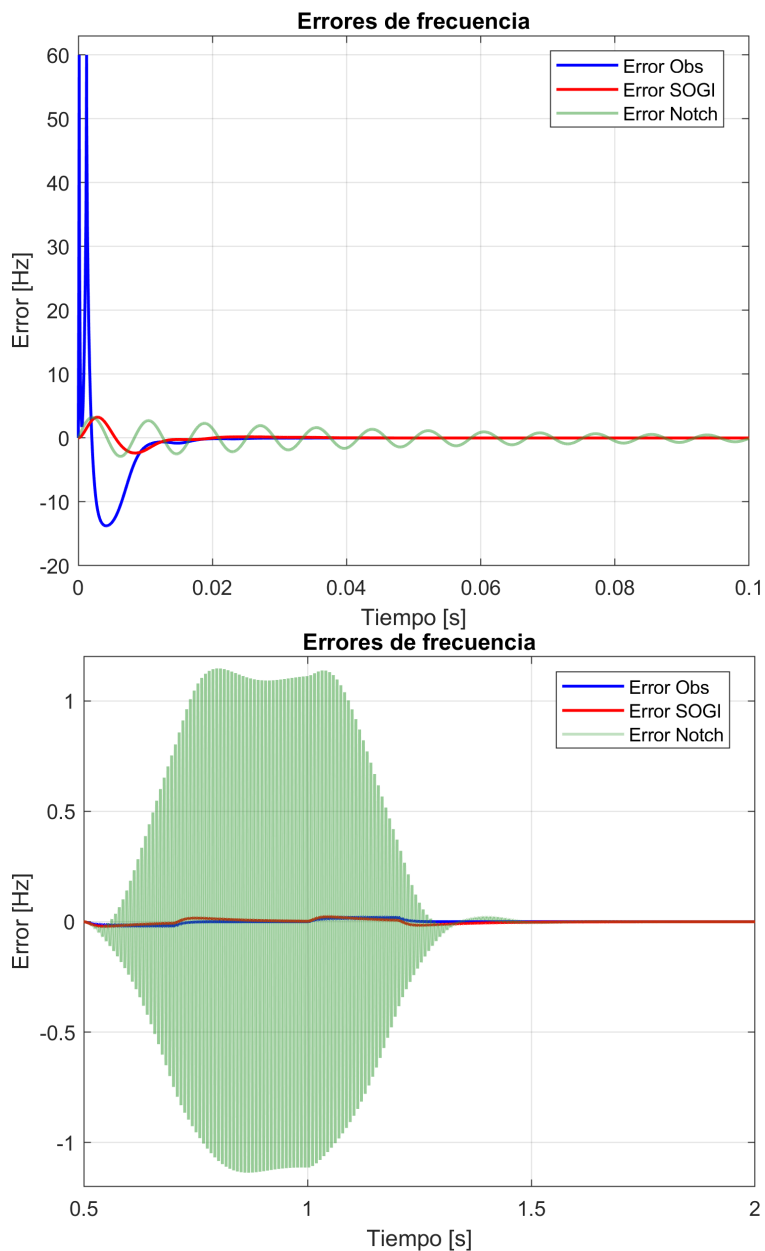


Figura 3.2: Comparación de errores de distintos PLL's

En estas imágenes puede apreciarse que el desempeño del observador es comparable al del *PLL SOGI*, el cual es ampliamente utilizado en la práctica. Asimismo, a diferencia del *pPLL Notch*, cuyo desempeño se degrada ante variaciones de frecuencia y pierde la capacidad de seguimiento, tanto el observador propuesto como el *PLL SOGI* mantienen una estimación adecuada de la frecuencia bajo dichas condiciones.

