



45/ Dept
K. Guis

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

LIBRERÍA CONJUNTA DEL INSTITUTO
DE INGENIERÍA Y DE LA DIVISIÓN

* OCT. 6 1994 *

DE ESTUDIOS DE POSGRADO
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Introducción al
Control Nolineal

Yu Tang

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DEPFI

PROLOGO

En la práctica, casi todos los sistemas son no-lineales. Para el análisis y diseño del sistema de control, se puede optar por métodos lineales, que linealizan el sistema alrededor de un punto de operación y diseñar el sistema de control basado en el método linealizado; o por métodos no lineales, que analizan y diseñan el sistema de control basado en un modelo no-lineal. Las ventajas de este último son entre otras, la simplicidad del diseño, robustez con respecto a la incertidumbre y el mejor desempeño con respecto a métodos basados en un modelo lineal.

Los objetivos de este apunte son, a través de conceptos básicos y ejemplos simples, introducir al lector al control no lineal, los métodos básicos de análisis y diseño de sistemas no-lineales. Muchos ejemplos de este apunte se han preparado con el paquete de simulación SIMNON. Por la naturaleza de un curso introductorio, este apunte evita el uso del enfoque geométrico, que se trata con profundidad en Isidori (1989) y Nijimeijer & Van der Shaft (1990).

El apunte consta de siete capítulos. Después de la introducción (Capítulo 1), cada capítulo trata un tópico relacionado al control no-lineal: el plano de fase, la estabilidad Lyapunov, la función descriptiva, el control deslizante, el control adaptable, y por último, el control no-lineal de una clase de plantas no-lineales.

El material del apunte fue dado en un curso intensivo en el Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana, y preparado con $\text{\LaTeX}$ por la Srta. Beatriz Merlo. El proyecto fue apoyado por la Dirección General de Auntos Académicos bajo el Proyecto DGAPA IN-300593.

Junio de 1994.

INDICE

PROLOGO

CAPITULO 1. Introducción. 1

1.1 Ejemplos simples. 2

CAPITULO 2. Análisis en el Plano de Fase. 4

2.1 Conceptos de análisis en el plano de fase. 4

2.2 Contrucción del plano de fase. 4

2.3 Determinación del tiempo. 6

2.4 Análsis para sistemas no-lineales. 6

2.5 Existencia de ciclos de límite. 9

CAPITULO 3. Fundamentos de la Teoria de Estabilidad Lyapunov. 11

3.1 Conceptos de estabilidad. 11

3.2 Método Directo: linealización y estabilidad local. 13

3.3 Método directo. 15

3.4 Análisis de sistemas basado en el método Directo. 17

3.5 Diseño de sistemas de control en el método directo. 20

CAPITULO 4. Análisis por la Función Descriptiva. 22

4.1 Fundamentos de la función descriptiva. 22

4.2 Funciones descriptivas de las nolinealidades comunes. 26

4.3 Análisis de sistemas no-lineales. 28

CAPITULO 5. Control de Modo Deslizante. 30

5.1 Superficies de deslización. 30

5.2 Aproximaciones continuas de la función de conmutación. 35

CAPITULO 6. Control Adaptable. 38

6.1 Control adaptable para sistemas lineales. 38

6.2 Control adaptable para sistemas no-lineales. 43

6.3 Control Adaptable v.s. Control Robusto. 45

CAPITULO 7. Control de una Clase de Sistemas No-lineales. 46

7.1 Pasividad y resultados relacionados. 46

7.2 Formulación del problema. 48

7.3 Diseño de $u_1 = Fu$. 51

7.4 Diseño de la ley de control. 53

REFERENCIAS

Capítulo 1

Introducción

Sistema lineal: Un sistema lineal satisface el principio de linealidad (superposición y homogeneidad).

Sea L un sistema lineal, cuya entrada es u , salida y ,

$$y = L(u)$$

- Superposición : $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
- Homogeneidad : $L(\alpha u) = \alpha L(u), \forall \alpha \in R$

Sistema no-lineal: Sistema que contiene por lo menos un elemento no lineal.

Control no-lineal. En el control no-lineal, se consideran los dos aspectos: análisis y diseño.

- Análisis: Determinar las características de un sistema (estabilidad, controlabilidad, observabilidad, etc.) para explicar y predecir el comportamiento, y/o diseñar un controlador para el mismo.
- Diseño: Dada una planta no-lineal y las especificaciones en malla cerrada, encontrar el controlador tal que el sistema en malla cerrada satisfaga las especificaciones.

Porqué el control no-lineal

- Mejoramiento sobre un sistema de control existente, ya que el sistema de control no-lineal está diseñado para un amplio rango de operaciones.
- Análisis de no linealidades duras (no-linealidades que no permiten una linealización, por ejemplo, la saturación)
- Robustez con respecto a incertidumbres. En los problemas reales, siempre existen incertidumbres, ya sean paramétricas o no-paramétricas. El control no-lineal trata las incertidumbres de manera explícita, obteniendo un sistema de control mas robusto.
- Simplicidad en el diseño. En muchos casos, el modelo no-lineal refleja ciertas propiedades físicas de la planta que pueden usarse en el análisis de sistema, simplificando el diseño del controlador.

Símbolos

$\lambda(A)$: valores propios de una matriz A .

$\Rightarrow$: implica.

$\Leftrightarrow$: implica e implicado.

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$): espacio lineal de dimensión n formado por los reales (complejos).

$\mathcal{C}[0, \infty)$: espacio lineal de funciones cuyas primeras n derivadas son continuas.

$\mathcal{R}^n(s)$: conjunto de funciones de transferencia racionales de orden n .

1.1 Ejemplos Simples.

A continuación se ilustran con ejemplos unos comportamientos típicos de sistemas no lineales con respecto a sistemas lineales.

Ejemplo 1. Sistemas lineales. Dado un sistema lineal en forma de ecuación de variables de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

La solución, dada $x(0)$, es

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

y tiene las siguientes propiedades

- Si A es estable, i.e. $\text{Re}\lambda(A) < 0$, u acotado $\Rightarrow y$ acotado.
- Si $u(t) = \sin(w_0 t) \Rightarrow y(t) = M(w_0) \sin(w_0 t + \alpha(w_0))$, $t \rightarrow \infty$, donde $M(w_0)$, $\alpha(w_0)$ es la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia del sistema, respectivamente.
- Si A es no-singular, i.e., $\det(A) \neq 0$, la ecuación solo tiene un punto de equilibrio (un punto de equilibrio es el punto en el espacio de variables de estado que anula la derivada cuando la entrada al sistema es cero).

Ejemplo 2. Violación a la Homogenidad. Consideramos el sistema dado por

$$\dot{v} + |v|v = u$$

$$\text{sea } v_s = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$$

$$u = 1 \Rightarrow 0 + |v_s|v_s = 1$$

$$\Rightarrow v_s = 1$$

$$u = 10 \Rightarrow 0 + |v_s|v_s = 10$$

$$\Rightarrow v_s = \sqrt{10} = 3.2$$

Ejemplo 3. Puntos de equilibrio multiples. Dado un sistema

$$\dot{x} = -x + x^2$$

Se encuentran los puntos de equilibrio igualando $\dot{x}(t) = 0$

$$0 = \dot{x} = -x + x^2 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

Ejemplo 4. Ciclo Límite. Consideramos la ecuación Van der Pol, dada por

$$m\ddot{x} + 2c(x_2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

donde $m, c, k > 0$. Las soluciones de esta ecuación para condiciones iniciales distintas de cero convergen a una solución periodica (ciclo límite). (Reproducirlo con SIMNON).

Ejemplo 5. Bifurcaciones. En la ecuación

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

el número de puntos de equilibrio puede cambiar cuando varia el parámetro α .

$$\alpha < 0 \Rightarrow x_e = 0$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow x_e = 0, \pm\sqrt{\alpha}$$

Ejemplo 6. Caos. En la ecuación

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6 \sin t$$

las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = 2.0 \\ \dot{x}(0) = 3.0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = 2.01 \\ \dot{x}(0) = 3.01 \end{cases}$$

se difieren totalmente después de un corto periodo. El comportamiento caos se refiere a la sensibilidad extrema de las soluciones de una ecuación diferencial a las condiciones iniciales.

Capítulo 2

Análisis en el Plano de Fase

Para sistemas de segundo orden dados por

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

se puede analizarlos en el plano formado por x_1 y x_2 trazando las trayectorias para distintas condiciones iniciales.

2.1 Conceptos del Análisis en el Plano de Fase

Plano de Fase: Es el plano formado por x_1 (x) y x_2 ($\dot{x}$).

Trayectoria: Es una curva en el plano de fase que representa una solución de (2.1-2.2) correspondiente a una condición inicial.

Retrato de Fase: Es una familia de trayectorias.

Punto singular: Es un punto de equilibrio en el plano de fase.

Ejemplo 1. Plano de fase de una ecuación lineal

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos t$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \sin t$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2(t) + x^2(t) = x_0^2$$

es decir, dada x_0 , el retrato de fase corresponde a un conjunto de círculos centrados en cero con radio x_0^2 .

2.2 Construcción del Plano de Fase

Existen dos métodos principales para la construcción de los planos de fase: método analítico y método de isoclinas.

Método analítico: Este método consiste en resolver analíticamente la ecuación (2.1-2.2).

Ejemplo 2. Traza del plano de fase por el método analítico.

$$\dot{x} + x = 0$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow \dot{x} \frac{dx}{dx} + x = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} dx + x dx = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + x^2 = x_0^2$$

Método Isoclinas: De la ecuación (2.1-2.2),

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha$$

$$\Rightarrow dx_2 = \alpha dx_1, \quad x_2 - x_{20} = \alpha(x_1 - x_{10})$$

Es decir, líneas con pendiente α .

Ejemplo 3. Traza del plano de fase por el método isoclinas.

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, x) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -f(\dot{x}, x)$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}} = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \dot{x} + f(\dot{x}, x) = 0$$

Ejemplo 4. Traza del plano de fase para la ecuación Van der Pol

$$\ddot{x} + \underbrace{0.2(x^2 - 1)\dot{x}}_{f(x, \dot{x})} + x = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \dot{x} + 0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\frac{x}{\alpha + 0.2(x^2 - 1)}$$

$$\alpha = 0: \quad \dot{x} = -5 \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\alpha = 1: \quad \dot{x} = -\frac{x}{1 + 0.2(x^2 - 1)}$$

$$\alpha = -1: \quad \dot{x} = -\frac{x}{-1 + 0.2(x^2 - 1)}$$

2.3 Determinación de Tiempo

El tiempo transcurrido entre dos puntos cercanos x_1 y x_2 se puede determinar de manera aproximada por

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

De este modo, para calcular el tiempo transcurrido entre dos puntos arbitrarios, se puede sumar los tiempos transcurridos entre los puntos consecutivos a lo largo de la trayectoria que une los dos puntos de interés.

