



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Análisis numérico de un flujo electroosmótico
que circula en un microcanal rectangular
considerando a un fluido no newtoniano
mediante el modelo de Carreau**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Josué Manuel Rodríguez Rodríguez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Guillermo Alberto Sánchez Lozano



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado ANALISIS NUMERICO DE UN FLUJO ELECTROOSMOTICO QUE CIRCULA EN UN MICROCANAL RECTANGULAR CONSIDERANDO A UN FLUIDO NO NEWTONIANO MEDIANTE EL MODELO DE CARREAU que presenté para obtener el título de INGENIERO MECÁNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

JOSUE MANUEL RODRIGUEZ RODRIGUEZ
Número de cuenta: 305071679

Contenido

Agradecimientos.....	3
Nomenclatura	4
Resumen.....	8
Capítulo 1 Introducción.....	9
Introducción.....	9
Microfluídica.....	10
Antecedentes.....	11
Justificación.....	18
Objetivo.....	19
Capítulo 2 Formulación del problema	20
Modelo matemático	20
Ecuaciones.....	21
Condiciones de frontera	24
Análisis de orden de magnitud	25
Modelo matemático adimensional	27
Condiciones de frontera adimensionales	29
Capítulo 3. Solución numérica del modelo físico del problema.....	31
FreeFem++	31
Método de elemento finito.....	31
Formulación variacional.....	34
Código.....	38
Capítulo 4 Análisis de resultados	46
Potencial eléctrico aplicado.....	46
Potencial eléctrico inducido.....	49
Presión.....	52
Velocidad longitudinal	54
Caudal	65

Conclusiones	67
Referencias	68

Agradecimientos

Dedico esta tesis a mi madre la Sra. Angela Guadalupe Rodríguez Cortés por enseñarme buenos valores, a optar siempre por el camino del bien y por ser un apoyo incondicional.

Expreso mi gratitud y reconocimiento a mi tutor de tesis, el Dr. Guillermo Alberto Sánchez Lozano por haberme dado la oportunidad de trabajar en la presente tesis y haberme guiado para la realización de esta.

A su vez, agradezco y reconozco al Dr. Edgar Ali Ramos Gómez por haberme transmitido enseñanzas y conocimiento formativo.

Dedico este trabajo a la Universidad Nacional Autónoma de México por ser una noble institución de la cual siento un enorme orgullo al formar parte de su comunidad. A su vez,

agradezco a la Facultad de Ingeniería y a la DIMEI por haberme formado profesionalmente.

Menciones especiales para Daniela Osorio Orozco por estar presente, por su apoyo, y a la Mtra. Ana Karen Zacarias, amiga y compañera de clases. A familiares y amigos. Infinitas gracias.

Nomenclatura

Símbolo	Significado	Unidades
a	Función de la parte bilineal	-
$\vec{B}$	Campo magnético	$[T]$
b	Parámetro empírico que mide la dependencia de la viscosidad con la temperatura	Adimensional
$\bar{c}$	Relación entre potenciales eléctricos característicos	Adimensional
ds	Diferencial de superficie	-
e	Carga elemental	$[C]$
E_0	Campo eléctrico aplicado	$\left[\frac{V}{m}\right]$
E_x	Campo eléctrico en dirección longitudinal	$\left[\frac{V}{m}\right]$
E_y	Campo eléctrico en dirección transversal	$\left[\frac{V}{m}\right]$
$\vec{F}_L$	Fuerza de Lorentz	$[N]$
f	Una variable arbitraria	-
f_{aux}	Una variable auxiliar de la variable arbitraria a resolver	-
g	Función lineal	-
$\{G\}$	Vector columna determinado por el efecto de cualquier influencia en los nodos	-
$\{G'\}$	Ensamble del vector $\{G\}$	-
$\{\bar{G}'\}$	Vector $\{G'\}$ con condiciones de frontera	-
H	Altura	$[m]$
k_B	Constante de Boltzmann	$\left[\frac{J}{K}\right]$
l	Función que representa la parte lineal	-
L	Longitud	$[m]$
n	Índice de ley de potencia	Adimensional

n_{∞}	Concentración iónica de la solución	$[\text{m}^{-3}]$
$\bar{n}$	Vector normal a la superficie	-
P	Presión	$[\text{Pa}]$
$\tilde{P}$	Presión adimensional	Adimensional
P_0	Presión de referencia	$[\text{Pa}]$
P_c	Presión característica	$[\text{Pa}]$
$[q]$	Matriz de rigidez	-
$[Q]$	Matriz de propiedades de ensamble	-
Re	Número adimensional de Reynolds	Adimensional
S	Función de un problema arbitrario a resolver	-
t	Tiempo	$[\text{s}]$
T_0	Temperatura de referencia	$[\text{K}]$
T_f	Temperatura final	$[\text{K}]$
u	Velocidad en dirección longitudinal	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
$\tilde{u}$	Velocidad en dirección longitudinal adimensional	Adimensional
$\{u\}$	Vector columna en nodos	-
$\{u'\}$	Ensamble del vector $\{u\}$	-
$\{\overline{u'}\}$	Vector $\{u'\}$ con condiciones de frontera	-
$\tilde{u}^n$	Variable $\tilde{u}$ en un tiempo anterior	Adimensional
$\tilde{u}^{n+1}$	Variable $\tilde{u}$ en tiempo actual	Adimensional
$\tilde{u}_{\text{aux}}$	Variable auxiliar de la velocidad longitudinal adimensional	Adimensional
u_{HS}	Velocidad de Helmholtz-Smoluchowski	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
v	Velocidad en dirección transversal	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
$\tilde{v}$	Velocidad en dirección transversal adimensional	Adimensional

$\tilde{v}^n$	Variable $\tilde{v}$ en un tiempo anterior	Adimensional
$\tilde{v}^{n+1}$	Variable $\tilde{v}$ en tiempo actual	Adimensional
$\tilde{v}_{\text{aux}}$	Variable auxiliar de la velocidad transversal adimensional	Adimensional
v_c	Velocidad en dirección transversal característica	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
x	Dirección longitudinal	[m]
X	Dirección longitudinal adimensional	Adimensional
y	Dirección transversal	[m]
Y	Dirección transversal adimensional	Adimensional
z	Valencia de solución electrolítica	-
	Letras griegas	
Símbolo	Significado	Unidades
$\dot{\gamma}$	Magnitud del tensor de deformación	Adimensional
$\tilde{\gamma}$	Magnitud del tensor de deformación adimensional	Adimensional
Δf	Operador laplaciano de la variable f	-
Δt	Tamaño de paso	[s]
ε	Relación entre la longitud y altura características	Adimensional
ϵ	Permitividad dieléctrica del fluido	$\left[\frac{\text{F}}{\text{m}}\right]$
ζ	Potencial zeta	[V]
η	Viscosidad	[kg/m-s] ó [Pa-s]
η_0	Viscosidad de cizallamiento cero	[kg/m-s] ó [Pa-s]
κ	Parámetro de Debye-Hückel	Adimensional
$\bar{\kappa}$	Parámetro de la longitud de Debye	Adimensional
λ	Tiempo de relajación	[s]
λ_D	Longitud de Debye	[m]
ξ	Valor de 1×10^{-10}	-

ρ	Densidad	[kg/m ³]
ρ_e	Densidad de carga	[c/m ³]
σ	Conductividad eléctrica	$\left[\frac{\text{A}}{\text{V-m}} \right]$
τ_{xx}	Esfuerzos normales viscosos en dirección longitudinal	[Pa-s]
τ_{yy}	Esfuerzos normales viscosos en dirección transversal	[Pa-s]
τ_{xy}, τ_{yx}	Esfuerzos cortantes viscosos	[Pa-s]
ϕ	Potencial eléctrico aplicado	[V]
ϕ_0	Potencial eléctrico aplicado de referencia	[V]
$\tilde{\phi}$	Potencial eléctrico aplicado adimensional	Adimensional
$\tilde{\phi}^n$	Variable $\tilde{\phi}$ en un tiempo anterior	Adimensional
$\tilde{\phi}^{n+1}$	Variable $\tilde{\phi}$ en tiempo actual	Adimensional
$\tilde{\phi}_{\text{aux}}$	Variable auxiliar del potencial eléctrico aplicado adimensional	Adimensional
Φ	Potencial total existente	[V]
ψ	Potencial eléctrico inducido	[V]
$\tilde{\psi}$	Potencial eléctrico inducido adimensional	Adimensional
$\tilde{\psi}^n$	Variable $\tilde{\psi}$ en un tiempo anterior	Adimensional
$\tilde{\psi}^{n+1}$	Variable $\tilde{\psi}$ en tiempo actual	Adimensional
$\tilde{\psi}_{\text{aux}}$	Variable auxiliar del potencial eléctrico inducido adimensional	Adimensional
ω_i	Numero adimensional de Weissenberg	Adimensional
Ω	Dominio	-
$\partial\Omega$	Frontera	-

Resumen

Actualmente diversos avances en ingeniería se han enfocado en disminuir el tamaño de máquinas tanto eléctricas, electrónicas y mecánicas a niveles micro (10^{-6}) y nano (10^{-9}), para tener un mejor control, así como también, una mayor eficiencia en procesos científicos, industriales y domésticos, lo que impacta de manera significativa en el progreso y desarrollo humano, por tal motivo, expandir y promover el conocimiento en el campo de la microfluídica es esencial para lograr dichos objetivos. Esta tesis se enfoca en el análisis de un flujo puramente electroosmótico bidimensional que fluye en un microcanal rectangular de placas planas paralelas, con un fluido no newtoniano, gobernado por el modelo de Carreau, enfocándose en los efectos producidos por el índice de ley de potencia n y el número adimensional de Weissenberg ω_i y como la variación de dichos parámetros afectan los perfiles de velocidad, cabe aclarar que para dicho fin, se recurrió a diversas consideraciones, tales como la ausencia de transferencia de calor, potenciales eléctricos inducidos menores a 25[mV], la inexistencia de gradientes de presión inducidos, y el movimiento del fluido generado únicamente por fuerzas electrocinéticas.

Para poder analizar la hidrodinámica de dicho fluido en dos dimensiones se hizo uso de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento, Poisson-Boltzmann y conservación de carga, así como las ecuaciones referentes al modelo de Carreau y la tasa de deformación asociado, de igual manera, se recurrió a un análisis de orden de magnitud, para adimensionalizar tanto las ecuaciones como las condiciones de frontera que rigen el microcanal rectangular en estudio, el cual, debido a la adimensionalización antes mencionada, se redujo a un cuadrado unitario el cual se tomó como el dominio Ω y los lados que lo conforman las fronteras $\partial\Omega$.

Una vez obtenidas las ecuaciones y las condiciones de frontera de forma adimensional, se recurrió a transformarlas en su forma variacional con ayuda de las identidades de Green, esto con el fin de poder expresar el problema de tal manera que pueda ser resuelto mediante el método de elemento finito, para ello, haremos uso del software numérico gratuito FreeFem++.

Los principales resultados obtenidos mostraron que un decremento en el índice de ley de potencia n conlleva a un aumento en la velocidad longitudinal u , a su vez, un aumento en el número adimensional de Weissenberg ω_i de la misma forma, aumenta la velocidad longitudinal u , al mismo tiempo, un aumento en el parámetro de la longitud de Debye $\bar{\kappa}$ de igual manera conlleva un aumento en la velocidad longitudinal.

Capítulo 1 Introducción

En este primer capítulo se realiza una breve descripción del campo de aplicación actual de los sistemas microelectromecánicos y como han influido en el avance tecnológico y sus impactos en la sociedad, de igual manera se describen los conceptos básicos de la microfluídica y los fenómenos electrocinéticos, detallando las principales contribuciones del flujo electroosmótico desarrollado por la comunidad científica desde los orígenes hasta años recientes. Finalmente se detalla la justificación y los objetivos del presente trabajo.

Introducción

Los sistemas microelectromecánicos (MEMS, por sus siglas en inglés) son dispositivos integrados los cuales son microfabricados con elementos capaces de recibir señales, procesarlas y replicarlas para distintas aplicaciones en sistemas mecánicos. Los sistemas microelectromecánicos se utilizan principalmente para analizar y estudiar variables físicas del entorno en el que se encuentran, como presión, voltaje, posición, temperatura, campo eléctrico, campo magnético, intensidad luminosa, sonido e incluso presencia gaseosa y química (Bogue, R., 2013). Como ejemplo de estos sistemas, podemos encontrar en la literatura especializada, el uso de microactuadores como dispositivos micrométricos capaces de transformar una fuente de energía de entrada (como la eléctrica, térmica, magnética o química) en una respuesta mecánica. Algunos mecanismos de accionamiento de los microactuadores son los sistemas piezoeléctricos, magnetostáticos y neumáticos. También se utilizan en aplicaciones relacionadas con la expansión térmica, los materiales con memoria de forma y los procesos de combustión (Judy, J. W., 2006). Los MEMS se han incorporado recientemente a dispositivos electrónicos como teléfonos móviles y ordenadores, así como a prótesis y dispositivos médicos para el control de la salud. El desarrollo de esta tecnología comenzó con los intentos de incorporar varios sistemas que realizaran tareas cada vez más complejas, con la posibilidad de miniaturizarlos. Anteriormente se mantenía como concepto general que los MEMS involucraban únicamente componentes micrométricos, mecánicos y eléctricos, sin embargo, esta definición se ha ido ampliando de forma que actualmente se considera de forma general como el conjunto de técnicas y procesos para crear componentes micrométricos, (Spearing, S. M., 2000), (Judy, J. W., 2001), (Choundhary, V., et. al., 2017). Una de las principales aplicaciones de los MEMS es el desarrollo de sensores. Están presentes en sensores de aceleración, presión, movimiento y estabilidad. Incorporan elementos piezoeléctricos que detectan variaciones de posición, registran y envían una señal de realimentación. Por su configuración y disposición suponen una ventaja frente a modelos anteriores en cuanto a simplicidad de integración y fiabilidad frente a sensores mecánicos más antiguos (Gupta, M. et. al., 2023). Estos sensores se han incorporado para detectar caídas repentinas, golpes, desaceleración y diversos dispositivos de control (Petruk, T. et.

al., 2016). Incluso se han colocado chips en órganos humanos, como el corazón, los pulmones y el cerebro, monitorizando su correcto desempeño y funciones estables, como la presión arterial, la frecuencia cardíaca, la oxigenación de la sangre, la actividad cerebral, entre otros, (Macias Silva, M., 2016). Por otro lado, también se ha planteado la posibilidad de que alguno de estos sistemas pueda sustituir a los órganos humanos, ya sea parcial o totalmente. Dado que los microcanales funcionan de forma natural en el cuerpo humano, es posible replicar su geometría en algunas zonas concretas, así como adaptarse a los lugares donde deben ubicarse, (Silva, M. M., 2016).

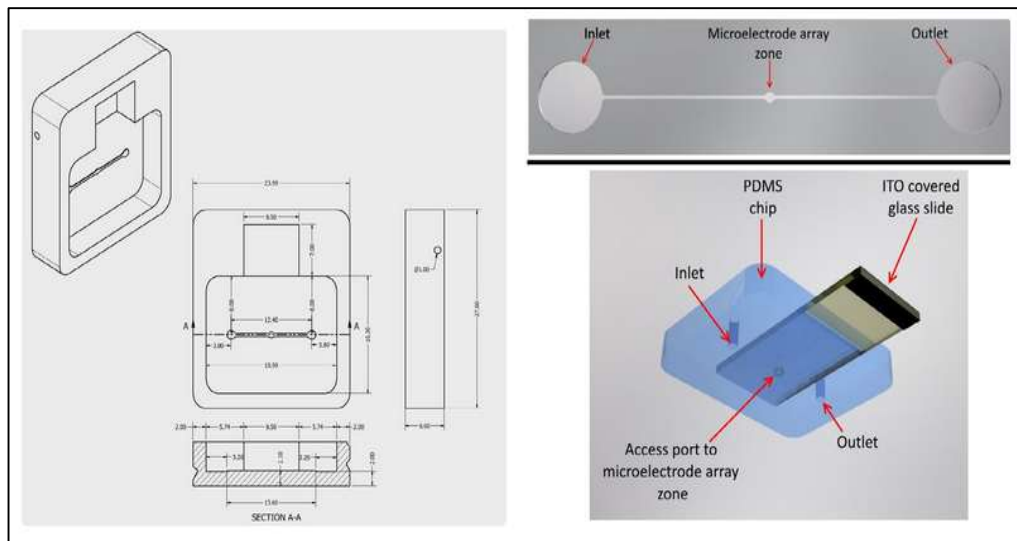


Fig. 1.1 Dispositivos bioMems con microcanales (Choreño, O. P., 2019)

Microfluídica

La microfluídica es la ciencia e ingeniería de los fluidos a micro (10^{-6}) y nano (10^{-9}) escala, de igual manera es, una subdisciplina de la mecánica de fluidos, ya que las ecuaciones fundamentales que describen la física de los fluidos a gran escala son las mismas que gobiernan en la microfluídica, sin embargo, a escalas de longitud micrométricas, el comportamiento de los fluidos difiere de los sistemas convencionales a gran escala, por ejemplo, los flujos microfluídicos suelen ser estrictamente laminares a diferencia de los sistemas convencionales, donde se encuentran en su mayoría, flujos turbulentos, a su vez, el efecto de la tensión superficial es un aspecto de suma importancia de los flujos microfluídicos, contrariamente a los sistemas convencionales en donde dichos efectos no representan afectaciones o alteraciones considerables (Rapp, B. E., 2016). En los sistemas microfluídicos es posible encontrar dos características convenientes como el tamaño menor y manejable, así como flujo laminar con números de Reynolds menores a cien, lo cual representa un mejor control en los procesos de estos dispositivos (Lapizco-Encinas, B. H., 2008). A su vez, la microfluídica representa una tecnología transformadora que permite la manipulación precisa

de fluidos a microescala, lo cual facilita los avances en diversas disciplinas científicas, tales como son la biología, la ciencia de materiales y la química (Bodas, D., 2025). La microfluídica tiene un impacto revolucionario tanto en el análisis como en la síntesis en diversas áreas científicas, similar al impacto de los circuitos integrados en la informática y la computación, una muestra de la capacidad de los dispositivos microfluídicos es que podrían cambiar incluso de manera comercial a las empresas dedicadas a la instrumentación, por ejemplo, en lugar de vender dispositivos costosos de análisis químico, biológico, médico, entre otros, se podría recurrir a la venta de dispositivos de análisis microfluídicos desechables y baratos, debido a ello, ante el importante potencial comercial y mejores entornos financieros, la microfluídica, rápidamente ha atraído el interés de la comunidad científica, por lo cual, científicos de todas las áreas tradicionales en la ingeniería y la ciencia, han comenzado a realizar investigación en microfluídica, convirtiéndola en un campo multidisciplinario representativo en la nueva economía del siglo veintiuno (Nguyen, N. T. et. al., 2019). Los efectos electrocinéticos son de suma importancia para el transporte de fluidos en la microfluídica, por ejemplo, la electroósmosis permite el bombeo de fluidos y control de flujo mediante campos eléctricos, eliminando la necesidad de bombas mecánicas y válvulas con componentes móviles, en suma a esto, el empleo de flujos electroosmóticos y los impulsados por presión, muestran diferencias relevantes como por ejemplo, los flujos electroosmóticos muestran perfiles de velocidad casi uniformes (en forma de tapón), mientras que los flujos accionados por presión muestran perfiles parabólicos, de la misma forma, los flujos electroosmóticos son más prácticos en aplicaciones de microcanales que los impulsados por presión (Karniadakis, G. et. al., 2006).

Antecedentes

Los fenómenos electrocinéticos pertenecen a las áreas más antiguas de la ciencia de superficies y coloides, tan solo la tensión superficial y los conceptos a fines datan de los tiempos de Francis Hauksbee, quien fuese ayudante de Issac Newton en la Royal Society. El descubrimiento de los fenómenos electrocinéticos tales como la electroforesis, la electroósmosis y el potencial de flujo, dio lugar al concepto de la doble capa eléctrica (EDL, por sus siglas en ingles) que, a su vez, ha desempeñado un papel importante en la comprensión de la estabilidad coloidal, de igual manera, los experimentos llevados a cabo por Reuss en 1909 (Probstein, R. F., 2005), demostraron que el agua puede precolar a través de un medio poroso mediante la aplicación de un campo eléctrico, por lo tanto, se debe tomar en cuenta que los sistemas coloidales que son sistemas en donde las partículas coloidales se mantienen en suspensión en el medio que a su vez, forma una solución heterogénea, están fuertemente relacionados con los efectos electrocinéticos, (Wall, S., 2010), tales como son:

Electroósmosis: es el movimiento de un líquido ionizado relativo a una superficie cargada y estacionaria, que se promueve mediante la aplicación de un campo eléctrico.

Electroforesis: es el movimiento de superficies y macromoléculas cargadas relativo a un líquido en reposo mediante la aplicación de un campo eléctrico.

