UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

CUADERNO DE EJERCICIOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Elizabeth Aguirre Maldonado
Gabriel Alejandro Jaramillo Morales

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA GENERAL Y QUÍMICA

AGUIRRE MALDONADO, ELIZABETH y Gabriel Alejandro Jaramillo Morales. *Cuaderno de ejercicios de Electricidad y Magnetismo*. México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 2003, 373 p.

Cuaderno de ejercicios de Electricidad y Magnetismo

Primera edición, marzo de 2003.

Impreso y hecho en México.

PRÓLOGO

Al inicio de los setenta, la entonces Coordinación de Materias Propedéuticas, actualmente la División de Ciencias Básicas, editó en manuscrito las primeras notas de las asignaturas que se impartían y se las ofreció a su alumnado con la finalidad de ayudarlo.

En su devenir, este material didáctico se ha venido adecuando conforme a los cambios que han sufrido los planes de estudio y las asignaturas que de ellos se derivan; y, en algunos casos, se ha transformado hasta alcanzar la calidad de libros de texto de reconocimiento nacional.

A raíz de la última revisión y aprobación de las currícula, que dieron origen a los conocidos Planes de Estudio 1994, y en concordancia con el Plan de Desarrollo de la Facultad de Ingeniería, esta División, a través de su personal académico y con el auxilio de la tecnología de computación, ha intensificado la tarea de actualizar los apuntes, manuales de prácticas, series de ejercicios y demás material didáctico escrito, con la misma finalidad y pretensión originales.

Tal es el caso del *Cuaderno de ejercicios de electricidad y magnetismo*, resultado de la actividad académica de Gabriel Alejandro Jaramillo Morales y Elizabeth Aguirre Maldonado, quienes lo ofrecen generosamente a los alumnos y profesores con objeto de contribuir al mejoramiento de la actividad académica.

Como la División se ha empeñado en revitalizar la vida académica de todas las Coordinaciones, juzgo que para ello esta obra constituye otro medio más. Por tanto, este cuaderno de ejercicios ha sido sometido a la crítica en el claustro académico de la Coordinación de Electricidad y Magnetismo para que, con la participación de todos, se perfeccione y logre constituirse en una publicación de alcance nacional e internacional.

Para tal efecto, agradeceré a los profesores que están impartiendo la asignatura de Electricidad y Magnetismo, y a los alumnos, darle uso intensivo a esta obra, anotar las observaciones de todo tipo que juzguen pertinentes y hacerlas llegar a los autores para coadyuvar a su perfeccionamiento.

Convencido que a todos nos interesa ofrecerles a nuestros alumnos lo mejor de nosotros mismos, les reitero mi agradecimiento a los autores y como siempre aprovecho para desearles salud.

ATENTAMENTE
Ciudad Universitaria D.F., enero de 2003
"Por mi Raza Hablará el Espíritu"
El Jefe de la División

Bernardo Frontana de la Cruz

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje significativo de la física requiere, además de la identificación y comprensión plena de los conceptos, la aplicación de éstos en problemas de clase, de libros y, si es posible, en problemas de la vida cotidiana o del ámbito profesional. El alumno, al estudiar y preparar sus clases y exámenes, necesita de material de estudio con grado de complejidad adecuado y congruente con los objetivos de la asignatura en cuestión.

Este cuaderno de ejercicios tiene como objetivo contribuir en el aprendizaje y dominio de una parte de la física: el electromagnetismo.

En cada uno de los temas, los cuales corresponden al programa vigente de la asignatura Electricidad y Magnetismo, se presenta, en número variable pero suficiente, un conjunto de problemas resueltos en los que el procedimiento matemático para su resolución se enriquece con las hipótesis, estrategias de solución, consideraciones, comentarios o conclusiones propias de cada problema. Además, se agregan problemas propuestos cuyas respuestas a todos y cada uno de sus incisos se incluyen al final de cada tema.

El contenido de este cuaderno fue seleccionado entre los problemas de clase y de exámenes que han resultado más representativos por su profundidad y extensión en el tratamiento de los conceptos; asimismo, estos problemas fueron clasificados y graduados en cuanto al avance del programa de estudios y a su dificultad.

Los autores tenemos la convicción de que este material tiene utilidad en el aprendizaje de la asignatura, basada en las pruebas preliminares realizadas con algunos alumnos, pero el juicio definitivo lo tendrá la población estudiantil que al emplearlo podrá, con su preferencia y recomendación, hacernos ver si hemos alcanzado el objetivo planteado para este cuaderno.

Los problemas que sirvieron de base para este cuaderno fueron propuestos para exámenes por los profesores de la asignatura a través de muchos años por lo que, al intentar mencionarlos, se correría el riesgo muy grave de omitir involuntariamente a algunos de ellos. Deseamos agradecer la recopilación inicial de estos problemas a los ingenieros Martín Bárcenas Escobar y Rigel Gámez Leal. Los ajustes a la redacción y presentación que cada problema requirió para tener un formato homogéneo y acorde con la intención de la obra se realizaron conjuntamente con el personal de la Unidad de Apoyo Editorial, en especial con la maestra en letras María Cuairán Ruidíaz, Jefa de la Unidad, la pasante Angélica Torres Rojas, quien tuvo a su cargo la revisión editorial, y el Sr. J. Guillermo Hernández M., quien realizó la captura del material.

Estamos conscientes de que esta obra es perfectible, para lo cual agradeceremos cualquier sugerencia o comentario que nos ayude a mejorarla.

Con la elaboración de este trabajo esperamos haber contribuido en resolver, aun cuando sea de manera parcial, la necesidad de material de apoyo para el estudio del electromagnetismo.

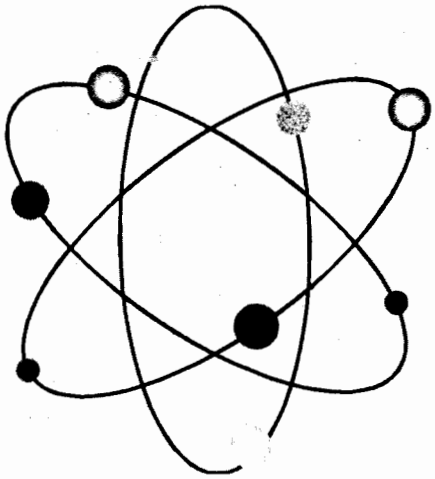
Elizabeth Aguirre Maldonado
Gabriel Alejandro Jaramillo Morales

CONTENIDO

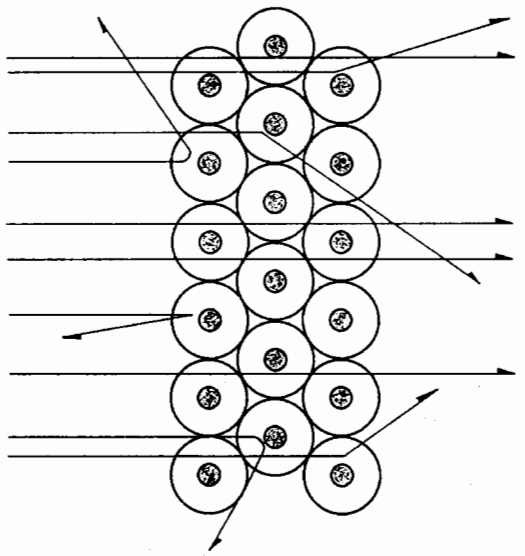
T E M A 1

CAMPO Y POTENCIAL ELÉCTRICOS

Problemas resueltos



1. Los experimentos de Rutherford demostraron que la ley de Coulomb es válida para la obtención de las fuerzas de repulsión entre dos núcleos a una separación de 10^{-12} [cm]. El núcleo de oro consta de 118 neutrones y 79 protones; una partícula α está formada por dos protones y dos neutrones. Calcule:



a) La fuerza de repulsión, en [N], entre ambas partículas, si están separadas 1×10^{-12}[cm].

b) La aceleración que experimenta la partícula α.

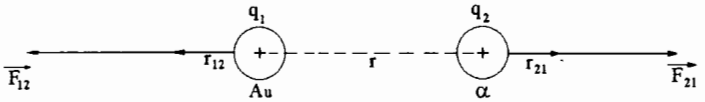
Considere que:

$$m_{protón} \cong m_{neutrón} = 1.67 \times 10^{-27}[\text{kg}]$$

Resolución:

a) Se calcula la carga eléctrica del núcleo del átomo de oro y de la partícula α:

$$q_{Au} = (79)(1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]) = 1.264 \times 10^{-17}[\text{C}]$$
$$q_{\alpha} = (2)(1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]) = 3.2 \times 10^{-19}[\text{C}]$$



Mediante la ley de Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\ \frac{q_{Au}\ q_{\alpha}}{r^2}\ \hat{r}\ ;\ \vec{F} = (9 \times 10^9)\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right]\frac{(1.264 \times 10^{-17})(3.2 \times 10^{-19})[\text{C}^2]}{(1 \times 10^{-14})^2\ [\text{m}^2]}\ \hat{r}$$

$$\vec{F}_{21} = 364.032\ \hat{r}_{21}\ [\text{N}]\ ;\ |\vec{F}| = 364.032\ [\text{N}]$$

b) De la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{21} = m_{\alpha}\,\vec{a}_{\alpha}\ ;\ \vec{a}_{\alpha} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_{\alpha}}$$

$$m_{\alpha} = m_{2p} + m_{2n} = (2 + 2)(1.67 \times 10^{-27}[\text{kg}]) = 6.68 \times 10^{-27}[\text{kg}]$$

$$\therefore\ \vec{a}_{\alpha} = \frac{364.032\ [\text{N}]}{6.68 \times 10^{-27}[\text{kg}]}\ \hat{r}_{21} = 5.45 \times 10^{28}\ \hat{r}_{21}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

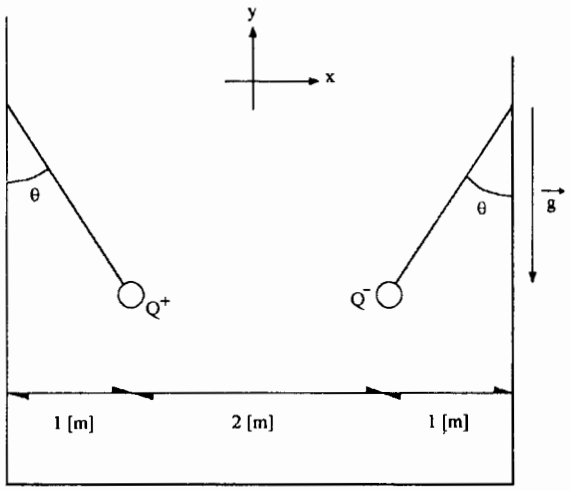
$$\vec{a}_{\alpha} = 5.45 \times 10^{28}\ \hat{r}_{21}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]\ ;\ |\vec{a}_{\alpha}| = 5.45 \times 10^{28}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

2. Dos esferas pequeñas poseen igual cantidad de masa (100 [g]) e igual cantidad de carga, pero de signos diferentes, se suspenden con hilos de peso despreciable como se muestra en la figura. Con base en ésta y en que $\theta = 45°$ y $g = 9.8$ [m/s^2], calcule:

a) La fuerza de origen eléctrico que experimenta cada esfera.

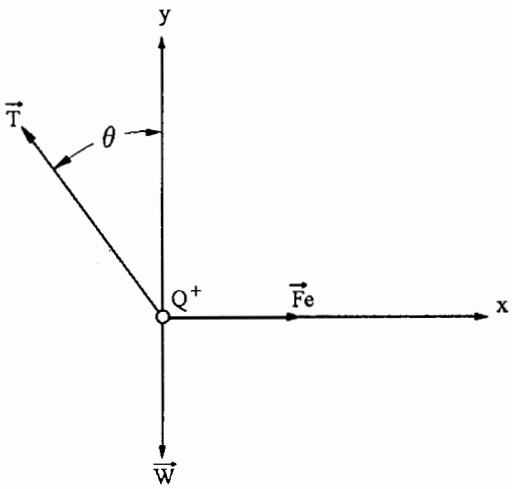
b) La cantidad de carga de cada esfera.

c) El campo eléctrico que ejerce cada carga en la posición de la otra.



Resolución:

a) Como las esferas se encuentran en equilibrio estático, para el análisis de las fuerzas que actúan sobre cada una se emplea el diagrama de cuerpo libre; para la esfera izquierda se tiene:



De las condiciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = F_e - T \text{ sen } \theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = T \cos \theta - W = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (2) se tiene:

$$T = \frac{W}{\cos\theta} = \frac{mg}{\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)'$$

De (1) se tiene:

$$F_e = T \text{ sen } \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)'$$

sustituyendo (2)' en (1)' se obtiene:

$$F_e = mg \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

$$F_e = mg \text{ tag } \theta \; ; \; F_e = 0.1\,[\text{kg}]\,9.8\,[\text{m/s}^2] \text{ tag } 45°$$

$$F_e = 0.98\,[\text{N}]$$

como las interacciones entre dos cargas eléctricas son de igual magnitud pero de direcciones opuestas, se tiene:

$$\vec{F}_{Q^+} = 0.98\,\hat{i}\ [\text{N}] \text{ y } \vec{F}_{Q^-} = -0.98\,\hat{i}\ [\text{N}]$$

b) Para determinar la cantidad de carga de cada esfera, recordamos que las interacciones eléctricas se cuantifican con la ley de Coulomb; para esto se considera que el tamaño (diámetro) de las esferas es despreciable comparado con la distancia (r) de separación entre ellas, por esta razón:

$$F_{Q^+} = F_{Q^-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q^+|\,|Q^-|}{r^2} \text{ ; como } |Q^+| = |Q^-| = Q$$

$$Q = \left[Fr^2 4\pi\varepsilon_0\right]^{1/2} \text{ ; } Q = \left[\frac{0.98[\mathrm{N}]}{9\times10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2/C^2}]}\right]^{1/2}(2)[\mathrm{m}] = 2.087\times10^{-5}[\mathrm{C}]$$

$$Q^+ = 20.87\ [\mu\mathrm{C}] \text{ y } Q^- = -20.87\ [\mu\mathrm{C}]$$

c) A partir de la definición de campo eléctrico y nombrando A a la posición que ocupa Q^+ y B a la posición que ocupa Q^-, se tiene:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

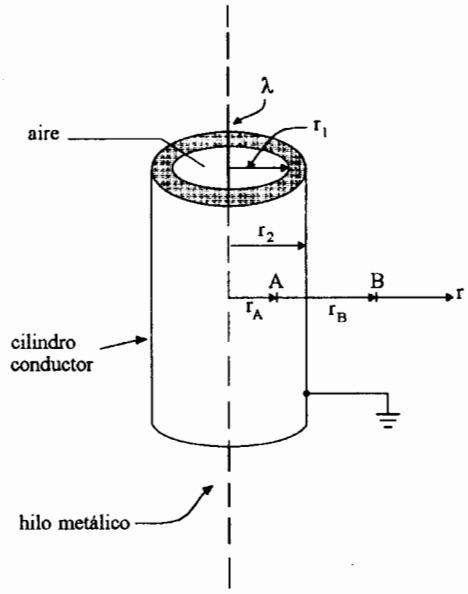
$$\vec{E}_A = \frac{\vec{F}_{Q^+}}{Q^+} = \frac{0.98\hat{i}\,[\mathrm{N}]}{20.87\times10^{-6}\,[\mathrm{C}]} = 46{,}957.36\,\hat{i}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] \quad \text{y}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\vec{F}_{Q^-}}{Q^-} = \frac{-0.98\hat{i}\,[\mathrm{N}]}{-20.87\times10^{-6}\,[\mathrm{C}]} = 46{,}957.36\,\hat{i}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

3. Se coloca un hilo metálico en el eje de un cilindro conductor hueco, ambos son muy largos. El hilo tiene una distribución uniforme de carga λ = -80 [nC/m], y el tubo originalmente neutro se conectó a tierra. Con base en esto y considerando que r_1 = 5 [cm], r_2 = 7 [cm], r_A = 4 [cm] y r_B = 10 [cm]:

a) Deduzca el campo eléctrico en función de r y calcule el valor que toma para los puntos A y B.

b) Calcule la fuerza eléctrica que actuaría sobre un protón que fuese ubicado en el punto A.

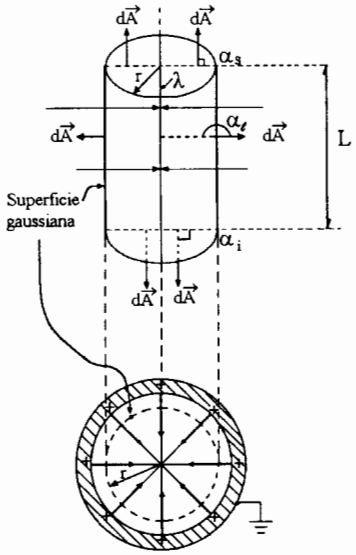


Resolución:

a) Como los cuerpos cargados (hilo y cilindro) son muy largos, el campo eléctrico puede ser evaluado a través de la ley de Gauss empleando una superficie gaussiana cilíndrica y coaxial con el cilindro conductor, la cual nos facilita el cálculo de la integral correspondiente:

$\varepsilon_0 \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{ne}$; para el cilindro es conveniente separar en tres integrales:

$$\varepsilon_0 \left[\underbrace{\iint \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{cara o superior}} + \underbrace{\iint \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{cara o inferior}} + \underbrace{\iint \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{cara lateral}} \right] = q_{ne}$$



La pared lateral del cilindro gaussiano es cruzado por las líneas del campo eléctrico, las cuales son perpendicualres al hilo cargado negativamente en la dirección radial negativa de las coordenadas cilíndricas; las integrales quedan:

$$\varepsilon_0\left[\iint E\,dA \cos\alpha_s + \iint E\,dA \cos\alpha_i + \iint E\,dA \cos\alpha_\ell\right] = q_{ne}$$

$$\alpha_s \sphericalangle_{\vec{E}}^{d\vec{A}} = \frac{\pi}{2}\ [\text{rad}]\ ;\ \alpha_i \sphericalangle_{d\vec{A}}^{\vec{E}} = \frac{\pi}{2}\ [\text{rad}]\ ;\ \alpha_\ell \sphericalangle_{d\vec{A}}^{\vec{E}} = \pi\ [\text{rad}]$$

$$-\varepsilon_0 \iint E\,dA = q_{ne}\ ;\ -\varepsilon_0 E \iint dA = q_{ne}\ ;\ -\varepsilon_0 E A_\ell = q_{ne}$$

$$E = -\frac{q_{ne}}{\varepsilon_0 A_\ell}\ ;\ E = \frac{-\lambda L}{\varepsilon_0 (2\pi r L)}\ ;\ |E| = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r}$$

ya que $q_{ne} = \lambda L$ y $\lambda < 0$, por ser negativa

Por lo tanto la función del campo eléctrico será:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r}\hat{r} \text{ para } 0 < r \leq r_1$$

Para el intervalo $r_1 < r < r_2$, la carga neta encerrada por la superficie gaussiana será cero, debido a la carga positiva que por inducción (rechazo de electrones hacia tierra ocasionado por el hilo negativo) se presenta en la cara interior del cilindro hueco. Para la condición de cargas estáticas, el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo.

$$\vec{E} = \bar{0} \text{ para } r_1 < r < r_2$$

Para $r \geq r_2$ la carga neta encerrada por el cilindro gaussiano sigue siendo nula y de este modo:

$$\vec{E} = \bar{0} \text{ para } r \geq r_2$$

$$\vec{E}_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_A}\hat{r}, \text{ ya que } 0 < r_A < r_1$$

$$\vec{E}_A = \frac{-9\times10^9[\mathrm{N\cdot m^2/C^2}]\ 2|\ -80\times10^{-9}|\ [\mathrm{C/m}]\ \hat{r}}{0.04\ [\mathrm{m}]} = -36\times10^3\,\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{E}_B = \bar{0}, \text{ porque } r_B > r_1$$

b) $\vec{F}_p = q_p\,\vec{E}_A$; $\vec{F}_p = 1.6\times10^{-19}\,[\mathrm{C}](-36\times10^3\,\hat{r})\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$

$$\vec{F}_p = -5.76\times10^{-15}\hat{r}\ [\mathrm{N}]$$

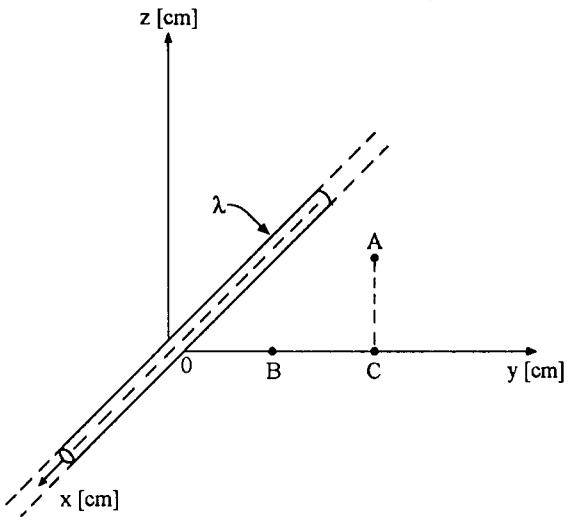
4. En la figura se muestra una línea muy larga que coincide con el eje x, con $\lambda = -5$[nC/m], y una carga puntual $q = 0.2$ [nC] colocada en C (0, 4, 0) [cm]. Calcule:

a) El vector intensidad de campo eléctrico en el punto A (0, 4, 3) [cm].

b) La fuerza eléctrica que actúa sobre la carga q.

c) La diferencia de potencial V_{AB}, siendo B (0, 2, 0) [cm].

d) El trabajo necesario para trasladar la carga q desde el punto C hasta el B.



Resolución:

a) El campo eléctrico en un punto debido a más de un cuerpo cargado se determina con la aplicación del principio de superposición:

$\vec{E}_A = \vec{E}_{A\lambda} + \vec{E}_{Aq}$; es decir:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{A0}}\hat{r}_{A0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r_{CA}^2}\hat{r}_{CA}$$

las direcciones de los vectores $\hat{r}_{A0}$ y $\hat{r}_{CA}$ se determinan de acuerdo con el tipo de carga de la línea y de la carga q respectivamente.

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2|\lambda|}{r_{A0}}\hat{r}_{A0} + \frac{|q|}{r_{CA}^2}\hat{r}_{CA}\right]; \ \vec{E}_A = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\left[\frac{2(5\times10^{-9})\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]}{0.05\,[\mathrm{m}]}\left[\frac{-4\hat{j} - 3\hat{k}}{5}\right] + \frac{0.2\times10^{-9}[\mathrm{C}]\hat{k}}{(0.03)^2[\mathrm{m}]^2}\right]$$

$$\vec{E}_A = \left[-1440\hat{j} - 1080\hat{k} + 2000\hat{k}\right]\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]; \ \vec{E}_A = \left[-1440\hat{j} + 920\hat{k}\right]\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) De la definición de campo eléctrico:

$$\vec{F}_q = q\vec{E}_{C\lambda}$$

$$\vec{E}_{C\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{C0}}\hat{r}_{C0}; \ \hat{r}_{C0} = -\hat{j}$$

$$\vec{F}_q = -0.2\times10^{-9}[\mathrm{C}]9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\frac{2(5\times10^{-9})\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]}{0.04\,[\mathrm{m}]}\hat{j}; \ \vec{F}_q = -4.5\times10^{-7}\hat{j}[\mathrm{N}]$$

c) Para el cálculo de la diferencia de potencial V_{AB}, también se emplea el principio de superposición; es decir:

$$V_{AB} = V_{AB\lambda} + V_{ABq}$$

Es conveniente analizar el signo de cada término del segundo miembro de la expresión anterior de acuerdo con la cercanía de cada punto al cuerpo cargado en cuestión, tomando en cuenta que cargas positivas producen potenciales positivos y cargas negativas producen potenciales negativos, es decir:

$V_{AB\lambda} > 0$, ya que $V_{A\lambda} > V_{B\lambda}$, aunque $V_{A\lambda} < 0$ y también $V_{B\lambda} < 0$ y $V_{ABq} < 0$, ya que $V_A < V_B$, siendo $V_{Aq} > 0$ y también $V_{Bq} > 0$

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_{B0}}{r_{A0}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[\frac{1}{r_{AC}} - \frac{1}{r_{BC}}\right]$$

$$V_{AB} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]2\left(-5\times10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]\right)\ln\frac{2}{5} + 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]0.2\times10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]\left[\frac{1}{0.03} - \frac{1}{0.02}\right]$$

$$V_{AB} = 82.466 - 30 = 52.466\ [\mathrm{V}]$$

d) El trabajo solicitado se calculará como trabajo cuasiestático, modificando de esta manera sólo la energía potencial electrostática de la carga q.

$${}_{C}W_{B}^{\,q} = \Delta EP\ ;\quad {}_{C}W_{B}^{\,q} = EP_B - EP_C \text{ y como } V_p = \frac{EP_p}{q}\text{, se obtiene:}$$

$${}_{C}W_{B}^{\,q} = qV_B - qV_C\ ;\quad {}_{C}W_{B}^{\,q} = qV_{BC\lambda} \text{ y } V_{BC\lambda} < 0\text{, porque } V_{B\lambda} < V_{C\lambda}$$

$$V_{BC\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_{C0}}{r_{B0}}\ ;\quad V_{BC\lambda} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]2\left(-5\times10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]\right)\ln\frac{4}{2}$$

$$V_{BC\lambda} = -62.38\,[\mathrm{V}]\ ;\ \text{y}\ {}_{C}W_{B}^{\,q} = 0.2\times10^{-9}[\mathrm{C}]\left(-62.38\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right]\right) = -1.248\times10^{-8}[\mathrm{J}]$$

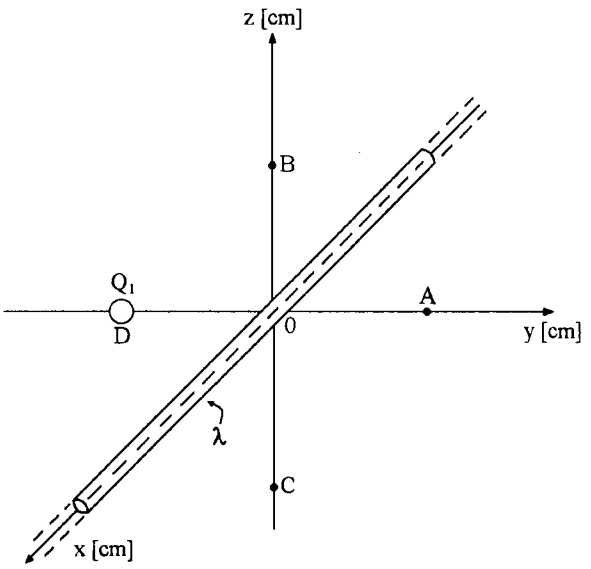
El signo – (negativo) en el resultado anterior significa que la energía del conjunto de cuerpos cargados disminuye al realizar el traslado de q, para lo cual no se requiere de fuerza alguna externa al conjunto de cargas.

5. En la figura se muestra una línea muy larga cargada uniformemente con λ = -50 [nC/m] y una carga puntual Q_1 de 12 [nC] colocada en el punto D (0, -3, 0) [cm]; determine:

a) ¿En qué posición sobre el eje y, ($y > 0$) debería colocarse una carga puntual q_0, de cualquier valor, para que la fuerza sobre esta carga fuese nula?

b) La diferencia de potencial V_{BA}, donde B (0, 0, 3)[cm] y A (0, 3, 0) [cm].

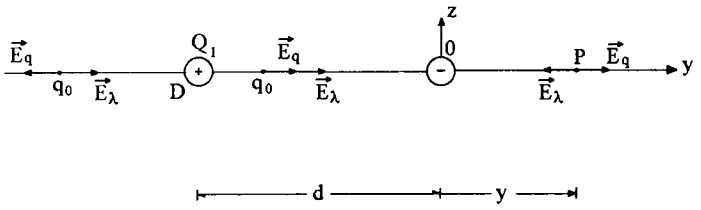
c) El trabajo necesario para mover una carga q = 10 [nC], desde el punto A hasta el punto C (0, 0,-3) [cm].



Resolución:

a) Para determinar la posición que debe ocupar q_0 para no experimentar fuerza eléctrica alguna se concluye que debe ser sobre el eje y, ya que sólo en sus puntos se puede cancelar la fuerza producida por la línea cargada con la fuerza producida por la carga Q_1. Además la posición buscada deberá estar a la derecha o a la izquierda de los cuerpos cargados, pero no entre ellos porque en esa región las fuerzas eléctricas no se cancelan mutuamente. De la definición de campo eléctrico se tiene:

$\vec{F}_{q0} = q_0 \vec{E}_0$; por lo cual $\vec{E}_0 = \vec{E}_\lambda + \vec{E}_q = 0$



Para un punto con $y > 0$ se tendrá:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{y}(-\hat{j}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{(d+y)^2}\hat{j} = 0 \text{, lo cual es equivalente a}$$

$$\frac{2|\lambda|}{y} = \frac{Q_1}{(d+y)^2} \; ; \; 2|\lambda|(d+y)^2 = Q_1 y \; ; \; 2(50\times10^{-9})\left[\frac{\text{C}}{\text{m}}\right](0.03\,[\text{m}]+y)^2 = 12\times10^{-9}[\text{C}] \;\; \text{y}$$

$$y^2 - 0.06y + 0.0009 = 0; \; y_1 = 0.03\,[\text{m}] = y_2 \; ; \; P(0,3,0)\,[\text{cm}]$$

Como las dos raíces de la ecuación de segundo grado resultaron iguales (0.03 [m]) se concluye que a la izquierda de los cuerpos cargados en ningún punto del eje y se cancelan las componentes de campo eléctrico.

b) La diferencia de potencial V_{BA} se obtiene mediante:

$$V_{BA} = V_{BA\lambda} + V_{BAQ_1}$$

$$V_{BA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_{B0}}{r_{A0}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_1 \left[\frac{1}{r_{BD}} - \frac{1}{r_{AD}} \right] ; \text{ como } r_{B0} = r_{A0} , V_{BA\lambda} = 0$$

$$V_{BA} = 9\times10^9 \left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \right] 12\times10^{-9} \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}} \right] \left[\frac{1}{3\sqrt{2}\times10^{-2}} - \frac{1}{0.06} \right] = 745.58[\mathrm{V}]$$

c) El trabajo cuasiestático para trasladar una q = 10 [nC] desde el punto A hasta el punto C se determina utilizando el principio de conservación de la energía con:

$$\underset{q}{{}_A W_C} = EP_C - EP_A , \text{ como } V_C = \frac{EP_C}{q} \text{ y } V_A = \frac{EP_A}{q}$$

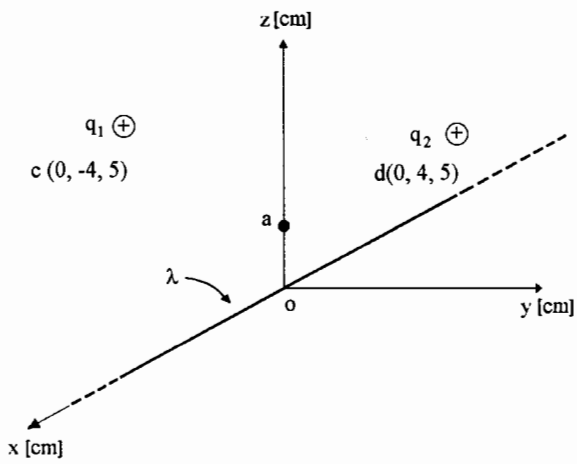
$$\underset{q}{{}_A W_C} = q(V_C - V_A) ; V_{CA} = V_{CA\lambda} + V_{CAQ_1} ; V_{CA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_{C0}}{r_{A0}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_1 \left[\frac{1}{r_{CD}} - \frac{1}{r_{AD}} \right]$$

$$\text{como } r_{C0} = r_{A0} , V_{CA\lambda} = 0 \text{ y } V_{CA} = 9\times10^9 \left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \right] 12\times10^{-9} \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}} \right] \left[\frac{1}{3\sqrt{2}\times10^{-2}} - \frac{1}{0.06} \right] \therefore V_{CA} = 745.58[\mathrm{V}] \text{ y}$$

$$\underset{q}{{}_A W_C} = 10\times10^{-9}[\mathrm{C}]745.58\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} \right] = 7.4558\times10^{-6}[\mathrm{J}] = 7.4558[\mu\mathrm{J}]$$

El trabajo resultó positivo, esto significa que lo debe realizar un agente externo al conjunto de cargas, incrementándose la energía del sistema.

6. Se tienen una línea muy larga, con carga $\lambda = -25\,[\text{pC/m}]$ uniformemente distribuida, y dos cargas puntuales q_1 y q_2 ambas de 10 [pC]. Determine:



a) El campo eléctrico en el punto *a* (0, 0, 2) [cm].

b) La fuerza eléctrica que experimentaría una carga $q = +1.8$ [nC], si se hallara en el punto *a*.

c) La diferencia de potencial V_{ab}, siendo *b* (0, 0, 8) [cm].

d) La densidad superficial de carga σ que distribuida uniformemente sobre un cilindro de radio $r = 1$ [cm], con su eje en el eje *x*, podría sustituir a la línea cargada, sin modificar el campo eléctrico en *a*.

Resolución:

a) Con la aplicación del principio de superposición se tiene:

$$\vec{E}_a = \vec{E}_{a\lambda} + \vec{E}_{a1} + \vec{E}_{a2}$$

$$\vec{E}_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{a0}}\hat{r}_{a0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{ca}^2}\hat{r}_{ca} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{da}^2}\hat{r}_{da}$$

$$\vec{E}_a = 9\times10^9\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{C^2}\right]\left[\left[\frac{2(25\times10^{-12})\left[\frac{C}{\text{m}}\right]}{0.02\,[\text{m}]}\right](-\hat{k}) + \frac{10\times10^{-12}[C]}{(0.05)^2[\text{m}^2]}\left[\frac{4\hat{j}-3\hat{k}}{5}\right] + \frac{10\times10^{-12}[C]}{(0.05)^2[\text{m}^2]}\left[\frac{-4\hat{j}-3\hat{k}}{5}\right]\right]$$

$$\vec{E}_a = 9\times10^9(-2.5\times10^{-9}\hat{k} + 3.2\times10^{-9}\hat{j} - 2.4\times10^{-9}\hat{k} - 3.2\times10^{-9}\hat{j} - 2.4\times10^{-9}\hat{k})\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

$$\vec{E}_a = -65.7\hat{k}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

b) La fuerza que experimentaría *q* se obtiene a partir de la definición:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\ ;\ \vec{F}_a = q\vec{E}_a$$

$$\vec{F}_a = 1.8\times10^{-9}[\text{C}](-65.7)\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]\hat{k} = -1.183\times10^{-7}\hat{k}\,[\text{N}]$$

c) Aplicando el principio de superposición:

$$V_{ab} = V_{ab\lambda} + V_{ab1} + V_{ab2}$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_{b0}}{r_{a0}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \left[\frac{1}{r_{ca}} - \frac{1}{r_{cb}}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \left[\frac{1}{r_{da}} - \frac{1}{r_{db}}\right]$$

con ayuda de la figura se puede deducir que:

$V_{ab} < 0$, $r_{ca} = r_{cb}$ y $r_{da} = r_{db}$, por lo cual:

$$V_{ab} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]2\left(-25\times10^{-12}\right)\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]\ln\frac{8}{2} = -0.624\,[\mathrm{V}]$$

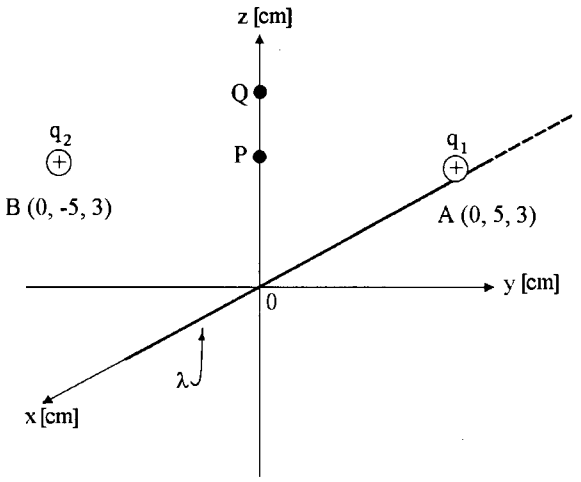
d) Para que $\vec{E}_{a\lambda} = \vec{E}_{a\sigma}$, se requiere que la carga de la línea sea igual a la del cilindro, para longitudes iguales de ambos:

$$q_{línea} = \lambda\ell \text{ y } q_{cilindro} = \sigma 2\pi r_c \ell \;;\; \therefore\; \sigma = \frac{\lambda}{2\pi r_c}$$

$$\sigma = \frac{-25\times10^{-12}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]}{2\pi(0.01)\,[\mathrm{m}]} = -3.979\times10^{-10}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}\right]$$

$$\sigma = -397.9\left[\frac{\mathrm{pC}}{\mathrm{m^2}}\right]$$

7. Se tienen una línea con $\lambda = 50\,[\text{pC/m}]$ uniformemente cargada y las cargas puntuales q_1 y q_2 localizadas en: (0, 5, 3)[cm] y (0, -5, 3)[cm], respectivamente, de 10 [pC] cada una, como se muestra en la figura.



a) Determinar el campo eléctrico en el punto P localizado en las coordenadas P (0, 0, 3) [cm].

b) Calcular la fuerza eléctrica que experimentaría una carga $q = 2\ [\mu\text{C}]$, si ésta se localizara en el punto P.

c) Calcular la diferencia de potencial V_{PQ}; si el punto Q se encuentra localizado en las coordenadas Q (0, 0, 6) [cm].

Resolución:

a) Aplicando el principio de superposición se plantea:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P\lambda} + \vec{E}_{P_1} + \vec{E}_{P_2}$$

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{0P}}\hat{r}_{0P} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{AP}^2}\hat{r}_{AP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{BP}^2}\hat{r}_{BP}$$

$$\vec{E}_p = 9\times10^9\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right]\left[\frac{2(50\times10^{-12})[\text{C/m}]}{0.03\,[\text{m}]}\hat{k} - \frac{10\times10^{-12}[\text{C}]}{(0.05)^2[\text{m}^2]}\hat{j} + \frac{10\times10^{-12}[\text{C}]}{(0.05)^2[\text{m}^2]}\hat{j}\right]$$

$$\therefore\ \vec{E}_P = 30\hat{k}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

b) De la definición de campo eléctrico:

$$\vec{E}_P = \frac{\vec{F}_P}{q}\ ;\ \vec{F}_P = q\vec{E}_P\ ;\ \vec{F}_P = 2\times10^{-6}[\text{C}]30\hat{k}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right] = 60\hat{k}\,[\mu\text{N}]$$

c) Mediante el principio de superposición:

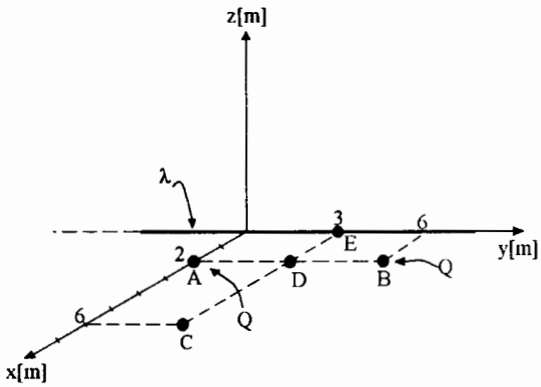
$$V_{PQ} = V_{PQ\lambda} + V_{PQ_1} + V_{PQ_2}$$

$$V_{PQ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\ln\frac{r_{0Q}}{r_{0P}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1\left[\frac{1}{r_{AP}} - \frac{1}{r_{AQ}}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_2\left[\frac{1}{r_{BP}} - \frac{1}{r_{BQ}}\right]$$

$$V_{PQ} = 9\times10^9\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right]\left[2(50\times10^{-12})\left[\frac{\text{C}}{\text{m}}\right]\ln\frac{6}{3} + 10\times10^{-12}\left[\frac{\text{C}}{\text{m}}\right]\left[\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.0583} + \frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.0583}\right]\right]$$

$$V_{PQ} = (0.6238 + 0.5125)[\text{V}]\ ;\ V_{PQ} = 1.1363[\text{V}]$$

8. Se tiene una línea muy larga, con densidad lineal de carga uniforme $\lambda = -2.0$ [μC/m]; en el punto A (2, 0, 0) [m] y en el punto B (2, 6, 0) [m] se coloca una carga puntual $Q = 4$ [μC], en cada punto. Todas las cargas de este conjunto están lo suficientemente alejadas como para despreciar el efecto de inducción; suponga que se encuentran en el vacío. Determine:



a) El campo eléctrico total en el punto C (6, 3, 0) [m].

b) El trabajo necesario para trasladar una carga $q = 1$ [nC] desde el punto C hasta el D (2, 3, 0) [m].

Resolución:

a) Con el principio de superposición se plantea:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{C\lambda} + \vec{E}_{CQA} + \vec{E}_{CQB} \; ; \; \vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{CE}}\hat{r}_{CE} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_A|}{r_{AC}^2}\hat{r}_{AC} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_B|}{r_{BC}^2}\hat{r}_{BC}$$

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2|\lambda|\hat{i}}{r_{CE}} + \frac{|Q_A|}{r_{AC}^2}\left(\frac{4\hat{i} + 3\hat{j}}{5}\right) + \frac{|Q_B|}{r_{BC}^2}\left(\frac{4\hat{i} - 3\hat{j}}{5}\right)\right]$$

como $|Q_A| = |Q_B|$ y $r_{AC} = r_{BC}$

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2|\lambda|}{r_{CE}}\hat{i} + \frac{|Q_A|}{r_{AC}^2}\left(\frac{8}{5}\hat{i}\right)\right] = 9\times10^9\left[\frac{-2(2\times10^{-6})\hat{i}}{6} + \frac{4\times10^{-6}}{(5)^2}\left(\frac{8}{5}\hat{i}\right)\right]$$

$$\vec{E}_C = (9\times10^3)\left[-\frac{4}{6}\hat{i} + \frac{32}{125}\hat{i}\right] = 9\times10^3(-0.4107\hat{i}) = -3{,}696\hat{i}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) $\underset{q}{{}_C W_D} = EP_D - EP_C = qV_{DC} \; ; \; V_{DC} = V_{DC\lambda} + V_{DCQA} + V_{DCQB}$

por inspección se obtiene que:

$$V_{DC\lambda} < 0 \; , \; V_{DCQA} > 0 \; , \; V_{DCQB} > 0$$

$$V_{DC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\ln\frac{r_C}{r_D} + \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{AC}}\right) + \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{BD}} - \frac{1}{r_{BC}}\right)$$

se observa que $r_{AD} = r_{BD}$ y como $r_{AC} = r_{BC}$

$$V_{DC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2\lambda)\ln\frac{r_C}{r_D} + \frac{2Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{AC}}\right)$$

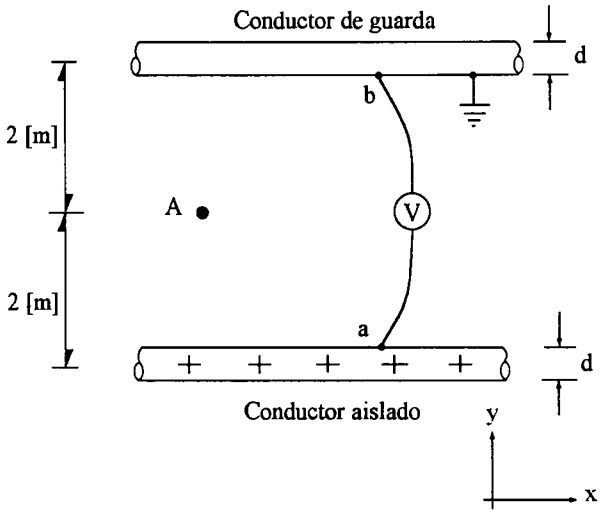
$$V_{DC} = 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[-2\times10^{-6}\ln\frac{6}{2} + 4\times10^{-6}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$V_{DC} = -39{,}550 + 9{,}600$$

$$V_{DC} = -29{,}950[\mathrm{V}]$$

$${}_CW_D = (1\times10^{-9})(-29{,}950) = -29.95\times10^{-6}[\mathrm{J}]$$

9. La figura muestra dos conductores rectos muy largos, paralelos entre sí, uno de ellos aislado y el otro conectado a tierra, ambos con diámetro d = 1 [cm] en su sección transversal. Si debido a una descarga atmosférica, el conductor aislado adquiere una carga eléctrica $\lambda = +3[\mu C/m]$, uniformemente distribuida. Determine:



a) La carga eléctrica en cada unidad de longitud (magnitud y signo) que adquirirá, por inducción, el conductor conectado a tierra.

b) El campo eléctrico en el punto A.

c) La diferencia de potencial V_{ab} que indicará el voltímetro V.

d) La energía necesaria para mover una molécula ionizada, con carga de + 1/6 [nC], desde el conductor aislado hasta el conductor conectado a tierra.

Resolución:

a) El conductor de guarda presentará carga negativa atraída de la Tierra por la carga positiva que posee el conductor aislado; de esta forma se puede concluir que:

$$\lambda_{inducida\ cg} = -\lambda_{adquirida\ ca}, \text{ es decir: } \lambda_{ind} = -3\left[\frac{\mu C}{m}\right]$$

b) Para el cálculo del campo eléctrico en el punto A, aplicamos el principio de superposición en dicho punto:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A\lambda-} + \vec{E}_{A\lambda+}$$

y consideramos que los conductores son hilos de carga con su λ en su eje, es decir:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda_-|}{r}\hat{j} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda_+|}{r}\hat{j}, \text{ expresión válida si } r \geq \frac{d}{2}$$

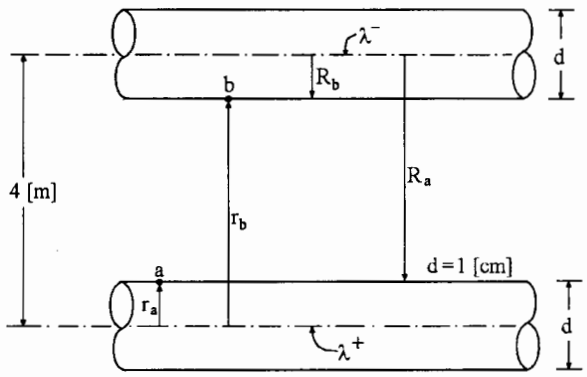
$$\vec{E}_A = 2\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r}\right]\hat{j} = 2\left[9\times10^9\left[\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right]\frac{(2)(3\times10^{-6})\left[\frac{C}{m}\right]}{2[m]}\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_A = 54{,}000\hat{j}\left[\frac{N}{C}\right]$$

c) Para calcular la diferencia de potencial V_{ab}, también empleamos el principio de superposición; es decir:

$$V_{ab} = V_{ab\lambda+} + V_{ab\lambda-}$$

se puede concluir que



$$V_{ab\lambda+} > 0 \text{ y } V_{ab\lambda-} > 0$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_+ \ln\frac{r_b}{r_a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_- \ln\frac{R_b}{R_a}$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2)\left[\lambda_+ \ln\frac{r_b}{r_a} + \lambda_- \ln\frac{R_b}{R_a}\right]$$

$$V_{ab} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]2\left[3\times10^{-6}\ln\frac{3.995}{0.005} - 3\times10^{-6}\ln\frac{0.005}{3.995}\right]\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$V_{ab} = 9\times10^9(2)(2)\left[3\times10^{-6}\ln\frac{3.995}{0.005}\right]\left[\frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$V_{ab} = 721{,}802.98\ [\mathrm{V}]$$

d) Sea q la carga de la molécula ionizada, por lo tanto la energía necesaria para realizar el traslado mencionado se puede calcular como el trabajo cuasiestático desarrollado en dicho traslado:

$$\underset{q}{{}_aW_b} = \Delta EP = EP_b - EP_a = qV_b - qV_a = qV_{ba} = -qV_{ab}$$

$$\underset{q}{{}_aW_b} = -\frac{1}{6}\times10^{-9}[\mathrm{C}](721{,}802.98)\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] = -1.203\times10^{-4}[\mathrm{J}]$$

El signo (–) en el resultado indica que la molécula disminuye su nivel energético al ser trasladada como se indicó: desde a hasta b.

10. Para cada una de las proposiciones siguientes, indique si es verdadera o falsa anotando en el paréntesis V o F, según sea el caso. Este tipo de reactivos se califican aciertos menos errores.

En una región del espacio en la que existe exclusivamente una carga puntual, se cumple que:

a) La magnitud del campo eléctrico aumenta al disminuir la distancia a la carga . . . . . (V)

b) El potencial eléctrico de puntos que se localizan a igual distancia de la carga es cero . . . . . (F)

c) La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera colocados a la misma distancia de la carga es cero . . . . . (V)

d) El trabajo necesario para desplazar la carga, de un punto a otro de la región, es cero . . . . . (V)

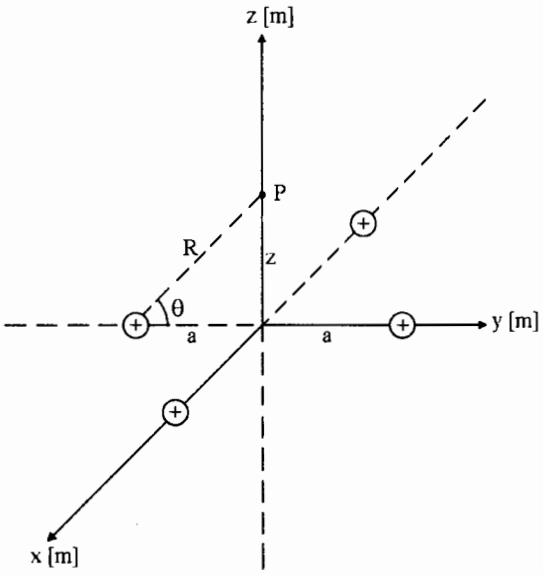
11. Cuatro cargas puntuales de 50 [nC] en el espacio libre, están situadas simétricamente sobre una circunferencia de radio a = 0.2 [m], centrada en el origen y localizada en el plano z = 0. Determine:

a) ¿En qué punto del eje z el campo eléctrico es máximo?

b) El valor de E_z máximo.

c) El potencial eléctrico del origen.

d) El trabajo necesario para mover una carga q_0 = 1 [nC] desde el infinito hasta el origen.

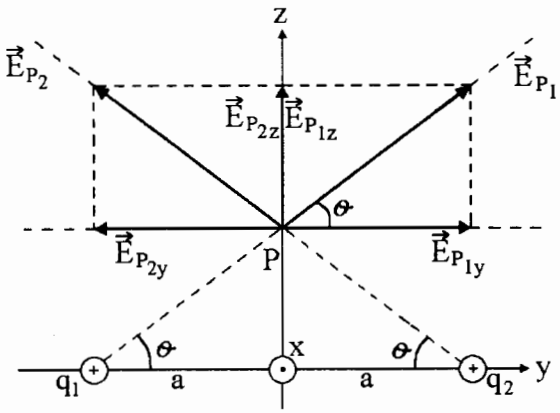


Resolución:

a) Sea P el punto del eje z en el cual el campo eléctrico es máximo. De acuerdo con el principio de superposición, el campo total en P se debe a la suma de las contribuciones de cada una de las cargas puntuales:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P1} + \vec{E}_{P2} + \vec{E}_{P3} + \vec{E}_{P4}$$

Conviene resaltar que los términos del segundo miembro de la ecuación anterior son de magnitudes iguales, ya que las cargas puntuales son de valores iguales y se encuentran a la misma distancia del punto P. Además debido a la simetría del conjunto de cargas, el campo eléctrico total en dicho punto tendrá la dirección del eje z ya que las componentes horizontales se cancelan.



Como $E_{P1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{R^2}$, el campo en P resulta:

$$\vec{E}_P = 4\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R^2}\right] \text{ sen } \theta\,\hat{k} \;;\; \text{sen } \theta = \frac{z}{R}$$

$$\vec{E}_P = 4\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R^2}\right]\frac{z}{R}\,\hat{k}$$

y $R^2 = a^2 + z^2$

Al sustituir se obtiene:

$$\vec{E}_P = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}\right]\hat{k}$$, se observa que $E_p = f(z)$

Con el método de máximos y mínimos, empleando la derivada del campo eléctrico con respecto a la variable independiente (z), obtenemos:

$$\frac{dE_P}{dz} = 0 \;;\; \frac{dE_P}{dz} = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(a^2+z^2)^{3/2} - z\left(\frac{3}{2}\right)(a^2+z^2)^{1/2}(2z)}{(a^2+z^2)^3}\right]$$

$$\frac{dE_P}{dz} = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(a^2+z^2)^{1/2}[a^2+z^2-3z^2]}{(a^2+z^2)^3}\right] = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a^2-2z^2}{(a^2+z^2)^{5/2}}\right] = 0$$

De esta expresión se deduce que debe cumplirse que:

$a^2 - 2z^2 = 0$ y $z_P = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$; $z_P = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$; como $a = 0.2$ [m]

$z_P = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0.2)[\text{m}] = \pm\ 0.1414$ [m]

El resultado nos indica que hay dos puntos, sobre el eje z, en los cuales el campo eléctrico es máximo; dichos puntos están situados simétricamente, a la distancia z_P, respecto al origen.

b) El valor máximo de E_z se encuentra al sustituir z_P en la expresión del campo eléctrico en el punto P, es decir:

$$\vec{E}_P = \pm 9\times 10^9\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right]4\,(50\times 10^{-9})[\text{C}]\left[\frac{0.1414\,[\text{m}]}{\left(\sqrt{(0.2)^2+(0.1414)^2}\right)^3[\text{m}^3]}\right]\hat{k}$$

$$\vec{E}_P = \pm 17{,}320.5\,\hat{k}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

c) El potencial del origen se debe a la superposición del potencial producido por cada carga puntual:

$$V_0 = V_{01} + V_{02} + V_{03} + V_{04}, \text{ en la cual } V_{01} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{10}}$$

como las cuatro cargas son iguales y también lo son las distancias de cada carga al origen, los potenciales que se producen en el origen son iguales, por lo tanto:

$$V_0 = 4\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\right]; \; V_0 = 4(9\times10^9)\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\frac{50\times10^{-9}[\mathrm{C}]}{0.2[\mathrm{m}]} = 9{,}000[\mathrm{V}]$$

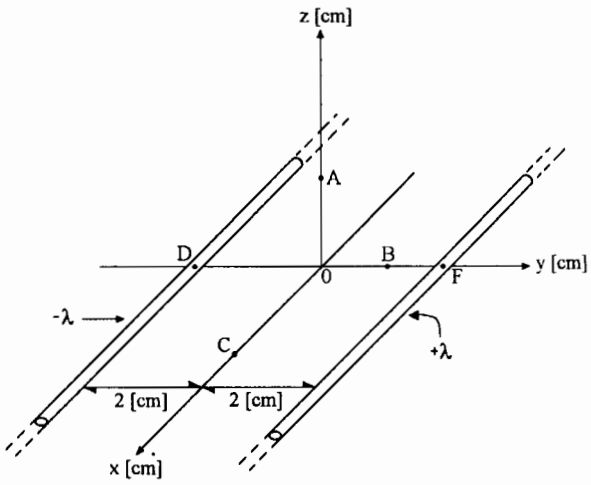
d) $\underset{q_0}{{}_{\infty}W_{0}} = EP_0 - EP_{\infty}$; como $V_P = \dfrac{EP_P}{q_0}$ se obtiene

$$\underset{q_0}{{}_{\infty}W_{0}} = q_0V_0 - q_0V_{\infty} = q_0(V_0 - V_{\infty}); \text{ por convención } V_{\infty} = 0$$

$$\underset{q_0}{{}_{\infty}W_{0}} = q_0V_0 = 1\times10^{-9}[\mathrm{C}]9{,}000\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] = 9\times10^{-6}[\mathrm{J}] = 9[\mu\mathrm{J}]$$

Como el signo del trabajo resultó positivo, significa que q_0 incrementa su energía al ser trasladada desde muy lejos hasta el origen.

12. En la figura se muestran dos alambres metálicos rectos muy largos, de diámetros despreciables, paralelos al eje x y contenidos en el plano xy, cargados con densidades lineales $+\lambda = 1/6\ [\mu C/\text{m}]$, el alambre de la derecha, y $-\lambda$, el alambre de la izquierda, separados 4 centímetros. Obtener:



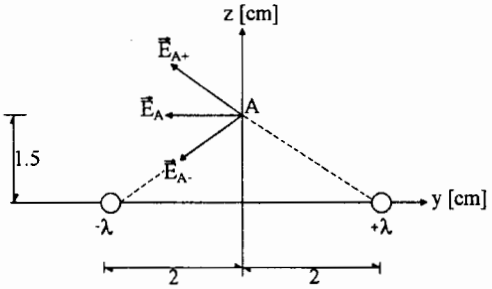
a) El campo eléctrico en el punto A (0, 0, 1.5) [cm] y en el punto 0 (0, 0, 0).

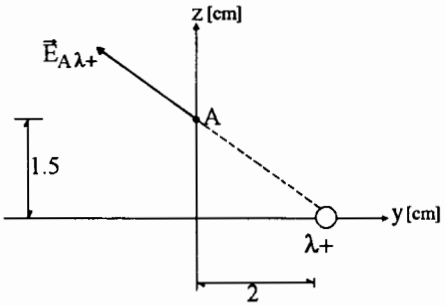
b) La diferencia de potencial V_{AC} entre el punto A y el punto C (2, 0, 0) [cm].

c) La fuerza que experimenta cada metro del conductor del lado derecho debida al otro conductor.

d) El trabajo necesario para trasladar 20 electrones del punto A al B (0, 1, 0) [cm].

Resolución:





$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A\lambda+} + \vec{E}_{A\lambda-}$$

$$\vec{E}_{A\lambda+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}\hat{r}_1$$

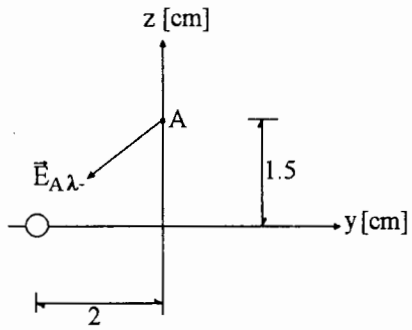
$$r = \sqrt{(0.015)^2 + (0.02)^2} = 0.025\ [\text{m}]$$

$$\hat{r}_1 = \left(-\frac{0.02}{0.025}\hat{j} + \frac{0.015}{0.025}\hat{k}\right) = \left(-0.8\hat{j} + 0.6\hat{k}\right)$$

$$\therefore\ \vec{E}_{A\lambda+} = (9\times10^9)\frac{(2)(1/6\times10^{-6})}{0.025}(-0.8\hat{j} + 0.6\hat{k})$$

$$\vec{E}_{A\lambda+} = (-96{,}000\,\hat{j} + 200{,}000\,\hat{k})\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{E}_{A\lambda-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}\hat{r}_2$$



$r = 0.025$ [m]

$$\hat{r}_2 = \left(-\frac{0.02}{0.025}\hat{j} - \frac{0.015}{0.025}\hat{k}\right)$$

$$\vec{E}_{A\lambda-} = (9\times10^9)\frac{(2)(1/6\times10^{-6})}{0.025}(-0.8\hat{j} - 0.6\hat{k}) = [-96{,}000\hat{j} - 200{,}000\hat{k}]\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\therefore\ \vec{E}_A = (-96\hat{j} + 200\hat{k} - 96\hat{j} - 200\hat{k})\times10^3 = (-192\hat{j})\,10^3\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0\lambda+} + \vec{E}_{0\lambda-}\ ;\ \vec{E}_{0\lambda+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}(-\hat{j}) = -(9\times10^9)\frac{2(1/6\times10^{-6})}{0.02}\hat{j}$$

$$\vec{E}_{0\lambda+} = -150\hat{j}\left[\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{E}_{0\lambda-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}(-\hat{j}) = -150\hat{j}\left[\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\therefore\ \vec{E}_0 = (-150\hat{j} - 150\hat{j})\,10^3 = (-300\hat{j})\,10^3\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) $V_{AB} = V_{AB\lambda+} + V_{AB\lambda-}$

$$V_{AB\lambda+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\ln\frac{r_B}{r_A} = (9\times10^9)(2)\left(\frac{1}{6}\times10^{-6}\right)\ln\frac{0.01}{0.025}$$

$$V_{AB\lambda+} = -2.749\times10^3\,[\mathrm{V}]$$

$$V_{AB\lambda-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln\frac{r_B}{r_A} = (9\times10^9)(2)\left(\frac{-1}{6}\times10^{-6}\right)\ln\frac{0.03}{0.025}$$

$$V_{AB\lambda-} = -\ 547[\mathrm{V}]$$

$$V_{AB} = (-2.749 - 0.547)[\mathrm{kV}] = -3.296[\mathrm{kV}]$$

c) $\vec{F} = q\vec{E}\ ;\ \lambda = \frac{q}{\ell} \therefore \frac{F}{\ell} = \frac{q}{\ell}E = \lambda E$

Como es fuerza en cada unidad de longitud: $\ell = 1$

$$F_1 = \lambda E = \lambda\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda^2}{r} = (9\times10^9)\frac{2(1/6\times10^{-6})^2}{0.04}$$

$$F_1 = 0.0125\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] \text{ y } \vec{F}_1 = -0.0125\hat{j}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

d) ${}_AW_B = qV_{BA} = -qV_{AB}$

$${}_AW_B = -(20)(-\ 1.6\times10^{-19})(-\ 3.296\times10^3)[\mathrm{J}]$$

$${}_AW_B = -\ 10.547\times10^{-15}[\mathrm{J}]$$

El signo - en este trabajo denota disminución de energía potencial eléctrica de los electrones trasladados.

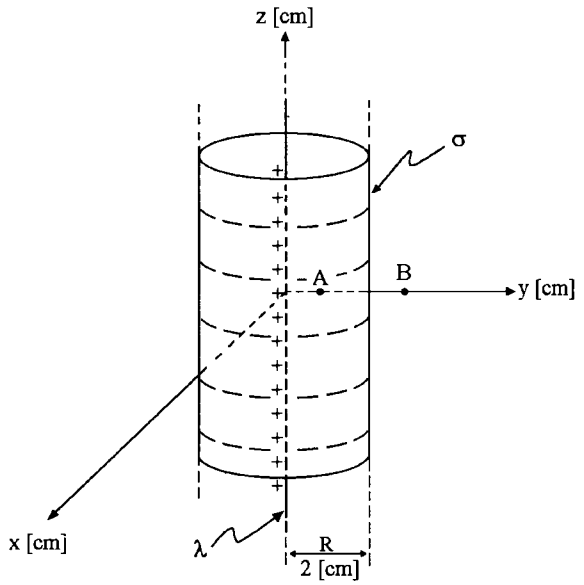
13. La figura muestra una línea recta con densidad lineal de carga $\lambda = 10[\mu C/m]$, coincidente con el eje z y una superficie cilíndrica con densidad superficial de carga $\sigma = -3\ [\mu C/m^2]$ coaxial con el eje z, ambas muy largas y con cargas uniformemente distribuidas. Determine:

a) El campo eléctrico en el punto A (0, 1, 0) [cm].

b) El campo eléctrico en el punto B (0, 3, 0) [cm].

c) La diferencia de potencial V_{AB}.

d) El trabajo necesario para desplazar una carga $q = -4.8\times10^{-19}$[C] de A a B.



Resolución:

a) Al aplicar el principio de superposición y la ley de Gauss se tiene:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A\lambda} + \vec{E}_{A\sigma}$$

$$\vec{E}_{A\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_A}\hat{j} = \frac{10\times10^{-6}}{(2\pi)(8.85\times10^{-12})(1\times10^{-2})}\hat{j}$$

$$\vec{E}_{A\lambda} = 17.97\times10^{6}\hat{j}\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$\vec{E}_{A\sigma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_A = 17.97\times10^{6}\hat{j}\left[\frac{N}{C}\right]$$

b) $\vec{E}_B = E_{B\lambda} + \vec{E}_{B\sigma}$; $\vec{E}_{B\lambda} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_B}\hat{j} = \dfrac{10\times10^{-6}}{2\pi(8.85\times10^{-12})(3\times10^{-2})}\hat{j} = 6\times10^{6}\hat{j}$

$$\lambda' = 2\pi R\sigma = 2\pi(2\times10^{-2})(-3\times10^{-6}) = -377\times10^{-9}\left[\frac{C}{m}\right]$$

$$\vec{E}_{B\sigma} = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r_B}\hat{j} = \frac{-377\times10^{-9}}{2\pi(8.85\times10^{-12})(3\times10^{-2})}\hat{j} = -0.226\times10^{6}\hat{j}$$

$$\vec{E}_B = (6\hat{j} - 0.223\hat{j})\times10^{6} = 5.777\times10^{6}\hat{j}\left[\frac{N}{C}\right]$$

c) Superposición de una línea y un cilindro hueco.

$$V_{AB} = V_{AB\lambda} + V_{AB\sigma}$$

$$V_{AB\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A} = \frac{10\times10^{-6}}{2\pi(8.85\times10^{-12})}\ln\frac{3}{1} = 197.48\times10^3\,[\mathrm{V}]$$

$$V_{AB\sigma} = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{R} = \frac{-377\times10^{-9}}{2\pi(8.85\times10^{-12})}\ln\frac{3}{2} = -2.748\times10^3\,[\mathrm{V}]$$

$$V_{AB} = (197.48 - 2.748)\times10^3 = 194.732\,[\mathrm{kV}]$$

d) $${}_{A}W_{B}^{\,q} = qV_{BA} = (-4.8\times10^{-19})(-194.732\times10^3)[\mathrm{J}]$$

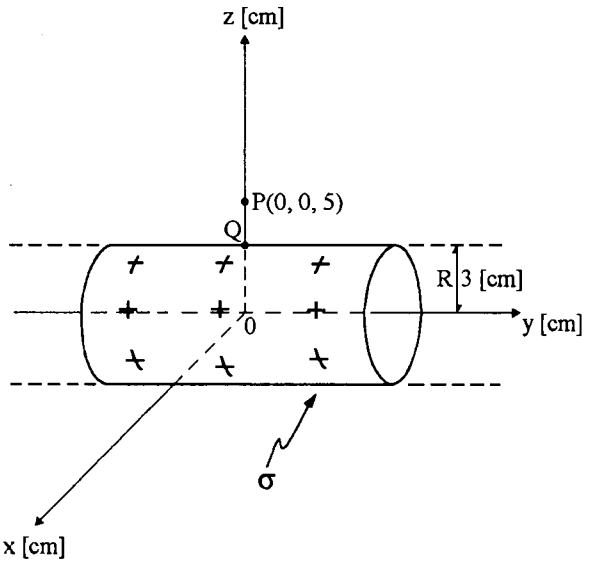
$${}_{A}W_{B}^{\,q} = 93.47\times10^{-15}\,[\mathrm{J}]$$

14. Se tiene una superficie cilíndrica con radio R = 3 [cm], coaxial con el eje y, muy larga, con densidad superficial de carga eléctrica σ = 2 [μC/m^2], distribuida uniformemente, como se muestra en la figura. Calcule:

a) La diferencia de potencial entre el punto 0 y el P (V_{0P}).

b) La fuerza eléctrica que experimentaría una partícula α $\left(q_\alpha = +\ 3.2\times10^{-19}[\mathrm{C}]\right)$, colocada en el punto P.

c) Si la diferencia de potencial entre el punto S (x_S, 0, 0) [cm] y el punto P es - 1,000 [V], ¿cuál es el valor de x_S?



Resolución:

a) Sea Q el punto (0, 0, 3) [cm].

$$V_{0P} = V_{QP} = \frac{\lambda_{eq}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_P}{r_Q}\ ;\ \lambda_{eq} = 2\pi R\sigma\ ;\ V_{0P} = \frac{2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_P}{r_Q}$$

$$V_{0P} = \frac{(3\times10^{-2})(2\times10^{-6})}{8.85\times10^{-12}}\ln\frac{5}{3} = 3.461\ [\mathrm{kV}]$$

b) $$\vec{E}_P = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{k} = \frac{2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\hat{k} = \frac{(3\times10^{-2})(2\times10^{-6})}{(8.85\times10^{-12})(5\times10^{-12})}\hat{k}$$

$$\vec{E}_P = 1.355\times10^6\,\hat{k}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{F}_\alpha = q_\alpha\vec{E}_P = (3.2\times10^{-19})(1.355\times10^6\,\hat{k})\ [\mathrm{N}]$$

$$\vec{F}_\alpha = 4.352\times10^{-13}\,\hat{k}\,[\mathrm{N}]$$

c) $V_{SP} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}2(\lambda_{eq})\ln\dfrac{r_P}{r_S}$; se hace notar que $r_S = x_S$

$$\ln\frac{r_P}{r_S} = \frac{V_{SP}}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2)\,\lambda_{eq}}\text{; tomando exponenciales:}$$

$$\frac{r_P}{r_S} = e^{\left(\frac{V_{SP}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda_{eq}}\right)} \quad ; \quad r_S = \frac{r_P}{e^{\left(\frac{V_{SP}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda_{eq}}\right)}} \quad \text{y} \quad \lambda_{eq} = 2\pi R\sigma$$

$$r_S = \frac{5\times10^{-2}[\text{m}]}{e^{-\frac{1{,}000}{9\times10^{9}(2)2\pi(0.03)2\times10^{-6}}}} = \frac{5\times10^{-2}[\text{m}]}{e^{-\frac{1{,}000}{6{,}785.84}}}$$

$$r_S = \frac{5\times10^{-2}[\text{m}]}{e^{-0.14737}} = \frac{5\times10^{-2}[\text{m}]}{0.863}$$

$$r_S = 0.0579[\text{m}]$$

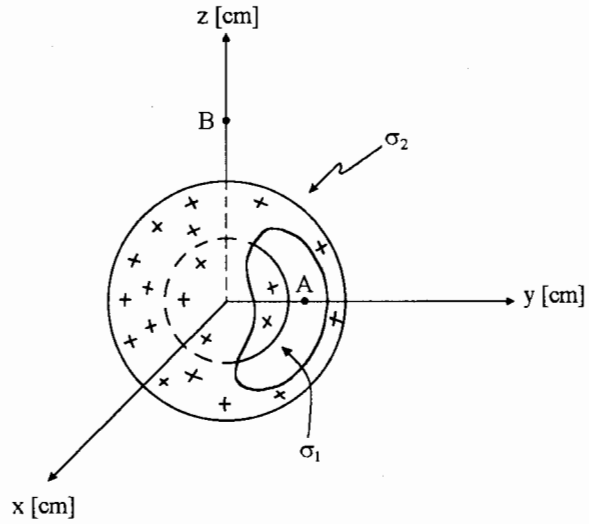
$$x_S \doteq 0.058[\text{m}] = 5.8\ [\text{cm}]$$

15. Se tienen dos superficies esféricas concéntricas, de espesores despreciables, de radios $r_1 = 0.2$ [m] y $r_2 = 0.4$ [m], con densidades superficiales de carga $\sigma_1 = 5$ [nC/m^2] y $\sigma_2 = 3$ [nC/m^2], respectivamente. Determine:

a) El campo eléctrico en el punto *B* (0,0, 0.5) [m].

b) La diferencia de potencial entre el punto *A* (0, 0.3, 0) [m] y el *B*.

c) El flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica imaginaria, con centro en el origen y radio $r = 1$ [m].



Resolución:

a) Superposición con la ley de Gauss

$$Q_1 = 4\pi r_1^2 \sigma_1 = 4\pi (0.2)^2 (5 \times 10^{-9}) = 2.51\,[\text{nC}]$$

$$Q_2 = 4\pi r_2^2 \sigma_2 = 4\pi (0.4)^2 (3 \times 10^{-9}) = 6.03\,[\text{nC}]$$

$$\vec{E}_B = \vec{E}_B^{\sigma 1} + \vec{E}_B^{\sigma 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_B^2} + \frac{Q_2}{r_B^2}\right)\hat{k}$$

$$\vec{E}_B = \frac{(9\times 10^9)(2.51 + 6.03)10^{-9}}{(0.5)^2}\hat{k} = 307\,\hat{k}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

b) $V_{AB} = V_{AB}^{\sigma 1} + V_{AB}^{\sigma 2} = V_{AB}^{\sigma 1} + V_{CB}^{\sigma 2}$, donde *C* es un punto de la esfera 2.

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[Q_1\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) + Q_2\left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B}\right)\right] = (9\times 10^9)\left[2.51\left(\frac{1}{0.3} - \frac{1}{0.5}\right) + 6.03\left(\frac{1}{0.4} - \frac{1}{0.5}\right)\right]10^{-9} = 57.3\,[\text{V}]$$

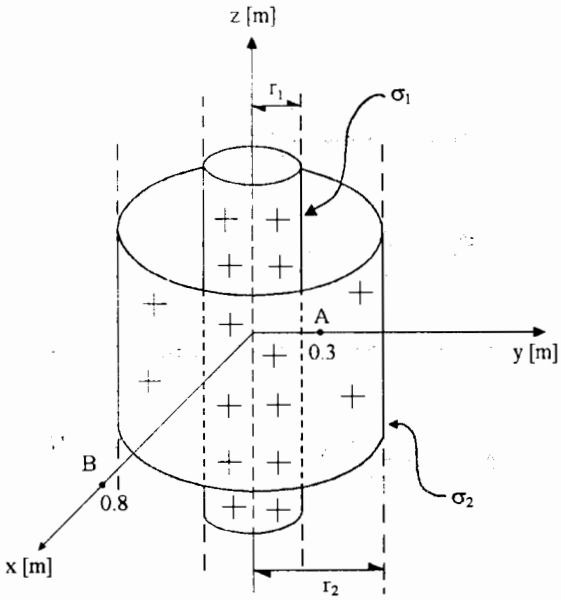
c) $$\phi_e = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{(2.51 + 6.03)10^{-9}}{8.85\times 10^{-12}} = 965\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}\right]$$

16. Se tienen dos superficies cilíndricas coaxiales con el eje z, muy largas, de radios $r_1 = 0.2$[m] y $r_2 = 0.4$[m], de espesores despreciables, con densidades superficiales de carga eléctrica uniformes $\sigma_1 = +2$[nC/m^2] y $\sigma_2 = +4$[nC/m^2], respectivamente. Determine:

a) El campo eléctrico en el punto B (0.8, 0, 0) [m].

b) La diferencia de potencial V_{AB}, siendo A (0, 0.3, 0) [m].

c) El flujo del campo eléctrico a través de un cilindro imaginario de radio $r = 0.5$ [m], con su eje coincidiendo con el eje z y sus bases (tapas) en los planos horizontales $z = -1$ [m] y $z = 1$ [m].



Resolución:

a) Para calcular el campo eléctrico en el punto B emplearemos la ley de Gauss y una superficie gaussiana coaxial con el eje z y de radio r_B ; esta superficie encerrará a las dos superficies cargadas σ_1 y σ_2 a partir de cuyos valores se pueden encontrar las densidades lineales de carga equivalentes que podrían ser colocadas en el eje z.

$$\lambda_{1eq} = 2\pi r_1 \sigma_1 \ ; \ \lambda_{1eq} = 2\pi(0.2)[\mathrm{m}]\, 2\times 10^{-9}[\mathrm{C/m^2}] = 2.51\ [\mathrm{nC/m}]$$

$$\lambda_{2eq} = 2\pi r_2 \sigma_2 = 2\pi(0.4)[\mathrm{m}]\, 4\times 10^{-9}[\mathrm{C/m^2}] = 10.05[\mathrm{nC/m}]$$

y aplicando el principio de superposición: $\vec{E}_B = \vec{E}_{B1} + \vec{E}_{B2}$

$$\vec{E}_B = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_{1eq}}{r_B}\hat{i} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_{2eq}}{r_B}\hat{i}$$

$$\vec{E}_B = \frac{18\times 10^9(2.51 + 10.05)10^{-9}\,\hat{i}}{(0.8)} = 283\,\hat{i}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) La diferencia de potencial V_{AB} puede evaluarse superponiendo los efectos de los dos cilindros; es decir:

$V_{AB} = V_{AB1} + V_{AB2} = V_{AB1} + V_{AC2} + V_{CB2}$, donde C es un punto del cilindro 2.

$V_{AB1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_{1eq} \ln\dfrac{r_B}{r_A}$; $V_{AC2} = 0$ ya que el interior del cilindro 2 es una región equipotencial debido a éste.

$$V_{CB2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_{2eq} \ln\frac{r_B}{r_C}$$

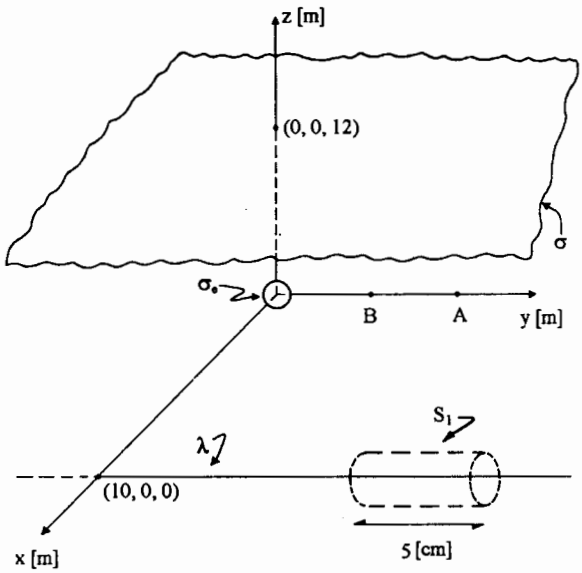
c) De la ley de Gauss $\oint_s E \cdot ds = \dfrac{\quad}{\varepsilon_0}$

$$\therefore \Phi_e = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} \quad ; \quad q_{ne} = \left(\lambda_{1eq} + \lambda_{2eq}\right) \ell$$

ya que la superficie imaginaria encierra a las dos superficies con carga, en la longitud $\ell = 2$[m] indicada:

$$\phi_e = \frac{(\lambda_{1eq} + \lambda_{2eq})\ell}{\varepsilon_0} = \frac{(2.51 + 10.05)10^{-9}(2)}{8.85 \times 10^{-2}} = 2838\left[\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C}}\right]$$

17. El sistema de elementos con cargas eléctricas mostrado en la figura comprende: una línea muy larga paralela al eje y, contenida en el plano xy y con densidad lineal λ = 10 [nC/m]; una superficie muy grande paralela al plano xy, con densidad superficial σ = -2 [nC/m^2] y una esfera conductora con radio de 2 [cm], centrada en el origen y con densidad superficial σ_e = 4 [μC/m^2]. Considere despreciable el efecto de inducción entre los cuerpos. Determine:



a) El campo eléctrico en el punto A (0, 8, 0) [m].

b) El flujo eléctrico a través de la superficie imaginaria cerrada S_1 producido por la línea de carga.

c) La diferencia de potencial V_{BA}, siendo B (0, 4, 0) [m].

d) El cambio en la energía potencial de un electrón, si éste se desplaza del punto A al punto B.

Resolución:

a) Al aplicar el principio de superposición para el campo eléctrico en A, se tiene:

$\vec{E}_A = \vec{E}_{A\lambda} + \vec{E}_{A\sigma} + \vec{E}_{A\sigma_e}$, al calcular cada componente:

$$\vec{E}_{A\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_A}(-\hat{i}) \;;\; \vec{E}_{A\lambda} = -9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\frac{2(10\times10^{-9})\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]}{10[\mathrm{m}]}\hat{i} = -18\hat{i}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{E}_{A\sigma} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\hat{k} \;;\; \vec{E}_{A\sigma} = \frac{2\times10^{-9}[\mathrm{C/m^2}]\hat{k}}{2(8.85\times10^{-12})[\mathrm{C^2/N\cdot m^2}]} \doteq 113\hat{k}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{E}_{a\sigma_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_{0A}^2}(\hat{j}) \text{ donde } Q = 4\pi r_e^2\sigma_e \;;\; \vec{E}_{A\sigma_e} = 9\times10^9\frac{4\pi(0.02)^2(4\times10^{-6})\hat{j}}{(8)^2} = 2.827\hat{j}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

y al sustituir en la expresión inicial:

$$\vec{E}_A = \left[-18\hat{i} + 2.827\hat{j} + 113\hat{k}\right]\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) De la ley de Gauss $\phi_e = \oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0}$, $q_{ne} = \lambda\ell \therefore \phi_e = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}$

$$\phi_e = \frac{10\times10^{-9}[\mathrm{C/m}](0.05)(\mathrm{m})}{8.85\times10^{-12}[\mathrm{C^2/N\cdot m^2}]} \doteq 56.5\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C}}\right]$$

c) Con el principio de superposición se obtiene: $V_{BA} = V_{BA\lambda} + V_{BA\sigma} + V_{BA\sigma_e}$, como las distancias (mínimas) del punto A a la línea λ y del punto B a la línea con carga son iguales, $V_{B\lambda} = V_{A\lambda}$ y $V_{BA\lambda} = 0$; por razones similares $V_{BA\sigma} = 0$ y $V_{BA\sigma_e} > 0$; es decir $V_{B\sigma_e} > V_{A\sigma_e}$, y como si fuera carga puntual:

$$V_{BA\sigma_e} = \frac{1(Q)}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_{B0}} - \frac{1}{r_{A0}}\right]; \; V_{BA\sigma_e} = 9\times10^9(4\pi)(0.02)^2(4\times10^{-6})\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right][\mathrm{V}] \therefore V_{BA} = V_{BA\sigma_e} = 22.62[\mathrm{V}]$$

d) Tenemos $\Delta EP_{BA} = EP_B - EP_A$; si el desplazamiento se realiza de manera cuasiestática; es decir, muy lentamente y sin variación en la energía cinética del electrón, se puede afirmar que

$$\Delta EP_{BA} = {}_A W_B$$

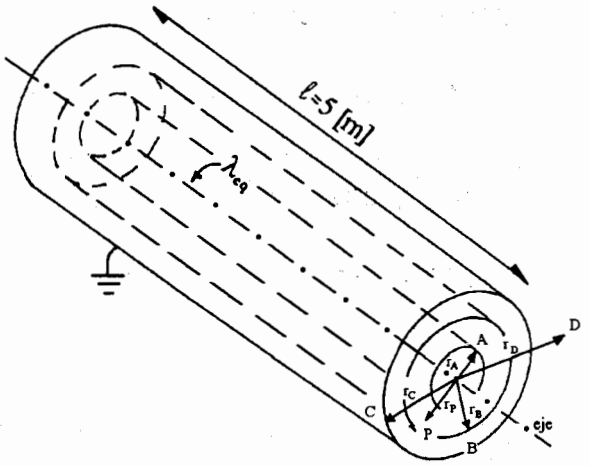
por lo tanto

$$\Delta EP_{BA} = eV_{BA}; \; \Delta EP_{BA} = -1.6\times10^{-19}[\mathrm{C}]\,22.62[\mathrm{V}]$$

y $\Delta EP_{BA} = -3.62\times10^{-18}[\mathrm{J}]$

El electrón disminuye su energía al realizar este desplazamiento.

18. Se coloca un cilindro A, con radio = 1 [cm] y densidad lineal de carga equivalente λ_{eq} = 3 [μC/m], coaxialmente con un cilindro metálico hueco B, con radio interior r_B = 3 [cm] y radio exterior r_C = 4 [cm]. Posteriormente la superficie exterior del cilindro B se conecta a tierra. Con la información de la figura, determine:



a) La densidad superficial de carga en la superficie exterior y en la interior del cilindro B.

b) La diferencia de potencial V_{PB}, entre los puntos P, situado a 2 [cm] del eje, y el B situado a 3 [cm] del eje.

c) El trabajo realizado al trasladar una carga q = 1 [nC] del punto D, situado fuera de los cilindros y a 8 [cm] del eje, al punto P.

Resolución:

a) Antes de conectar el cilindro hueco a tierra, en éste se presentaron cargas por el fenómeno de inducción. En la superficie interior habrá igual cantidad de carga que en el cilindro A pero de tipo negativo, la carga positiva del exterior del cilindro hueco se neutraliza con la conexión a tierra. Por esta razón:

$$\sigma_{ext} = 0 \text{ y } \sigma_{int} = \frac{-\lambda_{eq}\ell}{2\pi r_b \ell} \quad ; \quad \sigma_{int} = \frac{-3\times10^{-6}[\mathrm{C}]}{2\pi(0.03)[\mathrm{m}^2]} = -15.915\left[\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

b) La diferencia de potencial V_{PB} se evalúa con la integral

$V_{PB} = -\int_B^P \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ de la cual resulta:

$$V_{PB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_{eq} \ln\frac{r_B}{r_P} \quad ; \quad V_{PB} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right] 2(3\times10^{-6})\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]\ln\frac{3}{2} = 2.19\times10^4[\mathrm{V}]$$

c) El trabajo solicitado se puede expresar:

$${}_D W_P = q\, V_{PD}$$

la diferencia de potencial V_{PD} se puede escribir:

$$V_{PD} = V_{PB} + V_{BC} + V_{CD}$$

en la cual se pueden realizar simplificaciones:

$V_{BC} = 0$ ya que, en condiciones electrostáticas, el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo.

$V_{CD} = 0$ ya que no existe campo eléctrico en el exterior de los cilindros, al no haber carga en la superficie exterior del cilindro hueco debido a la conexión a tierra.

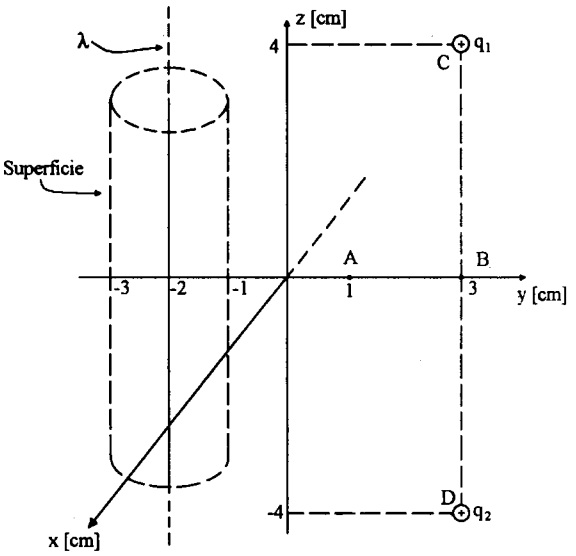
y se concluye que $V_{PD} = V_{PB}$ y el trabajo solicitado será:

$$_{D}W_{P} = qV_{PB}$$

$$_{D}W_{P} = = 1\times10^{-9}[\mathrm{C}]2.19\times10^{4}[\mathrm{V}] = 2.19\times10^{-5}[\mathrm{J}]$$

$$_{D}W_{P} = 21.9[\mu\mathrm{J}]$$

19. La figura muestra una línea muy larga paralela al eje z, que intercepta al eje y en -2 [cm], con densidad de carga λ = -200 [nC/m] y dos cargas puntuales q_1 y q_2, ambas de 25 [nC] y colocadas en C (0, 3, 4) [cm] y en D (0, 3, -4) [cm], respectivamente, con base en esto, determine:



a) El campo eléctrico en el punto A (0, 1, 0) [cm].

b) La diferencia de potencial V_{AB}, siendo B (0, 3, 0) [cm].

c) La fuerza eléctrica que actuaría sobre la carga $Q = -15\,[\text{nC}]$, si ésta fuese colocada en el punto B.

d) El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana, en cada unidad de longitud de ésta.

Resolución:

a) Al aplicar el principio de superposición:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A\lambda} + \vec{E}_{A1} + \vec{E}_{A2}$$

$$\vec{E}_{A\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{A\lambda}}\hat{r}_{A\lambda} \quad ; \quad \vec{E}_{A\lambda} = 9\times10^9\left[\frac{2|-200\times10^{-9}|}{0.03}\right](-\hat{j}) = -120\hat{j}\left[\frac{\text{kN}}{\text{C}}\right]$$

$$\vec{E}_{A1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{CA}^2}\hat{r}_{CA} \quad ; \quad \vec{E}_{A1} = 9\times10^9\left[\frac{25\times10^{-9}}{(\sqrt{20}\times10^{-2})^2}\right]\left[\frac{-2\hat{j}-4\hat{k}}{\sqrt{20}}\right] = \left[-50.3115\hat{j} - 100.623\hat{k}\right]\left[\frac{\text{kN}}{\text{C}}\right]$$

$$\vec{E}_{A2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{DA}^2}\hat{r}_{DA} \quad ; \quad \vec{E}_{A2} = 9\times10^9\left[\frac{25\times10^{-9}}{(\sqrt{20}\times10^{-2})^2}\right]\left[\frac{-2\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{20}}\right] = \left[-50.3115\hat{j} + 100.623\hat{k}\right]\left[\frac{\text{kN}}{\text{C}}\right]$$

y al sustituir en la expresión inicial

$$\vec{E}_A = \left(-120\hat{j} - 50.3115\hat{j} - 50.3115\hat{j} - 100.623\hat{k} + 100.623\hat{k}\right)\left[\frac{\text{kN}}{\text{C}}\right] = -220.623\hat{j}\left[\frac{\text{kN}}{\text{C}}\right]$$

b) Superponiendo los efectos se tiene

$$V_{AB} = V_{AB\lambda} + V_{AB_1} + V_{AB_2}$$

como $V_{AB\lambda} < 0$

$$V_{AB\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\ln\frac{r_{B\lambda}}{r_{A\lambda}} \quad ; \quad V_{AB\lambda} = 9\times10^9(2)(-200\times10^{-9})\ln\frac{5}{3} = -1{,}839\,[\text{V}]$$

$$V_{AB_1} < 0 \;;\; V_{AB_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{CA}} - \frac{q_1}{r_{CB}}\right] \;;\; V_{AB_1} = 9\times10^9(25\times10^{-9})\left[\frac{1}{\sqrt{20}\times10^{-2}} - \frac{1}{0.04}\right] = -593.85\,[\mathrm{V}]$$

$$V_{AB_2} < 0 \;;\; V_{AB_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_2\left[\frac{1}{r_{DA}} - \frac{1}{r_{DB}}\right] \;;\; V_{AB_2} = 9\times10^9(25\times10^{-9})\left[\frac{1}{\sqrt{20}\times10^{-2}} - \frac{1}{0.04}\right] = -593.85\,[\mathrm{V}]$$

finalmente $V_{AB} = (-1{,}839. \; - 593.85 \; - 593.85) = -3{,}026.7\,[\mathrm{V}]$

c) De la definición de campo eléctrico

$$\vec{F}_Q = Q\vec{E}_B \;;\; \vec{E}_B = \vec{E}_{B\lambda} + \vec{E}_{B1} + \vec{E}_{B2}$$

como $\vec{E}_{B1} + \vec{E}_{B2} = 0$

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{B\lambda} \;;\; \vec{E}_{B\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{B\lambda}}\hat{r}_{B\lambda} \;;\; \vec{E}_{B\lambda} = 9\times10^9\frac{2(200\times10^{-9})}{0.05}(-\hat{j})\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\vec{E}_B = -72{,}000\hat{j}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] \;\text{ y }\; \vec{F}_Q = -15\times10^{-9}(-72{,}000)\hat{j} = 1.08\hat{j}\,[\mathrm{mN}]$$

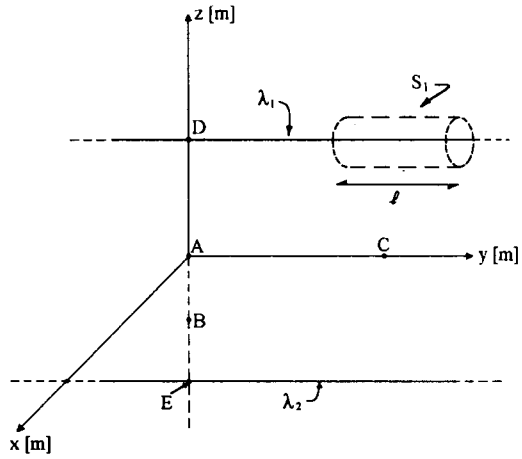
d) De la ley de Gauss

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} \;;\; \phi_e = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} = \frac{-200\times10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]1\,[\mathrm{m}]}{8.85\times10^{-12}\left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}\right]}$$

$$\phi_e = -22{,}598.9\left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}}\right]$$

el flujo del campo eléctrico ϕ_e resultó menor que cero porque la carga encerrada por la superficie gaussiana es negativa.

20. Se tienen dos líneas con densidades lineales de carga uniformes, de longitudes muy grandes, situadas en el plano yz y paralelas al eje y; la primera, con densidad lineal λ_1, toca al eje z en el punto D (0, 0, 2) [m]; la segunda, con densidad lineal λ_2, intercepta al eje z en el punto E (0, 0, - 2) [m]. El campo eléctrico en el punto A (0, 0, 0) [m], es: $\vec{E}_A = -27\hat{k}$ [N/C], si $\lambda_2 = -2\lambda_1$. Determine:



a) Los valores de λ_1 y λ_2.

b) La diferencia de potencial V_{AB}, si B (0, 0, -1) [m].

c) El cambio en la energía potencial de una carga puntual $q' = 1$ [nC] que se desplaza del punto A al C (0, 3, 0) [m] y enseguida se desplaza al punto B.

d) El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana S_1, cuya longitud ℓ es 1 [m].

Resolución:

a) Con el principio de superposición el campo eléctrico en A es $\vec{E}_A = \vec{E}_{A1} + \vec{E}_{A2}$

$$\vec{E}_{A1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda_1|}{r_{DA}}\hat{r}_{DA} \quad ; \quad \vec{E}_{A1} = 9\times10^9\frac{2|\lambda_1|}{2}(-\hat{k}) = -9\times10^9\lambda_1\hat{k}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right], \ \lambda_1 \text{ se supuso } +$$

$$\vec{E}_{A2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda_2|}{r_{EA}}\hat{r}_{EA} \quad ; \quad \vec{E}_{A2} = 9\times10^9\frac{2|\lambda_2|}{2}(+\hat{k}) = 9\times10^9\lambda_2\hat{k}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right], \ \lambda_2 \text{ debe ser } -$$

$$\vec{E}_A = -9\times10^9\lambda_1\hat{k} + 9\times10^9\lambda_2\hat{k}, \text{ como } \lambda_2 = -2\lambda_1, \ \vec{E}_A = -9\times10^9\lambda_1\hat{k} - 9\times10^9(2\lambda_1)\hat{k}$$

$$\vec{E}_A = 9\times10^9(-3\lambda_1)\hat{k}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right], \text{ de los datos } \vec{E}_A = -27\hat{k}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right], \text{ al igualar componentes}$$

$$9\times10^9(-3\lambda_1) = -27 \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{-27}{9\times10^9(-3)} = 1\times10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right] \text{ y } \lambda_2 = -2\times10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]$$

b) La diferencia de potencial V_{AB} se puede obtener superponiendo los efectos de las dos líneas de carga:

$$V_{AB} = V_{AB_1} + V_{AB_2} \quad ; \quad V_{AB_1} > 0 \quad , \quad V_{AB_2} > 0$$

$$V_{AB_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_1 \ln\frac{r_{BD}}{r_{AD}} = 9\times10^9(2)\,10^{-9}\ln\frac{3}{2} = 7.298\,[\mathrm{V}]$$

$$V_{AB_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_2 \ln\frac{r_{BE}}{r_{AE}} = 9\times10^9(2)(-2\times10^{-9})\ln\frac{1}{2} = 24.953\,[\mathrm{V}] \quad ; \quad V_{AB} = 32.251\,[\mathrm{V}]$$

c) $\Delta EP_{CA} + \Delta EP_{BC} = q'\,V_{CA} + q'\,V_{BC}$, pero se observa que

$V_A = V_C \therefore V_{CA} = 0$ y $\Delta EP_{CA} = 0$ y también

$$V_{AB} = V_{CB} \;,\; V_{BC} = -V_{AB} \;;\; {}_{C}W_{B} = q'V_{BC} = -q'V_{AB} \;;\; \Delta EP_{BC} = \Delta EP_{BA}$$

$$\Delta EP_{BA} = -1\times10^{-9}[\mathrm{C}]\,32.251\,[\mathrm{V}] = -32.251\times10^{-9}[\mathrm{J}] = -32.251\,[\mathrm{nJ}]$$

Este resultado significa que q' disminuye su energía al trasladarse del punto A hasta el punto B, disminuyendo con esto la energía del sistema.

d) Para el cálculo del flujo del campo eléctrico emplearemos la ley de Gauss

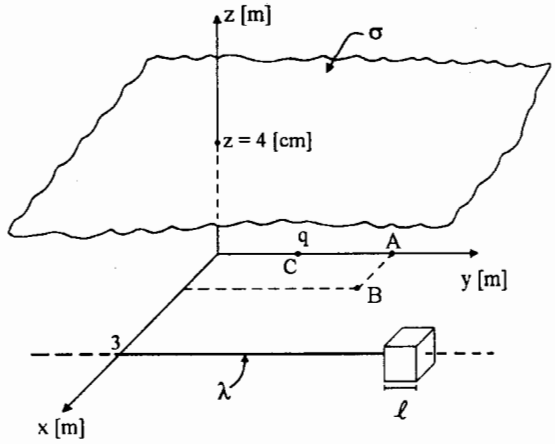
$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} \;;\; \text{es decir } \phi_{e_{S_1}} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0}$$

en este caso $q_{ne} = \lambda_1 \ell$

$$\text{por lo tanto: } \phi_{e_{S_1}} = \frac{\lambda_1 \ell}{\varepsilon_0} \;;\; \phi_{e_{S_1}} = \frac{1\times10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]1\,[\mathrm{m}]}{8.85\times10^{-12}\left[\frac{\mathrm{C}^2}{[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]}\right]} \doteq 113\left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}}\right]$$

El flujo resultó > 0 porque la carga neta encerrada por la superficie gaussiana es positiva.

21. De la configuración de cuerpos cargados mostrada, se sabe que la carga q = -50 [μC] disminuye su energía potencial eléctrica en 12.4766 [J] al ser trasladada del punto B (1.5, 8, 0) [cm] al punto A (0, 8, 0) [cm], y que en la posición mostrada, C (0, 5, 0) [cm], experimenta una fuerza $\vec{F}_q = [-600\hat{i} + 84.7\hat{k}]$[N]. Considere que el plano de carga con densidad superficial σ es paralelo al plano xy en z = 4 [cm], que la línea de carga con densidad lineal λ está contenida en el plano xy y es paralela al eje y en x = 3 [cm], que las dimensiones de ambos son muy grandes y que el efecto de inducción entre ellos es despreciable. Calcule:



a) La diferencia de potencial V_{AB}.

b) El campo eléctrico en C, posición de q.

c) La magnitud y signo de σ y de λ.

d) El flujo eléctrico a través de la superficie cúbica imaginaria mostrada, si ℓ = 3 [cm].

Resolución:

a) La diferencia de potencial V_{AB} podría calcularse al aplicar el principio de superposición, pero se carece de información de los cuerpos cargados; sin embargo se sabe que ΔEP_{AB} = -12.4766 [J] respecto a la carga q, por lo cual

$$\underset{\searrow q \nearrow}{{}_BW_A} = qV_{AB} \quad \text{y} \quad \underset{\searrow q \nearrow}{{}_BW_A} = EP_A - EP_B = \Delta EP_{AB} \quad \text{entonces}$$

$$\Delta EP_{AB} = qV_{AB} \quad \text{y} \quad V_{AB} = \frac{\Delta EP_{AB}}{q} \quad ; \quad V_{AB} = \frac{-12.4766[\text{J}]}{-50\times10^{-6}[\text{C}]} = +\,249{,}532\,[\text{V}]$$

b) Como $\vec{F}_q = [-\,600\hat{i} + 84.7\hat{k}]$[N] y $\vec{F}_q = q\vec{E}_C$, $\vec{E}_C = \dfrac{\vec{F}_q}{q}$

$$\vec{E}_C = \frac{[-\,600\hat{i} + 84.7\hat{k}][\text{N}]}{-50\times10^{-6}[\text{C}]} = [12\times10^6\,\hat{i} - 1.694\times10^6\hat{k}]\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right] \quad ; \quad \vec{E}_C = [12\hat{i} - 1.694\hat{k}]\left[\frac{\text{MN}}{\text{C}}\right]$$

c) Para determinar σ y λ aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{C\sigma} + \vec{E}_{C\lambda} \quad ; \quad \vec{E}_{C\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{k}) \quad \text{y} \quad \vec{E}_{C\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r_{C\lambda}}(-\hat{i}),$$

al igualar componentes con el campo encontrado en el inciso anterior:

$$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} = -1.694\times10^6\hat{k} \quad ; \quad \sigma = 2\varepsilon_0(1.694\times10^6) = 2.998\times10^{-5}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right] = 29.98\left[\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right] \text{ y}$$

$$\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{0.03}\hat{\imath} = 12\times10^6\hat{\imath} \quad ; \quad \lambda = \frac{-12\times10^6(0.03)}{9\times10^9(2)} = -2\times10^{-5}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right] = -20\left[\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]$$

d) Para evaluar el flujo eléctrico a través de la superficie cúbica, empleamos la ley de Gauss

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} \text{ , es decir}$$

$$\phi_e = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} \text{ y}$$

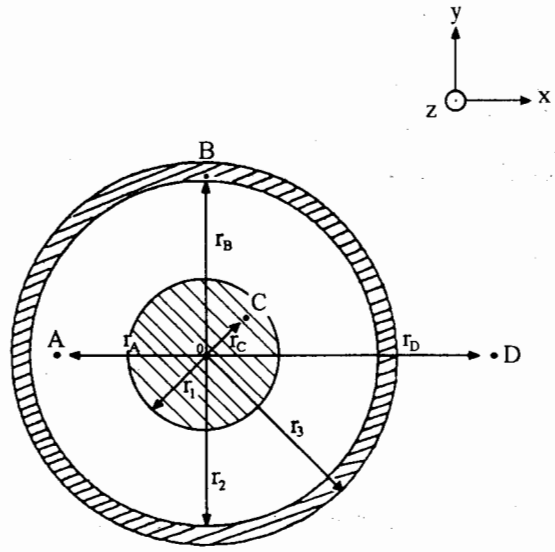
$$q_{ne} = \lambda\ell \text{ por lo tanto}$$

$$\phi_e = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \phi_e = \frac{-20\times10^{-6}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]0.03\,[\mathrm{m}]}{8.85\times10^{-12}\left[\frac{\mathrm{C}^2}{[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]}\right]}$$

$$\phi_e = -67{,}796.6\left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}}\right]$$

el signo de este resultado indica que la carga neta encerrada por la superficie cúbica es negativa.

22. La figura muestra dos esferas concéntricas de aluminio. Si la esfera interior posee un exceso de carga eléctrica positiva Q = + 40[nC] y la exterior es eléctricamente neutra, determine:



a) El flujo eléctrico a través de la superficie de un cubo imaginario, con lado ℓ = 15 [cm] centrado en el punto 0.

b) La diferencia de potencial V_{CD} .

Para la figura, utilice los valores:

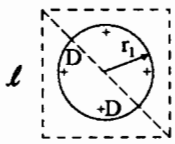
r_1 = 5 [cm]	r_A = 10 [cm]
r_2 = 18 [cm]	r_B = 19 [cm]
r_3 = 20 [cm]	r_C = 3 [cm]
	r_D = 25 [cm]

Resolución:

a) De la ley de Gauss tenemos

$$\phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} ;$$

la q_{ne} se puede determinar con una figura que muestre a la esfera interior y a la superficie imaginaria:



Si llamamos $2D$ a la diagonal del cuadrado mostrado, se obtiene $2D = \sqrt{15^2 + 15^2}$ [cm]; D = 10.607 [cm] como $r_1 < D < r_2$, el cubo sólo encierra a la carga Q de la esfera interior, por lo tanto $q_{ne} = Q$ y

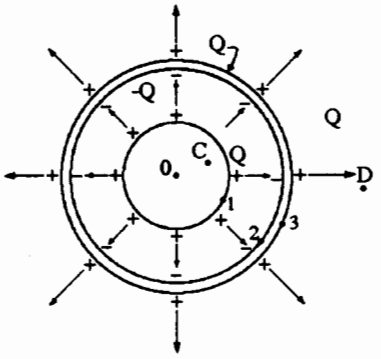
$$\phi_e = \frac{40 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{8.85 \times 10^{-12}\left[\dfrac{\mathrm{C}^2}{[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]}\right]} = 4{,}519.77\left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}}\right]$$

b) La diferencia de potencial V_{CD} se puede expresar como:

$V_{CD} = V_{CI} + V_{12} + V_{23} + V_{3D}$ y también

$$V_{CD} = -\int_{r_1}^{r_C} \vec{E}_1\cdot d\vec{\ell}_1 - \int_{r_2}^{r_1} \vec{E}_2\cdot d\vec{\ell}_2 - \int_{r_3}^{r_2} \vec{E}_3\cdot d\vec{\ell}_3 - \int_{r_D}^{r_3} \vec{E}_4\cdot d\vec{\ell}_4$$

En la figura se ilustran las distribuciones de carga resultantes por el efecto de inducción, lo cual permite concluir respecto a las funciones de campo eléctrico de la expresión anterior:



en la región $r_C \leq r < r_1$

$\vec{E}_1 = \vec{0}$, el campo en el interior de un conductor es nulo;

en la región $r_1 \leq r \leq r_2$

$\vec{E}_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{r}$, como campo eléctrico de carga puntual;

si $r_2 < r < r_3$

$\vec{E}_3 = \vec{0}$, interior de un conductor;

si $r_3 \leq r < r_\infty$

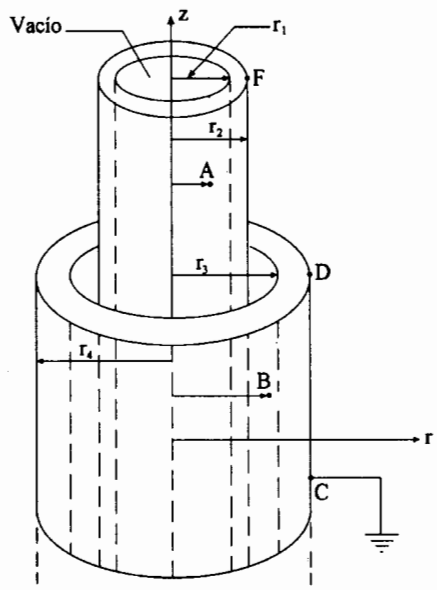
$\vec{E}_4 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{r}$, como campo eléctrico de carga puntual.

Por lo anterior: $V_{CD} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left[\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right] + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left[\dfrac{1}{r_3} - \dfrac{1}{r_D}\right]$

$$V_{CD} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]40\times10^{-9}[\mathrm{C}]\left[\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.18} + \frac{1}{0.20} - \frac{1}{0.25}\right]\left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right]$$

$V_{CD} = 5{,}560[\mathrm{V}]$

23. La figura muestra un par de cilindros metálicos coaxiales muy largos, el cilindro exterior está conectado a tierra y el cilindro interior posee una distribución de carga λ_{eq} = 10[μC/m]; los radios en [cm] son: r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, r_4 = 4, r_A = 0.5 y r_B = 2.5; además el vacío rodea al sistema; con base en ello, determine:



a) El vector campo eléctrico en el puntò *A*, aplicando la ley de Gauss.

b) El vector campo eléctrico en el punto *B*, en coordenadas cilíndricas.

c) La lectura que indicaría un voltímetro si se conectara entre los puntos *F* y *D*.

d) El potencial eléctrico del punto *B*, si V_C = 0[V].

Resolución:

a) Al aplicar la ley de Gauss, se considera una superficie gaussiana cilíndrica y coaxial con los cilindros metálicos pero que pase por el punto *A*. De esta forma dicha superficie no encierra carga alguna y de la ley se concluye:

$$\oint_S \vec{E}_A \cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} \;;\; q_{ne} = 0 \;\text{ y }\; \oint_s \vec{E}_A \cdot d\vec{s} = 0 \;;\; \vec{E}_A = \vec{0}.$$

Este resultado se puede generalizar a todo el espacio vacío del cilindro interior incluyendo su espesor.

b) Como el punto *B* se localiza en el espacio entre los cilindros, $r_2 < r_B < r_3$, podemos emplear otra superficie gaussiana coaxial con los cilindros metálicos pero de radio r_B; esta superficie encerrará la carga contenida en el cilindro interior, por lo tanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} \;;\; \oint \vec{E}_B \cdot d\vec{s} = \frac{\lambda_{eq}\ell}{\varepsilon_0} \;;$$

al integrar sobre la superficie lateral del cilindro gaussiano se obtiene

$$E_B(2\pi r_B)\ell = \frac{\lambda_{eq}\ell}{\varepsilon_0} \quad \text{es decir}$$

$$\vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda_{eq}}{r_B}\hat{r} \;;\; \vec{E}_B = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\frac{2(10\times10^{-6})[\mathrm{C}]\hat{r}}{0.025[\mathrm{m}][\mathrm{m}]} = 7.2\times10^6\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

c) $V_{FD} = V_{F3} + V_{3D}$ ya que no existe una sola función de $\vec{E}$ entre los puntos F y D. Por la aplicación de la ley de Gauss, el campo eléctrico en el espesor del cilindro exterior es nulo, todo el cilindro es una región equipotencial; es decir

$V_D = V_3$ y $V_{3D} = 0$ se tiene que

$V_{FD} = V_{F3} = -\int_3^F \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ en la cual la función de campo es la encontrada en el inciso anterior.

$$V_{FD} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_{eq} \ln\frac{r_3}{r_F}$$

$$V_{FD} = 9\times 10^9 (2)\, 10\times 10^{-6} \ln\frac{3}{2} = 72{,}983.7\,[\mathrm{V}]$$

d) $V_B = ?$; se puede escribir $V_{BC} = V_{B3} + V_{3C}$; por lo dicho en el inciso *c*

$V_{3C} = 0$, $V_3 = V_C$ y $V_{B3} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda_{eq} \ln\dfrac{r_3}{r_B}$;

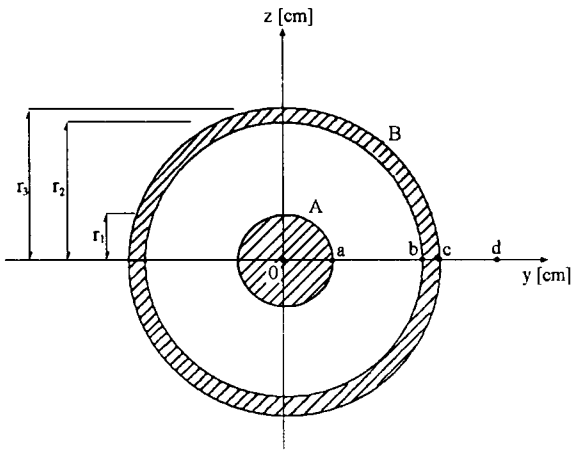
$$V_{B3} = 9\times 10^9 (2)\, 10\times 10^{-6} \ln\frac{3}{2.5}\,[\mathrm{V}]$$

$V_{BC} = 32{,}817.88\,[\mathrm{V}]$, como

$V_{BC} = V_B - V_C$ y $V_C = 0$ se concluye que

$V_B = 32{,}817.88\,[\mathrm{V}]$

24. En la figura se muestran dos esferas conductoras, concéntricas, A y B, con cargas $Q_A = +20[\mu C]$ y $Q_B = -20[\mu C]$, respectivamente, y radios: $r_1 = 5[cm]$, $r_2 = 10[cm]$ y $r_3 = 11[cm]$. Obtener:



a) El flujo eléctrico ϕ_e a través de una esfera imaginaria centrada en el origen, con radio r tal, que $r_1 < r < r_2$.

b) El flujo eléctrico ϕ_{eT} a través de una esfera como la del inciso anterior, pero con $r > r_3$.

c) La gráfica de variación de la magnitud del campo eléctrico como función de y, entre el punto 0 (0, 0, 0) y el punto d (0, 15, 0) [cm].

d) La diferencia de potencial entre el punto 0 y el punto d; es decir V_{0d}.

