

MODELADO GEOMETRICO POR COMPUTADORA

**Gabriel Mauricio Alvarez Medina
Víctor Manuel Ortega Apolonio**

3a. Reimpresión : Agosto 1990

D-87

F-DEPFI

D-87

L 9 9 0

83



DEPFI

CONTENIDO

PROLOGO 1

I INTRODUCCION

- 1.1 EL CICLO DE DISEÑO 3
- 1.2 LINEAS DE INVESTIGACION 6
- 1.3 OBJETIVOS 7
- 1.4 METODOLOGIA 8
- 1.5 EQUIPO DE DESARROLLO 9

II MODELACION GEOMETRICA

- 2.1 MODELADO DE FIGURAS DE ALAMBRE 12
- 2.2 MODELADO DE SUPERFICIES 12
- 2.3 MODELADO DE SOLIDOS 16
 - 2.3.1 ESQUEMAS DE REPRESENTACION PARA MODELADO DE SOLIDOS 20
 - 2.3.2 PROPIEDADES DE LOS ESQUEMAS DE REPRESENTACION 21
 - 2.3.3 TAXONOMIA DE REPRESENTACION 22
 - 2.3.3.1 MODELOS DE DESCOMPOSICION 22
 - ENUMERACION EXHAUSTIVA 22
 - ESQUEMAS DE SUBDIVISION ESPACIAL 23
 - "OCTREES Y QUADTREES" 24
 - SUBDIVISION ESPACIAL BINARIA 25
 - SUBDIVISION DEL ESPACIO LINEALIZADA 25
 - "OCTREES" LINEALES 26
 - "BINTREES" 26
 - DESCOMPOSICION CELULAR 27
 - 2.3.3.2 MODELOS CONSTRUCTIVOS 27
 - MODELOS DE ESPACIO MEDIO 28
 - GEOMETRIA CONSTRUCTIVA DE SOLIDOS (CSG) 30
 - "SWEEPING" O BARRIDO 32
 - 2.3.3.3 MODELOS DE FRONTERA (B-REP) 32
 - MODELOS DE FRONTERA BASADOS EN POLIGONOS 33
 - MODELOS DE FRONTERA BASADOS EN VERTICES 33
 - MODELOS DE FRONTERA BASADOS EN ARISTAS 34
 - ESTRUCTURA DE DATOS DE ARISTA-SALTEADA ("WINGED-EDGE") 34
 - 2.3.3.4 MODELADO HIBRIDO 37

III ESQUEMAS DE REPRESENTACION PARA SUPERFICIES DE FORMA LIBRE

- 3.1 SUPERFICIES BILINEALES 40
- 3.2 SUPERFICIES REGLADAS 40
- 3.3 SUPERFICIES LINEALES DE COONS 41
- 3.4 SUPERFICIES GENERALIZADAS DE COONS 42
- 3.5 SUPERFICIES BICUBICAS 44
- 3.6 SEGMENTOS DE FERGUSON O DE HERMITE 47

3.7	SEGMENTOS DE BEZIER	50
	CONDICIONES DE CONTINUIDAD	52
	REPRESENTACION TRIDIMENSIONAL	53
3.8	SPLINES	54
	CONDICION EN LOS EXTREMOS	59
3.9	B-SPLINES	60
	VARIACIONES EN B-SPLINES	65
3.10	CURVAS Y SUPERFICIES PARAMETRICAS RACIONALES	67
	PARAMETRIZACION CUADRICA RACIONAL DE UN SEGMENTO DE SECCION CONICA	68
	CURVAS CUBICAS RACIONALES	72
	COMPOSICION DE CURVAS RACIONALES	73
	SUPERFICIES PARAMETRICAS RACIONALES	75
IV CURVAS Y SUPERFICIES BETA-SPLINES		
4.1	CONTROL LOCAL	80
4.2	CONTINUIDAD GEOMETRICA	81
4.3	DERIVACION DE LAS FUNCIONES BASE DE LOS BETA-SPLINES	84
4.4	PROPIEDAD DE CUBIERTA CONVEXA	88
4.5	PERTURBACION DEBIDA A LA ALTERACION DE UN VERTICE	89
4.6	GENERALIZACION A PARAMETROS CONTINUOS	90
4.7	ANALISIS DE LAS CONDICIONES EN LOS EXTREMOS DE LOS SEGMENTOS	91
	VERTICES MULTIPLES	92
	TRIPLE VERTICE	93
	VERTICES FANTASMA	94
4.8	SUPERFICIES BETA-SPLINE	95
4.9	INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS PARAMETROS BETA	98
V SEGMENTOS Y DOMINIOS RECORTADOS		
5.1	DOMINIOS RECORTADOS	101
5.2	CODIFICACION	103
5.3	DISCRETIZACION	106
VI AMBIENTE DE MODELADO		
6.1	DESCRIPCION DEL AMBIENTE	109
6.2	DESCRIPCION DE UN EJEMPLO DE MODELADO	110
6.3	MENUS DEL SISTEMA	112
CONCLUSIONES		119
ANEXOS		121
REFERENCIAS		129

Seguramente, una de las actividades más estimulantes para el ser humano es la creación de formas. El sólo hecho de crear, es un reto a la imaginación y quizá sea posible decir que existen dos tipos de formas, aquellas cuya finalidad es totalmente artística y que sólo se sujetan a las restricciones que el artista y las herramientas que emplea le impongan y aquellas cuya forma se determina por la realidad de restricciones físicas y prácticas. Ambas formas son necesarias y ambas involucran un proceso de diseño.

1.1 El ciclo de diseño

Es posible que cualquier persona mantenga una idea intuitiva de las fases requeridas para diseñar un producto. Estas fases son influenciadas con la inclusión de software y hardware de propósito específico cuya finalidad sea acelerar aquellas que son susceptibles de ser automatizadas o semiautomatizadas.

La tecnología que se basa en el uso de las computadoras con la finalidad de acelerar el proceso de diseño y manufactura se denomina CAD/CAM/CAE, acrónimos del inglés "Computer-Aided Design/Computer-Aided Manufacturing/Computer-Aided Engineering" o Diseño Asistido por Computadora/Manufactura Asistida por Computadora/Ingeniería Asistida por Computadora.

Con respecto al proceso de diseño, Shigley[1] propuso seis fases que lo comprenden de una manera formal:

1. Reconocimiento de la necesidad
2. Definición del problema
3. Síntesis
4. Análisis y Optimización
5. Evaluación
6. Presentación

El reconocimiento de la necesidad lo realiza alguna persona involucrada en la actividad que requiere alguna medida correctiva o innovativa; la definición del problema involucra la cuidadosa especificación del elemento que se va a diseñar o rediseñar, incluyendo las características físicas y funcionales, costos, calidad y desarrollo operativo; la síntesis y el análisis están altamente relacionadas y son altamente iterativas en el proceso de diseño. Un componente o subsistema del sistema completo es conceptualizado por el diseñador tomando las variables, que a su juicio, son las más representativas y que forman la síntesis del componente, el cual se sujeta a análisis, se mejora y vuelve a diseñar. El proceso se repite hasta que el diseño ha sido optimizado con las restricciones impuestas por el diseñador. La evaluación concierne con la medición del diseño contra las especificaciones establecidas en la fase de definición del problema. Esta evaluación a menudo requiere la fabricación y prueba de prototipos para evaluar el desempeño operativo, la calidad, la confiabilidad y otros criterios. La fase final del proceso de diseño es la presentación, que incluye la documentación, el realismo, la lista de partes, y en general toda una base de información requerida del producto.

La tecnología CAD/CAM/CAE se compone por fases que mantienen una relación directa con fases correspondientes a este proceso de diseño (fig. 1.1). En particular, observe la fase de *Modelado Geométrico*, la cual corresponde a la fase de Síntesis de información en el proceso de diseño clásico. En esta fase, el diseñador crea una *abstracción de la realidad* y la expresa como un *modelo en computadora*. Aunque se define formalmente el concepto de modelo en el capítulo II, informalmente se puede decir que éste se constituye por una *topología*, que hace las veces de la estructura de datos en la cual se almacena el objeto, y una *geometría* que representa los valores que se incluyen en la topología del modelo, de tal suerte que es posible tener una topología y un número infinito de geometrías. Además, dentro de la estructura de datos

1.2 Líneas de Investigación

Dentro de la modelación geométrica puede investigarse en los siguientes puntos:

1. Definición de la Topología.
2. Especificación de la Geometría.
3. Algoritmos de consulta de información.
4. Algoritmos de procesamiento para obtener realismo de un modelo.
5. Algoritmos de transferencia de información entre sistemas de modelado.
6. Diseño de interfaces de comunicación con el sistema
7. Diseño de las estructuras de almacenamiento secundario para un modelo.
8. Diseño de algoritmos para el procesamiento de un modelo con vistas a implementarse en hardware.

Estas áreas no se encuentran unificadas en un mismo nivel de desarrollo o de investigación.

En particular, si se considera la modelación de sólidos y la modelación de superficies, se encuentra una variedad de técnicas en ambas escuelas de modelado que pueden complementarse y así obtener un modelador que cubra un mayor rango de posibles formas a crear, esto es, un modelador con una cobertura geométrica más amplia.

Esta observación, a nivel de dos grandes escuelas de modelado, también es válida en la variedad de posibilidades dentro de cada una ellas, lo cual genera, en forma natural, el nacimiento de *esquemas híbridos* de modelado geométrico.

De las dos grandes escuelas de modelado, sólidos y superficies, la última esta demostrando, en los últimos años, que tiene el potencial necesario para generar las formas que se obtienen mediante el modelado de sólidos, aunque aún se requieren años de investigación para lograrlo. Por otra parte también existe la tendencia natural a la integración de las mejores propiedades de cada una de las escuelas de modelado geométrico.

Para lograr la unificación anterior, se requiere de mayor investigación y desarrollo en cada una de las áreas de modelado.

En particular, dentro de la Modelación de Superficies aún no existe un esquema general para definir cualquier forma ni mucho menos, algoritmos de procesamiento generales para lograr consultas sobre los modelos generados. Las estructuras de datos aún se pueden considerar experimentales; la diversidad de restricciones matemáticas que pueden restringir a una superficie obligan a la diversificación de los esquemas de modelado, aún bajo una misma idea.

1.3 Objetivos

Realizar investigación y desarrollo sobre una técnica de modelado de superficies, los Beta-splines, quienes poseen cualidades interesantes que los colocan como una de las mejores teorías en éste campo del Diseño Asistido por Computadora.

Realizar investigación y desarrollo sobre el concepto de Segmentos Recortados, lo cual aportará ideas referentes a la forma que puedan tomar las fronteras de un objeto.

Integrar los Beta-splines con los Segmentos Recortados y aportar ideas sobre su estructuración y la posible utilidad de ésta integración.

Crear un Ambiente de Modelación Geométrica con las investigaciones anteriores que funcione como un laboratorio para comprender mejor la creación de éste tipo de sistemas y permita la inclusión de nuevos algoritmos de procesamiento sobre un modelo geométrico.

Ayudar a la integración entre la modelación de superficies y la modelación de sólidos.

1.4 Metodología

Los objetivos anteriores son altamente ambiciosos. Para lograrlos se procedió a una investigación completa sobre las técnicas de modelado de sólidos y superficies existentes, lo cual permitió poseer una visión real del estado del arte de la modelación geométrica. Posteriormente, se realizó la recopilación y el estudio de todo lo referente al esquema de modelado de superficies denominado Beta-splines. Con esta información se realizaron pruebas separadas de los conceptos que integran a éste tipo de Splines, primero en dos dimensiones y luego en tres dimensiones. En ambos casos se investigó sobre la modelación de una forma compleja así como la definición informal de superficies cuádricas. Estas pruebas se realizaron inicialmente en forma numérica para después integrar los algoritmos a un standard gráfico, en éste caso, PHIGS, un standard para tres dimensiones. Una vez comprendido en funcionamiento de los Beta-splines, se inició la investigación sobre el concepto de los Segmentos Recortados. De manera intuitiva, un segmento recortado se inicia con un dominio continuo en dos dimensiones sobre el cual se elimina o agrega información bidimensional que lleva a dominios limitados por fronteras finitas y cíclicas donde pueden existir hoyos. Estos dominios pueden emplearse como parte de las formulaciones Beta-splines para construir la forma final de las fronteras de un objeto.

Cuando se ha comprendido la teoría de los Beta-splines y de los Segmentos Recortados fué posible pensar en la topología y los mecanismos para indicar la geometría de un objeto. Al mismo tiempo, se generaron las ideas para el diseño interfaces de comunicación. De hecho, el éxito del sistema puede depender, en gran medida, de éste diseño.

Después de definida la Topología, los mecanismos de entrada de la geometría y la comunicación con el sistema, se procedió a realizar pruebas generales con el fin de retroalimentación al diseño global. En las pruebas se variaron todos los parámetros a los

cuales se tiene acceso. Una de las pruebas sobre una forma compleja se documentó y sus imágenes se muestran en éste trabajo.

1.5 Equipo de desarrollo

Todo el ambiente se desarrolló entre sistemas personales del tipo PS-2/60 y estaciones de diseño RT's de tecnología Risc. Los equipos RT's cuentan con buenas facilidades de desarrollo para software especializado de CAD. Tienen un poder de cómputo del orden de 0.5Mflops (millones de instrucciones de punto flotante por segundo) con un procesador central de la familia de los Motorola 68000; tres procesadores de punto flotante de la familia de los Motorola 68020; un procesador gráfico 5085 que integra los primitivos gráficos en firmware y se encarga del control de los periféricos especializados: ratón controlado por enbobinado de 29x29 cms² el cual se emplea como el dispositivo de "pick" de un estandard gráfico o como un teclado especial del tipo "LPKF" (teclado de funciones luminoso); teclado de funciones "LPKF" con 32 teclas luminosas; monitor 5081-19 de 18" de tecnología "raster" de 1024x1024 "pixels" direccionables visibles y 256 tonalidades de color al mismo tiempo de una paleta de 1000,000 de tonalidades bajo el sistema bojo-verde-azul "RGB".

El equipo PS-2/60 se empleó para el desarrollo de algoritmos en lenguaje C y su optimización. Una vez realizado esto, la versión depurada se traslado al ambiente UNIX de las RT's, donde existe una compatibilidad total en el código C generado.

CAPITULO II
MODELACION GEOMETRICA

Un *modelo* es un objeto construido artificialmente que permite la observación de otro de una manera más simple. Los modelos son útiles puesto que utilizarlos en ocasiones es más sencillo que su contraparte física. Ahora bien, la totalidad de la información que se almacena en un modelo depende del alcance de las preguntas que uno desea poder contestar[2].

El *Modelado Geométrico* se desarrollo en la década de los 70's como un campo del *Diseño Asistido por Computadora*[3] y su objetivo es permitir la representación de formas con objeto de alterarlas, consultar sus propiedades geométricas y atributos no geométricos, analizarlas y generar información de manufactura. La denominación de geométrico se debe a que los puntos anteriores son problemas eminentemente geométricos, por ejemplo, conocer el centro de gravedad de una pieza requiere conocer la geometría de la misma; determinar la trayectoria para un maquinado también requiere de esta información. Así mismo, generar el realismo de una forma también lo es.

El modelado geométrico tiene que ver con los siguientes elementos [19]:

- a) Representación en computadora de las entidades geométricas y las transformaciones que se les pueden aplicar tales como movimientos rígidos y operaciones booleanas.
- b) Algoritmos para el razonamiento geométrico y para el cálculo de propiedades geométricas y los efectos de las transformaciones.
- c) Las teorías matemáticas que fundamentan tales representaciones y algoritmos.
- d) El hardware y software en el cual esta inmerso el modelado geométrico.

Un ambiente de modelado se observa en la figura 2.1. Este mantiene un módulo encargado de permitir al usuario realizar la *definición de un objeto* a través de las *facilidades de modelado* del sistema (conceptos geométricos de modelado). Estas pueden ser tan sofisticadas como el acceso a objetos ya contruidos o tan sencilla como comandos de definición de primitivas básicas. El lenguaje al cual tiene acceso el usuario se traduce a *representaciones geométricas internas* al ambiente, sobre las cuales operarán *procesos de interrogación o transformación* que generan resultados específicos tales como el realismo o las trayectorias sobre una superficie, etc. Estas facilidades las descompone Requicha[4] en los siguientes componentes:

- Estructuras Simbólicas
- Procesos
- Facilidades de Entrada
- Facilidades de Salida

Las *estructuras simbólicas* son representaciones de los objetos; los *procesos* emplean a las representaciones para responder a preguntas geométricas acerca de los objetos; las *facilidades de entrada* son los medios disponibles en el sistema, orientados al usuario, para crear y editar representaciones de objetos así como para invocar los procesos que actúan sobre la representación; las *facilidades de salida* son los medios que el usuario emplea para despliegue de su información.

Observe que en estas actividades se involucra la capacidad de consulta física como un proceso y ésta no forma parte de un sistema de modelado, aunque la estructura interna de un modelador influye, en gran parte, sobre esta posibilidad de interrogación.

El modelado geométrico ha evolucionado en cuatro ramas principales:

- Figuras de Alambre
- Superficies
- Sólidos
- Esquemas Híbridos

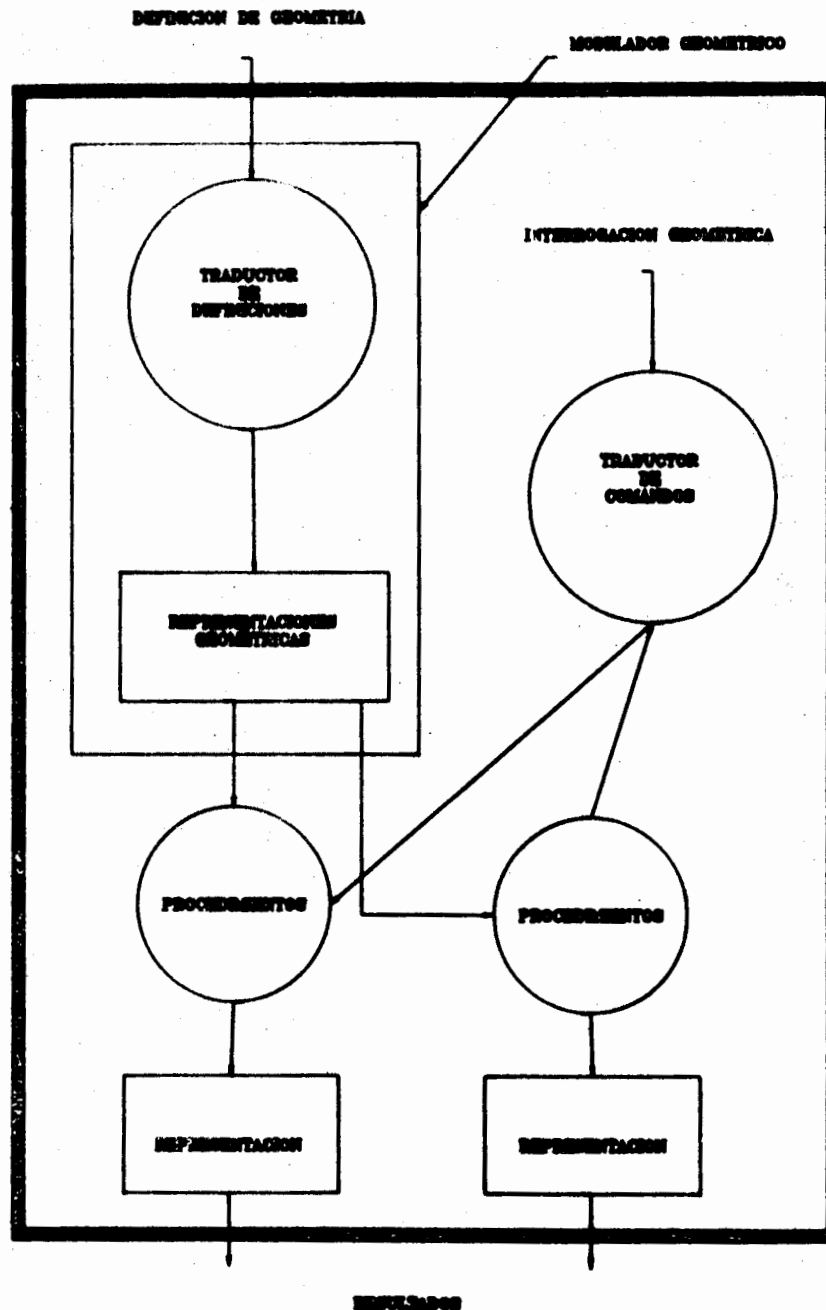


Fig. 2.1 AMBIENTE DE MODELADO GEOMETRICO

La diferencia en cada caso se identifica por la cantidad de información agregada a los modelos, las entidades geométricas empleadas en la modelación, las restricciones a los modelos, las facilidades de manipulación, interrogación y despliegue y en las estructuras de datos que posibilitan las operaciones anteriores.

2.1 Modelado de Figuras de Alambre

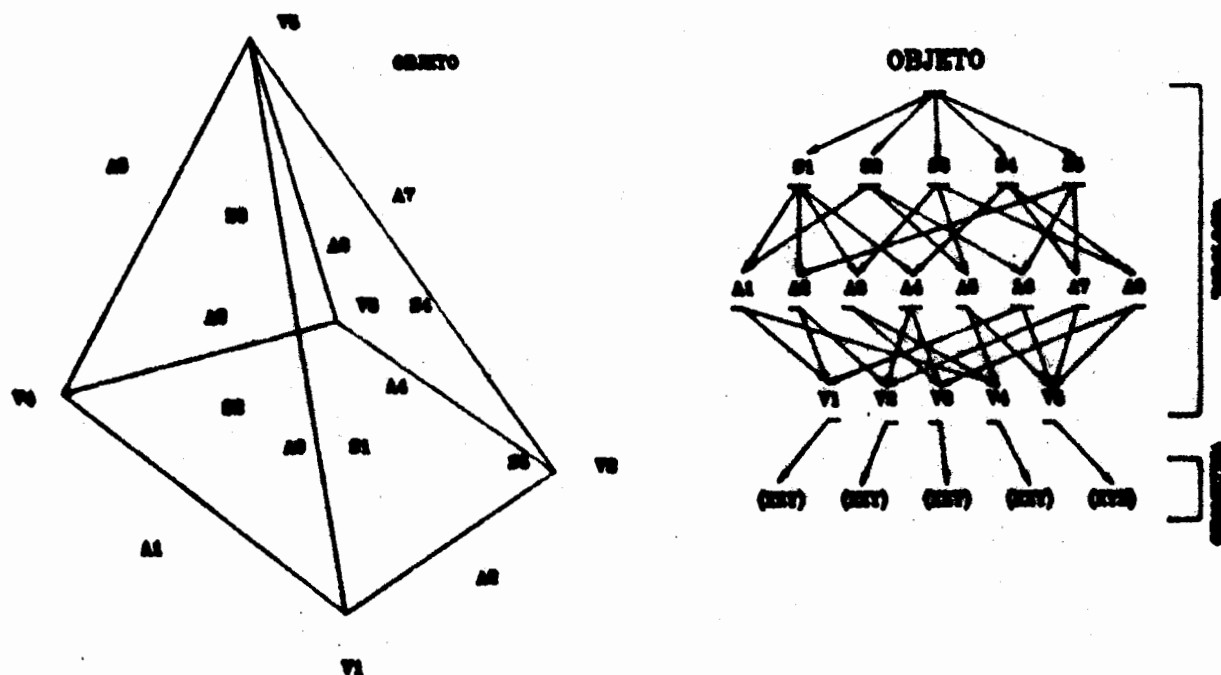
Esta tecnología representa a los objetos mediante segmentos de línea o en ocasiones curvas cuádricas interconectados. En función a las capacidades del sistema, se pueden generar figuras de alambre en 2, $2^{1/2}$ (proyección tridimensional sin información de la coordenada z), y 3D [44]. Aunque este tipo de representación permite desplegar objetos relativamente complejos, su estructura de datos y la falta de información no geométrica, como por ejemplo el tipo de material, limitan la interrogación de los mismos. Es posible lograr cierto realismo con la información, como por ejemplo, eliminar líneas ocultas si en la estructura de la información se agrega coherencia.

En estos esquemas, la información se maneja bajo una estructura jerárquica donde normalmente los vertices son los elementos base de un árbol (fig. 2.2). El concepto de objeto es la unión de segmentos geométricos y el equivalente a caras de un objeto se considera como planos.

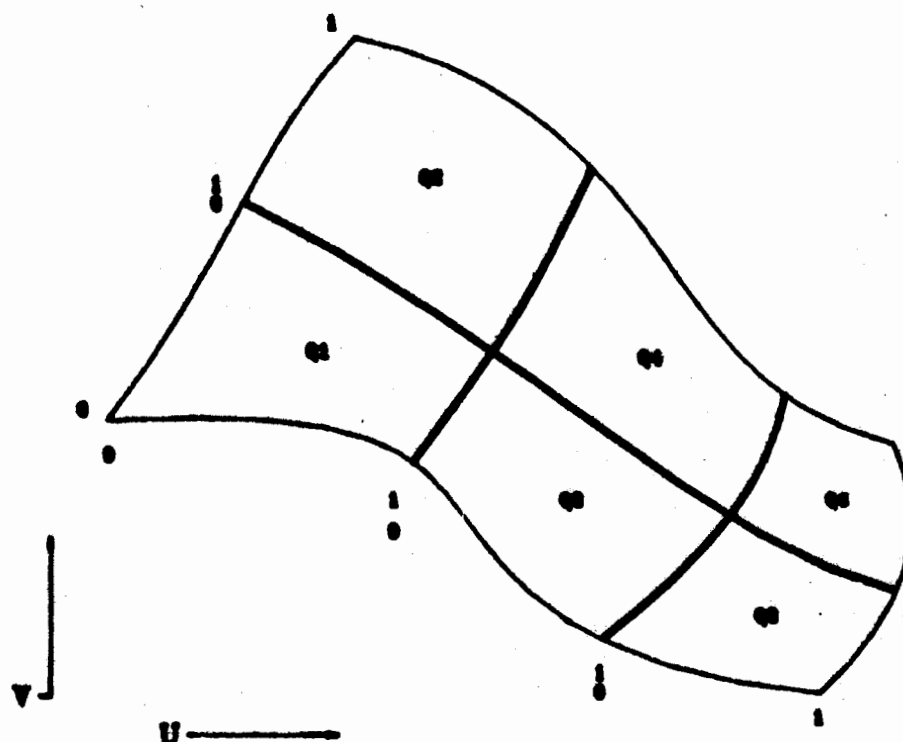
2.2 Modelado de Superficies

Este campo de representación de objetos surge en la década de los 60's debido a los trabajos de Coons orientado al diseño de estructuras de aviones, barcos, etc. La representación de estas formas, denominadas en ocasiones libres o esculpidas descansa en dos conceptos básicos [3]:

- El empleo de expresiones paramétricas
- La descomposición en partes de una curva o superficie



**Fig. 2.2 FIGURA DE ALAMBRE Y SU ESTRUCTURA ASOCIADA
OBSERVE LA DESCOMPOSICION ENTRE TOPOLOGIA Y GEOMETRIA**



**Fig. 2.3 SUPERFICIE DE FORMA LIBRE FORMADA POR SEGMENTOS
Q1 QUE MANTIENEN CONTINUIDAD EN SUS FRONTERAS. OBSERVE LA
VARIACION ENTRE 0 y 1 DE LOS PARAMETROS U,V**

El primer concepto permite representaciones multivaluadas con respecto a un sistema coordinado y mantiene independencia de la representación con respecto a los ejes, eliminando el problema de valuaciones con tangente infinita, facilita la representación de curvas en sistemas de coordenadas homogéneas, y permite la interrogación de entidades mediante la parametrización[6]. Otros beneficios de ésta son: representaciones explícitas, por lo cual es directo el cálculo de puntos sobre las curvas y superficies; su formulación es adecuada para definir curvas y superficies en forma segmentada; las curvas y superficies pueden definirse en función a combinaciones lineales de funciones escalares de parámetros con coeficientes vectoriales; y si se aplica la idea anterior, cualquier transformación geométrica sobre la curva o superficie se logra aplicando la transformación a los coeficientes vectoriales manteniendo una definición matemática sin modificaciones [7].

El segundo concepto elimina el problema de representar una curva o superficie por una sola función analítica, que en ocasiones produce un polígono de alto orden involucrando problemas de solución (búsqueda de raíces) y de oscilación, aunque incurre en el hecho de tener que colocar condiciones de continuidad entre los segmentos de curva modelados.

Quizá las principales desventajas de un sistema de modelado de superficies se refieren a la intuición para definir una forma, la dificultad de combinarse con otros elementos en el espacio mediante operadores booleanos y la complejidad de realizar revisiones topológicas y geométricas que aseguren la validez de la superficie modelada.

Bajo un esquema de superficies, un objeto se define por la integración de *segmentos* o *parches* que mantienen alguna relación de continuidad en sus fronteras (fig 2.3).

Las superficies de forma libre o SFL pueden categorizarse en función a las restricciones que soportan[8] y en general se representan de la siguiente forma:

$$S(u,v) = \{ (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \}$$

donde X, Y, Z son funciones polinomiales en u, v que al ser evaluadas, generan los puntos (x, y, z) sobre la superficie $S(u, v)$. Las funciones polinomiales que se emplean en las SFL son cúbicas debido a que es el grado más pequeño que permite tener una curva con un punto de inflexión, permite la posibilidad de girar en el espacio [6 pag. 119], se puede evaluar su segunda derivada con fines de continuidad, disminuyen los problemas de oscilación y de localización de raíces y son una solución a la curva que minimiza su energía de tensión interna (3.8).

Existen tres métodos generales para especificar la forma deseada de una curva libre (fig. 2.4)

- Definición de atributos vectoriales a los vértices extremos tales como la posición, magnitud y dirección.
- Definición de las fronteras de la superficie.
- Definición de un conjunto de vértices de control que en conjunto forman un polígono de control que mimifica la forma deseada final.

El primer método requiere información vectorial explícita para la definición de un segmento de curva o superficie, lo que en ocasiones puede ser un trabajo complejo, pues el diseñador se ve en la necesidad de especificar, por ejemplo, la magnitud de los vectores primera derivada o la dirección del vector producto cruz en una esquina de una superficie, cuyos valores pueden no ser tan evidentes (fig. 2.4a). Si el diseñador desea lograr un efecto particular sobre la forma de la superficie se le deben proporcionar elementos de control más accesibles y deben responder a la idea intuitiva para la cual se proporcionan, lo cual conduce a la necesidad de generar expresiones matemáticas que permitan lograr, mediante parámetros de control, esta facilidad de definición.

La segunda posibilidad, *definición de fronteras*, requiere que el diseñador proporcione la forma de estas, ya sea mediante una definición explícita o aprovechando algún generador del

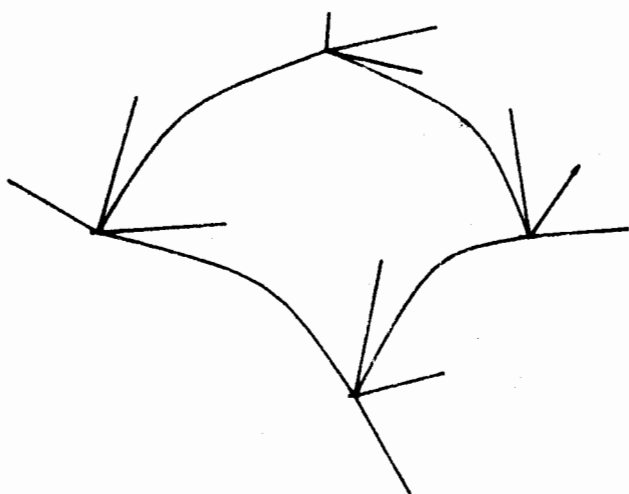


Fig. 2.4a SEGMENTO DE SUPERFICIE FORMADO
INFORMACION VECTORIAL EN LOS VERTICES

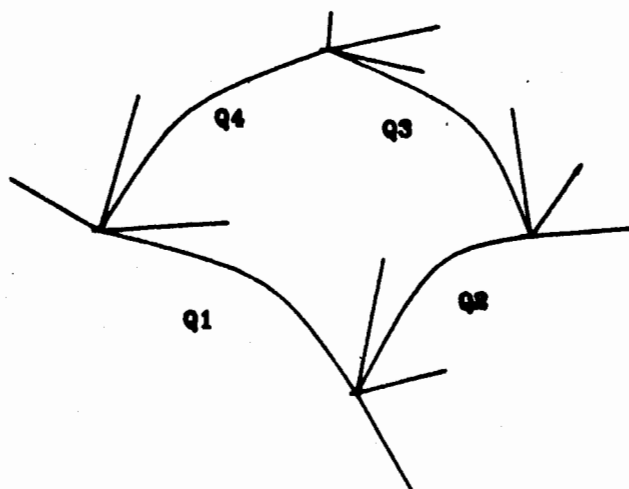


Fig. 2.4b SEGMENTO DEFINIDO POR INFORMACION VECTORIAL
Y ESPECIFICACION DE LAS FRONTERAS

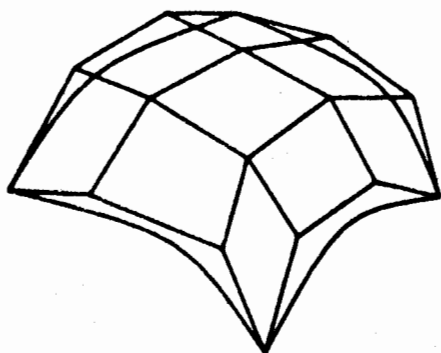


Fig. 2.4c SEGMENTO DE SUPERFICIE DEFINIDO
POR UN POLIGONO DE CONTROL QUE MIMIFICA LA
FORMA

sistema(fig 2.4b). Esta filosofía también requiere la definición de información vectorial en las esquinas de los segmentos de superficie aunque permite al usuario definir un segmento bajo interpolación entre dos curvas o cuatro curvas frontera. El tipo de interpolación define la forma de la superficie.

La definición por *polígonos de control* permite observar la forma antes de generar la superficie debido a que el polígono la mimifica(fig 2.4c). Esta filosofía sustituye la necesidad de especificar información vectorial, tal como primeras o segundas derivadas, apoyándose en expresiones matemáticas que integran la información de los vértices como parte de estos elementos vectoriales, proporcionando al diseñador parámetros de control altamente intuitivos. Además, es posible controlar algunas restricciones de continuidad entre los segmentos de SFL con el correcto ordenamiento de los vértices de control, cualidades que han hecho de esta filosofía una de las más populares en los ambientes de CAD.

Un sistema de modelado de curvas y superficies debe proporcionar las siguientes facilidades[20]:

- Un sistema adecuado de especificación de la forma deseada, que puede ser alguno de los anteriores, aunque los polígonos de control presentan la mayoría de las ventajas.
- Evaluación múltiple, pues es común diseñar formas donde $f(x,y)$ posea diversos z_i . Esta situación se resuelve por segmentación de una curva o superficie.
- Independencia de los ejes, para liberarse de los problemas de evaluación con pendiente infinita. Esta situación también se resuelve con la representación paramétrica.
- Control global y local. Esta propiedad se refiere a poseer los mecanismos adecuados para variar la forma de la superficie globalmente y también en pequeños sectores con objeto de afinar la

forma (localmente)(fig 2.5a).

- Control de oscilación. Algunas formulaciones tienen la característica de oscilar sobre los puntos de control en lugar de suavizar la representación. Es posible controlar la oscilación, o al menos disminuirla, realizando formulaciones basadas en polinomios de órdenes pequeños o aplicando tensión a la curva(2.5b).

- Versatilidad, referida a la cobertura geométrica que se puede lograr con la técnica de representación. Es deseable que el sistema permita una gran variedad de representaciones para no frustrar al diseñador, lo cual se logra mediante la inclusión de parámetros de control, aunque el exceso de estos puede llevar a confusiones.

- Orden de continuidad. Como en las representaciones que se consideran se maneja el concepto de segmentación de la curva o superficie, se requiere que entre cada segmento sea posible establecer ordenes de continuidad. La continuidad cero $-C^0-$ se refiere a mantener continuidad de posición; C^1 se refiere a continuidad en primera derivada o de vector tangente; C^2 se refiere a mantener continuidad de segunda derivada o de curvatura(fig 2.5c).

2.3 Modelado de sólidos

El modelado de sólidos -MS- es el campo del Diseño Asistido por Computadora que proporciona la capacidad de representar, manipular, analizar y consultar objetos reales en una computadora con un origen que se remonta a principios de los 70's [9]. Los objetos a los cuales se refiere el MS son funcionales más que estéticos, en los cuales el concepto de real se refiere a la idea intuitiva de lo que es real para el hombre.

Desde un punto de vista muy general, un sólido (representación de

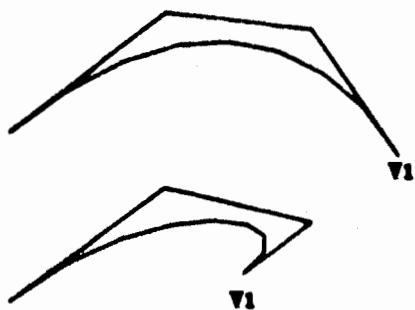


Fig. 2.5a CONTROL GLOBAL SOBRE UNA CURVA. OBSERVE LA ALTERACION DEL VERTICE V1 Y EL SEGUIMIENTO QUE TIENE LA CURVA.

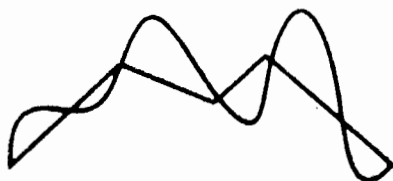


Fig. 2.5b LA CURVA NO DEBE OSCILAR AL MOMENTO DE GENERACION. ESTO SE CORRIGE CON TENSION (DISMINUCION DE LA LONGITUD DE ARCO) O CON POLINOMIOS DE MENOR GRADO.

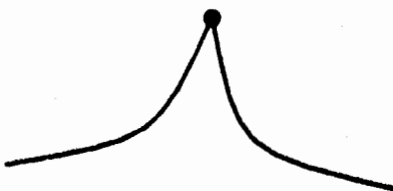


Fig. 2.5c CONTINUIDAD DE POSICION ENTRE DOS SEGMENTOS



Fig. 2.5c CONTINUIDAD DE PRIMERA DERIVADA O DE VECTOR TANGENTE

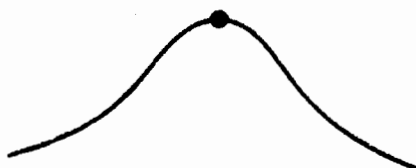


Fig. 2.5c CONTINUIDAD DE SEGUNDA DERIVADA O DE VECTOR CURVATURA

un objeto real), se puede entender como un *conjunto continuo* de puntos en E^3 que se mapean a una *representación ideal* en computadora, y donde el conjunto de puntos mantiene las siguientes propiedades para considerarse útil bajo la filosofía de modelado de sólidos

- Rigidez. Un objeto sólido debe mantener su forma invariante, independiente de su orientación o posición, esto es, el sólido no debe de variar bajo transformaciones rígidas (desplazamiento, rotación, espejo)(fig 2.8a)

- Regularidad: un sólido tiene un interior y exterior, y los elementos de sus fronteras no deben estar aislados o flotando. Un conjunto de puntos A en E^3 es un *conjunto regular* $r(A)$ si $r(A)=c(i(A))$ donde $c(A)$ e $i(A)$ son la cerradura y el interior de A tomando una definición topológica (anexo)(fig 2.8b)

- Definición finita en el espacio ocupado: los sólidos no pueden mantener fronteras infinitas.

- Cerradura bajo operaciones booleanas (ver la definición de espacios medios y los esquemas CSG en este capítulo). Intuitivamente, un operador booleano opera sobre dos objetos y genera uno nuevo en función del operador específico. Los operadores booleanos son: la adición de objetos, la diferencia entre objetos, la unión de volúmenes entre objetos.

- Descriptibilidad finita: deben existir aspectos de los sólidos que permitan una descripción finita de los mismos, por ejemplo el número de vértices o el número de caras que los forman de tal suerte que sean representables en computadora.

- Determinismo en las fronteras: las fronteras del sólido deben indicar, sin ninguna ambigüedad, qué está adentro y qué está afuera, esto es, las fronteras deben ser orientables (ver el

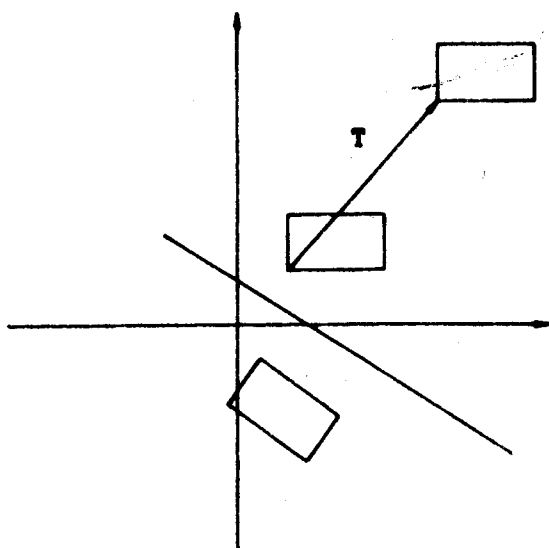
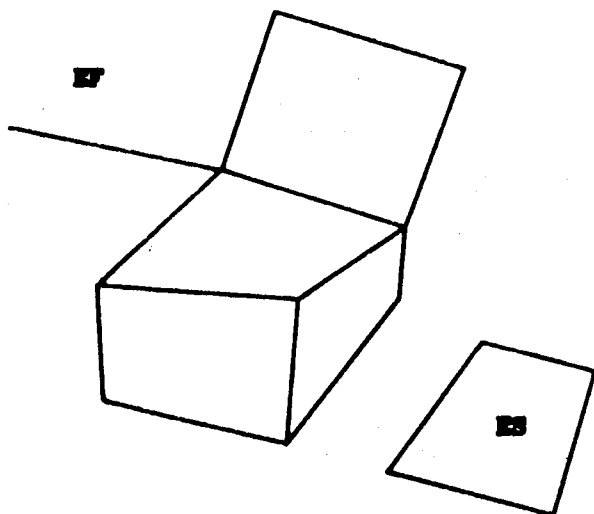


Fig. 2.6a LAS TRANSFORMACIONES RIGIDAS MANTIENEN LA FORMA DE UN OBJETO. ESTAS SON LA ROTACION TRANSLACION Y ESPEJO. OBSERVE QUE EL RECTANGULO MANTIENE SU FORMA.



