



SUMAS Y SERIES SEMITELESCOPICAS

Arturo Delgado Rodriguez

D-67

1a. edición: abril 1973

1a. reimpresión: abril 1987



F-DEPR1
D-67
1987
E-3

El contenido de esta obra es responsabilidad del autor

Sumas y series semitelescópicas

Arturo Delgado Rodríguez*

RESUMEN

Se definen sumas "semitelescópicas" y se enuncia un teorema que establece una propiedad que poseen dichas sumas. Si el término general, u_k , de una suma, puede expresarse del siguiente modo: $u_k = b_k - b_{k+r}$, se hace ver que es factible calcular el valor numérico de la suma, considerando solo $2r$ términos de ella, cuyo término general es b_k . En el caso de series infinitas, el cálculo del valor numérico de la suma resulta aún más sencillo.

Se exponen dos corolarios al teorema. El primer corolario se refiere a sumas y series "alternadas semitelescópicas". En el segundo corolario se propone un método para valuar numéricamente sumas y series en las cuales el término general es un cociente de dos polinomios, a los que se les imponen varias restricciones.

El trabajo incluye dos apéndices. El primero consiste en demostraciones al teorema propuesto y al primer corolario. En el segundo apéndice se presentan varios ejemplos numéricos específicos, cuya resolución permite apreciar la utilidad y ventaja de las fórmulas propuestas.

ABSTRACT

Semitelescopic sums are defined and a theorem is proposed which establishes a property that said sums possess. If the general term of a sum μ_k can be expressed as follows: $\mu_k = b_k - b_{k+r}$, it is shown how it is possible to calculate the numerical value of the sum, taking into account only $2r$ terms of the sum, whose general term is b_k . The numerical value of the sum of a series is found in an even easier manner.

From the theorem, two corollaries are derived. The first corollary refers to alternating telescopic sums and series. The second corollary describes a method for calculating the numerical value of sums and series in which the general term is a quotient of two polynomials, to which certain conditions are imposed. It is shown that the sum can be calculated as a linear combination of semitelescopic sums.

This paper includes two appendixes. The first one consists of demonstrations of the proposed theorem and its first corollary. In the second appendix various specific numerical examples are worked out, the solution of which is intended to provide ample proof of the usefulness and advantage of the proposed methods.

* Profesor titular de la sección de matemáticas de la División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

1. DEFINICION

Sumas finitas semitelescópicas son aquellas que pueden expresarse del siguiente modo:

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r})$$

TEOREMA

Las sumas semitelescópicas tienen la siguiente propiedad:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (1)$$

$$b_k \in R; n, k, r, p \in N; r \leq \frac{n-p+1}{2}$$

Si $r = 1$, la suma se denomina telescópica (refs 1 y 2). La demostración de la igualdad 1 aparece en el Apéndice I.

La fórmula 1 permite reducir el número de sumandos en sumas finitas (o en series convergentes, como se verá en el cap 2) en todos aquellos casos en que es factible expresar el término general del siguiente modo:

$$u_k = b_k - b_{k+r} \quad (2)$$

(Véanse los ejemplos i y ii en el Apéndice II.)

2. SERIES INFINITAS SEMITELESCOPICAS:

Si: $n \rightarrow \infty$ en la ec 1 $\Rightarrow$ de la ec 2:

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{\infty} u_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \right) = \\ &= \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Haciendo: } \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k = C$$

$$\text{Además, si existe } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+2} + \dots + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+r} = r \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned} \quad (4)$$

(Véanse los ejemplos vii, viii y ix en el Apéndice II.)

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\Rightarrow$ de (3) y (4):

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k = C \quad (5)$$

(Véanse los ejemplos iii, iv, v y vi en el Apéndice II.)

