

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL



# APLICACIONES DE CADENAS DE MARKOV

Autores:

Adolfo Carmona Jacobo

Eliú Rojas Martínez

Emma Laura Hernández Albarrán

Jorge Aldana Jamaica

Mauricio Albiter Cervantes

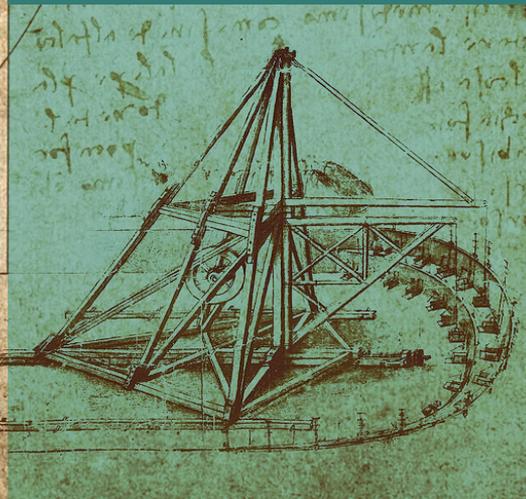
Paulina Santiago Martínez

Coordinadora:

Idalia Flores de la Mota

CUADERNILLO  
DE DIVULGACIÓN

# 20





# APLICACIONES DE CADENAS DE MARKOV

Autores:

Adolfo Carmona Jacobo  
Eliú Rojas Martínez  
Emma Laura Hernández Albarrán  
Jorge Aldana Jamaica  
Mauricio Albitzer Cervantes  
Paulina Santiago Martínez

Coordinadora:

Idalia Flores de la Mota



CUADERNILLO  
DE DIVULGACIÓN

# 20

Para visualizar la obra  
te sugerimos

Acrobat Reader  
Haz Click

Flores De la Mota, Idalia (Coordinadora).  
*APLICACIONES DE CADENAS DE MARKOV*  
Universidad Nacional Autónoma de México,  
Facultad de Ingeniería, 2025, 72 p.

### *Aplicaciones de cadenas de Markov*

Primera edición electrónica  
de un ejemplar (7 MB) Formato PDF  
Publicado en línea en septiembre de 2025

D.R. © 2025, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional  
Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación  
Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA  
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de  
la Universidad Nacional Autónoma de México.  
Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial  
por cualquier medio sin la autorización escrita del titular  
de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

---

Unidad de Apoyo Editorial  
Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz  
Formación editorial : Luis Enrique Vite Rangel

# CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b> .....	6
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	8
<b>CAPÍTULO 1.</b> Problemas de decisión de Markov y programación dinámica .....	14
1.1 Problemas de decisión de Markov .....	14
1.2 Modelo de programación dinámica de etapa finita .....	19
1.3 Conclusiones .....	25
<b>CAPÍTULO 2.</b> Aplicación de cadenas de Markov en el modelado de deterioro de carreteras .....	27
2.1 Introducción .....	27
2.2 Variables para determinar la matriz de probabilidad de transición. ....	29
2.3 Ejercicio de cadenas de Markov para concreto hidráulico ....	32
2.4 Conclusiones .....	37
<b>CAPÍTULO 3.</b> Análisis comercial en gasolineras con cadenas de Markov .....	39
3.1 Introducción .....	39
3.2 Marco teórico .....	40
3.3 Clasificación de las cadenas de Markov .....	43
3.4 Planteamiento del problema .....	45
3.5 Diagrama de flujo del proceso .....	47
3.6 Metodología. ....	48
3.7 Problemática .....	49
3.8 Datos y resultados .....	50
3.9 Conclusiones .....	51

<b>CAPÍTULO 4.</b> Aplicación de procesos de Markov en el análisis del comportamiento de ozono en la Ciudad de México . . . .	53
4.1 Introducción . . . . .	53
4.2 Caso de estudio . . . . .	57
4.3 Conclusiones . . . . .	64
<b>CAPÍTULO 5.</b> Evolución de una población de fumadores con cadenas de Markov . . . . .	67
5.1 Introducción . . . . .	67
5.2 Caso de estudio . . . . .	68
5.3 Conclusiones . . . . .	70

## PRÓLOGO

Con el objetivo de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje en el Departamento de Sistemas de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, un grupo de profesores y estudiantes hemos emprendido la creación de material didáctico y de divulgación. A través de cuadernillos y apuntes, buscamos complementar la bibliografía existente y acercar a los estudiantes de maestría y licenciatura en ingeniería (y áreas afines) a las aplicaciones prácticas de las cadenas de Markov, resaltando el potencial de esta herramienta en diversos campos.

Este material busca introducir al lector de manera clara y sencilla en los temas propuestos, sin comprometer el rigor teórico. La selección, edición y revisión técnica estuvieron a cargo de Idalia Flores De la Mota, mientras que la elaboración de cada capítulo fue realizada por los estudiantes de las maestrías del Departamento. Los autores son: Adolfo Carmona Jacobo, Emma Laura Hernández Albarrán, Paulina Santiago Martínez, Eliú Rojas Martínez, Mauricio Albiter Cervantes, Jorge Aldana Jamaica

Elaborar este material ha sido una experiencia gratificante. Los autores confiamos en que servirá como una herramienta valiosa para los estudiantes de ingeniería que deseen explorar las aplicaciones de las cadenas de Markov. La inclusión de una introducción concisa facilita el acceso a los conceptos fundamentales de esta teoría.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la Mtra. María Cuairán Ruidíaz y al Lic. Luis Enrique Vite Rangel por su colaboración en la revisión de estilo y la formación de este material. Asimismo, agradezco a la Dra. Carmen Angelina García Cerrud y a José Antonio Sánchez Calderón por sus valiosas aportaciones en la elaboración de las figuras y la revisión bibliográfica, con lo que enriquecieron significativamente este trabajo.

Idalia Flores De La Mota  
*Coordinadora de la publicación*

1

2

3

4

5

7

# INTRODUCCIÓN

Las cadenas de Markov son un tipo de proceso estocástico que describe un sistema que transita de un estado a otro dentro de un conjunto finito o infinito de posibles estados. Lo particular de una cadena de Markov es que la probabilidad de moverse a un estado futuro solo depende del estado actual y no de los estados anteriores, lo que se conoce como la propiedad de Markov o memoria sin pasado.

## Características clave de las cadenas de Markov

1. Estados: Representan las posibles condiciones en las que puede estar el sistema.
2. Probabilidades de transición: Son las probabilidades de pasar de un estado a otro en un solo paso.
3. Matriz de transición: Esta matriz contiene todas las probabilidades de transición entre los distintos estados.
4. Cadena de Markov homogénea: Cuando las probabilidades de transición entre los estados son constantes a lo largo del tiempo.

## Aplicaciones de las cadenas de Markov

### 1. Ingeniería

- Modelado de redes de comunicación: Se utilizan para analizar redes de colas, en las cuales los paquetes de datos pasan de un nodo a otro, o para predecir el rendimiento de redes bajo diferentes condiciones.
- Optimización de procesos de producción: Para modelar procesos industriales donde diferentes estados representan etapas de producción.

### 2. Economía y finanzas

- Modelado de mercados: Las cadenas de Markov se utilizan para modelar el comportamiento de los mercados financieros, como la predicción de los precios de acciones o tasas de interés, donde el estado actual influye en los futuros movimientos de precios.
- Valoración de riesgos crediticios: En la gestión de riesgos, se utilizan para modelar el riesgo de que un prestatario pase de un estado de solvencia a uno de incumplimiento.

### 3. Procesamiento de lenguaje natural (PLN)

- Modelado de secuencias: En PLN, las cadenas de Markov se utilizan para modelar secuencias de palabras o letras en texto, siendo clave en modelos como el etiquetado de partes del discurso, corrección ortográfica y generación de lenguaje.
- Modelos ocultos de Markov (HMM): Son una extensión que se usa en reconocimiento de voz y procesamiento de secuencias temporales.

1

2

3

4

5

#### 4. Inteligencia artificial (IA)

- Planificación y toma de decisiones: En IA, las cadenas de Markov son una base para la toma de decisiones bajo incertidumbre, como en los juegos, la robótica y la navegación autónoma.
- Modelos de aprendizaje por refuerzo: Estos modelos utilizan procesos de Markov para aprender a tomar decisiones óptimas en entornos inciertos.
- Modelado de comportamiento de usuarios: En el análisis de redes sociales, las cadenas de Markov pueden modelar las transiciones entre diferentes estados de interacción de los usuarios, como los “clics” en sitios web o la evolución de una comunidad en línea.
- Sistemas de recomendación: Netflix, Amazon y otros sistemas de recomendación usan cadenas de Markov para predecir el comportamiento de los usuarios y ofrecer recomendaciones basadas en sus acciones anteriores.

#### 5. Ciencias biológicas:

- Modelos de evolución genética: Las cadenas de Markov son útiles en la evolución de secuencias de ADN, donde la transición de un nucleótido a otro puede modelarse como un proceso de Markov.

### Métodos para resolver cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son herramientas poderosas para modelar sistemas que evolucionan a través del tiempo en pasos discretos, donde la probabilidad de transición a un estado futuro depende únicamente del estado actual. Para resolver estas cadenas y obtener información relevante, como las probabilidades estacionarias o el tiempo medio de primera pasada, se emplean diversos métodos.

### 1. Método de las ecuaciones de balance detallado

Este método se basa en la idea de que, en el estado estacionario, el flujo de probabilidad que entra a un estado debe ser igual al flujo que sale. Esto se traduce en un sistema de ecuaciones lineales.

Ventajas: Conceptualmente sencillo, aplicable a una amplia variedad de cadenas.

Desventajas: Para cadenas grandes, la resolución del sistema de ecuaciones puede ser computacionalmente costosa.

### 2. Método de las matrices de probabilidad de transición

Se utiliza la matriz de transición  $P$  para calcular las potencias de la matriz y así obtener las probabilidades de transición en  $n$  pasos. A medida que  $n$  tiende a infinito, bajo ciertas condiciones, se converge a un vector de probabilidades estacionarias.

Ventajas: Permite calcular probabilidades de transición a cualquier horizonte temporal.

Desventajas: Para cadenas grandes, el cálculo de potencias de matrices puede ser computacionalmente costoso.

### 3. Método de la programación dinámica

Para resolver una cadena de Markov usando programación dinámica se consideran los siguientes elementos:

- Definición del problema: Se establece el problema como un proceso de decisión de Markov (MDP), donde:
- Etapas: Se divide el problema por etapas que pueden ser meses, años, condiciones del entorno.

1

2

3

4

5

- Estados: Representan las posibles situaciones del sistema.
- Transiciones: Definen la probabilidad de pasar de un estado a otro dada una acción.
- Soluciones parciales: Asignan un valor numérico a cada transición, representando el beneficio o costo asociado.
- Ecuación de Bellman: Esta ecuación establece una relación recursiva entre el valor de estar en un estado y los valores de los estados futuros. Permite calcular el valor óptimo de cada estado y la política óptima (la secuencia de acciones que maximiza la recompensa esperada a largo plazo).

Se utiliza programación dinámica para resolver la ecuación de Bellman de manera iterativa y recursiva, comenzando por el horizonte de tiempo final y retrocediendo hasta el estado inicial.

Ventajas: La estructura de una cadena de Markov proporciona un marco natural para modelar problemas secuenciales. Es flexible ya que permite modelar una amplia variedad de problemas, desde problemas de inventario hasta problemas de control óptimo, y garantiza que se encuentre la solución óptima.

Desventajas: A medida que aumenta el número de estados y acciones, la complejidad computacional crece exponencialmente.

Modelos estocásticos: La incertidumbre inherente a los procesos estocásticos puede dificultar el análisis.