**Fig. 2.6b LOS OBJETOS REGULARES NO DEBEN MANTENER ELEMENTOS SUELTOS O FLOTANDO
ES=ELEMENTO SUELTO
EF=ELEMENTO FLOTANDO**

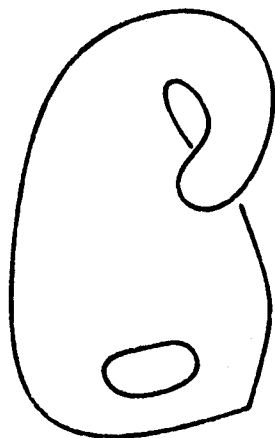


Fig. 2.6c LOS OBJETOS ORIENTABLES SE DISTINGUEN PORQUE ES CLARO CUAL ES SU SUPERFICIE INTERNA Y CUAL SU SUPERFICIE EXTERNA. LA BOTELLA DE KLEIN ES UN OBJETO NO ORIENTABLE

concepto de orientabilidad tres párrafos adelante)(fig 2.6c).

De estas propiedades, Requicha[4] demostró que los subconjuntos de E^3 que son cerrados, limitados, regulares y mantienen fronteras cuando menos semianalíticas son apropiados para la modelación de sólidos y les denomino *r-sets*.

Ahora bien, representar un sólido por un conjunto de puntos en el espacio es redundante pues no aprovecha la *coherencia espacial*[20] y además ocupa demasiados recursos de computadora. Una alternativa es representar al conjunto de puntos como un conjunto limitado por fronteras que representan superficies con las siguientes características [10]:

- Cerradas, esto es, continuas sin rompimientos, lo cual no impide la existencia de huecos en el objeto pero sí excluye las estructuras abiertas(fig 2.6d). Esta se puede asegurar revisando condiciones topológicas, como por ejemplo, que cada arista es adyacente a exactamente dos caras y dos vértices. La cerradura implica además que el perímetro de cada cara contiene un número igual de bordes y vértices y los perímetros asociados a un vértice mantienen un número de bordes y caras igual (excepto en algunos casos especiales como en el vértice de un cono).

- Orientabilidad, esto es, la propiedad que permite distinguir ambos lados de una superficie. Algunas superficies pueden ser cerradas y no orientables, como el caso de la Botella de Klein. Moebius propuso un método para determinar cuando una superficie poliédrica cerrada es orientable. A los bordes de cada cara se les asigna una dirección consistente tal que el interior de la cara va en dirección hacia la derecha. En una superficie cerrada cada borde recibe dos flechas, una por cada cara que limita. La superficie es orientable si y solo si es posible ordenar los bordes tal que cada borde mantenga una flecha en cada dirección.

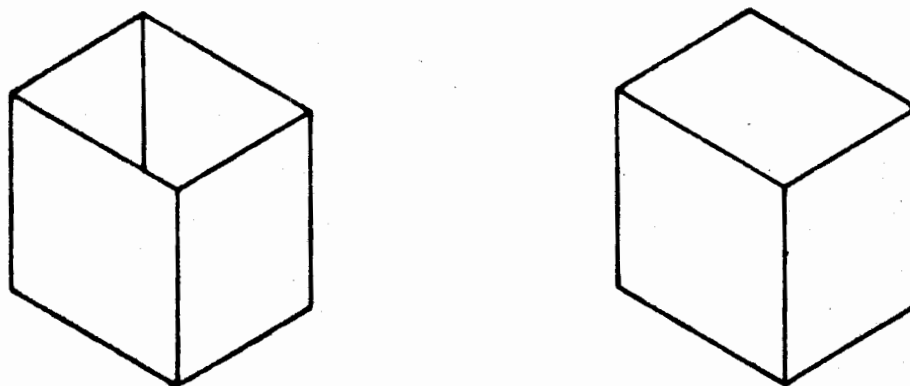


Fig. 2.6d LA ESTRUCTURA DE LA IZQUIERDA ES ABIERTA SIN TAPA, LA DERECHA ES CERRADA. LAS ESTRUCTURAS ABIERTAS COMO LA MOSTRADA PUEDEN EMULARSE COMO CERRADAS AGREGANDO INFORMACION FANTASMA A LAS ESTRUCTURAS DE DATOS.

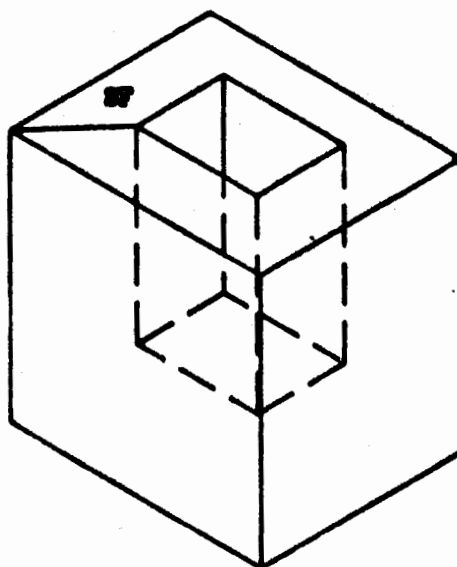


Fig. 2.7 UN OBJETO QUE TIENE HUECOS SE TRANSFORMA EN UNO SIMPLEMENTE CONECTADO MEDIANTE LA AGREGACION DE SEGMENTOS FANTASMA CUYA REPRESENTACION EXISTE EN LA ESTRUCTURA DE DATOS PERO NO SE DESPLIEGA. SF-SEGMENTO FANTASMA

- No intersectadas así mismas, en este caso se desea que las superficies que limitan a un objeto real no se intersequen así mismas con objeto de mantener la idea de un sólido real. No existen condiciones puramente topológicas que permitan asegurar esta propiedad por lo cual es necesario invocar procedimientos de revisión geométricos.

- Limitada, esto es, una superficie que mantiene las propiedades anteriores genera una división del espacio en dos conjunto disjuntos, uno de los cuales es finito (si la condición de no-intersección no se respeta, se generarían más de dos dominios).

- Conectada, esto es, una superficie puede ser cerrada pero estar formada de varias partes desconectadas (por ejemplo un cubo con una cavidad).

Los *formulas de Euler* pueden emplearse en forma práctica para demostrar la validez de un objeto desde un punto de vista topológico[21], aunque su dominio, en la práctica, se limita en gran forma a las figuras poliédricas, de las cuales requiere las siguientes definiciones extras :

- Todas sus caras están *simplemente conectadas* si se mantiene un anillo simple de bordes y no existen agujeros entre ellos. Si esta condición no se mantiene en un objeto, es posible incluir conexiones umbilicales para lograrla(fig 2.7).

- Un cuerpo sólido debe ser simplemente conectado de tal suerte que sea isomorfo a una esfera.

Si un sistema de MS garantiza las propiedades anteriores en sus superficies, entonces garantiza que los operadores sobre los sólidos se pueden aplicar interactivamente sin intervención humana.

2.3.1 Esquemas de representación para modelado de sólidos

Los algoritmos geométricos no manipulan objetos sólidos; en lugar de esto, manipulan estructuras simbólicas que representan sólidos [4]. Requicha[4] define una *representación* de un sólido como una colección finita de símbolos (de un alfabeto finito) que designa a un sólido de M , donde M es el *espacio de modelado matemático* de objetos cuyos elementos son *sólidos abstractos* denominados *r-sets*. Las *técnicas de representación* de un modelador de sólidos definen el espacio de representación R de un modelador. Aquellas representaciones que realmente pueden ser construidas por el modelador de sólidos de acuerdo a sus reglas de sintaxis se denominan *admisibles*. Un *esquema de representación* se define formalmente como una relación $s:M \rightarrow R$ (fig 2.8).

Se dice que una representación r en R es *completa* o *no ambigua* si ésta corresponde a un sólo objeto, esto es: si el conjunto $s^{-1}(r)$ es un solo elemento $\{m\}$ de M . La representación es *única* si los objetos correspondientes no admiten otra representación en el esquema, esto es si $s(s^{-1}(r)) = \{r\}$. Resumiendo, se puede decir que un esquema de representación es una *relación entre sólidos abstractos y representaciones*. Una representación es *inválida* si ésta no corresponde a ningún sólido. Una representación *válida* es *ambigua* si ésta corresponde a varios objetos. Un sólido no tiene una *representación única* si puede ser representado en diversas formas en el esquema. Como una observación, S puede generar representaciones en R que son incongruentes, por ejemplo, rotar un perfil más de 360^0 , lo cual sintácticamente es una representación correcta pero semánticamente no. Por tal motivo, en las definiciones anteriores puede mejorarse la definición de S indicando que su rango será un subconjunto de R al que llamaremos V y que forma el conjunto de representaciones que son válidas. De lo anterior puede indicarse que los sistemas de modelado variarán en el espacio de modelado, en el espacio de representación y en los esquemas de representación.

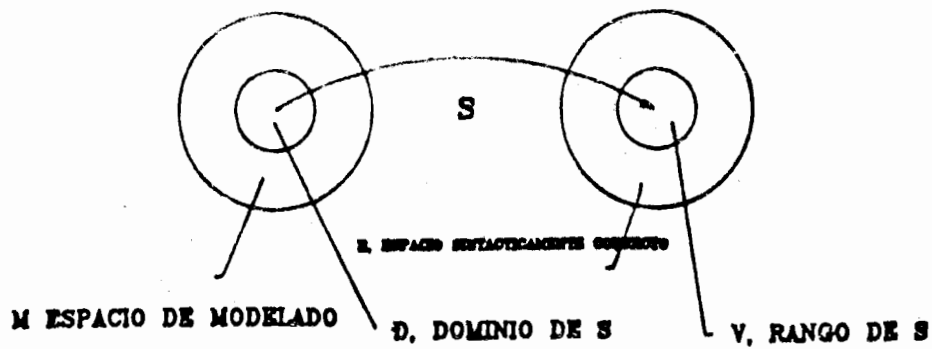


Fig. 2.8 DOMINIO Y RANGO DE UN ESQUEMA DE REPRESENTACION

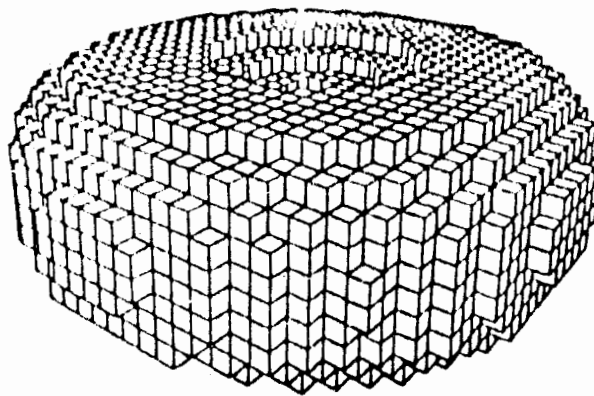


Fig. 2.9 ENUMERACION EXHAUSTIVA

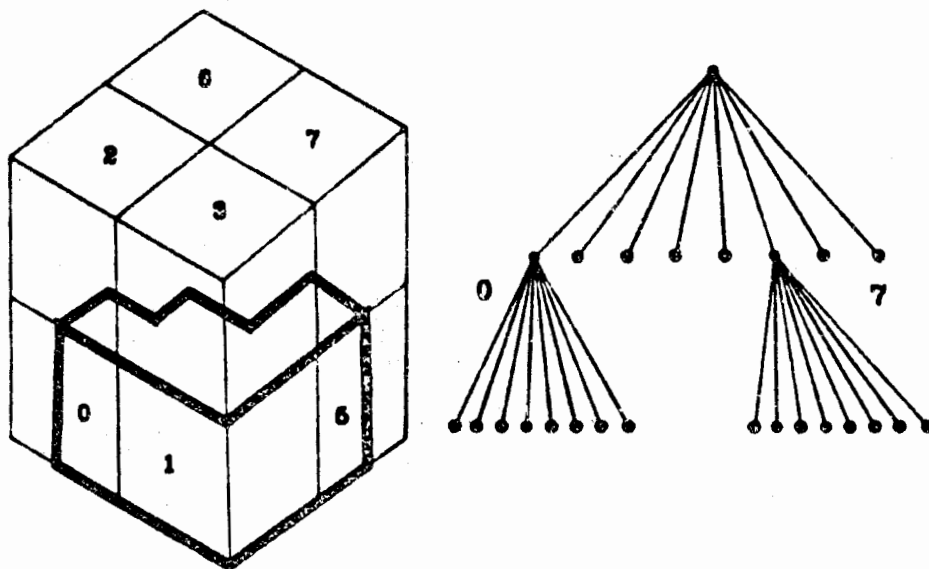


Fig. 2.10 DIAGRAMA DE UN OCTREE Y SU ARBOL CORRESPONDIENTE. OBSERVE LA INTENSIDAD DE LOS NODOS

2.3.2 Propiedades de los esquemas de representación

Los esquemas tienen características que nos permiten evaluarlos con más detalle:

- Poder expresivo o cobertura geométrica, que se refiere al universo de objetos en M que son cubiertos por los esquemas de representación. Aquí puede preguntarse sobre la precisión al modelar los objetos complicados y sobre la posibilidad de extender el dominio M .
- Validez, que se refiere a si todas las representaciones admisibles generadas por el esquema de representación son válidas, esto es, si designan algún sólido de M . Un esquema con esta propiedad se dice que es *sintácticamente válido*.
- No ambigüedad y unicidad, que se relaciona con el hecho de si todas las representaciones modelan exactamente un sólido y si algunos sólidos tienen más de una representación válida.
- Lenguajes de descripción. Se refiere a la clase de lenguajes para describir sólidos que pueden soportarse en un sistema de modelado. Estos, pueden estar basados en el esquema de representación o requerir basarse en una conversión desde otra representación.
- Conciso, lo cual se refiere al tamaño, en términos de almacenamiento en computadora que genera la representación de objetos prácticos e interesantes.
- Cerradura de operaciones. Al describir sólidos y las operaciones de manipulación que actúan sobre ellos, es posible preservar o no la validez de la representación. Además debe preguntarse si al manipular un sólido el resultado puede ser representado bajo el

esquema de representación.

- Facilidad computacional y aplicabilidad. Este punto se refiere a la clase de algoritmos que pueden escribirse para el esquema de representación, la clase de complejidad computacional que involucran, y la clase de aplicaciones a las que está orientado el esquema de representación.

2.3.3 Taxonomías de representación

Estas pueden categorizarse en los siguientes:

- o Modelos de Descomposición
- o Modelos Constructivos
- o Modelos de Frontera
- o Modelos Híbridos

2.3.3.1 Modelos de descomposición

Estos modelos describen sólidos mediante una combinación de estructuras básicas que mantienen relación bajo operaciones de agregación. Las estructuras básicas se mantienen en una base de datos fija. Sus variaciones se encuentran en el tipo de objetos básicos y la forma de manejarlos y representarlos.

Pertenecen a estos modelos los generados por los siguientes esquemas :

Enumeración exhaustiva

En esta variación, el espacio se divide en cubos que pertenecen parcial o totalmente al objeto que se desea modelar(fig. 2.9). De esta forma se avanza en cuanto al hecho de desear enumerar todos los puntos que pertenecen al objeto y en lugar de eso se recurre a una subdivisión regular del espacio. Cada cubo que comprende a la figura queda completamente definido por sus esquinas, siendo

necesario definir tan solo una de ellas y mantener una construcción regularizada del objeto. Una estructura simple para la codificación de estas estructuras es asignar a un arreglo tridimensional un código binario que indique o no la existencia de información en el espacio de interés.

La enumeración exhaustiva tiene la ventaja de mantener una representación casi explícita de un objeto, lo cual permite la integración de algoritmos de interrogación geométrica basada en la coloración de sus celdas, pero por otra parte, la codificación de un sólido mediante esta técnica representa un trabajo muy laborioso para un diseñador, por lo cual, si se desea emplear las bondades de este esquema, es necesario recurrir a la transformación de un esquema que sea más simple en cuanto a la definición de una forma. Si se desea revisar las propiedades de superficies bien formadas, este esquema presenta la ventaja de mantener una topología simple de revisar.

La estructuración que sugiere el esquema lo mantiene con ventajas para la representación de información en formatos digitales y de ahí su aplicación a procesamiento digital de imágenes. Una de sus grandes desventajas es la gran cantidad de recursos de almacenamiento que requiere, por ejemplo, una resolución de 256^3 requiere 16Mbits, y esta es apenas una resolución aceptable. Su cobertura geométrica le permite representar todas las formas válidas pero cuando la forma o el objeto no es coplanar, se pierde resolución. Todas las enumeraciones exhaustivas no tienen ambigüedad y además son únicas ya que en un espacio fijo de interés y resolución, cada sólido tiene una representación única. Los lenguajes para su descripción se basan normalmente en la traducción de otro esquema de representación.

Esquemas de subdivisión espacial

Estos esquemas realizan una subdivisión más eficiente del espacio adaptándose a la forma del objeto y aprovechando la coherencia espacial. Este concepto de subdivisión usa la propiedad fundamental de que el número de nodos necesarios para la

representación de un objeto es proporcional al área de su superficie[22], de esta forma, bajo una resolución r se requiere ar^2 elementos de almacenamiento, mientras que en la enumeración exhaustiva se requiere ar^3 elementos.

Bajo estos esquemas encontramos las siguientes representaciones:

"Octrees y Quadtrees"

Ambos son esquemas de representación, los primeros para objetos 3D y los segundos su contraparte en 2D. Los "octrees" realizan una subdivisión recursiva del espacio de interés en ocho octantes, representando a cada octante por la división de un árbol en ocho nodos (fig. 2.10). Es común tener que realizar una transformación del objeto a representar a un sistema de coordenadas adecuado para los "octrees". El primer nivel de los "octrees" envuelve a todo el objeto, y de ahí, las subsecuentes divisiones se mantendrán adentro del primer nivel de "octrees". Cada nodo del "octree" consiste de un código de coloreado y ocho apuntadores hacia sus hijos. El código es un atributo de cada nodo. Si el código es negro, quiere decir que el espacio que representa esta completamente ocupado por material y se tiene entonces una hoja del árbol. Si el código es blanco, el espacio representado no tiene material y nuevamente tenemos una hoja. Si el código es gris, quiere decir que el espacio que se representa esta parcialmente ocupado por material y se procede a una subdivisión del espacio en ocho regiones.

Bajo este esquema, cada subdivisión requiere analizar el espacio de interés contra una primitiva del sistema. La colección de posibles primitivas depende de la factibilidad de crear un algoritmo de clasificación para cada una.

Los "octrees" y los "quadtrees" pueden implementarse tomando como base información digital existente. Un modelador de "octrees" debe comprender los siguientes módulos para considerarse completo: el generador del árbol; el módulo de operación booleana entre árboles, el cual realiza la generación de un nuevo árbol bajo la

unión, diferencia, e intersección de objetos; los operadores geométricos que aplican transformaciones a la representación en "octrees"; los operadores de análisis y la generación de despliegue.

Con respecto al poder expresivo, los "octrees" dependen de los algoritmos de clasificación para un conjunto de primitivas además de que mantienen una aproximación a la forma final, que puede ser muy detallada pagando un alto costo en memoria de almacenamiento. Con respecto a la validez, si no existen requerimientos especiales de conectividad, todos los "octrees" son representaciones válidas de algún sólido. Ahora bien, hasta los límites de resolución, todos los "octrees" definen un sólido sin ambigüedades. Su lenguaje de descripción es aplicable a lo mencionado en la enumeración exhaustiva. Con respecto a la facilidad de manejar información más concisa, los "octrees" no son tan grandes como la enumeración pero aún requieren una gran cantidad de memoria, que para el diseño promedio de una pieza en ingeniería llega al orden de 1MB. Con respecto a su manejo en computadora y la aplicabilidad de operadores, la mayoría de las operaciones manejan su complejidad en forma proporcional al recorrido de sus árboles.

Subdivisión espacial binaria

Esta representación es aplicable a los conceptos de octrees con la diferencia de que al momento de realizar la subdivisión de un nodo gris, ésta se realiza en forma binaria sobre las direcciones x,y,z. Esta división crea un pequeño ahorro en cuanto a espacio de almacenamiento y sus ventajas se mencionan en los siguientes párrafos.

Subdivisión del espacio linealizada

Se refiere a una alternativa a las estructuras de datos de los octrees reemplazadas por estructuras de datos lineales que permiten almacenar una representación octree.

a) 'Octrees' lineales

Si la numeración de los octantes de un octree va del 0 al 7, estos números pueden emplearse para construir una dirección de trayectoria para cada nodo del octree excepto para la raíz(2.11). Evidentemente, la dirección de trayectoria de un nodo octree de nivel 1 se convierte en una secuencia de 1 dígitos 0,...,7. Un dígito especial marca la cola de un número que tiene menos dígitos que la máxima resolución e indica la existencia de una hoja. Gargantini[23] basa su representación en esta observación creando listas como la siguiente: {03,1X,51,53} que generan trayectorias solamente a los nodos negros. El 03 indica que debe seguirse por las ramas 0 y cuando no sea posible avanzar más, debe tomarse el nodo 3 y en el se tiene la información de un nodo negro. El caso de 1X indica avance por la rama 1 y tomar ese nodo como negro. Aquí la X indica una trayectoria con resolución restringida. Otra codificación lineal compacta de un octree es la llamada representación DF que se basa en recorrer el árbol en preorden y almacenar la información encontrada. Esta representación emplea la nomenclatura B,W,C para denotar nodo negro, blanco e interno respectivamente. Como el alfabeto solo mantiene tres símbolos solo se requieren dos bits para codificar cada nodo. Samet y Tamminen[24] muestran algoritmos que manipulan este tipo de representaciones para un caso bidimensional de una manera casi directa.

b) 'Bintrees'

Subdivisión lineal binaria; en comparación con los 'octrees' lineales, su representación es un poco más compacta porque el número de hojas es menor. Además, dos hojas, en el nivel más bajo del árbol, pueden codificarse con un solo bit ya que solo existen dos posibilidades, lo cual es un parámetro que ha llevado a trabajar sobre la representación de árboles con un bit por nodo. En el caso de 3D, Samet y Tamminen[25] denominan como bintree la representación correspondiente y describen los algoritmos para la evaluación de expresiones booleanas.

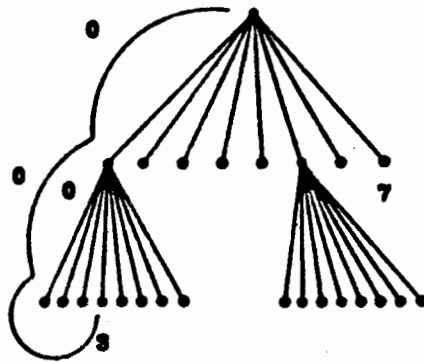


Fig. 2.11 TRAYECTORIA DE {03, DE UN OCTREE LINEAL

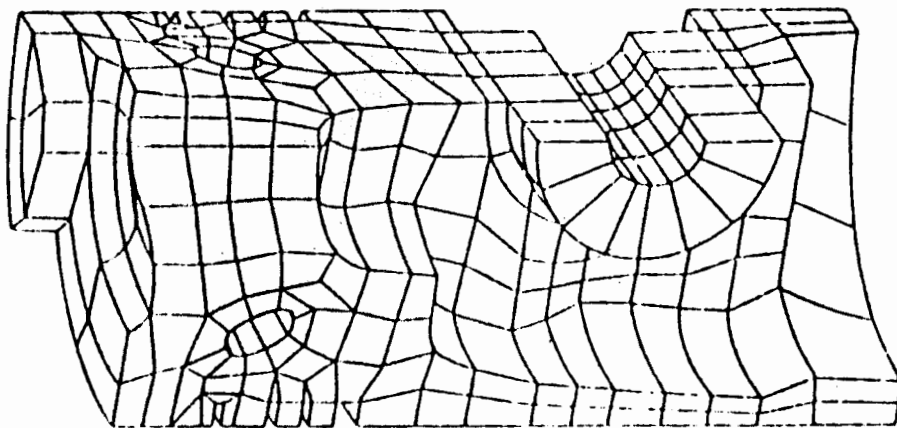


Fig. 2.12 OBJETO MODELADO POR DESCOMPOSICION CELULAR Y UNA CELDA TIPICA DE 20 VERTICES, 4 DE ELLOS OCULTOS

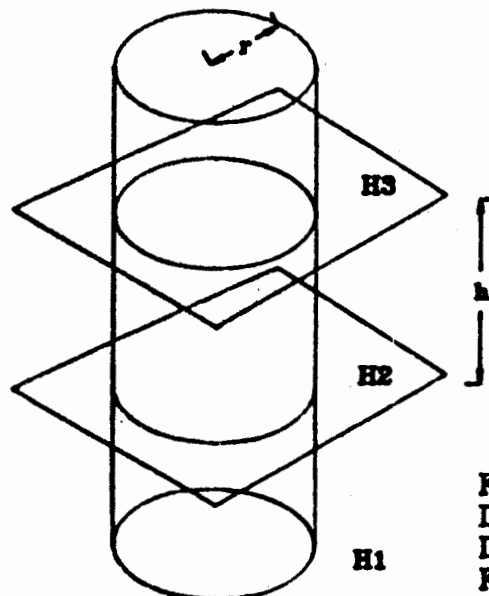


Fig. 2.13 MODELO DE ESPACIO MEDIO DE UN CILINDRO FINITO

Descomposición celular

Se basa en la representación de objetos en entidades que pueden o no ser cubos como se considera en los casos anteriores. Se mantiene un conjunto de celdas básicas y un operador de unión entre ellas (fig. 2.12). Comúnmente, las celdas se contruyen como una parametrización de las celdas básicas. Las células pueden ser cualquier entidad topológicamente equivalente a una esfera. El sólido se forma por una colección de celulas semidisjuntas que se tocan en su frontera pero que no mantienen puntos internos comunes. Una celda típica puede ser un poliedro curvo determinado por 20 puntos (8 en las esquinas y 12 entre cada segmento de linea), de tal suerte que cada borde de una celda se representa por una cuádrlica y la superficie se transforma en una bicuádrlica. El poder expresivo de esta representación es general; su validez es difícil de determinar y se requiere la aplicación de algoritmos de chequeo de intersección para todo par de células; una descomposición válida define completamente un sólido pero la descomposición no es única para un sólido determinado; los lenguajes de representación requieren conversión de otras representaciones. ASM es un esquema que se adecúa a la representación de células para una aplicación directa de la descomposición que es el elemento finito. Este esquema se menciona más adelante.

2.3.3.2 Modelos constructivos

A diferencia de los modelos de descomposición, que basan la construcción de sólido en una operación de unión o de agrupación de primitivos, los modelos de construcción integran un conjunto de operadores más completo así como su combinación.

Modelos de espacios medios

Los modelos constructivos consideran a un sólido como un conjunto de puntos en E^3 . Su idea básica es iniciar a partir de un conjunto lo suficientemente simple que mantengan una representación directa y modelar otros conjuntos como combinaciones de los espacios simples. Los modelos de espacio medio aplican esta idea de manera directa. Cada punto X se asocia a una función que informa si éste es parte de un conjunto A o no de la siguiente forma:

$$g(X)=1 \rightarrow X \in A$$

$$g(X)=0 \rightarrow X \notin A.$$

Si $g(X)$ se representa en términos de una función analítica $f(x,y,z)$, entonces se habla de tomar subconjuntos del espacio que son de nuestro interés y que pueden ser evaluados directamente, además que las funciones analíticas excluyen conjuntos con patologías geométricas que se mencionaron en 2.3. Se dice que todos los punto $X=(x,y,z)$ tales que $f(X) \geq 0$ forman parte del conjunto de puntos, mientras que $f(X) < 0$ forman el complemento. $f(X)=0$ divide al espacio en dos subconjuntos, $f(X) \leq 0$ y $f(X) \geq 0$, denominados *espacios medios* -EM-. Los espacios medios permiten modelar geometrías como las cuádricas, pero no poseen la capacidad directa para representar las formas libres.

Los espacios medios forman las primitivas básicas de los *modelos de espacios medios*. Como los espacios medios son conjuntos de puntos, los operadores booleanos son un medio adecuado y natural para crear nuevas geometrías combinando las primitivas básicas. De esta forma, las operaciones de unión, representada por $\cup$, la intersección $\cap$ y la diferencia $\setminus$ se emplean para definir un objeto operando sobre espacios medios. Por ejemplo, la definición de un cilindro C de longitud h y de radio r es (fig. 2.13):

$$H_1: x^2 + y^2 - r^2 \leq 0$$

$$H_2: z \geq 0$$

$$H_3: z - h \leq 0$$

$$C = H_1 \cap H_2 \cap H_3.$$

De esta forma, el espacio de modelado M de un modelador por EM es la clase de combinaciones booleanas de los EM disponibles.

La representación de los modelos de espacios medios requiere de dos elementos:

- La representación propia de los espacio medios
- La representación de combinaciones booleanas de los espacios medios

En el primer punto, se puede recurrir a una representación explícita de los EM manteniendo un código y los parámetros correspondientes. Una alternativa a esto es mantener una representación de todos los espacios medios cuádricos mediante su definición

$$f(X) f(x,y,z) [x,y,z][A_{ij}][x \ y \ z \ 1]^T \quad \forall i,j=1,\dots,4,$$

donde la matriz de coeficientes A_{ij} determina una cuádrica específica.

Con respecto al segundo punto, existe la posibilidad de descomponer un sólido en una suma de productos, de la misma forma en que se representa un circuito digital. Así, un sólido S puede abstraerse como la unión de intersecciones entre espacios medios:

$$S = \bigcup_i \bigcap_j H_{ij}.$$

El poder expresivo de los modeladores por espacios medios está determinado por la selección de los espacios disponibles y la generalidad de los operadores disponibles; su validez queda restringida a la posibilidad de determinar cuando un espacio es cerrado y no contiene espacios infinitos; cualquier combinación válida de EM representa sin ambigüedad un sólido pero las representaciones de un sólido no son únicas; los lenguajes de descripción pueden ser simples e incluir descriptores gráficos como interfaz al usuario; los modelos pueden ser relativamente concisos, siendo en ocasiones que la descripción de algún modelo de interés se logre con algunos cientos de espacios medios; las

operaciones booleanas sobre espacios medios definen espacios medios, por lo cual se mantiene una cerradura; finalmente, la naturaleza de los algoritmos que operan sobre EM requieren de la aplicación de algoritmos basados en SMC[26] o clasificación de un miembro sobre un conjunto.

Geometría Constructiva de Sólidos (CSG)

Esta representación de sólidos, conocida como CSG, avanza con respecto a los espacios medios por el hecho de presentarle al usuario final primitivas que limitan un volumen en el espacio. El usuario de un modelador CSG opera sobre instancias parametrizadas de primitivas sólidas que se combinan bajo operadores booleanos (fig 2.14). Cada primitiva sólida está definida por una combinación de espacios medios a los cuales el usuario no tiene un acceso directo, por lo cual, el espacio de modelado M de un CSG es el mismo que el de los espacios medios excepto que solo pueden incluir conjuntos finitos de puntos. La forma más natural de representar un objeto bajo CSG es un árbol binario definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle \text{Arbol CSG} \rangle ::= & \langle \text{primitiva} \rangle \mid \\ & \langle \text{Arbol CSG} \rangle \langle \text{operador booleano} \rangle \langle \text{Arbol CSG} \rangle \mid \\ & \langle \text{Arbol CSG} \rangle \langle \text{transformación rígida} \rangle, \end{aligned}$$

donde $\langle \text{primitiva} \rangle$ es una instancia de una primitiva sólida representada por un identificador y una secuencia de parámetros de dimensión; $\langle \text{operador booleano} \rangle$ es alguno de los definidos anteriormente; $\langle \text{transformación rígida} \rangle$ es una traslación o una rotación. De esta forma, un árbol mantiene en las hojas a las primitivas, y en los nodos internos a los operadores y las transformaciones rígidas, generando así, una gráfica acíclica dirigida.

Cada primitiva define un conjunto limitado de puntos en E^3 y el conjunto de operadores no destruye esta propiedad, por lo cual, los modelos CSG siempre son conjuntos limitados; el dominio de un

**Fig. 2.14 ARBOL CSG DE UN OBJETO.
LOS NODOS DEL ARBOL SON OPERADORES
BOOLEANOS EN ESTE CASO DE UNION Y
DIFERENCIA.**

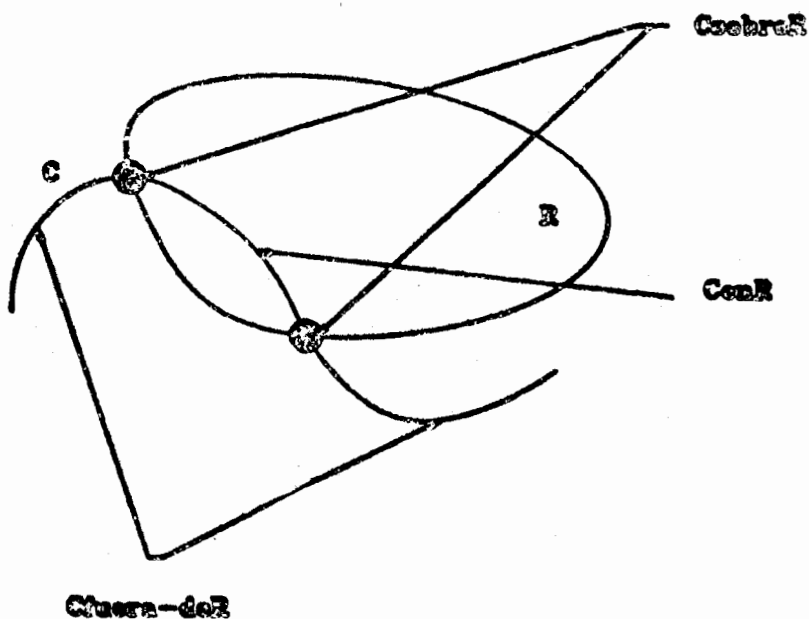
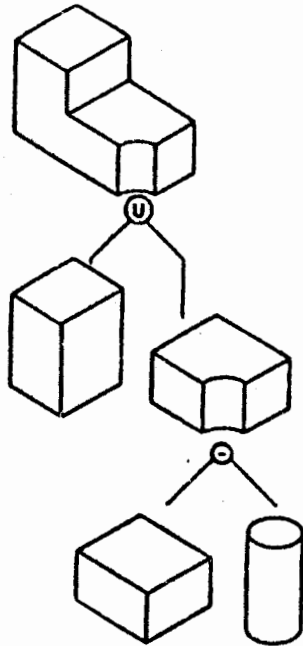


Fig. 2.15 CLASIFICACION DE C CONTRA R

modelador CSG depende directamente de los espacios medios con que cuenta; su facilidad al usuario depende también de la variedad de estos espacios medios.

Existen combinaciones de primitivos CSG que pueden generar objetos inconsistentes(2.3), por lo cual debe asegurarse que el modelador cuente con los medios para mantener siempre r-sets(2.3). La misma estructura de los árboles CSG sugiere la aplicación de algoritmos *divide-y-vence* los cuales mantienen la idea básica de dividir el problema de alguna manera en n partes, recursivamente resolver para cada parte y unir los resultados parciales. Desafortunadamente esta visión tan simple tiene problemas cuando los árboles no son balanceados, lo cual es común bajo este esquema de modelado cuando alguno de los objetos se obtiene con un número distinto de operaciones booleanas. Bajo la visión de *divide-y-vencerás*, el algoritmo SMC[28] es particularmente útil. El algoritmo SMC, trabaja sobre dos conjuntos: el conjunto candidato C y el conjunto de referencia R . Se espera que el algoritmo clasifique C contra R formando tres conjuntos $CenR$, $CsobreR$ y $Cfuera-deR$ representando dos espacios y su frontera(fig 2.18). La especificación del significado y las representaciones de los conjuntos involucrados definen un algoritmo SMC particular. El resultado de la clasificación puede emplearse, por ejemplo, en los algoritmos de operación booleana de instancias CSG.

El poder expresivo de los modeladores CSG está relacionado directamente con los espacios medios que se incluyen; la validez de los modelos está garantizada mientras se incluyan operadores regularizados; cada árbol define sin ambigüedad un sólido, pero no existe una representación única para cada sólido; los lenguajes de definición normalmente son textuales, aunque existen sistemas que soportan una interfaz gráfica indicando las primitivas gráficas a las cuales se tiene acceso; los árboles son relativamente concisos; la cerradura está garantizada por los operadores booleanos; su facilidad de cómputo está basada en el balanceo de los árboles y la aplicabilidad de los algoritmos de *divide y vencerás*; su aplicabilidad es grande y mantienen una base teórica

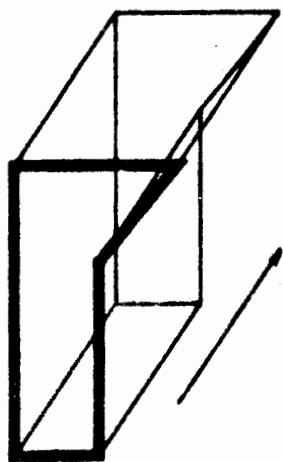
sólida.

"Sweeping" o Barrido

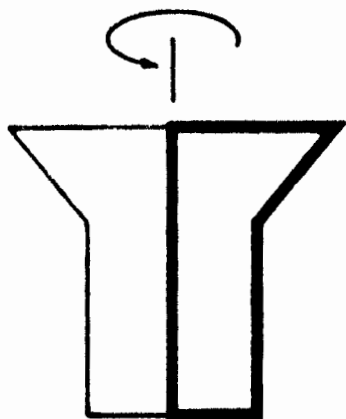
La idea básica de este esquema es la siguiente: un conjunto de puntos que se mueve en el espacio 'barre' un volumen, representando así un objeto en movimiento sobre una trayectoria. Considere el conjunto A sobre un plano, y un vector b; entonces S es el sólido barrido por A cuando éste se traslada, a lo largo de la trayectoria b, descripción que corresponde a una clasificación del 'sweep' denominada de *traslación*(fig. 2.18a). De manera similar se define un 'sweep' de *rotación* como un conjunto A que rota sobre un eje arbitrario de referencia(fig. 2.18b) y la combinación de ambos, el 'sweep' *híbrido*(fig. 2.18c). Estos esquemas no mantienen ambigüedad pero no son únicos; su dominio está limitado a objetos que puedan ser representados por traslación o rotación, y alguna combinación de ambas; la operación sobre un conjunto puede provocar fácilmente conjuntos que no son r-sets; su representación es natural para objetos sólidos que presentan movimiento en el espacio y de ahí su importancia en el contexto de manufactura donde permiten invocar procesos para la remoción de material y el estudio de la interferencia dinámica; los lenguajes de representación incluyen subsistemas de creación de perfiles bidimensionales cerrados que representan al conjunto A, así como generadores de trayectorias tridimensionales.

2.3.3.3 Modelos de fronteras (B-rep)

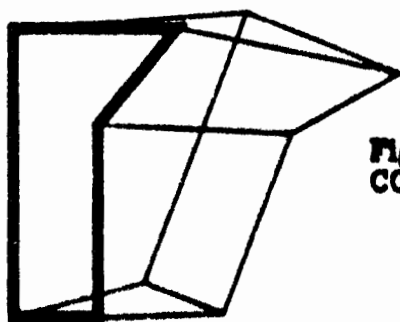
En los modelos anteriores, un sólido se representa como un conjunto de puntos enumerados o representados por entidades finitas, mientras que, bajo el enfoque de fronteras, un sólido se representa por la superficie que lo limita. Estos modelos se basan en la idea de superficie orientada(2.3) representando a los



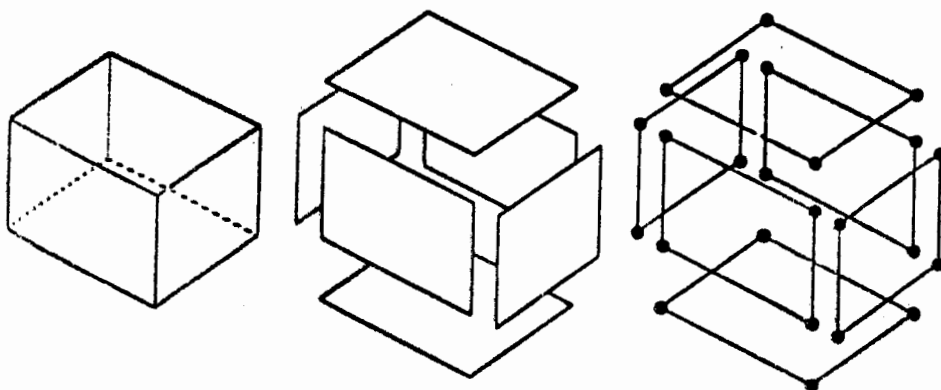
**Fig. 2.16a TRANSLACION DE UN PERFIL
EN LA DIRECCION QUE INDICA EL VECTOR
(SWEEP TRANSLACIONAL)**



**Fig. 2.16b ROTACION DE UN PERFIL
SOBRE UN EJE DE REFERENCIA**



**Fig. 2.16c TRANSLACION Y ROTACION
COMBINADA DE UN PERFIL**



**Fig. 2.17 ELEMENTOS GEOMETRICOS Y TOPOLOGICOS DE UN
MODELO B-rep**

sólidos mediante la división de su superficie en un conjunto de caras que mantienen una relación conveniente. Comunmente, la división se realiza de tal suerte que las caras resultantes mantengan una representación matemática compacta, por ejemplo, que la cara sea una cuádrica, y además, para que se asegure la división, se mantienen condiciones topológicas sobre la estructura del objeto(2.3). Las fronteras de las caras se representan por aristas comúnmente en forma paramétrica. Los límites de un borde forman los vértices del mismo. De esta forma, las caras, bordes, vértices y la información geométrica y topológica que los relaciona constituye la base de los modelos de frontera(fig 2.17).

Modelos de frontera basados en polígonos

Un modelo de frontera que únicamente maneja caras planas se denomina modelo *poligonal*, mediante el cual puede definirse un sólido por la colección de caras agrupadas en términos de una tabla de identificadores de caras o una lista ligada de nodos de cara.

Es posible eliminar la información de relación explícita entre caras y realizar una definición por cara, lo cual provoca repetir la información de los vértices por cada ocasión que una cara así lo requiera.