2.4 Análisis para Sistemas No-Lineales

En esta sección se presenta el análisis de sistemas no-lineales en el plano de fase a través de la linealización en un punto de equilibrio.

Ejemplo 5. Puntos Singulares de un Sistema lineal de Segundo Orden. Consideramos la ecuación

$$\dot{x} = Ax$$

con la condición inicial

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

donde x está representada con respecto a la base natural,

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la base natural.}$$

Haciendo una transformación equivalente,

$$z = Qx$$

donde

$$z = [q_1 \ q_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2 \quad \text{una base}$$

se obtiene

$$Q\dot{x} = QAQ^{-1} \cdot Qx$$

$$J = QAQ^{-1}$$

$$\dot{z} = Jz, \quad z(0) = z_0$$

Caso 1: Forma diagonal

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = z_{10} e^{\lambda_1 t} \\ z_2 = z_{20} e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$$\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow z_2 = z_{20} e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \frac{z_1}{z_{10}}} = z_{20} \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Caso 2: Forma Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \lambda z_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = z_{10} e^{\lambda t} + z_{20} t e^{\lambda t} \\ z_2 = z_{20} e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{z_2}{z_{20}}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(z_{10} + \frac{z_{20}}{\lambda} \ln \frac{z_2}{z_{20}} \right) \cdot e^{\ln \frac{z_2}{z_{20}}} \\ &= \left(z_{10} + \frac{z_{20}}{\lambda} \ln \frac{z_2}{z_{20}} \right) \frac{z_2}{z_{20}} \\ &= \frac{z_{10}}{z_{20}} z_2 + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{z_2}{z_{20}} z_2 \end{aligned}$$

Caso 3: Los valores propios son complejos.

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ +\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 = \beta z_1 + \alpha z_2 \end{cases}$$

Sean

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \phi = \log^{-1} \frac{z_2}{z_1}$$

$$\dot{r} = \frac{2z_1 \dot{z}_1 + 2z_2 \dot{z}_2}{2\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} = \frac{z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} = \frac{\alpha(z_1^2 + z_2^2)}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} = \alpha r$$

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{z}_2 z_1 - z_2 \dot{z}_1}{z_1^2 + z_2^2} = \frac{(\beta z_1 + \alpha z_2) z_1 - (\alpha z_1 - \beta z_2) z_2}{z_1^2 + z_2^2} = \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) = r(0)e^{\alpha t} \\ \phi(t) = \phi(0) + \beta t \end{cases}$$

En resumen

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0. \Rightarrow$ nodo inestables

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0. \Rightarrow$ nodo estable

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0. \Rightarrow$ punto de silla

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

$\alpha < 0 \Rightarrow$ foco estable

$\alpha > 0 \Rightarrow$ foco inestable

$\alpha = 0 \Rightarrow$ punto centro

Ejemplo 6. Análisis de Sistema No-lineal (linealización). En la ecuación

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

definiendo $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ se tiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = -0.6x_2 - 3x_1 - x_1^2 = f_2 \end{cases}$$

Puntos de equilibrio: $x_e = (0, 0), (-3, 0)$

Linealización en $x_e = (0, 0)$: Alrededor del x_e , se puede aproximar la ecuación no-lineal por una lineal

$$\frac{d}{dt}(x - x_e) = A(x - x_e)$$

donde

$$A = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.6 \end{bmatrix}$$

y la estabilidad en este punto se determina basado en los valores propios de la matriz A .

$$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + 0.6) + 3 = \lambda^2 + 0.6\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{-0.6 \pm \sqrt{0.6^2 - 12}}{2} \Rightarrow \text{un foco estable}$$

Linealización en $x_e = (-3, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -0.6 \end{bmatrix}$$

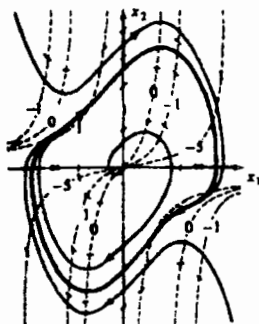
$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 0.6 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 0.6\lambda - 3 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0.36 + 12 > 0$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3 \Rightarrow \text{nodo inestable}$$

Se recuerda que un ciclo límite de una ecuación no-lineal es una solución periódica. En el plano de fase, esto representa una curva cerrada *aislada*.

Ejemplo 7. Ecuación Van der Pol.



Compare este ejemplo con el Ejemplo 1.

2.5 Existencia de Ciclos Límites.

A continuación se presentan una condición necesaria de existencia de ciclos de límites y una condición suficiente de no-existencia de ciclos de límites en el plano de fase.

Teorema Poincaré: Sean

N=número de nodos, centros y focos encerrados en un ciclo límite

S=puntos silla encerrados en el ciclo límite

Si existe un ciclo límite, $\Rightarrow N = S + 1$

Teorema Bendixson:

Si $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq 0$ y no cambia de signo $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Rightarrow$ no existen ciclos límites en Ω .

Ejemplo 8. Sea g y h dos funciones continuas arbitrarias,

$$\dot{x}_1 = g(x_2) + 4x_1x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = h(x_1) + 4x_1^2x_2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4(x_1^2 + x_2^2) \neq 0$$

$$\forall x_1, x_2 \neq 0$$

por lo tanto, no existe ningún ciclo límite en $\mathbb{R}^2$.

En

na

Capítulo 3

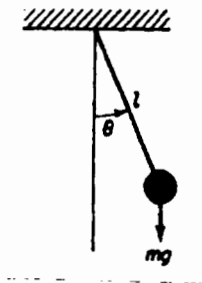
Fundamentos de la Teoría de Estabilidad Lyapunov

Este capítulo presenta una herramienta muy poderosa en el análisis y diseño de sistemas de control no-lineal: la teoría de estabilidad Lyapunov, la cual consiste en el método indirecto (linealización) y el método directo.

3.1 Conceptos de Estabilidad

Consideremos primero un ejemplo simple.

Ejemplo 1. Péndulo simple



Obtención del modelo usando el método Lagrangiano:

Energía cinética: $K = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$

Energía potencial: $P = mg(\ell - \ell \cos \theta)$

Lagrangiana: $L = K - P$

Par aplicado a la planta: $\tau = u - B\dot{\theta}$

De la ecuación Lagrangiana

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{dL}{d\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau$$

se obtiene

$$m\ell^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + mg\ell \sin \theta = u$$

Sean

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$$

En forma de variables de estado,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{m\ell^2}x_2 - \frac{g}{\ell}\sin x_1 + u$$

Puntos de equilibrio: para $u = 0$, igualando $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, se obtiene

$$x_2 = 0$$

$$\sin x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$$

Estabilidad de los puntos de equilibrio: Aplicamos una pequeña perturbación a las variables de estado cuando éstas están cerca a un punto de equilibrio.

(a) $x_e = (0, 0)$:

i) $B = 0$: x oscila alrededor del punto x_e , i.e., x_e es estable.

ii) $B > 0$: x oscila alrededor del punto x_e , además regresa eventualmente a x_e , i.e., x_e es asintóticamente estable.

(b) $x_e = (\pi, 0)$: x se aleja de x_e para cualquier perturbación mayor que cero, i.e., x_e es inestable.

Ahora, considérense un sistema no-lineal autónomo (la función f en la ecuación siguiente no depende del tiempo explícitamente) en general

$$\dot{x} = f(x)$$

Puntos de equilibrio: Son los puntos que anulan la derivada, i.e., son los puntos en donde $f(x) = 0$.

Observación: Sea x_e un punto de equilibrio, se define $y = x - x_e \Rightarrow \dot{y} = f(y + x_e)$ tiene un punto de equilibrio en $y = 0$.

Norma de un vector: La norma de un vector x se define como $\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}}$.

Conceptos de Estabilidad:

$x_e = 0$ es estable, si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, tal que $\forall \|x(0)\| < \delta, \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$.

$x_e = 0$ es asintóticamente estable, si

(a) x_e es estable,

- (b) $\|x(t)\| \rightarrow 0$, al $t \rightarrow \infty$.
 $x_e = 0$ es exponencialmente estable, si $\exists \alpha, \lambda > 0$, tal que $\forall x \in B_r$ (una bola en $x = 0$),
 $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$, $\forall t \geq 0$

Estabilidad Global y Local: Si la condición de estabilidad se cumple para todas condiciones iniciales, se dice que la estabilidad es global. De otra manera, la estabilidad es local.

Ejemplo 2. Consideremos un sistema lineal de tercer orden

$$\dot{x} = Ax$$

Sea Q la matriz de transformación a la forma Jordan, que se supone tiene la siguiente forma

$$J = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

La solución de esta ecuación, dada $x(0)$, está dada por

$$x(t) = e^{At}x(0) = Q^{-1}e^{Jt}Qx(0)$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Entonces,

- Si $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \forall i$, $\Rightarrow x = 0$ es exponencialmente estable.
- Si $\operatorname{Re} \lambda_i > 0 \forall i$, $\Rightarrow x = 0$ es inestable.
- Si $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$, $x = 0$ es inestable (el bloque de Jordan es 2x2).
- Si $\operatorname{Re} \lambda_2 = 0$, y $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $x = 0$ es estable (el bloque de Jordan es 1x1).

3.2 Método Indirecto: Linealización y Estabilidad Local

Linealización

Dada una ecuación no-lineal autónoma

$$\dot{x} = f(x)$$

La expansión por serie de Taylor en el punto de equilibrio $x = 0$ es:

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} x + O(x)$$

donde $O(x)$ denota los términos de orden superior en x

Sea

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

entonces, la linealización en el punto $x = 0$ está dada por

$$\dot{x} = Ax$$

Estabilidad Local Basado en la Linealización

- Si $\text{Re}\lambda_i(A) < 0, \forall i \Rightarrow x = 0$ es asintóticamente estable.
- Si $\text{Re}\lambda_i(A) > 0$, para algún $i \Rightarrow x = 0$ es inestable
- Si $\text{Re}\lambda_i(A) = 0$, para algún $i \Rightarrow$ no hay conclusión para la ecuación no-lineal.

Ejemplo 3. Estabilidad del péndulo simple (continuación)

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{m\ell^2}x_2 - \frac{g}{\ell}\sin x_1 = f_2$$

Linealizando en $x_{e1} = (0, 0)$ y $x_{e2} = (\pi, 0)$, se obtiene

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{x=x_{e1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{B}{m\ell^2} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{B}{m\ell^2} \end{bmatrix}$$

Estabilidad los puntos de equilibrio:

$$\det(\lambda I - A_1) = \lambda^2 + \frac{B}{m\ell^2}\lambda + \frac{g}{\ell}$$
$$\text{Re}\lambda_i < 0, i = 1, 2,$$

por lo tanto, $x_{e1} = (0, 0)$ es asintóticamente estable.

$$\det(\lambda I - A_2) = \lambda^2 + \frac{B}{m\ell^2}\lambda - \frac{g}{\ell}$$

$$\text{Re}\lambda_1 > 0$$

por lo tanto, $x_e = (\pi, 0)$ es inestable.