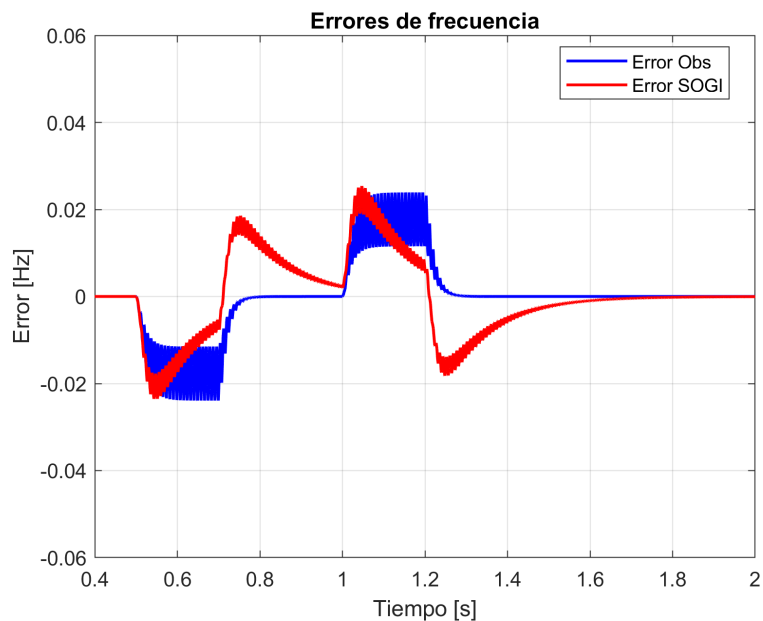


Figura 3.3: Errores de frecuencia de observador y PLL SOGI

En esta figura se aprecian con mayor claridad las diferencias entre el observador propuesto y el *PLL SOGI*. En particular, puede observarse que el observador presenta una convergencia más rápida en la estimación de la frecuencia.

#### Respuesta de fase del observador propuesto

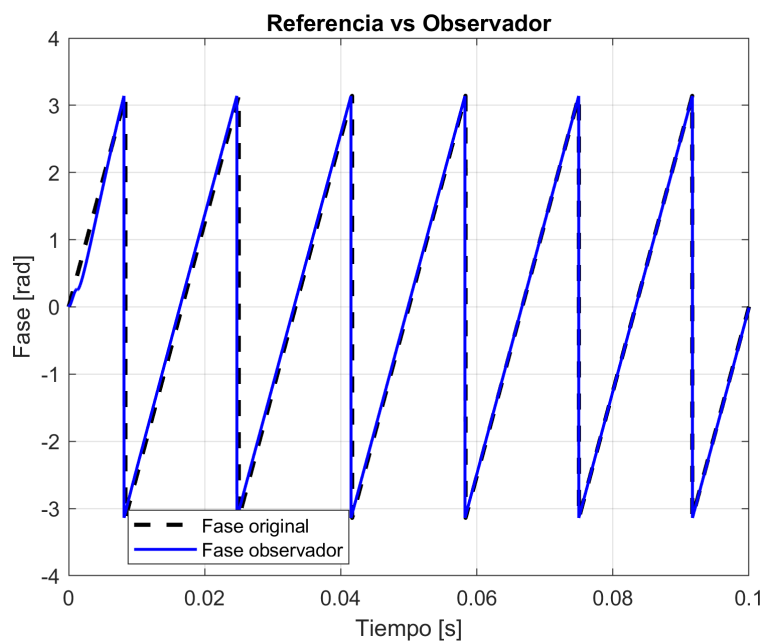
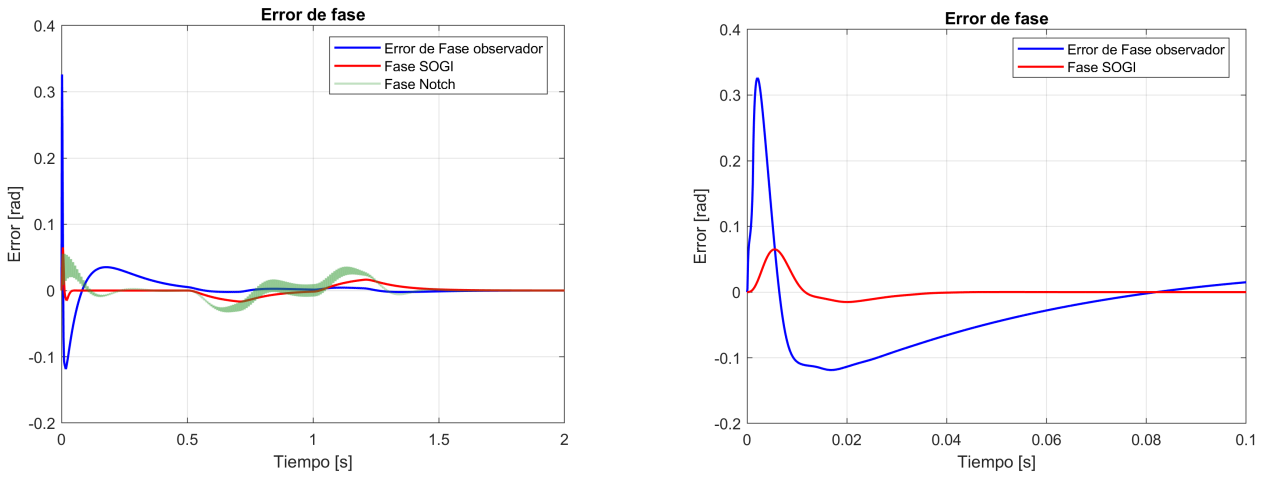


