



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Distribución espacial de fuentes
potenciales mediante detectores
de bordes aplicados a la
deconvolución de Euler 3D del
Cráter Chicxulub**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Geofísico

P R E S E N T A

Israel Fernández Martínez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Jaime Humberto Urrutia Fucugauchi



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado DISTRIBUCION ESPACIAL DE FUENTES POTENCIALES MEDIANTE DETECTORES DE BORDES APLICADOS A LA DECONVOLUCION DE EULER 3D DEL CRATER CHICXULUB que presenté para obtener el título de INGENIERO GEOFÍSICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

ISRAEL FERNANDEZ MARTINEZ
Número de cuenta: 314087166

...And humans create such beautiful myths; what imaginations they have. Perhaps that's why their aspirations are so immense. Look at Arecibo. Any species who can build such a thing must have greatness within it.

My species probably won't be here for much longer; it's likely that we'll die before our time and join the Great Silence. But before we go, we are sending a message to humanity. We just hope the telescope at Arecibo will enable them to hear it.

The message is this:

You be good. I love you.

-Ted Chiang, The Great Silence

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería por haberme brindado una sólida formación académica, por todas las experiencias vividas a lo largo de los años, por las oportunidades ofrecidas y por todas las personas que conocí en sus recintos, quienes marcaron mi desarrollo académico y personal.

Agradezco profundamente a mis padres, Margarita y Diego, quienes siempre han estado conmigo en todos los aspectos de mi vida, acompañándome en cada paso de mi carrera y creyendo en mí en todo momento. Gracias por su amor, comprensión y entrega.

Agradezco al Dr. Jaime Urrutia Fucugauchi por abrirme las puertas de sus laboratorios para mi formación académica, por inculcarme el interés por la investigación, por su apoyo, asesoría y por darme la oportunidad de participar en proyectos científicos. A la Dra. Ligia Pérez Cruz, por brindarme la oportunidad de conocer la geofísica desde el buque Justo Sierra, en el Golfo de México, donde el horizonte parece infinito y las estrellas iluminan con una calma hipnótica. Agradezco al Instituto de Geofísica, a la Coordinación de Plataformas Oceanográficas y al Instituto de Investigación Científica y Estudios Avanzados Chicxulub.

Agradezco a mis sinodales: la Dra. Leticia Flores Márquez, el M.C. Julián Zapotitla Román, el M.C. Pablo Aguirre Díaz y el M.C. Manuel Ortiz Osio, por su conocimiento, interés, tiempo y asesoría en el presente trabajo.

Agradezco al Dr. Juan Martín Gómez González y al proyecto *Taller de Ciencia para Jóvenes 2015* del Centro de Geociencias, Campus UNAM-Juriquilla (proyecto PAPIME-PE100915), por sembrar en mí la semilla de la curiosidad por las geociencias e inspirarme a elegir una carrera científica. Agradezco también a Fundación UNAM por el apoyo económico recibido durante mi formación.

A mis amigos, que hicieron mi estancia académica más amena: Brenda, Berna, Eric, Dámaris, Yusuri, Xare, Ale, Fer. A Aranza, por ser una persona muy importante en mi vida. Agradezco a todos los amigos que he formado en el camino y con quienes he compartido experiencias inolvidables, al team Universum y al grupo de montañismo de la UNAM.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una metodología para mejorar la estimación de fuentes potenciales mediante la integración de la deconvolución de Euler 3D con operadores de realce de bordes. La deconvolución de Euler, aunque ampliamente utilizada en exploración geofísica, presenta limitaciones, en particular una tendencia a sobrestimar la posición lateral de las fuentes, especialmente cuando se ubican a mayor profundidad. La combinación con operadores permite mejorar la delimitación de los bordes reales de las anomalías y reducir sobrestimaciones.

Se analizaron dos tipos principales de operadores: de amplitud y de fase. Los operadores de fase, al incorporar funciones trigonométricas que capturan mejor la variación local del campo, se utilizaron para construir una nueva familia de métodos denominada deconvolución de Euler de fase local. Estos métodos modifican la ecuación de deconvolución de Euler al utilizar derivadas del operador como función de entrada en lugar del campo medido, eliminando así la necesidad de conocer a priori el índice estructural y de depender del campo ambiental. Esta modificación mejora significativamente las estimaciones en planta.

Para extender la aplicabilidad del método a fuentes profundas, se desarrolló una variante que compensa el efecto del decaimiento del campo potencial, lo que resultó en mejores estimaciones en profundidad, integrando así una caracterización más robusta. Los distintos enfoques fueron evaluados mediante pruebas sintéticas, generadas a partir de la modelación directa de cuerpos geométricos, obteniendo sus respectivas respuestas gravimétricas y magnetométricas. Esto permitió identificar ventajas y limitaciones de cada técnica y seleccionar las configuraciones más estables y precisas para su aplicación a datos reales.

Finalmente, los métodos desarrollados se aplicaron a datos gravimétricos y aeromagnéticos del cráter Chicxulub. La implementación conjunta permitió una mejor caracterización de la geometría de las fuentes y una delimitación más clara de las estructuras. Como resultado, se generó un mapa de los principales lineamientos del cráter, los cuales fueron validados con estudios previos de tipo sísmico, gravimétrico, aeromagnético, de inversión y de perforación de pozos, evidenciando la utilidad del enfoque propuesto frente a los métodos convencionales.

ABSTRACT

This work presents a methodology to improve the estimation of potential field sources by integrating 3D Euler deconvolution with edge detection operators. Although widely used in geophysical exploration, Euler deconvolution has certain limitations, particularly a tendency to overestimate the lateral position of sources, especially when they are located at greater depths. The combination with edge detection operators improves the delineation of the actual boundaries of anomalies and reduces overestimation.

Two main types of operators were analyzed: amplitude-based and phase-based. Phase-based operators, which incorporate trigonometric functions to better capture the local variation of the field, were used to develop a new family of methods referred to as local phase Euler deconvolution. These methods modify the traditional Euler equation by using derivatives of the operator as input functions instead of the measured field, thereby eliminating the need for a priori knowledge of the structural index and of the regional field. This modification significantly improves plan-view estimations.

To extend the applicability of the method to deeper sources, a variant was developed to compensate for the decay of the potential field with depth, resulting in improved depth estimations and a more robust overall characterization. The different approaches were evaluated using synthetic tests generated through the forward modeling of geometric bodies, from which their respective gravity and magnetic responses were computed. This allowed for the identification of strengths and limitations of each technique and the selection of the most stable and accurate configurations for real data application.

Finally, the proposed methods were applied to gravity and aeromagnetic data from the Chicxulub crater. The combined implementation enabled a better characterization of the source geometries and a clearer delineation of buried structures. As a result, a map of the main lineaments of the crater was produced and validated through previous studies, including seismic, gravity, aeromagnetic, inversion, and borehole data, demonstrating the usefulness of the proposed approach over conventional methods.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	IV
ABSTRACT	V
LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE TABLAS	XIII
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivos.....	3
1.2 Justificación	3
1.3 Metodología	4
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	5
2.1 Campo potencial	5
2.1.1 Concepto de campo	6
2.1.2 Concepto de potencial	7
2.1.3 Teorema de Helmholtz.....	7
2.2 Fuentes gravitacionales	9
2.2.1 Ley de atracción gravitacional de Newton	9
2.2.2 Potencial gravitacional.....	12
2.2.3 Ecuaciones de Poisson y Laplace	13
2.2.4 Vector gravitacional.....	14
2.2.5 Tensor gravitacional.....	16
2.3 Fuentes magnéticas	18
2.3.1 Intensidad magnética y susceptibilidad magnética.....	18
2.3.2 Potencial escalar magnético y magnetización.....	20
2.3.3 Vector del campo magnético.....	22
2.3.4 Tensor del campo magnético	23
2.4 Derivadas direccionales	25

2.5	Operadores de realce de bordes	28
2.6	Ecuación de homogeneidad de Euler	32
2.6.1	Deconvolución de Euler	33
2.7	Deconvolución de Euler de fase local (EULD-W)	36
2.7.1	Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación (EULD-Tilt)	37
2.7.2	Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación normalizado (EULD-TDX)	40
2.7.3	Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación extendido (EULD-ETA)	42
2.8	Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación normalizado y corrección en profundidad (EULD-TDXz)	44
2.9	Modelado directo 3D	47
2.9.1	Modelado gravimétrico	47
2.9.2	Modelado magnético	49
2.9.3	Ensamble de prismas elementales	52
3	MÉTODOS, MODELADO Y OPERADORES	54
3.1	Modelado directo 3D	54
3.1.1	Modelado gravimétrico	55
3.1.2	Modelado magnético	55
3.2	Modelos sintéticos	57
3.2.1	Modelo sintético MC	57
3.2.2	Modelo sintético MS	59
3.3	Aplicación de los operadores de realce de bordes	61
3.4	Soluciones de la deconvolución de Euler (EULDPH)	66
3.4.1	Selección de fuentes: Thompson	67
3.4.1.1	Pruebas en modelos sintéticos	69
3.4.2	Selección de fuentes: Operadores de realce de bordes	74
3.4.2.1	Pruebas en modelos sintéticos	75
3.4.3	Selección de fuentes: Ángulo de inclinación modificado (TDXm)	81
3.4.3.1	Pruebas en modelos sintéticos	83
3.5	Soluciones de la deconvolución de Euler de fase local (EULD-W)	86
3.5.1	Pruebas en modelos sintéticos	86
3.6	Soluciones de la deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación normalizado y corrección en profundidad (EULD-TDXz)	90
3.6.1	Pruebas en modelos sintéticos	90

4	CRÁTER CHICXULUB	94
4.1	Localización del área de estudio.....	95
4.2	Morfología y geología	96
4.3	Procesamiento de datos gravimétricos	97
4.3.1	Operadores de realce de bordes	99
4.3.2	Deconvolución de Euler 3D.....	102
4.4	Procesamiento de datos magnéticos	112
4.4.1	Operadores de realce de bordes	113
4.4.2	Deconvolución de Euler 3D.....	116
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	123
	REFERENCIAS	126
	ANEXO	137
A.1	Definiciones de cálculo vectorial.....	137
A.2	Operadores para el realce de anomalías en métodos potenciales.....	138

LISTA DE FIGURAS

2.1	Campo escalar $F(x, y)$ y su campo vectorial asociado $\nabla F(x, y)$: a Campo escalar; b Campo vectorial. Las flechas indican dirección y magnitud.	6
2.2	Representación de la ley de atracción gravitacional de Newton con las masas m_1 y m_2 . El vector $\hat{r}$ indica la dirección de la fuerza gravitacional y el vector r es la distancia entre las masas. El vector $\hat{r}$ por convención va de la fuente gravitacional al punto de observación.	10
2.3	Atracción gravitacional en el punto $P(x, y, z)$ debido a una distribución de densidades $\rho(x', y', z')$ dentro de un volumen V . La suma de estas contribuciones infinitesimales ilustra el principio de superposición. Modificado de Blakely (1995).	11
2.4	Ángulo sólido bajo el que se ve la superficie elemental dS desde el punto Q , donde se encuentra la masa dm . Modificado de Kaufman (1992).	14
2.5	Modelo de un prisma rectangular elemental con densidad constante ρ , que genera un campo gravitacional y se observa desde cualquier punto (Plouff, 1976).	48
2.6	Interpretación geométrica del vector del campo magnético total $\vec{B}_T = \vec{B}_N + \Delta\vec{B}_N$, junto con la representación de las componentes del campo magnético terrestre $\vec{B}_N$. Modificado de Hinze (2013).	50
2.7	Ejemplo del modelado directo: a) Volumen discretizado en prismas elementales; b) Plano de observación $z = 0$; c) Anomalía gravimétrica g_z	52
3.1	Modelo MC: a Respuesta gravimétrica; b Respuesta magnética.	58
3.2	Diferentes perspectivas de visualización del modelo MC: a Perspectiva ZX; b Perspectiva ZY; c Perspectiva XY; d Perspectiva oblicua.	58
3.3	Modelo MS: a Respuesta gravimétrica; b Respuesta magnética.	59

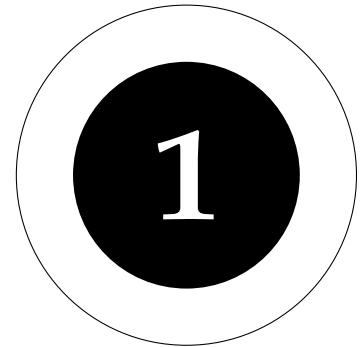
3.4	Diferentes perspectivas de visualización del modelo MS: a Perspectiva XY; b Perspectiva ZX; c Perspectiva ZY; d Perspectiva oblicua.	60
3.5	Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía gravimétrica del modelo MC: a HGA; b ASA; c Tilt; d TDX; e ETA; f Nz.	62
3.6	Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía magnética del modelo MC: a HGA; b ASA; c Tilt; d TDX; e ETA; f Nz.	63
3.7	Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía gravimétrica del modelo MS: a HGA; b ASA; c Tilt; d TDX; e ETA; f Nz.	64
3.8	Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía magnética del modelo MS: a HGA; b ASA; c Tilt; d TDX; e ETA; f Nz.	65
3.9	Profundidades obtenidas mediante el método EULDPHT para el modelo MC. a-b soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; c-d soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.	71
3.10	Histogramas de las profundidades estimadas mediante el método EULDPHT para el modelo MC. a fuente gravitacional; b fuente magnética.	71
3.11	Histogramas de las profundidades estimadas mediante el método EULDPHT para el modelo MS. a fuente gravitacional; b fuente magnética.	73
3.12	Profundidades obtenidas mediante el método EULDPHT para el modelo MS. a-b soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; c-d soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.	74
3.13	Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente gravitacional del modelo MC. a ASA; b Tilt; c TDX; d ETA; e Nz	78
3.14	Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente gravitacional del modelo MS. a ASA; b Tilt; c TDX; d ETA; e Nz	78
3.15	Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente magnética del modelo MC. a ASA; b Tilt; c TDX; d ETA; e Nz	79

3.16	Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente magnética del modelo MS. a ASA; b Tilt; c TDX; d ETA; e Nz	79
3.17	Operador TDX_m aplicado al modelo MC: a Fuente gravitacional; b Fuente magnética.	82
3.18	Operador TDX_m aplicado al modelo MS: a Fuente gravitacional; b Fuente magnética.	82
3.19	Estimaciones de profundidades mediante el método EULDPH y el operador TDX_m aplicado al modelo MC: a Fuente gravitacional; b Fuente magnética. .	85
3.20	Estimaciones de profundidades mediante el método EULDPH y el operador TDX_m aplicado al modelo MS: a Fuente gravitacional; b Fuente magnética. .	85
3.21	Estimaciones de profundidad y ubicación en planta para el modelo MC. Para una fuente gravitacional: a EULD-Tilt, b EULD-TDX y c EULD-ETA. Para una fuente magnética: d EULD-Tilt, e EULD-TDX y f EULD-ETA.	87
3.22	Estimaciones de profundidad y ubicación en planta para el modelo MS. Para una fuente gravitacional: a EULD-Tilt, b EULD-TDX y c EULD-ETA. Para una fuente magnética: d EULD-Tilt, e EULD-TDX y f EULD-ETA.	87
3.23	Cálculo del índice estructural para el modelo MS: las figuras a-b muestran las soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; c-d soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.	91
3.24	EULD-TDX con corrección en profundidad aplicado al modelo MS: a-b soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; c-d soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.	92
4.1	Ubicación del cráter Chicxulub y puntos de interés. El círculo negro punteado muestra la extensión del anillo interior del cráter, mientras que los puntos azules corresponden a la ubicación de los cenotes.	95
4.2	Anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub y ubicación de puntos de interés. La línea en negro representa el límite territorial.	98
4.3	Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: a HGA; b ASA; c Tilt; d TDX_m ; e ETA; f Nz. . .	101
4.4	Soluciones del método EULDPHT para la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: a TOL:10; b TOL:20.	103

