

Si $x_{v,\tau}$, para $v = 1, 2, \dots, n$ años, y $\tau = 1, 2, \dots, \omega$ periodos en el año representa una serie periódica, entonces, las características estadísticas de cada periodo τ se estiman como:

Media

$$\bar{x}_\tau = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{v,\tau}, \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (10.11)$$

Varianza insesgada

$$S_\tau^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{v=1}^n (x_{v,\tau} - \bar{x}_\tau)^2 \quad (10.12)$$

Coefficiente de asimetría insesgado

$$g_\tau = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} g_\tau^{sesg} \quad (10.13)$$

Coefficiente de curtosis insesgado

$$k_\tau = \frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} k_\tau^{sesg} \quad (10.14)$$

Coefficiente de autocorrelación serial

$$r_{k,\tau} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (x_{v,\tau} - \bar{x}_\tau)(x_{v,\tau-k} - \bar{x}_{\tau-k})}{S_\tau S_{\tau-k}} \quad (10.15)$$

Donde

$r_{k,\tau}$ estimador del coeficiente de autocorrelación serial poblacional $\rho_{k,\tau}$

Cuando $\tau - k < 1$ los términos $\frac{1}{n}, \nu = 1, x_{\nu, \tau-k}, \bar{x}_{\tau-k}$ y $S_{\tau-k}$ de la expresión (10.15) se reemplazan por $\frac{1}{n-1}, \nu = 2, x_{\nu-1, \omega+\tau-k}, \bar{x}_{\omega+\tau-k}$ y $S_{\omega+\tau-k}$.

Para las series multivariadas, además de las características de cada serie individual, es importante determinar la relación de dependencia entre estaciones (Salas et al, 1988).

Si se tienen series anuales $X_t^s, t = 1, 2, \dots, n$ años y $s = 1, 2, \dots, ms$ sitios, entonces, la estructura de dependencia entre el sitio i y el sitio j se determina a través del coeficiente de correlación cruzada $r_k^{i,j}$ que es un estimador del valor poblacional $\rho_k^{i,j}$.

$$r_k^{i,j} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t^{(i)} - \bar{x}_t^{(i)}) (x_{t+k}^{(j)} - \bar{x}_{t+k}^{(j)})}{\left[\sum_{t=1}^{n-k} (x_t^{(i)} - \bar{x}_t^{(i)})^2 \sum_{t=1}^{n-k} (x_{t+k}^{(j)} - \bar{x}_{t+k}^{(j)})^2 \right]^{1/2}} \quad (10.16)$$

Donde

- $\bar{x}_t^{(i)}$ media de los primeros $n - k$ valores de las series i .
- $\bar{x}_{t+k}^{(j)}$ media de los últimos $n - k$ valores de las series j .

Para las ms series de tiempo la matriz de correlación se representa por

$$\hat{M}_k = \begin{bmatrix} r_k^{1,1} & r_k^{1,2} & \dots & r_k^{1,ms} \\ r_k^{2,1} & r_k^{2,2} & \dots & r_k^{2,ms} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_k^{ms,1} & r_k^{ms,2} & \dots & r_k^{ms,ms} \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

Para series periódicas la estructura de dependencia entre las series $x_{\nu, \tau}^{(i)}$ y $x_{\nu, \tau}^{(j)}$ se determina por

$$r_{k, \tau}^{i,j} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (x_{\nu, \tau}^{(i)} - \bar{x}_{\tau}^{(i)}) (x_{\nu, \tau-k}^{(j)} - \bar{x}_{\tau-k}^{(j)})}{S_{\tau}^{(i)} S_{\tau-k}^{(j)}} \quad (10.18)$$

Donde

- $r_{k,\tau}^{i,j}$ estimador del coeficiente de autocorrelación serial poblacional $\rho_{k,\tau}^{i,j}$
- $x_t^{(i)}$ media periódica en el intervalo τ de las series i .
- $x_{t+k}^{(j)}$ media periódica en el intervalo τ de las series j .
- $S_t^{(i)}$ desviación estándar periódica en el intervalo τ de las series i .
- $S_{t+k}^{(j)}$ desviación estándar periódica en el intervalo τ de las series j .

Cuando $\tau - k < 1$ los términos $\frac{1}{n}, \nu = 1, x_{\nu, \tau-k}^{(i)}, x_{\tau-k}^{(i)}$ y $S_{\tau-k}^{(i)}$ de la expresión (10.18) se reemplazan por $\frac{1}{n-1}, \nu = 2, x_{\nu-1, \omega+\tau-k}^{(j)}, x_{\omega+\tau-k}^{(j)}$ y $S_{\omega+\tau-k}^{(j)}$.

Para las ms series de tiempo la matriz de correlación de cada periodo τ se representa por

$$\hat{M}_{k,\tau} = \begin{bmatrix} r_{k,\tau}^{1,1} & r_{k,\tau}^{1,2} & \dots & r_{k,\tau}^{1,ms} \\ r_{k,\tau}^{2,1} & r_{k,\tau}^{2,2} & \dots & r_{k,\tau}^{2,ms} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k,\tau}^{ms,1} & r_{k,\tau}^{ms,2} & \dots & r_{k,\tau}^{ms,ms} \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

Gran parte de las técnicas disponibles para la modelación de las series de tiempo requieren que éstas tengan una distribución Normal, lo que muchas veces no se cumple. Para cubrir este requisito, es recomendable transformar la serie registrada x_t a otra y_t mediante el procedimiento del apartado 6.2. Una vez logrado esto y de acuerdo con el tipo de serie de que se trate, ya sea anual o periódica, se debe estandarizar la serie como:

$$z_t = y_t - \bar{y}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (10.20)$$

$$z_t = \frac{y_t - \bar{y}}{S_y}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (10.21)$$

Donde

$\bar{y}$ y S_y son la media y desviación estándar de la serie normalizada y_t .

10.2. Modelo autoregresivo anual AR(p)

La forma general del modelo es (Box y Jenkins, 1970)

$$z_t = \sum_{j=1}^p \phi_j z_{t-j} + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^p \phi_j z_{t-j} + \sigma_\varepsilon \xi_t \quad (10.22)$$

Donde

p orden del modelo auto regresivo

z_t variable estandarizada con la expresión (10.20), con $E[y_t] = \mu$ y $Var(y_t) = \sigma^2$

ε_t serie de residuales que es independiente de y_t , con $E[\varepsilon_t] = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

σ_ε desviación estándar de la serie de residuales ε_t

ξ_t serie con distribución Normal estándar $E[\xi_t] = 0$ y $Var(\xi_t) = 1$.

Las varianzas σ^2 y σ_ε^2 se relacionan como

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_j \right) \quad (10.23)$$

Donde

ϕ_j coeficiente autoregresivo

ρ_j coeficiente de autocorrelación serial de la variable y_t .

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_{|k-j|}, \quad k > 0 \quad (10.24)$$

Los parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ se estiman al resolver el sistema de p ecuaciones no lineales (10.24), donde los coeficientes ρ_j se sustituyen por los estimadores r_k de la expresión (10.10) y los parámetros ϕ_j se reemplazan por $\hat{\phi}_j$.

$$r_k = \hat{\phi}_1 r_{k-1} + \hat{\phi}_2 r_{k-2} + \dots + \hat{\phi}_p r_{k-p}, \quad k > 0 \quad (10.25)$$

Los parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ del modelo (10.22) deben cumplir las condiciones de estacionariedad, esto es, si las raíces de la ecuación característica (10.26) se ubican dentro del círculo unitario (Yevjevich, 1972)

$$u^p - \phi_1 u^{p-1} - \phi_2 u^{p-2} - \dots - \phi_p = 0 \quad (10.26)$$

La serie ξ_t se obtiene a través del procedimiento propuesto por Box y Müller (1958), el cual consiste en proponer números u_1 y u_2 con distribución uniforme en el intervalo (0,1) y sustituirlos en las expresiones (10.27) y (10.28). Este procedimiento calcula números aleatorios con distribución Normal estándar por parejas y se deberá realizar tantas veces como el tamaño de muestra deseado para el objetivo de generar muestras sintéticas.

$$\xi_1 = [2 \ln(1/u_1)]^{1/2} \cos(2\pi u_2) \quad (10.27)$$

$$\xi_2 = [2 \ln(1/u_1)]^{1/2} \sin(2\pi u_2) \quad (10.28)$$

Una vez que se han obtenido los parámetros del modelo y se ha probado que cumplen las condiciones de (10.26) se debe verificar que la serie de residuales ε_t (expresión 10.29) tiene una distribución Normal y es independiente.

$$\varepsilon_t = z_t - \sum_{j=1}^p \phi_j z_{t-j}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (10.29)$$

La normalidad se verifica considerando que el coeficiente de asimetría de los residuales $g_\varepsilon \approx 0$. La independencia se comprueba a través de la prueba de Anderson (apartado 7.3) o utilizando la Prueba de Porte Manteau (Salas et al, 1988), la cual utiliza el estadístico

$$Q = n \sum_{k=1}^L r_k^2(\varepsilon) \quad (10.30)$$

Donde

$r_k^2(\varepsilon)$ es el correlograma obtenido al aplicar la expresión (10.10) a la serie de residuales ε_t
 L es el máximo retraso considerado, $L \approx 0.30n$.

El estadístico Q esta distribuido en forma Chi-cuadrada con $L - p$ grados de libertad. Si para cierto nivel de confianza $Q < \chi^2_{(L-p)}$, entonces ε_t es independiente y el modelo adecuado.

Para seleccionar el mejor modelo que describe el comportamiento de la serie de tiempo se utiliza el criterio de información de Akaike (Akaike, 1974)

$$CIA(p) = n \ln(\sigma_\varepsilon^2) + 2p \quad (10.31)$$

Dentro de las opciones que se manejen en el modelado, la mejor opción será aquel que proporcione el mínimo valor de CIA.

10.2.1. Modelo autoregresivo anual AR(1)

La forma del modelo es

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (10.32)$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \sigma_\varepsilon \xi_t \quad (10.33)$$

De la expresión (10.24), la función de autocorrelación es

$$\rho_k = \phi_1^k, \quad k \geq 0. \quad (10.34)$$

De acuerdo con la expresión (10.25) el parámetro auto regresivo se estima como

$$\phi_1 = r_1 \quad (10.35)$$

Para cubrir la condición de estacionareidad (10.26) se debe cumplir que

$$\begin{aligned} -1 < \phi_1 < 1 \\ -1 < \rho_1 < 1 \end{aligned} \quad (10.36)$$

La serie de residuales se obtiene para $t = 2, 3, \dots, n$ con la expresión (10.37) y se considera que $\varepsilon_1 = 0$.

$$\varepsilon_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} \quad (10.37)$$

La varianza de los residuales se obtiene a partir de la expresión (10.23) como

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2(1 - \phi_1^2) \quad (10.38)$$

Donde

σ^2 es la varianza de la serie normalizada y_t .

La versión insesgada de la expresión (10.38) se obtiene por

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{n}{(n-1)} \sigma^2(1 - \phi_1^2) \quad (10.39)$$

10.2.2. Modelo autoregresivo anual AR(2)

La forma del modelo es

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t \quad (10.40)$$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \sigma_\varepsilon \xi_t \quad (10.41)$$

De la expresión (10.24), la función de autocorrelación es

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{(1 - \phi_2)}, \quad k = 1 \quad (10.42)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k > 1 \quad (10.43)$$

La expresión debe resolverse recursivamente considerando los valores $\rho_0 = 1$ y ρ_1 de (10.42).

De acuerdo con la expresión (10.25) los parámetros auto regresivos se estiman como

$$\phi_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_1^2} \quad (10.44)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} \quad (10.45)$$

Para cubrir la condición de estacionariedad (10.26) se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 &< 1 \\ \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1 &< 1 \\ -1 &< \hat{\phi}_2 < 1 \\ -1 &< \rho_1 < 1 \\ -1 &< \rho_2 < 1 \\ \rho_1^2 &< (1 + \rho_2)/2 \end{aligned} \quad (10.46)$$

La serie de residuales se obtiene para $t = 3, 4, \dots, n$ con la expresión (10.47) y se considera que $\varepsilon_1 = 0$ y $\varepsilon_2 = 0$.

$$\varepsilon_t = z_t - \hat{\phi}_1 z_{t-1} - \hat{\phi}_2 z_{t-2} \quad (10.47)$$

La varianza de los residuales se obtiene a partir de la expresión (10.23) como

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 \frac{(1 + \hat{\phi}_2)}{(1 - \hat{\phi}_2)} [(1 - \hat{\phi}_2)^2 - \hat{\phi}_1^2] \quad (10.48)$$

Donde

σ^2 es la varianza de la serie normalizada y_t .

La versión insesgada de la expresión (10.48) se obtiene por

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{n}{(n-2)} \sigma^2 \frac{(1 + \hat{\phi}_2)}{(1 - \hat{\phi}_2)} [(1 - \hat{\phi}_2)^2 - \hat{\phi}_1^2] \quad (10.49)$$

Ejemplo 10.1. Obtener una muestra sintética a partir del registro de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Año	V anual (Mm ³)	Año	V anual (Mm ³)
1953	2304.3	1962	2454.4
1954	3388.5	1963	2536.1
1955	3244.0	1964	2698.1
1956	3291.4	1965	3348.6
1957	2385.4	1966	3070.1
1958	4415.9	1967	2875.8
1959	3234.8	1968	3623.6
1960	3748.6	1969	3909.1
1961	4027.1	1970	2768.5

Tabla 10.1. Serie de volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Con la información de la tabla 10.1 y las expresiones (10.1) a (10.8) se obtienen las características estadísticas insesgadas de la tabla 10.2. Con el fin de determinar si la serie es independiente se calcula el correlograma con las expresiones (10.9), (10.10) y (7.13) y los resultados se muestran en la tabla 10.3. De acuerdo con estos, la serie es independiente al 95% de confianza y por tanto se puede ajustar un modelo estocástico.

