



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Óptica Cuántica: Una Visión Simplificada y Simulaciones

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero en Computación

P R E S E N T A

Roberto Cabello Ramírez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado OPTICA CUANTICA: UNA VISION SIMPLIFICADA Y SIMULACIONES que presenté para obtener el título de INGENIERO EN COMPUTACIÓN es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

ROBERTO CABELLO RAMIREZ
Número de cuenta: 410023288

Agradecimientos

El presente trabajo representa un esfuerzo en redirigir mis aprendizaje y futuro laboral y académico hacia el estudio de la computación cuántica, partiendo del uso de la Interferometría para el estudio de la misma. Esto no hubiera sido posible sin el incondicional apoyo del director de la presente tesis, el Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar, quien me ha apoyado, guiado e instruido en todo lo necesario para poder comprender la extensa teoría detrás de la mecánica cuántica, base de la computación cuántica a la que tanto interés tengo. A su gran paciencia, dedicación y calidez humana le estaré siempre agradecido.

Agradezco a mi madre, María Helena Ramírez Tuta, por la fehaciente fe en mis intereses y por su incansable apoyo e impulso en esta gran tarea que me propuse. A mi padre y su esposa, Roberto Cabello Reyes y María Luisa González de Miguel, por su siempre presente apoyo y convicción en el camino elegido, y a mi pareja, Grecia Jocelyn Hernández Jaramillo, por su fe en mi desarrollo académico, mis capacidades, consejos y aliento para continuar con mi sueño de investigar sobre computación cuántica.

Finalmente, pero no menos importante, al M.C. José Bladimir Pérez Guzmán, por su ayuda en comprender las matemáticas mas intrincadas dentro del marco de la teoría cuántica de campos que tantos dolores de cabeza causaron en un inicio. Las platicas y largas discusiones en el pizarrón me permitieron darle un enfoque mas practico y explicativo a tan complejo campo de conocimiento. Su apoyo incondicional me permitió tal tarea. También, al M.C. Andrés Alexander Mora Chaverri y el M.C. Miguel Alfonso Zapata de la Cruz, quienes con su gran expertise en física, me ayudaron a comprender conceptos teóricos que me parecían indescifrables, siempre dispuestos a charlar a toda aquella cuestión que cruzara mi mente. Todos ellos grandes amigos que me impulsaron siempre a perseguir el sueño que esta tesis comienza.

Índice general

Agradecimientos	i
Índice general	ii
Índice de figuras	iii
I Introducción	1
I Introducción a teoría cuántica de campos e Interferometría	2
2 La Cuantización del Campo Electromagnético	3
2.1. Cuantización de un Campo Unimodal	3
2.2. Las fluctuaciones cuánticas de un campo de modo singular	12
3 Divisores de Haz e Interferometría	14
3.1. La mecánica cuántica de los divisores de haz	14
3.2. Interferometría de fotones individuales	20
3.3. Mediciones libres de interacciones	22
4 Interferómetro de Hong-Ou-Mandel y Estados de Bell	24
4.1. Conversión paramétrica descendente espontánea como fuente de fotones	24
4.2. Interferómetro de Hong-Ou-Mandel	28
4.3. Estados de Bell	29
II Simplificación practica para operaciones en Interferometría	30
5 Interferencia cuántica y el único problema de la mecánica cuántica	31
5.1. Interferencia Cuántica	33
5.2. Interferencia de estados onda	37
5.3. Entrelazamiento	39
5.4. Estados iniciales entrelazados	41
6 Teorema de la No Clonación: Un Caso Práctico	43
6.1. Teorema de la no clonación	43
III Simulaciones de experimentos en Óptica Cuántica	46
7 Simulación por computadora en experimentos en óptica cuántica	47

7.1. Fuentes aleatorias	47
7.2. La prueba de anticorrelación de Grangier	52
7.3. Experimento cuántico de la doble rendija de Young	56
7.4. Simulación de la prueba experimental de no localidad cuántica	58
8 Conclusiones	61
Bibliografía	62

Índice de figuras

2.1. Campo electromagnético confinado a una cavidad unidimensional a lo largo del eje Z , con paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$	3
3.1. Divisor de haz con entrada del vacío	16
3.2. Interferómetro de Mach-Zehnder con solo un foton incidente. Los divisores de haz, BS1 y BS2 son 50:50; tambien contiene dos espejos, M1 y M2. La caja con la leyenda θ representa un cambio de fase relativo entre los dos brazos del interferómetro	21
3.3. El mismo interferómetro de MZI, pero sin la fase θ y con un objeto obstruyendo uno de los caminos, representado por la elipse.	23
4.1. Los fotones del haz bombeado son convertidos en los fotones señal e inerte, los cuales salen del cristal en distintas direcciones, con misma polarización entre ella, pero ortogonal a la original de la haz bombeado. Las direcciones posible están descritas por los conos concéntricos. GK04	25
4.2. Una sección transversal de los conos de luz que emergen del CPDE tipo I, donde puede verse como los símbolos iguales representan los fotones conjugados que satisfacen las condiciones de concordancia de fase. Además, los fotones del círculo intermedio representan el caso degenerado. La segunda figura es una representación gráfica de la condición de fase en concordancia. GK04	26
4.3. Convertidor descendente de tipo II, donde los fotones señal e inerte tendrán polarizaciones ortogonales. Por efectos de birrefringencia, los fotones son emitidos en dos conos que se intersecan, donde uno sera para el haz o y otro par el haz e. GK04	27
4.4. Esbozo del interferómetro de HOM	28
5.1. Divisor de haz con un fotón incidente en el puerto 1 y sus salidas para el caso transmitido y el reflejado.	33
5.2. El interferómetro de Mach-Zehnder está compuesto por dos divisores de haz, dos espejos, dos detectores, un control de fase para poder marcar uno de los caminos ópticos a la salida del primer divisor de haz y un contador de coincidencias.	34
5.3. Divisor de haz con dos fotones incidentes en el puerto 1 y 2 y sus salidas para el caso transmitido y el reflejado.	35
5.4. Divisor de haz con dos fotones incidentes en cada puerto	37
5.5. Divisor de haz con dos fotones incidentes con polarización ortogonal entre ellos en un mismo puerto.	39
5.6. Divisor de haz con dos fotones incidentes con polarización ortogonal entre ellos en puertos distintos.	40

5.7. Representación de la incidencia de los estado de Bell $ \psi^+\rangle$ y $ \psi^-\rangle$	41
7.1. Número de fotones en función del tiempo para dos series temporales: la serie de fotones simulados generada a partir de números aleatorios representada por cruces y una serie temporal periódica con intervalos de tiempo promedio de τ_0 representada por líneas.	49
7.2. Distribuciones de probabilidad del número de fotones para diferentes tiempos de conteo: $\tau = 0.1\tau_0, \tau_0, 2\tau_0, 3\tau_0, 4\tau_0, 10\tau_0$	50
7.3. Distribución de probabilidad de conteo de fotones simulada para diferentes tiempos de conteo $\tau = 5\tau_0, 0, 20\tau_0$; donde obtuvimos $\bar{n} = 5$ y $n = 20$ fotones en promedio respectivamente.	51
7.4. Distribuciones de probabilidad del número de fotones para una fuente cuántica en la que los intervalos de conteo son $\tau = \tau_0$ y $\tau = 2\tau_0$ respectivamente.	52
7.5. Diagrama del experimento moderno de Grangier.	53
7.6. Simulación del comportamiento de la función de correlación de segundo orden, casos $g_{2D}^2(0)$ (datos morados) y $g_{3D}^2(0)$ (datos rojos) en función de la ventana de coincidencia de fotones.	54
7.7. Simulación del comportamiento de la función de correlación de segundo orden $g_{3D}^2(0)$ en función del número de fotones para tres series independientes de fotones, una para cada detector.	55
7.8. Se producen pares de fotones a través de un cristal no lineal como el objetivo de la simulación anterior. Los fotones señal se dirigen hacia una doble rendija, mientras que los fotones idler se dirigen directamente al detector idler. Cada fotón que logra pasar a través de la doble rendija y es detectado debe estar en coincidencia temporal con el fotón idler para asegurar su estado de fotón individual.	56
7.9. Simulación del comportamiento de fotones individuales cruzando una doble rendija.	57
7.10. Simulación de la detección de fotones individuales cruzando una doble rendija en una pantalla para diferentes números de fotones: 100, 500, 1000 y 10,000.	58
7.11. Comportamiento del parámetro de Bell S en función del ángulo de diferencia de fase entre los componentes cuánticos de diferente polarización. Los efectos de no localidad comienzan a observarse por encima de $S = 2.0$	59
7.12. EB en función de la diferencia de fase $e^{i\phi}$ para 100 experimentos de no localidad simulados para el estado $ \Phi\rangle^+$. El valor promedio es $S = 2.25 \pm 0.024$	60

CAPÍTULO 1

Introducción

En este trabajo de tesis, perseguimos dos objetivos. El primero de ellos tienen que ver con la descripción plana de los conceptos básicos de la óptica cuántica, mientras que por otro lado discutimos los mismos conceptos desde el punto de vista de una **descripción didáctica**. Esta segunda parte es la contribución de esta tesis. Creemos que esta contribución es importante desde el punto de vista de que comprender los conceptos físicos que tienen una gran importancia en aplicaciones como el cómputo cuántico, la información cuántica, la metrología cuántica incluso la teleportación cuántica, en su momento serán desarrollados desde la ingeniería, razón por la cual, una base conceptual sencilla que permita crear algoritmos con una descripción rápida y directa sin atender los primeros principios.

Entonces la primera parte, en el capítulo 1, describimos la cuantización del campo electromagnético para tener el primer concepto de fotón y la base matemática que nos permite reconstruir el espectro de energía de un campo cuantizado. En el capítulo 2 hablamos de interferencia cuántica y del “único problema conceptual de la mecánica cuántica”. En el capítulo 3 se toca el tema del enredamiento cuántico. Estos temas están a nivel de un curso introductorio de óptica cuántica en cualquier carrera de física. Es importante notar la importancia de poseer algunos conocimientos sobre electrodinámica y mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana, lo cual permitirá al lector avanzar a través del capítulo sin mayor inconveniente. En caso de requerir apoyo, se recomienda utilizar el libro introductorio a la electrodinámica de Griffiths [Gri17], mientras que para la mecánica lagrangiana y hamiltoniana, el libro de la serie Schaum de Spiegel [Spi67] es de gran ayuda para obtener rápidamente una noción de estas.

En la segunda parte, realizamos una deconstrucción de lo aprendido, para darnos cuenta de que podemos evitar la mayor parte del trabajo ortodoxo de la rigurosidad construir algunas reglas que nos permitan calcular rápidamente la mayoría de los cálculos que se requieren a nivel de estados de fotones en la base del oscilador armónico. El capítulo 5 es dedicado a reflexionar cuáles son los motivos por los cuales podemos crear una intuición de los fenómenos cuánticos a partir de las reglas sencillas construidas en el capítulo 4, pero sobre todo, comprender por qué unas reglas tan sencillas pueden describir los conceptos contraintuitivos de la Mecánica Cuántica.

Entonces, el objetivo podría verse cumplido si cualquier lector de esta tesis, al revisar los capítulos 4,5 y 6 es capaz de computar y comprender los conceptos básicos de la mecánica cuántica.

Es necesario mencionar que los capítulos 2,3, y 4 están basados en la referencia [GK04], que es un libro obligado para los estudiantes de la óptica cuántica y que bien pudimos haberlo dejado indicado sin repetirlo a lo largo de esta tesis, sin embargo, la mayoría de los pasos intermedios en todas las deducciones han sido realizados por el sustentante. Esto le da un valor didáctico a la inclusión de los mencionados capítulos.

Finalmente, el capítulo 6 presenta un conjunto de simulaciones por computadora que reproducen experimentos clave de óptica cuántica en ausencia de laboratorio: (i) generación de fuentes aleatorias y comparación entre distribuciones de conteo tipo Poisson (láser) y no clásicas (sub-Poisson); (ii) prueba de anticorrelación de Grangier con énfasis en el antibunching y la condición $g^{(2)}(0) < 1$; (iii) doble rendija con detección fotón a fotón; y (iv) prueba de no localidad tipo Bell/CHSH a partir de estados entrelazados generados por SPDC, con sintonía de fase, ángulos y eficiencias para aproximar el estado $|\Phi^+\rangle$. Las simulaciones son didácticas y operativas: permiten barrer parámetros, visualizar transiciones clásico-cuánticas y calcular observables (tasas de coincidencia, correlaciones, visibilidad y violaciones de Bell), consolidando la intuición desarrollada en los capítulos anteriores.

PARTE I

Introducción a teoría cuántica de campos e Interferometría

CAPÍTULO 2

La Cuantización del Campo Electromagnético

En este capítulo se desarrolla el proceso de cuantización del campo electromagnético, iniciando con el estudio de un campo unimodal confinado en una cavidad unidimensional con paredes perfectamente conductoras. A partir de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes y mediante el método de separación de variables, se obtiene la ecuación de onda cuyas soluciones representan modos estacionarios con frecuencias discretas. Al expresar la energía total del campo en términos del campo eléctrico y magnético, se construye el Hamiltoniano y se establece su equivalencia con el de un oscilador armónico simple. Posteriormente, se introducen los operadores de creación y aniquilación, que permiten interpretar las excitaciones del campo como fotones de energía $\hbar\omega$. Se demuestra así que los estados del campo $|n\rangle$ describen configuraciones con n fotones, siendo el estado base el vacío con energía $\hbar\omega/2$. Finalmente, se analizan las fluctuaciones cuánticas del campo eléctrico, mostrando que su valor medio es nulo pero su varianza no lo es, incluso en el vacío, lo cual evidencia las fluctuaciones del vacío y la relación de incertidumbre entre el número de fotones y la fase del campo.

2.1. Cuantización de un Campo Unimodal

El caso a estudiar es el modo más simple de un campo de radiación, donde este se encuentra confinado a una cavidad unidimensional a lo largo del eje Z , con paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$. Lo anterior se puede apreciar en la figura 2.1. El campo eléctrico debe desvanecerse en las fronteras y tomara la forma de una onda estacionaria. Por conveniencia, se asumen fuentes de radiación nulas, lo que se puede tomar como la inexistencia de corrientes, cargas o algún medio dieléctrico en la cavidad. El campo eléctrico toma la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_x E_x(z, t) \quad (2.1)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_x$ es el vector de polarización unitario.

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, con unidades SI, están definidas como

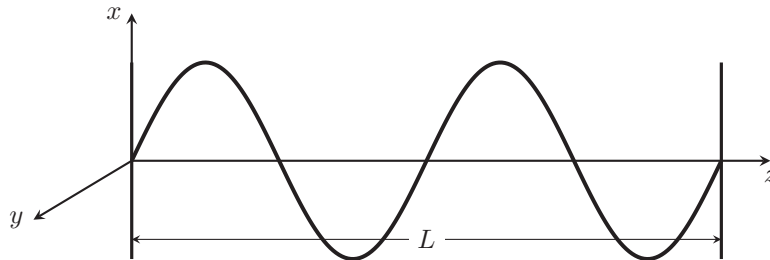


Figura 2.1: Campo electromagnético confinado a una cavidad unidimensional a lo largo del eje Z , con paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{B}$ representa el campo magnético, μ_0 la permeabilidad del vacío y ϵ_0 la permitividad del vacío, siendo μ_0 y ϵ_0 constantes definidas.

Un campo de modo singular que satisfaga las ecuaciones de Maxwell, debe satisfacer de igual manera la ecuación de onda. Las ecuaciones de Maxwell constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales están acopladas [Gri17 p. 393]. Para desacoplarlas, basta con aplicar el rotacional a las leyes de Faraday (2.2) y Ampère (2.3). En el caso presente, solo se aplicará el rotacional a la ley de Faraday para obtener la ecuación de onda para el campo electromagnético, cuya solución es de nuestro interés encontrar. Realizando lo ya dicho, se llega a

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (2.6)$$

donde si se utilizando identidades del álgebra vectorial [1], se puede llegar a

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Para el lado derecho de (2.6), se tiene que

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

donde se ha hecho uso de la ley de Ampère (2.3). De la ley de Gauss (2.4), se puede ver que para (2.7), si $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y aunado a (2.8), entonces (2.6) se simplifica a

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Se tiene la relación

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (2.10)$$

con c como la velocidad de la luz en el vacío, con lo que (2.9) queda como

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) es una ecuación diferencial parcial con las 3 dimensiones espaciales y la parte temporal, cuya solución para la parte izquierda puede ser vista como un superposición de soluciones de las componentes $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$. La ecuación para el campo magnético puede ser obtenida de una manera análoga. De la figura 2.1 y el hecho de que el campo eléctrico se propaga sobre el eje z , puede apreciarse que las componentes para los ejes x y y son nulas. Así, (2.11) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, con la solución propuesta

$$\mathbf{E}_x = Z(z) q(t). \quad (2.13)$$

¹La identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ es la utilizada.

Si se utiliza (2.13) en (2.12) y se desarrolla, se llega a

$$\frac{c^2}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

donde utilizando la constante de separación $-\omega^2$ para igualar ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\frac{c^2}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\omega^2 \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (2.16)$$

de las cuales, resolviendo, podemos obtener

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} Z(z) = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (2.18)$$

las cuales son dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. La solución para (2.18) se expresa solamente como $q(t)$, mientras que para (2.17) se tiene

$$Z(z) = \alpha_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}z\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}z\right). \quad (2.19)$$

Así, de (2.13), la solución para $E_x(z, t)$ queda dada como

$$E_x(z, t) = \left(\alpha_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}z\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}z\right) \right) (q(t)). \quad (2.20)$$

Con el numero de onda $k = \omega/c$, donde ω es la frecuencia del modo, se tiene

$$E_x(z, t) = (\alpha_1 \cos(kz) + \alpha_2 \sin(kz))(q(t)). \quad (2.21)$$

El campo eléctrico se desvanece en $z = 0$ y $z = L$, por lo que para la condición de frontera $z = 0$ y dado que $q(t)$ no puede ser nulo, la constante $\alpha_1 = 0$. Para la condición de frontera $z = L$, obtenemos que las frecuencias permitidas están dadas por

$$\omega_m = c \left(\frac{m\pi}{L} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

ya que, dado que $q(t)$ no puede ser nulo, entonces $\alpha_2 \sin k/L = 0$, donde $\alpha_2 \neq 0$ para evitar la solución trivial. Por tanto, para $\sin kL = 0$, con $kL = \omega L/c$, se tiene que $\omega L/c = m\pi$, que al resolver para ω , se obtiene (2.22).

Con lo anterior, llegamos a un solución para $E_x(z, t)$ de la forma

$$E_x(z, t) = \alpha_2 q(t) \sin(kz) \quad (2.23)$$

con la constante α_2 aun por determinar. Utilizando (2.23) en (2.3), se tiene que para el lado derecho de (2.3), la parcial del campo eléctrico

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} \hat{\mathbf{e}}_x = \alpha_2 \dot{q}(t) \sin(kz) \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (2.24)$$

la cual mantiene su dirección $\hat{\mathbf{e}}_x$.

Ahora, el campo magnético, por definición tiene una polarización perpendicular al campo eléctrico. Así, se definirá como $\mathbf{B}(r, t) = \hat{\mathbf{e}}_y B_y(z, t)$, donde mantiene su propagación en z . Su rotacional queda como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (2.25)$$

Igualando (2.24) y (2.25) para después integrar a ambos lados de la ecuación resultante, se llega a

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right) \alpha_2 \dot{q}(t) \cos kz + c_1. \quad (2.26)$$

De [Gri17, p. 357, 398] se tiene que la energía por unidad de volumen para campos electromagnéticos esta dada por

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right), \quad (2.27)$$

que en el caso concerniente sera

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right) \quad (2.28)$$

la cual se puede tomar para determinar el Hamiltoniano para un campo de modo singular si se integra sobre todo el volumen [GK04, p. 11], por lo que

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left(\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right) \quad (2.29)$$

será el mencionado Hamiltoniano.

Se sabe, además, que el Hamiltoniano del oscilador armónico simple de masa unitaria es

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \quad (2.30)$$

Empleando (2.23) y (2.26) en (2.29) se tiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V dV \left[\epsilon_0 \alpha_2^2 q^2(t) \sin^2(kz) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right)^2 \alpha_2^2 \dot{q}^2(t) \cos^2(kz) \right] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha_2^2 q^2(t) \int_V dV \sin^2(kz) + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \epsilon_0^2}{k^2} \alpha_2^2 \dot{q}^2(t) \int_V dV \cos^2(kz). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para un modo con condición de frontera $k = m\pi/L$ se cumple

$$\int_V dV \sin^2(kz) = \int_V dV \cos^2(kz) = \frac{V}{2},$$

por lo que el Hamiltoniano anterior puede escribirse como

$$H = \frac{V}{4} \epsilon_0 \alpha_2^2 q^2(t) + \frac{V}{4} \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0^2}{k^2} \right) \alpha_2^2 \dot{p}^2(t) + V c_1 + c_2, \quad (2.32)$$

donde en el último paso se ha identificado al momento canónico $p(t) = \dot{q}(t)$.

Al comparar (2.32) con el Hamiltoniano del oscilador armónico de masa unitaria, dado por (2.30),

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2),$$

se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{V}{2} \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0^2}{k^2} \right) \alpha_2^2, \\ \omega^2 &= \frac{V}{2} \epsilon_0 \alpha_2^2, \\ 0 &= V c_1, \\ 0 &= c_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

De aquí se concluye que $c_1 = c_2 = 0$ y, resolviendo para α_2 y usando la relación $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$ junto con $k = \omega/c$, se obtiene

$$\alpha_2 = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2}. \quad (2.34)$$

Haciendo uso de (2.34) en (2.23) y (2.26) se llega

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz) \quad (2.35)$$

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} p(t) \cos kz \quad (2.36)$$

que son los campos eléctrico y magnético para un campo de modo singular que satisfacen las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera dadas. Es notorio que los campos mencionados toman los roles de la posición y momento canónicos, respectivamente, de la ya mencionada Mecánica Hamiltoniana. Con las variables canónicas identificadas y observando al hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional dado en (2.30), se utiliza la regla de correspondencia formulada por Niels Bohr en 1920 y sostenida matemáticamente por el Teorema de Ehrenfest, donde se utilizan las variables clásicas q y p para reemplazarlas por sus operadores equivalentes $\hat{q}$ y $\hat{p}$. Estos satisfacen la relación canónica de conmutación dada como

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I} \quad (2.37)$$

donde se sigue el consenso de omitir $\hat{I}$, para solo escribir $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Con lo anterior, los campos eléctrico y magnético del modo singular se convierten en los operadores

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{q}(t) \sin(kz) \quad (2.38)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{p}(t) \cos kz, \quad (2.39)$$

respectivamente. Ahora, dado que los operadores $\hat{q}$ y $\hat{p}$ son hermíticos, corresponden entonces a cantidades observables, y por ende, medibles.

El oscilador armónico simple tiene el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (2.40)$$

donde se toma la masa unitaria y se aplica el principio de correspondencia para la posición y momentos canónicos, y así

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2), \quad (2.41)$$

el cual es el operador hamiltoniano.

Ahora, se presentan los operadores de aniquilación $\hat{a}$ y creación $\hat{a}^\dagger$, los cuales, al no ser Hermíticos, tampoco serán observables, a través de las combinaciones

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{1/2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (2.42)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{1/2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (2.43)$$

Haciendo uso de los operadores anteriores, se puede redefinir a los operadores eléctrico y magnético den términos de estos, así

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (2.44)$$

$$\hat{B}_x(z, t) = \mathcal{B}_0 \frac{1}{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz) \quad (2.45)$$

donde $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2}$ y $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k)(\epsilon_0 \hbar\omega^3/V)^{1/2}$ representan los campos eléctrico y magnético "por fotón", respectivamente. Los operadores de aniquilación y creación satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.46)$$

Ahora, si se realiza la operación $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, respetando el orden de operación y usando las definiciones (2.43) y (2.42), se llega a

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2 \hat{q}^2 + \hat{p}^2) - \frac{1}{2}, \quad (2.47)$$

de donde se identifica al operador Hamiltoniano (2.41), definiéndose así al operador Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.48)$$

en términos de los operadores de creación y aniquilación.

Para tratar ahora la dependencia temporal de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$, unos puntos deben ser resaltados previamente. En la representación de Schrödinger, los operadores no tienen dependencia temporal y los vectores estado pueden "modificarse" en el tiempo a través de los operadores unitarios $\hat{U}$ y su adjunto $\hat{U}^\dagger$. Mientras, a contrario sensu, en la representación de Heisenberg la dependencia temporal está en los operadores y los vectores estado se encuentran "congelados" en el tiempo [Zet09, p. 572, 573]. Así, en la representación de Heisenberg, la ecuación de movimiento de Heisenberg es

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}], \quad (2.49)$$

para un operador cualquiera $\hat{O}$.

