

ENZO LEVI

TEORIAS Y METODOS DE LAS MATEMATICAS APLICADAS

1ª edición 1965
1ª reimpresión 1980
2ª reimpresión 1986

D-63



F
DEPI
D-63
1986
EJ.2

El contenido expresado en esta obra es responsabilidad del autor.

INDICE GENERAL

PREFACIO	XI
----------------	----

CAPITULO I

ANALISIS VECTORIAL Y TEORIA DEL POTENCIAL

I. RESUMEN DE CONCEPTOS BASICOS

1. Concepto de vector	1
2. Suma de vectores	1
3. Producto escalar	2
4. Producto vectorial	2
5. Productos múltiples	3
6. Diferenciales de puntos y de vectores	5
7. Derivadas de punto y de vector	6
8. Homografías vectoriales	7
9. Matriz de una homografía vectorial	8
10. Derivada de un vector con respecto a un punto	9

II. OPERADORES DIFERENCIALES

11. El gradiente	11
12. Primeras propiedades del gradiente	12
13. Gradientes de distancias	12
14. Expresión cartesiana del gradiente	13
15. Problemas de máximo y mínimo	14
16. Rectas normales y planos tangentes a superficies	15
17. El rotacional	17
18. Primeras propiedades del rotacional	17
19. Rotacional de una función vectorial compuesta	18
20. Expresión cartesiana del rotacional	19
21. La divergencia	20
22. Divergencia de una función vectorial compuesta	21
23. Expresión cartesiana de la divergencia	22
24. Operadores diferenciales compuestos	22
25. La ecuación de Laplace	24
26. Polinomios armónicos homogéneos	26

III. FORMULAS INTEGRALES Y FUNCIONES ARMONICAS

27. Coordenadas curvilíneas	29
28. Coordenadas cilíndricas y esféricas	30
29. Teorema de la integral de rotacional	32
30. Teorema de la integral de la divergencia	34
31. Teoremas derivados del teorema de Gauss	36
32. Fórmulas fundamentales de Green	38
33. Expresión de una función conociéndose su laplaciano en un volumen dado y valores de frontera	39
34. Propiedades de las funciones armónicas tridimensionales	41

2355

G(2)- 2355

35. Problemas de Dirichlet y de Neumann	43
36. El potencial de masa	44
37. Teorema de la divergencia y fórmulas de Green para el plano	47
38. Expresión de una función conociéndose su laplaciano en un área plana dada y valores de frontera	48
39. Propiedades de las funciones armónicas planas	50

CAPITULO II

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

I. FUNCIONES MONOGENAS SEGUN CAUCHY Y RIEMANN

40. Números complejos	51
41. Funciones de variable compleja	52
42. Condiciones de Cauchy-Riemann	55
43. Series de potencias en el campo complejo	56
44. Series derivadas	59
45. Funciones exponencial y goniométricas	60
46. Función logarítmica	64
47. Superficies de Riemann	66
48. Transformaciones conformes	70
49. Transformaciones conformes elementales	73
50. Transformaciones sucesivas	76

II. INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

51. Puntos ordinarios y puntos singulares	77
52. Teorema de Cauchy	77
53. Cálculo de integrales de línea	80
54. Aplicación al cálculo de ciertas integrales impropias	82
55. Integrales abelianas	84
56. Integrales elípticas de primera especie	85
57. Transformación de Schwarz-Christoffel	87
58. Fórmula de Cauchy	90
59. Polinomios de Legendre	91
60. Teorema de Morera	93
61. Principio de la reflexión analítica	94

CAPITULO III

DESARROLLOS EN SERIE

I. DESARROLLOS EN SERIE DE POTENCIAS

62. Desarrollo en serie de Taylor	97
63. Polinomios y trascendentes enteras	98
64. Concepto de función analítica	101

INDICE GENERAL

VII

65. Desarrollo en serie de potencias negativas	104
66. Desarrollo en serie de Laurent	105
67. Teorema de los residuos	107
68. Análisis de los puntos singulares aislados	109
69. Funciones meromorfas	111

II. LA FUNCION GAMMA

70. Desarrollos en serie y en producto infinito para funciones gamma métricas	114
71. La función gamma; expresiones de Weierstrass y de Gauss ...	116
72. Propiedades de la función gamma	118
73. La integral euleriana de segunda especie	119
74. La función beta	120

III. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

75. Clasificación de las funciones periódicas	123
76. Desarrollo en serie de funciones simplemente periódicas	124
77. Desarrollo de Fourier en el campo real	126
78. Ejemplos de desarrollos en serie de Fourier	129
79. Análisis armónico	131

CAPITULO IV

CALCULO FUNCIONAL

I. ELEMENTOS DE CALCULO DE VARIACIONES

80. Concepto de funcional	133
81. Máximos y mínimos de funcionales	134
82. La ecuación de Euler	136
83. Dos problemas	139
84. Variación de una funcional	142
85. Extremos de funcionales de varios argumentos	143
86. Extremos con condiciones auxiliares	145
87. Problemas isoperimétricos	147
88. Variación de una integral doble	148
89. Principios variacionales de la Mecánica	150
90. Ecuaciones de Lagrange	153
91. El problema de la cuerda vibrante	154

II. FUNCIONALES LINEALES

92. Representación integral de las funcionales lineales	157
93. Espacios de Hilbert	158
94. Sistemas de referencia ortonormales	161
95. Ecuaciones integrales lineales	164
96. Resolución de las ecuaciones de Volterra de segunda especie ..	165
97. La convolución	167

98. La ecuación integral de Abel y los fenómenos hereditarios	169
99. Transformaciones funcionales lineales	172
100. Transformaciones de Fourier y de Laplace	173
101. Propiedades operacionales	176
102. Inversión de las transformaciones de Fourier y Laplace	178
 III. LA TRANSFORMACION DE LAPLACE	
103. Cálculo de transformadas fundamentales	181
104. Fórmula del retroceso	184
105. Fórmulas de amortiguación y de similitud	185
106. Fórmulas de la derivación y de la integración	186
107. Transformada de la convolución	187
108. Transformadas expresadas por desarrollos en serie	188
109. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias	191
110. Resolución de ecuaciones integrales	193
111. Resolución de ecuaciones lineales en las derivadas parciales ..	195

CAPITULO V

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

I. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

112. Generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias	197
113. Resolución del problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas	199
114. Formas reducidas de las ecuaciones lineales del segundo orden	201
115. Características oscilantes	203
116. Teorema de comparación de Sturm	204
117. Distancia mínima entre ceros de una integral	206
118. Estabilidad de las integrales	210
119. La ecuación y las funciones de Bessel	211
120. El problema de Sturm-Liouville	215
121. Función de Green y ecuación integral relativa	217
122. Autofunciones y autovalores	221
123. Ecuaciones con núcleo de Goursat	224
124. Ecuaciones con infinitos autovalores	226
125. Análisis de la ecuación de onda	229
126. La ecuación de Laguerre	231
127. La ecuación de Legendre	234
128. Los polinomios de Hermite	237

II. ECUACIONES EN LAS DERIVADAS PARCIALES

129. Ecuaciones lineales del primer orden	240
130. Ecuaciones lineales del segundo orden	243
131. Clasificación de las ecuaciones del segundo orden	245
132. Ecuaciones totalmente lineales	246
133. Métodos para la integración de ecuaciones en las derivadas parciales	248

134. Método de la transformación de Laplace. Ecuación de la difusión fórmula de Duhamel	248
135. Método de la función de Green. Problema de Dirichlet en tres dimensiones	250
136. Problema de Dirichlet con frontera plana	252
137. Problema de Dirichlet en la esfera	253
138. Problema de Dirichlet en dos dimensiones	255
139. Problema de Dirichlet en el círculo	256
140. Método de las autofunciones. La ecuación de onda	257
141. Potencial de un campo con frontera esférica	258
142. Funciones esféricas	261

CAPITULO VI

GEOMETRIA DIFERENCIAL

I. CURVAS ALABEADAS, ENVOLVENTES Y SUPERFICIES DESARROLLABLES

143. Tangente y plano osculador a una curva alabeada	265
144. Curvatura de las curvas alabeadas	266
145. Torsión de una curva alabeada	268
146. Planos principales	270
147. Fórmulas de Frenet	271
148. Envolventes de curvas planas	271
149. Envolventes de superficies	274
150. Envolventes de curvas alabeadas	274
151. Superficies desarrollables	276

II. GEODESICAS, ASINTOTICAS Y LINEAS DE CURVATURA

152. Teorema de Meusnier	280
153. Variación de un arco de curvatura perteneciente a una superficie	282
154. Geodésicas de una superficie	283
155. Coordenadas geodésicas	287
156. Curvatura geodésica	289
157. La involución de Dupin	290
158. Tangentes principales y lineales asintóticas	292
159. Tangentes de curvatura	295
160. Teorema de Euler	298
161. Líneas de curvatura	299
162. Curvatura de una superficie	301
163. Teorema de Joachimsthal	304
164. Sistemas triples ortogonales de superficies	305
165. Teorema de Dupin	306
166. Líneas de curvatura que son geodésicas	308

III. ANALISIS DE LAS SUPERFICIES POR COORDENADAS CURVILINEAS

167. Las formas cuadráticas fundamentales	309
168. Casos de simplificación de las formas cuadráticas	311

169. Aplicación de las formas cuadráticas del cálculo de ángulos y áreas	314
170. Cálculo de las curvaturas media y total	317
171. Superficies de área mínima	318
172. Superficies aplicables	321
173. Representaciones conformes de una superficie sobre otra	323
174. Proyección de Mercator	325
175. Proyección estereográfica	327

PREFACIO

*The time soon will come, or is already here,
when mathematical analysis will be applied
in almost all branches of engineering.*

THEODOR VON KARMAN (1940)

La rápida evolución tecnológica, característica de nuestro tiempo, exige nuevas orientaciones en la preparación del ingeniero. Nuevos materiales, nuevos aparatos, nuevos criterios de diseño aparecen día tras día; las técnicas que aprendimos hace pocos años se abandonan, para dejar lugar a otras, desconocidas hasta ayer; el mismo motivo de ser de la profesión va cambiando. El ingeniero que no esté en condiciones de reajustar en cualquier momento sus conocimientos, no sólo en el sentido de ir ampliando su cultura profesional, sino en el sentido más inmediato de hacer suyas las nuevas técnicas, difícilmente vencerá la competencia de quienes, amparándose en ellas, pueden ofrecer soluciones más económicas y más seguras. La enseñanza universitaria se ve hoy obligada a alejarse del antiguo objeto de capacitación profesional, consistente en producir técnicos *informados*, para enfrentar la tarea, mucho más ardua, de preparar profesionistas *capaces de informarse*.

Una consecuencia característica de este nuevo enfoque es la importancia siempre mayor que van adquiriendo las Matemáticas, que parecen ofrecer una base permanente para entender y atacar los problemas técnicos. Esto se debe a que, mientras que el problema pertenece a la naturaleza, las matemáticas son algo humano, en cuanto constituyen esencialmente un modo de pensar, el más adecuado para reducir la extrema complicación de los fenómenos naturales a una medida tal que nuestro intelecto pueda prever su desarrollo y aprovechar sus efectos.

Pensar matemáticamente es una facultad que todo hombre posee en mayor o menor grado; pero las teorías y los métodos matemáticos de que disponemos constituyen una colección de *procesos de razonamiento*, que fueron concibiendo y desarrollando individuos de inteligencia superior, al enfrentarse con problemas no resolubles, o bien resolubles de manera insatisfactoria, por medio de los conocimientos de su época. Esos problemas pudieron tener entonces un interés técnico o bien no tenerlo: por lo general al matemático, como al poeta, poco le importa de donde venga su inspiración, interesándole más bien la belleza estética de la creación engendrada por ella. Por lo contrario el ingeniero necesita, y con urgencia, resolver un problema determinado; en el caso de que, habiendo consultado todos sus recuerdos y apuntes de escuela y la literatura disponible, no lo halle ya resuelto, tendrá que intentar obtener él mismo la solución, utilizando los métodos matemáticos disponibles, con tanta más probabilidad de éxito cuanto mayores sean su familiaridad con tales métodos y su destreza en emplearlos.

Ahora ¿qué es, en el inmenso dominio de las Matemáticas, lo que puede ser de auxilio al ingeniero? La pregunta es imposible de contestarse, ya que, en el afán de echar mano de todo lo que nos saque de apuros, hasta a las teorías que hoy parecen más abstractas mañana les encontraremos aplicaciones. La realidad actual nos lleva sin embargo a considerar tres campos principales: Análisis Matemático, Probabilidad y Estadística, Cálculo Numérico y Programación. Con referencia al primero, que es el que aquí nos interesa directamente, existen en las Escuelas de Ingeniería cursos de Cálculo Diferencial e Integral, más o menos desarrollados, pero que se inspiran todos en un programa básico común: todos tienen evidentemente un mismo origen, que es instructivo conocer. A fines del siglo XVIII se fundó en París la Escuela Politécnica, con la intención de adecuar la enseñanza de la ingeniería civil y militar a los conocimientos científicos y técnicos de la época. A dictar la clase de Cálculo se llamó a un matemático sexagenario, llegado unos 10 años antes, por invitación del rey, a París, donde había quedado no sin temores y dificultades originadas por ser súbdito de un país enemigo, el Reino de Cerdeña, durante el período subsiguiente a la Revolución

Francesa. Ahora bien, es en el curso que dicho matemático, José Luis Lagrange, dictó desde 1799 en la escuela mencionada, que hallamos por primera vez desarrollado en esencia ese programa de Cálculo Diferencial, que durante más de siglo y medio ha seguido constituyendo el paso obligado para todo estudiante de ingeniería.

Desde luego no hay que creer que desde Lagrange al Análisis Matemático no haya producido nada que sea de interés para las aplicaciones técnicas: todo lo contrario. Cauchy con las funciones de variable compleja, Abel y Jacobi con las elípticas, Gauss con la geometría diferencial, Laplace, Poisson y Green con la teoría del potencial, Fourier con el análisis armónico, Ricci y Levi-Civita con el cálculo diferencial absoluto, Volterra e Hilbert con el cálculo funcional, proporcionaron nuevos métodos básicos; se creó el cálculo vectorial; se integraron diversos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, llegándose a definir nuevas importantes funciones; las ecuaciones integrales no sólo demostraron su utilidad intrínseca, sino que permitieron alumbrar con nueva luz la teoría general de las ecuaciones diferenciales; ecuaciones lineales y no lineales en las derivadas parciales fueron atacadas por poderosos métodos de análisis; se desarrolló la teoría de las transformaciones integrales y el cálculo operacional de Heaviside adquirió forma rigurosa. Además, y esto es de suma importancia, muchos métodos matemáticos que, al aplicarse, permitían obtener fórmulas resolutivas de interés puramente teórico, por la imposibilidad práctica de realizar en términos finitos ciertas operaciones implícitas, hoy día se han vuelto utilizables con fines prácticos gracias al empleo de calculadoras electrónicas.

Este manual, que ambiciona ofrecer una visión no superficial de parte de estas teorías que todavía no han merecido derecho de ciudadanía en los cursos profesionales, quisiera estar al alcance de quienquiera se encuentre familiarizado con las matemáticas que se enseñan en el primer bienio de una escuela de ingeniería o de física; sus lineamientos generales, algo diferentes de los corrientes en obras de este tipo, merecen sin embargo una aclaración. A veces he oído expresar la opinión de que lo que el ingeniero aprovecha en cuanto a matemáticas es únicamente conocer bien las fórmulas y saberlas emplear; esto implica desde luego que posea una idea clara de los

principios básicos y una información general acerca de las teorías, pero deja sobreentender que todo lo que es aclaración rigurosa de conceptos, demostración de teoremas o razonamiento orientado hacia la obtención de las fórmulas es algo meramente especulativo, superfluo para quien no tenga intereses que no sean las aplicaciones. A mi parecer esto no es correcto, y por dos motivos: primero porque todo resultado matemático, como conclusión de una labor mental ordenada, difícilmente puede separarse de ésta sin menoscabo para una apreciación correcta y completa del resultado mismo; y en segundo lugar porque los procesos conocidos de razonamiento matemático son de por sí una valiosísima herencia humana que estamos utilizando, de manera más o menos consciente, cada vez que escudriñamos la naturaleza; y cuanto más los hayamos asimilado, transformándolos en patrones de nuestro propio pensamiento, tanto más resultará multiplicada nuestra capacidad para la investigación.

De aquí que me haya propuesto orientar decididamente este manual hacia la exposición detallada de teorías y métodos, buscando la simplificación necesaria, para que resulte al alcance del técnico, en la máxima aclaración de conceptos y algoritmos y en la eliminación de todo desarrollo superfluo o de interés secundario. A esta tendencia simplificadora obedece por ejemplo el empleo frecuente del cálculo vectorial y, dentro de él, las definiciones adoptadas para los operadores diferenciales gradiente, rotacional y divergencia; definiciones cuyas ventajas se aprecian toda vez que se trabaje con coordenadas que no sean las cartesianas y muy especialmente en la deducción rápida y conceptualmente sencilla de fórmulas fundamentales, como son las relaciones integrales de Stokes y de Gauss, o la expresión de Lamé para el laplaciano.

Los temas principales tratados en el libro pertenecen a los campos siguientes: análisis vectorial y teoría del potencial, funciones de variable compleja, desarrollos en series de potencias y de Fourier, cálculo de variaciones, cálculo funcional, transformación de Laplace, ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y en las derivadas parciales, y geometría diferencial. Dentro de este marco general, tal vez de por sí hasta demasiado ambicioso para un manual de este tamaño, he aprovechado sin embargo toda ocasión favorable para introducir

otras nociones útiles: funciones especiales algebraicas, como los polinomios de Legendre, Laguerre, Hermite y los armónicos homogéneos, y trascendentes como las funciones gamma y beta, las de Bessel, las esféricas, la función de los errores, etc.; problemas relativos a ecuaciones diferenciales: los de Cauchy y de Sturm-Liouville, de Dirichlet y de Neumann; aplicaciones físicas como el principio de Hamilton y las ecuaciones de Lagrange de la Mecánica, la teoría del potencial de masa, la ecuación de la cuerda vibrante, los fenómenos hereditarios y de histéresis, el principio de Duhamel relativo a la propagación del calor.

No he abundado mayormente en ejemplos de este último tipo porque no ha sido mi intención hacer de éste, un libro de Matemáticas Aplicadas. En el manual de *Mecánica de los fluidos*, que se ha publicado simultáneamente, el lector que se interese hallará, en el desarrollo de esos tópicos tan importantes hoy en día, una grande variedad de aplicaciones, que lo guiarán paulatinamente a hacerse dueño de fórmulas y métodos aquí presentados.

A propósito de ejercicios, creo que debo una palabra de explicación a quienes extrañen las listas de preguntas de fin de capítulo, usuales en libros como éste. Ideadas con el objeto de que el lector pueda contestarlas sin la guía del maestro, esas preguntas acaban por ser inevitablemente aplicaciones demasiado simples de fórmulas o teoremas, y pueden crear en quien las haya contestado la ilusión de que ya sabe todo, ilusión destinada a desvanecerse la primera vez que él tenga que enfrentarse a un problema realmente complejo. En efecto el verdadero ejercicio no consiste en la utilización inmediata de una fórmula, sino en la resolución de problemas que exigen la utilización amplia de conceptos, métodos y teoremas diferentes, combinados entre sí, implicando, si es posible, la interpretación física de los elementos utilizados y de los resultados obtenidos. El lector estudioso utilizará con mucho mayor provecho esos libros de ejercicios, resueltos y por resolver, tradicionales en la enseñanza europea, que hoy en día se van difundiendo también en Norteamérica.

No tengo la pretensión de que este libro se lea como una novela, pero sí considero que sólo leyéndolo con orden y sosiego se puede captar en toda su amplitud esa visión de diferentes aspectos

del pensamiento matemático, que me agradaría dejar con el lector. Para eso quisiera sugerir a quien se acerque a estos temas por primera vez que proceda a la lectura en tres fases sucesivas: una primera intentando entender con toda claridad los conceptos básicos, el lineamiento general de las demostraciones y el significado de los resultados, aunque algo se le escape en relación con los desarrollos analíticos; la segunda lectura se dedicará más bien a entender con todo rigor los cálculos sin olvidar detalles, reconstruyendo, si será del caso, esos pasos sencillos que he estado dejando al lector, con tanta mayor frecuencia cuanto más la tratación va avanzando; finalmente una tercera lectura completa, realizada ya sin preocupaciones, abrirá los ojos del lector a toda belleza de estas teorías y le ayudará a hacerse dueño de ellas. Para que el libro, una vez asimilado su contenido, pueda servir permanentemente como manual de consulta, se anexan índices analítico y alfabético muy detallados.

México, D. F., febrero de 1965

ENZO LEVI

CAPITULO I

ANALISIS VECTORIAL Y TEORIA DEL POTENCIAL

I. RESUMEN DE CONCEPTOS BASICOS

1. **Concepto de vector.** Un *vector* es un ente geométrico caracterizado por su magnitud y por su dirección. Se indicará con $\overrightarrow{AB}$ al vector engendrado por el transporte de un punto móvil desde el punto A hasta el punto B , siguiendo la recta AB . La magnitud del vector se llama *módulo* del vector y se indica con AB o con $|\overrightarrow{AB}|$, o bien, para mayor claridad, con *mód* $\overrightarrow{AB}$. Se llaman *escalares* los entes caracterizados tan sólo por su magnitud. El módulo de un vector es un escalar.

Llábase *componente* de un vector, con respecto a una recta, la magnitud de su proyección ortogonal sobre esa recta. En particular, las componentes con respecto a una terna cartesiana ortogonal x, y, z , son las magnitudes de las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados. Si $\mathbf{u}$ es un vector, llamaremos u_x, u_y, u_z , sus componentes con respecto a los ejes x, y, z , respectivamente. Se tiene

$$\text{mód } \mathbf{u} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (1.1)$$

2. **Suma de vectores.** Un vector $\mathbf{w}$ se llama suma de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y se escribe

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

cuando se tiene

$$w_x = u_x + v_x \quad w_y = u_y + v_y \quad w_z = u_z + v_z.$$

Todo vector del espacio puede siempre representarse como combinación lineal de tres vectores no coplanares dados. En particular, si se toman tres vectores unitarios (de módulo 1) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, dirigidos según los ejes coordenados: $\mathbf{i}$ según el eje x , $\mathbf{j}$ según el eje y , $\mathbf{k}$ según el eje z , se puede escribir

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}. \quad (2.1)$$

3. Producto escalar. *Producto escalar* (o *puntual*) de dos vectores u y v es el escalar que resulta al multiplicar los módulos de ambos vectores entre sí y por el coseno del ángulo formado por sus direcciones

$$u \cdot v = v \cdot u = \text{mód } u \cdot \text{mód } v \cdot \cos(u, v) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \quad (3.1)$$

Se escribe u^2 el producto escalar del vector u por sí mismo:

$$u^2 = u \cdot u = (\text{mód } u)^2.$$

Se tiene por (3.1)

$$i^2 = i \cdot i = 1, \quad j^2 = j \cdot j = 1, \quad k^2 = k \cdot k = 1, \quad (3.2)$$

$$i \cdot j = j \cdot i = j \cdot k = k \cdot j = k \cdot i = i \cdot k = 0. \quad (3.3)$$

Propiedad distributiva de la suma y del producto escalar:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w. \quad (3.4)$$

4. Producto vectorial. *Producto vectorial* (o *cruzado*) de dos vectores u y v es un tercer vector cuyo módulo es el resultado del producto de los módulos de ambos vectores entre sí y por el seno del ángulo formado por sus direcciones

$$\text{mód } (u \times v) = \text{mód } u \cdot \text{mód } v \cdot \text{sen } (u, v), \quad (4.1)$$

y cuya dirección es normal al plano que contiene los dos vectores multiplicados y orientada de tal manera que un giro de un ángulo (u, v) alrededor del vector $u \times v$ tomado como eje, en sentido opuesto a las manecillas del reloj (*sentido antihorario*), lleva el vector u a la dirección del vector v . Se tiene

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Invirtiendo el orden de los factores, el producto cruzado cambia de signo:

$$u \times v = -v \times u. \quad (4.3)$$

En particular, se obtiene de (4.1)

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0.$$

$$\begin{aligned} i \times j &= -j \times i = k, & j \times k &= -k \times j = i, \\ k \times i &= -i \times k = j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Suma y producto vectorial gozan de la *propiedad distributiva*

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w. \quad (4.5)$$

5. Productos múltiples. *Producto mixto* de tres vectores no coplanares u, v, w es el escalar $u \cdot (v \times w)$. Su valor no cambia al *permutar circularmente los factores*, o sea

$$u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (5.1)$$

El producto mixto *mide el volumen del paralelepípedo* cuyos lados son u, v, w .

El *doble producto vectorial* $u \times (v \times w)$ tiene el desarrollo

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w. \quad (5.2)$$

La demostración de esta fórmula se logra como sigue. Primero observemos que el vector $u \times (v \times w)$ es perpendicular a la normal al plano que contiene los vectores v y w . Por consiguiente es un vector que está en ese plano y puede por tanto expresarse por la combinación lineal

$$u \times (v \times w) = a v + b w, \quad (5.3)$$

siendo a y b dos coeficientes convenientes. Además, por la perpendicularidad del vector $u \times (v \times w)$ con u , se tiene $[u \times (v \times w)] \cdot u = 0$, y luego por (5.3)

$$a v \cdot u + b w \cdot u = 0$$

o sea

$$a v \cdot u = -b w \cdot u; \quad \frac{a}{b} = -\frac{w \cdot u}{v \cdot u}.$$

de donde, indicando con k un número conveniente,

$$a = k(w \cdot u), \quad b = -k(v \cdot u)$$

y reemplazando en (5.3)

$$u \times (v \times w) = k[(w \cdot u)v - (v \cdot u)w]. \quad (5.4)$$

En el caso de que sea $v = u$, se comprueba fácilmente que $k = 1$. En efecto, entonces

$$u \times (u \times w) = k[(u \cdot w)u - (u \cdot u)w]$$

y multiplicando escalarmente por w

$$w \cdot [u \times (u \times w)] = k[(u \cdot w)^2 - u^2 w^2]$$

o sea por (5.1)

$$-(u \times w)^2 = k[(u \cdot w)^2 - u^2 w^2]$$

y recordando las fórmulas (3.1) y (4.1)

$$u^2 w^2 \sin^2(u, w) = k u^2 w^2 [\cos^2(u, w) - 1]$$

de donde resulta, sin más, que $k = 1$, o sea

$$u \times (u \times w) = (u \cdot w)u - (u \cdot u)w. \quad (5.5)$$

En el caso general, también es $k = 1$. En efecto, multiplicando escalarmente el producto por v , y tomando en cuenta (5.1), se obtiene

$$\begin{aligned} v \cdot [u \times (v \times w)] &= (v \times w) \cdot (v \times u) = -(u \times v) \times v \cdot w = \\ &= -v \times (v \times u) \cdot w \end{aligned}$$

y aplicando (5.5)

$$\begin{aligned} v \cdot [u \times (v \times w)] &= -[(v \cdot u)v - (v \cdot v)u] \cdot w = (v \cdot v)(u \cdot w) - \\ &- (v \cdot u)(v \cdot w) = v \cdot [(u \cdot w)v - (u \cdot v)w]. \end{aligned}$$

Esta última, comparada con (5.4) permite afirmar que $k = 1$, o sea que vale la (5.2), como queríamos demostrar.

Permutando circularmente los tres vectores u , v y w , calculando las expresiones (5.2) correspondientes y sumando, se obtiene la otra fórmula importante

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0. \quad (5.6)$$

El producto triple $(u \cdot v \times w)z$ tiene dos desarrollos importantes. El primero

$$(u \cdot v \times w)z = (z \cdot v)(w \times u) + (z \cdot w)(u \times v) + (z \cdot u)(v \times w) \quad (5.7)$$

se comprueba fácilmente ya que, al multiplicar puntualmente ambos miembros por u , después por v y finalmente por w (con lo que se obtienen magnitudes proporcionales a las componentes de la expresión (5.7) con respecto a la terna cartesiana, generalmente no ortogonal, formada por los ejes u , v , w), se obtienen los mismos valores. El segundo desarrollo es

$$(u \cdot v \times w)z = (z \cdot v \times w)u + (z \cdot w \times u)v + (z \cdot u \times v)w \quad (5.8)$$

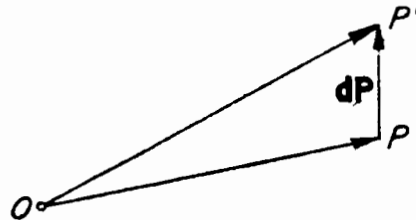
y se comprueba de manera parecida, multiplicando puntualmente ambos miembros por los vectores $u \times v$, $v \times w$ y $w \times u$.

→ 6. **Diferenciales de puntos y de vectores.** Sea O un punto fijo del espacio y P otro variable. Si P se desplaza a una posición infinitamente próxima P' , entonces el vector infinitamente pequeño

$$PP' = OP' - OP$$

se llama *diferencial del punto P* y se escribe

$$PP' = dP.$$



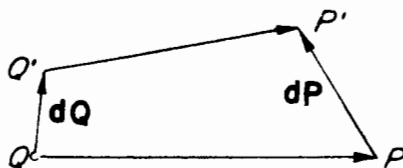
Si el punto P tiene coordenadas x , y , z , resulta

$$dP = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}. \quad (6.1)$$

Consideremos ahora un vector QP que una a dos puntos, ambos móviles, Q y P , y supongamos que se desplace a una posición infi-

nitamente próxima $Q'P'$. Entonces se define como *diferencial del vector QP* al vector

$$dQP = Q'P' - QP \quad (6.2)$$



Por otro lado, resulta de la figura que

$$QP + dP = dQ + Q'P'$$

o sea, reemplazando en la definición (6.2),

$$dQP = dP - dQ \quad (6.3)$$

Esta fórmula, muy importante, expresa la diferencial de un vector por medio de las diferenciales de sus puntos extremos.

Si ponemos $QP = u$, obtenemos de (6.2) la fórmula en coordenadas cartesianas

$$du = du_x i + du_y j + du_z k. \quad (6.4)$$

Las reglas de diferenciación de los productos de vectores son las siguientes:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + du \cdot v \quad (6.5)$$

$$d(u \times v) = u \times dv + du \times v \quad (6.6)$$

y la del producto de un escalar por un vector es

$$d(fu) = f du + u df. \quad (6.7)$$

7. Derivadas de punto y de vector. Presentamos a continuación los conceptos de derivadas de un punto y de un vector con respecto a una variable escalar.

Si P es un punto que se mueve de tal manera, que a todo valor de la variable t corresponda una posición bien determinada de P , se

dice que P es función de t y se escribe $P = P(t)$; entonces se define como derivada del punto P con respecto a t , y se escribe dP/dt , el vector que multiplicado por dt da la diferencial dP :

$$\frac{dP}{dt} dt = dP. \quad (7.1)$$

Análogamente, si a cada valor de la variable escalar t corresponde uno y sólo un valor del vector u , se dice que u es función de t , y se escribe $u = u(t)$. Entonces también las componentes de u son funciones de t . Se define como derivada del vector u con respecto a t , y se escribe du/dt , al vector que multiplicado por dt da la diferencial du :

$$\frac{du}{dt} dt = du. \quad (7.2)$$

8. Homografías vectoriales. Un operador ξ es *aditivo* cuando, siendo x, y dos magnitudes (escalares o vectoriales, según el operador) a las cuales puede ser aplicado, se tiene que

$$\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y). \quad (8.1)$$

es decir, que el resultado de la operación efectuada sobre la suma de las dos magnitudes es igual a la suma de los resultados de las operaciones efectuadas sobre cada una por separado. Un operador ξ es *homogéneo*, cuando, siendo m un número cualquiera y x una magnitud a la cual el operador es aplicable,

$$\xi(mx) = m\xi(x) \quad (8.2)$$

es decir, que el resultado de la operación efectuada sobre mx es igual a m multiplicado por el resultado de la operación efectuada sobre x . El operador que es aditivo y homogéneo al mismo tiempo se llama *operador lineal*. Por ejemplo el operador $a \cdot$ (multiplicación por el número a) es un operador lineal, ya que

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \quad a \cdot (mx) = m(a \cdot x).$$

Por el contrario, el operador $a +$ (adición del número a) no es aditivo ni homogéneo, ya que

$$a + (x + y) \neq (a + x) + (a + y), \quad a + mx \neq m(a + x).$$

Se conocen bajo el nombre de "homografías vectoriales" los operadores vectoriales lineales que, aplicados a vectores, dan vectores. Los tensores son precisamente operadores de este tipo.

Si u es un vector cualquiera, entonces el operador $u \times$ es una homografía vectorial. En efecto, si x, y son dos vectores también arbitrarios, se tiene

$$u \times (x + y) = u \times x + u \times y \quad , \quad u \times (mx) = mu \times x.$$

9. Matriz de una homografía vectorial. Una homografía vectorial resulta completamente determinada cuando se conocen los transformados de tres vectores no coplanares dados. En efecto, sean x, y, z tres vectores no coplanares. Si la homografía es α , entonces los transformados son $\alpha(x), \alpha(y), \alpha(z)$, que suponemos conocer. Por otro lado un vector u cualquiera puede expresarse como combinación lineal de x, y, z , bajo la forma

$$u = ax + by + cz.$$

Aplicando luego a u la homografía, de la cual tomaremos en cuenta las propiedades aditiva y homogénea, resulta

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \alpha(ax + by + cz) = \alpha(ax) + \alpha(by) + \alpha(cz) = \\ &= a\alpha(x) + b\alpha(y) + c\alpha(z) \end{aligned} \quad (9.1)$$

y esta última expresión se calcula inmediatamente en cuanto todos sus términos se conocen.

Supongamos en particular que conocemos los vectores transformados de los vectores unitarios i, j, k , y que sean

$$\begin{cases} \alpha(i) = a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k \\ \alpha(j) = a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k \\ \alpha(k) = a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k \end{cases} \quad (9.2)$$

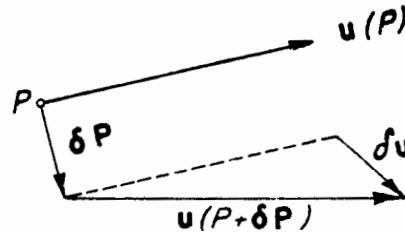
donde los coeficientes a_{11}, a_{12} , etc. se conocen. La matriz

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \quad (9.3)$$

se llama *matriz de la homografía*. Por lo que se acaba de decir, el conocimiento de esta matriz es suficiente para obtener el transformado de cualquier vector.

10. Derivada de un vector con respecto a un punto. Una homografía vectorial muy importante es la *derivada de un vector con respecto a un punto*. Sea $P(x, y, z)$ un punto móvil en el espacio y $\mathbf{u}$ un vector que varía con el punto P . Entonces llamamos derivada del vector $\mathbf{u}$ con respecto al punto P , e indicamos con $d\mathbf{u}/dP$, a la homografía que aplicada a un desplazamiento infinitésimo δP de P da como resultado el incremento correspondiente $\delta \mathbf{u}$ de $\mathbf{u}$. O sea

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \delta P = \delta \mathbf{u}. \quad (10.1)$$



Calculemos la matriz de esta homografía. Demos a P un desplazamiento infinitésimo paralelo al eje x

$$dP = \mathbf{i} dx.$$

Entonces tenemos por definición

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} (\mathbf{i} dx) = d\mathbf{u},$$

o sea por (8.2)

$$dx \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{i} = d\mathbf{u}$$

y dividiendo entre dx

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x};$$

es decir, por (2.1)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{i} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \mathbf{k}.$$

Fórmulas análogas se sacan para $\frac{du}{dP} j$ y $\frac{du}{dP} k$. La matriz de esta homografía es por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

II. OPERADORES DIFERENCIALES

11. **El gradiente.** Consideremos el punto P , variable como se quiera en una región del espacio, y a cada posición de él asociemos un valor de una *variable escalar* f . Diremos que f es *función del punto* P y escribiremos

$$f = f(P).$$

Llamaremos *gradiente de f* , y escribiremos $\text{grad } f$, el vector que, multiplicado escalarmente por un desplazamiento infinitésimo arbitrario dP del punto P , da el correspondiente incremento de f :

$$\boxed{\text{grad } f \cdot dP = df} \quad (11.1)$$

Comprobaremos que, si el *gradiente de f* existe, es *único*. En efecto, sea u otro vector tal que

$$u \cdot dP = df.$$

Restando de la relación (11.1), resulta

$$(\text{grad } f - u) \cdot dP = 0.$$

Siendo dP un desplazamiento del punto P en una dirección cualquiera, esta relación indica que, si el vector $(\text{grad } f - u)$ no es nulo, tiene que ser perpendicular a todas las rectas que pasan por P , lo que no es posible. Por tanto se tiene $\text{grad } f - u = 0$, o sea

$$u = \text{grad } f,$$

lo que comprueba la unicidad del gradiente.

De la definición (11.1) sigue inmediatamente que, si f se *mantiene constante al variar P* , su *gradiente es nulo*. En efecto, si $f = \text{cte}$, resulta $df = 0$ y luego ha de ser

$$\text{grad } f \cdot dP = 0$$

idénticamente, cualquiera que sea el desplazamiento dP . El vector $\text{grad } f = 0$ satisface esta ecuación, y constituye la única solución por la observación anterior.

12. Primeras propiedades del gradiente. Si f es función de otras variables $r, s, t, \dots$ que a su vez son funciones del punto P , se dice que f es *función compuesta* de P . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \text{grad } f \cdot d\mathbf{P} &= df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \text{grad } r \cdot d\mathbf{P} + \frac{\partial f}{\partial s} \text{grad } s \cdot d\mathbf{P} + \frac{\partial f}{\partial t} \text{grad } t \cdot d\mathbf{P} + \dots \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial r} \text{grad } r + \frac{\partial f}{\partial s} \text{grad } s + \frac{\partial f}{\partial t} \text{grad } t + \dots \right) \cdot d\mathbf{P} \end{aligned}$$

de donde resulta por la arbitrariedad de $d\mathbf{P}$

$$\boxed{\text{grad } f(r, s, \dots) = \frac{\partial f}{\partial r} \text{grad } r + \frac{\partial f}{\partial s} \text{grad } s + \dots} \quad (12.1)$$

fórmula que expresa el *gradiente de una función compuesta*.

Si aplicamos esta fórmula a la función $f = r + s$, obtenemos

$$\text{grad } (r + s) = \text{grad } r + \text{grad } s \quad (12.2)$$

o sea que *el gradiente de la suma es la suma de los gradientes*. Si la aplicamos a la función $f = rs$, obtenemos el desarrollo del *gradiente del producto*:

$$\text{grad } (rs) = s \text{ grad } r + r \text{ grad } s. \quad (12.3)$$

13. Gradientes de distancias. Sea O un punto fijo del espacio y P un punto variable; la distancia r entre O y P resulta una función escalar del punto P . Queremos calcular el gradiente de dicha función. Se tiene $r^2 = (\mathbf{OP})^2$, y luego tomando en cuenta la (6.3) con la consideración que $d\mathbf{O} = 0$,

$$d(r^2) = 2 \mathbf{OP} \cdot d\mathbf{OP} = 2 \mathbf{OP} \cdot d\mathbf{P}.$$

Pero $d(r^2) = 2r dr$. Reemplazando en la anterior y despejando dr , obtenemos

$$dr = \frac{\mathbf{OP}}{r} \cdot d\mathbf{P} \quad (13.1)$$

$$\text{grad } r \cdot dP = \frac{OP}{r} \cdot dP$$

y por la arbitrariedad de dP

$$\text{grad } r = \frac{OP}{r}. \quad (13.2)$$

En conclusión, el gradiente de la distancia entre un punto fijo O y un punto variable P es un vector unitario, dirigido según la recta que une O y P , en el sentido desde O hacia P .

Ahora queremos calcular el gradiente de la distancia r entre un punto P variable y un plano fijo. Sea Q el pie de la perpendicular bajada desde P sobre el plano. Entonces tendremos como antes $r^2 = (QP)^2$, y luego por (6.3)

$$d(r^2) = 2 QP \cdot dQP = 2 QP \cdot dP - 2 QP \cdot dQ.$$

Pero el punto Q se desliza sobre el plano; por tanto el vector dQ es siempre perpendicular a QP , siendo

$$QP \cdot dQ = 0.$$

Reemplazando en la relación anterior, se obtiene

$$2r dr = 2 QP \cdot dP, \quad dr = \frac{QP}{r} \cdot dP$$

de donde resulta

$$\text{grad } r = \frac{QP}{r} = n. \quad (13.3)$$

siendo n un vector unitario, dirigido según la perpendicular QP , en el sentido desde el plano hacia el punto.

14. Expresión cartesiana del gradiente. Estamos ahora en condiciones de dar la expresión de las componentes del gradiente según una terna cartesiana ortogonal x, y, z . Consideremos una función $f(x, y, z)$. Por la fórmula (12.1) tenemos

$$\text{grad } f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{grad } x + \frac{\partial f}{\partial y} \text{grad } y + \frac{\partial f}{\partial z} \text{grad } z.$$

Pero se deduce de (13.2) que

$$\text{grad } x = \mathbf{i}, \text{ grad } y = \mathbf{j}, \text{ grad } z = \mathbf{k} \quad (14.1)$$

y luego reemplazando

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (14.2)$$

Si se introduce el operador ∇ (nabla), definido por

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (14.3)$$

la (14.2) se puede escribir simbólicamente

$$\text{grad } f = \nabla f. \quad (14.4)$$

15. Problemas de máximo y mínimo. Si en una posición P_0 del punto P la función $f(P)$ es máxima o mínima, entonces el $\text{grad } f$ es nulo en P_0 . En efecto, supongamos por reducción al absurdo que, siendo f máxima en P_0 , el $\text{grad } f$ sea diferente de cero. Tomemos un desplazamiento $d\mathbf{P}$ que forme un ángulo agudo con $\text{grad } f$. Entonces, forzosamente

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{P} > 0$$

o sea, hay un punto infinitamente próximo a P_0 tal que, si P va de P_0 a ese punto, la función f crece, lo que es contrario a la hipótesis. Una demostración análoga se hace en el caso del mínimo.

Una aplicación interesante del teorema anterior es la resolución del siguiente problema de Steiner: dados tres puntos fijos A, B, C cualesquiera en el espacio, hallar el punto P tal que la suma de sus distancias a los tres puntos dados es mínima. Llamemos r_1, r_2 y r_3 esas distancias, y pongamos

$$r_1 + r_2 + r_3 = R.$$

Se tiene que $\text{grad } R$ ha de ser cero. Pero por (13.2)

$$\text{grad } R = \frac{\mathbf{AP}}{r_1} + \frac{\mathbf{BP}}{r_2} + \frac{\mathbf{CP}}{r_3}.$$

Igualando a cero, queda

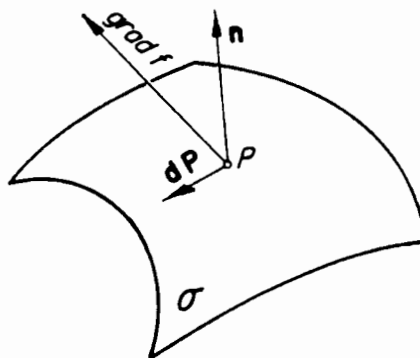
$$\frac{AP}{r_1} + \frac{BP}{r_2} = -\frac{CP}{r_3}$$

y elevando al cuadrado

$$1 + 1 + 2 \cos \widehat{APB} = 1$$

de donde resulta que $\cos \widehat{APB} = -\frac{1}{2}$, $\widehat{APB} = 120^\circ$. Lo mismo se deduce para los otros ángulos. El punto P tiene que ser tal que sus visuales a los tres puntos dados formen ángulo de 120° entre sí; naturalmente, siendo que $120^\circ \times 3 = 360^\circ$, resulta, en particular, que P está en el plano ABC .

16. Rectas normales y planos tangentes a superficies. Sea P un punto móvil y $f(P)$ una función de P . Si el punto P está obligado a moverse sobre una superficie σ , la función $f(P)$ es máxima o mínima en correspondencia a esas posiciones de P para las cuales el vector grad f es normal a la superficie. En efecto supongamos, por reducción al absurdo, que grad f no sea normal a σ en un punto de máximo de $f(P)$, y que forme por ejemplo un ángulo agudo con la normal n . Entonces existe un desplazamiento dP , tangencial a σ y coplanar con n y grad f , que forma también un ángulo agudo con grad f , resultando



$$df = \text{grad } f \cdot dP > 0$$

en contradicción con la hipótesis de máximo. Una demostración análoga vale para el caso de mínimo.

Sea una superficie σ y sea $f(P)$ una función de P que conserva un valor constante cuando P se mueve como se quiera sobre la superficie. Entonces la normal en todo punto de la superficie está diri-

gida según el vector $\text{grad } f$ en ese punto. En efecto, para todo desplazamiento superficial dP , ha de ser $f(P) = \text{cte}$, luego $df = 0$. Teniendo dP dirección arbitraria y debiendo ser siempre

$$\text{grad } f \cdot dP = 0,$$

$\text{grad } f$ resulta perpendicular a la superficie.

De lo anterior se deduce de inmediato la ecuación del plano tangente a una superficie. Sea $f(x, y, z) = 0$ la ecuación de la superficie. Por lo que acabamos de decir, el vector $\text{grad } f$ es normal a ella. Tomando el plano tangente en el punto P y otro punto M sobre el mismo plano, resulta

$$PM \cdot \text{grad } f = 0. \quad (16.1)$$

Si las coordenadas del punto P genérico de la superficie son x, y, z , y las del punto M del plano tan-

gente son X, Y, Z , la ecuación (16.1) se escribe bajo la forma usual

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (16.2)$$

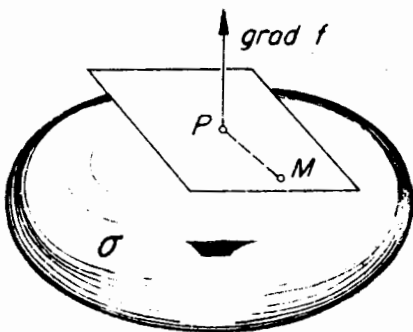
La ortogonalidad del vector $\text{grad } f$ con la superficie $f = \text{cte}$ implica que, si llamamos $\mathbf{n}$ al vector unitario normal a la superficie misma, la *magnitud* de $\text{grad } f$ puede expresarse por el producto escalar $\text{grad } f \cdot \mathbf{n}$. Si sobre el vector $\mathbf{n}$, y a empezar de su punto de aplicación P sobre la superficie, medimos abscisas n , un desplazamiento infinitésimo del punto P siguiendo a la normal resulta

$$dP = \mathbf{n} dn,$$

de donde despejamos $\mathbf{n} = dP/dn$. Por tanto se puede escribir

$$\text{grad } f \cdot \mathbf{n} = \frac{\text{grad } f \cdot dP}{dn} = \frac{\partial f}{\partial n} \quad (16.3)$$

o sea que $\text{grad } f \cdot \mathbf{n}$ es la *derivada normal* de la función f sobre la superficie $f = \text{cte}$ considerada.



17. **El rotacional.** Sea $u(P)$ un vector función del punto P . Si P sufre un desplazamiento dP , sea du el incremento correspondiente del vector u , y para otro desplazamiento δP sea δu el incremento. Llámase *rotacional de u* y se escribe $\text{rot } u$, el vector cuyo producto escalar por el producto cruzado $dP \times \delta P$ da como resultado la diferencia $du \cdot \delta P - \delta u \cdot dP$, o sea

$$\boxed{\text{rot } u \cdot (dP \times \delta P) = du \cdot \delta P - \delta u \cdot dP.} \quad (17.1)$$

El vector rotacional así definido es *único*. En efecto, si hubiera otro vector a diferente que satisficiera (17.1), entonces restando obtendríamos

$$(\text{rot } u - a) \cdot (dP \times \delta P) = 0.$$

El vector $dP \times \delta P$ tiene dirección arbitraria. Por lo tanto el vector $(\text{rot } u - a)$, de no ser nulo, debiera ser perpendicular a todo vector del espacio, lo que es absurdo.

De la definición (17.1) resulta inmediatamente que, si un vector u es constante, su rotacional es nulo (por ser entonces $du = \delta u = 0$). También, siendo la diferencial de una suma igual a la suma de las diferenciales, lo mismo pasa con el rotacional:

$$\text{rot } (u + w) = \text{rot } u + \text{rot } w. \quad (17.2)$$

18. **Primeras propiedades del rotacional.** Se tiene

$$du \cdot \delta P - \delta u \cdot dP = d(u \cdot \delta P) - \delta(u \cdot dP), \quad (18.1)$$

por ser $d\delta P = \delta dP$. Por tanto, si reemplazamos en (17.1), tenemos

$$\text{rot } u \cdot (dP \times \delta P) = d(u \cdot \delta P) - \delta(u \cdot dP). \quad (18.2)$$

Ahora, supongamos que u sea el gradiente de una función numérica f :

$$u = \text{grad } f.$$

Entonces resulta de (18.2)

$$\text{rot grad } f \cdot (dP \times \delta P) = d(\text{grad } f \cdot \delta P) - \delta(\text{grad } f \cdot dP)$$

y recordando la definición (11.1)

$$\text{rot grad } f \cdot (dP \times \delta P) = d(\delta f) - \delta(df) = 0.$$

De aquí, dada la arbitrariedad del producto $dP \times \delta P$, resulta que

$$\text{rot grad } f = 0, \quad (18.3)$$

o sea el rotacional de un gradiente es siempre nulo.

Calculemos ahora el rotacional del producto de una función escalar m por un vector u . Aplicando la fórmula (17.1), tenemos

$$\begin{aligned} \text{rot}(mu) \cdot (dP \times \delta P) &= \\ &= (m du + dm u) \cdot \delta P - (m \delta u + \delta m u) \cdot dP = \\ &= m(du \cdot \delta P - \delta u \cdot dP) + u \cdot (dm \delta P - \delta m dP). \end{aligned} \quad (18.4)$$

Pero tenemos

$$u \cdot (dm \delta P - \delta m dP) = u \cdot [(grad m \cdot dP) \delta P - (grad m \cdot \delta P) dP]$$

y esto, recordando la fórmula (5.2), se puede escribir

$$u \cdot (dm \delta P - \delta m dP) = u \cdot [grad m \times (\delta P \times dP)],$$

o también por (5.1)

$$\begin{aligned} u \cdot (dm \delta P - \delta m dP) &= (\delta P \times dP) \cdot (u \times grad m) = \\ &= (dP \times \delta P) \cdot (grad m \times u). \end{aligned} \quad (18.5)$$

Reemplazando las expresiones (17.1) y (18.5) en (18.4), resulta

$$\begin{aligned} \text{rot}(mu) \cdot (dP \times \delta P) &= m \text{rot } u \cdot (dP \times \delta P) + \\ &+ (dP \times \delta P) \cdot (grad m \times u) \end{aligned}$$

o sea, dada la arbitrariedad del vector $dP \times \delta P$,

$$\boxed{\text{rot } mu = m \text{rot } u + grad m \times u} \quad (18.6)$$

19. Rotacional de una función vectorial compuesta. Sí el vector u es función de diferentes variables $r, s, t, \dots$, que a su vez son funciones del punto P , se dice que u es función compuesta del punto P . En tal caso, aplicando la definición (17.1), resulta

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{P} \times \mathbf{\delta P}) &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial s} ds + \dots \right) \cdot \mathbf{\delta P} - \\ &- \left(\frac{\partial u}{\partial r} \delta r + \frac{\partial u}{\partial s} \delta s + \dots \right) \cdot d\mathbf{P} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot (dr \mathbf{\delta P} - \delta r d\mathbf{P}) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial s} (ds \mathbf{\delta P} - \delta s d\mathbf{P}) + \dots \quad (19.1) \end{aligned}$$

Pero se tiene por ejemplo, análogamente a (18.5),

$$\frac{\partial u}{\partial r} \cdot (dr \mathbf{\delta P} - \delta r d\mathbf{P}) = (d\mathbf{P} \times \mathbf{\delta P}) \cdot \left(\text{grad } r \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right)$$

y reemplazando en (19.1),

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{P} \times \mathbf{\delta P}) &= \\ &= (d\mathbf{P} \times \mathbf{\delta P}) \cdot \left[\text{grad } r \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \text{grad } s \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Luego, dada la arbitrariedad de $d\mathbf{P} \times \mathbf{\delta P}$,

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{u}(r, s, \dots) = \text{grad } r \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \text{grad } s \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} + \dots} \quad (19.2)$$

20. Expresión cartesiana del rotacional. Si se toman como variables independientes las coordenadas cartesianas x, y, z , se obtiene en particular

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u}(x, y, z) &= \text{grad } x \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \text{grad } y \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \text{grad } z \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \\ &= \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \end{aligned}$$

o sea

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{i} \times \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{j} \times \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}). \quad (20.1)$$

Reemplazando $\mathbf{u}$ por su expresión (2.1), queda la conocida fórmula

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}} \quad (20.2)$$

que, empleando el operador ∇ definido por (14.3) y recordando la expresión (4.2) del producto vectorial, puede escribirse simbólicamente

$$\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (20.3)$$

21. La divergencia. Dado un vector $\mathbf{u}$ función del punto P , su *divergencia* $\text{div } \mathbf{u}$ es el escalar que, si se dan al punto P tres desplazamientos infinitesimales no coplanares arbitrarios $d\mathbf{P}$, $\delta\mathbf{P}$, $\theta\mathbf{P}$, para los cuales $\mathbf{u}$ adquiera los incrementos du , δu , θu respectivamente, satisface la identidad

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} (d\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P}) = \\ = du \cdot \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P} + \delta u \cdot \theta\mathbf{P} \times d\mathbf{P} + \theta u \cdot d\mathbf{P} \times \delta\mathbf{P} \end{aligned}$$

(21.1)

La divergencia así definida es *única*. En efecto, si hubiera otro escalar f que cumpliera con la relación (21.1), restando miembro a miembro se obtendría

$$(\text{div } \mathbf{u} - f) (d\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P}) = 0.$$

El factor $d\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P}$ es un escalar no nulo; por tanto el escalar $(\text{div } \mathbf{u} - f)$ ha de ser nulo, lo que está en contradicción con la hipótesis de que f sea distinto de $\text{div } \mathbf{u}$.

Se ve de inmediato por (21.1) que, si $\mathbf{u} = \text{cte}$, entonces $\text{div } \mathbf{u} = 0$; en efecto, entonces serán nulas las diferenciales du , δu y θu . También, tomando en cuenta la propiedad de que $d(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = d\mathbf{u} + d\mathbf{v}$, resulta de inmediato que

$$\text{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{div } \mathbf{u} + \text{div } \mathbf{v}. \quad (21.2)$$

Vamos a comprobar ahora que, si m es un escalar cualquiera,

$$\text{div}(m\mathbf{u}) = m \text{div } \mathbf{u} + \text{grad } m \cdot \mathbf{u}. \quad (21.3)$$

En efecto, se tiene por (21.1)

$$\begin{aligned} \text{div}(m\mathbf{u}) (d\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P}) = (m du + dm u) \cdot \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P} + \\ + (m \delta u + \delta m u) \cdot \theta\mathbf{P} \times d\mathbf{P} + (m \theta u + \theta m u) \cdot d\mathbf{P} \times \delta\mathbf{P} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m(du \cdot \delta P \times \theta P + \delta u \cdot \theta P \times dP + \partial u \cdot dP \times \delta P) + \\
&+ (\text{grad } m \cdot dP)(u \cdot \delta P \times \theta P) + (\text{grad } m \cdot \delta P)(u \cdot \theta P \times dP) + \\
&+ (\text{grad } m \cdot \theta P)(u \cdot dP \times \delta P) = m \text{div } u \cdot (dP \cdot \delta P \times \theta P) + \\
&+ \text{grad } m \cdot [dP(u \cdot \delta P \times \theta P) + \delta P(u \cdot \theta P \times dP) + \\
&+ \theta P(u \cdot dP \times \delta P)]
\end{aligned}$$

y recordando (5.8)

$$\text{div}(mu)(dP \cdot \delta P \times \theta P) =$$

$$= m \text{div } u(dP \cdot \delta P \times \theta P) + \text{grad } m \cdot u(dP \cdot \delta P \times \theta P).$$

Por no ser nulo el factor $dP \cdot \delta P \times \theta P$, sigue la relación (21.3).

22. Divergencia de una función vectorial compuesta. Si $u = u(r, s, t, \dots)$, aplicando la definición de divergencia (21.1), se tiene

$$\begin{aligned}
\text{div } u(dP \cdot \delta P \times \theta P) &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial s} ds + \dots \right) \cdot \delta P \times \theta P + \\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \delta r + \frac{\partial u}{\partial s} \delta s + \dots \right) \cdot \theta P \times dP + \\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \partial r + \frac{\partial u}{\partial s} \partial s + \dots \right) \cdot dP \times \delta P = \\
&= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot [(\text{grad } r \cdot dP)(\delta P \times \theta P) + (\text{grad } r \cdot \delta P)(\theta P \times dP) + \\
&+ (\text{grad } r \cdot \theta P)(dP \times \delta P)] + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot [(\text{grad } s \cdot dP)(\delta P \times \theta P) + \\
&+ (\text{grad } s \cdot \delta P)(\theta P \times dP) + (\text{grad } s \cdot \theta P)(dP \times \delta P)] + \dots
\end{aligned}$$

y por (5.7)

$$\begin{aligned}
\text{div } u(dP \cdot \delta P \times \theta P) &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot (dP \cdot \delta P \times \theta P) \text{grad } r + \\
&+ \frac{\partial u}{\partial s} \cdot (dP \cdot \delta P \times \theta P) \text{grad } s + \dots
\end{aligned}$$

Por no ser nulo el factor $dP \cdot \delta P \times \theta P$, sigue la fórmula

$$\boxed{\text{div } u(r, s, \dots) = \text{grad } r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \text{grad } s \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \dots} \quad (22.1)$$

que permite calcular la divergencia de una función vectorial compuesta.

23. Expresión cartesiana de la divergencia. Si tomamos como variables independientes las coordenadas cartesianas x, y, z , obtenemos en particular

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) &= \operatorname{grad} x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \operatorname{grad} y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \operatorname{grad} z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \\ &= \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}), \end{aligned}$$

de donde, expresando $\mathbf{u}$ de acuerdo con (2.1),

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}} \quad (23.1)$$

Esta expresión, introduciendo el operador ∇ definido por (14.3), y recordando el desarrollo (3.1) del producto escalar, puede ser escrita simbólicamente

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (23.2)$$

24. Operadores diferenciales compuestos. Las definiciones (11.1), (17.1) y (21.1) de los operadores diferenciales gradiente, rotacional y divergencia se apoyan en la posibilidad de realizar uno, dos y tres desplazamientos puntuales infinitésimos arbitrarios independientes entre sí. En el espacio de tres dimensiones no es posible efectuar más; por tanto, la producción de operadores de este tipo queda agotada con los tres señalados. Es interesante también observar que el gradiente es entre ellos el que aplicado a un escalar da un vector, el rotacional, el que aplicado a un vector da un vector y la divergencia el que aplicado a un vector da un escalar.

Al querer ahora estudiar *operadores diferenciales compuestos* por dos de los anteriores, vemos que, por lo que acabamos de decir, no tienen ningún significado las expresiones $\operatorname{grad} \operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{u}$, $\operatorname{rot} \operatorname{div} \mathbf{u}$, $\operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{u}$. Quedan los siguientes operadores

—	—	—
$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$	$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$	$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}$
$\operatorname{div} \operatorname{grad} f$	$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u}$	—

El primero, $\text{rot grad } f$, es nulo por (18.3):

$$\boxed{\text{rot grad } f = 0} \quad (24.1)$$

Se tiene también, cualquiera que sea el vector u ,

$$\boxed{\text{div rot } u = 0} \quad (24.2)$$

como se comprueba de inmediato por ser, de acuerdo con (20.2) y (23.1),

$$\begin{aligned} \text{div rot } u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ahora analicemos el operador $\text{div grad } f$. Se tiene

$$\begin{aligned} \text{div grad } f &= \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (24.3)$$

El operador

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \quad (24.4)$$

que puede considerarse el producto escalar simbólico $\nabla \cdot \nabla$, estando ∇ definido por (14.3), se llama *operador de Laplace* (o *laplaciano*). Podemos escribir la relación (24.3) bajo la forma

$$\boxed{\text{div grad } f = \nabla^2 f} \quad (24.5)$$

y expresarla diciendo que *la divergencia del gradiente de f es el laplaciano de f* . Si ponemos $u = \text{grad } f$ en la fórmula (21.1), recordando que $d(\mathfrak{E}P \times \mathfrak{O}P) + \delta(\mathfrak{O}P \times dP) + \mathfrak{O}(dP \times \mathfrak{E}P) = 0$, obtenemos la expresión

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{dP \cdot \mathfrak{E}P \times \mathfrak{O}P} [d(\text{grad } f \cdot \mathfrak{E}P \times \mathfrak{O}P) + \delta(\text{grad } f \cdot \mathfrak{O}P \times dP) + \mathfrak{O}(\text{grad } f \cdot dP \times \mathfrak{E}P)]} \quad (24.6)$$

que fue encontrada (en forma no vectorial) por *Lamé*, a través de un cálculo muy laborioso.

Una aplicación interesante de la fórmula (24.5) se tiene al calcular el *laplaciano del producto de dos funciones* f y g . Recordando la (12.2), resulta

$$\nabla^2(fg) = \operatorname{div} \operatorname{grad} (fg) = \operatorname{div} (g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g),$$

y luego por (21.3) y (24.5)

$$\boxed{\nabla^2(fg) = g \nabla^2 f + f \nabla^2 g + 2 \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g} \quad (24.7)$$

Los operadores $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}$ y $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ no tienen interpretación sencilla si se toman por separado, pero sí la tiene su diferencia. En efecto resulta, como es fácil comprobar,

$$\boxed{\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (24.8)$$

entendiéndose con $\nabla^2 \mathbf{u}$ (*laplaciano del vector* $\mathbf{u}$) el vector

$$\nabla^2 \mathbf{u} = i \nabla^2 u_x + j \nabla^2 u_y + k \nabla^2 u_z. \quad (24.9)$$

25. La ecuación de Laplace. Consideremos el campo formado por vectores $\mathbf{u}(P)$ definidos para todos los puntos P de cierta región del espacio. Si es posible encontrar una función escalar $f(P)$ tal que en todo punto

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} f,$$

se dice que f es el *potencial del campo vectorial* $\mathbf{u}$. En muchas teorías físicas aparecen *campos vectoriales de tipo solenoidal*, o sea tales que la divergencia del vector del campo es nula en cada punto; si un campo solenoidal posee potencial, entonces resulta en todo el campo, por (24.5),

$$\boxed{\nabla^2 f = 0} \quad (25.1)$$

La ecuación (25.1) se suele llamar *ecuación de Laplace*; por tanto el resultado anterior puede expresarse diciendo que *el potencial de un campo solenoidal tiene que satisfacer la ecuación de Laplace*. Ejemplos de campos de este tipo son el campo de fuerzas creado

por la atracción newtoniana y el campo de velocidades de un fluido perfecto en movimiento irrotacional. Un potencial que satisface la (25.1) se llama a veces *potencial newtoniano*.

Las funciones *f* uniformes (o sea de un solo valor), finitas y continuas con sus derivadas primeras y segundas que satisfacen la ecuación de Laplace se llaman *funciones armónicas*. Por lo que acabamos de decir, la *teoría del potencial* de los campos solenoidales coincide esencialmente con la teoría de las funciones armónicas.

Un ejemplo importante de función armónica en el espacio lo tenemos en la función

$$f = \frac{1}{r} \quad (25.2)$$

donde, siendo O un punto fijo y P un punto móvil en el espacio, r representa la distancia OP . En efecto, recordando las relaciones (24.5), (12.1), (13.2) y (21.3), tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{r} &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \operatorname{div} \frac{-\operatorname{grad} r}{r^2} = -\operatorname{div} \frac{OP}{r^3} = \\ &= -\frac{1}{r^3} \operatorname{div} OP - \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} \cdot OP. \end{aligned}$$

Pero se tiene por (21.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} OP (dP \cdot \delta P \times \theta P) &= \\ &= dOP \cdot \delta P \times \theta P + \delta OP \cdot \theta P \times dP + \theta OP \cdot dP \times \delta P = \\ &= dP \cdot \delta P \times \theta P + \delta P \cdot \theta P \times dP + \theta P \cdot dP \times \delta P = \\ &= 3(dP \cdot \delta P \times \theta P) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\operatorname{div} OP = 3. \quad (25.3)$$

Además

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \operatorname{grad} r = -\frac{3}{r^4} \frac{OP}{r} = -\frac{3}{r^5} OP.$$

Reemplazando en la expresión de $\nabla^2 \frac{1}{r}$, resulta

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} OP \cdot OP = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} \cdot r^2$$

o sea que

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = 0} \quad (25.4)$$

como queríamos comprobar.

26. Polinomios armónicos homogéneos. Acabamos de ver que la función $1/r$ es armónica. Consideremos ahora las derivadas parciales sucesivas de esta función con respecto a x, y, z , siendo éstas las coordenadas cartesianas de P con respecto a un sistema con centro en O . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} &= \frac{\partial(1/r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \left(-\frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \left(-\frac{1}{r^2}\right) \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

y análogamente

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial(1/r)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}.$$

Pasando a las derivadas segundas, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = -\frac{r^3 - 3r^2 x^2/r}{r^6} = \frac{-r^2 + 3x^2}{r^5} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{r^5} \\ \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3} = \frac{3xy}{r^5} \end{aligned}$$

y fórmulas análogas para las demás derivadas segundas. Los numeradores de las derivadas anteriores son los siguientes polinomios de 1º y 2º grado:

$$\begin{array}{ccc} -x & -y & -z \\ 2x^2 - y^2 - z^2, & 2y^2 - z^2 - x^2, & 2z^2 - x^2 - y^2. \\ 3xy & 3yz & 3xz \end{array}$$

El análisis de las derivadas terceras lleva a polinomios de tercer grado, divididos entre r^7 , y así sucesivamente. *Todos los polinomios así obtenidos son homogéneos y su grado de homogeneidad es n (*).*

(*) Se dice que $f(x, y, z)$ es una función homogénea con grado de homogeneidad k en las variables x, y, z , cuando $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$. Para una función de este tipo vale el teorema de Euler: $\mathbf{OP} \cdot \text{grad } f = kf$.

Si indicamos con $P_n(x, y, z)$ uno de estos polinomios y con $D^n(1/r)$ la derivada de orden n que lo engendra, podemos escribir

$$\boxed{D^n \frac{1}{r} = \frac{P_n}{r^{2n+1}}} \quad (26.1)$$

De aquí se deduce en particular que $D^n(1/r)$ es también una función homogénea, y que su grado de homogeneidad es $n - (2n+1) = -(n+1)$, y aplicando a $D^n(1/r)$ el teorema de Euler sobre funciones homogéneas, resulta

$$\mathbf{OP} \cdot \text{grad } D^n \frac{1}{r} = -(n+1) D^n \frac{1}{r}. \quad (26.2)$$

Las funciones P_n/r^{2n+1} son evidentemente armónicas en cuanto son, por (26.1), derivadas de la función armónica $1/r$:

$$\nabla^2 \left(D^n \frac{1}{r} \right) = D^n \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) = 0. \quad (26.3)$$

Queremos comprobar que también los polinomios $P_n(x, y, z)$ son armónicos. Tenemos, recordando las fórmulas (26.1) y (24.7),

$$\begin{aligned} \nabla^2 P_n &= \nabla^2 \left(r^{2n+1} D^n \frac{1}{r} \right) = D^n \frac{1}{r} \nabla^2 r^{2n+1} + r^{2n+1} \nabla^2 D^n \frac{1}{r} + \\ &\quad + 2 \text{grad } r^{2n+1} \cdot \text{grad } D^n \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (26.4)$$

Además se tiene por (12.1) y (13.2)

$$\text{grad } r^{2n+1} = (2n+1) r^{2n} \text{grad } r = (2n+1) r^{2n-1} \mathbf{OP}$$

y por (26.2)

$$\begin{aligned} \text{grad } r^{2n+1} \cdot \text{grad } D^n \frac{1}{r} &= (2n+1) r^{2n-1} \mathbf{OP} \cdot \text{grad } D^n \frac{1}{r} = \\ &= -(n+1)(2n+1) r^{2n-1} D^n \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (26.5)$$

También

$$\nabla^2 r^{2n+1} = \text{div grad } r^{2n+1} = (2n+1) \text{div } (r^{2n-1} \mathbf{OP}),$$

de donde, por (21.3) y (25.3)

$$\nabla^2 r^{2n+1} = (2n+1) [r^{2n-1} \text{div } \mathbf{OP} + \text{grad } r^{2n-1} \cdot \mathbf{OP}]$$

$$\begin{aligned}
 &= (2n + 1) \left[3r^{2n-1} + (2n - 1) r^{2n-2} \frac{\mathbf{OP}}{r} \cdot \mathbf{OP} \right] \\
 &= (2n + 1) [3r^{2n-1} + (2n - 1) r^{2n-1}] = \\
 &= (2n + 1) (2n + 2) r^{2n-1}
 \end{aligned}$$

o sea

$$\nabla^2 r^{2n+1} = 2(2n + 1) (n + 1) r^{2n-1} \quad (26.6)$$

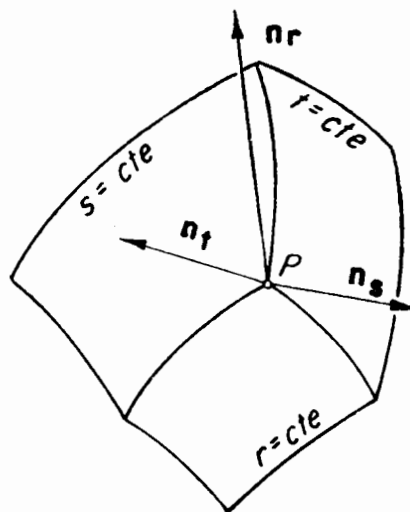
Reemplazando en (26.4) las expresiones (26.3), (26.5) y (26.6), resulta que $\nabla^2 P_n = 0$, como queríamos comprobar.

También es posible demostrar que los polinomios P_n que acabamos de definir son los únicos polinomios armónicos homogéneos posibles, o sea que cualquier otro polinomio homogéneo que sea armónico ha de ser uno de los P_n , eventualmente multiplicado por un factor constante.

III. FORMULAS INTEGRALES Y FUNCIONES ARMONICAS

27. **Coordenadas curvilíneas.** Si referimos los puntos del espacio a un sistema de *ejes cartesianos ortogonales* x, y, z , entonces un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ puede considerarse obtenido por la intersección mutua de los tres planos $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, que se cortan en ángulo recto en P_0 . En general, podemos imaginar llenado el espacio por *tres familias compuestas de planos paralelos entre sí*: la de los $x = \text{cte}$, la de los $y = \text{cte}$ y la de los $z = \text{cte}$; por cada punto pasa uno y tan sólo un plano de cada familia, cortándose los tres ortogonalmente. La intersección de un plano $y = \text{cte}$ con uno $z = \text{cte}$ es una recta sobre la cual sólo varía la variable x , y así análogamente sobre la intersección de un plano $z = \text{cte}$ con uno $x = \text{cte}$ sólo varía la y , y sobre la intersección de un plano $x = \text{cte}$ con uno $y = \text{cte}$ sólo varía la z .

Imaginemos ahora que todos estos planos sean deformables, pudiendo encorvarse y extenderse o encogerse, pero de modo que cada familia siga llenando, sin huecos ni sobreposiciones, todo el espacio. Al efectuarse la deformación, los planos se transformarán en *tres familias de superficies curvas*; por cada punto del espacio seguirá pasando una superficie de cada familia, pero sin cortarse ya necesariamente las tres en ángulo recto. Introduciremos tres parámetros r, s, t de modo que sean $r = \text{cte}, s = \text{cte}, t = \text{cte}$ respectivamente las ecuaciones de las tres familias. Una $s = \text{cte}$ cortará a una $t = \text{cte}$ según una curva sobre la cual sólo r es variable, y así análogamente sobre una curva intersección de una superficie $r = \text{cte}$



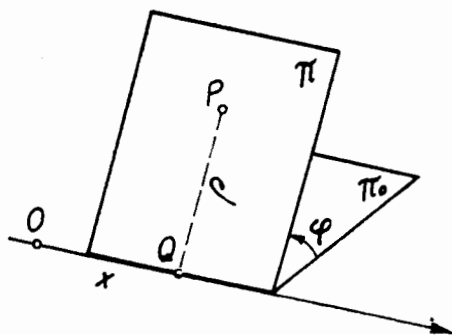
con una $t = \text{cte}$ varía s y sobre una curva intersección de una superficie $r = \text{cte}$ con una $s = \text{cte}$ varía t . Las r, s, t constituyen un

sistema triple de coordenadas curvilíneas en el espacio, pudiendo todo punto P identificarse por los valores de r, s, t que le corresponden. A veces es útil asociar al punto P , en lugar de las superficies coordenadas que se cruzan en él, los tres vectores unitarios normales a las mismas $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s, \mathbf{n}_t$. Estos vectores están ligados a los gradientes de r, s, t por las relaciones (ver N° 16)

$$\text{grad } r = |\text{grad } r| \mathbf{n}_r, \quad \text{grad } s = |\text{grad } s| \mathbf{n}_s, \quad \text{grad } t = |\text{grad } t| \mathbf{n}_t. \quad (27.1)$$

28. Coordenadas cilíndricas y esféricas. Tomemos en el espacio un eje rectilíneo x con un origen O , y un plano fijo π_0 por él. Todo punto P del espacio puede localizarse, una vez trazada la perpendicular PQ al eje x , por medio de la abscisa x del punto Q , la distancia $\rho = PQ$ y el ángulo φ que el plano π que proyecta P desde el eje x forma con el plano fijo π_0 : x, ρ, φ son las coordenadas

cilíndricas de P . Las superficies coordenadas en este caso son: las $x = \text{cte}$, planos normales al eje x , las $\rho = \text{cte}$, cilindros coaxiales con el eje x y las $\varphi = \text{cte}$, planos que pasan por dicho eje. Los vectores



$$\text{grad } x = \mathbf{i}, \quad \text{grad } \rho = \frac{QP}{\rho}$$

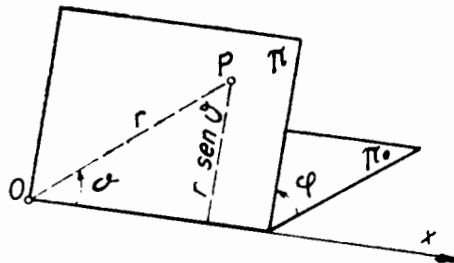
son evidentemente unitarios. Por otro lado, si el plano π sufre un desplazamiento infinitésimo $d\varphi$, el módulo del desplazamiento dP normal al plano mismo es $|dP| = \rho d\varphi$, y luego resulta

$$\text{grad } \varphi \cdot dP = d\varphi = \frac{|dP|}{\rho};$$

pero dP y $\text{grad } \varphi$ son paralelos, y por tanto el módulo de $\text{grad } \varphi$ tiene que ser $1/\rho$. Llamados $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\varphi$ los vectores unitarios normales a las superficies coordenadas, las fórmulas (27.1) se hacen ahora

$$\text{grad } x = \mathbf{n}_x, \quad \text{grad } \rho = \mathbf{n}_\rho, \quad \text{grad } \varphi = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}_\varphi. \quad (28.1)$$

Las coordenadas esféricas r, θ, φ se definen a partir de un origen O sobre el eje x , midiendo la distancia $r = OP$, el ángulo θ que OP forma con el eje x y el ángulo φ , definido como para las coordenadas cilíndricas. Así las superficies $r = \text{cte}$ son esferas con centro en O , las $\theta = \text{cte}$ conos con vértice en O y eje el eje x , las $\varphi = \text{cte}$ planos por el mismo eje. Con razonamiento parecido al de antes se concluye que ahora



$$\text{grad } r = \mathbf{n}_r, \quad \text{grad } \theta = \frac{1}{r} \mathbf{n}_\theta, \quad \text{grad } \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{n}_\varphi. \quad (28.2)$$

Como aplicación, queremos expresar por medio de estas coordenadas el laplaciano de una función f . Admitiendo primeramente que tenemos en coordenadas cilíndricas

$$f = f(x, \rho, \varphi).$$

los vectores $dP, \delta P, \theta P$ de la fórmula de Lamé (24.6) pueden escribirse

$$dP = \mathbf{n}_x dx, \quad \delta P = \mathbf{n}_\rho d\rho, \quad \theta P = \mathbf{n}_\varphi (\rho d\varphi)$$

y siendo los tres ortogonales entre sí, por ser tales las superficies coordenadas, resulta

$$\begin{aligned} \delta P \times \theta P &= \rho \mathbf{n}_x d\rho d\varphi, & \theta P \times dP &= \rho \mathbf{n}_\rho d\varphi dx, \\ dP \times \delta P &= \mathbf{n}_\varphi dx d\rho, & dP \cdot \delta P \times \theta P &= \rho dx d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Siendo además por (16.3)

$$d \text{ grad } f \cdot \mathbf{n}_x = d \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \delta \text{ grad } f \cdot \mathbf{n}_\rho = \delta \frac{\partial f}{\partial \rho},$$

$$\vartheta \text{ grad } f \cdot \mathbf{n}_\varphi = \vartheta \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

la (24.6) se hace

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right]$$

o sea, desarrollando los cálculos y simplificando,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (28.3)$$

fórmula que expresa el laplaciano en coordenadas cilíndricas.