1

2

3

4

5

## Selección del método adecuado

La elección del método depende de:

1. Tamaño de la cadena: Para cadenas pequeñas, los métodos analíticos son preferibles. Para cadenas grandes, la simulación o software especializado pueden ser más eficientes.
2. Tipo de cadena: Cadenas ergódicas, absorbentes, etc.
3. Información requerida: Probabilidades estacionarias, tiempos medios de primera pasada, etc.
4. Disponibilidad de herramientas computacionales.

## Resumen

Las cadenas de Markov son poderosas herramientas de modelado que tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas, desde la ciencia y la ingeniería hasta las ciencias sociales y la economía. Gracias a su capacidad para modelar sistemas con transiciones probabilísticas entre estados, son muy útiles para estudiar procesos dinámicos con incertidumbre.

La resolución de cadenas de Markov involucra una combinación de métodos analíticos y numéricos. La elección del método más adecuado dependerá del problema específico y de los recursos computacionales disponibles.

En este cuadernillo se presentan algunas aplicaciones en la ingeniería y algunos de los métodos para resolverlos.

1

2

3

4

5

## CAPÍTULO 1

# Problemas de decisión de Markov y programación dinámica

Idalia Flores De La Mota

## 1.1 PROBLEMA DE DECISIÓN DE MARKOV

En un inicio las cadenas de Markov<sup>1</sup> se usaron para analizar procesos físicos y de meteorología, ya que una de las primeras aplicaciones fue para predecir patrones de clima. Actualmente su aplicación es muy extensa, como precios, mantenimiento de maquinaria, selección de productos, longitud de colas en los servicios, manejo de inventarios y hasta en el comportamiento de animales en laboratorio. Esto se basa en el hecho de que estos sistemas pueden estar en uno de diferentes estados posibles y con el tiempo ese estado puede cambiar. Si se encuentra que la transición de un estado a otro no está predeterminada, sino que ocurre en función de ciertas probabilidades que dependen de la historia del sistema, entonces se tiene un proceso estocástico. Pero si además estas probabilidades de transición dependen solamente de la historia inmediata del sistema, es decir, si el estado del sistema en una observación cualquiera

---

<sup>1</sup> A.A.Markov (1856-1922) matemático ruso que inventó el método.

depende solo de su estado en la observación inmediata anterior, entonces el proceso es un proceso de Markov.

Existen una variedad de procesos de Markov que no se abordan en estos apuntes pues no es su finalidad, solo cabe mencionar que las probabilidades asociadas a diferentes estados se conocen como probabilidades de transición y con dichas probabilidades se construye una matriz de transición como se define a continuación.

Una matriz de transición  $P = [p_{ij}]$  es una matriz cuadrada con entradas no negativas y donde la suma de cada columna es igual a la unidad.

En esta sección veremos cómo se resuelve un problema de cadenas de Markov usando programación dinámica, esto será a través de un ejemplo que, a pesar de su sencillez, hace la paráfrasis de varias aplicaciones importantes en las áreas de inventarios, reemplazo, manejo de la circulación de efectivo y regulación de la capacidad de un depósito de agua.

**Ejemplo 1.1** El problema de la jardinera (Taha, 2005)

Todos los años, al inicio de la estación de cultivo, una jardinera realiza pruebas químicas para revisar la condición de la parcela. Dependiendo de los resultados de las pruebas, puede clasificar la productividad del jardín para la nueva temporada como buena, regular o deficiente.

Con el paso de los años, la mujer observó que la productividad del año en curso puede suponerse dependiente solo de la condición del terreno del año anterior. Por lo tanto, puede representar las probabilidades de transición en un periodo de un año de un estado de productividad a otro en términos de la siguiente cadena de Markov:

$$\text{Estado del sistema este año} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right. \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^1$$

Estado del sistema  
para el próximo año  
1    2    3

La representación supone la siguiente correspondencia entre la productividad y los estados de la cadena

**Tabla 1.1** Productividad y estados de la cadena

Productividad (Condición del terreno)	Estado del sistema
Buena	1
Regular	2
Deficiente	3

Las probabilidades de transición en  $P^1$  indican que la productividad de un año en curso puede no ser mejor que la del año anterior. Por ejemplo, si la condición del terreno para este año es regular (estado 2), la productividad del año siguiente puede seguir siendo regular con probabilidad 0.5 o volverse deficiente (estado 3), también con probabilidad 0.5.

La mujer puede alterar las probabilidades de transición  $P^1$  tomando otros cursos de acción que tenga a su disposición. Comúnmente puede decidir fertilizar el jardín para mejorar la condición del terreno, que producirá la siguiente matriz de transición  $P^2$ :

$$P^2 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 2 & 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 3 & 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el fertilizante, es posible mejorar la condición del terreno con respecto a la del año pasado.

Para poner en perspectiva el problema de decisión, la jardinera asocia una función de rendimiento (o estructura de recompensa) con la transición de un estado a otro. La función de rendimiento expresa la ganancia o pérdida durante un periodo de un año, dependiendo de los estados entre los que se haga la transición. Como la mujer tiene las opciones de utilizar o no fertilizante, se espera que su ganancia y pérdidas varíen según la decisión que ella tome. Las matrices  $R^1$  y  $R^2$  resumen las funciones de rendimiento en cientos de unidades monetarias asociadas con las matrices  $P^1$ ,  $P^2$ , respectivamente. Por lo tanto,  $R^1$  se aplica cuando no se usa fertilizante; en caso contrario, se puede utilizar  $R^2$  en la representación de la función de rendimiento.

$$R^1 = \|r_{ij}^1\| = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R^2 = \|r_{ij}^2\| = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Note que los elementos  $r_{ij}^2$  de  $R^2$  toman en cuenta el costo de aplicar el fertilizante. Por ejemplo, si el sistema estuviera en el estado 1 y se mantuviera en ese estado durante el año siguiente, su ganancia sería  $r_{11}^2 = 6$  en comparación con  $r_{11}^1 = 7$  cuando no se emplea fertilizante.

¿Qué tipo de problema de decisión tiene la jardinera? Primero, queremos saber si la actividad de cultivo seguirá realizándose un número de años limitado o para fines prácticos, por tiempo indefinido. Estas situaciones se conocen como problemas de decisión de *etapa finita* y de *etapa infinita*. En ambos casos, la jardinera necesitaría determinar el mejor curso de acción que debe seguir (fertilizar o no fertilizar el terreno) dado el resultado de las pruebas químicas (estado del sistema). El proceso de optimización estará basado en la maximización de ingreso esperado. Quizá la jardinera también esté interesada en evaluar el ingreso esperado resultante de seguir un curso de acción especificado, siempre que ocurra un estado dado del sistema. Por ejemplo, ella puede decidir fertilizar siempre que la condición del terreno sea deficiente (estado 3). El proceso de toma de decisión en este caso se dice estar representado por una política estacionaria.

Debemos observar que cada política estacionaria debe estar asociada con matrices de transición y rendimiento diferentes que, en general, pueden construirse a partir de las matrices  $P^1$ ,  $P^2$ ,  $R^1$ , y  $R^2$ . Por ejemplo, para la política estacionaria que pide se aplique fertilizante solo cuando la condición del terreno sea deficiente (estado 3), las matrices de transición y rendimiento resultantes,  $P$  y  $R$ , están dadas por

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Estas matrices difieren de  $P^1$  y  $R^1$  solo en los renglones terceros que se toman directamente de  $P^2$  y  $R^2$ . La razón es que  $P^2$  y  $R^2$  son las matrices que se generan cuando se aplica fertilizante en todos y cada uno de los estados.

## 1.2 MODELO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA DE ETAPA FINITA

Suponga que la jardinera planea “retirarse” de su pasatiempo en  $N$  años. Por lo tanto, está interesada en determinar su curso de acción óptimo para cada año (fertilizar o no fertilizar el terreno) sobre un horizonte de planeación finito. Aquí, la optimalidad se define de manera que la jardinera acumulará el más alto ingreso esperado al cabo de  $N$  años.

Sean  $k = 1$  y  $2$  los dos cursos de acción (opciones) disponibles para ella. Las matrices  $P^k$  y  $R^k$  representan las probabilidades de transición y la función de remuneración para la alternativa  $k$ .

$$P^1 = \|p_{ij}^1\| = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R^1 = \|r_{ij}^1\| = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \|p_{ij}^2\| = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \|r_{ij}^2\| = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Recuerde que el sistema tiene tres estados: bueno (estado 1), regular (estado 2) y malo o deficiente (estado 3).

Podemos expresar el problema de la jardinera como un modelo de programación dinámica de estado finito de la manera siguiente. Para hacer una generalización, suponga que el número de estados para cada etapa (año) es  $m$  ( $=3$  en el ejemplo de la jardinera) y se define:

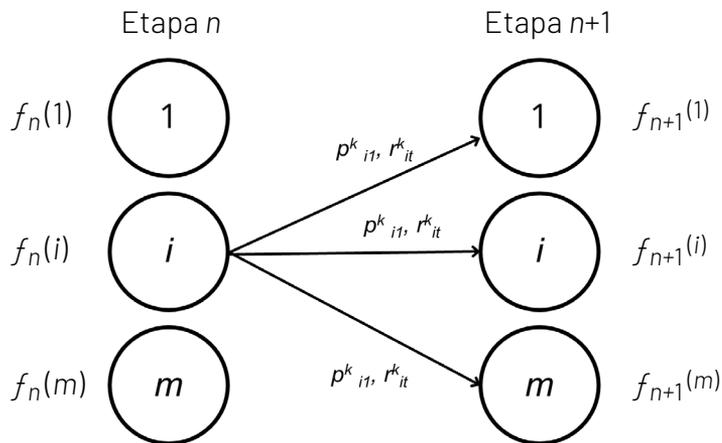
$f_n(i)$  = ingreso esperado óptimo de las etapas  $n, n + 1, \dots, N$ , dado que el estado del sistema (condición del terreno) al inicio del año  $n$  es  $i$ .

$m$  = cantidad de estados de cada etapa (año) (3 en el problema de la jardinera)

La ecuación recursiva hacia atrás que relaciona a  $f_n$  y  $f_{n+1}$  puede escribirse como sigue y se puede ver en la figura 1.

$$f_n(i) = \max_K \left\{ \sum_{j=1}^m p_{ij}^k [r_{ij}^k + f_{n+1}(j)] \right\}, \quad n=1,2,\dots,N$$

Donde  $f_{N+1}(j) = 0$  para toda  $j$



**Figura 1.** Relaciones recursivas para el problema de la jardinera

Una justificación para la ecuación es que el ingreso acumulado  $r_{ij}^k + f_{n+1}(j)$  que resulta de llegar al estado  $j$  en la etapa  $n + 1$  desde el estado  $i$  en la etapa  $n$  ocurre con la probabilidad  $p_{ij}^k$ . De hecho, si  $v_i^k$ .

representa el rendimiento esperado resultante de una transición desde el estado  $i$  dada la alternativa  $k$ , entonces  $v_i^k$  puede expresarse como

$$v_i^k = \sum_{j=1}^m p_{ij}^k r_{ij}^k.$$

La ecuación recursiva de programación dinámica puede escribirse como

$$f_N(i) = \max_k \{v_i^k\}$$

$$f_n(i) = \max_k \left\{ v_i^k + \sum_{j=1}^m p_{ij}^k f_{n+1}(j) \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

Antes de demostrar cómo se utiliza la ecuación recursiva para resolver el problema de la jardinera, ilustramos el cálculo de  $v_i^k$  que es parte de la ecuación recursiva. Por ejemplo, suponga que no se utiliza fertilizante ( $k=1$ ); entonces

$$v_1^1 = 0.2(7) + 0.5(6) + 0.3(3) = 5.3$$

$$v_2^1 = 0(0) + 0.5(5) + 0.5(1) = 3$$

$$v_3^1 = 0(0) + 0(0) + 1(-1) = -1$$

Estos valores muestran que si se advierte que la condición del terreno es buena (estado 1) al inicio del año, se espera que una sola transición genere 5.3 para el año. En forma análoga, si la condición del terreno es regular la productividad es 3, y si es mala (deficiente), la productividad es -1.