4.5	Principales lineamientos definidos por las profundidades estimadas mediante el método EULDPHT en la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub.	104
4.6	Soluciones del método EULD-TDX para la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: a $\pi/12 < R < \pi/2$; b $-\pi/12 < R < -\pi/2$. De fondo del operador TDXm.	106
4.7	Principales lineamientos definidos por las profundidades estimadas mediante el método EULD-TDX en la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter.	107
4.8	Índice estructural para las soluciones de EULD-TDX de la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: a $\pi/12 < R < \pi/2$; b $-\pi/12 < R < -\pi/2$. De fondo del operador TDXm.	108
4.9	Corrección en profundidad para soluciones de EULD-TDX de la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: a $\pi/12 < R < \pi/2$; b $-\pi/12 < R < -\pi/2$. De fondo del operador TDXm.	109
4.10	a Lineamientos identificados con EULD-TDXz. b Integración de los lineamientos de los métodos EULDPHT y EULD-TDXz.	110
4.11	a Anomalía magnética de campo total con continuación ascendente de 5.0[km]; b Reducción al polo de la anomalía magnética.	112
4.12	Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía magnética del cráter Chicxulub: a HGA; b ASA; c Tilt; d TDXm; e ETA; f Nz.	115
4.13	Soluciones del método EULDPHT TOL:80 para la anomalía magnética del cráter Chicxulub: a Extensión completa; b Extensión ASA.	117
4.14	Soluciones del método EULD-TDX para la anomalía magnética del cráter Chicxulub: a Extensión completa; b Extensión ASA.	118
4.15	Lineamientos definidos mediante los operadores de realce de bordes y estimaciones del método EULD-TDX en la anomalía magnética del cráter.	118
4.16	Estimaciones del índice estructural para la anomalía magnética del cráter Chicxulub: a Extensión completa; b Extensión ASA.	119
4.17	Correcciones en profundidad para soluciones de EULD-TDX de la anomalía magnética del cráter Chicxulub: a Extensión completa; b Extensión ASA.	120
4.18	Integración de los lineamientos obtenidos mediante el procesamiento gravimétrico y magnético con los operadores de realce de bordes y la deconvolución de Euler 3D. De fondo la anomalía magnética del cráter.	121

LISTA DE TABLAS

2.1	Clasificación de campos vectoriales según su divergencia y rotacional (Blakely, 1995; Kaufman, 1992).	8
2.2	Índice estructural del potencial newtoniano y magnético, así como de sus respectivas derivadas. Modificado de Stavrev y Reid, 2007.	34
3.1	Parámetros utilizados para la creación del modelo MC, así como de las propiedades físicas para el cálculo de la anomalía gravimétrica y magnética. . .	57
3.2	Parámetros utilizados para la creación del modelo MS, así como de las propiedades físicas para el cálculo de la anomalía gravimétrica y magnética.	59
3.3	Soluciones de EULDPH utilizando los operadores de realce de bordes como criterio de selección de fuentes.	76
3.4	Soluciones de EULDPH utilizando el operador TDX_m como criterio de selección de fuentes.	83
3.5	Estimaciones de profundidad y en planta utilizando el método EUL-W para los modelos MC y MS, aplicados a fuentes gravitacionales y magnéticas. . . .	88
3.6	Soluciones de EULD-TDX con corrección en z, aplicado al modelo MS. . . .	91
5.1	Operador nabla y gradiente en distintos espacios (Payá Albert, 2010).	137
5.2	Definiciones de la divergencia y el rotacional, expresadas de forma analítica (Marsden, 1991) y mediante su formulación en términos de límite (Kaufman, 1992).	137



INTRODUCCIÓN

La geofísica surgió como una consecuencia de la necesidad de explorar y comprender la física de la Tierra, tanto en su parte interna, que abarca las capas hasta el núcleo, como en su parte externa, incluyendo la ionosfera y magnetosfera. Una forma de estudiar la Tierra es a través de la gravedad y el magnetismo, conceptos que se han desarrollado desde la formulación matemática de la ley de la gravitación universal de Newton en 1687, así como las aportaciones realizadas por Gauss para el entendimiento del magnetismo y el campo magnético terrestre en 1837.

El interés por conocer los efectos de la gravedad y el magnetismo en la Tierra impulsó el desarrollo de dispositivos de medición. Actualmente, es posible medir la componente vertical del campo gravitacional con gravímetros que permiten detectar contrastes de densidad en el subsuelo. De manera similar, se cuenta con magnetómetros capaces de medir variaciones en el campo magnético que hacen posible identificar variaciones de susceptibilidad magnética.

Los datos obtenidos a partir de mediciones geofísicas permiten identificar anomalías gravimétricas o magnéticas, las cuales reflejan cambios en las propiedades físicas del subsuelo asociados a estructuras geológicas de interés, comúnmente denominadas fuentes. Un objetivo clave de estos estudios es determinar la ubicación y las características físicas de dichas fuentes. Para ello, se han desarrollado diversas teorías y algoritmos que facilitan su análisis e interpretación. Entre estos métodos, destaca el uso de operadores de realce de bordes para

la estimación de la posición de las fuentes en planta y el método de deconvolución de Euler 3D, empleada para la estimación de la profundidad de las fuentes potenciales.

Werner (1953) demostró que la ecuación de un dique 2D delgado puede expresarse de forma lineal en función de parámetros como la profundidad, el ángulo de inclinación y la susceptibilidad magnética, lo que permite determinar su ubicación y geometría. Por otro lado, Thompson (1982) desarrolló la deconvolución de Euler, un método que estima la posición de las fuentes potenciales tanto en planta como en profundidad sin asumir un modelo geológico específico, aunque requiere conocer previamente el índice estructural que define su geometría. Para delimitar las fuentes en planta, se emplean operadores de realce de bordes. Dole y Jordan (1978) implementaron la amplitud del gradiente horizontal, mientras que Nabighian (1972) introdujo la señal analítica, y Miller y Singh (1994) desarrollaron los detectores de fase local. Posteriormente, Salem et al. (2008) utilizó la definición de la deconvolución de Euler 3D y operadores de fase para desarrollar una ecuación lineal que no depende del índice estructural.

En México se han realizado diversos estudios utilizando el método de deconvolución de Euler 3D para delimitar estructuras geológicas, mejorar la caracterización estructural, así como también ayudar a restringir parámetros en inversiones no lineales 3D. Por mencionar algunos trabajos, a nivel regional, se han llevado a cabo estudios en el noroeste de la península de Baja California (Fregoso et al., 2015), en el Bloque Jalisco (López-Loera et al., 2022), en la caracterización del régimen hidrotectónico de la Cuenca villa Hidalgo, San Luis Potosí (Yoan-Pérez, 2020), y en el análisis de fallas en el valle de Banderas, Nayarit (Alatorre-Zamora et al., 2012), así como en el área del cráter Chicxulub (Urrutia-Fucugauchi et al., 2022) y en la detección de cuencas sedimentarias y fallas kársticas en la península de Yucatán (Ortiz-Alemán et al., 2025). A nivel local, este método se ha aplicado para la caracterización de la zona arqueológica de Teotihuacán (Chávez et al., 2001), en el estudio de sistemas de fracturas en el basamento del vertedero urbano de Mazatlán, en la ciudad de Guadalajara (Alatorre-Zamora et al., 2020), entre muchos más.

1.1 Objetivos

Objetivo General

Determinar la ubicación tridimensional de anomalías gravimétricas y magnéticas para identificar lineamientos asociados a cuerpos geológicos, mediante algoritmos desarrollados en MATLAB®, utilizando deconvolución de Euler 3D mejorada con operadores de realce de bordes, con el fin de lograr una mejor caracterización.

Objetivos Particulares

- Generar modelos sintéticos para probar los algoritmos en un entorno controlado.
- Identificar los métodos más adecuados para delimitar la ubicación, tanto en planta como en profundidad, de las anomalías gravimétricas y magnéticas.
- Elaborar un mapa que muestre los principales lineamientos geofísicos del área del cráter Chicxulub utilizando la técnica desarrollada en esta tesis.

1.2 Justificación

La deconvolución de Euler 3D es un método utilizado en la exploración minera, de hidrocarburos y en el estudio de zonas geológicas de interés debido a su capacidad para determinar la ubicación tridimensionales de fuentes potenciales. No obstante, este método presenta limitaciones, especialmente en términos de precisión. Las estimaciones en planta tienden a estar sobrestimadas; cuanto más profunda es una fuente, mayor es la sobrestimación, lo que puede generar interpretaciones incorrectas sobre la extensión y los límites de las fuentes.

Para abordar estas limitaciones, se propone la integración de la deconvolución de Euler 3D con operadores de realce de bordes, lo que permite mejorar la precisión de las estimaciones, tanto en planta como en profundidad. Estos operadores, al aprovechar los gradientes horizontales y verticales del campo potencial, facilitan una delimitación más precisa de los bordes reales de las fuentes, reduciendo así las sobrestimaciones en planta típicas del método tradicional y mejorando la resolución en zonas más profundas. De esta manera, se logra una caracterización más detallada de las fuentes geológicas y una representación más precisa de los lineamientos geofísicos.

1.3 Metodología

La metodología utilizada para la elaboración de la presente tesis sigue una serie de pasos diseñados para cumplir con los objetivos planteados.

1. Generar modelos sintéticos de cuerpos con geometrías simples.
2. Calcular la respuesta gravimétrica y magnetométrica de los modelos propuestos.
3. Aplicar y evaluar diferentes operadores de realce de bordes para delimitar las fuentes potenciales.
4. Aplicar y probar el algoritmo de deconvolución de Euler 3D y sus variantes.
5. Combinar ambas técnicas para obtener una mejor caracterización tridimensional de las soluciones.
6. Implementar el algoritmo en datos gravimétricos y magnéticos del cráter Chicxulub para la caracterización de lineamientos geológicos.



FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Campo potencial

Un campo es una abstracción matemática que asocia el valor de una función evaluada en un punto del espacio y tiempo, describiendo cómo varía una magnitud en función de estas variables. En geofísica, un campo representa una manifestación de las propiedades físicas en cada punto de un dominio espacio-temporal, las cuales pueden tener un carácter escalar, vectorial o tensorial. Los campos de fuerza, por su parte, describen las fuerzas que actúan en cada punto del espacio en un momento dado, como la atracción gravitatoria de la Tierra o el campo magnético generado por corrientes eléctricas (Blakely, 1995).

Los campos físicos más utilizados por los geofísicos y sus respectivas fuentes son: campo gravitacional, que está asociado con los contrastes de densidad; campo magnetostático, que se relaciona con la permeabilidad magnética; campo electromagnético, que está vinculado con la conductividad eléctrica, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética; campo de flujo de corriente continua, asociado a resistividad eléctrica; campo electrostático, que está relacionado con la constante dieléctrica y la permitividad eléctrica, entre otros (K. Roy, 2008).

2.1.1 Concepto de campo

Existen diversas maneras de clasificar los campos según las propiedades que se deseen estudiar. Por ejemplo, se pueden distinguir entre campos naturales y aquellos creados por el hombre, campos vectoriales o escalares, rotacionales o irrotacionales, conservativos o no conservativos, potenciales newtonianos o no newtonianos, armónicos o no armónicos, entre otras clasificaciones. En este trabajo, nos centraremos en el estudio de los campos escalares y vectoriales, así como en su relación con la divergencia y el rotacional.

De acuerdo con Payá Albert (2010), un *campo escalar* representa la distribución espacial de una magnitud que asocia un valor numérico (escalar) a cada punto de una región del plano o del espacio. Un ejemplo físico común es un campo de densidades. Matemáticamente, se modela como una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es la región en estudio. Si $n = 2$, se tiene un campo escalar en el plano, $(x, y) \mapsto f(x, y)$; y si $n = 3$, un campo escalar en el espacio, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$. La figura (2.1a) muestra un ejemplo de este tipo de campo.

Por su parte, un *campo vectorial* describe la asignación de un vector a cada punto del espacio, representando magnitudes como velocidad, fuerza o flujo. Se expresa como una función $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde cada componente del vector puede depender de las coordenadas espaciales. En el plano ($n = 2$), se tiene $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$; en el espacio ($n = 3$), se extiende a $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$. La figura (2.1b) ilustra el campo vectorial.

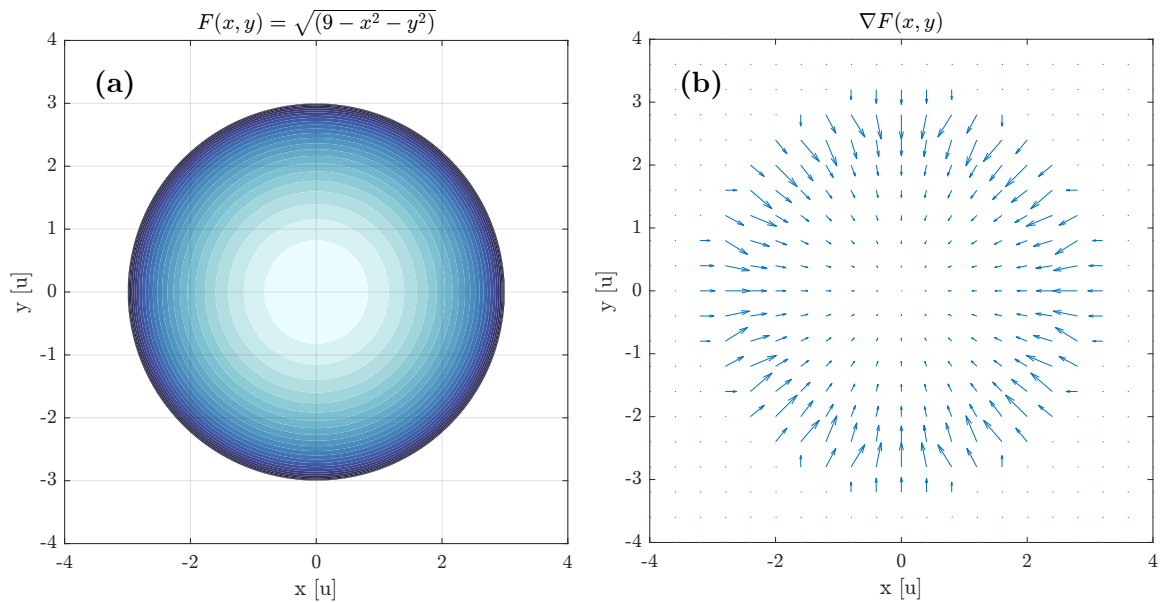


FIGURA 2.1: Campo escalar $F(x, y)$ y su campo vectorial asociado $\nabla F(x, y)$: (a) Campo escalar; (b) Campo vectorial. Las flechas indican dirección y magnitud.

2.1.2 Concepto de potencial

Consideremos una partícula bajo la influencia de un campo de fuerzas vectorial $\vec{F}$. El trabajo realizado por dicho campo se define como la cantidad de energía cinética necesaria para mover una partícula desde un punto r_1 hasta un punto r_2 (Blakely, 1995):

$$E_2 - E_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W(r_2, r_1), \quad (2.1)$$

donde $d\vec{r}$ representa el desplazamiento infinitesimal de la partícula. En general, este trabajo W depende de la trayectoria. Sin embargo, si el resultado es independiente del camino seguido, el campo se denomina conservativo.

Un campo conservativo puede representarse como el gradiente de una función escalar W , conocida como función de trabajo o potencial. Si W es continua y diferenciable, al integrarse se obtiene:

$$W(r_2, r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \right) = W(r_2) - W(r_1), \quad (2.2)$$

lo cual confirma que el trabajo depende únicamente de los puntos inicial y final, y no de la trayectoria seguida. Finalmente, es común denotar la función de trabajo o potencial con el símbolo ϕ , y su relación con el campo vectorial conservativo se expresa como:

$$\vec{F} = \nabla \phi.$$

Los campos estudiados en este trabajo, gravitacional y magnético, son considerados campos conservativos.

2.1.3 Teorema de Helmholtz

El Teorema de Helmholtz establece que cualquier campo vectorial $\vec{F}$ continuo y que tienda a cero en el infinito puede descomponerse en la suma del gradiente de un potencial escalar ϕ y el rotacional de un potencial vectorial $\vec{A}$ (Blakely, 1995):

$$\vec{F} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A}. \quad (2.3)$$

Las expresiones para estos potenciales son:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{F}}{r} dv, \quad (2.4)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \vec{F}}{r} dv, \quad (2.5)$$

donde r representa la distancia entre el punto de observación y el punto de integración. Esta descomposición permite analizar la estructura de los campos a partir de sus generadores: las fuentes, asociadas con la divergencia, y los vórtices, con el rotacional (Kaufman, 1992). Para el desarrollo de los diferentes tipos de campos se emplean conceptos fundamentales de cálculo vectorial, cuyas definiciones se incluyen en el Anexo A.1.

Tipo de campo	Divergencia	Rotacional
Conservativo	$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$	$\nabla \times \vec{F} = 0$
Solenoidal	$\nabla \cdot \vec{F} = 0$	$\nabla \times \vec{F} \neq 0$
Armónico	$\nabla \cdot \vec{F} = 0$	$\nabla \times \vec{F} = 0$
Complejo	$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$	$\nabla \times \vec{F} \neq 0$

TABLA 2.1: Clasificación de campos vectoriales según su divergencia y rotacional (Bla-kely, 1995; Kaufman, 1992).

A partir de esta clasificación, se definen los siguientes campos:

- **Campo conservativo:** Su rotacional es nulo y la divergencia no lo es, lo que implica que la circulación alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero, es decir, el trabajo realizado es independiente del camino seguido. Este campo se puede expresar como el gradiente de un potencial escalar, $\vec{F} = \nabla\phi$. Un ejemplo clásico es el campo gravitatorio.
- **Campo solenoidal:** Posee divergencia nula pero rotacional distinto de cero, lo que significa que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es cero, indicando la ausencia de fuentes o sumideros en la región. Este campo puede describirse como el rotacional de un potencial vectorial, $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$. Un ejemplo es el campo magnético terrestre.
- **Campo armónico:** Tanto su divergencia como su rotacional son nulos, permitiendo que se exprese mediante un potencial escalar que satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$. Esta condición es fundamental en problemas geofísicos relacionados con potenciales sin generadores en la región estudiada. Ejemplos de este campo es el potencial newtoneano en regiones libres de masa y el potencial magnético en regiones sin corrientes.