En coordenadas esféricas sea

$$f = f(r, \theta, \varphi).$$

Tendremos

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} &= \mathbf{n}_r dr, & \delta\mathbf{P} &= \mathbf{n}_\theta (r d\theta), & \theta\mathbf{P} &= \mathbf{n}_\varphi (r \sin \theta d\varphi) \\ \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P} &= r^2 \sin \theta \mathbf{n}_r d\theta d\varphi, & \theta\mathbf{P} \times d\mathbf{P} &= r \sin \theta \mathbf{n}_\theta d\varphi dr \\ d\mathbf{P} \times \delta\mathbf{P} &= r \mathbf{n}_\varphi dr d\theta, & d\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{P} \times \theta\mathbf{P} &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

y además por (16.3)

$$\begin{aligned} d \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{n}_r &= d \frac{\partial f}{\partial r}, & d \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{n}_\theta &= \delta \frac{\partial f}{r \partial \theta}, \\ d \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{n}_\varphi &= \delta \frac{\partial f}{r \sin \theta \partial \varphi}, \end{aligned}$$

de donde resulta por la fórmula de Lamé (24.6)

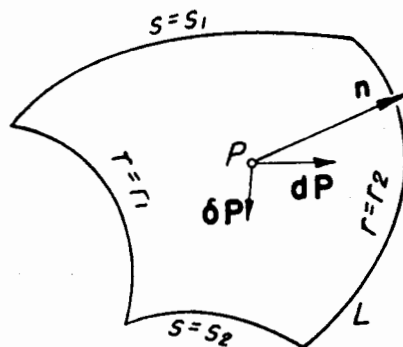
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right];$$

desarrollando los cálculos y simplificando, se obtiene la expresión del laplaciano en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (28.4)$$

29. Teorema de la integral del rotacional. Consideremos una porción de superficie S abierta u horadada, limitada por una línea L . Supongamos que la superficie S sea una superficie coordenada $t = \text{cte}$. Entonces sobre ella se tendrá un sistema de coorde-

nadas curvilíneas r , s , dispuestas de modo tal que las dos familias de líneas $r = \text{cte}$, $s = \text{cte}$ la cubren por completo, correspondiendo a cada punto P de la superficie un par bien determinado de valores de r y s . En particular, supongamos que se han escogido las coordenadas de manera tal que el contorno L esté compuesto por dos arcos $r = r_1$, $r = r_2$ y por dos arcos $s = s_1$, $s = s_2$. Si δP representa un desplazamiento infinitésimo del punto P siguiendo la tangente a la curva $r = \text{cte}$ que pasa por él, dP un desplazamiento infinitésimo siguiendo la tangente a la $s = \text{cte}$, y n el vector unitario normal a la superficie S en P , entonces



$$dP \times \delta P = n dS$$

habiendo indicado con dS el área del rectángulo elemental de lados dP y δP . Por tanto, recordando la definición (17.1) y la relación (18.1), resulta para cualquier vector u función de P ,

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } u \cdot n dS &= \int_S \text{rot } u \cdot (dP \times \delta P) = \\ &= \int_S du \cdot \delta P - \int_S \delta u \cdot dP = \int_S d(u \cdot \delta P) - \int_S \delta(u \cdot dP) \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } u \cdot n dS &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial r} (u \cdot \delta P) dr - \int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial s} (u \cdot dP) ds = \\ &= \left[\int_{s_1}^{s_2} u \cdot \delta P \right]_{r_2} + \left[\int_{s_2}^{s_1} u \cdot \delta P \right]_{r_1} + \left[\int_{r_2}^{r_1} u \cdot dP \right]_{s_2} + \left[\int_{r_1}^{r_2} u \cdot dP \right]_{s_1} \end{aligned}$$

Pero esta última suma representa la integral de $u \cdot dP$ extendida a todo el contorno L . Concluyendo, resulta

$$\boxed{\int_S \text{rot } u \cdot n dS = \oint_L u \cdot dP} \quad (29.1)$$

Esta fórmula expresa el *teorema de la integral del rotacional, o de Stokes*. En vista de la arbitrariedad que se tiene en la elección de las coordenadas curvilíneas, la demostración vale evidentemente cualquiera que sea el contorno L .

Una aplicación importante del teorema del rotacional se tiene cuando el área S es plana. En tal caso, tomadas sobre el plano coordenadas cartesianas ortogonales x, y , y la coordenada z normal a él, se tiene $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ y $d\mathbf{P} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. Por tanto, introduciendo en la fórmula (29.1) el vector bidimensional

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j},$$

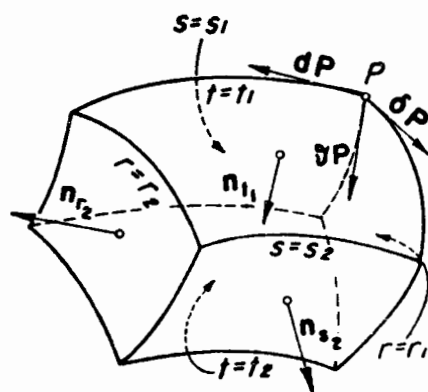
se obtiene

$$\int_S \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (u_x dx + u_y dy) \quad (29.2)$$

siendo L el contorno plano que encierra S . Esta fórmula será de gran utilidad en lo sucesivo.

30. Teorema de la integral de la divergencia. Consideremos ahora, dentro del campo vectorial del vector variable $\mathbf{u}(P)$, un volumen V limitado por una superficie cerrada S . Establezcamos

un sistema de coordenadas curvilíneas r, s, t , de tal manera que la superficie S resulte compuesta por superficies $r = \text{cte}$, $s = \text{cte}$ y $t = \text{cte}$. Más concretamente, supongamos que, en el interior del volumen V , r varíe entre los valores r_1 y r_2 , s entre s_1 y s_2 y t entre t_1 y t_2 , adquiriendo estos valores extremos sobre el contorno.



Ya que por cada punto P del espacio pasa una curva sobre la cual varía sólo r (que llamaremos curva r), una sobre la cual varía sólo s (curva s) y otra sobre la cual varía sólo t (curva t), curvas que son las intersecciones de dos en dos de las superficies $r = \text{cte}$,

$s = \text{cte}$, $t = \text{cte}$ que se cruzan en P , demos a P tres desplazamientos infinitésimos tangentes a dichas curvas, llamando dP el tangente a la curva r , δP el tangente a la s y θP el tangente a la t . Sabemos que la divergencia de u satisface la ecuación (21.1)

$$\text{div } u(dP \cdot \delta P \times \theta P) = du \cdot \delta P \times \theta P + \\ + \delta u \cdot \theta P \times dP + \partial u \cdot dP \times \delta P.$$

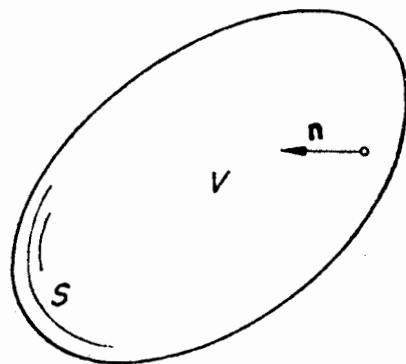
El producto mixto $dP \cdot \delta P \times \theta P$ representa ahora el volumen dV del paralelepípedo curvo infinitésimo con caras formadas por elementos de las superficies $r = \text{cte}$, $s = \text{cte}$ y $t = \text{cte}$ que pasan por P , mientras que el producto $\delta P \times \theta P$ representa el vector $n_r dS_r$, obtenido multiplicando el elemento dS_r de la superficie $r = \text{cte}$ por el vector unitario normal a ella n_r , y análogamente tendremos $\theta P \times dP = n_s dS_s$, $dP \times \delta P = n_t dS_t$. Reemplazado en la ecuación anterior e integrando sobre todo el volumen V , tenemos

$$\int_V \text{div } u dV = \int_V du \cdot n_r dS_r + \int_V \delta u \cdot n_s dS_s + \int_V \partial u \cdot n_t dS_t. \quad (30.1)$$

Pero el vector n_r , normal a una superficie $r = \text{cte}$, es función de s y t , y no de r ; de modo que se puede escribir $du \cdot n_r = d(u \cdot n_r)$, y luego

$$\int_V du \cdot n_r dS_r = \int_V d(u \cdot n_r) dS_r = \int_{S_r} \left[\int_{r_1}^{r_2} d(u \cdot n_r) \right] dS_r = \\ = \int_{S_{r_2}} (u \cdot n_{r_2}) dS_{r_2} - \int_{S_{r_1}} (u \cdot n_{r_1}) dS_{r_1}. \quad (30.2)$$

Ahora, los vectores n_{r_1} y n_{r_2} , normales a las caras $r = r_1$ y $r = r_2$ de la superficie S , están orientados ambos en el mismo sentido, resultando el n_{r_1} hacia el interior del volumen V y el n_{r_2} hacia el exterior. Si convenimos, como es corriente, considerar el vector n normal a S orientado positivamente cuando está dirigido hacia el interior de V , entonces n_{r_2} resulta orientado al contrario que el vector n sobre la superficie $r = r_2$. Tomando en cuenta este hecho, reemplazando en (30.1) los desarrollos (30.2) y los análogos que se obtienen para las otras integrales, y observando que las superficies



$S_{r_1}, S_{r_2}, S_{s_1}, S_{s_2}, S_{t_1}$ y S_{t_2} cubren totalmente la frontera S , obtenemos por fin

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = - \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (30.3)$$

que expresa el *teorema de la integral de la divergencia, o teorema de Gauss*.

31. Teoremas derivados del teorema de Gauss. Aplicando el teorema de Gauss a los vectores $u_x \mathbf{i}$, $u_y \mathbf{j}$, $u_z \mathbf{k}$ respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial u_x}{\partial x} dV &= - \int_S u_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad \int_V \frac{\partial u_y}{\partial x} dV = - \int_S u_y (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) dS, \\ \int_V \frac{\partial u_z}{\partial x} dV &= - \int_S u_z (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (31.1)$$

Pero

$$\begin{aligned} u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} &= \mathbf{u}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \mathbf{k} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Por tanto, multiplicando las igualdades (31.1) la primera por $\mathbf{i}$, la segunda por $\mathbf{j}$ y la tercera por $\mathbf{k}$ y sumando, resulta

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dV = - \int_S \mathbf{u} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (31.2)$$

Análogamente, aplicando el teorema de Gauss a los vectores $v_x \mathbf{j}$, $v_y \mathbf{j}$ y después a los vectores $w_x \mathbf{k}$, $w_y \mathbf{k}$, $w_z \mathbf{k}$, se tiene

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dV = - \int_S \mathbf{v} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad \int_V \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} dV = - \int_S \mathbf{w} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (31.3)$$

Sea ahora $\alpha(\mathbf{n})$ el resultado de aplicar al vector $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$ la homografía vectorial α ; tendremos por (9.1)

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{n}) &= \alpha[(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\mathbf{i} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})\mathbf{j} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\mathbf{k}] = \\ &= (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\alpha(\mathbf{i}) + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})\alpha(\mathbf{j}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\alpha(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (31.4)$$

Así, si ponemos en (31.2) y (31.3)

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{i}), \quad \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{j}), \quad \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{k})$$

y sumamos miembro a miembro, recordando (31.4), obtenemos

$$\int_V \left[\frac{\partial \alpha(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial \alpha(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial \alpha(\mathbf{k})}{\partial z} \right] dV = - \int_S \alpha(\mathbf{n}) dS \quad (31.5)$$

fórmula que constituye una *extensión del teorema de Gauss a las homografías vectoriales*.

Por otro lado, aplicando el teorema de la divergencia (30.3) sucesivamente a los vectores $f\mathbf{i}$, $f\mathbf{j}$, $f\mathbf{k}$, siendo f un escalar arbitrario, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV &= - \int_S f(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad \int_V \frac{\partial f}{\partial y} dV = - \int_S f(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS, \\ \int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV &= - \int_S f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dS.\end{aligned}$$

Multiplicando la primera igualdad por $\mathbf{i}$, la segunda por $\mathbf{j}$ y la tercera por $\mathbf{k}$ y sumando, resulta

$$\int_V \text{grad } f dV = - \int_S f \mathbf{n} dS \quad (31.6)$$

Esta fórmula expresa el *teorema de la integral del gradiente, o de Green*.

Finalmente, si ponemos

$$\mathbf{u} = \text{grad } f$$

siendo f una función escalar, y recordamos que $\text{div grad } f = \nabla^2 f$ y que $\text{grad } f \cdot \mathbf{n} = \partial f / \partial n$ (fórmulas (24.5) y (16.3)), el teorema de Gauss (30.3) da

$$\boxed{\int_V \nabla^2 f \, dV = - \int_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dS} \quad (31.7)$$

identidad muy importante, que liga entre sí el laplaciano de la función f dentro del volumen V y su derivada normal sobre la superficie frontera S .

32. Fórmulas fundamentales de Green. Consideremos ahora el vector

$$\mathbf{u} = f \, \text{grad } g$$

siendo f y g dos funciones escalares. Por (21.3) y (24.5) se tiene

$$\text{div } \mathbf{u} = f \, \text{div grad } g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g = f \nabla^2 g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g,$$

y reemplazando en (30.3) tomando en cuenta (16.3),

$$\boxed{\int_V (f \nabla^2 g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) \, dV = - \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS} \quad (32.1)$$

que es la *primera fórmula fundamental de Green*. Esta puede escribirse

$$\int_V f \nabla^2 g \, dV = - \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS - \int_V \text{grad } f \cdot \text{grad } g \, dV.$$

Análogamente intercambiando las funciones f y g se tiene

$$\int_V g \nabla^2 f \, dV = - \int_S g \frac{\partial f}{\partial n} \, dS - \int_V \text{grad } g \cdot \text{grad } f \, dV$$

y restando miembro a miembro

$$\boxed{\int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = - \int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \, dS} \quad (32.2)$$

segunda fórmula fundamental de Green.

Dos *identidades características de funciones armónicas* definidas en el volumen V encerrado por una superficie S , se deducen de las (31.7) y (32.2). De la primera resulta

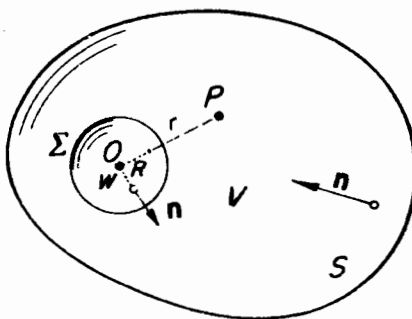
$$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0 \quad [\text{si } \nabla^2 f = 0] \quad (32.3)$$

y de la segunda

$$\int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = 0 \quad [\text{si } \nabla^2 f = \nabla^2 g = 0]. \quad (32.4)$$

33. Expresión de una función conociéndose su laplaciano en un volumen dado y valores de frontera. Si suponemos que en la fórmula (32.2) f sea una función regular arbitraria y g sea la función $1/r$, obtenemos una fórmula de gran importancia, que permite determinar el valor de una función regular en un campo en un punto cualquiera de él, conociéndose el laplaciano de la función en el interior del campo y los valores que adquieren sobre la superficie frontera la función y su derivada normal a la superficie misma.

Sea V el campo y S la superficie que lo encierra, O un punto fijo y P un punto móvil, ambos pertenecientes a V . Si la distancia OP es r , la función $g = 1/r$ se vuelve infinitamente grande en O . Excluiremos el punto O por medio de una esferita con centro en O y radio R , y llamaremos Σ la superficie de dicha esferita y W el volumen encerrado en ella. Entonces la función g es regular en todo el campo $V - W$, campo que resulta limitado exteriormente por la superficie S e interiormente por la Σ . Recordaremos además que, como se demostró en el No. 25, la función $g = 1/r$ es armónica. Así, aplicando la segunda fórmula fundamental de Green en el volumen $V - W$, cuya frontera exterior es la superficie S y cuya frontera interior es la Σ , obtenemos



$$\begin{aligned} \int_{V-W} \frac{1}{r} \nabla^2 f dV &= \int_S \left(f \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \int_\Sigma \left(f \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\Sigma. \end{aligned} \quad (33.1)$$

Por otro lado, indicándose con f_o el valor que la función f adquiere en O y observando que sobre la superficie de la esfera se tiene $r = R$ y que, coincidiendo allí las direcciones radial y normal, resulta $\partial/\partial n = \partial/\partial r$, la última integral se hace

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \left(f \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\Sigma &= - \int_\Sigma f \frac{1}{R^2} d\Sigma - \int_\Sigma \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial n} d\Sigma = \\ &= - \frac{1}{R^2} \int_\Sigma [(f - f_o) + f_o] d\Sigma - \frac{1}{R} \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n} d\Sigma = \\ &= - \frac{1}{R^2} \int_\Sigma (f - f_o) d\Sigma - \frac{1}{R^2} f_o \cdot 4\pi R^2 - \frac{1}{R} \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n} d\Sigma. \end{aligned}$$

Reemplazando en (33.1) y poniendo $d\Sigma = R^2 d\alpha$ ($d\alpha$ se llama el ángulo sólido bajo el cual se ve desde A el elemento superficial $d\Sigma$), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{V-W} \frac{1}{r} \nabla^2 f dV &= \int_S \left(f \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS - \int_o^{4\pi} (f - f_o) d\alpha - \\ &- 4\pi f_o - R \int_o^{4\pi} \frac{\partial f}{\partial n} d\alpha. \end{aligned}$$

Si ahora reducimos la esferita Σ haciéndola tender al punto O , con lo que el volumen W y el radio R tienden a cero y f a f_o , la última ecuación resulta en el límite

$$\int_V \frac{1}{r} \nabla^2 f dV = \int_S \left(f \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS - 4\pi f_o$$

de donde se obtiene, despejando

$$f_o = \frac{1}{4\pi} \left[\int_S \left(f \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS - \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 f dV \right] \quad (33.2)$$

Esta es la *fórmula de Green*, que expresa el valor f_o de la función f en un punto cualquiera O interior al campo V , conociendo el $\nabla^2 f$ en

V y f y su derivada normal $\partial f/\partial n$ sobre S . Nótese que r representa las distancias a los puntos P medidas desde el punto O que se considera, y por tanto varía al cambiar el punto O .

34. Propiedades de las funciones armónicas tridimensionales. Supongamos ahora que f sea una función armónica. Entonces la fórmula de Green (33.2) se hace

$$f_o = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(f \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS \quad (34.1)$$

y manifiesta que los valores que una función armónica adquiere dentro de un campo, están totalmente definidos en cuanto se conozca a la función y a su derivada normal sobre la frontera del campo.

Si hacemos $f = 1$ en la ecuación (34.1), obtenemos

$$\int_S \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS = 4\pi. \quad (34.2)$$

Pero si recordamos que $1/r$ es armónica y le aplicamos la (32.3), obtenemos

$$\int_S \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS = 0, \quad (34.3)$$

fórmula que parece en contradicción con la anterior. La explicación de esta contradicción aparente está en que la fórmula (34.3) vale para el contorno S de un campo que *no incluye* al punto singular $r = 0$, y la (34.2) para el contorno de un campo que *sí lo incluye*. En campos de este último tipo la función $1/r$ no es regular dondequiera, y por tanto *no puede considerarse armónica* (ya que, como señalamos en el No. 25, la definición de función armónica implica entre otras cosas su regularidad).

De la máxima importancia en la teoría del potencial es el *teorema del valor medio de Gauss* relativo al valor que una función armónica adquiere en el centro de una esfera. Supongamos que el espacio V sea una esfera Σ de radio R y que O sea su centro. Entonces la

normal interna n a la superficie está dirigida como el radio, pero en sentido opuesto, resultando

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial n} = -\frac{\partial(1/r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}.$$

La ecuación (34.1) se escribe entonces

$$f_o = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R^2} \int_{\Sigma} f d\Sigma - \frac{1}{R} \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n} d\Sigma \right].$$

Pero la última integral es nula por (32.3); por tanto resulta

$$f_o = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Sigma} f d\Sigma \quad (34.4)$$

Esta fórmula constituye el *teorema del valor medio*, que puede enunciarse así: *el valor que una función armónica adquiere en el centro de una esfera es el promedio de los valores que ella adquiere sobre la superficie.*

Una consecuencia del teorema de Gauss es la siguiente: *una función armónica regular en un espacio V no puede tener ni máximo ni mínimo en el interior de V ; sus máximos y mínimos estarán sobre la superficie frontera S , que encierra V .* En efecto, supongamos por reducción al absurdo que un máximo de la función armónica f se encuentre por ejemplo en el punto interior O . Tracemos una esfera de radio R con centro en O y toda incluida en V , y sea Σ su superficie. En todo punto de la superficie de la esfera se tiene por hipótesis $f < f_o$, y por tanto

$$\int_{\Sigma} f d\Sigma < f_o \cdot 4\pi R^2$$

en contradicción con (34.4). Análogamente se comprueba la imposibilidad del mínimo.

Si una función armónica en el interior de un campo V toma un valor constante sobre toda la superficie frontera S , entonces deberá de tener ese mismo valor en todo el interior de V , ya que de otro modo tendría en el interior un máximo o un mínimo, en contradicción con el teorema anterior. En particular, si la función armónica se anula sobre la frontera, vale cero también en todo el espacio interior.

35. Problemas de Dirichlet y de Neumann. La resolución de una ecuación diferencial del tipo de la de Laplace (25.1) es factible cuando se dan suficientes "condiciones de frontera", que sirven para determinar los valores de las constantes arbitrarias que resultan en la integración. Las condiciones de frontera pueden ser, según el problema que se enfrente, de tipos muy variados, y pueden determinar tan sólo una o muchas integrales de la ecuación.

Para la ecuación de Laplace hay dos tipos usuales de condiciones de frontera, que dan lugar a los llamados problemas de Dirichlet y de Neumann. El *problema de Dirichlet* consiste en determinar una función armónica regular en el interior de un campo V , cuando se conocen los valores que ella toma sobre el contorno S del campo. Se demuestra que este problema tiene siempre una y tan sólo una solución; vamos a comprobar la *unicidad*. Supongamos que f_1, f_2 son dos funciones armónicas que adquieren los mismos valores sobre el contorno. Entonces la diferencia $f_1 - f_2$ adquiere el valor cero sobre el contorno, y es armónica por ser diferencia de dos funciones armónicas. Por lo que acabamos de ver al final del No. 34, $f_1 - f_2$ ha de valer cero en todo el campo, luego

$$f_1 = f_2$$

en todo V y sobre S . La unicidad de la solución queda así comprobada.

El *problema de Neumann* consiste en determinar una función armónica f , regular en el interior de un campo V , supuesto conocer los valores de su derivada normal $\partial f / \partial n$ sobre el contorno S . Aquí también se puede comprobar la *unicidad* de la solución, siempre que se acepte en este caso que ella incluya una constante aditiva arbitraria, ya que el hecho de conocer sobre el contorno no la función sino la derivada de ella, deja a la función indeterminada por una constante aditiva. La comprobación de la unicidad se efectúa así. Supongamos tener, a un mismo tiempo, dos funciones f_1 y f_2 , armónicas y cuyas derivadas normales adquieren sobre la superficie S valores iguales. Entonces la diferencia $f_1 - f_2$ es armónica y tiene derivada normal nula sobre S . Apliquemos ahora la primera fórmula de Green (32.1)

en la que se tome para f y para g la misma función $f_1 - f_2$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \int_V (f_1 - f_2) \nabla^2 (f_1 - f_2) dV + \int_V [\text{grad } (f_1 - f_2)]^2 dV = \\ = - \int_S (f_1 - f_2) \frac{\partial}{\partial n} (f_1 - f_2) dS. \end{aligned}$$

La primera y la tercera integral son nulas por lo que acabamos de decir; ha de ser, luego

$$\text{grad } (f_1 - f_2) = 0$$

en todo el espacio V , de donde resulta

$$f_1 - f_2 = \text{cte}$$

como se quería comprobar.

Con respecto a la solución de los dos problemas anteriores cabe una observación importante: mientras que en el de Dirichlet los valores de la función incógnita sobre el contorno pueden asignarse de manera arbitraria, no pasa lo mismo con los valores de la derivada normal en el problema de Neumann, puesto que hay que asegurarse de que dejen satisfecha la condición (32.3).

36. El potencial de masa. A continuación presentaremos una aplicación física muy importante de la teoría del potencial. Supongamos que un campo V esté lleno de *masa atrayente distribuida en forma continua*, pero con ley variable de un punto a otro, M , del campo. Si m es la masa, la densidad $\rho(M)$, en el punto M , está dada por la derivada

$$\rho(M) = \frac{dm}{dV} \quad (36.1)$$

calculada en el punto M . Consideremos ahora otro punto P del espacio, *exterior al campo* V , y que en él se halle concentrada una *masa unitaria*. La *atracción newtoniana* dA de la masa dm ubicada en el punto fijo M , sobre la masa unitaria ubicada en el punto va-

riable P , indicándose con r la distancia MP , se expresa vectorialmente (en unidades convenientes) por

$$\begin{aligned} dA &= \frac{dm}{r^2} \frac{\mathbf{PM}}{r} = -\frac{\rho(M)}{r^2} \frac{\mathbf{MP}}{r} dV = \\ &= \rho(M) \left[\text{grad} \frac{1}{r} \right]_P dV = \left[\text{grad} \frac{\rho(M)}{r} \right]_P dV. \end{aligned}$$

La atracción total ejercida por la masa que está en el campo V sobre el punto P es

$$A(P) = \int_V \left[\text{grad} \frac{\rho(M)}{r} \right]_P dV = \left[\text{grad} \int_V \frac{\rho(M)}{r} dV \right]_P \quad (36.2)$$

habiéndose podido permutar la integración con el gradiente en cuanto, por suponerse P exterior a la masa V , ρ/r resulta finita y continua. Se llama *potencial de la masa atrayente V* la función

$$U(P) = \int_V \frac{\rho(M)}{r} dV \quad (36.3)$$

y la relación (36.2) puede escribirse

$$A(P) = \text{grad } U(P). \quad (36.4)$$

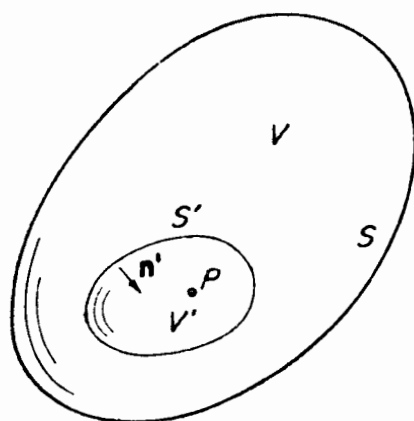
En el caso en estudio, o sea cuando P está situado fuera de la masa V , el potencial $U(P)$ es una función armónica (*teorema de Lagrange*). En efecto tenemos

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \int_V \frac{\rho(M)}{r} dV$$

e intercambiando el operador ∇^2 con la integral, con la observación de que ρ ha de considerarse constante con respecto a él, siendo función de M y no de P , resulta

$$\nabla^2 U = \int_V \rho(M) \nabla^2 \frac{1}{r} dV$$

y esta integral es nula por ser $1/r$ armónica.



Supongamos ahora que el punto P sea *interno al campo* V . Sea S el contorno de V y sea S' otra superficie cerrada, interna a V y que incluye el punto P . Sea V' el volumen encerrado por S' . Partamos de la fórmula resultante de (36.2) y (36.4)

$$\text{grad } U = \int_V \rho \text{ grad } \frac{1}{r} dV,$$

multipliquemos ambos miembros por el vector unitario $\mathbf{n}'$, normal interior a la superficie S' en un punto cualquiera de ella e integremos sobre toda S' . Obtenemos por (16.3)

$$\int_{S'} \frac{\partial U}{\partial n'} dS' = \int_{S'} \left[\int_V \rho \frac{\partial (1/r)}{\partial n'} dV \right] dS'$$

e intercambiando el orden de las integraciones

$$\int_{S'} \frac{\partial U}{\partial n'} dS' = \int_V \rho \left[\int_{S'} \frac{\partial (1/r)}{\partial n'} dS' \right] dV. \quad (36.5)$$

Ahora observemos que la integral extendida al volumen V puede reemplazarse por otra extendida a todo el espacio (ya que fuera de V se tiene $\rho = 0$). Además la integral

$$\int_{S'} \frac{\partial (1/r)}{\partial n'} dS'$$

siendo $r = \text{mod } \mathbf{MP}$, resulta igual a 4π mientras M esté en el campo V' , que contiene el punto singular $r = 0$ (fórmula (34.2)) y resulta igual a cero cuando M está fuera del campo V' (fórmula (34.3) aplicada a la función $1/r$ en todo el espacio exterior a V'). Reemplazando estos valores en el segundo miembro de la ecuación (36.5) y transformando el primer miembro en una integral de volumen por medio de (31.7), queda

$$-\int_{V'} \nabla^2 U dV' = \int_{V'} 4\pi \rho dV'$$

o sea

$$\int_{V'} (\nabla^2 U + 4\pi \rho) dV' = 0.$$

Esta relación debe cumplirse en cualquier volumen V' interno a V , por lo que, en todo punto M interno al campo atrayente V , ha de ser

$$\boxed{\nabla^2 U = -4\pi \rho(M)} \quad (36.6)$$

Esta es la célebre *fórmula de Poisson* para el potencial de masa. Concluyendo, el potencial de masa, que es la función definida por la fórmula (36.3), goza de la propiedad fundamental de que su laplaciano vale cero fuera del campo V , mientras que, en todo punto M interno al campo, vale $-4\pi \rho(M)$.

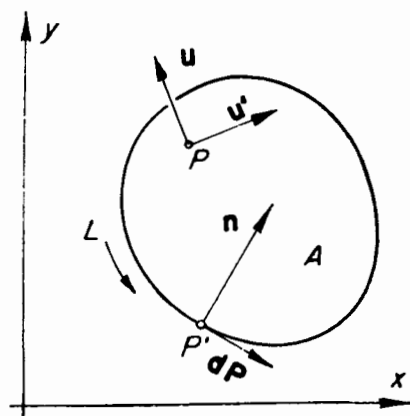
37. Teorema de la divergencia y fórmulas de Green para el plano. Queremos ahora exponer las teorías que, en el plano, corresponden a las que acabamos de ver para el espacio. Empezaremos presentando la fórmula análoga a la de la integral de la divergencia (30.3).

Consideremos en el plano un área A limitada por una curva cerrada L . Tengamos definido, en todo punto interior y del contorno, un vector

$$\mathbf{u}(P) = u_x(x, y)\mathbf{i} + u_y(x, y)\mathbf{j}$$

siendo x, y las coordenadas del punto P . Consideremos al vector

$$\mathbf{u}'(P) = u_y\mathbf{i} - u_x\mathbf{j}$$



normal al anterior. Apliquemos a este último vector el teorema de Stokes (29.1) extendido al área A , teniendo en cuenta que ahora el vector unitario normal a la superficie es el vector $\mathbf{k}$. Resulta

$$-\int_A \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} dA = \oint_L \mathbf{u}' \cdot d\mathbf{P}. \quad (37.1)$$

Sobre una curva plana cerrada se conviene tomar como sentido positivo de circulación el que deja a su izquierda el interior del área contenida en la curva. En estas condiciones, considerado en un punto P' del contorno L , el desplazamiento infinitésimo $d\mathbf{P}$ tangencial a la curva y el vector unitario normal $\mathbf{n}$ dirigido hacia el interior, resulta, como se ve en la figura,

$$\mathbf{u}' \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dL$$

siendo dL , módulo de $d\mathbf{P}$, la longitud del elemento de arco del contorno. Reemplazando en (37.1) y tomando en cuenta que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

se obtiene la fórmula

$$\boxed{\int_A \operatorname{div} \mathbf{u} dA = - \oint_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dL} \quad (37.2)$$

que expresa el *teorema de la divergencia para el plano*.

De aquí, poniendo $f = f(x, y)$ y $\mathbf{u} = \operatorname{grad} f$, se obtiene la fórmula análoga a (31.7)

$$\int_A \nabla^2 f dA = - \oint_L \frac{\partial f}{\partial n} dL. \quad (37.3)$$

Además, procediendo como en el No. 32, consideradas dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$, la *primera fórmula fundamental de Green* (32.1) adquiere la forma

$$\int_A (f \nabla^2 g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dA = - \oint_L f \frac{\partial g}{\partial n} dL \quad (37.4)$$

y la *segunda* (32.2) adquiere la forma

$$\int_A (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dA = - \oint_L \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dL. \quad (37.5)$$

38. Expresión de una función conociéndose su laplaciano en un área plana dada y valores de frontera. Son *funciones armónicas en el plano* las funciones $f(x, y)$ uniformes, finitas y continuas

con sus derivadas primeras y segundas, que satisfacen la *ecuación de Laplace en dos dimensiones*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (38.1)$$

Si consideramos en el plano la distancia r entre un punto fijo O y un punto variable P , la función $1/r$ ya no es armónica, pero sí lo es la función

$$f = \ln \frac{1}{r} = -\ln r. \quad (38.2)$$

En efecto recordando (12.1) tenemos

$$\text{grad} \ln \frac{1}{r} = -\frac{d}{dr} (\ln r) \cdot \text{grad} r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{OP}{r} = -\frac{OP}{r^2}.$$

Ahora si x, y son las coordenadas de P con respecto a un sistema cartesiano con centro en O , resulta

$$\frac{OP}{r^2} = \frac{xi + yj}{x^2 + y^2}$$

y por tanto

$$\nabla^2 \ln \frac{1}{r} = \text{div} \left(\text{grad} \ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

suma que vale cero por ser

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por tanto la función $-\ln r$ es armónica en el plano, donde se presta a una utilización análoga a la de la función $1/r$ en el espacio.

Pongamos $g = -\ln r$ en la segunda fórmula fundamental (37.3). Si repetimos el desarrollo efectuado para el caso tridimensional en el No. 33, reemplazando volúmenes por áreas y esfera por círculo, obtenemos de manera absolutamente parecida la *fórmula de Green*:

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\oint_L \ln r \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) dL + \int_A \ln r \nabla^2 f dA \right] \quad (38.3)$$

siendo f_o el valor que f adquiere en un punto O cualquiera interno al área A , de contorno L .

39. Propiedades de las funciones armónicas planas. Si $f(x, y)$ es una función armónica en el plano, la fórmula anterior toma la forma

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \oint_L \left(\ln r \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) dL, \quad (39.1)$$

y permite, como la análoga tridimensional, calcular la función f en el punto O interno al área A , conociendo los valores que f y su derivada normal adquieren sobre el contorno L .

Si la figura A es un círculo σ de radio R y centro O , entonces se deduce de la fórmula anterior el *teorema del valor medio de Gauss*

$$f_o = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\sigma} f d\sigma$$

que, por ser $d\sigma = R d\theta$, siendo θ la anomalía alrededor del centro del círculo σ , puede escribirse

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\theta \quad (39.2)$$

o sea, la función armónica f toma en el centro del círculo el promedio de los valores que adquiere sobre la circunferencia. Como en el No. 34, se deduce de esto que una función armónica regular dentro de un área A *no puede tener ni máximo ni mínimo en el interior de A* , y que si toma valor constante sobre el contorno, toma ese mismo valor en todo el interior de A . De aquí resulta que dos funciones armónicas en cierta área, si toman los mismos valores sobre el contorno, coinciden en toda el área.

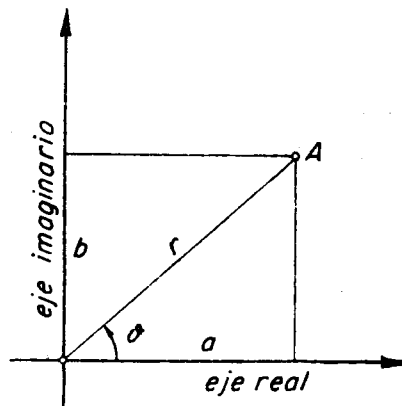
Aquí nos quedaremos, por ahora, en el estudio de las funciones armónicas en el plano. Al tratar la teoría de las funciones de variable compleja, enfocaremos el mismo tema bajo un punto de vista nuevo, de alcance mucho mayor.

CAPITULO II

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

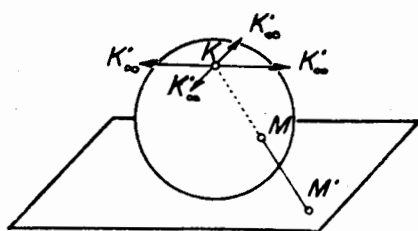
I. FUNCIONES MONOGENAS SEGUN CAUCHY Y RIEMANN

40. **Números complejos.** La representación de los números complejos por puntos del plano es muy conocida. Tomados dos ejes cartesianos ortogonales, el uno como eje real, el otro como eje imaginario, el número complejo $a + ib$ queda representado geométricamente por el punto A , cuya abscisa (sobre el eje real) es a y cuya ordenada (sobre el eje imaginario) es b . El punto A se llama *índice del número complejo* $a + ib$; éste a su vez se llama *afijo del punto* A . Si, tomando como eje al eje real, se introducen coordenadas polares, entonces el punto A resulta definido por su módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y por su argumento θ , que se llamarán respectivamente *módulo* (o *valor absoluto*) y *argumento* (o *anomalía*) del número complejo $a + ib$. El módulo se indica con $|a + ib|$ o bien $\text{mod}(a + ib)$, el argumento con $\arg(a + ib)$.



Con el objeto de que la correspondencia mencionada sea *biunívoca*, o sea que a cada número complejo corresponda un punto índice y viceversa, es necesario admitir que *el plano representativo* (o *plano complejo*) *posea un solo punto en el infinito* (o *punto impropio*), o sea que, contrariamente a lo que se admite en Geometría Proyectiva, todo punto móvil sobre el plano que se vaya alejando indefinidamente del origen tienda hacia el mismo punto, cualquiera que sea la dirección de su movimiento. Una idea más clara de este plano con un solo punto en el infinito, también llamado *plano de Argand-Gauss*,

la podemos adquirir al considerarlo como *proyección estereográfica de una esfera*. En efecto, tomemos una esfera tangente al plano, y consideremos sobre ella el punto K , diametralmente opuesto al punto de contacto. Si desde K proyectamos todos los puntos de la esfera



sobre el plano, a cada punto M de la esfera corresponde por proyección un punto M' del plano situado a distancia finita, y viceversa, con excepción de que a todos los puntos K'_∞ a distancia infinita sobre el plano les corresponde el único punto K , centro de proyección.

Debido a lo que acabamos de mencionar, es frecuente reemplazar el término *plano complejo* por el de *esfera compleja*, cuando se quiere recordar su propiedad en el infinito.

41. Funciones de variable compleja. Consideremos una *variable compleja*

$$z = x + iy$$

cuyo índice se mueve en el interior de un campo $\mathfrak{C}$ del plano complejo. Sea

$$w = u + iv$$

una segunda variable compleja que depende de z de tal manera que, para cada valor de z en $\mathfrak{C}$, la w adquiere un valor perfectamente determinado; en otras palabras supondremos que la parte real u y el coeficiente imaginario v de la variable w son funciones, en el sentido ordinario (de Dirichlet), de las dos variables reales x, y .

Si no impusiéramos a u y v más condición que ésta, el estudio de las funciones de una variable compleja no sería diferente del de un par de funciones de dos variables reales. Pero el concepto de *función de variable compleja* implica además ciertas condiciones relativas a su continuidad y a su derivabilidad, que le confieren un interés muy especial en las Matemáticas.

En primer lugar supondremos que u y v , consideradas como funciones de las dos variables reales x , y , son *continuas* en proximidad de todo punto del campo $\mathbb{C}$. En segundo lugar tenemos que suponer que la función w posee *derivadas parciales primeras* $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ también *finitas y continuas* en $\mathbb{C}$. Por tanto, considerada una línea cualquiera L en el plano complejo y sobre ella un punto M_0 de afijo z_0 , si al desplazarse la variable z sobre L desde M_0 a un punto próximo M , de afijo $z_0 + \Delta z$, la función w adquiere un incremento Δw , la razón incremental $\Delta w/\Delta z$ tiene que converger hacia un límite finito bien determinado, cuando M se acerca indefinidamente a M_0 . En efecto, indicando con s el arco de la curva L , cuando z se mueve a lo largo de L , z y w pueden ser consideradas como funciones de s , y se tendrá

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta w}{\Delta s} \middle/ \frac{\Delta z}{\Delta s} \right)$$

y luego

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}}. \quad (41.1)$$

Este límite, que depende únicamente de la dirección de la tangente a la curva L en el punto M_0 , se llama *derivada de w según dicha dirección*. En particular las derivadas direccionales de w tomadas según las paralelas al eje x y al eje y que pasan por M_0 , resultan respectivamente

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (41.2)$$

Ahora, para llegar al concepto de función de variable compleja, tenemos que imponer, con Cauchy, una última condición de máxima importancia, a saber: que la *derivada de w en el punto M_0 sea independiente de la dirección según la cual ha sido calculada*. Por ejemplo se necesitará que las derivadas (41.2), calculadas según las direcciones de los ejes, sean iguales, o sea que

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}} \quad (41.3)$$

Pero, si esta condición resulta satisfecha, reemplazando en (41.1) se obtiene

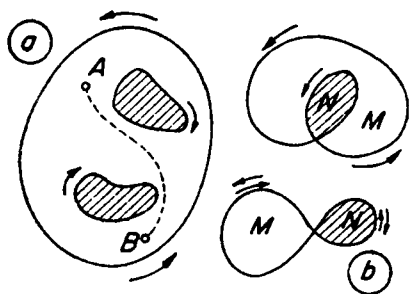
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} \right)}{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}} = \frac{\partial w}{\partial x},$$

lo que comprueba que la derivada conserva el mismo valor cualquiera que sea la curva sobre la cual nos acercamos al punto en que tiene que ser calculada. La última relación puede escribirse también así:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (41.4)$$

Resumiendo, podemos dar la siguiente definición: *w se llama función de la variable compleja z en el campo $\mathfrak{C}$ cuando a todo valor de z en $\mathfrak{C}$ corresponde un valor determinado para w, siendo además w función continua de las variables x, y, y provista de derivadas parciales del primer orden $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ finitas y continuas en $\mathfrak{C}$, siempre que éstas estén ligadas entre sí por la relación (41.3). Esta relación se llama condición de monogenicidad.*

La categoría más sencilla de funciones de variable compleja es la constituida por las *funciones holomorfas*, que queremos definir a continuación. Pero antes, tenemos que aclarar algunos conceptos acerca de los campos de variabilidad de z. Sea una región $\mathfrak{C}$ del plano,



limitada por una o más líneas cerradas, sobre las cuales tomaremos, según la convención del No. 37, como positivo el sentido de recorrido que deja la región a la izquierda. Se dice que $\mathfrak{C}$ constituye una *región conexa* cuando ésta es de una sola pieza, o más exactamente cuando dos puntos cualesquiera A y B de la región se pueden

juntar por un camino continuo que no sale de la región misma. También una región agujereada como la de la figura (a) es conexa, mientras que no son tales los dos campos dibujados en (b).

pues para el primero no resulta claro si M es una región interior o exterior, ya que parte del contorno la deja a la izquierda y parte la deja a la derecha, y para el segundo, una de las regiones M y N es seguramente interior y la otra exterior, pero hay ambigüedad en saber cuál. *Llámacse curva simple una curva cerrada tal que la región que ella encierra en su interior resulta conexa.* Las curvas (b) no son tales.

Se llaman *funciones uniformes* o *monódromas* las que adquieren un solo valor para cada valor de la variable, *multiformes* o *polídromas* las que adquieren varios valores. Se dice que una función de la variable compleja z es *holomorfa* (o *regular*) en el interior de un campo conexo $\mathbb{C}$, cuando dicha función es finita, continua y uniforme para todo valor de z contenido en el campo. Este concepto de función holomorfa, que extiende el de las funciones continuas uniformes en el campo real, resultará de grande utilidad en lo sucesivo.

42. Condiciones de Cauchy-Riemann. Si separamos la función w en sus partes real e imaginaria, podemos escribir la ecuación (41.3) bajo la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

e igualando las partes reales entre sí y las imaginarias entre sí,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (42.1)$$

Estas relaciones, equivalentes a la condición de monogenidad (41.3), se conocen bajo el nombre de *condiciones de Cauchy-Riemann*.

Se demostrará más adelante (No. 58) que una función de variable compleja posee derivadas no sólo de primer orden, como se supuso por hipótesis, sino también necesariamente de todos los órdenes superiores al primero. Admitiendo por ahora este resultado, si derivamos la primera ecuación (42.1) con respecto a x y la segunda con respecto a y , obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Sumando miembro a miembro, las derivadas mixtas desaparecen y queda

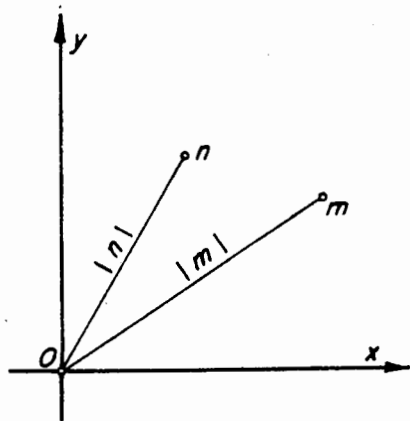
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (42.2)$$

Si, viceversa, derivamos la primera ecuación (42.1) con respecto a y , la segunda con respecto a x y restamos, llegamos a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (42.3)$$

Por tanto ya sea la parte real, ya sea el coeficiente del imaginario de una función de variable compleja *satisfacen la ecuación de Laplace*, o sea, son funciones armónicas. Todo par de funciones armónicas u, v , ligadas entre sí por las relaciones (42.1) se dice que son un par de *funciones armónicas asociadas*.

43. Series de potencias en el campo complejo. Las relaciones de *mayor* y *menor* no valen entre dos números complejos m y n . Estas relaciones se han definido para números reales expresando el



concepto de hallarse un número ubicado más a la derecha o más a la izquierda que otro sobre la recta numérica, concepto que no puede transportarse al plano complejo. Los que sí pueden compararse entre sí son los módulos de m y n , expresándose con $|m| > |n|$ la idea de que el punto índice de m está más lejos del origen 0 que el punto índice de n .

Como la noción de *convergencia de una serie* está ligada con el realizarse de una desigualdad, así

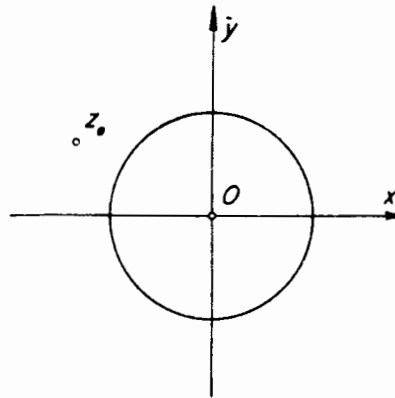
también no se puede decir sin más que una serie de términos complejos es convergente, sino únicamente se podrá hablar de *convergencia absoluta* (o en valor absoluto) cuando converge la serie formada por los módulos de sus términos. El concepto de *conver-*

gencia uniforme de una serie de términos variables se extiende al campo complejo por el concepto de *convergencia absoluta y uniforme*.

Consideremos una serie de potencias de la variable compleja z :

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (43.1)$$

Esta serie evidentemente converge (y vale a_0) cuando $z = 0$. Supongamos que exista otro valor $z = z_0$ para el cual la serie converge también en valor absoluto. Entonces, *descrito en el plano complejo un círculo con centro en el origen que deja a z_0 afuera, en todo el interior y contorno del círculo la serie (43.1) converge en valor absoluto y uniformemente*, por próxima que esté la circunferencia al punto z_0 .



Demostración. Tenemos que comprobar la convergencia uniforme de la serie de los módulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z^n|, \text{ o sea, dado un}$$

número ε positivo arbitrariamente pequeño, se puede hallar un número entero m bastante grande para que, para todos los valores de z

comprendidos en el interior del círculo,

$$R_m = |a_m| |z^m| + |a_{m+1}| |z^{m+1}| + \dots < \varepsilon.$$

Por hipótesis la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge; luego todos los términos son limitados. Podemos pues hallar un número positivo finito k tal que, para todo valor de n , sea

$$|a_n| |z_0|^n < k.$$

Escribiendo $q = |z| / |z_0|$, resulta

$$\begin{aligned} R_m &= |a_m| |z_0|^m q^m + |a_{m+1}| |z_0|^{m+1} q^{m+1} + \dots < \\ &< k(q^m + q^{m+1} + \dots) \end{aligned} \quad (43.2)$$

o sea, efectuando la suma de la serie entre paréntesis,

$$R_m < k \frac{q^m}{1-q}.$$

Luego, siendo $q < 1$, bastará tomar m lo suficientemente grande para que sea

$$k \frac{q^m}{1-q} \leq \varepsilon,$$

para lograr que $R_m < \varepsilon$. Con esto el teorema queda demostrado.

Del teorema anterior se deduce el siguiente corolario: *si en un punto z_1 la serie (43.1) no converge, con mayor razón no convergerá en cualquier punto que diste del origen más que z_1 .* En efecto, si convergiera en un punto así, tendría que converger también en z_1 .

Ahora bien, clasifiquemos los círculos con centro en 0 en dos clases: a) los círculos tales que en todo su *interior* la serie (43.1) converge, b) los círculos tales que en todo su *exterior* la serie (43.1) no converge. Todo círculo pertenece evidentemente a la clase (a) o a la clase (b); además, si un círculo pertenece a la clase (a), también pertenecerá a la clase (a) todo círculo de radio menor; si un círculo pertenece a la clase (b), también pertenecerá a la clase (b) todo círculo de radio mayor. Por tanto, *no puede haber más que un círculo, a lo sumo, que pertenezca al mismo tiempo a ambas clases.* Existe luego un círculo-límite (mejor llamado *círculo de convergencia*) C , tal que en todo punto interior a C la serie (43.1) converge y en todo punto exterior la serie no converge, no pudiéndose generalmente prever el comportamiento de la serie sobre la circunferencia de C , sino estudiando cada caso en particular.

Resulta de lo que acabamos de demostrar que la suma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (43.3)$$

de la serie de potencias, en todo campo interior al círculo de convergencia, representa una función finita y continua de las dos variables reales x y y . Veremos a continuación que no sólo es así, sino que S es precisamente una función de la variable compleja z , según la definición dada en el No. 41.

44. **Series derivadas.** Empecemos comprobando que la serie derivada de la (43.3)

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (44.1)$$

tiene el mismo círculo de convergencia C que la serie primitiva. Demostraremos con este objeto, que

a) en todo punto interior a C la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| |z|^{n-1}$ converge,

b) en todo punto exterior a C dicha serie no converge.

Demostración:

a) Sea R el radio del círculo de convergencia C , y sea z_0 interior a C . Entonces

$$|z_0| < R.$$

Sea z_1 otro punto tal que

$$|z_0| < |z_1| < R.$$

Se tiene

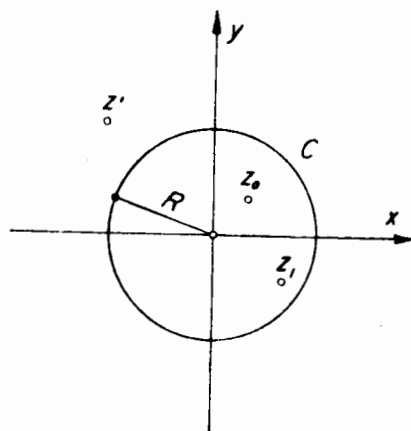
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |z_0|^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |z_1|^{n-1} \left(\frac{|z_0|}{|z_1|} \right)^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |z_1|^{n-1} q^{n-1} \end{aligned}$$

habiéndose escrito $q = |z_0| / |z_1|$. Pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} \quad (44.2)$$

es convergente, ya que dos términos sucesivos de ella son

$$u_n = n q^{n-1}, \quad u_{n+1} = (n+1) q^n$$



y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1,$$

y las cantidades positivas $|a_n| |z_1|^{n-1}$ van decreciendo por la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = (S - a_0)/z$ cuando $z = z_1$. Luego también la serie (44.1), que se obtiene multiplicando los términos de la serie (44.2) por dichas cantidades, converge.

b) Sea z' exterior a C ; en este caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |z'|^{n-1}$ no converge. En efecto, si convergiera, también convergería la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z'|^n$, que se obtiene de ella multiplicando respectivamente sus términos por los factores decrecientes $|z'|/n$, lo que es absurdo, ya que entonces z' sería punto de convergencia para la serie (43.3), contrariamente a la hipótesis.

Basándose en el resultado anterior, se demuestra inmediatamente que la serie (43.3), en el interior del círculo de convergencia, es función de la variable compleja z . En efecto, dicha serie es derivable en el interior de C , y derivando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{dS}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{dS}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \end{aligned}$$

resultando por tanto satisfecha la condición de monogenidad (41.3).

Otra consecuencia del teorema anterior es que la función S posee, en el interior del círculo C , todas las derivadas de todos los órdenes (ya que todas tienen el mismo círculo de convergencia), y que también cada una de esas derivadas es función de la variable compleja z .

45. Funciones exponencial y goniométricas. Las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

son series cuyo radio de convergencia es infinitamente grande, o sea *convergen en todo el plano complejo*. Esto se comprueba aplicando el criterio de d'Alembert (o de la razón), ya que, por ejemplo para la primera serie, se tiene para todo z finito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{n} \right| = 0 < 1$$

y análogamente para las otras. Si z es real, o sea si $z = x$, dichas series representan respectivamente las funciones e^x , $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$; como también para valores complejos de z dichas series tienen un significado bien definido, puesto que representan funciones de la variable compleja z finitas, continuas y uniformes (o de un solo valor) en todo el plano, se conviene representar a dichas funciones por los símbolos (hasta ahora sin sentido si z no es real) e^z , $\text{sen } z$ y $\text{cos } z$ respectivamente. En otras palabras, *aceptaremos como definiciones* las expresiones siguientes

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (45.1)$$

$$\text{sen } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad (45.2)$$

$$\text{cos } z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad (45.3)$$

Estas tres funciones *están ligadas entre sí*: en efecto, si en la primera reemplazamos z por iz , obtenemos

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)$$

o sea

$$e^{iz} = \text{cos } z + i \text{sen } z \quad (45.4)$$

Esta relación entre funciones exponencial y goniométricas es sumamente importante y se conoce como *fórmula de Euler*. De la misma forma se comprueba que

$$e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z \quad (45.5)$$

Si z y z' son dos números complejos, tenemos que

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + z' + \frac{z'^2}{2!} + \frac{z'^3}{3!} + \dots\right) \\ &= 1 + z + z' + zz' + \frac{z^2}{2!} + \frac{z'^2}{2!} + z \frac{z'^2}{2!} + z' \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z'^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + (z + z') + \frac{z^2 + 2zz' + z'^2}{2!} + \\ &\quad + \frac{z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + (z + z') + \frac{(z + z')^2}{2!} + \frac{(z + z')^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

o sea que en el campo complejo sigue valiendo la propiedad fundamental de las exponenciales

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \quad (45.6)$$

Tomando en cuenta las relaciones (45.6) y (45.4), obtenemos la siguiente descomposición de la función e^z en sus partes real e imaginaria

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (45.7)$$

de donde resulta que la función exponencial conserva el mismo valor si la variable y crece en un múltiplo de 2π , o sea que la *función exponencial es periódica de periodo $2\pi i$* . Sumando miembro a miembro las (45.4) y (45.5), se obtiene

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (45.8)$$

y restándolas miembro a miembro

$$\boxed{\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \quad (45.9)$$

Siendo e^z periódica de período $2\pi i$, resulta de estas últimas dos fórmulas que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son periódicas de período 2π . Por fin tomando en cuenta las fórmulas (45.6), (45.4) y (45.5), obtenemos de (45.9) que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z + z') &= \frac{1}{2i} [e^{i(z+z')} - e^{-i(z+z')}] = \frac{1}{2i} [e^{iz} e^{iz'} - e^{-iz} e^{-iz'}] = \\ &= \frac{1}{2i} [(\cos z + i \operatorname{sen} z)(\cos z' + i \operatorname{sen} z') - \\ &\quad - (\cos z - i \operatorname{sen} z)(\cos z' - i \operatorname{sen} z')] = \\ &= \frac{1}{2i} [2i \cos z \operatorname{sen} z' + 2i \operatorname{sen} z \cos z'] \end{aligned}$$

o sea vale la fórmula de adición, extensión de la que ya conocemos en el campo real,

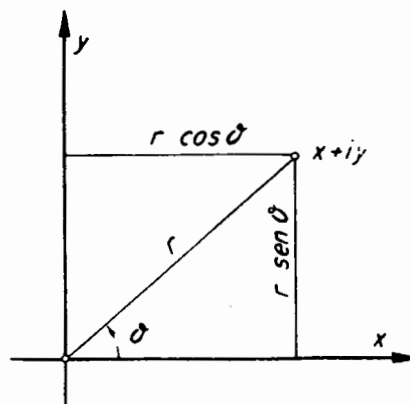
$$\operatorname{sen}(z + z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z'. \quad (45.10)$$

Si procedemos análogamente con el coseno, obtenemos

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'. \quad (45.11)$$

La fórmula (45.4) permite dar una expresión interesante para los números complejos. Si un número complejo $x + iy$ tiene módulo r y argumento θ , entonces $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, y por tanto

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta}} \quad (45.12)$$



Esta fórmula, que reúne las *tres representaciones, cartesiana, goniométrica y euleriana*, de los números complejos, debe complementarse por las relaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (45.13)$$

que ligán r, θ con x, y .

46. Función logarítmica. Las consideraciones anteriores permiten dar una definición de la *función logarítmica en el campo complejo*, de modo que resulte una extensión lógica del logaritmo de los números reales. En efecto podemos escribir formalmente

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \quad (46.1)$$

con lo que se obtiene una función de la variable compleja z , ya que sus partes real e imaginaria

$$u = \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad , \quad v = \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

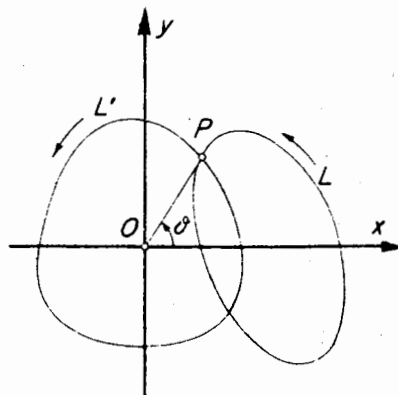
se comprueba inmediatamente que satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (42.1).

La función logarítmica así definida resulta polídroma, y precisamente *adquiere en cada punto infinitos valores*. En efecto, si aumentamos el argumento θ en múltiplos de 2π , resulta de (45.12) que z conserva el mismo valor; pero no así el $\ln z$, que por (46.1) crece en múltiplos de $2\pi i$.

Esta polidromía, que parece impedir que se pueda considerar al logaritmo como función holomorfa, se evita con la consideración siguiente. Si en un punto P del plano elegimos para el argumento θ uno de sus valores y después, partiendo de ese mismo punto, hacemos que z describa una línea continua cualquiera, en cada punto de ella quedará fijado por la ley de continuidad el valor que hay que tomar para θ ; en particular, si z recorre *una línea cerrada L que no incluye en su interior al origen de los ejes real e imaginario*, regresa al punto P con el mismo valor de θ con el cual había salido, puesto que la variación del ángulo θ no ha podido pasar de 2π . Por tanto *en el interior de un campo que no incluye el origen*, basta fijar el

valor de $\ln z$ en un punto cualquiera del campo para que dicha función resulte finita, continua y uniforme en todo el campo; podemos afirmar que $\ln z$ es función holomorfa en el campo indicado.

Si por el contrario el punto P pudiera recorrer curvas como L' , rodeando el origen, entonces por cada vuelta el $\ln z$ aumentaría o disminuiría en $2\pi i$, según si la vuelta es en el sentido antihorario (con el que se conviene crezcan los ángulos) u opuesto a él. El origen es para la función $\ln z$ un punto tal que, si la variable compleja z gira alrededor de él y vuelve al punto de partida, la función adquiere un valor diferente al de salida; se dice que el origen es un *punto crítico* para la función $\ln z$. La holomorfía de $\ln z$ se pierde en cuanto la variable z rodea el punto crítico.



La función z^c , siendo el exponente c un número real cualquiera, se puede definir ahora por la fórmula

$$z^c = e^{c \ln z} \quad (46.2)$$

y sus partes real e imaginaria son por (46.1)

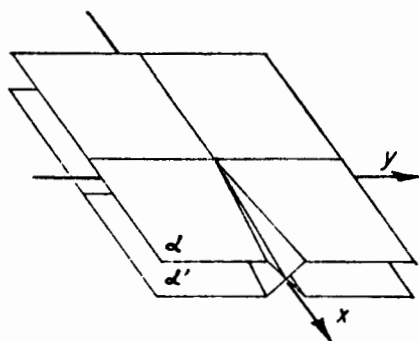
$$u = e^{c \ln r} \cos c\theta, \quad v = e^{c \ln r} \sin c\theta \quad (46.3)$$

que, como es fácil ver, satisfacen las condiciones de monogenidad. Debido a la polidromía del logaritmo, el argumento θ queda indeterminado por múltiplos de 2π , y luego el argumento $c\theta$ queda indeterminado por múltiplos de $2\pi c$, a los cuales, si c no es entero, corresponderán valores diversos del seno y del coseno, y por lo tanto, por (46.3), diferentes valores de z^c . Si c es un número real entero, la función z^c es uniforme; si c es real quebrado (o racional), z^c es polídroma de un número finito de valores; en los demás casos, z^c es polídroma de infinitos valores. Para poder considerar a z^c como función holomorfa, hay que impedir, como para la función $\ln z$, la

circulación de la variable z alrededor del origen de coordenadas, que resulta punto crítico también para z^c .

47. Superficies de Riemann. Consideremos en particular la función $\sqrt{z}$. Para ella tenemos $c = \frac{1}{2}$, y por tanto el argumento $c\theta$ queda indeterminado a menos de múltiplos de π . De esto sigue que la función $\sqrt{z}$ es de dos valores, el uno positivo y el otro negativo, en cuanto cambia de valor a la primera vuelta de z alrededor del origen, pero vuelve al valor inicial después de dos vueltas, porque $c\theta$ ha variado en 2π , y $\sin c\theta$, $\cos c\theta$ han recuperado su valor de origen.

Siendo $\sqrt{z}$ una función de dos valores, podemos representar su primer valor sobre un plano α y su segundo valor sobre otro plano α' paralelo al anterior. Pero los dos planos no resultan desligados, ya

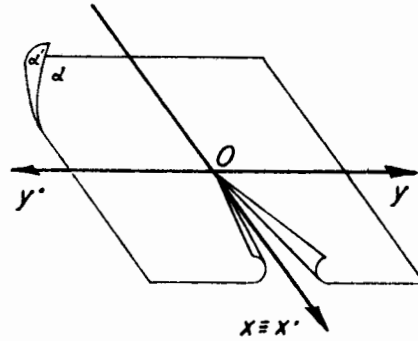


que hay que pasar del uno al otro cuando el punto índice da una vuelta alrededor del origen. Se logra una representación conveniente juntando los dos planos en una *superficie de Riemann*, de la manera siguiente. Imaginemos cortar los planos en cuestión a lo largo de una semirrecta que parte de 0, por ejemplo a lo largo del semieje real positivo, y juntar después la orilla derecha del tajo de α con la

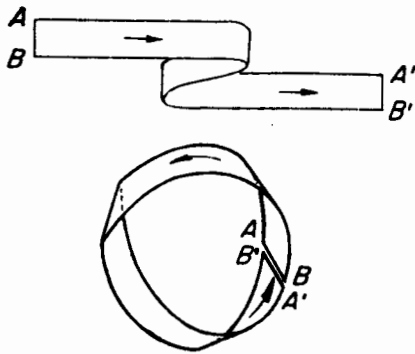
izquierda del de α' , la izquierda del de α con la derecha del de α' . Los dos planos quedan así entrelazados como se ve en la figura. Tenemos además que convenir que un punto z que recorre esta superficie de Riemann está obligado, por la conformación misma de la superficie, a cambiar de plano cada vez que en su recorrido corta al semieje de las x positivas. *Sobre la superficie de Riemann así construida, la función $f = \sqrt{z}$ pierde su polidromía y resulta holomorfa*; de aquí el gran interés de esta representación.

Puede desagradar a nuestro sentido geométrico la suposición hecha, de que la superficie de Riemann se atraviese a sí misma sin

que por esto resulte ninguna conexión entre los tramos cruzados; podemos evitarlo. Supongamos, con tal objeto, que separamos los planos α y α' , giramos el plano α' dándole una vuelta de 180° alrededor del eje real, juntamos entre sí las dos orillas derechas y las dos izquierdas de los tajos, y finalmente aplastamos α' contra α . Tendremos así *un solo plano de dos caras*, cortado a lo largo del semieje Ox , plano cuya cara superior corresponde al plano α , la inferior a α' . Así ya no hay que cruzar para pasar de un plano a otro: es suficiente darse vuelta de la cara superior a la inferior cada vez que se encuentre el corte, como haría una hormiga paseando sobre una hoja de papel.



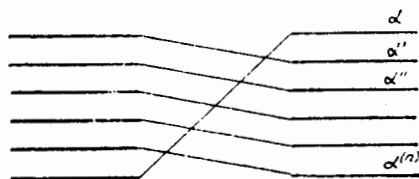
Todavía podría no gustar este paso de una cara a otra, que no se apega al concepto de plano como figura sin espesor. También esta dificultad no es esencial: existen superficies, llamadas *superficies uniláteras*, que gozan de la propiedad de que se puede pasar con movimiento continuo y regular de una cara a otra de ellas, pudiéndose transformar topológicamente nuestro plano de dos caras en una de éstas. La más conocida es la *cinta de Moebius*, obtenida de una tira plana $ABB'A'$, torciéndola y juntando sus extremos de modo que A coincida con B' y A' con B , tal como se ve en la figura.



Un punto que recorre la superficie saliendo de una cara, termina una vuelta llegando a la cara opuesta.

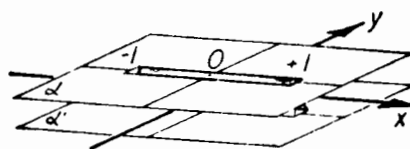
Si ahora consideramos la función $\sqrt[n]{z}$, siendo n un entero cualquiera, vemos como antes que su argumento tiene n determinaciones

posibles, que difieren en $2\pi/n$. Esta función deberá representarse sobre n planos que, con cortes y juntas adecuados a lo largo del semieje real positivo, vienen a constituir de manera parecida a lo visto antes una *superficie de Riemann de n hojas*, sobre la cual la



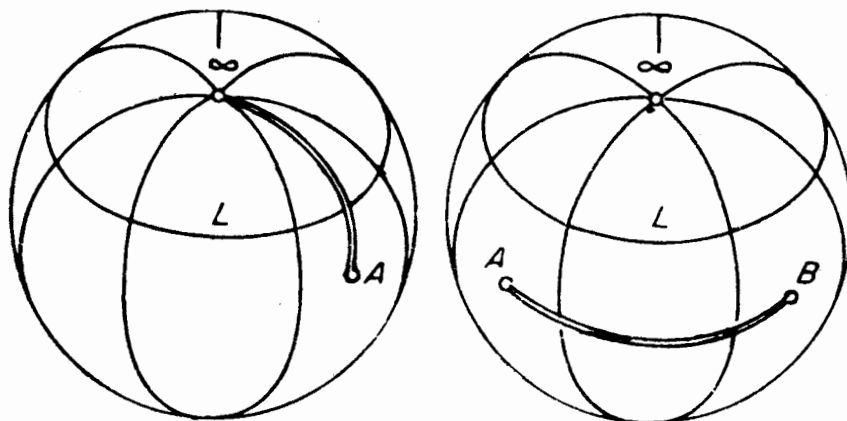
función es holomorfa. Para la función z^n , siendo n racional, también se necesita una superficie de Riemann de un número finito de hojas mientras que, si n es irracional, la superficie es de infinitas hojas.

Hasta aquí hemos visto ejemplos de funciones con un punto crítico en el origen. Consideremos ahora la función $\sqrt{z-1}$: ésta tiene un cero, que corresponde a $z=1$, o sea al punto $+1$ del eje real. Si efectuamos una traslación que lleva el origen al punto $z=1$, volvemos a la función $\sqrt{z}$; por lo tanto esta función ha de tener su *punto crítico en $z=1$* . Análogamente $\sqrt{z+1}$ tiene su punto crítico en $z=-1$, y $\sqrt{z^2-1}$, producto de las anteriores, tendrá *dos puntos críticos*, uno en $z=+1$ y otro en $z=-1$. La superficie de Riemann para esta última función se obtiene por tanto impidiendo la vuelta sobre un mismo plano alrededor de uno de los dos puntos críticos (no de los dos a un mismo tiempo), lo que se consigue por ejemplo con cortes y juntas cruzadas a lo largo del segmento $(+1, -1)$. En general, cuando una función tiene dos puntos críticos, es suficiente *cortar el plano a lo largo de un arco de curva que une los dos puntos*, para evitar la polidromía.



Ahora, como el plano complejo posee un *punto en el infinito*, es interesante investigar acerca de la posibilidad de que éste resulte un punto crítico. Consideremos una función que, como $\sqrt{z}$, tenga un solo punto crítico a distancia finita. Una línea cerrada simple L divide el plano en dos regiones; decimos que ella *rodea un punto A* cuando, considerado el plano como esfera compleja, resulta que el punto A

y el punto impropio no quedan en la misma región. Por tanto, para impedir la circulación alrededor de un punto crítico a distancia finita, hay que impedirla también alrededor del punto impropio solo. Es por esto que en el caso de $\sqrt{z}$ se trazó una semirrecta indefinida como línea de corte. En general, si una función tiene un sólo punto cri-

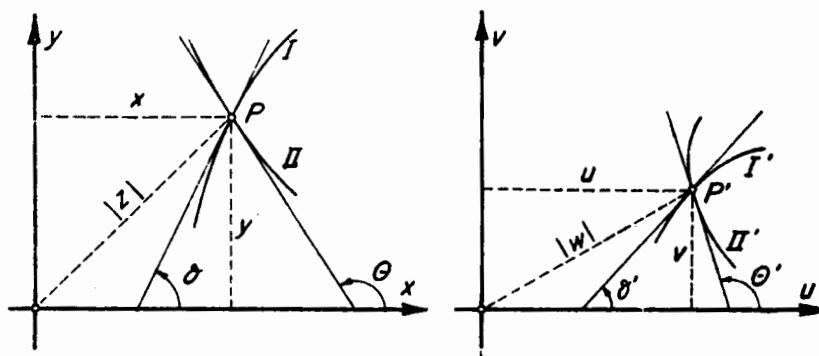


tico A , hay que considerar también como punto crítico al punto impropio y cortar el plano sobre un arco de curva que una los dos. Si la función tiene, como $\sqrt{z^2 - 1}$, dos puntos críticos A y B a distancia finita, entonces una vuelta alrededor del punto impropio no afecta la monodromía; luego éste no es punto crítico, y es suficiente el corte entre A y B .

Si $P_m(z)$ es un polinomio de grado m en z , por el Teorema Fundamental del Algebra (ver más adelante. No. 63), P_m posee m ceros. Luego también la función $\sqrt[n]{P_m(z)}$, siendo n un número entero cualquiera, tiene m ceros, que son todos puntos críticos para ella. Si m es par, el razonamiento que acabamos de hacer comprueba que no hay otros, y por tanto se conseguirá una representación monódroma de la función por medio de una superficie de Riemann de n hojas con tajos que unen los puntos críticos de dos en dos, sin cruzarse; si m es impar, el punto crítico sobrante tendrá que unirse con el punto impropio del plano complejo, que habrá que considerar también como punto crítico.

48. Transformaciones conformes. Queremos presentar a continuación una importante *interpretación geométrica* de la teoría de las funciones de variable compleja.

Sea $w = u + iv$ una función de la variable compleja $z = x + iy$, holomorfa dentro del campo $\mathbb{C}$ del plano z . Además de este plano z , en el cual se toman x, y como coordenadas cartesianas ortogonales, consideremos otro plano w , en que las coordenadas cartesianas ortogonales sean u, v . La relación funcional que liga w con z hace que a todo par de valores de x, y (punto del plano z) corresponda un bien determinado par de valores u, v (punto del plano w). Se establece así una *correspondencia entre puntos, líneas y figuras de los dos planos*, puesto que a un punto del primero corresponde uno del segundo, a una línea del primero una del segundo, a una figura del primero una del segundo, y viceversa. Esta correspondencia puede considerarse también como una *transformación de figuras de un plano en figuras del otro*. A continuación vamos a analizar qué características de la transformación resultan del hecho de que w es función holomorfa de z .



Supongamos con tal objeto que $P(x, y)$ y $P'(u, v)$ son dos puntos correspondientes en la transformación considerada

$$w = f(z). \quad (48.1)$$

Sea $y = y(x)$ una curva I del plano z , que pasa por P , $v = v(u)$ la curva correspondiente I' que pasa por P' , y sean θ, θ' los ángulos que

sus tangentes en P y P' forman con los ejes x, u respectivamente. Llamemos ds, ds' los elementos de arco de I, I' ; se tendrá

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |dz|, \quad ds' = \sqrt{du^2 + dv^2} = |dw|$$

y luego

$$dz = dx + i dy = ds e^{i\theta}, \quad dw = du + i dv = ds' e^{i\theta'}. \quad (48.2)$$

Pero, por ser w función de la variable compleja z , tenemos en P

$$dw = \left(\frac{df}{dz} \right)_P dz$$

y luego, reemplazando dw y dz por las expresiones (48.2),

$$ds' e^{i\theta'} = \left(\frac{df}{dz} \right)_P ds e^{i\theta}. \quad (48.3)$$

Puesto que

$$\left(\frac{df}{dz} \right)_P = \left| \frac{df}{dz} \right|_P e^{i \arg(df/dz)_P},$$

reemplazando en (48.3) e igualando entre sí módulos y argumentos, se tiene

$$ds' = \left| \frac{df}{dz} \right|_P ds \quad (48.4)$$

$$\theta' = \theta + \arg \left(\frac{df}{dz} \right)_P. \quad (48.5)$$

La primera de estas relaciones expresa que el elemento de arco ds' transformado del elemento ds , se obtiene de éste multiplicándolo por el módulo de la derivada de la función f calculada en el punto P . Ahora, la monogenidad de la función w implica que la derivada df/dz sea función del punto P , pero no de la curva I sobre la cual se mueve el punto z . Por tanto, considerada otra curva II por el punto P y su transformada II' que pasa por P' , entre sus elementos de arco dS y dS' tiene que subsistir también la relación

$$dS' = \left| \frac{df}{dz} \right|_P dS,$$

de donde, comparando con (48.4), resulta que, si df/dz no es nula o infinitamente grande en P , se tiene

$$ds : dS = ds' : dS' \quad (48.6)$$

en proximidad de P y de P' . Haciendo un razonamiento similar para la expresión (48.5), sacamos que, llamado Θ el ángulo formado con el eje x por la tangente a II en P , Θ' el formado con el eje u por la tangente a II' en P' , se tiene

$$\Theta' = \Theta + \arg \left(\frac{df}{dz} \right)_P$$

y restando miembro a miembro de la (48.5)

$$\theta' - \Theta' = \theta - \Theta \quad (48.7)$$

Esta última relación expresa que el ángulo $(\theta - \Theta)$ comprendido entre las tangentes a las dos curvas I y II en P es igual al ángulo $(\theta' - \Theta')$ entre las tangentes a las dos curvas transformadas I' y II' en P' , o sea que la transformación (48.1) *conserva los ángulos*. Por otro lado la relación (48.6) expresa la proporcionalidad entre elementos de arco correspondientes. Luego un polígono del plano z de lados infinitamente pequeños se transforma en otro semejante (ángulos iguales y lados proporcionales) en el plano w . La transformación (48.1) *conserva la forma de las figuras infinitamente pequeñas*; de aquí el nombre que suele dársele de *transformación conforme*. Concluyendo, *si las variables cartesianas (x, y) y (u, v) de dos planos son tales que $u + iv$ sea función holomorfa de $x + iy$, entonces toda figura de uno de los planos resulta ser representación conforme de la figura correspondiente del otro*. Esto con excepción de los puntos en que es nula o infinitamente grande la derivada dw/dz , que son *puntos singulares* para la transformación, ya que, en tales condiciones, pierden significado las relaciones (48.4) y (48.5).

El número de puntos arbitrarios en una transformación conforme queda definido a través del *teorema fundamental de Riemann*, que no vamos a demostrar, según el cual, dadas dos áreas planas H y H' simplemente conexas, es siempre posible representar biunivocamente de modo conforme una de las áreas sobre la otra, disponiendo como se quiera de tres constantes arbitrarias, por ejemplo imponiendo que a tres puntos A, B, C del contorno de H correspondan precisamente tres puntos prefijados A', B', C' del contorno de H' .

49. Transformaciones conformes elementales. Pasando a considerar algunas transformaciones conformes, empecemos por la transformación

$$w = z^2 \quad (49.1)$$

que conserva la igualdad de ángulos en todas partes, con excepción única de los que tienen vértice en el origen $z = 0$, donde la derivada $dw/dz = 2z$ vale cero. Se ve inmediatamente de la fórmula (49.1) que dos puntos del plano z que sean simétricos con respecto al origen corresponden al mismo punto del plano w ; más exactamente, si escribimos la fórmula así

$$u + iv = x^2 + 2ixy - y^2$$

y separamos las partes reales y las imaginarias, obteniendo

$$x^2 - y^2 = u, \quad 2xy = v, \quad (49.2)$$

vemos que los dos cuadrantes en que x y y tienen el mismo signo, se transforman ambos en el semiplano $v \geq 0$, y los dos cuadrantes en que x y y tienen signo opuesto, se transforman en el semiplano $v \leq 0$. Por consiguiente una mitad del plano z , por ejemplo el semiplano $z \geq 0$, se transforma en todo el plano w . Si escribimos la primera de las ecuaciones anteriores bajo la forma $y^2 + u = x^2$, vemos que ella vale sólo si u no es menor que $-y^2$; por tanto al eje $y = 0$ del plano z , contorno del semiplano considerado, le corresponde en la transformación la semirrecta $v = 0, u \geq 0$ del plano w , o sea un corte según el semieje de las u positivas.

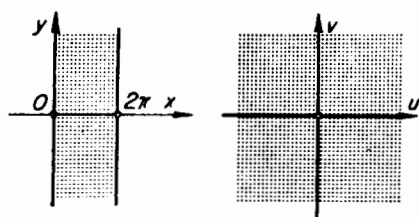
La transformación conforme

$$w = \cos z \quad (49.3)$$

cuyos puntos excepcionales son aquéllos en los cuales $dw/dz = -\sin z$ es nulo, o sea los puntos $z = \pm n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), se puede escribir, separando partes reales e imaginarias,

$$u + iv = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \quad (49.4)$$

De aquí se desprende que, mientras que la variable w puede adquirir cualquier valor complejo, la variable z no tiene necesidad de



adquirir sino los valores incluidos en una faja vertical de ancho 2π , por ejemplo la que corresponde a $0 \leq x \leq 2\pi$, ya que en ese intervalo seno y coseno adquieren todos los valores posibles. La transformación (49.3) transforma una faja vertical de ancho 2π , conte-

nida en el plano z , en todo el plano w . Separando las partes reales y las imaginarias en la fórmula (49.4), se obtiene

$$u = \cos x \cosh y, \quad v = -\sin x \sinh y$$

de donde resulta, tomando en cuenta que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, que las rectas $y = \text{cte}$ del plano z corresponden en el plano w a las *elipses homofocales* (con focos en los puntos $z = \pm 1$).

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1 \quad (49.5)$$

y tomando en cuenta que $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, que las rectas $x = \text{cte}$ del plano z corresponden en el plano w a las *hipérbolas homofocales* (cuyos focos son los mismos que los de las elipses)

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1. \quad (49.6)$$

Siendo que la transformación es conforme, podemos concluir que, como las rectas $x = \text{cte}$, $y = \text{cte}$, así también las cónicas (49.5) y (49.6) constituyen dos familias de curvas que se cortan mutuamente en ángulo recto, hecho que por otro lado no es difícil comprobar directamente.