Modelos de frontera basados en vértices

Este modelo elimina la redundancia localizada en los vértices que genera el modelo anterior manteniendo un identificador de vértice y la coordenada asociada como entidades independientes. La definición de una cara mantiene una lista de identificadores de vértices que siguen un orden consistente que sirve, por ejemplo, para determinar la parte interna o externa de una cara.

La organización de la información para un cubo basado en esta técnica es (fig 2.18)

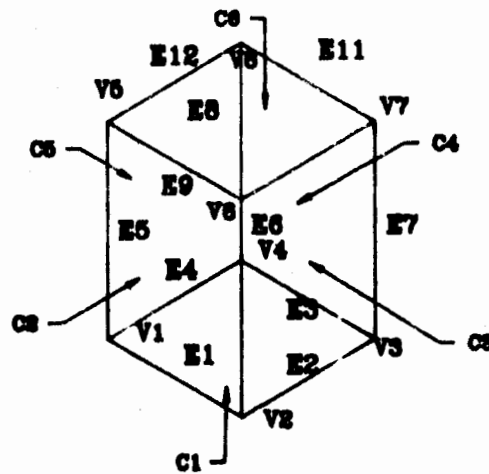


Fig. 2.18 CUBO CON LA INFORMACION TOPOLOGICA DE VERTICES, ARISTAS Y CARAS REQUERIDAS EN B-rep

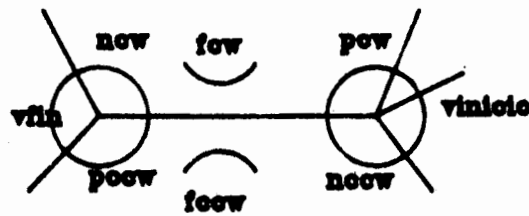


Fig. 2.19 ELEMENTOS TOPOLOGICOS E IDENTIFICADORES ASOCIADOS A LA ESTRUCTURA DE ARISTA SALTEADA

vértice	coordenadas	cara	vértices
v1	x1 y1 z1	f1	v1 v2 v3 v4
v2	x2 y2 z2	f2	v6 v2 v1 v5
v3	x3 y3 z3	f3	v7 v3 v2 v6
v4	x4 y4 z4	f4	v8 v4 v3 v7
v5	x5 y5 z5	f5	v5 v1 v4 v8
v6	x6 y6 z6	f6	v6 v7 v8 v5
v7	x7 y7 z7		
v8	x8 y8 z8		

Modelos de frontera basados en aristas

Estos modelos representan la frontera de una cara en término de una secuencia cerrada o circuito de aristas. Los vértices de las caras se representan únicamente a través de las aristas. Las aristas mantienen una orientación consistente considerando que su definición va, por ejemplo, en sentido positivo del vértice v1 al vértice v2, lo cual genera la definición de orientación de una cara implícitamente. Debe observarse que cada arista ocurre exactamente dos veces, una por cada cara en la cual está presente. La estructura para un cubo es:

borde	vértices	vértice	coordenadas	cara	bordes
e1	v1 v2	v1	x1 y1 z1	f1	e1 e2 e3 e4
e2	v2 v3	v2	x2 y2 z2	f2	e8 e6 e1 e5
e3	v3 v4	v3	x3 y3 z3	f3	e10 e7 e2 e6
e4	v4 v1	v4	x4 y4 z4	f4	e11 e8 e3 e7
e5	v1 v5	v5	x5 y5 z5	f5	e12 e5 e4 e8
e6	v2 v6	v6	x6 y6 z6	f6	e12 e11 e10 e9
e7	v3 v7	v7	x7 y7 z7		
e8	v4 v8	v8	x8 y8 z8		
e9	v5 v6				
e10	v6 v7				
e11	v7 v8				
e12	v8 v5				

Estructura de datos de arista saltada ('winged-edge')

Esta estructura de datos proporciona información explícita entre

las caras de un objeto, asociando las aristas con los identificadores de las caras a las que pertenecen. Bajo esta estructura, una arista aparece exactamente dos veces, una por cada cara a la que está asociada y aparece una ocasión definida en sentido positivo y otra en sentido negativo de orientación. Esta estructura de datos toma ventaja de esta relación estructural, asociando los identificadores de las dos siguientes aristas con un nodo de arista. Por convención, estos datos se denotan por *ncw* y *nccw* debido a *siguiente en el sentido de las manecillas del reloj*, ('*next-clockwise*') y *siguiente en el sentido contrario a las manecillas del reloj*, ('*next-counterclockwise*'), siendo en particular que *ncw* identifica la siguiente arista en la cara donde la arista ocurre en su orientación positiva y *nccw* la siguiente arista en la otra cara. En virtud a esta representación, las caras necesitan solamente incluir el identificador de una arista arbitraria y un bit que indique su orientación. En una variación más general de esta estructura, los nodos también incluyen los identificadores *fcw* y *fccw* de sus caras vecinas y, análogamente a *ncw* y *nccw*, los identificadores *pcw* y *pccw* de las aristas previas en esta caras (fig 2.19).

El cubo bajo esta estructura se representa como sigue

arista	vinicio	vfin	fcw	fccw	ncw	pcw	nccw	pccw
e1	v1	v2	f1	f2	e2	e4	e5	e8
e2	v2	v3	f1	f3	e3	e1	e6	e7
e3	v3	v4	f1	f4	e4	e2	e7	e8
e4	v4	v1	f1	f5	e1	e3	e8	e5
e5	v1	v5	f2	f5	e9	e1	e4	e12
e6	v2	v6	f3	f2	e10	e2	e1	e9
e7	v3	v7	f4	f3	e11	e3	e2	e10
e8	v4	v8	f5	f4	e12	e4	e3	e11
e9	v5	v6	f2	f6	e6	e5	e12	e10
e10	v6	v7	f3	f6	e7	e6	e9	e11
e11	v7	v8	f4	f6	e8	e7	e10	e12
e12	v8	v5	f5	f6	e5	e8	e11	e9

vértice	primer-arista	coordenadas	cara	primer-arista
v1	e1	x1 y1 z1	f1	e1
v2	e2	x2 y2 z2	f2	e9
v3	e3	x3 y3 z3	f3	e8
v4	e4	x4 y4 z4	f4	e7
v5	e9	x5 y5 z5	f5	e12
v6	e10	x6 y6 z6	f6	e9
v7	e11	x7 y7 z7		
v8	e12	x8 y8 z8		

Las estructuras de datos descritas anteriormente asumen que cada cara está simplemente conectada, esto es, que solamente se mantiene una frontera. Si tenemos objetos que mantienen más de una frontera, existe la alternativa de generar las estructuras anteriores pero con la asignación de una arista puente que une fronteras separadas y que debe marcarse de alguna forma para no ser incluida en los algoritmos de despliegue, por ejemplo. Sin embargo, en la estructura de arista-salteada, estos bordes auxiliares se identifican fácilmente comparando *fcw* y *fccw* ya que ocurren dos veces en la misma cara. Un modelo de frontera se considera válido si éste define la frontera de un objeto sólido razonable que debe seguir las propiedades mencionadas en (2.3), esto es: el conjunto de caras forma una piel que encierra un volumen; las caras no se intersecan excepto en vértices comunes o en los bordes; los límites de las caras son polígonos que no se intersecan así mismos.

La primera condición se relaciona con la integridad topológica del modelo, la cual puede ser revisada por medios estructurales, por ejemplo, el hecho de que un borde debe ocurrir dos veces en la estructura, lo cual se cumple automáticamente con la estructura arista-salteada. Esta estructura también obliga a que las caras cumplan con la regla de Moebius(2.3), manteniendo una definición consistente en la orientación de las mismas. Sin embargo, la integridad geométrica de las últimas dos condiciones no se puede revisar directamente por medios estructurales y es necesario la asignación de algoritmos de chequeo a la información geométrica asignada a la topología del modelo o dejar que el usuario se responsabilice de la validez geométrica del modelo.

Las definiciones anteriores muestran que una de las desventajas del modelado de fronteras es su descripción, que en ocasiones llega a ser extremadamente compleja para un diseñador. Para resolver este problema, es conveniente proporcionar mecanismos de entrada que faciliten el diseño, por ejemplo, lenguajes basados en representaciones CSG, y posteriormente realizar la generación del modelo a partir de estas definiciones.

Una ventaja directa de los modelos de frontera es la definición *explícita* del modelo, comparada con otros esquemas de representación, debido a que proporciona un acceso mucho más directo a la información de caras, aristas y vértices, lo cual, en ambientes CSG, por ejemplo, requiere de una evaluación.

El poder expresivo de los esquemas B-rep depende de la selección de superficies que se mantengan, y no tienen que limitarse únicamente a espacios medios; la validez es difícil de determinar como se mencionó anteriormente, esto es, la integridad topológica que se tiene resuelta en un alto porcentaje, pero la integridad geométrica requiere de algoritmos de chequeo más intensos; los modelos válidos no permiten ambigüedad de sólidos pero no son únicos; los lenguajes de descripción deben basarse en métodos de descripción alternativos; los modelos de objetos pueden ser muy grandes, especialmente cuando las fronteras son curvas y deben representarse mediante poliedros; la cerradura bajo operadores booleanos puede evaluarse mediante fórmulas de Euler; los modelos B-rep son útiles para la representación gráfica de la información, no así los algoritmos de análisis.

2.3.3.4 Modeladores Híbridos

De los modeladores mencionados anteriormente, ninguno tiene todas las ventajas sobre los demás. Los modeladores por descomposición son los más simples y adecuados para algoritmos numéricos pero

requieren grandes volúmenes de información, y la definición de un objeto es extremadamente compleja exceptuando el caso cuando se tiene la información ya digitalizada; los modelos constructivos son más concisos, pero los algoritmos de despliegue o de análisis son los más lentos, por lo cual se emplean métodos de traducción a otros esquemas; los B-rep son útiles para una representación gráfica y en particular la representación poligonal es adecuada para algoritmos de análisis si el número de polígonos es aceptable, pero su definición se torna extremadamente laboriosa y en ocasiones difícil, por lo cual se requiere de técnicas alternativas para su descripción.

Así se observa que el diseño de un ambiente híbrido tiene la posibilidad de generar un esquema superior a cualquier aproximación que trabaje sola. Un modelador híbrido es capaz de soportar varias representaciones coexistentes de sólidos y tomar los elementos más adecuados de cada una de ellas para las diversas tareas de modelado, lo cual debe implicar la existencia de algoritmos de conversión entre cada esquema de modelado.

Este fenómeno sucede de manera indirecta durante la elaboración de un modelador geométrico, ya sea en las estructuras de datos, en los algoritmos de análisis, de realismo o de combinación de entidades y resulta claro que ésta es una tendencia en la modelación geométrica.

CAPITULO III

ESQUEMAS DE REPRESENTACION PARA SUPERFICIES DE FORMA LIBRE

En el capítulo II, se menciona el hecho de modelar sólidos ya sea a través de representaciones que enumeran conjuntos de puntos en E^3 o mediante la identificación de tales espacios por un conjunto de superficies poligonales que los limiten.

Tales esquemas sólo consideran la modelación de objetos donde las superficies que representan a las fronteras mantienen una descripción bien conocida -cuádricas-, pero dejan entrever la posibilidad de modelar formas irregulares(2.2) que representen la superficie del objeto, incrementando así, la cobertura geométrica del modelador.

Desafortunadamente, el tratamiento de una cuádrica no se aplica eficientemente a una forma libre, pero sí existe el proceso contrario[14][15][16]. Existe la posibilidad de aproximar formas libres mediante polígonos planos, pero las técnicas poligonales generalmente crean imágenes que pueden objetarse a simple vista, aún cuando se apliquen algoritmos de luminiscencia completos, además de que los modelos poligonales requieren de una gran cantidad de información para su almacenamiento y su resolución puede ser limitada, situación que no sucede con las técnicas de modelado de superficies libres donde el almacenamiento de la superficie es mucho menor y se puede computar la superficie al grado de resolución deseada en función de la situación particular. Las representaciones que se consideran están basadas en el concepto de parametrización y descomposición por segmentos cuyas ventajas se indican en (2.2).

En los esquemas de representación, se considera que un segmento de superficie o curva Q se construye en base a un vector de datos conocidos llamado P , siendo en ocasiones que P y Q solo coincidan en algunos datos si ambos representan información vectorial(fig 3.1).

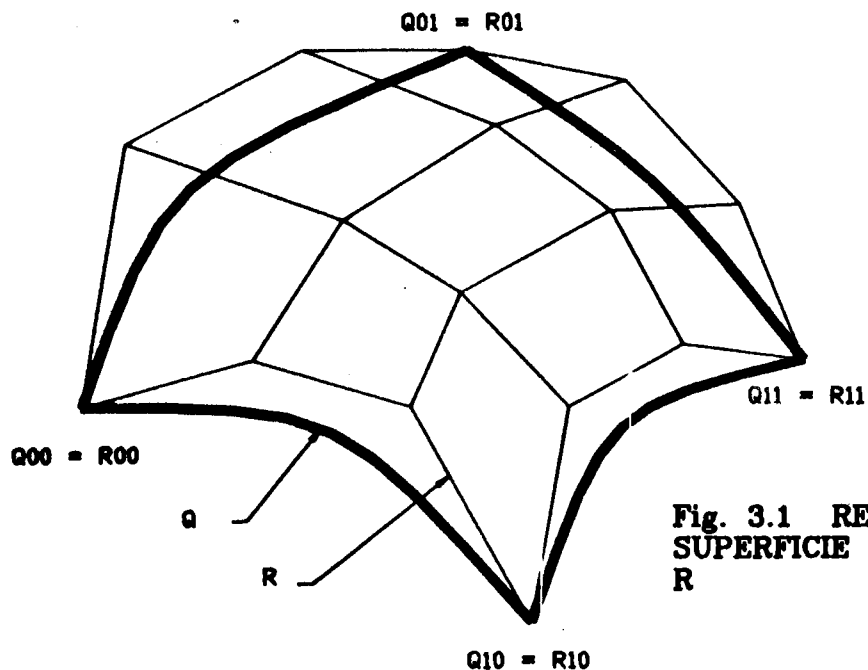


Fig. 3.1 RELACION ENTRE LA SUPERFICIE Q Y LOS VERTICES R

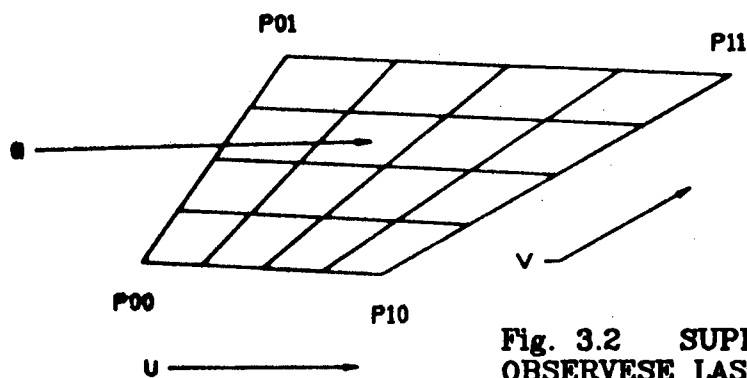


Fig. 3.2 SUPERFICIE BILINEAL. OBSERVESE LAS FRONTERAS CURVAS QUE BIEN PUEDEN SER CUALQUIER SPLINE

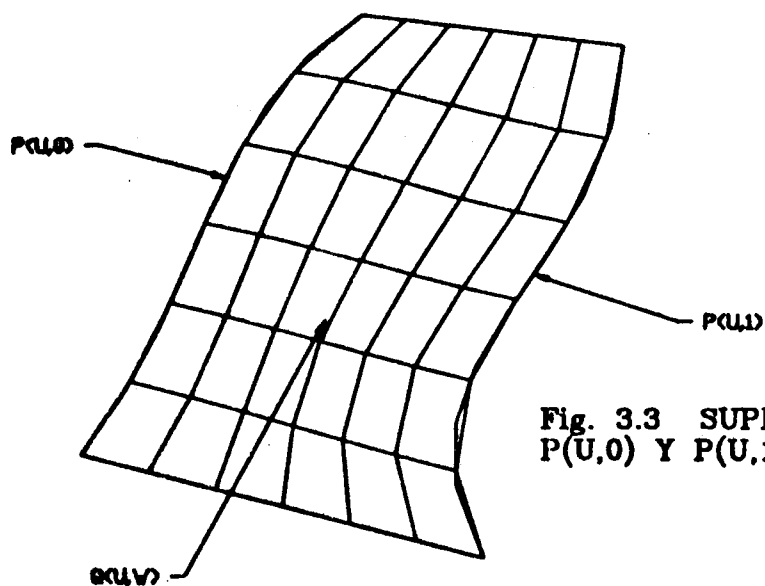


Fig. 3.3 SUPERFICIE REGLADA ENTRE $P(u,0)$ Y $P(u,1)$

3.1 Superficies Bilineales

Este es quizá el caso más simple de superficies. Lo que se desea es construir una función bivariada o superficie bilineal $Q(u,w)$, donde los parámetros u, w varían en el rango de $[0,1]$, proporcionando así el punto de coordenadas $[Q_x(u,w), Q_y(u,w), Q_z(u,w)]$ para el caso 3D.

Dado el conjunto de vectores de posición $P = \{P_{00} \ P_{01} \ P_{10} \ P_{11}\}$ en las esquinas que limitan a la superficie deseada Q , la siguiente expresión genera la interpolación lineal:

$$Q(u,w) = P_{00}(1-u)(1-w) + P_{01}(1-u)w + P_{10}u(1-w) + P_{11}uw,$$

que corresponde a:

$$Q(u,w) = \begin{bmatrix} (1-u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix}$$

Debe observarse que Q en los extremos de la parametrización es exactamente igual a P en los puntos conocidos, esto es, $P_{00}=Q(0,0)$, $P_{01}=Q(0,1)$, $P_{10}=Q(1,0)$ y $P_{11}=Q(1,1)$ (fig. 3.2).

Esta expresión se extiende a tres dimensiones, bajo la siguiente representación compacta:

$$Q(x(u,w) \ y(u,w) \ z(u,w)) = UP,$$

donde Q es el vector de posición de la superficie, P es la matriz de vectores de posición de las esquinas conocidas y U está dada por:

$$U = \begin{bmatrix} (1-u) & (1-u)w & u(1-w) & uw \end{bmatrix}.$$

3.2 Superficies regladas

Una superficie reglada[15] se genera por una familia de líneas rectas y se expresa en forma general por:

$$Q(u,w) = rQ(u) + wQ(u),$$

donde $r_0(u)$ es un punto dado sobre la línea cuyo parámetro es u y $n(u)$ es su vector de dirección. El parámetro w proporciona la distancia de $r_0(u)$ hasta el punto $r(u,w)$.

Otra alternativa para obtener una superficie reglada asume la existencia de dos curvas P_{u0} y P_{u1} que se mantienen en los lados opuestos del plano u,w parametrizado. De esta forma, la superficie $Q(u,w)$ esta dada por:

$$Q(u,w) = P_{u0}(1-w) + P_{u1}w .$$

Es posible realizar la generación de la superficie complementaria si se agregan las dos fronteras P_{0w} y P_{1w} bajo la interpolación expresada por

$$Q(u,w) = P_{0w}(1-u) + P_{1w}u$$

Debe observarse que nuevamente Q y P son iguales en los puntos extremos de la representación paramétrica, pero se presenta la ventaja de permitir la definición de fronteras curvas, con lo cual se incrementa la cobertura geométrica de esta clase de generadores de superficies (fig 3.3). Ahora bien, aunque es posible definir las cuatro fronteras de una superficie, la interpolación resultante no es la suma de ambas interpolaciones.

3.3 Superficies lineales de Coons

Sean P_{u0} , P_{u1} , P_{0w} , P_{1w} las cuatro curvas que limitan a una superficie. Si se desea obtener una expresión que las interpole, no es suficiente con aplicar la suma de dos superficies regladas, cuya expresión esta dada por :

$$Q(u,w) = P_{u0}(1-w) + P_{u1}w + P_{0w}(1-u) + P_{1w}u ,$$

la cual, valuada en posiciones conocidas genera las siguientes expresiones :

$$\begin{aligned} Q(0,w) &= P_{00}(1-w) + P_{01}w + P_{0w} \\ Q(0,0) &= 2P_{00} , \end{aligned}$$

las cuales no cumplen con la condición de que P y Q deben ser iguales en los puntos extremos de parametrización. Esta situación se corrige eliminando la contribución extra que se genera por los puntos extremos[17], obteniéndose :

$$Q(u,w)=P_{u0}(1-w)+P_{u1}w+P_{w0}(1-u)+P_{w1}u- \\ P_{00}(1-u)(1-w)-P_{01}(1-u)w- \\ P_{10}u(1-w)-P_{11}uw .$$

revisando en los extremos se verifica que

$$Q(u,0)=P_{u0} \\ Q(u,1)=P_{u1} \\ Q(0,w)=P_{w0} \\ Q(1,w)=P_{w1} ,$$

lo que implica una correcta interpolación de las fronteras del segmento de superficie.

Esta superficie es el caso más simple de las superficies de Coons. Las funciones u , $(1-u)$, $(1-w)$, w se denominan *funciones de suavización* porque su efecto es suavizar, de manera conjunta, las cuatro curvas de frontera que se mantienen separadas para generar una sola superficie(fig. 3.4).

3.4 Superficie generalizada de Coons

Si en las superficies lineales de Coons se reemplaza el conjunto de funciones de suavización $\{(1-u), u, (1-w), w\}$ por el conjunto de funciones $\{\beta_{0,0}(u), \beta_{0,1}(u), \beta_{0,0}(w), \beta_{0,1}(w)\}$ respectivamente donde $\beta_{0,0}(0)=1$, $\beta_{0,0}(1)=0$, $\beta_{0,1}(0)=0$, $\beta_{0,1}(1)=1$, se genera la misma superficie interpolada para las cuatro curvas en la frontera.

Así, las funciones del tipo $\beta_{r,i}(u)$, cumplen la función de suavizar las condiciones de frontera para formar la superficie. En ellas, la r indica que la función de suavización esta influenciada por una función univariada que representa alguna condición de derivada en las fronteras de orden r . Así, la derivada cero, interpretada como continuidad de posición, se especifica por $r=0$,

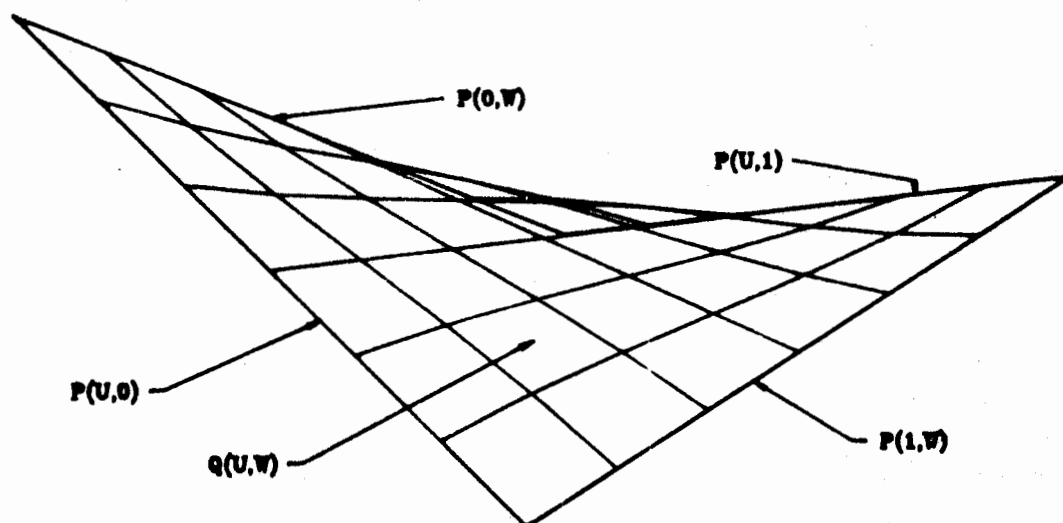


Fig. 3.4 SUPERFICIE LINEALIZADA DE COONS. EN ESTE CASO EXISTE UNA INTERPOLACION ENTRE CUATRO CURVAS FRONTERA

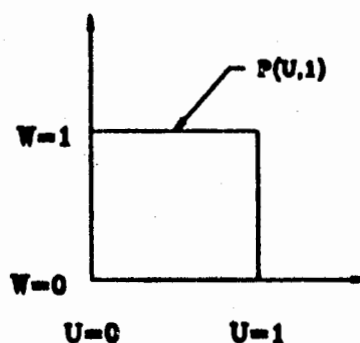


Fig. 3.5 INFLUENCIA DE LA FUNCION DE SUAVIZACION $B_{01}(W)$ SOBRE EL CUADRO NORMALIZADO UW . ESTA FUNCION SUAVIZA LA CURVA $W=1=P(U,1)$

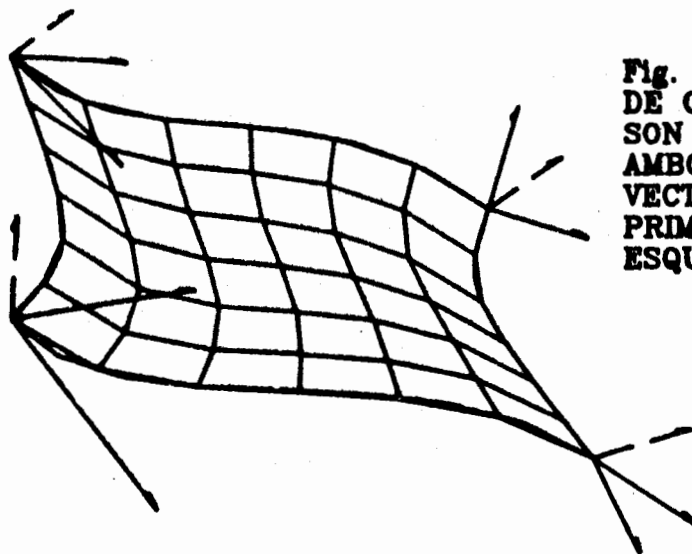


Fig. 3.6 SUPERFICIE GENERALIZADA DE COONS. LOS DISCONTINUIDADES SON LAS DERIVADAS PARCIALES HACIA AMBOS LADOS EN LAS ESQUINAS. LOS VECTORES CONTINUOS SON LAS PRIMERAS DERIVADAS EN LAS ESQUINAS

$r=1$ para tangentes, y $r=2$ para curvatura, etc.

El índice i indica la posición, sobre el cuadrado unitario uw , de la función que es influenciada por la función de suavización $\beta_{r,i}(u)$. En general, se considera $u=u_i$. De esta forma, $\beta_{0,1}(v)$ es la función de suavización que influye la curva Pu_1 (fig. 3.8). Cuando se especifica un segmento de superficie solamente por sus límites, las funciones de suavización deben satisfacer la condición $\beta_{0,i}(j)=\delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker que satisface lo siguiente :

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 1 \text{ si } i=j \\ \delta_{ij} &= 0 \text{ si } i \neq j.\end{aligned}$$

Es posible elegir dentro de un rango muy amplio de funciones $\beta_{i,j}(u)$ que satisfagan las condiciones anteriores, aunque normalmente las funciones elegidas son funciones continuas, por ejemplo, $\beta_{0,0}(u)=\cos^2(\pi/2) u$; $\beta_{0,1}(u)=\sin^2(\pi/2) u$.

Si sustituimos las funciones generalizadas de suavización dentro de la representación de superficies lineales de Coons, se obtiene la siguiente expresión :

$$Q(u,v)=\sum_{i=0}^1 P_{1i} \beta_{0,i}(u) + \sum_{j=0}^1 P_{0j} \beta_{0,j}(v) - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{ij} \beta_{0,i}(u) \beta_{0,j}(v),$$

que representa una superficie más sofisticada pero que solo mantiene continuidad de posición entre segmentos de superficie, indicado por el parámetro $r=0$.

Las superficies de Coons pueden construirse para satisfacer condiciones en la frontera de mayor orden ($r>0$). Supongase que se desea satisfacer derivadas de orden m_i en $u=u_i$ y orden n_j en $v=v_j$. Los datos que definen la superficie serán las siguientes funciones de frontera :

$$\begin{aligned}P^{r,0}(i,v) & \quad 0 \leq r \leq m_i, \\ P^{0,s}(u,j) & \quad 0 \leq s \leq n_j.\end{aligned}$$

y las correspondientes funciones de suavización serán

$$\beta_{r,i}(u) \text{ y } \beta_{s,j}(v) ,$$

las cuales mantienen las propiedades :

$$\beta_{r,i}^p(u_k) = \delta_{pr} \cdot \delta_{ik} \text{ para } 0 \leq p \leq m_i ,$$

$$\beta_{s,j}^p(u_k) = \delta_{ps} \cdot \delta_{jk} \text{ para } 0 \leq p \leq n_j ,$$

que finalmente permiten mostrar la ecuación de la superficie como:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{r=0}^{m_i} P^{r,0}(i,v) \beta_{r,i}(u) + \sum_{j=0}^1 \sum_{s=0}^{n_j} P^{0,s}(u,j) \beta_{s,j}(v) -$$

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^{m_j} \sum_{s=0}^{n_j} P^{r,s}(i,j) \beta_{r,i}(u) \beta_{s,j}(v) ,$$

que representa la forma más general de la superficie de Coons (fig 3.8). Manejando restricciones en esta formulación es posible llegar a las expresiones vistas en párrafos anteriores, por ejemplo, revisar la expresión de la superficie bicúbica.

3.5 Superficies bicúbicas

Una de las descripciones más útiles de un segmento de superficie utiliza representaciones paramétricas cúbicas para los bordes P_{u0} , P_{u1} , P_{0v} y P_{1v} , así como para las funciones de suavización.

El polinomio cúbico parametrizado de una curva se representa por la expresión :

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \quad (3.5.1),$$

donde el rango de la parametrización normalmente se expresa de 0 a 1 y $P(t)$ representa la posición vectorial de la curva para un

valor del específico del parámetro t . Para generar la superficie, el parámetro toma el valor u para un par de bordes y w para el otro par. Es claro que la solución de $P(t)$ requiere la obtención de los coeficientes B_i , los cuales se obtienen aprovechando las condiciones en las fronteras así como la primera derivada de $P(t)$ la cual es :

$$P'(t) = B_2 + 2B_3t + 3B_4t^2 .$$

Evaluando en las fronteras se obtiene :

$$\begin{aligned} P(0) &= B_1 \\ P(1) &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \\ P'(0) &= B_2 \\ P'(1) &= B_2 + 2B_3 + 3B_4 , \end{aligned}$$

que puede representarse matricialmente como :

$$P = MB ,$$

donde M es la matriz de coeficientes asociados a las B 's y B es la matriz de B 's, de donde :

$$B = M^{-1}P .$$

Sustituyendo B en (3.5.1) se tiene la expresión

$$P(u) = F_1(u)P(0) + F_2(u)P(1) + F_3(u)P'(0) + F_4(u)P'(1) \quad (3.5.2),$$

donde

$$[F_1(t) \ F_2(t) \ F_3(t) \ F_4(t)] = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

De esa forma, las funciones $F_i(t)$ se consideran funciones de suavización que actúan sobre la información vectorial $P(0)$ $P(1)$ $P'(0)$ $P'(1)$ y en conjunto con ésta, generan una curva continua.

En el caso de un segmento bicúbico, se genera una superficie que satisfaga condiciones, primero para las fronteras donde $u=0$ y $u=1$,

y posteriormente en las fronteras $w=0$ y $w=1$, para finalmente realizar una combinación de ambas agregando o eliminando la información necesaria final para cumplir con la condición $Q=P$ (3.1).

Se requiere la siguiente notación para continuar:

$$P^a(u) = \partial^a P(u) / \partial^a u ,$$

$$P(u_i) = \partial^a P(u) / \partial^a u \text{ para } u=u_i ,$$

de manera similar :

$$P^{a,b}(u,w) = \partial^{a+b} P(u,w) / \partial u^a \partial w^b \text{ para } u=u_i \text{ y } w=w_j ,$$

Las superficies regladas que satisfacen las condiciones de frontera a lo largo de u y w son :

$$Q(u,w)_u = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_0 w (1-3u^2+2u^3) + P \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 w (3u^2-2u^3) + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 (0,w) (u-2u^2+u^3) + P \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 (1,w) (-u^2+u^3)$$

y

$$Q(u,w)_w = P \begin{Bmatrix} u \\ 1 \end{Bmatrix}_0 (1-3w^2+2w^3) + P \begin{Bmatrix} u \\ 1 \end{Bmatrix}_1 (3w^2-2w^3) + P \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 (u,0) (w-2w^2+w^3) + P \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 (w,1) (-w^2+w^3)$$

respectivamente.

Como en el caso de la superficie bilineal, una combinación simple de las dos superficies anteriores no cumple con la condición $Q=P$, lo cual se corrige por el decremento en la aportación de componentes en los extremos de las superficies, esto es, las esquinas de la superficie se incluirían dos veces con una simple suma de los resultados lo cual produce una doble inclusión de la información de los vectores tangentes y los términos de derivada cruzada (vectores de giro).

Restando estas aportaciones a $Q(u,w)_u + Q(u,w)_w$ se obtiene la representación final de un segmento de superficie bicúbica :

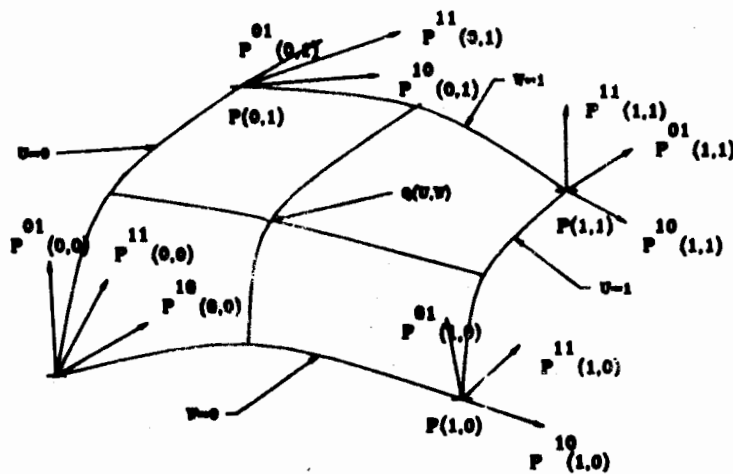


Fig. 3.7a INFORMACION VECTORIAL DE UN SEGMENTO BICUBICO CORRESPONDIENTE A LA MATRIZ P

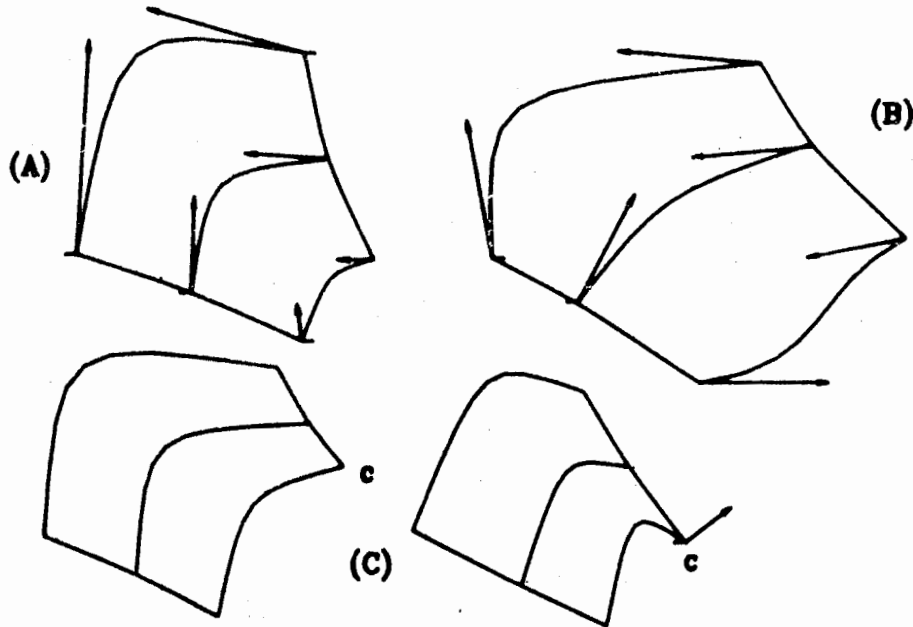


Fig. 3.7b (A) ALTERACION POR MAGNITUD DE VECTOR TANGENTE
(B) ALTERACION POR DIRECCION DE VECTOR TANGENTE
(C) ALTERACION POR VECTOR DE GIRO. EN ESTE ULTIMO CASO LA POSICION INDICADA MUESTRA CUANDO EXISTE EL VECTOR DE GIRO.

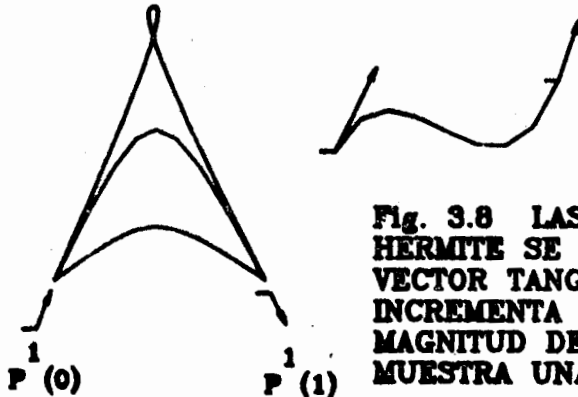


Fig. 3.8 LAS CURVAS DE FERGUSON O DE HERMITE SE CONTROLAN POR POSICION Y VECTOR TANGENTE. A LA IZQUIERDA LA CURVA INCREMENTA SU PLENITUD EN FUNCION A LA MAGNITUD DEL VECTOR TANGENTE. ARRIBA SE MUESTRA UNA CURVA CON INFLEXION.

$$Q(u,w)=[F_1(u)] \begin{matrix} 1, \dots, 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P^{01}(0,0) & P^{01}(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P^{01}(1,0) & P^{01}(1,1) \\ P^{10}(0,0) & P^{10}(0,1) & P^{11}(0,0) & P^{11}(0,1) \\ P^{10}(1,0) & P^{10}(1,1) & P^{11}(1,0) & P^{11}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{bmatrix},$$

que es equivalente a la siguiente representación matricial :

$$Q(u,w)=[u^3 \ u^2 \ u \ 1] M P M^T [v^3 \ v^2 \ v \ 1]^T,$$

donde M se define en (3.5) y P la matriz de $P^{ij}(u,w)$ y $P(u,w)$.

Así, $Q(u,w)$ queda definido por las funciones de suavización $F_1(u)$, cuatro fronteras cúbicas, cuatro vectores que definen las esquinas del segmento, ocho vectores tangentes distribuidos en las esquinas y cuatro vectores de giro también en las esquinas.

La información en las esquinas del segmento $Q(u,v)$ se visualiza en forma natural bajo la siguiente notación :

$$P = \begin{bmatrix} \text{Coordenadas de las} & \text{vectores tangentes a } w \\ \text{Esquinas} & \\ \text{vectores tangentes a } u & \text{vectores de giro} \end{bmatrix},$$

de tal forma que P controla la forma del segmento de superficie (fig 3.7a) (fig 3.7b).

El segmento bicúbico, aunque es altamente útil, presenta la desventaja de tener que proporcionar directamente el contenido de la matriz P, cuyos valores pueden diferir en diversos ordenes de magnitud y en donde la combinación adecuada de estos, para obtener un resultado deseado, resulta ser una operación en extremo laboriosa, situación que, dentro de un ambiente de CAD, no es posible aceptar.

3.8 Segmentos de Ferguson o de Hermite

Estos segmentos son una simplificación a los segmentos bicúbicos considerando los vectores de giro igual a cero. Solamente es

posible mantener continuidad de primer orden en las fronteras de un segmento de esta naturaleza, debido a que la superficie está restringida a dejar en cero las derivadas cruzadas de las esquinas, lo cual genera superficies con menor suavidad para algunas aplicaciones[6].

En el caso bidimensional, un segmento de curva puede desarrollarse de la siguiente forma[7], basandose en el mismo desarrollo de (3.5) bajo una curva paramétrica cúbica :

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.6.1),$$

que evaluada en los extremos del parámetro t proporciona las siguientes relaciones :

$$\begin{aligned} r(0) &= a_0 \\ r(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ r'(0) &= a_1 \\ r'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3, \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

de las cuales se observa, que de los *manejadores* (los factores de los cuales depende directamente la forma resultante), solamente a_0 y a_1 tienen una significancia geométrica obvia y no sería razonable solicitar a un diseñador que determinase la forma de una curva manipulando a_2 y a_3 , puesto que su efecto no es intuitivamente predecible.

Si se conoce la información de posición y primera derivada en los extremos del segmento, ésta se puede emplear para encontrar el valor de los coeficientes de $r(t)$ colocando las siguientes restricciones :

$$\begin{aligned} r(0) &= p(0) \\ r(1) &= p(1) \\ r'(0) &= p'(0) \\ r'(1) &= p'(1), \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

donde los $p(j)$ y $p'(j)$ son los vectores de posición y la primera derivada, respectivamente, en los extremos del segmento.

Resolviendo (3.6.2) con las expresiones definidas bajo (3.6.3) y

sustituyendo en (3.6.1) se obtiene la expresión :

$$r(t) = p(0)[1-3t^2+2t^3] + p(1)[3t^2-2t^3] + p^1(0)[t-2t^2+t^3] + p^1(1)[-t^2+t^3],$$

para $0 \leq t \leq 1$

que equivale a (3.5.2).

Un problema que se presenta con este tipo de formulación es que, mientras la significancia geométrica de la dirección de $p^1(0)$ y $p^1(1)$ es obvia, no lo es así el significado de su magnitud, la cual se asocia con el control de la plenitud de la curva. Si la magnitud de ambos vectores se incrementa simultáneamente, la longitud de arco de la curva entre los puntos fijos se incrementa y el segmento de curva se arquea hacia afuera de la longitud de la cuerda. De hecho, si la magnitud es suficientemente grande, se formará un circuito en la intersección de las rectas definida por los vectores extremos (fig. 3.8). Algunos sistemas de diseño restringen al usuario a valores límites de la magnitud para no causar anomalías en el diseño[27]. Si el incremento en la magnitud de los vectores tangente se realiza diferencialmente (uno crece distinto del otro), la curva tenderá a panderase siguiendo la dirección del vector de mayor magnitud. Una ventaja de este sistema es que el número de grados de libertad para diseñar un segmento en el caso bidimensional es de dos (la magnitud en cada extremo del segmento) una vez que la posición y la dirección de un segmento ha sido determinado.