- **Campo complejo:** Presenta divergencia y rotacional distintos de cero simultáneamente, involucrando fuentes y vórtices en el mismo campo. Su tratamiento requiere el análisis tanto del potencial escalar como del vectorial, aunque frecuentemente se simplifica aproximándolo a campos conservativos o solenoidales para facilitar su estudio. Las ondas electromagnéticas son un ejemplo de este campo.

2.2 Fuentes gravitacionales

La gravimetría es un método fundamental en la exploración geofísica para el estudio de la variación del campo gravitacional de la Tierra. Estas variaciones se relacionan con la distribución de densidades presentes en los cuerpos en el interior y en la superficie de la corteza terrestre. Las mediciones se realizan a través de instrumentos llamados gravímetros, los cuales miden la aceleración del campo gravitacional; en específico la componente vertical (Hinze, 2013).

Las variaciones en la componente vertical del campo gravitacional dependen tanto de la densidad como de la geometría de las estructuras geológicas. Dado que el medio no es homogéneo se espera una respuesta gravimétrica diferente en cada punto, definiéndose como anomalías gravimétricas. Estas anomalías, que constituyen desviaciones o variaciones inusuales en el campo gravitacional terrestre, se presentan como discrepancias respecto a un valor esperado y son indicativas de variaciones en la densidad de las rocas bajo la superficie terrestre.

El método puede emplearse para caracterizar la geología tanto a nivel regional como local. A nivel regional, proporciona una comprensión más profunda de la evolución tectónica de una región específica, revelando grandes estructuras geológicas como cuerpos magmáticos intrusivos. A nivel local, permite la detección de fallas, la delimitación de cuerpos minerales metálicos y salinos, así como la identificación de cavidades subterráneas.

2.2.1 Ley de atracción gravitacional de Newton

Newton formuló la ley de atracción gravitacional, la cual establece que la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos masas es directamente proporcional al producto de dichas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Considerando dos partículas de masas puntuales, m_1 situada en la posición $Q = (x', y', z')$ y m_2 en la posición $P = (x, y, z)$, la fuerza gravitacional en coordenadas cartesianas se expresa mediante la fórmula (Blakely, 1995):

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.6)$$

donde:

$$r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

γ denota la constante de gravitación universal, la cual tiene un valor aproximado de $6.674 \times 10^{-11} [\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}]$ en el Sistema Internacional de Unidades (SI).

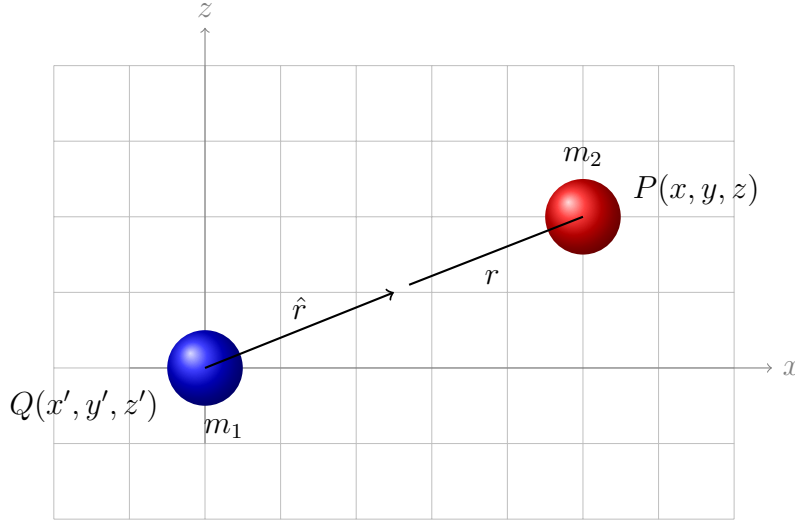


FIGURA 2.2: Representación de la ley de atracción gravitacional de Newton con las masas m_1 y m_2 . El vector $\hat{r}$ indica la dirección de la fuerza gravitacional y el vector r es la distancia entre las masas. El vector $\hat{r}$ por convención va de la fuente gravitacional al punto de observación.

Si consideramos a m_2 como una masa elemental de magnitud unitaria, y la fuerza $\vec{F}$ es proporcional a ella, entonces está sometida a la acción de esta fuerza. Se establece la siguiente relación, donde m_2 tiende a cero, de esta forma se obtiene la *atracción gravitacional* (figura 2.2) producida por la partícula m_1 :

$$\vec{g}(P) = \lim_{m_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\hat{r})}{m_2} = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{r}, \quad (2.7)$$

donde $\hat{r}$ es el vector unitario que va de la masa m_1 en el punto $Q = (x', y', z')$ hasta el punto de observación $P = (x, y, z)$, y en coordenadas cartesianas se expresa como:

$$\hat{r} = \frac{1}{r} [(x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}].$$

En la ecuación (2.7), el signo negativo se aplica como convención. Esta convención establece que el vector unitario $\hat{r}$ se dirige desde la fuente del campo gravitacional, ubicada en el punto $Q = (x', y', z')$, hacia el punto de observación $P = (x, y, z)$, en sentido contrario a la

atracción gravitacional. Dado que $\vec{g}$ representa la fuerza gravitacional dividida entre la masa, las unidades resultantes corresponden a la aceleración:

$$g = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right],$$

por esta razón, a menudo se denomina a la *atracción gravitacional* como *aceleración gravitacional*. En términos prácticos, el campo gravitacional se mide en miligales, de acuerdo con el Sistema Cegesimal de Unidades (CGS):

$$1 \text{ [Gal]} = 1 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right] = 0.01 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 1000 \text{ [mGal]}.$$

Si en lugar de determinar la atracción gravitacional de una masa elemental, buscamos comprender la atracción gravitacional de una distribución de masas en un volumen V , es necesario aplicar el principio de superposición. Este principio establece que la atracción gravitacional de una colección de masas es equivalente a la suma de las atracciones gravitacionales de las masas individuales. Por lo tanto, dividimos el volumen V en numerosos volúmenes elementales, los cuales deben ser considerablemente pequeños en comparación con la distancia entre dicho volumen y el punto de observación, como se observa en la figura (2.3). Además, las masas deben estar distribuidas uniformemente dentro de cada volumen elemental (Kaufman, 1992).

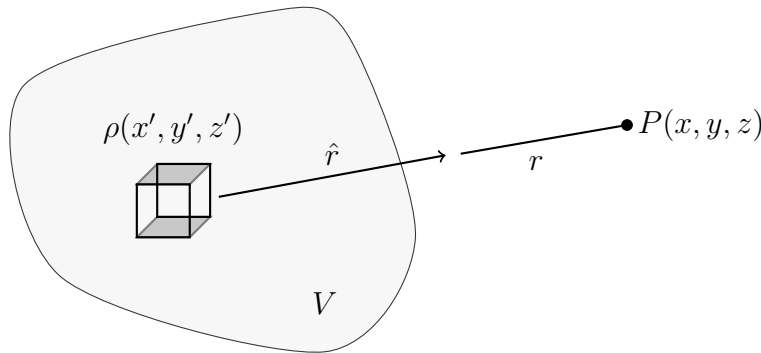


FIGURA 2.3: Atracción gravitacional en el punto $P(x, y, z)$ debido a una distribución de densidades $\rho(x', y', z')$ dentro de un volumen V . La suma de estas contribuciones infinitesimales ilustra el principio de superposición. Modificado de Blakely (1995).

Como consecuencia de lo anterior, la masa en un volumen infinitesimal se puede expresar como una diferencial de masa:

$$dm(Q) = \rho(Q)dv, \quad (2.8)$$

donde $\rho(Q)$ representa la densidad de la masa en el punto Q , que puede variar dentro del volumen V .

Sustituyendo la ecuación (2.8) en la ecuación (2.7), se obtiene la contribución infinitesimal al campo gravitacional en el punto de observación P , debida a esta masa diferencial:

$$\vec{g}(P) = -\gamma \frac{\rho(Q)}{r^2} \hat{r} dv, \quad (2.9)$$

dado que la atracción gravitacional total es la suma de las atracciones ejercidas por todas las masas, se integra sobre el volumen V , resultando en:

$$\vec{g}(P) = -\gamma \int_V \rho(Q) \frac{\hat{r}}{r^2} dv. \quad (2.10)$$

2.2.2 Potencial gravitacional

Se acuerdo a la sección (2.1.2), se sabe que el campo gravitacional es conservativo, lo que indica que el trabajo realizado para mover una partícula de masa de un punto r_1 a r_2 no depende de la trayectoria, sino sólo del punto inicial y final. Por lo tanto, se puede afirmar que el campo gravitacional, $\vec{g}(P)$, deriva de una función potencial escalar ϕ , la cual se denomina potencial newtoniano, y se obtiene evaluando el gradiente de este potencial:

$$\vec{g}(P) = \nabla \phi(P). \quad (2.11)$$

Sustituyendo el campo gravitacional en la ecuación (2.2), podemos obtener la función de trabajo o potencial del campo gravitacional $\vec{g}(P)$, lo cual nos da:

$$\phi(P) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{g}(P) \cdot d\vec{r}, \quad (2.12)$$

utilizando la expresión de $\vec{g}(P)$ de la ecuación (2.7), sustituimos en la ecuación (2.12), obteniendo:

$$\phi(P) = -\gamma \int_{r_1}^{r_2} \frac{m_1}{r^2} dr = \gamma m_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Si tomamos como referencia el punto r_1 en el infinito ($r_1 \rightarrow \infty$), donde asumimos que el potencial es cero ($\phi = 0$), el valor del potencial en el punto r_2 será:

$$\phi(P) = \gamma \frac{m_1}{r_2}.$$

En este caso, r_1 representa el punto de referencia en el infinito, lo que significa que, al alejarnos indefinidamente de la masa que genera el campo, el potencial gravitacional tiende a cero. Por otro lado, r_2 es la distancia entre la masa y el punto de observación P , donde queremos calcular el potencial.

De manera general, el potencial newtoniano desde el punto de observación P se puede expresar como:

$$\phi(P) = \gamma \frac{m}{r}. \quad (2.13)$$

De igual forma, el potencial newtoniano obedece el principio de superposición, por lo que para una distribución continua de masa $m(Q)$, se puede representar como el conjunto de pequeñas masas, $dm = \rho(Q)dv$, e integrando sobre el volumen V , se obtiene:

$$\phi(P) = \gamma \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dv. \quad (2.14)$$

2.2.3 Ecuaciones de Poisson y Laplace

Las ecuaciones de campo establecen la relación entre un campo físico y sus generadores. En el caso del campo gravitacional, la fuente es la masa. Considerando una masa elemental dm ubicada en $Q(x', y', z')$, el flujo del campo en el punto $P(x, y, z)$, aplicando la ley de Newton, se expresa como (Kaufman, 1992):

$$\vec{g}(P) \cdot dS = -\gamma \frac{dm}{r^2} \hat{r} \cdot dS = -\gamma dm dw,$$

donde dw representa el ángulo sólido bajo el cual se observa la superficie dS desde el punto Q , como se observa en la figura (2.4). Al integrar sobre una superficie cerrada que rodea la masa dm , y considerando que el ángulo sólido asociado a cualquier superficie cerrada es 4π , se obtiene:

$$\oint_S \vec{g} \cdot dS = -4\pi\gamma dm,$$

Para una distribución continua de masa, $dm = \rho(Q)dv$, y aplicando el teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{g} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \vec{g} dv = -4\pi\gamma \int_V \rho dv.$$

Como esta igualdad se cumple para cualquier volumen arbitrario, se igualan los integrandos:

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi\gamma\rho. \quad (2.15)$$

Para expresar el campo gravitacional en términos del potencial escalar ϕ , se sustituye la relación (2.11) en (2.15), obteniéndose la *ecuación de Poisson*, que vincula la masa con el potencial en todo el espacio dentro del volumen V :

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\gamma\rho. \quad (2.16)$$

En regiones libres de masa ($\rho = 0$), el campo es armónico, y el potencial satisface la *ecuación de Laplace*, que constituye un caso particular de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.17)$$

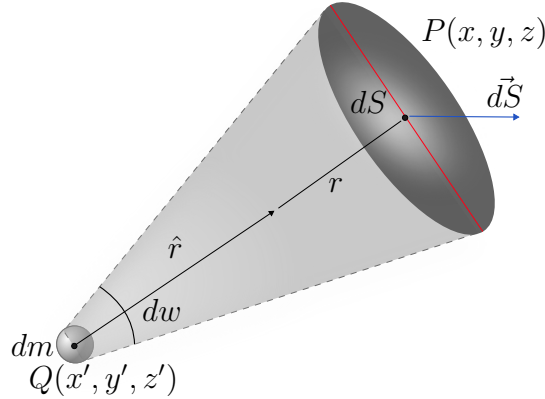


FIGURA 2.4: Ángulo sólido bajo el que se ve la superficie elemental dS desde el punto Q , donde se encuentra la masa dm . Modificado de Kaufman (1992).

2.2.4 Vector gravitacional

El campo vectorial gravitacional de una distribución de masas (2.10) se obtiene a través de la derivación del potencial newtoniano (2.14) y se puede representar como un vector con tres magnitudes espaciales:

$$\begin{aligned} \vec{g}(P) &= \frac{\partial \phi}{\partial i} = -\gamma \int_V \rho(Q) \frac{\hat{r}}{r} dv, \\ &= g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde i representan la direcciones x, y, z . Estas magnitudes se obtienen al derivar el potencial newtoniano en las direcciones x, y y z (Hinze, 2013):

$$g_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\gamma \int_V \frac{\rho(x - x')}{r^3} dv, \quad (2.19)$$

$$g_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\gamma \int_V \frac{\rho(y - y')}{r^3} dv, \quad (2.20)$$

$$g_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\gamma \int_V \frac{\rho(z - z')}{r^3} dv. \quad (2.21)$$

La magnitud del campo gravitacional que comúnmente se mide con gravímetros es la componente vertical g_z . En cuanto a las componentes horizontales, g_x y g_y , éstas se suelen calcular mediante herramientas de transformada de Fourier.

Considerando que la componente vertical del campo gravitacional, g_z , se mide en la superficie, en el plano (x, y) donde $z = z_0$, se tiene que $g_z(x, y, z_0)$. Dado que el campo gravitacional se obtiene a través de una función escalar potencial $\vec{g} = \nabla \phi$, y al ser medido en la superficie, el potencial se convierte en una función armónica que satisface la ecuación de Laplace. En el dominio de Fourier, la ecuación de Laplace se representa como:

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\phi(\mathbf{k}) = 0, \quad (2.22)$$

donde $\phi(\mathbf{k})$ es la transformada de Fourier de $\phi(x, y, z)$, $\mathbf{k}$ es el vector número de onda (k_x, k_y, k_z) y k_x, k_y, k_z son los números de onda en la dirección x, y y z respectivamente. El número de onda k_z , puede expresarse en términos de los número de onda en el plano k_x, k_y (Mickus & Hinojosa, 2001).

$$-ik_z = |\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Dado que en una función armónica el rotacional es nulo, $\nabla \times \vec{g} = 0$, se pueden obtener los siguientes pares de transformadas de Fourier:

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z} \Leftrightarrow (-ik_y)\mathcal{G}_z = |\mathbf{k}|\mathcal{G}_y, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x} \Leftrightarrow |\mathbf{k}|\mathcal{G}_x = (-ik_x)\mathcal{G}_z, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial y} \Leftrightarrow (-ik_x)\mathcal{G}_y = (-ik_y)\mathcal{G}_x, \quad (2.26)$$

donde $\mathcal{G}_x = \mathcal{G}_x(k_x, k_y)$, $\mathcal{G}_y = \mathcal{G}_y(k_x, k_y)$ y $\mathcal{G}_z = \mathcal{G}_z(k_x, k_y)$ son las transformadas de Fourier bidimensionales de las magnitudes g_x, g_y y g_z respectivamente. A partir de las ecuaciones (2.24) y (2.25) se pueden obtener las transformadas de Fourier de las componentes gravitacionales $\mathcal{G}_x$ y $\mathcal{G}_y$. Una vez que se han calculado las magnitudes restantes en el dominio de Fourier, se aplica la transformada inversa de Fourier para regresar al dominio espacial:

$$g_x = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{G}_x\} \Leftrightarrow \mathcal{G}_x = \frac{-ik_x}{|\mathbf{k}|} \mathcal{G}_z, \quad (2.27)$$

$$g_y = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{G}_y\} \Leftrightarrow \mathcal{G}_y = \frac{-ik_y}{|\mathbf{k}|} \mathcal{G}_z. \quad (2.28)$$

2.2.5 Tensor gravitacional

Muchos fenómenos de la física se describen matemáticamente mediante tensores. Un tensor es una generalización de los conceptos de escalar, vector y matrices en dimensiones superiores. Un escalar es un tensor de orden cero que solo posee magnitud. Un vector es un tensor de orden uno el cual es una cantidad que tiene magnitud y dirección. Un tensor de orden dos suele representarse como una matriz que tiene magnitud y dos direcciones (Chaves, 2013). El tensor gravitacional se obtiene a través de las segundas derivadas del potencial gravitacional newtoniano (2.14) y, de igual manera, se puede obtener a partir del gradiente del vector del campo gravitacional:

$$\Gamma_{i,j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial i \partial j} = \nabla \vec{g}(P), \quad (2.29)$$

donde i, j representan la direcciones x, y, z .

