

TEORIA Y PRACTICA DEL PENDULO DE TORSION, (FTP)

por

LEONARDO ZEEVAERT*, ph.D.

* Profesor, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México 21, D.F.

F-DEPFI

D-49

1984

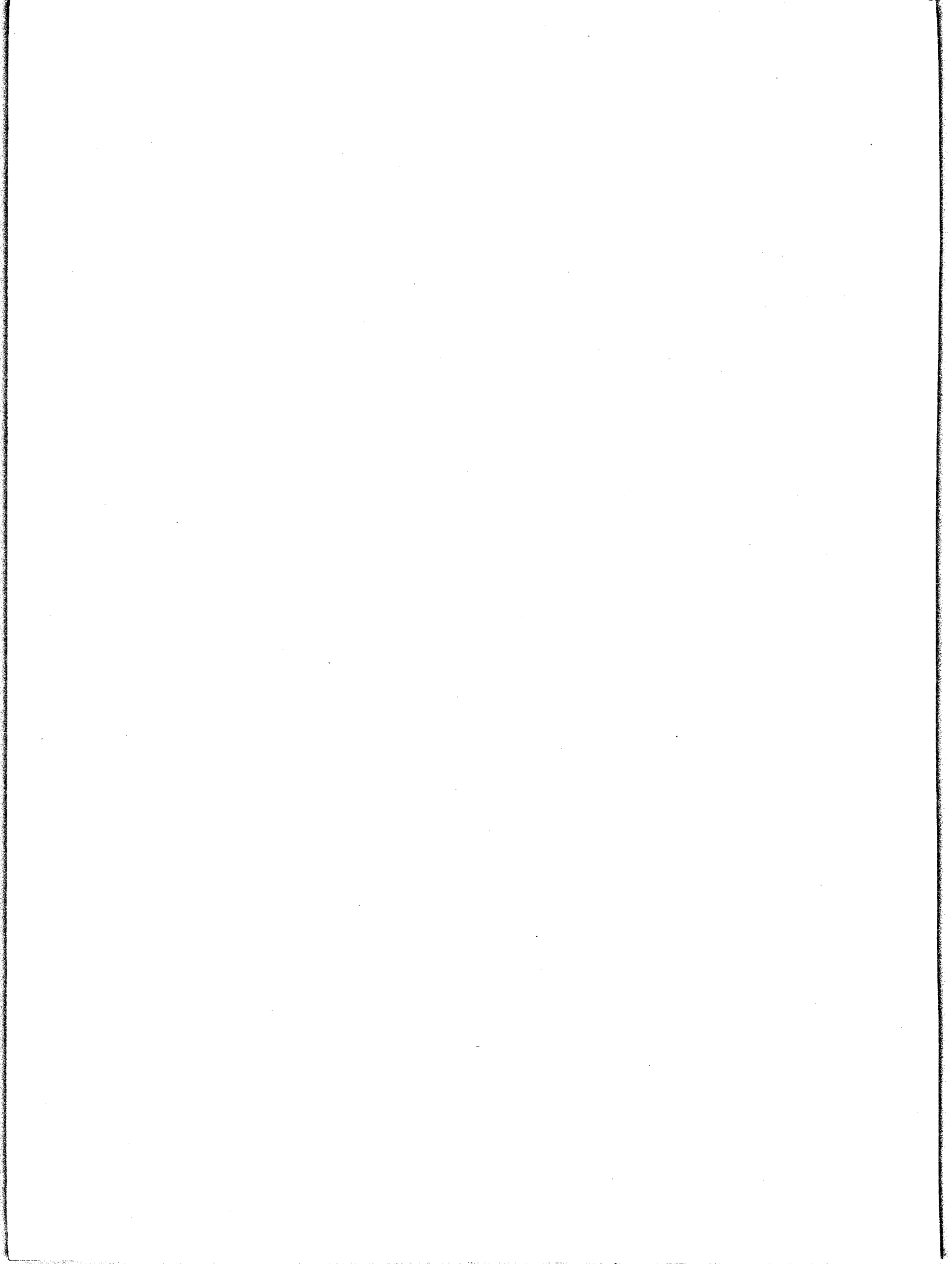
8.6



DEPFI

C O N T E N I D O

I.	INTRODUCCION	1
II.	EL INSTRUMENTO	3
III.	CONSIDERACIONES TEORICAS	8
IV.	USO DEL INSTRUMENTO	18
V.	PROGRAMANDO UNA PRUEBA	24
VI.	INTERPRETACION DE RESULTADOS	28
VII.	EJEMPLO DE CALCULO	32
VIII.	ERROR PROBABLE	35
IX.	EJEMPLO DE CORRELACION CON EL CAMPO	36



702335 J.L

I. INTRODUCCION

En la práctica de dinámica de suelos en múltiples problemas se requiere el conocimiento de la rigidez dinámica del suelo; o sea, el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante. Todo material del suelo tiene un cierto número de elementos elásticos que actúan en forma activa durante la vibración. La respuesta elástica de un suelo es por lo tanto una función de los elementos elásticos que sean excitados, la velocidad de las ondas en el suelo inducidas por sismos, o cimentaciones de maquinaria pueden estimarse conociendo esta propiedad dinámica del suelo. En muchos casos uno está obligado a conocer las amplitudes máximas probables de la cimentación producidas por las vibraciones que puedan afectar las instalaciones, y en general el comportamiento de la estructura. La predicción de la respuesta de un edificio durante los temblores depende principalmente de la relación entre el período de vibración de la estructura al período o períodos de la masa del suelo que soporta la cimentación. El período de vibración del suelo es una función de la rigidez del suelo. En el caso de maquinaria la vibración de la cimentación es muy importante en el comportamiento dinámico del sistema. La posibilidad de que se presente resonancia debe ser evitada para obtener un comportamiento adecuado de la maquinaria y las amplitudes deberán de reducirse a un límite establecido para el funcionamiento adecuado de la maquinaria. Aún más, los esfuerzos dinámicos en el suelo deberán estimarse y reducirse si es necesario a valores admisibles. Puesto que todos estos problemas se

encuentran íntimamente relacionados con la rigidez dinámica del suelo, un problema importante es determinar con precisión razonable esta propiedad dinámica del suelo. La predicción del comportamiento se basa en la determinación de la rigidez del suelo en el laboratorio utilizando las mejores muestras inalteradas representativas de los estratos que forman la masa del suelo.

Reconociendo la necesidad de investigar sobre la rigidez dinámica del suelo desde un punto de vista de ingeniería práctica, el autor diseñó hace dos décadas un instrumento sencillo llamado "El Péndulo de Vibración Libre"⁽²⁾. Este instrumento ha sido usado en trabajos de rutina, obteniéndose buenos resultados prácticos, los cuales han sido verificados por medio de correlaciones con el comportamiento real de cimentaciones diseñadas usando este parámetro dinámico del suelo determinado en el laboratorio. El instrumento y los métodos de prueba han mejorado en la actualidad y se describen en los párrafos que siguen, (SBEL). Sin embargo, otros mejoramientos pueden introducirse en el futuro para obtener un aparato más práctico y de fácil manejo. La aceptación y mejoramiento en la práctica de cualquier instrumento es lenta, ya que los resultados que se obtienen deberán de verificarse o calibrarse con el comportamiento del prototipo que fue diseñado con los parámetros del suelo obtenidos en el laboratorio.

II EL INSTRUMENTO

El péndulo de torsión de vibración libre comenzó a diseñarse como un instrumento hecho en casa, utilizando los accesorios disponibles en el laboratorio estándar de suelos. La idea es la de someter a una probeta de suelo inalterado a una vibración torsional pura bajo un determinado confinamiento de esfuerzos efectivos. Para lo anterior se usó la cámara triaxial estándar. Un vástago transmite la vibración torsional libre a través de la cabeza de la cámara triaxial y fija la parte superior de la probeta en forma rígida. La probeta también queda fija en la base. Esta acción se considera muy importante para obtener una buena transmisión del momento de torsión libre del movimiento dinámico proporcionado por el brazo B, Fig. 1. Se proporciona un impulso al brazo vibrante, permitiendo que este vibre libremente en respuesta a los elementos elásticos del suelo. El peso del brazo y masas colocadas sobre él son balanceadas por medio de un peso equivalente C, Fig. 1.

La vibración inducida se registra en una mesa registradora E, sobre la cual pasa una cinta de papel con cierta velocidad compatible con el rango de períodos de vibración esperados como respuesta de la probeta del suelo, ver fotografías Nos. 1, 2, 3 y 4. A un lado del papel registrador un marcador de tiempo registra la velocidad del papel que pasa sobre la mesa. Este registro es importante para calcular con precisión el tiempo de la vibración. Los registros obtenidos para diferentes tipos de suelos se observan como muestra la Fig. 2, de donde se puede obtener la