Con esta explicación ahora se resuelve el problema de la jardinera.

Considerando los datos de las matrices  $P^1$ ,  $P^2$ ,  $R^1$  y  $R^2$  con un horizonte de planeación de tres años, es decir  $N=3$ , se tienen los siguientes cálculos:

**Tabla 1.2** Datos para el problema de la jardinera

$i$	$v_i^1$	$v_i^2$
1	5.3	4.7
2	3	3.1
3	-1	0.4

**Etapa 3**

**Tabla 1.3** Cálculos para la tercera etapa

$i$	$v_i^k$		Solución óptima	
	$k=1$	$k=2$	$f_3(i)$	$k^*$
1	5.3	4.7	5.3	1
2	3	3.1	3.1	2
3	-1	0.4	0.4	2

**Etapa 2**

**Tabla 1.4** Cálculos para la segunda etapa

$i$	$v_i^k + p_{i1}^k f_3(1) + p_{i2}^k f_3(2) + p_{i3}^k f_3(3)$		Solución óptima	
	$k=1$	$k=2$	$f_2(i)$	$k^*$
1	$5.3+0.2(5.3)+0.5(3.1)+0.3(0.4)=8.03$	$4.7+0.3(5.3)+0.6(3.1)+0.1(0.4)=8.19$	8.19	2
2	$3+0(5.3)+0.5(3.1)+0.5(0.4)=4.75$	$3.1+0.1(5.3)+0.6(3.1)+0.3(0.4)=5.61$	5.61	2
3	$-1+0(5.3)+0(3.1)+1(0.4)=-0.6$	$0.4+0.05(5.3)+0.4(3.1)+0.55(0.4)=2.13$	2.13	2

## Etapa 1

Tabla 1.5 Cálculos para la primera etapa

$v_i^k + p_{i1}^k f_2(1) + p_{i2}^k f_2(2) + p_{i3}^k f_2(3)$			Solución óptima	
$i$	$k=1$	$k=2$	$f_1(i)$	$k^*$
1	$5.3+0.2(8.19)+0.5(5.61)+0.3(2.13) = 10.38$	$4.7+0.3(8.19)+0.6(5.61)+0.1(2.13) = 10.74$	10.74	2
2	$3+0(8.19)+0.5(5.61)+0.5(2.13) = 6.87$	$3.1+0.1(8.19)+0.6(5.61)+0.3(2.13) = 7.92$	7.92	2
3	$-1+0(8.19)+0(5.61)+1(2.13) = 1.13$	$0.4+0.05(8.19)+0.4(5.61)+0.55(2.13) = 4.23$	4.23	2

La solución óptima indica que para los años 1 y 2, la jardinera debe fertilizar el terreno ( $k^*=2$ ) sin importar el estado del sistema (condición del terreno revelada por las pruebas químicas). Sin embargo, en el año 3 ella debe aplicar fertilizante solo si el sistema se encuentra en el estado 2 o 3 (condición del terreno regular o deficiente). Los ingresos totales esperados de los tres años son  $f_1(1) = 10.74$  si el estado del sistema en el año 1 es bueno,  $f_1(2) = 7.92$  si es regular y  $f_1(3) = 4.23$  si es deficiente.

La solución de programación dinámica que se dio antes se conoce algunas veces como el enfoque de iteración de valor, ya que, por la naturaleza real de la ecuación recursiva, los valores  $f_n(i)$  se determinan en forma iterativa.

El problema de la jardinera (de horizonte finito) que acabamos de resolver, se puede generalizar de dos formas. Primero, las probabilidades de transición y sus funciones de rendimiento no necesitan ser las mismas para cada año. Segundo, se puede aplicar un factor de descuento al ingreso esperado de las etapas sucesivas de manera que los valores  $f_1(i)$  representen el valor presente de los ingresos esperados de todas las etapas.

La primera generalización requeriría simplemente que los valores de rendimiento  $r_{ij}^k$  y las probabilidades de transición  $p_{ij}^k$  sean además funciones de la etapa  $n$ . En este caso las ecuaciones recursivas se ven como:

$$f_N(i) = \max_K \{v_i^{k,N}\}$$

$$f_n(i) = \max_k \left\{ v_k^{k,n} + \sum_{j=1}^m p_{ij}^{k,n} f_{n+1}(j) \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

Donde

$$v_i^{k,n} = \sum_{j=1}^m p_{ij}^{k,n} r_{ij}^{k,n}$$

La segunda generalización se lleva a cabo de la siguiente manera. Sea  $\alpha$  ( $<1$ ) el factor de descuento por año, que normalmente se calcula como  $\alpha = 1/(1+t)$ , donde  $t$  es la tasa de interés anual. Por lo tanto,  $D$  unidades monetarias de aquí a un año es equivalente a  $\alpha D$  unidades monetarias ahora, esto se verá con más detalle en el capítulo 4. La introducción del factor de descuento modificará la ecuación recursiva original como sigue:

$$f_N(i) = \max_K \{v_i^k\}$$

$$f_n(i) = \max_k \left\{ v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^m p_{ij}^k f_{n+1}(j) \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

La aplicación de esta ecuación recursiva es exactamente similar a la original salvo por la multiplicación del factor de descuento. En general el uso de un factor de descuento puede generar una decisión óptima diferente en comparación con el caso cuando no se utiliza un descuento.

La ecuación recursiva se puede utilizar para evaluar cualquier política estacionaria para el problema de la jardinera. Suponiendo que no se utiliza descuento, es decir ( $\alpha = 1$ ) la ecuación recursiva para evaluar una política estacionaria es

$$f_n(i) = v_i + \sum_{j=1}^m p_{ij} f_{n+1}(j)$$

Donde  $p_{ij}$  es el  $(i, j)$ -ésimo elemento de la matriz de transición asociada con la política y  $v_i$  es el ingreso de transición en un paso esperado de la política.

### 1.3 CONCLUSIONES

La programación dinámica se puede aplicar a las cadenas de Markov para encontrar políticas óptimas en **procesos de decisión de Markov**. En estos procesos, en cada estado se toma una decisión que afecta la probabilidad de transición a otros estados y una recompensa asociada.

Pasos generales:

#### 1. Definición del problema:

- Identificar los estados posibles del sistema.
- Definir las acciones posibles en cada estado.
- Especificar las probabilidades de transición entre estados dadas las acciones.
- Determinar la recompensa asociada a cada transición.

**2. Formulación del problema de optimización:**

- Definir una función de valor que represente la recompensa total esperada a largo plazo.
- El objetivo es encontrar la política que maximiza esta función de valor.

**3. Aplicación de la programación dinámica:**

- Descomponer el problema en subproblemas más pequeños.
- Resolver los subproblemas de forma recursiva, utilizando las soluciones óptimas de los subproblemas más pequeños para construir la solución óptima del problema original.

**REFERENCIAS**

- Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*. Editorial Pearson.
- Flores De La Mota Idalia. *Programación Dinámica*. México, Facultad de Ingeniería, UNAM. 2015.

1

2

3

4

5

## CAPÍTULO 2

# Aplicación de cadenas de Markov en el modelado de deterioro de carreteras

Adolfo Carmona Jacobo

## 2.1 INTRODUCCIÓN

La predicción del estado futuro de los pavimentos continúa siendo un reto muy importante de la ingeniería de carreteras, en este sentido actualmente el país no ha desarrollado modelos de deterioro específicos para la red carretera que comunica a todo su territorio, en cambio se han utilizado algunos desarrollados por otros países y que se ajustan a la operación actual del país. Esta actividad resulta crucial en el diseño o la gestión de pavimentos, procesos en los que se requiere de una estimación fiable del comportamiento del pavimento, o bien para determinar la sección y los materiales óptimos para soportar determinados volúmenes de tránsito y condiciones ambientales, o bien para elaborar programas de conservación que permitan ofrecer al público usuario los niveles de servicio esperados durante la vida útil de la carretera. Para proyectar la evolución del estado de los pavimentos se utilizan los denominados modelos de deterioro.

1

2

3

4

5

Los modelos de deterioro pueden agruparse en dos clases fundamentales (Robinson, et al., 1998):

- a. **Deterministas.** La condición futura se establece mediante un valor preciso, que se calcula relacionando de diversas maneras un indicador de deterioro con un conjunto de variables explicativas. En esta clase se agrupan los modelos puramente mecanicistas, de regresión y empírico mecanicistas antes descritos.
- b. **Probabilísticos.** El estado futuro del pavimento se estima como una función de probabilidad para el conjunto de posibles estados que podrían presentarse.

Se pueden utilizar dos tipos de funciones de probabilidad:

- i. **Función continua.** Expresa la probabilidad de que un índice de estado sea mayor que un valor dado en relación con la edad del pavimento. Este tipo de función se conoce como “curva de supervivencia”.
- ii. **Función discreta.** Denominada también “función markoviana” porque se basa en el concepto de “cadenas de Markov”, esta función divide el espacio de todas las condiciones posibles en una serie de “estados”.

Para utilizar las cadenas de Markov en el modelado del deterioro del pavimento, normalmente se parte de los siguientes supuestos:

- Los estados del proceso corresponden a los distintos niveles de deterioro del pavimento, definidos en términos de medidas del daño como la irregularidad, los deterioros superficiales o índices compuestos como el Índice de Nivel de Servicio Actual (*PSI* por *Present Serviceability Index*)(AASHTO, 1993).

- El nivel de deterioro se expresa a través de estados o bandas de condición, definidos en términos de algún indicador de interés, por ejemplo,  $1.5 \leq IRI < 3.5$  para el Índice de Regularidad Internacional (*IRI*).
- Los estados del proceso ocurren en ciclos de servicio con una duración fija, normalmente de un año.
- Se asume que el deterioro de pavimentos cumple con la propiedad de Markov, es decir, que el estado futuro depende únicamente del estado actual.

## 2.2 VARIABLES PARA DETERMINAR LA MATRIZ DE PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

Cuando se utilizan cadenas de Markov, el estado del pavimento en un ciclo de servicio  $t$  se representa a través de un vector de estado que tiene la forma:

$$\alpha_t = (\alpha_{t,1}, \alpha_{t,2}, \dots, \alpha_{t,n})$$

donde:

$\alpha_t$ : Vector de estado en el ciclo de servicio  $t$

$\alpha_{t,i}$ : Fracción de la red que se encuentra en el estado  $i$  durante el ciclo de servicio  $t$

$$\alpha_{t,i} \geq 0 \quad \forall i$$

$$\sum \alpha_{t,i} = 1$$

Por otro lado, en todo proceso de Markov aplicado a modelar el deterioro de pavimentos, debe verificarse que:

$$p_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

$$p_{nn} = 1$$

La primera condición se debe a que un pavimento no puede mejorar su condición si no es sometido a trabajos de conservación. Con  $p_{nn} = 1$ , se establece que existe un estado terminal en el que el pavimento ha alcanzado su peor condición y no puede ya sufrir deterioro alguno. Considerando estas restricciones, la forma usual de una Matriz de Probabilidades de Transición (MPT) para modelar el deterioro de pavimentos es:

$$p = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ 0 & 0 & P_{33} & \cdots & P_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, es usual suponer que el pavimento no puede deteriorarse en más de un estado durante un ciclo de servicio, con lo que la MPT queda:

$$p = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ 0 & 0 & P_{33} & \cdots & P_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

En lo que se refiere al cálculo de los elementos  $p_{ij}$  de la MPT, históricamente se han empleado dos métodos (Ortiz-García, *et al.*, 2006). El primero de ellos consiste en obtenerlos como:

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}$$

donde:

$N_{ij}$ : Número de tramos que pasaron del estado  $i$  al estado  $j$  en un ciclo de servicio

$N_i$ : Total de tramos que se encontraban en el estado  $i$  al inicio del ciclo

De lo anterior se desprende que bastan datos de dos años para calcular las probabilidades de transición. La ausencia de información histórica confiable da paso al segundo método, con el cual las  $p_{ij}$  se calculan a partir de las opiniones de un grupo de expertos.

