

INSTITUTO
DE INVESTIGACIONES
DE LA UNAM
DEPARTAMENTO DE
INGENIERIA CIVIL

TRABAJO DE INVESTIGACION II	
"Interacción Dinámica Estructura- Suelo-Estructura en Estratos Blandos"	
Diederich Kuscevic Ronant Pablo	
Asesor: Dra. Sonia Ruiz Gómez	
Sem. 88-2	Sptbre., 1988
DEPFI	UNAM

"INTERACCION DINAMICA ESTRUCTURA-SUELO-ESTRUCTURA EN ESTRATOS

BLANDOS

INDICE

RESUMEN

1. Introducción.....	1
2. BASES TEORICAS.....	4
2.1. Propagación de ondas.....	4
2.2. Teorema de adición de Graf.....	9
3. FORMULACION DEL MODELO.....	11
3.1 Descripción del modelo.....	11
3.2. Formulación matemática.....	14
4. SOLUCION.....	19
5. CONCLUSIONES.....	30
REFERENCIAS.....	31

RESUMEN

Se desarrolla un método analítico para resolver el problema de interacción dinámica de dos estructuras con un estrato blando asentado en una base rígida.

El sistema interacción estructura-suelo-estructura se modela compuesto por dos edificios de cortante apoyados en cimentaciones rígidas de sección transversal rectangular, las cuales están embebidas en un suelo blando elástico lineal, isótropo y homogéneo. A su vez el estrato blando se apoya en una base rígida.

El modelo pretende incluir varios de los parámetros del problema real. El efecto de la condición geológica local es investigada para ondas armónicas SH. Se presenta la solución analítica, a partir de la cual se pueden calcular las funciones de transferencia de los sistemas.

1. INTRODUCCION

En forma muy general se puede definir la interacción dinámica suelo-estructura como al conjunto de efectos de las condiciones locales del suelo en las características del movimiento sísmico en la base de un edificio. Se dice que existe interacción suelo-estructura, si el movimiento de un punto cualquiera ubicado en la entrecara suelo-estructura difiere del movimiento que ocurriría en este punto en el campo libre, si no estuviera la estructura.

En la mayoría de los estudios donde se considera la interacción suelo-estructura, se toma en cuenta sólo la interacción entre una estructura y el suelo que subyace a ésta, idealizando generalmente el suelo como un semiespacio, e ignorando la presencia de otras estructuras cercanas, así como de irregularidades geológicas.

Para este caso, Luco^[1], muestra que para terreno duro y frecuencias bajas se obtienen desplazamientos y fuerzas cortantes en la base mayores que los calculados cuando no se toma en cuenta la interacción. Kobori y Shinozaki^[2] estudiaron el problema de interacción entre una estructura y un valle aluvial semicilíndrico; sus resultados hacen ver que cuando la estructura está localizada cerca de una orilla del valle y sujeta a incidencia horizontal por la orilla opuesta, se presentan las amplificaciones dinámicas más significativas.

Luco y Contesse^[3], estudiaron la interacción dinámica entre dos estructuras y un semiespacio, encontrando que la presencia de otra estructura cercana produce un efecto adicional de interacción especialmente importante para frecuencias bajas y en la cercanía de las frecuencias naturales de la segunda estructura. Para frecuencias altas muestran que es suficiente considerar la interacción entre cada estructura y el suelo.

La interacción entre varias estructuras en un semiespacio fue estudiada por Wong y Trifunac^[4]; su trabajo muestra que la

dispersión, difracción e interferencia de ondas, de y alrededor de varias cimentaciones con las ondas incidentes SH pueden conducir a una protección significativa, así como a una amplificación del movimiento de entrada para cualquiera de los edificios.

Avilés^[5], presenta una solución al problema de interacción dinámica entre dos estructuras a través de un valle aluvial. Sus resultados indican la importancia de los efectos de interacción, los cuales dependen especialmente de la separación entre estructuras, la rigidez del valle aluvial y el ángulo de incidencia de las ondas armónicas SH.

En este trabajo se desarrolla una técnica analítica para analizar el problema de interacción dinámica entre dos estructuras y un estrato blando. El modelo bidimensional de interacción estructura-suelo estructura está compuesto por edificios de cortante desplantados sobre cimentaciones rígidas de sección transversal rectangular, las cuales están embebidas en un estrato de suelo elástico lineal, isótropo y homogéneo. A su vez el estrato blando se apoya en una base rígida. Con el fin de simplificar el manejo de la solución, se introducen unas fronteras ficticias alrededor de cada cimentación. La excitación sísmica se supone está dada por ondas armónicas SH de incidencia vertical. El problema se formula de manera similar al trabajo desarrollado por Avilés et al^[6]: como uno de difracción de ondas elásticas usando imágenes múltiples y se resuelve con un método de frontera, en el que las funciones de la expansión son soluciones base de la ecuación que gobierna el problema y los coeficientes de la aproximación se determinan al satisfacer las condiciones de frontera en el sentido de los mínimos cuadrados.

Es importante destacar los siguientes puntos con respecto a los modelos usados en los trabajos que se hacen referencia: a) en cuanto a las cimentaciones, en todos los estudios, se idealizan éstas con una sección transversal de forma semi-circular, b) en lo que toca a la modelación del suelo, se observa una progresiva evolución; primeramente se idealiza éste como un semiespacio,

posteriormente se considera la presencia de un valle aluvial de forma semicilíndrica en un semiespacio y finalmente la de un estrato apoyado en una base rígida.

Se puede apreciar la tendencia al uso de modelos que representen las condiciones reales del problema de interacción suelo-estructura. Es en éste sentido que se propone en el presente trabajo un modelo con cimentaciones rectangulares incrustadas en un estrato. En la figura 1.1 se esquematiza los modelos estudiados por los distintos autores.

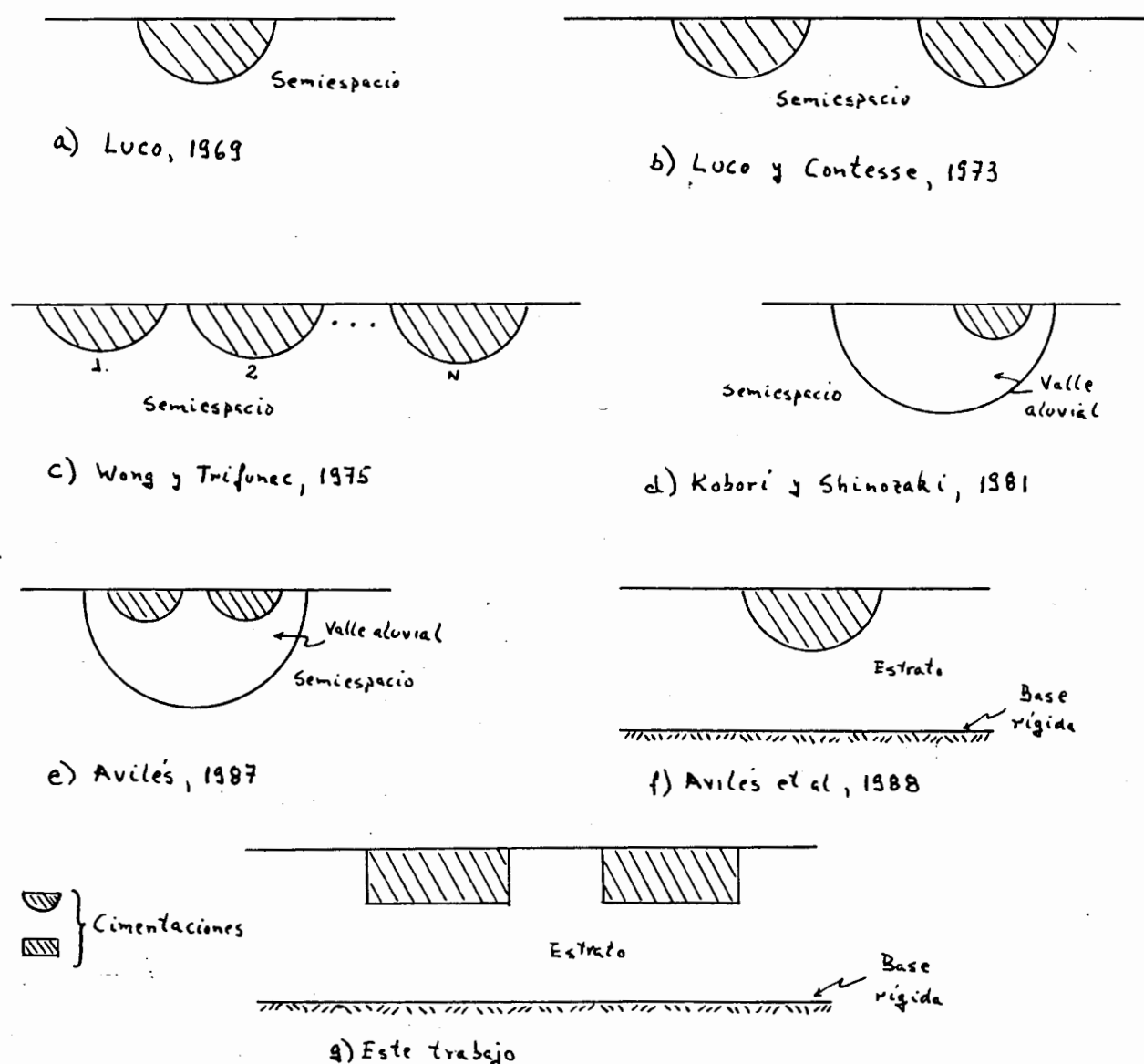


Figura 1.1 - Modelos de interacción suelo-estructura

2. BASES TEORICAS

En el presente capítulo se incluyen algunos conceptos básicos que son de gran utilidad para la formulación y solución del problema. Como ya se mencionó anteriormente, la técnica usada para el análisis es la de expansión de funciones de onda, por tanto es conveniente referirse a la teoría de ondas.

