



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Resolución de la ambigüedad de la  
señal GPS de la estación de referencia  
de operación continua (CORS) de la  
Facultad de Ingeniería**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Geomático**

**P R E S E N T A**

Pedro Antonio Delgado Ortiz

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Roberto Rene Manzano Islas



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025**



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado RESOLUCION DE LA AMBIGÜEDAD DE LA SEÑAL GPS DE LA ESTACION DE REFERENCIA DE OPERACION CONTINUA (CORS) DE LA FACULTAD DE INGENIERIA que presenté para obtener el título de INGENIERO GEOMÁTICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

---

**PEDRO ANTONIO DELGADO ORTIZ**  
Número de cuenta: 305001290

*Este trabajo escrito esta dedicado a todas las personas que fueron parte de este camino, a mis amigos, profesores y especialmente a mis padres ya que ellos fueron una parte muy importante para alcanzar esta meta, siempre recordare con amor toda la paciencia, apoyo y ánimo que me brindaron en todo momento, todo esto fue un aliciente para poder seguir adelante y no rendirme en ningún momento.*

# Agradecimientos

A mi supervisor, el Dr. René Manzano Islas, ya que esto no habría sido posible sin su entusiasmo, dedicación y guía. Agradezco su disposición para transmitirme su conocimiento y así poder desarrollar de la mejor manera este trabajo.

A la UNAM y a la FI por haberme permitido ser parte de estas beneméritas instituciones, siempre llevare con orgullo el nombre de estas.

A mis profesores por compartirme su sabiduría y transmitirme su experiencia.

Por ultimo, a mi familia que sin su compañía y apoyo esto no habría podido ser posible.



# Resumen

El posicionamiento satelital preciso (a nivel de centímetro) es posible cuando se usan las fases portadoras que han viajado al receptor desde el satélite. Para hacer uso de estas mediciones, es necesario calcular el número de ciclos de la señal que viaja desde el satélite hasta el receptor. Al cálculo de este valor entero se llama *resolución de la ambigüedad de las señales*.

En esta tesis se analizan los diferentes métodos y estrategias para resolver las ambigüedades de las señales del GPS. El método más común para resolver las ambigüedades es el método de Mínimos Cuadrados Enteros (MCE), el cual está implementado en la mayoría de la paquetería donde se procesan datos GNSS. Esta técnica es descrita en esta tesis, y los resultados obtenidos a partir de ella usando datos recibidos en la estación de Referencia de Operación Continua (CORS) situada en el Edificio B de la Facultad de Ingeniería (FI) de la UNAM, CU son analizados. De la misma manera, se analizan los resultados obtenidos usando las diferentes estrategias para calcular las ambigüedades, dentro de las que se encuentran: resolución instantánea, continua, y *fixar y sostener* (*Fix-and-Hold*).

Finalmente se comparan los resultados resolviendo de manera instantánea (época por época) las ambigüedades para el conjunto de datos obtenidos durante el mismo lapso de tiempo pero usando diferentes estaciones, la estación **CORS-FI** y una estación **SINO S6**. Posterior a esta comparación se hacen algunas propuestas para cualquier trabajo a futuro relacionado con la evaluación del desempeño de las técnicas para resolución de la ambigüedad.

# Índice general

|                                                                           |          |
|---------------------------------------------------------------------------|----------|
| Agradecimientos                                                           | II       |
| Resumen                                                                   | III      |
| Índice de Figuras                                                         | V        |
| Contenido                                                                 | VIII     |
| <b>1. Introducción</b>                                                    | <b>1</b> |
| 1.1. Sistemas de posicionamiento y navegación global satelital GNSS . . . | 1        |
| 1.2. Funcionamiento del GNSS . . . . .                                    | 2        |
| 1.3. Segmentos del GPS . . . . .                                          | 3        |
| 1.3.1. Segmento control . . . . .                                         | 4        |
| 1.3.2. Segmento espacial . . . . .                                        | 4        |
| 1.3.3. Segmento usuario . . . . .                                         | 6        |
| 1.4. Errores en la señal del GPS . . . . .                                | 7        |
| 1.5. Aplicaciones . . . . .                                               | 8        |
| 1.6. Características y observables de la señal GPS . . . . .              | 10       |
| 1.6.1. Pseudorango . . . . .                                              | 10       |
| 1.6.2. Fase portadora . . . . .                                           | 12       |
| 1.6.3. Doppler . . . . .                                                  | 12       |
| 1.7. RINEX . . . . .                                                      | 14       |
| 1.7.1. Archivos de navegación . . . . .                                   | 14       |
| 1.7.2. Archivos de observación . . . . .                                  | 15       |

|                                                        |           |
|--------------------------------------------------------|-----------|
| 1.7.3. Archivo de datos meteorológicos . . . . .       | 16        |
| <b>2. Métodos de posicionamiento satelital GPS</b>     | <b>18</b> |
| 2.1. Posicionamiento Simple . . . . .                  | 18        |
| 2.2. Posicionamiento puntual preciso (PPP) . . . . .   | 21        |
| 2.3. Posicionamiento Diferencial (DGPS) . . . . .      | 22        |
| 2.4. Posicionamiento en Tiempo Real con RTK . . . . .  | 24        |
| <b>3. Métodos de Resolución de la Ambigüedad</b>       | <b>27</b> |
| 3.1. Redondeo . . . . .                                | 30        |
| 3.2. Redondeo secuencial . . . . .                     | 31        |
| 3.3. Mínimos cuadrados enteros (MCE) . . . . .         | 33        |
| 3.3.1. Región de búsqueda . . . . .                    | 41        |
| 3.3.2. LAMBDA . . . . .                                | 43        |
| 3.4. Filtro de Kalman . . . . .                        | 46        |
| <b>4. Metodología</b>                                  | <b>50</b> |
| 4.1. RTKLIB . . . . .                                  | 50        |
| 4.2. Estaciones analizadas . . . . .                   | 54        |
| 4.2.1. Estación CORS-FI . . . . .                      | 54        |
| 4.2.2. Estación SINO S6 . . . . .                      | 57        |
| 4.3. Datos usados . . . . .                            | 61        |
| 4.4. Modos de resolución de la ambigüedad . . . . .    | 62        |
| 4.4.1. Ambigüedades apagadas . . . . .                 | 63        |
| 4.4.2. Ambigüedades calculadas cada instante . . . . . | 65        |
| 4.4.3. Ambigüedades calculadas continuamente . . . . . | 68        |
| 4.4.4. Fijar y mantener ambigüedades enteras . . . . . | 71        |
| 4.5. Comparación de Resultados . . . . .               | 75        |
| <b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>                | <b>83</b> |
| 5.1. Trabajo a Futuro . . . . .                        | 84        |
| Bibliografía . . . . .                                 | 85        |

# Índice de figuras

|                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Esquema de la idea básica de trilateración satelital. . . . .                                         | 3  |
| 1.2. Segmento Control GNSS. . . . .                                                                        | 4  |
| 1.3. Esquema de los tres segmentos que conforman el sistema GPS. . . . .                                   | 7  |
| 1.4. Aplicación de GNSS en la agricultura. . . . .                                                         | 9  |
| 1.5. Gráfica del pseudocódigo del satélite y el replicado en el oscilador del receptor. . . . .            | 11 |
| 1.6. Archivo RINEX de navegación. . . . .                                                                  | 15 |
| 1.7. Archivo RINEX de observación. . . . .                                                                 | 16 |
| 1.8. Archivo RINEX meteorológico. . . . .                                                                  | 16 |
| 2.1. Navegador GPS de mano. . . . .                                                                        | 19 |
| 2.2. Esquema del posicionamiento Diferencial Doble. . . . .                                                | 24 |
| 3.1. Regiones de atracción del metodo Redondeo $S_{R,z}$ en dos dimensiones. . . . .                       | 31 |
| 3.2. <i>Regiones de atracción</i> para el método Redondeo Secuencial en dos dimensiones . . . . .          | 33 |
| 3.3. <i>Regiones de atracción</i> para el método de Mínimos cuadrados enteros en dos dimensiones . . . . . | 43 |
| 3.4. Región de búsqueda sin decorrelacionar las ambigüedades. Ejemplo en dos dimensiones . . . . .         | 45 |
| 3.5. Región de búsqueda después de transformación LAMBDA. . . . .                                          | 45 |
| 4.1. Interfaz gráfica de usuario de RTKLIB . . . . .                                                       | 52 |
| 4.2. Interfaz de linea de comando de RTKLIB . . . . .                                                      | 53 |

|                                                                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.3. Anillos de Ahogo (Choke Rings) de la antena CR3 G3 . . . . .                                                                                         | 55 |
| 4.4. Receptor <b><i>SOUTH NET S9</i></b> . . . . .                                                                                                        | 56 |
| 4.5. Receptor <b>SINO S6 Plus Pocket</b> usado en esta tesis . . . . .                                                                                    | 58 |
| 4.6. Ubicación de la estación GNSS CORS . . . . .                                                                                                         | 59 |
| 4.7. Antena CR3 G3 . . . . .                                                                                                                              | 60 |
| 4.8. Placa V-099 de la Red Topo-Geodésica . . . . .                                                                                                       | 61 |
| 4.9. Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con am-<br>bigüedades reales. . . . .                                                  | 64 |
| 4.10. Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con am-<br>bigüedades enteras calculadas cada época (instantáneo). . . . .            | 67 |
| 4.11. Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con am-<br>bigüedades enteras calculadas de manera continua. . . . .                  | 70 |
| 4.12. Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con am-<br>bigüedades <i>Fix-and-Hold</i> . . . . .                                   | 74 |
| 4.13. <i>Gráfica de cielo</i> de la estación CORS-FI. . . . .                                                                                             | 77 |
| 4.14. <i>Gráfica de cielo</i> de la estación <b><i>SINO S6</i></b> . . . . .                                                                              | 77 |
| 4.15. Error en la posición usando el método de Mínimos cuadrados enteros<br>para resolver las ambigüedades de la estación CORS-FI. . . . .                | 78 |
| 4.16. Error en la posición usando el método de Mínimos cuadrados enteros<br>para resolver las ambigüedades de la estación <b><i>SINO S6</i></b> . . . . . | 78 |
| 4.17. Ambigüedades doblemente diferenciadas de la estación CORS-FI, cal-<br>culadas de manera instantánea . . . . .                                       | 79 |
| 4.18. Ambigüedades doblemente diferenciadas de la estación CORS-FI, en<br>modalidad <i>fix-and-hold</i> . . . . .                                         | 80 |
| 4.19. Error en la posición usando el método de Redondeo Secuencial para<br>resolver las ambigüedades de la estación CORS-FI. . . . .                      | 81 |
| 4.20. Error en la posición usando el método de Redondeo Secuencial para<br>resolver las ambigüedades de la estación <b><i>SINO S6</i></b> . . . . .       | 81 |

# Contenido

El contenido de esta tesis tiene la siguiente estructura:

1. Introducción: en este capítulo se describen los conceptos principales relacionados con los Sistemas de Posicionamiento Global y sus funciones principales.
2. Métodos de posicionamiento satelital: en esta sección se describen las técnicas para calcular una posición con los observables GPS. Se describen las ecuaciones de observación de pseudorange, fase portadora y su implementación en los métodos de posicionamiento.
3. Métodos de resolución de la ambigüedad: el método de mínimos cuadrados con una restricción entera en su solución es descrito. De igual manera, se describen los principales métodos para resolver la ambigüedad de la señal GPS. En este capítulo se describe el filtro de Kalman ya que es el estimador usado para calcular la posición del receptor.
4. Metodología: Se describen las estaciones y los datos analizados en esta tesis. De la misma manera se describe el programa usado. También se analizan los resultados obtenidos usando las diferentes estrategias para calcular las ambigüedades. Finalmente, en este capítulo se hace la comparativa del desempeño de dos de los principales métodos para resolver las ambigüedades, el redondeo secuencial y el método de MCE.
5. Conclusiones y trabajo futuro: en este capítulo se proporcionan las conclusiones en base a la teoría de los capítulos anteriores y los resultados obtenidos. También se discuten algunos aspectos a considerar en trabajos de investigación

relacionados con las distintas metodologías para resolver la ambigüedad de la señal GNSS.

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presentan los conceptos generales de los Sistemas de Posicionamiento Global. Se proveen los conceptos teóricos para entender el trabajo que realice en esta tesis. Se empieza por describir la funcionalidad de los Sistemas de Posicionamiento Global y sus principales componentes. De igual manera, se describen los observables de la señal y los mensajes que son transmitidos del satélite al receptor

### 1.1. Sistemas de posicionamiento y navegación global satelital GNSS

Los sistemas de posicionamiento global (GNSS por sus siglas en inglés) son sistemas de localización geográfica mediante satélites, que proporcionan registros muy exactos de la ubicación. Estos sistemas generan información de posición en tres dimensiones. Las coordenadas por lo general son calculadas dentro de un sistema geocéntrico, ya sea con parámetros curvilíneos (latitud, longitud y altitud) o cartesianos ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  en metros). El primer sistema de posicionamiento global (GPS por sus siglas en inglés) se colocó en 1978, con lo cual se inició la revolución de la navegación por satélite. Originalmente, estos sistemas fueron desarrollados para propósitos militares por el departamento de defensa de los Estados Unidos de América, bajo la administración de la fuerza aérea, a partir de 1983 se autorizó un uso limitado de las técnicas



GPS en aplicaciones civiles. Dentro de los principales usos en aplicaciones civiles, bajo diferentes técnicas para posicionamiento se encuentran la topografía, geodesia, navegación autónoma, gestión de transportes, geo-referenciación de fotos e imágenes aéreas etc [1].

Las aplicaciones del posicionamiento satelital son diversas, y están en función con la precisión de la posición calculada. Esta precisión depende del método de posicionamiento que se este empleando, el entorno en el cual se estén adquiriendo las observaciones satelitales y el equipo receptor usado.

## 1.2. Funcionamiento del GNSS

GPS depende en que cada satélite en la constelación transmita su posición exacta y una señal de tiempo extremadamente precisa a los receptores en la tierra. Dada esta información, los receptores GPS pueden calcular su distancia al satélite y combinando esta información de cuatro satélites, el receptor puede calcular su posición exacta usando un proceso llamado trilateración. La idea básica de la trilateración es la siguiente: es posible calcular la distancia teórica (distancia euclideana) del satélite al receptor, conociendo las coordenadas del satélite, los errores que impactan la señal y la medición de la distancia del satélite que es mandada desde el satélite. Esta distancia, aunada a otras dos calculadas de la misma manera, permite el cálculo de la posición del receptor. Es necesario 3 distancias para formar un sistema de ecuaciones lineales y poder calcular las 3 variables de la posición,  $x, y, z$ . En la figura 1.1 [2], se muestra de manera gráfica el concepto de trilateración. La idea de trilateración considera el hecho de que tenemos a disposición mas de 3 satélites (o distancias) para calcular la posición del receptor. Esto añade redundancia al sistema de ecuaciones (grados de libertad) y se aumenta la precisión de la posición calculada.

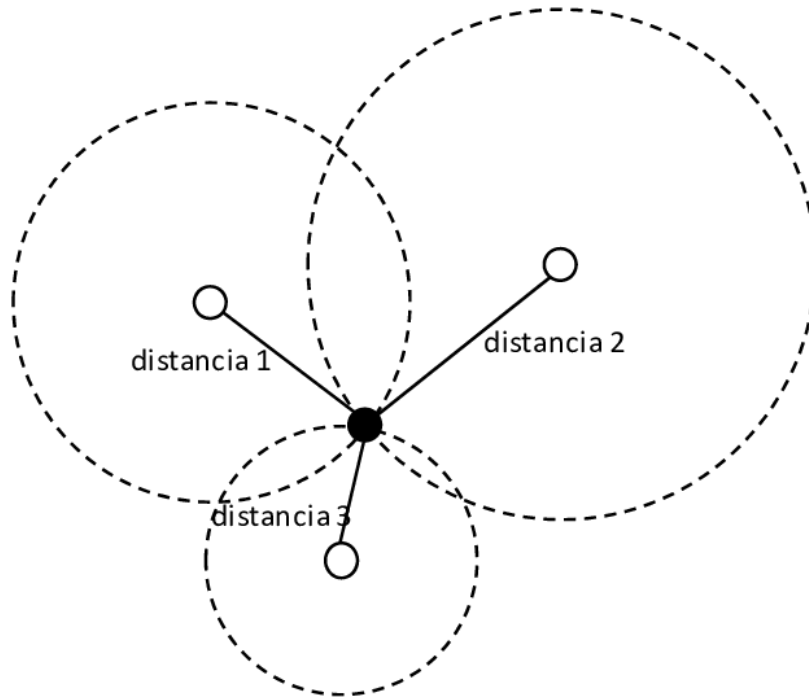


Figura 1.1: Esquema de la idea básica de trilateración satelital.

Habiendo descrito la idea de trilateración, donde solamente se estiman 3 incógnitas de la posición, se necesita hacer la anotación que para realizar un posicionamiento usando las mediciones del GPS, se necesitan un mínimo de cuatro satélites. Las mediciones obtenidas en el receptor GPS son usadas en un sistema de ecuaciones lineales, y el sistema se resuelve para cuatro incógnitas, la posición en tres dimensiones y el error en el reloj del receptor.

Las mediciones de los satélites GPS nos proporcionaran distancias que son calculadas básicamente usando el tiempo que tarda la señal en llegar al receptor, multiplicado por la velocidad de la luz (300 mil km/s aproximadamente). Los relojes, tanto del receptor como de los satélites, aunque sean muy precisos, contienen un error que debe ser calculado y corregido (cuarta incógnita del sistema de ecuaciones).

### 1.3. Segmentos del GPS

En esta sección se describen las componentes (también llamados segmentos) del Sistema de Posicionamiento Global.

### 1.3.1. Segmento control

El Segmento de Control GPS (OCS) consiste en una red global de instalaciones terrestres que rastrean los satélites GPS, monitorean sus transmisiones, realizan análisis y envían comandos y datos a la constelación.

El OCS actual incluye una estación de control principal, una estación de control principal alternativa, 11 antenas de comando y control, y 16 sitios de monitoreo. En la figura 1.2 [3], se muestran las estaciones de control para monitorear y mejorar la calidad de las mediciones GNSS.

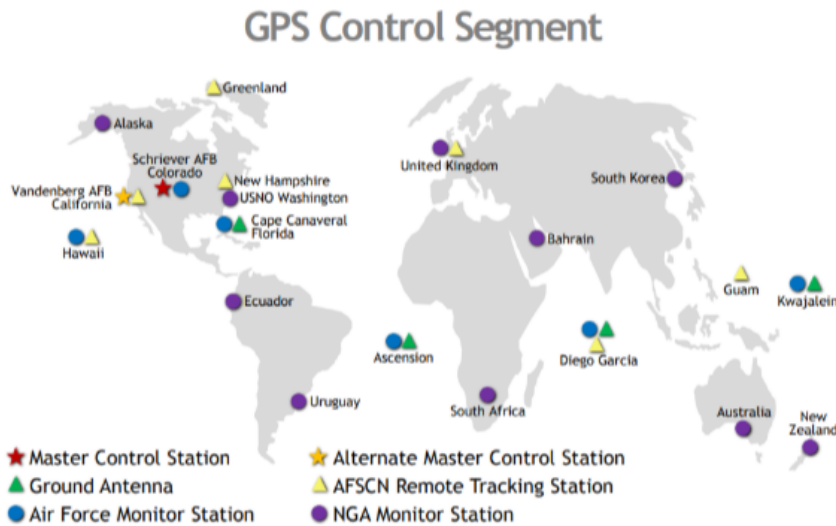


Figura 1.2: Segmento Control GNSS.

### 1.3.2. Segmento espacial

El segmento espacial GPS consiste en una constelación de satélites que transmiten señales de radio a los usuarios. Estados Unidos se ha comprometido a mantener la disponibilidad de al menos 24 satélites GPS operativos el 95 % del tiempo [1].

Para garantizar este compromiso, la Fuerza Espacial de EE. UU. ha operado 31 satélites GPS operativos durante más de una década.

Los satélites GPS vuelan en órbita terrestre media (MEO por sus siglas en inglés Middle Earht Orbit) a una altitud aproximada de 20200 km. Cada satélite orbita la Tierra dos veces al día. Los satélites de la constelación GPS están dispuestos en

seis planos orbitales equidistantes que rodean la Tierra. Cada plano contiene cuatro ranuras ocupadas por satélites de referencia. Esta disposición de 24 ranuras garantiza que los usuarios puedan ver al menos cuatro satélites desde prácticamente cualquier punto del planeta.

La Fuerza Espacial normalmente opera más de 24 satélites GPS para mantener la cobertura cuando los satélites de referencia reciben mantenimiento o son dados de baja. Los satélites adicionales pueden aumentar el rendimiento del GPS, pero no se consideran parte de la constelación principal.

### **Características de las constelaciones GNSS**

Existen 4 constelaciones:

- GPS (Estados Unidos de América EUA): Es un sistema creado por el departamento de defensa en colaboración con la NASA con la intención de construir un sistema de navegación con fines militares. El sistema se conforma por satélites que utilizan mediciones a distancia y esta conformados por una constelación de 32 satélites que orbitan a 20,200 km aproximadamente, alrededor de 6 planos con una inclinación de 55 grados
- GLONASS (Federación Rusa): Es un sistema de navegación desarrollado por la unión soviética creado con la intención de ser una alternativa del GPS. Esta conformado por una constelación de 24 satélites que orbitan a 19,100 km con una inclinación de 64.8 grados, constan de una duración de 11 hrs y 15 min para completar su orbita. Puede tener deficiencias en el hemisferio sur.
- GALILEO (Unión Europea): Es un sistema desarrollado por la Union europea atravez de la agencia espacial europea, su objetivo es ser una alternativa a GPS y GLONASS con una precisión mayor y esta enfocado en un uso civil. Esta conformado por una constelación de 30 satélites que orbitan a 23,200 km con una inclinación de 56 grados.
- BEIDOU (República Popoular China): Es un sistema de navegación creado para

ser una alternativa del GPS. Esta conformado por 3 diferentes tipos de orbitas. 7 satélites de orbita geoestacional, 10 orbita geo-sincrona inclinada y 27 en orbita terrestre.