Según lo descrito en párrafos anteriores, la generación de cadenas de Markov homogéneas supone el uso de series de datos de dos años consecutivos. En este caso, se utilizaron series correspondientes a los años 2008 y 2009, con un intervalo de medición de 20 m. El procedimiento seguido puede resumirse como sigue:

- a. Consolidar los datos en segmentos de 100 m, asignando a cada segmento el promedio de las mediciones a cada 20 m. Este paso tiene por objeto reducir la longitud de las unidades de análisis para facilitar su procesamiento, así como atenuar la dispersión de los datos debido a fenómenos o errores muy localizados.
- b. Obtener la estadística descriptiva de las series originales, con el fin de determinar, entre otras características, el rango de los datos, su nivel de dispersión y su distribución aproximada.
- c. Eliminar valores atípicos de las series originales y someterlas a un proceso de filtrado simple, para que los datos pudieran utilizarse en la generación de las cadenas de Markov.
- d. Definir rangos o bandas de IRI para caracterizar el estado de cada uno de los segmentos.
- e. Obtener la matriz de probabilidades de transición (MPT).
- f. Determinar la evolución de los vectores de estado de cada tramo en el tiempo, de acuerdo con los rangos de condición definidos.

- g. Obtener la curva de deterioro a partir de los valores esperados de los vectores de estado correspondientes a cada ciclo de servicio.

Los tramos utilizados en el ejercicio corresponden a segmentos homogéneos de autopista definidos con base en las siguientes características:

- Tipo de pavimento
- Volumen y composición del tránsito
- Clima

### 2.3 EJERCICIO DE CADENAS DE MARKOV PARA CONCRETO HIDRÁULICO

En el siguiente ejercicio se hará uso de una cadena de Márkov homogénea para determinar el índice de regularidad internacional en un tramo carretero compuesto de concreto hidráulico con el propósito de ilustrar las aplicaciones de las cadenas de Markov y constatar su funcionalidad en la operación carretera a nivel nacional.

#### Datos para pavimento de concreto hidráulico

En este caso, los datos generales del tramo son:

1. Longitud: 16.5 km
2. Tipo de pavimento: Concreto simple con juntas y pasajuntas
3. Volumen de tránsito en 2009: 6,314 vehículos por día
4. Composición vehicular (%):
  - A: 64.55.
  - B: 3.35.
  - C2: 3.05.

1

2

3

4

5

- C3: 3.35.
- T3-S2: 17.70.
- T3-S3: 3.55.
- T3-S2-R4: 4.45.
- Clima: Subtropical templado - semiárido

A partir del tramo estudiado se obtuvieron los siguientes datos para el año 2008 y 2009.

**Tabla 2.1** Medidas año 2008 - 2009

Medidas	2008	2009	Diferencia
n	166	166	166
Mínimo	1.25	1.69	0
Máximo	6.35	6.07	1
Media	2.56	2.79	0.23
Desviación estándar	0.8	0.79	0.81
Coefficiente de variación	0.31	0.28	3.53
Q1	2.05	2.21	-0.20
Mediana	2.36	2.52	0.16
Q3	2.87	3.10	0.66
RI	0.82	0.89	0.86
Q1-1.5RI	0.83	0.87	-1.49
Q3+1.5RI	4.09	4.43	1.96

Usando lo anterior se procedió al cálculo de las probabilidades de transición y al armado de la MPT que se presenta a continuación. Como puede observarse, en todos los casos y, como resultado de la revisión de los

datos, los segmentos solo pueden permanecer en el mismo estado o deteriorarse hasta el siguiente. Nótese también que la probabilidad de que un segmento permanezca en el mismo estado se incrementa conforme avanza el proceso de deterioro.

**Tabla 2.2** Matriz de probabilidad de transición

Estados de deterioro	1	2	3	4	$\Sigma p_i$
1	0	1	0	0	1
2	0	0.64	0.36	0	1
3	0	0	0.97	0.03	1
4	0	0	0	1	1

Si se continúa con el proceso, se llega a estado estable en la iteración veinticinco y se obtiene la siguiente tabla:

**Tabla 2.3** Matriz de probabilidad de transición

Estados de deterioro	1	2	3	4	$\Sigma p_i$
1	0	3.7414E-06	0.46493614	0.53506012	1
2	0	2.3945E-06	0.4509894	0.5490082	1
3	0	0	0.41340935	0.58659065	1
4	0	0	0	1	1

Si tomamos en cuenta que el vector de estado inicial que corresponde a los datos de este tramo es:

$$\alpha_0 = (0.05, 0.71, 0.23, 0.01)$$

se obtuvieron los vectores de estado y la curva de deterioro que se presentan en forma tabular en las siguientes tablas:

**Tabla 2.4** Matriz de probabilidad de transición

t	at1	at2	at3	at4
0	0.05	0.71	0.23	0.01
1	0	0.51	0.48	0.01
2	0	0.33	0.65	0.03
3	0	0.21	0.74	0.05
4	0	0.14	0.79	0.07
5	0	0.09	0.82	0.09
6	0	0.06	0.82	0.12
7	0	0.04	0.82	0.14
8	0	0.02	0.81	0.17
9	0	0.01	0.79	0.19
10	0	0.01	0.77	0.22
11	0	0.01	0.75	0.24
12	0	0	0.73	0.26
13	0	0	0.71	0.29
14	0	0	0.69	0.31
15	0	0	0.67	0.33
16	0	0	0.65	0.35
17	0	0	0.63	0.37
18	0	0	0.61	0.39
19	0	0	0.59	0.41
20	0	0	0.58	0.42

**Tabla 2.5** Curva de deterioro

<b>t</b>	<b>IRIt</b>	<b>Monte Carlo</b>
1	2.2	1
2	2.51	2
3	2.7	2.36
4	2.84	2.61
5	2.94	2.75
6	3.01	2.87
7	3.06	2.96
8	3.11	3.03
9	3.15	3.09
10	3.18	3.13
11	3.21	3.16
12	3.23	3.19
13	3.26	3.21
14	3.28	3.24
15	3.31	3.25
16	3.33	3.28
17	3.35	3.3
18	3.37	3.32
19	3.39	3.34
20	3.41	3.36
21	3.42	3.37

1

2

3

4

5

## 2.4 CONCLUSIONES

Del ejercicio de aplicación de las cadenas de Markov homogéneas al deterioro de pavimentos pueden obtenerse las siguientes conclusiones:

- Se ha podido confirmar que la aplicación del método es relativamente sencilla, siempre y cuando exista la información necesaria. Quizá la parte más compleja del procedimiento utilizado es la que se refiere a la detección de datos atípicos y al filtrado de las series originales.
- Las cadenas de Markov homogéneas pueden perder su capacidad predictiva conforme avanza el periodo de análisis, no solo porque las curvas de deterioro se vuelven asintóticas con respecto al valor máximo existente en las series, sino también porque ignoran la evolución de variables explicativas de gran importancia como el volumen de tránsito o la capacidad estructural del pavimento, algo que sí se obtiene de las cadenas de Markov no homogéneas.
- El uso de cadenas de Markov homogéneas conlleva las siguientes ventajas adicionales a las ya mencionadas:
  - « Como se ha mostrado en los ejemplos, la generación de la MPT y del pronóstico de deterioro requiere únicamente datos de dos años consecutivos.
  - « Las cadenas de Markov homogéneas (y también las no homogéneas) pueden utilizarse para modelar la degradación de los pavimentos y de cualesquier otros activos carreteros como puentes, drenaje, señalamiento, etc. (NHCRP, 2012). Lo anterior es posible porque el método se basa en un enfoque probabilístico que no considera ninguna relación, empírica o mecanicista.

1

2

3

4

5

- En lo que respecta a las desventajas de las cadenas de Markov homogéneas, se puede añadir que no proveen mecanismos para relacionar formalmente las variables explicativas con los indicadores de deterioro utilizados en el pronóstico. Lo anterior, y los demás inconvenientes ya mencionados, pueden hacer que la precisión de la estimación sea muy baja después de los primeros años del periodo de análisis.

## REFERENCIAS

- Solorio Murillo Ricardo, Márquez Mendoza Zaydith Daniel, Montoya Ortega Monserrat, Cárdenas Rodríguez Santa Ludinette, 2014. *Aplicación de métodos markovianos en el modelado del deterioro de carreteras*. Instituto Mexicano de Transporte, Querétaro
- Robinson, R., Danielson, U. & Snaith, m., 1998. *Road Maintenance Management*. Basingstoke (Hampshire)
- AASHTO, 1993. *AASHTO Guide for Design of Pavement Structures*. Washington, D.C, EUA
- Ortiz-García, J. J., Costello, S. B. & Snaith, M. S., 2006. *Derivation of Transition Probability Matrices for Pavement Deterioration Modeling*. ASCE Journal of Transportation Engineering

1

2

3

4

5

## CAPÍTULO 3

# Análisis comercial en gasolineras con cadenas de Markov

Emma Laura Hernández Albarrán

Paulina Santiago Martínez

Eliú Rojas Martínez

## 3.1 INTRODUCCIÓN

Las cadenas de Markov son modelos matemáticos que describen sistemas que transitan de un estado a otro dentro de un conjunto finito o infinito de posibles estados a través de una serie de eventos, en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior. Las cadenas de Markov son una de las herramientas más importantes para solucionar situaciones de la vida real, ya sea en tiempo discreto o en tiempo continuo.

En el competitivo mercado de combustibles, las estaciones de servicio de distintas marcas buscan maximizar su participación de mercado y su rentabilidad. Utilizar herramientas matemáticas avanzadas, como las cadenas de Markov, permite analizar y predecir el comportamiento de los consumidores y optimizar la toma de decisiones estratégicas. Este estudio aplica cadenas de Markov para analizar el consumo de combustible en las principales marcas de gasolineras en un mercado representativo, proporcionando una base para estrategias comerciales informadas.

1

2

3

4

5

El objetivo de este capítulo es analizar y predecir las dinámicas del mercado de gasolineras utilizando cadenas de Markov para entender y optimizar la participación de mercado y la rentabilidad de diferentes marcas de estaciones de servicio. A través del estudio de las probabilidades de transición de los consumidores entre diferentes marcas de gasolineras, este análisis busca proporcionar una base sólida para decisiones comerciales estratégicas e informadas. En concreto, se intenta modelar y prever el comportamiento del consumidor en relación con su lealtad a las marcas y su impacto en el volumen de ventas y la rentabilidad de las gasolineras, permitiendo así a las empresas adaptar sus estrategias operativas y de marketing para captar y retener clientes de manera más efectiva.

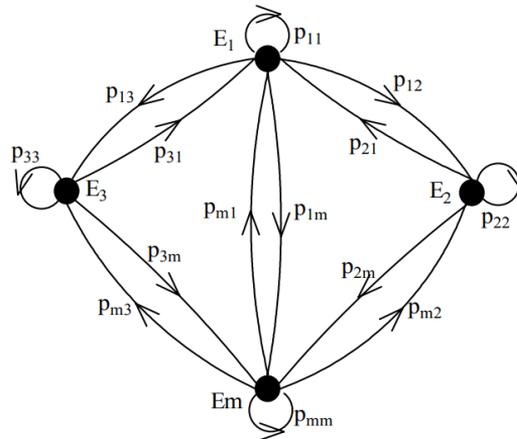
### 3.2 MARCO TEÓRICO

Las cadenas de Markov se basan en conceptos de teoría de la probabilidad, incluyendo variables aleatorias, distribuciones de probabilidad y espacios de muestra. Estas bases permiten la modelización formal de los procesos que son aleatorios, pero poseen dependencias internas (Cebreiro Rodríguez, N. 2021).