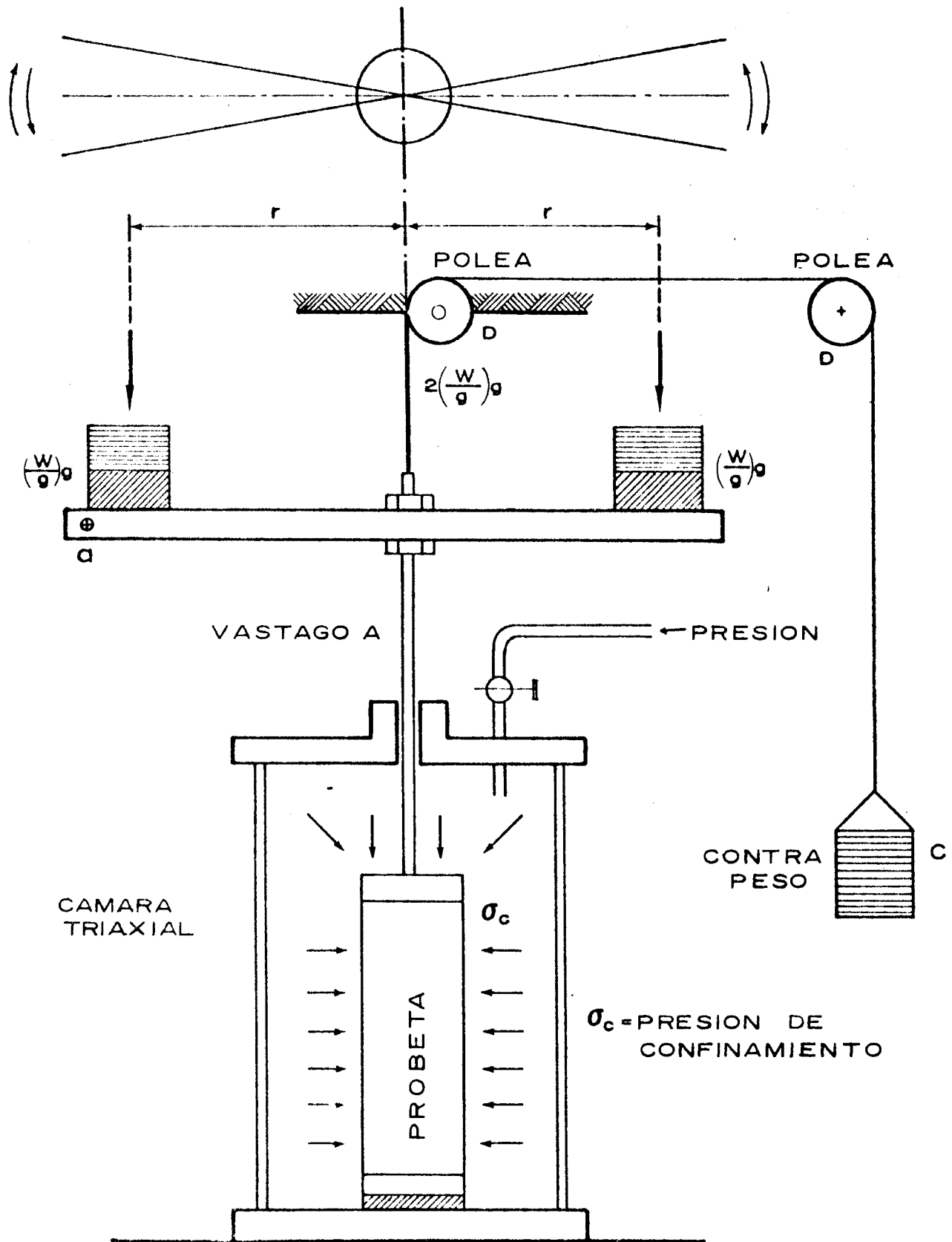
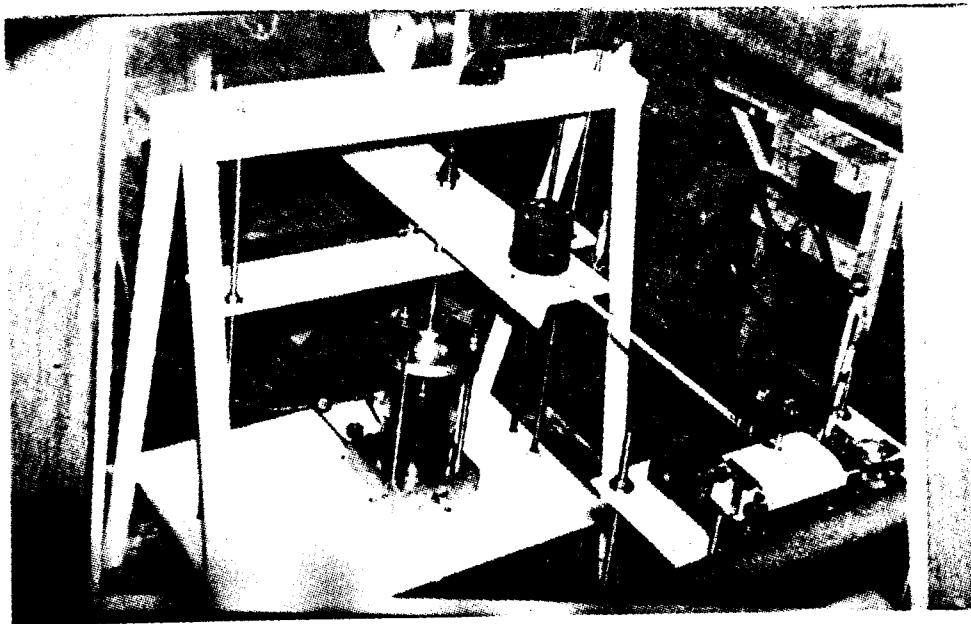
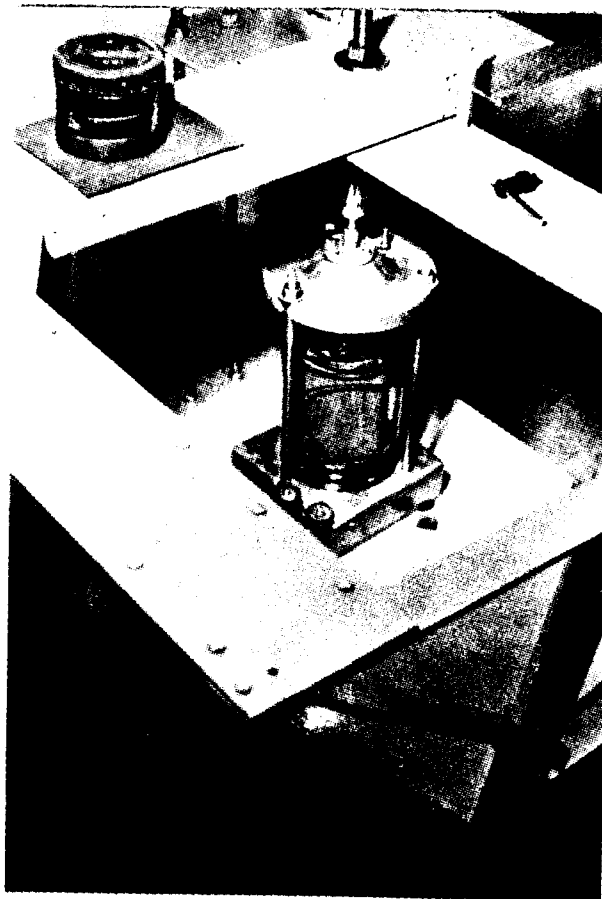


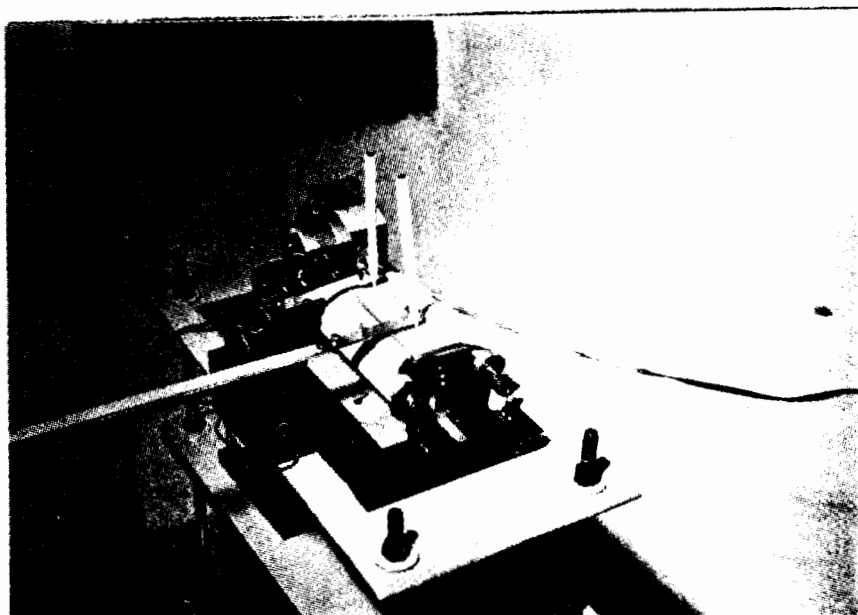
FIG.-I PENDULO DE TORSION DE VIBRACION LIBRE.



1. PENDULO DE TORSION LIBRE



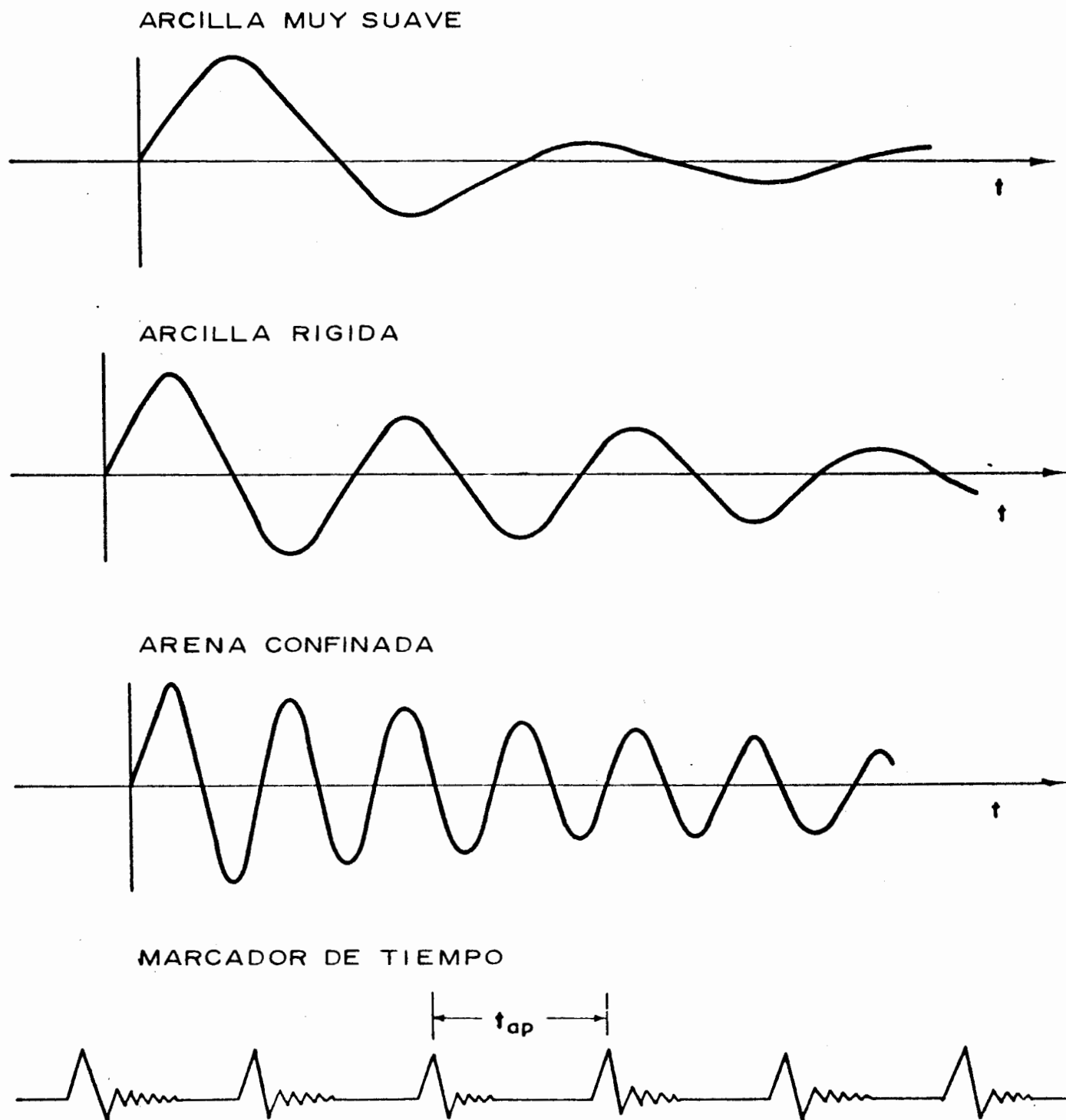
2. CAMARA TRIAXIAL



3. MESA REGISTRADORA



4. CABEZAS FIJADORAS DE LA PROBETA



CONFIGURACION DE LOS RECORDS

FIG.-2

amplitud, período y decremento logarítmico de la vibración libre amortiguada del sistema formado por el instrumento y la probeta del suelo.