Resolución:

a) Al aplicar la ley de Gauss $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0}$, una superficie esférica con radio r, tal que $r_1 < r < r_2$ encerrará únicamente a la esfera A y la q_{ne} será Q_A; por lo tanto

$$\phi_e = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0} = \frac{20\times10^{-6}[C]}{8.85\times10^{-12}\left[\frac{C^2}{N\cdot m^2}\right]} = 2.26\times10^6\left[\frac{N\cdot m^2}{C}\right]$$

b) Si ahora la esfera gaussiana tiene un radio $r > r_3$, ésta encerrará a las dos esferas A y B y la carga neta encerrada será:

$q_{ne} = Q_A + Q_B$ por lo cual $q_{ne} = 0$ y el flujo eléctrico, en este caso, será $\phi_e = 0$.

c) Para determinar la función $E = f(y)$ en cada región, empleamos la ley de Gauss y superficies gaussianas esféricas y con centro en 0.

si $0 \le y < r_1$ $\quad \vec{E} = \vec{0}$, $\quad$ ya que $q_{ne} = 0$

si $r_1 \le y \le r_2$ $\quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{y^2}\hat{j}$, $\quad$ ya que $q_{ne} = Q_A$

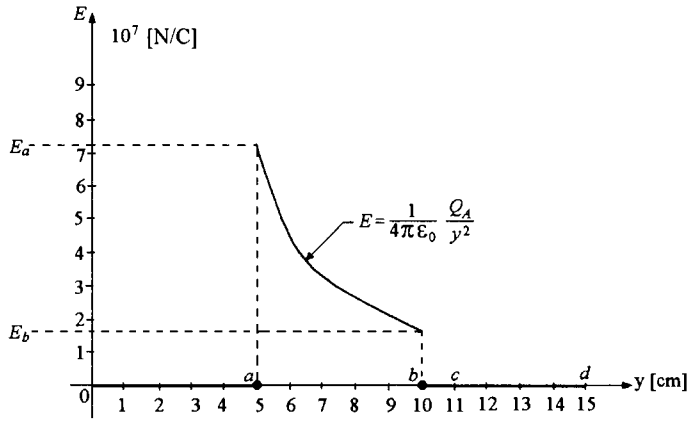
los valores límites son:

$$E_a = 9\times10^9\frac{20\times10^{-6}}{(0.05)^2} = 7.2\times10^7\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$E_b = 9\times10^9\frac{20\times10^{-6}}{(0.1)^2} = 1.8\times10^7\left[\frac{N}{C}\right]$$

si $r_2 < y \leq r_3$ $\qquad \vec{E} = \vec{0}$, ya que $q_{ne} = Q_A + Q_B = 0$

si $r_3 < y \leq r_4$, $r_4 = r_d$, $\qquad \vec{E} = \vec{0}$, ya que $q_{ne} = 0$



d) La diferencia de potencial entre el punto 0 y el punto *d* se puede expresar como:

$$V_{0d} = V_{0a} + V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$$

ya que entre 0 y *d* no existe una sola función de campo eléctrico como se vio en el inciso *c*.

Recordamos que la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 se calcula como:

$$V_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{\ell},$$

si en esta integral de línea la función de campo eléctrico es nula; es decir

$$\vec{E} = \vec{0}$$

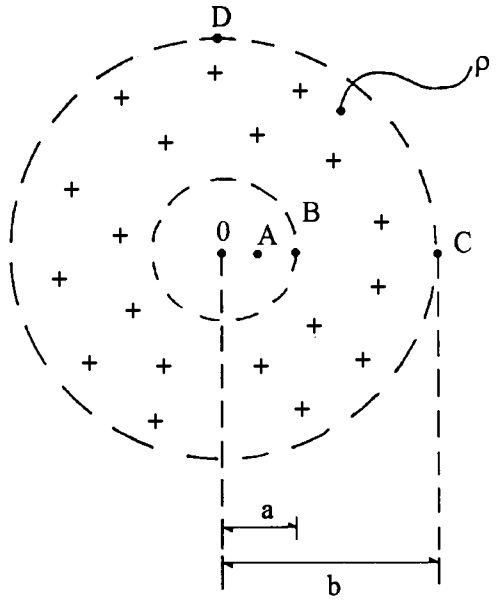
entonces los puntos 1 y 2 se encuentran al mismo potencial eléctrico y $V_{12} = 0$.

Por esta razón y empleando las funciones de $\vec{E}$ del inciso anterior:

$$V_{0a} = 0,\ V_{bc} = 0 \ \text{ y } \ V_{cd} = 0 \ \text{, pero } V_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_A \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right]$$

$$\therefore\ V_{0d} = 9\times 10^9 \left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right](20\times 10^{-6})[\mathrm{C}]\left[\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.10}\right]\left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right] = 1.8\times 10^6[\mathrm{V}]$$

25. En una región en forma de cascarón esférico se tiene carga eléctrica uniformemente distribuida, con densidad volumétrica $\rho_v = 1\,[\mu C/m^3]$. El radio a de la cavidad interior es 10 [cm] y el radio externo b es 20 [cm]. Determine:



a) El campo eléctrico en el punto A, situado a 5 [cm] del centro 0.

b) El potencial eléctrico en el punto C.

c) La diferencia de potencial entre los puntos C y B.

d) El trabajo que realizaría un agente externo para trasladar un electrón, $e = -1.6 \times 10^{-19}$[C], desde el punto B hasta el punto D.

Resolución:

a) $\vec{E}_A = ?$ Dada la simetría esférica del cuerpo con carga, emplearemos una superficie gaussiana esférica con centro en 0 y que contenga al punto A; es decir de 5 [cm] de radio. De la ley de Gauss $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_{ne}$ se obtiene que $q_{ne} = 0$ y se concluye que $\vec{E}_A = \vec{0}$

b) Para puntos con $r \geq b$, es decir externos al cascarón de carga, la función de campo eléctrico que se obtiene con la ley de Gauss es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$, donde Q es la carga total del cascarón:

$Q = \iiint \rho_V \, dV$, dado que la densidad volumétrica de carga (ρ_V) es constante

$Q = \rho_V \iiint_V dV$, en la cual V es el volumen del cascarón esférico, y este volumen se obtiene de las integraciones iteradas de:

$V = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$, en coordenadas esféricas; de esta forma

$$V = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)[\mathrm{m}^3] \quad \text{y} \quad Q = \rho_V\left[\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\right][\mathrm{C}]$$

El potencial eléctrico en el punto C se obtiene con

$$V_C - V_\infty = -\int_\infty^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \text{ es decir } V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\left[\frac{1}{r_C}\right]; \; V_\infty = 0, \; r_C = b,$$

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho_V\right]\left[\frac{1}{b}\right][\mathrm{V}]$$

simplificando

$$V_C = \frac{(b^3 - a^3)\rho_V}{3\varepsilon_0 b} \quad ; \quad V_C = \frac{(0.2^3 - 0.1^3)1 \times 10^{-6}}{3(8.85 \times 10^{-12})(0.2)} = 1{,}318.27[\mathrm{V}]$$

c) La diferencia de potencial

$V_{CB} = -\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$, pero $\vec{E}$ debe ser la función del campo eléctrico en la región en que se desea integrar; encontraremos esta función con la aplicación de la ley de Gauss:

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0}$, utilizaremos una superficie gaussiana esférica y concéntrica con el cascarón de carga, tal que su radio r esté en el intervalo $a \leq r \leq b$.

En este caso la carga neta encerrada será

$$q_{ne} = \rho_V\left[\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)\right][\mathrm{C}]$$

De la ley de Gauss se obtiene:

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3) \quad , \quad \vec{E} = \frac{\rho_V(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Al sustituir la función de campo eléctrico en la expresión de la diferencia de potencial se obtiene:

$$V_{CB} = -\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad ; \quad V_{CB} = -\int_a^b \frac{\rho_V(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}dr \cos\alpha \quad ; \quad \alpha \sphericalangle_{\vec{E}}^{d\vec{\ell}} = 0 \quad ; \quad \cos\alpha = 1$$

$$V_{CB} = -\frac{\rho_V}{3\varepsilon_0}\int_a^b\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)dr \quad ; \quad V_{CB} = -\frac{\rho_V}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r}\right]_a^b$$

$$V_{CB} = -\frac{\rho_V}{3\varepsilon_0}\left[\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{a}\right] = -\frac{\rho_V}{3\varepsilon_0}\left[\frac{b^3 + 2a^3 - a^2b - 2a^2b}{2b}\right] = \frac{\rho_V(3a^2b - 2a^3 - b^3)}{6\varepsilon_0 b}$$

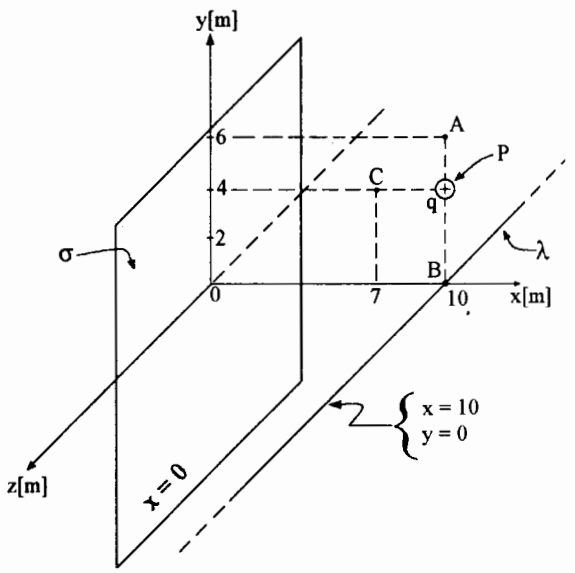
$$V_{CB} = \frac{10^{-6}(3(0.1)^2 0.2 - 2(0.1)^3 - (0.2)^3)}{6(8.85 \times 10^{-12})0.2} = -376.65[\mathrm{V}]$$

d) ${}_{\underset{e}{B}}W_D = e\,V_{DB}$, $V_{DB} = V_{DC} + V_{CB}$ y $V_{DC} = 0$, ya que $V_D = V_C$

$$\therefore {}_{\underset{e}{B}}W_D = e\,V_{CB} \quad ; \quad {}_{\underset{e}{B}}W_D = -1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}](-376.65)\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] = 6.0264 \times 10^{-17}[\mathrm{J}]$$

Como el signo del resultado es > 0 significa que el electrón incrementa su energía potencial eléctrica al pasar del punto B al punto D. El trabajo lo realiza un agente externo.

26. En la figura se muestran un plano de carga con $\sigma = 50[\text{nC/m}^2]$ contenido en el plano yz; una línea de carga con $\lambda = -3 \times 10^{-6}[\text{C/m}]$, paralela al eje z, contenida en el plano xz, que intercepta al eje x en el punto B (10, 0, 0)[m], y una carga puntual $q = 2$ [μC], colocada en el punto P (10, 4, 0)[m].



Las dimensiones del plano y la línea son muy grandes y los cuerpos cargados están lo suficientemente alejados, de forma tal que se justifica despreciar el efecto de inducción entre ellos. Determine:

a) El campo eléctrico total en el punto A (10, 6, 0)[m].

b) La diferencia de potencial total entre los puntos A y C (7, 4, 0)[m].

c) El trabajo desarrollado si se trasladara una carga $q' = 1$ [nC], desde el punto A hasta el punto C. Explique el significado del signo de su resultado.

d) La variación de la energía potencial eléctrica de q, si se le traslada de P hasta A.

Resolución:

a) Al aplicar el principio de superposición:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A\sigma} + \vec{E}_{A\lambda} + \vec{E}_{Aq}$$

$$\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{AB}}(-\hat{j}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{PA}^2}\hat{j}$$

$$\vec{E}_A = \frac{50 \times 10^{-9}\left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right]\hat{i}}{2(8.85 \times 10^{-12})\left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right]} - 9 \times 10^9 \frac{(2)3 \times 10^{-6}}{6}\hat{j}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right] + 9 \times 10^9\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right]\frac{2 \times 10^{-6}[\text{C}]}{(2)^2[\text{m}^2]}\hat{j}$$

$$\vec{E}_A = [2825\hat{i} - 9 \times 10^3\hat{j} + 4\ 500\hat{j}]\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right] \quad ; \quad \vec{E}_A = [2.825\hat{i} - 4.5\hat{j}]\left[\frac{\text{kN}}{\text{C}}\right]$$

b) $V_{AC} = V_{AC\sigma} + V_{AC\lambda} + V_{ACq}$; donde $V_{AC\sigma} < 0$, $V_{AC\lambda} > 0$ y $V_{ACq} > 0$

$$V_{AC} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_C - x_A) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda \ln\frac{r_{BC}}{r_{BA}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left[\frac{1}{r_{PA}} - \frac{1}{r_{PC}}\right]$$

$$V_{AC} = \frac{50 \times 10^{-9}(7-10)}{2(8.85 \times 10^{-12})} + 9 \times 10^{9}(2)(-3 \times 10^{-6}) \ln \frac{5}{6} + 9 \times 10^{9}(2 \times 10^{-6})\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right][\mathrm{V}]$$

$$V_{AC} = -8{,}475 + 9{,}845 + 3{,}000 \quad ; \quad V_{AC} = 4{,}370\ [\mathrm{V}];\ V_{AC} = -V_{CA}$$

c) El trabajo que se desarrolla para trasladar a q' desde A hasta C es:

$$\underset{q'}{{}_{A}W_{C}} = EP_C - EP_A = q' V_{CA} \quad ; \quad \underset{q'}{{}_{A}W_{C}} = 1 \times 10^{-9}[\mathrm{C}](-4{,}370)\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] = -4.37\,[\mu\mathrm{J}]$$

El signo negativo indica que el traslado lo efectúan las fuerzas eléctricas producidas por el conjunto de cuerpos con carga; con esto la energía potencial eléctrica del sistema se reduce.

d) $\Delta EP_{AP} = EP_A - EP_P = \underset{q}{{}_{P}W_{A}}$ y $\underset{q}{{}_{P}W_{A}} = qV_{AP}$, donde

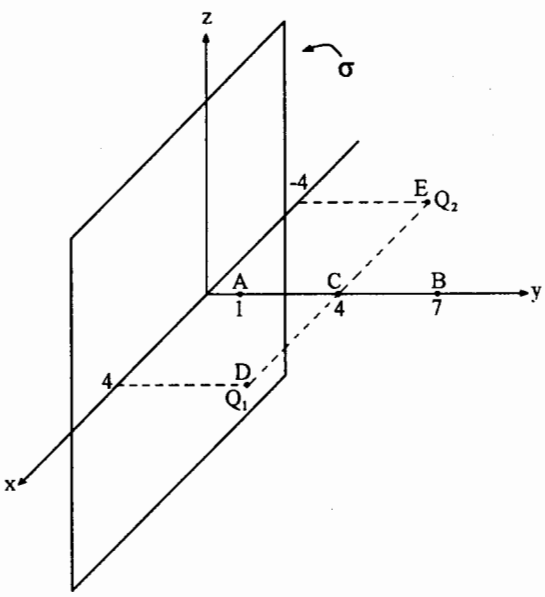
$$V_{AP} = V_{AP\sigma} + V_{AP_\lambda}$$

$V_{AP\sigma} = 0$, por estar A y P a la misma distancia respecto al plano σ, y

$$V_{AP\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_{PB}}{r_{AB}} \quad ; \quad V_{AP\lambda} = 9 \times 10^{9}(2)(-3 \times 10^{-6}) \ln \frac{4}{6} = 21{,}895\,[\mathrm{V}]$$

$\therefore\ \Delta EP_{AP} = 2 \times 10^{-6}[\mathrm{C}]21{,}895\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] = 43.79\,[\mathrm{mJ}]$, esto significa que q incrementa su energía con el traslado.

27. La figura muestra una superficie plana, cargada, muy grande, coincidente con el plano $y = 0$, con densidad superficial de carga $\sigma = -7.08[\mu C/m^2]$, y dos cargas puntuales Q_1 y Q_2, de 25 [nC] cada una, colocadas en D (4, 4, 0) [cm] y en E (–4, 4, 0) [cm], respectivamente. Determine:



a) El campo eléctrico en el punto B.

b) La fuerza eléctrica que actúa sobre la carga Q_1.

c) La diferencia de potencial eléctrico entre el punto A y el punto B.

d) El trabajo necesario para trasladar la carga Q_2 al punto C.

Resolución:

a) Aplicando el principio de superposición

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{B\sigma} + \vec{E}_{B1} + \vec{E}_{B2}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{j}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_{DB}^2}\hat{r}_{DB} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_{EB}^2}\hat{r}_{EB}$$

$$\vec{E}_B = \left[\frac{-7.08\times10^{-6}\hat{j}}{2(8.85\times10^{-12})} + 9\times10^9\frac{25\times10^{-9}}{(0.05)^2}\left[\frac{-4\hat{i}+3\hat{j}}{5}\right] + 9\times10^9\frac{25\times10^{-9}}{(0.05)^2}\left[\frac{4\hat{i}+3\hat{j}}{5}\right]\right]\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$\vec{E}_B = \left[-400{,}000\hat{j} + 54{,}000\hat{j} - 72{,}000\hat{i} + 72{,}000\hat{i} + 54{,}000\hat{j}\right]\left[\frac{N}{C}\right]$$

finalmente

$$\vec{E}_B = -292\hat{j}\left[\frac{kN}{C}\right]$$

b) La fuerza eléctrica que actúa sobre Q_1 es $\vec{F}_1 = Q_1\vec{E}_D$; $\vec{E}_D = \vec{E}_{D\sigma} + \vec{E}_{D2}$

$$\vec{E}_D = \frac{-\sigma\hat{j}}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_{ED}^2}\hat{r}_{ED} \quad ; \quad \vec{E}_D = \left[-400{,}000\hat{j} + 9\times10^9\frac{25\times10^{-9}}{(0.08)^2}\hat{i}\right]\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$\vec{E}_D = \left[-400{,}00\hat{j} + 35{,}156\hat{i}\right]\left[\frac{N}{C}\right] \quad ; \quad \vec{F}_1 = (25\times10^{-9}[C])[35.156\hat{i} - 400\hat{j}]\left[\frac{kN}{C}\right]$$

y la fuerza solicitada es

$$\vec{F}_1 = (0.879\,\hat{i} - 10\hat{j})[\text{mN}]$$

c) La diferencia de potencial debida a los tres cuerpos cargados es:

$$V_{AB} = V_{AB\sigma} + V_{AB_1} + V_{AB_2} \text{ ; por simetría}$$

$$V_{AB1} = 0,\ V_{A1} = V_{B1},\ V_{AB2} = 0 \text{ y}$$

$$V_{AB\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(y_B - y_A) \ ; \ V_{AB\sigma} = \frac{-7.08\times10^{-6}}{2(8.85\times10^{-12})}(7-1)10^{-2} = -24{,}000[\text{V}]$$

d) El trabajo requerido es

$$\underset{Q_2}{{}_E W_C} = Q_2 V_{CE} \text{ ; donde}$$

$$V_{CE} = V_{CE\sigma} + V_{CE_1} \text{ y}$$

$$V_{CE\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[y_C - y_E] = 0 \text{ y}$$

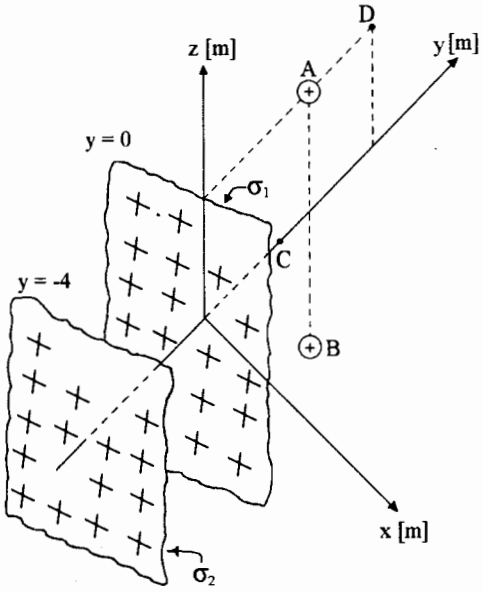
$$V_{CE_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_1\left[\frac{1}{r_{DC}} - \frac{1}{r_{DE}}\right] = 9\times10^9(25\times10^{-9})\left[\frac{1}{0.04} - \frac{1}{0.08}\right][\text{V}]$$

$\therefore\ V_{CE} = 2{,}812.5[\text{V}]$ y el trabajo necesario para el traslado será:

$$\underset{Q_2}{{}_E W_C} = (25\times10^{-9})[\text{C}](2{,}812.5)\left[\frac{\text{J}}{\text{C}}\right] = 70.31[\mu\text{J}]$$

con lo cual se incrementa la energía potencial de Q_2 y también la del conjunto de cargas eléctricas del sistema.

28. Se tienen dos planos $y = 0$ y $y = -4$, con densidades superficiales de carga $\sigma_1 = +10^{-9}[\mathrm{C/m^2}]$ y $\sigma_2 = 2 \times 10^{-9}[\mathrm{C/m^2}]$, respectivamente, y dos gotas esféricas de agua de 1[mm] de radio, cargadas positivamente con 10[pC], cada una, ubicadas en los puntos A (0, 6, 4) [m] y B (0, 6, −4) [m]. Determine:



a) El campo eléctrico en el punto C (0, 3, 0) [m].

b) El cambio en la energía potencial eléctrica de la gota ubicada en A, si se desplaza al punto D (0, 10, 4) [m].

c) Si los planos cargados se retiran mucho de las gotas, tanto que pueden ser ignorados, y las dos gotas se unen para formar una sola gota esférica mayor, con carga distribuida uniformemente, ¿cuánto valdrá el potencial eléctrico en la superficie de la nueva gota?

Resolución:

a) Al aplicar el principio de superposición:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{C\sigma 1} + \vec{E}_{C\sigma 2} + \vec{E}_{CqA} + \vec{E}_{CqB}$$

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{j} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{j} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{r_{AC}^2}\hat{r}_{AC} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{r_{BC}^2}\hat{r}_{BC} \quad ; \quad q_A = q_B \ , \ r_{AC} = r_{BC}$$

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{j} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{AC}^2}\left[\frac{-3\hat{j} - 4\hat{k}}{5} + \frac{-3\hat{j} + 4\hat{k}}{5}\right] = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{j} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{AC}^2}\left[\frac{6\hat{j}}{5}\right]$$

$$\vec{E}_C = \left[\frac{3 \times 10^{-9}\hat{j}}{2(8.85 \times 10^{-12})} - 9 \times 10^9 \frac{10 \times 10^{-12}}{5^2}\left[\frac{6}{5}\right]\hat{j}\right]\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] \quad ; \quad \vec{E}_C = [169.49 - 0.00432]\hat{j}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\therefore \vec{E}_C \doteq 169.485\hat{j}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) El cambio en la energía potencial eléctrica equivale al trabajo cuasiestático al trasladar la gota del punto A al punto D; es decir:

$$\Delta EP_{DA} = {}_{A}W_{D} = q_A V_{DA} \quad ; \quad V_{DA} = V_{DA\sigma 1} + V_{DA\sigma 2} + V_{DAqB} \ , \text{ siendo todas } < 0$$

$$V_{DA} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}[y_A - y_D] + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}[(y_A + 4) - (y_D + 4)] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_b\left[\frac{1}{r_{BD}} - \frac{1}{r_{BA}}\right]$$

$$V_{DA} = \frac{10^{-9}}{2\varepsilon_0}[6 - 10] + \frac{2 \times 10^{-9}}{2\varepsilon_0}[10 - 14] + 9 \times 10^9(10 \times 10^{-12})\left[\frac{1}{\sqrt{8^2 + 4^2}} - \frac{1}{8}\right][\mathrm{V}]$$

$$V_{DA} = -[225.99 + 451.98 + 1.188 \times 10^{-3}][\mathrm{V}] \quad ; \quad V_{DA} = -677.97[\mathrm{V}] \text{ y}$$

$$\Delta EP_{DA} = 10 \times 10^{-12}[\mathrm{C}][-677.97]\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] = -6.7797 \times 10^{-9}[\mathrm{J}] = -6.7797[\mathrm{nJ}]$$

El signo del resultado nos indica que la gota *A* disminuye su energía.

c) La gota nueva tendrá el doble del volumen y de la carga de cada gota original. El potencial en su superficie será

$V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2q}{r_n}$, donde r_n es el radio de la gota nueva, el cual se encuentra del volumen nuevo

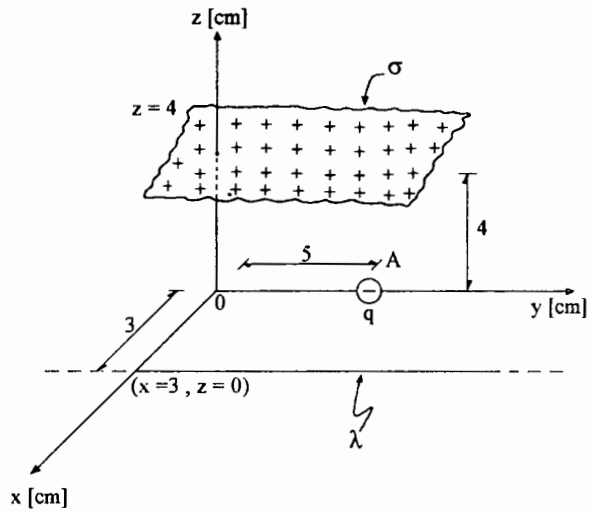
$V_n = 2Vol = 2\left[\dfrac{4}{3}\pi r^3\right]$, r es el radio de la gota original

$$\therefore \frac{4}{3}\pi r_n^3 = \frac{8}{3}\pi r^3 \quad ; \quad r_n = \sqrt[3]{2r^3} = \sqrt[3]{2}\, r \quad ; \quad r_n = \sqrt[3]{2}(1 \times 10^{-3})[\mathrm{m}] = 1.26(1 \times 10^{-3})[\mathrm{m}]$$

y el potencial resulta

$$V = 9 \times 10^9(2)(10 \times 10^{-12})\left[\frac{1}{1.26 \times 10^{-3}}\right] = 142.86[\mathrm{V}]$$

29. En la figura se muestran un plano de carga paralelo al plano xy y ubicado en $z = 4$ [cm], con densidad superficial $\sigma = 30[\mu C/m^2]$ una línea cargada con densidad lineal $\lambda = -20[\mu C/m]$, paralela al eje y, contenida en el plano xy y situada en $x = 3$ [cm], y una carga puntual $q = -50[\mu C]$ colocada en el punto A (0, 5, 0) [cm]. Determine:



a) La fuerza total que actúa sobre la carga q.

b) El campo eléctrico total que actúa en el origen de los ejes coordenados.

c) El trabajo necesario para desplazar la carga q desde su posición hasta el origen de los ejes coordenados.

Resolución:

a) De la definición de campo eléctrico: $\vec{F} = q\vec{E}_A$ y $\vec{E}_A = \vec{E}_{A\sigma} + \vec{E}_{A\lambda}$

$$\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{k}) + \frac{1(2)|\lambda|}{4\pi\varepsilon_0 r_A}\hat{i} \quad ; \quad \vec{E}_A = \frac{-30\times10^{-6}\hat{k}}{2(8.85\times10^{-12})} + 9\times10^9\frac{(2)|-20\times10^{-6}|}{0.03}\hat{i}$$

$$\vec{E} = [-1.695\hat{k} + 12\hat{i}]10^6\left[\frac{N}{C}\right] \quad ; \quad \vec{F} = -50\times10^{-6}[-1.695\hat{k} + 12\hat{i}]10^6[N]$$

de donde la fuerza total sobre q es: $\vec{F} = [-600\hat{i} + 84.75\hat{k}][N]$

b) Al aplicar el principio de superposición: $\vec{E}_0 = \vec{E}_{0\sigma} + \vec{E}_{0\lambda} + \vec{E}_{0q}$

$$\vec{E}_0 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_0}\hat{i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{0A}^2}(\hat{j}) \quad ; \quad \vec{E}_0 = [-1.695\hat{k} + 12\hat{i} + 180\hat{j}]10^6\left[\frac{N}{C}\right]$$

con lo cual el campo eléctrico en el origen es $\vec{E}_0 = [12\hat{i} + 180\hat{j} - 1.695\hat{k}]\left[\frac{MN}{C}\right]$

c) El trabajo necesario para el traslado de q será expresado como

$${}_A\underset{q}{W}_0 = EP_0 - EP_A = qV_{0A}\ , \text{ donde } V_{0A} = V_{0A\sigma} + V_{0A\lambda}$$

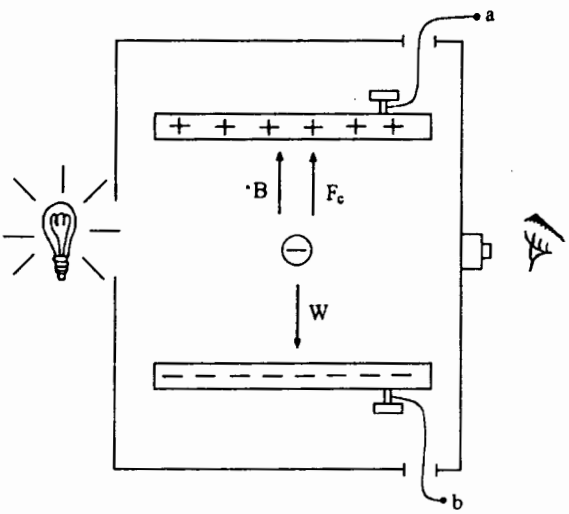
$$V_{0A\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[Z_0 - Z_A] \quad ; \text{ como } Z_0 = Z_A\ ,\ V_{0A\sigma} = 0 \text{ y}$$

$$V_{0A\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2)\ \lambda\ \ln\frac{r_A}{r_0} \quad ; \text{ como } r_A = r_0\ ,\ V_{0A\lambda} = 0$$

de lo anterior se puede concluir que $V_{0A} = 0$, $V_0 = V_A$ y esto significa que la carga q tendrá la misma energía potencial en el punto 0 que en punto A y para realizar el traslado mencionado (desde A hasta 0) no se requiere realizar trabajo:

$${}_A\underset{q}{W}_0 = 0$$

30. En un aparato para realizar el experimento de Millikan, se tienen dos placas metálicas con cargas iguales de signos contrarios, separadas 7 [cm], las cuales producen un campo eléctrico uniforme entre ellas. Si una gotita de aceite de masa $m = 7.651 \times 10^{-16}$[kg], con carga negativa $q = -3.2 \times 10^{-19}$[C] se encuentra en equilibrio bajo la acción de su peso W, el empuje del aire $B = 1.175 \times 10^{-17}$[N] que actúa verticalmente hacia arriba y la fuerza eléctrica F_e, determine:



a) La magnitud del campo eléctrico.

b) La diferencia de potencial V_{ab}.

c) La densidad superficial de carga de la placa positiva.

d) El incremento (o decremento) de energía potencial eléctrica que experimentaría la gota, si fuera desplazada de la placa superior a la inferior, bajo el campo eléctrico existente.

Resolución:

a) Como la gota se encuentra en equilibrio, la $\Sigma\vec{F} = 0$ o también:

$$-\left[\vec{F}_e + \vec{B}\right] = \vec{W} \; ;$$

en forma escalar

$F_e + B = W$; además

$F_e = qE$ y $W = mg$, al sustituir nos queda

$$qE + B = mg \quad \text{y} \quad E = \frac{mg - B}{q}$$

si consideramos que

$g = 9.81$ [m/s^2] obtenemos

$$E = \frac{[(7.651)10^{-16}(9.81) - 1.175 \times 10^{-17}][\text{N}]}{3.2 \times 10^{-19}[\text{C}]} = 23{,}418.4\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

Como la carga q es negativa, la $\vec{F}_e$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ apuntan en direcciones opuestas y

$E = 23{,}418.4\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$ vertical hacia abajo.

b) La diferencia de potencial se calcula con

$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$; como el campo eléctrico entre las placas es uniforme se tiene

$V_{ab} = E\ell$, siendo ℓ la separación entre las placas; de esta forma:

$$V_{ab} = \left(23{,}418.4\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]\right)(0.07\,[\mathrm{m}]) = 1{,}639.3\,[\mathrm{V}]$$

c) De acuerdo con la ley de Gauss, el campo eléctrico entre placas con cargas diferentes en signo pero iguales en valor se obtiene con

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, consideraremos que

$\varepsilon_0 \approx \varepsilon_{aire}$;

así

$\sigma = \varepsilon_0 E$ y

$$\sigma = 8.85\times 10^{-12}[\mathrm{C}^2/[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]]23{,}418.4\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] = 2.073\times 10^{-7}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

d) El trabajo cuasiestático desarrollado al trasladar la gota desde la placa superior hasta la inferior nos permite evaluar la variación de energía potencial eléctrica:

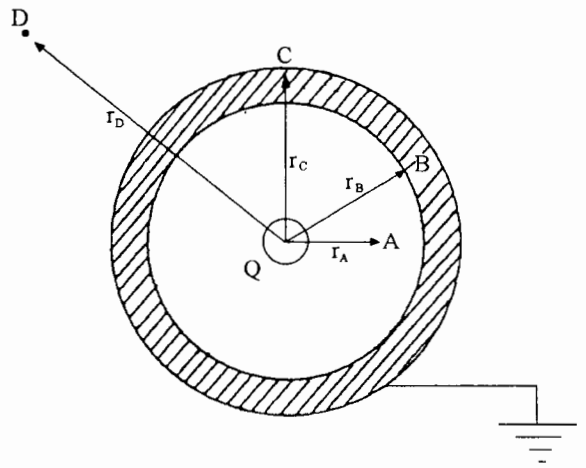
$\underset{q}{{}_aW_b} = EP_b - EP_a = qV_b - qV_a = qV_{ba}$ recordamos que

$V_{ba} = -V_{ab}$ por lo tanto

$\underset{q}{{}_aW_b} = -qV_{ab}$; $\underset{q}{{}_aW_b} = -(-3.2\times 10^{-19})[\mathrm{C}]\,1{,}639.3\,[\mathrm{V}] = 5.246\times 10^{-16}\,[\mathrm{J}]$

El signo del resultado anterior (+) nos indica que la gota aumentaría su energía potencial eléctrica al ser trasladada de la placa superior a la inferior.

31. Se coloca una carga esférica $Q = 5[\mu C]$ en el centro de una esfera metálica hueca. Posteriormente, la superficie exterior de esta esfera se conecta a tierra. Considere que $r_A = 5$, $r_B = 10$, $r_C = 11$ y $r_D = 18$, expresados todos en centímetros. Calcule:



a) La densidad superficial de carga en la superficie exterior y en la interior de la esfera metálica.

b) La diferencia de potencial V_{AB}.

c) El trabajo realizado al trasladar una carga $q' = 1[nC]$ desde el punto A hasta el punto D.

Resolución:

a) En la esfera metálica se inducen cargas eléctricas; en el interior carga negativa $(-q)$ y en la superficie exterior carga positiva $(+q)$. Esta carga se neutraliza al conectar la superficie exterior a tierra, de donde son atraídas cargas negativas $(-q)$.

Por lo descrito:

$\sigma_{ext} = 0$ y en la superficie interior

$\sigma_{int} = \dfrac{-q}{A_{int}}$ es decir

$$\sigma_{int} = \frac{-5\times10^{-6}[C]}{4\pi(10\times10^{-2})^2[m^2]} = -3.979\times10^{-5}\left[\frac{C}{m^2}\right] \quad ; \quad \sigma_{int} = -39.79\left[\frac{\mu C}{m^2}\right]$$

b) La diferencia de potencial se evalúa con

$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$; en el espacio entre A y B el campo eléctrico se debe sólo a la carga Q del centro.

La integral da en este caso

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] \quad ; \quad V_{AB} = 9\times10^9(5\times10^{-6})\left[\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.10}\right][V]$$

$V_{AB} = 450{,}000.\ [V]$

c) El trabajo para el traslado cuasiestático desde A hasta D es:

$${}_{A}W_{D} = q'\,V_{DA}\ ;$$
$$q'$$

la diferencia de potencial V_{DA} debe ser expresada como la suma de diferencias de potencial parciales, ya que entre el punto D y el punto A no hay una función de campo eléctrico única:

$V_{DA} = V_{DC} + V_{CB} + V_{BA}$, analizando cada término:

$V_{DC} = 0$, porque en el exterior de la esfera metálica $\vec{E} = \vec{o}$
$V_{CB} = 0$, porque en el interior de un conductor cargado $\vec{E} = \vec{o}$ y
$V_{BA} \neq 0$, porque en el espacio entre B y A existe un campo eléctrico debido a la carga Q colocada en el centro.

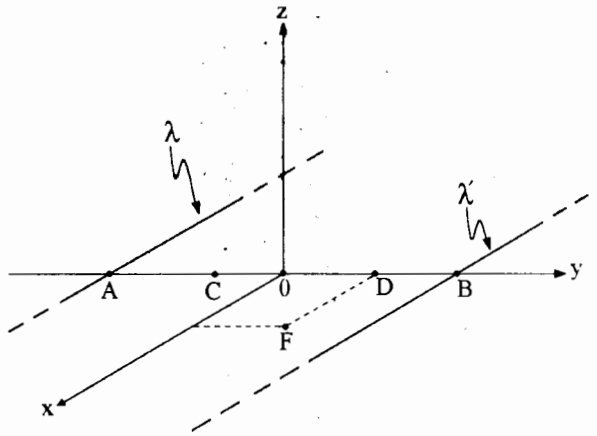
En resumen

$V_{DA} = V_{BA}$ y $V_{BA} = -V_{AB}$ y el trabajo resulta:

$${}_{A}W_{D}^{\,q'} = q'(-V_{AB}) \; ; \quad {}_{A}W_{D}^{\,q'} = 1\times10^{-9}[\mathrm{C}](-450{,}000\ [\mathrm{V}]) = -0.45\times10^{-3}[\mathrm{J}]$$

El signo del resultado nos indica que la carga q' disminuye su nivel energético con el traslado y que para realizar éste, no se requiere una fuerza externa ya que las fuerzas eléctricas pueden realizar el traslado indicado.

32. Suponga que un par de hilos metálicos se colocan paralelos, separados por aire y tienen un exceso de carga uniforme; considere los hilos de longitud muy larga, con $\lambda = 2$[nC/cm] el que pasa por A (0, -50, 0) [cm] y $\lambda' = -2$[nC/cm] el que pasa por B (0, 50, 0) [cm].



a) Deduzca el modelo matemático que le permita evaluar el potencial del punto C (0, -20, 0) [cm], si $V_D = 100$[V], siendo D (0, 30, 0) [cm], y calcúlelo.

b) Calcule el vector gradiente de potencial eléctrico en el origen.

c) Calcule la energía necesaria para trasladar una partícula cargada de -22[nC] del punto F (10, 30, 0) [cm] al punto C. ¿Qué significa el signo del resultado?

Resolución:

a) La diferencia de potencial entre los puntos C y D es $V_{CD} = V_{CD\lambda} + V_{CD\lambda'}$ y al aplicar la integral de línea del campo eléctrico producido por cada hilo con carga, se obtiene

$$V_{CD} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \ln\frac{r_{DA}}{r_{CA}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda' \ln\frac{r_{DB}}{r_{CB}}$$

Es posible analizar cada diferencia de potencial parcial y concluir que:

$V_{CD\lambda} > 0$ y $V_{CD\lambda'} > 0$; además $V_{CD} = V_C - V_D$, con lo cual: $V_C = V_{CD} + V_D$; es decir:

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2)\left[\lambda \ln\frac{r_{DA}}{r_{CA}} + \lambda' \ln\frac{r_{DB}}{r_{CB}}\right] + V_D \text{ , y su cálculo:}$$

$$V_C = 9\times10^9(2)\left[2\times10^{-7}\ln\frac{80}{30} - 2\times10^{-7}\ln\frac{20}{70}\right] + 100\text{[V]}$$

$$V_C = 18\times10^9(2\times10^{-7})[0.9808-(-1.2528)]+100 \text{ ; } V_C = 8{,}140.93\text{[V]}$$

b) Sabemos que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, por lo tanto $\vec{\nabla}V|_0 = -\vec{E}_0$ y $\vec{E}_0 = \vec{E}_{0\lambda} + \vec{E}_{0\lambda'}$,

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r_{A0}}\hat{j} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda'|}{r_{0B}}\hat{j} \text{ ; } \vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\left[\frac{1}{r_{A0}} + \frac{1}{r_{0B}}\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_0 = 9\times10^9(2)2\times10^{-7}\left[\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5}\right]\hat{j} = 14{,}400\hat{j}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right] \text{ y } \vec{\nabla}V|_0 = -14{,}400\hat{j}\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$$

c) La energía necesaria para el traslado es el trabajo que se realiza en dicho traslado, por lo tanto:

$$\underset{q}{{}_F W_C} = q V_{CF} \; ;$$

se observa que $V_F = V_D$ ya que el punto F tiene una posición relativa a los hilos con carga idéntica al punto D;

por esta razón $\underset{q}{{}_F W_C} = q V_{CD}$ y al sustituir valores:

$$\underset{q}{{}_F W_C} = (-\ 22 \times 10^{-9}[\mathrm{C}])(8{,}140.93 - 100)[\mathrm{V}] = -0.1769 \times 10^{-3}[\mathrm{J}] = -0.1769\,[\mathrm{mJ}]$$

El signo (–) del resultado nos indica que la partícula cargada q disminuye su energía potencial eléctrica en 0.1769 [mJ] al ser trasladada desde el punto F hasta el punto C, sin requerir de fuerzas externas para realizar este trabajo.

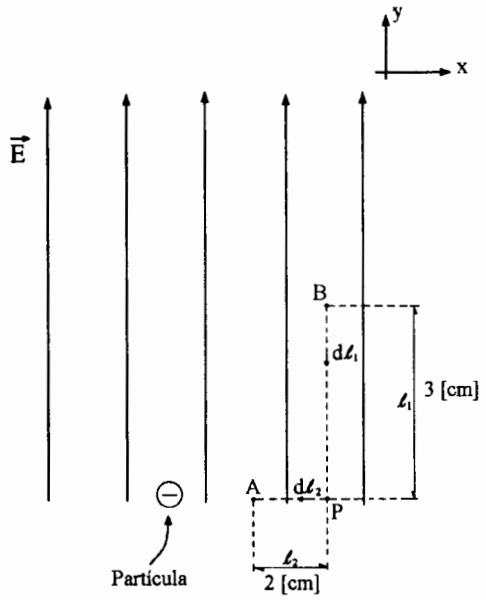
33. Una partícula que tiene una carga de -2×10^{-9} [C], se encuentra bajo la acción de un campo eléctrico uniforme, por lo cual experimenta una fuerza eléctrica $F = -3 \times 10^{-6}\hat{j}$ en [N]. Con base en ello, determine:

a) El vector campo eléctrico.

b) La diferencia de potencial V_{AB}.

c) El trabajo necesario para desplazar la partícula del punto A al punto B.

d) La función potencial eléctrico en la región del campo eléctrico.



Resolución:

a) De la definición de campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \; ; \; \vec{E} = \frac{-3 \times 10^{-6}\hat{j}\,[\mathrm{N}]}{-2 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]} = 1{,}500\hat{j}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) La diferencia de potencial V_{AB} se puede calcular con:

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_B^P \vec{E}\cdot d\vec{\ell}_1 - \int_P^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell}_2 \; ;$$

$$V_{AB} = -\int_B^P E d\ell_1 \cos\alpha_1 - \int_P^A E d\ell_2 \cos\alpha_2$$

$$\alpha_1 \sphericalangle_{\vec{E}}^{d\vec{\ell}_1} = \pi \text{ [rad]} \qquad \alpha_2 \sphericalangle_{\vec{E}}^{d\vec{\ell}_2} = \frac{\pi}{2} \text{ [rad]}$$

$$\cos\alpha_1 = -1 \qquad \cos\alpha_2 = 0$$

por lo tanto

$$V_{AB} = \int_B^P E d\ell_1 = E\int_B^P d\ell_1 = E\ell_1 \; ; \; V_{PA} = 0 \text{ y } V_P = V_A$$

y la diferencia de potencial V_{AB} resulta:

$$V_{AB} = 1{,}500\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right](3 \times 10^{-2})[\mathrm{m}] = 45\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right]$$

c) El trabajo cuasiestático para desplazar a la partícula es:

$$\underset{q_P}{{}_AW_B} = q_P V_{BA}, \text{ como } V_{BA} = -V_{AB}, \; \underset{q_P}{{}_AW_B} = -q_P V_{AB} = +2 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]45[\mathrm{V}] = 90[\mathrm{nJ}]$$

d) Para encontrar la función del potencial eléctrico partiremos de la ecuación del gradiente de potencial $\vec{\nabla} V = -\vec{E}$; es decir:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -1{,}500\hat{j}, \text{ de esto resulta } \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \text{ y } \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

por lo tanto $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{dV}{dy}$ y $\dfrac{dV}{dy} = -1{,}500$;

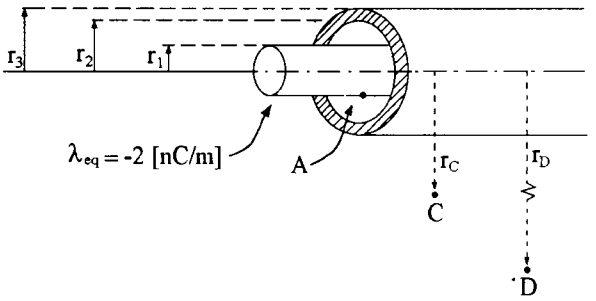
al separar variables:

$dV = -1{,}500dy$; al integrar $V(y) = -\int 1{,}500dy$; $V(y) = [-1{,}500y + C][\mathrm{V}]$, donde y está en [m],

expresión en la cual C (la constante de integración) representa el potencial de referencia cuando $y = 0$. El desconocer C no nos permite evaluar el potencial de un punto aislado, pero la indeterminación de C no es impedimento para calcular diferencias de potencial, como se hizo en el inciso *b*.

Se sugiere al lector comprobar el cálculo del inciso *b*, a partir de la función encontrada en el inciso *d*.

34. Un par de cilindros coaxiales muy largos forman el arreglo de la figura, el cilindro central es de plástico y tiene una distribución de carga uniforme λ_{eq}, el externo es metálico y neutro eléctricamente. El aire los separa y rodea, y los radios de la figura, expresados en [cm], son: $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_C = 6$ y $r_D = 10$. Calcule:



a) El campo eléctrico en el punto *D*.

b) La diferencia de potencial V_{CA}.

c) El trabajo para mover 10 electrones desde *A* hasta *C*.

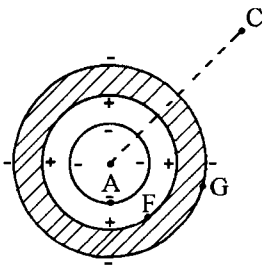
Resolución:

a) Para encontrar el campo eléctrico en el punto *D*, utilizamos la ley de Gauss con una superficie cilíndrica coaxial con los cilindros del problema. La superficie gaussiana contiene al punto *D* y aunque en el cilindro metálico se presentan cargas inducidas, positivas en la superficie interior y negativas en la superficie exterior, la carga neta encerrada por la superficie gaussiana resulta $\lambda_{eq}\ell$, siendo ℓ la longitud de los cilindros. De esta forma se obtiene:

$$\vec{E}_D = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda_{eq}|}{r_D}\hat{r} \quad \text{en coordenadas cilíndricas y considerando } \varepsilon_0 \approx \varepsilon_{aire}$$

$$\vec{E}_D = 9\times10^9\frac{(2)(2\times10^{-9})(-\hat{r})}{0.10} = -360\hat{r}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

b) Para calcular la diferencia de potencial V_{CA} es necesario identificar las funciones de campo eléctrico para las regiones entre los puntos *A* y *C*.



Para $r_1 \le r \le r_2$: $\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda_{eq}|}{r}\hat{r}$; $V_{FA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda_{eq}\ln\frac{r_1}{r_2}$

si $r_2 < r < r_3$: $\vec{E} = \vec{0}$, por ser interior de un conductor $V_{GF} = 0$

para $r_3 \le r$: $\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda_{eq}|}{r}\hat{r}$; $V_{CG} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda_{eq}\ln\frac{r_3}{r_C}$

como $V_{CA} = V_{CG} + V_{GF} + V_{FA}$, se obtiene:

$$V_{CA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(2)\lambda_{eq}\left[\ln\frac{r_3}{r_C} + \ln\frac{r_1}{r_2}\right] \;;$$

$$V_{CA} = 9\times 10^9(2)(-2\times 10^{-9})\left[\ln\frac{3}{6} + \ln\frac{1.5}{2}\right][\mathrm{V}]$$

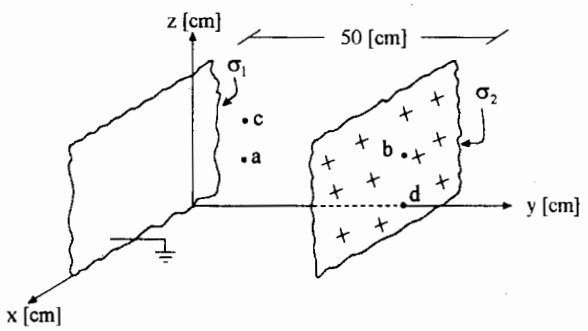
$$V_{CA} = -36[-0.9808] = 35.31[\mathrm{V}]$$

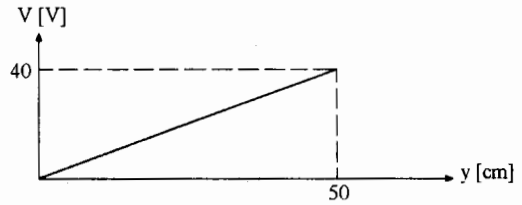
c) El trabajo para desplazar a los 10 electrones cuasiestáticamente es

$$\underbrace{{}_A W_C}_{10e} = 10eV_{CA} \;;\; \underbrace{{}_A W_C}_{10e} = 10(-1.6\times 10^{-19}[\mathrm{C}])(35.31[\mathrm{V}]) = -5.65\times 10^{-17}[\mathrm{J}]$$

En este traslado los electrones disminuyen su energía potencial eléctrica y para realizar el desplazamiento no se requiere de fuerza externa alguna.

35. Se tienen dos planos metálicos con cargas de signos opuestos distribuidas uniformemente, como se muestra en la figura. Si el potencial eléctrico entre los planos varía en la dirección y como indica la gráfica, y es independiente de x y z, determine:





a) El campo eléctrico entre los planos.

b) Las densidades de carga σ_1 y σ_2.

c) La diferencia de potencial V_{ad}, donde $a(0,\ 10,\ 10)$ [cm], $b(0,\ 40,\ 10)$ [cm] y $d(0,\ 40,\ 0)$ [cm].

d) El trabajo necesario para llevar una carga $q = 8[\mu C]$ desde el punto $c(0, 10, 20)$ [cm] hasta el punto d.

Resolución:

a) De la ecuación del gradiente de potencial $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$,

además $V = f(y)$

y de la gráfica $V = \dfrac{40}{50\times10^{-2}}y$, V no depende de x ni de z.

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right]\ ;\ \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}\ ;\ \vec{E} = -\frac{dV}{dy}\hat{j}\ ;\ \vec{E} = -\frac{d}{dy}(80y)\hat{j}$$

$$\vec{E} = -\ 80\hat{j}\left[\frac{N}{C}\right]$$

campo eléctrico uniforme entre los planos y dirigido del plano con σ_2 (positiva) hacia σ_1 (negativa).

b) De la ley de Gauss, el campo eléctrico entre las placas con σ_2 y σ_1 resulta, en magnitud:

$E = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$, por lo tanto

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 E$$

$$\sigma_2 = 8.85\times10^{-12}\left[\frac{C^2}{N\cdot m^2}\right]80\left[\frac{N}{C}\right] = 7.08\times10^{-10}\left[\frac{C}{m^2}\right]\ ;\ \sigma_2 = 0.708\left[\frac{nC}{m^2}\right]\ \text{y}\ \sigma_1 = -0.708\left[\frac{nC}{m^2}\right]$$

c) V_{ad} se determina con:

$$V_{ad} = E(y_a - y_d)$$

$$V_{ad} = 80\left[\frac{N}{C}\right](0.10-0.40)[m] = -24[V],\ V_d > V_a$$

d) El trabajo necesario se calcula como

$$\underset{q}{{}_cW_d} = qV_{dc} \quad \text{y}$$

$$V_{dc} = V_{db} + V_{ba} + V_{ac} \text{ , pero}$$

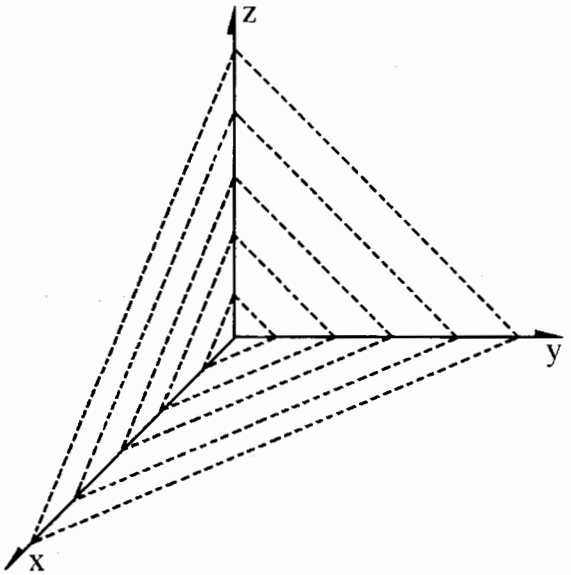
$V_{db} = 0$, $V_d = V_b$ porque los puntos *d* y *b* están en un plano equipotencial paralelo a los planos con carga eléctrica.

También $V_{ac} = 0$; $V_a = V_c$, los puntos *a* y *c* están en un plano equipotencial.

$$V_{ba} = E(y_b - y_a) = 80(0.40 - 0.10)[\text{V}] = 24[\text{V}] \text{ , con lo cual:}$$

$$\underset{q}{{}_cW_d} = qV_{ba} = 8 \times 10^{-6}[\text{C}]24\left[\frac{\text{J}}{\text{C}}\right] = 192[\mu\text{J}]$$

36. Suponga que el potencial eléctrico de una región se describe mediante la siguiente función $V(x, y, z) = 3(x+y+z)$, donde el potencial está en [kV] si x, y y z se sustituyen en metros. Obtenga:



a) El campo eléctrico en el punto $A(-1, 2, 3)$[m].

b) El trabajo necesario para mover un electrón del punto B (0, −1, 2) [m], al punto A.

c) El potencial eléctrico del punto $C(-2, -2, -2)$[m] si V_A se define como potencial de referencia ($V_A \equiv 0$).

d) El rotacional del campo eléctrico y concluir si se trata de un campo conservativo o no.

Resolución:

a) De la ecuación del gradiente de potencial

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \; ; \; V = 3(x + y + z)[\text{kV}]$$

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right] \; ; \; \vec{E} = -(3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k})\left[\frac{\text{kV}}{\text{m}}\right]$$

Se observa que el campo eléctrico $\vec{E}$ no depende de las coordenadas (x, y, z), por lo tanto se trata de un campo uniforme que puede ser representado por rectas paralelas y equidistantes entre sí.

b) El trabajo se calcula con

$${}_{B}W_{A} = EP_A - EP_B = eV_A - eV_B = e(V_A - V_B)$$

Con la función potencial:

$$V_A = 3[x_A + y_A + z_A][\text{kV}]; \; V_A = 3[-1 + 2 + 3] = 12[\text{kV}] \quad \text{y}$$

$$V_B = 3[x_B + y_B + z_B] \; ; \; V_B = 3[0 - 1 + 2] = 3[\text{kV}] \therefore V_A - V_B = (12 - 3)\text{kV} = 9[\text{kV}] \quad \text{y el}$$

$${}_{B}W_{A} = -1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]\, 9 \times 10^{3}\left[\frac{\text{J}}{\text{C}}\right] = -1.44 \times 10^{-15}[\text{J}]$$

c) De acuerdo con la función potencial

$V_C = 3[x_c + y_c + z_c][\text{kV}] = -18[\text{kV}]$ y la diferencia V_{CA} resulta

$$V_{CA} = V_C - V_A \; ; \; V_{CA} = [-18 - (12)][\text{kV}] = -30[\text{kV}]$$

Al definir como potencial de referencia el de un punto P, cualquiera, se modifican los valores de los potenciales de todos los puntos pero las diferencias de potencial no se modifican; es decir

$$V_{CA} = V'_C - V'_A$$

como $V'_A = 0$ (potencial de referencia) el potencial del punto C con esta referencia resulta

$$V'_C = V_{CA} + V'_A \; ; \; V'_C = V_{CA} = -30[\text{kV}]$$

Otra forma de analizar este concepto es observar que al elegir una referencia nueva, a todos los puntos se les deberá restar el potencial que el punto de referencia tenía antes de hacerse igual a 0; en nuestro problema $V_A = 12\text{kV}$.

De esta forma, la función potencial con el punto A como referencia es:

$$V'(x, y, z) = [3(x + y + z) - 12]\text{kV}$$

d) El rotacional del campo eléctrico $\vec{E} = -3{,}000(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$ es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -3{,}000 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3{,}000[\hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0)] = \vec{0}$$

Por lo tanto $\vec{E}$ resulta irrotacional y por esta razón se trata de un campo conservativo.

37. Relacione las columnas anotando en cada paréntesis la letra que corresponde.

a) Material sin portadores de carga libres.....(D)

b) Efecto de un campo eléctrico en un material dieléctrico.....(E)

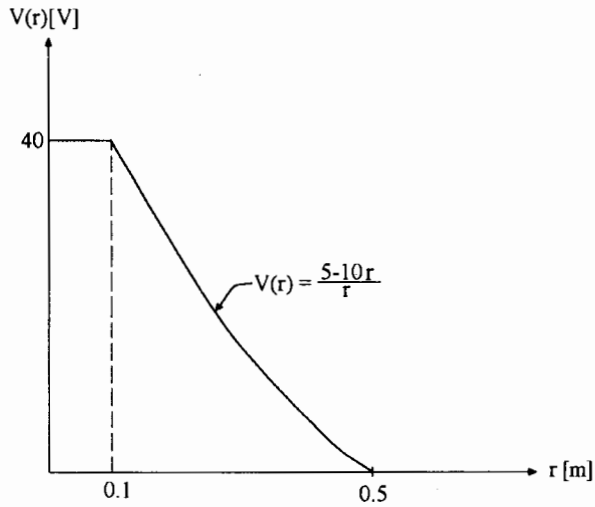
c) Unidad de potencial eléctrico en el SI.....(H)

d) Redistribución de las partículas cargadas de un conductor por efecto de un campo eléctrico de origen externo.....(A)

e) Procedimiento para descargar rápidamente un objeto de material conductor.....(F)

A) inducción electrostática
B) newton / coulomb
C) carga eléctrica
D) dieléctrico
E) polarización
F) conexión a tierra
G) frotamiento
H) joule / coulomb
I) conductor
J) semiconductor
K) volt / metro

38. La figura muestra la gráfica de variación del potencial eléctrico de cierta distribución de carga con respecto a la distancia r al origen del sistema de coordenadas. Considerando que el potencial tiene simetría esférica, esto es, que depende exclusivamente de r, determine:



a) El campo eléctrico de la distribución, como función de r.

b) La carga neta que existe en el interior de una superficie esférica S, imaginaria, de radio $R = 0.3$[m], centrada en el origen.

c) El incremento en la energía potencial electrostática de un electrón $(e = -1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}])$, al ser trasladado de un punto A a un punto B, si las distancias de dichos puntos al origen son $r_A = 0.5$ [m] y $r_B = 0.1$ [m], respectivamente.

d) La función potencial eléctrico, si se adopta como punto de referencia de potencial nulo cualquiera que se encuentre a una distancia $r = 0.1$ [m] del origen.

Resolución:

a) De la ecuación del gradiente de potencial $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi} \text{ y como } V = V(r) \text{ se tiene}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial(V(r))}{\partial r}\hat{r} \text{ y de la gráfica se obtienen las funciones de } V\text{:}$$

$$\text{si } 0 \le r < 0.1\,[\mathrm{m}],\ V(r) = 40\,[V] \therefore \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{si } 0.1 \le r \le 0.5\,[\mathrm{m}],\ V(r) = \frac{5-10r}{r} \therefore \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{5}{r} - 10\right]\hat{r} = \frac{5}{r^2}\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) De la ley de Gauss $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_{ne}$; tanto $\vec{E}$ como $d\vec{s}$, para todos los puntos de la superficie esférica (gaussiana) tienen dirección radial, por lo tanto:

$$\varepsilon_0 \oint E ds = q_{ne}\ ;\ \varepsilon_0 E \oint ds = q_{ne}\ ;\ \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q_{ne}\ ,\ \text{pero}$$

$$E = \frac{5}{r^2} \text{ y } q_{ne} = \varepsilon_0\left(\frac{5}{r^2}\right)4\pi r^2 = 20\pi\varepsilon_0\ ;\ q_{ne} = 20\pi(8.85 \times 10^{-12}) = 556.062\,[\mathrm{pC}]$$

Se puede destacar que q_{ne} sería la misma para cualquier superficie esférica, centrada en el origen, cuyo radio r cumpla con $0.1 \leq r \leq 0.5$ [m]

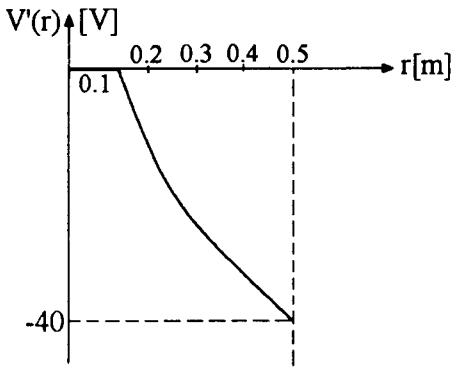
c) El incremento de energía potencial se puede expresar como:

$\Delta EP = EP_B - EP_A$ y por tratarse de un electrón

$\Delta EP = eV_B - eV_A = eV_{BA}$

$\Delta EP = -1.6 \times 10^{-19}[C](40-0)[V] = -6.4 \times 10^{-18}[J]$; el electrón disminuye su energía.

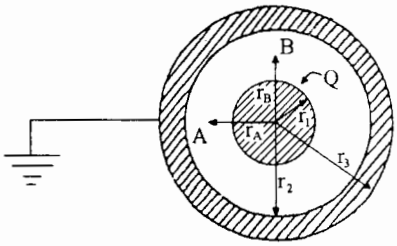
d) Al escoger como referencia a un punto con $r = 0.1$ [m], en el que se tenía un potencial de 40 [V], habrá que restar a todos los potenciales ese valor de 40 [V] para tener la referencia propuesta; es decir:

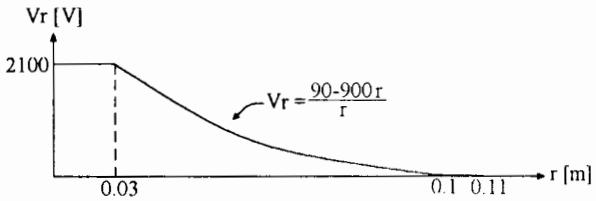


$$V'(r) = \left(\frac{5-10r}{r} - 40\right)[V]$$

NOTA. La curva es la misma que la original, pero está desplazada 40 [V] hacia la parte negativa del eje $V'(r)$.

39. Se coloca una esfera metálica de radio $r_1 = 3\,[\text{cm}]$, con carga Q positiva, concéntrica con una esfera metálica hueca, originalmente neutra de radio interior $r_2 = 10\,[\text{cm}]$ y radio exterior $r_3 = 11\,[\text{cm}]$. Posteriormente la superficie exterior de la esfera hueca se conecta a tierra y se mide el potencial como función de r; con lo que se obtiene la gráfica que se muestra. Con base en esto y en la figura, calcule:





a) El campo eléctrico como función de r.

b) El flujo eléctrico a través de una superficie esférica, imaginaria concéntrica con las esferas metálicas, de radio $r = 0.05\,[\text{m}]$.

c) La carga Q de la esfera interior.

d) El cambio en la energía potencial de un electrón al ser trasladado del punto A al B. Considere que $r_A = 5\,[\text{cm}]$ y $r_B = 8\,[\text{cm}]$.

Resolución:

a) De la gráfica del potencial

$$V_r(r) \begin{cases} 2{,}100\ [V] & \text{para } 0 \le r < 0.03\,[\text{m}]; \\ \dfrac{90 - 900\,r}{r} & \text{para } 0.03 \le r \le 0.1\,[\text{m}]; \\ 0 & \text{para } 0.1 < r \le 0.11\,[\text{m}]; \end{cases}$$

Con la ecuación del gradiente de potencial $\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}V(r)$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}(2{,}100)\hat{r} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{90 - 900r}{r}\right]\hat{r} = \frac{90}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}[0]\hat{r} = \vec{0}$$

b) De la definición de flujo eléctrico:

$$\phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s};$$

la esfera imaginaria es de radio $r = 0.05\,[\text{m}]$, por lo tanto la función de $\vec{E}$ es para $0.03 \le r \le 0.1\,[\text{m}]$ y

$$\phi_e = \oint \frac{90}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = \frac{90}{r^2}\oint \hat{r}\cdot d\vec{s} = \frac{90}{r^2}\oint |\hat{r}|\,|d\vec{s}| \cos\alpha\ ;\ \alpha \sphericalangle_{\hat{r}}^{d\vec{s}} = 0$$

$\alpha = 0$ porque $d\vec{s}$ y $\hat{r}$ son de dirección radial y hacia afuera de la esfera.

$$\phi_e = \frac{90}{r^2}\oint ds = \frac{90}{r^2}(4\pi r^2) = 360\pi\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}\right];\ \phi_e = 1{,}130.973\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}\right]$$

Se puede resaltar que el flujo ϕ_e resultaría del mismo valor para una esfera concéntrica con las metálicas, cuyo radio r fuese tal que $0.03 \leq r \leq 0.1\,[\mathrm{m}]$

c) De la ley de Gauss $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{q_{ne}}{\varepsilon_0}$; es decir $q_{ne} = \varepsilon_0 \phi_e$, utilizando el resultado del inciso anterior:

$$q_{ne} = 8.85\times 10^{-12}\left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\cdot m}^2}\right] 1{,}130.973\left[\frac{\mathrm{N\cdot m}^2}{\mathrm{C}}\right] \text{ es decir}$$

$$q_{ne} = 1.0\times 10^{-8}[\mathrm{C}] = 10\times 10^{-9}[\mathrm{C}] = 10\,[\mathrm{nC}]$$

d) $\underset{A\to B}{\Delta EP} = EP_B - EP_A = q_e(V_B - V_A) = q_e V_{BA}$ para un traslado cuasiestático.

Para evaluar V_B y V_A se emplea la función potencial para $0.03 \leq r \leq 0.1\,[\mathrm{m}]$

$$V_B = V(0.08) = \frac{90 - 900(0.08)}{0.08} = 225\,[\mathrm{V}] \quad \text{y} \quad V_A = V(0.05) = \frac{90 - 900(0.05)}{0.05} = 900\,[\mathrm{V}]$$

por lo tanto, $\underset{A\to B}{\Delta EP} = (-\,1.6\times 10^{-19}[\mathrm{C}])(225 - 900)\,[\mathrm{V}] = 1.08\times 10^{-16}[\mathrm{J}]$ y el electrón aumenta su energía potencial.

Problemas propuestos

1. Relacione las columnas anotando en cada paréntesis la letra que corresponda.

1) Es la unidad de potencial eléctrico en el Sistema Internacional de Unidades . . . . . (D)

2) Es un conductor que puede entregar o recibir carga, sin perder sustancialmente su neutralidad eléctrica . . . . . ( )

3) Representa, en cada punto del espacio, la fuerza que cada unidad de carga experimenta al ser colocada en el punto . . . . . ( )

4) Es la pérdida de electrones, que puede ocurrir en los átomos de un material . . . . . ( )

5) Es una sustancia que prácticamente carece de portadores de carga libres . . . . . ( )

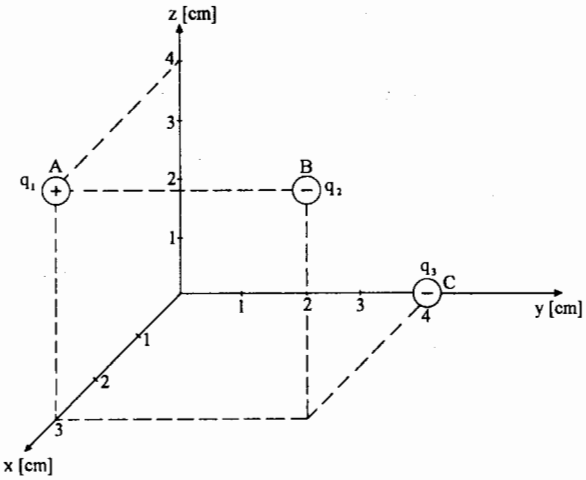
A) superconductor
B) campo eléctrico
C) aire ionizado
D) N·m/C
E) campo de potencial eléctrico
F) la Tierra
G) *V*/m
H) ionización
I) polarización
J) dieléctrico
K) conductor
L) descarga eléctrica

2. Considere el conjunto de cargas puntuales mostrado: $q_1 = 1\,[\mu C]$, $q_2 = -2\,[\mu C]$ y $q_3 = -3\,[\mu C]$, colocadas en los puntos *A* (3, 0, 4), *B* (3, 4, 4) y *C* (0, 4, 0), en [cm], respectivamente. Calcule:

a) La fuerza eléctrica sobre la carga q_2.

b) El potencial eléctrico en el punto ocupado por la carga q_2, considerando como referencia de potencial nulo un punto infinitamente alejado del conjunto.

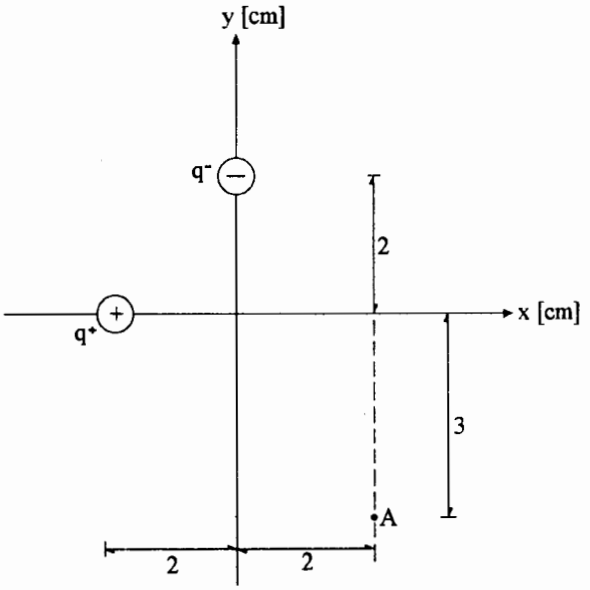
c) La energía potencial electrostática de la carga q_2.



3. Se tiene un dipolo eléctrico en el plano xy, en el que $q^+ = 5[\text{nC}]$ está ubicada en (-2, 0) [cm] y la $q^- = -5[\text{nC}]$, ubicada en (0, 2) [cm]. Determine:

a) El vector campo eléctrico en el punto A (2, -3) [cm].

b) El trabajo necesario para trasladar la q^- desde donde se encuentra hasta el punto A.

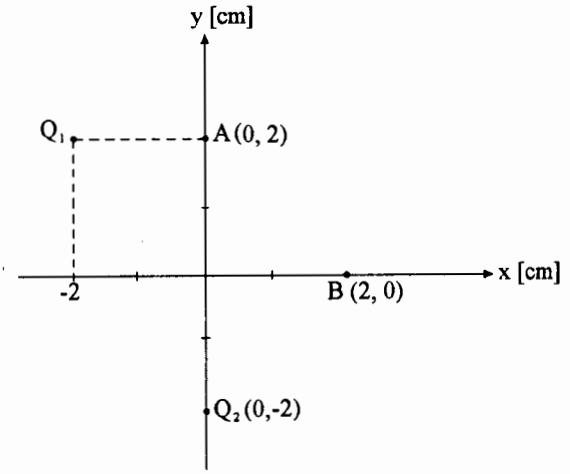


4. Se tienen dos cargas puntuales: $Q_1 = 10[\text{nC}]$ colocada en (-2, 2) [cm] y $Q_2 = -20[\text{nC}]$ colocada en (0, -2) [cm], interactuando en el vacío, donde $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}[\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2]$. Calcule:

a) El campo eléctrico en el punto B (2, 0) [cm].

b) La diferencia de potencial V_{BA}, siendo A (0, 2) [cm].

c) El trabajo necesario para trasladar un electrón desde B hasta A si se considerara que $V_{BA} = -1.9498 \times 10^3[\text{V}]$.

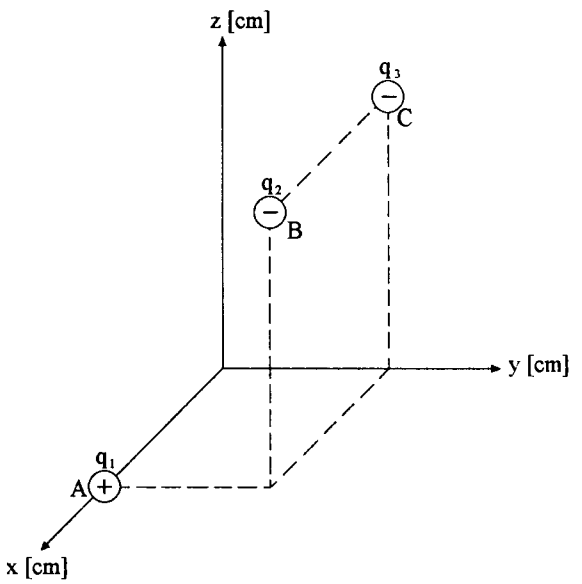


5. Considere el conjunto de cargas puntuales formado por: $q_1 = +10[\text{nC}]$ colocada en A (4, 0, 0) [cm], $q_2 = -10[\text{nC}]$ ubicada en B (4, 3, 5) [cm] y $q_3 = -5[\text{nC}]$ colocada en C (0, 3, 5) [cm]. Calcule:

a) La fuerza eléctrica sobre la carga q_2.

b) El potencial eléctrico en el punto B ocupado por q_2; considere como referencia de potencial nulo un punto infinitamente alejado del conjunto.

c) La energía potencial electrostática de la carga q_2.



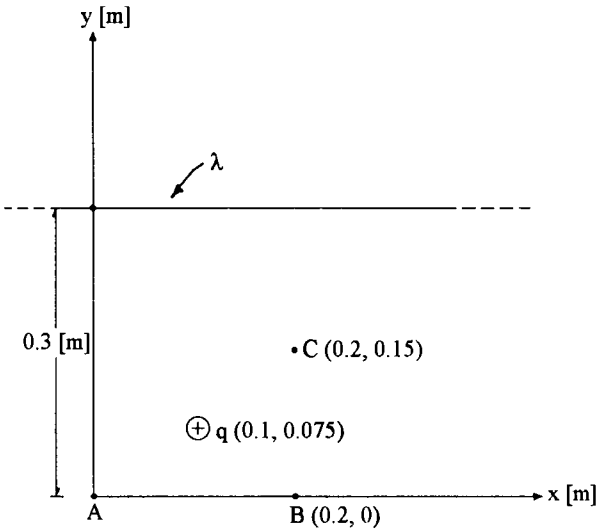
6. En la figura se muestran un alambre muy largo con densidad lineal uniforme de carga $\lambda = -4[\mu\text{C/m}]$ y una carga puntual $q = 1[\mu\text{C}]$. Despreciando el efecto de inducción de carga en el alambre, calcule:

a) El campo eléctrico en el punto A (0, 0) [m].

b) La diferencia de potencial V_{AC}.

c) La fuerza que actuaría sobre una carga $Q = 2[\mu\text{C}]$ colocada en B.

d) El trabajo necesario para mover la carga Q del punto C al B.

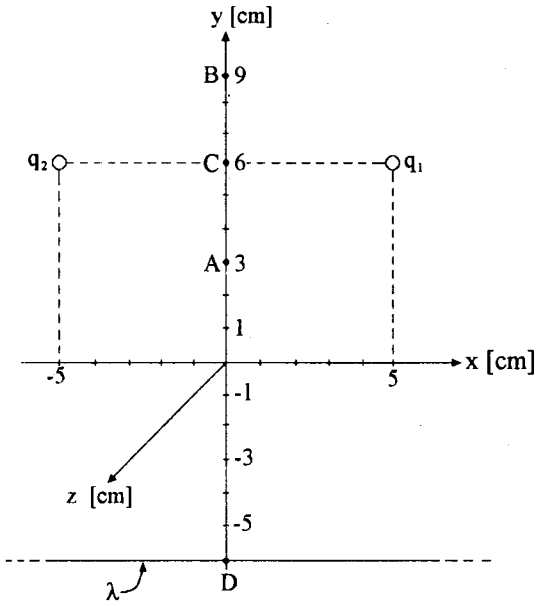


7. En la figura se muestra un conjunto de cargas que consta de una distribución lineal uniforme alojada en el plano xy paralela al eje x y que pasa por el punto D (0, -6, 0) [cm], con una densidad $\lambda = 100[\mu C/m]$ y dos cargas puntuales $q_1 = q_2 = 25[\mu C]$, colocadas en (5, 6, 0) [cm] y en (-5, 6, 0) [cm], respectivamente, con base en esto, determine:

a) La fuerza eléctrica que actúa sobre q_1.

b) La diferencia de potencial V_{AB}.

c) El trabajo necesario para trasladar la carga q_2 al punto C, partiendo de su posición inicial.



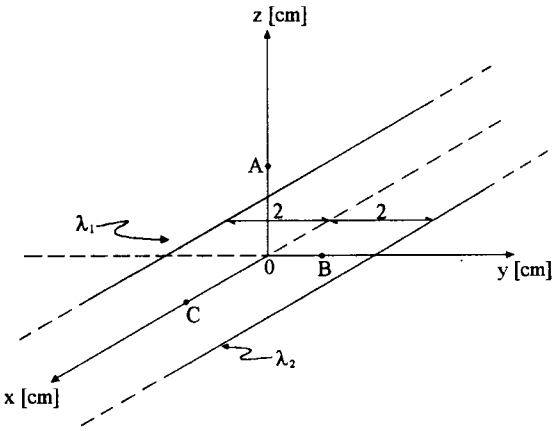
8. La figura muestra dos alambres rectos, largos y paralelos al eje x, cargados con densidad lineal $\lambda_1 = -1/6[\mu C/m]$ y con $\lambda_2 = -\lambda_1$, separados una distancia de 4 [cm], con base en esto, determine:

a) El vector campo eléctrico en el punto 0.

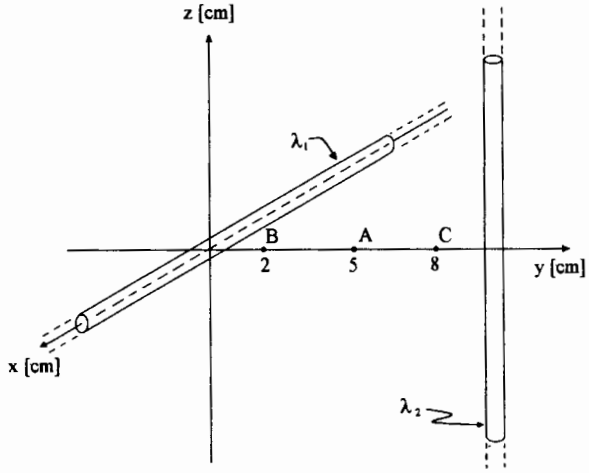
b) El vector campo eléctrico en el punto A (0, 0, 1.5) [cm].

c) La diferencia de potencial V_{AC} si C (2, 0, 0) [cm].

d) El trabajo necesario para trasladar 20 electrones del punto A al B (0, 1, 0) [cm].



9. El conjunto de cuerpos cargados formado por las dos líneas largas mostradas en la figura, donde $\lambda_1 = 5[\mu C/m]$ es coincidente con el eje x y $\lambda_2 = \lambda_1$ es paralela al eje z y pasa por el punto (0, 10, 0) [cm]. Determine:



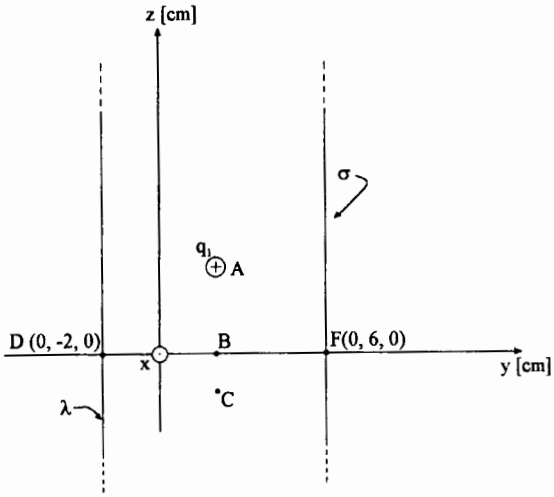
a) El vector campo eléctrico en el punto A (0, 5, 0) [cm].

b) El vector fuerza eléctrica que actuaría sobre una carga $q_\alpha = 3.2 \times 10^{-19}[C]$, colocada en el punto A.

c) La diferencia de potencial V_{BC}, siendo B (0, 2, 0) [cm] y C (0, 8, 0) [cm].

d) El trabajo necesario para mover la carga q_α, del punto C al punto B.

10. La figura muestra una carga puntual $q_1 = 2[\mu C]$ situada en el punto A (0, 2, 3) [cm], una línea cargada de longitud infinita con $\lambda = -10 \times 10^{-6}[C/m]$, paralela al eje z que corta el eje y en el punto D (0, -2, 0) [cm] y una superficie muy grande con $\sigma = -(10^{-3}/(4\pi))[C/m^2]$ paralela al plano xz que corta al eje y en el punto F (0, 6, 0) [cm]. Calcule:



a) El campo eléctrico en el punto B (0, 2, 0) [cm].

b) Las coordenadas del punto en el que tendría que situarse una nueva carga puntual positiva q', y la magnitud de ésta para anular el campo eléctrico en el punto B.

c) A partir de las tres distribuciones de carga mostradas en la figura, la diferencia de potencial V_{CB} si C (0, 2, -1) [cm].

d) El cambio en la energía potencial eléctrica de la carga q_1 cuando se desplaza del punto A al punto C.

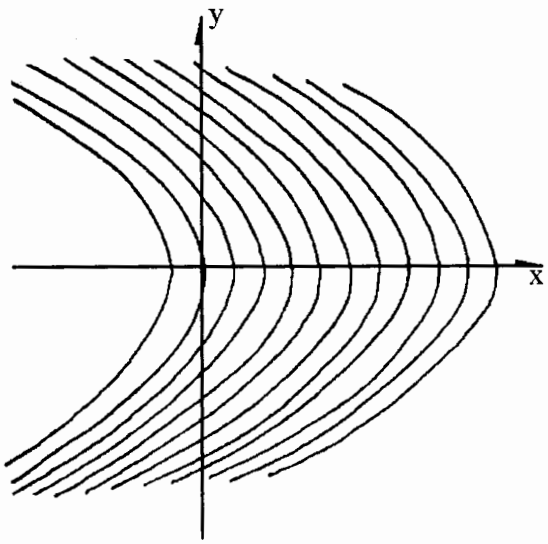
11. El potencial eléctrico de cierta región del espacio está dado por la ecuación $V(x, y) = (10x + 2y^2)[\mathrm{V}]$, cuando x y y se sustituyen en metros. Determine:

a) La función de campo eléctrico $\vec{E}(x, y)$.

b) El campo eléctrico en el punto A (10, 2) [m].

c) La diferencia de potencial $V_{A'B}$, donde A' (3, 2)[m] y B (1, 5) [m].

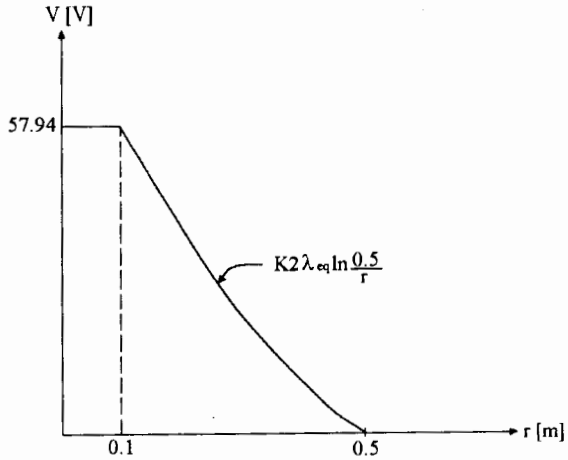
d) El rotacional del campo eléctrico y concluir si este campo es o no conservativo.



12. La figura muestra la gráfica de variación de potencial eléctrico de cierta distribución de carga con respecto de la distancia r al eje z del sistema de coordenadas cilíndricas. Considerando que el potencial tiene simetría axial con respecto al eje z, esto es, que el potencial depende exclusivamente de r:

a) Deduzca el campo eléctrico de la distribución como función de r; la K de la función potencial representa la constante de la ley de Coulomb.

b) Calcule el cambio en la energía potencial electrostática de 10 electrones al ser trasladados desde A (r_A = 0.5 [m]) hasta B (r_B = 0.1 [m]); considere que λ_{eq} = 2[nC/m].



Respuestas de los problemas propuestos

1. (1) D, (2) F, (3) B, (4) H y (5) J.

2. *a)* $\vec{F}_2 = [12.96\hat{i} - 11.25\hat{j} + 17.28\hat{k}]$[N]

   b) $V_B = -315$[kV]

   c) $EP_{q2} = 0.63$[J]

3. *a)* $\vec{E}_A = (8.637\hat{i} + 3.607\hat{j})$[kN/C]

   b) ${}_CW_A = 3.455$[μJ]

4. *a)* $\vec{E}_B = [-118.851\hat{i} - 179.225\hat{j}]$[kN/C]

   b) $V_{BA} = -4.352$[kV]

   c) ${}_BW_A = -3.12 \times 10^{-16}$[J]

5. *a)* $\vec{F}_2 = [281.25\hat{i} - 136.19\hat{j} - 226.98\hat{k}]$[μN]

   b) $V_B = 418.5$[V]

   c) $Ep_{q2} = -4.185$[μJ]

6. *a)* $\vec{E}_A = -[460.8\hat{i} + 105.6\hat{j}]$[kN/C]

   b) $V_{AC} = 49.907$[kV]

   c) $\vec{F}_Q = [0.922\hat{i} - 0.211\hat{j}]$[N]

   d) ${}_cW_B = 99.814$[mJ]

7. *a)* $\vec{F}_{q1} = [562.5\hat{i} + 375\hat{j}]$[N]

   b) $V_{AB} = 919.486$[kV]

   c) ${}_FW_C = 56.25$[J]

8. *a)* $\vec{E}_0 = -300\hat{j}$[kN/C]

   b) $\vec{E}_A = -192\hat{j}$[kN/C]

   c) $V_{AC} = 0$[V]

   d) ${}_AW_B = -1.055 \times 10^{-14}$[J]

9. *a)* $\vec{E}_A = \vec{0}$[N/C]

   b) $\vec{F}_{q\alpha} = \vec{0}$[N]

   c) $V_{BC} = 0$[V]

   d) ${}_CW_B = 0$[J]

10. *a)* $\vec{E}_B = -20\hat{k}$[MN/C]

    b) $q' = q_1 = 2$[μC] y situada en $A'(0, 2, -3)$[cm]

    c) $V_{CB} = -150$[kV]

    d) $\Delta Ep_{q1} = 0$, ya que ${}_AW_C = q_1 V_{CA}$, $V_{CA} = 0$[V]

11. *a)* $\vec{E}(x,y) = -(10\hat{i} + 4y\hat{j})$[V/m]

    b) $\vec{E}_A = -2(5\hat{i} + 4\hat{j})$[V/m]

    c) $V_{A'B} = -22$[V]

    d) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$, $\vec{E}(x,y)$ sí es un campo conservativo

12. *a)* $\vec{E} = \vec{0}$, para $0 \le r < 0.1$;

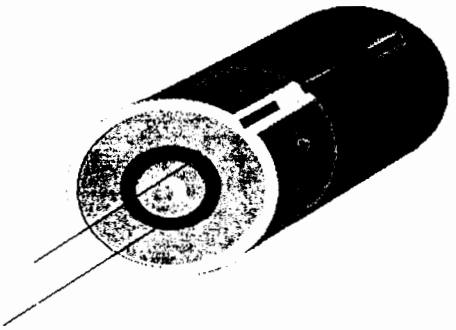
    $\vec{E} = K\dfrac{2\lambda_{eq}}{r}\hat{r}$, para $0.1 \le r \le 0.5$

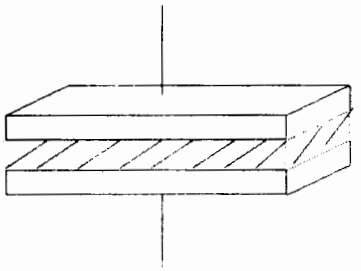
    b) $\Delta EP = {}_AW_B = -92.704 \times 10^{-18}$[J]

TEMA 2

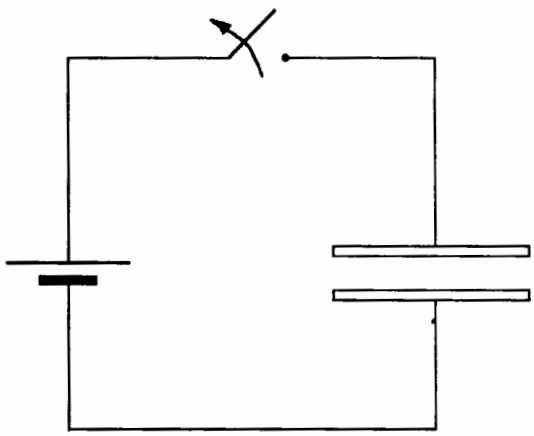
CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

Problemas resueltos





1. Un capacitor formado por dos placas planas paralelas de 500 [cm^2] de área, separadas 0.25 [cm] en el vacío, se desconecta de una fuente de 1,000 volts con la que fue cargado. Determine:



a) La magnitud del campo eléctrico entre las placas.

b) La capacitancia.

c) La carga almacenada en el capacitor.

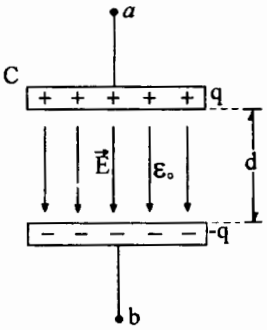
d) La energía almacenada en el capacitor.

Resolución:

a) La expresión para el cálculo de la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, dentro de un campo eléctrico, es:

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

por tratarse en este caso de un capacitor de placas planas y paralelas, el campo eléctrico entre ellas es uniforme (magnitud y dirección constantes) y se obtiene:



$V_{ab} = Ed$ y

$$E = \frac{V_{ab}}{d} \quad ; \quad E = \frac{10^3[\mathrm{V}]}{0.25 \times 10^{-2}[\mathrm{m}]} = 4 \times 10^5 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

la dirección de $\vec{E}$ se muestra en la figura.

b) De la definición de capacitancia:

$$C = \frac{q}{V_{xy}}$$

se puede deducir que para el capacitor de placas planas y paralelas:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

en la cual $\varepsilon = k_e \varepsilon_0$ siendo k_e = permitividad relativa, en este caso $\varepsilon = \varepsilon_0 \doteq 8.85 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right]$, lo que implica $k_{vacío} = 1$.

Por lo tanto:

$$C = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{d} = \frac{(1) 8.85 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right] 500 \times 10^{-4} [m^2]}{0.25 \times 10^{-2} [m]}$$

$$C = 1.77 \times 10^{-10} \left[\frac{C}{V}\right] = 177 [pF]$$

c) Para calcular la carga q (carga positiva en el electrodo a) es suficiente aplicar la definición de capacitancia:

$$C = \frac{q}{V_{xy}} \; ; \; q = CV_{xy} \; ; \text{ en este caso } q = CV_{ab}$$

por lo tanto

$$q = 177 \times 10^{-12} \left[\frac{C}{V}\right] 1{,}000 [V] = 177 [nC]$$

d) La energía almacenada en el capacitor es igual al trabajo desarrollado al trasladar la carga q, desde el electrodo b hasta el a, si se consideran despreciables los efectos disipativos; por esta razón:

$$U = \frac{1}{2} CV_{ab}^2 \; ; \; U = (0{,}5) 177 \times 10^{-12} [F] (1{,}000 [V])^2$$

$$U = 88.5 \times 10^{-6} [J] = 88.5 [\mu J]$$

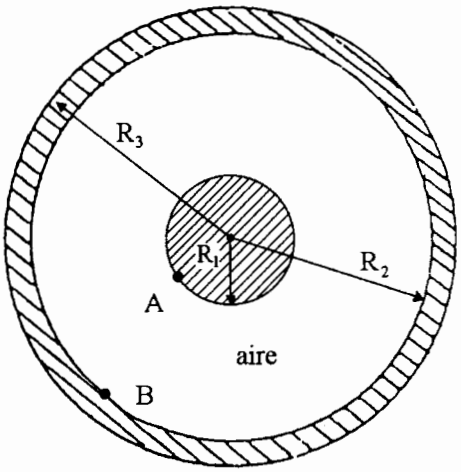
2. Un sistema formado por dos esferas conductoras concéntricas, separadas por aire, forman un capacitor. Deduzca:

a) La expresión que permita calcular la capacitancia del sistema y calcúlela.

b) La magnitud y signo de la carga eléctrica en cada conductor, si se aplica una diferencia de potencial $V_{BA} = 300[\mathrm{V}]$.

c) La magnitud máxima del vector campo eléctrico e indique en qué región ocurre; considere que $V_{BA} = 300[\mathrm{V}]$.

Para la figura se tiene que $R_1 = 1.0[\mathrm{m}]$, $R_2 = 1.5[\mathrm{m}]$, $R_3 = 1.7[\mathrm{m}]$ y $\varepsilon_{aire} \approx \varepsilon_0$.



Resolución:

a) La capacitancia del sistema la podemos obtener partiendo de la definición $C = \dfrac{q}{V_{xy}}$

Para este inciso no se indica la diferencia de potencial aplicada, por lo cual se puede pensar que es nula y, en consecuencia, también la carga q; la sustitución de estos valores nos lleva a: $C = \dfrac{0[\mathrm{C}]}{0[\mathrm{V}]}$, lo que se conoce como indeterminación.

Por lo anterior, supondremos que el capacitor en cuestión ya fue cargado a través de una diferencia de potencial $V_{AB} > 0$, que como se muestra en la figura *a*, en la cual también se representa el $\vec{E}$ entre los electrodos esféricos.

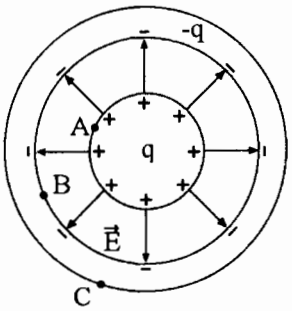


Figura *a*

Como: $C = \dfrac{q}{V_{AB}}$ y $V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

al evaluar la integral, resulta

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

cabe aclarar que como el $\vec{E}$ en el interior de un conductor, con carga estática, es $\bar{0}$, entonces $V_C = V_B$

Con lo anterior, la capacitancia resulta:

$$C = \frac{q}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\left[\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right]} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{r_B - r_A}{r_A r_B}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_A r_B}{r_B - r_A}$$

Se observa que C no depende de q, sino sólo de los radios $(r_A$ y $r_B)$ y de la permitividad del medio entre las esferas.

$$C = \frac{\frac{1}{9\times 10^9}\left[\frac{C^2}{N\cdot m^2}\right] 1\,[m]\ 1.5\,[m]}{(1.5-1)\,[m]} = 3.33\bar{3}\times 10^{-10}\left[\frac{C^2}{N\cdot m}\right] = 3.33\bar{3}\times 10^{-10}\left[\frac{C^2}{J}\right]$$

$$C = 3.33\bar{3}\times 10^{-10}\left[\frac{C}{\frac{J}{C}}\right] = 3.33\bar{3}\times 10^{-10}\left[\frac{C}{V}\right]$$

y finalmente $C = 0.333\bar{3}\times 10^{-9}[F] = 0.333\bar{3}\,[nF]$

b) Si $V_{BA} = 300[V]$, esto origina que la carga q positiva se localice en la esfera mayor y la q negativa en la esfera menor, como se muestra en la figura *b*. La dirección de $\vec{E}$ se invierte con respecto a lo supuesto en el inciso *a*.

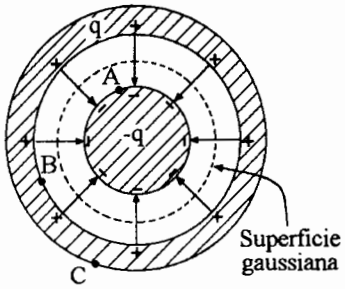


Figura *b*

La carga se obtiene de la definición de capacitancia

$$C = \frac{q}{V_{BA}}\ ;\ q = CV_{BA} = 0.333\bar{3}\times 10^{-9}[F]300[V]$$

$q = 100\times 10^{-9} = 0.1\times 10^{-6}[C]$, en la esfera mayor,

y en consecuencia, $-q = -0.1\times 10^{-6}[C]$, en la esfera menor.

c) De la ley de Gauss: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{ne}$, aplicada a la superficie gaussiana indicada en la figura *b*, se obtiene que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

para $r_A \le r \le r_B$ en la cual $\hat{r}$ es el vector unitario en dirección radial, de las coordenadas esféricas. En relación con la magnitud del campo eléctrico

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

y debido a que q (la carga neta encerrada por la superficie gaussiana) es constante, el módulo de $\vec{E}$ depende sólo de r^2 de manera inversa; si deseamos obtener $E_{máx}$, éste se obtendrá con:

$$E_{máx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{mín}^2}$$

$$E_{máx} = 9\times 10^9\left[\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right]\frac{|10^{-7}[C]|}{r_A^2} = 9\times 10^9\left[\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right]\frac{10^{-7}[C]}{(1\,[m])^2} = 9\times 10^2\left[\frac{N}{C}\right]$$

Es útil destacar que la dirección de $\vec{E}$ es la de $-\hat{r}$, debido a que la carga neta encerrada por la superficie gaussiana es negativa. De esta forma $\vec{E}_{máx} = -9\times 10^2\,\hat{r}\left[\frac{N}{C}\right]$ y ocurre para los puntos con r_A.

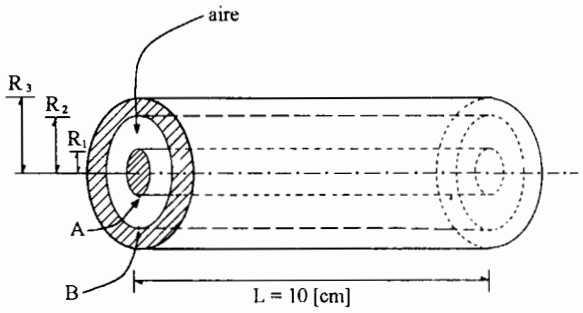
3. Un sistema formado por dos cilindros conductores coaxiales, separados por aire, forman un capacitor. Deduzca:

a) La expresión que permita calcular la capacitancia del arreglo y calcúlela.

b) La magnitud y signo de la carga eléctrica almacenada en cada conductor, si se aplica una diferencia de potencial $V_{AB} = 300[\mathrm{V}]$.

c) La magnitud máxima del vector de campo eléctrico e indique en qué región ocurre; considere $V_{AB} = 300[\mathrm{V}]$.

Para la figura utilice: $R_1 = 1[\mathrm{cm}]$, $R_2 = 1.5[\mathrm{cm}]$, $R_3 = 1.7[\mathrm{cm}]$ y $\varepsilon_{aire} \approx \varepsilon_0$.



Resolucion:

a) El cálculo de la capacitancia se puede realizar partiendo de la definición:

$$C = \frac{q}{V_{xy}}$$

supondremos que el capacitor fue cargado con una diferencia de potencial $V_{AB} > 0$, como se muestra en la figura, en la cual también se representa el campo eléctrico en el espacio entre los cilindros; para ilustrar esto con claridad, la figura *a* presenta a los cilindros vistos desde su base.

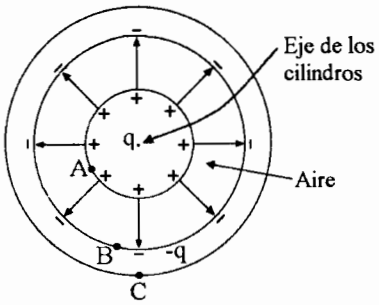


Figura *a*

Al calcular la diferencia de potencial entre los cilindros (entre los puntos *A* y *B*) por medio de la expresión:

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

para este caso se obtiene que:

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\left(\frac{q}{L}\right) \ln\frac{r_B}{r_A}$$

en la cual q representa la carga (positiva) del cilindro interior y $\varepsilon_{aire} \approx \varepsilon_0$

Al sustituir V_{AB} en la definición de capacitancia nos queda:

$$C = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\left(\frac{q}{L}\right)\ln\frac{r_B}{r_A}} \quad ; \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{r_B}{r_A}} \quad ; \quad C = \frac{2\pi(8.85\times10^{-12})\left[\frac{C^2}{N\cdot m^2}\right](0.1)[m]}{\ln\frac{1.5}{1}}$$

$$C = 1.3714\times10^{-11}\left[\frac{C^2}{J}\right]$$

$$C = 13.714[pF]$$

b) Para el cálculo de las cargas q y $-q$, se emplea la definición de capacitancia:

$$C = \frac{q}{V_{AB}} \quad ; \quad q = CV_{AB} \quad ; \quad q = 13.714\times10^{-12}\left[\frac{C}{V}\right]300[V] = 4.1142\times10^{-9}[C]$$

De esta forma en el cilindro interior se tiene $q = 4.1142[nC]$ y en el exterior $-q = -4.1142[nC]$

c) El campo eléctrico producido por los cilindros se determina con el empleo de la ley de Gauss con superficies cerradas como la mostrada en la figura *b*, es decir con superficies cilíndricas coaxiales con los cilindros conductores:

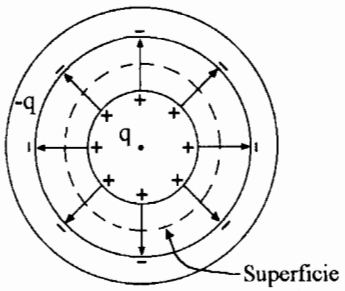


Figura *b*

de $\varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{ne}$ se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda_{eq}}{r}\hat{r}$$

$\hat{r}$ = vector unitario de coordenadas cilíndricas

para $R_1 \le r \le R_2$

y $\vec{E} = \vec{0}$ para $r < R_1$ y $\vec{E} = \vec{0}$ para $r > R_2$.

Como $\lambda_{eq} = \frac{q}{L}$, λ_{eq} = cte.

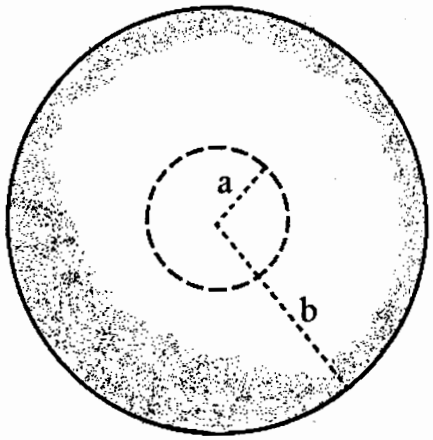
el campo eléctrico máximo se obtiene de:

$$\vec{E}_{máx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda_{eq}}{r_{mín}}\hat{r} \quad y \quad r_{mín} = R_1$$

$$\vec{E}_{máx} = 9\times10^9\left[\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right]\frac{2(4.1142\times10^{-9})[C]}{0.1[m]\ 0.01[m]}\hat{r} = 74{,}055.6\,\hat{r}\left[\frac{N}{C}\right]$$

y ocurre en toda la superficie del cilindro interior; es decir, para los puntos cuya distancia al eje es R_1.

4. Dos esferas conductoras concéntricas de radios $a = 6$[cm] y $b = 16$[cm] tienen cantidades de carga iguales pero de signos diferentes, 10^{-8}[C] en la interior y -10^{-8} en la exterior, considerar que $\varepsilon = \varepsilon_0$ para la región entre las esferas. Determine:



a) El valor máximo de E entre las esferas.

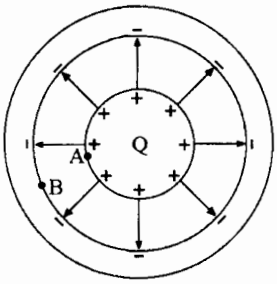
b) La diferencia de potencial entre ellas.

c) La energía total almacenada.

Resolución:

a) Con la ley de Gauss se obtiene que el campo eléctrico entre las esferas es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$



donde Q es la carga de la esfera interior y $\hat{r}$ es el vector unitario en dirección radial (coordenadas esféricas).

Como $E \propto \frac{1}{r^2}$, el campo eléctrico máximo ocurre en el radio mínimo $r = a$, por lo tanto:

$$\vec{E}_{máx} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\frac{10^{-8}[\mathrm{C}]\,\hat{r}}{(0.06)^2\,[\mathrm{m^2}]} = 25\times10^3\,\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

b) Sea V_{AB} la diferencia de potencial entre las esferas; V_{AB} se calcula como:

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]\ ;\ \text{es decir}\ V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

$$V_{AB} = 9\times10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]10^{-8}[\mathrm{C}]\left[\frac{1}{0.06}-\frac{1}{0.16}\right]\left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right] = 937.5\left[\frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$V_{AB} = 937.5\ [\mathrm{V}]$$

c) La energía almacenada se evalúa con:

$U = \frac{1}{2} C V_{AB}^2$; la capacitancia C se determina a partir de la definición

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} \quad ; \quad C = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]}$$

$$C = \frac{4\pi(8.85 \times 10^{-12})\left[\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right]}{\left[\frac{1}{0.06} - \frac{1}{0.16}\right]\left[\frac{1}{m}\right]} = 10.676 \times 10^{-12}[F]$$ y la energía almacenada es:

$$U = 0.5[10.676 \times 10^{-12}]\left[\frac{C}{V}\right] 937.5^2 [V]^2 = 4.692 \times 10^{-6}[J] = 4.692[\mu J]$$

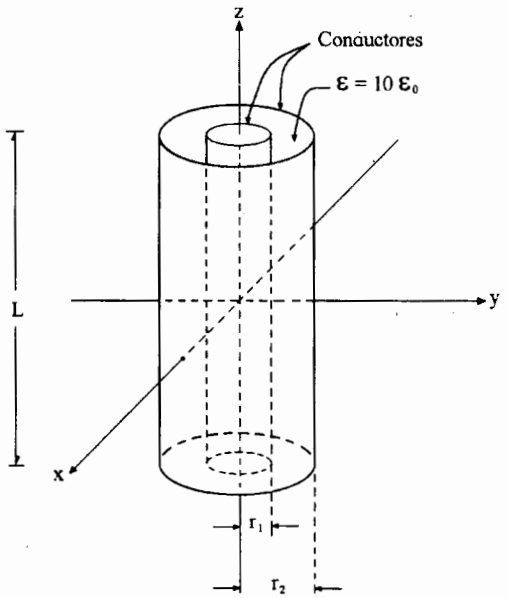
5. Cuando al par de conductores mostrado en la figura se le aplica cierta diferencia de potencial, el campo eléctrico entre ellos resulta ser $E = \frac{10^6}{r}\hat{a}_r$, en la cual $\hat{a}_r$ representa el vector unitario radial de las coordenadas cilíndricas. Para la figura considere que $r_1 = 5[\text{cm}]$, $r_2 = 10[\text{cm}]$ y $L = 20[\text{cm}]$. Determine:

a) La carga eléctrica en el cilindro interior.

b) La diferencia de potencial aplicada a los conductores.

c) La capacitancia del conjunto de conductores.

d) La energía almacenada en el conjunto de conductores.



Resolución:

a) De la ley de Gauss se obtiene el campo eléctrico en el espacio entre los cilindros $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2\lambda_{eq}}{r}\hat{r}$ (en coordenadas cilíndricas) en la cual $\lambda_{eq} = \frac{Q}{L} \therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2Q}{Lr}\hat{r}$

Aclarando que $\hat{a}_r = \hat{r}$ podemos igualar el módulo del campo eléctrico proporcionado en el enunciado, con el módulo de la expresión anterior.

$$\frac{10^6}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2Q}{Lr} \quad \text{y} \quad Q = \frac{\left(\frac{10^6}{r}\right)(4\pi\varepsilon)Lr}{2}$$

$$Q = \frac{4\pi\left(\frac{10^6}{r}\right)\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{C}\cdot\text{m}}\right]10(8.85\times10^{-12})\left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right](0.20)[\text{m}]r[\text{m}]}{2} = 1.112\times10^{-4}[\text{C}]$$

$$Q = 111.2[\mu\text{C}]$$

Como el campo eléctrico proporcionado es positivo en la dirección radial y hacia afuera del cilindro interior, la carga de éste es positiva.

b) Para la diferencia de potencial aplicada, de la expresión:

$$V_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

para el intervalo $r_1 \leq r \leq r_2$ se obtiene:

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}(2)\,\lambda_{eq}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad ; \quad V_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{k_e}\,2\frac{Q}{L}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$V_{12} = 9\times 10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\frac{1}{10}(2)\frac{1.112\times 10^{-4}[\mathrm{C}]}{0.20[\mathrm{m}]}\ln\frac{10}{5} = 693{,}701.7[\mathrm{V}]$$

c) La capacitancia se obtiene a partir de la definición.

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \quad ; \quad C = \frac{Q}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{k_e}(2)\dfrac{Q}{L}\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi k_e\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

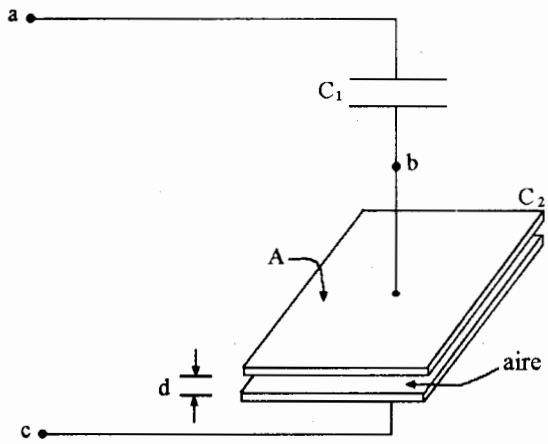
$$C = \frac{2\pi(10)8.85\times 10^{-12}\left[\dfrac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\cdot m^2}}\right]0.2[\mathrm{m}]}{\ln\dfrac{10}{5}} = 1.6045\times 10^{-10}[\mathrm{F}] = 160.45[\mathrm{pF}]$$

d) La energía almacenada se calcula con

$$U = \frac{1}{2}CV_{12}^2 \quad ; \quad U = 0.5(160.45\times 10^{-12})[\mathrm{F}](693{,}701.7[\mathrm{V}])^2$$

$$U \doteq 38.61[\mathrm{J}]$$

6. Para la conexión de capacitores de placas planas que se muestra en la figura, en la cual $C_1 = 11[\text{pF}]$, $A = 200[\text{cm}^2]$ y $d = 3[\text{mm}]$, calcule:



a) El valor de la capacitancia de C_2.

b) El capacitor equivalente entre los puntos *a* y *c*.

c) La energía total almacenada por los capacitores si se aplicara una diferencia de potencial $V_{ac} = 120[\text{V}]$.

d) La variación de la energía total almacenada si $V_{ac} = 120[\text{V}]$ y la distancia de separación de las placas de C_2 cambia a $d = 1[\text{mm}]$.

Resolución:

a) El valor de un capacitor de placas planas y paralelas se calcula con $C_2 = \dfrac{\varepsilon A}{d}$; en este caso $\varepsilon_{aire} \approx \varepsilon_0$, por lo tanto

$$C_2 = \frac{8.85 \times 10^{-12}\left[\dfrac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right]200 \times 10^{-4}[\text{m}^2]}{3 \times 10^{-3}[\text{m}]} \therefore C_2 = 5.9 \times 10^{-11}[\text{F}] \ , \ C_2 = 59[\text{pF}]$$

b) El capacitor C_{ac} es el que sustituye a la conexión en serie de C_1 y C_2:

$$\frac{1}{C_{ac}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ , o también } C_{ac} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \ ; \ C_{ac} = \frac{11(59)[\text{pF}]}{11 + 59} = 9.271[\text{pF}]$$

c) La energía total se puede calcular en el capacitor equivalente:

$$U_T = \frac{1}{2} C_{ac} V_{ac}^2 \ ; \ U_T = 0.5(9.271 \times 10^{-12})[\text{F}](120[\text{V}])^2 = 6.675 \times 10^{-8}[\text{J}]$$

$$U_T = 66.75[\text{nJ}]$$

También se puede calcular como $U_T = U_1 + U_2$

donde $U_1 = \dfrac{1}{2} C_1 V_{ab}^2$ y $U_2 = \dfrac{1}{2} C_2 V_{bc}^2$

Para calcular V_{ab} y V_{bc} se emplea el concepto de que las cargas en los capacitores conectados en serie son iguales entre sí e iguales a la del capacitor equivalente, por lo tanto $q_1 = q_2 = q_{ac}$

$$q_{ac} = C_{ac} V_{ac} \ ; \ q_{ac} = 9.271 \times 10^{-12}[\text{F}]120[\text{V}] = 1.1125 \times 10^{-9}[\text{C}]$$

$$\therefore V_{ab} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{1.1125 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{11 \times 10^{-12}[\mathrm{F}]} = 101.138[\mathrm{V}] \text{ y}$$

$$V_{bc} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1.1125 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{59 \times 10^{-12}[\mathrm{F}]} = 18.856[\mathrm{V}]$$

$$U_1 = 0.5(11 \times 10^{-12})[\mathrm{F}]\ 101.138^2[\mathrm{V}]^2 = 5.626 \times 10^{-8}[\mathrm{J}]$$

$$U_2 = 0.5(59 \times 10^{-12})[\mathrm{F}]\ 18.856^2[\mathrm{V}]^2 = 1.049 \times 10^{-8}[\mathrm{J}] \text{ con lo que}$$

$$U_T = 6.675 \times 10^{-8}[\mathrm{J}] = 66.75[\mathrm{nJ}]$$

d) El cálculo de la variación de energía total (ΔU_T) se puede obtener como $\Delta U_T = U'_T - U_T$; $U'_T = \frac{1}{2}C'_{ac}V_{ac}^2$

C_{ac} se modificó porque C_2 cambió;

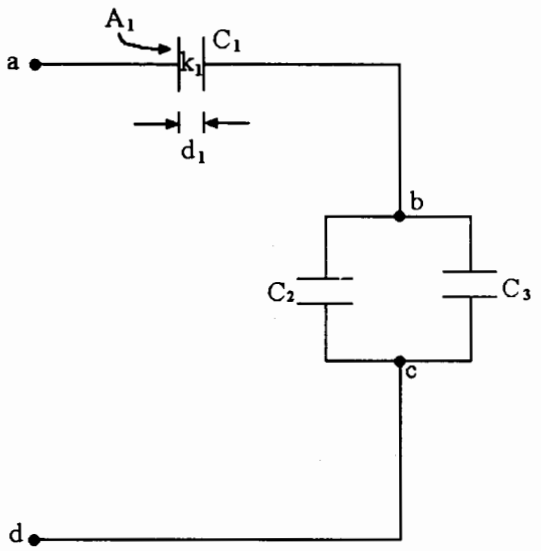
$$C'_2 = \frac{\varepsilon A}{d'} \ ; \ C'_2 = \frac{8.85 \times 10^{-12}\left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N \cdot m}^2}\right]200 \times 10^{-4}[\mathrm{m}^2]}{1 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]} = 177[\mathrm{pF}]$$

$$C'_{ac} = \frac{C_1 C'_2}{C_1 + C'_2} \ ; \ C'_{ac} = \frac{11(177)[\mathrm{pF}]}{11 + 177} = 10.356[\mathrm{pF}] \ ; \ U'_T = 0.5(10.356 \times 10^{-12})[\mathrm{F}]\,120^2[\mathrm{V}]^2$$

$$U'_T = 7.456 \times 10^{-8}[\mathrm{J}] \text{ y } \Delta U_T = [74.56 - 66.75][\mathrm{nJ}] = 7.81[\mathrm{nJ}]$$

El aumento de energía calculado se debe a que $C'_2 > C_2$ y con la condición de V_{ac} invariable, $q'_{ac} > q_{ac}$, lo cual se traduce en mayor carga y en mayor energía almacenada.