Estadístico	Serie : V anual (Mm ³)
Media	3184.7
Desviación estándar	605.5
Coefficiente de asimetría	0.341
Coefficiente de curtosis	3.168
Coefficiente de variación	0.190

Tabla 10. 2. Estadísticos insesgados de la serie de volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

k	C_k	Lím. inf. r_k	r_k	Lím. sup. r_k
0	346290.6		1	
1	-39623.7	-0.5200	-0.1144	0.4023
2	-25674.4	-0.5369	-0.0741	0.4119
3	-12124.1	-0.5555	-0.0350	0.4222
4	-34759.3	-0.5762	-0.1003	0.4333
5	-128731.4	-0.5992	-0.3717	0.4453
6	-78526.4	-0.6250	-0.2267	0.4583

Tabla 10.3. Correlograma de la serie de volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

La serie de volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec es normalizada vía la transformación de los logaritmos naturales (Tabla 10.4).

Año	$Y = \ln(V \text{ anual})$	Año	$Y = \ln(V \text{ anual})$
1953	7.7425	1962	7.8056
1954	8.1281	1963	7.8384
1955	8.0846	1964	7.9003
1956	8.0991	1965	8.1163
1957	7.7771	1966	8.0295
1958	8.3930	1967	7.9641
1959	8.0817	1968	8.1952
1960	8.2291	1969	8.2711
1961	8.3008	1970	7.9261

Tabla 10.4. Serie normalizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Con la información de la tabla 10.4 y las expresiones (10.1) a (10.8) se obtienen las características estadísticas insesgadas de la tabla 10.5. Con el fin de determinar si la serie es independiente se calcula el correlograma con las expresiones (10.9), (10.10) y (7.13) y los resultados se muestran en la tabla 10.6. De acuerdo con estos, la serie es independiente al 95% de confianza y por tanto se pueden utilizar los coeficientes de autocorrelación serial para la estimación de parámetros por momentos de los modelos estocásticos.

Estadístico	Serie : $Y = \ln(V \text{ anual})$
Media	8.0490
Desviación estándar	0.1900
Coeficiente de asimetría	-0.0090
Coeficiente de curtosis	2.8790
Coeficiente de variación	0.0240

Tabla 10. 5. Estadísticos insesgados de la serie normalizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

k	C_k	Lím. inf. r_k	r_k	Lím. sup. r_k
0	0.0342		1	
1	-0.0035	-0.5200	-0.1028	0.4023
2	-0.0034	-0.5369	-0.1011	0.4119
3	-0.0034	-0.5555	-0.1019	0.4222
4	-0.0021	-0.5762	-0.0623	0.4333
5	-0.0107	-0.5992	-0.3124	0.4453
6	-0.0066	-0.6250	-0.1937	0.4583

Tabla 10.6 Correlograma de la serie normalizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Aplicando la expresión (10.20) se procede a estandarizar la serie normalizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec (Tabla 10.7).

Año	$Z = Y - \bar{Y}$	Año	$Z = Y - \bar{Y}$
1953	-0.3065	1962	-0.2434
1954	0.0791	1963	-0.2106
1955	0.0355	1964	-0.1487
1956	0.0500	1965	0.0673
1957	-0.2719	1966	-0.0196
1958	0.3439	1967	-0.0849
1959	0.0327	1968	0.1462
1960	0.1801	1969	0.2220
1961	0.2518	1970	-0.1230

Tabla 10.7. Serie estandarizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Para el modelo AR(1):

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

El parámetro ϕ_1 se estima por momentos como

$$\hat{\phi}_1 = r_1 = -0.1028$$

La condición de estacionariedad se cumple ya que

$$-1 < \hat{\phi}_1 = -0.1028 < 1$$

La serie de residuales de la tabla 10.8 se obtiene para $t = 2, 3, \dots, n$ con los valores de la tabla 10.7 y la expresión (10.37).

Año	$\varepsilon_t = z_t - \hat{\phi}_1 z_{t-1}$	Año	$\varepsilon_t = z_t - \hat{\phi}_1 z_{t-1}$
1953	0.0000	1962	-0.2175
1954	0.0476	1963	-0.2357
1955	0.0437	1964	-0.1704
1956	0.0537	1965	0.0520
1957	-0.2668	1966	-0.0126
1958	0.3160	1967	-0.0870
1959	0.0681	1968	0.1375
1960	0.1835	1969	0.2371
1961	0.2703	1970	-0.1001

Tabla 10.8. Serie de residuales del modelo AR(1) ajustado a la serie estandarizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Ahora se debe probar la normalidad e independencia de la serie de residuales, para lo cual se obtienen sus estadísticos y el correlograma (Tablas 10.9 y 10.10). De acuerdo con los resultados, la serie si cumple las dos condiciones.

Estadístico	Serie : $\varepsilon_t = z_t - \phi_1 z_{t-1}$
Media	0.0018
Desviación estándar	0.1730
Coeficiente de asimetría	-0.0290
Coeficiente de curtosis	3.0100
Coeficiente de variación	9.7800

Tabla 10.9. Estadísticos inesgados de la serie de residuales del modelo AR(1) ajustado a la serie estandarizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

k	C_K	Lím. inf. r_k	r_k	Lím. sup. r_k
0	0.0342		1	
1	-0.0035	-0.5200	-0.1028	0.4023
2	-0.0034	-0.5369	-0.1011	0.4119
3	-0.0034	-0.5555	-0.1019	0.4222
4	-0.0021	-0.5762	-0.0623	0.4333
5	-0.0107	-0.5992	-0.3124	0.4453
6	-0.0066	-0.6250	-0.1937	0.4583

Tabla 10.10. Correlograma de la serie de residuales del modelo AR(1) ajustado a la serie estandarizada de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

El estimador para la varianza de los residuales se obtiene como

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{n}{(n-1)} \sigma^2 (1 - \phi_1^2) = \frac{18}{(18-1)} (0.19)^2 [1 - (-0.1028)^2] = 0.038$$

El criterio de información de Akaike para el modelo AR(1) es

$$CIA(1) = 18 \ln(0.038) + 2 = -56.86$$

Para el modelo AR(2): $z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$

Los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 se estiman por momentos con las expresiones

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2} = \frac{-0.1028[1-(-0.1011)]}{1-(-0.1028)^2} = -0.1144$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1-r_1^2} = \frac{-0.1011 - (-0.1028)^2}{1-(-0.1028)^2} = -0.1129$$

La condición de estacionariedad se cumple ya que $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 < 1$, $\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1 < 1$ y $-1 < \hat{\phi}_2 < 1$

Los residuales del modelo se obtienen con la expresión (10.47). Al igual que con el modelo AR(1) se debe probar que esta serie se distribuye en forma Normal y es independiente.

La varianza de los residuales se obtiene a partir de la expresión (10.49) como

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{n}{(n-2)} \sigma^2 \frac{(1+\hat{\phi}_2)}{(1-\hat{\phi}_2)} [(1-\hat{\phi}_2)^2 - \hat{\phi}_1^2] = 0.03986$$

El criterio de información de Akaike para el modelo AR(2) es

$$CIA(2) = 18 \ln(0.03986) + 4 = -53.99$$

La mejor opción para la serie analizada es el modelo AR(1) ya que $CIA(1) < CIA(2)$

El proceso de generación de la muestra sintética se lleva a cabo con la expresión

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \sigma_\varepsilon \xi_t$$

Los números aleatorios con distribución Normal estándar se obtienen con las expresiones (10.27) y (10.28)

Para dos números generados con distribución uniforme (0,1), $u_1 = 0.674$ y $u_2 = 0.565$

$$\xi_1 = [2 \ln(1/0.674)]^{1/2} \cos[2\pi(0.565)] = -0.815$$

$$\xi_2 = [2 \ln(1/0.674)]^{1/2} \sin[2\pi(0.565)] = -0.352$$

Dado que se requiere generar una muestra de 18 años, el proceso anterior se debe repetir 8 veces más, así

$$\xi_3 = [2 \ln(1/0.371)]^{1/2} \cos[2\pi(0.009)] = 1.406$$

$$\xi_4 = [2 \ln(1/0.371)]^{1/2} \sin[2\pi(0.009)] = 0.075$$

$$\xi_5 = [2 \ln(1/0.581)]^{1/2} \cos[2\pi(0.376)] = -0.742$$

$$\xi_6 = [2 \ln(1/0.581)]^{1/2} \sin[2\pi(0.376)] = 0.733$$

$$\xi_7 = [2 \ln(1/0.670)]^{1/2} \cos[2\pi(0.464)] = -0.872$$

$$\xi_8 = [2 \ln(1/0.670)]^{1/2} \sin[2\pi(0.464)] = 0.200$$

$$\xi_9 = [2 \ln(1/0.538)]^{1/2} \cos[2\pi(0.882)] = 0.823$$

$$\xi_{10} = [2 \ln(1/0.538)]^{1/2} \sin[2\pi(0.882)] = -0.750$$

$$\xi_{11} = [2 \ln(1/0.286)]^{1/2} \cos[2\pi(0.021)] = 1.569$$

$$\xi_{12} = [2 \ln(1/0.286)]^{1/2} \sin[2\pi(0.021)] = 0.210$$

$$\xi_{13} = [2 \ln(1/0.546)]^{1/2} \cos[2\pi(0.084)] = 0.951$$

$$\xi_{14} = [2 \ln(1/0.546)]^{1/2} \sin[2\pi(0.084)] = 0.553$$

$$\xi_{15} = [2 \ln(1/0.218)]^{1/2} \cos[2\pi(0.680)] = -0.744$$

$$\xi_{16} = [2 \ln(1/0.218)]^{1/2} \sin[2\pi(0.680)] = -1.580$$

$$\xi_{17} = [2 \ln(1/0.136)]^{1/2} \cos[2\pi(0.793)] = 0.538$$

$$\xi_{18} = [2 \ln(1/0.136)]^{1/2} \sin[2\pi(0.793)] = -1.923$$

Con los números aleatorios ξ_t y los valores de $\phi_1 = -0.1028$ y $\sigma_\epsilon = 0.1949$ se procede a estimar la serie sintética estandarizada con la expresión $z_t = -0.1028 z_{t-1} + 0.1949 \xi_t$, así,

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.1028 (0) + 0.1949 (-0.815) = -0.159 \\ z_2 &= -0.1028 (-0.159) + 0.1949 (-0.352) = -0.052 \\ z_3 &= -0.1028 (-0.052) + 0.1949 (1.406) = 0.279 \\ z_4 &= -0.1028 (0.279) + 0.1949 (0.075) = -0.014 \\ &\vdots \\ z_{17} &= -0.1028 (-0.292) + 0.1949 (0.538) = 0.135 \\ z_{18} &= -0.1028 (0.135) + 0.1949 (-1.923) = -0.389 \end{aligned}$$

La serie sintética desestandarizada se obtiene aplicando $y_t = z_t + y$. Donde el valor obtenido de la media para la serie normalizada es $y = 8.0490$.

$$\begin{aligned} y_1 &= -0.159 + 8.0490 = 7.890 \\ &\vdots \\ y_{18} &= -0.389 + 8.0490 = 7.660 \end{aligned}$$

Finalmente, la serie sintética x_t (Tabla 10.11) se obtiene al desnormalizar la serie generada y_t , aplicando el antilogaritmo, $x_t = \exp(y_t)$. Así, $x_1 = \exp(7.890) = 2670.74$

t	$x_t (\text{Mm}^3)$	t	$x_t (\text{Mm}^3)$
1	2670.74	10	2662.17
2	2971.35	11	4322.44
3	4140.23	12	3155.47
4	3087.09	13	3765.20
5	2713.11	14	3421.88
6	3664.99	15	2683.42
7	2598.88	16	2337.42
8	3318.32	17	3583.39
9	3653.60	18	2122.24

Tabla 10.11. Serie sintética generada de volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Los estadísticos de la serie generada se presentan en las tablas 10.12 y 10.13.

Estadístico	Serie generada $\hat{x}_t$
Media	3159.55
Desviación estándar	617.07
Coeficiente de asimetría	0.244
Coeficiente de curtosis	3.055
Coeficiente de variación	0.195

Tabla 10.12. Estadísticos insesgados de la serie generada $\hat{x}_t$ de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

k	C_k	Lím. inf. r_k	r_k	Lím. sup. r_k
0	359630.58		1	
1	-108525.24	-0.5200	-0.3017	0.4023
2	28822.06	-0.5369	0.0801	0.4119
3	93931.87	-0.5555	0.2611	0.4222
4	-139989.23	-0.5762	-0.3892	0.4333
5	-25613.81	-0.5992	-0.0712	0.4453
6	51364.48	-0.6250	0.14282	0.4583

Tabla 10.13. Correlograma de la serie generada $\hat{x}_t$ de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

Este procedimiento se debe repetir tantas veces como muestras sintéticas se deseen. En la tabla 10.14 se comparan los estadísticos de la serie original de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec, con aquellos valores esperados al generar 10,000 muestras sintéticas. De acuerdo con los resultados se observa que el modelo AR(1) si preserva las características de la serie original, por lo que las muestras sintéticas son confiables y aplicables en el análisis de un aprovechamiento hidráulico.

Estadístico	Serie registrada x_t	Series generadas $\hat{x}_t$
Media	3184.68	3193.94
Desviación estándar	605.52	637.93
Coeficiente de asimetría	0.341	0.474
Coeficiente de curtosis	3.168	4.005
Coeficiente de variación	0.190	0.199
Coeficiente r_1	-0.114	-0.294
Coeficiente r_2	-0.074	-0.027
Coeficiente r_3	-0.035	0.196

Tabla 10.12. Estadísticos insesgados de la serie registrada x_t y los valores esperados de 10,000 series sintéticas $\hat{x}_t$ de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec.