La transformación

$$w = \frac{z - i}{z + i} \quad (49.7)$$

se puede escribir

$$w = -\left(\frac{1-z^2}{1+z^2} + i\frac{2z}{1+z^2}\right)$$

de donde resulta de inmediato que si z es real, y se escribe

$$z = \tan \frac{\vartheta}{2},$$

siendo ϑ un ángulo conveniente, resulta

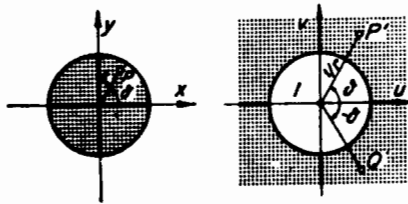
$$w = -(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = -e^{i\vartheta}.$$

Luego al eje x (línea sobre la cual z es real) corresponde en el plano w la circunferencia de centro en el origen y radio unitario (línea sobre la cual $w = -e^{i\vartheta}$), y precisamente recorriendo z el eje real desde $-\infty$ hasta $+\infty$, w recorrerá la circunferencia unitaria en sentido positivo, saliendo de $w = 1$ y volviendo al mismo punto. Los dos semiplanos en que el eje x subdivide el plano z corresponden uno a la zona interior y otro a la exterior a la circunferencia unitaria del plano w , y precisamente el semiplano $y \geq 0$ corresponde al interior de la circunferencia, ya que, por ejemplo, el punto $z = i$ corresponde por la fórmula (49.7) al centro $w = 0$ y el punto $z = -i$ corresponde al punto impropio $w = \infty$.

De interés es también la transformación

$$w = \frac{1}{z} \quad (49.8)$$

que hace corresponder a un punto P de módulo r y argumento ϑ , un punto Q de módulo $1/r$ y argumento $-\vartheta$. Si sobreponemos los planos w y z , haciendo coincidir los ejes coordenados x, y con los u, v ,



vemos que el punto Q viene a ser el simétrico, con respecto al eje u , del punto P' , correspondiente de P por transformación por radios vectores recíprocos con respecto al

círculo unitario con centro en el origen, o sea el punto alineado con O y P y tal que $OP \cdot OP' = 1$. El campo interior al círculo unitario en el plano z se transforma en el campo exterior al círculo unitario en el plano w .

50. Transformaciones sucesivas. A veces se pueden transformar entre sí dos figuras por procedimiento indirecto, transformando la primera en otra, ésta en otra y así siguiendo, hasta llegar a una que pueda transformarse en la segunda; la fórmula que da la transformación buscada se obtendrá combinando las fórmulas correspondientes a las transformaciones intermedias. Imaginemos por ejemplo querer *transformar una faja vertical en un círculo*. Sabemos transformar la faja en un plano, el plano en un semiplano y el semiplano en un círculo; se trata luego de aplicar las tres transformaciones sucesivamente.

Supongamos que la faja sea la de ancho 2π considerada en el párrafo anterior y que sea z su plano; la fórmula que la transforma en el plano de una variable compleja auxiliar Z será por (49.3)

$$Z = \cos z.$$

El plano Z se transformará en el semiplano superior de una segunda variable ζ por la transformación, análoga a la (49.1),

$$Z = \zeta^2.$$

Finalmente, el semiplano superior ζ se transformará en el círculo de radio unitario y centro en el origen del plano de una tercera variable compleja w , por la transformación, análoga a la (49.7),

$$w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}.$$

La transformación que lleva directamente de la faja al círculo resulta de eliminar entre las tres fórmulas anteriores las variables auxiliares Z y ζ , obteniéndose su expresión:

$$w = \frac{\sqrt{\cos z} - i}{\sqrt{\cos z} + i}. \quad (50.1)$$

II. INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

51. **Puntos ordinarios y puntos singulares.** Llámense *puntos ordinarios* para una función de variable compleja $f(z)$ los puntos del plano z que pueden encerrarse dentro de una región conexa (aunque sea muy pequeña) en que la función resulta holomorfa. Los puntos que no gozan de esta propiedad se llaman *puntos singulares*. Hay cuatro especies de puntos singulares: los puntos críticos, los puntos que pertenecen a tajos de las superficies de Riemann, los polos y los puntos singulares esenciales. Los primeros dos tipos ya los conocemos. Llámense *polos* los puntos en que el módulo de la función f se hace infinitamente grande, siempre que los mismos sean ordinarios para la función recíproca $1/f$, como por ejemplo es el origen para la función $f = 1/z$. Llámense *puntos singulares esenciales* los puntos en que resultan a un mismo tiempo infinitas la función f y su recíproca, o bien en los que la función f resulta indeterminada; así es el origen para la función $f = \text{sen}(1/z)$. Al estudiar los desarrollos en series de potencias para las funciones de variable compleja, llegaremos a analizar mejor las características de sus singularidades; por ahora basta con lo que acabamos de decir para aclarar el concepto de puntos singulares.

52. **Teorema de Cauchy.** Sea $w = u + iv$ una función de la variable compleja z , holomorfa en una región conexa $\mathcal{G}$, y L una línea cerrada interior a $\mathcal{G}$, pero que *no encierra ningún punto singular* (como podría ser por ejemplo una curva que rodea el agujero con el cual se ha excluido del campo $\mathcal{G}$ un punto crítico). Entonces el área S encerrada por la línea L pertenece íntegramente a la zona de holomorfía de w . Dentro de esta área, si aplicamos el teorema de Stokes (29.2), poniendo $u_x = u$, $u_y = -v$, obtenemos

$$\int_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (u dx - v dy)$$

y si procedemos de la misma forma poniendo $u_x = v$, $u_y = u$, obtenemos

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (v dx + u dy).$$

Los primeros miembros de las relaciones anteriores son nulos debido a las condiciones de monogenidad (42.1), de modo que

$$\oint_L (u dx - v dy) = 0, \quad \oint_L (v dx + u dy) = 0. \quad (52.1)$$

Multiplicando la segunda ecuación por i y sumando, queda

$$\oint_L (u + iv)(dx + i dy) = 0.$$

Siendo $u + iv = w$, $dx + i dy = dz$, la integral anterior no es otra sino la integral de la función $w(z)$ extendida al contorno cerrado L . El resultado que acabamos de obtener

$$\boxed{\oint_L w(z) dz = 0} \quad (52.2)$$

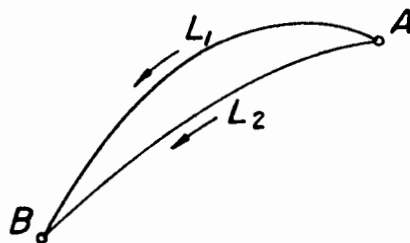
se conoce bajo el nombre de *teorema de Cauchy* y afirma que, si dentro del área S , incluyendo su contorno L , $w(z)$ es función finita, continua y monódroma de la variable compleja z , la integral de $w(z)$ extendida a todo el contorno L es nula.

De este teorema fundamental se deduce que el camino que se tome para integrar una función holomorfa entre dos puntos extremos A y B no influye sobre el resultado de la integración, siempre que todos los caminos elegidos dejen de un mismo lado los eventuales puntos singulares. En efecto, siendo L_1 y L_2 dos caminos de integración que unen A y B sin salir de la región conexa ni encerrar singularidades, resulta por el teorema de Cauchy

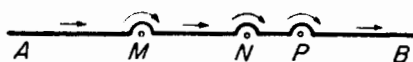
$$\oint_{L_1 - L_2} w(z) dz = 0$$

y luego

$$\oint_{L_1} w(z) dz = \oint_{L_2} w(z) dz. \quad (52.3)$$

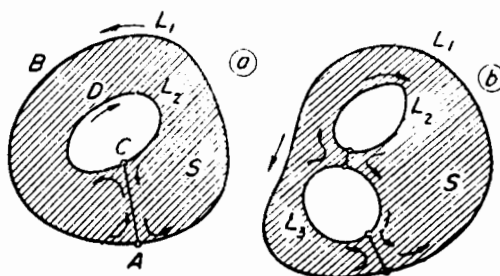


Esta importante observación permitirá en lo sucesivo *elegir, para efectuar la integración, caminos especialmente sencillos*, como los formados por segmentos de rectas o arcos de círculo. En el caso de querer seguir una recta que pasa por puntos singulares $M, N, P, \dots$



evitando tales puntos, podremos por el mismo motivo utilizar curvas compuestas por segmentos de dicha recta y pequeños semicírculos con centros en los puntos singulares.

El teorema de Cauchy vale también en regiones conexas horadadas (*regiones múltiplemente conexas*), siempre que se tome como contorno al conjunto de todas las curvas simples que delimitan la región, orientándolas de tal manera que cada una de ellas deje el área S a la izquierda. En el caso de la figura (a), esto puede justificarse



pensando que el contorno esté formado por la curva cerrada simple $ABACDCA$, con el segmento AC recorrido dos veces, en sentido contrario. Entonces, si tomamos un mismo sentido de giro sobre las curvas L_1 y L_2 , la fórmula (52.2) se escribe

$$\oint_{L_1} w(z) dz + \int_{AC} w(z) dz - \oint_{L_2} w(z) dz - \int_{AC} w(z) dz = 0$$

y simplificando se obtiene la fórmula

$$\oint_{L_1} w(z) dz = \oint_{L_2} w(z) dz, \quad (52.4)$$

que difiere de la (52.3) en cuanto se refiere a dos curvas cerradas, una interna a otra. Obsérvese que en el interior de L_2 y en el exterior

de L_1 pueden existir puntos singulares de la función w , pero no entre L_1 y L_2 , por la condición de regularidad. La fórmula (52.4) expresa que, si dos curvas cerradas que no se cruzan incluyen los mismos puntos singulares de la función analítica $w(z)$, la integral $\oint w(z) dz$ tiene el mismo valor si se calcula sobre la primera o sobre la segunda.

El resultado anterior se extiende a regiones con muchos agujeros (figura b) con un razonamiento análogo. Se encuentra que la integral sobre el contorno exterior es igual a la suma de todas las integrales sobre los contornos de los agujeros.

53. Cálculo de integrales de línea. Vamos a dar ahora unos ejemplos de aplicación del teorema de Cauchy. Primero calculemos la integral de la función $1/z$ sobre una línea cerrada simple L que rodea el polo $z = 0$. Puesto que la única singularidad de z está en dicho punto, la integral buscada podrá calcularse sobre cualquier línea de ese tipo, obteniéndose siempre el mismo valor; en particular, podemos calcularla sobre el círculo c , de radio unitario y centro en el origen. Sobre ese círculo es

$$z = e^{i\vartheta}, \quad dz = ie^{i\vartheta} d\vartheta, \quad (53.1)$$

de modo que resulta

$$\oint_L \frac{dz}{z} = \oint_c \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i d\vartheta = 2\pi i. \quad (53.2)$$

Supuesto que se elige como línea L una circunferencia con centro en el origen y radio x_0 , si la subdividimos en dos partes, la que está por encima y la que está por debajo del eje x , deducimos por razones de simetría que la integral entre los dos puntos del eje x de abscisa $-x_0$ y $+x_0$ vale

$$\int_{-x_0}^{+x_0} \frac{dz}{z} = \mp \pi i, \quad (53.3)$$

con signo menos si el camino de integración pasa por encima del origen, con signo más si pasa por debajo.

Análogamente, la integral de la función $1/z^2$ sobre una curva cerrada L alrededor del origen será

$$\oint_L \frac{dz}{z^2} = \oint_c \frac{dz}{z^2} = i \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{e^{i\vartheta}} = i \left[\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{e^{i\vartheta}} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\vartheta}{e^{i\vartheta}} \right].$$

Ahora, a cada valor $e^{i\theta}$ que la variable z adquiere sobre la semicircunferencia $(0, \pi)$, corresponde un valor contrario $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$ sobre la semicircunferencia $(\pi, 2\pi)$, y además se tiene $d(\theta + \pi) = d\theta$. Por tanto las dos últimas integrales son de signo opuesto, y su suma es nula; resulta que

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0. \quad (53.4)$$

Finalmente calcularemos la integral de la función $1/(z^2 - 1)$ entre $z = 0$ y $z = \infty$. Notoriamente se puede efectuar la descomposición

$$2 \int \frac{dz}{z^2 - 1} = \int \frac{dz}{z - 1} - \int \frac{dz}{z + 1}.$$

Ahora bien, para integrar esta función, lo más simple sería escoger como camino de integración el semieje de las x positivas; pero, mientras que la segunda integral es regular sobre todo el camino, la primera tiene el polo $z = 1$, que podemos evitar siguiendo el semicírculo c trazado en la figura. Separando la integral entre los intervalos $(0, 2)$ y $(2, \infty)$, podemos escribir

$$2 \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 - 1} = \left(\int_c \frac{dz}{z - 1} - \int_0^2 \frac{dz}{z + 1} \right) + 2 \int_2^\infty \frac{dz}{z^2 - 1}. \quad (53.5)$$

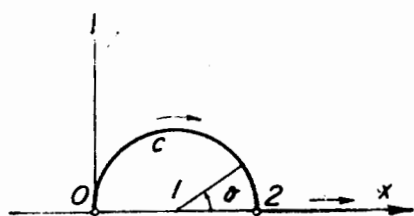
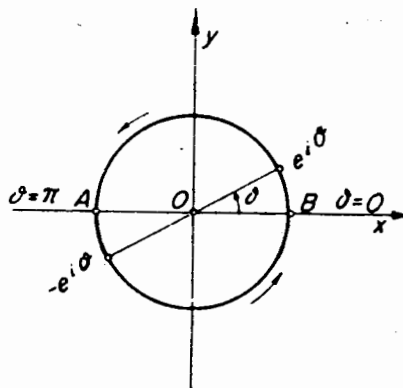
Ahora, puesto que sobre c , $z - 1 = e^{i\theta}$, resulta

$$\int_c \frac{dz}{z - 1} = i \int_\pi^0 d\theta = -i\pi$$

y además

$$\int_0^2 \frac{dz}{z + 1} = [\ln(z + 1)]_0^2 = \ln 3$$

$$2 \int_2^\infty \frac{dz}{z^2 - 1} = \left[\ln \frac{z - 1}{z + 1} \right]_2^\infty = -\ln \frac{1}{3} = \ln 3$$



de donde, reemplazando en (53.5), queda finalmente

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 - 1} = -\frac{i\pi}{2}. \quad (53.6)$$

Si hubiéramos escogido en lugar del semicírculo c su simétrico con respecto al eje x , habríamos obtenido para la integral el valor $+i\pi/2$.

54. Aplicación al cálculo de ciertas integrales impropias.

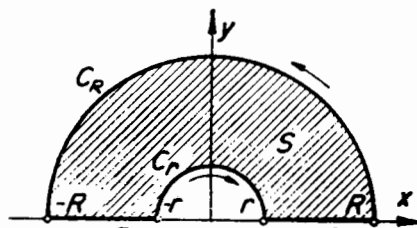
La teoría general de Cauchy permite también realizar *integraciones de funciones de variable real* que serían sumamente complicadas de quererse efectuar en el campo real, y que por el contrario se efectúan de manera bastante sencilla si la función integranda se extiende al campo complejo. Para dar un ejemplo, consideremos la *integral impropia*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx. \quad (54.1)$$

Para calcularla, estudiemos la integral

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (54.2)$$

extendida al contorno cerrado L constituido por los semicírculos c_r y c_R de centro en $z = 0$ y radios r y R ($R > r$) respectivamente, orientados como se ve en la figura, y los segmentos $(-R, -r)$ y



$(+r, +R)$ del eje x . En el campo S interno a este contorno la función e^{iz}/z es holomorfa, en cuanto sus singularidades, que son un polo para $z = 0$ y una singularidad esencial para $z = \infty$, quedan excluidas del campo. Por lo tanto por el teorema de Cauchy la integral (54.2) es nula, o sea,

separando el camino de integración en sus cuatro partes y considerando en cada tramo como positivo el recorrido de izquierda hacia derecha.

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{c_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (54.3)$$

Ahora se ve de inmediato que, si pasamos al límite para $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, el primer miembro de (54.3) se transforma en la integral (54.1) que se desea calcular, de modo que el problema quedará resuelto al calcularse los valores que las integrales del segundo miembro adquieren en el límite.

Recordando el desarrollo (45.1), vemos que se puede escribir

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + S(z)$$

siendo $S(z)$ una función regular en el origen, y por tanto también

$$\int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{c_r} S(z) dz + \int_{c_r} \frac{dz}{z} = \int_{c_r} S(z) dz + \pi i$$

por (53.3). Por otro lado la integral de la parte regular $S(z)$ tiene que tender a cero cuando el radio r decrece indefinidamente, de modo que resulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i. \quad (54.4)$$

A lo largo de la semicircunferencia c_R es

$$z = Re^{i\vartheta}, \quad dz = Re^{i\vartheta} i d\vartheta = iz d\vartheta$$

luego

$$\int_{c_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_0^\pi e^{iRe^{i\vartheta}} d\vartheta = i \int_0^\pi e^{iR \cos \vartheta} e^{-R \sin \vartheta} d\vartheta$$

y tomando los módulos, considerando que $e^{iR \cos \vartheta}$ es un número complejo de módulo unitario,

$$\left| \int_{c_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \int_0^\pi e^{-R \sin \vartheta} d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \vartheta} d\vartheta. \quad (54.5)$$

Fijado un número ε positivo tan pequeño como se quiera, esta última integral podrá descomponerse en dos, extendidas respectivamente a los intervalos $(0, \varepsilon)$ y $(\varepsilon, \pi/2)$. Pero se tiene

$$\text{para } 0 \leq \vartheta \leq \varepsilon, \quad e^{-R \sin \vartheta} \leq 1, \quad \int_0^\varepsilon e^{-R \sin \vartheta} d\vartheta \leq \varepsilon$$

$$\text{para } \varepsilon \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad e^{-R \sin \vartheta} \leq e^{-R \sin \varepsilon}$$

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} e^{-R \sin \vartheta} d\vartheta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) e^{-R \sin \varepsilon} < \frac{\pi}{2} e^{-R \sin \varepsilon}$$

y estando ε fijado de antemano, es siempre posible tomar R bastante grande para que esta última cantidad resulte menor que ε :

$$\frac{\pi}{2} e^{-R \operatorname{sen} \varepsilon} < \varepsilon.$$

Tomando en cuenta estas limitaciones, se obtiene de (54.5) que, para R suficientemente grande,

$$\left| \int_{c_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq 2(\varepsilon + \varepsilon) = 4\varepsilon$$

y por tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (54.6)$$

Pasando al límite para $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ en (54.3) y tomando en cuenta los resultados (54.4) y (54.6), se llega a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \quad (54.7)$$

con lo que se ha efectuado la integración deseada. Separando la función integranda en las partes real e imaginaria, se sacan de (54.7) dos integrales importantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi, \quad (54.8)$$

y también, observando que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no cambia de signo al cambiar x en $-x$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (54.9)$$

55. Integrales abelianas. Sea ζ una *función algebraica de la variable compleja z* , en el sentido de que subsiste una ecuación algebraica

$$f(\zeta, z) = 0 \quad (55.1)$$

que liga a ambas. Si indicamos con $R(\zeta, z)$ una *función racional cualquiera* en estas dos variables, toda integral

$$w = \int R(\zeta, z) dz \quad (55.2)$$

se llama *integral abeliana* (del nombre del matemático noruego Abel).

Si en particular la ecuación (55.1) es del tipo simple

$$\zeta^2 = P_n(z), \quad (55.3)$$

donde P_n indica un polinomio de grado n en la variable z , la integral (55.2) resulta

$$w = \int R(\sqrt{P_n(z)}, z) dz. \quad (55.4)$$

Si el grado n es 1 ó 2, la integral (55.4) se expresa notoriamente por medio de trascendentes elementales: el logaritmo, el arcoseno y el arcotangente. Si el grado n es mayor de 2, la integración no es ya, por lo general, posible por trascendentes elementales; cuando n vale 3 ó 4, la integral se dice *elíptica* y cuando n es mayor de 4 se dice *hiperelíptica*.

56. Integrales elípticas de primera especie. Legendre analizó las integrales elípticas, reduciéndolas a tres especies fundamentales. A continuación estudiaremos la *integral elíptica de primera especie*, que es particularmente interesante en vista de la representación conforme que ella establece entre los planos z y w . La integral en cuestión se puede expresar como sigue

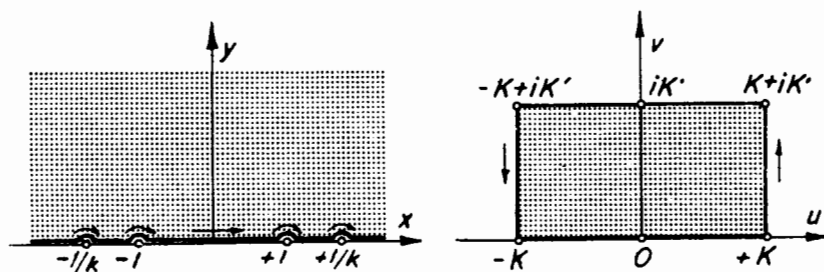
$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (56.1)$$

siendo k una constante real menor que la unidad. Esta relación indica claramente que w varía en función del extremo superior de integración z y del parámetro k . Queremos analizar cómo varía w cuando z recorre el eje real x .

La función integranda es el producto de los cuatro factores

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-z}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+kz}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-kz}} \quad (56.2)$$

que poseen polos respectivamente en los puntos $z = -1$, $z = +1$, $z = -1/k$, $z = +1/k$. Para evitar tales puntos singulares, el camino de integración, que recorre el eje x , se hará girar por encima



de ellos, siguiendo semicircunferencias infinitamente pequeñas. Ahora bien, mientras z va de 0 a 1 sobre el eje real, todos los factores (56.2) se mantienen reales, y lo mismo resulta entonces para w , que irá sobre el eje u del valor cero al valor

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (56.3)$$

Cuando z está entre 1 y $1/k$, el factor $1/\sqrt{1-z^2}$ se vuelve imaginario, y se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{i}{\sqrt{z^2-1}}$$

siendo $\sqrt{z^2-1}$ real. Entonces se puede escribir, tomando en cuenta (56.3),

$$w = K + i \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

La última integral es real, y varía del valor cero, para $z = 1$, al valor

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}, \quad (56.4)$$

de modo que la variable w , que para $z = 1$ se halla en el punto K del eje x , para $z > 1$ se desvía normalmente a dicho eje, llegando para $z = 1/k$ al punto $w = K + iK'$. Si z sigue creciendo ya serán dos los factores (56.2) que se vuelven imaginarios: $1/\sqrt{1-z^2}$ y $1/\sqrt{1-k^2z^2}$.

Su producto es real pero negativo, de modo que, tomando en cuenta las relaciones (56.3) y (56.4), queda

$$w = K + iK' - \int_{\frac{1}{k}}^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(k^2 z^2 - 1)}}$$

hallándose w sobre la paralela al eje u , a distancia K' . Para $z = \infty$, efectuada la sustitución $z = 1/ks$, la última integral se hace

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(k^2 z^2 - 1)}} = - \int_1^0 \frac{ds}{\sqrt{(1 - k^2 s^2)(1 - s^2)}} = K$$

y se obtiene $w = iK'$.

Concluyendo, al ir z de 0 a ∞ , w recorre el contorno rectangular abierto $(0, K, K + iK', iK')$; si z va de 0 a $-\infty$, se ve de manera análoga que w recorre el contorno simétrico del anterior $(0, -K, -K + iK', iK')$, de donde se concluye que la relación funcional (56.1) transforma el eje real del plano z en el contorno rectangular $(K, K + iK', -K + iK', -K)$ del plano w . Luego la misma relación hace corresponder los dos semiplanos en que el eje x corta el plano z , el uno al área interior y el otro al área exterior al rectángulo señalado. Precisamente, se comprueba que es el semiplano de las y positivas el que corresponde al interior del rectángulo. La fórmula (56.1) ofrece por tanto la transformación conforme que representa un semiplano en un rectángulo. Los puntos singulares de la transformación son los vértices del rectángulo, donde $dw/dz = \infty$.

Obsérvese que las dimensiones $2K$ y K' del rectángulo no son ambas arbitrarias, por estar K y K' ligadas a k , y luego entre sí, por las relaciones (56.3) y (56.4). K y K' se llaman *integrales elípticas completas de primera especie*. La relación (56.1) se escribe a veces en la forma abreviada

$$w = F(z, k), \quad (56.5)$$

simbolizando $F(z, k)$ la integral elíptica de primera especie.

57. Transformación de Schwarz-Christoffel. Generalizando las ideas expuestas en el artículo anterior, se puede llegar a una *relación integral que permite transformar un semiplano en un poli-*

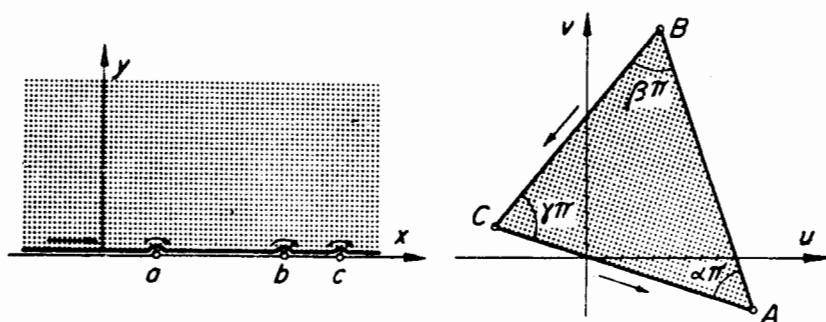
gono cualquiera. Para mayor sencillez, nos limitaremos a analizar el caso de que el polígono sea un triángulo. Consideremos la integral

$$w = \int_0^z (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} dz \quad (57.1)$$

donde a, b, c son tres constantes reales distintas cualesquiera y α, β, γ tres constantes reales positivas menores que la unidad y tales que

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (57.2)$$

En la práctica, α, β y γ son racionales, por lo que la integral (57.1) es del tipo abeliano. Supondremos, para fijar las ideas, que a, b, c sean positivas y que $a < b < c$. Llevaremos la integración (57.1) a



lo largo del eje real, evitando con semicircunferencias de radio r pequeño los tres puntos singulares $z = a, z = b$ y $z = c$.

Supongamos que el punto z se halle sobre el eje real, inmediatamente antes del punto a , y que, recorriendo la semicircunferencia, vuelva al eje x , entre a y b . Con la sustitución

$$z - a = re^{i\vartheta},$$

se ve que, para z real y $z < a$, se tiene $\vartheta = -\pi$, para z real y $z > a$, se tiene $\vartheta = 0$, y por tanto, al sobrepasar el punto a , el factor $(z-a)^{\alpha-1}$ de la integral (57.1) pasa del valor

$$r^{\alpha-1} e^{-i\pi(\alpha-1)} = -r^{\alpha-1} e^{-i\pi\alpha}$$

al valor

$$r^{\alpha-1} e^{i \cdot 0} = r^{\alpha-1},$$

creciendo su argumento en un ángulo $\alpha\pi$. Los otros dos factores de la integral no varían en su argumento, de modo que también la integral aumenta bruscamente su argumento en $\alpha\pi$. Si ponemos

$$A = \int_0^a (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} dz,$$

lo anterior puede expresarse diciendo que, al pasar z por a , el punto variable w pasa por A , desviando bruscamente su dirección de avance en un ángulo $\alpha\pi$. Mientras z siga avanzando entre a y b , w avanzará siguiendo una línea que se comprueba, análogamente al caso estudiado en el N° 56, ser una línea recta, hasta llegar al punto

$$B = \int_0^b (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} dz$$

cuando z llega a b . Allí w sufrirá otra desviación en un ángulo $\beta\pi$, y después seguirá un tramo recto, hasta llegar al punto

$$C = \int_0^c (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} dz$$

donde girará en un ángulo $\gamma\pi$. Después seguirá un camino rectilíneo, que, en vista de la condición (57.2), lo llevará hasta el punto A , cerrando el triángulo ABC . La transformación (57.1) *transforma el semiplano de las y positivas en el triángulo ABC del plano w .*

Una generalización del razonamiento anterior convence de que la *transformación de Schwarz-Christoffel*

$$w = m \int_0^z (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} \dots (z-k)^{\chi-1} dz \quad (57.3)$$

donde $a, b, \dots, k$, son n constantes reales, $\alpha, \beta, \dots, \chi$ son n constantes positivas tales que

$$\alpha + \beta + \dots + \chi = n - 2 \quad (57.4)$$

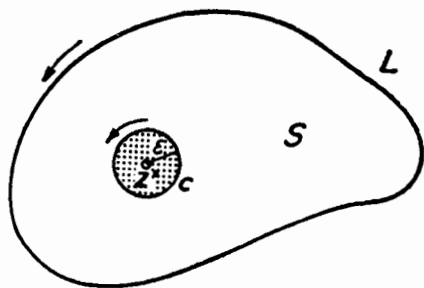
y m es un factor constante que determina la escala de la transformación, *transforma un semiplano en un polígono de n lados $ABC \dots K$, cuyos ángulos internos son de amplitud $\alpha\pi, \beta\pi, \dots, \chi\pi$. Obsérvese*

que la transformación (56.1) es precisamente de este tipo, con $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/2$, ya que se puede escribir

$$w = \frac{1}{k} \int_0^z \left(z + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

58. Fórmula de Cauchy. Sea $w(z)$ una función de la variable compleja z , holomorfa en el interior de cierta región conexa S de contorno L , y sea z' un punto de la región S . La función $w(z)/(z-z')$

tiene un polo en z' . Aislemos z' por un pequeño círculo de centro z' y radio ϵ , cuya circunferencia llamaremos c , y apliquemos la relación (52.4) a la región obtenida quitándole a S el círculo, región en la cual la función $w(z)/(z-z')$ es holomorfa. Obtenemos



$$\oint_L \frac{w(z)}{z-z'} dz = \oint_c \frac{w(z)}{z-z'} dz. \quad (58.1)$$

Ahora, cuando z está sobre la circunferencia c , se tiene $z-z' = \epsilon e^{i\theta}$ y

$$z = z' + \epsilon e^{i\theta}, \quad dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta = i(z-z') d\theta$$

con lo que la integral del segundo miembro se hace

$$\oint_c \frac{w(z)}{z-z'} dz = i \int_0^{2\pi} w(z' + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Pasando al límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, el primer miembro, cuyo valor, por (58.1), no depende de ϵ , no varía, mientras que el segundo tiende al valor $2\pi i w(z')$; por tanto

$$\oint_c \frac{w(z)}{z-z'} dz = 2\pi i w(z')$$

y reemplazando en (58.1),

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w(z)}{z-z'} dz \quad (58.2)$$

Esta es la *fórmula de Cauchy*, que permite expresar el valor de la función $w(z)$ en cualquier punto z' de su región de holomorfía S , por intermedio de los valores que dicha función adquiere sobre el contorno de la región misma. Resulta de aquí el hecho, que ya se podía prever en vista del ligamen que existe entre funciones de variable compleja y funciones armónicas, que los valores que una función de variable compleja adquiere sobre un contorno cerrado que no rodea puntos singulares, la determinan completamente en toda la región interior.

Derivando sucesivamente la fórmula de Cauchy con respecto a z' , por aplicación del principio de derivación bajo el signo de integral, llegamos a las siguientes fórmulas

$$w'(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w(z)}{(z - z')^2} dz$$

$$w''(z') = \frac{2}{2\pi i} \oint_L \frac{w(z)}{(z - z')^3} dz$$

etc. En general, la derivada de orden n resulta

$$w^{(n)}(z') = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{w(z)}{(z - z')^{n+1}} dz. \quad (58.3)$$

Siendo que la expresión integranda en esta última fórmula es continua y limitada sobre el contorno L , la integral siempre existe. Podemos concluir que una función de variable compleja z posee derivadas de todos los órdenes, siendo éstas también funciones de la variable compleja z .

59. Polinomios de Legendre. Haremos una aplicación de la fórmula de Cauchy a ciertos polinomios utilizados en problemas relacionados con la teoría del potencial: los polinomios de Legendre. De acuerdo con Olindo Rodrigues, definiremos como *polinomio de Legendre de orden n* a la función

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n, \quad (59.1)$$

de donde resulta inmediatamente que

$$P_0(z) = 1$$

$$P_1(z) = z$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2} (3z^2 - 1) \quad (59.2)$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2} (5z^3 - 3z)$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8} (35z^4 - 30z^2 + 3)$$

etc. Aplicando la fórmula (58.3) a la función $(z^2 - 1)^n$, que es holomorfa en todo el plano, se obtiene, indicando ahora con ζ la variable de integración,

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

y reemplazando en (59.1), queda la *fórmula de Schlaefli*

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot 2^n} \oint_L \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (59.3)$$

siendo L un circuito cualquiera a distancia finita.

Por medio de esta expresión es fácil demostrar que los polinomios de Legendre *satisfacen la ecuación diferencial del segundo orden*

$$(1 - z^2) \frac{d^2 P_n}{dz^2} - 2z \frac{dP_n}{dz} + n(n+1)P_n = 0 \quad (59.4)$$

En efecto, derivando la (59.3) dos veces con respecto a z

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dz} &= -\frac{n+1}{2\pi i \cdot 2^n} \oint_L \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta \\ \frac{d^2 P_n}{dz^2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2\pi i \cdot 2^n} \oint_L \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+3}} d\zeta \end{aligned}$$

y reemplazando estas expresiones y la (59.3) en el primer miembro de la ecuación (59.4), éste se hace

$$\begin{aligned} (1 - z^2) \frac{d^2 P_n}{dz^2} - 2z \frac{dP_n}{dz} + n(n+1)P_n &= \frac{n+1}{2\pi i \cdot 2^n} \\ &\oint_L \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+3}} [(1 - z^2)(n+2) - 2z(\zeta - z) + n(\zeta - z)^2] d\zeta. \end{aligned} \quad (59.5)$$

Ahora, se comprueba inmediatamente que la expresión en el paréntesis rectangular puede escribirse

$$\begin{aligned}(1 - z^2)(n + 2) - 2z(\zeta - z) + n(\zeta - z)^2 &= \\ &= 2\zeta(n + 1)(\zeta - z) - (n + 2)(\zeta^2 - 1).\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}} = \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+3}} [2\zeta(n + 1)(\zeta - z) - (n + 2)(\zeta^2 - 1)].$$

De todo esto resulta sin más que la integral en (59.5) es

$$\oint_L \frac{d}{d\zeta} \frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta$$

y, siendo la integral de una diferencial exacta, vale cero cualquiera que sea el contorno cerrado L . La validez de la ecuación de Legendre (59.4) queda así comprobada.

60. Teorema de Morera. El teorema de Morera es el *inverso del teorema de Cauchy*, y puede enunciarse como sigue: *si la variable compleja w resulta ligada a la variable z de tal manera que, moviéndose z en una región conexa, valga la ecuación (52.2) sobre cualquier línea cerrada L interior a la región y que no rodee singularidades de w , entonces w es función de la variable compleja z .*

En efecto, si es $w = u + iv$, la ecuación (52.2) se escribe

$$\oint_L (u + iv)(dx + idy) = 0$$

o sea, efectuando los productos y separando las partes real e imaginaria,

$$\oint_L (u dx - v dy) = 0, \quad \oint_L (v dx + u dy) = 0.$$

Aplicando el teorema de Stokes (29.2) en el área S encerrada por el contorno L , estas relaciones se hacen

$$\int_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0, \quad \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

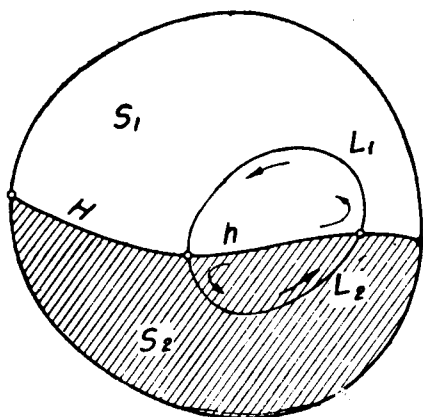
y dada la arbitrariedad del contorno L y luego del área S , se concluye que ha de ser idénticamente

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

o sea que tienen que valer las condiciones de Cauchy-Riemann (42.1). Luego w es función de la variable compleja z .

Es importante observar que el teorema de Morera y el de Cauchy juntos afirman la equivalencia de la condición de *unicidad de la integral*, resultante del hecho que la integral entre dos puntos tiene un valor independiente del camino recorrido, con la de *unicidad de la derivada* expresada por la condición de monogenidad.

61. Principio de la reflexión analítica. Consideremos en el plano complejo dos regiones S_1 y S_2 contiguas, separadas por una línea H , y supongamos que exista una función $w_1(z)$ holomorfa en S_1 y otra función $w_2(z)$ holomorfa en S_2 (incluyendo los contornos), que *adquieren los mismos valores sobre H* . Queremos comprobar que



entonces w_1 y w_2 constituyen una *única función de variable compleja*, holomorfa en toda la región $S_1 + S_2$ en el sentido de que no sólo los valores de las funciones mismas, sino también por ejemplo los de sus derivadas no presentan discontinuidades al cruzar la frontera H (*principio de la reflexión analítica*). Para demostrarlo es bastante comprobar que, puesto

$$\begin{aligned} w &= w_1 & \text{en } S_1 \\ w &= w_2 & \text{en } S_2 \end{aligned}$$

y llamado L cualquier contorno cerrado interior a la región $S_1 + S_2$, resulta

$$\oint_L w(z) dz = 0, \quad (61.1)$$

ya que entonces el teorema de Morera nos asegura que $w(z)$ es holomorfa.

Si L es todo interior a S_1 o todo interior a S_2 , (61.1) resulta satisfecha por la holomorfía de w_1 y de w_2 respectivamente. Si más bien L corta la línea H , llamando h la parte de H que queda en su interior y L_1, L_2 las dos partes de L que quedan respectivamente en S_1 y S_2 , se tiene

$$\oint_L w(z) dz = \oint_{L_1+h} w(z) dz + \oint_{h+L_2} w(z) dz, \quad (61.2)$$

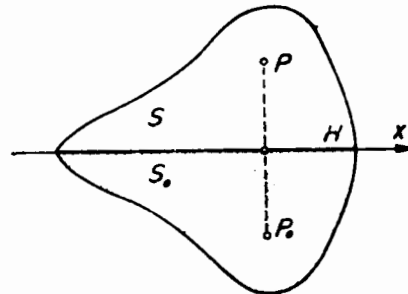
siendo efectuadas las integraciones en el sentido de las flechas de la figura. Pero el contorno $(L_1 + h)$ pertenece todo a la región S_1 y el contorno $(h + L_2)$ todo a la región S_2 , así que podemos escribir

$$\oint_{L_1+h} w(z) dz = \oint_{L_1+h} w_1(z) dz = 0$$

$$\oint_{h+L_2} w(z) dz = \oint_{h+L_2} w_2(z) dz = 0$$

y luego reemplazando en (61.2) sigue (61.1).

Un corolario muy importante del principio de reflexión analítica es el *principio de Schwarz*. Sea S una región simplemente conexa, cuyo contorno incluye un segmento rectilíneo H , y sea $w(z)$ una función holomorfa en S que adquiere *valores reales sobre H* . En tal caso, considérese la región S_0 simétrica de S con respecto al segmento H y en ella la función $w_0(z)$ que se obtiene tomando en cada punto P_0 el *valor complejo conjugado* del que w adquiere en el punto simétrico P . Con esto también w_0 toma valores reales sobre H y por el principio de reflexión analítica w y w_0 constituyen una *única función holomorfa en la región ampliada $S + S_0$* . Se suele decir que la función $w(z)$ ha sido *prolongada analíticamente* al otro lado de la recta H . En el caso de que $w(z)$ tome sobre el segmento H



valores imaginarios puros, su prolongación w_0 se definirá en S_0 como esa función que adquiere en puntos simétricos los valores complejos conjugados cambiados de signo. En fórmulas, si en P se tiene

$$w = u + iv,$$

en el primer caso se toma, en P_0

$$w_0 = u - iv$$

y en el segundo

$$w_0 = -u + iv.$$

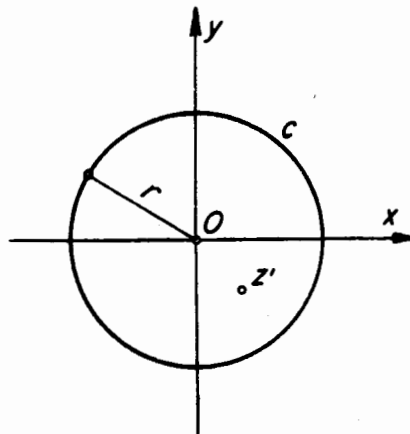
CAPITULO III

DESARROLLOS EN SERIE

I. DESARROLLOS EN SERIE DE POTENCIAS

62. Desarrollo en serie de Taylor. Sea $w(z)$ una función holomorfa dentro de una región conexas que incluye un círculo con centro en el origen y radio r , cuya circunferencia llamaremos c . Indicando con z' un punto interior al círculo, la fórmula de Cauchy (58.2) permite expresar el valor que $w(z)$ adquiere en dicho punto:

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{w(z)}{z - z'} dz. \quad (62.1)$$



Observemos que por hipótesis se tiene $|z'| < r$, mientras que sobre c , $|z| = r$. Luego, sobre c resulta también $|z'/z| < 1$, y por tanto podemos escribir

$$\frac{1}{z - z'} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{z'}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z'}{z}\right)^n,$$

habiéndose desarrollado $1/(1 - z'/z)$ en la serie geométrica de razón z'/z , serie que, por ser $|z'/z| < 1$, es absolutamente convergente. Reemplazando en (62.1), resulta

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{w(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z'}{z}\right)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} z'^n \oint_c \frac{w(z)}{z^{n+1}} dz$$

es decir que, si se llama a_n el número complejo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{w(z)}{z^{n+1}} dz, \quad (62.2)$$

queda

$$w(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n, \quad (62.3)$$

fórmula que da el desarrollo en serie de potencias positivas de la variable z de toda función w holomorfa dentro de un círculo con centro en $z = 0$. Una expresión más cómoda para los coeficientes a_n se obtiene tomando en cuenta la expresión (58.3), que para $z' = 0$ da sobre la circunferencia

$$w^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{w(z)}{z^{n+1}} dz,$$

de modo que, reemplazando en (62.2), se llega a

$$a_n = \frac{1}{n!} w^{(n)}(0). \quad (62.4)$$

El desarrollo en serie de Taylor (62.3) se puede por tanto escribir

$$w(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!} z'^n \quad (62.5)$$

Lo dicho anteriormente con respecto a funciones holomorfas en círculos con centro en el origen se extiende con un razonamiento similar a funciones holomorfas en círculos con *centro en un punto* $z = z_0$ cualquiera. Se obtiene con toda facilidad la fórmula

$$w(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} (z' - z_0)^n \quad (62.6)$$

Por tanto toda función holomorfa se puede expresar, dentro de un campo circular, por medio de un desarrollo en serie de potencias de Taylor.

63. Polinomios y trascendentes enteras. Si una función $w(z)$ es holomorfa para todo valor finito de z , lo que acabamos de ver asegura que dicha función admite un desarrollo en serie de Taylor convergente en todo el plano. Para una función así pueden darse tres casos por lo que se refiere a su comportamiento en el punto impropio, a saber: $w(z)$ en dicho punto (a) es regular, (b) tiene un polo y (c) tiene una singularidad esencial.

Referente al primer caso, vamos a demostrar el siguiente *teorema de Liouville*: una función $w(z)$ holomorfa en todo el plano y también en el infinito no puede ser sino una constante. Observemos primero que en ese caso se puede hallar un número M que sea mayor que cualquiera de los módulos de los valores que la función adquiere en todo el plano complejo, incluyendo el punto impropio. Ahora, comparemos los valores que $w(z)$ adquiere en el origen 0 y en otro punto cualquiera $z = z_0$; comprobaremos que son iguales. En efecto, por la fórmula de Cauchy (58.2) extendida a cualquier círculo c con centro en 0 y radio mayor que $|z_0|$, tenemos

$$\begin{aligned} w(z_0) - w(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c w(z) \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{z_0 w(z)}{z(z - z_0)} dz. \end{aligned}$$

Supongamos que se ha elegido la circunferencia c de tal manera que su radio R sea mayor que $2|z_0|$; entonces sobre ella se tiene

$$|z| = R, \quad |z - z_0| > \frac{1}{2}R.$$

Siendo además por hipótesis $|w(z)| < M$, $|z_0| < R$, se deduce de la fórmula anterior

$$\left| w(z_0) - w(0) \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{|z_0| M}{\frac{1}{2}R^2} \left| \oint_c dz \right|. \quad (63.1)$$

Pero si se escribe sobre c

$$z = Re^{i\theta}, \quad dz = iRe^{i\theta}d\theta,$$

resulta

$$\left| \oint_c dz \right| = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R,$$

y reemplazando en (63.1) se tiene por fin

$$|w(z_0) - w(0)| < 2|z_0| \frac{M}{R}.$$

Pero $|z_0|$ y M están fijados, mientras que R , sujeto tan sólo a la condición de ser mayor que $2|z_0|$, puede elegirse tan grande como se quiera; por tanto la diferencia $|w(z_0) - w(0)|$ puede hacerse tan pequeña como se quiera, cualquiera que sea el punto z_0 . Sigue

que ha de ser siempre $w(z_0) = w(0)$, es decir que $w(z)$ es constante, como se quería demostrar.

Pasando al caso (b), diremos que una función $w(z)$ tiene un polo de orden m en el infinito, cuando el límite de $|w(z)/z^m|$ para z tendiendo a ∞ es una cantidad finita, no nula. Vamos a comprobar que las funciones desarrollables en serie de Taylor en todo el plano con un polo de orden m en el infinito no son otra cosa sino los polinomios en z de grado m . En efecto, supongamos que la función

$$w(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m + a_{m+1}z^{m+1} + \dots,$$

que podemos escribir también

$$w(z) = (a_0 + a_1z + \dots + a_{m-1}z^{m-1}) + z^m(a_m + a_{m+1}z + \dots) \quad (63.2)$$

tenga un polo de orden m en el infinito. Si la serie

$$a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \dots \quad (63.3)$$

tuviese un polo de orden k en el infinito, el último término de la expresión (63.2) tendría un polo de orden $m + k$ (y por tanto mayor que m) en el infinito, y lo mismo pasaría con $w(z)$, contrariamente a la hipótesis. Luego la serie (63.3) ha de quedar siempre limitada y, por el teorema de Liouville, no puede ser sino una constante; la (63.2) expresa entonces a $w(z)$ por un polinomio de grado m en z .

De los resultados anteriores se concluye que, si $w(z)$ puede ser representada por una verdadera serie de Taylor convergente en todo el plano complejo, posee necesariamente en el infinito una singularidad de tipo esencial. Estas funciones, sumamente importantes, dotadas de una sola singularidad esencial en el infinito, se llaman trascendentes enteras. Recordando que los desarrollos en serie (45.1), (45.2) y (45.3) valen en todo el plano, concluimos que e^z , $\sen z$ y $\cos z$ son ejemplos de trascendentes enteras.

Una aplicación interesante del teorema de Liouville es la demostración del teorema fundamental del Álgebra, o sea que toda ecuación algebraica

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = 0$$

posee a lo menos una raíz. Consideremos en efecto el polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

y supongamos por reducción al absurdo que no se anule para ningún valor de z . Entonces la función recíproca $Q(z) = 1/P(z)$ resultaría holomorfa en todo el plano, incluyendo el punto impropio. Por el teorema de Liouville, $Q(z)$ sería entonces una constante, y lo mismo resultaría para $P(z)$, contrariamente a la hipótesis de que sea un polinomio.

64. Concepto de función analítica. Los resultados del No. 62 permiten entrever una equivalencia entre el concepto de función holomorfa y el de serie de potencias en el campo complejo. Sin embargo se presenta una dificultad fundamental y es que, mientras que una función holomorfa está definida dentro de una región conexa cuya forma depende de la función misma, la segunda, como se demostró en el No. 43, resulta definida tan sólo dentro de un círculo conveniente, que hemos llamado su círculo de convergencia, fuera del cual diverge perdiendo todo sentido. Para obviar este inconveniente, Weierstrass introdujo el concepto de *función analítica*, definiéndola como un oportuno conjunto de series de potencias, que permite representar a una función de variable compleja en el interior de todo su campo de holomorfía.

Para entender este nuevo concepto, tenemos que definir el de *prolongación analítica de una serie de potencias*. Consideremos dos series de potencias $w_0(z)$ y $w_1(z)$, la primera convergente dentro de un círculo c_0 con centro en z_0 , que escribiremos

$$w_0(z) = S_0(z - z_0), \quad (64.1)$$

indicando simbólicamente con S_0 una serie de potencias enteras positivas de $(z - z_0)$, y la segunda convergente dentro de un círculo c_1 con centro en z_1 , que escribiremos análogamente

$$w_1(z) = S_1(z - z_1). \quad (64.2)$$

Supongamos que los dos círculos c_0 y c_1 tengan una parte común, constituida por la lúnula $\mathcal{L}$, y que, a lo largo de cierto segmento de curva AB , interior a $\mathcal{L}$, se tenga

$$S_0(z - z_0) = S_1(z - z_1). \quad (64.3)$$

Vamos a comprobar que la igualdad (64.3) vale no sólo sobre AB , sino en todo el interior de la lúnula $\mathcal{L}$.

Con este objeto, prolonguemos la curva AB , juntándola con las intersecciones M y N de las circunferencias c_0 y c_1 con arcos de curva simples AM y BN , y consideremos la diferencia

$$w_0(z) - w_1(z) = h(z).$$

Esta función es nula por hipótesis sobre el arco AB ; vamos a comprobar que también lo es a lo largo de toda la curva $MABN$.

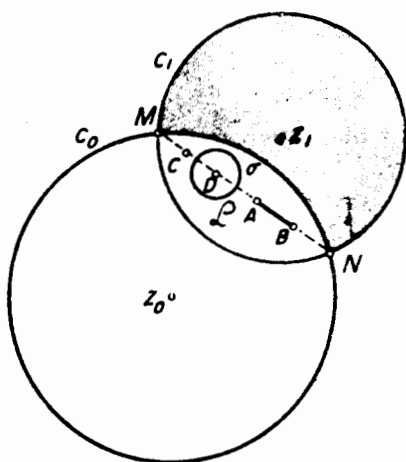
Supongamos por reducción al absurdo que, en un punto C de esta última curva, que tomaremos por ejemplo sobre el tramo MA , sea $h(z) \neq 0$. La $h(z)$ es una función continua a lo largo de BAM

(debido a la holomorfía de w_0 y w_1); siendo nula en BA y no nula en C , y debiendo variar con continuidad entre estos dos valores, tiene que existir sobre AM un punto D determinado (que también puede ser el mismo A), de separación entre los puntos de la curva en que $h(z)$ no es nula y los puntos en que sí lo es. En D será nula $h(z)$ y también todas sus derivadas (ya que éstas, por el principio de monogenidad, pueden ser calculadas a lo largo del arco BAD , sobre el cual $h = 0$), pero siempre

existirán puntos tan próximos como se quiera a D en los cuales $h(z) \neq 0$. Describese ahora un pequeño círculo σ con centro en D y todo interno a la lúnula. Si en D , $z = z_D$, la función holomorfa $h(z)$ puede desarrollarse en el interior del círculo σ en serie de potencias de la diferencia $(z - z_D)$; pero esta serie debe de tener todos sus coeficientes

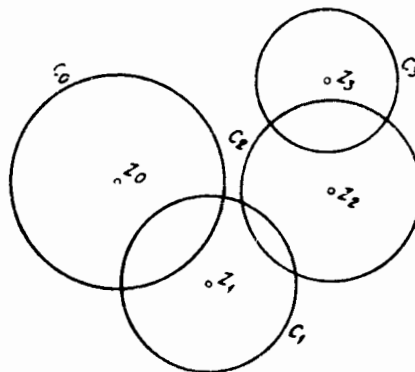
$$a_n = \frac{h^{(n)}(z_D)}{n!}$$

iguales a cero, por ser nulas en D todas las derivadas de h . Luego resultaría $h(z) = 0$ en todo el círculo σ , lo que contradice a la hipótesis de que existan en la proximidad inmediata de D puntos en los cuales $h(z)$ no es nulo.



Con lo anterior queda demostrado por reducción al absurdo que se tiene $h = 0$, o sea que vale la igualdad (64.3), sobre todo el arco de curva $MABN$. Aplicando el principio de la reflexión analítica (No. 61) con respecto a dicho arco, resulta que $w_0(z)$ y $w_1(z)$ son partes de una misma función holomorfa $w(z)$ dentro del área encerrada por los dos círculos c_0 y c_1 . Por tanto la igualdad (64.3) ha de ser válida en toda la lúnula $\mathcal{L}$, como queríamos comprobar. En el interior de $\mathcal{L}$, la función $w(z)$ puede representarse indiferentemente por w_0 o por w_1 .

La serie de potencias $S_1(z - z_1)$ puede por consiguiente considerarse como prolongación de $S_0(z - z_0)$ en la lúnula sombreada de la figura, fuera de su círculo de convergencia c_0 . Se dirá que $S_1(z - z_1)$ es una *prolongación analítica inmediata* de $S_0(z - z_0)$. A su vez puede existir una nueva serie de potencias $S_2(z - z_2)$ que sea una prolongación analítica inmediata de $S_1(z - z_1)$ y no de $S_0(z - z_0)$; diremos que S_2 es una *prolongación analítica* (ya no inmediata) de S_0 . Así siguiendo, podemos hallar toda una sucesión de series de potencias $S_0(z - z_0)$, $S_1(z - z_1)$, ..., $S_n(z - z_n)$, que en su conjunto definen una *función analítica* $w(z)$ igual a S_0 en c_0 , a S_1 en c_1 , ... a S_n en c_n . Cada una de estas series constituye, según la definición de Weierstrass, un *elemento de la función analítica* $w(z)$. Por lo que acabamos de ver, una función analítica resulta totalmente definida al conocerse uno cualquiera de sus elementos.



Se entiende por lo visto en el No. 62 que la función analítica $w(z)$ así definida es, dentro de su campo de existencia, una función holomorfa de la variable compleja z , y que viceversa *toda función holomorfa dentro de cierta región conexa tiene que poderse representar por un conjunto de series de potencias, las unas prolongación analítica de las otras, tales que sus círculos de convergencia cubren la región*. La hipótesis relativa a la conexión de la región es

fundamental, puesto que asegura la posibilidad de efectuar la prolongación. El campo de existencia de una función analítica puede estar limitado por puntos singulares, que o bien son puntos aislados, o bien cubren regiones dentro de las cuales no es posible penetrar por prolongación y que constituyen *lagunas de la función analítica*. Se comprueba que estas lagunas son las mismas zonas de singularidad que posee la función de variable compleja equivalente.

65. Desarrollo en serie de potencias negativas. A veces se da el caso de quererse *desarrollar en serie de potencias una función que es holomorfa en todo el plano, inclusive en el punto impropio, con excepción de un grupo de puntos o de una zona singular ubicados a distancia finita*. En tal caso, aislada la zona singular por

medio de un círculo con centro en el origen, conviene buscar un desarrollo en serie que converja exteriormente a dicho círculo.

Sea pues $w(z)$ una función holomorfa en la región exterior al círculo c' con centro en $z = 0$ y radio r' , e indiquemos con z' un punto cualquiera de dicha región. Aplicando el teorema de Cauchy, tendremos

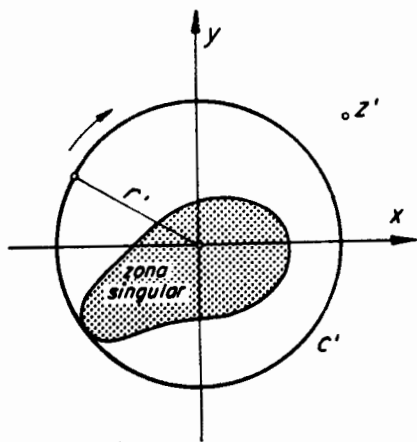
$$w(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} \frac{w(z)}{z - z'} dz. \quad (65.1)$$

Por otro lado

$$\frac{1}{z - z'} = \frac{-1}{z'(1 - z/z')} = -\frac{1}{z'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z'}\right)^m$$

siendo la serie absolutamente convergente sobre la circunferencia por ser $|z| = r'$, $|z'| > r'$, y luego $|z/z'| < 1$. Reemplazando en (65.1), queda

$$w(z') = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) \frac{1}{z'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z'}\right)^m dz =$$



$$= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z'^{-(m+1)}}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) z^m dz = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z'^{-n}}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) z^{n-1} dz,$$

habiéndose puesto $n = m + 1$. Entonces, si se escribe

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) z^{n-1} dz, \quad (65.2)$$

se obtiene el desarrollo según las potencias negativas de z

$$w(z') = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^{-n}. \quad (65.3)$$

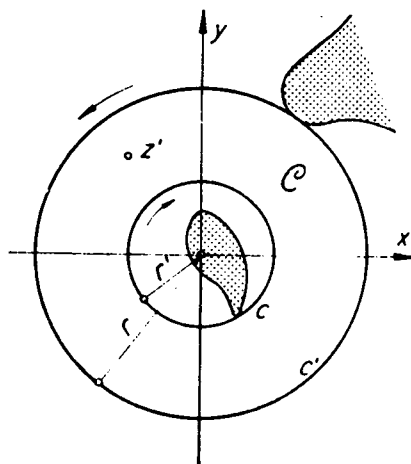
En el caso de que el centro de c' no esté en el origen, sino en $z = z_0$, obtendríamos en forma similar el desarrollo

$$w(z') = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z' - z_0)^{-n}, \quad (65.4)$$

estando los b_n dados por

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) (z - z_0)^{n-1} dz. \quad (65.5)$$

66. Desarrollo en serie de Laurent. Supongamos ahora que, por la presencia de puntos o zonas singulares, que incluyan ya sea el origen, ya sea el punto en el infinito, no sea posible hallar un círculo con centro en el origen, interior o exteriormente al cual la función de variable compleja $w(z)$ sea holomorfa dondequiera. Entonces puede darse el caso de que exista una corona circular $\mathcal{C}$ comprendida entre dos círculos c y c' con centro en $z = 0$, en que la función sea holomorfa. La región $\mathcal{C}$ puede considerarse como la región que queda a un mismo tiempo interior a la circunferencia c y exterior a la c' ; así que resulta, por la fórmula de Cauchy, aplicada a todo el contorno de la corona, y por los



desarrollos (62.3) y (65.3), que en todo punto z' del anillo se tiene

$$\begin{aligned} w(z') &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{w(z)}{z - z'} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{w(z)}{z - z'} dz = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z'^n}. \end{aligned} \quad (66.1)$$

Este desarrollo en serie de potencias enteras positivas y negativas de z' , para una función holomorfa dentro de una corona circular con centro en el origen, se llama *desarrollo de Laurent*. En el caso de que el centro no esté en el origen, sino en otro punto $z = z_0$, se tendría un desarrollo de Laurent del tipo

$$w(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z' - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z' - z_0)^n} \quad (66.2)$$

Como *ejemplo*, buscaremos el desarrollo de la función racional

$$w(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

que tiene dos polos, uno el origen $z = 0$ y otro en $z = 1$; si nos interesan sus valores en la zona comprendida entre los dos polos, podemos desarrollarla ya sea en una corona con centro en $z = 0$, ya sea en una corona con centro en $z = 1$, que pase entre dichos puntos. En el primer caso, desarrollando en serie de potencias de z y tomando en cuenta que $0 < |z| < 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + \dots) = \\ &= -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots \end{aligned} \quad (66.3)$$

que es el desarrollo de Laurent (66.1) con

$$b_1 = a_0 = a_1 = \dots = -1, \quad b_2 = b_3 = b_4 = \dots = 0.$$

En el segundo caso, desarrollando en serie de potencias del binomio $(z-1)$ y tomando en cuenta que es $0 < |z-1| < 1$, encontramos

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{(z-1)+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z-1} [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots] = \\
&= \frac{1}{z-1} 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \dots \quad (66.4)
\end{aligned}$$

que es un desarrollo del tipo (66.2).

67. Teorema de los residuos. Sea $w(z)$ una función de variable compleja que tiene un punto singular aislado en $z = z_0$. En proximidad de dicho punto, es posible desarrollarla en una serie del tipo (65.4), resultando su primer coeficiente, según (65.5),

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) dz.$$

Este coeficiente, que es el único de los b_n en cuya expresión no aparece el número z_0 , pero que sí depende indirectamente de z_0 en cuanto el camino de integración lo rodea, es un número complejo muy importante para el estudio local de la función; se llama *residuo de $w(z)$ en el punto $z = z_0$* y se escribe

$$\text{Res} [w(z)]_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) dz. \quad (67.1)$$

De esta relación, despejando la integral, se obtiene

$$\oint_{c'} w(z) dz = 2\pi i \text{Res} [w(z)]_{z_0},$$

es decir que la integral de la función $w(z)$ calculada a lo largo de la circunferencia c' con centro en z_0 vale $2\pi i$ multiplicado por el residuo en z_0 de la función misma. Como sabemos (No. 52), esta fórmula vale no sólo para la circunferencia c' , sino para cualquier otra curva L que incluya al punto singular z_0 , con tal que no contenga más puntos singulares; luego se puede escribir

$$\oint_L w(z) dz = 2\pi i \text{Res} [w(z)]_{z_0}. \quad (67.2)$$

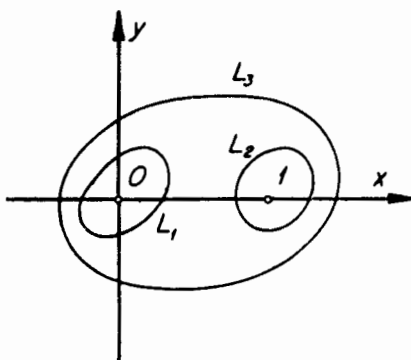
En el caso de que la curva L incluya varios puntos singulares aislados $z_1, z_2, \dots, z_m$, se puede encerrar cada uno de ellos por pequeños círculos $c_1, c_2, \dots, c_m$; y siendo (No. 52)

$$\oint_L w(z) dz = \sum_{n=1}^m \oint_{c_n} w(z) dz,$$

se obtiene la fórmula más general

$$\oint_L w(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res} [w(z)]_{z_n} \quad (67.3)$$

o sea que la integral de una función de variable compleja, calculada a lo largo de una curva cerrada L , es igual a $2\pi i$ multiplicado por la suma de los residuos de dicha función en cada uno de sus puntos singulares internos a L . Este teorema, llamado *teorema de los residuos*, se debe a Cauchy y constituye una extensión del teorema de Cauchy del No. 52, puesto que si no hay puntos singulares, los residuos son todos nulos y la fórmula (67.3) se reduce a la (52.2).



Como ejemplo, sea L_1 una curva cerrada que incluye al origen y no al punto $z = 1$, L_2 otra que incluye a $z = 1$ y no al origen, y L_3 una tercera curva que incluye a ambos. Por (67.1) y (66.3) se tiene

$$\oint_{L_1} \frac{dz}{z(z-1)} = 2\pi i \text{Res} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right]_0 = 2\pi i(-1) = -2\pi i,$$

por (66.4)

$$\oint_{L_2} \frac{dz}{z(z-1)} = 2\pi i \text{Res} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right]_1 = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

y por (67.3)

$$\begin{aligned} \oint_{L_3} \frac{dz}{z(z-1)} &= 2\pi i \left\{ \text{Res} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right]_0 + \text{Res} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right]_1 \right\} = \\ &= 2\pi i(-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

En el caso de que una función $w(z)$ sea desarrollable, dentro de un anillo con centro en $z = z_0$, en una serie de Laurent en que todos los coeficientes b_n sean nulos con excepción del b_1 , es fácil calcular el residuo; en efecto, basta observar que entonces

$$w(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + S(z - z_0) \quad (67.4)$$

habiéndose indicado con S una serie de potencias positivas de $(z - z_0)$. Invertiendo, resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(z)} &= \frac{z - z_0}{b_1 + (z - z_0)S(z - z_0)} = \\ &= \frac{z - z_0}{b_1} - (z - z_0)^2 \frac{S(z - z_0)}{b_1[b_1 + (z - z_0)S(z - z_0)]}.\end{aligned}$$

Ahora el factor que multiplica $(z - z_0)^2$, que resulta finito para $z = z_0$, representa una función $S'(z - z_0)$ holomorfa en proximidad de ese punto; escribiremos

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{z - z_0}{b_1} - (z - z_0)^2 S'(z - z_0).$$

Derivando con respecto a z y poniendo $z = z_0$, tenemos

$$\left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{w(z)} \right) \right]_{z=z_0} = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{\text{Res}[w(z)]} \quad (67.5)$$

por ser $S'(z - z_0)$ y su derivada primera finitas en el punto z_0 . De aquí resulta que, si $w(z)$ puede expresarse por un desarrollo de Laurent del tipo (67.4), su residuo es igual al valor de la inversa de la derivada de la función $1/w(z)$, calculada en el punto z_0 .

Como aplicación, volveremos a calcular los residuos de la función $1/z(z - 1)$ para $z = 0$ y para $z = 1$. Se tiene

$$\frac{1}{w(z)} = z(z - 1); \quad \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{w(z)} \right] = 2z - 1$$

y luego

$$\text{Res} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right]_0 = \left[\frac{1}{2z-1} \right]_0 = -1.$$

$$\text{Res} \left[\frac{1}{z(z-1)} \right]_1 = \left[\frac{1}{2z-1} \right]_1 = 1.$$

68. Análisis de los puntos singulares aislados. Sea $z = z_0$ un punto singular aislado de la función $w(z)$. Esto quiere decir que será siempre posible trazar dos circunferencias concéntricas, con centro en z_0 (la primera de radio ϵ muy pequeño), tales que en la corona circular $\mathcal{C}$ comprendida entre ellas la función $w(z)$ es holomorfa.

Esto permite, según vimos en el No. 66, desarrollar en $\mathfrak{U}$ la función $w(z)$ en la serie de Laurent (66.2)

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \quad (68.1)$$

Ahora, pueden presentarse dos casos: (a) que la segunda serie en la fórmula anterior se reduzca a un polinomio en la variable $1/(z - z_0)$, por ser los coeficientes b_n nulos de cierto valor de n en adelante, y (b) que dicha serie sea una serie verdadera. Se comprueba que, análogamente a lo que vimos (No. 63) que sucede para el punto impropio, en el caso (a) el punto singular z_0 es un *polo* de la función, mientras que en el caso (b) es una *singularidad esencial*.

En efecto, si los coeficientes b_n son nulos desde cierto valor $n = m + 1$ en adelante, la serie (68.1) se escribe

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (68.2)$$

y luego resulta

$$(z - z_0)^m w(z) = S(z - z_0), \quad (68.3)$$

habiéndose indicado con $S(z - z_0)$ la serie de Taylor

$$S(z - z_0) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}. \quad (68.4)$$

La serie anterior representa una función holomorfa en el punto z_0 y en su derredor que adquiere el valor no nulo b_m en z_0 ; luego su recíproca $1/S(z - z_0)$ es también holomorfa en z_0 y en su derredor, así como la función $(z - z_0)^m/S(z - z_0)$. Pero por (68.3) se tiene

$$\frac{(z - z_0)^m}{S(z - z_0)} = \frac{1}{w(z)}. \quad (68.5)$$

Luego la función $1/w(z)$ es regular en z_0 , mientras que $w(z)$ adquiere en ese punto valores infinitamente grandes, lo que por definición (No. 51) significa que z_0 es un *polo* para $w(z)$. Si por el contrario la segunda serie del desarrollo (68.1) es una serie verdadera, pierde validez el razonamiento anterior, $1/(w(z))$ resulta singular en z_0 , y por tanto $w(z)$ posee en z_0 una *singularidad esencial*.

En el caso de que $w(z)$ tenga un desarrollo del tipo (68.2), se dice que tiene en z_0 un *polo de orden m* ; su recíproca $1/w(z)$ tendrá entonces por (68.5) un *cero de multiplicidad m* en z_0 . Por ejemplo, el desarrollo (66.4) manifiesta que la función $1/z(z-1)$ posee un polo del primer orden en $z=1$, y es evidente que su recíproca tiene en dicho punto un cero simple, raíz de la ecuación $z(z-1)=0$.

69. **Funciones meromorfas.** De la fórmula (68.3)

$$w(z) = \frac{S(z-z_0)}{(z-z_0)^m}$$

es fácil concluir que, cuando el módulo de $z-z_0$ tiende a cero, el módulo de $w(z)$ crece indefinidamente, cualquiera que sea el camino que el punto variable z sigue para acercarse al polo z_0 . En efecto, sigue de (68.4) que $S(z-z_0)$ no es nula para $z=z_0$, y por tanto se puede siempre hallar una vecindad bastante pequeña que encierre z_0 , dentro de la cual el módulo de $S(z-z_0)$ quede mayor que cierto número positivo M conocido de antemano. Luego, llamado r el módulo de $z-z_0$, resulta $|w(z)| > M/r^m$, y esto comprueba que $|w(z)|$ crece indefinidamente cuando r tiende a cero. Por otro lado, siendo que $S(z-z_0)$ es una función regular para $z=z_0$, se puede siempre hallar un círculo c con centro en z_0 , dentro del cual $S(z-z_0)$ es holomorfa. El cociente $S(z-z_0)/(z-z_0)^m$ es por tanto una función holomorfa para todos los puntos de este círculo, con excepción del centro z_0 únicamente. Concluyendo, en proximidad del polo, la función $w(z)$ no admite otro punto singular que no sea el polo mismo, es decir, que *todo polo es un punto singular aislado*.

Toda función uniforme que, en cierta región, tiene tan sólo singularidades polares, se dice que es *meromorfa* en dicha región. *Una función meromorfa en todo el plano puede poseer infinitos polos, pero éstos sólo podrán ser en cantidad finita en toda región A situada a distancia finita.* En efecto, si la función $w(z)$, meromorfa en el interior de A y sobre su contorno, tuviese infinitos polos dentro de A , por un conocido teorema de Bolzano el conjunto de todos estos polos poseería un *punto de condensación* P_0 , tal que en toda vecindad, por pequeña que fuera, de P_0 , siempre se hallarían polos de $w(z)$. Pero un punto así no podría ser un polo, ya que acabamos de ver

que un polo es necesariamente aislado, ni mucho menos sería un punto ordinario. Por tanto P_0 tendría que ser una singularidad esencial, lo que está en contradicción con la hipótesis de que $w(z)$ es meromorfa.

A continuación vamos a determinar un *desarrollo en serie para funciones que son meromorfas en todo el plano*. Consideremos una región $\mathfrak{C}$, limitada por un contorno cerrado L sobre el cual no se halla ningún polo, y supongamos que en su interior estén los n polos $z_1, z_2, \dots, z_n$. En proximidad de $z = z_1$, la función $w(z)$ se puede escribir, por lo expresado en el No. 68,

$$w(z) = S_1(z - z_1) + P_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right)$$

siendo S_1 una serie de potencias, P_1 un polinomio. Escribase

$$w(z) - P_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) = w_1(z)$$

donde $w_1(z)$ representa una función regular en z_1 , pero que sí posee los demás polos de w . En proximidad de z_2 será

$$w_1(z) = S_2(z - z_2) + P_2\left(\frac{1}{z - z_2}\right)$$

y podremos escribir

$$w_1(z) - P_2\left(\frac{1}{z - z_2}\right) = w_2(z)$$

donde $w_2(z)$ es regular en z_1 y z_2 , pero conserva las demás singularidades polares. Si seguimos así hasta z_n , obtenemos el desarrollo, válido en todo punto del campo $\mathfrak{C}$,

$$w(z) = P_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) + P_2\left(\frac{1}{z - z_2}\right) + \dots + P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) + f(z) \quad (69.1)$$

siendo $f(z)$ una función que ya no tiene los polos $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Ahora bien, sea z' un punto de $\mathfrak{C}$ que no es un polo y tratemos de expresar el valor de $w(z)$ en z' por medio de los valores que dicha función adquiere sobre el contorno L . Siendo $f(z)$ regular dentro del campo, podemos escribir por la fórmula de Cauchy (58.2)

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z'} dz.$$

Reemplazando en ambos miembros la expresión

$$f(z) = w(z) - \sum_{r=1}^n P_r \left(\frac{1}{z - z_r} \right)$$

que se obtiene de (69.1) despejando $f(z)$, llegamos a

$$\begin{aligned} w(z') - \sum_{r=1}^n P_r \left(\frac{1}{z' - z_r} \right) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w(z)}{z - z'} dz - \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^n \oint_L \frac{1}{z - z'} P_r \left(\frac{1}{z - z_r} \right) dz. \end{aligned}$$

Las integrales que aparecen en la última suma son nulas, porque las funciones integrandas relativas son holomorfas en toda la región externa a L . Queda luego

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w(z)}{z - z'} dz + \sum_{r=1}^n P_r \left(\frac{1}{z' - z_r} \right). \quad (69.2)$$

Si los polos son tan sólo n , también la otra integral se anula por el mismo motivo, y la expresión anterior se reduce a

$$w(z') = \sum_{r=1}^n P_r \left(\frac{1}{z' - z_r} \right).$$

Las funciones racionales, cocientes de dos polinomios en z , son evidentemente funciones meromorfas, ya que no tienen más polos que los ceros del polinomio divisor. En este caso el resultado que acabamos de obtener expresa la conocida regla algebraica acerca de la posibilidad de descomponer toda función racional en una suma de quebrados simples. Si los polos son infinitos, pero se da el caso de que en cualquier región finita la integral

$$\oint_L \frac{w(z)}{z' - z_r} dz \quad (69.3)$$

calculada para todo punto z' , converja absolutamente hacia cero al ensancharse progresivamente el contorno L , entonces (69.2) se transforma en el desarrollo en serie de funciones racionales válido en todo el plano

$$w(z') = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \left(\frac{1}{z' - z_n} \right). \quad (69.4)$$

II. LA FUNCION GAMMA

70. Desarrollos en serie y en producto infinito para funciones goniométricas. Busquemos un desarrollo en serie para la función $\cotg z$, cuyos puntos singulares están ubicados en los puntos $z = n\pi$ del eje real, siendo n entero, positivo o negativo cualquiera. Estos son polos, ya que allí $\tan z$ es finito; y precisamente son polos del primer orden, porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z \cotg z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \cos x \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \pm 1.$$

Los residuos relativos pueden obtenerse luego aplicando la regla indicada al final del No. 67. Con $w(z) = \cotg z$, se tiene

$$\frac{1}{w(z)} = \tan z, \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{w(z)} \right) = \frac{1}{\cos^2 z}$$

y esta derivada, para $z = n\pi$, vale 1. Por la fórmula (67.5), resulta luego que los residuos de $\cotg z$ son todos iguales a 1, de modo que los polinomios P_r del desarrollo (69.2) valen

$$P_0 = \frac{1}{z}, \quad P_1 = \frac{1}{z - \pi}, \quad P_2 = \frac{1}{z - 2\pi}, \dots, P_n = \frac{1}{z - n\pi}, \dots$$

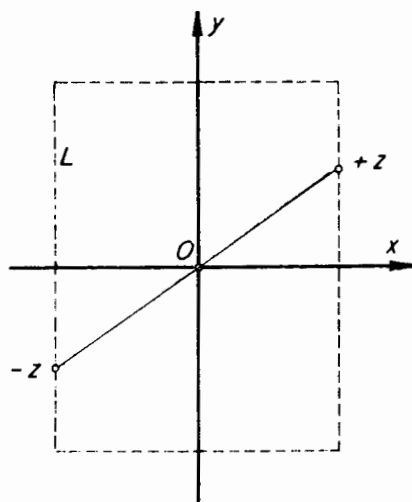
$$P_{-1} = \frac{1}{z + \pi}, \quad P_{-2} = \frac{1}{z + 2\pi}, \dots, P_{-n} = \frac{1}{z + n\pi}, \dots$$

Ahora, escojamos para los contornos crecientes L , rectángulos con centro en el origen. La integral

$$\oint_L \frac{\cotg z}{z} dz \quad (70.1)$$

es nula, ya que el contorno es simétrico con respecto al origen y que $\cotg(-z) = -\cotg z$, de modo que las integrales extendidas a los lados opuestos, que se recorren en sentido contrario, son iguales y de signo opuesto. Ahora se puede demostrar que, fijado un punto z' y escogida convenientemente la ley de crecimiento del contorno L , la integral

$$\oint_L \frac{\cotg z}{z - z'} dz \quad (70.2)$$



equivalente a la (69.3) en este caso, tiende absolutamente hacia cero a medida que se ensancha el rectángulo de integración. No vamos a dar la demostración, pero el resultado se justifica considerando que, por ser z' fijo y z siempre más grande, la diferencia $z - z'$ se acerca cada vez más a z , y por tanto la integral (70.2) se acerca siempre más a la integral (70.1) correspondiente, que como sabemos es nula.

En vista de los resultados anteriores, podemos aplicar la fórmula (69.4), con lo cual obtenemos

$$\cotg z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right],$$

es decir

$$\cotg z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2 \pi^2} \quad (70.3)$$

Pasando el término $1/z$ al primer miembro e integrando entre 0 y z , con el cuidado de que el camino de integración evite los polos, se llega a

$$\int_0^z \left(\cotg z - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \frac{2z}{z^2 - n^2 \pi^2} dz.$$

Ahora, para calcular la integral del primer miembro es lícito emplear la fórmula, conocida en el campo real,

$$\int_0^z \left(\cotg z - \frac{1}{z} \right) dz = \ln \frac{\sen z}{z},$$

mientras que la n -ava integral del segundo miembro es

$$\int_0^z \frac{2z}{z^2 - n^2 \pi^2} dz = \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Así se obtiene

$$\ln \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

y luego

$$\boxed{\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)} \quad (70.4)$$

fórmula de Euler que expresa el seno por medio de un *producto infinito*. Si reemplazamos la variable z por πz , la (70.4) se puede escribir también bajo la forma

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \quad (70.5)$$

que aprovecharemos en el artículo siguiente.

71. La función gamma; expresiones de Welerstrass y de Gauss. Consideremos el desarrollo en serie de funciones racionales

$$f(z) = -c + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) \quad (71.1)$$

donde c es una constante que se determinará más adelante. Este desarrollo es del tipo (69.4) y representa, como se ve enseguida recordando lo indicado en el No. 69, una función meromorfa en todo el plano, con infinitos polos del primer orden, ubicados en los puntos del eje x de abscisas $-1, -2, \dots, -n, \dots$. Procediendo con la serie (71.1) análogamente a lo que acabamos de hacer con la serie (70.3), integremos $f(z)$ entre los límites 0 y z , siguiendo un camino de integración que evite los polos. Obtenemos

$$\int_0^z f(z) dz = -cz + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} + \ln \frac{n}{z+n} \right).$$

Ahora, introduzcamos una nueva función $\Gamma(z)$ tal que sea por definición

$$\int_0^z f(z) dz = \ln [z \Gamma(z)].$$

Comparando con la fórmula anterior, resulta que

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{e^{-cz}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z+n} e^{z/n}} \quad (71.2)$$

Esta es la expresión de Weierstrass de la célebre función gamma de Euler.