2.1. Propagación de ondas

Se considera en primer lugar la propagación de ondas en un medio elástico infinito, isótropo y homogéneo. En ausencia de fuerzas de cuerpo, las componentes del vector de desplazamientos en este medio son gobernadas por la ecuación de movimiento de Navier ^[7]:

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{-----} (2.1)$$

Esta es una ecuación vectorial, donde $\mathbf{u}$ tiene tres componentes: u_1, u_2, u_3 . De acuerdo al teorema de Helmholtz ^[7], cualquier campo vectorial se puede expresar como la suma de dos potenciales, uno escalar ϕ y el otro vectorial ψ :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi, \quad \text{con } \nabla \cdot \psi = 0 \quad \text{-----} (2.2)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1), se tiene:

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \ddot{\phi}] + \nabla \times [\mu \nabla^2 \psi - \rho \ddot{\psi}] = 0,$$

la cual es satisfecha si

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \alpha^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad \text{-----} (2.3.a)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{-----} (2.3.b)$$

Las dos expresiones, (2.3.a) y (2.3.b), son ecuaciones de onda. Las soluciones de la primera corresponden a perturbaciones elásticas de cambios de volumen sin cambios de forma, son ondas longitudinales, se propagan con velocidad α y reciben el nombre de ondas P (primarias). Las soluciones de la segunda representan cambios de forma sin cambio de volumen, son ondas transversales, su velocidad de propagación es β y reciben el nombre de ondas S (secundarias).

En las ecuaciones de arriba, λ es el coeficiente de Lamé, μ el módulo de cortante, ρ la densidad de masa y el operador gradiente nabla ∇ está dado por

$$\nabla = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{-----}(2.4)$$

Una de las soluciones de las ecuaciones de onda son las que se expresan con frentes de onda planos, las cuales pueden ser representadas en términos de potenciales de desplazamiento por:

$$(\text{onda P}) \quad \varphi = \varphi_0 f(x \cdot v - \alpha t), \quad v = 0 \quad \text{-----}(2.5.a)$$

$$(\text{onda S}) \quad \psi = \psi_0 g(x \cdot v - \beta t), \quad f = 0 \quad \text{-----}(2.5.b)$$

cuyos desplazamientos correspondientes son

$$U_p = \nabla \cdot \varphi = \varphi_0 v f'(x \cdot v - \alpha t) \quad \text{-----}(2.6.a)$$

$$U_s = \nabla \times \psi = \psi_0 p g'(x \cdot v - \beta t), \quad p \cdot v = 0 \quad \text{-----}(2.6.b)$$

donde φ_0 y ψ_0 representan las amplitudes de las ondas P y S, respectivamente; f y g unas funciones arbitrarias (prima indica diferenciación con respecto al argumento), x denota el vector de posición, v un vector unitario normal al frente de onda y define la dirección de propagación en términos de sus cosenos directores y p un vector unitario que indica la polarización de las ondas de cortante.

Con referencia a la figura 1.1, si en el medio se escoge una línea

recta como el eje vertical (eje X_2) y se toma cualquier plano perpendicular a la línea recta como el plano horizontal, las ondas de cortante con polarización paralela al eje horizontal X_3 son llamadas ondas SH, aquellas con polarización paralela al plano vertical (plano X_1-X_2) son ondas SV. Las ondas P se polarizan siempre paralelas a la onda normal v . Es importante destacar que el movimiento del desplazamiento de las ondas SH es perpendicular al plano de incidencia y está contenido en el plano horizontal.

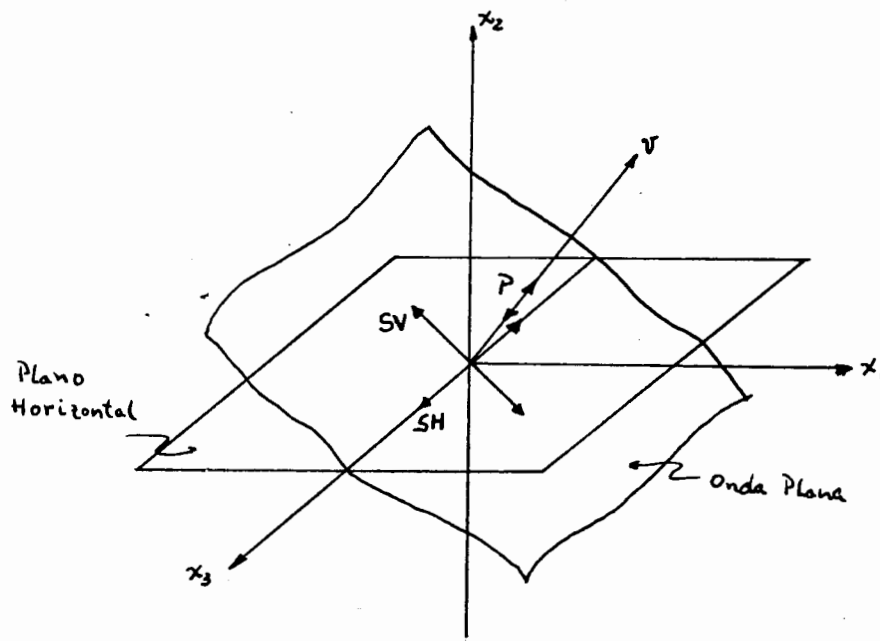


Figura 2.1 - Polarización de las ondas

Una función de especial interés es la función armónica $\exp(\pm i\omega t)$, donde $\omega = 2\pi/T$ (T es el periodo de la excitación) es la frecuencia circular. Se sobreentiende que solo la parte real o la imaginaria representa el movimiento. Para el caso de una onda SH se tiene,

$$\psi = \psi_0 \exp[-ik(x \cdot v - \beta t)]$$

$$\psi = \psi_0 \exp[-ik(x_1 v + x_2 v)] e^{i\omega t} \quad \text{----- (2.7)}$$

donde k es el número de onda y está relacionado con la frecuencia circular por $k=\omega/\beta$. En forma general,

$$\psi(x,t) = \Phi(x) e^{i\omega t} \text{ -----(2.8)}$$

es una solución de estado estacionario. Si se sustituye (2.8) en (2.3.b), se tiene:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \text{ -----(2.9)}$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación reducida de onda o ecuación de Helmholtz, donde se puede apreciar que se ha eliminado la dependencia con el tiempo.

Por las características del movimiento generado por las ondas SH, en el medio se presenta un estado de esfuerzos y deformaciones fuera del plano, el cual está definido como (las direcciones 1,2 y 3 corresponden a las de la figura 2.1):

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = W(x_1, x_2, t) \text{ -----(2.10)}$$

Los correspondientes esfuerzos serán:

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial W}{\partial x_2}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \text{ ----(2.11)}$$

La simplificación en (2.10) reduce la tercera de las ecuaciones de Navier a una ecuación de onda escalar,

$$\mu \nabla^2 W(x_1, x_2, t) = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \text{ -----(2.12)}$$

donde, el operador laplaciano es: $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$

Las otras dos ecuaciones se satisfacen idénticamente.

Si se considera, por ejemplo, la propagación de onda armónicas SH a través de un medio homogéneo, las ondas que emanan de una fuente determinada son llamadas ondas incidentes y pueden ser expresadas

con la ecuación (2.7). Si en su trayectoria se presenta una discontinuidad en las propiedades del material o bien una obstrucción cualquiera, es necesario la existencia de ondas reflejadas y refractadas a fin de satisfacer las condiciones de continuidad de esfuerzos y desplazamientos en esta interfase. Para fines prácticos, la refracción de ondas en la interfase de un sólido elástico con el aire puede ser despreciada. Las ondas reflejadas pueden ser expresadas también con la ecuación (2.7).