### 1.3.3. Segmento usuario

El segmento usuario del Sistema de Posicionamiento Global está compuesto por todos los receptores GNSS que emplean las señales transmitidas por los satélites para determinar su posición, velocidad y tiempo. Estos receptores pueden encontrarse en una gran variedad de aplicaciones, desde la navegación terrestre, marítima y aérea, hasta usos científicos y militares. La función principal del segmento usuario es *recibir, decodificar y procesar* las señales emitidas por el segmento espacial, para posteriormente calcular las coordenadas del usuario mediante técnicas de posicionamiento. En la figura 1.3 (fuente: elaboración propia), se muestran los 3 segmentos del Sistema de Posicionamiento Global, y sus interacciones descritas por las flechas que unen a los segmentos. El segmento usuario son los rectángulos naranjas, los cuales son los usuarios que disponen de un receptor para decodificar la señal de los satélites y calcular una posición sobre la superficie terrestre, la cual esta representada por la esfera azul. En el rectángulo verde, esta el segmento control, el cual consiste en todas las estaciones terrestres que monitorean la calidad de las señales de los satélites así como sus órbitas, se encargan de calcular efemérides precisas y de la calidad de las mediciones. Por último, en los círculos amarillos se encuentran los satélites que componen el segmento espacial. Este segmento recibe información del segmento control para incluir toda la información necesaria en el mensaje que se transmite al segmento usuario [1].

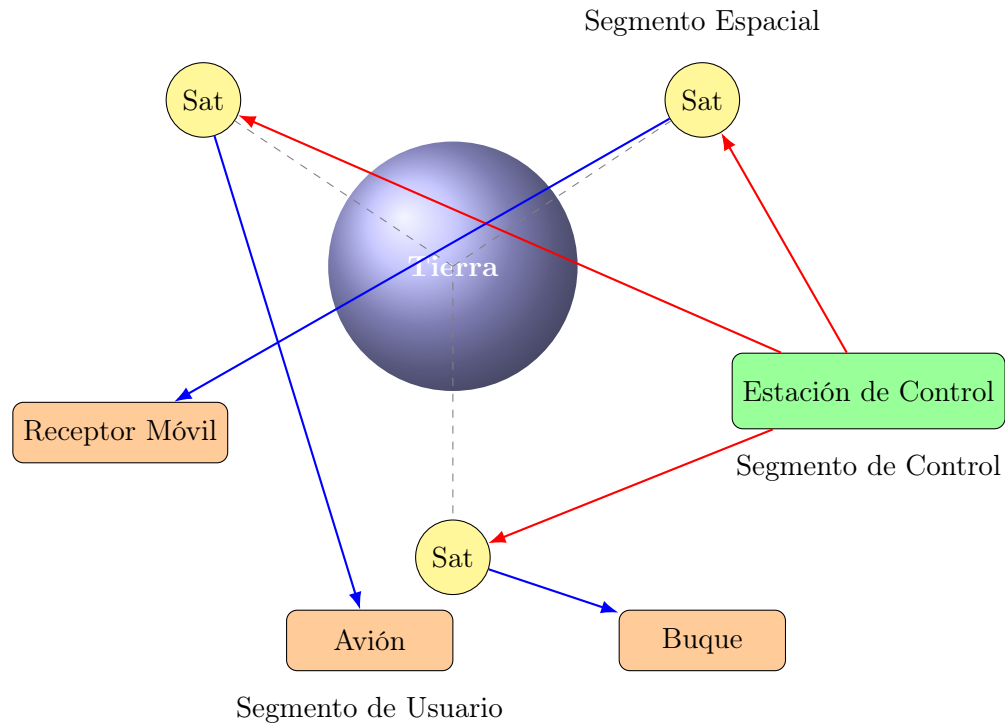


Figura 1.3: Esquema de los tres segmentos que conforman el sistema GPS.

## 1.4. Errores en la señal del GPS

Los errores tienen influencia en las medidas de las señales de los satélites GPS, entre ellos están la interferencia atmosférica y reflejos de obstáculos en la tierra como árboles y edificios. Los errores que ocurren en las mediciones de los satélites, tienen como consecuencia una posición calculada errada. Para mitigar los errores que impactan a las mediciones, es necesario modelar cada uno de ellos y contemplarlos en las observaciones. Por lo general, para corregir los errores físicos, tales como los atmosféricos (ionosfera y troposfera) se utilizan varios métodos como la corrección por frecuencia doble, filtros de señales, y modelos matemáticos para disminuir sus efectos [1]. Entre los factores que pueden afectar a la señal GPS y a la precisión se incluyen los siguientes:

- **Atmósfera:** las señales de satélite se ralentizan a medida que pasan a través de la atmósfera. El sistema GPS utiliza un modelo integrado para corregir parcialmente este tipo de error. El modelo más popular para corregir los efectos de la

ionosfera es Kobluchar [4]. Para modelar el efecto de la troposfera, los dos modelos más populares es el de Hopfield H. y Saastamoinen [5]. Sin embargo, si se cuenta con las observaciones de dos frecuencias por satélite, se opta por generar combinaciones lineales entre las mediciones y calcular la corrección ionosférica.

- Multitrayectoria de la señal (*Multipath*): la señal GPS puede reflejarse en objetos, como edificios altos o grandes superficies rocosas antes de llegar al receptor, lo que aumentara o reducirá la señal original, lo que impactará la medición que reciba la estación. No existe una manera concreta o un modelo matemático definido para modelar este error, sin embargo existen estrategias que posibilitan la detección y prevención de este error [6]. Entre las medidas populares para la detección del error *multipath*, esta la combinación del pseudorange menos la fase portadora. Para la prevención se puede implementar una mascarilla SNR y/o de elevación del satélite rigurosa en combinación de antenas con *choke ring*.
- Error en el reloj del receptor: el reloj integrado de un receptor puede tener errores de sincronización leves, ya que es menos preciso que los relojes atómicos de los satélites GPS.
- Geometría de los satélites: las señales de satélite son más efectivas cuando los satélites se encuentran en ángulos amplios entre sí, en lugar de en una línea o agrupación estrecha. Por lo general, esta es la razón por la que la altitud no es tan precisa como la posición horizontal.

## 1.5. Aplicaciones

Son múltiples los campos de aplicación de los sistemas de posicionamiento tanto como sistemas de ayuda a la navegación, como en modelado del espacio atmosférico y terrestres o aplicaciones con requerimientos de alta precisión en la medida del tiempo, a continuación se describen algunas de las aplicaciones:

- Agricultura: La navegación por satélite puede ayudar a los agricultores a aumentar su producción y a mejorar la eficiencia de sus métodos de cultivo. En

la figura 1.4 [7] se muestra un sistema de navegación autónomo satelital en un tractor que facilita diversas tareas en la agricultura.

- Navegación en tierra y mar: Además de sus usos directos para determinar posición usando sistemas de navegación a bordo, GPS se utiliza para mejorar la precisión de cartas marinas y para guiar sistemas autónomos.
- Usos militares: Además de las aplicaciones más comunes tal como la navegación general, los servicios militares utilizan el GPS en gran variedad de aplicaciones incluyendo dirigir proyectiles.
- Mapas y agrimensura: El GPS permite la construcción de mapas y cartas más precisas, y es usado rutinariamente por agrimensores para planear proyectos y localizar marcadores catastrales, límites, estructuras y rasgos naturales.

El GPS es especialmente valioso para investigadores de campo, para construir mapas y localizar sus estaciones de muestreo para definir límites habitables, para análisis espacial de rasgos naturales



Figura 1.4: Aplicación de GNSS en la agricultura.



## 1.6. Características y observables de la señal GPS

La señal transmite un mensaje y provee 3 observaciones, el pseudocódigo, la fase portadora, y la medición Doppler. Las señales de los satélites por sí solas no sirven para resolver el problema de posicionamiento y deben someterse a una serie de operaciones de procesamiento. Los códigos provenientes de las señales pueden ser código de acción civil (C/A) y código preciso (P). El código C/A también conocido como código de ruido pseudoaleatorio es modulado por la banda L1, mientras que el código P se modula por las bandas L1, L2 y L5 y cuyo principal uso es reducir los efectos de la ionosfera [8]. La más importante es la modulación orientada al acoplamiento de la señal a transmitir, para llevar los códigos C/A y P. Cada satélite tiene un código C/A diferente, lo que genera un ruido pseudoaleatorio distinto (PRN) y esto es fundamental para que el receptor identifique cada satélite [1]. El receptor que tiene almacenada las réplicas de todos los PRN, identifica cada satélite, y a la vez genera él una réplica del código recibido, desfasado, porque el recibido ha tenido que recorrer una distancia. El receptor corre los códigos generado y recibido, lo que le permite medir el tiempo y la distancia recorrida. La señal generada tanto en los satélites como en los receptores consiste en conjuntos de códigos digitales intencionadamente complicados para poder compararse sin ambigüedad.

### 1.6.1. Pseudorange

Pseudorange, es la distancia calculada a partir del tiempo recorrido del satélite al receptor multiplicado por la velocidad de la luz. Es la diferencia entre el tiempo de recepción y el tiempo de transmisión de una señal de satélite específica. Ver expresión (1.1) Esto corresponde a la distancia entre la antena del receptor y la antena del satélite, incluyendo los desfases de los relojes del receptor y del satélite, y otras influencias, como los retrasos atmosféricos. Para una señal de satélite en la banda  $i$ -ésima, la pseudodistancia puede expresarse utilizando el tiempo de recepción de la señal ( $s$ ) medido por el reloj del receptor y el tiempo de transmisión de la señal ( $s$ ) medido por el reloj del satélite, suponiendo que no hay errores el pseudorange sería

la distancia geométrica. En la figura 1.5 (imagen de [9]) se muestra de manera gráfica el pseudocódigo que envía el satélite al receptor, el cual replica el mismo código en su oscilador con el fin de recibir el mensaje de la señal.

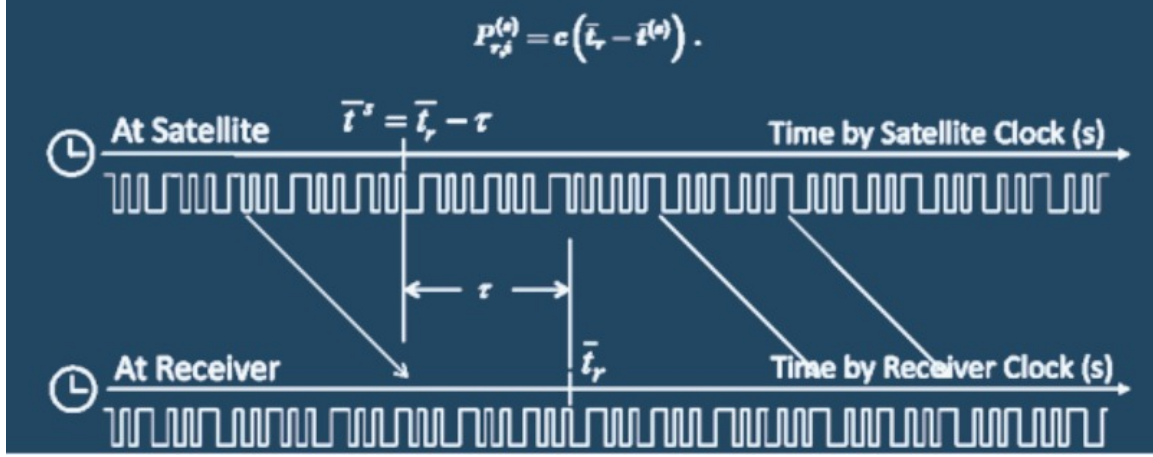


Figura 1.5: Gráfica del pseudocódigo del satélite y el replicado en el oscilador del receptor.

La expresión del pseudocódigo mostrada en la figura 1.5 es descrita de la siguiente manera:

$$\rho = c(t_R - t_S) \quad (1.1)$$

dónde  $c$  la velocidad de la luz,  $t_R$  el tiempo en el reloj del receptor y  $t_S$  la hora del reloj del satélite. El pseudorango no es igual a la distancia geométrica entre el satélite y el receptor debido a diversos factores, como los errores de los relojes, el efecto de la atmósfera, las mareas terrestres, los efectos multipath y los efectos relativistas [10]. Por lo tanto, la pseudodistancia observable real viene dada por la expresión:

$$p = \rho(t_R, t_S) - c(\delta t_R - \delta t_S) + \delta_{iono} + \delta_{tropo} + \delta_{tide} + \delta_{multicamino} + \delta_{rel} + \epsilon \quad (1.2)$$

Donde  $\rho(t_R, t_S)$  es la distancia geométrica entre el satélite y el receptor,  $\delta t_R$  representa los errores de reloj,  $\delta_{iono}$  y  $\delta_{tropo}$  los efectos de la ionosfera y troposfera en la transmisión de la señal,  $\delta_{tide}$  los errores asociados a las mareas terrestres,  $\delta_{multicamino}$  a los efectos multipath,  $\delta_{rel}$  a los efectos relativistas y  $\epsilon$  representa los errores no modelados.

### 1.6.2. Fase portadora

La fase de la portadora mide la fase de la señal satelital recibida con respecto a la fase de la portadora generada en el receptor en el momento de la recepción. Representa la distancia entre el emisor y el receptor, expresada en unidades de ciclo de la frecuencia portadora. Por lo tanto, el observable se obtiene desplazando la fase de la portadora de la señal generada para que coincida con la fase de la portadora recibida del satélite. Las mediciones de la fase de la portadora suelen ser mucho más precisas que las mediciones de pseudodistancia, ya que se pueden rastrear con una precisión del orden de milímetros. Sin embargo, hay dos puntos clave que deben tenerse en cuenta:

- Ambigüedad de fase, es el valor entero correspondiente al número de ciclos que tiene la señal desde el satélite al receptor.
- Deslizamiento de ciclo. La fase debe rastrearse continuamente ya que una brecha en el seguimiento de la fase a lo largo del tiempo cambiaría el valor de la ambigüedad de la fase. Esta sería la observación que viene contenida en el archivo RINEX de observaciones para cada frecuencia y satélite.

La fase portadora está descrita por la siguiente expresión [11]:

$$\Phi\lambda = \rho(t_R, t_S) - c(\delta t_R - \delta t_S) + \lambda N_R^S - \delta_{iono} + \delta_{tropo} + \delta_{tide} + \delta_{multicamino} + \delta_{rel} + \epsilon \quad (1.3)$$

El signo negativo del efecto ionosférico se debe al hecho de que la ionosfera adelanta la transmisión de la señal de fase, mientras que, en el caso de la señal de pseudorange, el efecto ionosférico la retrasa (por lo que el signo en la ecuación de pseudorange anterior es positivo).

### 1.6.3. Doppler

En los archivos RINEX de observación, además de los códigos pseudodistancia y las fases de portadora, se incluye la **observación Doppler**. Esta observación se

representa generalmente con la letra D seguida de un número que indica la frecuencia portadora y el sistema GNSS correspondiente (por ejemplo, D1C para la señal GPS L1 C/A).

La observación Doppler no corresponde a una medida directa de distancia, sino a una *medida de frecuencia*, que refleja el **corrimiento Doppler** de la señal portadora debido al movimiento relativo entre el satélite y el receptor. Esto quiere decir que la medición Doppler describe el cambio de la fase portadora con respecto al tiempo. Matemáticamente[11], el efecto Doppler se expresa como :

$$f_D = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\rho}{dt},$$

donde:

- $f_D$  es la frecuencia Doppler observada (en Hz),
- $\lambda$  es la longitud de onda de la señal portadora (en Hz),
- $\rho$  es la distancia geométrica satélite-receptor,
- $\frac{d\rho}{dt}$  es la derivada temporal de dicha distancia, es decir, la **velocidad relativa proyectada** en la dirección de la línea de vista (en Hz).

El valor registrado en el archivo RINEX para la observación Doppler se suele expresar en **ciclos por segundo (Hz)**. En muchos receptores, esta observación se guarda con signo negativo cuando el satélite se aproxima al receptor, y positivo cuando se aleja.

En aplicaciones de posicionamiento, las observaciones Doppler son particularmente útiles para:

- Estimar la **velocidad del receptor** con gran precisión instantánea.
- Mejorar la detección de **cambios de ciclo de portadora**.
- Contribuir al filtrado y la estimación en algoritmos como el Filtro de Kalman.

## 1.7. RINEX

Se ha mencionado en las secciones anteriores el mensaje que es transmitido desde el satélite al receptor. Este mensaje contiene las observaciones antes descritas, pseudo-rango, fase portadora y medición Doppler, también contiene los parámetros necesarios para calcular la posición del satélite en su órbita (Keplerianos) para cada constelación. El nombre de este mensaje es RINEX y contiene el archivo de observaciones y de navegación de los satélites.

### 1.7.1. Archivos de navegación

Como se mencionó anteriormente, el mensaje de navegación contiene las efemérides necesarias para calcular la posición del satélite para un tiempo dado. Estos parámetros son calculados por el Segmento Control y enviadas a los satélites para que a su vez sean transmitidos al Segmento Usuario. Las efemérides contienen los parámetros Keplerianos que definen la órbita, el movimiento del satélite en esta y coeficientes para corregir la posición del satélite y de la órbita con respecto al plano Ecuatorial Terrestre. En la figura 1.6 se muestra un ejemplo de un archivo RINEX de navegación (.n), el cual contiene un encabezado con información acerca del archivo, como la fecha, la versión del archivo, parámetros *Alpha* y *Beta* para calcular el efecto ionosférico y los segundos de salto (*leap seconds*) para empatar el reloj UTC con el tiempo GPS. En seguida se encuentran todos los parámetros para calcular la órbita del satélite y su posición dentro de ella. Estos parámetros están escritos en el archivo por bloque, donde cada bloque pertenece a un satélite de la constelación a una determinada época (fecha ubicada al principio del bloque). La ubicación exacta de los parámetros Keplerianos y como usarlos para calcular se encuentran en [12].

```

2
DAT2RINW 1.50 002      NAVIGATION DATA
                        TRS Logging session 16JAN13  8:59:44
                        RINEX VERSION / TYPE
                        PGM / RUN BY / DATE
                        COMMENT
                        ION ALPHA
                        ION BETA
                        DELTA-UTC: A0,A1,T,w
                        LEAP SECONDS
16                      END OF HEADER
1 13  1 16 10  0  0.0  .293739605695D-03  .238742359215D-11  .000000000000D+00  R1
                        .580000000000D+02  -.148125000000D+02  .445804282379D-08  .101515262667D+01  R2
                        -.627711415291D-06  .153908133507D-02  .113062560558D-04  .515371224976D+04  R3
                        .295200000000D+06  -.558793544769D-08  .915055766214D+00  .204890966415D-07  R4
                        .960134242405D+00  .159187500000D+03  .482605368919D+00  -.792747290035D-08  R5
                        -.214294641060D-10  .100000000000D+01  .172300000000D+04  .000000000000D+00  R6
                        .240000000000D+01  .000000000000D+00  .838190317154D-08  .580000000000D+02  R7
                        .288018000000D+06

```

Figura 1.6: Archivo RINEX de navegación.

### 1.7.2. Archivos de observación

En el archivo RINEX de observaciones se encuentran las mediciones del pseudo-rango, fase portadora y Doppler para las frecuencias y satélites observados desde la estación. En la figura 1.7, se encuentra un ejemplo de archivo de Observación (.o) para la constelación GPS [12]. En el encabezado del archivo está la información del levantamiento (y por lo consiguiente el contenido del archivo) realizado con la estación, la posición aproximada de la estación en coordenadas cartesianas, la altura del centro de fase de la antena del receptor, la tasa de observaciones en segundos, y las frecuencias y mediciones incluidas en el archivo. Al igual que el archivo de *Navegación*, la información está escrita por bloques, donde cada bloque corresponde a una época en la que se observó y guardó la información. A diferencia del archivo de *Navegación*, cada bloque incluye TODOS los satélites correspondientes a la constelación del archivos, observados en la época del bloque. Cada columna de datos dentro del bloque coincidirá con las columnas de observaciones descritas en el encabezado (Renglón 18 en la figura 1.7).

```

| 2 OBSERVATION DATA RINEX VERSION / TYPE 1
DAT2RINW 1.50 002 TRS logging session 26JAN14 13:00:09 PGM / RUN BY / DATE 2
Carolina Reyes Noya INEGI OBSERVER / AGENCY 3
0220294753 TRIMBLE 5700 Nav 1.24 sig 0.00 REC # / TYPE / VERS 4
3512 Zephyr Geodetic ANT # / TYPE 5
----- COMMENT 6
Offset from BOTTOM OF ANTENNA to PHASE CENTER is 53.3 mm COMMENT 7
----- COMMENT 8
TOL2 MARKER NAME 9
Base MARKER NUMBER 10
-1009229.1983 -5939511.4312 2094889.2288 APPROX POSITION XYZ 11
0.0947 0.0000 0.0000 ANTENNA: DELTA H/E/N 12
----- COMMENT 13
Above antenna height is from mark to BOTTOM OF ANTENNA. COMMENT 14
Note: The above offsets are CORRECTED. COMMENT 15
Raw Offsets: H= 0.1480 E= 0.0000 N= 0.0000 COMMENT 16
----- COMMENT 17
1 1 0 WAVELENGTH FACT L1/2 18
5 L1 C1 L2 P2 D1 # / TYPES OF OBSERV 19
15 INTERVAL 20
2014 1 26 18 0 0.000000 TIME OF FIRST OBS 21
2014 1 26 18 59 45.000000 TIME OF LAST OBS 22
11 # OF SATELLITES
3 187 187 186 186 187 PRN / # OF OBS
6 240 240 240 240 240 PRN / # OF OBS
14 240 240 240 240 240 PRN / # OF OBS
15 69 69 69 69 69 PRN / # OF OBS
18 240 240 240 240 240 PRN / # OF OBS
21 240 240 240 240 240 PRN / # OF OBS
22 240 240 240 240 240 PRN / # OF OBS
24 240 240 240 240 240 PRN / # OF OBS
27 240 240 240 240 240 PRN / # OF OBS
29 107 107 107 107 107 PRN / # OF OBS
31 37 37 36 36 37 PRN / # OF OBS
END OF HEADER
14 1 26 18 0 0.000000 0 9 6 14 15 18 21 22 24 27 29
-6794326.75406 23286957.82906 -5283367.13646 23286958.41946 875.35200
-15292146.91406 21400908.41106 -11901239.13048 21400907.09048 1710.31700
-84586.43405 24055259.70705 -55176.79146 24055260.40846 -3503.68600
-11722635.11307 21771058.74707 -9122461.39348 21771056.02048 -225.82500
-21765341.90607 20487404.98007 -16956687.65448 20487401.63948 431.03500
-10850109.75806 22257930.76806 -8445260.68348 22257926.67648 669.41900
-9969776.40205 22459797.85405 -7761821.77247 22459799.71247 -361.05500
-4900420.14105 23668584.53805 -3806946.64447 23668586.67647 1637.31900
-2355475.21905 23467935.49605 -1825638.16146 23467940.26246 -3525.27800

```

Figura 1.7: Archivo RINEX de observación.