Figura 3.4: Respuesta de fase del observador

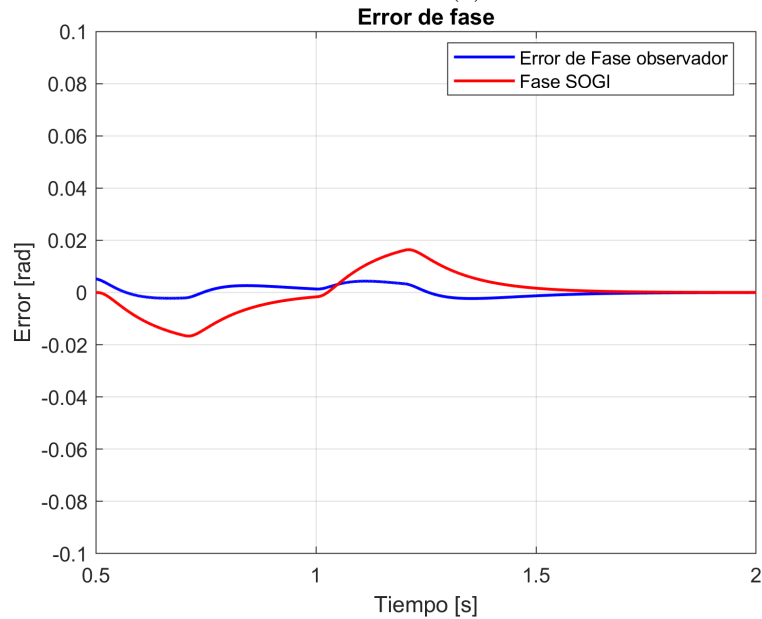
En esta figura se observa que, al inicio, existe un desfase en la estimación; sin embargo, en un corto intervalo de tiempo el observador es capaz de corregir dicho error y sincronizarse con la señal de referencia.

## Errores de fase



(a) Errores de fase de PLL's

(b) Inicio de error de fase de observador vs PLL SOGI



(c) Final del error de fase de observador vs PLL SOGI

Figura 3.5: Comparación de fase.

En esta figura puede observarse que, durante el transitorio inicial, tanto el *PLL SOGI* como el *pPLL Notch* presentan un mejor desempeño que el observador propuesto. Sin embargo, una vez alcanzado el régimen estacionario y ante cambios en la frecuencia, se puede observar cierta ventaja del observador, ya que éste es capaz de responder con mayor rapidez y corregir las variaciones de frecuencia.

## CAPÍTULO

# 4

# VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

La validación experimental de los algoritmos se llevó a cabo utilizando una tarjeta de adquisición de datos microlabbox 1 de dSPACE. Para evaluar y comparar la respuesta dinámica de las diversas técnicas de sincronización, las señales estimadas se enviaron a través de los puertos de salida analógica (DAC), permitiendo su visualización y análisis en tiempo real mediante un osciloscopio. Esta configuración experimental garantiza la evaluación del desempeño de los algoritmos bajo condiciones controladas y reproducibles.

Para las pruebas de desempeño, se modeló una perturbación en la frecuencia de la red con el objetivo de simular eventos críticos en sistemas eléctricos, tales como variaciones abruptas en la carga o cambios en la generación. Este comportamiento se implementó utilizando un modelo basado en la ecuación de *swing*, estándar en el análisis dinámico de sistemas de potencia.

Es importante señalar que, aunque se consideró una caída de frecuencia severa (de 60 Hz a 51 Hz), este escenario constituye un caso hipotético diseñado específicamente para someter a los *PLL* bajo estudio a condiciones de operación exigentes y analizar su robustez dinámica.