Ahora, si se inserta un obstáculo en la trayectoria de propagación, al chocar las ondas con el obstáculo, cada partícula en la frontera de éste actúa como una fuente secundaria que emite ondas radialmente hacia fuera. De aquí que en estos casos es necesario expresar las funciones de onda como una combinación de funciones radiales y angulares. Tomando como funciones radiales las funciones de Hankel de primera y segunda especie, $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$, y como funciones angulares las funciones trigonométricas $\cos(n\theta)$ y $\sin(n\theta)$, se tiene que el producto de una función radial por una angular constituye una función de onda. Dichas funciones de la forma,

$$H_n^{(1),(2)}(kr) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\theta, \quad k=\omega/\beta, \quad n=0,1,2,\dots \quad \text{-----}(2.13)$$

satisfacen la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares planas,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \right] \Phi = 0 \quad \text{-----}(2.14)$$

Las funciones de onda como en (2.13) se obtienen usualmente al resolver la ecuación de Helmholtz (2.14) por el método de separación de variables.

Las funciones de Hankel de primera especie $H_n^{(1)}(kr)$, y de segunda especie $H_n^{(2)}(kr)$, están relacionadas con las funciones de Bessel de primera especie $J_n(kr)$ y de segunda especie $Y_n(kr)$ por:

$$H_n^{(1)}(kr) = J_n(kr) + i Y_n(kr) \quad \text{-----} (2.15.a)$$

$$H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - i Y_n(kr) \quad \text{-----} (2.15.b)$$

Cuando las funciones en (2.13) son combinadas con el factor tiempo $e^{i\omega t}$, éstas representan ondas cilíndricas. Del comportamiento asintótico de $H_n^{(1),(2)}(kr)$,

$$H_n^{(1),(2)}(kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{\pm i(kr - \frac{1+2n}{4} \pi)},$$

se encuentra que la función $H_n^{(2)}(kr) \cos(n\theta) e^{i\omega t}$ representa una onda cilíndrica divergente, esto es, la onda se propaga alejándose del origen del sistema de coordenadas hacia el infinito. Similarmente, la función $H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) e^{i\omega t}$ representa una cilíndrica convergente hacia el origen. La elección de una u otra de las funciones radiales y angulares dependen esencialmente de la física del problema.

2.2. Teorema de adición de Graf

En ocasiones es necesario transformar un campo de ondas de un sistema de coordenadas a otro con la particularidad de que dicho campo conserve su forma original: por ejemplo, la transformación de un campo de ondas cilíndricas de (r_i, θ_i) a (r_j, θ_j) , de manera que al expresarlo en (r_j, θ_j) sigan representando ondas cilíndricas. Esto es posible con la ayuda del teorema de adición de Graf^[8]. Con referencia a la figura 2.2, éste teorema se presenta en la siguiente forma:

$$\zeta_n^{(W)} \begin{cases} \cos(n\chi) \\ \sin(n\chi) \end{cases} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \zeta_{n+m}^{(U)} J_m(V) \begin{cases} \cos(m\alpha) \\ \sin(m\alpha) \end{cases} \quad \text{-----} (2.16)$$

$$\text{con } |V e^{\pm i\alpha}| < |U|$$

dondé $J_m(V)$ es la función de Bessel de primera especie y orden m . La función ζ puede ser cualquiera de las funciones de Hankel o de Bessel. Cuando $\zeta=J$ y $n=0,1,2,\dots$, la restricción dada no es necesaria.

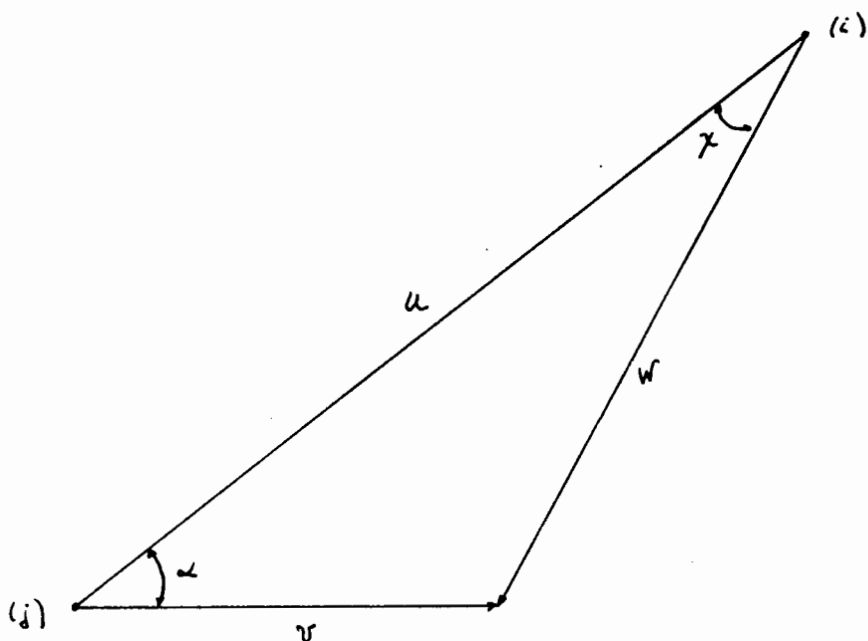


Figura 2.2 - Teorema de adición de Graf.

En particular, para el problema de interacción que se presenta en este trabajo, este teorema se utiliza para expresar un campo de ondas en un sistema de coordenadas determinado a fin de satisfacer las condiciones de frontera con respecto a éste sistema.

3. FORMULACION DEL MODELO

3.1. Descripción del modelo

En la figura 3.1 se muestra el sistema bidimensional de interacción dinámica estructura-suelo-estructura. Las estructuras, de altura h_j y ancho b_j , se idealizan como vigas unidimensionales de cortante, y se encuentran desplantadas sobre cimentaciones rígidas de sección transversal rectangular, de profundidad d_j y ancho e_j . A lo largo de todo el trabajo el índice j vale uno o dos, según se trate del sistema de la izquierda (1), o el de la derecha (2).

La suposición de que los cimientos se desplazan como si fueran infinitamente rígidos, no siempre es válido; sin embargo, en la práctica la mayoría de las estructuras para las que la interacción es un aspecto importante, poseen cimentaciones que se comportan de manera esencialmente rígida^[9].

Las cimentaciones se encuentran incrustadas en un estrato de suelo elástico lineal, isótropo y homogéneo de espesor H , el cual se apoya en una base rígida con movimiento armónico que genera ondas SH.

Dada la geometría del problema, se podría expresar los campos de onda en un sistema de coordenadas cartesiano, sin embargo la solución resulta muy costosa, pues es necesario satisfacer las condiciones de frontera en el sentido de colocación; para ésto se imponen dichas condiciones de frontera en P puntos de la interfase suelo-cimentación. En términos de tiempo de proceso de una computadora esto puede resultar poco económico, por tanto es preferible el uso de campos de onda cilíndricos, con los cuales las condiciones de frontera se definen en forma continua con una sola coordenada (el radio). Es evidente que existe una incompatibilidad en cuanto a las geometrías de la cimentación y de la ondas cilíndricas difractadas, de aquí que sea necesario hacer uso de un artificio, como lo es el de encerrar las cimentaciones

por medio de unas fronteras ficticias de forma semicircular.

Se definen seis sistemas de coordenadas, que según la conveniencia se manejan como polares o cartesianos. Los dos primeros (r_j, θ_j) con origen en el centro de cada cimentación sirven para construir: los campos de onda difractados por las fronteras ficticias, los campos de onda dentro de los dominios Ω_j^r y el movimiento de campo libre. Los cuatro siguientes (r_{jk}, θ_{jk}) se encuentran localizados a una distancia $2H$, hacia arriba y hacia abajo, de la superficie libre y sirven para construir los campos reflejados por la superficie libre y la base rígida. El índice k vale 1 si el campo se refiere a la base rígida, y 2 a la superficie libre. Los campos W_{j1} son imágenes de W_j y a su vez W_{j2} son imágenes de W_{j1} .

