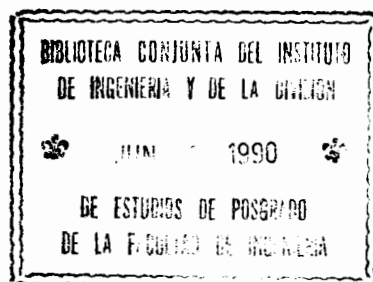


METODOS MATEMATICOS

(Parte 1)

Dr. Felipe I. Arreguín C.



D-84

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

1960

1960

METODOS MATEMATICOS

(PARTE I)

FELIPE I. ARREGUIN CORTES.

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA.
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.**



DEPFI

T
D80FJ
D-84
1990
E35

PROLOGO.

En los cursos de Mecánica de Fluidos, Hidráulica General, Fenómenos Transitorios, Hidráulica Marítima y otros de los posgrados de Hidráulica y Aprovechamientos Hidráulicos, los alumnos requieren utilizar como herramienta conocimientos firmes de análisis vectorial, desafortunadamente la mayoría de ellos estudiaron estos temas muchos años antes de iniciar los estudios de posgrado y no los han utilizado después de ello, entonces la comprensión cabal de los temas tratados en los cursos de maestría es muy difícil y a veces casi imposible.

Esta es la razón por la que se hizo necesario elaborar algún material escrito que permitiera a los alumnos actualizarse en el campo de los vectores de manera rápida y fácil, tomando en cuenta que estos temas no son nuevos para ellos, éste material son los presentes apuntes, que no tienen mayor pretensión que la de auxiliar a los alumnos en el repaso de los principales aspectos del análisis vectorial que se utilizarán en las materias antes mencionadas.

Los apuntes están elaborados de tal manera, que es el propio alumno quien decide que aspectos debe repasar, pues se desarrollan temas de la Mecánica de Fluidos, en los que frecuentemente se cuestiona al alumno acerca de las dudas que pudiera tener sobre análisis vectorial, y que lo podrían limitar en la comprensión de los temas tratados, entonces si es necesario se le refiere a las secciones de un anexo en donde puede aclarar sus dudas y regresar a estudiar el tema de la Mecánica de Fluidos que se está desarrollando.

Inicialmente se obtienen las Ecuaciones de Navier-Stokes, básicas en la mayoría de los cursos del posgrado en Hidráulica y de algunos de Aprovechamientos Hidráulicos, así como de otras áreas por ejemplo la de Ingeniería Petrolera o la de Mecánica de Suelos. A partir de estas ecuaciones se deducen las de Lagrange, que

permiten el análisis completo del campo de las aceleraciones, las de Stokes, útiles para el estudio de flujos laminares en los que la aceleración se considera nula, la ecuación de Euler que se emplea cuando en un flujo los efectos importantes son los inerciales y se puede despreciar a la viscosidad; se obtienen también las ecuaciones de la vorticidad y de los torbellinos, para llegar a las tan conocidas ecuaciones de Bernoulli, de la hidrostática y las de Torricelli que permiten calcular la descarga de agua a través de un orificio hecho en un recipiente. Los temas de análisis vectorial necesarios para comprender los conceptos antes mencionados son: álgebra vectorial, funciones vectoriales de una variable y diferenciación vectorial.

El segundo tema tratado en el principio de la conservación de la masa, a partir del cual se obtienen ecuaciones de tipo extensivo e intensivo para el análisis de flujos, se deduce la ecuación de continuidad, se repasan los flujos vorticosos y finalmente se establece como calcular una función conocido su Laplaciano en un volumen de control y sus valores de frontera, estos temas dan pie para que el alumno repase la integración vectorial, incluidos los teoremas integrales.

LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.

El hidromecánico francés Louis M. H. Navier (1785 - 1836) utilizó la ecuación de Leonard Euler que idealiza un flujo, para aplicarla a fluidos reales, tomando en cuenta la viscosidad, y lo consiguió en 1812 utilizando el modelo newtoniano de moléculas de resorte. Empleando otros modelos, los investigadores franceses A. L. Cauchy (1789 - 1857), Simeón Poisson (1781 - 1840) en 1821, y A. J. C. Barré de Saint-Venant (1797 - 1886) en 1843, así como el irlandés George G. Stokes (1819 - 1903) en 1845, obtuvieron ecuaciones similares a las de Navier, de hecho puede decirse que las conclusiones de Navier fueron perfeccionadas por Stokes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, de segundo orden, para el cálculo del movimiento en medios continuos de los fluidos viscosos newtonianos.

Para hacer su deducción se utilizará la 2ª ley de Newton. Considérese el volumen de control mostrado en la fig. 1, y supóngase que sobre éste actúan fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo. A continuación se establecerán las primeras.

En la figura 1 se observa un elemento cúbico de aristas Δx , Δy y Δz , sobre el que actúan una serie de fuerzas externas. Estas fuerzas producen esfuerzos sobre cada una de las seis caras. Así, el esfuerzo sobre la cara perpendicular al eje x en el punto 0 puede expresarse en términos de un esfuerzo normal σ_x y dos esfuerzos tangenciales ortogonales τ_{xy} y τ_{xz} :

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad (1)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} \quad (3)$$

donde ΔF_x , ΔF_y y ΔF_z son las componentes del vector $\Delta \vec{F}$ y ΔA_x un elemento diferencial de área sobre la cara A_x en la cual actúa la fuerza. La convención usada para los esfuerzos tangenciales es que el primer subíndice indica con respecto a qué eje es perpendicular la cara y el segundo subíndice la dirección en la cual actúa el esfuerzo.

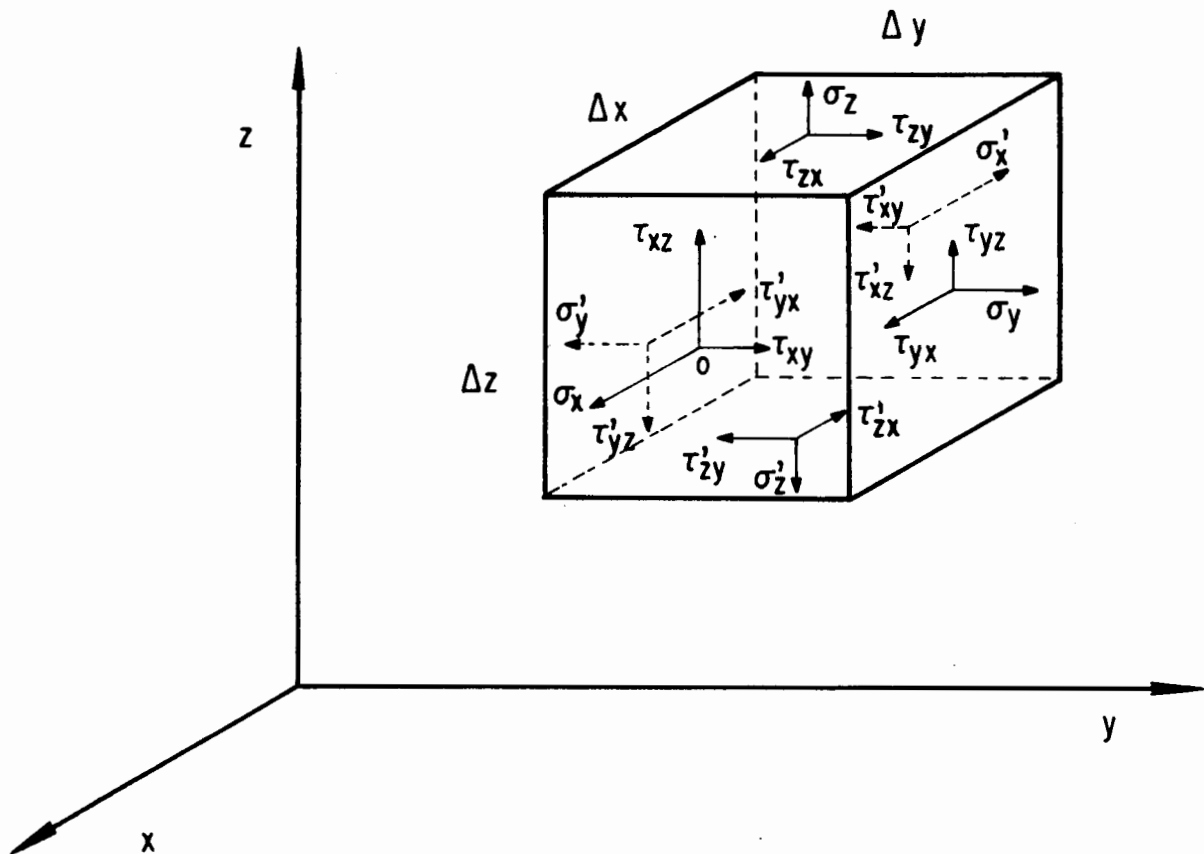


Fig 1 Volumen de control sujeto a un estado de esfuerzos

SI TIENE DUDAS RESPECTO A LAS COMPONENTES DEL VECTOR $\Delta \vec{F}$,
CONSULTE LA PAGINA A.1.

Además, en la otra cara, perpendicular al eje de las x (ver fig 1), los esfuerzos valdrán:

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x \quad (4)$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \Delta x \quad (5)$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \Delta x \quad (6)$$

Se puede proceder de manera similar con las caras perpendiculares a los ejes y y z :

$$\sigma_y = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_y} \quad (7)$$

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_y} \quad (9)$$

$$\sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \Delta y \quad (10)$$

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta y \quad (11)$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \Delta y \quad (12)$$

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_z} \quad (13)$$

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_z} \quad (14)$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_z} \quad (15)$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Delta z \quad (16)$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Delta z \quad (17)$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \Delta z \quad (18)$$

Se puede definir un esfuerzo normal promedio $\bar{\sigma}$ de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (19)$$

La relación esfuerzo-deformación en la dirección x en un sólido elástico se expresa mediante la relación de Hooke:

$$\sigma_x - \bar{\sigma} = 2 (G) (\epsilon_x - \frac{e}{3}) \quad (20)$$

donde

G es el módulo de elasticidad lineal o módulo de Young

ϵ_x es la componente en la dirección x de la deformación normal ϵ

e es la dilatación volumétrica

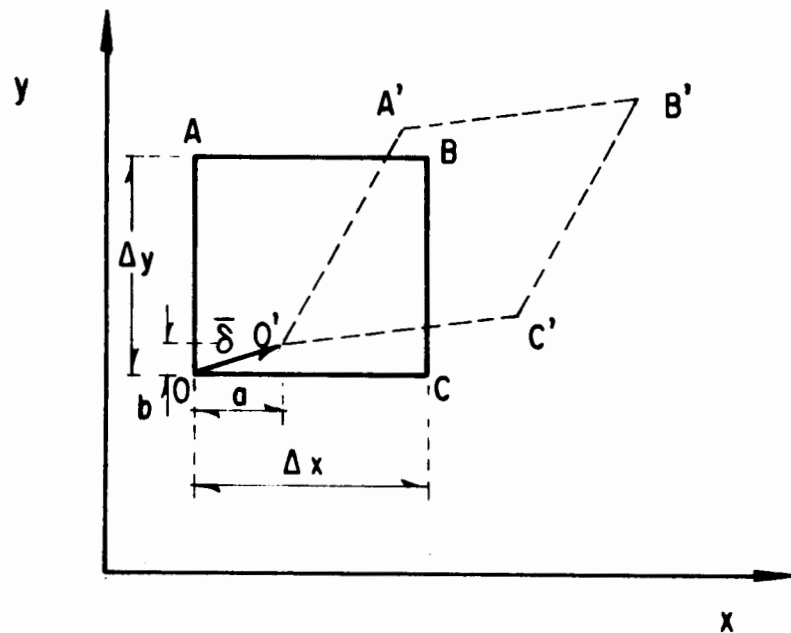


Fig 2. Deformación de un elemento diferencial $\Delta x \Delta y$.

La deformación normal se define como el cambio de longitud de un lado de un elemento sujeto a un estado de fuerzas, dividido entre la longitud original, ver fig 2. Así, las componentes de la deformación normal serán:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O'C' - OC}{OC} = \frac{\partial a}{\partial x} \quad (21)$$

$$\epsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{O'A' - OA}{OA} = \frac{\partial b}{\partial y} \quad (22)$$

Para el caso de tres dimensiones la otra componente será:

$$e_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{O'C' - OC}{OC} = \frac{\partial c}{\partial z} \quad (23)$$

El desplazamiento del punto 0 puede expresarse entonces por medio del vector desplazamiento $\bar{\delta}$, definido así:

$$\bar{\delta} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k} \quad (24)$$

SI TIENE DUDAS SOBRE ESTE NUEVO VECTOR $\bar{\delta}$, PASE A LA PAG. A.4.

La dilatación volumétrica es el cambio de volumen del elemento deformado, dividido entre el volumen original:

$$e = \frac{d(\Delta V)}{\Delta V} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \quad (25)$$

Que puede expresarse también de la siguiente manera:

$$e = \nabla \cdot \bar{\delta} \quad (26)$$

SI TIENE DUDAS ACERCA DEL TERMINO $\nabla \cdot \bar{\delta}$ PASE A LA PAGINA A.14.

El módulo de elasticidad tangencial G, puede sustituirse por una cantidad que exprese sus dimensiones en la ecuación 20, de la siguiente manera:

$$\sigma_x - \bar{\sigma} = 2 \left[\frac{F}{L^2} \right] \left(\epsilon_x - \frac{e}{3} \right) \quad (27)$$

donde

F es una fuerza

L es una longitud

En el caso de los fluidos, en lugar de la relación esfuerzos-deformación interesa la de esfuerzos-rapidez de deformación; así, la ecuación 27 se puede modificar como:

$$\sigma_x - \bar{\sigma} = 2 \left[\frac{Ft}{L^2} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_x - \frac{e}{3} \right) \quad (28)$$

donde t es el tiempo, su inclusión en la ecuación obedece a que la ecuación 28 debe ser dimensionalmente homogénea.

Nótese que la constante Ft/L^2 , tiene las dimensiones de la viscosidad dinámica μ , y ésta se puede incluir en la ecuación:

$$\sigma_x - \bar{\sigma} = 2\mu \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial e}{\partial t} \quad (29)$$

El término $\partial \epsilon_x / \partial t$ es la rapidez de variación de la componente de la deformación normal en la dirección x con respecto al tiempo, y entonces se tiene que:

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial a}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (30)$$

donde

u es la componente de la velocidad en la dirección x

$\frac{\partial e}{\partial t}$ es la rapidez de variación de la dilatación volumétrica del fluido con respecto al tiempo, de acuerdo a la ecuación 26 puede escribirse entonces:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} = \nabla \cdot \bar{V} \quad (31)$$

SI NECESITA RECORDAR COMO SE DERIVAN LOS VECTORES PASE A LA PAGINA A.31.

Un fluido es incompresible cuando no existe variación de la dilatación volumétrica con respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (32)$$

Sustituyendo 30 y 31 en la ecuación 29 se obtiene:

$$\sigma_x = \bar{\sigma} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \bar{V}) \quad (33)$$

en las otras dos direcciones se tendrá:

$$\sigma_y = \bar{\sigma} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \bar{V}) \quad (34)$$

$$\sigma_z = \bar{\sigma} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \bar{V}) \quad (35)$$

donde v y w son las componentes de la velocidad en las direcciones y y z respectivamente.

En forma análoga se pueden obtener los esfuerzos tangenciales para los sólidos y los líquidos:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = G \left[\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \right] \quad (36)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = G \left[\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} \right] \quad (37)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \left[\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial x} \right] \quad (38)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (39)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (40)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (41)$$

En el agua los efectos viscosos dependen únicamente de la viscosidad μ , la cual relaciona los esfuerzos tangenciales con la rapidez de deformación, de tal manera que se puede hacer una analogía con los sólidos elásticos y mediante la ley de Hooke, igualar el esfuerzo normal medio con la presión p como se muestra a continuación:

$$\bar{\sigma} = -p = \frac{1}{3} \left[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right] \quad (42)$$

El signo negativo es convencional. Sustituyendo 42 en 33, 34 y 35 se obtiene:

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \bar{V}) \quad (43)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \bar{V}) \quad (44)$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \bar{V}) \quad (45)$$

Ahora, es posible un planteamiento de las ecuaciones de movimiento en un fluido, para ello, como ya se indicó se utilizará la 2° ley de Newton. Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control, ver fig 1, son de superficie y de cuerpo, las primeras, son las antes discutidas y las fuerzas de cuerpo son las generadas por campos gravitacionales, electromagnéticos o inerciales. Así la fuerza producida por la acción de la gravedad $\bar{g}$ puede expresarse así:

$$\bar{g} = g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k} \quad (46)$$

Aplicando la 2° ley de Newton en la dirección x sobre el volumen de control de la fig 1, se tiene:

$$\Delta F_x = \Delta m a_x = (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) a_x \quad (47)$$

donde

Δm es un elemento diferencial de masa

a_x es la componente de la aceleración en la dirección x

ρ es la densidad del fluido

En forma más específica y utilizando las ecuaciones 1, 4, 8, 11, 14 y 18, ΔF_x se puede definir como:

$$\begin{aligned} \Delta F_x = & (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) g_x - \sigma_x \Delta y \Delta z + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \\ & - \tau_{yx} \Delta x \Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - \\ & - \tau_{zx} \Delta x \Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (48)$$

Sustituyendo 47 en 48 y dividiendo entre el volumen de control, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ se obtiene:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho a_x \quad (49)$$

En las direcciones y y z se tiene:

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho a_y \quad (50)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho a_z \quad (51)$$

En el caso de fluidos newtonianos se acepta la existencia de un solo coeficiente de viscosidad, de esta manera al sustituir las ecuaciones 39, 41 y 43 en la ecuación 49:

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \bar{V}) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \rho a_x \end{aligned} \quad (52)$$

Si además se considera constante a la viscosidad la ecuación 52 puede reescribirse así:

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{V}) \right] + \\ + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \rho a_x \end{aligned} \quad (53)$$

Ordenando:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] +$$

$$+ \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \bar{V}) = \rho a_x \quad (54)$$

en las direcciones y y z se tendrá:

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \bar{V}) = \rho a_y \quad (55)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \bar{V}) = \rho a_z \quad (56)$$

Las ecuaciones 54, 55 y 56 son la forma cartesiana de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos compresibles y viscosidad constante. Para escribir esta ecuación en forma vectorial, es necesario recordar el concepto de aceleración. El vector velocidad es:

$$\bar{V} = ui + vj + wk \quad (57)$$

donde las componentes u, v y w son función del tiempo y el espacio, es decir:

$$u = f(x, y, z, t) \quad (58)$$

$$v = f(x, y, z, t) \quad (59)$$

$$w = f(x, y, z, t) \quad (60)$$

Entonces la aceleración en la dirección x se obtiene con la derivada total de la componente u con respecto al tiempo:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (61)$$

en esta ecuación $\partial u / \partial t$ es la aceleración local y los términos

restantes del segundo miembro son la aceleración convectiva, en la dirección y y z la aceleración vale:

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (62)$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (63)$$

y en notación vectorial:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \quad (64)$$

De las ecuaciones 54, 55 y 56 y utilizando la ecuación 64 se obtiene la forma vectorial de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \bar{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) = \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \quad (65)$$

SI TIENE DUDAS SOBRE LOS OPERADORES VECTORIALES CONSULTE LA PAGINA A.39.