La constante c , que lleva el nombre de constante de Mascheroni, se determina imponiendo que

$$\Gamma(1) = 1. \quad (71.3)$$

Para eso ha de ser, reemplazando el valor $z = 1$ en (71.2),

$$1 = e^{-c} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n} e^{1/n}$$

de donde se saca

$$e^c = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n} e^{1/n}$$

y luego

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{n}{1+n} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \left(\ln \frac{r}{1+r} + \frac{1}{r} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \left[\ln r - \ln(r+1) + \frac{1}{r} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \dots + \right. \\ &\quad \left. + \ln n - \ln(n+1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\ln(n+1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Esta expresión, observando que es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n,$$

se suele escribir

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right] \quad (71.4)$$

y permite calcular la constante de Mascheroni, para la cual se halla el valor

$$c = 0.5772156 \dots$$

Reemplazando la expresión (71.4) en (71.2), obtenemos otra importante expresión de la función gamma. Resulta

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)z} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{r}{z+r} e^{z/r} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)z+(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})z} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{r}{z+r} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} e^{(\ln n)z} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{r}{z+r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z \prod_{r=1}^n \frac{z+r}{r}};\end{aligned}$$

o sea

$$\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}} \quad (71.5)$$

que es la expresión dada por Gauss para la función gamma.

72. Propiedades de la función gamma. Es fácil deducir de la fórmula anterior la *propiedad fundamental* de la función gamma, a saber que

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)} \quad (72.1)$$

En efecto, se tiene

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \frac{z}{z+1} \frac{z+1}{z+2} \dots \frac{z+n}{z+n+1} \right] = z \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z+n+1}.$$

Pero, siendo z un número finito, es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z+n+1} = 1;$$

por tanto es válida la expresión (72.1). Recordando la condición (71.3), se encuentra sucesivamente

$$\Gamma(2) = 1 \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \Gamma(2) = 2!, \quad \Gamma(4) = 3 \Gamma(3) = 3!$$

y en general para todo número entero positivo m

$$\boxed{\Gamma(m+1) = m!} \quad (72.2)$$

o sea que la función gamma constituye la extensión del factorial a valores no enteros positivos de la variable. Para z entero negativo, se deduce inmediatamente de la expresión (71.2) que la función gamma se hace infinitamente grande, hecho que podía esperarse, en vista de la relación que la liga con la función (71.1), función que tiene precisamente polos para $z = -1, -2, -3 \dots$

Otra fórmula fundamental es la que relaciona la función gamma con la función seno:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \quad (72.3)$$

En efecto tenemos por (72.1)

$$\Gamma(1-z) = -z \Gamma(-z)$$

o sea, si expresamos $\Gamma(-z)$ por (71.2),

$$\Gamma(1-z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{-z+n} e^{-z/n}.$$

Multiplicando por $\Gamma(z)$, también expresada por (71.2), y sacando la inversa, resulta

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+z}{n} \cdot \frac{n-z}{n} \right) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right),$$

que comparada con (70.5) da la (72.3). De ésta se deduce, para $z = 1/2$, el valor

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (72.4)$$

73. La integral euleriana de segunda especie. Finalmente vamos a comprobar que la función gamma puede escribirse también bajo forma de integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (73.1)$$

Recordando que la exponencial e^{-t} puede expresarse como límite, por medio de la fórmula

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad (73.2)$$

vemos que la integral que aparece en (73.1) puede considerarse como el límite para $n \rightarrow \infty$ de la función

$$I(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Haciendo $t = ns$, ésta se escribe

$$I(z, n) = n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds. \quad (73.3)$$

Integrando por partes, la integral del segundo miembro se hace

$$\int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds = \left[\frac{1}{z} s^z (1-s)^n \right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds.$$

Observando que el primer término del segundo miembro vale cero y volviendo a integrar por partes sucesivamente n veces, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds &= \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds = \dots \\ &= \frac{n(n-1) \dots 1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 s^{z+n-1} ds = \\ &= \frac{n(n-1) \dots 1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \frac{1}{z+n}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (73.3), queda

$$I(z, n) = \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)},$$

siendo por (71.5), su límite para $n \rightarrow \infty$ precisamente la función $\Gamma(z)$. Así se ha comprobado la fórmula (73.1); la integral que aparece en ella se conoce bajo el nombre de *integral euleriana de segunda especie*.

74. La función beta. Llámase *función beta de Euler* la función definida por la fórmula

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt \quad (74.1)$$

siendo las variables p, q reales positivas; la integral del segundo miembro se llama *integral euleriana de primera especie*.

La función beta se liga con la función gamma por la relación fundamental

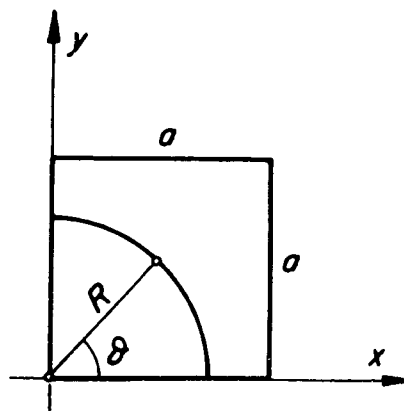
$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (74.2)$$

que nos proponemos comprobar a continuación. Con este objeto, consideremos la función

$$f(x, y) = 4x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} \quad (74.3)$$

que es continua y siempre positiva en el cuadrante $x > 0, y > 0$; queremos calcular la integral de esta función extendida a todo el cuadrante. Vamos a proceder de dos maneras: primero integraremos en un cuadrado con un vértice en el origen y dos lados sobre los ejes y haremos crecer indefinidamente la longitud del lado; después integraremos en un cuarto de círculo con centro en el origen y lados sobre los ejes, y haremos crecer el radio indefinidamente. De las dos maneras debemos llegar al mismo resultado.

Si a es el lado del cuadrado, la integral extendida a su área tiene el valor



$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_0^a 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx \int_0^a 2y^{2q-1} e^{-y^2} dy \right] = \Gamma(p)\Gamma(q) \quad (74.4)$$

puesto que, si en la integral (73.1) se pone por ejemplo $t = x^2, z = p$, se obtiene

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx \quad (74.5)$$

y análogamente para la otra integral.

Si por otro lado expresamos la función (74.3) en función de coordenadas polares r, θ y la integramos sobre un cuarto de círculo de radio R , tomando en cuenta que el elemento de área es

$$dA = dr \cdot r d\theta,$$

llegamos a

$$\int_0^R 2r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} 2 \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta.$$

La primera integral, para $R \rightarrow \infty$, tiende al valor $\Gamma(p+q)$, mientras que la segunda, puesto $\sin^2 \theta = t$, se transforma en la integral euleriana de primera especie (74.1). Podemos luego escribir

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^R 2r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} 2 \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right] &= \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q). \end{aligned}$$

Comparando con (74.4) y teniendo en cuenta que los límites de los primeros miembros tienen que ser iguales, resulta

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q),$$

o sea la fórmula (74.2).

En particular, supongamos p comprendido entre 0 y 1, y $q=1-p$. Entonces, recordando la (71.3), obtenemos de (74.2)

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

o sea por (74.1) y (72.3)

$$\int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{-p} dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad (74.6)$$

Se llama *función de los errores* (de Gauss), y se escribe $\operatorname{erf} z$, la función

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz \quad (74.7)$$

Si escribimos $p = 1/2$ en (74.5) y recordamos (72.4), obtenemos que

$$\operatorname{erf} \infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = 1, \quad (74.8)$$

resultado muy importante para el Cálculo de Probabilidades.

III. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

75. Clasificación de las funciones periódicas. Se dice que una función de variable compleja es *periódica* cuando es posible subdividir el plano complejo en una infinidad de regiones todas iguales entre sí, tales que la función adquiere los mismos valores en puntos correspondientes (u *homólogos*) de dichas regiones. Así por ejemplo las funciones $\cos z$ y $\sin z$ son periódicas, puesto que se reproducen idénticamente en fajas verticales de ancho 2π (ver No. 45). Naturalmente para una periodicidad de este tipo, llamada *periodicidad simple*, las fajas no necesitan ser paralelas al eje imaginario, sino que pueden ser inclinadas como se quiera. Imaginemos ahora un segundo sistema de fajas iguales, oblicuo con respecto al primero. Los dos sistemas cortarían el plano complejo en una doble infinidad de paralelogramos iguales entre sí. Las funciones que adquieren los mismos valores en todos los puntos homólogos de tales paralelogramos se llaman *doblemente periódicas* o *elípticas*.

No es nuestra intención tratar en este curso el tema, muy extenso, de las funciones elípticas. Sin embargo queremos justificar su nombre explicando en qué sentido estas funciones se relacionan con las integrales elípticas de las cuales se habló en el No. 55. Consideremos con este objeto la integral

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

que no es otra cosa sino la función $\arcsen z$. Si no conociéramos la función inversa, que es $\sen z$, un estudio de esta integral sería bastante difícil, puesto que, mientras que $\sen z$ es una función simplemente periódica uniforme, el $\arcsen z$ es polidroma de infinitos valores.

Abel tuvo la idea de invertir de manera análoga las integrales elípticas, cuyo estudio se dificultaba precisamente debido a su polidromía, y descubrió, con Jacobi, que las funciones inversas son funciones doblemente periódicas, que es suficiente estudiar dentro de uno de sus paralelogramos de periodicidad para conocerlas en todo el plano. Fueron éstas las primeras funciones elípticas conocidas,

extendiéndose después el nombre a todas las funciones doblemente periódicas.

76. Desarrollo en serie de funciones simplemente periódicas.

Vamos a comprobar que es posible, por medio de las dos funciones simplemente periódicas seno y coseno, construir desarrollos en serie aptos para representar cualquier otra función simplemente periódica uniforme. Estos desarrollos en serie de senos y cosenos se llaman *series de Fourier*. Demostraremos el siguiente teorema fundamental: si $f(z)$ es una función periódica uniforme de la variable compleja z , con periodo $2L$, y en el interior de una faja del plano z , comprendida entre dos rectas MM' y NN' paralelas a la dirección del periodo $2L$, no tiene ningún punto singular, entonces es posible desarrollarla en una serie de Fourier de la forma

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi z}{L} + b_n \sin \frac{n\pi z}{L} \right] \quad (76.1)$$

que converge uniformemente en toda región interna a dicha faja.

La demostración sigue fácilmente del teorema de Laurent del No. 66. En efecto, transformemos el plano z en un plano u , por medio de la transformación conforme

$$u = e^{\frac{\pi iz}{L}} \quad (76.2)$$

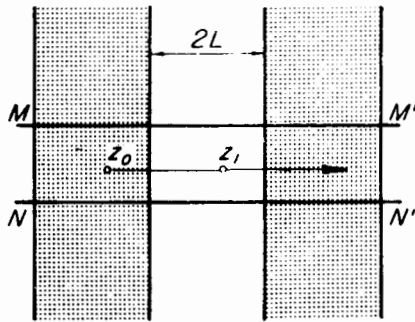
con lo que la función $f(z)$ se transformará en una función F de la nueva variable u

$$f(z) = F(u),$$

función que también es uniforme, porque si u describe un camino

cerrado alrededor del origen $u = 0$, el exponente de e en (76.2) aumenta en un múltiplo de $2\pi i$ y se hace

$$\left(\frac{\pi z}{L} + 2n\pi \right) i = \frac{\pi z + 2n\pi L}{L} i = \frac{\pi}{L} (z + 2nL) i,$$



con lo que z aumenta en un múltiplo de $2L$ y $f(z)$ por hipótesis vuelve al mismo valor. Ahora supongamos que la variable z , saliendo de un punto z_0 de su plano, vaya moviéndose sobre una recta paralela al período $2L$; entonces resulta

$$z = z_0 + 2\alpha L$$

siendo α un parámetro real que varía de $-\infty$ hasta $+\infty$, y la variable u toma los valores

$$u = e^{\frac{\pi i z_0}{L}} (\cos 2\pi\alpha + i \operatorname{sen} 2\pi\alpha).$$

o sea describe en el plano u una circunferencia con centro en $u = 0$ y radio

$$R = \left| e^{\frac{\pi i z_0}{L}} \right|.$$

Si el desplazamiento rectilíneo de z es de longitud $|2L|$ (desplazamiento de z_0 a z , en la figura), u recorre la circunferencia completa. Por tanto la transformación (76.2) cambia un tramo de longitud $|2L|$ de la faja $MM'NN'$, paralela a la dirección del período, contenida en el plano z , en un anillo circular con centro en el origen, contenido en el plano u . Siendo por hipótesis la función $f(z)$ holomorfa dentro de la faja, también será holomorfa su transformada $F(u)$ en el interior del anillo circular, y la podremos expresar por el desarrollo en serie de Laurent del tipo (66.1)

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{u^n}.$$

Volviendo a la variable z por medio de la transformación (76.2), se obtiene

$$f(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + B_n) \cos \frac{n\pi z}{L} + i(A_n - B_n) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \right]$$

y esta fórmula, poniendo

$$a_0 = A_0, \quad a_n = A_n + B_n, \quad b_n = i(A_n - B_n) \quad (76.3)$$

es precisamente la (76.1). Por lo dicho más arriba, la serie converge uniformemente en toda región interior a la faja $MM'NN'$.

Los coeficientes a_n y b_n se expresan por medio de integrales definidas en función de $f(z)$, de la manera que se indica a continuación. Por (62.2) y (65.2) se tiene

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{F(u)}{u^{n+1}} du, \quad B_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c F(u) u^{n-1} du$$

siendo c una circunferencia interna y concéntrica al anillo. Si efectuamos la transformación inversa a la (76.2), pasando del plano u al plano z , aquellas dos integrales se transforman en las siguientes integrales rectilíneas, calculadas sobre un segmento de recta $z_0 z_1$ paralelo a las fronteras de la faja $MM'NN'$ y de longitud $|2L|$:

$$A_n = \frac{1}{2L} \int_{z_0}^{z_1} f(z) e^{-i \frac{n\pi z}{L}} dz; \quad B_n = \frac{1}{2L} \int_{z_0}^{z_1} f(z) e^{i \frac{n\pi z}{L}} dz$$

de donde, reemplazando en (76.3), se deducen las fórmulas fundamentales

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz, & a_n &= \frac{1}{L} \int_{z_0}^{z_1} f(z) \cos \frac{n\pi z}{L} dz \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{z_0}^{z_1} f(z) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} dz \end{aligned}} \quad (76.4)$$

que permiten calcular los coeficientes del desarrollo de $f(z)$ en serie de Fourier.

77. Desarrollo de Fourier en el campo real. El caso de desarrollo en serie de Fourier que más interesa en las aplicaciones, es el que se refiere a las funciones de variable real, que no son otra cosa sino la intersección de las funciones de variable compleja con el eje real. La periodicidad de una función de variable compleja en fajas paralelas y de anchos iguales en el plano, implica la periodicidad de su intersección real en segmentos iguales del eje x . Con una reducción o ampliación de escala conveniente, se podrá siempre hacer de manera que dicho período $2L$ se reduzca a 2π , con lo que el punto $x = -\pi$ podrá tomarse como z_0 y el punto $x = +\pi$ como z_1 . Esto

tiene la ventaja de que el argumento $n\pi x/L$ se transforma en nx , con lo que las fórmulas (76.4) se simplifican así:

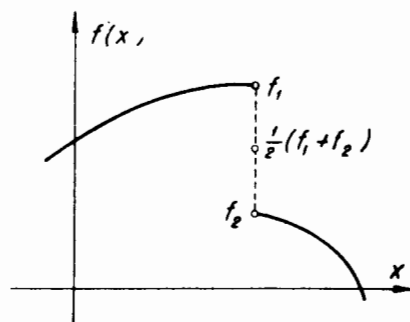
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \quad (77.1)$$

y la serie (76.1) resulta simplemente

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (77.2)$$

Una función $f(x)$ definida en cierto intervalo $a \leq x \leq b$ se dice *seccionalmente continua* cuando es posible subdividir dicho intervalo en un número finito de sub-intervalos, en cada uno de los cuales $f(x)$ sea finita, continua y dotada de límites finitos cuando x se acerca a cualquiera de los extremos de cada sección desde su interior (con lo que se excluye un comportamiento como el de $\tan x$ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, pero sí se aceptan discontinuidades en los extremos de los sub-intervalos). Si estos sub-intervalos se pueden a su vez subdividir en otros, de tal modo que en cada uno de ellos la función no crezca o bien no decrezca, se dice que $f(x)$ es *seccionalmente*

monótona (esto no sería posible por ejemplo para $\sin 1/x$ en proximidad de $x = 0$).



(77.1). Comprobó además que en los puntos de discontinuidad, en los cuales la función toma a un mismo tiempo dos valores distintos f_1 y f_2 , su desarrollo adquiere precisamente el valor medio

$$\frac{1}{2} (f_1 + f_2).$$

Dirichlet demostró que toda función $f(x)$ periódica de periodo 2π , que sea seccionalmente continua y monótona en el intervalo $(-\pi, \pi)$, puede siempre desarrollarse en una serie de Fourier del tipo (77.2) con los coeficientes

Se dice que una función $f(x)$ de variable real es *par* cuando es simétrica con respecto al eje y , o sea cuando

$$f(-x) = f(x);$$

análogamente se dice que la función es *impar* cuando

$$f(-x) = -f(x).$$

Por ejemplo, la función coseno es par, la función seno es impar. Ahora bien, las funciones periódicas pares o impares admiten desarrollos de Fourier especialmente simples. En efecto, supongamos que $f(x)$ sea par en el intervalo $(-\pi, +\pi)$. Entonces, siendo $f(-x) = f(x)$ y $\sin(-x) = -\sin x$, se tiene

$$\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx \, dx = - \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

y reemplazando en (77.1) se ve que todas las b_n son nulas. Por tanto *toda función par es desarrollable en serie de puros cosenos*; análogamente se ve que *toda función impar es desarrollable en serie de puros senos*, en cuanto para ella se anulan los coeficientes a_n . Viceversa toda función desarrollable en serie de cosenos es evidentemente par, toda función desarrollable en serie de senos impar, ya que son tales todos los términos de sus desarrollos.

A estos conceptos se ligan dos fórmulas muy útiles que vamos a establecer a continuación. Sea $f(x)$ una función cualquiera desarrollable en la serie de Fourier (77.2). Cambiando x en $-x$, se obtiene

$$f(-x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx)$$

y luego sumando miembro a miembro con (77.2) y dividiendo entre 2, se saca

$$\boxed{\frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx} \quad (77.3)$$

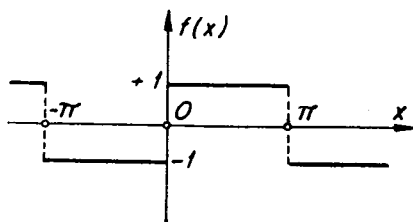
y restando

$$\boxed{\frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx} \quad (77.4)$$

que son también desarrollos en series de puros cosenos y de puros senos, hecho que podía esperarse, en cuanto $f(x) + f(-x)$ es una función par, $f(x) - f(-x)$ una función impar.

Finalmente conviene hacer una aclaración importante. Puede parecer que la condición de la periodicidad de la función $f(x)$ sea demasiado restrictiva, en cuanto limitaría el empleo de las series de Fourier a las solas funciones periódicas. De hecho cualquier función que cumpla con las condiciones de Dirichlet entre $-\pi$ y π es desarrollable en serie de Fourier (77.2); sólo que su desarrollo la representará únicamente en ese intervalo; fuera de él, *el desarrollo volverá a adquirir periódicamente los mismos valores*, y si en los extremos de los períodos resultara una discontinuidad, el valor de la serie sería allí el promedio aritmético entre los dos valores adquiridos en el salto.

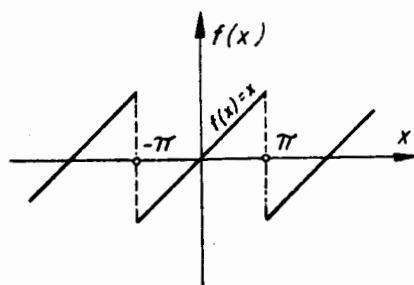
78. Ejemplos de desarrollos en serie de Fourier. Empecemos buscando un desarrollo para la función (constante) $f(x) = 1$. Trátándose de una función par, se obtendría una serie de cosenos; pero al efectuar los cálculos sale $a_0 = 1$, $a_n = 0$, resultando la identidad $1 = 1$ que no interesa. Intentemos entonces buscar un desarrollo en serie de senos, válido entre 0 y π . Para esto la función tiene que ser impar, de modo que en el intervalo entre $-\pi$ y 0 deberá de valer -1 , y así sucesivamente con alteraciones periódicas tal como se ve en la figura. Ahora bien, por (77.1) tenemos



$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (+1) \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi), \end{aligned}$$

o sea $b_n = 0$ si n es par, $b_n = \frac{4}{n\pi}$ si n es non. Por tanto resulta el desarrollo, válido entre 0 y π ,

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \quad (78.1)$$



La función $f(x) = x$ puede ser representada por una serie de senos o por una de cosenos. En el primer caso tendremos entre $-\pi$ y π

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$$

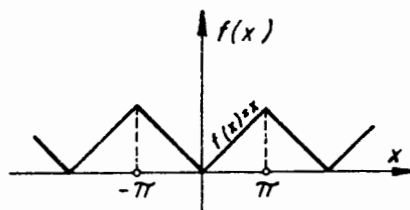
o sea, integrando por partes,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int \cos nx \, dx \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} \left[nx \cos nx - \operatorname{sen} nx \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2n\pi}{n^2 \pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

de donde resulta el desarrollo (de Euler) válido entre $-\pi$ y π

$$x = 2 \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \dots \right) \quad (78.2)$$

Desarrollando en serie de cosenos, se representa a la función que vale x entre 0 y π , pero vale $-x$ entre $-\pi$ y 0 , función cuya gráfica se ve en la figura. Los coeficientes resultan



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{n^2 \pi} \left[nx \operatorname{sen} nx + \cos nx \right]_0^{\pi}$$

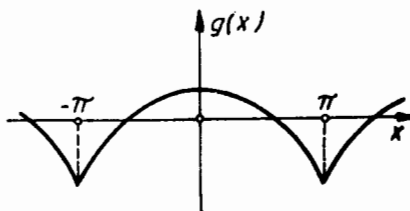
es decir $a_n = 0$ para n par, $a_n = -\frac{4}{n^2 \pi}$ para n non. Así se obtiene el desarrollo, válido entre 0 y π ,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right) \quad (78.3)$$

Por fin, quíerese desarrollar la función $f(x) = x^2$ en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Empezaremos por desarrollar la función

$$g(x) = \frac{1}{12} \pi^2 - \frac{1}{4} x^2$$

en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Siendo ésta una función par, la serie ha de ser de cosenos. Tendremos



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{12} \pi^2 dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{1}{24\pi} 2\pi^3 - \frac{1}{8\pi} \frac{2\pi^3}{3} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{12} \pi^2 - \frac{1}{4} x^2 \right) \cos nx \, dx = \\ &= \frac{\pi}{12} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{\pi}{12n} [\sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \\ &- \frac{1}{4n^3\pi} [2nx \cos nx + (n^2x^2 - 2) \sin nx]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}. \end{aligned}$$

Luego es, entre $-\pi$ y π ,

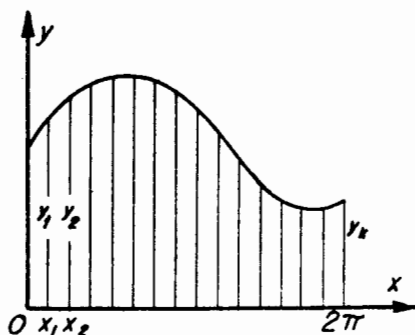
$$\frac{1}{12} \pi^2 - \frac{1}{4} x^2 = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - \dots$$

de donde se obtiene finalmente la fórmula, también de Euler,

$$\boxed{x^2 = \frac{1}{3} \pi^2 - 4 \left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - \dots \right]} \quad (78.4)$$

79. Análisis armónico. La determinación de los coeficientes a_n y b_n del desarrollo de Fourier de una función $f(x)$ se llama *análisis armónico* de la función. Los cálculos efectuados en el artículo anterior llevaron precisamente a realizar el análisis armónico de las varias funciones tomadas como ejemplo; pero es fácil darse cuenta de que no siempre el cálculo de las integrales (77.1) es sencillo, ni siempre posible. Es frecuente tener que analizar una curva dada por una gráfica (por ejemplo un oscilograma), o por una tabla de valores, a fin de obtener sus componentes senoidales. A continuación damos una idea de uno de los métodos que se pueden usar.

Supongamos que se ha reducido, por medio de una transformación de escalas conveniente, el intervalo de periodicidad de la función en estudio al intervalo $(0, 2\pi)$, y que se tienen los valores numéricos



$y_1, y_2, \dots, y_k$ de la función en correspondencia de los extremos derechos $x_1, x_2, \dots, x_k$ de k sub-intervalos iguales, de ancho $\Delta x = 2\pi/k$, en que se ha descompuesto el intervalo total. Entonces, reemplazando las integrales (77.1) por sumas, escribiremos las igualdades aproximadas

$$a_0 \cong \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k y_j \Delta x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j$$

y análogamente

$$a_n \cong \frac{2}{k} \sum_{j=1}^k y_j \cos n x_j = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^k y_j \cos \left(n j \frac{2\pi}{k} \right)$$

$$b_n \cong \frac{2}{k} \sum_{j=1}^k y_j \operatorname{sen} n x_j = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^k y_j \operatorname{sen} \left(n j \frac{2\pi}{k} \right).$$

Conocidos los valores y_j de la función, es bastante por tanto multiplicarlos respectivamente por los senos y cosenos indicados, efectuar las sumas y multiplicarlas por $2/k$ (lo que equivale a tomar el doble del promedio aritmético de tales productos), para obtener los coeficientes a_n y b_n del desarrollo, con aproximación tanto mayor cuanto mayor es el número k de los sub-intervalos.

Existen varios métodos de análisis armónico, análogos al que acabamos de señalar, que se prestan para el cálculo con computadoras electrónicas. También existen máquinas que realizan directamente esta clase de análisis; se llaman *analizadores armónicos*.

CAPITULO IV

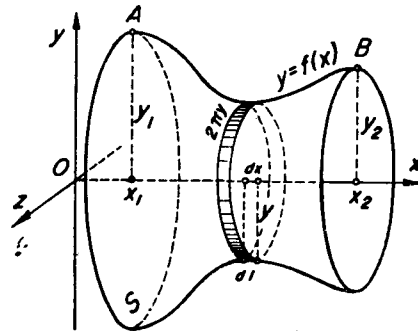
CALCULO FUNCIONAL

I. ELEMENTOS DE CALCULO DE VARIACIONES

80. **Concepto de funcional.** Consideremos en el plano x, y dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, y sea $y = f(x)$ una curva que une A con B ; naturalmente tiene que ser

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2. \quad (80.1)$$

Supongamos que el plano x, y se hace girar dando una vuelta completa alrededor del eje x : entonces la línea $y = f(x)$ describirá una superficie S , cuya área J se calcula, con las notaciones de la figura, por la fórmula



$$J = \int_A^B (2\pi y) dl = 2\pi \int_A^B y \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

o sea

$$J = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (80.2)$$

habiéndose indicado con y' la derivada df/dx .

La expresión (80.2) es una integral definida, y por tanto una constante, siempre que esté fijada la curva $y = f(x)$; pero en el caso de que admitamos la posibilidad de *ir variando dicha línea, manteniendo fijos sus extremos*, J resultará función de y . No se trata desde luego de una función en el sentido de Dirichlet (o sea que a cada valor de la variable independiente le corresponde un valor bien determinado de la función), sino en el sentido más amplio de que se tiene un valor de J para cada conjunto de valores de y que definen una línea AB diferente. Se escribirá con paréntesis cuadradas

$$J = J[y(x)]$$

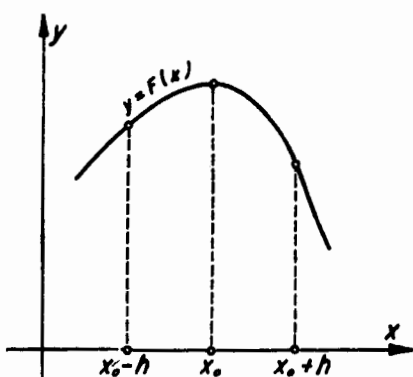
y se dirá que J es una *función de línea* (Volterra), o bien una *funcional* (Hadamard). La funcional (80.2) pertenece a una clase muy importante, la de aquéllas que se expresan por integrales definidas del tipo

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (80.3)$$

siendo $y = y(x)$ y siendo F una función de las tres variables x, y, y' .

Vito Volterra y los matemáticos de su escuela consiguieron analizar este nuevo concepto de funcionales, extendiendo a ellas operaciones como diferenciación, derivación e integración, y más recientemente introducir a los campos funcionales elementos como puntos, distancias y vectores generalizados. Se formó así el Cálculo Funcional, que constituye hoy uno de los capítulos más importantes y fecundos del Análisis Matemático.

81. Máximos y mínimos de funcionales. Ciertos conceptos de cálculo funcional son antiguos y empezaron desarrollándose hace más de dos siglos. Es precisamente en esa época que se inició el *Cálculo de Variaciones*, que se ocupa de la *determinación de los valores máximos y mínimos de las funcionales*. El objeto de dicho



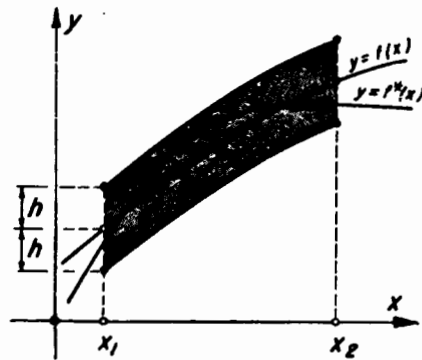
cálculo consiste esencialmente en buscar esa *función argumento* $y(x)$ en correspondencia a la cual una integral del tipo (80.3) adquiere un valor máximo o mínimo; este valor se llama genéricamente un *extremo* de la funcional, y la función $y(x)$ que le corresponde se dice la *extremal*. El problema se ha extendido más recientemente a la búsqueda de *extremales* de funcionales de cualquier tipo.

En el cálculo diferencial ordinario se suele decir que una función $y = F(x)$ alcanza un valor extremo (relativo) para $x = x_0$, cuando es posible determinar un intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, grande

o pequeño (*vecindad* (h) de la abscisa x_0), tal que $F(x_0)$ es menor (o mayor) que $F(x)$ en todos los demás puntos del intervalo. En el campo funcional el concepto de *punto* x_0 del eje x se reemplaza por el de *función* $y = f(x)$ y el de *vecindad del punto* x_0 por el de *vecindad de la función* $y = f(x)$, definida como sigue: dada una cantidad positiva h , se dice que una *función* $y = f^*(x)$ está en la *vecindad* (h) de una *función* $y = f(x)$, en el intervalo (x_1, x_2) , cuando se tiene

$$|f(x) - f^*(x)| < h \quad \text{para } x_1 \leq x \leq x_2,$$

o sea cuando la curva $y = f^*(x)$, en dicho intervalo, está incluida dentro de una faja de ancho $2h$, cuyo eje es la curva $y = f(x)$. El problema fundamental del Cálculo de Variaciones puede expresarse



correctamente así: en el dominio de las funciones argumento admisibles para una funcional determinada, hallar esa función argumento (extremal) para la cual la funcional alcanza un valor extremo, con respecto a los valores que ella adquiere para todas las demás funciones argumento del dominio, que se hallan en una vecindad suficientemente pequeña de la extremal.

Un ejemplo clásico de problema variacional es el siguiente: *entre todas las superficies de revolución engendradas por la rotación alrededor del eje x de un arco de curva que une dos puntos fijos A y B del plano x, y , hallar aquella que posee área mínima.* Por lo que se dijo en el artículo anterior, la resolución del problema implica buscar la función $y = f(x)$ que es extremal de la funcional (80.2). El dominio de las funciones argumento $y = f(x)$ posibles está evidentemente limitado por ciertas condiciones: en primer lugar la de que todas ellas satisfagan las condiciones de frontera (80.1), a fin de que las curvas correspondientes pasen por A y B , y en segundo lugar que todas las curvas AB que se aceptan para determinar la superficie de revolución satisfagan ciertas condiciones comunes, como

por ejemplo la de ser continuas y sin quiebres (lo que equivale a pedir que la función $f(x)$ sea continua y posea su primera derivada en todo el intervalo x_1, x_2). Por otra parte la suposición de que las funciones argumento se puedan expresar precisamente por una ecuación del tipo $y = f(x)$ lleva consigo la admisión implícita de excluir todas esas curvas AB que resultan intersectadas en más de un punto por algunas paralelas al eje y .

En el caso actual la única limitación que hay que imponer al ancho de la vecindad de la extremal que incluye las funciones argumento, es la de que las curvas relativas no pueden cortar el eje x , ya que entonces resultarían áreas negativas.

82. La ecuación de Euler. El problema más elemental del Cálculo de Variaciones consiste en *determinar un extremo de la integral (80.3) conociendo los valores $x_1, x_2, y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$* . Se admite que la función $F(x, y, y')$ se pueda derivar dos veces con respecto a sus tres argumentos x, y, y' y que esas derivadas sean continuas. Se supone también que exista y sea continua la segunda derivada y'' de y con respecto a x . Sea $y = f(x)$ la extremal buscada, es decir que, si se consideran todas las posibles funciones argumento $y(x)$ que se hallan en una vecindad suficientemente pequeña de la función $f(x)$ y coinciden con ella en los extremos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, la integral $J[y]$ tiene precisamente un máximo o un mínimo cuando $y = f(x)$.

Conviene interpretar las funciones argumento de la vecindad de $f(x)$ de manera análoga a lo que se hace en el Cálculo Diferencial al manejar los puntos próximos al extremo, por medio de pequeños incrementos de la variable independiente; con tal objeto se introduce el concepto análogo al de incremento, que en el Cálculo Funcional es el de *variación* (de donde precisamente viene el nombre de Cálculo de Variaciones). Considérese una función continua $\eta(x)$, definida en el intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, con derivadas primera y segunda también continuas, nula en los extremos y por lo demás arbitraria, y un parámetro ϵ que puede hacerse pequeño como se quiera; se llama *variación de la función $y = f(x)$* , y se escribe δy , la función

$$\delta y = \epsilon \eta(x). \quad (82.1)$$

Ahora bien, todas las funciones

$$y^* = f(x) + \varepsilon \eta(x) = y + \delta y$$

pertenecen al dominio de las funciones argumento y , para un valor suficientemente pequeño de ε , se hallan en una vecindad arbitrariamente pequeña de la extremal $y = f(x)$. La funcional

$$J[y^*] = J[f(x) + \varepsilon \eta(x)],$$

que puede considerarse como función $\chi(\varepsilon)$ de la variable ε , tendrá para $\varepsilon = 0$ un máximo o un mínimo, relativamente a todos los valores de ε incluidos en una vecindad suficientemente pequeña de $\varepsilon = 0$. Aplicando los resultados de la teoría elemental de máximos y mínimos, llegamos a la conclusión de que *condición necesaria para que $y = f(x)$ sea una extremal es que*

$$\frac{d\chi}{d\varepsilon} = 0 \quad \text{para } \varepsilon = 0. \quad (82.2)$$

Por (80.3) se tiene que

$$\chi(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx;$$

de donde, derivando bajo el signo de integral con respecto a ε y tomando en cuenta la condición $\varepsilon = 0$, que se señalará con un índice 0 a la derecha,

$$\left[\frac{d\chi}{d\varepsilon} \right]_0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx. \quad (82.3)$$

Integrando por partes la segunda parte de la integral anterior, resulta

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx.$$

El primer término del segundo miembro es nulo por ser $\eta(x_2) = \eta(x_1) = 0$ por hipótesis; luego se tiene, reemplazando en (82.3),

$$\left[\frac{d\chi}{d\varepsilon} \right]_0 = \int_{x_1}^{x_2} \eta \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \right\} dx. \quad (82.4)$$

La ecuación (82.2) puede escribirse por tanto

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \right\} dx = 0 \quad (82.5)$$

y debe valer para funciones $\eta(x)$ arbitrarias, con derivadas primera y segunda continuas, y nulas para $x = x_1$ y $x = x_2$.

Llegados a este punto, tenemos que demostrar el *lema fundamental del Cálculo de Variaciones*, que se expresa así: Si $M(x)$ es una función de x continua en (x_1, x_2) y si se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) M(x) dx = 0 \quad (82.6)$$

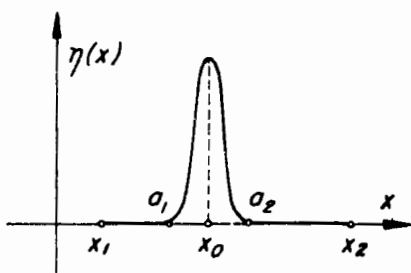
cualquiera que sea la función $\eta(x)$, continua con sus derivadas primera y segunda y nula en los extremos x_1 y x_2 , entonces tiene que ser idénticamente

$$M(x) = 0 \quad \text{para } x_1 \leq x \leq x_2.$$

Para demostrarlo, supongamos que la tesis no sea cierta, o sea que exista en el intervalo (x_1, x_2) un punto x_0 en el cual sea por ejemplo

$$M(x_0) > 0.$$

Dada la continuidad de $M(x)$, debe de existir un pequeño subintervalo (a_1, a_2) del intervalo (x_1, x_2) que incluye el punto x_0 , en el cual



$M(x)$ es positiva. Aprovechando la arbitrariedad de $\eta(x)$, la escogeremos de tal forma que resulte positiva en el subintervalo (a_1, a_2) , nula en los subintervalos (x_1, a_1) y (a_2, x_2) . Entonces el producto $\eta(x)M(x)$ resulta positivo en el primer subintervalo, nulo en los otros dos, y por tanto

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) M(x) dx > 0$$

contrariamente a la hipótesis (82.6).

Aplicando el lema anterior a la identidad (82.5), resulta que ha de ser

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0} \quad (82.7)$$

Siendo que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] y' + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] y'' = \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2},\end{aligned}$$

la ecuación (82.7) puede escribirse también

$$y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (82.8)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria del segundo orden en la variable y es la *ecuación de Euler*, y expresa una *condición necesaria* para la existencia de un extremo de la integral (80.3). En otras palabras, toda función $y = f(x)$ que hace máxima o mínima la funcional (80.3) tiene que satisfacer la ecuación de Euler (82.7). Siendo que la integral general de toda ecuación diferencial del segundo orden contiene dos constantes arbitrarias, podemos afirmar que, para cada problema variacional del tipo que estamos estudiando, existen en el plano (x, y) dos familias constituidas cada una por una infinidad de curvas soluciones $y = y(x)$. La curva extremal que resuelve el problema se obtiene tomando en cuenta las condiciones de frontera $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, para determinar el valor de las dos constantes arbitrarias. De acuerdo con Kneser, se ha tomado la costumbre de llamar generalmente *extremales del problema* a todas las integrales de la ecuación de Euler relativa, ya sea que satisfagan o no las condiciones de frontera.

83. Dos problemas. En el caso especial de que la función $F(x, y, y')$ no contenga la variable x en forma explícita, la ecuación de Euler se reduce a una ecuación del primer orden. En efecto, si

$$F = F(y, y'),$$

el tercer término de la (82.8) desaparece, resultando

$$y'' \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y'^2} + y' \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y} = 0. \quad (83.1)$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} - F(y, y') \right] &= \\ &= \left[y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \right) \right] - \\ &- \left[\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \right] = y' \left[y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} - \frac{\partial F}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

o sea comparando con (83.1)

$$\frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} - F(y, y') \right] = 0$$

e integrando

$$\boxed{F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = \text{cte}} \quad (83.2)$$

Como ejemplo de aplicación de esta fórmula, busquemos las *extremales* del área de la superficie de revolución mencionada en el No. 80. Siendo por (80.2)

$$F(y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}, \quad (83.3)$$

se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\pi y y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

y luego

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\pi y (1 + y'^2) - 2\pi y y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{2\pi y}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

resultando que la ecuación (83.2) adquiere la forma

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = k \cdot (k = \text{cte}).$$

Desarrollando queda

$$\begin{aligned} 1 + y'^2 &= \frac{y^2}{k^2} \\ y' &= \frac{\sqrt{y^2 - k^2}}{k} \end{aligned}$$

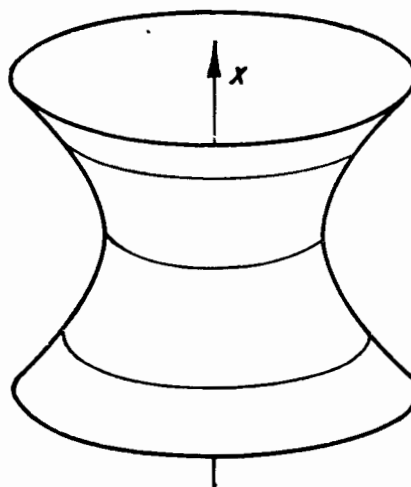
y reemplazando y' por dy/dx y separando las variables

$$dx = \frac{k dy}{\sqrt{y^2 - k^2}}, \quad x = k \ln (y + \sqrt{y^2 - k^2}) + h$$

siendo h una nueva constante. De aquí pasando a exponenciales y efectuando los cálculos se obtiene finalmente

$$y = k \cosh \frac{x-h}{k};$$

luego las *extremales del problema general son arcos de catenaria*. Fijados los puntos A y B , las condiciones de paso por esos puntos permiten calcular las constantes h y k y por tanto determinar precisamente la extremal que corresponde al problema específico planteado. Estas superficies de revolución de área mínima se llaman *catenoides*, y su aspecto es el que se ve en la figura. Al estudiar Geometría Diferencial se resolverá el problema más general de determinar la superficie de área mínima que se apoya a un contorno cerrado cualquiera.



La catenaria se liga con la solución de otro problema célebre del cálculo variacional: *determinar la forma que adquiere un cable uniforme y homogéneo con extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ fijos, bajo la acción de su peso propio*. Este pertenece a una categoría de problemas llamados *isoperimétricos*, porque incluyen entre sus condiciones de frontera la de que cierta línea contorno (en este caso la que representa al cable) mantenga siempre la misma longitud. Dejando para más adelante (No. 87) un estudio general de los problemas isoperimétricos, podemos ahora analizar el problema del cable de una manera elemental, observando que, llamada $y = y(x)$ la ecuación de su perfil, la condición de equilibrio, que

consiste en que el centro de gravedad esté lo más bajo posible, implica que la ordenada

$$I[y] = \int_A^B y \, ds / \int_A^B ds$$

del centro de gravedad adquiera su valor mínimo. Pero por la isoperimetría la integral del denominador es constante; luego el problema se simplifica en buscar el mínimo de la funcional

$$I[y] = \int_A^B y \, ds = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Aquí tenemos como función integranda a

$$F = y \sqrt{1 + y'^2}$$

que es prácticamente la misma función (83.3) que encontramos en el problema anterior; por tanto, utilizando la ecuación de Euler, se llega precisamente al mismo tipo de curvas extremales, o sea *catenarias*.

84. Variación de una funcional. En el No. 82 introdujimos la *variación δy de la función argumento $y = y(x)$* a través de la definición (82.1), inspirándonos a la idea de *incremento Δx* de la variable independiente x , concepto tan útil en el Cálculo Diferencial si considerado simultáneamente con el incremento Δf de la función $f(x)$. Esto sugiere la conveniencia de definir también una *variación δf de la funcional* (80.3), lo que puede hacerse de la manera siguiente.

En el Cálculo Diferencial, conociéndose el valor de la derivada df/dx en el punto $x = x_0$, es posible definir el incremento $\Delta f(x)$ que, en la cercanía inmediata de dicho punto, corresponde a un incremento $\Delta x = \varepsilon$ de la variable independiente, por medio de la fórmula

$$\Delta f = \varepsilon \left[\frac{df}{dx} \right]_{x_0}.$$

De manera análoga escribiremos, con las notaciones del No. 82,

$$\delta J[y] = \varepsilon \left[\frac{dJ}{d\varepsilon} \right]_0, \quad (84.1)$$

así que la condición (82.2) se escribe

$$\delta J = 0, \quad (84.2)$$

y puede expresarse diciendo que *condición necesaria para un extremo de la funcional $J[y]$ es el anularse de su variación primera*. Cuando vale la relación (84.2), se dice también que *la funcional J se hace estacionaria*. Reemplazando en (84.1) la derivada por (82.4) y tomando en cuenta la (82.1), se obtiene la importante *expresión integral de la variación*

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \right\} dx \quad (84.3)$$

Un análisis completo del extremo de una función implica determinar precisamente si se trata de un máximo o si se trata de un mínimo. En el Cálculo Diferencial esto se consigue anulando la derivada primera, y estudiando además los signos de las derivadas sucesivas; lo mismo pasa en el Cálculo de Variaciones. Se definen variaciones segundas por medio de derivadas segundas con respecto a ε , variaciones terceras por medio de derivadas terceras, y así siguiendo, y se comprueba la existencia de condiciones suficientes para el mínimo que toman en cuenta el signo o el anularse de éstas. La investigación de diferentes *condiciones necesarias y suficientes* y el deseo de perfeccionar la teoría variacional en muchos otros aspectos, llevó a desarrollos que hacen de este Cálculo uno de los principales capítulos del Análisis Matemático; los nombres de Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi, Weierstrass y Hilbert, para no señalar sino los más grandes, están ligados a él. Nosotros nos contentaremos con haber establecido la condición de Euler y con algunas generalizaciones de ella, que presentaremos a continuación.

85. Extremos de funcionales de varios argumentos. Supongamos que J sea una funcional dependiente de varias funciones argumento $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., y que pueda escribirse bajo la forma

$$\begin{aligned} J[u_1, u_2, \dots] = \\ = \int_{x_1}^{x_2} F[x; u_1(x), u_2(x), \dots, u_1'(x), u_2'(x), \dots] dx. \end{aligned} \quad (85.1)$$

Siguiendo un razonamiento análogo al del No. 82, determinaremos una *condición necesaria* para que, en correspondencia a ciertas fun-

ciones extremales $u_1 = f(x)$, $u_2 = g(x)$, ... dicha funcional tenga un extremo.

Aquí también se introducen funciones arbitrarias $\eta(x)$, $\zeta(x)$, ... que se anulan en los extremos x_1 , x_2 y se afirma que la función

$$\begin{aligned}\chi(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots) &= \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F[x, f(x) + \epsilon_1 \eta(x), g(x) + \epsilon_2 \zeta(x), \dots, \\ &\quad f' + \epsilon_1 \eta', g' + \epsilon_2 \zeta', \dots] dx\end{aligned}$$

debe de tener un extremo cuando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 0$; la teoría de máximos y mínimos para funciones de varias variables asegura luego que ha de ser

$$\frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_2} = \dots = 0 \quad \text{para } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 0.$$

Esta consideración lleva a anular la variación

$$\delta J = \epsilon_1 \left[\frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_1} \right]_0 + \epsilon_2 \left[\frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_2} \right]_0 + \dots$$

(indicando el índice 0 que se toman respectivamente $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$, ...). Una transformación como la (82.4) permite expresar la ecuación que resulta de anular J , bajo la forma explícita

$$\epsilon_1 \int_{x_1}^{x_2} \eta \left\{ \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_1'} \right] \right\} dx + \epsilon_2 \int_{x_1}^{x_2} \zeta \left\{ \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_2'} \right] \right\} dx + \dots = 0$$

Ahora, la arbitrariedad de las funciones $\eta(x)$, $\zeta(x)$, ... autoriza a suponer a todas ellas menos una, idénticamente nulas, con lo que la aplicación en cada caso del lema fundamental del Cálculo de Variaciones lleva sucesivamente a las ecuaciones, análogas a la (82.7):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_1'} \right] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_2'} \right] = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (85.2)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales del segundo orden expresa la extensión de la *condición de Euler* al caso actual; sus integrales son precisamente las funciones extremales buscadas

$$u_1 = f(x), \quad u_2 = g(x), \dots$$

86. Extremos con condiciones auxiliares. Es frecuente tener que resolver problemas variacionales algo más complicados que los que hemos estudiado hasta ahora, en cuanto el extremo que se busca resulta limitado por *condiciones auxiliares*. De este tipo son por ejemplo los problemas que se proponen buscar *propiedades variacionales de curvas vinculadas a estar sobre cierta superficie*. Si

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

es la ecuación de la curva, y si

$$G(x, y, z) = 0 \quad (86.1)$$

es la ecuación de la superficie, se trata de hacer variar cierta integral

$$J[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', z, z') dx$$

con las condiciones no sólo de que se conozcan de antemano los valores $y(x_1), y(x_2), z(x_1), z(x_2)$, sino que también y, z se hallen siempre ligados por la relación (86.1).

Una condición del tipo (86.1), que consiste en una relación en términos finitos entre x, y, z se llama, de acuerdo con Hertz, *holonómica* (o sea *de ley entera*); si la condición es más bien del tipo

$$G(x, y, y', z, z') =$$

apareciendo en ella relaciones diferenciales.

El problema mencionado, planteado de la manera más general, puede expresarse como sigue: *volver estacionaria la integral (85.1) de una función F dependiente de n funciones argumento $u_1(x), u_2(x), \dots$, con m condiciones auxiliares, holonómicas o no holonómicas,*

$$G_i(x, u_1, u_1', u_2, u_2', \dots) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (86.2)$$

Indicadas con

$$\lambda_1(x), \quad \lambda_2(x), \quad \dots, \quad \lambda_m(x)$$

m funciones indeterminadas regulares en (x_1, x_2) , consideremos la función

$$F^*(x; u_1, u_1', u_2, u_2', \dots) = F + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_m G_m. \quad (86.3)$$

Si valen las condiciones (86.2), o sea si todas las G_i son nulas, el problema de buscar un extremo de la integral (85.1) equivale al de buscar un extremo de

$$J^*[u_1, u_2, \dots] = \int_{x_1}^{x_2} F^*(x; u_1, u_1', u_2, u_2', \dots) dx. \quad (86.4)$$

O sea, si igualamos a cero la variación δJ^* y tomamos en cuenta las ecuaciones (86.2), obtenemos condiciones necesarias para el extremo. Aplicando lo visto en el párrafo anterior, el anularse de δJ^* lleva a las n ecuaciones de Euler, del tipo (85.2),

$$\begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F^*}{\partial u_1'} \right] = 0 \\ \frac{\partial F^*}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F^*}{\partial u_2'} \right] = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (86.5)$$

en las cuales F^* está expresada por (86.3). Juntando las ecuaciones (86.5) con las (86.2), se obtiene un sistema de $n + m$ ecuaciones en las $n + m$ funciones incógnitas

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m,$$

cuya integración lleva a la resolución del problema. Las funciones $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ se llaman *multiplicadores de Lagrange*. El método de análisis de Lagrange, que acabamos de exponer, tiene el grande mérito de cambiar un problema de $n - m$ grados de libertad (integración del sistema (85.2) con los vínculos (86.2)) en uno de $n + m$ grados de libertad, en el cual los vínculos han desaparecido.

Es interesante observar que el método de los multiplicadores indeterminados permite ampliar el alcance del Cálculo Variacional a funcionales que dependen de derivadas de orden superior al primero.

En efecto, por ejemplo la búsqueda de un extremo de la integral

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'') dx$$

equivale a buscar el extremo de la integral

$$I_1[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, z') dx$$

con la condición auxiliar no holonómica $z = y'$, o sea

$$y' - z = 0.$$

En este caso la (86.3) se hace

$$F^* = F + \lambda(x)(z - y')$$

y el sistema (86.5) resulta

$$\begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right] = 0 \\ \frac{\partial F^*}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F^*}{\partial z'} \right] = 0 \end{cases}$$

87. Problemas isoperimétricos. Los problemas isoperimétricos pueden estudiarse como caso particular de problemas variacionales con condiciones auxiliares. Consideremos el *problema isoperimétrico general* siguiente: *entre todas las curvas que unen dos puntos x_1, x_2 , para las cuales cierta integral definida*

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx \quad (87.1)$$

adquiere un valor fijado de antemano, determinar aquélla que vuelve máxima o mínima la otra integral definida

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx. \quad (87.2)$$

Para la resolución conviene introducir la función de x

$$\Theta(x) = \int_{x_1}^x G(x, y, y') dx,$$

por medio de la cual podemos escribir

$$\Theta'(x) = G(x, y, y'),$$

expresando en tal forma a G como función de la sola variable x . El problema planteado equivale a volver estacionaria la integral (87.2), tomando en cuenta la condición auxiliar

$$\Theta'(x) - G(x, y, y') = 0.$$

Aplicando el método que acabamos de explicar en el No. 86, podemos concluir que nuestro problema se transforma en el siguiente: hacer máxima o mínima la integral

$$J^*[y, \Theta] = \int_{x_1}^{x_2} [F - \lambda(\Theta' - G)] dx$$

siendo λ un multiplicador de Lagrange, función de x .

Las ecuaciones de Euler (86.5) son ahora

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} [F - \lambda(\Theta' - G)] - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} [F - \lambda(\Theta' - G)] \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} [F - \lambda(\Theta' - G)] - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta'} [F - \lambda(\Theta' - G)] \right\} = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación, siendo que F y G se consideran funciones no dependientes de Θ , se reduce a

$$\frac{d}{dx} \lambda = 0, \quad \text{es decir } \lambda = \text{cte.}$$

Reemplazando en la primera y tomando en cuenta que Θ' se considera función de x , no de y o de y' , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} [F + \lambda G] - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} [F + \lambda G] \right\} = 0,$$

que es precisamente la condición de Euler para que la integral

$$\int_{x_1}^{x_2} [F + \lambda G] dx \quad (87.3)$$

con λ constante sea máxima o mínima. Concluyendo, el problema isoperimétrico enunciado al principio de este párrafo equivale al problema variacional sencillo de *determinar los extremos de la funcional (87.3), con λ constante.*

88. Variación de una integral doble. Los desarrollos efectuados para estudiar los extremos de integrales simples se extienden sin dificultad a las *integrales dobles* del tipo

$$J[z] = \int_A F(x, y, z, p, q) dA \quad (88.1)$$

siendo $z = z(x, y)$ y habiéndose puesto, con notación clásica,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q} \quad (88.2)$$

A es un área fija del plano x, y . Se admite que la función z adquiera valores determinados de antemano sobre la curva L , contorno del área A .

En el caso actual la variación principal tiene que afectar a las dos variables independientes x, y , de modo que, procediendo de manera análoga a lo que se hizo en el No. 82, conviene introducir una función arbitraria $\eta(x, y)$, que se supondrá después ser igual a cero sobre el contorno L , imponiendo que se anule la variación

$$\delta J = \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} J(z + \epsilon \eta) \right]_{\epsilon=0} \quad (88.3)$$

Pero

$$J(z + \epsilon \eta) = \int_A F \left[x, y, z + \epsilon \eta, \quad p + \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad q + \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] dA$$

y luego derivando bajo el signo de integral con respecto a ϵ , igualando ϵ a cero y reemplazando en (88.3), obtenemos

$$\delta J = \epsilon \int_A \left[\frac{\partial F}{\partial z} \eta + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] dA. \quad (88.4)$$

Ahora se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ & = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] - \eta \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

de donde sustituyendo en (88.4) y aplicando la transformación (29.2), resulta

$$\begin{aligned} \delta J = \epsilon \int_A \eta \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial q} \right] dA + \\ + \epsilon \oint_L \eta \left[- \frac{\partial F}{\partial q} dx + \frac{\partial F}{\partial p} dy \right]. \end{aligned}$$

Iguando δJ a cero e imponiendo que η se anule sobre L , obtenemos por fin

$$\varepsilon \int_A \eta(x, y) \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial q} \right] dA = 0.$$

Ahora el lema fundamental establecido en el No. 82 para integrales simples vale también para integrales dobles, como se comprueba inmediatamente siguiendo el mismo método de demostración. Por tanto de la identidad anterior deducimos que ha de ser

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial p} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial q} \right] = 0} \quad (88.5)$$

Esta es la *ecuación de Euler para integrales dobles*, que expresa una *condición necesaria para que la funcional (88.1) se vuelva estacionaria*.

89. Principios variacionales de la Mecánica. Consideremos un sistema constituido por n puntos materiales $P_1, P_2, \dots, P_n$, a los cuales se aplican respectivamente las *fuerzas activas* $F_1, F_2, \dots, F_n$. Si el sistema está sujeto a determinados *vínculos*, que supondremos carentes de fricción, la acción de éstos podrá reemplazarse por fuerzas ficticias llamadas *reacciones*, que se añaden vectorialmente a las fuerzas activas. Indicaremos respectivamente con $R_1, R_2, \dots, R_n$ las reacciones en $P_1, P_2, \dots, P_n$. Los vínculos permiten ciertos desplazamientos posibles (o *virtuales*) de los puntos materiales que constituyen el sistema; si dichos puntos se desplazan así a las posiciones $P_1 + \delta P_1, P_2 + \delta P_2, \dots, P_n + \delta P_n$, diremos que el sistema ha sufrido un *desplazamiento virtual* $\delta P_1, \delta P_2, \dots, \delta P_n$. La reacción R_i correspondiente al punto P_i , cuando éste realiza el desplazamiento δP_i produce el trabajo elemental $R_i \cdot \delta P_i$; se llama *trabajo virtual de las reacciones del sistema* la suma de todos los trabajos elementales de reacción correspondientes a sus puntos materiales, en correspondencia a un desplazamiento virtual determinado:

$$R_1 \cdot \delta P_1 + R_2 \cdot \delta P_2 + \dots + R_n \cdot \delta P_n = \sum_{i=1}^n R_i \cdot \delta P_i.$$

El "principio de los trabajos virtuales" afirma que, en condiciones de equilibrio dinámico, el trabajo efectuado por las reacciones para cada desplazamiento virtual del sistema tiene que ser nulo:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{P}_i = 0. \quad (89.1)$$

La idea anterior se aclara mayormente a través del principio de d'Alembert. Si m_i es la masa del punto P_i y $\mathbf{a}_i$ la aceleración que dicho punto adquiere por efecto de la fuerza activa $\mathbf{F}_i$ y de la reacción $\mathbf{R}_i$ de los vínculos, se puede escribir por la ley de Newton

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) - m_i \mathbf{a}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (89.2)$$

o sea que durante el movimiento las fuerzas activas, las reacciones y las fuerzas de inercia $-m_i \mathbf{a}_i$ se equilibran. Este resultado constituye el principio de d'Alembert, que es verdaderamente el fundamento de toda la Dinámica, en cuanto permite reducir todo problema dinámico relativo a un sistema material en movimiento a un problema estático de equilibrio de fuerzas. Despejando las reacciones $\mathbf{R}_i$ de las ecuaciones (89.2) y reemplazando en la expresión (89.1) del principio de los trabajos virtuales, obtenemos

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{P}_i = 0. \quad (89.3)$$

Es muy importante observar que los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{P}$ mencionados arriba no son como los desplazamientos reales, que requieren cierto tiempo para efectuarse. Un desplazamiento virtual permite pasar de una posición P posible en cierto instante a otra posición P' que, tomados en cuenta los vínculos, es también posible en ese mismo instante. Por tanto las posiciones P y P' son sincronas y la ecuación (89.1) se refiere a un instante determinado. Si consideramos un fenómeno mecánico que empiece en cierto instante t_1 y termine en otro instante t_2 , y consideramos que en cada instante vale la relación (89.3) para los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{P}_i$ posibles en ese instante, podemos expresar el principio de d'Alembert bajo la forma más general

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{P}_i dt = 0, \quad (89.4)$$

habiéndose asociado a cada tiempo elemental dt el trabajo virtual correspondiente. Ahora bien, integrando por partes e indicando con v la velocidad de un punto cuya aceleración es a , se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} ma \cdot \delta P dt = [mv \cdot \delta P]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} mv \cdot \left(\frac{d}{dt} \delta P \right) dt \quad (89.5)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \delta P = \delta \frac{dP}{dt} = \delta v.$$

Supongamos además, como es frecuente en las aplicaciones, que los vínculos sean tales que en los instantes inicial y final t_1 y t_2 no haya posibilidad de desplazamientos virtuales, o sea que las configuraciones inicial y final del sistema no puedan variar; entonces $\delta P = 0$ para $t = t_1, t_2$, y luego

$$[mv \cdot \delta P]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Reemplazando en (89.5), resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} ma \cdot \delta P dt = - \int_{t_1}^{t_2} mv \cdot \delta v dt.$$

Por otro lado, siendo la fuerza viva

$$T = \frac{1}{2} mv \cdot v,$$

se obtiene diferenciando

$$\delta T = mv \cdot \delta v$$

y reemplazando en la ecuación anterior

$$\int_{t_1}^{t_2} ma \cdot \delta P dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt.$$

Por tanto la (89.4) puede escribirse

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (F_i \cdot \delta P_i + \delta T_i) dt = 0. \quad (89.6)$$

Si los campos de las fuerzas activas poseen potenciales U_i (ver No. 25), o sea si

$$F_i = \text{grad } U_i,$$

siendo entonces por (11.1)

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{P}_i = \text{grad } U_i \cdot \delta \mathbf{P}_i = \delta U_i,$$

la ecuación (89.6) se hace finalmente

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (\delta T_i + \delta U_i) dt = 0$$

o bien, poniendo

$$\sum_{i=1}^n T_i = T, \quad \sum_{i=1}^n U_i = U,$$

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt = 0} \quad (89.7)$$

Sea A la integral con respecto al tiempo de la suma de las energías cinética y potencial:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt, \quad (89.8)$$

integral que se suele llamar *acción de Hamilton*. La (89.7) manifiesta que la variación de dicha acción para cualquier desplazamiento virtual del sistema, tiene que ser nula. Este es el *principio de Hamilton*, que se expresa así: *si las configuraciones inicial y final del sistema están determinadas, la acción de Hamilton (89.8) ha de alcanzar un valor estacionario para cualquier desplazamiento virtual del sistema.*

90. Ecuaciones de Lagrange. Supongamos que las características del movimiento dependan de m parámetros (o coordenadas *lagrangianas*)

$$q_1, q_2, \dots, q_m,$$

que a su vez dependen del tiempo t . Entonces T y U dependerán de las q_i , de sus derivadas con respecto al tiempo $\dot{q}_i$ y del tiempo, y por tanto podremos escribir

$$T + U = F[t; q_1(t), \dot{q}_1(t), q_2(t), \dot{q}_2(t), \dots, q_m(t), \dot{q}_m(t)].$$

La funcional A (89.8) resulta luego del tipo (85.1), estando la variable t en lugar de la x y las q_i en lugar de las u_i . Las ecuaciones de Euler (85.2) son ahora las m ecuaciones

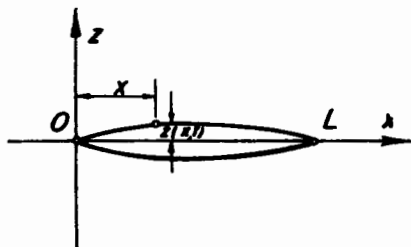
$$\frac{\partial}{\partial q_i} (T + U) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T + U) \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Si se supone, como es usual, que la energía potencial U no varía con el tiempo, queda el sistema

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (90.1)$$

Estas son las *ecuaciones de Lagrange*, tan importantes en la Mecánica, entre otras cosas por su notable propiedad de ser invariantes con respecto a transformaciones arbitrarias de las coordenadas. Se puede comprobar sin dificultad que, así como estas ecuaciones, todas las demás relaciones fundamentales de la *Mecánica Racional*, están implícitas en el principio variacional de Hamilton. En otras palabras, dado un sistema material, la función escalar $T + U$ relativa es suficiente para definir totalmente su comportamiento dinámico.

91. El problema de la cuerda vibrante. Los resultados anteriores valen naturalmente no sólo para sistemas formados por una cantidad finita n de puntos materiales, sino también para sistemas discretos o continuos de infinitos puntos. Como ejemplo de estos últimos, vamos a establecer la ecuación de la cuerda vibrante.



Supongamos una *cuerda homogénea sumamente delgada* fija en sus dos extremos $x = 0$, $x = L$, sujeta a una *tensión* τ constante, que efectúa en un plano (x, z) pequeñas vibraciones transversales

alrededor de su posición de equilibrio estable, que es el segmento $(0, L)$ del eje x . Indicada con $z(x, t)$ la *ordenada del centro de gravedad de la sección de abscisa x en el instante t* , queremos expresar

por medio de una ecuación las variaciones de z con x y con t . Permaneciendo fijos los extremos de la cuerda, se tiene, cualquiera que sea t ,

$$z(0, t) = z(L, t) = 0. \quad (91.1)$$

Si indicamos con ρ la *densidad lineal* de la cuerda (masa por unidad de longitud), la *energía cinética* de la cuerda es

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho z_t'^2 dx \quad (91.2)$$

habiéndose puesto para abreviar $z_t' = \partial z / \partial t$. La *energía potencial* U se define como $U = -\tau \Delta l$, siendo Δl el incremento de longitud de la cuerda con respecto a su longitud L en estado de reposo. Si escribimos $z_x' = \partial z / \partial x$, la longitud $l(t)$ de la cuerda en una posición cualquiera es

$$\begin{aligned} l &= \int_0^L \sqrt{1 + z_x'^2} dx = \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2} z_x'^2 + \dots \right) dx = \\ &= L + \frac{1}{2} \int_0^L z_x'^2 dx + \dots \end{aligned}$$

y su incremento resulta

$$\Delta l = l - L = \frac{1}{2} \int_0^L z_x'^2 dx + \dots$$

Despreciando los términos que contienen potencias de z_x' superiores a la segunda, podemos por tanto escribir

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^L \tau z_x'^2 dx. \quad (91.3)$$

La acción de Hamilton (89.8) es ahora por (91.2) y (91.3)

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\rho z_t'^2 - \tau z_x'^2) dx dt,$$

y ésta tiene que resultar estacionaria. Tratándose de una integral doble, aplicaremos la condición de Euler (88.5) a la función integranda

$$F(x, t, z, z_x', z_t') = F(z_x', z_t') = \rho z_t'^2 - \tau z_x'^2$$

con el entendido de que la variable y de dicha fórmula se reemplaza por el tiempo t . Resulta así

$$\tau \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (91.4)$$

que es la *ecuación de la cuerda vibrante*. Esta ecuación, que se conoce también como *ecuación de onda*, por presentarse en el análisis de la propagación de una onda en sentido unidimensional, se estudiará con detalle más adelante (Nos. 125, 140).

II. FUNCIONALES LINEALES

92. **Representación integral de las funcionales lineales.** Dadas n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, llamaremos *forma lineal*, e indicaremos con $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n(x_i)$, la combinación

$$P_n(x_i) = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n = \sum_{i=1}^n k_ix_i, \quad (92.1)$$

siendo las k_i constantes cualesquiera. El adjetivo *lineal* le corresponde en el mismo sentido ya señalado en el No. 8, en cuanto valen las propiedades

$$P_n(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n k_i(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n k_ix_i + \sum_{i=1}^n k_iy_i = P_n(x_i) + P_n(y_i)$$

$$P_n(ax_i) = \sum_{i=1}^n k_i(ax_i) = a \sum_{i=1}^n k_ix_i = aP_n(x_i).$$

Las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ pueden considerarse como n valores distintos adquiridos por cierta función $y(x)$. Si imaginamos que $y(x)$ adquiriera más bien infinitos valores, y precisamente todos los que le corresponden al variar x entre dos extremos a y b , a la suma convendrá reemplazar una integral, y la forma (92.1) se cambia en

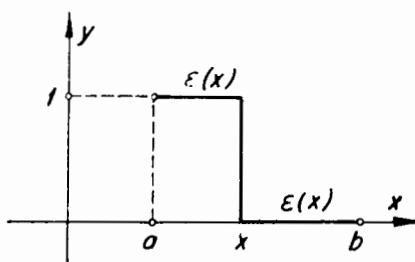
$$F[y(x)] = \int_a^b K(x)y(x)dx \quad (92.2)$$

que, si consideramos a $K(x)$ como una función dada y a $y(x)$ como una función variable, es una funcional del tipo (80.3). La función $K(x)$ se suele llamar el *núcleo de la funcional* (92.2).

Es fácil convencerse de que la *funcional* $F[y(x)]$ así definida es una *funcional lineal*; en efecto se tiene

$$\begin{aligned} F[y+z] &= \int_a^b K(x)[y(x) + z(x)]dx = \\ &= \int_a^b K(x)y(x)dx + \int_a^b K(x)z(x)dx = F[y] + F[z] \end{aligned}$$

$$F[cy] = \int_a^b K(x)cy(x)dx = c \int_a^b K(x)y(x)dx = cF[y].$$



Pero es posible afirmar algo más, y precisamente que la expresión (92.2) incluye prácticamente todas las *funcionales lineales* (teorema de Riesz). Más precisamente, llamemos $\varepsilon(x)$ una función de la variable x en (a, b) , definida así: en el intervalo (a, x) se tiene $\varepsilon(x) = 1$, y en (x, b) se tiene $\varepsilon(x) = 0$. Si la

funcional lineal $F[y(x)]$ es tal que se puede hallar una función $K(x)$ integrable en (a, b) tal que sea

$$F[\varepsilon(x)] = \int_a^b K(x) \varepsilon(x) dx = \int_a^x K(x) dx$$

y si además $F[y(x)]$ queda limitada cuando $y(x)$ es una función continua limitada en (a, b) , o sea si existe una constante M que no depende de la función $y(x)$ tal que

$$|F[y(x)]| < M \cdot \max |y(x)|$$

en todo el intervalo (a, b) , entonces el teorema de Riesz asegura que la funcional lineal $F[y]$ se puede expresar por la integral (92.2).

93. Espacios de Hilbert. Se llaman *funciones de cuadrado sumable en (a, b)* todas las funciones $f(x)$ definidas en dicho intervalo y tales que existe y es limitada la integral

$$\int_a^b f^2(x) dx.$$

Hilbert ideó una teoría general de estas funciones, que resulta muy útil en el estudio de las funcionales lineales. El principio de la teoría consiste en lo siguiente: así como un *punto* en el espacio ordinario puede considerarse como un conjunto de valores adquiridos por las tres coordenadas x, y, z , una *función* $f(x)$ en el intervalo (a, b) puede considerarse como el conjunto de los valores adquiridos por la infinidad de coordenadas constituidas por todos los valores que la función misma adquiere en (a, b) , y por tanto a $f(x)$ se podrá llamarla *punto del espacio de infinitas dimensiones* así definido (*espacio*

de Hilbert). La importancia de la hipótesis del cuadrado sumable está en que permite *extender al espacio hilbertiano el concepto de distancia*. En efecto, como la distancia de dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ resulta ser

$$\Delta[A, B] = \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

así la *distancia entre dos puntos $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el espacio de Hilbert* se define como

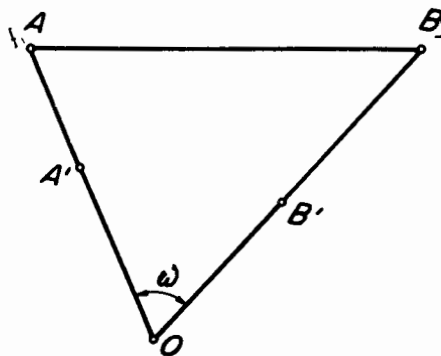
$$\Delta[f_1, f_2] = \sqrt{\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx}, \quad (93.1)$$

y esta expresión tiene un sentido sólo si $f_1(x)$, $f_2(x)$ son de cuadrado sumable. Esta distancia goza de muchas propiedades análogas a las de la distancia ordinaria: por ejemplo de que es nula si y sólo si los dos puntos $f_1(x)$ y $f_2(x)$ coinciden. También es fácil comprobar que, dadas tres funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, se tiene como en el espacio ordinario

$$\Delta[f_1, f_2] + \Delta[f_2, f_3] \geq \Delta[f_1, f_3]. \quad (93.2)$$

Se llama *origen del espacio hilbertiano* la función idénticamente nula $f(x) \equiv 0$. Así como en el espacio ordinario la recta que une el origen con el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ está constituida por los puntos de coordenadas $\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3$, siendo λ un parámetro variable, así también en el espacio hilbertiano, la *recta que proyecta desde el origen el punto $f(x)$* está constituida por los puntos $\lambda f(x)$.

El ángulo entre dos rectas OA y OB que pasan por el origen O puede definirse en el espacio euclidiano partiendo de la fórmula trigonométrica $(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2 - 2(AO) \cdot (BO) \cos \omega$ que, estando definidas las distancias AO, BO, AB , permite deducir el $\cos \omega$. Análogamente conviene definir en el espacio hilbertiano el *coseno del ángulo ω formado por las*



rectas que proyectan desde el origen los puntos $f_1(x)$, $f_2(x)$ a través de la fórmula

$$\int_a^b [f_1 - f_2]^2 dx = \int_a^b f_1^2 dx + \int_a^b f_2^2 dx - 2 \sqrt{\int_a^b f_1^2 dx \int_a^b f_2^2 dx} \cos \omega$$

que, tomando en cuenta la (93.1), equivale formalmente a la relación trigonométrica arriba mencionada. Desarrollando los cálculos y simplificando, se obtiene de aquí

$$\cos \omega = \frac{\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx}{\sqrt{\int_a^b f_1^2 dx \int_a^b f_2^2 dx}} \quad (93.3)$$

Si dos funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ son tales que la integral de su producto es nula

$$\boxed{\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0} \quad (93.4)$$

entonces resulta $\cos \omega = 0$. Se suele decir por tanto que *dos funciones que satisfacen la relación (93.4) son ortogonales*. Es interesante observar la analogía formal de esta fórmula con la relación

$$u \cdot v = 0 \quad \text{o bien} \quad \sum_{i=1}^3 u_i v_i = 0,$$

que expresa en el espacio ordinario la ortogonalidad de dos vectores.

Como en el espacio ordinario el ángulo $A \hat{O} B$ no cambia si a los puntos A y B se reemplazan respectivamente dos puntos A' y B' de las semirrectas OA , OB , así es evidente que la expresión (93.3) no cambia si $f_1(x)$, $f_2(x)$ se reemplazan por los puntos $\lambda f_1(x)$, $\mu f_2(x)$, con λ y μ arbitrarios, en cuanto esto implica multiplicar numerador y denominador por el mismo factor $\lambda\mu$. Aprovechando esta observación, podemos escoger precisamente para λ y μ los valores λ_0 y μ_0 tales que

$$\int_a^b \lambda_0^2 f_1^2(x) dx = \int_a^b \mu_0^2 f_2^2(x) dx = 1; \quad (93.5)$$

puesto entonces

$$\varphi_1(x) = \lambda_0 f_1(x), \quad \varphi_2(x) = \mu_0 f_2(x), \quad (93.6)$$

la fórmula (93.3) se simplifica en

$$\cos \omega = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx \quad (93.7)$$

siendo por (93.5) y (93.6)

$$\int_a^b \varphi_1^2(x) dx = \int_a^b \varphi_2^2(x) dx = 1. \quad (93.8)$$

94. Sistemas de referencia ortonormales. Las funciones $\varphi(x)$ tales que

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1$$

juegan un papel de suma importancia en la teoría hilbertiana; se llaman *funciones normales*. Las funciones normales representan todos los puntos que tienen distancia unitaria desde el origen, y pueden servir para definir las *direcciones que salen del origen*, de la misma manera que los vectores unitarios que salen del origen del espacio ordinario. En este espacio tiene importancia fundamental el sistema constituido por los tres vectores unitarios, ortogonales entre sí de dos en dos, i, j, k , ya que todo vector u puede escribirse

$$u = (u \cdot i)i + (u \cdot j)j + (u \cdot k)k,$$

siendo $u \cdot i, u \cdot j, u \cdot k$ las componentes de u con respecto a i, j, k ; análogamente en el espacio hilbertiano conviene considerar *sistemas de referencia ortonormales* formados por un conjunto de n funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, normales y ortogonales entre sí de dos en dos, o sea tales que, si i, j son dos índices cualesquiera, y es $i \neq j$,

$$\int_a^b \varphi_i^2(x) dx = 1, \quad \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad (94.1)$$

Una función $f(x)$ de cuadrado sumable en (a, b) , se puede interpretar, además que como punto del espacio hilbertiano, también

como *vector* que une dicho punto con el origen. En este sentido se suelen llamar sus *componentes* con respecto al sistema de referencia las integrales

$$h_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx. \quad (94.2)$$

En el espacio ordinario, siendo

$$u^2 = (u \cdot i)^2 + (u \cdot j)^2 + (u \cdot k)^2,$$

resulta que el cuadrado de un vector no puede ser menor que el cuadrado de una de sus componentes o que la suma de los cuadrados de dos de ellas. Vamos a demostrar una propiedad análoga para el espacio hilbertiano. Saldremos de la desigualdad

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^n h_i \varphi_i(x) \right]^2 dx \geq 0, \quad (94.3)$$

que vale en cuanto la función integranda es siempre positiva o nula. Desarrollando el cuadrado que aparece abajo del signo de integral, resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2 dx + \sum_{i=1}^n h_i^2 \int_a^b \varphi_i^2 dx - 2 \sum_{i=1}^n h_i \int_a^b f \varphi_i dx + \\ + 2 \sum_{i,j=1}^{n(i \neq j)} h_i h_j \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx \geq 0, \end{aligned}$$

o sea tomando en cuenta las expresiones (94.1) y (94.2)

$$\int_a^b f^2 dx + \sum_{i=1}^n h_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \geq 0,$$

de donde simplificando y volviendo a reemplazar h_i por su expresión (94.2), se obtiene la *desigualdad de Bessel*

$$\boxed{\int_a^b f^2(x) dx \geq \sum_{i=1}^n \left[\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \right]^2} \quad (94.4)$$

que expresa que el cuadrado del vector que une el origen con un punto del espacio hilbertiano no puede ser menor que la suma de los cuadrados de sus componentes con respecto a un sistema de referencia ortonormal.

Las funciones ortonormales se prestan para ser utilizadas como elementos para el *desarrollo en serie de funciones* $f(x)$ de *cuadrado sumable cualesquiera*. En efecto sea

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

una secuencia de infinitas funciones ortonormales y supongamos que se pueda escribir el desarrollo uniformemente convergente

$$f(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots \quad (94.5)$$

siendo $a_1, a_2, \dots$ coeficientes indeterminados a priori. Entonces la componente h_i de $f(x)$ con respecto a $\varphi_i(x)$ será

$$\int_a^b f \varphi_i dx = a_1 \int_a^b \varphi_1 \varphi_i dx + a_2 \int_a^b \varphi_2 \varphi_i dx + \dots + a_i \int_a^b \varphi_i^2 dx + \dots$$

o sea recordando (94.1) y (94.2), resulta simplemente que $h_i = a_i$; así queda aclarado que los *coeficientes del desarrollo en serie* (94.5) *son precisamente las componentes de* $f(x)$ *con respecto a las* φ_i . Es decir, se tiene

$$f(x) = h_1 \varphi_1(x) + h_2 \varphi_2(x) + \dots \quad \left[h_i = \int_a^b f \varphi_i dx \right] \quad (94.6)$$

Un ejemplo muy importante de aplicación de lo que acabamos de expresar es el que se refiere al sistema constituido por las siguientes funciones φ_k :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

que, como resulta de conocidas fórmulas integrales, son normales y ortogonales entre sí de dos en dos en el intervalo $(-\pi, \pi)$. El desarrollo de $f(x)$ en serie de estas funciones resulta

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right] \cos kx + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right] \sin kx \right\}$$

o sea precisamente el *desarrollo en serie de Fourier* (77.1), (77.2).