3.3 Método Directo

El método directo se basa en la observación de que si un sistema físico disipa energía, entonces se regresa a un punto de equilibrio donde la energía mecánica es mínima, y se procede así: se propone una función similar a la energía mecánica del sistema con respecto al punto de equilibrio. Si esta función no crece a lo largo de la ecuación que describe la dinámica del sistema, entonces el punto de equilibrio es estable, si esta función decrece, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Ejemplo 4. Péndulo simple (continuación). La energía mecánica total con respecto a $x_e = (0, 0)$ es

$$V = K + P = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos \theta) \geq 0$$

La derivada a lo largo de la ecuación del péndulo simple es

$$\begin{aligned}\dot{V} &= m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin \theta \\ &= \dot{\theta}(-B\dot{\theta} - mgl\sin \theta) + mgl\dot{\theta}\sin \theta \\ &= -B\dot{\theta}^2 \leq 0\end{aligned}$$

Esto es, V decrece para $\dot{\theta} \neq 0$, por lo tanto, el punto de equilibrio x_e es estable.

Función Positiva Definida

Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

V es positiva definida, si

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$

V es negativa definida si $-V(x)$ es positiva definida.

V es semi-positiva definida si

- $V(0) = 0$
- $V(x) \geq 0, \forall x \neq 0$

Función Lyapunov

Sea

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

y $V(x)$ una función positiva definida. Si $\dot{V}(t)$ a lo largo de (3.1) es $\dot{V}(x) \leq 0$, entonces se dice que $V(x)$ es una función Lyapunov de (3.1).

Estabilidad local

Sea $V = B_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $B_0 \subset \mathbb{R}^n$, continuamente diferenciable, tal que

- $V(x)$ es positiva definida

- $\dot{V}(x)$ es semi-negativa definida

Entonces $x = 0$ es estable.

Si $\dot{V}(x)$ es negativa definida, entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 5. Estabilidad usando el método directo.

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

$x_e = (0, 0)$ es un punto de equilibrio. Consideremos

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2) \\ &< 0, \forall x_1, x_2, \text{ tal que } x_1^2 + x_2^2 < 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, x_e es localmente asintóticamente estable.

Estabilidad Global

Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciable, tal que:

- $V(x)$ es positiva definida
- $\dot{V}(x)$ es negativa definida
- $V(x) \rightarrow \infty$, al $\|x\| \rightarrow \infty$

Entonces $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo 6. Estabilidad Global.

$$\dot{x} + c(x) = 0$$

donde $c(x)$ es continuo, y $c(x)x > 0$, $\forall x \neq 0$. Consideramos

$$V(x) = x^2$$

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = -2xc(x) \leq 0$$

Por lo tanto, $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo 7. Péndulo simple (continuación) En el Ejemplo 4 se obtiene

$$\dot{V} = -B\dot{\theta}^2$$

la cual es semi-negativa definida, y por lo tanto, $x = (0, 0)$ es estable. Pero sabemos que para $B > 0$, este punto de equilibrio es asintóticamente estable. El Teorema La Salle a continuación nos permite obtener la estabilidad asintótica cuando $\dot{V}$ es semi-negativa definida.

Teorema La Salle

Sea $V: B_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $B_0 \subset \mathbb{R}^n$, continuamente diferenciable

- $V(x)$ es positiva definida
- $\dot{V}(x)$ es semi-negativa definida
- $\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x \equiv 0$

Entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 8. Péndulo simple (continuación).

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\theta} \equiv 0 \Rightarrow \theta \equiv 0$$

Por lo tanto, $x = (0, 0)$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 9. Estabilidad local y global.

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0$$

donde b, c son funciones continuas arbitrarias, y

$$b(\dot{x})\dot{x} > 0, \forall \dot{x} \neq 0$$

$$c(x)x > 0, \forall x \neq 0$$

Consideramos

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)dy = \text{energía cinemática} + \text{energía potencial}$$

$$\dot{V} = \dot{x}\ddot{x} + c(x) \cdot \dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) \leq 0$$

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{x} \equiv 0 \Rightarrow c(x) \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$$

Por lo tanto $x = 0$ y $\dot{x} = 0$ es localmente asintóticamente estable. Si además,

$$\int_0^x c(y)dy \rightarrow \infty, \text{ al } |x| \rightarrow \infty,$$

se tiene la estabilidad global.

3.4 Análisis de Sistemas Basado en el Método Directo

Matriz Positiva Definida: $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es

- positiva definida ($P > 0$), si $x^T P x > 0, \forall x \neq 0$
- semi-positiva definida, ($P \geq 0$), si $x^T P x \geq 0$

Sin pérdida de generalidad, se supone que $P = P^T$.

Condiciones de Positividad de una Matriz

P es positiva definida $\Leftrightarrow \lambda(P) > 0$

P es positiva definida $\Leftrightarrow$ los menores principales ($m_{11}, m_{11}m_{22} - m_{21}^2, \det M$) son positivos.

Desigualdad Rayleigh: Sea P una matriz positiva definida, entonces

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2$$

Sistemas Lineales. Consideremos la siguiente ecuación lineal

$$\dot{x} = Ax.$$

Sea $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P > 0$, y

$$V = x^T P x \quad (3.2)$$

la derivada de esta función a lo largo de la ecuación (3.2) es

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x$$

Define

$$A^T P + P A = -Q$$

Si $Q > 0$ entonces $x = 0$ es asintóticamente globalmente estable.

Ecuación Lyapunov: Considérese la ecuación

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.3)$$

Entonces, A es estable ($\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$) $\Leftrightarrow \forall Q > 0$, la única solución de (3.3) es positiva definida.

Prueba:

($\Leftarrow$) Directo de acuerdo con la estabilidad de Lyapunov.

($\Rightarrow$) Sea A estable, y $Q > 0$, defínase una matriz semétrica

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt < \infty$$

Ahora,

$$A^T P + P A = \int_0^\infty [A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A] dt$$

$$A^T P + P A = \int_0^\infty d[e^{A^T t} Q e^{A t}] = e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_{t=0}^\infty = -Q$$

Ejemplo 10. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$$

Se escoge

$$Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

De la ecuación Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

Por lo tanto, A es estable.

Razón de Convergencia

$$V(x) = x^T P x$$

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x$$

con

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\frac{\dot{V}}{V} = -\frac{x^T Q x}{x^T P x} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2}{\lambda_{\max}(P) \|x\|^2} = -\alpha$$

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$$

$$\Rightarrow V(t) \leq V(0)e^{-\alpha t}$$

De acuerdo con la desigualdad Rayleigh, $\|x\| \rightarrow 0$ con una razón no menor que α .

Sistemas No-lineales. Para sistemas no-lineales, no hay una función Lyapunov general como en el caso lineal. Sin embargo, para una ecuación autónoma, se puede aplicar el siguiente resultado.

Sea

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) = 0$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{la matriz Jacobiana}$$

Si $F = A + A^T < 0$, $\forall x \in B_0 \subset \mathbb{R}^n$, $x = 0$ es asintóticamente estable.

Prueba: Sea

$$V(x) = f^T(x)f(x)$$

la cual es positiva definida, ya que

$$F < 0 \Rightarrow A \text{ no-singular} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ es invertible en } B_0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ es el único punto de equilibrio en } B_0.$$

Ahora

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = Af$$

$$\dot{V} = \dot{f}^T f + f^T \dot{f} = f^T A^T f + f^T A f = f^T F f \leq 0$$

La conclusión sigue inmediatamente.

Ejemplo 11. Considérese

$$\dot{x} = -6x_1 + 2x_2 = f_1$$

$$x_e = (0, 0)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 = f_2$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= A + A^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix} < 0$$

Por lo tanto, x_e es asintóticamente estable. De hecho, x_e es globalmente asintóticamente estable, ya que

$$V = f^T f = f_1^2 + f_2^2 \rightarrow \infty, \text{ al } \|x\| \rightarrow \infty$$

3.5 Diseño de Sistemas Basado en el Método Directo

El procedimiento de diseño de sistemas de control basado en el método Lyapunov consiste en, primero, encontrar una ecuación diferencial de error e , luego se propone una función positiva definida para el punto de equilibrio de interés (normalmente, $e, \dot{e}, \dots = 0$), después buscar el control tal que la derivada de la función sea negativa definida. A continuación, se ilustra esta idea con un ejemplo.

Ejemplo 12. Control de Péndulo

Planta

$$ml^2 \ddot{\theta} + B\dot{\theta} + mgl \sin \theta = u$$

Problema: Diseñar una ley de control, tal que dada θ_d doblemente diferenciable, el error de seguimiento

$$e = \theta - \theta_d \rightarrow 0, \text{ al } t \rightarrow \infty.$$

Ecuación de error: De la ecuación del péndulo, se obtiene

$$ml^2 \ddot{e} + B\dot{e} = u - ml^2 \ddot{\theta}_d - B\dot{\theta}_d - mgl \sin \theta$$

Se propone la función

$$V(e) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{e}^2 + \frac{1}{2}k_p e^2$$

ahora, derivar esta función con respecto al tiempo, y buscar el control tal que la derivada sea negativa definida.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= m\ell^2\dot{e}\ddot{e} + k_p e\dot{e} \\ &= \dot{e}(u - m\ell^2 \ddot{\theta}_d - B\dot{\theta}_d - mgl \sin \theta - B\dot{e} + k_p e)\end{aligned}$$

seleccionando

Control:

$$u = m\ell^2 \ddot{\theta}_d + B\dot{\theta}_d + mgl \sin \theta - k_p e - k_d \dot{e}$$

se obtiene que

$$\dot{V} = -(B + k_d)\dot{e}^2 \leq 0$$

Ahora, de acuerdo con el Teorema La Salle,

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{e} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{e} \equiv 0 \Rightarrow e \equiv 0$$

se concluye que el punto de equilibrio $(e, \dot{e}) = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Observación:

- La ley de control resultante es PD+precompensación.
- La función Lyapunov es la energía mecánica del sistema con respecto al punto de equilibrio de interés $(e, \dot{e}) = 0$. La ley de control hace que en este punto la energía mecánica del sistema en malla cerrada sea mínima, y consecuentemente, es globalmente asintóticamente estable.

Capítulo 4

Análisis por Función Descriptiva

En este capítulo, se presente un método de análisis de sistemas compuestos por subsistemas lineales y no-lineales. La parte lineal se caracteriza por su respuesta en frecuencia, mientras que la parte no-lineal, por una extensión de la respuesta en frecuencia: la función descriptiva.