En general:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L:$$

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - rL$$

$$\boxed{\sum_{k=p}^{\infty} u_k = C - rL} \quad (6)$$

NOTA: El ejemplo x presenta características muy particulares,

SUMAS Y SERIES ALTERNADAS SEMITELESCOPICAS

3. DEFINICION

Sumas alternadas finitas semitelescópicas son aquellas que pueden expresarse del siguiente modo:

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k u_k = \sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k \pm b_{k+2r}) \quad (7)$$

donde

$$b_k + b_{k+2r}, \text{ si } r \text{ es impar}$$

$$b_k - b_{k+2r}, \text{ si } r \text{ es par}$$

COROLARIO 1

Las sumas alternadas semitelescópicas tienen la siguiente propiedad:

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k + b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k \quad (8)$$

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k \quad (9)$$

$$b_k \in R; n, k, r, p \in N$$

La demostración de las fórmulas 8 y 9 se presenta en el Apéndice I. (Véanse los ejemplos xi y xii en el Apéndice II.)

4. SERIES ALTERNADAS SEMITELESCOPICAS

Si $n \rightarrow \infty$ en las ecuaciones 7, 8 y 9:

$$\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \mu_k = \begin{cases} \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k; r \text{ impar} \\ \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k; r \text{ par} \end{cases}$$

En ambos casos, $\lim \sum (-1)^k b_k = \sum \lim (-1)^k b_k$, ya que el número de sumandos es finito.

Observando que el límite de la sucesión oscilante $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k b_k$ existe, solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$

$$\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \mu_k = \begin{cases} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k (b_k + b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k & (10) \\ \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k & (11) \end{cases}$$

(Véanse los ejemplos xiii a xviii en el Apéndice II.)

5. CALCULO DE SUMAS Y SERIES EN LAS QUE EL TERMINO GENERAL ES EL COCIENTE DE DOS POLINOMIOS

El método que se expone a continuación permite calcular el valor numérico de la suma buscada, transformándola en una combinación lineal de sumas semitelescópicas.

DESARROLLO DEL PROCEDIMIENTO PROPUUESTO

HIPOTESIS:

a) $p(n)/q(n)$ es una función racional propia en que el denominador, $q(n)$, es un polinomio de grado finito m , en tanto que el numerador, $p(n)$, es un polinomio cuyo grado es, como máximo, $m-2$. Ambos polinomios tienen coeficientes en los reales ($m-2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

b) El polinomio del denominador $q(n)$ debe admitir la siguiente factorización:

$$q(n) = c(n - q_1)(n - q_2) \dots (n - q_m)$$

de modo que

$$q_i \in I; q_i \neq q_j \forall i \neq j; i, j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

En otras palabras: las raíces de la ecuación $q(n) = 0$ deben ser todas enteras y todas distintas

c) la suma

$$\sum_{n=k}^{n=k+s} \frac{p(n)}{q(n)} \quad (12)$$

es tal que $q(n)$ no se anula para ningún valor de $n(k \leq n \leq k+s)$; esto es, n no es raíz de $q(n) = 0$; ($n \in N$).

COROLARIO 2

La suma $\sum_{n=k}^{n=k+s} \frac{p(n)}{q(n)}$ puede calcularse como una com-

binación lineal de sumas semitelescópicas (o telescópicas), o como series semitelescópicas, cuando $s \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACION:

De acuerdo con la hipótesis b):

$$q(n) = c(n - q_1)(n - q_2) \dots (n - q_m)$$

puesto que, por la misma hipótesis:

$$q_i \in I; q_i \neq q_j \quad \forall i \neq j; i, j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$\Rightarrow$ siempre es posible la siguiente descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{A_1}{n - q_1} + \frac{A_2}{n - q_2} + \dots + \frac{A_m}{n - q_m} \dots \quad (13)$$

donde $A_i \in R; \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Pero la hipótesis a) establece que si $q(n)$ es de grado m , $p(n)$ será, como máximo, de grado $m - 2$ (puede ser $p(n)$ de cualquier grado $t \leq m - 2$), por lo cual resulta:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0$$

Si se considera cada A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) como una suma de números reales: $\sum C_k = A_i$, y teniendo en

cuenta que $\sum_{i=1}^m A_i = 0$, $\Rightarrow$ es siempre factible establecer una correspondencia biunívoca entre determinados C_k positivos, a los que se hacen corresponder igual número de C_k negativos, de tal modo que el segundo miembro de la ecuación 13 puede expresarse como una combinación lineal de diferencias de la forma:

$$k \left(\frac{1}{n - q_i} - \frac{1}{n - q_j} \right); k \in R$$

Por lo que se ve, al considerar la suma (12) resulta que puede calcularse como una suma finita de sumas semitelescópicas (o telescópicas). Si $s \rightarrow \infty$, la suma se convierte en serie, cuya suma es asimismo factible de ser determinada como semitelescópica (o telescópica).