III CONSIDERACIONES TEORICAS

Para ilustrar la teoría del instrumento consideremos primero un movimiento armónico simple, Fig. 3a. Llamemos M la masa del sistema y θ el ángulo de torsión del brazo donde la masa M está soportada. Para obtener equilibrio dinámico de la vibración libre establecemos la siguiente condición

$$J_s \ddot{\theta} + K_s \theta = 0 \quad (1)$$

Aquí $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular, J_s el momento de inercia de las masas del sistema y K_s la rigidez torsional del sistema. Para el movimiento armónico simple.

$$\theta = \theta_s \text{ sen } \omega_s t \quad (2)$$

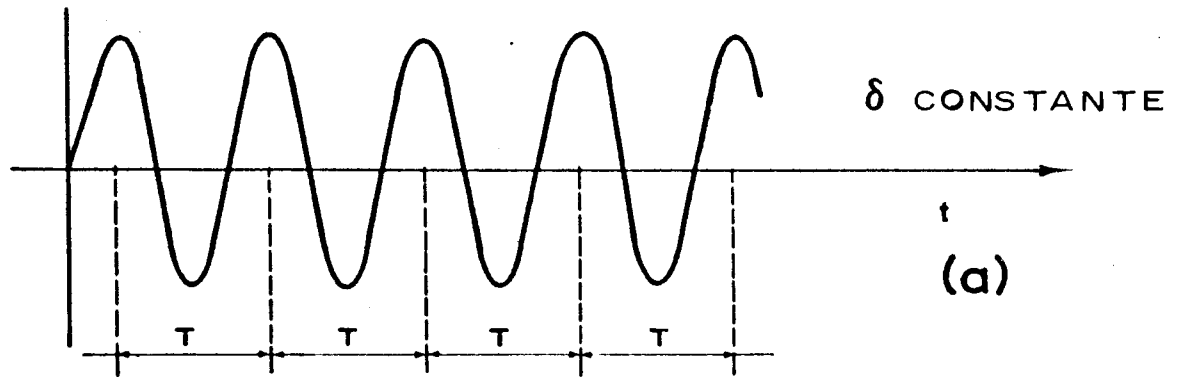
en donde θ_s es la amplitud del movimiento y ω_s es la frecuencia circular libre: $\omega_s = 2\pi/T_s$. Sustituyendo (2) en (1) y cancelando términos iguales obtenemos la frecuencia circular ω_s del sistema

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{J_s}} \quad (3)$$

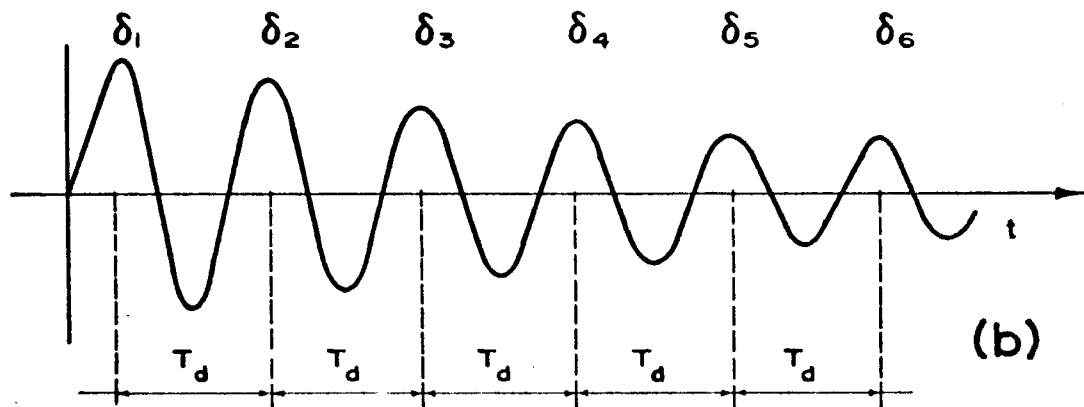
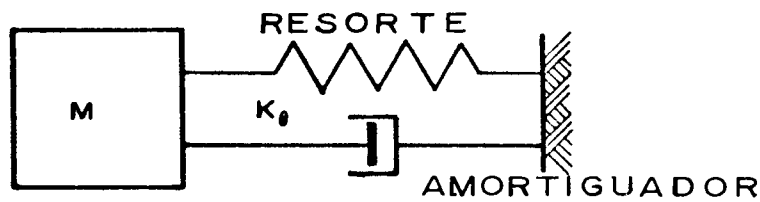
y consecuentemente el período, $T_s = 2\pi/\omega_s$

El movimiento, sin embargo, no es armónico simple, ya que el sis-

VIBRACION ARMONICA SIMPLE $\zeta = 0$



VIBRACION AMORTIGUADA $\zeta < 1$



SUBSIDENCIA $\zeta = 1$ (SIN VIBRACION)

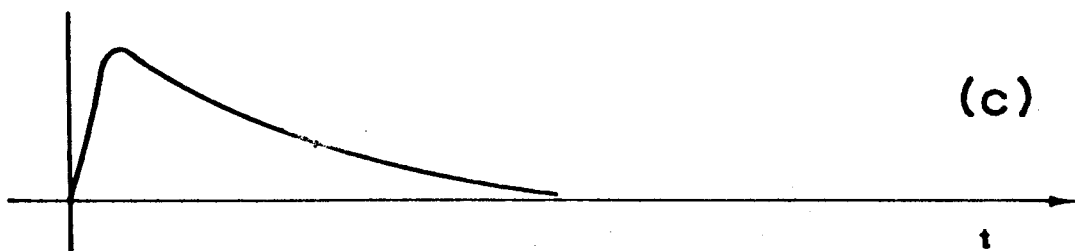


FIG.- 3

tema absorbe energía. Consideremos Fig. 3b que la energía del movimiento es absorbida por un elemento Newtoniano equivalente a un amortiguador.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \phi \cdot P \quad (4)$$

Aquí ϕ representa un parámetro del sistema que absorbe la energía cinética. Por lo tanto, la fuerza amortiguadora será $\frac{1}{\phi} \frac{\partial \theta}{\partial t}$.

Llamemos $1/\phi = C$, una constante que representa el amortiguamiento. Introduciendo esta fuerza amortiguadora en la ecuación de equilibrio dinámico de la vibración amortiguada libre

$$J_s \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + K_s \cdot \theta = 0 \quad (5)$$

La solución de esta ecuación diferencial es una función del valor C , dependiendo de que este valor sea mayor o menor que el amortiguamiento crítico⁽⁵⁾

$$C_c = 2 \sqrt{K_s J_s} \quad \text{o} \quad C_c = 2 J_s \omega_s \quad (6)$$

La relación $C/C_s = \zeta_s$ se define como una fracción del amortiguamiento crítico o bien relación de amortiguamiento. El valor real que representa la vibración libre amortiguada se obtiene para $\zeta \leq 1$. Cuando $\zeta = 1$ no se produce vibración, lo que implica que la distorsión ocasionada al sistema regresa a su posición original sin vibración, Fig. 3c.

Cuando $\zeta \leq 1$ la ecuación diferencial (5) se satisface por:

$$\theta = Ae^{-\zeta_s \omega_s t} (\cos \omega_{sd} \cdot t) \quad (7)$$

Aquí, la frecuencia circular amortiguada del sistema tiene el valor:

$$\omega_{sd}^2 = \omega_s^2 (1 - \zeta_s^2) \quad (8)$$

Nosotros podemos reconocer de (7) que la amplitud máxima del movimiento es

$$\theta_s = Ae^{-\zeta_s \omega_s (n T_{sd})} \quad (9)$$

en donde $(n T_{sd})$ es el tiempo correspondiente a la enésima cresta del movimiento. Considerando dos vibraciones sucesivas obtenemos:

$$\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{e^{-\zeta_s \omega_s (n T_{sd})}}{e^{-\zeta_s \omega_s (n+1) T_{sd}}} = e^{\zeta_s \omega_s T_{sd}}$$

pero de la (8) $T_{sd}/T_s = 1/\sqrt{1-\zeta_s^2}$

encontramos
$$\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = e^{\frac{2\pi\zeta_s}{\sqrt{1-\zeta_s^2}}} \quad (10)$$

De la (10) obtenemos:

$$\text{Log } \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{2\pi\zeta_s}{\sqrt{1-\zeta_s^2}} = \Delta \quad (11)$$

El valor Δ se conoce como el decremento logarítmico y puede determinarse de amplitudes sucesivas de la vibración amortiguada,

Fig. 3b. Conociendo el valor de Δ calculamos la relación de amortiguamiento del sistema

$$\zeta_s^2 = \frac{\Delta^2}{(2\pi)^2 + \Delta^2} \quad (12)$$

La teoría de acuerdo con la figura 1, se basa en la respuesta del sistema vibrante formado por la probeta del suelo y el instrumento. Llamemos K_p y K_a las constantes dinámicas de resorte de la probeta e instrumento respectivamente y K_s la del sistema. El impulso de momento dado al brazo es:

$$M_s = F \cdot \lambda = K_s \theta_s \quad (13)$$

también

$$F \cdot \lambda = K_p \theta_p \quad \text{y} \quad F \cdot \lambda = K_a \theta_a \quad (14)$$

La amplitud de la rotación del brazo registrador es $\theta_s = \theta_p + \theta_a$ de (14) encontramos

$$\theta_s = \frac{K_p + K_a}{K_p \cdot K_a} \cdot F \cdot \lambda \quad (15)$$

y usando (13) obtenemos:

$$K_s = \frac{K_p \cdot K_a}{K_p + K_a} \quad (16)$$

La aceleración circular del sistema está dada por $\ddot{\theta}_s = \theta_s \omega_s^2$ en donde ω_s es la frecuencia circular del sistema probeta-instrumento. Correspondientemente, el momento dinámico máximo puede ser expresado como sigue:

$$M_s = \theta_s \omega_s^2 \Sigma mr^2 \quad (17)$$

El valor $\Sigma mr^2 = J_s$ representa el momento polar de inercia de todas las masas oscilantes del instrumento y la probeta respectivamente, por lo tanto

$$\omega_s^2 = \frac{K_s}{J_s} \quad (18)$$

El valor ω_s se mide en la prueba.

El módulo de elasticidad al esfuerzo cortante o rigidez del suelo puede obtenerse de la teoría de elasticidad

$$\mu = \frac{M_s \cdot h}{\theta_p \cdot I_p} \quad (19)$$

El momento polar de inercia de la probeta es: $I_p = \pi D^4/32$, en donde h es la altura de la probeta, y D el diámetro. De donde la constante de resorte de la muestra es como sigue:

$$K_p = \frac{I_p}{h} \cdot \mu \quad (20)$$

Llamemos $I_p/h = C_p$ un parámetro función de la geometría de la probeta. De la calibración del instrumento, se obtienen los valores de ω_a y J_a .

Las constantes de resorte torsionales e individuales de considerar son las siguientes:

Probeta $K_p = C_p \mu$

$$\text{Instrumento} \quad K_a = J_a \omega_a^2 \quad (21)$$

$$\text{Probeta-instrumento} \quad K_s = J_s \omega_s^2$$

Sustituyendo estos valores en (16) y resolviendo para la rigidez dinámica del suelo μ obtenemos:

$$\mu = \frac{\omega_s^2 \cdot \omega_a^2}{\omega_a^2 J_a - \omega_s^2 J_s} \cdot \frac{J_a \cdot J_s}{C_p} \quad (22)$$

El momento polar de inercia de las masas de la probeta es muy pequeño comparado con las del instrumento, por tanto, $J_a = J_s$ y de (22) podemos escribir como sigue:

$$\mu = \frac{\omega_s^2}{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_a^2}} \cdot \frac{J_a}{C_p} \quad (23)$$

Además, llamemos $J_a/C_p = G$, también $G = J_a h/I_p$. El valor G es una constante representativa de las propiedades físicas del instrumento.