4.1 Fundamentos de la Función Descriptiva

Respuesta en Frecuencia para Sistemas Lineales.

Sea $H(s)$ la función de transferencia, y $h(t)$ la respuesta al impulso de un sistema lineal. La respuesta en frecuencia se puede interpretar de las siguientes maneras:

(a) La evaluación de $H(s)$ en $s = j\omega$, esto es

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H(s)|_{s=j\omega} \\ &= M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

(b) La transformada Fourier de $h(t)$

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt \\ \Rightarrow H(j\omega) &= \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

(c) La respuesta del sistema $y(t)$ cuando se aplica una entrada $u(t)$ está dada por

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

Ahora para $u(t) = e^{j\omega t}$, la respuesta es

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{j\omega t} \int_0^t h(\tau)e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &\rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}, \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Entonces, la respuesta para

$$u = A \sin \omega t = A \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

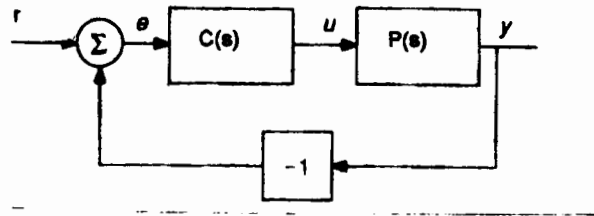
es

$$y(t) = A |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega)) = M(\omega) A \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

y la respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \frac{M(\omega)A}{A} e^{j\varphi(\omega)} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

Estabilidad usando el Criterio Nyquist. Considérese el sistema de control retroalimentado



La ecuación característica del sistema en malla cerrada es

$$1 + C(s)P(s) = 0 \quad (4.1)$$

Entonces, el sistema en malla cerrada es:

- estable, si las raíces de la ecuación (4.1) están en el semi-plano izquierdo (SPI).
- inestable, si por lo menos una de las raíces está en el semi-plano derecho (SPD).

Método Gráfico para detectar el número de raíces en el SPD (Criterio Nyquist)

N = número de envueltas netas del punto $(-1,0)$ (positivo el sentido del reloj) por $C(j\omega)P(j\omega)$

N_c = número de raíces en el SPD de $1 + C(s)P(s) = 0$

N_o = número de raíces en el SPD de $C(s)P(s)$

Entonces,

$$N_c = N_o + N$$

Función Descriptiva

- Es una extensión del método de la respuesta en frecuencia a sistemas no-lineales.
- Su aplicación principal es para detectar ciclos límites en sistemas no-lineales

Considérese una no-linealidad invariante en el tiempo, N (i.e., N no depende del tiempo explícitamente),

$$y = N(u)$$

Si se aplica una senoidad,

$$u(t) = A \sin \omega t$$

la salida

$$y(t) = N(A \sin \omega t)$$

es periódica con el periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Desarrollando $y(t)$ por la serie Fourier

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin \omega t],$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) d\omega t,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega t d\omega t, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin \omega t d\omega t.$$

Como la planta $P(j\omega)$ tiene características de pasabajas, la salida es aproximadamente igual a la primera armónica $y_1(t)$,

$$y_1(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$$

$$= M(\omega, A) \sin(\omega t + \varphi(\omega, A))$$

$$M(\omega, A) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\varphi(\omega, A) = \tan^{-1} \frac{a_1}{b_1}$$

Entonces, la función descriptiva de $N(u)$ está definida como

$$H(\omega, A) = \frac{M(\omega, A)}{A} e^{j\varphi(\omega, A)}.$$

Ejemplo 1. Sea

$$N(u) = \dot{u}u^2$$

La salida de esta no-linealidad a $u(t) = A \sin \omega t$ es

$$N(u) = A^3 \omega \sin^2 \omega t \cos \omega t$$

$$= \frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos 2\omega t) \cos \omega t$$

$$= \frac{A^3 \omega}{2} \left[\cos \omega t - \frac{1}{2} (\cos \omega t + \cos 3\omega t) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^3 w}{4} [\cos wt - \cos 3wt] \\
&\approx \frac{A^3 w}{4} \cos wt, \quad (\text{Despreciando } \cos 3wt) \\
&= \frac{A^3 w}{4} \sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) \\
\Rightarrow H(w, A) &= \frac{A^3 w}{4A} e^{j\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{A^2 w}{4} e^{j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Detección de ciclo de límite de la ecuación Van der Pol. La ecuación

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 + 1)\dot{x} + x = 0, \quad \alpha > 0$$

se puede escribir de la forma

$$\underbrace{\ddot{x} - \alpha\dot{x} + x}_{\text{lineal}} + \underbrace{\alpha x^2 \dot{x}}_{\text{no-lineal}} = 0$$

$$\Rightarrow (s^2 - \alpha s + 1)x = -\alpha x^2 \dot{x}$$

$$x = -\frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1} N(x),$$

$$N(x) = x^2 \dot{x}$$

$$p(s) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1}$$

De acuerdo con el Ejemplo 1, si $x = A \sin wt$

$$y \approx \frac{A^3 w}{4} \cos wt = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} (A \sin wt) = \frac{A^2 s}{4} (x)$$

La ecuación característica en malla cerrada es

$$1 + \frac{A^2 s}{4} \frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1} = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + \alpha\left(\frac{A^2}{4} - 1\right)s + 1 = 0$$

Para $A = 2$, se obtienen dos raíces sobre el eje imaginario $s = \pm j$, por lo tanto $x = 2 \sin t$ es un ciclo límite.

En general, la función descriptiva de una no-linealidad depende de tanto la amplitud como la frecuencia de la entrada. Pero, bajo ciertas condiciones, ésta depende solamente de la amplitud.

(i) Si N es invariante en el tiempo y sin memoria, entonces

$$H(\omega, A) = H(A)$$

Prueba: Con la entrada $u = A \sin \omega t$, la salida es

$$N(u) = N(A \sin \omega t)$$

y los coeficientes de la primera armónica son

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = a_1(A)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = b_1(A)$$

(ii) Si además de la condición en (i), N es impar, i.e.,

$$N(u) = -N(u)$$

entonces $H(A)$ es real.

Prueba:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(A \sin t) \cos \omega t d\omega t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera armónica es

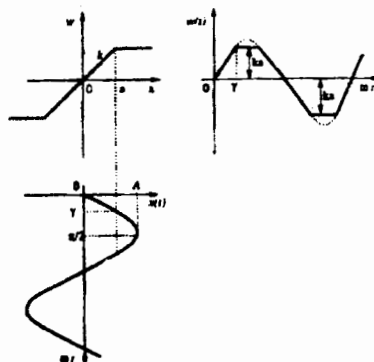
$$y_1 = b_1 \sin \omega t$$

y la función descriptiva está dada por

$$H(A) = \frac{b_1}{A}$$

4.2 Funciones Descriptivas de las No-linealidades Comunes

Saturación



De la gráfica se obtiene la respuesta de la función saturación cuando se aplica una senoidal.

$$w(t) = \begin{cases} kA \sin wt & 0 \leq wt \leq \gamma \\ ka & \gamma < wt \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

donde

$$\gamma = \sin^{-1} \frac{a}{A}$$

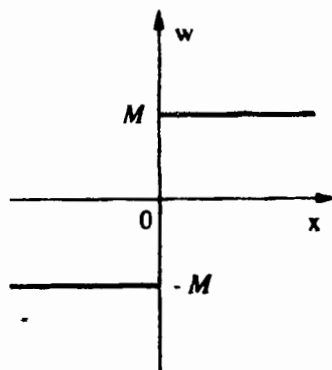
Como la saturación es una función impar, solo hay que calcular b_1 en la primera armónica.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin wt dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} w(t) \sin wt dt \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\gamma} kA \sin^2 wt dt + \int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} ka \sin wt dt \right] \\ &= \frac{2kA}{\pi} \left[\gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \end{aligned}$$

De lo cual se obtiene

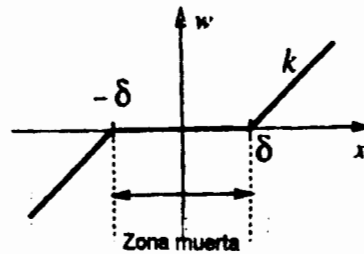
$$H(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right]$$

Relevador



En la función saturación haciendo $a \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $ak = M$, se obtiene

$$\begin{aligned} H(a) &= \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin^{-1} \frac{a}{A}}{\frac{a}{A}} \cdot \frac{ka}{A} + \frac{ka}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \\ &\rightarrow \frac{4M}{\pi A} \end{aligned}$$



La respuesta de la no-linealidad a una senoidad es

$$w(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq wt \leq \gamma \\ k(A \sin wt - \delta) & \gamma < wt \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

con

$$\delta = A \sin \gamma$$

$$\gamma = \sin^{-1} \frac{\delta}{A}$$

Calculando el coeficiente b_1 de la primera armónica

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} w(t) \sin wt dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} k(A \sin wt - \delta) dt \\ &= \frac{2kA}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\delta}{A} - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right) \end{aligned}$$

se obtiene

$$H(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\delta}{A} - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right)$$

4.3 Análisis de Sistemas No-lineales

Existencia de ciclos límites. Se supone que la no-linealidad es invariante en el tiempo sin memoria, entonces la función descriptiva depende solo de la amplitud de la entrada. Para que existan ciclos límites, se tiene que cumplir

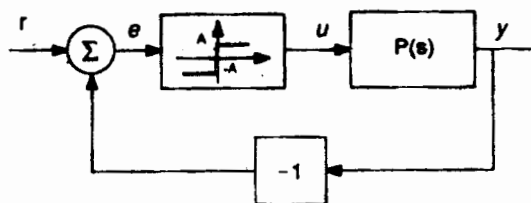
$$L(jw)H(A) + 1 = 0$$

esto es,

$$L(jw) = -\frac{1}{H(A)}$$

Estabilidad de los ciclos Límites. Supóngase que $L(s)$ no tiene polos en el SPD. Si los puntos cerca de un punto de ciclo límite a lo largo de $-\frac{1}{H(A)}$ con dirección de incrementar A no están envueltos por $L(jw)$, entonces el ciclo límite es estable. De lo contrario, es inestable.