Si se utiliza el operador de aniquilación $\hat{a}$ en (2.49), se tiene

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] = -i\omega\hat{a}, \quad (2.50)$$

donde se utilizó (2.48) para después desarrollar el conmutador, haciendo uso de las identidades de estos. La ecuación anterior nos lleva a una ecuación diferencial que tiene por resultado

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}. \quad (2.51)$$

Para el adjunto de $\hat{a}$, el operador de creación $\hat{a}^\dagger$, se puede seguir el mismo proceso, o simplemente obtener el Conjugado Hermítico de (2.51), obteniendo así

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}. \quad (2.52)$$

La representación de Heisenberg puede ser derivada de la representación de Schrödinger por medio de los Operadores Unitarios [Zet09, p. 572]

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \quad (2.53)$$

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = e^{i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}, \quad (2.54)$$

que al evaluarlos en $t_0 = 0$

$$\hat{U}(t, 0) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (2.55)$$

$$\hat{U}^\dagger(t, 0) = e^{i\hat{H}t/\hbar}, \quad (2.56)$$

permiten arribar a la representación de Heisenberg. Usando (2.55) y (2.56) para transformar un operador $\hat{O}$, se tiene

$$\hat{O}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{O} \hat{U} = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (2.57)$$

donde se hace alusión al hecho de que los operadores en la representación de Schrödinger en cualquier tiempo t son equivalentes a los operadores en $t = 0$ en la representación de Heisenberg [SN20, p. 88]. Lo anterior cobra sentido al observar a (2.57), donde puede notarse que al aplicar los Operadores Unitarios a un operador $\hat{O}(0) = \hat{O}_H$, esto es, en la representación de Heisenberg, se llega al operador en la representación de Schrödinger.

Ahora, un resultado similar a (2.51) se puede obtener, sin necesidad de resolver la ecuación de movimiento de Heisenberg (2.49), si se utiliza el lema de Baker-Hausdorf [SN20, p. 89]

$$\begin{aligned} \hat{O}(t) &= \hat{O}(0) + \frac{it}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}(0)] \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^2 [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{O}(0)]] + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^n [\hat{H}, [\hat{H}, [\hat{H}, \dots [\hat{H}, \hat{O}(0)]]] + \dots \end{aligned} \quad (2.58)$$

sobre el operador $\hat{a}$ escrito de la forma (2.57). Reemplazando al operador cualquiera $\hat{O}$ por el operador aniquilación $\hat{a}$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \hat{a}(0) + \frac{it}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}(0)] \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^2 [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{a}(0)]] + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^n [\hat{H}, [\hat{H}, [\hat{H}, \dots [\hat{H}, \hat{a}(0)]]] + \dots \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde el segundo termino de la suma es

$$\frac{it}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}(0)] = -i\omega t \hat{a}(0), \quad (2.60)$$

utilizando al operador $\hat{H}$ definido en (2.48) para el conmutador. Tomando (2.60) para el conmutador del tercer termino, repitiendo el proceso para cada termino necesario del lema, se puede llegar, que el caso en cuestión se resume a

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \hat{a}(0) \left[1 - i\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{i\omega^3 t^3}{3!} + \dots \right] \\ &= \hat{a}(0) \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^s}{s!} \right] \\ &= \hat{a}(0) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

el cual es claramente el mismo resultado a la ecuación de movimiento de Heisenberg (2.50) dado en (2.51). Este método, mas engoroso a primera vista, mostrara su utilidad en casos con interacciones no lineales.

Al producto de operadores $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ se le conoce también como el operador numero, representado por $\hat{n}$. Se denota al estado $|n\rangle$ como un eigenestado de energía de un campo de modo singular con eigenvalor de energía E_n tal que

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.62)$$

Si la ecuación (2.62) se multiplica por el operador de creación $\hat{a}^\dagger$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (2.63)$$

se obtiene una nueva ecuación de eigenvalores. Usando (2.46), se puede llegar a la relación

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} &= \hat{a}^\dagger \\ \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Con (2.64), (2.63), se convierte en

$$\begin{aligned} \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle &= E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) - \hbar\omega (\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= (E_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ \hat{H}(\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= (E_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.65)$$

el cual es el problema de eigenvalores para el eigenestado $\hat{a}^\dagger |n\rangle$, el cual tiene eigenvalor de energía $E_n + \hbar\omega$. Así, es posible entender el porqué del nombre “operador creación”, dado que al aplicar $\hat{a}^\dagger$ este crea un “cuanto” de energía $\hbar\omega$. Tomando ciertas “licencias interpretativas”, se puede decir que este operador crea un fotón con energía $\hbar\omega$. Ahora, si se aplica el operador aniquilación $\hat{a}$ a (2.62), se obtiene

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega) \hat{a}|n\rangle, \quad (2.66)$$

de donde se puede ver la razón al nombre de “aniquilación”, el cual anihila un cuanto de energía o un “fotón”; el eigenestado $(\hat{a}|n\rangle)$ posee un eigenvalor de energía $(E_n - \hbar\omega)$. Se observa que al aplicar varias veces el operador aniquilación $\hat{a}$ resultara en una disminución de la energía en múltiplos de $\hbar\omega$, pero debe tenerse en cuenta que la energía del oscilador armónico es siempre positiva; la energía debe tener un eigenvalor mínimo $E_0 > 0$ correspondiente al eigenestado $|0\rangle$ de tal forma que

$$\hat{H}(\hat{a}|0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega) (\hat{a}|0\rangle) = 0, \quad (2.67)$$

dado que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.68)$$

Con lo anterior, el problema de eigenvalores para el estado base $|0\rangle$ es

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle, \quad (2.69)$$

donde el eigenvalor de energía mínimo es el llamado energía de punto cero $\hbar\omega/2$. Dado que $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$, los eigenvalores de energía son

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

Se tiene para el operador numero $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ que

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.71)$$

donde estos estados numero se deben de normalizar de acuerdo a $\langle n|n\rangle = 1$. Para el estado $\hat{a}|n\rangle$ se tiene

$$\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle \quad (2.72)$$

con la constante c_n aun por determinar. El producto interno de $\hat{a}|n\rangle$ consigo mismo es

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{a}^\dagger(\hat{a}|n\rangle) &= \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n \\ &= \langle n-1|c_n^*c_n|n-1\rangle = |c_n|^2, \end{aligned} \quad (2.73)$$

y por tanto $|c_n|^2 = n$, de tal forma que $c_n = \sqrt{n}$. Así

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.74)$$

Lo mismo puede ser mostrado para el operador ‘creación’:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.75)$$

Ahora es fácil mostrar cómo puede obtenerse un estado $|n\rangle$ a partir del estado base $|0\rangle$ utilizando consecutivamente el operador creación $\hat{a}^\dagger$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger|0\rangle &= (\sqrt{1}|1\rangle) \\ (\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle &= \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger|0\rangle) = \hat{a}^\dagger(\sqrt{1}|1\rangle) = (\sqrt{1}\sqrt{2}|2\rangle) \\ (\hat{a}^\dagger)^3|0\rangle &= \hat{a}^\dagger((\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle) = \hat{a}^\dagger(\sqrt{1}\sqrt{2}|2\rangle) = (\sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}|3\rangle) \\ &\vdots \\ (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle &= \hat{a}^\dagger((\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle) = \hat{a}^\dagger(\sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}\dots\sqrt{n-1}|n-1\rangle) \\ &= \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\dots n}|n\rangle, \end{aligned} \quad (2.76)$$

por lo que se puede obtener la relación

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.77)$$

Dado que tanto los operadores $\hat{H}$ como $\hat{n}$ son Hermíticos, los estados de distinto número son ortogonales, esto es $\langle n'|n\rangle = \delta_{nn'}$ y además, los estados número forman un conjunto completo, mostrado como

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \quad (2.78)$$

Los únicos elementos matriciales que no se desvanecen de los operadores creación y aniquilación son

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\langle n-1|n-1\rangle = \sqrt{n} \quad (2.79)$$

$$\langle n+1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1|n+1\rangle = \sqrt{n+1} \quad (2.80)$$

2.2. Las fluctuaciones cuánticas de un campo de modo singular

El estado numero $|n\rangle$ es un estado de energía bien definido pero no es un estado campo eléctrico bien definido. Esto puede verse a continuación:

$$\begin{aligned}
 \langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle &= [\langle n|\mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz)|n\rangle \\
 &= \mathcal{E}_0 \sin(kz)[\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle] \\
 &= \mathcal{E}_0 \sin(kz)[\underbrace{\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle}_{=0} + \underbrace{\sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle}_{=0}] = 0
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Puede observarse que el campo promedio es cero, donde se han desarrollado los valores esperados obtenidos en la segunda línea conforme a (2.74) y (2.75). El mismo resultado habría sido obtenido si se observa que los únicos elementos matriciales que no se desvanecen son (2.79) y (2.80) para los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$, lo que nos mostraría que los valores esperados de la segunda línea son directamente cero. Ahora, el promedio del campo elevado al cuadrado, el cual contribuye a la densidad de energía es

$$\begin{aligned}
 \langle n|\hat{E}_x^2(z,t)|n\rangle &= \langle n|\mathcal{E}_0^2(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \sin^2(kz)|n\rangle \\
 &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2|n\rangle \\
 &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n|(\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger|n\rangle \\
 &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) [\langle n|(\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \\
 &\quad + \underbrace{\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]=1}|n\rangle] \\
 &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) [\langle n|(\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1|n\rangle] \\
 &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) [\underbrace{\langle n|(\hat{a}^\dagger)^2|n\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle n|\hat{a}^2|n\rangle}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{\langle n|2\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle}_{\hat{n}} + \underbrace{\langle n|1|n\rangle}_{=1}] \\
 &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) [2\underbrace{\langle n|\hat{n}|n\rangle}_{=n|n\rangle} + 1] \\
 &= 2\mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right),
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

que se observa no ser cero. Para caracterizar las fluctuaciones del campo eléctrico, se tiene la varianza como

$$\langle (\Delta \hat{E}_x(z,t))^2 \rangle = \langle \hat{E}_x^2(z,t) \rangle - \langle \hat{E}_x(z,t) \rangle^2 \tag{2.83}$$

o por la desviación estándar

$$\Delta E_x = \langle (\Delta \hat{E}_x(z,t))^2 \rangle^{1/2}, \tag{2.84}$$

que se denomina en ocasiones como la *incertidumbre del campo*. En el caso del estado $|n\rangle$ se tiene

$$\Delta E_x = \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \sin(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}. \tag{2.85}$$

Lo anterior puede verse si se hace notar que

$$\langle \hat{E}_x(z,t) \rangle = \langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle = 0 \tag{2.86}$$

$$\langle \hat{E}_x^2(z,t) \rangle = \langle n|\hat{E}_x^2(z,t)|n\rangle = 2\mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{2.87}$$

y ahora en (2.83) se utiliza (2.87) y (2.86), observando a (2.84), que dará el resultado mostrado por (2.85). Debe señalarse que cuando $n = 0$, el campo tiene fluctuaciones, llamadas fluctuaciones del vacío. Ahora, los estados $|n\rangle$ son utilizados para representar el estado de un campo que contiene un cantidad de fotones n ; pero, como se ha visto, el campo promedio es cero. Esto va en concordancia con el principio de incertidumbre dado que el operador $\hat{n}$ no conmuta con el campo eléctrico. Esto es porque²

$$\begin{aligned} [\hat{n}, \hat{E}_x] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz)] \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a} + \hat{a}^\dagger] \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) \{ [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] \} \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) (-\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Como $\hat{n}$ y $\hat{E}_x$ son cantidades complementarias, sus respectivas incertidumbres deben obedecer la desigualdad³

$$\Delta n \Delta E_x \geq \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 |\sin(kz)| |\langle \hat{a}^\dagger - \hat{a} \rangle|. \quad (2.89)$$

Nótese que en la relación de incertidumbre (2.89) la cota depende de la posición a través del factor $\sin(kz)$. Esto no contradice la discusión previa sobre el Hamiltoniano, ya que aquí trabajamos con el operador de campo *local* $\hat{E}_z(z, t)$, el cual depende explícitamente de z . En particular, en los nodos del modo, donde $\sin(kz) = 0$, el operador de campo se anula para ese modo y, en consecuencia, también lo hace el conmutador $[\hat{n}, \hat{E}_z(z, t)]$. Por ello, la desigualdad de incertidumbre posee una cota nula en dichos puntos. La complementariedad entre el número de fotones y el campo se manifiesta únicamente en las regiones donde el modo presenta amplitud distinta de cero, esto es, en los antinodos.

Para un estado numero $|n\rangle$, el lado derecho se desvanece pero $\Delta n = 0$ de igual forma. Si los campos estuvieran bien determinados, el numero de fotones no sería certero. Puede verse una conexión con la noción de fase del campo eléctrico. En la física clásica, la amplitud y la fase de un campo puede ser bien definido simultáneamente, no siendo así en la física cuántica. Dado que el concepto de la fase cuántica es largo y sujeto a discusión, se tomara un punto de vista heurístico de momento. La fase es complementaria al numero de manera análoga a como lo es el tiempo a la energía. Análogamente a la relación de incertidumbre del tiempo y energía, existe una relación de incertidumbre del numero y fase de la forma

$$\Delta n \Delta \phi \geq 1. \quad (2.90)$$

Puede verse que si la fase es bien conocida, el número de fotones será incierto, mientras que si el número de fotones está bien definido, la fase será incierta y estará distribuida de manera aleatoria en el rango $0 < \phi < 2\pi$.

²Se utilizan las relaciones $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}$ y $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ dadas en [CDL19, p. 143]

³Si dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ satisfacen $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ entonces $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle|$

CAPÍTULO 3

Divisores de Haz e Interferometría

Si bien es posible dar evidencia de la existencia del fotón por medio del efecto foto eléctrico o el efecto Compton, estos pueden ser tratados de manera semiclasica, solo cuantizando los átomos, sin hacerlo con el campo. Pero cuando es requerida una explicación de todos los aspectos de estos efectos, la cuantización del campo se vuelve importante.

Taylor logro en su experimento franjas de interferencia por medio de una fuente de luz muy débil, la cual al ser atenuada al mínimo, presentaba aun franjas de interferencia. Esto se prestaba a la errónea interpretación, basada en consideraciones energéticas simples, de que solo un fotón se encontraba entre la fuente y la pantalla. Pero el hecho de que una fuente térmica irradie paquetes de fotones en lugar de fotones simples no permite inferir la existencia de fotones simples incidiendo en la pantalla. Los láseres producen fotones de manera aleatoria, llegando a la misma imposibilidad de asegurar la presencia de solo un fotón en un momento dado.

Para poder llegar a esta aseveración, es necesaria una fuente que no produzca paquetes de fotones, donde idealmente la misma sea de solo un átomo. Esto fue desarrollado por Grangier y compañía para probar la violación de las desigualdades de Bell, y después también demostrar la indivisibilidad de los fotones. Esta fuente es un átomo de calcio irradiado por un haz de luz láser, el cual excita al fotón haciéndolo subir a un estado alto s , el cual al decaer a un estado p , emitirá un fotón de frecuencia ν_1 , para después decaer nuevamente a un estado base s , donde emitirá nuevamente un fotón de frecuencia ν_2 . Estos, conservando el momento, serán emitidos en direcciones opuestas.

3.1. La mecánica cuántica de los divisores de haz

Es importante notar que si bien para haces coherentes y térmicos, las formas clásicas y cuánticas coinciden, no lo hacen para casos de pocos fotones o fotones individuales. Para hacer notar esta discordancia, se procede a hacer la ejemplificación clásica.

Si se tiene un campo clásico de luz de amplitud compleja $\mathcal{E}_1$, el cual incide en un divisor de haz sin pérdida, donde $\mathcal{E}_2$ representa la amplitud transmitida y $\mathcal{E}_3$ representa la amplitud reflejada, donde tomando a r y t como la reflectancia y transmitancia compleja, se tiene que

$$\mathcal{E}_2 = r\mathcal{E}_1 \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_3 = t\mathcal{E}_1 \quad (3.1)$$

donde se tiene que para un divisor de haz 50:50, estas son $|r| = |t| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ahora, asumiendo que el divisor de haz no tiene pérdida, se tiene que

$$|\mathcal{E}_1|^2 = |\mathcal{E}_2|^2 + |\mathcal{E}_3|^2 \quad (3.2)$$

lo que requiere que

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \quad (3.3)$$

Para hacer el cambio al modo cuántico, se reemplaza las amplitudes complejas por los operadores de aniquilación, de tal manera que $\mathcal{E}_i \rightarrow \hat{a}_i (i = 1, 2, 3)$. En analogía con el caso clásico (3.1), se tendría

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 \quad \text{y} \quad \hat{a}_3 = t\hat{a}_1. \quad (3.4)$$

lo que, en teoría, debería de satisfacer las reglas de conmutación

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

pero, al hacer la comprobación llegamos a

$$\begin{aligned} [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] &= |r|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |r|^2, \\ [\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] &= |t|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |t|^2, \\ [\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] &= \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2 \\ &= r \hat{a}_1 t^* \hat{a}_1^\dagger - t^* \hat{a}_1^\dagger r \hat{a}_1 \\ &= r t^* [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] \\ &= r t^* \neq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde puede observarse que estas transformaciones no conservan las relaciones de conmutación, lo que las hacen inviables. La solución a esto se encuentra en la manera en la que se toma al divisor de haz: mientras que en el caso clásico no se toma en cuenta una de las entradas al divisor de haz, en el caso cuántico este debe considerarse, dado que este contiene un modo de campo cuantizado, el del vacío. Tomando al operador $\hat{a}_0$ como el operador de campo de este, se tienen la nuevas reglas de transformación:

$$\hat{a}_2 = r \hat{a}_1 + t' \hat{a}_0, \quad \hat{a}_3 = t \hat{a}_1 + r' \hat{a}_0 \quad (3.7)$$

donde la matriz de transformación de estas seria

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde para que estas relaciones sean satisfechas, se debe tener que:

$$\begin{aligned} |r'| &= |r| \\ |t| &= |t'| \\ |r|^2 + |t|^2 &= 1 \\ r^* t' + r' t^* &= 0 \\ r^* t + r' t'^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Otra relación se desprende si se toma que

$$|r| = |r'| \Rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{r'^*}{r^*} \quad (3.10)$$

por lo que

$$\begin{aligned} r t^* + r'^* t' &= \frac{r'^* r'}{r^*} t^* + \frac{r r^*}{r'} t' \\ &= \frac{r}{r'} (r^* t' + r' t^*) \xrightarrow{0} \\ r t^* + r'^* t' &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Haciendo uso de las relaciones (3.9), (3.10) y (3.11) pueden validarse correcta y fácilmente las relaciones de conmutación (3.5), empleando álgebra de operadores y respetando el orden de los mismos.

Ahora, tomando el caso idealizado de un divisor de haz 50:50, construido con una capa simple dieléctrica, los haces reflejado y transmitidos tendrán una fase entre sí de $e^{i\pi/2} = \pm i$, mientras que $|r| = |t| = 1/\sqrt{2}$, por lo que la matriz de transformación para el caso cuántico del divisor de haz en (3.1)

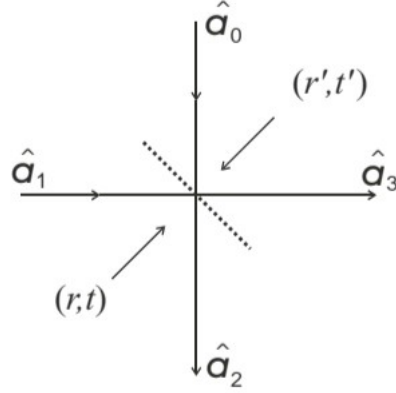


Figura 3.1: Divisor de haz con entrada del vacío

$$\tau = e^{i\phi_0} \begin{pmatrix} e^{i\phi_T} \cos \theta & -e^{i\phi_R} \sin \theta \\ e^{i\phi_R} \sin \theta & e^{i\phi_T} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

tomando $\phi_0 = \phi_T = 0$, $\phi_R = \pi/2$ y $\theta = \pi/4$, queda como

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

A partir de (3.13), pueden obtenerse las salidas del divisor de haz en (3.1) cuando se inciden en este $\hat{a}_0$ y $\hat{a}_1$ de tal manera que

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_0 + i\hat{a}_1) \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \hat{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{a}_0 + \hat{a}_1) \quad (3.16)$$

Dado que las transformación entre las entradas y salidas del divisor de haz deben de ser unitarias, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} \hat{U} \quad (3.17)$$

donde $\hat{U}$ esta definido como

$$\hat{U} = e^{i\frac{\pi}{4}(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger)}. \quad (3.18)$$

Si para $\hat{U}$, se toma

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger}{2} \quad (3.19)$$

$$\xi = i\frac{\pi}{2} \quad (3.20)$$

este puede definirse como

$$\hat{U} = e^{\xi \hat{J}_1}. \quad (3.21)$$

Esta transformación constituye una representación de Heisenberg de la formulación del divisor de haz. Ahora, en caso de buscar el estado resultante a cierta entrada al divisor de haz, debe de recordarse que cualquier superposición o mezcla estadística de los estados numero puede construirse a través de la acción de n potencias del operador de creación, por lo que puede utilizarse lo anterior para este fin. De tal forma, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \hat{U}^\dagger \quad (3.22)$$

de donde, para el caso de $\hat{a}_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \hat{U} \hat{a}_2 \hat{U}^\dagger \\ &= e^{\xi \hat{J}_1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_0 + i \hat{a}_1) \right] e^{-\xi \hat{J}_1}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En esta ultima relación, se puede hacer uso del Lema de Baker-Hausdorf, por lo que

$$e^{\xi \hat{J}_1} \hat{a}_2 e^{-\xi \hat{J}_1} = \hat{a}_2 + \xi [\hat{J}_1, \hat{a}_2] + \frac{\xi^2}{2!} [\hat{J}_1, [\hat{J}_1, \hat{a}_2]] + \dots \quad (3.24)$$

donde el primer conmutador sera

$$\begin{aligned} [\hat{J}_1, \hat{a}_2] &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_0 + i \hat{a}_1] \textcolor{red}{1} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ [\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_0] + [\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1, i \hat{a}_1] + [\hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_0] + [\hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger, i \hat{a}_1] \right\} \textcolor{red}{2} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + i \hat{a}_0) = -\frac{1}{2} \hat{a}_3. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ahora, para el segundo conmutador, usando las mismas relaciones que en el caso anterior, se tiene

$$\begin{aligned} [\hat{J}_1, [\hat{J}_1, \hat{a}_2]] &= -\frac{1}{2} [\hat{J}_1, \hat{a}_3] \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} [\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger, i \hat{a}_0 + \hat{a}_1] \\ &\vdots \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ [\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1, i \hat{a}_0] + [\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_1] + [\hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger, i \hat{a}_0] + [\hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1] \right\} \\ &\vdots \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} (-\hat{a}_0 - i \hat{a}_1) = \frac{1}{4} \hat{a}_3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

¹La relación a utilizar es $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$

²La relación a utilizar es $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

Finalmente, se tiene que

$$\hat{a}_0 = \hat{U} \hat{a}_2 \hat{U}^\dagger = \hat{a}_2 - \left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{a}_3 + \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}{2!} \hat{a}_2 + \dots \quad (3.27)$$

de donde puede notarse que, dado que $\xi \in \mathbb{C}$, y usando la expansión en series de la exponencial con argumento complejo

$$\begin{aligned} e^{i\zeta} &= \left(1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!}\right) \\ &= \cos \zeta + i \sin \zeta \end{aligned} \quad (3.28)$$

con $i\zeta = \frac{\xi}{2} = i\frac{\pi}{4}$, puede obtenerse

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{a}_2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{a}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2 - i\hat{a}_3) \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde es sencillo ver que $\hat{a}_0^\dagger$ es

$$\hat{a}_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2 + i\hat{a}_3). \quad (3.30)$$

Utilizando el mismo procedimiento para $\hat{a}_1$ y $\hat{a}_1^\dagger$ se tiene que

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\hat{a}_2 + \hat{a}_3) \quad (3.31)$$

$$\hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{a}_2 + \hat{a}_3). \quad (3.32)$$

Con (3.30) y (3.32) es posible determinar la salida del divisor de haz al hacer incidir un fotón por alguno de los puertos, indicados en la figura (3.1). De esta manera, se tiene que para $|0\rangle_0 |1\rangle_1$ se obtiene aplicando $\hat{a}_1^\dagger$ como $\hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1$, por lo que se tiene

$$|0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{\text{DH}} |0\rangle_2 |0\rangle_3 \quad (3.33)$$

donde al aplicar $\hat{a}_1^\dagger$ de (3.32) se llega a

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |1\rangle_1 &\xrightarrow{\text{DH}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{a}_2 + \hat{a}_3)\right) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Puede verse que al hacer incidir un fotón en el puerto $\hat{a}_1$ este sera reflejado o transmitido, con misma probabilidad. el estado (3.34) es un estado entrelazado, el cual no puede ser producido como un producto de los modos individuales 2 y 3.