Potencial de corriente: es el campo eléctrico que se genera por el movimiento de un fluido ionizado a lo largo de una superficie cargada y estacionaria.

Potencial de sedimentación: es el campo eléctrico que se crea por el movimiento de partículas cargadas relativo a un líquido estacionario.

Como se mencionó anteriormente, los fenómenos electrocinéticos tienen su origen en la distribución normal de iones libres respecto a superficie cargada eléctricamente, especialmente cuando una solución acuosa está en contacto con una superficie susceptible a cargarse. Los iones de carga opuesta se agrupan en las inmediaciones de la pared formando la capa de Stern, donde estos son atraídos por fuerzas electrostáticas. Fuera de la capa de Stern se forma una distribución de iones conocida como capa de Gouy-Chapman o capa difusa. Ambas capas, la de Stern y Gouy-Chapman forman la denominada doble capa eléctrica (EDL por sus siglas en inglés *Electric Double Layer*), cuya extensión se caracteriza a través de la longitud de Debye λ_D , la cual depende tanto de propiedades del electrolito como de la superficie (Masliyah, J. H., Bhattacharjee, S., 2006). La distribución de iones de la EDL produce un potencial eléctrico inducido ψ el cual es normal a la superficie cargada. Para el caso de placas paralelas con las mismas propiedades, ψ alcanza su máximo en las superficies y decae a cero en el centro del microcanal. Para caracterizar el máximo de ψ , se usa el potencial eléctrico inducido en el borde de la capa de Stern, el cual se conoce como potencial zeta ζ . Para el presente trabajo, los iones libres en la EDL difusa, pueden ser movilizados por campos eléctricos externos, lo que induce un campo de velocidades; dicho fenómeno se denomina electroósmosis (Karniadakis, G. et. al., 2006).

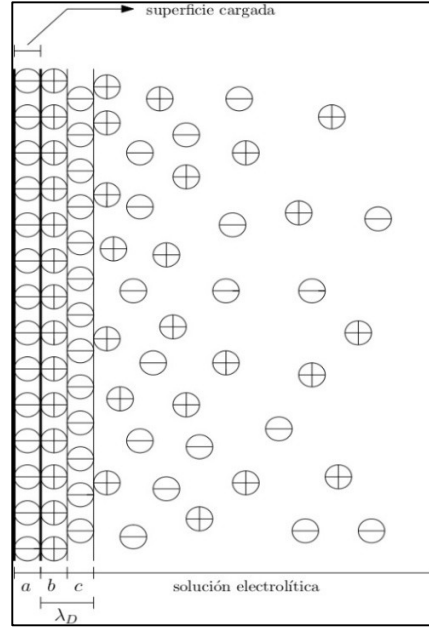


Fig. 1.2 Esquema de la doble capa eléctrica en donde a representa la superficie cargada, b la capa de Stern y c es la capa difusa, la suma $b + c$ representa la longitud de Debye λ_D que el espesor de la doble capa eléctrica (Masliyah, J. H., Bhattacharjee, S., 2006)

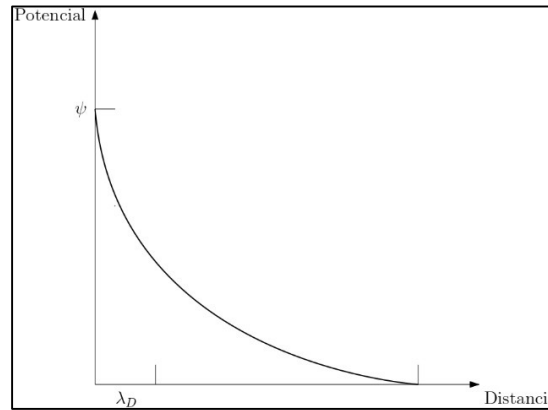


Fig. 1.3 Relación entre el potencial y la distancia (Masliyah, J. H., Bhattacharjee, S., 2006)

Como se puede apreciar en la Fig. 1.2, existe una acumulación de cargas entre la pared del microcanal y el fluido que va disminuyendo conforme las cargas se aproximan al centro del microcanal y que obedece a la distribución de Boltzmann Fig. 1.3.

En el presente trabajo se va a considerar únicamente la electroósmosis, debido a que es el fenómeno que gobierna al flujo electroosmótico (EOF del inglés *Electroosmotic flow*) el cual es el movimiento de un fluido con cargas libres provocado por un campo eléctrico longitudinal

ϕ el cual es paralelo a la superficie. Debido a la doble capa eléctrica que se forma en la interfase superficie-electrolito, se considera a la capa Stern estática y que los iones que se encuentran en la capa difusa migrarán a los electrodos con carga contraria al aplicar el campo eléctrico ϕ . Los iones en movimiento longitudinal están hidratados y las fuerzas de cohesión resultantes del enlace provocaran que el líquido se mueva por efecto viscosos. La magnitud de este flujo depende del espesor de la doble capa, que, a su vez, depende de las propiedades de la superficie, el pH, la fuerza iónica y la temperatura, debido a que el flujo se genera en la pared, el perfil del flujo electroosmótico es plano (tipo tapón), esto difiere del flujo impulsado por presión, en el que el arrastre en la pared ralentiza el flujo, lo que da lugar a un perfil de flujo parabólico (Guijt, R., 2019).

Dado que el flujo electroosmótico (EOF) se puede generar aplicando una diferencia entre electrodos ubicados en depósitos conectados por un microcanal, es relativamente sencillo y directo lograr el transporte de fluidos mediante el flujo electroosmótico. Actualmente el flujo electroosmótico ha sido estudiado en tiempos recientes debido a su gran funcionalidad en el movimiento de microfluidos encontrando aplicaciones en el área científica y en diversos campos tales como son la química, la biología, la medicina entre muchos otros, por tal motivo la comunidad científica ha desarrollado diversas investigaciones en dicho campo de estudio relacionado al flujo electroosmótico, entre estas investigaciones podemos destacar las Maynes y Webb (2003) quienes analizaron el transporte electroosmótico totalmente desarrollado para un microcanal de placa paralela y un microtubo circular bajo condiciones de contorno impuestas de flujo de calor de pared constante y temperatura de pared constante, con ello lograron observar, para la condición límite de flujo de calor constante que el número de Nusselt completamente desarrollado depende de la relación del conducto, la longitud de la tubería y de la fuente volumétrica adimensional, variando entre los límites definidos por los radios pequeños y grandes, el aumento de la fuente volumétrica adimensional provocada por el efecto de calentamiento Joule trae como consecuencia, una disminución del número de Nusselt para todos los tamaños relativos del canal, para la condición límite de temperatura constante, la condición asintótica del canal es aquella para que toda la energía generada volumétricamente en el fluido debido al efecto de calentamiento Joule se disipa convectivamente en la pared del canal, dando lugar a una condición de temperatura de pared uniforme demostrando que este escenario es idéntico al caso en el que se impone un flujo de calor de pared constante con fuente volumétrica adimensional negativa cuya magnitud viene dictada por un balance energético global del fluido. Peng, Chuncheng, Deyi, Hongli y Yan (2005) por su parte, realizaron una simulación numérica de un flujo electroosmótico en un canal rectangular para analizar las relaciones cuantitativas entre diversos parámetros característicos concluyendo que son importantes los efectos de la geometría sobre el caudal volumétrico, la velocidad media no depende de la relación de aspecto para un diámetro hidráulico fijo, el caudal volumétrico aumenta con el cuadrado del diámetro hidráulico, por tanto, cuando se desea un caudal de bombeo mayor, los canales de mayor diámetro parecen ser la mejor opción, las variaciones de concentración del electrolito afectan significativamente

al caudal y a la velocidad media, ya que influyen directamente en el potencial zeta, lo que repercute en la formación de la doble capa eléctrica EDL, por último demostraron que el caudal volumétrico varía linealmente con la aplicación de un campo eléctrico aplicado, aunque existen límites superiores a la tensión aplicada a lo largo del microcanal, debido al posible aumento de temperatura del fluido. En años recientes Ramos, Bautista, Lizardi y Méndez (2017) desarrollaron un análisis de perturbación regular para describir un flujo electroosmótico no isotérmico, dentro de un microcanal de hendidura, en donde se utilizaron parámetros adimensionales tanto para medir las desviaciones de la temperatura con respecto al caso isotérmico, así como para modular la intensidad de los gradientes generados, con lo cual se pudo observar que, la desviación de los campos de presión y temperatura fueron suficientes para ser considerados, y debido a esto, se presentaron nuevos gradientes de temperatura longitudinales, los cuales deben incluirse en las ecuaciones de cantidad de movimiento, con lo cual se modificó drásticamente los campos de presión y temperatura, así como el campo eléctrico, por consiguiente la influencia de estos parámetros determinaron la modificación del caudal volumétrico, sin embargo, los gradientes de temperatura no fueron suficientes para regular los caudales volumétricos debido a que los parámetros que regulan los gradientes generados, también ayudan a controlar factores que afectan la determinación del caudal volumétrico y controlan la competencia entre el efecto de calentamiento Joule y las pérdidas de calor en las paredes del microcanal, con lo cual se produjo que, los gradientes de temperatura tanto longitudinales como transversales compitieran simultáneamente para estimar la predicción de las variables principales de interés, bajo esa misma línea años más tarde Ramos, Treviño, Lizardi, Méndez (2022) desarrollaron en su investigación un novedoso análisis asintótico utilizando técnicas de perturbación para un flujo electroosmótico en un microcanal rectangular, considerando la viscosidad absoluta dependiente de la temperatura, lo que afecta la condición de deslizamiento en las paredes del microcanal, se determinó que, el efecto de calentamiento Joule, determina el nuevo régimen de flujo electroosmótico, por otro lado, los patrones de flujo son determinados por varios parámetros adimensionales los cuales de igual manera rigen el comportamiento hidrodinámico, térmico y eléctrico del problema, los autores destacaron que tan solo tres de ellos (parámetro adimensional de desviaciones de temperatura, longitud de deslizamiento adimensional y la disipación de calor a través de las paredes del microcanal) son suficientes para determinar de manera muy significativa la respuesta dinámica del sistema a variaciones externas promovidas por un campo eléctrico aplicado, de la misma manera, los autores resaltaron el uso de técnicas asintóticas para analizar situaciones en las que está en juego determinar la influencia de los distintos factores que contribuyen a generar patrones de flujo, mencionaron que, los flujos electroosmóticos controlados por efectos variables de temperatura, junto con el control de tasas de enfriamiento convectivo a través de las paredes del microcanal, mejoran la disposición, rendimiento y operación del flujo volumétrico, por último indicaron que, es de suma importancia distinguir y clarificar la influencia simultánea de diferentes parámetros físicos relacionados con la generación de entropía y la minimización de esta, ya que la

presencia de irreversibilidades puede tener serias repercusiones en el diseño y optimización de sistemas electroosmóticos.

Las investigaciones señaladas anteriormente en su mayoría analizaron flujos electroosmóticos con fluidos newtonianos, centrando la investigación hacia los casos donde se realizaron investigaciones con fluidos no newtonianos podemos resaltar los trabajos de Zhao, Zholdovskij, Masliyah y Yang (2008) en donde presentaron un modelo matemático para describir el flujo electroosmótico con fluidos que obedecen a la ley de potencia en un microcanal de hendidura, en el marco de la teoría de Poisson-Boltzmann linealizada, encontraron soluciones aproximadas de la distribución de velocidades para varios valores especiales del índice de ley de potencia, introduciendo una velocidad de Smoluchowski generalizada cuyos cálculos mostraron que para fluidos pseudoplásticos (shear thinning fluid), la viscosidad dinámica sin tensión disminuye desde la línea central del canal hasta la pared, para fluidos dilatantes (shear thickening fluid), la velocidad cerca de la parte central del canal se aproxima a la velocidad de Smoluchowski generalizada, el perfil de velocidad se asemeja al de tipo tapón a medida que el índice de ley de potencia disminuye, lo que sugiere que la velocidad de Smoluchowski es más apropiada como velocidad de deslizamiento para el flujo electroosmótico de fluidos con bajo índice de ley de potencia, por último, lograron observar que el efecto de la doble capa eléctrica EDL sobre la velocidad de Smoluchowski es más pronunciado que para los fluidos dilatantes (shear thickening fluid), de la misma manera resaltan las investigaciones de Tang, Li, He y Tao (2009), quienes investigaron un fluido no newtoniano para flujo electroosmótico en microcanales aplicando la metodología de Lattice-Boltzmann para describir la distribución del potencial eléctrico y el campo de flujo, centrándose en fluidos que se rigen bajo la ley de potencia con varios valores de índice de ley de potencia, con lo cual lograron demostrar que, las características reológicas del fluido pueden cambiar significativamente el patrón de flujo electroosmótico y que el índice de ley de potencia desempeña un papel importante, de igual manera, indicaron que, en el caso de un fluido newtoniano, el perfil de velocidad es de tipo tapón cuando la relación entre la altura del canal y la longitud de Debye es superior a 10 aproximadamente, sin embargo, el valor crítico cambia de manera significativa para el caso de un fluido no newtoniano, demostrando también que el comportamiento no newtoniano del fluido de transporte debe tenerse en cuenta en las aplicaciones prácticas de microfluidos con flujos electroosmóticos. En las investigaciones realizadas por Vasu, y De (2010) los autores lograron observar que los efectos electro-viscosos son mayores en los fluidos pseudopásticos (shear thinning fluid) que en los dilatantes (shear thickening fluid) y debido a estos mismos efectos en el caso de un fluido altamente pseudoplástico se observó una reducción del flujo de hasta el 65% y una viscosidad aparente que es el doble de la viscosidad normal para una doble capa eléctrica delgada, el análisis anterior ayudó a comprender mejor el flujo de fluidos de ley de potencia en microcanales, también ayudó a controlar mejor el transporte de fluidos en microdispositivos. Es de resaltar las investigaciones hechas por Zhao y Yang (2013). donde analizaron teóricamente un flujo electroosmótico con fluidos de ley de potencia no newtonianos en un microcanal cilíndrico, en sus investigaciones observaron que, debido a la

aproximación para la función de Bessel modificada de primer orden, las soluciones aproximadas introducen los mayores errores para predecir la velocidad electroosmótica cuando el espesor de la doble capa eléctrica es comparable al radio del canal, pero pueden predecir de manera favorable la velocidad electroosmótica cuando el espesor de la doble capa eléctrica es mucho menor o mayor que el radio del canal, destacaron que la velocidad de Helmholtz-Smoluchowski de los fluidos de ley de potencia en microcanales cilíndricos dependen de las dimensiones geométricas, lo que contrasta fuertemente con dicha velocidad sobre superficies planas en microcanales de placas paralelas, resaltan que, efectos tan interesantes pueden atribuirse al acoplamiento no lineal entre la electrostática, la geometría del canal y la hidrodinámica no newtoniana. Otros trabajos importantes fueron realizados por Escandón, Bautista y Méndez (2013) que determinaron las tasas de generación de entropía para el flujo electroosmótico de un fluido no newtoniano en un microcanal de placas planas paralelas, para rangos investigados de patrones adimensionales presentaron que, la tasa de generación de entropía está dominada por el efecto de calentamiento Joule y la contribución de la fricción del fluido es despreciable, la tasa de generación de entropía en el microcanal depende del número de Peclet, del término de generación de energía, la relación de aspecto y la diferencia adimensional de temperatura, por lo tanto, la tasa media adimensional de generación de entropía puede minimizarse en diferentes condiciones de funcionamiento, lo que corresponde a una relación específica entre las propiedades termofísicas del sistema y los parámetros geométricos del microcanal. Simultáneamente los trabajos de Sánchez, Arcos, Bautista y Méndez (2013) en donde se realizó un análisis teórico, basado en la teoría de lubricación del efecto de calentamiento Joule en un flujo puramente electroosmótico de fluidos no newtonianos a través de un microcanal de hendidura, en sus gráficos obtenidos explican que, un aumento en el número adimensional de Weissenberg implica un aumento en la velocidad longitudinal, de la misma manera se explica que para una viscosidad constante los perfiles de velocidad se asemejan a los de tipo tapón, sin embargo, los perfiles de velocidad son alterados cuando la viscosidad, así como la conductividad eléctrica del fluido depende de la temperatura, los autores detallan en sus graficas que para valores de índice de ley de potencia que van de 0.65 a 0.95, los valores de velocidad adimensional en dirección longitudinal caen con respecto a los valores antes mencionados, resaltan que los gradientes de temperatura axiales en el microcanal, afectan el campo eléctrico y el campo de flujo, haciéndolos no uniformes a través de la dirección longitudinal, en sus graficas de presión, los autores indican que, gradientes de presión negativos aparecen en la entrada y salida del microcanal, mientras que en la sección media es positiva, este comportamiento modifica los perfiles de velocidad en las regiones correspondientes a lo largo del microcanal, el perfil de velocidad es ligeramente convexo a la entrada y a la salida y cóncavo en la región central, los autores pusieron en evidencia que para fluidos no newtonianos, la presión adimensional incrementa con respecto a los fluidos newtonianos este incremento afecta la distribución de velocidad adimensional intensificando la concavidad y convexidad de los perfiles de velocidad dependiendo de la región donde se evalué, por ejemplo, cuando los gradientes de presión son positivos, conducirán el flujo opuesto a la electroósmosis, mientras que un

gradiente de presión negativo inducirá un flujo favorable a la electroósmosis, por último, los autores en sus gráficas de temperatura, resaltan un comportamiento no simétrico debido al efecto advectivo del flujo de fluido y reiteran que, para un valor de índice de potencia igual a la unidad los perfiles de temperatura no son influenciados por el número de Weissenberg de manera significativa, sin embargo para un número de Weissenberg de aproximadamente 0.65, la distribución de temperatura se ve fuertemente afectada.

Justificación

La literatura especializada antes mencionada ha jugado un papel de suma importancia en la difusión y divulgación de conocimiento científico y de ingeniería de la teoría electroosmótica, enfocándose en el análisis de flujos electroosmóticos, con lo cual se resalta la relevancia que han adquirido estos temas en el campo científico. En el análisis del estado del arte anterior es posible notar que varios estudios referentes a flujos puramente electroosmóticos en microcanales rectangulares, están enfocados en fluidos newtonianos, así como en diversos tipos de fluidos de ley de potencia, sin embargo, aún es posible notar la ausencia de estudios de flujos electroosmóticos con fluidos de ley de potencia que se rigen mediante el modelo de Carreau, por lo cual, con el presente trabajo se pretende expandir los conocimientos de este tipo de fluidos y sus comportamientos en flujos electroosmóticos. El presente estudio involucra los efectos de las variaciones de viscosidad que se rigen bajo el modelo de Carreau, $\eta(T_f, \dot{\gamma}) = \eta_0 e^{-b(T_f - T_0)} [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}$ haciendo la consideración de que no existe transferencia de calor, por lo cual, dicho modelo se reduce a $\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}$. Es posible observar que, si el índice de ley de potencia es igual a cero, matemáticamente caemos en el caso de viscosidad constante $\eta = \eta_0(1)$ que representa al caso de fluido newtoniano. Lo que se pretende resaltar en el presente trabajo, aparte de observar cómo influye el índice de ley de potencia n en los perfiles de velocidades, es también analizar el papel que toma el número adimensional de Weissenberg ω_i , que comienza a tener relevancia en el comportamiento de flujo electroosmótico cuando el índice de potencia es diferente de cero, junto con la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ y de qué forma alteran los perfiles de velocidad. Dicho análisis se realiza en un microcanal rectangular de placas planas paralelas, con coordenadas cartesianas (x, y) y en dos dimensiones, de la misma forma se consideran potenciales inducidos ζ bajos menores a 25[mV], por lo cual, es posible utilizara la linealización de Debye-Hückel.

La presente tesis simultáneamente pretende servir como base para futuras investigaciones en el campo de la teoría electrocinética y los flujos electroosmóticos con fluidos de ley de potencia y en especial los que se rigen bajo el modelo de Carreau y de igual manera, pretende aportar conocimiento en microfluídica con el fin de ser aprovechados no solo en el ámbito académico sino también en el médico, biológico, químico, robótico, etc.

Objetivo

Analizar físicamente la hidrodinámica de un flujo electroosmótico que circula en un microcanal rectangular considerando un fluido no newtoniano mediante el modelo de Carreau. Este es un trabajo numérico en donde se reescriben las ecuaciones de gobierno en su forma variacional para poder ser resueltas mediante la técnica de elemento finito con ayuda del software FreeFem++.

Capítulo 2 Formulación del problema

En este segundo capítulo, se describe la física del modelo de estudio a través de las ecuaciones que lo describen junto con sus condiciones iniciales, después se procede a realizar un análisis de orden de magnitud para reescribir dichas ecuaciones y condiciones en su forma adimensional.