Ejemplo 3. Considérese una planta de primer orden con retardo y la no-linealidad relevador,



$$P(jw) = \frac{k}{jTw + 1} e^{-jLw} = \frac{k}{\sqrt{(Tw)^2 + 1}} e^{-j(\tan^{-1} Tw + Lw)}$$

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

Para que existan ciclos Límites, se tiene que cumplir

$$P(jw) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4M}$$

Se observa que el ciclo del límite es estable, y tiene la forma

$$e(t) = A \sin w_p t$$

donde w_p y A están dadas por

$$\varphi(w) = -(\tan^{-1} Tw + Lw) = -\pi \Rightarrow w = w_p$$

$$P = |P(jw_p)| = \frac{k}{\sqrt{(Tw_p)^2 + 1}}$$

$$\frac{\pi A}{4M} = P \Rightarrow A = \frac{4MP}{\pi}$$

Capítulo 5

Control de Modo Deslizante

Robustez de un sistema de control

En todos los modelos matemáticos de un sistema físico existen incertidumbres, las cuales se pueden clasificar como

- incertidumbres estructuradas (paramétricas)
- incertidumbres no-estructuradas (dinámicas despreciadas)

Ejemplo 1. Sea una planta

$$P(s) = \frac{b}{s + a} \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

Cuando $w_n \gg a$, se puede modelar la planta como un sistema de primer orden

$$P_0(s) = \frac{b}{s + a}.$$

En este modelo, las dinámicas rápidas son despreciadas. Además, los parámetros a y b pueden variar en un rango

$$\underline{a} \leq a \leq \bar{a}$$

$$\underline{b} \leq b \leq \bar{b}$$

Existen dos métodos principales para tratar las incertidumbres: el control robusto y el control adaptable. Este capítulo presenta un diseño del control robusto (control de modo deslizante), el capítulo siguiente presentará el control adaptable.

5.1 Superficies de Deslización

Planta:

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + b(x)u \tag{5.1}$$

Suposiciones:

1. Los estados $x^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ son medibles.
2. $\exists F(x)$ conocida, tal que $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq F(x)$, $\forall x$, donde $\hat{f}$ es una estimación de f .
3. $b(x)$ es conocida.

Problema: Dado $x_d \in C^{n-1}[0, \infty)$, diseñar un control u , tal que el error de seguimiento

$$\tilde{x}^{(i)} = x^{(i)} - x_d^{(i)} \rightarrow 0, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Sea $p = \frac{d}{dt}$ el operador de derivada con respecto al tiempo, defínase

$$s = (p + \lambda)^{n-1} \tilde{x}, \lambda > 0.$$

La derivada de s , de acuerdo con la ecuación (5.1) es

$$\begin{aligned} \dot{s} &= p(p + \lambda)^{n-1} \tilde{x} = p \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \lambda^i p^{n-i-1} \tilde{x} \\ &= p^n \tilde{x} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \lambda^i p^{n-i} \tilde{x} \\ &= b(x)u + f(x) - x_d^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i p^{n-i} \tilde{x}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

con

$$g(x, x_d) = -x_d^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \lambda^i p^{n-i} \tilde{x},$$

$$\dot{s} = b(x)u + f(x) + g(x, x_d).$$

Análisis de Estabilidad. Sea

$$V = \frac{1}{2} s^2 \geq 0, \quad (5.3)$$

cuya derivada a lo largo de (5.2) es

$$\dot{V} = s\dot{s} = s[b(x)u + f(x) + g(x, x_d)].$$

Selecioneado u tal que

$$b(x)u + f(x) + g(x, x_d) = -k \operatorname{sgn}(s), \quad k > 0$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{b(x)}[f(x) + g(x, x_d) + K \operatorname{sgn}(s)],$$

se obtiene

$$\dot{V} = -k |s| \leq 0.$$

Como $f(x)$ es desconocida, se sustituye $f(x)$ por su estimación $\hat{f}(x)$, obteniendo la ley de control

$$u = -\frac{1}{b(x)}[\hat{f}(x) + g(x, x_d) + K(x)\text{sgn}(s)], \quad (5.4)$$

donde $K(x)$ se determina para contrarrestar la incertidumbre en $f(x)$.

Diseño de $K(x)$. De acuerdo con las ecuaciones (5.3) y (5.4),

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s[b(x)u + f(x) + g(x, x_d)] \\ &= s[-(\hat{f}(x) + g(x, x_d) + K(x)\text{sgn}(s)) + f(x) + g(x, x_d)] \\ &= s[(f(x) - \hat{f}(x)) - K(x)\text{sgn}(s)] \\ &= s(f(x) - \hat{f}(x)) - K(x) |s| \\ &\leq F(x) |s| - K(x) |s| \\ &= |s| (F(x) - K(x)). \end{aligned}$$

Seleccionando $K(x)$ tal que

$$\begin{aligned} K(x) &= -F(x) + \eta, \quad \eta > 0 \\ \Rightarrow \dot{V} &\leq -\eta |s| \leq 0. \end{aligned}$$

Esto es

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|. \quad (5.5)$$

La condición (5.5) se llama la condición de deslización, y al plano $s = 0$ se refiere como la superficie de deslización.

Ejemplo 2. Considérese

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(x) + u, \\ f(x) &= -a\dot{x}^2 \cos 3x, \\ 1 &\leq a \leq 2. \end{aligned}$$

Sea $\hat{f}$ una estimación de f ,

$$\hat{f}(x) = -\bar{a}\dot{x}^2 \cos 3x$$

con

$$\bar{a} = \frac{1+2}{2} = 1.5,$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(x) - f(x)| \leq 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| = F(x),$$

y el plano de deslización $s = 0$ con

$$s = (p + \lambda)\tilde{x} = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}, \lambda > 0,$$

es una linea con pendiente $-\lambda$.

Tiempo de Llegada a la Superficie Deslizante. De

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s| \Rightarrow s \dot{s} \leq -\eta |s|$$

$$s > 0 \Rightarrow \dot{s} \leq -\eta \Rightarrow \int_0^{t_1} \dot{s} dt \leq - \int_0^{t_1} \eta dt$$

$$s(t_1) - s(0) \leq -\eta t_1 \Rightarrow t_1 \leq \frac{s(0)}{\eta}$$

$$s < 0 \Rightarrow \dot{s} \geq +\eta \Rightarrow s(t_1) - s(0) \geq \eta t_1$$

$$\Rightarrow t_1 \leq -\frac{s(0)}{\eta}.$$

Por lo tanto, $t_1 \leq \frac{|s(0)|}{\eta}$.

Error en el modo deslizante

De la definición

$$s(x) = (s + \lambda)^{n-1} \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} = \frac{1}{(s + \lambda)^{n-1}} s(x),$$

$$\tilde{x}^{(i)} = \frac{s^i}{(s + \lambda)^{n-1}} s(x).$$

Si $|s(x)| \leq e_s$,

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq e_s \cdot \frac{1}{\lambda^{n-1-i}} \cdot 2^i = \frac{e_s}{\lambda^{n-1}} (2\lambda)^i$$

$$i = 0, \Rightarrow |\tilde{x}| \leq \frac{e_s}{\lambda^{n-1}}.$$

Relajación de la suposición (3). Se supone que

$$0 < \underline{b}(x) \leq b(x) \leq \bar{b}(x), \forall x.$$

Sea

$$\hat{b}(x) = \sqrt{\underline{b}(x)\bar{b}(x)},$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\underline{b}(x)}{\bar{b}(x)}} \leq \frac{b(x)}{\hat{b}(x)} \leq \sqrt{\frac{\bar{b}(x)}{\underline{b}(x)}}, \forall x.$$

$$s = (p + \lambda)^{n-1} \tilde{x}$$

$$\Rightarrow \dot{s} = b(x)u + f(x) + g(x, x_d).$$

Seleccionando

$$u = -\frac{1}{b(x)}[f(x) + g(x, x_d) + k \operatorname{sgn}(s)], \quad k > 0,$$

se obtiene

$$\dot{V} = -k |s| \leq 0.$$

Como $b(x)$ y $f(x)$ son desconocidas, se sustituyen por sus estimaciones, obteniendo

$$u = -\frac{1}{\hat{b}(x)}[\hat{f}(x) + g(x, x_d) + k(x) \operatorname{sgn}(s)],$$

donde $k(x)$ se determina para contrarrestar la incertidumbre.

Análisis de Estabilidad

$$\dot{s} = -\frac{b(x)}{\hat{b}(x)}[\hat{f}(x) + g(x, x_d) + k(x) \operatorname{sgn}(s)] + f(x) + g(x, x_d).$$

$$V = \frac{1}{2} s^2,$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \dot{s} = s \left[-\frac{b(x)}{\hat{b}(x)}(\hat{f}(x) + g(x, x_d) + k(x) \operatorname{sgn}(s)) + f(x) + g(x, x_d) \right] \\ &= -s \left\{ \frac{b(x)}{\hat{b}(x)}[\hat{f}(x) + g(x, x_d)] - f(x) - g(x, x_d) \right\} - k(x) |s| \\ &= -s \left[\frac{b(x)}{\hat{b}(x)}(\hat{f} - f) + f \left(\frac{b(x)}{\hat{b}(x)} - 1 \right) + g \left(\frac{b(x)}{\hat{b}(x)} - 1 \right) \right] - k(x) |s| \\ &\leq |s| \left[\left| \frac{b(x)}{\hat{b}(x)} \right| |\hat{f} - f| + |f| \left(\left| \frac{b(x)}{\hat{b}(x)} \right| + 1 \right) + |g| \left(\left| \frac{b(x)}{\hat{b}(x)} \right| + 1 \right) \right] - k(x) |s| \\ &\leq |s| \underbrace{\left[\frac{\bar{b}}{\underline{b}} F + (F + |\hat{f}|) \left(\frac{\bar{b}}{\underline{b}} + 1 \right) + |g| \left(\frac{\bar{b}}{\underline{b}} + 1 \right) \right]}_{H(x, x_d)} - K(x) |s| \\ &= |s| (H(x, x_d) - k(x)), \end{aligned}$$

con

$$K(x) = -H(x, x_d) + \eta,$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -\eta |s| \leq 0.$$

5.2 Aproximaciones continuas de la función de conmutación

Idea: "Suavizar" la ley de control para mantener

$$|s(x)| \leq e_s, e_s > 0.$$

Sea

$$B = \{x \mid |s(x)| \leq e_s\}.$$

Problema: Diseñar u , tal que B sea atrayente.