### 1.7.3. Archivo de datos meteorológicos

El mensaje RINEX meteorológico contiene variables relacionadas con el estado meteorológico para corregir el retraso troposférico de la señal. En la figura 1.8 se encuentra un ejemplo de dicho archivo [12].

```

| 2 METEOROLOGICAL DATA RINEX VERSION / TYPE
DAT2RINW 1.50 002 TRS logging session 26JAN14 14:00:09 PGM / RUN BY / DATE
TOL2 COMMENT
3 PR TD HR MARKER NAME
14 1 26 19 0 0 1010.0 20.0 50.0 # / TYPES OF OBSERV
END OF HEADER

```

Figura 1.8: Archivo RINEX meteorológico.

El dato *PR* es la presión en milibares, *TD* es la temperatura seca en grados Celsius y *HR* es la humedad relativa en porcentaje.

En este capítulo se han presentado los conceptos principales de GNSS para entender el trabajo realizado. Estos fundamentos teóricos son necesarios para entender el

trabajo realizado en esta tesis. En el siguiente capítulo se explicarán los métodos de posicionamiento satelital.



## Capítulo 2

# Métodos de posicionamiento satelital GPS

En el capítulo anterior, se describieron los conceptos principales de la teoría del GNSS, las ecuaciones de observación y los archivos RINEX. En el capítulo presente, se describen los métodos para calcular la posición del receptor. Esto es necesario para explicar la resolución de la ambigüedad en los capítulos posteriores.

En función de los requerimientos de precisión y de la infraestructura disponible, existen diferentes técnicas de posicionamiento basadas en observaciones GNSS. A continuación se describen los principales métodos.

### 2.1. Posicionamiento Simple

El **posicionamiento simple** puntual consiste en la determinación de la posición del receptor utilizando únicamente las pseudodistancias medidas hacia al menos cuatro satélites, junto con las efemérides transmitidas en la señal de navegación.

En este método, no se aplican correcciones diferenciales ni modelos de error avanzados, por lo que la precisión típica se encuentra en el orden de **5 a 15 metros** en condiciones abiertas. La precisión del posicionamiento simple esta impactada principalmente por el error del pseudorango el cual es de aproximadamente 20 metros. Al hacer la trilateración utilizando un conjunto de satélites, la precisión en la posición

puede alcanzar hasta los 3 metros.

Las principales fuentes de error incluyen:

- Errores en las efemérides transmitidas por los satélites.
- Retrasos ionosféricos y troposféricos.
- Ruido de medición y multitrayectoria.

El posicionamiento simple, es usado en navegación en mapas, donde solamente importa la posición como una referencia para conocer algún sitio o calle aledaña que para fines de navegación funciona. La mayoría de los equipos GPS de mano, usan solamente el posicionamiento simple debido a que solo utilizan la medición del pseudocódigo de los satélites. En la figura 2.1 [13] se muestra un navegador GPS típico. Este tipo de receptores, al usar el posicionamiento simple como técnica principal, ofrecen una precisión máxima de 3 metros.



Figura 2.1: Navegador GPS de mano.

Para calcular la posición del receptor  $(x, y, z)$  y el error de su reloj  $\delta t_R$  utilizando únicamente mediciones de pseudorangos, se requiere un sistema de al menos 4 ecua-

ciones correspondientes a 4 satélites visibles. Cada satélite  $i$  proporciona una ecuación de pseudorango con la siguiente estructura: Para  $n$  satélites ( $n \geq 4$ ), el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} + c \cdot \delta t_R + E_1 \\ p_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} + c \cdot \delta t_R + E_2 \\ &\vdots \\ p_n &= \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2} + c \cdot \delta t_R + E_n \end{aligned}$$

donde:

- $(x, y, z)$ : Coordenadas desconocidas del receptor
- $(x_i, y_i, z_i)$ : Coordenadas conocidas del satélite  $i$  en el momento de transmisión
- $\delta t_R$ : Error del reloj del receptor (desconocido)
- $E_i = -c \cdot \delta t_{S_i} + \delta_{\text{iono}_i} + \delta_{\text{tropo}_i} + \delta_{\text{tide}_i} + \delta_{\text{multicamino}_i} + \delta_{\text{rel}_i} + \epsilon_i$ : Términos de error y correcciones para el satélite  $i$

Dado que el sistema es no lineal, se lineariza alrededor de una posición aproximada  $(x_0, y_0, z_0)$  y error de reloj aproximado  $\delta t_{R_0}[1]$ :

$$\mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{X} = \mathbf{w}$$

donde:

- $\delta \mathbf{X} = [\delta x, \delta y, \delta z, \delta t_R]^T$ : Vector de correcciones
- $\mathbf{A}$ : Matriz de diseño ( $n \times 4$ ) con elementos:

$$\mathbf{A}_i = \left[ -\frac{x_i - x_0}{\rho_i}, -\frac{y_i - y_0}{\rho_i}, -\frac{z_i - z_0}{\rho_i}, 1 \right]$$

siendo  $\rho_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}$  la distancia aproximada al satélite  $i$  y  $x_0$ ,  $y_0$  y  $z_0$  son las coordenadas del receptor.

- $\mathbf{w}$ : Vector de residuales con elementos  $(n \times 1)$ :

$$\mathbf{w}_i = p_i^{\text{obs}} - (\rho_i + c \cdot \delta t_{R_0} + E_i)$$

## Solución por Mínimos Cuadrados

La solución se obtiene mediante el método de Mínimos Cuadrados Paramétrico cuya forma más sencilla es la siguiente [14]:

$$\delta \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{w}$$

y se actualiza en cada iteración:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \delta \mathbf{X}$$

hasta que  $\delta \mathbf{X}$  sea suficientemente pequeño.

El método que se acaba de describir es para un posicionamiento simple puntual, asumiendo que el receptor está estático, no habrá ningún modelo dinámico que describa el movimiento del receptor, por lo que el posicionamiento será puntual en todo momento.

## 2.2. Posicionamiento puntual preciso (PPP)

El **posicionamiento puntual preciso** (PPP, por sus siglas en inglés) mejora significativamente la precisión respecto al posicionamiento simple, ya que emplea observaciones de fase 1.3 y pseudodistancia 1.2 junto con **efemérides precisas** y **correcciones de reloj** proporcionadas por servicios internacionales como el IGS (International GNSS Service).

El método PPP permite alcanzar precisiones en el orden de centímetros, dependiendo de la calidad de los datos, de las correcciones empleadas y de la duración del período de convergencia. Sin embargo, las precisiones pueden ser por debajo del centímetro si se realiza el posicionamiento por largos periodos de tiempo. Además, el

error de la posición calculada es absoluto y no está correlacionado con otra estación base y satélite pivote.

Entre sus características principales destacan:

- Utiliza observaciones de código y fase de portadora. El procedimiento para resolver la ambigüedad aplicando este método se llama *Resolución de la Ambigüedad PPP* [15].
- Requiere modelos detallados para la ionosfera, troposfera, mareas y relatividad.

Es importante mencionar que al igual que el posicionamiento simple, este método también es absoluto, es decir, no necesita diferenciarse con ninguna estación base. La resolución de la ambigüedad se ejecuta con ambigüedades sin diferenciar, siempre y cuando cada uno de los errores que impactan la observación de la fase portadora sean modelados de manera correcta:

$$E_i = -c \cdot \delta t_{S_i} - \delta_{\text{iono}_i} + \delta_{\text{tropo}_i} + \delta_{\text{tide}_i} + \delta_{\text{multicamino}_i} + \delta_{\text{rel}_i} + \epsilon_i$$

A pesar de que el cálculo de los errores es complejo, el PPP ofrece la ventaja de que la estación no necesita un receptor base para alcanzar a fijar las ambigüedades.

## 2.3. Posicionamiento Diferencial (DGPS)

El **posicionamiento diferencial** (DGPS) se basa en el uso de una estación de referencia situada en un punto conocido que transmite en tiempo real las correcciones diferenciales a uno o varios receptores móviles.

En este método, se aprovecha que muchos de los errores que afectan a las observaciones GNSS son altamente **correlacionados en distancias cortas**. Al realizar la diferencia de las observaciones entre estaciones, se reduce significativamente el impacto de:

- Errores de reloj satelital.
- Retrasos ionosféricos y troposféricos.

- Errores orbitales.

La diferencia más común es entre receptores, la cual es obtenida cuando las observaciones de un conjunto de satélites son diferenciados entre el receptor rover y la estación base. La característica más importante es que el error en el reloj del satélite es cancelado y los errores atmosféricos son mitigados. Esto ocurre porque el reloj del satélite es muy estable, siendo los errores de este los mismo para las transmisiones cercanas y simultaneas [1]. Denotando los receptores por A y B y el satélite por i, y considerando la ecuación (2.5) para cada receptor, la ecuación de diferencia simple utilizando mediciones de fase es la siguiente:

$$\Phi_{AB}^i = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^i + N_{AB}^i + f^i \delta t_{AB} \quad (2.1)$$

Si asumimos dos receptores A, B y dos satélites i, j, pueden formarse dos diferencias simples (ecuación 2.1) para cada satélite. Para obtener una doble diferencia (DD), estas diferencias simples se restan. El sesgo del reloj del receptor se elimina utilizando el doble-diferenciamiento. Asumiendo frecuencias iguales para los satélites i y j, la ecuación de doble-diferencia es:

$$\Phi_{AB}^{ij} = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{ij} + N_{AB}^{ij} \quad (2.2)$$

lo que es resultado de hacer las diferencias entre diferencias simples entre satélites

$$\Phi_{AB}^{ij} = (\Phi_B^i - \Phi_B^j) - (\Phi_A^i - \Phi_A^j)$$

El uso de dobles-diferencias en la resolución de ambigüedades es importante. La razón es que al hacer esto, los términos de reloj se eliminan y el aislamiento de las ambigüedades es posible. En esta tesis, las dobles diferencias son empleadas ya que como se ha mencionado, es una forma eficiente de poder aislar las ambigüedades de los errores que impactan la señal. En la figura 2.2 [1] se muestra la representación gráfica del posicionamiento doble diferencial, en el cual se necesitan dos receptores guardando datos de las señales de los mismos satélites, a una distancia corta (línea base corta

menos de 40 km).

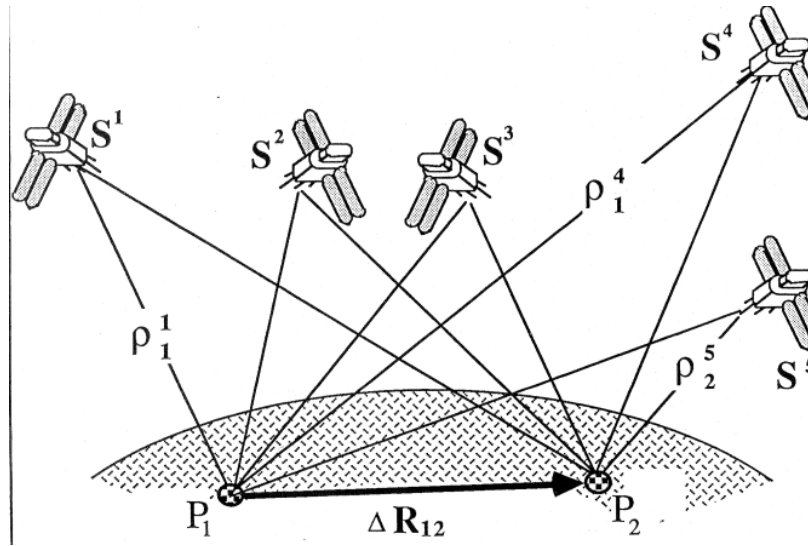


Figura 2.2: Esquema del posicionamiento Diferencial Doble.

Los errores en la posición calculada de la estación rover están correlacionadas con los errores de la estación base, esto es una limitante ya que aunque el método proporcione una precisión al nivel del centímetro, este error es relativo al error en la posición de la base.

## 2.4. Posicionamiento en Tiempo Real con RTK

El **posicionamiento cinemático en tiempo real** (RTK, por sus siglas en inglés) constituye una de las técnicas más eficientes de posicionamiento GNSS. Este método utiliza una estación base y uno o varios receptores móviles, transmitiendo las observaciones en tiempo real para resolver las **ambigüedades enteras** de la fase portadora desde la base a todas las estaciones rover conectadas por medio de radio.

La técnica RTK permite alcanzar precisiones de **centímetros** en tiempo real, lo que la hace ideal para aplicaciones de topografía, geodesia, agricultura de precisión, guiado autónomo y monitoreo estructural.

Entre sus características se destacan:

- Utiliza observaciones de fase y código, es decir, también hay resolución de la

ambigüedad.

- Requiere comunicación entre la estación base y el rover.
- Su precisión disminuye conforme aumenta la distancia entre la base y el móvil.

En el posicionamiento RTK, la estación base transmite al rover los siguientes datos esenciales:

1. **Mediciones de fase de portadora** de todos los satélites visibles
2. **Coordenadas precisas** de la estación base (posición conocida).
3. **Correcciones diferenciales** en tiempo real
4. **Información de tiempo** sincronizado

La estación CORS-FI tiene la capacidad de transmitir las correcciones RTK por medio del protocolo NTRIP, lo que habilita un posicionamiento RTK con solo un receptor en campo.

## Estructura de los datos transmitidos

Los datos se transmiten típicamente en formato RTCM (Radio Technical Commission for Maritime Services):

$$\text{Datos RTCM} = \{\text{Header}, \text{Coordenadas Base}, \Phi_{\text{base}}^s, \text{CRC}\}$$

donde  $\Phi_{\text{base}}^s$  representa las mediciones de fase para cada satélite  $s$ .

Para calcular las diferencias dobles, el rover necesita conocer las mediciones de la base ( $\Phi_A^s$  y  $\Phi_A^j$ ).

En este capítulo se han descrito los principales métodos de posicionamiento satelital. Estos métodos se pueden clasificar en dos grupos, los métodos absolutos y los relativos. La primer clasificación comprende aquellos métodos que no necesitan una estación base para calcular la posición del receptor del usuario. El error en la posición calculada no está correlacionado con ninguna estación, sin embargo si se quieren



ocupar las fases portadoras para tener precisión del nivel del centímetro es necesario usar las correcciones para todos los errores que impactan la señal (posicionamiento puntual preciso). Por otro lado, en la segunda clasificación los receptores para los cuales se quiere calcular la posición necesitan de una estación base. La función de la base será diferenciar los pseudorangos y las fases portadoras para eliminar los errores que se encuentran en las ecuaciones de observación. Este procedimiento es mas sencillo que calcular todos los errores para realizar un posicionamiento puntual preciso, aunque habrá una gran correlación con los errores en la estación base. Como se ha mencionado, en este trabajo se usaron las mediciones doblemente diferenciadas. En el siguiente capítulo se describirán los métodos para resolver las ambigüedades de la señal y habilitar el uso de la fase portadora para alcanzar una precisión al nivel del centímetro.

## Capítulo 3

# Métodos de Resolución de la Ambigüedad

En el capítulo anterior se han definido los métodos de posicionamiento satelital, siendo el posicionamiento diferencial el aplicado en este trabajo de tesis. Como se ha mencionado, el posicionamiento diferencial doble es capaz de mitigar los errores en los relojes de los satélites y del receptor, y los efectos atmosféricos. Estas mitigaciones son validas para líneas base cortas (distancia entre base y rover menor a 40 kilómetros). Al mitigar estos errores de las ecuaciones de observación de pseudorange 1.2 y de fase portadora 1.3, solamente se calculan las coordenadas del receptor y las ambigüedades de los satélites.

En este capítulo, se describirán tres de los métodos mas comunes para resolver las ambigüedades, el método de redondeo, redondeo secuencial y mínimos cuadrados enteros.

### Métodos admisibles

La estimación de los valores enteros de las ambigüedades a partir de sus valores flotantes, es un problema que atrae mucha atención de las personas que se dedican al posicionamiento satelital. Los métodos desarrollados no solamente necesitan encontrar los valores correctos con alta confiabilidad, también necesitan ser eficientes para

encontrarlos en el menor tiempo posible. Los métodos que se desarrollen necesitan cumplir con ciertos requerimientos para que sean válidos. Se parte del concepto que las ecuaciones de observación GNSS pueden ser parametrizadas en una parte entera y en otra no-entera, lo que es descrito por el siguiente sistema de ecuaciones de observación linealizadas [16]:

$$\underset{m \times 1}{\mathbf{y}} = \underset{m \times nn \times 1}{\mathbf{A}} \underset{nn \times 1}{\mathbf{a}} + \underset{m \times pp \times 1}{\mathbf{B}} \underset{pp \times 1}{\mathbf{b}} + \underset{m \times 1}{\mathbf{e}} \quad (3.1)$$

dónde  $\mathbf{y}$  es el vector que contiene las observaciones GPS  $m$ , los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  serán los vectores de estados que son estimados y  $\mathbf{e}$  es el vector del ruido del sistema. Cuando se resuelven las ambigüedades, usualmente el vector de observaciones  $\mathbf{y}$  contiene las observaciones doblemente diferenciadas de la fase portadora y los pseudorangos en las frecuencias que se recibieron en la estación. El vector  $\mathbf{a}$  consiste en las ambigüedades enteras desconocidas, y el vector  $\mathbf{b}$  contiene el resto de los parámetros que se estiman y son comúnmente llamados incrementos de la línea base. La estimación lineal clásica es aplicado a los modelos que contienen solamente valores reales, sin embargo cuando el modelo considera valores reales y enteros (Ecuación 3.1), se aborda el problema de una manera diferente que emplean pasos adicionales. El proceso completo para resolver el sistema de ecuaciones escrito en 3.1, consiste en tres pasos principales [16]:

1. Calcular la solución flotante mediante el método estandar de mínimos cuadrados. Estos valores estimados serán  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  con sus respectivas matrices de covarianzas  $Q_{\hat{a}}$ ,  $Q_{\hat{b}}$  y  $Q_{\hat{a},\hat{b}}$ .
2. Resolver la ambigüedad a partir de los valores reales estimados en el paso anterior  $\hat{a}$ :

$$\check{a} = S(\hat{a}) \quad (3.2)$$

dónde  $S$  es el mapeo de los valores reales hacia los valores en el dominio de los valores enteros.

3. El tercer paso consiste en corregir la parte real con base en la estimación de las

ambigüedades reales calculadas en el paso 2:

$$\check{b} = \hat{b} - Q_{\hat{a}, \hat{b}} Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - \check{a}) \quad (3.3)$$

El calculo de  $\check{b}$  se le conoce como solución fija [17], y junto con el paso 2 (resolución de la ambigüedad) dependen del método que se elija para calcular los valores enteros de  $\hat{a}$ . Existen diversos métodos para el cálculo de los valores enteros, y cada uno de estos tendrá su manera de mapear los valores reales a su correspondiente entero  $S$ , su distribución de probabilidad de que se calcule el valor correcto. El mapeo de los valores reales a los enteros  $S$  debe ser de varios a uno, debido a la naturaleza discreta del espacio de enteros  $\mathbb{Z}^n$ . Esto quiere decir que un solo valor entero será el valor correcto de  $\mathbb{Z}$  para un conjunto de valores  $\mathbb{R}$ . El subconjunto  $S_z$  contiene los valores reales que son mapeados al mismo vector entero  $z$  y se le conoce como *región de atracción*. Entonces el estimador de ambigüedades enteras se puede expresar matemáticamente como la suma de las *regiones de atracción* que mapean los valores de un vector de valores reales  $\hat{a}$  a un vector de valores enteros  $\check{a}$ :

$$\check{a} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} z S_z(\hat{a}) \quad (3.4)$$

El estimador entero 3.4 debe cumplir tres condiciones para que sea un método admisible [16]:

1. Su *región de atracción* debe cubrir el espacio completo de  $\mathbb{R}$ . Esto asegura que **todos** los valores reales sean mapeados a su valor entero correspondiente
2. Las regiones de atracción no deben traslaparse. Sin traslape, cada valor real solamente tiene un valor entero que le corresponda.
3. La tercera condición es la de invarianza traslacional. Esta condición asegura que si el valor flotante es perturbado por una cantidad  $z$ , su valor entero correspon-

diente es perturbado por la misma cantidad:

$$S(\hat{a} + z) = S(\check{a}) + z \quad (3.5)$$

Los estimadores de valores enteros más populares que existen es el Redondeo, Redondeo Secuencial (conocido como Bootstrapping en inglés) y el método de Mínimos Cuadrados Enteros. En las próximas secciones se describirán estos métodos. En este trabajo de tesis se comparan los errores en la posición calculados con los métodos de Redondeo Secuencial y Mínimos Cuadrados enteros.