Los razonamientos anteriores completan la demostración del corolario, sujeto a las hipótesis expuestas.

A fin de aclarar estas ideas, a continuación se desarrolla un ejemplo concreto.

Ejemplo: Determinar el valor numérico de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)}$$

SOLUCION

Se comprueba que en este caso se satisfacen las tres hipótesis básicas:

Se procede a la descomposición, en fracciones parciales, del término general:

$$\frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+4}$$

Dado que la descomposición es única, los valores numéricos de las constantes A, B, C se obtienen del siguiente modo:

si:

$$n = 0 \Rightarrow 1 = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

$$n = -2 \Rightarrow -5 = B(-2)(2) \Rightarrow B = \frac{5}{4}$$

$$n = -4 \Rightarrow -11 = C(-4)(-2) \Rightarrow C = -\frac{11}{8}$$

Se comprueba que:

$$A + B + C = \frac{1}{8} + \frac{5}{4} - \frac{11}{8} = 0$$

$$\frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) + \frac{10}{8} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right)$$

Con esta transformación del término general, la serie dada puede sumarse como dos series semitelescópicas, esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{12+6+4+3}{12} \right) + \frac{5}{4} \left(\frac{7}{12} \right) = \frac{25+70}{(12)(8)} = \frac{95}{96}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{95}{96}$$

APENDICE I

PRIMERA DEMOSTRACION DE LA FORMULA 1:

a)

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (1)$$

$$b_k \in R; n, k, r, p \in N; r < \frac{n-p+1}{2}$$

Por inducción sobre r :

a) si: $r = 1 \Rightarrow$ de (1):

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=p}^p b_k - \sum_{k=n+1}^{n+1} b_k \Rightarrow$$

$$(b_p - b_{p+1}) + (b_{p+1} - b_{p+2}) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_p - b_{n+1}$$

Este resultado concuerda, cuando $p = 1$, con el dado en la ref 2, pág 386, 10.7.)

b) Supóngase que la fórmula 1 se verifica para $r = m$; $\Rightarrow$ vale:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m}) = \sum_{k=p}^{p+m-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \quad (14)$$

Con base en la fórmula 14, debe hacerse ver que vale:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m+1}) = \sum_{k=p}^{p+m} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m+1} b_k \quad (15)$$

En efecto, del primer miembro de la fórmula 15:

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m+1}) &= \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p}^n b_{k+m+1} = \\ &= \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+1}^{n+1} b_{k+m} - b_{n+m+1} = \\ &= \sum_{k=p}^n b_k - \left[\left(\sum_{k=p}^n b_{k+m} - b_{p+m} \right) + b_{n+m+1} \right] = \\ &= \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p}^n b_{k+m} + (b_{p+m} - b_{n+m+1}) = \\ &= \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m}) + (b_{p+m} - b_{n+m+1}) = \\ &= \sum_{k=p}^{p+m-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k + (b_{p+m} - b_{n+m+1}) = \end{aligned}$$

De la ec 14:

$$\therefore \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m+1}) = \sum_{k=p}^{p+m} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m+1} b_k$$

que es precisamente la fórmula 15, con lo cual se completa la demostración: la fórmula 1 vale $\forall r \in \mathbb{N}$.

Obsérvese que aun cuando la condición $r \leq \frac{n-p+1}{2}$

no es necesaria, ya que no interviene en la demostración anterior, ésta es una limitación de orden práctico, pues indica hasta qué valor de r resulta una ventaja emplear la fórmula 1 para lograr reducción del número de sumandos.