En el caso de los fluidos incompresibles $\nabla \cdot \bar{v} = 0$, además las componentes de la aceleración son:

$$g_x = -g \frac{\partial h}{\partial x} ; \quad g_y = -g \frac{\partial h}{\partial y} ; \quad g_z = -g \frac{\partial h}{\partial z} \quad (66)$$

en forma vectorial:

$$\bar{g} = -g \nabla h \quad (67)$$

donde h es la coordenada vertical en la dirección de z, consecuencia de esta última aseveración es que:

$$g_x = 0 ; \quad g_y = 0 ; \quad g_z = -g \quad (68)$$

Con las consideraciones anteriores la ecuación 65 se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (71)$$

Como puede observarse existen cuatro variables u , v , w , y p , y sólo tres ecuaciones, la cuarta ecuación para resolverlas cuando se definen las condiciones de frontera es la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (72)$$

Ecuación de Lagrange:

La forma vectorial de las ecuaciones 69, 70 y 71 es:

$$\bar{a} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{V} \quad (73)$$

multiplicado por ρ :

$$\rho \bar{a} = \rho \bar{g} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \bar{V} \quad (74)$$

de la ecuación 69, se tiene que:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (75)$$

que también puede desarrollarse así:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] w - \\ &- \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] v = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{V}^2}{\partial x} + (\text{rot } \bar{V} \cdot \mathbf{j}) w - \\ &- (\text{rot } \bar{V} \cdot \mathbf{k}) v \end{aligned} \quad (76)$$

En forma similar pueden obtenerse las ecuaciones para a_y y a_z . Multiplicando a_x por $\mathbf{i}$, a_y por $\mathbf{j}$ y a_z por $\mathbf{k}$, y sumando se obtiene:

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad } \frac{\bar{V}^2}{2} + \text{rot } \bar{V} \times \bar{V} \quad (77)$$

que es la ecuación de Lagrange y cada término significa lo siguiente:

$\bar{a}$ es la aceleración sustancial

$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ es la aceleración local

$\text{grad } \frac{v^2}{2}$ es la aceleración convectiva

$\text{rot } \bar{v} \times \bar{v}$ es la aceleración de Coriolis

La aceleración local toma en cuenta solo el cambio de la velocidad con el tiempo en un punto determinado de observación. La aceleración convectiva, es el efecto del cambio de velocidad a lo largo de una trayectoria, sin tomar en cuenta los cambios de dirección. La aceleración de Coriolis es el efecto de los cambios de dirección, ver fig 3.

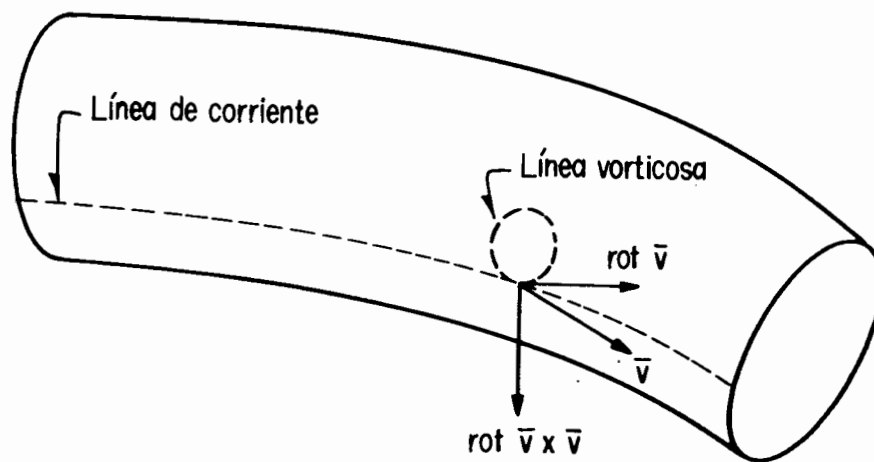


Fig 3. Aceleración de Coriolis en un codo

Ecuación de Stokes:

Esta ecuación es útil para flujos laminares en los que la aceleración se considera nula, de esta manera la ecuación 74, se puede reescribir así:

$$\mu \nabla^2 \bar{V} = \text{grad } p - \rho \bar{g} \quad (78)$$

si se desprecia el efecto de la gravedad se tiene:

$$\mu \nabla^2 \bar{V} = \text{grad } p \quad (79)$$

que es la ecuación fundamental para el análisis de flujos laminares.

Ecuación de Euler:

En este caso los efectos importantes son los inerciales y se desprecia la viscosidad, es decir el término $\mu \nabla^2 \bar{V}$, entonces la ecuación 74 se reduce a:

$$\bar{a} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (80)$$

Ecuaciones de la vorticidad y de los torbellinos:

Otra forma de presentar la ecuación de Euler es:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{rot } \bar{V} \times \bar{V} + \text{grad } E = 0 \quad (81)$$

donde E es la energía específica:

$$E = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \phi \quad (82)$$

y ϕ es una función potencial que cumple que:

$$\bar{f} = \text{grad } \phi \quad (83)$$

donde $\bar{f}$ es el vector de las fuerzas de cuerpo. Así, tomando el rotacional en todos los términos de la ecuación 81 se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \bar{V} + \text{rot} (\text{rot } \bar{V} \times \bar{V}) = 0 \quad (84)$$

que es la ecuación de la vorticidad.

SI TIENE DUDAS SOBRE EL ULTIMO DESARROLLO PASE A LA PAGINA A.39.

El vector torbellino se define:

$$\bar{w} = \text{rot } \bar{V} \quad (85)$$

sustituyendo en la ecuación 84:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \text{rot} (\bar{w} \times \bar{V}) = 0 \quad (86)$$

que es la ecuación de los torbellinos.

Ecuación de Bernoulli:

Si el flujo es permanente la ecuación 81 puede escribirse así:

$$\bar{V} \times \text{rot } \bar{V} = \text{grad } E \quad (87)$$

El lugar geométrico donde la energía E es constante se llama superficie equienergética, ver fig 4.

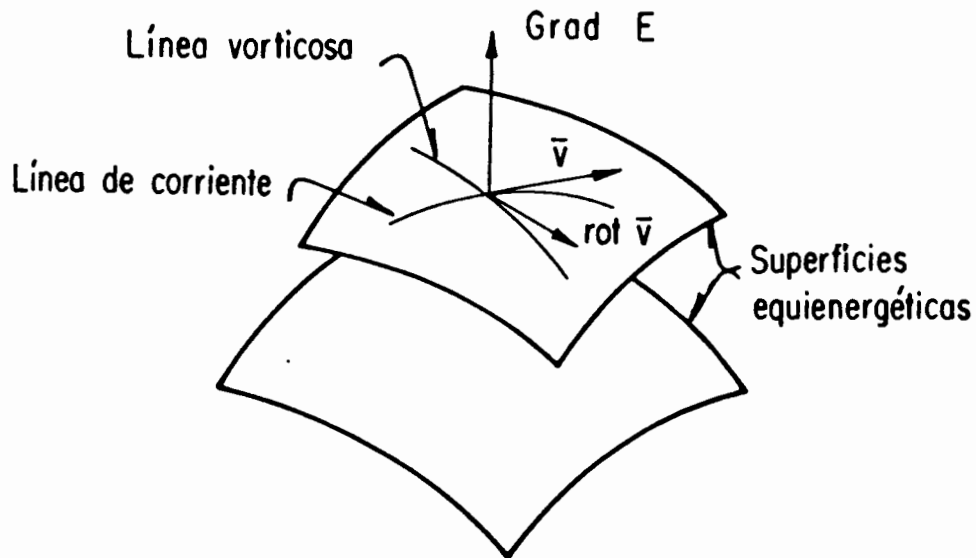


Fig 4. Superficies equienergéticas

El vector $\text{grad } E$ es perpendicular a la superficie equienergética, entonces la ecuación 87 indica que los vectores $\bar{V}$ y $\text{rot } \bar{V}$ son tangentes a dicha superficie, es decir las líneas de corriente y vorticosa pertenecen a la superficie equienergética, ver fig 4, lo cual significa que a lo largo de toda línea de corriente o vorticosa la energía es constante:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \phi = \text{cte} \quad (88)$$

este es el teorema de Bernoulli. Si la única fuerza de cuerpo existente es el peso, la ecuación 88 toma la forma:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{cte} \quad (89)$$

Si no existen pérdidas esta ecuación puede aplicarse entre dos puntos p_1 y p_2 :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (90)$$

Líquidos en reposo:

Si en un recipiente interesa conocer la presión en un punto p_1 , ubicado a una profundidad h , se puede utilizar la ecuación 90, tomando como referencia a la superficie libre del agua, se obtendrá:

$$0 + \frac{p_1}{\gamma} - h = 0 + 0 + 0 \quad (91)$$

y entonces:

$$p_1 = \gamma h \quad (92)$$

que es la ecuación fundamental de la hidrostática.

Descarga de orificios:

Si ahora se considera que el recipiente tiene un orificio en el punto p_1 a una profundidad h , y que se toma como nivel de referencia a la superficie libre del agua donde la presión es

la atmosférica, además si se considera que el recipiente es suficientemente grande como para despreciar la velocidad dentro de él, se obtiene:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma} - h = 0 + \frac{p_{atm}}{\gamma} + 0 \quad (93)$$

despejando y simplificando

$$v = \sqrt{2gh} \quad (94)$$

que es la ecuación teórica buscada, denominanda ecuación de Torricelli.

La ecuación práctica se obtiene aplicando un coeficiente de velocidad C_v y se tendrá:

$$v = C_v \sqrt{2gh}$$

en donde C_v tiene un valor que varía en un rango de 0.97 a 0.99.

PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA MASA:

Según este principio en el interior de un volumen de control, ver fig 5, no hay creación ni destrucción de masa, y por lo tanto cualquier cambio en la cantidad de masa se debe al flujo de la misma a través de la superficie del volumen de control.

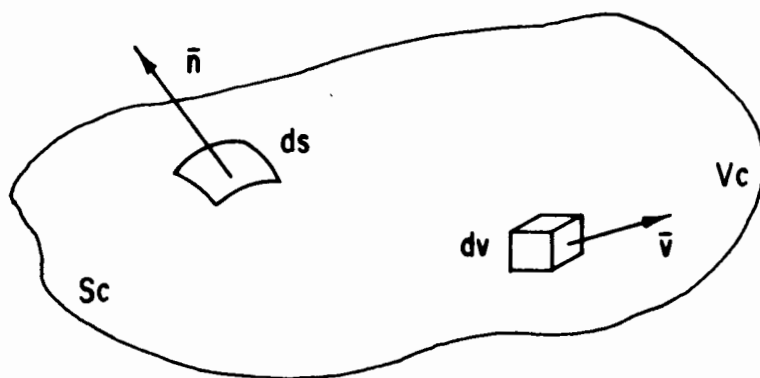


Fig 5. Volumen de control

Así, el incremento de masa sufrido por el elemento de volumen dV , ver fig 5, en la unidad de tiempo es $(\partial \rho / \partial t) dV$, y la masa que pasa por el elemento de superficie dS , en la unidad de tiempo, con una velocidad $\bar{V}$, será $(\rho \bar{V} \cdot \bar{n}) dS$, de acuerdo a la convención establecida en la fig 5, si $\bar{V} \cdot \bar{n}$ es positivo la masa sale y negativo si entra al volumen de control. Entonces la igualdad entre el incremento de masa en el volumen de control y la masa que entró por S_c será:

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint (\rho \bar{V} \cdot \bar{n}) dS \quad (95)$$

SI TIENE DUDAS RESPECTO A LA INTEGRACION VECTORIAL PASE A LA PAG A.45.

Nótese que en la ecuación número 95 existen integrales de volumen y de superficie, conviene expresar la ecuación en términos sólo de volumen o de superficie; aquí se hará lo primero, utilizando el teorema de Gauss.

$$\int_{V_c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{V}) \right] dV = 0 \quad (96)$$

SI TIENE DUDAS RESPECTO A LOS TEOREMAS INTEGRALES, CONSULTE LA PAG. A.55.

La ecuación 96 es de tipo extensivo y puede transformarse en intensiva, dado que la integral se extiende a todo el volumen de control que se eligió en forma arbitraria y no puede valer siempre cero, a menos que la función integrada sí lo valga:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{V}) = 0 \quad (97)$$

De acuerdo a las propiedades de la divergencia, ver ecuación 4 de las fórmulas de aplicación del operador ∇ pag A.38, y utilizando el concepto de derivada total, la ecuación 97 se transforma así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad } \rho \cdot \bar{V} + \rho \text{div } \bar{V} =$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \rho \text{div } \bar{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \bar{V} \quad (98)$$

Sustituyendo 98 en 97:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \bar{V} = 0 \quad (99)$$

La ecuación 97 indica que se ha elegido un volumen de control, en tanto que la ecuación 99 señala que se está siguiendo al fluido en su movimiento.

Si ahora se selecciona como volumen de control a un tubo de flujo, ver fig 6, y se considera al flujo permanente la ecuación 96 se reduce a:

$$\int_{V_c} \text{div} (\rho \bar{V}) dV = 0 \quad (100)$$

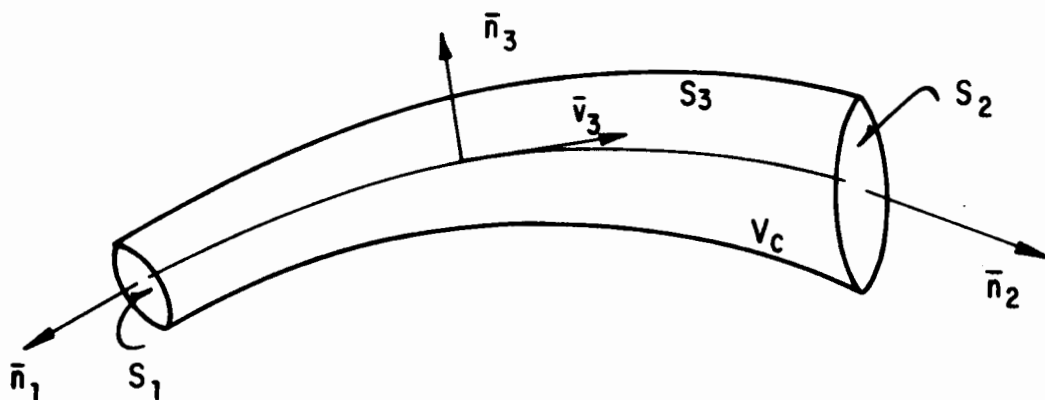


Fig 6. Tubo de flujo

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss, la ecuación 100 se transforma en:

$$\int_{S_1} \rho \bar{V} \cdot \bar{n}_1 dS + \int_{S_2} \rho \bar{V} \cdot \bar{n}_2 dS + \int_{S_3} \rho \bar{V} \cdot \bar{n}_3 dS = 0 \quad (101)$$

El vector $\bar{V}$ está sobre la superficie de flujo, por lo tanto es perpendicular a $\bar{n}_3$, de tal manera que $\bar{V} \cdot \bar{n}_3 = 0$ entonces la ecuación 101 puede escribirse así:

$$\int_{S_1} \rho \bar{V} \cdot \bar{n}_1 dS = - \int_{S_2} \rho \bar{V} \cdot \bar{n}_2 dS \quad (102)$$

Si el vector $\bar{n}_1$ se remplaza por un vector igual pero de sentido contrario $\bar{n}'_1$, la ecuación 102 queda:

$$\int_{S_1} \rho \bar{V} \cdot \bar{n}'_1 dS = \int_{S_2} \rho \bar{V} \cdot \bar{n}_2 dS \quad (103)$$

Notese que $\bar{n}'$ tendrá el sentido del flujo, al igual que

$\bar{n}_2$, esto quiere decir que el producto $\rho \bar{V} \cdot \bar{n}$ será siempre constante esto puede representarse así:

$$Q = \int_S \rho \bar{V} \cdot \bar{n} \, dS \quad (104)$$

donde Q es el gasto de masa que atraviesa una sección S en la unidad de tiempo.

Si ahora se repite el proceso y se sustituye el tubo de flujo por un tubo vorticoso, es decir aquel formado por una superficie vorticiosa que a su vez está integrado por líneas vorticosas, que son aquellas en que el vector $\text{rot } \bar{V}$ es tangente a ellas se obtiene la integral:

$$H = \int_S \text{rot } \bar{V} \cdot \bar{n} \, dS \quad (105)$$

donde H es la intensidad del tubo vorticoso.