En el caso tridimensional, un segmento de Ferguson se define por la siguiente expresión :

$$r(u,w) = [1 \ u \ u^2 \ u^3] F Q F^T [1 \ w \ w^2 \ w^3]^T \quad 0 \leq u, w \leq 1,$$

donde

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y Q es igual a la matriz P definida para la superficie bicúbica en

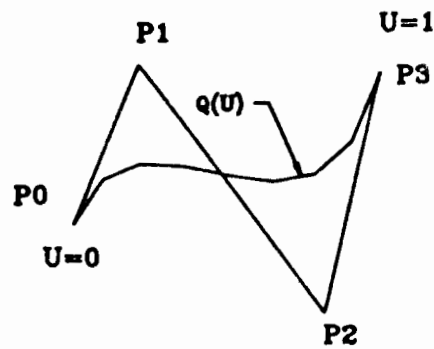
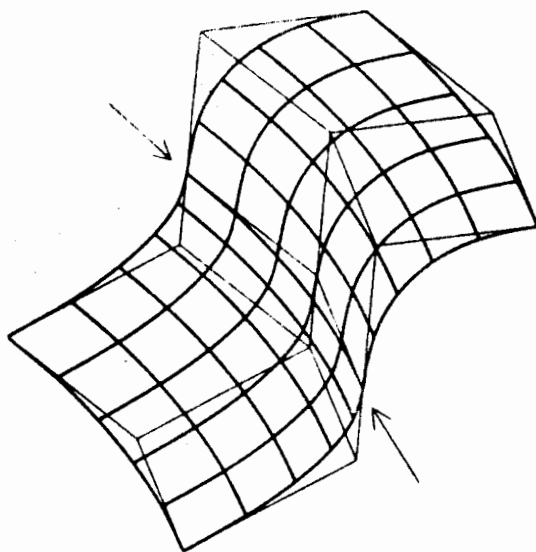


Fig. SUPERFICIE Y CURVA DE BEZIER
OBSERVE EL POLIGONO DE CONTROL
EN CADA CASO. LA CONTINUIDAD EN
LA SUPERFICIE SE LOGRA CON ARRE-
GLOS DE VERTICES DE CONTROL

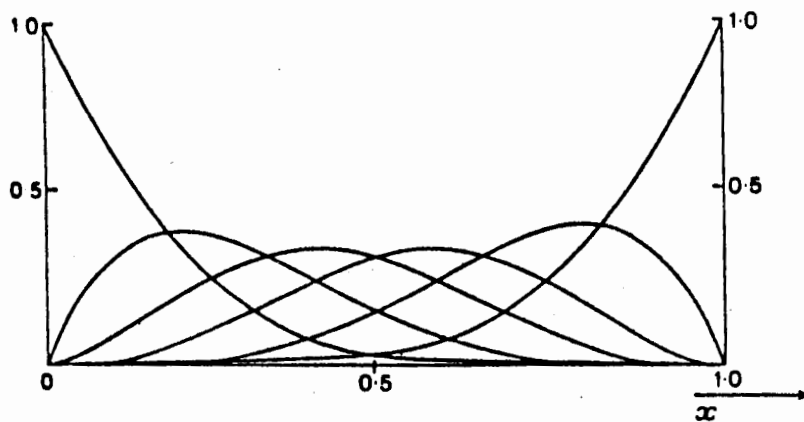


Fig. 3.10 FUNCIONES BASE DE BERNSTEIN UTILIZADAS EN BEZIER
PARA CINCO VERTICES DE CONTROL

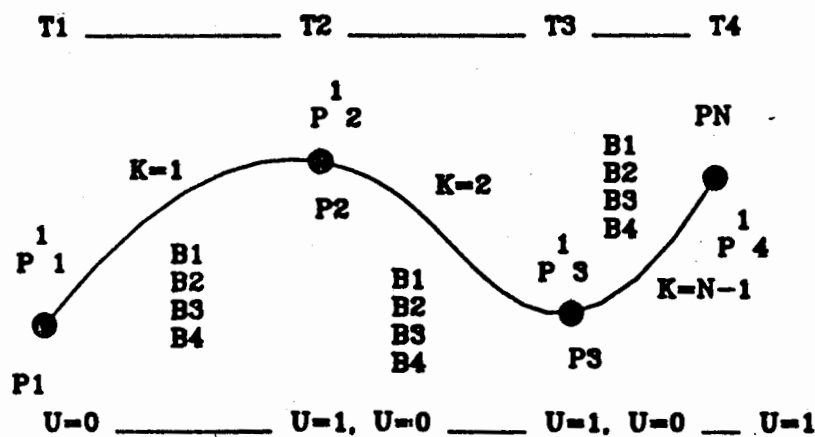


Fig. 3.11 COMPONENTES DE UNA CURVA SPLINE

en (3.5). En la formulación original de Ferguson, los vectores de giro se consideran nulos, lo que físicamente genera regiones planas cerca de las esquinas de los segmentos de superficie. Los vectores de giro solamente afectan la parte interior de la superficie[7].

3.7 Segmentos de Bezier

En las formulaciones anteriores para el diseño de segmentos de curva y superficie, el diseñador especifica información vectorial explícita, lo cual, en ocasiones puede resultar extremadamente difícil, más aún, cuando no se tiene una experiencia en el área. Es así que el uso de los manejadores(3.6) requiere dedicación con objeto de formarse una idea sobre su significado físico.

Bezier, nombre que refiere a su autor, soluciona algunas de estas situaciones y puede expresarse en función de los elementos de un segmento bicúbico(3.5) conviniendo su análisis primero, sobre segmentos de curva y posteriormente su representación tridimensional.

Las primeras ideas que deben mencionarse sobre Bezier, se refieren, primero, a que no es una técnica de interpolación (no toca a todos los vértices que definen la forma) sino de ajuste, esto es, toma como base una serie de vértices, de los cuales solo toca al primero y al último y aproxima a los demás; permite una relación más cercana entre la entrada de información (vértices de control) y la salida (la curva) y, finalmente, su base matemática es polinomial (fig 3.9).

Su base, los *polinómios de Bernstein*, está dada por la siguiente expresión :

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} , \quad (3.7.1)$$

donde

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} ,$$

en la cual, n es el grado del polinomio e i es el vértice particular sobre el cual se indexa (de 0 a n). En general, un polinomio de grado n se especifica por $n+1$ vértices de control.

Los puntos de la curva se encuentran evaluando la expresión :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.7.2)$$

donde P_i especifica los vertices de control.

Observe que :

$$J_{n,0}(0) = J_{n,n}(1) = 1,$$

lo que permite que $P(0) = P_0$ y $P(1) = P_n$, también que el máximo valor de la función se da en $t=1/n$.

La r -ésima derivada en los extremos de esta formulación está dada por lo siguiente :

$$P^r(0) = [n!/(n-r)!] \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} P_i,$$

$$P^r(1) = [n!/(n-r)!] \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} P_{n-i},$$

así, la primera derivada en los puntos extremos está dada por

$$P'(0) = n(P_1 - P_0), \quad (3.7.3)$$

$$P'(1) = n(P_n - P_{n-1}), \quad (3.7.4)$$

lo cual dice que el vector tangente al inicio y al final de la curva sigue la dirección de los segmentos inicial y final del polígono de control, por lo cual, la curva es tangente a estos segmentos.

La segunda derivada, evaluada en los extremos, esta dada por :

$$P''(0) = n(n-1)(P_0 - 2P_1 + P_2) \quad (3.7.5) ,$$

$$P''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \quad (3.7.6) ,$$

Esta formulación indica que la segunda derivada en los puntos inicial y final depende de los dos segmentos más cercanos para cada caso, o de los tres vértices más cercanos. En general, las r -ésimas derivadas en los extremos dependen del punto extremo correspondiente y los r vértices vecinos.

Condiciones de continuidad

Sean P y Q dos segmentos Bezier, donde el primero está formado de P_i vértices y es de grado n , y el segundo se forma por Q_i vértices y es de grado m . La continuidad de primera derivada en el vértice de unión se obtiene cuando

$$P'(1) = aQ'(0) \quad (3.7.7),$$

donde a es un escalar. Usando (3.7.3) y (3.7.4) en (3.7.7) se genera :

$$Q_1 - Q_0 = \left(\frac{n}{m}\right) (P_n - P_{n-1}) \quad (3.7.8)$$

Como Q_0 debe ser igual a P_n , el final de un segmento es igual a la pendiente de inicio del siguiente segmento cuando los vértices Q_1 , P_n y P_{n-1} son colineales. Para un caso particular de dos segmentos de Bezier cúbicos, ($n=m=3$), donde el vector tangente es igual en magnitud y dirección en la unión de los segmentos, se tiene que la ecuación (3.7.8) es la siguiente :

$$Q_1 - Q_0 = P_3 - P_2 = Q_1 - P_3 \quad (3.7.9),$$

así,

$$Q_1 + P_2 = 2P_3 \quad (3.7.10),$$

lo que implica que P_3 es el punto medio del segmento P_2Q_1 . Debe observarse que para mantener continuidad de primera derivada, solo es necesario que P_3 esté sobre el segmento P_2Q_1 . Para las mismas curvas Q y P anteriores, la continuidad de segunda derivada esta dada por :

$$m(m-1)(Q_0-2Q_1+Q_2) = n(n-1)(P_{n-2}-2P_{n-1}+P_n) \quad (3.7.11).$$

Representación Tridimensional

Esta mantiene los mismos principios del caso bidimensional, pero ahora generando la superficie sobre una malla de control, que para el caso bicúbico es de 4x4 bajo la siguiente representación :

$$P(u,v) = [(1-u)^3 \quad 3(1-u)^2u \quad 3(1-u)u^2 \quad u^3] [B] \begin{bmatrix} (1-v)^3 \\ 3(1-v)^2v \\ 3(1-v)v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad (3.7.12),$$

$$\text{donde } B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix}$$

El tensor B define los vértices de control del polígono de control y, de manera similar al caso bidimensional, solamente las esquinas ($B_{11}, B_{14}, B_{41}, B_{44}$) forman parte de la superficie generada. El vector tangente queda definido por los vértices externos, y así, por ejemplo, B_{11} y B_{12} definen la pendiente de la curva $v=0$, la cual parte de B_{11} . Los vértices internos a la malla de control definen el giro de la superficie en las esquinas (los vectores de giro son funciones de los vértices internos[15] para el caso de Bezier), lo que permite generar funciones más suaves en las esquinas y eliminar los problemas generados por la formulación de Ferguson al considerar los vectores de giro igual a 0.

Bezier puede representarse en forma de producto cartesiano de la siguiente forma :

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i+1,j+1} J_{n,i}(u) K_{m,j}(v) \quad (3.7.13),$$

$$\text{donde } J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (3.7.14)$$

$$\text{y } K_{m,j}(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j}$$

m y n son un número menor que el número de vértices en la dirección v y en la dirección u respectivamente.

En el caso de desear una composición de segmentos Bezier, es necesario que éstos mantengan una frontera común de vértices de control y que el plano tangente del primer segmento sobre $u=1$ coincida con el del segundo segmento en $u=0$ para toda v tal que $0 \leq v \leq 1$, y así, la normal a la superficie se mantiene continua en toda la frontera (fig 3.9).

Los segmentos Bezier son susceptibles al movimiento de un vértice pues se altera completamente la forma, esto es, su control local es restringido debido a la forma de su base polinomial (fig 3.10). También se observa que las funciones escalares $J_{n,i}(u)$ y $K_{m,j}(v)$ dependen del número de vértices de control, lo cual puede ser indeseable si se desea realizar una superficie que cubra un polígono relativamente grande. En esta formulación, si se desea obtener una mayor continuidad entre segmentos, es necesario aumentar el grado de la formulación, lo cual acarrea nuevamente problemas de oscilación.

3.8 Splines

Un *spline* es una curva polinomial generada por segmentos de grado K con continuidad de derivadas de orden $K-1$ en las uniones de los segmentos[28]. El valor del parámetro que corresponde a los extremos de un segmento spline se les denomina nudos (fig 3.11). Así, por ejemplo, un *spline* cúbico mantiene continuidad de segunda derivada en la unión de sus segmentos.

El término spline proviene de la analogía con una herramienta de dibujo, normalmente de metal delgado o de madera, la cual se tuerce elásticamente para pasar por algunos puntos de restricción. La curva generada por el spline físico es aquella que minimiza su energía de tensión interna, que expresado matemáticamente, es la curva cuya curvatura cuadrada media es mínima y en ese sentido ésta es la curva más suave que pasa a través de los puntos fijos

de restricción. En términos de coordenadas cartesianas, la curva de mínima energía es aquella que minimiza la siguiente integral entre dos puntos :

$$\int z'^2 dx / (1+z'^2)^{5/2} \quad (3.8.1).$$

Si se asume que $z' \ll 1$, la minimización es sobre $\int z'^2 dx$ cuya solución es una función cúbica por segmentos, continua hasta su segunda derivada, que cumple perfectamente con la definición de spline, en este caso cúbico, y de ahí la importancia de los splines y en particular de los cúbicos. z' puede manejarse como pequeña realizando un cambio de sistema de referencia sobre z , manteniendo un sistema local sobre cada posición de la curva[15]. En la práctica, se emplean los splines de grados pequeños (≤ 3) para generar curvas que suavicen a los puntos especificados. Su empleo con polinomios de bajo grado reduce los requerimientos de computación y reduce la inestabilidad numérica que surge con las curvas de grados altos. Sin embargo, ya que los polinomios de grados pequeños no pueden unir una serie arbitraria de puntos, se requiere entonces segmentos polinomiales adyacentes. Los splines cúbicos poseen la ventaja de ser las curvas espaciales de menor grado que permiten un punto de inflexión y tienen la habilidad de rotar en el espacio. La ecuación de un segmento de spline cúbico en términos de un parámetro t es la siguiente :

$$P(t) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.8.2),$$

donde $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$.

Expandiendo la expresión anterior se genera :

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \quad (3.8.3)$$

Si la información que se conoce es la posición y primera derivada en los extremos del segmento, se puede forzar a que la curva pase por estos extremos con la tangente determinada. Si la curva varía

en $[t_1..t_2]$, las restricciones se establecen por las siguientes igualdades, donde $t_1=0$:

$$P(0) = P_1; P(t_2) = P_2 \quad (3.8.4),$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = P'_1,$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_2} = P'_2.$$

Evaluando (3.8.3) en los extremos y considerando las condiciones (3.8.4), se generan las expresiones de las cuales se obtienen los coeficientes B_i :

$$P(0) = B_1 = P_1 \quad (3.8.5),$$

$$B_2 = P'_1 = \sum_{i=1}^4 (i-1)t^{i-2}B_i \Big|_{t=0},$$

$$P(t_2) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \Big|_{t=t_2} = B_1 + B_2 t_2 + B_3 t_2^2 + B_4 t_2^3,$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_2} = \sum (i-1)t^{i-2}B_i = B_2 + 2B_3 t_2 + 3B_4 t_2^2,$$

y se encuentra B_3 y B_4 :

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2},$$

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P'_1}{t_2^2} + \frac{P'_2}{t_2^2},$$

Así, la forma del spline la determinan la posición de los vértices finales y la derivada en los mismos, fijando así, la forma de la curva.

Sustituyendo los B_i en (3.8.3) se obtiene la expresión que

representa un spline cúbico :

$$P(t) = P_1 + P_1' t + [3(P_2 - P_1)/t_2^2 - (2P_1'/t_2) - (P_2'/t_2)] t^2 + [2(P_1 - P_2)/t_2^3 + P_1'/t_2^2 + P_2'/t_2^2] t^3 \quad (3.8.6)$$

Esta expresión se generaliza para dos segmentos adyacentes $P_k(t)$ y $P_{k+1}(t)$, donde $1 \leq k \leq n-2$ y n es el número de vértices sobre los cuales la curva debe pasar :

$$P_k(t) = P_k + P_k' t + [3(P_{k+1} - P_k)/t_2^2 - (2P_k'/t_2) - (P_{k+1}'/t_2)] t^2 + [2(P_k - P_{k+1})/t_2^3 + P_k'/t_2^2 + P_{k+1}'/t_2^2] t^3 \quad (3.8.7),$$

$$P_{k+1}(t) = P_{k+1} + P_{k+1}' t + [3(P_{k+2} - P_{k+1})/t_3^2 - (2P_{k+1}'/t_3) - (P_{k+2}'/t_3)] t^2 + [2(P_{k+1} - P_{k+2})/t_3^3 + P_{k+1}'/t_3^2 + P_{k+2}'/t_3^2] t^3 \quad (3.8.8),$$

donde se asume que la variación del parámetro t es $0 \leq t \leq t_2$ para el primer segmento, $0 \leq t \leq t_3$ para el segundo, etc.

Debe observarse que en la unión de los segmentos, el vértice P_{k+1} , no se tiene especificada la información de primera derivada, la cual se encuentra desarrollando la segunda derivada e igualándola en las uniones.

La segunda derivada del spline esta dada por :

$$P''(t) = \sum (1-i)(1-2)B_i t^{i-3} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.8.9).$$

Evaluando la segunda derivada en el extremo final, donde $t=t_2$, del primer segmento, se obtiene :

$$P'' = 6B_4 t_2 + 2B_3 \quad (3.8.10),$$

y al principio del segundo segmento, donde $t=0$, se tiene

$$P'' = 2B_3 \quad (3.8.11)$$

Iguando las dos condiciones anteriores que representan la condición de segunda derivada en la unión de los segmentos y agrupando términos, se tiene :

$$t_3 P_1' + 2(t_3 + t_2) P_2' + t_2 P_3' = [3/(t_2 t_3)] [t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)] \quad (3.8.12),$$

igualdad que se generaliza para n segmentos de un spline cúbico. Observe que en la igualdad de términos, cada B_s se refiere a su segmento correspondiente, por lo cual, B_3 en (3.8.10) y (3.8.11) es diferente. Matricialmente la condición anterior se representa de la siguiente forma :

$$\begin{bmatrix} t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4+t_5) & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [3/(t_2 t_3)] [t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)] \\ [3/(t_3 t_4)] [t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2)] \\ \dots \\ a \end{bmatrix}$$

$$a = [3/(t_{n-1} t_n)] [t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2})],$$

en donde P_1' y P_n' son vectores conocidos, al igual que todos los vectores de posición P_i y el valor de las t_j , quedando por determinar el valor de las derivadas internas P_2' a P_{n-1}' , las cuales se localizan resolviendo el sistema (3.8.13). Así, los vectores internos resultan de una condición de continuidad de segunda derivada y el diseñador no necesita especificarlos. Con estos vectores se calculan los coeficientes B_i empleando las relaciones (3.8.5) y finalmente se procede a calcular cada uno de los segmentos del spline mediante la expresión (3.8.3)

Una última consideración debe realizarse con respecto a la variación del parámetro t , el cual puede normalizarse a un rango $[0..1]$ para todos los arcos del spline. Esta normalización aplicada en (3.8.13), con un arreglo algebraico por renglón, conduce a la representación siguiente (nota $0 \rightarrow t_2$, $0 \rightarrow t_3$, $0 \rightarrow t_4$, $0 \rightarrow t_5$)



Fig. 3.12 SPLINES BAJO DIVERSAS CONDICIONES EN SUS EXTREMOS

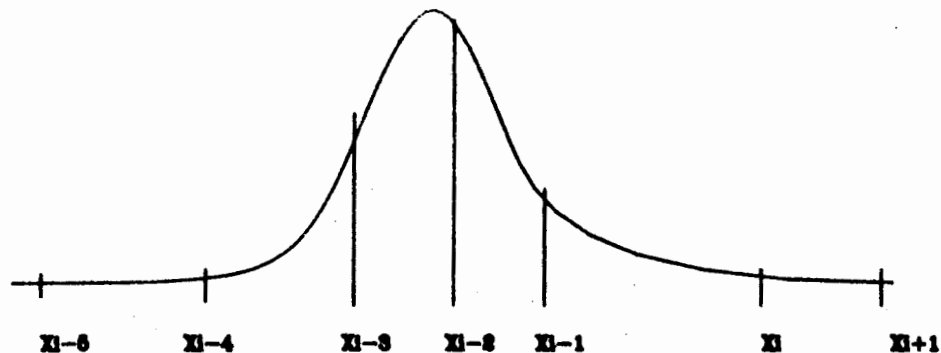


Fig. 3.13 SPLINE CUBICO SOBRE UN NUMERO FINITO DE ARCOS QUE SE EMPLEA PARA FORMAR LAS FUNCIONES BASE DE LOS B-splines

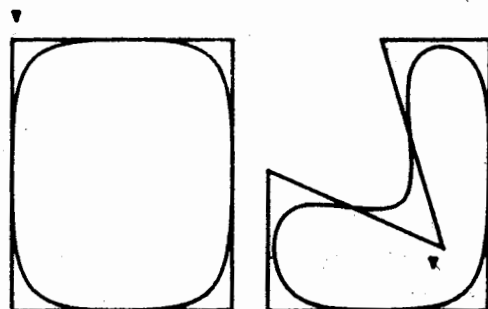


Fig. 3.14 ALTERACION LOCAL DE UNA CURVA B-spline MEDIANTE EL MOVIMIENTO DE UN VERTICE V

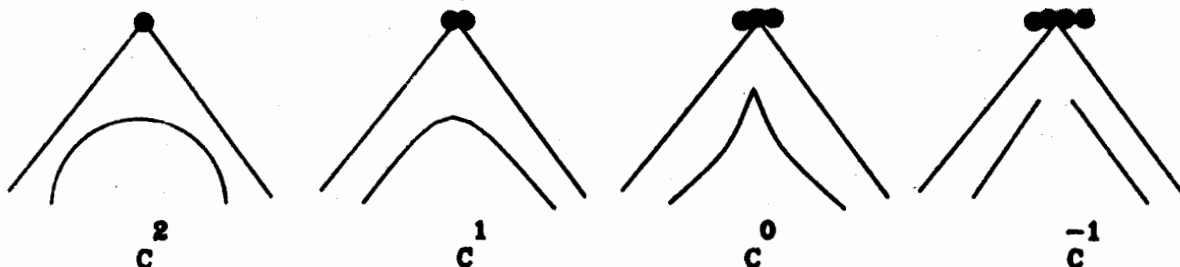


Fig. 3.15 AGREGACION DE DISCONTINUIDAD CONTROLADA EN UN VERTICE DE UNA CURVA B-spline MEDIANTE MULTIPLICIDAD

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2' \\ P_3' \\ \vdots \\ P_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_3 - P_1) - P_1' \\ 3(P_4 - P_2) \\ 3(P_5 - P_3) \\ \vdots \\ 3(P_n - P_{n-2}) - P_n' \end{bmatrix} \quad (3.8.14)$$

Para el caso cúbico, los coeficientes B_i pueden expresarse como

$$\begin{bmatrix} B_4 \\ B_3 \\ B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P_k' \\ P_{k+1}' \end{bmatrix} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.8.15)$$

Condición en los extremos

Las expresiones (3.8.4) y (3.8.5) establecen las condiciones en los extremos de un spline, pero son susceptibles de modificarse en función a necesidades específicas de un problema. (3.8.4) y (3.8.5) se conocen como las condiciones de fijación -'clamped'-. Otras condiciones son, por ejemplo, la *natural* o *relajada*, cuando $d^2P/d^2t=0$ se aplica a los arcos inicial y final del spline completo en los valores de parametrización $t=0$ y $t=t_n$, lo cual produce alteración de continuidad de curvatura en las fronteras del spline. También puede ser útil que el spline sea *cíclico* para diseñar curvas cerradas, en cuyo caso pueden considerarse las condiciones

$$P_1^i(0) = P_n^i(t_n), \quad 0 \leq i \leq 2,$$

o *anticíclico*

$$P_1^i(0) = -P_n^i(t_n), \quad 0 \leq i \leq 2,$$

cada una de las cuales produce variaciones significativas en la forma de las curvas, principalmente al inicio y final de la misma (fig. 3.12).

Una consideración final que debe hacerse con respecto a los splines cúbicos se refiere a la existencia de oscilaciones que eliminan la suavidad de la curva, las cuales pueden eliminarse aplicando *tensión* por los extremos dando inicio a la teoría de splines bajo tensión cuya principal objeción es que su formulación quede expresada en término de funciones exponenciales en lugar de funciones polinomiales, por lo cual existe un impedimento para su evaluación eficiente[29]. La oscilación sucede porque el spline se ve influenciado localmente por cada nodo a lo largo de la curva y la tercera derivada se mantiene constante en cada segmento. Las discontinuidades de la tercera derivada pueden inducir la generación de puntos de inflexión no deseados sobre la curva y así, ayudar a la generación de oscilaciones.

3.9 B-splines

En los ambientes de Diseño Asistido por Computadora donde se cuenta con un modelador de superficies, se torna evidente la necesidad de que este incluya en sus expresiones facilidades para alterar localmente las formas.

La teoría de los splines, como se expone en (3.8), no incluye un control local de la forma como una de sus cualidades y así, de existir una modificación en un vértice, es necesario recalcular el spline completo.

Si se tiene una base formada por splines que permita generar una curva o superficie como una combinación lineal de sus elementos, entonces se está generando un sistema de diseño de curvas y superficies que mantiene las propiedades de los splines y agrega una nueva dimensión que se traduce en control local.

El primer paso para llegar a un esquema de esta naturaleza se refiere a la generación de la base que permita un control local. Si consideramos un spline cúbico $\phi(x)$, tal que cumpla con las siguientes condiciones en sus extremos:

$$\phi(x) = \phi'(x) = \phi''(x) \quad (3.9.1)$$

y además se expanda sobre tres arcos, entonces se está forzando a una curva cuya forma tiene valor cero en los extremos, una condición similar a la que mantienen los polinomios de Bernstein, pero que si la analizamos, resulta un spline $\phi(x) \equiv 0$ en todo su intervalo. Si esta misma idea se extiende a un spline cúbico que se expande sobre cuatro arcos, entonces se genera una curva similar a una campana que asegura tener valores distintos de cero en el area que cubre (fig 3.13). Si además, a esa curva se le añade un segmento de línea de $-\infty$ al extremo izquierdo y del extremo derecho a $+\infty$ entonces se ha generado un spline cúbico sobre un número infinito de arcos.

Los extremos donde la campana se une con los segmentos de línea se refieren como X_{i-4} y X_i , y la curva resultante se denomina *B-spline* o spline fundamental de orden 4 (grado 3). Un B-spline se dice que es un spline de *soporte mínimo*, donde su soporte es la extensión de arcos sobre los cuales es distinto de cero. Debe observarse que un spline cúbico está completamente determinado por el conjunto de nudos sobre el cual está definido y un valor de Z. De manera más general, el B-spline $M_{m1}(x)$ de orden m (o grado $m-1$) sobre un conjunto de nudos dado es cero excepto sobre los m arcos sucesivos $X_{i-m} < X < X_i$.

Es común normalizar la amplitud de los B-splines, y tomando una propuesta de Cox y Boor[45], se tiene el B-spline normalizado

$$N_{m1}(X) = (X_i - X_{i-m}) M_{m1}(X) . \quad (3.9.2)$$

Una gran ventaja de los B-splines, demostrada por Curry y Schoenberg(1966) se refiere a que cualquier spline de orden m sobre un conjunto de nudos $X_0, X_1, \dots, X_n$ puede ser expresado como una suma de múltiplos de B-splines definidos sobre el mismo conjunto de nudos extendido por $m-1$ nudos adicionales en cada extremo del rango, elegidos arbitrariamente como $X_{-m+1}, X_{-m+2}, \dots, X_{-1}$ y $X_{n+1}, \dots, X_{n+m-1}$. Es posible construir $m+n-1$ B-splines sucesivos sobre el conjunto de nudos extendido, cada uno de los cuales es diferente de cero exactamente sobre m arcos consecutivos.

Estas condiciones se expresan por medio de la siguiente sumatoria

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m+n-1} C_i M_{m,i}(x), \quad (3.9.3)$$

donde $\phi(x)$ es un spline de grado $(m-1)$ sobre el conjunto de nudos original, $M_{m,i}(x)$ es el B-spline sobre el conjunto de nudos extendido y para el cual es diferente de cero en exactamente $X_{i-m} < x < X_i$, y C_i son coeficientes. La expresión (3.9.3) también puede ser escrita en términos de los B-splines normalizados y representa un resultado muy importante porque si un spline de grado $m-1$ se representa en función de B-splines, y se modifica uno de los coeficientes C_i , el spline resultante solo se ve afectado en m arcos sin variar sus propiedades de continuidad, lo cual representa un sistema de alteración local y el medio para no recalcular todo el spline bajo la modificación de un vértice (fig 3.14).

Considérese ahora, con más detalle, el B-spline cúbico normalizado $N_{4,i}(u)$ con su conjunto de nudos $u_i=1, i=0,1,\dots,n$ uniformes, el cual es diferente de cero en el rango $u_{i-4} < u < u_i$, y asuma que $n \geq 3$. La forma más conveniente de elegir los nudos en los extremos del B-spline es $u_{-3}=u_{-2}=u_{-1}=0$ y $u_{n+1}=u_{n+2}=u_{n+3}=n$, esto es, se tienen nudos múltiples en los extremos. Así, los arcos extra generados por estos nudos tienen longitud cero y los nudos extremos se transforman en nudos de multiplicidad 4. Se puede demostrar que la inclusión de la multiplicidad en un nudo produce un decremento del orden de continuidad del spline en ese nudo. De esa forma, mientras un spline cúbico es continuo hasta su segunda derivada en un nudo simple, se transforma en discontinuo en su segunda derivada en un nudo doble, discontinuo en su primera derivada en un nudo triple y discontinuo sobre él mismo en un nudo cuádruple (fig 3.15). Valuando (3.9.3) para el caso cúbico normalizado con el conjunto de nudos $0,1,2,\dots,n$ se obtiene la siguiente expresión

:

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^{n+3} C_i N_{4i}(u) . \quad (3.9.4)$$

Si C_i es un vector r_i , entonces se obtiene una curva $r(u)$ que los suaviza y a la cual se denomina curva *B-spline*, la cual mantiene las siguientes propiedades :

$$\sum_{i=0}^n N_{4,i+1}(u) = 1, \quad 0 \leq u \leq n-2 . \quad (3.9.5)$$

En el caso particular de $u=0$, la expresión es :

$$r(0) = \sum_{i=0}^n r_i N_{4,i+1}(0) , \quad (3.9.6)$$

de la cual, la única función diferente de cero para $u=0$ es $N_{4,1}(0)$ y además su valor es la unidad, lo que implica que $r(0)=r_0$
Derivando (3.9.5) se obtiene :

$$\sum_{i=0}^n \dot{N}_{4,i+1}(u) = 0 . \quad (3.9.7)$$

Desarrollando la sumatoria e igualando los dos únicos términos $\neq 0$, se obtiene la relación :

$$\dot{N}_{4,1}(0) = -\dot{N}_{4,2}(0) , \quad (3.9.8)$$

así como :

$$\dot{r}(0) = \sum_{i=0}^n r_i \dot{N}_{4,i+1}(0) . \quad (3.9.9)$$

Desarrollando (3.9.9) y considerando (3.9.8) se tiene que :

$$\dot{r}(0) = \dot{N}_{4,2}(0)(r_1 - r_0) \quad (3.9.10)$$

Considerando (3.9.6) y (3.9.10) se deduce que la curva *B-spline*

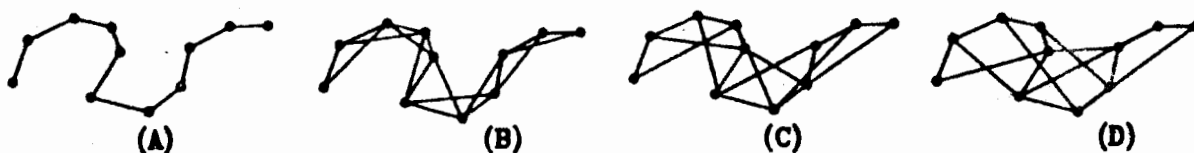


Fig. 3.16 UNA CURVA B-spline DE GRADO $M-1$ CAE DENTRO DE LA REGION CONVEXA DEFINIDA POR LOS M VERTICES VECINOS.

(A) LINEAL; (B) CUADRICO; (C) CUBICO; (D) $M=5$;
(E) $5 \leq M$

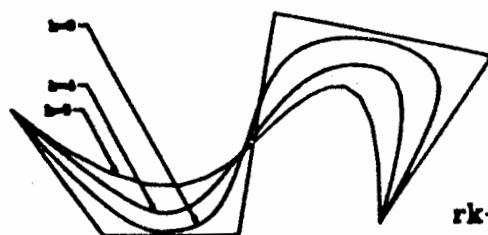
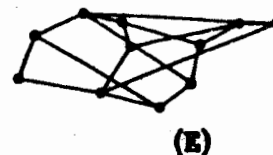


Fig. 3.19 VARIACION DE k EN UN B-spline

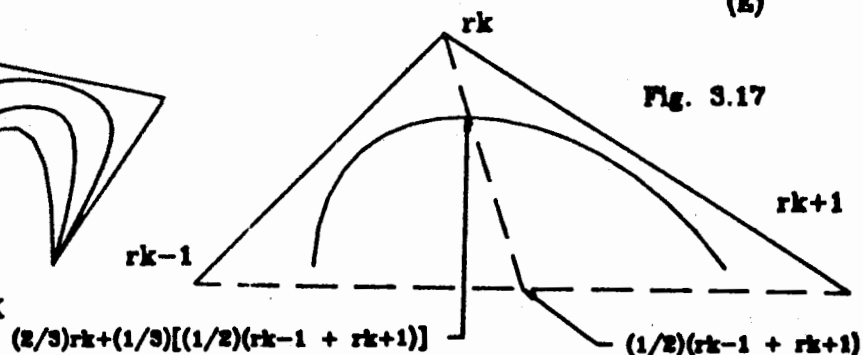


Fig. 3.17

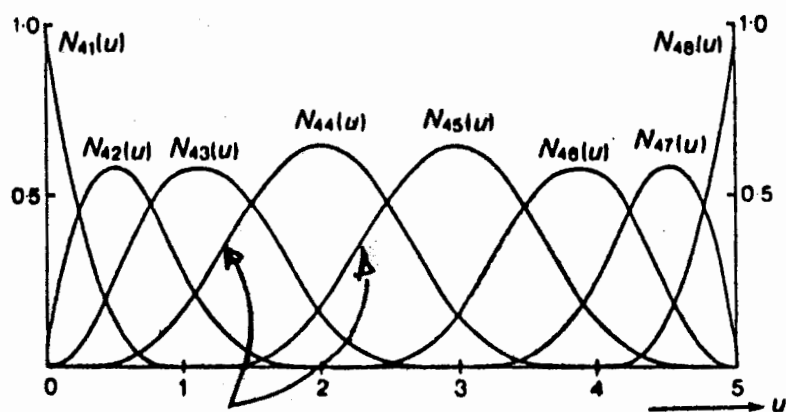


Fig. 3.18 FUNCIONES BASE B-splines NO PERIODICAS

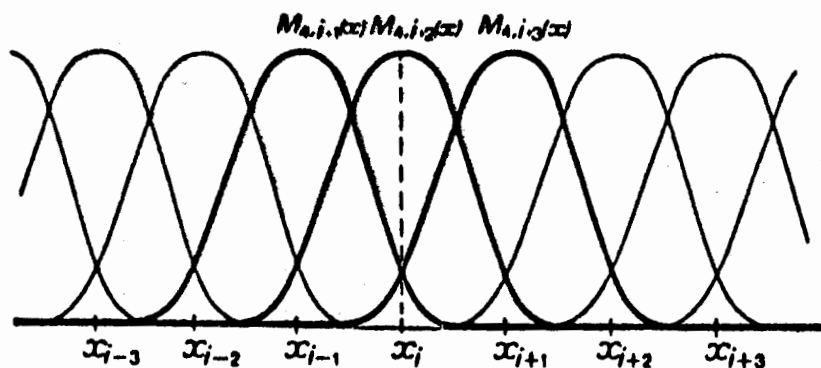


Fig. 3.20 FUNCIONES BASE B-splines PARA CASOS PERIODICOS. OBSERVESE QUE SON LA MISMA GRAFICA DESPLAZADA.

inicia en r_0 y su tangente en ese punto sigue la dirección $(r_1 - r_0)$, lo cual recuerda a las curvas de Bezier siguiendo su polígono de control, aunque los B-splines tienen la ventaja de que al cambiar uno de los vértices solo se produce un cambio en cuatro arcos sin alterar los demás segmentos de curva. Además se poseen los medios para construir un B-spline cúbico que aproxime un polígono con el número de aristas deseadas, asegurando la continuidad de segunda derivada en cualquiera de sus posiciones, lo cual no puede lograrse con Bezier pues su grado depende del número de vértices de control, o si se desea una composición de segmentos cúbicos, requiere el cálculo de vértices que permitan asegurar la curvatura, por mencionar solo una situación con respecto a los vértices de control.

Las curvas B-spline poseen algunas propiedades geométricas interesantes, por ejemplo, cada segmento de curva está definido por cuatro vértices de control, donde la suma de la base para un valor u determinado es igual a la unidad, por lo cual, para cualquier u , $r(u)$ es un promedio de los cuatro vértices de control y el segmento de curva correspondiente debe caer en la cubierta convexa definida por los vértices. Lo anterior se puede generalizar indicando que para una curva B-spline de grado $m-1$, cualquiera de sus puntos cae dentro de la carcasa convexa de los m vértices vecinos[28] (fig. 3.16). Si los cuatro vértices son colineales, la carcasa convexa es una línea recta y el segmento correspondiente es lineal.

Otro aspecto geométrico se refiere a que la curva B-spline pasa cerca de la región media de los lados del polígono excepto para el primero y el último, además, la curva pasa por los puntos (fig. 3.17) :

$$1/6 r_{k-1} + 2/3 r_k + 1/6 r_{k+1} = 2/3 r_k + 1/3 [1/2(r_{k-1} + r_{k+1})]$$

para $k = 2, 3, \dots, n-2$.

Es posible construir B-splines que generen curvas cerradas, empujando un polígono cerrado, para lo cual se requiere un conjunto

cíclico de nudos, esto es, $u_n = u_0$, $u_{n+1} = u_1$, etc, lo que elimina la necesidad de nudos múltiples que se presenta en la formulación para curvas abiertas (fig 3.14).

Las funciones de suavización $N_{i,k}(u)$ de grado $k-1$ pueden definirse recursivamente de la siguiente forma :

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (3.9.11)$$

$$N_{i,k}(u) = [(u - u_i)N_{i,k-1}(u)] / [(u_{i+k-1}) - u_i] + [(u_{i+k} - u)N_{i+1,k-1}(u)] / (u_{i+k} - u_{i+1}), \quad (3.9.12)$$

donde se toma por convención que $0/0=0$.

Variaciones en B-splines

La variación sobre el conjunto de nudos genera variaciones sobre los B-splines.

Si el conjunto de nudos se emplea para el diseño de curvas abiertas, entonces se llega al caso particular de B-splines no-periódicos uniformes[31] (fig 3.18), y el valor de los nudos se calcula con las siguientes condiciones desde u_0 hasta u_{n+k} (n =numero de vertices de control-1).

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k \\ i-k+1 & \text{si } k \leq i \leq n \\ n-k+2 & \text{si } i > n \end{cases} \quad (3.9.13)$$

La variación de k simula cambios de "tensión" en una curva (a menor valor de k , mayor tensión), lo cual también se observa en las figuras donde se muestra la propiedad de carcasa convexa (fig 3.19).

También es posible tener B-splines periódicos que permiten diseñar curvas cerradas en cuyo caso las funciones $N_{i,k}$ tienen una misma forma y se observa que la base es solamente el desplazamiento de

una curva tipo sobre espacios enteros. El vector nudo se elige de tal suerte que $u_1=1$, lo cual reduce las expresiones anteriores a lo siguiente :

$$N_{i,k}(u) = N_{0,k}((u-1+n+1) \bmod (n+1)) , \quad (3.9.14)$$

donde $0 \leq u \leq n+1$ y $\bmod(j)$ es la función módulo.

Para el caso donde $k=4$, las funciones B-splines canónicas uniformes cúbicas son las siguiente[30] :

0	$u < u_1$	(3.9.15)
$u_0^3/8$	$u_1 \leq u < u_1+1$	
$(-3u_1^3 + 3u_1^2 + 3u_1 + 1)/8$	$u_1+1 \leq u < u_1+2$	
$(3u_2^3 - 6u_2^2 + 4)/8$	$u_1+2 \leq u < u_1+3$	
$(1-u_3^3)/8$	$u_1+3 \leq u < u_1+4$	
0	$u_1+4 \leq u$	

= $N_{1,4}(u)$

donde $u'_j = u - u_{1+j}$, $j=1,1+1,\dots,1+3$.

Puede observarse que estas funciones tienen exactamente la misma forma, independientemente del valor de i . Así, cualquiera de las seis funciones anteriores puede obtenerse como una traslación de alguna de ellas (fig 3.20).

Otra posibilidad surge con B-splines no uniformes[31], donde los nudos están colocados a intervalos desiguales. Gordon y Riesenfeld(1974) experimentaron con este tipo de B-spline y su reporte indica que no existe gran diferencia con la formulación uniforme excepto en casos de gran disparidad entre las longitudes de las aristas del polígono de control. Mencionan además la posibilidad de cambiar la curvatura o la dirección de la curva cuando colapsan dos o tres vértices del polígono de control. También encontraron aplicación de los no uniformes en operaciones

como la inserción de nuevos vértices de control, puesto que esta operación genera de manera natural un esquema no uniforme.

Finalmente, la formulación de una superficie B-spline $Q_{k,1}(u,v)$ se extrapola de las formulaciones anteriores como sigue :

$$Q_{k,1}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,1}(v) V_{ij} , \quad (3.9.16)$$

lo cual es un producto tensor. Algunas de las propiedades de esta superficie se asocian a los Beta-spline que comentaremos más adelante.

Finalmente debe comentarse que la asignación de vértices múltiples crea discontinuidades controladas cuya utilidad puede ser la creación de cúspides en un segmento B-spline, lo cual es útil en aplicaciones de Diseño por Computadora.