SEGUNDA DEMOSTRACION DE LA FORMULA 1:

Esta demostración fue propuesta por el Sr. M. en C. Julio Damy Ríos.

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p}^n b_{k+r} \quad (16)$$

Si se hace en la segunda suma del segundo miembro de la fórmula 16

$$\begin{aligned} \text{si } k+r &= t \Rightarrow k = t-r \\ k=p &= t-r \Rightarrow t = p+r \\ k=n &= t-r \Rightarrow t = n+r \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores:

$$\sum_{k=p}^n b_{k+r} = \sum_{t=p+r}^{n+r} b_t = \sum_{k=p+r}^{n+r} b_k \quad (17)$$

Sustituyendo la fórmula 17 en la 16 y tomando en cuenta la ec 1:

$$\sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+r}^{n+r} b_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (18)$$

Para demostrar la fórmula 1, se considerarán tres casos para la ec 18

a) $p+r \leq n$; b) $p+r = n+1$; c) $p+r > n+1$

CASO a) $p + r \leq n$. Restando y sumando al primer

miembro de la fórmula 18, la suma finita $\sum_{k=p+r}^n b_k$ se obtiene:

$$\left(\sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+r}^n b_k \right) - \left(\sum_{k=p+r}^{n+r} b_k - \sum_{k=p+r}^n b_k \right) \quad (19)$$

Pero:

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n b_k &= \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k + \sum_{k=p+r}^n b_k \\ \Rightarrow \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+r}^n b_k &= \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k \end{aligned} \quad (20)$$

Asimismo:

$$\sum_{k=p+r}^{n+r} b_k = \sum_{k=p+r}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (21)$$

Sustituyendo las ecs 20 y 21 en la 19, y tomando en cuenta las fórmulas 16 y 18, resulta:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k$$

que es precisamente la fórmula 1 para $p + r \leq n$.

Obsérvese que en el caso *a* la fórmula 1 reduce la suma de $2(n - p + 1)$ términos a solo $2r$ términos; pero por hipótesis $p + r \leq n \Rightarrow r \leq n - p \Rightarrow 2r \leq 2(n - p) < 2(n - p + 1) \Rightarrow$ la fórmula 1 en el caso *a* permite una reducción de sumandos en el desarrollo de $\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r})^*$

CASO b) $p + r = n + 1, \Rightarrow p + r - 1 = n$

Sustituyendo en la ec 18:

$$\sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k = \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k$$

identidad que comprueba la validez de la fórmula 1 para $p + r = n + 1$.

En el caso *b* no hay ventaja en el uso de la fórmula 1, ya que:

$$p + r = n + 1 \Rightarrow r = n - p + 1 \Rightarrow 2r =$$

$$= 2(n - p + 1), \quad 2r > n - p + 1^*$$

CASO c) $p + r > n + 1$

Sumando y restando al primer miembro de la fórmula

18, la suma finita $\sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k$ resulta:

$$\sum_{k=p}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k - \left(\sum_{k=p+r}^{n+r} b_k + \sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k \right) \quad (22)$$

$$\text{Pero: } \sum_{k=p}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k \quad (23)$$

$$\sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k + \sum_{k=p+r}^{n+r} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (24)$$

Sustituyendo las ecs 23 y 24 en la 22 y tomando en cuenta las fórmulas 16 y 18, resulta:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k$$

que es precisamente la fórmula 1.