Considerando una línea cerrada ver fig 7, sobre el campo de flujo, se puede definir la circulación del vector velocidad sobre la curva cerrada L :

$$\Gamma = \oint \bar{V} \cdot d\bar{r} \quad (106)$$

donde $d\bar{r}$ es un vector diferencial tangente a la curva.

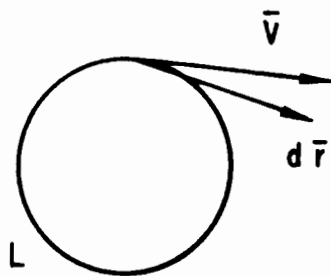


Fig 7. Línea cerrada L en un campo de flujo

De acuerdo al teorema del rotacional de Stokes, ver pag A.58, las ecuaciones 105 y 106 son iguales, es decir:

$$H = \nabla \quad (107)$$

Esto significa que en un tubo vorticoso la intensidad y la circulación son iguales.

Cálculo de una función conocido su laplaciano en el volumen de control y sus valores de frontera:

Si en la ecuación 106 se acepta que ϕ es una función arbitraria y $\psi = 1/r$, se puede obtener una ecuación que permite calcular una función en un punto p cualquiera del volumen V , si se conoce el laplaciano de la función en el interior del volumen y sus valores sobre la frontera S , ver fig 8.

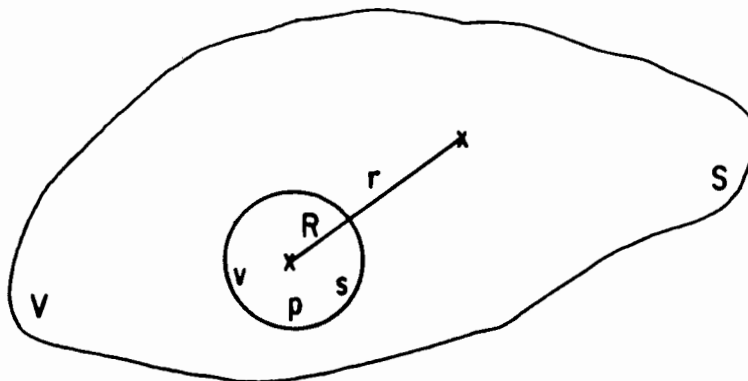


Fig 8. Volumen de control

Sea P un punto fijo y O uno móvil pertenecientes a V . Si P_0 es igual a r , la función $1/r$ tiende a infinito conforme O tiende a P . Si se separa el punto P mediante su inclusión en una esfera de radio R , volumen V y superficie s , ver fig 8, la función $\psi = 1/r$ es regular en el volumen $V - v$.

Por otro lado la función ψ es armónica es decir satisface la ecuación de Laplace: $\nabla^2 1/r = 0$. Si ahora se aplica la segunda identidad de Green, ecuación A.107, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 - \int_{V-v} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, dV &= \int_s \left[\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS + \\
 &+ \int_{\bullet} \left[\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds
 \end{aligned} \tag{108}$$

Nótese que en la fig 8, las direcciones radial y normal coinciden y se denominan por r y n respectivamente, es decir $\partial/\partial n = \partial/\partial r$, además $r = R$ bajo esta consideración el último término de la ecuación 108, se puede reescribir así:

$$\begin{aligned}
 \int_{\bullet} \left[\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds &= - \int_{\bullet} \phi \frac{1}{R^2} ds - \int_{\bullet} \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \\
 &= - \frac{1}{R^2} \int_{\bullet} \left[(\phi - \phi_p) + \phi_p \right] ds - \frac{1}{R} \int_{\bullet} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \\
 &= - \frac{1}{R^2} \int_{\bullet} (\phi - \phi_p) ds - \frac{1}{R^2} \phi_p 4\pi R^2 - \frac{1}{R} \int_{\bullet} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds
 \end{aligned} \tag{109}$$

donde ϕ_p es el valor de ϕ en p .

Sustituyendo 109 en 108 y haciendo el cambio de variable $ds = R^2 d\alpha$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 - \int_{V-v} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, dV &= \int_S \left[\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS - \\
 &- \int_0^{4\pi} (\phi - \phi_p) \, d\alpha - \phi_p \, 4\pi - R \int_0^{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \, d\alpha \quad (110)
 \end{aligned}$$

Si $R \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$ y $\phi \rightarrow \phi_p$ la ecuación 110 en el límite vale:

$$- \int_S \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, dV = \int_S \left[\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS - \phi_p \, 4\pi \quad (111)$$

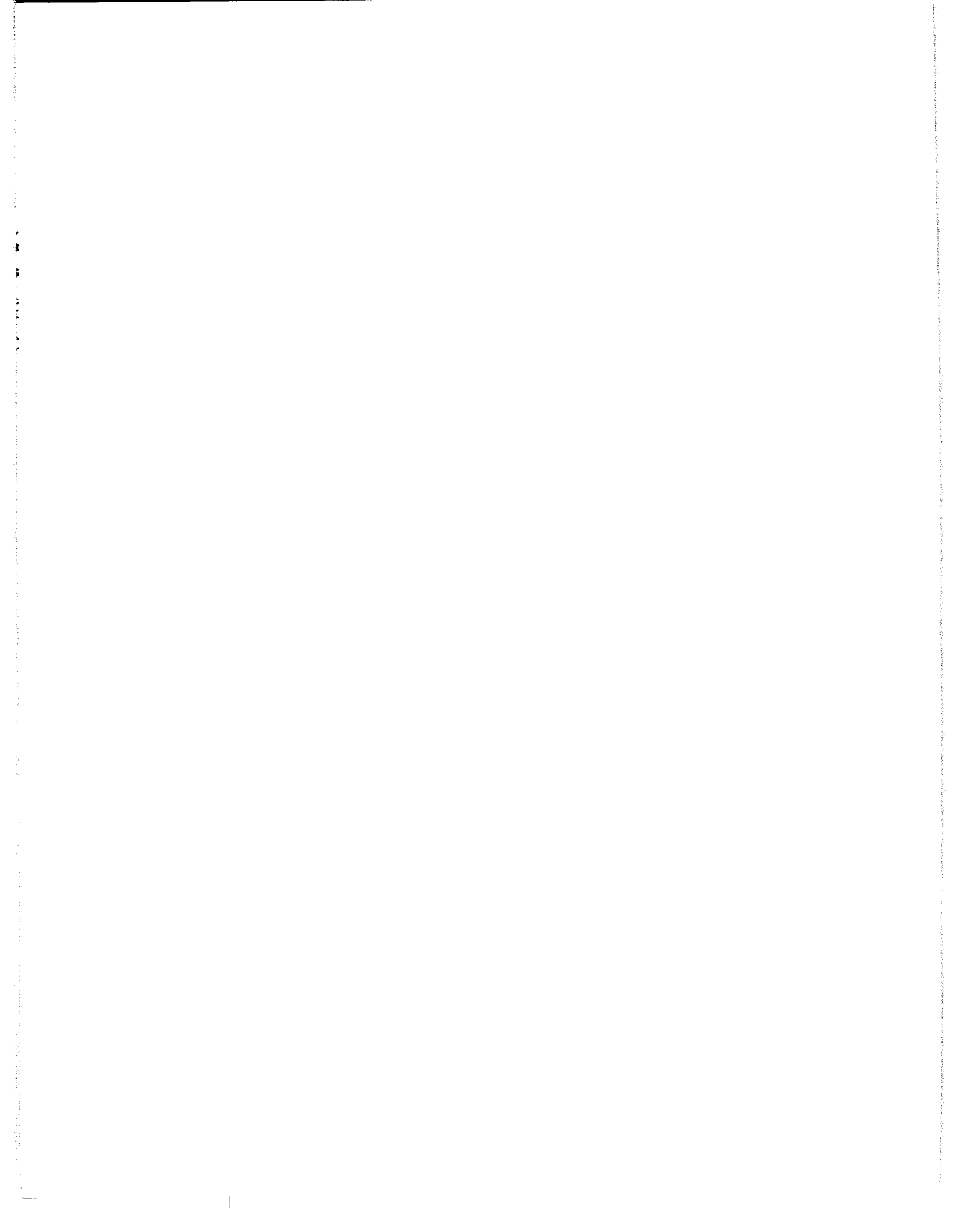
Despejando ϕ_p se obtiene:

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi} \left[\int_S \left(\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS + \int_S \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, dV \right] \quad (112)$$

Esta es una forma de la ecuación de Green que permite calcular el valor de ϕ_p de la función ϕ en un punto p , interior a V , conociendo el laplaciano de $\bar{V}$.

ANEXO I

ANALISIS VECTORIAL



ANALISIS VECTORIAL

Vectores

Un vector se define como un conjunto ordenado de n elementos $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Otra definición es: una cantidad que posee magnitud y dirección. Algunos ejemplos de vectores son la fuerza, la velocidad y la aceleración.

Las cantidades que solo poseen magnitud se llaman escalares, algunos ejemplos de ellos son el volumen, la masa y la temperatura.

En el caso de la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes el área ΔA_x es un escalar y $\Delta \vec{F}$ es un vector cuyas componentes en el espacio de tres dimensiones son ΔF_x , ΔF_y y ΔF_z , entonces el vector puede escribirse así:

$$\Delta \vec{F} = (\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z) \quad (A.1)$$

Además el vector ΔF puede representarse como se muestra en la fig A.1.

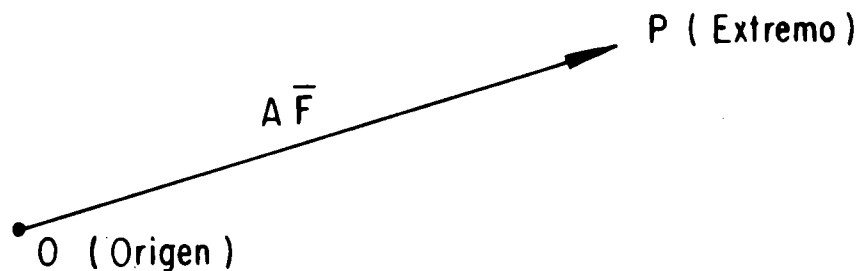


Fig A.1. Representación gráfica de un vector

El módulo, llamado también magnitud o valor absoluto de un vector es $|\Delta \vec{F}| = |\vec{OP}|$, ver fig A.2, y se calcula así:

$$|\Delta \vec{F}| = \sqrt{\Delta F_x^2 + \Delta F_y^2 + \Delta F_z^2} \quad (A.2)$$

A.1

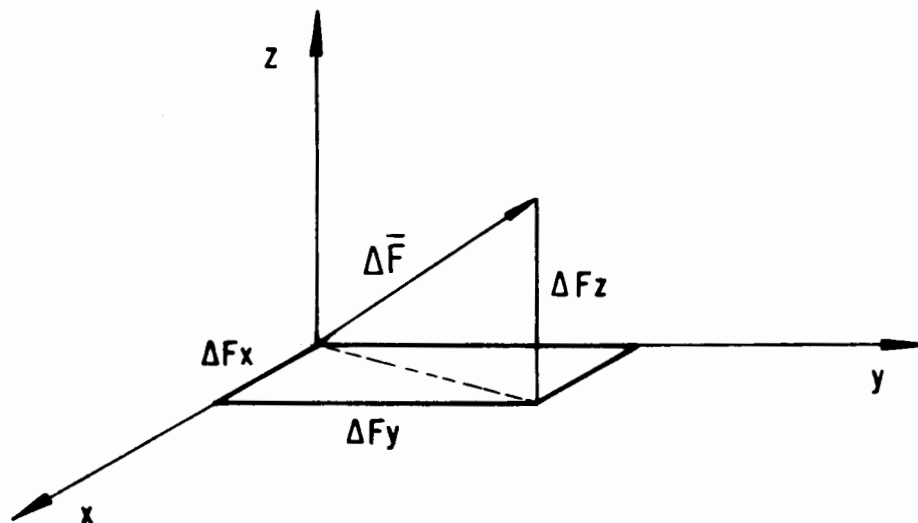


Fig A.2. Representación gráfica del vector $\Delta \vec{F}$,
sus componentes y su módulo

Ejemplo A.1.

Ubicar el vector $\vec{a} = (1, 2, 3)$.

Solución.

El número de vectores con esas componentes puede ser infinito, por ejemplo se pueden formar las siguientes combinaciones:

$$a_1 = 1-0, 2-1, 3-2, \dots$$

$$a_2 = 2-0, 3-1, 4-2, \dots$$

$$a_3 = 3-0, 4-1, 5-2, \dots$$

Estos vectores se presentan en la fig A.3.

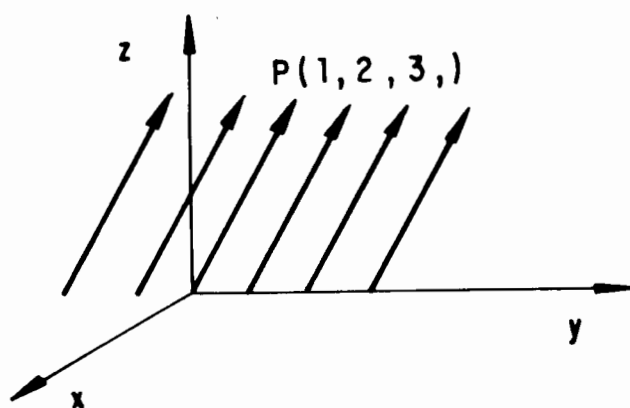


Fig A.3. Representación del vector $\bar{a} = (1, 2, 3)$

El módulo de estos vectores es:

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Ahora conviene presentar algunas definiciones de interés para la mejor comprensión del tema.

a) **Vectores iguales:** son los que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo, ver fig A.4.

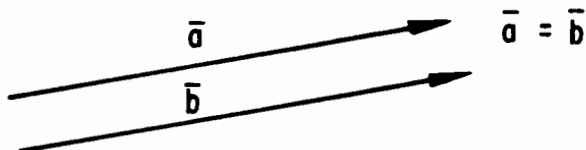
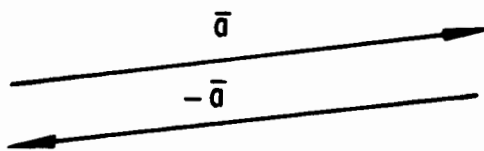


Fig A.4. Vectores iguales

Nota. Algunos autores llaman a los anteriores vectores equipolentes, argumentando que para ser iguales deben tener el mismo origen.

De aquí nace la idea de vector libre que es el que se puede mover paralelamente a sí mismo, y vector ligado, que es aquel que está fijo a un punto de aplicación.

b) **Vectores opuestos:** son los que tienen el mismo módulo y dirección pero diferente sentido, ver fig A.5.



$\vec{a}$ opuesto de $-\vec{a}$
y viceversa

Fig A.5. Vectores opuestos.

c) **Vector unitario:** $|\vec{a}| = 1$

d) **Vector nulo:** $|\vec{a}| = 0$

e) **Vector de posición:** es aquel que va del origen del sistema de referencia a un punto cualquiera.

REGRESE A LA PAGINA 4.

Vectores unitarios.

Los vectores i , j , k , se llaman vectores unitarios trirrectangulares, su módulo vale 1, y su dirección es la de los ejes coordenados, ver fig A.6.

Nota: Los vectores i, j, k , no se denotarán testados $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ para simplificar el texto.

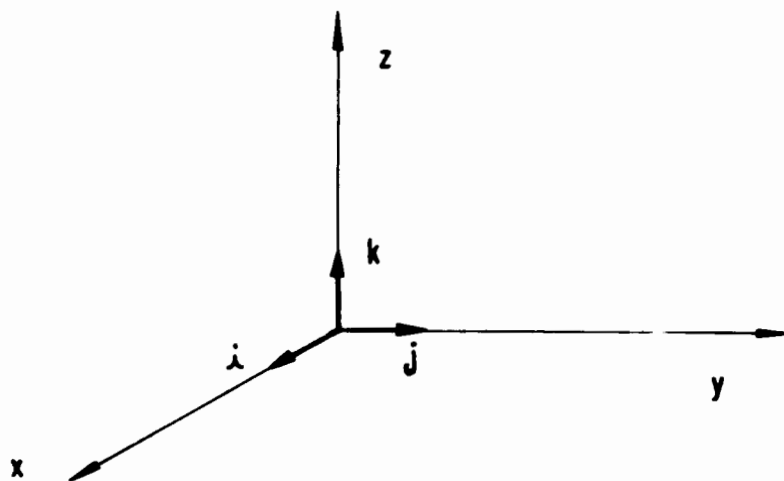


Fig A.6. Vectores unitarios trirrectangulares

Cosenos directores:

Son los cosenos de los ángulos que forma el vector con cada uno de los ejes, ver fig A.7.

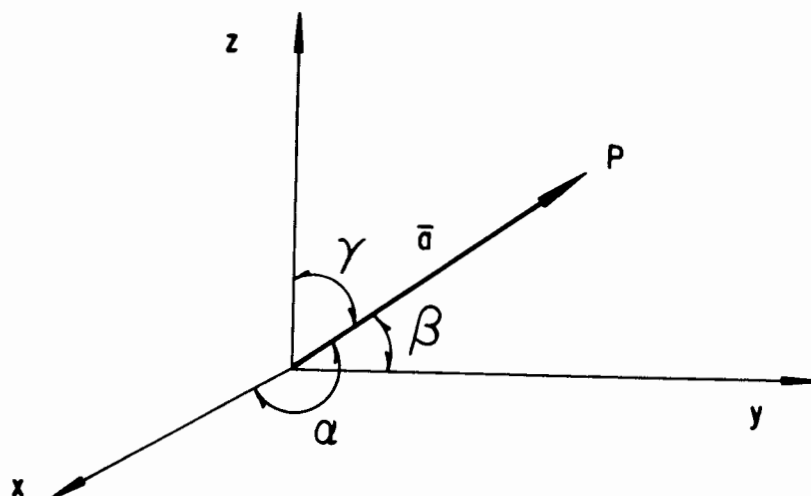


Fig A.7. Cosenos directores

Se cumple además que:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$$

y que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{z^2}{|\vec{a}|^2} = 1 \quad (\text{A.3})$$

El vector $\vec{\delta} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$, también puede expresarse así: $\vec{\delta} = (a, b, c)$, nótese que con la primera notación se está haciendo una suma de vectores y tres productos de un escalar por un vector, a continuación se definen algunas operaciones con vectores.