La evolución temporal de la frecuencia de prueba se presenta en la Figura [4.1](#). Durante el intervalo de 0 a 1 s, la frecuencia permanece constante en su valor nominal. Posteriormente, entre 1 y 4 s, se introduce un cambio descendente, seguida de una recuperación gradual entre los 4 y 9 s hasta retornar al valor de régimen permanente.

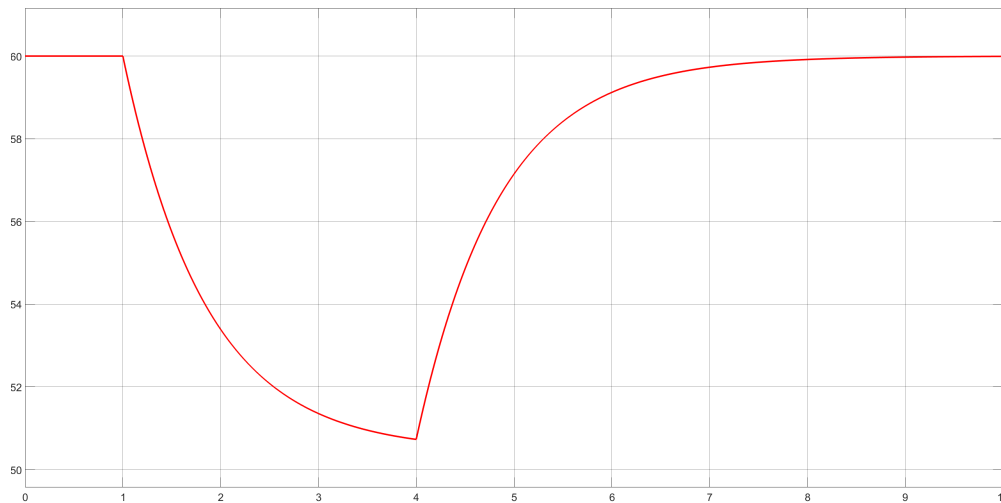


Figura 4.1: Perfil de variación de frecuencia implementado para la validación.

En la Figura 4.2 se ilustra el inicio del evento de perturbación (línea central). En esta captura se comparan cuatro señales: la señal de referencia (amarillo), la respuesta de la técnica SOGI (azul/cyan), la estimación del observador propuesto (rosa) y, finalmente, el desempeño del bloque PLL estándar de MATLAB/Simulink (verde).

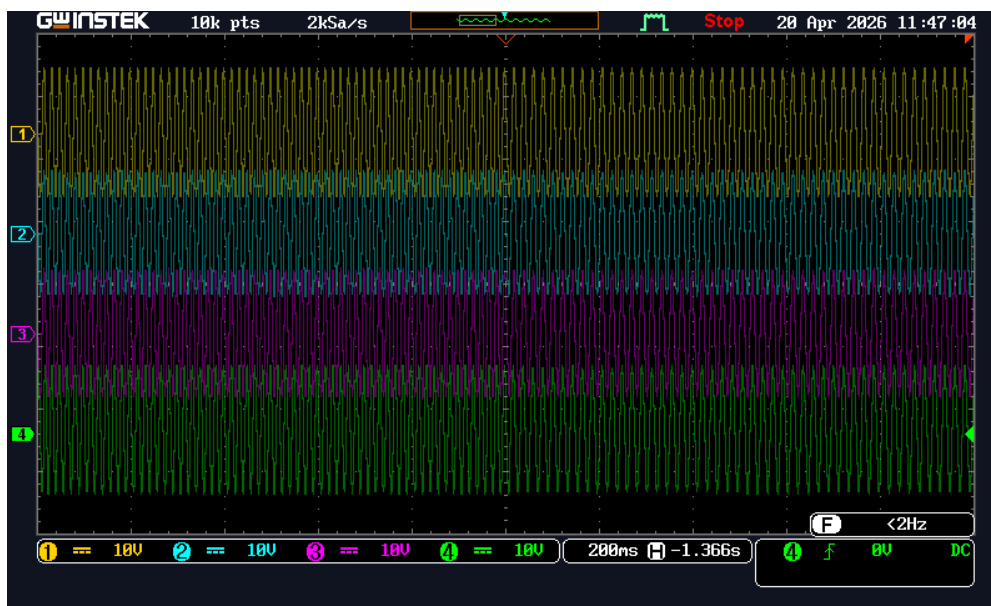


Figura 4.2: Respuesta de los algoritmos ante el inicio de la caída de frecuencia.