Debe hacerse notar que, en el caso *c*, la aplicación de la fórmula 1 aumenta en vez de reducir el número de sumandos, ya que, por hipótesis

$$p + r > n + 1$$

$$\Rightarrow r > n - p + 1$$

$$\Rightarrow 2r > 2(n - p + 1) > n - p + 1^*$$

Demostración del corolario 1**

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k + b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k \quad (8)$$

*El desarrollo de la serie dada originalmente $\sum_{k=p}^n u_k$ involucra $n - p + 1$ términos $\Rightarrow$ se logra reducción si

$$2r < n - p + 1$$

**Esta demostración está basada en una sugerencia del Sr. M. en C. Julio Dany Ríos.

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k \quad (9)$$

Si en la fórmula 1 se hace:

$$b_k = (-1)^k C_f$$

$$b_{k+r} = (-1)^{f+m} C_{f+m}$$

Sustituyendo estos valores en la 1:

$$\sum_{f=p}^n \left[(-1)^f C_f - (-1)^{f+m} C_{f+m} \right] = \sum_{f=p}^{p+m-1} (-1)^f C_f - \sum_{f=n+1}^{n+m} (-1)^f C_f \quad (25)$$

Del primer miembro de la fórmula 25:

$$\sum_{f=p}^n \left[(-1)^f C_f - (-1)^m (-1)^f C_{f+m} \right]$$

$$\text{Pero: } (-1)^m = \begin{cases} -1, & \text{si } m \text{ es impar} \\ 1, & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$$

Haciendo $m = 2r - 1$; $f = k$; $c = b$ en (25)

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k + b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k \quad (8)$$

Haciendo $m = 2r$; $f = k$; $c = b$ en (25)

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k \quad (9)$$

Obsérvese que tanto la fórmula 8 como la 9 pueden demostrarse por inducción matemática sobre r ; pero es más sencilla la demostración empleando la fórmula 1, ya demostrada para toda $r \in \mathbb{N}$.

APENDICE II

DETERMINAR EL VALOR DE LAS SIGUIENTES SUMAS:

$$i) \sum_{k=1}^{99} \frac{6}{k^2 + 3k}$$

SOLUCION

$$\frac{6}{k^2 + 3k} = 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{99} \frac{6}{k^2 + 3k} = 2 \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

Aplicando la fórmula 1, para $r = 3$:

$$\sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} - \sum_{k=100}^{102} \frac{1}{k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \frac{929049}{515100}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{99} \frac{6}{k^2 + 3k} = \frac{309683}{85850}$$

$$ii) \sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k$$

SOLUCION

De la ref 3, pág 817 (21.2 - 11):

$$\begin{aligned} \text{áng coth } k &= \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(k+1) - \ln(k-1) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{200} \left[\ln(k-1) - \ln(k+1) \right]$$

Aplicando la fórmula 1 para $r = 2$:

$$\sum_{k=2}^{200} [\ln(k-1) - \ln(k+1)] = \sum_{k=2}^3 \ln(k-1) - \sum_{k=201}^{202} \ln(k-1) =$$

$$= \ln 1 + \ln 2 - \ln 200 - \ln 201 = \ln \frac{1}{20100}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{20100}$$

$$\sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k = \ln \sqrt{20100}$$

$$\text{iii) } \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - m^2} ; m \in \mathbb{N}$$

SOLUCION

$$\frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{k-m} - \frac{1}{k+m} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+m} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{2m} \sum_{k=m+1}^{3m} \frac{1}{k-m}$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{2m} \sum_{k=m+1}^{3m} \frac{1}{k-m}$$

$$\text{iv) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

SOLUCION

$$\frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) - 3 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) - 3 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k+1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 3 \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{v) } \sum_{k=1}^{\infty} \text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

SOLUCION

De la ref 3, página 813 (21.2 - 17):

$$\text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1} = \text{áng tan } \frac{1}{k} - \text{áng tan } \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{áng tan } \frac{1}{k} = 0$$

Tomando valor principal:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{áng tan } k = \\ &= \text{áng tan } 1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{vi) } \sum_{k=2}^{\infty} \text{áng sen } \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1}$$