7. Para el arreglo de capacitores mostrado en la figura, en la cual para el capacitor C_1 : $d_1 = 0.2[\text{mm}]$, $A_1 = 500[\text{cm}^2]$ y $k_1 = 5$; además si $C_2 = 1[\text{nF}]$ y $C_3 = 3[\text{nF}]$, determine:



a) El valor de C_1.

b) La diferencia de potencial V_{ab}, si la carga en el capacitor C_2 es $14.75[\mu\text{C}]$.

c) La energía total almacenada en el arreglo.

Resolución:

a) El valor del capacitor de placas planas y paralelas C_1 se encuentra con

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d_1} = \frac{k_1 \varepsilon_0 A_1}{d_1}$$

$$C_1 = \frac{5(8.85 \times 10^{-12})\left[\dfrac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right]500 \times 10^{-4}[\text{m}^2]}{0.2 \times 10^{-3}[\text{m}]} = 11.0625[\text{nF}].$$

b) La diferencia de potencial V_{ab} corresponde a las terminales de C_1, por lo tanto $V_{ab} = q_1/C_1$; q_1 se desconoce pero sabemos que es igual a la carga del capacitor equivalente de C_2 y C_3. Este equivalente vale:

$$C_{eq_{23}} = C_2 + C_3 = 4[\text{nF}] \quad \text{y la carga} \quad q_{23} = C_{23}V_{bc}$$

$$\text{pero} \quad V_{bc} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{14.75 \times 10^{-6}[\text{C}]}{1 \times 10^{-9}[\text{F}]} = 14.75 \times 10^3[\text{V}]$$

$$q_{23} = 4 \times 10^{-9}[\text{F}](14.75 \times 10^3)[\text{V}] = 59 \times 10^{-6}[\text{C}] = q_1$$

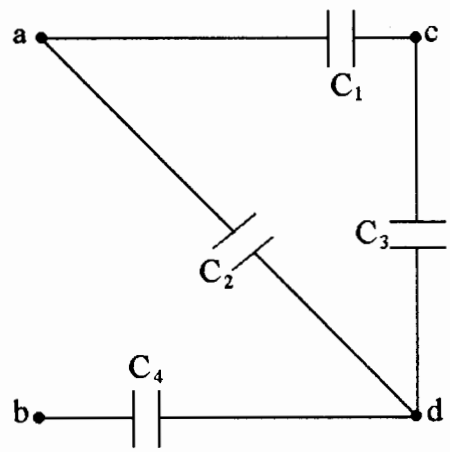
$$\text{y} \quad V_{ab} = \frac{59 \times 10^{-6}[\text{C}]}{11.0625 \times 10^{-9}[\text{F}]} = 5{,}333.33[\text{V}]$$

c) $U_T = \frac{1}{2}C_{ad}V_{ad}^2$; $C_{ad} = \dfrac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \dfrac{(11.0625)(4)[\text{nF}]}{11.0625 + 4} = 2.9378[\text{nF}]$ y

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} \quad ; \quad V_{ad} = 5{,}333.33 + 14{,}750 = 20{,}083.33[\text{V}]$$

$$\therefore U_T = 0.5(2.9378 \times 10^{-9})[\text{F}](20{,}083.33)^2[\text{V}]^2 \quad ; \quad U_T = 0.592[\text{J}]$$

8. Para el arreglo de capacitores mostrado, cuyos valores en [nF] son: $C_1 = 3$, $C_2 = 1$, $C_3 = 6$ y $C_4 = 2$. Determine:



a) La capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b*.

b) La energía almacenada en el capacitor C_2, cuando $V_{ab} = 15[\mathrm{V}]$.

c) La máxima diferencia de potencial V_{ab} que soporta el arreglo, si cada capacitor resiste como máximo 10[V] entre sus terminales.

Resolución:

a) C_{eq_1}: C_1 en serie con C_3;

$$C_{eq_1} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{3(6)}{3+6}[\mathrm{nF}] = 2[\mathrm{nF}]$$

$C_{ad} = C_{1,2,3} = C_2$ en paralelo con C_{eq_1} ;

$C_{ad} = C_2 + C_{eq_1}$; $C_{ad} = (1+2)[\mathrm{nF}]$; $C_{ad} = 3[\mathrm{nF}]$ y $C_{ab} = C_{ad}$ en serie con C_4 ;

$$C_{ab} = \frac{C_{ad} C_4}{C_{ad} + C_4} = \frac{3(2)[\mathrm{nF}]}{3+2} = \frac{6}{5}[\mathrm{nF}] \ ; \ C_{ab} = 1.2[\mathrm{nF}]$$

b) $Q_T = q_{ab} = C_{ab} V_{ab}$; $q_{ab} = 1.2 \times 10^{-9}(15)[\mathrm{C}] = 1.8 \times 10^{-8}[\mathrm{C}]; q_{ab} = q_4$;

$$V_4 = \frac{q_4}{C_4} = \frac{1.8 \times 10^{-8}[\mathrm{C}]}{2 \times 10^{-4}[\mathrm{F}]} = 9[\mathrm{V}] \ ; \ V_{ab} = V_2 + V_4 \therefore V_2 = V_{ab} - V_4 = (15-9)[\mathrm{V}] = 6[\mathrm{V}]$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(1 \times 10^{-9}[\mathrm{F}])(6[\mathrm{V}])^2 = 1.8 \times 10^{-8}[\mathrm{J}] = 18[\mathrm{nJ}]$$

c) Si el capacitor C_1 tuviese 10 volts entre sus terminales, es decir $V_{ac} = 10[\mathrm{V}]$, el capacitor C_3, por estar conectado en serie con C_1, tendría igual carga:

$q_1 = q_3 = C_1 V_{ac} = 30[\mathrm{nC}]$ y se puede concluir que:

$$V_{cd} = \frac{q_3}{C_3} = \frac{30 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{6 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]} = 5[\mathrm{V}]$$ con lo cual $V_{ad} = 15[\mathrm{V}]$, ya que $V_{ad} = V_{ac} + V_{cd}$.

Esta diferencia de potencial entre las terminales de C_2 lo dañaría.

Si suponemos que $V_{ad} = 10[V]$, C_2 estaría operando en su límite y tanto C_1 como C_3, tendrían una diferencia de potencial menor que $10[V]$; en este caso $V_{ac} = 6.667[V]$ y $V_{cd} = 3.333[V]$. Los tres capacitores estarían operando dentro de sus límites de seguridad; faltaría averiguar cuál sería la diferencia V_{db}.

Si $V_{ad} = 10[V]$, como se ha supuesto, y como $C_{ad} = 3[nF]$, la carga en este equivalnte es $q_{ad} = C_{ad}V_{ad}$; $q_{ad} = 3(10^{-9})10\,[C] = 30[nC]$; esta carga es igual a la que tendría C_4; es decir, $q_{ad} = q_4$ y de esta forma $V_{db} = \dfrac{q_4}{C_4} = \dfrac{30 \times 10^{-9}[C]}{2 \times 10^{-9}[F]} = 15[V]$, este valor excede los 10 [V] que C_4 puede resistir, por lo tanto habrá que protegerlo aplicando entre los puntos d y b sólo 10[V]; es decir, $V_{dbmáx} = 10[V]$ y la carga en C_4 sería:

$q_{4máx} = C_4 V_{4máx}$; $q_{4máx} = 2 \times 10^{-9}(10)[C] = 20 \times 10^{-9}[C]$ y como

$$q_{4máx} = q'_{ad} \quad , \quad V'_{ad} = \frac{q'_{ad}}{C_{ad}} = \frac{20 \times 10^{-9}[C]}{3 \times 10^{-9}[F]} = 6.667[V]$$

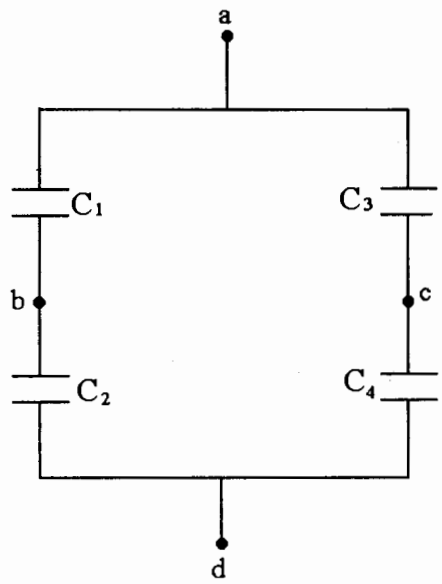
Se puede verificar que $V'_{ac} = 4.444[V]$ y $V'_{cd} = 2.222[V]$, de esta forma ninguno de los capacitores excede los 10[V] que puede soportar cada uno.

Finalmente

$$V_{abmáx} = V'_{ad} + V_{dbmáx}$$

$$V_{abmáx} = (6.667 + 10)[V] = 16.667[V]$$

9. Para la conexión de capacitores que se muestra en la figura, se sabe que la energía almacenada en el capacitor C_3 es 1.28[mJ], cuando se aplicó cierta diferencia de potencial entre los puntos *a* y *d*. Calcule:



a) La capacitancia equivalente entre los puntos *b* y *c*.

b) La diferencia de potencial que se presenta entre las terminales *b* y *d*, al aplicarse la V_{ad} citada.

Considere que:

$C_1 = 5[\mu F]$, $C_2 = 20[\mu F]$,
$C_3 = 10[\mu F]$ y $C_4 = 40[\mu F]$.

Resolución:

a) Para el cálculo de C_{bc} se observan dos trayectorias entre los puntos *b* y *c*. En una de ellas C_1 queda conectado en serie con C_3; en la otra, C_2 y C_4 también quedan en serie; los capacitores equivalentes, en cada trayectoria, resultan:

$$C_{1,3} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \; ; \; C_{1,3} = \frac{5(10)}{5 + 10}[\mu F] = 3.333[\mu F] \; ; \; C_{2,4} = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = 13.333[\mu F]$$

los capacitores encontrados quedan conectados en paralelo entre los puntos *b* y *c*;

por lo tanto $C_{bc} = C_{1,3} + C_{2,4}$; $C_{bc} = 16.666[\mu F]$

b) Como la energía en el capacitor C_3 es conocida, con ella calcularemos V_{ac} , ya que:

$$U_3 = \frac{1}{2} C_3 V_{ac}^2 \; ; \; V_{ac} = \sqrt{\frac{2U_3}{C_3}} \; ; \; V_{ac} = \sqrt{\frac{2(1.28 \times 10^{-3})}{10 \times 10^{-6}}} = 16[V]$$

Ahora, de la definición de capacitancia:

$$Q_3 = C_3 V_{ac} \; ; \; Q_3 = (10 \times 10^{-6})[F](16)[V] = 0.16[mC] \text{ y como } Q_3 = Q_4$$

$$V_{cd} = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{0.16 \times 10^{-3}(C)}{40 \times 10^{-6}(F)} = 4[V] \; ; \text{ así } V_{ad} = V_{ac} + V_{cd} \; ; \; V_{ad} = (16 + 4)[V] = 20[V]$$

Como $V_{ad} = 20[V]$, se sabe que ésta fue la diferencia de potencial aplicada.

Con esta diferencia de potencial y el valor del capacitor equivalente a la conexión en serie de C_1 y C_2 encontraremos la carga de $C_{1,2}$.

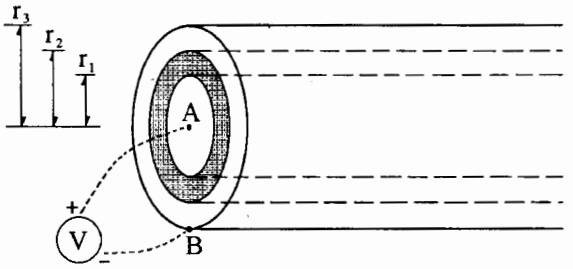
$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad ; \quad C_{1,2} = \frac{5(20)}{5 + 20} \quad ; \quad C_{1,2} = 4[\mu F] \text{ y } Q_{1,2} = C_{1,2} V_{ad}$$

$$Q_{1,2} = 4 \times 10^{-6}[F]20[V] = 80 \times 10^{-6}[C] \text{ ; además } Q_{1,2} = Q_1 = Q_2 \text{ y}$$

$$V_{bd} = \frac{Q_2}{C_2} \text{ ; } V_{bd} = \frac{80 \times 10^{-6}[C]}{20 \times 10^{-6}[F]} = 4[V] \text{ y como } V_{ad} = V_{ab} + V_{bd}$$

se obtiene que $V_{ab} = 16[V]$

10. Para el cable coaxial de 30[m] de longitud que se muestra, V_{AB} = 23[kV] entre los conductores, el dieléctrico es polietileno con k_e = 2.6 y E_{rup} = 22×10^6[V/m], r_1 = 2[mm], r_2 = 5[mm] y r_3 = 6[mm].



a) Calcule el valor máximo $E_{máx}$ del campo eléctrico e indique en qué región ocurre.

b) Diga si el polietileno se comporta como dieléctrico ante el campo eléctrico presente. Dé los argumentos de su respuesta.

c) Calcule la capacitancia del cable.

d) Calcule la energía almacenada.

Resolución:

a) La función del campo eléctrico $\vec{E}$ está definida para el intervalo $r_1 \le r \le r_2$, que es la zona ocupada por el dieléctrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2\lambda_{eq}}{r}\hat{r}$$

cuyo módulo es $E = \dfrac{\lambda_{eq}}{2\pi\varepsilon r}$

se observa que $E \,\alpha\, \dfrac{1}{r}$ por lo que E será máximo para el valor de r mínimo; es decir $r = r_1$.

Para calcular $E_{máx}$ se requiere λ_{eq} ; $\lambda_{eq} = \dfrac{q}{\ell}$ en la cual q es la carga eléctrica del conductor cilíndrico A y ℓ es el largo del cable.

Como se conoce la diferencia de potencial entre los conductores, a partir de ella se puede evaluar λ_{eq} y sustituirla en la expresión de E.

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}2\lambda_{eq}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad \therefore \quad E = \frac{V_{AB}}{r\ln\dfrac{r_2}{r_1}} \quad \text{y} \quad E_{máx} = \frac{23\times10^3[\text{V}]}{(2\times10^{-3})\ln\dfrac{5}{2}[\text{m}]} = 12.55\left[\frac{\text{MV}}{\text{m}}\right]$$

b) Como $E_{máx}$ es menor que E_{rup} (12.55 < 22), el polietileno está sirviendo como dieléctrico entre los conductores del cable.

c) Para calcular la capacitancia del cable partiremos de la definición de esta propiedad:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} \; ; \text{ en este caso } C = \frac{\lambda_{eq}\ell}{V_{AB}} \text{ pero } \lambda_{eq} = \frac{2\pi\varepsilon V_{AB}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \text{ y } C = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

como $\varepsilon = k_e \varepsilon_0$,

$$C = \frac{2\pi(2.6)8.85\times10^{-12}(30)[\mathrm{F}]}{\ln\frac{5}{2}} = 4.734\times10^{-9}[\mathrm{F}] = 4.734[\mathrm{nF}]$$

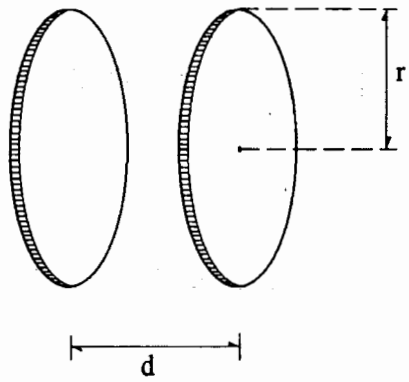
d) La energía almacenada en el cable, debido a su efecto capacitivo, es:

$$U = \frac{1}{2}CV_{AB}^2 \; ; \; U = \frac{1}{2}(4.734\times10^{-9})(23\times10^3)^2 = 1.252[\mathrm{J}]$$

11. Se requiere almacenar 1.5[mJ] en forma de energía potencial eléctrica en un capacitor de placas circulares, planas y paralelas. Obtenga:

a) El valor de la capacitancia requerida, si el voltaje entre las placas es 150[V].

b) El dieléctrico que debe ser utilizado, dentro de los indicados en la tabla, de forma tal que el área de las placas sea mínima.



Dieléctrico	E_{rup}[V/m]	k_e	d[m]
poliestireno	18×10^6	2.3	5×10^{-6}
mica	200×10^6	7.0	5×10^{-6}
polietileno	22×10^6	2.6	1×10^{-5}

Resolución:

a) Como se conoce la energía que se requiere almacenar y la diferencia de potencial que se aplicará, se puede determinar la capacitancia por medio de

$$U = \frac{1}{2}CV_{ab}^2 \; ; \; C = \frac{2U}{V_{ab}^2} \; ; \; C = \frac{2(1.5)10^{-3}[\mathrm{J}]}{150^2[\mathrm{V}]^2} = 133.33[\mathrm{nF}]$$

b) Para un capacitor de placas planas y paralelas

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{d} \quad \text{por lo tanto} \quad A = \frac{Cd}{\varepsilon_0 k_e};$$

además, el dieléctrico tendrá que soportar la diferencia de potencial que se aplicará al capacitor; dicha diferencia depende del campo eléctrico de ruptura y del espesor d del dieléctrico:

$$V_{máx(polies)} = E_{rup} \cdot d \quad ; \quad V_{máx(polies)} = 18 \times 10^6[\mathrm{V/m}]5 \times 10^{-6}[\mathrm{m}] = 90[\mathrm{V}]; \text{ no soportará.}$$

$$V_{máx(mica)} = 200 \times 10^6[\mathrm{V/m}]5 \times 10^{-6}[\mathrm{m}] = 10^3[\mathrm{V}] \quad \text{y} \quad V_{máx(poliet)} = 22 \times 10^6[\mathrm{V/m}]1 \times 10^{-5}[\mathrm{m}] = 220[\mathrm{V}]$$

Con esta prueba se elimina el poliestireno.

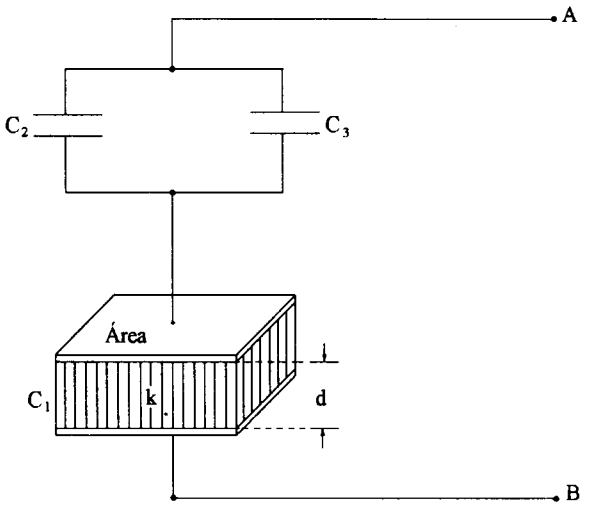
Calculando el área necesaria para los otros dos dieléctricos:

$$A_{mica} = \frac{(133.33 \times 10^{-9}[\mathrm{F}])5 \times 10^{-6}[\mathrm{m}]}{8.85 \times 10^{-12}[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]7} = 0.0108[\mathrm{m}^2] \quad \text{y}$$

$$A_{poliet} = \frac{(133.33 \times 10^{-9})[\mathrm{F}]1 \times 10^{-5}[\mathrm{m}]}{8.85 \times 10^{-12}[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]2.6} = 0.0579[\mathrm{m}^2] \; , \quad \text{se observa que } A_{mica} < A_{poliet}$$

El dieléctrico que debe ser utilizado es la mica.

12. Si la diferencia de potencial V_{AB} en el conjunto de capacitores mostrado es $10[\mathrm{V}]$, para el capacitor C_1 el área es $500[\mathrm{cm}^2]$, la permitividad relativa del dieléctrico es $k_e = 4$ y su espesor $d = 0.4425[\mathrm{mm}]$, además $C_2 = 1[\mathrm{nF}]$ y $C_3 = 3[\mathrm{nF}]$, determine:



a) La capacitancia C_1.

b) La carga almacenada en C_1.

c) La densidad superficial de carga positiva, inducida en el dieléctrico del capacitor C_1.

d) La energía total almacenada en el conjunto.

Resolución:

a) El capacitor C_1 es de placas planas y paralelas, por lo tanto su capacitancia es

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d_1} \;;\; C_1 = \frac{k_{e1}\varepsilon_0 A_1}{d_1} \;;\; C_1 = \frac{4(8.85\times10^{-12})500\times10^{-4}}{0.4425\times10^{-3}} = 4\times10^{-9}[\mathrm{F}]$$

b) Llamemos Q_1 a la carga almacenada en C_1; si obtenemos el capacitor equivalente entre los puntos A y B, éste tendrá la misma cantidad de carga almacenada que C_1 y que $C_{2,3}$ (capacitor equivalente a la conexión de C_2 y C_3).

De esta forma $C_{2,3} = C_2 + C_3$; $C_{2,3} = (1 + 3)[\mathrm{nF}]$ y C_{AB} se obtiene con $C_{AB} = \dfrac{C_1 \cdot C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}}$;

$C_{AB} = \dfrac{4(4)[\mathrm{nF}]}{4+4} = 2[\mathrm{nF}]$ y de la definición de capacitancia:

$$Q_T = C_{AB}V_{AB} \;;\; Q_T = 2\times10^{-9}[\mathrm{F}]10[\mathrm{V}] = 20[\mathrm{nC}] = Q_{2,3} = Q_1$$

c) Como $V_{AB} > 0$, $V_A > V_B$ y para C_1 la placa superior es la positiva y la placa inferior (conectada a B) es negativa. La carga inducida en el dieléctrico tiene signo contrario al de la placa al que está unido; esto significa que la densidad solicitada es la de la cara inferior del dieléctrico. Sabemos que la polarización $\vec{P}$ en el dieléctrico se obtiene:

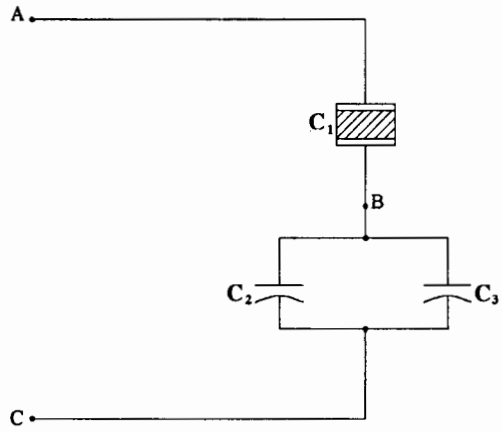
$\vec{P}_1 = \varepsilon_0\chi_{e_1}\vec{E}_1$ y que $|\vec{P}_1| = \sigma_{i_1}$; $\therefore\ \sigma_{i_1} = \varepsilon_0\chi_{e_1}E_1$, por tratarse de un capacitor de placas planas $E_1 = \dfrac{V_{C1}}{d}$ y $V_{C1} = \dfrac{Q_1}{C_1}$ además

$$1 + \chi_e = k_e \;\therefore\; \sigma_{i_1} = \varepsilon_0(k_e - 1)\frac{Q_1}{dC_1} \;;\; \sigma_{i_1} = 8.85\times10^{-12}(4-1)\frac{20\times10^{-9}}{0.4425\times10^{-3}(4\times10^{-9})} = 3\times10^{-7}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

es decir: $\sigma_{i_1} = 0.3\left[\dfrac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$

d) La energía total se obtiene con $U = \dfrac{1}{2}C_{AB}V_{AB}^2$; $U = 0.5(2\times10^{-9})(10)^2[\mathrm{J}]$ y $U = 10^{-7}[\mathrm{J}] = 0.1[\mu\mathrm{J}]$

13. En el arreglo mostrado en la figura, la densidad superficial de carga libre en el capacitor C_1 es $\sigma_1 = 12[\mu C/m^2]$, el área de cada una de sus placas es $0.16[m^2]$, las cuales están separadas $0.354[mm]$ por un dieléctrico de permitividad relativa $k_e = 8$ y campo eléctrico de ruptura de $2 \times 10^6[V/m]$, el capacitor C_2 es de $20[nF]$ y C_3 es de $40[nF]$, ambos capaces de soportar $400[V]$ como diferencia de potencial máxima. Determine:



a) La densidad superficial de carga inducida en el dieléctrico del capacitor C_1.

b) La diferencia de potencial aplicada V_{AC}.

c) La energía total que almacena el arreglo.

d) El voltaje máximo V_{AB} sin que se dañe el dieléctrico de C_1.

Resolución:

a) La densidad superficial de carga inducida σ_{i_1} es igual al $|\vec{P}_1|$ donde la polarización $\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_{e_1} \vec{E}_1$; $E_1 = \dfrac{V_{AB}}{d}$ y para calcular V_{AB} emplearemos la definición de capacitancia:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_{AB}} \;;\; Q_1 = \sigma_1 A_1 \;,\; Q_1 = 12 \times 10^{-6}\left[\frac{C}{m^2}\right]0.16[m^2] = 1.92[\mu C] = Q_{2,3} \text{ y}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d} \;;\; C_1 = \frac{k_{e_1}\varepsilon_0 A_1}{d} \;,\; C_1 = \frac{8(8.85 \times 10^{-12})0.16}{0.354 \times 10^{-3}} = 32 \times 10^{-9}[F] = 32[nF]$$

$$\text{con lo cual } V_{AB} = \frac{Q_1}{C_1} \;;\; V_{AB} = \frac{1.92 \times 10^{-6}[C]}{32 \times 10^{-9}[F]} = 60[V] \;,\; E_{1oper} = \frac{60[V]}{0.354 \times 10^{-3}[m]}$$

$$E_{1oper} = 169{,}491.53\left[\frac{V}{m}\right] < E_{1rup} \;;\; \sigma_{i_1} = 8.85 \times 10^{-12}(8-1)(169{,}491.53)\left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\sigma_{i_1} = 10.5\left[\frac{\mu C}{m^2}\right] \text{ y como debe ocurrir en un dieléctrico } \sigma_{i_1} < \sigma_1$$

b) $V_{AC} = V_{AB} + V_{BC}$, $V_{BC} = \dfrac{Q_{2,3}}{C_{2,3}}$; $C_{2,3} = C_2 + C_3$, $C_{2,3} = (20 + 40)[nF] = 60[nF]$

$$V_{BC} = \frac{1.92 \times 10^{-6}[C]}{60 \times 10^{-9}[F]} = 32[V] \;;\; V_{AC} = (60 + 32)[V] = 92[V]$$

c) La energía total se calcula con $U = \frac{1}{2}C_{AC}V_{AC}^2$, $C_{AC} = \frac{C_1 C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}}$

$$C_{AC} = \frac{32 \times 10^{-9}(60 \times 10^{-9})}{32 \times 10^{-9} + 60 \times 10^{-9}} = 20.87\,[\text{nF}] \quad ; \quad U = 0.5(20.87 \times 10^{-9})(92)^2\,[\text{J}] = 88.32\,[\mu\text{J}]$$

d) La diferencia de potencial $V_{ABmáx}$ se calcula con el campo eléctrico de ruptura como:

$$V_{ABmáx} = E_{rup_1} d_1 \quad , \quad V_{ABmáx} = 2 \times 10^6\,[\text{V/m}]\,0.354 \times 10^{-3}\,[\text{m}] \quad \text{y} \quad V_{ABmáx} = 708\,[\text{V}]$$

14. Al arreglo de capacitores de la figura se le aplica una diferencia de potencial $V_{ac} = 400[\text{V}]$. Si $C_1 = 90[\text{nF}]$ con voltaje máximo de $200[\text{V}]$ y $C_2 = 10[\text{nF}]$, determinar:

a) La diferencia de potencial V_{bc}.

b) El dieléctrico que puede ser empleado para construir C_2 y el área A necesaria, basándose en la tabla.

c) El módulo de la polarización (σ_i) en la superficie superior del dieléctrico de C_2, si su espesor es $0.1[\text{mm}]$, $E_{rup} = 4[\text{kV/mm}]$ y $k_2 = 4$.

d) El voltaje máximo V_{ac} que puede soportar el arreglo sin que se dañe capacitor alguno; emplear las características de C_2 del inciso anterior.

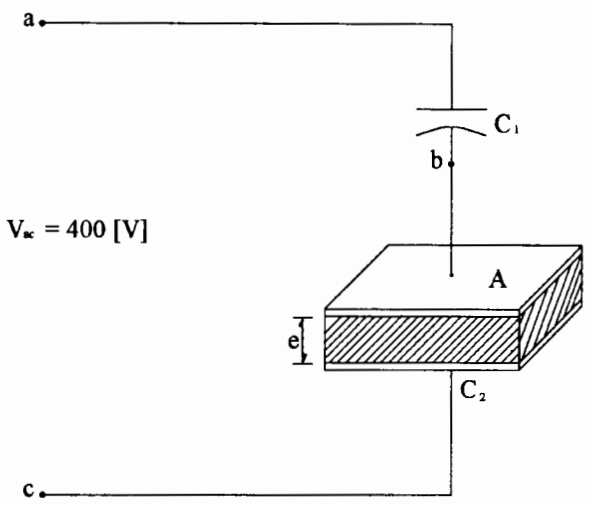


Tabla de dieléctricos			
Dieléctrico	E_{rup}[kV/mm]	k_e	e[mm]
1	2	3	0.15
2	4	4	0.1
3	8	2	0.04

Resolución:

a) V_{bc} se puede calcular conociendo Q_2 y C_2; se sabe que $Q_2 = Q_1 = Q_{a,c}$, con la definición de capacitancia

$$Q_{a,c} = C_{ac}V_{ac} \quad , \quad C_{ac} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{ac} = \frac{90(10)[\text{nF}]}{90 + 10} = 9[\text{nF}] \quad , \quad Q_{a,c} = 9 \times 10^{-9}(400) = 3.6 \times 10^{-6}[\text{C}] \text{ , y}$$

$$V_{bc} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{3.6 \times 10^{-6}[\text{C}]}{10 \times 10^{-9}[\text{F}]} = 360[\text{V}]$$

b) El dieléctrico de C_2 deberá soportar $V_{bc} \geq 360[\mathrm{V}]$, calculemos $V_{bc\,máx}$ para cada dieléctrico, a partir de su campo de ruptura y de su espesor:

Dieléctrico	$V_{máx}[\mathrm{v}]$
1	$V_{máx1} = E_{rup1}e_1$, $V_{máx1} = 2[\mathrm{kV/mm}]0.15[\mathrm{mm}] = 300[\mathrm{V}]$
2	$V_{máx2} = E_{rup2}e_2$, $V_{máx2} = 4[\mathrm{kV/mm}]0.1\ [\mathrm{mm}] = 400[\mathrm{V}]$
3	$V_{máx3} = E_{rup3}e_3$, $V_{máx3} = 8[\mathrm{kV/mm}]0.04[\mathrm{mm}] = 320[\mathrm{V}]$

De la tabla se concluye que el único dieléctrico que puede emplearse es el 2.

El área necesaria A se obtiene de:

$$C_2 = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{d} \quad ; \quad A = \frac{C_2 e_2}{k_{e_2}\varepsilon_0} \quad , \quad A = \frac{10 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]0.1 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]}{4(8.85 \times 10^{-12})[\mathrm{C^2/N \cdot m^2}]} = 0.0282[\mathrm{m^2}]$$

c) σ_{i_2} se calcula como $|\vec{P}_2| = \varepsilon_0 \chi_{e_2} E_2$; $\sigma_{i_2} = 8.85 \times 10^{-12}(4-1)\dfrac{360}{0.1 \times 10^{-3}} = 95.58\left[\dfrac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$

d) La diferencia de potencial máxima que se puede aplicar $V_{ac\,máx}$ dependerá del voltaje máximo de uno de los capacitores conectados en serie y de su carga (máxima) en estas condiciones; supongamos que C_2 es el que se encuentra en su valor $V_{bc\,máx}$; es decir:

$$V_{ac\,máx} = V_1 + V_{2\,máx} \ ,$$

$$q_{2\,máx} = C_2 V_{2\,máx} \quad ; \quad q_{2\,máx} = 10 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]400[\mathrm{V}] = 4 \times 10^{-6}[\mathrm{C}] \quad , \text{ como } q_{2\,máx} = q_1 \quad , \quad V_1 = \frac{q_1}{C_1} \ ,$$

$$V_1 = \frac{4 \times 10^{-6}[\mathrm{C}]}{90 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]} = 44.444[\mathrm{V}] \quad , \text{ como } V_1 < V_{1\,máx} \quad , \quad (V_{1\,máx} = 200[\mathrm{V}])$$

sólo el capacitor C_2 estará operando en su límite máximo; finalmente:

$$V_{ac\,máx} = (44.444 + 400)[\mathrm{V}] = 444.444[\mathrm{V}]$$

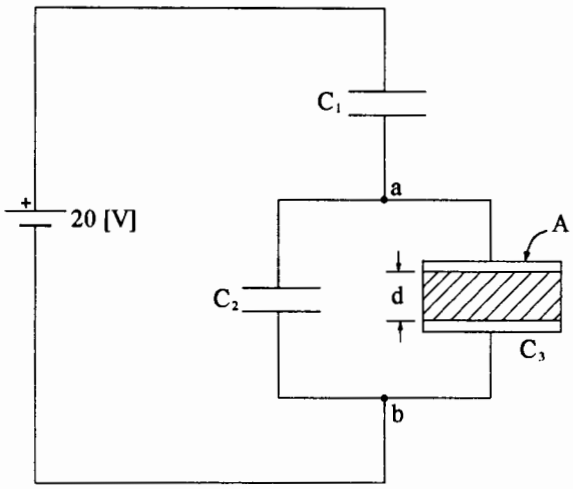
15. Para la conexión de capacitores mostrada, en la cual $C_1 = C_2 = 2[\text{nF}]$ y $C_3 = 1[\text{nF}]$, determine:

a) La capacitancia equivalente entre las terminales de la fuente de 20 [V].

b) La diferencia de potencial V_{ab}.

c) La energía almacenada en la conexión.

d) De la tabla de dieléctricos, el adecuado para el capacitor de $1[\text{nF}]$, de tal modo que pueda ser sometido a una diferencia de potencial de $50[\text{kV}]$; considere que $A = 84.5[\text{cm}^2]$ y $d = 1.5[\text{mm}]$.



Dieléctrico	k_e	E_{rup} [kV/mm]
1	20	100
2	10	35
3	5	20
4	20	30
5	5	40
6	15	75

Resolución:

a) Llamemos C al capacitor solicitado. En primer término obtendremos el capacitor equivalente a la conexión (en paralelo) de C_2 y C_3, así: $C_{2,3} = C_2 + C_3$; $C_{2,3} = (2 + 1)[\text{nF}]$; $C_{2,3} = 3[\text{nF}]$ y ahora $C_{2,3}$ y C_1 resultaron conectados en serie, por lo cual

$$C = \frac{C_{2,3}C_1}{C_{2,3} + C_1}$$

$$C = \frac{3(2)[\text{nF}]}{3 + 2} = \frac{6}{5}[\text{nF}] = 1.2[\text{nF}]$$

b) Sabemos que los capacitores C, C_1 y $C_{2,3}$ tienen la misma cantidad de carga eléctrica, conociéndola se puede calcular V_{ab}.

Como $C = \dfrac{Q}{V_{xy}}$, $Q = CV_{xy}$, $Q = 1.2 \times 10^{-9}[\text{F}]20[\text{V}] = 24[\text{nC}]$ y $V_{ab} = \dfrac{Q}{C_{2,3}}$

$$V_{ab} = \frac{24 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{3 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]} = 8[\mathrm{V}], \text{ del mismo modo } V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{24 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{2 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]} = 12[\mathrm{V}]$$

c) La energía se puede calcular con los valores de carga y diferencia de potencial del capacitor equivalente a la conexión de los tres capacitores

$$U = 0.5 Q V_{xy} \; ; \; U = 0.5(24 \times 10^{-9})[\mathrm{C}]20[\mathrm{V}] = 0.24[\mu\mathrm{J}]$$

d) Como $C_3 = 1[\mathrm{nF}]$ es de placas planas y paralelas, $C_3 = \dfrac{\varepsilon_3 A}{d} = \dfrac{k_{e_3}\varepsilon_0 A}{d}$ y

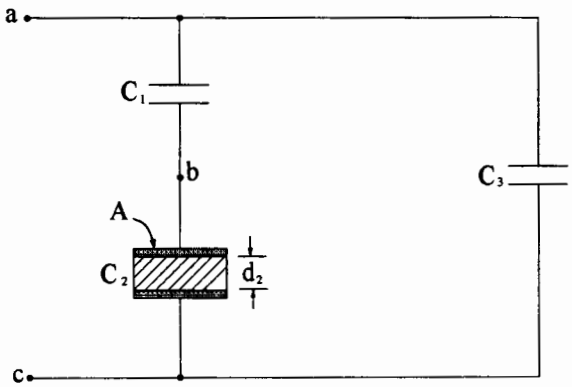
$$k_{e_3} = \frac{C_3 d}{\varepsilon_0 A} \; , \; k_{e_3} = \frac{1 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]1.5 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]}{8.85 \times 10^{-12}[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]84.5 \times 10^{-4}[\mathrm{m}^2]} \doteq 20.06 \approx 20$$

Al determinar el valor necesario para la permitividad relativa $k_{e_3} \approx 20$, se observa que sólo los dieléctricos 1 y 4 podrían ser empleados. Además, el campo eléctrico entre placas de C_3 será

$$E_3 = \frac{V_{ab}}{d} \; ; \; E_3 = \frac{50[\mathrm{kV}]}{1.5[\mathrm{mm}]} = 33.333\left[\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}}\right]$$

y como $E_3 > E_{rup\,4}$ el dieléctrico 4 se elimina, y $E_3 < E_{rup\,1}$ nos permite concluir que el dieléctrico 1 es el adecuado para construir C_3.

16. Al aplicar cierta diferencia de potencial entre los puntos a y c del sistema mostrado, se observa que $V_{ab} = 24[\mathrm{V}]$; se sabe que $C_1 = C_3 = 120[\mathrm{nF}]$ y C_2 está formado por placas de $0.5[\mathrm{m}^2]$ de área cada una, un dieléctrico de permitividad relativa $k_2 = 4$ y espesor $d_2 = 0.295[\mathrm{mm}]$. Calcule:



a) La capacitancia equivalente entre los puntos a y c.

b) La carga en cada capacitor.

c) La diferencia de potencial V_{ac}.

d) La densidad superficial de carga inducida en la cara superior del dieléctrico de C_2.

Resolución:

a) Para calcular C_{ac} requerimos el valor de C_2, el cual por ser de placas planas y paralelas:

$$C_2 = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{d_2} \quad , \quad C_2 = \frac{4(8.85 \times 10^{-12})[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]0.5[\mathrm{m}^2]}{0.295 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]} \quad \therefore \; C_2 = 60 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]$$

El capacitor equivalente a la conexión C_1 y C_2 es

$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad , \quad C_{1,2} = \frac{120(60)[\mathrm{nF}]}{120 + 60} = 40[\mathrm{nF}] \quad \text{y}$$

$$C_{ac} = C_{1,2} + C_3 = 160[\mathrm{nF}]$$

b) Como $V_{ab} = 24[\mathrm{V}]$, $Q_1 = C_1 V_{ab}$, $Q_1 = 120 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]24[\mathrm{V}] = 2.88[\mu\mathrm{C}]$

Por estar conectados en serie C_1 con C_2, $Q_1 = Q_2$; con esto se puede calcular

$$V_{bc} = \frac{Q_2}{C_2} \quad ; \quad V_{bc} = \frac{2.88 \times 10^{-6}[\mathrm{C}]}{60 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]} = 48[\mathrm{V}] \quad , \quad V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$

$$V_{ac} = (24 + 48)[\mathrm{V}] \quad ; \quad V_{ac} = 72[\mathrm{V}] \quad \text{y} \quad Q_3 = C_3 V_{ac} = 120 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]72[\mathrm{V}] = 8.64[\mu\mathrm{C}]$$

c) Del inciso anterior $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} = 72[\mathrm{V}]$

d) σ_{i_2} se puede calcular recordando que $\sigma_i = |\vec{P}|$ y $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ por lo tanto

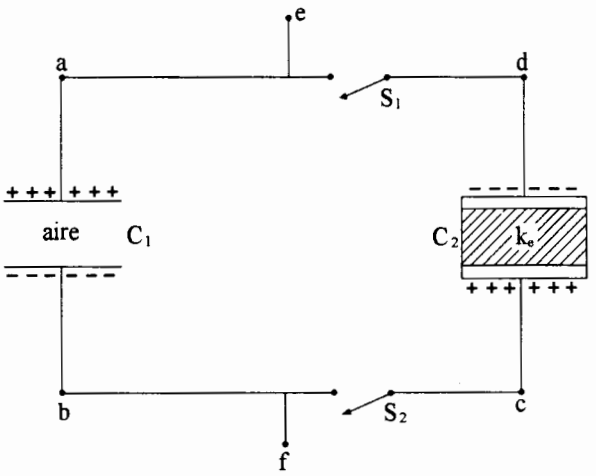
$$\sigma_{i_2} = \varepsilon_0 \chi_{e_2} E_2 \quad \text{y como} \quad \chi_{e_2} = k_{e_2} - 1 \quad \text{y} \quad E_2 = \frac{V_{bc}}{d_2}$$

$$\sigma_{i_2} = 8.85 \times 10^{-12} [\mathrm{C^2/N \cdot m^2}](4 - 1) \frac{48\,[\mathrm{V}]}{0.295 \times 10^{-3} [\mathrm{m}]} = 4.32 \left[\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

y como $V_{bc} > 0$, $V_b > V_c$, la placa superior de C_2 es la positiva y la densidad superficial de carga inducida en la cara superior del dieléctrico es negativa, por lo tanto:

$$\sigma_{i_2} = -4.32 \left[\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

17. Los capacitores C_1 y C_2 se encuentran energizados con una diferencia de potencial de $100\,[\mathrm{V}]$, pero con polaridad opuesta, de tal manera que los puntos a y c se encuentran en el lado de la placa positiva de C_1 y C_2, respectivamente. Con base en lo anterior y en las características de C_1 y C_2 que se proporcionan a continuación, determine:



$A_1 = A_2 = 0.001\,[\mathrm{m}^2]$, $d_1 = d_2 = 1\,[\mathrm{mm}]$, $k_{e_1} = 1$ y $k_{e_2} = 5$.

a) El valor de la capacitancia C_1 y de C_2.

b) El capacitor equivalente entre los puntos e y f, si los interruptores S_1 y S_2 se cerraran.

c) El valor de la energía almacenada en C_2 antes de cerrar los interruptores.

d) La diferencia de potencial entre los puntos e y f, si los interruptores S_1 y S_2 se cerraran.

Resolución:

a) El valor de C_1 y el de C_2 resultan:

$$C_1 = \frac{k_{e_1}\varepsilon_0 A_1}{d_1} \quad , \quad C_1 = \frac{1(8.85\times10^{-12})(0.001)}{1\times10^{-3}} = 8.85\,[\mathrm{pF}] \quad , \quad C_2 = \frac{5(8.85\times10^{-12})(0.001)}{1\times10^{-3}} = 44.25\,[\mathrm{pF}]$$

b) Al cerrar los interruptores el capacitor c_{ef} será equivalente a la conexión en paralelo de C_1 y C_2; es decir:

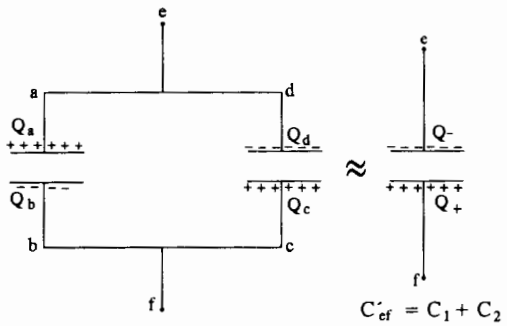
$$C_{ef} = (8.85 + 44.25)\,[\mathrm{pF}] = 53.1\,[\mathrm{pF}]$$

c) La energía de C_2: $U_{2/i} = 0.5\,C_2 V_{dc}^2$; $U_2 = 0.5(44.25\times10^{-12})(100)^2$

$U_{2/i} = 221.25\,[\mathrm{nJ}]$, de forma análoga $U_{1/i} = 44.25\,[\mathrm{nJ}]$ y $U_{ef} = 265.5\,[\mathrm{nJ}]$

d) Como $V_1 = V_2$ y $C_2 > C_1$, $C_2 = 5C_1$, $Q_2 > Q_1$, $Q_2 = 5Q_1 \begin{cases} Q_2 = 4{,}425\ [\mathrm{pC}] = Q_c \\ Q_1 = 885\ [\mathrm{pC}] = Q_a \end{cases}$

Al cerrar los interruptores la conexión queda:

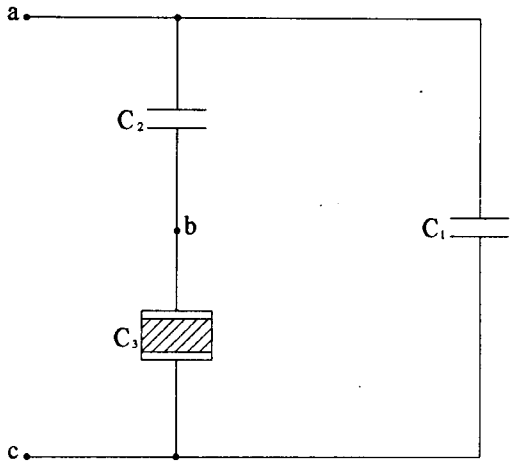


$$\left.\begin{aligned} Q_- &= Q_a + Q_d \\ Q_- &= Q_a - |Q_d| = -3.54 \times 10^{-9}[\mathrm{C}] \\ C_{eq} &= 53.1 \times 10^{-12}[\mathrm{F}] = C_{ef} \\ Q_+ &= Q_c + Q_b \\ Q_+ &= Q_c - |Q_b| = 3.54 \times 10^{-9}[\mathrm{C}] \end{aligned}\right\} \begin{aligned} V_{ef} &= \frac{Q_-}{C_{ef}} \\ V_{ef} &= \frac{-3.54 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{53.1 \times 10^{-12}[\mathrm{F}]} \\ V_{ef} &= -66.666[\mathrm{V}] \end{aligned}$$

y las energías almacenadas quedan:

$$U_{2lf} = 0.5 C_2 V_{fe}^2 = 98.33[\mathrm{nJ}] \quad , \quad U_{1lf} = 0.5 C_1 V_{fe}^2 = 19.66[\mathrm{nJ}] \text{ y } U'_{ef} = 117.99[\mathrm{nJ}]$$

18. En el arreglo de capacitores mostrado, $C_1 = 0.01[\mu F]$, $C_3 = 0.09[\mu F]$ y $V_{ac} = 175[V]$.



a) Determine el valor de la capacitancia C_2, si se sabe que el capacitor equivalente entre *a* y *c* es $0.072[\mu F]$.

b) Seleccione el dieléctrico apropiado para el capacitor C_3 con base en la tabla adjunta, si éste debe tener un espesor de $0.006[mm]$, un área de $2 \times 10^{-2}[m^2]$ en cada una de sus placas y diferencia de potencial $V_{bc} = 120[V]$.

c) Calcule la energía almacenada en C_2, considerándolo de $0.02[\mu F]$ y las condiciones del encabezado de este problema.

Dieléctrico	E_{rup}[kV/mm]	k_e
askarel	12	3
nylon	16	4
policarbonato	25	3
polietileno	40	2
papel	14	4

Resolución:

a) Se tiene que $C_{ac} = 0.072[\mu F]$, para encontrar el valor de C_2 deduzcamos la expresión para calcular C_{ac}:

El capacitor equivalente a la conexión de C_2 y C_3 es:

$$C_{2,3} = \frac{C_2(C_3)}{C_2 + C_3} \text{ y el capacitor entre } a \text{ y } c \text{ es: } C_{ac} = C_{2,3} + C_1$$

$$C_{ac} = \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} + C_1 \text{ , de la cual } C_2 = \frac{(C_{ac} - C_1)C_3}{C_1 + C_3 - C_{ac}} \text{ , } C_2 = \frac{(72 - 10)90[nF]}{10 + 90 - 72} = 199.29[nF]$$

b) Por tratarse de un capacitor de placas planas, el dieléctrico apropiado debe cumplir con un valor de permitividad relativa k_e tal que:

$$C_3 = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{d} \text{ , } k_e = \frac{C_3 d}{\varepsilon_0 A} \text{ , } k_e = \frac{90 \times 10^{-9}[F]6 \times 10^{-3}(10^{-3}m)}{8.85 \times 10^{-12}[C^2/N \cdot m^2]0.02[m^2]} = 3.05 \approx 3 \text{ ;}$$

además este capacitor tendrá un campo eléctrico entre sus placas $E = \dfrac{V_{bc}}{d}$

y el dieléctrico deberá tener un $E_{rup} \geq E$; $E = \dfrac{120[\mathrm{V}]}{6 \times 10^{-6}[\mathrm{m}]} = 20 \times 10^{6}\left[\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$, o $E = 20\left[\dfrac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}}\right]$

De la tabla de dieléctricos el único que cumple con $k_e = 3$ y $E_{rup} \geq 20\left[\dfrac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}}\right]$ es el policarbonato.

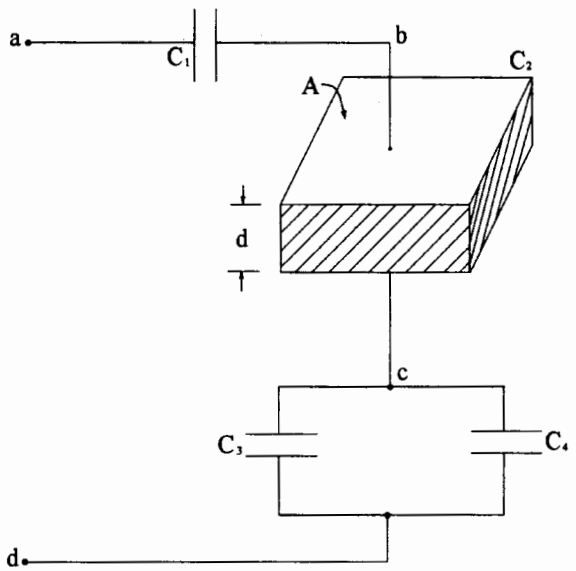
c) Si $C_2 = 20[\mathrm{nF}]$ y $C_3 = 90[\mathrm{nF}]$, $C_{2,3} = \dfrac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$; $C_{2,3} = \dfrac{20(90)[\mathrm{nF}]}{20 + 90} = 16.36[\mathrm{nF}]$

como $Q_2 = Q_3 = Q_{2,3}$ con dicho valor calcularemos la energía almacenada.

$Q_{2,3} = C_{2,3} V_{ac}$; $Q_{2,3} = 16.36 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]\,175[\mathrm{V}] = 2.864[\mu\mathrm{C}]$, de esta forma:

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} \quad ; \quad U_2 = \frac{(2.864 \times 10^{-6}[\mathrm{C}])^2}{2(20 \times 10^{-9}[\mathrm{F}])} = 2.05 \times 10^{-4}[\mathrm{J}] \quad , \quad U_2 = 205[\mu\mathrm{J}]$$

19. En la conexión de capacitores mostrada en la figura, al aplicar una fuerza electromotriz ε entre los puntos a y d, el capacitor C_1 adquirió un voltaje $V_{ab} = 30[\text{V}]$. Si $C_1 = 50$, $C_2 = 100$, $C_3 = 40$ y $C_4 = 60$, todos en $[\mu\text{F}]$ y $d = 0.01[\text{mm}]$, determine:



a) La capacitancia equivalente entre los puntos a y d.

b) El valor de la fuerza electromotriz ε que se aplicó a la conexión.

c) La energía almacenada en la red de capacitores, si V_{ad} fuese $500[\text{V}]$.

d) El dieléctrico que se debe emplear en C_2 y el área A necesaria para construirlo si V_{ad} fuese $500[\text{V}]$.

Dieléctrico	k_e	E_{rup}[MV/m]
aire	1.00059	0.8
neopreno	6.9	12.0
papel	3.5	14.0
porcelana	6.5	4.0

Resolución:

a) Para obtener C_{ad} obtendremos capacitores equivalentes parciales:

$$C_{cd} = C_3 + C_4 \ , \ C_{cd} = (40 + 60)[\mu\text{F}] = 100[\mu\text{F}];$$

ahora $$C_{bd} = \frac{C_{cd}C_2}{C_{cd} + C_2} = \frac{100(100)[\mu\text{F}]}{100 + 100} \quad C_{bd} = 50[\mu\text{F}]$$

y finalmente $$C_{ad} = \frac{C_1 C_{bd}}{C_1 + C_{bd}} = \frac{50(50)[\mu\text{F}]}{50 + 50} \therefore C_{ad} = 25[\mu\text{F}]$$

b) Se puede establecer que $\varepsilon = V_{ad}$ y que $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$ con V_{ab} y C_1 podemos calcular q_1, además $q_1 = q_2 = q_{cd}$ nos permitirán calcular las diferencias de potencial necesarias:

$$q_1 = C_1 V_{ab} \ , \ q_1 = 50 \times 10^{-6}(30)[\text{C}] = 1.5 \times 10^{-3}[\text{C}] \ , \ V_{bc} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1.5 \times 10^{-3}[\text{C}]}{100 \times 10^{-6}[\text{F}]} = 15[\text{V}] \text{ y}$$

$$V_{cd} = \frac{q_{cd}}{C_{cd}} = \frac{1.5 \times 10^{-3}[\text{C}]}{100 \times 10^{-6}[\text{F}]} = 15[\text{V}] \therefore \varepsilon = V_{ad} = (30 + 15 + 15)[\text{V}] = 60[\text{V}]$$

c) $U = 0.5C_{ad}V_{ad}^2$; $U = 0.5(25 \times 10^{-6})(500)^2 = 3.125[\mathrm{J}]$

d) Si $V_{ad} = 500[\mathrm{V}]$, la carga en el capacitor C_{ad} sería: $Q_{ad} = C_{ad}V_{ad}$

$$Q_{ad} = (25 \times 10^{-6}(\mathrm{F}))500(\mathrm{V}) = 12.5[\mathrm{mC}] \text{ y como } Q_{ad} = Q_2 \ , \ V'_{bc} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$V'_{bc} = \frac{12.5 \times 10^{-3}[\mathrm{C}]}{100 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]} = 125[\mathrm{V}],$$

con esta diferencia de potencial el dieléctrico de C_2 deberá tener un campo eléctrico de ruptura $E_{rup} \geq E_2$, donde

$$E_2 = \frac{V'_{bc}}{d} = \frac{125[\mathrm{V}]}{0.01 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]} = 12.5 \times 10^6\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

En la tabla de dieléctricos sólo el papel cumple con la condición descrita; por lo tanto

$$k_{e_2} = 3.5 \text{ y como } C_2 = \frac{k_{e_2}\varepsilon_0 A_2}{d_2} \ , \ A_2 = \frac{C_2 d_2}{k_{e_2}\varepsilon_0}$$

$$A_2 = \frac{100 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]0.01 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]}{3.5(8.85 \times 10^{-12})[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]} = 32.28[\mathrm{m}^2] \text{ es el área necesaria.}$$

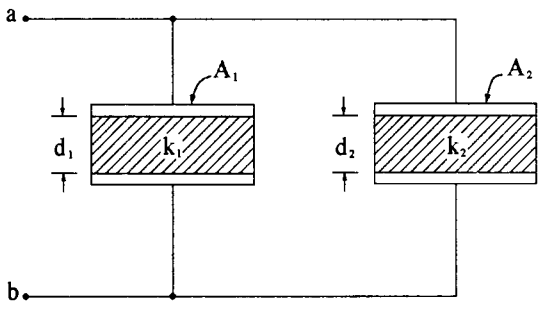
20. Para la conexión de capacitores, con los datos que se proporcionan, calcule:

$A_1 = 100[\text{cm}^2]$, $d_1 = 0.1[\text{mm}]$, $k_1 = 5$,

$E_{rup1} = 10[\text{kV/mm}]$

$A_2 = 400[\text{cm}^2]$, $d_2 = 0.1[\text{mm}]$, $k_2 = 10$,

$E_{rup2} = 8[\text{kV/mm}]$



a) La energía almacenada en el conjunto, si $V_{ab} = 100[\text{V}]$.

b) La diferencia de potencial máxima V_{ab} que es capaz de soportar el arreglo, sin que se dañe dieléctrico alguno.

Resolución:

a) La energía del conjunto se calcula con $U = 0.5C_{ab}V_{ab}^2$; para conocer C_{ab} se requieren los valores de los capacitores:

$$C_1 = \frac{k_1\varepsilon_0 A_1}{d_1} = \frac{5(8.85\times10^{-12})[\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2]100\times10^{-4}[\text{m}^2]}{0.1\times10^{-3}[\text{m}]} = 4.425\times10^{-9}[\text{F}] = 4.425[\text{nF}]$$

$$C_2 = \frac{k_2\varepsilon_0 A_2}{d_2} = \frac{10(8.85\times10^{-12})[\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2]400\times10^{-4}[\text{m}^2]}{0.1\times10^{-3}[\text{m}]} = 3.54\times10^{-8}[\text{F}] = 35.4[\text{nF}]$$

y por estar conectados en paralelo $C_{ab} = C_1 + C_2 = 39.825[\text{nF}]$

Por lo tanto: $U = 0.5(39.825\times10^{-9})[\text{F}](100)^2[\text{V}]^2 = 199.125[\mu\text{J}]$

b) La diferencia de potencial $V_{abmáx}$ depende del voltaje máximo aplicable a cada capacitor y dicho voltaje es función del campo eléctrico de ruptura y del espesor del dieléctrico:

$V_{1máx} = E_{rup1}d_1$; $V_{1máx} = 10[\text{kV/mm}]0.1[\text{mm}] = 1[\text{kV}] = 1{,}000[\text{V}]$

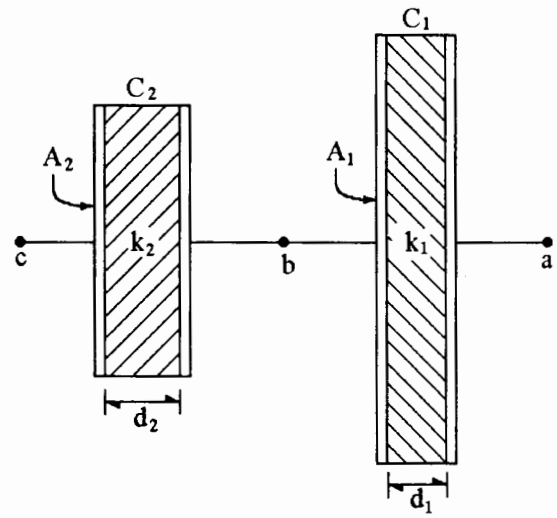
$V_{2máx} = E_{rup2}d_2$; $V_{2máx} = 8[\text{kV/mm}]0.1[\text{mm}] = 0.8[\text{kV}] = 800[\text{V}]$

De acuerdo con estos valores y para que los dos capacitores estén dentro de un rango de seguridad, $V_{abmáx} \leq 800[\text{V}]$.

21. En la conexión de capacitores que se muestra en la figura se aplica una diferencia de potencial V_{ab} = 250[V]. Con base en la figura y en los datos que se proporcionan, determine:

a) La cantidad de carga inducida en la cara izquierda del dieléctrico del capacitor C_1.

b) La diferencia de potencial máxima que puede ser aplicada, entre los extremos *a* y *c* de la conexión, sin que se dañen los dieléctricos de los capacitores.



$E_{R1} = 6[\text{kV/mm}], k_1 = 10, A_1 = 400[\text{cm}^2], d_1 = 0.1[\text{mm}],$

$E_{R2} = 5[\text{kV/mm}], k_2 = 25, A_2 = 200[\text{cm}^2] \text{ y } d_2 = 0.1[\text{mm}].$

Resolución:

a) Como $V_{ab} > 0$, $V_a > V_b$, esto significa que el electrodo conectado al punto *a* es positivo y la carga inducida frente a esta placa es negativa. La carga inducida solicitada es positiva y se calcula con:

$q_{i1} = \sigma_{i1} A_1$, donde $\sigma_{i1} = |\vec{P}_1| = \varepsilon_0 \chi_{e1} E_1$ en la cual $\chi_{e1} = k_{e1} - 1$ y

$$E_1 = \frac{V_{ab}}{d_1} \;;\; \therefore\; q_{i1} = \varepsilon_0 (k_{e1} - 1)\frac{V_{ab}}{d_1} A_1 \;;\; q_{i1} = 8.85 \times 10^{-12}(10 - 1)\frac{250}{0.1 \times 10^{-3}}(0.04)[\text{C}]$$

$$q_{i1} = 7.965 \times 10^{-6}[\text{C}] \;,\; q_{i1} = 7.965[\mu\text{C}]$$

b) Los voltajes máximos individuales se pueden calcular por medio de:

$$V_{máx1} = E_{R1} d_1 \;,\; V_{máx1} = 6[\text{kV/mm}]0.1[\text{mm}] = 600[\text{V}]$$

$$V_{máx2} = E_{R2} d_2 \;,\; V_{máx2} = 5[\text{kV/mm}]0.1[\text{mm}] = 500[\text{V}]$$

Con cierta lógica se podría suponer que $V_{acmáx}$ es la suma de los voltajes calculados; sin embargo, esto no es correcto para una conexión de capacitores, veamos por qué:

requerimos los valores C_1 y C_2:

$$C_1 = \frac{k_1 \varepsilon_0 A_1}{d_1} = \frac{10(8.85 \times 10^{-12})400 \times 10^{-4}}{0.1 \times 10^{-3}} = 35.4[\text{nF}] \text{ y}$$

$$C_2 = \frac{k_2 \varepsilon_0 A_2}{d_2} = \frac{25(8.85 \times 10^{-12})0.02}{0.1 \times 10^{-3}} = 44.25[\text{nF}]$$

ahora calculemos las cargas eléctricas máximas individuales a partir de los voltajes máximos y de los valores de capacitancia:

$$Q_{1\,máx} = C_1 V_{máx1} = 35.4 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]600[\mathrm{V}] = 21.24[\mu\mathrm{C}]$$

$$Q_{2\,máx} = C_2 V_{máx2} = 44.25 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]500[\mathrm{V}] = 22.125[\mu\mathrm{C}]$$

Como sabemos, los capacitores conectados en serie tienen cargas eléctricas de valores iguales, por lo que no podrán tener sus cargas máximas respectivas, ni sus voltajes máximos.

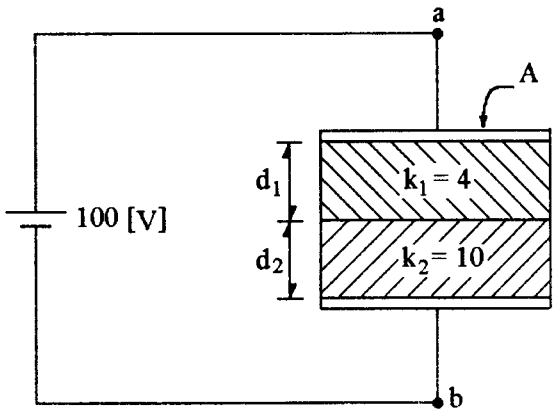
Sólo uno de ellos, el de la carga máxima menor, es el que podría operar a su $V_{máx}$, pero el otro capacitor estará a un valor menor que su $V_{máx}$; finalmente:

$$Q_2 = Q_{1\,máx}$$

$$V_{acmáx} = V_{máx1} + V_2 \; ; \; V_{acmáx} = V_{máx1} + \frac{Q_2}{C_2} \; ; \; V_{acmáx} = \left[600[\mathrm{V}] + \frac{21.24 \times 10^{-6}[\mathrm{C}]}{44.25 \times 10^{-9}[\mathrm{F}]}\right]$$

$$V_{acmáx} = [600 + 480][\mathrm{V}] \; ; \; V_{acmáx} = 1{,}080[\mathrm{V}]$$

22. Se tiene un capacitor de placas planas separadas por dos dieléctricos, energizado como indica la figura. Con base en ésta y en los datos que se anexan, calcule:



a) La capacitancia entre los puntos *a* y *b*.

b La magnitud del campo eléctrico en cada uno de los dieléctricos.

c) La densidad de carga de polarización en la superficie superior del dieléctrico 1.

d) La diferencia de potencial V_{ab} máxima que es posible aplicar al capacitor sin que se dañe.

$E_{rup1} = 8 \times 10^6 [\text{V/m}]$ y $E_{rup2} = 20 \times 10^6 [\text{V/m}]$

$d_1 = d_2 = 0.2 [\text{mm}]$ y $A = 0.4 [\text{m}^2]$.

Resolución:

a) El capacitor mostrado equivale a dos capacitores conectados en serie, digamos C_1 con el dieléctrico k_1 y C_2 con el dieléctrico k_2:

$$C_1 = \frac{k_1 \varepsilon_0 A}{d_1} \quad ; \quad C_1 = \frac{4(8.85 \times 10^{-12})0.4}{0.2 \times 10^{-3}} = 70.8 \times 10^{-9} [\text{F}] = 70.8 [\text{nF}]$$

$$C_2 = \frac{k_2 \varepsilon_0 A}{d_2} \quad ; \quad C_2 = \frac{10(8.85 \times 10^{-12})0.4}{0.2 \times 10^{-3}} = 177 \times 10^{-9} [\text{F}] = 177 [\text{nF}]$$

$$\therefore C_{ab} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad ; \quad C_{ab} = \frac{70.8(177)[\text{nF}]}{70.8 + 177} = 50.57 [\text{nF}]$$

b) De la integral de línea del campo eléctrico obtenemos $V_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ es decir $V_{ab} = V_1 + V_2$ o mejor aún

$$V_{ab} = E_1 d_1 + E_2 d_2 \ \ldots (1)$$

Ahora bien, al aplicar la ley de Gauss generalizada a la unión de los dieléctricos encontramos que el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ es igual en ambos dieléctricos, resultado válido para este caso de placas planas y paralelas. Por lo tanto

$$D_1 = D_2 \quad ; \quad \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \quad ; \quad k_1 E_1 = k_2 E_2$$

De esta expresión despejamos E_2 y lo sustituimos en la ecuación (1)

$$V_{ab} = E_1 d_1 + \frac{k_1}{k_2} E_1 d_2 \;\; ; \;\; V_{ab} = E_1\left[d_1 + \frac{k_1}{k_2} d_2\right] \;\; ; \;\; E_1 = \frac{V_{ab}}{d_1 + \frac{k_1}{k_2} d_2} = \frac{100}{0.2 \times 10^{-3}\left[1 + \frac{4}{10}\right]}$$

$$E_1 = 357.143\left[\frac{\text{kV}}{\text{m}}\right] \;\; \text{y} \;\; E_2 = \frac{k_1}{k_2} E_1 = 142.857\left[\frac{\text{kV}}{\text{m}}\right]$$

c) $\sigma_{i1} = |\vec{P}_1|$ y la polarización es $\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_1$ y en la superficie superior del dieléctrico 1 se induce carga negativa, por esta razón:

$$\sigma_{i1} = -8.85 \times 10^{-12}(4 - 1)357{,}143 = -9.482 \times 10^{-6}\left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right] = -9.482[\mu\text{C/m}^2]$$

d) Para determinar $V_{ab\,máx}$, obtenemos la diferencia de potencial máxima que se puede aplicar a cada dieléctrico:

$V_{1\,máx} = E_{rup1} d_1 = 1{,}600[\text{V}]$ y $V_{2\,máx} = E_{rup2} d_2 = 4{,}000[\text{V}]$. Con estos valores y los de capacitancias C_1 y C_2 calculamos:

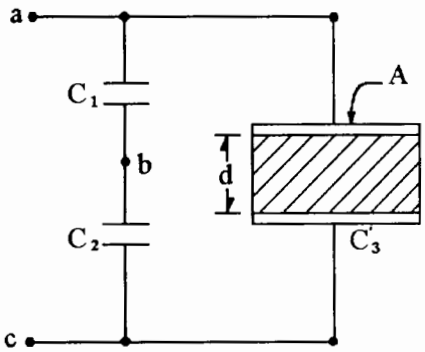
$$q_{1\,máx} = C_1 V_{1\,máx} = 113.328[\mu\text{C}] \;\; \text{y} \;\; q_{2\,máx} = C_2 V_{2\,máx} = 708.4[\mu\text{C}]$$

Como C_1 y C_2 están en serie tendrán la misma carga y ésta sólo puede ser $q_{1\,máx}$ ya que con ella C_1 estaría operando en su límite de seguridad.

$$\therefore V_{ab\,máx} = V_{1\,máx} + V'_2 \;\; ; \;\; V_{ab\,máx} = V_{1\,máx} + \frac{q_{1\,máx}}{C_2} = 1{,}600 + \frac{113.328 \times 10^{-6}}{177 \times 10^{-9}} = 1{,}600 + 640$$

$$V_{ab\,máx} = 2{,}240[\text{V}]$$

23. Se tiene un conjunto de capacitores como lo muestra la figura; se sabe que $C_2 = 90 \times 10^{-12}$[F] y se cuenta con información de algunos dieléctricos en la tabla anexa, con base en esto, determine:



a) La diferencia de potencial V_{bc} si la carga en el capacitor 2 es $Q_2 = 4.5 \times 10^{-9}$[C].

b) El valor del capacitor C_1 si $V_{ab} = 50$[V].

c) El valor del capacitor C_3 con el dieléctrico adecuado.

d) La energía total almacenada en el arreglo.

Dieléctrico	$A[\mathrm{m}^2]$	d[m]	k_e	E_{rup}[kV/m]
1	0.01	0.01	10	8
2	0.01	0.01	11.3	10
3	0.01	0.01	25.2	4
4	0.01	0.01	11.3	5

Resolución:

a) Para calcular V_{bc} empleamos la definición de capacitancia y se tiene:

$$V_{bc} = \frac{Q_2}{C_2} \quad ; \quad V_{bc} = \frac{4.5 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{90 \times 10^{-12}[\mathrm{F}]} = 50[\mathrm{V}]$$

b) Por estar conectados en serie, C_1 y C_2 tienen la misma cantidad de carga; es decir,

$$Q_2 = Q_1 \quad \therefore \quad C_1 = \frac{Q_1}{V_{ab}} \quad , \quad C_1 = \frac{4.5 \times 10^{-9}[\mathrm{C}]}{50[\mathrm{V}]} = 90 \times 10^{-12}[\mathrm{F}]$$

c) Para calcular el valor de C_3 requerimos la diferencia de potencial V_{ac}; ésta es

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} \quad , \quad V_{ac} = (50 + 50)[\mathrm{V}] = 100[\mathrm{V}]$$

Con esta diferencia y el espesor del dieléctrico podemos calcular el campo eléctrico entre los electrodos:

$$E_3 = \frac{V_{ac}}{d} \quad , \quad E_3 = \frac{100(\mathrm{V})}{0.01(\mathrm{m})} = 10^4\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right],$$ para elegir el dieléctrico su campo eléctrico de ruptura debe cumplir:

$E_{rup} \geq E_3$, por lo tanto sólo el dieléctrico 2 es adecuado para construir C_3, de esta forma:

$$C_3 = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{d} \quad , \quad C_3 = \frac{11.3(8.85 \times 10^{-12})[\mathrm{C^2/N \cdot m^2}]0.01[\mathrm{m^2}]}{0.01[\mathrm{m}]} = 10^{-10}[\mathrm{F}] = 0.1[\mathrm{nF}]$$

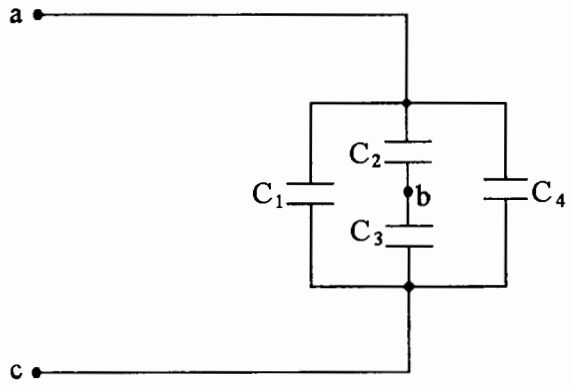
d) La energía total se calcula con $U = 0.5 C_{ac} V_{ac}^2$ y $C_{ac} = C_{1,2} + C_3$

$$C_{1,2} = \frac{90(90)[\mathrm{pF}]}{90 + 90} = 45[\mathrm{pF}] \text{ y como } C_3 = 100[\mathrm{pF}]$$

$$C_{ac} = 145[\mathrm{pF}]; \text{ entonces } U = 0.5(145 \times 10^{-12}[\mathrm{F}])(100[\mathrm{V}])^2$$

$$U = 0.725[\mu\mathrm{J}]$$

24. Con base en el circuito de la figura formado por capacitores de placas planas y paralelas, en el cual $V_{ac} = 100[\mathrm{V}]$, y en la tabla de materiales. Determine:



a) El capacitor equivalente entre ***a*** y ***c***, si se sabe que la energía total almacenada por el arreglo es de $0.25[\mathrm{mJ}]$.

b) Si $C_1 = 20[\mathrm{nF}]$ y $d_1 = 0.125[\mathrm{mm}]$, ¿con qué material dieléctrico está hecho el capacitor C_1?

c) Si $C_2 = C_3 = 40[\mathrm{nF}]$, ¿cuál es el valor de la carga almacenada en C_2?

d) Si $C_4 = 10[\mathrm{nF}]$ y tiene como dieléctrico papel, ¿cuál es el voltaje máximo que se puede aplicar a este capacitor?

Material	k_e	$E_{rup}[\mathrm{MV/m}]$	$A[\mathrm{m}^2]$
aire	≈ 1	0.8	0.2825
baquelita	4.8	12.0	0.0059
mica	4.5	160.0	0.0006
papel	3.5	14.0	0.0023

Resolución:

a) Para calcular C_{ac} sabemos que $U = 0.25[\mathrm{mJ}]$ y que $V_{ac} = 100[\mathrm{V}]$, como

$$U = 0.5C_{ac}V_{ac}^2 \quad , \quad C_{ac} = \frac{U}{0.5V_{ac}^2} = \frac{0.25\times10^{-3}[\mathrm{J}]}{0.5(100)^2[\mathrm{V}^2]} = 50\times10^{-9}[\mathrm{F}]$$

b) Como $C_1 = \dfrac{k_e\varepsilon_0 A}{d_1}$, $\dfrac{C_1 d_1}{\varepsilon_0} = k_e A$, $\dfrac{C_1 d_1}{\varepsilon_0} = \dfrac{20\times10^{-9}[\mathrm{F}]0.125\times10^{-3}[\mathrm{m}]}{8.85\times10^{-12}[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]} = 0.28248[\mathrm{m}^2]$

De la tabla, los valores $k_e A$ son:

$$k_eA_{aire} = 0.2825[\mathrm{m}^2] \ , \ k_eA_{baq} = 0.02832[\mathrm{m}^2] \ , \ k_eA_{mica} = 0.0027[\mathrm{m}^2] \ \text{ y } \ k_eA_{papel} = 0.00805[\mathrm{m}^2]$$

Se concluye que el dieléctrico que cumple con el valor requerido es el aire.

c) Como $C_2 = C_3 = 40[\mathrm{nF}]$, el capacitor equivalente a esta conexión, en serie, de C_2 con C_3 es:

$$C_{2,3} = \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} \quad , \quad C_{2,3} = \frac{40(40)[\mathrm{nF}]}{40 + 40} = 20[\mathrm{nF}]; \text{ además}$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_{2,3} \ \text{ y } \ Q_{2,3} = C_{2,3}V_{ac} \ , \ Q_{2,3} = 20\times10^{-9}[\mathrm{F}]100[\mathrm{V}] = 2[\mu\mathrm{C}] = Q_2$$

d) El voltaje máximo depende del campo eléctrico de ruptura y del espesor del dieléctrico; éste último se calcula de la expresión

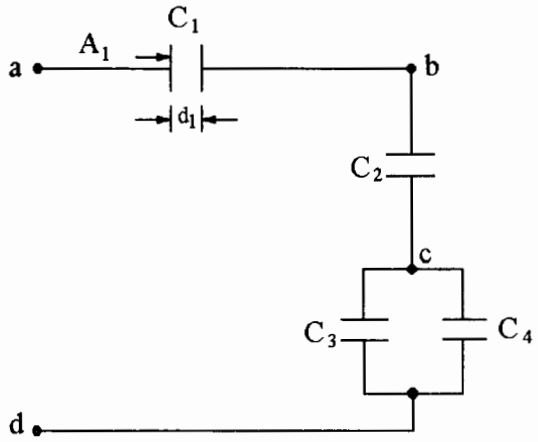
$$C_4 = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{d_4} \quad , \quad d_4 = \frac{k_e \varepsilon_0 A}{C_4} \quad , \quad d_4 = \frac{3.5(8.85 \times 10^{-12})0.0023}{10 \times 10^{-9}} = 7.12425\,[\mu\text{m}]$$

en este cálculo se emplearon los datos del papel. La diferencia de potencial máxima se obtiene de

$$V_{4máx} = E_{ruppapel}[d_4] = 14\,[\text{MV/m}]\,7.12425\,[\mu\text{m}]$$

$$V_{4máx} \doteq 99.74\,[\text{V}]$$

25. Entre los puntos a y d de una red de capacitores como la mostrada, donde $C_1 = 2[\mu F]$, $d_1 = 0.02[mm]$, $A_1 = 1.9651[m^2]$, $C_2 = 4[\mu F]$, $C_3 = 3[\mu F]$ y $C_4 = 1[\mu F]$, se aplicó el voltaje de una fuente de fuerza electromotriz (ε). Si se midió posteriormente la diferencia de potencial V_{bc} y ésta resultó ser de 250[V], determine:



a) El capacitor equivalente entre los puntos a y d (C_{ad}).

b) El valor de la fuente ε.

c) La energía total almacenada en la red.

d) Con base en la información de la tabla anexa, ¿qué dieléctrico se debería usar para construir C_1?

Dieléctrico	k_e	E_{rup}[kV/mm]
baquelita	4.8	16
mica	5.2	50
papel	3.6	12
polietileno	2.3	40

Resolución:

a) Para obtener el capacitor C_{ad}, obtendremos inicialmente el capacitor equivalente a la conexión de C_3 con C_4:

$$C_{3,4} = C_3 + C_4 \quad , \quad C_{3,4} = (3 + 1)[\mu F]$$

y ahora, el capacitor entre los puntos b y d se obtiene con

$$C_{bd} = \frac{C_2 C_{3,4}}{C_2 + C_{3,4}} \quad , \quad C_{bd} = \frac{4 \times 10^{-6}(4 \times 10^{-6})[F]}{4 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^{-6}[F] \quad , \quad C_{bd} = 2[\mu F]$$ y el capacitor entre a y d:

$$C_{ad} = \frac{C_{bd} C_1}{C_{bd} + C_1} = \frac{2(2)[\mu F]}{2 + 2} = 1[\mu F]$$

b) El valor ε de la fuente será igual a V_{ad} , $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$

V_{bc} se conoce: $V_{bc} = 250[V]$, con este valor y el de C_2 encontremos la carga del capacitor C_2:

$$Q_2 = C_2 V_{bc} \quad , \quad Q_2 = 4 \times 10^{-6}[F]250[V] = 10^{-3}[C]$$

por la conexión en serie de C_1, C_2 y $C_{3,4}$, se tiene que $Q_1 = Q_2 = Q_{3,4}$ y es posible calcular

$$V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{10^{-3}[\mathrm{C}]}{2\times 10^{-6}[\mathrm{F}]} = 500[\mathrm{V}] \text{ y también:}$$

$$V_{cd} = \frac{Q_{3,4}}{C_{3,4}} = \frac{10^{-3}[\mathrm{C}]}{4\times 10^{-6}[\mathrm{F}]} = 250[\mathrm{V}] \quad \therefore \quad V_{ad} = 500 + 250 + 250 = 10^3[\mathrm{V}] = \varepsilon$$

c) La energía total se calcula con

$$U = 0.5C_{ad}V_{ad}^2 = 0.5(1\times 10^{-6}[\mathrm{F}])(10^3[\mathrm{V}])^2 \text{ entonces}$$

$$U = 0.5[\mathrm{J}]$$

d) Se sabe que $C_1 = 2[\mu\mathrm{F}]$, $d_1 = 0.02[\mathrm{mm}]$ y $A_1 = 1.9651[\mathrm{m}^2]$ y como

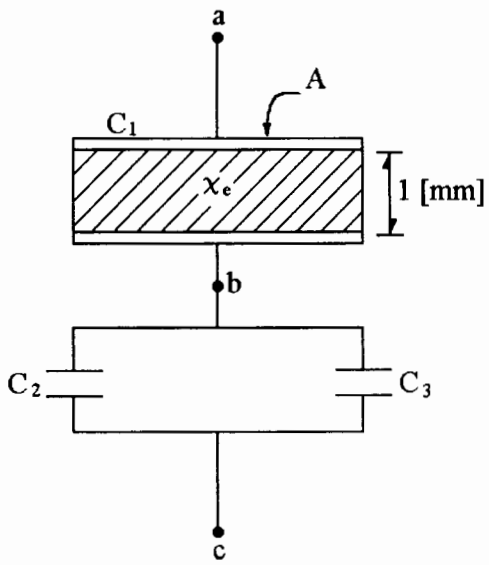
$$C_1 = \frac{k_e\varepsilon_0 A_1}{d_1} \quad , \quad k_e = \frac{C_1 d_1}{\varepsilon_0 A_1} \quad , \quad k_e = \frac{2\times 10^{-6}[\mathrm{F}]0.02\times 10^{-3}[\mathrm{m}]}{8.85\times 10^{-12}[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]1.9651[\mathrm{m}^2]} = 2.3,$$

esto significa que el dieléctrico que se debe emplear para construir C_1 debe tener permitividad relativa = 2.3. El dieléctrico, de los que aparecen en la tabla, que cumple con la condición descrita es el polietileno. El capacitor C_1 está sujeto a $V_{ab} = 500[\mathrm{V}]$, con el dieléctrico seleccionado $V_{ab\acute{m}\acute{a}x}$ debe ser $\geq V_{ab}$;

$$V_{ab\acute{m}\acute{a}x} = E_{ruppol}(d_1)$$

$$V_{ab\acute{m}\acute{a}x} = 40[\mathrm{kV/mm}]0.02\times 10^{-3}[\mathrm{m}] = 800[\mathrm{V}], \text{ el polietileno es adecuado.}$$

26. Se tiene un capacitor C_1 formado por dos placas conductoras planas y paralelas con área $A = 250[\text{cm}^2]$, cada placa posee una densidad superficial $|\sigma| = 5[\mu\text{C/m}^2]$, positiva la placa superior y negativa la inferior. Se introduce un dieléctrico con susceptibilidad $\chi_e = 4$ entre las placas de C_1. Con base en ello y en la conexión de la figura, donde $C_2 = 1.5[\text{nF}]$ y $C_3 = 1.0[\text{nF}]$, determine:



a) La carga en cada una de las placas de C_1.

b) La magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico de C_1.

c) La diferencia de potencial entre los puntos *a* y *c*.

d) La capacitancia del arreglo (C_{ac}).

e) La energía total almacenada en el arreglo.

Resolución:

a) Como $\sigma = \dfrac{Q}{A}$, $Q_1 = \sigma A$, $Q_1 = 5 \times 10^{-6}[\text{C/m}^2]250 \times 10^{-4}[\text{m}^2] = 0.125[\mu\text{C}]$

Q_1 positiva en la placa superior y Q_1 negativa en la placa inferior.

b) El campo eléctrico se calcula con $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$, como $\varepsilon = k_e\varepsilon_0 = (1 + \chi_e)\varepsilon_0$, el campo E resulta

$$E = \frac{5 \times 10^{-6}[\text{C/m}^2]}{(1 + 4)8.85 \times 10^{-12}[\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2]} = 112{,}994.35\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

c) La diferencia de potencial V_{ac} se obtiene de $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$, donde

$$V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} \text{ y } C_1 = \frac{k_e\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(1 + \chi_e)\varepsilon_0 A}{d} , \quad C_1 = \frac{(1 + 4)8.85 \times 10^{-12}(250 \times 10^{-4})}{1 \times 10^{-3}} = 1.1063[\text{nF}] \text{ y}$$

$$V_{ab} = \frac{0.125 \times 10^{-6}[\text{C}]}{1.1063 \times 10^{-9}[\text{F}]} = 112.99[\text{V}] \text{ y } V_{bc} = \frac{Q_1}{C_{2,3}}, \text{ ya que } Q_1 = Q_{2,3} \text{ y}$$

$$C_{2,3} = C_2 + C_3 , \quad C_{2,3} = (1.5 + 1)[\text{nF}] = 2.5[\text{nF}] \; ; \; V_{bc} = \frac{0.125 \times 10^{-6}[\text{C}]}{2.5 \times 10^{-9}[\text{F}]} = 50[\text{V}]$$

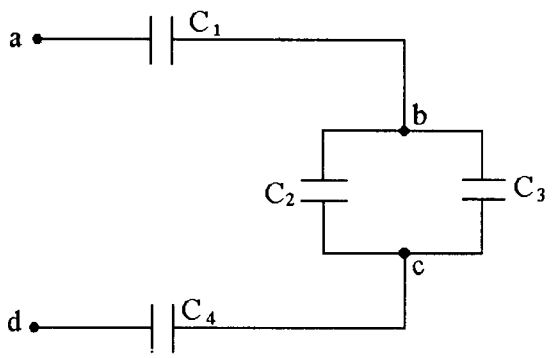
$$\therefore V_{ac} = 112.99 + 50 = 162.99[\text{V}]$$

d) La capacitancia C_{ac} se puede calcular como $C_{ac} = \dfrac{C_1 C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}} = \dfrac{1.1063(2.5)[\text{nF}]}{1.1063 + 2.5} \therefore C_{ac} = 0.7669[\text{nF}]$

e) La energía total se calcula con $U = 0.5C_{ac}V_{ac}^2$, por lo tanto:

$$U = 0.5(0.7669 \times 10^{-9}[\text{F}])(162.99[\text{V}])^2 = 10.187[\mu\text{J}]$$

27. En el arreglo de capacitores mostrado en el cual $C_1 = C_4 = 0.5[\mu F]$ y $C_2 = C_3 = 0.25[\mu F]$, la diferencia de potencial V_{ab} es $40[V]$.



a) Calcule la capacitancia equivalente entre ***a*** y ***d***.

b) Determine la diferencia de potencial entre ***a*** y ***d***.

c) Seleccione de la tabla de dieléctricos el adecuado para C_4 de placas paralelas, cuya área A debe ser de $0.005[m^2]$.

d) Calcule la energía U_T y la carga Q_T, almacenadas en el arreglo de capacitores.

Dieléctrico	E_{rup}[MV/m]	k_e	d[μm]
polietileno	22	2.6	0.23
dióxido de titanio	8	100	8.85
mica	200	7	0.80

Resolución:

a) Para calcular C_{ad}, primero calculemos C_{bc}, por estar en paralelo C_2 y C_3

$$C_{bc} = C_2 + C_3 \quad , \quad C_{bc} = (0.25 + 0.25)[\mu F] = 0.5[\mu F]$$

Ahora bien, C_1, C_{bc} y C_4 están conectados en serie por lo que:

$$\frac{1}{C_{ad}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{bc}} + \frac{1}{C_4} \quad ; \quad \frac{1}{C_{ad}} = \left[\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5}\right]\left[\frac{1}{\mu F}\right] \quad , \quad \frac{1}{C_{ad}} = \frac{3}{0.5\mu F} \quad , \quad C_{ad} = \frac{0.5[\mu F]}{3}$$

finalmente $C_{ad} = 0.1667[\mu F]$

b) Para calcular V_{ad} procederemos como sigue: como V_{ab} es conocido y C_1 también, esto nos permite determinar Q_1, además $Q_1 = Q_{bc} = Q_4$ y con estos valores podremos calcular cada diferencia de potencial.

Como $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$, $Q_1 = C_1 V_{ab}$, $Q_1 = 0.5 \times 10^{-6}[F]40[V] = 20[\mu C]$ y ahora

$$V_{bc} = \frac{Q_{bc}}{C_{bc}} = \frac{20 \times 10^{-6}[C]}{0.5 \times 10^{-6}[F]} = 40[V] \quad y \quad V_{cd} = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{20 \times 10^{-6}[C]}{0.5 \times 10^{-6}[F]} = 40[V]$$

de esta manera $V_{ad} = (40 + 40 + 40)[V] = 120[V]$

c) Como $C_4 = 0.5[\mu F]$ y $A_4 = 0.005[m^2]$, de $C_4 = \dfrac{k_e \varepsilon_0 A_4}{d_4}$, $\dfrac{C_4}{\varepsilon_0 A_4} = \dfrac{k_e}{d_4} = 11'299{,}435\left[\dfrac{1}{m}\right]$

calculando la razón k_e/d para los dieléctricos:

$$\left.\frac{k_e}{d_4}\right|_{poli} = 11'304{,}348\left[\frac{1}{m}\right] \ , \ \left.\frac{k_e}{d_4}\right|_{diox} = 11'299{,}435\left[\frac{1}{m}\right] \ \text{y} \ \left.\frac{k_e}{d_4}\right|_{mica} = 8'750{,}000\left[\frac{1}{m}\right]$$

Con cierta aproximación se podrá emplear polietileno o mejor aún con el dióxido de titanio, pero debemos verificar si el dieléctrico soportará la diferencia de potencial $V_{cd} = 40[V]$; es decir, $V_{máx} \geq V_{cd}$

$$V_{máxpoli} = E_{ruppoli} \cdot d_{poli} = 22 \times 10^6[V/m]0.23 \times 10^{-6}[m] = 5.06[V]; \text{ no cumple}$$

$$V_{máxdiox} = E_{rupdiox} \cdot d_{diox} = 8 \times 10^6[V/m]8.85 \times 10^{-6}[m] = 70.8[V]; \text{ sí cumple}$$

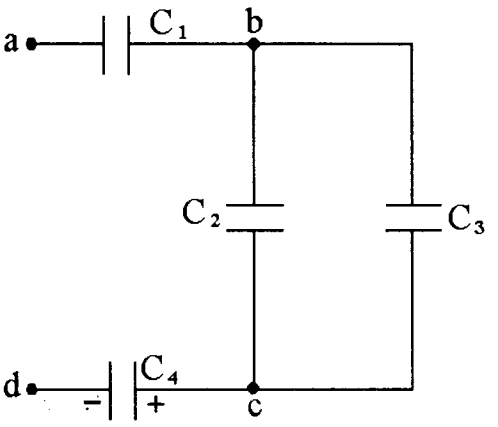
El dieléctrico adecuado es el dióxido de titanio.

d) Del inciso *b* se tiene $Q_1 = Q_{bc} = Q_4$, pero además $Q_1 = Q_T = 20[\mu C]$ y la energía

$$U_T = \frac{Q_T^2}{2C_T} \ , \ C_T = C_{ad} \ , \ U_T = \frac{(20 \times 10^{-6}[C])^2}{2(0.1667 \times 10^{-6}[F])} = 1.1997 \times 10^{-3}[J]$$

finalmente $U_T = 1.2[mJ]$

28. La conexión de capacitores de placas planas y paralelas, mostrada en la figura, fue energizada al conectarle una diferencia de potencial entre los puntos ***a*** y ***d***; se sabe que la carga en el capacitor C_4 es 0.1[mC] y las características de los capacitores se presentan en la tabla adjunta. Obtenga:



a) El valor de la diferencia de potencial V_{ad}.

b) La energía total almacenada en la red de capacitores.

c) El campo eléctrico en el dieléctrico de C_1.

d) La diferencia de potencial máxima que se puede aplicar entre los puntos ***a*** y ***d*** sin que se dañe capacitor alguno.

C[μF]	k_e	E_{rup}[kV/mm]	espesor [mm]
C_1 = 1.0	2.3	20	0.07
C_2 = 1.5	4.8	16	0.04
C_3 = 0.5	2.6	20	0.05
C_4 = 2.0	5.2	50	0.01

Resolución:

a) La diferencia de potencial V_{ad} se puede calcular como $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$, se sabe que

$Q_4 = 0.1[\text{mC}]$ y como $C_4 = 2[\mu\text{F}]$ se obtiene $V_{cd} = \dfrac{Q_4}{C_4}$

$V_{cd} = \dfrac{0.1 \times 10^{-3}[\text{C}]}{2 \times 10^{-6}[\text{F}]} = 50[\text{V}]$; además $Q_4 = Q_{2,3} = Q_1$, por lo tanto:

$V_{ab} = \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{0.1 \times 10^{-3}[\text{C}]}{1 \times 10^{-6}[\text{F}]} = 100[\text{V}]$, $C_{2,3} = C_2 + C_3 = 2[\mu\text{F}]$, $V_{bc} = \dfrac{Q_{2,3}}{C_{2,3}} = \dfrac{0.1 \times 10^{-3}[\text{C}]}{2 \times 10^{-6}[\text{F}]} = 50[\text{V}]$ y

$V_{ad} = (100 + 50 + 50)[\text{V}] = 200[\text{V}]$

b) $U = 0.5 C_{ad} V_{ad}^2$, $C_{ad} = ?$, calculemos $C_{bd} = \dfrac{C_{2,3} C_4}{C_{2,3} + C_4} = \dfrac{2[\mu\text{F}]2[\mu\text{F}]}{2[\mu\text{F}] + 2[\mu\text{F}]} = 1[\mu\text{F}]$ ahora

$C_{ad} = \dfrac{C_1 C_{bd}}{C_1 + C_{bd}} = \dfrac{1(1)\,\mu\text{F}}{1 + 1} = 0.5[\mu\text{F}]$ y $U = 0.5(0.5 \times 10^{-6})(200)^2 = 0.01[\text{J}]$

c) El campo eléctrico E_1, en magnitud, es $E_1 = \dfrac{V_{ab}}{d_1}$, $E_1 = \dfrac{100[\mathrm{V}]}{0.07 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]} = 1'428{,}571\left[\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$

d) Calculemos los voltajes máximos de los capacitores y la carga máxima de cada uno:

$$V_{1máx} = E_{rup1} \cdot d_1 = 20[\mathrm{kV/mm}]0.07[\mathrm{mm}] = 1{,}400[\mathrm{V}] \;\; ; \;\; Q_{1máx} = C_1 V_{1máx} = 1.4[\mathrm{mC}]$$

$$V_{2máx} = E_{rup2} \cdot d_2 = 16[\mathrm{kV/mm}]0.04[\mathrm{mm}] = 640[\mathrm{V}] \;\; ; \;\; Q_{2máx} = C_2 V_{2máx} = 0.96[\mathrm{mC}]$$

$$V_{3máx} = E_{rup3} \cdot d_3 = 20[\mathrm{kV/mm}]0.05[\mathrm{mm}] = 1{,}000[\mathrm{V}] \;\; ; \;\; Q_{3máx} = C_3 V_{3máx} = 0.5[\mathrm{mC}]$$

$$V_{4máx} = E_{rup4} \cdot d_4 = 50[\mathrm{kV/mm}]0.01[\mathrm{mm}] = 500[\mathrm{V}] \;\; ; \;\; Q_{4máx} = C_4 V_{4máx} = 1.0[\mathrm{mC}]$$

De estos valores se concluye que $V_{bcmáx} = 640[\mathrm{V}]$ y $Q_{2máx} = 0.96[\mathrm{mC}]$ y en C_3, $V_3 = 640[\mathrm{V}]$

$\therefore Q_3 = C_3 V_3$, $Q_3 = 0.5 \times 10^{-6}(640) = 0.32[\mathrm{mC}]$; esto significa que

$$Q_{2,3máx} = (0.96 + 0.32)[\mathrm{mC}] = 1.28[\mathrm{mC}]$$

Al comparar $Q_{1máx}$ con $Q_{2,3máx}$ y con $Q_{4máx}$ se llega a:

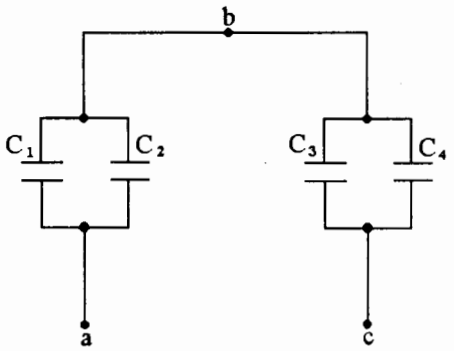
$$Q_{4máx} < Q_{2,3máx} < Q_{1máx}$$

como el capacitor C_4 con la carga $Q_{4máx}$ estaría en su límite de operación, se toma el valor menor de estas cargas máximas para calcular $V_{admáx}$

$$V_{admáx} = \frac{Q_{4máx}}{C_1} + \frac{Q_{4máx}}{C_{2,3}} + \frac{Q_{4máx}}{C_4} \;\; ; \;\; V_{admáx} = \frac{1 \times 10^{-3}[\mathrm{C}]}{1 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]} + \frac{1 \times 10^{-3}[\mathrm{C}]}{2 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]} + \frac{1 \times 10^{-3}[\mathrm{C}]}{2 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]}$$

$$V_{admáx} = (1{,}000 + 500 + 500)[\mathrm{V}] = 2{,}000[\mathrm{V}]$$

29. Para la conexión de capacitores mostrada en la figura, se cuenta con la tabla anexa en la cual se indica el valor de capacitancia y el voltaje máximo individual de cada capacitor; además se sabe que existe una diferencia de potencial $V_{ac} = 100[\mathrm{V}]$. Calcule:



a) La energía almacenada en el capacitor C_3.

b) La diferencia de potencial máxima V_{ac} que se puede aplicar, sin que se dañe capacitor alguno.

Capacitor	Valor [μF]	$V_{máx}$[V]
C_1	0.2	63
C_2	0.8	125
C_3	0.7	70
C_4	0.3	220

Resolución:

a) La energía almacenada se calcula con $U_3 = 0.5C_3V_3^2$, determinemos $V_3 = V_{bc}$. Como se conoce V_{ac}, con ésta y con el valor del capacitor equivalente entre los puntos *a* y *c* se puede encontrar la carga de éste último la cual es igual a la de los capacitores C_{ab} y C_{bc}.

$$C_{ab} = C_1 + C_2 = (0.2 + 0.8)[\mu\mathrm{F}] = 1[\mu\mathrm{F}] \quad ; \quad C_{bc} = C_3 + C_4 = (0.7 + 0.3)[\mu\mathrm{F}] = 1[\mu\mathrm{F}]$$

C_{ab} y C_{bc} resultan en serie, por lo que

$$C_{ac} = \frac{C_{ab}C_{bc}}{C_{ab} + C_{bc}} = \frac{1(1)[\mu\mathrm{F}]}{1 + 1} = 0.5[\mu\mathrm{F}] \text{ entonces}$$

$$Q_{ac} = C_{ac}V_{ac} = 0.5 \times 10^{-6}(100)$$

$Q_{ac} = 50[\mu\mathrm{C}] = Q_{ab} = Q_{bc}$, con esto

$$V_{bc} = \frac{Q_{bc}}{C_{bc}} = \frac{50 \times 10^{-6}[\mathrm{C}]}{1 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]} = 50[\mathrm{V}]$$

también se puede concluir $V_{ab} = 50[\mathrm{V}]$

$$\therefore U_3 = 0.5(0.7 \times 10^{-6})(50)^2 = 0.875[\mathrm{mJ}]$$

b) Como C_1 y C_2 están conectados en paralelo, sus diferencias de potencial son iguales, por lo tanto $V_{abmáx} = V_{1máx}$ ya que así ni C_1 ni C_2 se dañan.

Por razones semejantes $V_{bc\,máx} = V_{3\,máx}$, de este modo C_3 operará en su límite y C_4 estará en situación totalmente protegida.

Para calcular $V_{ac\,máx}$, supongamos que uno de los capacitores equivalentes C_{ab} con $V_{ab\,máx} = 63[\mathrm{V}]$, o C_{bc} con $V_{bc\,máx} = 70[\mathrm{V}]$, está funcionando con su $V_{máx}$, digamos C_{bc}; de esta forma $Q_{bc\,máx} = C_{bc} V_{bc\,máx}$

$Q_{bc\,máx} = 1 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]70[\mathrm{V}] = 70[\mu\mathrm{C}]$ y como C_{bc} queda en serie con C_{ab}, $Q'_{ab} = Q_{bc\,máx}$; con esta carga calculamos

$$V'_{ab} = \frac{Q'_{ab}}{C_{ab}} = \frac{70 \times 10^{-6}[\mathrm{C}]}{1 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]} = 70[\mathrm{V}];$$

este valor resulta $V'_{ab} > V_{ab\,máx}$ y significa que C_{bc} no debe operar con su $V_{bc\,máx}$, porque así se dañaría C_{ab}.

Por esta razón con $V_{ab\,máx} = 63[\mathrm{V}]$ calculamos $Q_{ab\,máx} = C_{ab} V_{ab\,máx} = 1 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]63[\mathrm{V}] = 63[\mu\mathrm{C}]$ y como $Q_{ab\,máx} = Q'_{bc}$

$$V'_{bc} = \frac{Q'_{bc}}{C_{bc}} = \frac{63 \times 10^{-6}[\mathrm{C}]}{1 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]} = 63[\mathrm{V}],$$ verificamos que $V'_{bc} \leq V_{bc\,máx}$ y así:

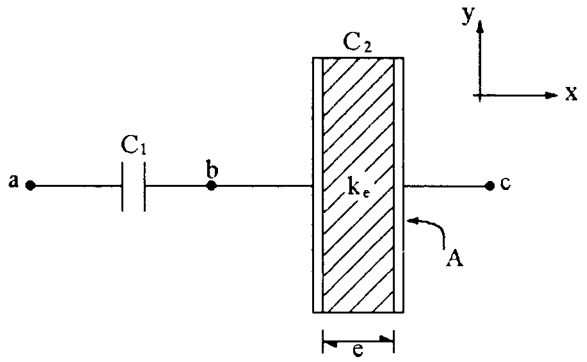
$$V_{ac\,máx} = V_{ab\,máx} + V'_{bc} \quad ; \quad V_{ac\,máx} = (63 + 63)[\mathrm{V}] = 126[\mathrm{V}]$$

Observación: en este caso particular, los voltajes de C_{ab} y C_{bc} resultaron iguales porque $C_{ab} = C_{bc}$ y quedan conectados en serie (cargas iguales).

30. A la conexión de capacitores mostrada en la figura, en la cual $C_1 = 150[\text{nF}]$, $C_2 = 15[\text{nF}]$, $A = 0.5[\text{m}^2]$ y $k_e = 4$, se le aplica una diferencia de potencial $V_{ac} = 150[\text{V}]$. Determine:

a) El vector polarización $\vec{P}$ en el dieléctrico de C_2.

b) La densidad σ_i de carga inducida en la cara izquierda del dieléctrico de C_2.



Resolución:

a) La polarización $\vec{P}_2$ se determina a través de $\vec{P}_2 = \varepsilon_0 \chi_2 \vec{E}_2$, en la cual $\chi_2 = k_{e2} - 1$ y $E_2 = \dfrac{V_{bc}}{e}$; se desconocen V_{bc} y e, por lo tanto:

$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$, si obtenemos el capacitor equivalente entre los puntos a y c podremos calcular su carga eléctrica y, como es la misma, la de C_1 y C_2.

$$C_{ac} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad , \quad C_{ac} = \frac{150(15)[\text{nF}]}{150 + 15} = 13.636[\text{nF}] \quad ; \quad q_{ac} = C_{ac} V_{ac} = 13.636 \times 10^{-9}(150)[\text{C}]$$

$$q_{ac} = 2.045[\mu\text{C}] = q_1 = q_2 \quad ; \quad V_{ab} = \frac{q_1}{C_1} = 13.633[\text{V}] \text{ y } V_{bc} = \frac{q_2}{C_2} = 136.333[\text{V}]$$

Además, para calcular el espesor e, empleamos la expresión de capacitancia de placas planas y paralelas:

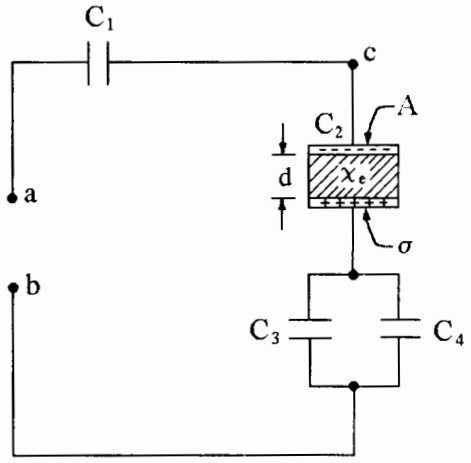
$$C_2 = \frac{\varepsilon A}{e} = \frac{k_{e2}\varepsilon_0 A}{e} \quad ; \quad e = \frac{k_{e2}\varepsilon_0 A}{C_2} = \frac{4(8.85 \times 10^{-12})0.5[\text{m}]}{15 \times 10^{-9}} = 1.18 \times 10^{-3}[\text{m}], \text{ entonces:}$$

$$\vec{P}_2 = \varepsilon_0 \chi_{e2} \frac{V_{bc}}{e} \hat{i} \quad ; \quad \vec{P} = 8.85 \times 10^{-12}\left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right](4 - 1)\frac{136.333\hat{i}}{1.18 \times 10^{-3}}\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right] = 3.068\hat{i}\left[\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}\right]$$

b) Sabemos que $|\vec{P}| = \sigma_i$; es decir, el módulo de la polarización es la densidad superficial de carga inducida; en la cara izquierda del dieléctrico de C_2 se tendrá carga inducida negativa ya que $V_b > V_c$; por lo tanto:

$$\sigma_i = -3.068 \times 10^{-6}[\text{C/m}^2]$$

31. Un arreglo como el mostrado, fue energizado con una diferencia de potencial $V_{ba} > 0$ y se sabe que la densidad superficial de carga en el electrodo inferior del capacitor C_2 es $\sigma = 10[\mu C/m^2]$. Si $d = 0.5[mm]$, $A = 0.01[m^2]$, $\chi_e = 2$, $C_1 = C_4 = 100[pF]$ y $C_3 = 200[pF]$. Calcule:



a) La energía almacenada en el capacitor C_4.

b) La diferencia de potencial V_{ab}.

c) Si los puntos *a* y *c* se unen con un alambre conductor, determine si C_2 se daña o no; considere $V_{ab} = 1{,}522[V]$ y $E_{rup2} = 1[kV/mm]$.

Resolución:

a) Para calcular $U_4 = 0.5 C_4 V_4^2$, requerimos V_4;

$V_4 = V_3 = V_{3,4}$. Con los datos podemos calcular Q_2 y sabemos que $Q_2 = Q_{3,4} = Q_1$; de esta forma

$Q_2 = \sigma A$, $Q_2 = 10 \times 10^{-6}[C/m^2]0.01[m^2] = 0.1[\mu C]$, además $C_{3,4} = C_3 + C_4$

$C_{3,4} = (200 + 100)[pF]$, $C_{3,4} = 300[pF] \therefore V_4 = \dfrac{Q_{3,4}}{C_{3,4}} = \dfrac{0.1 \times 10^{-6}[C]}{300 \times 10^{-12}[F]} = 333.33[V]$ y

$U_4 = 0.5(100 \times 10^{-12}[F])(333.33[V])^2 = 5.555[\mu J]$

b) La diferencia $V_{ab} = -V_{ba}$, $V_{ba} = V_4 + V_2 + V_{ca}$; calculemos V_2 y V_{ca}: requerimos

$C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 A k_e}{d} = \dfrac{\varepsilon_0 A(1 + \chi_e)}{d}$, $C_2 = \dfrac{8.85 \times 10^{-12}(0.01)(1 + 2)}{0.5 \times 10^{-3}} = 531[pF]$ así

$V_2 = \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{0.1 \times 10^{-6}[C]}{531 \times 10^{-12}[F]} = 188.32[V]$ y $V_{ca} = \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{0.1 \times 10^{-6}[C]}{100 \times 10^{-12}[F]} = 1{,}000[V]$ entonces

$V_{ab} = -(333.33 + 188.32 + 1{,}000) = -1{,}521.65[V] \approx -1{,}522\ [V]$

c) Al unir los puntos *a* y *c* con un alambre conductor, se consigue que $V_a = V_c$ y $V_{ac} = 0$, esto origina que C_1 no pueda acumular cargas en sus electrodos. De esta forma la diferencia $V_{ab} = 1{,}522[V]$ resulta aplicada a la conexión de C_2 en serie con $C_{3,4}$, la cual consideraremos sin carga inicial acumulada, ya que V_{ab} de este inciso es de polaridad opuesta a la de los incisos anteriores. Calculemos

$$V_{2máx} = E_{rup2} \cdot d = 1[\text{kV/mm}]0.5[\text{mm}] = 0.5[\text{kV}] = 500[\text{V}].$$

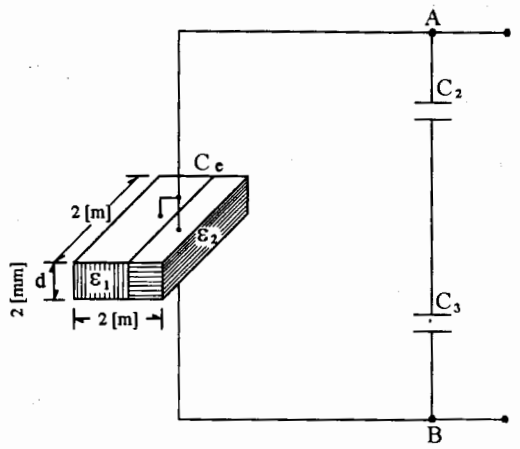
Por otra parte, la diferencia V_{ab} será aplicada al capacitor C_{ab} y éste vale:

$$C_{ab} = \frac{C_2 C_{34}}{C_2 + C_{34}} = \frac{531(300)[\text{pF}]}{531 + 300} \doteq 191.7[\text{pF}] \text{ y } Q_{ab} = C_{ab}\, V_{ab} = 191.7 \times 10^{-12}(1{,}522)$$

$$Q_{ab} = 0.2918[\mu\text{C}] = Q'_2 = Q'_{3,4} \text{ y } V'_2 = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{0.2918 \times 10^{-6}[\text{C}]}{531 \times 10^{-12}[\text{F}]} = 549.46[\text{V}]$$

al comparar este valor con $V_{2máx}$, resulta que $V'_2 > V_{2máx}$ y esto significa que el capacitor C_2 sí resultaría dañado.

32. Considere el circuito de capacitores mostrado en la figura, en el cual $C_e = 50[\text{nF}]$, $C_2 = C_3 = 100[\text{nF}]$. Determine:



a) Las dimensiones de las dos placas dieléctricas del capacitor C_e, si se sabe que la energía total en la región 1 es tres veces la energía total en la región 2, y $D_1 = 2D_2$.

b) El capacitor equivalente entre los puntos A y B.

c) La carga inducida en la cara superior de los dieléctricos 1 y 2, si $V_{AB} = 100[\text{V}]$, $\varepsilon_1 = 31.25[\text{pF/m}]$ y $\varepsilon_2 = 15.625[\text{pF/m}]$.