Modelo matemático

En la figura 2.1 se observa el modelo físico de estudio, el cual se encuentra en coordenadas cartesianas y en dos dimensiones (x, y) , con el origen en la entrada y centro del microcanal rectangular y cuyo eje x se posiciona por todo el eje central a lo largo del mismo, de igual manera, con dimensiones geométricas de altura $2H$ y longitud L , de las cuales se asume que el espesor es mucho más pequeño en comparación con la longitud $H \ll L$, a su vez las paredes del microcanal están conformadas por un material dieléctrico y dentro de este circula un fluido ionizado y el contacto entre estos dos materiales produce que las paredes se carguen negativamente por lo cual se producirá mayor densidad de protones cerca de las paredes, por tal motivo, se genera la doble capa eléctrica puede ser caracterizada por la longitud de Debye λ_D . La carga se va degradando de manera gradual desde la pared del microcanal, donde el potencial ψ es máximo (ζ) y llega a un valor de cero en el centro de este. Al aplicar un potencial externo ϕ , los protones que se encuentran cerca de las paredes del microcanal comenzarán a desplazarse y por efecto viscoso, todo el fluido de igual manera se desplazará (Ramos, E. A., et. al., 2017). Cabe destacar que las fuerzas de campo no se producen debido a la gravedad sino a fuerzas eléctricas representadas por las fuerzas de Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$ donde q , $\vec{E}$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son, la carga elemental, campo eléctrico, vector velocidad y campo magnético respectivamente y en ausencia de este último, se asume que el mecanismo para generar el movimiento del fluido se debe al empleo de fuerzas electroosmóticas que se producen debido a un campo eléctrico aplicado E_0 en dirección longitudinal, el cual se define de la siguiente manera $E_0 = \frac{\phi_0}{L}$, donde ϕ_0 es el potencial eléctrico de referencia. El sistema es soportado en los dos extremos por dos depósitos de líquido que se encuentran a una temperatura y presión de referencia T_0 y P_0 respectivamente.

Se considera que el fluido ionizado es no newtoniano y su comportamiento puede ser descrito mediante el conocido modelo de Carreau (Sánchez, S., et. al., 2012).

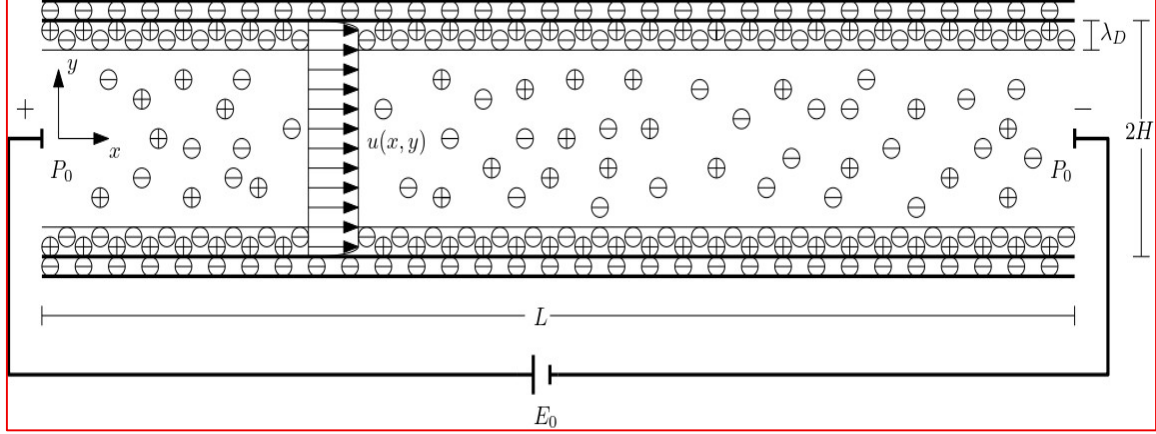


Fig. 2.1 Esquema de un microcanal rectangular bidimensional de longitud L y espesor $2H$ donde circula un flujo electroósmotico.

Para una mejor comprensión se agregan las siguientes consideraciones e hipótesis.

- Se considera flujo laminar con números de Reynolds bajos $Re < 1$.
- La carga en la doble capa eléctrica sigue la distribución de Poisson-Boltzmann.
- Se considera un fluido no newtoniano que obedece al modelo de Carreau.
- Potencial en las paredes menor a $25[\text{mV}]$
- No existe permeabilidad a través de las paredes

Ecuaciones

Se definen las ecuaciones que rigen el modelo de estudio en coordenadas cartesianas y las cuales describen el flujo electroósmotico. Para un flujo estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, incompresible y bidimensional, la ecuación de continuidad queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

En donde u y v son las componentes de velocidad en los ejes x y y respectivamente.

Las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujos estacionarios $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ y bidimensionales quedan para x :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho_e E_x \quad (2)$$

Y para el eje y :

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho_e E_y \quad (3)$$

De las dos ecuaciones anteriores, podemos ver que la influencia del potencial eléctrico aplicado ϕ actúa únicamente a través de la dirección x , mediante la relación $E_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{d\phi}{dx}$ (Ramos, E. A., et. al., 2022). Y en donde E_x es la fuerza de campo eléctrico en dirección x y ρ_e es la densidad de carga, a su vez, $\rho, P, \tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ y τ_{yx} son la densidad y la presión del fluido, los esfuerzos viscosos normales y cortantes respectivamente, y estos se definen como:

$$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4)$$

En donde η es la viscosidad del fluido, sin embargo, se considera trabajar con un fluido no newtoniano, por lo tanto, la viscosidad del fluido es variable, cuyo comportamiento se rige bajo el modelo de Carreau $\eta(T_f, \dot{\gamma}) = \eta_0 e^{-b(T_f - T_0)} [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}$ y considerando que la temperatura es constante, obtenemos:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \quad (5)$$

$$\dot{\gamma} = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

En donde b, η_0, n, λ y $\dot{\gamma}$ es el parámetro empírico que mide la dependencia de la viscosidad sobre la temperatura, la viscosidad de cizallamiento cero, el índice de ley de potencia, tiempo de relajación y la tasa de deformación respectivamente (Sánchez, S., et. al., 2012).

Ahora bien, el potencial total existente en el sistema se define como:

$$\Phi(x, y) = \phi(x) + \psi(y) \quad (7)$$

En donde $\phi(x), \psi(y)$ es el campo eléctrico aplicado y el campo eléctrico inducido, respectivamente y las fuerzas de campo se definen de la siguiente manera:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \quad (8)$$

$$E_y = -\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} \quad (9)$$

De la ecuación (7) se puede observar que el potencial eléctrico aplicado ϕ solo depende de la dirección x y el potencial eléctrico inducido ψ solo depende de la dirección y y debido a ello sustituyendo la ecuación (7) en las ecuaciones (8) y (9) obtenemos: $E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$ y $E_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$. Por otra parte, para nuestro caso de estudio se considera que el potencial en la pared del microcanal ζ es menor a 25[mV], es decir, $\zeta < 25[\text{mV}]$ y por consiguiente $E_y = 0$.

Considerando que, en nuestro caso de estudio se trabajará con un fluido no newtoniano, la ecuación se desarrollará tomando a la viscosidad como una función del campo de desplazamientos, con lo cual se obtiene que las ecuaciones de cantidad de movimiento quedan de la siguiente manera:

Para el eje x :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho_e E_x \quad (10)$$

Y para el eje y :

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (11)$$

Por otra parte, de acuerdo con la teoría electrostática, el potencial total existente es gobernado por la ecuación de Poisson-Boltzmann, por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (12)$$

En donde ϵ es la permitividad dieléctrica del vacío y como se había mencionado anteriormente ρ_e representa la densidad de carga eléctrica de la solución electrolítica, la cual está dada por la relación: $\rho_e = -2ze n_\infty \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_0}\right)$ y considerando que el máximo potencial es alcanzado en las paredes del microcanal cuando ζ llega a un máximo de 25[mV], el cual es considerado un valor bajo, es posible linealizar el término $\sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_0}\right)$, de esta manera, la relación de la densidad de carga queda de la siguiente forma: $\rho_e = -\frac{2z^2 e^2 n_\infty \psi}{k_B T_0}$, en donde z, e, n_∞, k_B, T_0 es la valencia de la solución electrolítica, la carga elemental, la concentración iónica de la solución, la constante de Boltzmann y la temperatura de referencia respectivamente. Cabe mencionar que la densidad de carga eléctrica ρ_e esta escrita en la forma de la conocida linealización de Debye-Hückel (Masliyah, J. H., et. al., 2006), (Sánchez, S., et. al., 2012).

Existe la propiedad de la conservación de carga, que se presenta en los fenómenos electrocinéticos: $\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0$, donde σ es la conductividad eléctrica y esta se considera constante, por lo tanto, la ecuación de conservación de carga queda de la siguiente manera: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$, y el potencial eléctrico aplicado ϕ solo depende de la longitud en x , se considera una diferencial exacta, quedando de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (13)$$

Condiciones de frontera

Para el presente problema, las ecuaciones de frontera requeridas para resolver el conjunto de ecuaciones (1), (10)-(13) quedan de la siguiente manera:

$$P(x = 0, y) = P(x = L, y) = 0 \quad (14)$$

$$v(x, y = \pm H) = 0, \quad v(x, y = 0) = 0 \quad (15)$$

$$u(x, y = \pm H) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (16)$$

$$\psi(x, y = \pm H) = \zeta, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (17)$$

$$\phi(x = 0, y) = \phi_0, \quad \phi(x = L, y) = 0. \quad (18)$$

Considerando que se trata de un flujo puramente electroosmótico, por lo cual el movimiento del fluido se debe únicamente a la aplicación de un campo eléctrico aplicado, por tanto, no existe un gradiente de presión aplicado o inducido, se considera una presión constante tanto en la entrada del microcanal $x = 0$, como en la salida de este $x = L$ (14). El valor de la velocidad v será igual a cero en las paredes del microcanal $y = H, y = -H$, a su vez, en el centro del microcanal $y = 0$ (15). El valor de la velocidad u , será igual a cero en las paredes del microcanal $y = H, y = -H$ (16) Debido a la naturaleza del sistema, se establece la condición de simetría, por lo tanto, se hace la consideración de que el comportamiento de la velocidad u y el potencial inducido ψ será simétrico desde el centro del microcanal a la pared tanto inferior como superior (16),(17), el potencial eléctrico inducido ψ será igual al potencial zeta ζ que es el valor máximo que este puede alcanzar en las paredes del microcanal $y = H, y = -H$ (14), el potencial eléctrico aplicado ϕ tendrá un valor de referencia ϕ_0 a la entrada del microcanal $x = 0$ y este será cero a la salida de este $x = L$ (18)

Análisis de orden de magnitud

El análisis de escala o de orden de magnitud se utiliza como primer paso en un estudio teórico-numérico con la finalidad de obtener información relevante que permite una descripción más simple del modelo físico a resolver. Este análisis permite encontrar los valores característicos de cada variable (incógnita) del sistema de ecuaciones diferenciales debido a que se puede predecir el comportamiento hidrodinámico del flujo electroosmótico correspondiente a un fluido no newtoniano.

De acuerdo con la geometría del microcanal se establecen las siguientes escalas características para la longitud y la altura, es decir:

$$x \sim L; y \sim H \quad (19)$$

En dirección longitudinal, se hace la consideración de que el potencial eléctrico aplicado característico es generado por el máximo campo eléctrico aplicado, a su vez en dirección transversal el potencial eléctrico inducido característico puede compararse por el generado por el simple contacto entre el material dieléctrico y el fluido ionizado que llega a su valor máximo en las paredes del microcanal que es el potencial zeta ζ , por lo tanto:

$$\phi \sim \phi_0; \psi \sim \zeta \quad (20)$$

De la ecuación de cantidad de movimiento en el eje x , ecuación (10), se puede observar que la única fuerza que promueve el movimiento, es la generada por el campo eléctrico aplicado, por tanto, compite con la fuerza que se opone al movimiento, que es la fuerza producida por el efecto viscoso que se ve reflejado en los términos difusivos (segundas derivadas) de la ecuación antes mencionada y actuando en el eje y , siendo dicho término: $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$, ahora bien, la variación de la viscosidad casi no produce un efecto significativo en la velocidad del fluido y por lo tanto puede ser no considerada $\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \sim 0$, por consiguiente, se realiza la comparación de lo que genera el movimiento contra lo que lo frena, siendo los siguientes términos: $E_x \rho_e \sim \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, quedando el orden de magnitud de la siguiente manera:

$$E_0 \rho_e \sim \eta \frac{u_{HS}}{\lambda_D^2} \quad (21)$$

En donde u_{HS}, λ_D es la velocidad de Helmholtz-Smucbolowski, que es la velocidad máxima que un flujo electroosmótico puede alcanzar y la longitud de Debye que representa el espesor de la capa de Stern mas la longitud de la capa difusa (Nguyen, N. T., et. al., 2019).

Despejando a la velocidad mencionada anteriormente obtenemos:

$$u_{HS} \sim \frac{E_0 \rho_e \lambda_D^2}{\eta} \quad (22)$$

De trabajos previos, tenemos las relaciones: $\lambda_D = \kappa^{-1}$; $\kappa = \sqrt{\frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T_0}}$, donde κ denota el parámetro de Debye-Hückel que a su vez se relaciona con la longitud de Debye de la forma anterior y de igual manera recordando la ecuación de la densidad de carga con la linealización de Debye-Hückel:

$$\rho_e = -2ze n_\infty \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_0}\right) \sim -2 \frac{z^2 e^2 n_\infty \psi}{k_B T_0} \quad (23)$$

consecuentemente introduciendo κ^2 en dicha ecuación obtenemos (Masliyah, J. H., et. al., 2006):

$$\rho_e \sim \epsilon \kappa^2 \zeta \quad (24)$$

Si relacionamos la ecuación (23) con la ecuación (22) obtenemos la siguiente expresión: $u_{HS} \sim \frac{\epsilon \zeta}{\eta} E_0$ y de trabajos previos, obtenemos:

$$u_{HS} = -\frac{\epsilon \zeta}{\eta} E_0 \quad (25)$$

Para conocer la escala característica relativa a la componente de velocidad en dirección y , se considera una comparación tomando como base a la ecuación de continuidad (1), y sabiendo que la escala característica de la componente de velocidad en dirección longitudinal u es u_{HS} y las longitudes características para x y y son L y H respectivamente, por lo tanto, se considera:

$$\frac{u_{HS}}{L} \sim \frac{v_c}{H} = 0 \quad (26)$$

Donde v_c es la escala característica de la componente de velocidad en el eje y , consecuentemente obtenemos:

$$v_c = \frac{u_{HS}}{L} H \quad (27)$$

Por otra parte, los gradientes de presión existentes en las ecuaciones de cantidad de movimiento se deben únicamente al campo eléctrico que es el mecanismo que produce el movimiento y de la misma manera, los términos difusivos en el eje y son los que se opondrían a dicho movimiento, como consecuencia, se realiza la comparación entre dichos términos:

$$E_x \rho_e \sim \frac{\partial P}{\partial x} \quad (28)$$

Y se obtiene:

$$E_x \rho_e \sim \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (29)$$

Y de manera subsecuente se realiza la comparación entre ambos, obteniendo:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim \eta \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \quad (30)$$

Y sustituyendo las escalas características anteriores:

$$\frac{\Delta P_c}{L} \sim \eta \frac{u_{HS}}{H^2} \quad (31)$$

Por lo tanto, la escala característica de la presión queda de la siguiente forma:

$$\Delta P_c \sim \eta \frac{u_{HS} L}{H^2} \quad (32)$$

Modelo matemático adimensional

Con base en el análisis de orden de magnitud, se proponen las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L}; \quad Y = \frac{y}{H}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_{HS}}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c} = \frac{vL}{u_{HS}H} \\ \tilde{P} &= \frac{P - P_0}{\Delta P_C} = \frac{(P - P_0)H^2}{\eta_0 u_{HS} L}; \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0}; \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\zeta} \end{aligned} \quad (33)$$

Sustituyendo las variables adimensionales (33) en la ecuación de continuidad (1) y aplicando el algebra referente al análisis adimensional se obtiene que la ecuación de continuidad adimensional queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad (34)$$

De igual manera despejando las variables adimensionales y sustituyendo en las ecuaciones (10) y (11) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \text{Re} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial X} + [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) - \bar{\kappa}^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dX}
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \text{Re} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \varepsilon^2 [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \\
&\quad + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)
\end{aligned} \tag{36}$$

De igual manera tenemos que:

$$\lambda \dot{\gamma} = \omega_i \tilde{\gamma} \tag{37}$$

En donde $\tilde{\gamma}$ es la tasa de deformación adimensional y se define como:

$$\tilde{\gamma} = \left[2\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + 2\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

Acoplando las variables adimensionales (33) a la ecuación (12), obtenemos que la ecuación de Poisson-Boltzmann adimensional queda de la siguiente manera:

$$\varepsilon^2 \bar{c} \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dX^2} + \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dY^2} = \bar{\kappa}^2 \tilde{\psi} \tag{39}$$

A su vez, aplicando el álgebra referente al análisis adimensional, obtenemos que la ecuación de conservación de carga finalmente nos queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dX^2} = 0 \tag{40}$$

De las ecuaciones anteriores los parámetros adimensionales se definen como:

$$\begin{aligned}
\text{Re} &= \frac{\rho u_{HS} H}{\eta_0}, \varepsilon = \frac{H}{L}, \omega_i = \frac{\lambda u_{HS}}{H} \\
\bar{c} &= \frac{\phi_0}{\zeta}, \bar{\kappa} = \frac{H}{\lambda_D}
\end{aligned} \tag{41}$$

En donde Re , ε , ω_i , $\bar{c}$ y $\bar{\kappa}$ es el número adimensional de Reynolds, la relación entre las dimensiones características del microcanal, el numero adimensional de Weissenberg, la

relación entre el potencial eléctrico aplicado e inducido y el inverso de la longitud de Debye, respectivamente (Bird, Armstrong y Hassager, 1987), (Ramos, Bautista, Lizardi y Méndez, 2017).

Condiciones de frontera adimensionales

Las ecuaciones adimensionales que describen la física del problema están asociadas a las siguientes condiciones de frontera, las cuales se obtuvieron de la sustitución de las variables adimensionales (33) en las condiciones de frontera originales ecuaciones (14) a (18) y por lo tanto se obtienen las siguientes condiciones:

$$\tilde{P}(X = 0, Y) = \tilde{P}(X = 1, Y) = 0 \quad (42)$$

$$\tilde{v}(X, Y = \pm 1) = 0 \quad ; \quad \tilde{v}(X, Y = 0) = 0 \quad (43)$$

$$\tilde{u}(X, Y = \pm 1) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (44)$$

$$\tilde{\psi}(X, Y = \pm 1) = 1 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (45)$$

$$\tilde{\phi}(X = 0, Y) = 1 \quad ; \quad \tilde{\phi}(X = 1, Y) = 0 \quad (46)$$

Es importante resaltar que el presente estudio es un caso general y no particular en microcanales y en la siguiente tabla se proveen valores promedio dados conocidos.

Parámetro	Valor	Unidades
L	10^2	[m]
H	$50 - 200$	[μm]
E_0	10^3	[V/m]
ϵ	10^{-10}	[C/V·m]
η_0	$10^{-3} - 10^{-1}$	[Kg/ms]
ρ	10^3	[Kg/m ³]
λ_D	$1 - 10$	[nm]

Tabla 2.1 Propiedades y parámetros geométricos aplicados al modelo físico de análisis.

Parámetro	Valor
Re	1.0
ε	0.01
$\bar{\kappa}$	10 – 40
n	0.8 – 1.0
ω_i	0.1 – 1.0
X	0.1 – 0.9
Y	0.1 – 0.9

Tabla 2.2 Parámetros adimensionales del presente análisis.

Capítulo 3. Solución numérica del modelo físico del problema

En este capítulo se realiza una breve descripción del funcionamiento del software de uso libre llamado FreeFem++, se implementan los métodos para obtener las ecuaciones y las condiciones iniciales adimensionales que gobiernan el modelo de estudio en su forma variacional con el objetivo de poder resolverlas a través del método de elemento finito, a su vez, se realiza una breve explicación del funcionamiento de los comandos más relevantes y su relación con las ecuaciones.

FreeFem++

Debido a que se requiere resolver de manera numérica el problema descrito mediante las ecuaciones diferenciales parciales adimensionales cuyas variables gobiernan la física del microcanal, se recurre al uso del software FreeFem++ que es un entorno de desarrollo integrado (IDE, por sus siglas en inglés) o plataforma de código abierto de alto nivel, utilizada para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de elementos finitos, con la finalidad de resolver algún fenómeno físico, ya que estos se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales. FreeFem++ utiliza un idioma de usuario para establecer y controlar el problema, de igual manera permite una rápida especificación de ecuaciones diferenciales parciales con la formulación variacional de un problema en estado estacionario y el usuario puede escribir sobre un script para resolver problemas no lineales y dependientes del tiempo (Hecht, F., et. al., 2005).