### 3.1. Redondeo

El método de Redondeo es la manera más sencilla para obtener el valor entero correspondiente a un valor real. En [18] se demuestra que el estimador cumple con las tres condiciones antes mencionadas. El valor real es redondeado a su entero más cercano, entonces, la diferencia máxima entre estos dos valores será de  $\frac{1}{2}$ . La *región de atracción* del Redondeo es:

$$S_{R,z} = \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in R^n \mid |x_i - z_i| \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (3.6)$$

Las regiones de atracción son cubos centrados en los valores enteros  $z$ . En el caso de dos dimensiones, e.g. Ambigüedades  $N_1$  y  $N_2$ , las regiones son cuadrados representados en la figura 3.1 [16]:

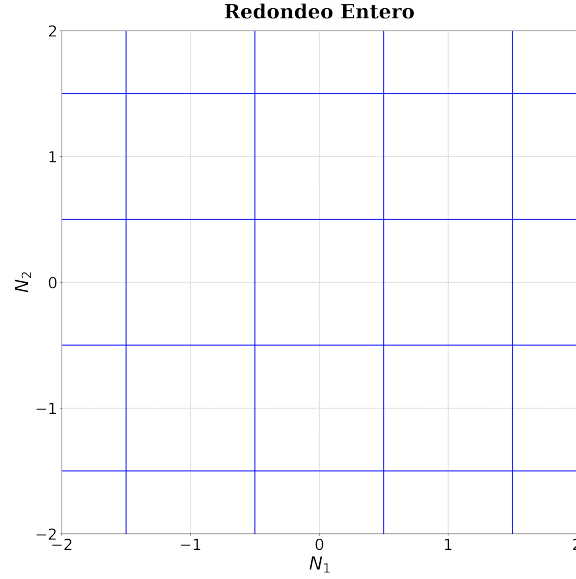


Figura 3.1: Regiones de atracción del metodo Redondeo  $S_{R,z}$  en dos dimensiones.

### 3.2. Redondeo secuencial

A diferencia del Redondeo, el método de redondeo secuencial (bootstrapping) considera la correlación entre las ambigüedades para estimar sus valores enteros. Este método esta basado en los principios de ajuste de *Mínimos cuadrados condicional* y *Mínimos cuadrados secuencial* [19]. El redondeo secuencial ocurre cuando la primera ambigüedad es redondeada a su entero y las ambigüedades reales restantes son corregidas sujetas a la estimación del entero de esta primer ambigüedad [20]. El pseudocódigo del estimador es el siguiente :

**Algoritmo 1** Estimador Redondeo Secuencial para Resolución de Ambigüedades**Entrada:**  $n$  ambigüedades reales  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n$  y su matriz de covarianzas  $Q_{\hat{a}}$ **Salida:** Vector de ambigüedades enteras  $\check{a}_1, \check{a}_2, \dots, \check{a}_n$ 

- 1: Inicializar:  $\hat{a}^{(1)} = \hat{a}$  ▷ Copia del vector original
- 2: **Para**  $i = 1$  a  $n$  **hacer**
- 3:     Redondear la ambigüedad  $i$ -ésima:  $\check{a}_i = \lfloor \hat{a}_i^{(i)} + 0.5 \rfloor$
- 4:     **Si**  $i < n$  **entonces**
- 5:         Corregir la ambigüedad  $i$ -ésima basado en la correlación con la ambigüedad  $i$ :
- 6:          $\hat{a}_{B,i} = \left[ \hat{a}_i - \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{\hat{a}_n \hat{a}_{i|I}} \sigma_{\hat{a}_{i|I}}^{-2} (\hat{a}_{i|I} - \check{a}_{B,i}) \right]$  donde  $\hat{a}_{i|I}$  es la  $i$ -ésima ambigüedad condicionada obtenida previa a través del Redondeo Secuencial
- 7:     **Fin Si**
- 8: **Fin Para**

Este algoritmo esta estrechamente relacionado con la descomposición triangular LDU de la matriz de covarianzas de las ambigüedades  $Q_{\hat{a}} = LDL^T$ , con  $L$  una matriz unitaria triangular inferior y  $D$  una matriz diagonal [19]. Teniendo:

$$(\hat{a} - z) = L(a' - z) \quad (3.7)$$

con  $a'$  siendo la solución de mínimos cuadrados condicional de la condición secuencial con  $z$  y la matriz de covarianzas dadas por  $D$  ( $\sigma_{\hat{a}_{i|I}}^{-2}$ ).

La *región de atracción* del Redondeo Secuencial esta dada por la siguiente expresión [16]:

$$S_{B,z} = \bigcap_{c_i \in Z^n} \left\{ \hat{a} \in R^n \mid |c_i^T D^{-1} L^{-2} (\hat{a} - z)| \leq \frac{1}{2} c_i^T D^{-1} c_i \right\} \quad (3.8)$$

con  $c_i$  siendo el  $i$ -ésimo vector unitario canónico, el cual tiene valor 1 en su  $i$ -ésima entrada y ceros en el resto. En la figura 3.2 (de [16]) se muestra las *regiones de atracción* del Redondeo secuencial en dos dimensiones. Las pendientes de las diagonales dependen de la correlación entre las ambigüedades flotantes. Si no se consideran las covarianzas, las diagonales serían líneas rectas horizontales, y las *regiones de atracción* serían iguales a las del Redondeo.

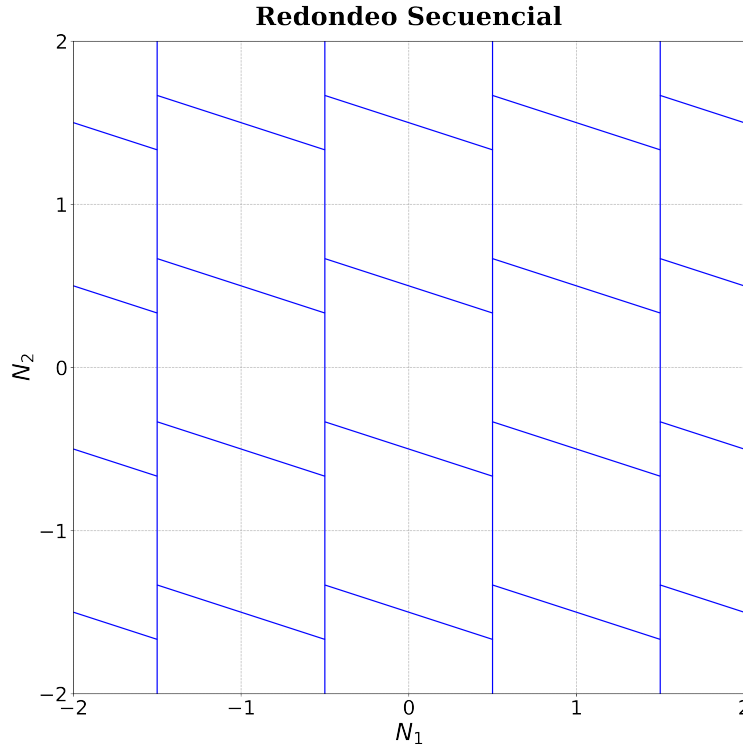


Figura 3.2: *Regiones de atracción* para el método Redondeo Secuencial en dos dimensiones

### 3.3. Mínimos cuadrados enteros (MCE)

En geomática, comúnmente los problemas de estimación de un estado  $\mathbf{x}$ , consisten en mapear ciertos valores  $N$  a un conjunto de valores experimentales obtenidos  $M$ . Por lo general, es que este mapeo es suave, y que los espacios tanto de  $N$  y  $M$  son continuos. Esto se cumple la mayoría de las veces, por ejemplo, cuando estimamos los ajustes de una poligonal topográfica los espacios tanto del estado como de las mediciones son continuas, y las funciones usadas son derivables y continuas de igual manera, habilitando la creación de una matriz de diseño (matriz Jacobiana) [21]. Sin embargo, en el procesamiento de los datos de observación correspondientes a las fases portadoras de los satélites GNSS, el problema de estimación es restringido al cálculo de una variable discreta, en lugar de continua como en la mayoría de los casos de las aplicaciones de mínimos cuadrados en topografía y geodesia. Esto es debido a que las



ambigüedades de fase representan el número entero de ciclos de la señal que recorre desde el satélite al receptor [22]. Existen diversos métodos que se han desarrollado para atender este problema de estimación, siendo dos de los principales los mencionados en secciones anteriores, el Redondeo y el Redondeo Secuencial. En general, las metodologías desarrolladas atienden el problema usando esquemas de redondeo costosos computacionalmente hablando [23]. La evolución de las técnicas propuestas para la estimación de los valores enteros de las ambigüedades de fase es entorno a hacer mas eficiente el algoritmo en términos de rapidez sin perder precisión. Es importante tomar en cuenta el tiempo y costo computacional que el método necesita para resolver las ambigüedades, ya que es crucial para aplicaciones de posicionamiento que sean en tiempo real, e.g. navegación autónoma. El método de mínimos cuadrados, atiende el problema de eficiencia y precisión, siendo uno de los métodos más populares para resolver las ambigüedades de la fase. Este método incluye una parametrización de las ambigüedades doblemente diferenciadas a un conjunto de ambigüedades enteras. Esta parametrización o transformación de valores otorga valores de varianza mas pequeños y menos correlacionados. El procedimiento de transformar los valores reales de las ambigüedades a otro dominio de valores para resolverlas a enteros, también es usado, por ejemplo, en la combinación entre frecuencias  $L_1$  y  $L_2$  para obtener el conjunto de ambigüedades de *banda-ancha* [11]. Esta transformación ademas de no ser uno a uno (a diferencia de la transformación considerada en este método), no contempla la geometría de los satélites en vista. La geometría es considerada en las ambigüedades doblemente diferenciadas, ya que se escoge el satélite "pivote" con la mayor altitud para que sea favorable a las diferencias obtenidas entre satélites.

En esta sección se describe el método de mínimos cuadrados enteros, con el objeto de mostrar las principales características y ventajas del método en comparación con los dos métodos descritos en las secciones anteriores. Es importante hacer énfasis que el trabajo de esta tesis está basado en comparar el desempeño de mínimos cuadrados enteros con la técnica de redondeo secuencial y al aplicarlo a datos obtenidos de diferentes receptores y la estación CORS-FI.

## Problema de Mínimos Cuadrados

El problema de mínimos cuadrados se formula como [22]:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - A(x)\|^2 \quad (3.9)$$

donde:

- $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m \geq n$ ) es una relación (lineal o no lineal) entre el vector de variables  $x$  y las observaciones  $y$ .
- $\|v\|^2 = v^T Q^{-1} v$  es una norma cuadrática definida por una matriz  $Q$  positiva definida. Es una norma pesada que incorpora información estadística sobre las observaciones.

$v = y - A(x)$  es el vector de residuos (diferencia entre observaciones y el modelo) y representa el residuo cuadrático pesado, que mide la discrepancia entre las observaciones y el modelo, teniendo en cuenta la confiabilidad de cada observación. Para cada  $x$ ,  $A(x)$  define un punto en  $\mathbb{R}^m$ . El conjunto de todos los  $A(x)$  forma una **variedad** de dimensión  $n$ . La cantidad  $\|y - A(x)\|$  es la distancia entre  $y$  y  $A(x)$ . El objetivo es encontrar el punto  $\hat{y} = A(\hat{x})$  más cercano a  $y$ .

1. **Ortogonalidad del residual:**  $\hat{v} = y - \hat{y}$  debe ser ortogonal al espacio tangente de la variedad en  $\hat{y}$ .
2. **Radio de curvatura:**  $y$  debe estar dentro de una hiperesfera centrada en  $\hat{y}$  con radio igual a la curvatura normal máxima en la dirección de  $\hat{v}$ .

Si  $A$  es lineal, la variedad es un subespacio plano, y la solución para el caso lineal es explícita considerando el proyector ortogonal  $P_A$  sobre el rango de  $A$ :

$$\hat{x} = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} y.$$

La derivación completa de la solución de mínimos cuadrados no está dentro del alcance de este trabajo. El desarrollo completo y todos los tipos y aplicaciones de las soluciones

de mínimos cuadrados se encuentra en [14]. Esta sección enfatizará la restricción de la estimación de valores enteros el cual es aplicable al cálculo de las ambigüedades de la fase.

### Restricción de estimación de valores enteros

Si el problema de mínimos cuadrados se restringe a estimar valores enteros, entonces se le conoce como mínimos cuadrados enteros. La formulación original, Ecuación 3.9, se escribe de la siguiente manera cuando es de tipo entero:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - A(x)\|^2, x \in \mathbb{Z}^n \quad (3.10)$$

donde  $\mathbb{R}^n$  ha sido reemplazado por el dominio en  $\mathbb{Z}^n$ .

La matriz  $A$  mapea la cuadrícula estándar de  $\mathbb{R}^n$  a una cuadrícula oblicua en el espacio de datos  $\mathbb{R}^m$ . Los puntos de esta cuadrilla son iguales al conjunto de puntos de  $\mathbb{Z}^n$  mapeada bajo  $A$ . Por lo tanto, es de este conjunto mapeado de puntos de la cuadrícula de donde se deben seleccionar puntos como posibles candidatos para resolver la Ecuación 3.10. La solución es el punto de esta cuadrícula más cercano a  $\mathbf{y}$  en la métrica  $\mathbf{Q}^{-1}$ .

Aplicando el teorema de Pitágoras, se separa el problema en dos partes:

$$\|y - Ax\|^2 = \|P_A y - Ax\|^2 + \|P_A^\perp y\|^2, \quad (3.11)$$

donde:

- $P_A = A(A^T \mathbf{Q}^{-1} A)^{-1} A^T \mathbf{Q}^{-1}$  es el proyector ortogonal.
- $P_A^\perp$  es el complemento ortogonal de  $A$ ;  $P_A^\perp = I - P_A$ ,  $P_A^\perp = I - A(A^T \mathbf{Q}^{-1} A)^{-1} A^T \mathbf{Q}^{-1}$ .
- El término  $\|P_A^\perp y\|^2$  es independiente de  $x$ .

De tal manera que el problema original expresado con la Ecuación 3.10, es equi-

valente al primer término del lado derecho de la Ecuación 3.11:

$$\min_x \|P_A y - Ax\|^2, \quad x \in \mathbb{Z}^n. \quad (3.12)$$

Dado que ambos problemas son equivalentes, el parámetro que minimiza la Ecuación 3.10, también minimiza 3.12. La solución es obtenida en dos pasos. El primero consiste en realizar una estimación ordinaria de mínimos cuadrados, lo que es equivalente a remplazar  $y$  en la Ecuación 3.10 por su estimación de mínimos cuadrados  $P_A y$  y obtener la Ecuación 3.12.

La restricción indica que el vector  $x$  se encuentra en el espacio de valores enteros  $\mathbb{Z}^n$ . Si solo algunos parámetros son enteros ( $x = (x_1, x_2)^T$  con  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}$ ), el problema se reescribe como:

$$\min_{x_1, x_2} \|y - A_1 x_1 - A_2 x_2\|^2, \quad (3.13)$$

y se resuelve en dos etapas:

1. Resolver el subproblema entero para  $x_2$ :

$$\min_{x_2} \|P_{A_1}^\perp y - P_{A_1}^\perp A_2 x_2\|^2, \quad x_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}. \quad (3.14)$$

2. Calcular  $x_1$  condicional a  $x_2$ :

$$\hat{x}_1 = (A_1^T Q^{-1} A_1)^{-1} A_1^T Q^{-1} (y - A_2 \hat{x}_2). \quad (3.15)$$

Definiendo  $Q_{\hat{x}} = (A^T Q^{-1} A)^{-1}$ , el problema se simplifica a:

$$\min_x \|\hat{x} - x\|_{Q_{\hat{x}}}^2, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad (3.16)$$

donde  $\hat{x}$  es la solución de mínimos cuadrados no restringidos y  $\|\cdot\|_{Q_{\hat{x}}}^2 = (\cdot)^T Q_{\hat{x}}^{-1} (\cdot)$ .

No existe una técnica estándar para resolver 3.16, ya que las ecuaciones que re-

suelven fueron desarrolladas para el problema ordinario. Debido a esto, se requiere el uso de estrategias para una búsqueda discreta de valores que minimicen el problema de mínimos cuadrados enteros. La idea es buscar el valor que minimice 3.16, estableciendo una región elipsoidal en  $R^n$ . La región elipsoidal esta descrita por la siguiente expresión:

$$(x - \hat{x})^T \mathbf{Q}_{\hat{x}}^{-1} (x - \hat{x}) \leq \chi^2 \quad (3.17)$$

dónde  $\chi^2$  define el tamaño del espacio de búsqueda, por lo que su valor debe ser elegido con cuidado. Un espacio demasiado pequeño puede que no contenga el valor que solucione el problema, y un espacio demasiado grande será ineficiente para la búsqueda, ya que se buscará el valor entre muchos candidatos.

La constante  $\chi^2$  controla el tamaño: si se escoge desde la distribución  $\chi^2$  (o F) se obtiene un criterio estadístico (nivel  $1 - \alpha$ ).

### Planos elipsoidales de soporte

El elipsoide se puede describir como intersección de pares de planos (“planos de soporte”). Para todo vector normal  $c \in \mathbb{R}^n$  vale la equivalencia [19]

$$(x - \hat{x})^T \mathbf{Q}_{\hat{x}}^{-1} (x - \hat{x}) \leq \chi^2 \iff (c^T (x - \hat{x}))^2 \leq (c^T \mathbf{Q}_{\hat{x}} c) \chi^2, \forall c. \quad (3.18)$$

El par de planos  $c^T (x - \hat{x}) = \pm \sqrt{c^T \mathbf{Q}_{\hat{x}} c} \chi$  son los planos de soporte con normal  $c$ . En la práctica sólo se puede usar un conjunto finito de normales  $c$ ; elegir las adecuadamente (p. ej. direcciones principales o combinaciones de ejes) reduce la región generada por dichos planos y permite seleccionar candidatos enteros.

### Selección de cotas coordenada a coordenada

Una elección simple es usar normales alineadas con los ejes de la cuadrícula:  $c = e_i$ . Entonces las cotas por coordenada son

$$|x_i - \hat{x}_i| \leq \sigma_{\hat{x}_i} \sqrt{\chi^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

donde  $\sigma_{\hat{x}_i}^2$  es la varianza marginal de  $\hat{x}_i$ . Estas cotas producen una caja recta que contiene el elipsoide, pero puede ser muy conservadora cuando el elipsoide está rotado y alargado.

### Mínimos cuadrados condicionales / completado de cuadrados (2D $\rightarrow$ nD)

Para obtener cotas más ajustadas se usa la idea de *completar cuadrados* (o ajuste condicional secuencial). En 2D, con la forma

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \leq \chi^2,$$

al completar cuadrados se obtiene

$$a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)x_2^2 \leq \chi^2,$$

de donde la cota para  $x_1$  condicionada en un  $x_2$  dado es más estrecha:

$$\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 \leq \frac{\chi^2}{a} - \frac{cb^2}{a^2}x_2^2.$$

Ese procedimiento equivale a una descomposición triangular (LDU) de  $Q_{\hat{x}}^{-1}$  y conduce a las cotas condicionales

$$\frac{(x_n - \hat{x}_{n|n+1})^2}{\sigma_{n|n+1}^2} + \frac{(x_{n-1} - \hat{x}_{n-1|n})^2}{\sigma_{n-1|n}^2} + \dots \leq \chi^2,$$

es decir, cotas del tipo

$$|x_i - \hat{x}_{i|i+1,\dots,n}| \leq \sigma_{i|i+1,\dots,n} \sqrt{\chi^2},$$

que son siempre (igual o) más estrechas que las univariadas de (3.19). Estas expresiones y su generalización secuencial se encuentran en la sección sobre mínimos cuadrados condicionales.

**Algoritmo de búsqueda**

1. Fija  $\chi^2$  (p.ej. por nivel de confianza o por incluir al menos un candidato entero).
2. Empieza por la última coordenada (índice  $n$ ): determina todos los enteros  $k_n$  que satisfacen la cota condicional para  $x_n$ .
3. Para cada candidato  $k_n$  calcula la cota condicional para  $x_{n-1}$ ; elige candidatos  $k_{n-1}$  que la satisfacen.
4. Continúa hacia atrás hasta formar un vector entero completo  $x$ . Evalúa la función objetivo original y actualiza  $\chi^2$  (si encontraste un vector con menor valor, puedes reducir la región).
5. Si en una etapa no hay candidatos, retrocede y prueba el siguiente entero en la etapa anterior (backtracking).

Este esquema es la base de búsquedas eficientes basadas en completar cuadrados / LDU y evita explorar grandes cajas cuando el elipsoide está muy rotado.