10.3. Modelo autoregresivo periódico PAR(p)

La forma general del modelo es (Salas et al, 1988)

$$z_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} z_{v,\tau-1} + \dots + \phi_{p,\tau} z_{v,\tau-p} + \sigma_{\varepsilon\tau} \xi_{v,\tau} \quad (10.50)$$

Donde

- p orden del modelo auto regresivo periódico
- $\sigma_{\varepsilon\tau}$ desviación estándar de la serie de residuales $\varepsilon_{v,\tau}$
- $\xi_{v,\tau}$ serie con distribución Normal estándar $E[\xi_{v,\tau}] = 0$ y $Var(\xi_{v,\tau}) = 1$
- $z_{v,\tau}$ serie estandarizada de acuerdo con (10.51) a (10.53) y $E[z_{v,\tau}] = 0$ y $Var(z_{v,\tau}) = 1$

$$z_{v,\tau} = \frac{y_{v,\tau} - \mu_\tau}{\sigma_\tau} \quad (10.51)$$

$$\mu_\tau = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n y_{v,\tau}, \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (10.52)$$

$$\sigma_\tau = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{v=1}^n (y_{v,\tau} - \mu_\tau)^2 \right]^{1/2} \quad (10.53)$$

Donde

- $y_{v,\tau}$ registro normalizado de la serie $x_{v,\tau}$ para $v = 1, 2, \dots, n$ años y $\tau = 1, 2, \dots, \omega$ periodos,
- y $E[y_{v,\tau}] = \mu_\tau$ y $Var(y_{v,\tau}) = \sigma_\tau^2$

Las varianza de los residuales se puede obtener como (Salas et al, 1988)

$$\sigma_{\varepsilon\tau}^2 = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} \rho_{j,\tau} \quad (10.54)$$

Donde

- $\phi_{j,\tau}$ coeficiente auto regresivo periódico
- $\rho_{j,\tau}$ coeficiente de autocorrelación serial de la variable $y_{v,\tau}$.

$$\rho_{k,\tau} = \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} \rho_{|k-j|,\tau-\ell_j}, \quad k > 0 \quad (10.55)$$

Donde

$$\ell_j = \min(k, j) \text{ y } \rho_{0,\tau} = 1$$

La expresión (10.55) se utiliza para determinar los parámetros de los modelos periódicos, al sustituir los coeficientes $\rho_{k,\tau}$ por los estimadores $r_{k,\tau}$ de la expresión (10.15).

En general, las condiciones que deben cumplir los parámetros periódicos $\phi_{j,\tau}$ no son fáciles de derivar, sin embargo, se pueden utilizar como una aproximación las condiciones derivadas de la expresión (10.26) para cada periodo τ .

Las series $\xi_{v,\tau}$ se generan para cada periodo τ con las expresiones (10.27) y (10.28).

Una vez que se han obtenido los parámetros del modelo y se ha probado que cumplen las condiciones aproximadas de (10.26), se debe verificar que las series de residuales ε_t tienen una distribución Normal y son independientes.

$$\varepsilon_{v,\tau} = z_{v,\tau} - \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} z_{v,\tau-j}, \quad v = 1, 2, \dots, n; \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (10.56)$$

10.3.1. Modelo autoregresivo periódico PAR(1)

La forma del modelo es

$$z_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} z_{v,\tau-1} + \varepsilon_{v,\tau} \quad (10.57)$$

$$z_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} z_{v,\tau-1} + \sigma_{\varepsilon\tau} \xi_{v,\tau} \quad (10.58)$$

De acuerdo con la expresión (10.55) los parámetros auto regresivos periódicos se estiman como

$$\hat{\phi}_{1,\tau} = r_{1,\tau} \quad \text{para } \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (10.59)$$

Para cubrir la condición de estacionareidad (10.26) se debe cumplir que

$$-1 < \hat{\phi}_{1,\tau} < 1 \quad (10.60)$$

La serie de residuales se obtiene a partir de $\varepsilon_{v,2}$ con la expresión (10.61).

$$\varepsilon_{v,\tau} = z_{v,\tau} - \hat{\phi}_{1,\tau} z_{v,\tau-1} \quad (10.61)$$

La varianza de los residuales se obtiene a partir de la expresión (10.54) como

$$\sigma_{\varepsilon\tau}^2 = 1 - \phi_{1,\tau}^2 \quad (10.62)$$

10.3.2. Modelo autoregresivo periódico PAR(2)

La forma del modelo es

$$Z_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} Z_{v,\tau-1} + \phi_{2,\tau} Z_{v,\tau-2} + \varepsilon_{v,\tau} \quad (10.63)$$

$$Z_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} Z_{v,\tau-1} + \phi_{2,\tau} Z_{v,\tau-2} + \sigma_{\varepsilon\tau} \xi_{v,\tau} \quad (10.64)$$

De acuerdo con la expresión (10.55) los parámetros auto regresivos periódicos se estiman como

$$\hat{\phi}_{1,\tau} = \frac{r_{1,\tau} - r_{1,\tau-1} r_{2,\tau}}{1 - r_{1,\tau-1}^2}, \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (10.65)$$

$$\hat{\phi}_{2,\tau} = \frac{r_{2,\tau} - r_{1,\tau-1} r_{1,\tau}}{1 - r_{1,\tau-1}^2}, \quad \tau = 1, 2, \dots, \omega \quad (10.66)$$

Para cubrir la condición de estacionariedad (10.26) se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{1,\tau} + \hat{\phi}_{2,\tau} &< 1 \\ \hat{\phi}_{2,\tau} - \hat{\phi}_{1,\tau} &< 1 \\ -1 < \hat{\phi}_{2,\tau} &< 1 \end{aligned} \quad (10.67)$$

La serie de residuales se obtiene a partir de $\varepsilon_{v,3}$ con la expresión

$$\varepsilon_{v,\tau} = Z_{v,\tau} - \hat{\phi}_{1,\tau} Z_{v,\tau-1} - \hat{\phi}_{2,\tau} Z_{v,\tau-2} \quad (10.68)$$

La varianza de los residuales se obtiene a partir de la expresión (10.54) como

$$\sigma_{\varepsilon\tau}^2 = 1 - \hat{\phi}_{1,\tau} r_{1,\tau} - \hat{\phi}_{2,\tau} r_{2,\tau} \quad (10.69)$$

Ejemplo 10.2. Obtener una muestra sintética a partir del registro de los volúmenes de escurrimiento mensual de la estación Jacatepec.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1953	63.0	41.8	40.5	38.0	35.7	72.4	251.9	284.4	366.0	681.5	339.3	89.8
1954	69.0	63.4	77.8	62.3	79.6	610.8	876.3	220.5	554.0	513.0	179.3	82.7
1955	55.0	51.9	42.8	31.4	27.6	48.6	992.5	341.5	589.2	596.9	210.2	256.4
1956	132.9	62.8	58.3	55.5	224.0	424.4	553.1	326.8	661.3	337.3	263.7	191.3
1957	108.4	68.7	59.4	50.1	61.9	129.1	444.9	356.8	557.9	284.7	164.2	99.3
1958	71.0	45.1	43.1	38.0	38.5	213.7	976.5	638.4	703.9	851.7	418.8	377.2
1959	129.9	106.6	124.2	137.6	102.0	476.7	468.2	430.0	316.8	405.0	410.7	127.1
1960	97.8	60.5	55.9	49.2	34.8	184.0	935.3	669.4	893.2	249.5	286.7	232.2
1961	143.1	91.5	92.8	52.7	39.8	201.3	956.5	704.0	590.7	396.3	607.0	151.4
1962	102.9	56.1	49.1	96.4	57.1	148.2	536.0	230.7	514.6	435.4	127.5	100.4
1963	84.0	52.0	52.3	43.4	45.4	98.9	713.9	388.4	599.4	239.8	106.7	111.9
1964	83.5	57.7	49.3	51.5	47.2	299.1	518.0	252.7	341.6	313.8	225.0	458.7
1965	245.8	93.8	81.9	68.5	88.0	275.7	575.5	517.1	440.8	576.8	259.6	125.1
1966	125.3	112.4	116.2	89.3	87.1	320.6	512.1	297.3	483.9	590.0	227.6	108.3
1967	82.1	62.7	61.7	52.6	67.4	373.2	538.5	313.8	441.1	484.6	206.8	191.3
1968	135.5	129.3	101.7	84.4	103.4	200.1	721.8	696.5	602.7	362.7	211.9	271.6
1969	185.3	81.6	82.5	89.7	100.6	230.6	917.4	136.9	1392.1	351.6	182.4	158.4
1970	86.8	94.4	82.3	45.7	38.9	147.0	415.7	490.3	625.7	378.9	277.9	84.9

Tabla 10.7. Series registradas mensuales $x_{v,r}$ de volúmenes de escurrimiento (Mm^3) de la estación Jacatepec.

Con las expresiones (10.11) a (10.15) se procede a determinar las características estadísticas de las series $x_{v,r}$ (Tabla 10.8).

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
$\bar{x}_r$	111.18	74.01	70.76	63.12	71.05	247.46	661.33	405.30	593.05	447.19	261.40	178.77
S_r	47.47	25.17	25.73	26.86	45.97	148.82	229.34	175.88	243.13	162.27	120.85	105.75
g_r	1.61	0.84	0.81	1.52	2.50	1.03	0.16	0.60	2.41	1.03	1.65	1.63
k_r	6.72	3.45	3.36	6.04	11.18	4.51	2.52	2.92	10.94	4.58	6.88	5.81
Cv_r	0.427	0.34	0.36	0.42	0.64	0.60	0.34	0.43	0.41	0.36	0.46	0.59
$r_{1,r}$	0.785	0.542	0.875	0.690	0.362	0.522	-0.015	0.310	-0.025	-0.208	0.276	0.121
$r_{2,r}$	0.037	0.440	0.480	0.584	0.292	0.416	-0.159	-0.204	0.542	0.017	-0.113	0.099
$r_{3,r}$	-0.133	0.032	0.444	0.437	0.277	0.421	-0.182	-0.179	-0.150	0.061	0.554	0.022
$r_{4,r}$	-0.120	0.200	0.138	0.482	0.416	0.217	-0.073	-0.138	0.107	0.001	0.165	0.222
$r_{5,r}$	0.276	0.150	0.393	0.507	0.411	0.142	-0.099	0.186	-0.023	-0.190	0.052	0.319
$r_{6,r}$	0.087	0.159	0.118	0.474	-0.006	0.190	-0.001	0.313	-0.038	-0.148	-0.103	-0.040

Tabla 10.8. Estadísticos muestrales de las series mensuales $x_{v,r}$ de la estación Jacatepec.

Para cada periodo τ se procede a normalizar la muestra con la expresión $y_{v,\tau} = \ln(x_{v,\tau})$. Adicionalmente, con las expresiones (10.11) a (10.15) se obtienen sus estadísticos insesgados.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1953	4.143	3.732	3.701	3.637	3.575	4.282	5.529	5.650	5.902	6.524	5.826	4.497
1954	4.234	4.149	4.354	4.132	4.377	6.414	6.775	5.395	6.317	6.240	5.189	4.415
1955	4.007	3.949	3.756	3.446	3.317	3.883	6.900	5.833	6.378	6.391	5.348	5.546
1956	4.889	4.140	4.065	4.016	5.411	6.050	6.315	5.789	6.494	5.821	5.574	5.253
1957	4.685	4.229	4.084	3.914	4.125	4.860	6.097	5.877	6.324	5.651	5.101	4.598
1958	4.262	3.808	3.763	3.637	3.650	5.364	6.884	6.459	6.556	6.747	6.037	5.932
1959	4.866	4.669	4.821	4.924	4.625	6.166	6.148	6.063	5.758	6.003	6.017	4.845
1960	4.582	4.102	4.023	3.895	3.549	5.214	6.840	6.506	6.794	5.519	5.658	5.447
1961	4.963	4.516	4.530	3.964	3.683	5.304	6.863	6.556	6.381	5.982	6.408	5.019
1962	4.633	4.027	3.893	4.568	4.044	4.998	6.284	5.441	6.243	6.076	4.848	4.609
1963	4.430	3.951	3.957	3.770	3.815	4.594	6.570	5.962	6.395	5.479	4.670	4.717
1964	4.424	4.055	3.897	3.941	3.854	5.700	6.250	5.532	5.833	5.748	5.416	6.128
1965	5.504	4.541	4.405	4.226	4.477	5.619	6.355	6.248	6.088	6.357	5.559	4.829
1966	4.830	4.722	4.755	4.492	4.467	5.770	6.238	5.694	6.181	6.380	5.427	4.684
1967	4.407	4.138	4.122	3.962	4.210	5.922	6.288	5.748	6.089	6.183	5.331	5.253
1968	4.909	4.862	4.641	4.435	4.638	5.298	6.581	6.546	6.401	5.893	5.356	5.604
1969	5.222	4.401	4.412	4.496	4.611	5.440	6.821	4.919	7.238	5.862	5.206	5.065
1970	4.463	4.547	4.410	3.822	3.661	4.990	6.030	6.195	6.438	5.937	5.627	4.441

Tabla 10.9. Series normalizadas mensuales $y_{v,\tau}$ de volúmenes de escurrimiento (Mm^3) de la estación Jacatepec.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
y_τ	4.637	4.253	4.200	4.071	4.116	5.327	6.432	5.912	6.323	6.044	5.478	5.049
S_τ	0.387	0.328	0.352	0.384	0.532	0.658	0.375	0.452	0.347	0.349	0.425	0.517
g_τ	0.523	0.337	0.316	0.614	0.720	-0.524	-0.593	-0.274	0.847	0.245	0.290	0.723
k_τ	3.881	2.854	2.675	3.713	4.207	3.912	4.072	3.606	5.848	3.286	4.272	3.296
Cv_τ	0.083	0.077	0.084	0.094	0.129	0.124	0.058	0.076	0.055	0.058	0.078	0.102
$r_{1,\tau}$	0.772	0.652	0.894	0.689	0.612	0.646	0.067	0.181	-0.057	-0.242	0.338	0.209
$r_{2,\tau}$	0.175	0.510	0.601	0.632	0.487	0.543	-0.100	-0.098	0.588	-0.018	-0.138	0.002
$r_{3,\tau}$	-0.114	0.163	0.480	0.602	0.450	0.520	-0.086	-0.236	-0.112	-0.062	0.503	0.102
$r_{4,\tau}$	-0.074	0.164	0.247	0.510	0.582	0.383	0.027	-0.198	0.033	-0.019	0.016	0.239
$r_{5,\tau}$	0.348	0.117	0.302	0.499	0.501	0.374	0.003	0.141	-0.089	-0.129	0.158	0.418
$r_{6,\tau}$	0.187	0.125	0.080	0.360	0.135	0.257	0.049	0.236	-0.025	-0.118	-0.121	0.036

Tabla 10.10. Estadísticos muestrales de las series mensuales $y_{v,\tau}$ de la estación Jacatepec.