Resolución:

a) Se sabe que $U_{e1} = 3U_{e2}$, es decir

$0.5C_{e1}V_{AB}^2 = \left[0.5C_{e2}V_{AB}^2\right]3$, o sea $C_{e1} = 3C_{e2}$ por lo tanto:

$\dfrac{\varepsilon_1 A_1}{d_1} = 3\dfrac{\varepsilon_2 A_2}{d_2}$ en la cual $d_1 = d_2 = 2[\text{mm}] = d$, y $A_1 = \ell a$ y $A_2 = \ell b$ siendo $\ell = 2[\text{m}]$ y $a + b = \ell$,

entonces: $\dfrac{\varepsilon_1 \ell a}{d} = \dfrac{3\varepsilon_2 \ell b}{d}$, es decir $\varepsilon_1 a = 3\varepsilon_2 b$; además $D_1 = 2D_2$

como $D = \varepsilon E$ y $E = \dfrac{V_{AB}}{d}$ entonces $\varepsilon_1 \dfrac{V_{AB}}{d} = 2\varepsilon_2 \dfrac{V_{AB}}{d}$; $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ y sustituyéndola en:

$\varepsilon_1 a = 3\varepsilon_2 b$, se obtiene $2\varepsilon_2 a = 3\varepsilon_2 b$, $a = \dfrac{3}{2}b$; de ésta y de $a + b = 2$ resulta: $a = 1.2[\text{m}]$ y $b = 0.8[\text{m}]$, finalmente:

Dieléctrico	Largo (ℓ)	Espesor (d)	Ancho	Área
ε_1	2 [m]	2 [mm]	$a = 1.2$ [m]	$\ell a = A_1 = 2.4[\text{m}^2]$
ε_2	2 [m]	2 [mm]	$b = 0.8$ [m]	$\ell b = A_2 = 1.6[\text{m}^2]$

b) Para calcular C_{AB}, requerimos

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + c_3} \quad , \quad C_{23} = \frac{100(100)[\text{nF}]}{100 + 100} = 50[\text{nF}]$$

y $C_{ab} = C_e + C_{23}$, $C_{AB} = (50 + 50)[\text{nF}]$ y $C_{AB} = 100[\text{nF}]$

c) Para calcular las cargas inducidas requerimos las densidades superficiales σ_{i1} y σ_{i2}

las que se determinan con $\sigma_i = |\vec{P}| = \varepsilon_0 \chi_e E$, $\chi_e = k_e - 1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1$

$$\sigma_{i1} = \varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1\right)\frac{V_{AB}}{d} \quad ; \quad \sigma_{i1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_{AB}}{d}, \text{ como } \varepsilon_1 = 31.25 \times 10^{-12}\left[\frac{\text{F}}{\text{m}}\right] \text{ y } \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right],$$

surge la pregunta ¿ $\left[\frac{\text{F}}{\text{m}}\right] = \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right]$?

veamos $\left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{m}}\right] = \left[\frac{\text{C}\cdot\text{C}}{\text{J}\cdot\text{m}}\right] = \left[\frac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}\right] = \left[\frac{\text{F}}{\text{m}}\right]$, por lo tanto:

$$\sigma_{i1} = (31.25 - 8.85)\,10^{-12}\left(\frac{100}{0.002}\right)\left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right] = 1.12\left[\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}\right] \quad , \quad \sigma_{i2} = (15.625 - 8.85)\,10^{-12}\left(\frac{100}{0.002}\right) = 338.75\left[\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}\right]$$

Las cargas inducidas en las caras superiores de los dieléctricos son negativas, ya que $V_A > V_B$ puesto que $V_{AB} > 0$:

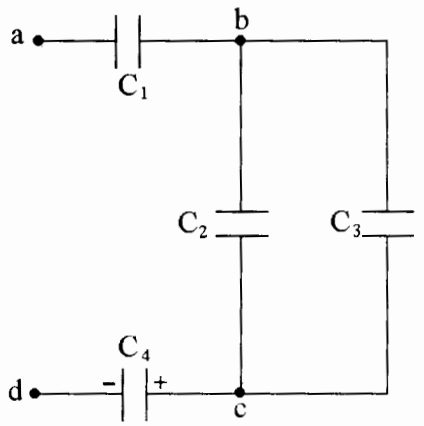
$$q_{i1} = \sigma_{i1} A_1 = -1.12 \times 10^{-6}(2.4) = -2.688[\mu\text{C}] \text{ y } q_{i2} = -338.75 \times 10^{-9}(1.6) = -0.542[\mu\text{C}]$$

Problemas propuestos

1. La conexión de capacitores mostrada en la figura se energizó al conectarle una diferencia de potencial entre los puntos ***a*** y ***d***; se sabe que $C_1 = 3[\mu F]$, $C_2 = 5[\mu F]$, $C_3 = 1[\mu F]$ y $C_4 = 2[\mu F]$; además, la carga en el capacitor C_4 es $0.3[mC]$. Determine:

a) El valor de la diferencia de potencial aplicada (V_{ad}).

b) La energía total almacenada en la red de capacitores.

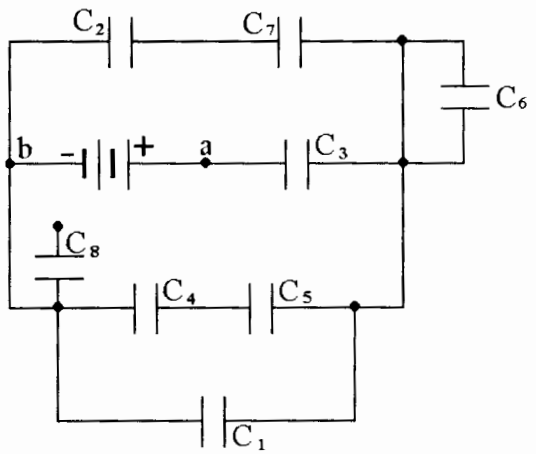


2. Suponga que un conjunto de capacitores se ha conectado a una fuente de fem como se indica en el circuito. Con base en la figura, en la cual los valores en $[\mu F]$ son: $C_1 = 30$, $C_2 = C_7 = 40$, $C_3 = 150$, $C_4 = C_5 = 200$, $C_6 = 400$ y $C_8 = 500$, además de que $V_{ab} = 0.5[kV]$, calcule:

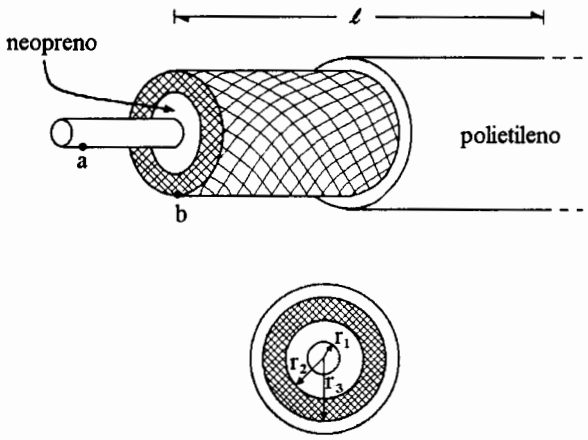
a) La capacitancia equivalente entre los puntos ***a*** y ***b***.

b) La diferencia de potencial del capacitor C_3.

c) La energía total que almacena el conjunto de capacitores.



3. Al cable coaxial (cilindros coaxiales) mostrado en la figura se le aplica una diferencia de potencial $V_{ab} > 0$. Si el aislante utilizado entre los conductores es neopreno y considerando la información adicional, determine:



a) La capacitancia del cable coaxial.

b) El valor máximo que puede tomar V_{ab} para que el aislante no conduzca.

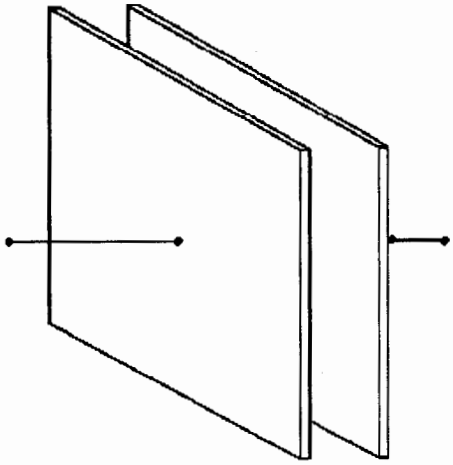
c) La región en la que se presentaría primeramente el daño en el dieléctrico al aplicar el voltaje de ruptura. Justifique su respuesta.

neopreno
$E_{rup} = 12 \times 10^6$ [V/m]
$k_e = 5.9$

polietileno
$E_{rup} = 18 \times 10^6$ [V/m]
$k_e = 2.3$

cable coaxial
$r_1 = 3$ [cm]
$r_2 = 5$ [cm]
$r_3 = 5.6$ [cm]
$\ell = 2$ [km]

4. Se requiere diseñar un capacitor de placas planas y paralelas, con una capacitancia de 2 [nF] y que opere adecuadamente con una diferencia de potencial de 55 [V].



a) Seleccione el dieléctrico apropiado para que el área A de cada placa sea mínima y determine dicha área.

Dieléctrico	k_e	E_{rup} [kV/m]	Espesor [mm]
1	25.2	100	1.0
2	25.2	10	1.0
3	11.3	100	0.5
4	11.3	30	2.0

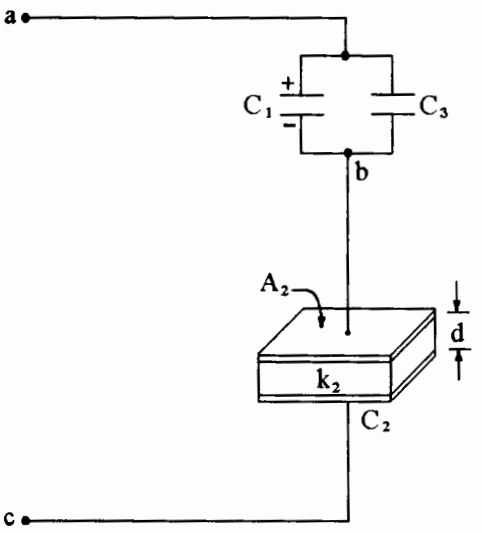
5. Para el circuito mostrado en la figura en el cual $C_1 = 3[\text{nF}]$, $C_3 = 2[\text{nF}]$, $A_2 = 400[\text{cm}^2]$, $d = 0.1[\text{mm}]$, $k_{e2} = 5$ y $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$, determine:

a) El valor de C_2.

b) La capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *c*.

c) La diferencia de potencial V_{ac}, si la carga en el capacitor C_1 es $15[\mu\text{C}]$.

d) La energía total almacenada en el arreglo.



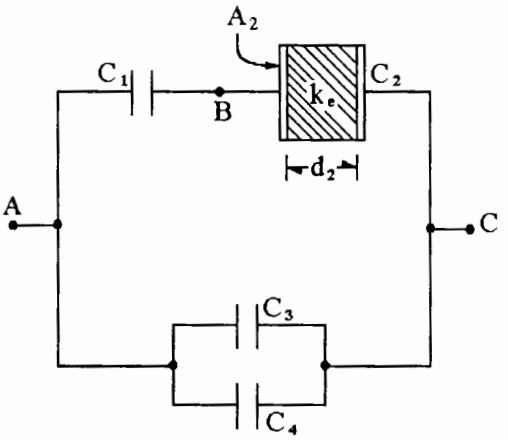
6. Para el circuito de capacitores mostrado en la figura en el cual:

$A_2 = 0.01[\text{m}^2]$, $k_e = 10$ y $d_2 = 1[\text{mm}]$;
$V_{AC} = 200[\text{V}]$, $C_1 = 2[\text{nF}]$ y $C_3 = C_4 = 10[\text{nF}]$.

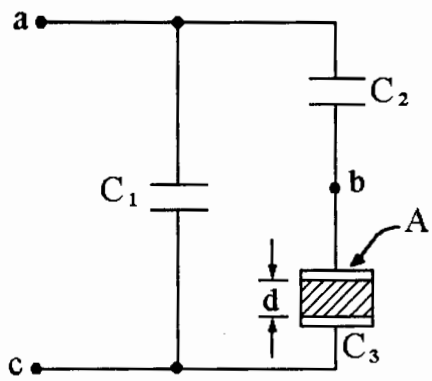
a) Determine el valor del capacitor C_2.

b) Calcule el capacitor equivalente, entre los puntos *A* y *C*.

c) Obtenga el valor de la carga Q_2 del capacitor C_2 si se tiene un voltaje $V_{AC} = 200[\text{V}]$.



7. Para el arreglo de capacitores mostrado, determine:



a) El dieléctrico necesario para que el capacitor C_3 tenga capacitancia de 1 [nF] y pueda soportar una diferencia de potencial de 100[V] sin dañarse, considere $A = 100[\text{cm}^2]$ y $d = 1[\text{mm}]$.

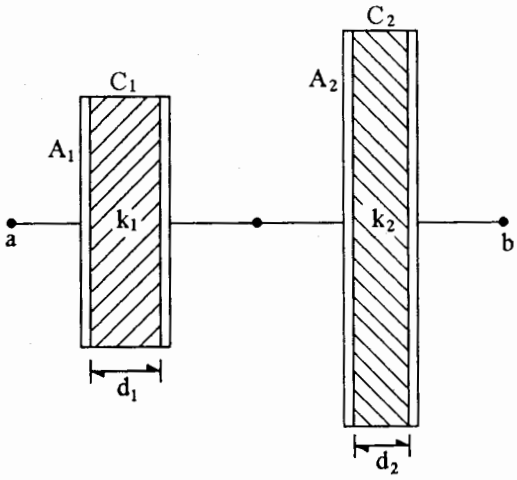
b) La capacitancia C_1 para que la energía total almacenada en el arreglo sea de 10[μJ], cuando $V_{ac} = 100[\text{V}]$ y $C_2 = C_3$.

c) La carga almacenada en un capacitor C'_2 (nuevo), cuando $V_{ac} = 100[\text{V}]$ y este capacitor fuese de 10[nF].

d) El voltaje entre los extremos del capacitor C_2, si su capacitancia fuese de 10[nF] y $V_{ac} = 100[\text{V}]$.

Dieléctrico	k_e	E_{rup}[kV/m]
1	25.2	10
2	11.3	100
3	11.3	30
4	25.2	100

8. Para el arreglo de capacitores mostrado, con base en los datos que se proporcionan, calcule:



a) La energía almacenada en el arreglo, si $V_{ab} = 250[\text{V}]$.

b) La diferencia de potencial V_{ab} máxima que es capaz de soportar el arreglo, sin que se dañen los dieléctricos.

$$E_{R1} = 5[\text{kV/mm}],\ k_1 = 10,\ A_1 = 100[\text{cm}^2],\ d_1 = 0.1[\text{mm}]$$

$$E_{R2} = 4[\text{kV/mm}],\ k_2 = 25,\ A_2 = 400[\text{cm}^2],\ d_2 = 0.1[\text{mm}]$$

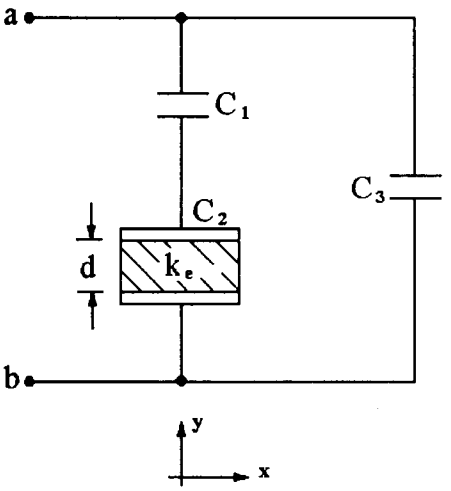
9. En el sistema de capacitores mostrado, en el cual $C_1 = 0.5[\mu F]$ y $C_3 = 0.1[\mu F]$, se sabe que la capacitancia equivalente entre los puntos ***a*** y ***b*** es $C_{ab} = 0.35[\mu F]$, el campo eléctrico en el capacitor C_2 es $E_2 = -100\hat{j}[kV/m]$, el dieléctrico de C_2 tiene un espesor $d = 0.1[mm]$ y su permitividad eléctrica relativa es $k_e = 6.9$. Determine:

a) El valor de C_2.

b) La diferencia de potencial V_{ab}.

c) El área de cada placa plana del capacitor C_2.

d) La energía total que almacena el sistema.

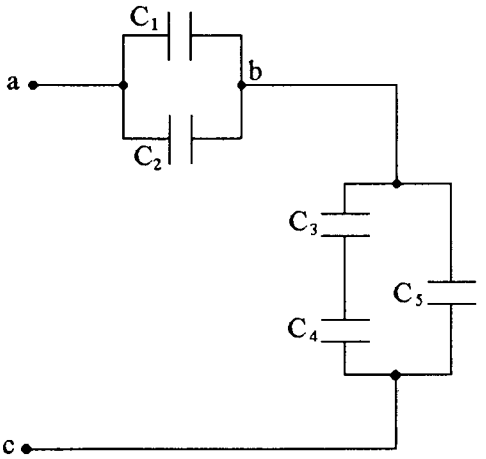


10. Con los capacitores $C_1 = C_2 = 47[\mu F]$, $C_3 = C_4 = 100[\mu F]$ y $C_5 = 10[\mu F]$ se formó el circuito de la figura, si la diferencia de potencial entre ***a*** y ***c*** es 15[V], determine:

a) La capacitancia equivalente entre ***a*** y ***c***.

b) La carga en el capacitor C_4

c) El voltaje de trabajo máximo de C_5 si se emplea mica en este capacitor de placas planas y paralelas.

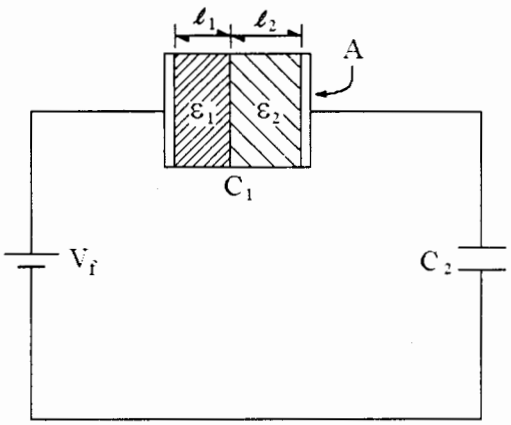


Material	Espesor [mm]	k_e	E_{rup}[MV/m]
mica	0.1	6	160
vidrio	1	4.5	13
porcelana	2	6.5	4

11. Para el circuito mostrado en la figura, donde $A = 1[\text{cm}^2]$, $C_2 = 10[\text{nF}]$ y la información de los dieléctricos de C_1 es:

$\ell_1 = 2[\text{cm}]$, $\varepsilon_1 = 100\varepsilon_0$, $E_{rup1} = 10[\text{kV/cm}]$,

$\ell_2 = 3[\text{cm}]$, $\varepsilon_2 = 500\varepsilon_0$ y $E_{rup2} = 25[\text{kV/cm}]$.



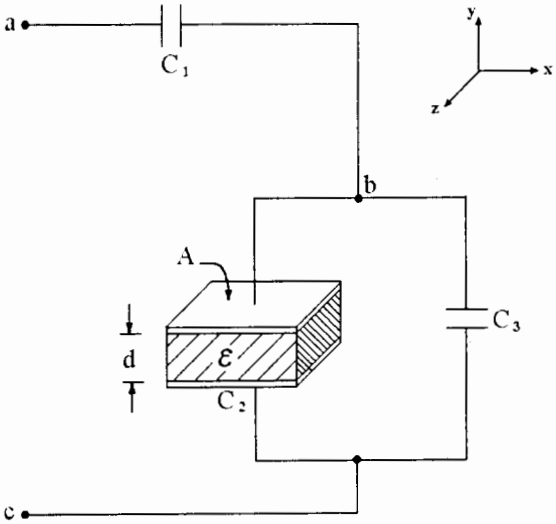
Determine:

a) El valor de la fuente V_f, si el voltaje del capacitor C_1, es 1,000[V].

b) La energía total almacenada en el arreglo cuando $V_{c1} = 1{,}000[\text{V}]$.

c) El voltaje máximo que puede tener aplicado entre sus terminales el capacitor C_1, sin dañarse.

12. Cuando una conexión de capacitores como la mostrada se conecta a una diferencia de potencial V_{ac}, el valor V_{bc} resulta ser 160[V]; si $C_1 = 6[\text{nF}]$, $C_3 = 4[\text{nF}]$, $A = 0.02[\text{m}^2]$, $d = 0.5[\text{mm}]$, $\varepsilon = 2 \times 10^{-10}[\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)]$ y $E_{rup2} = 7.08[\text{MV/m}]$, calcule:



a) La capacitancia de C_2.

b) La diferencia de potencial V_{ac} aplicada, si $Q_2 = 1.28[\mu\text{C}]$.

c) El desplazamiento eléctrico D en el dieléctrico de C_2.

d) El voltaje máximo que puede soportar el capacitor C_2.

Respuestas de los problemas propuestos

1. *a*) $V_{ad} = 300[\text{V}]$

   b) $U_T = 0.045[\text{J}]$

2. *a*) $C_{ab} = 75[\mu\text{F}]$

   b) $V_3 = 250[\text{V}]$

   c) $U_T = 9.375[\text{J}]$

3. *a*) $C = 1.285[\mu\text{F}]$

   b) $V_{ab\,máx} = 183{,}897[\text{V}]$

   c) en los puntos con $r = r_1$, ya que:

   $$E_{máx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2\lambda}{r_{mín}}$$

4. *a*) dieléctrico 1 y $A_{mín} = 89.68[\text{cm}^2]$

5. *a*) $C_2 = 17.7[\text{nF}]$

   b) $C_{ac} = 3.899[\text{nF}]$

   c) $V_{ac} = 6{,}412.43[\text{V}]$

   d) $U_T = 80.16[\text{mJ}]$

6. *a*) $C_2 = 0.885[\text{nF}]$

   b) $C_{ac} = 20.614[\text{nF}]$

   c) $Q_2 = 122.7[\text{nC}]$

7. *a*) dieléctrico 2

   b) $C_1 = 1.5[\text{nF}]$

   c) $q'_2 = 90.91[\text{nC}]$

   d) $V_2 = V_{ab} = 9.091[\text{V}]$

8. *a*) $U_T = 251.42[\mu\text{J}]$

   b) $V_{ab\,máx} = 550[\text{V}]$

9. *a*) $C_2 = 0.5[\mu\text{F}]$

   b) $V_{ab} = 20[\text{V}]$

   c) $A = 0.8188[\text{m}^2]$

   d) $U_T = 70[\mu\text{J}]$

10. *a*) $C_{ac} = 36.623[\mu\text{F}]$

    b) $q_4 = 457.8[\mu\text{C}]$

    c) $V_{5\,máx} = 16[\text{kV}]$

11. *a*) $V_f = 1{,}000.34[\text{V}]$

    b) $U_T = 1.697[\mu\text{J}]$

    c) $V_{1\,máx} = 26[\text{kV}]$

12. *a*) $C_2 = 8[\text{nF}]$

    b) $V_{ac} = 480[\text{V}]$

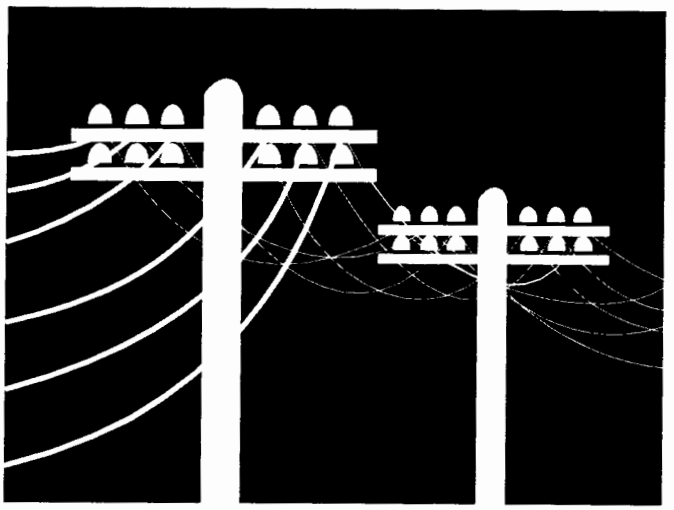
    c) $\vec{D}_2 = -64\hat{j}\,[\mu\text{C/m}^2]$

    d) $V_{2\,máx} = 3.54[\text{kV}]$

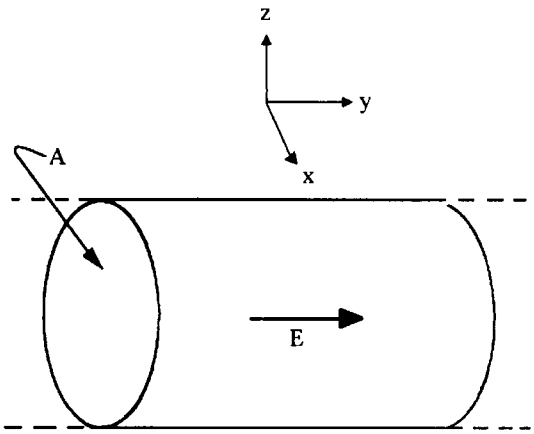
TEMA 3

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Problemas resueltos



1. El conductor metálico de la figura transporta una corriente constante. El campo eléctrico (uniforme) en el interior del conductor es $\vec{E} = 8.5\times10^{-3}\hat{j}[\text{V/m}]$, la sección transversal A del conductor es 2 [mm^2], su resistividad $\rho = 1.7\times10^{-8}[\Omega\cdot\text{m}]$ y su número de portadores de carga libres en cada metro cúbico es 8.5×10^{28}. Calcule:



a) El vector densidad de corriente.

b) La magnitud y sentido de la corriente convencional.

c) El vector velocidad de arrastre de los electrones.

d) La movilidad de los electrones.

Resolución:

a) Sabemos que la densidad de corriente $\vec{J}$ es un campo vectorial proporcional al campo eléctrico en un conductor, siendo σ (conductividad del material), la constante de proporcionalidad; así se tiene la expresión:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \text{ y como } \sigma = \frac{1}{\rho} : \vec{J} = \frac{8.5 \times 10^{-3}\hat{j}[\text{V/m}]}{1.7 \times 10^{-8}[\Omega\cdot\text{m}]} = 5 \times 10^{5}\hat{j}\left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right]$$

b) Como $I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{s}$, $I = JA$, $I = 5 \times 10^5[\text{A/m}^2]\ 2 \times 10^{-6}[\text{m}^2] = 1\,[A]$ y circula hacia la derecha, hacia la parte positiva del eje *y*.

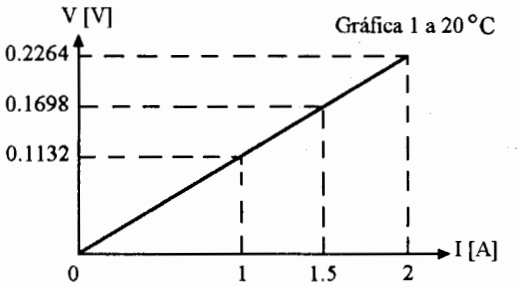
c) El sentido convencional de la corriente (movimiento de cargas positivas) es opuesto al movimiento de los electrones, de esta forma:

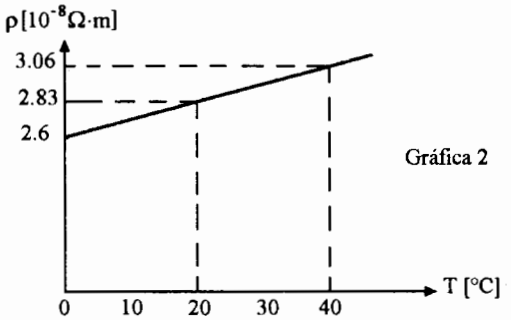
$$\vec{v}_- = \frac{1}{ne}\vec{J} \ , \ \vec{v}_- = \frac{5 \times 10^5\hat{j}[\text{A/m}^2]}{8.5 \times 10^{28}[1/\text{m}^3](-1.6 \times 10^{-19})[\text{C}]} = -36.76 \times 10^{-6}\hat{j}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

d) La velocidad de los portadores de carga ($\vec{v}$) es proporcional al campo eléctrico $\vec{E}$ en el conductor, en este caso la constante de proporcionalidad se denomina movilidad μ; es decir:

$$\vec{v} = \mu\vec{E} \text{ , por lo tanto } \mu = \frac{v}{E} = \frac{36.76 \times 10^{-6}[\text{m/s}]}{8.5 \times 10^{-3}[\text{V/m}]} = 4.32 \times 10^{-3}\left[\frac{\text{m}^2}{\text{V}\cdot\text{s}}\right]$$

2. Para una muestra de material conductor se obtuvieron, experimentalmente, las gráficas de variación de la diferencia de potencial entre los extremos de la muestra con respecto a la intensidad de corriente eléctrica (gráfica 1) y la de variación de la resistividad con respecto a la temperatura (gráfica 2). Con base en estas gráficas y en que la muestra es cilíndrica y recta, de longitud 20 [cm] y diámetro 0.2546 [mm], determine:





a) El valor del coeficiente α de variación de la resistividad con la temperatura.

b) La resistencia eléctrica de la muestra a 20 y 40 [°C].

c) La magnitud del vector campo eléctrico E a 20 [°C] si por la muestra circula una corriente eléctrica de 1.5 [A].

Resolución:

a) Sabemos que la variación de resistividad con la temperatura se evalúa con la expresión:

$$\rho_2 = \rho_1(1 + \alpha(T_2 - T_1)) \text{ , de la cual } \alpha = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1(T_2 - T_1)}$$

con la información de la gráfica 2

$$\alpha = \frac{(3.06 - 2.83)\,10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]}{2.83 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}](40 - 20)[°\text{C}]} \text{ finalmente}$$

$$\alpha = 4.064 \times 10^{-3}[°\text{C}^{-1}]$$

b) Para una muestra cilíndrica de conductor su resistencia se calcula con $R = \rho\frac{\ell}{A}$, donde

ℓ = longitud de la muestra y A = área transversal

como

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \therefore R = \frac{4\rho\ell}{\pi d^2} \;;\; R_{20} = \frac{4(2.83 \times 10^{-8})[\Omega \cdot \text{m}]0.20[\text{m}]}{\pi(0.2546 \times 10^{-3}[\text{m}])^2} \;,\; R_{20} = 0.1112[\Omega]$$

y a 40[°C]

$$R_{40} = \frac{4(3.06 \times 10^{-8})[\Omega \cdot \text{m}]0.20[\text{m}]}{\pi(0.2546 \times 10^{-3}[\text{m}])^2} \;,\; R_{40} = 0.1202\,[\Omega]$$

c) La magnitud del campo eléctrico en el conductor depende de la diferencia de potencial aplicada entre los extremos de la muestra y de la longitud de ésta; es decir:

$$E = \frac{V_{xy}}{\ell}$$

de la gráfica 1 tenemos que para que circule por la muestra una corriente de 1.5[A]

$$V_{xy} = 0.1698\,[\mathrm{V}]$$

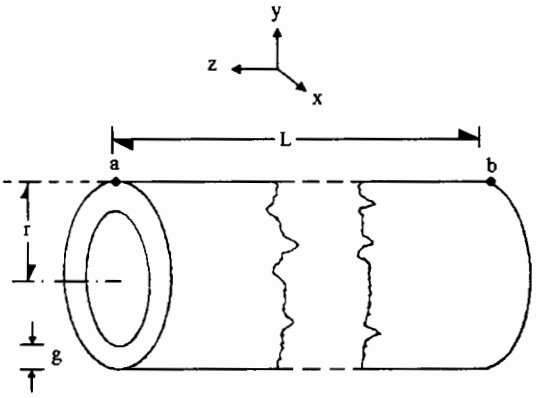
por lo tanto

$$E = \frac{0.1698\,[\mathrm{V}]}{0.20\,[\mathrm{m}]} = 0.849\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

Adicionalmente podemos calcular la densidad de corriente J, en su magnitud:

$$J = \frac{i}{A} = \frac{4i}{\pi d^2} = \frac{4(1.5)\,[\mathrm{A}]}{\pi\left(0.2546 \times 10^{-3}\,[\mathrm{m}]\right)^2} = 2.9463516 \times 10^7\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

3. Para el tubo conductor homogéneo mostrado en la figura, en el cual $L = 20\,[\mathrm{m}]$, $r = 0.7\,[\mathrm{cm}]$, $g = 0.1\,[\mathrm{cm}]$, $\vec{E} = 399.111\,\hat{k}\,[\mu\,\mathrm{V/m}]$, $\vec{J} = 24{,}485.379\,\hat{k}\,[\mathrm{A/m^2}]$ y $n = 5.87 \times 10^{22}$ portadores de carga libres en cada centímetro cúbico, obtenga:



a) La diferencia de potencial V_{ab} y la corriente que circula en el tubo.

b) La velocidad promedio de los portadores de carga positivos.

Resolución:

a) El tubo conductor es homogéneo en su material y en su sección transversal, por lo tanto el campo eléctrico en el interior es uniforme.

De la integral $V_{ba} = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\ell$, obtenemos: $V_{ba} = EL$

$$V_{ba} = 399.111 \times 10^{-6}[\mathrm{V/m}]20[\mathrm{m}] = 7.9822 \times 10^{-3}[\mathrm{V}]\ ,\ V_{ab} = -7.9822[\mathrm{mV}]$$

Para la corriente eléctrica sabemos que $I = \int\int J\cdot dS$, de la cual resulta

$$I = JA_c\ ,\ I = J\pi(r^2 - (r-g)^2)\ ,\ I = 24{,}485.379[\mathrm{A/m^2}]\pi((0.7 \times 10^{-2}[\mathrm{m}])^2 - (0.6 \times 10^{-2}[\mathrm{m}])^2)$$

$I = 1\,[\mathrm{A}]$; adicionalmente calculemos la resistencia del tubo:

como $V_{ba} = RI$, $R = \dfrac{V_{ba}}{I}$, $R = \dfrac{7.9822 \times 10^{-3}[\mathrm{V}]}{1[\mathrm{A}]} = 7.9822 \times 10^{-3}[\Omega]$.

O también, sabemos que $\vec{E} = \rho\vec{J}$ y $\rho = \dfrac{E}{J} = \dfrac{399.111 \times 10^{-6}[\mathrm{V/m}]}{24{,}485.379\,[\mathrm{A/m^2}]}$

$$\rho = 1.62999 \times 10^{-8}\left[\frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A}}\right] \quad \text{y} \quad A = \pi[(0.007[\mathrm{m}])^2 - (0.006[\mathrm{m}])^2] = 4.084 \times 10^{-5}[\mathrm{m^2}]$$

y como $R = \dfrac{\rho L}{A} = \dfrac{1.62999 \times 10^{-8}[\Omega\cdot\mathrm{m}]20[\mathrm{m}]}{4.084 \times 10^{-5}[\mathrm{m^2}]} = 7.9823 \times 10^{-3}[\Omega]$

b) Sabemos que $\vec{J} = n|e|\vec{v}$; $\vec{v} = \dfrac{\vec{J}}{n|e|} = \dfrac{24{,}485.379[\mathrm{A/m^2}]\hat{k}}{5.87 \times 10^{28}[1/\mathrm{m^3}]|-1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}]|}$

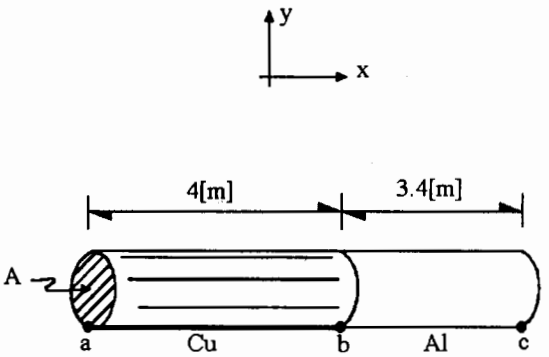
$$\vec{v} = 2.607 \times 10^{-6}\hat{k}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

adicionalmente calculemos la movilidad μ de los portadores, recordamos que $\vec{v} = \mu\vec{E}$,

por lo tanto

$$\mu = \frac{v}{E}\ ,\ \mu = \frac{2.607 \times 10^{-6}[\mathrm{m/s}]}{399.111 \times 10^{-6}[\mathrm{V/m}]} = 6.532 \times 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\cdot s}}\right]$$

4. Un alambre conductor se forma uniendo 4 [m] de alambre de cobre con 3.4 [m] de alambre de aluminio, ambos con A = 0.17 [mm^2] de sección transversal, como se indica en la figura. Si la temperatura de los alambres es T = 20 [°C] y la diferencia de potencial V_{ab} es 2[V], las resistividades a 20 [°C] son $\rho_{Cu} = 1.7 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]$ y $\rho_{Al} = 2.8 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]$; el número de portadores de carga libres en cada centímetro cúbico es: en el cobre 9×10^{22} y en el aluminio 6×10^{22}; calcule:



a) El campo eléctrico en cada material.

b) La densidad de corriente en cada material.

c) La resistencia total a 20 [°C] entre los extremos **a** y **c** del alambre.

d) La velocidad de arrastre en cada material.

e) La diferencia de potencial V_{ac}.

Resolución:

a) El campo eléctrico en el cobre se calcula con $E_{Cu} = \dfrac{V_{ab}}{d_{Cu}} = \dfrac{2[\text{V}]}{4[\text{m}]} = 0.5\left[\dfrac{\text{V}}{\text{m}}\right]$ finalmente $\vec{E}_{Cu} = 0.5\hat{i}[\text{V/m}]$

para determinar E_{Al} requerimos algunos cálculos previos: la corriente eléctrica i es la misma en el *Cu* y en *Al*.

$$i = \frac{V_{ab}}{R_{Cu}}\ ,\ R_{Cu} = \frac{\rho_{Cu} d_{Cu}}{A} = \frac{1.7 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]4[\text{m}]}{0.17 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 0.4[\Omega] \therefore i = \frac{2[\text{V}]}{0.4[\Omega]} = 5[\text{A}]$$

y

$$R_{Al} = \frac{\rho_{Al} d_{Al}}{A} = \frac{2.8 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]3.4[\text{m}]}{0.17 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 0.56[\Omega] \text{ y } V_{bc} = R_{Al}\, i = (0.56)(5) = 2.8[\text{V}]$$

y el campo eléctrico $\vec{E}_{Al} = \dfrac{2.8[\text{V}]\hat{i}}{3.4[\text{m}]} = 0.8235\,\hat{i}\left[\dfrac{\text{V}}{\text{m}}\right]$

b) Como $i = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$, $J = \dfrac{i}{\text{A}} = \dfrac{5[\text{A}]}{0.17 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 29'411{,}765\left[\dfrac{\text{A}}{\text{m}^2}\right]$, como $\vec{J}$ es un vector paralelo a $\vec{E}$: $\vec{J} = 29'411{,}765\left[\dfrac{\text{A}}{\text{m}^2}\right]\hat{i}$ en ambos materiales. La corriente i sería la misma en los dos o más materiales que se conectarán en forma análoga, $\vec{J}$ resultó igual en el *Cu* y en el *Al* debido a que los dos alambres tienen igual sección transversal A.

c) La resistencia total entre *a* y *c* se obtiene sumando las resistencias de los dos materiales:

$$R_T = R_{Cu} + R_{Al} = (0.4 + 0.56) = 0.96\,[\Omega]$$

d) Sabemos que $\vec{J} = ne\vec{v}$; $\vec{v} = \dfrac{\vec{J}}{ne}$, calcularemos la velocidad de arrastre o deriva para los portadores de carga negativos; es decir, de los electrones:

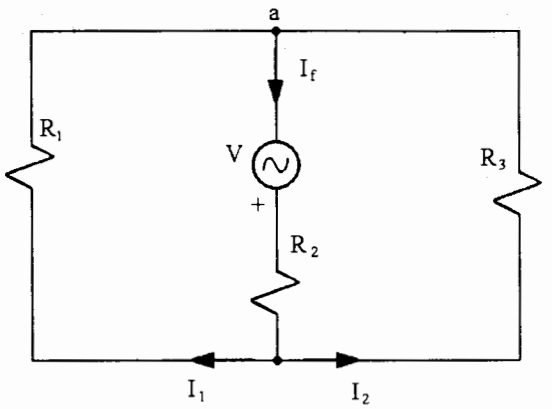
$$\vec{v}_{Cu} = \frac{29'411{,}765\,\hat{i}\,[\mathrm{A/m^2}]}{9 \times 10^{28}[1/\mathrm{m}^3](-1.6 \times 10^{-19})[\mathrm{C}]} = -2.042 \times 10^{-3}\,\hat{i}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

y en el aluminio $\vec{v}_{Al} = \dfrac{29'411{,}765\,\hat{i}\,[\mathrm{A/m^2}]}{6 \times 10^{28}[1/\mathrm{m}^3](-1.6 \times 10^{-19})[\mathrm{C}]} \doteq -3.064 \times 10^{-3}\,\hat{i}\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

$\vec{v}_{Al} > \vec{v}_{Cu}$, esto se explica observando que como el aluminio tiene menor número de portadores libres que el cobre $(n_{Al} < n_{Cu})$ los portadores del aluminio tienen que desplazarse más rápido para la misma *i*.

e) La diferencia $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$; $V_{ac} = (2 + 2.8)[\mathrm{V}] = 4.8[\mathrm{V}]$

5. Para el circuito eléctrico mostrado en la figura, en el cual la diferencia de potencial en la fuente es $V = 5\sqrt{2}\,\text{sen}\,\omega t$, $\omega = 2\pi f$ y $f = 60[\text{Hz}]$, $R_1 = R_3 = 50[\Omega]$ y $R_2 = 200[\Omega]$; obtenga:

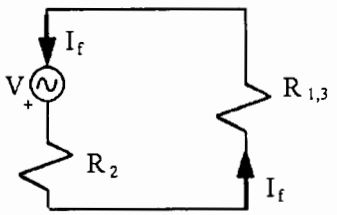


a) Las corrientes I_1, I_2 e I_f en función del tiempo.

b) La energía disipada promedio, en cada unidad de tiempo, por cada resistor de $50\,[\Omega]$.

Resolución:

a) Para calcular la corriente I_f es conveniente simplificar el circuito, reduciéndolo a su expresión mínima. Observamos que R_1 y R_3 están conectados en paralelo, por lo tanto el circuito queda:



$$R_{1,3} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\,,\quad R_{1,3} = \frac{50(50)\,[\Omega]}{50 + 50} = 25\,[\Omega]$$

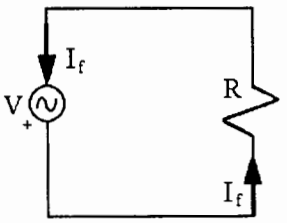
y como $R_{1,3}$ y R_2 quedan conectadas en serie:

$$R = R_{1,3} + R_2 = (25 + 200)\,[\Omega]$$

$$R = 225\,[\Omega]$$

$$V = RI_f$$

$$I_f = \frac{V}{R}$$



$$I_f = \frac{5\sqrt{2}\,\text{sen}\,\omega t\,[\text{V}]}{225\,[\Omega]} = 0.0314\,\text{sen}\,\omega t\,,\quad I_f = 0.0314\,\text{sen}(120\pi t)\,[\text{A}]$$

y ahora, como $R_1 = R_3$ se concluye que $I_1 = I_2$

$$\text{e } I_1 = \frac{I_f}{2} = \frac{0.0314\,\text{sen}\,120\pi t}{2}\,;\quad I_1 = 0.0157\,\text{sen}(120\pi t)\,[\text{A}] = I_2$$

b) Si denominamos E a la energía y P a la potencia (rapidez de disipación de energía) tendremos:

$P = \dfrac{dE}{dt}$; separando variables $dE = Pdt$, donde $P = P_{rms} = P_{prom}$, al integrar se obtiene

$$\int_0^{E_{dis}} dE = P\int_0^{t_1 = 1s} dt\,,\quad E_{dis} = P_{prom}(t_1 - 0) = P_{prom}\Delta t \text{ y } P_{prom} = RI_{rms}^2$$

por lo tanto $E_{dis1} = R_1 I_{1rms}^2 \Delta t = 50[\Omega]\left[\dfrac{I_{1máx}}{\sqrt{2}}\right]^2 [\text{A}^2]\,1\,[\text{s}]$

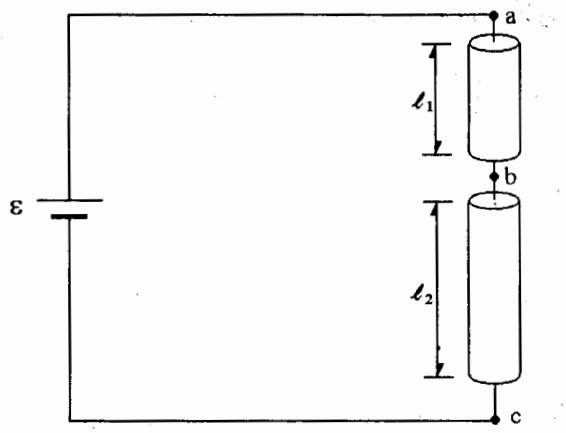
$$E_{dis1} = 50[\Omega]\left[\frac{0.0157}{\sqrt{2}}\right]^2[A^2]1[s] = 50\,(0.0111)^2[J] = 6.162[mJ]$$

y $E_{dis1} = E_{dis3}$, calculemos adicionalmente la energía disipada, en el mismo lapso, por el resistor R_2:

$$E_{dis2} = R_2 I_{frms}^2 \Delta t = R_2\left[\frac{I_{fmdx}}{\sqrt{2}}\right]^2 \Delta t$$

$$E_{dis2} = 200[\Omega]\left[\frac{0.0314}{\sqrt{2}}\right]^2[A^2]1[s] = 98.596[mJ]$$

6. La figura muestra dos conductores diferentes con $\rho_{1,20°} = 2.8 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$ y $\rho_{2,20°} = 5.6 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$, coeficientes de variación $\alpha_{1,20°} = 3.9 \times 10^{-3}[°C^{-1}]$ y $\alpha_{2,20°} = 4.5 \times 10^{-3}[°C^{-1}]$, longitudes $\ell_1 = 100[m]$ y $\ell_2 = 200[m]$ y con secciones transversales $A_1 = 2[mm^2]$ y $A_2 = 4[mm^2]$ conectados en serie con una fuente de fuerza electromotriz $\varepsilon = 10[V]$. Determine:



a) La corriente a través de la fuente de fem a 20[°C].

b) La diferencia de potencial V_{ab} a 80[°C].

c) La energía que se transforma en calor, a 80[°C] en el lapso de 1 segundo.

d) La relación que debería existir entre las resistividades ρ_1 y ρ_2, para que $V_{ab} = V_{bc}$

Resolución:

a) Si se obtiene el resistor equivalente (R) a los dos conductores, la corriente i, en la fuente y en los conductores, se puede calcular con $i_{20} = \dfrac{V_{ac}}{R_{20}}$, $R_{20} = R_{1_{20}} + R_{2_{20}}$, $R_{1_{20}} = \dfrac{\rho_1 \ell_1}{A_1} = \dfrac{2.8 \times 10^{-8}(100)[\Omega]}{2 \times 10^{-6}} = 1.4[\Omega]$ y

$$R_{2_{20}} = \frac{\rho_2 \ell_2}{A_2} = \frac{5.6 \times 10^{-8}(200)[\Omega]}{4 \times 10^{-6}} = 2.8[\Omega] \;\; ; \;\; R_{20} = 4.2[\Omega] \therefore i_{20} = \frac{10[V]}{4.2[\Omega]} = 2.3809[A]$$

b) Para calcular $V_{ab\,80}$ se requiere el valor de i_{80} y de $R_{1_{80}}$, y para éstas necesitamos ρ_1 y ρ_2 a 80°C; veamos:

$\rho_{80} = \rho_0(1 + \alpha_0 T_{80})$ o también, por los datos que tenemos:

$$\rho_{1_{80}} = \rho_{1_{20}}(1 + \alpha_{20}(T_{80} - T_{20})) \;\; ; \;\; \rho_{1_{80}} = 2.8 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m](1 + 3.9 \times 10^{-3}[°C^{-1}](80 - 20)[°C])$$

$$\rho_{1_{80}} = 3.455 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m] \;\; y \;\; \rho_{2_{80}} = 5.6 \times 10^{-8}(1 + 4.5 \times 10^{-3}(80 - 20)) = 7.112 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$$

$$R_{1_{80}} = \frac{\rho_{1_{80}} \ell_1}{A_1} = \frac{3.455 \times 10^{-8}(100)[\Omega]}{2 \times 10^{-6}} = 1.7275[\Omega] \;\; , \;\; R_{2_{80}} = \frac{\rho_{2_{80}} \ell_2}{A_2} = \frac{7.112 \times 10^{-8}(200)[\Omega]}{4 \times 10^{-6}} = 3.556[\Omega]$$

$$y \;\; R_{ac80} = R_{1_{80}} + R_{2_{80}} = (1.7275 + 3.556)[\Omega] = 5.2835[\Omega] \;\; , \;\; i_{80} = \frac{V_{ac}}{R_{ac80}} = \frac{10[V]}{5.2835[\Omega]}$$

$$i_{80} = 1.893[A] \;\; y \;\; V_{ab80} = R_{1_{80}} i_{80} = 1.7275(1.893)$$

$$V_{ab80} = 3.27[V]$$

c) Si llamamos Q al calor disipado, entonces la potencia de disipación es

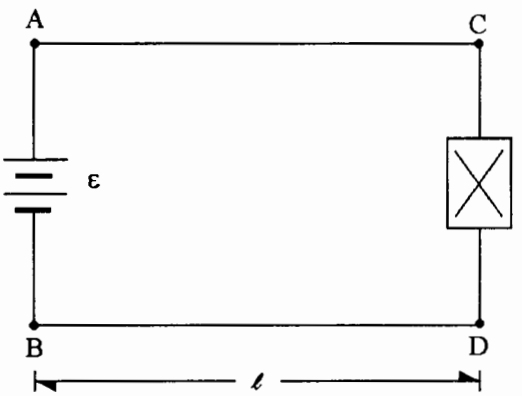
$$P_{dis} = \frac{dQ}{dt} \quad ; \quad dQ = P_d\,dt \quad , \quad \text{pero } P_d = P_{sum} = \varepsilon i_{80} \text{ ; entonces al integrar}$$

$$Q = \varepsilon i_{80}(t - t_0) \quad ; \quad \text{si } t_0 = 0 \;\; y \;\; t = 1[\text{s}] \quad , \quad Q = 10[\text{V}]\,1.893[\text{A}]\,1[\text{s}] = 18.93[\text{J}]$$

d) Si $V_{ab} = V_{bc}$, $R_1 i = R_2 i$, $\dfrac{\rho_1 \ell_1}{A_1} = \dfrac{\rho_2 \ell_2}{A_2} \therefore \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\ell_2 A_1}{\ell_1 A_2} = \dfrac{200(2)}{100(4)} = 1$

de esta expresión se concluye que las resistividades deben ser iguales si se desea que $V_{ab} = V_{bc}$

7. Un sistema resistivo x, cuyo valor de resistencia se puede considerar invariable con la temperatura, funciona correctamente con una diferencia de potencial $V_{CD} = 115[V]$ y potencia $Px = 1150[W]$ encontrándose a $\ell = 253[m]$ de la fuente $\varepsilon = 125[V]$. La conexión se realiza con dos cables de aluminio $\rho_{20°} = 2.63 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$ y $\alpha_{20°} = 4.1 \times 10^{-3}[°C^{-1}]$ iguales. Determine:



a) La resistencia que debe tener cada cable para que $V_{CD} = 115[V]$.

b) El calibre adecuado (área transversal) del cable para que $V_{CD} = 115[V]$, si su temperatura es $20[°C]$.

c) La menor área transversal posible de los cables para que $V_{CD} \geq 115[V]$, si sus temperaturas fuesen de $60[°C]$.

Calibre (AWG)	Área [mm²]
2	33.630
4	21.150
6	13.300
8	8.366
10	5.261

Resolución:

a) Sabemos que $\varepsilon = V_{AC} + V_{CD} + V_{DB}$, como los cables AC y DB son iguales y por ellos circula la misma corriente i, $V_{AC} = V_{DB} \therefore V_{AC} = \frac{1}{2}(\varepsilon - V_{CD})$

$V_{AC} = \frac{1}{2}(125 - 115)[V]$; $V_{AC} = 5[V]$; por otra parte, la potencia en el elemento x es:

$$Px = V_{CD} i \quad , \quad i = \frac{Px}{V_{CD}} = \frac{1150[W]}{115[V]} = 10[A]$$

entonces $V_{AC} = R_{AC} i$, $R_{AC} = \frac{V_{AC}}{i} = \frac{5[V]}{10[A]} = 0.5[\Omega] = R_{DB}$

b) Basándonos en el inciso anterior y en que $R_{AC} = \frac{\rho_{Al}\ell}{A_{Al}}$, $A_{Al} = \frac{\rho_{Al}\ell}{R_{AC}}$

y $A_{Al} = \frac{2.63 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]253[m]}{0.5[\Omega]} = 1.33078 \times 10^{-5}[m^2] = 13.3078 \times 10^{-6}[m^2]$ es decir,

como $A_{Al} = 13.3078[mm^2]$, el calibre adecuado es el #6 AWG.

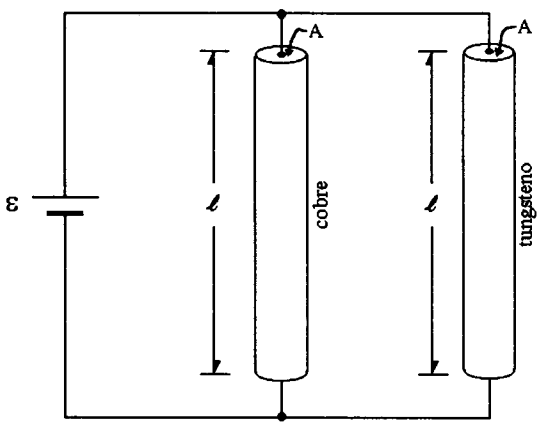
c) Si la temperatura de los cables fuese 60[°C], la resistencia de cada cable, para que $V_{CD} \geq 115[\mathrm{V}]$, debe ser $R_{AC_{60}} \leq 0.5[\Omega]$ ya que a esta temperatura la corriente i seguirá siendo de 10[A], ya que el sistema x posee una resistencia invariable con la temperatura.

Por lo tanto, $R_{AC_{60}} \leq 0.5[\Omega]$ y $R_{AC_{60}} \leq \dfrac{\rho_{Al_{60}}\ell}{A_{Al_{60}}}$; $A_{Al_{60}} \geq \dfrac{\rho_{Al_{60}}\ell}{R_{AC_{60}}}$

$$A_{Al_{60}} = \frac{(\rho_{Al_{20}}(1 + \alpha_{20}(60 - 20)))\ell}{R_{AC_{60}}}; \; A_{Al_{60}} = \frac{(2.63 \times 10^{-8}(1 + 4.1 \times 10^{-3}[60 - 20]))253[\mathrm{m}^2]}{0.5}$$

$A_{Al_{60}} \geq 15.49 \times 10^{-6}[\mathrm{m}^2] = 15.49[\mathrm{mm}^2]$, por lo cual se tendría que emplear cable calibre #4 AWG, con área $21.15[\mathrm{mm}^2]$.

8. De acuerdo con los datos $\ell = 1[\text{m}]$, $A = 1[\text{mm}^2]$ y los concentrados en la tabla, que corresponden a dos barras (cobre y tungsteno) conectadas a una fuente de 3[V] como se indica, determine con argumentos:



a) ¿En cuál barra circula mayor corriente eléctrica?

b) La magnitud de la velocidad de arrastre de los portadores de carga en cada una de las barras y compárelas.

c) ¿Cuál barra disipa más calor?

d) ¿En cuál barra cambia más rápidamente su resistencia, si la elevación de temperatura en ambas es la misma?

Metal	$\rho[\Omega \cdot \text{m}]$	$\alpha[°\text{C}^{-1}]$	$n[\text{portadores/m}^3]$
Tungsteno	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}	6.29×10^{28}
Cobre	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}	8.4×10^{28}

Resolución:

a) Las barras están conectadas en paralelo, entre sí y con la fuente de fuerza electromotriz ε; ambas barras tienen aplicados 3[V] de diferencia de potencial entre sus extremos; por esta razón, la barra por la cual circule mayor corriente eléctrica será aquella que tenga la resistencia menor.

Así: $R_{Cu} = \dfrac{\rho_{Cu}\ell}{A} = \dfrac{1.7 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]1[\text{m}]}{1 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 1.7 \times 10^{-2}[\Omega]$ y $R_W = \dfrac{\rho_W \ell}{A} = \dfrac{5.6 \times 10^{-8}(1)[\Omega]}{1 \times 10^{-6}}$

$R_W = 5.6 \times 10^{-2}[\Omega]$, se observa que $R_{Cu} < R_W$, $\therefore i_{Cu} > i_W$, veamos:

$$i_{Cu} = \frac{\varepsilon}{R_{Cu}} = \frac{3[\text{V}]}{0.017[\Omega]} = 176.47[\text{A}] \quad \text{e} \quad i_w = \frac{\varepsilon}{R_w} = \frac{3[\text{V}]}{0.056[\Omega]} = 53.57[\text{A}] \quad ; \quad i_{Cu} > i_W$$

b) Como $i = n|e|vA$, $v_{Cu} = \dfrac{i_{Cu}}{n_{Cu}|e|A} = \dfrac{176.47[\text{A}]}{8.4 \times 10^{28}[1/\text{m}^3]|-1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]|\ 1 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 13.1\left[\dfrac{\text{mm}}{\text{s}}\right]$

y $v_W = \dfrac{i_W}{n_W|e|A} = \dfrac{53.57[A]}{6.29 \times 10^{28}[1/\text{m}^3]|-1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]|1 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 5.32\left[\dfrac{\text{mm}}{\text{s}}\right]$; $v_{Cu} > v_W$

c) La potencia de disipación de un resistor se calcula como

$$P_{dis} = RI^2$$

$$P_{disCu} = R_{Cu} I_{Cu}^2 = 0.017[\Omega](176.47)^2[\mathrm{A}^2] = 529.41[\mathrm{J/s}]$$

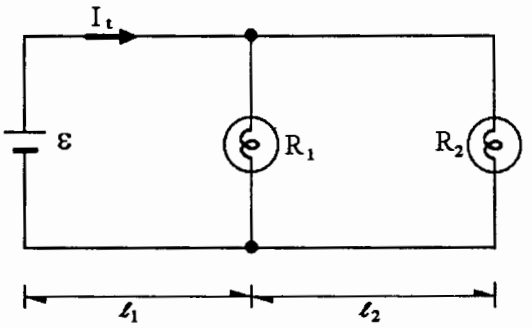
y para el tungsteno:

$$P_{disW} = R_W I_W^2 = 0.056[\Omega](53.57)^2[\mathrm{A}^2] = 160.70[\mathrm{J/s}]$$

Observamos que para el lapso de un segundo, el cobre disipa más del triple de la energía, en forma de calor, que disipa el tungsteno.

d) Sabemos que $R_{T+\Delta T} = R_T(1 + \alpha_T \Delta T)$, $R_{T+\Delta T} = R_T + R_T \alpha_T \Delta T$, $R_{T+\Delta T} - R_T = R_T \alpha_T \Delta T$, llamemos $(R_{T+\Delta T} - R_T) = \Delta R$, $(\Delta R/R_T) = \alpha_T \Delta T$ y si a $\Delta R/R_T$ le llamamos cambio porcentual de R_T, con respecto a R_T, $\%\Delta R$, entonces $(\%\Delta R/\Delta T) = \alpha_T$, como la elevación de la temperatura es la misma en ambas barras, se concluye que el cambio en R es directamente proporcional al valor de α_T, coeficiente de variación de la resistividad (y de la resistencia) con la temperatura; $\Delta R_W > \Delta R_{Cu}$.

9. Dos focos con resistencias $R_1 = R_2 = 8[\Omega]$ se conectan mediante 130 metros de alambre de cobre a una batería de 12 [V] con resistencia interna despreciable. Si las características del alambre a 20 °C son: $\ell_1 = 15[\text{m}]$, $\ell_2 = 50[\text{m}]$, $A = 0.344[\text{mm}^2]$, $\rho = 1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]$ y $\alpha = 3.9 \times 10^{-3}[°\text{C}^{-1}]$, y los tramos de conductores perpendiculares a ℓ_1 y ℓ_2 son de longitudes poco significativas, determine:



a) El circuito equivalente a 20 [°C], en su expresión mínima.

b) La corriente en cada una de las lámparas a 20 [°C].

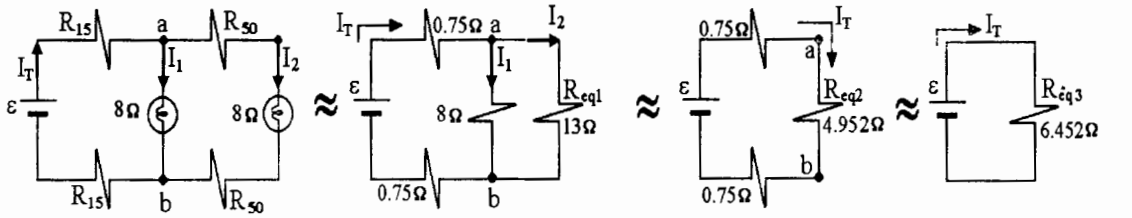
c) La corriente total I_t a 55 [°C], si la resistencia de las lámparas no cambia con el aumento de temperatura.

Resolución:

a) Las resistencias de los alambres de cobre son:

$$R_{15} = \frac{1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]\,15[\text{m}]}{0.344 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 0.75[\Omega] \quad \text{y} \quad R_{50} = \frac{1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]\,50[\text{m}]}{0.344 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 2.5[\Omega]$$

El circuito de la figura se puede dibujar de la manera siguiente:



$$R_{eq1} = 2R_{50} + R_2 \qquad R_{eq2} = \frac{R_1 R_{eq1}}{R_1 + R_{eq1}} \qquad R_{eq3} = R_{15} + R_{eq2} + R_{15}$$

b) Para calcular la corriente en cada lámpara, calculemos la corriente I_T. Con la ecuación de Ohm:

$$\varepsilon = R_{eq3} I_T \;;\; I_T = \frac{\varepsilon}{R_{eq3}} \;,\; I_T = \frac{12[\text{V}]}{6.452[\Omega]} \doteq 1.86[\text{A}]$$

Con la corriente I_T podemos calcular la diferencia V_{ab}:

$$V_{ab} = R_{eq2} I_T$$

$$V_{ab} = 4.952[\Omega]\,1.86[\text{A}] = 9.21[\text{V}]$$

ahora $V_{ab} = 8[\Omega]I_1$, $I_1 = \dfrac{V_{ab}}{8[\Omega]} = \dfrac{9.21[V]}{8[\Omega]} = 1.151[A]$

y también $V_{ab} = R_{eq1}I_2$, $I_2 = \dfrac{9.21[V]}{13[\Omega]} = 0.708[A]$

c) Para calcular I_t a 55[°C] se requieren los valores de R_{15} y R_{50} a esta temperatura, calculemos la resistividad:

$$\rho_{55} = \rho_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta T)$$

$$\rho_{55} = 1.72 \times 10^{-8}(1 + 3.9 \times 10^{-3}(55 - 20)) = 1.95478 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$$

y ahora $R'_{15} = \dfrac{1.95478 \times 10^{-8}(15)[\Omega]}{0.344 \times 10^{-6}} = 0.8524[\Omega]$, $R'_{50} = \dfrac{1.95478 \times 10^{-8}(50)[\Omega]}{0.344 \times 10^{-6}} = 2.8413[\Omega]$

y en circuitos semejantes a los del inciso *a*, pero a $T = 55$[°C]:

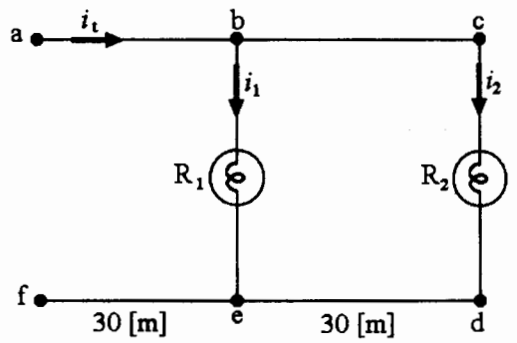
$R'_{eq1} = 2R'_{50} + R_2 = 2(2.8413) + 8 = 13.6826[\Omega]$, $R'_{eq2} = \dfrac{R_1 R'_{eq1}}{R_1 + R'_{eq1}} = 5.0483[\Omega]$

y $R'_{eq3} = R'_{15} + R'_{eq2} + R'_{15}$, $R'_{eq3} = [(0.8524)2 + 5.0483][\Omega] = 6.7531[\Omega]$

y la corriente $I_t = \dfrac{\varepsilon}{R'_{eq3}} = \dfrac{12[V]}{6.7531[\Omega]} = 1.777[A]$

se observa que $I_t < I_T$

10. Dos lámparas, con resistencias $R_1 = 150[\Omega]$ y $R_2 = 25[\Omega]$, se conectan con ayuda de 4 tramos de alambre de cobre de 30 [m] de longitud como se muestra. Todo el circuito se excita con ayuda de una fuente de 120 [V] conectada entre los puntos *a* y *f*. Las características eléctricas, a 20 [°C], del alambre son: $A = 3.6[\text{mm}^2]$, $\rho = 7.5 \times 10^{-7}[\Omega \cdot \text{m}]$ y $\alpha = 0.004[°\text{C}^{-1}]$. Obtenga:



a) El resistor equivalente "visto por la fuente" a 20[°C], (R_{af}).

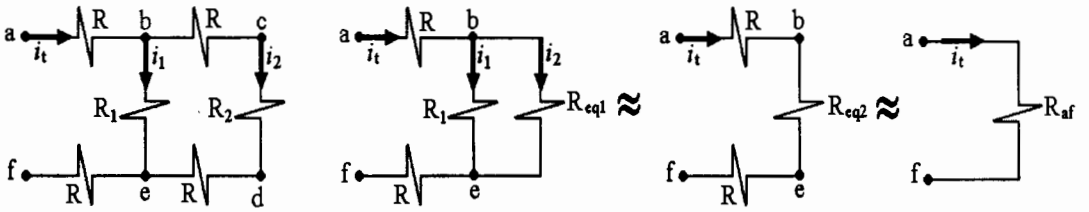
b) Las corrientes i_1 e i_2 a 20 [°C].

c) La diferencia de potencial V_{cd} a 20[°C].

d) La corriente i_t a 50 [°C], despreciando el cambio que en R_1 y R_2 pudiera producir dicho cambio de temperatura.

Resolución:

a) El circuito se puede representar y simplificar como se muestra a continuación



$$R = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{7.5 \times 10^{-7}(30)}{3.6 \times 10^{-6}} \qquad R_{eq1} = R + R_2 + R \qquad R_{eq2} = \frac{R_1 R_{eq1}}{R_1 + R_{eq1}} \qquad R_{af} = R + R_{eq2} + R$$

$$R = 6.25[\Omega] \qquad R_{eq1} = 6.25 + 25 + 6.25 \qquad R_{eq2} = \frac{150(37.5)}{150 + 37.5} \qquad R_{af} = 6.25 + 30 + 6.25$$

$$R_{eq1} = 37.5[\Omega] \qquad R_{eq2} = 30[\Omega] \qquad R_{af} = 42.5[\Omega]$$

b) Para calcular las corrientes eléctricas emplearemos la ecuación de Ohm:

$$\text{como } V_{af} = R_{af} i_t \ , \ i_t = \frac{V_{af}}{R_{af}} = \frac{120[\text{V}]}{42.5[\Omega]} = 2.8235[\text{A}] \ ; \ V_{be} = R_{eq2} i_t \ , \ V_{be} = 30(2.8235)[\text{V}]$$

$$V_{be} = 84.705[\text{V}] \ , \ V_{be} = R_1 i_1 \ , \ i_1 = \frac{V_{be}}{R_1} = \frac{84.705[\text{V}]}{150[\Omega]} = 0.5647[\text{A}] \ \text{ e } \ i_2 = \frac{V_{be}}{R_{eq1}} = \frac{84.705[\text{V}]}{37.5[\Omega]}$$

$i_2 = 2.2588[A]$; se observa que $i_t = i_1 + i_2$: $i_t = 0.5647 + 2.2588 = 2.8235[A]$

c) El cálculo de V_{cd} se puede hacer con la ecuación de Ohm:

$$V_{cd} = R_2 i_2$$

$$V_{cd} = 25[\Omega]2.2588[A] \ , \ V_{cd} = 56.47[V]$$

d) Para calcular la corriente i_t a la temperatura de 50 [°C] debemos encontrar la resistencia eléctrica de cada alambre a esta temperatura

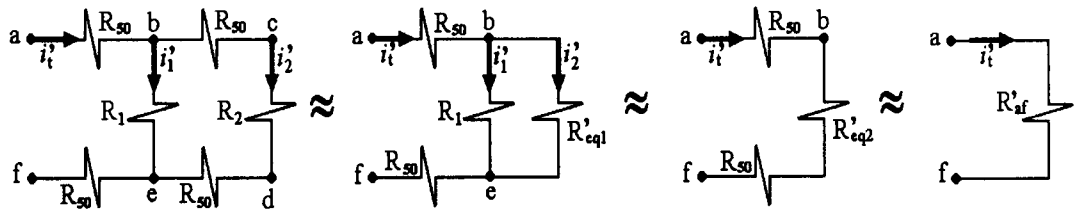
$$\rho_{50} = \rho_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta T)$$

Si consideramos que la longitud y la sección transversal del alambre no varían de manera importante con el cambio de temperatura, podemos escribir

$$\frac{\rho_{50}\ell}{[A]} = \frac{\rho_{20}\ell}{[A]}(1 + \alpha_{20}\Delta T)$$

es decir, $R_{50} = R_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta T) = 6.25(1 + 0.004(50 - 20))$

$$R_{50} = 7[\Omega]$$



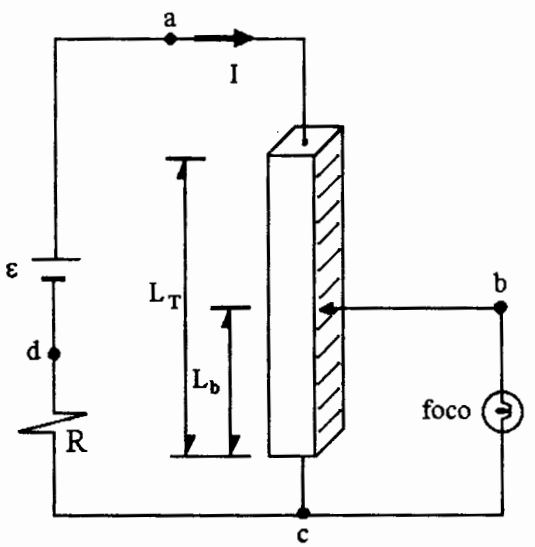
$$R'_{eq1} = 7 + 25 + 7 = 39[\Omega] \qquad R'_{eq2} = \frac{150(39)}{150 + 39} \qquad R'_{af} = 14 + 30.952$$

$$R'_{eq2} = 30.952[\Omega] \qquad R'_{af} = 44.952[\Omega]$$

finalmente:

$$i_t' = \frac{120[V]}{44.952[\Omega]} \ ; \ i_t' = 2.6695[A]$$

11. Por medio de una barra semiconductora con sección transversal $A = 4[\text{mm}^2]$, longitud $L_T = 8[\text{cm}]$, $\rho_{20} = 40 \times 10^{-4}[\Omega \cdot \text{m}]$, $\alpha = -0.01[°\text{C}^{-1}]$ y un contacto móvil como lo muestra la figura, se desea energizar un foco para que funcione al voltaje y potencia adecuados $(6[\text{V}], 1.5[\text{W}])$; además $\varepsilon = 13.7[\text{V}]$, $I = 350[\text{mA}]$ y $R = 2[\Omega]$. Con base en los datos y el circuito, obtenga:



a) La resistencia de la barra a 20 [°C].

b) La diferencia de potencial V_{ab} a 20 [°C].

c) La posición L_b del contacto móvil a 20 [°C].

d) La resistencia que tendría la barra a 60 [°C].

Resolución:

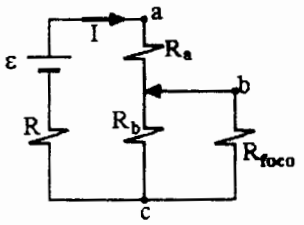
a) La resistencia R_T de la barra es $R_T = \dfrac{\rho_{20}\ell_T}{A} = \dfrac{40 \times 10^{-4}[\Omega \cdot \text{m}]0.08[\text{m}]}{4 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 80[\Omega]$

b) Para encontrar V_{ab} se puede realizar la adición de las diferencias de potencial en la malla externa del circuito:

$$\varepsilon = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} \quad , \quad \varepsilon = V_{ab} + V_{foco} + RI$$

$$\therefore V_{ab} = \varepsilon - V_{foco} - RI \quad , \quad V_{ab} = 13.7 - 6.0 - (2)(0.350) = 7[\text{V}]$$

c) El circuito se puede representar de la manera siguiente:



la resistencia de la barra $R_T = R_a + R_b$ y $V_{ab} = R_a I$

$$\therefore R_a = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{7[\text{V}]}{0.35[\text{A}]} = 20[\Omega] \ , \ R_b = R_T - R_a \ ,$$

$R_b = (80 - 20)[\Omega]$; $R_b = 60[\Omega]$ y como $R_b = \dfrac{\rho_{20} L_b}{A}$

$$L_b = \frac{R_b A}{\rho_{20}} = \frac{60[\Omega]4 \times 10^{-6}[\text{m}^2]}{40 \times 10^{-4}[\Omega \cdot \text{m}]}$$

$L_b = 6 \times 10^{-2}[\text{m}] = 0.06[\text{m}]$ y

$L_a = 0.02[\text{m}]$

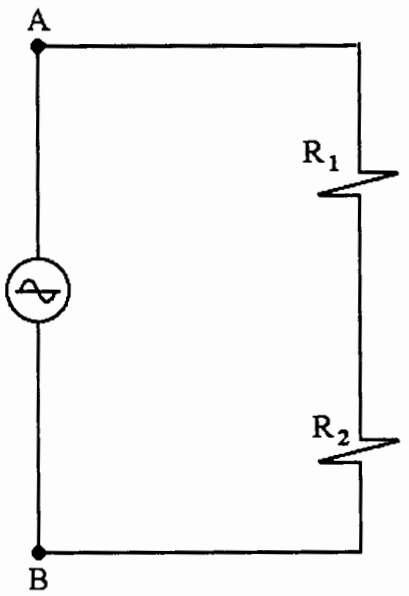
d) Sabemos que $\rho_{60} = \rho_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta T)$, si la longitud y la sección transversal de la barra no se modifican de manera importante con el cambio en su temperatura, entonces:

$$\frac{\rho_{60} L_T}{A} = \frac{\rho_{20} L_T}{A}(1 + \alpha_{20}\Delta T) \ ;$$

es decir $R_{T60} = R_{T20}(1 + \alpha_{20}\Delta T)$

$$R_{T60} = 80[\Omega](1 + (-0.01°\text{C}^{-1})(60 - 20)(°\text{C})) = 80(1 - 0.4)[\Omega] = 48[\Omega]$$

12. Una fuente de fuerza electromotriz produce una diferencia de potencial senoidal $V_{AB} = 240 \operatorname{sen} \omega t$[V] y se aplica a un circuito resistivo, en el cual $R_1 = 50[\Omega]$ y $R_2 = 70[\Omega]$. Calcule:



a) El valor eficaz de la corriente eléctrica de cada resistor.

b) El valor eficaz de la diferencia de potencial de cada elemento del circuito.

c) La potencia eficaz de la fuente.

d) La energía que entrega la fuente durante una hora.

Resolución:

a) Como R_1 y R_2 están conectados en serie, se puede obtener un resistor equivalente $R_{AB} = R_1 + R_2$, $R_{AB} = (50 + 70)[\Omega]$, $R_{AB} = 120[\Omega]$ y aplicando la ecuación de Ohm:

$V_{AB} = R_{AB} i$, $i = \dfrac{V_{AB}}{R_{AB}}$, $i = \dfrac{240 \operatorname{sen} \omega t[\mathrm{V}]}{120[\Omega]} = 2 \operatorname{sen} \omega t[\mathrm{A}]$, esta corriente es la corriente instantánea, la cual es función del tiempo.

La corriente eficaz se calcula con

$$I_{ef} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} \quad \therefore I_{ef} = \frac{2[\mathrm{A}]}{\sqrt{2}} = 1.4142[\mathrm{A}]$$

Como la fuente de fuerza electromotriz y los resistores están conectados en serie, tanto la corriente instantánea como la corriente eficaz son la misma en los tres elementos:

$$I_{ef} = 1.4142[\mathrm{A}]$$

b) El valor eficaz de la diferencia de potencial en la fuente es

$$V_{ABef} = \frac{V_{ABmáx}}{\sqrt{2}} = \frac{240[\mathrm{V}]}{\sqrt{2}} = V_{ABef} \doteq 169.71[\mathrm{V}]$$

Calculemos los voltajes instantáneos en los resistores y después los eficaces:

$$v_1 = R_1 i = 50[\Omega] 2 \operatorname{sen} \omega t[\mathrm{A}] = 100 \operatorname{sen} \omega t[\mathrm{V}] \ , \ v_{1ef} = \frac{V_{1máx}}{\sqrt{2}} = \frac{100[\mathrm{V}]}{\sqrt{2}} = 70.71[\mathrm{V}]$$

$$v_2 = R_2 i = 70[\Omega] 2 \operatorname{sen} \omega t[\mathrm{A}] = 140 \operatorname{sen} \omega t[\mathrm{V}] \ , \ v_{2ef} = \frac{V_{2máx}}{\sqrt{2}} = \frac{140[\mathrm{V}]}{\sqrt{2}} \doteq 99[\mathrm{V}]$$

c) Como la potencia se calcula

$$P = VI \; ; \; P_{ef} = V_{ef} I_{ef}$$

con los cálculos anteriores

$$P_{ef} = V_{ABef} I_{ef}$$

$P_{ef} = 169.71[\text{V}]1.4142[\text{A}] = 240[\text{W}]$ entregados por la fuente.

d) Para determinar la energía entregada por la fuente utilizaremos la potencia eficaz calculada anteriormente, si la potencia es la rapidez con que la fuente entrega la energía podemos escribir:

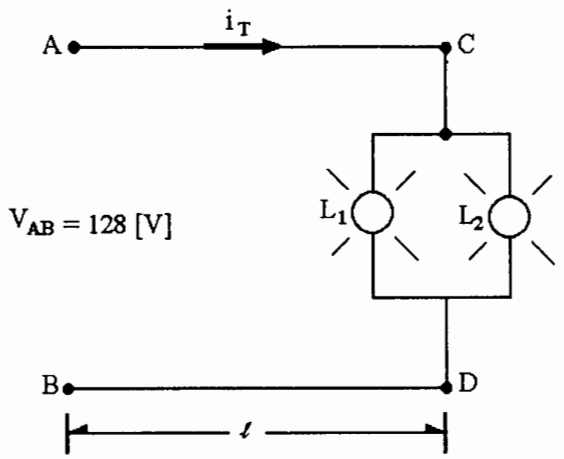
$\dfrac{dE}{dt} = P_{ef}$, al separar variables $dE = P_{ef} dt$

y al integrar entre 0 y el instante $t_1 = 1\,\text{hora}$

$$\int_0^{E_{sum}} dE = P_{ef} \int_0^{t_1} dt \quad , \quad E_{sum} = P_{ef} \Delta t = P_{ef}(t_1 - 0)$$

$E_{sum} = 240\left[\dfrac{\text{J}}{\text{s}}\right]60(60)[\text{s}] = 864{,}000[\text{J}]$; $E_{sum} = 864[\text{kJ}]$ en el lapso de 1 hora.

13. Se desean conectar dos lámparas $L_1(120[V], 60[W])$ y $L_2(120[V], 180[W])$ a una toma lejana $\ell = 50[m]$, cuya diferencia de potencial es $V_{AB} = 128[V]$, por medio de 100[m] de cable conductor de cobre $\rho_{20°C} = 1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$, $\alpha_{20°C} = 3.9 \times 10^{-3}[°C^{-1}]$ y resistencia total $R_C = 4[\Omega]$ a 20[°C] como se muestra en la figura, determine:



a) La corriente i_T en los cables a 20 [°C].

b) Con base en la tabla de conductores, el adecuado para realizar la conexión a 20 [°C].

c) La energía eléctrica transformada a luz y calor, en cada lámpara, en el lapso de una hora, si T=20[°C].

d) La resistencia eléctrica de 200 [m] de conductor tipo *a* a la temperatura de 60 [°C].

Conductor	Área [mm²]
a	0.215
b	0.350
c	0.430

Resolución:

a) La corriente i_T debe estar formada por las corrientes necesarias en las lámparas; con los datos de éstas:

$$P = VI \text{ entonces } I = \frac{P}{V}$$

$$I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{60[W]}{120[V]} = 0.5[A] \text{ e } I_2 = \frac{P_2}{V_2} = \frac{180[W]}{120[V]} = 1.5[A] \ , \ I_T = I_1 + I_2 = 2.0[A]$$

b) Sabemos que $V_{AB} = V_{AC} + V_{CD} + V_{DB}$, además $V_{CD} = 120[V]$ y $V_{AC} = V_{DB}$ ya que el conductor desde *A* hasta *C* es idéntico al conductor desde *D* hasta *B* y por ellos circula la misma corriente i_T, por lo tanto:

$$128 = V_{AC} + 120 + V_{AC} \ , \ V_{AC} = 4[V]$$

$$\text{entonces } R_{AC} = \frac{V_{AC}}{i_T} = \frac{4[V]}{2[A]} = 2[\Omega]$$

y como $R_{AC} = \dfrac{\rho\ell}{\text{Área}}$; $\text{Área} = \dfrac{\rho\ell}{R_{AC}} = \dfrac{1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]50[m]}{2[\Omega]} = 0.43 \times 10^{-6}[m^2] = 0.43[mm^2]$ de acuerdo con este resultado y la tabla de conductores, el adecuado para la conexión es el conductor *c*.

c) La rapidez de transformación de la energía eléctrica a luz y calor en las lámparas está cuantificada por su dato de potencia, por lo tanto:

$$P_1 = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} \quad , \quad \Delta E_1 = P_1 \Delta t_1 \quad , \quad \Delta E_1 = 60\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right]3600[\mathrm{s}] = 216{,}000[\mathrm{J}] = 216[\mathrm{kJ}]$$

$$P_2 = \frac{\Delta E_2}{\Delta t_2} \quad , \quad \Delta E_2 = P_2 \Delta t_2 \quad , \quad \Delta E_2 = 180\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right]3600[\mathrm{s}] = 648{,}000[\mathrm{J}] = 648[\mathrm{kJ}]$$

d) Un conductor de 200 [m] del tipo *a*, de la tabla, tiene una resistencia a 20°C del valor siguiente:

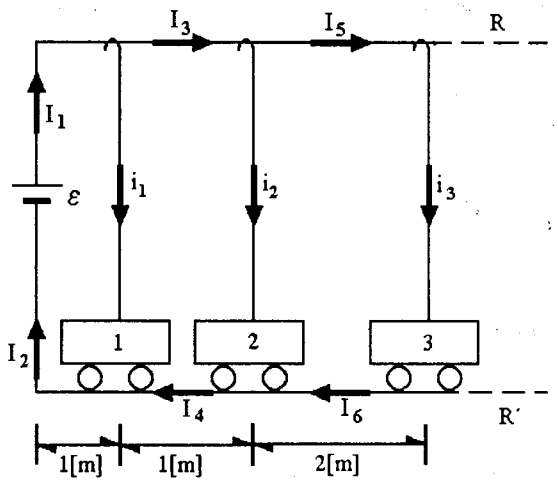
$$R_{20} = \frac{\rho_{20} L}{\text{Área}} \quad , \quad R_{20} = \frac{1.72 \times 10^{-8}(200)[\Omega]}{0.215 \times 10^{-6}} = 16[\Omega]$$

y a la temperatura de 60[°C]:

$$R_{60} = R_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta T) = 16\left(1 + 3.9 \times 10^{-3}(40)\right)$$

$$R_{60} = 18.496[\Omega]$$

14. Las corrientes a través de tres carros eléctricos de una feria son $i_1 = 50[A]$, $i_2 = 100[A]$ e $i_3 = 100[A]$ cuando la fuente de fuerza electromotriz $\varepsilon = 550[V]$, como se muestra en la figura. El alambre superior tiene una resistencia $R = 0.4[\Omega/m]$ y la pista una resistencia $R' = 0.03[\Omega/m]$. Si no hay otros carros en la pista, determine:



a) El circuito eléctrico equivalente, asociando una corriente a cada rama.

b) Los valores de las resistencias R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 y R_6.

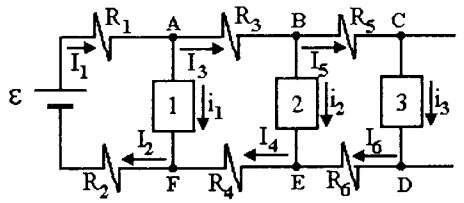
c) Los valores de las corrientes I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6.

d) La potencia que entrega la fuente.

e) Si hay una tarifa de \$10.00 por consumo de cada kW · h (kilowatt · hora), ¿cuál será el costo si los carros funcionan durante una hora en forma continua?

Resolución:

a) El circuito eléctrico equivalente es:



b) En el cual:

$$R_1 = R\ell_1 = 0.4\left[\frac{\Omega}{m}\right]1[m] = 0.4[\Omega]$$

$$R_2 = R'\ell_1 = 0.03\left[\frac{\Omega}{m}\right]1[m] = 0.03[\Omega]$$

$$R_3 = R_1$$

$$R_4 = R_2$$

$$R_5 = R\ell_5 = 0.4\left[\frac{\Omega}{m}\right]2[m] = 0.8[\Omega]$$

$$R_6 = R'\ell_5 = 0.03\left[\frac{\Omega}{m}\right]2[m] = 0.06[\Omega]$$

c) Los valores de las corrientes eléctricas los determinamos con la aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff en algunos nodos

C: $I_5 - i_3 = 0$, $I_5 = i_3$, $I_5 = 100[\text{A}]$

D: $i_3 - I_6 = 0$, $i_3 = I_6$, $I_6 = 100[\text{A}]$

B: $I_3 - I_5 - i_2 = 0$, $I_3 = I_5 + i_2$, $I_3 = 100[\text{A}] + 100[\text{A}] = 200[\text{A}]$

E: $i_2 + I_6 - I_4 = 0$, $I_4 = i_2 + I_6$, $I_4 = 100[\text{A}] + 100[\text{A}] = 200[\text{A}]$

A: $I_1 - I_3 - i_1 = 0$, $I_1 = I_3 + i_1$, $I_1 = 200[\text{A}] + 50[\text{A}] = 250[\text{A}]$

F: $i_1 + I_4 - I_2 = 0$, $I_2 = i_1 + I_4$, $I_2 = 50[\text{A}] + 200[\text{A}] = 250[\text{A}]$

claro está que I_2 e I_1 son la misma corriente.

d) La potencia que entrega la fuente ε se calcula como:

$P = \varepsilon I_1$, $P = 550[\text{V}]250[\text{A}] = 137.5[\text{kW}]$

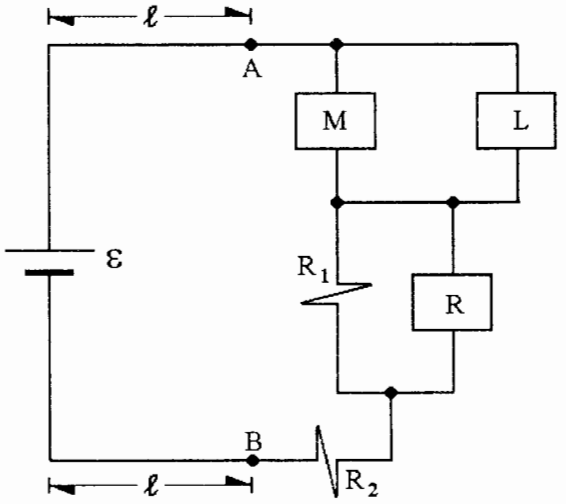
e) Como $P = \dfrac{dE}{dt}$; $dE = Pdt$, en este caso P = cte. $\therefore E = P\Delta t$

$E = 137.5[\text{kW}]\,1[\text{h}] = 137.5[\text{kW}\cdot\text{h}]$, como el costo es $\dfrac{\$10.0}{[\text{kW}\cdot\text{h}]}$

el costo de la energía que se consumiría en una hora es

$$C_{total} = E(\text{costo}) = 137.5[\text{kW}\cdot\text{h}]\cdot\frac{\$10.0}{[\text{kW}\cdot\text{h}]} = \$1{,}375.0$$

15. A una batería de $\varepsilon = 48[V]$ se conectan un radio (R) que opera con 6[V] y 150[mA], una lámpara (L) que opera con 12[V] y 500[mA], y un motor (M) que opera con 12[V] y 5[A], por medio de dos tramos de nicrómel de 1[mm] de diámetro, $\ell = 1[m]$ de longitud, $\rho = 150 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$ y $\alpha = 4 \times 10^{-4}[°C^{-1}]$. Considerando que el circuito utilizado es el que se muestra en la figura y que los aparatos deben tener las condiciones de operación indicadas, determine:



a) La potencia total disipada en forma de calor por los dos conductores de nicrómel.

b) El valor de los resistores R_1 y R_2.

Resolución:

a) Cada conductor de nicrómel se comporta como un resistor y la potencia que disipa se puede calcular con la ley de Joule:

$P = RI^2$, donde I es la corriente que circulará por los dos conductores y por la batería. Esta corriente se puede determinar con la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada en el punto donde se unen el conductor superior de nicrómel, el motor y la lámpara:

$I = I_M + I_L$; $I = 5[A] + [0.5][A] = 5.5[A]$ y el conductor tiene una resistencia

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad ; \quad R = \frac{150 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]\,1[m]}{\pi(1 \times 10^{-3}[m])^2/4} \doteq 1.91[\Omega]$$

Por lo tanto, la potencia total disipada por los dos conductores de nicrómel resulta:

$$P = (1.91[\Omega](5.5[A])^2)2 = 115.55[W]$$

b) Cálculo de R_1: la corriente eléctrica que circula en este resistor es I_1, y se puede conocer aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff al punto en que se unen el motor, la lámpara, el radio y R_1; es decir $I_M + I_L - I_R - I_1 = 0$, $I_1 = I_M + I_L - I_R$, $I_1 = (5 + 0.5 - 0.15)[A]$, $\therefore I_1 = 5.35[A]$. La diferencia de potencial entre los extremos R_1 es 6[V], ya que está conectada en paralelo con el radio, con la ecuación de Ohm:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \quad ; \quad R_1 = \frac{6[V]}{5.35[A]} = 1.12[\Omega]$$

Cálculo de R_2: si aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff a la malla que contiene a R_2 y a la fuente ε, se obtiene:

$-\varepsilon + V_M + V_1 + V_2 + 2RI = 0$, $V_2 = (48 - 12 - 6 - 2(1.91)5.5)[V] = 8.99[V]$ y como por R_2 circula la corriente I, con la ecuación de Ohm:

$$R_2 = \frac{V_2[V]}{I[A]} = \frac{8.99}{5.5}[\Omega] = 1.63[\Omega]$$

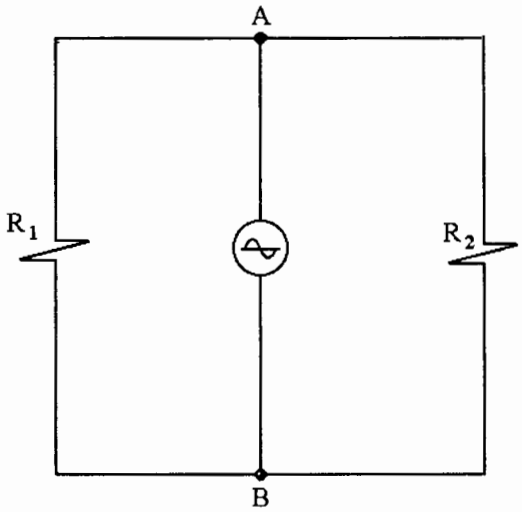
16. Una fuente de fuerza electromotriz produce una diferencia de potencial senoidal $V_{AB} = 240\text{sen}\omega t[\text{V}]$ y se aplica a un circuito resistivo, $R_1 = 100[\Omega]$ y $R_2 = 200[\Omega]$. Calcule:

a) El valor eficaz de la corriente eléctrica en cada resistor.

b) El valor eficaz de la diferencia de potencial en cada elemento.

c) La potencia eficaz de la fuente.

d) La energía que entrega la fuente durante una hora.



Resolución:

a) Podemos calcular la corriente eléctrica en la fuente, obteniendo el resistor equivalente a la conexión de R_1 y R_2 en paralelo:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad R_e = \frac{100[\Omega]200[\Omega]}{(100+200)[\Omega]} = 66.67[\Omega] \text{ y con la ecuación de Ohm}$$

$$V_{AB} = R_e i_f \quad ; \quad i_f = \frac{V_{AB}}{R_e} = \frac{240\text{sen}\,\omega t[\text{V}]}{66.67[\Omega]} = 3.6\text{sen}\omega t[\text{A}]$$

y la corriente eficaz en la fuente se obtiene de $i_{fef} = \dfrac{i_{fmáx}}{\sqrt{2}} = 2.55[\text{A}]$

En cada resistor:

$$i_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{240\text{sen}\,\omega t[\text{V}]}{100[\Omega]} = 2.4\text{sen}\,\omega t[\text{A}] \text{ y su valor eficaz } = \frac{i_{1máx}}{\sqrt{2}} = 1.697[\text{A}]$$

$$i_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{240\text{sen}\,\omega t[\text{V}]}{200[\Omega]} = 1.2\text{sen}\,\omega t[\text{A}] \text{ e } i_{2ef} = \frac{i_{2máx}}{\sqrt{2}} = 0.849[\text{A}]$$

b) Como los tres elementos están conectados en paralelo, su diferencia de potencial es la misma y su valor eficaz es:

$$V_{ABef} = \frac{V_{ABmáx}}{\sqrt{2}} = \frac{240[\text{V}]}{\sqrt{2}} = 169.71[\text{V}]$$

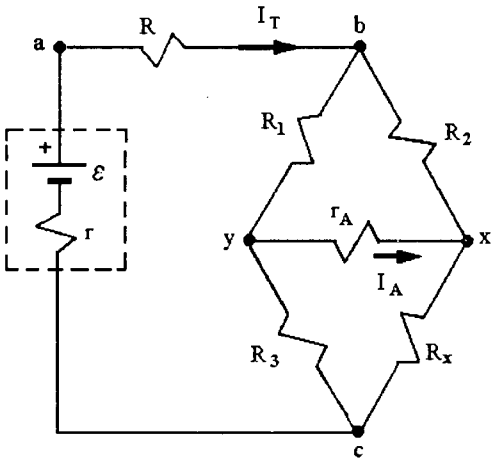
c) La potencia en la fuente se calcula con $P = V_{AB} i_f$

y en valor eficaz $P_{ef} = V_{ABef} i_{fef}$, $P_{ef} = 169.71[\text{V}]2.55[\text{A}] = 432.76[\text{W}]$

d) Como la potencia se define como $P = \dfrac{dE}{dt}$, $dE = Pdt$

y al integrar $E_f = P_{ef}\Delta t$, $E_f = 432.76[\text{W}]60(60)[\text{s}] = 1'557{,}936.0[\text{J}]$

17. En el circuito de la figura se cumple que $V_{bc}=75[V]$ y que la corriente $I_A=0$, si $r=2[\Omega]$, $R=43[\Omega]$, $R_1=20[\Omega]$, $R_2=60[\Omega]$, $R_3=80[\Omega]$ y $r_A=10[\Omega]$. Calcule:



a) La diferencia de potencial V_{xy}.

b) El valor de R_x.

c) La corriente I_T si $R_x=240[\Omega]$.

d) La diferencia de potencial V_{ac}.

e) El valor de la fem ε.

Resolución:

a) Aplicando la ecuación de Ohm en el resistor r_A, se tiene:

$$V_{yx} = r_A I_A$$

pero se sabe que

$$I_A = 0 \quad , \quad \therefore V_{yx} = 0 \quad , \quad V_{xy} = 0$$

b) Se puede escribir

$$V_{bc} = V_{by} + V_{yc} \text{ y también } V_{bc} = V_{bx} + V_{xc}$$

por otro lado, ya que $V_{yx} = 0$, $V_y = V_x$

y en consecuencia $V_{by} = V_{bx}$ y $V_{yc} = V_{xc}$

Con ayuda de la ecuación de Ohm estas dos ecuaciones se pueden escribir:

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \text{ y } R_3 i_1 = R_x i_2$$

Al dividir la última ecuación entre la penúltima se obtiene:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \quad , \quad \therefore R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad , \quad R_x = \frac{60(80)[\Omega^2]}{20[\Omega]} = 240[\Omega]$$

c) La corriente I_T puede ser evaluada con la ley de voltajes de Kirchhoff en las mallas que contienen a i_1 y a i_2 con las ecuaciones:

$$V_{bc} = R_1 i_1 + R_3 i_1 \quad ; \quad i_1 = \frac{V_{bc}}{R_1 + R_3} = \frac{75[\mathrm{V}]}{(20 + 80)[\Omega]} = 0.75[\mathrm{A}] \quad \text{y}$$

$$V_{bc} = R_2 i_2 + R_x i_2 \quad ; \quad i_1 = \frac{V_{bc}}{R_2 + R_x} = \frac{75[\mathrm{V}]}{(60 + 240)[\Omega]} = 0.25[\mathrm{A}]$$

Con la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo *b*, se tiene

$$I_T = i_1 + i_2$$

$$I_T = (0.75 + 0.25)[\mathrm{A}] = 1[\mathrm{A}]$$

d) El cálculo de V_{ac} se puede efectuar planteando que

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$

$$V_{ac} = RI_T + V_{bc} \quad ; \quad V_{ac} = 43[\Omega]1[\mathrm{A}] + 75[\mathrm{V}] = 118[\mathrm{V}]$$

e) El valor ε se puede determinar con la ley de voltajes de Kirchhoff aplicada a la malla externa del circuito de la figura:

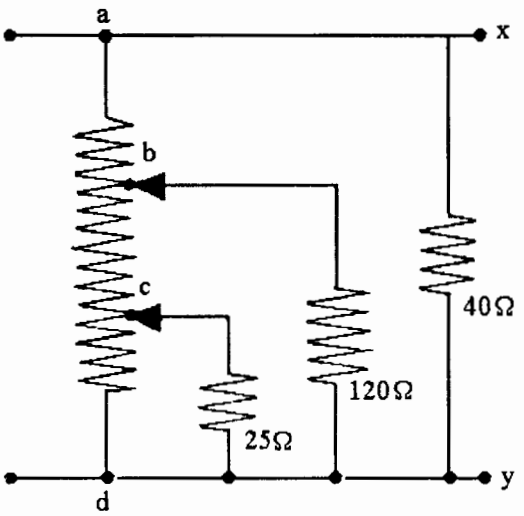
$$RI_T + V_{bc} + rI_T - \varepsilon = 0 \quad , \quad \varepsilon = (43(1) + 75 + 2(1))[\mathrm{V}]$$

$$\varepsilon = 120[\mathrm{V}]$$

18. El resistor largo entre a y d tiene una resistencia de $300[\Omega]$ y derivaciones a cada tercio de su longitud. Determine:

a) La resistencia equivalente entre los puntos a y d, si la diferencia de potencial $V_{xy} = 320[\text{V}]$.

b) La corriente en los resistores de: $40[\Omega]$, $120[\Omega]$, $25[\Omega]$ y en el tramo cd del resistor largo.



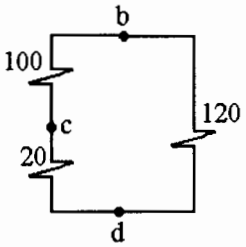
Resolución:

a) Como $\ell_{ab} = \ell_{bc} = \ell_{cd} = \dfrac{\ell_{ad}}{3}$, $R_{ab} = R_{bc} = R_{cd} = \dfrac{R_{ad}}{3} = \dfrac{300[\Omega]}{3} = 100[\Omega]$ al considerar individualmente y por separado al resistor largo.

Para obtener el resistor equivalente entre a y d se analizarán las conexiones con los demás resistores:

R_{cdeq} se obtiene con la conexión en paralelo de R_{cd} y $R = 25[\Omega]$; $R_{cdeq} = \dfrac{100(25)}{100 + 25} = 20[\Omega]$

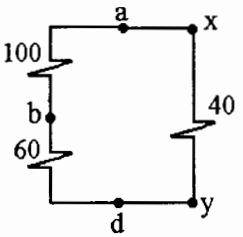
Ahora R_{bdeq}



$$R_{bdeq} = \frac{120(120)}{120 + 120}$$

$$R_{bdeq} = 60[\Omega]$$

y R_{adeq}

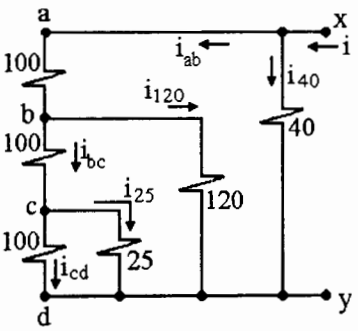


$$R_{adeq} = \frac{160(40)}{160 + 40}$$

$$R_{adeq} = 32[\Omega]$$

Por lo tanto la resistencia equivalente entre a y d $(R_{adeq}) = 32[\Omega]$ y este valor no depende de la diferencia de potencial $V_{xy} = 320[\text{V}]$.

b) Para la determinación de las corrientes eléctricas emplearemos el diagrama:



Como $R_{adeq} = R_{xy}$, con la ley de Ohm podemos calcular el valor de i:

$$i = \frac{V_{xy}}{R_{xy}} = \frac{320[\text{V}]}{32[\Omega]} = 10[\text{A}]$$

También con ley de Ohm:

$$i_{40} = \frac{V_{xy}}{R_{40}} = \frac{320[\text{V}]}{40[\Omega]} = 8[\text{A}]$$

Con la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo x:

$i_{ab} + i_{40} = i \therefore i_{ab} = i - i_{40}$; $i_{ab} = (10 - 8)[A] = 2[A]$ y $V_{ab} = R_{ab} i_{ab}$

$V_{ab} = 100[\Omega]2[A] = 200[V]$

y como

$V_{xy} = V_{ad} = V_{ab} + V_{bd}$, $V_{bd} = (320 - 200)[V]$

Como $V_{bd} = 120[V]$, con ley de Ohm:

$$i_{120} = \frac{V_{bd}}{R_{120}} = \frac{120[V]}{120[\Omega]} = 1[A]$$

Con ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo b: $i_{bc} + i_{120} = i_{ab}$, $i_{bc} = (2 - 1)[A]$

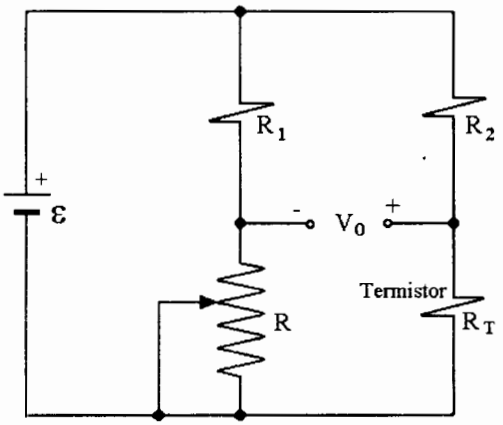
Con ley de Ohm $V_{bc} = R_{bc} i_{bc}$; $v_{bc} = 100(1)[V] = 100[V]$; $V_{bd} = V_{bc} + V_{cd}$

$V_{cd} = (120 - 100)[V]$; $V_{cd} = 20[V]$

y $V_{cd} = R_{cd} i_{cd}$; $i_{cd} = \dfrac{20[V]}{100[\Omega]} = 0.2[A]$, también $i_{25} = \dfrac{V_{cd}}{R_{25}} = \dfrac{20[V]}{25[\Omega]} = 0.8[A]$

y se cumple que $i_{bc} = i_{25} + i_{cd}$, la cual se obtiene con la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada en el nodo c.

19. En el circuito de la figura se tiene que $\varepsilon = 15[V]$, $R_1 = R_2 = 1[k\Omega]$ y se sabe que, a la temperatura ambiente (20°C) cuando se ajusta $R = 1[k\Omega]$, la diferencia de potencial V_0 es igual a 0. El coeficiente de variación de resistencia con la temperatura del termistor es $-2[\Omega/°C]$ (su resistencia disminuye en $2[\Omega]$ en cada grado centígrado de aumento de temperatura). Determine:

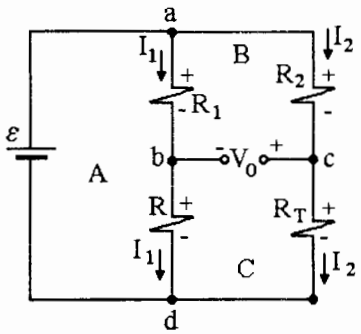


a) La resistencia del termistor a la temperatura ambiente.

b) Cuando el termistor se coloca en un medio ambiente diferente, $V_0 = 150[mV]$. ¿Cuál es la temperatura del medio ambiente'

Resolución:

a) Con base en el diagrama siguiente, se puede establecer que como $V_0 = 0$, $V_{cb} = 0$ y como



$V_{ab} = V_{ac} + V_{cb}$,

$V_{ab} = V_{ac}$ ...(1)

y de forma análoga

$V_{bd} = V_{cd}$ ...(2)

Empleando la ley de Ohm en los resistores R_1 y R_2

$V_{ab} = R_1 I_1$ y $V_{ac} = R_2 I_2$, sustituyendo en (1):

$R_1 I_1 = R_2 I_2$, como $R_1 = R_2$ se obtiene que

$I_1 = I_2$ ...(3)

También con ley de Ohm $V_{bd} = RI_1$ y $V_{cd} = R_T I_2$; y al sustituir en (2) se obtiene $RI_1 = R_T I_2$

de acuerdo con la (3) se concluye que $R = R_T$, $R_T = 1[k\Omega]$ a 20 °C.

b) Para conocer la temperatura del medio ambiente se requiere conocer el valor nuevo de resistencia del termistor R_T', el cual depende de esa temperatura.

Con la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) aplicada en la malla A, calculemos I_1:

$$R_1 I_1 + R I_1 - \varepsilon = 0 \; ; \; I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R} \; ; \; I_1 = \frac{15[\mathrm{V}]}{(1000 + 1000)[\Omega]} = 7.5[\mathrm{mA}]$$

Esta corriente no cambia en tanto no se modifique el ajuste de R.

Ahora con la LVK en la malla B se tiene:

$$R_2 I_2 + V_{cb} - R_1 I_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{R_1 I_1 - V_{cb}}{R_2} \; ; \; I_2 = \frac{10^3(7.5 \times 10^{-3}) - 0.15}{10^3} = 7.35[\mathrm{mA}]$$, y con LVK en malla C:

$$V_{cd} = V_{cb} + V_{bd}$$

$$V_{cb} = 0.15[\mathrm{V}] \; , \; V_{bd} = RI_1 = 10^3(7.5 \times 10^{-3}) = 7.5[\mathrm{V}] \therefore V_{cd} = 0.15 + 7.5 = 7.65[\mathrm{V}]$$

y con la ecuación de Ohm:

$$V_{cd} = R_T' I_2 \; ; \; R_T' = \frac{V_{cd}}{I_2} = \frac{7.65[\mathrm{V}]}{7.35 \times 10^{-3}[\mathrm{A}]} = 1{,}040.82[\Omega]$$

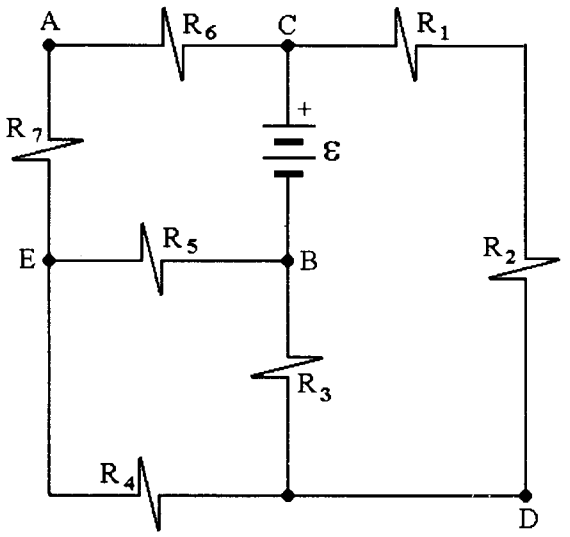
Además, se sabe que $\frac{dR_T}{dT} = -2\left[\frac{\Omega}{°\mathrm{C}}\right] = cte.$, por lo tanto $\frac{\Delta R_T}{\Delta T} = -2\left[\frac{\Omega}{°\mathrm{C}}\right]$, $\Delta T = \frac{\Delta R_T}{-2\left[\frac{\Omega}{°\mathrm{C}}\right]}$

donde $\Delta R_T = R_T' - R_T$; $\Delta R_T = 1040.82 - 1000 = 40.82[\Omega]$; $\Delta T = \frac{40.82[\Omega]}{-2\left[\frac{\Omega}{°\mathrm{C}}\right]} = -20.41[°\mathrm{C}]$

Ahora bien, $\Delta T = T' - T$, donde $T = 20°\mathrm{C}$, $T' = \Delta T + T$

y $T' = -20.41[°\mathrm{C}] + 20[°\mathrm{C}] = -0.41[°\mathrm{C}]$ es la temperatura nueva.

20. En el circuito eléctrico mostrado en la figura se tiene: $R_1 = 10[\Omega]$, $R_2 = 3[\Omega]$, $R_3 = 7[\Omega]$, $R_4 = 9[\Omega]$, $R_5 = 8[\Omega]$, $R_6 = 5[\Omega]$, $R_7 = 3[\Omega]$ y $\varepsilon = 10[V]$. Determine:



a) Un sistema de ecuaciones simultáneas que nos permitan calcular la corriente en cada rama del circuito.

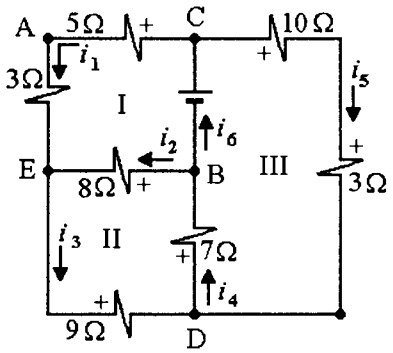
b) La magnitud y sentido de la corriente convencional del resistor R_2.

c) La diferencia de potencial V_{DA}.

d) La energía que entrega la fuente del circuito si funciona durante 7 horas.

Resolución:

a) De acuerdo con el diagrama siguiente existen seis corrientes diferentes en el circuito propuesto. Con las leyes de Kirchhoff obtendremos las ecuaciones necesarias para obtener los valores de las seis corrientes.



Con LCK:

nodo C $-i_1 - i_5 + i_6 = 0$
nodo B $-i_2 + i_4 - i_6 = 0$
nodo D $i_3 - i_4 + i_5 = 0$
nodo E $i_1 + i_2 - i_3 = 0$

De éstas, sólo tres ecuaciones son linealmente independientes.

Con la LVK:

malla I $(5 + 3)i_1 - 8i_2 - 10 = 0$
malla II $8i_2 + 9i_3 + 7i_4 = 0$
malla III $(10 + 3)i_5 + 7i_4 - 10 = 0$

Estas tres ecuaciones son linealmente independientes.

Al resolver el sistema de ecuaciones:

$i_1 = 0.6677[A]$, $i_2 = -0.5822[A]$, $i_3 = 0.0855[A]$,

$i_4 = 0.5556[A]$, $i_5 = 04701[A]$, $i_6 = 1.1378[A]$.

El signo – en la corriente i_2 nos indica que su sentido de circulación es contrario al indicado en la figura.

b) La corriente en R_2 es $i_5 = 0.4701\,[\mathrm{A}]$ y su sentido convencional es el mostrado en la figura.

c) $V_{DA} = 7i_4 - \varepsilon + 5i_1$

$V_{DA} = 7(0.5556) - 10 + 5(0.6677) = -2.7723\,[\mathrm{V}]$

el resultado indica que el potencial eléctrico del punto D es menor que el del punto A, en $2.7723\,[\mathrm{V}]$.

d) Sabemos que $P_{sum} = \dfrac{dE_{sum}}{dt}$

$dE_{sum} = P_{sum}dt$

al integrar como $P_{sum} = \varepsilon i_6 = \text{cte.}$

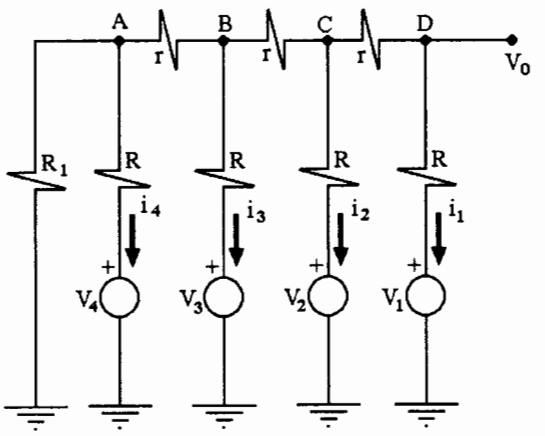
se obtiene $E_{sum} = P_{sum}\,\Delta t$

$E_{sum} = \varepsilon\, i_6\, \Delta t$

$E_{sum} = 10\,[\mathrm{V}]\,1.1378\,[\mathrm{A}]\,7(3600)\,[\mathrm{s}]$

$E_{sum} = 286.726\,[\mathrm{kJ}]$

21. En el circuito mostrado se cumple que $V_0 = (V_1/2) + (V_2/4) + (V_3/8) + (V_4/16)$ donde $V_1 = 2[V]$, $V_2 = 4[V]$, $V_3 = 8[V]$ y $V_4 = 16[V]$; además $R_1 = R = 2[\Omega]$ y $r = 1[\Omega]$.