En forma matricial, se presenta como:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \Gamma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Como se observa, el tensor gravitacional es una matriz diagonalmente simétrica lo que implica que los datos del tensor son simétricos:

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_{yx}, \quad \Gamma_{xz} = \Gamma_{zx}, \quad \Gamma_{yz} = \Gamma_{zy},$$

por lo tanto, sólo seis componentes del tensor son independientes. Esto permite reescribir la matriz como:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \Gamma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{xy} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{xz} & \Gamma_{yz} & \Gamma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Desarrollando la matriz (2.31), se obtienen las expresiones de las componentes del tensor (Hinze, 2013):

$$\Gamma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial x} = \gamma \int_V \rho \left[\frac{3(x - x')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] dv, \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = \gamma \int_V \rho \left[\frac{3(x - x')(y - y')}{r^5} \right] dv, \quad (2.33)$$

$$\Gamma_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = \gamma \int_V \rho \left[\frac{3(x - x')(z - z')}{r^5} \right] dv, \quad (2.34)$$

$$\Gamma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial y} = \gamma \int_V \rho \left[\frac{3(y - y')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] dv, \quad (2.35)$$

$$\Gamma_{yz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial g_y}{\partial z} = \gamma \int_V \rho \left[\frac{3(y - y')(z - z')}{r^5} \right] dv, \quad (2.36)$$

$$\Gamma_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = \gamma \int_V \rho \left[\frac{3(z - z')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] dv. \quad (2.37)$$

La matriz del tensor gravitacional también puede expresarse en el dominio de Fourier, calculada conociendo únicamente la componente vertical del campo gravitacional (Mickus & Hinojosa, 2001):

$$\Gamma_{ij} = \mathcal{F}^{-1} \{ [\mathcal{K}(\mathbf{k})] \mathcal{G}_z(\mathbf{k}) \}, \quad (2.38)$$

donde:

$$[\mathcal{K}(\mathbf{k})] = \begin{bmatrix} \frac{-k_x^2}{|\mathbf{k}|} & \frac{-k_x k_y}{|\mathbf{k}|} & -ik_x \\ \frac{-k_x k_y}{|\mathbf{k}|} & \frac{-k_y^2}{|\mathbf{k}|} & -ik_y \\ -ik_z & -ik_y & |\mathbf{k}| \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

con $|\mathbf{k}| \neq 0$, $i = x, y, z$, $j = x, y, z$, $\mathcal{G}_z(\mathbf{k})$ representa la transformada de Fourier bidimensional de la componente vertical g_z del campo gravitacional. La función $\mathcal{F}^{-1}$ corresponde a la transformada inversa de Fourier, la cual se aplica para regresar al dominio espacial.

2.3 Fuentes magnéticas

La magnetometría es un método geofísico utilizado para estudiar las variaciones en el campo magnético terrestre, influenciado por la presencia de materiales magnéticos en el subsuelo. Estas variaciones, conocidas como anomalías magnéticas, se generan debido a las diferencias en las propiedades magnéticas de las rocas, como su susceptibilidad magnética. Los instrumentos utilizados para medir estas variaciones se llaman magnetómetros, que detectan cambios en la intensidad del campo magnético terrestre en distintos puntos de la superficie.

A nivel regional, la magnetometría es útil para identificar el basamento rocoso, permitiendo el mapeo de grandes estructuras geológicas, como cuencas sedimentarias y complejos ígneos, esenciales para comprender la evolución tectónica de una región. A nivel local, el método se emplea en la exploración minera para delimitar yacimientos minerales y detectar fallas. Además, tiene aplicaciones en arqueología, donde se utiliza para identificar estructuras enterradas, como antiguos asentamientos o muros, sin necesidad de excavación directa, lo que lo convierte en una herramienta no invasiva para la investigación arqueológica.

2.3.1 Intensidad magnética y susceptibilidad magnética

Como se mencionó en la sección (2.1.3), el campo magnético terrestre es un campo solenoidal, cuyas fuentes se describen mediante la ley de Gauss para el magnetismo, donde no existen monopolos magnéticos, y una versión modificada de la ley de Ampère. Este tratamiento considera el caso magnetostático, en el cual la magnetización del medio influye en el comportamiento del campo magnético $\vec{B}$ (Kaufman, 1994):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.40)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} \right), \quad (2.41)$$

donde $\vec{J}_f$ representa la densidad de corriente libre. Para describir el comportamiento del campo magnético, además de las corrientes eléctricas macroscópicas, debe considerarse la magnetización del medio, que introduce una densidad de corriente adicional a nivel microscópico, expresada como $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$, denominada densidad de corriente ligada. Agrupando

los términos de la ecuación (2.41), la ley de Ampère se puede escribir como:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \mu_0 \vec{J}_f. \quad (2.42)$$

El valor entre paréntesis de la ecuación (2.42) se le denomina campo $\vec{H}$ o intensidad de campo magnético:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (2.43)$$

Por lo que el campo $\vec{H}$ permite describir la ley de Ampère en únicamente términos de la densidad de corriente libre. Las ecuaciones de campo de $\vec{H}$ son las siguientes:

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}, \quad (2.44)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}_f. \quad (2.45)$$

En el Sistema Internacional de Unidades (SI), la intensidad de campo magnético $\vec{H}$ se mide en amperios por metro [A/m]. Alternativamente, en el sistema Gaussiano, se mide en oersted, siendo 1[A/m] equivalente a $4\pi \times 10^{-3}$ oersted.

Los cuerpos pueden adquirir un componente de magnetización en la presencia de un campo magnético externo, lo cual describe la capacidad de un material para magnetizarse en respuesta a $\vec{H}$. De hecho, para la mayoría de las sustancias, la magnetización es proporcional al campo, siempre que este no sea demasiado intenso (Griffiths, 2013):

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad (2.46)$$

donde χ es una constante conocida como susceptibilidad magnética del material y es independiente del campo aplicado. La susceptibilidad magnética es una cantidad adimensional que varía de una sustancia a otra: positiva para los paramagnéticos y negativa para los diamagnéticos. Los materiales que cumplen con la ecuación (2.46) se denominan medios lineales.

Si despejamos el campo magnético $\vec{B}$ de la ecuación (2.43) y sustituimos la ecuación (2.46), se obtiene una nueva expresión para el campo magnético en función de la susceptibilidad magnética:

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H}, \quad (2.47)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (2.48)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.49)$$

donde μ_r es la permeabilidad relativa del material, y μ es la permeabilidad absoluta, medida en henrios por metro [H/m]:

$$\mu_r = 1 + \chi, \quad (2.50)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r. \quad (2.51)$$

De acuerdo a la susceptibilidad magnética, los materiales se clasifican en diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos (Salam, 2014):

- **Diamagnéticos:** Un campo magnético aplicado provoca una magnetización en sentido opuesto al campo, debido a la perturbación en el movimiento orbital de sus electrones, lo que da lugar a una susceptibilidad magnética negativa ($\chi \leq 0$). El cobre, el oro, el diamante, el silicio, el bismuto y la plata son ejemplos de materiales diamagnéticos. En ausencia de un campo magnético externo, estos materiales no retienen campos magnéticos.
- **Paramagnéticos:** Se encuentra en materiales que poseen momentos magnéticos atómicos. La aplicación de un campo magnético induce a que los momentos magnéticos atómicos se alineen parcialmente en la misma dirección al campo aplicado. Estos materiales poseen una susceptibilidad magnética positiva y pequeña ($\chi > 0$). Estos materiales son ligeramente atraídos por el campo magnético y no retienen esta propiedad después de eliminar el campo externo.
- **Ferromagnéticos:** En estos materiales, los momentos magnéticos vecinos interactúan intensamente, causando una magnetización espontánea con una susceptibilidad magnética mucho mayor ($\chi \gg 0$). Ejemplos de materiales ferromagnéticos incluyen el óxido de níquel (NiO) y el sulfuro ferroso (FeS). Estos materiales responden fuertemente a campos magnéticos externos y retienen esta propiedad incluso cuando el campo externo se elimina. Además, presentan una respuesta no lineal al campo aplicado.

2.3.2 Potencial escalar magnético y magnetización

En magnetostática se trata a la materia magnetizada sin corrientes eléctricas, por lo que $\vec{J}_f = 0$, con estas condiciones las ecuaciones de campo de $\vec{H}$ se pueden expresar como:

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}, \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0. \quad (2.53)$$

Estas ecuaciones resultantes tienen una reminiscencia en las ecuaciones de campo para materia polarizada sin carga electrostática, donde $\nabla \cdot \vec{E} = -\epsilon_0^{-1} \nabla \cdot P$ y $\nabla \times \vec{E} = 0$. En este

contexto el campo eléctrico se determina normalmente tomando el gradiente del voltaje, y esta relación viene dada por $\vec{E} = -\nabla\vec{V}$. Dado que la intensidad de campo magnético $\vec{H}$ en este caso es irrotacional, también se puede introducir un potencial magnético escalar ϕ_m (Lindner, 2018). La intensidad del campo magnético se define como el gradiente negativo de la fuerza magnetomotriz o el potencial escalar magnético, es decir:

$$\vec{H} = -\nabla\phi_m. \quad (2.54)$$

El potencial escalar magnético en el punto de observación P dado por un momento dipolar $\vec{m}$ se define como (Blakely, 1995):

$$\phi_m(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m} \cdot \nabla\frac{1}{r}, \quad (2.55)$$

La ecuación (2.55) describe el potencial de un dipolo elemental. De acuerdo al Sistema Internacional de Unidades (SI), las constantes tiene las siguientes dimensiones físicas:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right],$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío.

La magnetización en un volumen V se define como la suma vectorial de todos los momentos dipolares individuales m_i , dividido por el volumen (Blakely, 1995). Es decir:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i m_i, \quad (2.56)$$

en el Sistema Internacional de Unidades (SI), la magnetización tiene unidades de $[\text{A/m}]$. Si consideramos un pequeño material magnético con magnetización $\vec{M}$ en el punto $Q(x', y' z')$, que puede actuar como un único dipolo $\vec{M}(Q)dv = \vec{m}$, el potencial observado en el punto $P(x, y, z)$ está dado por:

$$\phi_m(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}(Q) \cdot \nabla\frac{1}{r}dv. \quad (2.57)$$

Al integrar sobre todo el volumen, se puede obtener el potencial de una distribución de magnetización en el punto Q . El gradiente cumple la siguiente característica $\nabla'\frac{1}{r} = -\nabla\frac{1}{r}$, el operador ∇' se refiere al gradiente con respecto al punto de la fuente $Q(x', y' z')$:

$$\phi_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(Q) \cdot \nabla'\frac{1}{r}dv, \quad (2.58)$$

a está ecuación se le conoce como el potencial escalar magnético, análogo al potencial newtoniano. Sustituyendo la ecuación (2.58) en la ecuación (2.54), se obtiene la ecuación que

describe la magnetización en el punto Q desde el punto de observación P :

$$\vec{H}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \vec{M}(Q) \cdot \nabla' \frac{1}{r} dv. \quad (2.59)$$

En la adquisición de datos magnéticos, es importante distinguir entre los campos $\vec{B}$ (campo magnética) y $\vec{H}$ (intensidad del campo magnético). No obstante, al realizar mediciones en ambientes libres de corrientes y de materiales magnéticos, como el aire, el océano o el espacio, la diferencia entre ambos campos es mínima desde el punto de vista práctico. En tales entornos, la permeabilidad magnética es prácticamente igual a la del vacío ($\mu \approx \mu_0$), por lo que los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ se relacionan de manera lineal (ecuación 2.49). Debido a esta relación, y dado que los magnetómetros miden el campo magnético $\vec{B}$, es posible considerar que dicho campo puede expresarse como el gradiente negativo de un potencial escalar magnético:

$$\vec{B} = -\nabla \phi_m. \quad (2.60)$$

Los magnetómetros miden directamente el campo $\vec{B}$, expresado en teslas $[T] = [Wb/m^2]$ en el SI. Para datos antiguos del campo magnético, se solía utilizar el Sistema Cegesimal de Unidades (CGS), en el cual el campo magnético $\vec{B}$ se medía en gauss $[G]$, con la siguiente equivalencia: $1 [T] = 10^4 [G]$.

2.3.3 Vector del campo magnético

Considerando la ecuación (2.60), las componentes del campo magnético vectorial generado por una distribución de momento magnético $\vec{M}$ en un volumen pueden expresarse, en términos de sus tres componentes cartesianas, como:

$$\begin{aligned} \vec{B}(P) &= \frac{\partial \phi_m}{\partial i} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \vec{M}(Q) \cdot \nabla' \frac{1}{r} dv, \\ &= B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde:

- i representan la direcciones x, y, z .
- μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío.
- $\vec{M}(Q) = M_x(Q)\hat{e}_x + M_y(Q)\hat{e}_y + M_z(Q)\hat{e}_z$ es el vector de magnetización en el punto de origen $Q(x', y', z')$.
- $r = |\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ es la distancia entre P y Q .

- ∇ es el operador gradiente respecto a las coordenadas de P .
- ∇' es el operador gradiente respecto a las coordenadas de Q .

Para obtener las componentes del vector $\vec{B}$, se deriva el potencial escalar del campo magnético en cada una de las direcciones x, y, z , y se descompone el producto escalar $\vec{M} \cdot \nabla' \frac{1}{r}$. De forma general, cada componente queda de la siguiente manera (Hinze, 2013):

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\partial \phi_m}{\partial x} \\ &= \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_x \frac{3(x-x')^2 - r^2}{r^5} + M_y \frac{3(x-x')(y-y')}{r^5} + M_z \frac{3(x-x')(z-z')}{r^5} \right] dv, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} B_y &= -\frac{\partial \phi_m}{\partial y} \\ &= \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_x \frac{3(y-y')(x-x')}{r^5} + M_y \frac{3(y-y')^2 - r^2}{r^5} + M_z \frac{3(y-y')(z-z')}{r^5} \right] dv, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{\partial \phi_m}{\partial z} \\ &= \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_x \frac{3(z-z')(x-x')}{r^5} + M_y \frac{3(z-z')(y-y')}{r^5} + M_z \frac{3(z-z')^2 - r^2}{r^5} \right] dv, \end{aligned} \quad (2.64)$$

En los inicios de la magnetometría, las mediciones se realizaban principalmente a través de la componente vertical. Posteriormente, con el avance de la tecnología, se implementaron sensores capaces de medir el campo magnético total B_T , lo que permitió una mayor precisión en las observaciones ya que no se depende de una orientación específica (Hinze, 2013).

2.3.4 Tensor del campo magnético

El tensor del campo magnético es un tensor de segundo orden que representa las derivadas espaciales de las componentes del campo magnético (B_x, B_y, B_z) respecto a las coordenadas espaciales (x, y, z). Este tensor describe cómo varía el campo magnético en cada punto del espacio. Se puede obtener a partir de las segundas derivadas del potencial escalar del campo magnético (2.58) o, de manera equivalente, mediante el gradiente del vector del campo magnético (2.59):

$$B_{i,j} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial i \partial j} = \nabla \vec{B}(P), \quad (2.65)$$

donde i, j representan la direcciones x, y, z .