Suma Vectorial:

La suma de dos vectores puede definirse por la ley del paralelogramo; es decir, si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se trazan con el mismo origen, y se construye un paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$, la suma $\vec{a} + \vec{b}$ estará representada por la diagonal, ver fig A.8.

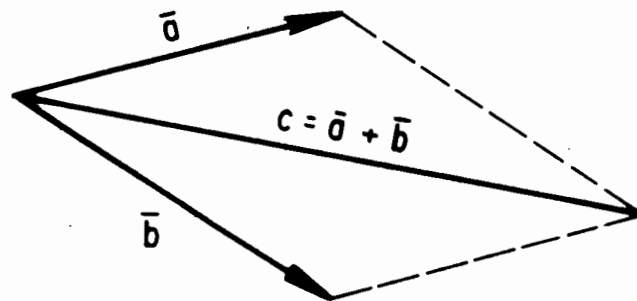


Fig A.8. Suma vectorial

La suma de dos vectores puede realizarse directamente sumando una a una sus componentes:

si

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (\text{A.4})$$

Ejemplo A.2.

Hallar la suma de los vectores:

$$\bar{a} = (1, 2, 3), \quad \bar{b} = (2, 3, 5)$$

Solución.

$$\bar{a} + \bar{b} = (1 + 2, 2 + 3, 3 + 5) = (3, 5, 8)$$

Ejemplo A.3.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B, ver figura A.9.

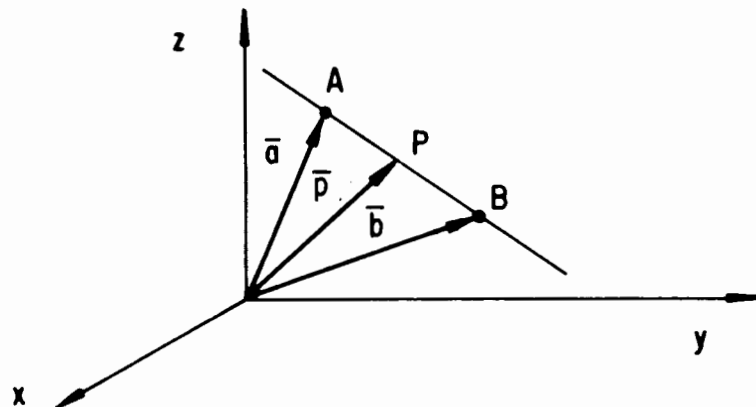


Fig A.9. Recta que pasa por los puntos A y B.

Solución.

De la definición de suma vectorial:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{p} \text{ , despejando } \overrightarrow{AP}:$$

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$$

por otro lado

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} \text{ , despejando } \overrightarrow{AB}:$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

como $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AB}$ son colineales $\overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB}$, sustituyendo:

$$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$$

por lo tanto

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

que es la ecuación pedida.

Diferencia de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

Es la suma del primero y el opuesto del segundo, ver fig A.10.

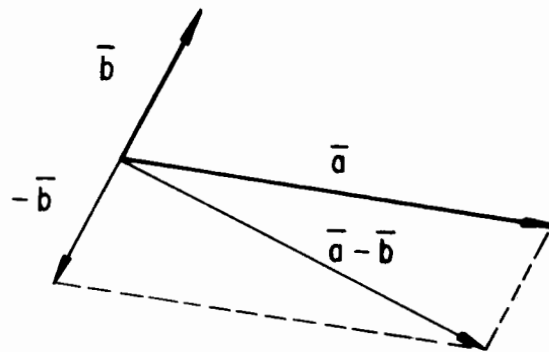


Fig A.10. Diferencia de vectores

En forma directa la diferencia de vectores se define así:

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) \quad (\text{A.5})$$

si

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{y} \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \text{entonces:}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \quad (\text{A.6})$$

Existen tres tipos de productos: el de un escalar por un vector (es el caso de la ecuación 24), el escalar y el vectorial.

Producto de un escalar m por un vector $\bar{a}$:

Es otro vector $m\bar{a}$ de la misma dirección que $\bar{a}$ pero con un módulo m veces el de $\bar{a}$, en forma directa este producto puede efectuarse así:

Sea $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, y m un escalar, el producto será:

$$m\bar{a} = (ma_1, ma_2, ma_3) \quad (\text{A.7})$$

Se pueden presentar los casos mostrados en la figura A.11.

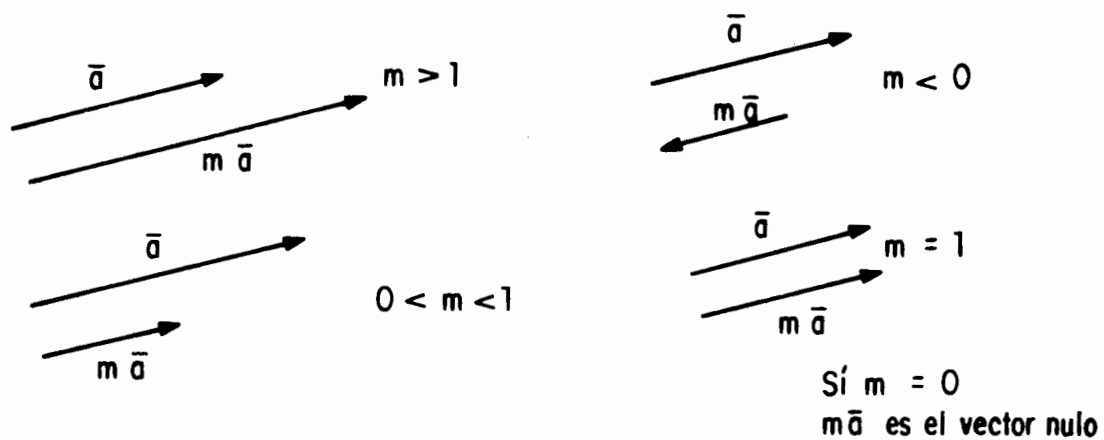


Fig A.11. Producto de un escalar m por un vector $\vec{a}$.

Ahora es fácil representar gráficamente al vector $\vec{\delta}$, ver fig A.12.

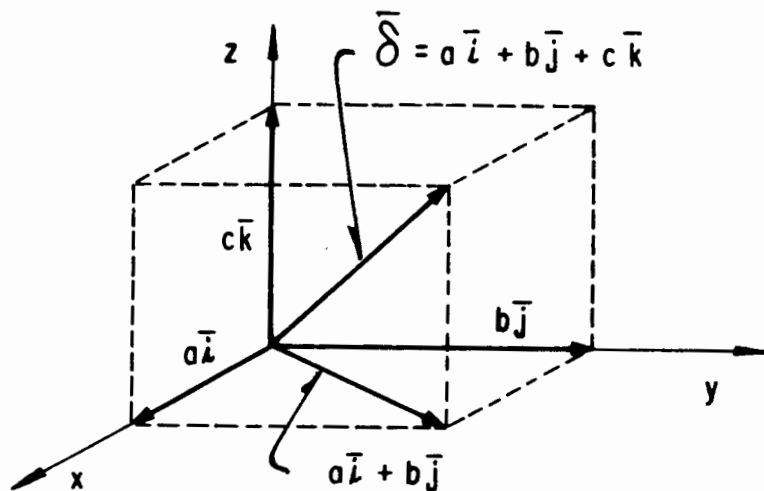


Fig A.12. Representación del vector $\vec{\delta}$

Obsérvese que cada componente a , b , c está multiplicada por un vector unitario $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ y que efectivamente el vector $\vec{\delta}$ es la suma de $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Leyes del algebra vectorial:

Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ tres vectores y m , n dos escalares, se cumple que:

a) Propiedad conmutativa de la suma:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \quad (\text{A.8})$$

b) Propiedad asociativa de la suma:

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} \quad (\text{A.9})$$

c) Propiedad conmutativa del producto por un escalar:

$$m\bar{a} = \bar{a}m \quad (\text{A.10})$$

d) Propiedad asociativa del producto por un escalar:

$$m(n\bar{a}) = (mn)\bar{a} \quad (\text{A.11})$$

e) Propiedad distributiva del producto por un escalar respecto a la suma de escalares:

$$(m + n)\bar{a} = m\bar{a} + n\bar{a} \quad (\text{A.12})$$

f) Propiedad distributiva del producto por un escalar respecto a la suma de vectores:

$$m(\bar{a} + \bar{b}) = m\bar{a} + m\bar{b} \quad (\text{A.13})$$

Problemas propuestos.

1.- Sea $\bar{a} = i - 2j + 3k$, $\bar{b} = i + j - 6k$ y $\bar{c} = 8k$, hallar:

- | | |
|------------------------------------|--|
| a) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ | j) $\bar{a}/ \bar{a} - \bar{a}/ \bar{a} $ |
| b) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ | k) $ \bar{a} + \bar{b} $ |
| c) $ \bar{a} - \bar{b} $ | l) $ \bar{a} + \bar{b} $ |
| d) $ \bar{a} - \bar{b} $ | m) $3\bar{b} - 6\bar{c}$ |

$$e) |\bar{a} + \bar{b}| + |\bar{c}|$$

$$f) |\bar{a}| + |\bar{b} + \bar{c}|$$

$$g) \bar{a}/|\bar{a}|$$

$$h) \bar{b}/|\bar{b}|$$

$$i) \bar{c}/|\bar{c}|$$

$$n) 3(\bar{b} - 2\bar{c})$$

$$o) 2\bar{a} + 2\bar{b}$$

$$p) 2(\bar{a} + \bar{b})$$

$$q) -\bar{a}$$

$$r) \bar{a} + \bar{b}$$

Solución:

$$a) 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$b) 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$c) 9.49$$

$$d) -2.42$$

$$e) 11.74$$

$$f) 6.19$$

$$g) \frac{1}{\sqrt{14}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}} \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}} \mathbf{k}$$

$$h) \frac{1}{\sqrt{38}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{38}} \mathbf{j} - \frac{6}{\sqrt{38}} \mathbf{k}$$

$$i) \mathbf{k}$$

$$j) 0$$

$$k) 3.74$$

$$l) 9.91$$

$$m) \mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k}$$

$$n) \mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k}$$

$$o) 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$p) 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$q) \mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 53\mathbf{k}$$

$$r) -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$s) 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

2.- Dados $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ calcular:

$$a) |\mathbf{a}|$$

$$b) |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$$

$$c) |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$$

$$d) |\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}|$$

Solución:

a) $\sqrt{21}$

b) $\sqrt{65}$

c) $\sqrt{21}$

d) $\sqrt{74}$

3.- Dados los vectores del problema número 2 , calcular los valores de los escalares a , b y c , de tal manera que se cumpla que: $\bar{d} = a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}$, donde $\bar{d} = i + j + k$.

Solución: $a = 0$, $b = 0$, y $c = 1$

4.- Dados los vectores del problema número 2 , hallar un vector unitarios en la dirección de los resultante de:

a) $\bar{a} + \bar{b}$

b) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

c) $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$

Solución:

a) $\frac{2}{\sqrt{14}} i - \frac{1}{\sqrt{14}} j - \frac{3}{\sqrt{14}} k$

b) $\frac{2}{\sqrt{30}} i - \frac{1}{\sqrt{30}} j + \frac{5}{\sqrt{30}} k$

c) $\frac{2}{\sqrt{126}} i - \frac{1}{\sqrt{126}} j - \frac{11}{\sqrt{126}} k$

5.- Demostrar que los vectores $\bar{a} = 6i - 4j + 2k$, $\bar{b} = 2i - 6j + 10k$ y $\bar{c} = 4i + 2j - 8k$ son los lados de un triángulo.

Solución: debido a que $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$ los vectores forman un triángulo

6.- Determinar una fuerza $\vec{f}_1$ tal que, $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\vec{f}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, estén en equilibrio.

Solución: $\vec{f}_1 = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

REGRESE A LA PAGINA 8.

Producto escalar o interno:

Es un escalar igual al producto de los módulos de los dos vectores y el coseno del ángulo que forma su dirección positiva, ver fig A.13:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{A.14})$$

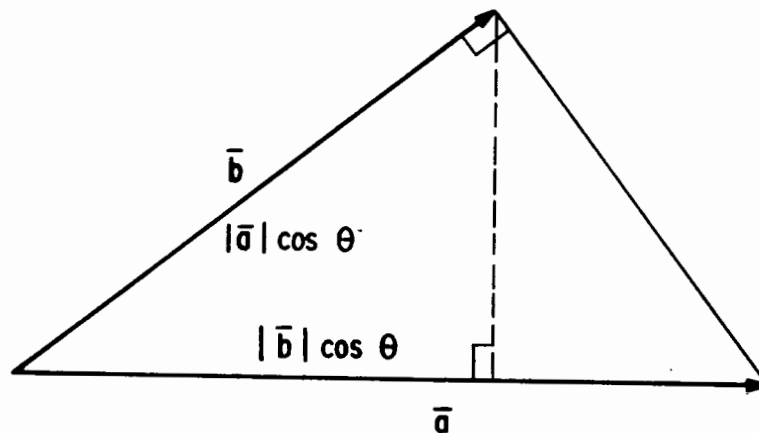


Fig A.13. Producto escalar.

Es inmediato que el ángulo entre vectores vale:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (\text{A.15})$$

además:

$$\text{si } \bar{a} = \bar{b}, \quad \cos \theta = \cos 0 = 1 \quad (\text{A.16})$$

si $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, uno de los vectores es nulo o los vectores son perpendiculares ($\cos 90^\circ = 0$), se puede demostrar que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{A.17})$$

Propiedades del producto escalar o interno:

Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ tres vectores y m un escalar.

a) Ley conmutativa;

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} \quad (\text{A.18})$$

b) Ley distributiva del producto escalar con respecto a la suma;

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} \quad (\text{A.19})$$

c) Ley asociativa;

$$m(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (m\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (m\bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{b})m \quad (\text{A.20})$$

Producto entre vectores unitarios:

Sean i, j, k los vectores unitarios, entonces se satisfacen las siguientes condiciones.

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0 ; \text{ porque son perpendiculares} \quad (\text{A.21})$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 ; \text{ porque son paralelos} \quad (\text{A.22})$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0 ; \text{ porque son paralelos} \quad (\text{A.23})$$

$$i \times j = k = -j \times i \quad (\text{A.24})$$

$$j \times k = i = -k \times j \quad (\text{A.25})$$

$$k \times i = j = -i \times k \quad (\text{A.26})$$

Ejemplo A.4.

Ecuación del plano. Un plano del espacio que pase por P_0 , se define como el lugar geométrico de todas las rectas que pasando por P_0 son perpendiculares a una dirección dada $\vec{a} = (A, B, C)$, ver fig A.14.

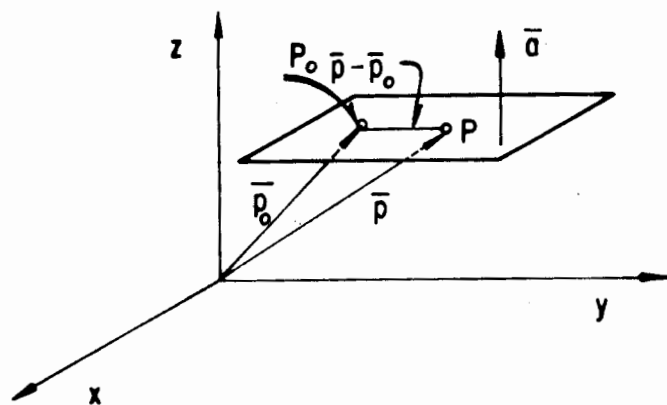


Fig A.14. El plano es un sistema tridimensional

Solución:

De la figura A.14 se tiene:

$$\bar{p} - \bar{p}_0 \cdot \bar{a} = 0$$

es decir $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$

entonces:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

finalmente:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

que es la ecuación del plano, donde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

y A, B y C son los números directores de su normal.

Producto vectorial o externo:

Es un vector cuyo valor absoluto es definido de la siguiente manera, (ver fig A.15):

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \text{ sen } \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{A.27})$$

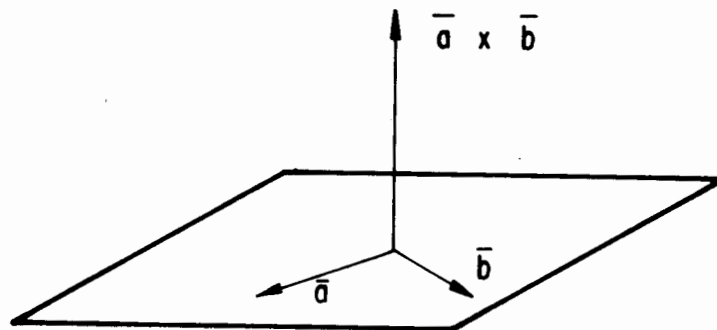


Fig A.15. Producto vectorial

Se puede demostrar que:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Como $|\bar{b}| \sin \theta$ es la proyección de $|\bar{b}|$ en la dirección perpendicular al vector $\bar{a}$, esto quiere decir que $|\bar{a} \times \bar{b}|$ es el formado por los dos vectores y dos rectas paralelas a los mismos, (ver fig. A.16):

$$|\bar{a}| |\bar{b}| \sin \theta = |\bar{a} \times \bar{b}| \quad (\text{A.29})$$

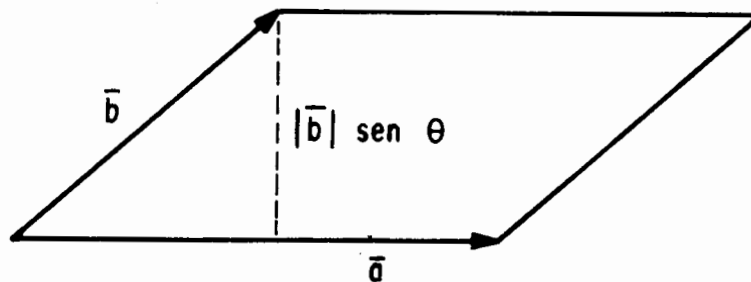


Fig A.16. Aplicación del producto vectorial para el cálculo del área de un paralelogramo

Ejemplo A.5.