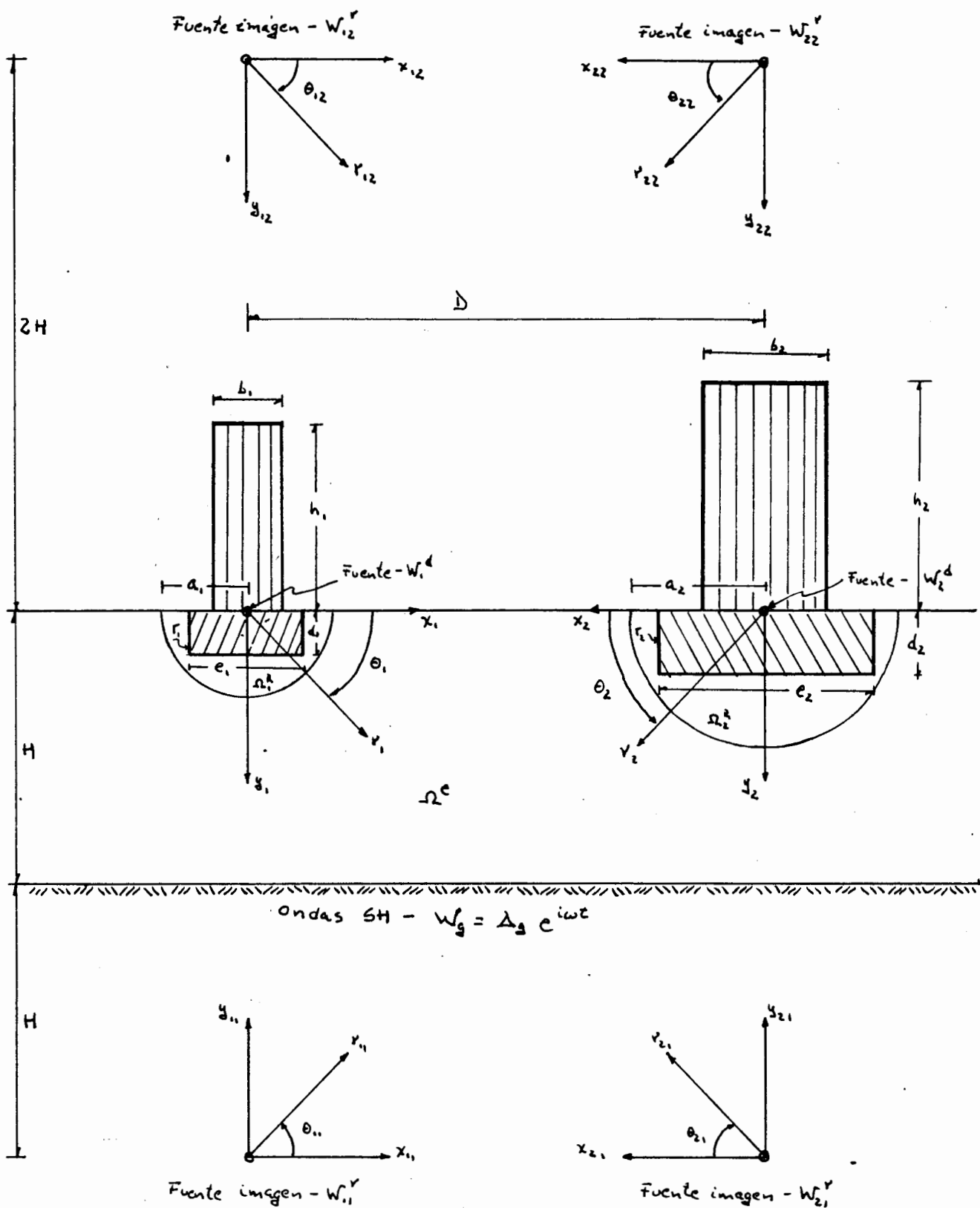


Figura 3.1 - Modelo de interacción estructura-suelo-estructura

3.2. Formulación matemática

3.2.1. Construcción de los campos de ondas

En un medio elástico lineal, isótropo y homogéneo el desplazamiento, W_s en la dirección z que genera la propagación de ondas armónicas SH, satisface la ecuación (2.9) de Helmholtz:

$$\nabla^2 W_s + k_s^2 W_s = 0, \quad \text{en } \Omega_j^R \text{ y } \Omega^e \quad (j = 1, 2) \quad (3.1)$$

donde: $k_s = \omega / \beta_s$, y $\beta_s = \sqrt{\mu_s / \rho_s}$

k_s = Número de onda de cortante del suelo.

ω = Frecuencia de excitación.

β_s = Velocidad de propagación de ondas de cortante en el suelo.

μ_s = Módulo de cortante del suelo.

ρ_s = Densidad del suelo.

En el dominio Ω^e el campo total W^e se puede construir con el principio de superposición como:

$$W^e = W^i + W^r + \sum_{j=1}^2 W_j^d + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 W_{jk}^r \quad (3.2)$$

donde: $W^i + W^r$ = movimiento de campo libre en ausencia de las estructuras. Si la base presenta un movimiento armónico $W_g = \Delta_g e^{i\omega t}$ que genera ondas SH, el campo $W^i + W^r$ en (x_j, y_j) está dado por la ecuación (2.7):

$$W^i(x_j, y_j) + W^r(x_j, y_j) = \Delta_g [\exp(ik_s y_j) + \exp(-ik_s y_j)] e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

donde: $\Delta_g = \frac{\Delta_g}{2 \cos(k_s H)}$ (3.4)

W_j^d = campo difractado por la cimentación j , el cual debe ser simétrico con respecto a y_j , y se puede expresar en (r_j, θ_j) como

una expansión de ondas cilíndricas^[7]:

$$W_j^d(r_j, \theta_j) = \Delta_s \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_{2n}^{(2)}(k_s r_j) \cos(2n\theta_j) \right] e^{i\omega t} \quad \text{----- (3.5)}$$

donde A_n^j = coeficiente complejo indeterminado y $H_m^{(2)}(\cdot)$ = función de Hankel de segunda especie y orden m .

W_{jk}^r = campo reflejado por la fuente imagen jk , el cual debe ser simétrico con respecto a y_j , W_{j1}^r es imagen de W_j^d y W_{j2}^r a su vez de W_{j1}^r , por tanto en (r_j, θ_j) pueden ser expresados como:

$$W_{jk}^r(r_{jk}, \theta_{jk}) = - \Delta_s \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_{2n}^{(2)}(k_s r_{jk}) \cos(2n\theta_{jk}) \right] e^{i\omega t} \quad \text{----- (3.6)}$$

En el dominio Ω_j^R el campo W_j^R se puede construir con superposición de ondas planas. De la figura 3.2,

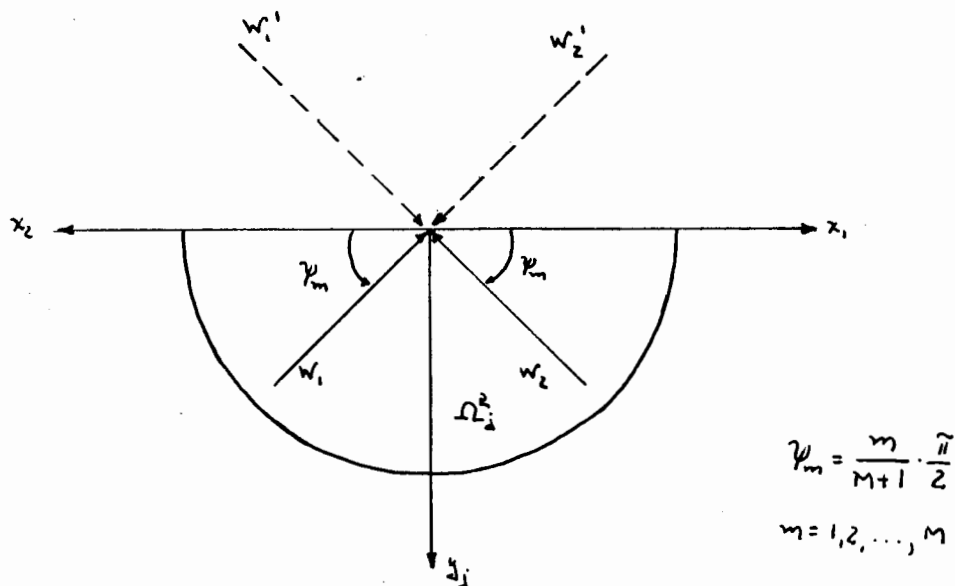


Figura 3.2 - Campo de ondas planas en Ω_j^R

$$W_j^M = W_1 + W_1' + W_2 + W_2' \quad \text{-----} (3.7)$$

donde W_j y W_j' están dados por la ecuación (2.7). Desarrollando (3.7) se llega a:

$$W_j^M(x_j, y_j) = [4 \cos(k_s y_j \sin \gamma_m'') \cos(k_s x_j \cos \gamma_m'')] e^{i\omega t} \quad \text{-----} (3.8)$$

Por tanto,

$$W_j^R(x_j, y_j) = \Delta_s \sum_{m=1}^{m_{\max}} B_m^j W_m^j(x_j, y_j) \quad \text{en } \Omega_j^R \quad \text{-----} (3.9)$$

3.2.2. Condiciones de frontera del problema

Fronteras ficticias: Las condiciones de frontera que se deben satisfacer en las fronteras ficticias son de continuidad de desplazamientos y esfuerzos:

$$W^e \Big|_{r_j=a_j} = W^R \Big|_{r_j=a_j} \quad 0 \leq \theta_j \leq \pi \quad \text{-----} (3.10)$$

$$\mu_s \frac{\partial W^e}{\partial r_j} \Big|_{r_j=a_j} = \mu_s \frac{\partial W^R}{\partial r_j} \Big|_{r_j=a_j} \quad 0 \leq \theta_j \leq \pi \quad \text{-----} (3.11)$$

Cimentaciones: Las condiciones de frontera que se deben satisfacer en las fronteras r_j (interfases suelo-cimentaciones) son de continuidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas:

$$W_j^R \Big|_{r_j} = W_j^c = \Delta_j^c e^{i\omega t} \quad \text{-----} (3.12)$$

$$M_j^c \ddot{W}_j^c = F_j^s + F_j^E \quad \text{-----} (3.13)$$

donde:

Δ_j^c = Amplitud de desplazamiento de la cimentación j .