En forma matricial, el tensor se expresa como:

$$\begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Dado que el potencial escalar del campo magnético se obtiene bajo la suposición de que estamos fuera de la región de magnetización y en ausencia de corrientes, se satisface la ecuación de Laplace. Esto implica que las derivadas son funciones continuas y diferenciables, lo que hace que la matriz (2.66) sea simétrica. En consecuencia, el tensor se puede describir mediante sólo seis componentes independientes (Hinze, 2013), cuyas expresiones desarrolladas son:

$$B_{xx} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x \partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \int_V \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left[M_x \left(3(x - x') - \frac{5(x - x')^3}{r^2} \right) + M_y \left((y - y') - \frac{5(x - x')^2(y - y')}{r^2} \right) + M_z \left((z - z') - \frac{5(x - x')^2(z - z')}{r^2} \right) \right] dv, \quad (2.67)$$

$$B_{xy} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_V \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left[M_x \left((y - y') - \frac{5(x - x')^2(y - y')}{r^2} \right) + M_y \left((x - x') - \frac{5(y - y')^2(x - x')}{r^2} \right) - M_z \left(\frac{5(x - x')(y - y')(z - z')}{r^2} \right) \right] dv, \quad (2.68)$$

$$B_{xz} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x \partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = \int_V \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left[M_x \left((z - z') - \frac{5(x - x')^2(z - z')}{r^2} \right) - M_y \left(\frac{5(x - x')(y - y')(z - z')}{r^2} \right) - M_z \left((x - x') - \frac{5(z - z')^2(x - x')}{r^2} \right) \right] dv, \quad (2.69)$$

$$B_{yy} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y \partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \int_V \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left[M_x \left((x - x') - \frac{5(y - y')^2(x - x')}{r^2} \right) + M_y \left(3(y - y') - \frac{5(y - y')^3}{r^2} \right) + M_z \left((z - z') - \frac{5(y - y')^2(z - z')}{r^2} \right) \right] dv, \quad (2.70)$$

$$B_{yz} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y \partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z} = \int_V \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left[-M_x \left(\frac{5(x-x')(y-y')(z-z')}{r^2} \right) + M_y \left((z-z') - \frac{5(y-y')^2(z-z')}{r^2} \right) + M_z \left((y-y') - \frac{5(z-z')^2(y-y')}{r^2} \right) \right] dv, \quad (2.71)$$

$$B_{zz} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial z \partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = \int_V \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left[M_x \left((x-x') - \frac{5(z-z')^2(x-x')}{r^2} \right) + M_y \left((y-y') - \frac{5(z-z')^2(y-y')}{r^2} \right) - M_z \left(3(z-z') - \frac{5(z-z')^3}{r^2} \right) \right] dv. \quad (2.72)$$

2.4 Derivadas direccionales

En campos potenciales se utilizan las derivadas direccionales para el análisis de los datos; la derivada vertical ayuda a la caracterización de fuentes a profundidad, y las derivadas horizontales delimitan los bordes de los cuerpos. Las derivadas se pueden calcular de dos maneras: de forma espacial con diferencias finitas y en el dominio del número de onda con las propiedades de la transformada de Fourier.

Una diferencia finita se obtiene mediante la expansión en series de Taylor, permitiendo aproximar operadores diferenciales a través de operadores en diferencias finitas. El teorema de Taylor es un instrumento para calcular la discretización de operadores diferenciales y se expresa en una dimensión de la siguiente manera (Lara et al., 2019):

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x), \quad (2.73)$$

donde $F_n(x)$ es un polinomio de grado n al rededor de x_i y R_n es el residuo o el error de truncamiento asociado con el polinomio $F_n(x)$. La expansión desarrollada se define como:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F(x_i) + \frac{dF(x_i)}{dx}(x-x_i) + \frac{d^2F(x_i)}{dx^2} \frac{(x-x_i)^2}{2!} + \dots + \frac{d^n F(x_i)}{dx^n} \frac{(x-x_i)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{d^k F(x_i)}{dx^k} \frac{(x-x_i)^k}{k!}. \\ R_n &= \frac{F^{(n+1)}(x_i)}{(n+1)!} (x-x_i)^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

De igual forma se hace el análisis de la serie de Taylor en dos dimensiones, x y y , y de ordenes superiores:

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= F(x_i, y_j) + \frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x}(x - x_i) + \frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y}(y - y_j) + \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial x^2} \frac{(x - x_i)^2}{2!} \\
&+ \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} (x - x_i)(y - y_j) + \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial y^2} \frac{(y - y_j)^2}{2!} + \dots \\
&+ \frac{1}{(N - m)!} \frac{1}{m!} \frac{\partial^N}{\partial x^{(N-m)} \partial y^m} F(x_i, y_j) (x - x_i)^{N-m} (y - y_j)^m + R_{N+1} \\
&= \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{N-m} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} F(x_i, y_j)}{\partial x^m \partial y^n} (x - x_i)^m (y - y_j)^n + R_N,
\end{aligned} \tag{2.75}$$

donde $R_N(x, y)$ es el residuo multidimensional o error de truncamiento asociado a $F(x, y)$.

La ecuación (2.75) es una ecuación diferencial parcial en dos dimensiones y para su solución numérica con diferencias finitas se necesita generar una malla con un conjunto finito en donde se busca una aproximación a la ecuación diferencial para los puntos x_i y y_j (Carrillo et al., 2021). Si aproximamos la función en el punto $x = x_i + \Delta x$ y $y = y_j + \Delta y$ en diferencias finitas de primer orden, conocidas como diferencias finitas progresivas o hacia adelante de $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$:

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_i + \Delta x, y_j) - F(x_i, y_j)}{\Delta x}, \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{F(x_i, y_j + \Delta y) - F(x_i, y_j)}{\Delta y}. \tag{2.77}$$

Si aproximamos la función en el punto $x = x_i - \Delta x$ y $y = y_j - \Delta y$ en diferencias finitas de primer orden, se conocen como diferencias finitas regresivas o hacia atrás de $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$:

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_i, y_j) - F(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x}, \tag{2.78}$$

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{F(x_i, y_j) - F(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y}, \tag{2.79}$$

Si aproximamos la función en los puntos $x = x_i + \Delta x$, $x = x_i - \Delta x$, $y = y_j + \Delta y$ y $y = y_j - \Delta y$ en diferencias finitas de primer orden, se conocen como diferencias finitas centradas de $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$:

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_i + \Delta x, y_j) - F(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x}, \tag{2.80}$$

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{F(x_i, y_j + \Delta y) - F(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y}. \tag{2.81}$$

Las derivadas obtenidas a través de diferencias finitas centradas, ecuación (2.80) y (2.81),

tienen una mejor aproximación al tomar en cuenta los puntos de su entorno, pero en una malla no es posible calcular los extremos, por lo que se usan las derivadas por diferencias finitas progresivas y regresivas de acuerdo al extremo a calcular.

De igual forma se pueden calcular las derivadas horizontales, x y y , a través de las propiedades de la transformada de Fourier que se encuentran en el dominio de las frecuencias y el número de onda:

$$\frac{\partial^n F(x_i, y_j)}{\partial x^n} = \mathcal{F}^{-1} \{ (ik_x)^n \mathcal{F} \{ F(x_i, y_j) \} \}, \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial^n F(x_i, y_j)}{\partial y^n} = \mathcal{F}^{-1} \{ (ik_y)^n \mathcal{F} \{ F(x_i, y_j) \} \}, \quad (2.83)$$

donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}$ es la transformada de Fourier inversa, k_x y k_y representan el número de onda en la dirección x y y respectivamente, n es el orden de la derivada, i representa el número complejo $\sqrt{-1}$.

La derivada vertical se obtiene dado que el campo potencial $\mathbf{F}$ es armónico, por lo tanto satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial z^2} = 0, \quad (2.84)$$

por lo tanto la segunda derivada vertical se puede despejar de la ecuación (2.17) usando las derivadas horizontales:

$$\frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial y^2}. \quad (2.85)$$

La derivada vertical se puede calcular en el dominio del número de onda aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier:

$$\frac{\partial^n F(x_i, y_j)}{\partial z^n} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right)^n \mathcal{F} \{ F(x_i, y_j) \} \right\}, \quad (2.86)$$

donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}$ es la transformada de Fourier inversa, k_x y k_y representan el número de onda en la dirección x y y respectivamente.

2.5 Operadores de realce de bordes

Para el estudio y caracterización de las fuentes potenciales, se emplean herramientas de análisis espacial que permiten determinar en planta los límites de los cuerpos en el subsuelo de interés. Las derivadas direccionales (sección 2.4) muestran la tasa de cambio de la posible fuente potencial en una dirección específica, y son la base para los detectores de bordes, los cuales permiten una mejor delimitación de estas fuentes. En el presente trabajo, se emplearon derivadas direccionales en el dominio espacial y en el dominio de número de onda de la respuesta de las fuentes potenciales, además de algunos operadores de realce de bordes que se desarrollarán en esta sección.

Las anomalías magnéticas y gravimétricas contienen información que permite caracterizar la profundidad de las fuentes que las generan, así como sus límites laterales. El objetivo principal se enfoca en reducir la incertidumbre al interpretar los resultados de los operadores aplicados, dado que los límites y profundidades obtenidos no siempre coinciden con los cuerpos reales.

A lo largo del tiempo se han propuesto diferentes tipos de operadores, muchos de ellos son modificaciones que intentan mejorar los límites de los cuerpos, cada operador tiene sus ventajas y limitaciones: algunos permiten caracterizar con mayor precisión cuerpos someros, mientras que otros resultan más eficaces para estructuras profundas. Los operadores se pueden usar para el procesamiento de perfiles y cuadrículas, transformando los datos potenciales a mapas. Para su implementación, se utilizaron derivadas verticales y horizontales definidas mediante diferencias finitas y espectrales, como se detalló en la sección anterior.

La amplia variedad de operadores desarrollados se encuentra recopilada en el Anexo A.2. Para este análisis se seleccionaron los operadores; amplitud del gradiente horizontal (HGA), amplitud de la señal analítica (ASA), ángulo de inclinación (Tilt), ángulo de inclinación normalizado (TDX), ángulo de inclinación extendido (ETA) y normalización del tensor con la derivada vertical (Nz), los cuales son utilizados para caracterizar las anomalías generadas por los modelos directos. Los primeros operadores históricos, como HGA y ASA, se basan en las amplitudes de las derivadas direccionales. Posteriormente, surgieron operadores de fase local, los cuales emplean funciones trigonométricas inversas, especialmente la arcotangente, para analizar las variaciones en las anomalías potenciales en términos de ángulos, facilitando así la detección de cambios abruptos o graduales en la magnitud y dirección del campo, como ocurre con Tilt, TDX, ETA y Nz.

Amplitud del gradiente horizontal (HGA)

El operador HGA es uno de los más conocidos y antiguos, hace uso de las derivadas horizontales de la anomalía de campo potencial. Fue propuesta y aplicada por Dole y Jordan (1978) a mapas de datos aeromagnéticos y por Cordell (1979) a datos gravimétricos con el fin de delimitar fallas y límites geológicos. Los máximos del gradiente delinean puntos de inflexión de la gravedad o el campo magnético que se pueden interpretar como posibles fallas verticales o de pronunciados contrastes de densidad o de susceptibilidad magnética. La limitante del operador HGA es la dificultad en la detección de bordes difusos en la presencia de anomalías adyacentes y a profundidad:

$$HGA(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.87)$$

Amplitud de la señal analítica (ASA)

Nabighian (1972) definió la señal analítica a través de las transformadas de Hilbert para cuerpos magnéticos en dos dimensiones, el cual es independiente de la magnetización. Para el caso en tres dimensiones, Nabighian (1984) extendió esta definición de la señal analítica de un campo potencial F como:

$$AS(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{z}.$$

donde $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ representan los vectores unitarios en las direcciones x , y y z , respectivamente. La amplitud de la señal analítica fue definida por Roest et al. (1992) como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las primeras derivadas verticales y horizontales del campo potencial:

$$|ASA(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}. \quad (2.88)$$

Los valores máximos del operador señalan contrastes de densidad o magnetización en el medio, ubicándose en los bordes de los cuerpos geológicos que causan la anomalía. Aunque el operador presenta mejor resolución en la caracterización de cuerpos a mayor profundidad en comparación con el operador HGA, ecuación (2.87), mantiene limitaciones para identificar estructuras a profundidades aún mayores. Además, en el caso tridimensional, su respuesta depende de la magnetización del cuerpo (X. Li, 2006).

Ángulo de inclinación (Tilt)

Al trabajar únicamente con las amplitudes de los gradientes, la respuesta es muy dinámica, y en ocasiones, los perfiles o mapas no son proporcionales al tamaño de la señal detectada. Por esta razón, Miller y Singh (1994) introdujeron uno de los primeros operadores de fase local, Tilt, el cual utiliza la relación entre la derivada vertical y la amplitud del gradiente horizontal. Esta relación es pequeña para fuentes profundas y grande cuando el punto de observación se encuentra sobre la fuente. Cerca del borde de las fuentes, los valores son cercanos a cero, ya que la derivada vertical tiende a cero mientras que el gradiente horizontal es máximo. Fuera del cuerpo, la relación se vuelve negativa, pues la derivada vertical es negativa. Los valores, al estar expresados en ángulos, se encuentran en un rango definido de $[-\pi/2, \pi/2]$:

$$Tilt(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} \right). \quad (2.89)$$

Ángulo de inclinación normalizada (TDX)

Cooper y Cowan (2006) introdujeron el ángulo de inclinación normalizado, el cual se define como la relación entre la amplitud del gradiente horizontal y el valor absoluto del gradiente vertical, siendo éste un enfoque contrario a la ecuación (2.89). Cerca de los bordes de la anomalía el gradiente horizontal alcanza su valor máximo mientras que el gradiente vertical es mínimo, lo que genera una respuesta máxima. En cambio, tanto fuera como dentro de la anomalía, el valor es bajo. Además, el valor absoluto del gradiente vertical asegura que el operador siempre tome valores positivos, y su dominio se encuentra en el rango $[0, \pi/2]$:

$$TDX(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \right). \quad (2.90)$$

Ángulo de inclinación extendido (ETA)

El uso extendido de operadores para la delimitación de fuentes potenciales ha alcanzado otras áreas, como la inversión geofísica. El operador ETA, propuesto por Chen et al. (2022), se desarrolla como una extensión del operador TDX con el objetivo de proporcionar mayor estabilidad a las soluciones de inversión. Este operador establece una relación entre la amplitud de la señal analítica y el valor absoluto del gradiente vertical. Al incluir las derivadas

direccionales en x , y y z , se obtiene una relación más acentuada en los máximos y mínimos de la anomalía facilitando la interpretación en la delimitación de los bordes de las fuentes:

$$ETA(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \right). \quad (2.91)$$

Normalización del tensor con la derivada vertical (Nz)

La medición del tensor de los campos potenciales ha demostrado ser útil en la detección de bordes, mediante la información contenida en su matriz. Esta medición se realiza con un gradiómetro, que registra directamente las componentes del tensor. Se utiliza la función arcotangente para equilibrar anomalías de diferentes profundidades y también para ecualizar señales. Con el fin de eliminar los efectos de ruido adicional, G. Li et al. (2023) emplearon la función *ReLU* para filtrar la señal. *ReLU* se define de la siguiente manera:

$$ReLU = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Los componentes verticales del tensor de gradiente completo permiten revelar detalles geológicos con mayor precisión, por lo que se emplean en la construcción del operador Nz, el cual normaliza el gradiente vertical utilizando los valores del tensor. Sobre la anomalía, los valores de la función arctan son positivos, mientras que fuera de la anomalía son negativos. Al aplicar la función *ReLU*, los valores positivos alcanzan un máximo y los valores negativos se reducen a cero, lo que delimita con precisión los bordes de las anomalías y reduce la incertidumbre asociada a bordes falsos:

$$N_z(x, y) = ReLu \left[\tan^{-1} \left(\frac{-(F_{xx} + F_{yy})}{\sqrt{(F_{xx} + F_{yy})^2 + F_{zz}^2}} \right) \right]. \quad (2.92)$$

2.6 Ecuación de homogeneidad de Euler

Los campos potenciales, tanto el gravitacional como el magnético, suelen medirse en la superficie terrestre, es decir, en regiones externas a las fuentes. En estas condiciones, el campo medido puede considerarse armónico, véase la tabla (2.1), ya que no está directamente afectado por las fuentes locales de magnetización o masa. Al tratarse de un campo armónico, satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, la cual, en coordenadas cartesianas, se expresa como:

$$\nabla^2 F(x, y, z) = \frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial z^2} = 0.$$

donde F puede representar la magnitud g_z del campo gravitacional o el campo magnético total B_T . Toda solución de la ecuación de Laplace es una función armónica si sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas. Por lo tanto, si F es una función armónica, cualquier derivada parcial de F también lo será.

Euler definió una función homogénea como aquella que mantiene una propiedad de cambio de escala, en la que todas las variables son multiplicadas por el mismo factor. Esta característica implica que la función escala de manera predecible cuando sus argumentos se escalan uniformemente (Euler & Aycok, 2019).

Matemáticamente una función escalar en $\mathbb{R}^n$ se define como una función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que F es homogénea de grado n si cumple la siguiente relación:

$$F(tx_1, tx_2, \dots, tx_i) = t^n F(x_1, x_2, \dots, x_i), \quad (2.93)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ son las variables independientes, i es el número de variables, t es un número real y n es el grado de homogeneidad de $F(\mathbf{x})$. Si $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y homogénea, se puede obtener la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$tx_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + tx_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + tx_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nt^{n-1} F(x_1, x_2, \dots, x_i),$$

siendo t un parámetro arbitrario. Al definir $t = 1$, se simplifica a $nt^{n-1} = n$, por lo que la ecuación queda:

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF(x_1, x_2, \dots, x_i),$$

que es la ecuación diferencial parcial de homogeneidad de Euler. Esta ecuación también se puede expresar utilizando el operador gradiente:

$$x_i \cdot \nabla F(x_i) = nF(x_i). \quad (2.94)$$

Para un campo escalar en el plano $(x, y) \mapsto F(x, y)$, diferenciable y homogéneo en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, la ecuación de homogeneidad de Euler se expresa como:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = nF(x, y).$$

De manera similar, para un campo escalar en el espacio $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$, diferenciable y homogéneo en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, la ecuación de homogeneidad de Euler se expresa como:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = nF(x, y, z). \quad (2.95)$$

La ecuación de homogeneidad se utiliza para modelar procesos físicos y, en particular, en la resolución de problemas directos e inversos relacionados con campos potenciales, tales como en la gravimetría y la magnetometría. El principal interés en el uso de la ecuación de homogeneidad de Euler radica en su capacidad para estimar la geometría de las fuentes potenciales, las cuales dependen del gradiente del campo potencial (Stavrev & Reid, 2007).