Observación:

$$|s(x)| \leq e_s \Rightarrow |\tilde{x}(t)| \leq \frac{1}{\lambda^{n-1}} e_s.$$

Ejemplo. 3. (continuación del Ejemplo 2.)

a)

$$u = \hat{u} - K \operatorname{sgn}(s)$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

b)

$$u = \hat{u} - K \operatorname{sat}\left(\frac{s}{e_s}\right)$$

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ x & -1 \leq x < 1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \dot{s}(\hat{f} - f) - s K \operatorname{sat}\left(\frac{s}{e_s}\right),$$

con

$$K = F + \eta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq F |s| - \frac{K}{e_s} s^2$$

$$= |s| \left[F - \frac{|s|}{e_s} (F + \eta) \right]$$

$$= -\eta \frac{|s|^2}{e_s} + F |s| \left(1 - \frac{|s|}{e_s} \right).$$

Rediseño de la Ley de control con e_s variante en el tiempo
En la condición de deslización

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$$

se obtiene

$$s\dot{s} \leq -\eta |s|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} s > 0 & \dot{s} \leq -\eta, \\ s < 0 & \dot{s} \geq \eta. \end{array}$$

Ahora, para atraer S a B , se tiene que cumplir

$$s \geq e_s \quad \frac{d}{dt}(s - e_s) \leq -\eta \quad \Rightarrow \quad \dot{s} \leq -\eta + \dot{e}_s$$

$$s \leq -e_s \quad \frac{d}{dt}(s + e_s) \geq \eta \quad \Rightarrow \quad \dot{s} \geq \eta - \dot{e}_s$$

Combinando las dos condiciones,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq (\dot{e}_s - \eta) |s| = -(\eta - \dot{e}_s) |s|.$$

Para ello,

$$u = \hat{u} - \bar{k} \text{sat}\left(\frac{s}{e_s}\right), \quad \hat{u} = \hat{f} + \bar{x}_d - \lambda \tilde{x}$$

$$\bar{k} = \eta - \dot{e}_s$$

$\forall s \in B$

$$\dot{s} = (u - f - \bar{x}_d) + \lambda \tilde{x}$$

$$= (\hat{f} - f) - \bar{k}(x) \frac{s}{e_s}$$

$$\Rightarrow \dot{s} = -\bar{k}(x) \frac{s}{e_s} + \tilde{f}(x),$$

como

$$|x - x_d| \leq \frac{e_s}{\lambda^{n-1}} \doteq \varepsilon,$$

$\bar{k}\tilde{f}$, continuas, por la serie de Taylor

$$\dot{s} = -\bar{K}(x_d) \frac{s}{e_s} + (\tilde{f}(x_d) + O(\varepsilon))$$

i.e., filtro de primer orden.

Si se selecciona

$$\frac{\bar{k}(x_d)}{e_s} = \lambda,$$

$$\Rightarrow \bar{k} = k - \dot{e}_s$$

$$\Rightarrow \dot{e}_s = -\lambda e_s + k(x_d)$$

$$\Rightarrow \dot{k} = k(x) - k(x_d) + \lambda e_s$$

Entonces, la nueva ley es:

$$u = \hat{u} - \bar{k} \text{sat}\left(\frac{s}{e_s}\right)$$

$$\bar{k} = k(x) - k(x_d) + \lambda e_s$$

$$k(x) = F(x) + y$$

$$\dot{e}_s = -\lambda e_s + k(x_d).$$

Capítulo 6

Control Adaptable

El control adaptable es un método para tratar las incertidumbres en los modelos matemáticos. En contraste con el control robusto, en que se diseña un controlador que tolera ciertas incertidumbres, el controlador adaptable "aprende" de las dinámicas de la planta a través de estimación en línea ya sea de la planta o del controlador. Este capítulo, mediante ejemplos simples, introduce las ideas principales en el control adaptable.

6.1 Control Adaptable para Sistemas Lineales

Problema: Dada una planta lineal invariante en el tiempo (LIT) con parámetros desconocidos, se diseña un controlador adaptable (un controlador y un algoritmo de adaptación), tal que se cumple con el objetivo de control mientras mantiene la estabilidad del sistema.

Ejemplo 1. Sistema de primer orden

Planta:

$$y(t) = P(s)u = \frac{b}{s + a}u(t) \quad (6.1)$$

Modelo:

$$y_m(t) = M(s)r = \frac{b_m}{s + a_m}r(t)$$

Objetivo: Seguimiento al modelo, esto es que

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$$

Control lineal: Retroalimentación de estados

$$u(t) = c_o r(t) + d_o y(t)$$

Diseño del controlador lineal: En malla cerrada,

$$y = \frac{c_o b}{s + a + b d_o} r$$

para que $y = y_m$, se seleccionan

$$c_o^* = \frac{b}{b_m}, \quad d_o^* = \frac{a_m - a}{b}. \quad (6.2)$$

Como no se conocen los parámetros de la planta, no se puede calcular los parámetros del controlador a partir de (6.2). El control adaptable se puede proceder de las siguientes maneras: 1) identificar los parámetros de la planta (a y b) y calcular los parámetros del controlador (c_0^* y d_0^*) usando (6.2) (Control Adaptable Indirecto), 2) identificar los parámetros del controlador (c_0^* y d_0^*) directamente (Control Adaptable Directo).

A. Control Adaptable Indirecto

Identificación de la Planta

Parametrización de la Planta: Expresar la planta en una forma lineal en los parámetros que se quieren estimar.

Para evitar el uso de la derivada de las señales, de la planta (6.1) se obtiene

$$y(t) = \frac{b}{s + \lambda + (a - \lambda)} u(t),$$

donde $\lambda > 0$, la cual se puede expresar como

$$\begin{aligned} y(t) &= (\lambda - a) \frac{1}{s + \lambda} y(t) + b \frac{1}{s + \lambda} u(t) \\ &= \varphi^T(t) \theta_* \end{aligned}$$

con

$$\varphi^T(t) = [\varphi_u(t), \quad \varphi_y(t)]$$

$$\theta_* = [b \quad \lambda - a]$$



Algoritmo de Identificación (Gradiente)

Denota $(\cdot)$ la estimación de $(\cdot)$, defínanse

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t) \hat{\theta}(t)$$

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t), \quad \text{error de identificación}$$

Consideramos el algoritmo gradiente para la adaptación de $\hat{\theta}$,

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \frac{\varphi(t) \varepsilon(t)}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)}, \quad \gamma > 0. \quad (6.3)$$

Estabilidad del algoritmo gradiente (Análisis Lyapunov)

Sea el error de parámetros

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta_*$$

En términos de $\tilde{\theta}$, se puede expresar el error de identificación como

$$\varepsilon(t) = \varphi^T(t) \tilde{\theta}(t)$$

Del algoritmo de estimación (6.3), se obtiene

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \frac{\varphi(t) \varphi^T(t)}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)} \tilde{\theta}$$

Consideramos la siguiente función positiva definida

$$V = \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \geq 0$$

cuya derivada es

$$\dot{V} = 2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} = -2 \frac{\tilde{\theta}^T \varphi(t) \varphi^T(t) \tilde{\theta}(t)}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)} = -\frac{2\varepsilon^2(t)}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)} \leq 0$$

Por lo tanto, $\tilde{\theta}$ es acotado y

$$\int_0^\infty \dot{V}(t) dt = -2 \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)} dt \leq \frac{V(0)}{2}$$

Como

$$\frac{d}{dt} \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)}} \text{ es acotado, } \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varphi^T \varphi}} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Convergencia paramétrica. Lema: Sea

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, & x(0) = x_0 \\ y = c^T(t)x \end{cases}$$

Si $\exists P = P^T > 0$, tal que

$$A^T(t)P + PA(t) = -c(t)c^T(t) \quad \forall t \geq 0$$

y

$(A(t), c^T(t))$ es uniformemente observable, i.e., $\forall t \geq 0$,

$$0 < \beta_1 I \leq \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) c(\tau) c^T(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \leq \beta_2 I$$

donde $\Phi(t, \tau)$ es la matriz de transición, entonces, $x = 0$ es exponencialmente estable.

Prueba:

$$V = x^T P x$$

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$= x^T (A^T(t)P + PA(t))x$$

$$= -x^T c(t) c^T(t) x(t)$$

$$= -y^2(t) \leq 0$$

Ahora

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow y(t) = c^T(t)x(t) = 0$$

$$\Rightarrow x^T(t)c(t)c^T(t)x(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow x^T(\tau)c(\tau)c^T(\tau)x(\tau) = 0, \quad \forall \tau \geq 0$$

pero

$$x(\tau) = \Phi(\tau, t)x(t)$$

$$\Rightarrow x^T(t)\Phi^T(\tau, t)(\tau)c^T(\tau)\Phi(\tau, t)x(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow x^T(t) \int_0^t \Phi^T(\tau, t)c(\tau)c^T(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau x(t) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.$$

De acuerdo con el Teorema La Salle, se obtiene la conclusión.

Observación: Sea

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + u \\ y = c^T(t)x \end{cases}$$

con

$$u = v - k^T(t)y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A(t) - k(t)c^T(t))x + v \\ y = c^T(t)x \end{cases}$$

Entonces,

$(A(t), c^T(t))$ es uniformemente observable

$\Leftrightarrow (A(t) - k(t)c^T(t), c^T(t))$ también lo es.

Ahora, regresamos al problema de convergencia paramétrica. Escribiendo la ecuaciones de error como

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \frac{\varphi\varphi^T}{1+\varphi^T\varphi} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varepsilon} = \frac{\varphi^T}{\sqrt{1+\varphi^T\varphi}} \end{cases}$$

Definiendo

$$A(t) = -\gamma \frac{\varphi\varphi^T}{1+\varphi^T\varphi}$$

$$c^T(t) = \frac{\varphi^T}{\sqrt{1+\varphi^T\varphi}}$$

Con $P = \frac{\gamma}{2}I$, se tiene

$$A^T(t)P + PA(t) = -\frac{\varphi\varphi^T}{1+\varphi^T\varphi} = -c(t)c^T(t)$$

entonces, $\tilde{\theta}(x) \rightarrow 0$ exponencialmente, si

$$\beta_1 I \leq \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) c(\tau) c^T(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \leq \beta_2 I \quad \forall t \geq 0$$

i.e., $(A(t), c^T(t))$ es uniformemente observable

$\Leftrightarrow (A(t) - k(t)c^T(t), c^T(t))$ lo es, con $k(t)$ acotado

$\Leftrightarrow (0, c^T(t))$, lo es

Si se selecciona $k(t)$ tal que

$$A(t) - k(t)c^T(t) = 0$$

$$\Rightarrow k(t) \cdot \frac{\varphi^T}{\sqrt{1 + \varphi^T \varphi}} = -\gamma \frac{\varphi \varphi^T}{1 + \varphi^T \varphi}$$

$$\Rightarrow k = -\gamma \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^T \varphi}}$$

Por lo tanto, la condición para la convergencia paramétrica es

$$\beta_1 I \leq \int_t^{t+\delta} \frac{\varphi(\tau) \varphi^T(\tau)}{1 + \varphi^T \varphi} d\tau \leq \beta_2 I \quad \forall t \geq 0$$

i.e., condición de excitación persistente.