Nótese que ésta no es la única forma posible para una ecuación funcional lineal, ya que por ejemplo también la ecuación

$$\int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + y(x) = z(x) \quad (95.5)$$

es lineal, en cuanto es lineal el término $y(x)$ que se agrega al primer miembro. Las ecuaciones (95.4) y (95.5) se conocen como *ecuaciones integrales lineales*: la (95.4) es la *ecuación integral de Fredholm de primera especie*, la (95.5) es la *ecuación integral de Fredholm de segunda especie*. De grande importancia son también las ecuaciones integrales de límite superior variable:

$$\int_a^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi = z(x) \quad (95.6)$$

que es la *ecuación integral de Volterra de primera especie* y

$$\int_a^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi + y(x) = z(x) \quad (95.7)$$

que es la *de Volterra de segunda especie*.

96. Resolución de las ecuaciones de Volterra de segunda especie. Estas fueron, entre todas las ecuaciones integrales, las primeras en ser estudiadas (por Volterra, en 1896), y son de resolución relativamente fácil. Efectivamente vamos a comprobar, siguiendo un *método de Neumann*, que, si las funciones $z(x)$ y $K(x, \xi)$ están limitadas en el intervalo (a, b) de variación de la variable x (intervalo que determina indirectamente también el de la variable ξ , que varía entre a y x), o sea si es

$$|z(x)| \leq M, \quad |K(x, \xi)| \leq N \quad (\text{para } a \leq \xi \leq x \leq b) \quad (96.1)$$

siendo M y N dos números positivos convenientes, la ecuación de Volterra de segunda especie (95.7) seguramente es resoluble. A un mismo tiempo daremos una expresión de la solución.

Consideremos la ecuación, algo más general que la (95.7),

$$y(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi = z(x) \quad (96.2)$$

que se reduce a la (95.7) cuando el *parámetro* λ vale 1. Supongamos que la función incógnita $y(x)$, que resulta función también de λ , pueda expresarse por un *desarrollo en serie de potencias de* λ

$$y(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\lambda + \alpha_2(x)\lambda^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^n. \quad (96.3)$$

Reemplazando en (96.2), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^x K(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi = z(x)$$

e igualando los coeficientes de las mismas potencias de λ en los dos miembros, quedan las identidades

$$\alpha_0(x) = z(x) \quad (96.4)$$

$$\alpha_1(x) = - \int_a^x K(x, \xi) \alpha_0(\xi) d\xi$$

$$\alpha_2(x) = - \int_a^x K(x, \xi) \alpha_1(\xi) d\xi$$

y así siguiendo. La n -ava identidad será

$$\alpha_n(x) = - \int_a^x K(x, \xi) \alpha_{n-1}(\xi) d\xi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (96.5)$$

Esta es una fórmula que, puesto $n = 1$ y reemplazando $\alpha_0(x)$ por su expresión (96.4), permite sacar $\alpha_1(x)$. Puesto $n = 2$ y tomando en cuenta la anterior expresión de $\alpha_1(x)$, la misma fórmula da $\alpha_2(x)$, y así siguiendo. Se determinan así sucesivamente por proceso iterativo todos los coeficientes del desarrollo en serie (96.3) que expresa $y(x)$. Falta demostrar que *esta serie converge absoluta y uniformemente*.

Esto resulta de inmediato de las limitaciones (96.1) que, aplicadas a las relaciones (96.4) y siguientes, dan

$$|\alpha_0(x)| \leq M$$

$$|\alpha_1(x)| \leq \int_a^x N M d\xi = MN(x-a)$$

$$|\alpha_2(x)| \leq \int_a^x N [MN(\xi-a)] d\xi = MN^2 \frac{(x-a)^2}{2!}$$

y así siguiendo. El término n -avo será

$$|\alpha_n(x)| \leq MN^n \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Por tanto los términos de la serie (96.3) son menores o iguales en valor absoluto a los de la *serie mayorante*

$$M + M[N(x-a)\lambda] + \frac{1}{2!} M[N(x-a)\lambda]^2 + \\ + \frac{1}{3!} M[N(x-a)\lambda]^3 + \dots$$

que, separado el factor común M , resulta ser una serie exponencial en la variable $N(x-a)\lambda$, y esta serie converge para todo valor de λ (ver No. 45). En particular ha de converger también para $\lambda = 1$, que es el valor que da la solución de la ecuación de Volterra de segunda especie (95.7). Esta solución está por tanto proporcionada por la serie convergente

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \quad (96.6)$$

resultando las funciones $\alpha_n(x)$ expresadas por las fórmulas (96.4) y (96.5).

Si se aplicase el método de Neumann a una *ecuación de Fredholm de segunda especie*, la serie mayorante no resultaría una exponencial, sino una serie geométrica de razón $N(b-a)\lambda$, que converge sólo si esta razón es menor que 1 en valor absoluto. De hecho, no es posible establecer para la ecuación de Fredholm condiciones de resolubilidad tan amplias como para la de Volterra.

97. La convolución. Se llama *producto integral* o *convolución* de dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ y se escribe $F(x) * G(x)$, la integral

$$F(x) * G(x) = \int_0^x F(x-\xi) G(\xi) d\xi \quad (97.1)$$

Esta operación puede considerarse como una extensión a las funcionales del producto escalar de dos vectores u y v

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^3 u_i v_i.$$

Siendo que

$$\int_0^x F(x-\xi) [G(\xi) + I(\xi)] d\xi = \int_0^x F(x-\xi) G(\xi) d\xi + \int_0^x F(x-\xi) I(\xi) d\xi,$$

la convolución goza de la *propiedad distributiva*

$$F^*[G + I] = F^*G + F^*I \quad (97.2)$$

Efectuando el cambio de variables $\eta = x - \xi$, se obtiene que

$$\int_0^x F(x-\xi) G(\xi) d\xi = \int_0^x G(x-\eta) F(\eta) d\eta$$

o sea vale la *propiedad conmutativa*

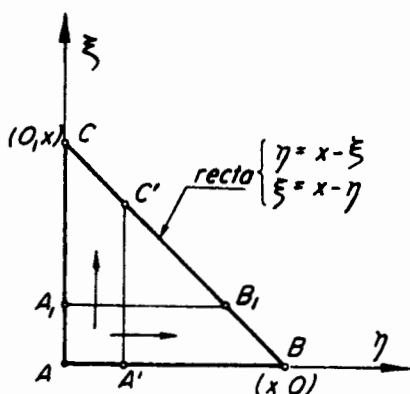
$$F^*G = G^*F \quad (97.3)$$

También vale la *propiedad asociativa*

$$F^*[G^*I] = [F^*G]^*I \quad (97.4)$$

Consideremos en efecto que se tiene

$$F^*[G^*I] = \int_0^x F(\xi) \left[\int_0^{x-\xi} G(x-\xi-\eta) I(\eta) d\eta \right] d\xi,$$



donde las dos integraciones se efectúan, en el interior del triángulo ABC de la figura, de la manera siguiente: primero se integra el producto $F(\xi)G(x-\xi-\eta)I(\eta)$ con respecto a η entre 0 y $x-\xi$, siguiendo un segmento A_1B_1 paralelo al eje η , y después se integra con respecto a ξ , recorriendo el segmento A_1B_1 paralelamente a sí mismo desde la posición AB ($\xi=0$) hasta la posición C ($\xi=x$). Por otro lado se tiene por (97.3)

$$[F^*G]^*I = I^*[F^*G] = \int_0^x I(\eta) \left[\int_0^{x-\eta} G(x-\eta-\xi) F(\xi) d\xi \right] d\eta,$$

lo que implica integrar el producto de antes dentro del mismo triángulo ABC , pero primero con respecto a ξ sobre un segmento $A'C'$ paralelo al eje ξ , y después con respecto a η recorriendo dicho segmento paralelamente a sí mismo desde la posición $AC(\eta = 0)$ hasta la posición $B(\eta = x)$. Las dos integraciones son evidentemente equivalentes.

Si en la fórmula (97.1) se pone $G(x) \equiv 1$ y se toma en cuenta la propiedad conmutativa (97.3), se obtiene la expresión

$$F * 1 = \int_0^x F(\xi) d\xi \quad (97.5)$$

que define el *producto integral de una función cualquiera por la unidad*. Reemplazando $F(x)$ por su derivada y efectuando la integración, queda

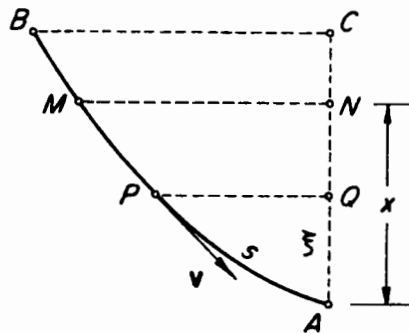
$$\frac{dF}{dx} * 1 = F(x) - F(0)$$

o bien

$$F(x) = \frac{dF}{dx} * 1 + F(0). \quad (97.6)$$

Estas fórmulas serán útiles más adelante.

98. La ecuación integral de Abel y los fenómenos hereditarios. La convolución está ligada con ciertas ecuaciones integrales de suma importancia, la primera de las cuales fue estudiada por Abel en 1823. El problema planteado era el siguiente. Sea BMA una curva contenida en un plano vertical, BC su proyección horizontal y CA su proyección vertical. Supongamos que una partícula material baje a lo largo de la curva BA por acción de la gravedad, partiendo del reposo en un punto M , y sea T el tiempo que ella requiere para ir de M a A . Si se pone, con las notaciones de la figura, $AN = x$, el tiempo T resulta evidentemente una función $T(x)$ de la ordenada x y de la forma de



la curva. Abel suponía dar de antemano esta función $T(x)$ y se proponía determinar la forma de la curva que le correspondiese.

Sea P un punto cualquiera de la curva entre M y A , y Q su proyección sobre la vertical, póngase $AP = s$, $AQ = \xi$, y sea t el tiempo que la partícula requiere para recorrer el tramo MP . Si m es la masa de la partícula, y su velocidad en P es v , su energía cinética en P será $1/2 m v^2$ y su energía potencial será $mg\xi$. Escribiendo que la energía total en P es igual a la que la partícula tenía en M , resulta

$$\frac{1}{2} m v^2 + mg\xi = mgx$$

y despejando

$$v = \sqrt{2g(x - \xi)}.$$

Si medimos la longitud de curva s de A hacia P , tenemos $v = -ds/dt$, y luego

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(x - \xi)}} = -\frac{ds}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{2g(x - \xi)}}.$$

Póngase

$$F(\xi) = \frac{s(\xi)}{\sqrt{2g}}. \quad (98.1)$$

Reemplazando en la ecuación anterior e integrando sobre la vertical entre N y A , se obtiene

$$T(x) = -\int_x^0 \frac{F'(\xi)d\xi}{\sqrt{x - \xi}} = \int_0^x \frac{F'(\xi)d\xi}{\sqrt{x - \xi}}.$$

Por tanto el problema de hallar la forma de la curva BA conociendo el tiempo $T(x)$ resulta expresado por la ecuación integral de Volterra de primera especie

$$T(x) = \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} F'(\xi) d\xi \quad (98.2)$$

o bien, con la notación (97.1), por

$$T(x) = x^{-1/2} * F'(x). \quad (98.3)$$

Abel consiguió integrar no sólo esta ecuación, sino la más general

$$z(x) = x^{-n} * F'(x) \quad \text{para } 0 < n < 1, \quad (98.4)$$

por medio de consideraciones directas relacionadas con propiedades de la función gamma. Nosotros llegaremos al mismo resultado con cálculo operacional (ver No. 110).

La novedad matemática implícita en el problema de Abel consiste en haberse hecho variar la ordenada x , con lo que la posición de los puntos de la curva BA viene a depender de la posibilidad de resultar cada uno de ellos punto de partida del movimiento. Esto explica la presencia, en la ecuación integral (98.2), de un núcleo $(x - \xi)^{-1/2}$ función de las distancias verticales $x - \xi$ entre puntos P variables sobre la curva, como posiciones de la partícula, y puntos M también variables sobre la curva de manera totalmente independiente de los anteriores, como puntos de arranque del movimiento. Análogos a éste bajo el punto de vista analítico son los *fenómenos hereditarios*, que son aquéllos que dependen no sólo del estado actual del sistema que se estudia, o de los estados que lo han precedido inmediatamente, sino de todos los estados por los cuales el sistema ha pasado, a partir de cierto instante inicial $t = 0$. El ejemplo más conocido de estos fenómenos dependientes de la historia del sistema es el de los *efectos de histéresis* (elástica, magnética, eléctrica, etc.). Bajo convenientes hipótesis simplificadoras, y principalmente la de suponer que *el fenómeno hereditario sea lineal y tenga siempre el mismo desarrollo si pasa sucesivamente por las mismas condiciones (principio del ciclo cerrado)*, se comprueba que se llega también en este caso a ecuaciones integrales lineales, con núcleos que son funciones de las distancias en tiempo $t - \tau$, entre el instante t en que se estudia el fenómeno y cualquier instante anterior τ en que el fenómeno haya tenido lugar. Un fenómeno de herencia lineal cíclica se expresa por medio de una ecuación integral de Volterra del tipo

$$z(t) = a y(t) + \int_0^t K(t - \tau) y(\tau) d\tau \quad (98.5)$$

o sea

$$z(t) = a y(t) + K(t) * y(t), \quad (98.6)$$

donde z es un parámetro cuyos valores con el tiempo t dependen de la variable y . La historia de y (*historia primaria*) resulta determinada

por la función $y(\tau)$, la historia de z (*historia hereditaria*) resulta determinada por la función $z(t)$.

Por ejemplo en el caso de la *torsión elástica de un alambre*, si se indica con m el momento del par de torsión, con ω el ángulo de torsión, suponiendo equilibrio estático se tiene en primera aproximación la relación lineal

$$\omega = km, \quad (98.7)$$

siendo k una constante que depende de las características del alambre. Sin embargo ensayos cuidadosos comprueban que ω depende no sólo del momento de torsión m actual, sino también de todos los anteriores. Si $\omega(t)$ indica el ángulo de torsión en un instante t , los momentos de torsión $m(\tau)$ en los instantes τ resultarán con añadir en el segundo miembro de (98.7) un término corrector que depende de todos los valores de $m(\tau)$ desde el instante $t = 0$ en que comenzó a realizarse la torsión hasta el instante t que se considera. Si se supone una *herencia lineal y cíclica*, se obtiene precisamente la ecuación

$$\omega(t) = km(t) + \int_0^t H(t-\tau) m(\tau) d\tau$$

del tipo (98.5), donde el núcleo $H(t-\tau)$ caracteriza la ley de la herencia.

99. Transformaciones funcionales lineales. Si interpretamos los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ que aparecen en el sistema de ecuaciones (95.3) como componentes de un vector x de un espacio vectorial de n dimensiones y los números $y_1, y_2, \dots, y_n$ como componentes de un vector y de otro espacio vectorial de n dimensiones, vemos que dichas ecuaciones, al variar las x_j y las y_i permaneciendo invariados los coeficientes k_{ij} , establecen una relación lineal entre los dos espacios mencionados. Esta relación puede interpretarse como una *homografía vectorial* α que, aplicada a los vectores x , da los vectores y (ver No. 8), es decir, como una *transformación lineal que transforma el espacio x en el espacio y* , en cuanto hace corresponder a todo vector del primero un vector bien determinado del segundo. Si condensamos las (95.3) en la expresión

$$y_i = \sum k_{ij} x_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (99.1)$$

vemos la posibilidad de extender formalmente este concepto a los espacios funcionales. Precisamente, considérense dos variables independientes s y t , y sea $F(t)$ una función cualquiera de t , $f(s)$ una cualquiera de s ; tenemos así dos espacios funcionales: el de las funciones $F(t)$ y el de las funciones $f(s)$. La relación

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) F(t) dt \quad (99.2)$$

con núcleo $K(s, t)$ dado, constituye la extensión lógica de la (99.1) al campo funcional, en cuanto es una *transformación funcional lineal* (por lo indicado en el No. 92), que a toda función $F(t)$ hace corresponder una conveniente función $f(s)$. Así como la transformación vectorial establecida por la homografía α se puede escribir simbólicamente $y = \alpha(x)$ (ver No. 8), la transformación funcional (99.2) se escribirá

$$f(s) = T\{F(t)\}. \quad (99.3)$$

interpretándose T como el *operador* que efectúa la transformación de $F(t)$ en $f(s)$. A veces se considera también la *transformación inversa* que permite pasar de $f(s)$ a $F(t)$. La transformación inversa de la T se indica simbólicamente con T^{-1} , escribiéndose

$$F(t) = T^{-1}\{f(s)\}. \quad (99.4)$$

Las operaciones del tipo (99.2) se llaman también *transformaciones integrales*.

100. Transformaciones de Fourier y de Laplace. En el No. 76 se consideraron los desarrollos en serie de Fourier (76.1) para funciones periódicas de periodo $2L$. Si en las fórmulas (76.4) que expresan los coeficientes, suponemos que la variable n , que adquiere los valores discretos $1, 2, 3, \dots$, se reemplace formalmente por una variable continua s , escribiendo

$$s = \frac{n\pi}{L},$$

y sustituimos además z por t , $f(z)$ por $F(t)$, z_0 por a , z_1 por b y escribimos

$$La_n = f_1(s), \quad Lb_n = f_2(s).$$

obtenemos

$$f_1(s) = \int_a^b \cos st F(t) dt \quad (100.1)$$

$$f_2(s) = \int_a^b \operatorname{sen} st F(t) dt. \quad (100.2)$$

Las relaciones (100.1) y (100.2) son del tipo (99.2), con el núcleo $K(s, t)$ dado respectivamente por $\cos st$ y $\operatorname{sen} st$. Consideradas, siguiendo el criterio del No. 99, como transformaciones integrales entre los espacios funcionales $F(t)$ y $f(s)$, éstas se llaman respectivamente *transformación cosenoidal* y *transformación senoidal de Fourier*.

Póngase ahora

$$f(s) = f_1(s) + if_2(s).$$

Tomando en cuenta las expresiones (100.1) y (100.2), así como la fórmula de Euler (45.4), resulta la nueva transformación

$$f(s) = \int_a^b e^{ist} F(t) dt \quad (100.3)$$

de núcleo $K(s, t) = e^{ist}$. Supuesto que s sea una variable compleja

$$s = x + iy,$$

la transformación anterior se conoce como *transformación de Fourier-Laplace*, llamándose *transformación exponencial de Fourier* cuando corresponde a s real:

$$f(x) = \int_a^b e^{ixt} F(t) dt \quad (100.4)$$

y *transformación de Laplace* cuando corresponde a s imaginaria:

$$f(y) = \int_a^b e^{-yt} F(t) dt. \quad (100.5)$$

Es evidente que toda función seccionalmente continua en un intervalo (a, b) finito (ver N° 77) es transformable según Fourier y según Laplace (o sea existen sus transformadas (100.4) y (100.5) en dicho intervalo). Siendo de importancia fundamental ciertas transformaciones de Fourier y de Laplace en intervalos infinitos, interesa

definir cuáles condiciones accesorias hay que añadir entonces a la continuidad seccional a fin de asegurar la transformabilidad.

Se llama *transformación de Fourier propiamente dicha* y se indica con el símbolo $\mathfrak{F}$, la transformación

$$\boxed{\mathfrak{F}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} F(t) dt} \quad (100.6)$$

Para que esta transformación tenga significado, es necesario que se pueda asignar a la integral impropia un valor finito bien determinado, cualquiera que sea x . Como se tiene

$$|e^{ixt}| = 1,$$

es suficiente, para que esto se realice, que exista y sea finita la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} |F(t)| dt. \quad (100.7)$$

Se llama *transformación de Laplace propiamente dicha*, y se indica con el símbolo $\mathfrak{L}$, la transformación

$$\boxed{\mathfrak{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-yt} F(t) dt} \quad (100.8)$$

Para que una función $F(t)$ seccionalmente continua en $(0, \infty)$ sea transformable según Laplace, basta que se pueda encontrar un número α tal que exista y sea finito el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|F(t)|}{e^{\alpha t}},$$

condición que se expresa diciendo que $F(t)$ es una función del orden de $e^{\alpha t}$ para $t \rightarrow \infty$, y se escribe

$$F(t) = O(e^{\alpha t}) \quad \text{para } t \rightarrow \infty. \quad (100.9)$$

En efecto podemos escribir, siendo T un número positivo cualquiera,

$$\mathfrak{L}\{F(t)\} = \int_0^T e^{-yt} F(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-yt} F(t) dt.$$

La primera integral existe y está limitada si $F(t)$ es seccionalmente continua. Por otro lado, si $F(t)$ es de orden exponencial, se puede hallar un número A tal que, para todo $t > T$, se tenga $|F(t)| < Ae^{\alpha t}$, es decir

$$e^{-yt} |F(t)| < Ae^{-(y-\alpha)t},$$

quedando por tanto la segunda integral inferior en valor absoluto a la integral

$$A \int_T^\infty e^{-(y-\alpha)t} dt$$

que, siempre que sea $y > \alpha$, es limitada.

101. Propiedades operacionales. Las transformaciones de Fourier y de Laplace gozan de propiedades muy importantes en lo referente a su manera de operar sobre funciones derivadas. En efecto, apliquemos la transformación general de Fourier-Laplace (100.3) a la función $F'(t) = dF/dt$; integrando por partes se obtiene

$$\int_a^b e^{ist} F'(t) dt = \left[e^{ist} F(t) \right]_a^b - is \int_a^b e^{ist} F(t) dt. \quad (101.1)$$

En el caso de la transformación de Fourier (100.4), que abreviaremos con el símbolo $\mathfrak{F}_{a,b}$, esta fórmula da

$$\mathfrak{F}_{a,b} \{F'\} = \left[e^{ixt} F \right]_a^b - ix \mathfrak{F}_{a,b} \{F\}. \quad (101.2)$$

En el caso de la transformación de Laplace (100.5), que abreviaremos con $\mathfrak{L}_{a,b}$, resulta

$$\mathfrak{L}_{a,b} \{F'\} = \left[e^{-yt} F \right]_a^b + y \mathfrak{L}_{a,b} \{F\}. \quad (101.3)$$

Si reemplazamos en (101.1) la función $F(t)$ por su derivada $F'(t)$, obtenemos

$$\int_a^b e^{ist} F''(t) dt = \left[e^{ist} F'(t) \right]_a^b - is \int_a^b e^{ist} F'(t) dt$$

y sustituyendo la última integral por la expresión (101.1), queda

$$\int_a^b e^{ist} F''(t) dt = \left[e^{ist} (F' - isF) \right]_a^b - s^2 \int_a^b e^{ist} F(t) dt, \quad (101.4)$$

es decir, en el caso de la transformación de Fourier,

$$\mathfrak{F}_{a,b}\{F''\} = \left[e^{ixt} (F' - ixF) \right]_a^b - x^2 \mathfrak{F}_{a,b}\{F\} \quad (101.5)$$

y en el caso de la de Laplace

$$\mathfrak{L}_{a,b}\{F''\} = \left[e^{-yt} (F' + yF) \right]_a^b + y^2 \mathfrak{L}_{a,b}\{F\}. \quad (101.6)$$

Según las fórmulas (101.1) y (101.4), las transformadas de Fourier-Laplace de las derivadas $F'(t)$ y $F''(t)$ resultan funciones lineales de las transformadas de la función primitiva $F(t)$, que se multiplica por la variable s en el caso de la derivada primera y por la variable s^2 en el caso de la derivada segunda; así siguiendo se podría ver que *la transformada de la derivada de orden n se expresa por una fórmula lineal en que aparece s^n multiplicada por la transformada de $F(t)$* . Por consiguiente, si transformamos por ejemplo una ecuación diferencial lineal homogénea

$$a_0 F(t) + a_1 F'(t) + a_2 F''(t) + \dots + a_n F^{(n)}(t) = 0, \quad (101.7)$$

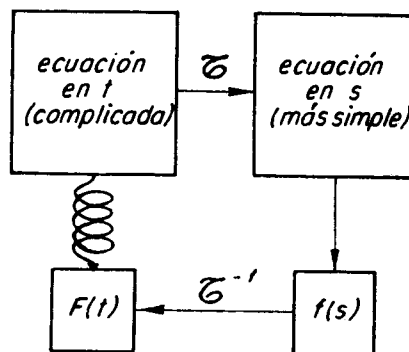
obtenemos una expresión del tipo

$$(a_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n) f(s) = \varphi(s),$$

siendo $\varphi(s)$ una función conocida de s y $f(s)$ la transformada (100.3) de $F(t)$. De aquí se obtiene despejando

$$f(s) = \frac{\varphi(s)}{a_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} \quad (101.8)$$

y *antitransformando*, o sea aplicando la transformación funcional inversa, se puede obtener $F(t)$, resolviendo así indirectamente la ecuación diferencial dada. Este proceso permite reemplazar la integración directa de la ecuación diferencial en la función incógnita $F(t)$ por los pasos siguientes, que son generalmente más fáciles:



- a) transformación de la ecuación en otra más simple en la incógnita $f(s)$

- b) resolución de esta última (determinación de $f(s)$)
- c) antitransformación de $f(s)$ en $F(t)$.

El método de cálculo indicado, que se llama *Cálculo Operacional*, se aplica con éxito también a ecuaciones diferenciales ordinarias más complicadas que la (101.7), así como a ecuaciones integrales y a ciertas ecuaciones en las derivadas parciales. Algunos ejemplos se verán en la última parte de este capítulo, dedicada a la transformación de Laplace, que es la que se utiliza con más frecuencia, porque tiene la ventaja de mantener todo el cálculo dentro del campo real; esto no pasa con la transformación de Fourier, como se ve por ejemplo comparando la fórmula (101.2) con la (101.3).

102. Inversión de las transformaciones de Fourier y Laplace. Al hablar acerca del Cálculo Operacional, se mencionó la importancia de antitransformar, o sea dada la función $f(s)$ hallar la $F(t)$ que le corresponde. Para encontrar la fórmula que invierte la transformación de Fourier-Laplace (100.3), empecemos analizando un problema más simple.

Considérese el *desarrollo en serie de Dirichlet*

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{isn} \quad (102.1)$$

que puede considerarse como la *operación funcional* que transforma en $\varphi(s)$ el conjunto de todos los coeficientes F_n para $n = 0, 1, 2, \dots$, conjunto que interpretaremos como una función discontinua, que adquiere los infinitos valores

$$F_0, F_1, \dots, F_n, \dots$$

Puesto

$$e^{is} = \xi, \quad \varphi(s) = \psi(\xi), \quad (102.2)$$

la serie (102.1) se transforma en la *serie de potencias*

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \xi^n.$$

que podemos considerar como la operación que transforma los F_n en $\psi(\xi)$. El problema de antitransformar $\psi(\xi)$ en F_n ya se

ha resuelto en el N° 62 por medio de la fórmula (62.2), que expresa que

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\psi(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

siendo c una circunferencia con centro en el punto $\xi = 0$. Si en esta fórmula reemplazamos la variable ξ por la variable s por medio de las relaciones (102.2), y observamos que la circunferencia c , sobre la cual $|\xi| = \text{cte}$, se transforma, en el plano de la variable $s = x + iy$, en una línea sobre la cual $|e^{is}| = \text{cte}$, o sea en una $is = \text{cte}$, obtenemos

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{(is=\text{cte})} e^{-isn} \varphi(s) ds. \quad (102.3)$$

Esta es la fórmula que invierte la (102.1), antitransformando $\varphi(s)$ en los F_n .

Ahora bien, si consideramos que la transformación de Fourier-Laplace (100.3) es la extensión al espacio hilbertiano de la serie (102.1), en cuanto en lugar de la variable discreta n se considere la variable continua t y en lugar de la función $\varphi(s)$ la $f(s)$, queda justificada formalmente la expresión, análoga a la (102.3),

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{(is=\text{cte})} e^{-ist} f(s) ds. \quad (102.4)$$

En el caso de la transformación de Fourier (100.6), poniendo $s = x$, resulta que la línea $is = \text{cte}$ es una recta $ix = \text{cte}$, y por tanto paralela al eje x en el plano de la variable compleja $s = x + iy$. Podemos escoger la constante igual a cero, y escribir así con la notación (99.4).

$$\mathfrak{F}^{-1} \{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx \quad (102.5)$$

En el caso de la transformación de Laplace (100.8), poniendo $s = iy$, resulta que la línea $is = \text{cte}$ es una recta $iy = \gamma$, siendo γ una constante conveniente, como indicaremos de inmediato. Siendo esta recta paralela al eje y en el plano de la variable $s = x + iy$, sus puntos

impropios se podrán expresar como $\gamma - i\infty$ y $\gamma + i\infty$; reemplazando en (102.4), resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(y)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{yt} f(y) dy \quad (102.6)$$

Se comprueba que esta integral es convergente siempre que el camino de integración deje a su izquierda todos los eventuales puntos singulares de la función $f(y)$. de donde se concluye que el número γ tiene que escogerse mayor que la más grande de las partes reales de los afijos de dichas singularidades.

III. LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

103. **Cálculo de transformadas fundamentales.** En lo que sigue vamos a considerar que la transformación de Laplace opere entre el campo de la variable real t y el campo de una variable s , que generalmente se considerará también real. En el caso de que s sea compleja, la transformación ya no será de Laplace, sino evidentemente del tipo de Fourier-Laplace. Escribiremos luego la (100.5) así:

$$\mathcal{L}_{a,b}\{F(t)\} = \int_a^b e^{-st} F(t) dt \quad (103.1)$$

y la (101.3) así:

$$\mathcal{L}_{a,b}\{F'\} = s \mathcal{L}_{a,b}\{F\} + e^{-bs} F(b) - e^{-as} F(a). \quad (103.2)$$

En el caso de la *transformación de Laplace propiamente dicha* (100.8)

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \quad (103.3)$$

siendo $F(t)$ una función de orden exponencial limitada por la condición (100.9), tendremos que, para toda $s > \alpha$, la (103.2) se escribe

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s \mathcal{L}\{F(t)\} - F(0) \quad (103.4)$$

Aplicando esta relación a la función derivada $F'(t)$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{F(t)\} - s F(0) - F'(0) \quad (103.5)$$

que es la (101.6) para este caso.

Las fórmulas anteriores permiten calcular de inmediato las *transformadas de ciertas funciones elementales*. De la fórmula (103.4) se deduce

para $F(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{0\} = s\mathcal{L}\{1\} - 1 \quad \text{y luego} \quad * \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad (103.6)$$

para $F(t) = t$

$$\mathcal{L}\{1\} = s\mathcal{L}\{t\} \quad \text{y luego} \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{\mathcal{L}\{1\}}{s} = \frac{1}{s^2},$$

para $F(t) = t^2$

$$2\mathcal{L}\{t\} = s\mathcal{L}\{t^2\} \quad \text{y luego} \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2\mathcal{L}\{t\}}{s} = \frac{2}{s^3},$$

y así sucesivamente. Para $F(t) = t^n$ resulta en general

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \text{ entero positivo}) \quad (103.7)$$

De la fórmula (103.5) aplicada a las *funciones circulares e hiperbólicas* se obtiene

$$-k^2\mathcal{L}\{\sin kt\} = s^2\mathcal{L}\{\sin kt\} - k \quad \text{y luego}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}} \quad (103.8)$$

$$-k^2\mathcal{L}\{\cos kt\} = s^2\mathcal{L}\{\cos kt\} - s \quad \text{y luego}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}} \quad (103.9)$$

$$k^2\mathcal{L}\{\sinh kt\} = s^2\mathcal{L}\{\sinh kt\} - k \quad \text{y luego}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}} \quad (103.10)$$

$$k^2\mathcal{L}\{\cosh kt\} = s^2\mathcal{L}\{\cosh kt\} - s \quad \text{y luego}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2}} \quad (103.11)$$

Otras transformadas se pueden calcular por integración directa. Por ejemplo la de la *función t^k con exponente k cualquiera* es

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \int_0^\infty e^{-st} t^k dt = \frac{1}{s^{k+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^k dx$$

* En general, para cualquier transformación funcional aditiva $\mathcal{T}$ se cumple que

$$\mathcal{T}\{0\} = \mathcal{T}\{F(t) - F(t)\} = \mathcal{T}\{F(t)\} - \mathcal{T}\{F(t)\} = 0.$$

habiéndose efectuado la sustitución

$$st = x.$$

Por (73.1) queda luego

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} \quad (103.12)$$

Nótese que esta fórmula vale sólo para $k > -1$, por tenerse que evitar los polos de la función gamma (ver N° 71). La (103.7) es evidentemente un caso particular de esta última. Otro caso particular es la fórmula

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (103.13)$$

que se obtiene de (103.12) recordando (72.4).

La transformada de la exponencial e^{-t^2} se obtiene como sigue:

$$\mathcal{L}\{e^{-t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t^2} dt = e^{s^2} \int_0^\infty e^{-(s+t)^2} dt$$

y efectuando el cambio de variable

$$s + \frac{1}{2}t = u$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t^2}\} = 2e^{s^2} \int_s^\infty e^{-u^2} du. \quad (103.14)$$

Pero se tiene

$$\int_s^\infty e^{-u^2} du = \int_0^\infty e^{-u^2} du - \int_0^s e^{-u^2} du$$

y luego por (74.8) y (74.7)

$$\int_s^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - \operatorname{erf} s).$$

Reemplazando en (103.14), llegamos a la fórmula de transformación

$$\mathcal{L}\{e^{-t^2}\} = \sqrt{\pi} e^{s^2} (1 - \operatorname{erf} s) \quad (103.15)$$

A continuación determinaremos varias propiedades de la transformación de Laplace, suponiendo siempre que las funciones a las

que se aplica sean seccionalmente continuas y, en el caso de transformarse en intervalo infinito, de orden exponencial para $t \rightarrow \infty$ (ver N° 100).

104. Fórmula del retroceso. Toda transformación de Laplace en un intervalo (a, b) cualquiera puede siempre reducirse a tener extremo inferior en el punto $t = 0$. En efecto, si reemplazamos t por $t + a$, resulta

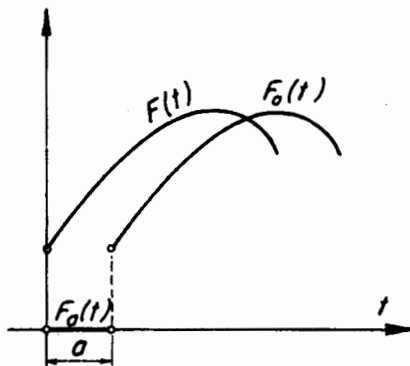
$$\int_a^b e^{-st} F(t) dt = e^{-as} \int_0^{b-a} e^{-st} F(t+a) dt$$

o sea vale la fórmula del retroceso

$$\mathcal{L}_{a,b} \{F(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}_{0,b-a} \{F(t+a)\}. \quad (104.1)$$

Aquí con $F(t+a)$ se representa la misma función $F(t)$, pero recorrida en una distancia a paralelamente al eje de la variable t . En el caso de la transformación en el intervalo $(0, \infty)$, si indicamos con $F_a(t)$ la función definida por

$$\begin{cases} F_a(t) = 0 & \text{para } 0 \leq t \leq a \\ F_a(t) = F(t-a) & \text{para } t \geq a \end{cases} \quad (104.2)$$



obtenemos por (104.1)

$$\mathcal{L}_{a,\infty} \{F_a(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}_{0,\infty} \{F(t)\}$$

$$\mathcal{L}_{0,a} \{F_a(t)\} = \mathcal{L}_{0,a} \{0\} = 0$$

y sumando, con la consideración de que $\mathcal{L}_{0,a} + \mathcal{L}_{a,\infty} = \mathcal{L}_{0,\infty} = \mathcal{L}$,

$$\boxed{\mathcal{L}\{F_a(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{F(t)\}} \quad (104.3)$$

Una consecuencia interesante de la fórmula del retroceso se refiere al cálculo de la transformada en $(0, \infty)$ de una función $F(t)$ periódica de periodo T , cuando se conozca su transformada en el intervalo $(0, T)$, y viceversa. Subdivídase el intervalo $(0, \infty)$ en los infinitos intervalos parciales $(0, T)$, $(T, 2T)$, $(2T, 3T)$, ..., con lo que se puede escribir

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_{nT, (n+1)T} \{F(t)\}.$$

Reduciendo todas las operaciones del segundo miembro a transformaciones con extremo izquierdo en el origen por intermedio de (104.1), y tomando en cuenta la periodicidad, queda

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \right] \mathcal{L}_{0,T} \{F(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \mathcal{L}_{0,T} \{F(t)\},$$

es decir

$$\boxed{\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\mathcal{L}_{0,T} \{F(t)\}}{1 - e^{-Ts}}} \quad (104.4)$$

Así por ejemplo se obtiene de (103.8), empleando esta fórmula inversamente,

$$\mathcal{L}_{0,2\pi} \{\sin t\} = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}. \quad (104.5)$$

105. Fórmulas de amortiguación y de similitud. En muchos problemas de aplicación aparecen *funciones amortiguadas*, que resultan de multiplicar una función $F(t)$ dada por la exponencial de exponente negativo e^{-ht} . Transformarlas es simple; en efecto tenemos

$$\mathcal{L}\{e^{-ht} F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-ht} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+h)t} F(t) dt.$$

o sea que su transformada es la misma que la de $F(t)$, siempre que a la variable s se reemplace $s + h$. Simbólicamente podemos escribir

$$\mathcal{L}\{e^{-ht} F(t)\} = \mathcal{L}\{F(t)\}_{(s+h)} \quad (105.1)$$

Como aplicación, calculemos precisamente la transformada de la función e^{-ht} . Poniendo $F(t) \equiv 1$ en la fórmula anterior, queda

$$\mathcal{L}\{e^{-ht}\} = \mathcal{L}\{1\}_{(s+h)}$$

o sea por (103.6)

$$\mathcal{L}\{e^{-ht}\} = \frac{1}{s+h} \quad (105.2)$$

Es de interés también la fórmula que, por medio de otro cambio en la variable s , permite calcular la transformada de la función $F(kt)$, obtenida de la $F(t)$ por el proceso de *similitud*, consistente en multiplicar la variable independiente t por una constante k determinada (factor de escala). Reemplazando la variable t por τ/k , obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(kt) dt = \int_0^{\infty} e^{-s\tau/k} F(\tau) d\frac{\tau}{k} = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{k}\tau} F(\tau) d\tau$$

o sea

$$\mathcal{L}\{F(kt)\} = \frac{1}{k} \mathcal{L}\{F(t)\}_{(s/k)} \quad (105.3)$$

106. Fórmulas de la derivación y de la integración. Derivando bajo el signo de integral, se tiene

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = - \int_0^{\infty} te^{-st} F(t) dt$$

o sea

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{F(t)\} = - \mathcal{L}\{tF(t)\} \quad (106.1)$$

(fórmula de la derivación). Aplicando esta relación a la función $F(t)/t$, resulta

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = - \mathcal{L}\{F(t)\}$$

e integrando con respecto a s

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = -\int_c^s \mathfrak{L}\{F(t)\} ds = \int_s^c \mathfrak{L}\{F(t)\} ds, \quad (106.2)$$

habiéndose indicado con c un número tal que, cuando $s = c$, se tenga $\mathfrak{L}\{F(t)/t\} = 0$. Pero por (103.4) se tiene que

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \frac{1}{s} \left[\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt} \frac{F(t)}{t}\right\} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t} \right]$$

y para que el producto del segundo miembro sea nulo para $s = c$, no pudiéndolo ser el factor entre paréntesis por la arbitrariedad de la función $F(t)$, tiene que serlo el factor $1/s$, resultando necesariamente $c = \infty$. Reemplazando en (106.2), resulta la *fórmula de la integración*

$$\boxed{\int_s^\infty \mathfrak{L}\{F(t)\} ds = \mathfrak{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}} \quad (106.3)$$

Como aplicación de esta fórmula, calculemos la transformada de la función $\text{sen } t/t$. Resulta por (106.3) y (103.8)

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\text{sen } t}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathfrak{L}\{\text{sen } t\} ds = \left[\text{arctg } s \right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } s,$$

es decir

$$\boxed{\mathfrak{L}\left\{\frac{\text{sen } t}{t}\right\} = \text{arccotg } s} \quad (106.4)$$

107. Transformada de la convolución. Una de las propiedades más útiles de la transformación de Laplace se expresa por el siguiente *teorema de Horn*: la transformada de la convolución $F(t) * G(t)$ de dos funciones $F(t)$ y $G(t)$ es igual al producto de las transformadas de cada una de ellas

$$\boxed{\mathfrak{L}\{F(t) * G(t)\} = \mathfrak{L}\{F(t)\} \mathfrak{L}\{G(t)\}} \quad (107.1)$$

En efecto, si aplicamos la relación fundamental (103.4) a la función (97.5), cuya derivada es $F(t)$, obtenemos

$$\mathfrak{L}\{F * 1\} = \frac{1}{s} \mathfrak{L}\{F\}.$$

Utilizando esta última relación, la (97.6) y las propiedades del producto integral, resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F*G\} &= \mathcal{L}\{F*[G'*1 + G(0)]\} = \mathcal{L}\{F*G'*1\} + \\ &+ \mathcal{L}\{F*G(0)\} = \mathcal{L}\{F*G'*1\} + G(0)\mathcal{L}\{F*1\} = \\ &= \frac{1}{s}[\mathcal{L}\{F*G'\} + G(0)\mathcal{L}\{F\}].\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene, siempre por (103.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G\} &= \mathcal{L}\{F\}\frac{1}{s}[\mathcal{L}\{G'\} + G(0)] = \frac{1}{s}[\mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G'\} + \\ &+ G(0)\mathcal{L}\{F\}].\end{aligned}$$

Restando los primeros y los últimos miembros de las dos relaciones anteriores, queda

$$\mathcal{L}\{F*G\} - \mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G\} = \frac{1}{s}[\mathcal{L}\{F*G'\} - \mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G'\}].$$

Como ésta es una identidad, que tiene que valer como quiera que se escoja la función G , no puede ser cierta a menos que sea siempre, para $F(t)$ y $G(t)$ transformables cualesquiera,

$$\mathcal{L}\{F*G\} - \mathcal{L}\{F\}\mathcal{L}\{G\} = 0,$$

lo que comprueba la (107.1).

108. Transformadas expresadas por desarrollos en serie.

En las aplicaciones del Cálculo Operacional es muy importante, además de determinar transformadas, poder *antitransformar*.

La fórmula general (102.6) para efectuar la antitransformación no es ciertamente de aplicación fácil, por lo que se prefiere, mientras sea posible, acudir a tablas que contengan listas de funciones y de sus transformadas; tales son las que resultan de las fórmulas directas obtenidas en el N° 103, la (105.2), la (106.4) y las que pueden deducirse de éstas aplicando las reglas generales del Cálculo Operacional. Estas listas, aparentemente limitadas a un conjunto reducido de funciones, pueden ampliarse notablemente al considerar la posibilidad de que $f(s)$ se exprese por un desarrollo en serie conveniente.

Por ejemplo si $f(s)$ se expresa por la serie de potencias negativas

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}, \quad (108.1)$$

por (103.7) resulta

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \quad (108.2)$$

y se demuestra que, mientras esta última función sea de orden exponencial, en el sentido aclarado en el N° 100, la (108.1) posee un radio de convergencia no nulo.

Otro caso interesante se relaciona con la desarrollabilidad en la serie de Dirichlet

$$a_0 e^{-b_0 s} + a_1 e^{-b_1 s} + a_2 e^{-b_2 s} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n s}$$

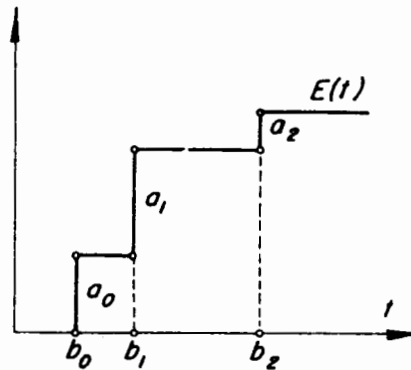
donde los coeficientes a_n y b_n son constantes, siendo los b_n positivos y ordenados en orden creciente

$$0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots$$

Ahora bien, supongamos que la función $f(s)$ es del tipo

$$f(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n s}; \quad (108.3)$$

vamos a comprobar que se trata de la transformada de la función escalonada $E(t)$, que adquiere el valor a_0 para $b_0 \leq t < b_1$, el valor $a_0 + a_1$ para $b_1 < t < b_2$, el valor $a_0 + a_1 + a_2$ para $b_2 < t < b_3$, y así sucesivamente (Hamburger). En efecto, por (103.2)



$$\mathcal{L}_{b_n, b_{n+1}} \{0\} = s \mathcal{L}_{b_n, b_{n+1}} \{1\} + e^{-b_{n+1}s} - e^{-b_n s}$$

y siendo el primer miembro nulo (ver nota a pie de pág. 182), resulta

$$\mathcal{L}_{b_n, b_{n+1}} \{1\} = \frac{1}{s} [e^{-b_n s} - e^{-b_{n+1}s}] \quad (108.4)$$

Por otro lado tenemos

$$\mathfrak{L}\{E(t)\} = \mathfrak{L}_{b_0, b_1}\{a_0\} + \mathfrak{L}_{b_1, b_2}\{a_0 + a_1\} + \mathfrak{L}_{b_2, b_3}\{a_0 + a_1 + a_2\} + \dots$$

y aplicando (108.4),

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{E(t)\} &= \frac{1}{s} [a_0(e^{-b_0s} - e^{-b_1s}) + (a_0 + a_1)(e^{-b_1s} - e^{-b_2s}) + \\ &\quad + (a_0 + a_1 + a_2)(e^{-b_2s} - e^{-b_3s}) + \dots] = \\ &= \frac{1}{s} [a_0 e^{-b_0s} - a_0 e^{-b_1s} + a_0 e^{-b_1s} + a_1 e^{-b_1s} - a_0 e^{-b_2s} - \\ &\quad - a_1 e^{-b_2s} + a_0 e^{-b_2s} + a_1 e^{-b_2s} + a_2 e^{-b_2s} - \dots]\end{aligned}$$

de donde efectuando simplificaciones resulta de inmediato que

$$E(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n s} \right\} \quad (108.5)$$

o sea que la función escalonada $E(t)$ es precisamente la antitransformada de la (108.3).

Por último, supongamos que $f(s)$ pueda desarrollarse en una serie de potencias del tipo

$$f(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{s-1}{s} \right]^n. \quad (108.6)$$

La antitransformada de esta función se liga con los polinomios de Laguerre. Se llama *polinomio de Laguerre de grado n* , siendo n entero positivo o nulo, la expresión

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} \quad (108.7)$$

Por ejemplo se tiene

$$L_0(t) = 1$$

$$L_1(t) = -t + 1$$

$$L_2(t) = \frac{1}{2} (t^2 - 4t + 2)$$

$$L_3(t) = \frac{1}{6} (-t^3 + 9t^2 - 18t + 6)$$

$$L_4(t) = \frac{1}{24} (t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24).$$

La transformada del polinomio $L_n(t)$ es, por (103.7)

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{L_n(t)\} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \mathfrak{L}\{t^k\} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{1}{s} \left[\frac{s-1}{s} \right]^n \end{aligned}$$

deduciéndose la última igualdad del desarrollo del binomio $(s-1)^n$:

$$\begin{aligned} (s-1)^n &= s^n - \binom{n}{1} s^{n-1} + \binom{n}{2} s^{n-2} - \dots + (-1)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} s^{n-k}. \end{aligned}$$

Luego

$$\mathfrak{L}\{L_n(t)\} = \frac{1}{s} \left[\frac{s-1}{s} \right]^n$$

y de aquí se deduce la *fórmula de Tricomi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{s-1}{s} \right]^n \right\} \quad (108.8)$$

que expresa formalmente la antitransformada de (108.6) por medio de un *desarrollo en serie de polinomios de Laguerre*. Se comprueba que la antitransformada (108.8) existe, siempre que la función $f(s)$ sea regular exteriormente a un círculo conveniente, con centro sobre el eje real.

109. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. En el párrafo 101 indicamos cómo se procede por medio del Cálculo Operacional a integrar ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes. Si los coeficientes son variables, el Cálculo Operacional puede también ser de grande utilidad. Veamos, como ejemplo, de resolver la ecuación

$$F''(t) + k^2 F(t) = G(t) \quad (109.1)$$

siendo $F(t)$ la función incógnita y $G(t)$ una función conocida. Pasando al campo transformado, queda por (103.5)

$$[s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)] + k^2 f(s) = g(s)$$

siendo $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$. De aquí, despejando $f(s)$,

$$f(s) = \frac{1}{s^2 + k^2} [g(s) + F'(0)] + F(0) \frac{s}{s^2 + k^2}. \quad (109.2)$$

Ahora se puede escribir

$$\frac{1}{s^2 + k^2} g(s) = \frac{1}{k} \left[\frac{k}{s^2 + k^2} g(s) \right]$$

y el término entre paréntesis es el producto de la transformada (103.8) de $\sin kt$ por la de $G(t)$. Por lo tanto, según (107.1) y (103.9), la antitransformada de (109.2) es

$$F(t) = \frac{1}{k} \sin kt * G(t) + \frac{F'(0)}{k} \sin kt + F(0) \cos kt$$

es decir por (97.1)

$$F(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \sin k(t-\tau) G(\tau) d\tau + \frac{F'(0)}{k} \sin kt + F(0) \cos kt. \quad (109.3)$$

Siendo que el empleo de la transformación de Laplace puede introducir soluciones extrañas, falta comprobar que $F(t)$ así determinada satisface efectivamente la ecuación (109.1). Aplicando la regla para derivar bajo el signo de integral *, llegamos a

$$F'(t) = \int_0^t \cos k(t-\tau) G(\tau) d\tau + F'(0) \cos kt - k F(0) \sin kt$$

$$F''(t) = -k \int_0^t \sin k(t-\tau) G(\tau) d\tau + G(t) - k F'(0) \sin kt - k^2 F(0) \cos kt.$$

* O sea que, si la función $\Phi(t)$ se expresa por la integral entre extremos variables

$$\Phi(t) = \int_{p(t)}^{q(t)} \varphi(t, \tau) d\tau,$$

su derivada es

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{p(t)}^{q(t)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \tau) d\tau + \varphi[t, q(t)] \frac{dq}{dt} - \varphi[t, p(t)] \frac{dp}{dt}.$$

Reemplazando esta expresión y la (109.3) en el primer miembro de la ecuación (109.1), se obtiene precisamente $G(t)$, lo que comprueba que dicha ecuación queda satisfecha.

110. Resolución de ecuaciones integrales. La transformación de Laplace resulta muy útil en la resolución de *ecuaciones integrales con convolución*, del tipo (98.5), que se presentan en el estudio de fenómenos hereditarios.

Empezaremos por la *ecuación de Volterra de primera especie* $G(t) = K(t) * F(t)$, es decir

$$G(t) = \int_0^t K(t-\tau)F(\tau)d\tau, \quad (110.1)$$

donde las funciones $G(t)$ y $K(t)$ se suponen conocidas, $F(t)$ incógnita. Aceptando que existan las transformadas

$$g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}, \quad k(s) = \mathcal{L}\{K(t)\}, \quad f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\},$$

vemos que, por (107.1), la ecuación (110.1) se transforma en

$$g(s) = k(s)f(s)$$

que en ocasiones puede ser de fácil integración. Como ejemplo, consideremos la *ecuación de Abel* (98.4), que escribiremos

$$G(t) = \int_0^t (t-\tau)^{-n} F'(\tau) d\tau \quad (110.2)$$

donde n es un número comprendido entre cero y 1. Por (103.12) se tiene $\mathcal{L}\{t^{-n}\} = \Gamma(1-n)/s^{1-n}$, mientras que la transformada de $F'(t)$ se puede expresar por (103.4). Así la transformada de Laplace de $G(t)$, de acuerdo con (110.2) y (107.1), queda

$$g(s) = \frac{\Gamma(1-n)}{s^{1-n}} [sf(s) - F(0)];$$

de donde

$$f(s) = \frac{F(0)}{s} + \frac{g(s)}{\Gamma(1-n)s^n}.$$

Si antitransformamos, recordando nuevamente la fórmula (103.12) además de la (103.6), obtenemos

$$F(t) = F(0) + \frac{1}{\Gamma(1-n)\Gamma(n)} t^{n-1} * G(t)$$

y por (72.3)

$$F(t) = F(0) + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} t^{n-1} * G(t). \quad (110.3)$$

Derivando la función así obtenida, hallamos $F'(t)$, que es la incógnita de la ecuación de Abel (110.2).

Las ecuaciones integrales de segunda especie

$$F(t) + \int_0^t K(t-\tau)F(\tau)d\tau = G(t).$$

se transforman en

$$f(s) + k(s)f(s) = g(s)$$

de donde, despejando, resulta

$$f(s) = \frac{g(s)}{1+k(s)}, \quad (110.4)$$

fórmula que expresa sencillamente la transformada de $F(t)$. Por ejemplo, sea la ecuación integral

$$F(t) + \int_0^t \operatorname{senh}(t-\tau)F(\tau)d\tau = mt \quad (110.5)$$

donde m es una constante. Recordando que, por las fórmulas (103.10) y (103.7),

$$k(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{senh} t\} = \frac{1}{s^2-1}, \quad g(s) = L\{mt\} = \frac{m}{s^2},$$

la (110.4) resulta

$$f(s) = \frac{m}{s^2 \left(1 + \frac{1}{s^2-1}\right)} = m \frac{s^2-1}{s^4} = m \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4}\right)$$

y por lo tanto se tendrá antitransformando por (103.7).

$$F(t) = m \left(t - \frac{t^3}{3!}\right).$$

Reemplazando en la ecuación (110.5), se comprueba fácilmente que esta última es efectivamente una solución.

111. Resolución de ecuaciones lineales en las derivadas parciales. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales puede resultar útil el empleo del Cálculo Operacional, en cuanto se consiga aprovechar su propiedad de cambiar la derivación en producto, para eliminar las derivadas con respecto a una de las variables independientes. Un ejemplo sencillo lo tenemos en la integración de la *ecuación de Laplace bidimensional*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad (111.1)$$

suponiéndose conocer los valores que la función $F(x, t)$ y su derivada primera con respecto a t adquieren para $t = 0$. Si aplicamos la transformación de Laplace siendo

$$f(x, s) = \mathcal{L}\{F(x, t)\},$$

resulta por (103.5) que (111.1) se transforma en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + s^2 f = sF(x, 0) + \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_{t=0}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria del segundo orden con respecto a la variable x . Integrando esta ecuación y antitransformando la función $f(x, s)$ obtenida, se llega a determinar la función $F(x, t)$ que resuelve (111.1).

Otras aplicaciones de la transformación de Laplace a la integración de ecuaciones diferenciales se verán en el capítulo siguiente.

CAPITULO V

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

I. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

112. Generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El objeto tradicional de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias es el siguiente: dada una ecuación de la forma

$$F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}] = 0 \quad (112.1)$$

(donde con los ápices se indican las sucesivas derivadas de y con respecto a x), integrarla determinando explícitamente una función y de la variable x y de una o más constantes arbitrarias $c_1, c_2, \dots$ que, reemplazada en la ecuación (112.1), la deje idénticamente satisfecha. Se pide además que la solución (o integral) tenga un grado de generalidad suficiente obteniéndose, de ser posible, una *fórmula que incluya todas las soluciones de la ecuación*, en términos finitos.

Esto no siempre se consigue; por tanto es usual contentarse con la determinación de la *integral general* de la ecuación, a saber una función

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (112.2)$$

de la variable independiente x y de n constantes arbitrarias $c_1, c_2, \dots, c_n$, que contiene a estas últimas de tal manera que, atribuyendo a ellas valores convenientes, sea posible satisfacer en cierto punto $x = x_0$ a condiciones del tipo

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \quad (112.3)$$

como quiera que se hayan fijado de antemano los valores $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ de la función y y de sus primeras $n - 1$ derivadas en x_0 . Estas se llaman *condiciones iniciales*. Llámense *integrales particulares* las que resultan de la integral general al dar valores a las constantes arbitrarias. El problema de integrar la (112.2) con las condiciones iniciales indicadas se llama *problema de Cauchy*, y se comprueba que, dentro de condiciones muy amplias para las integrales, este

problema admite una y tan sólo una solución para cada conjunto de valores (112.3). No se excluye la existencia de eventuales soluciones de la ecuación diferencial (112.1) que no puedan deducirse de ninguna manera de las (112.2) dando valores a las constantes arbitrarias (soluciones que se conocen bajo el nombre de *integrales singulares* de la ecuación); sólo se requiere que la integral general sea suficientemente flexible como para adaptarse a las condiciones iniciales (112.3). Por lo general se comprueba que, al conocerse la integral general de una ecuación diferencial, es posible resolver los principales problemas relacionados con la ecuación misma, por ejemplo el de determinar las soluciones de ella que satisfacen condiciones accesorias (o de frontera) de tipo diferente de las (112.3).

Sensiblemente también la determinación de la integral general de una ecuación diferencial es posible sólo para un número relativamente reducido de ecuaciones, y a veces, aunque sea realizable, se expresa por fórmulas tan complicadas que resultan de poca utilidad. Por lo indicado, se ha desarrollado recientemente una tendencia del Análisis Matemático en el sentido de intentar con diferentes métodos el estudio directo de las propiedades principales de las soluciones de la ecuación, tomando en cuenta las condiciones accesorias de cada caso. Se puede así obtener directamente alguna integral particular que interesa, o definir el comportamiento de las integrales en proximidad de puntos determinados, o bien cuando la variable tiende a ∞ (*comportamiento asintótico*), o simplemente ver si hay integrales que tienen características dadas o satisfacen a ciertas limitaciones.

En el presente capítulo analizaremos bajo este último punto de vista ciertos problemas relacionados con las *ecuaciones diferenciales lineales*, o sea las del tipo

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x). \quad (112.4)$$

Más especialmente se estudiarán las de *tipo homogéneo*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (112.5)$$

carentes de término independiente de la variable $y(x)$. Como es inmediato comprobar, las integrales de estas últimas ecuaciones gozan de las dos propiedades siguientes:

- a) Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son dos integrales de la ecuación (112.5), también su suma $y_1(x) + y_2(x)$ es integral de la misma ecuación.
- b) Si $y_1(x)$ es una integral de la ecuación indicada, también $cy_1(x)$ es integral, cualquiera que sea el factor constante c .

De lo anterior sigue que, si se conocen n integrales particulares independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$ $y_n(x)$ de la ecuación (112.5), una integral conteniendo n constantes arbitrarias puede ser

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (112.6)$$

y se comprueba que ésta es la integral general de la ecuación siempre que el determinante wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (112.7)$$

no sea idénticamente nulo. También se sabe que la integración de una ecuación diferencial lineal no homogénea (112.4) puede siempre reducirse a la de la ecuación homogénea correspondiente (112.5) por el método de variación de las constantes arbitrarias debido a Lagrange.

113. Resolución del problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Quiérase resolver el problema de Cauchy para la ecuación diferencial lineal homogénea del primer orden

$$y' = p(x)y. \quad (113.1)$$

o sea determinar su integral bajo la condición inicial de que para $x = a$ sea $y = b$. Traslademos el origen de las coordenadas al punto (a, b) , escribiendo

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad P(X) = p(x), \quad Q(X) = bp(x).$$

Con esto la ecuación (113.1) se transforma en la ecuación no homogénea

$$Y' = P(X)Y + Q(X)$$

con las condiciones iniciales de que sea $Y = 0$ para $X = 0$. Integrando se tiene

$$Y(X) = \int_0^X P(\xi) Y(\xi) d\xi + R(X) \quad (113.2)$$

donde

$$R(X) = \int_0^X Q(\xi) d\xi$$

es una función conocida. La ecuación diferencial (113.1) se ha transformado así en una ecuación integral de Volterra de segunda especie (95.7).

Un resultado análogo se obtiene para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Limitémonos por sencillez a considerar la *ecuación del segundo orden*

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad (113.3)$$

cuyas condiciones iniciales supondremos haber reducido, por una transformación de coordenadas análoga a la anterior, a ser

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{para} \quad x = 0.$$

Si efectuamos la sustitución

$$y'' = z(x), \quad (113.4)$$

obtenemos integrando sucesivamente

$$y' = \int_0^x z(\xi) d\xi \quad (113.5)$$

$$y = \int_0^x \left[\int_0^\eta z(\xi) d\xi \right] d\eta. \quad (113.6)$$

Esta última expresión puede escribirse por (97.5) y (97.4)

$$y = [z * 1] * 1 = z * [1 * 1].$$

Pero se tiene

$$1 * 1 = \int_0^x dx = x$$

y luego la integral doble (113.6) equivale a la integral simple

$$y = z * x = \int_0^x (x - \xi) z(\xi) d\xi. \quad (113.7)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (113.3) las expresiones (113.4), (113.5) y (113.7) de y'' , y' , y , se obtiene finalmente

$$z(x) = \int_0^x p(x)z(\xi)d\xi + \int_0^x q(x)(x-\xi)z(\xi)d\xi + r(x)$$

o sea

$$z(x) = \int_0^x [p(x) + (x-\xi)q(x)]z(\xi)d\xi + r(x). \quad (113.8)$$

Esta última es una ecuación de Volterra de segunda especie en la incógnita $z(x)$, con núcleo

$$K(x, \xi) = -[p(x) + (x-\xi)q(x)].$$

Por medio de los razonamientos anteriores, que pueden generalizarse a ecuaciones de cualquier orden, se comprueba que *el problema de Cauchy relativo a una ecuación diferencial lineal homogénea se puede reducir al problema análogo relativo a una ecuación integral de Volterra de segunda especie*. En el N° 96 se comprobó que este último tiene siempre solución y se expresó la integral general por medio de la serie convergente (96.6). Luego también *el problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales lineales es siempre resoluble, y poseemos una fórmula que nos da su solución*.

114. Formas reducidas de las ecuaciones lineales del segundo orden. Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea del segundo orden

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0. \quad (114.1)$$

Si sus coeficientes fuesen tales que se tuviese idénticamente

$$B(x) = A'(x), \quad (114.2)$$

la ecuación podría escribirse bajo la forma

$$\frac{d}{dx} [A(x)y'] + C(x)y = 0. \quad (114.3)$$

Las ecuaciones del tipo (114.3), que se tratan más fácilmente que las (114.1), se llaman *ecuaciones autoadjuntas*.

Ahora es interesante observar que *cualquier ecuación (114.1) puede transformarse en otra del tipo autoadjunto con sólo multiplicar*

todos sus términos por un factor $H(x)$ conveniente. En efecto, supuesta efectuada dicha multiplicación, la ecuación (114.1) se hace

$$A(x)H(x)y'' + B(x)H(x)y' + C(x)H(x)y = 0 \quad (114.4)$$

y la condición (114.2) se transforma en

$$B(x)H(x) = \frac{d}{dx} [A(x)H(x)]$$

o sea desarrollando y dividiendo todo entre $A(x)H(x)$

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = -\frac{A'(x)}{A(x)} + \frac{B(x)}{A(x)}$$

e integrando

$$\ln H(x) = -\ln A(x) + \int \frac{B(x)}{A(x)} dx.$$

$$H(x) = \frac{1}{A(x)} e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx} \quad (114.5)$$

Por tanto si elegimos para $H(x)$ precisamente la expresión (114.5), la ecuación (114.4) resulta autoadjunta, y se escribe

$$\boxed{\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y = 0} \quad (114.6)$$

donde

$$p(x) = e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx}, \quad q(x) = \frac{C(x)}{A(x)} e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx} \quad (114.7)$$

Si se supone que los coeficientes $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ de (114.1) sean funciones continuas de x y que además sea $A(x) \neq 0$, la expresión obtenida para $p(x)$ asegura que $p(x)$ no sólo es continua, sino que es una función siempre positiva (por ser una exponencial) y que su derivada primera es continua, siendo

$$p'(x) = \frac{B(x)}{A(x)} e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx}$$

Otra observación de grande importancia es que la ecuación (114.6) se puede siempre transformar en otra análoga con coefi-

ciente $p(x)$ idénticamente igual a la unidad (y por tanto carente de término en la derivada primera)

$$\boxed{\frac{d^2y}{d\xi^2} + Q(\xi)y = 0} \quad (114.8)$$

con tal de escoger la nueva variable ξ de modo conveniente. Precisamente es bastante tomar

$$\xi = \int_0^x \frac{dx}{p(x)}, \quad (114.9)$$

con lo que resulta

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p(x)}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{d}{d\xi}$$

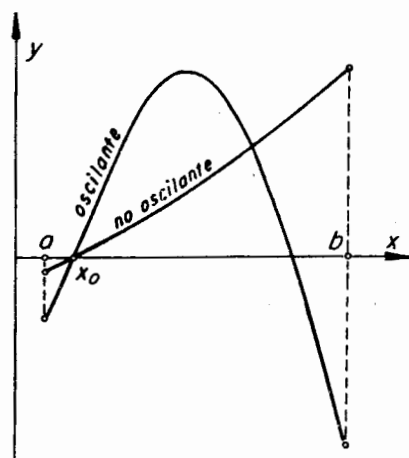
y reemplazando en (114.6)

$$\frac{1}{p(x)} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{dy}{d\xi} \right] + q(x)y = 0$$

que es la ecuación (114.8), siempre que se ponga

$$Q(\xi) = p(x)q(x). \quad (114.10)$$

115. Características oscilantes. Llámense "características" de una ecuación diferencial (112.1) las curvas que representan en el plano (x, y) las ecuaciones $y = y(x)$ de sus integrales particulares.



Es muy importante poder determinar en ciertos casos cuáles características de una ecuación diferencial lineal ordinaria del segundo orden tienen un desarrollo oscilante y cuáles no lo tienen. Con más exactitud el problema se plantea así: considérense todas las características que cortan el eje x en un punto determinado $x = x_0$; serán oscilantes en el intervalo (a, b) las que volverán a cortar el eje x por lo menos en otro punto del intervalo, no oscilantes las que no lo

vuelven a cortar. Las intersecciones de las características con el eje x son los ceros de la integral $y(x)$ correspondiente; por tanto el problema de comprobar la oscilación equivale a buscar criterios para determinar si una integral $y(x)$ para la cual $y(x_0) = 0$ tiene o no tiene otros ceros en el intervalo (a, b) .

Un criterio importante es éste: si en una ecuación diferencial del tipo (114.6) el coeficiente $p(x)$ es siempre positivo, no hay integrales oscilantes dentro de todo intervalo (a, b) en que sea siempre $q \leq 0$. En efecto, si consideramos la ecuación bajo su forma equivalente (114.8), vemos que las condiciones $p(x) > 0$, $q(x) \leq 0$ implican por (114.10) que ha de ser

$$Q(\xi) \leq 0$$

y por tanto, tomando en cuenta la (114.8), resulta

$$y \frac{d^2 y}{d\xi^2} = -Q(\xi) y^2 \geq 0$$

o sea que la y y su segunda derivada tienen el mismo signo, lo que significa que las características dirigen siempre su convexidad hacia el eje ξ , y luego también hacia el eje x que le es paralelo (ya que por (114.9) se tiene $\xi = \text{cte}$ cuando $x = \text{cte}$); y esto no sería posible para una característica que tuviese más que una intersección con el eje x .

116. Teorema de comparación de Sturm. Para el estudio de los ceros de las integrales de ecuaciones del tipo (114.6) resulta frecuentemente útil el *teorema de comparación de Sturm*, que permite sacar conclusiones acerca de la posición de dichos ceros, por comparación de la ecuación diferencial en estudio con otra que se sepa integrar explícitamente, o cuyos ceros ya se hayan localizado:

Teorema de Sturm. Sean dos ecuaciones diferenciales

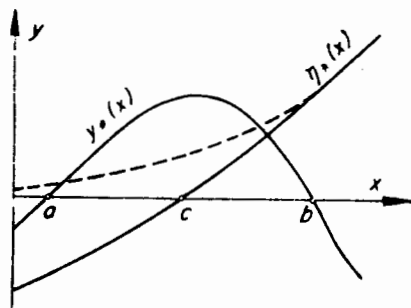
$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q_1(x)y = 0, \quad \frac{d}{dx} [p(x)\eta'] + q_2(x)\eta = 0 \quad (116.1)$$

que tienen el mismo coeficiente $p(x)$, pero tales que sea

$$p(x) > 0, \quad q_2(x) \geq q_1(x). \quad (116.2)$$

Entre dos ceros sucesivos de una integral de la primera ecuación cae siempre por lo menos un cero de cualquier integral de la segunda.

Para la demostración, supongamos que $y_*(x)$ sea la integral de la primera ecuación que se considera y que $x = a$, $x = b$ sean sus dos ceros sucesivos. Ya que toda integral de una ecuación diferencial



lineal homogénea se puede multiplicar por un factor constante cualquiera sin dejar por eso de satisfacer la ecuación, podemos suponer que (previa multiplicación eventual por -1) $y_*(x)$ sea siempre positiva entre a y b , con lo que se tendrá también (ver la figura) que

$$y'_*(a) > 0, \quad y'_*(b) < 0. \quad (116.3)$$

Supongamos ahora por reducción al absurdo que existe una integral $\eta_*(x)$ de la segunda ecuación que no tiene ceros entre a y b , siendo por ejemplo positiva en todo el intervalo incluyendo los extremos (línea punteada de la figura).

Reemplacemos en (116.1) las integrales y_* y η_* a las variables, multipliquemos la primera ecuación por η_* y la segunda por y_* , y restemos. Obtendremos

$$\begin{aligned} [q_2(x) - q_1(x)] y_* \eta_* &= \eta_* \frac{d}{dx} [p(x) y'_*] - y_* \frac{d}{dx} [p(x) \eta'_*] = \\ &= \frac{d}{dx} [p(x) (\eta_* y'_* - y_* \eta'_*)] \end{aligned}$$

e integrando entre a y b

$$\begin{aligned} \int_a^b [q_2(x) - q_1(x)] y_*(x) \eta_*(x) dx &= \\ &= [p(x) (\eta_* y'_* - y_* \eta'_*)]_a^b \end{aligned} \quad (116.4)$$

Siendo que por hipótesis $y_*(a) = y_*(b) = 0$, el segundo miembro vale

$$p(b) \eta_*(b) y'_*(b) - p(a) \eta_*(a) y'_*(a)$$

y por tanto es negativo (en vista de (116.2) y (116.3) y por ser $\eta_*(x) > 0$). Por el contrario, siempre por las hipótesis (116.2), el primer miembro es positivo, de modo que la igualdad (116.4) es imposible. A la misma conclusión habríamos llegado suponiendo $\eta_*(x) < 0$ en (a, b) . Concluyendo, es absurdo suponer que la característica $\eta_*(x)$ no corte al eje x ; si tendrá que cortarlo en un punto c comprendido entre a y b , y esto comprueba el teorema de Sturm.

Si aplicamos el teorema de Sturm a la comparación de una ecuación consigo misma (cuando la segunda relación (116.2) se reemplaza por la identidad $q_2(x) \equiv q_1(x)$), obtenemos como corolario que *entre dos ceros sucesivos de cierta integral de una ecuación diferencial lineal del segundo orden cae siempre un cero de toda otra integral, linealmente independiente de la primera*. Hay más: se puede asegurar que allí cae tan sólo un cero de la otra, porque si cayeran dos, entre ellos no caería ningún cero de la primera, contrariamente a lo afirmado por el teorema. En otras palabras, llegamos al siguiente *teorema de la separación: los ceros de dos integrales linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal del segundo orden se separan mutuamente*.

117. Distancia mínima entre ceros de una integral. *Los ceros de una integral de una ecuación diferencial lineal homogénea del segundo orden son todos simples*, es decir que sus características no pueden ser tangentes al eje x : si lo alcanzan, lo cortan. En efecto, si una característica $y = y(x)$ fuese tangente al eje x en un punto $x = x_0$, sería

$$y(x_0) = 0 \quad y'(x_0) = 0$$

Pero estas dos condiciones de frontera ya definen una integral de la ecuación: la que es idénticamente nula; y, en vista de la unicidad de solución del problema de Cauchy, no puede haber otra distinta.

Este resultado se puede interpretar en el sentido de que la distancia entre dos ceros consecutivos de una integral no puede nunca reducirse a cero. Pero hay más: no sólo esta distancia no puede anularse, sino tampoco puede hacerse demasiado pequeña, ya que

siempre es posible determinar una *limitación inferior* para ella. Esta es una importante consecuencia del teorema de Sturm, que vamos a demostrar.

Supuesta la ecuación diferencial escrita bajo la forma (114.8), o sea, reemplazando ξ por x .

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)y = 0. \quad (117.1)$$

y supuesto además que la estudiamos dentro de un intervalo en el cual el coeficiente $Q(x)$ es positivo, de modo que existen dos números positivos m^2 y M^2 , el primero no mayor del segundo, tales que sea en todo el intervalo

$$m^2 \leq Q(x) \leq M^2. \quad (117.2)$$

el teorema de Sturm sugiere comparar la ecuación (117.1) con las dos ecuaciones diferenciales de coeficiente constante

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + M^2y = 0. \quad (117.3)$$

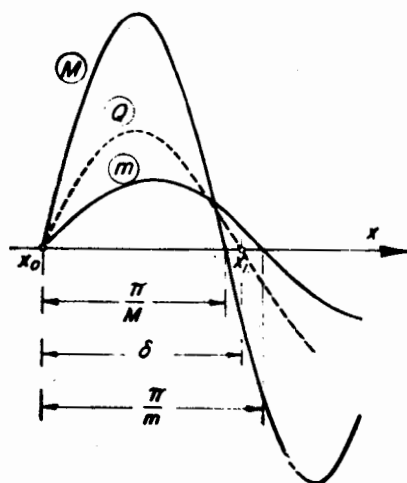
Estas son ecuaciones del tipo llamado del *oscilador armónico*, siendo sus integrales generales respectivamente

$$y = A \sin m(x - a), \quad y = B \sin M(x - b)$$

con A, a, B, b constantes arbitrarias. Si en ambos casos consideramos precisamente esas integrales que tienen un cero en $x = x_0$, sus demás ceros estarán respectivamente en

$$x_0 + \frac{k\pi}{m}, \quad x_0 + \frac{k\pi}{M}$$

con k entero. Ahora por el teorema de Sturm, entre dos ceros consecutivos x_0 y x_1 de una integral de la ecuación (117.1) (curva Q de la figura) debe de caer un cero de cualquier integral de la segunda



ecuación (117.3) (curva M), y éste será el primero después de x_0 , o sea el punto $x_0 + \pi/M$. Análogamente entre x_0 y $x_0 + \pi/m$, ceros consecutivos de la integral de la primera ecuación (117.3) (curva m), debe de caer un cero de la característica Q , y luego allí cae x_1 . Por tanto subsisten las desigualdades

$$x_0 + \frac{\pi}{M} \leq x_1 \leq x_0 + \frac{\pi}{m},$$

o sea si llamamos

$$\delta = x_1 - x_0$$

la distancia entre los dos ceros x_0 y x_1 de la integral considerada de la ecuación (117.1), resulta

$$\boxed{\pi/M \leq \delta \leq \pi/m} \quad (117.4)$$

Esta fórmula establece precisamente *limitaciones inferior y superior de la distancia entre ceros consecutivos de cualquier integral*.

De la limitación superior podemos deducir consecuencias interesantes. Si la condición

$$Q(x) \geq m^2 \quad (117.5)$$

está satisfecha en un intervalo de longitud no menor que $2\pi/m$, en el intervalo tendrán que caer a lo menos dos ceros de cualquier integral de la ecuación, y por tanto éstas serán todas oscilantes. Más generalmente, el número N_h de ceros de una integral cualquiera de la ecuación diferencial considerada, que caen dentro de un intervalo de amplitud h en que esté satisfecha la condición (117.5), ha de ser

$$N_h \geq h \frac{m}{\pi} - 1. \quad (117.6)$$

Como ejemplo de aplicación de las limitaciones (117.4), consideremos la *ecuación de Bessel de índice n*

$$\boxed{\frac{d}{dx} (xy') + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0} \quad (117.7)$$

siendo n una constante que se suele suponer positiva, ecuación cuyas integrales, llamadas *funciones de Bessel*, se determinarán en el

Nº 119. Es posible reducirla a la forma (117.1) por medio de la sustitución (114.9), o tan sólo con poner

$$\sqrt{x} y = z, \quad (117.8)$$

con lo que resulta

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}, \quad y' = \frac{z' - \frac{1}{2} \frac{z}{x}}{\sqrt{x}}$$

de donde, reemplazando en (117.7) con fáciles simplificaciones, se obtiene

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(1 + \frac{1/4 - n^2}{x^2}\right) z = 0 \quad (117.9)$$

que es precisamente del tipo (117.1) con

$$Q(x) = 1 + \frac{1/4 - n^2}{x^2}. \quad (117.10)$$

Este coeficiente se vuelve infinitamente grande para $x = 0$. Para excluir este punto excepcional, consideraremos valores de la variable x mayores que cierto número positivo γ .

Si se tiene $n^2 \leq 1/4$, resulta entonces

$$1 \leq Q(x) \leq 1 + \frac{1/4 - n^2}{\gamma^2}$$

y esto por (117.2) y (117.4) implica que, para $x \geq \gamma$, la distancia δ entre dos ceros sucesivos de una función de Bessel está limitada por

$$\pi \left[1 + \frac{1/4 - n^2}{\gamma^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \leq \delta \leq \pi.$$

resultando en particular $\delta = \pi$ cuando $n^2 = 1/4$; esto era de esperarse, ya que entonces la (117.9) se hace

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + z = 0$$

con integral general

$$z = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

En el caso de $n^2 > 1/4$, para que $Q(x)$ se conserve positivo tiene que ser

$$\gamma > \sqrt{n^2 - 1/4}.$$

lo que da

$$0 < 1 + \frac{1/4 - n^2}{\gamma^2} \leq Q(x) \leq 1$$

$$\pi \leq \delta \leq \pi \left(1 + \frac{1/4 - n^2}{\gamma^2} \right)^{-1/2}$$

De lo anterior se desprende que, siempre que sea $x \geq \gamma$, $Q(x)$ será mayor que una cantidad positiva, y por tanto la desigualdad (117.5) estará satisfecha en un intervalo tan grande como se quiera a la derecha de $x = \gamma$. Por otro lado la separación δ entre ceros está limitada superiormente. Esto permite concluir que *toda integral de la ecuación de Bessel está representada por una curva oscilante provista de infinitos ceros, cuya distancia tiende a π para $x \rightarrow \infty$ (o sea para $\gamma \rightarrow \infty$, ya que entonces la variable*

$$\left[1 + \frac{1/4 - n^2}{\gamma^2} \right]^{-1/2}$$

tiende a 1).

118. Estabilidad de las integrales. Se dice que una integral de cierta ecuación diferencial es estable, si se mantiene limitada cuando la variable independiente tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. En muchas aplicaciones es de suma importancia decidir si todas las integrales de cierta ecuación son estables. Para las ecuaciones del tipo (117.1) tiene mucha utilidad para ese objeto el siguiente teorema de Ascoli, que no vamos a demostrar: *Si todas las integrales de la ecuación*

$$y'' + R(x)y = 0 \quad (118.1)$$

son estables para $x \rightarrow \infty$, entonces también todas las integrales de la ecuación

$$y'' + [R(x) + S(x)]y = 0$$

son estables para $x \rightarrow \infty$, siempre que exista y sea finita la integral

$$\int_{x_0}^{\infty} |S(x)| dx,$$

indicando x_0 una abscisa fija cualquiera.