Se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineal conformado por las ecuaciones: (34),(35),(36),(39) y (40) y se requiere resolver numéricamente las variables $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{P}$, $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$, las cuales son dependientes entre sí, por consiguiente, se recurre a un método iterativo con el objetivo de resolver simultáneamente el sistema, para dicha tarea se recurre al programa FreeFem++.

Método de elemento finito

El método de elemento finito (FEM por sus siglas en inglés *Finite Element Method*) consiste en segmentar el dominio de la solución en elementos con formas más simples, por lo que es posible desarrollar una solución aproximada de la ecuación diferencial parcial (EDP) para cada una de estas regiones. La solución total se obtiene uniendo las soluciones individuales asegurando la continuidad de las fronteras entre los elementos, con lo cual, la EDP se

satisface por secciones. Desarrollar el método de elemento finito, obedece a una serie de instrucciones que se ejecutan paso a paso y en el siguiente orden:

Discretización: El dominio de la solución es dividido en elementos finitos. Los puntos que unen las líneas que forman los lados de los elementos se denominan nodos y estos mismos lados se conocen como líneas o planos nodales.

Ecuaciones de los elementos: En este punto, se desarrollan ecuaciones para aproximar la solución de cada elemento, para esto es necesario seguir dos pasos fundamentales. Como primer paso se elige una función apropiada cuyos coeficientes sean desconocidos, dicha función aproxima la solución. Como segundo paso, se evalúan los coeficientes para que la función calcule la solución de manera óptima. Comúnmente, se emplean polinomios interpolantes de Lagrange ya que son fácilmente manipulables de manera matemática. Con dichos polinomios, se obtienen funciones de aproximación o de forma las cuales ofrecen un medio para predecir valores intermedios que se encuentran entre los nodos. Una vez elegida dicha función de interpolación, se debe manipular la ecuación que gobierna el comportamiento del elemento. Esta ecuación refleja un ajuste de la función a la solución de la EDP con la que se trabaje, para lograr esto, existen métodos como el método directo, el método de residuos ponderados y el método variacional. Los resultados de todos estos métodos son análogos al ajuste de curvas (Chapra, S. C. et. al, 2011). De forma matemática las ecuaciones del elemento obtenido se conforman con un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en forma matricial, de la siguiente manera:

$$[q]\{u\} = \{G\} \quad (47)$$

Donde: $[q]$ es una propiedad del elemento o matriz de rigidez, $\{u\}$ es el vector columna en los nodos y $\{G\}$ es el vector columna determinado por el efecto de cualquier influencia externa aplicada a los nodos.

Ensamble: Una vez obtenidas las ecuaciones de elementos individuales, estos deben unirse o ensamblarse para caracterizar el comportamiento de todo el sistema. Este proceso de ensamble obedece al concepto de continuidad, por lo cual, las soluciones de elementos contiguos se acoplan de manera que los valores de las incógnitas en sus nodos comunes sean equivalentes, se puede observar el ensamble de las versiones individuales a través de la ecuación (47) de la siguiente manera:

$$[Q]\{u'\} = \{G'\} \quad (48)$$

Donde $[Q]$ es la matriz de propiedades de ensamble y $\{u'\}$ y $\{G'\}$ son ensambles de los vectores $\{u\}$ y $\{G\}$ de los elementos individuales respectivamente.

Condiciones de frontera:

$$[\bar{Q}]\{u'\} = \{\bar{G}'\} \quad (49)$$

La barra significa que las condiciones de frontera han sido aplicadas.

Solución: Las soluciones de la ecuación (49) se obtienen con técnicas tales como la descomposición LU entre otras.

Procesamiento posterior: Una vez obtenida la solución, esta se despliega en forma tabular o de manera gráfica (Chapra, S. C. et. al, 2011).

Para el presente caso de estudio, se tienen cinco ecuaciones con cinco incógnitas, altamente dependientes, la aplicación del método de elemento finito, requiere primeramente bajar el orden de los términos difusivos (segundas derivadas), para ello se recurre a la formulación variacional o también conocida como formulación débil, el objetivo de dicha formulación permite pasar una ecuación diferencial parcial de segundo orden a una de primer orden, lo que facilita la discretización, permitiendo usar polinomios de Lagrange de grado uno ($P1 = a_1x + a_0$) y de esta manera conocer la información entre un nodo y otro. La discretización se basa en elementos triangulares, lo que facilita el cálculo entre nodos ya que cada uno de estos, está conectado con otros dos, por lo cual, son puntos donde los polinomios de Lagrange son evaluados y de esta manera se conectan todos los nodos entre sí, conformando un sistema de ecuaciones con la forma de la ecuación (47), a diferencia del método de diferencias finitas, el cual requiere de un mayor número de nodos y por lo tanto mallas más finas que a su vez, requieren de tiempos de cómputo mayores.

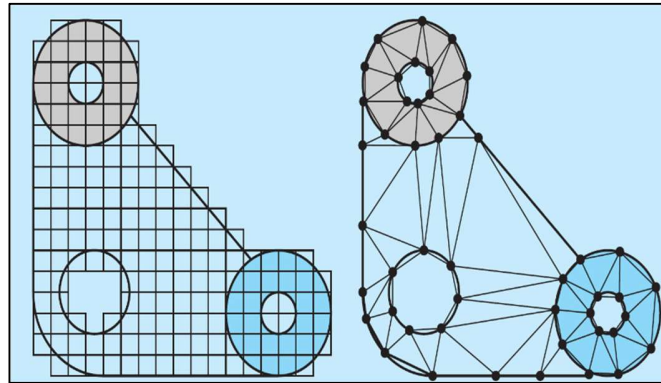


Fig. 3.1 Diferencia entre una malla rectangular y una malla usando elementos triangulares (Chapra, S. C. et. al, 2011)

En la figura 3.1 se puede observar una malla construida con elementos triangulares, lo cual proporciona una mejor aproximación a diferencia de una malla rectangular, una

discretización por elementos finitos es más adecuada para el sistema a resolver. Los programas computacionales que aplican el método de elemento finito pueden utilizar polinomios de Lagrange de grado uno o de mayor grado y entre mayor sea este, más exacto será el cálculo. En el caso de un polinomio de grado uno, se evalúa el punto final e inicial para conocer la información entre estos dos puntos, en el caso de un polinomio de grado dos, el sistema requiere información de tres nodos y la solución se optimiza, pero el tiempo de cómputo, a su vez, se incrementa.

Formulación variacional

La formulación débil o formulación variacional de un problema definido mediante ecuaciones diferenciales, es una forma alternativa en que dichas ecuaciones se escriben en forma integral, dando lugar a ecuaciones tratables mediante los métodos del álgebra lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita o espacio funcional (Ciarlet, P. G., Oden, J. T., 1978). La formulación variacional de un problema consiste en separar la ecuación o ecuaciones en una parte bilineal $a(f, f_{\text{aux}})$ y una parte lineal $l(g, f_{\text{aux}})$ y condiciones de frontera, la parte bilineal está constituida por las segundas derivadas, (laplaciano de f , Δf), mientras que la parte lineal la conforma la función lineal, de igual manera la forma variacional se obtiene multiplicando la ecuación que se pretende resolver por una variable auxiliar arbitraria e integrando el resultado sobre el dominio. Después se utilizan las ecuaciones de Green que disminuyen el grado de la ecuación diferencial multiplicándolo por la parcial de la función auxiliar. La importancia de la forma débil o variacional es que, para problemas de interés práctico, la solución puede calcularse mediante el método de los elementos finitos sin complicaciones considerables, aun cuando la solución analítica no sea fácil de encontrar para un dominio establecido, la expresión general es (Hecht, F., et. al., 2005):

$$\text{problem } S(f, f_{\text{aux}}) = a(f, f_{\text{aux}}) - l(g, f_{\text{aux}}) + (\text{condiciones de frontera}) \quad (50)$$

Donde: la función S representa el problema a resolver y esta en función de f que es la variable que se pretende resolver, junto con f_{aux} que es su variable auxiliar, la función a representa la parte bilineal y la función l representa la parte lineal que está en función de la variable g que es una función lineal.

Para poder introducir las ecuaciones al programa FreeFem++, se deben reescribir a su forma variacional utilizando las ecuaciones de Green (51), (52), término a término, para llevar a cabo este procedimiento, la ecuación a tratar debe estar igualada a cero, y se debe multiplicar a toda la ecuación por la variable auxiliar implementada para después integrar con respecto al dominio Ω y sustituir las condiciones de frontera sobre la frontera $\partial\Omega$.

Ecuaciones de Green:

$$\int_{\partial\Omega} f_{\text{aux}} \nabla f \cdot \bar{n} ds = \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\nabla f_{\text{aux}} \cdot \nabla f) dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Omega} f_{\text{aux}} (\Delta f) dx dy \quad (51)$$

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} (\nabla f) f_{\text{aux}} dx dy = - \int_{\Omega} \int_{\Omega} f (\nabla f_{\text{aux}}) dx dy + \int_{\Gamma} (\bar{n} f) f_{\text{aux}} ds \quad (52)$$

Para obtener la forma variacional de la ecuación de cantidad de movimiento en x esta debe de estar igualada a cero y a su vez, se le debe agregar la componte temporal en los términos convectivos de la ecuación para darle estabilidad al código y manejar un tiempo ficticio debido a la no linealidad de estos términos y poder realizar el cálculo mediante un ciclo iterativo, para después ser multiplicada por la variable auxiliar y por último, integrando con respecto al dominio Ω , quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \frac{\partial P}{\partial X} dx dy \\ & - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) dx dy \\ & - \int_{\Omega} \int_{\Omega} 2 \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} dx dy \\ & - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) dx dy \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \bar{\kappa}^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dX} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Una vez obtenida la Ec. (53) se procede a aplicar las identidades de Green, la Ec. (52) aplicada al término de la presión $\int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \frac{\partial P}{\partial X} dx dy$, considerando las condiciones de frontera para la presión $\tilde{P}(X=0, Y) = \tilde{P}(X=1, Y) = 0$, que en este caso son de tipo Dirichlet, de igual manera la Ec. (48) se aplica para los términos difusivos de la ecuación que en este caso son: $\int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) dx dy$, considerando sus condiciones iniciales $\tilde{u}(X, Y = \pm 1) = 0$; $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}|_{Y=0} = 0$, que son de tipo Dirichlet y Neumann respectivamente, con lo cual se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) dx dy - \int \int_{\Omega} P \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial X} dx dy \\
& + \int \int_{\Omega} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial Y} \right) dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} 2 \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) dx dy \\
& + \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \bar{\kappa}^2 \frac{d\phi}{dX} dx dy = 0
\end{aligned} \tag{54}$$

Para los términos convectivos no es posible utilizar las entidades de Green y dado que son los términos no lineales ya que son productos de funciones con sus mismas derivadas, FreeFem++ utiliza un comando llamado **convect**, que posibilita la resolución de estos términos y debido a la no linealidad de estos, la resolución debe ser iterada por lo que se hace uso de un ciclo, para ello la componente temporal se descompone de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{u}^n}{\Delta t} \tag{55}$$

Aplicando algebra y reescribiendo los términos convectivos de la ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) dx dy \\
& = \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \left(\frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{u}^n}{\Delta t} + \tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right) dx dy \\
& = \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \frac{1}{\Delta t} \left[\tilde{u}^n - \Delta t \left(\tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right) \right] dx dy
\end{aligned} \tag{56}$$

Donde los términos dentro de los corchetes representan el comando **convect**, por lo tanto, los términos difusivos quedan de la siguiente manera:

$$\int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} dx dy - \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{u}^n) dx dy \tag{57}$$

Donde $\tilde{u}^{n+1}$ es la variable $\tilde{u}$ en tiempo actual, $\tilde{u}^n$ representa a $\tilde{u}$ en un tiempo anterior y Δt representa el tamaño de paso, por lo tanto, la ecuación de momentum en el eje x en su forma variacional queda como:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} dx dy - \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon \text{Re} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{u}^n) dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} P \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial X} dx dy + \int \int_{\Omega} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial Y} \right) dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} 2\tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) dx dy \\
& + \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \bar{\kappa}^2 \frac{d\phi}{dX} dx dy = 0
\end{aligned} \tag{58}$$

Aplicando el mismo análisis para la ecuación de momentum en el eje y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\Omega} \tilde{v}_{\text{aux}} \varepsilon^3 \text{Re} \frac{\tilde{v}^{n+1}}{\Delta t} dx dy - \int \int_{\Omega} \tilde{v}_{\text{aux}} \varepsilon^3 \text{Re} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{v}^n) dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} P \frac{\partial \tilde{v}_{\text{aux}}}{\partial Y} dx dy + \int \int_{\Omega} \varepsilon^2 [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{v}_{\text{aux}}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{v}_{\text{aux}}}{\partial Y} \right) dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} 2\tilde{v}_{\text{aux}} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} dx dy \\
& - \int \int_{\Omega} \varepsilon^2 \tilde{v}_{\text{aux}} \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) dx dy = 0
\end{aligned} \tag{59}$$

Como se puede observar en las Ecs. (58) y (59) tanto la ecuación de cantidad de movimiento en x como la ecuación de momentum en y fueron multiplicadas por sus variables auxiliares de las componentes de velocidad $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ respectivamente, ahora bien, para el caso de la ecuación de continuidad se procede a multiplicarla por una presión auxiliar P_{aux} , debido a que se trata de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, pero dado que no existe un término que relacione la presión en la ecuación de continuidad, se procede a sumar una variable ξ del orden de 1×10^{-10} multiplicando a la presión P para no afectar el comportamiento del sistema, después

se procede a aplicar el método para la formulación variacional quedando la ecuación de continuidad de la siguiente forma:

$$\int \int_{\Omega} P_{\text{aux}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) dx dy + \int \int_{\Omega} \xi P_{\text{aux}} P dx dy = 0 \tag{60}$$

Ahora bien, para la ecuación de Poisson-Boltzmann debemos incorporar la componente temporal como en el caso de las ecuaciones de cantidad de movimiento para darle estabilidad al código, por lo tanto, la ecuación (39) queda de la siguiente manera:

$$\varepsilon^2 \bar{c} \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dX^2} + \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dY^2} - \bar{\kappa}^2 \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \quad (61)$$

Para esta ecuación se deben realizar varias consideraciones, la ecuación de conservación de carga esta igualada a cero $\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dX^2} = 0$, el potencial eléctrico inducido solo actúa sobre la longitud transversal Y , multiplicando por la variable auxiliar ψ_{aux} , igualando a cero, aplicando las ecuaciones de Green y considerando las condiciones de frontera $\tilde{\psi}(X, Y = \pm 1) = 1$; $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y}|_{Y=0} = 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega} \tilde{\psi}_{\text{aux}} \frac{\tilde{\psi}^{n+1}}{\Delta t} dx dy - \int \int_{\Omega} \tilde{\psi}_{\text{aux}} \frac{\tilde{\psi}^n}{\Delta t} dx dy \\ & + \int \int_{\Omega} \left[0 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\text{aux}}}{\partial X} \right) + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\text{aux}}}{\partial Y} \right] dx dy + \int \int_{\Omega} \tilde{\psi}_{\text{aux}} \bar{\kappa}^2 \tilde{\psi} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Por último, para la ecuación de conservación de carga:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial Y^2} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \quad (63)$$

Aplicamos la misma metodología, se agrega la componente temporal para darle estabilidad al código, se iguala a cero, se multiplica por su variable auxiliar y se aplica el teorema de Green, para obtener su forma variacional, la cual queda de la siguiente forma:

$$\int \int_{\Omega} \tilde{\phi}_{\text{aux}} \frac{\tilde{\phi}^{n+1}}{\Delta t} dx dy - \int \int_{\Omega} \tilde{\phi}_{\text{aux}} \frac{\tilde{\phi}^n}{\Delta t} dx dy + \int \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{\phi}_{\text{aux}}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{\phi}_{\text{aux}}}{\partial Y} dx dy = 0 \quad (64)$$

Código

Para poder resolver el sistema de ecuaciones correspondiente al modelo físico en cuestión, es necesario generar la malla que es el conjunto de elementos finitos que describen el dominio de análisis en cuestión, en este caso el microcanal rectangular. Dado que se está considerando un microcanal simétrico, es decir, el comportamiento de las variables con respecto a la longitud transversal y , es igual, del centro del microcanal $y = 0$, a la pared superior en la longitud H , así como del centro del microcanal $y = 0$, a la pared inferior en la longitud $-H$, es posible simplificar el sistema, considerando únicamente la parte superior que va desde el centro del microcanal $y = 0$, a la pared superior $y = H$, a su vez, el adimensionamiento de las variables independientes tanto x como y , es decir:

$$X = \frac{x}{L} \quad (65)$$

Cuando x toma valores de 0 a L , por lo cual, X toma valores que van de 0 a 1, y a su vez con la variable y :

$$Y = \frac{y}{H} \quad (66)$$

Cuando y toma valores de 0 a H , por lo cual Y toma valores que van de 0 a 1, la región en la cual se va a describir el comportamiento del flujo electroosmótico, queda simplificado a un cuadrado unitario.

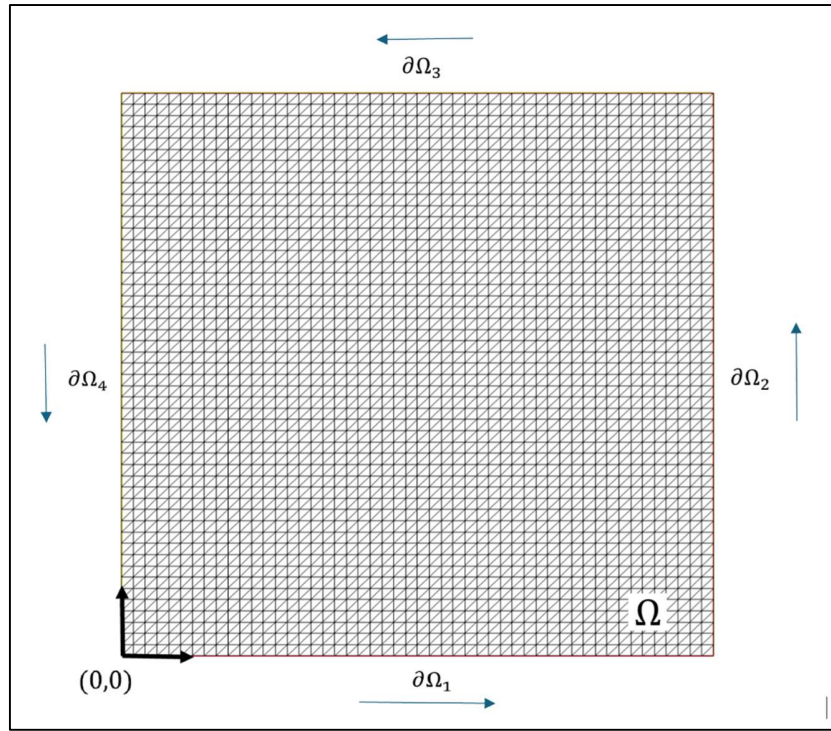


Fig. 3.2 Malla que describe el espacio por el cual pasa el fluido en el microcanal.

A este cuadrado unitario se le denomina dominio Ω y a sus fronteras $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_3$ y $\partial\Omega_4$ a los lados que conforman el cuadrado partiendo del origen y recorriendo el perímetro del dominio en sentido contrario a las manecillas del reloj respectivamente. Esta malla fue generada en FreeFem++ mediante el comando **mesh** y el comando **square** el cual por defecto genera un cuadrado unitario con su respectiva malla denominada para este caso como Th , dividiendo el cuadro unitario en cincuenta divisiones por lado, la línea de programación para la generación de esta malla queda de la siguiente manera:

```
mesh Th=square(50,50);
```

Una vez generada la malla Th, es necesario generar el espacio de elementos finitos definidos sobre Th, dentro del espacio de elementos finitos se declaran las variables dependientes y por cada variable dependiente tenemos una variable auxiliar. En elemento finito podemos trabajar con polinomios de primero, segundo y hasta tercer grado, conforme aumenta el grado del polinomio cuando se está interpolando, la precisión será mejor, pero los tiempos de cómputo aumentarían, para generar el espacio de elementos finitos se hace uso del comando **fespace**, en nuestro caso generamos dos espacios de elementos finitos, uno para calcular las variables de velocidad: u, v, uaux, vaux denominado Uh, con un polinomio de grado dos **P2** y otro para calcular las variables de presión: P, Paux denominado Ph con un polinomio de grado uno **P1**, la línea de programación queda de la siguiente forma:

```
fespace Uh(Th,P2);
Uh u,v, uaux, vaux;
```

```
fespace Ph(Th,P1);
Ph P, Paux;
```

El siguiente paso consiste en definir el problema en FreeFem++, para definir un problema se utiliza el comando **problem** y se le asigna un nombre, en este caso, lo denominamos como Carreau, en esta parte debe estar igualada a todas las ecuaciones en su forma variacional para ser resueltas, la línea de programación es la siguiente:

```
problem Carreau ([u,v,P],[uaux,vaux,Paux])=
```

A continuación, se ingresan las ecuaciones en su forma débil o variacional trabajadas anteriormente, compuesta por su parte lineal, bilineal y sus condiciones de frontera como lo establece la ecuación (52), para ello, FreeFem++ utiliza comandos para designar varios operadores matemáticos. Para definir una doble integral sobre la región con la cual se está trabajando, se utiliza el comando **int2d(Th)**, ya que Th representa a la región sobre la cual se trabaja, es decir, el mallado, de la misma manera el comando **dx(u)**, representa la primera parcial con respecto de x de la variable dependiente u que representa a la velocidad longitudinal y el comando **dy(u)** representa la primera parcial con respecto de y .