Calcule:

a) Las corrientes i_1, i_2, i_3 e i_4.

b) Las diferencias de potencial de los nodos *A*, *B* y *C*, con respecto a tierra.

c) La energía disipada en R_1, en Δt = 3 minutos.

Resolución:

a) Los valores de las corrientes se pueden encontrar con las leyes de Kirchhoff; sin embargo, por ser ocho el número de ramas principales, se tendrán ocho corrientes diferentes y la resolución puede resultar ardua con este procedimiento.

Emplearemos dichas leyes en forma más sencilla:

determinaremos el potencial en el punto $D = V_0 = \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{8}{8} + \frac{16}{16} = 4[V]$

con LVK $V_D = Ri_1 + V_1$

$$i_1 = \frac{V_D - V_1}{R} = \frac{4 - 2}{2} = 1[A] \text{ y } V_{CD} = ri_1 = 1(1) = 1[V]$$

b) $V_C = V_{CD} + V_D$; $V_C = (1 + 4)[V] = 5[V]$

$$V_C = Ri_2 + V_2 \ ; \ i_2 = \frac{V_C - V_2}{R} = \frac{5 - 4}{2} = 0.5[A]$$

De manera análoga $V_{BC} = r(i_1 + i_2)$

$$V_{BC} = 1(1 + 0.5) = 1.5[V]$$

$$V_B = V_{BC} + V_C \ ; \ V_B = (1.5 + 5) = 6.5[V]$$

$$V_B = Ri_3 + V_3 \ ; \ i_3 = \frac{V_B - V_3}{R} = \frac{6.5 - 8}{2} = -0.75[A]$$

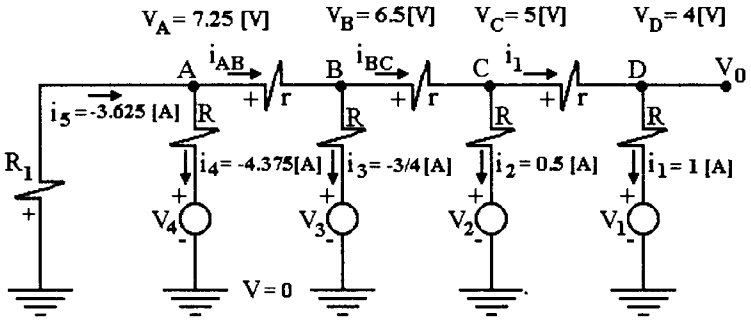
$$V_{AB} = r(i_{AB}) = r(i_3 + i_2 + i_1)$$

$$V_{AB} = 1(-0.75 + 0.5 + 1) = 0.75[V]$$

$$V_A = V_{AB} + V_B \ ; \ V_A = (0.75 + 6.5)[V] = 7.25[V] \text{ y}$$

$$V_A = Ri_4 + V_4 \;\; ; \;\; i_4 = \frac{V_A - V_4}{R} = \frac{7.25 - 16}{2} = -4.375\,[\mathrm{A}]$$

Las corrientes i_3 e i_4 resultaron negativas, esto indica que su sentido es opuesto al indicado en la figura original. En el diagrama siguiente se concentran los resultados obtenidos.



Con LCK en el nodo A:

$$i_5 - i_{AB} - i_4 = 0 \;\; ; \;\; i_5 = i_{AB} + i_4$$

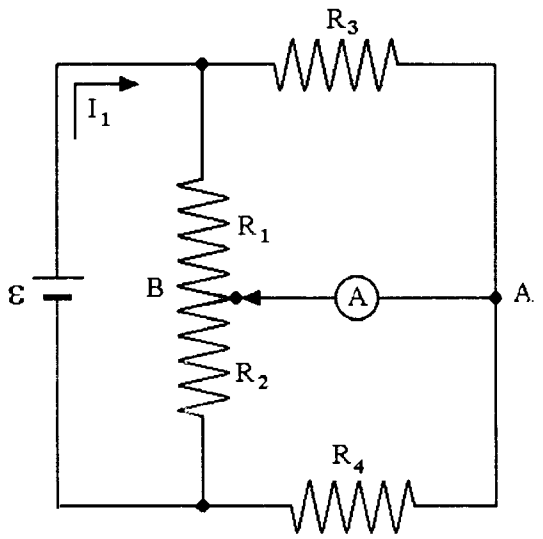
$$i_5 = 0.75 + (-4.375) = -3.625\,[\mathrm{A}]$$

$$i_{BC} = i_1 + i_2 = (1 + 0.5)\,[\mathrm{A}] = 1.5\,[\mathrm{A}]$$

c) $$P_{dis} = \frac{dE_{dis}}{dt} \;\; ; \;\; dE_{dis1} = P_{dis1}dt \;\; , \;\; \int_0^{E_1} dE_{dis1} = \int_0^{t_1} P_{dis1}dt \;\; ; \;\; P_{dis1} = R_1 i_5^2 = cte.$$

$$E_{dis1} = R_1 i_5^2 \Delta t \;\; ; \;\; E_{dis1} = (2)[\Omega](-3.625)^2[\mathrm{A}]^2 3(60)[\mathrm{s}] \doteq 4731\,[\mathrm{J}]$$

22. El circuito mostrado contiene una resistencia variable con un contacto deslizable que la divide en dos resistencias R_1 y R_2; además se sabe que $\varepsilon = 10[V]$, $I_1 = 1[A]$, $R_3 = 250[\Omega]$ y $R_4 = 1000[\Omega]$. Si se desplaza el contacto hasta que el amperímetro señale una corriente nula, determine:



a) La diferencia de potencial V_{AB}.

b) La relación R_1/R_2, fundamentando su respuesta.

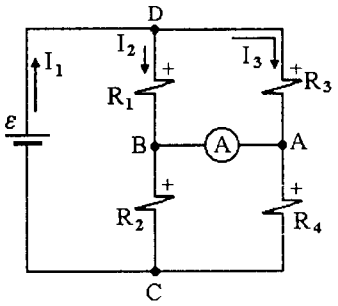
c) El valor de R_1 y R_2.

d) La energía disipada en forma de calor cada segundo en R_2, si se considera que $R_2 = R_4$. ¿En este problema se podría cumplir esta consideración?

Resolución:

a) Cuando la corriente en el amperímetro es nula, la diferencia de potencial entre sus extremos (punto *A* y punto *B*) también es nula; es decir $V_{AB} = 0$

b) De acuerdo con el diagrama siguiente se tiene: $V_{AB} = 0$, $V_A = V_B$



por lo tanto $V_{DB} = V_{DA}$ y $V_{BC} = V_{AC}$

con la ley de Ohm

$$R_1 I_2 = R_3 I_3 \ldots (1)$$

$$R_2 I_2 = R_4 I_3 \ldots (2)$$

si dividimos la ecuación (1) ÷ (2) obtenemos:

$$\frac{R_1 I_2}{R_2 I_2} = \frac{R_3 I_3}{R_4 I_3} \quad ; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{250[\Omega]}{1000[\Omega]} \quad ; \quad \frac{R_1}{R_2} = 0.25$$

c) Con la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla externa se obtiene:

$$I_3(R_3 + R_4) - \varepsilon = 0 \quad ; \quad I_3 = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_4} \quad ; \quad I_3 = \frac{10[V]}{(250 + 1000)[\Omega]} = 0.008[A]$$

Si ahora aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo *D*:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad ; \quad I_2 = I_1 - I_3 \quad , \quad I_2 = (1 - 0.008)[A] = 0.992[A]$$

De la ecuación (1)

$$R_1 = \frac{R_3 I_3}{I_2} \quad ; \quad R_1 = \frac{250[\Omega](0.008)[A]}{0.992[A]} = 2.016[\Omega] \text{ y de la ecuación (2)}$$

$$R_2 = \frac{R_4 I_3}{I_2} \quad ; \quad R_2 = \frac{1000[\Omega]0.008[A]}{0.992[A]} \doteq 8.065[\Omega]$$

d) Si R_2 fuese igual a R_4 (ambas de 1000[Ω]) y el amperímetro nos diese lectura nula, se tendría que $(R_1/R_2) = 0.25$ y $R_1 = 0.25\ (R_2) = 250[\Omega]$, con lo cual resultaría que $R_1 = R_3$.

Como $(R_3 + R_4) = 1250[\Omega]$ y $(R_1 + R_2) = 1250[\Omega]$ significaría que la corriente en la rama $(R_3 + R_4)$ debería ser igual a la que circularía por $(R_1 + R_2)$; pero esto no es así porque $I_2 = 992[\text{mA}]$ e $I_3 = 8[\text{m}A]$.

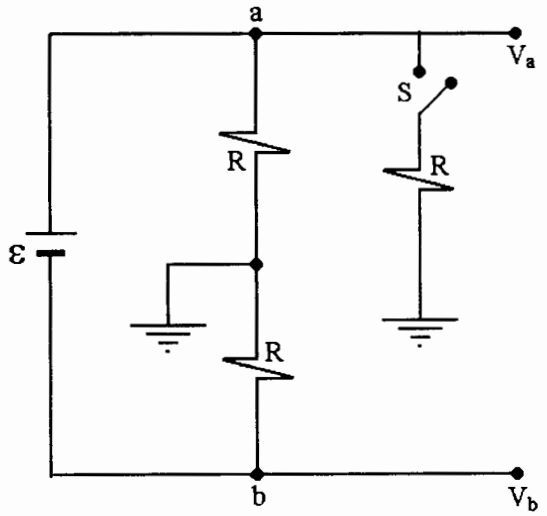
Por lo anterior, en este circuito con la corriente I_1, no se puede cumplir que $R_2 = R_4$; la energía que disipa R_2 cada segundo es:

$$E_{dis} = R_2 I_2^2 \Delta t \quad ; \quad E_{dis} = 8.065(0.992)^2 1 = 7.9365[J].$$

23. Para el circuito mostrado en la figura se sabe que las unidades de las cantidades que aparecen son: $[\varepsilon]_u = [V]$, $[R]_u = [\Omega]$, $[V_a]_u = [V_b]_u = [V]$; determine:

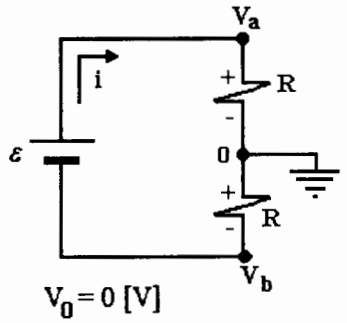
a) V_a y V_b cuando el interruptor S está abierto.

b) V_a y V_b cuando el interruptor S está cerrado.



Resolución:

a) Con el interruptor S abierto, el circuito se reduce al siguiente:



Con la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene:

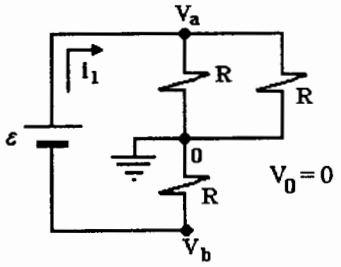
$$-\varepsilon + V_{a0} + V_{0b} = 0$$

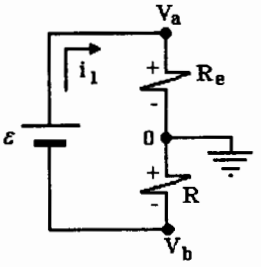
$$-\varepsilon + Ri + Ri = 0 \;\; ; \;\; i = \frac{\varepsilon}{2R}[\text{A}] \text{ por lo tanto}$$

$$V_{a0} = V_a = Ri \;\; ; \;\; V_a = R\left[\frac{\varepsilon}{2R}\right] = \frac{\varepsilon}{2}[\text{V}]$$

$$\text{y } V_{0b} = Ri \;\; ; \text{ como } V_{0b} = V_0 - V_b \,,\; V_b = -R\left[\frac{\varepsilon}{2R}\right] = -\frac{\varepsilon}{2}[\text{V}]$$

b) Con el interruptor S cerrado, el circuito queda como se muestra:





donde $R_e = \dfrac{R\,R}{R+R} = \dfrac{R}{2}$; con la ley de voltajes de Kirchhoff se puede escribir:

$$-\varepsilon + R_e i_1 + Ri_1 = 0 \;\; ; \;\; i_1 = \frac{\varepsilon}{R_e + R} = \frac{2\varepsilon}{3R}[\text{A}]$$

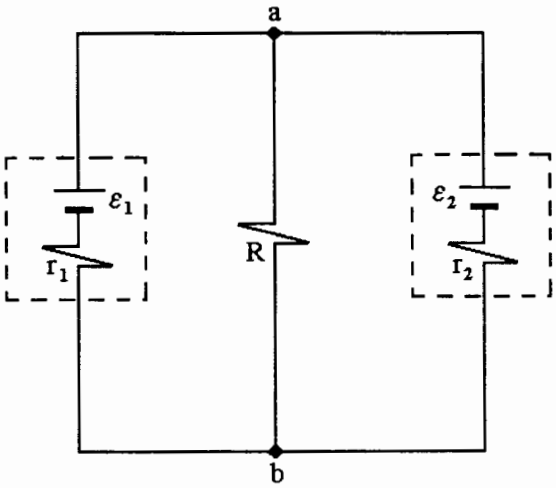
Con la ley de Ohm:

$$V_{a0} = R_e i_1 \;\; ; \;\; V_a = \frac{R}{2}\left[\frac{2\varepsilon}{3R}\right] = \frac{\varepsilon}{3}[\text{V}] \text{ y}$$

$$V_{0b} = Ri_1 \;\; ; \;\; V_{0b} = V_0 - V_b \;\; , \;\; V_b = -Ri_1$$

$$V_b = -R\left[\frac{2\varepsilon}{3R}\right] \;\; , \;\; V_b = -\frac{2}{3}\varepsilon\,[\text{V}]$$

24. El resistor $R = 5[\Omega]$ del circuito de la figura disipa el calor adecuadamente con una potencia no mayor de $30[W]$; los valores de fuerza electromotriz y resistencia interna de las fuentes reales son: $\varepsilon_1 = 15[V]$ y $r_1 = 1[\Omega]$; y $\varepsilon_2 = 20[V]$ y $r_2 = 2[\Omega]$. Determine:

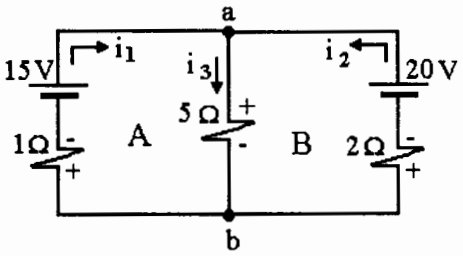


a) ¿Cuánta energía entrega al circuito cada una de las fuentes reales en un segundo?

b) ¿Elevará excesivamente su temperatura el resistor *R*? Justifique su respuesta.

Resolución:

a) Al asignar corrientes a cada rama principal del circuito, se tiene:



Para encontrar los valores de las corrientes estableceremos un sistema de ecuaciones aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito.

Con la ley de corrientes en el nodo *a* se obtiene

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad ...(1)$$

Con la ley de voltajes en las mallas *A* y *B* se obtienen:

Malla *A*: $1(i_1) - 15 + 5i_3 = 0 \;\; ; \;\; i_1 + 0i_2 + 5i_3 = 15 \quad ...(2)$

Malla *B*: $2(i_2) - 20 + 5i_3 = 0 \;\; ; \;\; 0i_1 + 2i_2 + 5i_3 = 20 \quad ...(3)$

Al resolver el sistema se encuentran

$$i_1 = 0.29[A] \;\; ; \;\; i_2 = 2.65[A] \;\; ; \;\; i_3 = 2.94[A]$$

y la energía que entrega cada fuente resulta: $E_1 = P_1 \Delta t \;\; ; \;\; P_1 = \varepsilon_1 i_1 - r_1 i_1^2$

$$E_1 = [15(0.29) - 1(0.29)^2]1[J] \;\; ; \;\; E_1 = 4.266[J]$$

$$E_2 = P_2 \Delta t \;\; ; \;\; P_2 = \varepsilon_2 i_2 - r_2 i_2^2$$

$$E_2 = [20(2.65) - 2(2.65)^2]1[J] \;\; ; \;\; E_2 = 38.955[J]$$

b) Las energías calculadas son entregadas al resistor *R* en cada segundo, éste deberá disipar un total de43.221 [J] en el mismo lapso; esto significa que la potencia en *R* será 43.221 [W] y como la potencia nominal del resistor es 30[W], este elemento elevará excesivamente su temperatura.

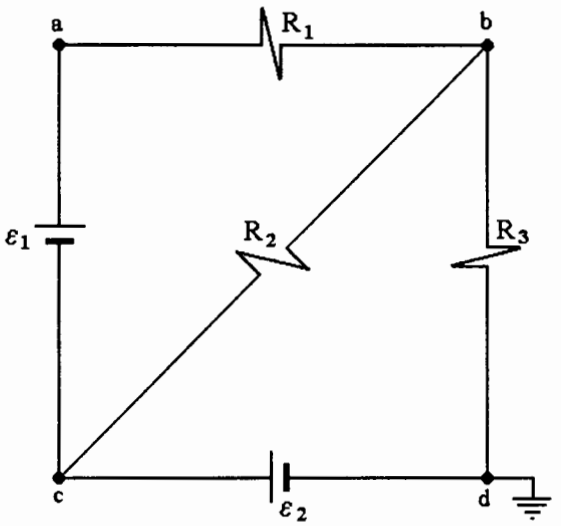
25. En el circuito mostrado $\varepsilon_1 = 12[V]$, $\varepsilon_2 = 6[V]$, $R_1 = R_3 = 8[\Omega]$ y $R_2 = 4[\Omega]$, calcule:

a) La corriente en cada una de las fuentes de fem.

b) La energía suministrada al circuito durante 10 minutos.

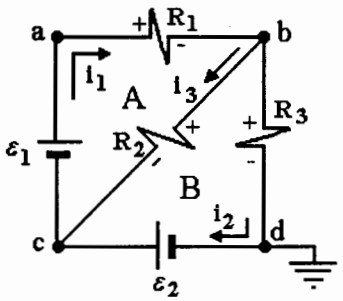
c) El potencial del punto *a*.

d) La potencia en el resistor R_2.



Resolución:

a) Al asignar corrientes al circuito se obtiene:



Para conocer los valores de las corrientes, se establece un sistema de ecuaciones simultáneas con la aplicación de las leyes de Kirchhoff.

Con la ley de corrientes en el nodo *b* tenemos:

$i_1 - i_2 - i_3 = 0$ ...(1)

Como no se pueden obtener más ecuaciones linealmente independientes con esta ley, aplicaremos la ley de voltajes en las mallas A y B.

Malla A: $-\varepsilon_1 + R_1 i_1 + R_2 i_3 = 0$; $8i_1 + 4i_3 = 12$ ...(2)

Malla B: $-\varepsilon_2 - R_2 i_3 + R_3 i_2 = 0$; $8i_2 - 4i_3 = 6$ ...(3)

Al resolver el sistema se encuentran:

$i_1 = 1.3125[A]$, $i_2 = 0.9375[A]$ e $i_3 = 0.375[A]$

b) La energía es suministrada al circuito por las fuentes

$E_1 = P_1 \Delta t$; $P_1 = \varepsilon_1 i_1$ y $\Delta t = 10(60)[s]$ $\therefore$ $E_1 = 12[V]1.3125[A]600[s] = 9{,}450[J]$

$E_2 = P_2 \Delta t$; $P_2 = \varepsilon_2 i_2$ y $\Delta t = 600[s]$ $\therefore$ $E_2 = 6[V]0.9375[A]600[s] = 3.375[J]$

Esto significa que el circuito recibe 12,825 [J] en un lapso de 10 minutos.

c) El potencial del punto *a* es numéricamente idéntico a la diferencia de potencial entre este punto y el punto *d*, es decir:

$v_a = V_{ad}$, $V_d = 0[V] \therefore V_{ad} = R_1 i_1 + R_3 i_2$; $V_{ad} = 8(1.3125) + 8(0.9375)[V] = 18[V] = V_a$

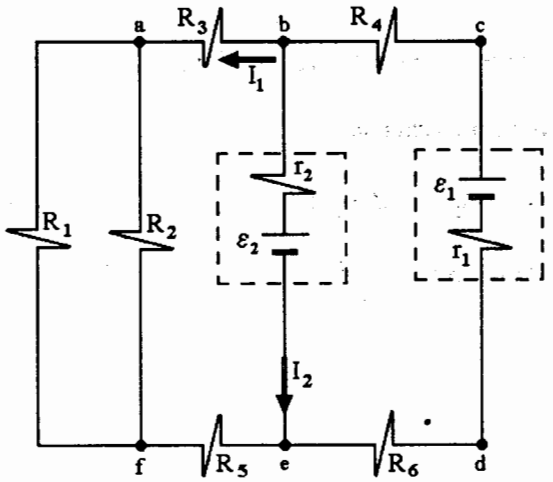
por otra trayectoria $V_{ad} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $V_{ad} = (12 + 6)[V] = 18[V]$

d) Con la ley de Joule

$P_2 = R_2 i_3^2$; $P_2 = 4[\Omega]0.375^2[A]^2 = 0.5625[W]$

También $P_2 = \dfrac{V_{bc}^2}{R_2}$; $P_2 = \dfrac{(R_2 i_3)^2}{R_2} = R_2 i_3^2$

26. En la red mostrada los valores de los resistores, en [Ω], son $R_1 = 4.5$, $R_2 = 9$, $R_3 = R_5 = 15$, $R_4 = 7.5$, $R_6 = r_2 = 3$ y $r_1 = 1.5$; la fuente de fuerza electromotriz $\varepsilon_2 = 54$[V] y la diferencia de potencial V_{be} es 56.5[V]. Determine:



a) El valor de I_1.

b) El valor de I_2.

c) La fuerza electromotriz ε_1.

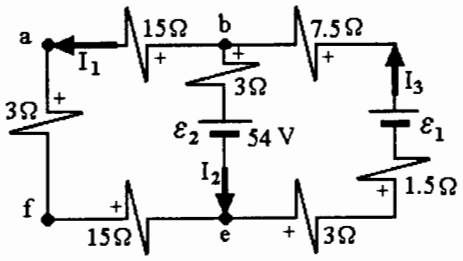
d) La energía disipada por el resistor de 9[Ω] en el lapso de 2 minutos.

e) La potencia entregada por la fuente 1 al resto del circuito.

Resolución:

a) Para simplificar el circuito se obtiene el resistor equivalente R_{af} de la conexión en paralelo de R_1 y R_2

$$R_{af} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad ; \quad R_{af} = \frac{4.5(9)}{4.5 + 9} = 3[\Omega]$$



En la rama izquierda se puede reducir la conexión en serie de R_3, R_{af} y R_5 a un resistor R_{be} = (15 + 3 + 15)[Ω] = 33[Ω] y con la ley de Ohm

$$V_{be} = R_{be} I_1 \; ; \; I_1 = \frac{56.5[\text{V}]}{33[\Omega]} \therefore I_1 = 1.712[\text{A}]$$

b) En la rama central $V_{be} = 3I_2 + 54$

$$I_2 = \frac{(56.5 - 54)[\text{V}]}{3[\Omega]} = 0.833[\text{A}]$$

c) Los valores de I_1 e I_2 nos permiten conocer I_3 con la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo *b*

$$I_1 + I_2 = I_3 \; ; \; I_3 = 2.545[\text{A}]$$

Ahora con la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla derecha:

$$V_{be} + 3I_3 + 1.5I_3 - \varepsilon_1 + 7.5I_3 = 0 \; ; \; \varepsilon_1 = V_{be} + 12I_3$$

$$\varepsilon_1 = 56.5[\text{V}] + 12(2.545)[\text{V}] = 87.04[\text{V}]$$

d) $E_9 = P_9 \Delta t$

$\Delta t = 2(60)[\text{s}] = 120[\text{s}]$

$P_9 = R_2 I_9^2$

$I_9 = \dfrac{V_{af}}{R_2} = \dfrac{R_{af} I_1}{R_2} \therefore I_9 = \dfrac{3[\Omega]1.712[\text{A}]}{9[\Omega]} = 0.571[\text{A}]$

$P_9 = 9[\Omega]0.571^2[\text{A}]^2 = 2.931[\text{W}]$

y la energía disipada $E_9 = 2.931[\text{W}]120[\text{s}] = 351.713[\text{J}]$

e) Como ambas fuentes son reales, es decir poseen resistencia interna, la potencia que entrega la fuente 1 es

$P_1 = \left(\varepsilon_1 I_3 - r_1 I_3^2\right)[\text{W}]$

$P_1 = 87.04[\text{V}]2.545[\text{A}] - 1.5[\Omega]2.545^2[\text{A}]^2 = 221.517 - 9.716$

$P_1 = 211.801[\text{W}]$

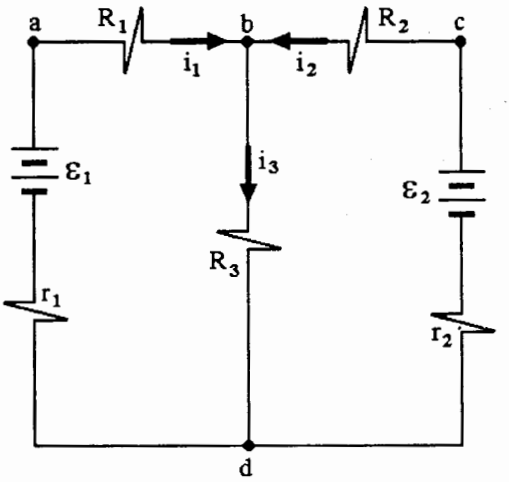
27. En el circuito eléctrico mostrado en la figura, $R_1 = 18[\Omega]$, $R_2 = 9[\Omega]$, $R_3 = 14.3[\Omega]$, $r_1 = 2[\Omega]$, $r_2 = 1[\Omega]$, $\varepsilon_1 = 12[V]$ y $\varepsilon_2 = 6[V]$; calcule:

a) Las corrientes eléctricas i_1, i_2 e i_3.

b) La diferencia de potencial V_{ac} , tomando como referencia el nodo *c*.

c) La potencia suministrada por la fuente real ε_1.

d) La energía entregada por la fuente real ε_2 al resto del circuito en un lapso de 2 minutos.



Resolución:

a) Con la aplicación de las leyes de Kirchhoff se establecen las ecuaciones necesarias (tres) para encontrar los valores de las corrientes.

Con LCK en el nodo *b*: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$ ...(1)

Con LVK en malla izquierda: $-\varepsilon_1 + (R_1 + r_1)i_1 + R_3 i_3 = 0$

sustituyendo valores $20i_1 + 14.3i_3 = 12$ ...(2)

Con LVK en malla derecha: $-\varepsilon_2 + (R_2 + r_2)i_2 + R_3 i_3 = 0$

sustituyendo valores $10i_2 + 14.3i_3 = 6$ ...(3)

Al resolver el sistema se obtiene: $i_1 = 0.3272[A]$, $i_2 = 0.0543[A]$ e $i_3 = 0.3815[A]$

b) V_{ac} se calcula con las corrientes encontradas

$V_{ac} = R_1 i_1 - R_2 i_2$; $V_{ac} = 18[\Omega]0.3272[V] - 9[\Omega]0.0543[A] = 5.401[V]$

c) La potencia suministrada por ε_1 es $P_1 = \varepsilon_1 i_1 - r_1 i_1^2$

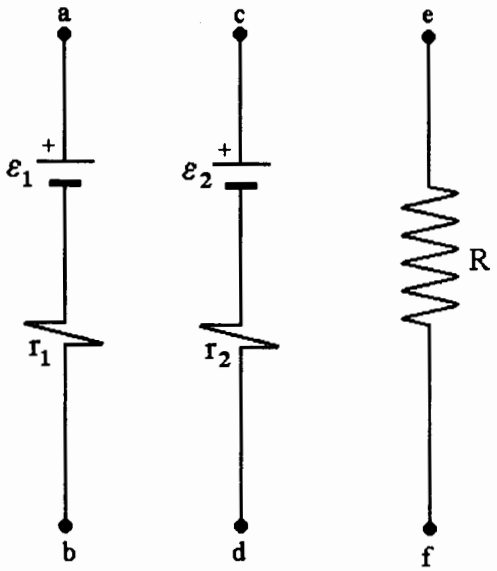
$P_1 = 12[V]0.3272[A] - 2[\Omega]0.3272^2[A]^2 = 3.7123[W]$

d) La energía entregada por la fuente ε_2 resulta $E_2 = P_2 \Delta t$

donde $P_2 = \varepsilon_2 i_2 - r_2 i_2^2$; $P_2 = 6(0.0543) - 1(0.0543)^2 = 0.3229[W]$

y la energía $E_2 = 0.3229[W]120[s] = 38.742[J]$

28. Se conectan en paralelo las dos fuentes reales y el resistor R mostrados en la figura, uniendo las terminales a, c y e en un solo punto y las terminales b, d y f en otro punto. Si $\varepsilon_1 = 10[V]$, $r_1 = 1[\Omega]$, $r_2 = 2[\Omega]$ y $R = 100[\Omega]$, determine:

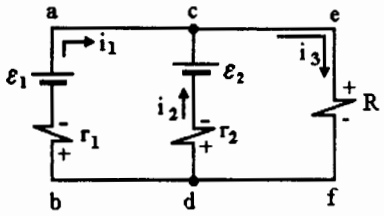


a) El valor de ε_2 de manera que $V_{ab} = V_{cd} = V_{ef} = 15[V]$.

b) La fuente que entrega energía al circuito y en qué cantidad después de 5 minutos.

Resolución:

a) Al efectuar la conexión queda un circuito como el de la figura



Se puede escribir que $V_{cd} = \varepsilon_2 - r_2 i_2$, $V_{cd} = 15[V]$, pero se ignora i_2 y no se puede calcular ε_2.

Por lo tanto valuaremos las corrientes:

como $V_{ef} = Ri_3$, $i_3 = \dfrac{15[V]}{100[\Omega]} = 0.15[A]$ y $V_{ab} = \varepsilon_1 - r_1 i_1$

$$i_1 = \frac{V_{ab} - \varepsilon_1}{-r_1} = \frac{(15 - 10)[V]}{-1[\Omega]} = -5.0[A]$$

como el signo de i_1 resultó (–) significa que su sentido es al contrario.

Con la ley de corrientes en el punto c se obtiene $i_1 + i_2 - i_3 = 0$

$i_2 = i_3 - i_1$; $i_2 = [0.15 - (-5.0)][A]$

$i_2 = 5.15[A]$ y como

$\varepsilon_2 = V_{cd} + r_2 i_2$, $\varepsilon_2 = 15 + 2(5.15) = (15 + 10.30)[V]$

$\varepsilon_2 = 25.30[V]$

b) La fuente ε_1 se está energizando, ya que i_1 resultó negativa; la fuente ε_2 es la que entrega energía al circuito y en $\Delta t = 5[\text{min}] = 300[\text{s}]$

$$E_2 = P_2 \Delta t$$

$$P_2 = \varepsilon_2 i_2 - r_2 i_2^2$$

$$P_2 = 25.3[\text{V}]5.15[\text{A}] - 2[\Omega]5.15^2[\text{A}]^2$$

$$P_2 = (130.295 - 53.045)[\text{W}] = 77.250[\text{W}]$$

$$\therefore E_2 = 77.25[\text{W}]300[\text{s}]$$

y la energía que la fuente ε_2 entrega en el lapso solicitado es

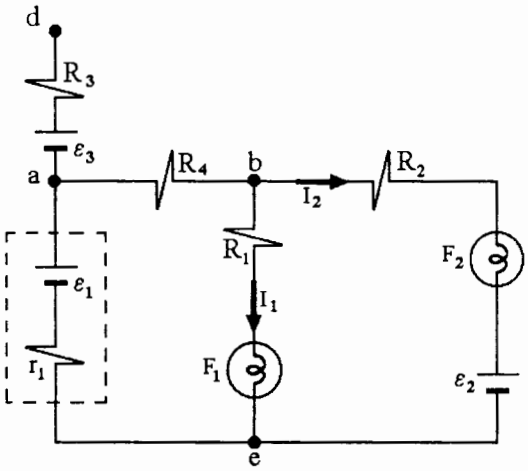
$$E_2 = 23{,}175[\text{J}]$$

29. Si los focos del circuito de la figura funcionan al voltaje y potencia nominales: $F_1(12[V],24[W])$ y $F_2(6[V],12[W])$, además $R_3=10[\Omega]$, $R_4=5[\Omega]$, $r_1=1[\Omega]$, $\varepsilon_1=60[V]$, $\varepsilon_2=10[V]$ y $\varepsilon_3=9[V]$, calcule:

a) El valor del resistor R_1 y el de R_2 para que funcionen los focos si se sabe que $V_{be}=36[V]$.

b) El material del conductor con el cual podría construirse el resistor $R=20[\Omega]$ y tener longitud mínima, de acuerdo con la tabla de materiales.

c) La potencia total suministrada a los elementos del circuito.



Material	σ[S/m] a 20[°C]	$A[mm^2]$	Calibre
nicrómel	0.9259×10^7	0.823	18
cobre	5.814×10^7	0.823	18
aluminio	3.534×10^7	0.823	18

Resolución:

a) Como los focos funcionan a valores nominales, se pueden calcular las corrientes I_1 e I_2 de los datos de dichos elementos.

$$P_1 = 24[W] \text{ y } V_1 = 12[V] \therefore I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{24[W]}{12[V]} = 2[A] \text{ y}$$

$$P_2 = 12[W] \text{ y } V_2 = 6[V] \therefore I_2 = \frac{P_2}{V_2} = \frac{12[W]}{6[V]} = 2[A] \text{ , como}$$

$$V_{be} = 36[V] \text{ , } V_{be} = R_1 I_1 + V_1 \text{ ; } R_1 = \frac{V_{be} - V_1}{I_1} = \frac{(36 - 12)[V]}{2[A]} = 12[\Omega] \text{ y una potencia}$$

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 \text{ ; } P_{R1} = 12(2)^2[W] \text{ ; } P_{R1} = 48[W] \text{ , también}$$

$$V_{be} = R_2 I_2 + V_2 + \varepsilon_2 \text{ ; } R_2 = \frac{V_{be} - V_2 - \varepsilon_2}{I_2} = \frac{(36 - 6 - 10)[V]}{2[A]} = 10[\Omega] \text{ y una potencia}$$

$$P_{R2} = R_2 I_2^2 \text{ ; } P_{R2} = 10(2)^2[W] \text{ ; } P_{R2} = 40[W]$$

b) Para construir el resistor

$R = 20[\Omega]$ empleamos la ecuación $R = \dfrac{\rho \ell}{A}$

como la resistividad ρ es recíproca de la conductividad σ, se tiene

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} \therefore \ell = R\sigma A$$

como el calibre de los materiales es el mismo, también lo es su sección transversal A; como R = constante, la longitud será mínima cuando σ sea mínima, por esta razón se elige el nicrómel y la longitud ℓ necesaria será:

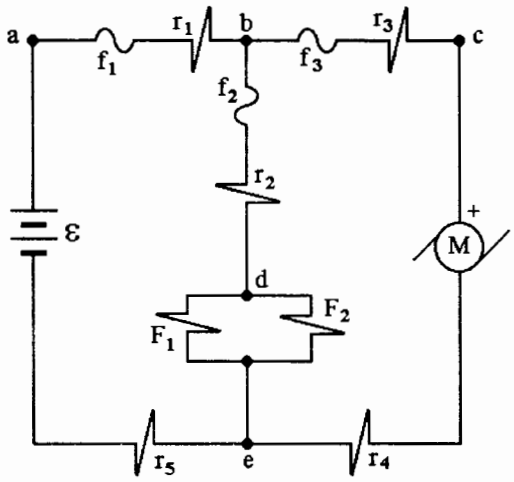
$$\ell = 20[\Omega]0.9259 \times 10^7[\mathrm{S/m}]0.823 \times 10^{-6}[\mathrm{m}^2] = 152.40[\mathrm{m}]$$

c) La potencia es suministrada por la fuente ε_1 únicamente. En la rama ***da*** no circula corriente eléctrica, por lo tanto la corriente en la fuente ε_1 es (aplicando ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo *b*):

$I = I_1 + I_2$; $I = (2 + 2)[\mathrm{A}] = 4[\mathrm{A}]$ y por tratarse de una fuente real, su potencia es:

$$P_{\varepsilon 1} = \varepsilon_1 I - r_1 I^2 \; ; \; P_{\varepsilon 1} = \left(60(4) - 1(4)^2\right)[\mathrm{W}] \; ; \; P_{\varepsilon 1} = 224[\mathrm{W}]$$

30. El circuito mostrado en la figura forma parte del sistema eléctrico de un móvil. A través del motor M debe circular una corriente eléctrica de 15[A], la potencia eléctrica de F_1 y de F_2 es 100[W] y operan con una diferencia de potencial de 10[V]; además, $r_1 = r_2 = r_5 = 0.2\,[\Omega]$ y $r_3 = r_4 = 0.1\,[\Omega]$. Con base en ello, determine:



a) La corriente eléctrica en cada uno de los fusibles f_1, f_2 y f_3; la resistencia de cada fusible es despreciable.

b) El valor de la fem ε.

c) La diferencia de potencial V_{be}.

d) La potencia eléctrica de la fuente de fem ε.

Resolución:

a) A partir de los valores nominales se obtiene que la corriente eléctrica en el motor debe ser 15[A] y ésta fluye a través de f_3.

Por f_2 circula una corriente que se divide en dos para encender cada lámpara (F_1 y F_2); en éstas se tiene:

$$P_F = V_F I_F \;;\; I_F = \frac{P_F}{V_F} = \frac{100\,[\mathrm{W}]}{10\,[\mathrm{V}]} = 10\,[\mathrm{A}] \;,\; I_{F1} = I_{F2} \therefore I_{f2} = 2I_{F1} = 20\,[\mathrm{A}]$$

Ahora bien, con la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada en el nodo *b*:

$$I_{f1} = I_{f2} + I_{f3} \;;\; I_{f1} = 20\,[\mathrm{A}] + 15\,[\mathrm{A}] = 35\,[\mathrm{A}]$$

b) Para encontrar el valor ε, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla izquierda:

$$r_5 I_{f1} - \varepsilon + r_1 I_{f1} + r_2 I_{f2} + V_{F1} = 0, \text{ con valores}$$

$$\varepsilon = (0.2 + 0.2)\,[\Omega](35)\,[\mathrm{A}] + 0.2\,[\Omega]20\,[\mathrm{A}] + 10\,[\mathrm{V}] = 28\,[\mathrm{V}]$$

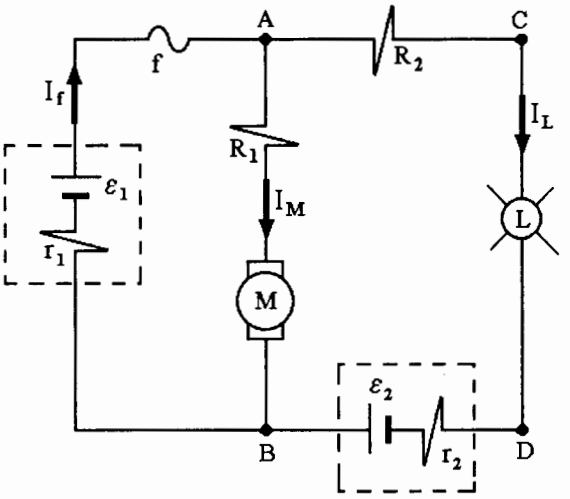
c) La diferencia de potencial V_{be} se calcula a través de

$$V_{be} = r_2 I_{f2} + V_{F2} \;;\; V_{be} = 0.2\,[\Omega]20\,[\mathrm{A}] + 10\,[\mathrm{V}] = 14\,[\mathrm{V}]$$

d) La potencia de la fuente se obtiene con $P = \varepsilon I_{f1}$, ya que aparece como fuente ideal, por lo tanto:

$$P = 28\,[\mathrm{V}]35\,[\mathrm{A}] = 980\,[\mathrm{W}]$$

31. Con base en el circuito eléctrico mostrado en la figura, donde el motor y la lámpara operan con el voltaje y corriente nominales: $M(12[\text{V}],0.5[\text{A}])$ y $L(6[\text{V}],0.5[\text{A}])$, las fuentes de fem son $\varepsilon_1 = 26[\text{V}]$ con $r_1 = 1[\Omega]$ y $\varepsilon_2 = 3[\text{V}]$ con $r_2 = 1[\Omega]$, además de considerar despreciable la resistencia del fusible f, calcule:



a) La corriente eléctrica que circula por el fusible f.

b) Los valores de resistencia y potencia que deben tener los resistores R_1 y R_2.

c) La diferencia de potencial V_{CB}.

d) La energía disipada en forma de calor en el circuito en el lapso de 5 minutos.

Resolución:

a) Con la LCK en el nodo A se obtiene $I_f = I_M + I_L$

de los datos $I_M = 0.5[\text{A}]$ e $I_L = 0.5[\text{A}] \therefore I_f = (0.5 + 0.5)[\text{A}] = 1[\text{A}]$

b) Con la LVK en la malla izquierda se obtiene $r_1 I_f - \varepsilon_1 + R_1 I_M + V_M = 0$

$$R_1 = \frac{\varepsilon_1 - r_1 I_f - V_M}{I_M} \; ; \; R_1 = \frac{(26 - 1(1) - 12)[\text{V}]}{0.5[\text{A}]} \; ; \; R_1 = 26[\Omega] \text{ y su potencia}$$

$$P_1 = R_1 I_M^2 \; ; \; P_1 = 26[\Omega](0.5)^2[\text{A}]^2 = 6.5[\text{W}]$$

Ahora con la LVK en la malla externa se obtiene $r_1 I_f - \varepsilon_1 + R_2 I_L + V_L + r_2 I_L - \varepsilon_2 = 0$

$$R_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - r_1 I_f - V_L - r_2 I_L}{I_L} \; ; \; R_2 = \frac{(26 + 3 - 1(1) - 6 - 1(0.5))[\text{V}]}{0.5[\text{A}]} = 43[\Omega] \text{ y}$$

$$P_2 = R_2 I_L^2 \; ; \; P_2 = 43(0.5)^2 = 10.75[\text{W}]$$

c). La diferencia de potencial V_{CB} se puede expresar como $V_{CB} = V_{CD} + V_{DB}$

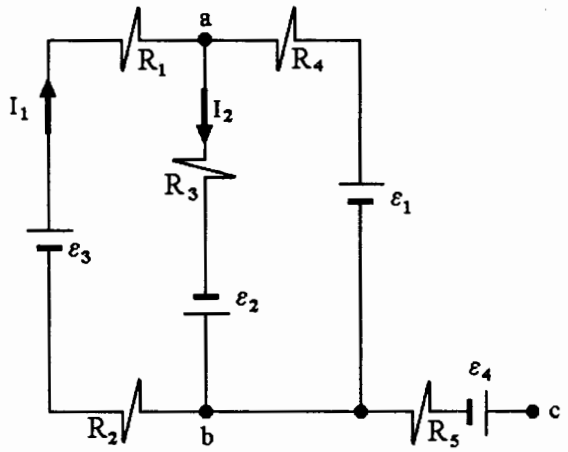
$$V_{CB} = V_L + r_2 I_L - \varepsilon_2 \; ; \; V_{CB} = (6 + 1(0.5) - 3)[\text{V}] = 3.5[\text{V}]$$

d) La energía en forma de calor es disipada por los resistores y por la lámpara, por lo tanto:

$$E_{dis} = \left(r_1 I_f^2 + R_1 I_M^2 + R_2 I_L^2 + V_L I_L + r_2 I_L^2\right)\Delta t \text{ en la cual } \Delta t = 5(60)[\text{s}] = 300[\text{s}]$$

$$E_{dis} = \left(1(1)^2 + 26(0.5)^2 + 43(0.5)^2 + 6(0.5) + 1\ 0.5)^2\right)[\text{W}]300[\text{s}] = 6{,}450[\text{J}]$$

32. En el circuito de la figura $\varepsilon = 4[V]$, $\varepsilon_3 = 24[V]$, $\varepsilon_4 = 4[V]$, $R_2 = 4[\Omega]$, $R_3 = 16[\Omega]$, $R_4 = 6[\Omega]$, $R_5 = 10[\Omega]$ e $I_1 = 1.5[A]$, obtenga:



a) El valor del resistor R_1 si $V_{ab} = 12[V]$.

b) La corriente I_2.

c) El valor de la fem ε_1.

d) La diferencia de potencial V_{ac}.

Resolución:

a) Para encontrar el valor de R_1 aplicamos la LVK a la malla izquierda

$$R_2 I_1 - \varepsilon_3 + R_1 I_1 + V_{ab} = 0$$

$$R_1 = \frac{\varepsilon_3 - V_{ab} - R_2 I_1}{I_1}$$

$$R_1 = \frac{(24 - 12 - 4(1.5))[V]}{1.5[A]} = 4[\Omega]$$

b) Para conocer I_2, con la LVK en la malla izquierda

$$V_{ab} = R_3 I_2 - \varepsilon_2 \ , \ I_2 = \frac{\varepsilon_2 + V_{ab}}{R_3} \ , \ I_2 = \frac{(4 + 12)[V]}{16[\Omega]} = 1[A]$$

c) Con la LVK aplicada en la malla derecha se obtiene $V_{ab} = R_4 I_3 + \varepsilon_1$, considerando a I_3 fluyendo desde *a* hasta *b* por la rama derecha, con LCK en el nodo *a* se establece: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

$I_3 = I_1 - I_2$; $I_3 = (1.5 - 1)[A] = 0.5[A]$, de esta forma $\varepsilon_1 = V_{ab} - R_4 I_3$

$$\varepsilon_1 = 12[V] - 6[\Omega]0.5[A] = 9[V]$$

d) La diferencia de potencial V_{ac} se puede obtener como $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$, como no hay corriente en R_5,

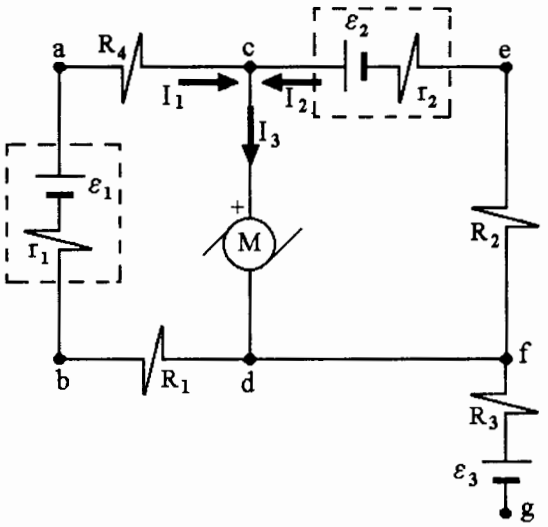
$V_{bc} = -\varepsilon_4$ y $V_{ac} = 12[V] + (-4)[V] = 8[V]$

También se puede encontrar V_{ac} partiendo del potencial V_a y llegando al potencial V_c, como se indica a continuación:

$$V_a - R_3 I_2 + \varepsilon_2 + R_5(0) + \varepsilon_4 = V_c \ ; \ V_a - V_c = V_{ac} = R_3 I_2 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4$$

$$V_{ac} = 16[\Omega]1[A] - 4[V] - 4[V] = (16 - 8)[V] = 8[V]$$

33. Para el circuito eléctrico mostrado en la figura donde el motor opera con 12[V] y 18[W], se sabe que $\varepsilon_1 = 30[V]$, $\varepsilon_2 = 18[V]$, $\varepsilon_3 = 6[V]$, $r_1 = 2[\Omega]$, $r_2 = 1.5[\Omega]$, $R_3 = 1[\Omega]$, $R_4 = 10[\Omega]$ y que la diferencia de potencial $V_{ac} = 10[V]$, obtenga:



a) Los valores de las corrientes eléctricas I_1, I_2 e I_3.

b) Los valores de los resistores R_1 y R_2.

c) El valor de la diferencia de potencial V_{cg}.

Resolución:

a) Para encontrar las corrientes eléctricas se pueden aplicar las leyes de Kirchhoff; sin embargo, en ocasiones como ésta se cuenta con información que nos permite valuar algunas de esas corrientes con otras expresiones: como $V_{ac} = R_4 I_1$

$$I_1 = \frac{V_{ac}}{R_4}\ ,\ I_1 = \frac{10[V]}{10[\Omega]} = 1[A]$$

En el motor, su potencia $P = V_M I_M$, $I_M = I_3$

$$\therefore I_3 = \frac{P_M}{V_M}\ ,\ I_3 = \frac{18[W]}{12[V]} = 1.5[A]$$ y con LCK en el nodo c: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ entonces

$$I_2 = I_3 - I_1\ ,\ I_2 = (1.5 - 1)[A] = 0.5[A]$$

b) Al aplicar la LVK en la malla izquierda se puede encontrar R_1

$$R_1 I_1 + r_1 I_1 - \varepsilon_1 + R_4 I_1 + V_M = 0\ ,\ R_1 = \frac{\varepsilon_1 - r_1 I_1 - R_4 I_1 - V_M}{I_1}\ ,\ R_1 = \frac{(30 - 2(1) - 10(1) - 12)[V]}{1[A]}$$

se encuentra que $R_1 = 6[\Omega]$.

Con la LVK en la malla derecha podremos conocer R_2

$$V_m + R_2 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0\ ;\ R_2 = \frac{\varepsilon_2 - V_M - r_2 I_2}{I_2}\ ;\ R_2 = \frac{(18 - 12 - 1.5(0.5))[V]}{0.5[A]} = 10.5[\Omega]$$

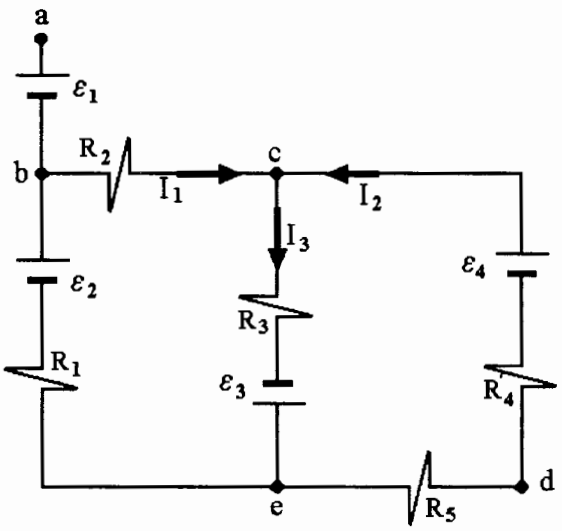
c) La diferencia de potencial V_{cg} resulta de plantear

$$V_{cg} = V_{cd} + V_{df} + R_3(0) + \varepsilon_3\ ,\ \text{como } V_d = V_f$$

ya que son el mismo punto y la corriente en el resistor R_3 es nula

$$V_{cg} = V_M + \varepsilon_3\ ;\ V_{cg} = 12[V] + 6[V] = 18[V]$$

34. Para el circuito eléctrico mostrado en la figura se sabe que $\varepsilon_1 = 3[V]$, $\varepsilon_2 = 12[V]$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 6[V]$, $R_1 = 2[\Omega]$, $R_2 = 18[\Omega]$, $R_3 = 30[\Omega]$, $R_4 = 1[\Omega]$ y $R_5 = 9[\Omega]$; además $I_1 = 0.327[A]$ y $V_{ed} = 495[mV]$; con base en esto, calcule:



a) El valor de la corriente I_3.

b) El valor de la diferencia de potencial V_{ae} a través de dos trayectorias diferentes.

Resolución:

a) Al aplicar la LCK en el nodo *c* es posible obtener el valor de I_3:

$I_1 + I_2 = I_3$, se sabe que $I_1 = 0.327[A]$ y con la ley de Ohm

$$V_{ed} = R_5 I_2 \ , \ I_2 = \frac{V_{ed}}{R_5} \ , \ I_2 = \frac{0.495[V]}{9[\Omega]} = 0.055[A] \ , \ \therefore I_3 = (0.327 + 0.055)[A]$$

$$I_3 = 0.382[A]$$

b) Calculemos V_{ae} por la trayectoria *a*, *b*, *c*, *e* es decir:

$$V_{ae} = V_{ab} + V_{bc} + V_{ce} \ ; \ V_{ae} = \varepsilon_1 + R_2 I_1 + R_3 I_3 - \varepsilon_3$$

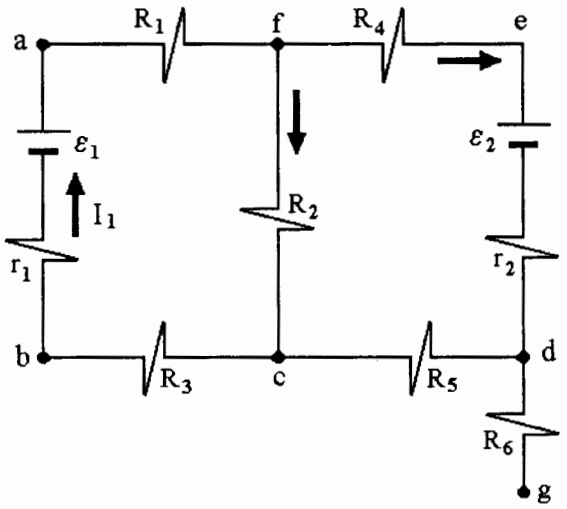
$$V_{ae} = 3 + 18(0.327) + 30(0.382) - 6 = 14.346[V]$$

Si ahora empleamos la trayectoria dada por la rama izquierda:

$$V_{ae} = V_{ab} + V_{be} \ ; \ V_{ae} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - R_1 I_1$$

$$V_{ae} = 3 + 12 - 2[0.327] = 14.346[V]$$

35. En el circuito que se muestra, $\varepsilon_2 = 10[V]$, $r_1 = 1[\Omega]$, $r_2 = 2[\Omega]$, $R_1 = 8[\Omega]$, $R_2 = 4[\Omega]$, $R_3 = 6[\Omega]$, $R_4 = 10[\Omega] = R_6$ y $R_5 = 9[\Omega]$; además $I_1 = 2[A]$, determine:



a) La fuerza electromotriz ε_1.

b) La energía que entrega, al resto del circuito, cada una de las fuentes reales durante un minuto de operación.

c) La diferencia de potencial V_{ge}.

d) El potencial del nodo *a*, si el nodo *f* se conecta a tierra.

Resolución:

a) Llamaremos I_2 a la corriente que circula desde *f* hasta *c* por R_2 e I_3 a la corriente que circula desde *f* hacia *e* a través de R_4.

Con LCK en el nodo *f* se tiene $I_1 = I_2 + I_3$; $I_2 + I_3 = 2$ (1)

Con LVK en la malla izquierda $R_3 I_1 + r_1 I_1 - \varepsilon_1 + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$

al sustituir valores $15 I_1 + 4 I_2 - \varepsilon_1 = 0$; $4 I_2 - \varepsilon_1 = -30$ (2)

Con LVK en la malla derecha $R_4 I_3 + \varepsilon_2 + r_2 I_3 + R_5 I_3 - R_2 I_2 = 0$

al sustituir valores $21 I_3 - 4 I_2 = -\varepsilon_2$; $4 I_2 - 21 I_3 = 10$ (3)

Del sistema de ecuaciones resultan:

$I_2 = 2.08[A]$, $I_3 = -0.08[A]$ y

$\varepsilon_1 = 38.32[V]$

el signo (–) en I_3 significa que dicha corriente circula en sentido opuesto

b) En el lapso de 1 minuto, $\Delta t = 60[s]$

$E_1 = \left(\varepsilon_1 I_1 - r_1 I_1^2\right)\Delta t$; $E_1 = (38.32(2) - 1(2)^2)60[J]$

$E_1 = 4{,}358.4[J]$

$E_2 = \left(\varepsilon_2 I_3' - r_2 I_3'^2\right)\Delta t$; $E_2 = (10(0.08) - 2(0.08)^2)60[J]$; $E_2 = 47.232[J]$

donde $I_3' = -I_3$

c) $V_{ge} = V_{gd} + r_2 I_3' - \varepsilon_2$

$V_{ge} = R_6(0) + 2(0.08) - 10 = -9.84[V]$

d) $V_a = V_{af}$ si $V_f = 0[V]$

$V_{af} = R_1 I_1$, $V_{af} = 8[\Omega]2[A] = 16[V]$

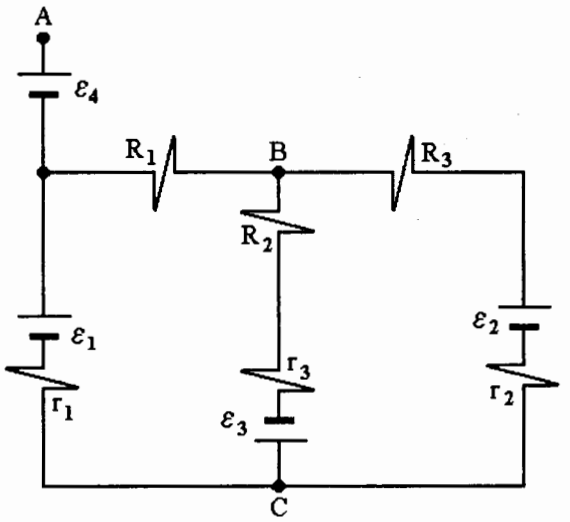
36. Para el circuito mostrado se tienen: $\varepsilon_1 = 12[V]$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 6[V]$, $\varepsilon_4 = 3[V]$; $R_1 = 18[\Omega]$, $R_2 = 28[\Omega]$, $R_3 = 9[\Omega]$, $r_1 = r_3 = 2[\Omega]$, $r_2 = 1[\Omega]$; obtenga:

a) La corriente en cada fuente de fem.

b) La energía que se transforma en calor, cada segundo, en el resistor de $28[\Omega]$.

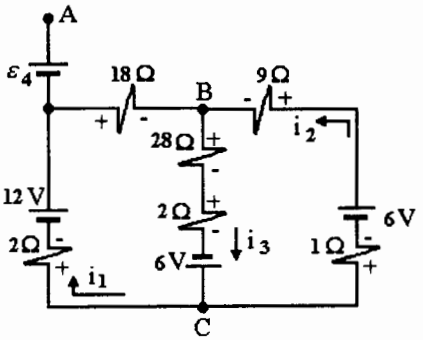
c) La diferencia de potencial V_{CA}.

d) La energía suministrada por la fuente ε_1 durante una hora.



Resolución:

a) Asignaremos las corrientes según se indica en la figura siguiente:



Con LCK en el nodo B: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$ ...(1)

Con LVK en la malla izquierda

$2i_1 - 12 + 18i_1 + 28i_3 + 2i_3 - 6 = 0$

$20i_1 + 30i_3 = 18$ ...(2)

Con LVK en la malla derecha

$1i_2 - 6 + 9i_2 + 28i_3 + 2i_3 - 6 = 0$; $10i_2 + 30i_3 = 12$ ...(3)

Al resolver el sistema se encuentran:

$i_1 = 0.327[A]$, $i_2 = 0.055[A]$; $i_3 = 0.382[A]$; en ε_4 no hay corriente.

b) E_{R2} en $\Delta t = 1[s]$; $E_{R2} = R_2 I_3^2 \Delta t$; $E_{R2} = 28[\Omega]0.382^2[A]^2\,1[s] = 4.086[J]$

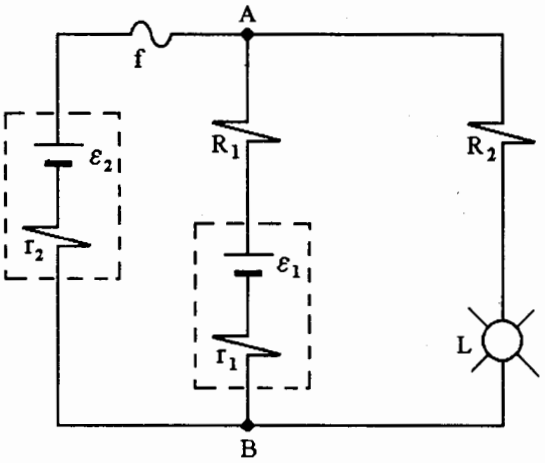
c) Cálculo de V_{CA} por rama de la izquierda

$V_{CA} = r_1 i_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_4$; $V_{CA} = 2(0.327) - 12 - 3 = -14.346[V]$

d) $E_{\varepsilon 1} = \left(\varepsilon_1 i_1 - r_1 i_1^2\right)\Delta t$, ya que ε_1 es fuente real y $\Delta t = 1h = 3600[s]$

$E_{\varepsilon 1} = \left(12(0.327) - 2(0.327)^2\right)3600[J] = 3.710(3600)[J] = 13{,}356.5[J]$

37. Con una fuente de fuerza electromotriz $\varepsilon_2 = 25[V]$ y resistencia interna $r_2 = 0.5[\Omega]$, se desea energizar un acumulador $\varepsilon_1 = 12[V]$ y resistencia interna $r_1 = 0.8[\Omega]$ y simultáneamente encender una lámpara L de $30[W]$ que funciona con $15[V]$. El circuito sugerido se muestra en la figura; además se sabe que la resistencia del fusible es despreciable y que la corriente en el acumulador no debe exceder $5[A]$, pero se desea energizarlo en el menor tiempo posible. Determine:



a) La corriente que circulará por el fusible.

b) El valor del resistor R_1 y la potencia que debe disipar.

c) El valor del resistor R_2 y la potencia que debe disipar.

d) La potencia que entrega la fuente ε_2 al resto del circuito.

Resolución:

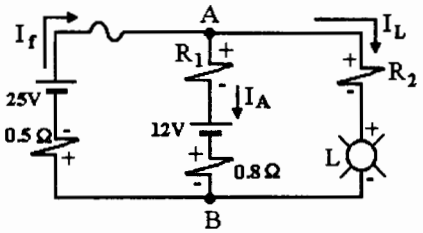
a) Como la potencia en la lámpara es $P_L = 30[W]$ y $V_L = 15[V]$, podemos conocer la corriente eléctrica en la lámpara:

$$P_L = V_L I_L \quad \therefore \quad I_L = \frac{P_L}{V_L} = \frac{30[W]}{15[V]} \text{ de donde } I_L = 2[A].$$

Para el acumulador su corriente no debe exceder $5[A]$, pero si su valor disminuye, el proceso para energizarlo será más tardado; por lo anterior

$I_A = 5[A]$; con LCK en el nodo A, se tiene $I_f = I_A + I_L$, así

$$I_f = (5 + 2)[A] = 7[A]$$



b) Para conocer R_1, con LVK en la malla izquierda:

$$r_2 I_f - \varepsilon_2 + R_1 I_A + \varepsilon_1 + r_1 I_A = 0 \; ; \; 0.5(7) - 25 + R_1(5) + 12 + 0.8(5) = 0$$

$$R_1 = \frac{(25 - 3.5 - 12 - 4)[V]}{5[A]} = 1.1[\Omega] \text{ y su potencia } P_1 = R_1 I_A^2 \; , \; P_1 = 1.1(5)^2 = 27.5[W]$$

c) Para encontrar R_2, aplicamos la LVK en la malla externa:

$$r_2 I_f - \varepsilon_2 + R_2 I_L + V_L = 0 \; ; \; 0.5(I_f) - 25 + R_2(2) + 15 = 0$$

$$R_2 = \frac{(25 - 15 - 3.5)[\mathrm{V}]}{2[\mathrm{A}]}$$

$R_2 = 3.25[\Omega]$ y su potencia $P_2 = R_2 I_L^2$

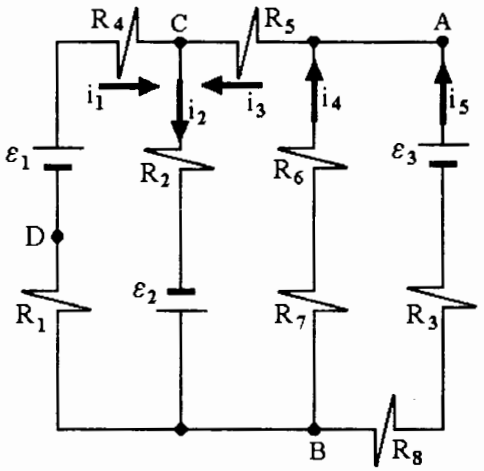
$$P_2 = 3.25(2)^2 = 13[\mathrm{W}]$$

d) La potencia en una fuente de fem real es $P = \varepsilon I - rI^2$, en este caso:

$$P_{sum} = \varepsilon_2 I_f - r_2 I_f^2$$

$$P_{sum} = \left(25(7) - 0.5(7)^2\right)[\mathrm{W}] = 175 - 24.5 = 150.5[\mathrm{W}]$$

38. El circuito eléctrico mostrado se formó con las fuentes de fem ideales: $\varepsilon_1 = 25[V]$, $\varepsilon_2 = 3[V]$ y $\varepsilon_3 = 12[V]$; y con los resistores en $[\Omega]$: $R_1 = 2$, $R_2 = R_7 = 8$, $R_3 = R_5 = 5$, $R_4 = 23$, $R_6 = 12$ y $R_8 = 7$; además se sabe que $V_{CB} = 5[V]$, $i_3 = 0.2[A]$ y $V_{AB} = 6[V]$; con esta información determine:



a) Las corrientes eléctricas i_4 e i_5

b) La diferencia de potencial V_{CD}.

c) La potencia que entrega la fuente de fem ε_3.

d) La energía que entrega la fuente de fem ε_2, en un lapso de 9 minutos.

Resolución:

a) Para conocer i_4 e i_5 emplearemos el dato $V_{AB} = 6[V]$, tal vez sea mejor con $V_{BA} = -6[V]$ para recorrer cada rama en el sentido de cada corriente:

$$V_{BA} = R_7 i_4 + R_6 i_4$$

$$i_4 = \frac{V_{BA}}{R_6 + R_7} \; ; \; i_4 = \frac{-6[V]}{(12 + 8)[\Omega]} = -0.3[A]$$

El signo negativo en i_4 nos indica que esta corriente fluye en sentido contrario al indicado en la figura.

Para la rama derecha $V_{BA} = (R_8 + R_3)i_5 - \varepsilon_3$

$$i_5 = \frac{V_{BA} + \varepsilon_3}{R_3 + R_8} \; , \; i_5 = \frac{(-6 + 12)[V]}{(5 + 7)[\Omega]}$$ y se obtiene

$$i_5 = 0.5[A]$$

b) Para calcular V_{CD} requerimos del valor de i_1, obtengámoslo:

Con LCK en el nodo A, verificamos los cálculos de i_4 e i_5 ya que i_3 es dato;

$i_4 + i_5 = i_3$, $(-0.3 + 0.5)[A] = 0.2[A]$ que concuerda con el dato. Por otra parte se sabe que

$V_{CB} = 5[V]$ y $V_{CB} = R_2 i_2 - \varepsilon_2$

$$i_2 = \frac{V_{CB} + \varepsilon_2}{R_2} \; , \; i_2 = \frac{(5 + 3)[V]}{8[\Omega]} = 1[A]$$ y con LCK en el nodo C

$$i_1 + i_3 = i_2 \; ; \; \therefore \; i_1 = i_2 - i_3$$

$i_1 = (1 - 0.2)[A]$; $i_1 = 0.8[A]$; ahora

$V_{CD} = V_{CB} + V_{BD}$; $V_{CD} = V_{CB} + R_1 i_1$

$V_{CD} = 5[V] + 2[\Omega]0.8[A] = 6.6[V]$

O también siguiendo a i_1

$V_{DC} = -\varepsilon_1 + R_4 i_1$, $V_{DC} = -25[V] + 23[\Omega](0.8)[A]$

$V_{DC} = -6.6[V]$ y $V_{CD} = +6.6[V]$

c) Como las fuentes de fem son ideales

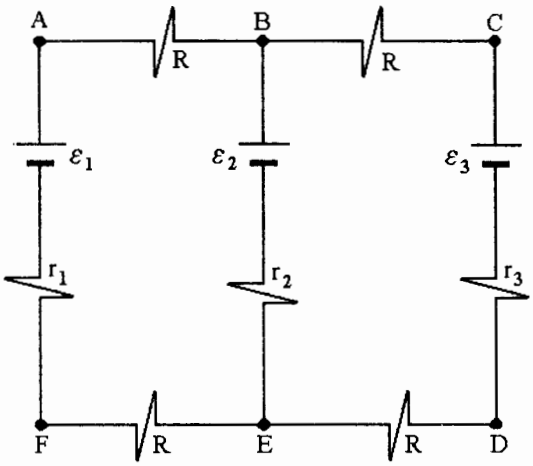
$P_{sum3} = \varepsilon_3 i_5$, $P_{sum3} = 12[V]0.5[A]$

$P_{sum3} = 6[W]$

d) $E_{sum2} = P_{sum2}\Delta t$; $E_{sum2} = \varepsilon_2 i_2 \Delta t$

$E_{sum2} = 3[V]1[A]9(60)[s] = 1{,}620[J]$

39. La fuente de poder $\varepsilon_1 = 20[V]$ se utiliza para energizar las baterías $\varepsilon_2 = 12[V]$ y $\varepsilon_3 = 9[V]$ mediante el circuito mostrado, se ha incluido la resistencia $R = 0.5[\Omega]$ de cada uno de los cables de conexión y la resistencia interna de las fuentes: $r_1 = 2[\Omega], r_2 = 1.2[\Omega]$ $r_3 = 1[\Omega]$; determine:



a) La corriente que circula en cada fuente de fem, indicando su sentido.

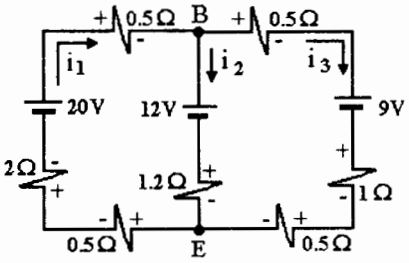
b) La diferencia de potencial V_{BF}.

c) La energía entregada por la fuente ε_1 al resto del circuito, en el lapso de 5 horas, dé su resultado en [W·h].

d) La energía disipada en forma de calor en todo el circuito, durante 5 horas de operación, en [kJ].

Resolución:

a) Los sentidos de las corrientes se indican en la figura siguiente:



Con la LCK en el nodo B, se tiene:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \qquad ...(1)$$

Con la LVK en la malla izquierda:

$Ri_1 + r_1 i_1 - \varepsilon_1 + Ri_1 + \varepsilon_2 + r_2 i_2 = 0$, con valores:

$$3i_1 + 1.2i_2 = 8 \qquad ...(2)$$

Con la LVK en la malla derecha:

$Ri_3 + \varepsilon_3 + r_3 i_3 + Ri_3 - r_2 i_2 - \varepsilon_2 = 0$, con valores:

$$-1.2i_2 + 2i_3 = 3 \qquad ...(3)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$i_1 = 2.4333[A] \ , \ i_2 = 0.5834[A] \text{ e } i_3 = 1.8499[A]$$

b) Para calcular V_{BF}, encontremos V_{FB} siguiendo a la corriente i_1:

$$V_{FB} = r_1 i_1 - \varepsilon_1 + Ri_1 \ ; \ V_{FB} = (2(2.4333) - 20 + 0.5(2.4333))[V] = -13.917[V]$$

$\therefore\ V_{BF} = -V_{FB} = -(-13.917)[\mathrm{V}]\ ;\ V_{BF} = 13.917[\mathrm{V}]$

c) $E_{sum1} = P_{\varepsilon 1}\Delta t\ ;\ E_{sum1} = \left(\varepsilon_1 i_1 - r_1 i_1^2\right)\Delta t$

$E_{sum1} = \left(20[\mathrm{V}]2.4333[\mathrm{A}] - 2[\Omega]2.4333^2[\mathrm{A}]^2\right)5[\mathrm{h}]$

$E_{sum1} = (48.666 - 11.842)[\mathrm{W}]5[\mathrm{h}] = 36.824[\mathrm{W}]5[\mathrm{h}] = 184.12[\mathrm{W{\cdot}h}]$

d) $E_{dis} = P_{dis}\Delta t\ ;\ P_{dis} = \left(2Ri_1^2 + r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + 2Ri_3^2 + r_3 i_3^2\right)[\mathrm{W}]$

$P_{dis} = \left((1+2)2.4333^2 + 1.2(0.5834)^2 + (1+1)1.8499^2\right)[\mathrm{W}]$

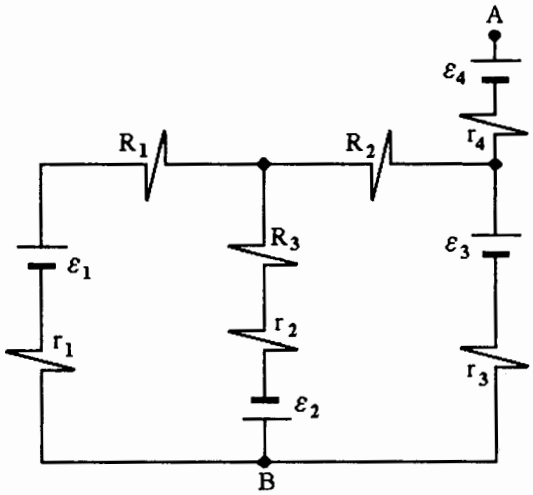
$P_{dis} = 17.763 + 0.408 + 6.844 = 25.015[\mathrm{W}]$

$\Delta t = 5(60)(60)[\mathrm{s}]$

$E_{dis} = 25.015[\mathrm{J/s}]18{,}000[\mathrm{s}] = 450{,}270[\mathrm{J}]$

$E_{dis} = 450.27[\mathrm{kJ}]$

40. Con base en la información siguiente que corresponde al circuito de la figura, obtenga:



$\varepsilon_1 = 12[V]$	$r_1 = 2[\Omega]$	$R_1 = 18[\Omega]$
$\varepsilon_2 = 6[V]$	$r_2 = 1[\Omega]$	$R_2 = 9[\Omega]$
$\varepsilon_3 = 6[V]$	$r_3 = 2[\Omega]$	$R_3 = 28[\Omega]$
$\varepsilon_4 = 3[V]$	$r_4 = 1[\Omega]$	

a) La corriente eléctrica en cada una de las fuentes de fem.

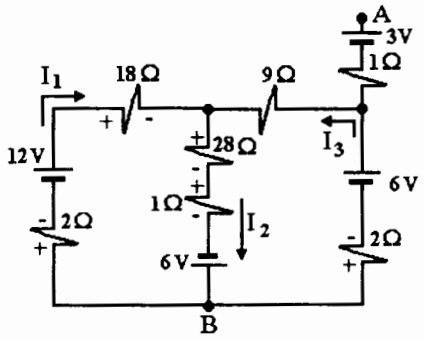
b) La energía eléctrica que se transforma en calor, cada segundo, en el resistor R_1.

c) La diferencia de potencial V_{AB}.

d) La energía suministrada por la fuente ε_2 al resto del circuito en 5 segundos.

Resolución:

a) En la figura siguiente se muestran las corrientes en cada rama.



Con la LCK en el nodo B, tenemos

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad ...(1)$$

Con la LVK en la malla izquierda

$$r_1 I_1 - \varepsilon_1 + R_1 I_1 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0$$

$$20 I_1 + 29 I_2 = 18 \qquad ...(2)$$

Con la LVK en la malla derecha

$$r_3 I_3 - \varepsilon_3 + R_2 I_3 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0$$

$$29 I_2 + 11 I_3 = 12 \qquad ...(3)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se encuentran:

$$I_1 = 0.3324[A] \ , \ I_2 = 0.3914[A] \text{ e } I_3 = 0.059[A] \ , \ I_{\varepsilon 4} = 0$$

b) $E_{disR1} = P_1 \Delta t$; $P_1 = R_1 I_1^2 \therefore E_{disR1} = 18[\Omega] 0.3324^2 [A]^2 1[s]$; $E_{disR1} = 1.989[J]$

c) $V_{AB} = \varepsilon_4 - r_4(0) + R_2 I_3 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2$

$V_{AB} = (3 + 9(0.059) + 28(0.3914) + 1(0.3914) - 6)[\mathrm{V}]$

$V_{AB} = (3 + 0.531 + 10.959 + 0.3914 - 6)[\mathrm{V}]$,

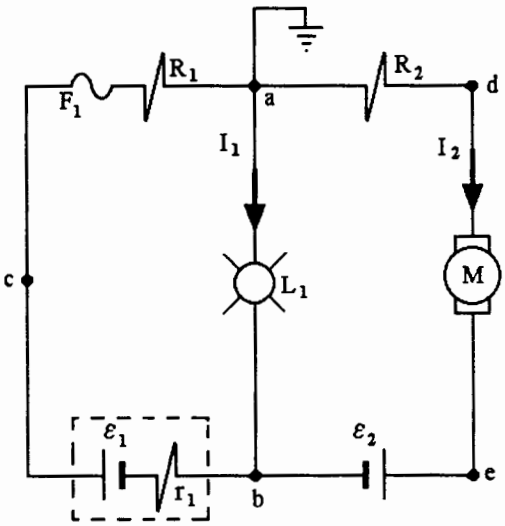
$V_{AB} = 8.882[\mathrm{V}]$

d) $E_{sum2} = P_2 \Delta t$; $P_2 = \varepsilon_2 I_2 - r_2 I_2^2$ ya que es fuente real, $\Delta t = 5[\mathrm{s}]$

$E_{sum2} = \left(6(0.3914) - 1(0.3914)^2\right)[\mathrm{W}]5[\mathrm{s}]$

$E_{sum2} = 10.976[\mathrm{J}]$

41. En el circuito eléctrico mostrado en la figura, el motor y la lámpara operan con los valores siguientes: $M(I_2 = 0.5[A], V_{de} = 6[V])$ y $L_1(I_1 = 0.5[A], V_{ab} = 12[V])$; además $\varepsilon_1 = 24[V]$ con $r_1 = 1[\Omega]$, $\varepsilon_2 = 3[V]$ con resistencia interna despreciable, como la resistencia del fusible F_1, determine:



a) El valor de cada uno de los resistores R_1 y R_2, así como la energía que disipa cada uno de éstos en la unidad de tiempo.

b) La intensidad de corriente que circula por el fusible F_1.

c) El potencial eléctrico en el nodo *e* y en el nodo *c*, tomando como referencia el *a*.

d) La energía suministrada por la fuente ε_1 al resto del circuito, en dos minutos; y la energía mecánica obtenida en el mismo lapso.

Resolución:

a) Para conocer R_1 empleamos la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla de la izquierda; en los elementos de la rama izquierda circula una corriente I_3 que alejándose del nodo *b* tiene un valor $I_3 = I_1 + I_2$, $I_3 = (0.5 + 0.5)[A] = 1[A]$, de esta forma, al recorrer la malla izquierda: $r_1 I_3 - \varepsilon_1 + I_3 R_1 + V_{ab} = 0$,

$$R_1 = \frac{\varepsilon_1 - V_{ab} - r_1 I_3}{I_3}$$

$$R_1 = \frac{(24 - 12 - 1(1))[V]}{1[A]} = 11[\Omega]$$

$$P_1 = R_1 I_3^2 \; ; \; P_1 = 11[\Omega](1[A])^2 = 11[W]$$

Para determinar R_2, con la LVK en la malla derecha:

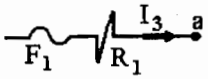
$$R_2 I_2 + V_{de} + \varepsilon_2 + V_{ba} = 0$$

$$R_2 = \frac{-V_{ba} - \varepsilon_2 - V_{de}}{I_2} \; ; \; R_2 = \frac{(12 - 3 - 6)[V]}{0.5[A]} = 6[\Omega]$$

y su potencia, con la ley de Joule, es $P_2 = R_2 I_2^2$

$$P_2 = 6[\Omega](0.5[A])^2 = 1.5[W]$$

b) Con la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada en el nodo *b*:



$$I_{F1} = I_3 = I_1 + I_2 \; ; \; I_{F1} = 0.5[\mathrm{A}] + 0.5[\mathrm{A}] = 1[\mathrm{A}]$$

c) Para obtener el potencial del nodo *e* calcularemos la diferencia V_{ae}, siguiendo a la corriente I_2:

$$V_{ae} = R_2 I_2 + V_{de}$$

$$V_{ae} = (6(0.5) + 6)[\mathrm{V}] \; ; \; V_{ae} = 9[\mathrm{V}] \text{ y como}$$

$$V_{ae} = V_a - V_e \; ; \; V_a - 9 = V_e \; ; \; V_a = 0 \therefore V_e = -9[\mathrm{V}]$$

De forma semejante calculamos V_{ca} siguiendo a la corriente I_3

$$V_{ca} = R_1 I_3 \; ; \; V_{ca} = 11[\Omega]1[\mathrm{A}] = 11[\mathrm{V}] \text{ y como}$$

$$V_{ca} = V_c - V_a \text{ y } V_a = 0 \; ; \; V_c = 11[\mathrm{V}]$$

d) Por ser ε_1 una fuente real con resistencia interna r_1, la potencia que entrega al resto del circuito es

$$P_{sum1} = \varepsilon I_3 - r_1 I_3^2 \text{ y } P_{sum1} = \frac{dE_{sum1}}{dt}$$

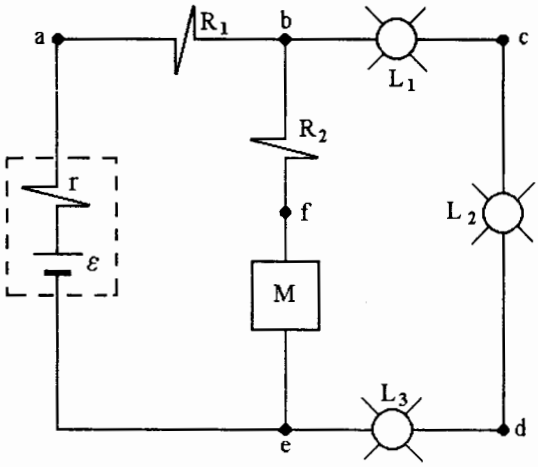
$$dE_{sum1} = P_{sum1} dt \text{ , al integrar } E_{sum1} = \left(\varepsilon_1 I_3 - r_1 I_3^2\right)\Delta t$$

$$E_{sum1} = \left(24(1) - 1(1)^2\right)2(60)[\mathrm{J}] = 2760[\mathrm{J}]$$

De manera semejante, la energía mecánica en el motor será:

$$E_{mec} = (V_{de} I_2)\Delta t \; ; \; E_{mec} = 6[\mathrm{V}]0.5[\mathrm{A}]2(60)[\mathrm{s}] = 360[\mathrm{J}]$$

42. Con una fuente de fem $\varepsilon = 20[V]$ y $r = 1[\Omega]$, en un circuito como el mostrado en la figura, se desean energizar una parte M de una microcomputadora (10[V] y 0.3[A]) y tres lámparas iguales L_1, L_2 y L_3(6[V] y 3[W]) de manera que estos elementos funcionen óptimamente. Determine:



a) La corriente a través de L_2 y la que circula por R_1.

b) La energía proporcionada por la fuente real al resto del circuito, en el lapso de 2 minutos.

c) El valor de R_1, de R_2 y de la potencia de disipación de cada una.

Resolución:

a) Como L_1, L_2 y L_3 están conectadas en serie, la corriente que circula por las tres lámparas es la misma. Con los datos nominales se tiene $P = VI_L$; $I_L = \dfrac{P}{V}$; $I_L = \dfrac{3[W]}{6[V]} = 0.5[A]$ y la corriente en M es $I_M = 0.3[A]$.

Al aplicar la LCK en el nodo b se obtiene $I_{R1} = I_\varepsilon = I_L + I_M$ es decir $I_\varepsilon = 0.5[A] + 0.3[A] = 0.8[A]$

b) Con la ley de Joule se tiene que la potencia que la fuente entrega es $P = \varepsilon I_\varepsilon - rI_\varepsilon^2$ y como $P = \dfrac{dE}{dt}$

$dE = Pdt$ y al integrar $E = P\Delta t$; $E = \left(\varepsilon I_\varepsilon - rI_\varepsilon^2\right)\Delta t$

$E = (20(0.8) - 1(0.8)^2)2(60)$; $E = 15.36[W]2(60)[s] = 1843.2[J]$

c) Para encontrar el valor R_1, aplicaremos la LVK en la malla izquierda y siguiendo a las corrientes I_ε e I_M

$$-\varepsilon + rI_\varepsilon + R_1 I_\varepsilon + R_2 I_M + V_{fe} = 0 \quad \ldots (1)$$

Con la LVK en la malla derecha: $V_{L1} + V_{L2} + V_{L3} - V_M - R_2 I_M = 0 \quad \ldots (2)$

$$R_2 = \frac{V_{L1} + V_{L2} + V_{L3} - V_M}{I_M} \; ; \; R_2 = \frac{(6 + 6 + 6 - 10)[V]}{0.3[A]} = \frac{8[V]}{0.3[A]} = 26.667[\Omega]$$

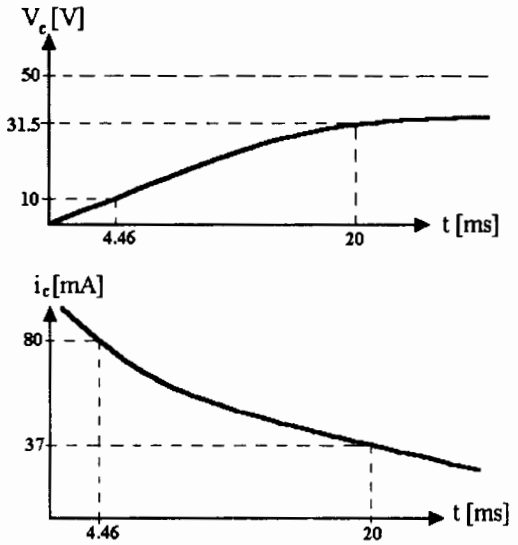
y su potencia $P_{R2} = V_{bf} I_M$; $P_{R2} = 8[V]0.3[A] = 2.4[W]$

y al despejar R_1 de la ecuación (1): $R_1 = \dfrac{\varepsilon - rI_\varepsilon - R_2 I_M - V_{fe}}{I_\varepsilon}$

$R_1 = \dfrac{(20 - 1(0.8) - 26.667(0.3) - 10)[V]}{0.8[A]} = \dfrac{1.2[V]}{0.8[A]} = 1.5[\Omega]$ y su potencia resulta

$P_{R1} = V_{ab} I_\varepsilon$; $P_{R1} = (1.5[\Omega]0.8[A])0.8[A] = 0.96[W]$

43. En un circuito *RC* serie con una fuente de fem de 50 [V] y un interruptor que se cierra en $t = 0$[s], se efectuaron mediciones del voltaje del capacitor V_C y de su corriente eléctrica i_C en función del tiempo, obteniéndose las gráficas mostradas en las figuras, determine:



a) El valor promedio de la constante de tiempo τ_C del circuito.

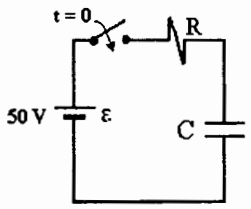
b) El valor promedio del resistor *R* del circuito.

c) El valor promedio de la capacitancia *C* del circuito.

d La carga en el capacitor y la corriente en el resistor si $t = 20\tau_C$.

Resolución:

a) El circuito empleado es como el mostrado en la figura siguiente:



Para el capacitor *C*, si su carga inicial $q(0) = 0$, la carga q en cualquier instante t se obtiene con la función

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right) \qquad \ldots(1)$$

donde:

$$\tau_C = \text{constante de tiempo}$$

Si dividimos la ecuación (1) entre el valor *C* se obtiene analíticamente la diferencia de potencial V_C:

$$V_C = \frac{q}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

De la gráfica primera tenemos dos puntos definidos, con cada uno de los cuales se puede calcular τ_C:

$\dfrac{V_C}{\varepsilon} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}$; $\varepsilon^{-\frac{t}{\tau_C}} = 1 - \dfrac{V_C}{\varepsilon}$, calculando logaritmos naturales:

$$-\frac{t}{\tau_C} = \mathrm{Ln}\left(1 - \frac{V_C}{\varepsilon}\right) \text{ de donde } \tau_C = \frac{-t}{\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{V_C}{\varepsilon}\right)}$$

con las coordenadas de los puntos: $(4.46 \times 10^{-3}\ ,\ 10)$ y $(20 \times 10^{-3}\ ,\ 31.5)$

se determinan $\tau_1 = \dfrac{-4.46 \times 10^{-3}[s]}{\mathrm{Ln}\left(1 - \dfrac{10}{50}\right)} = 0.019987[s]$

$$\tau_2 = \frac{-20 \times 10^{-3}[s]}{\mathrm{Ln}\left(1 - \dfrac{31.5}{50}\right)} = 0.020116[s]$$

Por lo tanto $\bar{\tau}_C = 0.020051[s] = 20.051[ms]$

b) Para determinar C sabemos que $\tau_C = RC$; por esta razón calcularemos R de manera semejante al inciso anterior, con los puntos definidos de la segunda gráfica y con la función de la corriente i_C que se obtiene al derivar la función (1) con respecto al tiempo:

$$i_C = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau_C}} \qquad \ldots(2)$$

$$R = \frac{\varepsilon}{i_C} e^{-\frac{t}{\tau_C}} \; ; \; R_1 = \frac{\varepsilon}{i_{C1}} e^{-\frac{t_1}{\tau_C}}$$

$$R_1 = \frac{50}{80 \times 10^{-3}} e^{-\frac{4.46}{20.051}} = 500.36[\Omega]$$

$$R_2 = \frac{50}{37 \times 10^{-3}} e^{-\frac{20}{20.051}} = 498.4[\Omega]$$

c) Por lo tanto $\bar{R} = 499.38[\Omega]$ y $\bar{C} = \dfrac{\bar{\tau}}{\bar{R}} = \dfrac{20.051 \times 10^{-3}[s]}{499.38[\Omega]} = 40.1 \times 10^{-6}[F]$

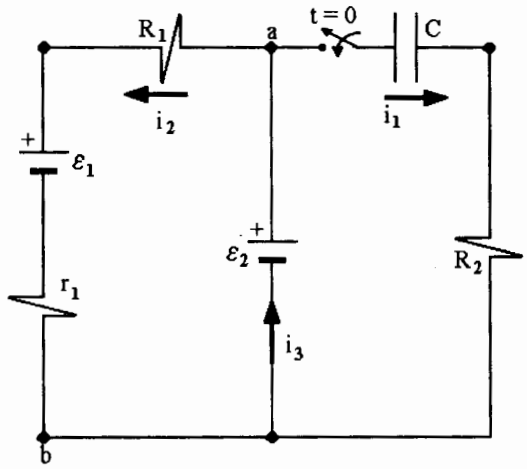
d) La carga eléctrica q y la corriente eléctrica i se obtienen con los datos en las funciones (1) y (2):

$$q|_{t = 20\tau_C} = 40.1 \times 10^{-6}(50)\left(1 - e^{-\frac{20\tau_C}{\tau_C}}\right) = 40.1 \times 10^{-6}(50) = 2.005[mC]$$

$$i|_{t = 20\tau_C} = \frac{50}{499.38} e^{-\frac{20\tau_C}{\tau_C}} \doteq 0[A] \text{ y } V_C|_{t = 20\tau_C} = \frac{q}{C} = 50[V]$$

44. En el circuito mostrado en la figura:

$\varepsilon_1 = 25[V]$ $\quad r_1 = 2[\Omega]$ $\quad \varepsilon_2 = 100[V]$
$R_1 = 148[\Omega]$ $\quad R_2 = 200[\Omega]$ $\quad C = 40[\mu F]$



Si el interruptor del circuito se cierra en $t = 0$, obtenga:

a) Las corrientes i_1, i_2 e i_3 en $t = 0$.

b) La corriente i_1 en $t = 8 \times 10^{-3}[s]$.

c) La diferencia de potencial V_{ab} cuando $t \to \infty$, compruebe el resultado por dos trayectorias diferentes.

d) La diferencia de potencial en el capacitor y en R_2 cuando $t \to \infty$.

Resolución:

a) En el instante $t = 0[s]$ se tendrá que en la rama derecha, como la carga en el capacitor será función del tiempo:

$q(t) = C\varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$, la corriente $i_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$, si $t = 0[s]$; $i_1 = \dfrac{100[V]}{200[\Omega]} e^{-0} = 0.5[A]$

Para encontrar i_2 empleamos la LVK en la malla izquierda:

$$R_1 i_2 + \varepsilon_1 + r_1 i_2 - \varepsilon_2 = 0 \; ; \; i_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_1 + r_1} = \frac{(100 - 25)[V]}{(148 + 2)[\Omega]} = \frac{75[V]}{150[\Omega]} = 0.5[A]$$

se observa que i_2 no es función del tiempo, i_2 = constante.

Y ahora, aplicando LCK en el nodo *a*: $- i_1 - i_2 + i_3 = 0$; $i_3 = i_1 + i_2 = 1[A]$

se observa que i_3 sí es función del tiempo, ya que i_1 lo es.

b) Para calcular i_1 en cualquier instante se emplea $\quad i_1 = \dfrac{100[V]}{200[\Omega]} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$

en la cual $\tau_C = R_2 C = 200[\Omega]40[\mu F] = 0.008[s]$.

Por lo tanto $i_1|_{t = 8ms} = 0.5[A]e^{-\frac{8 \times 10^{-3}}{0.008}} = 0.5[A](0.3679) = 0.1839[A]$

c) Cálculo de V_{ab} por la rama izquierda, siguiendo a i_2: $V_{ab} = R_1 i_2 + \varepsilon_1 + r_1 i_2$ es decir

$$V_{ab} = 148[\Omega]0.5[A] + 25[V] + 2[\Omega]0.5[A] = 100[V] \; ; \; V_{ab} \neq f(t)$$

Cálculo de V_{ab} por la rama derecha, siguiendo a i_1: $\frac{q}{C} + R_2 i_1 = V_{ab}$

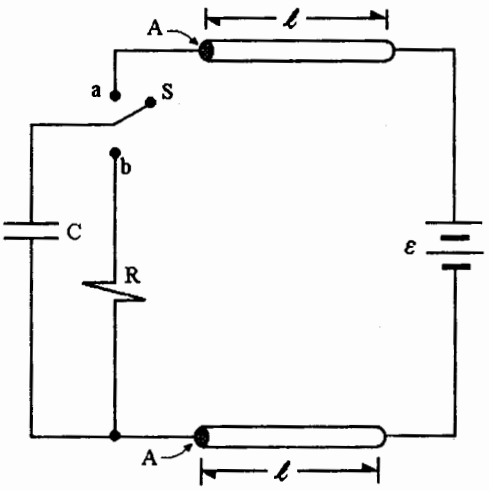
$$\frac{C\varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)}{C} + R_2\left(\frac{\varepsilon_2}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right) = V_{ab}$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_2 e^{-\frac{t}{\tau_C}} + \varepsilon_2 e^{-\frac{t}{\tau_C}} = V_{ab} \; ; \; V_{ab} = \varepsilon_2$$

Por lo tanto se concluye que $V_{ab} = \varepsilon_2$ y este resultado es constante.

d) En cualquier instante $v_C = \frac{q}{C} = \frac{C\varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)}{C} = \varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$ y cuando $t \to \infty$, $v_C \to \varepsilon_2$, en este caso $v_C \to 100$[V] ; y en el resistor R_2, con la ecuación de Ohm, $v_{R2} = R_2 i_1 = R_2 \frac{\varepsilon_2}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$ es decir $v_{R2} = \varepsilon_2 e^{-\frac{t}{\tau_C}}$, cuando $t \to \infty$, $v_{R2} \to 0$

45. El sistema de la figura recibe energía de una fuente $\varepsilon = 1.5[V]$, por medio de dos alambres de cobre de $\ell = 150[m]$ de longitud cada uno, sección transversal $A = 0.0172[mm^2]$ y resistividad $\rho = 1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$, además de otros conectores de resistencia despreciable; el capacitor C es de $5[\mu F]$ y $R = 500[\Omega]$. Si en el instante $t = 0$ se conecta el interruptor S al punto a, obtenga:



a) La constante de tiempo del circuito resultante.

b) La energía almacenada en el capacitor en $t = 15[ms]$.

Si a continuación, en el instante $t = 15[ms]$, el interruptor se cambia a la posición b, calcule para el instante $t = 17.5[ms]$:

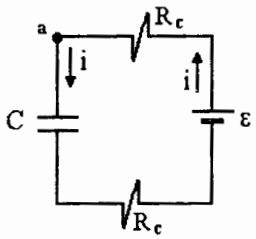
c) La corriente en el resistor R.

d) La potencia que entrega el capacitor.

Resolución:

a) El circuito resultante en $t = 0[s]$ es el circuito de carga siguiente:

$t = 0$



En el cual $R_C = \dfrac{\rho_{cu}\ell}{A}$; $R_C = \dfrac{1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]150[m]}{0.0172 \times 10^{-6}[m^2]} = 150[\Omega]$

$R_T = 2R_C = 300[\Omega]$, la constante será $\tau_C = R_T C$

$\tau_C = 300[\Omega]5 \times 10^{-6}[F] = 0.0015[s] = 1.5[ms]$

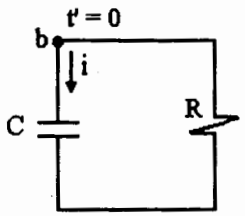
b) La energía almacenada se calcula con $U = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{\left(C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)\right)^2}{2C}$

$U = 0.5C\varepsilon^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)^2$, si $t_1 = 15[ms] = 10\tau_C$

$U_1 = 0.5C\varepsilon^2(1 - e^{-10})^2[J]$

$U_1 = 0.5(5 \times 10^{-6})(1.5)^2(1 - 0)^2[J] = 5.625 \times 10^{-6}[J]$; $U_1 = 5.625[\mu J]$

c) En el instante $t = 15[ms]$, $t' = 0[s]$; a partir de este instante el circuito resultante es el circuito de descarga siguiente:



En el cual $R = 500[\Omega]$ y su constante de tiempo cambia a

$\tau' = RC = 500[\Omega]5 \times 10^{-6}[F] = 0.0025[s] = 2.5[ms]$

Con la LVK se obtiene $v_C + v_R = 0$, es decir $\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt'} = 0$

al separar variables

$-\frac{dt'}{RC} = \frac{dq}{q}$, al integrar $\text{Ln}q + C_1 = -\frac{t'}{RC}$

Si $C_1 = \text{Ln}C_2$, $\text{Ln}q + \text{Ln}C_2 = -\frac{t'}{RC}$, $\text{Ln}(C_2 q) = -\frac{t'}{RC}$

tomando exponenciales $e^{-\frac{t'}{RC}} = C_2 q$

Para valuar C_2 veamos las condiciones iniciales de C en $t' = 0$

$q(t' = 0) = q(t = 15[ms]) = C\varepsilon \quad \therefore \quad e^{-\frac{0}{RC}} = C_2(C\varepsilon)$ y

$C_2 = \frac{1}{C\varepsilon}$ y la carga q para $t' \geq 0$ es $q = C\varepsilon e^{-\frac{t'}{RC}}$

Si derivamos con respecto a t' se obtiene $i(t') = -\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t'}{RC}}$

Si $t_2 = 17.5[ms]$; $t_2' = 2.5[ms]$; la corriente es

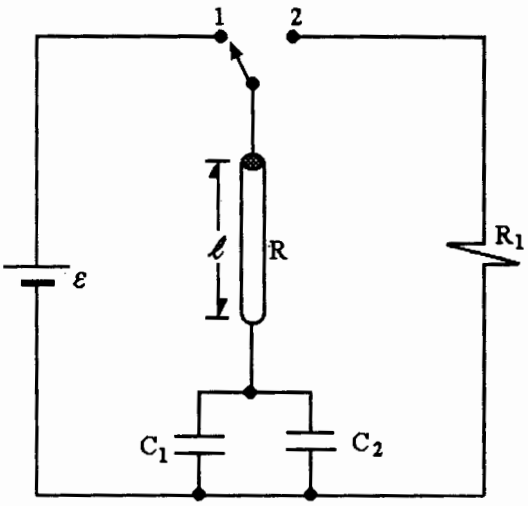
$i(2.5[ms]) = -\frac{1.5[V]}{500[\Omega]}e^{-\frac{2.5}{2.5}} = -3 \times 10^{-3}(0.3679)[A] = -1.1036[mA]$

El signo (–) indica que el capacitor se descarga, entrega energía.

d) De la ley de Joule: $P_C = v_C i$; $V_C = \frac{q}{C} = \varepsilon e^{-\frac{t'}{RC}}$ y $P_C|_{t_2'} = v_{ci}|_{t_2'}$

$P_C = 1.5[V]e^{-\frac{2.5}{2.5}}(1.1036 \times 10^{-3})[A] = 608.988 \times 10^{-6}[W] = 608.988[\mu W]$

46. En el circuito que se muestra en la figura, el interruptor se coloca en la posición 1 en el instante $t=0$ y en $t=12\tau_c$ se cambia a la posición 2. Si $R_1=5[\Omega]$, $C_1=0.5[\mu F]$, $C_2=1.5[\mu F]$ y $\varepsilon=25[V]$, determine:



a) El valor de la resistencia del filamento R, si el interruptor está en la posición 1 y la constante de tiempo es $\tau_C=2\times10^{-5}[s]$.

b) El material del cual está construido el filamento R cuyo diámetro es 0.0794[mm] y longitud $\ell=90[cm]$, tomando como base la tabla mostrada.

c) El valor de la corriente en el resistor $R_1=5[\Omega]$ cuando han transcurrido 60[μs] con el interruptor en la posición 2.

d) La energía que disipa el resistor R_1, en cada unidad de tiempo, en el instante del inciso anterior.

Material	$\rho[\Omega\cdot m]\times10^{-8}$	$\alpha[1/°C]\times10^{-3}$
hierro	9.8	6.3
tungsteno	5.5	4.6
nicrómel	108	0.16

Resolución:

a) Con el interruptor en la posición 1, la trayectoria de carga de los capacitores (que se consideran inicialmente descargados) es a través de la fuente ε y del filamento R; por lo tanto $\tau_C = Rc_{eq}$, $C_{eq} = C_1 + C_2$; como

$$\tau_C = 2\times10^{-5}[s] \text{ y } C_{eq} = 2[\mu F]\ ,\ R = \frac{\tau_C}{C_{eq}} = \frac{20[\mu s]}{2[\mu F]} = 10[\Omega]$$

b) Se tiene que $R = 10[\Omega]$, $d = 0.0794\times10^{-3}[m]$ y $\ell = 0.90[m]$ y como

$$R = \frac{\rho\ell}{A} = \frac{4\rho\ell}{\pi d^2}\ ;\ \rho = \frac{R\pi d^2}{4\ell}\ ;\ \rho = \frac{10[\Omega]\pi(0.0794\times10^{-3})^2[m^2]}{4(0.90)[m]} = 5.5016\times10^{-8}[\Omega\cdot m]$$

lo que nos permite suponer que el material del filamento R es tungsteno, de acuerdo con la tabla disponible.

c) Al cambiar el interruptor a la posición 2, se propicia la descarga de los capacitores a través de R y R_1. La constante de tiempo del circuito de descarga es, a partir de $t = 12\tau_C$ y $t' = 0$,

$$\tau'_C = (R + R_1)C_{eq} = R_{eq}C_{eq}$$

$\tau'_C = 15[\Omega]2 \times 10^{-6}[F] = 30[\mu s]$

En este inciso se pide i_{R1} en $t' = 60[\mu s]$

A partir de $t' = 0$, la carga en el capacitor se obtiene con $q(t') = C_{eq}\varepsilon e^{-\frac{t'}{\tau'_C}}$ y la corriente se obtiene al derivar la función anterior con respecto a t', es decir:

$$i(t') = -\frac{\varepsilon}{R_{eq}} e^{-\frac{t'}{\tau'_C}}, \text{ así } i(60[\mu s]) = \frac{25[V]}{15[\Omega]} e^{-\frac{60}{30}} = 0.2256[A]$$

d) $P_{dis} = \dfrac{dE_{dis}}{dt}$ y por la ley de Joule $P_{dis} = R_1 i^2$

$P_{dis} = 5[\Omega](0.2256[A])^2$; $P_{dis} = 0.2544[W]$

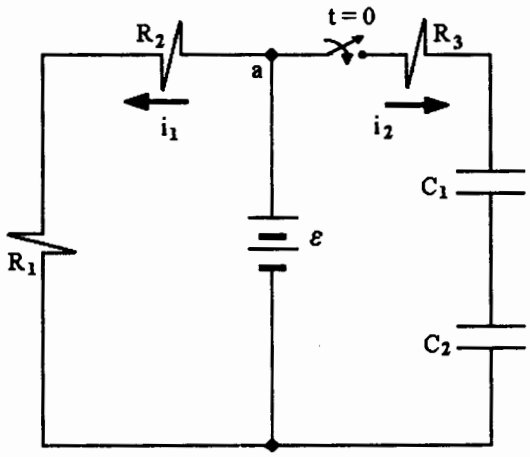
$$\frac{dE_{dis}}{dt} = 0.2544\left[\frac{J}{s}\right]$$

47. En el circuito mostrado:

$\varepsilon = 10[V]$ $\quad C_1 = 10[\mu F]$ $\quad C_2 = 2[\mu F]$

$R_1 = 10[\Omega]$ $\quad R_2 = 30[\Omega]$ $\quad R_3 = 100[\Omega]$

el interruptor se cierra en $t = 0[s]$, hallándose descargados los capacitores. Calcule:



a) La corriente i_2 para $t = \tau_C$.

b) La corriente máxima que circula por la fuente e indicar en qué instante ocurre.

c) El voltaje en el capacitor C_1, para $t = 100[\mu s]$.

d) La diferencia de potencial entre los extremos de R_3 en $t = 100[\mu s]$.

Resolución:

a) A partir de $t = 0[s]$, con la ley de voltajes de Kirchhoff aplicada en la malla derecha se obtiene: $R_3 i_2 + \frac{q}{C} = \varepsilon$ en la cual $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ e $i_2 = \frac{dq}{dt}$

La solución de dicha ecuación diferencial es $q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$; donde $\tau_C = R_3 C$

$i_2 = \frac{\varepsilon}{R_3} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$ se observa que el valor máximo de i_2 ocurre en $t = 0[s]$

$i_2 \to 0$ cuando $t \to \infty$

Cuando $t = \tau_C$; $i_2 = \frac{10[V]}{100[\Omega]} e^{-\frac{\tau_C}{\tau_C}} = 0.1(0.3679)[A] = 0.03679[A] = 36.79[mA]$

b) Con la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada en el nodo *a* se obtiene que la corriente en la fuente i_f es igual a $(i_1 + i_2)$, esta corriente será máxima cuando lo sea la suma $(i_1 + i_2)$; i_1 es de valor constante y se obtiene con LVK en la malla izquierda $R_2 i_1 + R_1 i_1 - \varepsilon = 0$

$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$; $i_1 = \frac{10[V]}{(10 + 30)[\Omega]} = 0.25[A]$

Por otro lado i_2 sí es variable y función del tiempo como se destacó en el inciso anterior,

como $i_2 = \frac{\varepsilon}{R_3} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$; para $t = 0$; i_2 es máxima $= \frac{\varepsilon}{R_3}$

$i_2(0) = \frac{10[V]}{100[\Omega]} = 0.1[A] \therefore i_{fmáx} = i_1 + i_{2máx}$; $i_{fmáx} = (0.25 + 0.1)[A] = 0.35[A]$ y ocurre en $t = 0[s]$

c) El voltaje en C_1, $v_{C1} = \dfrac{q_1}{C1}$; $q_1 = f(t)$ pero $q_1 = q_2 = q$, siendo q la carga del capacitor equivalente $C = 1.667(\mu F)$ por lo tanto la carga $q = 1.667 \times 10^{-6}(10)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$

Si $t_1 = 100[\mu s]$ y $\tau_C = 100[\Omega]1.667 \times 10^{-6}[F]$

$\tau_C = 166.7[\mu s]$ entonces $q_1 = 16.67 \times 10^{-6}\left(1 - e^{-\frac{100}{166.7}}\right) = 16.67 \times 10^{-6}(0.4511)[C]$

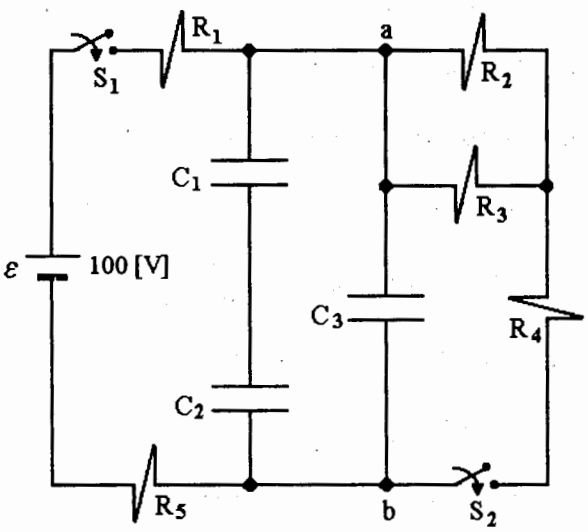
$q_1 = 7.5202[\mu C]$ y $v_{C1} = \dfrac{7.5202[\mu C]}{10[\mu F]} = 0.752[V]$

d) $v_{R3} = R_3 i_2$; $v_{R3} = 100[\Omega] i_2(100[\mu s])$

$i_2(100[\mu s]) = \dfrac{10[V]}{100[\Omega]} e^{-\frac{100}{166.7}} = 54.89[mA]$

por lo tanto $v_{R3} = 100[\Omega]54.89 \times 10^{-3}[A] = 5.489[V]$

48. En el circuito mostrado: $R_1 = R_5 = 50[\mathrm{k}\Omega]$, $R_2 = R_3 = 10[\mathrm{k}\Omega]$, $R_4 = 5[\mathrm{k}\Omega]$; el interruptor S_1 se cierra en el instante $t = 0$, mientras que el interruptor S_2 permanece abierto; 10 segundos después, S_1 se abre y S_2 se cierra, permaneciendo así un tiempo muy largo. Si los capacitores $C_1 = C_2 = 2C_3 = 20[\mu\mathrm{F}]$ se hallan descargados inicialmente, determine:



a) La carga eléctrica almacenada en el circuito en $t = 1[\mathrm{s}]$.

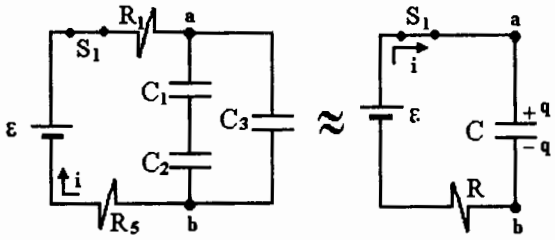
b) La potencia en el resistor R_5 en $t = 1[\mathrm{s}]$.

c) La diferencia de potencial V_{ab} en $t = 10.1[\mathrm{s}]$.

d) La potencia en el resistor R_4 en $t = 10.1[\mathrm{s}]$.