3.10 Curvas y Superficies Paramétricas Racionales

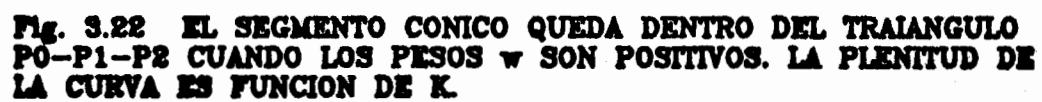
Las curvas y superficies racionales han empezado a utilizarse en algunos modeladores geométricos de gran difusión[16]. Estas formulaciones tiene la ventaja de permitir crear formas libres y además incluir funciones bien conocidas, como las cuádricas, lo cual resulta atractivo si se considera que para emular, por ejemplo, un círculo en alguna formulación anterior como es el caso de Bezier, se debe hacer lo siguiente: si el círculo deseado es $r = \cos\phi + j\sin\phi$ para $0 \leq \phi \leq \pi/2$, se emplean los vectores de posición :

$$r_0=1, \quad r_1=1+kj, \quad r_2=k1+j, \quad r_3=j ,$$

donde $k=4(\sqrt{2}-1)/3$, en la representación :

$$r=r(u)=(1-u)^3 r_0 + 3u(1-u)^2 r_1 + 3u^2(1-u) r_2 + u^3 r_3 ,$$

con lo cual se obtiene un círculo con una variación entre 1 y



1.00027 en el radio.

Partiendo de la parametrización de una sección cónica, encontraremos que la expresión final nos permite llegar a lo mencionado en el párrafo anterior.

**Parametrización cuádrica racional de un
segmento de sección cónica**

Con objeto de definir el segmento $PoP'P_2$ de una sección cónica se toman las tangentes definidas en ellos y se crean los vértices P_1 , A y B que son las intersecciones de las líneas tangentes resultantes (fig 3.21). Si se mantienen constantes los vértices PoP_1P_2 y se varía P' , entonces se crean dos razones que dependen de esta variación y que pueden emplearse como parámetros para la posición de P' sobre la curva. Las razones son :

$$g_1 = P_1A / PoA , \quad (3.10.1)$$

$$g_2 = P_1B / P_2B . \quad (3.10.2)$$

Ahora bien, si los segmentos de línea definidos por PoP_1 , P_1P_2 , P_2P_3 se representan por las ecuaciones $l_1=0$, $l_2=0$ y $l_3=0$ entonces, la ecuación de una familia de cónicas que pasan por Po y P_2 y tienen tangentes definidas por PoP_1 , P_1P_2 se representa por :

$$(1-\lambda)l_1 l_2 + \lambda l_3^2 = 0 . \quad (3.10.3)$$

Para continuar con el desarrollo, es conveniente cambiar a un sistema coordenado oblicuo (α, φ) , donde el vértice P' es el centro del sistema de coordenadas, Po es el vértice $(1,0)$ y P_2 es $(0,1)$ por lo cual un punto cualquiera $P(\alpha, \varphi)$ en este plano esta dado por

$$r = r_1 + \alpha(r_0 - r_1) + \varphi(r_2 - r_1) , \quad (3.10.4)$$

donde las r 's representan los vectores a los puntos P 's correspondientes.

Bajo este nuevo sistema de coordenadas, las líneas PoP_1 , P_1P_2 , PoP_2 tienen las ecuaciones $\varphi=0$, $-\alpha=0$ y $\alpha+\varphi-1=0$ respectivamente. Así, la familia de cónicas expresada por (3.10.3) es :

$$S(\alpha, \varphi) = (1-\lambda)\alpha\varphi - \lambda(\alpha - \varphi - 1)^2 = 0, \quad (3.10.5)$$

bajo el sistema de coordenadas oblicuo.

En la expresión anterior, se considera $-\alpha$ en lugar de $+\alpha$ ya que se desea tener la familia de curvas que pasan dentro del triángulo $P_0P_1P_2$ que corresponde a $0 < \lambda < 1$.

La línea tangente a la cónica en el punto $P'(\alpha, \varphi)$ se obtiene utilizando la formulación explícita (3.10.5) :

$$S_\alpha(\alpha', \varphi')(\alpha - \alpha') + S_\varphi(\alpha', \varphi')(\varphi - \varphi') = 0, \quad (3.10.6)$$

donde $S_\alpha(q, w)$ y $S_\varphi(q, w)$ son las derivadas parciales de S en α y φ respectivamente.

Esta línea intersecta al segmento P_0P_1 en $(\alpha, 0)$, que sustituido en (3.10.6) y despejando α se obtiene :

$$\alpha = [-2\lambda(\alpha' + \varphi' - 1)] / [(1-\lambda)\varphi' - 2\lambda(\alpha' + \varphi' - 1)]. \quad (3.10.7)$$

El segmento P_0P_1 puede representarse por la línea paramétrica :

$$T = (1-u)P_0 + uP_1, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (3.10.8)$$

Si el segmento se divide en el punto A , el mismo de la razón (3.10.1), los nuevos segmentos miden :

$$\begin{aligned} \text{segmento } P_0 \rightarrow A; & \quad (1-u)P_0A & (3.10.9) \\ \text{segmento } A \rightarrow P_1; & \quad uAP_1, \quad 0 \leq u \leq 1. \end{aligned}$$

En este caso, el parámetro u , relacionado con α , esta proporcionando exactamente los segmentos anteriores. Así,

$$\begin{aligned} uP_1A &= \alpha P_1A & (3.10.10) \\ (1-u)P_0A &= (1-\alpha)P_0A. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.10.10) en (3.10.1) y aplicando el mismo principio para (3.10.2), se obtienen :

$$g_1 = \alpha / (1 - \alpha) = -2\lambda(\alpha' + \varphi' - 1) / (1 - \lambda)\varphi', \quad (3.10.11)$$

$$g_2 = \varphi / (1 - \varphi) = -2\lambda(\alpha' + \varphi' - 1) / (1 - \lambda)\alpha'. \quad (3.10.12)$$

Para encontrar el valor λ específico para una curva, puede tomarse el producto de las g 's referido a una constante :

$$g_1 g_2 = k^2 \quad (3.10.13)$$

Resolviendo (3.10.11) y (3.10.12) podemos expresar a (α', φ') en términos de las g 's :

$$\alpha' = g_1 / (g_1 + 2 + g_2), \quad (3.10.14)$$

$$\varphi' = g_2 / (g_1 + 2 + g_2). \quad (3.10.15)$$

De esta forma, el punto sobre la sección cónica donde la tangente intersecta a P_0P_1 y P_1P_2 , tiene el vector de posición r dado por

$$\begin{aligned} r &= r_1 + g_1(r_0 - r_1) / (g_1 + 2 + g_2) + g_2(r_2 - r_1) / (g_1 + 2 + g_2), \\ &= (g_1 r_0 + 2r_1 + g_2 r_2) / (g_1 + 2 + g_2). \end{aligned} \quad (3.10.16)$$

Aplicando las siguientes relaciones :

$$g_1 = w_0(1-u) / w_1 u, \quad (3.10.17)$$

$$g_2 = w_2 u / w_1 (1-u), \quad (3.10.18)$$

de tal suerte que :

$$g_1 g_2 = k^2 = w_0 w_2 / w_1^2, \quad (3.10.19)$$

donde las w 's se conocen como pesos.

Finalmente, sustituyendo (3.10.17) y (3.10.18) en (3.10.16) se obtiene la siguiente expresión :

$$(3.10.20)$$

$$r = [w_0 r_0 (1-u)^2 + 2w_1 r_1 u (1-u) + w_2 r_2 u^2] / [w_0 (1-u)^2 + 2w_1 u (1-u) + w_2 u^2],$$

que representa la ecuación paramétrica cuádrica racional para un segmento cónico con tangentes P_0P_1 y P_1P_2 bajo el producto $g_1 g_2$ anterior. Así, la naturaleza de la curva queda definida por la relación entre los w 's.

La ecuación (3.10.20) se expresa en coordenadas homogéneas $[xw, yw, zw, w]$ de la siguiente forma :

$$P = (1-u)^2 P_0 + 2u(1-u)P_1 + u^2 P_2, \quad (3.10.21)$$

donde :

$$P_i = [x_i w_i \ y_i w_i \ z_i w_i \ w_i],$$

$$r w = P, \quad (3.10.22)$$

considerando a r homogeneizado a $[x \ y \ z \ 1]$.

La expresión (3.10.21) es similar, por ejemplo, a Bezier cuadrático (3.7), sin embargo, la expresión racional cuadrática puede representar cualquier segmento cónico, mientras que Bezier cuadrático solo puede representar parábolas.

Valuando (3.10.21) en los extremos 0 y 1 de u , así como la derivada en los mismos extremos, se encuentra que la cónica racional tiene puntos extremos P_0 y P_2 y tangentes definidas por $2(P_1 - P_0)$ y $2(P_2 - P_1)$.

Las relaciones cartesianas se obtienen aprovechando (3.10.22) de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} r w &= P, \\ P' &= r w' + w r', \\ r' &= (1/w)(P' - r w'), \end{aligned} \quad (3.10.23)$$

así :

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 & (3.10.24) \\ r(1) &= r_1 \\ r'(0) &= (2w_1/w_0)(r_1 - r_0) \\ r'(1) &= (2w_1/w_2)(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Puede deducirse que el punto máximo QM de la curva racional definida por los términos anteriores se encuentra al igualar las razones $g_1 = g_2 = k$, siendo $QM = P_1 N(1+k)$, donde $P_1 N$ es la perpendicular desde P_1 sobre $P_0 P_2$, así, la plenitud de la curva queda definida por k (fig 3.22).

Cuando $w_0 = w_1 = w_2$, o $k=1$, el denominador w de en la formulación homogénea corresponde a la unidad, obteniéndose la representación

de Bezier de una parábola. Si $k > 1$, tenemos una elipse, y si $k < 1$, una hipérbola.

Otro ejemplo importante es la generación de una línea recta que pase por r_0 y r_2 , lo cual se logra con las siguientes relaciones :

$$\begin{aligned} w_1 r_1 &= (w_0 r_0 + w_2 r_2) / 2, \\ w_1 &= (w_0 + w_2) / 2, \end{aligned}$$

donde el punto r_1 es colineal a los otros dos, obteniéndose la expresión de la línea :

$$r = [w_0 r_0 (1-u) + w_2 r_2 u] / [w_0 (1-u) + w_2 u] .$$

La razón $w_0:w_2$ determina la parametrización de la línea recta, la cual es uniforme cuando $w_0=w_2$, en cuyo caso se obtiene la parametrización ya conocida :

$$r = r_0(1-u) + r_2 u .$$

El círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante se obtiene con $r_0=1$, $r_1=1+j$, $r_2=j$, $w_0=\sqrt{2}$, $w_1=1$, $w_2=\sqrt{2}$.

Curvas cúbicas racionales

Estas son tan sólo una extensión natural a la teoría empleada en el caso de las cuádricas. Aprovechando la formulación homogeneizada, se tiene el siguiente segmento racional parametrizado cúbico :

$$P = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3, \quad (3.10.25)$$

donde las P_i tienen el mismo significado que en el caso cuádrico. Las relaciones en los extremos en coordenadas cartesianas son, empleando la misma idea que en caso cuádrico, las siguientes :

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0, \\ r(1) &= r_1, \\ r'(0) &= (3w_1/w_0)(r_1-r_0), \\ r'(1) &= (3w_2/w_3)(r_3-r_2). \end{aligned}$$

Debe observarse que en este caso se mantienen cuatro vértices de

control r_i , $i=0, \dots, 3$.

Puede demostrarse que la curvatura en los extremos de (3.10.25) son las siguientes expresiones :

$$\begin{aligned} k(0) &= (2w_0w_2/3w_1^2)(\text{mag}[(r_1-r_0)X(r_2-r_1)]/\text{mag}[r_1-r_0]^3) \\ k(1) &= (2w_1w_3/3w_2^2)(\text{mag}[(r_2-r_1)X(r_3-r_2)]/\text{mag}[r_3-r_2]^3) \end{aligned} \quad (3.10.26)$$

donde $\text{mag}[h]$ significa la magnitud del vector h , y ya que las magnitudes son constantes en este caso, las curvaturas se controlan por los pesos w_i , un fenómeno que es similar en el caso cuádrico, donde $k^2 = w_0w_2/w_1^2$ controla también la curvatura.

Las cúbicas racionales tienen la ventaja de incorporar a las cuádricas como casos especiales, haciendo que $P_0 - 3P_1 + 3P_2 - P_3 = 0$. De igual forma, si los w_i son iguales, llegamos a la expresión de una curva cúbica de Bezier.

Si se desea obtener una línea recta bajo la expresión cúbica, debe hacerse que $P_1 = (2P_0 + P_3)/3$ y $P_2 = (P_0 + 2P_3)/3$, con lo cual se obtiene, en forma homogénea, $P = (1-u)P_0 + uP_3$.

Composición de curvas racionales

Tomando la ecuación paramétrica racional cuádrica (3.10.20), su primera y segunda derivadas en los extremos se definen por las expresiones :

$$\begin{aligned} r'(0) &= (2w_1/w_0)(r_1-r_0) \\ r'(1) &= (2w_1/w_2)(r_2-r_1) \\ r''(0) &= ((4w_1/w_0) + (2w_2/w_0) - (8w_1^2/w_0^2))(r_1-r_0) + (2w_2/w_0)(r_2-r_1) \\ r''(1) &= ((2w_0/w_2) + (4w_1/w_2) - (8w_1^2/w_2^2))(r_1-r_0) + (2w_0/w_2)(r_0-r_1) \end{aligned} \quad (3.10.27)$$

Utilizando la relación :

$$kB = (r' \times r'') / \text{mag}[r']^3, \quad (3.10.28)$$

donde k es la curvatura, B el vector binormal al plano osculatorio de un punto y $\text{mag}[h]$ la magnitud del vector h , se encuentra que la

curvatura en los extremos esta dada por :

$$\begin{aligned} k(0)B(0) &= \frac{1}{2}k^2((r_1-r_0) \times (r_2-r_1))/\text{mag}[r_1-r_0]^3, \\ k(1)B(1) &= \frac{1}{2}k^2((r_2-r_1) \times (r_0-r_1))/\text{mag}[r_2-r_1]^3. \end{aligned} \quad (3.10.29)$$

Si se iguala la curvatura de dos curvas en sus posiciones paramétricas 1 y 0 respectivamente, se deduce que para mantener una continuidad de curvatura entre ambas es necesario ajustar el valor de k para no alterar los vectores de posición r_i . Esto se traduce a jugar con los pesos w_i de cada una de las curvas hasta encontrar una igualdad en las expresiones (3.10.29). Debe observarse que en las expresiones anteriores, cada una de las curvas está formada por sus vértices r_0 a r_2 . Todos estos vértices aparecen en la expresión de curvatura anterior y además, como el lado izquierdo es un vector en la dirección del binormal B , el producto cruz de las r_i debe dar un vector en la misma dirección, lo cual solo puede suceder si todos los vectores r_i son coplanares, por lo cual la curva que resulta de las cuádricas racionales debe ser plana si desea mantener continuidad de curvatura.

En el caso cúbico de las racionales, se sigue un proceso similar al anterior para encontrar las condiciones de igualdad en curvatura. En este caso debe recordarse que una curva cúbica se determina por cuatro vértices, $r_0, \dots, r_3$. La primera y segunda derivadas valuadas en los extremos de estas curvas son

$$\begin{aligned} r'(0) &= (3w_1/w_0)(r_1-r_0), \\ r'(1) &= (3w_2/w_3)(r_3-r_2), \\ r''(0) &= ((6w_1/w_0)+(6w_2/w_0)-(18w_1^2/w_0^2))(r_1-r_0)+(6w_2/w_0)(r_2-r_1), \\ r''(1) &= ((6w_1/w_3)+(6w_2/w_3)-(18w_2^2/w_3^2))(r_2-r_3)+(6w_1/w_3)(r_1-r_2). \end{aligned} \quad (3.10.30)$$

Aplicando igualdad de las expresiones de curvatura para cada curva se encuentra lo siguiente :

$$k_1^2((r_2^1 - r_1^1) \times (r_3^1 - r_2^1)) / \text{mag}[r_3^1 - r_2^1]^3 = k_2^2((r_1^2 - r_0^2) \times (r_2^2 - r_1^2)) / \text{mag}[r_2^2 - r_1^2]^3,$$

donde la i en r^i significa a que curva corresponde el vértice r . Observe que para la primera curva (1), el vértice r_0 no aparece y de igual forma, para la curva (2), el vértice r_3 tampoco aparece, lo que indica que para mantener una misma curvatura en una unión de las curvas cúbicas solo se requiere que todos los vértices sean coplanares excepto, si así se desea, r_0^1 y r_3^2 con lo cual se abre la posibilidad de generar curvas con torsión. Nuevamente en este caso debe ajustarse el valor de las k_i para obtener una continuidad de curvatura en las uniones. Como resumen se puede decir que es posible obtener continuidad de posición, de gradiente y de curvatura en las cuádricas y cúbicas racionales.

Superficies paramétricas racionales

Apoyándose en la expresión cúbica racional, puede definirse un segmento de superficie.

La curva racional parametrizada cúbica puede expresarse de la siguiente forma (3.10.32) :

$$r(u) = \alpha_0(u)r(0) + \alpha_1(u)r(1) + \phi_0(u)r'(0) + \phi_1(u)r'(1),$$

esto es, en términos de sus puntos finales, sus tangentes finales y funciones de suavización. Utilizando los valores de $r(0)$, $r(1)$, y las primeras derivadas $r'(0)$ y $r'(1)$, y comparando con la expresión general de la racional cúbica, se encuentran las expresiones de suavización

$$\begin{aligned}
\alpha_0(u) &= (w_0(1-u)^3 + 3w_1u(1-u)^2)/w(u), \\
\alpha_1(u) &= (w_3u^3 + 3w_2u^2(1-u))/w(u), \\
\varphi_0(u) &= (w_0u(1-u)^2)/w(u), \\
\varphi_1(u) &= -w_3u^2(1-u)/w(u),
\end{aligned}
\tag{3.10.33}$$

donde $w(u)$ es el denominador de la expresión racional paramétrica cúbica.

Las expresiones en (3.10.33) cumplen con las siguientes características :

$$\begin{aligned}
\alpha_0(0) &= 1, & \alpha_0(1) &= 0, \\
\alpha_1(0) &= 0, & \alpha_1(1) &= 1, \\
\alpha_0'(0) &= \alpha_0'(1) = \alpha_1'(0) = \alpha_1'(1) = 0, \\
\varphi_0(0) &= \varphi_0(1) = \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0, \\
\varphi_0'(0) &= 1, & \varphi_0'(1) &= 0, \\
\varphi_1'(0) &= 0, & \varphi_1'(1) &= 1,
\end{aligned}
\tag{3.10.34}$$

que son las condiciones establecidas en los segmentos de Coons para poder crear un segmento del tipo producto tensor que mantenga continuidad de posición y de gradiente[17][30][15].

Así, la superficie :

$$\begin{aligned}
& \tag{3.10.35} \\
r_1(u,v) &= \alpha_0(u)r(0,v) + \alpha_1(u)r(1,v) + \varphi_0(u)r_u(0,v) + \varphi_1(u)r_u(1,v)
\end{aligned}$$

interpola las fronteras $r(0,v)$ y $r(1,v)$, y la superficie :

$$\begin{aligned}
& \tag{3.10.36} \\
r_2(u,v) &= \alpha_0(v)r(u,0) + \alpha_1(v)r(u,1) + \varphi_0(v)r_v(u,0) + \varphi_1(v)r_v(u,1),
\end{aligned}$$

interpola las fronteras $r(u,0)$ y $r(u,1)$, donde $r_u()$ o $r_v()$ significa la derivada en el subíndice especificado. Finalmente, siguiendo la composición de un segmento de Coons con la información anterior, se obtiene el siguiente segmento :

$$r(u,v) = w^{-1}(u)w^{-1}(v)UCWQW^T C^T V, \quad (3.10.37)$$

donde :

$$W = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 3(w_1-w_0) & 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 3(w_3-w_2) & 0 & w_3 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_v(0,0) & r_v(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_v(1,0) & r_v(1,1) \\ r_u(0,0) & r_u(0,1) & r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_u(1,0) & r_u(1,1) & r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix},$$

$$U = [1 \ u \ u^2 \ u^3],$$

$$V = [1 \ v \ v^2 \ v^3]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Este tipo de segmentos permite generar superficies libres y además incluir, como un caso particular, a las superficies cuádricas. Los factores de peso dan una nueva dimensión al control de la forma pues permiten especificar el valor de los vectores tangentes y los de giro, como lo demuestra la valuación de (3.10.37) para el caso $u=v=0$, esto es, en una esquina :

$$r(0,0)=r_{00},$$

$$r_u(0,0)=3w_{10}/w_{00}(r_{10}-r_{00}),$$

$$r_v(0,0)=3w_{01}/w_{00}(r_{01}-r_{00}),$$

$$r_{uv}(0,0)=9((w_{11}/w_{00})(r_{11}-r_{00})+(w_{01}w_{10}/w_{00}^2)(2r_{00}-r_{01}-r_{10})).$$

Un problema con este tipo de formulación es la variedad de parámetros de control que se tienen a la mano. Si suponemos que

este esquema se empleará en un ambiente de CAD/CAM con usuarios que normalmente no son matemáticos, entonces se tiene un problema de comunicación. De cualquier forma, esta formulación ya se emplea en cuando menos un sistema comercial[16] aprovechando la formulación racional de los B-splines.

CAPITULO IV

CURVAS Y SUPERFICIES BETA-SPLINES

Los *Beta-splines*[33] representan un nuevo intento por definir curvas y superficies, y en el campo de CAD/CAM/CAE, proporcionan un medio para aplicar *tensión*[29] e incluir, como un caso particular, las facilidades de los *B-splines*(3.9). Además proporcionan un medio por el cual, los diseñadores que no posean una formación en áreas físico matemáticas, tengan la posibilidad de diseñar curvas y superficies sin la necesidad de proporcionar explícitamente información de derivadas en las fronteras o tener que especificar información vectorial para mantener alguna continuidad(2.2). Los *Beta-splines* integran nuevos parámetros de control de forma que mantienen un carácter altamente intuitivo de su función, sin aumentar el grado en los polinomios que forman su base.

Los *Beta-splines*, o *Betas* como se refieren en ocasiones en éste documento, se basan en la idea de vértices de control que mimifican la forma final deseada(2.2) y a los cuales, en su mayoría, no interpola, aunados con funciones de suavización similares a las empleadas en *B-splines*.

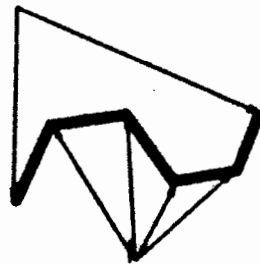
En las curvas, los vértices de control son una secuencia ordenada y están conectados para formar un polígono de control, abierto o cerrado, representado por el siguiente conjunto :

$$V=[V_0, V_1, \dots, V_m]. \quad (4.1)$$

Para una superficie, los vértices de control se organizan en una forma topológicamente rectangular, donde cada vértice representa una coordenada cartesiana $[x \text{ y } z]$. Cada par de vértices se encuentra unido por una *arista* y es posible distinguir entre *vértices internos* y *vértices frontera* (fig 4.1). El polígono de control es un conjunto de vértices y aristas $\{V,E\}$, donde V se define por :

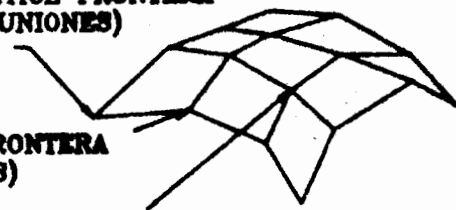


VERTICES FRONTERA



VERTICES INTERNOS

VERTICE FRONTERA
(2 UNIONES)



VERTICE FRONTERA
(3 UNIONES)

VERTICE INTERNO (4 UNIONES)

Fig. 4.1 COMPONENTES DE UN POLIGONO DE CONTROL EN 2 Y 3D

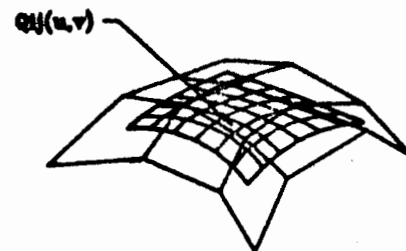
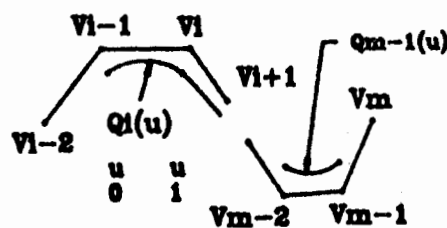


Fig. 4.2 SEGMENTO DE CURVA Y SUPERFICIE BETA-splines.
 Q_1 ESTA INFLUENCIADO POR V_{i-2} V_{i-1} V_i V_{i+1}

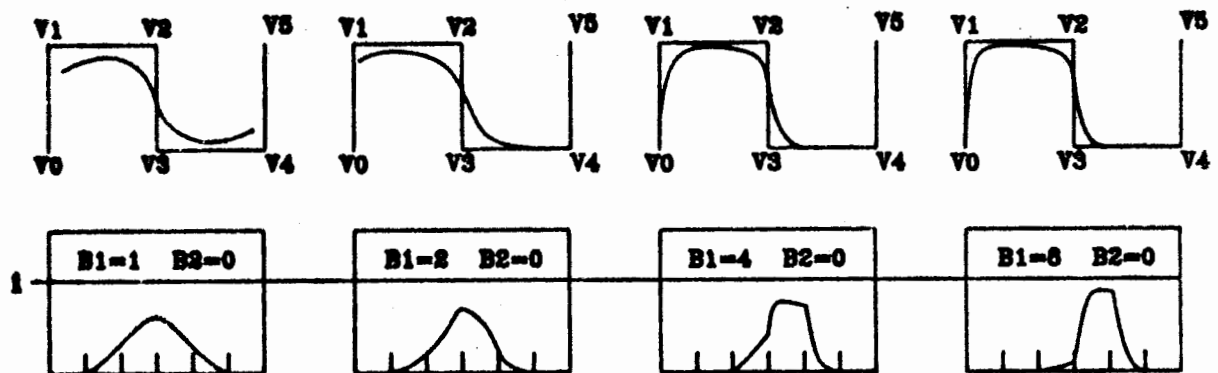


Fig. 4.3 ALTERACION DE B_1 U SU CORRESPONDIENTE EFECTO EN LAS FUNCIONES BASE Y EN LA FORMA DE LA CURVA BETA-spline

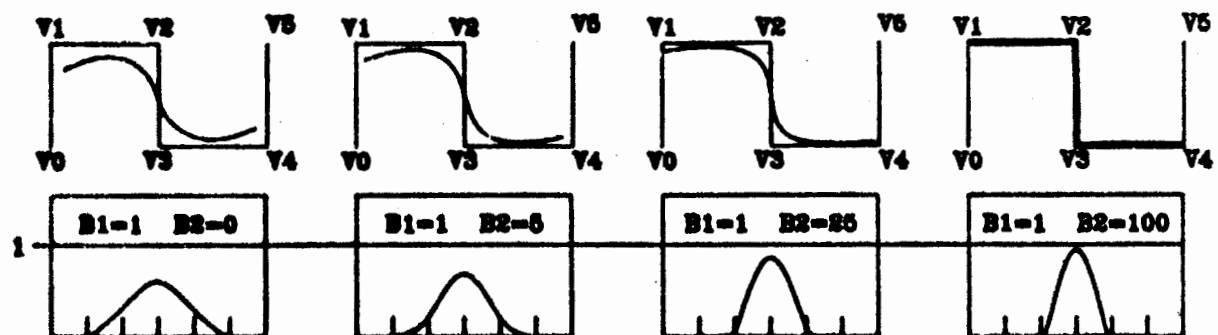
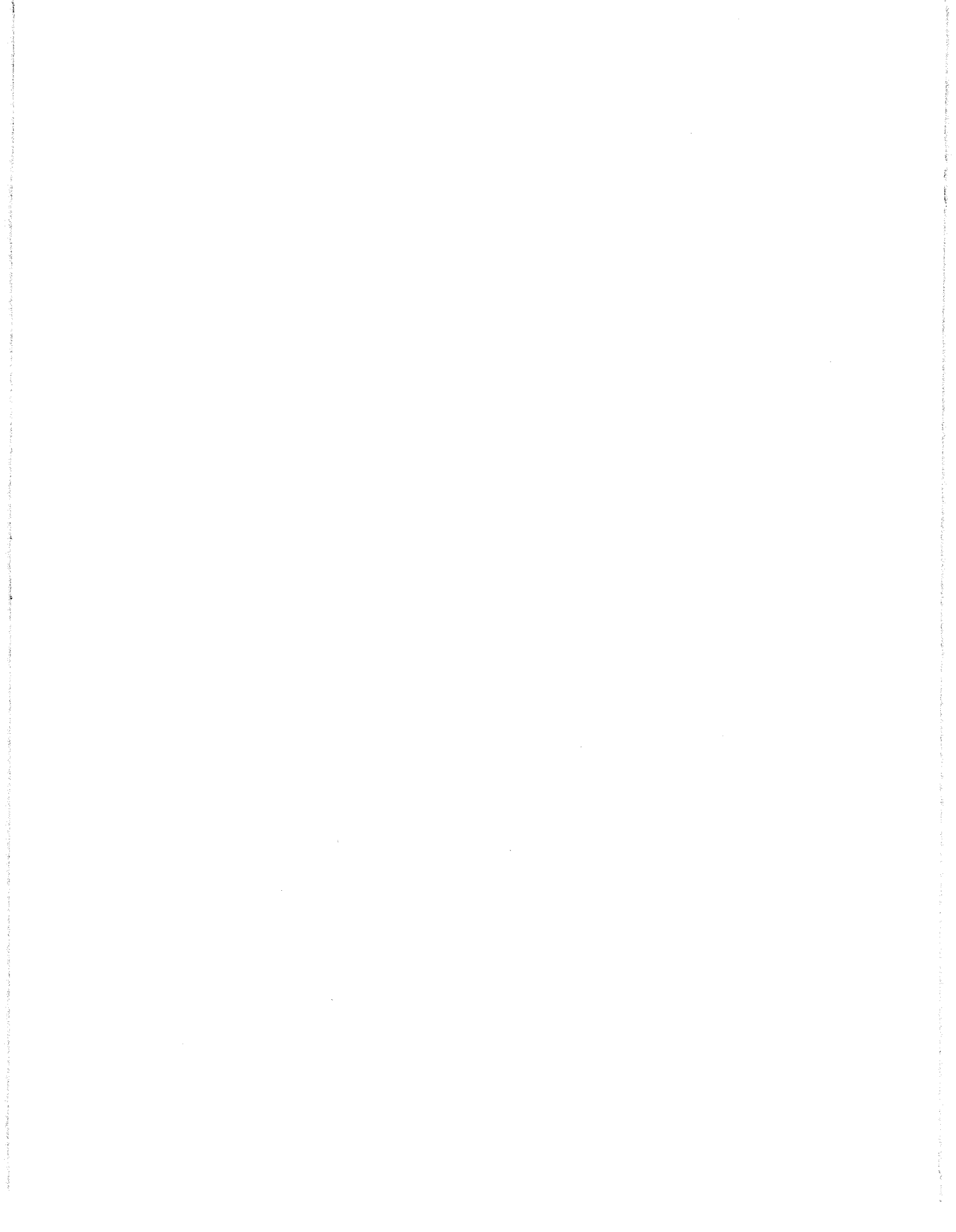


Fig. 4.4 ALTERACION DE B_2 Y SU EFECTO EN LAS FUNCIONES BASE Y EN LA CURVA BETA-spline



$$V = \{V_{ij} \mid i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n\}, \quad (4.2)$$

y el conjunto de aristas :

(4.3)

$$E = \left\{ (V_{ij}, V_{i,j+1}) \mid i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n-1 \right\} \cup \left\{ (V_{ij}, V_{i+1,j}) \mid i=0,1,\dots,m-1; j=0,1,\dots,n \right\},$$

donde los vértices internos son :

$$V_{ij}; \quad 1 \leq i \leq m-1; \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (4.4)$$

y los vértices frontera son

$$\begin{aligned} V_{0j}, & \quad j=0,1,\dots,n-1, \\ V_{in}, & \quad i=0,1,\dots,m-1, \\ V_{mj}, & \quad j=1,2,\dots,n, \\ V_{i0}, & \quad i=1,2,\dots,m, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Similar a los esquemas presentados en (III), las transformaciones a los vértices de control provocan una modificación de la forma, que bajo el esquema de vértices de control puede predecirse.

4.1 Control local

Los Beta-slines mantienen una base local, esto es, las funciones de la base tienen un soporte local (diferente de cero sobre un espacio finito de su dominio). Como cada V_i tiene asociado una función de la base, su transformación sólo tiene influencia en un espacio finito de la curva o superficie, por lo cual, es posible recalcular la curva solamente sobre la porción modificada y además realizar modificaciones locales.

Los Beta-splines explotan la idea de construcción por segmentos lo cual representa ventajas importantes (2.2). Cada segmento de curva se controla por solamente cuatro vértices de control y no se ve afectado por ningún otro vértice. Como analiza más adelante, el transformar un solo vértice genera un efecto sobre cuatro segmentos de la curva únicamente.

En el caso de las superficies, cada segmento está controlado por 16 vértices de control y la transformación de un vértice tiene efectos sobre 16 segmentos de superficie (fig 4.2).

Como cada uno de los segmentos de curva está controlado por cuatro vértices de control, cada uno de los puntos del segmento representa un promedio de la influencia de los cuatro vértices de control correspondientes. El peso de cada vértice lo determina el conjunto de funciones escalares de la base evaluadas en algún valor u de su dominio.

El parámetro u parametriza un segmento de curva Beta-splines, siendo igual a cero al inicio del segmento e igual a la unidad al final del mismo (fig 4.2). El i -ésimo segmento de curva Beta-spline se representa como $Q_i(u)$, y como esta formulación aprovecha la construcción por segmentos de curva, debe aplicarse criterios de continuidad, los cuales se explican a continuación.

4.2 Continuidad Geométrica

Dadas dos curvas $Q_1(u)$ y $Q_2(u)$ parametrizadas por u , las cuales se unen en $Q_1(1)=Q_2(0)$, se desea que mantengan continuidad de posición, de vector tangente unitario y de vector curvatura en su unión (Anexo).

La continuidad de posición se logra al igualar $Q_1(1)=Q_2(0)$.

La continuidad de vector tangente unitario se logra considerando la siguiente expresión :

$$Q_1'(1)/|Q_1'(1)| = Q_2'(0)/|Q_2'(0)|, \quad (4.6)$$

de donde :

$$Q_1'(1)[|Q_2'(0)|/|Q_1'(1)|] = Q_2'(0), \quad (4.7)$$

que en forma condensada se representa por :

$$Q_2^1(0) = \beta_1 Q_1^1(1). \quad (4.8)$$

La continuidad de vector curvatura se logra aprovechando la expresión del vector curvatura bajo la formulación de producto cruz y parametrización arbitraria, el cual se representa en la siguiente expresión :

$$K(u) = [(Q^1(u) \times Q^2(u)) \times Q^1(u)] / |Q^1(u)|^4. \quad (4.9)$$

y la curvatura es :

$$k(u) = |K(u)|. \quad (4.10)$$

Para obtener continuidad de curvatura, debe igualarse los vectores de curvatura en la unión de los segmentos $Q_1(1)$ y $Q_2(0)$, esto es :

$$\begin{aligned} & [(Q_1^1(1) \times Q_1^2(1)) \times Q_1^1(1)] / |Q_1^1(1)|^4 = \\ & [(Q_2^1(0) \times Q_2^2(0)) \times Q_2^1(0)] / |Q_2^1(0)|^4 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando (4.8) en la expresión anterior :

$$\begin{aligned} & [(Q_1^1(1) \times Q_1^2(1)) \times Q_1^1(1)] / |Q_1^1(1)|^4 = \\ & [(\beta_1 Q_1^1(1) \times Q_2^2(0)) \times \beta_1 Q_1^1(1)] / |\beta_1 Q_1^1(1)|^4. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por observación se encuentra que esta igualdad se cumple si:

$$Q_2^2(0) = \beta_1^2 Q_1^2(1), \quad (4.13)$$

lo cual asegura la continuidad de vector curvatura.

De una forma más general, $Q_2^2(0)$ puede incluir un término adicional múltiplo de $Q_1^1(1)$. De hecho puede incluir cualquier combinación de términos restringidos en sus parámetros que, al momento que generen influencia en la curva, producen discontinuidad de vector curvatura. Así, la expresión expandida queda como :

$$Q_2^2(0) = \beta_1^2 Q_1^2(1) + \beta_2 Q_1^1(1). \quad (4.14)$$

De esta forma (4.13) y (4.14) aseguran la continuidad de vector tangente unitario y de vector curvatura, siempre y cuando $\beta_2=0$ en el segundo caso.

Los parámetros β_1 y β_2 , se denominan de *control de la forma* [32]. Si $\beta_1=1$, se tiene continuidad de vector tangente unitario; si $\beta_1=1$ y $\beta_2=0$ se tiene continuidad de vector tangente unitario y vector curvatura. Más adelante se comenta el efecto físico de la variación de estos parámetros (4.3).

Resumiendo, las restricciones de continuidad entre los segmentos $Q_i(u)$ y $Q_{i+1}(u)$ están dadas por las expresiones :

$$\begin{aligned} Q_{i+1}(0) &= Q_i(1), \\ Q_{i+1}^1(0) &= \beta_1 Q_i^1(1), \\ Q_{i+1}^2(0) &= \beta_1^2 Q_i^2(1) + \beta_2 Q_i^1(1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ahora bien, cada punto sobre un segmento de curva $Q_i(u)$ es un promedio de cuatro vértices de control V_{i+r} , $r=-2,-1,0,1$, donde los índices se eligen por facilidad de expresión (fig 4.2). Así, el segmento de curva $Q_i(u)$ se expresa de la siguiente forma :

$$Q_i(u) = \sum_{r=-2}^1 b_r(\beta_1, \beta_2; u) V_{i+r}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (4.16)$$

donde las b_r 's son la base escalar de los Beta-splines y los V 's son sus coeficientes asociados.

En la expresión (4.16) se observa que los vértices del segmento $Q_i(u)$ son V_{i-2} , V_{i-1} , V_i , V_{i+1} y los vértices del siguiente segmento son V_{i-1} , V_i , V_{i+1} , V_{i+2} , y así sucesivamente. Esto indica que el segmento $Q_i(u)$ comparte tres vértices con el segmento $Q_{i+1}(u)$ y que las funciones base solamente se están recorriendo un vértice entre cada uno de los segmentos.

4.3 Derivación de las funciones base de los Beta-splines

Cada una de las funciones base de los Beta-splines, es función de los parámetros β_1 , β_2 y u . Son funciones escalares que aprovechan la cualidad de los polinomios cúbicos(2.2) y se definen de la siguiente forma :

$$b_r(\beta_1, \beta_2; u) = \sum_{q=0}^3 C_{qr}(\beta_1, \beta_2) u^q, \quad 0 \leq u \leq 1; \quad r = -2, -1, 0, 1, \quad (4.17)$$

donde los coeficientes $C_{qr}(\beta_1, \beta_2)$ $q=0, \dots, 3$ y $r=-2, \dots, 1$ son funciones de los parámetros β . Estos coeficientes se determinan a partir de las condiciones de continuidad geométrica expresadas por (4.15). Aprovechando (4.16) y considerando (4.15), tenemos lo siguiente :

$$Q_1^a(u) = \sum_r b_r^a(\beta_1, \beta_2; u) V_{1+r}, \quad 0 \leq u \leq 1; \quad y \quad a=0, 1, 2. \quad (4.18)$$

Evalutando (4.18) en sus fronteras y sustituyendo en las condiciones de continuidad (4.15), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} \sum_{r=-2}^1 b_r(\beta_1, \beta_2; 0) V_{1+1+r} &= \sum_{r=-2}^1 b_r(\beta_1, \beta_2; 1) V_{1+r}, \\ \sum_{r=-2}^1 b_r^1(\beta_1, \beta_2; 0) V_{1+1+r} &= \beta_1 \sum_{r=-2}^1 b_r^1(\beta_1, \beta_2; 1) V_{1+r}, \\ \sum_{r=-2}^1 b_r^2(\beta_1, \beta_2; 0) V_{1+1+r} &= \beta_1^2 \sum_{r=-2}^1 b_r^2(\beta_1, \beta_2; 1) V_{1+r} + \beta_2 \sum_{r=-2}^1 b_r^1(\beta_1, \beta_2; 1) V_{1+r}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para mantener la igualdad en cada una de estas expresiones, se igualan los coeficientes de los vértices V_i equivalentes. Así, en la primera igualdad de las expresión (4.19) se tienen las siguientes equivalencias :

$$\begin{aligned}
0 &= b_{-2}(\beta_1, \beta_2; 1)V_{i-2}, \\
b_{-2}(\beta_1, \beta_2; 0)V_{i-1} &= b_{-1}(\beta_1, \beta_2; 1)V_{i-1}, \\
b_{-1}(\beta_1, \beta_2; 0)V_i &= b_0(\beta_1, \beta_2; 1)V_i, \\
b_0(\beta_1, \beta_2; 0)V_{i+1} &= b_1(\beta_1, \beta_2; 1)V_{i+1}, \\
b_1(\beta_1, \beta_2; 0)V_{i+2} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

y como en el lado izquierdo existe V_{i+2} el cual no existe en el lado derecho, su coeficiente tiene que ser cero. Lo mismo sucede para el vértice V_{i-2} del lado derecho.