La figura 1 muestra el esquema básico de un proceso estocástico (para un instante de tiempo específico) donde las variables de estado han sido discretizadas en  $m$  posibles situaciones (Estados 1, ..., Estado  $m$ ) y el tiempo ha sido discretizado en etapas (horas, días, meses, etc.).

En las cadenas de Markov se supone que el paso o transición de un estado a otro solo depende de ambos, es decir se puede asociar una probabilidad  $p_{ij}$  a la transición del estado  $E_i$  en la fecha  $n$  hacia estado  $E_j$  en la fecha  $n+1$ . Si llamamos  $p_j(n)$  la probabilidad de que el proceso se encuentre en

el estado  $E_j$  en una fecha  $n$ , y si las probabilidades de transición  $p_{ij}$  se mantienen constantes, tenemos una cadena de Markov (Bedoya, J. C., & Barrera, M. 2006).



**Figura 1.** Representación de la transición entre estados para una cadena de Markov

## Procesos estocásticos

Un proceso estocástico se define como una colección de variables aleatorias indexadas por tiempo. Las cadenas de Markov son un subtipo de estos procesos, caracterizadas por la propiedad de Markov, que implica que la probabilidad de transición de un estado a otro solo depende del estado actual.

## Matriz de transición

La matriz de transición en una cadena de Markov se define como una matriz cuadrada donde cada entrada  $p_{ij}^{(n)}$  representa la probabilidad en

$n$  pasos de transitar del estado  $i$  al estado  $j$ , como se muestra en la figura 2. La suma de las probabilidades en cada fila de esta matriz es igual a 1, dado que cada fila representa una distribución de probabilidad completa sobre los posibles estados siguientes (Bedoya, J. C., & Barrera, M. 2006).

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \dots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}^{(n)} & p_{i1}^{(n)} & p_{i2}^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

**Figura 2.** Matriz de transición en  $n$  pasos

**Dimensiones:** La matriz es cuadrada y su tamaño depende del número de estados en la cadena de Markov.

**Entradas:** Cada entrada  $p_{ij}^{(n)}$  en la matriz indica la probabilidad de moverse del estado  $i$  al estado  $j$  en  $n$  pasos.

**Propiedades:**

La suma de las probabilidades en cualquier fila es igual a 1 (cumpliendo con la definición de una distribución de probabilidad). Las probabilidades son no negativas.

### 3.3 CLASIFICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV

Las cadenas de Markov pueden clasificarse de diversas maneras según sus características y el tipo de problemas que se pretenden resolver. Los más comunes son [5]:

*Tiempo discreto*: estas cadenas de Markov toman valores en pasos de tiempo específicos y discretos (por ejemplo, segundos, minutos, días). Comúnmente utilizadas en modelos donde los eventos ocurren en intervalos fijos.

*Tiempo continuo*: en este tipo, el cambio de estado puede ocurrir en cualquier momento, no solo en tiempos discretos predefinidos. Son adecuadas para modelar sistemas donde los cambios de estado son continuos y no se ajustan a un horario regular, como ciertos procesos físicos o químicos.

*Homogéneas*: las probabilidades de transición entre estados no cambian con el tiempo. Simplifican el análisis y la computación porque la matriz de transición es constante a lo largo del tiempo.

*No homogéneas*: las probabilidades de transición pueden cambiar de un paso a otro. Son útiles para modelar sistemas dinámicos donde las condiciones externas influyen en las probabilidades de transición, como sistemas económicos o climáticos.

*Absorbentes*: contienen al menos un estado absorbente, un estado que, una vez alcanzado, no puede dejarse. Son utilizadas para modelar procesos que terminan en un estado específico, como la ruina de un jugador o ciertos procesos de decisión.

1

2

3

4

5

**Ergódicas:** todas las cadenas de estados son aperiódicas y todos los estados se comunican entre sí. Estas cadenas eventualmente alcanzan una distribución de estado estacionario, útil para estudios a largo plazo de sistemas estables.

**Recurrentes:** un estado es recurrente si la cadena tiene una probabilidad no nula de regresar a este estado.

Recurrencia positiva: la cadena regresa al estado en un número finito de pasos en promedio.

Recurrencia nula: la cadena regresa al estado, pero el número promedio de pasos puede ser infinito.

**Transitorias:** los estados transitorios son aquellos desde los cuales la cadena tiene una probabilidad de nunca regresar.

### **Modelos específicos y aplicaciones**

Las cadenas de Markov se aplican en una amplia gama de campos, desde la física y la biología hasta la economía y la informática. Algunas aplicaciones incluyen:

**Modelado de sistemas de colas:** Para analizar el flujo de clientes en sistemas de servicio.

**Biología computacional:** Para modelar secuencias de ADN o la dinámica de poblaciones.

**Finanzas:** En la valoración de opciones y otros derivados.

**Aprendizaje automático:** En algoritmos como los modelos ocultos de Markov.

1

2

3

4

5

### 3.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El sector de las gasolineras enfrenta un ambiente altamente competitivo donde las fluctuaciones en la lealtad del cliente y las preferencias pueden impactar significativamente la participación de mercado y la rentabilidad de las empresas. A pesar de la importancia estratégica de prever y entender estos cambios en el comportamiento del consumidor, muchas estaciones de servicio carecen de herramientas analíticas avanzadas que les permitan anticipar estas dinámicas y adaptarse eficazmente. Este desafío se ve agravado por la necesidad de optimizar operaciones y estrategias de marketing en un contexto de fluctuaciones constantes en los precios del combustible y la diversificación de las ofertas de servicios.

#### Objetivos específicos

- Lealtad del cliente: analizar cómo la lealtad de los consumidores afecta la retención y atracción de clientes en distintas marcas de gasolineras, identificando patrones de comportamiento que puedan ser influenciados mediante estrategias de fidelización y marketing.
- Participación de mercado: evaluar cómo las transiciones de los consumidores entre diferentes marcas afectan la distribución del mercado entre las principales gasolineras, con el fin de desarrollar tácticas que mejoren la competitividad.
- Optimización de utilidades: determinar cómo las preferencias de consumo y las transiciones entre marcas impactan las utilidades de las gasolineras, buscando maximizar los ingresos a través de ajustes en la estrategia comercial.

1

2

3

4

5

## Preguntas de investigación

¿Cuál es la probabilidad de que un cliente de una determinada marca de gasolinera cambie a otra marca?

¿Cómo influyen las tendencias de lealtad de los clientes en la participación de mercado de las gasolineras Pemex, BP y Repsol?

¿Cuáles son las estrategias efectivas que pueden implementar las gasolineras para mejorar su participación de mercado y rentabilidad en un periodo determinado?

## Hipótesis

Para lograr una mayor participación en el mercado y rentabilidad, las gasolineras deben enfocarse en ofrecer un valor agregado a través de una combinación de precios competitivos, excelente servicio y programas de fidelización personalizados. Además, el uso de herramientas analíticas como las cadenas de Markov les permite tomar decisiones más informadas y adaptarse de manera proactiva a las dinámicas del mercado.

1

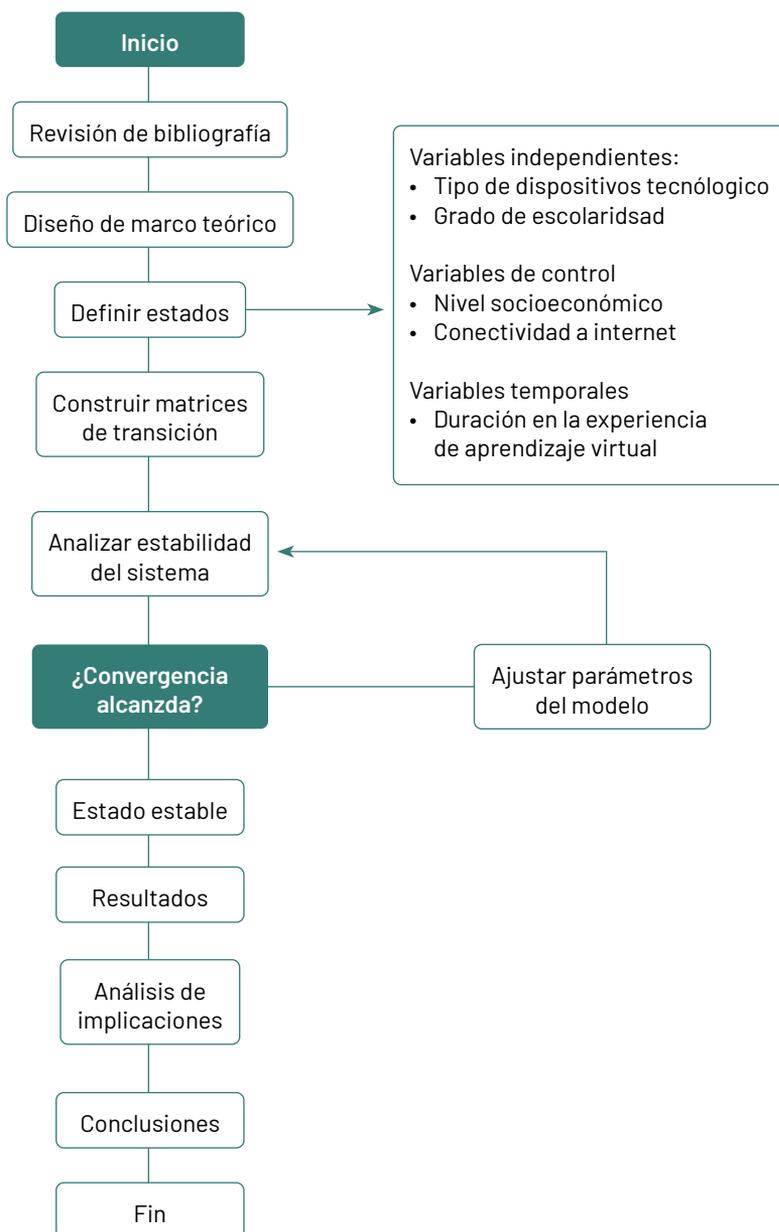
2

3

4

5

## 3.5 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCESO



1

2

3

4

5

### 3.6 METODOLOGÍA

Para realizar el análisis, se utilizaron cadenas de Markov con las siguientes etapas:

Definición de estados: Los estados se definieron como las tres marcas de gasolineras: Pemex, BP y Repsol.

Construcción de matrices de transición: Se utilizaron matrices de transición para modelar la probabilidad de que un consumidor cambie de una gasolinera a otra en un periodo determinado. Las matrices de transición utilizadas son:

Primera matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.490 & 0.360 & 0.150 \\ 0.410 & 0.400 & 0.190 \\ 0.450 & 0.360 & 0.190 \end{pmatrix}$$

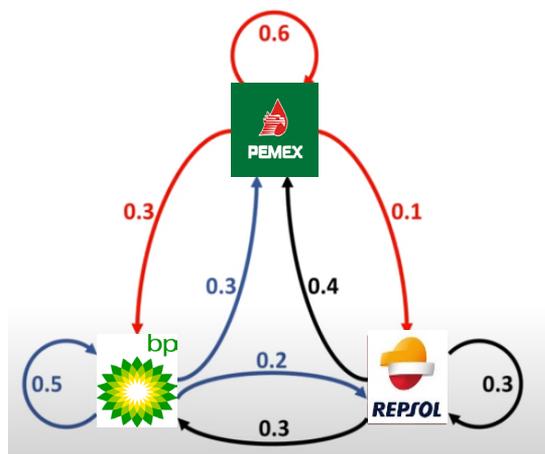
$$\begin{pmatrix} 0.453 & 0.375 & 0.172 \\ 0.453 & 0.375 & 0.172 \\ 0.453 & 0.375 & 0.172 \end{pmatrix}$$

Matrices de transición evolutivas:

Análisis de estabilidad: Se evaluaron las matrices de transición para determinar la estabilidad del sistema (estado estable) y la convergencia a una distribución estacionaria.