Es conveniente mostrar el operador de densidad, el cual se define como

$$\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i| \quad (3.35)$$

$$\text{donde } 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (3.36)$$

que al aplicarlo a (3.34) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{23} = & \frac{1}{2} \{ |1\rangle_2 |0\rangle_3 {}_2\langle 1| {}_3\langle 0| + |0\rangle_2 |1\rangle_3 {}_2\langle 0| {}_3\langle 1| \\ & + i |1\rangle_2 |0\rangle_3 {}_2\langle 0| {}_3\langle 1| - i |0\rangle_2 |1\rangle_3 {}_2\langle 1| {}_3\langle 0| \}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Si solo se hace la medición del modo 2 y no del modo 3, puede obtenerse la versión reducida el operador de densidad de $\hat{\rho}_{23}$ obteniendo la traza de los estados del modo no medido, de tal manera que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_2 = Tr_3 \hat{\rho}_{23} &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n | \hat{\rho}_{23} | n \rangle_3 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n | \{ |1\rangle_2 |0\rangle_3 {}_2\langle 1| {}_3\langle 0| + |0\rangle_2 |1\rangle_3 {}_2\langle 0| {}_3\langle 1| \\ &\quad + i |1\rangle_2 |0\rangle_3 {}_2\langle 0| {}_3\langle 1| - i |0\rangle_2 |1\rangle_3 {}_2\langle 1| {}_3\langle 0| \} | n \rangle_3 \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{2} \{ |0\rangle_2 {}_2\langle 0| + |1\rangle_2 {}_2\langle 1| \}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esto es una mezcla estadística, sin términos fuera de la diagonal, del tipo $|0\rangle\langle 1|$ o $|1\rangle\langle 0|$, donde se obtendrían resultados equivalentes para la detección de los fotones, con el 50 % para la detección de un fotón y otro 50 % para la ausencia de uno. Este resultado es el esperado para cuando se posiciona un detector en solo una salida del divisor de haz.

Otro caso importante para la transformaciones de operadores es cuando en un divisor de haz 50:50, se inciden dos fotones, uno por cada puerto de este. Lo anterior se expresa como $|1\rangle_0 |1\rangle_1 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1$, donde utilizando (3.30) y (3.32) se tiene

$$\begin{aligned} |1\rangle_0 |1\rangle_1 &\xrightarrow{DH} \frac{1}{2} (\hat{a}_2^\dagger + i \hat{a}_3^\dagger) (i \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= \frac{i}{2} (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |2\rangle_3) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Puede verse que dos fotones salen juntos por alguna de las dos salidas del divisor de haz. Esto se debe, en vez de a la naturaleza tipo partícula del fotón, a la interferencia, del tipo ondulatorio, causada por las dos posibles formas de obtener el estado $|1\rangle_2 |1\rangle_3$; una cuando ambos fotones son reflejados y otra cuando ambos son transmitidos. Estos dos procesos son indistinguibles entre si. Usando la regla de Feynman *-sumar todas las amplitudes de los procesos involucrados para luego obtener el cuadrado del modulo de la suma-* para obtener la probabilidad de salida para procesos indistinguibles para este caso, se toma que la amplitud de reflexión es $A_R = \frac{i}{\sqrt{2}}$, recordando el desfase $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, y para la transmisión $A_T = \frac{i}{\sqrt{2}}$, donde entonces se tiene que

$$\begin{aligned} P_{11} &= |A_T \cdot A_T + A_R \cdot A_R|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Existe otra manera de obtener el mismo resultado a través de los operadores de proyección, por lo que si se toma

$$\hat{P}_n^{(0,1)} = |0\rangle_0 \langle N|_1 {}_0\langle 0|_1 \langle N| \quad (3.41)$$

como el operador de proyección hacia el sector de N fotones de los modos 0 y 1, el correspondiente operador de proyección hacia los modos 2 y 3 es

$$\hat{P}_N^{(2,3)} = \sum_{k=0}^N |k\rangle_2 \langle N-k|_3 {}_2\langle k|_3 \langle N-k|. \quad (3.42)$$

Suponiendo que un operador Hermitiano $\hat{Q}$, que representa al observable Q , este tendrá los eigenestados $\{|q_n\rangle\}$, y sus eigenvalores estarán dados por la ecuación de eigenestados $\hat{Q} |q_n\rangle = q_n |q_n\rangle$; así, estos eigenestados son completos y resuelven la unidad como $\sum_n |q_n\rangle \langle q_n| = \hat{I}$. Además, un operador de proyección se define como $\hat{P}(q_n) := |q_n\rangle \langle q_n|$.

Haciendo uso de lo expuesto anteriormente, se tiene que un estado $|\psi\rangle$, el cual esta normalizado, esto es $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, puede ser expandido en términos de los eigenestados de $\hat{Q}$ como

$$|\psi\rangle = \hat{I}|\psi\rangle = \sum_n |q_n\rangle \langle q_n|\psi\rangle = \sum_n c_n |q_n\rangle, \quad (3.43)$$

donde $c_n = \langle q_n|\psi\rangle$, generalmente un numero complejo, representa la amplitud de probabilidad. Si $|\psi\rangle$ es un estado vector anterior a la medición del observable Q , la probabilidad de obtener el resultado q_n , $P(q_n)$, sera

$$P(q_n) = \langle\psi|\hat{P}(q_n)|\psi\rangle = |c_n|^2. \quad (3.44)$$

De esta manera, es posible expresar la medición proyectiva de un estado $|\psi\rangle$ para un eigenestado $|q_n\rangle$ como

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{Proyectiva}]{\text{Medicion}} |q_n\rangle = \frac{\hat{P}(q_n) |\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{P}(q_n)|\psi\rangle^{1/2}} \quad (3.45)$$

Así, para, (3.41) se tiene

$$|0\rangle_0 \langle N|_1 = \frac{\hat{P}_N^{(0,1)} |Entrada\rangle}{\langle Entrada|\hat{P}_N^{(0,1)}|Entrada\rangle^{1/2}} \quad (3.46)$$

y para (3.42)

$$|\psi_N\rangle_{2,3} = \frac{\hat{P}_N^{(2,3)} |Salida\rangle}{\langle Salida|\hat{P}_N^{(2,3)}|Salida\rangle^{1/2}}. \quad (3.47)$$

3.2. Interferometría de fotones individuales

Ahora que el divisor de haz ha sido abordado, resulta fácil comprender los experimentos realizados por medio de interferómetros, los cuales pueden tener mas de un divisor de haz en algún tipo de arreglo especial que permite estudiar distintos aspectos de los fotones así como la interferencia entre estos y si mismos. El interferómetro de Mach-Zender³ permite realizar experimentos de interferencia con un solo fotón, donde este se puede apreciar en la figura (3.2). La interferencia radica en el hecho de que, para los detectores D_1 y D_2 resulta indistinguible el camino del fotón. El MZI tiene en uno de sus caminos algún elemento desfasados, que puede ser un poco de fibra óptica extra, de tal manera que los caminos del MZI son diferentes y ajustables. El cambio de fase puede ser representado como un operador unitario $e^{i\theta\hat{n}}$, donde $\hat{n}$ es el operador numero del campo en esa sección del interferómetro y θ el cambio de fase relativo entre los dos caminos del interferómetro.

³Mach-Zender Interferometer, MZI por sus siglas en ingles

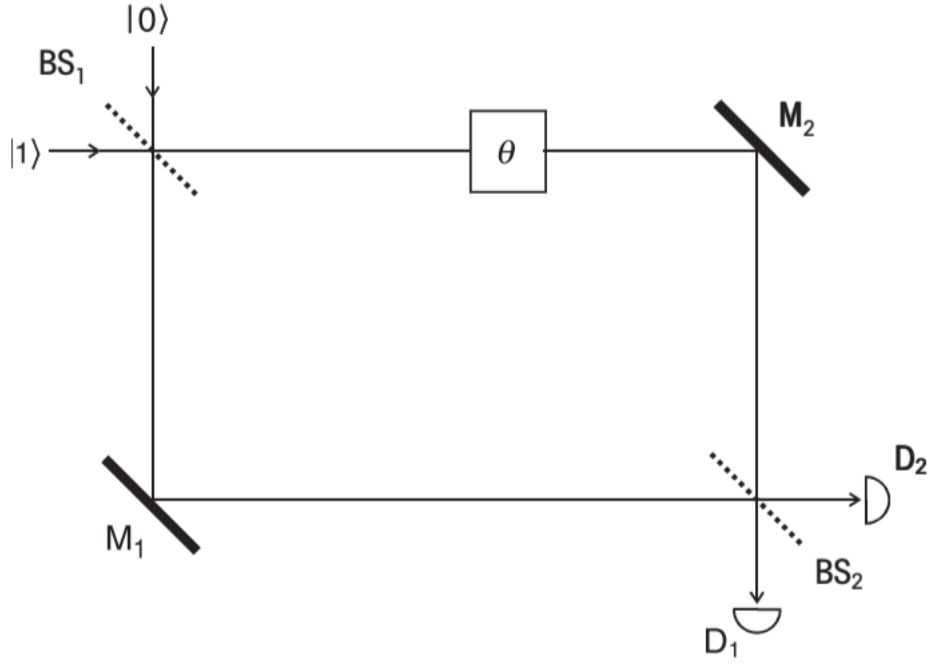


Figura 3.2: Interferómetro de Mach-Zehnder con solo un fotón incidente. Los divisores de haz, BS1 y BS2 son 50:50; también contiene dos espejos, M1 y M2. La caja con la leyenda θ representa un cambio de fase relativo entre los dos brazos del interferómetro

Si se tiene un estado de entrada $|0\rangle|1\rangle$, donde el estado que va en contra de las manecillas del reloj precede a aquellos que van a favor. Los divisores de haz son los mismos estudiados anteriormente. Se tiene así que el primer divisor de haz BS_1 transforma las entradas como

$$|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{BS_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \quad (3.48)$$

Como se estableció en la convención, el primer término de la superposición, $|0\rangle|1\rangle$, va en contra de las manecillas del reloj y el segundo término, $i|1\rangle|0\rangle$ va a favor, identificable por la fase $e^{i\pi/2} = i$, propia de la reflexión en el divisor de haz. Los espejos contribuyen con un factor de $e^{i\pi/2}$ a cada término, que se suma a una fase irrelevante, la cual se omite. El desfase en el camino que va en el sentido de las manecillas del reloj afecta la fase de la primera componente, de tal manera que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \xrightarrow{\theta} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta}|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \quad (3.49)$$

Como ambos divisores de haz son iguales, sus transformaciones serán las mismas, por lo que se tiene que

$$|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{BS_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \quad (3.50)$$

$$|1\rangle|0\rangle \xrightarrow{BS_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle + i|0\rangle|1\rangle) \quad (3.51)$$

donde, tomando en cuenta la convención, los primeros términos de las superposiciones de los estados producidos van en dirección del detector D_1 , mientras que los segundos van hacia el detector D_2 . Se tiene así, la transformación del estado total, dado el segundo divisor de haz, como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta}|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \xrightarrow{BS_2} \frac{1}{2}e^{i\theta}(|0\rangle|1\rangle + i|0\rangle|1\rangle) + \frac{1}{2}(i|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle) \\ \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta}|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \xrightarrow{BS_2} \frac{1}{2}[(e^{i\theta} - 1)|0\rangle|1\rangle + i(e^{i\theta} + 1)|1\rangle|0\rangle]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Finalmente, la probabilidad de que el detector D_2 encuentre un fotón, por el estado $|1\rangle|0\rangle$, tomando en cuenta (3.44), con

$$c_n^{(D_2)} = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - 1) \quad (3.53)$$

es

$$\begin{aligned} P_{01} &= |c_n^{(D_2)}|^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(e^{i\theta} - 1) * \frac{1}{2}(e^{-i\theta} - 1)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})) \\ P_{01} &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.54)$$

y con el estado $|1\rangle|0\rangle$ para D_1 , con

$$c_n^{(D_1)} = \frac{i}{2}(e^{i\theta} + 1) \quad (3.55)$$

es

$$\begin{aligned} P_{10} &= |c_n^{(D_1)}|^2 = \left(\sqrt{\frac{i}{2}(e^{i\theta} + 1) * \frac{-i}{2}(e^{-i\theta} + 1)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2 + (e^{i\theta} + e^{-i\theta})) \\ P_{10} &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Es importante notar que si el largo de la fibra óptica es modificado, y por ende θ , las probabilidades tendrán oscilaciones, las cuales son a causa de las franjas de interferencia que indican la interferencia de un solo fotón.

3.3. Mediciones libres de interacciones

Una de las peculiaridades de la mecánica cuántica es la posibilidad de detectar la presencia de un objeto sin dispersar cuantos, en este caso fotones. Es de suponer, que para detectar la presencia de un objeto, sea necesario detectar un fotón dispersado por este.

Para mostrar este caso, será útil tomar el MZI de la figura (3.2), sin desfase por tener fibras ópticas del mismo largo, esto es $\theta = 0$, donde el detector D_2 no detectará fotón alguno dada la interferencia destructiva entre ambos caminos, detectando incidencias solo en D_1 . Esta interferencia puede verse de (3.54), donde para $\theta = 0$, la probabilidad de que el detector D_2 encuentre un fotón es nula.

Si ahora se toma el caso de la figura (3.3), donde un objeto se ha colocado en el camino que va contra sentido horario, sin desfase, se podrían colocar detectores en la vecindad del objeto, detectando la dispersión del fotón por el objeto, lo que daría información del camino tomado después del primer divisor de haz. En caso de detectarse un fotón en la vecindad del objeto, se puede asumir entonces que el fotón tomó el camino contra sentido horario y que existe un objeto obstructor. Pero para llegar a la misma conclusión, no es necesario colocar medidores en la vecindad del objeto. Si en cambio, se toma en cuenta solo las

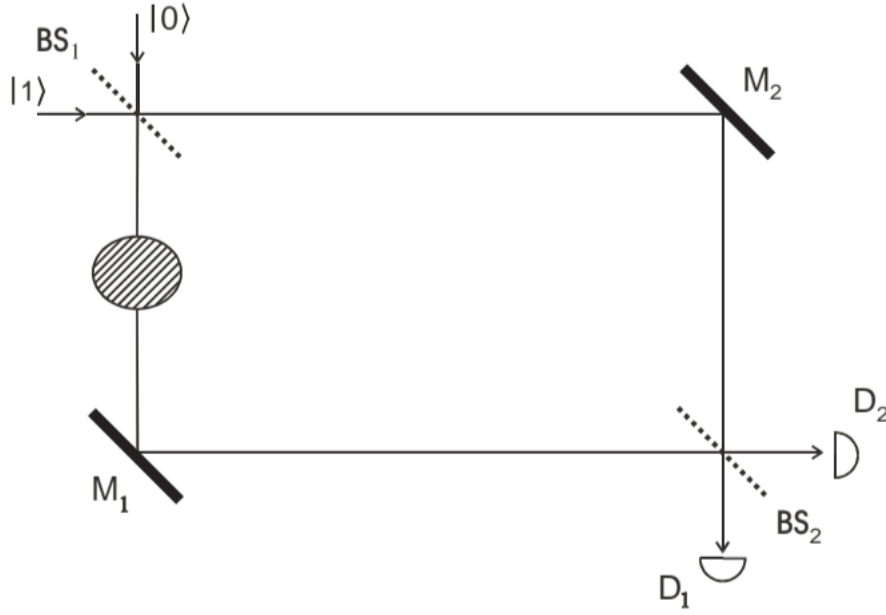


Figura 3.3: El mismo interferómetro de MZI, pero sin la fase θ y con un objeto obstruyendo uno de los caminos, representado por la elipse.

incidencias en los detectores D_1 y D_2 , se encontrarían resultados peculiares. Si en una de las pruebas no se detecta fotón en alguno de los detectores, se sabría que existe el objeto y que el camino tomado fue contra sentido horario. Pero si se detectara fotón en D_1 , se sabría que el camino tomado fue en sentido horario. Ahora en caso de detectar un fotón en D_2 se sabría que existe forzosamente el objeto, dado que al no haber un desfase y de no haber objeto en el brazo contra reloj, existiría interferencia y D_2 nunca detectaría fotón alguno. Se tendrían entonces las probabilidades

$$\begin{aligned}
 P_{00} &= \frac{1}{2} && \text{Ningún detector se acciona} \\
 P_{10} &= \frac{1}{4} && D_1 \text{ se acciona} \\
 P_{01} &= \frac{1}{4} && D_2 \text{ se acciona}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Que D_2 se active, confirma la existencia del objeto, a pesar de que el mismo no haya dispersado fotón alguno. Tan extraño como aparenta, muestra una de las particularidades, bastante general de hecho, llamada **no localidad**: el aparentemente *instantáneo* efecto de cierto tipo de influencias debidas a interacciones y mediciones.

CAPÍTULO 4

Interferómetro de Hong-Ou-Mandel y Estados de Bell

Existen experimentos que permiten validar, o invalidar, las teorías de variables ocultas; teorías sobre variables no contempladas en la formulación original de la mecánica cuántica que buscan explicar y darle “realismo” a los, aparentemente, arbitrarios y contraintuitivos resultados de experimentar con cuantos. Como se ha tratado en el capítulo pasado en el interferómetro de Hong-Ou-Mandel, el entrelazamiento cuántico permite conocer el estado de un elemento del sistema sin necesariamente medirlo. Extendiendo este tipo de medición a espacios muchos mayores de los presentes en un laboratorio, pareciera existir “comunicaciones” hiperlumínicas, que suceden fuera del cono de luz que marca la teoría de la relatividad, el cual es impuesto por el límite que da la velocidad de luz. Las variables ocultas pueden ser no locales, como la onda piloto teorizada por Bohm y De Broglie, o locales, sugerida por Einstein, Podolsky y Rosen, donde ambas buscan darle ese mencionado “realismo” y completitud a la teoría cuántica.

Por medio de las desigualdades de Bell, las cuales surgieron como una confirmación, resultando en el caso contrario, y experimentos de laboratorio, como el interferómetro de Hong-Ou-Mandel, fue posible darle resolución a este enigma.

Es importante antes entender los elementos necesarios, tanto teóricos como materiales, que permiten realizar dichos experimentos. El presente capítulo presenta una perspectiva muy elemental que permite tener una idea básica del funcionamiento de dichos elementos.

4.1. Conversión paramétrica descendente espontánea como fuente de fotones

La generación no clásica de luz por medios no lineales controlados paramétricamente está caracterizada por una susceptibilidad de segundo orden no lineal $\chi^{(2)}$. El caso no degenerado con una bomba cuantizada, se caracteriza por medio del Hamiltoniano

$$\hat{H}_1 \sim \chi^{(2)} \hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger + H.c., \quad (4.1)$$

donde H.c. significa conjugado Hermítico o transpuesto conjugado. $\hat{a}_p$ es el operador de aniquilación del haz bombeado, mientras que $\hat{a}_s^\dagger$ y $\hat{a}_i^\dagger$ son los operadores de creación de los haces “señal” e “inerte”, respectivamente, los cuales mantienen su nombre por temas históricos, no teniendo algún significado particular.

De esta manera, es posible pasar de los modos señal e inerte del estado vacío a contener un fotón en sus modos respectivos. De igual manera, el modo correspondiente el haz bombeado con un solo fotón pasa a no tener fotón alguno, ya que este fue convertido “espontáneamente” en los fotones señal e inerte, generados simultáneamente. Este proceso queda caracterizado como

$$|1\rangle_p |0\rangle_s |0\rangle_i \Rightarrow \hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger |1\rangle_p |0\rangle_s |0\rangle_i = |0\rangle_p |1\rangle_s |1\rangle_i. \quad (4.2)$$

Es importante notar ciertas condiciones que deben de ser cumplidas por el proceso de conversión descendente. Teniendo las frecuencias ω_p , ω_s y ω_i , como las frecuencias asociadas a los haces bomba, señal e inerte, respectivamente, la conservación de la energía necesita que

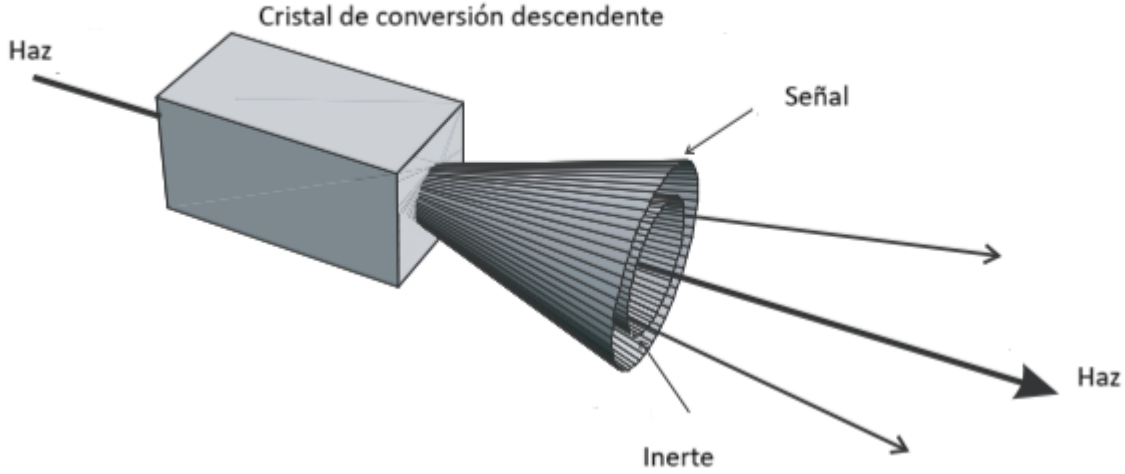


Figura 4.1: Los fotones del haz bombeado son convertidos en los fotones señal e inerte, los cuales salen del cristal en distintas direcciones, con misma polarización entre ella, pero ortogonal a la original de la haz bombeado. Las direcciones posible están descritas por los conos concéntricos. [GK04](#)

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \quad (4.3)$$

Ademas, si $\mathbf{k}_p$, $\mathbf{k}_s$ y $\mathbf{k}_i$ representan los respectivos números de onda, se debe tener al interior del cristal que

$$\hbar\mathbf{k}_p \approx \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i \quad (4.4)$$

donde la aproximación se deriva de la incertidumbre dada por el recíproco del largo del medio no lineal.

Estas ecuaciones, conocidas como condiciones de empalme de fase son alcanzadas por cierto tipo de medios no lineales, como los cristales no-centro-simétricos. Estos últimos son los únicos que no tienen una $\chi^{(2)}$ no evanescente. Los mas comunes son los KDP (KD_2PO_4) y BBO ($\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$). Existen dos tipos de procesos de conversión paramétrica descendente espontánea (CPDE), donde el tipo I, como en la figura [\(4.1\)](#) puede apreciarse, los fotones señal e inerte tienen la misma polarización entre ellos, siendo ortogonal la de ambos a la del fotón de la bomba de fotones, incidente en el cristal. El hamiltoniano para este proceso esta dado por

$$\hat{H}_1 = \hbar\eta\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger + H.c., \quad (4.5)$$

con H.c. como el conjugado hermítico. Nótese que $\eta \propto \chi^{(2)}\varepsilon_p$ es una aproximación, con ε_p es la amplitud del campo coherente clásico. La condición de concordancia de fase [\(4.4\)](#) impone una restricción de tal manera que los fotones conjugados señal e inerte deben salir del cristal en lados opuestos de los conos concéntricos que están centrados en la dirección del haz bombeado, como puede apreciarse en la figura [\(4.2\)](#), donde puede verse que existen un sin fin de posibilidades.

Para la conversión descendente de tipo II, los fotones inerte y señal tienen polarizaciones ortogonales y por efectos birrefringentes, o doble refractivos, los fotones son emitidos en dos conos que se intersecan en dos puntos, como puede verse en la figura [\(4.3\)](#), donde uno de los conos sera para la onda ordinaria (o) y otro para la onda extraordinaria (e). Los fotones que estén localizados en las intersecciones, estarán entrelazados entre si, donde estos sera "filtrados" del resto de fotones con una pantalla con pequeños huecos justo en las intersecciones de los conos (o) y (e). Sin embargo, habrá una ambigüedad entre cual fotón, de los dos pequeños huecos, tendrá cual polarización: vertical u horizontal.