M_j^c = Masa por unidad de longitud de la cimentación j .

F_j^s = Fuerza por unidad de longitud que genera el suelo sobre la cimentación j , la cual está dada por:

$$F_j^s = 2\mu_j^s \left[\int_0^{e_j/2} \frac{\partial W_j^R}{\partial y_j} \Big|_{y_j=d_j} dx_j + \int_0^{d_j} \frac{\partial W_j^R}{\partial x_j} \Big|_{x_j=e_j/2} dy_j \right] e^{i\omega t} \quad \text{-----}(3.14)$$

Desarrollando ésta expresión se llega a:

$$F_j^s = -8\mu_j^s \Delta_s \sum_{m=1}^M B_m^j \left[\frac{\text{sen}(k_s e_j/2 \cos\psi_m) \text{sen}(k_s d_j \text{sen}\psi_m)}{\text{sen}\psi_m \cos\psi_m} \right] e^{i\omega t} \quad \text{-----}(3.15)$$

donde:

$$\mu_j^s = \omega^2 M_j^s / (k_s^2 e_j d_j), \quad \text{y} \quad M_j^s = \rho_s e_j d_j$$

M_j^s = masa por unidad de longitud del suelo removido por la cimentación j.

F_j^E = fuerza por unidad de longitud que genera la estructura j sobre la cimentación j. Dado que la estructura j se modela como una viga unidimensional de cortante (figura 3.3), la ecuación que gobierna su movimiento es^[10]:

$$\frac{\partial^2 W_j^E(y_j, t)}{\partial y_j^2} = \frac{1}{(\beta_j^E)^2} \frac{\partial^2 W_j(y_j, t)}{\partial t^2} \quad \text{-----}(3.16)$$

$$\text{donde: } \beta_j^E = \sqrt{\mu_j^E / \rho_j^E}$$

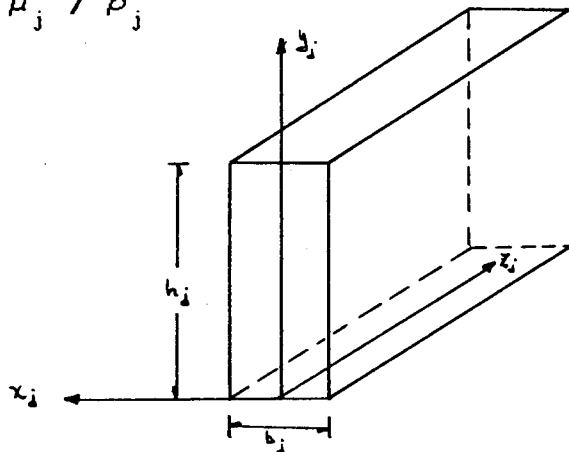


Figura 3.3 - Modelo unidimensional de viga de cortante

Resolviendo (3.16), considerando respuesta armónica en el tiempo, se llega a:

$$W_j^E(y_j, t) = \Delta_j^c \left[\cos(k_j^E y_j) + \tan(k_j^E h_j) \sin(k_j^E y_j) \right] e^{i\omega t}$$

y, como $F_j^E = \mu_j^E \partial W_j^E / \partial y_j \big|_{y_j=0}$, se tiene:

$$F_j^E = \omega^2 M_j^E \frac{\tan(k_j^E h_j)}{k_j^E h_j} \Delta_j^c e^{i\omega t} \quad \text{-----(3.17)}$$

donde $k_j^E = \omega / \beta_j^E =$ número de onda de cortante en la estructura j .

A pesar que el modelo de la estructura es unidimensional, mientras que el modelo del suelo es bidimensional, ambos son perfectamente compatibles, ya que tanto los desplazamientos como los esfuerzos generados por uno u otro modelo son fuera del plano.

4. SOLUCION

Interesa conocer la amplitud del movimiento en cada cimentación; para ésto se sustituye la ecuación (3.12) en (3.13), resultando:

$$- M_j^c \omega^2 \Delta_j^c e^{i\omega t} = F_j^s + F_j^E \quad \text{-----} (4.1)$$

Reemplazando (3.15) y (3.17) en (4.1), y despejando Δ_j^c , se tiene:

$$\Delta_j^c = C_j \Delta_s \sum_{m=1}^M B_m^j \phi_m^j \quad \text{-----} (4.2)$$

donde:

$$C_j = \frac{8 (k_j^E h_j / k_s^2 e_j d_j)}{(M_j^E/M_j^s) \tan(k_j^E h_j) + (M_j^c/M_j^s) k_j^E h_j} \quad \text{-----} (4.3)$$

$$\phi_m^j = \frac{\text{sen}(k_s e_j / 2 \cos \psi_m) \text{sen}(k_s d_j \text{sen} \psi_m)}{\text{sen} \psi_m \cos \psi_m} \quad \text{-----} (4.4)$$

De la ecuación (4.2), se puede apreciar claramente que las incógnitas del problema son los coeficientes indeterminados B_m^j ($m=1,2,\dots,M$; $j=1,2$). Dichos coeficientes se calculan al satisfacer las condiciones de frontera en las fronteras ficticias y en las cimentaciones (ecuaciones 3.10, 3.11 y 3.12); sin embargo dichas ecuaciones no se pueden resolver idénticamente. Para su solución se empleará el método de los mínimos cuadrados.

Para satisfacer las condiciones de frontera impuestas en el problema, es necesario representar cada campo de ondas referido a los sistemas de coordenadas (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) . Para esto, primeramente, es conveniente expresar el campo W_j^m como función del sistema de coordenadas (r_j, θ_j) y desarrollarlo en serie de funciones de ondas cilíndricas. De la ecuación (3.8) y sustituyendo en (3.9): (en lo sucesivo el factor tiempo $e^{i\omega t}$ se sobreentiende a lo largo del trabajo)

$$W_j^R(r_j, \theta_j) = 4 \Delta_s \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n J_{2n}(k_s r_j) \left[\sum_{m=1}^M B_m^j \cos(2n\psi_m) \right] \cos(2n\theta_j) \quad \text{-----}(4.5)$$

donde ε_n = factor de Neuman ($\varepsilon_0 = 1$ y $\varepsilon_n = 2$, $n \geq 1$).

Similarmente, el campo libre $W^i + W^r$ en (r_j, θ_j) será:

$$W_j^i(r_j, \theta_j) + W_j^r(r_j, \theta_j) = 2 \Delta_s \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_{2n}(k_s r_j) \cos(2n\theta_j) \quad \text{-----}(4.6)$$

Para referir los campos W_{jk}^r y W_j^d a los sistema de coordenadas (r_j, θ_j) se utiliza el teorema de adición de Graf. En las figuras 4.1 y 4.2 se ilustra la aplicación de éste teorema en la transformación de los campos de ondas.

Al comparar las figuras 4.1 y 4.2 se puede observar que los ángulos θ_{jk} y α correspondientes a cada transformación son de la misma forma. Por tanto es posible expresar los campos en una forma general. Desarrollando en cada caso la ecuación (2.16) se llega a:

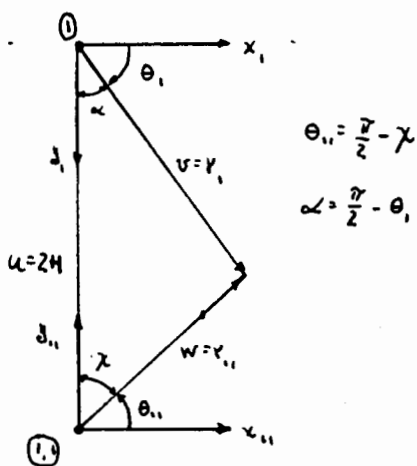
$$W_{jk}^r(r_j, \theta_j) = -(\Delta_s/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^{n+m} KH_{nm}(2k_s H) A_n^j J_{2m}(k_s r_j) \cos(2m\theta_j) \quad \text{-----}(4.7)$$

$$W_{j\pm 1, k}^r(r_j, \theta_j) = -\Delta_s \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_m/2) KH_{nm}(k_s u, \gamma) A_n^{j\pm 1} J_{2m}(k_s r_j) \cos(2m\theta_j) \right. \\ \left. \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} LH_{nm}(k_s u, \gamma) A_n^{j\pm 1} J_{2m}(k_s r_j) \sin(2m\theta_j) \right] \quad \text{---}(4.8)$$