Realizando el análisis de la ecuación de cantidad de movimiento en x (58), los términos que componen la parte convectiva, es decir:

$$\int_{\Omega} \tilde{u}_{aux} \varepsilon \text{Re} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} dx dy - \int_{\Omega} \tilde{u}_{aux} \varepsilon \text{Re} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], -\Delta t, \tilde{u}^n) dx dy \quad (67)$$

Se introducen al programa con la siguiente escritura:

$$\text{Int2d(Th)(Re*eps*uaux*u/dt)-int2d(Th)(Re*eps*uaux*convect([uold,vold],-dt,uold)/dt)}$$

Donde el termino eps representa el parámetro ε , dt es el tamaño de paso, uaux es la variable auxiliar de la componente de velocidad longitudinal u y tanto uold como vold son las componentes de velocidad en un tiempo anterior u^n, v^n respectivamente.

Para la parte de la ecuación referente a la presión:

$$+ \int_{\Omega} P \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial X} dx dy \quad (68)$$

La linea de programación referente queda:

$$+\text{int2d(Th)(P*dx(uaux))}$$

Para los términos difusivos es decir los términos que contienen segundas derivadas, es decir:

$$- \int_{\Omega} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{u}_{\text{aux}}}{\partial Y} \right) dx dy \quad (69)$$

queda programada de la siguiente manera:

$$-\text{int2d(Th)(weiss*(pow(eps,2)*dx(u)*dx(uaux)+dy(u)*dy(uaux)))}$$

Aquí weiss se refiere al termino no newtoniano equivalente a $[1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}$, y se introduce de la siguiente forma:

$$\text{weiss} = \text{pow}((1. + \text{pow}(\text{we} * \text{gamma}, 2), (n-1.)/2);$$

y a su vez, la tasa de deformación adimensional $\tilde{\gamma} = [2\varepsilon^2 (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X})^2 + (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X})^2 + 2\varepsilon^2 (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y})^2]^{\frac{1}{2}}$, se introduce como sigue:

$$\text{gamma} = \text{sqrt}((2.*\text{pow}(\text{eps}, 2.))*((\text{pow}(\text{dx}(\text{u}), 2.)) + (\text{dy}(\text{u}) * \text{dx}(\text{v})) + (\text{pow}(\text{dy}(\text{v}), 2.))) + (\text{pow}(\text{eps}, 4.)*\text{pow}(\text{dx}(\text{v}), 2.)) + (\text{pow}(\text{dy}(\text{u}), 2.)));$$

FreeFem++ utiliza el comando **pow** para elevar variables a respectivas potencias, en este caso pow(eps,2) es equivalente a tener ε^2 , a su vez, el comando **sqrt** representa la raíz cuadrada.

Los terminos no newtonianos de la ecuación:

$$- \int \int_{\Omega} 2\tilde{u}_{\text{aux}} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} dx dy \quad (70)$$

$$- \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) dx dy \quad (71)$$

Se introducen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & -\text{int2d}(\text{Th})(2.\text{pow}(\text{eps},2)*\text{uaux}*dx(\text{weiss})*dx(u)) \\ \text{Y} \\ & -\text{int2d}(\text{Th})(\text{uaux}*dy(\text{weiss})*(dy(u)+\text{pow}(\text{eps},2)*dx(v))) \end{aligned}$$

Respectivamente.

Por último, el termino referente al campo eléctrico aplicado:

$$+ \int \int_{\Omega} \tilde{u}_{\text{aux}} \bar{\kappa}^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dX} dx dy \quad (72)$$

Se introduce de la forma:

$$+\text{int2d}(\text{Th})(\text{uaux}*\text{pow}(k,2)*\text{psi}*dx(\text{phi}))$$

En donde k representa el parámetro $\bar{\kappa}$, psi el potencial eléctrico inducido adimensional $\tilde{\psi}$ y phi el potencial eléctrico aplicado adimensional $\tilde{\phi}$.

En nuestro caso tenemos condiciones de frontera de tipo Dirichlet, las cuales, son establecidas mediante el comando **on**, para esta ecuación, no hay movimiento en las paredes del microcanal $\tilde{u}(X, Y = \pm 1) = 0$, por lo tanto, las condiciones de frontera se escriben de la siguiente manera:

$$+\text{on}(3,u=0)$$

Cabe aclarar que, en este caso, 3 representa la pared del microcanal $\partial\Omega_3$, véase Fig. 3.2

Todo el procedimiento anterior se aplica para la ecuación de cantidad de movimiento en el eje Y , y de esta manera queda definidas las partes referentes a las ecuaciones de movimiento,

para la parte de la ecuación de continuidad (60), la línea de programación queda definida de la siguiente forma:

$$\text{int2d(Th)}(\text{Paux}*(\text{dx}(\text{u})+\text{dy}(\text{v}))+\text{int2d(Th)}(\text{xi}*\text{P}*\text{Paux})$$

en donde xi representa la variable ξ , la cual no produce cambios significativos en el comportamiento de las ecuaciones debido a su valor del orden de 1×10^{-10} pero la cual es necesario para complementar los términos de la presión en el sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones de Poisson Boltzmann y de conservación pueden ser utilizadas para conocer los valores de ϕ y ψ , los problemas de dichas ecuaciones pueden ser definidos en FreeFem++ de la siguiente manera, para la ecuación de Poisson-Boltzmann:

$$\begin{aligned} \text{Problem Psi}(\text{psi}, \text{psiaux}) = & \text{int2d(Th)}(\text{psiaux}*\text{psi}/\text{dt}) - \text{int2d(Th)}(\text{psiaux}*\text{psiold}/\text{dt}) \\ & + \text{int2d(Th)}(0. * (\text{dx}(\text{psi}) * \text{dx}(\text{psiaux})) + \text{dy}(\text{psi}) * \text{dy}(\text{psiaux})) \\ & + \text{int2d(Th)}(\text{psiaux} * \text{pow}(\text{k}, 2) * \text{psi}) \\ & + \text{on}(1, \text{psi} = 0) \\ & + \text{on}(3, \text{psi} = 1); \end{aligned}$$

En esta parte se multiplico por cero la componente en x ya el potencial eléctrico inducido no actúa en esta dirección.

Para la ecuación de conservación de carga:

$$\begin{aligned} \text{Problem Phi}(\text{phi}, \text{phiaux}) = & \text{int2d(Th)}(\text{phiaux}*\text{phi}/\text{dt}) - \text{int2d(Th)}(\text{phiaux}*\text{phiold}/\text{dt}) \\ & + \text{int2d(Th)}((\text{dx}(\text{phi}) * \text{dx}(\text{phiaux})) + \text{dy}(\text{phi}) * \text{dy}(\text{phiaux})) \\ & + \text{on}(2, \text{phi} = 0) \\ & + \text{on}(4, \text{phi} = 1); \end{aligned}$$

Definidos los problemas de Carreau, Psi y Phi, se implementa un ciclo para obtener los valores de las incógnitas requeridas, los resultados se muestran en pantalla con ayuda del comando **plot** y las variables que se desean conocer.

$$\text{plot}(\text{u});$$

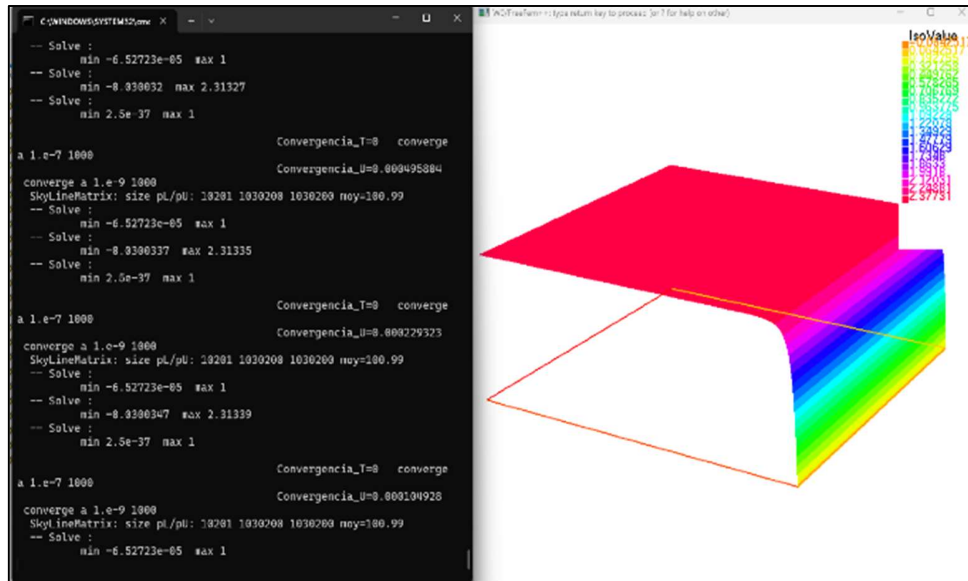


Fig. 3.3 Interfaz de FreeFem++

En la fig. 3.3 se puede observar la simulación en FreeFem++ del perfil de velocidades en dirección longitudinal sobre un flujo puramente electroosmótico, la simulación corresponde a la definición de las ecuaciones de cantidad de movimiento tanto en el eje x , como en el eje y y la ecuación de continuidad, las cuales están definidas a través del “problem Carreau”.

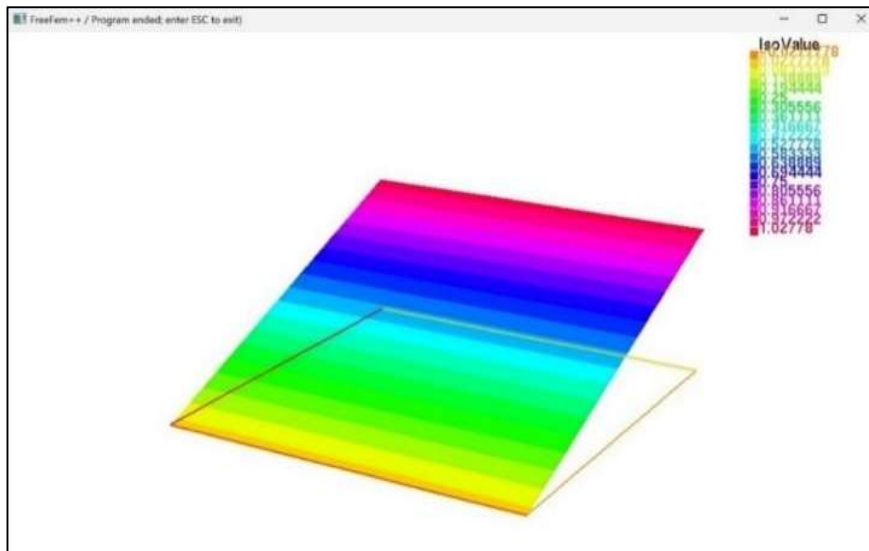


Fig. 3.4 Gráfica de potencial eléctrico aplicado $\tilde{\phi}$

En la fig. 3.4 se puede observar el gráfico del potencial electrico aplicado sobre la interfaz de FreeFem++, que se rige bajo la definición de la ecuacion de conservación de carga, en este caso, definido como “problem Phi”.

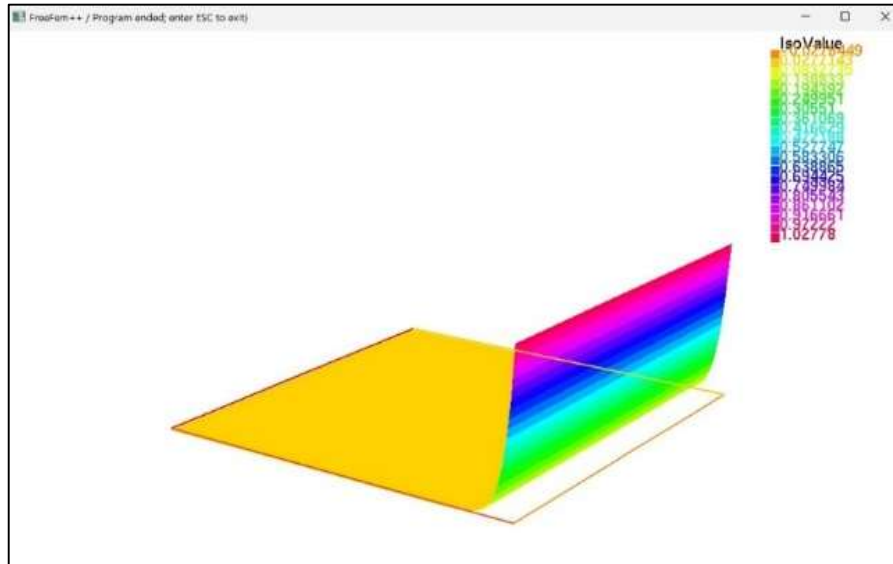


Fig. 3.5 Gráfica de potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$

En la fig. 3.5 es posible observar el gráfico del potencial eléctrico inducido sobre la interfaz de FreeFem++, el programa arroja el grafico de la definición del “problem Psi”.

Capítulo 4 Análisis de resultados

En este capítulo se discuten los resultados obtenidos numéricamente y se realiza una detallada explicación de las gráficas obtenidas, así como su interpretación física y la influencia de cada uno de los parámetros adimensionales analizados. Se obtuvieron gráficas del potencial eléctrico aplicado e inducido adimensionales, presión adimensional, velocidad longitudinal adimensional y caudal volumétrico adimensional. La variación de parámetros representa diversos escenarios en los perfiles analizados.

Potencial eléctrico aplicado

El potencial eléctrico adimensional es una diferencial exacta ya que únicamente es función de la longitud adimensional.

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dX^2} = 0 \quad (73)$$

Al obtener la solución numérica de esta ecuación se obtienen los siguientes gráficos.

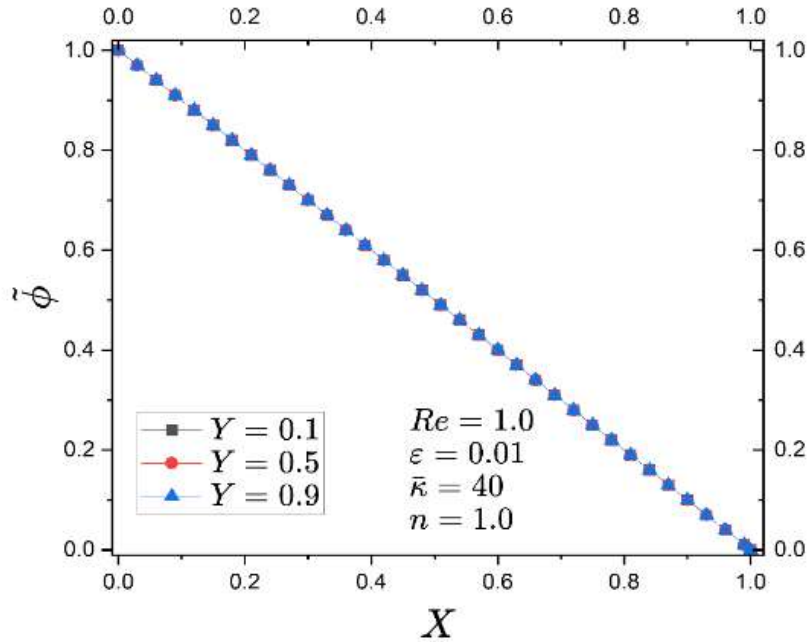


Fig.4.1 Perfiles de potencial eléctrico aplicado $\tilde{\phi}$, a lo largo de la coordenada longitudinal X para diferentes valores de posición Y

En la Figura 4.1 se obtienen los perfiles del potencial eléctrico aplicado $\tilde{\phi}$ como una función de la coordenada longitudinal X para distintos valores de la coordenada transversal Y . Los parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$ y $n = 1.0$. Como se observa en los perfiles, el potencial eléctrico aplicado tiene un comportamiento lineal, alcanzando un valor máximo de $\tilde{\phi} = 1$ en la entrada del microcanal, mientras que a la salida, el potencial eléctrico aplicado adimensional es igual a cero. Otro aspecto importante a analizar, es que el potencial eléctrico aplicado es una función únicamente de la coordenada longitudinal, $\tilde{\phi}(X)$, y por tal motivo, al variar la coordenada transversal, no existe algún tipo de cambio, razón por la cual, las tres gráficas cuentan con el mismo comportamiento. Este último aspecto, se aprecia matemáticamente con la ecuación (73).

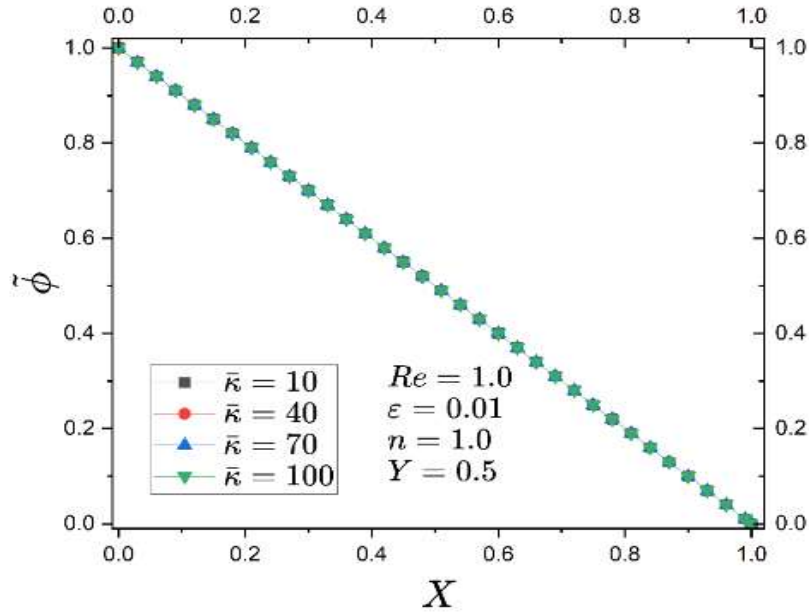


Fig.4.2 Perfiles de potencial eléctrico aplicado $\tilde{\phi}$, a lo largo de la coordenada longitudinal X para diferentes valores del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$, para una posición transversal $Y = 0.5$

En la Figura 4.2 se obtienen los perfiles del potencial eléctrico aplicado $\tilde{\phi}$ como una función de la coordenada longitudinal X para distintos valores del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$. Los parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $n = 1.0$ y $Y = 0.5$. Como se puede apreciar, el potencial eléctrico aplicado tampoco depende del parámetro adimensional de la longitud de Debye, ya que al ir aumentando el valor de $\bar{\kappa}$ de 10 a 100, los perfiles tienen el mismo comportamiento. Cabe aclarar, que el potencial aplicado, tal y como sucede en la Figura 4.1, cuenta con una dependencia lineal, alcanzado un máximo a la entrada y un mínimo a la salida. Así mismo, esta gráfica se evaluó en $Y = 0.5$, pero por los resultados de la anterior figura, se obtendrían los mismos perfiles para distintos valores de la coordenada transversal Y .