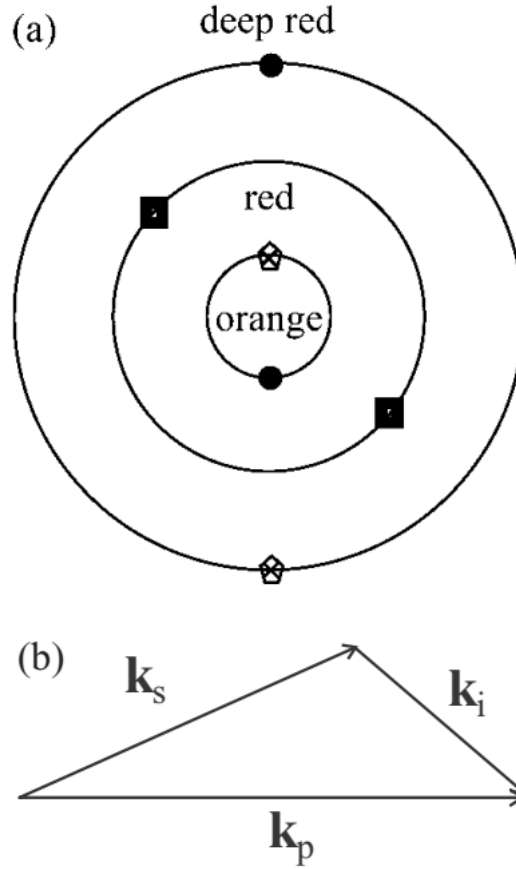


Figura 4.2: Una sección transversal de los conos de luz que emergen del CPDE tipo I, donde puede verse como los símbolos iguales representan los fotones conjugados que satisfacen las condiciones de concordancia de fase. Además, los fotones del círculo intermedio representan el caso degenerado. La segunda figura es una representación gráfica de la condición de fase en concordancia. [GK04](#)

Se introducen ahora los estados $|V\rangle$ y $|H\rangle$ para los fotones con polarización vertical y horizontal, los cuales se tiene ahora el contexto de su generación, siendo de fundamental importancia para los temas tratados en el siguiente capítulo.

El hamiltoniano para el proceso de conversión descendente de tipo II, con la postselección hecha por la pantalla con dos pequeños huecos, es

$$\hat{H}_I = \hbar\eta\left(\hat{a}_{Vs}^\dagger\hat{a}_{Hi}^\dagger + \hat{a}_{Hs}^\dagger\hat{a}_{Vi}^\dagger\right) + H.c., \quad (4.6)$$

donde los operadores $\hat{a}_{Vs}^\dagger$, $\hat{a}_{Vi}^\dagger$, $\hat{a}_{Hs}^\dagger$ y $\hat{a}_{Hi}^\dagger$, son los operadores de creación para los fotones señal e inerte en su polarización vertical y horizontal, respectivamente.

El estado inicial de los modos señal e inerte representado como $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$, que es el estado vacío de ambos de manera conjunta, ya sea para la conversión descendente de tipo I o II, el cual evoluciona como

$$|\Psi(t)\rangle = e^{\frac{-it\hat{H}_I}{\hbar}} |\Psi_0\rangle \quad (4.7)$$

puede ser expandido, dado que $\hat{H}_I$ no tiene dependencias temporales explicitas, como

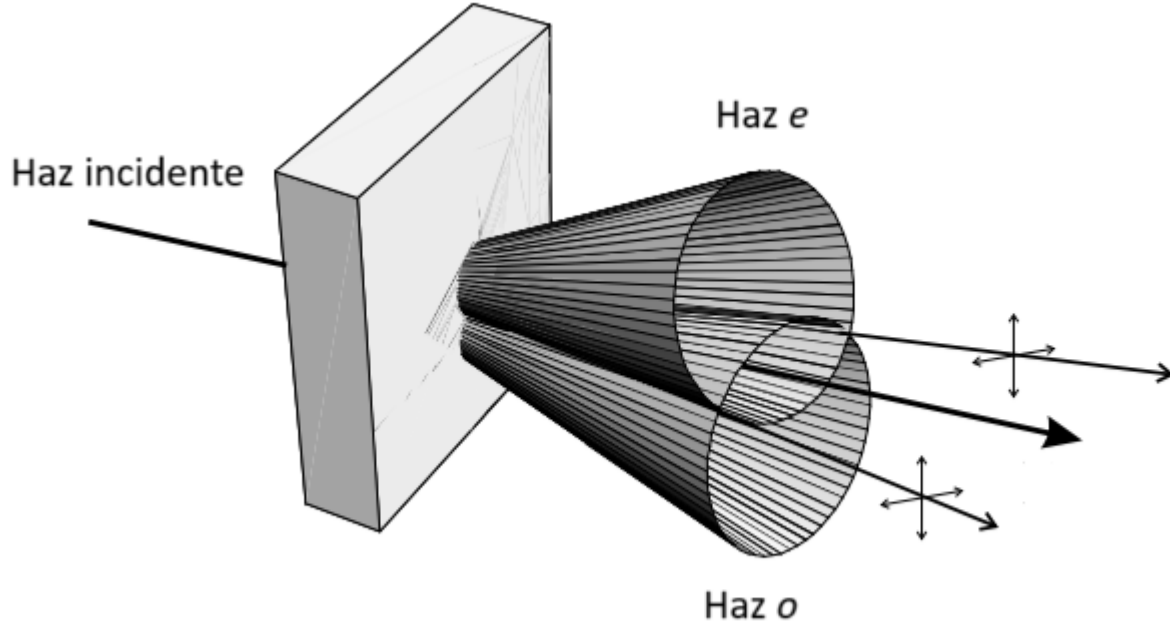


Figura 4.3: Convertidor descendente de tipo II, donde los fotones señal e inerte tendrán polarizaciones ortogonales. Por efectos de birrefriferencia, los fotones son emitidos en dos conos que se intersectan, donde uno sera para el haz o y otro par el haz e. GK04

$$|\Psi(t)\rangle \approx \left[1 - \frac{it\hat{H}_I}{\hbar} + \frac{1}{2} \left(\frac{-it\hat{H}_I}{\hbar} \right)^2 \right] |\Psi_0\rangle \quad (4.8)$$

a segundo orden en el tiempo, donde se utilizo el lema de Baker-Hausdorf ya utilizado anteriormente. SI se considera el CPDE tipo I, entonces $|\Psi_0\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i$ se tiene que

$$|\Psi(t)\rangle = \left(1 - \frac{\mu^2}{2} \right) |0\rangle_s |0\rangle_i - i\mu |1\rangle_s |1\rangle_i \quad (4.9)$$

con $\mu = \eta t$. El estado esta normalizado a primer orden en μ , donde se desprecia el termino de orden μ^2 que contiene el estado $|2\rangle_s |2\rangle_i$.

Para el caso del CPDE de tipo II, con estado inicial $|\Psi_0\rangle = |0\rangle_{Vs} |0\rangle_{Hs} |0\rangle_{Vi} |0\rangle_{Hi}$ se tiene

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \left(1 - \frac{\mu^2}{2} \right) |0\rangle_{Vs} |0\rangle_{Hs} |0\rangle_{Vi} |0\rangle_{Hi} \\ & - i\mu \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{Vs} |0\rangle_{Hs} |0\rangle_{Vi} |1\rangle_{Hi} + |0\rangle_{Vs} |1\rangle_{Hs} |1\rangle_{Vi} |0\rangle_{Hi}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se definen ahora los estados con polarización vertical y horizontal tanto para el vacío como para fotones simples como $|0\rangle := |0\rangle_V |0\rangle_H$, $|V\rangle := |1\rangle_V |0\rangle_H$ y $|H\rangle := |0\rangle_V |1\rangle_H$, con lo que es posible redefinir (4.10) como

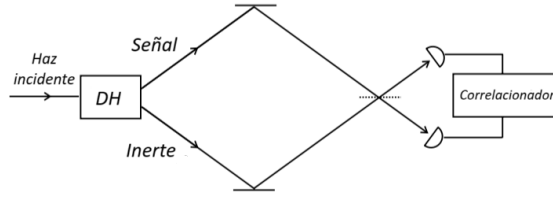


Figura 4.4: Esbozo del interferómetro de HOM

$$|\Psi(t)\rangle = \left(1 - \frac{mu^2}{2}\right) |0\rangle_s |0\rangle_i - i\mu (|V\rangle_s |H\rangle_i + |H\rangle_s |V\rangle_i). \quad (4.11)$$

donde tomando el segundo termino y normalizándolo, se tiene uno de los estados de Bell, el estado $|\Psi^+\rangle$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle_s |H\rangle_i + |H\rangle_s |V\rangle_i). \quad (4.12)$$

Así, es posible mostrar el conjunto total de los estados de Bell:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |V\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |H\rangle_2) \quad (4.13)$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |H\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |V\rangle_2) \quad (4.14)$$

4.2. Interferómetro de Hong-Ou-Mandel

Como se ha adelantado en el capítulo anterior, cuando dos fotones inciden sobre las caras de un divisor de haz 50:50, los fotones salen juntos ya sea por un cara del divisor del haz o por la otra, por la interferencia del tipo ondulatorio. Es por esto, que al incidirse el estado $|1\rangle_s |1\rangle_i$, se tiene lo obtenido en (3.39). Si se colocan detectores a ambas salidas del divisor de haz, estos nunca deberán de detectar fotones de manera simultanea. La primera demostración de esto, fue con el interferómetro de HOM, el cual estaba diseñado originalmente para medir el tiempo de incidencia en el divisor de haz al enviar ambos fotones por cada puerto.

Como puede apreciarse en la figura (4.4), el cristal de CPDE, que se toma de tipo I, es incidido por un haz de fotones bombeados, donde los fotones que salen del cristal son redirigidos, por medio de espejos, a un divisor de haz 50:50, donde a las salidas de este se encuentran dos detectores conectados a un correlacionador. El cambiar la posición del divisor de haz causara un tenue retraso entre los instantes en el que los haces inciden en el divisor. De ser este retraso ligeramente no nulo, los fotones independientemente incidirán en los detectores, desencadenando detecciones con un lapso muy corto entre estas. Como se muestra en el artículo [HOM87], la tasa de coincidencias en las detecciones, R_{coin} , tiene la forma

$$R_{coin} \sim \left[1 - e^{-(\Delta\omega)^2(\tau_s - \tau_i)^2}\right], \quad (4.15)$$

donde $\delta\omega$ es el ancho de banda de la luz y $c\tau_s$ y $c\tau_i$ son las distancias recorridas desde el cristal hasta el divisor. El ancho de banda $\delta\omega$ muestra que los haces señal e inerte no son monocromáticos, donde en (4.15) puede notarse que su aparición viene de asumir que la distribución espacial es Gaussiana. Cuando $\tau_s - \tau_i = 0$, $R_{coin} = 0$, como puede esperarse dado que los fotones saldrán del divisor, en conjunto, por uno de las salidas del divisor. Si $|\tau_s - \tau_i| \gg \tau_{corr}$, donde $\tau_{corr} = 1/\delta\omega$ como la correlación temporal entre los fotones, será cuando la tasa de coincidencia se vaya a la alza, hacia un máximo. τ_{corr} esta en el orden de nanosegundos, que aunque es complicado de medir con técnicas convencionales de medición, es posible con el interferómetro de HOM.

4.3. Estados de Bell

Para lo que sigue, es conveniente tomar el estado de Bell

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |V\rangle_2 - |V\rangle_1 |H\rangle_2), \quad (4.16)$$

el cual es obtenido a través de un proceso de conversión descendente.

Si se definen para cada modo, estados de polarización a lo largo y ortogonales del modo 1, θ , y el modo 2, ϕ , se tiene

$$\begin{aligned} |\theta\rangle_1 &= \cos\theta |H\rangle_1 + \sin\theta |V\rangle_1, \\ |\theta^\perp\rangle_1 &= -\sin\theta |H\rangle_1 + \cos\theta |V\rangle_1, \\ |\phi\rangle_2 &= \cos\phi |H\rangle_2 + \sin\phi |V\rangle_2, \\ |\phi^\perp\rangle_2 &= -\sin\phi |H\rangle_2 + \cos\phi |V\rangle_2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde haciendo uso de estos es posible definir (4.16), por lo que al sacar el producto de los estados en (4.17) y resolver el sistema de ecuaciones, se tiene

$$\begin{aligned} |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\cos\theta \sin\phi - \sin\theta \cos\phi) |\theta\rangle_1 |\phi\rangle_2 \\ &\quad + (\cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi) |\theta\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2 \\ &\quad - (\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi) |\theta^\perp\rangle_1 |\phi\rangle_2 \\ &\quad - (\sin\theta \cos\phi - \cos\theta \sin\phi) |\theta^\perp\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2 \}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si se toma $\phi = \theta$, la expresión pasada claramente se reduce a

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\theta\rangle_1 |\theta^\perp\rangle_2 - |\theta^\perp\rangle_1 |\theta\rangle_2), \quad (4.19)$$

lo que muestra la invarianza rotacional del estado $|\Psi^-\rangle$, la cual no se cumple para el resto de los estados de Bell.

PARTE II

Simplificación practica para operaciones en Interferometría

CAPÍTULO 5

Interferencia cuántica y el único problema de la mecánica cuántica

En este capítulo retomamos nuevamente los conceptos cuánticos que nos permiten comprender los conceptos básicos de la mecánica cuántica partir de un número menor de elementos conceptuales. Se hace con el objetivo de que un lector interesado de otras áreas diferentes a la física puedan comprender la esencia de los estados cuánticos y poder manipularlos para comprender los resultados experimentales obtenidos a partir de estados de fotones. Esto tiene una justificación directa: Partiendo de que la mecánica cuántica es contraintuitiva en sus fenómenos principales, los postulados de la mecánica cuántica parecen formar parte de un recetario a seguir para la explicación de los resultados experimentales. En ese sentido, podemos modificar un poco el recetario de forma que sea más directo. Si descartamos de entrada los procesos que tienen que ver con los fenómenos que involucran partículas con masa en reposo diferente de cero y solamente nos enfocamos a fotones, las reglas de la mecánica cuántica se reducen en el recetario. Estas son la reglas básicas:

1. Cualquier estado cuántico referido a fotones individuales puede denotarse así:

$$|1\rangle, |H\rangle, |H\rangle|V\rangle, \quad (5.1)$$

donde el primero se refiere al estado de un sólo fotón, sin importar otra cosa que solo tiene un cuanto de energía. El segundo estado se refiere a un estado con un cuanto de energía con polarización horizontal, y el tercer estado se refiere a dos fotones cada uno con la polarización señalada.

2. Una base de estados de fotones individuales con polarización ortonormal y una base de pares de fotones que son producidos con polarización ortonormal se describen así:

$$\{|H\rangle, |V\rangle\} \quad (5.2)$$

$$\{|H\rangle|V\rangle, |H\rangle|V\rangle\} \quad (5.3)$$

Es necesario mencionar que el concepto de base, es el mismo que solemos aplicar a la base de un sistema coordinado. Por ejemplo en el plano cartesiano, una base conocida es aquella de los vectores unitarios: $\hat{i}, \hat{j}$

En la cual podemos expresar cualquier vector en ese plano, por ejemplo:

$$\vec{A} = a_i \hat{i} + a_j \hat{j} \quad (5.4)$$

con las correspondientes reglas algebraicas básicas ya conocidas, de ortonormalidad, producto interno (producto punto)

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \quad (5.5)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \quad (5.6)$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \quad (5.7)$$

$$\hat{i} \cdot \vec{A} = a_i \quad (5.8)$$

$$\hat{j} \cdot \vec{A} = a_j \quad (5.9)$$

Interpretamos a_i y a_j como las proyecciones de $\vec{A}$ en los ejes $\hat{i}$ y $\hat{j}$ respectivamente. El estado cuántico análogo de [5.4] es:

$$|\psi\rangle = C_H|H\rangle + C_V|V\rangle \quad (5.10)$$

Podemos decir que el estado del fotón, $|\psi\rangle$ es una superposición del estado del fotón en polarización horizontal, con el estados del mismo fotón en polarización vertical. Las cantidades C_H y C_V son las amplitudes de probabilidad de que cuando hagamos una medición de la polarización del fotón sea $|H\rangle$ y $|V\rangle$ respectivamente. Podemos hacer la correspondencia de los vectores con los estados cuánticos:

$$\langle H|V\rangle = 0 \quad (5.11)$$

$$\langle H|H\rangle = 1 \quad (5.12)$$

$$\langle V|V\rangle = 1 \quad (5.13)$$

$$\langle H|\psi\rangle = C_H \quad (5.14)$$

$$\langle V|\psi\rangle = C_V \quad (5.15)$$

Lo que define una base ortonormal. La diferencia con una base vectorial en el plano cartesiano es que esta representa una base en el espacio complejo.

Un estado $|\psi\rangle$ con dos posibilidades de estados puede escribirse como la combinación lineal de los estados de la base con amplitudes de probabilidad C_H y C_V complejos.

$$|\psi\rangle = C_H|H\rangle + C_V|V\rangle \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

Si queremos saber cual es el es la probabilidad de que en una medición midamos al fotón con una polarización definida debemos obtener:

$$P_H = |C_H|^2 = |\langle H|\psi\rangle|^2 \quad (5.18)$$

$$P_V = |C_V|^2 = |\langle V|\psi\rangle|^2 \quad (5.19)$$

Finalmente para completar, un operador A que actúa sobre un estado de la base puede hacer dos cosas. Si este es diagonal implica que

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \quad (5.20)$$

donde se preserva la linealidad

$$\hat{A}|\psi\rangle = \hat{A}(C_H|H\rangle + C_V|V\rangle) \quad (5.21)$$

$$= C_H\hat{A}|H\rangle + C_V\hat{A}|V\rangle \quad (5.22)$$

En su tercer libro de conferencias dedicado a la física cuántica [FLS11], Richard Feynman asevera que el único problema conceptual de la mecánica cuántica proviene de la interpretación del estado final de aquella partícula que al entrar a un experimento cuyas dos opciones de salida se escribe como una combinación lineal de las dos historias posibles al salir. Tomemos como ejemplo el estado final de un fotón que cruza un divisor de haz, [3.34].

$$|\psi\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3) \quad (5.23)$$

Pero si usted ha decidido leer esta tesis comenzando en este capítulo, simplemente le diremos que un fotón que entra a un divisor de haz construido con la especificación (50:50) tendrá un 50% de probabilidad $P_T = 1/2$ de irse transmitido por la misma trayectoria de entrada y tiene probabilidad $P_R = 1/2$ de irse reflejado, cambiando de camino en 90° a la derecha. Este cambio debido a la reflexión, produce una fase de $e^{i\pi/2} = i$, que es el factor complejo i en el primer sumando de la derecha en la [5.23].

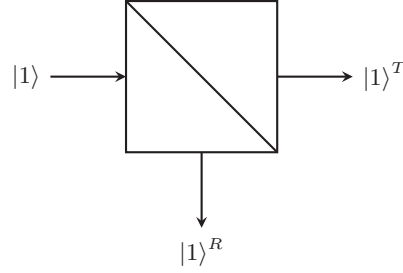


Figura 5.1: Divisor de haz con un fotón incidente en el puerto 1 y sus salidas para el caso transmitido y el reflejado.

Cuando el fotón entra a un divisor de haz con diferentes probabilidades de transmisión y reflexión, entonces escribiremos su estado así:

$$|\psi\rangle = iC_2 |1\rangle_2 + C_3 |1\rangle_3 \quad (5.24)$$

donde C_2 y C_3 son cantidades complejas llamadas amplitudes de probabilidad.

Si se obtienen los productos internos para obtener las amplitudes de probabilidad, se tiene

$$\begin{aligned} {}_2\langle 1|\psi\rangle &= iC_2 {}_2\langle 1|1\rangle_2 + C_3 {}_2\langle 1|1\rangle_3 = iC_2 \\ {}_3\langle 1|\psi\rangle &= iC_2 {}_3\langle 1|1\rangle_2 + C_3 {}_3\langle 1|1\rangle_3 = C_3 \end{aligned} \quad (5.25)$$

por lo que la probabilidad será el módulo al cuadrado para cada amplitud, así

$$\begin{aligned} |{}_2\langle 1|\psi\rangle|^2 &= (iC_2)(-iC_2^*) \\ |{}_3\langle 1|\psi\rangle|^2 &= (C_3)(C_3^*). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Es importante aclarar que los módulos al cuadrado deben sumar 1, esto sería que $|{}_2\langle 1|\psi\rangle|^2 + |{}_3\langle 1|\psi\rangle|^2 = 1$, por lo que es necesario que la expresión se encuentre normalizada. Mas de esto en a continuación.

5.1. Interferencia Cuántica

Considerando el interferómetro de Mach-Zehnder, como se puede observar en la figura (5.2), es posible analizar ciertas cuestiones fundamentales de la interferencia entre fotones. El interferómetro mencionado está compuesto por dos divisores de haz, dos espejos, dos detectores, un control de fase para poder marcar uno de los caminos ópticos a la salida del primer divisor de haz y un contador de coincidencias.

Para el caso de un solo fotón incidente en el primer divisor de haz, como se puede apreciar en la figura (5.1), es posible obtener la superposición de estados en la salida del segundo divisor de haz como sigue

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |\Psi\rangle_e^T + \frac{i}{\sqrt{2}} |\Psi\rangle_e^R \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} (|1\rangle_t^T + i|1\rangle_r^T) + \frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle_t^R + i|1\rangle_r^R) \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde es posible notar el efecto del control de fase en el camino óptico de transmisión del primer divisor de haz, que añade $e^{i\theta}$ al primer estado de ambos estados de salida. Nótese que los superíndices en los estados hacen referencia al resultado de la salida al primer divisor de haz, mientras que los subíndices en los estados representan la salida al segundo divisor de haz. En la segunda línea de la ecuación (5.27), puede verse cómo es posible descomponer ambos estados de salida del segundo divisor de haz en la superposición de los estados resultantes de la interacción con este. Puede notarse que, en contraste con la ecuación (5.23), los estados $|0\rangle_2 |1\rangle_3$ y $|1\rangle_2 |0\rangle_3$ están representados como $|\Psi\rangle_e^T$ y $|\Psi\rangle_e^R$, respectivamente, con la finalidad de

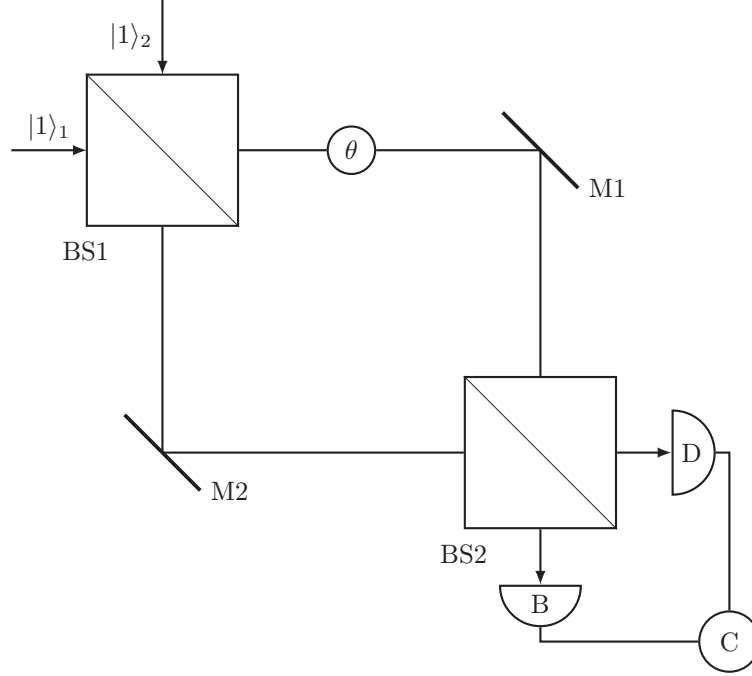


Figura 5.2: El interferómetro de Mach-Zehnder está compuesto por dos divisores de haz, dos espejos, dos detectores, un control de fase para poder marcar uno de los caminos ópticos a la salida del primer divisor de haz y un contador de coincidencias.

simplificar la escritura; sin embargo, el manejo y sus reglas de operación se mantienen. Lo mismo sucede con los estados resultantes a la salida del segundo divisor de haz.

Ahora, agrupando los estados a la salida del segundo divisor de haz, en la línea 2 de (5.27), puede simplificarse la ecuación al agrupar lo que cada detector al final del interferómetro captura, de tal manera que se tienen las salidas $|\Psi\rangle_B$ y $|\Psi\rangle_D$, como se puede ver en la ecuación (5.28)

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_B &= \frac{1}{2} [e^{i\theta} |1\rangle_t^T - |1\rangle_r^R] = \frac{1}{2} [e^{i\theta} - 1] |\psi\rangle_B \\ |\Psi\rangle_D &= \frac{i}{2} [e^{i\theta} |1\rangle_r^T + |1\rangle_t^R] = \frac{i}{2} [e^{i\theta} + 1] |\psi\rangle_D \end{aligned} \quad (5.28)$$

Se observa que el estado del detector $|\psi\rangle_B$ capturara los estados $|1\rangle_t^T$ y $|1\rangle_r^R$, mientras que el estado del detector $|\psi\rangle_D$ captura $|1\rangle_r^T$ y $|1\rangle_t^R$, por lo que al factorizar sus coeficientes llegamos a las ultimas igualdades de ambas líneas.