### 3.7 PROBLEMÁTICA

Se busca determinar el volumen de venta de gasolina de 92 octanos para 3 gasolineras y su utilidad con base en datos estadísticos sobre la preferencia de los consumidores de acuerdo con la siguiente gráfica:



**Figura 3.** Preferencias de consumo de tres gasolineras

Con base en la figura que busca resolver las siguientes problemáticas clave:

Lealtad del cliente: determinar la lealtad del cliente a una marca y las probabilidades de cambio de una gasolinera a otra.

Participación de mercado: analizar cómo las dinámicas de transición afectan la participación de mercado de cada marca.

Optimización de utilidades: estimar las utilidades potenciales basándose en el consumo anual de combustible y las probabilidades de transición.

### 3.8 DATOS Y RESULTADOS

Con una población de 50 millones de habitantes y un consumo promedio de 4 litros de combustible por semana, el consumo anual total se estima en 10,400 millones de litros. La utilidad promedio es de 20 centavos por litro. Se construyen las siguientes matrices de transición con el propósito de obtener el estado estable:

El estado estable se obtuvo en la iteración 6 (M1) lo que indica que estos son las preferencias de consumo en una población para cada una de las gasolineras objeto del estudio, dándonos los siguientes resultados:

		Pemex	BP	Repsol			Pemex	BP	Repsol
M1	Pemex	0.6	0.3	0.1	M4	Pemex	0.455	0.374	0.170
	BP	0.3	0.5	0.2		BP	0.450	0.376	0.174
	Repsol	0.4	0.3	0.3		Repsol	0.454	0.374	0.172
M2	Pemex	0.490	0.360	0.150	M5	Pemex	0.454	0.375	0.172
	BP	0.410	0.400	0.190		BP	0.452	0.375	0.172
	Repsol	0.450	0.360	0.190		Repsol	0.453	0.375	0.172
M3	Pemex	0.462	0.372	0.166	M6	Pemex	<b>0.453</b>	0.375	0.172
	BP	0.442	0.380	0.178		BP	0.453	<b>0.375</b>	0.172
	Repsol	0.454	0.372	0.174		Repsol	0.453	0.375	<b>0.172</b>

Figura 4. Estados de transición del problema

10,400,000,000 litros de gasolina de 92 octanos de consumo anual

Consumo de litros por gasolinera:

Pemex: 4,603,329,900 litros

BP: 3,772,966,600 litros

Repsol: 2,022,134,400 litros

Utilidad por consumo de gasolina (MMUSD):

Pemex: \$ 920.67 millones

BP: \$ 754.59 millones

Repsol: \$ 404.43 millones

### 3.9 CONCLUSIONES

El análisis de cadenas de Markov ha proporcionado una visión sobre del comportamiento del consumidor en el mercado de gasolineras. Pemex mantiene la mayor cuota de mercado, seguido por BP y Repsol.

La estabilidad observada en las últimas matrices de transición sugiere que el mercado se encuentra en un estado estacionario, donde las probabilidades de transición se han estabilizado.

El presente estudio ha demostrado que la probabilidad de cambio de una marca de gasolinera a otra varía significativamente según factores como la ubicación, el precio del combustible, y las promociones en curso. Las cadenas de Markov aplicadas revelan que ciertas marcas experimentan una mayor fidelidad del cliente debido a la percepción de mejor calidad y servicio al cliente. La probabilidad de que un cliente cambie de una gasolinera Pemex a una BP o Repsol, por ejemplo, tiende a ser más baja cuando Pemex ofrece descuentos o servicios adicionales.

La lealtad del cliente tiene una correlación directa con la participación de mercado de las gasolineras. Marcas como Pemex mantienen una participación de mercado superior. La implementación de estrategias de retención de clientes basadas en la comprensión de sus preferencias y comportamientos, modelados a través de las cadenas de Markov, ha demostrado ser efectiva para mejorar la lealtad y, por ende, la participación de mercado.

1

2

3

4

5

Las estrategias que han resultado más efectivas para las gasolineras en términos de mejora de participación de mercado y rentabilidad incluyen la optimización de la ubicación de las estaciones de servicio, el ajuste de precios en respuesta a los cambios en las preferencias del cliente y las condiciones del mercado, y la mejora continua de los servicios adicionales.

Por lo tanto, este tipo de análisis es crucial para que las empresas desarrollen estrategias en sus procesos de almacenamiento y reparto, captación de clientes, estrategias de participación de mercado, así como el aumento en sus utilidades.

Utilizando estos modelos, las gasolineras pueden prever cambios en las preferencias de los consumidores y ajustar sus estrategias comerciales y de marketing.

## REFERENCIAS

- Hillier F. & Lieberman G. (2003). Introducción a la investigación de operaciones. Mc Graw Hill, Última edición
- Cebreiro Rodríguez, N. (2021). Principios básicos de las cadenas de Markov.
- Tolver, A. (2016). Una introducción a las cadenas de Markov. Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Copenhague.
- Bedoya, J. C., & Barrera, M. (2006). Convergencia de las cadenas de Markov. *Scientia et Technica*, 3(32).
- Silverstein, M. L., & Rosenblatt, M. (1974). Clasificación de las cadenas de Markov simétricas estables. *Revista de Matemáticas de la Universidad de Indiana*, 24(1), 29-77.

1

2

3

4

5

## CAPÍTULO 4

# Aplicación de procesos de Markov en el análisis del comportamiento de ozono en la Ciudad de México

Mauricio Albiter Cervantes

## 4.1 INTRODUCCIÓN

La crisis ambiental que se vive no solo en la Ciudad de México, sino en todo el mundo, es un tema que no se debe tomar a la ligera. Actualmente, en la Ciudad de México es muy común encontrar algo similar a una nube gris cubriendo el cielo, la cual está llena de contaminantes atmosféricos. La contaminación atmosférica sucede cuando las sustancias tóxicas se aglomeran debido a que no pueden ser diluidas por el ecosistema. Estas sustancias tóxicas son principalmente causadas por la combustión de materia prima (Manahan, 2007).

Por otra parte, sabemos que el ser humano no tiene control sobre la naturaleza, factores como el clima, las características geográficas de una zona, incendios, entre otros, generan contaminantes atmosféricos, los cuales, no podemos cambiar, pero sí mitigar. Sin embargo, hay factores, como la deforestación, en los cuales sí podemos actuar para reducir al máximo los impactos ambientales negativos.

1

2

3

4

5

El ozono es una molécula formada por tres átomos de oxígeno ( $O_3$ ). El ozono se localiza principalmente en la estratósfera y tropósfera. El ozono se crea todos los días, sin embargo, hay temporadas que favorecen su desarrollo, como lo es la temporada de primavera y verano, ya que la radiación solar y los vientos ligeros son aliados del ozono (Bermejo *et al.*, 2009).

La concentración de ozono en la estratósfera desempeña una función de suma importancia ya que filtra los rayos ultravioleta (rayos UV). Pero, como menciona Stedman (1987), el ozono ubicado en la tropósfera tiene una reacción fotoquímica al entrar en contacto con otros contaminantes y la presencia de luz solar. Dicha reacción al no ser resultado de un proceso en particular provoca que el ozono sea considerado un contaminante secundario.

El ozono es un contaminante que representa riesgos para la salud humana, ya que es un oxidante que irrita las vías respiratorias, afectando principalmente a personas con problemas respiratorios como asma y alergias, además de adultos mayores, personas con tabaquismo, personas con malos hábitos alimenticios, entre otros (Nuvolone *et al.*, 2018).

Aunado a lo anterior, los bebés, las niñas y niños también son muy vulnerables a los efectos del ozono, esto debido a que los órganos continúan en desarrollo.

Monitorear los niveles de ozono nos indica qué días son favorables para las actividades al aire libre, y qué días es mejor no realizarlas. Para hacer un monitoreo favorable, se realiza una fotometría UV, el cual es un método que se basa en la absorción de luz ultravioleta con ayuda de resonancia electrónica interna, la cual, brinda un comportamiento proporcional al nivel de concentración de ozono (CENMA, 2013).

1

2

3

4

5

El Índice Metropolitano de Calidad del Aire (IMECA) es una herramienta analítica desarrollada para proporcionar los niveles de contaminación a la población, con la finalidad de brindar medidas de precaución oportunas (gobierno de la Ciudad de México, 2023).

El índice IMECA registra la presencia de los cinco principales contaminantes: dióxido de azufre, dióxido de nitrógeno, monóxido de carbono, partículas suspendidas y ozono. Para facilitar la identificación de los rangos, se representan mediante un color, tal como se observa en la figura 1. Además, la imagen representa el parámetro específico del ozono.

Puntos.	Calidad.	Riesgo.	O <sub>3</sub> ppb
0-50	BUENA	No representa ningún riesgo para la salud.	<0.11
51-100	REGULAR	Riesgo moderado para la salud.	0.11
101-150	MALA	Posibles efectos para personas con problemas cardiovasculares o cardíacos.	0.123
151-200	MUY MALA	Efectos adversos a la salud de la población en general y se agravan los síntomas en personas con problemas respiratorios.	0.35
201-500	EXTREMADAMENTE MALA	Efectos graves a la salud de la población en general, se pueden presentar complicaciones en personas con problemas respiratorios.	0.60

**Figura 1.** Parámetros de monitoreo. Obtenido de Arias (2023)

A nivel nacional, en México se tienen diversas normas mexicanas, así como decretos, acuerdos y leyes que regulan el uso de los recursos naturales para reducir los impactos ambientales. Además, estipulan las sanciones correspondientes en caso de no cuidar el medio ambiente.

A nivel de cuidado del aire y la atmósfera, durante la mayor parte del siglo XX no se tuvieron normatividades rigurosas. Fue hasta 1990 donde surge PROAIRE, el cual es un conjunto de programas dedicados a reducir los impactos negativos en la atmósfera y el aire.

Actualmente la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT) es la encargada de monitorear algunos contaminantes atmosféricos, proporcionando un rango de concentraciones permisibles a través de una Norma Oficial Mexicana (NOM) correspondiente a cada contaminante. En el caso del Ozono, la NOM correspondiente es la NOM-020-SSA1-2014, y su norma técnica NOM-036-SEMARNAT-1993.

Además de las regulaciones nacionales, también se tienen tratados internacionales, como lo son el Acuerdo de París, el Protocolo de Kioto, y el Protocolo de Montreal, entre otros. Estos tratados internacionales buscan financiar proyectos ambientales, regulan las emisiones de contaminantes permitidas y general planes a corto, mediano y largo plazo para disminuir las emisiones de contaminantes.

A lo largo de este texto se ha hablado sobre el Ozono, sus repercusiones y la contaminación en general. Sin embargo, ¿cómo se relacionan los procesos de Markov con esto?

De aquí en adelante, se mostrará un resumen corto del trabajo realizado por Arias (2023), en el cual aplica procesos de Markov a datos recolectados por IMECA para analizar el comportamiento del ozono en la CDMX.

1

2

3

4

5

## 4.2 CASO DE ESTUDIO

La zona de estudio que se utiliza es el centro de la Ciudad de México. Esto debido a la alta afluencia de personas y vehículos, tanto por la gran cantidad de negocios, como por la oferta cultural que presenta la zona.