Hallar un vector unitario perpendicular al plano formado por $\bar{a} = (2, -6, -3)$, $\bar{b} = (4, 3, -1)$.

a) Empleando producto escalar

b) Empleando producto vectorial

Solución:

a) Utilizando producto escalar.

Sea $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$, supóngase que $\bar{c}$ es perpendicular a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$, se tendrá entonces:

$$\bar{c} \cdot \bar{a} = 2c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0$$

$$\bar{c} \cdot \bar{b} = 4c_1 + 3c_2 - c_3 = 0$$

la solución a este sistema de ecuaciones es:

$$c_1 = \frac{1}{2} c_3$$

$$c_2 = -\frac{1}{3} c_3$$

donde:

$$\bar{c} = c_3 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1 \right)$$

el vector unitario se obtiene dividiendo $\bar{c}$ entre su módulo:

$$\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{c_3 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1 \right)}{\sqrt{c_3^2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(1 \right)^2 \right]}}$$

$$\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} = \pm \left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

b) Empleando el producto vectorial.

El vector $\bar{a} \times \bar{b}$ es perpendicular tanto a $\bar{a}$ como a $\bar{b}$, entonces:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & j & k \\ 1 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 15i - 10j + 30k$$

y el vector unitario será:

$$\frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{15i - 10j + 30k}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}}$$
$$= \pm \left(\frac{3}{7} i - \frac{2}{7} j + \frac{6}{7} k \right)$$

Propiedades del producto vectorial:

a) Ley distributiva respecto a la adición

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \quad (\text{A.30})$$

b) El producto vectorial no es conmutativo

$$\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{b} \times \bar{a} \quad (\text{A.31})$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a} \quad (\text{A.32})$$

c) Si $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, uno de los vectores es nulo o $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos.

Ejemplo A.6.



Hallar la ecuación del plano:

a) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano $3x - 2y + 4z - 5 = 0$

b) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y $P_1(3, -2, 1)$ y es perpendicular al plano $3x - 2y + 4z - 5 = 0$

c) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$, $P_1(3, -2, 1)$ y $P_2(5, 0, -4)$

Solución:

a) El vector normal al plano, ver fig A.17 es:

$$\bar{n} = (3, -2, 4)$$

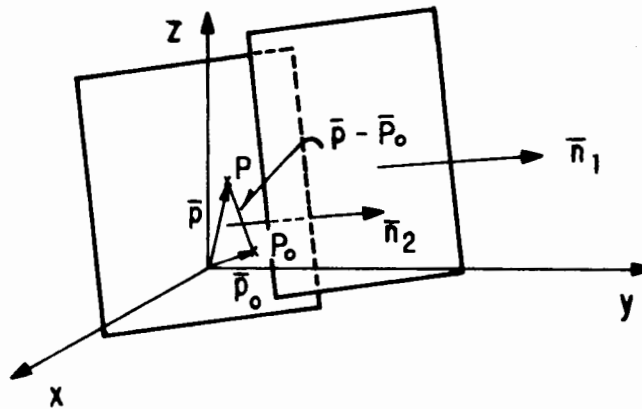


Fig A.17. Obtención de la ecuación del plano que pasa por P_0

El vector $\bar{p} - \bar{p}_0$ pertenece al plano buscado, (ver fig A.17) y deberá cumplirse que:

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot \bar{n} = 0$$

sustituyendo valores:

$$3(x - 1) - 2(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

que es la ecuación del plano.

b) El vector $(\bar{p}_1 - \bar{p}_0) = (2, -4, -2)$ y el vector $\bar{a} = (3, -2, 4)$ son paralelos, por lo tanto $(\bar{p}_1 - \bar{p}_0) \times \bar{a}$ es normal a dicho plano y su ecuación vale:

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot \left[(\bar{p}_1 - \bar{p}_0) \times \bar{a} \right] = 0$$

sustituyendo valores:

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & j & k \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

de aquí se obtiene:

$$4x + y + 2z - 12 = 0$$

que es la ecuación del plano buscada.

c) los vectores; $\bar{p}_1 - \bar{p}_0 = (2, -4, -2)$ y $\bar{p}_2 - \bar{p}_0 = (4, -2, -7)$ son paralelos al plano pedido, por lo tanto $(\bar{p}_1 - \bar{p}_0) \times (\bar{p}_2 - \bar{p}_0)$ es normal a dicho plano, su ecuación vectorial es:

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot \left[(\bar{p}_1 - \bar{p}_0) \times (\bar{p}_2 - \bar{p}_0) \right] = 0$$

sustituyendo valores:

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & j & k \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & -7 \end{bmatrix} = 0$$

de aquí se obtiene:

$$4x + y + 2z - 12 = 0$$

que es la ecuación del plano buscada.

Producto entre tres vectores, $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$:

En este caso se presentan las siguientes posibilidades.

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}, \quad \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}), \quad \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \quad (A.33)$$

$(\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$ es un vector cuya longitud es $|\bar{a} \cdot \bar{b}|$ veces la longitud de $\bar{c}$, y la dirección de este, o en sentido opuesto según sea positivo o negativo $|\bar{a} \cdot \bar{b}|$.

$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ se llama triple producto escalar y no es necesario el paréntesis, también puede escribirse así:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} \quad ; \quad [\bar{a} \bar{b} \bar{c}] \quad (A.34)$$

Interpretación geométrica.

$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}$ representa el volumen del paralelepípedo que tiene a $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ por aristas, ver fig A.18.

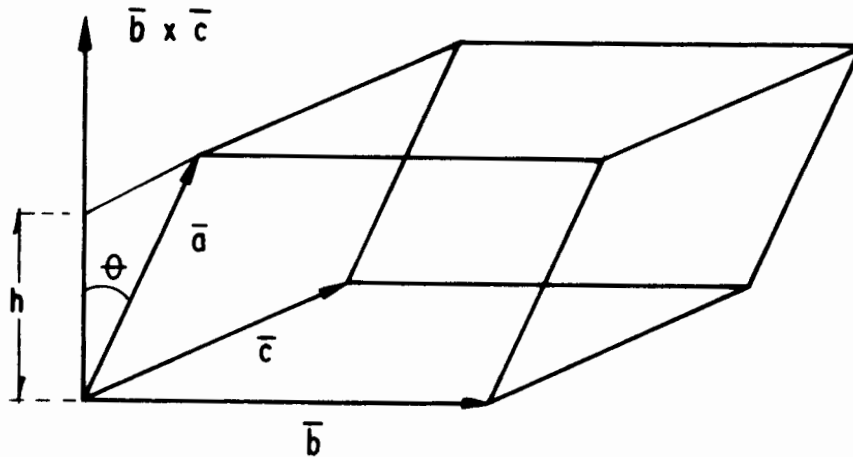


Fig A.18. Representación geométrica del triple producto escalar.

h es la proyección de $\bar{a}$ sobre $\bar{b} \times \bar{c}$

$$h = |\bar{a}| \cos \theta \quad (\text{A.35})$$

$$v = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = |\bar{a}| |\bar{b} \times \bar{c}| \cos \theta \quad (\text{A.36})$$

Además, se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} &= \bar{b} \cdot \bar{c} \times \bar{a} = \bar{c} \cdot \bar{a} \times \bar{b} = -\bar{a} \cdot \bar{c} \times \bar{b} = \\ &= -\bar{b} \cdot \bar{a} \times \bar{c} = -\bar{c} \cdot \bar{b} \times \bar{a} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$[\bar{a} \bar{b} \bar{c}] = 0$, es condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean paralelos a un mismo plano.

Además dados:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad , \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad , \quad \bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} &= (a_1 + a_2 + a_3) \left[(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (b_1 c_3 - \right. \\ &- b_3 c_1) + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \left. \right] = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + \\ &+ a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{aligned}$$

se cumple que:

$$[\bar{a} \bar{b} \bar{c}] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (A.38)$$

Triple producto vectorial $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$:

Es un vector perpendicular al vector $\bar{a}$ y al producto $\bar{b} \times \bar{c}$, pero $\bar{b} \times \bar{c}$ es perpendicular al plano que contiene a los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$, entonces cualquier vector $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ debe estar en el plano de $\bar{b}$ y $\bar{c}$, ver fig A.19.

Además se puede demostrar que:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} \quad (A.39)$$

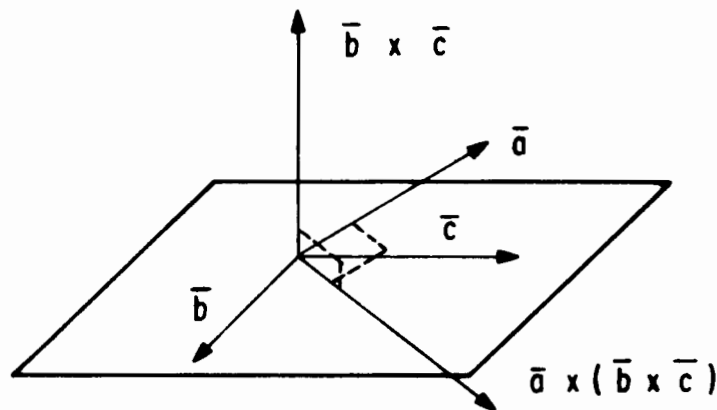


Fig A.19. Representación geométrica del triple producto vectorial

Problemas propuestos

1) Sea $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$
calcular:

- a) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}$
- b) $\bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$
- c) $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{c}$
- d) $|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|$

Solución:

- a) $-2\bar{j} + \bar{k}$
- b) 18
- c) 4
- d) $\sqrt{77}$

2) Hallar el ángulo entre los planos:

$$x + y + z = 1 \quad y \quad 3x - 2y + z = 4$$

Solución:

$$\theta = 72.02^\circ$$

3) Sean $\bar{a} = i + j$, $b = -i + 2j$, $\bar{c} = 2i + 3j + k$
 calcular:

a) $\bar{a} \times \bar{c}$

d) $\bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$

b) $|\bar{a} \times \bar{c}|$

e) $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$

c) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c}$

f) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$

Solución:

a) $i - j + k$

b) $\sqrt{3}$

c) $3i - 6k$

d) $3i - 6k$

e) $2i + 3j + k$

f) 3

4) Hallar un vector $\bar{v}$ paralelo a la intersección de los planos:

$$x - y + z = 5 ,$$

$$2x + y - 3z = 4$$

Solución:

$$V = \alpha (2i + 5j + 3k) , \text{ donde } \alpha \text{ es un escalar}$$

5) Decir si son paralelos o perpendiculares los siguientes vectores:

$$\bar{a} = (i \times j) \times j$$

$$\bar{b} = j \times (j \times k)$$

Solución:

a) son perpendiculares

- 6) Hallar el área del triángulo que tiene los siguientes vértices:
 $(1, 3, 0)$, $(0, 2, 5)$ y $(-1, 0, 2)$.

Solución:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{234} \text{ u}^2$$

- 7) Hallar el volumen del paralelepípedo que tiene los vectores dados como aristas adyacentes:

$$\bar{a} = i + 4j , \quad \bar{b} = 6k , \quad \bar{c} = 2j + 3k$$

Solución:

$$\text{Vol} = 12 \text{ u}^3$$

- 8) Exprese en forma vectorial $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ y todos sus módulos respectivos.

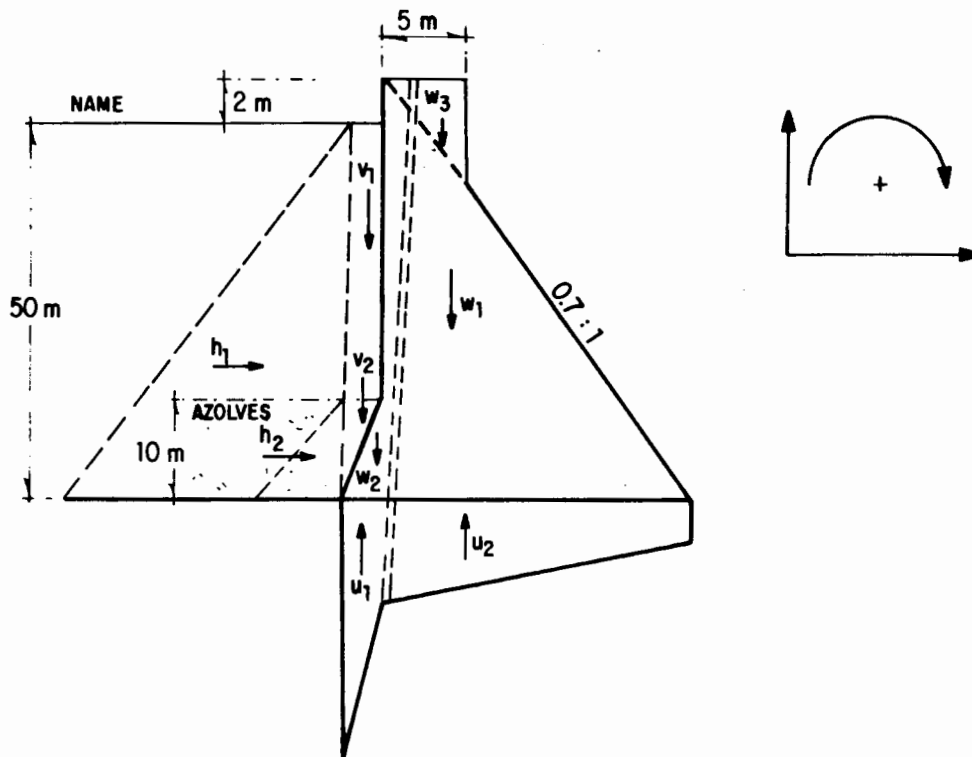


Fig A.20 del problema 8

Solución:

$$\begin{array}{ll}
 \bar{h}_1 = 1250i, & |\bar{h}_1| = 1250 \text{ ton} \\
 \bar{h}_2 = 18i, & |\bar{h}_2| = 18 \text{ ton} \\
 \bar{v}_1 = 18i, & |\bar{v}_1| = 90 \text{ ton} \\
 \bar{v}_2 = -9j, & |\bar{v}_2| = 9 \text{ ton} \\
 \bar{w}_1 = -2271j, & |\bar{w}_1| = 2271 \text{ ton} \\
 \bar{w}_2 = -24j, & |\bar{w}_2| = 24 \text{ ton} \\
 \bar{w}_3 = -43j, & |\bar{w}_3| = 43 \text{ ton} \\
 \bar{u}_1 = 133j, & |\bar{u}_1| = 133 \text{ ton} \\
 \bar{u}_2 = 287j, & |\bar{u}_2| = 287 \text{ ton}
 \end{array}$$

Funciones vectoriales de una variable:

Sea $\bar{V}(t)$ una función de la variable escalar t , entonces sus componentes serán.

$$\bar{V}(t) = V_1(t)i + V_2(t)j + V_3(t)k \quad (\text{A.40})$$

Nótese que si $\bar{V}(t)$ es función de (t) también lo son sus componentes, y $\bar{V}(t)$ es continua si y solo si $V_1(t)$, $V_2(t)$ y $V_3(t)$ son continuas.

Si t varía en Δt se tiene un incremento vectorial, ver fig A.21.