A partir de (5.28), es posible obtener las probabilidades de que los detectores B y D contabilicen un fotón al obtener el modulo al cuadrado de los productos internos ${}_B\langle 1|\Psi\rangle_B$ y ${}_D\langle 1|\Psi\rangle_D$, como sigue

$$\begin{aligned} P_B &= \left| \frac{1}{2} (e^{i\theta} - 1) \right|^2 = \frac{1}{4} (e^{i\theta} - 1) (e^{-i\theta} - 1) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i\theta} e^{-i\theta} - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 1) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i\theta - i\theta} - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 1) \\ &= \frac{1}{4} (2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde si se utiliza la identidad $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, es posible simplificar a

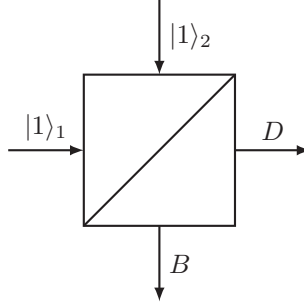


Figura 5.3: Divisor de haz con dos fotones incidentes en el puerto 1 y 2 y sus salidas para el caso transmitido y el reflejado.

$$P_B = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad (5.30)$$

Nótese que, al ser las amplitudes de probabilidad números complejos, el modulo se define como $|a| = aa^*$. Ahora, al realizar el mismo procedimiento para P_D , se tiene

$$\begin{aligned} P_D &= \left| \frac{i}{2} (e^{i\theta} + 1) \right|^2 \\ &= \left(\frac{i}{2} \right) \left(\frac{-i}{2} \right) (e^{i\theta} + 1) (e^{-i\theta} + 1) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i\theta} e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 1) \\ &= \frac{1}{4} (2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\ P_D &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde se hizo uso de la identidad $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Pero si ahora tomamos el caso en el que dos fotones incidan simultáneamente en el primer divisor de haz del interferómetro de Mach-Zehnder, como puede verse en la figura (5.3), se observara que ciertas consideraciones deberán de ser tomadas.

La salida al primer divisor de haz estará dada ahora como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_s &= \frac{1}{2} (|1\rangle^{T_1} + i|1\rangle^{R_1}) (|1\rangle^{T_2} + i|1\rangle^{R_2}) \\ &= \frac{1}{2} (|1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_2} + i|1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_2} + i|1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_2} - |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_2}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Tomando como referencia la figura (5.3), nótese que en (5.32) se utilizan los superíndices T_1 , T_2 , R_1 y R_2 en el estado $|1\rangle$ para diferenciar los casos en el que los fotones de los puertos 1 y 2 son reflejados o transmitidos por el divisor de haz. Dado que los estados $|1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_2}$ y $|1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_2}$ son indistinguibles al salir los pares T_1 y R_2 por el mismo puerto, con el mismo caso para los pares T_2 y R_1 , estos se anulan, simplificando a

$$|\Psi\rangle_s = \frac{i}{2} (|1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_2} + |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_2}). \quad (5.33)$$

Trasladando (5.33) a las direcciones de propagación B y D, utilizando un subíndice para denotar los fotones que llegan a cada detector, se simplifica aun mas a

$$|\Psi\rangle_s = \frac{i}{2} (|2\rangle_B + |2\rangle_D) \quad (5.34)$$

Un inspección superficial da a notar que, a diferencia del caso anterior con un solo fotón, la probabilidad de salida no es del 50%:

$$P(B) = P(D) = \left| \frac{i}{2} \right|^2 = \left(\sqrt{\frac{i}{2} \cdot \frac{-i}{2}} \right)^2 = \frac{1}{4}, \quad (5.35)$$

lo que da como conclusión que el estado resultante no se encuentra normalizado. Esto es esperable dada la manera en la que actúa el operador de creación (2.76) sobre los estados número, empezando por el estado vacío.

Si el lector lo permite, regresaremos a un punto critico sobre como se utiliza el operador de creación sobre los estados numero y como estos se generan a partir del estado vacío. Como indica (2.76), los estados números se generan a partir de la aplicación recursiva sobre el estado numero vacío una n cantidad de veces, donde como se demuestra en (2.76), al aplicar una n cantidad de veces el operador de creación sobre el estado numero vacío, se van “apilando” unos coeficientes de la forma $\sqrt{n!}$, por lo que el resultado de n iteraciones entrega $(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$. Tomando esto en consideración, podemos notar porque no afecta el caso de un solo fotón, esto es el estado $|1\rangle$, dado que el coeficiente que lo acompañaría seria $\sqrt{1!} = 1$, pero en el caso con 2 o mas fotones, esto es, estados numero $|2\rangle$ y mayores, no sera el mismo escenario. Esta disertación permitir tomar un “atajo” practico al momento de realizar cálculos sobre los estado resultantes al hacer incidir dos o mas fotones en un divisor de haz, un factor de normalización:

$$|n\rangle \rightarrow \sqrt{n!} |n\rangle. \quad (5.36)$$

Haciendo uso de este factor, que parte de la definición misma de los estado numero, es posible corregir la no normalización de (5.34), por lo que agregando este factor faltante, se tiene

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_s &= \frac{i}{2} \left(\sqrt{2!} |2\rangle_B + \sqrt{2!} |2\rangle_D \right) \\ &= \frac{i\sqrt{2}}{2} (|2\rangle_B + |2\rangle_D) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_B + |2\rangle_D), \end{aligned} \quad (5.37)$$

Lo cual, al aplicar el modulo al cuadrado sobre el coeficiente da $P_B = P_D = \frac{1}{2}$, como era esperado.

Es importante hacer notar un par de cosas sobre este procedimiento:

- El factor de normalización debe ser aplicado a cada uno de los estados numero.
- El factor de normalización debe ser aplicado tanto al estado inicial como al final, dado que el coeficiente $\sqrt{n!}$, “acompaña” a todo estado numero.

A manera de ejemplo, se puede hacer uso del factor de normalización en el caso donde dos fotones sean incidentes en cada uno de los puertos de un divisor de haz, como se aprecia en la figura (5.4):

$$|\psi\rangle_e = |2\rangle_1 |2\rangle_2 \xrightarrow{BS} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle^{T_1} + i |1\rangle^{R_1}) \right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle^{T_2} + i |1\rangle^{R_2}) \right]^2. \quad (5.38)$$

Aplicando el factor de normalización al estado de entrada $|\Psi\rangle_e$ primero, se tiene:

$$\sqrt{2!}\sqrt{2!} |2\rangle_1 |2\rangle_2 = 2 |2\rangle_1 |2\rangle_2 \quad (5.39)$$

Y ahora para la salida $|\Psi\rangle_s$:

$$2 |2\rangle_1 |2\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{4} * \left\{ \begin{aligned} &\left(|1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_1} + i |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_1} + i |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_1} - |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_1} \right)^* \\ &\left(|1\rangle^{T_2} |1\rangle^{T_2} + i |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{R_2} + i |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{T_2} - |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{R_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Expandiendo el lado derecho

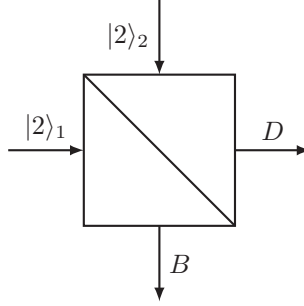


Figura 5.4: Divisor de haz con dos fotones incidentes en cada puerto

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} * \{ |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{T_2} + i |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{R_2} \\
& + i |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{T_2} - |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{R_2} \\
& - i |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{T_2} - |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{R_2} \\
& - |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{T_2} - i |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{R_2} \\
& + i |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{T_2} - |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{R_2} \\
& - |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{T_2} - i |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{R_2} \\
& - |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{T_2} - i |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{T_2} |1\rangle^{R_2} \\
& - i |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{T_2} + |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_1} |1\rangle^{R_2} |1\rangle^{R_2} \}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

De (5.41), es posible observar, cuidadosamente, que algunos fotones saldrán por el mismo puerto del divisor de haz, donde al trasladar a las direcciones de propagación como se hizo en (5.34), se simplifica a

$$|\Psi\rangle_s = -\frac{1}{4} (|4\rangle_B + |4\rangle_D + |2\rangle_B |2\rangle_D), \tag{5.42}$$

el cual, como se esperaba, no está normalizado. Entonces, aplicando ahora el factor de normalización a la salida y tomando en cuenta que se había aplicado ya a la entrada se tiene

$$\begin{aligned}
2|2\rangle_1 |2\rangle_2 & \rightarrow -\frac{1}{4} (\sqrt{4!}|4\rangle_B + \sqrt{4!}|4\rangle_D + 2\sqrt{2!}\sqrt{2!}|2\rangle_B |2\rangle_D) \\
|2\rangle_1 |2\rangle_2 & \rightarrow -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}|4\rangle_B + \sqrt{\frac{3}{2}}|4\rangle_D + |2\rangle_B |2\rangle_D \right) \\
|2\rangle_1 |2\rangle_2 & \rightarrow -\sqrt{\frac{3}{8}} (|4\rangle_B + |4\rangle_D) - \frac{1}{2} |2\rangle_B |2\rangle_D
\end{aligned} \tag{5.43}$$

el cual se encuentra ya normalizado:

$$P_s = \left(-\sqrt{\frac{3}{8}} \right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{3}{8}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 1 \tag{5.44}$$

5.2. Interferencia de estados onda

A continuación, se examina el caso donde se hace incidir un estado onda en un interferómetro de Mach-Zehnder, el cual tiene la forma

$$|\Psi\rangle_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 + |1\rangle_2), \tag{5.45}$$

el cual, al ser aplicado al primer divisor de onda, entrega

$$|\Psi_i\rangle_D = \frac{1}{2} (e^{i\theta}|1\rangle_1^T + ie^{i\theta}|1\rangle_2^R) \quad (5.46)$$

$$|\Psi_i\rangle_B = \frac{1}{2} (i|1\rangle_1^R + |1\rangle_2^T) \quad (5.47)$$

Nótese que en el caso de $|\Psi\rangle_D$, en control de fase genera el desfase de $e^{i\theta}$.

Al entrar ambos estado en el segundo divisor de haz del interferómetro de Mach-Zehnder, los estados entrantes generan una nueva superposición por cada incidencia, que queda como

$$|\Psi\rangle_D = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{1,t}^T + i|1\rangle_{1,r}^T) + \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{2,t}^R + i|1\rangle_{2,r}^R) \right], \quad (5.48)$$

$$|\Psi\rangle_B = \frac{1}{2} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{1,t}^R + i|1\rangle_{1,r}^R) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{2,t}^T + i|1\rangle_{2,r}^T) \right]. \quad (5.49)$$

Nótese ahora que se utiliza una notación en el estado $|1\rangle$ para diferenciar los diferentes caminos ópticos que toman los fotones que inciden inicialmente al interferómetro. De manera similar a antes, los superíndices indican la salida al primer divisor de haz, mientras que los subíndices indican la salida al segundo divisor de haz. Si en el subíndice del estado $|1\rangle$ se tiene un 1, indica que es el fotón que incide por el puerto uno al primer divisor del interferómetro, mientras que un 2 indicaría que el fotón incidió por el segundo puerto del divisor de haz, tomando como referencia la figura (5.3) para identificar el puerto.

Ahora, como se ha realizado anteriormente, se revisa cuales estados serán incidentes en cual detector, de tal manera que los estado se simplifiquen:

$$D \rightarrow \frac{ie^{i\theta}}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{1,r}^T, \frac{-e^{i\theta}}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{2,r}^R, \quad (5.50)$$

$$\frac{i}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{1,t}^R, \frac{1}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{2,t}^T$$

$$B \rightarrow \frac{e^{i\theta}}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{1,t}^T, \frac{ie^{i\theta}}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{2,t}^R, \quad (5.51)$$

$$\frac{i^2}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{1,r}^R, \frac{1}{2\sqrt{2}} |1\rangle_{2,r}^T$$

donde al factorizar los coeficientes, se tiene

$$|\Psi_s\rangle_D = \frac{1}{2\sqrt{2}} (ie^{i\theta} - e^{i\theta} + i + 1) |1\rangle_D \quad (5.52)$$

$$|\Psi_s\rangle_B = \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^{i\theta} + ie^{i\theta} + i^2 + i) |1\rangle_B. \quad (5.53)$$

Ahora, para obtener sus probabilidades, solo es cuestión de obtener el modulo al cuadrado de la amplitud de probabilidad, entonces para P_D se tiene

$$\begin{aligned} P_D &= \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} (ie^{i\theta} - e^{i\theta} + i + 1) \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} (4 + 2ie^{i\theta} - 2ie^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i^2}{2} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sin \theta}{2} \\ P_D &= \frac{1}{2} (1 - \sin \theta) \end{aligned} \quad (5.54)$$

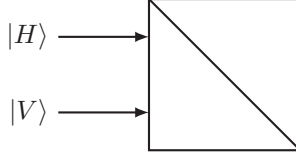


Figura 5.5: Divisor de haz con dos fotones incidentes con polarización ortogonal entre ellos en un mismo puerto.

y para P_B

$$\begin{aligned}
 P_D &= \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^{i\theta} + ie^{i\theta} + i - 1) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{8} (4 + 2ie^{-i\theta} - 2ie^{i\theta}) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\sin \theta}{2} \\
 P_D &= \frac{1}{2} (1 + \sin \theta)
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.3. Entrelazamiento

El estudio de la interacción de dos fotones incidentes en un divisor de haz será ligeramente diferente, donde como se observa en la figura (5.5), se inciden dos fotones ortogonales, con polarización horizontal y vertical, sobre el mismo puerto de divisor de haz. El estado inicial está entrelazado y correlacionado, donde el interés se encuentra en la salida al divisor de haz, con el estado inicial

$$|\Phi\rangle_e = |H\rangle_1 |V\rangle_1 \tag{5.56}$$

Como se ha estudiado a lo largo del presente capítulo, se espera que cada fotón tenga una interacción con el divisor de haz donde este se refleje o transmita, lo que nos entrega una salida de la forma

$$|\Psi\rangle_s = \frac{1}{2} [|H\rangle_D + i|H\rangle_B] [|V\rangle_D + i|V\rangle_B] \tag{5.57}$$

el cual al expandir, entrega

$$\begin{aligned}
 |\Phi\rangle_s &= \frac{1}{2} [|H\rangle_D |V\rangle_D + i|H\rangle_D |V\rangle_B \\
 &\quad + i|H\rangle_B |V\rangle_D - |H\rangle_B |V\rangle_B]
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

donde si se definen los estados de Bell

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_D |V\rangle_B + |H\rangle_B |V\rangle_D) \tag{5.59}$$

$$|\psi'^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_D |V\rangle_D - |H\rangle_B |V\rangle_B) \tag{5.60}$$

es posible reescribir (5.58) como

$$|\Psi\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|\psi^+\rangle + |\psi'^-\rangle), \tag{5.61}$$

los cuales son estados entrelazados.

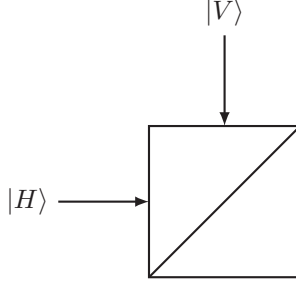


Figura 5.6: Divisor de haz con dos fotones incidentes con polarización ortogonal entre ellos en puertos distintos.

Es también de notarse que, en una medición de correlación, se encontrará únicamente el estado $|\psi\rangle^+$, ya que el estado $|\psi\rangle'^-$ será descartado al no generar coincidencias en ambos detectores, dado que ambos fotones en dicho estado se medirán solo por un detector; estos términos se denominan “bunching”. Además, no se hizo uso de indicadores del puerto de entrada en el divisor de haz, dado que, al ser una medición de entrelazamiento de post-selección, la simetría del experimento indicará que las salidas de transmisión y reflexión serán equivalentes; no habrá distinción entre $|\psi\rangle^+$ y $|\psi\rangle'^-$ que pueda medirse.

Tomando ahora el caso mostrado en la figura (5.6), se tendrá una entrada distinta, donde esta se define como

$$|\Phi\rangle_e = |H\rangle_1 |V\rangle_2. \quad (5.62)$$

La salida estará dada como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_s &= \frac{1}{2} (|H\rangle_1^T + i|H\rangle_1^R) (|V\rangle_2^T + i|V\rangle_2^R) \\ &= \frac{1}{2} [|H\rangle_1^T |V\rangle_2^T + i|H\rangle_1^T |V\rangle_2^R \\ &\quad + i|H\rangle_1^R |V\rangle_2^T - |H\rangle_1^R |V\rangle_2^R], \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde si se toman en cuenta los puertos de salida para simplificar, se tiene

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_s &= \frac{1}{2} [|H\rangle_D |V\rangle_B + i|H\rangle_D |V\rangle_D \\ &\quad + i|H\rangle_B |V\rangle_B - |H\rangle_B |V\rangle_D], \end{aligned} \quad (5.64)$$

donde si se hace uso de los estado de Bell

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_D |V\rangle_B - |H\rangle_B |V\rangle_D) \quad (5.65)$$

$$|\psi'^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_D |V\rangle_D + |H\rangle_B |V\rangle_B) \quad (5.66)$$

(5.64) se reduce a

$$|\Psi\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|\psi'^+\rangle + |\psi^-\rangle) \quad (5.67)$$

Ahora, es posible observar que, a diferencia del caso anterior, el estado que es posible detectar es $|\psi\rangle^-$, donde el estado $|\psi'^+\rangle$ exhibe “bunching” y por ende no genera coincidencias en los detectores, al salir ambos por alguno de los puertos del divisor de haz de manera conjunta. El estado $|\psi\rangle^-$ es un estado antisimétrico, el cual proviene del orden en que cada modo de entrada se mezcla, intercambiando cuál

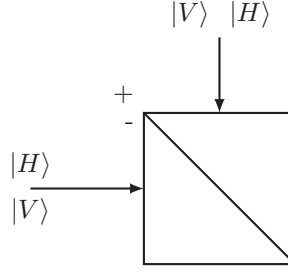


Figura 5.7: Representación de la incidencia de los estado de Bell $|\psi^+\rangle$ y $|\psi^-\rangle$

fotón sale por D y cuál por B; puede entenderse como la adición de un desfase adicional, proveniente del orden de aplicación de las reflexiones y transmisiones, de modo que esas dos amplitudes cruzadas contienen ese signo “-”.

Es importante precisar la necesidad de la medición de coincidencias que se resumen como sigue:

Pérdida de la fase relativa en medidas individuales

Si se colocara un solo detector en D, o se midiera sólo las intensidades o polarizaciones de cada salida aisladamente, lo único a obtenerse son conteos promedio. Esos conteos son idénticos tanto si el sistema está en uno u otro estado de Bell (o incluso en una mezcla clásica de fotones “ $H \rightarrow D$, $V \rightarrow B$ ” y “ $H \rightarrow B$, $V \rightarrow D$ ”), pues no revelan la coherencia (la fase relativa) entre las dos posibles rutas.

Post-selección de un fotón en cada salida

Al medir coincidencias en los detectores D y B se fuerza al sistema a proyectarse en el subespacio “exactamente un fotón en D y un fotón en B”. Con eso se descartan todos los términos de “bunching” (ambos fotones en D o ambos en B) y se deja sólo la superposición coherente de las dos rutas cruzadas. Es precisamente esa superposición la que define el estado de Bell, y su fase relativa (+ o -) queda inscrita en el patrón de coincidencias.

Diferencia entre entrelazamiento y mezcla

Sin coincidencias, la estadística de un solo detector puede describirse con una matriz de densidad diagonal (mezcla). Sólo la estadística conjunta (las correlaciones de polarización o ruta entre D y B) tiene los términos fuera de la diagonal (que puede entenderse del final de [Capítulo 3](#)) que testifican la no-separabilidad cuántica,

5.4. Estados iniciales entrelazados

Es momento de estudiar lo que sucede en la interacción de la incidencia de estados entrelazados, como los estados de Bell, con un divisor de haz. Tomando la figura [\(5.7\)](#), se toma el caso de incidencia del estado de Bell $|\psi^+\rangle$, se tiene entonces la entrada definida como

$$|\Psi\rangle_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1|V\rangle_2 + |V\rangle_1|H\rangle_2), \quad (5.68)$$

donde entonces se tendrá la salida

$$|\Psi\rangle_s = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|H\rangle_D + i|H\rangle_B)(|V\rangle_B + i|V\rangle_D) + (|V\rangle_D + i|V\rangle_B)(|H\rangle_B + i|H\rangle_D)], \quad (5.69)$$

que al expandir se tendrá

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_s &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|H\rangle_D |V\rangle_B + i|H\rangle_D |V\rangle_D + \\
&\quad + i|H\rangle_B |V\rangle_B - |H\rangle_B |V\rangle_D + \\
&\quad + |V\rangle_D |H\rangle_B + i|V\rangle_D |H\rangle_D + \\
&\quad + i|V\rangle_B |H\rangle_B - |V\rangle_B |H\rangle_D) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} [i(2|H\rangle_D |V\rangle_D + 2|H\rangle_B |V\rangle_B)] \\
&= \frac{i}{\sqrt{2}} (|H\rangle_D |V\rangle_D + |H\rangle_B |V\rangle_B).
\end{aligned} \tag{5.70}$$

De (5.70) es posible observar que el resultado no es otro que un estado de Bell $|\psi^{+'}\rangle$ desfasado $\pi/2$, de tal forma que se tiene como salida a

$$|\Psi\rangle_s = i|\psi^{+'}\rangle \tag{5.71}$$

que es casi idéntico al estado de Bell incidente. El proceso es reversible, por lo que, haciendo de lado la fase, si se incidiera al inicio el estado de Bell $|\psi^+\rangle$, se obtendría a la salida el estado de Bell $|\psi^{+'}\rangle$.

Finalizando, es de utilidad mencionar tres puntos importantes para resumir lo trabajado en el presente capítulo:

Interacciones entre un divisor de haz y fotones incidentes

Estados entrelazados que se hagan incidir en un divisor de haz, tendrán como salida estado entrelazados, tal como $|\psi^+\rangle \xrightarrow{\vec{bs}} |\psi^{+'}\rangle$ y $|\psi^-\rangle \xrightarrow{\vec{bs}} |\psi'^-\rangle$

Conservación de la correlación

Si un estado inicial no está entrelazado, incluso donde la salida sea una combinación lineal de estados entrelazados, la salida, como una suma general, tampoco lo estará.

Interacción de estados producto y un divisor de haz

Cualquier combinación de un producto de estados que se incida sobre un divisor de haz, tendrá una salida como combinación lineal de estados entrelazados.

Como nota al margen para el lector, es importante notar que el presente capítulo presenta una simplificación práctica de la matemática detrás de la interacción de un divisor de haz con fotones incidentes (las transformaciones vistas en el Capítulo 3 para aplicar el operador de creación sobre estados número que permite calcular la salida a un divisor de haz, por ejemplo), donde la presente tesis muestra todo punto importante que llevara al lector a tener la habilidad técnica para utilizar estos atajos sin necesidad de hacer uso siempre del rigor teórico que se necesita para llegar a semejantes cálculos.

CAPÍTULO 6

Teorema de la No Clonación: Un Caso Práctico

Si el lector ha llegado desde el inicio del presente trabajo hasta este punto, ha podido atestiguar como se ha recorrido un camino desde planteamientos fundamentales, hasta simplificaciones que permiten no realizar cálculos tan rigurosos pero que mantienen toda la base teórica de fondo.

En este caso, se tomara como caso practico el *Teorema de la No Clonación* [WZ82], extendiendo lo expuesto en el [Capítulo 5].

6.1. Teorema de la no clonación

El teorema de la no clonación plantea que no existe un aparato universal que permita “clonar” un estado cuántico a la salida del mismo. La linealidad de la evolución cuántica (unitariedad) impide la existencia de un aparato que clone de forma perfecta un estado cuántico cualquiera. El hecho de que esto fuera posible, permitiría transmitir información en estados entrelazados a velocidades hiperlumínicas, que entraría en contrariedad con lo establecido por la relatividad de Einstein.

El planteamiento del tema, por Wootters y Zurek, es el siguiente:

Un dispositivo perfecto de amplificación, en el caso particular de fotones polarizados, recibiría un estado polarizado $|S\rangle$ como sigue

$$|A_0\rangle |S\rangle \rightarrow |A_S\rangle |S\rangle |S\rangle \quad (6.1)$$

donde $|A_0\rangle$ es el estado inicial del aparato y $|A_S\rangle$ el estado final que puede depender o no de la polarización del fotón incidente. Puede observarse que a la salida, se presentan dos fotones de polarización S como $|S\rangle |S\rangle$. Tomando los casos particulares para polarizaciones con polarización vertical $|V\rangle$ y polarización horizontal $|H\rangle$, el sistema puede expresarse como

$$|A_0\rangle |V\rangle \rightarrow |A_V\rangle |V\rangle |V\rangle \quad (6.2)$$

$$|A_0\rangle |H\rangle \rightarrow |A_H\rangle |H\rangle |H\rangle \quad (6.3)$$

Lo que describe la reproducción de un fotón con la misma polarización dejando al aparato A_0 en modo A_V o A_H según el fotón reproducido. Dado los principios de la mecánica cuántica, esta transformación debería ser representable por un operador lineal y unitario, por lo que debería ser posible hacer incidir una combinación lineal de dos fotones con polarización arbitraria en función de los pesos α y β

$$\alpha |V\rangle + \beta |H\rangle \quad (6.4)$$

como

$$|A_0\rangle (\alpha |V\rangle + \beta |H\rangle) \rightarrow \alpha |A_V\rangle |V\rangle |V\rangle + \beta |A_H\rangle |H\rangle |H\rangle. \quad (6.5)$$

Es posible que $|A_V\rangle \neq |A_H\rangle$, por lo que al no ser los estado del aparato iguales a la salida, la fotones emergentes se encuentren en un estado mezcla estadística, como se vio en el [Capítulo 3]. Pero, si $|A_V\rangle = |A_H\rangle$, se podrá factorizar al aparato y entonces los fotones se encontraran en un estado puro

$$(\alpha |V\rangle |V\rangle + \beta |H\rangle |H\rangle) |A_F\rangle \quad (6.6)$$

con $|A_F\rangle$ como el estado final del aparato donde ambos estado de salida sean iguales. Si $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ el resultado es un estado enredado, por lo que esta vía de clonación implicaría la no-localidad.