(B) Control Adaptable Directo

Parametrización del controlador. Sea

$$\theta_* = \begin{bmatrix} c_o^* \\ d_o^* \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix}$$

$\hat{\theta}$ = estimación de θ_* , $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta_*$

Se expresa la ley de control como

$$u = \hat{c}_o r + \hat{d}_o y = \hat{\theta}^T \varphi = \theta_*^T \varphi + \tilde{\theta}^T \varphi$$

y se obtienen la salida y error de seguimiento

$$y = \frac{c_o^* b}{s + a - b d_o^*} + \frac{b}{s + a + b d_o^*} \tilde{\theta}^T \varphi$$

$$= M(s) r + \frac{1}{c_o^*} M(s) \varphi^T \tilde{\theta}$$

$$\Rightarrow e = y - y_m = \frac{1}{c_o^*} M(s) \varphi^T \tilde{\theta}$$

Análisis de Estabilidad Lyapunov. Se expresa la ecuación de error en forma de la ecuación de variables de estado como

$$\dot{e} = -a_m e + b \varphi^T \tilde{\theta}$$

Se supone que $b > 0$, y considérese

$$V = e^2 + \frac{b}{\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e\dot{e} + 2\frac{b}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= 2e(-a_m e + b \cdot \varphi^T \tilde{\theta}) + 2\frac{b}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -2a_m e^2 + \frac{2b}{\gamma} \tilde{\theta}^T (\dot{\tilde{\theta}} + \gamma \varphi e) \end{aligned}$$

seleccionando

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \varphi e$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} \text{ es acotado}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -2a_m e^2 \leq 0 \Rightarrow e, \text{ y, son acotados}$$

además

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(t) dt &= \int_0^\infty -2a_m e^2(t) dt \\ \Rightarrow \int_0^\infty e^2(t) dt &\leq \frac{V(0)}{2a_m} \end{aligned}$$

Como $\dot{e} = -a_m e + b \varphi^T \tilde{\theta}$ es acotado, se obtiene

$$e(t) \rightarrow 0 \text{ al } t \rightarrow \infty.$$

6.2 Control Adaptable de Sistemas No-lineales

Una clave en el control adaptable de sistemas no-lineales es encontrar una parametrización que es *lineal* en los parámetros de interés. En este caso, las técnicas usadas en el control adaptable para sistemas lineales también se pueden usar.

Ejemplo 2. Control adaptable de una planta no-lineal. Considérese

$$\ddot{x} + a\dot{x}^2 \cos 3x = u$$

donde a es un parámetro desconocido. El objetivo de control es que el error de seguimiento

$$\tilde{x} = x - x_d \rightarrow 0, \text{ al } t \rightarrow \infty$$

donde x_d es una trayectoria deseada.

Ley de control no adaptable. Sean

$$v = \dot{x}_d - \lambda \tilde{x}, \lambda > 0$$

$$s = \dot{x} - v = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}$$

Con la ley de control

$$u = \dot{v} + a \tilde{x}^2 \cos 3x - ks$$

$$\Rightarrow \tilde{x} + a \tilde{x}^2 \cos 3x = \dot{v} + a(t) \tilde{x}^2 \cos 3x - ks$$

$$\Rightarrow \dot{s} + ks = 0$$

Por consiguiente, $\tilde{x} \rightarrow 0$ al $t \rightarrow \infty$.

Ley de control adaptable: En la ley de control adaptable, se sustituye el parámetro a por su estimación $\hat{a}$,

$$u = \dot{v} + \hat{a} \tilde{x}^2 \cos 3x - ks$$

Definiendo $\tilde{a} = \hat{a} - a$, esta expresión se puede expresar como

$$u = \dot{v} + a \tilde{x}^2 \cos 3x - ks + \tilde{a} \tilde{x}^2 \cos 3x$$

y la ecuación de error es ahora,

$$\dot{s} + ks = \tilde{a} \tilde{x}^2 \cos 3x$$

Considérese la función positiva definida

$$V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\tilde{a}^2$$

cuya derivada a lo largo de la ecuación de error es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s(-ks + \tilde{a} \tilde{x}^2 \cos 3x) + \tilde{a}\dot{\tilde{a}} \\ &= -ks^2 + \tilde{a}(\dot{\tilde{a}} + \tilde{x}^2 \cos 3x) + \tilde{a}\dot{\tilde{a}} \end{aligned}$$

Se selecciona el algoritmo de adaptación

$$\Rightarrow \dot{\tilde{a}} = \dot{\hat{a}} = -\tilde{x}^2 \cos 3x$$

se obtiene

$$\dot{v} = -ks^2$$

Por lo tanto, $s(t) \rightarrow 0$ al $t \rightarrow \infty$, y todas las señales son acotadas.

6.3 Control Adaptable v.s. Control Robusto

Consideremos el mismo ejemplo para diseñar un controlador robusto (modo deslizante).

Ejemplo 3. Control robusto. Sean

$$\ddot{x} + ax^2 \cos 3x = u$$

$$f(x) = ax^2 \cos 3x$$

Se supone que

$$1 \leq a \leq 2$$

Con la estimación de f dada por

$$\hat{f}(x) = \bar{a}x^2 \cos 3x = 1.5x^2 \cos 3x$$

$$\Rightarrow |\hat{f} - f| = |1.5 - a(t)| x^2 |\cos 3x|$$

$$\leq 0.5x^2 |\cos 3x| = F(x)$$

De acuerdo con el procedimiento de diseño del control deslizante, se obtiene

$$\hat{u} = \hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{x} = 1.5x^2 \cos 3x + \ddot{x}_d - \lambda \dot{x}$$

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sgn} s, \quad s = \dot{x} + \lambda \tilde{x}, \quad \lambda > 0$$

$$k = F(x) + \eta, \quad \eta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} s^2 \leq -\eta |s|$$

Observaciones:

1. En el control robusto, hay que suponer que los parámetros varían dentro de cierto rango, mientras en el control adaptable no.
2. Los parámetros del controlador robusto, una vez diseñada, son fijas, y por lo tanto la carga computacional es menor, mientras los parámetros del controlador adaptable son ajustados en la operación.
3. Como en el control adaptable hay un algoritmo de adaptación, cuando no hay excitación apropiada, puede presentar el fenómeno de deriva de los parámetros estimados, mientras el control robusto es independiente de la excitación de las señales.

Capítulo 7

Control de una Clase de Sistemas No-lineales

En este capítulo, se estudia el problema de control de plantas de la forma en (7.1), la cual incluye todos los sistemas que pueden modelarse por el método Lagrangiano. Bajo ciertas suposiciones, la planta (7.1) es pasiva de $u_1 = Fu$ a $\dot{q}$. Esta propiedad se puede aprovechar para el análisis y diseño de sistemas de control para esta clase de plantas.

7.1 Pasividad y Resultados Relacionados

Definiciones

Norma de Funciones: Sea $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, la norma $p \in [0, \infty]$ de f se define como

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left[\int_0^\infty \|f(t)\|^T dt \right]^{\frac{1}{p}} & \text{para } p \in [0, \infty) \\ \sup_{t \geq 0} \|f(t)\| & \text{para } p = \infty \end{cases}$$

donde $\|x\|$ denota la norma Euclidiana de x ,

$$\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la norma $p \in [0, \infty]$ extendida de f se define como

$$\|f\|_{p,T} = \begin{cases} \left[\int_0^T \|f(t)\|^T dt \right]^{\frac{1}{p}} & \text{para } p \in [0, \infty) \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\| & \text{para } p = \infty \end{cases}$$

para $T \geq 0$

Espacio L_p y su Extensión. El espacio L_p consiste en las funciones integrables por intervalo y su norma L_p está acotada, i.e.,

$$L_p = \{ f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|f\|_p < \infty \}$$

El espacio L_p extendido denotado por $L_{p,T}$ consiste en las funciones integrables por intervalo y su norma L_p extendida está acotada, i.e.,

$$L_{p,T} = \{ f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|f\|_{p,T} < \infty \}$$

Pasividad: Sea $H : L_{2,T} \rightarrow L_{2,T}$. Se dice que el mapeo H es pasivo si $y = H(u)$ y

$$\langle u, y \rangle_T \geq \beta, \quad \forall T \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

estrictamente pasivo si

$$\langle u, y \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 + \beta, \quad \forall T \geq 0, \quad \delta > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Producto Interno: Sea $u, y \in L_{2,T}$, el producto interno está definido como:

$$\langle u, y \rangle_T = \int_0^T u^T(t)y(t)dt, \quad T \geq 0.$$

Sistemas Pasivos Conectados en Retroalimentación

Lema 1: Sean

$$H_1 : L_{2,T} \rightarrow L_{2,T}, \quad y_1 = H_1(e_1)$$

$$H_2 : L_{2,T} \rightarrow L_{2,T}, \quad y_2 = H_2(e_2)$$

conectados en forma de retroalimentación. Se supone que $\forall T \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$H_1 \text{ es pasivo: } \langle e_1, y_1 \rangle_T \geq \beta_1,$$

$$H_2 \text{ es pasivo: } \langle e_2, y_2 \rangle_T \geq \beta_2.$$

Entonces, el mapeo $u_1 \rightarrow y_1$ es pasivo,

$$\langle u_1, y_1 \rangle_T \geq \beta, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2$$

Prueba: ver Desoer y Vidyasagar (1975), pp.183.

Estabilidad Basado en Pasividad

Teorema 1: Sean

$$H_1 : L_{2T} \rightarrow L_{2T}, \quad y_1 = H_1(e_1)$$

$$H_2 : L_{2T} \rightarrow L_{2T}, \quad y_2 = H_2(e_2)$$

Se supone que $\forall T \geq 0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$H_1 : \langle e_1, y_1 \rangle_T \geq \beta_1$$

$$H_2 : \langle e_2, y_2 \rangle_T \geq \delta \|e_2\|_{2T}^2 + \beta_2, \quad \delta > 0.$$

Entonces

$$u_1 \in L_2 \Rightarrow y_1 \in L_2.$$

Prueba: ver Desoer y Vidyasagar (1975), pp.181.

Teorema 2: Sea $H \in \mathcal{R}(s)$, estrictamente propia y exponencialmente estable,

$$y = H(s)u.$$

Entonces

$$u \in L_2 \Rightarrow y \in L_2 \cap L_\infty, \dot{y} \in L_2 \text{ y es continua, } y(t) \rightarrow 0, \text{ al } t \rightarrow \infty.$$

Prueba: ver Desoer y Vidyasagar (1975), pp.59.

Lema Barbalat: Si $f(t)$ es uniformemente continua, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau \text{ existe y es finita.}$$

Entonces

$$f(t) \rightarrow 0, \text{ al } t \rightarrow \infty$$

Prueba: ver Slotine y Li (1991), pp.123.

Corolario: Si $x \in L_\infty \cap L_p, \dot{x} \in L_\infty, p \in [1, \infty)$, entonces $x(t) \rightarrow 0$, al $t \rightarrow \infty$.

Prueba: Con $f = |x|^p$, como $x, \dot{x} \in L_\infty$, f es uniformemente continua. El resultado sigue directamente del Teorema 3.