---

**Algoritmo 2** Búsqueda secuencial para el problema de mínimos cuadrados enteros (MCE)

---

**Entrada:**  $\hat{x}$  estimador LS real,  $Q_{\hat{x}}$  covarianza,  $\chi^2$  radio inicial

**Salida:**  $x^*$  solución entera que minimiza (3.16)

---

```

1: function BUSQUEDA-MCE( $\hat{x}, Q_{\hat{x}}, \chi^2$ )
2:   Factoriza  $Q_{\hat{x}}^{-1}$  en forma triangular (p.ej.  $LDL^T$ )
3:    $x^* \leftarrow \emptyset$ ,  $f_{\min} \leftarrow +\infty$ 
4:   Inicializa índice  $i \leftarrow n$  y vector parcial  $z \leftarrow$  vacío
5:   Mientras  $i \leq n$  hacer
6:     Calcula  $\hat{x}_{i|i+1,\dots,n}$  y  $\sigma_{i|i+1,\dots,n}$ 
7:     Determina conjunto de enteros candidatos

```

$$\mathcal{C}_i = \left\{ k \in \mathbb{Z} : |k - \hat{x}_{i|i+1,\dots,n}| \leq \sigma_{i|i+1,\dots,n} \sqrt{\chi_{\text{res}}^2} \right\}$$

donde  $\chi_{\text{res}}^2$  es el radio residual tras fijar  $x_{i+1}, \dots, x_n$ .

```

8:   Si  $\mathcal{C}_i$  no vacío entonces
9:     Elige siguiente  $k$  de  $\mathcal{C}_i$ , asígnalo a  $z_i$ 
10:    Si  $i = 1$  entonces
11:      Forma vector completo  $x$  con las  $z_j$ 
12:      Calcula  $f = (x - \hat{x})^T Q_{\hat{x}}^{-1} (x - \hat{x})$ 
13:      Si  $f < f_{\min}$  entonces
14:         $f_{\min} \leftarrow f$ ,  $x^* \leftarrow x$ ,  $\chi^2 \leftarrow f_{\min}$ 
15:      Fin Si
16:    Si no
17:       $i \leftarrow i - 1$  ▷ bajar a la coordenada anterior
18:    Fin Si
19:  Si no
20:     $i \leftarrow i + 1$  ▷ retroceder (backtracking)
21:  Fin Si
22: Fin Mientras
23: Retornar  $x^*$ 
24: Fin function

```

---

### 3.3.1. Región de búsqueda

Considerando el problema general de mínimos cuadrados con parámetros reales y enteros (Ecuación 3.13).

$$\min_{x_1, x_2} \|y - A_1 x_1 - A_2 x_2\|^2, \quad (3.20)$$



Dónde  $x_1$  son las variables en el dominio de los valores reales, y  $x_2$  perteneciente al dominio de los enteros  $\mathbb{Z}$ . Minimizando el término  $A_2x_2$  y resolviendo o ajustando  $A_1x_1$  condicionado a la resolución de la parte entera, como se ha mencionado en la sección anterior, el problema de mínimos cuadrados con restricción entera se soluciona. El término correspondiente a los valores enteros, tercer termino de Ecuación 3.20, es descrito de la siguiente manera [16]:

$$\check{a}_2 = \min \|\hat{a} - z\|_{Q_{\hat{a}}}^2 \quad (3.21)$$

dónde  $\check{a}_2$  es la solución a las ambigüedades por mínimos cuadrados enteros,  $\hat{a}$  es el valor real de las ambigüedades y  $z$  es el valor entero perteneciente a  $\mathbb{Z}$ . La *región de atracción* de los valores enteros  $z$  en una región de puntos reales y continuos, es el grupo o colección de valores reales  $x \in \mathbb{R}^n$  que se encuentran más cerca de  $z$  que de cualquier otro entero en la región, dónde la distancia es medida con la metrica de la matriz de covarianzas  $Q_{\hat{a}}$ . La *región de atracción* perteneciente al entero  $z$  es descrita por la expresión:

$$S_z = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\|_{Q_{\hat{a}}}^2 \leq \|x - u\|_{Q_{\hat{a}}}^2, \forall u \in \mathbb{Z}^n \right\} \quad (3.22)$$

Las *regiones de atracción* en el método de Mínimos cuadrados enteros se construyen mediante la intersección de semiplanos, los cuales están delimitados por planos ortogonales a los vectores  $(u - z)$ , donde  $u \in \mathbb{Z}^n$  y  $z$  representa la estimación flotante de las ambigüedades. Cada uno de estos planos pasa por el punto medio  $\frac{1}{2}(u + z)$ . En [17] se demuestra que :

- Se necesitan como máximo  $2^n - 1$  pares de semiplanos para la construcción
- Los vectores enteros  $u$  deben corresponder a los  $2^n - 1$  enteros adyacentes

Para el caso particular de  $n = 2$  (bidimensional):

- Se requieren 3 pares de semiplanos ( $2^2 - 1 = 3$ )
- La intersección forma regiones hexagonales

- Esta configuración se ilustra en la figura 3.3. Imagen de [16]

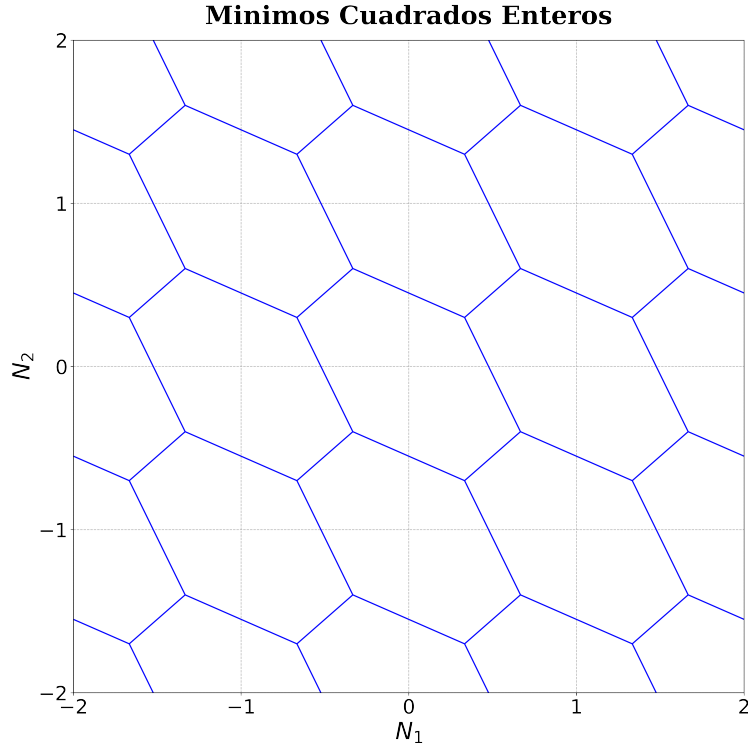


Figura 3.3: *Regiones de atracción* para el método de Mínimos cuadrados enteros en dos dimensiones

### 3.3.2. LAMBDA

El Ajuste de Decorrelación de las Ambigüedades de Mínimos Cuadrados (LAMBDA por sus siglas en inglés), es un método que soluciona de manera eficiente el problema de resolución de la ambigüedad. El espacio de búsqueda es definido de la siguiente manera:

$$a \in Z^n | (\hat{a} - a)^T Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - a) \leq X^2 \quad (3.23)$$

Esto quiere decir que el espacio de búsqueda es un elipsoide de  $n$  dimensiones con centro en  $\hat{a}$ , moldeado por la matriz de covarianzas  $Q_{\hat{a}}^{-1}$  y su tamaño definido por  $X^2$  [16]. Por lo tanto, correlaciones altas entre las ambigüedades resulta en un elipsoide muy elongado, aumentando el tamaño de búsqueda de los enteros. El método LAMB-

DA, es necesario para transformar el espacio de búsqueda a una región mas esférica. Al método LAMBDA, también se le conoce como transformación  $Z$ , y decorrelaciona las ambigüedades [24]:

$$z = Z^* a, \hat{z} = Z^* \hat{a}, Q_{\hat{z}} = Z^* Q_{\hat{a}} Z \quad (3.24)$$

Esta transformación es admisible siempre que  $Z^*$  preserve el volumen del elipse y tenga enteros como entrada solamente. Entonces el problema de mínimos cuadrados enteros discutido en la Sección anterior, se transforma al siguiente problema:

$$\min(\hat{z} - z)^* Q_{\hat{z}}^{-1} (\hat{z} - z) \quad (3.25)$$

con  $z \in \mathbb{Z}^n$ . La búsqueda es mas eficiente con esta transformación ya que la decorrelación hace más esférica el espacio de búsqueda. El espacio de búsqueda transformado, se describe de la siguiente manera [24]:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{z}_{i|I} - z_i)^2 / \sigma_{i|I}^2 \leq X^2 \quad (3.26)$$

donde  $X^2$  es elegido para controlar el número de candidatos contenidos en el elipsoide. En las figuras 3.4 y 3.5 [25] se muestra el espacio de búsqueda antes y después de decorrelacionar las ambigüedades con la transformación  $Z$ . El elipse después de la transformación es menos elongado, reduciendo el espacio de búsqueda marcado por el cuadrado amarillo. Aunque el elipse es menos elongado después de  $Z$ , su área se conserva mientras que el número de candidatos enteros se reduce.

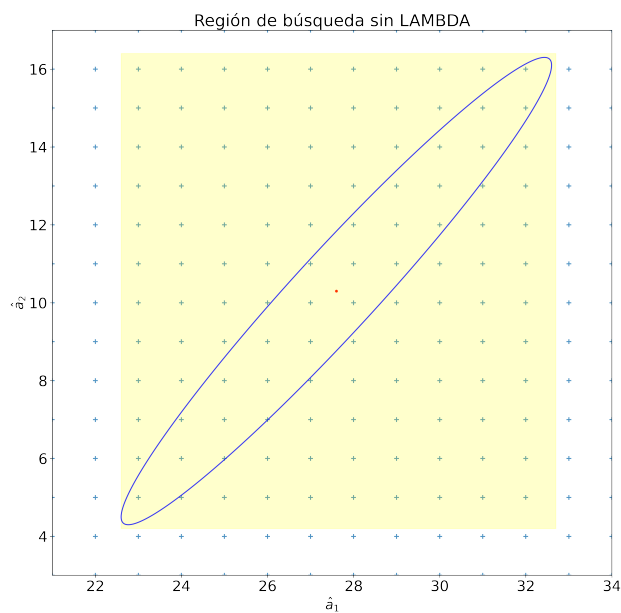


Figura 3.4: Región de búsqueda sin decorrelacionar las ambigüedades. Ejemplo en dos dimensiones

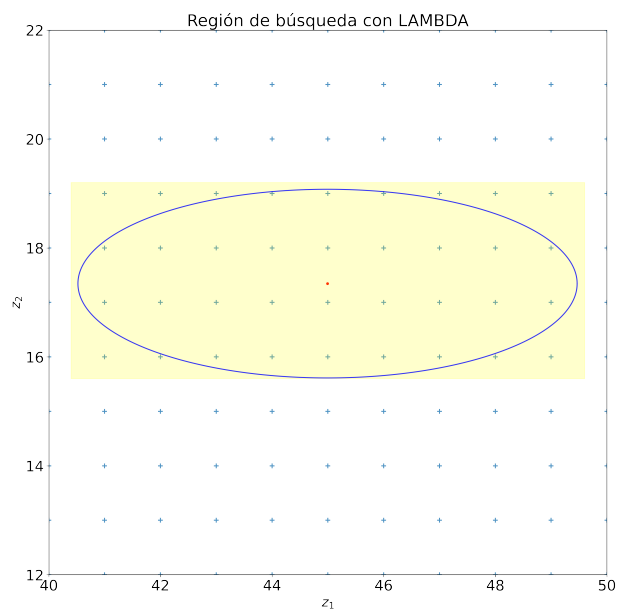


Figura 3.5: Región de búsqueda después de transformación LAMBDA.

## Prueba estadística

Una vez que se encontraron las ambigüedades enteras que minimizan el error del sistema de ecuaciones, se debe corroborar que esta solución es la correcta. Este paso es necesario antes de fijar la solución flotante a la fija (paso 3 de la resolución de la ambigüedad). La prueba de *tasa* es la estadística usada para confiar en la solución que se acaba de calcular [26]. Consideremos  $\hat{a}$  como minimizador de  $R(a)$ :

$$R(a) = (\hat{a} - a)^T Q_{\hat{a}\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - a) \quad (3.27)$$

Sea  $a'$  el entero que entrega el segundo valor más pequeño de  $R(a)$ . Entonces la prueba de *tasa* es como sigue:

$$\frac{R(a')}{R(a)} > kc \quad (3.28)$$

donde  $kc$  es el valor critico elegido, comúnmente se elige 3. Este es el criterio que evalúa si se acepta o se rechaza la solución encontrada por mínimos cuadrados.

## 3.4. Filtro de Kalman

En posicionamiento y navegación satelital, el uso de un estimador Bayesiano recursivo, como lo es el Filtro de Kalman, es popular. Esto se debe a la robustez y simplicidad del filtro en el cálculo de un vector de estado que contiene la posición, velocidad, aceleración del receptor así como las ambigüedades de las señales recibidas. Las siguientes características son las que hacen que el estimador supere al método de mínimos cuadrados en navegación satelital:

- El método es recursivo y contiene las características de un proceso markoviano, haciendo uso de las cadenas de Gauss-Markov.
- Se considera un modelo dinámico dentro el paso de la predicción del filtro. Esto hace posible que el filtro estime de manera más precisa el estado con un modelo que depende del tiempo

- El vector de estado puede involucrar casi cualquier variable que se requiera calcular.

El filtro de Kalman es usado en esta tesis ya que es el método implementado en RTKLIB para el cálculo de la posición y su respectivo error. Es importante describir el método para analizar los resultados obtenidos para las diferentes maneras de resolver las ambigüedades.

## Estructura del filtro de Kalman

El problema de estimación consiste en calcular el vector de estado  $\mathbf{x}$  de manera recursiva en base a las observaciones  $y$  recibidas en cada época  $k$ . Se considera un sistema discreto dinámico definido por la dinámica del estado  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1|k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.29)$$

dónde  $x_k$  es el estado calculado en la época  $k$ , que contiene el vector de posición, velocidad y aceleración en las tres dimensiones, y las ambigüedades reales  $N$  de la señal,  $\mathbf{x}_k = (r_{x,y,z}, v_{x,y,z}, a_{x,y,z}, N_{1...n})$ ,  $n$  siendo el número de satélites,  $\mathbf{F}_k$  es la matriz de transición del modelo dinámico. La covarianza del estado también se propaga en la fase de predicción como:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (3.30)$$

El filtro de Kalman sigue un esquema estándar en dos pasos fundamentales:

1. **Predicción:** Se proyecta el estado y su covarianza hacia la siguiente época utilizando un modelo dinámico.
2. **Actualización:** Se incorporan las observaciones GNSS recibidas (pseudorangos, fases portadoras, Doppler) para corregir la predicción, ponderadas según sus incertidumbres.

## Modelo de observación

Las observaciones GNSS están relacionadas de forma no lineal con el estado a través del siguiente modelo de observación:

$$\mathbf{y}_k = H_k \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{v}_k, \quad (3.31)$$

dónde  $\mathbf{H}(x_k)$  es la matriz que proporciona la conexión entre la medición con ruido  $n_k$  y el vector de estado en el tiempo  $k$ , que para el caso no lineal será la matriz Jacobiana de derivadas parciales del modelo de medición justo como la matriz de diseño  $A$  en los mínimos cuadrados y  $\mathbf{y}$  son las observaciones recibidas en la época  $k$ . Se le conoce innovación o residuo de las observaciones, a la diferencia entre las mediciones y el vector de estado relacionado al dominio de las mediciones a través de  $h$ , la cual es una función no lineal de observación con la matriz de diseño  $H$  adjunta:

$$z_k = \mathbf{y}_k - h(\hat{x}_{k|k-1}) \quad (3.32)$$

La ganancia de Kalman, que pondera el peso relativo entre la predicción y las mediciones, se calcula como:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3.33)$$

Con la innovación y la ganancia, el estado y su covarianza se actualizan como:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \quad (3.34)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (3.35)$$

El filtro de Kalman es un derivado del método de mínimos cuadrados secuencial pero incorporando un paso de predicción para calcular el estado de manera recursiva. En el paso de actualización, Ecuación 3.34, se corrige la predicción usando la ganancia de Kalman multiplicada por la innovación o residuo. El filtro viene modulado por el

ruido que se usa en el estado (matriz de covarianza  $\mathbf{Q}_k$  y el error de las mediciones descrito por la matriz  $\mathbf{R}_k$  en la ganancia de Kalman). El filtro de Kalman usado en RTKLIB, calcula la solución geométrica completa, es decir la posición, velocidad, aceleración y ambigüedades flotantes cada época.



# Capítulo 4

## Metodología

En el capítulo anterior se describieron 3 de los métodos válidos y mas comunes para calcular los valores enteros de las ambigüedades de fase. Una de las conclusiones principales del capítulo anterior, es que el método de mínimos cuadrados tiene la mayor probabilidad de encontrar los valores enteros correctos, seguido de la técnica de Redondeo Secuencial o Bootstrapping y al último el Redondeo Simple. En este capítulo se describe la metodología seguida para procesar los datos, obtener los errores de las diferentes técnicas de resolución de la ambigüedad y los diferentes receptores para posteriormente compararlos. El capítulo empieza por describir el software utilizado, RTKLIB. Seguido de esta descripción, se explican las características de los datos usados, después se procede a explicar los diferentes modos de Resolución de la Ambigüedad en RTKLIB, y por último se muestran y discuten los resultados obtenidos.

### 4.1. RTKLIB

El software RTKLIB es un programa libre elaborado por el Dr. Takasu Tomoji en el 2006, profesor de la Universidad de Tokio para procesar datos GNSS y realizar un posicionamiento preciso. Debido a que es de código abierto, RTKLIB desde su elaboración ha tenido aportaciones (técnicas y de innovación) y desarrollos importantes por parte de una comunidad científica global dedicada al estudio de diversas áreas

relacionadas con Posicionamiento y Navegación satelital.

## Características principales

RTKLIB se compone de diversos módulos escritos en C. Los módulos principales están desarrollados de acuerdo a la técnica de posicionamiento que se requiera. Las técnicas de posicionamiento que son posibles aplicar son:

- Posicionamiento puntual simple. Se lleva a cabo solamente usando pseudorangos de los satélites y usando el filtro de Kalman Extendido (mínimos cuadrados secuencial)
- Posicionamiento estático. Es un posicionamiento diferencial usando el filtro de Kalman solamente con la posición y las ambigüedades en el vector de estado, no se calcula vector de velocidad ni aceleración.
- Posicionamiento puntual preciso. Es un posicionamiento de alta precisión y absoluto. RTKLIB admite correcciones de órbita, correcciones de los relojes de los satélites, perfiles ionosféricos y troposféricos, y los parámetros de calibración de la estación.

RTKLIB también tiene rutinas para decodificar las observaciones de receptores de bajo costo y es adaptable a recibir mediciones de otros sensores para ser integrados en la posición, por ejemplo, medidas de acelerómetros, giroscopios, LIDAR. Esta flexibilidad para incorporar mediciones de otras fuentes lo hace apto para ser usado en navegación satelital autónoma.

RTKLIB está disponible en su repositorio de código GITHUB [27] y cuenta con dos versiones, la aplicación con interfaz gráfica y el código fuente para ser compilado y ser ejecutado en una terminal de comandos de sistema.

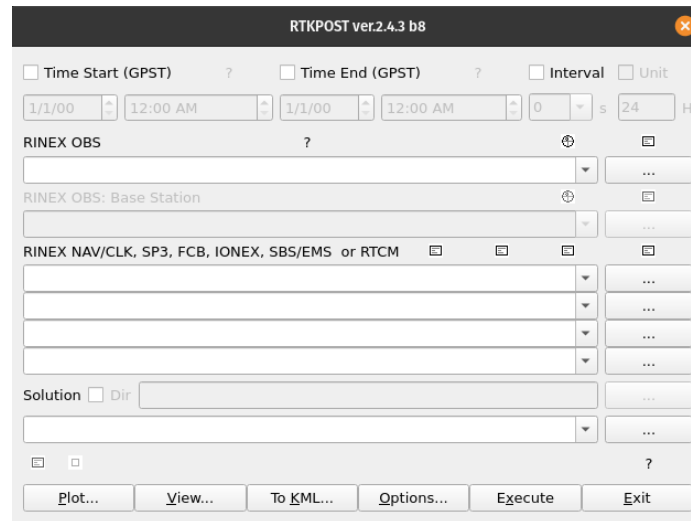


Figura 4.1: Interfaz gráfica de usuario de RTKLIB

Debido a que el código fue modificado, la interfaz de Línea de Comandos de RTKLIB fue usada. El flujo de trabajo cuando la interfaz de línea de comandos es usada, es el siguiente:

1. Modificar el código en C que se requiera, en este trabajo las modificaciones se realizaron principalmente en el módulo RNX2RTKP, el cual es el módulo encargado para hacer post-procesamiento.
2. Compilar el código completo. Se puede hacer uso del archivo *make* para hacer el compilado más sencillo. De igual manera se requiere un compilador en C previamente instalado en la máquina.
3. Correr el ejecutable con los argumentos necesarios para procesar los datos

En la figura 4.2, se muestra un ejemplo de la ejecución de RTKLIB, corriendo el ejecutable que se produce al compilar el código.

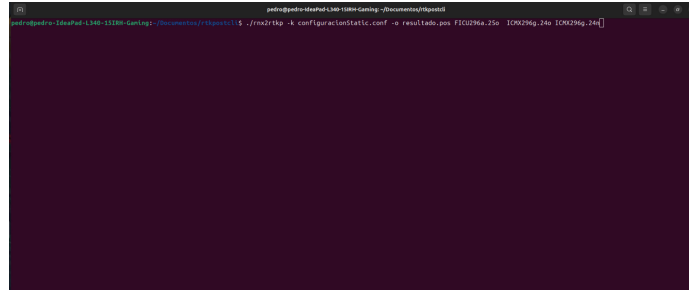


Figura 4.2: Interfaz de línea de comando de RTKLIB

En la figura 4.2 se muestra un ejemplo de como ejecutar RTKLIB con la interfaz de línea de comandos. El comando mostrado ejecuta el modulo para post-proceso `rnx2rtkp` con ciertos parametros y banderas, a continuación se explica de manera detallada:

```
1 ./rnx2rtkp -k opts4.conf -o resultado1.pos TOL21420.250 FICU1400  
  .250 FICU1400.25N
```

Código 4.1: Comando de post-procesamiento en RTKLIB

- `./rnx2rtkp`: Ejecutable principal de RTKLIB para post-procesamiento.
- `-k opts4.conf`: Especifica el archivo de configuración con parámetros de procesamiento. Contiene opciones como:
  - Modo de posicionamiento (`pos1-mode`)
  - Umbrales para resolución de ambigüedades (`pos1-arthres`)
  - Modelos atmosféricos
- `-o resultado1.pos`: Archivo de salida donde se guardarán los resultados (coordenadas, estadísticas).
- `TOL21420.250`: Archivo de observación RINEX de la estación base (ejemplo: día 214, año 2020, extensión `.250`).
- `FICU1400.250`: Archivo de observación RINEX del receptor móvil (rover).
- `FICU1400.25N`: Archivo de navegación RINEX con efemérides.

## 4.2. Estaciones analizadas

En esta sección se describen las características principales de los receptores usados en esta tesis para obtener las observaciones satelitales, procesarlas y comparar los resultados obtenidos.

### 4.2.1. Estación CORS-FI

Una estación GNSS CORS es una estación de referencia que provee continuamente información de posicionamiento en tiempo real para un área en específico. El término CORS proviene del nombre en inglés Continuously Operating Reference Station, y por lo general, las estaciones de referencia CORS son instaladas y mantenidas por agencias gubernamentales, universidades o alguna institución privada. Los datos colectados por una estación CORS, son usados en topografía, geodesia y cualquier tipo de investigación que requiera posicionamiento preciso.