SOLUCION

Si se toma de la ref 3, página 813 (21.2 - 17):

$$\sqrt{(k \pm 1)^2} = \left| \sqrt{(k \pm 1)^2} \right| = k \pm 1$$

$$\text{áng sen } \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1} = \text{áng sen } \frac{1}{k-1} - \text{áng sen } \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{áng sen } \frac{1}{k} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \text{áng sen} \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1} =$$

$$= \sum_{k=2}^3 \text{áng sen} \frac{1}{k-1} = \text{áng sen } 1 + \text{áng sen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4}{6} \pi$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \text{áng sen} \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1} = \frac{2}{3} \pi}$$

$$vii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 4k + 3}$$

SOLUCION

$$\frac{6}{k^2 + 4k + 3} = \frac{3k + 6}{k + 3} - \frac{3k}{k + 1} *$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 4k + 3} = -3 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+2}{k+3} \right) \right]$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k+2} = 1$$

Aplicando la fórmula 6:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 4k + 3} = -3 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - 2(1) \right] = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k^2 + 4k + 3} = \frac{5}{2}}$$

$$viii) \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)}$$

*Obsérvese que también puede hacerse como sigue:

$$\frac{6}{k^2 + 4k + 3} = 3 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

SOLUCION

De la ref 3, página 810 (21.2 - 11):

$$\text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{k} - \cos \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{k} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^2 \cos \frac{1}{k} - 2(1) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos 1 + \cos \frac{1}{2} - 2 \right)$$

De la ref 3, pág. 1010:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} \doteq 1 - \frac{0.542 + 0.878}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} \doteq 0.290}$$

$$ix) \sum_{k=2}^{2000} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

SOLUCION

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$\Rightarrow \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2 \ln k$$

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(k-1) - \ln k \right] - \sum_{k=2}^n \left[\ln k - \ln(k+1) \right] \quad (26)$$

$$= \ln 1 - \ln n + \ln(n+1) - \ln 2$$

$$= \ln \frac{n+1}{2n} \quad (27)$$

$$\sum_{k=2}^{2000} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \ln \frac{2001}{4000}$$

$$x) \sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

SOLUCION

De la fórmula 27 en el ejemplo anterior:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{2n}$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = -\ln 2$$

Observación: el segundo miembro de la fórmula 26 del ejemplo ix representa la diferencia de dos sumas telescópicas. Si $n \rightarrow \infty$ resultan dos series telescópicas, siendo cada una de ellas divergente ($\lim_{k \rightarrow \infty} \ln k = \infty$), por lo que el primer miembro de la fórmula 26 es la indeterminación $\infty - \infty$, cuyo valor, en este caso, resultó ser $-\ln 2$.

Este ejemplo proporciona una ilustración de cómo es posible que la diferencia de dos series divergentes se exprese como una serie convergente.

$$xi) \sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k}$$

SOLUCION

$$\frac{2k+3}{k^2+3k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+3}$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k} = \sum_{k=2}^{199} (-1)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+3} \right)$$

Aplicando la fórmula 8:

$$2r-1=3 \Rightarrow r=2$$

$$\sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k} = \sum_{k=2}^4 (-1)^k \frac{1}{k} - \sum_{k=200}^{202} (-1)^k \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{200} + \frac{1}{201} - \frac{1}{202}$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{20201}{4060200}$$

$$\sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k} = \frac{557183}{1353400}$$

$$xii) \sum_{k=2}^{100} (-1)^k \ln(k^2+k-2)$$

SOLUCION

$$\sum_{k=2}^{100} (-1)^k \ln(k^2+k-2) = \sum_{k=2}^{100} (-1)^k [\ln(k-1) + \ln(k+2)]$$

Aplicando la fórmula 8 para $r=2$

$$\sum_{k=2}^{100} (-1)^k (k^2+k-2) = \sum_{k=2}^4 (-1)^k (k-1) - \sum_{k=101}^{103} (-1)^k (k-1)$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln 3 + \ln 100 - \ln 101 + \ln 102$$

$$\sum_{k=2}^{100} (-1)^k \ln(k^2+k-2) = \ln \frac{15300}{101}$$

$$xiii) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}$$

SOLUCION

$$\frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}$$

$$b_k = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

Aplicando la fórmula 10:

$$p=0; r=1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = 1$$

$$xiv) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k}$$

SOLUCION

De la ref 1, pág 814 (21.2 - 25)

$$\frac{1}{2} \left(\sinh \frac{1}{k} + \sinh \frac{1}{k+3} \right) = \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sinh \frac{1}{k} = 0$$