La estación del IMECA utilizada para el estudio es la mostrada en la figura 2, donde se dan datos de la estación como el nombre, clave, número de identificación, domicilio y coordenadas:

Nombre	Merced
Clave	MER
No. ID	4.8409E+11
Domicilio	Congreso de la Unión esq. Stan de Tiro s/n, Col. Merced Balbuena, C.P. 15860
Alcaldía	Venustiano Carranza
Estado	CDMX
Latitud	19.42461
Longitud	-99.119594
Altitud	2245 msnm

**Figura 2.** Datos de la estación utilizada. Obtenido de Arias (2023)

De la estación mencionada se recabaron los registros máximos de ozono por día, durante el periodo conformado entre el 01 de enero de 2018 y el 01 de enero de 2023.

Para establecer las matrices evaluadas, se usa el parámetro de monitoreo de IMECA, donde se tienen cuatro estados que determinan el comportamiento del ozono, siendo "bueno", "regular", "malo" y "muy malo". El quinto estado "extremadamente malo" se ignora al no tener datos en el estudio actual. La transición entre los estados se define en la figura 3.

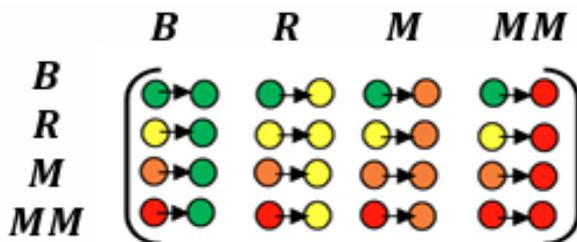


Figura 3. Matriz de los estados. Obtenido de Arias (2023)

Los datos fueron divididos por mes, dando un total de doce matrices a lo largo de cada año. A cada mes del año se le asignó una letra del alfabeto, siendo que a enero se le asignó la letra A, a febrero la letra B, a marzo la letra C y así sucesivamente.

Como ejemplo, Arias(2023) utiliza los datos recopilados de mayo (nomenclatura: E) a través de los 5 años de estudio. En las figuras 4, 5, 6, 7 y 8, se muestran los datos recopilados del mes de mayo, plasmando la transición entre los estados propuestos anteriormente.

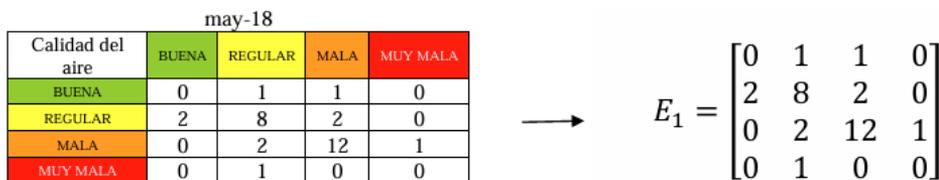


Figura 4. Datos de mayo de 2018. Obtenido de Arias (2023)

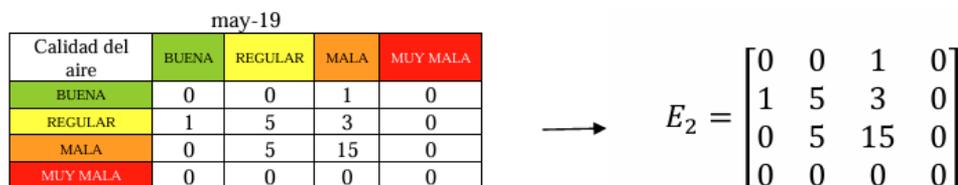


Figura 5. Datos de mayo de 2019. Obtenido de Arias (2023)

may-20

Calidad del aire	BUENA	REGULAR	MALA	MUY MALA
BUENA	0	0	0	0
REGULAR	0	3	4	0
MALA	0	4	19	0
MUY MALA	0	0	0	0

$$\longrightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Figura 6.** Datos de mayo de 2020. Obtenido de Arias (2023)

may-21

Calidad del aire	BUENA	REGULAR	MALA	MUY MALA
BUENA	1	1	0	0
REGULAR	0	2	4	0
MALA	1	3	18	0
MUY MALA	0	0	0	0

$$\longrightarrow E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Figura 7.** Datos de mayo de 2021. Obtenido de Arias (2023)

may-22

Calidad del aire	BUENA	REGULAR	MALA	MUY MALA
BUENA	0	2	0	0
REGULAR	1	0	3	0
MALA	1	2	15	3
MUY MALA	0	0	3	0

$$\longrightarrow E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Figura 8.** Datos de mayo de 2022. Obtenido de Arias (2023)

Para llenar la matriz, se tomaron en cuenta días continuos. Por ejemplo, si el 18 de mayo se tuvo una calidad regular, y el día siguiente (19 de mayo) se tuvo una calidad regular, entonces el dato se agrega en la fila 2, columna 2.

Una vez obtenidas las matrices, se procedió a sumar los datos de las 5 matrices, bajo el argumento de que las muestras son del mismo caso

estudio, es decir, el mismo mes. En la figura 9 se observa el resultado de integrar las matrices obtenidas del mes de mayo de los cinco años del estudio.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 18 & 16 & 0 \\ 2 & 16 & 79 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Figura 9.** Matriz integral de los datos de mayo. Obtenida de Arias (2023)

Una vez obtenida la matriz integral, se procede a sumar los datos de las columnas, tal como se muestra en la figura 10. Dichas sumatorias permiten conocer la probabilidad de los cambios de estados, mostrando qué tan probable es pasar a un estado futuro estando en un estado actual. En la figura 11 se muestran las probabilidades de pasar de un estado a otro.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 18 & 16 & 0 \\ 2 & 16 & 79 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \Sigma = 7 \\ \rightarrow \Sigma = 38 \\ \rightarrow \Sigma = 101 \\ \rightarrow \Sigma = 4 \end{array}$$

**Figura 10.** Sumatoria de las columnas de la matriz integral.

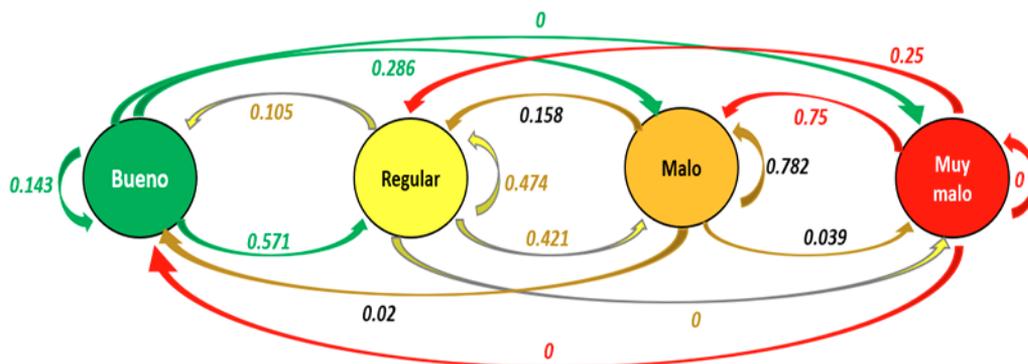
Obtenido de Arias (2023)

$$P_E = \begin{array}{l} B \\ R \\ M \\ MM \end{array} \begin{bmatrix} B & R & M & MM \\ 0.143 & 0.571 & 0.286 & 0 \\ 0.105 & 0.474 & 0.421 & 0 \\ 0.020 & 0.158 & 0.782 & 0.039 \\ 0 & 0.25 & 0.75 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \Sigma = 1 \\ \rightarrow \Sigma = 1 \\ \rightarrow \Sigma = 1 \\ \rightarrow \Sigma = 1 \end{array}$$

**Figura 11.** Matriz de probabilidad de los cambios de estado.

Obtenido de Arias (2023)

Una matriz de transición se puede representar mediante un diagrama de transición como el que se presenta en la figura 12. Mediante este diagrama, se puede apreciar de mejor forma las probabilidades de cambios de estado.



**Figura 12.** Diagrama de transición del mes de mayo. Obtenido de Arias (2023)

Posteriormente, se puede estabilizar la matriz de transición mediante la ecuación de Chapman, la cual establece que se puede multiplicar la matriz de transición por sí misma  $n$  veces ( $P^n$ ).

Para el caso de esta matriz, el número de iteraciones necesarias para lograr que los primeros seis decimales sean estables es de 16, lo que significa que se requiere multiplicar por sí misma la matriz 16 veces. Entre más multiplicaciones por sí misma se realicen, mayor precisión se tendrá. En las figuras 13 y 14 se observa el proceso de las matrices hasta llegar al estado estable en los primeros seis decimales.

1

2

3

4

5

1	B	R	M	MM
B	0.1429	0.5714	0.2857	0
R	0.1053	0.4737	0.4211	0
M	0.0198	0.1584	0.7822	0.0396
MM	0	0.2500	0.7500	0

2	B	R	M	MM
B	0.086216	0.397571	0.504897	0.011315
R	0.073237	0.351229	0.558859	0.016675
M	0.034993	0.220165	0.713865	0.030977
MM	0.041167	0.237233	0.691897	0.029703

3	B	R	M	MM
B	0.064164	0.320402	0.595438	0.019996
R	0.058500	0.300922	0.618445	0.022133
M	0.042310	0.245116	0.684302	0.028272
MM	0.044554	0.252931	0.675113	0.027402

4	B	R	M	MM
B	0.054684	0.287760	0.633974	0.023582
R	0.052280	0.279475	0.643752	0.024493
M	0.045397	0.255757	0.671745	0.027101
MM	0.046358	0.259068	0.667837	0.026737

**Figura 13.** Iteraciones de la 1 a la 4 para llega al estado estable. Obtenido de Arias (2023)

13	B	R	M	MM
B	0.047682	0.263634	0.662449	0.026235
R	0.047681	0.263630	0.662454	0.026235
M	0.047678	0.263619	0.662466	0.026237
MM	0.047679	0.263621	0.662465	0.026236

14	B	R	M	MM
B	0.047680	0.263627	0.662457	0.026236
R	0.047680	0.263626	0.662459	0.026236
M	0.047679	0.263621	0.662464	0.026236
MM	0.047679	0.263622	0.662463	0.026236

15	B	R	M	MM
B	0.047680	0.263625	0.662460	0.026236
R	0.047679	0.263624	0.662461	0.026236
M	0.047679	0.263622	0.662463	0.026236
MM	0.047679	0.263622	0.662463	0.026236

16	B	R	M	MM
B	0.047679	0.263623	0.662461	0.026236
R	0.047679	0.263623	0.662462	0.026236
M	0.047679	0.263622	0.662462	0.026236
MM	0.047679	0.263622	0.662462	0.026236

**Figura 14.** Iteraciones de la 13 a la 16 para llega al estado estable. Obtenido de Arias (2023)

Una vez llegando al estado estable, se obtiene el vector de estado estable. En la figura 15 se muestra el vector de estado estable.

$$\vec{\pi} = [ 0.047679 \quad 0.263623 \quad 0.662462 \quad 0.026236 ]$$

**Figura 15.** Vector de estado estable. Elaboración propia a partir de matriz de transición

Con el vector de estado estable, se obtiene el pronóstico de la calidad de aire por ozono que se espera para mayo de 2023. Esto se logra multiplicando por 100 para así obtener las probabilidades y así apreciar de mejor forma los resultados, como se observa en la figura 16.