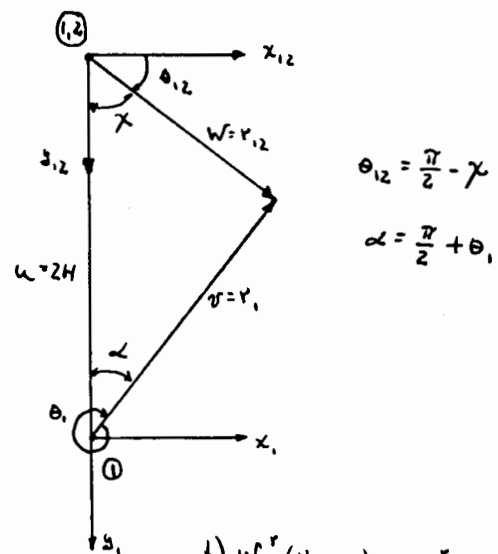
$$W_{j\pm 1}^d(r_j, \theta_j) = \Delta_s \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_m KH_{nm}(k_s D) A_n^{j\pm 1} J_{2m}(k_s r_j) \cos(2m\theta_j) \quad \text{---}(4.9)$$

En estas expresiones:

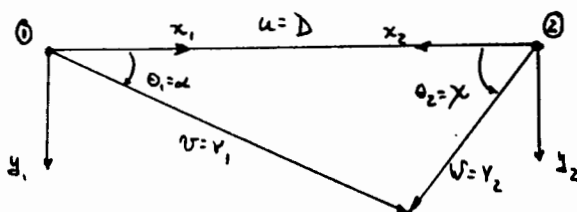
$$KH_{nm}(2k_s H) = H_{2(n+m)}^{(2)}(2k_s H) + H_{2(n-m)}^{(2)}(2k_s H)$$



a) Campo $W_{11}^r(r_{11}, \theta_{11}) \rightarrow W_{11}^r(r_1, \theta_1)$

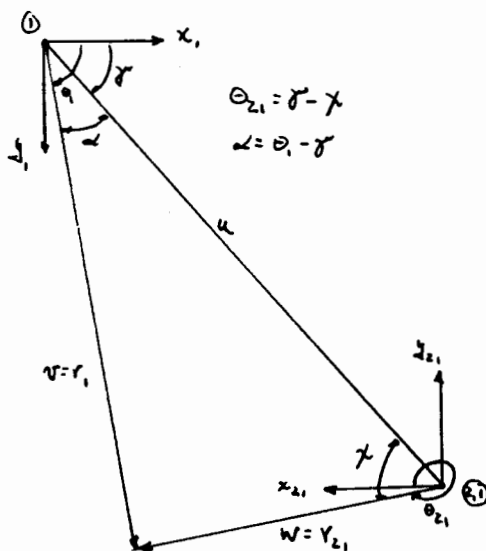


b) $W_{12}^r(r_{12}, \theta_{12}) \rightarrow W_{12}^r(r_1, \theta_1)$



c) $W_2^d(r_2, \theta_2) \rightarrow W_2^d(r_1, \theta_1)$

d) $W_{21}^r(r_{21}, \theta_{21}) \rightarrow W_{21}^r(r_1, \theta_1)$



e) $W_{22}^r(r_{22}, \theta_{22}) \rightarrow W_{22}^r(r_1, \theta_1)$

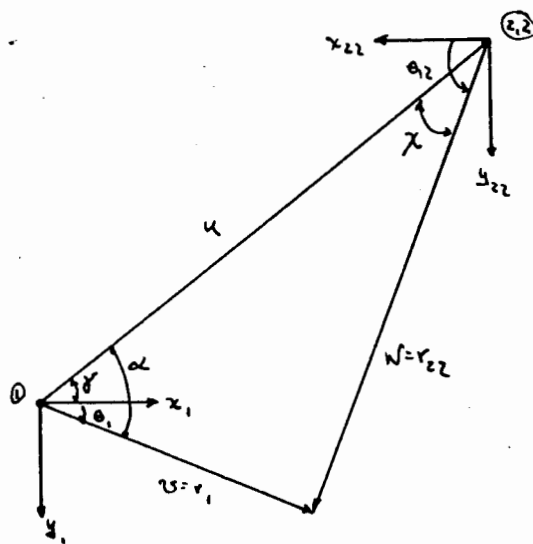
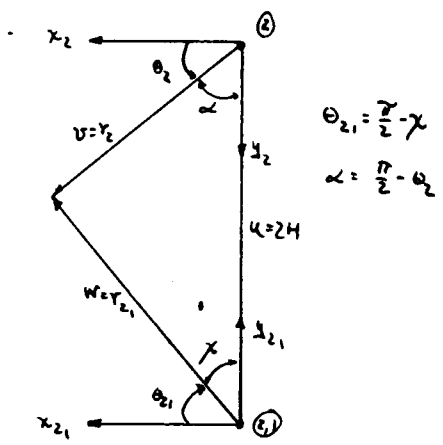
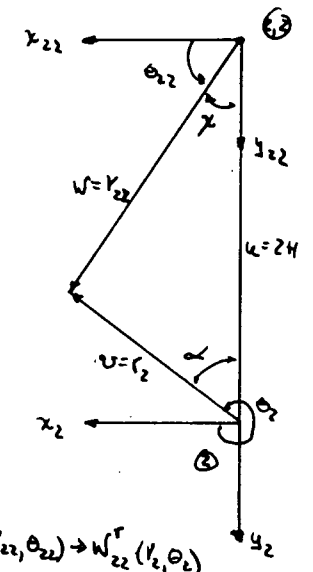


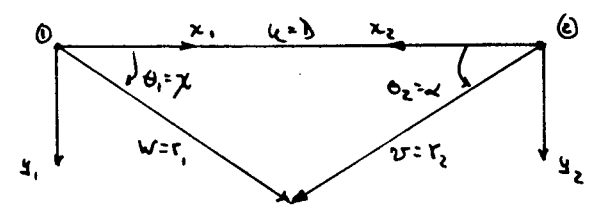
Figura 4.1 - Transformación de los campos de ondas a (r_1, θ_1)



a) $w_{21}^v(r_{21}, \theta_{21}) \rightarrow w_{21}^r(r_2, \theta_2)$

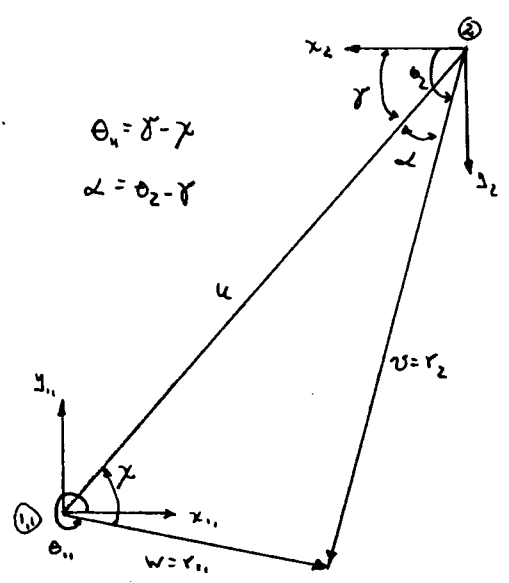


b) $w_{22}^r(r_{22}, \theta_{22}) \rightarrow w_{22}^v(r_2, \theta_2)$



c) $w_1^d(r_1, \theta_1) \rightarrow w_1^d(r_2, \theta_2)$

d) $w_{11}^r(r_{11}, \theta_{11}) \rightarrow w_{11}^r(r_2, \theta_2)$



e) $w_{12}^r(r_{12}, \theta_{12}) \rightarrow w_{12}^r(r_2, \theta_2)$

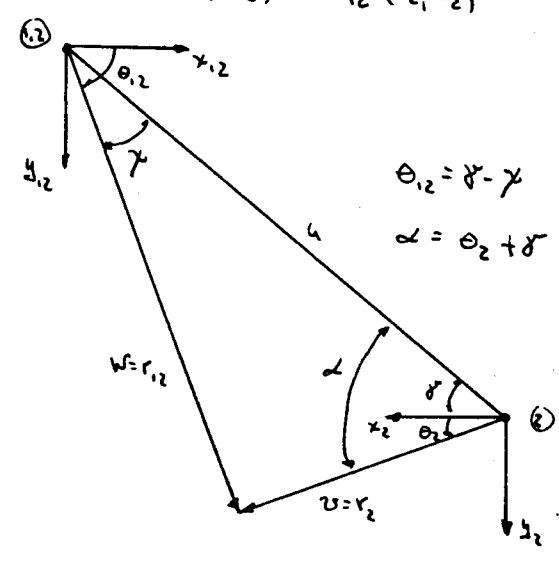


Figura 4.2 - Transformación de los campos de ondas a (r_2, θ_2)

$$KH_{nm}(k_s u, \gamma) = \cos(2(n+m)\gamma) H_{2(n+m)}^{(2)}(k_s u) + \cos(2(n-m)\gamma) H_{2(n-m)}^{(2)}(k_s u)$$

$$u = \sqrt{4H^2 + D^2} ; \quad \gamma = \tan^{-1}(2H/D)$$

$$KH_{nm}(k_s D) = [H_{2(n+m)}^{(2)}(k_s D) + H_{2(n-m)}^{(2)}(k_s D)] / 2$$

$$LH_{nm}(k_s u, \gamma) = \sin(2(n+m)\gamma) H_{2(n+m)}^{(2)}(k_s u) - \sin(2(n-m)\gamma) H_{2(n-m)}^{(2)}(k_s u)$$

$$\text{En } j \pm 1 \begin{cases} +, & \text{si } j = 1 \\ -, & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

H = Espesor del estrato

D = Separación entre las dos estructuras

Por tanto, en el dominio Ω^e el campo total W^e referido al sistema de coordenadas (r_j, θ_j) se construye sustituyendo (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9) en la ecuación (3.2):

$$W^e(r_j, \theta_j) = \Delta_s \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2\varepsilon_n J_{2n}(k_s r_j) + H_{2n}^{(2)}(k_s r_j) A_n^j + \varepsilon_n J_{2n}(k_s r_j)^* \right. \\ \left. \sum_{l=0}^{\infty} [KH_{ln}(k_s D) - KH_{ln}(k_s u, \gamma)] A_l^{j \pm 1} - (-1)^{l+n} KH_{ln}(2k_s H) A_l^j \right\} \cos(2n\theta_j) \quad \text{-----}(4.10)$$

El índice m se cambia por n, y n por l.