En cualquier caso e independiente al estado de salida del aparato, es necesario que el estado final, después de la transformacional, siga el rigor matemático detrás de la aplicación del operador de creación $\hat{a}^\dagger$, el cual sería

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \hat{a}_V^\dagger + \beta \hat{a}_H^\dagger)^2 |0\rangle = \alpha^2 |V\rangle |V\rangle + \sqrt{2}\alpha\beta |V\rangle |H\rangle + \beta^2 |H\rangle |H\rangle \quad (6.7)$$

que difiere de (6.6), el estado esperado de una combinación lineal a causa del término cruzado $\sqrt{2}\alpha\beta |V\rangle |H\rangle$. Lo que implica que no es posible clonar el estado de un fotón con polarización arbitraria.

Para demostrar el estado (6.7), es posible seguir todo el proceso matemático como se estudio en los capítulos Capítulo 3 y Capítulo 4 pero si en vez de eso, se hace uso de lo aprendido en Capítulo 5, es posible llegar al mismo resultado de una manera mas sencilla.

Así, es posible establecer el estado de entrada como

$$|\psi_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |V\rangle + \beta |H\rangle) \quad (6.8)$$

donde la transformación dada por el aparato idealizado y su desarrollo sería

$$\begin{aligned} |\psi_e\rangle |A_0\rangle &\xrightarrow{\text{Aparato}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |V\rangle + \beta |H\rangle)^2 |A_F\rangle \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^2 |V\rangle |V\rangle + \alpha\beta |V\rangle |H\rangle + \beta\alpha |H\rangle |V\rangle + \beta^2 |H\rangle |H\rangle) |A_F\rangle \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^2 |V\rangle |V\rangle + 2\alpha\beta |V\rangle |H\rangle + \beta^2 |H\rangle |H\rangle) |A_F\rangle. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Antes de continuar, es necesario recordar y establecer unas observaciones previas:

- Un estado de polarización $|S\rangle$ es un solo fotón con polarización S , por lo que puede expresarse como $|1\rangle_S$
- Dos fotones con misma polarización $|S\rangle |S\rangle$ se pueden expresar como $|2\rangle_S$
- Dos fotones con diferentes polarización $|S_1\rangle |S_2\rangle$ puede expresarse como $|1\rangle_{S_1} |1\rangle_{S_2}$

Si bien lo anterior resulta obvio, es importante mencionarlo para poder visualizar como es que posible aplicar el factor de normalización usado en Capítulo 5. Queda entonces la siguiente relación:

$$|V\rangle |V\rangle = |2\rangle_V \quad (6.10)$$

$$|V\rangle |H\rangle = |1\rangle_V |1\rangle_H \quad (6.11)$$

$$|H\rangle |H\rangle = |2\rangle_H \quad (6.12)$$

Con lo anterior, ahora resulta obvio que es necesario aplicar el factor de normalización $|n\rangle \rightarrow \sqrt{n!}|n\rangle$ a (6.9) por lo que ahora se tendrá una entrada normalizada como

$$|\psi\rangle_e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \sqrt{1!} |V\rangle + \beta \sqrt{1!} |H\rangle) \right) |A_0\rangle \quad (6.13)$$

y una salida normalizada

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_s &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^2\sqrt{2!}|V\rangle|V\rangle + 2\alpha\beta\sqrt{1!}\sqrt{1!}|V\rangle|H\rangle + \beta^2\sqrt{2!}|H\rangle|H\rangle)|A_F\rangle \\ &= (\alpha^2|V\rangle|V\rangle + \alpha\beta\sqrt{2}|V\rangle|H\rangle + \beta^2|H\rangle|H\rangle)|A_F\rangle, \end{aligned} \quad (6.14)$$

que es justo lo que se obtendría a través de la aplicación del operador de creación, en (6.7).

Es posible notar la utilidad del uso de lo aprendido en el capítulo [Capítulo 5](#) en el manejo de transformaciones de estados cuánticos, donde el operador creación este involucrado en la creación de estados numero.

Por otro lado, lo anterior demuestra, a partir de primeros principios, que no es posible el crear un aparato que clone fotones con polarización arbitraria. Esto no excluye casos para amplificar dos polarizaciones particulares, como por ejemplo en Prisma de Nicol, sin embargo, si aplica para casos de polarización arbitraria o cualquier otro ente cuántico que se haga incidir o interactuar de desde estados arbitrarios.

PARTE III

Simulaciones de experimentos en Óptica Cuántica

CAPÍTULO 7

Simulación por computadora en experimentos en óptica cuántica

No todas las universidades en el mundo cuentan con un laboratorio de Física Moderna con experimentos de óptica cuántica. Desde la perspectiva de que crear estados cuánticos requiere una fuente de fotones individuales y detectores con eficiencia cuántica, lo cual requiere una cierta inversión económica, realizar experimentos mentales a través de simulaciones entrena a los interesados para tener una idea de lo que se espera en este tipo de experimentos, así como para desarrollar su intuición cuántica. La física experimental juega un papel crucial en la verificación y aplicación de teorías científicas, proporcionando valiosas percepciones sobre nuestra interacción con el universo. Sin embargo, es importante señalar que los experimentos por sí solos no determinan únicamente la veracidad de una teoría ni sirven como el árbitro final de la realidad. La relación entre teoría y experimento es dinámica e interdependiente. El laboratorio sirve como un espacio para la experimentación porque nuestra comprensión del universo aún no está completa. Si se lograra una “teoría del todo exhaustiva”, el trabajo de laboratorio podría centrarse principalmente en aprender de los logros pasados y mejorar el equipo existente. El aprendizaje de los fundamentos de la física podría lograrse a través de simulaciones por computadora. Los experimentos simulados podrían ser muy fieles a la realidad y no son un concepto nuevo. Los creadores de la mecánica cuántica no tenían acceso a laboratorios adaptados a las nuevas teorías, por lo que crearon una serie de *gedanken experiments* (experimentos mentales), a principios del siglo XX. Aunque se es consciente de que la experimentación en laboratorio sigue siendo indispensable para validar modelos teóricos y descubrir nuevos conocimientos, ante la falta de espacios y equipos necesarios para realizarlos, las simulaciones pueden dar a los interesados la comprensión de los fenómenos bajo estudio.

7.1. Fuentes aleatorias

La óptica cuántica abarca diversas fuentes de fotones que emiten fotones a intervalos aleatorios con diferentes propiedades estadísticas. Como resultado, la capacidad de simular fuentes de fotones con estadísticas aleatorias se vuelve crucial. Un enfoque es utilizar los generadores de números aleatorios proporcionados por las plataformas de algoritmos o lenguajes de programación. Aunque estos generadores producen números pseudoaleatorios ya que son generados algorítmicamente, siguen siendo muy útiles para nuestros propósitos. La instrucción `rand()` en C++ o `random.random()` en Python proporcionan un número aleatorio real r en el intervalo $0 \leq r \leq 1$ con distribución uniforme. Estos números aleatorios pueden usarse luego para determinar si un fotón ocupa una posición temporal específica a lo largo de un intervalo. En el laboratorio, al contar fotones de una fuente de luz intensa, es necesario atenuar la luz para evitar dañar el detector, como un tubo fotomultiplicador o un fotodiodo de avalancha. Típicamente, la configuración de detección registra alrededor de un millón de fotones por segundo. La atenuación se logra mediante el uso de polarizadores, filtros neutros o una combinación de ambos. Para obtener una lectura promedio de un fotón por unidad de tiempo, a menudo se emplea un dispositivo electrónico. Este dispositivo cuenta las señales del detector dentro de intervalos de tiempo arbitrarios controlados por el usuario. Por ejemplo, si contamos en intervalos de $1 \mu\text{s}$, el número promedio de fotones detectados en cada intervalo se denotaría como $\bar{n} = 1$. Una forma de construir una serie temporal simulada de fotones,

denotada como f_s , es siguiendo el siguiente procedimiento: Primero, solicitamos a la computadora que genere una serie de números aleatorios.

Por ejemplo, consideremos el primer número aleatorio como $r_1 = 7.62939453E - 06$, el segundo como $r_2 = 0.131537676$ y el tercero como $r_3 = 0.755605221$. Asignando un significado a estos números, establecemos que el fotón inicial parte de la fuente en el tiempo $t_1 = 0$. Posteriormente, el primer fotón sale de la fuente en el tiempo $t_2 = r_1$, el segundo fotón sale en el tiempo $t_3 = r_1 + r_2$, el tercer fotón sale en el tiempo $t_4 = r_1 + r_2 + r_3$, y así sucesivamente. De esta manera, los intervalos de tiempo entre las emisiones de fotones se vuelven aleatorios. Es importante notar que las unidades de tiempo aún no se han especificado y pueden elegirse según nuestra conveniencia, como segundos, milisegundos, microsegundos o cualquier otra unidad. Además, esto es solo una ejemplificación de como generar series de tiempo. Para obtener una serie temporal de fotones para análisis, podemos instruir a la computadora que genere una secuencia de cien mil números aleatorios. Con eso, tendremos una serie temporal de fotones con la que trabajar. Consideremos que la serie temporal generada representa un flujo de fotones que abarca un segundo. Si colocáramos un obturador a la salida de la fuente de luz y lo abriéramos durante exactamente un segundo, escaparían un promedio de $\bar{n} = 100,000$ fotones durante esa duración. Calculemos ahora el tiempo promedio entre fotones vecinos:

$$\tau_0 = \frac{1s}{100000} = 10 \mu s \quad (7.1)$$

Vale la pena notar que un individuo con intuición estadística limitada podrían inclinarse a creer que si el obturador se abre a intervalos de precisamente τ_0 , se observaría un fotón en cada apertura del obturador. Sin embargo, la figura (7.1) proporciona una comparación entre dos series temporales. La primera serie temporal, representada por cruces, corresponde al flujo simulado de fotones creado usando números aleatorios. Por otro lado, la segunda serie temporal, representada por barras, exhibe un intervalo de tiempo entre cada barra igual a τ_0 . En la figura (7.1), se hace evidente que mientras algunos intervalos de tiempo no contienen fotones, otros exhiben la presencia de múltiples fotones. Esta observación resalta un aspecto importante: la ocurrencia de fotones en la serie temporal no está uniformemente distribuida en intervalos de τ_0 . En cambio, la presencia o ausencia de fotones sigue un patrón aleatorio dictado por las propiedades estadísticas subyacentes de la fuente de fotones. Comprender y analizar estos patrones es crucial en los experimentos de óptica cuántica, en particular es una forma de determinar los diferentes tipos de fuentes de fotones.

Distribución de Poisson

La emisión de fotones provenientes de un láser sigue una secuencia aleatoria y el conteo de fotones para una ventana de tiempo fija exhibe una distribución de Poisson. Para simular una fuente láser que emite $N = 10^5$ fotones en un marco de tiempo de un segundo, es necesario establecer el tiempo de conteo mínimo —dependiente de la capacidad de memoria y velocidad de la computadora— utilizado para la tarea. En la mayoría de los casos, se puede emplear un tiempo de conteo de $\tau_0 = 10^{-7} s$ sin sobrecargar significativamente la computadora. Esta elección implica dividir la duración de un segundo en 10^7 intervalos. Ahora, el desafío radica en distribuir aleatoriamente los 10^5 fotones entre estos 10^7 intervalos. Un cálculo sencillo revela que la probabilidad de que un intervalo contenga un solo fotón es $P_1 = N\tau_0 = 10^{-2}$. Para abordar esto, comenzamos definiendo un vector, denotado como $s(i)$, que consta de 10^7 entradas. Inicialmente, a todas las entradas se les asigna un valor de cero. Luego construimos un bucle que comprende 10^7 iteraciones, donde cada iteración i determina el valor de $s(i)$. Dentro de cada iteración, se genera un número aleatorio r_i . Si $r_i < P_1$, establecemos $s(i) = 1$; de lo contrario, $s(i) = 0$. En consecuencia, se construye una serie temporal de fotones, caracterizada por una secuencia como $(0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$, donde cada posición corresponde a un intervalo de 10^{-7} segundos. En este ejemplo, el cuarto intervalo contiene un fotón, mientras que los tres primeros intervalos no. Con este enfoque, la serie temporal resultante exhibe un promedio de $\bar{n} = 0.01$ fotones por 10^{-7} segundos. En los experimentos discutidos en el presente trabajo, trabajaremos con dos tiempos distintos. El primero es la duración del experimento en sí, denotada como T , que en este caso es $1 s$. Esto implica que si la intensidad de la fuente de fotones permanece constante, deberíamos esperar medir un promedio de $\bar{n} = 100,000$ fotones por segundo. Sin embargo, tenemos la flexibilidad de manipular el número promedio de fotones medidos ajustando el tiempo de detección, al que

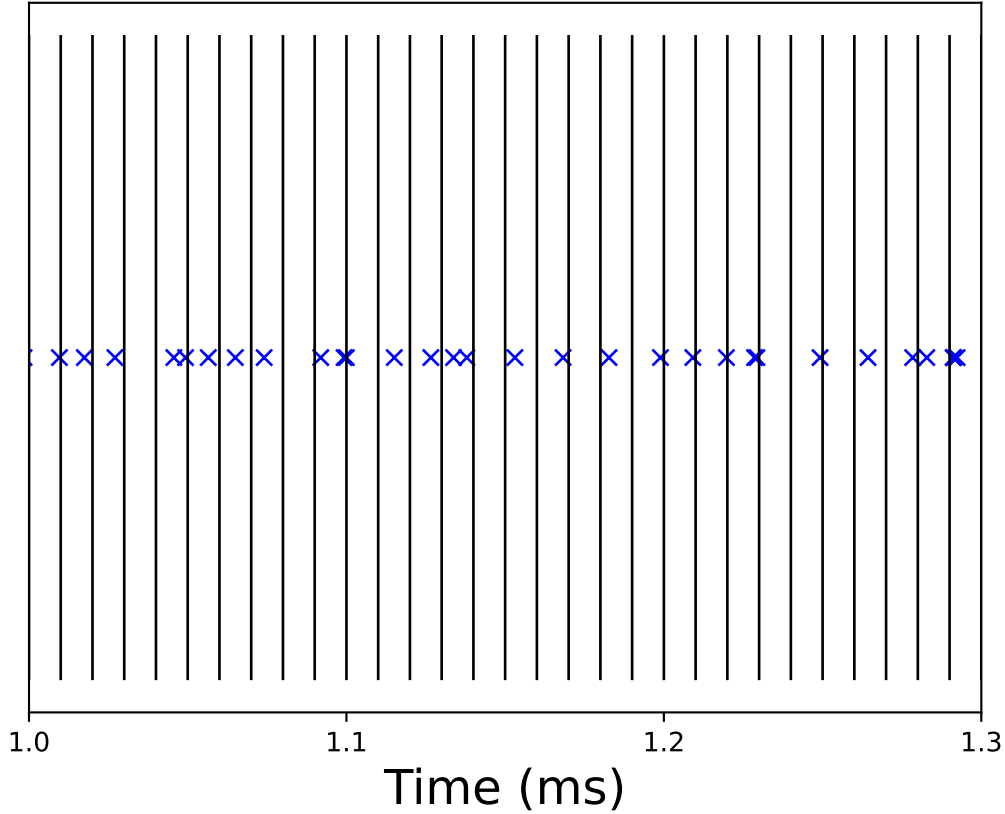


Figura 7.1: Número de fotones en función del tiempo para dos series temporales: la serie de fotones simulados generada a partir de números aleatorios representada por cruces y una serie temporal periódica con intervalos de tiempo promedio de τ_0 representada por líneas.

nos referiremos como τ . Al variar τ , podemos modificar el conteo promedio de fotones por intervalo según se desee. τ_0 fue elegido para que el promedio de conteo de fotones fuera uno. Si apuntamos a un promedio de n fotones por intervalo, usaríamos n veces el tiempo de detección, $\tau = n\tau_0$. Para obtener la distribución de fotones por unidad de intervalo de tiempo, τ_0 , contamos el número de fotones en cada intervalo y luego analizamos la distribución de cuán frecuentemente aparece cada conteo. Desarrollar un programa para lograr esta tarea no es demasiado complejo. Necesitamos crear un bucle de tiempo que avance en pasos de τ_0 , asegurando que dentro de cada paso se use una declaración if para determinar el número de fotones presentes en cada intervalo τ . La Figura (7.2) muestra los resultados de este ejercicio, donde obtuvimos distribuciones de probabilidad de detección de fotones para $P(n) = 0.1, 1, 2, 3, 4, 10$. Aquí queda claro que el promedio de fotones $\bar{n}$ de cada distribución para un tiempo de conteo $n\tau$ es n . Sin embargo, el tipo de distribución cambia para diferentes valores de τ .

En la Figura (7.3) se muestran las distribuciones de probabilidad de fotones para los casos de $\bar{n} = 5, 20$, $\tau = 5\tau_0$ y $\tau = 20\tau_0$, respectivamente. Se observa que la distribución se aproxima a una distribución de Poisson,

$$P^{\bar{n}}(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{n!}, \quad (7.2)$$

para valores pequeños de $\bar{n}$ y a una distribución Gaussiana para valores grandes de $\bar{n}$ (GK04). Esto

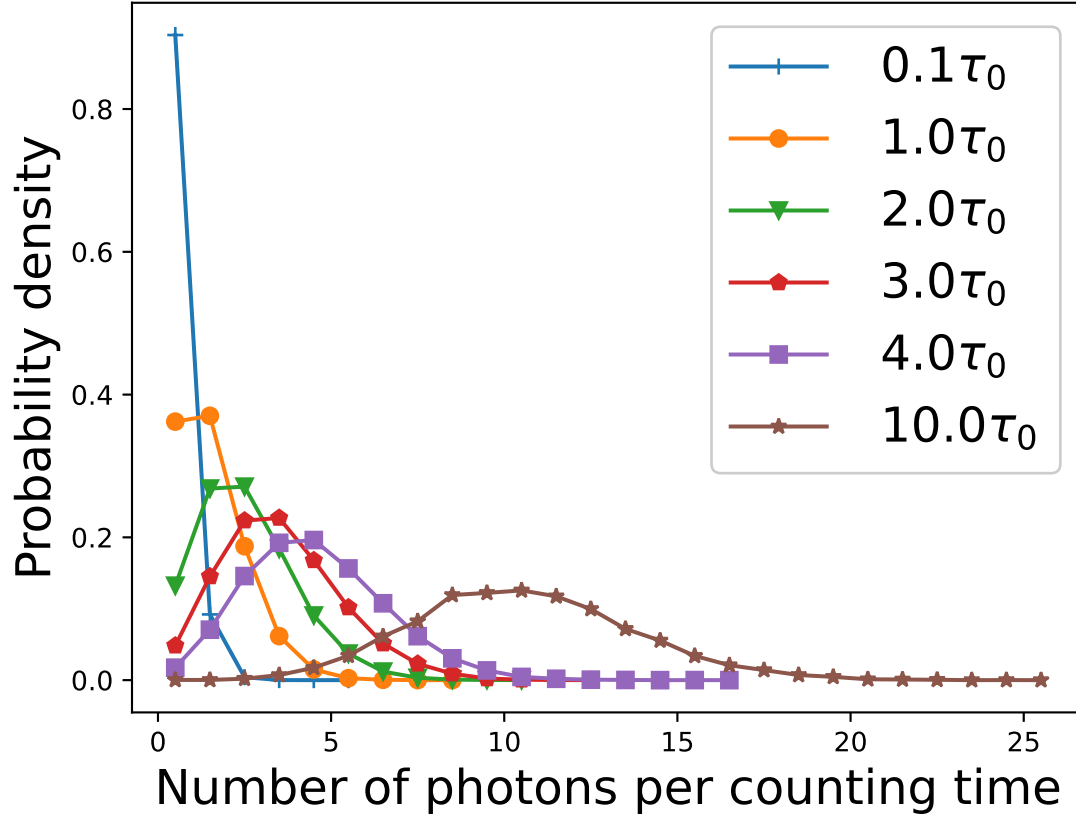


Figura 7.2: Distribuciones de probabilidad del número de fotones para diferentes tiempos de conteo: $\tau = 0.1\tau_0, \tau_0, 2\tau_0, 3\tau_0, 4\tau_0, 10\tau_0$

representa la "firma" de los fotones provenientes de una fuente láser y de eventos que se comportan aleatoriamente.

Distribución cuántica

Ahora que sabemos cómo simular series temporales de fotones que se emiten aleatoriamente desde una fuente, podemos preguntar cómo se ve la función de distribución de probabilidad para una fuente cuántica. Una fuente cuántica ideal se define como una fuente que siempre emite un número fijo de fotones en cada emisión. Por ejemplo, consideremos una fuente cuántica que emite exactamente $N = 100\,000$ fotones en un segundo. Cuando tomamos intervalos de conteo de duración $\tau_0 = 1\text{ s}/N$, $P_1 = 1$, en otras palabras, siempre encontramos un fotón en cada intervalo. En este caso, podemos decir que esta fuente no es aleatoria en sus emisiones. Esto significa que los fotones nunca se acercan lo suficiente entre sí como para tener dos en el intervalo de tiempo τ_0 y al mismo tiempo no están tan lejos como para que no haya ningún fotón en τ_0 . Este efecto se llama anti-agrupamiento de fotones (photon anti-bunching) y es característico de las fuentes cuánticas. Simplemente cambiando el valor de τ_0 a $\tau_0 = 1/N$ en la simulación anterior obtenemos una fuente cuántica ideal. La Figura (7.4) muestra distribuciones de probabilidad para una fuente cuántica con tasas de conteo promedio de $\bar{n} = 1, 2$. Una diferencia clave que podemos notar es que las distribuciones de probabilidad para fotones temporizados aleatoriamente tienen un cierto ancho $\sigma \neq 0$, mientras que las distribuciones cuánticas tienen $\sigma = 0$.

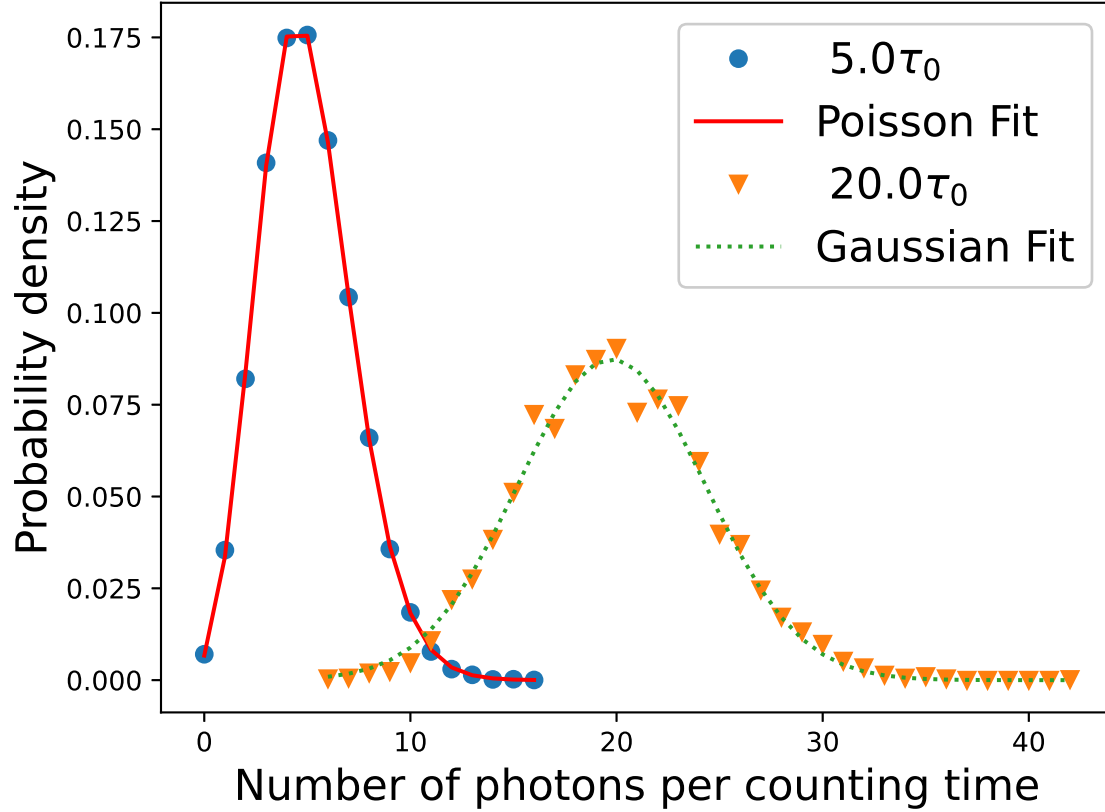


Figura 7.3: Distribución de probabilidad de conteo de fotones simulada para diferentes tiempos de conteo $\tau = 5\tau_0, 0, 20\tau_0$; donde obtuvimos $\bar{n} = 5$ y $n = 20$ fotones en promedio respectivamente.