A partir de los valores de las tablas 10.9 y 10.10 se obtiene la serie $z_{v,t} = \frac{y_{v,t} - \bar{y}_t}{S_t}$

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1953	-1.275	-1.585	-1.417	-1.128	-1.017	-1.586	-2.408	-0.579	-1.212	1.374	0.820	-1.066
1954	-1.040	-0.314	0.438	0.157	0.489	1.653	0.916	-1.142	-0.017	0.560	-0.679	-1.226
1955	-1.626	-0.925	-1.260	-1.625	-1.501	-2.191	1.248	-0.174	0.159	0.994	-0.305	0.961
1956	0.652	-0.343	-0.381	-0.143	2.434	1.100	-0.310	-0.271	0.492	-0.640	0.227	0.395
1957	0.126	-0.069	-0.328	-0.409	0.017	-0.707	-0.891	-0.077	0.002	-1.125	-0.886	-0.872
1958	-0.966	-1.353	-1.240	-1.128	-0.875	0.057	1.205	1.210	0.672	2.012	1.316	1.707
1959	0.593	1.270	1.768	2.219	0.955	1.276	-0.755	0.335	-1.628	-0.116	1.270	-0.395
1960	-0.139	-0.457	-0.501	-0.456	-1.065	-0.169	1.090	1.314	1.358	-1.503	0.424	0.769
1961	0.843	0.804	0.939	-0.277	-0.813	-0.033	1.150	1.426	0.167	-0.178	2.189	-0.057
1962	-0.008	-0.687	-0.870	1.293	-0.134	-0.498	-0.394	-1.042	-0.230	0.091	-1.482	-0.851
1963	-0.532	-0.919	-0.690	-0.783	-0.565	-1.112	0.370	0.110	0.209	-1.616	-1.901	-0.641
1964	-0.547	-0.601	-0.858	-0.337	-0.492	0.568	-0.485	-0.840	-1.411	-0.846	-0.145	2.085
1965	2.241	0.880	0.584	0.404	0.678	0.447	-0.204	0.743	-0.676	0.896	0.190	-0.426
1966	0.500	1.432	1.579	1.094	0.659	0.673	-0.516	-0.481	-0.407	0.961	-0.118	-0.704
1967	-0.591	-0.348	-0.220	-0.282	0.177	0.904	-0.382	-0.361	-0.674	0.397	-0.344	0.395
1968	0.703	1.859	1.255	0.947	0.981	-0.042	0.399	1.402	0.225	-0.432	-0.286	1.072
1969	1.511	0.455	0.605	1.106	0.929	0.173	1.039	-2.197	2.637	-0.521	-0.639	0.030
1970	-0.447	0.900	0.598	-0.648	-0.856	-0.510	-1.072	0.625	0.333	-0.307	0.351	-1.175

Tabla 10.11. Series estandarizadas mensuales $z_{v,t}$ de volúmenes de escurrimiento (Mm^3) de la estación Jacatepec.

Con los valores de los coeficientes de autocorrelación $r_{1,t}$ de la tabla 10.10 y con las expresiones (10.59), (10.65) y (10.66) se obtienen los estimadores por momentos de los parámetros periódicos de los modelos PAR(1) y PAR(2). Con estos valores es posible obtener para cada modelo los estimadores de $\sigma_{\varepsilon t}^2$ (expresiones 10.62 y 10.69) y del criterio de información de Akaike (expresión 10.31) para seleccionar la mejor opción de ajuste.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
PAR(1)												
$\phi_{1,t}$	0.772	0.652	0.894	0.689	0.612	0.646	0.067	0.181	-0.057	-0.242	0.338	0.209
$\sigma_{\varepsilon t}^2$	0.063	0.065	0.026	0.082	0.187	0.267	0.148	0.209	0.127	0.121	0.169	0.271
CIA(1)	-47.50	-47.10	-63.50	-42.99	-28.15	-21.76	-32.37	-26.16	-35.13	-35.93	-29.96	-21.50
PAR(2)												
$\phi_{1,t}$	0.772	0.639	0.873	0.613	0.527	0.502	0.226	0.188	-0.169	-0.244	0.342	0.236
$\phi_{2,t}$	0.175	0.016	0.031	0.084	0.124	0.235	-0.247	-0.110	0.619	-0.032	-0.059	-0.077
$\sigma_{\varepsilon t}^2$	0.019	0.069	0.025	0.090	0.199	0.261	0.143	0.220	0.066	0.129	0.183	0.284
CIA(2)	-66.61	-43.93	-61.76	-39.17	-24.97	-20.12	-30.93	-23.22	-44.67	-32.81	-26.51	-18.60

Tabla 10.12. Parámetros periódicos de los modelos PAR(1) y PAR(2) ajustados a los volúmenes de escurrimiento mensual de la estación Jacatepec.

De acuerdo con el criterio de selección, el mejor modelo de ajuste es el PAR(1). Ahora se obtienen los residuales del modelo empleando la expresión $\varepsilon_{v,t} = z_{v,t} - \phi_{1,t} z_{v,t-1}$ con los valores de la tabla 10.11.

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1953	-1.275	-0.753	-0.001	-0.152	-0.325	-0.928	-2.302	-0.142	-1.245	1.079	0.355	-1.239
1954	-1.040	0.364	0.719	-0.144	0.393	1.336	0.806	-1.308	-0.083	0.556	-0.869	-1.083
1955	-1.626	0.135	-0.433	-0.756	-0.505	-1.221	1.395	-0.401	0.149	1.033	-0.642	1.025
1956	0.652	-0.769	-0.074	0.119	2.522	-0.473	-0.384	-0.215	0.476	-0.520	0.444	0.347
1957	0.126	-0.152	-0.266	-0.183	0.267	-0.718	-0.843	0.084	-0.001	-1.124	-0.505	-0.686
1958	-0.966	-0.723	-0.030	-0.274	-0.184	0.623	1.201	0.991	0.741	2.175	0.634	1.431
1959	0.593	0.883	0.632	1.000	-0.403	0.658	-0.840	0.472	-1.609	-0.511	1.309	-0.661
1960	-0.139	-0.366	-0.092	-0.111	-0.785	0.519	1.101	1.117	1.434	-1.173	0.933	0.680
1961	0.843	0.254	0.220	-0.925	-0.642	0.492	1.152	1.217	0.248	-0.137	2.249	-0.516
1962	-0.008	-0.682	-0.255	1.893	-0.927	-0.411	-0.361	-0.970	-0.290	0.035	-1.512	-0.540
1963	-0.532	-0.572	0.131	-0.307	-0.086	-0.746	0.444	0.043	0.215	-1.566	-1.353	-0.242
1964	-0.547	-0.244	-0.320	0.253	-0.285	0.887	-0.523	-0.752	-1.459	-1.189	0.141	2.116
1965	2.241	-0.581	-0.202	0.001	0.430	0.006	-0.234	0.780	-0.633	0.732	-0.112	-0.466
1966	0.500	1.105	0.298	0.006	-0.011	0.247	-0.561	-0.387	-0.435	0.862	-0.444	-0.679
1967	-0.591	0.037	0.090	-0.130	0.350	0.790	-0.442	-0.292	-0.695	0.233	-0.478	0.467
1968	0.703	1.401	-0.407	0.082	0.400	-0.676	0.402	1.330	0.305	-0.377	-0.140	1.132
1969	1.511	-0.530	0.198	0.689	0.252	-0.427	1.027	-2.385	2.511	0.119	-0.463	0.164
1970	-0.447	1.192	-0.206	-1.061	-0.458	0.042	-1.038	0.820	0.368	-0.226	0.455	-1.248

Tabla 10.13. Series de residuales $\varepsilon_{v,t}$ del modelo PAR(1) ajustado a los volúmenes de escurrimiento mensual de la estación Jacatepec.

Con las expresiones (10.11) a (10.15) se procede a determinar las características estadísticas de los residuales $\varepsilon_{v,t}$ y se verifican las condiciones de normalidad e independencia de las series.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
y_t	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
S_t	1.000	0.724	0.326	0.685	0.762	0.730	0.997	0.981	0.998	0.967	0.934	0.975
g_t	0.523	0.831	0.907	1.266	2.351	0.075	-0.433	-0.737	0.690	0.397	0.676	0.695
k_t	3.881	3.070	4.129	6.639	11.101	2.679	3.708	4.349	5.246	3.828	4.582	3.375
$r_{1,t}$	0.754	0.050	0.159	0.103	-0.020	-0.097	0.132	0.017	-0.114	-0.015	0.005	0.038
$r_{2,t}$	0.229	-0.004	0.056	-0.213	0.036	0.011	-0.089	0.043	0.609	-0.049	-0.029	-0.039
$r_{3,t}$	-0.137	-0.048	0.009	0.275	-0.138	0.518	-0.173	-0.142	-0.179	0.086	0.549	0.143
$r_{4,t}$	-0.054	0.399	0.161	0.164	0.280	0.176	0.038	-0.412	0.107	0.045	0.028	0.061
$r_{5,t}$	0.320	0.222	0.472	0.434	0.302	-0.003	-0.052	-0.230	-0.129	-0.048	0.316	0.426
$r_{6,t}$	0.186	-0.150	-0.058	0.178	-0.343	-0.124	0.024	0.263	-0.080	-0.102	-0.084	0.071

Tabla 10.14. Estadísticos de las series $\varepsilon_{v,t}$ del modelo PAR(1) ajustado a los volúmenes de escurrimiento mensual de la estación Jacatepec.

Una vez que se han cubierto las condiciones generales del modelo se generan números aleatorios con distribución Normal estándar de acuerdo con las expresiones (10.27) y (10.28).

t	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1	0.868	-1.725	1.064	1.860	1.007	-1.111	-0.541	0.546	0.044	-0.507	0.982	0.599
2	-0.008	0.356	-1.279	-0.307	0.071	-0.628	-0.984	-0.481	0.175	0.074	0.486	-0.063
3	-1.295	-0.466	1.393	0.503	-0.926	0.851	0.227	0.452	-2.352	1.238	3.129	-0.686
4	0.492	-0.508	-0.466	1.249	-0.344	-1.207	-0.276	1.443	0.737	-1.833	-0.846	0.487
5	0.375	1.026	-1.187	-0.683	-0.380	1.063	-1.490	-1.762	0.477	-0.678	-1.025	-1.223
6	-0.952	-0.538	1.316	-0.135	-0.353	-1.817	1.407	-2.284	0.067	1.084	-0.559	-0.319
7	0.701	0.495	-0.301	0.257	0.577	0.531	-1.336	-0.225	-0.385	-1.481	-0.972	0.221
8	-0.524	0.584	-0.011	-0.844	-1.488	0.740	-1.255	-0.178	0.912	2.015	-0.093	0.013
9	-0.441	-2.018	-1.592	0.263	-0.588	-1.188	0.157	1.225	-0.566	-0.682	0.223	0.435
10	1.001	0.251	-0.729	-1.234	1.090	-0.803	-0.718	0.901	-0.103	0.044	-1.132	1.318
11	-1.495	-0.067	0.049	2.816	-1.025	-1.455	1.069	0.316	-0.270	1.464	0.501	-0.596
12	0.435	-2.803	-0.974	2.050	-0.476	-0.531	0.549	0.271	0.061	-0.388	0.967	1.432
13	-1.074	1.531	-0.115	-0.814	-0.220	0.872	-0.204	-1.861	-0.069	0.479	-2.124	-1.342
14	-0.119	1.828	0.647	-0.230	-2.111	0.284	0.783	0.751	-0.554	0.646	0.126	-0.467
15	1.297	1.391	-0.524	-0.939	0.608	1.521	-1.439	0.764	0.338	-0.071	-1.101	-0.071
16	1.124	0.446	-0.061	-0.029	0.095	0.625	-1.586	-0.499	0.330	0.939	-0.195	-0.341
17	0.280	-2.525	-0.521	-0.059	0.150	-1.261	0.086	1.910	-1.181	-0.834	0.607	0.905
18	1.935	0.111	-1.157	-0.001	2.351	-1.007	-0.064	1.346	0.470	-0.013	-0.469	0.050

Tabla 10.15. Números aleatorios $\xi_{v,r}$ generados mediante el procedimiento de Box-Müller.