Debe observarse que siempre existen dos igualdades a cero en cada una de las expresiones de sumatoria anteriores. Así, contemplando todas las igualdades y representando a las $b_i(\beta_1, \beta_2; u)$ como $b_i(u)$, se obtiene el siguiente sistema :

$$\begin{aligned}
0 &= b_{-2}(1), \\
b_{r-1}(0) &= b_r(1), \\
b_1(0) &= 0,
\end{aligned} \quad r = -1, 0, 1$$

$$\begin{aligned}
0 &= \beta_1 b_{-2}^1(1), \\
b_{r-1}^1(0) &= \beta_1 b_r^1(1), \\
b_1^1(0) &= 0,
\end{aligned} \quad r = -1, 0, 1 \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \beta_1^2 b_{-2}^2(1) + \beta_2 b_{-2}^1(1), \\
b_{r-1}^2(0) &= \beta_1^2 b_r^2(1) + \beta_2 b_r^1(1), \\
b_1^2(0) &= 0,
\end{aligned} \quad r = -1, 0, 1$$

Efectuando las diferenciaciones necesarias y evaluando en los extremos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones donde las funciones escalares $C_{g,r}(\beta_1, \beta_2)$ se representan por $C_{g,r}$, para facilidad de representación :

$$\begin{aligned}
C_{3,-2} + C_{2,-2} + C_{1,-2} + C_{0,-2} &= 0, \\
C_{0,r-1} &= C_{3,r} + C_{2,r} + C_{1,r} + C_{0,r}, \\
C_{0,1} &= 0,
\end{aligned} \quad r = -1, 0, 1$$

$$\begin{aligned}
\beta_1(3C_{3,-2} + 2C_{2,-2} + C_{1,-2}) &= 0, \\
C_{1,r-1} &= \beta_1(3C_{3,r} + 2C_{2,r} + C_{1,r}), \\
C_{1,1} &= 0,
\end{aligned} \quad r = -1, 0, 1 \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& 3(2\beta_1^2 + \beta_2)C_{3,-2} + 2(\beta_1^2 + \beta_2)C_{2,-2} + \beta_2 C_{1,-2} = 0, \\
& 2C_{2,r-1} = 3(2\beta_1^2 + \beta_2)C_{3,r} + 2(\beta_1^2 + \beta_2)C_{2,r} + \beta_2 C_{1,r}, \quad r = -1, 0, 1 \\
& C_{2,1} = 0.
\end{aligned}$$

Este es un sistema de 15 ecuaciones con 16 coeficientes desconocidos $C_{g,r}(\beta_1, \beta_2)$ $g=0,1,2,3$ y $r=-2,-1,0,1$. Una restricción más es necesaria para lograr una solución única del sistema. Una restricción que se revisó en esquemas anteriores es la normalización de la base, lo cual ayuda a lograr que la curva se mantenga dentro de la región convexa del polígono de control. Así, para un caso particular, $u=0$, la suma de las funciones de la base debe ser la unidad :

$$C_{0,-2}(\beta_1, \beta_2) + C_{0,-1}(\beta_1, \beta_2) + C_{0,0}(\beta_1, \beta_2) + C_{0,1}(\beta_1, \beta_2) = 1. \quad (4.23)$$

El sistema de ecuaciones formado por (4.22) y (4.23) depende de los parámetros Beta, por lo cual es más útil resolverlo simbólicamente que explícitamente para una pareja de valores Beta dados. Utilizando software para solución simbólica[34] se obtienen

las siguientes expresiones :

$$\begin{aligned}
 C_{0,-2} &= 2\beta_1^3/\delta, \\
 C_{1,-2} &= -6\beta_1^3/\delta, \\
 C_{2,-2} &= 6\beta_1^3/\delta, \\
 C_{3,-2} &= -2\beta_1^3/\delta, \\
 C_{0,-1} &= [4\beta_1^2 + 4\beta_1 + \beta_2]/\delta, \\
 C_{1,-1} &= 6\beta_1(\beta_1^2 - 1)/\delta, \\
 C_{2,-1} &= 3[-2\beta_1^3 - 2\beta_1^2 - \beta_2]/\delta, \\
 C_{3,-1} &= 2[\beta_1^3 + \beta_1^2 + \beta_1 + \beta_2]/\delta, \\
 C_{0,0} &= 2/\delta, \\
 C_{1,0} &= 6\beta_1/\delta, \\
 C_{2,0} &= 3[2\beta_1^2 + \beta_2]/\delta, \\
 C_{3,0} &= -2[\beta_1^2 + \beta_1 + \beta_2 + 1]/\delta, \\
 C_{3,1} &= 2/\delta, \\
 C_{0,1} &= 0, \\
 C_{1,1} &= 0, \\
 C_{2,1} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

donde $C_{g,r} = C_{g,r}(\beta_1, \beta_2)$ y $\delta = 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + \beta_2 + 2$.

Así, sustituyendo (4.24) en (4.17), la formulación explícita de la base se representa finalmente por :

$$\begin{aligned}
 b_{-2} &= 2\beta_1^3(1-u)^3/\delta, \\
 b_{-1} &= [2\beta_1^3 u(u^2 - 3u + 3) + 2\beta_1^2(u^3 - 3u^2 + 2) + 2\beta_1(u^3 - 3u + 2) + \beta_2(2u^3 - 3u^2 + 1)]/\delta, \\
 b_0 &= [2\beta_1^2 u^2(3-u) + 2\beta_1 u(3-u^2) + \beta_2 u^2(3-2u) + 2(1-u^3)]/\delta, \\
 b_1 &= 2u/\delta,
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

donde $b_i = b_i(\beta_1, \beta_2; u)$.

Con las expresiones anteriores ya es posible evaluar para cualquier conjunto de parámetros (β_1, β_2, u) , así como obtener la primera y segunda derivadas del segmento de curva Beta-spline. Resulta ser de particular importancia las evaluaciones en los extremos para realizar un análisis que conduzca a determinar la agregación de nuevos vértices V_i para interpolar las fronteras (4.7). La base se altera con el valor de los parámetros Beta $-\beta_1, \beta_2-$ y algunos ejemplos se observan en las figuras (4.3) y (4.4).

4.4 Propiedad de cubierta convexa

La condición (4.23) ayuda a que la curva Beta-spline se mantenga en su región convexa. Esta ecuación es sólo un caso particular de la siguiente expresión :

$$\sum_{r=-2}^1 b_r(\beta_1, \beta_2; u) = 1, \quad (4.26)$$

que indica que la suma de las funciones base para cualquier valor de u y parejas Beta suma la unidad. También se observa que para una potencia u diferente de cero, los coeficientes C_{gr} suman cero, esto es :

$$\sum_{r=-2}^1 C_{gr}(\beta_1, \beta_2) = 0, \quad g=1,2,3, \quad (4.27)$$

así como la sumatoria de coeficientes de término constante suman la unidad :

$$\sum_{r=-2}^1 C_{0r}(\beta_1, \beta_2) = 1. \quad (4.28)$$

Revisando las expresiones explícitas de las funciones base dada en (4.25), se observa que todas las expresiones en u son positivas para $0 \leq u \leq 1$ y $\beta_1 \geq 0$; $\beta_2 \geq 0$.

Como cada función base es diferente de cero bajo estas condiciones y su suma es la unidad, entonces cada una sólo puede generar valores entre 0 y 1. Ahora, como cada punto de la curva Beta es una combinación de cuatro vértices de control con el valor respectivo de las funciones base, entonces se concluye que cada punto de la curva cae dentro de la región convexa formada por los cuatro vértices de control que le correspondan.

Como la curva Beta-spline es una composición de segmentos Beta-spline, entonces la curva final debe caer en la unión de las regiones convexas correspondientes.

4.5 Perturbación debido a la alteración de un vértice.

Una de las ventajas de esta formulación se refiere a que la alteración de un vértice de control afecta localmente a la curva, por lo cual sólo es necesario recalcularla en 4 segmentos. Más aún, no es necesario realizar el cálculo total de los cuatro segmentos pues sólo uno de sus vértices se modifica.

Considérese primero la ecuación del segmento Beta-spline $Q_i(u)$ modificado por la alteración de un vértice y representese esta modificación de la siguiente forma :

$$Q_i\Delta(u) = \sum b_r(\beta_1, \beta_2; u) V_{i+r}\Delta, \quad (4.29)$$

donde $V_{i+r}\Delta$ es el cambio de posición del vértice V_{i+r} . Denominando al vértice V_{i+r} modificado como $V_i\xi$, y asumiendo que los demás vértices han mantenido su posición, se afirma que :

$$V_i\Delta=0, \quad \forall i \neq i\xi. \quad (4.30)$$

de tal suerte que (4.29) se reduce a la siguiente expresión, puesto que sólo un término es diferente de cero :

$$Q_i\Delta(u) = b_r(\beta_1, \beta_2; u) V_{i+r}\Delta, \quad (4.31)$$

donde :

$$i+r=i\xi. \quad (4.32)$$

Reescribiendo (4.31) :

$$Q_{i\xi-r}\Delta(u) = b_r(\beta_1, \beta_2; u) V_i\xi\Delta, \quad r=-2, -1, 0, 1. \quad (4.33)$$

Se observa que los segmentos $Q_i(u)$ que son afectados están dados por $i=i\xi-r$, para $r=-2, -1, 0, 1$. Así que el cambio del vértice V_i modifica a los segmentos $Q_i(u)$ en :

$$Q_i\Delta(u) = b_{i\xi-i}(\beta_1, \beta_2; u) V_i\xi\Delta, \quad i=i\xi-r. \quad (4.34)$$

Esta alteración puede aplicarse a cada segmento de curva correspondiente para encontrar la curva resultante, esto es :

$$Q_{i\xi}(u) = Q_{iv}(u) + Q_i\Delta(u), \quad (4.35)$$

donde $Q_{iW}(u)$ es la nueva curva y su predecesora es $Q_{iV}(u)$.

Así, para calcular la nueva curva resultante de la modificación del vértice $V_i\xi$, se requiere evaluar la última ecuación en todos los valores de u necesarios para cada uno de los cuatro segmentos $Q_i(u)$ con los valores de $i=i\xi-r$, $r=-2,-1,0,1$.

4.6 Generalización a parámetros continuos

La formulación de los Beta-splines, tal como se plantea en (4.16), considera un sólo valor para los parámetros Beta sobre toda la curva. Esta concepción se generaliza al considerar una variación de estos parámetros sobre toda la curva, en cuyo caso se obtiene una curva Beta-spline con *parámetros continuos* representados por $\beta_{1i}(u)$ y $\beta_{2i}(u)$ para el segmento $Q_i(u)$. En forma más apropiada, estos parámetros son ahora *funciones escalares Beta*. Para mantener las condiciones de continuidad, se requiere, además de las condiciones analizadas, que el valor de los parámetros Beta sea el mismo en la unión de dos segmentos, esto es, en $Q_{i+1}(0)=Q_i(1)$, $i=1,2,\dots,n-1$.

Los extremos de los segmento mantienen las siguientes relaciones :

$$\begin{aligned} \beta_{11}(0) &= \alpha_{10}, & \beta_{21}(0) &= \alpha_{20}, & (4.36) \\ \beta_{1_{i+1}}(0) &= \alpha_{1_i} = \beta_{1_i}(1), & \beta_{2_{i+1}}(0) &= \alpha_{2_i} = \beta_{2_i}(1), & i=1,2,\dots,n-1, \\ \alpha_{1_n} &= \beta_{1_n}(1), & \alpha_{2_n} &= \beta_{2_n}(1). \end{aligned}$$

Los parámetros Beta se obtienen mediante interpolación entre las α_{i-1} y α_i , lo cual se puede lograr utilizando como base la expresión de unión de una línea parametrizada, alterando el factor de parametrización, esto es :

$$\begin{aligned}\beta_{1,i}(u) &= (1-s)\alpha_{1,i-1} + s\alpha_{1,i}, \\ \beta_{2,i}(u) &= (1-s)\alpha_{2,i-1} + s\alpha_{2,i}, \quad i=1,2,\dots,m,\end{aligned}\quad (4.37)$$

donde $s=10u^3-15u^4+6u^5$ [32 pag. 205], que resulta de una interpolación de Hermite, la cual es posible en este caso gracias a que se tiene el valor del gradiente y el valor de la función $\beta(u)$, proporcionando una función de interpolación continua en su primera derivada, sin problemas serios de oscilación [15 pag. 154-155].

Bajo esta notación modificada, es necesario ampliar la definición de δ hacia un $\delta_i(u)$, sustituyendo los β 's por las nuevas definiciones. Por otra parte, los valores de $\delta_i(u)$ en los extremos de un segmento reciben un nuevo nombre :

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \delta_1(0), \\ \gamma_1 &= \delta_1(1).\end{aligned}\quad (4.38)$$

Así, la representación original de la curva Beta-spline se logra haciendo una sustitución hacia atrás de las últimas expresiones encontradas.

4.7 Análisis de las condiciones en los extremos de los segmentos

Evaluyendo (4.16) para un segmento en sus extremos de parametrización, se encuentra que los puntos generados no interpolan los vértices inicial y final que definen al segmento (fig 4.2). En el caso de la aplicación de un generador de curvas y superficies en ambientes de CAD/CAM/CAE, es deseable que esta interpolación exista, por lo cual, se realizan modificaciones a la formulación inicial de los Beta-spline para que esto suceda.

Recuérdese nuevamente el polígono de control formado por $m+1$ vértices de control $V_0, V_1, \dots, V_m$, los cuales se emplean en la

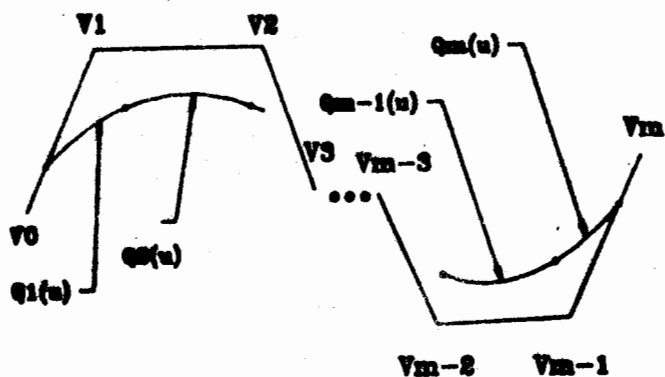


Fig. 4.5 AGREGACION DE SEGMENTO POR DOBLE VERICE

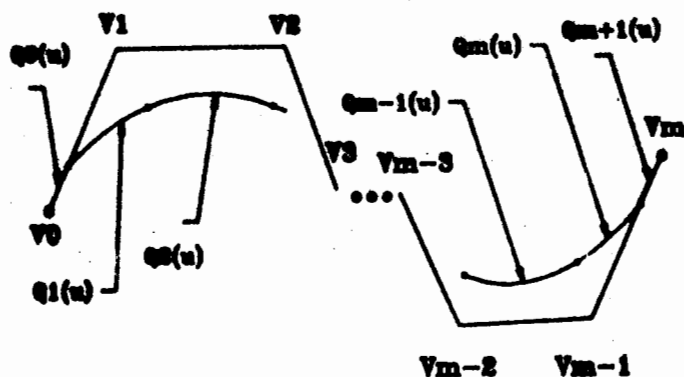


Fig. 4.6 AGREGACION DE SEGMENTO POR TRIPLE VERICE

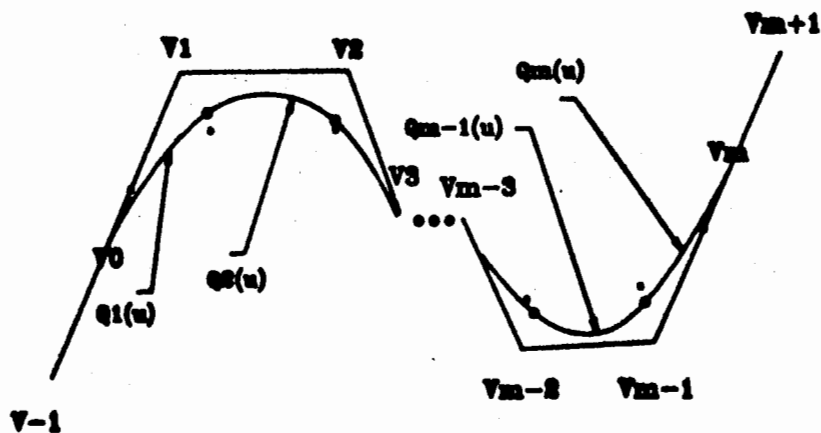


Fig. 4.7 AGREGACION DE SEGMENTOS POR VERTICES FANTASMA $V-1$ Y $Vm+1$

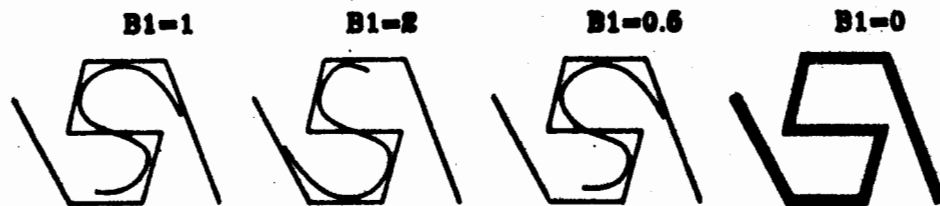


Fig. 4.8 VARIACION DE B1 CON B2=0

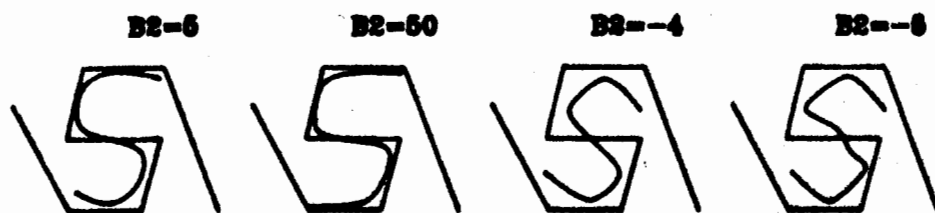


Fig. 4.9 VARIACION DE B2 CON B1=1

generación de $m-2$ segmentos de curva denotados por $Q_2(u)$, $Q_3(u), \dots, Q_{m-1}(u)$. Evaluando en el extremo inicial y final a los segmentos inicial y final respectivamente, se encuentra lo siguiente :

$$Q_2(0) = [2\alpha_1^3/\gamma_1]V_0 + [1-2[\alpha_1^3+1]/\gamma_1]V_1 + [2/\gamma_1]V_2, \quad (4.39)$$

$$Q_{m-1}(1) = [2\alpha_{m-1}^3/\gamma_{m-1}]V_{m-2} + [1-2[\alpha_{m-1}^3+1]/\gamma_{m-1}]V_{m-1} + [2/\gamma_{m-1}]V_m,$$

de donde es claro que los segmentos extremos no interpolan los vértices extremos. Una solución es agregar segmentos, también de naturaleza Beta-spline, que interpolen a los vértices extremos. Existen dos posibilidades para realizarlo, una mediante la agregación de *vértices múltiples* en los extremos, y otra mediante la agregación de *vértices fantasma*.

Vértices múltiples

La primera alternativa es duplicar los vértices en los extremos de la curva Beta-spline, lo cual genera dos nuevos segmentos y crea una curva de m segmentos, desde $Q_1(u)$ hasta $Q_m(u)$, con la correspondencia de m aristas del polígono de control (fig 4.5). Los nuevos segmentos quedan definidos por la expresión original (4.16), solamente que ahora los vértices extremos se encuentran duplicados, esto es :

$$Q_1(u) = [b-2(u)+b-1(u)]V_0 + b_0(u)V_1 + b_1(u)V_2, \quad (4.40)$$

$$Q_m(u) = [b-2(u)V_{m-2} + b-1(u)V_{m-1} + [b_0(u)+b_1(u)]V_m.$$

Evaluando estas expresiones en los extremos, el primer punto de la curva se localiza en $2/\gamma_0$ sobre el vector V_1-V_0 , y el punto final se encuentra en $1-2\alpha_{m-1}^3/\gamma_m$ sobre el vector V_m-V_{m-1} . Ninguna de estas posiciones corresponde a los vértices extremos.

Ahora bien, bajo esta solución, los nuevos segmentos de curva son

tangentes al polígono de control, como lo demuestra la primera derivada en los extremos inicial y final, representadas respectivamente por las expresiones :

$$\begin{aligned} Q_1'(0) &= (6\alpha_{10}/\gamma_0)[V_1-V_0] , \\ Q_m^1(1) &= (6\alpha_{1m}^2/\gamma_m)[V_m-V_{m-1}] . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Otra condición importante en los extremos de la curva es la curvatura. Evaluando la segunda derivada para los nuevos segmentos se encuentra lo siguiente :

$$\begin{aligned} Q_1^2(0) &= 6(2\alpha_{10}^3+\alpha_{20})[V_1-V_0]/\gamma_0 , \\ Q_m^2(1) &= 6(2\alpha_{1m}+\alpha_{2m})[V_m-1-V_m]/\gamma_m . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sustituyendo (4.41) en (4.42), se tiene :

$$\begin{aligned} Q_1^2(0) &= [2\alpha_{10}^3+\alpha_{20}]Q_1^1(0)/\alpha_{10} , \\ Q_m^2(1) &= [2\alpha_{1m}+\alpha_{2m}]Q_m^1(1)/\alpha_{1m}^2 . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considerando que los vértices V_0 y V_1 son $\neq 0$ y además observando, de (4.43), que la primera y segunda derivada son linealmente dependientes en $u=0$, se concluye que la curvatura es cero al inicio de la curva Beta-spline. Lo mismo sucede en el extremo final de la curva, lo cual implica que la curva inicia y termina con un segmento de línea, el cual es, en general, más pequeño que los demás debido a la influencia del doble vértice.

Triple vértice

Esta extensión a la idea anterior genera los segmentos $Q_0(u)$ y $Q_{m+1}(u)$, respetando la generación de los segmentos $Q_1(u)$ y $Q_m(u)$ como se vió en la técnica anterior (fig 4.8). Los nuevos segmentos se generan empleando V_0 cuando se referencia a V_{-1} y V_{-2} para $Q_0(u)$, y V_m cuando se referencia a V_{m+1} y V_{m+2} en el caso de $Q_{m+1}(u)$.

Evaluando los nuevos segmentos se encuentra que ambos son líneas rectas, siendo $Q_1(u)$ una línea que inicia en V_0 y termina en $2/\gamma_0$

en la dirección del vector V_1-V_0 . El segmento $Q_{m+1}(u)$ inicia en $1-2\alpha_1^3/\gamma_m$ a lo largo del vector V_m-V_{m-1} y termina en V_m . En general, los nuevos segmentos son más pequeños que los segmentos $Q_1(u)$ y $Q_m(u)$ y presentan la ventaja de interpolar a los vértices de control finales.

Vértices fantasma

Se denominan fantasmas a los vértices que se agregan con el único propósito de generar nuevos segmentos de curva y a los cuales el usuario del sistema no tiene acceso. El tamaño de los segmentos que se generan es normal y como sólo se agrega un vértice para cada nuevo segmento, se tiene entonces m segmentos de curva con m arcos del polígono de control, lo cual hace más elegante la formulación final.

Los segmentos que se generan en esta formulación son $Q_1(u)$ y $Q_m(u)$, donde $Q_1(0)=P_0$ y $Q_m(1)=P_m$ (fig. 4.7). Sustituyendo en el lado izquierdo de estas igualdades la evaluación de la curva $Q_1(u)$ para el valor del parámetro u respectivo y finalmente despejando para los vértices fantasma V_{-1} y V_{m+1} se tiene

$$\begin{aligned} V_{-1} &= (\gamma_0 P_0 - ((\gamma_0 - 2\alpha_1^3 - 2)V_0 + 2V_1)) / 2\alpha_1^3, \\ V_{m+1} &= (\gamma_m P_m - ((\gamma_m - 2\alpha_1^3 - 2)V_m + 2\alpha_1^3 V_{m-1})) / 2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aplicando un análisis de curvatura similar al realizado en el caso de vértices múltiples, se encuentra que los vectores primera y segunda derivada en los extremos son, en general, linealmente independientes si se considera que la curva termina en cualquier vértice P_i , por lo cual, la curvatura es diferente de cero. Si los vértices P_i coinciden con los vértices V_0 y V_m , se obtienen las siguientes expresiones para los fantasmas :

$$\begin{aligned} V_{-1} &= V_0 + [V_0 - V_1] / \alpha_1^3, \\ V_{m+1} &= V_m + [V_m - V_{m-1}] \alpha_1^3. \end{aligned} \quad (4.26)$$

La primera derivada de la curva en los extremos es

$$\begin{aligned} Q_1^1(0) &= 6(\alpha_{10}+1)[V_1-V_0]/\gamma_0, \\ Q_m^1(1) &= 6\alpha_m(\alpha_m^2+1)[V_m-V_{m-1}]/\gamma_m, \end{aligned} \quad (4.27)$$

lo que demuestra que la curva es tangente al polígono de control en los extremos.

La segunda derivada en los extremos esta dada por :

$$\begin{aligned} Q_1^2(0) &= 6(2\alpha_{10}^2+\alpha_{20}-2)[V_1-V_0]/\gamma_0, \\ Q_m^2(1) &= 6(2\alpha_m^3-2\alpha_m-\alpha_{2m})[V_m-V_{m-1}]/\gamma_m. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Comparando la primera y segunda derivada en los extremos, es claro que la primera derivada puede sustituirse en la segunda, logrando una relación de dependencia entre ambas. Si además se considera que los vértices V_1 y V_0 son diferentes, entonces la primera derivada es diferente de cero, por lo cual la curvatura en los extremos es igual a cero.

Así, mediante la técnica de vértices fantasmas, se generan dos nuevos vértices que son función de vértices existentes al momento de definir el polígono de control.

4.8 Superficies Beta-spline

Una superficie Beta-spline es una extensión a la teoría de curvas Beta-spline.

En este caso, un punto (i,j) sobre la superficies Beta-spline está dado por el promedio de 16 vértices de control V_{ij} (fig 4.2) influidos por las funciones base, y se representan por :

$$\{V_{ij} \mid i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}. \quad (4.29)$$

Los vértices que se involucran son los $V_{i+r,j+s}$, $r=-2,-1,0,1$ y $s=-2,-1,0,1$. De esta forma, el segmento de superficie Beta-spline $Q_{ij}(u,v)$ se define por :

$$Q_{ij}(u, v) = \sum_{r=-2}^1 \sum_{s=-2}^1 bbr_{rs}(\beta_1, \beta_2; u, v) V_{i+r, j+s}, \quad (4.30)$$

para $0 \leq u, v \leq 1$,

donde la función bivariada $bbr_{rs}()$ es el producto tensor del conjunto de funciones base univariadas :

$$bbr_{rs}(\beta_1, \beta_2; u, v) = b_r(\beta_1, \beta_2; u) b_s(\beta_1, \beta_2; v), \quad (4.31)$$

donde $r = -2, -1, 0, 1$ y $s = -2, -1, 0, 1$.

Como $b_r(\beta_1, \beta_2; u)$ es independiente de s , (4.30) puede expresarse como :

$$Q_{ij}(u, v) = \sum_{r=-2}^1 [b_r(\beta_1, \beta_2; u)] \sum_{s=-2}^1 V_{i+r, j+s} b_s(\beta_1, \beta_2; v) \quad (4.32)$$

para $0 \leq u, v \leq 1$

En el caso del segmento de superficie, es posible seguir la misma teoría presentada para la generación de nuevos segmentos que permitan interpolar los vértices que definen la frontera del polígono de control. En el caso particular de agregación de vértices fantasmas, nuevamente mantienen un tamaño natural similar al caso bidimensional. La superficie total resultante se forma de $m \times n$ segmentos con $(m+1) \times (n+1)$ vértices de control. Los vértices fantasma quedan totalmente definidos por los vértices originales del polígono de control, excepto para el caso de los vértices en las esquinas, los cuales son función de puntos fantasma y se calculan al final.

Debe observarse que al realizar una superficie compuesta por más de un segmento, se vuelve innecesario calcular todos los vértices fantasmas pues, de manera similar al caso bidimensional, existen vértices que se comparten en las fronteras entre segmentos.

Igualando a cero el vector segunda derivada en las fronteras del segmento se obtienen los vértices fantasma en las esquinas :

$$\begin{aligned}
V_{-1,-1} &= (2\alpha_{100}^2 + \alpha_{200})[V_{0,-1} - V_{1,-1}]/2\alpha_{100}^3 + V_{0,-1}, \\
V_{-1,n+1} &= (2\alpha_{10n} + \alpha_{20n})[V_{-1,n} - V_{-1,n-1}]/2 + V_{-1,n}, \\
V_{m+1,n+1} &= (2\alpha_{1mn} + \alpha_{2mn})[V_{m+1,n} - V_{m+1,n-1}]/2 + V_{m+1,n}, \\
V_{m+1,-1} &= (2\alpha_{1m0} + \alpha_{2m0})[V_{m,-1} - V_{m-1,-1}]/2 + V_{m,-1},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

y los demás vértices fantasmas se encuentran con las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
V_{-1,j} &= (2\alpha_{10j}^2 + \alpha_{20j})[V_{0,j} - V_{1,j}]/2\alpha_{10j}^3 + V_{0,j}, \quad j=0,1,\dots,n \\
V_{1,n+1} &= (2\alpha_{11n} + \alpha_{21n})[V_{1,n} - V_{1,n-1}]/2 + V_{1,n}, \quad n=0,1,\dots,m \\
V_{m+1,j} &= (2\alpha_{1mj} + \alpha_{2mj})[V_{m,j} - V_{m-1,j}]/2 + V_{m,j}, \quad j=0,1,\dots,n \\
V_{1,-1} &= (2\alpha_{110}^2 + \alpha_{210})[V_{1,0} - V_{1,1}]/2\alpha_{110}^3 + V_{1,0}, \quad n=0,1,\dots,m
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Con estos vértices se obtiene el valor del vector de giro en las esquinas aprovechando la expresión :

$$Q^{11}(c,d) = \delta^2 / \delta u \delta v Q(u,v) \quad u=c, \quad v=d.$$

En este caso, los vectores de giro son :

$$\begin{aligned}
Q_{11}^{11}(0,0) &= a_{00}(V_{00} - V_{01} + V_{11} - V_{10}), \\
Q_{1n}^{11}(0,1) &= a_{0n}(V_{0,n-1} - V_{0n} + V_{1n} - V_{1,n-1}), \\
Q_{mn}^{11}(1,1) &= a_{mn}(V_{m-1,n-1} - V_{m-1,n} + V_{mn} - V_{m,n-1}), \\
Q_{m1}^{11}(1,0) &= a_{m0}(V_{m+1,0} - V_{m+1,1} + V_{m1} - V_{m0}),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

donde :

$$a_{ij} = 9[4\alpha_{1j}^4 + 8\alpha_{1j}^3 + 4\alpha_{1j}^2 \alpha_{2j}^2 + 4\alpha_{1j}^2 + 4\alpha_{1j} \alpha_{2j}^2 + \alpha_{2j}^2]^{1/2}$$

Las condiciones anteriores se obtuvieron considerando que el vector segunda derivada es igual a cero, lo cual conduce a que estos vectores son trivialmente dependientes y ya que la primera

derivada en las fronteras del segmento son diferente de cero, entonces se tiene que la curvatura en las fronteras del segmento es igual a cero.

4.9 Interpretación geométrica de los parámetros Beta

Los parámetros de control β_1 y β_2 surgen al especificar condiciones de continuidad en la unión de dos segmentos Beta-spline. Si $\beta_1=1$, se tiene una continuidad del vector primera derivada, y si $\beta_1=1$ y $\beta_2=0$, se tiene continuidad de los vectores primera y segunda derivada.

En la ecuación de continuidad (4.8), generalizada por la expresión

$$Q_{i+1}^1(0)=\beta_1 Q_i^1(1),$$

se observa que β_1 es la razón entre la primera derivada al inicio de la curva $i+1$ y la primera derivada al final de la curva i . De esta forma, β_1 , denominado factor de polarización, representa, de manera intuitiva, la influencia de los vectores tangentes sobre las curvas. Así, un valor igual a la unidad representa equilibrio del vector tangente correspondiente para cada curva; un valor mayor que la unidad representa que el $(i+1)$ ésimo vector tangente tiene más influencia sobre la forma de la curva y la obligará a seguirlo más de cerca mientras que el caso donde el valor es menor a la unidad produce el efecto contrario (fig 4.8).

Para analizar el parámetro β_2 se emplea la condición de continuidad de posición $Q_{i+1}(0)=Q_i(1)$, evaluando la curva con la sustitución de las funciones base (4.25). En la expresión resultante solo quedan los términos para los vértices V_{i-1} , V_i , y V_{i+1} , debido a que las funciones $b_{-2}(1)$ y $b_1(0)$ valen cero. Bajo esta situación se obtiene la siguiente expresión :

$$b_{-2}(0)V_{i-1}+b_{-1}(0)V_i+b_0(0)V_{i+1} = b_{-1}(1)V_{i-1}+b_0(1)V_i+b_1(1)V_{i+1}.$$

Sustituyendo el valor de las funciones base se obtiene :

$$[2\beta_1^3 V_{i-1} + (4\beta_1^2 + 4\beta_1 + \beta_2)V_i + 2V_{i+1}]/\delta = Q_i(1), \quad (4.36)$$

reescrita como :

$$[K_i + \beta_2 V_i]/(k + \beta_2) = Q_i(1), \quad (4.37)$$

la cual es una expresión en función de β_2 , considerando a los demás términos constantes, y donde :

$$K_i = 2\beta_1^3 V_{i-1} + 4\beta_1(\beta_1 + 1)V_i + 2V_{i+1},$$

$$k = \delta - \beta_2.$$

Si (4.37) se aprovecha para crear la expresión que represente el vector de V_i a la unión entre las curvas, se tiene lo siguiente :

$$[[K_i + \beta_2 V_i]/(k + \beta_2)] - V_i = [K_i - kV_i]/(k + \beta_2). \quad (4.38)$$

Si se considera que los valores de esta expresión son constantes y que la única variable es β_2 , se pueden realizar las siguientes observaciones :

- Si β_2 se incrementa, entonces el vector de V_i a la unión de las curvas es más pequeño produciendo una fenómeno de atracción entre ambos.
- El mismo efecto anterior se produce con valores de β_2 negativos grandes
- Cuando β_2 tiende a $-k$, la distancia entre el vértice V_i y la unión se incrementa considerablemente, de tal suerte que se produce un efecto de repulsión entre ambos y físicamente aparecen puntos de inflexión.
- β_2 solamente está afectando la magnitud del vector entre la unión y el vértice V_i , por lo cual, la atracción y la repulsión entre V_i y la unión se produce en la dirección del vector definido por la unión y el vértice V_i .

Intuitivamente, β_2 permite generar *tensión* y *holgura* en la curva Beta-spline. Mientras mayor la tensión, se generan menor número de puntos de inflexión y mientras más holgura, se generan mayor número de puntos de inflexión. Para el caso de valores negativos de β_2 , cuando éste varía de 0 a $-k$, cada unión es repelida de su correspondiente vértice de control V_i , generandose una curva con holgura. Cuando β_2 incrementa su valor negativo, cada unión es atraída por su correspondiente vértice de control, pero del lado opuesto del polígono de control (fig 4.2).

Finalmente se puede decir que los parámetros de control permiten generar formas bajo una idea intuitiva del efecto que se logrará con su variación.

CAPITULO V

SEGMENTOS Y DOMINIOS RECORTADOS

El dominio $U \subset E^2$ de la ecuación de un Beta-spline es cerrado en el rango $[0,1] \times [0,1]$, pero en ningún lugar se limita a la existencia de discontinuidades.

Los Beta-spline(4) generan segmentos de superficie del tipo producto tensor, al mapear U hacia E^3 (fig 5.1).

Considerando ambas ideas, es posible generar un segmento que se mantenga dentro de las fronteras de un producto-tensor pero que no sea conectado, esto es, se permite la existencia de subregiones conectadas disjuntas dentro del producto tensor que pueden integrarse como la frontera de un objeto, en forma similar a los esquemas de representación B-rep(2.3.4.3) y ASM [12] (fig 5.2).

5.1 Dominios Recortados

Un dominio recortado D_n es un conjunto de subdominios $\Omega_i \in U \subseteq E^2$ donde :

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad (5.1)$$

y U es un dominio parametrizado tal que cada punto $P(u,v) \in U$ existe para $0 \leq u, v \leq 1$ (fig 5.3)

Los Ω_i resultan del proceso de discretización de regiones limitadas por una frontera externa y diversas (≥ 0) fronteras internas, ambas representadas por gráficas cíclicas orientadas [35], que en conjunto se denominan *segmento recortado*. Un *segmento recortado* S_n es un conjunto de subsegmentos denominados *Islas*, esto es :

$$S_n = \{ I_i, i=1,2,\dots,n \}, \quad (5.2)$$

donde :

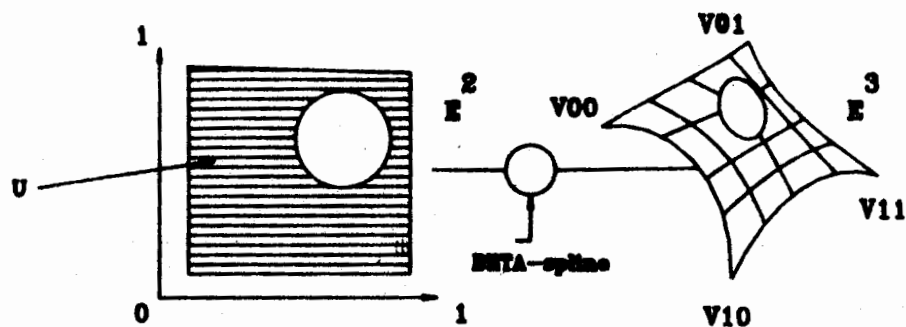


Fig. 5.1 MAPEO DE UN DOMINIO DISCONTINUO EN E^2 A E^3 MEDIANTE UNA FUNCIÓN BETA-spline. LA DEFORMACIÓN ESTÁ CONTROLADA POR EL POLIGONO DE CONTROL DE LA FORMULACIÓN BETA

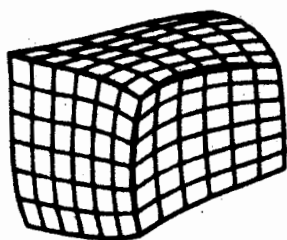


Fig. 5.2 UN OBJETO BAJO ASM MANTIENE FRONTERAS DE FORMA LIBRE Y SU FORMA SE CONTROLA MEDIANTE POLIGONOS DE CONTROL

Fig. 5.3 UN DOMINIO RECORTADO ES UN CONJUNTO DE SUBDOMINIOS QUE NO SE INTERSECTAN Y SE MANTIENEN DENTRO DE UN ESPACIO PARAMETRIZADO $[0,1] \times [0,1]$

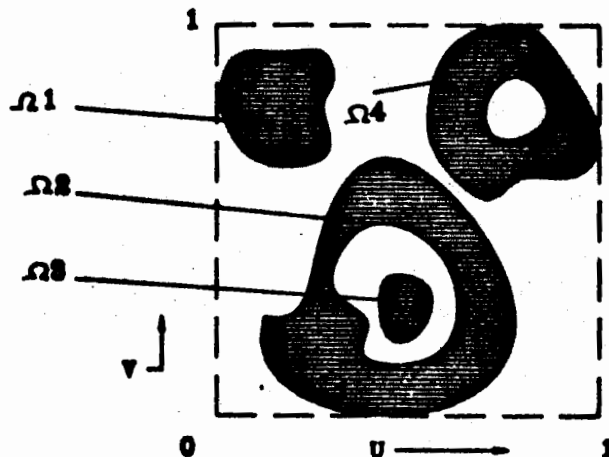
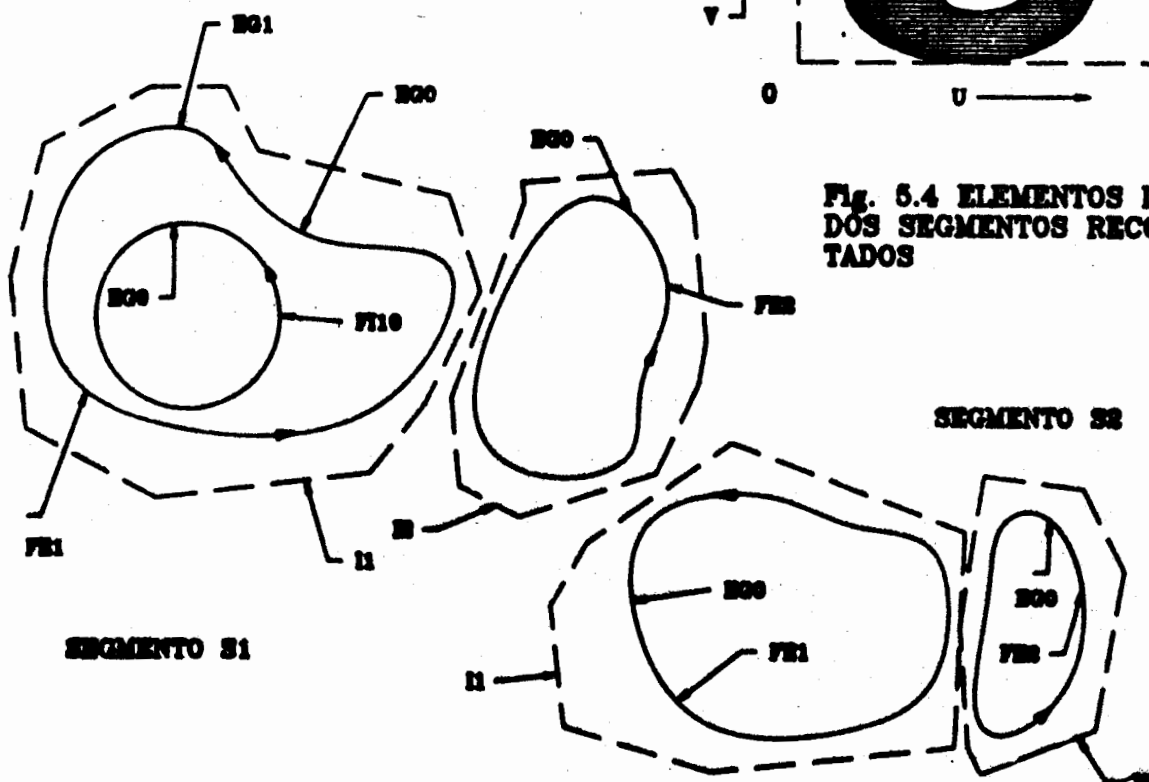


Fig. 5.4 ELEMENTOS DE DOS SEGMENTOS RECORTADOS



$$I_i \cap I_j = \emptyset, \quad (5.3)$$

para $i=1,2,\dots,n$ y $s=1,2,\dots,n$, $s \neq i$.

Cada isla mantiene una frontera externa FE_i , y diversas fronteras internas FI_{it} , $t \geq 0$ tal que :

$$FE_i \cap FI_{it} = \emptyset \quad i \neq t, \quad (5.4)$$

$$FI_{it} \cap FI_{iq} = \emptyset \quad \text{para } t \neq q, \quad (5.5)$$

$$FI_{it} \subset \text{reg}(FE_i) \quad \forall t \geq 0, \quad (5.6)$$

y además, no existe ninguna frontera $FI_{it} \mid FI_{iu} \subset FI_{it}$ para $u \neq t$.