Durante la prueba, sin embargo, obtendremos la frecuencia circular libre amortiguada del sistema ω_{sd} , así también de la calibración se obtiene la frecuencia circular amortiguada ω_{ad} . Estos valores quedan relacionados con sus frecuencias no amortiguadas como sigue:

$$\begin{aligned} \omega_{sd}^2 &= \omega_s^2 (1 - \zeta_s^2) \\ \omega_{ad}^2 &= \omega_a^2 (1 - \zeta_a^2) \end{aligned} \quad (24)$$

En estas expresiones ζ_s y ζ_a representan las relaciones de amortiguamiento del sistema probeta-instrumento y la del instrumento respectivamente, se obtienen de los registros como los mostrados en la Fig. 2. Sustituyendo los valores dados por la (24) en la expresión (23) obtenemos finalmente

$$\mu = \frac{\omega_{sd}^2 \cdot G}{(1 - \zeta_s^2) - (1 - \zeta_a^2) (\omega_{sd}/\omega_{ad})^2} \quad (25)$$

Otra propiedad del suelo importante necesaria para el cálculo en problemas de dinámica de suelos, es la relación de amortiguamiento del suelo ζ_p . Esta propiedad se obtiene de la prueba. Examinando la vibración acoplada del sistema, obtenemos el momento máximo

$$M_s = (\theta_a + \theta_p) \omega_s^2 \cdot J_s \quad (26)$$

pero $M_s = K_s \theta_s$, luego podemos escribir

$$\frac{1}{\omega_s^2} = \frac{\theta_a J_s}{\theta_s K_s} + \frac{\theta_p \cdot J_s}{\theta_s K_s} \quad (27)$$

y considerando $J_s = J_a$, y de la (14) también

$$K_s \theta_s = K_a \theta_a = K_p \cdot \theta_p$$

De la (27)

$$\frac{1}{\omega_s^2} = \frac{J_a}{K_a} + \frac{J_a}{K_p} \quad (28)$$

en donde

$$\frac{K_a}{J_a} = \omega_a^2 \quad \text{es la frecuencia circular del instrumento}$$

como si $K_p = \infty$.

$$\frac{K_p}{J_a} = \omega_p^2 \quad \text{es la frecuencia circular de la probeta}$$

como si $K_a = \infty$.

De las consideraciones anteriores:

$$\frac{1}{\omega_p^2} = \frac{1}{\omega_s^2} - \frac{1}{\omega_a^2} \quad (29)$$

En la prueba obtenemos las frecuencias circulares amortiguadas (24) de donde también

$$\frac{1}{\omega_{pd}^2} = \frac{1}{\omega_{sd}^2} + \frac{1}{\omega_{ad}^2} \quad (30)$$

Combinando las expresiones (29) y (30) y solucionando para la relación de amortiguamiento del suelo ζ_p obtenemos

$$\zeta_p^2 = \frac{\zeta_s^2 - \zeta_a^2 (\omega_{sd}/\omega_{ad})^2}{1 + (\omega_{sd}/\omega_{ad})^2} \quad (31)$$

Si el instrumento tiene una frecuencia circular muy alta entonces $\zeta_p \rightarrow \zeta_s$.

Sin embargo, se sabe que para cierta distorsión angular inicial γ_p proporcionada a la probeta se obtiene un valor de μ y ζ_p , para cada esfuerzo de confinamiento σ_c . El esfuerzo cortante máximo

en la probeta de radio $D/2$ es

$$\tau = \frac{(F \cdot \lambda)}{I_p} \frac{D}{2} \quad (32)$$

Por otro lado $\gamma_p = \tau/\mu$, por lo tanto

$$\gamma_p = \frac{D}{2I_p \mu} (F \cdot \lambda) \quad (33)$$

Aquí λ es la distancia al centro de rotación del punto donde se aplica el impulso F , Fig. 4. El impulso de momento es

$(F \cdot \lambda) = \theta_s K_s$ pero $K_s = \omega_s^2 J_a$ y $\theta_s = \delta_s/\ell$, por lo tanto sustituyendo estos valores en (33) obtenemos

$$\gamma_p = \frac{DJ_a}{2I_p \mu} \frac{\omega_s^2 \delta_s}{\ell}$$

Considerando que $I_p = \pi D^4/32$ y $\omega_s^2 = \omega_{sd}^2/(1 - \zeta_s^2)$ se obtiene finalmente

$$\gamma_p = \frac{16J_a}{\pi D^3 \ell} \frac{\omega_{sd}^2}{(1 - \zeta_s^2)} \frac{\delta_s}{\mu} \quad (34)$$

Los valores de ω_{sd} , μ y δ_s se obtienen de la prueba. El valor de δ_s se mide para la primera ordenada de la respuesta después de aplicar el impulso de momento $(F \cdot \lambda)$ para omitir cualquier distorsión plástica que se presente en el impulso registrado en la ordenada δ_0 Fig. 6.

IV USO DEL INSTRUMENTO

La calibración del instrumento se efectúa por medio de un cilindro de acero de aproximadamente las mismas dimensiones que las probetas del suelo. Los parámetros por determinar son: la frecuencia circular ω_{ad} o período $T_{ad} = \frac{2\pi}{\omega_{ad}}$, la relación de amortiguamiento ζ_a y la constante dinámica de resorte K_a debido a la distorsión θ_a del instrumento. Estas constantes del instrumento sin embargo, cambian con las masas colocadas sobre el brazo vibrante B, Fig. 1. La distorsión de la probeta de acero puede despreciarse.

La constante rotacional K_a se define por:

$$K_a = \frac{(F \lambda)}{\theta_a}$$

pero de la (21) $K_a = J_a \omega_a^2$ se obtiene:

$$J_a \omega_a^2 = \frac{F \lambda}{\theta_a}$$

La amplitud angular es $\theta_a = \delta_a / \ell$, por lo tanto en la mesa registradora

$$\delta_a = \frac{\ell}{J_a \omega_a^2} (F \lambda)$$

De la definición de constante de resorte dinámica lineal del instrumento $F/\delta_a = k_a$, se obtiene

$$k_a = \frac{J_a \omega_a^2}{\lambda \cdot \ell} \quad (35)$$

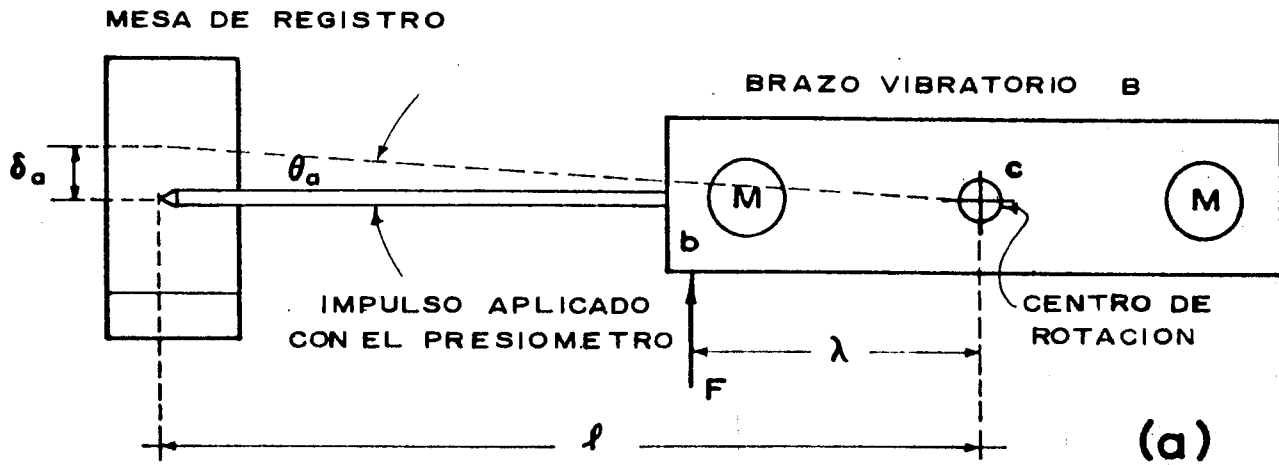
Se coloca la probeta de acero en el instrumento y se induce una rotación con un presiómetro en el punto b, sobre el brazo vibrador B en un rango de 5 a 15 mm medidos en la mesa registradora. La constante de resorte dinámica k_a se relaciona con el número de masas y se presenta gráficamente como muestra la Fig. 4. Con la constante de resorte k_a y conociendo δ_a podremos determinar la fuerza dinámica F aplicada en el punto b.

Cuando se efectúa la prueba en la probeta del suelo la deflexión δ_s en la mesa registradora corresponde a la suma de las distorsiones del suelo e instrumento respectivamente. La deflexión lineal en la mesa registradora debido a la distorsión de la probeta de suelo al aplicar el impulso es $\delta_p = \delta_s - \delta_a$ y la rotación θ_p en la cabeza de la probeta es $\theta_p = \delta_p / \ell$, Fig. 5.

Por lo tanto, la distorsión angular por esfuerzo cortante en la probeta es

$$\gamma_p = \frac{1}{2} \frac{D}{h} \frac{\delta_p}{\ell} \quad (36)$$

De la calibración como se explica arriba se selecciona, para un comportamiento óptimo, el número de masas para el cual se obtiene el mínimo de la relación de amortiguamiento del instrumento.