Ahora, es posible desarrollar las ecuaciones de continuidad de desplazamientos y esfuerzos en las fronteras ficticias e interfase suelo-cimentaciones.

Fronteras ficticias:

De la ecuación (3.10) - continuidad de desplazamientos - :

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^n [KH_{ln}(k_s u, \gamma) - KH_{ln}(k_s D)] A_l^{j \pm 1} + (-1)^l [KH_{ln}(2k_s H) - \\ \frac{\delta_{nl}}{\varepsilon_l} \frac{H_{2l}^{(2)}(k_s a_j)}{J_{2l}(k_s a_j)}] A_l^j + 4 \sum_{m=1}^M B_m^j \cos(2n\psi_m) = 2(-1)^n \quad \text{-----}(4.11)$$

De la ecuación (3.11) - continuidad de esfuerzos - :

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^n [KH_{ln}(k_s u, \gamma) - KH_{ln}(k_s D)] A_l^{j \pm 1} + (-1)^l [KH_{ln}(2k_s H) - \frac{\delta_{nl}}{\varepsilon_l} \frac{H_{2l}^{(2)'}(k_s a_j)}{J_{2n}'(k_s a_j)}] A_l^j + 4 \sum_{m=1}^M B_m^j \cos(2n\psi_m) = 2(-1)^n \text{ ----- (4.12)}$$

Donde prima indica diferenciación.

Cimentaciones:

De la ecuación (3.12) - Continuidad de desplazamientos - :

$$\sum_{m=1}^M [C_j \phi_m^j - 4 \cos(k_s y_j \sin \psi_m) \cos(k_s e_j / 2 \cos \psi_m)] B_m^j = 0, \quad 0 \leq y_j \leq d_j \text{ ----- (4.13.a)}$$

$$\sum_{m=1}^M [C_j \phi_m^j - 4 \cos(k_s d_j \sin \psi_m) \cos(k_s x_j \cos \psi_m)] B_m^j = 0, \quad -e_j/2 \leq x_j \leq e_j/2 \text{ ---- (4.13.b)}$$

Ya se mencionó anteriormente que éstas ecuaciones no se pueden satisfacer idénticamente. En las fronteras ficticias (ecuaciones 4.11 y 4.12) existe un error definido por :

$$\left\{ E_j^F \right\} = \left\{ \begin{matrix} \{ E_j^d \} \\ \{ E_j^a \} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} [D] & [F]_j & [H] \\ [D] & [G]_j & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ A \}_{j \pm 1} \\ \{ A \}_j \\ \{ B \}_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{ I \} \\ \{ I \} \end{Bmatrix} \text{ ----- (4.14)}$$

Donde:

$$[D_{nl}] = [(-1)^n (KH_{ln}(k_s u, \gamma) - KH_{ln}(k_s D))], \quad n, l = 0, 1, \dots, LN$$

$$[F_{nl}] = [(-1)^l \left\{ KH_{ln}(2k_s H) - \frac{\delta_{nl}}{\varepsilon_l} \frac{H_{2l}^{(2)}(k_s a_j)}{J_{2l}(k_s a_j)} \right\}], \quad n, l = 0, 1, \dots, LN$$

$$[G_{nl}] = [(-1)^l \left\{ KH_{ln}(2k_s H) - \frac{\delta_{nl}}{\varepsilon_l} \frac{H_{2l}^{(2)'}(k_s a_j)}{J_{2l}'(k_s a_j)} \right\}], \quad n, l = 0, 1, \dots, LN$$

$$[H_{nm}] = [4 \cos(2n\psi_m)], \quad n = 0, 1, \dots, LN, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\{I_n\} = \{2(-1)^n\}, \quad n = 0, 1, \dots, LN$$

En las cimentaciones (ecuaciones 4.13.a y 4.13.b) existe un error definido por:

$$\left\{ \begin{matrix} E_j^x \\ E_j^y \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} E_j^x(x_j) \\ E_j^y(y_j) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \{J_j\}^T \{B_j\} \\ \{K_j\}^T \{B_j\} \end{matrix} \right\} \quad \text{----- (4.14)}$$

Donde:

$$\{J_m(x_j)\} = \{C_j \phi_m^j - 4 \cos(k_s d_j \sin \psi_m) \cos(k_s x_j \cos \psi_m)\}, \quad m = 0, 1, \dots, M$$

$$\{K_m(y_j)\} = \{C_j \phi_m^j - 4 \cos(k_s y_j \sin \psi_m) \cos(k_s e_j/2 \cos \psi_m)\}, \quad m = 0, 1, \dots, M$$

Para la solución de las ecuaciones se utilizará el método de los mínimos cuadrados. Aplicando el método, el error cuadrático en las condiciones de frontera queda definido por:

$$E^2 = \sum_{j=1}^2 \left\{ a_j \int_0^\pi |E_j^d|^2 d\theta_j + a_j \int_0^\pi |E_j^s|^2 d\theta_j + 2 \int_0^{e_j/2} |E_j^x|^2 dx_j + 2 \int_0^{d_j} |E_j^y|^2 dy_j \right\}$$

o bien :

$$E^2 = \sum_{j=1}^2 \left\{ a_j \int_0^\pi E_j^{d*} E_j^d d\theta_j + a_j \int_0^\pi E_j^{s*} E_j^s d\theta_j + 2 \int_0^{e_j/2} E_j^{x*} E_j^x dx_j + 2 \int_0^{d_j} E_j^{y*} E_j^y dy_j \right\} \quad \text{----- (4.15)}$$

Donde el signo * implica conjugación.

Como, $E^2 = E^2 (A_0^j, A_1^j, \dots, A_{LN}^j, B_1^j, B_2^j, \dots, B_M^j)$, la condición de mínimo está dada por :

$$\frac{\partial E^2}{\partial A_i^j} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, LN \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial B_k^j} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.17)$$

Desarrollando las ecuaciones (4.16) y (4.17) se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} [C]_{11} & [C]_{12} & [C]_{13} & [C]_{14} \\ [C]_{21} & [C]_{22} & [C]_{23} & [C]_{24} \\ [C]_{31} & [C]_{32} & [C]_{33} & [C]_{34} \\ [C]_{41} & [C]_{42} & [C]_{43} & [C]_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\}_1 \\ \{A\}_2 \\ \{B\}_1 \\ \{B\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{D\}_1 \\ \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Donde:

$$\begin{aligned} [C_{il}]_{11} = [C_{il}]_{22} = & \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (a_j/4) ([J_{2n}(k_s a_j)]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)}(k_s a_j) - \right. \right. \\ & (-1)^i KH_{ln}^*(2k_s H)] [\delta_{nl} H_{2n}^{(2)}(k_s a_j) - (-1)^l KH_{ln}(2k_s H)] + [J_{2n}'(k_s a_j)]^2 \\ & [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)*}(k_s a_j) - (-1)^i KH_{ln}^*(2k_s H)] [\delta_{nl} H_{2n}^{(2)*}(k_s a_j) - (-1)^l KH_{ln}(2k_s H)] \} \\ & + (a_{j\pm 1}/4) ([J_{2n}(k_s a_{j\pm 1})]^2 + [J_{2n}'(k_s a_{j\pm 1})]^2) [KH_{ln}^*(k_s D) - KH_{ln}^*(k_s u, \gamma)] \\ & \left. [KH_{ln}(k_s D) - KH_{ln}(k_s u, \gamma)] \right\} \Bigg], \quad \begin{matrix} [C]_{11} & \text{con } j=1 \\ [C]_{22} & \text{con } j=2 \end{matrix} \quad (4.19) \end{aligned}$$