En las expresiones anteriores, $\text{reg}(\alpha)$ significa la región interna finita definida por la gráfica cíclica dirigida α .

Toda frontera, ya sea externa o interna, está formada por entidades geométricas denominadas EG_r tales que :

$$Pr(EG_k) = Pi(EG_{k+1}),$$

donde $Pi(u)$ y $Pr(u)$ representan el vértice inicial y el vértice final, respectivamente de la entidad geométrica u .

Cada entidad geométrica cumple con lo siguiente :

$$EG_k \cap EG_r = \emptyset, \quad k=0,\dots,a, \quad (5.7)$$

$r=0,\dots,a,$
 $r \neq k,$

excepto en $Pr(EG_k) = Pi(EG_{k+1})$, por lo cual, las fronteras son gráficas cíclicas sin intersección excepto en los puntos de contacto de sus entidades geométricas (fig 5.4).

Las entidades geométricas EG_k pueden ser cualquier función representada por sus componentes geométricos fundamentales. Bajo esta filosofía se define un objeto O_w como :

$$(5.8)$$

$$O_w = \{ D_n \mid n=1,2,\dots,\tau \} \cup \{ PC_\alpha \mid \alpha=1,2,\dots,\tau \} \cup R(D_n, PC_\alpha),$$

donde PC_α define un polígono de control(2.2) que forma parte de una función de mapeo $Z: E^2 \rightarrow E^3$, en este caso una Beta-spline(4), y $R(c, \rho)$ es una relación entre un dominio recortado y el polígono de

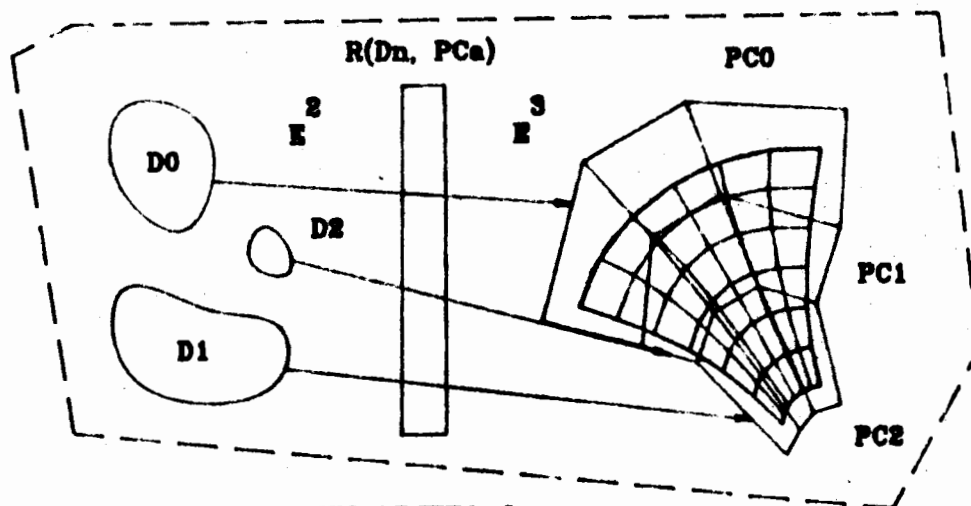


Fig. 5.5 ELEMENTOS DE UN OBJETO O_w

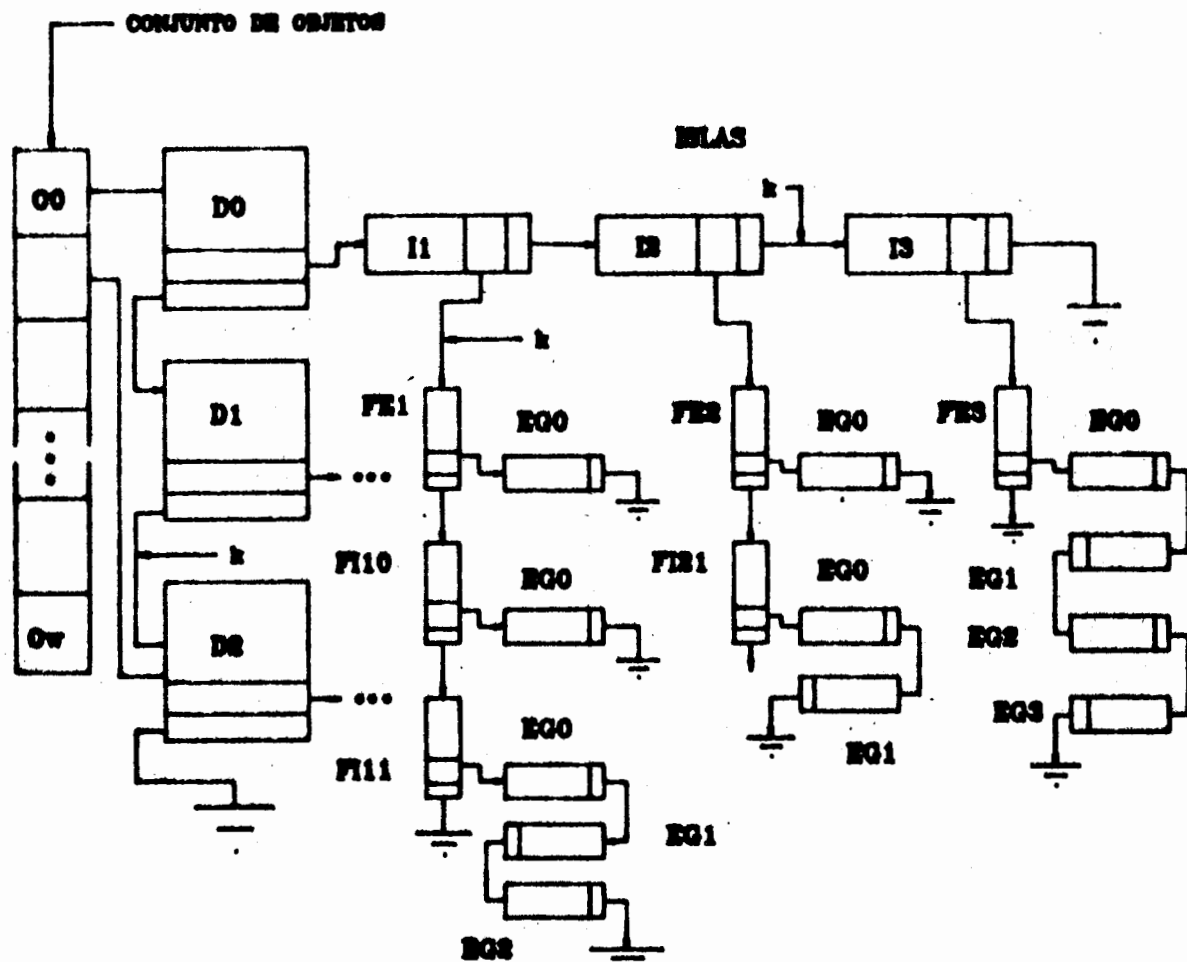


Fig. 5.6 ESTRUCTURA DE DATOS PARA LA DEFINICION DE OBJETOS
LA NAVEGACION SE CORRIJE EMPLEANDO MONITORES E .

control sobre el cual se mapea este dominio (fig 5.5).

Bajo esta definición, no existe una restricción en cuanto a la creación de objetos cerrados o abiertos, ni tampoco en cuanto a la conectividad del objeto, pues éste puede crearse por segmentos mapeados aisladamente. Estas situaciones se pueden presentar como una libertad al diseñador permitiéndole que indique los elementos de la relación $R(\epsilon, \rho)$.

Al momento de la asignación de valores a estos parámetros, se tiene la posibilidad de lograr una revisión topológica del objeto con sólo revisar los polígonos de control, aunque claro, esta revisión es parcial, pues no se analiza directamente la superficie, sino el polígono que la emula.

La estructura de datos para esta definición de objeto es dinámica del tipo jerárquico, y su elección se basa en la naturaleza misma del problema que sugiere esta estructuración. Al momento de codificación, los algoritmos que actúan sobre la estructura realizan una fuerte navegación que se corrige utilizando monitores a la estructura de datos (fig 5.6).

5.2 Codificación

Cada uno de los segmentos recortados se encuentra codificado por sus elementos geométricos más significativos. Por ejemplo, una codificación amplia para las entidades Línea, Arco circular y Arco elíptico está dada por los siguientes registros, cada uno representando a las entidades respectivas identificadas por un código de operación al principio, identificado por una letra :

L X₁ Y₁ X₂ Y₂
C X_c Y_c R AI AF S
E X_c Y_c R_{men} R_{may} AI AF S AR

donde X₁ Y₁ representan una coordenada; R el radio de un círculo; R_{men} el radio menor de la elipse; R_{may} el radio mayor de la

Fig. 5.7 GRAFICA DE UN SEGMENTO RECORTADO FORMADO POR DOS ISLAS. OBSERVE QUE SIEMPRE DEBE MANTENERSE EL SENTIDO DE GENERACION DE LOS EGK PARA CADA UNA DE LAS ISLAS. LA ISLA MAYOR DEFINE UN HUECO CIRCULAR EN SU ESTRUCTURA.

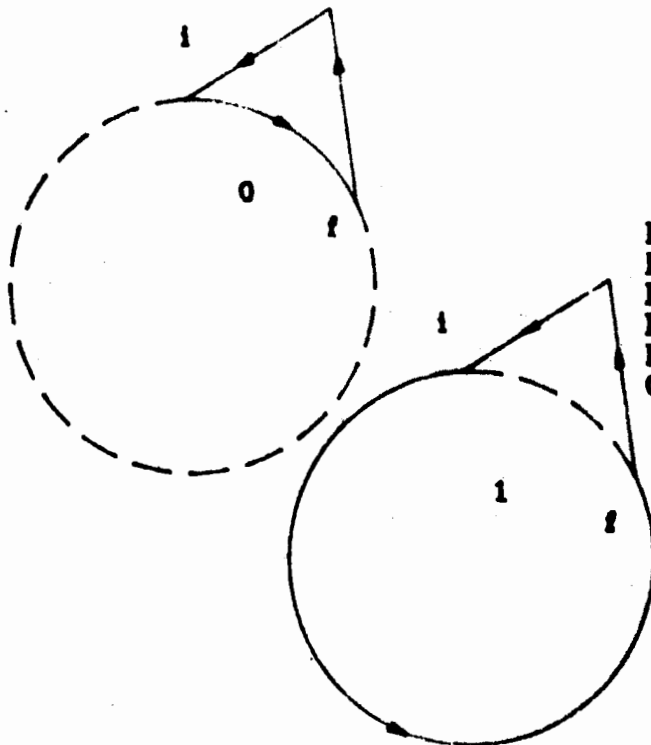


Fig. 5.9 LA INTERSECCION ENTRE ELEMENTOS EGK SE RESUELVE POR LA AGREGACION DE NUEVOS EGK EN LA INTERSECCION CREANDO ASI UNA SOLA ISLA

(A) DOS ISLAS INDEPENDIENTES
(B) LA ISLA RESULTANTE

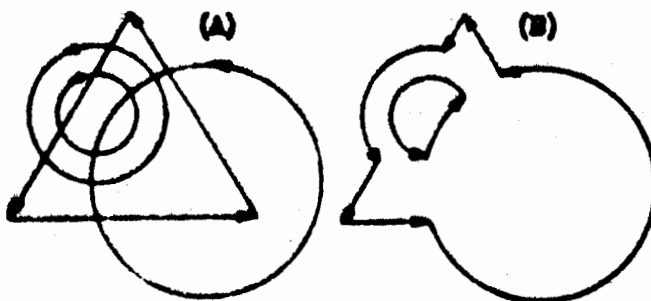


Fig. 5.8 UN EGK CIRCULAR O ELIPTICO PUEDE DESARROLLARSE EN SENTIDO O CONTRARIO A LAS MANECILLAS DEL RELOJ MEDIANTE LOS INDICES [0,1] RESPECTIVAMENTE COMO SE OBSERVA EN LAS GRAFICAS

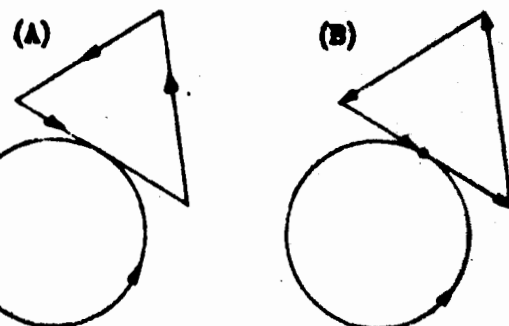
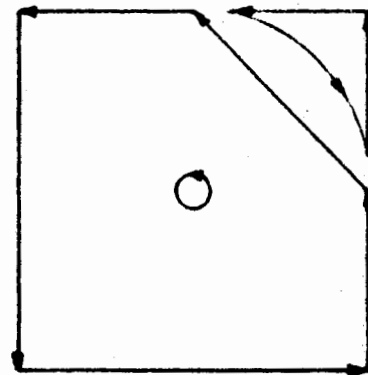


Fig. 5.10 CUANDO VARIOS SEGMENTOS DE SOBREPONEN DEBE GENERARSE UNO SOLO MEDIANTE EL CALCULO DE LAS INTERSECCIONES ENTRE FRONTERAS EXTERNAS E INTERNAS. (A) SEGMENTOS SOBREPUESTOS; (B) SEGMENTO GENERADO

elipse; AI el ángulo inicial de creación de un segmento; AF el ángulo final de creación de un segmento; AR el ángulo de rotación de la elipse; S el sentido de creación de un segmento de curva, en este caso +1 significa contrario a las manecillas del reloj y 0 en sentido de las manecillas del reloj.

Existe también la definición reducida, que se utiliza en un mayor porcentaje para la definición de un segmento recortado. Esta definición es la siguiente para los elementos anteriores

```
L Xr Yr
C Xc Yc R AF S
E Xc Yc Rmen Rmay AF S R
```

Este esquema de codificación permite la definición de cualquier entidad geométrica identificada por un código de operación y sus entidades geométricas fundamentales. Por ejemplo, un segmento de curva Beta-spline bajo parámetros continuos estaría dado por

```
S  $\beta_1$   $\beta_2$  X1 Y1 X2 Y2 X3 Y3 X4 Y4
```

Observe que sólo se requieren cuatro vértices de control para la definición del segmento.

Cuando se define un segmento recortado, no es necesario proporcionar la definición amplia de cada uno de los componentes geométricos, pues sólo se requiere la definición del primero, y los siguientes se definen en forma relativa. Para propósitos de procesamiento, el sistema que procesa los segmentos y los discretiza posteriormente realiza la conversión al esquema ampliado.

La siguiente información representa un segmento recortado además de información extra que requiere el módulo que los procesa y discretiza (fig 8.7)

```
1 num. de objetos a definir
1 num. Dn que definen al objeto
2 num. de islas de la superficie recortada 1
100 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 precision, atributos, appcont, betas
```

```

1  num. de fronteras internas de la isla 1(I1)
5 1 num. de segmentos EG de la FE y de la FI
L 0 0 10 0 segmento de línea de (0,0) a (10,0). EG1 de FE
L 10 5 segmento de línea relativo a (10,5) EG2 de FE
L 5 10 EG3 de FE
L 0 10 EG4 de FE
L 0 0 EG5 de FE
C 5 5 0.5 0 360 1 inician los EG de FI1 EG1 de FI1
0 num. de fronteras internas de la segunda isla (I2)
3 num. de EG de la frontera externa de la I2
L 10 6 10 10 segmento de línea de (10,8) a (10,10) EG1 de FE
L 6 10 segmento relativo al anterior EG2 de FE
C 5 5 5.0990195 11.309932 0 arco circular relativo EG3 de FE

```

El parámetro de sentido permite generar arcos como lo que se observan en la figura (fig 5.8)

Aunque las definiciones realizadas no permiten el manejo de tangencias ni segmentos sobrepuestos, es posible trabajar con estas situaciones creando nuevas entidades geométricas. Por ejemplo, en la figura (5.9a) se observan dos islas independientes que mantienen una tangencia y un número de EG's=4. La tangencia se resuelve creando una nueva EG en la posición de tangencia, lo cual equivale a descomponer una EG en dos y modificar la estructura de codificación con un nuevo segmento relativo. De esta forma, la nueva isla $I = I_1 \cup I_2$ sería la indicada en la figura (5.9b). Debe observarse que el sentido de las entidades gráficas se mantiene constante. La agregación de una nueva entidad geométrica requiere únicamente una actualización sobre la estructura dinámica mostrada en la figura (5.8) para el almacenamiento de los segmentos recortados.

En el caso de los encimamientos de regiones, lo cual no puede suceder bajo una condición final entre segmentos (5.1), se resuelve localizando las intersecciones entre las fronteras externas, las cuales forman los vértices de una nueva frontera externa, procediéndose de manera similar en las fronteras internas (5.10).

5.3 Discretización

La definición de los segmentos recortados puede realizarse en coordenadas del mundo o globales definidas por el usuario. Una vez definido el segmento, éste se traduce a un sistema de coordenadas enteras $n \times n \subset \mathbb{I}^2$. Para esta transformación, se encuentra el rectángulo máximo-mínimo sobre la definición original, se modifica este rectángulo al cuadrado máximo definido por sus vértices, con lo cual se obtiene una región $r \times r \subset \mathbb{R}^2$ a la cual se le aplica una transformación ventana puerto al puerto $n \times n$, con lo cual se facilitan los algoritmos de definición del dominio para el Beta-spline, aunque queda, en la mayoría de los casos, área sin información. En este nuevo sistema se invoca un procedimiento de conversión por barrido, mediante el cual, se determina el dominio de la región (fig 5.11). Cada intersección localizada mediante este procedimiento entra en una estructura dinámica del tipo mostrado en la figura (5.12). En este caso, se aplica una variación a los algoritmos de conversión conocidos [20][36], procediendo de la siguiente forma :

- o Minimax a la estructura
- o Generación del espacio $n \times n \in \mathbb{E}^2$
- o VO_i , $i=1$, número de objetos
- o VD_j , $j=1$, número de superficies de O_i
- o VI_k , $k=1$, número de islas de D_j
- o VFE y FI de I_k
- o Minimax de EG. En este paso se obtiene el rectángulo máximo mínimo que encierra a la primitiva. Los casos especiales se presentan con los minimax de segmentos de arco.
- o Determina intersecciones de EG en su minimax.
Esto se puede lograr mediante el generador de la primitiva o mediante una solución empleando preferentemente la representación paramétrica de las entidades geométricas. Debe tenerse particular cuidado con la determinación de los vértices singulares en las secciones curvas.
- o Actualiza la estructura de intersecciones. Debe observarse que no todas las líneas de barrido que se emplean en la conversión tendrán intersecciones. Una forma muy efectiva de asegurarnos que no se revisa posiciones donde no existe información es el empleo del minimax.
- o Ordenamiento incremental por cada una de los renglones donde se localizó intersección en la estructura de intersecciones.

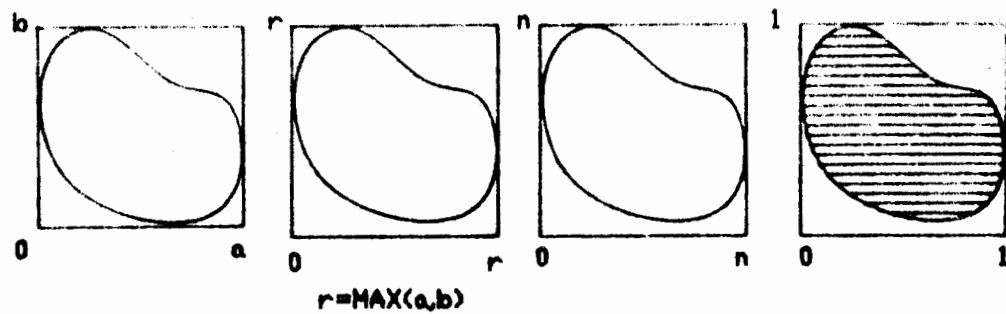


Fig. 5.11 MAPEO DE LOS SEGMENTOS RECORTADOS HASTA LA GENERACION DE UN DOMINIO PARAMETRIZADO.

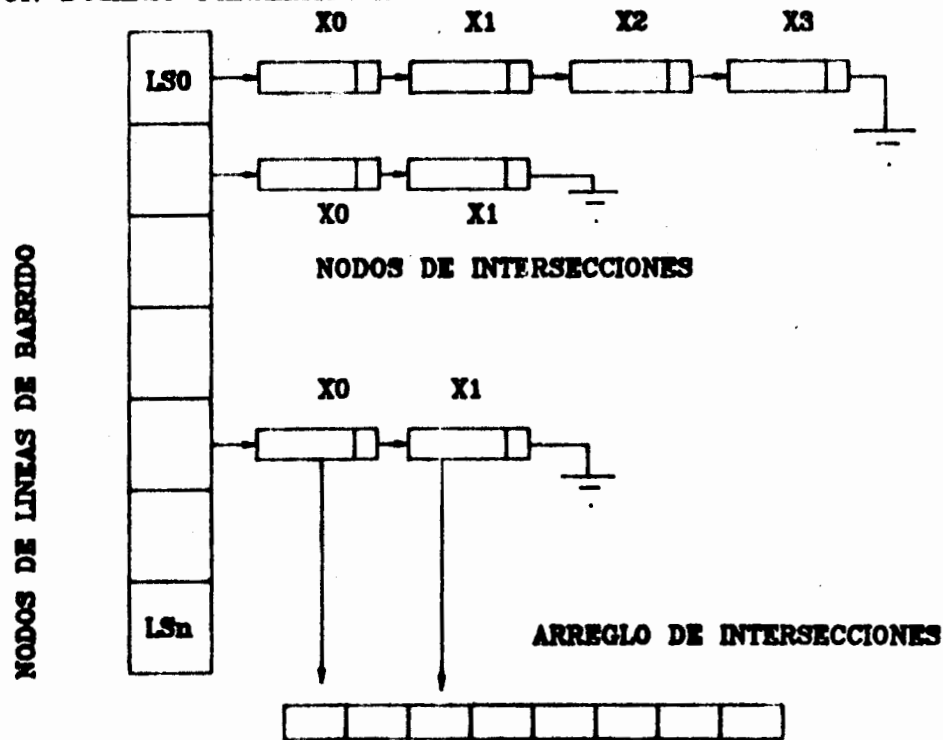


Fig. 5.12 ESTRUCTURA DE DATOS PARA MANEJO DE INTERSECCIONES
TODA LA ESTRUCTURA ES DINAMICA EXCEPTO EL ARREGLO INFERIOR.

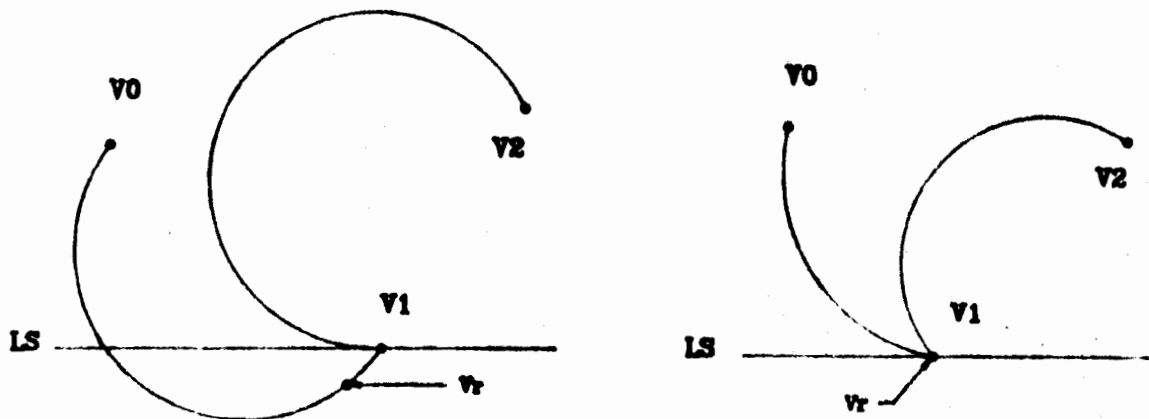


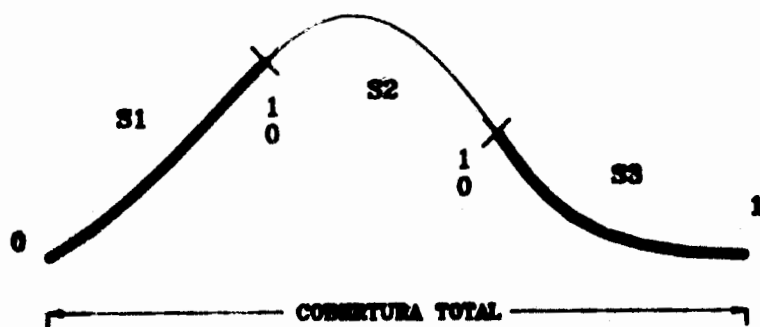
Fig. 5.13 LAS FRONTERAS CURVAS REQUIEREN LA AGREGACION DE VERTICES DE REFERENCIA V_r PARA LA DETERMINACION DE LA SINGULARIDAD DE UN VERTICE TERMINAL DE UNA EGK.

Algunos detalles importantes al momento de la conversión se presentan en la determinación de la singularidad de un vértice, esto es, ¿debe un vértice contarse una o dos veces en la estructura de intersección?. Como las entidades geométricas EG pueden ser segmentos de arco, circular o elíptico, la determinación de la singularidad de un vértice no es directa, como lo muestra la figura (5.13). En este caso, se tienen dos segmentos de arco unidos en el vértice V_i . Si se aplica el criterio de comparación de las coordenadas 'y' entre los vértices V_{i-1} , V_i , y V_{i+1} [20 pp 234], este vértice debe contarse dos veces, lo cual no proporciona una solución correcta. Una solución es la generación de un vértice de referencia V_r , que, bajo una definición como la presentada para un segmento de arco esta dada por :

$$\phi_r = \phi_2 - \%fp(|\phi_2 - \phi_1|) , \quad (5.9)$$

donde se ha encontrado que el valor $fp=0.02$ es adecuado para cualquier caso. ϕ_r define el ángulo en el cual hay que evaluar el segmento de arco de la EG para determinar las coordenadas de V_r . ϕ_1 y ϕ_2 definen el ángulo inicial y el ángulo final del segmento de arco. Para los arcos elípticos esta expresión también es aplicable.

Una vez que se ha obtenido el dominio U definido por las intersecciones almacenadas en la estructura de intersecciones (fig 5.12), éste debe reconfigurarse para realmente aplicarlo como dominio de una superficie Beta-spline. Esta modificación es necesaria si consideramos una superficie Beta-spline de cobertura completa, esto es, una superficie que interpole a los vértices que se encuentran en las esquinas de su polígono de control(4). Como U es un dominio parametrizado $[0,1]$, en la superficie completa no sería posible representarlo y lograr una cobertura total (fig 5.15) pues si valuamos en forma natural el Beta-spline, entonces solo lograríamos ver la superficie mapeada en la región definida por S_2 , que es el caso natural. La finalidad es ver un mapeo



**Fig. 5.14 UNA CURVA
ESTA FORMADA POR UN
GRUPO DE SEGMENTOS
PARAMETRIZADOS DE
0 a 1**

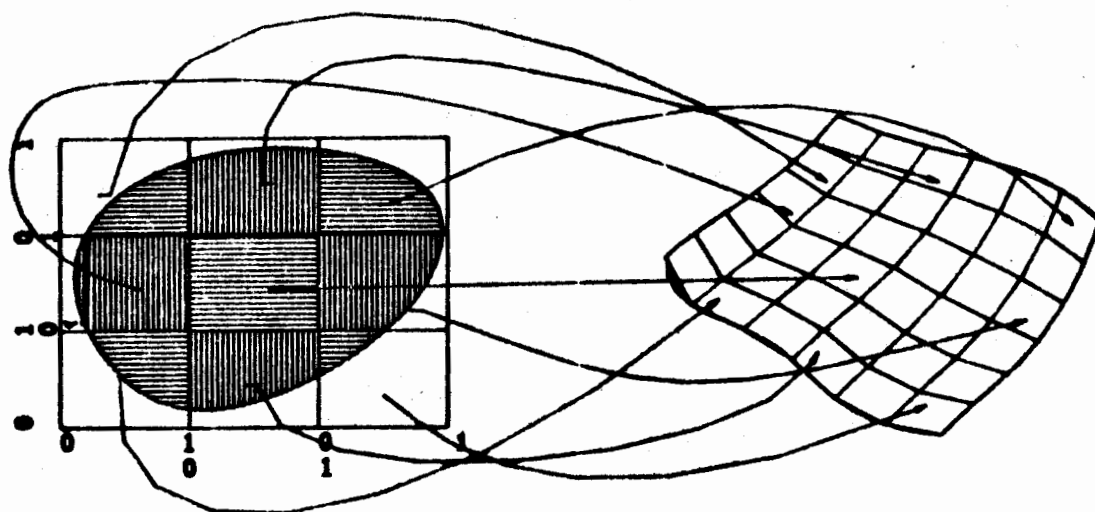
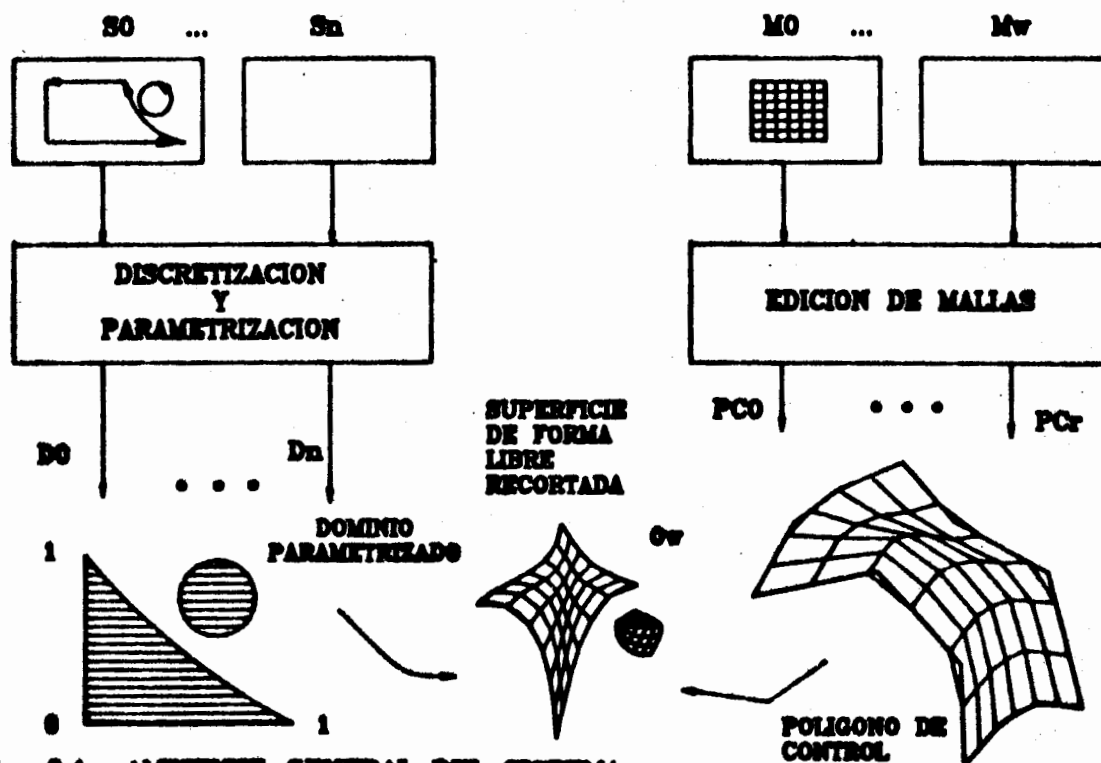


Fig. 5.15 EXPANSION A UN DOMINIO DE NUEVE REGIONES Y SU MAPEO



**Fig. 6.1 AMBIENTE GENERAL DEL SISTEMA
OBSERVESE LA INTEGRACION ENTRE DOMINIOS RECORTADOS Y
POLIGONOS DE CONTROL**

formado por los segmentos S_1, S_2, S_3 . Para lograr este efecto, se crea una *expansión artificial* de U en 9 regiones parametrizadas de $[0,1]$, para el caso 3D. Así se logra un dominio U que se vería como en la figura (8.15)

Así, cada una de las nuevas regiones se puede aplicar para la generación de cada uno de los 9 segmentos Beta-spline que constituyen la superficie total. Debe observarse que este dominio no es continuo, por lo cual la valuación de una expresión Beta-spline debe realizarse segmento por segmento.

CAPITULO VI
AMBIENTE DE MODELADO

6.1 Descripción del ambiente

La teoría de los Beta-splines(IV) y los Segmentos Recortados(V), además de las ideas principales vistas en el capítulo II acerca de las superficies, representan la base para el desarrollo del ambiente de modelado de éste trabajo.

Así, el ambiente se orienta a la modelación de superficies de forma libre(2.2), bajo la filosofía de modelado por segmentos que mantienen continuidad controlada en sus fronteras, en este caso continuidades G^2 .

La estructura general del ambiente se muestra en la figura 6.1, donde se observa la existencia de dos actividades que pueden desarrollarse en paralelo: la creación de segmentos recortados S_n , y la creación de mallas de control M_w .

Los S_n los crea el diseñador siguiendo las reglas indicadas en el capítulo V sobre segmentos recortados y dominios parametrizados, donde básicamente se indica la metodología para formar gráficas cíclicas que no mantengan intersecciones. Estas gráficas se discretizan y parametrizan mediante algoritmos de conversión por barrido como se indicó en el capítulo V, para generar finalmente un dominio parametrizado D_n . Existe equivalencia uno a uno entre un S_n y un D_n .

Por otra parte, las mallas M_w las proporciona el sistema de modelado al usuario, primero como un plano sobre el cual se tiene acceso a un conjunto regular de vértices de control. El diseñador tiene acceso a funciones de transformación que actúan sobre los vértices del plano. Cuando se transforma un vértice, se observa en video la alteración en tiempo real, manteniendo siempre la topología de la malla. Mediante las transformaciones, el diseñador crea un polígono de control que asemeja la forma final deseada (ver fig. 6.1).

A partir de una malla M_w , es posible crear diversos polígonos de control PC_r , los cuales pueden almacenarse para ser llamados posteriormente y continuar con el proceso de edición.

Una vez generado un dominio recortado D_n y un polígono de control PC_r , el diseñador tiene la opción de mapear D_n hacia PC_r , creando un segmento de superficie de forma libre que es parte de un objeto O_w (ver fig. 6.1).

Como un D_n requiere 16 vértices de control (ver fig. 4.2) para lograr su mapeo final, cada PC_r generado en el sistema, será múltiplo de 16 vértices, dejando libre la posibilidad para la creación de objetos más complejos que aquellos formados por un solo segmento de superficie.

La selección de opciones del sistema se realiza interactivamente aprovechando lo más posible de la estación de diseño RT vía el estándar gráfico PHIGS.

Todo el ambiente se desarrolló bajo el sistema operativo AIX en lenguaje C.

6.2 Descripción de un ejemplo de modelado

La figura 6.2 esta compuesta realmente de 6 gráficas que muestran las fases de diseño de una copa empleando éste sistema de diseño. La primera gráfica muestra el polígono de control diseñado para la generación de la copa. El polígono se observa desde el vector $[0,0,1]$ que representa la posición del observador y la cual se indica por el sistema de ejes dinámicos en la parte inferior derecha de la pantalla. Para deformar los vértices que se observan en el polígono de control, el diseñador primero debe seleccionarlos y posteriormente transformarlos interactivamente. La selección se realiza aprovechando la propiedad de PHIGS para asignar el atributo de detectabilidad de una entidad geométrica. En la parte superior derecha se observa el dominio parametrizado D_n que se deformará posteriormente sobre el polígono de control. En la parte inferior izquierda, sobre el polígono de control, se

observa un menú dinámico del ambiente, proporcionando acceso a alguna de las opciones del sistema. Este tipo de menús aparecen y desaparecen constantemente a petición del usuario del sistema.

En la parte inferior izquierda se observa una ventana de mensajes al usuario, indicándole la acción que debe realizar a cada momento. En la región inferior izquierda, en color oscuro, se observan las coordenadas del último vértice seleccionado. Estas coordenadas cambian dinámicamente al momento de editar un vértice de control. A la derecha de ésta ventana, se muestran opciones globales a las cuales tiene acceso el usuario en cualquier momento. También se observan dos valores, en color oscuro, que representan a los parámetros Beta $-\beta_1$, β_2 . Estos valores varían dinámicamente seleccionando la ventana correspondiente mediante el dispositivo de 'pick' de la estación de diseño. El rango de valores para los parámetros Beta va de -100 a +100 con valores reales intermedios.

La segunda gráfica, muestra el polígono de control después de diversas transformaciones en el espacio, así como la superficie generada con los valores $\beta_1=1$ y $\beta_2=5$. Obsérvese como la copa tiende a acercarse a los vértices de control aunque aún en una forma muy ligera. También debe observarse una serie de ranuras en la copa, que son el resultado de deformar el dominio parametrizado que se observa en la parte superior derecha. Esta copa está formada por cuatro segmentos de superficie que mantiene las continuidades definidas para los Beta-splines.

La tercera gráfica se obtuvo con el mismo polígono de control pero con un valor de tensión negativo $\beta_2=-5$ y un valor de polarización $\beta_1=1$. Obsérvese como los segmentos de superficie tienden a ir en sentido contrario a los vértices de control al cual están asociados. En ésta gráfica se generan nuevos puntos de inflexión que equivalen a generar holgura en la superficie.

INTERFAZ CON EL USUARIO Y VARIACIONES DE LOS PARAMETROS BETA

**Fig. 6.2 ESTA ES EL CONJUNTO DE LAS SIGUIENTES
GRAFICAS DEL SISTEMA**

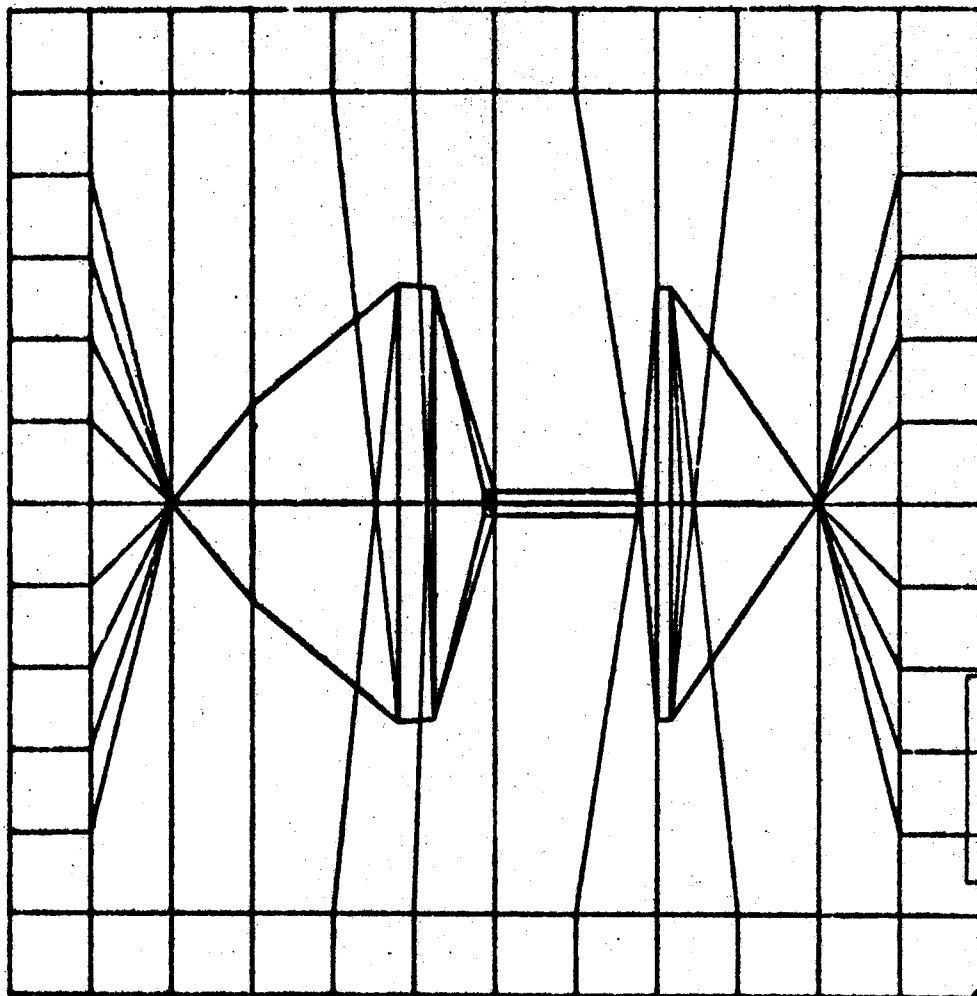
En la cuarta gráfica se dejaron en cero ambos parámetros Beta. El efecto final sobre la superficie equivale a un cambio en la separación de las curvas generadas por la parametrización. Se observa la concentración de la información en las fronteras de cada segmento de superficie así como una separación de la información recortada.

La quinta gráfica se generó con valores de $\beta_1=90$ y $\beta_2=0$. Se lleva a observar una ligera inclinación de la superficie hacia un lado del polígono de control, generada por el efecto de polarización del factor β_1 . Además observese la concentración mucho más marcada de los segmentos de superficie en las fronteras. Bajo estas condiciones se esta obligando a la superficie a seguir con mayor fuerza la dirección de una derivada en las fronteras, de ahí el efecto de concentración.

La última gráfica se generó con los valores $\beta_1=-27$ y $\beta_2=0$. El efecto final generado equivale a la aplicación de tensión muy grande que obliga a la superficie a 'pegarse' al polígono de control. Pero este efecto no es del todo exacto puesto que la superficie ocupa un volumen mayor al definido por el polígono de control. Observe la diferencia entre la superficie generada y el polígono.

6.3 Menús del Sistema

El conjunto de opciones que ofrece el sistema se accesan mediante dos menús básicos que auxilian en la creación y transformación de los polígonos de control, en la asociación de los dominios recortados, en la generación de la superficie Beta-spline, en la activación de un algoritmo de realismo y en la obtención de una impresión en 'plotter' de cualquier imagen del modelo.