CONSTANTE DEL RESORTE DEL INSTRUMENTO

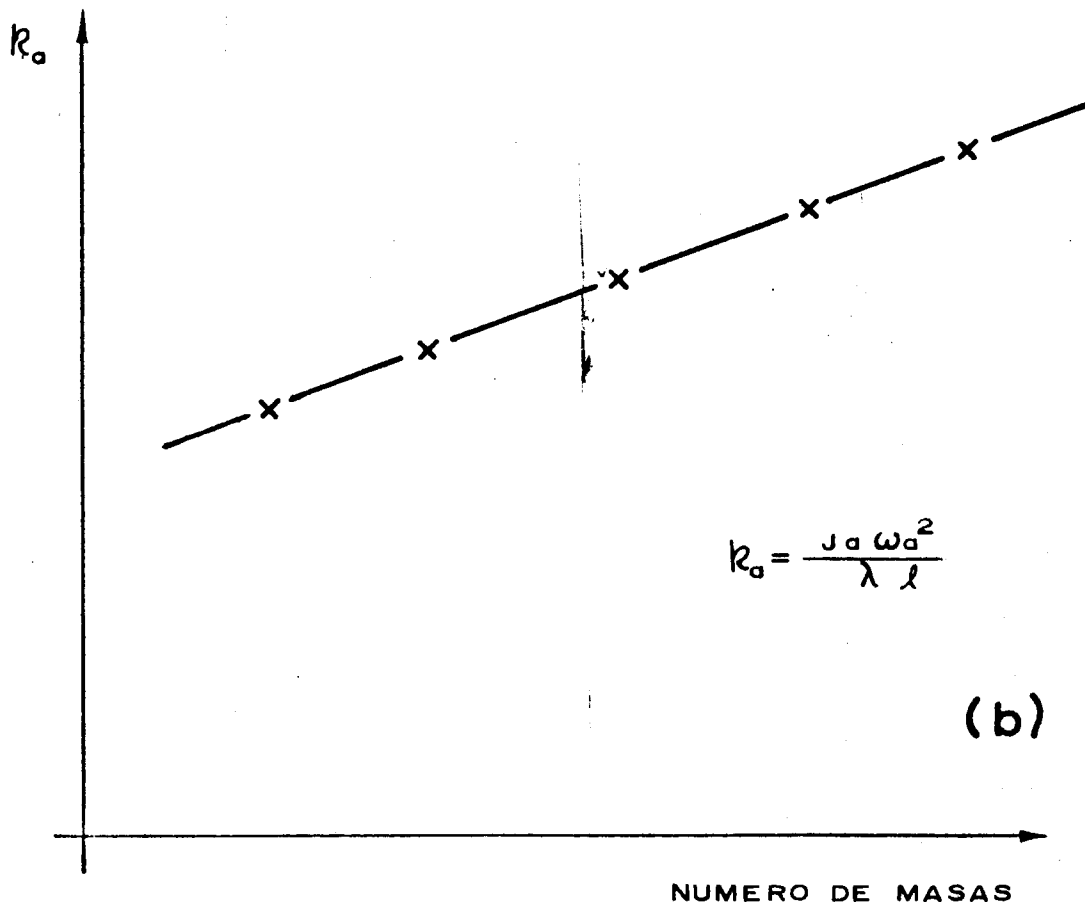


FIG.- 4

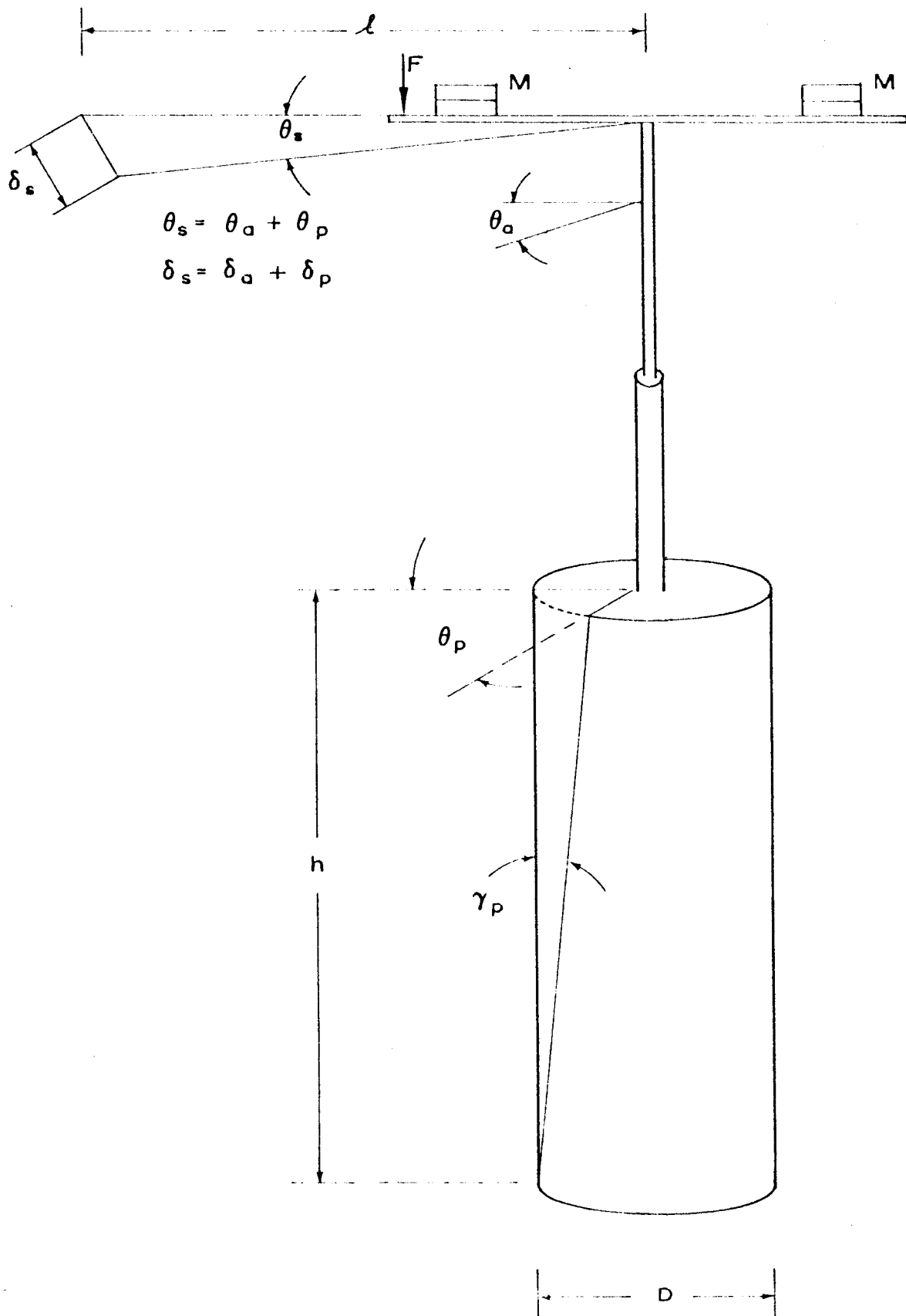


FIG. - 5

Supongamos que efectuamos una prueba con N masas. De acuerdo a la Fig. 6 obtenemos la siguiente información:

- a) L_p , longitud de N_p pulsos
- b) N_p , número de pulsos
- c) t_{ap} , período de reloj marcador
- d) L_p/N_p , longitud de un pulso
- e) $L_p/(N_p \cdot t_{ap})$, velocidad del papel registrador
- f) L_M , longitud de N_M ondas
- g) N_M , número de ondas
- h) $L_M/(N_M \cdot T_{sd})$, velocidad del papel registrador

El período medio de N_M ondas

$$T_{sd} = \frac{L_M}{N_M} / \text{velocidad de papel}$$

o bien

$$T_{sd} = \frac{L_M}{L_p} \frac{N_p}{N_M} \cdot t_{ap}$$

El decremento logarítmico según la (11) es

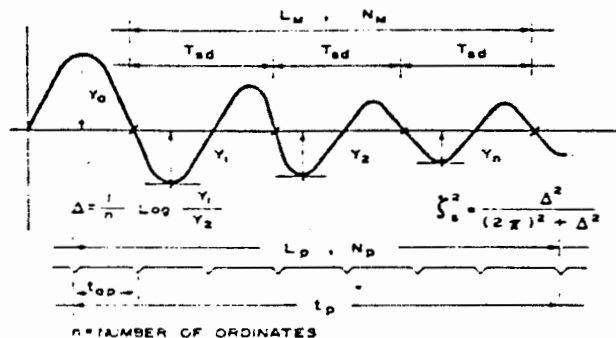
$$\Delta = \text{Log} \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}}$$

Para el primer ciclo $\Delta_1 = \text{Log} \frac{\delta_1}{\delta_2}$

ZEEVAERT, FREE TORSION VIBRATION PENDULUM

DYNAMIC SOIL RIGIDITY, SHEARING STRAIN, DAMPING RATIO, AND ERROR.

PROJECT:
DATE:



N_m , NUMBER OF PERIODS T_{sd} IN LENGTH L_m
 L_m , LENGTH OF N_m PERIODS OF VIBRATION
 t_{dp} , TIMER PERIOD, (INSTRUMENT CONSTANT)
 N_p , NUMBER OF CYCLES OF THE TIMER IN THE RECORDING LENGTH
 L_p , LENGTH OF CYCLES IN THE VIBRATION RECORD
 (VARIES WITH THE THICKNESS OF THE PAPEL ROLL REGISTER)

VELOCITY OF PAPER:

$$\frac{L_p}{N_p t_{dp}} = \frac{L_m}{N_m T_{sd}} \therefore T_{sd} = \frac{L_m}{L_p} \cdot \frac{N_p}{N_m} t_{dp}$$

t_{dp} = PERIOD OF TIMER

CALIBRATION CONSTANTS
INSTRUMENT N°

$\lambda =$ $l =$

MASSSES	T_{sd}	ζ_0	J_0	γ_0
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

PROBABLE ERROR.

$$\% \frac{\Delta \mu}{\mu} = \frac{200}{1 - \left(\frac{T_{sd}}{T_{sd}}\right)^2} \cdot \frac{\Delta T_{sd}}{T_{sd}}$$

SOIL SHEARING STRAIN

$$\gamma_0 = F / k_0$$

$$k_0 = \frac{J_0 \omega_0^2}{\lambda l} = \frac{(2\pi)^2 J_0}{\lambda l T_{sd}^2}$$

$$\gamma_{dp} = \left(\frac{64 J_0 \pi}{D^3 l} \right) \frac{Y_1}{T_{sd}^2 \mu}$$

γ_{dp} = MAXIMUM SHEARING STRAIN OF THE SPECIMEN

λ = ARM TO F APPLICATION

SOIL DAMPING RATIO

$$\zeta_p = \left(\frac{\zeta_0^2 - \zeta_0^2 T_{sd}^2 / T_{sd}^2}{1 - T_{sd}^2 / T_{sd}^2} \right)^{1/2}$$

ζ_0 , T_{sd} vs N MASSES OBTAINED FROM CALIBRATION

DYNAMIC SOIL RIGIDITY

$$\mu = \frac{(2\pi)^2 G}{(1 - \zeta_0^2) T_{sd}^2 - (1 - \zeta_0^2) T_{sd}^2}$$

J_0 = MASSES MOMENT OF INERTIA

D = DIAMETER SPECIMEN

h = HEIGHT OF SPECIMEN

$$G = \frac{32 J_0}{\pi D^4} h \quad (2\pi)^2 G = 402.124 \frac{J_0 h}{D^4}$$

SAMPLE _____				DEPTH : _____		OVERBURDEN EFFECTIVE STRESS : σ_0 _____										CRITICAL STRESS : σ_b _____					APROX CONSISTENCY : q_u _____									
1	2	3	4	5		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
TEST	SSN	σ_c	RUN	DESCRIPTION OF		W	%S	q_u	MASS	t_{ap}	t_{ad}	ζ_0	J_0	h	D	L_w	N_w	L_p	N_p	Y_1	Y_n	n	T_{sd}	ζ_s	μ	γ_p	ζ_p	$\% \frac{\Delta \mu}{\mu}$	μ/q_u	
N°	PLCT	kg/cm ²	N°	ESPECIMEN		%	%	kg/cm ²	N°	SEC.	SEC.	10 ⁻²	kg. cm. mm ²	cm.	cm.	cm.	N°	cm.	N°	cm.	cm.	N°	SEC	10 ⁻²	kg/cm ²	10 ⁻³	10 ⁻²	%	-	

FIG. - 6

para el segundo ciclo $\Delta_2 = \text{Log } \frac{\delta_2}{\delta_3}$

en el ciclo enésimo $\Delta_n = \text{Log } \frac{\delta_{n-1}}{\delta_n}$

y para (n-1) ciclos

$$\Delta = \frac{1}{(n-1)} \text{Log } \frac{\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_{n-1}}{\delta_2 \cdot \delta_3 \cdot \dots \cdot \delta_{n-1} \cdot \delta_n}$$

de donde

$$\Delta = \frac{1}{(n-1)} \text{Log } \frac{\delta_1}{\delta_n} \quad (37)$$

De (37) la relación de amortiguamiento puede obtenerse usando la expresión (12), y la distorsión angular por cortante de la probeta con la expresión (34).

V. PROGRAMANDO UNA PRUEBA

Cuando efectuamos una prueba en el péndulo de torsión de vibración libre se debe estimar la magnitud de las deflexiones que deban darse en la mesa registradora. La idea es de esforzar la probeta de suelo durante el impulso en el rango cuasi-elástico. Por tanto, el esfuerzo cortante en el perímetro de la probeta no debe de ser mayor que 1/2 de la resistencia última al esfuerzo cortante, supongamos que efectuamos una prueba en una probeta de arcilla con una consistencia natural q_u , consecuentemente el esfuerzo cortante deberá de ser $\tau \leq \frac{1}{4} q_u$. Por lo tan to: $\frac{1}{4} q_u = \frac{16}{\pi D^3} \cdot (F\lambda)$, de donde $F = \frac{\pi D^3}{64\lambda} q_u$.