Con los valores de la tabla 10.15 y los parámetros periódicos de la tabla 10.12 se procede a obtener la serie sintética estandarizada como $z_{v,r} = \phi_{1,r} z_{v,r-1} + \sigma_{\varepsilon r} \xi_{v,r}$.

t	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1	0.220	-0.298	-0.094	0.468	0.723	-0.107	-0.215	0.211	0.003	-0.178	0.344	0.384
2	0.168	-0.103	-0.291	0.235	0.474	-0.394	-0.393	-0.182	0.062	0.069	0.317	0.048
3	-0.328	-0.333	-0.072	0.095	-0.343	0.218	0.102	0.225	-0.851	0.638	1.504	-0.041
4	-0.129	-0.347	-0.140	0.423	-0.359	-0.482	-0.099	0.701	0.312	-0.794	0.162	0.245
5	0.095	0.324	0.097	-0.129	-0.243	0.392	-0.547	-0.905	0.222	-0.290	-0.520	-0.746
6	-0.168	0.074	0.300	-0.127	-0.302	-0.685	0.505	-1.209	0.011	0.448	-0.406	-0.322
7	0.177	0.242	0.167	0.189	0.365	0.511	-0.480	-0.190	-0.126	-0.485	-0.565	-0.003
8	0.004	0.307	0.148	-0.112	-0.420	0.712	-0.515	-0.116	0.332	0.820	-0.229	0.006
9	-0.111	-0.589	-0.784	-0.465	-0.539	-0.963	-0.004	0.559	-0.234	-0.181	0.031	0.233
10	0.167	-0.320	-0.820	-0.674	0.141	-1.038	-0.277	0.514	-0.023	0.059	-0.455	0.735
11	-0.378	-0.264	-0.228	0.650	-0.045	-0.781	0.359	0.210	-0.108	0.537	0.388	-0.229
12	-0.182	-0.889	-0.362	1.035	-0.234	-0.779	0.236	0.162	0.028	-0.265	0.529	0.697
13	-0.272	0.214	0.173	-0.114	-0.165	0.344	-0.056	-0.861	0.025	0.161	-0.820	-0.871
14	-0.240	0.607	0.259	-0.145	-1.015	0.369	0.298	0.187	-0.199	0.186	-0.226	-0.426
15	0.328	0.570	0.424	0.023	0.277	0.965	-0.489	0.261	0.106	-0.050	-0.470	-0.135
16	0.538	0.485	0.369	0.008	0.211	0.947	-0.643	-0.181	0.112	0.339	-0.239	-0.206
17	0.071	-0.599	-0.620	-0.411	-0.187	-0.772	-0.018	0.870	-0.471	-0.176	0.190	0.511
18	0.544	-0.363	-0.742	-0.283	0.903	-1.020	-0.026	0.773	0.194	0.038	-0.129	0.133

Tabla 10.16. Serie sintética $z_{v,r}$ generada con el modelo PAR(1) de volúmenes de escurrimiento mensual de la estación Jacatepec.

Finalmente, la serie sintética $\hat{x}_{v,r}$ se obtiene a partir de los valores de la tabla 10.16 como $\hat{x}_{v,r} = \exp(\hat{y}_{v,r})$ e $\hat{y}_{v,r} = y_r + S_r(z_{v,r})$.

t	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1	128.5	52.1	60.7	93.6	126.3	184.8	500.9	456.1	559.3	353.1	337.6	228.8
2	122.0	63.3	49.8	74.1	98.5	138.7	419.4	308.0	593.1	451.8	328.5	163.5
3	74.3	50.3	62.0	64.4	43.5	255.9	688.1	462.7	237.9	798.3	1076.9	149.6
4	90.7	49.6	57.9	89.5	42.8	126.9	562.7	744.6	761.2	190.6	281.3	199.2
5	113.4	97.1	73.5	51.5	48.1	304.5	359.5	149.4	695.9	315.5	142.2	73.9
6	87.2	76.6	90.0	51.6	45.3	103.6	1029.7	110.3	563.7	660.3	159.4	112.9
7	123.2	89.5	78.8	70.8	88.3	342.7	384.5	305.5	491.2	259.5	136.1	155.4
8	103.6	95.5	77.3	52.4	40.3	419.4	371.2	329.0	77.1	957.8	190.2	156.9
9	92.3	39.0	30.4	36.8	35.7	78.5	618.9	646.5	441.2	351.9	246.8	196.8
10	121.9	51.0	29.3	29.8	70.6	72.8	471.2	617.5	544.5	447.5	151.7	325.1
11	70.7	53.9	53.0	112.3	58.6	94.2	889.9	455.7	500.2	721.3	352.8	124.0
12	86.0	28.9	46.4	165.1	48.5	94.3	786.4	434.5	573.2	323.4	406.4	313.2
13	78.6	87.0	79.2	52.3	52.0	290.2	587.7	156.1	571.3	495.4	105.4	65.2
14	81.1	128.9	86.4	50.7	22.2	297.6	836.9	445.6	456.8	508.1	191.0	101.8
15	143.2	124.2	101.9	60.0	80.9	540.2	381.0	479.6	619.4	401.0	149.5	136.1
16	176.7	114.1	96.4	59.0	75.7	530.4	326.6	308.4	623.2	592.2	188.4	126.9
17	110.7	38.6	35.8	38.9	50.9	95.0	610.0	882.0	348.0	353.5	289.5	259.8
18	177.8	48.9	31.7	44.1	151.3	74.1	605.5	800.5	677.0	438.2	210.4	178.1

Tabla 10.17. Serie sintética $\hat{x}_{v,r}$ generada con el modelo PAR(1) de volúmenes de escurrimiento mensual de la estación Jacatepec.

Con las expresiones (10.11) a (10.14) se procede a determinar las características estadísticas de las series $\hat{x}_{v,r}$. Al comparar los estadísticos de la tabla 10.8 con los de la tabla 10.18 se observa el modelo PAR(1) si preserva las características de la serie original, por lo que las muestras sintéticas son confiables y aplicables en el análisis de un aprovechamiento hidráulico.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
$\bar{x}_r$	110.1	71.5	63.4	66.5	65.5	224.7	579.4	449.6	557.5	478.9	274.7	170.4
S_r	32.0	30.9	23.2	32.4	33.3	155.8	202.9	221.2	135.1	199.4	218.3	73.4
g_r	0.99	0.60	0.00	2.03	1.43	0.95	0.79	0.40	-0.61	1.04	3.48	0.86
k_r	4.12	2.86	2.59	8.35	5.40	3.48	3.61	3.35	4.62	4.44	16.34	4.02
Cv_r	0.29	0.43	0.36	0.48	0.50	0.69	0.35	0.49	0.24	0.41	0.79	0.43

Tabla 10.18. Estadísticos insesgados de la serie generada $\hat{x}_{v,r}$ de los volúmenes de escurrimiento mensual de la estación Jacatepec.

10.4. Modelo autoregresivo multivariado anual MAR(p)

Si se dispone de información en más de un sitio de aforos, se puede construir un modelo multivariado. Este modelo permite transferir información entre los sitios, mejorando con esto el proceso de generación sintética en un sitio de proyecto.

Si $x_t^{(i)}$ representan las series hidrológicas anuales para $t = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, ms$ sitios ; $y_t^{(i)}$ las series transformadas con distribución Normal y $z_t^{(i)}$ las series estandarizadas de acuerdo con

$$z_t^{(i)} = \frac{y_t^{(i)} - \mu^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \quad (10.70)$$

$$\mu^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, ms \quad (10.71)$$

$$\sigma^{(i)} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (y_t^{(i)} - \mu^{(i)})^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, ms \quad (10.72)$$

Entonces, de acuerdo con Salas et al (1988) se puede plantear un modelo general multivariado auto regresivo anual de la forma

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + A_2 Z_{t-2} + \dots + B \varepsilon_t \quad (10.73)$$

Donde

- Z_t es una matriz compuesta de variables estandarizadas (10.70) de orden $(ms \times 1)$
- A_p y B matrices de parámetros por calcular de orden $(ms \times ms)$
- ε_t matriz de residuales de orden $(ms \times 1)$

10.4.1. Modelo autoregresivo multivariado anual MAR(1)

El modelo es de la forma (Salas et al, 1988)

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + B \varepsilon_t \quad (10.73)$$

Los estimadores de las matrices de los parámetros se obtienen como (Matalas, 1967)

$$A_1 = \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \quad (10.74)$$

$$\hat{B} \hat{B}^T = \hat{M}_0 - A_1 \hat{M}_1^T \quad (10.75)$$

$$\hat{D} = \hat{M}_0 - A_1 \hat{M}_1^T \quad (10.76)$$

Donde

$\hat{M}_0$ y $\hat{M}_1$ se obtienen con las expresiones (10.16) y (10.17)

Los elementos de la matriz triangular inferior $\hat{B}$ se estiman con el siguiente procedimiento.

Si $\hat{D}$ es una matriz positiva definida (determinante > 0), entonces, los elementos diferentes a cero se obtienen como (Graybill, 1969)

$$b^{jj} = d^{jj} / b^{jj} \quad \text{para } j = 1, i = 1, \dots, ms \quad (10.77)$$

$$b^{jj} = \left[d^{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (b^{jk})^2 \right]^{1/2} \quad \text{para } j = 2, \dots, ms; \quad i = j \quad (10.78)$$

$$b^{ij} = \left[d^{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b^{ik} b^{jk} \right] / b^{jj} \quad \text{para } j = 2, \dots, ms-1; \quad i = j+1, \dots, ms \quad (10.79)$$

Si $\hat{D}$ es una matriz positiva semidefinida, entonces, los elementos diferentes a cero se obtienen como (Lane, 1979)

$$b^{ki} = 0 \text{ para todo } k < i \quad (10.80)$$

$$b^{ki} = 0 \text{ para todo } k \geq i \text{ cuando } d^{ii} - \sum_{j < i} (b^{ij})^2 \leq 0 \quad (10.81)$$

$$b^{ki} = \frac{d^{ki} - \sum_{j < i} b^{ij} b^{kj}}{\left[d^{ii} - \sum_{j < i} (b^{ij})^2 \right]^{1/2}} \text{ para todo } k \geq i \text{ cuando } d^{ii} - \sum_{j < i} (b^{ij})^2 > 0 \quad (10.82)$$

Las expresiones (10.80) a (10.82) se aplican para calcular todos los elementos de la primera columna, de arriba hacia abajo, posteriormente la segunda, tercera, etc.

La matriz de residuales se obtiene como

$$\varepsilon_t = \hat{B}^{-1} [Z_t - \hat{A}_1 Z_{t-1}] \quad (10.83)$$

10.4.2. Modelo autoregresivo multivariado anual MAR(2)

El modelo es de la forma (Salas et al, 1988)

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + A_2 Z_{t-2} + B \varepsilon_t \quad (10.83)$$

Los estimadores de las matrices de los parámetros se obtienen como (Matalas, 1967)

$$\hat{A}_1 = [\hat{M}_1 - \hat{M}_2 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1^T] [\hat{M}_0 - \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1^T]^{-1} \quad (10.84)$$

$$\hat{A}_2 = [\hat{M}_2 - \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1] [\hat{M}_0 - \hat{M}_1^T \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1]^{-1} \quad (10.85)$$

$$\hat{B} \hat{B}^T = \hat{M}_0 - [\hat{A}_1 \hat{M}_1^T + \hat{A}_2 \hat{M}_2^T] \quad (10.86)$$

$$\hat{D} = \hat{M}_0 - [\hat{A}_1 \hat{M}_1^T + \hat{A}_2 \hat{M}_2^T] \quad (10.87)$$

Donde

$\hat{M}_0$, $\hat{M}_1$ y $\hat{M}_2$ se obtienen con las expresiones (2.16) y (2.17)

Los elementos de la matriz triangular inferior $\hat{B}$ se estiman en forma similar al apartado anterior.

La matriz de residuales se obtiene como

$$\varepsilon_t = \hat{B}^{-1} [Z_t - \hat{A}_1 Z_{t-1} - \hat{A}_2 Z_{t-2}] \quad (10.88)$$

Ejemplo 10.3. Obtener una muestra sintética a partir del registro de los volúmenes de escurrimiento anual de la estación Jacatepec, asociando la información de la estación Cantón.

En la tabla 10.19 se presentan las series registradas, normalizadas con logaritmos naturales y estandarizadas para cada uno de los dos sitios analizados. Cabe mencionar que aunque se trata de series anuales, en este caso la estandarización se lleva a cabo con la expresión (10.70) en lugar de la (10.20).

Año	Jacatepec			Cantón		
	x_t^1	y_t^1	z_t^1	x_t^2	y_t^2	z_t^1
1953	2304.3	7.742	-1.609	3844.9	8.254	-1.734
1954	3388.5	8.128	0.415	6435.7	8.769	0.336
1955	3244.0	8.084	0.186	7136.9	8.873	0.751
1956	3291.4	8.099	0.262	6752.1	8.817	0.529
1957	2385.4	7.777	-1.427	4644.4	8.443	-0.975
1958	4415.9	8.393	1.805	8450.4	9.042	1.431
1959	3234.8	8.081	0.171	4818.7	8.480	-0.827
1960	3748.6	8.229	0.945	7618.1	8.938	1.014
1961	4027.1	8.300	1.321	6807.9	8.825	0.562
1962	2454.4	7.805	-1.277	4712.4	8.458	-0.917
1963	2536.1	7.838	-1.105	4954.5	8.508	-0.715
1964	2698.1	7.900	-0.780	4638.7	8.442	-0.980
1965	3348.6	8.116	0.353	5922.4	8.686	0.001
1966	3070.1	8.029	-0.102	5579.1	8.626	-0.238
1967	2875.8	7.964	-0.446	4849.0	8.486	-0.802
1968	3623.6	8.195	0.767	6668.1	8.805	0.478
1969	3909.1	8.271	1.165	10181.1	9.228	2.180
1970	2768.5	7.926	-0.645	5783.7	8.662	-0.093

Tabla 10.19. Series de volúmenes de escurrimiento anual en las estaciones Jacatepec y Cantón.