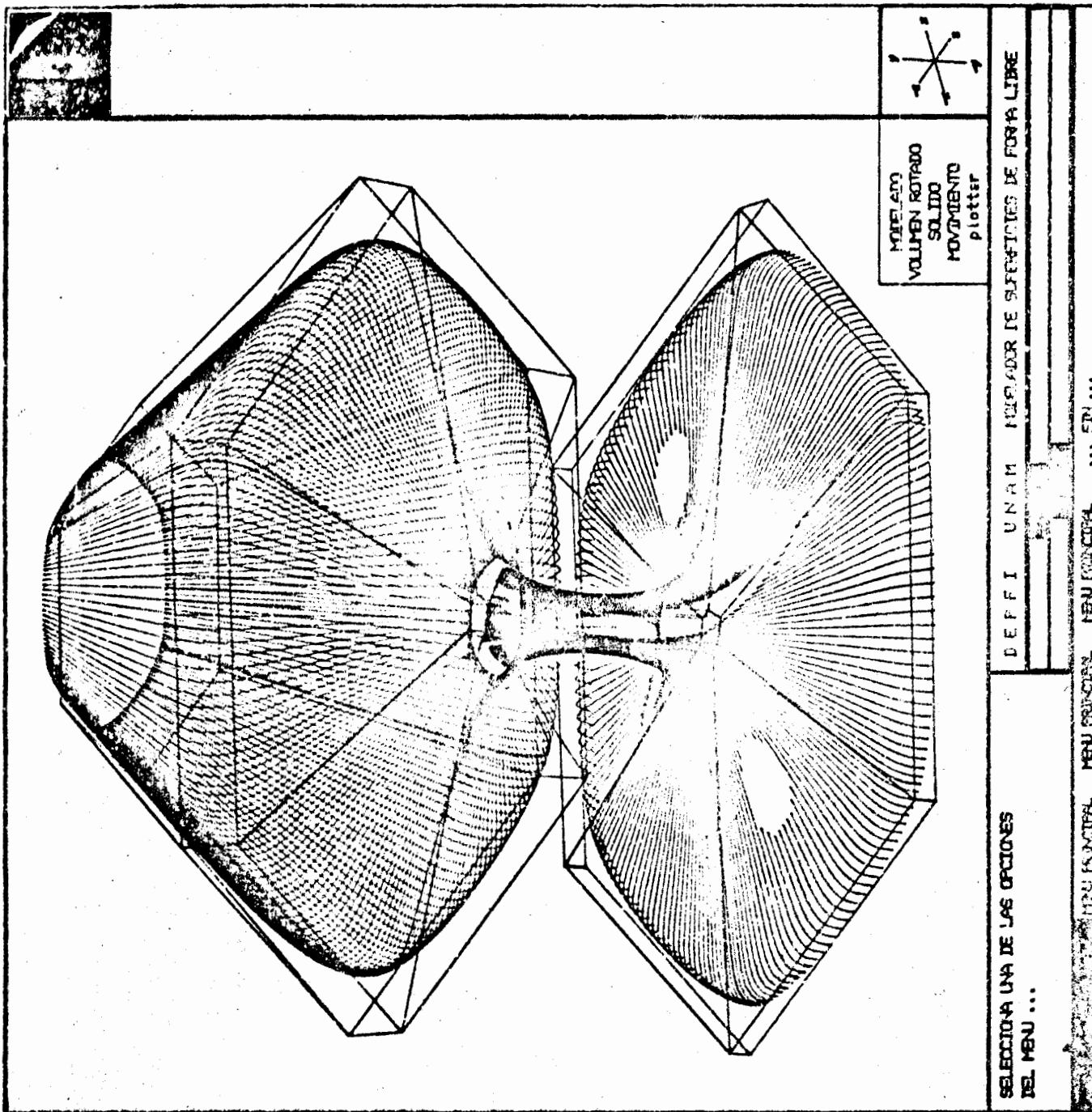


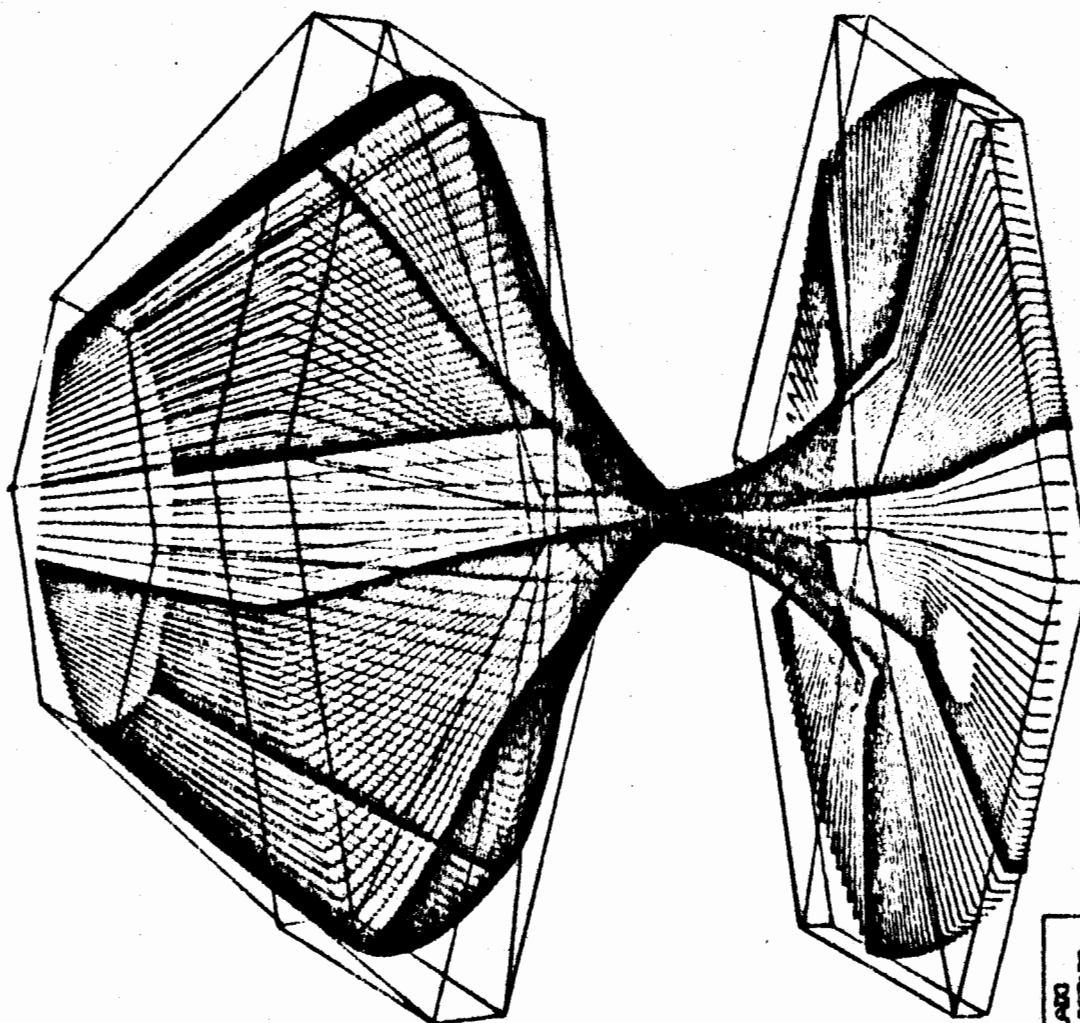
MODELO
 VOLUMEN ROTADO
 SOLIDO
 MOVIMIENTO
 plotter

SELECCIONA UNA DE LAS OPCIONES
 DEL MENU ...

DE PFI UNAM MODELADOR DE SUPERFICIES DE FORMA LIBRE

MENU PRINCIPAL MENU PRINCIPAL ... FIN ...





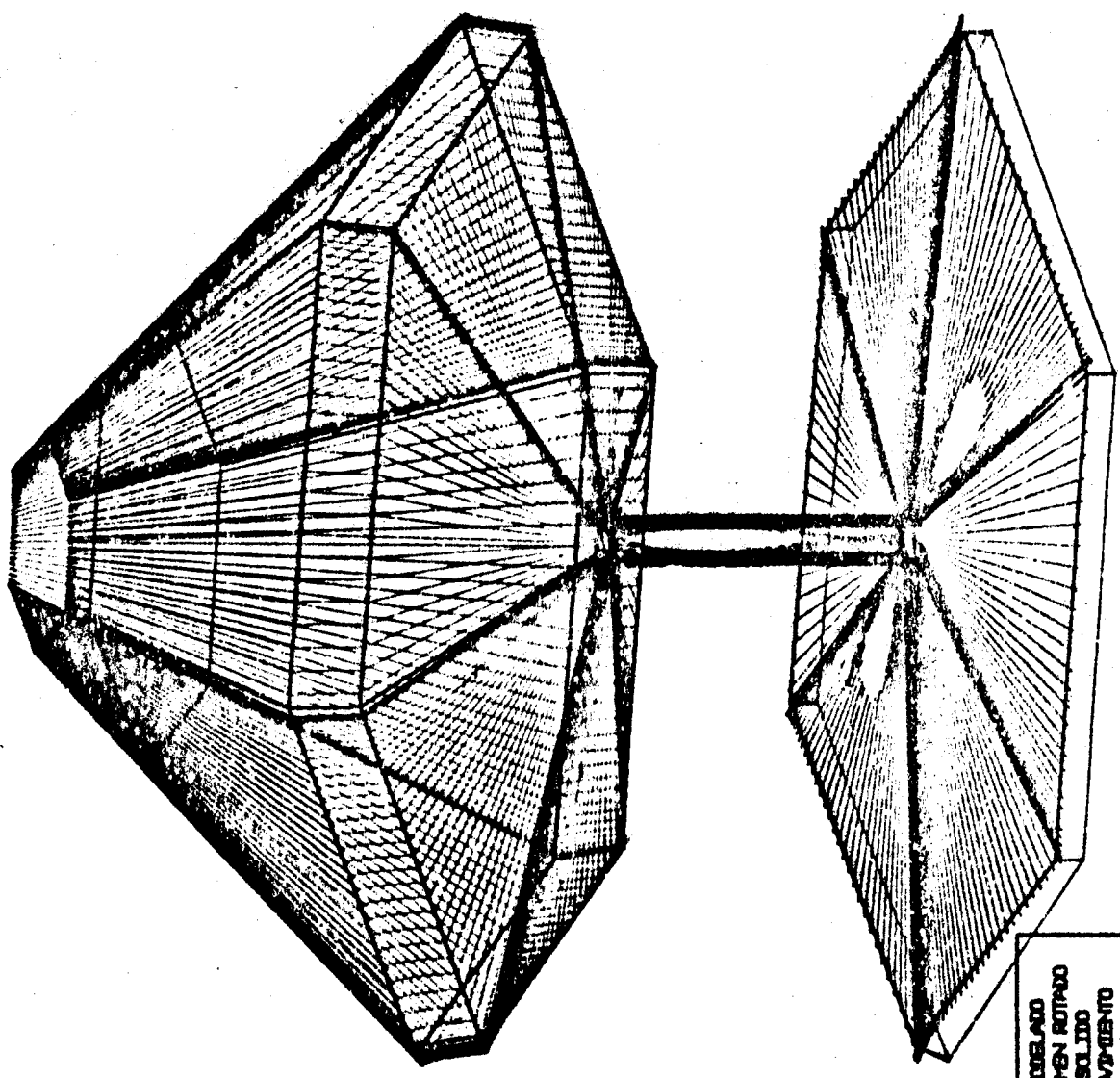
MODELADO
 VOLUMEN: SÓLIDO
 SÓLIDO
 PONTOS: 1000
 PLOTTER

SELECCIONA UNA DE LAS OPCIONES
 DEL MENU ...

DEPT. UNAM. MODELO DE 3 PERFILES DE FORMA LINE

MENU PRINCIPAL MODELADO MENU PRINCIPAL ... PRINCIPAL

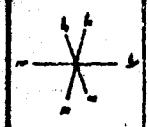




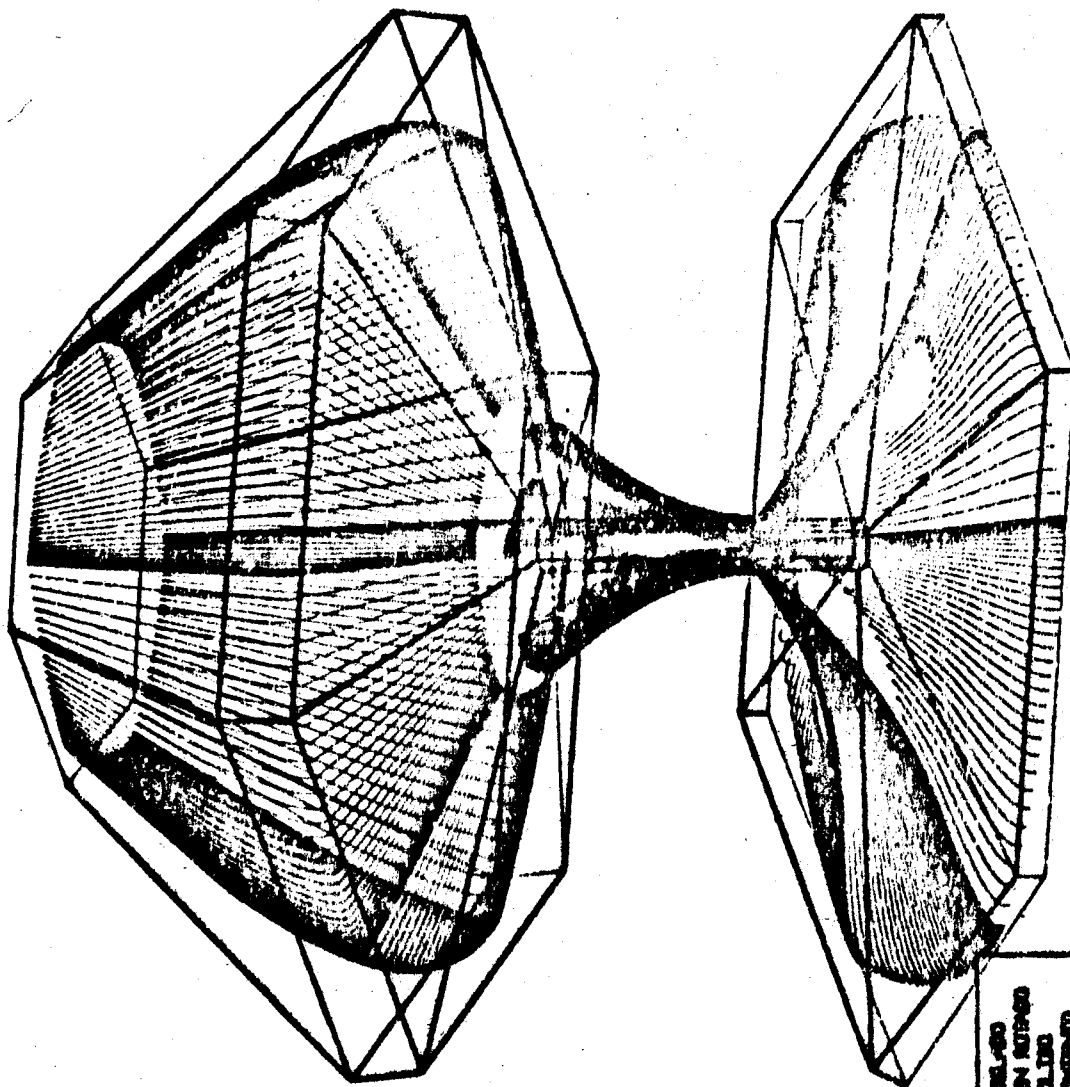
MODELO
 VOLVUM ROTATO
 SOLIDO
 MOVIMIENTO
 plotter

SELECCIONA UNA DE LAS OPCIONES
 DEL MENU ...

DE PFI UNAM MODELO DE ESPERANCIAS DE FORMA LINE



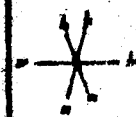
... FIN ...

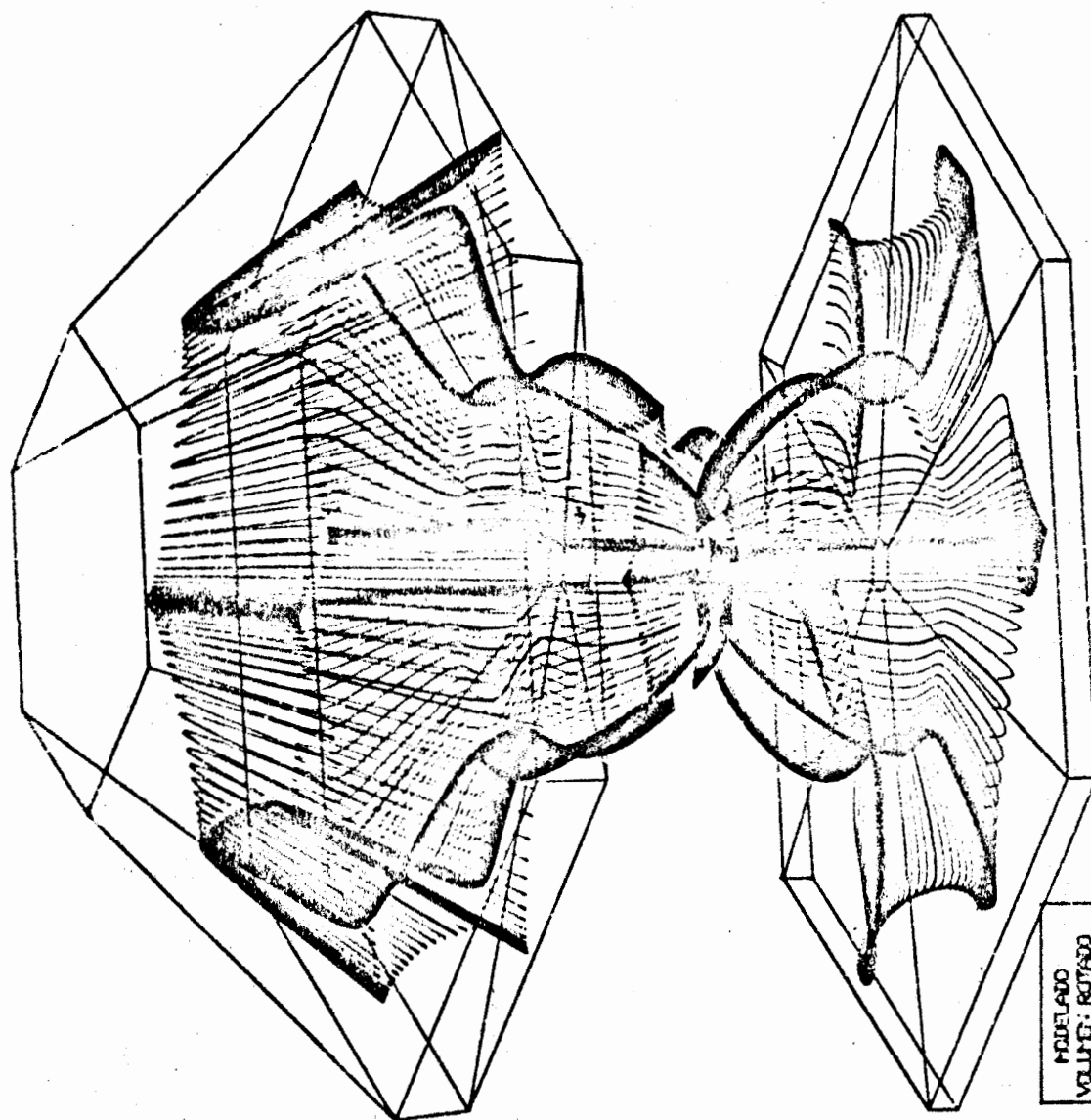


PIELADO
 VALLONADO
 ELIJO
 MOVIMIENTO
 platón

SECCIONA LAS OPIES
 DEL HNU ...

DEPI UNAN MOEDER DE SPOPIES DE APOA LINE





MODELADO
VOLUMEN: ROTADO
SOLIDO
MOVIMIENTO
plotter

SELECCIONA UNA DE LAS OPCIONES
DEL MENU ...

DEFFI UFFH IMPLANT DE SUBSTITUCION DE FORA LIBRE

MENU PRINCIPAL ... FIN ...

EN PRODUCTO MODELADO

correspondientes para cargar o salvar la información de los polígonos de control (PC) utilizados en el modelado de la superficie. Sus opciones asociadas son: POLIGONO NUEVO; POLIGONO ACTUAL; QUITAR POLIGONO; CARGAR ARCHIVO; SALVAR ARCHIVO.

Polígono nuevo crea una malla cuyo tamaño se selecciona de entre 16 posibilidades mostradas en la parte inferior de la pantalla, siendo 16 el número máximo de polígonos por lado que pueden formar la malla. Cada polígono se forma por 16 vértices de control. La malla se crea considerando la selección anterior, ajustándose su escala al máximo puerto en el video.

Una vez creada la malla, es posible trabajar con uno de sus subconjuntos. El sistema pregunta por la cantidad de polígonos con que se desea trabajar, para no mantener presente toda la información y así agilizar el procesamiento de la información.

Polígono nuevo modifica el valor de diversas variables del sistema, reiniciando las matrices de transformación y restaurando los puertos y ventanas originales. Además, se puede seleccionar un nuevo tamaño para la malla, perdiéndose la información que pudiese haber de otra malla previa, por lo cual debe salvarse la información anterior si no desea desecharse

Polígono actual despliega toda la malla formada por los polígonos de control que constituyen el modelo completo. Hay que considerar que la malla puede fragmentarse para trabajar con uno o más polígonos, y dependiendo del número seleccionado al iniciar modelado, es la cantidad de información gráfica presente en la pantalla. La malla completa solamente se tiene en pantalla cuando se indica explícitamente al utilizar los comandos Polígono nuevo, o Cargar archivo, seleccionando una cantidad de polígonos igual a los que constituyen la malla. Cuando se trata desplegar una malla que no existe, el sistema ignora el comando, pero si la malla ya ha sido creada con alguna de las opciones anteriores, entonces se despliega completamente.

Quitar polígono elimina de la pantalla de despliegue y del archivo de datos del plotter la información correspondiente a la malla. Es útil cuando se desea tener presente solamente la información de la superficie generada.

Cargar archivo presenta un listado de los archivos correspondientes al tamaño de la malla con que se está trabajando y permite la selección de alguno de ellos. Estos archivos debieron haber sido generados previamente al efectuar la edición de algún polígono de control. La selección se efectúa al posicionar el cursor sobre alguno de ellos y oprimir alguna tecla del 'ratón'. El archivo sólo contiene la información de las coordenadas de los vértices de alguna malla. La información sobre los Beta-splines y los parámetros Beta, se almacena y accesa por separado.

Salvar archivo almacena en disco la información del valor de las coordenadas de cada vértice que forma la malla con que se está trabajando, para poder ser utilizada posteriormente. Esta información se almacena en un archivo cuyo nombre debe ser proporcionado por el usuario, con la restricción que debe tener una extensión correspondiente al número de polígonos que forman la malla por lado; esto es, si se está trabajando con una malla formada de 3 X 3 polígonos de control, un posible nombre para el archivo en que sea guardada la información correspondiente podría ser ARCH.3, dado que la extensión indica el número de polígonos que constituyen la malla por lado.

Deformar controla todo el proceso de edición, en tiempo real, del polígono actual, y se constituye por cinco opciones: SELECCION DE VERTICE; DEFORMACION X,Y; DEFORMACION X,Z; TRANSFORMACIONES; MODELADO.

Selección de vértice coloca sobre cada vértice del polígono una

marca detectable con el cursor, que permite seleccionarlo directamente. En ese momento, se presenta en la pantalla la información sobre su número dentro de la malla y sus coordenadas con objeto de retroalimentación.

Deformación X,Y traslada el vértice seleccionado a lo largo de los ejes X y Y. La deformación del polígono se realiza por medio del dispositivo de selección definido en PHIGS. Durante el proceso de deformación, las líneas que unen al vértice con el resto de la malla se modifican, siguiendo la dirección correspondiente a la deformación del vértice, mientras que la información de su posición se muestra en formato de punto flotante en la pantalla.

Deformación X,Z realiza la función similar al caso anterior intercambiando Y por Z.

Mediante Deformar, se tiene acceso a las facilidades que proporciona la opción del grupo de TRANSFORMACIONES que también pueden ser accedidos desde el menú principal. Además, existe la posibilidad de regresar al conjunto de instrucciones de MODELADO.

La siguiente opción del grupo de MODELADO es Splines, con la cuál se tiene acceso al grupo de comandos que permiten la generación de la superficie que cubrirá el polígono de control y el mapeo de alguno de los dominios recortados sobre la misma. Para esto, se cuenta con las opciones siguientes: AJUSTE B1; AJUSTE B2; SPLINE NUEVO; SPLINE ANTERIOR; MODELADO.

Ajuste β_1 y Ajuste β_2 son el medio de asignación a los parámetros Beta de control. La selección de los valores Beta se logra colocando el cursor sobre el área de la pantalla en que se muestra el valor de los parámetros, y moviendo hacia la izquierda o la derecha el cursor sobre el cuadro en el que aparece el valor de la Beta seleccionada. El valor del parámetro varía dinámicamente en

función de la dirección del cursor.

Spline nuevo activa el cálculo de una nueva superficie Beta-spline empleando el valor de los parámetros Beta. La información correspondiente a estos parámetros, así como la de las coordenadas de cada punto de la superficie generada, se almacenan durante su cálculo en disco, para posteriormente poder ser utilizados. La curva calculada se despliega mediante líneas en la pantalla una vez que ha sido generada.

Spline anterior recupera de disco un Beta-spline que haya sido generado previamente y que coincida con el segmento de malla con que se esté trabajando en ese momento. Si dicho Beta-spline no existe, el comando es ignorado (cuando se genera un Beta-spline nuevo, el sistema lo salva a disco y le asigna un nombre formado con las características propias del segmento de malla con que se genera).

La última de las opciones de Splines es Modelado, que permite regresar a esta opción sin tener que recorrer toda la trayectoria correspondiente del árbol.

Sólido dentro de Modelado, activa el proceso de realismo sobre la superficie, empleando el vector de luz definido por la posición del observador y la normal definida por los segmentos topológicamente rectangulares de la superficie.

El último comando del grupo de Modelado es Menú principal, con el cual se permite el acceso a la raíz del sistema.

Superficie de rotación es el siguiente comando de Menú Principal, el cual, al momento de su selección, coloca a valores preestablecidos algunas variables del sistema, dejando la matriz de transformación principal como identidad y la ventana y puerto

con sus dimensiones originales. En seguida, el sistema espera que el usuario delimite un perfil bidimensional con el cursor, para que una vez proporcionado, se genere la superficie de revolución correspondiente, la cual se presenta por medio de una figura de alambre formada por círculos con centro sobre el eje Y y curvas radiales a dicho eje.

Sólido realiza la misma acción indicada en párrafos anteriores.

Dentro MENU PRINCIPAL, se encuentra Transformaciones con la cual se tiene acceso a lo siguiente: ROTACION; TRANSLACION; ZOOM; RESET.

Rotaciones permite la rotación del modelo, en tiempo real, sobre alguno de los ejes coordenados del modelo, permitiendo observar la posición de éste tomando como referencia la dirección de los ejes que aparecen en la parte inferior derecha de la pantalla (fig 6.2). Esta opción se subdivide a su vez en: ROTACION EN X; ROTACION EN Y; ROTACION EN Z; TRANSFORMACIONES; MENU ANTERIOR.

Translación permite efectuar el movimiento del modelo sobre alguno de los ejes coordenados.

Zoom permite la transformación ventana-puerto sobre detalles del modelo bajo un puerto de cobertura máxima.

Reset modifica la matriz de transformación global colocándola como identidad, así como la ventana y el puerto en sus parámetros iniciales.

Manejo de plotter, dentro de MENU PRINCIPAL, da de alta una estación de trabajo definida como plotter, enviando la imagen del modelo hacia el dispositivo de impresión. Finalmente desactiva el dispositivo de impresión y libera sus recursos.

Si estas condiciones no se cumplen, se requiere más análisis para determinar el valor de $K(u)$.

Medidas Geométricas Fundamentales

El grado de continuidad de una curva en ambientes CAD/CAM/CAE se refiere al mayor nivel de diferenciación en el cual es continua. Formalmente, si una función $f \in C^n[a, b]$, entonces f^i , $i=0, 1, \dots, n$ existen y son continuas sobre $[a, b]$.

Continuidad de Vector Tangente Unitario y Vector Curvatura

Pueden encontrarse casos donde la primera y segunda derivadas paramétricas de una curva $Q(u)$ proporcionen información distinta a los vectores $T(u)$ y $K(u)$, por lo cual no es lo mismo hablar de continuidades C^n referidas a las derivadas, que de las continuidades G^n referidas a $T(u)$ y $K(u)$.

Los siguientes ejemplos ilustran estas situaciones :

a) Dados dos segmentos de línea parametrizados :

$$Q_1(u) = \{12u, 9u\},$$

$$Q_2(u) = \{4(u+3), 3(u+3)\},$$

su primera derivada esta dada por :

$$Q_1'(u) = \{12, 9\},$$

$$Q_2'(u) = \{4, 3\}.$$

Así, los dos segmentos, aunque son continuos en $T(u)$, tienen una discontinuidad (su primera derivada es diferente) en la unión.

b) Dados los segmentos de línea :

$$Q_1(u) = \{a(2u-u^2), b(2u-u^2)\},$$

$$Q_2(u) = \{a+(c-a)u^2, b(1-u^2)\},$$

su primera derivada valuada en la unión de los segmentos está dada por :

$$Q_1'(1) = \{0, 0\}.$$

$$Q_2^1(0)=[0, 0].$$

Así, estos segmentos se unen con una primera derivada paramétrica continua siendo que existe una discontinuidad de $T(u)$ en la unión.

c) Dados dos arcos de círculo :

$$Q_1(u)=[a \operatorname{sen}((\pi/2)u^2, \quad a \cos((\pi/2)u^2)],$$

$$Q_2(u)=[a \cos((\pi/2)u^2, \quad -a \operatorname{sen}((\pi/2)u^2)],$$

su segunda derivada paramétrica valuada en la unión está dada por

$$Q_1^2(1)=[-a\pi^2, \quad -a\pi],$$

$$Q_2^2(0)=[0, \quad -a\pi],$$

la cual es claramente discontinua a pesar de que la curvatura es la misma en la unión, esto es, $K(u)$ es el mismo en la unión.

d) Dados dos segmentos de círculo :

$$Q_1(u)=[a \cos((\pi/2)(1-u)^3), \quad a \operatorname{sen}((\pi/2)(1-u)^3)],$$

$$Q_2(u)=[a+b-b \cos((\pi/2)u^3), \quad -b \operatorname{sen}((\pi/2)u^3)],$$

su segunda derivada paramétrica valuada en la unión está dada por

$$Q_1^2(1)=[0, \quad 0],$$

$$Q_2^2(0)=[0, \quad 0].$$

Así, mientras que la segunda derivada paramétrica es continua, el vector curvatura es discontinuo.

Conceptos de Topología

Si X es un conjunto no vacío y F una colección de subconjuntos de X incluyendo el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X mismo, entonces la colección F se denomina una Topología sobre X si satisface las siguientes condiciones:

- La unión de cualquier número de subconjuntos de X que están en F también está en F .

Referencias

- [1] Shigley, J. E., *Mechanical Engineering Design*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.
- [2] Mantyla, M., *An Introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press, 1988, USA.
- [3] Kalay, Y. E., *Modelling polyhedral solids bounded by multi-curved parametric surfaces*, CAD Vol. 15 No. 3, May. 1983.
- [4] Requicha, A. A. G., *Representation for rigid solids: Theory, methods, and systems*, Computing Surveys, Vol. 12, No.4, Dec. 1980.
- [5] Alvarez Medina, G. M., *Modelación Geométrica: Técnicas y Tendencias*, Congreso Nacional sobre Informática: enseñanza, investigación y computación, Memoria II pp 312-321, Monterrey N.L., México, Oct. 1988.
- [6] Rogers, D. F., and Adams, J. A., *Mathematical elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill Book Co, 1976, USA.
- [7] Gregory, J. A., *The Mathematics of surfaces*, Clarendon Press, 1986, Oxford. Art. *Parametric curve and surfaces as used in Computer-Aided Design*, Pratt, M. J., pp 19-46.
- [8] Miller, J. R., *Sculptured Surfaces in solid models: Issues and alternative approaches*, IEEE CG&A, Dec. 1986.
- [9] Weiler, K., *Edge-Based data structures for solid modeling in curved-surface environments*, IEEE CG&A pp 21-40, Jan. 1985.
- [10] Baer, A., & Eastman, C., & Henrion, M., *Geometric modelling: a survey*, CAD, Vol. 11, No. 5, Sept. 1979.
- [11] Casale, M. S., *Solid Modeling with freeform surfaces using trimmed surface patches*, IEEE CG&A, Jan. 1987, pp 33-42.
- [12] Casale, M. S. & Straton, E. L., *An Overview of Analitic Solid Modeling*, IEEE CG&A, Feb. 1985, pp 45-56.
- [13] Barnhill, R. E., & Riesenfeld, R. F., *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 1974, Utha. Art. *Computational Geopmetry-Achivements and Problems*, Forrest, A. R.
- [14] Tiller, W., *Rational B-splines for curve and surface representation*, CG&A, Sep. 1983 pp 61-69.

- [15] Faux, I. D., & Pratt, M. J., *Computational Geometry for Design and manufacturing*, Ellis Horwood Limited, 1979. U.K.
- [16] I-DEAS Solid Modeler, Reference Manual, SDRC, 1988, USA.
- [17] Forrest, A. R., *On Coons and other methods for the representation of curved surfaces*, Computer Graphics and Image Processing, 1972 Vol I No. 4, 341-359.
- [18] Foley, J. D., and Van Dam A., *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*, Addison-Wesley, 1983.
- [19] Requicha, A. A. G., & Voelcker, H. B., *Boolean Operations in solid modeling: Boundary evaluation and merging algorithms*, Proceedings of the IEEE, Vol. 73 No. 1, pp 30-44, Jan. 1985.
- [20] Newman, W. M., & Sproull, R. F., *Principles of Interactive Computer Graphics (second edition)*, McGraw-Hill, Inc., 1981.
- [21] Wilson, P. R., *Euler Formulas and Geometric Modeling*, IEEE CG&A, Ago. 1985, pp 24-36.
- [22] Meagher, D., *Geometric Modeling using octree encoding*, CG & Image Processing, 19:129-147, 1982.
- [23] Gargantini, I., *Linear octrees for fast processing of 3D objects*, Computer Graphics and Image Processing, 20:365-374, 1982.
- [24] Samet, H., & Tamminen, M., *Computing geometric properties of image represented by linear quadrees*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 7(2):229-240, 1985.
- [25] Samet, H., & Tamminen, M., *Bintrees, CSG trees and time*, Computer Graphics, 19(3):121-130, 1985, Proc. SIGGRAPH, 1985.
- [26] Tilove, R. B., *Set Membership Classification: a unified approach to Geometric Intersection Problem*, IEEE Transaction on Computers C-29(10); pp 847-883, 1980.
- [27] CADAM Reference Manual, CADAM Inc. 1988-1989, USA.
- [28] Barnhill, R. E., & Riesenfeld, R. F., *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 1974, Utha.
- [29] Barsky, B. A., *Exponential and Polinomial Methods for Applying Tension to an Interpolating spline curve*, Computer Vision, Graphics and Image Processing, Vol. 27, No. 1, Jul. 1984 pp 1-18.
- [30] Barsky, B. A., *A Description and Evaluation of various 3D models*, IEEE CG&A, Jan. 1984, pp 38-52.

- [31] Gordon, W. J., & Riesenfeld, R. F., *B-splines curves and surfaces*, Proceedings of a Conference Held at the University of Utah, Salt Lake City, Utah. Mar. 18-21, 1974 pp 95-126.
- [32] Barsky, B. A., *Local Control of Bias and Tension in Beta-splines*, ACM Transactions on Graphics, Apr. 1983 pp 193-218.
- [33] Barsky, B. A., *Computer Graphics and Geometric Modeling using Beta-splines*, Springer-Verlag, 1988, Germany.
- [34] REDUCE, User Manual, Notas en IIMAS, Cd. Universitaria, México.
- [35] Wilson, R. J., *Introducción a la Teoría de Grafos*, Alianza Editorial, España, 1983.
- [36] Rogers, D. F., *Procedural elements for computer graphics*, International Student Editions, 1985, Singapore.
- [37] Kunii, T. L., & Wyvill, G., *A simple but Systematic CSG System*, Department of information science, Faculty of Science, University of Tokyo, Mar. 1985.
- [38] Barsky, B. A., & Greenberg, D. P., *Interactive surface representation system using a B-spline formulation with interpolation capability*, CAD Vol. 14 No. 4 Jul. 1982.
- [39] Farouki, R. T., *Trimmed-surface algorithms for the evaluation and interrogation of solid boundary representation*, IBM Research Development, Vol. 31, No. 3, May. 1987.
- [40] Miller, J. M., *Analysis of Quadric-surface-Based solid models*, IEEE CG&A, Jan. 1988.
- [41] Lastra, G. L., & Santana, S. J., & Angeles, F. M., *The four-wings-edge for solid boolean operations with trimmed surface patches*, Application of computers to engineering design, manufacturing and management, North-Holland, Netherlands, 1988.
- [42] Flegg, G., H., *From Geometry to Topology*, The English Universities Press Ltd, 1974, U.K.
- [43] *grAPHIGS Programmer's Reference*, IBM, 1986.
- [44] Groover, M. P., and Zimmers, E. W., *CAD/CAM, Computer-Aided Design and Manufacturing*, Prentice Hall, 1984, USA.
- [45] Cox, M. G., *The Numerical Evaluation of B-splines*, Journal Inst. Maths. Applics., 15, 95-108.
- [46] Schweikert, Daniel. G., *An Interpolation Curve Using Spline in Tension*, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 45, pag. 312-317.

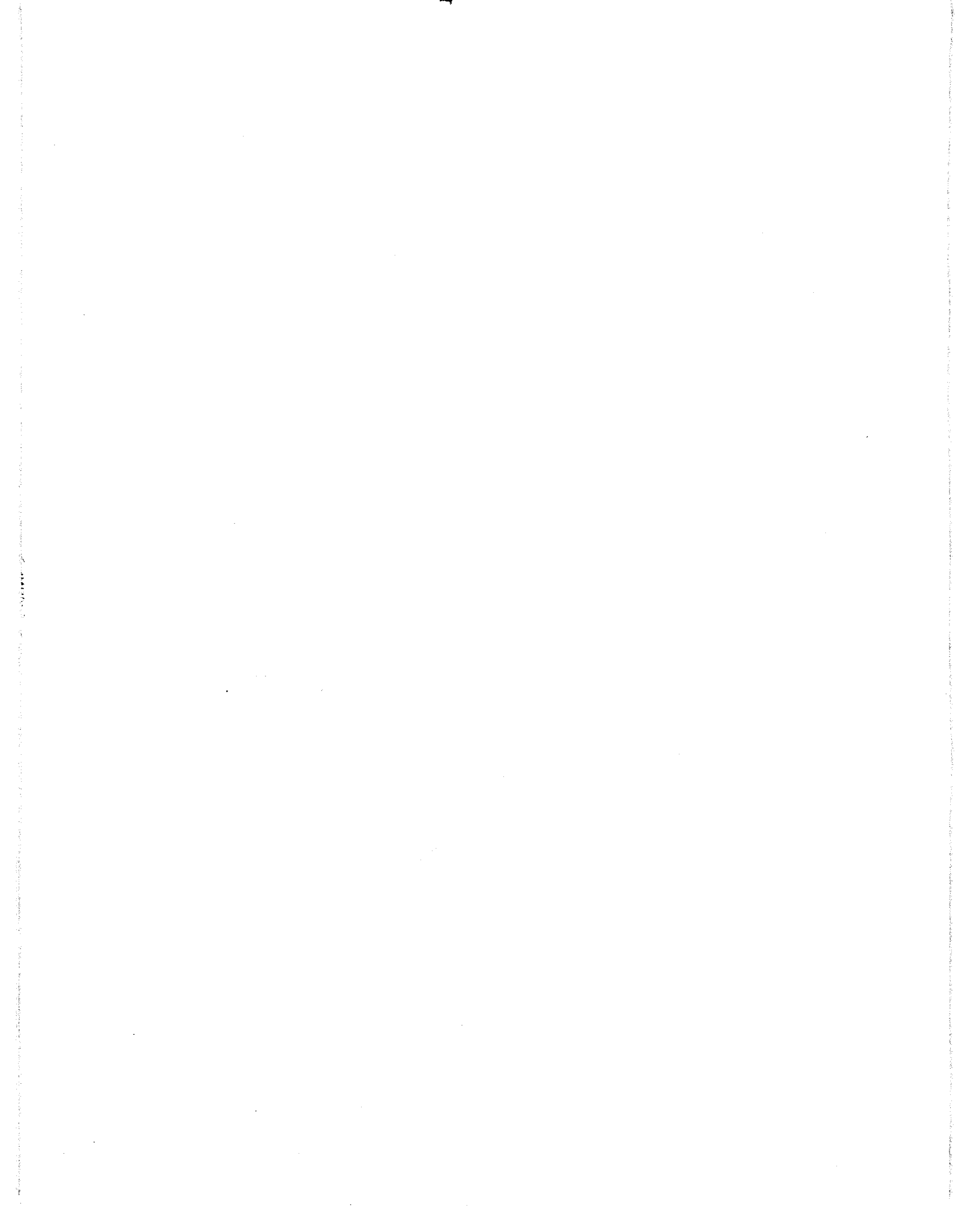
[47] Nielson, G. M., *Some Piecewise Polynomial Alternatives to Splines Under Tension*, Computer Aided geometric Design, edited by Barnhill, R. E., and Riesenfeld, R. F., Academic Press, New York, USA, 1974, pp 209-235.

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EN AGOSTO DE 1990.

**EN LOS TALLERES DE IMPRESORES PROFESIONALES,
LORENZO BOTURINI 530 COL. DEL PARQUE
MEXICO, D.F. 15960 TEL. 552-09-07**

**BAJO SUPERVISION EN LA SECCION EDITORIAL DE LA
LIC. ELSA MARTINEZ BREMONT.**

EL TIRAJE DE ESTA EDICION FUE DE 100 EJEMPLARES



F-DEPFI/D- 87/1990/Ej.3



720893

F-DEPFI
D-84
1990
83

G(2)

00000