La distorsión por cortante es $\gamma = \tau/\mu$. La rotación θ_p en la cabeza del espécimen del suelo es $\theta_p = \frac{2h}{D} \cdot \gamma_p$ y en la mesa registradora

$$\delta_p \leq \frac{1}{2} \frac{q_u}{\mu} \frac{h \cdot \ell}{D} \quad (38)$$

El impulso F debido a la distorsión del instrumento es $F = k_a \delta_a$.

En la mesa registradora

$$\delta_s = \delta_a + \delta_p \quad (39)$$

Generalmente δ_a está comprendida entre 5 a 15mm en la mesa registradora. Estimando δ_p y δ_a el rango del valor de δ_s puede calcularse para proceder con la prueba.

En suma el procedimiento para la prueba es el siguiente:

- 1) Estimar q_u con un penetrómetro de bolsillo
- 2) De experiencia previa sobre μ vs q_u estimar el valor de q_u/μ
- 3) Calcular aproximadamente el rango de las deflexiones que deban darse en la mesa registradora: $\delta_s < \delta_a + \delta_p$, calculando $F = \frac{\pi D^3}{64\lambda} q_u$ y $\delta_a = F/k_a$ también $\delta_p = \frac{1}{2} \left(\frac{q_u}{\mu} \right) \frac{h\ell}{D}$
- 4) Determinar el esfuerzo de confinamiento medio en el suelo a la profundidad de donde fue obtenida la muestra de suelo inalterada

$$\sigma_{oc} = \frac{1}{3} (1 + 2K_o) \sigma_o$$

en donde σ_o , es el esfuerzo efectivo vertical existente.

Para una arcilla normalmente consolidada tomar $K_o = 0.75$,

de donde $\sigma_{oc} = 0.83 \cdot \sigma_o$. Usar presiones confinantes iguales

o menores que el valor arriba indicado.

Usar cuando menos cuatro presiones de confinamiento diferentes. Ver Ref (1) Capítulo II, págs. 52-56.

- 5) Permitir que el exceso de presión de poro en el agua de la probeta se disipe completamente antes de efectuar la prueba de vibración. Verificar ésto con un aparato de presión de poro. La prueba deberá de efectuarse con esfuerzos efectivos.
- 6) Para cada presión confinante efectuar cuando menos cinco corridas con diferentes deflexiones máximas δ_s sobre la mesa registradora: $\delta_s, 2\delta_s, 3\delta_s, 4\delta_s, 5\delta_s$.
- 7) Después de la prueba determinar la consistencia natural q_u de la probeta, el contenido de agua w y el grado de saturación $\% S$. Para este propósito se corta la probeta al ras de las cabezas del instrumento arriba y abajo.
- 8) De la calibración del instrumento se obtiene lo siguiente;
Fig 6
 - a) J_a , vs número de masas
 - b) ω_a , vs número de masas
 - c) ζ_a , vs número de masas
 - d) k_a , vs número de masas, Fig 4b.
 - e) t_{ap} , período del reloj marcador
- 9) De la prueba, con N masas y cierta presión de confinamiento σ_c se obtiene la siguiente información:

- a) T_{sd} , período amortiguado del sistema
- b) ζ_s , relación de amortiguamiento del sistema
- c) γ_p , distorsión unitaria máxima al cortante de la probeta del suelo
- d) $q_u, w, \%S$, después de efectuar la prueba.

De la información citada arriba se calcula

- a) La rigidez dinámica del suelo para cada σ_c y distorsión unitaria γ_p

$$\mu = \frac{(2\pi)^2 G}{(1-\zeta_s^2) T_{sd}^2 - (1-\zeta_a^2) T_{ad}^2}$$

en donde

$$G = \frac{32}{\pi} \frac{J_a}{D^4} \cdot h$$

- b) La relación de amortiguamiento del suelo para cada σ_c y γ_p

$$\zeta_p^2 = \frac{\zeta_s^2 - \zeta_a^2 \left(\frac{T_{ad}}{T_{sd}}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_{ad}}{T_{sd}}\right)^2}$$

- c) La distorsión unitaria máxima por cortante para cada σ_c

$$\gamma_p = \frac{16J_a}{\pi D^3 \ell} \frac{\omega_s^2 \delta_s}{\mu}$$

- 10) La preparación y montaje de probetas de arcilla no representa problemas especiales mayores que la técnica usual usada en la prueba triaxial ortodoxa. Sin embargo, en caso de un suelo no cohesivo se podrán encontrar problemas en la formación de una probeta uniforme con la densidad requerida. Se deberá considerar sin embargo, que en la naturaleza la arena pocas veces se encuentra sin cohesión, aún más es difícil obtener buenas muestras inalteradas de arena suelta en el campo, en las mejores condiciones se podrá determinar la densidad *in situ*. Por consiguiente, se está obligado a efectuar pruebas con diferentes compactaciones desde el estado suelto hasta el compacto e interpolar los resultados a la densidad determinada *in situ*.

VI. INTERPRETACION DE RESULTADOS

La rigidez del suelo μ para una muestra de suelo específica, se encuentra que crece con el esfuerzo de confinamiento. Por otro lado, para cierta presión de confinamiento la rigidez del suelo decrece al aumentar la distorsión de la probeta. En la práctica uno está obligado a asignar un valor a la rigidez del suelo y a la relación de amortiguamiento para el valor máximo probable de la distorsión angular que se espera tener en el campo. Podremos mencionar el caso cuando se requiere calcular el desplazamiento de un depósito de suelo apoyado sobre suelo firme ocasionado por ondas de cortante que viajan verticalmente desde la base firme hacia la superficie del depósito. En este

caso la distorsión angular varía de un máximo en la base a prácticamente zero en la superficie. Supongamos que el sedimento es uniforme con la profundidad y que la amplitud de los desplazamientos relativos horizontales pueden ser representados por:

$$U = U_0 \cos \frac{\pi}{2H} \cdot z \quad (40)$$

en donde U_0 es la amplitud del movimiento en la superficie del suelo de donde la distorsión angular es

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -U_0 \frac{\pi}{2H} \sin \frac{\pi}{2H} \cdot z$$

Para dar una idea sobre la magnitud de la distorsión angular supongamos que la amplitud de desplazamiento en la superficie es de $U_0=2.5\text{cm}$, y el espesor del depósito del suelo hasta la base firme es de 1500cm , entonces:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \gamma = (2.62 \times 10^{-3}) \sin \frac{\pi}{3000} \cdot z$$

De donde:

PROFUNDIDAD	DISTORSION ANGULAR
$z \text{ cm}$	$\gamma \times 10^{-3}$
1500	2.620
750	1.850
200	0.544
100	0.274

La rigidez del suelo y la relación de amortiguamiento para obtener buena aproximación en cálculos de dinámica de suelos,

deberá ser determinada para distorsiones angulares en el rango de las amplitudes que se esperan en el lugar. El rango de las distorsiones angulares obtenidas por medio del péndulo de torsión de vibración libre pueden ser estimadas de:

$$\gamma_p = \frac{1}{2} \frac{D}{h\ell} \cdot \delta_p$$

supongamos $D=7.0\text{cm}$, $h=16\text{cm}$, $\ell=90\text{cm}$, entonces $\gamma_p=(2.430 \times 10^{-3}) \delta_p$ de donde, para $\delta_p=0.3$ a 2.0cm , el rango será de 0.740 a 4.830×10^{-3} rad. Por consiguiente, los resultados quedarán dentro del rango de distorsiones angulares de suelos suaves para problemas dinámicos. Sin embargo, para distorsiones angulares menores el brazo B al centro de rotación puede aumentar para obtener mayor precisión, Fig 4a.

Los resultados de la prueba determinados por medio del péndulo de torsión de vibración libre, (FTP) pueden ser graficados como muestran las Figs 7 y 8. El valor de μ puede interpolarse para el esfuerzo de confinamiento medio en el campo $\sigma_c=(1+2K_o)\sigma_o/3$, y para la distorsión angular esperada. La relación de amortiguamiento podrá también ser graficada como muestra la Fig 8, y su valor seleccionado en la misma forma antes descrita.

Sin embargo, desde el punto de vista de ingeniería práctica, en problemas de cimentaciones en dinámica de suelos, se tiene suficiente precisión de la rigidez del suelo μ usándolo solamente como una función del esfuerzo de confinamiento en el rango de la distorsión angular que se espere obtener en el campo.