También es interesante simular una fuente cuántica más realista. En los laboratorios de óptica cuántica es común usar cristales de Beta Borato de Bario (BBO) como fuentes cuánticas. Los cristales de BBO convierten fotones de alta energía en dos fotones de menor energía llamados señal (signal) e idler (compañero o heraldo, dependiendo del texto), a través de un proceso llamado conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC). Los fotones señal e idler producidos en el SPDC se crean en pares, y su generación está inherentemente correlacionada. Los fotones señal e idler pueden entrelazarse, lo que significa que sus estados cuánticos están vinculados y no pueden describirse independientemente. Para la simulación, dividimos un segundo en $sep = 5 \times 10^7$ intervalos de 20 ns, lo que corresponde al tiempo mínimo estándar en la electrónica en los laboratorios de óptica cuántica que realizan este experimento. El número de fotones en 1 s sería N y el número de pares será N_p donde N_p es un orden de magnitud menor que N , lo que corresponde a lo que generalmente se observa experimentalmente. Crearemos aleatoriamente dos series como antes, una para los fotones señal y otra para los idler, donde $P_{ph} = N/sep$. Esto simulará los fotones que no se recogen en pares debido a la geometría del experimento, la alineación y la eficiencia del fotodetector. Adicionalmente crearemos otra serie aleatoria para los pares de fotones con una probabilidad de $P_p = N_p/sep$, y la sumaremos a ambas series. En este caso, graficar el histograma no sería suficiente para determinar si la fuente de luz es cuántica o poissoniana. Para esto podríamos usar la anticorrelación de Grangier.

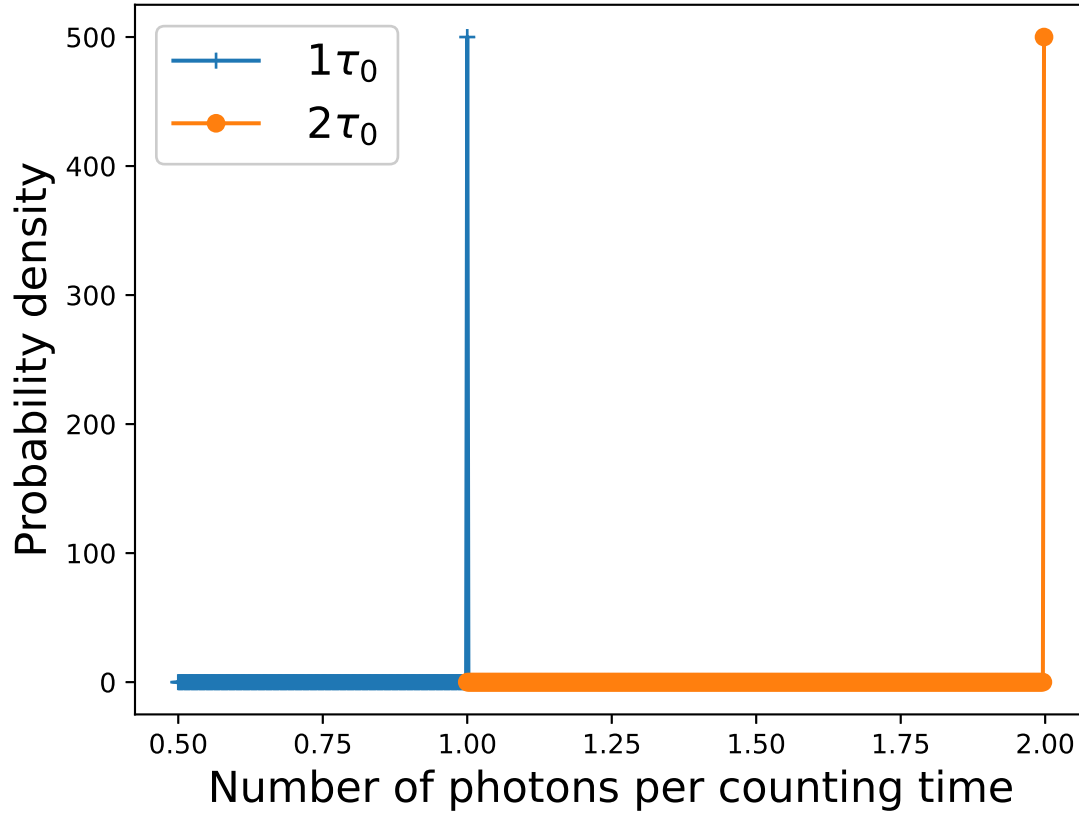


Figura 7.4: Distribuciones de probabilidad del número de fotones para una fuente cuántica en la que los intervalos de conteo son $\tau = \tau_0$ y $\tau = 2\tau_0$ respectivamente.

7.2. La prueba de anticorrelación de Grangier

La prueba de anticorrelación de Grangier [\[GRA86\]](#) es un método utilizado para determinar si los fotones de una fuente de luz están correlacionados, anticorrelacionados o decorrelacionados. En una serie de eventos correlacionados, la ocurrencia de un evento en el tiempo t es seguida por otro evento en un tiempo menor que $t + \tau_0$ indicando predictibilidad y la probabilidad de detectar fotones asociados. Por el contrario, la anticorrelación ocurre cuando ningún otro evento sucede dentro del intervalo de tiempo $t + \tau_0$ después de un evento en la serie. Las series temporales decorrelacionadas se refieren a aquellas que siguen una distribución de Poisson o una combinación de igual peso de correlación y anticorrelación.

Una serie de eventos correlacionados tiene la propiedad de que para cualquier evento en el tiempo t , ocurre otro evento en un tiempo menor que $t + \tau_0$. Esta correlación tiene una cierta predictibilidad, porque significa que si se detecta un fotón en esta serie, también es probable que se detecte otro fotón asociado con él. La anticorrelación tiene una definición similar, pero con el significado opuesto: si cualquier evento en una serie ocurre en el tiempo t , entonces ningún otro evento ocurre dentro del intervalo de tiempo $t + \tau_0$. Los eventos en una serie temporal decorrelacionada son aquellos que siguen una distribución de Poisson, o simplemente una combinación con igual peso de correlación y anticorrelación. Una forma de determinar si los fotones de una fuente de luz están correlacionados, anticorrelacionados o decorrelacionados es a través del experimento de anticorrelación de Grangier. Este experimento consiste en dirigir el haz de luz hacia un divisor de haz (beam splitter). A la salida del divisor de haz, se colocan dos detectores para

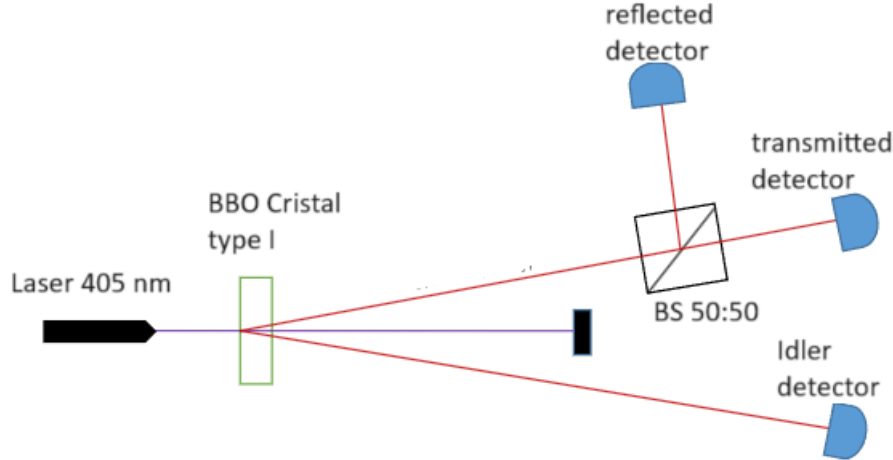


Figura 7.5: Diagrama del experimento moderno de Grangier.

detectar fotones que emergen del divisor bajo condiciones de transmisión y/o reflexión. La esencia del experimento de Grangier es observar el comportamiento de fotones individuales que entran al divisor de haz uno por uno, o bien separados por un tiempo mayor o igual a $t \geq \tau_0$. El experimento busca determinar si la estadística de detección muestra coincidencias entre el fotón idler y los eventos en los detectores del divisor de haz (correlación), si los dos detectores del divisor nunca registran simultáneamente un evento para un mismo suceso disparado por el idler (anticorrelación), o si las coincidencias no siguen un patrón definido (decorrelación).

De esta forma, la correlación no implica que un mismo fotón llegue a ambos detectores simultáneamente, sino que la detección del fotón idler sirve como referencia temporal para evaluar la coincidencia con los eventos registrados en los detectores de señal.

Para analizar las estadísticas de la fuente cuántica realista como la simulada en la sección anterior; el haz señal se dirige hacia un divisor de haz, mientras que el haz idler se envía directamente al detector idler (ver Figura (7.5)). En esta configuración, la llegada del fotón idler establece la posibilidad de una correlación triple ya que se produce prácticamente simultáneamente con el fotón señal dentro del cristal. La diferencia de tiempo entre ellos es de aproximadamente 120 ns [Car+12], lo que indica una condición correlacionada para los pares de fotones que salen del cristal. La presencia de fotones transmitidos, reflejados o ambos puede determinarse a través del fotón idler y los detectores respectivos dentro de un tiempo de correlación τ_0 . Los tiempos de correlación típicos en experimentos de laboratorio de este tipo, donde la intensidad de la fuente cuántica detectada es aproximadamente una cuarta parte de la intensidad en los detectores individuales de señal e idler, son del orden de microsegundos. Un experimento bien alineado puede producir aproximadamente 10^5 pares de fotones en unas seis horas, siendo suficiente un tiempo de correlación de $\tau = 5 \times 10^{-9}$ s. Aunque este tiempo es mayor que 120 fs, es mucho menor que τ_0 . Debido a la naturaleza estadística de este experimento, se deben tomar múltiples muestras. Se puede realizar un experimento con 10^5 fotones en un segundo y repetirlo para promediar los resultados. Las estadísticas de correlación se analizan típicamente usando la función de correlación de segundo orden [Bec07, GK04]. En la simulación del experimento de Grangier, se consideran las correlaciones con y sin los fotones idler. Las funciones de correlación de segundo orden pueden expresarse de la siguiente manera:

$$g_{2D}^{(2)}(\tau_0) \approx \frac{C_{TR}}{N_T N_R} \frac{T}{\tau_0} \quad (7.3)$$

$$g_{3D}^{(2)}(\tau_0) \approx \frac{C_{TRi}}{C_{Ti} C_{Ri}} N_i \quad (7.4)$$

Estas expresiones satisfacen la igualdad para $\tau_0 = 0$, pero en experimentos prácticos, se utilizan correlacionadores electrónicos, que no pueden hacer comparaciones en tiempos cero. La función de correlación [7.3](#) no considera la correlación con los fotones idler (i), y por lo tanto las detecciones conjuntas (coincidencias, C) son solo entre los dos detectores. La presencia del fotón idler introduce una distinción en la notación. Sin embargo, cuando los haces señal e idler se analizan por separado, consisten en series de fotones con secuencias de tiempo aleatorias. En experimentos donde los fotones se registran directamente desde el cristal al detector, no es posible localizar todos los pares simultáneamente. De un flujo de aproximadamente 10^5 fotones por segundo, solo se registran 5×10^3 pares. Estos pares de fotones son los que mostrarán la naturaleza cuántica de la luz. Cuando una serie aleatoria cruza un divisor de haz 50 : 50 produce otras dos series aleatorias, cada una con aproximadamente la mitad del número de fotones que la original. Cada una de las dos series resultantes, llamadas $st(t)$ y $sr(t)$ (transmitida y reflejada respectivamente), tiene una probabilidad de $\frac{10^5}{5 \times 10^7}$ de tener un fotón en cada intervalo de 20 ns. Además de estas dos series, se introduce una serie de coincidencias $sc(t)$, con una probabilidad asociada de $\frac{5 \times 10^3}{5 \times 10^7}$. Para cada fotón en la serie $sc(t)$, se realiza una operación de decisión cuando cruza el divisor de haz 50 : 50. Se genera un número aleatorio r_{bs} y si $r_{bs} \geq 0.5$, el valor de $sc(t)$ se suma a $st(t)$ para el mismo tiempo t . De lo contrario, se suma a la serie $sr(t)$. Este proceso construye los dos haces, reflejado y transmitido, que llegarán a los detectores. El haz idler es una copia de la serie $sc(t)$.

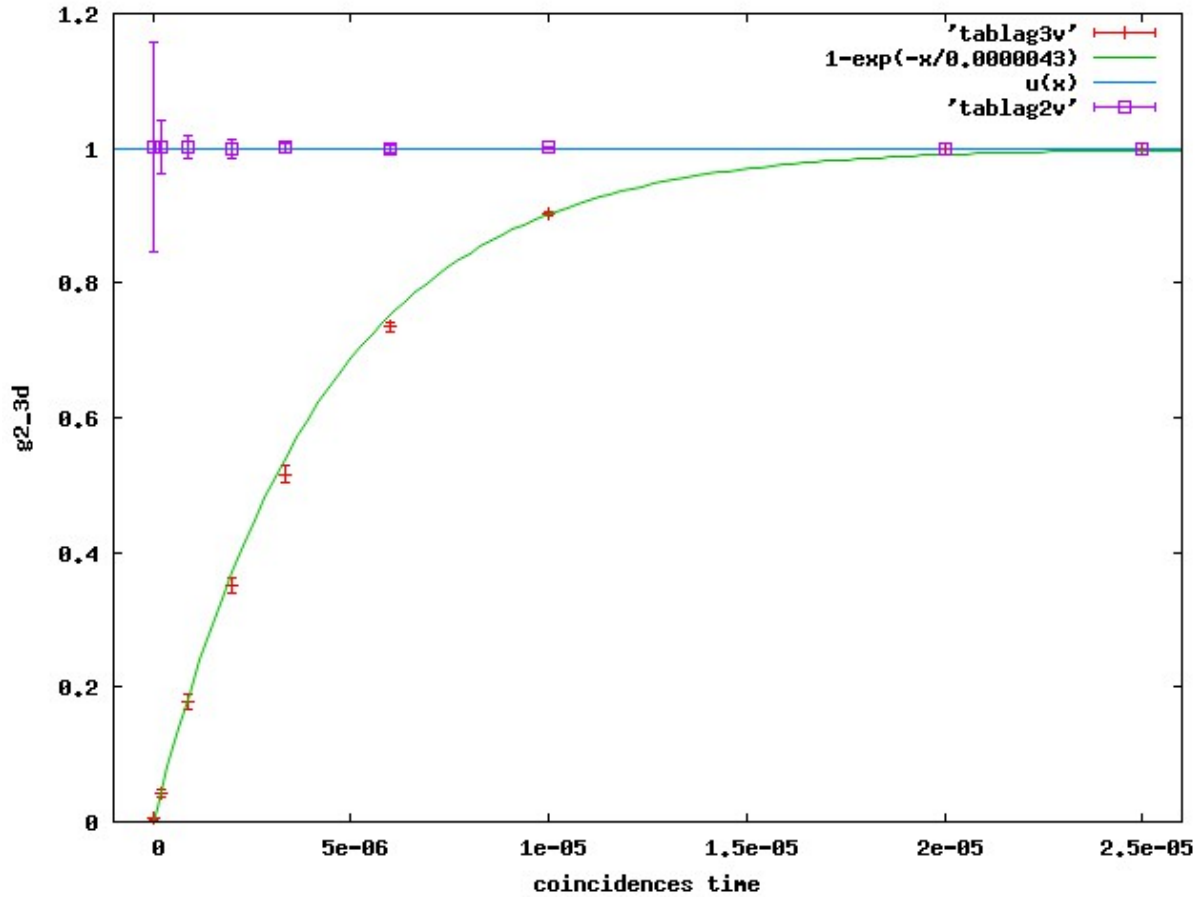


Figura 7.6: Simulación del comportamiento de la función de correlación de segundo orden, casos $g_{2D}^2(0)$ (datos morados) y $g_{3D}^2(0)$ (datos rojos) en función de la ventana de coincidencia de fotones.

En la Figura [7.6](#), se muestran las dos curvas correspondientes a las funciones de correlación 3 y 4.

Técnicamente, estas relaciones se definen para $t = 0$. Para simular el efecto de aumentar proporcionalmente el número de fotones aleatorios, aumentando por lo tanto el número de fotones que realizan coincidencias en la misma proporción, realizamos un ejercicio que consistió en aumentar el intervalo de tiempo de detección en múltiplos de 20 ns. Para el tiempo más corto en este ejercicio, observamos los siguientes resultados: $g_{2D}^2(20) = 1.14$ y $g_{3D}^2(20) = 0.005$. La diferencia entre estos dos resultados se debe únicamente al hecho de que el cálculo para el caso de dos detectores (ecuación (7.3)) no tuvo en cuenta el haz idler. Cuando aumentamos el tiempo de comparación para medir las probabilidades de detección conjunta, la función de correlación sin la señal idler se estabiliza rápidamente en $g_{2D}^2(20) = 1.0$. En contraste, la función de correlación que usa la señal idler comienza cerca de cero y aumenta hasta alcanzar $g_{3D}^2(20) = 1.0$, después de un tiempo aproximado de 2×10^{-5} s. Esta observación nos lleva a concluir que cuando no se utiliza la serie de la señal idler, los fotones exhiben un comportamiento clásico, ondulatorio, en sus propiedades de correlación. Sin embargo, cuando se incorpora la serie de la señal idler, es posible rastrear la trayectoria de cada "fotón" después del divisor de haz, lo que sugiere un comportamiento corpuscular. Se suele preguntar si es posible encontrar un comportamiento cuántico en series aleatorias independientes usando la ecuación (7.3). En otras palabras, si el resultado obtenido sería diferente para diferentes tipos de fuentes de luz. Haciendo este ejercicio donde se crean tres series aleatorias independientes para $sc(t)$, $sr(t)$ y $st(t)$ no obtenemos una correlación clara entre ellas como se muestra en la Figura (7.7).

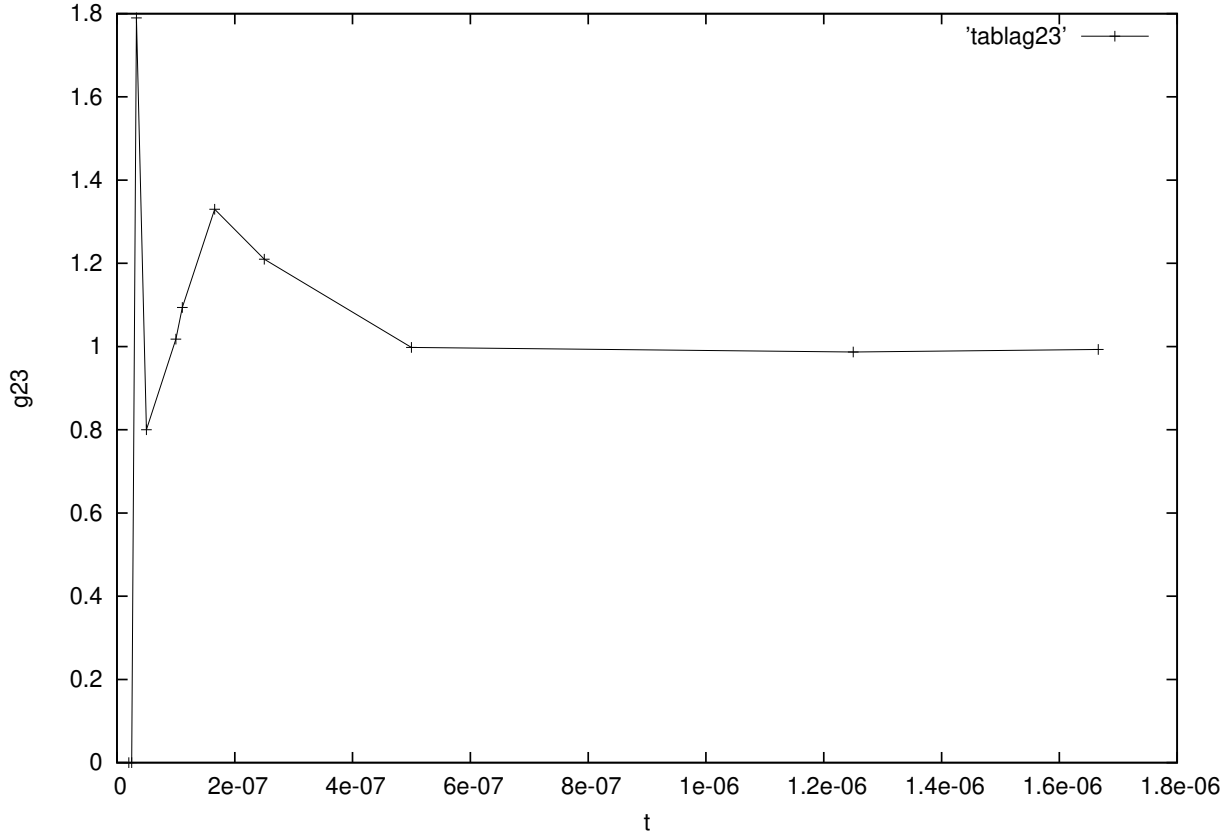


Figura 7.7: Simulación del comportamiento de la función de correlación de segundo orden $g_{3D}^2(0)$ en función del número de fotones para tres series independientes de fotones, una para cada detector.

7.3. Experimento cuántico de la doble rendija de Young

El experimento de la doble rendija de Young se ha convertido en el experimento ideal para explicar los sorprendentes efectos de la mecánica cuántica. Una vez que se ha demostrado que cuando enviamos fotones uno por uno a un divisor de haz, siempre existe una anticorrelación, como ya hemos visto en las simulaciones de la sección anterior. Hemos aprendido que cada fotón solo puede localizarse en el detector transmitido o en el detector reflejado. Por lo tanto, podemos pensar de manera similar que si pudiéramos poner un detector a la salida de cada rendija, entonces solo uno de los dos detectores detectaría el fotón que logró cruzar la doble rendija. Sin embargo, si elegimos no saber por cuál rendija pasa el fotón, entonces su estado será una combinación lineal de las dos posibilidades.

$$|\psi\rangle = C_1|1\rangle_1 + C_2|1\rangle_2 \quad (7.5)$$

Debe notarse que $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$, lo que garantiza que si el fotón pasó a través de la doble rendija, debería ser detectado en algún lugar de la pantalla. Las Figuras (7.9) y (7.10) muestran el resultado de la simulación del experimento de la doble rendija de Young.

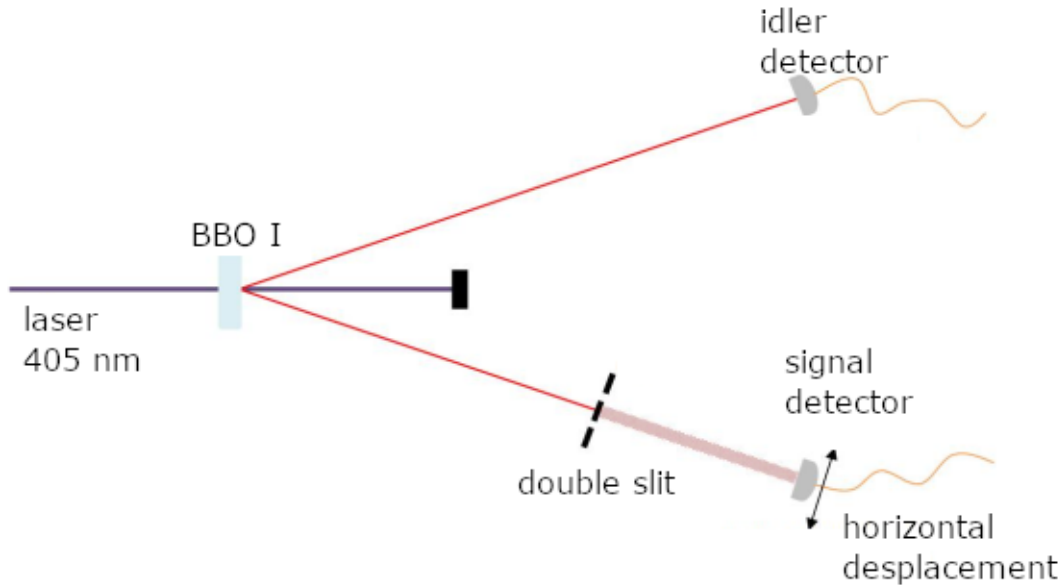


Figura 7.8: Se producen pares de fotones a través de un cristal no lineal como el objetivo de la simulación anterior. Los fotones señal se dirigen hacia una doble rendija, mientras que los fotones idler se dirigen directamente al detector idler. Cada fotón que logra pasar a través de la doble rendija y es detectado debe estar en coincidencia temporal con el fotón idler para asegurar su estado de fotón individual.