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{V} &= \bar{V}(t + \Delta t) - \bar{V}(t) = \left[V_1(t + \Delta t)i + V_2(t + \Delta t)j + \right. \\
 &\quad \left. V_3(t + \Delta t)k \right] - \left[V_1(t)i + V_2(t)j + V_3(t)k \right] = \\
 &= \Delta V_1 i + \Delta V_2 j + \Delta V_3 k \quad (\text{A.41})
 \end{aligned}$$

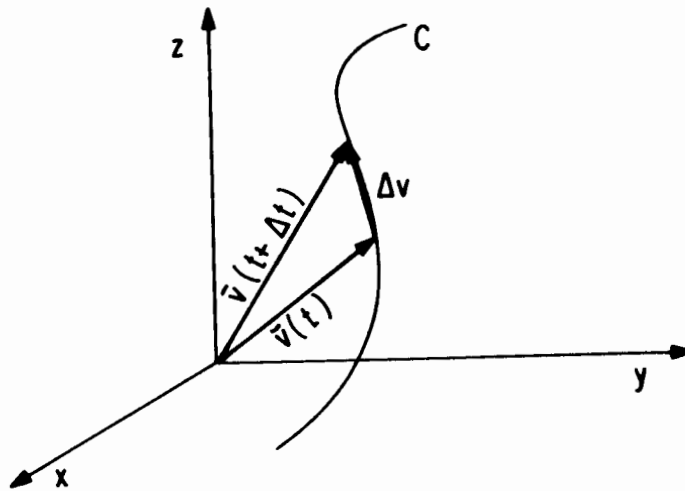


Fig A.21. Interpretación geométrica del incremento vectorial

Derivada de una función vectorial:

Se define así.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{A.42})$$

es decir:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} i + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} j + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_3}{\Delta t} k \quad (\text{A.43})$$

y entonces:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_1}{dt} i + \frac{dv_2}{dt} j + \frac{dv_3}{dt} k \quad (\text{A.44})$$

A su vez las diferenciales se definen así:

Si

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (A.45)$$

$$d\bar{a} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k} \quad (A.46)$$

$$d(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot d\bar{b} + d\bar{a} \cdot \bar{b} \quad (A.47)$$

$$d(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times d\bar{b} + d\bar{a} \times \bar{b} \quad (A.48)$$

REGRESE A LA PAGINA 8

Fórmulas de derivación:

$$\frac{d(\bar{U} \pm \bar{V})}{dt} = \frac{d\bar{U}}{dt} \pm \frac{d\bar{V}}{dt} \quad (A.49)$$

$$\frac{d(\phi\bar{V})}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \bar{V} + \phi \frac{d\bar{V}}{dt}; \quad \phi \text{ función escalar derivable} \quad (A.50)$$

$$\frac{d(\bar{U} \cdot \bar{V})}{dt} = \frac{d\bar{U}}{dt} \cdot \bar{V} + \bar{U} \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} \quad (A.51)$$

$$\frac{d(\bar{U} \times \bar{V})}{dt} = \frac{d\bar{U}}{dt} \times \bar{V} + \bar{U} \times \frac{d\bar{V}}{dt} \quad (A.52)$$

$$\frac{d(\bar{U} \cdot \bar{V} \cdot \bar{W})}{dt} = \left[\frac{d\bar{U}}{dt} \cdot \bar{V} \cdot \bar{W} \right] + \left[\bar{U} \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} \cdot \bar{W} \right] + \left[\bar{U} \cdot \bar{V} \cdot \frac{d\bar{W}}{dt} \right] \quad (A.53)$$

$$\frac{d(\bar{U} \times (\bar{V} \times \bar{W}))}{dt} = \frac{d\bar{U}}{dt} \times (\bar{V} \times \bar{W}) + \bar{U} \times \left(\frac{d\bar{V}}{dt} \times \bar{W} \right) +$$

$$+ \bar{U} \times \left(\bar{V} \times \frac{d\bar{W}}{dt} \right) \quad (\text{A.54})$$

La interpretación geométrica de la derivada de $\frac{d\bar{V}}{dt}$ se presenta en la fig A.22, $\frac{d\bar{V}}{dt}$ es un vector tangente a la curva c que es el conjunto de extremos de los vectores $\bar{V}(t)$.

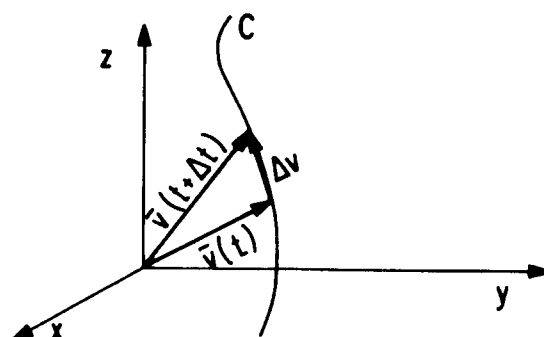


Fig A.22. Interpretación geométrica de la derivada

Derivadas parciales de un vector.

Se aplican las mismas reglas de diferenciación parcial del cálculo diferencial ordinario de las funciones escalares:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} \cdot \bar{b} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} \times \bar{b} \quad (\text{A.56})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{a} \cdot \bar{b}) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{a} \cdot \bar{b}) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} \cdot \bar{b} \right] = \\ &= \bar{a} \cdot \frac{\partial^2 \bar{b}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y \partial x} \cdot \bar{b} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Ejemplo A.7.

Las ecuaciones paramétricas de una línea de corriente son $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, $z = 6t$. Hallar el módulo de la velocidad y de la aceleración en el tiempo $t = 0$.

Solución:

Sea $P(x, y, z)$ un punto de la curva, y

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (4 \cos t)\vec{i} + (4 \sin t)\vec{j} + 6t\vec{k}$
su vector de posición.

La velocidad vale:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-4 \sin t)\vec{i} + (4 \cos t)\vec{j} + (6)\vec{k}$$

y la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-4 \cos t)\vec{i} - (4 \sin t)\vec{j}$$

para $t = 0$

$$\vec{V} = 4\vec{j} + 6\vec{k} \quad ; \quad |\vec{V}| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$$

$$\vec{a} = -4\vec{i} \quad ; \quad |\vec{a}| = 4$$

El operador ∇ :

Sea ϕ una función escalar de punto que posea primeras derivadas parciales con respecto a x, y, z y $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, el vector de posición del punto P , ver fig A.23.

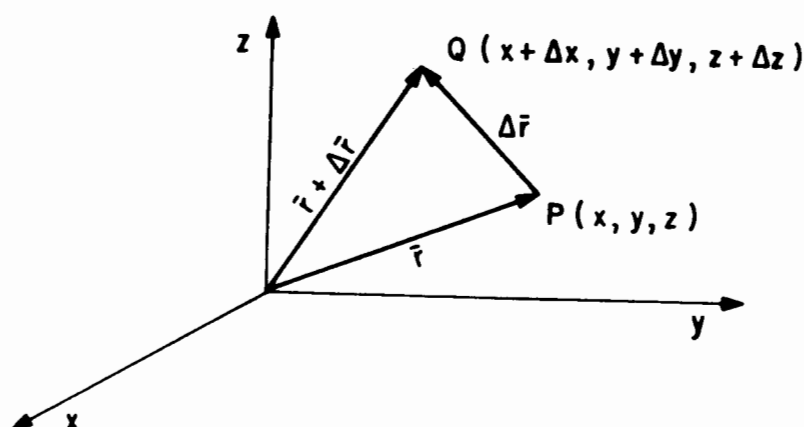


Fig A.23. Vectores en los puntos P y Q.

Si se pasa de P a Q, la función ϕ cambiará en $\Delta\phi$; es decir:

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z \quad (\text{A.58})$$

donde ϵ_1 , ϵ_2 , y ϵ_3 son variables. Si Q tiende a P, entonces ϵ_1 , ϵ_2 , y ϵ_3 tenderán a cero.

Si se divide $\Delta\phi$ entre $\Delta s = |\Delta\vec{r}|$, se obtiene una medida de la proporción en que cambia ϕ cuando se pasa de P a Q.

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s} \quad (\text{A.59})$$

El valor límite de $\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ al tender Q hacia P a lo largo del segmento $\overline{PQ}$ se llama derivada de ϕ en la dirección $\overline{PQ}$, o derivada direccional de ϕ , en el límite:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} \quad (\text{A.60})$$

Nótese que $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ y $\partial\phi/\partial z$, demuestran que ϕ depende solo de las coordenadas de P, y que los términos $\partial x/\partial s$, $\partial y/\partial s$ y $\partial z/\partial s$, son independientes de ϕ y dependen solo de la dirección en que se calcula la derivada. Entonces puede hacerse:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j + \frac{\partial\phi}{\partial z} k \right] \cdot \left[\frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k \right] = \\ &= \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j + \frac{\partial\phi}{\partial z} k \right] \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

en esta ecuación el término $\frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j + \frac{\partial\phi}{\partial z} k$ es una función vectorial llamada gradiente de ϕ , en forma abreviada $\text{grad } \phi$, entonces la ecuación puede escribirse así:

$$\frac{d\phi}{ds} = (\text{grad } \phi) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (\text{A.62})$$

Como $\Delta s = |\Delta \vec{r}|$, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ es un vector unitario entonces $(\text{grad } \phi) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$ es la proyección de $\text{grad } \phi$ sobre la dirección $\frac{d\vec{r}}{ds}$, $\text{grad } \phi$ tiene la propiedad de que su proyección sobre una dirección cualquiera es igual a la derivada de ϕ en esa dirección, ver fig A.24.

Si se hace $\phi(x, y, z) = c$, se tiene para distintos valores de c , una familia de superficies que se llaman superficies de nivel de ϕ , $\frac{d\vec{r}}{ds}$ tiene la dirección límite de una secante $\overline{PQ}$ a la superficie de nivel, ver fig A.25.

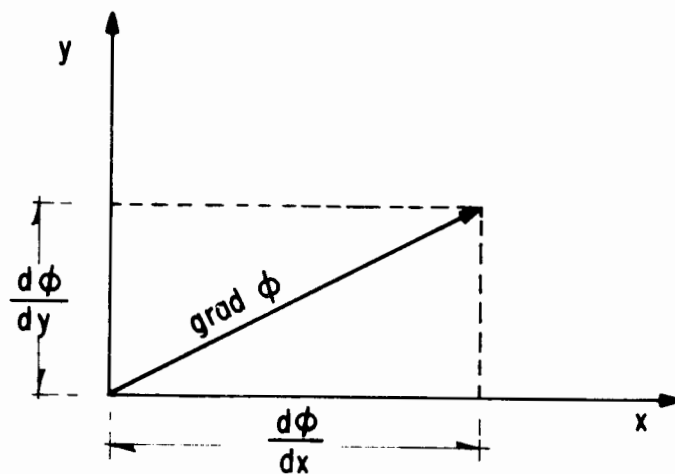


Fig A.24. Proyección de $\text{grad } \phi$ sobre los ejes x , y .

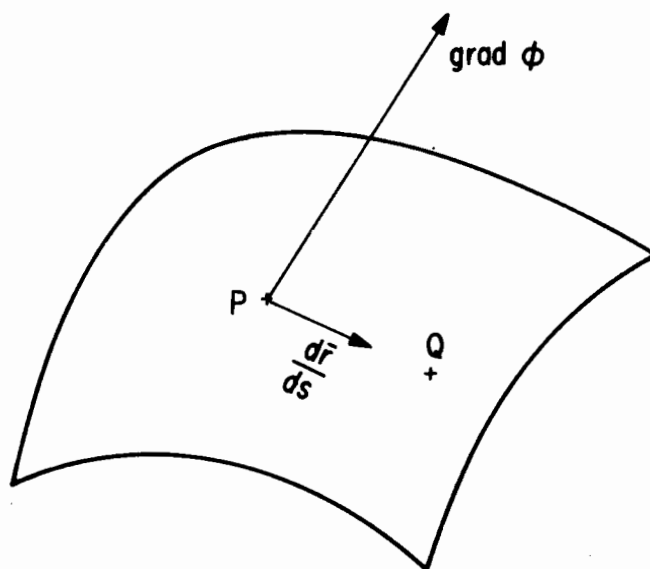


Fig A.25. Interpretación geométrica de $\text{grad } \phi$.

La condición $(\text{grad } \phi) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0$, implica perpendicularidad, entonces $\text{grad } \phi$ es normal a la superficie de nivel ϕ .

De la definición de gradiente:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \quad (\text{A.63})$$

se puede obtener:

$$\text{grad } \phi = \left[i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right] \phi \quad (\text{A.64})$$

el operador se llama *nabla* es decir:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.65})$$

resumiendo:

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi \quad (\text{A.66})$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla \phi \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (\text{A.67})$$

$$d\phi = \nabla \phi \cdot d\vec{r} \quad (\text{A.68})$$

además:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.69})$$

Al operador ∇^2 se le llama *laplaciano* u operador de *Laplace*, y a $\nabla^2 \phi$, *laplaciano* de ϕ .

Ejemplo A.8.

Hallar la derivada direccional de $\phi = x^2 yz + 4xz^2$ en el punto $(1, -2, -1)$ y en la dirección y sentido de $2i - j - 2k$.

Solución:

Utilizando la definición de derivada direccional, ec A.67:

$$\frac{d\phi}{ds} = (\text{grad } \phi) \leftrightarrow \frac{dr}{ds}$$

$$\nabla\phi = \nabla (x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + (x^2z)\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k}$$

que valuada en el punto $(1, -2, -1)$; vale:

$$\nabla\phi = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k}$$

el vector unitario en la dirección de $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ es:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

la derivada pedida es:

$$\nabla\phi \cdot \bar{\mathbf{a}} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

El hecho de que tenga caracter vectorial sugiere la posibilidad de que se efectúe en los dos productos: escalar y vectorial:

$$\nabla \leftrightarrow \bar{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} \right]$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad (\text{A.70})$$

y se llama *Divergencia* del vector $\bar{f}$.

Además:

$$\nabla \times \bar{f} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.71})$$

que es el *rotacional* del vector $\bar{f}$.

Fórmulas de aplicación del operador nabla ∇ :

Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos funciones vectoriales derivables, y ϕ y ψ dos escalares derivables también en una región del espacio, entonces:

$$\begin{aligned} 1.- \nabla (\phi + \psi) &= \nabla \phi + \nabla \psi ; \text{ grad } (\phi + \psi) = \\ &= \text{ grad } \phi + \text{ grad } \psi \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{aligned} 2.- \nabla \cdot (\bar{A} + \bar{B}) &= \nabla \cdot \bar{A} + \nabla \cdot \bar{B} ; \text{ div } (\bar{A} + \bar{B}) = \\ &= \text{ div } \bar{A} + \text{ div } \bar{B} \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{aligned} 3.- \nabla \times (\bar{A} + \bar{B}) &= \nabla \times \bar{A} + \nabla \times \bar{B} ; \text{ rot } (\bar{A} + \bar{B}) = \\ &= \text{ rot } \bar{A} + \text{ rot } \bar{B} \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

$$4.- \nabla \cdot (\phi \bar{A}) = (\nabla \phi) \cdot \bar{A} + \phi (\nabla \cdot \bar{A}) \quad (\text{A.75})$$

$$5.- \nabla \times (\phi \bar{A}) = (\nabla \phi) \times \bar{A} + \phi (\nabla \times \bar{A}) \quad (A.76)$$

$$6.- \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B}) \quad (A.77)$$

$$7.- \nabla \times (\bar{A} \times \bar{B}) = (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{A} - \bar{B} (\nabla \cdot \bar{A}) - \\ - (\bar{A} \cdot \nabla) \bar{B} + \bar{A} (\nabla \cdot \bar{B}) \quad (A.78)$$

$$8.- \nabla (\bar{A} \cdot \bar{B}) = (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{A} + (\bar{A} \cdot \nabla) \bar{B} + \\ + \bar{B} \times (\nabla \times \bar{A}) + \bar{A} \times (\nabla \times \bar{B}) \quad (A.79)$$

$$9.- \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (A.80)$$

donde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{se llama operador de Laplace}$$

$$10.- \nabla \times (\nabla \phi) = \bar{0} \quad (A.81)$$

el *rotacional* del *gradiente* de ϕ es el vector cero

$$11.- \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0 \quad (A.82)$$

la *divergencia* del *rotacional* de A es cero

$$12.- \nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} \quad (A.83)$$

Ejemplo A.10.

Demostrar la ecuación A.75.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\phi \bar{A}) &= \nabla \cdot \left[\phi (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \right] \\
 &= \frac{\partial \phi A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi A_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi A_3}{\partial z} \\
 &= \phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial A_2}{\partial y} + A_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \frac{\partial A_3}{\partial z} + A_3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \\
 &= \phi (\nabla \cdot \bar{A}) + \bar{A} \cdot (\nabla \phi) \quad \text{l.c.q.d}
 \end{aligned}$$

Problemas propuestos:

1.- Determinar la primera y segunda derivada de las siguientes funciones vectoriales.

- a) $\bar{a} = (\text{sen } t)i + (\cos t)j$
- b) $\bar{v} = (3 \cos t)i + (6 \text{ sen } t)j$
- c) $\bar{f} = e^{-t}[(\cos t)i - (\text{sen } t)j]$
- d) $\bar{v} = \text{sen } t (i + j)$
- e) $\bar{g} = ti + t^3 j - 4 t^4 k$

Solución:

- a) $\frac{d\bar{a}}{dt} = (\cos t)i - (\text{sen } t)j$, $\frac{d^2\bar{a}}{dt^2} = (-\text{sen } t)i - (\cos t)j$
- b) $\frac{d\bar{v}}{dt} = -3(\text{sen } t)i + 6(\cos t)j$, $\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} = -3(\cos t)i - 6(\text{sen } t)j$
- c) $\frac{d\bar{f}}{dt} = e^{-t} [(\cos t + \text{sen } t)i - (\cos t + \text{sen } t)j]$
 $\frac{d^2\bar{f}}{dt^2} = 2e^{-t} [(\text{sen } t)i + (\cos t)j]$
- d) $\frac{d\bar{v}}{dt} = \cos t (i + j)$ $\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} = -\text{sen } t (i + j)$

$$e) \frac{d\bar{g}}{dt} = i + 3t^2j - 16t^3k, \quad \frac{d^2\bar{g}}{dt^2} = 6tj - 48t^2k$$

2.- Calcular las primeras derivadas parciales con respecto a (x, y, z) de las siguientes funciones vectoriales.

$$a) \bar{v} = x^2 i + y^2 j + z^2 k$$

$$b) \bar{v} = e^x i + e^y j + e^z k$$

$$c) \bar{v} = (x + y)i + (x - y)j$$

Solución:

$$a) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 2xi, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 2yj, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 2zk$$

$$b) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = e^x i, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = e^y j, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = e^z k$$

$$c) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = i + j, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = i - j$$

3.- Dado el vector de posición $\bar{r}$ de una partícula en movimiento, donde $t \geq 0$, hallar el vector velocidad y el vector aceleración.

$$a) \bar{r} = 6e^{-t}i + 8e^{-t}j$$

$$b) \bar{r} = \text{sen } t^2 i + \cos t^2 j + t k$$

$$c) \bar{r} = 3 \cos 3t i + 2 \text{ sen } 2t j$$

Solución:

$$a) \bar{v} = -6e^{-t}i - 8e^{-t}j, \quad \bar{a} = 6e^{-t}i + 8e^{-t}j$$

$$b) \bar{v} = (2t \cos t^2)i - (2t \text{ sen } t^2)j$$

$$\bar{a} = (-4t^2 \text{ sen } t^2 + 2 \cos t^2)i - (4t^2 \cos t^2 + 2 \text{ sen } t^2)j$$

$$c) \bar{v} = (-9 \text{ sen } 3t)i + (4 \cos 2t)j$$

$$\bar{a} = (-27 \cos 3t)i - (8 \cos 2t)j$$

4.- Hallar el gradiente ($\nabla\phi$), de las siguientes funciones.

a) $\phi = 3xy$

d) $\phi = x^2 + y$

b) $\phi = x/y$

e) $\phi = \text{sen } (x^2 + y^2 + z^2)$

c) $\phi = \arctan (y/x)$

f) $\phi = 1/2 \ln (x^2)$

Solución:

a) $\nabla\phi = 3yi + 3xj$

b) $\nabla\phi = (1/y)i - (x/y^2)j$

c) $\nabla\phi = -\frac{1}{x^2 + y^2} i + \frac{1}{x + y^2/x} j$

d) $\nabla\phi = 2xi + j$

e) $\nabla\phi = (2x \cos x^2)i + (2y \cos y^2)j + (2z \cos z^2)k$

f) $\nabla\phi = (1/x)i$

5.- Hallar un vector unitario normal a la superficie dada en el punto $P(x, y, z)$.

a) $x^2 + 2y^2 = 6$

$P(1, 2, 3)$

b) $z = y^4$

$P(1, 4, 1)$

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$P(1, 0, 1)$

d) $z = xy$

$P(3, 1, 0)$

Solución:

a) $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2}{\sqrt{68}} i + \frac{8}{\sqrt{68}} j ;$

c) $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2}{\sqrt{8}} i + \frac{2}{\sqrt{8}} k$

b) $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{4}{\sqrt{17}} j + \frac{1}{\sqrt{17}} k$

d) $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{1}{\sqrt{11}} i + \frac{3}{\sqrt{11}} j - \frac{1}{\sqrt{68}} k$

6) Calcular la derivada direccional de ϕ en P en la dirección de $\bar{a}$, para los siguientes valores.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------|-------------------------|
| a) $\phi = x^2 + y^2 + z^2$ | P(0, 1, 4) | $\bar{a} = i + j + k$ |
| b) $\phi = x/z$ | P(1, 2, 3) | $\bar{a} = i - k$ |
| c) $\phi = e^x \cos y$ | P(6, π , 0) | $\bar{a} = i + k$ |
| d) $\phi = xyz$ | P(1, 2, 3) | $\bar{a} = i - 2j + 3k$ |

Solución:

a) $\frac{d\phi}{ds} = \frac{10}{3} \sqrt{3}$	c) $\frac{d\phi}{ds} = \frac{-e^6}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{9} \sqrt{2}$	d) $\frac{d\phi}{ds} = \frac{6}{\sqrt{14}}$

7.- Calcular la divergencia de las funciones.