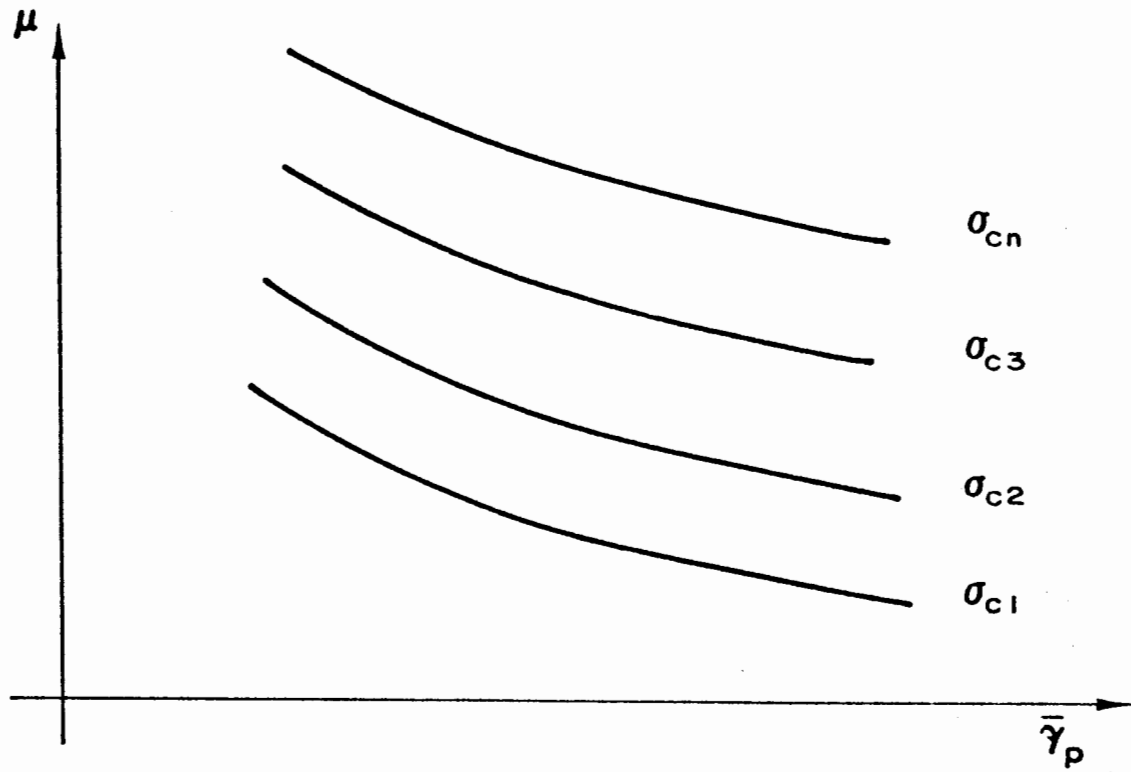


FIG. - 7

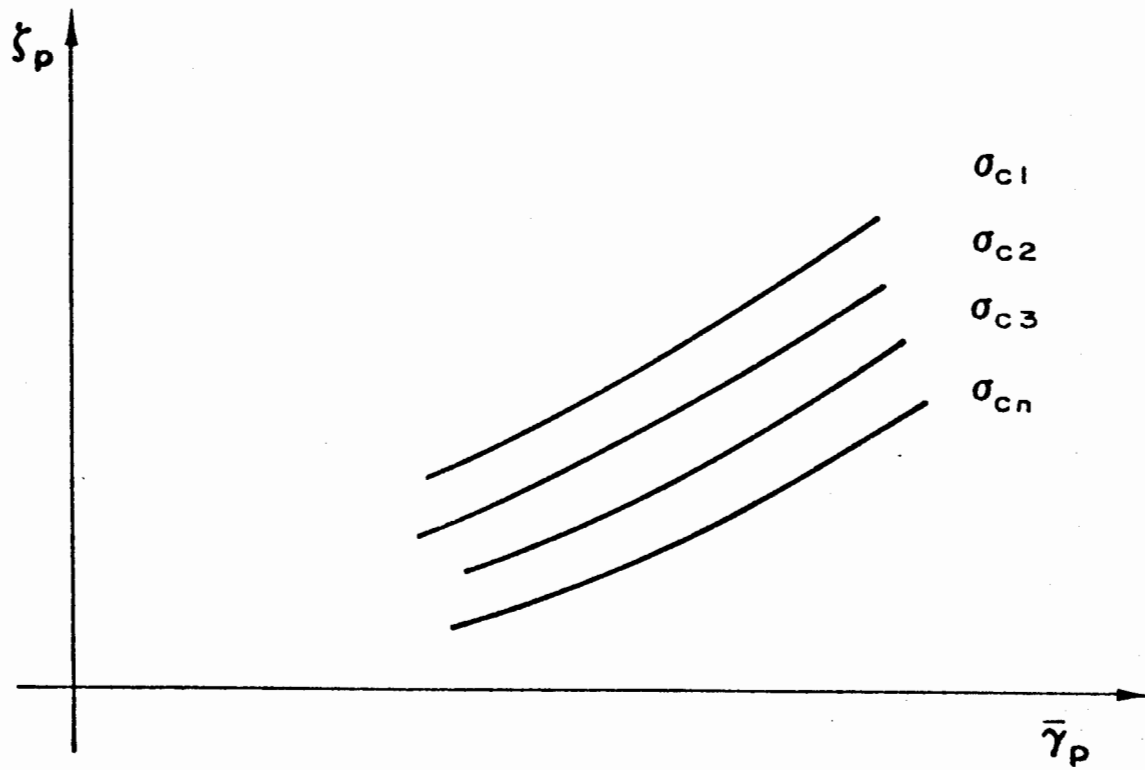


FIG. - 8

Bajo esta hipótesis, se estima la distorsión máxima probable y se calcula por medio de (38) y (39) el desplazamiento inicial que deberá proporcionarse en la prueba sobre la mesa de registro. Seleccionando los esfuerzos de confinamiento se efectúan cinco corridas y se calcula, como se explicó anteriormente, los valores de μ y ζ_p para cada corrida y se toma la media aritmética, Fig 6. Los valores así obtenidos se representan en forma gráfica contra las presiones de confinamiento usadas en la investigación, Figs 9 y 10. Cuando el problema en consideración requiere de un cambio de esfuerzos de confinamiento en el campo, el rango del cambio debe ser previsto, y las presiones de confinamiento en la prueba podrán programarse dentro del rango que se espera.

Se tiene que tomar en consideración, sin embargo, que para obtener resultados confiables en el lugar de la investigación, se deberán procurar las mejores muestras inalteradas. Las probetas de prueba no deberán de ser menores de 7cm de diámetro y 16cm de longitud, la perturbación de la estructura del suelo durante el muestreo y la prueba deberán de ser reducidas a un mínimo, en otra forma los resultados pueden resultar inciertos.

VII. EJEMPLO DE CALCULO (VER FIG 6)

- 1) Sitio: Centro de la ciudad de México
 Profundidad de la muestra No.: 23.0 m
 Descripción: Arcilla limosa volcánica
 Contenido de agua: $W\% = 275\%$

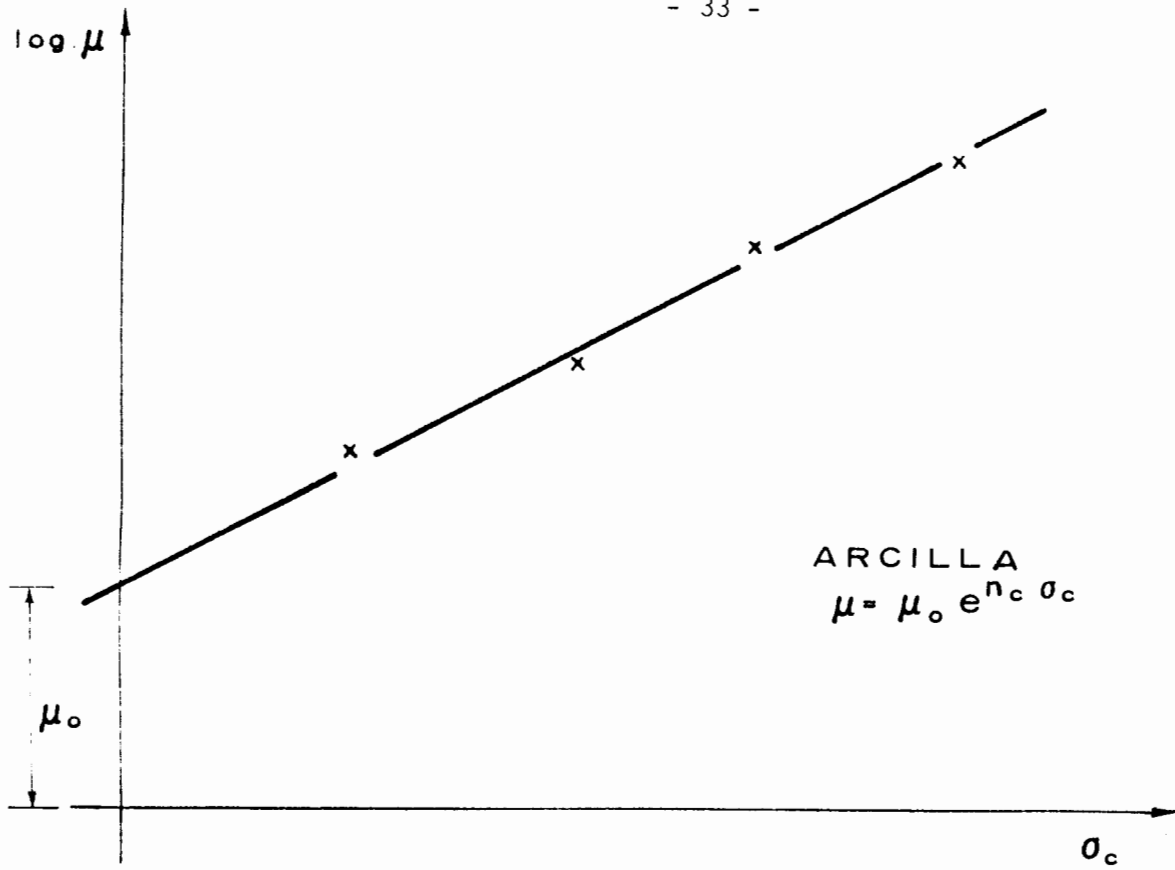


FIG.-9

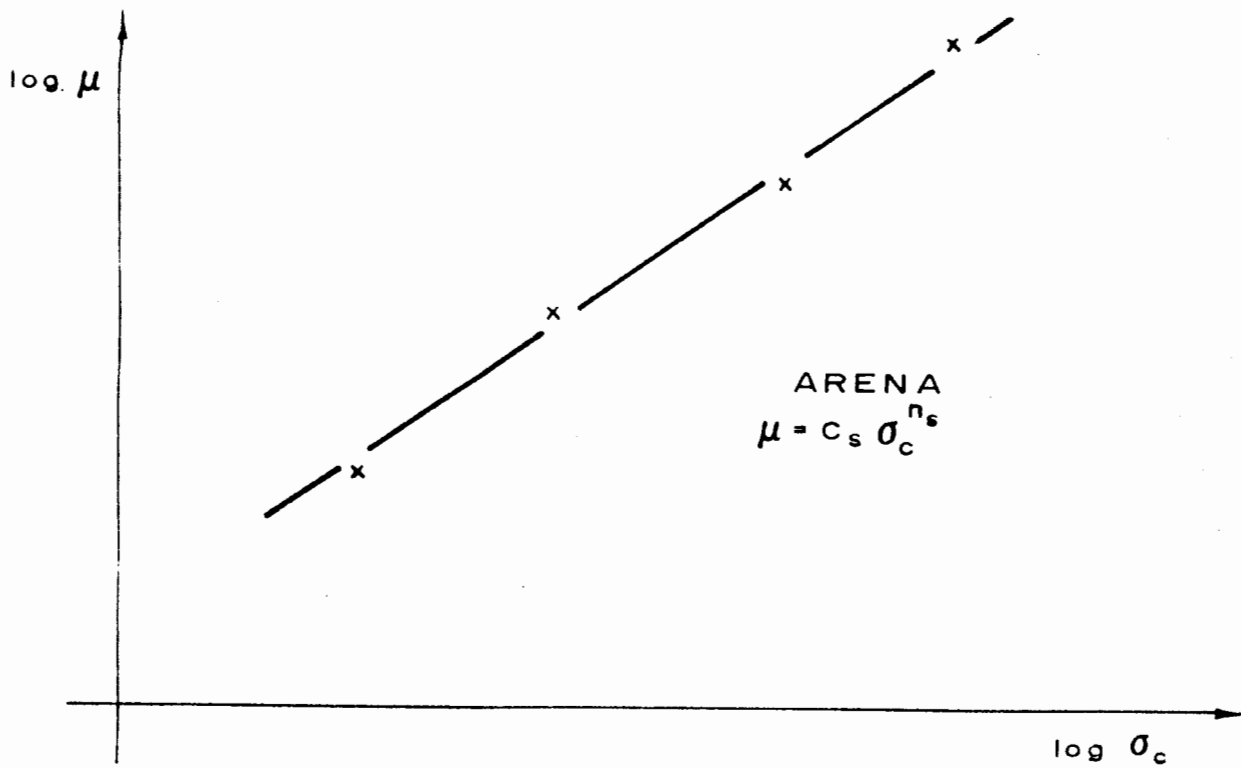


FIG.-10

Grado de saturación % $S=98\%$

Diámetro $D=7.10\text{cm}$

Altura: $h=17.85\text{cm}$

Consistencia natural $q_u=1.31 \text{ K/c}^2$, (estimada con un penotrómetro de bolsillo), y $q_u/\mu=0.025$.

2) Datos de la calibración; para 4 masas

$$T_{ad} = 0.421 \text{ sec}$$

$$\zeta_a = 0.0162$$

$$J_a = 14.443$$

$$t_{ap} = 0.576$$

$$k_a = 1.73 \text{ K/cm}$$

3) Desplazamientos máximos estimados en la mesa registradora

$$F_m = \frac{\pi (7.1)^3}{64.204} 1.31 = 1.13, \delta_a \approx F/k_a = \frac{1.13}{1.73} = 0.65\text{cm}$$

$$\delta_p \approx \frac{1}{2} 0.025 \frac{17.85}{7.10} 91 = 2.85$$

$$\delta_s \approx 3.50\text{cm}, \text{ usar } \delta_s=0.5\text{cm mínimo} \\ \text{a } \delta_s=2.5\text{cm máximo}$$

4) La prueba es efectuada con $\sigma_c=0.8 \text{ K/c}^2$.

Un ejemplo de las vibraciones registradas, datos y resultados se proporcionan en la Tabla 1, Fig 6.