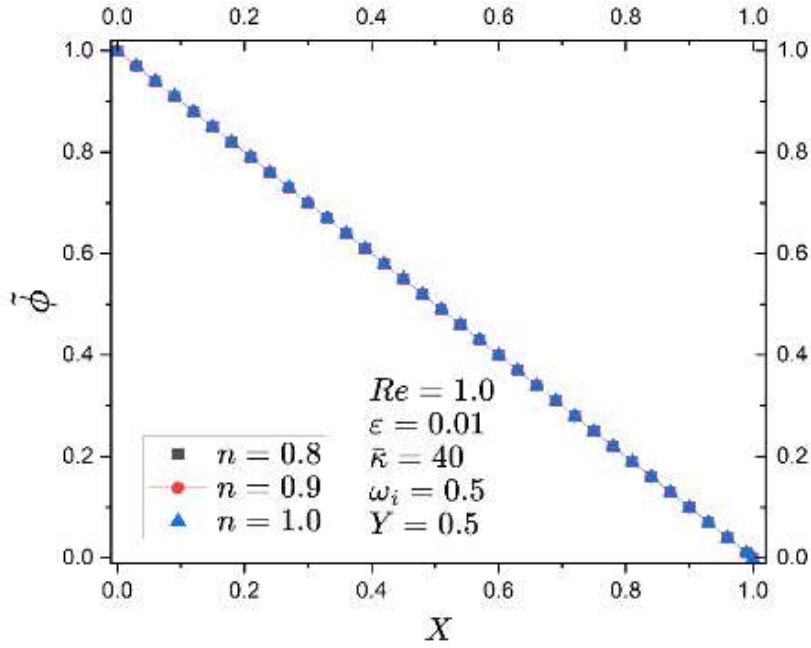


Fig.4.3 Perfiles de potencial eléctrico aplicado $\tilde{\phi}$, a lo largo de la coordenada longitudinal X para diferentes valores del índice de ley de potencia n , para una posición transversal $Y = 0.5$

En la Figura 4.3 se obtienen los perfiles del potencial eléctrico aplicado $\tilde{\phi}$ como una función de la coordenada longitudinal X para distintos valores del índice de ley de potencia n . Los parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$ y $\omega_i = 0.5$. Como se puede apreciar, el potencial eléctrico aplicado tampoco depende del comportamiento del fluido, medido por el índice de ley de potencia n , ya que al ir aumentando el valor de n de 0.8 a 1.0, los perfiles tienen el mismo comportamiento. De igual manera, el potencial eléctrico aplicado cuenta con una dependencia lineal, alcanzando un máximo en la entrada y un mínimo a la salida. Esta gráfica fue evaluada en la coordenada transversal $Y = 0.5$ y como se aprecia en la figura 4.1, el potencial eléctrico aplicado, mantendrá el mismo comportamiento para cualquier valor de Y .

En los gráficos anteriores es posible analizar que el comportamiento del potencial eléctrico aplicado adimensional es completamente invariante de las propiedades reológicas del fluido, a su vez, es independiente del efecto que produce el espesor de la longitud de Debye y de la coordenada transversal.

Potencial eléctrico inducido

Se resuelven las ecuaciones referentes al potencial eléctrico inducido adimensional las cuales son:

$$\varepsilon^2 \bar{c} \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dX^2} + \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dY^2} = \bar{\kappa}^2 \tilde{\psi}; \quad \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dX^2} = 0 \quad (74)$$

Con lo cual, se obtienen los siguientes gráficos:

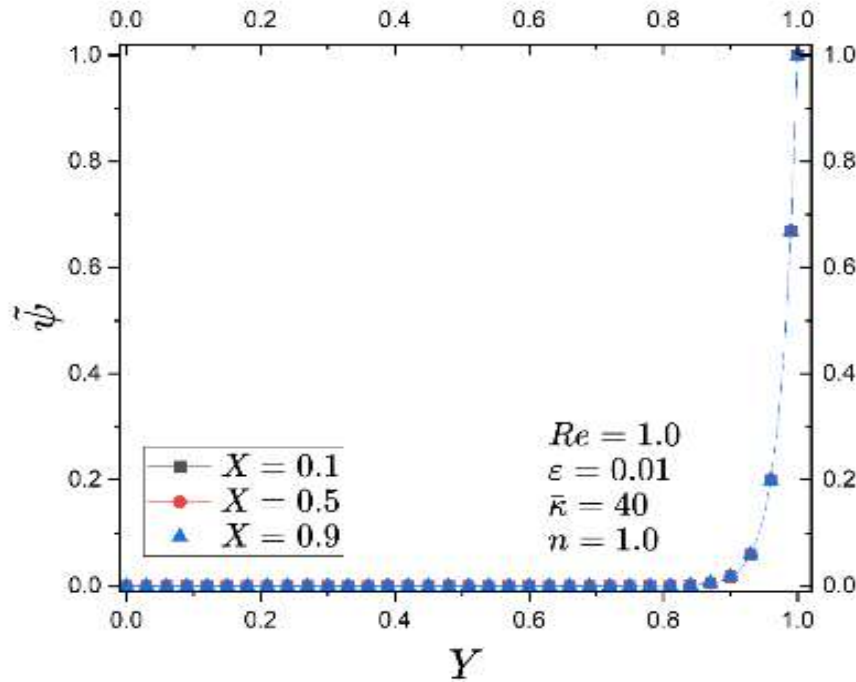


Fig 4.4 Perfiles del potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ a lo largo de la longitud transversal Y para diferentes valores de la posición longitudinal X

En la Figura 4.4 se obtienen los perfiles del potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ como una función de la coordenada transversal Y para distintos valores de la coordenada longitudinal X . Los parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$ y $n = 1.0$. Como se puede apreciar, el potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ tiene un comportamiento parabólico que alcanza su máximo $\tilde{\psi} = 1$ en la pared del microcanal $Y = 1$, el comportamiento de este parámetro se mantiene prácticamente de la misma manera con un valor nulo en casi todo el recorrido transversal del microcanal, sin embargo, al acercarse a la pared, en un valor aproximado de $Y = 0.9$, el potencial eléctrico inducido crece de manera repentina, a su vez, es posible percatarse de que el potencial eléctrico inducido es invariante

con respecto a la coordenada longitudinal X ya que al ir aumentando el valor de X de 0.1 a 0.9, los perfiles mantienen el mismo comportamiento.

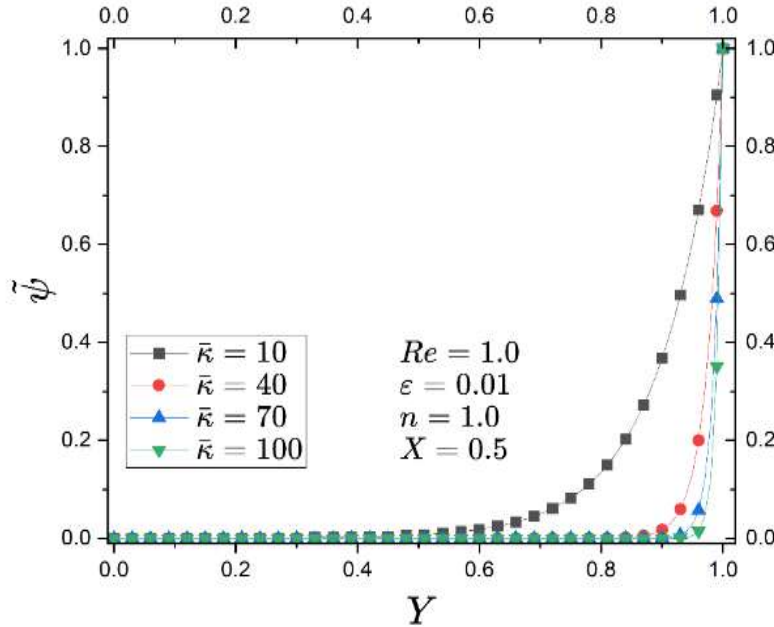


Fig 4.5 Perfiles del potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ a lo largo de la longitud transversal Y para diferentes valores del parametro adimensional $\bar{\kappa}$

En la Figura 4.5 se obtienen los perfiles del potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ como una función de la coordenada longitudinal Y para distintos valores del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$. Los parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\epsilon = 0.01$, $n = 1.0$ y $X = 0.5$. En esta gráfica es posible observar que el potencial eléctrico inducido posee un comportamiento parabolico que alcanza su máximo $\tilde{\psi} = 1$, en la pared del microcanal $Y = 1$, el comportamiento parabolico del potencial eléctrico inducido es invariante a lo largo de la longitud transversal, sin embargo, su valor crece de manera subita al acercarse a la pared del microcanal, cabe aclarar que el comportamiento parabolico difiere para cada valor del parametro adimensional de la longitud de Debye, para un valor de $\bar{\kappa} = 10$, el cambio se da de manera mas tenue, para valores a partir de $\bar{\kappa} = 40$, el cambio es mas subito, pero es posible observar que el comportamiento se va asemejando para este valor en adelante hasta llegar a $\bar{\kappa} = 100$. Cabe reiterar que el comportamiento del potencial eléctrico inducido es invariante con respecto a las coordenadas longitudinales X , como se puede apreciar en la figura 4.4.

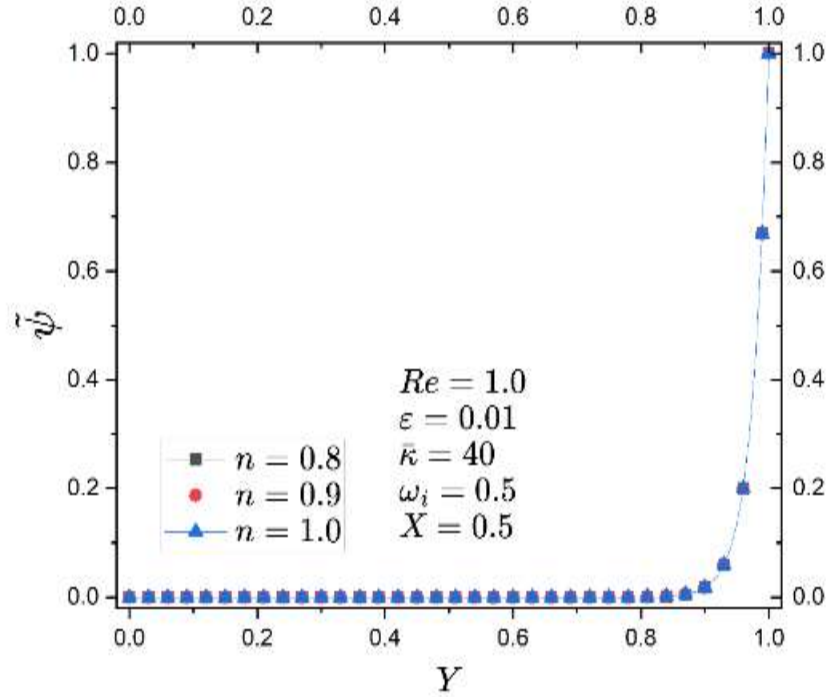


Fig 4.6 Perfiles del potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ a lo largo de la longitud transversal Y para diferentes valores del índice de ley de potencia n

En la Figura 4.6 se obtienen los perfiles del potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ como una función de la coordenada transversal Y para distintos valores del índice de ley de potencia n . Los parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$ y $\omega_i = 0.5$. Como se puede apreciar, el potencial eléctrico inducido $\tilde{\psi}$ tiene un comportamiento parabolico que alcanza su maximo $\tilde{\psi} = 1$ en la pared del microcanal $Y = 1$. De igual manera que en las gráficas anteriores, el crecimiento del valor del potencial electrico inducido crece repentinamente al irse aproximando a la pared del microcanal en un valor aproximado de $Y = 0.9$, a su vez, es posible observar en la gráfica que, el comportamiento del potencial eléctrico inducido es invariante con respecto al comportamiento del fluido evaluado a través del índice de ley de potencia n , cabe aclarar que este análisis fue evaluado en la coordenada longitudinal $X = 0.5$, sin embargo, como se aprecia en la gráfica 4.4, el comportamiento del potencial eléctrico inducido es independiente de la posición longitudinal X .

De las gráficas anteriores, es posible observar que el potencial eléctrico inducido adimensional es independiente de las propiedades reológicas del fluido y de la coordenada longitudinal, por otra parte, presenta variaciones con respecto al parametro adimensional de la longitud de Debye.

Presión

La parte de la presión se observa en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{Re} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial X} + [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\ & + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \\ & + \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) - \bar{\kappa}^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dX} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \text{Re} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = & -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \varepsilon^2 [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\ & + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

Al resolver numericamente el sistema de ecuaciones anterior se obtuvieron los siguientes resultados:

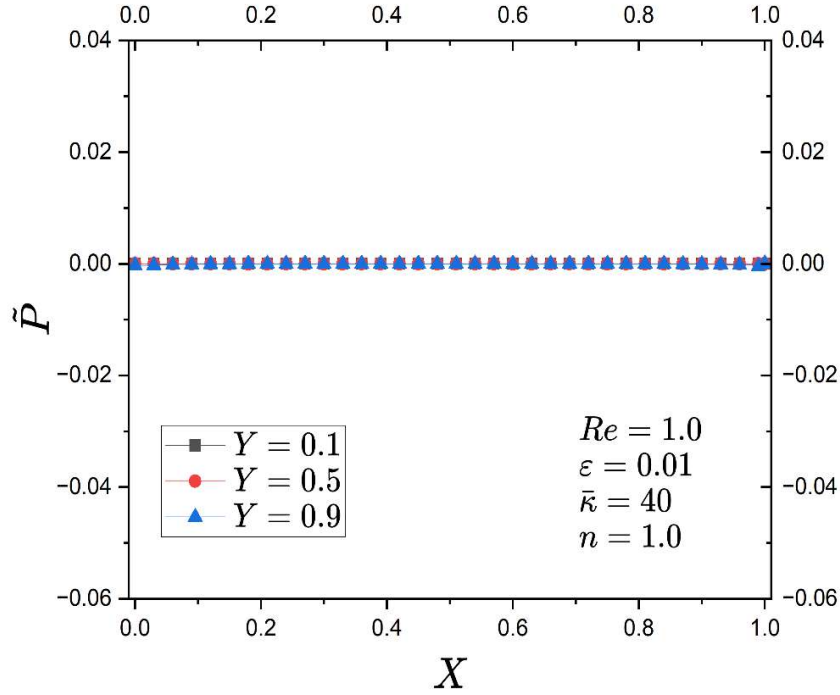


Fig. 4.7. Perfiles de Presión adimensional $\tilde{P}$ a lo largo de coordenada transversal X para diferentes valores de la posición Y .

En la Figura 4.7 se obtienen los perfiles para la presión adimensional $\tilde{P}$ como una función de la coordenada longitudinal X para distintos valores de la coordenada transversal Y . Los

parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$ y $n = 1.0$. Como se observa en los perfiles, la presión adimensional $\tilde{P}$ mantiene un valor constante de cero tanto en la entrada como en la salida del microcanal, es decir, a través de todo el recorrido longitudinal, cabe resaltar que, al variar la coordenada transversal, no existe ningún tipo de cambio, por lo cual en las gráficas podemos observar el mismo comportamiento independientemente de la posición transversal, la presión adimensional $\tilde{P}$ al presentar un valor de cero, es posible confirmar que se trata de un flujo que no es impulsado por diferencias de presión, se trata de un flujo puramente electroosmótico como lo dicta la teoría.

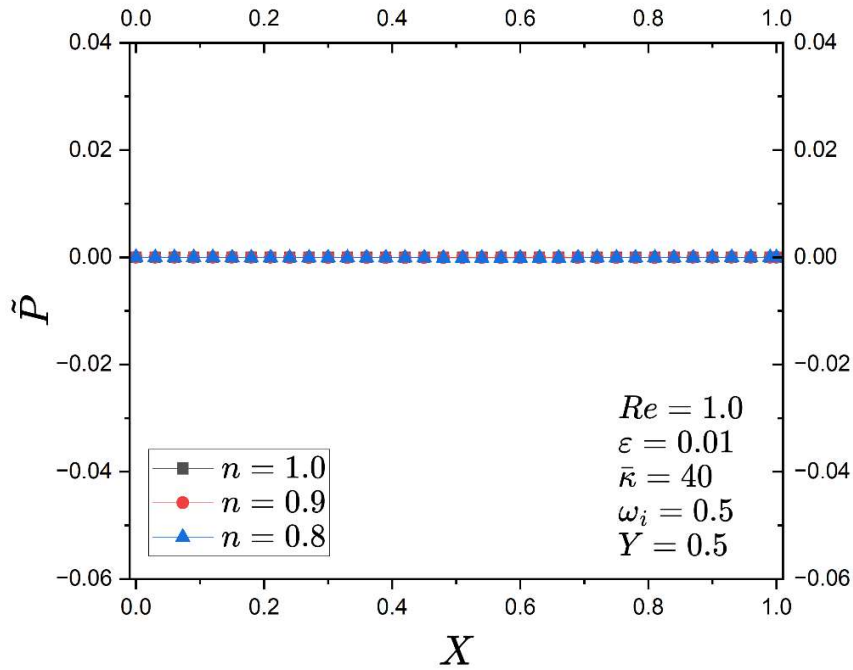


Fig. 4.8. Perfiles de Presión adimensional $\tilde{P}$ a lo largo de coordenada transversal X para diferentes valores del índice de ley de potencia n

En la Figura 4.8 se obtienen los perfiles para la presión adimensional $\tilde{P}$ como una función de la coordenada longitudinal X para distintos valores del índice de ley de potencia n . Los parámetros adimensionales utilizados en esta gráfica son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$ y $\omega_i = 0.5$. Como se observa en la gráfica, la presión adimensional $\tilde{P}$ mantiene un valor constante de cero tanto en la entrada como en la salida del microcanal, es decir, a través de toda la distancia longitudinal independientemente del índice de ley de potencia, ya que se puede apreciar en la gráfica que un el índice de ley de potencia n aumenta de 0.8 a 1.0, sin embargo, los perfiles de velocidad mantienen el mismo comportamiento, esta gráfica fue evaluada en la coordenada transversal $Y = 0.5$, ya que como es posible observar en la figura 4.7, el

comportamiento de la presión adimensional es independiente de los valores tomados para la coordenada transversal Y .

Velocidad longitudinal

Para obtener las gráficas de la velocidad longitudinal adimensional, se procedió a resolver numericamente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \epsilon \text{Re} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial X} + [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\ & + 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \\ & + \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) - \bar{\kappa}^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dX} \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \text{Re} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = & -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \epsilon^2 [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\ & + 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \\ & + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [1 + (\omega_i \tilde{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (78)$$

Se obtuvieron las siguientes gráficas:

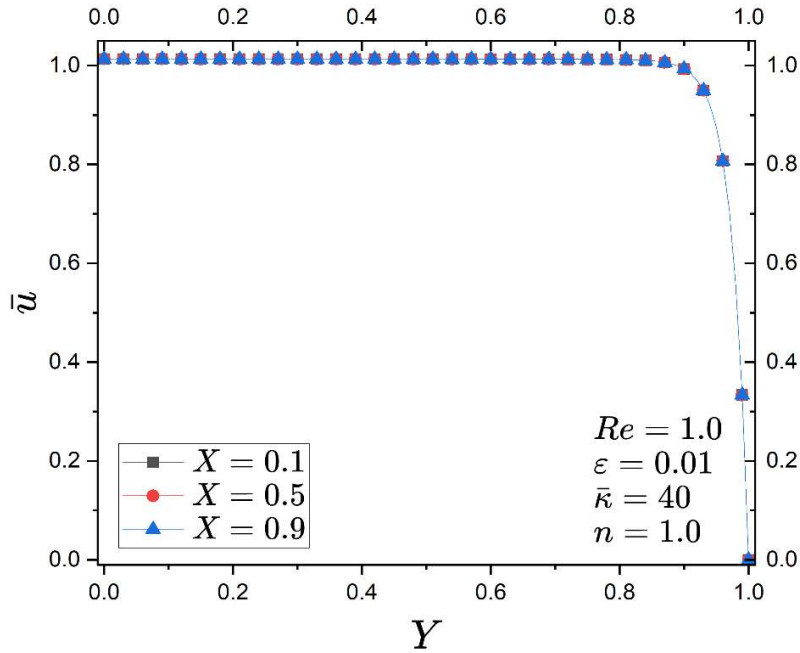


Fig. 4.9 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores de posición longitudinal X , con valor de índice de ley de potencia $n = 1$.

En la Figura 4.9 se grafican los perfiles de la velocidad adimensional $\tilde{u}$ como una función de la coordenada transversal Y para diferentes valores de la coordenada longitudinal $X = 0.1, 0.5$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$ y $n = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad longitudinal alcanza un máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$), obteniendo un valor de aproximadamente uno, y alcanzando una velocidad mínima en las paredes del microcanal ($Y = 1$). Este último caso, se debe a la condición de no deslizamiento. Además, el comportamiento de la velocidad es uniforme entre $Y = 0$ y $Y = 0.85$, aproximadamente, como una consecuencia del flujo tapón, clásico en un problema de flujo puramente electroosmótico (el fluido no se mueve por presión); y a partir de $Y = 0.9$, la velocidad cae rápidamente a cero. Cabe aclarar que estamos analizando únicamente la mitad del microcanal como una consecuencia de las condiciones de frontera de simetría impuestas en el modelo físico, es decir, que lo que sucede en la parte superior del microcanal, también ocurre en la parte inferior. Otro punto para considerar es que la velocidad $\tilde{u}$ es únicamente función de la coordenada transversal, ya que como se puede apreciar, para diferentes valores de la coordenada longitudinal, los perfiles tienen el mismo comportamiento; por esta razón, en toda esta tesis, analizaremos solamente gráficas de la velocidad longitudinal como una función de la coordenada transversal.