Al analizar con detalle la Figura 4.3, se aprecia que el observador presenta un error de seguimiento mínimo. Si bien la técnica SOGI muestra un desempeño aceptable, se percibe un ligero desfase respecto a la referencia. Por el contrario, el PLL de MATLAB presenta un error considerable, evidenciando limitaciones en su capacidad de seguimiento dinámico.

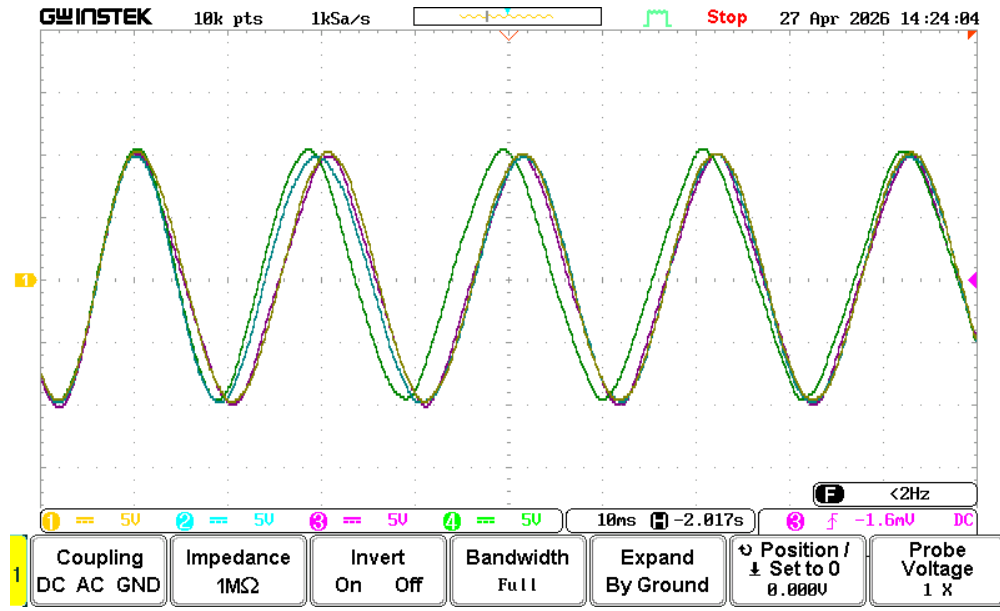


Figura 4.3: Comparativa de señales durante el régimen transitorio.

La Figura 4.4 permite apreciar de forma directa la superioridad del observador propuesto. Mientras este sigue con precisión la señal de referencia, las otras dos técnicas presentan errores de fase cercanos a los  $90^\circ$ , lo cual invalidaría su uso en aplicaciones de control de potencia donde el sincronismo es crítico.

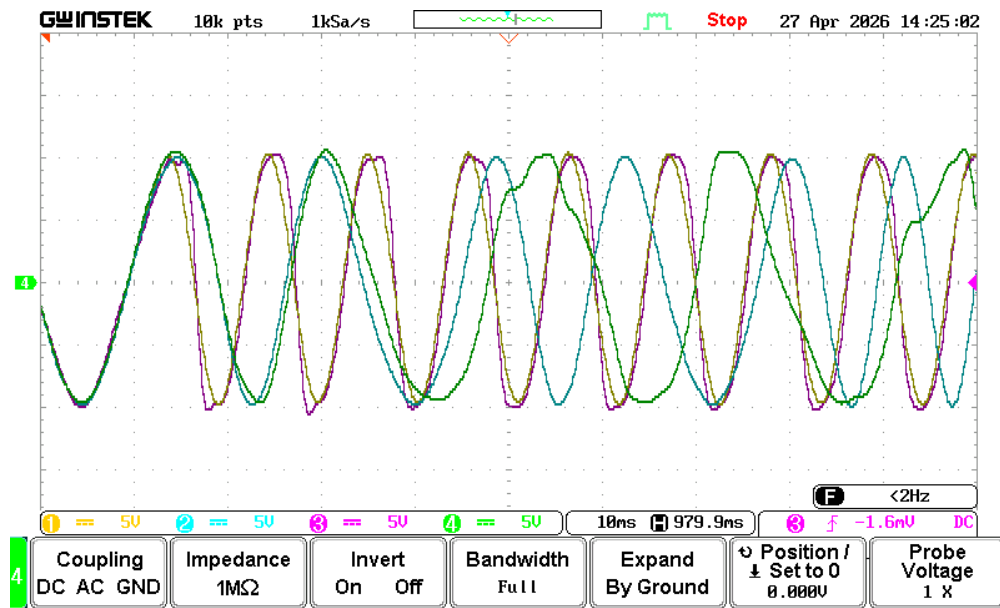


Figura 4.4: Comparativa directa de errores de fase entre técnicas.