- a) $\bar{v} = e^{xyz}(i + j - k)$
 b) $\bar{v} = (xi + yj)/(x^2 + y^2)$
 c) $\bar{v} = (\cos x)(\sinh y)i + (\cos x)(\cosh y)j$

Solución:

a) $\nabla \cdot \bar{v} = yz e^{xyz}i + xz e^{xyz}j - xy e^{xyz}k$
 b) $\nabla \cdot \bar{v} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} i + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} j$
 c) $\nabla \cdot \bar{v} = (\cos x)(\sinh y)i + (\cos x)(\sinh y)j$

8.- Hallar el $\text{rot } \bar{v}$ de las siguientes funciones vectoriales.

- a) $\bar{v} = xi + 3xyj + 2zk$
 b) $\bar{v} = -xi + yj - (x^2 - y^2 - z^2)k$
 c) $\bar{v} = (xi + yj + zk)/(x^2 + y^2 + z^2)$

Solución:

a) $\text{rot } \bar{v} = 3y\bar{k}$

b) $\text{rot } \bar{v} = -2y\bar{i} - 2x\bar{j}$

c) $\text{rot } \bar{v} = (2y/z^3 - 2z/y^3)\bar{i} + (-2x/z^3 + 2z/x^3)\bar{j} + (-2y/x^3 + 2x/y^3)\bar{k}$

9.- Demostrar que.

a) $\text{rot } (\bar{u} + \bar{v}) = \text{rot } \bar{u} + \text{rot } \bar{v}$

b) $\text{div } (\phi \nabla \theta \times \theta \nabla \phi) = 0$

c) $\text{div } (\text{rot } \bar{v}) = 0$

d) $\text{rot } (\text{grad } \phi) = 0$

donde $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son funciones vectoriales y ϕ y θ son escalares.

10.- La velocidad de un fluido es $\bar{v} = 4x\bar{i} + 2y\bar{j}$, hallar el $\text{rot } \bar{v}$ y decir si el flujo es incompresible.

Solución:

$\text{rot } \bar{v} = 0$, $\text{div } \bar{v} = 6$, el flujo no es incompresible

REGRESE A LA PAGINA 10

Integración Vectorial:

La integración vectorial sigue las mismas reglas que la integración de escalares. Sea $\bar{V}(t)$ una función escalar, entonces su integración se realiza así:

$$\int \bar{V}(t) dt = \bar{i} \int v_1(t) dt + \bar{j} \int v_2(t) dt + \bar{k} \int v_3(t) dt \quad (\text{A.84})$$

Integrales curvilíneas:

Este concepto es aplicable a curvas continuas lisas a trozos, es decir curvas continuas que consisten de un número finito de arcos en cada uno de los cuales la tangente varía continuamente. Sea $F(x, y)$ una función que nada tiene que ver con la curva C , ver fig A.26.

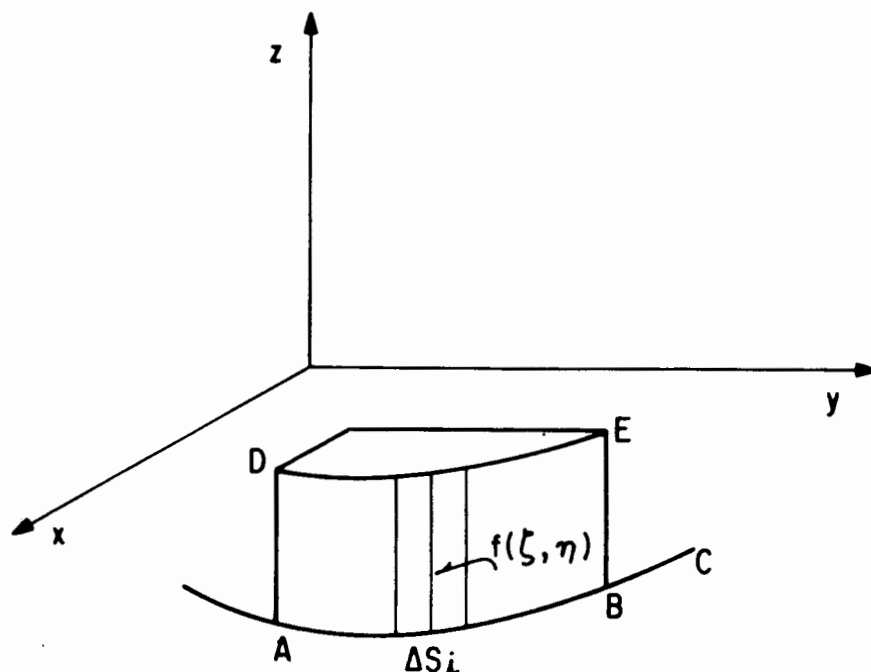


Fig A.26. Integral curvilínea

Si la curva C se divide en n arcos Δs y se proyectan sobre los ejes x y y , se obtiene Δx_i y Δy_i , en los cuales puede valorarse la función $f(\xi_i, \eta_i)$, ver fig A.27.

Si se valúa $F(x, y)$ en cada punto (ξ_i, η_i) y se forman los productos:

$$F(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad F(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i, \quad F(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (A.85)$$

para la suma todas las subdivisiones del arco AB se tiene:

$$\sum_{i=1}^n F(\zeta_i, \eta_i) \Delta x_i \quad , \quad \sum_{i=1}^n F(\zeta_i, \eta_i) \Delta y_i \quad , \quad \sum_{i=1}^n F(\zeta_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (A.86)$$

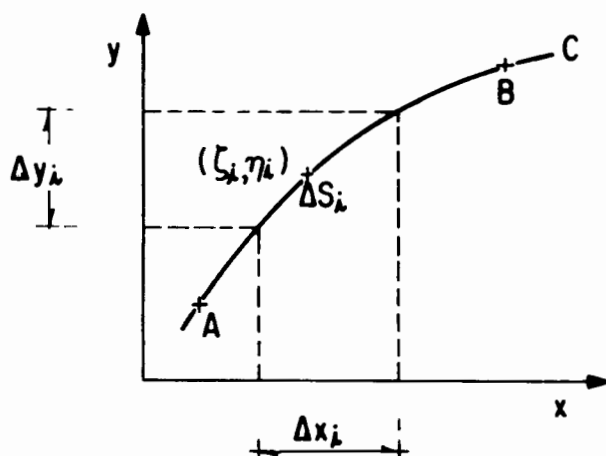


Fig A.27. Subdivisión de la curva C en arcos Δs_i

Si $n \rightarrow \infty$, $\Delta s_i \rightarrow 0$ y entonces:

$$\int_c F(x, y) dx \quad \int_c F(x, y) dy \quad \int_c F(x, y) ds \quad (A.87)$$

Estas son las llamadas integrales curvilíneas, el concepto puede extenderse fácilmente a tres direcciones:

$$\int_c F(x, y, z) dx \quad \int_c F(x, y, z) dy \quad \int_c F(x, y, z) dz \quad (A.88)$$

Si la curva es cerrada la notación usada es:

$$\oint F(x, y) \, ds \quad (A.89)$$

Nótese que en $F(x, y) \, ds$ los dos factores son escalares, si se emplean vectores deberá escribirse la integral curvilínea así:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (A.90)$$

Ejemplo A.11.

Cuál es el valor de $\int_A^B \frac{1}{x+y} \, dx$ a lo largo de los caminos mostrados en la fig A.28.

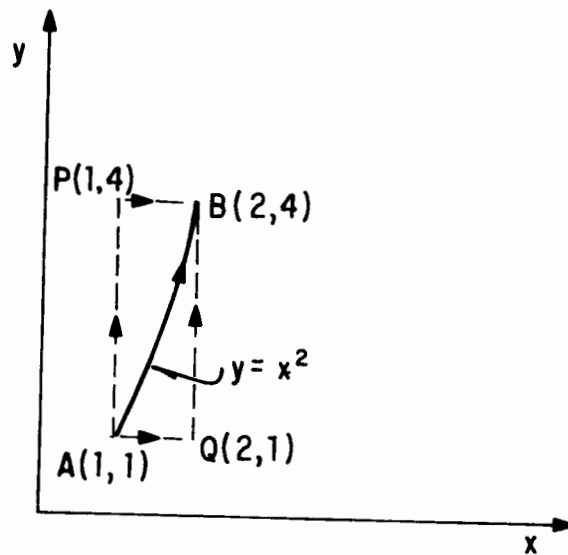


Fig A.28. Caminos de integración del problema A.11.

A lo largo de la curva $y = x^2$

$$\int_1^2 \frac{1}{x + x^2} \, dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \left[\ln x - \ln (1+x) \right]_1^2 =$$

$$= \ln \frac{4}{3}$$

A lo largo de APB:

dado que en AP, $x = \text{cte}$ la integral vale cero, a lo largo de PB, $y = 4$, entonces:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+4} = \left[\ln(x+4) \right]_1^2 = \ln \frac{6}{5}$$

A lo largo de QB, la integral vale cero dado que $x = \text{cte}$.

En general el valor de la integral curvilínea depende del camino de integración. En este caso no es así. Se demuestra que una integral curvilínea $\int_C (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$ es independiente del camino de integración siempre que exista una función $\phi(x, y, z)$ tal que $d\phi = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$.

Ejemplo A.12:

Hallar el trabajo realizado por la fuerza:

$$\vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$$

para desplazar una partícula desde el origen hasta $C(1, 1, 1)$

a) A lo largo de la recta OC

b) A lo largo de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$

Solución:

Utilizando la ecuación A.90:

$$\begin{aligned}\bar{F} \cdot d\bar{r} &= [(x + yz)\bar{i} + (y + xz)\bar{j} + (z + xy)\bar{k}] \cdot (\bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz) \\ &= (x + yz)dx + (y + xz)dy + (z + xy)dz\end{aligned}$$

a) Para la recta, OC $x = y = z$, $dx = dy = dz$
entonces:

$$\int_c^{(1,1,1)} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 3 \int_{(0,0,0)}^1 (x + x^2)dx = \left[\left(\frac{3}{2} x^2 + x^3 \right) \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

b) A lo largo de la curva, $x = t$, $dx = dt$, $y = t^2$, $dy = 2tdt$,
 $z = t^3$, $dz = 3t^2 dt$. En el punto cero, t vale 0, y en C , t
vale 1

$$\int_0^1 (t + t^5)dt + (t^2 + t^4)2tdt + (t^3 + t^3)3t^2dt =$$

$$= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5)dt = \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t^4 + \frac{3}{2} t^6 \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

El concepto de integral curvilínea puede extenderse fácilmente al de integrales de superficie y de volumen. Sea S una superficie cualquiera, ver fig A.29 que se divide en n áreas ΔS_i , si en cada punto P_i de estas subdivisiones se calcula la función $F(x, y)$ entonces:

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_S F(x, y) dS \quad (A.91)$$

en tres dimensiones se tiene:

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \iiint_V F(x, y, z) dS \quad (A.92)$$

en forma vectorial, la ecuación A.91 se puede escribir así:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (A.93)$$

donde $d\vec{S} = \vec{n} dS$, ver fig A.30.

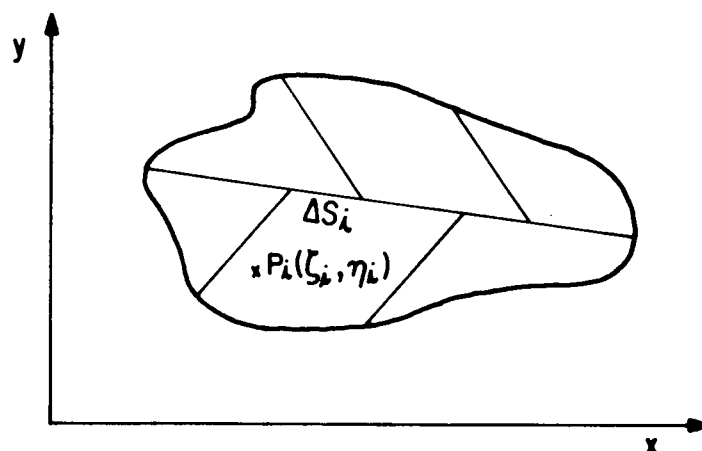


Fig A.29. División de una superficie S en n áreas ΔS_i
A.51

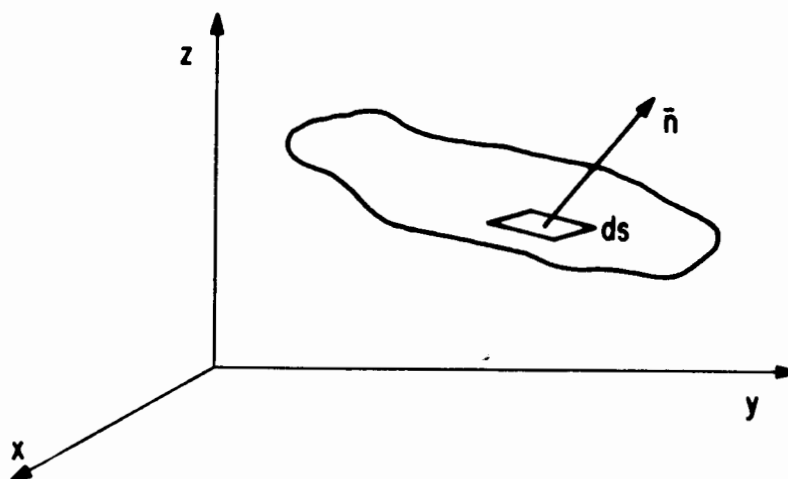


Fig A.30. Localización del vector normal $\bar{n}$ sobre una superficie

También se puede definir las integrales de volumen:

$$I_1 = \iiint_V A \, dV \quad (A.94)$$

$$I_2 = \iiint_V \phi \, dV \quad (A.95)$$

Ejemplo A.13:

Encontrar la integral de superficie $\iint_S \bar{A} \cdot \bar{n} \, dS$ si $\bar{A} = 20z\bar{i} - 10y\bar{j} + 10y\bar{k}$ y S la región del plano $2x + 4y + 4z = 8$ situada en el primer octante, ver fig A.31.

Solución:

Suponiendo que R es la proyección de la superficie S sobre el plano xy , se puede demostrar que:

$$\iint_S \bar{A} \cdot \bar{n} \, dS = \iint_R \bar{A} \cdot \bar{n} \frac{dx \, dy}{|\bar{n} \cdot \bar{k}|}$$

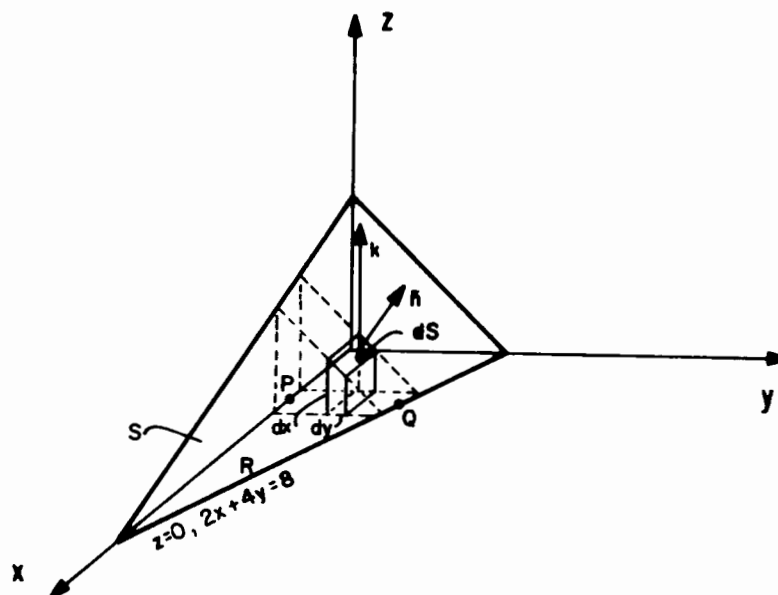


Fig A.31. Superficie S y su proyección sobre el plano xy .