Si observamos que la ecuación del oscilador armónico

$$y'' + k^2 y = 0$$

tiene todas sus integrales de tipo sinusoidal, y por tanto estables, el teorema de Ascoli permite concluir que, si el coeficiente $Q(x)$ de la ecuación (117.1) tiende al límite k^2 para $x \rightarrow \infty$ y existe la integral

$$\int_{x_0}^{\infty} |Q(x) - k^2| dx,$$

entonces todas las integrales de la ecuación (117.1) son estables para $x \rightarrow \infty$.

En particular se halla en esta condición la forma reducida (117.9) de la ecuación de Bessel, ya que, tomando $k = 1$, resulta de (117.10)

$$\int_{x_0}^{\infty} |Q(x) - 1| dx = \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{1/4 - n^2}{x^2} \right| dx = \left| \frac{1/4 - n^2}{x_0} \right|.$$

Luego todas las integrales de la ecuación de Bessel, que según sabemos son infinitamente oscilantes, son estables para $x \rightarrow \infty$.

119. La ecuación y las funciones de Bessel. A continuación nos proponemos integrar directamente la ecuación de Bessel (117.7), con las condiciones de frontera de que $y(0)$ sea nula y $y'(0)$ sea finita.

Si desarrollamos la derivación del primer término de (117.7) y dividimos entre x , obtenemos

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (119.1)$$

Efectuemos la sustitución

$$x^n y = Z(x), \quad (119.2)$$

de donde resulta

$$y = x^{-n} Z \quad (119.3)$$

$$y' = -nx^{-(n+1)} Z + x^{-n} Z' \quad (119.4)$$

$$y'' = n(n+1)x^{-(n+2)} Z - 2nx^{-(n+1)} Z' + x^{-n} Z''.$$

Reemplazando en (119.1), ésta se transforma en

$$xZ'' + (1 - 2n)Z' + xZ = 0. \quad (119.5)$$

Esta ecuación diferencial lineal en $Z(x)$ tiene la ventaja sobre la (119.1) de que sus coeficientes son funciones lineales de la variable x .

Apliquemos la transformación de Laplace entre el campo de la variable x y el de una nueva variable s , escribiendo $\mathfrak{L}\{Z(x)\} = z(s)$ y observando que $Z(0)$ y $Z'(0)$ son nulas, como resulta al reemplazar en (119.3) y (119.4) las condiciones iniciales para $y(0)$ y $y'(0)$. Tomando en cuenta las propiedades (106.1), (103.5) y (103.4) de la transformación de Laplace, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{xZ''\} &= -\frac{d}{ds} \mathfrak{L}\{Z''\} = -\frac{d}{ds} (s^2 z) = -2sz - s^2 \frac{dz}{ds} \\ \mathfrak{L}\{Z'\} &= sz \\ \mathfrak{L}\{xZ\} &= -\frac{dz}{ds}, \end{aligned}$$

así que la transformada de la ecuación (119.5) queda la ecuación diferencial del primer orden

$$(s^2 + 1) \frac{dz}{ds} + (1 + 2n)sz = 0.$$

Separando las variables, obtenemos

$$\frac{dz}{z} = -(1 + 2n) \frac{s}{s^2 + 1} ds$$

e integrando

$$z = c(s^2 + 1)^{-\frac{2n+1}{2}} \quad (119.6)$$

siendo c una constante arbitraria. Ahora hay que antitransformar para determinar $Z(x)$. Conviene proceder por el método de desarrollo en serie de potencias negativas, explicado en el N° 108. Escribiremos la (119.6) como sigue:

$$z = c(s^2)^{-\frac{2n+1}{2}} (1 + s^{-2})^{-\frac{2n+1}{2}} = cs^{-(2n+1)} (1 + s^{-2})^{-\frac{2n+1}{2}}$$

y desarrollando la potencia del binomio

$$z = \frac{c}{s^{2n+1}} \left[1 - \frac{2n+1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!} \frac{2n+1}{2} \frac{2n+3}{2} \frac{1}{s^4} - \dots \right].$$

o bien, dividiendo y multiplicando todo por $\Gamma(2n+1)$ y tomando en cuenta la propiedad factorial (72.1) de la función gamma,

$$\begin{aligned} z &= \frac{c}{\Gamma(2n+1)} \left[\frac{\Gamma(2n+1)}{s^{2n+1}} - \frac{1}{2(2n+2)} \frac{\Gamma(2n+3)}{s^{2n+3}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!4(2n+2)(2n+4)} \frac{\Gamma(2n+5)}{s^{2n+5}} - \dots \right] = \\ &= \frac{c}{\Gamma(2n+1)} \left[\frac{\Gamma(2n+1)}{s^{2n+1}} - \frac{1}{2^2(n+1)} \frac{\Gamma(2n+3)}{s^{2n+3}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma(2n+5)}{s^{2n+5}} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Pasando a la antitransformada, en base a la fórmula (103.12), obtenemos

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{c}{\Gamma(2n+1)} \left[x^{2n} - \frac{1}{2^2(n+1)} x^{2n+2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)} x^{2n+4} - \dots \right], \end{aligned}$$

y reemplazando en (119.2), resulta para la integral $y(x)$ la expresión

$$y(x) = \frac{cx^n}{\Gamma(2n+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)} - \dots \right]. \quad (119.7)$$

Se define como *función de Bessel* (o *función cilíndrica*) de *primera especie de índice n* , y se escribe $J_n(x)$, la función

$$J_n(x) = \left(\frac{1}{2} x \right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{(\frac{1}{2} x)^2}{1! \Gamma(n+2)} + \frac{(\frac{1}{2} x)^4}{2! \Gamma(n+3)} - \dots \right] \quad (119.8)$$

Comparando con (119.7), se obtiene

$$y(x) = c \frac{2^n \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} J_n(x). \quad (119.9)$$

La constante arbitraria c , cuya presencia se justifica en cuanto, siendo la ecuación de Bessel homogénea, la integral $y(x)$ queda indeter-

minada por un factor constante, se puede escribir, introduciendo una nueva constante k_n ,

$$c = k_n \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1)} \quad (119.10)$$

con lo que la (119.9) se hace simplemente

$$y(x) = k_n J_n(x). \quad (119.11)$$

La función cilíndrica $J_n(x)$, multiplicada por una constante arbitraria k_n , resuelve por tanto la ecuación de Bessel (119.1). Es importante notar que ésta no es la única integral, existiendo otra linealmente independiente, llamada *función de Bessel de segunda especie*, de la cual no nos ocuparemos.

La serie que aparece en la fórmula (119.8) que define las funciones de Bessel, es absolutamente convergente cualquiera que sea el índice n . En efecto, llamados u_i, u_{i+1} dos términos consecutivos de la serie, resulta

$$\left| \frac{u_{i+1}}{u_i} \right| = \frac{(\frac{1}{2}x)^2}{(i+1)(n+i+1)}$$

y esta expresión tiende a cero cuando $i \rightarrow \infty$. Para dar un ejemplo de aplicación de la (119.8), calcularemos la función $J_{\frac{1}{2}}(x)$. Se tiene

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{(\frac{1}{2}x)^2}{1! \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{(\frac{1}{2}x)^4}{2! \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} - \dots \right]$$

y factorizando en la serie entre paréntesis la expresión

$$\frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}x}$$

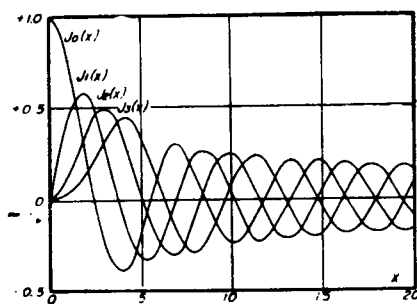
(recuérdese la fórmula (72.4)), queda simplemente

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right]$$

o sea por (45.2)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x. \quad (119.12)$$

Se trata de una *sinusoide, amortiguada proporcionalmente a $\sqrt{x}$* . Las demás funciones de Bessel tienen un aspecto análogo a ésta. En la gráfica se han representado las funciones $J_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3$. Se ven claramente en ella la separación mutua de los ceros de dife-



rentes integrales (Nº 116), las infinitas oscilaciones de cada integral (Nº 117), y su estabilidad para $x \rightarrow \infty$ (Nº 118).

Finalmente observaremos de paso que los resultados que acabamos de obtener llevan a una importante fórmula de Cálculo Operacional. En efecto escribiendo que la función z dada por (119.6) es

la transformada de Laplace de la función $Z = x^n y$, que por (119.11) se escribe

$$Z(x) = x^n k_n J_n(x),$$

tomando en cuenta la (119.10) y dividiendo ambos miembros entre k_n , se obtiene

$$\mathfrak{L}\{x^n J_n(x)\} = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1)} (s^2 + 1)^{-\frac{2n+1}{2}} \quad (119.13)$$

En particular para $n = 0$ se tiene la útil fórmula de antitransformación

$$J_0(x) = \mathfrak{L}^{-1}\{(s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\} \quad (119.14)$$

120. El problema de Sturm-Liouville. Hemos estudiado el problema de Cauchy relativo a las ecuaciones diferenciales lineales del segundo orden. Queremos referirnos ahora a otro problema de frontera muy importante en las aplicaciones, el de Sturm-Liouville. Este resulta de asociar a la ecuación (114.6)

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y = 0 \quad (120.1)$$

las condiciones siguientes: dadas dos constantes A y A' no ambas nulas y otras dos constantes B y B' no ambas nulas, buscar esas integrales $y(x)$ de la ecuación que, para los valores (finitos) $x = a$, $x = b$ de la variable independiente, satisfacen las condiciones de frontera

$$\boxed{\begin{aligned} Ay(a) + A'y'(a) &= 0 \\ By(b) + B'y'(b) &= 0 \end{aligned}} \quad (120.2)$$

Supuesto que se conocen dos integrales linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ecuación (120.1), pero que no satisfacen necesariamente las condiciones de frontera que acabamos de mencionar, se sabe de la teoría general recordada en el N° 112 que todas las demás integrales (y luego en particular las que satisfacen las condiciones (120.2)) están contenidas en la combinación

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (120.3)$$

siendo C_1 y C_2 dos constantes arbitrarias. Para que una integral (120.3) satisfaga las condiciones (120.2), los valores correspondientes de C_1 , C_2 deben de ser tales que

$$\begin{cases} C_1[Ay_1(a) + A'y_1'(a)] + C_2[Ay_2(a) + A'y_2'(a)] = 0 \\ C_1[By_1(b) + B'y_1'(b)] + C_2[By_2(b) + B'y_2'(b)] = 0. \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones homogéneas de primer grado en las incógnitas C_1 y C_2 ; condición necesaria y suficiente para que sea resoluble es que el determinante Δ de los coeficientes sea nulo, o sea que

$$\Delta = \begin{vmatrix} Ay_1(a) + A'y_1'(a) & Ay_2(a) + A'y_2'(a) \\ By_1(b) + B'y_1'(b) & By_2(b) + B'y_2'(b) \end{vmatrix} = 0. \quad (120.4)$$

Sólo bajo esta condición es posible satisfacer simultáneamente las ecuaciones (120.1) y (120.2), o sea hay posibilidad de que se tengan soluciones continuas y con su derivada también continua del problema de Sturm-Liouville, además de la solución $y(x) \equiv 0$ que evidentemente siempre existe, por ser las (120.1), (120.2) todas homogéneas.

El conocimiento de este resultado, de interés teórico, no se presta a aplicaciones prácticas, en cuanto no hay reglas que nos ayuden a individualizar, entre todas las integrales de la ecuación (120.1), precisamente a las que satisfacen la (120.4). Dada una ecuación diferencial de ese tipo, queda luego sumamente difícil averiguar si el problema de Sturm-Liouville resultante de su asociación con condiciones de frontera del tipo de las (120.2) admite o no admite solución. Como además en línea general dicha solución no existe, el interés de los matemáticos se ha dirigido más bien hacia el estudio de ecuaciones diferenciales del mismo tipo de la (120.1), pero en las que, análogamente a lo que se hizo al estudiar ecuaciones integrales (Nº 96), *se deja libertad a los coeficientes de variar en función de un parámetro auxiliar λ , buscando a un mismo tiempo reglas para determinar para qué valores de λ el problema de Sturm-Liouville es resolvable.*

Las ecuaciones de este tipo que tienen más interés en las aplicaciones son las que se pueden representar bajo la forma

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0 \quad (120.5)$$

siendo el coeficiente de y una expresión que depende linealmente de λ . Se supone además por lo general que $r(x)$ sea una función *siempre positiva* en el intervalo (a, b) . A continuación vamos a comprobar que el problema de Sturm-Liouville para ecuaciones (120.5) asociadas con las condiciones (120.2), puede reducirse a la resolución de una ecuación integral conveniente.

121. Función de Green y ecuación integral relativa. Póngase para abreviar

$$L\{y\} = \frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y, \quad (121.1)$$

con lo que la ecuación (120.5) se escribirá simplemente

$$L\{y\} = -\lambda r(x)y. \quad (121.2)$$

Asociemos esta ecuación con la (120.1), que es la (120.5) correspondiente a $\lambda = 0$, que escribiremos (llamando ahora $z(x)$ su variable)

$$L\{z\} = \frac{d}{dx} [p(x)z'] + q(x)z = 0. \quad (121.3)$$

Supondremos que (121.3) no admita solución (continua con su derivada primera) del problema de Sturm-Liouville, fuera que la idénticamente nula $z(x) \equiv 0$. Tomando en cuenta la (121.1), obtenemos

$$\begin{aligned} zL\{y\} - yL\{z\} &= z \frac{d}{dx} (py') - y \frac{d}{dx} (pz') = \\ &= \frac{d}{dx} [p(zy' - yz')]. \end{aligned}$$

Pero el primer miembro es simplemente $zL\{y\}$, debido a la igualdad (121.3), de modo que resulta

$$zL\{y\} = \frac{d}{dx} [p(zy' - yz')]. \quad (121.4)$$

Hemos dicho que la ecuación (121.3) no admite soluciones $z(x)$ no idénticamente nulas, que sean continuas con derivada primera también continua y que satisfagan las condiciones de frontera (120.2). Admitamos por el momento (lo que comprobaremos más adelante) que *existe una solución $z(x)$ del problema de Sturm-Liouville continua, pero cuya derivada tiene una discontinuidad en el punto $x = \xi$* , y supongamos que sea precisamente esa z la que aparece en la fórmula (121.4). Si integramos esa fórmula entre los extremos a y b , recordando que, si una función $F'(x)$ posee una discontinuidad para $x = \xi$ en el intervalo (a, b) , pero su integral es continua, se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{\xi-\epsilon} + \int_{\xi+\epsilon}^b F'(x) dx \right] = \\ &= \left[F(x) \right]_a^b - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F(\xi + \epsilon) - F(\xi - \epsilon)], \end{aligned}$$

obtenemos

$$\int_a^b zL\{y\} dx = \left[p(zy' - yz') \right]_a^b - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[p(zy' - yz') \right]_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon}. \quad (121.5)$$

Por otro lado admítase que no sólo $z(x)$, sino también $y(x)$ satisfaga las condiciones de frontera (120.2); será

$$\left[p(zy' - yz') \right]_{x=a} = p(a) \left[-z(a) \frac{A}{A'} y(a) + y(a) \frac{A}{A'} z(a) \right] = 0$$

y lo mismo pasará en el extremo $x = b$, de modo que el primer término del segundo miembro de (121.5) vale cero. En cuanto al segundo término, recordando que ni y , ni y' , ni z tienen discontinuidad para $x = \xi$, podemos escribir

$$\begin{aligned} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[p(zy' - yz') \right]_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[pyz' \right]_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [p(\xi + \varepsilon)y(\xi + \varepsilon)z'(\xi + \varepsilon) - p(\xi - \varepsilon)y(\xi - \varepsilon)z'(\xi - \varepsilon)] = \\ &= p(\xi)y(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [z'(\xi + \varepsilon) - z'(\xi - \varepsilon)], \end{aligned}$$

y reemplazando todo lo anterior en (121.5), obtenemos finalmente

$$\int_a^b zL\{y\}dx = p(\xi)y(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [z'(\xi + \varepsilon) - z'(\xi - \varepsilon)]. \quad (121.6)$$

Si imaginamos que el punto de discontinuidad $x = \xi$ sea variable dentro del intervalo (a, b) , para cada ξ tendremos una $z(x)$ diferente, o sea tendremos una función $z(x, \xi)$ que varía con x y con ξ , función que puede definirse de muchas maneras. Llamaremos "función de Green" $g(x, \xi)$ esa función $z(x, \xi)$ tal que el salto de su derivada en el punto ξ es precisamente igual a $1/p(\xi)$, lo que tiene la ventaja de que la fórmula (121.6) aplicada a $g(x, \xi)$ se simplifica en

$$\int_a^b g(x, \xi)L\{y\}dx = y(\xi). \quad (121.7)$$

La función de Green se suele construir como sigue. Llamemos $u(x)$ una integral particular de la ecuación $L\{z\}=0$, que satisfaga la primera ecuación del sistema (120.2), integral que puede obtenerse de la expresión $z(x) = C_1z_1(x) + C_2z_2(x)$ de la integral general suponiendo por ejemplo $C_1 = Az_2(a) + A'z_2'(a)$, $C_2 = -Az_1(a) - A'z_1'(a)$:

$$u(x) = [Az_2(a) + A'z_2'(a)]z_1(x) - [Az_1(a) + A'z_1'(a)]z_2(x).$$

Análogamente sea $v(x)$ una integral particular de la ecuación $L\{z\}=0$ que satisfaga la segunda de las (120.2); por ejemplo

$$v(x) = [Bz_2(b) + B'z_2'(b)]z_1(x) - [Bz_1(b) + B'z_1'(b)]z_2(x).$$

Ahora tomaremos la función $g(x, \xi)$ igual a $mu(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq \xi$ y a $nv(x)$ en el intervalo $\xi < x \leq b$, escogiendo los factores constantes m y n de tal forma que $g(x, \xi)$ sea, como antes se dijo, continua en el punto ξ , mientras que su derivada $g_x'(x, \xi)$ valga allí $1/p(\xi)$. Para esto tiene que ser

$$\begin{cases} mu(\xi) - nv(\xi) = 0 \\ mu'(\xi) - nv'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \end{cases}$$

sistema lineal no homogéneo en m y n , que posee una solución bien determinada, en cuanto el determinante de sus coeficientes no es nulo [ya que, de ser nulo, sería resoluble el sistema formado por la primera de las ecuaciones anteriores con la ecuación homogénea $mu'(\xi) - nv'(\xi) = 0$, contrariamente a la hipótesis de la discontinuidad de $g_x'(x, \xi)$ en ξ].

Además vamos a comprobar que la función de Green $g(x, \xi)$ así construida es función simétrica de sus argumentos, en el sentido de que no cambia si intercambiamos x y ξ . Con tal objeto, llamemos ξ, η dos puntos cualesquiera del intervalo (a, b) y escribamos

$$y = g(x, \xi), \quad z = g(x, \eta).$$

Integrando la (121.4) entre a y b después de haber sustituido en ella a y, z estas expresiones, y tomando en cuenta que es $L\{y\} = L\{z\} = 0$, resulta

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \{p(x)[g(x, \eta)g_x'(x, \xi) - g(x, \xi)g_x'(x, \eta)]\} dx = 0,$$

de donde, observando que ahora tenemos los dos puntos de discontinuidad $x = \xi, x = \eta$, para $g_x'(x, \xi)$ y $g_x'(x, \eta)$ respectivamente, y haciendo consideraciones análogas a las que se hicieron para establecer la (121.6), se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [p(x)g(x, \eta)g_x'(x, \xi)]_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [p(x)g(x, \xi)g_x'(x, \eta)]_{\eta-\epsilon}^{\eta+\epsilon} = 0.$$

Pero el primer limite es

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[p(x) g(x, \eta) g'_x(x, \xi) \right]_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} = p(\xi) g(\xi, \eta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[g'_x(x, \xi) \right]_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} = g(\xi, \eta)$$

y el segundo es $g(\eta, \xi)$, de modo que queda comprobado que

$$g(\xi, \eta) = g(\eta, \xi)$$

o sea, siendo η una x cualquiera, que $g(x, \xi) = g(\xi, x)$. Esto demuestra la simetría de la función de Green con respecto a sus dos argumentos.

Finalmente, volvamos a la (121.7). Reemplazando a $L\{y\}$ su expresión (121.2), obtenemos

$$y(\xi) = -\lambda \int_a^b g(x, \xi) r(x) y(x) dx \quad (121.8)$$

Recordando que por hipótesis es $r(x) > 0$ en (a, b) , multipliquemos todo por $\sqrt{r(\xi)}$; queda

$$\sqrt{r(\xi)} y(\xi) = -\lambda \int_a^b g(x, \xi) \sqrt{r(x)r(\xi)} \sqrt{r(x)} y(x) dx.$$

Puesto

$$\varphi(x) = \sqrt{r(x)} y(x), \quad K(x, \xi) = -g(x, \xi) \sqrt{r(x)r(\xi)} \quad (121.9)$$

e intercambiando x con ξ , con la observación de que $K(x, \xi)$ es una función simétrica de x, ξ , por ser producto de dos funciones que lo son, obtenemos

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (121.10)$$

Esta es una ecuación homogénea del tipo (95.5), es decir una *ecuación integral de Fredholm homogénea de segunda especie*, con la importante propiedad de poseer *núcleo simétrico*.

122. Autofunciones y autovalores. Lo que acabamos de ver permite afirmar que *todo sistema de Sturm-Liouville* (120.5). (120.2) *es equivalente a la ecuación integral de Fredholm de núcleo simétrico*

(121.10), estando las funciones que aparecen en ella ligadas con los coeficientes y con la función de Green del sistema por las relaciones (121.9).

Como el sistema de Sturm-Liouville del cual se salió *tiene solución sólo para determinados valores del parámetro* λ , lo mismo ha de suceder con la ecuación integral equivalente (121.10), y a cada uno de tales valores ha de corresponder una función $\varphi(x)$ también perfectamente determinada, que es la que resuelve la ecuación integral. Estos valores λ se llaman *valores característicos* o *autovalores* y las funciones $\varphi(x)$ correspondientes se llaman *funciones características* o *autofunciones* de la ecuación integral [en alemán *Eigenfunktionen*, en inglés antiguamente *autofunctions*, ahora *eigenfunctions*, en italiano *autofunzioni*]. Nótese que para el sistema de Sturm-Liouville se conviene considerar como autofunciones no las $\varphi(x)$, sino las integrales $y(x)$ ligadas con esas $\varphi(x)$ por la primera relación (121.9). El hecho de que el núcleo $K(x, \xi)$ es simétrico confiere a las autofunciones y a los autovalores propiedades muy importantes, que estudiaremos a continuación.

En primer lugar vamos a comprobar que *dos autofunciones cualesquiera* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *correspondientes a autovalores* λ_1 , λ_2 *diferentes de la misma ecuación* (121.10), *son ortogonales entre sí en el intervalo* (a, b) . En efecto, siendo

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi$$

$$\varphi_2(x) = \lambda_2 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_2(\xi) d\xi$$

si multiplicamos la primera relación por $\varphi_2(x)$, la segunda por $\varphi_1(x)$ e integramos con respecto a x entre a y b , obtenemos respectivamente

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \lambda_1 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(\xi) \varphi_2(x) d\xi dx \quad (122.1)$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) \varphi_1(x) dx = \lambda_2 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_2(\xi) \varphi_1(x) d\xi dx.$$

Si intercambiamos ξ con x , con lo que $K(x, \xi)$ no cambia debido a su simetría, esta última se hace

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \lambda_2 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(\xi) \varphi_2(x) d\xi dx.$$

Restando miembro a miembro de (122.1), queda

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(\xi) \varphi_2(x) d\xi dx$$

y siendo por hipótesis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que ha de ser nula la integral que aparece aquí; reemplazando en (122.1) se obtiene precisamente que

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0 \quad (122.2)$$

o sea la ortogonalidad de las autofunciones (ver N° 93). Siendo, como ya se ha dicho, *autofunciones del sistema de Sturm-Liouville* las integrales $y_i(x)$ que corresponden a los autovalores λ_i , reemplazando la primera relación (121.9) en (122.2), obtenemos para estas últimas autofunciones la relación equivalente

$$\boxed{\int_a^b r(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0} \quad (122.3)$$

Esta relación no corresponde evidentemente a la ortogonalidad simple (93.4). Se trata de una *ortogonalidad pesada*, siendo $\sqrt{r(x)}$ la *función peso* con que hay que *cargar* las funciones $y_i(x)$ para que las integrales de sus productos de dos en dos sean nulas en el intervalo (a, b) .

La simetría del núcleo $K(x, \xi)$ tiene otra consecuencia muy importante, a saber que *los autovalores de un sistema de Sturm-Liouville con coeficientes reales son todos reales*. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que sea

$$\lambda_h = \alpha + i\beta \quad (122.4)$$

un autovalor complejo. Esto implica que también la autofunción $\varphi_h(x)$ correspondiente es compleja, o sea que

$$\varphi_h(x) = F(x) + i\Phi(x) \quad (122.5)$$

siendo $F(x)$, $\Phi(x)$ reales. En efecto si $\varphi_h(x)$ fuese real, la (121.10) establecería una igualdad imposible entre una función real y otra compleja (siendo el núcleo $K(x, \xi)$ real por ser tales por hipótesis los coeficientes del sistema de Sturm-Liouville). Reemplazando en (121.10) las expresiones (122.4), (122.5), obtenemos

$$F(x) + i\Phi(x) = (\alpha + i\beta) \int_a^b K(x, \xi) [F(\xi) + i\Phi(\xi)] d\xi \quad (122.6)$$

de donde, igualando las partes reales entre sí y las imaginarias entre sí, resulta

$$F(x) = \alpha \int_a^b K(x, \xi) F(\xi) d\xi - \beta \int_a^b K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi$$

$$i\Phi(x) = i\beta \int_a^b K(x, \xi) F(\xi) d\xi + i\alpha \int_a^b K(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi.$$

Restando miembro a miembro y volviendo a factorizar, se obtiene

$$F(x) - i\Phi(x) = (\alpha - i\beta) \int_a^b K(x, \xi) [F(\xi) - i\Phi(\xi)] d\xi$$

con lo que se comprueba que también $F(x) - i\Phi(x)$ es una autofunción, a la cual corresponde el autovalor $\alpha - i\beta$. Aplicando a las autofunciones $F + i\Phi$, $F - i\Phi$ la relación de ortogonalidad (122.2), queda

$$\int_a^b [F^2(x) + \Phi^2(x)] dx = 0$$

lo que es absurdo, ya que siendo $F^2 + \Phi^2 \geq 0$, para que valga la igualdad anterior debiera ser en todo (a, b)

$$F(x) \equiv \Phi(x) \equiv 0$$

y por tanto resultaría por (122.5) que debiera ser nula $\varphi_h(x)$, contrariamente a la hipótesis de que dicha autofunción es compleja.

123. Ecuaciones con núcleo de Goursat. Los autovalores pueden ser en número finito o infinito. Comprobaremos que el primer caso se realiza cuando la función de Green [y luego, por (121.9),

$$\begin{vmatrix} -1 + \lambda c_{11} & \lambda c_{12} & \lambda c_{13} & \dots & \lambda c_{1n} \\ \lambda c_{21} & -1 + \lambda c_{22} & \lambda c_{23} & \dots & \lambda c_{2n} \\ \lambda c_{31} & \lambda c_{32} & -1 + \lambda c_{33} & \dots & \lambda c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda c_{n1} & \lambda c_{n2} & \lambda c_{n3} & \dots & -1 + \lambda c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (123.6)$$

Los autovalores son precisamente esos valores de λ para los cuales se realiza esta igualdad. Siendo las c_{ij} cantidades conocidas, la (123.6) resulta una ecuación algebraica de grado n en la incógnita λ , que tendrá n raíces, que ya sabemos por lo demostrado en el artículo anterior que son todas reales. Este resultado puede confirmarse por consideraciones algebraicas, ya que se demuestra que toda ecuación del tipo (123.6), conocida bajo el nombre de *ecuación secular*, tiene siempre n raíces reales. Concluyendo, en el caso de que la ecuación integral equivalente (121.10) tiene un núcleo de Goursat (123.1), el sistema de Sturm-Liouville posee n autovalores reales.

124. Ecuaciones con infinitos autovalores. Si el núcleo es de tipo cualquiera, todos los casos son posibles: que no haya autovalores, que sean en número finito o que sean infinitos. Para estudiar esta última posibilidad, supongamos que *todas las autofunciones sean normales*. Esto puede siempre hacerse, ya que la relación (121.10) sigue valiendo si se multiplica la función $\varphi(x)$ por un factor constante: y si escogemos para cada $\varphi_i(x)$ el factor

$$\left[\int_a^b \varphi_i^2(x) dx \right]^{-1/2},$$

o sea si tomamos como autofunciones a las

$$\varphi_i^*(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\left[\int_a^b \varphi_i^2(x) dx \right]^{1/2}}.$$

resulta precisamente que es

$$\int_a^b \varphi_i^{*2}(x) dx = 1 \quad (124.1)$$

o sea que todas ellas son normales. Por otro lado ellas son ortogonales entre sí (Nº 122); luego, siendo ortonormal el sistema formado por n autofunciones distintas cualesquiera,

$$\varphi_1^*(x), \varphi_2^*(x), \dots, \varphi_n^*(x), \quad (124.2)$$

podemos aplicar al núcleo $K(x, \xi)$ la limitación de Bessel (94.4) con respecto a las autofunciones (124.2), con lo que obtenemos

$$\int_a^b K^2(x, \xi) d\xi \geq \sum_{i=1}^n \left[\int_a^b K(x, \xi) \varphi_i^*(\xi) d\xi \right]^2 \quad (124.3)$$

Por otro lado, si a la autofunción $\varphi_i^*(x)$ le corresponde el autovalor λ_i , se tiene por (121.10)

$$\varphi_i^*(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i^*(\xi) d\xi,$$

y siendo que por hipótesis $\lambda_i \neq 0$, podemos escribir

$$\int_a^b K(x, \xi) \varphi_i^*(\xi) d\xi = \frac{\varphi_i^*(x)}{\lambda_i}.$$

Reemplazando en (124.3), queda

$$\boxed{\int_a^b K^2(x, \xi) d\xi \geq \sum_{i=1}^n \left[\frac{\varphi_i^*(x)}{\lambda_i} \right]^2} \quad (124.4)$$

Esta fórmula permite sacar conclusiones de grande importancia. En el caso de que exista una infinidad numerable de autovalores, podemos suponer que el segundo miembro incluya tantos cuantos se quiera de ellos; por tanto siendo el primer miembro una cantidad finita determinada (si se admite, como es usual en esta teoría, que el núcleo $K(x, \xi)$ sea una función de cuadrado sumable), resulta que la serie

$$\left[\frac{\varphi_1^*(x)}{\lambda_1} \right]^2 + \left[\frac{\varphi_2^*(x)}{\lambda_2} \right]^2 + \left[\frac{\varphi_3^*(x)}{\lambda_3} \right]^2 + \dots$$

que es de términos todos positivos y tiene por (124.4), para cualquier valor de x , sus sumas parciales limitadas por un límite fijo, es uniformemente convergente. De esto sigue que también la serie obtenida integrando la anterior término a término entre a y b es convergente, en cuanto sus sumas parciales son todas menores del número positivo

$$H = \int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi. \quad (124.5)$$

Tomando en cuenta las condiciones de normalidad (124.1), podemos escribir por tanto

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} + \dots \leq H. \quad (124.6)$$

lo que asegura que *la serie de los recíprocos de los cuadrados de los autovalores es convergente*.

Ya que todos los términos de la serie son positivos, se desprende de esta última desigualdad que el recíproco del cuadrado de todo autovalor es menor que H . Siendo posible que a un determinado autovalor λ_k correspondan muchas autofunciones linealmente independientes, podemos deducir de lo anterior también una limitación para el número de ellas. En efecto, si su número es N , el autovalor correspondiente ha de aparecer N veces en la desigualdad (124.6), resultando por tanto

$$\frac{N}{\lambda_k^2} \leq H$$

de donde se obtiene

$$N \leq H\lambda_k^2. \quad (124.7)$$

fórmula que determina el *número máximo de autofunciones linealmente independientes que pueden corresponder a un mismo autovalor* λ_k . Llamando autovalor múltiplo de orden N a todo autovalor al que corresponden N autofunciones linealmente independientes, lo indicado manifiesta en particular que *todo autovalor tiene multiplicidad finita*.

Finalmente, fijado un número positivo M , podemos obtener una *limitación para el número de autovalores que en valor absoluto son menores que M* . En efecto sea N' dicho número; si es

$$|\lambda_i| < M \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{\lambda_i^2} > \frac{1}{M^2},$$

se tiene, tomando en cuenta también la (124.6).

$$\frac{N'}{M^2} \leq \sum \frac{1}{\lambda_i^2} \leq H$$

y luego

$$N' \leq H M^2. \quad (124.8)$$

En particular se obtiene que el número de los autovalores que son menores en valor absoluto que un número positivo M es limitado. Por tanto *los autovalores correspondientes a un mismo sistema de Sturm-Liouville, si son en cantidad infinita, son una infinidad numerable y podrán ordenarse, por ejemplo por valores absolutos crecientes. Esto se suele expresar diciendo que tales autovalores constituyen un espectro discontinuo.*

Los razonamientos anteriores caen en el caso de que el núcleo $K(x, \xi)$ no sea de cuadrado sumable, es decir cuando la integral

$$\int_a^b K^2(x, \xi) d\xi$$

no queda limitada para todos los valores de x . En ese caso puede presentarse la eventualidad de que exista un número infinito de autovalores dentro de un intervalo finito, teniendo allí puntos de condensación, o hasta que haya autovalores que llenen con continuidad un determinado segmento del eje x , en cual caso se tendrá un *espectro continuo* de autovalores.

125. Análisis de la ecuación de onda. Un importante problema que lleva a la integración de un sistema de Sturm-Liouville se refiere al estudio de las cuerdas vibrantes que, como sabemos, depende de la ecuación diferencial lineal del segundo orden en las derivadas parciales (91.4) (*ecuación de onda*)

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0} \quad (125.1)$$

El análisis de la ecuación (125.1) se suele llevar a cabo intentando expresar la función $z(x, t)$ por el producto de una función y de la variable x por una T de la variable t :

$$z(x, t) = y(x) T(t). \quad (125.2)$$

Esta expresión reemplazada en (125.1) da

$$\frac{\tau}{\rho} \frac{y''(x)}{y(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Siendo los dos miembros funciones de dos variables diferentes, esta ecuación no puede resolverse a menos que los dos miembros adquieran ambos el mismo valor constante, que conviene llamar $-\lambda$. Con esto la ecuación se descompone en las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$y''(x) + \lambda \frac{\rho}{\tau} y(x) = 0 \quad (125.3)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \quad (125.4)$$

Las condiciones de frontera (91.1) resultan por (125.2)

$$y(0) = y(L) = 0. \quad (125.5)$$

La ecuación (125.3) juntamente con las condiciones (125.5) forma un sistema de Sturm-Liouville. Precisamente si comparamos la (125.3) con la expresión general (120.5), vemos que aquí se tiene

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0.$$

Ahora, si la integral $y(x)$ satisface las condiciones (125.5), debe de tener por lo menos dos ceros, o sea ha de ser oscilante. Como $p(x) > 0$, la observación hecha en el No. 115 manifiesta que es necesario que el coeficiente $\lambda\rho/\tau$ de $y(x)$ en la ecuación (125.3) sea positivo, y esto, siendo $\rho/\tau > 0$, implica a su vez que sea $\lambda > 0$. Por tanto se tendrá una sucesión ilimitada de autovalores positivos

$$\lambda_0 = \omega_0^2, \quad \lambda_1 = \omega_1^2, \quad \lambda_2 = \omega_2^2, \dots \quad (125.6)$$

con un punto límite único, en el ∞ . Si integramos por otro lado la ecuación (125.4), que es del tipo (117.3), obtenemos

$$T(t) = A \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} (t - a) \quad (125.7)$$

con A y a constantes arbitrarias; de donde, tomando en cuenta las (125.6), resultan las expresiones

$$T(t) = A \operatorname{sen} \omega_i (t - a), \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

o sea que las respectivas *frecuencias de vibración* ν_i son

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i}. \quad (125.8)$$

Concluyendo, se tiene $\lambda_i = 4\pi^2\nu_i^2$, o sea los autovalores son proporcionales a los cuadrados de las frecuencias de los movimientos armónicos que caracterizan la vibración de la cuerda.

126. La ecuación de Laguerre. Por último queremos mencionar ciertos sistemas análogos a los de Sturm-Liouville en los cuales las condiciones de frontera (120.2) se reemplazan por convenientes condiciones asintóticas, sistemas cuyas autofunciones son polinomios de grande importancia.

Como primer ejemplo presentamos la ecuación de Laguerre

$$x y'' + (1 - x) y' + \lambda y = 0 \quad (126.1)$$

siendo λ un parámetro real. La ecuación se considera en el intervalo $(0, \infty)$, buscándose entre sus integrales las que satisfacen las siguientes condiciones asintóticas:

a) En proximidad del origen $x = 0$, la integral puede representarse por un desarrollo en serie de potencias del tipo

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots \quad (126.2)$$

b) Para $x \rightarrow \infty$, la integral crece algebraicamente, o sea es posible hallar un número positivo N suficientemente grande para que, en todos los puntos x que están a la derecha de cierta $x = x_0$, valga una desigualdad del tipo

$$|y(x)| < A x^N \quad (x > x_0) \quad (126.3)$$

siendo A una constante positiva conveniente.

Fijándonos primero en la condición (a), vamos a determinar los coeficientes del desarrollo (126.2). Siendo

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots, \quad y'' = 2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \dots,$$

reemplazando estas expresiones y la (126.2) en la ecuación diferencial (126.1) se obtiene, como es inmediato comprobar,

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda - k) C_k + (k + 1)^2 C_{k+1}] x^k = 0.$$

Siendo ésta una identidad que ha de valer cualquiera que sea x , todos los coeficientes de la serie deben de ser nulos, y por tanto los coeficientes C_k tienen que satisfacer la relación

$$C_{k+1} = \frac{k-\lambda}{(k+1)^2} C_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (126.4)$$

que, aplicada sucesivamente a partir de C_1 , da

$$C_1 = -\lambda C_0$$

$$C_2 = \frac{1-\lambda}{2^2} C_1 = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2^2} C_0$$

y así siguiendo; el coeficiente de índice k será

$$C_k = (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1)}{(k!)^2} C_0. \quad (126.5)$$

Es interesante observar que la serie (126.2) con los coeficientes que acabamos de obtener es *convergente*, con *radio R de convergencia infinito*, ya que se tiene por (126.4)

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_k}{C_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{k-\lambda} = \infty.$$

Quedando así satisfecha la condición de frontera (a), queremos averiguar si lo será también la condición (b). Es fácil ver que esto no puede realizarse si la serie (126.2) es una serie verdadera, o sea si consta de infinitos términos. En efecto, siendo $(k+1)^2 > 0$ y siendo que, cualquiera que sea el número real (fijo) λ , siempre se podrá hallar un número entero positivo k_0 tal que, para $k > k_0$, sea

$$k - \lambda > 0,$$

la relación (126.4) manifiesta que, para todos los valores de k mayores que k_0 , los coeficientes C_k tendrán el mismo signo, que, fijando convenientemente el de C_0 , podemos suponer que es el signo positivo. Podremos luego subdividir la serie (126.2) en dos partes: el polinomio constituido por los términos hasta el de grado k_0 y la serie que comprende todos los demás, serie cuyos coeficientes son por lo visto todos positivos. Ahora, mientras que el polinomio satisface

una limitación del tipo (126.3), la serie no puede satisfacerla, ya que su suma es mayor que cada uno de sus términos que son todas potencias de x , y entre estos hay con exponente tan grande como se quiera.

Concluyendo, la condición (b) se satisface sólo en esos casos en que la serie (126.2) se reduce a un polinomio, lo que acontece cuando el parámetro λ adquiere un valor entero no negativo. En efecto, si es

$$\lambda = n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (126.6)$$

se ve de la relación (126.5) que

$$C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = 0.$$

Los valores (126.6) son por tanto los autovalores relativos al problema en estudio. Las *autofunciones*, o sea las integrales $y(x)$ correspondientes a dichos autovalores, son polinomios cuyo grado es igual al autovalor mismo. La fórmula (126.5) manifiesta que todos los coeficientes de dichos polinomios están multiplicados por un factor común C_0 todavía no definido. Se acostumbra poner $C_0 = 1$, de modo que, si tomamos en cuenta también la (126.6), la fórmula mencionada se hace

$$C_k = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!}.$$

Las autofunciones son luego los *polinomios de Laguerre* (108.7) que ya conocemos

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}. \quad (126.7)$$

Así como en general las autofunciones de los sistemas de Sturm-Liouville, los polinomios de Laguerre gozan de una *ortogonalidad pesada del tipo* (122.3) en el intervalo $(0, \infty)$. En efecto, si multiplicamos todos los términos de la ecuación (126.1) por e^{-x} , obtenemos

$$\frac{d}{dx} [x e^{-x} y'] + \lambda e^{-x} y = 0$$

o sea siendo

$$\lambda = n, \quad y = L_n(x).$$

queda

$$\frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{d L_n(x)}{dx} \right] + n e^{-x} L_n(x) = 0 \quad (126.8)$$

que es una nueva forma de la ecuación de Laguerre. Si multiplicamos todo por el polinomio $L_m(x)$ siendo $m \neq n$, resulta

$$L_m(x) \frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{d L_n(x)}{dx} \right] + n e^{-x} L_m(x) L_n(x) = 0$$

e intercambiando n con m y restando.

$$L_m \frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{d L_n}{dx} \right] - L_n \frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{d L_m}{dx} \right] + (n - m) e^{-x} L_m L_n = 0$$

que se puede escribir también

$$\frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \left(L_m \frac{d L_n}{dx} - L_n \frac{d L_m}{dx} \right) \right] + (n - m) e^{-x} L_m L_n = 0.$$

Integrando entre 0 e ∞ , el primer término se hace

$$\left[x e^{-x} \left(L_m \frac{d L_n}{dx} - L_n \frac{d L_m}{dx} \right) \right]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x e^{-x} \left(L_m \frac{d L_n}{dx} - L_n \frac{d L_m}{dx} \right) \right] = 0$$

como resulta aplicando por ejemplo la regla de L'Hôpital al cálculo del límite, y lo que queda, dividido entre $(n - m)$, da para $m \neq n$

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0 \quad (126.9)$$

Existe por tanto entre polinomios de Laguerre una *ortogonalidad pesada* en $(0, \infty)$, siendo $\sqrt{e^{-x}}$ la *función peso* correspondiente.

127. La ecuación de Legendre. De manera análoga a la seguida para estudiar la ecuación de Laguerre puede estudiarse la de *Legendre* (59.4), que escribiremos

$$\boxed{\frac{d}{dx} [(1 - x^2) y'] + \lambda y = 0} \quad (127.1)$$

La consideraremos en el intervalo $(-1, 1)$, intervalo en cuyos extremos la ecuación tiene evidentemente una singularidad, en cuanto allí se anula el coeficiente $p(x) = 1 - x^2$. El problema de Legendre consiste en *buscar esas integrales que se mantienen limitadas ya sea cuando $x \rightarrow +1$, ya sea cuando $x \rightarrow -1$* . Nos contentaremos con dar una indicación resumida del proceso de análisis, que es muy parecido al que se siguió al estudiar la ecuación de Laguerre.

Expresada también aquí la integral $y(x)$ por el desarrollo (126.2), se obtiene

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] = 2C_2 + 2(3C_3 - C_1)x + 3(4C_4 - 2C_2)x^2 + \dots$$

y reemplazando ésta y la (126.2) en la ecuación (127.1), queda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ (k+1)[(k+2)C_{k+2} - kC_k] + \lambda C_k \} x^k = 0$$

de donde sigue de inmediato que ha de ser

$$C_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} C_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (127.2)$$

Como esta fórmula relaciona coeficientes separados de dos lugares entre sí, es conveniente expresar el desarrollo (126.2) separando los términos de índice par de los de índice impar, con poner

$$y(x) = S_0(x^2) + xS_1(x^2) \quad (127.3)$$

donde

$$S_0(x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} x^{2m}, \quad S_1(x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} x^{2m+1}. \quad (127.4)$$

Ambas series $S_0(x^2)$ y $S_1(x^2)$ tienen *radio de convergencia R igual a 1*, ya que resulta de (127.2)

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_k}{C_{k+2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+1) - \lambda} = 1.$$

Análogamente a lo que se vio en el artículo anterior, se puede comprobar ahora que, si las dos series (127.4) son series verdaderas, ambas divergen para $x \rightarrow \pm 1$, de modo que la condición de frontera de que la integral se mantenga limitada en dichos extremos

se realiza sólo si la serie (126.2) se reduce a un polinomio, lo que acontece, como se ve de (127.2), sólo si una de las series $S_0(x^2)$, $S_1(x^2)$ se anula, y la otra se reduce a un polinomio, siendo

$$\lambda = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (127.5)$$

Los (127.5) son los autovalores del problema, y a ellos corresponden como autofunciones esos polinomios de grado n a los cuales se reduce respectivamente la serie $S_0(x^2)$ bien la $xS_1(x^2)$ según si n es par o impar. Si reemplazamos las expresiones (127.5) en (127.2) y calculamos los coeficientes, tomando por conveniencia

$$C_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!}, \quad (127.6)$$

obtenemos sucesivamente, como es inmediato comprobar, los *polinomios de Legendre* $P_n(x)$, dados por las fórmulas (59.2), en que se reemplace la variable z por la x .

Si $P_m(x)$, $P_n(x)$ son dos polinomios de Legendre diferentes, la ecuación (127.1) da para ellos las dos relaciones

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

y si multiplicamos la primera por P_n , la segunda por P_m y restamos, queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \left(P_n \frac{dP_m}{dx} - P_m \frac{dP_n}{dx} \right) \right] + \\ + [m(m+1) - n(n+1)] P_m P_n = 0. \end{aligned}$$

Integrando entre -1 y $+1$ el primer término se anula, y resulta que, para $m \neq n$,

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0} \quad (127.7)$$

o sea los polinomios de Legendre son ortogonales entre sí en el intervalo $(-1, +1)$.

128. **Los polinomios de Hermite.** No podríamos considerar completa esta exposición si dejásemos de mencionar una tercera clase de polinomios ortogonales muy importantes para las matemáticas modernas: los *de Hermite*. Para ellos podría efectuarse un análisis análogo a los anteriores; pero llegaremos más brevemente a ellos en forma directa, considerando que dichos polinomios nacen de los coeficientes del desarrollo, en serie de potencias de la variable real t , de la función

$$\psi(x, t) = e^{-t^2 - 2xt} = e^{x^2} e^{-(t+x)^2}. \quad (128.1)$$

Por (62.5), desarrollando en serie se tiene

$$e^{-(t+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n e^{-(t+x)^2}}{d(t+x)^n} \right]_{t=0} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \frac{t^n}{n!}$$

y luego sustituyendo en (128.1)

$$\psi(x, t) = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \frac{t^n}{n!}.$$

Si se escribe para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\boxed{H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}} \quad (128.2)$$

con la convención de que sea $H_0(x) = 1$, queda

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \quad (128.3)$$

siendo la serie convergente cualesquiera que sean x y t . Se ve inmediatamente de la definición (128.2) que la función $H_n(x)$ es un polinomio de grado n , calculándose sin dificultad que

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, & H_1 &= -2x, & H_2 &= 4x^2 - 2 \\ H_3 &= -8x^3 + 12x, & H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned} \quad (128.4)$$

Estas funciones $H_n(x)$ son precisamente los *polinomios de Hermite*.

Si derivamos la función $\psi(x, t)$ (128.1) con respecto a t , obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2(t+x)e^{-t^2-2xt} = -2(t+x)\psi$$

y dando a ψ su expresión (128.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = -2(t+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

De aquí igualando los coeficientes de los términos en t^n , se obtiene

$$\frac{H_{n+1}}{n!} + 2 \frac{H_{n-1}}{(n-1)!} + 2x \frac{H_n}{n!} = 0$$

$$\boxed{H_{n+1}(x) + 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0} \quad (128.5)$$

Esta es una fórmula recurrente de gran importancia, que permite calcular un polinomio de Hermite, conociendo los dos de grados inmediatamente inferiores. Pueden volverse a encontrar así los valores de H_2 , H_3 y H_4 dados en (128.4), saliendo de H_0 y H_1 .

Si derivamos la función (128.1) con respecto a x , obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2te^{-t^2-2xt} = -2t\psi$$

o sea reemplazando ψ por su desarrollo en serie de potencias (128.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}$$

e igualando los coeficientes de t^{n+1}

$$H'_{n+1}(x) = -2(n+1) H_n(x). \quad (128.6)$$

Si ahora derivamos la (128.5), obtenemos

$$H'_{n+1} + 2H_n + 2xH'_n + 2nH'_{n-1} = 0$$

y tomando en cuenta (128.6)

$$-2(n+1) H_n + 2H_n + 2xH'_n - H''_n = 0$$

o sea

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (128.7)$$

Por tanto los polinomios de Hermite satisfacen la ecuación diferencial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (128.8)$$

y son precisamente sus autofunciones, ya que se puede comprobar que los autovalores n de dicha ecuación son todos los números enteros no negativos.

Si multiplicamos la (128.7) por e^{-x^2} , queda

$$\frac{d}{dx} [e^{-x^2} H'_n(x)] + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0$$

y reemplazando n por m (diferente de n)

$$\frac{d}{dx} [e^{-x^2} H'_m(x)] + 2me^{-x^2} H_m(x) = 0.$$

Multiplicando la primera relación por H_m , la segunda por H_n y restando, resulta

$$\frac{d}{dx} [e^{-x^2} (H_m H'_n - H_n H'_m)] + 2(n - m)e^{-x^2} H_n H_m = 0.$$

e integrando entre $-\infty$ y $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0; \quad (128.9)$$

luego los polinomios de Hermite son ortogonales en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, con el peso $e^{-x^2/2}$.

II. ECUACIONES EN LAS DERIVADAS PARCIALES

129. **Ecuaciones lineales del primer orden.** Dada una función

$$z = f(x, y) \quad (129.1)$$

se llama *ecuación lineal en las derivadas parciales del primer orden en las dos variables x, y* una ecuación diferencial de la forma

$$pu(x, y, z) + qv(x, y, z) = w(x, y, z) \quad (129.2)$$

siendo p, q las derivadas parciales $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$, de acuerdo con la notación (88.2), y u, v, w funciones conocidas de las variables x, y, z . Esta ecuación es lineal con respecto a p y q , pero no lo es con respecto a z . Integrar la ecuación (129.2) significa determinar las funciones (129.1) que la satisfacen.

En cada punto $P(x, y, z)$ del espacio consideremos los vectores

$$V(P) = ui + vj + wk \quad (129.3)$$

$$N(P) = pi + qj - k. \quad (129.4)$$

La ecuación (129.2) expresa evidentemente que

$$V \cdot N = 0 \quad (129.5)$$

o sea la perpendicularidad de dichos vectores. Ahora, si escribimos

$$\varphi(x, y, z) = f(x, y) - z$$

el vector (129.4) resulta

$$N(P) = \text{grad } \varphi(P).$$

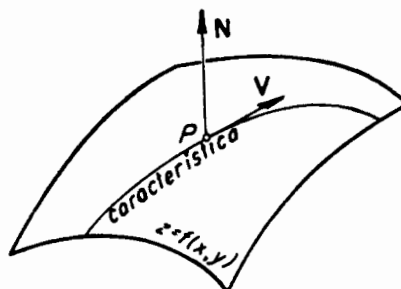
Por otro lado la ecuación (129.1) corresponde a la superficie $\varphi(P) = 0$; por consiguiente (ver No. 16), el vector N es perpendicular a dicha superficie.

La relación (129.5) puede luego interpretarse diciendo que el vector $V(P)$ dado por (129.3) es tangente a la superficie (129.1) en el punto $P(x, y, z)$. Todas las líneas pertenecientes a la super-

ficie $z = f(x, y)$ y que en cada uno de sus puntos son tangentes al vector V correspondiente a ese punto, se llaman *características* de la ecuación (129.2). Si el punto P sufre un desplazamiento infinitésimo

$$dP = dx i + dy j + dz k$$

a lo largo de una característica, este desplazamiento es paralelo al vector $V(P)$; luego subsiste la proporcionalidad entre componentes



$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)} \quad (129.6)$$

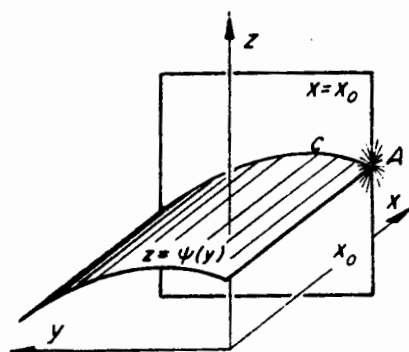
Este es un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya integración lleva a dos relaciones

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad G(x, y, z, b) = 0 \quad (129.7)$$

conteniendo dos constantes de integración a, b arbitrarias. Para cada par de valores de a, b , se obtienen así las ecuaciones de dos superficies, cuya intersección es precisamente una curva característica. Si damos a x, y, z valores x_0, y_0, z_0 determinados, las (129.7) resultan un sistema de dos ecuaciones en las dos incógnitas a, b ; al resolver este sistema, hallamos un par de valores de a, b , que determinan cierta característica. Esto puede interpretarse en el sentido de que *generalmente por cada punto del espacio pasa una característica y tan sólo una*. La consideración de las curvas características permite reemplazar la integración de la ecuación en las derivadas parciales (129.2) por aquella, mucho más simple, del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (129.6). Geométricamente esto implica, en lugar de determinar directamente las superficies integrales, determinar las curvas características y después pasar a las superficies integrales cubiertas por ellas.

El problema de Cauchy para una ecuación del tipo (129.2) consiste en hallar la integral $z = f(x, y)$ que, para $x = x_0$, se reduce a una función $z = \psi(y)$ conocida. Geométricamente, esto corres-

ponde a dar la curva c , intersección del plano $x = x_0$ con el cilindro $z = \psi(y)$ y buscar la superficie integral (129.1) que pasa por dicha curva. Lo que acabamos de decir pone en claro que el problema por lo general será resoluble, tomando en cada punto de c la curva



característica que pasa por él; la ecuación $z = f(x, y)$ de la superficie constituida por todas esas curvas proporciona precisamente la integral buscada. Esta solución es única, siempre que la curva c no sea una característica. Si más bien c fuese una característica, se tendría una infinidad de soluciones; en efecto en este último caso si por un punto A de c se traza por ejemplo el haz de las

rectas normales a c , y por cada punto de cada una de ellas la curva característica que pasa por él, obtenemos infinitas superficies integrales, cada una de las cuales satisface la condición de frontera de contener la curva c .

Un problema que lleva a una interpretación geométrica importante de la ecuación diferencial (129.2) es el de determinar una superficie $z = f(x, y)$ normal a todas las superficies de una familia

$$F(x, y, z) = \lambda \quad (129.8)$$

siendo λ el parámetro variable que caracteriza a cada superficie. Como el vector $\text{grad } F$ es perpendicular a las superficies (129.8) y el vector $\text{grad } (f - z)$ es perpendicular a la $z = f(x, y)$ (ver No. 16), la condición de ortogonalidad de las superficies equivale a la de perpendicularidad de estos vectores

$$\text{grad } F \cdot \text{grad } (f - z) = 0$$

o sea

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} \quad (129.9)$$

Si escribimos

$$\text{grad } F = V$$

siendo el vector V expresado por (129.3). la (129.9) se transforma precisamente en la (129.2).

130. Ecuaciones lineales del segundo orden. La forma más general de una ecuación diferencial lineal del segundo orden en las dos variables x, y , es

$$A(x, y)r + 2B(x, y)s + C(x, y)t + F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (130.1)$$

siendo

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (130.2)$$

El problema de Cauchy relativo a estas ecuaciones se plantea de la manera siguiente: dada en cierto plano $x = x_0$ una curva c , y fijados sobre ella los valores de las derivadas parciales p y q , buscar la integral

$$z = f(x, y) \quad (130.3)$$

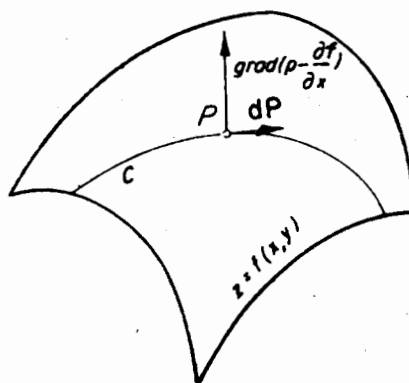
de la ecuación (130.1) que pasa por ella, adquiriendo sus primeras derivadas los valores mencionados. Como en el caso de la ecuación lineal del primer orden, aquí también se comprueba que, si c es una curva genérica, el problema de Cauchy tiene una y tan sólo una solución. Las curvas excepcionales son las *características*, que pueden por tanto buscarse en base a esa condición, de que por ellas pase más que una superficie integral (130.3).

Sea pues c una característica. y sea $z = f(x, y)$ una superficie integral que pasa por ella. Sobre la superficie se tiene, por (130.2),

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (130.4)$$

resultando por tanto (No. 16) los vectores

$$\text{grad} \left(p - \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \text{grad} \left(q - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$



normales a la superficie. Escribiendo que en un punto P de la característica c esos vectores son perpendiculares a un vector dP tangente a ella, resulta

$$\text{grad } p \cdot dP = \text{grad } \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dP$$

$$\text{grad } q \cdot dP = \text{grad } \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dP$$

o sea por (130.2)

$$\begin{cases} rdx + sdy = \text{grad } \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dP \\ sdx + tdy = \text{grad } \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dP \end{cases} \quad (130.5)$$

Conociéndose por hipótesis $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, y por tanto las funciones (130.3) y (130.4) a lo largo de la curva c , las (130.5) pueden considerarse ecuaciones lineales en las tres incógnitas r , s , t , y juntarse con la (130.1), también calculada sobre c , para formar un sistema de tres ecuaciones en dichas incógnitas. La condición para que este sistema tenga más que una solución es que se anule el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

o sea que esté satisfecha la ecuación diferencial

$$\boxed{A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0} \quad (130.6)$$

Fijada una superficie integral $z = f(x, y)$, la ecuación (130.6) da las características sobre ella. Pudiéndose resolver dicha ecuación con respecto a dy/dx y descomponerse luego en

$$\begin{cases} A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0 \\ A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0 \end{cases} \quad (130.7)$$

resulta que sobre toda superficie integral se tienen dos familias de curvas características que la recubren. De hecho las ecuaciones (130.7), que contienen tan sólo las variables x , y , representan las

proyecciones de las características sobre el plano $z = 0$. Al variar la superficie integral $z = f(x, z)$, variarán las curvas características sobre ella, pero de modo tal que sus proyecciones sobre el plano $z = 0$ quedan las mismas; por tanto las características de una determinada superficie integral se obtienen intersectando con la superficie a los cilindros de generatrices paralelas al eje z , cuyas ecuaciones son las (130.7).

131. Clasificación de las ecuaciones del segundo orden. Las ecuaciones lineales del segundo orden suelen clasificarse en *tres categorías, según si sus familias características son reales y distintas, reales y coincidentes, o bien imaginarias*. Considerando las ecuaciones (130.7), se ve que la primera condición la tenemos cuando

$$B^2 - AC > 0$$

diciéndose entonces que la ecuación (130.1) es de *tipo hiperbólico*, la segunda cuando

$$B^2 - AC = 0$$

diciéndose entonces que la ecuación es de *tipo parabólico*, y la tercera, que corresponde al *tipo elíptico*, cuando

$$B^2 - AC < 0.$$

Siendo A, B, C funciones de x, y , es posible que cierta ecuación sea por ejemplo de tipo elíptico en cierta región del plano x, y e hiperbólico en otra. Cuando los coeficientes A, B, C son constantes, entonces la ecuación pertenecerá a un tipo único, perfectamente determinado en todo el plano x, y .

La ecuación de Laplace (38.1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

para la cual se tiene $B^2 - AC = -1$, es el ejemplo más simple de ecuación del tipo elíptico: la *ecuación de la difusión* (o del calor)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

para la cual $B^2 - AC = 0$, es del tipo parabólico; la ecuación de onda (91.4)

$$\tau \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

para la cual $B^2 - AC = \tau\rho > 0$, es del tipo hiperbólico.

La clasificación de las ecuaciones lineales del segundo orden en dos variables independientes en elípticas, parabólicas e hiperbólicas se extiende de manera parecida a las que dependen de más de dos variables, como por ejemplo la ecuación de Laplace en tres dimensiones (25.1).

132. Ecuaciones totalmente lineales. Sea $u(x, y, z, \dots)$ una función de las variables indicadas. Consideremos la funcional

$$L\{u\} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dots + E \frac{\partial u}{\partial x} + F \frac{\partial u}{\partial y} + \dots + Hu \quad (132.1)$$

en la cual aparecen linealmente no sólo las derivadas parciales segundas de u como en (130.1), sino también las derivadas primeras y la función u , con coeficientes $A, B, \dots, E, F, \dots, H$ funciones de $x, y, z, \dots$. El operador diferencial

$$L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dots + E \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial y} + \dots + H$$

es evidentemente lineal, teniéndose, cualesquiera que sean las constantes c_1 y c_2 ,

$$L\{c_1 u_1 + c_2 u_2\} = c_1 L\{u_1\} + c_2 L\{u_2\}. \quad (132.2)$$

La ecuación diferencial

$$L\{u\} = F(x, y, z, \dots) \quad (132.3)$$

siendo F una función arbitraria conocida, se dice *ecuación diferencial del segundo orden totalmente lineal* en las variables $x, y, z, \dots$. Se dice *homogénea* la ecuación

$$L\{u\} = 0. \quad (132.4)$$

La propiedad (132.2) permite afirmar que, si u_1, u_2 son dos soluciones de una ecuación homogénea (132.4), también cualquier combinación lineal $c_1 u_1 + c_2 u_2$ es solución. Más generalmente se puede

obtener una solución combinando linealmente tantas soluciones particulares $u_1, u_2, u_3, \dots$ cuantas se quiera, o también formando una serie convergente

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \quad (132.5)$$

con la combinación lineal de infinitas soluciones. Finalmente, si se conoce una solución $u(x, y, z, \dots, \lambda)$ de la ecuación homogénea (132.4) dependiente de un parámetro variable λ , y $K(\lambda)$ es una función continua arbitraria conocida de λ , toda integral

$$U = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} K(\lambda) u(x, y, z, \dots, \lambda) d\lambda \quad (132.6)$$

que puede considerarse una extensión funcional de la serie (132.5) (ver No. 92), es también solución de la ecuación (132.4).

Además del problema de Cauchy, del cual se habló en el No. 130, muchos son los problemas que pueden plantearse con respecto a las ecuaciones totalmente lineales (132.3). Supuesto que el campo de variabilidad V de las variables independientes $x, y, z, \dots$ esté limitado por una frontera S (que será una línea plana cerrada si las variables son sólo dos, una superficie cerrada si son tres), y si $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a S , se pueden dar los valores de u y de $\partial u / \partial n$ sobre la frontera S . Condiciones de frontera del tipo

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (\text{sobre } S) \quad (132.7)$$

se dicen *condiciones homogéneas*, mientras que una condición

$$u = f(x, y, z, \dots) \quad (\text{sobre } S) \quad (132.8)$$

con f no idénticamente nula, no es homogénea.

A veces es importante poder transformar un problema relativo a una ecuación lineal homogénea (132.4), $L\{u\} = 0$ con condiciones de frontera no homogéneas, por ejemplo la (132.8), en otro en que las condiciones de frontera si sean homogéneas, aunque la ecuación relativa ya no lo sea. Supuesto que los valores de frontera f puedan extenderse con continuidad a todo el campo V , de tal modo que allí $L\{f\} = g(x, y, z, \dots)$ sea una función continua, la

función incógnita u se puede reemplazar por $v = f - u$, siendo por (132.8) $v = 0$ sobre S , y

$$L\{v\} = L\{f\} - L\{u\} = g.$$

El problema original relativo a la ecuación homogénea $L\{u\} = 0$ con condiciones de frontera no homogéneas $u = f$ puede transformarse así en uno relativo a la ecuación no homogénea $L\{v\} = g$ con la condición de frontera homogénea $v = 0$. Este resultado se invierte, ya que si se conoce una solución f de la ecuación no homogénea $L\{v\} = g$ con $v = 0$ sobre S , es bastante reemplazar v por $f - u$ para pasar a la ecuación homogénea $L\{u\} = 0$, con $u = f$ sobre S .

133. Métodos para la integración de ecuaciones en las derivadas parciales. La resolución efectiva de problemas relativos a ecuaciones diferenciales lineales en las derivadas parciales ofrece dificultades muy grandes, muchas veces imposibles de vencer si se desea una integración en términos finitos; en determinados casos pueden introducir útiles simplificaciones los tres métodos siguientes, que ya hemos tenido ocasión de mencionar a propósito de las ecuaciones diferenciales ordinarias:

- a) el empleo de la transformación de Laplace,
- b) el método de la función de Green,
- c) el método de las autofunciones.

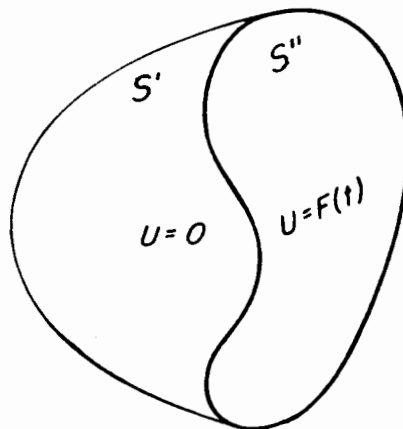
El primer método permite transformar la ecuación en las derivadas parciales en una ordinaria; los otros dos, que están ligados estrechamente entre sí, la transforman en una ecuación integral. A continuación presentaremos estos métodos a través de ejemplos de su empleo, que nos permitirán familiarizarnos al mismo tiempo con algunas entre las más importantes ecuaciones diferenciales de las Matemáticas Aplicadas.

134. Método de la transformación de Laplace. Ecuación de la difusión y fórmula de Duhamel. En el No. 111 se vio cómo el Cálculo Operacional puede ayudar en la integración de la ecuación

de Laplace. Un interesante ejemplo de otro tipo se tiene en el siguiente problema relativo a la *ecuación de difusión*

$$(\rho c) \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div} (k \text{ grad } U) \quad (134.1)$$

que se presenta en termodinámica al estudiarse la propagación del calor a lo largo de un cuerpo sólido conductor V , limitado por una superficie S . En ella t representa el tiempo, ρ la densidad, c el calor específico y k la conductividad térmica del cuerpo; $U(P, t)$ es la temperatura en un punto P cualquiera del cuerpo en el instante t . Las condiciones de frontera son que en el instante inicial $t = 0$ la temperatura U es nula en todo el cuerpo, mientras que después la temperatura sigue conservándose nula sobre una parte S' de su superficie exterior S , y sobre la parte S'' remanente crece con una ley conocida $U = F(t)$. Es decir



$$\begin{cases} U(P, 0) = 0 & \text{en todo } V \\ U(P, t) = 0 & \text{sobre } S' \\ U(P, t) = F(t) & \text{sobre } S'' \end{cases} \quad (134.2)$$

Si, siguiendo a Bartels y Churchill, aplicamos la transformación de Laplace a la variable tiempo, poniendo

$$u(P, s) = \mathcal{L}\{U(P, t)\} \quad (134.3)$$

resulta que la función transformada u satisface la ecuación

$$(\rho c) s u = \text{div} (k \text{ grad } u) \quad (134.4)$$

que se obtiene con aplicar la fórmula (103.4) a la (134.1), tomando en cuenta la primera condición (134.2). Las otras dos condiciones de frontera se transforman en

$$\begin{cases} u(P, s) = 0 & \text{sobre } S' \\ u(P, s) = f(s) & \text{sobre } S'' \end{cases} \quad (134.5)$$

siendo $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$.

Pudiéndose disponer arbitrariamente de la función $F(t)$, supon-
gamos en primer lugar que sea en todo instante $F(t) = 1$ y que
 $W(P, t)$ sea la integral de (134.1) en tales condiciones (o sea
 $W = 0$ sobre S' , $W = 1$ sobre S''). La transformada $w(P, s) =$
 $\mathcal{L}\{W(P, t)\}$ satisfará la (134.4), siendo $w = 0$ sobre S' y por
(103.6) $w = 1/s$ sobre S'' , y así también la función $s f(s)w(P, s)$
tiene que satisfacer la (134.4) (donde la variable s no queda afec-
tada por las operaciones diferenciales), pero con las condiciones
de frontera

$$\begin{cases} s f(s)w(P, s) = 0 & \text{sobre } S' \\ s f(s)w(P, s) = f(s) & \text{sobre } S'' \end{cases}$$

Estas condiciones son las mismas (134.5), de modo que la función
 $s f(s)w$ es precisamente la u buscada:

$$u(P, s) = s f(s)w(P, s).$$

Antitransformando esta ecuación, si se toma en cuenta que, por
(103.4), sw es la transformada de $\partial W/\partial t$, se obtiene por (107.1)
 $U = F^*(\partial W/\partial t)$, o sea

$$U(P, t) = \int_0^t F(t - \tau) \frac{\partial W(P, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (134.6)$$

Esta importante *fórmula de Duhamel* es del tipo (98.5), y muestra el
efecto hereditario de las condiciones de frontera sobre el fenómeno.

135. Método de la función de Green. Problema de Dirichlet en tres dimensiones. El método de la función de Green, ya em-
pleado en el No. 121 a propósito de ecuaciones diferenciales ordina-
rias, permite, como se vio en esa ocasión, *transformar una ecuación diferencial lineal en una ecuación integral de núcleo simétrico, mediante una modificación provisional de las condiciones de frontera*. A continuación explicaremos como se procede en el caso de la ecuación de Laplace $\nabla^2 f(P) = 0$, haciendo notar desde luego que

el método de Green puede aplicarse también a otras ecuaciones en las derivadas parciales.

Analizaremos primero el caso *tridimensional*. Supuesto que la función $f(P)$ sea armónica en el interior de una región V limitada por una superficie cerrada S , y que tenga derivadas normales regulares sobre S , su valor en un punto P interior a V se expresa por la fórmula (34.1).

$$f(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(f \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS.$$

Aquí r representa la distancia entre P y un punto P_s cualquiera del contorno, n un vector unitario en P_s , normal al contorno y dirigido hacia el interior. Supuesto que $g(P)$ sea otra función armónica conocida en V , f y g estarán ligadas entre sí por la relación (32.4)

$$\int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = 0.$$

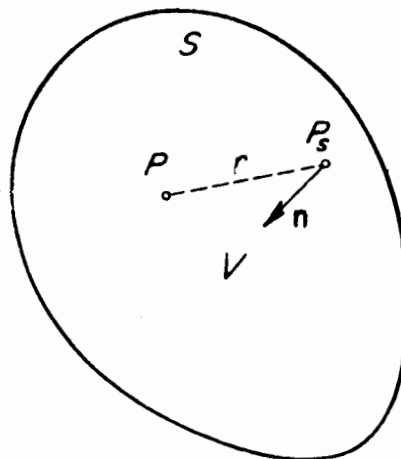
que dividida entre 4π y sumada a la anterior, da

$$f(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[f \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + g \right) - \left(\frac{1}{r} + g \right) \frac{\partial f}{\partial n} \right] dS \quad (135.1)$$

Supuesto quererse resolver el problema de Dirichlet (ver No. 35) de determinar la función armónica $f(P)$ conociendo los valores que ella adquiere sobre el contorno, pero no los de su derivada normal, la fórmula que acabamos de escribir nos ofrece el resultado, siempre que la última parte de la función integranda se anule, o sea que $g(P)$ sea una función tal que

$$g(P) = -\frac{1}{r} \quad \text{sobre } S \quad (135.2)$$

La función $g(P)$ así definida es precisamente la *función de Green* relativa a este problema. Como la función de Green obtenida en el

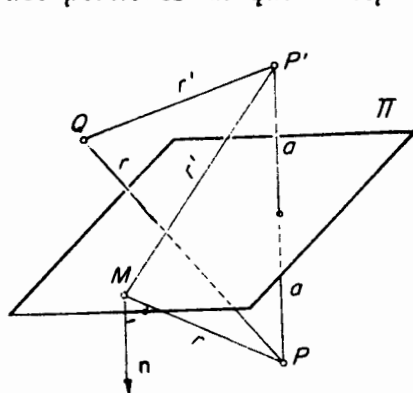


No. 121, ésta también *ha de tener derivada discontinua sobre el contorno*, pues de otro modo sería idéntica a la función $-1/r$ y la (135.1) daría la solución idénticamente nula $f(P) \equiv 0$. En estas condiciones la (135.1) se hace

$$f(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(P_s) \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + g \right) \right] dS \quad (135.3)$$

siendo ésta una ecuación integral, equivalente a la ecuación diferencial $\nabla^2 f = 0$. A continuación veremos dos ejemplos de resolución de la (135.3).

136. Problema de Dirichlet con frontera plana. Vamos a resolver por el método indicado el *problema de Dirichlet en una de las dos porciones en que el espacio queda dividido por un plano Π* .



Sea a la distancia entre el punto P y el plano Π y sea P' el simétrico de P con respecto al plano. Sean r, r' las distancias de un punto Q a P y a P' respectivamente; entonces la función de Green resulta

$$g(P) = -\frac{1}{r'}. \quad (136.1)$$

En efecto se trata de una función armónica en el semiespacio que contiene P (por ser del tipo (25.2)) y sin singularidades en él (ya que su singularidad está en P' , al otro lado del plano Π) y además esta función vale $-1/r$ cuando Q está sobre Π . Para ella resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + g \right) &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} - \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dn} = \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dn} + \frac{1}{r'^2} \frac{dr'}{dn}. \end{aligned} \quad (136.2)$$

Siendo M un punto sobre Π y n la normal interna al plano en M , en M se tiene por (13.2)

$$\frac{dr}{dn} = \text{grad } r \cdot \frac{dM}{dn} = \frac{PM}{r} \cdot \frac{dM}{dn} = -\cos(nr)$$

siendo $\frac{PM}{r}$ un vector unitario dirigido de P hacia M y $\frac{dM}{dn}$ otro vector unitario en dirección de la normal n . Igualmente se tendrá

$$\frac{dr'}{dn} = \cos(nr);$$

luego, siendo sobre Π . $r = r'$, se tiene reemplazando en (136.2) que sobre Π

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + g \right) = \frac{2}{r^2} \cos(nr).$$

Reemplazando en la fórmula (135.3), resulta que la función que resuelve el problema de Dirichlet en el campo considerado está dada en el punto P por

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} f \frac{\cos(nr)}{r^2} d\Pi$$

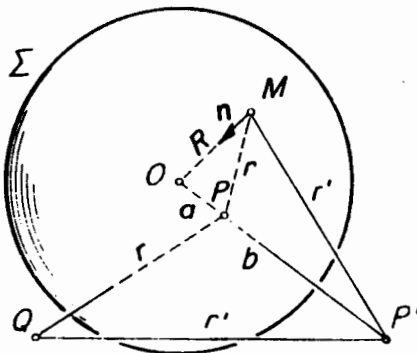
o sea, siendo que sobre el plano Π es $\cos(nr) = a/r$,

$$f(P) = \frac{a}{2\pi} \int_{\Pi} \frac{f}{r^3} d\Pi \quad (136.3)$$

137. Problema de Dirichlet en la esfera. Pasemos ahora al problema de Dirichlet en el interior de una esfera Σ , con centro en O y radio R . Sean P y P' dos puntos alineados con O , P interno y P' externo a la esfera, y sea $OP = a$, $OP' = b$ con

$$b = \frac{R^2}{a}. \quad (137.1) \quad \Sigma$$

Se dice que P' es el punto que corresponde a P en la inversión por radios vectores recíprocos con respecto a la esfera que, como se ve enseguida, transforma el campo interior a la esfera, en el exterior y la superficie en sí misma (ver



también No. 49). Dado otro punto Q cualquiera interno a la esfera, llámese r su distancia a P , r' su distancia a P' . Si se trata de un punto M sobre la superficie Σ , entonces los triángulos OMP y OMP' son semejantes, por tener el ángulo en O común y los lados que lo forman proporcionales, siendo por (137.1) $a:R = R:b$. Por tanto resulta que también los otros dos lados están entre sí en la misma proporción o sea que

$$r' : r = R : a$$

de donde sigue que

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{a} \frac{1}{r'}. \quad (137.2)$$

Luego, siendo $1/r'$ armónica en el interior de la esfera, la función de Green será

$$g = -\frac{R}{a} \frac{1}{r'} \quad (137.3)$$

de modo que sobre la superficie Σ resulta

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + g \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{a} \frac{1}{r'} \right) = -\frac{1}{r^2} \cos(nr) + \frac{R}{a} \frac{1}{r'^2} \cos(nr').$$

Ahora, en los triángulos OPM y $OP'M$ tenemos

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos(nr) \\ b^2 &= R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos(nr'), \end{aligned} \quad (137.4)$$

de modo que, reemplazando en la fórmula anterior, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + g \right) = \frac{a^2 - R^2 - r^2}{2Rr^3} - \frac{R}{a} \frac{b^2 - R^2 - r'^2}{2Rr'^3}.$$

Pero recordando las relaciones (137.1) y (137.2), resulta

$$\begin{aligned} \frac{R}{a} \frac{b^2 - R^2 - r'^2}{2Rr'^3} &= \frac{R}{a} \frac{\frac{R^4}{a^2} - R^2 - \frac{R^2 r^2}{a^2}}{2R \frac{R^3 r^3}{a^3}} \\ &= \frac{R^4 - a^2 R^2 - R^2 r^2}{2R^3 r^3} \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + g \right) &= \frac{a^2 R^2 - R^4 - R^2 r^2 - (R^4 - a^2 R^2 - R^2 r^2)}{2R^3 r^3} = \\ &= \frac{2a^2 R^2 - 2R^4}{2R^3 r^3} = \frac{a^2 - R^2}{R r^3}\end{aligned}$$

Reemplazando en (135.3), tenemos por fin

$$f(P) = \frac{a^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\Sigma} \frac{f}{r^3} d\Sigma \quad (137.5)$$

formula de Poisson que ofrece la solución del problema de Dirichlet en la esfera.