Además en la Figura 4.5 se observa que la técnica SOGI requiere muchos más ciclos para converger nuevamente tras una perturbación abrupta. En contraste, el observador propuesto no pierde la la señal propuesta, demostrando una robustez superior.

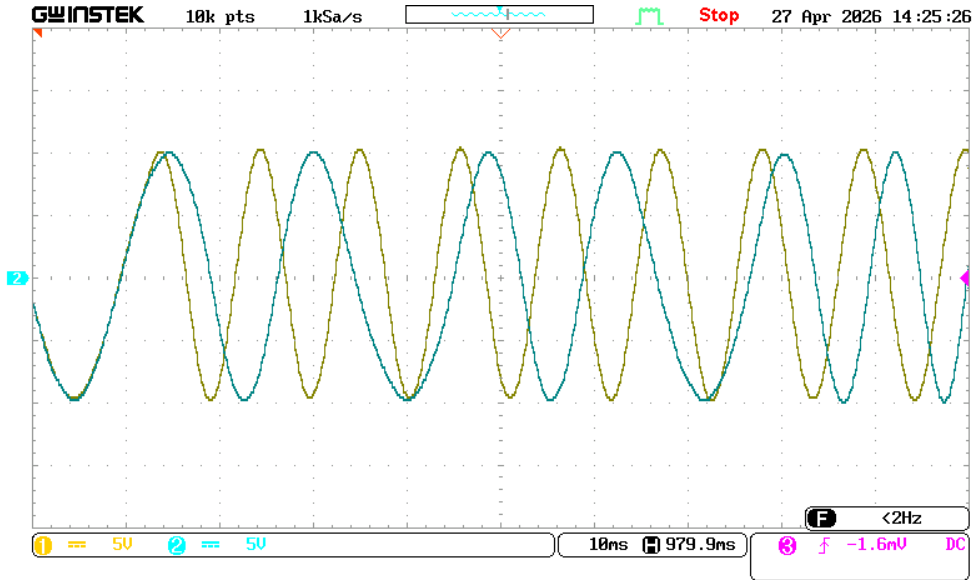


Figura 4.5: Convergencia del SOGI

Finalmente, para cuantificar la precisión del observador, la Figura 4.6 muestra un acercamiento al error de seguimiento. Considerando una frecuencia de operación de 52 Hz (periodo  $T \approx 19.23$  ms) y una diferencia medida entre picos de  $\Delta t = 1$  ms, el desfase angular  $\phi$  se calcula mediante la relación:

$$\phi = \Delta t \cdot f \cdot 360^\circ = (1 \times 10^{-3} \text{ s}) \cdot (52 \text{ Hz}) \cdot 360^\circ \approx 18.72^\circ$$

Este valor demuestra una alta fidelidad en la reconstrucción de la fase bajo condiciones de baja frecuencia.