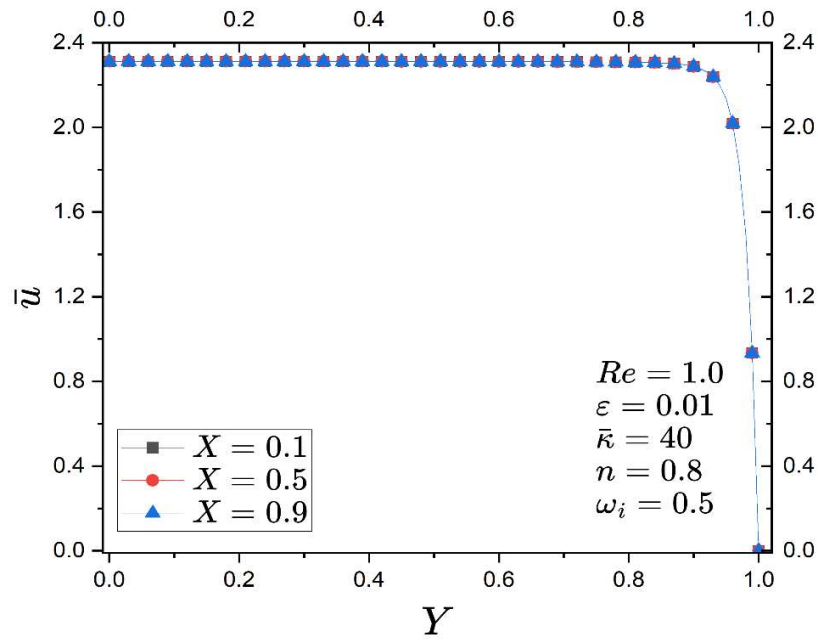


Fig. 4.10. Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores de posición longitudinal X , con valor de índice de ley de potencia $n = 0.8$

En la Figura 4.10, se obtienen los perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ como función de la coordenada transversal Y para distintos valores de la coordenada longitudinal $X = 0.1, 0.5$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$, $n = 0.8$ y $\omega_i = 0.5$. Cabe aclarar que para este caso, el índice de ley de potencia tiene un valor de 0.8 que difiere con el caso de la Figura 4.9 cuyo valor representa a un fluido newtoniano ($n = 1$), este cambio implica la aparición del número adimensional de Weissenberg (ω_i) como se aprecia en las ecuaciones de momentum adimensionales (32) y (33) al cual se le asigna un valor de 0.5 . Como se observa en la figura, la velocidad longitudinal vuelve a alcanzar su máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$) y su mínimo en las paredes del microcanal ($Y = 0$), debido a la condición de no deslizamiento, de igual manera, mantiene un comportamiento uniforme que cae abruptamente a partir de $Y = 0.9$, caracterizando un flujo de tipo tapón, sin embargo, es posible observar un aumento en la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ de más del doble en comparación con el caso de que representa a un fluido newtoniano ($n = 1$) mostrado en la Figura 4.9. De igual manera la velocidad adimensional longitudinal no muestra variación con respecto a los diferentes valores de las coordenadas longitudinales ya que los perfiles muestran el mismo comportamiento.

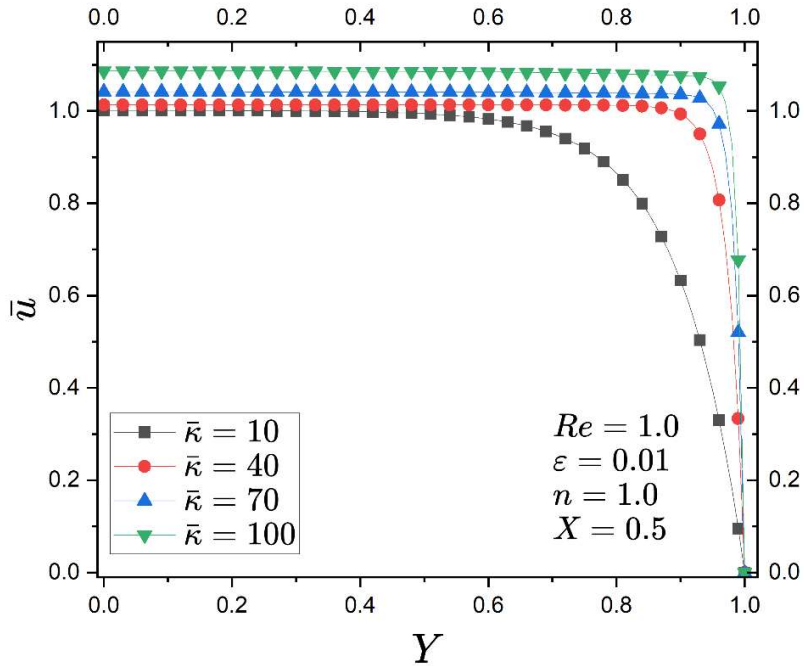


Fig. 4.11. Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$, con valor de índice de ley de potencia $n = 1$

En la Figura 4.11 se analizan los perfiles de velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ en función de la coordenada transversal Y para distintos valores del parámetro adimensional de la longitud de Debye $\bar{\kappa} = 10, 40, 70$ y 100 . Los parámetros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $n = 1.0$ y $X = 0.5$. Como es posible observar en la figura, se mantiene la condición de no deslizamiento ya que la velocidad adimensional longitudinal alcanza su valor máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$) y su mínimo en la pared del mismo ($Y = 1$), a su vez, el comportamiento de la velocidad se mantiene uniforme y cae abruptamente a cero conforme se acerca a la pared del microcanal, razón por la cual el fluido mantiene el comportamiento típico de un flujo de tipo tapón característico del flujo puramente electroosmótico, sin embargo, es posible observar un ligero aumento en la velocidad adimensional longitudinal alcanzando un valor aproximado de 1.1, cuando el valor del parámetro adimensional de la longitud de Debye $\bar{\kappa}$ es de cien, de igual manera para este valor, la velocidad se mantiene estable hasta un valor aproximado de ($Y = 0.95$) cayendo a cero de manera más repentina en ($Y = 1$). Cuando el valor del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$ obtiene un valor de 10, la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ mantiene un valor aproximado de 1.0 el cual comienza a disminuir a partir de ($Y = 0.6$), haciendo la caída menos abrupta.

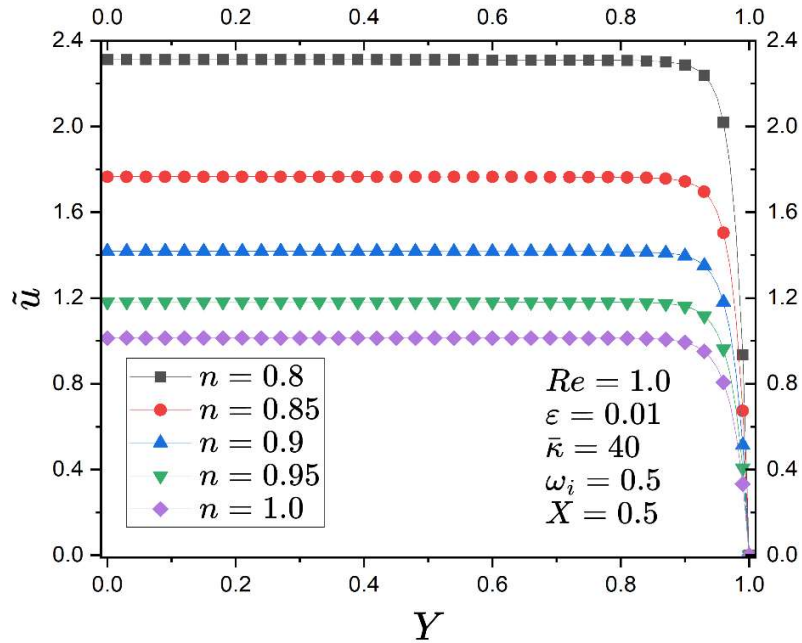


Fig.4.12 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de coordenada transversal Y para diferentes valores del índice de ley de potencia n

En la Figura 4.12 se grafican los perfiles de la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ en función de la coordenada transversal Y para diferentes valores del índice de ley de potencia $n = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$ y 1.0 . Los parametros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$, $\omega_i = 0.5$ y $X = 0.5$. Como se aprecia en la figura, los perfiles de velocidad mantienen el mismo comportamiento, todos tienen su máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$) y su mínimo en la pared ($Y = 1$) por lo tanto obedecen a la condición de no deslizamiento, todos mantienen un comportamiento de velocidad uniforme entre valores de $Y = 0$ y $Y = 0.85$ aproximadamente y a partir de un valor aproximado de $Y = 0.9$ la velocidad cae rápidamente a cero, por lo cual se pueden caracterizar como flujos de tipo tapón, la diferencia radica en los aumentos de velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ debido al decremento del índice de ley de potencia n y un número de Weissenberg (ω_i) fijo de 0.5 , lo que coincide con la información de la Figura 4.10, para un valor de índice de ley de potencia $n = 1$ la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ alcanza un valor aproximado de 1.0 , para un valor de índice de ley de potencia de $n = 0.8$, la velocidad adimensional longitudinal máxima alcanzada es de aproximadamente 2.3 , este cambio en el índice de ley de potencia representa un aumento aproximado de más del doble en la velocidad adimensional longitudinal.

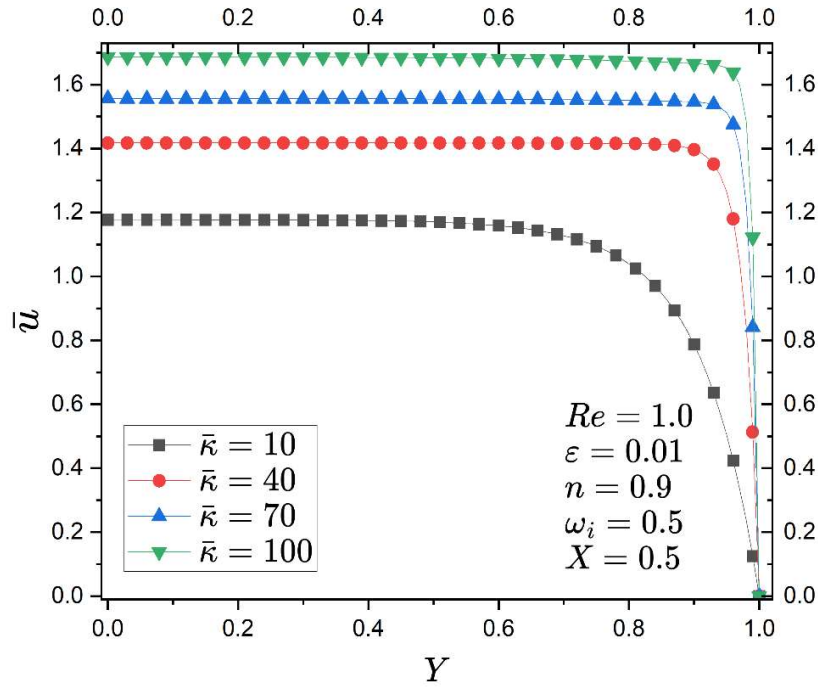


Fig. 4.13 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$, con valor de índice de ley de potencia $n = 0.9$

En la Figura 4.13 se obtienen perfiles de velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ en función de la coordenada transversal Y para diferentes valores del parametro adimensional de la longitud de Debye $\bar{\kappa} = 10, 40, 70$ y 100 . Los parametros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $n = 0.9$, $\omega_i = 0.5$ y $X = 0.5$. Como se observa en la figura, para un valor fijo del índice de ley de potencia $n = 0.9$, los perfiles de velocidad adimensional longitudinal muestran incrementos en sus valores máximos que ocurren en el centro del microcanal ($Y = 0$), conforme el parámetro adimensional de la longitud de Debye aumenta, cabe aclarar que para valores de $\bar{\kappa} = 100, 70, 40$ y 10 , se obtienen velocidades máximas aproximadas de $\tilde{u} = 1.2, 1.4, 1.55$ y 1.7 respectivamente, los perfiles de velocidad en donde $\bar{\kappa}$ obtiene valores entre 40 y 100 , el comportamiento es similar, sin embargo, es posible notar una diferencia en el perfil donde $\bar{\kappa} = 10$, cuya caída en la velocidad es menos abrupta que las anteriores, todos los perfiles se rigen bajo la condición de no deslizamiento y se caracterizan como flujos de tipo tapón. Es de suma importancia indicar que un cambio en el parámetro adimensional de la longitud de Debye de 10 a 100 , representa un incremento en la velocidad adimensional longitudinal cuyos valores van de aproximadamente 1.2 a 1.7 .

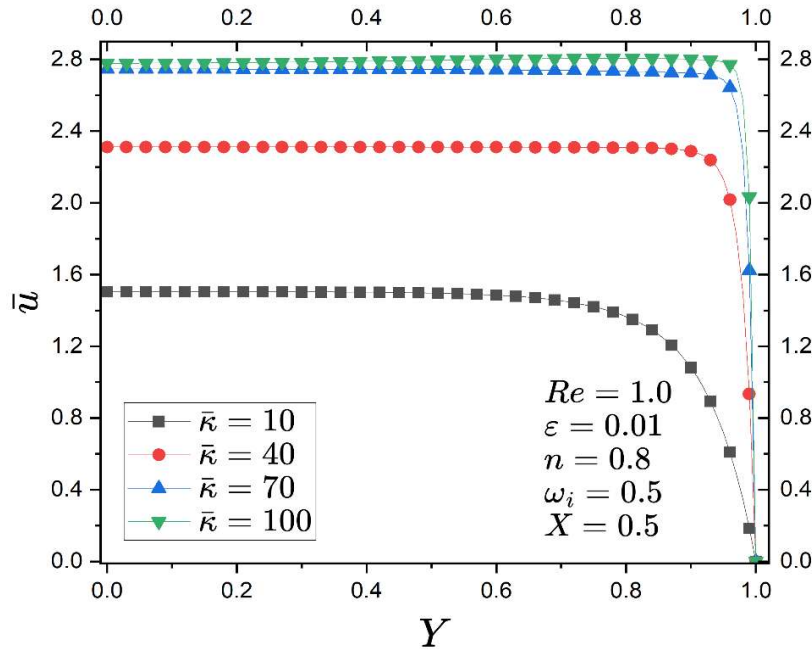


Fig. 4.14 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$, con valor de índice de ley de potencia $n = 0.8$

En la Figura 4.14 se obtienen perfiles de velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ en función de la coordenada transversal Y para diferentes valores del parametro adimensional de la

longitud de Debye $\bar{\kappa} = 10, 40, 70$ y 100 . Los parametros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $n = 0.8$, $\omega_i = 0.5$ y $X = 0.5$. Como se observa en la figura, un cambio en el índice de ley de potencia n de 0.9 a 0.8 , representa un cambio significativo en la velocidad adimensional longitudinal como se observa en la figura 4.13 en donde el valor máximo de la velocidad alcanzado es de aproximadamente 1.7 con un valor del parámetro adimensional de la longitud de Debye de $\bar{\kappa} = 100$ y los resultados obtenidos en esta figura para el mismo valor del parámetro adimensional $\bar{\kappa}$, pero para un valor del índice de ley de potencia de 0.8 , la velocidad máxima alcanzada es de aproximadamente 2.8 . Cabe destacar que los perfiles en donde el parámetro $\bar{\kappa}$ es de 70 y de 100 , el comportamiento parece aproximarse. Salvo estas diferencias, los perfiles mantienen comportamientos similares en los explicados en la Figura 4.13.

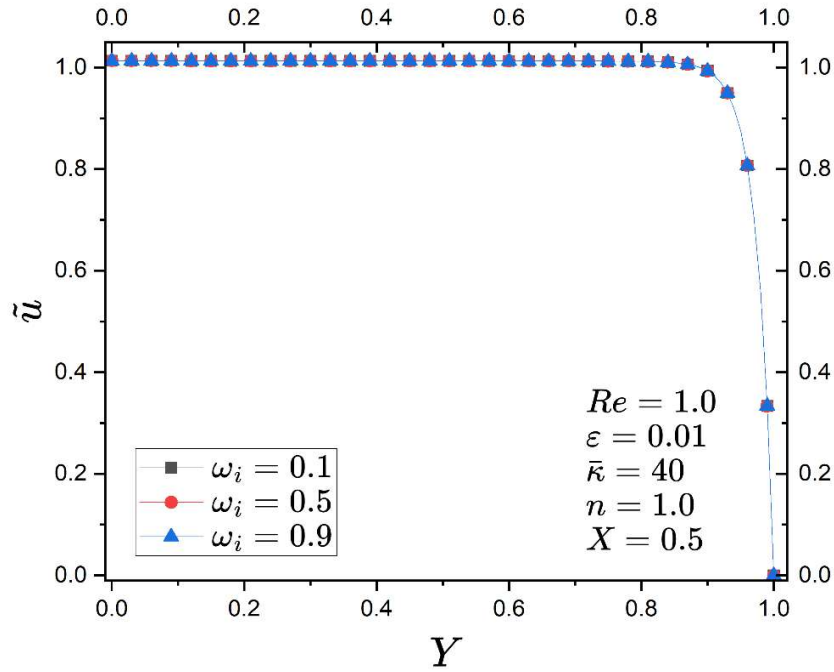


Fig. 4.15. Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número de Weissenberg ω_i , con valor de índice de ley de potencia $n = 1.0$

En la Figura 4.15 se obtienen perfiles de velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ en función de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número adimensional de Weissenberg $\omega_i = 0.1, 0.5$ y 0.9 . Los parametros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $n = 1.0$ y $X = 0.5$. En la figura es posible observar los perfiles de velocidad clásicos de fluidos newtonianos cuyo valor máximo de la velocidad adimensional longitudinal se alcanza en el centro del microcanal ($Y = 0$) con un valor aproximado de uno y un valor mínimo en la pared del microcanal ($Y = 1$) con un valor de cero, comportamiento que se debe a la

condición de no deslizamiento, cabe destacar que el comportamiento de la velocidad es uniforme entre aproximados de la coordenada transversal que van de $Y = 0$ a $Y = 0.85$ como consecuencia del comportamiento clásico de un flujo de tipo tapón característico del flujo puramente electroosmótico el cual no es impulsado por presión y cuyo valor cae de manera abrupta a partir de un valor a aproximado de $Y = 0.9$. Es posible comprobar como se muestra en las ecuaciones de momentum (32) y (33) que para un valor de ley de potencia de uno, el número adimensional de Weissenberg pierde todo significado, por lo tanto, los perfiles se mantienen iguales, sin importar los valores del número adimensional antes mencionado.

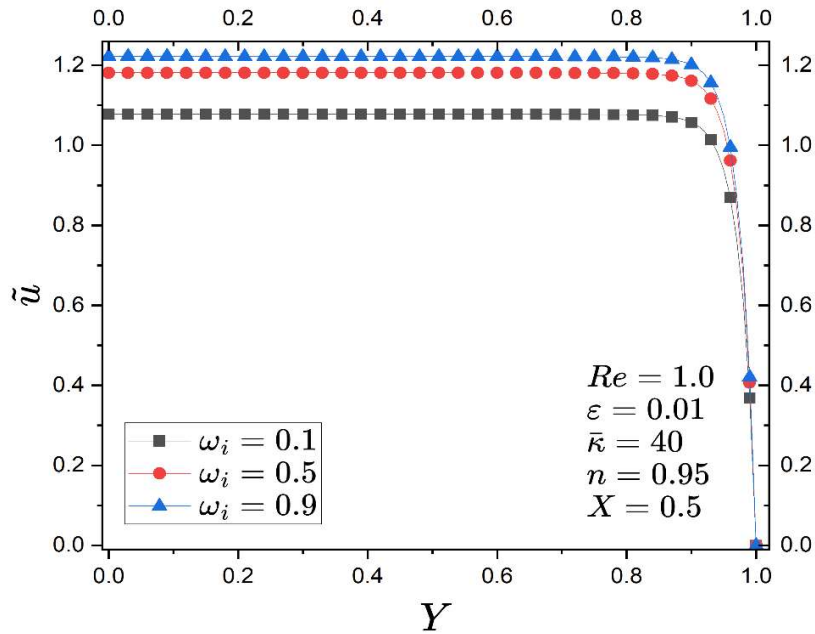


Fig. 4.16 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número de Weissenberg ω_i , con valor de índice de ley de potencia $n = 0.95$

En la figura 4.16 se grafican los perfiles de la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ para diferentes valores del número de Weissenberg $\omega_i = 0.1, 0.5$ y 0.9 . Los parámetros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\epsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$, $n = 0.95$ y $X = 0.5$. Como se aprecia en la figura hay una disminución en el índice de ley de potencia el cual se mantiene en un valor fijo de 0.95 , cabe destacar que este cambio en dicho índice conlleva un aumento en la velocidad comparado con el caso de fluido newtoniano ($n = 1$), como es posible comprobar en la Figura 4.12. Para valores de índice de ley de potencia menores a uno, el número de Weissenberg comienza a tener relevancia como se muestra en las ecuaciones de momentum

(32) y (33), podemos observar que para valores de número de Weissenberg $\omega_i = 0.1, 0.5$ y 0.9 , se alcanzan valores aproximados de velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u} = 1.09, 1.19$ y 1.21 respectivamente, por lo tanto, es importante destacar que el aumento en el número de Weissenberg conlleva un aumento en la velocidad adimensional longitudinal para fluidos con valores de índice de ley de potencia menores a la unidad, a su vez, el comportamiento de los perfiles con valores de número de Weissenberg de 0.5 y 0.9 son numéricamente parecidos. Los perfiles alcanzan su máximo en el centro del microcanal y su mínimo en la pared, debido a la condición de no deslizamiento, a su vez mantienen perfiles de flujo tipo tapón.