7.2 Formulación del problema

Planta:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Kq + G(q) = Fu, \quad (7.1)$$

donde $q = [q_1^T \ q_2^T]^T \in \mathbb{R}^n$, $q_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $u \in \mathbb{R}^m$, y las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, K , $G(q)$, F tienen dimensiones correspondientes.

Suposiciones:

1. $m I \leq M(q) = M^T(q) \leq \bar{m} I, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$
2. $\dot{q}^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{q} = 0, \quad \forall \dot{q} \in \mathbb{R}^n$
3. $K = K^T \geq 0$
4. $\dot{q}^T G(q) \geq 0$
5. $C(q, \dot{q}), G(q)$ son funciones acotadas de sus argumentos

Lema: El mapeo $Fu \rightarrow \dot{q}$ es pasivo, i.e., $\exists \beta \in \mathbb{R}$, tal que
 $\langle Fu, \dot{q} \rangle_T \geq \beta, \quad \forall T \geq 0.$

Prueba: Considérese la siguiente función positiva definida

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \int_0^t \dot{q}^T G d\tau + \int_0^t \dot{q}^T K q d\tau \geq 0$$

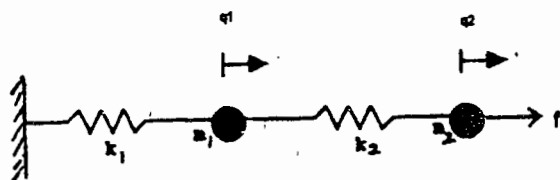
su derivada a lo largo de (7.1) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T M \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T G + \dot{q}^T K q \\ &= \dot{q}^T Fu + \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - C) \dot{q} \\ &= \dot{q}^T Fu \end{aligned}$$

De aquí, $\forall T \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle Fu, \dot{q} \rangle_T &= \int_0^T \dot{V} dt \\ &= V(T) - V(0) \\ &\geq -V(0) \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Dos masas en serie.



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Robot rígido de n grados de libertad. Considérese un robot rígido de n de grado de libertad

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

donde

$q \in \mathbb{R}^n$: posición angular

$D(q)$: matriz de inercia

$C(q, \dot{q})\dot{q}$: terminos centrífugales y Coriolis

$g(q)$: par gravitacional

τ : par aplicado

Ejemplo 3. Robot flexible de n grados de libertad. Un manipulador de n grado de libertad con uniones flexibles impulsado por un motores de corriente directa está dado por

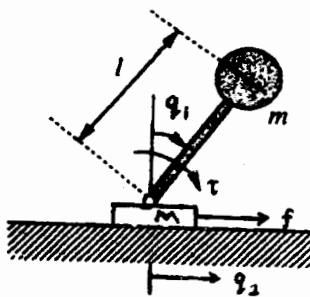
$$\begin{bmatrix} D(q_1) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(q_1, \dot{q}_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}$$

donde

J : la matriz de inercia del motor de corriente directa

k : matrix de coeficiente de rigidez

Ejemplo 4. Péndulo Invertido.



$$\begin{bmatrix} J_l + l_c^2 m & ml_c \cos q_1 \\ ml_c \cos q_1 & M + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dot{q}_1 ml_c \sin q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml_c g \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Problema: Dada una trayectoria deseada q_{d1} doblemente diferenciable, diseñar una ley de control u , tal que el error del seguimiento definido como

$$\tilde{q}_1 = q_1 - q_{d1} \rightarrow 0, \text{ al } t \rightarrow \infty$$

mientras mantiene la estabilidad (acotamiento de todas las señales).

En la resolución de este problema, procedemos primero, encontrar $u_1 = Fu$, y luego, obtener la ley de control u .

7.3 Diseño de $u_1 = Fu$

(A) Control PD + Precompensación Ecuación de Error. De la ecuación (7.1) se obtiene

$$M\ddot{\tilde{q}} + C\dot{\tilde{q}} + K\tilde{q} = u_1 - M\ddot{q}_d - C\dot{q}_d - Kq_d - G$$

Análisis de Lyapunov. Considérese la siguiente función positiva definida

$$V = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T M\dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T (K + K_p)\tilde{q}, \quad K_p > 0$$

Su derivada a lo largo de la ecuación de error es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\tilde{q}}^T M\ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \dot{M}\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T (k + k_p)\tilde{q} \\ &= \dot{\tilde{q}}^T (u_1 - M\ddot{q}_d - Kq_d - G - K\tilde{q} + (K + K_p)\tilde{q}) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \left(\frac{1}{2}\dot{M} - C \right) \dot{\tilde{q}} \end{aligned}$$

Se selecciona

$$u_1 = M\ddot{q}_d + C\dot{q}_d + Kq_d + G - K_p\tilde{q} - K_D\dot{\tilde{q}}, \quad K_D > 0$$

se obtiene

$$\dot{V} = -\dot{\tilde{q}}^T K_D \dot{\tilde{q}} \leq 0$$

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{q}} \equiv 0 \Rightarrow \tilde{q} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{q}} \equiv 0$$

De acuerdo con el Teorema La Salle, $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0$ es asintóticamente estable.

(B) Control PD + Precompensación variante en el tiempo. A continuación se usa los resultados de pasividad para resolver el problema planteado arriba.

Ecuación de Error. Defínase

$$s = (p + \lambda)\tilde{q} = \dot{\tilde{q}} + \lambda\tilde{q}, \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$a = \ddot{\tilde{q}} - \lambda\dot{\tilde{q}}$$

De la ecuación de la planta (7.1), se obtiene

$$M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + K \int_0^t s d\tau = u_1 - M(q)\ddot{a} - C(q, \dot{q})a - K \int_0^t a d\tau - G(q)$$

Análisis basado en la pasividad. Sea

$$V = \frac{1}{2}s^T M s + \frac{1}{2} \int_0^t s^T d\tau K \int_0^t s d\tau$$

cuya derivada a lo largo de la ecuación de error es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T M \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{M} S + s^T k \int_0^t s d\tau \\ &= s^T \left[u_1 - M\dot{a} - Ca - K \int_0^t a d\tau - G - K \int_0^t s d\tau + K \int_0^t s d\tau \right] + \frac{1}{2} s^T (\dot{M} - 2C)s \end{aligned}$$

Se selecciona

$$u_1 = M\dot{a} + Ca + K \int_0^t a d\tau + G - \xi$$

donde $\xi = H(s)$ tal que

$$\langle s, \xi \rangle_T \geq \delta \|s\|_{2T}^2, \quad \forall T \geq 0.$$

se obtiene

$$\dot{V} = -s^T \xi$$

Integrando en ambos lados, y tomando en cuenta que $V(T) \geq 0, \forall T \geq 0$, se obtiene

$$\int_0^T s^T s dt \leq \frac{V(0)}{\delta}$$

De aqui

$$s \in L_2, \quad s, \int_0^t s d\tau \in L_\infty,$$

$$\tilde{q} \in L_\infty \cap L_2, \quad \tilde{q} \rightarrow 0, \quad \text{al } t \rightarrow \infty.$$

$$\tilde{q} \in L_\infty.$$

De la ecuación de error, $\dot{s} \in L_\infty, \Rightarrow s \rightarrow 0, \text{ al } t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{q}} \rightarrow 0, \text{ al } t \rightarrow \infty.$$

Observaciones: El mapeo $H(s)$ puede ser cualquier función siempre y cuando sea estrictamente pasivo, lo cual deja mucha flexibilidad en escoger esta función para satisfacer otros requerimientos (rechazo de perturbaciones, robustez, etc.).

7.4 Diseño de la Ley de control

(a) Caso $m = n$, $\det F \neq 0$

En este caso

$$u = F^{-1}u_1$$

(b) Caso $m < n$

En este caso, se hace la partición de las matrices

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad F_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \det F_2 \neq 0$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

De $u_1 = Fu$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix} u$$

De aquí, la ley de control está dada por

$$u = F_2^{-1}u_{12}$$

y la trayectoria deseada de q_2 está dada por

$$u_{11} = 0.$$

En general, esta última expresión corresponde a una ecuación diferencial. La existencia de soluciones y su estabilidad no están garantizadas actualmente, lo cual es un tema bajo investigación.

Ejemplo 5. Control de robot flexible. Considérese la ecuación en el Ejemplo 3. Defínanse

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 + \lambda \tilde{q}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 + \lambda \tilde{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$a = \dot{q}_d - \lambda \tilde{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{1d} - \lambda \tilde{q}_1 \\ \dot{q}_{2d} - \lambda \tilde{q}_2 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el procedimiento (B) arriba presentado, se obtiene

$$u_1 = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t a_1 d\tau \\ \int_0^t a_2 d\tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

lo cual implica que

$$0 = D\dot{a}_1 + Ca_1 + g + k \int_0^t (a_1 - a_2) d\tau - \xi_1$$

$$u = J\dot{a}_2 - k \int_0^t (a_1 - a_2) d\tau - \xi_2$$

de la primera ecuación se obtiene la trayectoria deseada para q_2

$$q_{2d} = k^{-1}(D\dot{a}_1 + Ca_1 + g - \xi_1) + (q_{1d} - \lambda \int_0^t (\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2) d\tau - q_{1d}(0) + q_{2d}(0)),$$

la cual es acotada de acuerdo con las conclusiones arriba. Sumando las dos ecuaciones se obtiene la ley de control

$$u = D\dot{a}_1 + J\dot{a}_2 + Ca_1 + g - \xi_1 - \xi_2,$$

con

$$\xi = H(s), \text{ y } \langle s, \xi \rangle_T \geq \delta \|s\|_{2T}^2, \forall T \geq 0.$$

Una selección de ξ será

$$\xi = K_s s, \text{ con } K_s > 0$$

De acuerdo con los resultados, se tiene que todas las señales son acotadas, y $\tilde{q}$ y $\dot{\tilde{q}} \rightarrow 0$ al $t \rightarrow \infty$.

Referencias

1. Anderson B. D. O., R.R. Bitmead, C.R. Johnson, P.V. Kokotovic, R.L. Kosut, I.M.Y. Mareels, L. Praly, y D. Riedle, *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*, MIT Press 1986
2. Astrom K, y B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley, 1989
3. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduccion*, Springer Verlag, 1989
4. Lozano R. y B. Brogliato, "Adaptive control of robot manipulators with flexible joints", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol. 37, pp. 174-181, 1992
5. Nijimeijer, Van der Shaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag, 1990
6. Ogata K., *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 1970
7. Ortega R. y M. Spong, "Adaptive motion control of rigid robot: a tutorial", *Automatica*, Vol. 25, pp.308-312, 1989
8. Sastry S, y M. Bodson, *Adaptive Control, Satbility, Convergence, and Robustness*, Prentice Hall, 1989
9. Slotin J., W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991
10. Spong M., y M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons 1989
11. Vidyasager M., *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, 1993

F/DEPFI/D-103/1994/EJ.3



719313