2.6.1 Deconvolución de Euler

De acuerdo con la ecuación de homogeneidad de Euler para un campo escalar en el espacio (2.95), si se considera que δF es una anomalía de campo potencial, ya sea newtoniano o magnético, medido en el punto de observación $P(x, y, z)$, y que las fuentes del campo están localizadas en el punto $Q(x', y', z')$, el vector que conecta ambos puntos es $\vec{r} = (x - x', y - y', z - z')$. Bajo estas condiciones, la ecuación de homogeneidad de Euler toma la siguiente forma:

$$(x - x') \frac{\partial \delta F}{\partial x} + (y - y') \frac{\partial \delta F}{\partial y} + (z - z') \frac{\partial \delta F}{\partial z} = n \delta F(x, y, z),$$

donde n representa el grado de homogeneidad de la función $\delta F(x, y, z)$. Este grado de homogeneidad describe cómo varía δF cuando se escala su argumento. Para el caso de los campos potenciales, estos muestran una dependencia inversa con respecto a la distancia entre el punto de observación y la fuente del campo.

Por ejemplo, en gravimetría, el potencial newtoniano de una masa puntual decrece inversamente con la distancia:

$$\phi(P) = \gamma \frac{m}{r},$$

lo que sugiere un grado de homogeneidad $n = -1$.

En el caso de la magnetometría, el potencial escalar magnético generado por un dipolo mag-

nético decae con el cuadrado de la distancia:

$$\phi_m(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \cdot \nabla \frac{1}{r},$$

donde el grado de homogeneidad es $n = -2$, ya que $\frac{1}{r}$ tiene un grado de homogeneidad $n = -1$, y el operador ∇ añade otro grado de homogeneidad $n = -1$. El vector del momento magnético $\vec{m}$ no afecta el grado de homogeneidad, pues no depende de la posición.

En este contexto, se introduce el término N , conocido como índice estructural, que mide cómo varían las derivadas espaciales de la anomalía del campo. Este índice está relacionado con la forma y la distribución espacial de la fuente, y describe su geometría (punto, línea, superficie, volumen). El índice está inversamente relacionado con el grado de homogeneidad, de modo que el índice estructural N es el negativo del grado de homogeneidad $N = -n$ (Reid et al., 1990).

Esto significa que si la anomalía del campo tiene un grado de homogeneidad $n = -1$ (como en el caso del potencial newtoniano de una masa puntual), el índice estructural será $N = 1$, lo que indica que la fuente es puntual. En la tabla (2.2) se tienen los valores de índice estructural para diferente tipos de fuentes asociadas al potencial gravitacional y magnético, así como el orden de sus derivadas (Stavrev & Reid, 2007).

Índices Estructurales $N_{(grav mag)}$				
<i>Fuente/Modelo</i>	<i>Potencial newtoniano/magnético</i>	<i>Campo gravitacional/magnético</i>	<i>Gradientes, componentes tensoriales</i>	<i>3eras derivadas del potencial</i>
Masa puntual - dipolo equivalente Esfera	1 2	2 3	3 4	4 5
Líneas de masa - dipolo equivalente Cilindro	0 1	1 2	2 3	3 4
Lámina delgada semi-infinita Dique, sill, contacto, falla	-1 0	0 1	1 2	2 3
Contacto profundidad ∞ Pirámide	-2 -1	-1 0	0 1	1 2

TABLA 2.2: Índice estructural del potencial newtoniano y magnético, así como de sus respectivas derivadas. Modificado de Stavrev y Reid, 2007.

De manera general, podemos suponer que la lectura de la anomalía de un campo potencial $\delta F(x, y, z)$ se comporta de la siguiente forma:

$$\delta F(x, y, z) = \frac{\lambda}{r^N}, \quad (2.96)$$

donde $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ es la distancia entre el punto de observación y la fuente, N es el índice estructural, y λ es una constante independiente de las coordenadas x , y , y z . Al incorporar estas consideraciones, la ecuación de homogeneidad de Euler se presenta como:

$$(x - x') \frac{\partial \delta F}{\partial x} + (y - y') \frac{\partial \delta F}{\partial y} + (z - z') \frac{\partial \delta F}{\partial z} = -N \delta F(x, y, z). \quad (2.97)$$

La implementación directa de la ecuación (2.97) a datos observados resulta errática y poco confiable debido a varios problemas. Uno de ellos es que, aunque los índices estructurales altos describen mejor la geometría de las anomalías, en la práctica, los índices estructurales bajos tienden a proporcionar estimaciones más precisas de la profundidad de las fuentes. Además, es difícil conocer con precisión el nivel absoluto del campo anómalo δF . En la mayoría de los casos, los datos medidos están afectados por campos regionales (que incluye grandes estructuras geológicas o interferencias de fuentes lejanas) lo que provoca una distorsión en los resultados (Thompson, 1982).

Para mitigar este efecto, se considera un campo ambiental B , el cual se asume constante dentro de una ventana de análisis específica y afecta al campo anómalo observado. Por lo tanto, la medición real realizada es:

$$F = \delta F + B,$$

despejando el campo anómalo δF y sustituyendo en la ecuación (2.97), se obtiene una ecuación mas robusta:

$$(x - x') \frac{\partial [F - B]}{\partial x} + (y - y') \frac{\partial [F - B]}{\partial y} + (z - z') \frac{\partial [F - B]}{\partial z} = -N [F - B], \quad (2.98)$$

dado que las derivadas del campo ambiental B son nulas, al reordenar los términos se obtiene la ecuación conocida como deconvolución de Euler 3D (EULDPH):

$$x' \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} + NB = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} + NF. \quad (2.99)$$

Al realizar las mediciones en la superficie, se considera $z = 0$, lo que simplifica los términos de la ecuación:

$$x' \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} + NB = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + NF. \quad (2.100)$$

En esta ecuación, las incógnitas son x' , y' , z' y B . Para obtener una mejor estimación de la fuente anómala y corregir la influencia del campo ambiental, la ecuación se evalúa en múltiples puntos dentro de una ventana, generando un sistema sobredeterminado. Este sistema lineal de ecuaciones puede resolverse mediante el método de mínimos cuadrados, proporcionando una solución óptima que minimiza el error cuadrático y ajusta mejor los datos observados.

2.7 Deconvolución de Euler de fase local (EULD-W)

El método de deconvolución de Euler desarrollado en la sección anterior (2.6.1) requiere información a priori, específicamente el índice estructural (IE). Una elección inadecuada de este parámetro puede conducir a estimaciones erróneas de profundidad y a una sobredeterminación en las estimaciones en planta.

Stavrev y Reid (2007) demostraron, tanto teórica como experimentalmente, las dimensiones del índice estructural en función del tipo de fuente y del orden de las derivadas del campo. Sin embargo, en la práctica, es complicado determinar cuál es el índice estructural más adecuado. Además, la profundidad de la fuente y el índice estructural no son variables completamente independientes, por lo que resolverlos de manera simultánea puede generar un problema mal planteado. Barbosa et al. (1999) propusieron un criterio para seleccionar el índice estructural óptimo basado en la correlación entre la anomalía observada y el campo ambiental (B). Nabighian y Hansen (2001) extendieron el método de Euler mediante la estimación del índice estructural a partir del cálculo de las transformadas de Hilbert de las derivadas del campo. Salem et al. (2005) desarrollaron el método ELW, el cual utiliza números de onda locales y proporciona una ecuación que permite calcular la ubicación horizontal y la profundidad de cuerpos magnéticos sin requerir información a priori sobre la geometría de la fuente. Salem et al. (2008) emplearon derivadas del ángulo de inclinación (Tilt) para estimar la ubicación de la fuente a partir de datos magnéticos, obteniendo información tanto de la profundidad como del índice estructural.

En esta sección se describe el método propuesto por Salem et al. (2008), junto con sus variantes. La particularidad de este enfoque radica en la combinación de la deconvolución de Euler con operadores de realce de bordes de fase local, utilizados como función de entrada. Esta integración permite estimar de forma directa la ubicación de las fuentes a partir de los gradientes de dichos operadores. Se explica el desarrollo teórico de la deconvolución de Euler con ángulo de inclinación (EULD-Tilt), así como la deconvolución de Euler con ángulo de inclinación normalizado (EULD-TDX), desarrollada por Ma (2014), y la deconvolución de Euler con ángulo de inclinación extendido (EULD-ETA), propuesta por Chen et al. (2022). Por razones prácticas, estas metodologías se referirán de manera general como deconvolución de Euler de fase local (EULD-W).

2.7.1 Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación (EULD-Tilt)

En la sección (2.5) se introduce el operador ángulo de inclinación (Tilt), ecuación (2.89), definido como:

$$\text{Tilt}(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} \right).$$

En la deconvolución de Euler se asume que el campo potencial F es una función homogénea y armónica, es decir, satisface la ecuación de Laplace (ecuación 2.6), y que cada una de sus derivadas espaciales en x , y y z también cumple estas propiedades. Esto permite, entre otras cosas, calcular la derivada vertical del campo a partir de datos medidos en un plano horizontal, utilizando técnicas de continuación ascendente o derivación en el dominio de Fourier.

No obstante, al aplicar operadores no lineales como el operador Tilt, se pierde la propiedad de armonicidad. Aunque el operador se construye a partir de derivadas del campo que son funciones armónicas, la combinación no lineal —que incluye un cociente, una raíz cuadrada y la función arcotangente— impide que el resultado siga satisfaciendo la ecuación de Laplace. Por lo tanto, el operador Tilt no puede considerarse armónico, a pesar de derivarse de funciones que sí lo son (Florio et al., 2006). Esta pérdida de armonicidad, junto con la no linealidad del operador, imposibilita el uso directo de técnicas basadas en la transformada de Fourier, las cuales dependen de ambas propiedades. Por ello, para trabajar con el operador Tilt y obtener sus derivadas en las direcciones x , y y z , se prefiere operar directamente en el dominio espacial, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial \text{Tilt}}{\partial x} = \frac{1}{A^2} \left[H \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial z} / H \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \right) \right], \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial \text{Tilt}}{\partial y} = \frac{1}{A^2} \left[H \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial z} / H \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \right], \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial \text{Tilt}}{\partial z} = \frac{1}{A^2} \left[H \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z} / H \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) \right]. \quad (2.103)$$

Donde la amplitud del gradiente horizontal y la señal analítica corresponden a las ecuaciones (2.104) y (2.105), respectivamente:

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}, \quad (2.104)$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}. \quad (2.105)$$

Las derivadas del operador Tilt se utilizan para proporcionar una estimación directa de la ubicación de la fuente, mediante la ecuación de deconvolución de Euler 3D (2.100), presentada en la sección anterior (2.6.1). Al calcular las derivadas de dicha ecuación con respecto a las direcciones x , y y z , se obtiene:

$$(x - x') \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (y - y') \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + (z - z') \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (2.106)$$

$$(x - x') \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (y - y') \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (z - z') \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (2.107)$$

$$(x - x') \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + (y - y') \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + (z - z') \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (2.108)$$

Se busca expresar las derivadas de la deconvolución de Euler 3D, ecuaciones (2.106 - 2.108), en función de las derivadas del operador Tilt, ecuaciones (2.101 - 2.103).

Para la dirección en x , se multiplica la ecuación (2.106) por el factor $\frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \right)$, obteniéndose:

$$\frac{(x - x')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{(y - y')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{(z - z')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = -\frac{(N + 1)}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2. \quad (2.109)$$

De manera análoga, para la dirección en y , se multiplica la ecuación (2.107) por $\frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \right)$:

$$\frac{(x - x')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{(y - y')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{(z - z')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = -\frac{(N + 1)}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2. \quad (2.110)$$

Las ecuaciones (2.109) y (2.110) se suman, esto permite representar la estructura del gradiente en el plano horizontal:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) + \frac{(y - y')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{(z - z')}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) = -\frac{(N + 1)}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} H^2. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Para la dirección en z , se multiplica la ecuación (2.108) con H^2/A^2 :

$$\frac{(x-x')}{A^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} H^2 + \frac{(y-y')}{A^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} H^2 + \frac{(z-z')}{A^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} H^2 = -\frac{(N+1)}{A^2} \frac{\partial F}{\partial z} H^2. \quad (2.112)$$

Al restar la ecuación (2.111) de (2.112), se introduce la dependencia en la dirección vertical. De este modo, la expresión resultante se ajusta a la forma de la ecuación de Euler en términos del operador Tilt, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{(x-x')}{A^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} H^2 - \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ + \frac{(y-y')}{A^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} H^2 - \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \right] \\ + \frac{(z-z')}{A^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} H^2 - \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Por último, se divide la ecuación (2.113) por H y se sustituyen las definiciones de las derivadas del operador Tilt (ecuaciones 2.101 - 2.103), resultando:

$$(x-x') \frac{\partial \text{Tilt}}{\partial x} + (y-y') \frac{\partial \text{Tilt}}{\partial y} + (z-z') \frac{\partial \text{Tilt}}{\partial z} = 0. \quad (2.114)$$

La ecuación (2.114) es similar a la ecuación de deconvolución de Euler 3D. La diferencia radica en que esta no depende del conocimiento de la geometría de la fuente ni del índice estructural, además de que no requiere del cálculo de un campo ambiental.

El sistema lineal de ecuaciones tiene como incógnitas la posición de la fuente (x', y', z') . De forma matricial se expresa como $G_{ij}m_j = d_i$, donde v representa el tamaño de la ventana móvil.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Tilt}_1}{\partial x} & \frac{\partial \text{Tilt}_1}{\partial y} & \frac{\partial \text{Tilt}_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \text{Tilt}_2}{\partial x} & \frac{\partial \text{Tilt}_2}{\partial y} & \frac{\partial \text{Tilt}_2}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \text{Tilt}_v}{\partial x} & \frac{\partial \text{Tilt}_v}{\partial y} & \frac{\partial \text{Tilt}_v}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{\partial \text{Tilt}_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \text{Tilt}_1}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \text{Tilt}_1}{\partial z} \\ x_2 \frac{\partial \text{Tilt}_2}{\partial x} + y_2 \frac{\partial \text{Tilt}_2}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \text{Tilt}_2}{\partial z} \\ \vdots \\ x_v \frac{\partial \text{Tilt}_v}{\partial x} + y_v \frac{\partial \text{Tilt}_v}{\partial y} + z_v \frac{\partial \text{Tilt}_v}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

2.7.2 Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación normalizado (EULD-TDX)

El operador de ángulo de inclinación normalizado (TDX), definido en la sección (2.5), se expresa como:

$$TDX(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \right).$$

Debido a la falta de armonicidad del operador, el cálculo de sus derivadas se realiza de manera directa en el dominio espacial en las direcciones x , y y z , obteniéndose:

$$\frac{\partial TDX}{\partial x} = \frac{1}{A^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} / H \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \right) - H \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right], \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial TDX}{\partial y} = \frac{1}{A^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} / H \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - H \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right], \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial TDX}{\partial z} = \frac{1}{A^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} / H \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) - H \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right]. \quad (2.118)$$

Siguiendo el enfoque de Ma (2014), se emplea el operador TDX para determinar la ubicación de la fuente a partir de las derivadas de la deconvolución de Euler 3D, ecuaciones (2.106–2.108), en función de las derivadas del operador TDX, ecuaciones (2.116–2.118).

En la dirección x , se multiplica la ecuación (2.106) por $(1/H) \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \right)$, obteniendo:

$$\frac{(x - x')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{(y - y')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{(z - z')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = - \frac{(N + 1)}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2. \quad (2.119)$$

En la dirección y , se multiplica la ecuación (2.107) por $(1/H) \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \right)$:

$$\frac{(x - x')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{(y - y')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{(z - z')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = - \frac{(N + 1)}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2. \quad (2.120)$$

En la dirección z , se multiplica la ecuación (2.108) con H :

$$(x - x') \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} H + (y - y') \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} H + (z - z') \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} H = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial z} H. \quad (2.121)$$

Las ecuaciones (2.119) y (2.120) se suman, ya que esto permite representar la estructura del gradiente en el plano horizontal:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) + \frac{(y - y')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{(z - z')}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) = -\frac{(N + 1)}{H} \frac{\partial F}{\partial z} H^2. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Al restar la ecuación (2.122) de (2.121), se introduce la dependencia en la dirección vertical. De este modo, la expresión resultante se ajusta a la forma de la ecuación de Euler en términos del operador TDX, obteniendo:

$$\begin{aligned} (x - x') \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) - H \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right] \\ + (y - y') \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - H \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right] \\ + (z - z') \left[\frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \right) - H \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Por último, se divide la ecuación (2.123) por $1/A^2$ y se sustituyen las definiciones de las derivadas del operador TDX (ecuaciones 2.116 - 2.118), conduciendo a la siguiente expresión:

$$(x - x') \frac{\partial \text{TDX}}{\partial x} + (y - y') \frac{\partial \text{TDX}}{\partial y} + (z - z') \frac{\partial \text{TDX}}{\partial z} = 0. \quad (2.124)$$

De esta manera, la ecuación lineal (2.124) también es análoga a la ecuación de deconvolución de Euler 3D, pero no depende de la geometría de la fuente ni requiere el cálculo del campo ambiental. Para resolver el sistema de ecuaciones en forma matricial, se utiliza la ecuación (2.115), sustituyendo el operador Tilt por el operador TDX.