La expresión (10.16) permite obtener los coeficientes de correlación cruzada de las series registrada y normalizada. Con los coeficientes de la serie normalizada se calculan las matrices de parámetros para el modelo MAR(1)

$$\hat{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.872 \\ 0.872 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{M}_1 = \begin{bmatrix} -0.0505 & -0.0333 \\ -0.0927 & -0.0559 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 4.1791 & -3.6450 \\ -3.6450 & 4.1791 \end{bmatrix} \quad \hat{M}_1^T = \begin{bmatrix} -0.0505 & -0.0927 \\ -0.0333 & -0.0559 \end{bmatrix}$$

De la expresión (10.74)

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0505 & -0.0333 \\ -0.0927 & -0.0559 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.1791 & -3.6450 \\ -3.6450 & 4.1791 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0896 & 0.0448 \\ -0.1837 & 0.1043 \end{bmatrix}$$

De la (10.75)

$$\hat{B}\hat{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0.872 \\ 0.872 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0896 & 0.0448 \\ -0.1837 & 0.1043 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0505 & -0.0927 \\ -0.0333 & -0.0559 \end{bmatrix}$$

Y de la (10.76)

$$\hat{D} = \hat{B}\hat{B}^T = \begin{bmatrix} 0.9969 & 0.8663 \\ 0.8663 & 0.9887 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz triangular inferior $\hat{B}$ se obtienen aplicando las expresiones (10.77) a (10.79), así,

$$\hat{b}_{1,1} = \sqrt{\hat{d}_{1,1}} = \sqrt{0.9969} = 0.9984$$

$$\hat{b}_{2,1} = \frac{\hat{d}_{1,2}}{\hat{b}_{1,1}} = \frac{0.8663}{0.9984} = 0.8677$$

$$\hat{b}_{2,2} = \left[\hat{d}_{2,2} - (\hat{b}_{2,1})^2 \right]^{1/2} = \left[0.9887 - (0.8677)^2 \right]^{1/2} = 0.4856$$

Finalmente,

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.9984 & 0.0000 \\ 0.8677 & 0.4856 \end{bmatrix}$$

Las series sintéticas para los dos sitios se estimaran con la expresión $Z_t = A_1 Z_{t-1} + B \varepsilon_t$

$$Z_t = \begin{bmatrix} -0.0896 & 0.0448 \\ -0.1837 & 0.1043 \end{bmatrix} Z_{t-1} + \begin{bmatrix} 0.9984 & 0.0000 \\ 0.8677 & 0.4856 \end{bmatrix} \varepsilon_t$$

Así,

$$z_t^1 = -0.0896z_{t-1}^1 + 0.0448z_{t-1}^2 + 0.9984\varepsilon_t^1 + 0.0000\varepsilon_t^2$$

$$z_t^2 = -0.1837z_{t-1}^1 + 0.1043z_{t-1}^2 + 0.8677\varepsilon_t^1 + 0.4856\varepsilon_t^2$$

Donde

t	ε_t^1	ε_t^2
1	-0.467	2.141
2	-0.096	-0.684
3	0.062	0.042
4	0.899	2.021
5	-0.245	-0.182
6	-0.050	-0.840
7	0.091	-0.261
8	-0.770	0.565
9	-1.086	-0.087
10	0.020	-0.983
11	1.575	-0.898
12	0.107	0.406
13	-1.727	0.895
14	0.113	-1.119
15	1.283	0.260
16	-1.105	0.565
17	-0.387	0.655
18	0.228	-1.251

Tabla 10.20. Números aleatorios con distribución Normal estándar de acuerdo con Box-Müller.

Siguiendo el proceso de desestandarización y desnormalización se obtienen las series $\hat{x}_t$ para Jacatepec y Cantón (Tabla 10.21). Los estadísticos insesgados de las series sintéticas de los dos sitios se presentan en la tabla 10.22.

t	x_t^1	x_t^2
1	2864.6	6931.5
2	3115.6	5543.9
3	3162.2	5996.3
4	3712.5	9164.2
5	2987.3	5518.3
6	3106.7	5312.3
7	3175.6	5794.3
8	2698.9	5337.0
9	2571.6	4750.3
10	3174.5	5409.2
11	4205.4	7366.4
12	3135.3	6064.5
13	2255.8	4553.3
14	3264.3	5576.9
15	3972.9	7927.9
16	2509.0	4862.3
17	2946.9	6088.5
18	3290.2	5440.0

Tabla 10.21. Series sintéticas x_t^1 y x_t^2 de volúmenes de escurrimiento anual para las estaciones Jacatepec y Cantón.

t	x_t^1	x_t^2
$\bar{x}_r$	3119.4	5979.8
S_r	486.6	1179.5
g_r	0.617	1.577
k_r	4.554	5.996
Cv_r	0.156	0.197

Tabla 10.21. Estadísticos insesgados de las series generadas x_t^1 y x_t^2 de volúmenes de escurrimiento anual para las estaciones Jacatepec y Cantón.

10.5. Modelo autoregresivo multivariado periódico MPAR(p)

Si $x_{v,\tau}^{(i)}$ representan las series hidrológicas anuales para $v = 1, 2, \dots, n$, $\tau = 1, 2, \dots, \omega$ e $i = 1, 2, \dots, ms$ sitios; $y_{v,\tau}^{(i)}$ las series transformadas con distribución Normal y $z_{v,\tau}^{(i)}$ las series estandarizadas de acuerdo con

$$z_{v,\tau}^{(i)} = \frac{y_{v,\tau}^{(i)} - \mu_{\tau}^{(i)}}{\sigma_{\tau}^{(i)}} \quad (10.89)$$

$$\mu_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n y_{v,\tau}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, ms \quad (10.90)$$

$$\sigma_{\tau}^{(i)} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{v=1}^n (y_{v,\tau}^{(i)} - \mu_{\tau}^{(i)})^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, ms \quad (10.91)$$

Entonces, de acuerdo con Salas et al (1988) se puede plantear un modelo general multivariado auto regresivo periódico con coeficientes periódicos de la forma

$$Z_{v,\tau} = A_{1,\tau} Z_{v,\tau-1} + A_{2,\tau} Z_{v,\tau-2} + \dots + B_{\tau} \varepsilon_{v,\tau} \quad (10.92)$$

Donde

$Z_{v,\tau}$ matriz compuesta de variables estandarizadas (10.89) de orden $(ms \times 1)$
 $A_{1,\tau}$ y B_{τ} matrices de parámetros por calcular de orden $(ms \times ms)$ para el intervalo τ
 $\varepsilon_{v,\tau}$ matriz de residuales de orden $(ms \times 1)$ para el intervalo τ

Las secuencias $Z_{v,\tau}$ y $\varepsilon_{v,\tau}$ tienen medias iguales a cero y varianzas iguales a uno. La matriz $\varepsilon_{v,\tau}$ se considera no correlacionada, esto es $E[\varepsilon_{v,\tau}^{(i)} \varepsilon_{v,\tau}^{(j)}] = 0$.

10.5.1. Modelo autoregresivo multivariado periódico MPAR(1)

El modelo es de la forma (Salas et al, 1988)

$$Z_{v,r} = A_{1,r} Z_{v,r-1} + B_r \varepsilon_{v,r} \quad (10.93)$$

Los estimadores de las matrices de los parámetros se obtienen como (Salas y Pegram, 1978)

$$\hat{A}_{1,r} = \hat{M}_{1,r} \hat{M}_{0,r-1}^{-1} \quad (10.94)$$

$$\hat{B}_r \hat{B}_r^T = \hat{M}_{0,r} - \hat{A}_{1,r} \hat{M}_{1,r}^T \quad (10.95)$$

$$\hat{D}_r = \hat{M}_{0,r} - \hat{A}_{1,r} \hat{M}_{1,r}^T \quad (10.96)$$

Donde

$\hat{M}_{0,r}$, $\hat{M}_{0,r-1}$ y $\hat{M}_{1,r}$ se obtienen con las expresiones (10.18) y (10.19) correlacionando $z_{v,r}^{(i)}$ con $z_{v,r-k}^{(j)}$.

Los elementos de la matriz triangular inferior $\hat{B}_r$ se estiman con el procedimiento ya mencionado.

La matriz de residuales se obtiene como

$$\varepsilon_{v,r} = B_r^{-1} [Z_{v,r} - A_{1,r} Z_{v,r-1}] \quad (10.97)$$

10.5.2. Modelo autoregresivo multivariado periódico MPAR(2)

El modelo es de la forma (Salas et al, 1988)

$$Z_{v,\tau} = A_{1,\tau}Z_{v,\tau-1} + A_{2,\tau}Z_{v,\tau-2} + B_{\tau}\varepsilon_{v,\tau} \quad (10.98)$$

Los estimadores de las matrices de los parámetros se obtienen como (Salas et al, 1988)

$$A_{1,\tau} = [\hat{M}_{1,\tau} - \hat{M}_{2,\tau}\hat{M}_{0,\tau-1}^{-1}\hat{M}_{1,\tau}^T] [\hat{M}_{0,\tau} - \hat{M}_{1,\tau}\hat{M}_{0,\tau-1}^{-1}\hat{M}_{1,\tau}^T]^{-1} \quad (10.99)$$

$$A_{2,\tau} = [\hat{M}_{2,\tau} - \hat{M}_{1,\tau}\hat{M}_{0,\tau-1}^{-1}\hat{M}_{1,\tau}^T] [\hat{M}_{0,\tau} - \hat{M}_{1,\tau}\hat{M}_{0,\tau-1}^{-1}\hat{M}_{1,\tau}^T]^{-1} \quad (10.100)$$

$$\hat{B}\hat{B}^T = \hat{M}_{0,\tau} - [\hat{A}_{1,\tau}\hat{M}_{1,\tau}^T + \hat{A}_{2,\tau}\hat{M}_{2,\tau}^T] \quad (10.101)$$

$$\hat{D} = \hat{M}_{0,\tau} - [\hat{A}_{1,\tau}\hat{M}_{1,\tau}^T + \hat{A}_{2,\tau}\hat{M}_{2,\tau}^T] \quad (10.102)$$

Donde

$\hat{M}_{0,\tau}, \hat{M}_{0,\tau-1}, \hat{M}_{1,\tau}$ y $\hat{M}_{2,\tau}$ se obtienen con las expresiones (2.18) y (2.19) correlacionando $z_{v,\tau}^{(i)}$ con $z_{v,\tau-k}^{(j)}$.

Los elementos de la matriz triangular inferior $\hat{B}$ se estiman en forma similar al apartado anterior.

La matriz de residuales se obtiene como

$$\varepsilon_{v,\tau} = B_{\tau}^{-1}[Z_{v,\tau} - A_{1,\tau}Z_{v,\tau-1} + A_{2,\tau}Z_{v,\tau-2}] \quad (10.103)$$

REFERENCIAS

- Anderson, T. W., 1957. Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some observations are missing. *Journal of the American Statistical Association*. 52: 220-223.
- Akaike, H., 1974. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*. AC-19(6): 716-723.
- Andrews, D. F., 1972. Plots of high dimensional data. *Biometrics*. 28: 125-136.
- Bortkiewicz, L., Von., 1922. Variationsbreite und mittlerer fehler. *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*. 21: 3-11.
- Box, G. E. P. y G. M. Jenkins., 1970. *Time series analysis forecasting and control*. Holden day series in time series analysis, San Francisco. USA.
- Box, G. E. P. y M. E. Müller., 1958. A note on the generation of normal deviates. *Annals of Mathematics Statistics*. 28: 610-611.
- Burden, R., Douglas, J. y A. Reynolds., 1981. *Numerical analysis*. USA. PWS Publishers. pp. 439-461.
- Burn, D.H., 1988. Delineation of groups for regional flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*. 104: 345-364.
- Burn, D.H., 1990. Evaluation of regional flood frequency analysis with a region of influence approach. *Water Resources Research*. 26(10): 2257-2265.
- Chander, S., Spolia, S. K. y A. Kumar., 1978. Flood frequency analysis by power transformation. *Proc. A.S.C.E. J. Hydraul. Div.* 104(HY11): 1495-1504.
- Clarke, R. T., 1980. Bivariate gamma distributions for extending annual streamflow records from precipitation: some large sample results. *Water Resources Research*. 16(5): 863-870.
- Cunnane, C., 1988. Methods and merits of regional flood frequency analysis. *Journal of Hydrology* 100(1-4): 269-290.
- Dalrymple, T., 1960. Flood frequency methods. U. S. Geological Service. *Water Supply Paper*. 1543(A): 11-51.
- Domínguez, J., 1995. *El principio de máxima entropía en las distribuciones bivariadas de valores extremos*. Tesis de maestría. DEPMI. UNAM. México. 263 p.
- Domínguez, R., Fuentes, O. y V. Franco., 1980. *Manual de diseño de obras civiles. Hidrotecnia*. Capítulo A.1.10. Avenida de Diseño. Comisión Federal de Electricidad. México.
- Escalante, C., 1991. *Funciones de distribución de probabilidad trivariadas de valores extremos y sus aplicaciones en hidrología*. Tesis doctoral. DEPMI-UNAM. 272 p.

Escalante, C., 1998a. Multivariate estimation of extreme flood hydrographs. *Hydrological Science and Technology Journal*. American Institute of Hydrology. USA. 14(1-4): 19-27.

Escalante, C. 1998b. Multivariate extreme value distribution with mixed gumbel marginals. *Journal of the American Water Resources Association*. 34(2): 321-333.

Escalante, C. y J. Domínguez., 1997. Parameter estimation for bivariate extreme value distribution by maximum entropy. *Hydrological Science and Technology Journal*. American Institute of Hydrology. USA. 13(1-4): 1-10.

Escalante, C. y J. Domínguez., 1998. *Análisis de gastos máximos anuales aguas arriba de la confluencia de dos ríos*. XVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Oaxaca, México. 3: 293-302

Escalante, C. y J. Domínguez., 2001. Análisis regional de precipitación con base en una distribución bivariada ajustada por máxima entropía. *Ingeniería Hidráulica en México*. 16(3): 91-102.

Escalante, C. and J. A. Raynal., 1994. A trivariate extreme value distribution applied to flood frequency analysis. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*. 99(4): 369-375.

Escalante, C y J. A. Raynal., 1998. Multivariate estimation of floods: The trivariate Gumbel distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. Gordon and Breach Publishers. Holland. 61(4): 313-340.

Escalante, C. y L. Reyes., 2000. Estimación regional de avenidas de diseño. *Ingeniería Hidráulica en México*. 15(2): 5-19.

Finkelstein, B. V., 1953. On the limiting distributions of the extreme terms of a variational series of a two-dimensional random quantity. *Doklad Akad, S.S.S.R.* 91(2): 209.

Fisher, R. A. y Tippett, L. H. C., 1928. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 24(2): 180-190.

Fréchet, M., 1927. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*. Cracovie. 6: 93-116.

Fujita, M., Zhu, M. y T. Nakao, 1992. An application of fuzzy set theory to runoff prediction. *Sixth IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics*, IAHR Taipei, pp. 727-734.

Gnedenko, B. U., 1943. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*. 44: 423-453.

Graybill, F. A., 1969. *Introduction to matrices with applications in statistics*. Wadsworth publishing Co., California. USA.