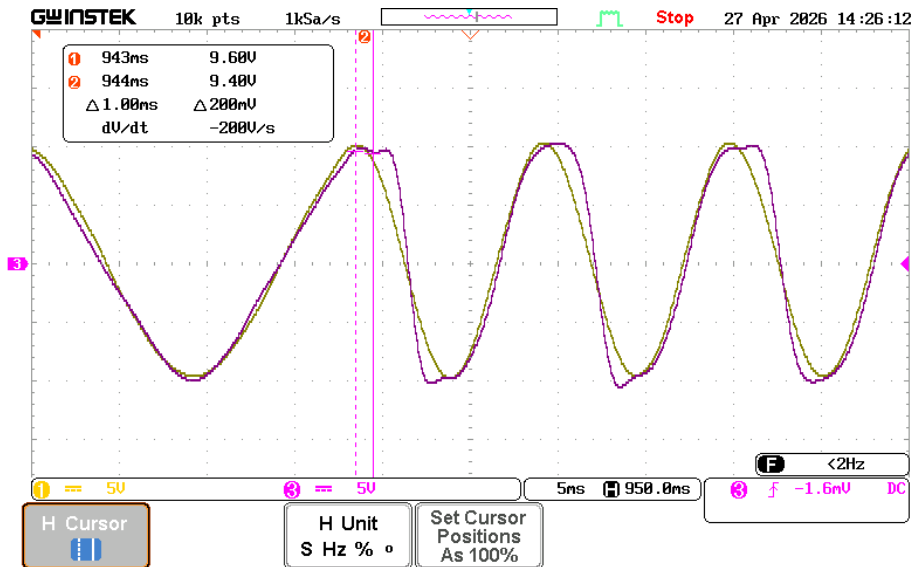


Figura 4.6: Error del observador propuesto

En conclusión, los resultados experimentales validan la eficacia del observador de alta ganancia. A diferencia de las simulaciones ideales, la implementación en tiempo real introduce desafíos computacionales y de cuantización que degradan significativamente el desempeño del SOGI y el PLL de MATLAB; sin embargo, el observador mantiene su capacidad de seguimiento incluso ante variaciones de frecuencia extremas.

## CAPÍTULO

### 5

# CONCLUSIONES

## Conclusiones

---

A través del desarrollo de este trabajo, se logró validar el funcionamiento del observador propuesto para la estimación de frecuencia en sistemas eléctricos monofásicos. Mediante la comparativa experimental con técnicas ampliamente utilizadas en el estado del arte, se demostró una mejora significativa en la precisión y robustez del seguimiento ante perturbaciones incluso ante cambios grandes de frecuencia.

Una de las ventajas competitivas más relevantes de este algoritmo es su sencillez estructural, lo que permite una implementación ligera y eficiente en sistemas de procesamiento en tiempo real sin comprometer el desempeño. Esto lo posiciona como una alternativa robusta frente a métodos más complejos que requieren una mayor carga computacional o etapas de filtrado adicionales.

## Trabajo a Futuro

---

A partir de los resultados obtenidos, se proponen las siguientes líneas de investigación para dar continuidad al proyecto:

- **Análisis de costo computacional:** Realizar una comparación entre el almacenamiento requerido y los tiempos de ejecución frente a otras técnicas para cuantificar la eficiencia del observador propuesto.
- **Integración en convertidores de potencia:** Implementar el algoritmo en el lazo de control de un convertidor real para evaluar su desempeño en la sincronización con la red bajo condiciones de operación.
- **Optimización de parámetros:** Si bien en este trabajo se establecieron consideraciones generales para la sintonía de las ganancias, se plantea como meta el desarrollo de un algoritmo de optimización que permita determinar los valores ideales de las ganancias de manera sistemática.



# BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. Attanayake, I. Wickramage, U. Samarasinghe, Y. Ranmini, S. Ehalapitiya, R. Jayathilaka, and S. Yapa, “Renewable energy as a solution to climate change: Insights from a comprehensive study across nations,” *Plos one*, vol. 19, no. 6, p. e0299807, 2024.
- [2] A. I. Osman, L. Chen, M. Yang, G. Msigwa, M. Farghali, S. Fawzy, D. W. Rooney, and P.-S. Yap, “Cost, environmental impact, and resilience of renewable energy under a changing climate: a review,” *Environmental chemistry letters*, vol. 21, no. 2, pp. 741–764, 2023.
- [3] A. Olabi and M. A. Abdelkareem, “Renewable energy and climate change,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 158, p. 112111, 2022.
- [4] International Energy Agency, “World energy outlook 2024,” 2024. Accessed: 2025-09-02.
- [5] International Renewable Energy Agency (IRENA), “Renewable energy statistics 2025.”
- [6] Secretaría de Energía (SENER), “Programa de desarrollo del sistema eléctrico nacional (prodesen) 2024–2038.”
- [7] R. Mathew, J. G. Rueda-Escobedo, and J. Schiffer, “Robust design of phase-locked loops in grid-connected power converters,” *European Journal of Control*, vol. 80, p. 101055, 2024.
- [8] R. Teodorescu, M. Liserre, and P. Rodriguez, *Grid converters for photovoltaic and wind power systems*. John Wiley & Sons, 2011.
- [9] S. Golestan, J. M. Guerrero, and J. C. Vasquez, “Single-phase pll: A review of recent advances,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 32, no. 12, pp. 9013–9030, 2017.
- [10] Y. Han, M. Luo, X. Zhao, J. M. Guerrero, and L. Xu, “Comparative performance evaluation of orthogonal-signal-generators-based single-phase pll algorithms—a survey,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 31, no. 5, pp. 3932–3944, 2016.
- [11] W. F. Egan, *Phase-lock basics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [12] A. Liu, H. Cao, and J. Liu, “Enhancing stability control of phase-locked loop in weak power grids,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 161, p. 110145, 2024.