Resolución:

a) Para el intervalo de tiempo $0 \le t \le 10[\mathrm{s}]$, el circuito se reduce al mostrado enseguida:



$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \left[\frac{20(20)}{20 + 20} + 10\right][\mu\mathrm{F}] = 20[\mu\mathrm{F}]$$

$$R = R_1 + R_5 = (50 + 50)[\mathrm{k}\Omega] = 100[\mathrm{k}\Omega]$$

$$\tau_C = RC = 2[\mathrm{s}]$$

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \text{ en } t = 1[\mathrm{s}]$$

$$q = 20 \times 10^{-6}(100)\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = 786.94[\mu\mathrm{C}]$$

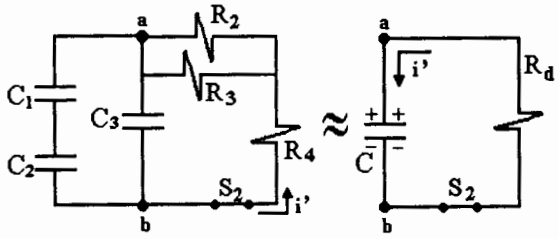
b) La potencia en R_5 es $P = R_5 i^2$; $i = f(t)$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \; ; \; i = \frac{100}{100 \times 10^3} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$i = 606.53[\mu\mathrm{A}] \quad \text{como} \quad P = R_5 i^2 \quad \therefore \; P = 50 \times 10^3 (606.53 \times 10^{-6})^2 [\mathrm{W}]$$

$$P = 0.0184[\mathrm{W}]$$

c) Para los valores de $t \ge 10[\mathrm{s}]$, el circuito se reduce al que se muestra a continuación:



$$R_d = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 \; ; \; R_d = \left[\frac{10(10)}{10 + 10} + 5\right][\mathrm{k}\Omega]$$

$$R_d = 10[\mathrm{k}\Omega] \; ; \; \tau'_C = R_d C$$

$$C = 20[\mu\mathrm{F}] \; , \; \tau'_C = 10 \times 10^3[\Omega]\, 20 \times 10^{-6}[\mathrm{F}]$$

$$\tau'_C = 0.2[\mathrm{s}]$$

En este circuito la carga en el capacitor C depende del tiempo, de la forma siguiente:

$q(t') = CV_{ab0}\, e^{-\frac{t'}{\tau_C}}$ donde $t' = [t - 10]$[s] y V_{ab0} es la diferencia de potencial máxima alcanzada en $t = 10$[s] en el primer circuito:

$$V_{ab0} = \frac{q}{C}\Big|_{t = 10[s]} = \frac{1.986 \times 10^{-3}[C]}{20 \times 10^{-6}[F]} = 99.326[V]\ ,\ \text{¡casi } 100[V]!$$

Por lo tanto $v_{ab} = \frac{q}{C}\Big|_{t' = 0.1[s]}$; $v_{ab} = \frac{CV_{ab0}}{C}\, e^{-\frac{t'}{\tau_C}} = v_{ab0}\, e^{-\frac{t'}{\tau_C}} = 60.244[V]$

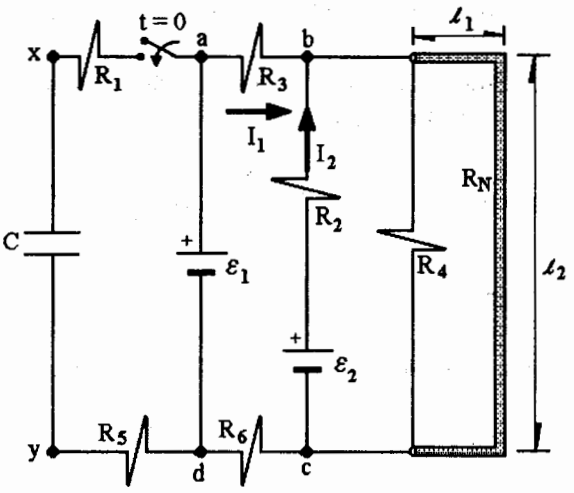
d) La potencia será $P_4 = R_4 i'^2$, en $t = 10.1$[s] o bien en $t' = 0.1$[s]

$$i' = CV_{ab0}\left(-\frac{1}{\tau_C}\right)e^{-\frac{t'}{\tau_C}}\ ;\ i' = \frac{V_{ab0}}{R_d}e^{-\frac{t'}{\tau_C}}$$

$$i' = \frac{99.326}{10 \times 10^3}\, e^{-\frac{0.1}{0.2}} = 6.024[mA] \text{ y así}$$

$$P_4 = 5 \times 10^3[\Omega](6.024 \times 10^{-3}[A])^2 = 0.1815[W]$$

49. En el circuito mostrado, entre los puntos c y b se encuentra conectado un alambre de nicrómel de calibre AWG 20 cuyo diámetro nominal es $d_n = 0.813\,[\text{mm}]$; $\ell_1 = 2.31\,[\text{m}]$, $\ell_2 = 5\,[\text{m}]$, $\rho_{nic} = 1.08 \times 10^{-6}\,[\Omega \cdot \text{m}]$ y $\alpha_{nic} = 0.16 \times 10^{-3}[°\text{C}^{-1}]$ a $20\,[°\text{C}]$, cuya resistencia es R_N; además se tiene:



$\varepsilon_1 = 40\,[\text{V}]$, $\varepsilon_2 = 30\,[\text{V}]$, $R_1 = 200\,[\Omega]$, $R_2 = 2\,[\Omega]$, $R_3 = 6\,[\Omega]$, $R_4 = 20\,[\Omega]$, $R_5 = 1300\,[\Omega]$, $R_6 = 5\,[\Omega]$ y $C = 3\,[\text{mF}]$, calcule:

a) Las corrientes i_1 e i_2 si el interruptor está abierto.

b) La corriente en la fuente de fem ε_1 en $t = 0$, instante en que se cierra el interruptor.

c) La diferencia de potencial V_{xy}, nueve segundos después de cerrar el interruptor ($t = 9\,[\text{s}]$).

d) La diferencia de potencial V_{ax} para $t = 18\,[\text{s}]$.

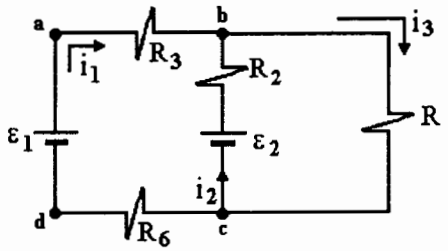
Resolución:

a) Obtendremos R_N, con $R_N = \dfrac{\rho_{nic}\,\ell}{A}$ como $A = \dfrac{\pi d_n^2}{4}$

$$R_N = \frac{4\rho_{nic}\,\ell}{\pi d_n^2}\ ;\ \ell = 2\ell_1 + \ell_2$$

$$R_N = \frac{4(1.08 \times 10^{-6})[\Omega \cdot \text{m}]9.62[\text{m}]}{\pi(0.813 \times 10^{-3})^2[\text{m}]^2} = 20.01\,[\Omega] \approx 20\,[\Omega].$$

El circuito equivalente es:



$$R = \frac{R_N R_4}{R_N + R_4}\ ;\ R = \frac{20(20)[\Omega]}{20 + 20} = 10\,[\Omega]$$

Con LCK en el nodo b $\quad i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad$ ...(1)

Con LVK en malla izquierda $\quad 11 i_1 - 2 i_2 = 40 - 30 \quad$ ...(2)

Con LVK en malla derecha $\quad 2 i_2 + 10 i_3 = 30 \quad$ ...(3)

De la resolución del sistema de ecuaciones se obtienen los valores

$i_1 = 1.1842[A]$, $i_2 = 1.5132[A]$ e $i_3 = 2.6974[A]$

b) A partir de $t \cong 0[s]$ existe una corriente i en la rama izquierda que contiene un capacitor.

Esta corriente se calcula con la $\frac{dq}{dt}$, donde $q = C\varepsilon_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$ siendo

$\tau_C = (R_1 + R_5)C \therefore i = \frac{\varepsilon_1}{R_1 + R_5} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$, esta corriente y la i_1 pasan por la fuente ε_1.

$i(0) = \frac{40[V]}{1500[\Omega]} e^{-0} = 0.0267[A]$; $i_{fuente} = i(0) + i_1$

$i_{fuente} = 0.0267 + 1.1842$; $i_{fuente} = 1.211[A]$

c) La diferencia de potencial V_{xy} se obtiene: $V_{xy} = \frac{q}{C}$, $V_{xy}|_{t=9[s]} = \frac{C\varepsilon_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)}{C}$

$V_{xy}|_{t=9[s]} = 40[V]\left(1 - e^{-\frac{9}{4.5}}\right)$ ya que $\tau_C = 1500[\Omega]3 \times 10^{-3}[F] = 4.5[s]$

$V_{xy}|_{t=9[s]} = 34.5866[V]$

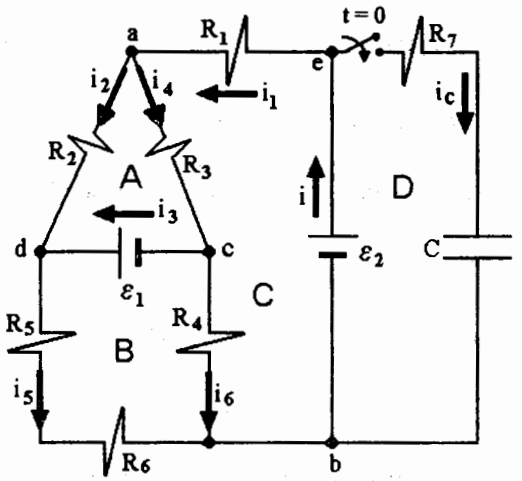
d) La diferencia V_{ax} se obtiene con la ley de Ohm:

$V_{ax} = R_1 i$ y en el instante $t = 18[s]$:

$V_{ax}|_{t=18[s]} = 200[\Omega]\frac{40[V]}{1500[\Omega]} e^{-\frac{18}{4.5}} = 0.0977[V]$

50. Para el circuito de la figura se tienen los datos siguientes:

$R_1 = 10[\Omega]$, $R_4 = 15[\Omega]$, $R_7 = 10[k\Omega]$, $R_2 = 5[\Omega]$, $R_5 = 25[\Omega]$, $\varepsilon_1 = 20[V]$, $R_3 = 20[\Omega]$, $R_6 = 30[\Omega]$, $\varepsilon_2 = 10[V]$, $C = 1[mF]$.



Si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$, determine:

a) El tiempo para el cual el capacitor C tendrá una energía almacenada de $0.05[J]$.

b) Utilizando las leyes de Kirchhoff, las ecuaciones necesarias para la solución del circuito (conocer las corriente eléctricas) después de cerrar el interruptor.

c) La diferencia de potencial V_{bc}, en caso de que la corriente eléctrica $i_5 = 0.3[A]$ con el sentido indicado en la figura.

d) El instante t_1 en que la carga del capacitor será de la mitad del valor máximo que puede alcanzar en este circuito; expresarlo en [s] y en constantes de tiempo $[\tau_C]$.

Resolución:

a) Como la energía en el capacitor es $U = \frac{1}{2}Cv_C^2$; $v_C = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2(0.05)}{1 \times 10^{-3}}}$; $v_C = 10[V]$ y como

$$v_C = \frac{q}{C} = \frac{C\varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)}{C} = \varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$; como $v_C = 10[V]$ y $\varepsilon_2 = 10[V]$

$$1 = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$, es decir: $e^{-\frac{t}{\tau_C}} = 0$ y $t \to \infty$

b) En este circuito se tienen seis corrientes eléctricas ($i_1, i_2, i_3, \ldots, i_6$) antes de cerrar el interruptor, porque a partir de $t = 0[s]$, en la rama derecha que contiene un capacitor y a R_7, circulará otra corriente denominada i_C. Por lo tanto, desde $t = 0$ se tendrán cinco nodos principales: a, b, c, d y e ($n = 5$) y ocho ramas principales, por lo cual resultan ocho corrientes.

Con la ley de Kirchhoff de corrientes se obtienen ($n - 1$) ecuaciones linealmente independientes.

nodo a	$i_1 - i_2 - i_4 = 0$	(1)
nodo b	$i_5 + i_6 + i_c - i = 0$	(2)
nodo c	$-i_3 + i_4 - i_6 = 0$	(3)
nodo d	$i_2 + i_3 - i_5 = 0$	(4)

Con la ley de Kirchhoff de voltajes se obtienen las cuatro ecuaciones adicionales para resolver las ocho incógnitas: i , i_c , i_1 , i_2 , i_3 , i_4 , i_5 e i_6.

malla A $$R_2 i_2 + \varepsilon_1 - R_3 i_4 = 0 \qquad (5)$$

malla B $$-\varepsilon_1 + R_5 i_5 + R_6 i_5 - R_4 i_6 = 0 \qquad (6)$$

malla C $$-\varepsilon_2 + R_1 i_1 + R_3 i_4 + R_4 i_6 = 0 \qquad (7)$$

malla D $$i_c = \frac{\varepsilon_2}{R_7} e^{-\frac{t}{R_7 C}} \qquad (8)$$

c) Para determinar V_{bc} con $i_5 = 0.3$[A] calculemos V_{cb} recorriendo los elementos entre el nodo c y el b:

$$V_{cb} = -\varepsilon_1 + R_5 i_5 + R_6 i_5 = -20 + (25 + 30)0.3$$

$$V_{cb} = -20 + 16.5 = -3.5[\text{V}] \therefore V_{bc} = 3.5[\text{V}]$$

d) Como $q = C\varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$ siendo $\tau_C = R_7 C$; $q = Q$, su valor máximo $Q = C\varepsilon_2$, cuando $t \to \infty$,

si se desea $q_1 = \dfrac{C\varepsilon_2}{2}$

se obtiene sustituyendo este valor en la ecuación inmediata anterior.

$$\frac{C\varepsilon_2}{2} = C\varepsilon_2\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_C}}\right) ; \; 0.5 = 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_C}}$$

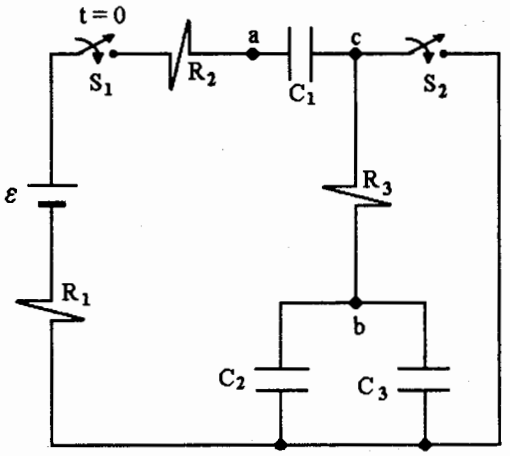
$$e^{-\frac{t_1}{\tau_C}} = 1 - 0.5 = 0.5$$

al tomar logaritmos naturales $-\dfrac{t_1}{\tau_C} = \text{Ln}0.5$; $t_1 = -\tau_C \text{Ln}0.5$

$\tau_C = 10^4(10^{-3})$[s] ; $\tau_C = 10$[s], entonces

$t_1 = -(10[\text{s}])(-0.693) = 6.93$[s] y $t_1 = 0.693\tau_C$, es decir menos de una constante de tiempo.

51. En el instante $t=0$ se cierra el interruptor S_1 del circuito mostrado, hallándose descargados los capacitores, 2[s] después se abre éste y se cierra el interruptor S_2. Si los valores de los elementos del circuito son:



$\varepsilon = 120[V]$ $\qquad C_1 = 6[\mu F]$

$R_1 = R_2 = 10[k\Omega]$ $\qquad C_2 = 8[\mu F]$

$R_3 = 30[k\Omega]$ $\qquad C_3 = 4[\mu F]$

Calcule:

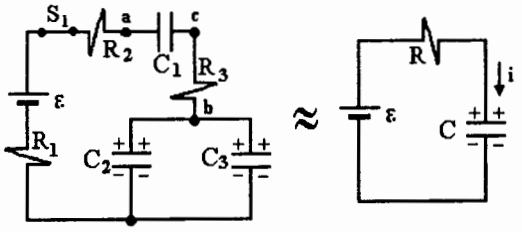
a) La diferencia de potencial V_{ab} en $t=0.2$[s]

b) La energía almacenada en C_1 en $t=0.2$[s]

c) La diferencia de potencial V_{ab} en $t=2.36$[s]

Resolución:

a) En el intervalo $0 \le t \le 2$[s], S_1 se cierra y S_2 está abierto, el circuito es



$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 50[k\Omega]$$

$$C_{eq} = C_2 + C_3$$

$$C = \frac{C_1 C_{eq}}{C_1 + C_{eq}} = 4[\mu F]$$

$$C_{eq} = 12[\mu F]$$

$$\tau_C = RC = 50 \times 10^3 (4 \times 10^{-6})[s] = 0.2[s]$$

si $t = 0.2[s]$

La diferencia $V_{ab} = V_{ac} + V_{cb}$; $V_{ab} = \dfrac{q}{C_1} + R_3 i$

en la cual $q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$ e $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$

para el instante $t = 0.2$[s] : $q = 4 \times 10^{-6}(120)\left(1 - e^{-\frac{0.2}{0.2}}\right)$

$q = 303.42[\mu C]$ y la corriente $i = \dfrac{120}{50{,}000} e^{-\frac{0.2}{0.2}} = 0.8829[mA]$

por lo tanto $V_{ab} = 50.57 + 26.49 = 77.06[V]$

b) Como la energía almacenada en el capacitor se calcula con $U = \frac{1}{2} C_1 v_{ac}^2$ y $v_{ac}|_{t = 0.2} = 50.57[\text{V}]$

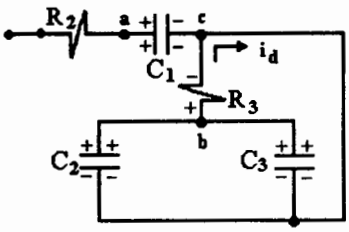
por lo tanto $U = 0.5(6 \times 10^{-6})(50.57)^2 = 7.672[\text{mJ}]$

c) Como $V_{ab} = V_{ac} + V_{cb}$, en $t = 2.36[\text{s}]$, V_{ac} conserva el valor alcanzado en $t = 2[\text{s}]$ cuando se abre el interruptor S_1 y se cierra S_2.

En $t = 2[\text{s}]$: $v_{ac} = \frac{q}{C_1}|_{t = 2[\text{s}]} = \frac{C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)}{C_1} = \frac{4 \times 10^{-6}(120)(1 - e^{-10})}{6 \times 10^{-6}} = 79.996[\text{V}]$

Se observa que este valor no cambia ya que C_1 queda desconectado en uno de sus extremos y no se carga ni se descarga.

A partir de $t = 2[\text{s}]$, el circuito queda como se muestra a continuación, en éste se destaca que $C_{eq} = (C_2 + C_3)$ se descargará a través de R_3.



El voltaje máximo que alcanzó C_{eq} fue $v_{eq} = \frac{q}{C_{eq}}$

$$V_{Ceq}|_{t = 25} = \frac{C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)[\text{V}]}{C_{eq}} \doteq 40[\text{V}] = v_0 \text{ en } t' = 0[\text{s}]$$

Estos capacitores sí van a descargarse a través de R_3 con la corriente:

$$i_d = \frac{v_0}{R_3} e^{-\frac{t'}{\tau_d}} \; ; \; \tau_d = R_3 C_{eq} = 0.360[\text{s}]$$

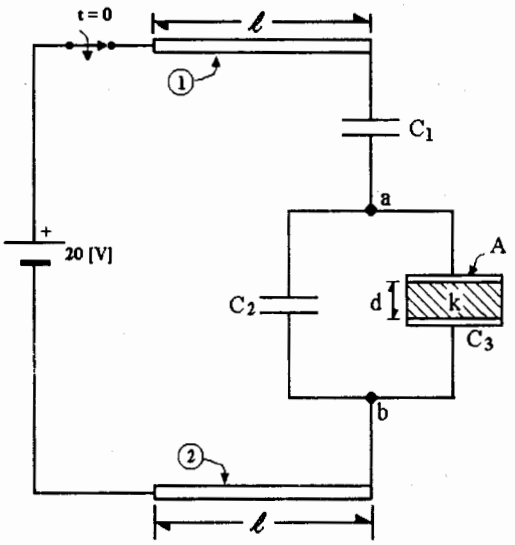
$t' = t - 2[\text{s}] \therefore$ para $t = 2.36$, $t' = 0.36$

$$i_d|_{0.36[\text{s}]} = \frac{40}{30000} e^{-\frac{0.36}{0.36}} = 0.49[\text{mA}]$$

$$v_{cb} = - i_d R_3 \; ; \; v_{cb} = - 0.49 \times 10^{-3}[\text{A}]30 \times 10^3[\Omega] = - 14.715[\text{V}]$$

por lo tanto $v_{ab}|_{t = 2.36[\text{s}]} = 79.996 - 14.715 = 65.281[\text{V}]$

52. El conjunto de capacitores $C_1 = C_2 = 2[\mu F]$ y $C_3 = 1[\mu F]$, en el cual $k = 10$ y $A = 84.5[cm^2]$, se conecta a una fuente de fem $\varepsilon = 20[V]$, por medio de dos conductores (1 y 2) de $\ell = 30[m]$, sección transversal $A_C = 0.178[mm^2]$ y resistividad $\rho_{20°C} = 1.78 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]$ y un interruptor que se cierra en $t = 0[s]$, determine:



a) El circuito equivalente, en su expresión mínima, a 20°C.

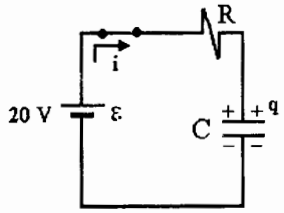
b) La diferencia de potencial V_{ab} para $t = 2\tau_C$.

c) La energía almacenada en el capacitor equivalente en $t = 0.5\tau_C$.

d) La separacion d entre los electrodos del capacitor C_3.

Resolución:

a) El circuito equivalente mínimo es:



$$R_C = \frac{\rho \ell}{A_C} = \frac{1.78 \times 10^{-8}[\Omega \cdot m]30[m]}{0.178 \times 10^{-6}[m^2]} = 3[\Omega] \; ; \; R = R_{C1} + R_{C2} = 6[\Omega]$$

$$C_{ab} = C_2 + C_3 \; ; \; C_{ab} = (2 + 1)[\mu F] = 3[\mu F]$$

$$C = \frac{C_{ab}C_1}{C_{ab} + C_1} = \frac{3(2)[\mu F]}{3 + 2} = 1.2[\mu F]$$

Con LVK en este circuito:

$$\frac{q}{C} + Ri = \varepsilon \; ; \; \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = \varepsilon \; ; \; q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

$$\tau_C = RC \; ; \; \tau_C = 7.2[\mu s] \; ; \; q_1 = q_{ab} = q$$

b) La diferencia de potencial $V_{ab} = \dfrac{q_{ab}}{C_{ab}}$; $q_{ab}|_{t = 2\tau_C} = 20[V]1.2 \times 10^{-6}[F]\left(1 - e^{-\frac{2\tau_C}{\tau_C}}\right)$

$$q_{ab} = 20.752 \times 10^{-6}[C] \text{ y } V_{ab} = \frac{20.752 \times 10^{-6}[C]}{3 \times 10^{-6}[F]} = 6.92[V]$$

c) Para calcular la energía en el capacitor C, empleamos la expresión:

$$U = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \; ; \; U|_{t = 0.5\tau_C} = \frac{1}{2}\frac{(C\varepsilon(1 - e^{-0.5}))^2}{C} = 0.5C\varepsilon^2(1 - e^{-0.5})^2$$

$$U = 37.156 \times 10^{-6}[J] = 37.156[\mu J]$$

d) Como el capacitor C_3 es del tipo que tiene electrodos de placas planas y paralelas, su capacitancia se calcula con la expresión:

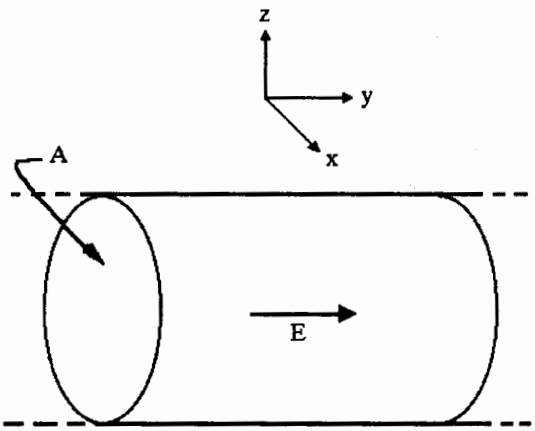
$$C_3 = \frac{\varepsilon_3 A}{d} \; ; \; d = \frac{k\varepsilon_0 A}{C_3}$$

$$d = \frac{10(8.85 \times 10^{-12})\left(\frac{C^2}{[N \cdot m^2]}\right)84.5 \times 10^{-4}[m^2]}{1 \times 10^{-6}[F]}$$

$$d = 7.478 \times 10^{-7}[m] \; ; \; d = 0.7478[\mu m]$$

Problemas propuestos

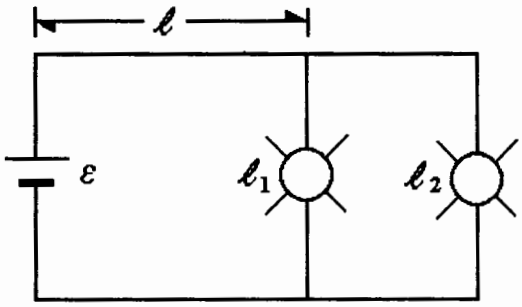
1. El conductor metálico de la figura transporta una corriente constante. Dentro del conductor se tiene un campo eléctrico uniforme de $17 \times 10^{-3}\hat{j}$ [V/m]; la sección transversal A es $2.5[\text{mm}^2]$ y el material del conductor posee 8.5×10^{28} portadores de carga libres en cada metro cúbico y una resistividad de $1.7 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]$. Con base en esto y en la figura, calcule:



a) El vector velocidad de arrastre de los electrones.

b) La movilidad de los electrones.

2. Dos lámparas (ℓ_1 y ℓ_2) de 500[W] cada una, están conectadas a una fuente $\varepsilon = 125$[V] por medio de dos conductores de $\ell = 50$[m], $\rho_{20} = 1.723 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]$ y $\alpha_{20} = 0.00393[°\text{C}^{-1}]$, como indica la figura. Si las lámpáras operan con una diferencia de potencial de 120[V], a 20[°C], determine:

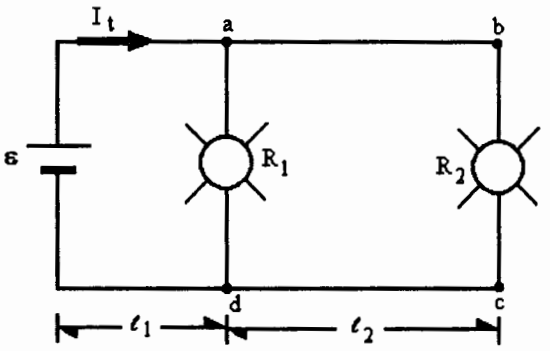


a) La corriente en cada lámpara.

b) La resistencia de cada uno de los conductores de 50[m] a 20[°C].

c) La resistencia de cada uno de los conductores de 50[m] si su temperatura fuese 60[°C].

3. Dos focos con resistencias $R_1 = R_2 = 10\ [\Omega]$, se conectan mediante 130 [m] de alambre de cobre a una batería de 12 [V] con resistencia interna despreciable. Si las características del alambre a 20[°C] son $\ell_1 = 15$ [m], $\ell_2 = 50$ [m], $A = 0.344\ [\text{mm}^2]$, $\rho = 1.723 \times 10^{-8}\ [\Omega \cdot \text{m}]$ y $\alpha = 0.00393\ [°\text{C}^{-1}]$, determine para una temperatura de 55[°C]:



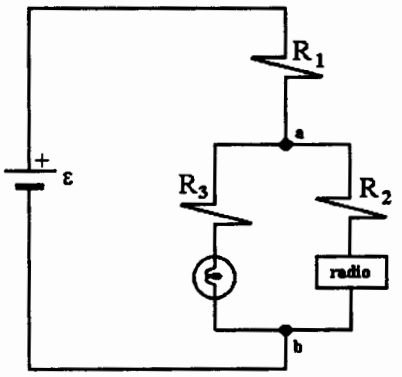
a) La corriente total I_t.

b) La potencia entregada por la fem, si la resisitencia de las lámparas no cambia con el aumento de temperatura.

c) La potencia en cada lámpara.

d) La energía eléctrica transformada en calor en los conductores de cobre, en el lapso de un minuto; y el porcentaje que ésta representa de la suministrada por la fuente en el mismo lapso.

4. Si en el circuito de la figura $\varepsilon = 12$[V], el foco opera con 6[V] y es de 3[W], el radio funciona con 9[V] y 0.9[W] y $R_3 = 8\ [\Omega]$, determine:



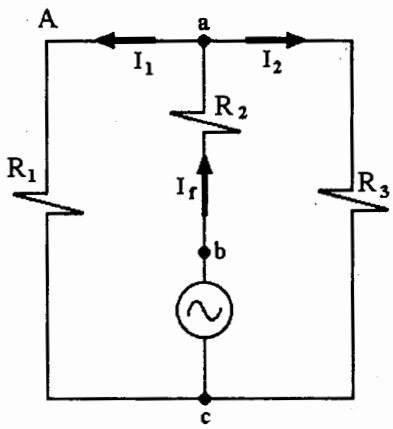
a) La corriente en el foco y en el radio.

b) La diferencia de potencial V_{ab}.

c) Los valores de R_1 y R_2.

d) La energía suministrada por la fuente en el lapso de diez segundos.

5. Para el circuito eléctrico mostrado en la figura se tiene que la fuerza electromotriz alterna de la fuente es $V_{bc} = 5\sqrt{2}\ \text{sen}\,\omega t$[V], $R_1 = R_3 = 25[\Omega]$ y $R_2 = 50[\Omega]$; además $\omega = 2\pi f$ y $f = 60$[Hz], determine:



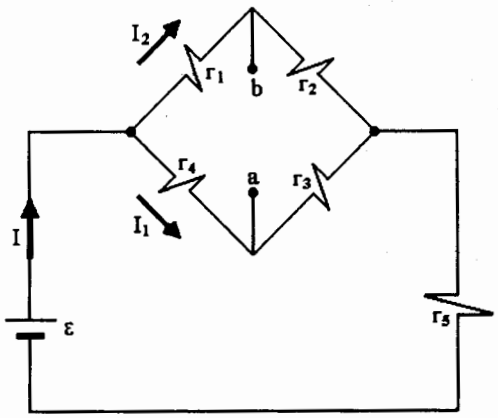
a) Las corrientes I_1, I_2 e I_f en función de t.

b) La diferencia de potencial en el resistor de $50[\Omega]$ en función de t.

c) La energía disipada promedio en cada unidad de tiempo, en cada resistor de $25[\Omega]$.

d) La potencia eficaz de la fuente.

6. Para el circuito de la figura en el que $\varepsilon = 40$[V], $r_1 = 10[\Omega]$, $r_2 = r_4 = 5[\Omega]$, $r_3 = 8[\Omega]$ y $r_5 = 2[\Omega]$, calcule:



a) Las corrientes I, I_1 e I_2.

b) La diferencia de potencial V_{ab}.

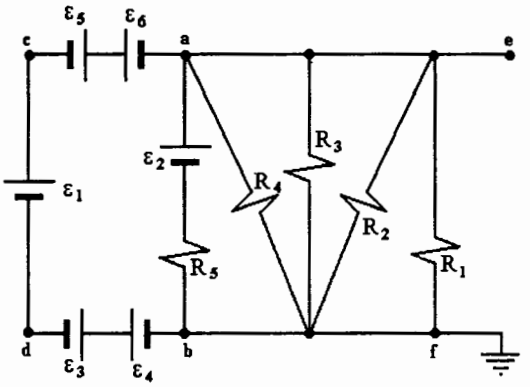
c) La energía que consume (transforma en calor) el circuito, al operar durante una hora.

7. En el circuito eléctrico mostrado, con los datos que se proporcionan, calcule:

a) El circuito equivalente en su expresión mímina.

b) La corriente eléctrica en cada una de las ramas.

c) La diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* (V_{ab}).

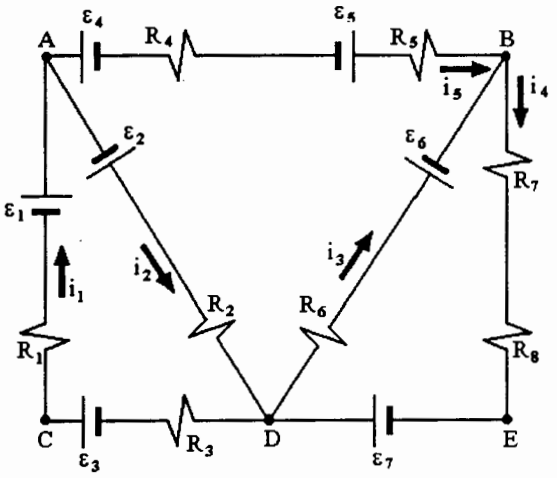


ε_1 = 50[V]	R_1 = 10[Ω]
ε_2 = 30[V]	R_2 = 10[Ω]
ε_3 = 30[V]	R_3 = 20[Ω]
ε_4 = 20[V]	R_4 = 4[Ω]
ε_5 = 30[V]	R_5 = 5[Ω]
ε_6 = 20[V]	

8. Con base en el circuito de la figura, plantee:

a) El sistema de ecuaciones requeridas para la solución del circuito; es decir, aquellas que nos permitan conocer sus corrientes utilizando las leyes de Kirchhoff.

b) La expresión para obtener la diferencia de potencial V_{AE} utilizando las literales correspondientes.



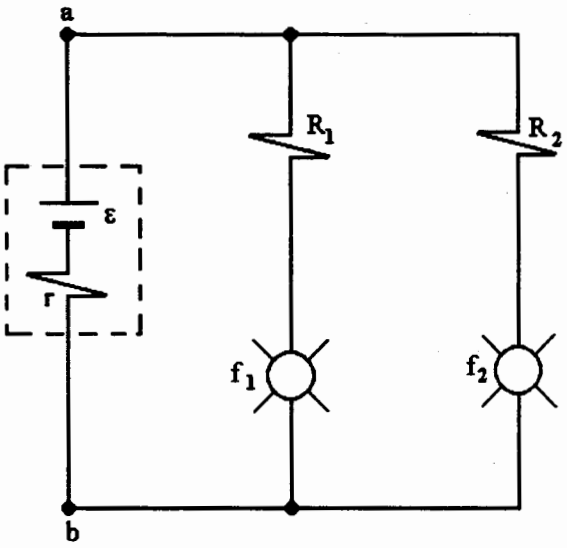
9. En el circuito eléctrico mostrado en la figura, los focos f_1 y f_2 funcionan con su voltaje y su potencia eléctrica nominales: $f_1(8[V],\ 1[W])$ y $f_2(2.2[V],\ 1[W])$, calcule:

a) El valor del resistor R_1 y R_2, si la diferencia de potencial entre *a* y *b* es $10[V]$.

b) El valor de la resistencia interna *r*, si se sabe que la potencia que se disipa en la fuente es $1.4[W]$.

c) El valor de la fuerza electromotriz ε.

d) La energía suministrada por la fuente de fem real al resto del circuito, en 10 minutos.



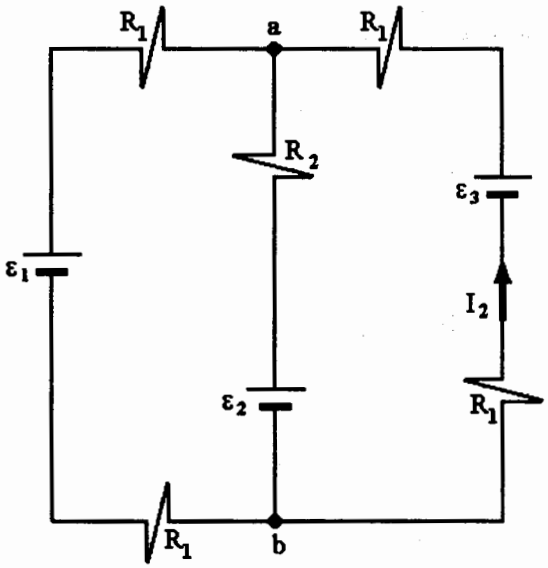
10. En el circuito de la figura la corriente en la fuente ε_3 es $I_2 = 0.33[A]$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 4[V]$, $R_1 = 1[\Omega]$ y $R_2 = 2[\Omega]$. Calcule:

a) El valor de la fem ε_1.

b) La corriente en la fuente ε_1.

c) La diferencia de potencial V_{ab}.

d) La energía que disipa en forma de calor el resistor R_2 en un minuto de operación.



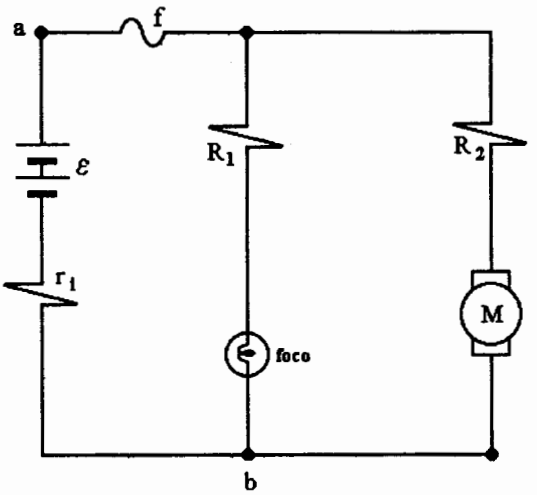
11. Una batería de $\varepsilon = 24[V]$ y resistencia interna $r_i = 2[\Omega]$ proporciona energía a un foco de $6[V]$ y $0.5[A]$, y a un motor de $12[V]$ y $1[A]$; por medio del circuito mostrado, calcule:

a) Los valores de las resistencias R_1 y R_2 y sus valores de potencia.

b) La corriente I a través del fusible f.

c) La diferencia de potencial V_{ab}.

d) La energía suministrada por la batería durante un minuto.



12. La figura muestra un circuito RC con la información siguiente:

$\varepsilon_1 = 12[V]$	$R_1 = 6[k\Omega]$	$C_1 = 30[\mu F]$
$\varepsilon_2 = 9[V]$	$R_2 = 4[k\Omega]$	$C_2 = 60[\mu F]$
$\varepsilon_3 = 3[V]$	$R_3 = 1[k\Omega]$	$C_3 = 90[\mu F]$

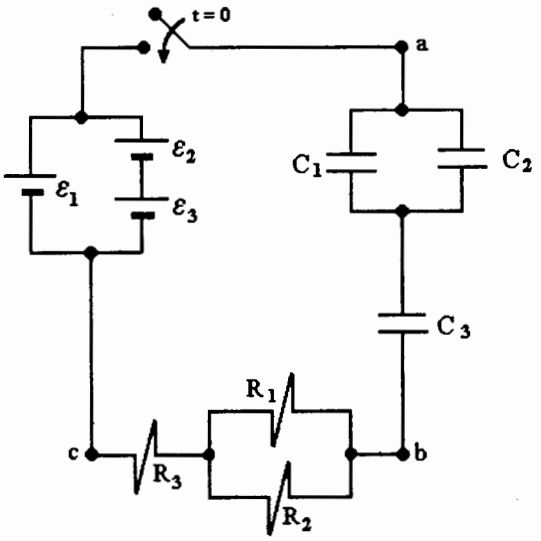
y si el interruptor se cierra en $t = 0[s]$; determine:

a) El circuito equivalente en su expresión mínima.

b) La diferencia de potencial v_{ab} para $t = \tau_C$.

c) La energía almacenada en C_2 cuando $t \to \infty$.

d) La diferencia de potencial V_{bc} en $t = 3\tau_C$.



Respuestas de los problemas propuestos

1. *a)* $\vec{V} = -73.5 \times 10^{-6}\,\hat{j}\,[\mathrm{m/s}]$
   b) $\mu = 4.32 \times 10^{-3}[\mathrm{m^2/[V \cdot s]}]$

2. *a)* $I_1 = I_2 = 4.167[\mathrm{A}]$
   b) $R_t = 0.3[\Omega]$, a $20[°\mathrm{C}]$
   c) $R_t' = 0.34716[\Omega]$, a $60[°\mathrm{C}]$
   con $\alpha_0 = 1/[(1/\alpha_{20}) - T_{20}]$
   $\alpha_0 = 4.2652 \times 10^{-3}[°\mathrm{C}^{-1}]$

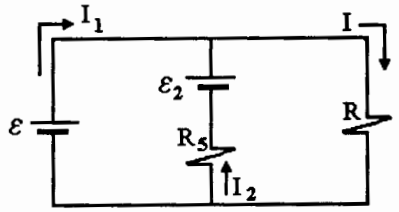
3. *a)* $I_t = 1.5353[\mathrm{A}]$
   b) $P_{sum} = 18.4236[\mathrm{W}]$
   c) $P_1 = 8.7914[\mathrm{W}]$ y $P_2 = 3.5725[\mathrm{W}]$
   d) $E = 363.646[\mathrm{J}]$; $(E \cdot 100)/E_{sum} = 32.9\%$

4. *a)* $I_f = 0.5[\mathrm{A}]$ e $I_r = 0.1[\mathrm{A}]$
   b) $V_{ab} = 10[\mathrm{V}]$
   c) $R_1 = 3.33[\Omega]$ y $R_2 = 10[\Omega]$
   d) $E_{sum} = 72[\mathrm{J}]$

5. *a)* $I_1 = I_2 = 0.057 \operatorname{sen} 120\,\pi t$
   $I_f = 0.113 \operatorname{sen} 120\,\pi t$
   b) $V_{ba} = 5.65 \operatorname{sen} 120\,\pi t$
   $E_{dis1} = E_{dis3} = 0.04[\mathrm{J}]$
   d) $P = 0.4[\mathrm{W}]$

6. *a)* $I = 4.4622[\mathrm{A}]$
   $I_1 = 2.3905[\mathrm{A}]$
   $I_2 = 2.0717[\mathrm{A}]$
   b) $V_{ab} = 8.765[\mathrm{V}]$
   c) $E_{dis} = 642{,}557[\mathrm{J}]$

7. *a)* $\varepsilon = 50[\mathrm{V}]$
   $R = 2[\Omega]$



   b) $I_1 = 29[\mathrm{A}]$, $I_2 = -4[\mathrm{A}]$, $I = 25[\mathrm{A}]$,
   $I_{R4} = 12.5[\mathrm{A}]$, $I_{R3} = 2.5[\mathrm{A}]$, $I_{R2} = I_{R1} = 5[\mathrm{A}]$
   c) $V_{ab} = 50[\mathrm{V}]$

8. *a)* Nodos principales: A, B y D
   Con LCK se pueden establecer:
   A: $i_1 - i_2 - i_5 = 0$
   B: $i_3 - i_4 + i_5 = 0$
   C: $-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0$
   sólo dos de ellas son linealmente independientes.
   Con LVK se pueden plantear:
   $R_1 i_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + R_2 i_2 + R_3 i_1 - \varepsilon_3 = 0$
   $R_6 i_3 + \varepsilon_6 + R_7 i_4 + R_8 i_4 - \varepsilon_7 = 0$
   $-\varepsilon_2 + R_2 i_2 + R_6 i_3 + \varepsilon_6 - R_5 i_5 + \varepsilon_5 - R_4 i_5 - \varepsilon_4 = 0$
   $(R_4 + R_5) i_5 + (R_7 + R_8) i_4 + (R_1 + R_3) i_1 =$
   $\varepsilon_1 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7 + \varepsilon_3$
   entre las cuales se pueden elegir 3 ecuaciones (linealmente independientes) para completar el sistema de cinco ecuaciones.
   b) $V_{AE} = \varepsilon_4 + R_4 i_5 - \varepsilon_5 + R_5 i_5 + (R_7 + R_8) i_4$

9. *a)* $R_1 = 16[\Omega]$ y $R_2 = 17.16[\Omega]$
   b) $r = 4.17[\Omega]$
   c) $\varepsilon = 12.42[\mathrm{v}]$
   d) $E_{sum} = 3.477[\mathrm{kJ}]$

10. *a)* $\varepsilon_1 = 2.02[\mathrm{V}]$
    b) $I_{\varepsilon 1} = 0.66[\mathrm{A}]$
    c) $V_{ab} = 3.34[\mathrm{V}]$
    d) $E_{dis} = 13.068[\mathrm{J}]$

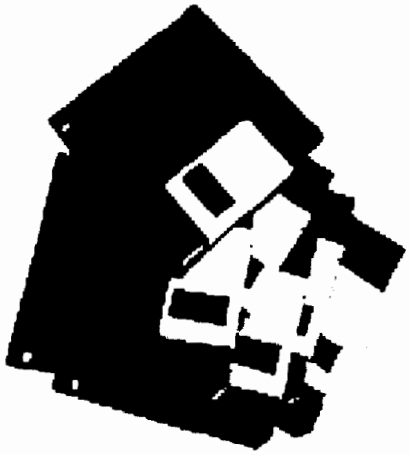
11. *a)* $R_1 = 30[\Omega]$, $P_1 = 7.5[\mathrm{W}]$ y
    $R_2 = 9[\Omega]$, $P_2 = 9[\mathrm{W}]$
    b) $I = 1.5[\mathrm{A}]$
    c) $V_{ab} = 21[\mathrm{V}]$
    d) $E_{sum} = 1{,}890[\mathrm{J}]$ al resto del circuito.

12. *a)* Circuito RC serie (una malla) con:
    $\varepsilon = 12[\mathrm{V}]$, $C = 45[\mu\mathrm{F}]$ y
    $R = 3.4[\mathrm{k}\Omega]$
    b) $V_{ab} = 7.5854[\mathrm{V}]$
    c) $U_2 = 1.08[\mathrm{mJ}]$
    d) $V_{bc} = 0.5974[\mathrm{V}]$

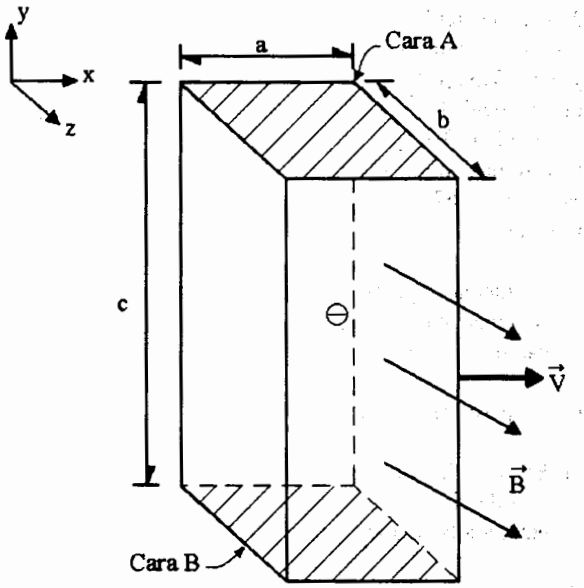
T E M A 4

MAGNETOSTÁTICA

Problemas resueltos



1. Una barra metálica en forma de paralelepípedo rectángulo, con largo $a = 1\,[\text{cm}]$, ancho $b = 0.5\,[\text{cm}]$ y alto $c = 2\,[\text{cm}]$, se mueve con una velocidad constante $\vec{V} = 70\hat{i}$ [m/s] dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B} = 3\hat{k}\,[\text{T}]$, como se muestra en la figura. Calcule:



a) La fuerza magnética que actúa sobre un electrón que se encuentra a la mitad de la barra.

b) La fuerza eléctrica necesaria para que el electrón se encuentre en equilibrio dinámico; es decir que su velocidad sea sólo $V = 70\hat{i}\,[\text{m/s}]$. El efecto gravitatorio es despreciable.

c) El campo eléctrico capaz de producir la fuerza eléctrica del inciso anterior.

d) La diferencia de potencial entre las caras A y B de la barra, si el campo eléctrico del inciso anterior existe en su interior.

Resolución:

a) La fuerza magnética se calcula con $\vec{F}_m = q_e\vec{V} \times \vec{B}$, es decir:

$$\vec{F}_m = -1.6 \times 10^{-19}(70\hat{i}) \times (3\hat{k}) = 33.6 \times 10^{-18}\hat{j}\ [\text{N}]$$

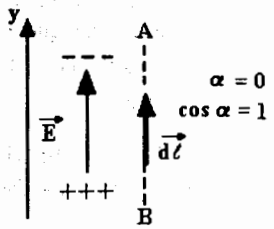
b) La fuerza eléctrica debe ser tal que equilibre a la fuerza magnética, es decir: $\vec{F}_e = -\vec{F}_m$, de esta forma la fuerza resultante sobre el electrón es nula y también la aceleración sobre la partícula y con esto la velocidad se mantiene fija.

$$\therefore\ \vec{F}_e = -33.6 \times 10^{-18}\,\hat{j}\ [\text{N}]$$

c) El campo eléctrico se puede determinar aplicando la definición:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_e}\ ;\ \vec{E} = \frac{-33.6 \times 10^{-18}\hat{j}\ [\text{N}]}{-1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]} = 210\hat{j}\left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]$$

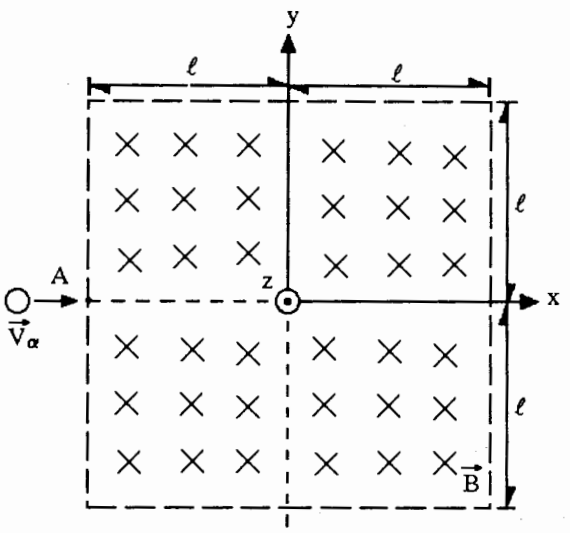
d) La diferencia de potencial se puede evaluar con la expresión:



$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$; el campo eléctrico es uniforme, por lo tanto:

$$V_{AB} = -E\int_{yB}^{yA} d\ell\ \cos\alpha\ ;\ V_{AB} = -E[y_A - y_B] = -210[2 \times 10^{-2}] = -4.2\,[\text{V}]$$

2. Una partícula α (núcleo de helio) es lanzada a una región de campo magnético uniforme $\vec{B} = -0.2\hat{k}$[T] y $\ell = 0.3131$[m], como la mostrada en la figura, con una velocidad $\vec{V} = 3 \times 10^6 \hat{i}$ [m/s] y entra en el punto $A(-0.3131, 0, 0)$[m]. El número atómico del He es 2 y en su núcleo hay dos protones y dos neutrones, con: $m_p \approx m_n = 1.67 \times 10^{-27}$[kg] y $q_\alpha = 2(1.6 \times 10^{-19})$[C]. Calcule:



a) La fuerza magnética F_m que actúa sobre la partícula α inmediatamente después de entrar a la zona de campo magnético.

b) La masa de la partícula α.

c) El radio de la trayectoria que describe la partícula α y el de la trayectoria que describiría un electrón que entrara a la zona de campo $\vec{B}$ con velocidad $\vec{V}_\alpha$.

d) El trabajo realizado por la fuerza magnética para que la partícula α describa su trayectoria, identifique la forma de ésta.

e) La velocidad $\vec{V}_\alpha$ de la partícula α al salir de la región de campo magnético.

Resolución:

a) La fuerza es $\vec{F}_{m\alpha} = q_\alpha \vec{V}_\alpha \times \vec{B}$; $\vec{F}_{m\alpha} = 2(1.6 \times 10^{-19})\left[3 \times 10^6 \hat{i} \times (-0.2\hat{k})\right] = 1.92 \times 10^{-13}\hat{j}$[N]

b) La masa de la partícula α es: $m_\alpha = 2m_p + 2m_n$; $m_\alpha = 4m_n$, es decir

$$m_\alpha = 4(1.67 \times 10^{-27})[\text{kg}] = 6.68 \times 10^{-27}[\text{kg}]$$

c) Como la fuerza de origen magnético es perpendicular a la velocidad de la partícula y no modifica el módulo de $\vec{V}_\alpha$ dentro del campo uniforme, la fuerza tiene módulo constante y origina que la partícula describa una trayectoria en forma de circunferencia. La fuerza apunta hacia el centro de la trayectoria, es una fuerza central y le produce a la partícula una aceleración centrípeta.

De la segunda ley de Newton

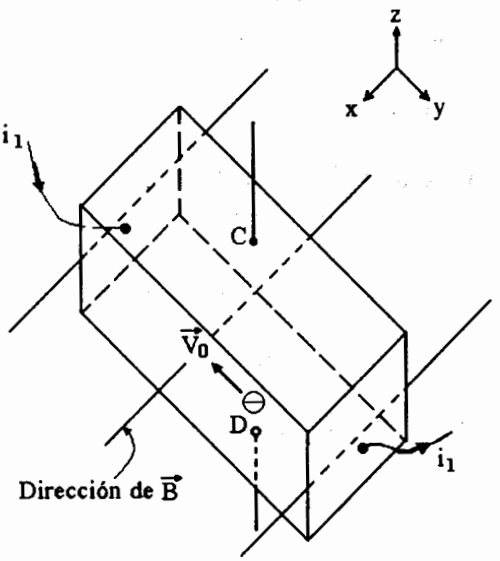
$$F_{m\alpha} = m_\alpha \frac{V_\alpha^2}{r_\alpha} \; ; \; r_\alpha = \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{F_{m\alpha}} = \frac{(6.68 \times 10^{-27}[\text{kg}])(3 \times 10^6[\text{m/s}])^2}{(1.92 \times 10^{-13}[\text{N}])} = 0.3131[\text{m}]$$

para el electrón $\vec{F}_{me} = -0.96 \times 10^{-13}\hat{j}$ [N] y $r_e = \dfrac{(9.1 \times 10^{-31}[\text{kg}])(3 \times 10^6[\text{m/s}])^2}{(0.96 \times 10^{-13})[\text{N}]} = 0.0853 \times 10^{-3}[\text{m}]$

d) Como la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad, no realiza trabajo alguno ya que éste se calcula con $W = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{\ell}$ y como $\vec{F}_m$ es $\perp$ a $d\vec{\ell}$, $W = 0$, la forma de la trayectoria es una circunferencia, aunque en la zona disponible sólo describe un arco de la cuarta parte de la circunferencia, esto para la partícula α. El electrón describe media circunferencia coplanar con el plano xy y hacia la parte negativa del eje y.

e) La partícula α sale de la región de $\vec{B}$ en el punto (0, 0.3131, 0)[m] y con velocidad $\vec{V}_{\alpha\,salida} = 3 \times 10^6\hat{j}$ [m/s]. Para el electrón el punto de salida sería $(-0.3131 \;,\; -2(0.0853 \times 10^{-3}) \;,\; 0)$[m] y su velocidad $\vec{V}_{e\,salida} = -3 \times 10^6 \hat{i}$ [m/s].

3. La figura muestra esquemáticamente una punta de prueba de un teslámetro, por la que circula una corriente i_1 y que ha sido colocada en un campo magnético para su medición, generándose entre las caras C y D que se encuentran a 1.5[mm] de separación, un voltaje debido al efecto Hall. Determine:



a) La magnitud de la fuerza magnética sobre un portador de carga (electrón) cuando no haya desviación en su trayectoria, si el voltaje de Hall es $V_{CD} = 5\,[\text{mV}]$.

b) El vector inducción magnética $(\vec{B})$ que originó la fuerza magnética sobre cada electrón si $V_0 = 2\,[\text{m/s}]$.

c) La fuerza magnética sobre un electrón que se mueve con $\vec{V}_0 = -2\hat{j}\,[\text{m/s}]$, si se coloca la punta dentro de un campo $\vec{B}_1 = -4\hat{i}\,[\text{T}]$.

d) La diferencia de potencial V_{CD} en la punta de prueba, en las condiciones del inciso anterior.

Resolución:

a) La diferencia de potencial V_{CD} está asociada a un campo eléctrico con dirección $(-\hat{k})$ debido a que $V_{CD} > 0$ y $V_C > V_D$.

$$\vec{E}_{CD} = \frac{-V_{CD}}{\ell_{CD}}\hat{k}\ ;\ \vec{E}_{CD} = \frac{-5 \times 10^{-3}[\text{V}]}{1.5 \times 10^{-3}[\text{m}]}\hat{k} = -3.333\hat{k}\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$$

y la fuerza eléctrica sobre el electrón es

$$\vec{F}_e = q_e\vec{E}\ ;\ \vec{F}_e = -1.6 \times 10^{-19}[\text{C}]\ (-3.333\hat{k})[\text{N/C}]\ ;\ \vec{F}_e = 5.333 \times 10^{-19}\hat{k}[\text{N}].$$

Para que no exista desviación en su trayectoria se requiere que $\sum\vec{F} = 0$, sobre la partícula.

El efecto gravitatorio es despreciable en comparación con $\vec{F}_e$; veamos

$$\vec{F}_g = m_e\vec{g}\ ;\ \vec{F}_g = 9.1 \times 10^{-31}[\text{kg}]9.81[\text{m/s}^2] = 8.927 \times 10^{-30}(-\hat{k})[\text{N}]$$

por esta razón la fuerza magnética debe equilibrar a la eléctrica: $\vec{F}_e = -\vec{F}_m$ y $\vec{F}_m = -5.333 \times 10^{-19}\hat{k}[\text{N}]$

b) La fuerza magnética se obtiene con $\vec{F}_m = q_e\vec{V}_0 \times \vec{B}$; la magnitud de la fuerza es $F_m = q_eV_0B$ sen α , donde $\alpha \sphericalangle_{\vec{V}_0}^{\vec{B}} = (\pi/2)\,[\text{rad}]$ y sen$\alpha = 1$; así

$$B = \frac{F_m}{q_eV_0}\ ;\ B = \frac{E}{V_0}\ ;\ B = \frac{3.333[\text{V/m}]}{2[\text{m/s}]} = 1.667[\text{T}]$$

y la dirección de $\vec{B}$ es tal que $\vec{F}_m$ tenga dirección $(-\hat{k})$ y $\vec{V}_0$ tenga dirección $(-\hat{j})$ sin olvidar que la partícula es negativa. Finalmente $\vec{B} = 1.667\hat{i}\,[\mathrm{T}]$.

c) Si $\vec{B}_1 = -4\hat{i}\,[\mathrm{T}]$, $\vec{F}_{m1} = -1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}](-2\hat{j}\,[\mathrm{m}/s]) \times (-4\hat{i}\,[\mathrm{T}]) = 12.8 \times 10^{-19}\hat{k}[\mathrm{N}]$

d) Cuando $\vec{B}_1 = -4\hat{i}\,[\mathrm{T}]$, la fuerza eléctrica sobre el electrón es $\vec{F}_{e1} = -12.8 \times 10^{-19}\hat{k}$ en [N] y el campo eléctrico que la produce

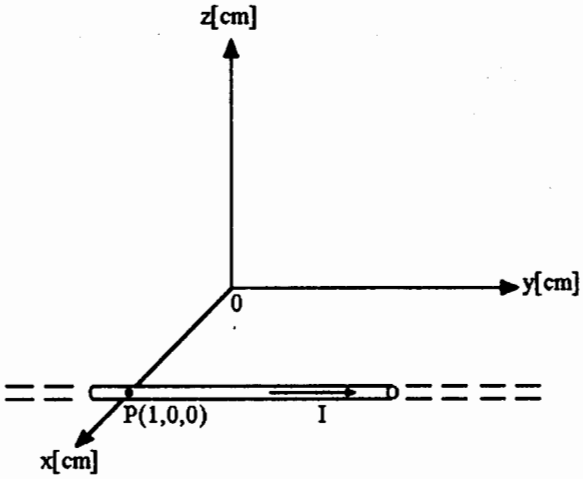
$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{e1}}{q_e} = \frac{-12.8 \times 10^{-19}\hat{k}[\mathrm{N}]}{-1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}]} = 8\hat{k}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

Se observa que $\vec{E}_1$ tiene dirección $\hat{k}$, por lo cual $V_D > V_C$ y $V_{DC} > 0$ entonces

$$E_1 = \frac{V_{DC}}{\ell_{CD}}\ ;\ V_{DC} = 8[\mathrm{N/C}]1.5 \times 10^{-3}[\mathrm{m}] = 12[\mathrm{mV}]$$

como $V_{DC} = -V_{CD}$; $V_{CD} = -12[\mathrm{mV}]$

4. En la figura se muestra un conductor recto y muy largo, paralelo al eje y, que transporta una corriente eléctrica $I = 200[\mathrm{A}]$, como se muestra en la figura. Calcule:



a) El campo magnético en el punto 0 (0, 0, 0).

b) La fuerza que experimenta un electrón al pasar por el punto 0 con velocidad $\vec{V}_e = 1.5\hat{j}\,[\mathrm{km/s}]$.

c) El campo eléctrico que le produzca al electrón una fuerza que equilibre a la fuerza calculada en el inciso anterior.

d) El campo magnético en 0, si se agrega otro conductor paralelo al eje y, contenido en el plano yz, que pase por R (0,0, 0.5)[cm], con 120[A] de corriente en el mismo sentido que el primer conductor.

Resolución:

a) Con la ley de Biot-Savart aplicada al conductor recto y largo se obtiene

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{P0}}\hat{k}\ ,\ \vec{B}_0 = \frac{4\pi \times 10^{-7}(200)}{2\pi(0.01)}\hat{k}\ ,\ \vec{B}_0 = 4\hat{k}[\mathrm{mT}]$$

b) La fuerza que experimenta el electrón al pasar por el origen es de naturaleza magnética y se calcula con

$$\vec{F}_m = q_e\vec{V}_e \times \vec{B}_0\ ;\ \vec{F}_m = (-1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}])10^3 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} 10^{-3} = -9.6 \times 10^{-19}\hat{i}[\mathrm{N}]$$

c) La fuerza eléctrica que equilibra a $\vec{F}_m$ es $\vec{F}_e = 9.6 \times 10^{-19}\hat{i}\,[\mathrm{N}]$

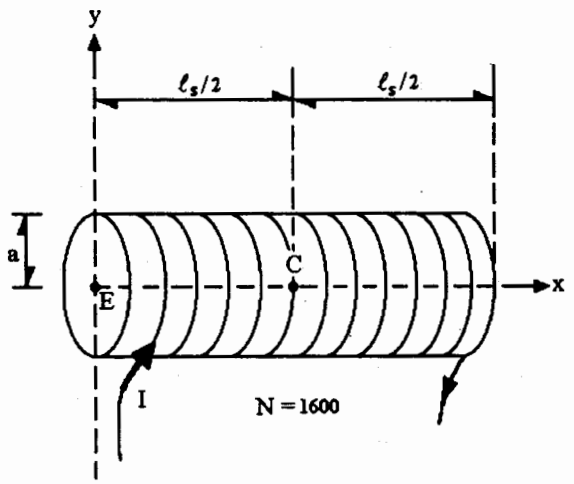
y de la definición de campo eléctrico $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}_e}{q_e}$, $\vec{E} = \dfrac{9.6 \times 10^{-19}\hat{i}\,[\mathrm{N}]}{-1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}]}$; $\vec{E} = -6\hat{i}\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$

d) Sea el campo magnético en 0: $\vec{B}_0 = \vec{B}_{01} + \vec{B}_{02}$, donde $\vec{B}_{01} = 4\hat{k}[\mathrm{mT}]$ del primer inciso,

$$\vec{B}_{02} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}(-\hat{i})\ ,\ \vec{B}_{02} = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(120)\hat{i}}{2\pi(0.5)10^{-2}} = -4.8\hat{i}\,[\mathrm{mT}]$$

y así $\vec{B}_0 = (-4.8\hat{i} + 4\hat{k})[\mathrm{mT}]$

5. Se requiere realizar un experimento en una zona de campo magnético prácticamente constante. Para esto se diseña un solenoide de sección circular como el mostrado, el cual requiere 1600 vueltas en una sola capa. Si se utiliza alambre de cobre barnizado calibre AWG#40 (diámetro nominal 0.079 [mm]), el radio de la sección transversal del solenoide es 1[cm] y éste se energizará con una fuente de voltaje constante de 18[V] y resistencia interna despreciable. Considere que a 20°C $\rho_{Cu} = 1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]$ y $\alpha_{Cu} = 0.00393[°\text{C}^{-1}]$, además $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[\text{Wb}/(\text{A} \cdot \text{m})]$. Calcule:



a) La resistencia del embobinado.

b) La corriente que circulará por el solenoide.

c) El campo magnético en el punto $C(\vec{B}_C)$.

d) El campo magnético en el punto $E(\vec{B}_E)$.

Resolución:

a) La resistencia del embobinado se determina con la expresión $R = \dfrac{\rho \ell}{A}$

donde ℓ es la longitud del alambre empleado, la cual se determina con el perímetro de una vuelta y el número de vueltas: $\ell = N2\pi a$; $\ell = 1600(2\pi)1 \times 10^{-2}[\text{m}] = 100.53[\text{m}]$

además A es la sección transversal del alambre: $A = \dfrac{\pi d_n^2}{4}$; $d_n = 0.079[\text{mm}]$

$$\therefore A = \frac{\pi(0.079 \times 10^{-3})^2[\text{m}^2]}{4} = 4.902 \times 10^{-9}[\text{m}^2]$$, con esta información:

$$R = \frac{1.72 \times 10^{-8}[\Omega \cdot \text{m}]100.53[\text{m}]}{4.902 \times 10^{-9}[\text{m}^2]} = 352.74[\Omega]$$

b) Al conectar el solenoide a la fuente de voltaje, con la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene $\varepsilon - Ri = 0$, de donde la corriente en el solenoide es:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \; ; \; i = \frac{18[\text{V}]}{352.74[\Omega]} = 0.05103[\text{A}] \; ; \; i = 51.03[\text{mA}]$$

c) Para el cálculo del campo magnético se requiere determinar la longitud ℓ_s del solenoide, ésta se obtiene con

$$\ell_s = Nd_n = 1600(0.079)10^{-3}[\text{m}] \; ; \; \ell_s = 0.1264[\text{m}]$$

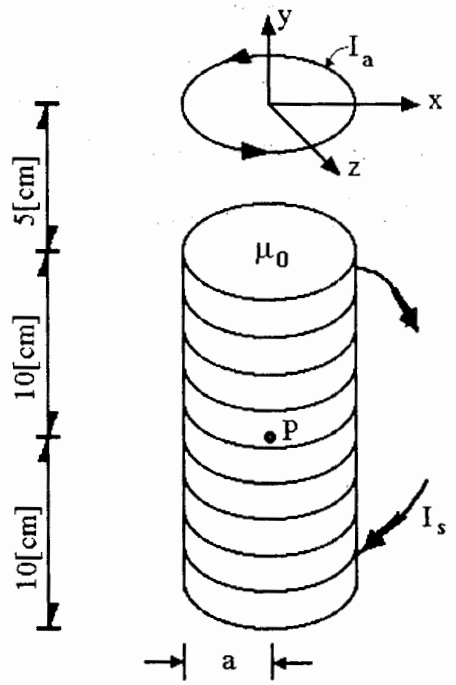
como $\ell_s \gg a$, $0.1264 \gg 0.01$, el solenoide se puede considerar largo y el campo en C es:

$$\vec{B}_C = \frac{\mu_0 N i}{\ell_s}(-\hat{i}) \; ; \; \vec{B}_C = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(1600)51.03 \times 10^{-3}\hat{i}}{0.1264} = -8.117 \times 10^{-4}[\mathrm{T}]\hat{i} \; ; \; \vec{B}_C = -811.7\hat{i}\,[\mu\mathrm{T}]$$

d) El campo magnético en el punto E se obtiene con la expresión:

$$\vec{B}_E = \frac{-\mu_0 N i}{2\ell_s}\hat{i} \; ; \; B_E \doteq -405.86\hat{i}\,[\mu\mathrm{T}]$$

6. La figura muestra un anillo circular situado en el plano xz con centro en el origen, radio $a = 2$[cm] y corriente $I_a = 2$[A] y un solenoide de $N = 5000$ vueltas, coaxial con el eje y. Determine:



a) El campo magnético producido por el anillo circular en el punto ***P*** situado en el eje del solenoide, cuando $I_s = 0$.

b) La corriente eléctrica I_s en el solenoide, que anule el campo magnético producido por el anillo en el punto ***P***.

c) La fuerza magnética que experimenta una carga $q = +3.2 \times 10^{-19}$[C] al pasar por el punto ***P*** con velocidad $\vec{V} = 5 \times 10^5 \hat{k}$[m/s], en las condiciones del inciso *a*.

d) El flujo magnético a través de la sección transversal del solenoide, si $I_a = 0$ e $I_s = 0.5$[A].

e) El campo magnético total en el origen si $I_a = 2$[A] e $I_s = -90$[mA].

Resolución:

a) El campo magnético que produce una espira en puntos localizados en su eje se calcula con:

$$\vec{B}_{Pa} = \frac{\mu_0 I_a a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}\hat{j} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2)(0.02)^2}{2(0.02^2 + 0.15^2)}\hat{j} = 0.145\hat{j}\,[\mu\text{T}]$$

b) El campo magnético que produce un solenoide largo ($\ell \gg a$) en puntos de su eje es:

$B_{Ps} = \dfrac{\mu_0 N I_s}{\ell}$, se desea que $\vec{B}_{Pa} = -\vec{B}_{Ps}$, con el sentido de I_s de la figura se consigue la dirección necesaria en $\vec{B}_{Ps}$ y la magnitud de:

$$I_s = \frac{B_{Ps}\,\ell}{\mu_0 N} = \frac{0.145 \times 10^{-6}(0.2)}{4\pi \times 10^{-7}(5000)} = 4.615[\mu\text{A}]$$

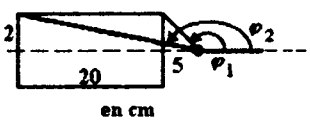
c) La fuerza sobre q se calcula con $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ por lo tanto:

$$\vec{F}_m = 3.2 \times 10^{-19}[\text{C}]\,5 \times 10^5\hat{k}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \times 0.145\hat{j}\,[\mu\text{T}] = -2.32 \times 10^{-20}\hat{i}\,[\text{N}]$$

d) El flujo magnético se calcula con $\phi = \int\int \vec{B}_s \cdot d\vec{S}$, como $\vec{B}_s$ es longitudinal, al tomar la sección transversal del solenoide el ángulo entre $\vec{B}_s$ y $d\vec{S}$ es cero; $\alpha = 0$ y $\cos\alpha = 1$ entonces $\phi = \int\int B_s dS$, B_s es constante, sobretodo en la parte central, y $\phi = B_s \int\int dS$, finalmente $\phi = B_s A$, siendo A la sección transversal del solenoide

$$\therefore\ \phi = \frac{\mu_0 N I_s}{\ell}\pi a^2\ ;\ \phi = \frac{4\pi \times 10^{-7}(5000)0.5\pi(0.02)^2}{0.20} = 19.74[\mu\text{Wb}]\ ,\ \text{hacia } -y$$

e) Aplicando el principio de superposición, el campo en el origen es



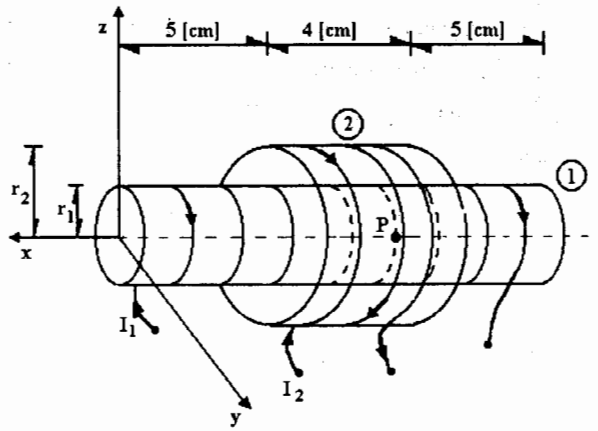
$$\vec{B}_0 = \vec{B}_{0a} + \vec{B}_{0s}\ ;\ \vec{B}_{0a} = \frac{\mu_0 I_a}{2a}\hat{j} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2)}{2(0.02)}\hat{j} = 6.283 \times 10^{-5}\hat{j}\,[\text{T}]$$

$$\text{y}\ \vec{B}_{0s} = \frac{\mu_0 N I_s}{2\ell}\left[\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\right]$$

$$\vec{B}_{0s} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(5000)(90 \times 10^{-3})}{2(0.20)}\left[\frac{25}{\sqrt{2^2+25^2}} - \frac{5}{\sqrt{2^2+5^2}}\right]\hat{j} = 1\ 4137 \times 10^{-3}[0.9968 - 0.9285]\hat{j}$$

$$\vec{B}_{0s} = 9.658 \times 10^{-5}\hat{j}\,[\text{T}]\ ;\ \vec{B}_0 = [6.283 + 9.658]10^{-5}\hat{j}\,[\text{T}] = 0.1594\hat{j}\,[\text{mT}]$$

7. Para los solenoides coaxiales con el eje x de la figura se tiene que $r_1 = 1$ [cm] y $r_2 = 2$ [cm], $N_1 = 5000$ y $N_2 = 2000$ vueltas, determine:



a) La corriente I_1, si el flujo magnético a través de la sección transversal del solenoide 1 es: $\phi_b = 25 \times 10^{-5}$ [Wb], con $I_2 = 0$.

b) El campo magnético en el punto $P(-7,0,0)$ [cm], cuando $I_1 = I_2 = 5$ [A].

c) La fuerza magnética sobre una carga $q = 10^{-6}$ [C] que pase por P con una velocidad $\vec{V} = 10\hat{j}$ [m/s], con las condiciones del inciso b.

d) El campo magnético total en el origen producido por $I_1 = -5$ [A] e $I_2 = 5$ [A].

Resolución:

a) El flujo se obtiene con $\phi = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$, de la cual $\phi = BA_1 = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1 (\pi r_1^2)}{\ell_1}$ e

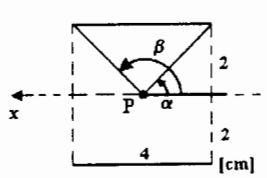
$$I_1 = \frac{\phi \ell_1}{\mu_0 N_1 \pi r_1^2} = \frac{25 \times 10^{-5}(14 \times 10^{-2})}{4\pi^2 \times 10^{-7}(5000)(0.01)^2} = 17.7312 \text{[A]}$$

b) Aplicando el Principio de Superposición: $\vec{B}_P = \vec{B}_{P1} + \vec{B}_{P2}$

El solenoide 1 es un solenoide largo; ya que $\ell_1 \gg r_1$, es decir $14 \gg 1$

$$\vec{B}_{P1} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1}(-\hat{i}) = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(5000)5}{14 \times 10^{-2}}\hat{i} = -0.2244\hat{i} \text{[T]}$$

El solenoide 2 no es largo y el campo magnético que produce se calcula:



perfil del solenoide 2

$$\vec{B}_{P2} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\ell_2}[\cos\alpha - \cos\beta](-\hat{i})$$

$$\vec{B}_{P2} = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(2000)5}{2(4 \times 10^{-2})}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right]\hat{i}$$

$$\vec{B}_{P2} = -0.2221\hat{i} \text{[T]}$$

$$\therefore \vec{B}_P = (-0.2244 - 0.2221)\hat{i} \text{[T]} = -0.4465\hat{i} \text{[T]}$$

c) La fuerza sobre q es: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -10^{-6}$[C] $10\hat{j}$ [m/s] $\times$ $446.55 \times 10^{-3}\hat{i}$ [T]

$$\vec{F} = 4.4655 \times 10^{-6}\hat{k} \text{[N]}, \quad \vec{F} = 4.4655\hat{k} [\mu\text{N}]$$

d) Con el principio de superposición: $\vec{B}_0 = \vec{B}_{01} + \vec{B}_{02}$

como el solenoide 1 es largo $\vec{B}_{01} = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1 \hat{i}}{2\ell_1} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7}(5000)5\hat{i}}{2(0.14)} = 0.1122\hat{i}\,[\mathrm{T}]$

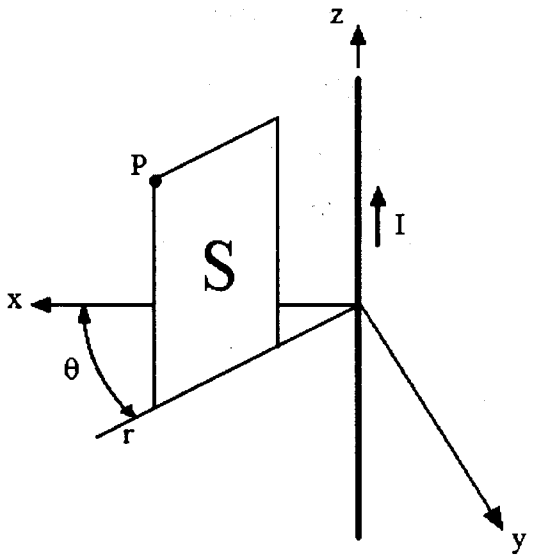
y para el solenoide 2

$$\vec{B}_{02} = \frac{-\mu_0 N_2 I_2 \hat{i}}{2\ell_2}\left[\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right] = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(2000)5\hat{i}}{2(0.04)}\left[\frac{-5}{\sqrt{5^2+2^2}} - \left(-\frac{9}{\sqrt{9^2+2^2}}\right)\right]$$

$$\vec{B}_{02} = -0.1571\hat{i}\left[-0.9285 - (-0.9762)\right] = -7.491 \times 10^{-3}\hat{i}\,[\mathrm{T}]$$

$$\vec{B}_0 = \left[0.1122\hat{i} - 0.007491\hat{i}\right][\mathrm{T}] = 0.1047\hat{i}\,[\mathrm{T}]$$

8. Para el plano $\theta = \pi/4$, definido por $0.02 \leq r \leq 0.1$[m] y $0 \leq z \leq 4$[m], y el conductor recto muy largo que coincide con el eje z, por el cual circula $I = 1.5$[A], mostrado en la figura, calcule:



a) La inducción magnética $\vec{B}$ en el punto P.

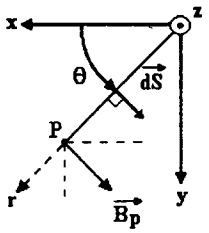
b) El flujo magnético a través del plano S.

c) La inducción magnética en el centro C del plano S, debido al conductor recto muy largo.

d) La inducción magnética en el punto C, si el conductor recto fuese de longitud finita de 4[m] (desde z = 0 hasta z = 4 [m]) con $I = 1.5$[A].

Resolución:

a) El campo magnético en P se determina con $\vec{B}_P = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_P}\hat{a}_\theta$, $\hat{a}_\theta$ = vector unitario de dirección perpendicular a la dirección $\hat{r}$ y perpendicular a $\hat{z}$.



$ds = drdz$

$$\vec{B}_P = \frac{4\pi \times 10^{-7}(1.5)}{2\pi(0.1)}\hat{a}_\theta = 3\hat{a}_\theta[\mu\text{T}]$$

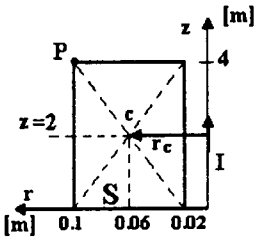
y en coordenadas rectangulares

$$\vec{B}_P = \frac{3}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})[\mu\text{T}]$$

b) El flujo $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$; $\phi = \int\int BdS\cos\alpha$; $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$; $\phi = \int_0^4\int_{0.02}^{0.1}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}dr\,dz$

$$\phi = \frac{4\mu_0 I}{2\pi}\text{Ln}\frac{0.1}{0.02} = 1.93[\mu\text{Wb}]$$, en el sentido antihorario.

c) Veamos el plano S en magnitud real para localizar C; el campo magnético en dicho punto es:

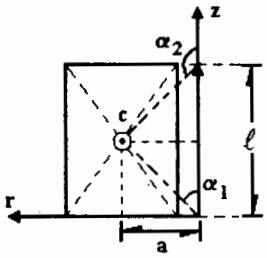


$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\hat{a}_\theta = \frac{4\pi \times 10^{-7}(1.5)\hat{a}_\theta}{2\pi(0.06)} = 5 \times 10^{-6}\hat{a}_\theta[\text{T}]$$

y en coordenadas rectangulares $\vec{B}_c = \dfrac{5}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})[\mu\text{T}]$

$$c\begin{cases} r = 0.06[\text{m}] \\ \theta = \pi/4\ [\text{rad}] \\ z = 2[\text{m}] \end{cases}$$

d) En el centro *C*, el conductor de longitud finita produciría un campo



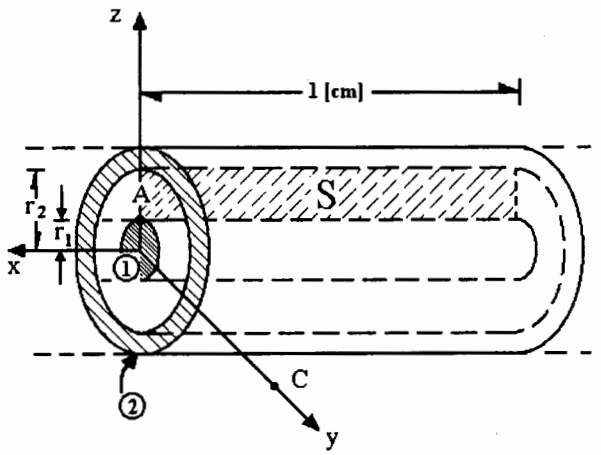
$$\vec{B}_{cf} = B_{cf}\,\hat{a}_\theta\ ,\ \vec{B}_{cf} = \frac{\mu_0 I_c}{4\pi a}\left[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right]$$

$$\vec{B}_{cf} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(1.5)}{4\pi(0.06)}\,\hat{a}_\theta\left[\frac{2}{\sqrt{2^2 + 0.06^2}} - \left[\frac{-2}{\sqrt{2^2 + 0.06^2}}\right]\right]$$

$$\vec{B}_{cf} = 2.5 \times 10^{-6}[0.99955 + 0.99955]\hat{a}_\theta = 4.99775\hat{a}_\theta\ [\mu\mathrm{T}]$$

Se observa que este resultado es prácticamente el mismo del inciso *c* y esto se debe a que la distancia ***a*** es mucho menor que la longitud del conductor, aunque ésta sea limitada.

9. Los conductos cilíndricos y coaxiales 1 y 2 de la figura con radios $r_1 = 1.5[\text{mm}]$ y $r_2 = 2.5[\text{mm}]$, transportan corrientes I_1 e I_2, respectivamente. Si el campo magnético en el punto $A(0,0,1.5)[\text{mm}]$ es: $\vec{B}_A = 10^{-5}\hat{j}\,[\text{T}]$, cuando $I_2 = 0$, determine:



a) La corriente I_1.

b) El flujo magnético a través de la superficie S.

c) El campo magnético en el punto $C(0,10,0)[\text{m}]$, si I_2 fuera igual a I_1, pero de sentido contrario.

d) El campo magnético en C si $I_1 = 2[\text{A}]$ hacia la parte negativa del eje x e $I_2 = 3[\text{A}]$ en sentido opuesto.

Resolución:

a) El campo magnético en A es producido sólo por la corriente I_1; al aplicar la ley de Ampere referente a la circulación de $\vec{B}$ se obtiene: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_N$

elegimos como trayectoria de integración el perímetro de la sección transversal del conductor 1 que incluye a A.

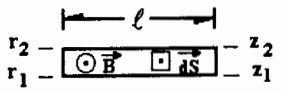
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell \cos\varphi$$

$\varphi = 0$ ya que $\vec{B}$ y $d\vec{\ell}$ son tangentes a la trayectoria de integración,

$\cos\varphi = 1$; $\oint B d\ell = \mu_0 I_1$ porque I_1 es la corriente enlazada

$$\therefore\ B(2\pi r_1) = \mu_0 I_1\ ;\ I_1 = \frac{2\pi r_1 B_A}{\mu_0} = \frac{2\pi(1.5)10^{-3}(10^{-5})[\text{A}]}{4\pi \times 10^{-7}} = 0.075[\text{A}] \text{ hacia } -x$$

b) El flujo magnético en S lo evaluamos con su definición $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$



$$\phi = \int\int B dS \cos\alpha$$

$\therefore\ \alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ y del inciso *a*

$B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$, se observa que I_2 no produce flujo magnético en S y $dS = dz\,dx$

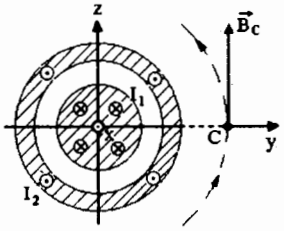
$$\phi = \int\int \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} dz\,dx\ ;\ \phi = \int_0^{\ell}\int_{z1}^{z2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} dz\,dx$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I_1 \ell}{2\pi}\text{Ln}\frac{z_2}{z_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(0.075)1}{2\pi}\text{Ln}\frac{2.5}{1.5}\ ;\ \phi = 7.662 \times 10^{-9}[\text{Wb}]$$

c) Para calcular $\vec{B}_c$ empleamos la ley de Ampere y una circunferencia concéntrica con los conductores y radio r_c, es decir que contenga a C

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_N \text{ , pero } i_N = I_1 + I_2 \text{ , si } I_1 = -I_2 \text{ , } i_N = 0 \text{ y } \vec{B}_c = \vec{0}$$

d) Con base en el inciso anterior $i_N = I_2 + I_1 = (3 - 2)[\text{A}]$ hacia $+x$



como $i_N = 1[\text{A}]$ y $\vec{B}_c = B_c \hat{k}$, del inciso *a*:

$$B_c = \frac{\mu_0 i_N}{2\pi r_c} \text{ ; } B_c = \frac{4\pi \times 10^{-7}(1)[\text{T}]}{2\pi(10)} = 2 \times 10^{-8}[\text{T}]$$

$$\therefore \vec{B}_c = 20\,\hat{k}[\text{nT}]$$

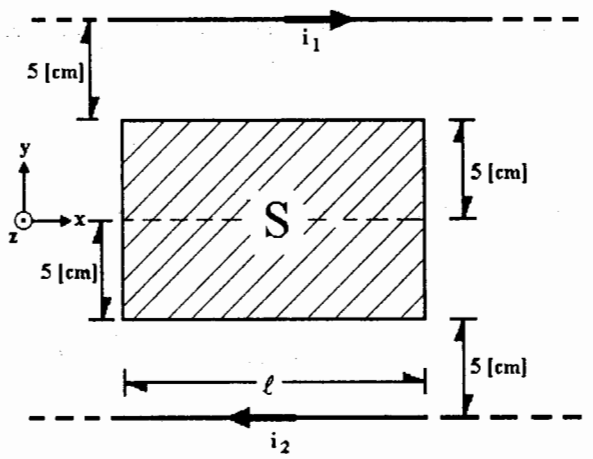
10. Se tienen dos conductores paralelos muy grandes como se muestran en la figura, en los cuales $i_1 = 50[A]$, $i_2 = 100[A]$ y $\ell = 30[cm]$. Calcule:

a) El flujo magnético a través de la superficie S coplanar con los conductores.

b) La fuerza que experimentan ocho metros del conductor 1, debida al conductor 2.

c) El campo magnético total en el centro del área S.

d) La fuerza magnética total que experimentaría un tercer conductor paralelo con la corriente $I_3 = 40[A]$, hacia la derecha, colocado en medio de los dos conductores iniciales.



Resolución:

a) El flujo se calcula con la expresión $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$ y $\phi = \int\int BdS\cos\alpha$ debido a i_1

$\phi_{s1} = \int\int B_1 dS$, $\alpha = 0$, tanto $\vec{B}_1$ y $d\vec{S}$ entran a la figura, $\cos\alpha = 1$

$\phi_{s1} = \int_0^{\ell}\int_{r1}^{r2} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} dr dx$; $\phi_{s1} = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}$; en este caso entra a la figura.

$$\phi_{s1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(50)(0.30)}{2\pi} \mathrm{Ln}\ \frac{15}{5} = 3.296[\mu\mathrm{Wb}]$$, hacia -z, de manera análoga

$$\phi_{s2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(100)0.30}{2\pi} \mathrm{Ln}\ \frac{15}{5} = 6.592[\mu\mathrm{Wb}]$$, hacia -z.

De acuerdo con el Principio de Superposición: $\phi_s = \phi_{s1} + \phi_{s2} = 9.888[\mu\mathrm{Wb}]\ \otimes$

b) $\vec{F}_{12} = i_1\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_{12}$; $\vec{F}_{12} = i_1\vec{\ell}_1 \times \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}(-\hat{k}) = 50(8)\hat{i} \times \frac{4\pi \times 10^{-7}(100)}{2\pi(0.20)}(-\hat{k})$

$\vec{F}_{12} = 0.04\hat{j}\,[N]$; se puede comprobar que para 8[m] de 2: $\vec{F}_{21} = -0.04\hat{j}\,[N]$

c) El punto central del área S se encuentra a 10[cm] de cada conductor; aplicando el Principio de Superposición tenemos $\vec{B}_c = \vec{B}_{c1} + \vec{B}_{c2}$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_{1c}}(-\hat{k}) + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_{2c}}(-k)\ ;\ B_c = -\frac{\mu_0 \hat{k}}{2\pi r_{1c}}(i_1 + i_2)\ ;\ r_{1c} = r_{2c} = 10[cm]$$

de esta forma $\vec{B}_c = -\frac{4\pi \times 10^{-7}(50 + 100)}{2\pi(0.10)}\hat{k} = -3 \times 10^{-4}\hat{k}[T]$

d) Por la simetría del conjunto de conductores, el tercer conductor, paralelo a los iniciales, pasará por P y el campo magnético que le afectará, en toda su longitud, es el calculado en el inciso *c*, que es el efecto total de los conductores 1 y 2; de acuerdo con esto:

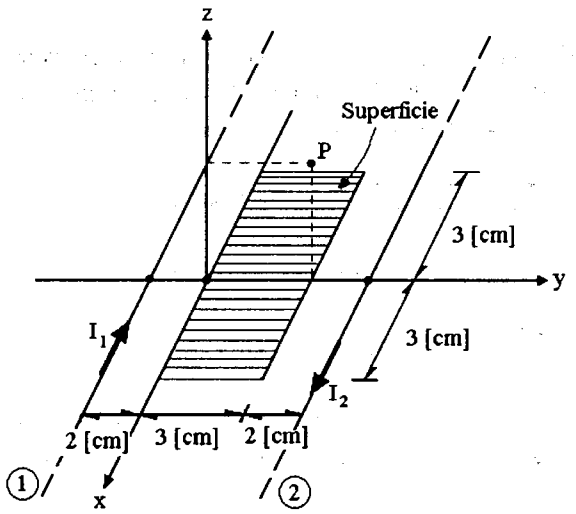
$$\vec{F}_3 = i_3\vec{\ell}_3 \times \vec{B}_3 \; ; \; \vec{F}_3 = 40[\mathrm{A}]8[\mathrm{m}]\hat{i} \times \left(-3 \times 10^{-4}\hat{k}\right)[\mathrm{T}]$$

Nótese que $\vec{B}_3 = \vec{B}_c$ y que hemos tomado $\ell_3 = 8[\mathrm{m}]$ como en *b*.

$$\vec{F}_3 = 0.096\hat{j}\,[\mathrm{N}]$$

Si se calcularan por separado la fuerza producida por cada conductor resultaría que el 1 atraería al 3, y que el 2 rechazaría al 3, de esta forma la fuerza resultante sería en dirección $\hat{j}$.

11. Suponga dos conductores rectos y muy largos con $I_1 = 20[\text{A}]$ e $I_2 = 10[\text{A}]$, paralelos al eje x y contenidos en el plano xy del sistema de referencia de la figura; determine:



a) El vector $\vec{B}$ de campo magnético en $P(0,3,3)[\text{cm}]$.

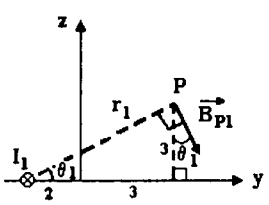
b) La fuerza de origen magnético que actuará sobre un electrón, si al pasar por el punto P lleva una velocidad $\vec{V}_e = 3\hat{i} \times 10^6[\text{m/s}]$.

c) La fuerza magnética en cada unidad de longitud del conductor 1, debida al conductor 2.

d) El flujo magnético total a través de la superficie mostrada.

Resolución:

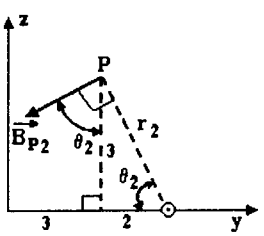
a) Con el Principio de Superposición: $\vec{B}_P = \vec{B}_{P1} + \vec{B}_{P2}$



$$\vec{B}_{P1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\left[\text{sen}\theta_1 \hat{j} - \cos\theta_1 \hat{k}\right]$$

$$= \frac{2 \times 10^{-7}(20)}{\sqrt{34} \times 10^{-2}}\left[\frac{3}{\sqrt{34}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{34}}\hat{k}\right]$$

$$= \left[35.294\hat{j} - 58.823\hat{k}\right][\mu\text{T}]$$



$$\vec{B}_{P2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\left[-\text{sen}\theta_2 \hat{j} - \cos\theta_2 \hat{k}\right]$$

$$= \frac{2 \times 10^{-7}(10)}{\sqrt{13} \times 10^{-2}}\left[\frac{-3}{\sqrt{13}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{k}\right]$$

$$= \left[-46.154\hat{j} - 30.769\hat{k}\right][\mu\text{T}]$$

y al sustituir: $\vec{B}_P = \left[-10.860\hat{j} - 89.592\hat{k}\right][\mu\text{T}]$

b) Para la determinación de la fuerza magnética tenemos: $\vec{F} = q\vec{V}_e \times \vec{B}$

$$\vec{F} = q\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_{ex} & V_{ey} & V_{ez} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} ; \vec{F} = -1.6 \times 10^{-19}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -10.86 & -89.592 \end{vmatrix} 10^6(10^{-6})$$

$$\vec{F} = -1.6 \times 10^{-19}\left[\hat{i}(0) - \hat{j}(-268.776) + \hat{k}(-32.58)\right] = \left[-43.004\hat{j} + 5.213\hat{k}\right]10^{-18}[\mathrm{N}]$$

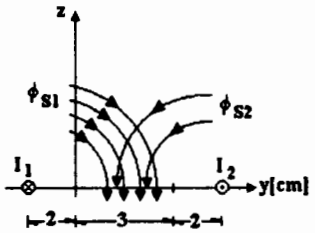
c) La fuerza en 1 se obtiene con $\vec{F}_{12} = I_1\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_{12}$; $\vec{F}_{12} = I_1\vec{\ell}_1 \times \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi d}(-\hat{k})$

$$\vec{F}_{12} = 20[\mathrm{A}]\,1[\mathrm{m}](-\hat{i}) \times \frac{4\pi \times 10^{-7}(10)[\mathrm{T}]}{2\pi(0.07)[\mathrm{m}]}(-\hat{k}) = -571.43\hat{j}\,[\mu\mathrm{N}]$$

d) $\phi_s = \phi_{s1} + \phi_{s2}$ y $\phi_{s1} = \int\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$

$\phi_{s1} = \int\int B_1 dS \cos\alpha$, como $\vec{B}_1$ y $d\vec{S}$ son paralelos $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$.

$$\phi_{s1} = \int\int \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} dr\,dx \;;\; \phi_{s1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_0^{\ell}\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r}$$



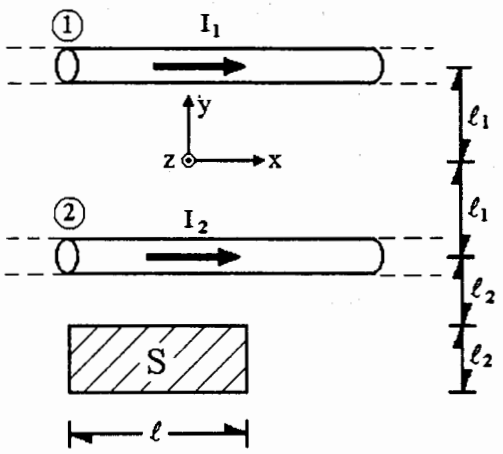
$$\phi_{s1} = \frac{\mu_0 I_1 \ell}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi_{s1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(20)(0.06)}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{5}{2} = 0.22\,[\mu\mathrm{Wb}],\ \text{hacia } -z \text{ y}$$

$$\phi_{s2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(10)(0.06)}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{5}{2} = 0.11\,[\mu\mathrm{Wb}],\ \text{hacia } -z$$

$$\therefore\ \phi_s = (0.22 + 0.11)[\mu\mathrm{Wb}] = 0.33\,[\mu\mathrm{W}b],\ \text{hacia } -z.$$

12. La figura muestra dos conductores rectos, paralelos y muy largos que transportan las corrientes $I_1 = 2[A]$ e $I_2 = 3[A]$; si $\ell = 60$, $\ell_1 = 25$ y $\ell_2 = 20$ en [cm], determine para este conjunto:



a) El campo magnético en el origen.

b) La fuerza magnética que experimentaría una partícula con carga $q = -50[nC]$, al pasar por el origen con una velocidad $\vec{V} = 2 \times 10^7 \hat{i}[m/s]$.

c) La fuerza magnética que actúa sobre cada metro de longitud del conductor 1.

d) El flujo magnético a través de la superficie S.

Resolución:

a) Con el Principio de Superposición: $\vec{B}_0 = \vec{B}_{01} + \vec{B}_{02}$ en la cual

$$\vec{B}_{01} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a_1}(-\hat{k}) = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(2)\hat{k}}{2\pi(0.25)} = -1.6\hat{k}[\mu T] \; ; \; \vec{B}_{02} = \frac{\mu_0 I_2 \hat{k}}{2\pi a_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(3)\hat{k}}{2\pi(0.25)} = 2.4\hat{k}[\mu T]$$

Por lo tanto $\vec{B}_0 = (-1.6 + 2.4)\hat{k}[\mu T] = 0.8\hat{k}[\mu T]$

b) La fuerza se encuentra con $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}_0$, es decir:

$$\vec{F} = -50 \times 10^{-9}[C]2 \times 10^7 \hat{i}[m/s] \times 0.8\hat{k}10^{-6}[T] = 8 \times 10^{-7}\hat{j}[N]$$

c) El conductor 1 experimenta una fuerza dada por $\vec{F}_{12} = I_1 \vec{\ell}_1 \times \vec{B}_{12}$

$$\text{si } \ell_1 = 1[m] : \vec{F}_{12} = 2[A]1[m]\hat{i} \times \frac{4\pi \times 10^{-7}(3)[Wb][A]}{2\pi(0.5)[m][A \cdot m]}\hat{k} = -2.4 \times 10^{-6}\hat{j}[N]$$

d) Aplicando el Principio de Superposición: $\phi_s = \phi_{s1} + \phi_{s2}$, en la cual

$$\phi_{s1} = \int\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \; ; \; \phi_{s1} = \int -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{k} \cdot (\ell dr)(-\hat{k}) = \frac{\mu_0 I_1 \ell}{2\pi}\int_{r_1 = 2\ell_1 + \ell_2}^{r_2 = 2(\ell_1 + \ell_2)} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 \ell}{2\pi}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi_{s1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2)(0.60)}{2\pi}\text{Ln}\frac{90}{70} = 6.032 \times 10^{-8}[Wb] \text{ , hacia } -z \text{ ; de manera semejante:}$$

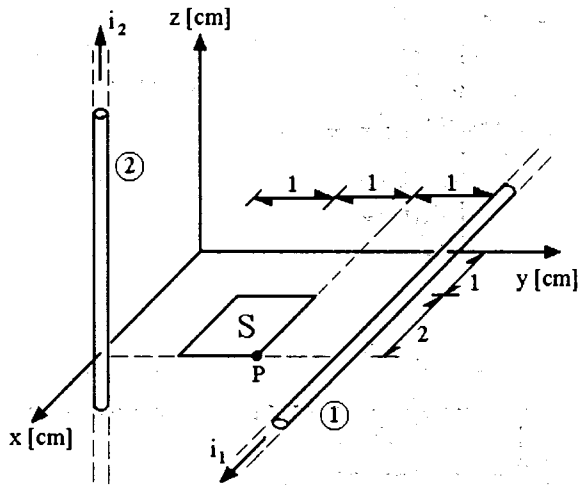
$$\phi_{s2} = \int\int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} \; ; \; \phi_{s2} = \int -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{k} \cdot (\ell dr)(-\hat{k}) = \frac{\mu_0 I_2 \ell}{2\pi}\int_{r_1 = \ell_2}^{r_2 = 2\ell_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_2 \ell}{2\pi}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi_{s2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(3)(0.60)}{2\pi}\text{Ln}\frac{40}{20} = 2.49 \times 10^{-7}[Wb] \text{ , hacia } -z \text{ , al sustituir se obtiene:}$$

$$\phi_s = (60.32 + 249)10^{-9}[Wb] \text{ , hacia } -z.$$

$$\phi_s = 309.32[nWb], \text{ hacia } -z.$$

13. Se tienen dos conductores rectos y muy largos con corrientes $i_1 = 20[A]$ e $i_2 = 30[A]$ como lo indica la figura. El conductor 1 se halla en el plano xy y es paralelo al eje x; el conductor 2, ubicado en el plano xz, es paralelo al eje z. Determinar:



a) El campo magnético en el punto $P(3,2,0)[cm]$.

b) El flujo magnético a través de la superficie S.

c) La fuerza magnética, en cada unidad de longitud, que experimentaría el conductor 2, si fuera colocado a lo largo del eje x, de modo que la corriente i_2 circulara en sentido contrario al de i_1.

d) ¿Qué fuerzas actúan sobre cada conductor, debido al otro, en la posición mostrada en la figura?

Resolución:

a) Con la aplicación del Principio de Superposición se tiene:

$\vec{B}_P = \vec{B}_{P1} + \vec{B}_{P2}$ en la cual

$$\vec{B}_{P1} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_{1P}}(-\hat{k}) = \frac{-2 \times 10^{-7}(20)\hat{k}}{10^{-2}} = -0.4\hat{k}[mT] \text{ y}$$

$$\vec{B}_{P2} = \frac{\mu_0 i_2(-\hat{i})}{2\pi r_{2P}} = -\frac{2 \times 10^{-7}(30)\hat{i}}{2 \times 10^{-2}} = -0.3\hat{i}[mT] \therefore \vec{B}_P = [-0.3\hat{i} - 0.4\hat{k}][mT]$$

b) Con el mismo Principio: $\phi_s = \phi_{s1} + \phi_{s2}$.

Se observa que $\phi_{s2} = 0$ y ϕ_{s1} se obtiene de

$$\phi_{s1} = \int\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \; ; \; \phi_{s1} = \int\int \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}(-\hat{k}) \cdot dr\,dx(-\hat{k}) \; ; \; \phi_{s1} = \int_0^{\ell}\int_{r1}^{r2} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\,dr\,dx$$

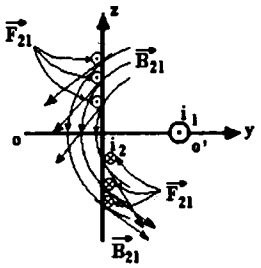
$$\phi_{s1} = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(20)0.02}{2\pi}\text{Ln}\frac{2}{1} = 55.5[nWb] \text{ , hacia } -z \; ; \; \phi_s = \phi_{s1}$$

c) La fuerza sobre el conductor 2 resultaría: $\vec{F}_{21} = i_2\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_{21}$

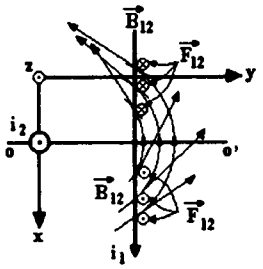
$$\vec{F}_{21} = i_2\ell_2(-\hat{i}) \times \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}(-\hat{k}) \; ; \; \vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \ell_2}{2\pi d}(-\hat{j}) = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(20)(30)(1)}{2\pi(0.03)}\hat{j}$$

$\therefore \vec{F}_{21} = -4\hat{j}[mN]$, lo rechazaría el conductor 1, y el 2 rechazaría al 1.

d) Para encontrar las fuerzas que actúan sobre un conductor debido al otro, analicemos cada uno en vistas de perfil que muestren al conductor en turno en su magnitud real.



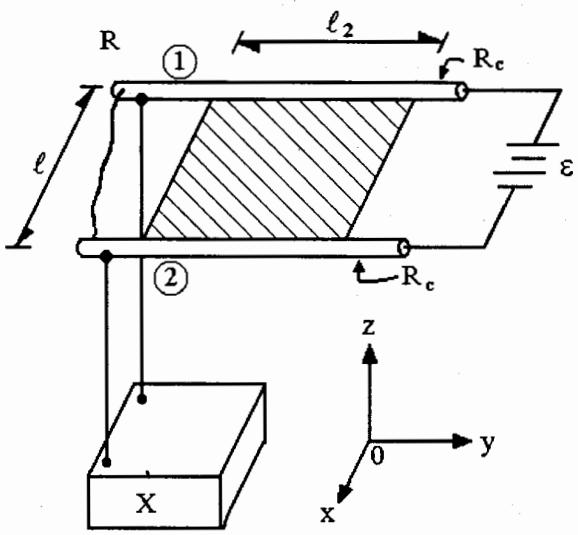
El conductor 2 tiende a alinearse como el eje x; es decir como el conductor 1, girando en torno del eje 00'



El conductor 1 tiende a alinearse como el eje z; es decir como el conductor 2, girando en torno del eje 00'

Conclusión: si se dejan libres a los conductores, éstos, girando en torno del eje 00', tratarán de estar paralelos y con sus corrientes en el mismo sentido y posteriormente se juntarán.

14. El vehículo x de la figura recibe energía eléctrica por medio de los conductores rectos y paralelos 1 y 2 separados $\ell = 50\,[\text{cm}]$, cada uno de los cuales tiene resistencia $R_c = 0.1\,[\Omega]$ en una longitud $\ell_2 = 500\,[\text{m}]$; el vehículo x tiene resistencia $R_x = 10\,[\Omega]$ y la fuente de fuerza electromotriz es $\varepsilon = 600\,[\text{V}]$. De repente se establece un circuito corto con un conductor de resistencia R prácticamente nula. Determine:



a) La corriente en los conductores, antes y después del circuito corto.

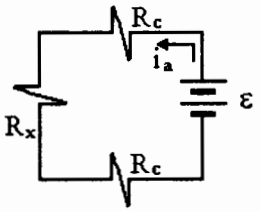
b) La fuerza máxima que actúa sobre cada uno de los conductores rectos y ¿cuándo ocurre?

c) El flujo magnético máximo a través del área sombreada en la figura, si el radio r de cada conductor es $1\,[\text{cm}]$.

d) La forma y posición de alguna superficie a través de la cual el flujo magnético fuese nulo.

Resolución:

a) Para calcular la corriente antes del circuito corto, dibujemos simbólicamente el circuito:

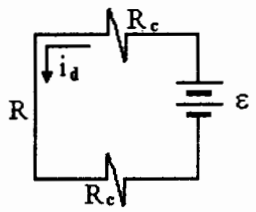


Con la ley de voltajes de Kirchhoff: $R_c i_a + R_x i_a + R_c i_a = \varepsilon$

$$i = \frac{\varepsilon}{2R_c + R_x} = \frac{600\,[\text{V}]}{[2(0.1) + 10]\,[\Omega]}$$

$$i_{antes} = 58.82\,[\text{A}]$$

Cuando ocurre el circuito corto:



Con LVK

$$R_c i_d + R_c i_d = \varepsilon \;,\; R \approx 0$$

$$i_d = \frac{\varepsilon}{2R_c} = \frac{600\,[\text{V}]}{0.2\,[\Omega]}$$

$$i_d = 3000\,[\text{A}]$$

b) Como la fuerza de interacción magnética se obtiene con $\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$; $\vec{F}_{12\,máx} = i_{máx}\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_{12\,máx}$, es decir

$$\vec{F}_{12\,máx} = 3000(500)(-\hat{j}) \times \frac{4\pi \times 10^{-7}(3000)}{2\pi\ell}\hat{k}$$

$\vec{F}_{12} = -1800\hat{i}$ [N] y sobre el otro conductor $\vec{F}_{21} = +1800\hat{i}$ [N]

c) Al aplicar el Principio de Superposición se establece que $\phi = \phi_1 + \phi_2$

Por los sentidos de las corrientes en los conductores y por la simetría se encuentra que $\phi_1 = \phi_2$ y

$$\phi_1 = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\phi_1 = \int\int \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{k}\cdot dx dy \hat{k}$$

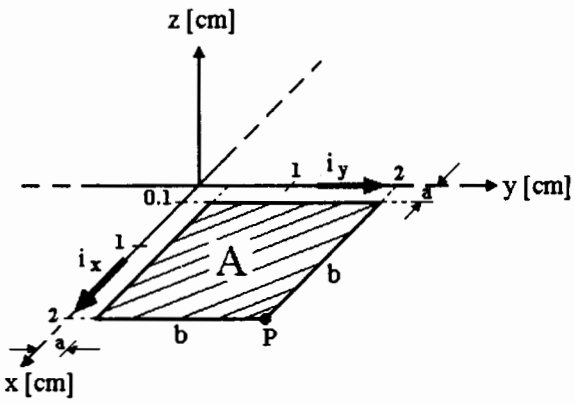
$$\phi_1 = \int_0^{\ell_2}\int_r^{\ell-r} \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{dx}{x}dy = \frac{\mu_0 i \ell_2}{2\pi}\text{Ln}\frac{\ell-r}{r}$$ y ϕ_1 será máximo cuando $i = i_{máx}$

$$\therefore\ \phi_{máx} = 2\phi_{1\,máx} = \frac{2(4\pi \times 10^{-7})3000(500)}{2\pi}\text{Ln}\frac{50-1}{1} = 2.335\,[\text{Wb}] \text{ hacia } +z$$

Este flujo ocurre desde que se establece el circuito corto.

d) Algunas superficies a través de las cuales el flujo magnético es nulo son: cualquier superficie cerrada, en cualquier posición, con base en la ley de Gauss para el magnetismo. Además puede ser un plano vertical entre los dos conductores y paralelo a éstos; un plano paralelo y centrado con la superficie sombreada de ancho 2ℓ y de largo ℓ_2, entre otras.

15. En la figura se muestran dos conductores muy largos, de sección transversal despreciable, que coinciden uno con el eje x y otro con el eje y, con las corrientes $i_x = 50[A]$ e $i_y = 35[A]$, respectivamente, indicadas en la figura. El área A está contenida en el plano xy. Determine:



a) El campo magnético en el punto P, debido a cada una de las corrientes.

b) El campo magnético en el punto P, debido a las dos corrientes simultáneamente.

c) El flujo magnético total a través del área A.

d) La fuerza de origen magnético que experimenta una partícula α $\left(q_\alpha = 3.2 \times 10^{-19}[C]\right)$ al pasar por P con una velocidad $\vec{V} = \left(-4 \times 10^6 \hat{i} + 3 \times 10^6 \hat{k}\right)[m/s]$.

Resolución:

a) Como se trata de conductores rectos, su campo se calcula con $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d}$

$$\vec{B}_{Px} = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi d}\hat{k} \; ; \; \vec{B}_{Px} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(50)\hat{k}}{2\pi(2)} = 5\hat{k}[\mu T]$$

$$\vec{B}_{Py} = \frac{-\mu_0 i_y}{2\pi d}\hat{k} \; ; \; \vec{B}_{Py} = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(35)\hat{k}}{2\pi(2)} = -3.5\hat{k}[\mu T]$$

b) El campo magnético total $\vec{B}_P$ se obtiene aplicando el Principio de Superposición:

$$\vec{B}_P = (5\hat{k} - 3.5k)[\mu T] \; ; \; \vec{B}_P = 1.5\hat{k}[\mu T]$$

c) Con el mismo Principio: $\phi_A = \phi_{Ax} + \phi_{Ay}$ y como $\phi = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\phi_{Ax} = \int\int \frac{\mu_0 i_x}{2\pi y}\hat{k} \cdot dy dx \hat{k} \; ; \; \phi_{Ax} = \frac{\mu_0 i_x}{2\pi}\int_0^b \int_{0.1}^{2} \frac{dy}{y} dx \; ; \; \phi_{Ax} = \frac{\mu_0 i_x b}{2\pi} \mathrm{Ln}\frac{2}{0.1}$$

$$\phi_{Ax} = 56.92[\mu Wb] \text{ hacia } +z \text{ y } \phi_{Ay} = \frac{\mu_0 i_y b}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{2}{0.1} = 39.84[\mu Wb] \text{ hacia } -z$$

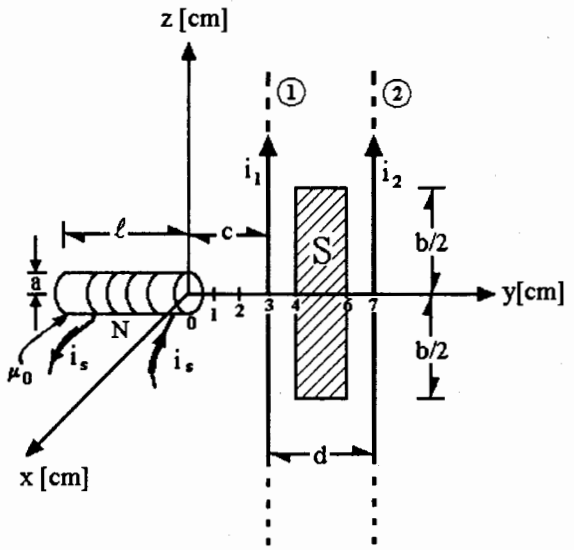
$$\phi_A = 17.08[\mu Wb] \text{ hacia } +z$$

d) La fuerza sobre la partícula α se evalúa con $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{F} = q_\alpha \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \; ; \; \vec{F} = q_\alpha \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{vmatrix} 10^6 10^{-6}$$

$$\vec{F} = 3.2 \times 10^{-19}\left[\hat{i}(0) - \hat{j}(-6.0) + \hat{k}(0)\right] = 1.92 \times 10^{-18}\hat{j}[N]$$

16. Los conductores 1 y 2 son rectos, muy largos y contenidos en el plano yz, igual que la superficie plana S. El eje del solenoide coincide con la parte negativa del eje y, además se sabe que: $a = 2$[cm], $b = 6$[cm], $c = 3$[cm], $d = 4$[cm], $\ell = 30$[cm], $N = 120$ vueltas, $i_s = 2$[A], $i_1 = 60$[A], $i_2 = 70$[A], $\mu_{aire} \approx \mu_0$. Determine:



a) El campo magnético en el origen $(\vec{B}_0)$, debido al solenoide y conductores.

b) Los puntos sobre el eje y para los cuales el campo magnético producido por los conductores rectos es cero (considerar que $i_s = 0$).

c) El flujo magnético total a través de la superficie S.

d) La fuerza de origen magnético que experimentan 10[m] del conductor 1 debido al 2 (considerar que $i_s = 0$).