Greenwood, J.A., Landwehr, J.M. y J. R. Wallis., 1979. Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distribution expressible in inverse form. *Water Resources Research*. 15(5): 1049-1054.

- Gumbel, E. J., 1937. *La duree extreme de la vie humaine*. Actualites Scientifiques et Industrielles. Paris : Herman et Cie.
- Gumbel, E. J., 1941. The return period of flood flows. *Annals of Mathematical Statistics*. 12: 163-190.
- Gumbel, E. J., 1944. On the plotting of flood discharges. *Transactions of the American Geophysical Union*. 25: 699-719.
- Gumbel, E. J., 1945. Floods estimated by probability methods. *Engineering News Record*. 134: 97-101.
- Gumbel, E. J., 1947. The distribution of the range. *Annals of Mathematical Statistics*. 18: 384-412.
- Gumbel, E. J., 1954. Statistical theory of droughts. *Proceedings American Society of Civil Engineers*. 80: 439.
- Gumbel, E. J., 1958. *Statistics of extremes*. Columbia University Press. USA. 375 p.
- Gumbel, E. J., 1959. Multivariate distributions with given margins. *Revista da Faculdade de Ciencias*. 2A(2): 178-218.
- Gumbel, E. J. 1960a. Multivariate extremal distributions, *Bulletin of the International Statistics Institute*. 39(2): 471-475.
- Gumbel, E. J., 1960b. Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimensions. *Publications de L'Institute de Statistique*. 9: 171-173.
- Gumbel, E. J., 1962. *Statistical theory of extreme values (Main results)*. Contribution to order statistics, Sarhan, A. S. and Greenberg, B. G., editors. John Wiley and Sons. Chapter 6: 59-93.
- Gumbel, E. J. y Mustafi, C. K., 1967. Some analytical properties of bivariate extremal distributions. *Journal of the American Statistical Association*. 62: 569-589.
- Hiemstra, L. A. y D. M. Francis., 1979. *The runoff hydrograph theory and application for flood predictions*. Water Resources Commission. Pretoria. Sudáfrica.
- Hosking, J.R.M., 1990, L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Journal of The Royal Statistics Society. Series. B*. 52(1): 105-124.
- Hosking, J.R.M. y J.R. Wallis., 1993. Some statistics useful in regional frequency analysis. *Water Resources Research*. 29(2): 271-281.
- Jenkinson, A. F., 1955. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of metereological elements. *Quaterly Journal of the Royal Metereological Society*. 87: 158-171.
- Jing, D., Dedun S. y Y. Ronfu., 1989. Further research on application of probability weighted moments in estimating parameters of the Pearson type three distribution. *Journal of Hydrology*. 100: 239-257.

Jowitt P., 1979. The extreme-value type-1 distribution and the principle of maximum entropy. *Journal of Hydrology*. 42: 23-28.

Kite, G.W. 1988. *Frequency and risk analyses in hydrology*. Water Resources Publications. USA. 257p.

Kuester, J. L. y J. H. Mize., 1973. *Optimization techniques with fortran*. McGraw-Hill Book Co. USA. pp. 386-398.

Lane, W. L., 1979. *Applied stochastic techniques, user manual*. Division of Planning Technical Services. Bureau of Reclamation. USA.

Linsley, R. y J. B. Franzini., 1979. *Water Resources Engineering*. 3a. edición. McGraw-Hill. Pp. 125-126.

Matalas, N.C. y B. Jacobs., 1964. *A correlation procedure for augmenting hydrologic data*. U.S. Geological Survey. Professional Paper. 434-E, E1-E7.

Matalas, N. C., 1967. Mathematical assessment of synthetic hydrology. *Water Resources Research*. 3(4): 937-945.

Mood, A. M. y F. Graybill., 1963. *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill Inc. Tercera edición. 546 p.

Moran, M. A., 1974. On estimators obtained from a simple augmented by multiple regression. *Water Resources Research*. 10(1): 81-85.

Nathan, R. J. y J. Mc Mahon., 1990. Identification of homogeneous regions for the purposes of regionalization. *Journal of Hydrology*. 121: 217-238.

Natural Environment Research Council., 1975. Estimation of flood volumes over different durations. *Flood Studies Report*, Vol 1. United Kingdom.

Nathan, R. J. y J. Mc Mahon., 1990. Identification of homogeneous regions for the purposes of regionalisation. *Journal of Hydrology*. 121: 217-238.

Orlovski, S. A. 1990. Decomposition of properties and definition of fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems* 37: 53-63.

Peagram S. y P. Deacon. 1992. Extreme flood hydrographs of chosen probability. *Proceedings of the International Symposium on Dams and Extreme Floods. International Comission of Large Dams*. Granada, Spain. 1: 69-80.

Phien H., 1987. A review of methods of parameter estimation for the extreme value type 1 distribution *Journal of Hydrology*. 90: 251-268.

Raynal, J. A., 1982. Parameter estimation efficiency in extreme value distribution type I and II. *Report of a special study*. Civil Engineering Department, Colorado State University. USA.

- Raynal, J. A., 1985. *Bivariate extreme value distributions applied to flood frequency analysis*. Ph. D. dissertation, Civil Engineering Department, Colorado State University. USA. 237 p.
- Raynal, J. A. y J.D. Salas., 1987. A probabilistic model for flooding downstream of the junction of two rivers. *Hydrological Frequency Modeling*. Reidel Publishing Company. 1: 595-602.
- Rosenbrock, H. H., 1960. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *Computer Journal*. 3: 175-184.
- Rossi, F., Fiorentino, M. y P. Versace., 1984. Two Component extreme value distribution for flood frequency analysis. *Water Resources Research*. 20(7): 847-856.
- Rueda, E., 1981. *Transfer of Information for Flood Related Variables*. M. Sc. Thesis, Civil Engineering Department, Colorado State University. USA. 112 pp.
- Salas, J. D., J. W. Delleur, V. Yevjevich y W. L. Lane., 1988. *Applied modeling of hydrological time series*. Water Resources Publications. USA. 484 p.
- Salas, J. D. y G. S. Pegram., 1978. A seasonal multivariate multilag autoregressive model in hydrology. *Modeling Hydrologic Processes*. Water Resources Publications. USA.
- Shannon, C. E., 1948. The mathematical theory of communications I and II. *Bell System Technology Journal*. 27: 379-423.
- Singh, V. P. y H. Aminian., 1986. An empirical relation between volume and peak of direct runoff. *Water Resources Bulletin*. 22(5): 725-730.
- Soto, G y C. Escalante., 1999. Inferencia y pronóstico de eventos con base en la teoría de los subconjuntos borrosos. *Ingeniería Hidráulica en México*. 14(3): 5-17.
- Tiago de Oliveira, J., 1958. Extremal distributions. *Revista Faculdade de Ciencias*. Universidad de Lisboa. Portugal. pp. 2 Serie A(7): 219-228.
- Tiago de Oliveira, J., 1982. *Bivariate extremes: models and statistical decision*. Center for Stochastic Processes, Department of Statistics, University of North Carolina, at Chapel Hill. Technical Report No. 14.
- Tippet, L. H. C., 1925. On the extreme individuals and the range of sample taken from a Normal distribution. *Biometrika*. 17(3-4): 364-387.
- Von Mises, R., 1923. Über die variationsbreite einer beobachtungsreihe. *Berliner Math gesellschaft*. 22: 3.
- Von Mises, R., 1936. La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. Math de L'Union Interbalkanique*. Athens. 1: 1-20.

Wallis, J.R., 1980. Risk and uncertainties in the evaluation of flood events for the design of hydrological structures. Keynote address at "Seminar on extreme hydrological events-Floods and Droughts". Erice, Italy, 33p.

Weibull, W., 1939. The phenomenon of rupture in solids. *Ingenior Vetenskaps Akademiens Handliger*. 153: 2.

Woodroffe, M. 1975. Probability with applications. McGraw-Hill. USA. pp. 179-190.

Yevjevich, V. 1972. *Stochastic processes in hydrology*. Water Resources Publications. USA. 302 p.

Zadeh L. A. 1975. *Calculus of fuzzy restriction. Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Process*. Academic Press, NY, USA.

APÉNDICE A

Estación	A	P.M.A.	S _C	E _m	L _{CP}	S _{CP}	P _I	D _D	D _C
San Miguel Zapotitlan	34450	789.42	0.0406	1650.70	440	0.00342	0.0336	0.0046	0.0128
San Blas	33590	799.52	0.0414	1682.76	402	0.00353	0.0324	0.0046	0.0120
La Tina	275	654.73	0.0167	405.00	30.3	0.00413	0.2109	0.0036	0.0738
Bamicori	223	800.45	0.0061	415.00	20.2	0.00490	0.3363	0.0045	0.0906
Las Cañas	29529	825.14	0.0445	1759.82	342	0.00538	0.0328	0.0049	0.0118
El Mahone	29428	826.08	0.0445	1759.82	337	0.00548	0.0326	0.0049	0.0117
Choix	1403	972.06	0.0221	1050.00	82	0.00234	0.1447	0.0050	0.0513
Huites	26020	822.80	0.0493	1912.95	267	0.00685	0.0324	0.0051	0.0097
Palo Dulce	6323	911.37	0.0569	1742.05	184	0.01028	0.0614	0.0044	0.0269
Chinipas	5098	909.69	0.0600	1940.00	131	0.01449	0.0651	0.0047	0.0235
San Francisco	17531	773.47	0.0504	2015.74	246	0.00720	0.0379	0.0058	0.131
San Ignacio	10920	802.23	0.0536	2002.43	209	0.01041	0.0497	0.0067	0.0183
La Veranera	4106	739.77	0.0363	2354.62	137	0.01565	0.0852	0.0049	0.0312
Urique	4000	738.56	0.0358	2408.80	127	0.01537	0.0843	0.0050	0.0300
Guerachic	6262	818.71	0.0423	2322.16	145	0.01249	0.0564	0.0053	0.0216
Alamos	2270	634.25	0.0158	505.00	124	0.00184	0.1093	0.0035	0.0520
Cazanate	1813	654.11	0.0156	556.36	93	0.00156	0.1120	0.0033	0.0458
Jaina	8179	982.60	0.0518	1279.18	177	0.01014	0.0560	0.0056	0.0241
Toahayana	5281	1003.39	0.0579	1602.67	131	0.01130	0.0583	0.0064	0.0235
Tecusiapa	3773	1040.37	0.0666	1893.68	90	0.01504	0.0861	0.0053	0.0220
Los Molinos	501	919.96	0.0417	1300.00	35	0.02159	0.1936	0.0020	0.0639
Naranjo	2064	809.04	0.0209	586.36	107	0.00760	0.1177	0.0029	0.0484
Zopilote	666	743.32	0.0283	437.50	68	0.00690	0.1922	0.0030	0.0871
Guamuchil	1645	767.17	0.0096	201.11	65	0.00698	0.1173	0.0030	0.0383
Pericos	270	734.26	0.0130	150.00	31	0.00613	0.2778	0.0037	0.1111
Tierra Blanca	11614	977.22	0.0434	1541.27	276	0.00603	0.0527	0.0030	0.0215
Pte. Sud-Pacífico	11434	978.50	0.0434	1541.27	268	0.00632	0.0525	0.0031	0.0214
Palos Blancos	11409	982.29	0.0434	1563.29	256	0.00649	0.0508	0.0031	0.0210
El Varejonal	10987	990.33	0.0470	1653.33	233	0.00680	0.0519	0.0029	0.0191
Badiraguato	1018	983.50	0.0520	595.00	59	0.02118	0.1473	0.0029	0.0570
Guatenipa	8252	1006.34	0.0491	1994.90	178	0.01202	0.0594	0.0032	0.0194
La Huerta	6149	1019.94	0.0412	2217.57	117	0.01569	0.0631	0.0036	0.0171
Puente Cañedo	4086	1045.49	0.0433	774.80	117	0.00470	0.0710	0.0037	0.0289
Sanalona	3657	1080.66	0.0518	895.24	85	0.00438	0.0662	0.0036	0.0202
Picacho	3280	1106.39	0.0518	895.24	85	0.00438	0.0729	0.0040	0.0213
Tamazula	2241	1171.95	0.0684	1146.43	48	0.01024	0.0848	0.0036	0.0192
El Bledal	371	856.13	0.0206	267.50	31	0.00799	0.2372	0.0027	0.0809
Santa Cruz	8919	1068.89	0.0532	1689.60	180	0.01267	0.0561	0.0085	0.0202
Acatitlan	1884	1046.59	0.0497	726.92	115	0.01131	0.1131	0.0080	0.0215
Ixpallino	6166	1006.73	0.0430	1393.68	174	0.01310	0.0592	0.0070	0.0264
Piactla	5307	1044.76	0.0496	1644.52	142	0.01689	0.0660	0.0066	0.0239
El Quelite	835	720.06	0.0084	211.67	42	0.00579	0.1653	0.0096	0.0515

Tabla A.1. Características fisiográficas de las cuencas que drenan hasta las estaciones que pertenecen a la región hidrológica número 10.