Dado que cada haz de la fuente, señal e idler, tiene estadísticas Poissonianas independientes, se requiere coincidencia temporal entre ellos para validar la presencia de un solo fotón en el detector señal después de pasar por la doble rendija. Las coincidencias entre los fotones que pasan por la doble rendija y sus respectivos fotones idler garantizan que la información adquirida de cada fotón que pasó por la doble rendija proviene solo de ese fotón y no de otro. En otras palabras, la probabilidad de detectar un fotón en algún lugar del espacio depende solo de la interferencia entre sus componentes cuánticos relativos al estado de cruzar cada rendija. Por lo tanto, si aparece un patrón de interferencia, sería el del propio fotón. Esto es evidentemente un efecto de no localidad. Nuestra simulación tiene varias simplificaciones. La principal

tiene que ver con la simulación de una fuente de fotones individuales. La primera de ellas es que, para esta simulación, no será necesario aumentar los intervalos de tiempo de conteo. Analizaremos las coincidencias de los fotones señal que pasan por la doble rendija con sus respectivos fotones idler solo en el caso en que $g^2(0) \approx 0$, que representa el caso más simple en la simulación de anticorrelación. Antes de explicar la segunda simplificación, es necesario explicar matemáticamente los detalles del truco que realizan los fotones en el laboratorio. Si hay una pantalla después de la doble rendija a una distancia $\mathbf{r}$, entonces nuestros fotones de $810nm$ pueden seguir la receta para el comportamiento de sus dos componentes cuánticos [Jac+05](#):

$$|1\rangle \rightarrow \frac{f(r)}{r} (e^{i(kr_1)}|1\rangle_1 + e^{i(kr_2)}|1\rangle_2) \quad (7.6)$$

donde $f(r) = i \left[\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0(4\pi R)} \right]^{1/2}$, R es el radio del volumen de normalización, r_1 y r_2 son las distancias desde las rendijas hasta la pantalla. $r = |\mathbf{r}|$ es el resultado de la aproximación $r_1 \approx r_2 = r$, k es el número de onda. Es posible obtener fotones individuales con anticorrelación excitando un material con un láser pulsado. Aunque en este experimento se utiliza un biprisma de Fresnel en lugar de una doble rendija, el resultado es muy similar.

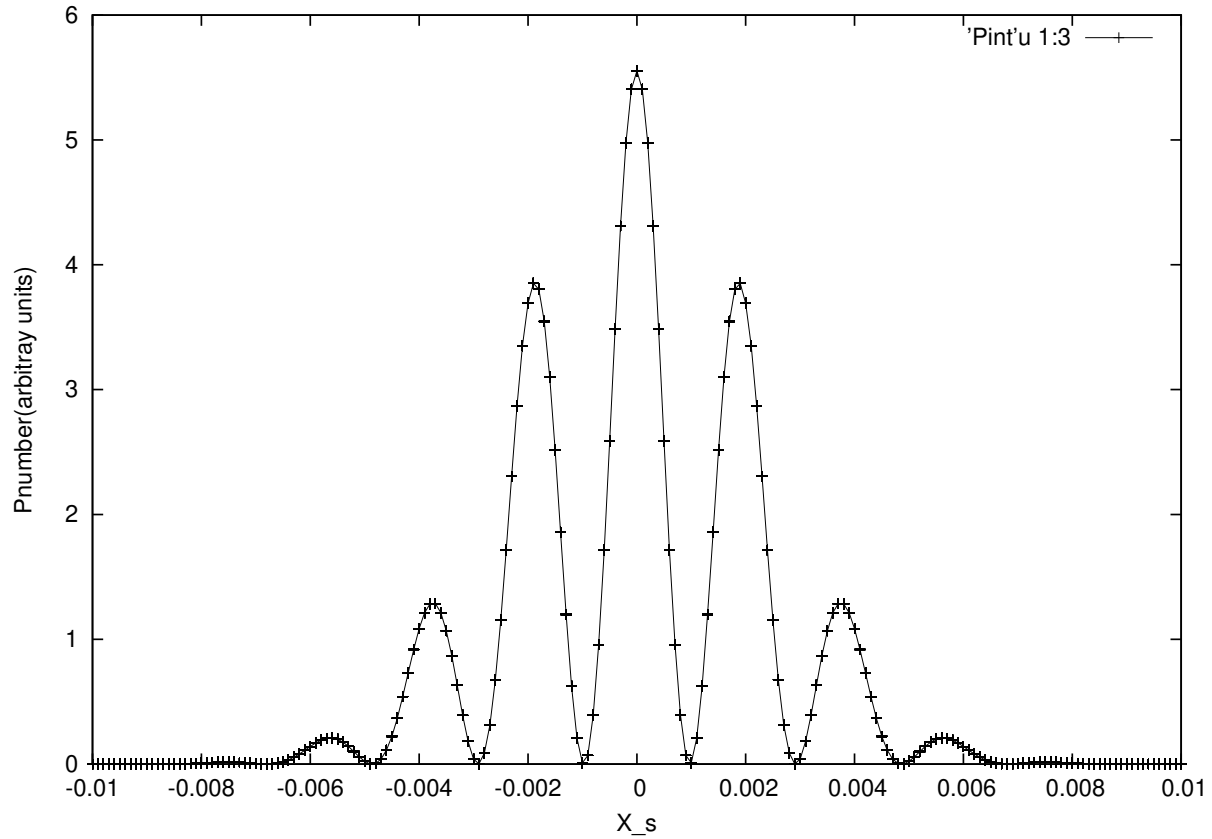


Figura 7.9: Simulación del comportamiento de fotones individuales cruzando una doble rendija.

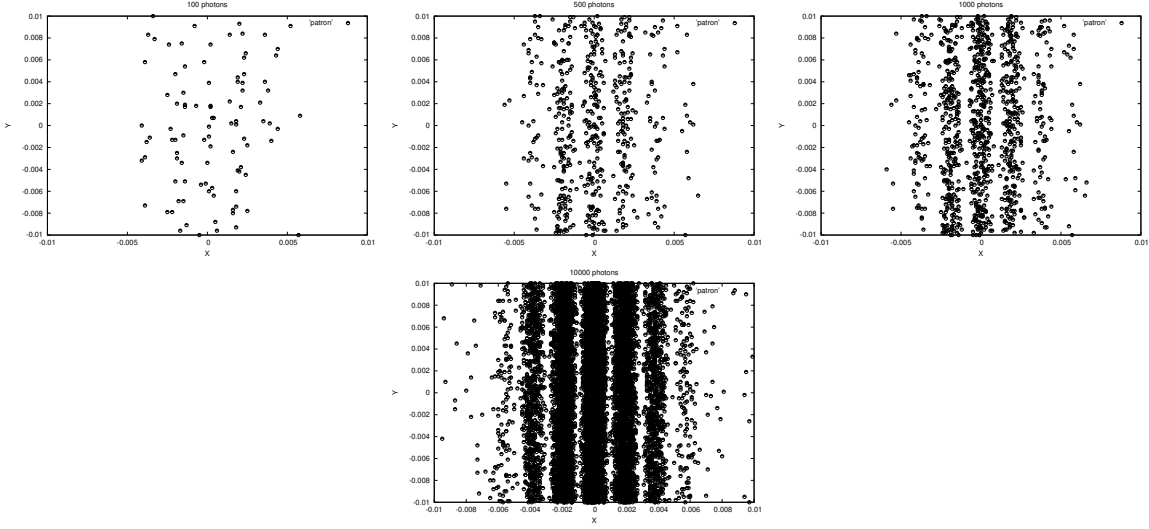


Figura 7.10: Simulación de la detección de fotones individuales cruzando una doble rendija en una pantalla para diferentes números de fotones: 100, 500, 1000 y 10,000.

7.4. Simulación de la prueba experimental de no localidad cuántica

El experimento de prueba de no localidad cuántica es una de las experiencias más interesantes para un estudiante en un curso de física moderna, a pesar de que, en condiciones modernas, los fotones no pueden visualizarse porque su color está en el rango del infrarrojo cercano y la intensidad es tan baja que todo el experimento debe realizarse a través de una computadora. Para simular este experimento, seguiremos el trabajo de Dehlinger y Mitchell [DM02], quienes brindan una explicación muy clara de la teoría de variables ocultas y la prueba de desigualdad realizada en un laboratorio de estudiantes de pregrado. Para llevar a cabo este experimento, se requieren dos cristales no lineales tipo I (BBO), orientados ortogonalmente en la misma montura. Se utiliza un láser violeta de 405 nm y 100 mW. El estado que se logra es el siguiente:

$$|\Phi\rangle^{SPDC} = \cos(\theta)|H\rangle_1|H\rangle_2 + e^{i\phi}\sin(\theta)|V\rangle_1|V\rangle_2 \quad (7.7)$$

Aquí, los coeficientes $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ representan las amplitudes de probabilidad de que los dos fotones fueran producidos en los estados $|H\rangle_1|H\rangle_2$ y $|V\rangle_1|V\rangle_2$ respectivamente. Está claro que para obtener un estado “entrelazado”, ambos estados deben tener la misma probabilidad, por lo que θ debe ser un múltiplo de $\pi/4$. El proceso se llama SPDC porque es el estado tal como sale del cristal. Lleva una fase $e^{i\phi}$ heredada del grosor del cristal birrefringente. Dado que el par $|H\rangle_1|H\rangle_2$ se produce dentro de un cristal y $|V\rangle_1|V\rangle_2$ se produce en el otro cristal, ambos pares estarán desfasados, porque ambos cristales están separados espacialmente y porque ambos tienen un cierto grosor: $100\mu m$. Esta diferencia de fase puede ilustrarse pensando que los fotones de una polarización están adelantados respecto a los de la otra polarización. Para compensar esta diferencia de fase, usualmente bombeamos el cristal no lineal con el láser violeta en un estado diagonal. Luego, con la ayuda de un compensador de Babinet-Soleil, retrasamos o adelantamos la fase de uno de los dos componentes horizontales o verticales del láser de bombeo. De esta manera, pre-compensamos la fase $e^{i\phi}$.

Simulación de estados de Bell

En el laboratorio, es bastante desafiante alinear la configuración para construir el estado $|\Phi\rangle^{SPDC}$ que sea lo más cercano posible al estado $|\Phi\rangle^+$.

$$|\Phi\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 + |V\rangle_1|V\rangle_2) \quad (7.8)$$

Esto requiere, en primer lugar, que en la ecuación (7.7), $\phi \approx 0$ y $\theta \approx \pi/4$. Estos dos parámetros están relacionados con el cristal no lineal. Cuanto más gruesos son los cristales, mayor es la diferencia de fase entre los fotones verticales y horizontales. La Figura (7.11) muestra que si $\phi > \pi/3$, el parámetro de Bell será menor o igual a 2, por lo que no será posible observar los efectos de la no localidad en los pares de fotones. Por otro lado, el ángulo θ debe ser lo más cercano posible a $\pi/4$, para que haya la misma probabilidad de producir pares de fotones horizontales y verticales. Si usamos una montura graduada con una graduación mínima de dos grados, ese será nuestro error sistemático en las proporciones de polarización. Si además somos capaces de alinear la polarización del láser con respecto a la orientación seleccionada del cristal, entonces tenemos otra fuente de incertidumbre en la orientación de la polarización del láser, digamos tres grados. Otra fuente de incertidumbre es la orientación de los polarizadores en los caminos 1 y 2. Si las monturas de los polarizadores, nuevamente, tienen una graduación mínima de dos grados, entonces nuestro error sistemático en la orientación del polarizador será de dos grados. En resumen, la construcción del estado $|\Phi\rangle^{SPDC}$ que sea lo más cercano posible al estado $|\Phi\rangle^+$ es un desafío significativo en el laboratorio, debido a la presencia de incertidumbres sistemáticas y estadísticas.

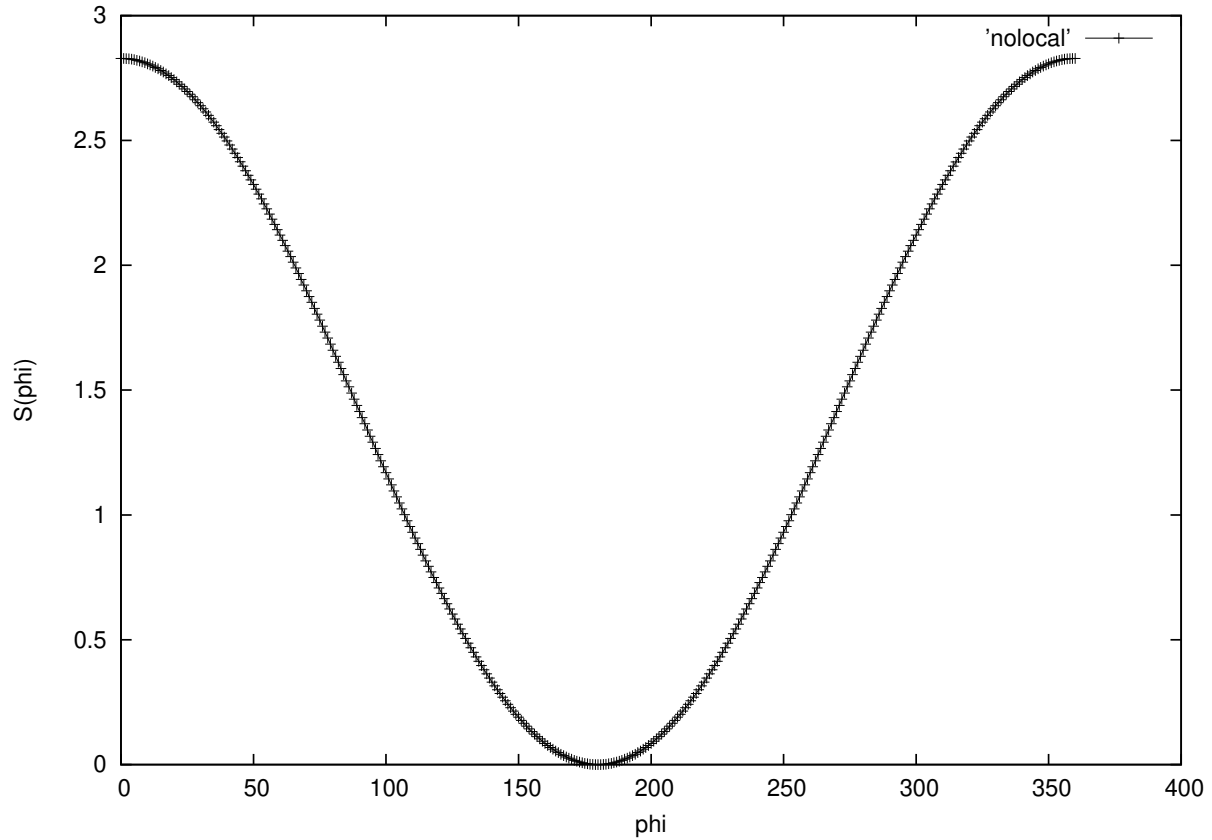


Figura 7.11: Comportamiento del parámetro de Bell S en función del ángulo de diferencia de fase entre los componentes cuánticos de diferente polarización. Los efectos de no localidad comienzan a observarse por encima de $S = 2.0$.

La Figura (7.12) muestra el comportamiento del parámetro EB en función de la diferencia de fase $e^{i\phi}$ dentro del cristal. El experimento generalmente muestra que, mientras no se utilicen cristales compensadores,

el valor de $EB \approx 1/2$, lo que corresponde al límite local. El hecho de que este valor supere $1/2$ implica que el número de pares que entran en fase aumenta a medida que aumenta la proximidad a $\phi \rightarrow \pi$.

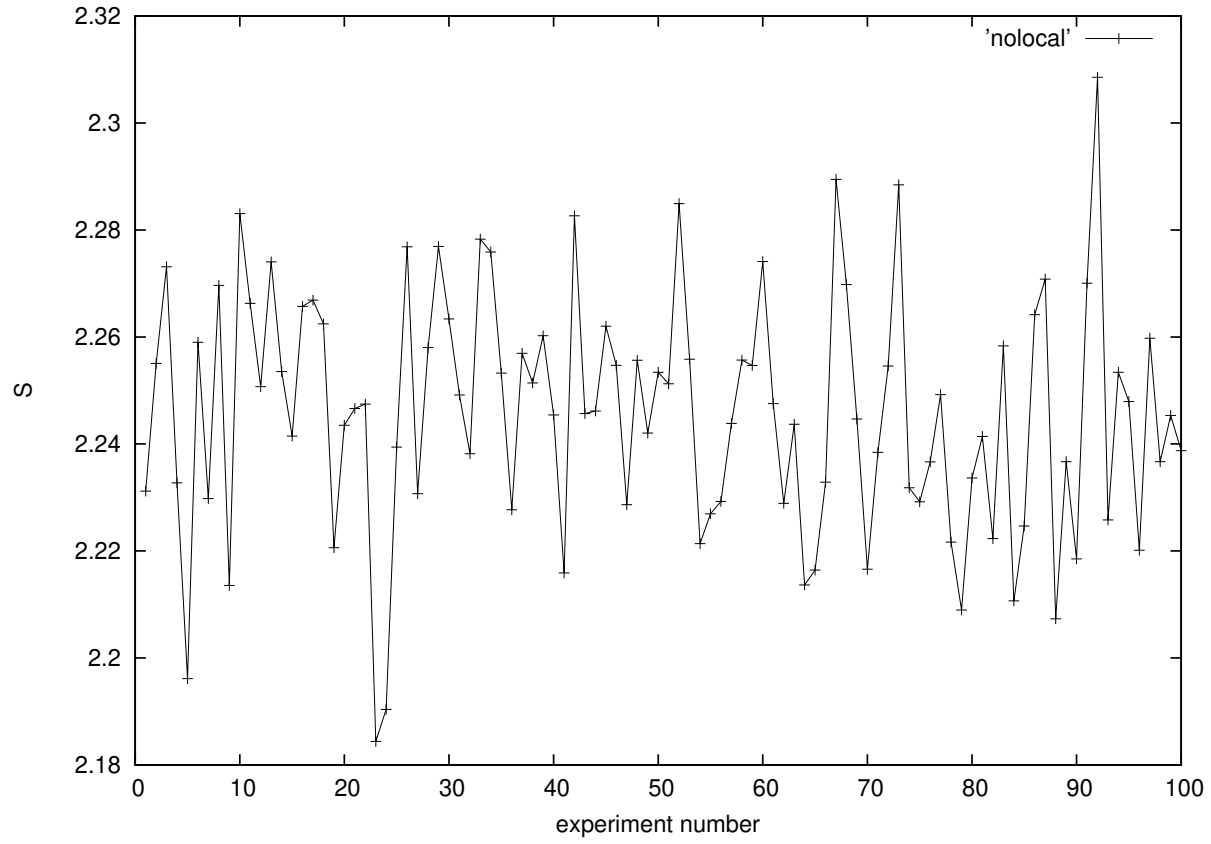


Figura 7.12: EB en función de la diferencia de fase $e^{i\phi}$ para 100 experimentos de no localidad simulados para el estado $|\Phi\rangle^+$. El valor promedio es $S = 2.25 \pm 0.024$.

CAPÍTULO 8

Conclusiones

El desarrollo de esta tesis se centró en el estudio de los fundamentos de la óptica cuántica y su aplicación a la comprensión y simulación de fenómenos cuánticos, partiendo desde **primeros principios** con el objetivo de construir una formulación más clara y simplificada de los procesos físicos subyacentes. Este enfoque permitió enlazar de manera natural la teoría con herramientas prácticas, orientadas tanto a la enseñanza como a la exploración independiente.

En las primeras secciones, se abordó la cuantización del campo electromagnético en su forma unimodal, estableciendo un marco riguroso que conecta la descripción clásica con la cuántica. A partir de este desarrollo, se comprendió cómo las fluctuaciones del vacío, la energía discreta y las propiedades ondulatorias de los fotones emergen de manera coherente de la estructura del campo. El tratamiento desde primeros principios permitió derivar resultados fundamentales sin depender de postulados arbitrarios, favoreciendo una visión más intuitiva y accesible de los fenómenos cuánticos.

Posteriormente, se estudiaron fenómenos de **interferencia cuántica** mediante el análisis de divisores de haz e interferómetros como los de Mach-Zehnder y Hong-Ou-Mandel. Estas configuraciones experimentales permitieron ilustrar de manera clara la superposición cuántica y la indistinguibilidad de los fotones, mostrando cómo estos conceptos se manifiestan en resultados observables como la interferencia constructiva o destructiva, pilares esenciales en la óptica cuántica experimental.

En la parte final del desarrollo teórico, se introdujo el **teorema de la no clonación** como un *ejemplo práctico* para ilustrar las limitaciones inherentes de la mecánica cuántica y su relación con la manipulación de la información. Más que como un tema de estudio aislado, este teorema se empleó para mostrar cómo las restricciones fundamentales del formalismo cuántico pueden integrarse en un esquema conceptual simplificado, útil para comprender los límites de la replicación de estados y la transmisión de información cuántica.

Finalmente, el **capítulo de simulaciones** complementó el trabajo teórico al ofrecer una herramienta práctica para reproducir los fenómenos descritos a lo largo de la tesis. Este capítulo constituye una aportación clave, ya que **permite realizar simulaciones computacionales de óptica cuántica sin necesidad de contar con un laboratorio físico**. Las simulaciones desarrolladas demuestran que, mediante la implementación numérica de los modelos teóricos, es posible observar y analizar el comportamiento de fotones, interferencias y correlaciones cuánticas con alta fidelidad. De este modo, el trabajo no solo refuerza los conceptos teóricos, sino que también democratiza el acceso al estudio de la óptica cuántica, facilitando su exploración desde entornos educativos y de investigación con recursos limitados.

En conjunto, esta tesis cumple su propósito de **presentar una visión clara, estructurada y didáctica** de la óptica cuántica moderna, construida desde fundamentos hasta llegar a una implementación práctica accesible. El resultado es una obra que combina **rigor conceptual con aplicabilidad computacional**, demostrando que la física cuántica puede estudiarse, comprenderse y simularse incluso fuera del laboratorio, promoviendo un aprendizaje autónomo, reproducible y orientado al desarrollo de nuevas aplicaciones en ingeniería, computación e información cuánticas.

Bibliografía

- [Bec07] Beck, M. . «Comparing measurements of single-photon and two-photon interference fringes». Inglés. En: *Journal of the Optical Society of America B* vol. 24 (2007), págs. 2972-2978.
- [Car+12] Carvioto-Lagos, J. . et al. «The Hong–Ou–Mandel interferometer in the undergraduate laboratory». Inglés. En: *European Journal of Physics* vol. 33, n.º 6 (2012), pág. 1843.
- [CDL19] Cohen-Tannoudji, C. ., Diu, B. . y Laloë, F. . *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Inglés americano. 2.ª ed. Wiley-VCH, 4 de dic. de 2019.
- [DM02] Dehlinger, D. . y Mitchell, M. . W. . «Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory». Inglés. En: *American Journal of Physics* vol. 70, n.º 9 (2002), págs. 903-910.
- [FLS11] Feynman, R. . P. ., Leighton, R. . B. . y Sands, M. . *The Feynman Lectures on Physics: The Definitive Edition, Volume 3*. Inglés. definitiva. San Francisco: Addison-Wesley, 2011.
- [GK04] Gerry, C. . y Knight, P. . *Introductory Quantum Optics*. Inglés americano. 1.ª ed. Cambridge University Press, 2004.
- [GRA86] Grangier, P. ., Roger, G. . y Aspect, A. . «Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: a new light on single-photon interferences». Inglés. En: *Europhysics Letters (EPL)* vol. 1 (1986), pág. 173.
- [Gri17] Griffiths, D. . J. . *Introduction to Electrodynamics*. 4.ª ed. Cambridge University Press, jul. de 2017.
- [HOM87] Hong, C. K., Ou, Z. Y. y Mandel, L. «Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference». En: *Phys. Rev. Lett.* vol. 59 (18 nov. de 1987), págs. 2044-2046.
- [Jac+05] Jacques, V. . et al. «Single-photon wavefront-splitting interference». Inglés. En: *European Physical Journal D* vol. 35 (2005), págs. 561-565.
- [SN20] Sakurai, J. . J. . y Napolitano, J. . *Modern Quantum Mechanics*. Inglés americano. 3.ª ed. Cambridge University Press, 8 de oct. de 2020.
- [Spi67] Spiegel, M. . R. . *Theoretical Mechanics*. Inglés. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [WZ82] Wootters, W. . K. . y Zurek, W. . H. . «A single quantum cannot be cloned». Inglés. En: *Nature* vol. 299 (1982), págs. 802-803.
- [Zet09] Zettili, N. . *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Inglés americano. 2.ª ed. Wiley, 24 de feb. de 2009.