La estación de referencia de operación continua (CORS) es de marca South Net S9. La antena de la estación es de calidad geodésica diseñada para operar de manera continua. El modelo de la antena es CR3 G3 y es de tipo *Choke Ring* (Anillo de Ahogo), cuyo diseño tiene la finalidad de mitigar de manera significativa los errores multicamino de las señales recibidas. En la figura 4.3 se muestran los anillos de la antena CR3 G3, los cuales están hechos de una aleación de aluminio con cobre. El material y la separación de los anillos tienen un efecto sobre la señal de mitigación o cancelación para toda señal que incida en los anillos, protegiendo la antena de cualquier señal impactada por el efecto multicamino.



Figura 4.3: Anillos de Ahogo (Choke Rings) de la antena CR3 G3

La antena CR3 G3 tiene un diseño que la hacen capaz de operar en condiciones climatológicas extremas, tolerando un rango de temperatura de -65 a 85 grados Celsius y a una humedad relativa del 95 por ciento. De igual manera, su diseño de *alta ganancia* mejora la capacidad de recibir señales de satélites cercanos al horizonte (con baja elevación), y aumenta la disponibilidad de satélites.

### Receptor

El receptor ***SOUTH NET S9*** tiene las siguientes características principales:

- Integra una placa ***OEM profesional***, con ***336 canales*** y compatibilidad con las siguientes constelaciones: GPS, GALILEO, GLONASS, BDS y SBAS.
- Tiene un almacenamiento interno de 32 Giga Bytes y expansible hasta 64G.
- Tiene capacidad de almacenar observaciones hasta una tasa de 50 Hz. Los datos son almacenados en un formato RINEX, sin embargo también es posible guardarlos en el formato crudo de la estación STH.
- Permite el envío de correcciones para un posicionamiento RTK en formato RTCM, por el protocolo NTRIP
- Al igual que la antena, tiene un diseño robusto que permite su operación en condiciones ambientales extremas.



Figura 4.4: Receptor *SOUTH NET S9*

### Trabajos actuales relacionados con estaciones CORS

Actualmente las redes CORS son usadas para diferentes propósitos científicos y comerciales, entre los cuales se encuentran generación de correcciones para posicionamiento puntual en tiempo real, eficientar los métodos de resolución de la ambigüedad con la transmisión de correcciones RTK por medio de NTRIP, entre otros.

En [28], los autores describen el análisis y procedimiento para mantener una red activa de mas de 1300 estaciones CORS localizadas en Japón. Esta descripción que se proporciona, incluye mejoras en los modelos para mapear el efecto troposférico en la cobertura donde opera la red de receptores. Es importante mencionar que la operación de una red de estaciones CORS, habilita otras áreas de investigación debido a la naturaleza de algunos de los errores que interfieren con la señal GNSS, como lo son los efectos atmosféricos que son altamente dependientes del camino recorrido de la señal. El efecto atmosférico, ya sea troposferico o ionosferico, es modelado con mas precisión usando una red de estaciones operando al mismo tiempo.

Al modelar el efecto de la ionosfera usando una red de estaciones CORS, el principal desafío es considerar de la manera mas eficiente los datos de la mayor cantidad de estaciones. En [29], se propone el uso de una red neuronal densa (DNN Dense Neural

Network por sus siglas en inglés) para el modelado del retraso total de la troposfera en el zenith (ZTD, Zenith Total Delay). Los autores demuestran que con el uso de Deep Learning y suficientes datos colectados de una red CORS, es posible no solamente modelar la troposfera, sino completar el ZTD , donde y cuando se requiera con una alta fiabilidad.

#### 4.2.2. Estación SINO S6

La estación **SINO S6 Plus Pocket** fue utilizada en esta tesis con el objetivo de analizar el desempeño de los métodos de resolución de las ambigüedades con diferentes equipos, realizando el posicionamiento diferencial con la misma estación base de la Ciudad de México ICMX de INEGI.

#### Antena y Receptor

Las especificaciones del receptor **SINO S6 PLUS POCKET** son estándar entre los equipos GNSS para topografía. Los equipos de esta clase son diseñados en su mayoría para realizar levantamientos RTK con un par de receptores que se comunican por canales de radio.

Las especificaciones del **SINO S6** en términos de recepción de señales y decodificación del receptor son muy parecidas a las del equipo **SOUTH NET S9**, de hecho es capaz de hacer el seguimiento de las mismas señales de las constelaciones , GPS, GLONASS, GALILEO, BDS y SBAS. En la figura 4.5 se aprecia el receptor usado en esta tesis.





Figura 4.5: Receptor **SINO S6 Plus Pocket** usado en esta tesis

Las principales especificaciones del receptor son las siguientes:

- Diseñado para ambientes extremos, temperatura de  $-40^{\circ}\text{C}$  a  $65^{\circ}\text{C}$  y ambientes húmedos sin precipitación
- Conexión Bluetooth V4 para controladora y por radio-frecuencia para conexión entre receptores
- Capaz de procesar y enviar datos RTCM lo que habilita la conexión con alguna estación CORS cercana para hacer posicionamiento diferencial.

Cabe mencionar que las principales diferencias entre los equipos diseñados para topografía y las estaciones de Operación continua radica en el diseño complejo de las estaciones de referencia para mitigar el efecto multicamino en lo posible. De igual

manera la capacidad para almacenar y usar un servidor para la transmisión de datos es propia de los receptores CORS.

## Ubicación estación CORS

La antena del receptor esta ubicada en el techo del edificio B del Conjunto Norte de la Facultad de Ingeniería de Ciudad Universitaria. En la figura 4.6 se indica con una flecha roja la ubicación de la estación sobre el techo del edificio B, como referencia principal se aprecia la Alberca Olímpica Universitaria.

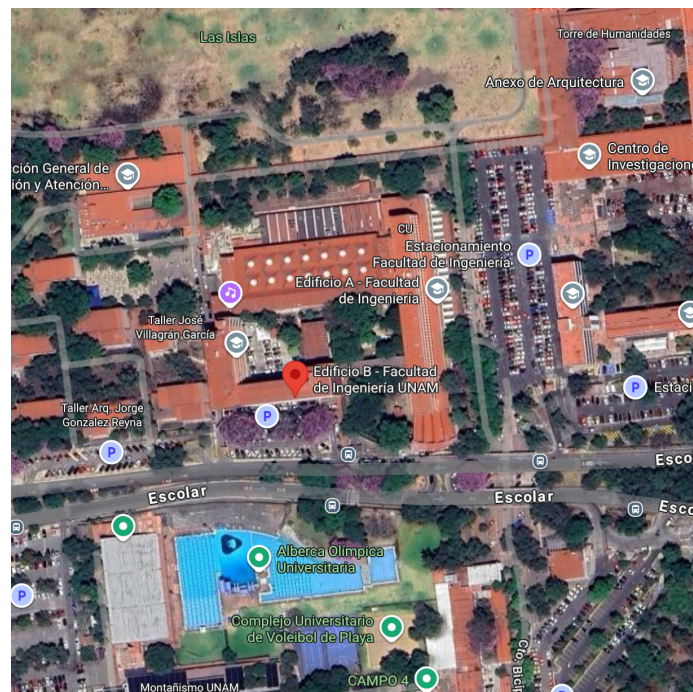


Figura 4.6: Ubicación de la estación GNSS CORS

En la figura 4.7, se muestra la antena instalada con una persona a un costado para apreciar el tamaño de la estructura donde esta montada. La instalación de la antena cumple con la normativa establecida por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) y fue supervisada por el Departamento de Geodesia y Cartografía de la División de Ingenierías Civil y Geomática de la Facultad de Ingeniería, CU. Los requerimientos son necesarios para que la estación sea incorporada a la Red Geodésica Nacional Activa de México.



Figura 4.7: Antena CR3 G3

## Ubicación levantamiento con SINO S6

Con el objetivo de comparar el desempeño de los métodos de resolución de las ambigüedades se realizó la obtención de datos con la estación **SINO S6** en la placa V-099 establecido por el Instituto de Geografía y la Sociedad de Alumnos de Ingeniería Geomática (SAIG), denominada en el marco del proyecto *Prevención de inundaciones con generación de Red Topo-geodésica en Ciudad Universitaria (Gaceta # 8 de Septiembre de 2025)*, ubicado afuera del Edificio R de la Facultad de Ingeniería. En la figura 4.8 se muestra el punto donde se recibieron las mediciones satelitales con el equipo **SINO S6**.





Figura 4.8: Placa V-099 de la Red Topo-Geodésica

El entorno para la recepción de las señales de los satélites es menos óptimo que el de la estación CORS-FI. El edificio R esta a unos metros a un costado del punto, pudiendo causar efecto multitrayectoria en satélites que estén cerca de la mascara de elevación, la cual fue configurada a 15 grados. La decisión de no configurar una mascara más rigurosa fue con el objetivo de no perder mediciones de satélites y también que este efecto de entorno semi-urbano influyera en las posiciones calculadas.

### 4.3. Datos usados

Para cumplir los objetivos establecidos en esta tesis, los siguientes conjuntos de datos fueron procesados:

- Con el objetivo de mostrar las diferentes modalidades de resolución de la ambigüedad dentro de RTKLIB, se procesaron en modo estático diferencial, los datos de la estación CORS-FI pertenecientes al 22 de Octubre del 2024 a las 6 horas (tiempo GPS). La taza de observación de la estación es de 15 segundos y la duración de los datos analizados fue de una hora.

- Para hacer la comparativa de los métodos de Resolución de la Ambigüedad en función de la estación GPS usada, y el método de resolución usado, se eligieron los datos adquiridos con el receptor **SINO S6** en la placa número 99 de la Red Topo-Geodésica. El mismo intervalo de tiempo de la adquisición de datos fue usado para los datos de la estación CORS-FI. Los datos fueron observados el día 10 de junio del 2025, durante aproximadamente 4 horas.

Es importante mencionar que todos los datos usados en esta tesis tienen el formato RINEX 2.11 ya que simplifica el procesamiento diferencial al ser el mismo formato de los datos pertenecientes a las estaciones de la Red Geodésica Nacional Activa del INEGI. Para todo el procesamiento y análisis de los datos GPS, se usó la estación GPS de referencia de la Ciudad de México llamada *ICMX* con coordenadas geodésicas cartesianas  $x = -959486.6725$ ,  $y = -5943204.5920$  y  $z = 2106506.6727$  referidas al elipsoide *WGS84*.

#### 4.4. Modos de resolución de la ambigüedad

Dentro de RTKLIB y la mayoría de los Software dedicado al procesamiento de datos RINEX, se han implementado diversas modalidades para la resolución de las ambigüedades de las señales del GPS. Aunque, la técnica desarrollada e incorporada en RTKLIB es el método de mínimos cuadrados enteros, esta se puede emplear de diferentes maneras.

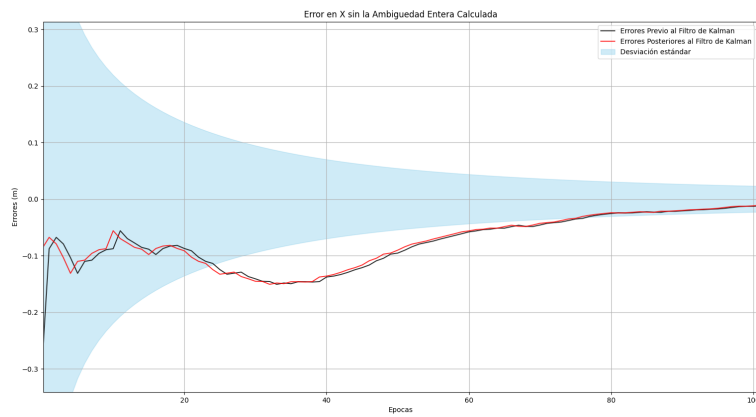
Como se mencionó en el capítulo 2, la manera más sencilla y eficiente de poder aislar el error de las ambigüedades de la fase portadora, es realizando un posicionamiento diferencial doble, ya que se mitigan los efectos atmosféricos y los errores en los relojes tanto del satélite como del receptor, aislando la ambigüedad en las ecuaciones de observación (Ecuación 2.2 reescrita aquí por simplicidad).

$$\phi_{AB}^{ij}(t) = \frac{1}{\lambda_{ij}} \varrho_{AB}^i(t) + N_{AB}^{ij} \quad (4.1)$$

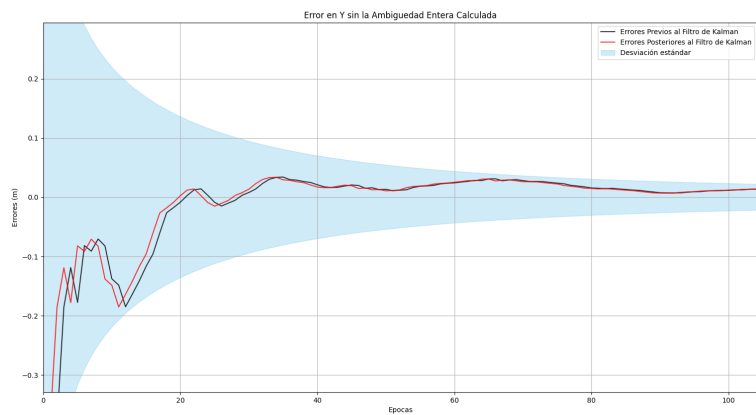
Dicho esto, al procesar los datos usados en esta tesis se eligió el método de posicionamiento diferencial estático, donde la base es la estación ICMX de INEGI, y los rovers la estación CORS-FI ó la estación **SINO S6** (según corresponda). En esta sección se describirá y analizarán los resultados obtenidos de las diferentes modalidades disponibles dentro de RTKLIB para resolver las ambigüedades. Los datos usado para esta finalidad, son los obtenidos con la estación CORS-FI pertenecientes al 22 de Octubre del 2024 los cuales se describen en la sección anterior.

#### 4.4.1. Ambigüedades apagadas

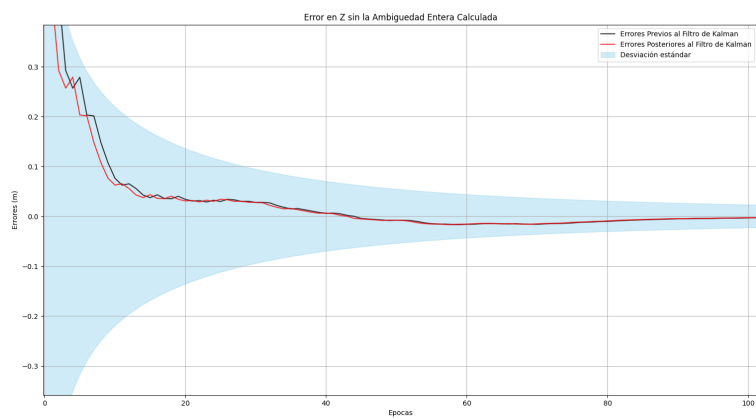
Si se apagan las ambigüedades, la estimación de la posición solamente usará los valores reales de ciclos que se estiman dentro del Filtro de Kalman. Aunque los valores reales de las ambigüedades minimizan el error del modelo de observación (mejor solución posible), estos valores no tienen sentido físico alguno ya que el número de ondas de los satélites al receptor es entero. En la figura 4.9, se muestran los errores en el cálculo de la posición de la antena CORS-FI, usando las ambigüedades con valores reales. Cada una de las gráficas mostradas muestra el error en cada dirección X, Y y Z, ya que se calculó la posición en coordenadas cartesianas. Como se ha mencionado en la Sección anterior, el intervalo de datos procesado es de 1 hora con una tasa de observación de 15 segundos, sin embargo, en las gráficas se muestran solamente las primeras 100 épocas del procesamiento, lo que equivale a 1500 segundos (20 minutos 30 segundos). Esto se debe a que es más pertinente mostrar las primeras épocas del filtro con el fin de mostrar la convergencia del cálculo de la posición.



(a) Error en la posición X



(b) Error en la posición Y



(c) Error en la posición Z

Figura 4.9: Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con ambigüedades reales.

En la figura anterior, la **envoltura** azul, es la desviación estándar de la posición calculada en la dirección correspondiente multiplicada por 2. En la línea negra se encuentra el error en la posición calculada por el paso de predicción del filtro y en la línea roja se encuentra el error en la posición una vez que se corrigió la posición dentro del filtro usando las observaciones. Con base en la normalidad de los errores, se espera que en ésta distribución probabilística, el 95.45 % de los errores se encuentren dentro del límite establecido por  $2\sigma$ . Dicho esto, si el error se encuentra fuera de la **envoltura** de  $2\sigma$ , la posición estará sesgada por algún tipo de error. Tal es el caso del error mostrado en la dirección  $X$ , se muestra una posición sesgada después de la época 20. La razón por la posición se vea impactada pocas épocas solamente en una dirección puede ser variada, sin embargo la más común es que alguna medición satelital involucrada en el posicionamiento contenga un error anómalo, por ejemplo, multipath. Aunque hay algunas épocas donde el error en la posición  $X$  no es normal, el filtro logra recuperarse, llevando el error de la posición de vuelta a 0, es decir, ambas líneas (roja y negra) regresan a la media 0. Este comportamiento no se ve en la dirección  $Y$  ó en la dirección  $Z$ .

#### 4.4.2. Ambigüedades calculadas cada instante

Como se ha descrito anteriormente, el vector de estado que se calcula cada época a través del filtro de Kalman, es la solución geométrica completa,  $\mathbf{x}_k = (r_{x,y,z}, v_{x,y,z}, a_{x,y,z}, N_{1\dots n})$ ,  $n$ . Además, considerando la estimación de las ambigüedades enteras por medio de Mínimos cuadrados enteros:

$$N \in \mathbb{Z}^{m_{\min}} (N^f - N)^T Q_{N^f}^{-1} (N^f - N) \quad (4.2)$$

se aprecia que el problema de resolución de las ambigüedades esta estrechamente relacionado con el desempeño del filtro de Kalman, ya que la matriz de covarianzas de las ambigüedades  $Q_{N^f}$  que determina el espacio de búsqueda de los valores enteros correctos, es predicho y actualizado por el filtro de Kalman. En RTKLIB, es posible ignorar la secuencia de la matriz  $Q_{N^f}$  a través del tiempo dentro del filtro de Kal-



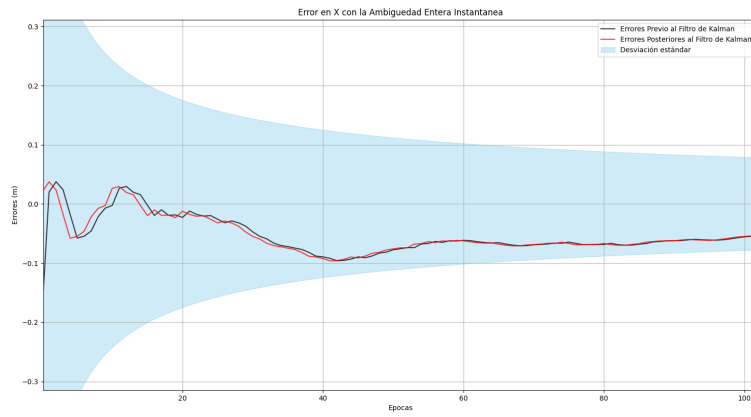
man, y usar una matriz  $Q_{Nf}$  (suficientemente grande) fija cada época. El resultado será que las ambigüedades no usarán las actualizaciones continuas de la matriz de covarianzas  $Q_{Nf}$ , sino usarán una fija, además de que el estado de las ambigüedades flotantes tampoco será actualizado por el filtro. En lugar de usar la información del filtro de manera continua, las ambigüedades serán reseteadas cada época usando el pseudorango de la señal de la siguiente manera:

$$N_{i,f}^{\text{float}}(t) = \Phi_{i,f}(t) - \frac{P_{i,f}(t)}{\lambda_f} \quad (4.3)$$

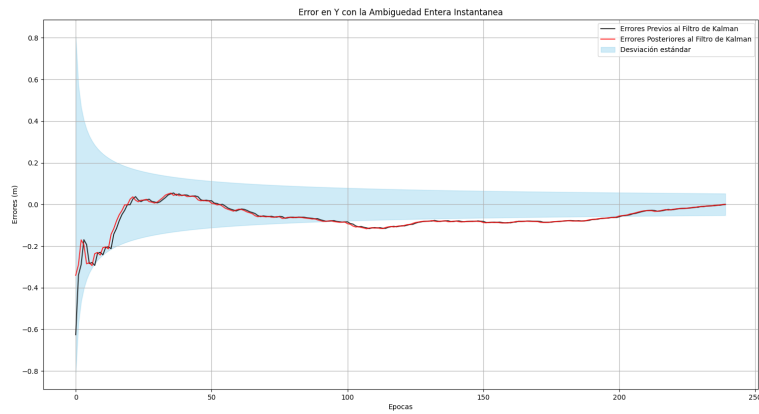
De esta manera, la ambigüedad flotante usada en el proceso de resolución de las ambigüedades no vendrá de la solución del filtro de Kalman, si no del mismo pseudorango de la señal recibida cada época. Esta modalidad tiene como ventaja robustez a los saltos de ciclo que puedan afectar el desempeño del filtro, y debido a que sucede cada época, las ambigüedades se resolverán tan pronto se pase la prueba estadística [18]:

$$\text{tasa}(t) = \frac{\chi_{\text{mejor}}^2}{\chi_{2\text{do mejor}}^2} > 3 \quad (4.4)$$

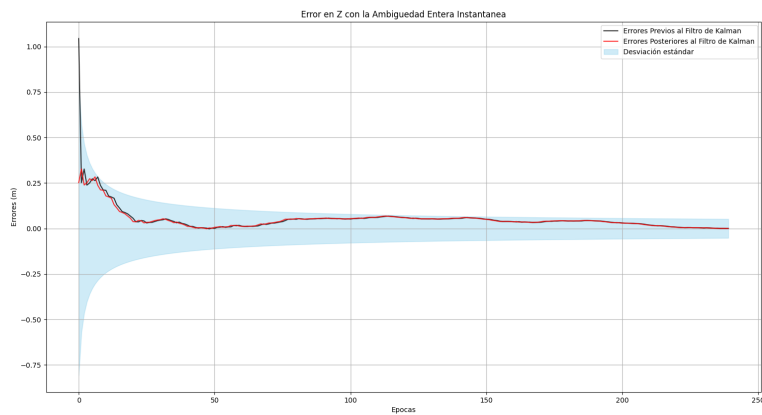
En la figura 4.10 están los errores calculados para la posición en las tres direcciones. Se aprecia que en general, la solución estuvo mejor que la que mostrada anteriormente con las ambigüedades flotantes. En la dirección  $y$  se aprecia un poco de error sin embargo son muy pocas épocas en las que persiste. Hace sentido que la solución mejore cuando se usen las ambigüedades enteras siempre y cuando pasen la prueba estadística de la Ecuación 4.4.