Año	Estación											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1924						4562						
1925						2624						
1926						3821						
1927						3102						
1928						1122						
1929						947						
1930						3580						
1931						1320						
1932						5751						2848
1933					1350	1780						486
1934					1268	2427						1377
1935					2006	3755						1570
1936					725	1690						994
1937					1426	2676						692
1938			335		1579	2412						868
1939	277	162	299		2453	5599	4160					1943
1940	170	35	255			2335	1648					1526
1941	90	10	65			4008	2808					1904
1942	1405	400	445			5039	5113					939
1943	1776	819	1550			11000	8340					1952
1944	221	110	392			4000	2091					2276
1945	403	116	916			4755	3000					3232
1946	304	194	241			701	582					429
1947	61	23	530			782	1009					332
1948	659	690	648			790	1006					398
1949	1320	776	375			2760	2209					455
1950	374	182	272			5228	4140					151
1951	31	75	422			330	475					74
1952	96	386	377			398	842					42
1953	90	487	1173			3490	2794					64
1954	185	54	219			1227	1264					
1955	475	206	3507			3152	2780					
1956	57	377	165			361	753					
1957	190	70	526			378	485					
1958	3093	1030	1014			5715	3883					
1959	593	334	1610				1280		361			
1960	334	177	137	39			5048	1226	435			
1961	119	230	525	170			1845	1656	276			
1962	434	331	985	227			830	1034	4220			
1963	433	806	459	353			992	400	420			
1964	223	82	390	69			104	166	236			
1965	534	293	449	230			150	168	213	675		
1966	330	611	688	141			171	69	922	565		
1967	684	710	720	91			172		480	2037		
1968	1720	452	200	152			725		435	5000		
1969	255	10	312	82			97		64	435	175	
1970	435	838	520	322			240		250	798	659	
1971	600	318	1045	219			86		435	1670	530	
1972	405	275	34	307			82		470	4230	1931	
1973	1150	518	13	198			140		585	2431	1251	
1974	800	298		186			335		600	1717	1260	
1975	349	561		186			1713		290	488	273	
1976	1995	508		76			72		320	3127	1250	
1977	73	370		143			236		250	451	331	
1978	230	93		176			1633		245	860	322	
1979	104	43		103			1633		890	3050	1605	
1980	755	320		308			135		461	825	451	
1981	2040	924		353			1860		9245	3392	1475	
1982	1630	796		362			256		2388	1350	609	
1983	889	189		236			92		277	1650	1303	
1984	296	334		267			66		481	976	683	
1985	542	447		258			268		614	3937	1774	

Tabla A.2. Gastos máximos anuales instantáneos registrados en la estaciones hidrométricas que pertenecen a la región hidrológica número 10.

Año	Estación											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1937		505										
1938		962		766								
1939		1587		597								
1940		1088		170								
1941		1220		119							1562	
1942		833		65							2284	
1943		1704		157	2103						12675	
1944	1896			197	2142						3447	
1945	2660			414	1023						1636	
1946	375			291	838						1154	
1947	346			174	1161						1142	
1948	233			233	1062						3280	
1949	485			155	784						9200	
1950	158			44	1086						3800	
1951	227			227	488							
1952	169			169	677							
1953	669			669	807		1046					
1954	54			31	553		709					
1955	415			152	1252	579	1045					
1956	94			91	370	350	322					
1957	283			283	330	321	240					
1958	615			433	1958	840	1902	1344				
1959	240			132	762	702	722	510				
1960	529			529	1074	1510	556	444	117	563		60
1961	378			122	1280	646	864	821	290	488		73
1962	1000		1304	1000	1002	1674	1766	1276	624	213		75
1963	327		894	336	3680	622	2205	2855	157	648		34
1964	276		592	258	861	457	707	652	272	609		120
1965	153		228	92	889	710	1334	614	1600	127		17
1966	173		607	122	1166	1191	842	631	563	1480		71
1967	303		907	326	950	553	1056	937	101	512		113
1968	1600		723	1576	7000	4600	6200	6399	1008	1131		778
1969	264		292	228	484	400	872	799	183	41		30
1970	136		509	82	921	568	1020	765	173	82		2
1971	326		590	276	812	422	546	503	166	498		115
1972	421		1246	380	3332	1830	4365	3527	1080	720		10
1973	304		463	296	898	792	801	640	160	711		47
1974	504		361	311	2790	2005	1957		464	479		110
1975	629		564	490	620	1410	450		464	69		110
1976	45		564	60	1495	380	975		296	69		29
1977	66		364	123	836	625	949		253	60		160
1978	185		620	255	940	542	405		55	729		58
1979	473		313	303	3080	355	939		110	1529		2
1980	228		362	226	1550	1404	1374		664	198		156
1981	238		443	210	306	1555	2582		1743	2786		122
1982	74		375	67	151	638	660		115			193
1983	450		518	51	83	921	1440		532			72
1984	183		584	160	126	907			382			
1985	603			278	875	2470			610			

Tabla A.2. Gastos máximos anuales instantáneos registrados en la estaciones hidrométricas que pertenecen a la región hidrológica número 10 (Continuación).

Año	Estación											
	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1941					2085			1326				
1942					2531			1558				
1943					14376			2292				
1944					2580			1376				
1945					1499			894				
1946					1165			559				
1947					1127			1137				
1948		842			623			1668				
1949		10000			2298			4710				
1950		4579			3229			2920				
1951	58	946			677			493				
1952	153	2264			1266			695		88		
1953	124	1210			1025			678		120		209
1954	405	1619			955			683		371		260
1955	379	7477		112	4780			3101		1343		595
1956	379	659		74	532			583		138		496
1957	170	129		73	593	248		434		143		181
1958	192	3888		220	1045	455		3750		861		354
1959	67	1624		299	1908	743		1572		384		525
1960	89	8562		1150	15000	6800		6640		561		5300
1961	155	697		159	1396	472		880		250		320
1962	46	329		376	1620	347		997		285		422
1963	110	824		407	2702	584		2134		407		1860
1964	94	607		250	1319	481		735		565		547
1965	650	172		464	1944	1360	1178	952		272		495
1966	93	1507	197	275	2420	674	406	2144				
1967	49	595	271	300	2506	635	843	1175	1341		282	
1968	438	10000	194	336	1534	530	363	1308	1164		216	
1969	22	213	203	248	1508	1100	721	605	960		115	
1970	138	420	176	136	1558	390	417	980	860		88	
1971	44	766	150	360	2200	1283	1420	950	884		308	
1972	70		164	273	2225	688	1152	2129	1740		274	
1973	141		180	351	7960	1370	1516	4855	3075		319	
1974	650		192*	194	4001	1588	1742		1897		354	
1975	100		215	192	1067	383	430		1002		308	
1976	495		205*	580	3233	740	420		4020		293	
1977	214		207	189	1119	333	752		861		79	
1978	94		189	348	6178	535	1446		1696		300	
1979	54		196*	576	4443	1825	2158		2210		716	
1980	363		189	417	1474	562	720		876		338	
1981	134		216	1700	2508	1180	980		1765		285	
1982	54		217	748	1530	951	1001		1369		243	
1983			165*	588	8000	1010	1740		1795		282	
1984			218		5496	190	1271		1413		563	
1985			224		3385	483	1605		1898		387	
1986					1374							
1987					1245							
1988					2299							
1989					1345							
1990					11350							
1991					2509							
1992					2006							
1993					1180							

Tabla A.2. Gastos máximos anuales instantáneos registrados en la estaciones hidrométricas que pertenecen a la región hidrológica número 10 (Continuación).

Año	Estación					
	37	38	39	40	41	42
1941			759			
1942			2065			
1943			6991			
1944			580			
1945			714			
1946			746			
1947			771			
1948	137		693			
1949	395		2614			
1950	133		2336			
1951	77		437			
1952	248		594			
1953	42		546			
1954	177		516			
1955	542		1600			
1956	297		639			
1957	246		362	420		
1958	445		2232	1560	601	85
1959	669		616	343	387	33
1960	376		2003	2239	1525	99
1961	114		795	793	581	116
1962	115		1137	888	816	231
1963	521		1226	1814	1547	161
1964	175		454	392	271	206
1965	258		650	329	496	82
1966	292		958	812	620	262
1967	7	21	900	1251	1010	172
1968	74	90	1338	1298	767	273
1969	106	199	340	295	287	182
1970		218	357	311	212	167
1971		3223	1109	1060	894	
1972		715	932	908	2521	
1973		185	1349	1570	3075	
1974		424	680	963	976	
1975		111	488	368		
1976		198	900	809		
1977		259	791	672		
1978		475	989	1500		
1979		509	1620	1930		
1980		685	400	331		
1981		1365	2832	952		
1982		988	4440	2580		
1983		255	179	1713		
1984		375	694	736		
1985		250	1213	1580		
1986			494			

Tabla A.2. Gastos máximos anuales instantáneos registrados en la estaciones hidrométricas que pertenecen a la región hidrológica número 10 (Continuación).

Número	Estación hidrométrica
1	Naranjo
2	Zopilote
3	Guamuchil
4	Pericos
5	Tierra Blanca
6	Puente Sud-Pacífico
7	Palos Blancos
8	El Varejonal
9	Badiraguato
10	Guatenipa II
11	La Huerta
12	Puente Cañedo
13	Sanalona
14	Picachos
15	Tamazula
16	El Bledal
17	Santa Cruz
18	Acatitan
19	Ixpalino
20	Piactla
21	El Quelite
22	San Miguel Zapotitlan
23	San Blas
24	La Tina
25	Bamicori
26	Las Cañas
27	El Mahone
28	Choix
29	Huites
30	Palo Dulce
31	Chinipas
32	San Francisco
33	San Ignacio
34	La Veranera
35	Urique II
36	Guerachic
37	Alamos
38	Cazanate
39	Jaina
40	Toahayana
41	Tecusiapa
42	Los Molinos

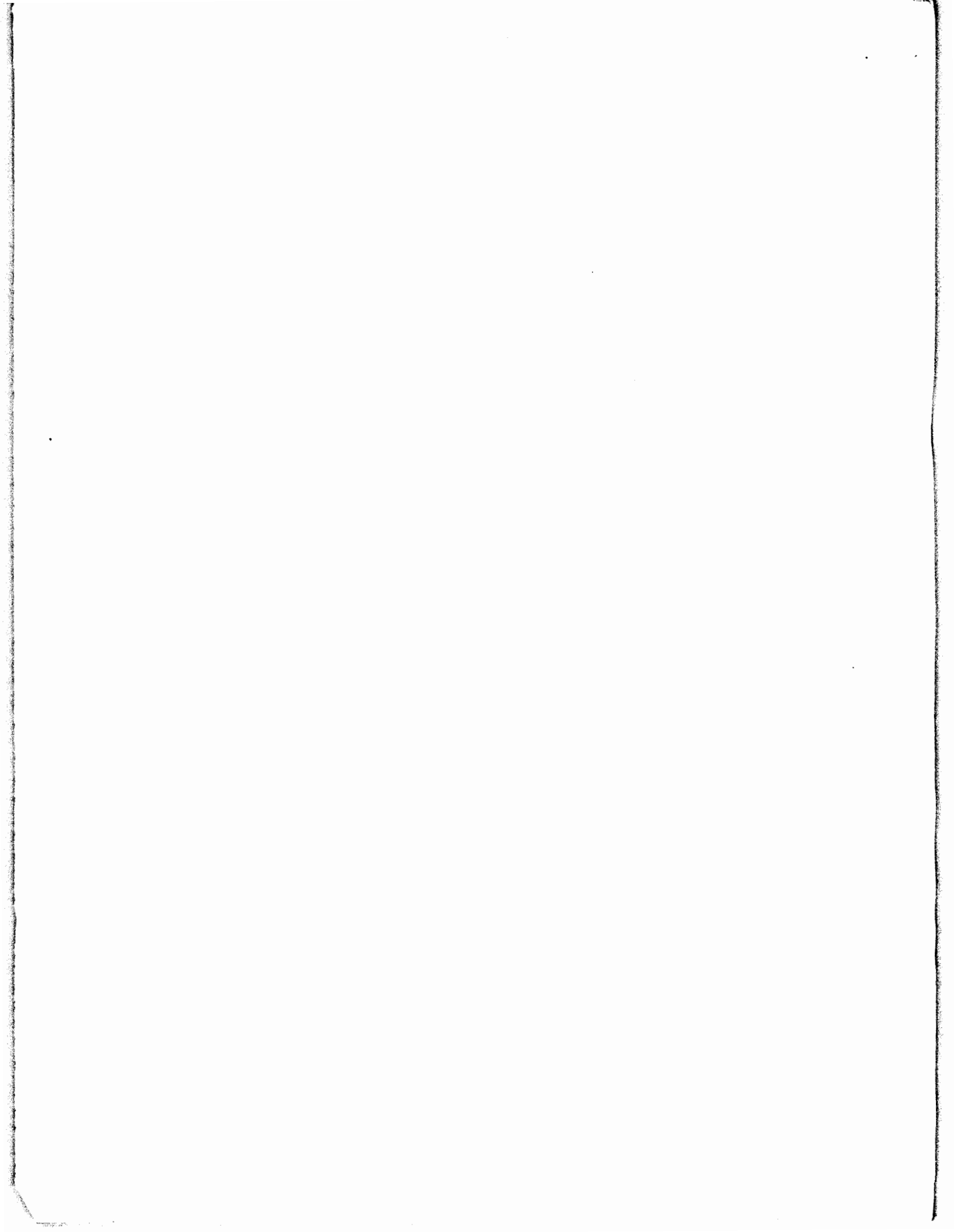
Tabla A.3. Nombre de las estaciones hidrométricas que pertenecen a la región hidrológica número 10, cuyo número coincide con el encabezado de la tabla A.2.

Número	Región homogénea A Estación hidrométrica	Región homogénea B Estación hidrométrica
1	San Miguel Zapotitlan	Tierra Blanca
2	La Tina	Puente Sud-Pacífico
3	Chinipas	Palos Blancos
4	Urique	El Varejonal
5	Alamos	La Huerta
6	Cazanate	Puerto cañedo
7	Toahayana	Picachos
8	Los Molinos	Badiraguato
9	Naranjo	Tamazula
10	Zopilote	Acatitan
11	San Blas	Ixpalino
12	El Mahone	Piaxtla
13	Huites	Guatenipa
14	Palo Dulce	Sanalona
15	San Francisco	El Bledal
16	San Ignacio	Santa Cruz
17	Guerachic	El Quelite
18	Bamicori	Guamuchil
19	Las Cañas	Pericos
20	Choix	
21	La Veranera	
22	Jaina	
23	Tecusiapa	

Tabla A.4. Regiones homogéneas definidas con los criterios de delimitación del capítulo 8 para la región hidrológica número 10.



Figura A.1. Localización de las estaciones hidrométricas dentro de la región hidrológica número 10.



Esta obra se terminó de imprimir
en noviembre de 2002
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 200 ejemplares
más sobrantes de reposición

F-DEPFI/PUB 0009 /2002
/Ej.10



722361

F-DEPFI
PUB 00009
2002
Ej.10

G(2) 2002