Aplicando la fórmula 10:

$$p = 1 ; r = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k} = \frac{1}{2} \left(-\sinh 1 + \sinh \frac{1}{2} - \sinh \frac{1}{3} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k} = \frac{1}{2} \left(-\sinh 1 + \sinh \frac{1}{2} - \sinh \frac{1}{3} \right)$$

$$xv) \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \operatorname{áng} \coth k$$

SOLUCION

De la ref 3, pág 817 (21.2 - 11):

$$\operatorname{áng} \coth k = \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} = \frac{1}{2} \left[\ln(k+1) - \ln(k-1) \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \operatorname{áng} \coth k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \left[\ln(k-1) - \ln(k+1) \right]$$

Aplicando la fórmula 11, ($2r=2$), $b_k = \ln(k-1)$

$$\sum_{k=2}^{200} \left[\ln(k-1) - \ln(k+1) \right] = \sum_{k=2}^3 (-1)^k \ln(k-1) - \sum_{k=201}^{202} (-1)^k \ln(k-1)$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln 200 - \ln 201 = \ln \frac{100}{201}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \operatorname{áng} \coth k = -\frac{1}{2} \ln \frac{100}{201} = \ln \sqrt{\frac{201}{100}} = \ln \sqrt{2.01}$$

$$xvi) \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right)$$

SOLUCION

$$1 - \frac{4}{k^2} = \frac{k^2 - 4}{k^2} = \frac{(k-2)(k+2)}{k^2}$$

$$\ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \ln(k-2) + \ln(k+2) - 2 \ln k$$

$$\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \left[\ln(k-2) - \ln k \right] - \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \left[\ln k - \ln(k+2) \right]$$

Aplicando la fórmula 11:

$$\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \sum_{k=3}^4 (-1)^k \ln(k-2) - \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \ln(k-2) -$$

$$- \sum_{k=3}^4 (-1)^k \ln k + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \ln k$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln(2n-1) - \ln 2n + \ln 3 - \ln 4 - \ln(2n+1) + \ln 2(n+1)$$

$$\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \ln \frac{3(2n-1)(n+1)}{4(2n)(2n+1)} = \ln \frac{6n^2 + 3n - 3}{16n^2 + 8n}$$

$$xvii) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k+2)}$$

SOLUCION

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0; 2r = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$xviii) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k^2 + 4k + 3}$$

SOLUCION

$$\frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} *$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0; 2r = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-3+2}{6} = -\frac{1}{6}$$

*La descomposición $\frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k}{k+1} = -\left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+2}{k+3} \right)$

no funciona porque $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$ no existe.

SIMBOLOS EMPLEADOS

- R = conjunto de números reales
- N = conjunto de números naturales = $\{1, 2, \dots\}$
- I = conjunto de números enteros = $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\forall$ = para todo
- ϵ = elemento de
- $\Rightarrow$ implica que
- $\rightarrow$ = tiende a

REFERENCIAS

1. A. Delgado R., "Notas para el curso introductorio Matemáticas 041", División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F. (1972)
2. T. M. Apostol, "Calculus", Vol 1, 2a ed, Blaisdell Publishing Co. (1967)
3. G. A. Korn y T. M. Korn, "Mathematical Handbook", 2a ed, McGraw-Hill Book, Co. Inc., Nueva York (1968)

RECONOCIMIENTO

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento a las siguientes personas, de quienes ha recibido apoyo y consejo, así como muy valiosos comentarios, los que han sido tomados en cuenta en la presentación final de este trabajo:

Dr. Javier Salazar R.
 Dr. Octavio Rascón Ch.
 M. en C. Julio Damy Ríos
 Dr. Fernando E. Prieto C.
 Dr. Ismael Herrera
 Dr. Carlos Marín D.
 Dr. Artur Grigori
 M. en L. Carmen Meda de R.
 Act. Martha D. Delgado W.

F/DEPFI/D-67/1987/EJ.3



718340