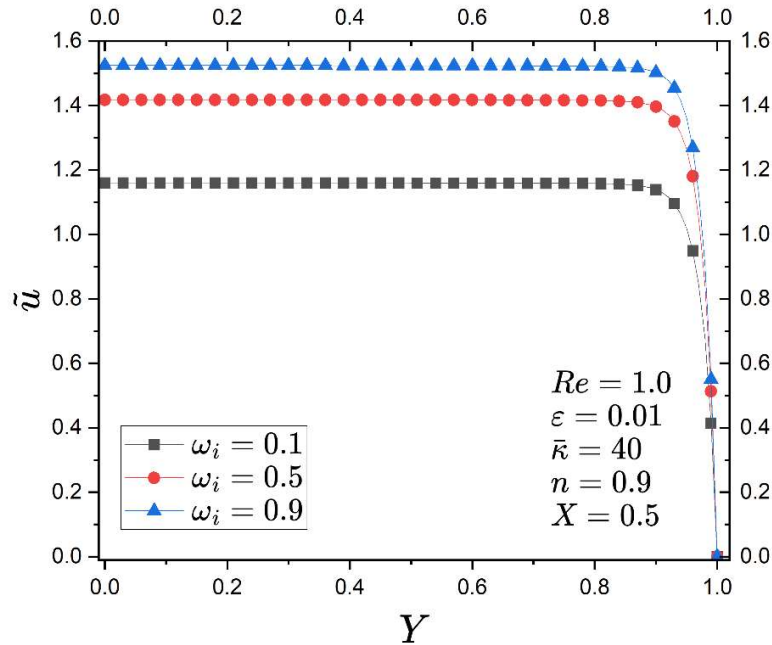


Fig. 4.17 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número de Weissenberg ω_i , con valor de índice de ley de potencia $n = 0.9$

En la figura 4.17 se obtienen los perfiles de la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ para diferentes valores del número de Weissenberg $\omega_i = 0.1, 0.5$ y 0.9 . Los parámetros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$, $n = 0.9$ y $X = 0.5$. Como se puede ver en la figura, una disminución del índice de ley de potencia de 0.95 a 0.9 conlleva un aumento en la velocidad adimensional longitudinal aproximado de 1.09 a 1.18 con un valor de número de Weissenberg de 0.1 con respecto a los resultados obtenidos en la Figura 4.16, de igual manera para un valor de número de Weissenberg de 0.9 , la velocidad aumenta aproximadamente de 1.18 a 1.52 . Los perfiles alcanzan su máximo en el centro del microcanal y su mínimo en la

pared, debido a la condición de no deslizamiento, a su vez mantienen perfiles de flujo tipo tapón.

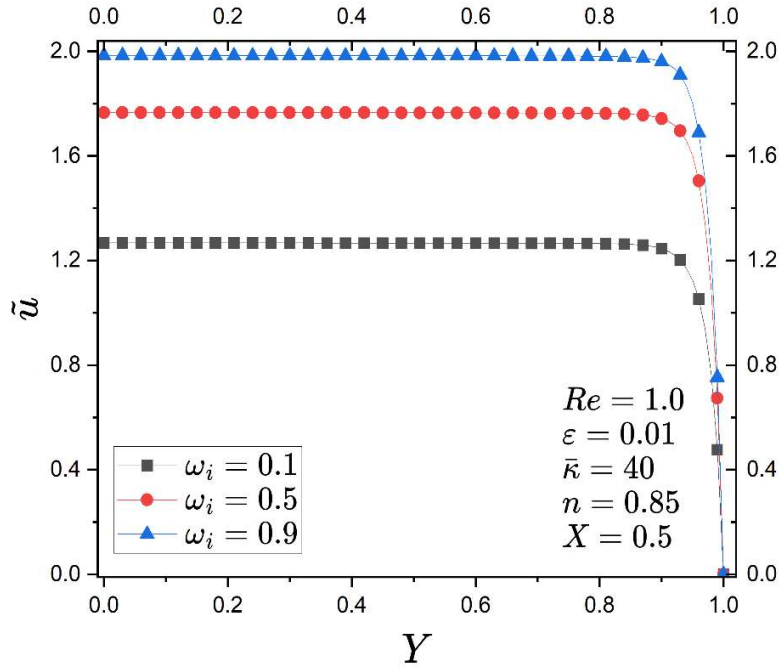


Fig. 4.18. Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número de Weissenberg ω_i , con valor de índice de ley de potencia $n = 0.85$

En la Figura 4.18 se grafican los perfiles de la velocidad adimensional $\tilde{u}$ como una función de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número adimensional de Weissenberg $\omega_i = 0.1, 0.5$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$, $n = 0.85$ y $X = 0.5$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad longitudinal alcanza un máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$), y una velocidad mínima en las paredes del microcanal ($Y = 1$). debido a la condición de no deslizamiento. Además, el comportamiento de la velocidad es uniforme entre $Y = 0$ y $Y = 0.85$, aproximadamente, como una consecuencia del flujo tapón, clásico en un problema de flujo puramente electroosmótico (el fluido no se mueve por presión); y apartir de $Y = 0.9$, la velocidad cae rápidamente a cero. Para un valor de $\omega_i = 0.1$, la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$ máxima es de aproximadamente 1.25, para un valor de $\omega_i = 0.5$, la velocidad máxima es de aproximadamente 1.8 y para un valor de $\omega_i = 0.9$, la velocidad máxima presenta un valor aproximado de 2.0, estos resultados son considerados para un valor de índice de ley de potencia n fijo de 0.85, que, de igual manera, aumenta la velocidad con respecto a los fluidos con $n = 0.9$ mostrados en la Figura 4.17.

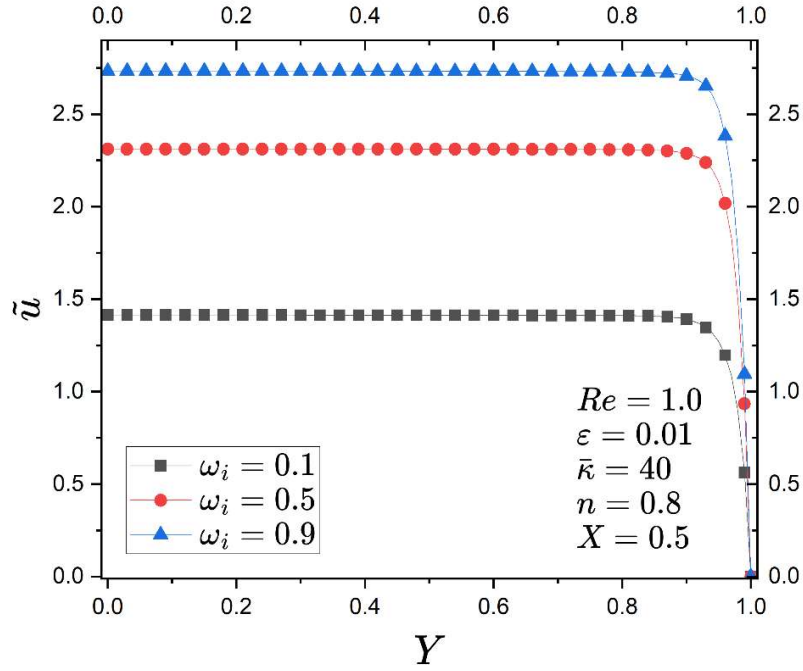


Fig. 4.19 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número de Weissenberg ω_i , con valor de índice de ley de potencia $n = 0.8$

En la Figura 4.19 se grafican los perfiles de la velocidad adimensional $\tilde{u}$ como una función de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número adimensional de Weissenberg $\omega_i = 0.1, 0.5$ y 0.9 . Los valores de los parámetros adimensionales son: $Re = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\kappa} = 40$, $n = 0.8$ y $X = 0.5$. En la figura se observa que para un valor fijo de índice de ley de potencia $n = 0.8$, el cual produce un aumento de velocidad con respecto a los resultados de la Figura 4.18 cuando $n = 0.85$, se observa que para valores de $\omega_i = 0.1, 0.5$ y 0.9 , las velocidades aproximadas máximas alcanzadas que se generan en el centro del microcanal son de $\tilde{u} = 1.35, 2.25$ y 2.75 respectivamente. Por lo tanto, se puede decir que un cambio en el índice de ley de potencia de 0.8 a 0.95 y de igual manera un cambio en el número de Weissenberg de 0.1 a 0.9 adimensional puede casi triplicar el valor de la velocidad adimensional longitudinal $\tilde{u}$.

Caudal

El caudal volumetrico adimensional ayuda a visualizar de manera global, los resultados del presente trabajo. El caudal volumétrico adimensional $\tilde{Q}$ con ancho unitario se define como (Sánchez, S., et. al., 2012):

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{2 u_{HS} h} = \int_0^1 \tilde{u} dY \quad (79)$$

Para un caudal volumétrico adimensional en función del índice de ley de potencia y variando el número adimensional de Weissenberg, se obtiene el siguiente gráfico.

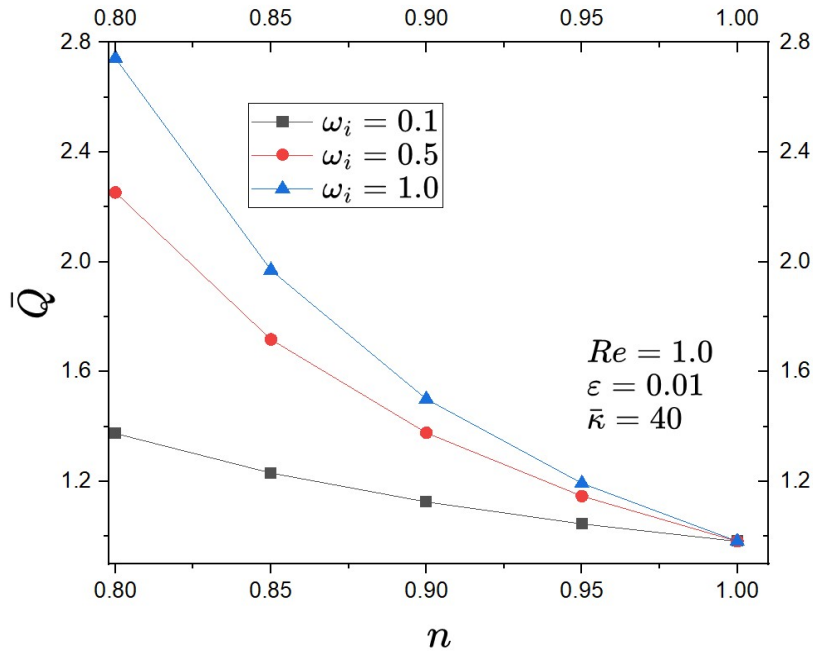


Fig. 4.20 Perfiles de velocidad adimensional $\tilde{u}$ a lo largo de la coordenada transversal Y para diferentes valores del número de Weissenberg ω_i , con valor de índice de ley de potencia $n = 0.8$

En la figura 4.20 se grafican los perfiles del caudal adimensional $\tilde{Q}$ como función del índice de ley de potencia con valores de $n = 0.80, 0.85, 0.9, 0.95$ y 1.0 , para diferentes valores del número adimensional de Weissenberg $\omega_i = 0.1, 0.5, 1.0$. Los parametros adimensionales utilizados son $Re = 1.0, \varepsilon = 0.01, \bar{\kappa} = 40$. En este gráfico, es posible observar que, como se ha visto en ocasiones anteriores, para un valor del índice de ley de potencia de $n = 1$, el caudal adimensional tendra el valor de 1, independientemente del valor del número

adimensional de Weissenberg, es decir, el caso newtoniano. De igual manera es posible observar que, para un valor de $\omega_i = 0.1$, el cambio en el caudal adimensional se produce de manera tenue, pasando de un valor aproximado de 1 a 1.4, cuando el índice de ley de potencia disminuye de 1.0 a 0.85, lo que contrasta para valores de $\omega_i = 1.0$, que prácticamente triplican el valor del caudal adimensional, el cual toma valores de 1 a 2.7, cuando el índice de ley de potencia disminuye de 1 a 0.8, de esta manera se observa el efecto del número adimensional de Weissenberg sobre el caudal adimensional.

Conclusiones

En el presente trabajo se reescribieron las ecuaciones de gobierno en su forma variacional y se realizó un análisis numérico donde fue aplicado el método de elemento finito a través del software gratuito FreeFem++ para analizar un flujo puramente electroosmótico que circula en un microcanal rectangular con un fluido no newtoniano cuyo comportamiento se rige bajo el modelo reológico de Carreau y el cual obedece a la ley de potencia. Con la presente investigación se demostró que, el perfil de velocidad longitudinal ($\tilde{u}$), presentó el comportamiento típico de un flujo puramente electroosmótico de tipo tapón y este se mantuvo en todos los resultados, es decir, la velocidad se mantiene constante a través del eje transversal Y y cae subitamente al aproximarse a la pared debido a la condición de no deslizamiento, no se presentaron gradientes de presión longitudinales, asimismo, se identificó que, el potencial eléctrico aplicado e inducido mantienen el mismo comportamiento independientemente de las condiciones no newtonianas y reológicas que impone el modelo de Carreau, es decir, son completamente independientes de los valores en el índice de ley de potencia (n) y el número adimensional de Weissenberg (ω_i), lo cual responde directamente al objetivo planteado, analizar un flujo puramente electroosmótico, de igual manera, en la presente tesis se pudo comprobar que, una disminución en el índice de ley de potencia provocó un aumento en la velocidad longitudinal en comparación con el caso newtoniano ($n = 1$), en suma a esto, los resultados mostraron que, a la par de la disminución del índice de ley de potencia, aumentos en el número de Weissenberg de igual manera provocan aumentos en la velocidad longitudinal, llegando estos a más del doble para números ω_i altos, lo que significa la predominancia de las fuerzas elásticas sobre las fuerzas viscosas que son las que se oponen al movimiento del fluido y que provocan tales aumentos de velocidad.

El presente trabajo demostró que es posible alterar la velocidad longitudinal en flujos puramente electroosmóticos variando los principales parámetros que rigen la naturaleza reológica de fluidos basados en el modelo de Carreau, esto pretende considerarse un aporte más en el análisis y estudio del comportamiento de fluidos no newtonianos en microcanales y flujos electroosmóticos, fluidos que tienen aplicaciones en diversas áreas científicas e industriales.

Por otro lado cabe destacar que, en la presente tesis se impusieron varias consideraciones y simplificaciones, por lo cual, se propone la utilización de este trabajo como base para hacer el mismo análisis considerando la transferencia de calor en el modelo de Carreau, a su vez, considerar potenciales inducidos significativos y geometría en tres dimensiones.

Referencias

Bird, R. B., Armstrong, R. C., & Hassager, O. (1987). *Dynamics of polymeric liquids*. Vol. 1: Fluid mechanics.

Bodas, D. (2025). Fundamentals of microfluidics. In *Microfluidics-Aided Technologies* (pp. 1-31). Academic Press.

Bogue, R. (2013). Recent developments in MEMS sensors: A review of applications, markets and technologies. *Sensor review*, 33(4), 300-304.

Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., & Benites, G. E. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros* (Vol. 5, pp. 154-196). New York, NY, USA: McGraw-Hill.

Choreño, O. P. (2019). Explorando la micromecánica aplicada a la biología: BIOMEMS. *Gaceta Instituto de Ingeniería, UNAM*, 1(139), 11-13.

Choudhary, V., & Iniewski, K. (Eds.). (2017). *Mems: fundamental technology and applications*. CRC Press.

Ciarlet, P. G., & Oden, J. T. (1978). The finite element method for elliptic problems. *Journal of Applied Mechanics*, 45(4), 968.

Escandón, J., Bautista, O., & Méndez, F. (2013). Entropy generation in purely electroosmotic flows of non-Newtonian fluids in a microchannel. *Energy*, 55, 486-496.

Guijt, R. (2019). Lab on a chip-future technology for characterizing biotechnology products.

Gupta, M., Bhatia, D., & Kumar, P. (2023). *Modern Intervention Tools for Rehabilitation*. Elsevier.

Hecht, F., Pironneau, O., Le Hyaric, A., & Ohtsuka, K. (2005). FreeFem++ manual. *Laboratoire Jacques Louis Lions*, 1-188.

Judy, J. W. (2001). Microelectromechanical systems (MEMS): fabrication, design and applications. *Smart materials and Structures*, 10(6), 1115.

Judy, J. W. (2006, January). Microactuators. In *MEMS* (pp. 751-803). William Andrew Publishing.

Karniadakis, G., Beskok, A., & Aluru, N. (2006). *Microflows and nanoflows: fundamentals and simulation* (Vol. 29). Springer Science & Business Media.

Lapizco-Encinas, B. H. (2008). Microfluidics applications in bioseparations. *Revista mexicana de ingeniería química*, 7(3), 205-214.

Macías Silva, M. (2016). *De la ficción a la realidad: órganos-en-chips al Servicio de la Ciencia y la Medicina*. Revista odontológica mexicana, 20(2), 74-75.

Masliyah, J. H., & Bhattacharjee, S. (2006). *Electrokinetic and colloid transport phenomena*. John Wiley & Sons.

Maynes, D., & Webb, B. W. (2003). Fully developed electro-osmotic heat transfer in microchannels. *International journal of heat and mass transfer*, 46(8), 1359-1369.

Nguyen, N. T., Wereley, S. T., & Shaegh, S. A. M. (2019). *Fundamentals and applications of microfluidics*. Artech house.

Peng, Z., Chuncheng, Z., Deyi, Z., Hongli, C., & Yan, L. (2005, August). Numerical Simulation on Electroosmotic Flow in a Rectangular Microchannel. In *2005 6th International Conference on Electronic Packaging Technology* (pp. 1-5). IEEE.

Petruk, T., Teslyuk, V., & Melnyk, M. (2016, April). *Optimization of the accelerometer design using ANSYS*. In 2016 XII International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH) (pp. 37-39). IEEE.

Probstein, R. F. (2005). *Physicochemical hydrodynamics: an introduction*. John Wiley & Sons.

Ramos, E. A., Bautista, O., Lizardi, J. J., & Méndez, F. (2017). *A perturbative thermal analysis for an electro-osmotic flow in a slit microchannel based on a Lubrication theory*. *International Journal of Thermal Sciences*, 111, 499-510.

Ramos, E. A., Treviño, C., Lizardi, J. J., & Méndez, F. (2022). *Non-isothermal effects in the slippage condition and absolute viscosity for an electroosmotic flow*. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 93, 29-41.

Rapp, B. E. (2016). *Microfluidics: modeling, mechanics and mathematics*. William Andrew.

Sánchez, S., Arcos, J., Bautista, O., & Méndez, F. (2012). *Joule heating effect on a purely electroosmotic flow of non-Newtonian fluids in a slit microchannel*. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 192, 1-9.

Silva, M. M. (2016). *De la ficción a la realidad: órganos-en-chips al Servicio de la Ciencia y la Medicina*. *Revista Odontológica Mexicana Órgano Oficial de la Facultad de Odontología UNAM*, 20(2), 74-76.

Spearing, S. M. (2000). Materials issues in microelectromechanical systems (MEMS). *Acta materialia*, 48(1), 179-196.

Tang, G. H., He, Y. L., & Tao, W. Q. (2010). Numerical analysis of mixing enhancement for micro-electroosmotic flow. *Journal of Applied Physics*, 107(10).

Tang, G. H., Li, X. F., He, Y. L., & Tao, W. Q. (2009). Electroosmotic flow of non-Newtonian fluid in microchannels. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 157(1-2), 133-137.

Vasu, N., & De, S. (2010). Electroviscous effects in purely pressure driven flow and stationary plane analysis in electroosmotic flow of power-law fluids in a slit microchannel. *International journal of engineering science*, 48(11), 1641-1658.

Wall, S. (2010). The history of electrokinetic phenomena. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 15(3), 119-124.

Zhao, C., Zholkovskij, E., Masliyah, J. H., & Yang, C. (2008). Analysis of electroosmotic flow of power-law fluids in a slit microchannel. *Journal of colloid and interface science*, 326(2), 503-510.

Zhao, C., & Yang, C. (2013). Electroosmotic flows of non-Newtonian power-law fluids in a cylindrical microchannel. *Electrophoresis*, 34(5), 662-667.