2.7.3 Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación extendido (EULD-ETA)

El operador de ángulo de inclinación extendido (ETA), presentado por Chen et al. (2022) y analizado en la sección (2.5), se formula como:

$$ETA(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \right).$$

El operador ETA no es una función armónica, por lo tanto sus derivadas en dirección x , y y z se expresan de la siguiente manera en el dominio espacial:

$$\frac{\partial ETA}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + A^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} / A \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \right) - A \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right], \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial ETA}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + A^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} / A \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \right) - A \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right], \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial ETA}{\partial z} = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + A^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} / A \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) - A \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right]. \quad (2.127)$$

Con base en la metodología desarrollada por Chen et al. (2022), se pretende reformular las derivadas de la ecuación de deconvolución de Euler 3D, ecuaciones (2.106 - 2.108), en función de las derivadas del operador ETA, ecuaciones (2.125 - 2.127).

En la dirección x , se multiplica la ecuación (2.106) por $\left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x}\right)$, resultando:

$$(x - x') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (y - y') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + (z - z') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2. \quad (2.128)$$

En la dirección y , se multiplica la ecuación (2.107) por $\left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y}\right)$:

$$(x - x') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (y - y') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (z - z') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2. \quad (2.129)$$

En la dirección z , se multiplica la ecuación (2.108) por $\left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z}\right)$:

$$(x - x') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + (y - y') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + (z - z') \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2. \quad (2.130)$$

Las ecuaciones (2.128 - 2.130) se integran para caracterizar la estructura del gradiente en el plano horizontal, lo que permite resaltar las variaciones en esa dirección y su vínculo con la distribución de la fuente:

$$\begin{aligned} (x - x') \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right) \\ + (y - y') \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) \\ + (z - z') \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \\ = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial z} A^2. \end{aligned} \quad (2.131)$$

En la dirección z , con el objetivo de representar el gradiente vertical, se multiplica la ecuación (2.108) por A^2 :

$$(x - x') \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} A^2 + (y - y') \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} A^2 + (z - z') \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} A^2 = -(N + 1) \frac{\partial F}{\partial z} A^2. \quad (2.132)$$

Al sustraer la ecuación (2.131) de (2.130), se incorpora la dependencia en la dirección vertical. En consecuencia, la expresión obtenida se adapta a la forma de la ecuación de Euler en función del operador ETA, dando lugar a:

$$\begin{aligned} (x - x') \left[\frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right) - A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right] \\ + (y - y') \left[\frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) - A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right] \\ + (z - z') \left[\frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) - A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.133)$$

Finalmente, la ecuación (2.133) se multiplica por $1 / \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + A^2 \right] A$, y se reemplazan las definiciones de las derivadas del operador ETA (ecuaciones 2.125 - 2.127), obteniendo:

$$(x - x') \frac{\partial \text{ETA}}{\partial x} + (y - y') \frac{\partial \text{ETA}}{\partial y} + (z - z') \frac{\partial \text{ETA}}{\partial z} = 0. \quad (2.134)$$

2.8 Deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación normalizado y corrección en profundidad (EULD-TDXz)

El método consiste en obtener mejores estimaciones para cuerpos que generalmente se encuentran a grandes profundidades. En estos casos, es común que las estimaciones sean subestimadas, lo que genera errores considerables respecto al valor real y puede llevar a una interpretación incorrecta de los cuerpos de la zona estudiada. La técnica integra las ventajas de la deconvolución de Euler 3D convencional, EULDPH, como de los métodos que no requieren de índice estructural, EULD-W.

Para realizar la corrección en la estimación de la profundidad, primero debe analizarse cómo influye el decaimiento de los dos potenciales que se han utilizado en los resultados obtenidos mediante la deconvolución de Euler 3D. Como se vio en la sección (2.6.1), el potencial newtoniano de una masa puntual decae inversamente con la distancia al punto de observación ($\frac{1}{r}$), mientras que el potencial escalar magnético de un dipolo lo hace inversamente al cuadrado de la distancia ($\frac{1}{r^2}$). Además, cada derivada añade un orden adicional de decaimiento al respectivo campo potencial estudiado.

En el método EULD-W, al emplear las derivadas del operador en la definición de la deconvolución de Euler 3D, el decaimiento del campo es de ($\frac{1}{r^3}$) para una fuente gravitacional y de ($\frac{1}{r^4}$) para una fuente magnética. Esto implica que, a medida que se incrementa la distancia a la fuente, la información proveniente de estructuras profundas se atenúa con mayor rapidez, lo que puede conducir a una subestimación considerable de la profundidad real en las soluciones de EULD-W.

Basándose en el método de Zapotitla-Román (2016), propongo un procedimiento para corregir las estimaciones obtenidas en profundidad mediante el método EULD-W con respecto a su campo potencial. Dado que las observaciones del campo potencial se realizan en el plano $z = 0$, se retoma la ecuación de deconvolución de Euler 3D convencional:

$$x' \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} + NB = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + NF, \quad (2.135)$$

así como la ecuación de deconvolución de Euler de fase local con los diferentes operadores. En este caso se retoma la ecuación del método EULD-TDX:

$$x' \frac{\partial \text{TDX}}{\partial x} + y' \frac{\partial \text{TDX}}{\partial y} + z' \frac{\partial \text{TDX}}{\partial z} = x \frac{\partial \text{TDX}}{\partial x} + y \frac{\partial \text{TDX}}{\partial y}. \quad (2.136)$$

Para realizar la corrección en profundidad, se sigue la metodología descrita a continuación:

1. Se resuelve el sistema de ecuaciones del método EULD-TDX (2.136), con el propósito de obtener una estimación precisa de las fuentes potenciales en planta. Las coordenadas resultantes $[x'_{\text{TDX}}, y'_{\text{TDX}}, z'_{\text{TDX}}]$ se almacenan para su uso posterior.
2. Dado que se requiere recuperar información a profundidad y reducir el grado de decaimiento, es necesario resolver el sistema de ecuaciones (2.135), cuyas incógnitas corresponden a la posición de la fuente (x', y', z') y el campo ambiental B . Para evitar la dependencia de un índice estructural predefinido, éste se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones (2.108), donde N se despeja utilizando las coordenadas de la fuente obtenidas en el paso anterior. La ecuación resultante es:

$$N \frac{\partial F}{\partial z} = (x - x'_{\text{TDX}}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - (y - y'_{\text{TDX}}) \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + z'_{\text{TDX}} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (2.137)$$

El sistema lineal de ecuaciones se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_v}{\partial x} \end{bmatrix} [N] = \begin{bmatrix} x'_{\text{TDX}_1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} - x_1 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + y'_{\text{TDX}_1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - y_1 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} + z'_{\text{TDX}_1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ x'_{\text{TDX}_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - x_2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + y'_{\text{TDX}_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} - y_2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} + z'_{\text{TDX}_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \vdots \\ x'_{\text{TDX}_v} \frac{\partial^2 F_v}{\partial x \partial z} - x_1 \frac{\partial^2 F_v}{\partial x \partial z} + y'_{\text{TDX}_v} \frac{\partial^2 F_v}{\partial y \partial z} - y_v \frac{\partial^2 F_v}{\partial y \partial z} + z'_{\text{TDX}_v} \frac{\partial^2 F_v}{\partial z^2} - \frac{\partial F_v}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.138)$$

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones (2.135) para recuperar información a profundidad, utilizando el índice estructural previamente calculado para cada solución. El campo ambiental B_F se guarda para ser utilizado en el siguiente paso.
4. Dado que los campos F y TDX corresponden a la misma fuente en el mismo dominio de observación en el plano $[X \ Y]$, la corrección en profundidad se lleva a cabo resolviendo el sistema de ecuaciones (2.135). La profundidad corregida, denominada z'_{cor} , se evalúa en la posición en planta $[x'_{\text{TDX}}, y'_{\text{TDX}}]$, utilizando el campo ambiental B_F . La ecuación a resolver es:

$$z'_{\text{cor}} \frac{\partial F}{\partial z} = (x - x'_{\text{TDX}}) \frac{\partial F}{\partial x} + (y - y'_{\text{TDX}}) \frac{\partial F}{\partial y} - N (B_F - F). \quad (2.139)$$

El sistema lineal de ecuaciones se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_v}{\partial x} \end{bmatrix} [Z'_{\text{cor}}] = \begin{bmatrix} x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} - x'_{\text{TDX}_1} \frac{\partial F_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} - y'_{\text{TDX}_1} \frac{\partial F_1}{\partial y} - N_1 B_{F_1} + N_1 F_1 \\ x_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} - x'_{\text{TDX}_2} \frac{\partial F_2}{\partial x} + y_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} - y'_{\text{TDX}_2} \frac{\partial F_2}{\partial y} - N_2 B_{F_2} + N_2 F_2 \\ \vdots \\ x_v \frac{\partial F_v}{\partial x} - x'_{\text{TDX}_v} \frac{\partial F_v}{\partial x} + y_v \frac{\partial F_v}{\partial y} - y'_{\text{TDX}_v} \frac{\partial F_v}{\partial y} - N_v B_{F_v} + N_v F_v \end{bmatrix}. \quad (2.140)$$

De esta forma, el sistema (2.140) se resuelve mediante el método de mínimos cuadrados, obteniéndose un sistema sobredeterminado si $v > 4$. Así, a partir de las estimaciones en planta $[x'_{\text{TDX}}, y'_{\text{TDX}}]$, calculadas mediante el método EULD-TDX, se determina la profundidad correspondiente en función del campo potencial F y del campo ambiental B_F . Por lo tanto, las soluciones de profundidad presentan un menor grado de decaimiento, lo que mejora la precisión en la recuperación de información a profundidad. El procedimiento se puede replicar aplicando los métodos EULD-Tilt y EULD-ETA.

El cálculo del índice estructural a partir de las estimaciones en planta del método EULD-TDX se inspira en los trabajos de Smith y Salem (2005), quienes, mediante números de onda locales, estimaron la profundidad y la geometría (IE) de las estructuras. Este enfoque ofrece un mapa detallado de las estructuras y del índice estructural que mejor se ajusta a datos magnéticos, sirviendo como guía en la selección o suposición del índice estructural adecuado. Por su parte, Salem et al. (2008) implementaron el cálculo del índice estructural como parte del criterio de selección de fuentes, utilizando las soluciones del método EULD-Tilt.

2.9 Modelado directo 3D

El modelado directo en geofísica consiste en predecir los valores de los campos físicos observables, como los campos gravitacionales o magnéticos, a partir de un modelo geológico previamente definido. Este modelo incluye las propiedades físicas del subsuelo, como la densidad o la susceptibilidad magnética, que generan los efectos observables en la superficie. El proceso de calcular los valores teóricos de estos campos físicos esperados se denomina problema directo (Ždanov, 2015).

En esta tesis, se utiliza el método de ensamblaje de prismas de Plouff (1976) para modelar y calcular el campo gravitacional. De manera similar, se emplea el método de Bhattacharyya (1964), que también usa prismas, para el modelado y cálculo del campo magnético. En ambos casos, los prismas se consideran homogéneos en sus propiedades físicas, y el análisis se realiza en un espacio libre de fuentes.

2.9.1 Modelado gravimétrico

Como se trató en la sección (2.2), los gravímetros miden la componente vertical del campo gravitacional, g_z . Por lo tanto, al considerar solamente esta componente (2.21) en el punto de observación P , se puede representar en coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} g_z(x, y, z) &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\gamma \int_V \rho \frac{(z - z')}{r^3} dv, \\ &= -\gamma \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \rho(x', y', z') \frac{(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (2.141)$$

donde $P(x, y, z)$ es el punto de observación, dv es un volumen de masa con densidad ρ en las coordenadas de la fuente (x', y', z') , γ representa la constante gravitacional, y $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ es la distancia entre el punto P y un elemento dv .

Para simplificar el cálculo de la ecuación (2.141), se considera un prisma rectangular con densidad constante ρ , cuyas dimensiones están delimitadas por los intervalos $x_1 \leq x' \leq x_2$, $y_1 \leq y' \leq y_2$, y $z_1 \leq z' \leq z_2$, como se observa en la figura (2.5). Además, el punto de observación se encuentra en el origen $P = (0, 0, 0)$, lo que permite que la ecuación se exprese como:

$$g_z = \gamma \rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} dx' dy' dz'. \quad (2.142)$$

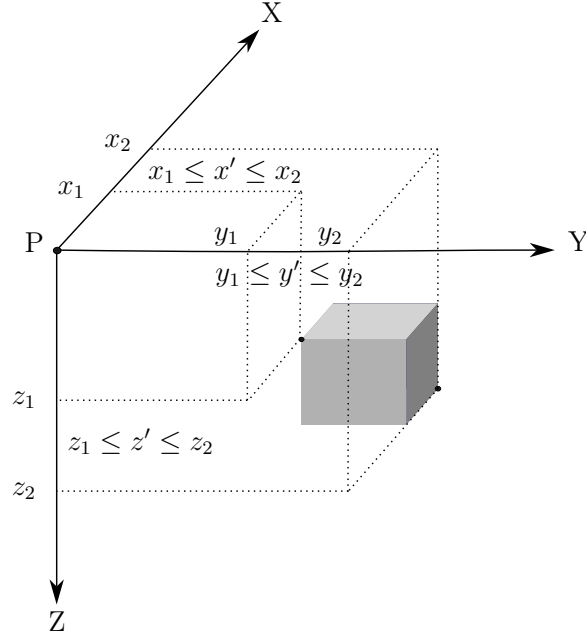


FIGURA 2.5: Modelo de un prisma rectangular elemental con densidad constante ρ , que genera un campo gravitacional y se observa desde cualquier punto (Plouff, 1976).