138. Problema de Dirichlet en dos dimensiones. Si $f(P) = f(x, y)$ es una *función armónica bidimensional* en la región plana A limitada por la línea cerrada L , la fórmula (38.3) da

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \left(\ln r \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dL.$$

Si $g(P)$ es otra función armónica en A , se tiene por (37.5)

$$\oint_L \left(g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) dL = 0.$$

Dividiendo esta última entre 2π y sumando la anterior, queda

$$f(P) = -\frac{1}{2\pi} \oint_L \left[f \frac{\partial}{\partial n} (\ln r + g) - (\ln r + g) \frac{\partial f}{\partial n} \right] dL. \quad (138.1)$$

Si se introduce una *función de Green* $g(P)$ tal que

$$g(P) = -\ln r \quad (\text{sobre } L) \quad (138.2)$$

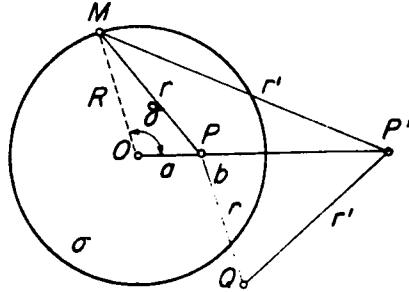
se obtiene con razonamiento análogo al del No. 135, la ecuación integral

$$f(P) = -\frac{1}{2\pi} \oint_L f(P_L) \left[\frac{\partial}{\partial n} (\ln r + g) \right] dL \quad (138.3)$$

equivalente a la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

139. **Problema de Dirichlet en el círculo.** La resolución del problema de Dirichlet en un área circular es análoga a la que vimos en el No. 137 para la esfera. Aquí también se considera el punto P' ,

correspondiente a P por inversión con respecto a la circunferencia σ . Siendo R el radio del círculo, $OP = a$, $OP' = b = R^2/a$, $QP = r$, $OP' = r'$ exactamente como en el caso de la esfera, también es válida aquí la relación (137.2)



$$r = \frac{a}{R} r' \quad (\text{sobre } \sigma). \quad (139.1)$$

La función de Green es ahora

$$g = -\ln r' - \ln \frac{a}{R}. \quad (139.2)$$

ya que se trata de una función armónica dentro del círculo y que, por (139.1), adquiere el valor (138.2) sobre la circunferencia. Entonces resulta

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln r + g) = \frac{\partial}{\partial n} (\ln r - \ln r') = -\frac{1}{r} \cos(nr) + \frac{1}{r'} \cos(nr').$$

Ahora, reemplazando los cosenos por sus expresiones que provienen en las fórmulas (137.4), se tiene de manera análoga

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln r + g) = \frac{a^2 - R^2 - r^2}{2Rr^2} - \frac{b^2 - R^2 - r'^2}{2Rr'^2} = \frac{a^2 - R^2}{Rr^2}.$$

Reemplazando en (138.3), queda

$$f(P) = \frac{R^2 - a^2}{2\pi R} \oint_{\sigma} \frac{f}{r^2} d\sigma \quad (139.3)$$

fórmula que resuelve el problema de Dirichlet para el círculo. Si llamamos ϑ el ángulo POM , tenemos

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta. \quad d\sigma = R d\vartheta$$

por lo que la fórmula anterior puede escribirse también

$$f(P) = \frac{R^2 - a^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta) d\vartheta}{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta} \quad (139.4)$$

reduciéndose la determinación del valor de f en P al cálculo de una integral definida en la variable ϑ .

140. Método de las autofunciones. La ecuación de onda. Una vez transformada una ecuación diferencial lineal en las derivadas parciales en ecuación integral, es posible en determinados casos integrarla mediante las autofunciones relativas; si hay una infinidad de autofunciones, siendo éstas todas ortogonales entre sí (ver No. 122), lo que se vio en el No. 94 sugiere la posibilidad de expresar esas soluciones de la ecuación diferencial dada que sean funciones de cuadrado sumable, por medio de un desarrollo en serie de autofunciones.

Veamos por ejemplo la ecuación de onda (125.1) que, escogiendo convenientemente la unidad de medida de los tiempos, escribiremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (140.1)$$

Lo visto en el No. 125 manifiesta que, en el caso de que pueda realizarse la separación de variables $z = y(x) T(t)$, la $y(x)$ resulta solución de la ecuación diferencial ordinaria (125.3)

$$y'' + \lambda y = 0. \quad (140.2)$$

Admitiendo por sencillez que la longitud de la cuerda sea igual a π , las condiciones de frontera (125.5) se hacen $y(0) = y(\pi) = 0$. Siendo la solución general de (140.2)

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= c_1 (\cos \sqrt{\lambda}x + i \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x) + c_2 (\cos \sqrt{\lambda}x - i \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x) \end{aligned}$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias, se ve que las condiciones de frontera se satisfacen sólo si

$$\lambda = n^2 \quad (n \text{ entero}). \quad (140.3)$$

resultando entonces infinitas soluciones de (140.2), del tipo

$$y_n(x) = ic \operatorname{sen} nx. \quad (140.4)$$

Los valores (140.3) son los autovalores, las funciones (140.4) son las autofunciones del problema. Por otro lado, supuesto por sencillez $T(0) = 0$, la (125.7) da

$$T_n(t) = A_n \operatorname{sen} nt,$$

resultando para la ecuación (140.1) las soluciones

$$z_n(x, t) = y_n(x) T_n(t) = B_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nt$$

con $B_n = 2icA_n$, y luego por (132.5) la solución general

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nt, \quad (140.5)$$

expresada como desarrollo en serie de autofunciones.

141. Potencial de un campo con frontera esférica. Otro ejemplo clásico de aplicación del método de las autofunciones se tiene en la *integración de la ecuación de Laplace* $\nabla^2 U = 0$ en el interior de una esfera Σ de radio R , sin fijar de antemano el tipo de condiciones de frontera, como en el No. 137, sino admitiendo que la solución U , expresada en coordenadas esféricas r, ϑ, φ , pueda escribirse como producto de una función X de la sola variable r por una función Y de ϑ y φ :

$$U = X(r) Y(\vartheta, \varphi). \quad (141.1)$$

Reemplazando en la ecuación de Laplace escrita en coordenadas esféricas (fórmula (28.4))

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0,$$

obtenemos

$$\frac{d^2 X}{dr^2} Y + \frac{2}{r} \frac{dX}{dr} Y + \frac{X}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{X}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0,$$

de donde, multiplicando por r^2/XY y separando variables.

$$\frac{r^2}{X} \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{2r}{X} \frac{dX}{dr} = - \left[\frac{1}{Y \operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{Y \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right]$$

Con lo anterior se ha conseguido aislar en el primer miembro funciones solamente de r , en el segundo, funciones solamente de ϑ y φ . La identidad de ambas expresiones no puede realizarse a no ser que ambos miembros sean iguales a una misma constante, que llamaremos λ , o sea si

$$r^2 \frac{d^2 X}{dr^2} + 2r \frac{dX}{dr} - \lambda X = 0 \quad (141.2)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (141.3)$$

Supuesto, como en No. 126, que valga el desarrollo en serie

$$X(r) = C_0 + C_1 r + C_2 r^2 + C_3 r^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^k \quad (141.4)$$

y luego

$$X'(r) = C_1 + 2C_2 r + 3C_3 r^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} k C_k r^{k-1}$$

$$X''(r) = 2C_2 + 6C_3 r + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k r^{k-2}.$$

sustituyendo en (141.2) queda

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k [k(k-1) + 2k - \lambda] r^k = 0.$$

Esta ecuación está satisfecha sólo si se anula cada uno de los coeficientes, es decir si $k(k-1) + 2k - \lambda = 0$, o sea

$$k(k+1) = \lambda. \quad \text{para todo } k \text{ entero.}$$

Escribase

$$\lambda = n(n+1) \quad (141.5)$$

y reemplácese en la ecuación anterior. Resulta

$$k(k+1) - n(n+1) = 0$$

$$(k-n)(k+n+1) = 0$$

y luego se tienen las dos raíces

$$k = n, \quad k = -(n+1)$$

de donde se ve que, siendo k entero, n también lo ha de ser. Por tanto, reemplazando en (141.4), se obtiene que la solución de la ecuación diferencial (141.2) es del tipo

$$X(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \quad (141.6)$$

con A y B constantes. Estas son las autofunciones de dicha ecuación, y los números (141.5) con n entero son los autovalores correspondientes.

La expresión (141.1) se hace por (141.6)

$$U = Ar^n Y_n(\vartheta, \varphi) + \frac{BY_n(\vartheta, \varphi)}{r^{n+1}} \quad (141.7)$$

con n entero, siendo las funciones $Y_n(\vartheta, \varphi)$ las soluciones de la ecuación (141.3) para $\lambda = n(n+1)$. Esta fórmula da el potencial U buscado, siempre que se halle la manera de determinar estas funciones Y_n . Ahora, para que U sea una *función armónica*, es suficiente por (141.7) que las funciones

$$r^n Y_n(\vartheta, \varphi), \quad \frac{Y_n(\vartheta, \varphi)}{r^{n+1}} \quad (141.8)$$

sean armónicas a un mismo tiempo. Por otro lado conviene recordar que los *polinomios armónicos homogéneos* $P_n(x, y, z)$ estudiados en el No. 26 son funciones armónicas, así como las funciones (26.1) P_n/r^{2n+1} , y que ellos por ser homogéneos gozan de la propiedad que, al efectuarse la sustitución

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = r \cos \vartheta \sin \varphi \\ z = r \sin \vartheta \end{cases} \quad (141.9)$$

que cambia coordenadas cartesianas en coordenadas esféricas, se expresan por el producto de r^n por una función de ϑ, φ solamente. Luego es bastante escribir

$$r^n Y_n(\vartheta, \varphi) = P_n(x, y, z) \quad (141.10)$$

siendo entonces también

$$\frac{P_n}{r^{2n+1}} = \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad (141.11)$$

para obtener una expresión de funciones armónicas del tipo (141.8).

142. Funciones esféricas. Las funciones $Y_n(\vartheta, \varphi)$, que satisfacen la ecuación diferencial (141.3) con $\lambda = n(n+1)$ y que se obtienen de los polinomios armónicos homogéneos por la relación (141.10), que escribiremos

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{P_n(x, y, z)}{r^n} \quad (142.1)$$

se llaman *funciones esféricas*. A ellas únicamente afectan las condiciones de frontera del problema planteado, ya que, siendo sobre la superficie de la esfera $r = \text{cte}$, allí U depende sólo de ϑ , φ y luego sólo de las funciones Y_n .

Las funciones esféricas gozan de la propiedad muy importante de que *son ortogonales, entre si de dos en dos, sobre la superficie Σ de la esfera*. Para comprobarlo, es bastante aplicar la relación (32.4) a dos polinomios P_m y P_n diferentes, integrando sobre dicha superficie. Se obtiene

$$\int_{\Sigma} \left(P_m \frac{\partial P_n}{\partial n} - P_n \frac{\partial P_m}{\partial n} \right) d\Sigma = 0$$

es decir, por ser Σ una esfera,

$$\int_{\Sigma} \left(P_m \frac{\partial P_n}{\partial r} - P_n \frac{\partial P_m}{\partial r} \right) d\Sigma = 0.$$

Reemplazando los polinomios por funciones esféricas, por medio de (141.10), se obtiene sucesivamente

$$\int_{\Sigma} (r^m Y_m \cdot n r^{n-1} Y_n - r^n Y_n \cdot m r^{m-1} Y_m) d\Sigma = 0$$

$$\int_{\Sigma} r^{m+n-1} (n - m) Y_m Y_n d\Sigma = 0$$

$$(n - m) R^{m+n-1} \int_{\Sigma} Y_m Y_n d\Sigma = 0$$

de donde resulta la ortogonalidad

$$\int_{\Sigma} Y_m(\vartheta, \varphi) Y_n(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = 0. \quad (142.2)$$

Por tanto ha de ser posible obtener soluciones más generales del problema del potencial en la esfera, por medio de *desarrollos en serie de funciones esféricas*, determinando los coeficientes por el método señalado en el No. 94.

Empezando por el *problema de Dirichlet dentro de la esfera*, ya atacado por otro camino en el No. 137, supondremos que se quiere encontrar una función $U(r, \vartheta, \varphi)$ que sobre la superficie de la esfera de ecuación $r = R$ adquiere los valores $U = U_{\Sigma}(\vartheta, \varphi)$ y que es armónica en el interior de la esfera, admitiendo además que, siguiendo el método indicado, logremos desarrollar la función $U_{\Sigma}(\vartheta, \varphi)$ en una serie uniformemente convergente de funciones esféricas

$$U_{\Sigma}(\vartheta, \varphi) = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots \quad (142.3)$$

Entonces la solución del problema está dada por la función

$$U(r, \vartheta, \varphi) = a_1 \frac{r}{R} Y_1 + a_2 \frac{r^2}{R^2} Y_2 + \dots,$$

ya que se trata de una serie uniformemente convergente (pues ésta, por ser $r/R < 1$, converge más rápidamente que (142.3)), que dicha serie se reduce a la (142.3) para $r = R$ y que, por la fórmula (142.1), puede escribirse

$$U = \frac{a_1}{R} P_1 + \frac{a_2}{R^2} P_2 + \dots \quad (142.4)$$

de donde resulta que U es armónica por ser una suma infinita de términos que son todas funciones armónicas. Es interesante observar que la expresión (142.4) expresa a U por medio de una serie de potencias de las variables x, y, z .

El problema anterior tiene interés por ejemplo al quererse determinar el potencial de atracción de una cáscara esférica. En el problema hidrodinámico de calcular el potencial de velocidad en el fluido indefinido que se mueve alrededor de una esfera, interesa más bien resolver el *problema del Neumann en el exterior de la esfera*, ya que

por lo general se conocerán sobre la esfera no los valores del potencial, sino los de sus derivadas normales, que son las componentes radiales de la velocidad. En este caso, si se supone sobre la esfera las derivadas normales dadas por la serie uniformemente convergente

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{\Sigma} = b_0 + b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + \dots \quad (142.5)$$

la solución resulta dada por la función

$$U = -R \left[b_0 \frac{R}{r} + b_1 \frac{R^2}{2r^2} Y_1 + b_2 \frac{R^3}{3r^3} Y_2 + \dots \right] \quad (142.6)$$

que es una serie que converge uniformemente fuera de la esfera (para $R/r < 1$), por admitir a (142.5) como mayorante, cuya derivada radial se reduce a (142.5) para $r = R$, y que además es armónica porque todas las funciones (141.11) lo son.

CAPITULO VI

GEOMETRIA DIFERENCIAL

I. CURVAS ALABEADAS, ENVOLVENTES Y SUPERFICIES DESARROLLABLES

143. **Tangente y plano osculador a una curva alabeada.** Consideremos una curva alabeada y un punto P de ella. Si a P se le da un desplazamiento elemental dP sobre la curva, se llama *elemento de arco*, y se escribe ds , el módulo del vector dP

$$ds = \text{mod } dP. \quad (143.1)$$

resultado
$$ds^2 = dP \cdot dP = dP^2. \quad (143.2)$$

Por tanto el vector

$$t = \frac{dP}{ds} \quad (143.3)$$

es unitario y está dirigido según la tangente a la curva en el punto P : se le llama *vector tangente*. Siendo $(t)^2 = 1$, derivando con respecto a la variable *longitud de arco* s , se llega a

$$t \cdot \frac{dt}{ds} = 0.$$

Esta relación manifiesta que *el vector dt/ds , si no es nulo, es normal al vector tangente*. El vector unitario n dirigido como el vector dt/ds se llama *normal principal* a la curva en P . El plano que pasa por la tangente y la normal principal se llama *plano osculador* a la curva en P .

El plano osculador a una curva en un punto P es la posición límite del plano que pasa por la tangente a la curva en el punto P y por otro punto P' de la curva, próximo a P , cuando este segundo punto se acerca indefinidamente a P . En efecto, supongamos que se miden por medio de la variable s los arcos de la curva, a partir de cierto origen, y que son s , $s + \Delta s$ los arcos que corresponden a P , P' respectivamente; resulta

$$P = P(s). \quad P' = P(s + \Delta s). \quad (143.4)$$

Si consideramos un tercer punto O , fijo en el espacio, aplicando la fórmula de Taylor al vector variable OP (lo que se puede considerar el resultado de aplicar esa fórmula a las tres componentes de dicho vector), se obtiene

$$OP(s + \Delta s) = OP(s) + \Delta s \frac{d}{ds} OP(s) + \frac{\Delta s^2}{2} \left[\frac{d^2}{ds^2} OP(s) + \varepsilon \right]$$

siendo ε un vector que tiende a cero con Δs : luego observando que por (143.4)

$$OP(s + \Delta s) - OP(s) = OP' - OP = PP'$$

y recordando (6.3) y (143.3), queda

$$PP' = \Delta s t + \frac{\Delta s^2}{2} \left[\frac{dt}{ds} + \varepsilon \right].$$

Esta fórmula manifiesta que el vector $PP' - \Delta s t$ es paralelo al vector $dt/ds + \varepsilon$; pero el vector $PP' - \Delta s t$ es coplanar a los vectores PP' y t , de los cuales es combinación lineal. En el límite para $P' \rightarrow P$, el plano de estos dos vectores tiene por tanto que contener al vector dt/ds , que es el límite de $dt/ds + \varepsilon$, y esto, recordando la definición de plano osculador, comprueba lo que se quería demostrar.

144. Curvatura de las curvas alabeadas. Se define como *curvatura de curva una alabeada en un punto P* de ella el límite para $\Delta s \rightarrow 0$ de la razón $\Delta\phi/\Delta s$ entre el ángulo $\Delta\phi$ formado por el vector unitario t tangente a la curva en el punto $P(s)$ con el vector unitario t' tangente a la curva en $P(s + \Delta s)$ (ángulo medido en radianes), y la longitud Δs del arco interceptado entre los puntos. Es decir, llamada $1/r$ la curvatura, se tiene

$$\frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}. \quad (144.1)$$

Para calcular este límite observemos que se tiene

$$\text{mod}(t \times t') = \text{sen } \Delta\phi,$$

y luego, confundiendo el seno con el arco, podemos escribir (144.1) así

$$\frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \text{mod} \frac{t \times t'}{\Delta s}. \quad (144.2)$$

Por otro lado por la fórmula de Taylor limitada al segundo término del desarrollo, podemos escribir análogamente a lo hecho en el No. 143.

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t} + \Delta s \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds} + \boldsymbol{\varepsilon} \right)$$

siendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ un vector que tiende a cero con Δs ; luego multiplicando vectorialmente ambos miembros por $\mathbf{t}$,

$$\mathbf{t} \times \mathbf{t}' = \Delta s \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\varepsilon} \right)$$

de donde resulta pasando al límite

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{t}'}{\Delta s} = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

y reemplazando en (144.2)

$$\frac{1}{r} = \text{mod} \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right).$$

Pero, siendo $\mathbf{t}$ un vector unitario y normal a $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$, se tiene

$$\text{mod} \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right) = \text{mod} \frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

resultando la fórmula de la curvatura

$$\frac{1}{r} = \text{mod} \frac{d\mathbf{t}}{ds}. \quad (144.3)$$

Puesto que el vector $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ está orientado como el vector normal principal $\mathbf{n}$ y éste es un vector unitario, podemos concluir que

$$\boxed{\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{r} \mathbf{n}} \quad (144.4)$$

Esta es la relación que liga ambos vectores entre sí.

El escalar r se llama *radio de curvatura* de la curva en el punto P considerado. Tracemos por P el vector $\mathbf{CP} = r\mathbf{n}$; el extremo C se llama *centro de curvatura*.

Si el punto P varía en función de una variable u , de la cual es también función el arco s , resulta por (143.3)

$$\frac{dP}{du} = \frac{ds}{du} t \quad (144.5)$$

y derivando, en base a (144.4),

$$\frac{d^2P}{du^2} = \frac{d^2s}{du^2} t + \frac{1}{r} \left(\frac{ds}{du} \right)^2 n. \quad (144.6)$$

Por tanto la primera derivada del punto P con respecto a la variable u es un vector paralelo a la tangente, cuyo módulo es du/ds , la segunda derivada es un vector que está en el plano osculador, con componente d^2s/du^2 según la tangente y $1/r(ds/du)^2$ según la normal principal. Las aplicaciones de este resultado para determinar las magnitudes de las aceleraciones tangencial y radial en el movimiento curvilíneo son muy conocidas.

145. Torsión de una curva alabeada. Se define como torsión de una curva alabeada en un punto P de ella el límite para $\Delta s \rightarrow 0$ de la razón $\Delta\psi/\Delta s$ entre el ángulo $\Delta\psi$ formado por el plano osculador a la curva en el punto $P(s)$ con el plano osculador en el punto $P(s + \Delta s)$ (ángulo medido en radianes), y la longitud Δs del arco interceptado entre los dos puntos. O sea, llamada $1/\tau$ la torsión, resulta

$$\frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s}. \quad (145.1)$$

Para calcular este límite procederemos como sigue. Sea b el vector unitario obtenido efectuando el producto cruzado de t por n

$$b = t \times n, \quad (145.2)$$

vector que es normal al plano osculador. Llámase *binormal* a la curva en el punto P la semirrecta que sale de P y está dirigida según b . El ángulo $\Delta\psi$ resulta luego igual al de las binormales b y b' en $P(s)$ y $P(s + \Delta s)$, o sea

$$\text{mod}(b \times b') = \text{sen } \Delta\psi$$

y se tiene de (145.1)

$$\frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \text{mod} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{b}'}{\Delta s}. \quad (145.3)$$

Por otro lado se puede escribir, por la fórmula de Taylor,

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \Delta s \left(\frac{d\mathbf{b}}{ds} + \epsilon \right)$$

y luego

$$\mathbf{b} \times \mathbf{b}' = \Delta s \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{b}}{ds} + \mathbf{b} \times \epsilon \right),$$

de donde pasando al límite

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{b}'}{\Delta s} = \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{b}}{ds}.$$

Reemplazando en (145.3), con la observación de que $\mathbf{b}$ es un vector unitario y que, por ser $\mathbf{b}^2 = 1$, se tiene derivando $(d\mathbf{b}/ds) \cdot \mathbf{b} = 0$, o sea que $\mathbf{b}$ y $d\mathbf{b}/ds$ son ortogonales entre sí, resulta por fin

$$\frac{1}{\tau} = \text{mod} \frac{d\mathbf{b}}{ds}. \quad (145.4)$$

Esta fórmula permite encontrar para la binormal una expresión análoga a la (144.4), en que la torsión cumple el papel que en la (144.4) cumplía la curvatura. En efecto, siendo $\mathbf{b}$ normal a $\mathbf{t}$, tenemos $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$ y derivando con respecto a s

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0,$$

o sea por (144.4)

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{r} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Pero $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$ es cero, y por tanto $d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{t} = 0$, o sea $d\mathbf{b}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{t}$; siendo además perpendicular a $\mathbf{b}$, tiene que ser paralelo a $\mathbf{n}$; siendo que su módulo, por (145.4), es igual a $1/\tau$. queda por fin

$$\boxed{\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\tau} \mathbf{n}} \quad (145.5)$$

El escalar τ se llama a veces *radio de torsión* de la curva en el punto considerado.

146. Planos principales. De la (144.4) resulta que, si $dt/ds = 0$ cualquiera que sea s , ha de ser $r = \infty$ (curvatura nula) y por tanto la curva es una *recta* paralela a t . Si más bien se tiene idénticamente $db/ds = 0$, resulta de (145.5) que es $\tau = \infty$ (torsión nula). Para entender qué clase de curva es ésta, obsérvese que, siendo entonces $b = \text{cte}$, considerando el punto Q fijo sobre la curva y otro punto P móvil sobre ella, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (QP \cdot b) &= QP \cdot \frac{db}{ds} + \frac{dQP}{ds} \cdot b \\ &= \frac{dQP}{ds} \cdot b = t \cdot b = 0. \end{aligned}$$

Luego ha de ser

$$QP \cdot b = \text{cte}.$$

Ahora, recordemos que b se ha supuesto constante mientras que QP es variable por hipótesis. La ecuación anterior no puede subsistir a menos que el producto sea cero:

$$QP \cdot b = 0,$$

lo que implica que QP tiene que ser perpendicular a b . Esto significa que Q está siempre en el plano osculador a la curva en P , es decir que dicha curva es una curva plana; luego *las curvas de torsión nula son las curvas planas*.

Los vectores característicos t , n y b , tomados de dos en dos, definen tres planos. El primero, que contiene t y n , es el *plano osculador* que ya conocemos; el segundo, que contiene n y b , llámase *plano normal* a la curva por ser perpendicular a la tangente t ; por fin el plano que contiene t y b se llama *plano rectificante*. Su nombre proviene del hecho que, si b es constante, y por tanto la curva es plana como acabamos de comprobar, entonces la proyección de la curva sobre dicho plano es una recta; en general, para b variable, será ése, entre todos los que pasan por P y t , el plano tal que la proyección sobre él de un tramo de curva muy

próximo a P se acerca más a un segmento de recta. Los tres planos osculador, normal y rectificante se llaman "planos principales" de la curva en P .

147. **Fórmulas de Frenet.** Siendo por definición $n = b \times t$, derivando con respecto a s , tenemos

$$\frac{dn}{ds} = \frac{db}{ds} \times t + b \times \frac{dt}{ds}$$

y tomando en cuenta (145.5) y (144.4)

$$\frac{dn}{ds} = \frac{1}{\tau} n \times t + \frac{1}{r} b \times n :$$

Pero $n \times t = -b$, $b \times n = -t$, y por tanto

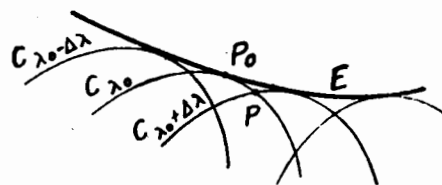
$$\boxed{\frac{dn}{ds} = -\frac{b}{\tau} - \frac{t}{r}} \quad (147.1)$$

Esta fórmula da la derivada del vector unitario n con respecto al arco s . Las fórmulas (144.4), (145.5) y (147.1), que expresan las derivadas de los vectores t , b y n en función de los demás y de los escalares r y τ , son fundamentales en la teoría de las curvas alabeadas, y se llaman *fórmulas de Frenet*.

148. **Envoltentes de curvas planas.** La ecuación

$$f(x, y, \lambda) = 0, \quad (148.1)$$

donde λ es un parámetro, para cada valor de λ representa una curva perteneciente al plano (x, y) . Si suponemos que λ pueda adquirir valores reales, variables con continuidad dentro de cierto intervalo, (148.1) representa a toda una familia de curvas (o sistema ∞^1 de curvas), que llamaremos C_λ .



Consideremos la curva C_{λ_0} que corresponde a la ecuación

$$f(x, y, \lambda_0) = 0 \quad (148.2)$$

y observemos el punto P , intersección de ella con otra curva próxima $C_{\lambda_0 + \Delta\lambda}$, de ecuación

$$f(x, y, \lambda_0 + \Delta\lambda) = 0.$$

Este punto intersección tendrá que dejar satisfechas a un mismo tiempo las dos ecuaciones anteriores y por tanto también la combinación lineal de ellas

$$\frac{f(x, y, \lambda_0 + \Delta\lambda) - f(x, y, \lambda_0)}{\Delta\lambda} = 0. \quad (148.3)$$

Supongamos ahora que el incremento $\Delta\lambda$ vaya disminuyendo con continuidad y tienda a cero. La curva $C_{\lambda_0 + \Delta\lambda}$ se irá acercando siempre más a la curva C_{λ_0} y la intersección P tenderá hacia una posición límite P_0 , cuyas coordenadas tendrán que satisfacer simultáneamente a la ecuación (148.2) y a la obtenida de (148.3) para $\Delta\lambda \rightarrow 0$, es decir

$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, y, \lambda) \right]_{\lambda = \lambda_0} = 0. \quad (148.4)$$

El punto P_0 , intersección de la curva C_{λ_0} con la infinitamente próxima, se dice ser "punto característico" para la primera. Cada curva de la familia poseerá en general un punto característico. El conjunto de ellos será una curva E , a la cual se da el nombre de *envolvente* de la familia C_λ . Por lo que acabamos de ver, la ecuación de la envolvente consistirá en el sistema obtenido combinando (148.2) y (148.4) para todos los valores de λ_0 , o sea

$$\boxed{f(x, y, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, y, \lambda) = 0} \quad (148.5)$$

donde λ es variable. La eliminación de λ entre estas dos ecuaciones da la ecuación de la envolvente en las variables x, y .

Es importante observar que *toda curva de la familia C_λ es tangente a la envolvente E en su punto característico*. Para comprobarlo, empezaremos señalando que, correspondiendo a cada curva es decir a cada valor de λ , un punto característico diferente, y siendo éste un punto de E , λ puede tomarse como parámetro varia-

ble sobre la envolvente, correspondiendo a cada valor de λ un punto de la envolvente misma. Por tanto, siendo $P_0(x, y)$ un punto móvil sobre la envolvente, sus coordenadas serán funciones de λ

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda)$$

y estas expresiones paramétricas dan precisamente la ecuación de la curva E . Sobre E es válida la ecuación (148.1), que derivada con respecto a λ da

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0;$$

pero sobre E la última derivada parcial es nula por (148.5), de modo que resulta

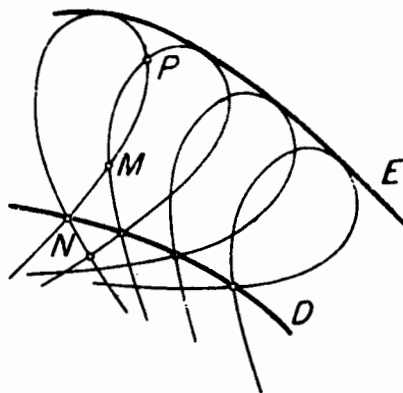
$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} = 0,$$

es decir, multiplicando por $d\lambda$,

$$\text{grad } f \cdot dP = 0. \quad (148.6)$$

Siendo $\text{grad } f$ normal a la curva C_λ en P_0 y dP tangente a la curva E en P_0 , (148.6) expresa la ortogonalidad entre esas dos rectas y consecuentemente la coincidencia de las tangentes a las dos curvas E y C_λ en su punto común P_0 ; con esto queda comprobado lo que se quería demostrar.

Una última observación importante: si bien la envolvente satisface las ecuaciones (148.5), no todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen a dicho sistema pertenecen necesariamente a la envolvente. En efecto supongamos que todas las curvas de la familia C_λ posean un punto doble. Entonces dos curvas muy próximas tendrán, además de la intersección P , otras dos intersecciones M y N que, al acercarse indefinidamente las dos curvas, tenderán hacia el punto doble de ellas. Por tanto, al aplicar el proceso anterior para encontrar la envolvente E , se encontrará al mismo tiempo la curva



D, lugar geométrico de los puntos dobles; el sistema (148.5) incluye también esta curva *D*, y en general el lugar geométrico de todos los puntos singulares de las curvas de la familia.

149. Envolventes de superficies. La ecuación

$$f(x, y, z, \lambda) = 0 \quad (149.1)$$

al variar el parámetro λ , representa una *familia de superficies*. Repitiendo con modificaciones evidentes el razonamiento hecho en el caso de las curvas planas (No. 148), se comprueba que la intersección de una de estas superficies, correspondiente al valor $\lambda = \lambda_0$ del parámetro, con la superficie infinitamente próxima de la familia, será generalmente una curva, llamada *curva característica*, cuya ecuación está dada por el sistema

$$f(x, y, z, \lambda_0) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, y, z, \lambda) \right]_{\lambda=\lambda_0} = 0. \quad (149.2)$$

El conjunto de todas las curvas características determina una superficie, que se llama *superficie envolvente*; su ecuación está dada por el sistema (con λ variable)

$$\boxed{f(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, y, z, \lambda) = 0} \quad (149.3)$$

Esta superficie es tangente a todas las superficies de la familia. La ecuación (149.3) incluye además el lugar geométrico de todas las curvas singulares de la familia de superficies considerada.

150. Envolventes de curvas alabeadas. Una familia de *curvas alabeadas*, variables con el parámetro λ , tiene ecuación dada por un sistema del tipo

$$f(x, y, z, \lambda) = 0, \quad g(x, y, z, \lambda) = 0. \quad (150.1)$$

Diremos *envolvente de esta familia de curvas una curva E a la cual todas son tangentes*. Para determinar la ecuación de la envolvente, tenemos que razonar nuevamente de manera análoga al No. 148. La variante consiste en observar que, siendo ahora la curva

alabeada correspondiente a $\lambda = \lambda_0$, la intersección de las dos superficies $f(x, y, z, \lambda_0) = 0$ y $g(x, y, z, \lambda_0) = 0$, sus puntos característicos han de ser los puntos comunes a las dos curvas resultantes de la intersección de la superficie $f(x, y, z, \lambda_0) = 0$ con su infinitamente próxima, y de la intersección de la superficie $g(x, y, z, \lambda_0) = 0$ con su infinitamente próxima; de donde sigue de inmediato (No. 149) que en dichos puntos han de quedar satisfechas las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \lambda_0) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, y, z, \lambda) \right]_{\lambda=\lambda_0} &= 0 \\ g(x, y, z, \lambda_0) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} g(x, y, z, \lambda) \right]_{\lambda=\lambda_0} &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto los puntos de la envolvente deben de satisfacer al sistema

$$f(x, y, z, \lambda) = 0, \quad g(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0$$

(150.2)

Supongamos ahora que se quiere hallar la *envolvente de la familia constituida por todas las curvas características de un sistema ∞^1 de superficies*. Si la ecuación de las superficies es la (149.1), la de las curvas características es la (149.2), obteniéndose una curva característica por cada valor de λ_0 ; así que la familia de las curvas características tiene ecuación dada por el sistema (149.3). Comparemos este sistema (149.3) con el sistema (150.1): se ve que el primero es del tipo (150.1), siendo

$$g(x, y, z, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, y, z, \lambda).$$

Luego en este caso el sistema de ecuaciones (150.2) que da la envolvente se transforma en

$$f(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0, \quad (150.3)$$

sistema que tiene tres ecuaciones en lugar de cuatro.

Un ejemplo interesante de envolvente de curvas características se tiene cuando las superficies de la familia son planos. Entonces la ecuación (149.1) es del tipo

$$a(\lambda)x + b(\lambda)y + c(\lambda)z + d(\lambda) = 0 \quad (150.4)$$

siendo los coeficientes a, b, c, d funciones del parámetro λ . Las curvas características son, por la fórmula (149.2), las rectas intersecciones de estos planos con los otros

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0. \quad (150.5)$$

indicando los ápices derivaciones con respecto a λ .

Al variar λ , el sistema de ecuaciones (150.4) y (150.5) representa la superficie formada por todas estas rectas características, que es la superficie envolvente de la familia de planos (150.4). La curva envolvente de las rectas características es por (150.3) la que satisface al sistema de las dos ecuaciones anteriores y simultáneamente a la tercera ecuación

$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0. \quad (150.6)$$

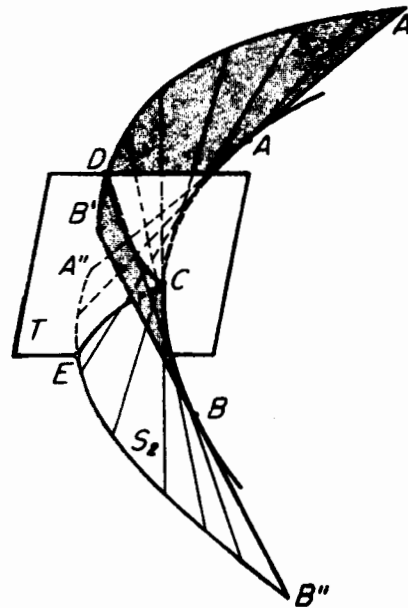
Esta envolvente será por lo general una curva alabeada.

151. Superficies desarrollables. Llámase superficie desarrollable toda superficie envolvente de una familia de planos, o sea de un sistema de planos dependientes de un solo parámetro variable. El nombre se debe al hecho que, si se giran sucesivamente todos los planos de la familia, cada uno alrededor de su recta característica de modo que vaya a sobreponerse al plano infinitamente próximo, todos los planos se reducen a uno solo y la superficie se vuelve plana sin haberse estirado ni encogido en ninguna parte. Por esto las superficies desarrollables se llaman a veces superficies aplicables sobre un plano. Las rectas características mencionadas son las generatrices de la superficie desarrollable. Lo que acabamos de ver al final del No. 150 comprueba que toda superficie desarrollable es el lugar geométrico de las rectas tangentes a una curva alabeada conveniente.

Viceversa, es fácil comprobar que el lugar geométrico de las rectas tangentes a toda curva alabeada es una superficie desarro-

lible, y que esta superficie es precisamente la envolvente de los planos osculadores a la curva. En efecto, dos planos osculadores infinitamente próximos se cortan en una tangente a la curva, que por tanto es recta característica para el plano osculador que le corresponde.

Esta generación de las superficies desarrollables permite que nos hagamos una idea clara acerca de su forma. Por cada punto de un arco AB de curva alabeada tracemos la tangente, y consideremos de esta tangente tan sólo una semirrecta determinada, por ejemplo la que está dirigida en el sentido que va de B hacia A . El lugar geométrico de todas estas semirrectas constituye una falda S_1 de superficie, limitada por el arco AB y las semirrectas tangentes extremas AA' y BB' . Análogamente tomando las otras semitangentes, hallamos la falda S_2 , limitada por AB y las semirrectas tangentes AA'' y BB'' . Ahora, si por un punto C del arco AB tomamos un plano cualquiera T , éste cortará las dos superficies S_1 y S_2 según dos curvas DC y CE que se unen en C , formando allí una cúspide o punto de retroceso. Por tal motivo la curva envolvente AB se llama a veces *arista de retroceso* de la superficie desarrollable constituida por sus tangentes.



Determinaremos a continuación la *ecuación diferencial de las superficies desarrollables*. Sea una superficie desarrollable S ; llamemos, como en el No. 16, X, Y, Z las coordenadas cartesianas de un punto cualquiera del espacio, x, y, z las de un punto que pertenece a la superficie. La ecuación de un plano tangente genérico

a la superficie es la (16.2), que podemos escribir, con notación (88.2),

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \quad (151.1)$$

Esta ecuación depende de los dos parámetros p y q , variables sobre la superficie. Pero los planos tangentes a una superficie desarrollable constituyen, como sabemos, un sistema ∞^1 , por lo que su ecuación tiene que poderse escribir bajo la forma (150.4), dependiendo de un solo parámetro. Esto implica que los coeficientes p y q de la ecuación (151.1) no pueden ser independientes, sino que estarán ligados por una conveniente relación funcional, que escribiremos

$$p = \varphi(q).$$

Derivando ambos miembros de esta relación con respecto a x y con respecto a y , sucesivamente queda

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dq} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dq} \frac{\partial q}{\partial y},$$

es decir, por (130.2),

$$r = \frac{d\varphi}{dq} s, \quad s = \frac{d\varphi}{dq} t,$$

de donde, eliminando $d\varphi/dq$, se obtiene $rt - s^2 = 0$, o sea

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (151.2)$$

Esta ecuación diferencial del segundo orden en las derivadas parciales es válida sobre toda superficie desarrollable. Se comprueba fácilmente que, viceversa, si sobre una superficie es válida esta relación, entonces la superficie es desarrollable. Luego (151.2) es la ecuación característica de las superficies desarrollables.

Llámanse superficies regladas todas las superficies constituidas por un sistema ∞^1 de rectas. Analíticamente, una superficie reglada puede considerarse el lugar geométrico de las rectas de ecuación

$$x = a(\lambda)z + b(\lambda), \quad y = c(\lambda)z + d(\lambda), \quad (151.3)$$

cuyos coeficientes a , b , c , d dependen del parámetro variable arbitrario λ . El sistema (151.3) puede también interpretarse como ecuación de una recta móvil que con su movimiento engendra la superficie, y que por lo tanto se llama *generatriz* de ella. *Las superficies desarrollables son superficies regladas particulares, y precisamente esas superficies regladas cuyas generatrices poseen una curva envolvente.*

II. GEODESICAS, ASINTOTICAS Y LINEAS DE CURVATURA

152. Teorema de Meusnier. Nos proponemos ahora estudiar la *geometría de las superficies*, a través del análisis de las curvas que pueden trazarse sobre ellas.

La consideración de una superficie de apoyo que contiene una línea simplifica el estudio de la curvatura de la línea misma. En efecto, si una línea L pertenece a una superficie S , entre el vector

t tangente a L en un punto P y el vector N normal a la superficie en P subsiste la relación de ortogonalidad

$$t \cdot N = 0,$$

y luego, derivando con respecto al arco s ,

$$\frac{dt}{ds} \cdot N + t \cdot \frac{dN}{ds} = 0 \quad (152.1)$$

y multiplicando por el radio de curvatura r de la curva L en P

$$r \frac{dt}{ds} \cdot N + rt \cdot \frac{dN}{ds} = 0.$$

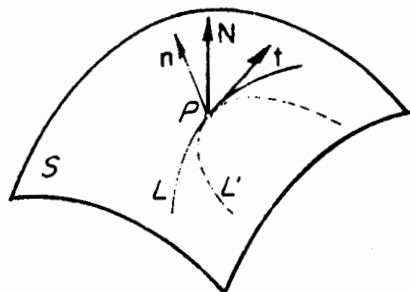
Pero, por (144.4), el primer sumando no es otra cosa que el producto $n \cdot N$ de dos vectores unitarios, el que está dirigido según la normal principal a la curva y el que está dirigido según la normal a la superficie. Indicando con (n, N) el ángulo entre ellos, la relación anterior puede luego escribirse

$$\cos(n, N) + rt \cdot \frac{dN}{ds} = 0$$

o sea

$$\frac{\cos(n, N)}{r} = -t \cdot \frac{dN}{ds}. \quad (152.2)$$

Ahora, sea L' una segunda curva superficial, que pasa por P y tiene allí la misma tangente t que tiene L ; sea r' su radio de curvatura y n' su normal principal en P . Puesto que para L y L' los vec-



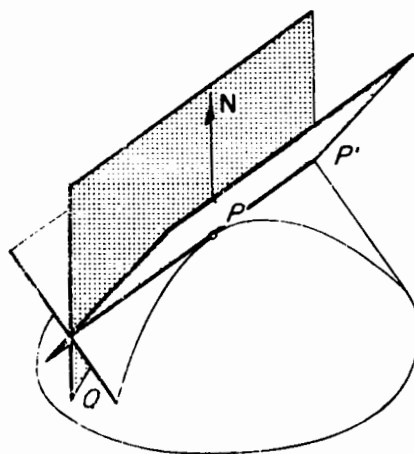
tores t y N y el elemento de arco ds en el punto P son los mismos, resulta de (152.2) que

$$\frac{\cos(n, N)}{r} = \frac{\cos(n', N)}{r'}. \quad (152.3)$$

Si además las dos curvas tuviesen en P el mismo plano osculador, coincidirían sus normales principales n y n' y luego resultaría de (152.3) que también serían iguales sus curvaturas. Esto acontece en particular si se toma como curva L' la sección de la superficie S con el plano osculador a la curva L en P . Podemos concluir que *una curva superficial cualquiera tiene en cada uno de sus puntos la misma curvatura que la sección plana de la superficie con el plano osculador a la curva en ese punto.*

Para estudiar cómo varía la curvatura de diferentes curvas superficiales que pasan por el mismo punto P , basta por tanto estudiar lo que pasa con convenientes secciones planas de la superficie en P . Empecemos considerando aquéllas obtenidas por un haz de planos que pasan por la misma tangente PP' a la superficie. Entre éstas debe de haber una, PQ , cuyo plano $PP'Q$ contiene la normal N a la superficie; ésta se llama *sección normal* de la superficie en P . Llamado R su radio de curvatura r' , y siendo para ella $n' = N$, reemplazando en (152.3) se obtiene

$$\frac{\cos(n, N)}{r} = \frac{1}{R} \quad (152.4)$$



Este resultado, conocido bajo el nombre de *teorema de Meusnier*, puede escribirse $r = R \cos(n, N)$, de donde resulta que *el centro de curvatura de una sección plana oblicua de la superficie en un punto P se obtiene proyectando ortogonalmente, sobre el plano de dicha sección, el centro de curvatura de la sección normal que tiene la misma tangente en P .*

Más arriba se había observado que es posible reducir el cálculo de la curvatura de una línea superficial alabeada al de una sección plana; ahora acabamos de ver cómo el cálculo de la curvatura de esta última se reduce al de la curvatura de una sección normal conveniente. Por tanto *basta conocer las curvaturas de todas las secciones normales de la superficie en un punto P de ella, para poder deducir la curvatura de cualquier otra línea superficial en ese punto.*

En lo sucesivo, nos limitaremos a tratar con secciones normales únicamente (las obtenidas cortando la superficie con el haz de planos por N), haciendo la convención de suponer el radio de curvatura positivo si está dirigido como N , negativo si está dirigido en el sentido opuesto. Para toda sección normal, se deduce de (152.4) y (152.2)

$$\frac{1}{R} = -t \cdot \frac{dN}{ds}$$

o sea, recordando las relaciones (143.2) y (143.3)

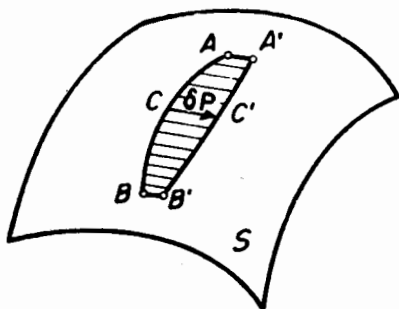
$$\boxed{\frac{1}{R} = -\frac{dP \cdot dN}{dP^2}} \quad (152.5)$$

fórmula que será útil más adelante.

153. Variación de un arco de curva perteneciente a una superficie. Consideremos una superficie S y por dos puntos fijos A, B de ella un arco de curva AB todo perteneciente a la superficie. Si indicamos con dP un desplazamiento infinitésimo tangente al arco, la longitud del arco AB resulta, por (143.1),

$$s = \int_A^B \text{mod } dP$$

siendo la integral curvilínea extendida al arco considerado. Supongamos ahora que el arco AB se deforma sin abandonar la superficie.



hasta alcanzar una posición infinitamente próxima $A'C'B'$. Esto se consigue dando convenientes desplazamientos infinitesimos superficiales δP a todos los puntos de la curva (el símbolo δ indica un desplazamiento sobre la superficie, pero fuera de la curva inicial) El nuevo arco $A'B'$ tendrá una longitud diferente de la de AB . La *variación de la longitud de arco* será

$$\delta s_{AB} = \int_{A'}^{B'} \text{mod } dP - \int_A^B \text{mod } dP = \delta \int_A^B \text{mod } dP = \int_A^B \delta (\text{mod } dP). \quad (153.1)$$

Pero

$$(\text{mod } dP)^2 = dP^2$$

y diferenciando ambos miembros con el operador δ

$$2 \text{mod } dP \cdot \delta (\text{mod } dP) = 2 dP \cdot \delta dP,$$

o sea por (143.1)

$$ds \cdot \delta (\text{mod } dP) = dP \cdot \delta dP$$

y despejando

$$\delta (\text{mod } dP) = \frac{dP}{ds} \cdot \delta dP. \quad (153.2)$$

Reemplazando en (153.1), se llega a

$$\delta s_{AB} = \int_A^B \frac{dP}{ds} \cdot \delta dP,$$

e integrando, por partes, previo intercambio de los operadores δ y d resulta la importante fórmula

$$\delta s_{AB} = \left[\frac{dP}{ds} \cdot \delta P \right]_A^B - \int_A^B \frac{d^2P}{ds^2} \cdot \delta P. \quad (153.3)$$

154. Geodésicas de una superficie. Llámense *geodésicas de una superficie* las curvas que, como las rectas en el plano y los círculos máximos en la esfera, ofrecen el camino más corto (distancia superficial mínima) para pasar de un punto a otro de la superficie, sin salir de ella. Expresándonos con más exactitud, considere-mos una superficie S y dos puntos A y B fijos sobre ella: se define como "*arco geodésico*" de extremos A y B sobre la superficie al arco

tal que, al pasar de él a los arcos infinitamente próximos con los mismos extremos, la variación de la longitud δs_{AB} resulta nula. Se obtiene inmediatamente que condición suficiente para que un arco sea geodésico es que resulte

$$\frac{d^2P}{ds^2} \cdot \delta P = 0 \quad (154.1)$$

idénticamente para todo punto P del arco, cualquiera que sea su desplazamiento δP sobre la superficie. En efecto en tal caso la relación (153.3) se hace

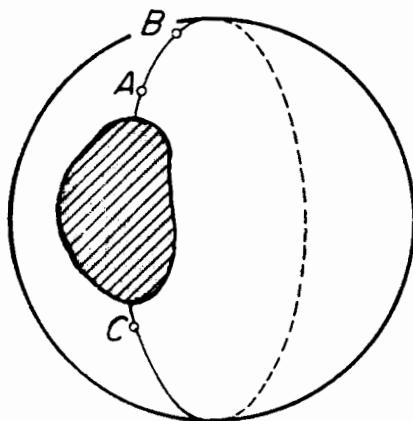
$$\delta s_{AB} = \left[\frac{dP}{ds} \cdot \delta P \right]_A^B. \quad (154.2)$$

Pero A y B son puntos fijos que no se desplazan, y por tanto su δP es nulo, quedando

$$\delta s_{AB} = 0,$$

que es la ecuación del arco geodésico.

Es importante observar que una misma curva puede realizar la distancia superficial mínima entre dos de sus puntos, y no entre otros dos, hecho evidente si pensamos por ejemplo que sobre una



esfera agujerada, un arco de meridiano mayor de un semimeridiano y con extremos en los bordes del agujero realiza la distancia mínima entre dos de sus puntos A , B que disten menos que un semimeridiano, pero no entre dos A , C que disten más.

Si recordamos que por (143.3) se tiene

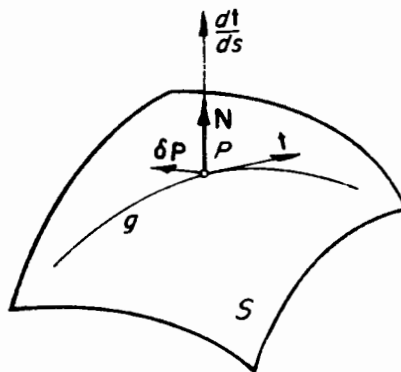
$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{dt}{ds},$$

podemos interpretar (154.1) diciendo que, si consideramos un punto P de una superficie S , una geodésica g que pase por el y el vector t tangente en P a ella, el vector derivado dt/ds , que es normal a t

(ver No. 143), tiene que resultar normal también al desplazamiento superficial δP , y por tanto será normal a la superficie S , coincidiendo en dirección con la normal N a la superficie en P . La expresión (154.1) puede luego escribirse bajo la forma equivalente

$$\frac{dt}{ds} \times N = 0. \quad (154.3)$$

Pero sabemos (ver fórmula (144.4)) que dt/ds es también paralela a la normal principal n a la curva g en P y por tanto está en el plano osculador. Podemos concluir, con Juan Bernoulli, que el plano osculador a una geodésica en cada uno de sus puntos contiene la normal a la superficie en ese punto.



La propiedad anterior es característica de las geodésicas, que pueden definirse precisamente como las curvas de la superficie tales que en cada uno de sus puntos el plano osculador contiene la normal a la superficie misma. Esta propiedad, observada por Clairaut en 1733, se utilizó en el siglo XVIII para trazar geodésicas sobre la superficie terrestre, para lo cual los geodestas iban clavando una sucesión de balizas verticales muy próximas entre sí, de tal modo que cada una fuera ocultada por la anterior; con esto se logra localizar la línea más corta entre dos puntos de la Tierra, sin necesidad de conocer previamente la forma de ésta.

Resulta inmediata la comprobación de lo que se había afirmado antes, a saber que *sobre un plano las geodésicas son las rectas*, ya que para todas las demás curvas el plano osculador es el plano mismo, y no puede contener sus propias normales. *Sobre una esfera, las geodésicas son los círculos máximos*, ya que han de ser curvas cuyo plano osculador contenga el radio, y por tanto pase por el centro de la esfera.

Sobre un cilindro circular, el plano osculador de una geodésica tiene que contener en todo punto la normal al eje del cilindro. Esta propiedad es común a todas las *hélices circulares* que se pueden

trazar sobre el cilindro (una hélice circular es la línea descrita por un punto que se mueve sobre el cilindro, siendo animado contemporáneamente por dos movimientos uniformes: uno de traslación paralelamente al eje del cilindro y otro de rotación alrededor del mismo). En este caso es fácil ver que existe una infinidad de arcos de geodésica entre dos puntos dados sobre la superficie; pero de estos arcos tan sólo uno (el que no alcanza a dar más de media vuelta al cilindro) realiza el mínimo.

Es interesante la siguiente *consecuencia mecánica*. Supongamos que una partícula P se mueve sin fricción sobre una superficie por efecto de una velocidad inicial y de la reacción de la superficie misma, pero sin que existan fuerzas activas sobre ella; entonces la partícula recorre con velocidad constante una geodésica de la superficie. La explicación de este fenómeno resulta inmediata al recordar que la aceleración, por lo expresado al final del No. 144, está siempre contenida en el plano osculador a la trayectoria, de modo que también la fuerza total, que está dirigida como la aceleración, estará en dicho plano. Pero esta fuerza total se reduce en el caso presente a la reacción que, por la ausencia de fricción, queda normal a la superficie. La trayectoria será por tanto una curva cuyo plano osculador en cada punto contiene la normal a la superficie, a saber una geodésica. Además siendo la normal a la superficie también normal principal de la curva en el punto (por estar en su plano osculador), la aceleración resulta puramente normal, o sea la aceleración tangencial es nula, y de esto sigue que la velocidad del movimiento es constante en magnitud.

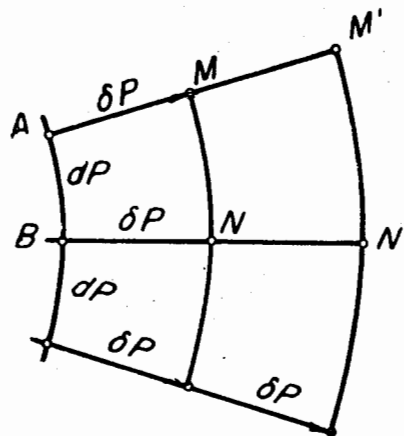
Con razonamiento análogo se comprueba que, si apoyamos sobre una superficie lisa y sin fricción un hilo no extensible, bajo la acción de fuerzas que lo tiendan en sus extremos, si éstas son grandes con respecto al peso del hilo, el hilo se dispone siguiendo una geodésica de la superficie. En efecto el hilo alcanza al equilibrio sólo cuando la presión resultante de la tensión, que está dirigida según el plano osculador, resulta perpendicular a la superficie.

Siendo que al salir la partícula P de un punto determinado de la superficie con velocidad inicial determinada, su recorrido resulta perfectamente definido, queda justificado bajo el punto de

vista mecánico el teorema siguiente, que podría comprobarse por métodos geométricos: *por un punto dado de una superficie y con una tangente dada, pasa por lo general una y tan sólo una geodésica*. Por tanto, de cada punto de una superficie salen generalmente infinitas geodésicas, una por cada dirección, y éstas no se cortan entre sí, por lo menos en una vecindad inmediata del punto; en este sentido dichas curvas realizan efectivamente el camino superficial de longitud mínima entre el punto dado y otros puntos próximos a él. En las geodésicas que hemos mencionado: las rectas sobre el plano, los círculos máximos sobre la esfera y las hélices circulares sobre el cilindro, vemos ejemplos claros de este hecho.

155. Coordenadas geodésicas. Sea una geodésica sobre una superficie; por lo anteriormente dicho, por cada punto de ella pasará una geodésica perpendicular a la primera. Sobre cada una de las geodésicas normales midamos, a partir de la primera, pequeños arcos todos iguales: vamos a comprobar que los extremos de ellos pertenecen a una línea de la superficie que corta en ángulo recto todas las geodésicas normales.

La mencionada propiedad es válida con todo rigor siempre que los arcos considerados sean de longitud infinitamente pequeña. En efecto, sea AB la geodésica inicial y dP la longitud del arco infinitamente pequeño AB de ella. Sean AM , BN los arcos de geodésica normales en A y B , de longitud δP . Estos arcos, por ser M y N muy próximos a A y B , dan seguramente la distancia mínima entre A y M , B y N de modo que las variaciones de las longitudes δs_{AM} y δs_{BN} de estos arcos han de resultar nulas. Igualando a cero las expresiones (153.3) correspondientes, y tomando en



cuenta que sobre ellos, por ser arcos geodésicos, vale la (154.1), resulta

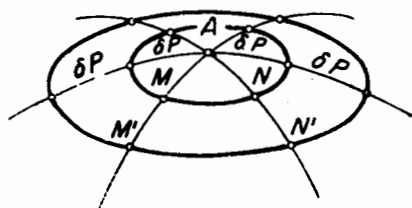
$$\left[\frac{dP}{ds} \cdot \delta P \right]_A^M = 0, \quad \left[\frac{dP}{ds} \cdot \delta P \right]_B^N = 0.$$

Por otro lado se tiene por la ortogonalidad supuesta que, en A y en B , $(dP/ds) \cdot \delta P = 0$. Luego por sustitución en (155.1) queda también

$$\left[\frac{dP}{ds} \cdot \delta P \right]_M = 0, \quad \left[\frac{dP}{ds} \cdot \delta P \right]_N = 0, \quad (155.1)$$

lo que expresa que la línea MN corta en ángulo recto las líneas AM y BN , que es lo que se quería demostrar.

Ahora, si a partir de todos los puntos $M, N, \dots$ de la nueva línea se vuelven a trazar arcos de geodésicas $MM', NN', \dots$ normales a ella y se repite la operación anterior, se obtiene una nueva línea $M'N'$ normal a las geodésicas $AMM', BNN', \dots$, etc. Todas las líneas $MN, M'N', \dots$ así construidas se dicen ser *geodésicamente paralelas* entre sí. Si consideramos por un lado la familia de curvas superficiales constituida por la geodésica AB y todas las curvas geodésicamente paralelas a ella, y por otro lado la familia constituida por las geodésicas AMM', BNN' y análogas, obtenemos una *red de curvas mutuamente ortogonales* sobre la superficie, tal que por cada punto de la superficie pasa una y sólo una curva de cada familia, cortándose las dos en ángulo recto. Es frecuente tomar un sistema de este tipo como sistema curvilíneo de referencia para la localización de todos los puntos de la superficie; se dirá entonces que se dispone de un *sistema de coordenadas geodésicas*. De este tipo es por ejemplo el sistema de *paralelos y meridianos sobre la esfera*



terrestre: el ecuador es la geodésica inicial, los paralelos son las líneas geodésicamente paralelas entre sí y los meridianos las geodésicas normales.

En el caso límite en que la geodésica inicial se reduce a un punto A , las geodésicas ortogonales resultarán siendo todas las geodésicas que salen de dicho punto. Entonces las curvas geodésica-

mente paralelas que las cortan en ángulo recto se cierran sobre sí mismas, y se llaman *círculos geodésicos*. Un sistema ortogonal de curvas de este tipo puede también tomarse para referencia de los puntos de la superficie, constituyendo lo que se llama un *sistema de coordenadas geodésicas polares*. La red constituida por meridianos y paralelos de la esfera terrestre en proximidad de un polo es un ejemplo de coordenadas geodésicas polares.

156. **Curvatura geodésica.** La curvatura de una línea alabeada resulta de la fórmula (144.3)

$$\frac{1}{r} = \text{mod } \frac{dt}{ds}.$$

Pero dt/ds es perpendicular al vector unitario tangente t y al vector binormal b , de modo que la fórmula anterior puede expresarse por medio de un producto mixto:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{dt}{ds} \times b \right) \cdot t. \quad (156.1)$$

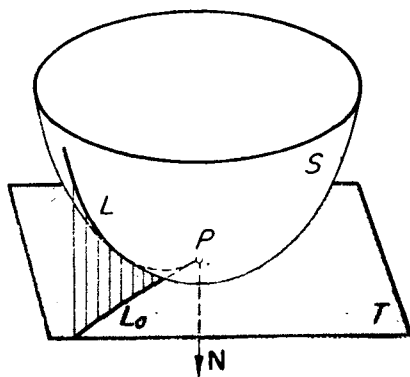
Si consideramos una curva L perteneciente a la superficie S y en cada punto de ella el vector unitario N normal a la superficie, el producto análogo al anterior, sólo que en él se reemplaza b por N ,

$$\boxed{\frac{1}{r_g} = \left(\frac{dt}{ds} \times N \right) \cdot t} \quad (156.2)$$

representa la que se suele llamar *curvatura geodésica relativa a la línea L de la superficie S* . Evidentemente, mientras que la curvatura (156.1) está determinada unívocamente para toda curva, la (156.2) depende también de la superficie S , de modo que una curva L tendrá una curvatura geodésica diferente por cada superficie que se haga pasar por ella.

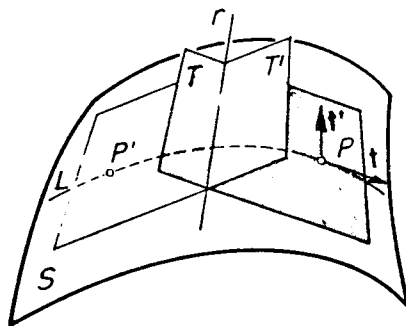
Supongamos que L sea una geodésica para la superficie; reemplazando (154.3) en (156.2), resulta entonces que $1/r_g = 0$. Por tanto *las geodésicas gozan de la propiedad de que su curvatura geodésica es nula en todos sus puntos*, propiedad que generaliza la de las rectas, cuya curvatura (en el sentido ordinario) $1/r$ es nula.

Consideremos ahora el plano T tangente a la superficie S en un punto P de una curva L cualquiera de ella y proyectemos dicha curva ortogonalmente sobre T . Sea L_0 la curva proyección. La



curvatura (156.1) de esta curva plana en el punto P es idéntica a la curvatura geodésica (156.2) de la L en P , puesto que su binormal es normal a T y por tanto coincide con la normal N a la superficie S en P . Esta observación permite reducir el cálculo de la curvatura geodésica en un punto al de la curvatura ordinaria de una curva plana que pasa por ese punto.

157. La involución de Dupin. Consideremos sobre una superficie S una línea L y un punto P sobre ella. Sea t el vector unitario tangente a L en P y T el plano tangente a la superficie en P . Consideremos además otro punto P' sobre L , próximo a P , y el plano T' , tangente a la superficie en P' . Los planos T y T' tendrán una intersección: la recta r . Si P' , moviéndose sobre la línea L , tiende hacia P , entonces la recta r tenderá hacia una posición límite que pasa por P . Tomemos sobre esta recta límite un vector unitario t' . En cada punto P de L existe así un vector t' bien determinado, y éste ha de resultar el mismo para todas las curvas superficiales L que pasan por P teniendo allí una misma tangente t . En otras palabras, a cada vector t que sale de P y está en el plano tangente T corresponde un vector t' bien determinado, que sale de P y está en el mismo plano; los dos vectores t y t' se llaman *vectores conjugados* en la correspondencia.



Podemos obtener una representación analítica de la correspondencia señalada, procediendo como sigue. Llamemos dP el desplazamiento elemental sobre la curva L en P , N el vector unitario normal al plano T (y luego a la superficie) en P , δP el desplazamiento elemental sobre la recta r . Supongamos P y P' infinitamente próximos entre sí, y que sea $N + dN$ el vector normal al plano T' (y luego a la superficie) en P' . En el límite, cuando P' llega a coincidir con P , el vector δP adquiere la dirección t' , y tienen que realizarse simultáneamente las dos condiciones de ortogonalidad

$$\delta P \cdot N = 0; \quad \delta P \cdot (N + dN) = 0.$$

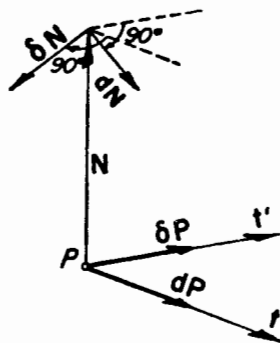
Aplicando a la segunda expresión la propiedad distributiva (3.4) y restando de la primera, se obtiene

$$\boxed{\delta P \cdot dN = 0} \quad (157.1)$$

o sea que δP y dN son ortogonales. Esta fórmula representa indirectamente una *relación que liga entre sí los dos vectores conjugados t y t'* .

La correspondencia entre los vectores t y t' goza de la importante propiedad de ser *recíproca*, en el sentido que se aclara a continuación. Para cierta dirección tangencial t , la posición límite de la intersección de los planos tangentes es t' ; ahora bien, si por el contrario acercamos P' a P según una línea cuya tangente sea t' , la posición límite de la intersección de los planos tangentes será precisamente t . En efecto, sean dP y δP dos desplazamientos superficiales, según t y t' respectivamente. Por su ortogonalidad con la normal a la superficie en P , tenemos

$$dP \cdot N = 0, \quad \delta P \cdot N = 0.$$



Diferenciemos la primera igualdad en la dirección t' , la segunda en la dirección t y restemos, tomando en cuenta que $d\delta P = \delta dP$; resulta

$$dP \cdot \delta N - \delta P \cdot dN = 0, \quad (157.2)$$

de modo que, si es válida la relación (157.1) (correspondencia entre t y t') también lo es la

$$dP \cdot \delta N = 0 \quad (157.3)$$

que afirma la correspondencia recíproca entre t' y t . La correspondencia entre t y t' es por tanto unívoca y recíproca, o sea *biunívoca*; la relación que ella establece entre todas las rectas orientadas como los vectores t y t' que salen de un mismo punto P de una superficie se llama *involución de Dupin*.

En la involución de Dupin hay pares de rectas conjugadas que tienen importancia particular. Estas son

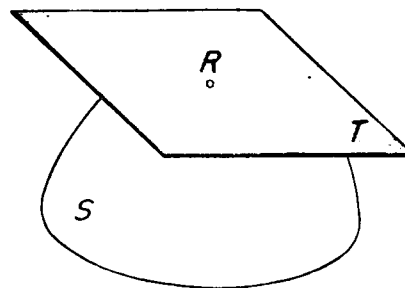
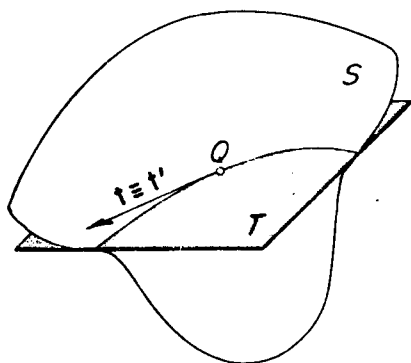
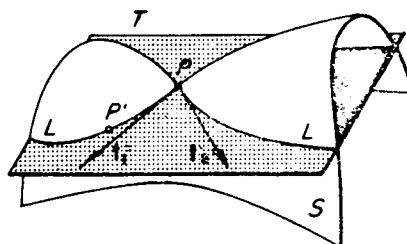
- a) las *rectas unidas*, o sea aquéllas que coinciden con su conjugada,
- b) las rectas que resultan *perpendiculares a su conjugada*.

Demostraremos en el No. 158 que *las rectas unidas no pueden ser más que dos* (siempre que las rectas del haz no sean todas unidas, en cuyo caso la correspondencia es la *identidad*); la involución se llama *hiperbólica* si posee dos rectas unidas, *parabólica* si posee una y *elíptica* si no posee ninguna. En cuanto a las *rectas conjugadas perpendiculares* entre sí, demostraremos en el No. 159 que existe precisamente *un par* de ellas (siempre que todas las rectas no sean perpendiculares a sus conjugadas, en cuyo caso se dice que la involución es una *involución circular*).

Comprobaremos además que las rectas mencionadas son tangentes que envuelven líneas superficiales muy importantes: las rectas unidas, llamadas *tangentes principales*, envuelven las *líneas asintóticas*, las rectas perpendiculares entre sí, llamadas *tangentes de curvatura*, envuelven las *líneas de curvatura*.

158. Tangentes principales y líneas asintóticas. Para reconocer las direcciones unidas de la involución de Dupin, en las cuales

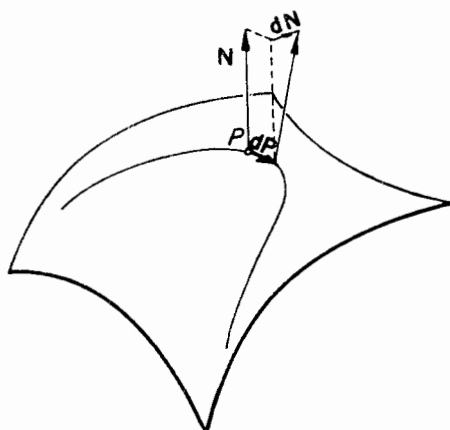
$t = t'$, o sea las *tangentes principales*, consideremos el plano T tangente a la superficie en un punto P de ella y supongamos que, como en el caso de la figura, éste corte la superficie según una línea L (que tendrá en P un punto doble). Si hacemos de manera que el punto P' considerado en el No. 157 se acerque a P a lo largo de la curva L , entonces es evidente que la intersección del plano T' tangente a la superficie en P' con el plano T , tiende precisamente a una tangente a la curva L en P . Por tanto las rectas unidas en la involución de Dupin son las tangentes en P a la curva intersección del plano tangente con la superficie. Si esta intersección tiene en P un nudo, entonces las rectas unidas son dos, la involución es hiperbólica y el punto P se dice *punto hiperbólico*, si la intersección tiene en P una cúspide, hay una sola recta unida y la involución es parabólica (*punto parabólico*), y finalmente si la intersección



es un punto doble aislado la involución es elíptica (*punto elíptico*). En el punto P de la primera figura la involución de Dupin es hiperbólica; en los puntos Q y R de las figuras siguientes es parabólica y elíptica respectivamente.

Las consideraciones anteriores permiten también reconocer fácilmente qué líneas son las *asintóticas*, o sea las curvas envueltas

por las tangentes principales. En efecto, si recordamos la definición de plano osculador dada en el No. 143 y tomamos en cuenta lo que acabamos de decir acerca de la generación de las tangentes principales como intersección-límite de planos tangentes, vemos que *el plano osculador de la asintótica deberá coincidir en cada punto con el plano tangente a la superficie en ese punto*, propiedad ésta que puede tomarse como definición de las asintóticas. Es interesante observar que, mientras que las geodésicas, cuyo plano osculador es normal a la superficie, son en cierto sentido las curvas superficiales más levantadas, las asintóticas, cuyo plano osculador es tangente a la superficie, son las más tendidas. *Sobre una superficie puede haber o no asintóticas*; en una zona de punto hiperbólicos, hay dos familias de asintóticas pasando por cada punto una curva de cada familia, en una zona de puntos parabólicos hay una sola familia, que la cubre simplemente, y en una zona de puntos elípticos no hay ninguna. Así por ejemplo sobre una esfera no hay asintóticas. Si sobre una superficie hay una línea recta, ésta es seguramente una asintótica, ya que



puede tomarse como plano osculador todo plano que pase por ella, y en particular el plano tangente a la superficie en cada uno de sus puntos. Por ejemplo las generatrices de una superficie reglada constituyen para ella una familia de asintóticas.

La ecuación diferencial de las asintóticas resulta inmediatamente de (157.1), cuando se tome en cuenta que el despla-

zamiento elemental dP sobre ellas es conjugado de sí mismo en la involución de Dupin; queda

$$dP \cdot dN = 0$$

(158.1)

o sea a lo largo de una asintótica los vectores dP y dN correspondientes son perpendiculares entre sí.

159. **Tangentes de curvatura.** Vamos a comprobar a continuación que la involución de Dupin admite efectivamente un par de rectas conjugadas perpendiculares entre sí, o sea que *en todo punto de una superficie se tienen siempre dos tangentes de curvatura*. Supongamos con tal objeto que entre todos los pares de rectas conjugadas exista uno cuyas direcciones, que indicaremos por los desplazamientos elementales d_1P , d_2P relativos, sean perpendiculares entre sí. Entonces

$$d_1P \cdot d_2P = 0. \quad (159.1)$$

Pero por (157.1) y (157.3)

$$d_1P \cdot d_2N = 0, \quad d_2P \cdot d_1N = 0. \quad (159.2)$$

Ahora, todos los vectores d_1P , d_2P , d_1N , d_2N , son perpendiculares a la misma dirección N , y por tanto coplanares; así que para que sean válidas simultáneamente las relaciones (159.1) y (159.2) es necesario que d_1N y d_1P sean paralelos, así como también d_2N y d_2P . Existirán luego dos números m_1 y m_2 tales que

$$d_1N = m_1 d_1P, \quad d_2N = m_2 d_2P \quad (159.3)$$

Por otro lado, operando sobre los vectores d_1P y d_2P por medio de la homografía vectorial dN/dP (No. 10), tenemos por (10.1)

$$d_1N = \frac{dN}{dP} d_1P, \quad d_2N = \frac{dN}{dP} d_2P \quad (159.4)$$

y luego comparando con (159.3)

$$\frac{dN}{dP} d_1P = m_1 d_1P, \quad \frac{dN}{dP} d_2P = m_2 d_2P. \quad (159.5)$$

Este resultado manifiesta que la homografía dN/dP transforma el vector d_1P en otro vector $m_1 d_1P$ que tiene la misma dirección y el vector d_2P en otro $m_2 d_2P$ que tiene también la misma dirección. Lo mismo puede afirmarse evidentemente para el transformado de cualquier otro vector que esté dirigido como d_1P y d_2P . Esto se expresa diciendo que las direcciones de d_1P y d_2P son *direcciones unidas* para la homografía dN/dP . *El problema de encontrar las direcciones conjugadas perpendiculares entre sí de la involución*

de Dupin equivale por tanto al de encontrar las direcciones unidas de la homografía vectorial dN/dP . Gracias a esta observación resulta fácil demostrar que las direcciones conjugadas perpendiculares d_1P y d_2P existen realmente.

Restemos las expresiones (159.2) miembro a miembro; tomando en cuenta (159.4), queda

$$d_1P \cdot \frac{dN}{dP} d_2P - d_2P \cdot \frac{dN}{dP} d_1P = 0.$$

es decir, si tomamos el vector unitario i según la dirección de d_1P y el vector unitario j según la dirección perpendicular d_2P ,

$$i \cdot \frac{dN}{dP} j - j \cdot \frac{dN}{dP} i = 0.$$

Supongamos que las transformadas de i y de j por la homografía sean respectivamente

$$\begin{cases} \frac{dN}{dP} i = a_{11} i + a_{12} j \\ \frac{dN}{dP} j = a_{21} i + a_{22} j. \end{cases} \quad (159.6)$$

Sustituyendo en la fórmula anterior, resulta

$$i \cdot (a_{21} i + a_{22} j) - j \cdot (a_{11} i + a_{12} j) = 0$$

o sea, efectuando los productos,

$$a_{21} = a_{12}. \quad (159.7)$$

Ahora, si la dirección de cierto vector u es unida para la homografía dN/dP , debe existir, análogamente a (159.5), un número m tal que

$$\frac{dN}{dP} u = mu. \quad (159.8)$$

Si $u = u_x i + u_y j$, tomando en cuenta las expresiones (159.6) y (159.7) podemos escribir esta relación así:

$$u_x(a_{11} i + a_{12} j) + u_y(a_{12} i + a_{22} j) = m(u_x i + u_y j).$$

Multiplicando escalarmente primero por i y después por j , se obtiene

$$\begin{cases} u_x a_{11} + u_y a_{12} = m u_x \\ u_x a_{12} + u_y a_{22} = m u_y \end{cases}$$

y luego

$$\begin{cases} (a_{11} - m)u_x + a_{12}u_y = 0 \\ a_{12}u_x + (a_{22} - m)u_y = 0. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene un par de raíces u_x, u_y , siempre que sea

$$\begin{vmatrix} a_{11} - m & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - m \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$m^2 - (a_{11} + a_{22})m + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0. \quad (159.9)$$

El discriminante de esta ecuación de segundo grado en m es

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) &= a_{11}^2 + a_{22}^2 + 4a_{12}^2 - 2a_{11}a_{22} = \\ &= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0. \end{aligned}$$

Resultando el discriminante positivo por ser la suma de dos cuadrados, (159.9) posee efectivamente dos raíces reales m_1 y m_2 , que son precisamente los coeficientes que permiten satisfacer las relaciones (159.5). *La existencia de dos direcciones conjugadas en la involución de Dupin y mutuamente ortogonales queda luego asegurada.*

En el razonamiento anterior no se ha considerado la posibilidad de que la relación (159.8) sea una identidad, cualquiera que sea el vector u . En tal caso todas las direcciones son unidas en la homografía dN/dP , y por tanto cada una de ellas es perpendicular a su conjugada en la involución de Dupin; en otros términos, la involución de Dupin es entonces una *involución circular*. Un punto de una superficie para el cual la involución de Dupin es una involución circular se llama *omblico* de la superficie. Omblicos son por ejemplo todos los puntos de una esfera o los vértices de un elipsoide de revolución.

160. **Teorema de Euler.** Considérense en un punto P de una superficie, las dos tangentes de curvatura y la normal N a la superficie. Se llaman *planos normales principales* los dos planos (perpendiculares entre sí) que pasan por la normal y por cada una de las tangentes de curvatura, *secciones normales principales* de la superficie en P las intersecciones de dichos planos con la superficie.

Llamaremos $R_1(P)$ y $R_2(P)$ los radios de curvatura en P de las dos secciones normales principales (*radios principales de curvatura*). Para el cálculo de dichos radios, podemos aplicar la fórmula (152.5), obteniendo con las notaciones del artículo anterior

$$\frac{1}{R_1} = - \frac{d_1 P \cdot d_1 N}{d_1 P^2}, \quad \frac{1}{R_2} = - \frac{d_2 P \cdot d_2 N}{d_2 P^2}, \quad (160.1)$$

de donde, reemplazando $d_1 N$, $d_2 N$ por sus expresiones (159.3), resultan las relaciones

$$\frac{1}{R_1} = - m_1, \quad \frac{1}{R_2} = - m_2 \quad (160.2)$$

que ligan las curvaturas principales con los números m_1 y m_2 . Consideremos ahora la sección normal por P que forma el ángulo ω con la primera sección principal y llamemos dP el desplazamiento elemental relativo. Resulta evidentemente que, siendo $\text{mod } d_1 P = \text{mod } d_2 P = \text{mod } dP$,

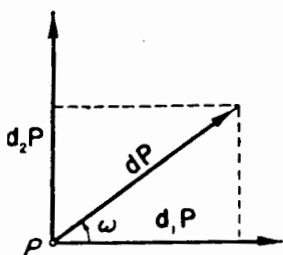
$$dP = d_1 P \cos \omega + d_2 P \sin \omega.$$

Siendo por (159.3) los desplazamientos dN paralelos a los dP correspondientes, podremos escribir también

$$dN = d_1 N \cos \omega + d_2 N \sin \omega.$$

Reemplazando en (152.5), queda

$$\frac{1}{R} = - \frac{(d_1 P \cos \omega + d_2 P \sin \omega) \cdot (d_1 N \cos \omega + d_2 N \sin \omega)}{dP^2}$$



y si efectuamos los productos, tomando en cuenta las (159.2).

$$\frac{1}{R} = - \frac{d_1 P \cdot d_1 N}{dP^2} \cos^2 \omega - \frac{d_2 P \cdot d_2 N}{dP^2} \sin^2 \omega.$$

Pero $d_1 P^2 = d_2 P^2 = dP^2$; luego por (160.1) resulta finalmente

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \omega + \frac{1}{R_2} \sin^2 \omega} \quad (160.3)$$

Esta fórmula expresa que *la curvatura de una sección normal cualquiera en un punto P de una superficie es igual a la suma de los productos de las curvaturas principales por los cuadrados de los cosenos de los ángulos que la sección normal considerada forma con las secciones normales principales correspondientes.* (Teorema de Euler).