Para obtener $\bar{n}$ que es un vector perpendicular a la superficie $2x + 4y + 4z = 8$ se utiliza:

$$\nabla (2x + 4y + 4z) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

entonces un vector unitario normal en un punto de S es:

$$\bar{n} = \frac{2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2}} = \frac{2}{6}\mathbf{i} + \frac{4}{6}\mathbf{j} + \frac{4}{6}\mathbf{k}$$

de aquí :

$$\bar{n} \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{2}{6}\mathbf{i} + \frac{4}{6}\mathbf{j} + \frac{4}{6}\mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{k} = \frac{4}{6}$$

y

$$\frac{dx \, dy}{|\bar{n} \cdot \mathbf{k}|} = \frac{6}{4} \, dx \, dy$$

por otro lado:

$$\begin{aligned}\bar{A} \cdot \bar{n} &= (20zi - 10j + 10yk) \left(\frac{2}{6}i + \frac{4}{6}j + \frac{4}{6}k \right) = \\ &= \frac{40z - 40 + 40y}{6} = \frac{40 - 20x}{6}\end{aligned}$$

debido a que: $z = \frac{8 - 2x - 4y}{6}$, entonces:

$$\begin{aligned}\iint_S \bar{A} \cdot \bar{n} \, dS &= \iint_R \bar{A} \cdot \bar{n} \frac{dx \, dy}{|\bar{n} \cdot \bar{k}|} = \iint_R \left(\frac{40 - 20x}{6} \right) \frac{6}{4} \, dx \, dy \\ &= \iint_R (10 - 5x) \, dx \, dy\end{aligned}$$

Para hallar esta integral extendida a R , se mantiene fijo x y se integra con respecto a y desde $y = 0$ (P en la figura) a $y = \frac{8 - 2x}{4}$ (Q en la figura A.26) a continuación, se integra con respecto a x desde $x = 0$ a $x = 4$. De esta forma se recorre R por completo. Haciendo operaciones.

$$\int_0^4 \int_0^{(8-2x)/4} (10 - 5x) \, dy \, dx = \int_0^4 \left(\frac{10}{4} x^2 - 15x + 20 \right) \, dx = \frac{40}{3}$$

Si se hubiera tomado como sentido positivo del vector unitario normal $\bar{n}$ el opuesto al de la fig A.31, el resultado obtenido sería $-\frac{40}{3}$.

Ejemplo A.14.

Sea $\vec{F} = 2xi + yj$, encontrar $\iiint_V \vec{F} \cdot d\vec{V}$ siendo V el volumen limitado por la superficie $z = 4 - x^2$ y los planos $x = 0$, $y = 2$ y $z = 0$.

Solución:

La región V se recorre de la siguiente manera.

- a) manteniendo x e y fijos e integrando desde $z = 0$ hasta $z = 4 - x^2$.
- b) manteniendo fijo x e integrando desde $y = 0$ hasta $y = 2$.
- c) integrando desde $x = 0$ hasta $x = 2$ (en donde $z = 4 - x^2$ corta a $z = 0$).

Así pues, la integral es:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^2 (2x + y) dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (8x - 2x^3 + 4y - x^2 y) dy dx$$

$$\int_0^2 (16x - 2x^3 - 4x^3 + 8) dx = 26.66$$

REGRESE A LA PAGINA 24

TEOREMAS INTEGRALES:

- 1.- Teorema de la divergencia de Gauss. Sea V un volumen limitado por una superficie cerrada S y $\vec{V}$ una función vectorial derivable, entonces:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{V} dV = \int_V \text{div } \vec{V} dV = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \oint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.96})$$

donde $\bar{n}$ es el vector normal a la superficie, ver fig A.32.

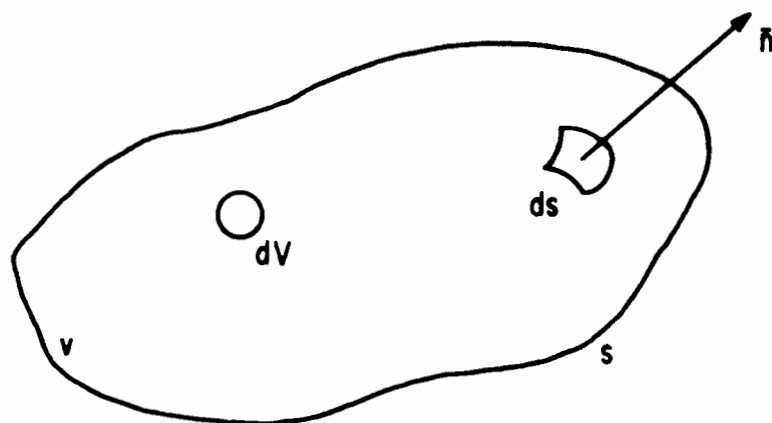


Fig A.32. Volumen de integración del teorema de Gauss.

Ejemplo A.15.

Comprobar el teorema de la divergencia de Gauss, para $\bar{V} = 4x\bar{i} - 2y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ sobre la región dada por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y $z = 3$

Solución:

Utilizando la integral de Volumen.

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \bar{V} \, dV &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (4x) + \frac{\partial}{\partial y} (-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z} (z^2) \right] dV \\ &= \iiint_V (4 - 4y + 2z) \, dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \int_{z=0}^{z=3} (4 - 4y + 2z) \, dz \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$= 42 \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{2} 4 \arcsin \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2$$

$$= 84 \pi$$

Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss el resultado debe ser el mismo.

Integral de superficie, ver fig A.33.

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n} dS_1 + \iint_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n} dS_2 + \iint_{S_3} \vec{V} \cdot \vec{n} dS_3$$

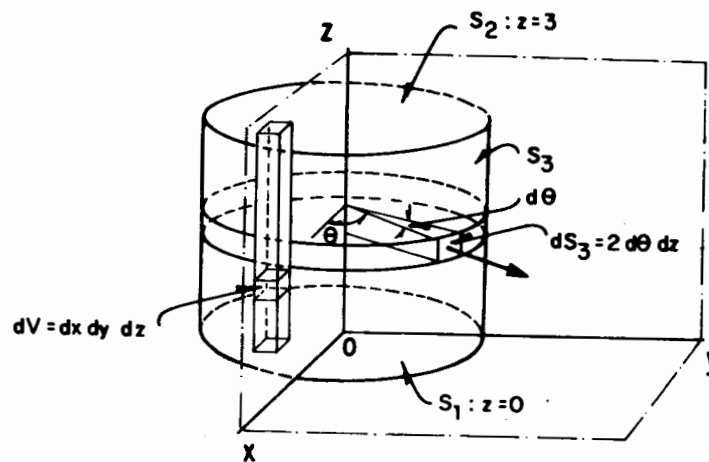


Fig A.33. Superficie de integración del ejemplo A.15.

La superficie S del cilindro está formada por dos bases

$S_1 (z = 0)$ y $S_2 (z = 3)$, y la superficie convexa $S_3 (x^2 + y^2 = 4)$.
sobre $S_1 (z = 0)$, $\bar{n} = \bar{k}$, $\bar{V} = 4x\bar{i} - 2y\bar{j}$

$$\bar{V} \cdot \bar{n} = 0, \quad \text{entonces} \quad \iint_{S_1} \bar{V} \cdot \bar{n} \, dS_1 = 0$$

sobre $S_2 (z = 3)$, $\bar{n} = \bar{k}$, $\bar{V} = 4x\bar{i} - 2y^2\bar{j} + 9\bar{k}$, y

$$\bar{V} \cdot \bar{n} = 9 \quad \text{entonces} \quad 9 \iint_{S_2} dS_2 = 36\pi$$

(ya que el área del círculo de diámetro 4 es 4π)

sobre $S_3 (x^2 + y^2 = 4)$, el vector perpendicular a S_3 tiene el sentido de $\nabla(x^2 + y^2) = 2x\bar{i} + 2y\bar{j}$, y el vector unitario normal $\bar{n}$ será:

$$\bar{n} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j}}{\sqrt{4(x^2 + y^2)}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

entonces:

$$\bar{V} \cdot \bar{n} = 2x^2 - y^3$$

en coordenadas polares:

$$x = 2\cos \theta$$

$$y = 2\sen \theta$$

$$dS_3 = 2 \, d\theta \, dz$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \bar{V} \cdot \bar{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[2 (2\cos \theta)^2 - (2\sin \theta)^3 \right] 2 \, dz \, d\theta \\ &= 48 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 48\pi \end{aligned}$$

por lo que al sumar las integrales de superficie resulta:

$$\int_{S_1} \int_{S_2} \int_{S_3} \bar{V} \cdot \bar{n} \, dS = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$$

que es igual al resultado obtenido utilizando la integral de volumen.

2.- Extensión del teorema de la divergencia de Gauss. Si además de las variables definidas anteriormente, se acepta que $\bar{U}$ también es una función vectorial derivable, se cumple que:

$$\int_S \bar{U} (\bar{V} \cdot d\bar{S}) = \int_V \left[\bar{U} (\nabla \cdot \bar{V}) + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{U} \right] dV \quad (A.97)$$

3.- Teorema de Gauss aplicado al producto vectorial:

$$\int_V \nabla \times \bar{V} \, dV = \int_S (\bar{n} \times \bar{V}) \, dS = \int_S d\bar{S} \times \bar{V} \quad (A.98)$$

4.- Teorema del rotacional de Stokes. Sea S una superficie abierta, C una curva cerrada simple situada sobre S , y $\bar{V}$ una función vectorial derivable. C se recorre en sentido positivo, esto es el camino que seguiría un observador sobre C , de tal manera que siempre tuviera a su izquierda a la superficie S , ver fig A.34. Además $d\bar{r}$ es un vector tangente a C , bajo estas condiciones, se cumple que:

$$\int_V \bar{V} \cdot d\bar{r} = \int_V \text{rot } \bar{V} \cdot \bar{n} dS = \int_S \nabla \times \bar{V} \cdot \bar{n} dS = \oint_S \nabla \times \bar{V} \cdot d\bar{S} \quad (\text{A.99})$$

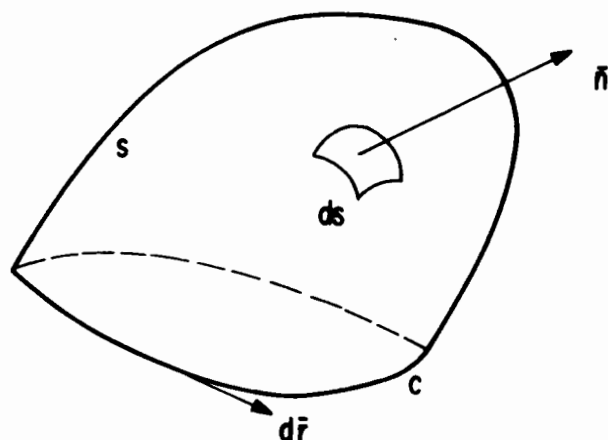


Fig A.34. Superficie de integración del teorema de Stokes

5.- Teorema de Green en el plano. Si R es una región plana limitada por un número finito de curvas simples cerradas (que no se cruza a sí misma) ver fig A.35, y si $U(x, y)$, $V(x, y)$, $\partial U/\partial y$ y $\partial V/\partial x$ son continuas en todo punto de R y de su contorno C , entonces:

$$\int_C U dx + V dy = \iint_R \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dx dy \quad (\text{A.100})$$

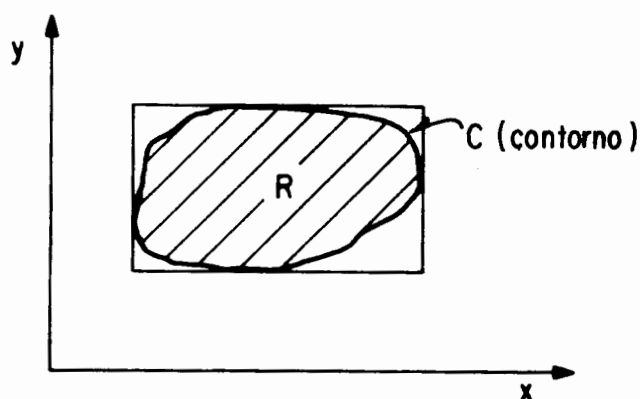


Fig A.35. Región de integración del teorema de Green.

Ejemplo A.16.

Calcular $\oint_C (y - \operatorname{sen} x) dx + \cos x dy$

siendo C el triángulo mostrado en la fig A.36.

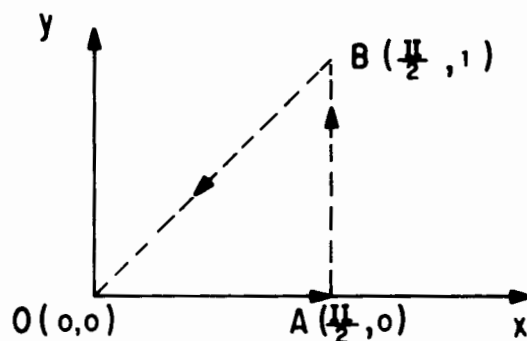


Fig A.36. Triángulo del ejemplo A.16.

Solución:

A lo largo de OA , $y = 0$, $dy = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} (0 - \operatorname{sen} x) dx + \cos x (0) = \\ & = \int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen} x dx = \cos x \Big|_0^{\pi/2} = -1 \end{aligned}$$

A lo largo de AB , $x = \pi/2$, $dx = 0$, entonces:

$$\int_0^1 (y - 1) (0) + (0) dy = 0$$

A lo largo de BO , $y = \frac{2}{\pi} x$, $dy = \frac{2}{\pi} dx$, luego:

$$\int_{\pi/2}^0 \left[\frac{2}{\pi} x - \operatorname{sen} x \right] dx + \frac{2}{\pi} \cos x dx =$$

$$= \left. \frac{x^2}{\pi} + \cos x + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x \right]_{\pi/2}^0 = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$$

la integral a lo largo de C vale

$$-1 + 0 + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$$

Aplicando el teorema de Green en el plano:

$$\text{si} \quad U = y - \operatorname{sen} x \quad y \quad V = \cos x$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 1$$

entonces:

$$\int_C U \, dx + V \, dy = \iint_R \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dx \, dy =$$

$$\iint_R (-\operatorname{sen} x - 1) \, dy \, dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi/2} \left[\int_{y=0}^{y=2x/\pi} (-\operatorname{sen} x - 1) \, dy \right] dx = \int_0^{\pi/2} (-y \operatorname{sen} x - y) \Big|_0^{2x/\pi} dx =$$

$$= \int \left(-\frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi} x \right) dx = -\frac{2}{\pi} (-x \cos x + \operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$$

que es igual al resultado obtenido anteriormente.

6.- Generalización del teorema de Green. Si la curva C es cortada en más de dos puntos por una recta paralela a los ejes región múltiplemente convexa, ver fig A.37, el teorema de Green puede generalizarse como se indica a continuación.

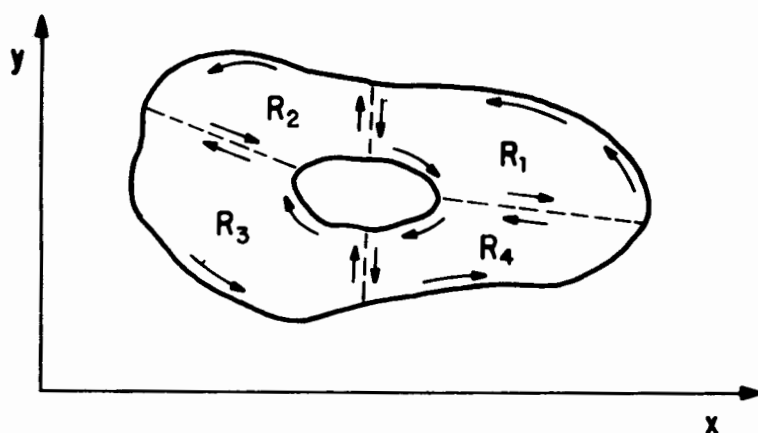


Fig A.37. Región de integración de la generalización del teorema de Green.

Divídase la región R en n subregiones en un sentido tal que un observador que se mueva a lo largo de C , tiene siempre el interior de la región R a su izquierda, ver fig A.37, de esta manera se debe aplicar el teorema en cada subregión R_i , y sumar el total de las subregiones, en el caso de la fig A.37, se tendría:

$$\int_{C_1} U dx + V dy = \int_{R_1} \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dx dy \quad (A.101)$$

$$\int_{C_2} U dx + V dy = \int_{R_2} \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dx dy \quad (A.102)$$

$$\int_{C_3} U dx + V dy = \int_{R_3} \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dx dy \quad (A.103)$$

$$\int_{C_4} U dx + V dy = \int_{R_4} \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dx dy \quad (A.104)$$

Sumando

$$\int_C U dx + V dy = \int_R \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] dx dy \quad (A.105)$$

7.- Primera identidad de Green. Sean ϕ y ψ dos funciones escalares, entonces se cumple que:

$$\int_V \left[\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \right] dV = \int_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} \quad (A.106)$$

8.- Segunda identidad de Green:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{S} \quad (A.107)$$

Existen otros teoremas integrales que quedan fuera del alcance de estos apuntes.

REGRESE A LA PAGINA 25

F/DEPFI/D-84/1990/EJ.5



702495