(a) Error en la posición X



(b) Error en la posición Y



(c) Error en la posición Z

Figura 4.10: Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con ambigüedades enteras calculadas cada época (instantáneo).

### 4.4.3. Ambigüedades calculadas continuamente

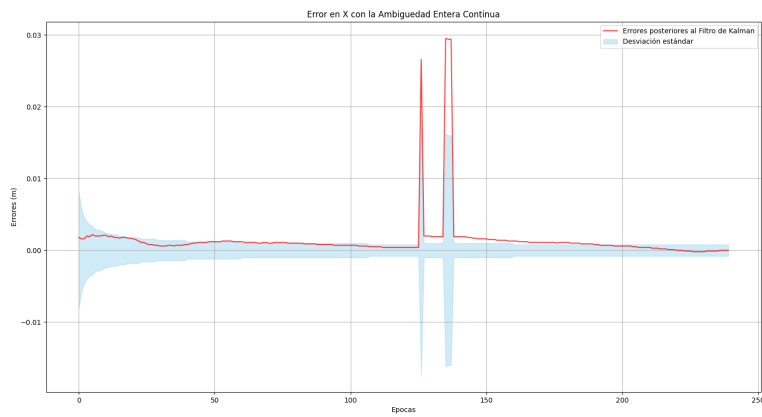
A diferencia de la modalidad *instantanea* en la que las ambigüedades se inician cada época usando el pseudorango, las ambigüedades del estado  $\mathbf{x}_k$  calculadas dentro del filtro de Kalman son usadas junto con su matriz de covarianza  $Q_{Nf}$ . La matriz  $Q_{Nf}$  es la porción de la matriz  $P_{k|k}$  correspondiente a las ambigüedades, y cuyo calculo es descrito a partir de la ganancia de Kalman,  $P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$  (Ecuación 3.35). Esto implica que la posición calculada contempla la información de las ambigüedades flotantes directamente del filtro. En esta modalidad, las ambigüedades solamente son iniciadas nuevamente si se detectan saltos de ciclo en la señal, a diferencia de las *instantaneas* que se inicializan época tras época. Las ventajas de usar las ambigüedades del filtro son:

- Se da continuidad a las ambigüedades flotantes calculadas por el filtro de Kalman cada época, como consecuencia, la solución mejorará con el tiempo.
- Se puede dar un seguimiento a las ambigüedades calculadas y a la convergencia de estas, a diferencia de las calculadas instantáneamente.
- La matriz de covarianzas  $Q_{Nf}$  se reduce con el tiempo, lo que hace la solución más precisa con el paso del tiempo.
- Es robusto porque es sensible a cualquier error que afecte el cálculo dentro del filtro.

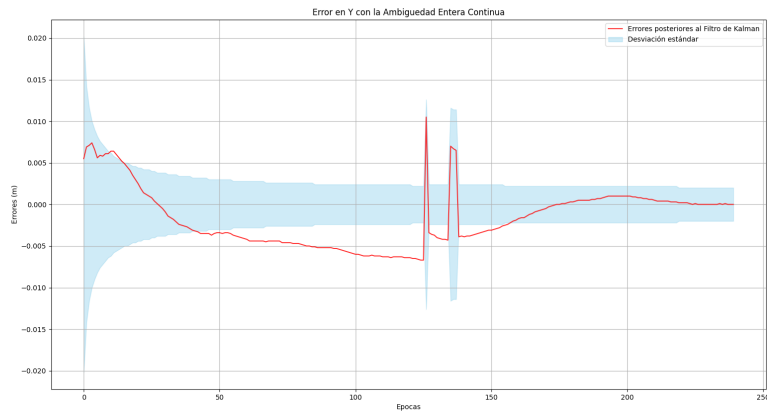
La desventaja del modo *continuo*, es que para poder sacar provecho de la solución precisa del filtro, hay que esperar el tiempo necesario para que la convergencia de la solución empiece a dar más precisión. En la figura 4.11, se encuentra el error en la posición con las ambigüedades calculadas de manera continua. En esta solución se puede apreciar lo siguiente:

- Esta solución es más precisa que la obtenida del modo de resolución *instantáneo*. El rango de la envoltura  $2\sigma$  es del orden de los milímetros (de 5 hasta 15 mm.)

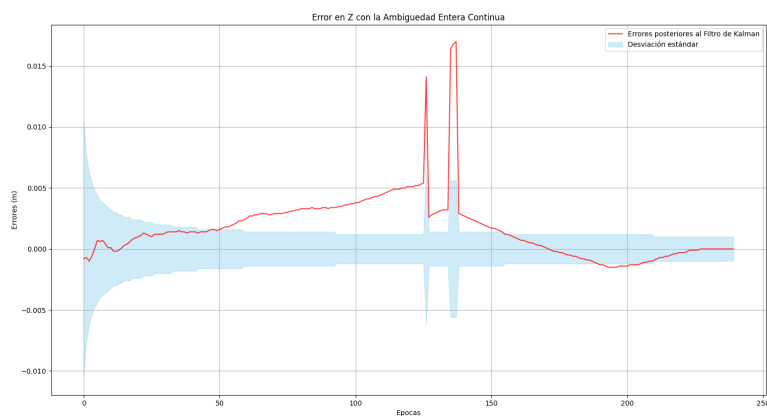
- Debido a que los valores flotantes provienen del filtro de Kalman, la posición es sensible a cualquier factor que afecte la solución, siendo mas notorio en épocas avanzadas del filtro, una vez que la matriz de covarianzas  $P_{k|k}$  ha decrecido. Alrededor de la época 140, equivalente a 2100 segundos o 35 minutos, se detectan dos saltos en todas las posiciones del filtro. Aunque este salto no es de gran magnitud (un par de cm en x, pero 3 mm en las otras dos direcciones), se aprecia que la posición es altamente sensible a cualquier cambio o error en el calculo.
- Después de los dos saltos ocurridos, la solución vuelve a converger, lo que sugiere que los saltos fueron provocados por una resolución errónea de la ambigüedad. Una vez que se vuelve a resolver a una ambigüedad correcta, la solución de la posición vuelve a ser normal.



(a) Error en la posición X



(b) Error en la posición Y



(c) Error en la posición Z

Figura 4.11: Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con ambigüedades enteras calculadas de manera continua.

#### 4.4.4. Fijar y mantener ambigüedades enteras

La modalidad *Fijar y mantener* (*Fix-and-Hold* en inglés) es una estrategia híbrida de resolución de ambigüedades en tiempo real, implementada en RTKLIB. Su objetivo es mantener las ambigüedades enteras fijadas en épocas posteriores, imponiendo restricciones adicionales al filtro de Kalman extendido. Esto permite que la solución fija sea más estable y continua, reduciendo las pérdidas de fijación en presencia de condiciones de observación cambiantes. Es por esto que se puede considerar una combinación de las dos estrategias anteriores, el método continuo y el instantáneo. Aunque se use la información de las ambigüedades flotantes calculadas dentro del filtro de Kalman, estas tendrán una restricción una vez que sean calculados los valores enteros, las cuales hacen que las ambigüedades se mantengan durante periodos largos para aquellos satélites cuya señal fue recibida de manera óptima.

El procedimiento consiste en lo siguiente:

1. Una vez que se logra una solución fija confiable mediante el algoritmo LAMBDA, se seleccionan las ambigüedades que han sido validadas.
2. Para cada frecuencia y cada satélite, se generan *restricciones lineales* entre las ambigüedades fijas y las ambigüedades flotantes correspondientes:

$$v = [(\hat{a}_1 - \hat{a}_i) - (a_1 - a_i)] \quad (4.5)$$

dónde  $\hat{a}$  representa las ambigüedades enteras fijadas y  $a$  las estimaciones flotantes actuales.  $a_1$  y  $\hat{a}_1$  son las ambigüedades elegidas como referencia del satélite base, el cual es elegido en base a su ángulo de elevación.  $a_i$  son los demás satélites que se *sujetarán* al entero calculado. Básicamente, la Ecuación 4.5 es una restricción que asegura que la diferencia de ambigüedades entre satélites se mantenga igual al valor encontrado en la primera solución fija.

3. Estas restricciones se introducen al filtro de Kalman en forma matricial:

$$v = H x + \epsilon, \quad (4.6)$$

es decir, en la matriz de Jacobianos  $H$ , se agregan las *observaciones* de las restricciones usando la ecuación 4.5 para cada satélite que se use en el calculo. De igual manera los residuales serán usado en la matriz de innovación del filtro de Kalman.

con  $H$  como la matriz de diseño que impone las diferencias de ambigüedades, y  $\epsilon$  un término de error con varianza definida.

4. La matriz de covarianzas asociada a estas restricciones se modela como:

$$R = \sigma^2 I,$$

con  $\sigma^2$  definido por el usuario, por lo general es un valor demasiado pequeño para asegurar que la restricción sea aplicada de manera efectiva. La varianza que se usa en el filtro para estas restricciones controla el peso con el cual estas restricciones afectan al estado.

5. Finalmente, el filtro de Kalman se actualiza con estas restricciones adicionales, reforzando la solución fija sin reiniciar completamente el estado.

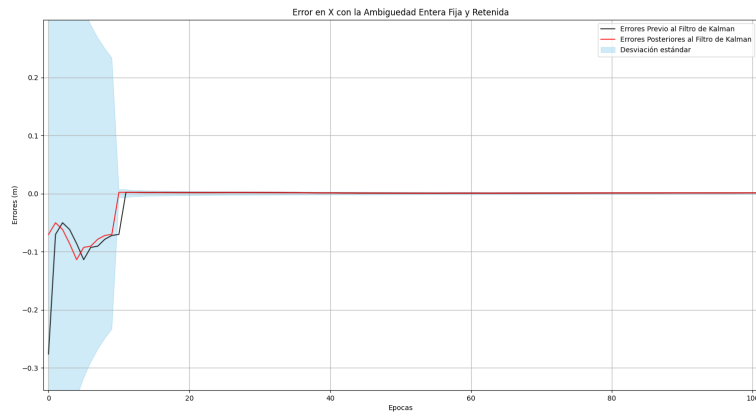
En términos prácticos, la modalidad *Fix-and-Hold* tiene las siguientes características:

- Una vez fijadas, las ambigüedades se mantienen constantes mediante restricciones lineales suaves, en lugar de reinicializarse.
- Proporciona mayor continuidad y estabilidad en ambientes con pérdida intermitente de observaciones (por ejemplo, obstrucciones parciales o multi-trayectoria).
- Es más robusta que el modo instantáneo, pero más arriesgada que el modo continuo, ya que mantener restricciones incorrectas puede degradar la solución.

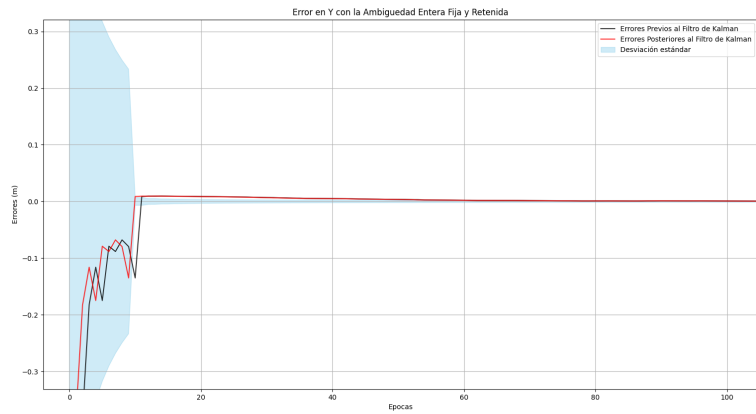
De esta forma, *Fix-and-Hold* actúa como un compromiso entre rapidez en la resolución de ambigüedades y estabilidad de la solución a lo largo del tiempo. En la

figura 4.12, se muestran los errores en la posición en las tres direcciones con el método *Fix-and-Hold*. Se aprecia que una vez que las ambigüedades fueron resueltas, la precisión incrementa y la posición se mantiene estable, resultando en un error muy cercano a cero. También se puede observar que en ningún momento la restricción se pierde, por lo que la solución es estable durante toda la serie de datos. Las razones por las cuales se ignora la restricción es por una mala geometría de los satélites o detección de saltos de ciclo. En comparación con el modo *continuo* para resolver las ambigüedades, el imponer las restricciones como pseudo-observaciones en el filtro de Kalman, asegura estabilidad a lo largo del posicionamiento y evita los saltos que se observaron en la figura 4.11.

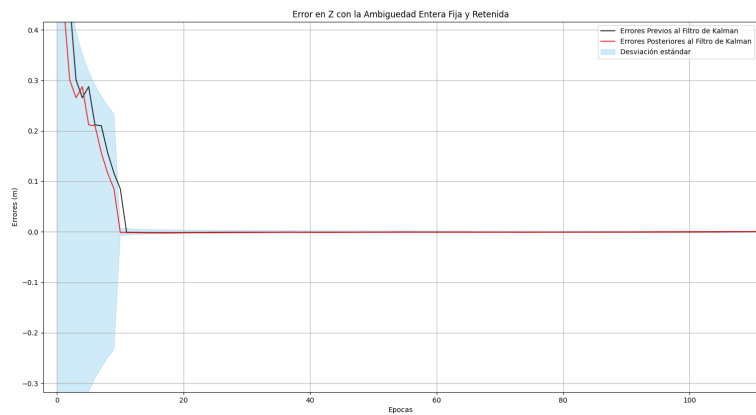




(a) Error en la posición X



(b) Error en la posición Y



(c) Error en la posición Z

Figura 4.12: Errores en la posición con coordenadas cartesianas calculadas con ambigüedades *Fix-and-Hold*

El riesgo que tiene esta modalidad para resolver las ambigüedades es que si se fijan los valores incorrecto y se aplica la restricción durante las épocas subsecuentes, la solución será errónea y no se podrá detectar hasta que otra vez se calculen las ambigüedades a través de mínimos cuadrados enteros.

## 4.5. Comparación de Resultados

En la Sección anterior se compararon los resultados de las diferentes estrategias para resolver las ambigüedades. Se analizaron tres metodologías (además de la solución flotante), resolución de las ambigüedades de modo continuo, instantáneo, y *fijar y mantener* (*Fix-and-Hold*). Estas diferentes estrategias usan la técnica de Mínimos cuadrados enteros para realizar la búsqueda de los valores enteros correctos. En esta Sección, se hace la comparación entre dos diferentes técnicas de búsqueda, el Redondeo Secuencial y Mínimos cuadrados enteros. Además, se analizaran los mismos datos, usando diferente equipo, la estación CORS-FI, y la estación **SINO S6**, los cuales han sido descritos anteriormente.

Para realizar la comparación del desempeño de las diferentes técnicas y equipo, se mostrara solamente la magnitud total del error en la posición con su respectiva desviación estándar  $2\sigma$ :

$$Error_{total} = \sqrt{Error_x^2 + Error_y^2 + Error_z^2} \quad (4.7)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \quad (4.8)$$

El conjunto de datos que se analizaron corresponde a aproximadamente 4 horas del día 10 de junio, sin embargo solo se muestran los primeros 50 minutos del filtro de Kalman, ya que la solución converge y no hay algún rasgo en la gráfica para mostrar. Aunque la tasa de observación de datos de la estación **SINO S6** fue configurada a 1 Hertz, se estableció un intervalo de 15 segundos por época dentro del filtro para coincidir con la tasa de observación (y procesamiento) de datos de la estación CORS-FI. La estrategia elegida en RTKLIB para realizar esta comparación fue el de calcular

las ambigüedades de manera instantánea. Como se mostró en la Sección anterior, el método continuo puede tardar en converger y dar una solución en la que se pueda hacer la comparación, y el método de *Fijar y mantener* deja de buscar las ambigüedades una vez que las haya fijado y se haya aplicado la restricción en el filtro. En la Sección 4.3, se describieron los datos usados para realizar la comparativa de los resultados usando ambas estaciones. Se describe que el entorno de la estación **SINO S6** no está totalmente despejado, teniendo un árbol a un par de metros y el Edificio R de concreto a unos 10 metros aproximadamente. Estos factores *simulan* un ambiente semiurbano, donde el receptor puede empezar a guardar datos en medio de edificios no tan altos y árboles medianos a su alrededor. La disponibilidad de los satélites así como su intensidad se puede apreciar en una *Gráfica de cielo*. Este tipo de gráfica muestra la trayectoria de los satélites observados, en una gráfica polar que tiene una retícula para las elevaciones cada 15 grados, y líneas de azimut cada 30 grados. El origen o centro de la gráfica es la estación usada. En las figuras 4.13 y 4.14, se muestran las *gráficas de cielo* para la estación CORS-FI y para la estación **SINO S6** respectivamente. Los colores que se muestran son de acuerdo al valor *SNR* indicando la intensidad de la señal. Si el color es verde es que la señal es fuerte y conforme se acerque al color rojo, se indica un valor *SNR* bajo. La intensidad de la señal coincide con la altitud de los satélites, las líneas verdes aparecen en las trayectorias que están cerca del zenit, mientras que diferentes tonalidades (azules, rojos), aparecen en elevaciones bajas. Comparando ambas gráficas, se nota que la disponibilidad de los satélites en la estación **SINO S6** fue menor, principalmente en elevaciones de 15 a 30 grados. Esto genera gran diferencia en las posiciones calculadas y mostradas en las secciones posteriores.

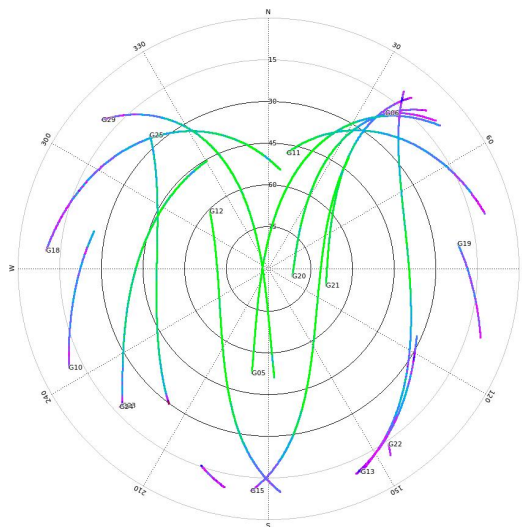


Figura 4.13: *Gráfica de cielo* de la estación **CORS-FI**.

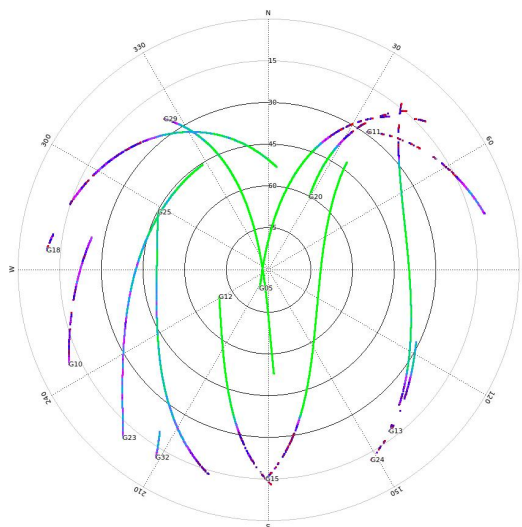


Figura 4.14: *Gráfica de cielo* de la estación **SINO S6**.

## Mínimos cuadrados Enteros

En las figuras 4.15 y 4.16, se muestran los errores en la posiciones calculadas resolviendo las ambigüedades por el método de mínimos cuadrados enteros con los datos de la estación **CORS-FI** y **SINO S6** respectivamente. La estrategia para resolver las ambigüedades en ambos casos es el cálculo instantáneo.

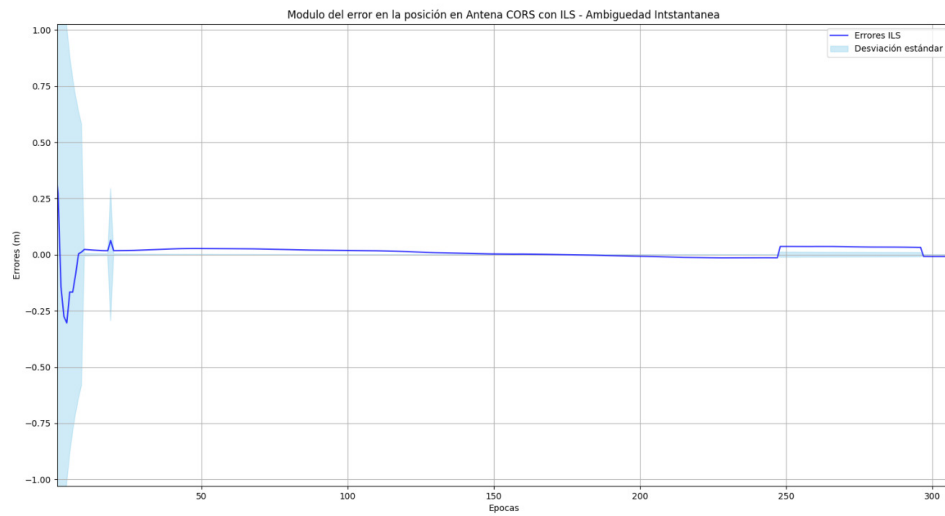


Figura 4.15: Error en la posición usando el método de Mínimos cuadrados enteros para resolver las ambigüedades de la estación CORS-FI.