En el No. 152 habíamos visto que el cálculo de la curvatura de una línea superficial cualquiera se reduce al de una sección plana y que el de una sección plana se reduce, por el teorema de Meusnier, al de una sección normal. Por su parte el teorema de Euler permite determinar la curvatura de una sección normal cualquiera conociendo las curvaturas principales. Por tanto es suficiente el conocimiento de estas últimas en un punto dado de una superficie para determinar la curvatura que tiene allí cualquier otra línea de la superficie que pase por el punto.

161. Líneas de curvatura. La consecuencia más interesante del teorema de Euler resulta en la comprobación de que, *entre todas las secciones normales de una superficie en un punto, las secciones normales principales son las que tienen curvatura máxima y mínima respectivamente.* En efecto, para que se tenga un máximo o un mínimo de la curvatura, la diferencial $d(1/R)$ ha de ser nula, o sea, introduciendo para $1/R$ la expresión (160.3),

$$-\frac{2}{R_1} \sin \omega \cos \omega d\omega + \frac{2}{R_2} \sin \omega \cos \omega d\omega = 0$$

o también

$$\sin \omega \cos \omega \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = 0.$$

Si $R_1 \neq R_2$, las raíces de esta ecuación son

$\sin \omega = 0$ (es decir la primera dirección principal)

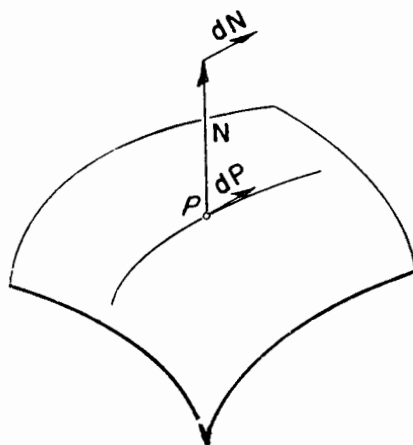
$\cos \omega = 0$ (es decir la segunda dirección principal)

con lo que queda comprobado lo que se quería demostrar. Si fuese $R_1 = R_2$, resulta de (160.3) que no sólo las secciones normales principales, sino todas las demás secciones normales también tendrían la misma curvatura. Este caso se presenta cuando el punto es un ombligo de la superficie.

El resultado anterior confiere un interés especial a las líneas de la superficie envueltas por las tangentes de curvatura. Estas curvas, llamadas *líneas de curvatura*, constituyen dos familias: la familia de las que corresponden a las secciones normales de curvatura máxima y la de las que corresponden a las secciones normales de curvatura mínima. Por cada punto de la superficie pasa una y sólo una curva de cada familia y las dos se cortan en ángulo

recto, ya que así se cortan las tangentes de curvatura. Por ejemplo, las *líneas de curvatura de una superficie de revolución son sus meridianos y sus paralelos*, correspondiendo las primeras a secciones normales de curvatura mínima, las segundas a secciones normales de curvatura máxima.

De las ecuaciones (159.3) y (160.2) se deducen las ecuaciones diferenciales de las dos familias de líneas de curvatura, bajo la forma



$$dN = -\frac{dP}{R_1(P)}, \quad dN = -\frac{dP}{R_2(P)} \quad (161.1)$$

De estas ecuaciones, conocidas con el nombre de *fórmulas de Olindo Rodrigues*, se desprende que si, partiendo de un punto P de la superficie, nos movemos tangencialmente a una de las dos líneas de curvatura que salen de P , la *variación dN del vector normal*

a la superficie, que corresponde a un desplazamiento infinitésimo dP , es paralela a dicho desplazamiento. Este hecho ya implícito en las fórmulas (159.3), es característico de las líneas de curvatura: para otras líneas, dN queda generalmente desviado con respecto a dP . Las ecuaciones (161.1) pueden condensarse en una sola:

$$\boxed{t \times dN = 0} \quad (161.2)$$

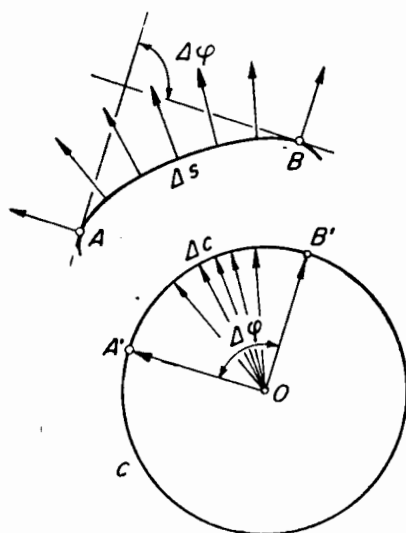
que constituye la ecuación de las líneas de curvatura en su forma más sintética.

Esta propiedad diferencial de las líneas de curvatura permite comprobar que *sobre un plano cualquier línea es línea de curvatura*, ya que al moverse un punto sobre una curva plana L , los vectores N normales al plano resultan todos paralelos entre sí, de modo que los vectores dN resultan nulos y la (161.2) queda satisfecha. *En el caso de una esfera, todos los círculos superficiales son líneas de curvatura*, por ser t y dN tangentes a dos secciones normales de un mismo cono en sus intersecciones con una generatriz, y luego paralelos entre sí; de cada punto sale por tanto una infinidad de líneas de curvatura, hecho que ya podía preverse en cuanto, como sabemos, la involución de Dupin es entonces circular. *El plano y la esfera son las únicas superficies en las que se tienen por cada punto infinitas líneas de curvatura*, ya que son las únicas cuyos puntos son todos ombligos. En las demás superficies los ombligos son puntos excepcionales generalmente aislados, así que por lo general se tendrán por cada punto siempre dos y sólo dos líneas de curvatura, y éstas perpendiculares entre sí. Este resultado se conoce como *teorema de Monge*.

162. Curvatura de una superficie. Gracias al teorema de Euler (160.3), el conocimiento de los radios principales de curvatura R_1 y R_2 en un punto P de una superficie permite conocer con toda exactitud la curvatura de la superficie en proximidad de P . Sin embargo, más que los radios principales en sí, conviene utilizar para las aplicaciones corrientes sus dos combinaciones

$$\boxed{H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad K = \frac{1}{R_1 R_2}} \quad (162.1)$$

H se llama *curvatura media*, K se llama *curvatura total*. A continuación señalaremos una importante propiedad de la segunda, que fue introducida por Gauss. Acerca de la curvatura media hablaremos más adelante (No. 171) y veremos cómo ella se relaciona con la variación de las áreas de trozos de superficie apoyados a un contorno rígido fijo.



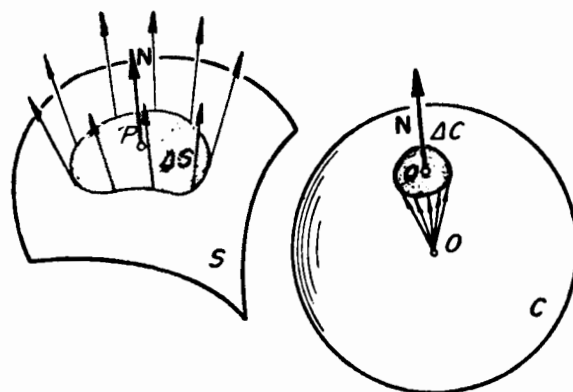
La *curvatura de las líneas planas* admite una interpretación geométrica interesante, que conviene recordar ahora. Sea AB un arco de una curva plana s , de longitud Δs , y considérense todos los vectores unitarios normales a la curva en los puntos del arco. Por un punto O tomado como origen, trácense vectores unitarios paralelos a los anteriores. Los extremos de estos cubren un arco $A'B'$ del círculo c que tiene centro en O y radio 1 (*círculo indicador*), arco

cuya longitud Δc es igual a la medida en radianes del ángulo $\Delta\phi$ comprendido entre las tangentes a la curva s en los puntos A y B . Reemplazando en la expresión (144.1) de la curvatura, resulta

$$\frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta s} = \frac{dc}{ds} \quad (162.2)$$

o sea que la *curvatura es la derivada del arco del círculo indicador c con respecto al arco s de la curva original*.

Análogamente sea ΔS una región de una superficie S , y considérense todos los vectores normales unitarios N en los puntos de ΔS . Por un punto O trácense vectores unitarios paralelos a los anteriores con lo que se obtendrá una región ΔC de la superficie esférica C de centro O y radio 1. ΔC se llama *imagen esférica* de ΔS y la esfera C , sobre la cual se trazan las imágenes esféricas de la superficie, se llama *indicatriz esférica*.



A cada punto P de la superficie S corresponde sobre la indicatriz ese punto Q en el cual el radio de la esfera es paralelo al vector N en P . Siendo que todo desplazamiento superficial sobre la esfera es normal al radio y por tanto a N , a todo desplazamiento dP sobre S corresponde un desplazamiento dN sobre la indicatriz. Si se traza sobre S la red de líneas de curvatura, toda figura ΔS puede descomponerse en cuadros elementales de dicha red, cuadros cuya área, si indicamos precisamente con dP y δP los desplazamientos siguiendo las líneas de curvatura que pasan por P , es

$$dS = |dP \times \delta P|.$$

El área del elemento dC correspondiente será por lo dicho antes

$$dC = |dN \times \delta N|.$$

Pero por las fórmulas de Rodrigues (161.1), se tiene

$$dN \times \delta N = \frac{dP \times \delta P}{R_1 R_2}$$

y reemplazando en las relaciones anteriores,

$$dC = \frac{dS}{R_1 R_2}$$

y luego por (162.1)

$$K = \frac{dC}{dS} \quad (162.3)$$

Este resultado, formalmente análogo al (162.2), expresa que la curvatura total es la derivada del área C medida sobre la indicatriz esférica, con respecto al área S que le corresponde sobre la superficie original.

163. Teorema de Joachimsthal. El teorema de Joachimsthal afirma lo siguiente: *si la intersección de dos superficies es una línea de curvatura para cada una de ellas, entonces las superficies se cortan bajo un ángulo constante. Viceversa, si dos superficies se cortan bajo un ángulo constante y la línea de intersección es línea de curvatura para una de ellas, también lo es para la otra.*

Vamos a demostrar este teorema. Sea P un punto de la intersección de las dos superficies, N el vector unitario normal a la primera superficie en P y N' el normal a la segunda. Se tiene

$$d(N \cdot N') = N' \cdot dN + N \cdot dN' \quad (163.1)$$

Ahora, si la línea de intersección es línea de curvatura para ambas superficies, los vectores dN y dN' tienen que ser paralelos al vector dP tangente a ella, vector que a su vez es normal a N y a N' ; luego dN y dN' son normales a N y a N' simultáneamente. Entonces el segundo miembro de (163.1) se anula y resulta

$$d(N \cdot N') = 0, \quad N \cdot N' = \text{cte}$$

lo que demuestra la primera parte del teorema.

Viceversa, supongamos que sea $N \cdot N' = \text{cte}$ y que además la intersección sea línea de curvatura para la superficie cuya normal es N . Entonces llamando R_1 su radio de curvatura, resulta por (161.1)

$$N' \cdot dN = -N' \cdot \frac{dP}{R_1} = 0,$$

expresión nula por ser N' perpendicular al vector dP , tangente a la línea intersección. Siendo además por hipótesis $d(N \cdot N') = 0$, reemplazando en (163.1), se obtiene

$$N \cdot dN' = 0$$

es decir dN' es normal a N . Pero dN' es también normal a N' (por ser $N'^2 = 1$), y siendo normal a N y N' es paralelo a dP . Este paralelismo asegura lo que queríamos comprobar, es decir que la intersección es línea de curvatura también para la segunda superficie.

164. Sistemas triples ortogonales de superficies. Entre las superficies que se cortan bajo un ángulo constante, las más importantes son las que se cortan en ángulo recto. De especial interés son los *sistemas triples ortogonales de familias de superficies*, o sea sistemas de tres familias tales que por cada punto P del espacio pasa una y tan sólo una superficie de cada familia, formando las tangentes a las tres curvas intersecciones un triedro trirectángulo, con vértice en P . El sistema triple ortogonal más conocido es el de los *planos* $x = \text{cte}$, $y = \text{cte}$, $z = \text{cte}$ normales a los ejes coordenados de un *sistema cartesiano ortogonal*. Otro sistema sencillo es el de *planos, conos y esferas* obtenido tomando como primera familia el haz de planos por una recta fija, como segunda los conos circulares con vértice en un punto fijo de dicha recta, que tienen como eje la recta misma, y como tercera familia las esferas con centro en el vértice de los conos; sus curvas intersecciones dan esencialmente las *coordenadas esféricas* que ya conocemos (No. 28).

Otro sistema triple ortogonal de gran importancia es aquél cuyas superficies satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} = 1, \quad (164.1)$$

siendo λ un parámetro variable y a , b , c números positivos tales que $a > b > c$. Se trata de un sistema de cuádricas confocales, y se comprueba fácilmente que por cada punto del espacio pasan tres superficies del sistema ortogonales entre sí: *un elipsoide, un hiperboloide de una falda y un hiperboloide de dos faldas*, ya que, si reemplazamos en (164.1) las tres coordenadas del punto, obtenemos una ecuación de tercer grado en la incógnita λ , que posee siempre tres raíces, una λ_1 mayor que a , a la cual corresponde el elipsoide, otra λ_2 comprendida entre a y b , a la cual corresponde el hiperboloide de una falda y otra λ_3 comprendida entre b y c , a la cual

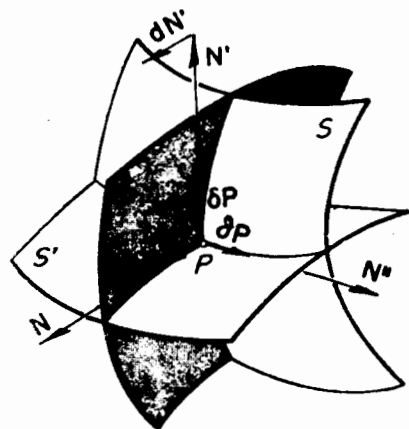
corresponde el hiperboloide de dos faldas. A cada punto del espacio corresponden así tres números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, que suelen llamarse *coordenadas elípticas* del punto.

Como último ejemplo, recordaremos los *paraboloides* representados por la ecuación

$$\frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} = 2x - \lambda \quad (164.2)$$

siendo p y q constantes positivas y λ un parámetro variable. Por cada punto del espacio pasan los tres paraboloides, ortogonales entre sí, que corresponden a los tres valores de λ que son raíces de la ecuación obtenida de (164.2) al reemplazar las variables x, y, z por las coordenadas cartesianas del punto. Estos valores son las *coordenadas parabólicas* del punto.

165. Teorema de Dupin. Este importante teorema, que concierne a las líneas de curvatura de las superficies que constituyen un sistema triple ortogonal cualquiera, se enuncia así: *la intersección de dos superficies pertenecientes a un sistema triple ortogonal es línea de curvatura para ambas.*



En efecto, sea P un punto de la línea L intersección de dos superficies S', S'' del sistema, N' y N'' los vectores unitarios normales respectivos en P , y N el vector normal a la superficie de la tercera familia que pasa por P . Sean $\delta P, \theta P$ y dP los desplazamientos elementales a lo largo de esas tres direcciones normales, para los cuales

$$\text{mod } dP = \text{mod } \delta P = \text{mod } \theta P. \quad (165.1)$$

Por la ortogonalidad de las tres superficies, tendremos

$$N \cdot N' = 0 \quad N' \cdot N'' = 0, \quad N'' \cdot N = 0.$$

y diferenciando cada una de estas relaciones con respecto a la tercera dirección

$$\begin{aligned} N \cdot \partial N' + N' \cdot \partial N &= 0, & N' \cdot dN'' + N'' \cdot dN' &= 0, \\ N'' \cdot \delta N + N \cdot \delta N'' &= 0. \end{aligned} \quad (165.2)$$

Por otro lado

$$N' = \frac{\delta P}{\text{mod } \delta P} \quad N'' = \frac{\theta P}{\text{mod } \theta P}$$

y diferenciando

$$\partial N' = \frac{\delta \theta P}{\text{mod } \delta P} \quad \delta N'' = \frac{\theta \delta P}{\text{mod } \theta P}$$

Pero $\theta \delta P = \delta \theta P$ y los denominadores son iguales por (165.1); luego

$$\partial N' = \delta N''.$$

Análogamente se comprueban las igualdades

$$dN'' = \partial N, \quad \delta N = dN'.$$

Gracias a estas relaciones, podemos hacer que en el sistema (165.2) aparezcan sólo los tres productos escalares $N \cdot \delta N''$, $N' \cdot \partial N$, $N'' \cdot dN'$; dicho sistema resulta así

$$\begin{aligned} N \cdot \delta N'' + N' \cdot \partial N &= 0, & N' \cdot \partial N + N'' \cdot dN' &= 0, \\ N'' \cdot dN' + N \cdot \delta N'' &= 0. \end{aligned} \quad (165.3)$$

Este es un sistema del tipo general

$$A + B = 0, \quad B + C = 0, \quad C + A = 0,$$

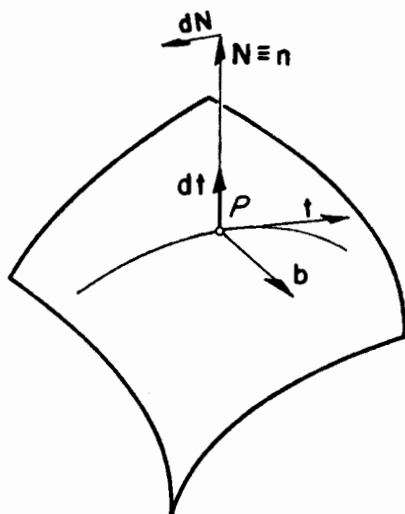
para cuya resolución, restando la segunda relación de la primera se obtiene $A - C = 0$ y sumando a la tercera se obtiene $A = 0$. Así se deduce también que ha de ser $B = 0$ y $C = 0$. Por tanto el sistema (165.3) se reduce a

$$N \cdot \delta N'' = 0, \quad N' \cdot \partial N = 0, \quad N'' \cdot dN' = 0.$$

De la última de estas relaciones se deduce que dN' es perpendicular a N'' . Pero también es perpendicular a N' (por ser $N'^2 = 1$); luego dN' ha de ser paralelo a N y por tanto a dP , y esto comprueba

que la línea L es línea de curvatura para la superficie S' (ver No. 161). Aplicando ahora el teorema de Joachimsthal, se deduce sin más que L es también línea de curvatura para S'' , con lo que el teorema de Dupin queda totalmente demostrado.

166. Líneas de curvatura que son geodésicas. Hemos estudiado entre las líneas importantes de las superficies a las geodésicas y a las líneas de curvatura. Puede darse el caso que una línea de curvatura sea a un mismo tiempo una geodésica. Vamos a demostrar que *una línea que es simultáneamente línea de curvatura y geodésica para una superficie determinada, tiene que ser una línea plana.*



una línea que es simultáneamente línea de curvatura y geodésica para una superficie determinada, tiene que ser una línea plana.

En efecto, indicado con t el vector unitario tangente a la línea considerada en un punto P de ella y con N la normal a la superficie en P , tenemos por (154.3) y por (161.2)

$$dt \times N = 0, \quad t \times dN = 0$$

y sumando

$$dt \times N + t \times dN = 0,$$

es decir

$$d(t \times N) = 0.$$

Pero por ser la línea una geodésica, la normal N coincide con la normal principal n a la línea, de modo que la última relación indica que el vector binormal

$$b = t \times n$$

tiene que ser constante en dirección a lo largo de toda la línea. Por tanto ésta es plana (ver No. 146).

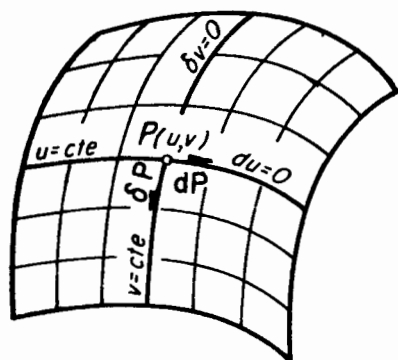
III. ANALISIS DE LAS SUPERFICIES POR MEDIO DE COORDENADAS CURVILINEAS

167 Las formas cuadráticas fundamentales. Consideremos la fórmula (152.5) que expresa la curvatura de una sección normal de una superficie, o mejor su recíproca, que da el radio de curvatura

$$R = - \frac{dP^2}{dP \cdot dN} \quad (167.1)$$

El numerador y el denominador del segundo miembro son dos diferenciales cuadráticas de mucha importancia en el análisis de las superficies, que nos proponemos estudiar a continuación.

Establezcamos sobre la superficie un sistema de *coordenadas curvilineas* u, v (ver No. 27), o sea elijamos dos parámetros u, v que varíen con continuidad sobre la superficie, adquiriendo en cada punto un valor bien definido el parámetro u y otro bien definido



al parámetro v . Las líneas $u = \text{cte}$ y $v = \text{cte}$ constituyen dos familias de curvas, cada una de las cuales cubre simplemente la superficie, que pueden considerarse como líneas coordenadas.

Entonces un punto P cualquiera de la superficie resulta función de u y v , y podemos escribir

$$dP = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv; \quad (167.2)$$

por tanto el numerador de (167.1) resulta

$$dP^2 = dP \cdot dP = \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 dv^2.$$

Si se observa que, indicando con ds la longitud del elemento de arco de curva superficial que pasa por P y es tangente a dP , se tiene $dP^2 = ds^2$, y si se escribe, para abreviar,

$$E = \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial v}, \quad G = \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2, \quad (167.3)$$

se obtiene finalmente la expresión diferencial

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (167.4)$$

Esta se llama la *primera forma cuadrática fundamental de las superficies*.

El denominador de (167.1) puede desarrollarse así:

$$\begin{aligned} -d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{N} &= -\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} dv\right) \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} dv\right) \\ &= -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} du^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}\right) du dv - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} dv^2 \end{aligned} \quad (167.5)$$

Si ponemos

$$\begin{cases} D = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}, \\ D' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} \right), \\ D'' = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}, \end{cases} \quad (167.6)$$

obtenemos de aquí la *segunda forma cuadrática fundamental*

$$-d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{N} = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 \quad (167.7)$$

Siendo $\mathbf{N}$ perpendicular a todo desplazamiento tangencial sobre la superficie, resulta

$$\mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = 0$$

y derivando estas relaciones primero con respecto a u y después con respecto a v ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} &= -\mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial u^2}, & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} &= -\mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} &= -\mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial v \partial u}, & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} &= -\mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial v^2}. \end{aligned} \quad (167.8)$$

De modo que reemplazando en (167.6), resultan estas nuevas expresiones de los coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental:

$$D = N \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \quad D' = N \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}, \quad D'' = N \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}. \quad (167.9)$$

168. Casos de simplificación de las formas cuadráticas. Es muy importante observar que, si bien las dos diferenciales cuadráticas dP^2 y $-dP \cdot dN$, consideradas a través de su definición vectorial, se relacionan con la geometría de la superficie únicamente, siendo *independientes del sistema de coordenadas curvilineas* que eventualmente se establezcan sobre la superficie misma, las expresiones de E, F, G, D, D', D'' cambian con dicho sistema. Por ejemplo para el plano, con coordenadas cartesianas ortogonales x, y , tenemos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

mientras que con coordenadas polares r, θ , resulta

$$dx = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$dy = d(r \sin \theta) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

y elevando al cuadrado y sumando

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

En otros términos, si ponemos $u = x, v = y$, el ds^2 del plano queda

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \quad (168.1)$$

con $E = 1, F = 0, G = 1$, y si ponemos $u = r, v = \theta$, el mismo ds^2 queda

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv^2 \quad (168.2)$$

con $E = 1, F = 0, G = u^2$.

Supongamos más generalmente que las coordenadas curvilineas sobre la superficie sean dos familias de curvas mutuamente ortogonales. Entonces el desplazamiento dP a lo largo de una línea $u = \text{cte}$ es normal al desplazamiento dP a lo largo de una $v = \text{cte}$; siendo

$\partial \mathbf{P} / \partial u$ el vector unitario tangente a $v = \text{cte}$, $\partial \mathbf{P} / \partial v$ el vector unitario tangente a $u = \text{cte}$ en P , lo anterior se expresa por la fórmula

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = 0,$$

es decir, por (167.3), $F = 0$. La primera forma cuadrática fundamental se escribirá entonces

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 \quad (168.3)$$

Viceversa si se tiene idénticamente $F = 0$, entonces $\partial \mathbf{P} / \partial u$ ha de ser siempre perpendicular a $\partial \mathbf{P} / \partial v$ y por tanto las líneas coordenadas son perpendiculares entre sí: *la condición*

$$F = 0 \quad (168.4)$$

caracteriza las coordenadas curvilíneas ortogonales. Las coordenadas cartesianas y polares en el plano son de esta especie, y efectivamente vemos que los ds^2 correspondientes (168.1) y (168.2) carecen de término en $dudv$.

Supongamos ahora que las dos familias de líneas coordenadas sean conjugadas, en el sentido de que en cada punto de la superficie las dos rectas tangentes a la línea $u = \text{cte}$ y a la línea $v = \text{cte}$, que pasan por el punto, sean conjugadas en la involución de Dupin correspondiente. Desarrollando entonces la expresión (157.3) de manera análoga a la (167.5), tomando en cuenta las (167.6), y considerando que, como resulta comparando entre sí la segunda y la tercera de las (167.8)

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u},$$

se obtiene la ecuación de la involución de Dupin bajo la forma

$$Ddu\delta u + D'(du\delta v + \delta u dv) + D''dv\delta v = 0 \quad (168.5)$$

Ahora, si las líneas $u = \text{cte}$ y $v = \text{cte}$, además de ser conjugadas en la involución de Dupin, son líneas coordenadas, se tiene $du = 0$, $\delta v = 0$, y sustituyendo en la ecuación anterior

$$D'\delta u dv = 0.$$

Pero δu y dv no son nulos, así que la condición que hay que satisfacer para que el sistema de referencia sea conjugado es

$$\boxed{D' = 0} \quad (168.6)$$

Si las familias coordenadas son precisamente las líneas de curvatura, el sistema es simultáneamente ortogonal y conjugado, por lo que tienen que satisfacerse ambas condiciones (168.4) y (168.6). Subsistirán además relaciones importantes entre E y D , G y D'' , que vamos a establecer a continuación. Si las $v = \text{cte}$ son las líneas de radio de curvatura R_1 , las $u = \text{cte}$ las de radio de curvatura R_2 , podemos escribir las expresiones (161.1) bajo la forma

$$\frac{\partial P}{\partial u} = -R_1 \frac{\partial N}{\partial u}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = -R_2 \frac{\partial N}{\partial v}.$$

Reemplazando en (167.3), se obtiene

$$E = R_1^2 \left(\frac{\partial N}{\partial u} \right)^2, \quad G = R_2^2 \left(\frac{\partial N}{\partial v} \right)^2,$$

y reemplazando en (167.6)

$$D = R_1 \left(\frac{\partial N}{\partial u} \right)^2, \quad D'' = R_2 \left(\frac{\partial N}{\partial v} \right)^2.$$

Dividiendo miembro a miembro, queda finalmente

$$\boxed{E = DR_1, \quad G = D''R_2} \quad (168.7)$$

Consideremos por fin como sistema de referencia un sistema de coordenadas geodésicas. Tomadas las líneas geodésicamente paralelas como $u = \text{cte}$, las geodésicas como $v = \text{cte}$, sabemos en primer lugar que dichas curvas son ortogonales entre sí, de modo que resulta $F = 0$. En segundo lugar, vimos en el No. 155 que los arcos elementales interceptados sobre las geodésicas por curvas geodésicamente paralelas infinitamente próximas son todos iguales entre sí, así que al tomar las coordenadas del modo señalado, los incrementos de arco sobre las geodésicas $v = \text{cte}$ se medirán precisamente por $ds = du$; o sea la expresión del ds^2 ha de ser tal que, hacién-

dose $dv = 0$, tiene que resultar $ds = du$. Por tanto se ha de tener simultáneamente

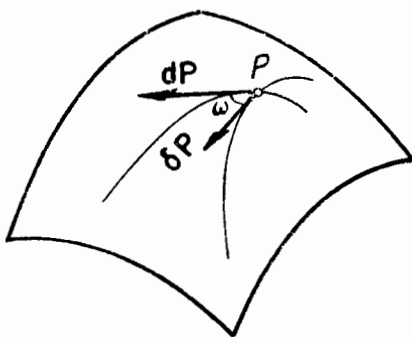
$$\boxed{E = 1, \quad F = 0} \quad (168.8)$$

de modo que el ds^2 de una superficie referida a coordenadas geodésicas adquiere la forma

$$\boxed{ds^2 = du^2 + Gdv^2} \quad (168.9)$$

Las expresiones (168.1) y (168.2) son precisamente de este tipo, ya que las coordenadas cartesianas y las polares son coordenadas geodésicas para el plano.

169. Aplicación de las formas cuadráticas al cálculo de ángulos y áreas. El conocimiento de las dos formas cuadráticas fundamentales facilita el análisis de muchas propiedades superficiales. Por ejemplo el ángulo según el cual se intersectan dos curvas



de la superficie se determina fácilmente por medio del ds^2 . En efecto, sea P el punto de intersección, dP y δP los desplazamientos elementales en dirección tangencial a las dos curvas. ω el ángulo entre ellas. Entonces se tiene

$$\cos \omega = \frac{dP}{\text{mod } dP} \cdot \frac{\delta P}{\text{mod } \delta P} \quad (169.1)$$

Pero tenemos también

$$\text{mod } dP = \sqrt{Edu^2 + 2Fdu\delta v + G\delta v^2}$$

$$\text{mod } \delta P = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}$$

$$dP \cdot \delta P = Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u\delta v) + G\delta v\delta v,$$

siendo el último desarrollo el resultado de consideraciones análogas a las utilizadas para deducir la (168.5). Reemplazando en (169.1), llegamos a la fórmula

$$\cos \omega = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u\delta v) + G\delta v\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\delta v + G\delta v^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \quad (169.2)$$

que expresa el ángulo en función de la variación de las coordenadas curvilíneas u, v a lo largo de las dos curvas. Por ejemplo la condición de ortogonalidad $\cos \omega = 0$ queda

$$Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v = 0 \quad (169.3)$$

El ángulo ω que forman entre sí las líneas coordenadas se obtiene de (169.2), considerando que sobre toda $u = \text{cte}$ es $du = 0$, sobre toda $v = \text{cte}$ es $\delta v = 0$, resultando

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (169.4)$$

Si las coordenadas son ortogonales entre sí, el $\cos \omega$ es cero y volvemos a encontrar la (168.4).

A la primera forma cuadrática fundamental se liga también la expresión en coordenadas curvilíneas del área de una figura trazada sobre la superficie. En efecto cualquier área superficial σ puede descomponerse en paralelogramos superficiales elementales $d\sigma$ encerrados entre dos pares de líneas coordenadas $u = \text{cte}$ y $v = \text{cte}$ infinitamente próximas. Ahora, el elemento de arco de una $u = \text{cte}$ se obtiene de (167.4) poniendo $du = 0$, y resulta ser $ds = \sqrt{G} dv$; análogamente el elemento de arco de una $v = \text{cte}$ es $ds = \sqrt{E} du$. Si el ángulo que forman entre sí las líneas coordenadas es ω , podemos escribir

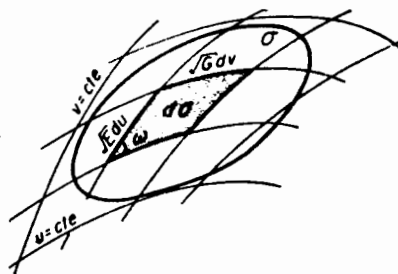
$$d\sigma = \sqrt{E} du \sqrt{G} dv \sin \omega.$$

Pero de (169.4) se obtiene

$$\sin \omega = \sqrt{1 - \cos^2 \omega} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}$$

y reemplazando en la expresión de $d\sigma$,

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (169.5)$$



La expresión del área de una figura superficial se obtiene por tanto calculando la integral doble

$$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (169.6)$$

extendida a toda la figura.

El estudio de las *intersecciones de una superficie con su plano tangente*, ya considerado en el No. 158, se liga con la segunda forma cuadrática fundamental. En efecto la *ecuación de las asíntotas* (158.1) se escribe por (167.7) en coordenadas curvilíneas

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0 \quad (169.7)$$

o lo que es lo mismo

$$D\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2D'\frac{du}{dv} + D'' = 0.$$

En cada punto de la superficie, los coeficientes D , D' y D'' adquieren valores numéricos determinados, de modo que la anterior resulta una ecuación de segundo grado en la variable du/dv , cuyas raíces dan precisamente las direcciones de las tangentes principales en el punto. Siendo $4(D'^2 - DD'')$ el discriminante de la ecuación, tendremos que *el punto será respectivamente hiperbólico, parabólico o elíptico según si*

$$D'^2 - DD'' > 0, \quad D'^2 - DD'' = 0$$

o bien

$$D'^2 - DD'' < 0. \quad (169.8)$$

170. Cálculo de las curvaturas media y total. Para calcular las curvaturas media H y total K , definidas por las fórmulas (162.1), empezaremos observando que *dos secciones normales, simétricas con respecto a las secciones normales principales, tienen la misma curvatura*. En efecto, si en la fórmula (160.3) de Euler se reemplaza ω por $-\omega$, el valor que resulta para R queda el mismo; de todos los radios de curvatura tan sólo R_1 y R_2 corresponden a una sola

sección. Ahora bien, reemplazando en (167.1) las dos formas cuadráticas fundamentales, tenemos

$$R = \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}$$

y eliminando el denominador,

$$(DR - E) \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2(D'R - F) \frac{du}{dv} + (D''R - G) = 0. \quad (170.1)$$

Fijado un valor para R , los valores de du/dv que resuelven esta ecuación de segundo grado son precisamente las dos direcciones correspondientes al radio de curvatura R . Por lo dicho más arriba, a los radios R_1 y R_2 tienen que corresponder raíces dobles de la ecuación (170.1), lo que requiere que entonces se anule su discriminante, es decir que

$$(DR - E)(D''R - G) - (D'R - F)^2 = 0.$$

Esta es una ecuación en la variable R , que podemos escribir

$$(EG - F^2) \frac{1}{R^2} - (ED'' + GD - 2FD') \frac{1}{R} + (DD'' - D'^2) = 0.$$

Las curvaturas H y K son por definición la suma y el producto de las raíces; aplicando fórmulas algebraicas conocidas, se obtiene finalmente

$$H = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{EG - F^2}, \quad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \quad (170.2)$$

De las dos curvaturas, la *curvatura total* es la más importante. Si observamos que siempre

$$EG - F^2 \geq 0,$$

como resulta inmediatamente al recordar las expresiones (167.3) de E , F y G , vemos que el signo de K es el de su numerador. Por tanto las condiciones (169.8) para que un punto P de una superficie sea hiperbólico, parabólico o elíptico pueden expresarse como sigue: en los puntos hiperbólicos es $K < 0$, o sea, por (162.1), los dos radios de curvatura principales R_1 y R_2 son de signo opuesto, lo

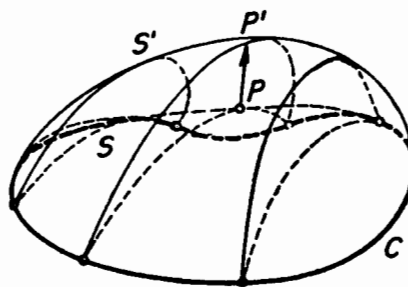
que implica que las líneas de curvatura que pasan por el punto P son una cóncava y otra convexa; en los puntos *elípticos* es $K > 0$, los dos radios principales son del mismo signo; luego las líneas de curvatura son ambas cóncavas o ambas convexas, y así también todas cóncavas o todas convexas son las secciones normales de la superficie por P , ya que el radio de ellas, por el teorema de Euler, está comprendido entre R_1 y R_2 ; por fin en los puntos *parabólicos* es $K = 0$ y por tanto a lo menos uno de los radios principales de curvatura es infinitamente grande.

Para que todos los puntos de una superficie sean parabólicos es necesario que por cada uno de ellos pase una recta perteneciente a la superficie misma, recta que será una de las líneas de curvatura por el punto; esa superficie ha de ser por tanto una *superficie reglada* (No. 151). En otras palabras, la ecuación

$$DD'' - D'^2 = 0 \quad (170.3)$$

puede considerarse como la *ecuación diferencial de las superficies regladas*. Sobre las superficies de revolución, en que las líneas de curvatura son los meridianos y los paralelos, en todos los puntos en los cuales la línea meridiana dirige su concavidad hacia el eje de rotación las curvaturas principales son en el mismo sentido y el punto es *elíptico*; donde el meridiano dirige su convexidad hacia el eje el punto es *hiperbólico* y donde el meridiano tiene una inflexión el punto es *parabólico*.

171. Superficies de área mínima. La curvatura media H se liga con el problema (que es una generalización del que se estudió en el No. 83) de *determinar, entre todas las porciones de superficie que pasan por un contorno cerrado alabeado fijo, la que tiene área mínima*. Para atacar el problema por medio del Cálculo de Variaciones, supongamos que C sea el contorno fijo, S y S' dos porciones de superficie próximas entre sí que



pasan por él. Por cada punto P de la primera elevemos la normal hasta encontrar la segunda en un punto, que llamaremos P' . Establecidas coordenadas curvilíneas u, v sobre S , podremos escribir análogamente a (82.1),

$$PP' = N\epsilon\eta(u, v)$$

siendo $\eta(u, v)$ una función conveniente de dichos parámetros que se anula sobre C y ϵ otro parámetro independiente, que puede hacerse pequeño como se quiera. Si el punto P sufre un desplazamiento superficial infinitésimo dP , el vector PP' variará en

$$d(PP') = dP' - dP = N\epsilon d\eta + \epsilon\eta dN.$$

Si las curvas coordenadas $u = cte, v = cte$ son precisamente líneas de curvatura para la superficie S , es posible expresar dN por dP , por medio de las fórmulas de Rodrigues (161.1), obteniéndose

$$\frac{\partial P'}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u} + N\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\epsilon\eta}{R_1} \frac{\partial P}{\partial u}$$

y una expresión análoga para la derivada con respecto a v ; es decir

$$\frac{\partial P'}{\partial u} = N\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial u} \left(1 - \frac{\epsilon\eta}{R_1}\right)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial v} = N\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial v} \left(1 - \frac{\epsilon\eta}{R_2}\right).$$

De aquí, tomando en cuenta que N es perpendicular a los desplazamientos dP , y que sobre S se tiene $F = 0$ por la ortogonalidad de las líneas coordenadas, se obtiene por (167.3) que sobre S'

$$E' = \left(\frac{\partial P'}{\partial u}\right)^2 = \epsilon^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 + E \left(1 - \frac{\epsilon\eta}{R_1}\right)^2$$

$$F' = \frac{\partial P'}{\partial u} \cdot \frac{\partial P'}{\partial v} = \epsilon^2 \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$G' = \left(\frac{\partial P'}{\partial v}\right)^2 = \epsilon^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 + G \left(1 - \frac{\epsilon\eta}{R_2}\right)^2$$

Suponiendo ϵ sumamente pequeño, y despreciando por tanto los términos que contienen sus potencias con grado superior al primero, obtenemos por fin

$$E'G' - F'^2 = EG \left[1 - 2\epsilon\eta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] = EG (1 - 2H\epsilon\eta).$$

Extrayendo la raíz cuadrada y desarrollando en serie, resulta

$$\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EG} (1 - 2H\epsilon\eta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{EG} (1 - H\epsilon\eta) \quad (171.1)$$

habiéndose también aquí despreciado las potencias de ϵ superiores a la primera. Llamados $d\sigma$, $d\sigma'$ dos elementos de área de las superficies S , S' respectivamente, se tiene por (169.5) y por (171.1)

$$d\sigma' - d\sigma = (\sqrt{E'G' - F'^2} - \sqrt{EG}) du dv = -\sqrt{EG} H\epsilon\eta du dv.$$

Integrando sobre toda la superficie S e indicando con $\delta\sigma$ la variación del área encerrada en el contorno C , se concluye que la porción de superficie S realizará un mínimo de área con respecto a las porciones de superficies S' contiguas, siempre que se anule

$$\delta\sigma = -\epsilon \iint_S \sqrt{EG} H\eta(u, v) du dv$$

lo que, en vista de que $\eta(u, v)$ es una función arbitraria que debe anularse sobre el contorno C , y no pudiendo $\sqrt{EG}$ ser idénticamente nula, implica por el lema fundamental del Cálculo de Variaciones (Nos. 82, 85) que sea $H = 0$. Concluyendo, *condición necesaria para que la porción de superficie S realice el mínimo de área es que la curvatura media en cada uno de sus puntos sea nula.*

Se llaman *superficies de área mínima* precisamente esas superficies para las cuales se tiene $H = 0$ en todas partes, es decir que en cada uno de sus puntos sus *radios de curvatura principales* R_1 y R_2 son iguales y de dirección opuesta. Su ecuación diferencial resulta por (170.2)

$$\boxed{ED'' + GD - 2FD' = 0} \quad (171.2)$$

Una aplicación importante de las superficies de área mínima se tiene en el análisis de la forma adquirida por una lámina fluida

delgadísima, apoyada a un anillo rígido de forma cualquiera, por efecto de la tensión superficial (*problema de Plateau*).

172. Superficies aplicables. Se dice que *dos superficies* S y S' *son aplicables la una sobre la otra cuando, imaginando una cualquiera de ellas representada por una lámina delgadísima, flexible pero inextensible, es posible adaptarla perfectamente, sin arrugas, sobre la otra.* Por ejemplo ya sabemos (No. 151) que las superficies desarrollables son aplicables sobre un plano. Ahora bien, supongamos que, al aplicarse S sobre S' , dos puntos cualesquiera P, Q de S vayan a sobreponerse a dos puntos P', Q' de S' ; es evidente que la distancia, medida sobre un arco de curva de la superficie S entre P y Q , ha de ser igual a la distancia, medida sobre el arco correspondiente de la superficie S' , entre P' y Q' . Esto ha de pasar para todos los pares de puntos correspondientes que se escojan sobre las dos superficies; por consiguiente, *condición necesaria y suficiente para que dos superficies sean aplicables la una sobre la otra es que el ds^2 de una de ellas sea igual al ds^2 de la otra.* Escojamos ahora sobre ambas superficies líneas coordenadas $u = \text{cte}$, $v = \text{cte}$ correspondientes (o sea tales que al aplicarse una superficie sobre la otra dichas líneas vayan a sobreponerse) y sean

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 \\ ds'^2 &= E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2 \end{aligned} \quad (172.1)$$

las expresiones de sus ds^2 en función de dichas coordenadas curvilíneas. Entonces, debiendo de ser $ds^2 = ds'^2$ como quiera que se escojan las variables u y v , también se tendrá que

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'. \quad (172.2)$$

Viceversa, si son válidas las identidades (172.2), entonces reemplazando en (172.1) resulta $ds^2 = ds'^2$ y por tanto las dos superficies son aplicables.

Lo anterior puede expresarse diciendo que, *si dos superficies son aplicables, entonces será siempre posible, eligiendo convenientemente los sistemas de coordenadas curvilíneas sobre ellas, hacer de modo que tengan el mismo ds^2 .* Por ejemplo sabemos que el

plano referido a coordenadas cartesianas ortogonales $u = \text{cte}$, $v = \text{cte}$ tiene el ds^2 (168.1)

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \quad (172.3)$$

luego toda superficie desarrollable, referida a un conveniente sistema de coordenadas curvilíneas, tendrá ese mismo ds^2 . Esto se realizará si dicho sistema consta de las curvas en que se transformarán las rectas paralelas a los ejes coordenados del plano cuando éste se aplique sobre la superficie, por ejemplo en el caso de un cilindro si se toma como variable u la abscisa medida a lo largo de una generatriz y como variable v la longitud de arco medida sobre las secciones rectas obtenidas cortando el cilindro normalmente a su eje.

Más generalmente, consideremos una superficie cuyo ds^2 , referido a un sistema curvilíneo ortogonal conveniente, pueda escribirse

$$ds^2 = E(u)du^2 + G(u)dv^2 \quad (172.4)$$

es decir que E y G sean funciones de la sola variable u . Vamos a demostrar que esta superficie es aplicable sobre una superficie de revolución. Para esto es suficiente comprobar que toda superficie de revolución referida a coordenadas oportunas, tiene un ds^2 del tipo (172.4), pudiéndose dar a E y G cualquier expresión en función de u , con tal de elegir debidamente la superficie.

Con tal objeto tomemos como eje z el eje de simetría de la superficie de revolución y en su sección recta coordenadas polares r y ϑ , esta última medida a partir de una línea meridiana fija. Entonces las coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie son

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = f(r) \quad (172.5)$$

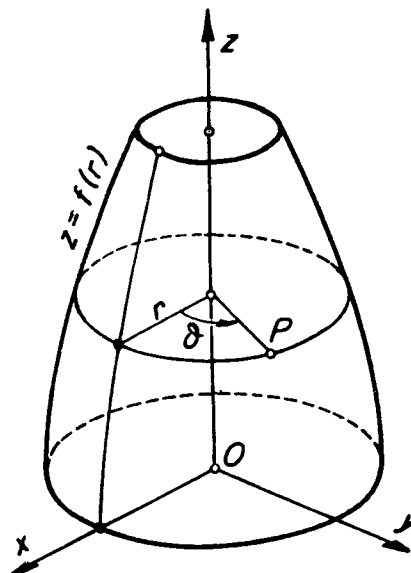
habiéndose indicado con f una función arbitraria de la variable r , que da la forma de la línea meridiana. Diferenciando y elevando al cuadrado, resulta inmediatamente

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [1 + f'^2(r)] dr^2 + r^2 d\vartheta^2 \quad (172.6)$$

y esta forma diferencial resulta del tipo (172.4) si se toma $u = r$, $v = \vartheta$, o sea si se escogen meridianos y paralelos como líneas coor-

denadas. En la fórmula (172.6) se ve que, debido a la indeterminación de f , $E(u)$ y $G(u)$ pueden ser funciones cualesquiera de la variable u , que es lo que se quería comprobar.

De lo dicho en este párrafo sigue sin más que la *aplicabilidad es una transformación conforme*, o sea que conserva los ángulos comprendidos entre dos pares de líneas superficiales correspondientes. Esto resulta al observar que dicho ángulo, cuyo coseno está dado por la fórmula (169.2), es función de los coeficientes E , F y G , coeficientes que, por las relaciones (172.2), son iguales para ambas superficies. Un razonamiento análogo referido a la fórmula (169.5) comprueba que la *aplicabilidad conserva también las áreas*, o sea que dos figuras aplicables son de igual área. En general, *toda la métrica superficial de una superficie queda determinada al conocerse el ds^2 , y por tanto resulta la misma para dos superficies aplicables la una sobre la otra.*



173. Representaciones conformes de una superficie sobre otra. Acabamos de ver que la aplicabilidad es una correspondencia conforme entre dos superficies; pero *no es la única*. En efecto para que la expresión (169.2) sobre dos superficies sea la misma, siendo numerador y denominador homogéneos de primer grado en E , F y G , no es necesario que dichos coeficientes sean iguales (condición (172.2)), sino simplemente que sean proporcionales.

Para expresarnos con exactitud, consideremos dos superficies S_1 y S_2 y supongamos que sobre la primera las coordenadas curvilíneas sean u_1 , y v_1 sobre la segunda las coordenadas curvilíneas sean u_2 y v_2 . Se tiene una correspondencia biunívoca entre los pun-

tos de ambas superficies cuando es posible establecer dos relaciones funcionales

$$u_2 = f(u_1, v_1), \quad v_2 = g(u_1, v_1) \quad (173.1)$$

que sean independientes, es decir tales que el determinante jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{vmatrix}$$

no sea nulo. En el caso de que el jacobiano se anulara, los puntos de una superficie podrían corresponder a puntos de una línea, o todos a un solo punto. Ahora bien, supongamos que E_1, F_1, G_1 sean los coeficientes del ds^2 de S_1 , E_2, F_2, G_2 los del ds^2 de S_2 : estos últimos son funciones de u_2 y v_2 , pero aplicando la transformación (173.1) podemos expresarlos en función de u_1 y v_1 , escribiendo

$$E_2(u_2, v_2) = E_2^*(u_1, v_1), \quad F_2(u_2, v_2) = F_2^*(u_1, v_1)$$

$$G_2(u_2, v_2) = G_2^*(u_1, v_1).$$

Así la condición de proporcionalidad antes mencionada se escribe

$$E_2^* : E_1 = F_2^* : F_1 = G_2^* : G_1 = \lambda(u_1, v_1) \quad (173.2)$$

siendo λ una función conveniente de u_1 y v_1 , y entre los ds^2 de las dos superficies subsiste la relación

$$ds_2^{*2} = \lambda(u_1, v_1) ds_1^2 \quad (173.3)$$

Desde luego, cuando son válidas las condiciones (173.2), si bien se conservan los ángulos entre líneas correspondientes, no se conservan ni las distancias entre puntos correspondientes, ni las áreas de figuras correspondientes. Existirán escalas de transformación en el caso especial de que λ sea constante; entonces las distancias se transformarán según la escala $\sqrt{\lambda}$, las áreas según la escala λ .

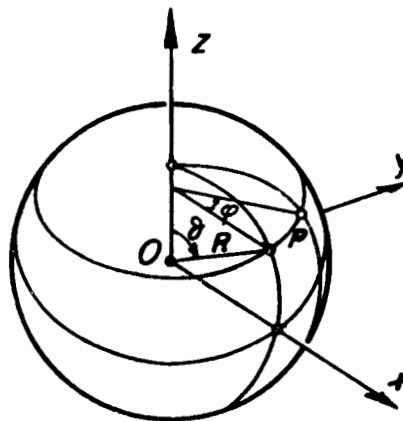
Concluyendo, diremos que se da una representación conforme de una superficie S_1 sobre otra S_2 cuando se puede encontrar sobre

la primera un sistema de coordenadas curvilineas u_1, v_1 y sobre la segunda otro u_2, v_2 , ligadas entre sí por una relación (173.1) con jacobiano no nulo, tales que subsista la proporcionalidad (173.2) entre los coeficientes E, F, G de la primera y los correspondientes de la segunda expresados en función de u_1, v_1 .

174. **Proyección de Mercator.** Un problema importante de representación conforme es el de los *mapas geográficos isogonales*, que consiste en *representar conformemente la esfera sobre un plano* (mapa). Evidentemente la esfera no es aplicable sobre el plano, pero sí es posible hacer de modo que, para sistemas coordenados convenientes, pueda valer una relación del tipo (173.2) entre los coeficientes de los ds^2 relativos. Por lo que acabamos de ver, estas representaciones, si bien conservan los ángulos, *deformarán distancias y áreas*; viceversa un mapa geográfico que conservara rigurosamente la escala de distancias o la de áreas, deformaría los ángulos.

Refiramos el plano a coordenadas cartesianas ortogonales, que llamaremos u_1 y v_1 . Se llama *proyección de Mercator* una representación conforme de la esfera sobre el plano, realizada de tal manera que los meridianos y los paralelos de la esfera se transformen respectivamente en las rectas $u_1 = \text{cte}$ y en las rectas $v_1 = \text{cte}$ del plano. Si referimos la esfera a un sistema cartesiano ortogonal cuyo eje z sea eje polar, cuyo origen esté en el centro de la esfera y cuyo eje x pase por el meridiano cero, e indicamos con ϑ la colatitud y con φ la longitud, las coordenadas de un punto P de la superficie, supuesto que el radio sea R , resultan dadas por las relaciones, análogas a las (141.9).

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi, \\ y = R \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi, \\ z = R \cos \vartheta. \end{cases}$$



de donde se saca diferenciando

$$\begin{aligned} dx &= R \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - R \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi \\ dy &= R \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + R \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi \\ dz &= -R \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = \\ &= R^2 \sin^2 \vartheta \left(d\varphi^2 + \frac{d\vartheta^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \end{aligned} \quad (174.1)$$

es el ds^2 de la esfera en coordenadas geográficas.

Si se escribe

$$u_2 = \varphi, \quad v_2 = \int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \ln \tan \frac{\vartheta}{2}, \quad (174.2)$$

con lo que las líneas $u_2 = \text{cte}$ resultan los meridianos, las $v_2 = \text{cte}$ los paralelos, la (174.1) se transforma en

$$ds_2^2 = R^2 \sin^2 \vartheta (du_2^2 + dv_2^2) \quad (174.3)$$

Los ds^2 para los cuales $E = G$ y $F = 0$ se dice que tienen forma isométrica; el ds^2 de la esfera que acabamos de obtener tiene precisamente forma isométrica.

En cuanto al plano del mapa, su ds^2 es el (172.3)

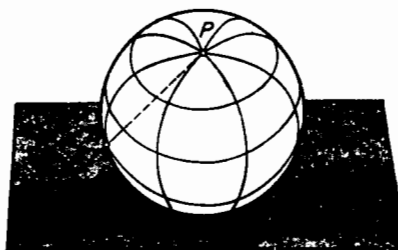
$$ds_1^2 = du_1^2 + dv_1^2$$

y se ve claramente que entre el ds^2 del mapa y el de la esfera (174.3) intercede una relación del tipo (173.3), con

$$\lambda = R^2 \sin^2 \vartheta. \quad (174.4)$$

Falta determinar cuáles son en este caso las relaciones (173.1) entre u_1 , v_1 y u_2 , v_2 . Desde luego hay muchas maneras de establecerlas; la más sencilla, que permite representar media esfera sobre una faja rectangular de longitud infinita, es la siguiente: imagínese el plano del mapa tangente a la esfera en el punto del ecuador de longitud cero, y que se hace corresponder a todo punto de la esfera

quemos el plano del mapa de modo que sea tangente a la esfera en un polo y proyectemos desde el polo opuesto. La red de meridianos y paralelos se proyecta así en un sistema de coordenadas polares con centro en el polo. Al plano le corresponderá luego un ds^2 (168.2).



$$ds_1^2 = du_1^2 + u_1^2 dv_1^2. \quad (175.1)$$

Por otro lado, recordando que

$$\text{sen } \vartheta = 2 \tan \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2},$$

el ds^2 (174.1) de la esfera puede escribirse

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 d\vartheta^2 + 4R^2 \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^4 \frac{\vartheta}{2} d\varphi^2 = \\ &= 4 \cos^4 \frac{\vartheta}{2} \left[\frac{R^2}{4 \cos^4 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta^2 + R^2 \tan^2 \frac{\vartheta}{2} d\varphi^2 \right] \end{aligned}$$

Basta entonces escribir

$$u_2 = R \tan \frac{\vartheta}{2}, \quad v_2 = \varphi \quad (175.2)$$

(con lo que las $u_2 = \text{cte}$ son los paralelos, las $v_2 = \text{cte}$ los meridianos), y luego

$$du_2 = \frac{R}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta,$$

para que la fórmula anterior se haga

$$ds_2^2 = 4 \cos^4 \frac{\vartheta}{2} (du_2^2 + u_2^2 dv_2^2) \quad (175.3)$$

la intersección de tres planos, el del mapa y los del meridiano y del paralelo que pasan por el punto. Entonces, tomada como eje u_1 la intersección del plano del ecuador con el plano del mapa y como eje v_1 la del plano del meridiano cero con el plano del mapa, resulta

$$u_1 = R \operatorname{tang} \varphi \quad v_1 = R \cos \vartheta$$

y por (174.2)

$$u_1 = R \operatorname{tang} u_2, \quad v_1 = R \frac{1 - e^{2v_2}}{1 + e^{2v_2}}.$$

Estas son las actuales relaciones (173.1), y comprueban que *la representación estudiada es efectivamente una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera y los del plano.*

La propiedad más importante de la proyección de Mercator es que *toda línea que corta sobre la esfera los meridianos bajo un ángulo constante (loxodromia) se representa en el mapa por una recta.* Esta propiedad, que es una consecuencia inmediata del hecho de que la representación por un lado conserva los ángulos y por otro transforma los meridianos en rectas paralelas (ya que una curva que intersecta un haz de rectas paralelas bajo un ángulo constante no puede ser sino una recta), constituye la ventaja indiscutible que los mapas de Mercator ofrecen para la navegación. En efecto la loxodromia es precisamente esa línea que recorre el navegante al seguir un rumbo que forma un ángulo fijo con el Norte señalado por la brújula. Es de notarse que la proyección de Mercator deforma notablemente las distancias, que se exageran siempre más cuanto más cerca estamos de los polos; en efecto se ve de la fórmula (174.4) que las distancias en el mapa se modifican en proporción inversa al seno de la colatitud (o sea al coseno de la latitud).

175. Proyección estereográfica. Como acabamos de ver, la proyección de Mercator deforma completamente la representación de la esfera en proximidad de los polos. Una buena representación conforme de las zonas polares se consigue con la *proyección estereográfica*, de la cual ya hicimos mención en el No. 40. Colo-

Entre el ds^2 (175.1) del plano y el (175.3) de la esfera subsiste una relación del tipo (173.3), donde

$$\lambda = 4 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

representa la escala de transformación de las áreas.

INDICE ALFABETICO

A

Abel, 84, 123, 169, 170
Acción de Hamilton, 153, 155
Aceleración tangencial, 268
 radial, 268
Afijo de un punto, 51
Análisis armónico, 131, 132
Angulo en el espacio hilbertiano, 159, 160
 entre curvas superficiales, 314, 315
 entre superficies, 304
Anomalia de un número complejo, 51
Antitransformación, ver *transformación inversa*
Aplicabilidad de superficies, 321
 sobre superficies de revolución, 322
Arco geodésico, 283, 284
Area de una figura superficial, 315
Argand, 51
Argumento de un número complejo, 51
Arista de retroceso, 277
Ascoli, 210
Asintóticas, 292-294, 316
Atracción newtoniana, 24, 44
Autofunciones, 222, 226, 228, 257
Autovalores, 222, 224, 228, 229
 reales, 223, 226

B

Bartels, 249
Bernoulli, Juan, 285
Bessel, 172, 208
Beta, función, 120-122
Binormal, 268
Bolzano, 111

C

Cable colgante, 141, 142
Cálculo de probabilidades, 122
 de variaciones, 134, 135
 funcional, 134
 operacional, 178, 248
Camino de integración, 78, 79
Campo conexo, 55
 de fuerzas, 24

 de velocidades, 24
 solenoidal, 24
 vectorial, 24
Características, 203, 241, 245
 oscilantes 203, 204
Catenaria, 141, 142
Catenoides, 141
Cauchy, 53, 55, 78, 91, 108, 197
Centro de curvatura, 267
Ceros de integrales, 206, 208
 de un polinomio, 69, 100, 111
Cinta de Moebius, 67
Circulo de convergencia, 58, 59
 funciones armónicas en un—, 50, 256
 indicador, 302
Circuitos geodésicos, 289
Clairaut, 285
Componentes de un vector, 1, 161
 en el espacio hilbertiano, 162
Comportamiento asintótico, 198
Condición de monogenidad, 53, 54
 de unicidad de la integral, 94
Condiciones auxiliares, 145
 de Cauchy-Riemann, 55
 de Dirichlet, 127, 129
 de frontera, 43, 198, 247
 holonómicas, 145
 iniciales, 197
Constante de Mascheroni, 117
Convergencia absoluta, 56, 57
 de una serie, 56
 uniforme, 57
Convolución, 167-169, 187, 193
Coordenadas cartesianas ortogonales, 29, 305, 311
 cilíndricas, 30
 curvilíneas conjugadas, 312, 313
 curvilíneas en el espacio, 29, 30
 curvilíneas ortogonales, 311, 312
 curvilíneas sobre una superficie, 309
 elípticas, 306
 esféricas, 31, 305
 geodésicas, 288, 313, 314
 lagrangianas, 153
 parabólicas, 306
 polares, 288, 311
 sobre la esfera terrestre, 288

Coseno, 61-63, 182
 en el espacio hilbertiano, 159, 160
Cotangente, 155
Cuerda vibrante, 154
Curva envolvente de características,
 275, 276
 envolvente de curvas alabeadas, 274
 envolvente de curvas planas, 272, 273
 simple, 55
Curvas características de una familia
 de superficies, 274
 de torsión nula, 270
 geodésicamente paralelas, 288
Curvatura de líneas planas, 302
 de líneas superficiales, 299
 de una curva alabeada, 266, 267,
 280-282
 de una sección normal, 299, 317
 geodésica, 289, 290
 media, 302, 317, 320
 total, 302, 304, 317

CH

Christoffel, 89
Churchill, 249

D

D'Alembert, 151
Densidad, 44
Derivación bajo el signo de integral,
 192
 de un punto con respecto a un es-
 calar, 7
 de un vector con respecto a un es-
 calar, 7
 de un vector con respecto a un punto,
 9, 10
 de una función de variable comple-
 ja, 53, 54, 91
 de una serie de potencias, 59, 60
 direccional, 53
 normal a una superficie, 16, 28, 39,
 41, 43
Derivadas sucesivas de una función de
 variable compleja, 53, 54, 91
 de una serie de potencias, 59, 60
Descomposición de funciones raciona-
 les, 113
Desigualdad de Bessel, 162
Desplazamientos virtuales, 150
Diferencial de un punto, 5, 6
 de un vector, 6

Diferenciales de productos entre vec-
 tores, 6
Direcciones en el espacio hilbertiano,
 161
Dirichlet, 43, 52, 127, 133, 178
Distancia en el espacio hilbertiano, 159
 entre puntos, 12-15
 entre un punto y un plano, 13
Distancia mínima entre ceros de una
 integral, 206, 208
 entre puntos de una superficie, 283
Divergencia de un gradiente (ver tam-
 bién *Laplaciano*), 23
 de un producto, 20, 21
 de un rotacional, 23
 de una constante, 20
 de una función vectorial compuesta,
 21
 de una suma, 20
 definición, 20
 expresión cartesiana, 22
 integral de la—, 36
Duhamel, 250
Dupin, 292, 306

E

Ecuación de Bessel, 208, 210, 211
 de Euler, 138-140, 150
 de Hermite, 239
 de la cuerda vibrante, 156
 de la difusión (o del calor), 245, 249
 de Laguerre, 231
 de Laplace, 24
 de Laplace, en dos dimensiones, 49,
 56, 195, 245
 de Laplace, en tres dimensiones, 246,
 250-255
 de las asintóticas, 294
Ecuación de las geodésicas, 284
 de las líneas de curvatura, 301
 de las superficies desarrollables, 278
 de Legendre, 92, 234
 de onda, 156, 229, 246, 257
 integral de Abel, 170, 193
 secular, 226
Ecuaciones algebraicas, 100
 autoadjuntas, 201, 202
 de Euler, 144, 145
 de Fredholm de 1a. especie, 165
 de Fredholm de 2a. especie, 165, 167,
 221
 de Lagrange, 154
 de Volterra de 1a. especie, 165, 193

- Ecuaciones de Volterra de 2a. especie*, 165-167, 194
 funcionales, 164
Ecuaciones diferenciales homogéneas
 del 1er. orden, 199, 200
 homogéneas del 2o. orden, 200-210
 lineales, 177, 191, 198
 ordinarias, 197
Ecuaciones de las derivadas parciales
 clasificación, 245
 del 1er. orden, 240-243
 del 2o. orden, 243-246
 totalmente lineales, 246
Elipses e hipérbolas homofocales, 74
Envolvente, ver *curva envolvente y superficie envolvente*
Escalares, 1
Esfera compleja, 52
 funciones armónicas en una—, 46, 253, 258
Espacio de Hilbert, 168, 169
Espacios funcionales, 173
 vectoriales de n dimensiones, 172
Espectros de autovalores, 229
Estabilidad de las integrales, 210
 143
Euler, 26, 62, 116, 120, 130, 131, 139,
Expresión cartesiana de la diferencial
 de un vector, 6
 de la divergencia, 22
 de un vector, 1
 del gradiente, 13
 del rotacional, 19
Extremos, 134, 137, 139
Extremos con condiciones auxiliares,
 145-147
 de funcionales, 134, 136, 143-145
 de funciones, 134
- F**
- Factorial*, 119
Familias de curvas, 271
 de curvas ortogonales, 74, 312
 de superficies, 274
 de superficies ortogonales, 305
Fenómenos hereditarios, 171, 193, 250
Forma isométrica del ds^2 , 326
 lineal, 157
Formas cuadráticas fundamentales,
 310-314
 reducidas de la ecuación diferencial
 del 2o. orden, 202, 203
Fórmula de Cauchy, 90, 91
 de Duhamel, 250
 de Euler para la exponencial, 62
 de Euler para el seno, 116
 de Green, 40, 41, 49
 de la adición para seno y coseno, 63
 de la amortiguación, 186
 de la derivación, 186
 de la integración, 187
 de la similitud, 186
 de Poisson para el potencial de masa, 47
 de Poisson para el problema de Dirichlet, 255
 de Schlaefli, 92
 de Tricomi, 191
 del retroceso, 185
Fórmulas de Frenet, 271
 de Rodrigues, 300
 fundamentales de Green, 38, 48
Fourier, 124, 174
Frecuencia de vibración, 230
Fredholm, 165
Frenet, 271
Función beta, 120
 de los errores, 122, 183
 de Green, 219-221, 250-252
 escalonada, 189
 exponencial, 61, 62, 183
 gamma, 116-122, 183
 logarítmica, 64
 según Dirichlet, 133
 vectorial compuesta, 18
 $\ln 1/r$, 49
 $\sqrt{z}$, 66
 $1/r$, 25, 26, 41
 z^c , 65
Funcionales, 133, 134
 lineales, 157, 158
Funciones analíticas, 101, 103, 104
 armónicas asociadas, 56
 armónicas en el plano, 48-50, 56
 armónicas en 3 dimensiones, 25, 39, 42
Funciones características, 222
 cilíndricas, 213
 de Bessel, 208, 213-215
 de cuadrado sumable, 158
 de línea, 134
 de orden exponencial, 175
 de variable compleja, 52-55, 60
 doblemente periódicas (o elípticas),
 123
 esféricas, 261
 hiperbólicas, 182
 holomorfas, 54, 55, 97-100, 103
 homogéneas, 26

Funciones goniométricas (o circulares), 61-63, 114-116, 182

impares, 128
meromorfas, 111-113
multiformes (o polidromas), 55, 64
normales, 161
ortogonales, 160
ortonormales, 161
pares, 128
periódicas, 62, 63, 184
racionales, 113
seccionalmente continuas, 127
simplemente periódicas, 123, 124, 127, 129
uniformes (o monódromas), 55

G

Gamma, función, 116-122
Gauss, 36, 41, 48, 50, 51, 118, 122, 302
Generatrices de una superficie desarrollable, 276
Geodésicas, 283-287, 308
sobre el cilindro, 285
sobre el plano, 285
sobre la esfera, 285
Goursat, 225
Gradiente de distancias, 13
de un producto, 12
de una constante, 11
de una divergencia, 24
de una función compuesta, 12
de una suma, 12
definición, 11
en la determinación de normales a superficies, 15, 16
en problemas de máximo y mínimo, 14
expresión cartesiana, 14
integral del, 37
Grado de homogeneidad, 26
Green, 37, 38, 40, 48, 49, 219

H

Hadamard, 134
Hamilton, 153
Hélices circulares, 285
Herencia lineal cíclica, 171, 172
Hermite, 237
Hertz, 145
Hilbert, 143, 158
Histeresis, 171
Historia primaria, 171
hereditaria, 172

Homografías vectoriales, 8, 37, 172
Horn, 187

I

Imagen esférica, 302
Indicatriz esférica, 302
Índice de un número complejo, 51
Integral de la divergencia, 36
de la función $\cos x/x$, 84
de la función e^{ix}/x , 82-84
de la función $\sin x/x$, 84
de la función $1/z$, 80
de la función $1/z(z-1)$, 108
de la función $1/z^2$, 80
de la función $1/(z^2-1)$, 81
euleriana de 1ª especie, 121
euleriana de 2ª especie, 119, 120
general, 197-199
Integrales abelianas, 84
de funciones de variable real, 82
de funciones holomorfas, 78
de línea, 78, 89, 81
elípticas, 85, 123
elípticas de 1ª especie, 85
elípticas completas de 1ª especie, 87
hiperelípticas, 85
impropias, 82
particulares, 197
singulares, 198
sobre curvas cerradas, 80, 108
Inversión de la transformación de Fourier, 179
de la transformación de Laplace, 180
de una funcional, 164
por radios vectores recíprocos, 75, 76, 253, 256
Involución circular, 292, 297, 301
de Dupin, 290-292, 312

J

Jacobi, 123, 143
Jacobiano, 324
Joachimsthal, 304

K

Kneser, 139

L

Lagrange, 45, 143, 146, 154, 199
Laguerre, 190, 231
Lagunas de una función analítica, 104
Lamé, 24

Laplace, 23, 174
Laplaciano de un vector, 24
 de una función, 23, 31, 38
 del producto, 24
 en coordenadas cilíndricas, 32
 en coordenadas esféricas, 32
 expresión de Lamé, 23
Laurent, 106
Legendre, 85, 91, 143, 234
Lema fundamental del Cálculo de Variaciones, 138
Líneas de curvatura, 292, 300, 301, 304, 313
 que son geodésicas, 308
Liouville, 99, 215
Logaritmo, 64, 65
Longitud de un arco de curva, 265, 282
Loxodromía, 327

M

Mapas geográficos, 325
Masa atrayente, 44
Mascheroni, 117
Matriz de una homografía vectorial, 8-10
Máximos y mínimos absolutos, 14
 de las funciones armónicas, 42, 50
 relativos, sobre una superficie, 15
Mercator, 325
Meridianos y paralelos de una superficie de revolución, 300
 sobre la esfera terrestre, 288, 325, 328
Métodos de integración de ecuaciones en las derivadas parciales, 248
Meusnier, 281
Módulo de un número complejo, 51, 56
 de un vector, 1
Moebius, 67
Monge, 301
Morera, 93
Movimiento de una partícula sobre una curva, 169
 de una partícula sobre una superficie, 286
Multiplicadores de Lagrange, 146
Multiplicidad de un cero, 111
 de un polo, 111

N

Nabla, 14, 20, 22, 23
Neumann, 43, 165
Normal a una superficie, 15, 35, 280
 principal de una curva, 265

Núcleo de una funcional lineal, 157, 171, 172, 221
 de una transformación funcional, 173
 incompleto (o de Goursat), 225, 226
Números complejos, 51, 52

O

Omblicos de una superficie, 297, 301
Operador de Laplace (ver también *Laplaciano*), 23
nabla, ver *Nabla*
Operadores aditivos, 7
 diferenciales compuestos, 22, 23
 diferenciales del Análisis Vectorial, 11-24
 homogéneos, 7
 lineales, 7
Origen en el espacio hilbertiano, 159
Ortogonalidad de funciones, 160
 de las autofunciones, 222
 de las funciones esféricas, 261
 de los polinomios de Hermite, 239
 de los polinomios de Laguerre, 234
 de los polinomios de Legendre, 236
 pesada, 223
Oscilograma, 131

P

Periodicidad de una función, 123
Plano complejo, 51, 52
 de Argand-Gauss, 51
 de dos caras, 67
 normal a una curva, 270
 osculador, 265, 270, 281
 osculador de las asíntóticas, 294
 osculador de las geodésicas, 285
 rectificante, 270
 tangente, 16, 293
Planos normales principales, 298
 principales de una curva, 271
Plateau, 321
Poisson, 41, 255
Polidromía de una función, 55, 64
Polinomios, 69, 100
 armónicos homogéneos, 26-28, 260
 de Hermite, 237
 de Laguerre, 190, 191, 233
 de Legendre, 91, 92, 236
Polos, 77, 100, 110, 111
Potencial, 24
 de masa, 45, 47
 de un campo esférico, 258
 newtoniano, 25

Principio de d'Alembert, 151
 de Hamilton, 153, 154
 de la reflexión analítica, 94
 de los trabajos virtuales, 151
 de Schwarz, 95
 del ciclo cerrado, 171
Problema de Abel, 169-171
 de Cauchy, 197, 199-201, 241, 243
 de Dirichlet, 43, 252-257
 de Dirichlet con frontera plana, 252, 253
 de Dirichlet en dos dimensiones, 255
 de Dirichlet en el círculo, 256, 257
 de Dirichlet en la esfera, 253-255, 262
 de Dirichlet en tres dimensiones, 255
 de Neumann, 43, 44, 262, 263
 de Plateau, 321
 de Steiner, 14, 15
 de Sturm-Liouville, 215-217
 fundamental del Cálculo de Variaciones, 135
Problemas de máximo y mínimo, 14
 isoperimétrico, 141, 147, 148
Producto escalar, 2, 167
 infinito, 116
 integral, ver *convolución*
 mixto de tres vectores, 3
 triple, 5
 vectorial, 2, 8
 vectorial doble, 3-5
Prolongación analítica, 101, 103
Proyección de Mercator, 325
 estereográfica de la esfera, 52, 327
Punto característico, 272
 del espacio hilbertiano, 158
 derivada de—, 7
 diferencial de—, 5
 en el infinito (o impropio), 51, 68, 69, 98
Puntos críticos, 65, 68, 69
 dobles, 274
 elípticos hiperbólicos y parabólicos, 293, 316, 318
 ordinarios, 77
 singulares, 77, 100, 111
 singulares de una transformación conforme, 72

R

Radicales, 66-69
Radio de curvatura, 267
 de torsión, 270

Radios principales de curvatura, 298
Recta del espacio hilbertiano, 159
Reflexión analítica, 94
Región conexa, 54, 55
 múltiplemente conexa, 79
Representación cartesiana del número complejo, 51, 63, 64
 conforme de una superficie sobre otra, 323, 324
 euleriana del número complejo, 63, 64
 goniométrica del número complejo, 63, 64
 gráfica del número complejo, 51, 52
Residuo, 107, 109
Riemann, 55, 66, 72
Riesz, 158
Rodrigues, 91, 300
Rotacional de un gradiente, 18, 23
 de un producto, 18
 de un rotacional, 24
 de una constante, 17
 de una función vectorial compuesta, 19
 de una suma, 17
 definición, 17
Rotacional expresión cartesiana, 19
 integral del—, 33

S

Schlaefli, 92
Schwarz, 89, 95
Secciones normales de una superficie, 281, 282
 principales, 298
Seno, 61-63, 116, 119, 123, 182, 185
Sentido positivo de rotación sobre una curva cerrada, 48
 del vector normal a una superficie, 35
Serie de coseno, 128
 de Dirichlet, 178, 189
 de Fourier, 124-131, 163
 de funciones racionales, 113
 de Laurent, 106, 109, 110
 de potencias negativas, 105, 189
 de potencias positivas (o de Taylor), 57, 60, 97, 98, 100, 103
 de senos, 128
Series de autofunciones, 257
 de funciones esféricas, 262, 263
 de funciones ortonormales, 163
Singularidades esenciales, 77, 100, 110
Sistemas de referencia ortonormales, 161
 ∞^1 de curvas, ver *familias de curvas*

Sistemas triples ortogonales de superficies, 305, 306
 Steiner, 14
 Stokes, 34
 Sturm, 204, 215
 Suma de vectores, 1
 Superficie envolvente, 274
 normal a una familia de superficies, 242
 Superficies aplicables, 321
 aplicables sobre un plano, 276
 de área mínima, 141, 318
 de revolución, 318, 322
 de revolución de área mínima, 135, 140, 141
 de Riemann, 66-68
 desarrollables, 276, 277, 279, 321
 regladas, 278, 318
 uniláteras, 67

T

Tangentes de curvatura, 292, 295, 297
 principales, 292, 293
 Taylor, 98
 Tensores, 8
 Teorema de Ascoli, 210
 de Bolzano, 111
 de Cauchy, 78-80, 94
 de comparación de Sturm, 204, 206
 de Dupin, 306
 de Euler sobre la curvatura de secciones normales, 299
 de Euler sobre las funciones homogéneas, 26
 de Gauss para homografías vectoriales, 37
 de Horn, 187
 de Joachimsthal, 304
 de la integral de la divergencia (o de Gauss), 36, 48
 de la integral del gradiente (o de Green), 37
 de la integral del rotacional (o de Stokes), 33, 34
 de Lagrange sobre el potencial de masa, 45
 de Liouville, 99
 de los residuos, 108
 de Meusnier, 281, 299
 de Monge, 301
 de Morera, 93, 94
 de Riesz, 158
 Teorema del valor medio de Gauss, 41, 42, 50

fundamental de Riemann, 72
 fundamental del Algebra, 100
 Teoría del potencial, 25
 Torsión de una curva alabeada, 268
 elástica de un alambre, 172
 Trabajo virtual de las reacciones, 150
 Transformación conforme de un círculo en la zona exterior, 75, 76
 conforme de un semiplano en un círculo, 74, 75
 conforme de un semiplano en un plano, 73
 conforme de un semiplano en un polígono, 89
 conforme de un semiplano en un rectángulo, 85, 87, 89
 conforme de un semiplano en un triángulo, 88, 89
 conforme de una faja en un círculo, 76
 conforme de una faja en un plano, 73, 74
 cosenoidal de Fourier, 174
 de Fourier-Laplace, 174, 181
 de Fourier propiamente dicha, 175
 de Laplace, 174-176, 181-196, 248-250
 de Laplace propiamente dicha, 175
 de Schwarz-Christoffel, 89
 exponencial de Fourier, 174-176
 inversa, 173, 177, 179, 180, 188
 por radios vectores reciprocos, ver inversión
 senoidal de Fourier, 174
 Transformaciones conformes en el espacio, 323
 conformes en el plano, 70-73-76
 conformes sucesivas, 76
 entre planos, 70
 funcionales lineales (o integrales), 173
 Transformada de cero, 182
 Tricomi, 191

U

Unicidad de la divergencia, 20
 del gradiente, 11
 del rotacional, 17

V

Valor absoluto de un número complejo, 51
 Valor medio de una función armónica en un círculo, 50



702355

- Valor medio de una función armónica*
 en una esfera, 42
Valores característicos, 222
Variable compleja, 52
Variación de la longitud de arco, 283
 de las constantes arbitrarias, 199
 de una funcional, 136, 142, 143
 de una integral doble, 148-150
Vector binormal, 268
 derivada de—, 7
 diferencial de—, 6
 normal a una superficie, 15, 16, 280
 normal principal, 265
 tangente, 265
- Vectores componentes de los*, 1, 161
 conjugados en la involución de Dupin, 290, 291
 en el espacio hilbertiano, 162
 productos de—, 2-5
 suma de—, 1
 unitarios coordenados, 1-3, 8, 161
 unitarios normales a las superficies
 coordenadas, 30
Volterra, 134, 165
- W**
- Weierstrass*, 101, 117, 143
Wronskiano, 199