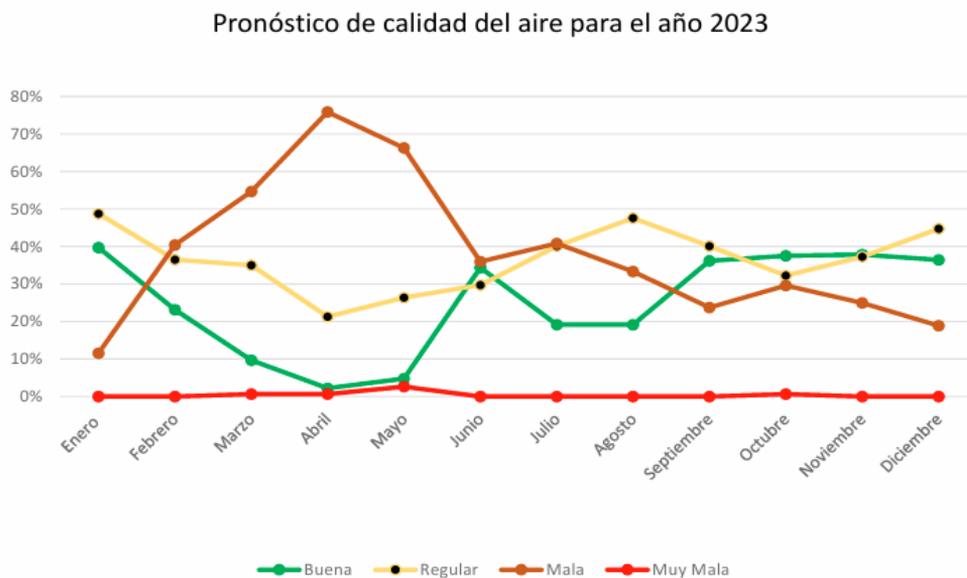
	BUENA	REGULAR	MALA	MUY MALA
Mayo	4.8%	26.4%	66.2%	2.6%

**Figura 16.** Pronóstico de la calidad del aire por ozono en mayo.  
Obtenido de Arias (2023)

Este mismo procedimiento se realiza con los datos diarios de los demás meses de los 5 años de estudio. En las figuras 17 y 18, se muestra el resultado obtenido para los demás meses del 2023. En la figura 17, se muestran las probabilidades en forma de tabla y en la figura 18 mediante un diagrama.

Mes	BUENA	REGULAR	MALA	MUY MALA
Enero	39.7%	48.7%	11.6%	0.0%
Febrero	23.2%	36.5%	40.4%	0.0%
Marzo	9.7%	35.0%	54.7%	0.6%
Abril	2.2%	21.3%	75.8%	0.7%
Mayo	4.8%	26.4%	66.2%	2.6%
Junio	34.3%	29.7%	36.0%	0.0%
Julio	19.1%	40.1%	40.8%	0.0%
Agosto	19.1%	47.6%	33.3%	0.0%
Septiembre	36.1%	40.1%	23.7%	0.0%
Octubre	37.5%	32.2%	29.6%	0.7%
Noviembre	37.8%	37.3%	24.9%	0.0%
Diciembre	36.4%	44.7%	18.9%	0.0%

**Figura 17.** Pronóstico del 2023. Obtenido de Arias (2023)



**Figura 18.** Pronóstico del 2023. Obtenido de Arias (2023)

De esta forma es como se pueden aplicar los procesos de Markov al análisis del comportamiento del ozono.

### 4.3 CONCLUSIONES

Las cadenas de Markov ofrecen un marco ideal para modelar el comportamiento dinámico de variables ambientales como el ozono. Al considerar el nivel de ozono en un momento dado como un estado, podemos predecir su nivel futuro basado en probabilidades de transición.

**Las ventajas clave incluyen:**

- Captura de la variabilidad: Permite modelar las fluctuaciones diarias, estacionales y anuales en los niveles de ozono.

- Identificación de patrones: Ayuda a identificar tendencias y patrones cíclicos en la concentración de ozono.
- Predicción: Permite realizar pronósticos a corto y mediano plazo sobre la calidad del aire.
- Evaluación de políticas: Se puede utilizar para evaluar el impacto de diferentes políticas de control de la contaminación en los niveles de ozono.

### Limitaciones y consideraciones

- Simplificaciones: El modelo asume que el proceso es markoviano homogéneo, lo que puede no ser del todo realista.
- Datos: Requiere de datos históricos confiables sobre el comportamiento de fumar en la población.
- Cálculo de probabilidades de transición: La estimación precisa de estas probabilidades puede ser compleja.

### REFERENCIAS

- Arias, Adrián. (2023). Análisis del comportamiento de ozono en la CDMX considerando el modelo de cadenas de Márkov. Facultad de Ingeniería. UNAM. México.
- Bermejo, Victoria & Alonso, Rocío & Elvira, Susana & Rábago, Isaura & García Vivanco, Marta. (2009). El ozono troposférico y sus efectos en la vegetación.
- CENMA, (2013). Elaboración de reglamentos y protocolos de procedimientos para el aseguramiento de la calidad del monitoreo de contaminantes atmosféricos. Santiago de Chile, 98 pp.

- Gobierno de la Ciudad de México. (2023). Información sobre el monitoreo atmosférico en la Ciudad de México.
- Manahan, S. E. (2007). Introducción a la química ambiental. México. Reverte.
- Nuvolone, D., Petri, D., & Voller, F. (2018). The effects of ozone on human health. *Environmental science and pollution research international*, 25(9), 8074–8088.
- Stedman, D. (1987). "Ozone". In: *Climatology. Encyclopedia of Earth Science*. Springer, Boston, MA.

1

2

3

4

5

## CAPÍTULO 5

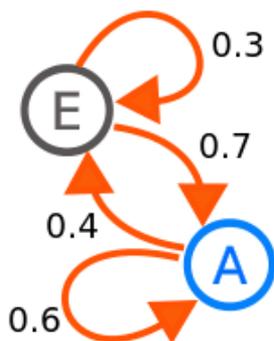
# Evolución de una población de fumadores con cadenas de Markov

Jorge Aldana Jamaica

## 5.1 INTRODUCCIÓN

### Cadenas de Markov: Una descripción general

Una cadena de Markov es un modelo matemático que describe una secuencia de eventos en la que la probabilidad de cada evento depende únicamente del estado actual, y no de la historia previa. En otras palabras, los sistemas de Markov tienen “memoria a corto plazo”, lo que significa que el futuro solo depende del presente, independientemente de lo que haya sucedido en el pasado.



**Figura 1.** Probabilidades de preferencia en una cadena de Markov

Las cadenas de Markov se caracterizan por dos elementos clave:

Estados: Un conjunto finito de posibles configuraciones o condiciones del sistema.

Matriz de transición: Una matriz que define las probabilidades de transición entre los estados. Cada entrada de la matriz representa la probabilidad de pasar de un estado específico a otro.

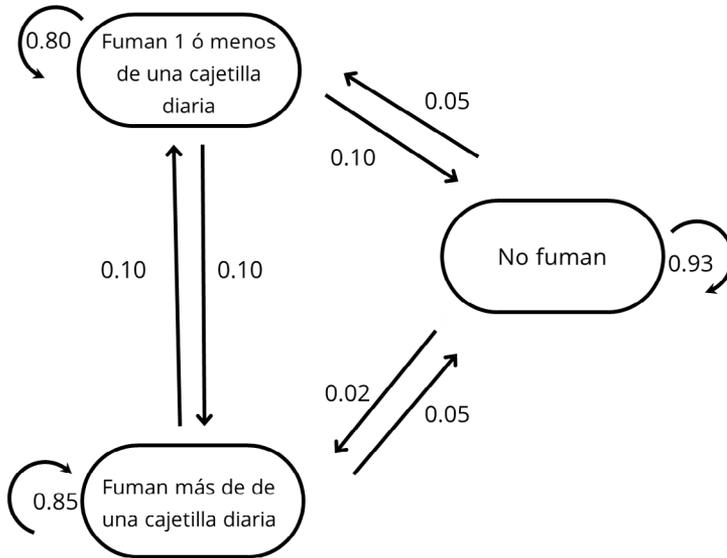
Cadenas de Markov de tiempo discreto: En este tipo de cadena, el tiempo se divide en pasos discretos, y los eventos ocurren en momentos específicos.

## 5.2 CASO DE ESTUDIO

*Como expectativa de salud se plantea el siguiente ejemplo usando cadenas de Markov.*

En una población de 10,000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5% de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario, o menos, y un 2% de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete, o menos, hay un 10% de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10% de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5% de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10% de que pasen a fumar un paquete, o menos.

La figura siguiente representa las probabilidades para cada segmento de la población. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?



**Figura 2.** Probabilidades para cada segmento de la población

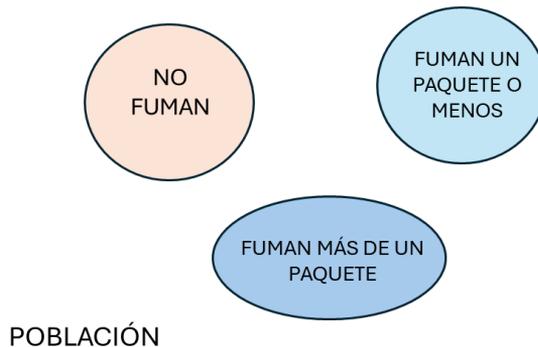
Solución:

La población se conforma de tres grupos:

NF= No fuman

FC= Fuman uno o menos de un paquete diario

FCC= Fuman más de un paquete diario



**Figura 3.** Población representada por conjuntos.

1

2

3

4

5

Matriz de transición

	NF	FC	FCC
NF	0.93	0.05	0.02
FC	0.10	0.80	0.10
FCC	0.05	0.10	0.85

$$(NF, FC, FCC) = (5000 \ 2500 \ 2500) \begin{pmatrix} 0.93 & 0.05 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{pmatrix} = (5025, 2500, 2475)$$

Después de un mes habrán  $NF=5025$ ,  $FC=2500$ ,  $FCC=2475$ .

### 5.3 CONCLUSIONES

Las cadenas de Markov ofrecen un marco probabilístico útil para modelar sistemas que evolucionan en el tiempo, como los hábitos de fumar. Al considerar el estado de una persona como fumadora o no fumadora en un momento dado, podemos predecir su estado futuro basado en probabilidades de transición.

#### Las ventajas principales son:

- Simplicidad: El modelo es relativamente fácil de entender e implementar.
- Flexibilidad: Puede adaptarse a diferentes grupos poblacionales y considerar factores socioeconómicos.

- Probabilístico: Permite cuantificar la incertidumbre inherente al proceso de dejar de fumar o comenzar a fumar.
- Soporte para la toma de decisiones: Ayuda a diseñar intervenciones efectivas para reducir el tabaquismo.

### Limitaciones y consideraciones

- Simplificaciones: El modelo asume que el proceso es markoviano homogéneo, lo que puede no ser del todo realista.
- Datos: Requiere de datos históricos confiables sobre el comportamiento de fumar en la población.
- Cálculo de probabilidades de transición: La estimación precisa de estas probabilidades puede ser compleja.

En resumen, las cadenas de Markov ofrecen una herramienta útil para modelar el comportamiento de fumar y apoyar la toma de decisiones en la prevención del tabaquismo. Sin embargo, es importante comprender las limitaciones del modelo y considerar su uso en conjunto con otras técnicas de análisis.

### REFERENCIAS

- Manuosunaca. (2024). ¿Qué es una cadena de Markov y cómo se aplica en el mundo real?
- [https://www.youtube.com/watch?v=A1xVADPsKrg&list=PL6r-g2aZfV7iy2EbBzyRjifPwF5PX0iV\\_X](https://www.youtube.com/watch?v=A1xVADPsKrg&list=PL6r-g2aZfV7iy2EbBzyRjifPwF5PX0iV_X)



*Aplicaciones de cadenas de Markov*

se publicó digitalmente en el repositorio de la Facultad de Ingeniería en junio de 2025. Primera edición electrónica de un ejemplar (7 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Barlow para textos y Roboto Slab para títulos con sus respectivas variantes.