- 
- [13] R. M. Santos Filho, P. F. Seixas, P. C. Cortizo, L. A. Torres, and A. F. Souza, “Comparison of three single-phase pll algorithms for ups applications,” *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 55, no. 8, pp. 2923–2932, 2008.
- [14] R. Gobu, M. Dineshkumar, K. Kalaiyarasi, P. A. Kumar, M. B. Priyan, and K. N. Sanjeev, “Review of power quality issues in smart grid,” in *2023 7th International Conference on Computing Methodologies and Communication (ICCMC)*, pp. 32–38, 2023.
- [15] P. Lamo, A. Pigazo, and F. J. Azcondo, “Evaluation of quadrature signal generation methods with reduced computational resources for grid synchronization of single-phase power converters through phase-locked loops,” *Electronics*, vol. 9, no. 12, p. 2026, 2020.
- [16] J. G. Rueda-Escobedo, J. A. Moreno, and E. A. Contreras Flores, “Robust quadrature generator for single phase AC signals,” in *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2025*, (México), Asociación de México de Control Automático (AMCA), 2025. en prensa.
- [17] R. Rosso, X. Wang, M. Liserre, X. Lu, and S. Engelken, “Grid-forming converters: Control approaches, grid-synchronization, and future trends—a review,” *IEEE Open Journal of Industry Applications*, vol. 2, pp. 93–109, 2021.
- [18] F. Blaabjerg, *Control of power electronic converters and systems: volume 2*, vol. 2. Academic Press, 2018.
- [19] D. Dutta, S. P. Tumukunta, N. Sivaraaj, and K. A. Majeed, “Exploring the landscape of phase-locked loop architectures: A comprehensive review,” *IEEE Access*, 2024.
- [20] S. Golestan, M. Monfared, F. D. Freijedo, and J. M. Guerrero, “Design and tuning of a modified power-based pll for single-phase grid-connected power conditioning systems,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 27, no. 8, pp. 3639–3650, 2012.
- [21] S. Golestan, M. Monfared, F. D. Freijedo, and J. M. Guerrero, “Dynamics assessment of advanced single-phase pll structures,” *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 60, no. 6, pp. 2167–2177, 2012.
- [22] M. Karimi-Ghartemani, B.-T. Ooi, and A. Bakshshai, “Application of enhanced phase-locked loop system to the computation of synchrophasors,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 26, no. 1, pp. 22–32, 2010.
- [23] P. M. Joshi and H. Verma, “Synchrophasor measurement applications and optimal pmu placement: A review,” *Electric Power Systems Research*, vol. 199, p. 107428, 2021.
- [24] H. Bevrani, T. Kato, T. Ise, and K. Inoue, *Grid connected converters: Modeling, stability and control*. Elsevier, 2022.
- [25] D. G. Holmes and T. A. Lipo, *Pulse width modulation for power converters: principles and practice*. John Wiley & Sons, 2003.
- [26] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson educación, 2003.
- [27] A. Yasdani and R. Iravani, “Voltage-sourced converters in power systems,” *IEEE/Wiley: Hoboken, NJ, USA*, 2010.
- [28] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 3 ed., 2002.
- [29] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford University Press, 3rd ed., 1999.
- [30] D. Liberzon, “Switched systems: Stability analysis and control synthesis.” Lecture Notes for HYCON-EECI Graduate School on Control. Available at <http://liberzon.csl.illinois.edu>
- [31] F. Sun, J. Sun, X. Zhang, H. Yang, X. Qian, and P. Ye, “Measurement method of inertia constant of power system based on large-scale wind power grid connection,” *Energy Reports*, vol. 8, pp. 200–209, 2022.