Resolución:

a) El campo magnético en el origen se debe a tres elementos: $\vec{B}_0 = \vec{B}_{01} + \vec{B}_{02} + \vec{B}_{0S}$ es decir:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i_1 \hat{i}}{2\pi c} + \frac{\mu_0 i_2 \hat{i}}{2\pi(c+d)} + \frac{\mu_0 N i_s \hat{j}}{2\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7}\hat{i}}{2\pi}\left[\frac{60}{0.03} + \frac{70}{0.07}\right] + \frac{4\pi \times 10^{-7}(120)2}{2(0.3)}\hat{j}$$

$$\vec{B}_0 = \left[4 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-4}\right]\hat{i} + 5.026 \times 10^{-4}\hat{j}\,[\mathrm{T}] \;;\; \vec{B}_0 = \left[6\hat{i} + 5.026\hat{j}\right]10^{-4}[\mathrm{T}]$$

b) Sabemos que $B_P = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$; $B_P \propto \dfrac{1}{r}$ $\therefore$ $B_P \to 0$ si $r \to \infty$ $\begin{cases} y_1 \to \infty \\ y_2 \to -\infty \end{cases}$

y existe un punto entre los conductores para $\vec{B}_P = \vec{0}$: $\vec{B}_{P1} + \vec{B}_{P2} = 0$, es decir

$$\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d_2} \;;\; \frac{i_1}{d_1} = \frac{i_2}{d_2} \text{ y como } d_1 + d_2 = 4[\mathrm{cm}] \;;\; \frac{i_1}{d_1} = \frac{i_2}{0.04 - d_1}$$

$$d_1 = \frac{0.04 i_1}{i_1 + i_2} = \frac{0.04(60)}{60 + 70} = 1.8462[\mathrm{cm}] \text{ y el punto } y_3 = c + d_1 = 4.8462[\mathrm{cm}]$$

c) El flujo total se debe expresar como : $\phi_s = \phi_{ss} + \phi_{s1} + \phi_{s2}$

y observamos que $\phi_{ss} = 0$ ya que ninguna línea de campo del solenoide enlaza o cruza el área S.

Por otra parte $\phi_{s1} = \int\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$; $\vec{B}_1$ y $d\vec{S}$ son paralelos

$$\phi_{s1} = \int\int \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}(-\hat{i})\cdot drdz(-\hat{i}) \; ; \; \phi_{s1} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\int_0^b\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r}dz = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1}$$

por lo tanto: $\phi_{s1} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7}(60)(0.06)}{2\pi}\text{Ln}\dfrac{3}{1} = 0.791[\mu\text{Wb}]$ hacia $-x$, $\otimes$ y

$$\phi_{s2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(70)(0.06)}{2\pi}\text{Ln}\frac{3}{1} = 0.9228[\mu\text{Wb}] \text{ , hacia } +x, \odot$$

$$\phi_s = [0 - 0.791 + 0.9228][\mu\text{Wb}] = 0.1318[\mu\text{Wb}], \text{ hacia } +x, \odot$$

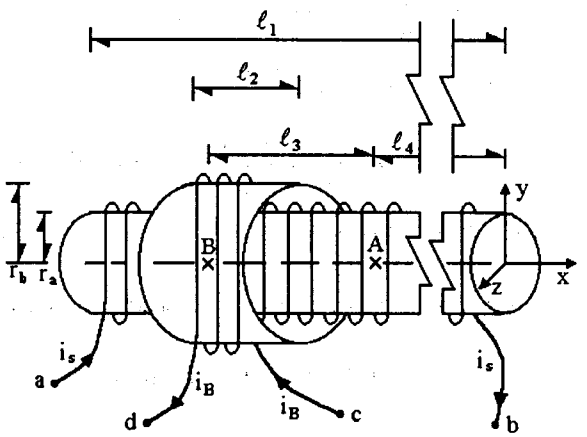
d) La fuerza que experimenta el conductor 1, debida al conductor 2 es:

$$\vec{F}_{12} = i_1\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_{12} \; ; \; \vec{F}_{12} = 60[\text{A}]10[\text{m}]\hat{k} \times \frac{4\pi \times 10^{-7}(70)[\text{T}]}{2\pi(0.04)}\hat{i} = 0.21\hat{j}\,[\text{N}]$$

17. Para el arreglo de inductores: solenoide largo y bobina con núcleo de aire y con los datos en [cm]:

$\ell_1 = 100$	$r_a = 1$	$i_s = 1$[A]
$\ell_2 = 2$	$r_b = 3$	$i_b = 10$[A]
$\ell_3 = 4$	$N_s = 400$	$N_b = 20$
$\ell_4 = 50$		

de acuerdo con la figura, determine:



a) El vector densidad de flujo magnético total en el punto *A*.

b) El flujo magnético a través de la bobina debido al solenoide.

c) ¿Qué tendría que modificarse para lograr la cancelación del campo magnético en el punto *B*?

d) El campo magnético total en el punto *B* si solenoide y bobina se conectan en serie con $i = 10$[A].

Resolución:

a) El campo magnético en *A* es producido por el solenoide y la bobina: $\vec{B}_A = \vec{B}_{As} + \vec{B}_{Ab}$

como $\ell_1 \gg r_a$, $(100 \gg 1)$, el solenoide es largo y se calcula:

$$\vec{B}_{AS} = \frac{\mu_0 i_s N_s}{\ell_1}(-\hat{\imath}) = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(1)(400)}{1}\hat{\imath} = -502.65\hat{\imath}\,[\mu\text{T}].$$

Para la bobina consideremos que está formada por $N_b = 20$ espiras de radio $r_b = 3$[cm], todas ellas a ℓ_3[m] del punto *A*, su cálculo de $\vec{B}_{Ab}$ es:

$$\vec{B}_{Ab} = \frac{N_b \mu_0 i_b r_b^2}{2\left(r_b^2 + \ell_3^2\right)^{3/2}}\hat{\imath} \;;\; \vec{B}_{Ab} = \frac{20(4\pi \times 10^{-7})10(0.03)^2\hat{\imath}}{2\left[0.03^2 + 0.04^2\right]^{3/2}} = 904.78\hat{\imath}\,[\mu\text{T}]$$

$$\therefore\; \vec{B}_A = [-502.65 + 904.78]\hat{\imath}\,[\mu\text{T}] = 402.13\hat{\imath}\,[\mu\text{T}]$$

b) Como todo el flujo magnético producido por el solenoide enlaza a la bobina

$$\phi_{ss} = \phi_{bs} = \int\int \vec{B}_s \cdot d\vec{S} \;;\; \phi_{bs} = \int\int B_s dS \cos\alpha \;,\; \alpha = 0 \text{ y } \cos\alpha = 1 \;;\; \phi_{bs} = B_s(A_s)$$

$$\phi_{bs} = \frac{\mu_0 i_s N_s}{\ell_1}A_s = \frac{4\pi \times 10^{-7}(1)400\pi(0.01)^2}{1} = 0.158[\mu\text{Wb}], \text{ hacia } -x \text{ , a la izquierda.}$$

c) Para que $\vec{B}_B = \vec{0}$, se requiere que $\vec{B}_{Bs} + \vec{B}_{Bb} = 0$ y $|\vec{B}_{Bs}| = |\vec{B}_{Bb}|$

$$\vec{B}_{Bs} = \frac{-\mu_0 i_s N_s}{\ell_1}\hat{\imath} = -502.65\hat{\imath}\,[\mu\text{T}] \;;\; \vec{B}_{Bb} = \frac{\mu_0 i_b N_b}{2r_b}\hat{\imath} = 4.189 \times 10^{-3}\hat{\imath}\,[\text{T}]$$

Por lo tanto, para que $\vec{B}_B = \vec{0}$ se requiere que:

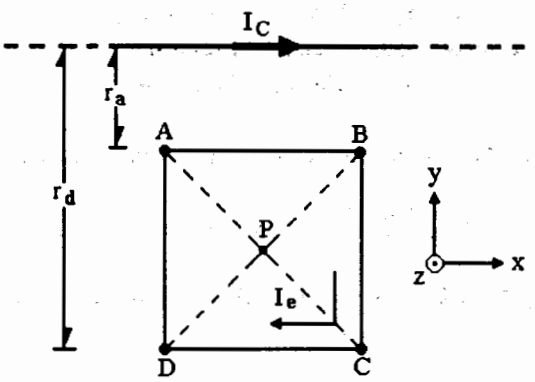
a) i_s = 8.33 [A] y lo demás quede igual.
b) N_s = 3333 vueltas y el resto sin cambios.
c) i_b = 1.20 [A], lo demás sin cambio.

d) Los valores de los campos magnéticos se modifican para i' = 10[A]

$$\vec{B}'_{Bs} = \frac{-\mu_0 i' N_s \hat{i}}{\ell_1} = -5.0265\hat{i}\,[\text{mT}] \quad \text{y} \quad \vec{B}_{Bb} = 4.189\hat{i}\,[\text{mT}] = \vec{B}'_{Bb}$$

Así $\vec{B}'_B = \vec{B}'_{Bs} + \vec{B}'_{Bb}$; $\vec{B}'_B = [-5.0265\hat{i} + 4.189\hat{i}]\,[\text{mT}] = -0.8375\hat{i}\,[\text{mT}]$

18. En la figura se muestra un conductor recto y muy largo que transporta una $I_c = 10[A]$, y una espira conductora, ambos en el plano xy. Además $r_a = 2$ y $r_d = 5$ en [cm], y cada lado de la espira cuadrada mide 3[cm]. Con base en ello determine:



a) El campo magnético que produce únicamente la espira en el punto P, $I_e = 5[A]$.

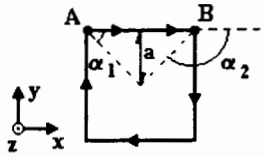
b) El flujo del campo magnético a través del área circundada por la espira, si $I_e = 0$.

c) La fuerza de origen magnético que experimenta cada lado de la espira.

d) La fuerza que experimentaría una carga $q_p = 1.6 \times 10^{-6}[C]$ que pasara por el punto P con velocidad $\vec{V} = 4 \times 10^3(\hat{i} + \hat{k})[m/s]$.

Resolución:

a) Se requiere $\vec{B}_{Pe} = \vec{B}_{PAB} + \vec{B}_{PBC} + \vec{B}_{PCD} + \vec{B}_{PDA}$; como cada lado de la espira es un conductor recto, de longitud finita, el campo magnético que produce, por ejemplo: el lado AB, es $\vec{B}_{PAB} = \frac{\mu_0 I_e}{4\pi a}[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2](-\hat{k})$



$$\vec{B}_{PAB} = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(5)}{4\pi(0.015)}\left[\frac{1.5}{2.12} - \left(-\frac{1.5}{2.12}\right)\right]\hat{k}$$

$$= \frac{-5 \times 10^{-7}\hat{k}}{(0.015)}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{-5\sqrt{2} \times 10^{-7}\hat{k}}{(0.015)}[T]$$

$$\vec{B}_{PAB} = -4.714 \times 10^{-5}\hat{k}[T] = -47.14\hat{k}[\mu T]$$

Los otros tres lados producen un campo magnético idéntico cada uno, $\therefore\ \vec{B}_P = 4\vec{B}_{PAB}$

$$\vec{B}_{Pe} = -188.562\hat{k}[\mu T]$$

b) Si $I_e = 0$, el flujo a través del área se debe al conductor recto y largo:

$$\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}\ ;\ \phi = \int_0^l\int_{ra}^{rd}\frac{\mu_0 I_c d_r}{2\pi r}dx\ ;\ \alpha \measuredangle_B^{dS} = 0\ ;\ \cos\alpha = 1\ ;\ \phi = \frac{\mu_0 I_c \ell}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{r_d}{r_a}$$

$$\phi = \frac{4\pi \times 10^{-7}(10)0.03}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{5}{2} = 5.498 \times 10^{-8}[Wb]\ ;\ \phi = 54.98[nWb]\ ,\ \text{hacia } -z$$

c) $\vec{F}_{AB} = I_e(\ell)\hat{i} \times B_{AC}(-\hat{k})\ ;\ \vec{F}_{AB} = 5(0.03)\hat{i} \times \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r_a}(-\hat{k}) = 0.15\frac{4\pi \times 10^{-7}(10)}{2\pi(0.02)}\hat{j} = 15\hat{j}[\mu N]$

y $\vec{F}_{CD} = 0.15\frac{4\pi \times 10^{-7}(10)}{2\pi(0.05)}(-\hat{j}) = -6\hat{j}[\mu N]$

Para calcular $\vec{F}_{BC}$: $d\vec{F} = I_e d\vec{l} \times \vec{B}$

ya que B varía a lo largo de este lado de la espira; $\int dF = \int I_e \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r} dr$ y

$$\vec{F}_{BC} = \frac{\mu_0 I_e I_c}{2\pi} \text{Ln} \frac{r_d}{r_a} \hat{i} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(5)(10)\hat{i}}{2\pi} \text{Ln} \frac{5}{2} = 9.163\hat{i}\,[\mu\text{N}] \text{ y } \vec{F}_{DA} = -9.163\hat{i}\,[\mu\text{N}]$$

d) La fuerza sobre la carga se obtiene con: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}_P$; $\vec{B}_P = \vec{B}_{Pc} + \vec{B}_{Pe}$

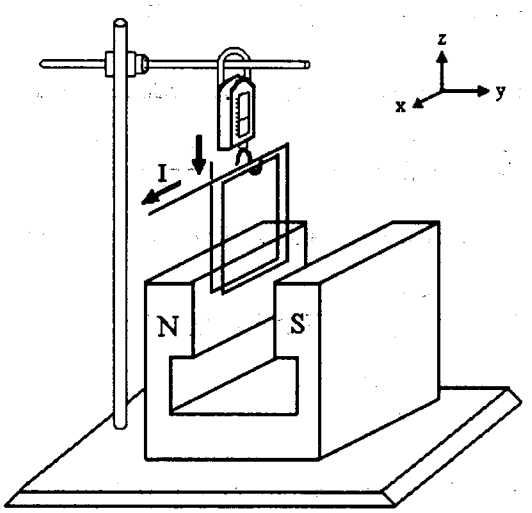
$$\vec{B}_{Pc} = \frac{-\mu_0 I_c}{2\pi r_p}\hat{k} = \frac{-4\pi \times 10^{-7}(10)\hat{k}}{2\pi(0.035)} = -57.143\hat{k}\,[\mu\text{T}] \; ; \; \vec{B}_P = [-57.143 - 188.562]\hat{k}\,[\mu\text{T}]$$

$$\vec{B}_P = -245.705\hat{k}\,[\mu\text{T}]$$

$$\vec{F}_P = 1.6 \times 10^{-6} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2.457 \end{vmatrix} 10^3(10^{-4}) = 1.6 \times 10^{-7}\left[\hat{i}(0) - \hat{j}(-9.828) + \hat{k}(0)\right]$$

finalmente: $\vec{F}_P = 1.573\hat{j}\,[\mu\text{N}]$

19. El dispositivo de la figura se utiliza como amperímetro en un laboratorio de la ciudad de México. Consta de una bobina de 100 espiras rectangulares de $4[\text{cm}] \times 25[\text{cm}]$, suspendida de un dinamómetro de resorte que tiene una escala de 0 a 5[N]. Cuando no circula corriente por la bobina, la lectura en el dinamómetro es 2.4[N]. Cuando circula una corriente de 0.5[A] marca 2.7[N]. De acuerdo con esto, determine:



a) El campo magnético $\vec{B}$ en el entrehierro del imán.

b) ¿Cuál es la corriente máxima que puede medirse con este dispositivo?

c) ¿Cuál es la fuerza magnética que experimenta cada uno de los electrones de conducción cuando circula por el lado inferior de una de las espiras, con una velocidad de 0.02[cm/s], debido al campo del imán?

d) ¿Cuál es la masa de la bobina?

Resolución:

a) Sabemos que la fuerza magnética sobre el lado inferior de la bobina es $\vec{F}_m = NI\vec{\ell} \times \vec{B}$; en el instrumento se observa que $\vec{\ell}$ es $\perp$ a $\vec{B}$, por esta razón, la magnitud de la fuerza sobre la bobina es $F_m = NI\ell B \operatorname{sen}(\pi/2)$

de donde: $B = \dfrac{F_m}{NI\ell}$; $B = \dfrac{(2.7 - 2.4)[\text{N}]}{100(0.5)[\text{A}]0.04[\text{m}]} = 0.15[\text{T}]$; $\vec{B} = 0.15\hat{j}\,[\text{T}]$

Se observa que la fuerza magnética resulta de la diferencia de la lectura con corriente (0.5[A]) y la lectura sin corriente en el medidor.

b) La corriente máxima $I_{máx}$ dependerá de la fuerza máxima que pueda medirse, pero dicha fuerza es la magnética. Ésta se obtiene con el valor superior del rango menos la fuerza gravitatoria (peso de la bobina) que se presenta aun sin corriente en la bobina: $F_{máx} = (5 - 2.4)[\text{N}]$

por lo tanto $I_{máx} = \dfrac{F_{máx}}{N\ell B} = \dfrac{(5 - 2.4)[\text{N}]}{100(4 \times 10^{-2}[\text{m}])0.15[\text{T}]} = 4.33[\text{A}]$, en el sentido de la figura.

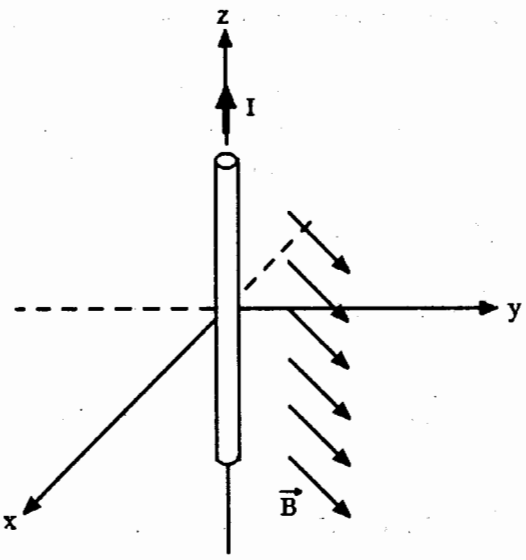
c) La fuerza magnética sobre cargas en movimiento se obtiene con $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, se observa que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{B}$, la fuerza sobre el electrón es:

$$\vec{F}_e = -1.6 \times 10^{-19}[\text{C}][0.02 \times 10^{-2}][\text{m}](\hat{i}) \times 0.15\hat{j}\,[\text{T}] = -4.8 \times 10^{-24}\hat{k}\,[\text{N}]$$

d) La masa de la bobina se puede encontrar al conocer su peso y la aceleración gravitatoria del lugar, ciudad de México, $g = 9.78[\text{m/s}^2]$; de la segunda ley de Newton, peso $= mg$

$$m = \frac{\text{peso}}{g} \therefore m = \frac{2.4[\text{N}]}{9.78[\text{m/s}^2]} = 0.2454[\text{kg}]$$

20. En la figura se muestra un segmento de conductor con diámetro $d = 0.05\,[\text{cm}]$ y longitud $L = 20\,[\text{cm}]$ que transporta una corriente $I = 3\,[\text{A}]$, dentro de la región con campo $\vec{B} = 3.5(\hat{i} + \hat{j}) \times 10^{-3}\,[\text{T}]$; el conductor de plata tiene densidad $10.51\,[\text{g/cm}^3]$ y masa atómica $107.87\,[\text{g/mol}]$. Con base en lo anterior y en la figura, obtenga para el conductor:



a) El número de portadores de carga libres en cada unidad de volumen, en el SI.

b) La velocidad de un portador de carga negativo.

c) La fuerza ejercida sobre un portador de carga negativo.

d) La fuerza magnética ejercida sobre el conductor.

Resolución:

a) La cantidad de portadores libres en cada unidad de volumen n, se puede calcular con :

$$n = \rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right] (\sharp) \frac{No\,[\text{port/mol}]}{M\,[\text{g/mol}]} \text{ ; en la cual}$$

ρ: densidad del material
$\sharp = 1$, número de [electrones libres/átomo]
M: masa atómica del conductor
$No = 6.023 \times 10^{23}$ [port/mol], número de Avogadro
$M_{Ag} = 107.87\left[\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right]$

al sustituir obtenemos:

$$n = 10.51\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right](1)\frac{6.023 \times 10^{23}\,[\text{port/mol}]}{107.87\,[\text{g/mol}]} = 5.87 \times 10^{22}\left[\frac{\text{port}}{\text{cm}^3}\right] = 5.87 \times 10^{28}\left[\frac{\text{port}}{\text{m}^3}\right]$$

b) La rapidez de los portadores y la corriente eléctrica se relacionan:

$$I = n|e|vA \;;\; v = \frac{i}{n|e|A} = \frac{3\,[\text{C/s}]4}{5.87 \times 10^{28}\left[\frac{\text{port}}{\text{m}^3}\right] 1.6 \times 10^{-19}\left[\frac{\text{C}}{\text{port}}\right] \pi(5 \times 10^{-4})^2[\text{m}^2]}$$

y resulta $\vec{v}_- = -1.6268 \times 10^{-3}\hat{k}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

c) La fuerza de origen magnético que experimenta un portador de carga negativo es $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$, es decir:

$$\vec{F} = -1.6 \times 10^{-19} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -1.6268 \\ 3.5 & 3.5 & 0 \end{vmatrix} 10^{-3}(10^{-3}) = -1.6 \times 10^{-19}\left[-\hat{j}(5.683) + \hat{i}(5.683)\right]10^{-6}$$

$$\vec{F} = \left(-9.1\hat{i} + 9.1\hat{j}\right)10^{-25}[\mathrm{N}]$$

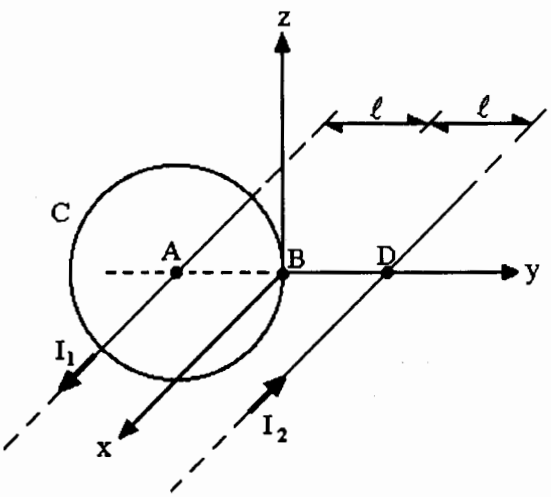
d) La fuerza sobre el conductor se obtiene de $\vec{F} = I\left[\vec{\ell} \times \vec{B}\right]$

$$\vec{F} = 3[\mathrm{A}]0.2\hat{k}[\mathrm{m}] \times \left(\hat{i} + \hat{j}\right)3.5 \times 10^{-3}[\mathrm{T}] = 3[\mathrm{A}] \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 3.5 & 3.5 & 0 \end{vmatrix} 10^{-3}$$

$$\vec{F} = 3[\mathrm{A}]\left[\hat{i}(-0.7) - \hat{j}(-0.7) + \hat{k}(0)\right]$$

$$\vec{F} = \left(-2.1\hat{i} + 2.1\hat{j}\right)10^{-3}[\mathrm{N}]$$

21. Se tienen dos conductores rectos, largos y paralelos contenidos en el plano xy con una separación $2\ell = 1$ [m] entre ellos, con corrientes $I_1 = 10$[A] e $I_2 = 10$[A] como lo muestra la figura. Determine:



a) El campo magnético en el punto $A(0,-0.5,0)$[m] debido a la corriente en el conductor 2.

b) El campo magnético en el punto $B(0,0,0)$ debido a las dos corrientes.

c) La fuerza magnética que actúa sobre el conductor 1 en cada unidad de longitud.

d) La circulación de campo magnético $\vec{B}$, empleando como trayectoria de integración la circunferencia C, centrada en A, con radio $R = 0.5$[m] y contenida en el plano yz.

Resolución:

a) El campo magnético en A debido a I_2: $\vec{B}_{A2} = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi(2\ell)}\hat{k} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7}(10)\hat{k}}{2\pi(1)}$; $\vec{B}_{A2} = 2\hat{k}[\mu\text{T}]$

b) Con el Principio de Superposición: $\vec{B}_B = \vec{B}_{B1} + \vec{B}_{B2}$

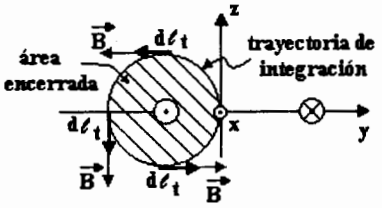
$$\vec{B}_B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ell}\hat{k} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\ell}\hat{k} = \frac{\mu_0}{2\pi\ell}[I_1 + I_2]\hat{k}\ ;\ \vec{B}_B = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi(0.5)}[10 + 10]\hat{k} = 8\hat{k}[\mu\text{T}]$$

c) La fuerza magnética sobre el conductor se calcula con: $\vec{F}_{12} = i_1\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_{12}$

$$\vec{F}_{12} = 10[\text{A}]\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1[\text{m}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{12}[\text{T}] \end{vmatrix} = 10\left[\hat{i}(0) - \hat{j}(B_{12}) + \hat{k}(0)\right]\ ;\ \vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_2\hat{k}}{2\pi(2\ell)} = \vec{B}_{A2}$$

$$\therefore\ \vec{F}_{12} = 10(-\hat{j})2 \times 10^{-6} = -20\hat{j}[\mu\text{N}]$$

d) La circulación de $\vec{B}$ es: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{neta}$; de acuerdo con esta ley de Ampere, la corriente neta enlazada es la que cruza el área encerrada por la trayectoria de integración; por esta razón el campo magnético en el integrando es el originado por I_1:



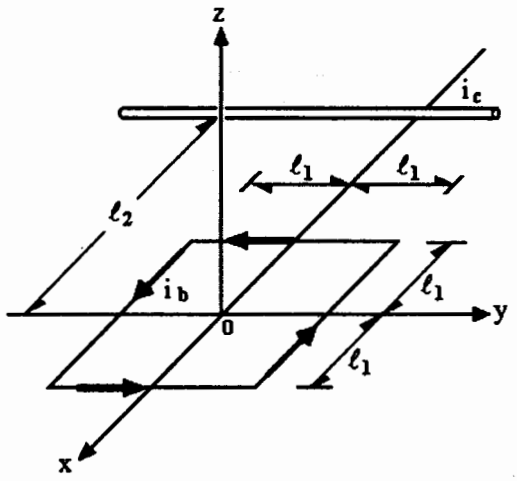
$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}_t = \oint \vec{B}_1\cdot d\vec{\ell}_t = \oint B_1 d\ell_t \cos\alpha$, como $\vec{B}_1$ es tangente a la trayectoria de integración como lo es $d\vec{\ell}_t$, el ángulo α entre estas cantidades es cero y $\cos\alpha = 1$, entonces:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}_t = \oint B_1 d\ell_t = \oint \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ell}d\ell_t = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ell}\oint d\ell_t = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ell}(2\pi\ell) = \mu_0 I_1$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}_t = 4\pi \times 10^{-7}\left[\frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}\right]10[\text{A}] = 4\pi \times 10^{-6}[\text{T}\cdot\text{m}]$$

y el valor de la circulación resulta igual para <u>cualquier</u> curva cerrada que rodee o enlace al conductor 1.

22. La figura muestra un conductor recto largo y una bobina cuadrada de $N_b = 20$ vueltas ambos contenidos en el plano xy; si $\ell_1 = 2$[cm], $\ell_2 = 2\ell_1$ e $i_b = 0.2$[A], calcule:



a) El vector campo magnético producido por la bobina cuadrada en el origen.

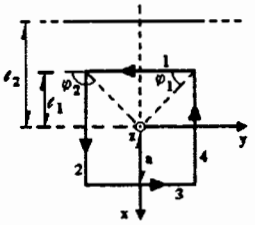
b) La magnitud y sentido de la corriente en el conductor recto, para que el campo resultante en el origen sea nulo.

c) La fuerza magnética total sobre la bobina, si $i_c = 20$[A] (hacia la derecha).

d) El flujo magnético a través de la bobina, debido sólo a la corriente del conductor recto $i_c = 20$[A] hacia la derecha.

Resolución:

a) El campo magnético en el origen será el resultado de cada uno de los cuatro lados de la bobina. El campo magnético que produce un lado es:



$$\vec{B}_{01} = \frac{\mu_0 i_b}{4\pi a}\left[\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right]\hat{k} = \frac{\mu_0 i_b}{4\pi \ell_1}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 i_b}{4\pi \ell_1}\hat{k} = 1.4142\hat{k}[\mu\text{T}]$$

y debido a los cuatro lados de la espira, se tiene

$$\vec{B}_{0e} = 4\vec{B}_{01} = \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 i_b}{\pi \ell_1}\hat{k} = 5.657\hat{k}[\mu\text{T}]$$

pero la bobina tiene 20 espiras: $\vec{B}_{0b} = 20\vec{B}_{0e}$

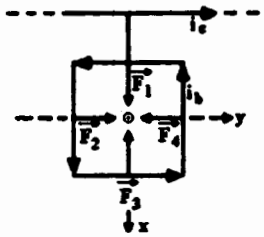
$$\vec{B}_{0b} = 1.1314 \times 10^{-4}\hat{k}[\text{T}]$$

b) Para que el campo magnético en el origen se anule se requiere:

$\vec{B}_{0T} = \vec{B}_{0b} + \vec{B}_{0c} = \vec{0}$; $\vec{B}_{0b} = -\vec{B}_{0c}$, para que $\vec{B}_{0c}$ tenga dirección $(-\hat{k})$ la corriente I_c debe circular de izquierda a derecha $\rightarrow I_c$ y de valor:

$$B_{0c} = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi \ell_2}\ ;\ I_c = \frac{B_{0c}(2\pi \ell_2)}{\mu_0}\ ;\ I_c = \frac{1.1314 \times 10^{-4}(2\pi)4 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7}} = 22.63[\text{A}]$$

c) La fuerza neta sobre la bobina será determinada por superposición de efectos:



$\vec{F}_b = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$; $\vec{F}_2 = F_2\hat{j}$ y $\vec{F}_4 = F_4(-\hat{j})$, se puede demostrar

$\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$

$\therefore\ \vec{F}_b = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$; $\vec{F}_b = N_b[i_b\ell_2B_{1c} - i_b\ell_2B_{3c}]\,\hat{i} = N_bi_b\ell_2[B_{1c} - B_{3c}]\hat{i}$

$$\vec{F}_b = N_bi_b\ell_2\frac{\mu_0 i_c}{2\pi}\left[\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_1 + \ell_2}\right]\hat{i} = 20(0.20)0.04\,\frac{\mu_0(20)\hat{i}}{2\pi}\left[\frac{1}{0.02} - \frac{1}{0.06}\right]$$

$$\vec{F}_b = 21.33\hat{i}\,[\mu\text{N}]$$

d) De la definición $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$ se obtiene $\phi = \dfrac{\mu_0 i_c\ell_2}{2\pi}\text{Ln}\dfrac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1}$

y $\phi = \dfrac{4\pi \times 10^{-7}(20)(0.04)}{2\pi}\text{Ln}\dfrac{6}{2} = 1.76 \times 10^{-7}[\text{Wb}] = 0.176[\mu\text{Wb}]$, hacia -z.

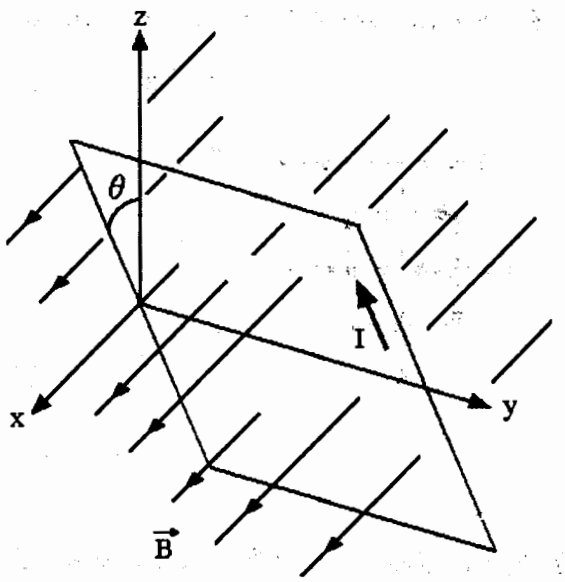
23. La espira cuadrada de la figura mide 20[cm] de lado, por ella circula una corriente $I = 5$[A] y se encuentra expuesta a un campo magnético $\vec{B} = 5\hat{i}$[T]. El plano de la espira forma el ángulo $\theta = 30°$ con el plano yz. Determine:

a) La fuerza magnética resultante sobre la espira.

b) El par magnético que obra sobre la espira y su tendencia al giro.

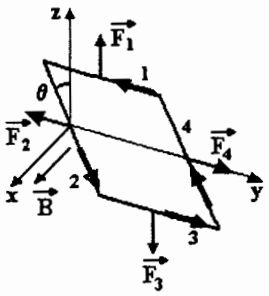
c) El flujo magnético a través de la espira.

d) Los valores de θ que corresponden al flujo nulo y al máximo a través de la espira.



Resolución:

a) Numeremos los lados de la espira, como $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$, siendo ℓ = lado, calculemos la fuerza sobre cada lado:



$$\vec{F}_1 = I\vec{\ell}_1 \times \vec{B} \;;\; \vec{F}_1 = 5(0.2)(-\hat{j}) \times 5\hat{i} = +5\hat{k}[\text{N}]$$

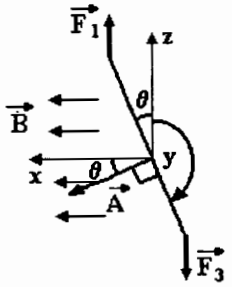
$$\vec{F}_3 = I\vec{\ell}_3 \times \vec{B} \;;\; \vec{F}_3 = 5(0.2)\hat{j} \times 5\hat{i} = -5\hat{k}[\text{N}]$$

$$\vec{F}_2 = I\vec{\ell}_2 \times \vec{B} \;;\; \vec{F}_2 = 5(0.2)\hat{\ell}_2 \times 5\hat{i} = 5\hat{\ell}_2 \times \hat{i}[\text{N}]$$

$$\vec{F}_4 = I\vec{\ell}_4 \times \vec{B} \;;\; \vec{F}_4 = 5(0.2)\hat{\ell}_4 \times 5\hat{i} = -5\hat{\ell}_2 \times \hat{i}[\text{N}] \;;\; \hat{\ell}_2 = -\hat{\ell}_4$$

y $\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = \vec{0}$, pero la suma de momentos es diferente de cero; por lo tanto el sistema resultante es un par de fuerzas.

b) El par magnético lo forman $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$ y le producen a la espira una tendencia a girar en el sentido ↩ si vemos de frente el eje y:



El momento $\vec{\tau}$ es: $\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A}$ es el vector perpendicular al plano de la espira y dirección dada por el tornillo roscado a derecha al girar según el sentido de la corriente I.

$$\vec{\tau} = 5[\text{A}]\vec{A} \times 5\hat{i} \;;\; \vec{A} = (0.20)^2[\cos\theta\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{k}]$$

$$\vec{\tau} = 5[\text{A}][0.2]^2[3.464 \times 10^{-2}\hat{i} - 2 \times 10^{-2}\hat{k}][\text{m}^2]$$

$$\vec{\tau} = -0.5\hat{j}[\text{N}\cdot\text{m}] \;\hookleftarrow$$

c) De la definición $\phi = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$; $\phi = \int\int BdS \cos\theta$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

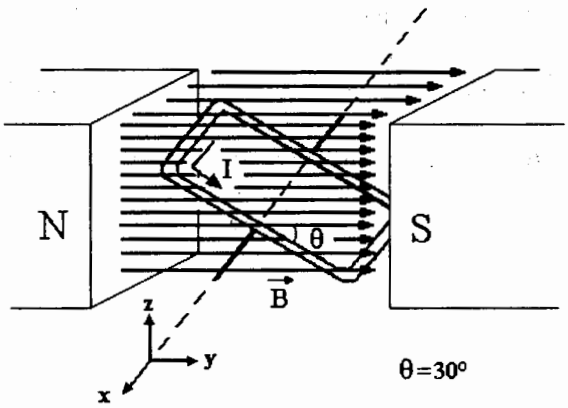
$\phi = B \cos\theta A$; $\phi = 5(0.20)^2 \cos 30° = 0.173$[Wb] , hacia x.

d) Basados en el inciso anterior, podemos concluir que:

$\phi_{min} = 0$ si $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$[rad]

y $\phi_{max} = 5(0.2)^2 = 0.2$[Wb] cuando $\theta = 0$

24. En la figura se muestra una espira rectangular de $5[\text{cm}] \times 10[\text{cm}]$, atada a un eje de giro paralelo a x dentro de un campo magnético cuya magnitud es $5 \times 10^{-2}[\text{T}]$. Si por dicha espira circula una corriente eléctrica $I = 5[\text{A}]$, determine para la posición mostrada:



a) El flujo magnético a través de la superficie enmarcada por la espira.

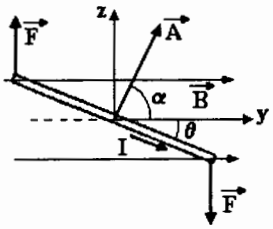
b) El momento que experimenta la espira y su sentido de giro.

c) La posición θ para obtener el momento de valor máximo y el de valor mínimo.

d) Tres formas diferentes para lograr incrementar el par máximo al cuádruplo.

Resolución:

a) De la definición: $\phi = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$; $\phi = \int\int BdS \cos\alpha$, siendo $\alpha \sphericalangle_{\vec{B}}^{d\vec{S}} = 90° - \theta = 60°$



$$\phi = B \cos\alpha \int\int dS = BA \cos\alpha$$

$$\phi = 0.05[\text{T}](5 \times 10 \times 10^{-4})[\text{m}^2] \cos 60° = 125[\mu\text{Wb}]$$

b) $\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$; $\vec{A} = A[\cos 60° \hat{j} + \text{sen}60° \hat{k}] = A[0.5\hat{j} + 0.866\hat{k}][\text{m}^2]$

$$\vec{\tau} = 5[\text{A}]50 \times 10^{-4}[\text{m}^2] \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{vmatrix} [\text{T}]$$

$\vec{\tau} = 250\ 10^{-4}[\hat{i}(-0.05)0.866 - \hat{j}(0) + \hat{k}(0)][\text{N} \cdot \text{m}]$; $\vec{\tau} = -1.0825 \times 10^{-3}\hat{i}\,[\text{N} \cdot \text{m}]$ y el sentido de giro es ↩

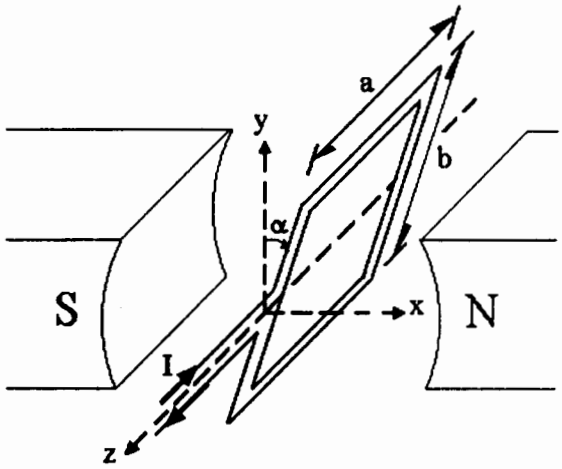
c) Sabemos que $\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}$ y $|\vec{\tau}| = NI|\vec{A}||\vec{B}|\ \text{sen}\alpha$, consideraremos que I, A y B no cambian; de esta forma:

$\tau_{máx}$ ocurre con $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}[\text{rad}]$, entonces $\theta_M = 0$ y $\tau_{mín}$ se presenta cuando $\alpha = 0$ y $\theta_m = 90° = \frac{\pi}{2}[\text{rad}]$

d) Como $\tau_{máx} = IAB\ \text{sen}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, si deseamos $\tau'_{máx} = 4\tau_{máx}$, se puede lograr con

$$\left.\begin{array}{l} i)\ I' = 4I \\ ii)\ A' = 4A \\ iii)\ B' = 4B \end{array}\right\}$$ y el resto sin cambio, o también con una bobina de $N = 4$ espiras, sin cambiar otra cosa.

25. En el motor mostrado en la figura, por su rotor circula una corriente de 1.2[A], éste consta de 120 vueltas de largo a = 20[cm] y ancho b = 10[cm] y está bajo un campo magnético uniforme $\vec{B} = -0.6\hat{i}$ [T]. El plano del rotor forma un ángulo $\alpha = 30°$ con el plano yz. Para la posición mostrada, determine:



a) El vector fuerza magnética sobre el lado ***a*** del rotor.

b) La magnitud del par motor.

c) El sentido de giro.

d) El flujo a través de las espiras.

Resolución:

a) La fuerza magnética se obtiene con $\vec{F}_r = NI\vec{a} \times \vec{B}$, es decir:

$\vec{F}_r = 120(1.2)[\mathrm{A}](-0.2)\hat{k}[\mathrm{m}] \times (-0.6)\hat{i} = 17.28\hat{j}[\mathrm{N}]$, sobre el lado ***a*** superior.

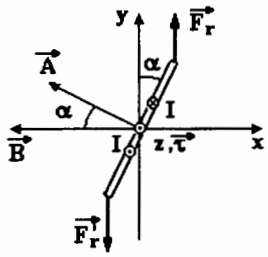
Sobre el lado ***a*** paralelo (inferior) $\vec{F}_r' = -17.28\hat{j}[\mathrm{N}]$, ambas forman un par.

b) El par motor o momento se calcula con $\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} = A(-\cos\alpha\hat{i} + \operatorname{sen}\alpha\hat{j}) = (0.2)(0.1)(-0.866\hat{i} + 0.5\hat{j})[\mathrm{m}^2]$

$\vec{A} = [-0.0173\hat{i} + 0.01\hat{j}][\mathrm{m}^2]$

$$\vec{\tau} = 120(1.2)\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1.73 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0 \end{vmatrix} 10^{-2} = 144[0.6(0.01)]\hat{k}$$



$\vec{\tau} = 0.864\hat{k}[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$

c) El sentido de giro se determina observando el efecto del par de fuerzas $\vec{F}_r$ y $\vec{F}_r'$; el rotor gira en sentido antihorario: ↻.

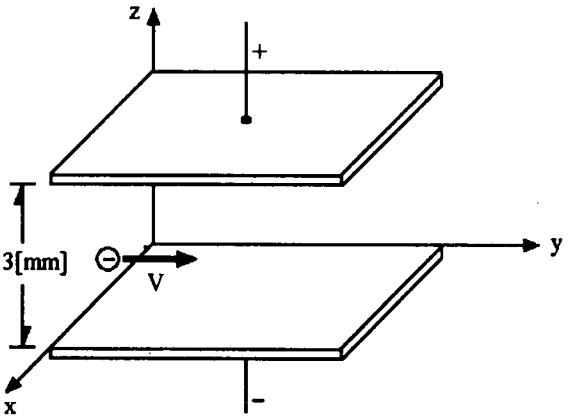
d) El flujo se encuentra con la definición: $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$

$\phi = \int\int BdS\cos\alpha$; $\phi = B\cos\alpha\int\int dS$; $\phi = BA\cos\alpha$

$\phi = (0.6)[\mathrm{T}](0.2)(0.1)[\mathrm{m}^2]\cos 30° = 0.0104[\mathrm{Wb}]$, hacia la izquierda.

Problemas propuestos

1. La figura representa dos placas planas, paralelas, muy grandes, con una diferencia de potencial de 15 [V] y 3 [mm] de separación entre ellas, en medio de las cuales existe un campo magnético $\vec{B}$ uniforme, que tiene la dirección del eje x. Si se lanza un electrón entre las placas con velocidad $\vec{V} = 2 \times 10^4 \hat{j}$ [m/s], obtenga:



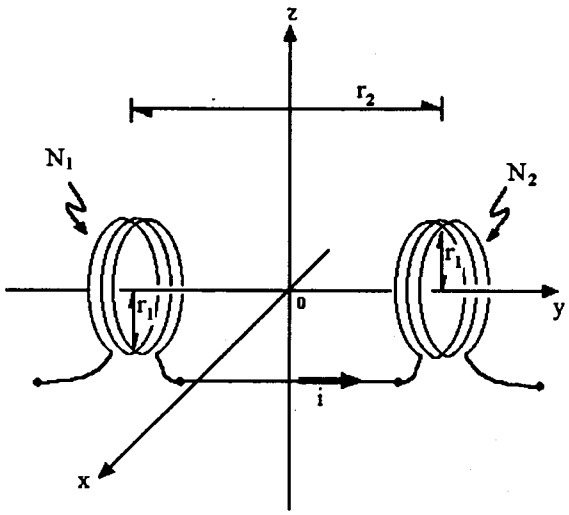
a) El campo eléctrico entre las placas.

b) La fuerza magnética que le permitiría al electrón pasar sin desviación entre las placas.

c) El campo magnético capaz de originar la fuerza del inciso *b*.

d) Si se lanzara una partícula α con la misma velocidad del electrón, ¿cuál debería ser $\vec{B}$ para que dicha partícula pase sin desviación?

2. Un par de bobinas circulares se colocan paralelas y se conectan en serie. La corriente aplicada es 3[A], si $r_1 = r_2 = 15$[cm] $= r$ y $N_1 = N_2 = 300$ vueltas $= N$, determine:



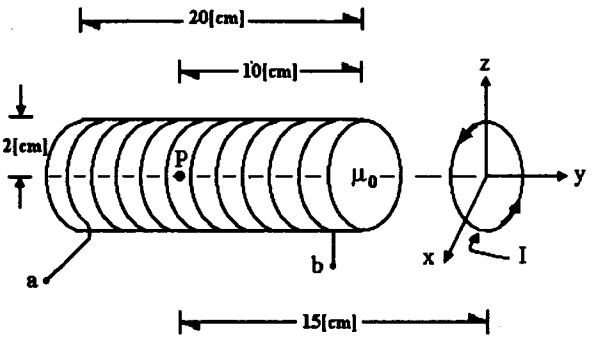
a) El modelo matemático para calcular la magnitud de campo magnético en el centro del arreglo, el origen.

b) El vector de campo magnético en el origen, si las bobinas (de Helmholtz) se encuentran en aire.

c) El vector fuerza que actuaría sobre un electrón que pasara por el origen con una velocidad $\vec{V} = 3 \times 10^4 \hat{j}$ [m/s].

d) La corriente i necesaria para producir en el origen y su entorno, un campo $\vec{B} = 40\hat{j}$ [mT], considere los datos de N y r dados en el enunciado.

3. La figura muestra un anillo circular situado sobre el plano xz, con centro en el origen, radio $r = 2$[cm] e $I = 1$[A], y un solenoide de N = 5000 vueltas coaxial con el eje y. Determine:



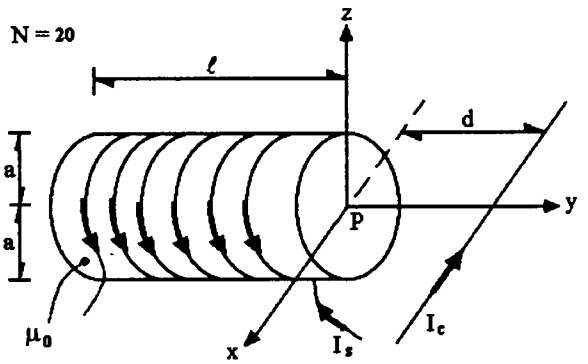
a) El sentido y magnitud de la corriente en el solenoide I_s que anule el campo magnético producido por el anillo circular en el punto P, situado sobre el eje del solenoide y en su parte media.

b) La fuerza magnética sobre la carga $q = 3.2 \times 10^{-19}$[C] con una velocidad $\vec{V} = 10^6 \hat{k}$[m/s] al pasar por el origen. Considere únicamente el anillo circular.

c) Si el anillo pudiera desplazarse libremente y en el solenoide circulara la corriente del inciso *a*, ¿sería atraído o rechazado por el solenoide?

d) El campo magnético total en el origen si $I = 1$[A] e I_s es 50 [mA], entrando por la terminal b.

4. Para el solenoide coaxial con eje y, de longitud $\ell = 30$[cm], radio $a = 2$[cm], $N = 20$ vueltas, núcleo de aire y corriente eléctrica $I_s = 5$[A] y el conductor recto (de longitud muy grande) contenido en el plano xy, paralelo al eje x, situado a $d = 4$[cm] de éste y con corriente eléctrica $I_c = 50$[A], calcule:



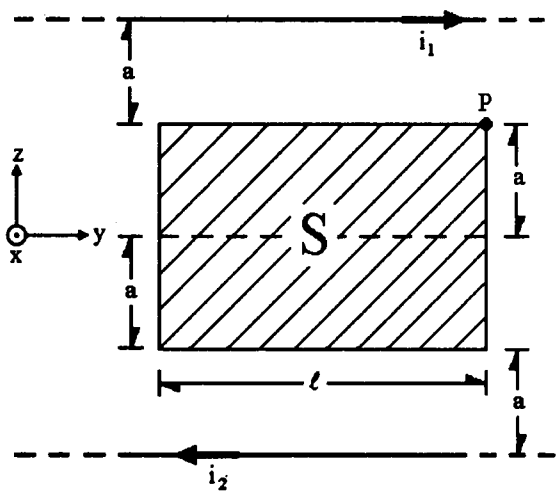
a) El campo magnético en el punto P, producido por el solenoide.

b) El campo magnético en el punto P, producido por el conductor recto y largo.

c) El campo magnético total en el punto P.

d) La fuerza de origen magnético que actuaría sobre un electrón que al pasar por el punto P llevara una velocidad $\vec{V}_e = (3\hat{j} - 4\hat{k})10^6$[m/s].

5. Para el par de conductores rectos y muy largos, mostrados en la figura, se sabe que $a = 5$[cm], $\ell = 30$[cm] y que el flujo magnético total en la superficie S es 9.8875 [μWb] entrando al plano de la figura. Calcule:



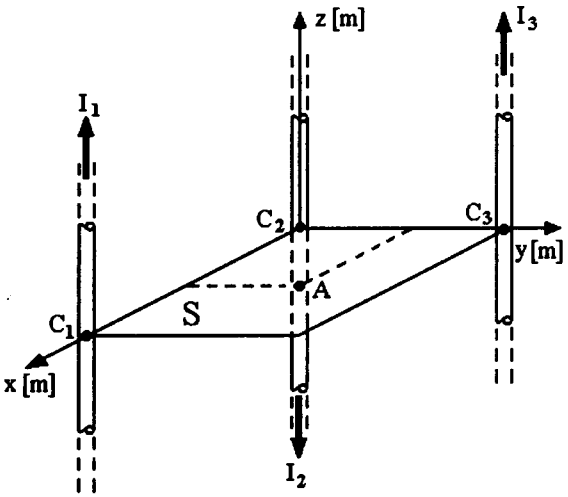
a) El valor de la corriente i_2 si i_1 = 50[A].

b) El vector de inducción magnética en el punto P, suponiendo que i_2= 60[A].

c) La fuerza que experimentan 5[m] del conductor 1, debido al conductor 2, si i_2 = 60[A].

d) La fuerza de origen magnético que experimentaría un electrón que tuviera una velocidad $\vec{V} = 2 \times 10^6 \hat{k}$ [m/s] al pasar por P, si i_2 = 60[A].

6. Se tienen tres conductores rectos, largos y paralelos con corrientes: $I_1 = 2$, $I_2 = 3$, $I_3 = 2$, en [A], y las coordenadas de los puntos $A(1,1,0)$, $C_1(2,0,0)$, $C_2(0,0,0)$ y $C_3(0,2,0)$ en [m], como lo indica la figura. Con base en ello, determine:



a) El campo magnético en el punto A.

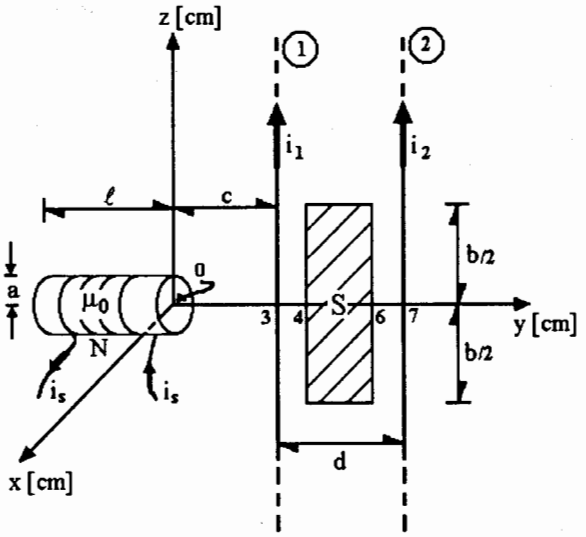
b) La fuerza magnética que experimentaría un electrón si pasara por A con una velocidad $\vec{V} = 10^7 \hat{k}$ [m/s].

c) La fuerza magnética que experimenta cada unidad de longitud del conductor 2.

d) El flujo magnético en la superficie S.

7. En la figura se muestran los conductores rectos muy largos 1 y 2 y la superficie S que están contenidos en el plano yz; el eje del solenoide coincide con la parte negativa del eje y y además se sabe que:

$a = 2$ [cm]	$c = 3$ [cm]	$i_s = 2$ [A]	$N = 120$
$b = 6$ [cm]	$d = 4$ [cm]	$i_1 = 60$ [A]	$\ell = 30$ [cm]
		$i_2 = 70$ [A]	$\mu_{aire} \doteq \mu_0$



Determine:

a) El campo magnético en el origen $\left(\vec{B}_0\right)$ debido al solenoide y conductores rectos.

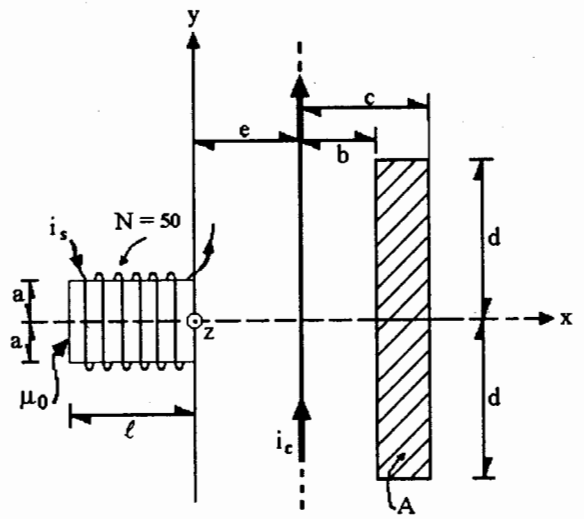
b) La fuerza de origen magnético que experimentan 8 [m] del conductor 2, debida a la corriente del conductor 1.

c) El flujo magnético a través de la superficie S, debido a cada conductor por separado.

d) La fuerza de origen magnético que experimentaría un electrón que pasara por 0, con $\vec{V}_e = \left(8\hat{i} + 2\hat{j}\right)10^6$ [m/s].

8. En la figura se muestra un solenoide coaxial con el eje x, uno de cuyos extremos coincide con el origen del sistema de coordenadas; además se representa un conductor recto muy largo, paralelo al eje y y contenido en el plano xy, de igual manera que el área rectangular A. También se sabe que:

$a = 0.5$ [cm]	$c = 3$ [cm]	$e = 4$ [cm]	$i_s = 2$ [A]
$b = 2$ [cm]	$d = 3$ [cm]	$\ell = 6$ [cm]	$i_c = 200$ [A]



Determine:

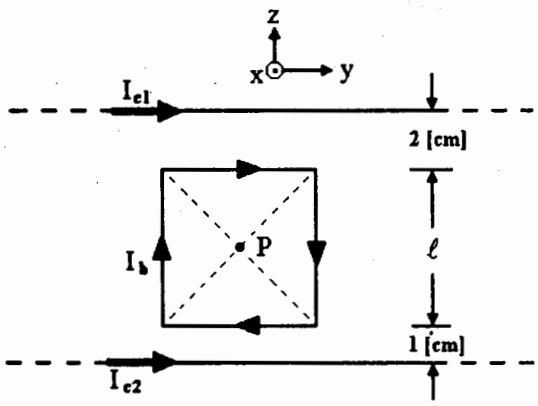
a) El campo magnético total en el origen $0(0,0,0)$, $\vec{B}_0$.

b) El flujo magnético a través del área A.

c) La fuerza de origen magnético que actuaría sobre una partícula $\alpha\left(q_\alpha = 3.2 \times 10^{-19}\,[\mathrm{C}]\right)$, si ésta tuviera en el origen una velocidad $\vec{V}_\alpha = \left(9\hat{i} + 3\hat{k}\right)10^5$ [m/s].

d) La fuerza de origen magnético sobre 5 [cm] de un conductor muy largo que se colocara sobre el eje y con corriente de 100 [A] y en el mismo sentido que el primer conductor; no considere el efecto del solenoide.

9. Una bobina cuadrada de $\ell = 4$[cm] de lado y 20 vueltas, se encuentra en el plano *yz* junto con dos conductores rectos, largos y paralelos, como se muestra en la figura. Con base en ello, determine:



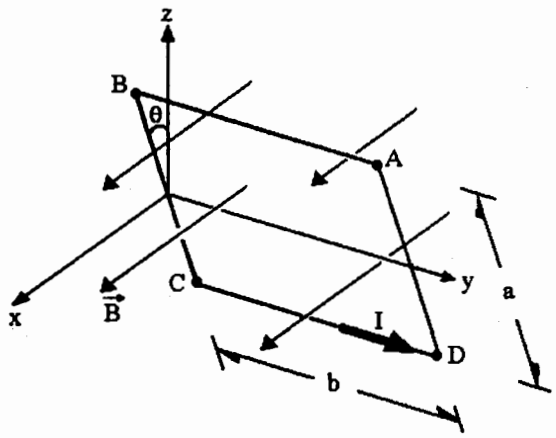
a) El campo magnético en el punto *P* cuando $I_{c1} = I_{c2} = 0$ e $I_b = 200$[mA].

b) El campo magnético en el punto *P* si $I_{c1} = 20$[A], $I_{c2} = 40$[A] e $I_b = 0.2$[A].

c) El flujo magnético a través de la bobina, si $I_{c1} = 20$[A], $I_{c2} = 40$[A] e $I_b = 0$,

d) La fuerza sobre la bobina cuando $I_b = 0.1$[A], $I_{c1} = 0$, e $I_{c2} = 40$[A].

10. La espira rectangular mostrada en la figura tiene dimensiones: $a = 10$[cm] y $b = 30$[cm], por ella circula una corriente $I = 10$[A] y está en una región de campo magnético $\vec{B} = 5\hat{i}$ [T]. El plano de la espira forma un ángulo $\theta = 60°$ con el plano *yz*. Determine:



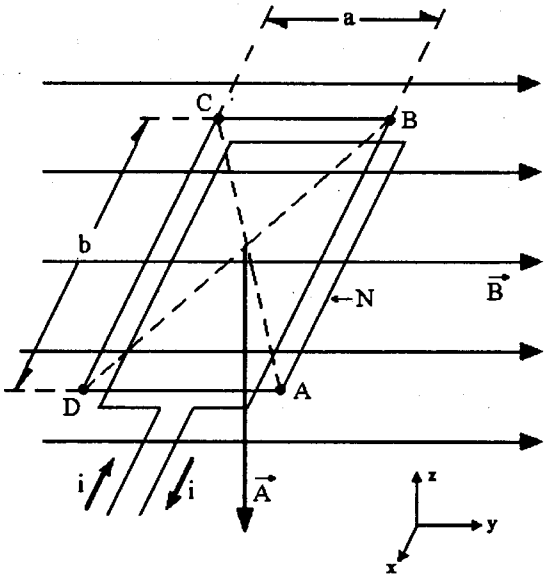
a) La fuerza magnética sobre el lado *AD* de la espira.

b) El flujo magnético a través de la espira.

c) El par magnético que actúa sobre la espira.

d) El ángulo θ para el cual el par magnético es igual a cero.

11. En la figura se muestra una bobina rectangular de $N = 50$ espiras, cada una de ancho $a = 5$[cm] y largo $b = 10$[cm], hechas de alambre de cobre AWG No. 35 (diámetro nominal = 0.142 [mm]); el número de portadores de carga libres (electrones) del cobre es 8.38×10^{22} en cada cm^3. La corriente que circula en la bobina es 5 [A] y la magnitud del campo magnético es $B = 0.005$[T]. Calcule:



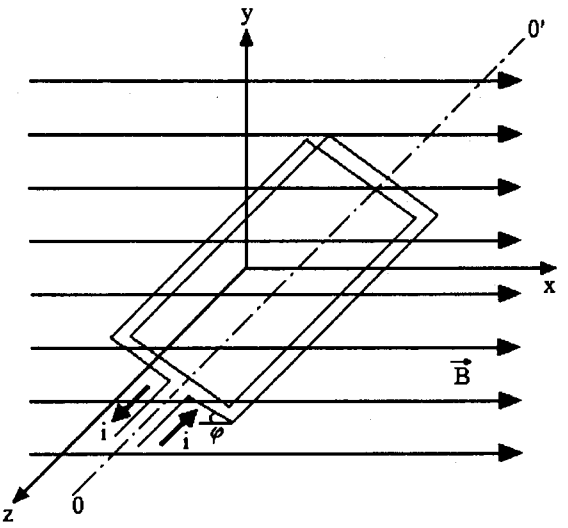
a) La fuerza de origen magnético que actúa sobre un electrón que se mueve del vértice A al B de una de las espiras.

b) El flujo magnético que cruza el área de una espira si ésta gira $\pi/6$[rad], en sentido antihorario, con respecto a la posición de la figura.

c) La fuerza de origen magnético que actúa sobre el lado DC de la bobina.

d) El momento máximo sobre la bobina y el valor del ángulo α entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, de este caso.

12. En la figura se muestran dos espiras de las $N = 20$ que forman la bobina rectangular de 20[cm^2] de área, que se encuentra dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B} = 2\hat{x}$[T]. La bobina está sujeta al eje 00' y su plano forma un ángulo $\varphi = (\pi/3)$[rad] con el plano xz; por ella circula la corriente $i = 10$[A]. Determine:



a) La ubicación de los vectores $\vec{A}$ (área de la bobina) y $\vec{\tau}$ (momento de torsión) y el sentido de giro de la bobina, de acuerdo con la figura.

b) El vector momento de torsión $\vec{\tau}$ en la posición mostrada, y el $\tau_{máx}$.

c) El valor del ángulo α, entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para el cual el par sobre la bobina es máximo.

d) ¿De qué manera(s) se puede conseguir un momento $\vec{\tau}_{máx}$ sobre la bobina que sea 5 veces el calculado en el inciso b?

Respuestas de los problemas propuestos

1. *a)* $\vec{E} = -5\hat{k}$[kV/m]
   b) $\vec{F}m = -8 \times 10^{-16}\hat{k}$[N]
   c) $\vec{B} = -0.25\hat{i}$[T]
   d) $\vec{B} = -0.25\hat{i}$[T]

2. *a)* $B_0 = \mu_0 Ni/[(5/4)^{3/2}r]$
   b) $\vec{B}_0 = -5.395\hat{j}$[mT]
   c) $\vec{F} = \vec{0}$[N]
   d) $i = -22.243$[A]

3. *a)* $I_s = 2.309[\mu A]$ y entrando por *a*
   b) $\vec{F}m = -1.005 \times 10^{-17}\hat{i}$[N]
   c) Se rechazan mutuamente
   d) $\vec{B}_0 = 85.07\hat{j}[\mu T]$

4. *a)* $\vec{B}_{Ps} = 2.0944 \times 10^{-4}\hat{j}$[T]
   b) $\vec{B}_{Pc} = 2.5 \times 10^{-4}\hat{k}$[T]
   c) $\vec{B}_P = (2.0944\hat{j} + 2.5\hat{k})10^{-4}$[T]
   d) $\vec{F}m = -2.54 \times 10^{-16}\hat{i}$[N]

5. *a)* $i_2 = 100$[A]
   b) $\vec{B}_P = -280\hat{i}[\mu T]$
   c) $\vec{F}_{12} = 0.015\hat{k}$[N]
   d) $\vec{F}m = 8.96 \times 10^{-17}\hat{j}$[N]

6. *a)* $\vec{B}_A = 0.3(\hat{i} - \hat{j})[\mu T]$
   b) $\vec{F}e = -4.8 \times 10^{-19}(\hat{i} + \hat{j})$[N]
   c) $\vec{F}_2 = -6 \times 10^{-7}(\hat{i} + \hat{j})$[N]
   d) $\phi_s = 0$[Wb]

7. *a)* $\vec{B}_0 = (600\hat{i} + 502.65\hat{j})[\mu T]$
   b) $\vec{F}_{21} = -0.168\hat{j}$[N]
   c) $\phi_{ss} = 0$, $\phi_{s1} = 0.791[\mu Wb]$, hacia $-x$
   $\phi_{s2} = 0.923[\mu Wb]$, hacia $+x$
   d) $\vec{F}e = -4.514 \times 10^{-16}\hat{k}$[N]

8. *a)* $\vec{B}_0 = (1.047\hat{i} + \hat{k})$[mT]
   b) $\phi_A = 973.12$[nWb]
   c) $\vec{F}_\alpha = -1.875 \times 10^{-16}\hat{j}$[N]
   d) $\vec{F}_{21} = 0.5\hat{i}$[N]

9. *a)* $\vec{B}_{Pb} = -113.137\hat{i}[\mu T]$
   b) $B_P = 53.529\hat{i}[\mu T]$
   c) $\phi = 0.339[\mu Wb]$, sale de la figura
   d) $\vec{F}_{bob} = 51.2\hat{k}[\mu N]$

10. *a)* $\vec{F}_{AD} = 2.5\hat{j}$[N]
    b) $\phi_{esp} = 75$[mWb] hacia $+x$
    c) $\vec{\tau}_m = -1.3\hat{j}$[N · m]
    d) $\theta = 0$ y $\Theta = \pi$[rad]

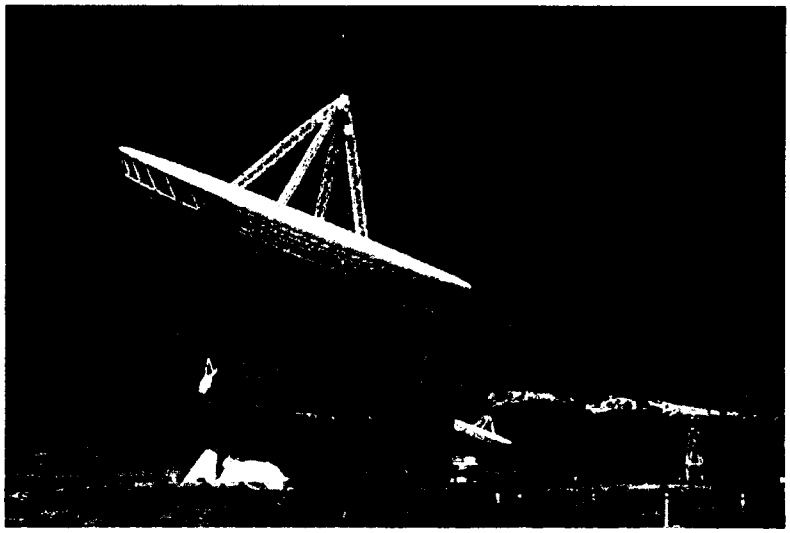
11. *a)* $\vec{F}e = 1.884 \times 10^{-23}\hat{k}$[N]
    b) $\phi_b = 12.5[\mu Wb]$, a la derecha
    c) $\vec{F}_{DC} = -0.125\hat{k}$[N]
    d) $\vec{\tau}_{máx} = 6.25 \times 10^{-3}\hat{i}$[N · m], con
    $\alpha = (\pi/2)$[rad]

12. *a)* $\vec{A} = (17.32\hat{i} + 10\hat{j})10^{-4}[m^2]$
    $\vec{\tau}$ tiene dirección $(-\hat{k})$, ↻ giro
    b) $\vec{\tau} = -0.4\hat{k}$[N · m], $\vec{\tau}_{máx} = -0.8\hat{k}$[N · m]
    c) $\alpha = (\pi/2)$[rad] = 90°
    d) Para que $\vec{\tau}'_{máx} = 5\,\vec{\tau}_{máx}$:
    $i' = 5i = 50$[A]
    $\vec{B}' = 5\vec{B} = 10\hat{i}$[T]
    $N_b' = 5N_b = 100$ vueltas
    $A' = 5A = 1 \times 10^{-2}[m^2]$
    cambiando una sola variable a la vez.

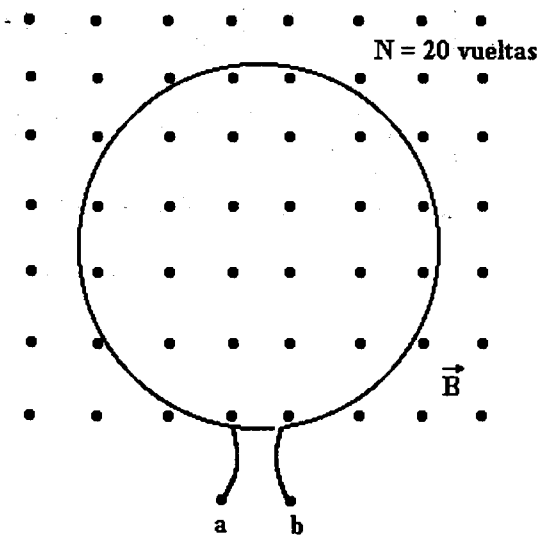
TEMA 5

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Problemas resueltos



1. Una bobina circular está ubicada perpendicular a una región donde existen líneas de flujo magnético que responde a la siguiente ecuación: $\phi = (0.10t^2 + 20)$[Wb], en la cual t está en segundos. Con base en ello y en la figura, determine:



a) El flujo magnético y su rapidez de variación en $t = 5$[s].

b) La diferencia de potencial inducida V_{ba} en $t = 5$[s] ¿cuál es el punto de potencial eléctrico mayor?

c) La corriente inducida y su sentido si se conectaran los puntos a y b con un resistor $R = 4[\Omega]$, el embobinado tiene resistencia $r_b = 1[\Omega]$.

d) La energía en forma de calor que disipa la bobina en los primeros diez segundos.

Resolución:

a) En el instante $t_1 = 5$[s]:

$$\phi_1 = 0.1(5)^2 + 20 = 22.5[\text{Wb}] \text{ y } \frac{d\phi}{dt} = 0.1(2)t\left[\frac{\text{Wb}}{\text{s}}\right] \quad \therefore \frac{d\phi_1}{dt} = 0.2(5) = 1\left[\frac{\text{Wb}}{\text{s}}\right]$$

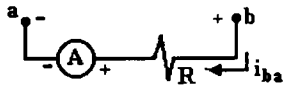
b) Para encontrar V_{ba} emplearemos la ley de Faraday para determinar su magnitud y el Principio de Lenz para la polaridad de esta diferencia de potencial:

$$|V_{ba}| = \left|-N_b\frac{d\phi}{dt}\right| \;;\; |V_{ba}|_{t\,=\,5[s]} = |-20(0.2t)|_{t\,=\,5[s]} = |-4t|_{t\,=\,5[s]} = 20[\text{V}]$$

Ahora, como el $\phi\uparrow$ (aumenta), la corriente inducida debe producir flujo magnético entrando al área circular para oponerse a la $(d\phi/dt)$; la corriente, de existir circuito cerrado, circularía saliendo del punto b y entrando por la terminal a $\therefore$ $V_b > V_a$; $V_{ba} > 0$ y $V_{ba} = 20$[V]

c) Con la ley de voltajes de Kirchhoff se establece: $V_{ba} = Ri + r_b i$

y al despejar: $i_{ba} = \dfrac{V_{ba}}{R + r_b} = \dfrac{20[\text{V}]}{(4 + 1)[\Omega]} = 4[\text{A}]$



d) Sabemos que la potencia P se define como $P = \dfrac{dE}{dt}$; $dE = Pdt$ y al integrar:

$E = \int Pdt$ y para la bobina $P = r_b i^2$ e $i = \dfrac{V_{ba}}{R_T}$ y $V_{ba} = 4t$, entonces

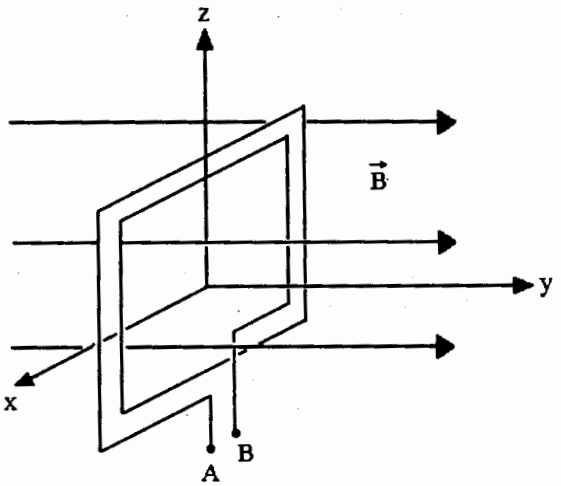
$$E = \int_{t=0}^{t=10} r_b i^2 dt = \int_{t=0}^{t=10} r_b \frac{V_{ba}^2}{R_T^2} dt \; ; \; E = \frac{r_b}{R_T^2} \int_{t=0}^{10} (4t)^2 dt$$

$$E = \frac{r_b}{R_T^2}(16)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{10} \; ; \; E = \frac{16 r_b}{3 R_T^2}\left[10^3 - 0\right] = \frac{16(1)10^3}{3(4+1)^2} = 213.33[J]$$

hagamos una revisión de las unidades de E (energía):

$$[E]_u = \frac{[\Omega]}{[\Omega^2]} \cdot \frac{[V^2]}{[s^2]} \cdot [s^3] = \frac{[V^2]}{[\Omega]} \cdot [s] = [A \cdot V \cdot s] = [W \cdot s] = \left[\frac{J}{s} \cdot s\right] = [J]$$

2. Una bobina cuadrada estática con N = 30 espiras y su plano paralelo al plano xz, tiene un flujo magnético cuya magnitud se describe mediante la función $\phi(t) = 0.002\cos\omega t\,[\mathrm{Wb}]$, en la que $\omega = 2\pi f$ y $f = 50\,[\mathrm{Hz}]$. La ubicación de la bobina con respecto al campo magnético uniforme $\vec{B}$ se describe en la figura; con base en ello determine:



a) El valor absoluto de la diferencia de potencial inducida V_{AB}, para $t = 5\,[\mathrm{ms}]$.

b) El punto A o B que tiene mayor potencial eléctrico en $t = 5\,[\mathrm{ms}]$.

c) La corriente inducida en $t = 5\,[\mathrm{ms}]$ si la bobina tiene resistencia de $4\,[\Omega]$ y cerrara con un conductor entre A y B. Explique y haga una figura.

d) La posición en que habría que colocar la bobina para que V_{AB} sea nula en todo instante.

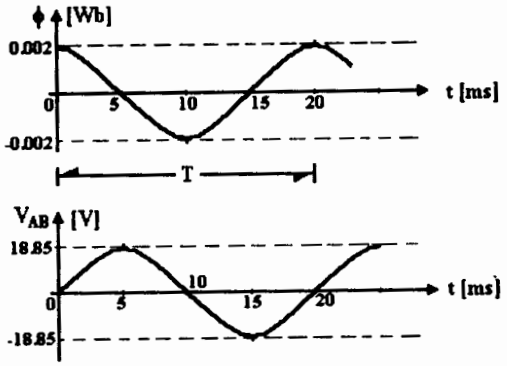
Resolución:

a) De acuerdo con la ley de Faraday $|V_{AB}| = N\left|\dfrac{-d\phi(t)}{dt}\right|$; $|V_{AB}| = 30\left|\dfrac{-d}{dt}(0.002\cos\omega t)\right|$

$|V_{AB}| = 30\left|+(0.002\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t\right|$ y como $\omega = 2\pi f = 2\pi(50) = 100\pi$

$|V_{AB}| = |30(0.002)100\pi\,\mathrm{sen}(100\pi t)|$; $|V_{AB}|_{t\,=\,5[\mathrm{ms}]} = 18.85\,\mathrm{sen}\left[100\pi(5\times10^{-3})\right] = 18.85\,[\mathrm{V}]$

b) El punto de mayor potencial entre A y B, se puede determinar aplicando el Principio de Lenz, pero resulta necesario saber si en el instante $t = 5\,[\mathrm{ms}]$ el flujo magnético está creciendo o disminuyendo, para esto emplearemos las gráficas siguientes.



Observamos que en $t = 5\,[\mathrm{ms}]$, el flujo $\phi\downarrow$ (disminuye), de existir una corriente inducida (en circuito cerrado) ésta produciría un flujo que se opondría a dicha disminución, por lo tanto circularía entrando en B y saliendo en A, por esta razón $V_A > V_B$ y $V_{AB} > 0$ y $V_{AB\,t\,=\,5(\mathrm{ms})} = 18.85\,[\mathrm{V}]$

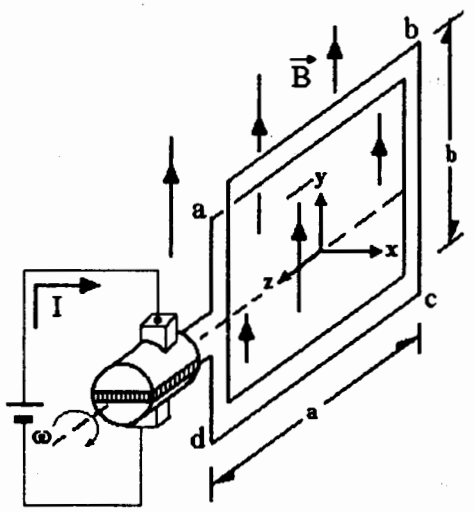
c) Basados en el inciso anterior y con LVK: $V_{AB} - r_b i = 0$; $i = \dfrac{V_{AB}}{r_b}$

$$i = \frac{18.85[\mathrm{V}]}{4[\Omega]} = 4.713[\mathrm{A}]$$

d) Para que V_{AB} fuese nula en todo instante se requeriría que el plano de la bobina estuviera paralelo a las líneas de inducción; es decir con su vector $\vec{A}$ (área) perpendicular a la dirección de $\vec{B}$.

Se destaca que para resolver los incisos anteriores no se requirió el valor del área A y significa que la fuerza electromotriz no es función de ϕ, pero sí de su rapidez de cambio $(d\phi/dt)$.

3. En la figura se muestra la bobina de $N=200$ espiras, rectangulares y paralelas al plano yz, de un motor de corriente directa expuesta a un campo magnético $\vec{B}=0.5\hat{j}\,[\mathrm{T}]$. Cada espira mide de largo $a=5\,[\mathrm{cm}]$ y ancho $b=2\,[\mathrm{cm}]$ y ω representa la rapidez angular del rotor que en este caso es $4\pi\,[\mathrm{rad/s}]$. Si la corriente en la bobina es $I=1\,[\mathrm{A}]$ en la posición mostrada, determine:



a) La fuerza magnética sobre el lado ***ab*** y sobre el ***bc*** de la bobina.

b) El momento de rotación que actúa sobre la bobina.

c) El flujo magnético a través de la bobina en función del tiempo y cuando ésta giró 30° con respecto a la posición mostrada, debido al campo $\vec{B}$ uniforme.

d) El valor de la fem inducida máxima en la bobina.

Resolución:

a) La fuerza sobre el lado *ab* es: $\vec{F}_{ab} = NI\vec{a} \times \vec{B}$; $\vec{F}_{ab} = NIa(-\hat{k}) \times B\hat{j}$

$\vec{F}_{ab} = NIaB(-\hat{k} \times \hat{j})$; $\vec{F}_{ab} = 200(1)5 \times 10^{-2}(0.5)\hat{i} = 5\hat{i}\,[\mathrm{N}]$, sobre el lado *bc*: $\vec{F}_{bc} = NI\vec{b} \times \vec{B}$

$\vec{F}_{bc} = NIb(-\hat{j}) \times B(\hat{j}) = \vec{0}$

b) El momento de rotación en la bobina se evalúa con: $\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}$ en la cual $\vec{A} = ab(-\hat{i})$ de acuerdo con la regla del tornillo de rosca derecha y $\vec{B} = B(\hat{j})$

$\vec{\tau} = NIab(-\hat{i}) \times B(\hat{j})$; $\vec{\tau} = 200(1)(0.05)(0.02)0.5(-\hat{k})$ es decir $\vec{\tau} = -0.1\hat{k}\,[\mathrm{N\cdot m}]$

c) De la definición: $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{s}$; $\phi = \int\int Bds\cos\alpha$, donde $\alpha \sphericalangle_{\vec{B}}^{d\vec{s}}$, $B = cte$

$\phi = B\cos\alpha \int\int dS$; $\phi = B(\cos\alpha)\mathrm{A}$, como $\alpha = \omega t$: $\phi = BA\cos\omega t$; $\alpha = 90° - 30° = 60°$

$\therefore\ \phi = 0.5(0.05)(0.02)\cos 60° = 2.5 \times 10^{-4}\,[\mathrm{Wb}]$

y el flujo concatenado $\lambda = N\phi = 200(2.5 \times 10^{-4}) = 0.05\,[\mathrm{Wb}]$

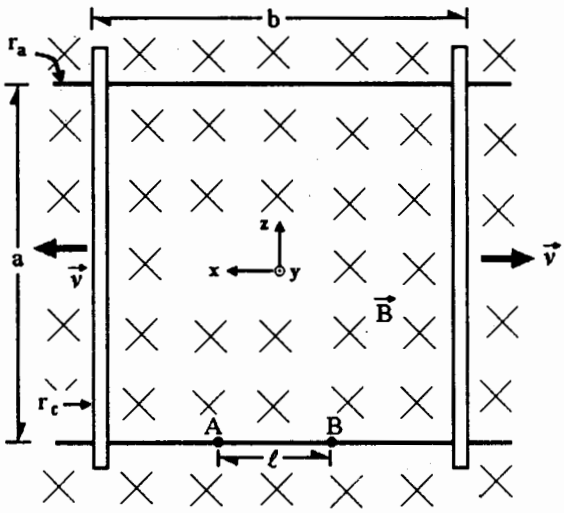
d) De acuerdo con la ley de Faraday: $|\varepsilon| = \left|-\dfrac{d\lambda}{dt}\right| = \left|-N\dfrac{d\phi}{dt}\right|$

$|\varepsilon| = |-N(BA\omega)(-\mathrm{sen}\,\omega t)| = NBA\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$; $\varepsilon_{máx}$ ocurre si $\mathrm{sen}\,\omega t = 1$

$\therefore\ \varepsilon_{máx} = NBA\omega = 200(0.5)(0.05)(0.02)(4\pi) = 1.257\,[\mathrm{V}]$

esta fuerza electromotriz se presenta cuando el vector $\vec{A}$ de la bobina apunta en dirección $(-\hat{i})$, como en la figura, y cuando el vector $\vec{A}$ apunta en dirección $\hat{i}$.

4. En la figura se muestran dos correderas metálicas con resistencia $r_c = 0.1\,[\Omega/\text{m}]$ que parten del origen y se desplazan en direcciones contrarias sobre dos alambres con resistencia $r_a = 0.2\,[\Omega/\text{m}]$ y paralelos al eje x, con rapideces $v = 20\,[\text{m/s}]$ constantes e iguales. En la región existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = -0.5\hat{j}\,[\text{T}]$; para el instante mostrado $a = 12\,[\text{cm}]$, $b = 15\,[\text{cm}]$ y $\ell = 5\,[\text{cm}]$, obtenga:



a) La rapidez de variación del flujo magnético con respecto del tiempo $d\phi/dt$.

b) La fuerza electromotriz inducida en el circuito cerrado formado por las correderas y los alambres.

c) La corriente inducida y su sentido.

d) La diferencia de potencial V_{AB}.

Resolución:

a) Por definición sabemos que $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$; $\phi = \int\int BdS\cos\alpha$, siendo $\alpha \sphericalangle_{\vec{B}}^{d\vec{S}} = 0$

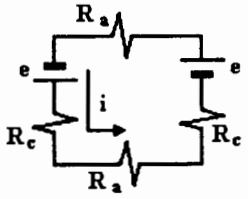
$$\therefore\ \phi = \int\int BdS = \int_0^a\int_0^b Bdxdz = Ba\int_0^b dx = Bab,\ \text{notar que } a = cte \text{ y } b = f(t)$$

de esta forma $\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{d(Bab)}{dt} = Ba\dfrac{db}{dt} = Bav_x$, siendo $v_x = \dfrac{db}{dt} = 2v \therefore \dfrac{d\phi}{dt} = 2Bav\left[\dfrac{\text{Wb}}{\text{s}}\right]$

b) Con la ley de Faraday: $|\varepsilon| = \left|-N\dfrac{d\phi}{dt}\right|$, como $N = 1$, $|\varepsilon| = 2BavN = 2Bav$

$$|\varepsilon| = 2(0.5)(0.12)(20) = 2.4\,[\text{V}]$$

c) De acuerdo con el circuito equivalente siguiente:



$$e = Bav \quad \text{y} \quad \varepsilon = 2e$$

$$R_c = r_c a = 0.1\left[\frac{\Omega}{\text{m}}\right]0.12\,[\text{m}] = 0.012\,[\Omega]$$

$$R_a = r_a b = 0.2\left[\frac{\Omega}{\text{m}}\right]0.15\,[\text{m}] = 0.03\,[\Omega]$$

$$i = \frac{\varepsilon}{2R_c + 2R_a}$$

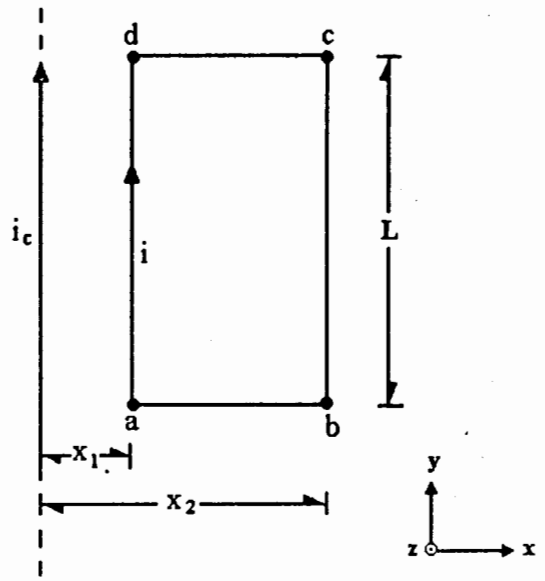
$$i = \frac{2.4\,[\text{V}]}{2(0.012 + 0.03)\,[\Omega]}$$

$$i = 28.57\,[\text{A}]$$

d) La diferencia de potencial V_{AB} la calculamos con la ley de Ohm:

$$V_{AB} = R_{AB}i = r_a(\ell)i\ ;\ V_{AB} = 0.2\left[\frac{\Omega}{\text{m}}\right]0.05\,[\text{m}]28.57\,[\text{A}] = 0.2857\,[\text{V}]$$

5. En la figura se muestran un conductor recto muy largo y una espira rectangular, ambos coplanares al plano *xy*. Si por el conductor recto circula una corriente eléctrica de 100[A] y por la espira una de 20[A], $x_1 = 2$[cm], $x_2 = 10$[cm] y L = 20[cm], calcule:



a) La fuerza de origen magnético en el lado *ab* de la espira, debida al conductor recto muy largo.

b) El flujo magnético debido al conductor recto a través del área encerrada por la espira rectangular.

c) La fem inducida en la espira si por el conductor recto circula una corriente eléctrica $i_c = 100\,\text{sen}\,\omega t$, siendo $\omega = 2\pi f$ y $f = 60$[Hz].

d) El coeficiente de inducción mutua entre la espira y el conductor.

Resolución:

a) A lo largo del lado *ab* de la espira se tiene un campo magnético variable en magnitud pero de dirección $(-\hat{k})$ constante, por esta razón la fuerza F_{ab} se obtendrá por integración de $d\vec{F}_{ab} = i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$; en magnitud

$$dF_{ab} = i\,d\ell\,B\,\text{sen}\theta \;;\; \theta \sphericalangle_{d\vec{\ell}}^{\vec{B}} = \frac{\pi}{2}[\text{rad}] \text{ y } \vec{F}_{ab} = F_{ab}(-\hat{j})$$

$$\text{y } F_{ab} = \int dF_{ab} \;;\; F_{ab} = i\int_{x1}^{x2} \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i_c i}{2\pi}\text{Ln}\frac{x_2}{x_1}\text{, donde } dr = d\ell$$

$$\therefore\ \vec{F}_{ab} = -\left[\frac{4\pi \times 10^{-7}(100)20}{2\pi}\text{Ln}\frac{10}{2}\right]\hat{j} = -0.6438\hat{j}\,[\text{mN}]$$

b) De la definición de flujo magnético: $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$ se obtiene:

$$\phi = \int\int B\,dS\cos\alpha \;;\; \alpha = 0 \;;\; \alpha \sphericalangle_{\vec{B}}^{d\vec{S}} \text{ y } B = f(r) \;\therefore \phi = \int\int B\,dx\,dy = \int_0^L\int_{x1}^{x2}\frac{\mu_0 i_c}{2\pi x}dx\,dy$$

$$\phi_{ec} = \frac{\mu_0 i_c L}{2\pi}\text{Ln}\frac{x_2}{x_1} \;;\; \phi_{ec} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(100)0.2}{2\pi}\text{Ln}\frac{10}{2} = 6.438[\mu\text{Wb}] \text{ entrando a la figura}$$

c) Con ley de Faraday $\varepsilon = -N\dfrac{d\phi}{dt}$; $\varepsilon = -N\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\mu_0 i_c L}{2\pi}\text{Ln}\dfrac{x_2}{x_1}\right]$

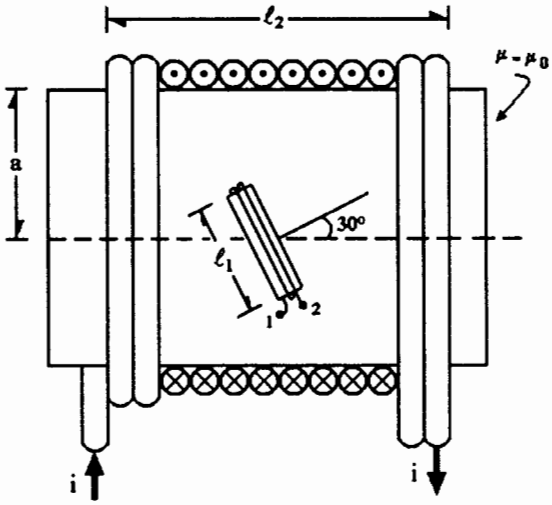
$$\varepsilon = -N\frac{\mu_0 L}{2\pi}\text{Ln}\frac{x_2}{x_1}\frac{d(i_c)}{dt} \;;\; \varepsilon = -N\frac{\mu_0 L}{2\pi}\text{Ln}\frac{x_2}{x_1}\frac{d}{dt}(100\,\text{sen}\,\omega t) = -N\frac{\mu_0 L}{2\pi}\text{Ln}\frac{x_2}{x_1}(100\omega\cos\omega t)$$

$$\varepsilon = -(1)\frac{4\pi \times 10^{-7}(0.2)}{2\pi}\left[\text{Ln}\frac{10}{2}\right]100(2\pi(60))\cos\omega t = 2.4269\cos(120\pi t)[\text{mV}]$$

d) El coeficiente de inducción mutua se obtiene con $M = \dfrac{N\phi_{ec}}{i_c}$

$$M = \frac{N\mu_0 i_c L}{(i_c)2\pi}\text{Ln}\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1)4\pi \times 10^{-7}(0.2)}{2\pi}\text{Ln}\frac{10}{2} = 64.378[\text{nH}]$$

6. En la figura se muestra un solenoide de longitud $\ell_2 = 15$[cm], radio $a = 0.5$[cm] y $N_s = 1000$ espiras, en cuyo interior se colocó una bobina de 50 vueltas con diámetro $\ell_1 = 1$[cm] y con la inclinación mostrada, si la corriente eléctrica en el solenoide es $i = 100 \cos 188.5t$, calcule:



a) La inductancia mutua entre el solenoide y la bobina.

b) La fem inducida en la bobina en función del tiempo.

c) La frecuencia y la frecuencia angular e indique en qué posición de la bobina la fem inducida se anula para todo instante.

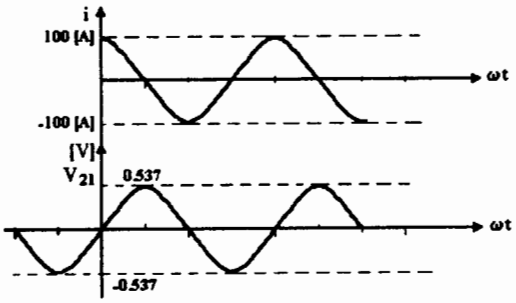
d) El valor instantáneo de la fem inducida, al transcurrir un periodo y medio a partir del valor máximo negativo.

Resolución:

a) M se obtiene con $M = \dfrac{N_b \phi_{bs}}{i_s}$; $M = \dfrac{N_b B_s A_b \cos 30°}{i_s} = \dfrac{N_b \mu_0 N_s i_s A_b \cos 30°}{i_s \ell_2}$

$$M = \frac{50(4\pi \times 10^{-7})10^3 \pi (0.5 \times 10^{-2})^2 \cos 30°}{(0.15)} = 28.491\,[\mu\text{H}]$$

b) De acuerdo con ley de Faraday: $\varepsilon_{21} = -M\dfrac{di_s}{dt} = -M\dfrac{d}{dt}(100 \cos 188.5t)$



$$\varepsilon_{21} = -28.491 \times 10^{-6}(188.5)100(-\text{sen}\,188.5t)$$

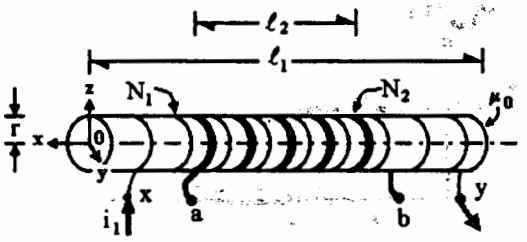
$$\varepsilon_{21} = 0.537\ \text{sen}\,188.5t\,[\text{V}]$$

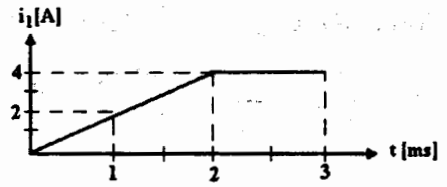
c) La frecuencia angular $\omega = 188.5\left[\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ y como $\omega = 2\pi f$, $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{188.5[\text{rad}]}{2\pi[\text{rad}]s} = 30[\text{Hz}]$

y el periodo $T = \dfrac{1}{f} = 33.33$[ms] y la posición en que la fem inducida se anula, para todo instante, es cuando el plano de la bobina contiene al eje del solenoide.

d) Al transcurrir un lapso de periodo y medio desde el valor mínimo nos lleva a un valor máximo, de acuerdo con la gráfica del inciso *b* $\therefore\ \varepsilon_{máx} = 0.537$[V] en el cual $\text{sen}\,188.5t = 1$.

7. Se tienen dos solenoides superpuestos, como se muestra en la figura, ambos de espiras apretadas sobre un núcleo de aire y de resistencia despreciable. Se sabe que la corriente en el embobinado 1 varía en la forma mostrada en la figura y que $\ell_1 = 30[\text{cm}]$, $\ell_2 = 20[\text{cm}]$, $N_1 = 2000$, $N_2 = 800$ espiras y $r = 2[\text{cm}]$; calcule:





a) La autoinductancia de cada solenoide.

b) La diferencia de potencial V_{xy} en el instante $t = 1.0[\text{ms}]$.

c) La diferencia de potencial V_{ab} en el intervalo $0 \le t \le 3[\text{ms}]$.

d) La inductancia mutua y el coeficiente de acoplamiento entre los solenoides.

Resolución:

a) La autoinductancia se calcula con $L = \dfrac{N\phi}{i}$; $L_1 = \dfrac{N_1\phi_{11}}{i_1} = \dfrac{N_1 B_1 A_1}{i_1}$

$$L_1 = \frac{N_1\mu_0 N_1 i_1 A_1}{i_1 \ell_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2000)^2\pi(0.02)^2}{0.3} = 21.055[\text{mH}]$$

$$\text{y } L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A_2}{\ell_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(800)^2\pi(0.02)^2}{0.2} = 5.053[\text{mH}]$$

b) Con la ley de Faraday, la fuerza electromotriz autoinducida es:

$$|V_{xy}|_{t = 1[\text{ms}]} = \left|-L_1\frac{di_1}{dt}\right| = \left|-21.055 \times 10^{-3}[\text{H}]\frac{4[\text{A}]}{2 \times 10^{-3}[\text{s}]}\right| = 42.11[\text{V}]$$

y de acuerdo con el Principio de Lenz: $V_x > V_y$, $V_{xy} = 42.11[\text{V}]$

c) De acuerdo con la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida es:

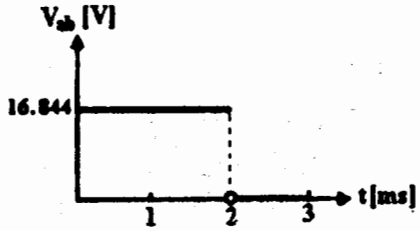
$|V_{ab}| = \left|-M\dfrac{di_1}{dt}\right|$, requerimos el valor de M; $M = \dfrac{N_2\phi_{21}}{i_1} = \dfrac{N_2\phi_{11}}{i_1} = \dfrac{N_2 A_1 \mu_0 N_1 i_1}{i_1 \ell_1}$

$$\therefore\ M = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2000)(800)\pi(0.02)^2}{0.3} = 8.422[\text{mH}], \text{ de esta forma:}$$

$$|V_{ab}| = \left|-8.422 \times 10^{-3}[\text{H}]\frac{4[\text{A}]}{2 \times 10^{-3}[\text{s}]}\right| = 16.844[\text{V}] \text{ para } 0 \le t \le 2[\text{ms}]$$

y por el Principio de Lenz $V_a > V_b$; $V_{ab} = 16.844[\text{V}]$

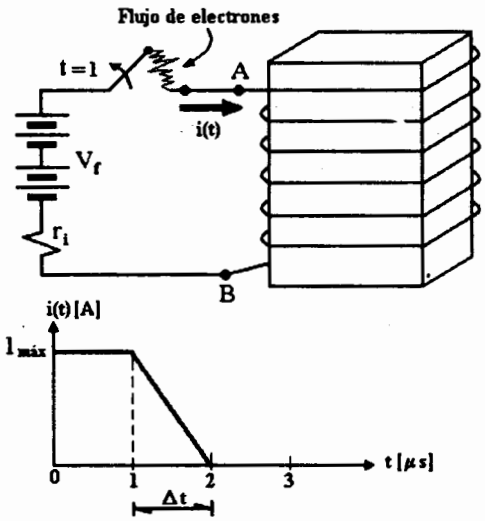
y para $2 < t \le 3[\text{ms}]$: $\dfrac{di_1}{dt} = 0 \therefore V_{ab} = 0$



d) Del inciso anterior M = 8.422[mH] y el coeficiente de acoplamiento se obtiene con $M = k\sqrt{L_1 L_2}$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{8.422 \times 10^{-3}}{\sqrt{21.055(5.053)}\ 10^{-3}} = 0.8165$$

8. En el instante $t = 1\,[\mu s]$, el interruptor del circuito mostrado se abre luego de haber permanecido cerrado durante mucho tiempo, produciéndose a partir de ese momento la variación en la corriente que se presenta en la gráfica. Si la fuente de fuerza electromotriz $V_f = 12\,[V]$, su resistencia interna es $r_i = 1\,[\Omega]$, la autoinductancia del solenoide $L = 1\,[H]$ y de resistencia despreciable, determine:



a) El valor máximo de la corriente.

b) El voltaje autoinducido V_{AB} durante el lapso $1\,[\mu s] \leq t \leq 2\,[\mu s]$.

c) La energía máxima almacenada en el inductor antes de la apertura del interruptor.

d) La corriente máxima I_M que circularía por una persona con $100\,[k\Omega]$ de resistencia entre sus manos, si tocase los puntos A y B en el lapso Δt.

Resolución:

a) El circuito de la figura se puede modelar como un circuito *RL* serie; en éste, la corriente $i(t)$ depende del tiempo que ha transcurrido desde que el interruptor se cerró según la ecuación:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \text{ en la cual}$$

$\varepsilon = V_f$, $R = r_i + r_s$, como $r_s \approx 0$, $R = r_i$ y $\tau_L = \dfrac{L}{R}$ conocida como la constante de tiempo del circuito.

En el enunciado se menciona que el interruptor ha permanecido cerrado durante mucho tiempo ($t \to \infty$), por lo tanto $i(t) = \dfrac{\varepsilon}{R}$; $i(t) = \dfrac{V_f}{r_i}[A]$; $i(t) = \dfrac{12[V]}{1[\Omega]} = 12[A]$ que es el valor máximo de la corriente.

b) En el intervalo $1[\mu s] \leq t \leq 2[\mu s]$ la corriente $i(t)$ disminuye y V_{AB} será, de acuerdo con la ley de Faraday:

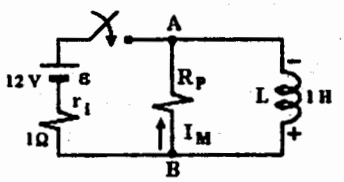
$$|V_{AB}| = \left|-L\frac{di}{dt}\right| = \left|-1\left(\frac{-12}{1 \times 10^{-6}}\right)\right| = 12\,[MV]$$

y por el Principio de Lenz, como $i(t)\downarrow$, $V_B > V_A \therefore V_{AB} = -12\,[MV]$

c) Como la energía almacenada en el inductor es $U = \frac{1}{2}LI^2$, la energía máxima se tiene cuando I alcanza su valor más alto:

$$U_{máx} = \frac{1}{2}LI_{máx}^2 \; ; \; U_{máx} = 0.5(1)(12)^2 = 72\,[J]$$

d) El planteamiento de este inciso se puede representar con el circuito:



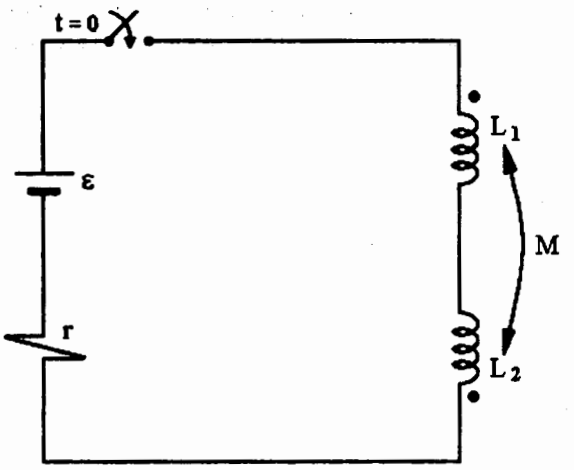
En el lapso Δt $(1[\mu s] \leq t \leq 2[\mu s])$; V_{BA} = 12[MV], por lo tanto, con la ley de Ohm:

$$I_M = \frac{V_{BA}}{R_p}$$

$$I_M = \frac{12[MV]}{100[k\Omega]} = 120[A]$$

El valor de I_M excede con muchísimo la corriente eléctrica que el ser humano puede tolerar sin daños en su organismo.

9. Dos solenoides de sección circular se conectan en serie, como se muestra en la figura, a una fuente de 24[V] con 1[Ω] de resistencia interna, el coeficiente de acoplamiento es $k = 0.2$ y respecto a los solenoides se tiene:



espiras	$N_1 = 2000$	$N_2 = 1000$
longitud	$\ell_1 = 12$[cm]	$\ell_2 = 10$[cm]
radio espira	$a_1 = 1$[cm]	$a_2 = 0.5$[cm]
resistencia	$r_1 = 6$[Ω]	$r_2 = 3$[Ω]

Calcule:

a) Las autoinductancias L_1 y L_2 de los solenoides.

b) El inductor equivalente a la conexión en serie.

c) El circuito *RL* equivalente.

d) La constante de tiempo del circuito *RL*.

Resolución:

a) En cada uno de los inductores comparamos su longitud ℓ con el radio a de sus espiras; en ambos se encuentra que $\ell \gg a$; $(\ell > 10a)$, por lo tanto su autoinductancia se puede calcular con: $L = \dfrac{\mu N^2 A}{\ell}$

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A_1}{\ell_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2000)^2\pi(0.01)^2}{0.12} = 13.159 \times 10^{-3}[\text{H}]$$

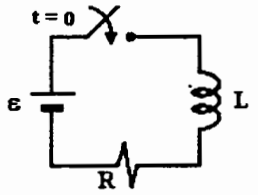
$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A_2}{L_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(1000)^2\pi(0.005)^2}{0.10} = 0.987 \times 10^{-3}[\text{H}]$$

b) El inductor equivalente a la conexión serie es: $L = L_1 + L_2 - 2M$ y

$M = k\sqrt{L_1 L_2}$; $M = 0.2\sqrt{13.159(0.987)} = 0.7207 \times 10^{-3}$[H], por lo tanto:

$L = 13.159 + 0.987 - 2(0.7207) = 12.7046$[mH]

c) El circuito equivalente es:



en el cual:

$\varepsilon = 24$[V]

$L = 12.7046$[mH] y

$R = r_1 + r_2 + r$; $R = (6 + 3 + 1)[\Omega] = 10[\Omega]$

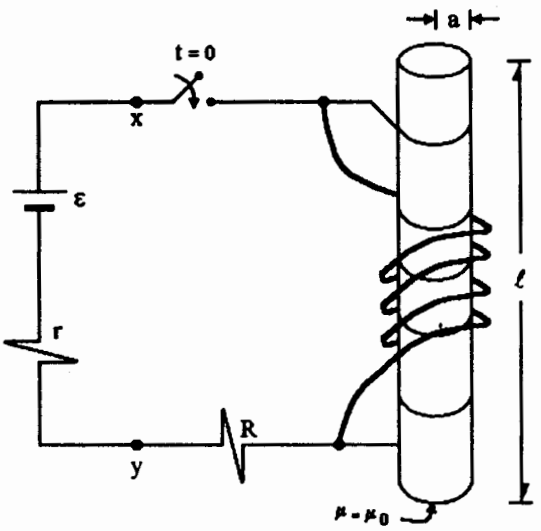
d) Después de cerrar el interruptor en el circuito anterior, la corriente que circularía sería $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$, donde τ_L se conoce como constante de tiempo (inductiva) del circuito y ésta vale:

$$\tau_L = \frac{L}{R}\ ;\ \tau_L = \frac{12.7046 \times 10^{-3}[\mathrm{H}]}{10[\Omega]} = 1.2705 \times 10^{-3}[\mathrm{s}] = 1.2705[\mathrm{ms}]$$

verifiquemos las unidades:

$$[\tau_L]_u = \frac{[\mathrm{H}]}{[\Omega]} = \frac{[\mathrm{Wb}\cdot \mathrm{A}]}{[\mathrm{A}\cdot \mathrm{V}]} = \frac{[\mathrm{Wb}]}{[\mathrm{V}]} = \frac{[\mathrm{V}\cdot \mathrm{s}]}{[\mathrm{V}]} = [\mathrm{s}]$$

10. El circuito de la figura se formó con un solenoide de 2000 espiras de radio a = 1[cm] y $\ell = 15$[cm] de longitud, sobre el cual se colocó una bobina de 500 vueltas e inductancia propia $L_b = 4$[mH]; el núcleo es de aire, $R = 3[\Omega]$ y la fuente de fem $\varepsilon = 12$[V] con resistencia interna $r = 1[\Omega]$. Calcule:



a) La inductancia equivalente a los dos embobinados.

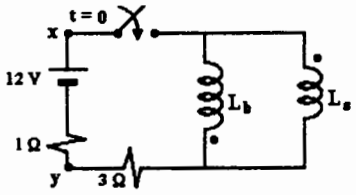
b) La corriente i para $t = 2.5\tau_L$.

c) La energía máxima del campo magnético que puede ser almacenada en el circuito.

d) La diferencia de potencial V_{xy} en $t = 10\tau_L$, si cuando ha transcurrido un tiempo $t = 2.5\tau_L$ se abre el interruptor.

Resolución:

a) La representación simbólica de la conexión de inductores es:



Como el solenoide es largo ($\ell \gg a$): $L_s = \dfrac{\mu_0 N_s^2 A}{\ell}$

$L_s = \dfrac{4\pi \times 10^{-7}(2 \times 10^3)^2 \pi (0.01)^2}{0.15} = 10.53$[mH] y como están superpuestos los embobinados $M \neq 0$ y vale

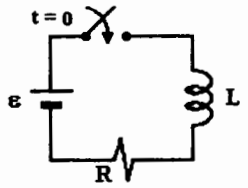
$$M = \frac{N_b \phi_{bs}}{i_s} = \frac{N_b \mu_0 N_s i_s A}{i_s \ell}$$

$$M = \frac{\mu_0 N_s N_b A}{\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2000)(500)\pi(0.01)^2}{0.15} \; ; \; M = 2.63[\text{mH}]$$

Aunque es poco común, se observa que los inductores están conectados en paralelo; aunque en sus núcleos la dirección del campo magnético es opuesta, en el exterior los flujos magnéticos de uno a otro embobinado se "ayudan"; es este caso el inductor equivalente se calcula con

$$L = \frac{L_s L_b - M^2}{L_s + L_b - 2M} \; ; \; L = \frac{(10.53)(4) - (2.63)^2}{10.53 + 4 - 2(2.63)} = 3.798[\text{mH}]$$

b) El circuito equivalente, en su expresión mínima es:



al cerrar el interruptor en este circuito, la corriente resulta:

$i = \dfrac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$, en la cual $R = (3 + 1)[\Omega] = 4[\Omega]$ y

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{3.798 \times 10^{-3}[\text{H}]}{4[\Omega]} = 0.9495[\text{ms}] \; ; \text{ ahora si } t = 2.5\tau_L$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-2.5}\right) \;\; ; \;\; i = \frac{12[\mathrm{V}]}{4[\Omega]}\left(1 - e^{-2.5}\right) = 2.754[\mathrm{A}]$$

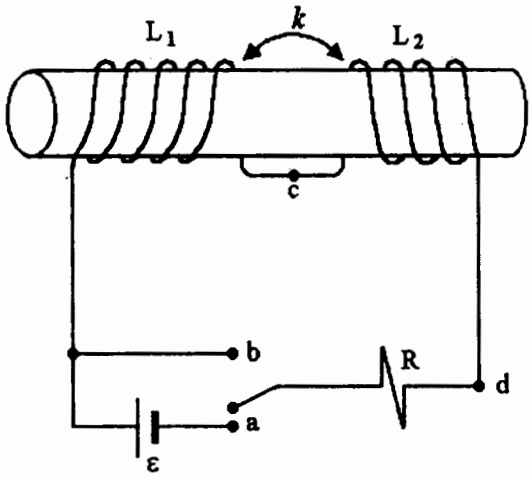
c) Como $U = \frac{1}{2}L\,i^2$, U es máxima cuando i es máxima; si $t \to \infty$, $i \to I = \frac{\varepsilon}{R}$

$$\therefore\; U_{máx} = \frac{1}{2}LI^2 \;;\; U_{máx} = 0.5(3.798 \times 10^{-3})(3)^2 = 17.091][\mathrm{mJ}]$$

d) Si en $t = 2.5\tau_L$ se abre el interruptor, la energía almacenada por el inductor al formar su campo magnético será devuelta a los portadores de carga y al término de dicha energía la corriente será nula; como

$$V_{yx} = ri - \varepsilon \;\; ; \;\; V_{yx} = -\varepsilon \;\; \text{y} \;\; V_{xy} = \varepsilon \;\; ; \;\; V_{xy} = 12[\mathrm{V}]$$

11. La figura muestra dos inductores cercanos devanados sobre el mismo núcleo, para los cuales $L_1 = 100[\text{mH}]$, $L_2 = 200[\text{mH}]$, $k = 0.8$, $R = 10[\Omega]$ y $\varepsilon = 10[\text{V}]$; si el interruptor se coloca en la posición *a* en $t = 0$, calcule:



a) La inductancia mutua entre los dos solenoides.

b) La diferencia de potencial V_{bc} para $t = \tau_L$.

c) La energía almacenada en el inductor L_2 en $t = 4\tau_L$.

d) Si después de que la corriente alcanza su valor máximo y estable, el interruptor se cambia a la posición *b* ($t' = 0$), encuentre la corriente eléctrica para $t' = 2\tau_L$.