$$[C_{il}]_{12} = [C_{il}]_{21} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (a_j/4) ([J_{2n}(k_s a_j)]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(2)}(k_s a_j) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^l \text{KH}_{ln}(2k_s H)] + [J_{2n}'(k_s a_j)]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(2)'}(k_s a_j) - (-1)^l \text{KH}_{ln}(2k_s H)] \\
& [\text{KH}_{ln}^*(k_s D) - \text{KH}_{ln}^*(k_s u, \gamma)] + (a_{j\pm 1}/4) ([J_{2n}(k_s a_{j\pm 1})]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)}(k_s a_{j\pm 1})] \\
& + [J_{2n}'(k_s a_{j\pm 1})]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)'}(k_s a_{j\pm 1}) - (-1)^l (\text{KH}_{ln}^*(2k_s H))] [\text{KH}_{ln}(k_s D) - \\
& \text{KH}_{ln}(k_s u, \gamma)] \} \Bigg] \begin{matrix} [C]_{12} \text{ con } j=1 \\ [C]_{21} \text{ con } j=2 \end{matrix} \text{-----} (4.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [C_{im}^*]_{13} [C_{kl}^*]_{31} = [C_{im}^*]_{24} = [C_{kl}^*]_{42} = \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_j \cos(2n\psi_m) ([J_{2n}(k_s a_j)]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)}(k_s a_j) - (-1)^l \text{KH}_{ln}^*(2k_s H)] + \right. \right. \\
& \left. \left. [J_{2n}'(k_s a_j)]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)'}(k_s a_j) - (-1)^l \text{KH}_{ln}^*(2k_s H)] \right\} \right] \text{-----} (4.21) \\
& [C]_{13}^* = [C]_{31} \text{ con } j=1, \quad [C]_{24}^* = [C]_{42} \text{ con } j=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [C_{im}^*]_{14} = [C_{kl}^*]_{41} = [C_{im}^*]_{23} = [C_{kl}^*]_{32} = \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_j \cos(2n\psi_m) ([J_{2n}(k_s a_j)]^2 + [J_{2n}'(k_s a_j)]^2) [\text{KH}_{ln}^*(k_s D) - \right. \right. \\
& \left. \left. \text{KH}_{ln}^*(k_s u, \gamma)] \right\} \right] \text{-----} (4.22) \\
& [C]_{14}^* \text{ y } [C]_{32} \text{ con } j=1, \quad [C]_{41}^* \text{ y } [C]_{23} \text{ con } j=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [C_{km}]_{99} = [C_{km}]_{44} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 4 a_j \cos(2n\psi_k) \cos(2n\psi_m) ([J_{2n}(k_s a_j)]^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. [J_{2n}'(k_s a_j)]^2 \right) + (P_{km}^j/2\pi\epsilon_n) + (Q_{km}^j/2\pi\epsilon_n) \right\} \Bigg] \begin{matrix} [C]_{99} \text{ con } j=1 \\ [C]_{44} \text{ con } j=2 \end{matrix} \text{---} (4.23)
\end{aligned}$$

$$[C_{km}]_{94} = [C_{km}]_{49} = [0] \quad (\text{matriz de ceros}) \text{-----} (4.24)$$

$$\{D_l\}_1 = \{D_l\}_2 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n / 2 \right] \left[a_j \left([J_{2n}(k_s a_j)]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)}(k_s a_j) - (-1)^l KH_{ln}^*(2k_s H)] + [J_{2n}'(k_s a_j)]^2 [\delta_{nl} H_{2n}^{(1)'}(k_s a_j) - (-1)^l KH_{ln}^*(2k_s H)] \right) + a_{j\pm 1} ([J_{2n}(k_s a_{j\pm 1})]^2 + [J_{2n}'(k_s a_{j\pm 1})]^2) [KH_{ln}^*(k_s D) - KH_{ln}^*(k_s u, \gamma)] \right] \right\}$$

$\{D_l\}_1$ con $j=1$, $\{D_l\}_2$ con $j=2$, ----- (4.25)

$$\{D_k\}_3 = \{D_k\}_4 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[-2(-1)^n a_j \cos(2n\psi_k) ([J_{2n}(k_s a_j)]^2 + [J_{2n}'(k_s a_j)]^2) \right] \right\}, \{D_l\}_3 \text{ con } j=1 \text{ y } \{D_l\}_4 \text{ con } j=2 \text{ ----- (4.26)}$$

En estas ecuaciones: $l, l = 0, 1, \dots, LN$; $k, m = 1, 2, \dots, M$.

En la ecuación (4.23):

$$P_{km}^j = C_j^2 \phi_k^j \phi_m^j e_j / 2 - \frac{4 C_j}{k_s} \left[\frac{\phi_k^j \cos(k_s d_j \sin \psi_m) \sin(k_s e_j / 2 \cos \psi_m)}{\cos \psi_m} + \frac{\phi_m^j \cos(k_s d_j \sin \psi_k) \sin(k_s e_j / 2 \cos \psi_k)}{\cos \psi_k} \right] + \frac{8 \cos(k_s d_j \sin \psi_k) \cos(k_s d_j \sin \psi_m)}{k_s}$$

$$\left[(1 - \delta_{mk}) \left(\frac{\sin(k_s e_j / 2 (\cos \psi_m - \cos \psi_k))}{\cos \psi_m - \cos \psi_k} + \frac{\sin(k_s e_j / 2 (\cos \psi_m + \cos \psi_k))}{\cos \psi_m + \cos \psi_k} \right) + \frac{\delta_{mk}}{2} \left(k_s e_j + \frac{\sin(k_s e_j \cos \psi_m)}{\cos \psi_m} \right) \right] \text{ ----- (4.27)}$$

$$Q_{km}^j = C_j^2 \phi_k^j \phi_m^j d_j - \frac{4 C_j}{k_s} \left[\frac{\phi_k^j \cos(k_s e_j / 2 \cos \psi_m) \sin(k_s d_j \sin \psi_m)}{\sin \psi_m} + \frac{\phi_m^j \cos(k_s e_j / 2 \cos \psi_k) \sin(k_s d_j \cos \psi_k)}{\sin \psi_k} \right] + \frac{8 \cos(k_s e_j / 2 \cos \psi_k) \cos(k_s e_j / 2 \cos \psi_m)}{k_s}$$

$$\left[(1-\delta_{mk}) \left(\frac{\sin(k_s d_j (\sin\psi_m - \sin\psi_k))}{\sin\psi_m - \sin\psi_k} + \frac{\sin(k_s d_j (\sin\psi_m + \sin\psi_k))}{\sin\psi_m + \sin\psi_k} \right) + \frac{\delta_{mk}}{2} \left(2k_s d_j + \frac{\sin(2k_s d_j \sin\psi_m)}{\sin\psi_m} \right) \right] \text{-----} (4.28)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (4.18), se obtienen los valores de los coeficientes indeterminados B_m^j , y al sustituir en (4.2) se tienen las amplitudes de los desplazamientos en las cimentaciones. De aquí es posible calcular las funciones de transferencia para cada sistema, las cuales están dadas por:

$$H_j(\omega) = \frac{\ddot{W}_j^c}{\ddot{W}_g} = \frac{\Delta_j^c}{\Delta_g} \text{-----} (4.29)$$



DEPFI

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el desarrollo analítico de un modelo para estudiar el problema de interacción entre dos estructuras y un estrato de suelo. Como características principales del modelo se pueden mencionar: se consideran cimentaciones con secciones transversales rectangulares y un estrato de suelo apoyado en una base rígida.

Por limitaciones de tiempo se presenta únicamente la solución analítica, sin embargo el objetivo principal es hacer un análisis paramétrico a fin de poder establecer en que medida puede ser importante el efecto de interacción estructura-suelo-estructura.

Finalmente, es posible incorporar en este trabajo algunas mejoras que permitan modelar en forma más aproximada el problema real, como por ejemplo, incluir el amortiguamiento de los materiales, así como la modelación de una frontera en la base del estrato que no sea infinitamente rígida.

REFERENCIAS

- [1] . Luco, E., "Dynamic Interaction of a Shear Wall with the Soil", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM2, 1969.
- [2] . Kobori, T. y Shinozaki, Y., "Earthquake Response of Structures under a Topographic Site Condition", Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 30, 1981.
- [3] . Luco, E. y Contesse, L., "Dynamic Structure-Soil-Structure Interaction", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 63, No. 4, 1973.
- [4] . Wong, H.L. y Trifunac, M.D., "Two-Dimensional, Antiplane, Building-Soil-Building Interaction for two or more Buildings and for Incident Plane SH Waves", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 65, No. 6, 1975.
- [5] . Avilés, J., "Interacción Estructura-Suelo-Estructura en Valles Aluviales", VII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Querétaro, Gro., 1987.
- [6] . Avilés, J., de Gante, J. y Calzada, D., "Respuesta Sísmica de una Estructura sobre un Estrato Blando", VI Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Puebla, Pue., 1988.
- [7] . Mow, C. y Pao, Y., The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, The Rand Corporation, R-482-PR, Santa Monica, California, 1971.
- [8] . Abramowitz, M y Stegun, I., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1970.
- [9] . Whitman, R. y Bielak, J., Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos, Capítulo 7: Cimentaciones, Editorial Imcyc, 1982.

[10] : Newmark, M. y Rosenblueth, E., Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1971.