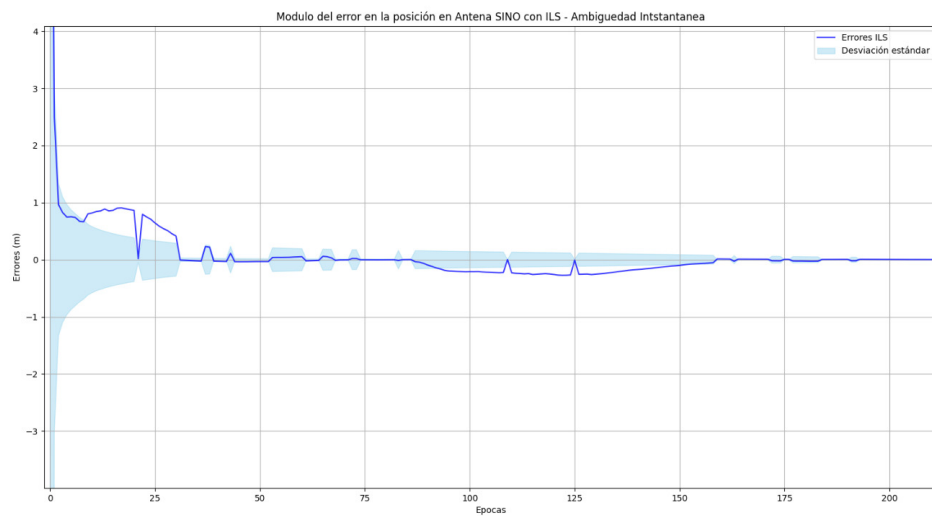


Figura 4.16: Error en la posición usando el método de Mínimos cuadrados enteros para resolver las ambigüedades de la estación **SINO S6**.

Se puede apreciar algunas diferencias en el desempeño de la resolución de las ambigüedades cuando se usan distintas estaciones:

- Convergencia de la solución es más rápida en la estación CORS-FI. La solución

converge en alrededor de 15 épocas, 225 segundos (3.75 minutos) en la estación CORS, y en la **SINO S6** en aproximadamente 25 épocas.

- La solución es más estable en la estación CORS-FI. Esto se debe al entorno más favorable para la adquisición de las señales en comparación con el de la estación **SINO S6**.

El tiempo de convergencia mayor en la estación **SINO S6** y los saltos que ocurren posteriormente a la convergencia es debido principalmente a los posibles errores causados por el efecto multipath del Edificio R a un costado de la placa. En la figura 4.17 se muestran las ambigüedades doblemente diferenciadas usando los datos de la estación CORS-FI y la estación de ICMX de INEGI. Se aprecia la correlación entre las ambigüedades y su convergencia con el tiempo.

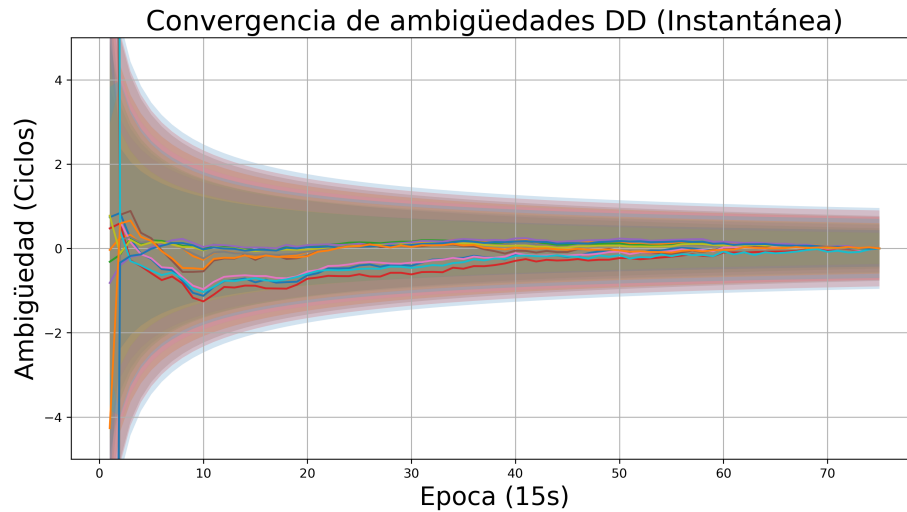


Figura 4.17: Ambigüedades doblemente diferenciadas de la estación CORS-FI, calculadas de manera instantánea

Con el fin de mostrar la diferencia del método instantáneo con el *Fix-and-Hold* en la figura 4.18 se muestran las diferenciales dobles. Se aprecia que en la época 15 las ambigüedades se fijan y las desviaciones estándar se reducen significativamente debido a la restricción aplicada.

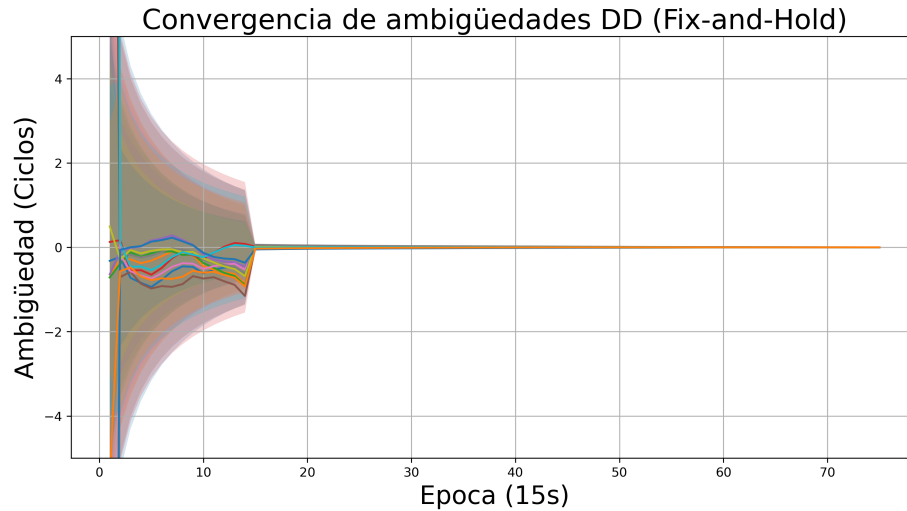


Figura 4.18: Ambigüedades doblemente diferenciadas de la estación CORS-FI, en modalidad *fix-and-hold*

## Redondeo Secuencial

Para el mismo conjunto de datos, se implementó el Redondeo Secuencial dentro de RTKLIB. Se identificó el módulo en el cual se realiza la búsqueda de las ambigüedades enteras y se reemplazó por el método de Redondeo Secuencial desarrollado en C de igual manera. La idea es que el programa RTKLIB funcione exactamente igual, siendo lo único que cambie la manera en la cual se encuentran los valores enteros.

En las figuras 4.19 y 4.20 se muestran los errores en la posición usando el método de Redondeo Secuencial para resolver las ambigüedades usando los datos observados por la estación CORS-FI y la estación **SINO S6**. Comparando ambos equipos, se vuelve a apreciar que el filtro de la estación CORS-FI converge mas rápido.

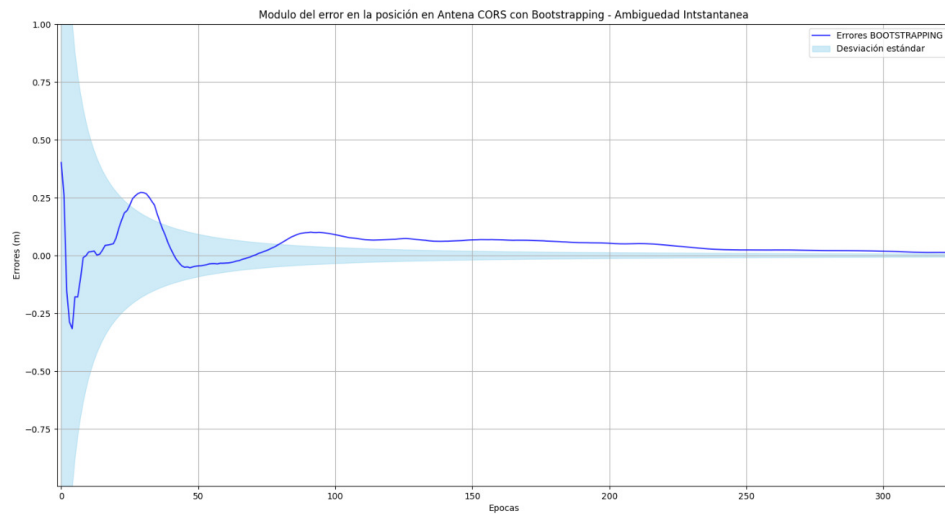


Figura 4.19: Error en la posición usando el método de Redondeo Secuencial para resolver las ambigüedades de la estación CORS-FI.

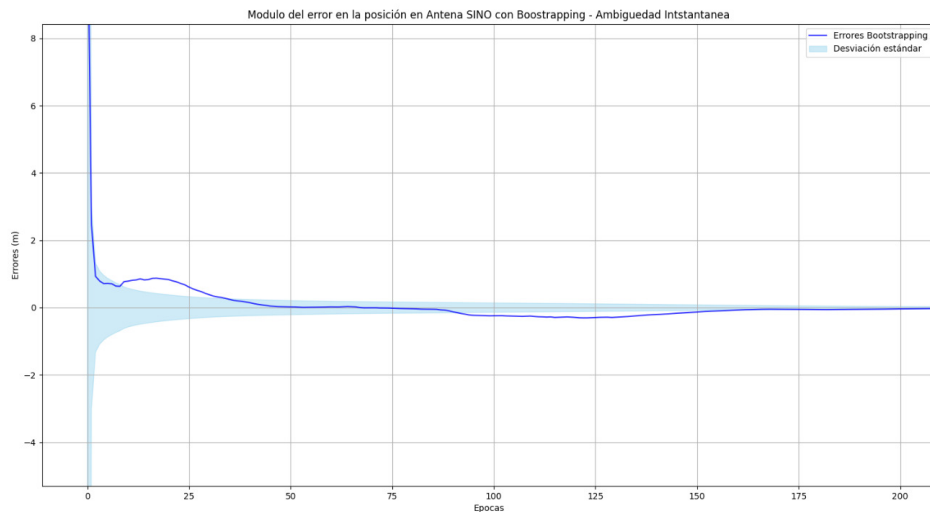


Figura 4.20: Error en la posición usando el método de Redondeo Secuencial para resolver las ambigüedades de la estación **SINO S6**.

Al comparar las figuras correspondientes al método de Redondeo Secuencial, con las figuras correspondientes al método de Mínimos cuadrados, se aprecia la superioridad de este último. La convergencia en las figuras 4.19 y 4.20 es mas lento, y el sobre de la desviación estándar  $2\sigma$  es mas ancho. Cabe mencionar que independientemente



del método para resolución de la ambigüedad usado o la estación usada, después de cierto tiempo la solución converge, lo que refuerza la idea que para que se alcance una alta precisión es necesario tener un periodo largo de tiempo en observaciones.

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo de tesis esta enfocada en proveer una descripción detallada del proceso de resolución de la ambigüedad de la señal GPS de la estación CORS ubicada en el techo del edificio B de la Facultad de Ingeniería en Ciudad Universitaria. Se han realizado tres comparaciones para este propósito:

- Las posiciones de la estación CORS-FI con las ambigüedades resueltas y con valores reales.
- Las tres estrategias para resolver las ambigüedades implementadas en RTKLIB: estimación continua, instantánea y *Fix-and-Hold*.
- Se comparó el desempeño de dos de los métodos mas populares para resolver las ambigüedades:redondeo Secuencial y Mínimos cuadrados.
- Diferentes equipos para evaluar el desempeño desde el punto de vista del hardware.

De acuerdo con los resultados obtenidos en las comparaciones realizadas, se concluyen los siguientes puntos:

- Aunque la solución flotante es la mejor de acuerdo a la minimización del error usando las ecuaciones de las observaciones de pseudorange y fase portadora, no es la más precisa y carece de un sentido físico ya que el numero de ciclos de la señal tiene que ser entero y no real.

- Cada estrategia para resolver las ambigüedades de las señales tiene ventajas y desventajas dependiendo del entorno en donde se haga la recolección de datos. Para entornos donde el receptor este muy susceptible a recibir señales impactadas por multipath, se recomienda calcular las ambigüedades instantáneamente. Si se puede asegurar un entorno óptimo para la recepción de las señales, el método recomendado es el *continuo* o el *Fix-and-Hold*.
- Un entorno favorable para la adquisición de la señal GPS, ayuda a reducir el tiempo en el cual las ambigüedades convergen a su solución entera. En general, cualquier factor que favorezca la calidad de la señal, repercutirá en una posición con mas precisión, lo cual tiene como consecuencia una resolución mas eficiente de la ambigüedad.
- El método de mínimos cuadrados enteros, es el mejor de los tres comparados. Esto se debe a que el espacio de búsqueda de cada valor entero contempla de mejor manera las varianzas de las ambigüedades, resolviendo más rápido las ambigüedades que el método de redondeo secuencial.

## 5.1. Trabajo a Futuro

Se ha descrito en este trabajo de tesis, las estrategias principales para la resolución de las ambigüedades, su desempeño usando datos adquiridos de la estación CORS-FI. De igual manera, se comparó el desempeño de la resolución de las ambigüedades usando dos estaciones diferentes, la estación **CORS-FI** y una estación **SINO S6**, y los resultados obtenidos usando la técnica de Redondeo Secuencial y Mínimos cuadrados. El estudio de las diferentes técnicas de redondeo secuencial, abarca lineas de investigación que están relacionadas con navegación autónoma, receptores de bajo costo, implementación de restricciones en el filtro de Kalman y el uso de diferentes estimadores Bayesianos [30]. De igual manera el uso de una red CORS puede hacer más eficiente el proceso de resolución de la ambigüedad [31]. Es importante notar que el proceso de resolución de las ambigüedades de las señales recibidas es lo que brinda

la precisión a nivel de centímetro al receptor, por lo que cualquier restricción, apoyo o técnica matemática que brinde mayor precisión a las fases observadas hará el proceso más eficiente. Es importante volver a enfatizar que la técnica de posicionamiento fue diferencial, es decir, algunos de los errores mostrados en las gráficas, puede que hayan sido ocasionados en la estación base. Este problema es muy común dentro de los posicionamientos diferenciales, incluso en levantamientos RTK, el error que se obtiene al posicionar un rover esta co-relacionado con los errores de la base usada. En trabajo futuro se propone trabajar con el método de posicionamiento preciso puntual para obtener errores absolutos.

# Bibliografía

- [1] David Wells, Norman Beck, Demitris Delikaraoglou, Alfred Kleusberg, Edward J. Krakiwsky, Gerard Lachapelle, Richard B. Langley, Mete Nakiboglu, Klaus-Peter Schwarz, James M. Tranquilla, and Petr Vanicek. *Guide to GPS Positioning*. Canadian GPS Associates, Fredericton, New Brunswick, Canada, November 1999. ISBN 0-920114-73-3. URL <https://www2.unb.ca/gge/Resources/GPS.Guide.pdf>. A comprehensive guide to GPS theory and applications.
- [2] Eva M. García Polo. Técnicas de localización en redes inalámbricas de sensores. *Instituto de Investigación en Informática de Albacete*, 2023. Departamento de Sistemas Informáticos.
- [3] Pennsylvania State University. Gps error sources. <https://www.e-education.psu.edu/geog862/node/1776>, 2023. URL <https://www.e-education.psu.edu/geog862/node/1776>. Accessed: 2023-12-01.
- [4] Ashraf Farah. The ionospheric delay effect for gps single-frequency users: Analysis study for simulation purposes. In *Proceedings of the 15th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 2002)*, pages 1313–1320, Portland, OR, September 2002. The Institute of Navigation. URL <https://www.ion.org/publications/abstract.cfm?articleID=3996>. ION GPS 2002.
- [5] Chao Xu, Yiqun Zhu, Xingyu Xu, Jian Kong, Yibin Yao, Junbo Shi, and Xiulong Li. Regional tropospheric correction model from gnss-saastamoinen-gpt2w data for zhejiang province. *Atmosphere*, 14:815, 04 2023. doi: 10.3390/atmos14050815.

- [6] Bernd Eissfeller and Jon Olafur Winkel. GPS dynamic multipath analysis in urban areas. In *Proceedings of the 9th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1996)*, pages 719–727, Kansas City, MO, September 1996. The Institute of Navigation. URL <https://www.ion.org/publications/abstract.cfm?articleID=>. ION GPS 1996.
- [7] Hexagon AB. Agriculture division. <https://hexagon.com/company/divisions/agriculture>, 2023. URL <https://hexagon.com/company/divisions/agriculture>. Accessed: 2023-12-01.
- [8] Guochang Xu. *GPS: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2nd edition, 2010. ISBN 978-3-642-05421-3. doi: 10.1007/978-3-642-05422-0.
- [9] T. Takasu, N. Kubo, and A. Yasuda. Development, evaluation and application of RTKLIB: A program library for RTK-GPS. In *Proceedings of the GPS/GNSS Symposium 2007*, pages 213–218, 2007.
- [10] GPS World. Gps world: The business and technology of global navigation and positioning. <https://www.gpsworld.com/>, 2025. Consultado el 22 de mayo de 2025.
- [11] Bernhard Hofmann-Wellenhof, Herbert Lichtenegger, and Elmar Wasle. *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*. Springer, Vienna, Austria, 1st edition, 2008. ISBN 978-3-211-73012-6. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-211-73017-1>. DOI: 10.1007/978-3-211-73017-1.
- [12] Roberto René Manzano Islas. *Análisis espectral del efecto troposférico en la señal GPS*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2014. URL <https://repositorio.unam.mx/contenidos/211851>. Tesis de Licenciatura.
- [13] Garmin Ltd. Garmin México – sitio oficial, 2023. URL <https://www.garmin.com/es-MX/>. Sitio web oficial de Garmin para México.

- [14] D. E. Wells and E. J. Krakiwsky. The method of least squares. Technical report, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P.O. Box 4400, Fredericton, N.B., Canada E3B 5A3, February 1997. URL <https://www2.unb.ca/gge/Pubs/LN39.pdf>. Latest reprinting.
- [15] Manuel Glaner and Robert Weber. Ppp with integer ambiguity resolution for GPS and Galileo using satellite products from different analysis centers. *GPS Solutions*, 25(3):102, 2021. ISSN 1521-1886. doi: 10.1007/s10291-021-01140-z. URL <https://doi.org/10.1007/s10291-021-01140-z>.
- [16] Sandra Verhagen. *The GNSS integer ambiguities: estimation and validation*. PhD thesis, Delft Institute of Earth Observation and Space Systems, Delft University of Technology, 2004. ISBN 90-804147-4-3.
- [17] P. J. G. Teunissen. Theory of carrier phase ambiguity resolution. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 8(2):135–140, June 2003. ISSN 1007-1202. doi: 10.1007/BF02899809. URL <https://doi.org/10.1007/BF02899809>. Citations: 61, Reads: 135.
- [18] Peter J. G. Teunissen. An optimality property of the integer least-squares estimator. *Journal of Geodesy*, 73(11):587–593, 1999. doi: 10.1007/s001900050269. URL <https://doi.org/10.1007/s001900050269>.
- [19] P. J. G. Teunissen. Gnss ambiguity bootstrapping: Theory and application. *Journal of Geodesy*, 71(7):431–447, 1997. doi: 10.1007/s001900050106.
- [20] G. Blewitt. Carrier phase ambiguity resolution for the GPS applied to geodetic baselines up to 2000 km. *J. Geophys. Res.*, 94:10187–10203, 1989. doi: 10.1029/JB094iB08p10187.
- [21] John O. Ogundare. *Understanding Least Squares Estimation and Geomatics Data Analysis*. Wiley, Hoboken, NJ, 2018. ISBN 978-1-119-35949-6.
- [22] Peter JG Teunissen. Least-squares estimation of the integer gps ambiguities. *Delft University of Technology, Faculty of Geodetic Engineering*, 1993.

- [23] Benjamin W. Remondi. Performing centimeter-level surveys in seconds with GPS carrier phase: Initial results. *Journal of Navigation*, 33(3):1–XX, 1986. Volume III in the journal’s original numbering.
- [24] P. De Jonge and C. Tiberius. *The Lambda Method for Integer Ambiguity Estimation: Implementation Aspects*, volume 12 of *LGR Series*. Delft Geodetic Computing Centre, Delft, The Netherlands, 1998.
- [25] R. R. Manzano Islas. *Sequential importance resampling particle filter for ambiguity resolution*. Ph.d. thesis, University of Calgary, Calgary, Canada, 2023. URL <https://prism.ucalgary.ca>. Doctoral thesis.
- [26] H. Euler and B. Schaffrin. On a measure for the discernibility between different ambiguity solutions in the static-kinematic gps-mode. *Kinematic Systems in Geodesy, Surveying and Remote Sensing*, 107:285–295, 05 1991. doi: [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3102-8\\_26](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3102-8_26).
- [27] Tomoji Takasu. Rtklib: An open source program package for gnss positioning. <https://github.com/tomojitakasu/RTKLIB>, 2023.
- [28] Naofumi Takamatsu, Hiroki Muramatsu, Satoshi Abe, Yuki Hatanaka, Tomoaki Furuya, Yasuaki Kakiage, Kazuyuki Ohashi, Chiaki Kato, Keitaro Ohno, and Satoshi Kawamoto. New geonet analysis strategy at gsi: daily coordinates of over 1300 gnss cors in japan throughout the last quarter century. *Earth, Planets and Space*, 2023. doi: 10.1186/s40623-023-01787-7.
- [29] Jianqiang Shi, Xinyue Li, Lihong Li, Chenhao Ouyang, and Chaoqian Xu. An efficient deep learning-based troposphere ztd dataset generation method for massive gnss cors stations. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2023. doi: 10.1109/tgrs.2023.3276874.
- [30] Rene Manzano-Islas and Kyle O’Keefe. Sir particle filter in float solution for ambiguity resolution. In *Proceedings of the 34th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS+ 2021)*, pages



2493–2506, St. Louis, Missouri, September 2021. doi: 10.33012/2021.17949. URL <https://doi.org/10.33012/2021.17949>.

- [31] Bofeng Li and Peter J. G. Teunissen. Gnss antenna-array aided CORS ambiguity resolution. *Journal of Geodesy*, 88(4):363–376, 2014. doi: 10.1007/s00190-013-0688-2. URL <https://doi.org/10.1007/s00190-013-0688-2>.