Resolución:

a) Con la información con que se cuenta, $M = k\sqrt{L_1 L_2}$; es decir:

$$M = 0.8\sqrt{100 \times 10^{-3}(200 \times 10^{-3})} = 113.14 \times 10^{-3}[\text{H}]$$

b) En este circuito la corriente es función del tiempo: $i = \dfrac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$

en la cual $\tau_L = \dfrac{L}{R}$ y $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$ donde $L = L_1 + L_2 - 2M$; ahora entre el punto *b* y el *c* sólo se encuentra el inductor ideal L_1 pero afectado por la inducción de L_2:

$$V_{bc} = (L_1 - M)\frac{di}{dt} = (L_1 - M)\frac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

si $t = \tau_L$: $V_{bc\tau} = (L_1 - M)\dfrac{\varepsilon}{\tau} e^{-1} = (100 - 113.14)10^{-3}\left[\dfrac{10}{73.72 \times 10^{-3}}\right] e^{-1} = -0.656[\text{V}]$

en este mismo instante $V_{cd} = 4.335[\text{V}]$ y $V_{da} = 6.321$

c) Como $U = \dfrac{1}{2}Li^2$, para el inductor L_2: $U = \dfrac{1}{2}(L_2 - M)i^2$; $i_{4\tau_L} = \dfrac{10}{10}(1 - e^{-4})$

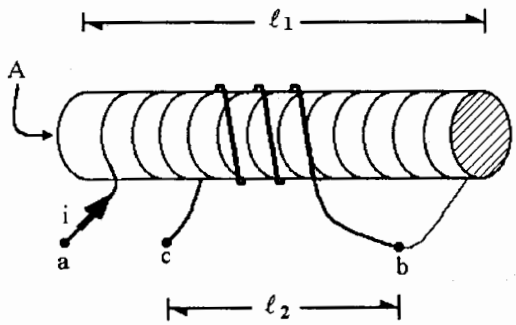
$$i = 0.9817[\text{A}] \ ; \ U = 0.5(200 - 113.14)10^{-3}(0.9817)^2 = 41.854[\text{mJ}]$$

d) Como el circuito se modifica, la corriente se calcula con:

$i|_{t' = \tau_L'} = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t'}{\tau'}}$; $i = \dfrac{10(0.368)}{10} = 0.368[\text{A}]$, se observa que $\tau_L = \tau_L'$

para $t' = 2\tau_L$: $i\Big|_{t' = 2\tau_L'} = \dfrac{10}{10} e^{-2} = 0.135[\text{A}]$; la corriente está disminuyendo.

12. Dos solenoides largos de $\ell_1 = 8\pi$[cm] y $\ell_2 = \ell_1/2$ de longitud, con $N_1 = 4000$ y $N_2 = 2000$ espiras, están enrollados sobre el mismo núcleo de aire y área $A = 6[\text{cm}^2]$, como se muestra en la figura. Determine:



a) La inductancia propia de cada solenoide.

b) La inductancia mutua entre los solenoides y el factor de acoplamiento.

c) El inductor equivalente entre los puntos *a* y *c*.

d) La diferencia de potencial V_{ab} en función de t, si $i = 0.2\,\text{sen}\,120\pi t$[A].

Resolución:

a) Del área $A = 6[\text{cm}^2]$, obtenemos que el radio de cada espira es $r = 1.38$[cm], como $\ell_1 \gg r$ y $\ell_2 \gg r$, los solenoides son largos y su inductancia es:

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(2000)^2(6 \times 10^{-4})}{4\pi \times 10^{-2}} = 0.024[\text{H}] = 24[\text{mH}]$$

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(4000)^2(6 \times 10^{-4})}{8\pi \times 10^{-2}} = 0.048[\text{H}] = 48[\text{mH}]$$

b) Para el cálculo de $M = \dfrac{N_2\phi_{21}}{i_1} = \dfrac{N_2 B_1 A}{i_1} = \dfrac{N_2\mu_0 N_1 i_1 A}{i_1 \ell_1} = \dfrac{2000(4\pi \times 10^{-7})1000(6 \times 10^{-4})}{8\pi \times 10^{-2}}$

de donde se obtiene: $M = 24 \times 10^{-3}$[H] $= 24$[mH]; además $M = k\sqrt{L_1 L_2}$

y $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$; $k = \dfrac{24}{\sqrt{48(24)}}$; $k = 0.7071$

c) Como los flujos que producen ambos inductores son de sentidos iguales, el inductor equivalente es $L = L_1 + L_2 + 2M$

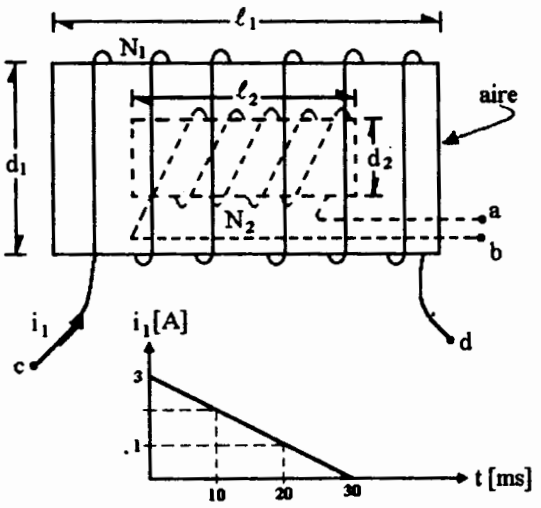
$$L = 48 + 24 + 2(24) = 120[\text{mH}]$$

d) Si $i = 0.2$ sen $120\pi t$[A] ; $\dfrac{di}{dt} = 0.2(120\pi)\cos 120\pi t \left[\dfrac{\text{A}}{\text{s}}\right]$ como los inductores son ideales (resistencia despreciable), para V_{ab} se tiene:

$$V_{ab} = (L_1 + M)\frac{di}{dt} \; ; \; V_{ab} = (48 + 24)10^{-3}[\text{H}]0.2(120\pi)\cos 120\pi t \left[\frac{\text{A}}{\text{s}}\right]$$

$$V_{ab} = 5.43 \cos 120\pi t\,[\text{V}]$$

13. En la figura se muestra un solenoide de sección circular con radio $r_1 = 0.02$[m] y $N_1 = 850$ vueltas; en la parte central de su núcleo (de aire) se coloca otro de $N_2 = 100$ vueltas y radio $r_2 = 0.01$[m]; $\ell_1 = 20$[cm] y $\ell_2 = 6$[cm]. Determine:



a) El coeficiente de inductancia mutua entre los solenoides.

b) El valor de la fem inducida en el solenoide 2 en $t = 10$[ms] y su polaridad (V_{ab}) si por el solenoide 1 se hace circular una corriente variable como indica la figura.

Si el solenoide 1 se desconecta de su fuente de alimentación y se conecta en serie con el solenoide 2 uniendo la terminal *b* con la *d*, y suponiendo que $M = 0.168$[mH], $L_1 = 5.7$[mH] y $L_2 = 65.797$[μH], obtenga:

c) La representación simbólica de la conexión y el valor del inductor equivalente entre *a* y *c*.

d) El factor de acoplamiento magnético.

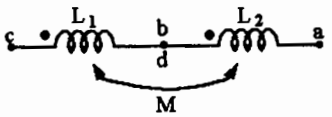
Resolución:

a) El coeficiente M se determina con $M = \dfrac{N_2\phi_{21}}{i_1} = \dfrac{N_2 B_1 A_2}{i_1} = \dfrac{N_2 A_2 \mu_0 N_1 i_1}{i_1 \ell_1}$

$$\therefore\ M = \frac{4\pi \times 10^{-7}(100)(850)\pi(0.01)^2}{0.2} = 167.783[\mu\text{H}]$$

b) Al aplicar la ley de Faraday: $|\varepsilon_2| = \left|-M\dfrac{di}{dt}\right| = \left|-167.783 \times 10^{-6}\left(\dfrac{-3}{30 \times 10^{-3}}\right)\right|$; $|\varepsilon_2| = |V_{ab}|$; con el Principio de Lenz, como $i_1 \downarrow$, $V_a > V_b$, $V_{ab} \doteq 16.78$[mV]

c) La representación simbólica de la conexión es la siguiente:



en este caso $L_{ac} = L_1 + L_2 + 2M$

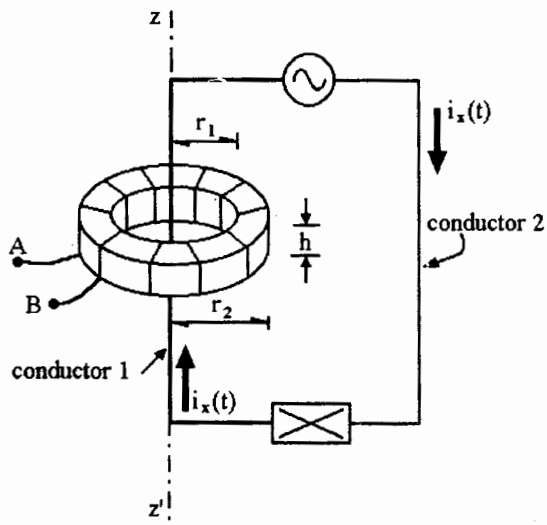
$$L_{ac} = [5.7 + 0.065797 + 2(0.168)][\text{mH}]$$

$$L_{ac} = 6.102[\text{mH}]$$

d) El factor de acoplamiento magnético se calcula con:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}\ ;\ k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0.168[\text{mH}]}{\sqrt{5.7\,(0.065797\ [\text{mH}]}} = 0.274\ ;\ k = 27.4\%$$

14. La corriente $i_x(t)$ del conductor 1 de la figura provoca un flujo magnético, a través de cada una de las $N=500$ espiras del toroide, dado por: $\phi(t)=0.01\cos\omega t$[Wb] con t en segundos. Deduzca expresando en literales (N, h, r_1, etc.):



a) La inductancia mutua del arreglo.

b) La diferencia de potencial $V_{AB}(t)$.

c) La inductancia propia del toroide si se considera que $r_1=7$[cm], $r_2=10$[cm] y $h=3$[cm], calcule L_t.

d) La diferencia de potencial inducida $V_{AB}(t)$, si ambos conductores, 1 y 2, pasaran por el eje zz' del toroide.

Resolución:

a) La inducción mutua M entre conductor y toroide se obtiene con $M = \dfrac{N\phi_{tc}}{i_c}$; $i_c = i_x$ y

$$\phi_{tc} = \int\int \vec{B}_c \cdot d\vec{S} = \int\int B_c dS \cos\alpha, \text{ donde } \alpha \sphericalangle_{\vec{B}_c}^{d\vec{S}} = 0$$

$$\phi_{tc} = \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i_x}{2\pi r} dr dh = \frac{\mu_0 i_x h}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_x h}{2\pi} \text{Ln}\frac{r_2}{r_1}; \text{ al sustituir:}$$

$$M = \frac{N\mu_0 i_x h}{2\pi i_x} \text{Ln}\frac{r_2}{r_1}[\text{H}] \; ; \; M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \text{Ln}\frac{r_2}{r_1}[\text{H}]$$

b) Con la aplicación de la ley de Faraday: $|V_{AB}| = \left|-M\dfrac{di_x}{dt}\right|$ o también:

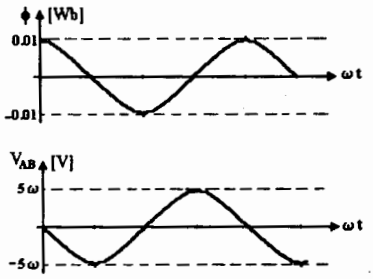
$$|V_{AB}| = \left|-N\frac{d\phi_{tc}}{dt}\right| = \left|-N\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 i_x h}{2\pi}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1}\right]\right| = \left|-N\frac{\mu_0 h}{2\pi}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1}\frac{di_x}{dt}\right|$$

$$|V_{AB}| = \left|-N\frac{d}{dt}[0.01\cos\omega t]\right| = 0.01N(\text{sen}\,\omega t)\omega = 0.01(500)\omega\,\text{sen}\,\omega t[\text{V}]$$

$|V_{AB}| = 5\omega\,\text{sen}\,\omega t$[V] y de acuerdo con el principio de Lenz: $V_B > V_A$ en el primer medio ciclo,

$$\therefore\; V_{AB} = -5\omega\,\text{sen}\,\omega t[\text{V}]$$

c) La autoinductancia es



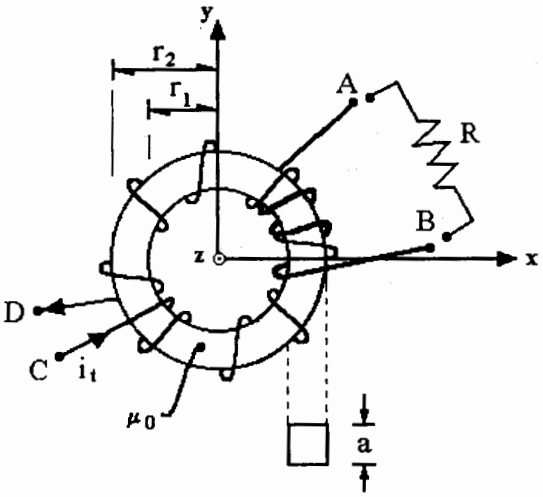
$$L_t = \frac{N_t \phi_{tt}}{i_t} \text{ y para el toroide}$$

$$L_t = \frac{\mu_0 N_t^2 h}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{r_2}{r_1}$$

$$L_t = \frac{4\pi \times 10^{-7}(500)^2(0.03)}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{10}{7} = 535\,[\mu\text{H}]$$

d) Si tanto el conductor 1 como el 2 pasaran por el eje zz' causarían que $\phi_{tc} = 0$ y en consecuencia $V_{AB}(t) = 0$.

15. En la figura se muestra un toroide con radios $r_1 = 10[\text{cm}]$ y $r_2 = 15[\text{cm}]$, de 3000 espiras juntas y apretadas y espesor $a = 5[\text{cm}]$; sobre una parte del toroide se encuentra una bobina de 300 vueltas con resistencia $r_b = 0.3[\Omega]$. Con base en esta información y las figuras, determine:

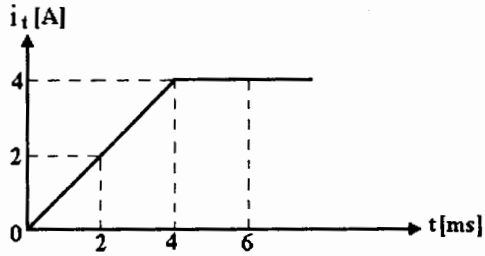


a) La expresión para el cálculo del flujo magnético en una sección transversal del toroide, en función de su corriente.

b) El coeficiente de inductancia mutua entre toroide y bobina.

c) La diferencia de potencial V_{AB} inducida en la bobina en $t = 5[\text{ms}]$.

d) La corriente inducida (magnitud y sentido) que circularía por el resistor $R = 0.5[\Omega]$, si éste se conectase en las terminales A y B, en $t = 2[\text{ms}]$.



Resolución:

a) De la definición $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$, obtenemos $\phi = \int\int BdS\cos\alpha$, $\alpha \sphericalangle_{\vec{B}}^{d\vec{S}} = 0$ y

$$dS = drda \therefore \phi = \int_0^a\int_{r_1}^{r_2} Bdrda = \int_0^a\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}drda \; ; \; \phi = \frac{\mu_0 N_t a i_t(t)}{2\pi}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1}[\text{Wb}]$$

b) El coeficiente M se encuentra con $M = N_b\dfrac{\phi_{bt}}{i_t}$, pero $\phi_{bt} = \phi_{tt}$

$$\therefore M = \frac{N_b\mu_0 N_t a i_t}{2\pi i_t}\text{Ln}\frac{r_2}{r_1} \text{ y con valores: } M = \frac{300(4\pi \times 10^{-7})3000(0.05)}{2\pi}\text{Ln}\frac{15}{10}[\text{H}] = 3.649[\text{mH}]$$

c) Mediante la aplicación de la ley de Faraday: $|V_{AB}| = \left|-M\dfrac{di_t}{dt}\right|$

$$|V_{AB}|_{t=5[\text{ms}]} = \left|-M\frac{di_t}{dt}\right|_{t=5[\text{ms}]}\Bigg|, \text{ en } t = 5[\text{ms}] \;,\; i_t = 4[\text{A}] = cte \therefore \frac{di_t}{dt} = 0 \text{ y en consecuencia } V_{AB} = 0$$

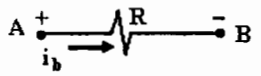
d) En el instante $t = 2[\text{ms}]$: $|V_{AB}| = \left|-3.649 \times 10^{-3}\left[\dfrac{4}{4 \times 10^{-3}}\right]\right| = 3.649[\text{V}]$

en este instante i_t está creciendo y en consecuencia el flujo también está creciendo, con el Principio de Lenz $V_B > V_A$, es decir:

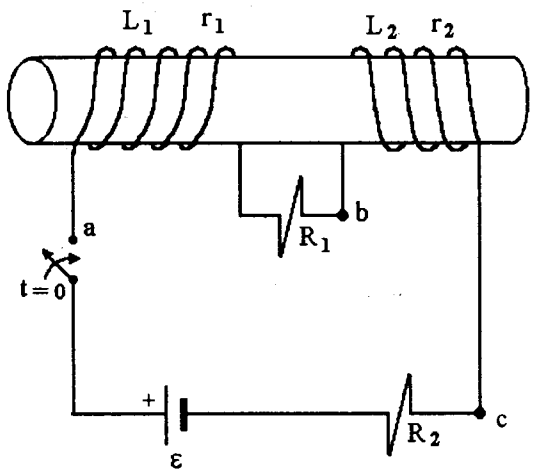
$V_{AB} = -3.649[V]$ en el lapso $0 \leq t \leq 4[ms]$; $V_{BA} = 3.649[V]$ y la corriente inducida se obtiene con la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$V_{BA} - Ri_b - r_b i_b = 0 \; ; \; i_b = \frac{V_{BA}}{R + r_b} = \frac{3.649[V]}{(0.5 + 0.3)[\Omega]}$$

$i_b = 4.561[A]$ y como $V_B > V_A$:



16. Si el coeficiente de acoplamiento entre los inductores $L_1 = 0.45[\text{H}]$ con $r_1 = 2[\Omega]$ y $L_2 = 0.2[\text{H}]$ con $r_2 = 7[\Omega]$ es $k = 0.6$ y además $\varepsilon = 60[\text{V}]$, $R_1 = R_2 = 10[\Omega]$, determine:



a) La representación simbólica de la conexión de L_1 y L_2 y el inductor equivalente entre los puntos *a* y *c*.

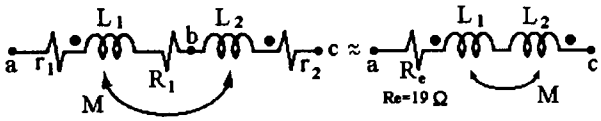
b) La corriente en el circuito para $t = 5[\text{ms}]$.

c) La diferencia de potencial V_{ab} para $t = 5[\text{ms}]$.

d) La energía almacenada por el inductor L_2 en $t = 30[\text{ms}]$.

Resolución:

a) La representación simbólica es:

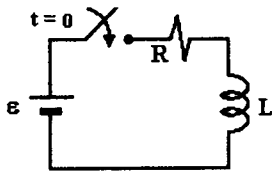


el inductor equivalente es $L = L_1 + L_2 - 2M$

donde $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.6\sqrt{0.45(0.2)} = 0.18[\text{H}]$

$L = 0.45 + 0.2 - 2(0.18) = 0.29[\text{H}]$

b) El circuito equivalente, en su expresión mínima es:



$R = R_e + R_2$

$\varepsilon = 60[\text{V}]$

$R = 29[\Omega]$

$L = 0.29[\text{H}]$

Con la ley de voltajes de Kirchhoff se tiene:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = \varepsilon, \text{ en la cual } i = \frac{\varepsilon}{R}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right]$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{0.29[\text{H}]}{29[\Omega]} = 10[\text{ms}]$$

por lo tanto: $i\big|_{t\,=\,5[\mathrm{ms}]} = \dfrac{60}{29}\left(1 - \exp[5/10]\right) = 0.8141[\mathrm{A}]$

c) Con la ley de voltajes de Kirchhoff: $V_{ab} = (L_1 - M)\dfrac{di}{dt} + (r_1 + R_1)i$ [V]

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \;;\; \left.\frac{di}{dt}\right|_{t\,=\,5[\mathrm{ms}]} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{5}{10}} = 125.49\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}\right] \text{ y del inciso anterior } i = 0.8141[\mathrm{A}]$$

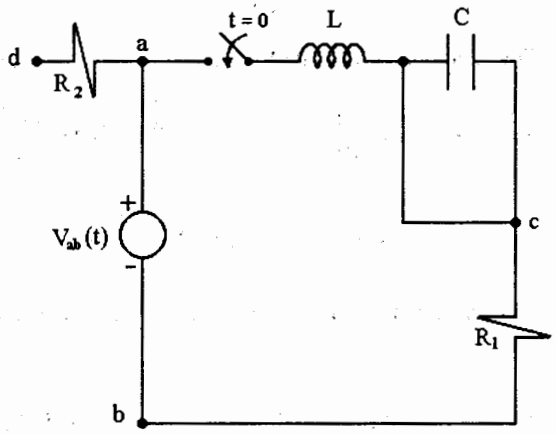
$$\therefore\; V_{ab} = (0.45 - 0.18)[\mathrm{H}]125.49\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}\right] + (2 + 10)[\Omega]0.8141[\mathrm{A}] = 33.882 + 9.769 = 43.65[\mathrm{V}]$$

d) La energía almacenada por un inductor se obtiene con $U = \dfrac{1}{2}Li^2$, para el inductor L_2:

$$U_2\big|_{t\,=\,30[\mathrm{ms}]} = 0.5(L_2 - M)i^2\big|_{t\,=\,30[\mathrm{ms}]} \;;\; U_2 = 0.5(0.2 - 0.18)\left[\frac{60}{29}\left(1 - e^{-\frac{30}{10}}\right)\right]^2 [\mathrm{J}]$$

finalmente: $U_2 = 38.65[\mathrm{mJ}]$

17. En el circuito mostrado, el interruptor se cierra cuando $t=0$, suponga que en este instante $V_c=0$ e $i_L=0$, además $R_1=10[\Omega]$, $R_2=10R_1$, $L=0.1[\text{H}]$ y $C=100[\mu\text{F}]$; determine:



a) La ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito y su solución.

b) El valor de la constante de tiempo τ_L del circuito.

c) La energía almacenada por el inductor si $t=2\tau_L$ y $V_{ab}(t)=10[\text{V}]$.

d) La diferencia de potencial V_{dc} en $t=30[\text{ms}]$, si $V_{ab}(t)=10[\text{V}]$.

Resolución:

a) Se observa que en el circuito hay dos elementos que no realizan función alguna: el resistor R_2, por tener una terminal sin conectar, y el capacitor C, porque con el conductor entre sus terminales no se le permite almacenar carga alguna; con la ley de voltajes de Kirchhoff se tiene:

$$-V_{ab}(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \text{ ; si } V_{ab} = \varepsilon$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\varepsilon}{L}$$

Ecuación diferencial del comportamiento del circuito; ésta es una ecuación diferencial lineal, de primer orden y de primer grado, no homogénea y de coeficientes constantes.

La solución general es $i = i_c + i_p$, donde i_c es la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada $i_c = C_1 e^{-\frac{R}{L}t}$ y la solución i_p se determina como $i_p = C_2$ y al derivarla y sustituirla $C_2 = \varepsilon/R$; de esta forma la solución general es: $i(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R}$ y por condiciones iniciales $i(0) = 0$

$$C_1 = -\frac{\varepsilon}{R} \therefore i(t) = -\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R} \text{ ; } i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \text{ donde } \tau_L = \frac{L}{R}$$

b) El valor de la constante de tiempo inductiva τ_L es: $\tau_L = \frac{0.1[\text{H}]}{10[\Omega]} = 10[\text{ms}]$

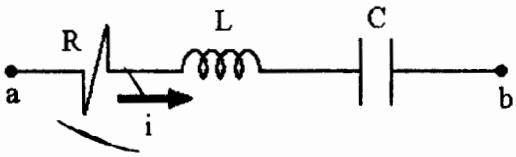
c) Como la energía almacenada se obtiene con: $U = \frac{1}{2}Li^2$, para $t_1 = 2\tau_L$:

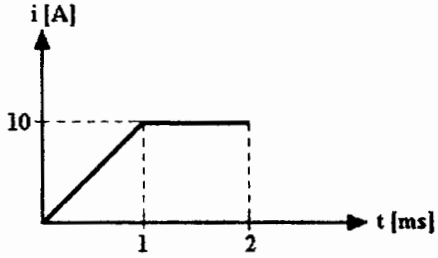
$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) \text{ ; } i_1 = \frac{10}{10}\left(1 - e^{-2}\right) = 0.865[\text{A}] \text{ ; } U_1 = 0.5(0.1)(0.865)^2 = 37.38[\text{mJ}]$$

d) La diferencia de potencial V_{dc} se puede expresar como $V_{dc} = V_{da} + V_{ac}$, $V_{da} = 0$ ya que por R_2, desconectada de un extremo, no puede circular corriente alguna: $i_{da} = 0$ y $V_{ac} = L\frac{di}{dt}$, como $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(i - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ y } V_{ac} = 0.1[\text{H}]\left[\frac{10[\text{V}]}{0.1[\text{H}]}e^{-\frac{30}{10}}\right] = 0.498[\text{V}] \therefore V_{dc} = V_{ac} = 0.498[\text{V}]$$

18. Por la rama mostrada en la figura, en la cual $R=2[\Omega]$, $L=2[\text{mH}]$ y $C=500[\mu\text{F}]$, circula una corriente que varía en el tiempo como indica la gráfica. Si en $t=0$ el capacitor se encuentra descargado, calcule:





a) La carga del capacitor en $t=2[\text{ms}]$.

b) La diferencia de potencial en cada elemento como función del tiempo, en forma matemática y gráfica con la misma escala de tiempo, para el intervalo $0 \le t \le 2[\text{ms}]$.

c) La diferencia de potencial V_{ab} para $t=1[\text{ms}]$.

d) La diferencia de potencial V_{ab} para $t=2[\text{ms}]$.

Resolución:

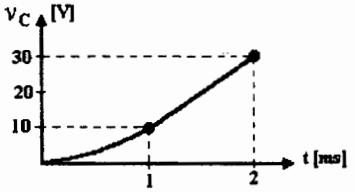
a) Para calcular la carga, recordamos que: $i = \dfrac{dq}{dt}$; $dq = i\,dt$; $q(t) = \int i(t)dt$ como:

$$i(t) \begin{cases} 10^4 t \text{ para } 0 \le t \le 10^{-3}[\text{s}] \\ 10 \quad \text{para } t > 10^{-3}[\text{s}] \end{cases} \quad ; \quad q(t) = \int_0^{10^{-3}} \frac{10}{10^{-3}} t\,dt + \int_{10^{-3}}^{2\times 10^{-3}} 10\,dt[\text{C}]$$

$$q(t) = \left[10^4 \frac{t^2}{2}\right]_0^{10^{-3}} + \left[10t\right]_{10^{-3}}^{2\times 10^{-3}} = \frac{10^4 \cdot 10^{-6}}{2} + 10(2)10^{-3} - 10(10^{-3}) = 15 \times 10^{-3}[\text{C}] = 15[\text{mC}]$$

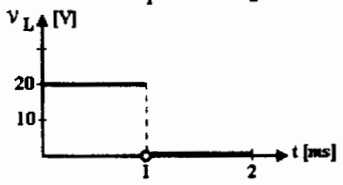
b) El voltaje en el capacitor:

$$v_c = \frac{q}{C} \; ; \; v_c = \frac{q[\text{C}]}{500 \times 10^{-6}[\text{F}]} \begin{cases} 10^7 t^2[\text{V}] \text{ para } 0 \le t \le 10^{-3}[\text{s}] \\ [2 \times 10^4 t - 10][\text{V}] \text{ para } t > 10^{-3}[\text{s}] \end{cases}$$



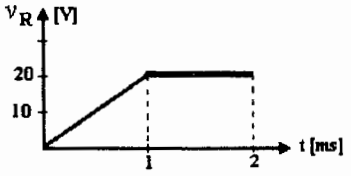
El voltaje en el inductor:

$$v_L = L\frac{di}{dt} \; ; \; v_L = 2 \times 10^{-3}\frac{di}{dt} \begin{cases} 20[\text{V}] \text{ para } 0 \le t \le 10^{-3}[\text{s}] \\ 0[\text{V}] \text{ para } t > 10^{-3}[\text{s}] \end{cases}$$



En voltaje en el resistor:

$$v_R = Ri \; ; \; v_R = 2i \begin{cases} 2 \times 10^4 t[\text{V}] \text{ para } 0 \le t \le 10^{-3}[\text{s}] \\ 20[\text{V}] \text{ para } t > 10^{-3}[\text{s}] \end{cases}$$

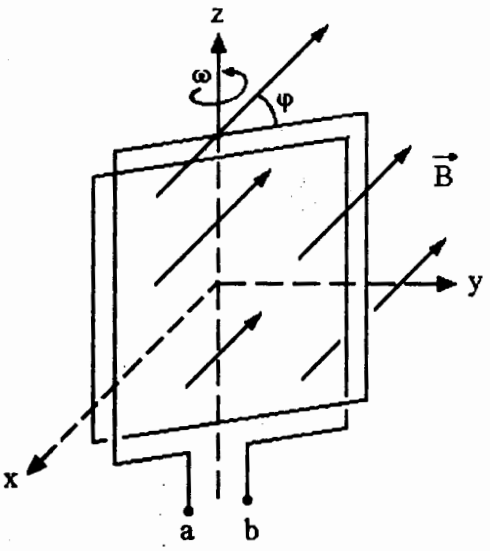


c) En $t_1 = 1[\text{ms}]$; $V_{ab1} = v_R + v_L + v_c$; $V_{ab1} = 20 + 20 + 10 = 50[\text{V}]$

d) En $t_2 = 2[\text{ms}]$; $V_{ab2} = v_R + v_L + v_c$; $V_{ab2} = 20 + 0 + 30 = 50[\text{V}]$

Problemas propuestos

1. La bobina de la figura está formada por 100 espiras rectangulares de 5[cm] de ancho y 10[cm] de largo y gira en torno del eje z, con rapidez angular $\omega = 120\pi$[rad/s] dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B} = -0.1\,\hat{i}$[T]. En el instante de la figura, la bobina forma un ángulo $\phi = (\pi/6)$[rad] con la dirección del campo magnético; determine:



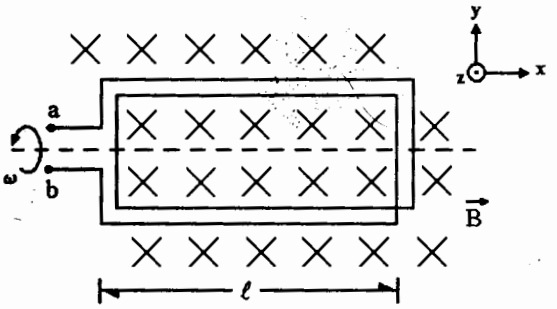
a) El flujo magnético a través de la bobina.

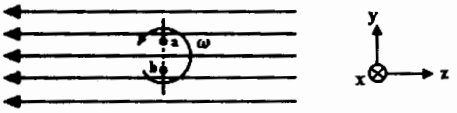
b) La fuerza electromotriz inducida en función del ángulo α (complementario de ϕ) y en función del tiempo.

c) La V_{ab} inducida si $\varphi = 30°$, la $V_{abmáx}$ y en qué instante ocurre.

d) La corriente inducida (con su sentido) si los extremos de la bobina se unen y su resistencia es $r_b = 2.0[\Omega]$.

2. En las figuras se muestra una bobina de 50 espiras rectangulares, de largo $\ell = 15$[cm] y ancho $d = 10$[cm], que gira en torno de una recta paralela al eje x, con rapidez angular $\omega = 2\pi$[rad/s] dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B} = -0.5\hat{k}$[T]. Determine:





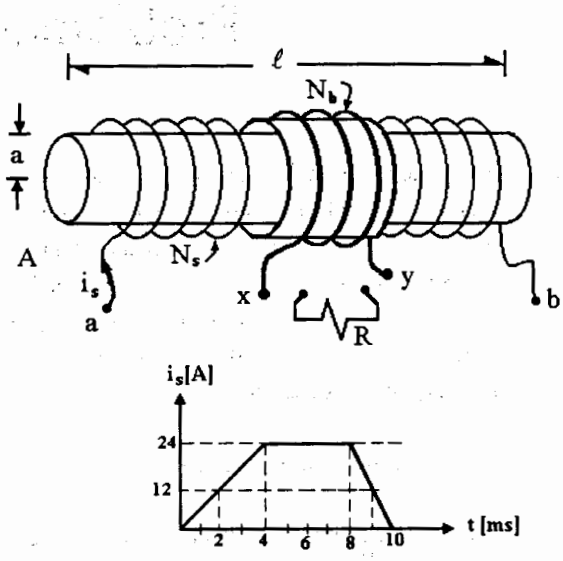
a) La expresión que permite evaluar el flujo magnético a través de la bobina, en función del tiempo.

b) La expresión de la fuerza electromotriz en función del tiempo.

c) El flujo magnético concatenado por [illegible] na en la posición mostrada.

d) La diferencia de potencial inducida (V_{ab}) entre las terminales de la bobina, en la posición mostrada y $V_{abmáx}$ y en qué posición ocurre.

3. Sobre la parte central de un solenoide con $\ell = 30[\text{cm}]$, $N_s = 3000$ espiras de radio $a = 2[\text{cm}]$ y núcleo de aire, se devana una bobina de $N_b = 500$ vueltas, lográndose un coeficiente de acoplamiento $k = 0.6$, como se muestra en la figura. Determine:



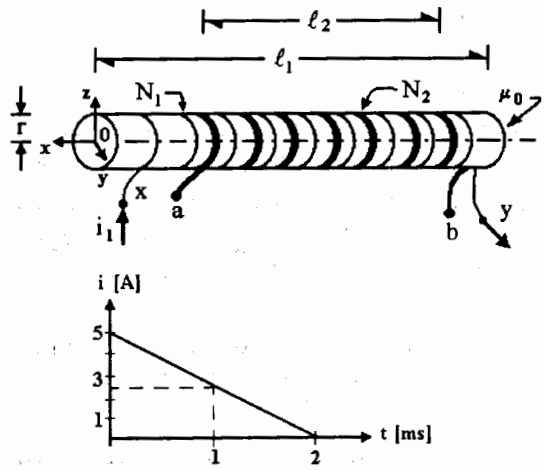
a) El coeficiente de autoinducción (L_s) del solenoide.

b) El coeficiente de inducción mutua (M), entre la bobina y el solenoide, y el coeficiente de autoinducción de la bobina (L_b).

c) La diferencia de potencial entre las terminales x y y de la bobina en $t = 3[\text{ms}]$, si la corriente en el solenoide varía como lo indica la gráfica.

d) La corriente que circularía por el resistor R de $6[\Omega]$ conectado a las terminales x y y de la bobina cuya resistencia es $2[\Omega]$, en el instante $t = 9[\text{ms}]$. Indique magnitud y sentido.

4. En la figura se muestran dos solenoides superpuestos de espiras apretadas sobre un núcleo de aire, en los cuales $N_1 = 2000$ y $N_2 = 800$ espiras, $\ell_1 = 30[\text{cm}]$, $\ell_2 = 20[\text{cm}]$ y $r = 2[\text{cm}]$. Determine:



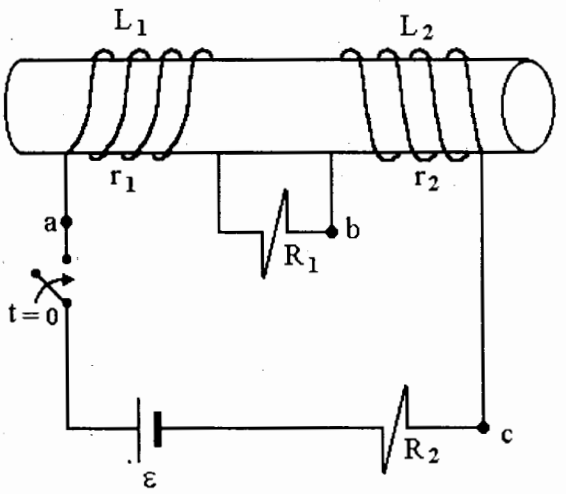
a) El campo magnético en el punto 0, si por el solenoide 1 circula una corriente de $5[\text{A}]$.

b) La fuerza electromotriz inducida (ε_{xy}) en el solenoide 1, si este inductor tiene $21.055[\text{mH}]$ de autoinductancia y su corriente varía como muestra la figura.

c) El coeficiente de inducción mutua entre los solenoides, si $L_2 = 5.053[\text{mH}]$ y el factor de acoplamiento es $k = 0.8165$

d) La gráfica de la diferencia de potencial v_{ab}, en función del tiempo, para el intervalo $0 \le t \le 2[\text{ms}]$.

5. El circuito de la figura se formó con $L_1 = 0.45[\text{H}]$ y $L_2 = 0.2[\text{H}]$ con resistencias internas $r_1 = 2[\Omega]$ y $r_2 = 7[\Omega]$, con los resistores $R_1 = R_2 = 10[\Omega]$ y la fuente de fem $\varepsilon = 60[\text{V}]$, su interruptor se cierra en $t = 0$. Si el coeficiente de acoplamiento entre los inductores L_1 y L_2 es $k = 0.6$, calcule:



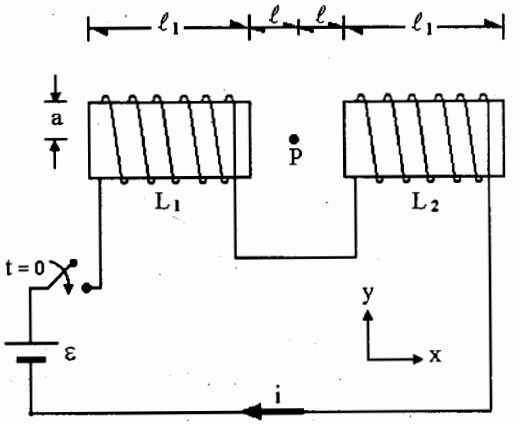
a) El inductor equivalente entre los puntos *a* y *c*.

b) La corriente en el circuito para $t = 5[\text{ms}]$.

c) La diferencia de potencial V_{ac} para $t = 5[\text{ms}]$.

d) La energía asociada al campo magnético almacenada para $t = 100[\text{ms}]$.

6. Considere los solenoides de $N_1 = N_2 = 2000$ vueltas y núcleo de aire mostrados en la figura, en la cual $a = 1[\text{cm}]$, $\ell = 2[\text{cm}]$, $\ell_1 = 10[\text{cm}]$ y $\varepsilon = 6[\text{V}]$; determine:



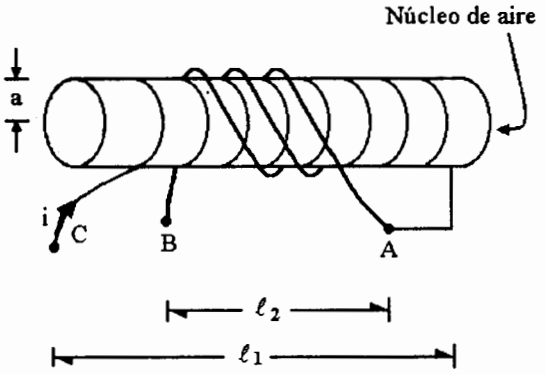
a) El campo magnético en el punto *P*, cuando la corriente $i = 3[\text{A}]$.

b) Las autoinductancias L_1 y L_2 de los solenoides.

c) La inductancia equivalente a los dos embobinados si el factor de acoplamiento es $k = 0.6$.

d) La energía almacenada en el sistema 25.264 [ms] después del cierre del interruptor, si la resistencia de cada solenoide es $r = 1[\Omega]$.

7. Por los solenoides coaxiales y sobrepuestos de la figura circula la corriente alterna $i(t) = 0.2 \text{ sen}(60\pi t)$ [A]. Además $N_1 = 1600$ y $N_2 = 800$ espiras de radio $a = 1$[cm], $\ell_1 = 20$[cm] y $\ell_2 = 10$[cm]; despreciando la resistencia de los solenoides, calcule:



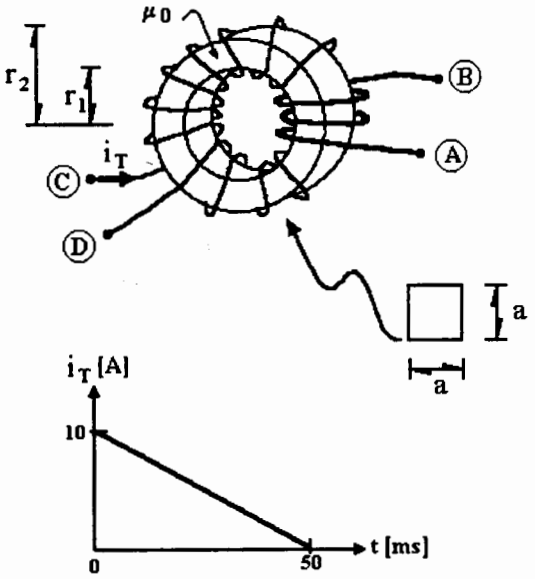
a) La inductancia mutua entre los solenoides y la representación simbólica de su conexión.

b) La inductancia equivalente a los dos embobinados.

c) La diferencia de potencial V_{AB} en el instante $t = 1/9$[s].

d) Si la terminal del solenoide 1 se desconecta de A y se une a la terminal B del solenoide 2, dibuje la representación simbólica de la conexión y calcule el valor del inductor equivalente.

8. Una bobina de 1000 espiras se enrolla sobre una parte del toroide de 9000 vueltas sobre núcleo de aire, mostrado en la figura. Si $r_1 = 8$[cm], $r_2 = 10$[cm], $a = 2$[cm] y la corriente i_T en el toroide varía en función del tiempo como se muestra, obtenga:



a) El flujo magnético a través de la bobina.

b) La diferencia de potencial inducida V_{AB}.

c) La magnitud y sentido de la corriente que circularía por un foco $(R = 10[\Omega])$ conectado entre los bornes A y B, considere que la resistencia de la bobina es $0.5[\Omega]$.

d) La autoinductancia del toroide.

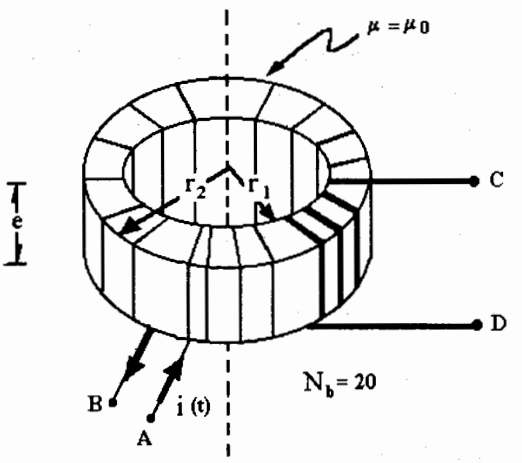
9. Se coloca una bobina rectangular de 20 vueltas sobre un toroide de 2200 espiras, radio interior $r_1 = 10$[cm], radio exterior $r_2 = 13$[cm], espesor $e = 5$[cm] y núcleo de aire. Calcule:

a) El flujo magnético que cruza la bobina si $i(t) = 7$[A].

b) La diferencia de potencial inducida $V_{CD}(t)$ si $i(t) = 3\,\text{sen}\,\omega t$, $\omega = 2\pi f$ y $f = 60$[Hz]. Indique qué punto, C o D, tiene mayor potencial eléctrico si $i(t)$ aumenta en cierto instante.

c) La inductancia mutua del arreglo y describa la deducción del modelo matemático utilizado.

d) La diferencia de potencial V_{AB} y V_{CD} en $t = 4$[ms] si $i(t) = 2000t$[A], con t en [s].



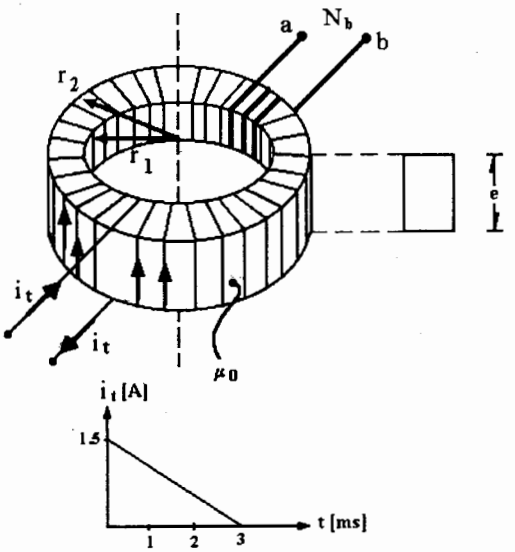
10. La figura muestra un toroide de sección transversal rectangular, con $r_1 = 10$[cm], $r_2 = 14$[cm], $e = 5$[cm], $N_t = 800$ espiras y núcleo de aire; sobre una parte de éste se colocó un embobinado $N_b = 20$ con sus espiras muy apretadas. Determine:

a) El flujo magnético a través de la sección transversal, si la corriente en el toroide es 1.5[A].

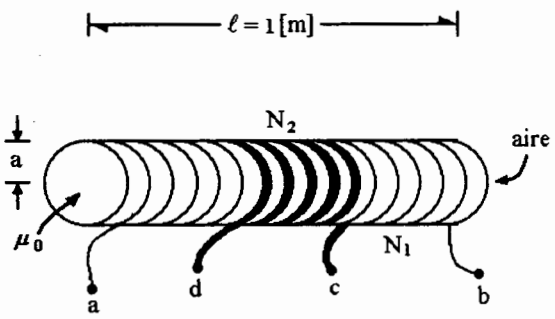
b) El valor de la autoinductancia del toroide.

c) El coeficiente de inducción mutua entre el toroide y la bobina.

d) La diferencia de potencial inducida en la bobina (V_{ab}), si la corriente en el toroide varía como indica la figura.



11. Sobre la parte central de un solenoide de $N_1 = 400$ espiras de radio $a = 1\,[\text{cm}]$, longitud $\ell = 1\,[\text{m}]$ y núcleo de aire (μ_0), se devanan $N_2 = 20$ espiras apretadas de una bobina para conseguir un coeficiente de acoplamiento de 70% con el solenoide; con base en esto y en la figura, calcule:



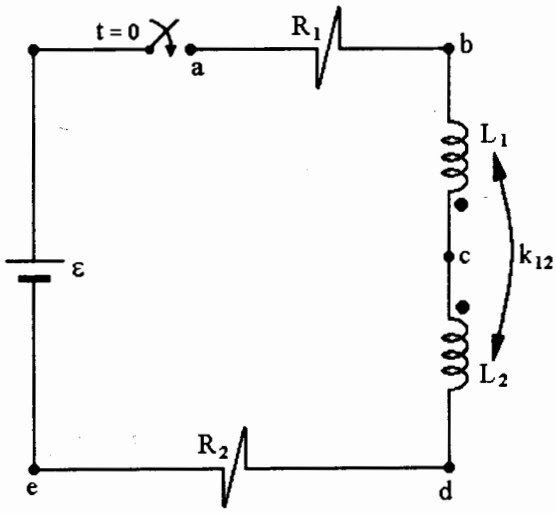
a) La autoinductancia del solenoide.

b) La inductancia mutua entre solenoide y bobina.

c) La autoinductancia de la bobina.

d) El inductor equivalente entre los puntos *a* y *d*, si se unen las terminales *b* y *c*.

12. Para el circuito mostrado en la figura: $\varepsilon = 10\,[\text{V}]$, $R_1 = 3\,[\Omega]$, $L_1 = 5\,[\text{mH}]$, $L_2 = 8\,[\text{mH}]$, $k_{12} = 0.8$ y $R_2 = 2\,[\Omega]$, calcule:



a) El valor del inductor equivalente entre *b* y *d*.

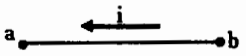
b) El circuito equivalente y el valor de la constante de tiempo inductiva.

c) La diferencia de potencial V_{de} cuando $t = 2\,[\text{ms}]$.

d) La energía total almacenada cuando $t = 1\,[\text{s}]$.

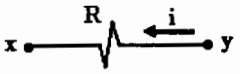
Respuestas de los problemas propuestos

1. *a)* $\phi = 0.25[\text{mWb}]$
   b) $\varepsilon = NBA\omega \operatorname{sen}\alpha$
   $\varepsilon = NBA\omega \operatorname{sen}\omega t$
   c) $V_{ab} = -16.324[\text{V}]$
   $V_{ab\,máx} = 18.85[\text{V}]$ en $t = 12.5[\text{ms}]$
   d) $i = 8.162[\text{A}]$ sentido horario:



2. *a)* $\phi = B\ell d \cos\omega t$
   b) $\varepsilon = NBd\ell\omega \operatorname{sen}\omega t$
   c) $\lambda = N\phi = 0.375[\text{Wb}]$ para $\alpha = 0$
   α es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$
   d) $V_{ab} = 0$ para $\alpha = 0$
   $V_{ba\,máx} = 2.356[\text{V}] = V_{ab\,mín}$, $\alpha = 90°$
   $V_{ba\,máx} = 2.356[\text{V}]$ para $\alpha = 270°$

3. *a)* $L_s = 47.374[\text{mH}]$
   b) $M = 7.896[\text{mH}]$ y $L_b = 3.656[\text{mH}]$
   c) $V_{xy} = 47.376[\text{V}]$
   d) $i = 11.844[\text{A}]$,

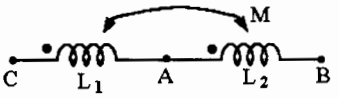


4. *a)* $\vec{B}_0 = 20.94\hat{i}\,[\text{mT}]$
   b) $\varepsilon_{xy} = -52.64[\text{V}]$
   c) $M = 8.422[\text{mH}]$
   d) $V_{ab} = -21.055[\text{V}]$ para $0 \le t \le 2[\text{ms}]$

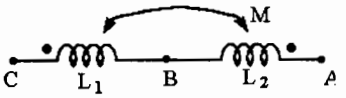
5. *a)* $L_{eq} = 0.29[\text{H}]$
   b) $i = 0.814[\text{A}]$
   c) $V_{ac} = 51.86[\text{V}]$
   d) $U = 620.633[\text{mJ}]$

6. *a)* $\vec{B}_P = 7.7\hat{i}\,[\text{mt}]$
   b) $L_1 = L_2 = 15.79[\text{mH}]$
   c) $L_{eq} = 50.528[\text{mH}]$
   d) $U = 90.82[\text{mJ}]$

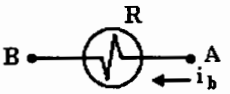
7. *a)* $M = 2.527[\text{mH}]$



   b) $L_{eq} = 12.604[\text{mH}]$
   c) $V_{AB} = -95.27[\text{mV}]$
   d) $L_{eq} = 2.496[\text{mH}]$



8. *a)* $\phi_b = 8.033 i_T\,[\mu\text{Wb}]$, $0 \le t \le 50[\text{ms}]$
   b) $V_{AB} = 1.607[\text{V}] = \text{constante}$
   c) $i_b = 0.153[\text{A}]$



   d) $L = 72.299[\text{mH}]$

9. *a)* $\phi_b = 40.4[\mu\text{Wb}]$, sentido ↺
   b) $V_{CD}(t) = 0.131 \cos 120\pi t[\text{V}]$; $V_C > V_D$
   c) $M = 115.44[\mu\text{H}]$
   d) $V_{AB} = 25.397[\text{V}]$, constante $\forall t$
   $V_C = 0.2309[\text{V}]$, constante $\forall t$

10. *a)* $\phi = 4.04[\mu\text{Wb}]$, sentido ↺
    b) $L_t = 2.15[\text{mH}]$
    c) $M = 53.87[\mu\text{H}]$
    d) $V_{ab} = -26.93[\text{mV}]$, $0 \le t \le 3[\text{ms}]$

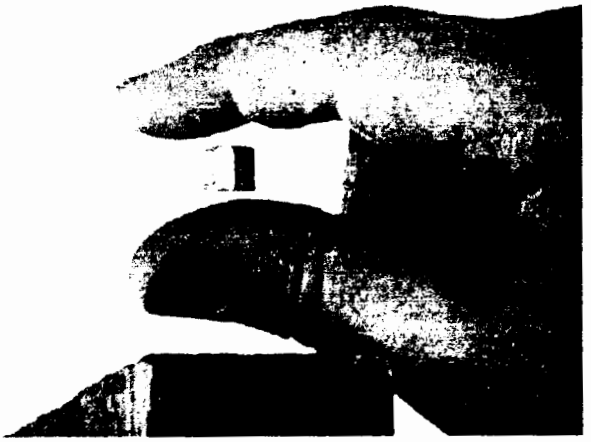
11. *a)* $L_s = 63.16[\mu\text{H}]$
    b) $M = 3.16[\mu\text{H}]$
    c) $L_b = 0.323[\mu\text{H}]$
    d) $L_{eq} = 57.163[\mu\text{H}]$

12. *a)* $L_{eq} = 2.88[\text{mH}]$
    b) $\varepsilon = 10[\text{V}]$, $R = 5[\Omega]$ y $L = 2.88[\text{mH}]$
    en serie y $\tau_L = 0.576[\text{ms}]$
    c) $V_{de} = 3.876[\text{V}]$
    d) $U = 5.76[\text{mJ}]$

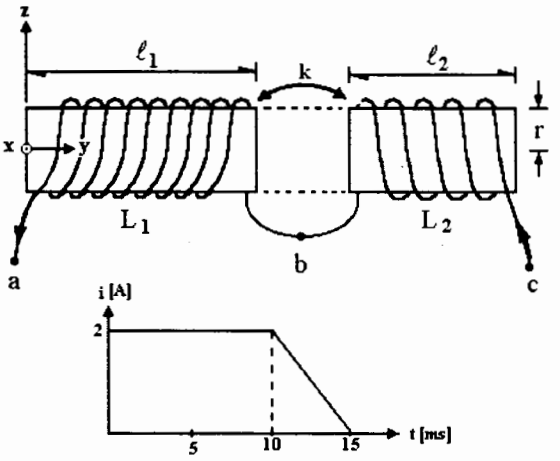
TEMA 6

PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

Problemas resueltos



1. La figura muestra la conexión de dos solenoides largos L_1 y L_2 entre los cuales el coeficiente de acoplamiento magnético es $k = 0.8$, $\ell_1 = 20$[cm], $\ell_2 = 10$[cm], $N_1 = 5000$, $N_2 = 2000$, $\mu_1 = 100\mu_0$, $\mu_2 = 50\mu_0$ y $r = 1$[cm]. Con base en la figura y en los datos que se proporcionan, calcule:



a) El vector campo magnético en el origen que produce el solenoide L_1, para $t = 5$[ms].

b) La inductancia propia del solenoide L_1 y L_2.

c) La inductancia mutua entre los solenoides.

d) La diferencia de potencial V_{ab} en el intervalo: $0 \le t \le 15$[ms].

Resolución:

a) Como el origen es uno de los puntos extremos del solenoide de 1, se tiene:

$$\vec{B}_{01} = \frac{\mu_1 i N_1}{2\ell_1}(\hat{j}) = \frac{100(4\pi \times 10^{-7})(2)5000}{2(0.2)}\hat{j} = 3.1416\hat{j}\,[\mathrm{T}]$$

b) Sabemos que $L_1 = \dfrac{N_1\phi_{11}}{i_1}$ y $\phi_{11} = B_1 A_1 \therefore L_1 = \dfrac{N_1\mu_1 N_1 i_1 A_1}{i_1\ell_1} = \dfrac{100(4\pi \times 10^{-7})(5000)^2\pi(0.01)^2}{0.2}$

$$L_1 = 4.9348[\mathrm{H}] \text{ y } L_2 = \frac{\mu_2 N_2^2 A_2}{\ell_2} = \frac{50(4\pi \times 10^{-7})(2000)^2\pi(0.01)^2}{0.1} = 0.7896[\mathrm{H}]$$

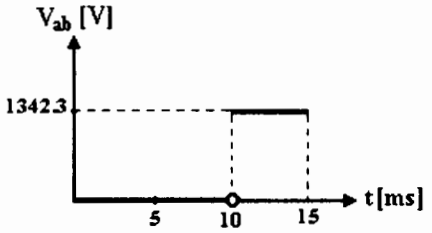
c) De acuerdo con la información disponible: $M = k\sqrt{L_1 L_2}$; $M = 0.8\sqrt{4.9348(0.7896)} = 1.5791$[H]

d) De acuerdo con la ley de Faraday, la fuerza electromotriz neta V_{ab} es:

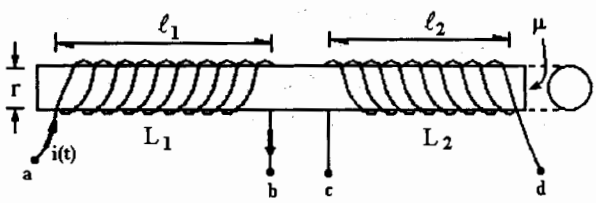
$$|V_{ab}| = (L_1 - M)\left|\frac{di}{dt}\right| = (4.9348 - 1.5791)\left|-\frac{2}{5 \times 10^{-3}}\right| = 1342.28[\mathrm{V}] \text{ para } t \ge 10[\mathrm{ms}]$$

además, empleando el Principo de Lenz, como $i\downarrow$: $V_a > V_b$; $V_{ab} = 1342.3$[V]

Para el intervalo $0 \le t < 10$[ms] , $\dfrac{di}{dt} = 0$ y $V_{ab} = 0$; en resumen:



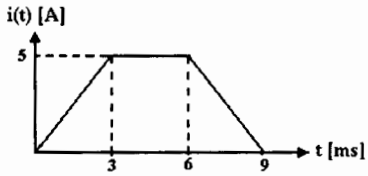
2. En la figura se muestran dos conductores cercanos devanados sobre el mismo núcleo de permeabilidad magnética $\mu = 100\mu_0$, $\ell_1 = 8$, $\ell_2 = 10$ y $r = 0.5$ en [cm], $N_1 = 100$ y $N_2 = 120$ espiras, con base en la figura y los datos, calcule:



a) La autoinductancia de cada inductor.

b) El coeficiente de inducción mutua M.

c) La fem inducida V_{cd} en el inductor L_2 para el instante $t = 8$[ms], si en el inductor L_1 circula la corriente mostrada en la gráfica.



d) La inductancia equivalente entre *a* y *d* si se conectan las terminales *b* y *c*; dibuje su representación simbólica.

Resolución:

a) Si se parte de $L = \dfrac{N\phi}{i}$ se llega a $L = \dfrac{\mu N^2 A}{\ell}$ para solenoides largos: $\ell \gg r$

$$L_1 = \frac{100(4\pi \times 10^{-7})(100)^2\pi(0.5 \times 10^{-2})^2}{0.08} = 1.234[\text{mH}] \text{ y también:}$$

$$L_2 = \frac{100(4\pi \times 10^{-7})(120)^2\pi(0.5 \times 10^{-2})^2}{0.10} = 1.421[\text{mH}]$$

b) Como la permeabilidad del núcleo es mucho mayor que la del vacío, el flujo producido por L_1 enlaza totalmente a L_2 y en consecuencia $k = 1$

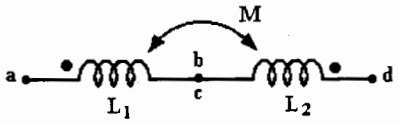
$$\therefore\ M = k\sqrt{L_1 L_2}\ ;\ M = (1)\sqrt{1.234(1.421)} = 1.324[\text{mH}]$$

c) Aplicando la ley de Faraday se tiene: $|\varepsilon_2| = \left|M\dfrac{di}{dt}\right| = 1.324 \times 10^{-3}\left|\dfrac{0-5}{(9-6)10^{-3}}\right|$

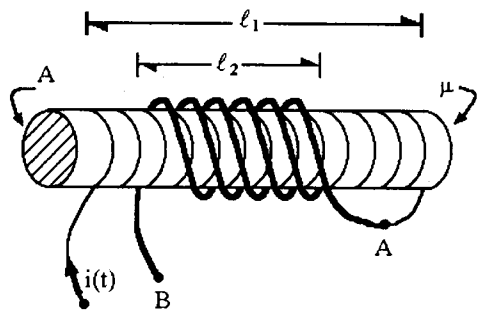
$\varepsilon_2 = 2.21$[V], con el principio de Lenz $V_c > V_d$, ya que $i_1 \downarrow$, $V_{cd} = 2.21$[V]

d) Al realizar la conexión indicada los inductores quedan conectados en serie; después de analizar los sentidos de los flujos magnéticos se puede establecer: $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$ y sustituyendo valores:
$L_{eq} = [1.234 + 1.421 - 2(1.324)]$[mH] $= 7[\mu\text{H}]$

y la representación simbólica es:



3. Por dos solenoides coaxiales y sobrepuestos, como los de la figura, circula una corriente alterna dada por: $i(t) = 0.5\,\text{sen}\,120\pi t\,[\text{A}]$. Despreciando la resistencia de los solenoides y empleando $\ell_1 = 20$ y $\ell_2 = 10$ en [cm], $N_1 = 1000$ y $N_2 = 500$ espiras, $A = 3.1416[\text{cm}^2]$ y $\mu = 5\mu_0$, calcule:



a) La inductancia propia de cada solenoide.

b) La inductancia mutua y el coeficiente de acoplamiento.

c) La inductancia equivalente a la conexión.

d) La diferencia de potencial V_{AB} en el instante $t = 1/6\,[\text{s}]$.

Resolución:

a) El área de cada espira es $A = \pi r^2$; $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$; $r = \sqrt{\dfrac{3.1416}{\pi}}\,[\text{cm}] = 1\,[\text{cm}]$, como $\ell_1 \gg r$ y $\ell_2 \gg r$, los solenoides son largos y sus inductancias se obtienen:

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 A_1}{\ell_1} = \frac{5(4\pi \times 10^{-7})(1000)^2(3.1416 \times 10^{-4})}{0.20} = 9.87\,[\text{mH}]$$ y para el otro inductor:

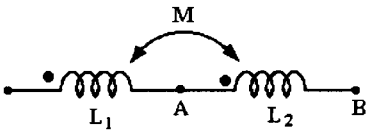
$$L_2 = \frac{\mu N_2^2 A}{\ell_2} = \frac{5(4\pi \times 10^{-7})(2000)^2(3.1416 \times 10^{-4})}{0.10} = 4.935\,[\text{mH}]$$

b) La inducción mutua: $M = \dfrac{N_2\phi_{21}}{i_1} = \dfrac{N_2\phi_{11}}{i_1} = \dfrac{N_2 B_1 A}{i_1} = \dfrac{N_2 \mu N_1 i_1 A}{i_1 \ell_1} = \dfrac{\mu N_1 N_2 A}{\ell_1}$

$$M = \frac{5(4\pi \times 10^{-7})(1000)(500)3.1416 \times 10^{-4}}{0.20} = 4.935\,[\text{mH}]$$ y el coeficiente de acoplamiento, como

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}\ ;\ k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{4.935\,[\text{mH}]}{\sqrt{9.87(4.935)}\,[\text{mH}]} = 0.7071$$

c) La representación simbólica de la conexión es

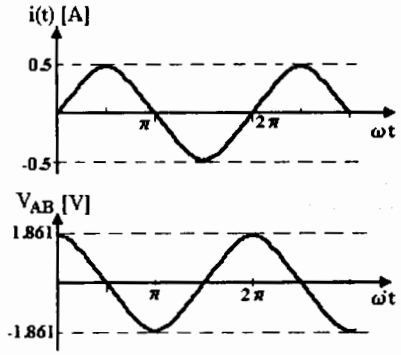


y su valor: $L = L_1 + L_2 + 2M$

$$L = 9.87 + 4.935 + 2(4.935)\,[\text{mH}]$$

$$L = 24.675\,[\text{mH}]$$

d) Con la ley de Faraday: $V_{AB} = (L_2 + M)\dfrac{di}{dt} = (4.935 + 4.935)10^{-3}\dfrac{d}{dt}(0.5\,\text{sen}\,120\pi t)$



$$V_{AB} = 9.87 \times 10^{-3}(120\pi)(0.5)\cos 120\pi t\,[\mathrm{V}]$$

$$V_{AB} = 1.861 \cos 120\pi t\,[\mathrm{V}] \quad \text{y para} \quad t_1 = \frac{1}{6}[\mathrm{s}]$$

$$V_{AB1} = 1.861 \cos 120\pi \left(\frac{1}{6}\right) = 1.835[\mathrm{V}]$$

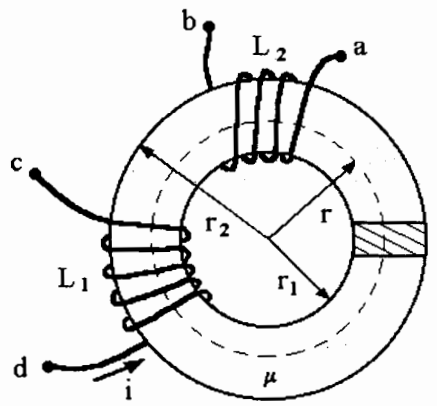
con el principio de Lenz, cuando $i(t) \uparrow \; V_A > V_B \,,\; V_{AB} > 0$

Como $\omega t = 120\pi t,\; \omega = 120\pi,\; \omega = 2\pi f$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 60[\mathrm{Hz}] \text{ y } T = \frac{1}{f} = 0.01667[\mathrm{s}]$$

$$t_1 = \frac{1}{6}[\mathrm{s}] \approx 10[\mathrm{T}]$$

4. En el toroide ferromagnético $(\mu = 500\mu_0)$ de sección circular mostrado en la figura con $r_1 = 26$ y $r_2 = 30$ en [cm], se tienen devanados dos inductores: $L_1 = 6$[mH] y $L_2 = 4$[mH]. Si se conectan las terminales *b* y *c* de los inductores y por ellos circula una corriente $i = 25t^2$, calcule:



a) El número de espiras N_1 y el N_2 de los embobinados.

b) El flujo magnético promedio en la sección del toroide.

c) El inductor equivalente y su representación simbólica.

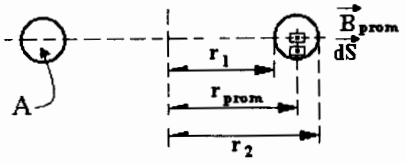
d) La diferencia de potencial $V_{ad}(t)$ como función del tiempo.

Resolución:

a) Para calcular N_1, partimos del valor de $L_1 = \dfrac{N_1\phi_{11}}{i_1}$; $\phi_{11} = \int\int \vec{B}_{prom}\cdot d\vec{S} = \int\int \dfrac{N_1\mu i_1}{2\pi r_{prom}} dS\cos\alpha$

como $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$

$$\phi_{11} = \frac{N_1\mu i_1}{2\pi r_{prom}}A \;;\; L_1 = \frac{N_1\mu N_1 i_1 A}{i_1 2\pi r_{prom}} = \frac{\mu N_1^2 A}{2\pi r_{prom}} \;;\; N_1 = \sqrt{\frac{2\pi r_{prom} L_1}{\mu A}}$$



$$N_1 = \sqrt{\frac{2\pi(0.28)6\times10^{-3}}{500(4\pi\times10^{-7})\pi(0.30-0.26)^2/4}} = 115.62 \approx 116 \text{ espiras}$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{2\pi(0.28)4\times10^{-3}}{500(4\pi\times10^{-7})\pi(0.02)^2}} = 94.40 \approx 95 \text{ espiras}$$

b) El flujo magnético promedio se obtiene con $\phi_{prom} = \int\int \vec{B}_{prom}\cdot d\vec{S}$, para $\vec{B}_{prom}$ se toma $r_{prom} = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$;

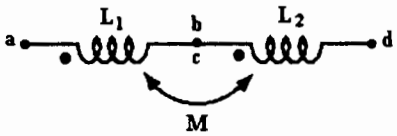
$$\phi_{prom} = B_{prom}A \;;\; \phi_{prom} = B_{prom}\pi\frac{(r_2 - r_1)^2}{4} \;;\; \phi_{prom} = \frac{\mu N_T i A}{2\pi r_{prom}} \text{ [Wb]}$$

$$\phi_{prom} = \frac{500\mu_0(N_1 + N_2)iA}{2\pi r_{prom}} = \frac{500(4\pi\times10^{-7})(116+95)\pi(0.04)^2}{2\pi(0.28)(4)}\left[25t^2\right] \text{ ; se observa: } \phi_{prom} = f(t)$$

para $t = 1$[s] ; $\phi_{prom} = 2.367$[mWb]

c) Como $\mu \gg \mu_0$, se considera que $k = 1$ y $M = k\sqrt{L_1 L_2}$; $M = (1)\sqrt{6(4)[\text{mH}]^2} = 4.8989[\text{mH}]$

La representación simbólica es:



y su valor: $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$

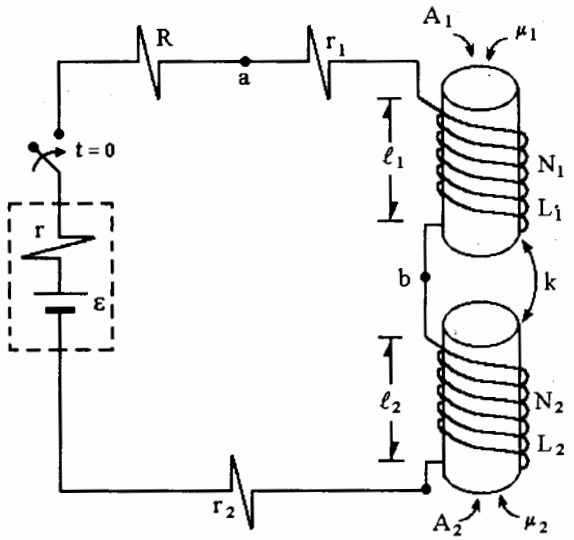
$L_{eq} = 6 + 4 + 2(4.8989) = 19.7979[\text{mH}]$

d) Con la ley de Faraday: $|V_{ad}(t)| = \left|L_{eq}\dfrac{di(t)}{dt}\right| = \left|19.7979 \times 10^{-3}\dfrac{d}{dt}(25t^2)\right| = 19.7979(50t)[\text{mV}]$

$|V_{ad}(t)| = 0.9898t[\text{V}]$; como $t \geq 0$, $i\uparrow$ y $V_d > V_c$ $\therefore$ $V_{ad}(t) = -0.9898t[\text{V}]$

5. En un circuito como el mostrado en la figura, se conectan una fuente real $\varepsilon = 20[\text{V}]$ y $r = 2[\Omega]$, un resistor $R = 20[\Omega]$ y dos inductores reales L_1 y L_2, en los cuales:

$A_1 = A_2 = 12[\text{cm}^2]$	$r_1 = 3[\Omega]$
$\ell_1 = \ell_2 = 20[\text{cm}]$	$r_2 = 15[\Omega]$
$\mu_1 = \mu_2 = 10\mu_0$	$k = 0.8$
$N_1 = 1000$ espiras	$N_2 = 5000$ espiras



Determinar:

a) El circuito equivalente en su expresión mínima (una fuente, un resistor y un inductor equivalentes).

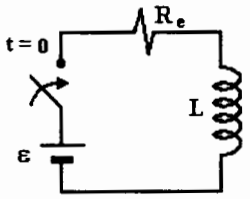
b) La diferencia de potencial V_{ab} para $t = 2\tau_L$.

c) La energía total ($t \to \infty$) almacenada en el campo magnético de los inductores.

d) El instante en que la diferencia de potencial entre las terminales de R es 5 [V].

Resolución:

a) El circuito equivalente será el siguiente:



$$\varepsilon = 20[\text{V}] \; ; \; R_e = r + R + r_1 + r_2 \; ; \; R_e = 2 + 20 + 3 + 15 = 40[\Omega]$$

$$\text{y } L = L_1 + L_2 + 2\text{M}$$

$$L_1 = \frac{\mu_1 N_1^2 A}{\ell_1} = \frac{4\pi \times 10^{-6}(10^3)^2(12 \times 10^{-4})}{0.20} = 0.0754[\text{H}]$$

$$L_2 = \frac{\mu_2 N_2^2 A}{\ell_2} = \frac{4\pi \times 10^{-6}(5 \times 10^3)^2(12 \times 10^{-4})}{0.20} = 1.8849[\text{H}]$$

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.8\sqrt{0.0754(1.8849)} = 0.3016[\text{H}]$$

$$L = 0.0754 + 1.8849 + 2(0.3016) = 2.5635[\text{H}]$$

b) Con la ley de voltajes de Kirchhoff: $V_{ab} = r_1 i + L_1 \dfrac{di}{dt} + M\dfrac{di}{dt}$; al resolver la ecuación diferencial $R_e i + L\dfrac{di}{dt} = \varepsilon$ se obtiene:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_e}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \; ; \; \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{t}{\tau_L}} \; ; \; \tau_L = \frac{L}{R_e} = \frac{2.5635[\text{H}]}{40[\Omega]} = 0.0641[\text{s}] = 64.1[\text{ms}]$$

para $t = 2\tau_L$:

$$i = \frac{20}{40}(1 - e^{-2}) = 0.4323[\text{A}] \; ; \; \frac{di}{dt} = \frac{20[\text{V}]}{2.5635[\text{H}]} e^{-2} = 1.056 \left[\frac{\text{A}}{\text{s}}\right]$$

$$\therefore \; V_{ab} = 3(0.4323) + (0.0754 + 0.3016)1.056 = 1.297 + 0.398 = 1.695[\text{V}]$$

c) La energía en los inductores se obtiene con $U = \frac{1}{2}Li^2$; cuando $t \to \infty$

$$i \to I = \frac{\varepsilon}{R_e} \; ; \; \therefore \; U_{t \to \infty} = 0.5(2.5635)\left(\frac{20}{40}\right)^2 = 0.3204[\text{J}]$$

d) Para encontrar el instante en que $V_R = 5[\text{V}]$, analicemos lo siguiente:

$V_R = Ri$, sabemos que $i = \frac{\varepsilon}{R_e}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$ entonces $V_R = R\frac{\varepsilon}{R_e}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$

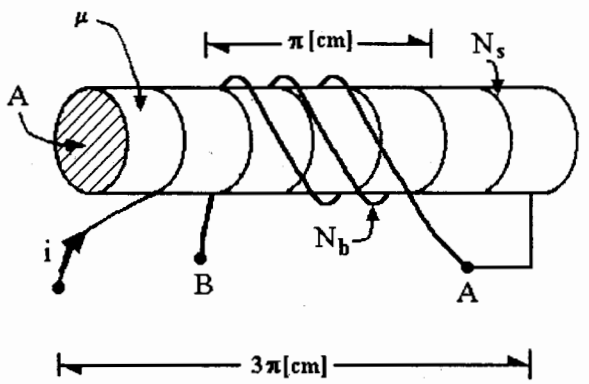
$\frac{V_R R_e}{R\,\varepsilon} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}$; $1 - \frac{V_R R_e}{\varepsilon R} = e^{-\frac{t}{\tau_L}}$; tomando logaritmos naturales: $\text{Ln}\left[1 - \frac{V_R R_e}{\varepsilon R}\right] = \frac{-t}{\tau_L}$

y $t = -\tau_L \text{Ln}\left[1 - \frac{V_R R_e}{\varepsilon R}\right]$; si $V_R = 5[\text{V}]$ en el circuito de la figura:

$$t = -\tau_L \text{Ln}\left[1 - \frac{5(40)}{20(20)}\right] = -\tau_L \text{Ln}(0.5) \; ; \; t = -\tau_L(-0.693) = 0.693\tau_L$$

y como $\tau_L = 0.0641[\text{s}]$; $t = 0.0444[\text{s}]$; $t = 44.4[\text{ms}]$

6. Un solenoide y una bobina se encuentran enrollados como se indica en la figura, en la cual $A = 10[\text{cm}^2]$, $\mu = 10\mu_0$, $N_S = 1800$ y $N_b = 400$ espiras; determine:



a) La inductancia mutua entre los imbobinados.

b) La representación del arreglo con la simbología adecuada y la posición de las marcas de polaridad.

c) La inductancia equivalente a los embobinados.

d) El voltaje V_{AB} en función de t , si por el arreglo circula una corriente $i(t) = 0.2\,\text{sen}\,120\pi t$.

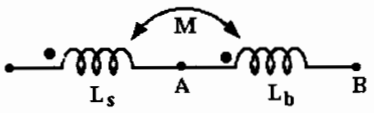
Resolución:

a) El área de la sección transversal A se obtiene como $A = \pi a^2$; $a = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

$a = \sqrt{\dfrac{10 \times 10^{-4}}{\pi}[\text{cm}^2]} = 1.78[\text{cm}]$; $\ell_S = 3\pi[\text{cm}]$ concluimos que $\ell_S > a$; $\ell_S \approx 5a$ aunque ℓ_S no es mucho mayor que a, no se cumple $\ell_S \geq 10a$, el solenoide será considerado como largo ya que $\mu = 10\mu_0 \therefore B = \dfrac{\mu N_S i_S}{l_S}$, entonces como $M = \dfrac{N_b \phi_{bS}}{i_S}$ y $\phi_{bS} = \phi_{SS} = \dfrac{\mu N_S i_S A}{\ell_S}$

$$M = \frac{N_b \mu N_S i_S A}{i_S \ell_S} = \frac{4\pi \times 10^{-6}(400)(1800)10 \times 10^{-4}}{3\pi \times 10^{-2}} = 96[\text{mH}]$$

b) El solenoide y la bobina están conectados en serie y sus flujos son de sentidos iguales, por estas razones la representación es:



$$L_S = \frac{4\pi \times 10^{-6}(1800)^2 10 \times 10^{-4}}{3\pi \times 10^{-2}}\,[\text{H}]$$

$$L_S = 432[\text{mH}]$$

$$L_b = \frac{4\pi \times 10^{-6}(400)^2 10 \times 10^{-4}}{\pi \times 10^{-2}}[\text{H}]$$

$$L_S = 64[\text{mH}]$$

c) El inductor equivalente es $L_{eq} = L_S + L_b + 2\text{M}$

Se destaca que las autoinductancias se han calculado como solenoides largos.

$$\therefore L_{eq} = [0.432 + 0.064 + 2(0.096)][\text{H}] = 0.688[\text{H}]$$

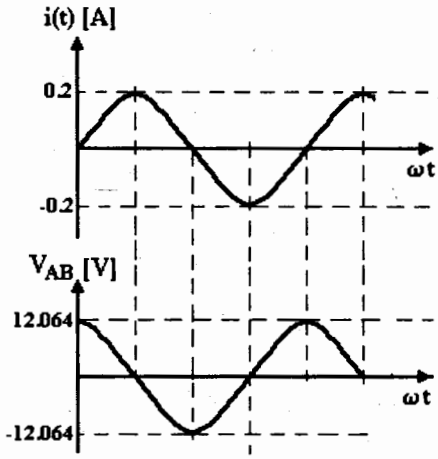
d) $|V_{AB}| = (L_b + M)\left|\frac{di}{dt}\right|$

$$= (64 + 96)10^{-3}(120\pi(0.2 \cos 120\pi t))$$

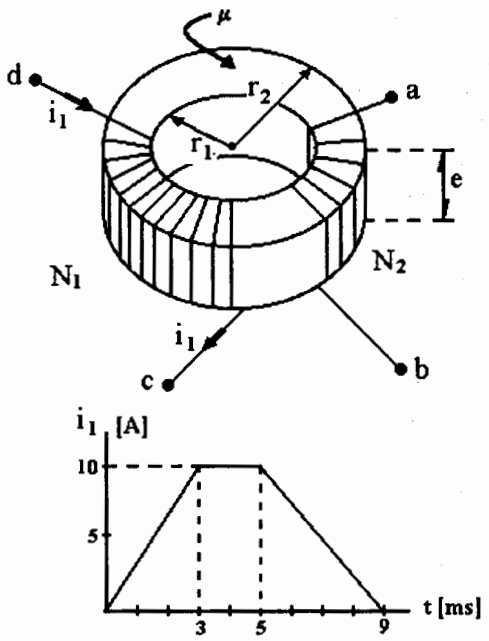
y $V_{AB} = 12.064 \cos 120\pi t$[V]

con el principio de Lenz $V_A > V_B$

en el primer cuarto de ciclo.



7. En la figura se muestra un núcleo toroidal de material ferromagnético $(\mu = 100\mu_0)$ sobre el cual se han devanado $N_1 = 850$ vueltas, por cuyo embobinado se hace circular la corriente i_1 que se presenta en la gráfica. Sobre el mismo núcleo se coloca una bobina de 25 vueltas (N_2); si $r_1 = 15$[cm], $r_2 = 20$[cm] y $e = 4$[cm], determinar:



a) El flujo magnético a través de la sección transversal del toroide, cuando $t = 4$[ms].

b) El coeficiente de inductancia mutua entre los dos embobinados.

c) La fuerza electromotriz inducida (V_{ab}) entre las terminales de la bobina, cuando $t = 7$[ms].

d) La fuerza electromotriz inducida V_{cd} en $t = 6$[ms].

Resolución:

a) De la definición $\phi_b = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int\int BdS\cos\alpha$, $\alpha = 0$ y $\cos\alpha = 1$, $\phi_b = \int\int BdS$

$$\phi_b = \int_0^e\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu N_1 i_1}{2\pi r}\,dr\,de = \frac{\mu N_1 i_1 e}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}\ ;\ \phi_b = \frac{4\pi \times 10^{-5}(850)(10)(0.04)}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\frac{20}{15} = 1.956\,[\mathrm{mWb}]$$

ya que $i_1 = 10$[A] en $t = 4$[ms]

b) El coeficiente de inducción mutua se obtiene con $M = \dfrac{N_2\phi_{21}}{i_1}$

como $\mu \gg \mu_0$; $\phi_{21} = \phi_{11} = \phi_b \therefore M = \dfrac{e\mu N_2 N_1}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{4\pi \times 10^{-5}(25)(850)0.04}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\dfrac{20}{15}$

$M = 4.8906$[mH]

c) Con la ley de Faraday: $|V_{ab}| = M\left|\dfrac{di_1}{dt}\right| = 4.8906 \times 10^{-3}\left|\dfrac{-10}{4 \times 10^{-3}}\right| = 12.2265$[V]

aplicando el principio de Lenz $V_b > V_a \therefore V_{ab} = -12.2265$[V]

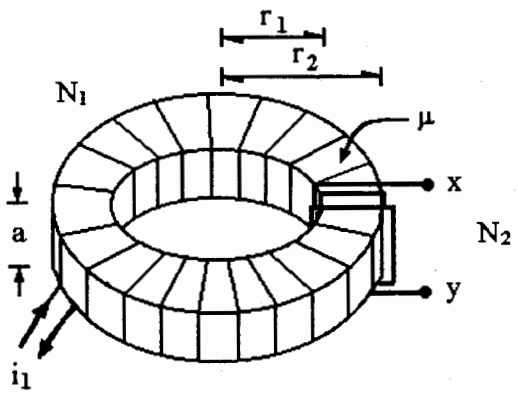
d) Aplicando la ley de Faraday: $|V_{cd}| = \left|L_1\dfrac{di_1}{dt}\right|$

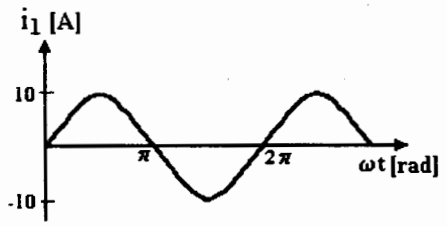
como $L_1 = \dfrac{N_1\phi_{11}}{i_1} = \dfrac{N_1\mu N_1 i_1 e}{i_1 2\pi}\,\mathrm{Ln}\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{4\pi \times 10^{-5}(850)^2 0.04}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\dfrac{20}{15} = 0.1663$[H]

entonces: $|V_{cd}| = \left|0.1663\left(\dfrac{-10}{(9-5)10^{-3}}\right)\right| = 415.7$[V] ; de acuerdo con el principio de Lenz, como $i_1 \downarrow$

(disminuye), $V_c > V_d$; $V_{cd} = 415.7$[V]

8. En la figura se muestra un núcleo toroidal de material ferromagnético con $\mu = 1000\mu_0$ sobre el cual se han devanado $N_1 = 1200$ vueltas y se le hace circular la corriente i_1 mostrada en la gráfica. Sobre el mismo núcleo se coloca un segundo devanado con $N_2 = 50$ vueltas, además: $r_1 = 20$, $r_2 = 25$ y $a = 10$ en [cm]. Con base en la figura y en la gráfica, determine:





a) El flujo magnético a través de la sección transversal del toroide en función del tiempo.

b) El valor de la fem inducida entre las terminales x y y del segundo devanado, en función del tiempo.

c) El valor máximo de la fem entre x y y en el intervalo: $0 \le \omega t \le \pi/2$ y el punto de mayor potencial, x o y.

d) Las inductancias propias y mutua de los embobinados.

Resolución:

a) A partir de la definición: $\phi = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ e integrando en la sección transversal del toroide: $\phi = \int\int BdS \cos\alpha$;

$\alpha = 0$ y $\cos\alpha = 1$, además $B_1 = \dfrac{\mu N_1 i_1}{2\pi r}$ y $dS = drda$

$$\phi = \int_0^a \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu N_1 i_1}{2\pi r}\, drda \;;\; \phi = \frac{\mu N_1 i_1 a}{2\pi} \operatorname{Ln}\frac{r_2}{r_1} \text{ y } \phi(t) = \left[\frac{\mu N_1 a}{2\pi} \operatorname{Ln}\frac{r_2}{r_1}\right] i_1(t)$$

$$\text{y } \phi(t) = \left[\frac{4\pi \times 10^{-4}(1200)0.10}{2\pi} \operatorname{Ln}\frac{25}{20}\right] 10 \text{ sen } \omega t \;;\; \phi(t) = 0.05355 \text{ sen } \omega t\,[\text{Wb}]$$

b) Con la ley de Faraday: $|\varepsilon_2| = \left|-N_2 \dfrac{d\phi(t)}{dt}\right| = N_2 \dfrac{d}{dt}[0.05355 \text{ sen } \omega t]$

$$|\varepsilon_2| = N_2(0.05355)\omega \cos\omega t \;;\; \varepsilon_2 = 2.6775\,\omega \cos\omega t\,[\text{V}]$$

c) Para el intervalo $0 \le \omega t \le \dfrac{\pi}{2}$ [rad] ; $i_1 \uparrow$ (es creciente) y $V_x > V_y$ al aplicar el principio de Lenz; por lo tanto $\varepsilon_{xy} = 2.6775\omega \cos\omega t$[V] y el valor máximo de ε_{xy} es 2.6775ω[V].

d) Como $L = \dfrac{N\phi}{i}$; $L_1 = \dfrac{\mu N_1^2 a}{2\pi} \operatorname{Ln}\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{4\pi \times 10^{-4}(1200^2)(0.1)}{2\pi} \operatorname{Ln}\dfrac{25}{20} = 6.4265$[H]

también: $L_2 = \dfrac{\mu N_2^2 a}{2\pi} \operatorname{Ln}\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{4\pi \times 10^{-4}(50)^2(0.1)}{2\pi} \operatorname{Ln}\dfrac{25}{20} = 11.16$[mH]

y $M = \dfrac{N_2\phi_{21}}{i_1} = \dfrac{50(4\pi \times 10^{-4})1200(0.1)}{2\pi} \operatorname{Ln}\dfrac{25}{20} = 267.8$[mH]

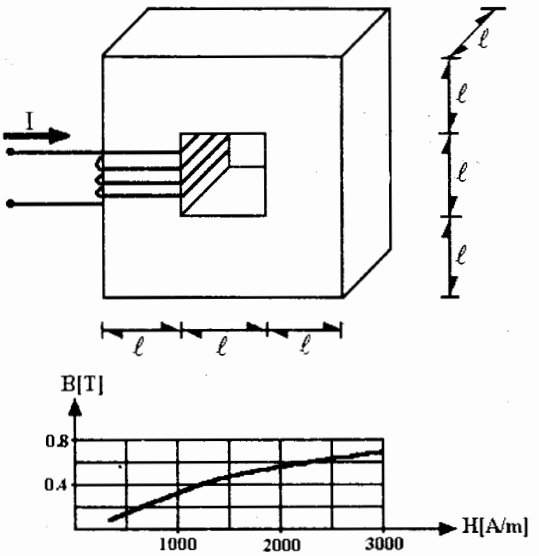
9. Se tiene una bobina de 200 vueltas devanadas sobre un núcleo toroidal ferromagnético cuya curva de magnetización aparece en la gráfica. Si $I = 1.6$[A] y $\ell = 2$[cm], obtenga:

a) La magnitud de la intensidad de campo magnético H en el núcleo.

b) La magnitud del campo magnético B en el núcleo.

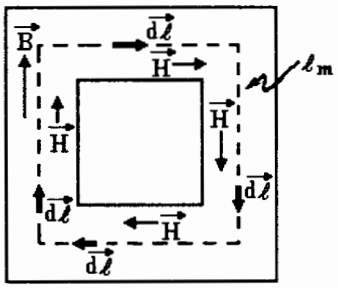
c) La reluctancia $\Re$ del núcleo.

d) El circuito magnético y su flujo.



Resolución:

a) Con base en la ley de Ampere, la circulación del vector intensidad de campo magnético H es: $c_h = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI_c$, en la cual I_c = corriente de conducción, si elegimos como trayectoria de integración la longitud media (ℓ_m) del núcleo:



$\oint H d\ell \cos\alpha = NI_c$, en la trayectoria seleccionada $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$; $H \oint d\ell = NI_c$

$$H \cdot \ell_m = NI_c \; ; \; H = \frac{NI_c}{\ell_m} = \frac{200(1.6)[\mathrm{A}]}{16 \times 10^{-2}[\mathrm{m}]} = 2000 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

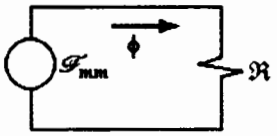
b) Con ayuda de la curva de magnetización y con el valor de H calculado, buscamos el valor de B sobre dicha curva: se encuentra que $B \doteq 0.54$[T]

c) Sabemos que $\vec{B} = \mu \vec{H}$, en magnitud $B = \mu H$, y $\mu = \dfrac{B[\mathrm{T}]}{H\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]} = \dfrac{0.54[\mathrm{T}]}{2000\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]}$

$$\mu = 2.7 \times 10^{-4} \left[\frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}\right] \; ; \; \left[\frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}\right] = \frac{\mathrm{Wb \cdot m}}{\mathrm{m^2 \cdot A}} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A \cdot m}}$$ y la reluctancia:

$$\Re = \frac{\ell_m}{\mu A} \; ; \; \Re = \frac{16 \times 10^{-2}[\mathrm{m}]}{2.7 \times 10^{-4}\left[\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A \cdot m}}\right](2 \times 10^{-2})^2[\mathrm{m^2}]} = 1.4815 \times 10^6 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}\right]$$

d) La representación del circuito magnético es la siguiente:



En este circuito es aplicable la expresión: $\mathcal{F}_{mm} = \Re\phi$

$\mathcal{F}_{mm} = NI_c = 200(1.6)[\text{A}] = 320[\text{A} \cdot \text{vuelta}]$, ésta es la fuerza magnetomotriz.

Del inciso anterior, la reluctancia es: $\Re = 1.4815\left[\dfrac{\text{MA}}{\text{Wb}}\right]$ por lo tanto, el flujo

$$\phi = \frac{\mathcal{F}_{mm}}{\Re} = \frac{320[\text{A} \cdot \text{vuelta}]}{1.4815[\text{MA/Wb}]} = 2.16 \times 10^{-4}[\text{Wb}]$$

o también $\phi = 0.216[\text{mWb}]$

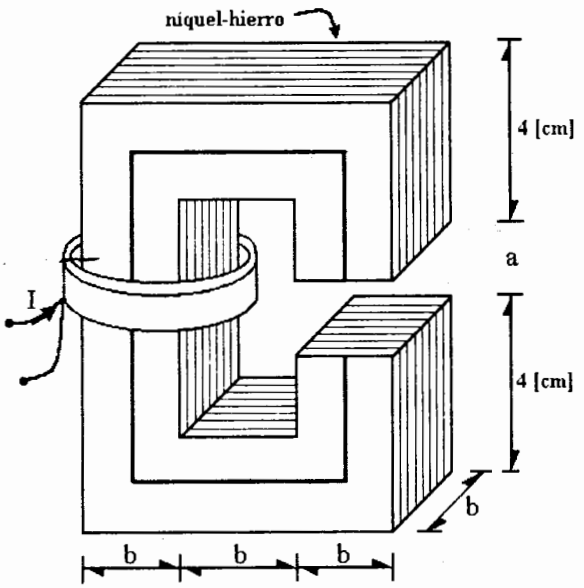
10. En el circuito magnético mostrado en la figura se tiene una bobina de $N=450$ espiras por la cual circula la corriente $I=100$[mA], el entrehierro es $a=1$[mm], $b=2$[cm] y la permeabilidad magnética del níquel-hierro es: $\mu_{nh}=4.22 \times 10^3 \mu_0$; obtener:

a) La fuerza magnetomotriz aplicada al circuito magnético.

b) El circuito magnético equivalente.

c) El valor de la reluctancia para la porción de núcleo de níquel-hierro y para el entrehierro de aire.

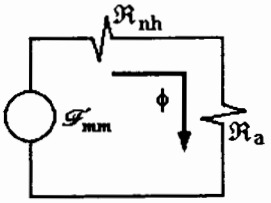
d) La magnitud de la densidad de flujo magnético B en el níquel-hierro.

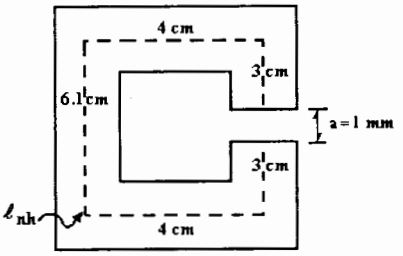


Resolución:

a) La fuerza magnetomotriz se calcula con $\mathcal{F}_{mm} = NI_c$, $I_c = I$, así $\mathcal{F}_{mm} = 450(100)[\text{mA}] = 45[\text{A} \cdot \text{vuelta}]$

b) La representación del circuito magnético es:





La trayectoria media en la porción de núcleo de níquel-hierro es:

$$\ell_{nh} = (3 + 4 + 6.1 + 4 + 3)[\text{cm}]$$

$$\ell_{nh} = 20.1[\text{cm}]$$

c) Para el núcleo $\Re_{nh} = \dfrac{\ell_{nh}}{\mu_{nh} A_{nh}} = \dfrac{20.1 \times 10^{-2}[\text{m}]}{4.22 \times 10^3 (4\pi \times 10^{-7})[\text{Wb}/[\text{A} \cdot \text{m}]] 4 \times 10^{-4}[\text{m}^2]} = 94{,}758 \left[\dfrac{\text{A}}{\text{Wb}}\right]$

para el entrehierro $\Re_a = \dfrac{a}{\mu_0 A} = \dfrac{1 \times 10^{-3}[\text{m}]}{4\pi \times 10^{-7}(\text{Wb}/[\text{A} \cdot \text{m}]) 4 \times 10^{-4}[\text{m}^2]} = 1'989{,}437 \left[\dfrac{\text{A}}{\text{Wb}}\right]$

d) En el circuito magnético se cumple que: $\mathcal{F}_{mm} = \Re_{nh}\phi + \Re_a\phi = (\Re_{nh} + \Re_a)\phi$

y el $\phi = \dfrac{\mathcal{F}_{mm}}{\Re} = \dfrac{45[\text{A}\cdot\text{vuelta}]}{2'084,195[\text{A/Wb}]} = 21.591 \times 10^{-6}[\text{Wb}] = 21.591[\mu\text{Wb}]$

de la definición: $\phi = \int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$; en este caso $\phi = BA$, en el núcleo $B_{nh} = \dfrac{\phi}{A_{nh}}$

$B_{nh} = \dfrac{21.591 \times 10^{-6}[\text{Wb}]}{4 \times 10^{-4}[\text{m}^2]} = 0.05398[\text{T}] = 53.98[\text{mT}]$, calculemos también B_a :

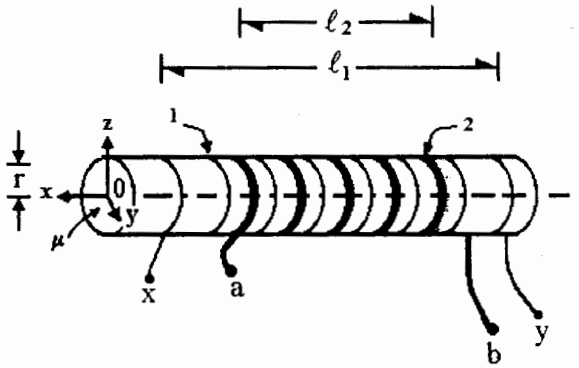
para el entrehierro $B_a = \dfrac{\phi}{A_{ap}}$, el área aparente A_{ap} se emplea para tomar en cuenta el efecto de la dispersión del flujo en el aire, en este caso:

$A_{ap} = (b + a)(b + a) = (2.1)^2[\text{cm}^2] = 4.41[\text{cm}^2]$, la cual es un poco mayor que A_{nh}

entonces: $B_a = \dfrac{21.591 \times 10^{-6}[\text{Wb}]}{4.41 \times 10^{-4}[\text{m}^2]} = 48.959[\text{mT}]$

Problemas propuestos

1. Sobre un solenoide 1 de espiras apretadas, se embobina otro solenoide 2 sobre la parte central del primero. El núcleo de los embobinados es de material ferromagnético con $\mu = 100\mu_0$ y $r_1 = 2\,[\text{cm}]$; además $\ell_1 = 50\,[\text{cm}]$, $\ell_2 = 25\,[\text{cm}]$, $N_1 = 5000$ y $N_2 = 800$ espiras; obtenga:



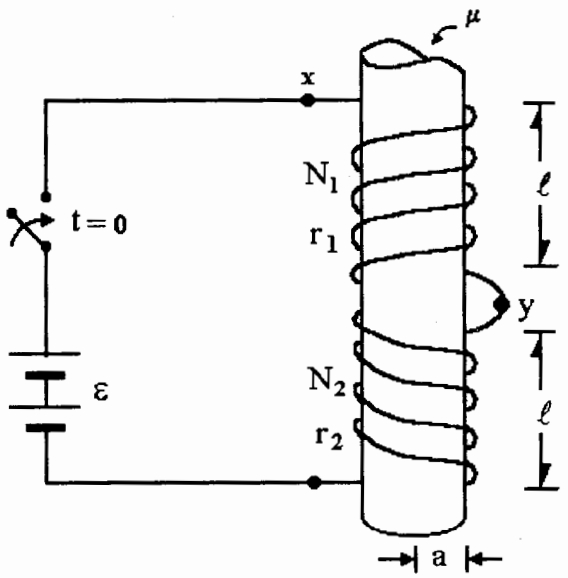
a) La autoinductancia del solenoide 1.

b) La inductancia mutua entre los solenoides.

c) El factor de acoplamiento magnético entre los solenoides.

d) El valor del inductor equivalente entre los puntos x y a, si la terminal b se conecta con la y. Dibuje la representación simbólica de esta conexión empleando marcas de polaridad.

2. Se tienen dos solenoides, uno de 150 vueltas y resistencia $r_1 = 0.1\,[\Omega]$, y otro de 300 vueltas y resistencia $r_2 = 0.2\,[\Omega]$; devanados sobre un núcleo ferromagnético de permeabilidad $\mu = 100\mu_0$ y conectados en serie con una fuente ideal $\varepsilon = 1.5\,[\text{V}]$, como indica la figura. Si el radio $a = 0.5\,[\text{cm}]$, $\ell = 5\,[\text{cm}]$ y el interruptor se cierra en $t = 0$, determine:



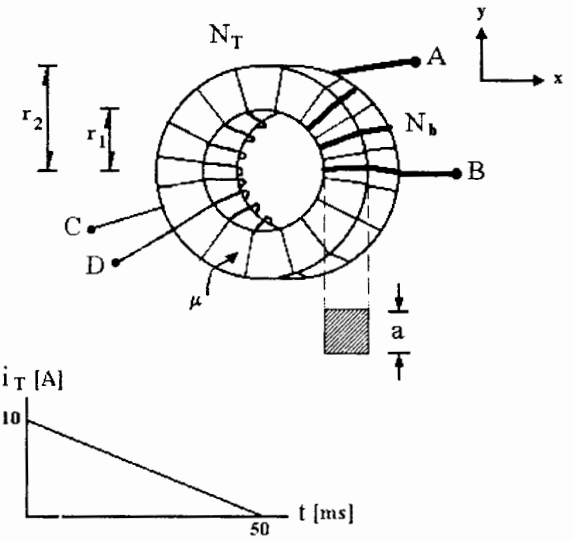
a) Las inductancias propias y mutua de los solenoides.

b) La constante de tiempo τ_L del circuito y el factor de acoplamiento entre los solenoides.

c) La energía magnética almacenada en el solenoide de 300 vueltas, en el intante $t = 10\tau_L$.

d) La diferencia de potencial V_{xy} en el instante $t = 29.56\,[\text{ms}]$.

3. Una bobina de 100 espiras se enrolla sobre una parte del toroide de sección cuadrada como se muestra en la figura. Se sabe que: $r_1 = 8[\text{cm}]$, $r_2 = 10[\text{cm}]$, $a = 2[\text{cm}]$, $N_T = 900$ espiras y $\mu = 250\mu_0$. Calcule:



a) La magnitud y sentido de la corriente i_T en el toroide para que el campo magnético debido a ésta, en el centro de la bobina, sea $\vec{B} = 0.5\hat{j}\,[\text{T}]$.

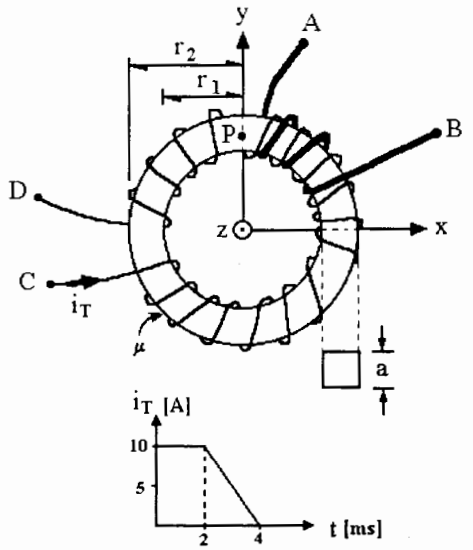
b) El flujo magnético máximo a través de la bobina, si la corriente i_T en el toroide varía como se indica en la gráfica.

c) La diferencia de potencial inducida V_{AB} si la corriente en el toroide entra por *c* y varía como se indica en la gráfica.

d) La magnitud de la corriente que circularía por un foco de resistencia $R = 10[\Omega]$ conectado entre los bornes *A* y *B*. Con ayuda de una figura indicar el sentido de la corriente en el foco.

4. Si la corriente eléctrica en el toroide de sección transversal cuadrada, como se muestra en la figura, es $i_t = 10[\text{A}]$, con:

$r_1 = 15[\text{cm}]$ $\quad \mu = 100\mu_0$
$r_2 = 25[\text{cm}]$ $\quad N_b = 200$
$r_p = 20[\text{cm}]$ $\quad N_t = 3000$
$a = 10[\text{cm}]$



Determine:

a) El campo magnético $\vec{B}_P$ en el punto *P*.

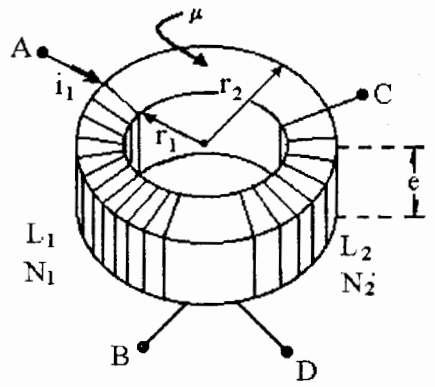
b) La fuerza magnética que actuaría sobre una partícula $\alpha(q_\alpha = 2|e|)$ que pasara por el punto *P* con velocidad $\vec{V}_\alpha = 5 \times 10^4\hat{j}\,[\text{m/s}]$.

Si la corriente i_t en el toroide varía como indica la gráfica, calcule:

c) La magnitud de la fuerza electromotriz inducida en la bobina $|\varepsilon_{AB}|$ en el instante $t = 3[\text{ms}]$.

d) El voltaje V_{AB} en $t = 2.5[\text{ms}]$.

5. Sobre un núcleo toroidal de $\mu = 100\mu_0$, de sección transversal cuadrada con $e = 5$[cm], se devanan dos embobinados $N_1 = 1000$ y $N_2 = 800$ espiras, $r_1 = 10$[cm] y $r_2 = 15$[cm], como se muestra en la figura; calcule:



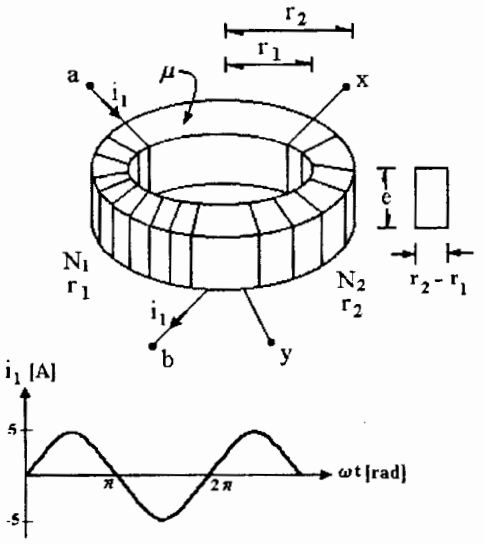
a) Los valores de L_1 y L_2.

b) La inducción mutua y el coeficiente de acoplamiento magnético entre L_1 y L_2.

c) El inductor equivalente entre las terminales A y C si la terminal B se une con la D. Represente esta conexión empleando la simbología conveniente y las marcas de polaridad.

d) La diferencia de potencial V_{CD} si $i_1 = 4\,\text{sen}\,40\pi t$[A], para un lapso de un periodo.

6. Sobre un núcleo ferromagnético de permeabilidad $\mu = 2.5 \times 10^{-4}$[Wb/(A · m)] se devanan dos bobinas como se muestra en la figura, si $r_1 = 20$, $r_2 = 25$ y $e = 10$ en [cm], $N_1 = 1000$ y $N_2 = 400$ espiras, determine:



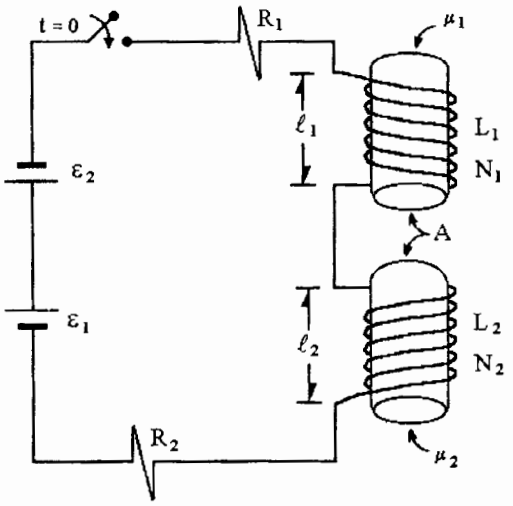
a) El flujo magnético máximo a través de la sección transversal del toroide, cuando $i_2 = 0$ e i_1 varía como indica la figura.

b) El coeficiente de inducción mutua entre los dos embobinados.

c) El voltaje inducido V_{xy}, para el intervalo $0 \le \omega t \le 2\pi$, si la corriente i_1 varía de acuerdo con la gráfica.

d) El valor del inductor equivalente entre los puntos ***a*** y ***x***, si se une la terminal ***b*** con la ***y***; suponga $L_1 = 10$[mH], $L_2 = 4$[mH] y $M = 6.325$[mH].

7. Para el circuito mostrado en la figura en el cual:



$\varepsilon_1 = 10[\text{V}]$ $\quad \varepsilon_2 = 2[\text{V}]$
$R_1 = 0.5[\Omega]$ $\quad R_2 = 0.3[\Omega]$
$\ell_1 = 25[\text{cm}]$ $\quad \ell_2 = 25[\text{cm}]$
$N_1 = 1000$ $\quad N_2 = 800$
$\mu_1 = 5\mu_0$ $\quad \mu_2 = 8\mu_0$
$A = 6[\text{cm}^2]$

Determine:

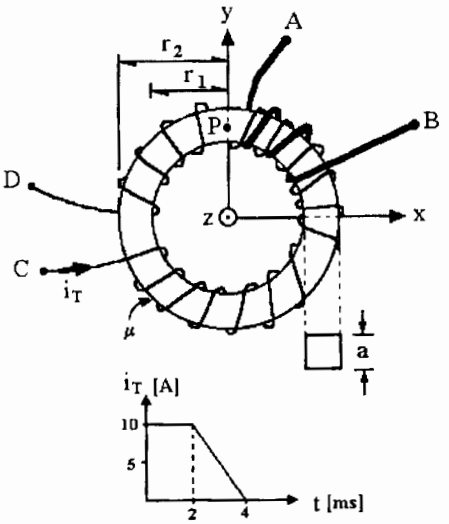
a) Los valores de L_1 y L_2.

b) El coeficiente de inducción mutua M, entre L_1 y L_2, si el factor de acoplamiento es $k = 0.8$.

c) El circuito equivalente en su expresión mínima (una fuente, un resistor y un inductor equivalentes).

d) La energía magnética almacenada en el circuito, si $t = 10\tau_L$, siendo τ_L la constante de tiempo del circuito.

8. Se tiene un toroide con núcleo ferromagnético de permeabilidad magnética $\mu = 10^2\mu_0$, altura $a = 10[\text{cm}]$, radios $r_1 = 15$ y $r_2 = 25$ en [cm], sobre el cual se devanaron $N_t = 3000$ espiras además de una bobina de $N_b = 200$ vueltas. Si la corriente i_T varía en función del tiempo, como lo indica la gráfica, calcule:



a) El flujo magnético en la sección transversal del toroide para $t = 1[\text{ms}]$.

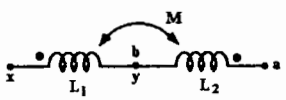
b) El coeficiente de autoinductancia del toroide.

c) La fuerza electromotriz inducida V_{AB} en el intervalo $0 \le t \le 4[\text{ms}]$.

d) La inductancia equivalente entre los puntos C y B si la terminal D del toroide se une con la terminal A de la bobina, considere que $k = 1$.

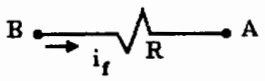
Respuestas de los problemas propuestos

1. *a)* $L_1 = 7.8957$[H]
   b) $M = 1.2633$[H]
   c) $k = 0.7071$
   d) $L_{eq} = 5.7711$[H]



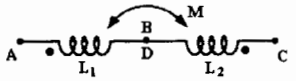
2. *a)* $L_1 = 4.44$[mH]
   $L_2 = 17.76$[mH]
   $M = 8.883$[mH]
   b) $\tau_L = 14.78$[ms] y $k = 1.0$
   c) $U_2 = 110.963$[mJ]
   d) $V_{xy} = 0.2289$[V]

3. *a)* $i_T = 1$[A], entrando por C.
   b) $\phi_{máx} = 2$[mWb]
   c) $V_{AB} = -4$[V]
   d) $i_f = 0.4$[A]



4. *a)* $\vec{B}_P = 3\hat{i}$[T]
   b) $\vec{F}_m = -4.8 \times 10^{-14}\hat{k}$[N]
   c) $|\varepsilon_{AB}| = 3065$[V]
   d) $V_{AB} = 3065$[V]

5. *a)* $L_1 = 0.4055$[H] y $L_2 = 0.2595$[H]
   b) $M = 0.3244$[H] y $k = 1.0$
   c) $L_{eq} = 16.2$[mH]



   d) $V_{CD} = 163.06 \cos 40\pi t$[V]

6. *a)* $\phi_{máx} = 4.4393$[mWb] sentido ↺
   b) $M = 0.355$[H]
   c) $V_{xy} = 669.43 \cos 120\pi t$[V]
   d) $L_{eq} = 1.35$[mH]

7. *a)* $L_1 = 15.08$[mH] y $L_2 = 15.44$[mH]
   b) $M = 12.207$[mH]
   c) $\varepsilon = 8$[V], $R = 0.8$[Ω] y
   $L = 6.106$[mH] conectados en serie
   d) $U = 0.3053$[J]

8. *a)* $\phi = 30.65$[mWb]
   b) $L_t = 9.195$[H]
   c) $V_{AB} = 0$ para $0 \leq t < 2$[ms]
   $V_{AB} = 3065$[V] para $2 \leq t \leq 4$[ms]
   d) $L_{eq} = 8.01$[H]

ÍNDICE DE CONCEPTOS

d

e

f

g

h

i

r

s

t

u

v

w

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, Marcelo y Edward J. Finn, *Física: campos y ondas*, Vol. II, 2a. ed., México, Fondo Educativo Interamericano, 1976.

Feynman, Richard P. *et al.*, *Física: electromagnetismo y materia*, Vol. II, Estados Unidos, Fondo Educativo Interamericano, 1972.

Jaramillo M., Gabriel A. y Alvarado C., Alfonso A., *Electricidad y Magnetismo*, primera reimpresión, México, Trillas, 2001.

Kip, Arthur F., *Fundamentals of Electricity and Magnetism*, 2a. ed., Estados Unidos, McGraw-Hill Kogakusha, 1973.

Lorrain, Paul y Dale R. Corson, *Electromagnetics Fields and Waves*, 2a. ed., San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1970.

_____, *Electromagnetism: Principles and Aplications*, San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1978.

McKelvey, John P. y Howard Grotch, *Física para ciencias e ingeniería*, tomo II, México, Harper & Row Latinoamericana, 1981.

Esta obra se terminó de imprimir
en agosto de 2003
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1000 ejemplares
más sobrantes de reposición.