VIII. ERROR PROBABLE

El error aproximado en el cálculo de la rigidez del suelo podrá estimarse considerando la precisión en la medida del valor T_{sd} . El valor asignado de T_{ad} podrá considerarse constante durante la investigación de μ . Lo mismo puede decirse de los otros parámetros del instrumento. Por tanto, de la fórmula (25) para μ y considerando que ζ_s tiene una variación pequeña, obtenemos:

$$\Delta\mu = \frac{-(2\pi)^2 G(1-\zeta_s^2) \cdot 2T_{sd} \cdot \Delta T_{sd}}{\left[(1-\zeta_s^2) T_{sd}^2 - (1-\zeta_a^2) T_{ad}^2 \right]} \quad (42)$$

dividiendo por el valor de μ y arreglando términos

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{2}{1 - \frac{(1-\zeta_a^2) T_{ad}^2}{(1-\zeta_s^2) T_{sd}^2}} \cdot \frac{\Delta T_{sd}}{T_{sd}} \quad (43)$$

o bien

$$\% \frac{\Delta\mu}{\mu} \approx \frac{200}{1 - T_{ad}^2/T_{sd}^2} \cdot \left(\frac{\Delta T_{sd}}{T_{sd}} \right) \quad (44)$$

De la expresión (44) podemos reconocer que el instrumento deberá de ser diseñado para obtener valores pequeños de T_{ad} , con objeto de lograr precisión en los resultados, el valor de T_{sd} cuando se determina con cuidado podrá obtenerse con una precisión del orden de 1.0%.

Finalmente, se puede decir que el péndulo de torsión de vibración libre es un instrumento simple y de fácil operación. Los resultados que se obtienen son suficientemente aproximados para usarse en problemas de cimentación dinámicos en la ingeniería práctica. Una ventaja importante puede reconocerse de inmediato. La prueba de torsión dinámica produce una perturbación muy pequeña en la probeta del suelo, por lo tanto, estando la probeta colocada en la cámara triaxial se podrán determinar las propiedades esfuerzo-deformación del suelo bajo condiciones confinadas y posteriormente la probeta del suelo puede llevarse a la falla para conocer los parámetros de esfuerzo cortante.

IX. EJEMPLO DE CORRELACION CON EL CAMPO

Un problema importante en ingeniería sísmica de cimentaciones es la determinación del modo fundamental de vibración de un depósito de sedimentos suaves. Esta propiedad física se usa en la solución de varios problemas dinámicos de ingeniería de cimentaciones. Con este propósito el valor medio de la rigidez μ debe determinarse para cada estrato del subsuelo por medio de muestras de suelo inalteradas. Con el valor de μ se calcula la velocidad de la onda de cortante $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$. El período fundamental del depósito puede determinarse por medio del método de la velocidad de onda⁽¹⁾

$$T_s = 4 \sum \frac{d_i}{v_{si}}$$

en donde v_{si} es la velocidad de la onda de cortante para un estrato de espesor d_i . Por lo tanto, d_i/v_{si} representa el tiempo que toma la onda de cortante para atravesar el estrato i . De donde la suma de los tiempos para n estratos, desde la superficie del suelo hasta la base firme será $1/4$ del período dominante del depósito de suelo suave.

En la parte central de la Ciudad de México, el autor tuvo la oportunidad de verificar los resultados del período dominante de la masa del suelo calculado por medio del F T P, con el período medido por medio de un acelerógrafo instalado sobre la superficie del suelo.

Los resultados de los cálculos de T_s obtenidos por medio de la rigidez dinámica del suelo obtenida en el laboratorio se muestran en la Tabla 2. El período encontrado por este método es del orden de $T_s = 2.42$ seg. Por otro lado, del espectro de pseudo-aceleración obtenido por medio del registro del acelerógrafo para el fuerte temblor que ocurrió en la Ciudad de México en Mayo 11 de 1962, se puede observar que la respuesta pico de la aceleración corresponde a un período de $T = 2.45$ seg, Fig 11. El pico se obtiene cuando el período de la estructura de un grado de libertad es igual al período dominante de la masa del suelo.

De la investigación anterior puede observarse una correlación muy satisfactoria. Otras investigaciones semejantes han sido efectuadas para diferentes condiciones del suelo obteniéndose

buena concordancia. De las correlaciones estudiadas se concluye que el uso del F T P proporciona resultados satisfactorios para predecir problemas dinámicos de ingeniería de suelos, donde se necesita usar el valor de la rigidez dinámica del suelo.

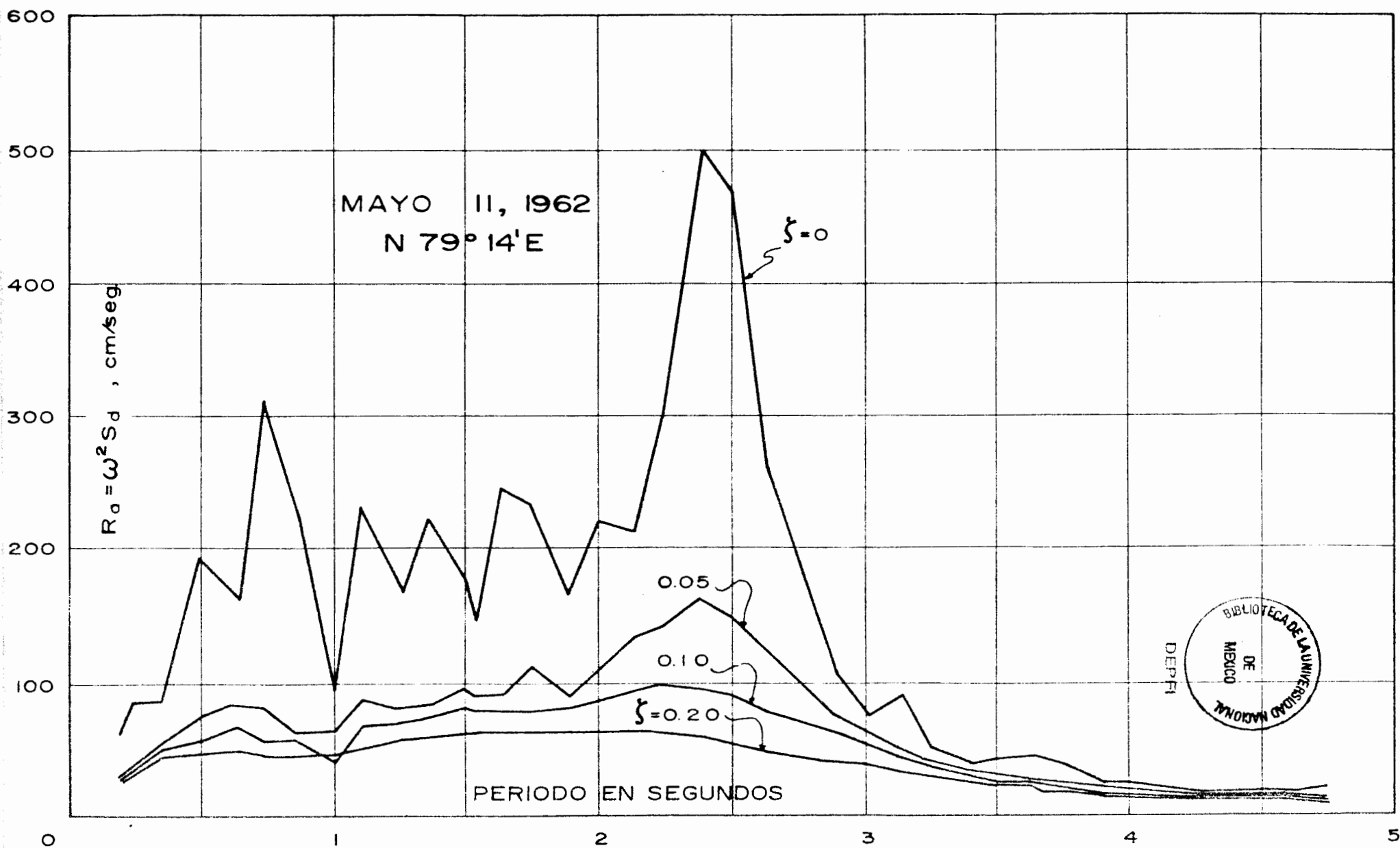


FIG.-II ESPECTRO DE SEUDO-ACELERACION DEL PARQUE ALAMEDA DE LA CD. DE MEXICO

CLASIFICACION DEL SUELO	PROF. m.	d_i m.	γ Ton/m ³	μ Ton/m ²	v_s m/seg	$4 \sum \Delta T$ seg
RELLENO	2.70	2.70	1.67	1000	76.6437	0.141
LIMO ARCILLOSO	5.50	2.80	1.60	800	70.036	0.301
LIMO ARENOSO	7.10	1.60	1.67	750	66.375	0.397
ARCILLA LIMOSA	10.00	2.90	1.20	175	37.824	0.704
LIMO ARCILLOSO	14.50	4.50	1.206	305	49.809	1.065
ARCILLA LIMOSA	18.70	4.20	1.14	215	43.013	1.456
ARCILLA LIMOSA	20.40	1.70	1.20	580	68.859	1.555
ARCILLA LIMOSA	22.50	2.10	1.18	600	70.627	1.674
LIMO ARCILLOSO	27.30	4.80	1.26	800	78.921	1.917
ARCILLA LIMOSA	32.20	4.90	1.209	1350	104.662	2.104
ARENA LIMOSA	36.40	4.20	1.70	9000	227.893	2.178
ARCILLA LIMOSA	37.80	1.40	1.29	2600	140.613	2.218
ARCILLA LIMOSA	39.60	1.80	1.25	2750	146.908	2.267
ARCILLA LIMOSA	43.00	3.40	1.27	2400	136.156	2.367
LIMO ARCILLOSO	45.00	2.00	1.45	3100	144.821	2.422

FIG.-12 PERIODO FUNDAMENTAL DEL CENTRO DE LA CD. DE MEXICO

REFERENCES

- 1) Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, L. Zeevaert (1973), Chapter XII, pp 528-540. Van Nostrand-Reinhold Book Co.
- 2) Free Vibration Torsion Tests to Determine the Shear Modulus of Elasticity of Soils, L. Zeevaert (1967), Panam. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, p 111, Caracas, Venezuela
- 3) Dynamics of Bases and Foundations. Barkan, P.D. (1960), McGraw-Hill Book Co.
- 4) Vibration of Soils and Foundations, Richart, Hall and Woods (1970), Prentice Hall
- 5) Vibration Problems in Engineering, Timoshenko, Young and Weaver Jr., Fourth Edition, Chapter 1, John Wiley Book Co.
- 6) De Vrije Wrigigsproef; Een Belangrijke Bijdrage Tot de Studie Van Het Dedrag. Van Funderingen Onder Invloed Van Grondtrillingen, W. Van Impe (1977). Tijdschrift Der Openbare Werken Van Belgie--Drukkerij N.I.C.I. Lousbegskaa 32 9000 Gent
- 7) Seismic Site Response of Nonlinear Soil Media, Taylor, P.W. and Larkin, T.J. J. Geotechnical Engineering Division GT3, March (1978), p 3.69-381 A.S.C.E.
- 8) Interacción Suelo-Estructura de Cimentaciones (1980), L. Zeevaert, Editorial Limusa, México, D.F.
- 9) Strong Ground Motions Recorded during Earthquakes of May 11th and 19th, 1962 in Mexico City, 1964, by L. Zeevaert, Bulletin Seismological Society of America, Vol. 54, No. 1, pp 209-231, Febr. 1964

*roo

F-DEPFI/D-49/1984/Ej.6



720883