De manera numérica, es posible aproximar la integral de la componente vertical g_z del campo gravitacional generado por un prisma rectangular, observada desde cualquier punto en la superficie (Plouff, 1976):

$$g_z = \gamma \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan \left(\frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} \right) - x_i \log(R_{ijk} + y_j) - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \right], \quad (2.143)$$

donde:

$$R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2},$$

$$\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k.$$

2.9.2 Modelado magnético

Los magnetómetros suelen medir únicamente la intensidad escalar del campo geomagnético, conocido como campo magnético total $\vec{B}_T$. Para interpretar los datos de las observaciones del campo total, es necesario aplicar una corrección en la que la anomalía de campo total ΔB_T se obtiene restando la influencia del campo magnético generado por la Tierra, $\vec{B}_N$, a los datos del campo total $\vec{B}_T$:

$$\Delta B_T = |\vec{B}_T| - |\vec{B}_N|. \quad (2.144)$$

De acuerdo con Hinze (2013), los componentes del campo magnético terrestre pueden calcularse utilizando el Campo de Referencia Geomagnético Internacional (IGRF), que se fundamenta en mediciones de observatorios magnéticos y observaciones satelitales para estimar el campo magnético mediante series de armónicos esféricos. El campo magnético terrestre se descompone en sus componentes geográficas horizontales $B_{N(H)}$, donde $B_{N(X)}$ se dirige al norte y $B_{N(Y)}$ hacia el este, y la componente vertical $B_{N(Z)}$ se dirige hacia abajo en el eje Z. Las relaciones angulares entre $B_{N(Y)}$ y $B_{N(H)}$ definen la declinación D , y entre $B_{N(H)}$ y B_N definen la inclinación I . Los cosenos directores de estas componentes se expresan de la siguiente forma:

$$B_N = |\vec{B}_N| = \sqrt{B_{N(X)}^2 + B_{N(Y)}^2 + B_{N(Z)}^2}, \quad (2.145)$$

donde:

$$\begin{aligned} B_{N(X)} &= (B_N) \cos I \cos D, \\ B_{N(Y)} &= (B_N) \cos I \sin D, \\ B_{N(Z)} &= (B_N) \sin I. \end{aligned}$$

Si se considera que el campo magnético terrestre $\vec{B}_N$ es perturbado por una fuente magnética debido a variaciones en la magnetización de las rocas, generando un contraste $\Delta \vec{B}_N$, el campo total observado $\vec{B}_T$ puede reescribirse como:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_N + \Delta \vec{B}_N. \quad (2.146)$$

De forma estricta, la anomalía del campo total no es igual a la anomalía del campo terrestre, es decir, $\Delta B_T \neq |\Delta \vec{B}_N|$. Sin embargo, si consideramos que la anomalía del campo terrestre tiene una magnitud pequeña en comparación con el campo terrestre ($\vec{B}_N \gg \Delta \vec{B}_N$), entonces la anomalía del campo total se aproxima a la componente de la anomalía en la dirección del campo magnético terrestre y puede considerarse como una función armónica:

$$\Delta B_T \approx \hat{B}_N \cdot \Delta \vec{B}_N. \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned}
\Delta B_T = & -\frac{\mu_0}{4\pi} |\vec{M}| \left[\frac{\alpha_{23}}{2} \log \left(\frac{r_0 - x'}{r_0 + x'} \right) + \frac{\alpha_{13}}{2} \log \left(\frac{r_0 - y'}{r_0 + y'} \right) - \alpha_{12} \log(r_0 + z_1) \right. \\
& - \hat{M}_x \hat{B}_{N(x)} \arctan \left(\frac{x'y'}{x'^2 + r_0 z_1 + z_1^2} \right) - \hat{M}_y \hat{B}_{N(y)} \arctan \left(\frac{x'y'}{r_0^2 + r_0 z_1 - x'^2} \right) \\
& \left. + \hat{M}_z \hat{B}_{N(z)} \arctan \left(\frac{x'y'}{r_0 z_1} \right) \right] \bigg|_{x'=x_1}^{x'=x_2} \bigg|_{y'=y_1}^{y'=y_2}, \tag{2.149}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \hat{M}_x \hat{B}_{N(y)} + \hat{M}_y \hat{B}_{N(x)}, \\
\alpha_{13} &= \hat{M}_x \hat{B}_{N(z)} + \hat{M}_z \hat{B}_{N(x)}, \\
\alpha_{23} &= \hat{M}_y \hat{B}_{N(z)} + \hat{M}_z \hat{B}_{N(y)}, \\
r_0 &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z_1^2}, \\
\vec{M} &= M(\hat{M}_x \mathbf{i} + \hat{M}_y \mathbf{j} + \hat{M}_z \mathbf{k}), \\
\hat{B}_N &= (\hat{B}_{N(x)}, \hat{B}_{N(y)}, \hat{B}_{N(z)}).
\end{aligned}$$

Aquí, $\vec{M}$ es el vector de magnetización del prisma, $\hat{B}_N$ es el vector unitario en la dirección del campo terrestre, y r_0 representa la distancia del punto de observación a un elemento diferencial de volumen dv del prisma.

La ecuación (2.149) da una respuesta magnética de la anomalía del campo total de un prisma elemental de extensión vertical Z_1 a ∞ . Para obtener la respuesta de un prisma finito se debe evaluar dos veces la ecuación (2.149), una vez evaluado a una profundidad inicial Z_1 y una segunda vez evaluado a una mayor profundidad inicial Z_2 , y se realiza la diferencia de ambas ecuaciones para obtener la anomalía del campo total:

$$\Delta B_T = \Delta \vec{B}_{T1} - \Delta \vec{B}_{T2}.$$

2.9.3 Ensamble de prismas elementales

Para modelar un cuerpo complejo, se discretiza en N prismas elementales. Dado que el campo gravitacional y la anomalía del campo magnético cumplen con el principio de superposición, la respuesta gravimétrica g_z y magnética ΔB_T de un cuerpo puede calcularse como la suma de las respuestas individuales de los N prismas elementales, observadas desde el punto $P(x, y)$:

$$g_z(P) = \sum_{j=1}^N g_z^j(P), \quad (2.150)$$

$$\Delta B_T(P) = \sum_{j=1}^N \Delta B_T^j(P), \quad (2.151)$$

donde $g_z^j(P)$ y $\Delta B_T^j(P)$ representan las respuestas de la componente vertical del campo gravitacional y de la anomalía magnética, respectivamente, generadas por el j -ésimo prisma elemental en el punto de observación $P(x, y)$.

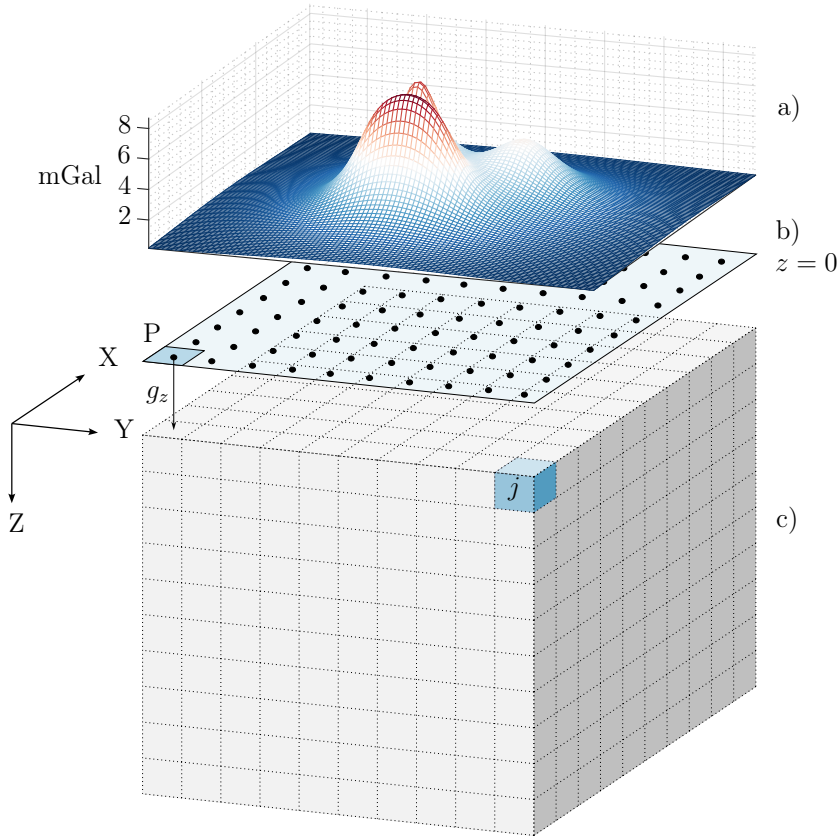


FIGURA 2.7: Ejemplo del modelado directo: a) Volumen discretizado en prismas elementales; b) Plano de observación $z = 0$; c) Anomalía gravimétrica g_z .

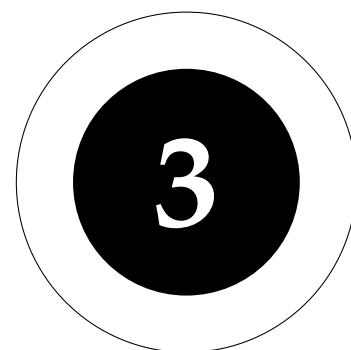
La respuesta del campo gravitacional se calcula en función del contraste de densidad $\Delta\rho$, que expresa la diferencia entre la densidad de la fuente y la del medio circundante:

$$\Delta\rho = \rho_{cuerpo} - \rho_{medio} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right].$$

Análogamente, la respuesta magnética se obtiene mediante el contraste de magnetización ΔM , definido como la diferencia entre la magnetización de la fuente y la del medio circundante:

$$\Delta M = M_{cuerpo} - M_{medio} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right].$$

En la figura (2.7) se ejemplifica el procedimiento utilizado en el modelado 3D. En la figura (2.7a) se muestra el espacio discretizado en prismas, donde se modela una estructura geológica simple. La figura (2.7b) representa el plano de observación, es decir, el lugar donde se realizan las mediciones del campo potencial generado por la estructura geológica; en un sentido práctico, corresponde a la superficie donde se adquieren los datos. Finalmente, en la figura (2.7c) se presenta la respuesta gravimétrica-magnetométrica, la cual se interpreta como una anomalía de campo potencial.



MÉTODOS, MODELADO Y OPERADORES

3.1 Modelado directo 3D

Dado que modelar una fuente potencial con forma irregular resulta extremadamente complejo en términos de parametrización, se opta por simplificar el cuerpo mediante figuras geométricas bien definidas que faciliten su cálculo. Entre las aproximaciones más comunes se encuentran las láminas poligonales horizontales, utilizadas por Talwani y Ewing (1960); los prismas elementales, empleado en los trabajos de Bhattacharyya (1964) y Plouff (1976); y los poliedros con facetas triangulares propuestos por Barnett (1976).

Posteriormente, se desarrolló la teoría unificada poliédrica de anomalías gravimagnéticas de Holstein (2002), que facilita la parametrización de cuerpos de geometría compleja mediante el uso de poliedros. Existen además enfoques alternativos, como la cuadratura gaussiana aplicada por Zhong et al. (2019), el empleo de integrales tipo Cauchy de Mohammadi et al. (2021), y métodos para el modelado de gravedad y magnetismo en el dominio de Fourier, como en el trabajo de Wang et al. (2023).

Como se revisó en la sección (2.9), para el modelado y cálculo del campo gravitacional se empleó el método de ensamblaje de prismas propuesto por Plouff (1976). De manera análoga, el campo magnético se modeló utilizando el enfoque desarrollado por Bhattacharyya (1964), basado igualmente en la descomposición del volumen en prismas rectangulares.

Toda la modelación numérica se realizó en MATLAB[®] R2023a, incluyendo el desarrollo e implementación de los algoritmos para ambos campos potenciales. Para ejecutar los cálculos se utilizó un equipo de cómputo con procesador Intel[®] Core[™] i9-13900KF y 64 GB de memoria RAM, permitiendo manejar modelos con un elevado número de prismas y resolución espacial. Además, se empleó la paquetería Parallel Computing Toolbox[™] de MATLAB[®], que permitió paralelizar partes del código y reducir significativamente los tiempos de ejecución, aprovechando la arquitectura multinúcleo del procesador.

3.1.1 Modelado gravimétrico

Para la implementación computacional de esta solución numérica del campo gravitacional g_z , se utilizó una subrutina denominada **gbox**, propuesta por Blakely (1995). Esta subrutina, originalmente desarrollada en lenguaje Fortran, fue adaptada por mí para el presente trabajo, utilizando MATLAB[®] R2023a. Los cálculos requieren los siguientes parámetros:

$$g_z = gbox(x_0, y_0, z_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \rho)$$

- Coordenadas del punto observación: (x_0, y_0, z_0) [km]
- Extensión volumétrica del prisma rectangular, definida por las coordenadas de sus vértices, como se muestra en la figura (2.5):
 - Extensión del prisma en dirección X: (x_1, x_2) [km]
 - Extensión del prisma en dirección Y: (y_1, y_2) [km]
 - Extensión del prisma en dirección Z: (z_1, z_2) [km]
- Densidad del prisma: ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]

De esta manera, se modela de forma directa la respuesta de la componente vertical del campo gravitacional g_z , producida por un prisma rectangular de densidad constante y uniforme, observado desde el punto $P(x, y)$.

3.1.2 Modelado magnético

Para la implementación computacional de esta solución numérica de la anomalía del campo total $\Delta\vec{B}_T$, se utilizó una subrutina denominada **mbox**, propuesta por Blakely (1995). Esta subrutina, originalmente desarrollada en lenguaje Fortran, fue adaptada por mí para el presente trabajo, utilizando MATLAB[®] R2023a. Los cálculos requieren los siguientes parámetros:

$$\Delta B_T = mbox(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, M_I, M_D, F_I, F_D, M)$$

- Coordenadas del punto observación: (x_0, y_0, z_0) [km]
- Extensión volumétrica del prisma rectangular, definida por las coordenadas de sus vértices:
 - Extensión del prisma en dirección X: (x_1, x_2) [km]
 - Extensión del prisma en dirección Y: (y_1, y_2) [km]
 - Extensión del prisma en dirección Z: (z_1, ∞) [km]
- Variables de la magnetización del prisma elemental:
 - Magnitud de magnetización: $M \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$
 - Inclinación: M_I [grados]
 - Declinación: M_D [grados]
- Variables del campo magnético terrestre (ambiental):
 - Inclinación: F_I [grados]
 - Declinación: F_D [grados]

De esta manera, se modela de forma directa la respuesta magnética de la anomalía del campo total ΔB_T , producida por un prisma rectangular finito con magnetización constante y uniforme, observado desde el punto $P(x, y)$.

3.2 Modelos sintéticos

Los modelos sintéticos tridimensionales de fuentes gravimétricas y magnéticas se utilizan para recrear las características de un medio conocido, con el objetivo de tener un control total sobre las condiciones y parámetros involucrados, como la densidad, geometría y ubicación de las fuentes. De esta manera, se pueden probar algoritmos y métodos de estudio, evaluando sus ventajas y limitaciones en un entorno controlado. Este tipo de modelado es de particular utilidad para validar herramientas de procesamiento de datos antes de su aplicación a datos reales, donde las condiciones son desconocidas.

En la presente tesis, se crearon dos modelos sintéticos, tanto gravimétrico como magnético. El primero es un modelo prismático, denominado MC, que simula una estructura regional. El segundo es un modelo conocido como MS, que posee características geométricas más complejas.

3.2.1 Modelo sintético MC

Para simular estructuras geométricas simples, como en el caso de un prisma, se recreó el modelo propuesto por Chen et al. (2022), que simula una respuesta gravimétrica regional. Debido a su geometría, el modelo ofrece una respuesta potencial clara, proporcionando un entorno ideal para implementar los algoritmos desarrollados. En la Tabla (3.1) se presentan las características del modelo MC, junto con las propiedades físicas utilizadas para el cálculo de las anomalías gravimétrica y magnética. Para su construcción, el espacio se discretizó en 8,000 prismas elementales ($20 \times 20 \times 20$ en las direcciones X, Y y Z, respectivamente). En la Figura (3.2) se ilustra el modelo desde diferentes ángulos.

Modelo	Cuerpo	$\Delta\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	$\Delta m \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$	$\mathbf{F_I}, \mathbf{F_D}$	$\mathbf{M_I}, \mathbf{M_D}$	Dimensiones $\mathbf{x,y,z}$ [km]	Profundidad [km]
MC	Prisma A	450	0.5	$90^\circ, 0^\circ$	$90^\circ, 0^\circ$	$100 \times 100 \times 30$	5.0 – 35.0

TABLA 3.1: Parámetros utilizados para la creación del modelo MC, así como de las propiedades físicas para el cálculo de la anomalía gravimétrica y magnética.

En el plano de observación $z = 0$, se definió una malla regular de 122,500 puntos de adquisición (350×350 en las direcciones X y Y) en un área total de $160,000 \text{ [km}^2\text{]}$. El tiempo total de cálculo computacional fue de 87.38 [s] para la respuesta gravimétrica, mientras que para la respuesta magnética se tuvo un tiempo de 95.77 [s]. El sistema de referencia utilizado consiste en orientar el eje X hacia el este, representando las coordenadas de longitud, mientras que el eje Y se orienta hacia el norte, simulando las coordenadas de latitud.

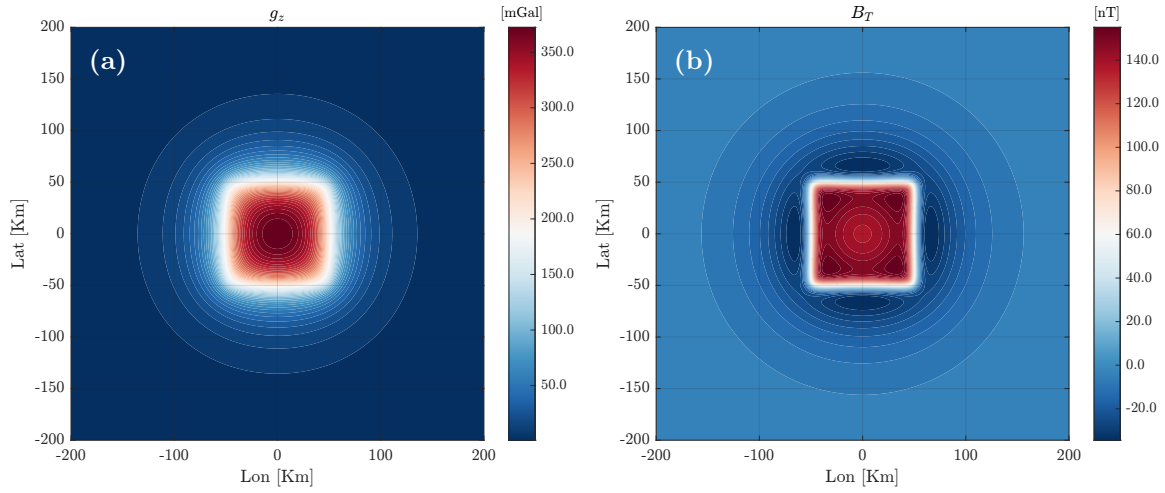


FIGURA 3.1: Modelo MC: (a) Respuesta gravimétrica; (b) Respuesta magnética.

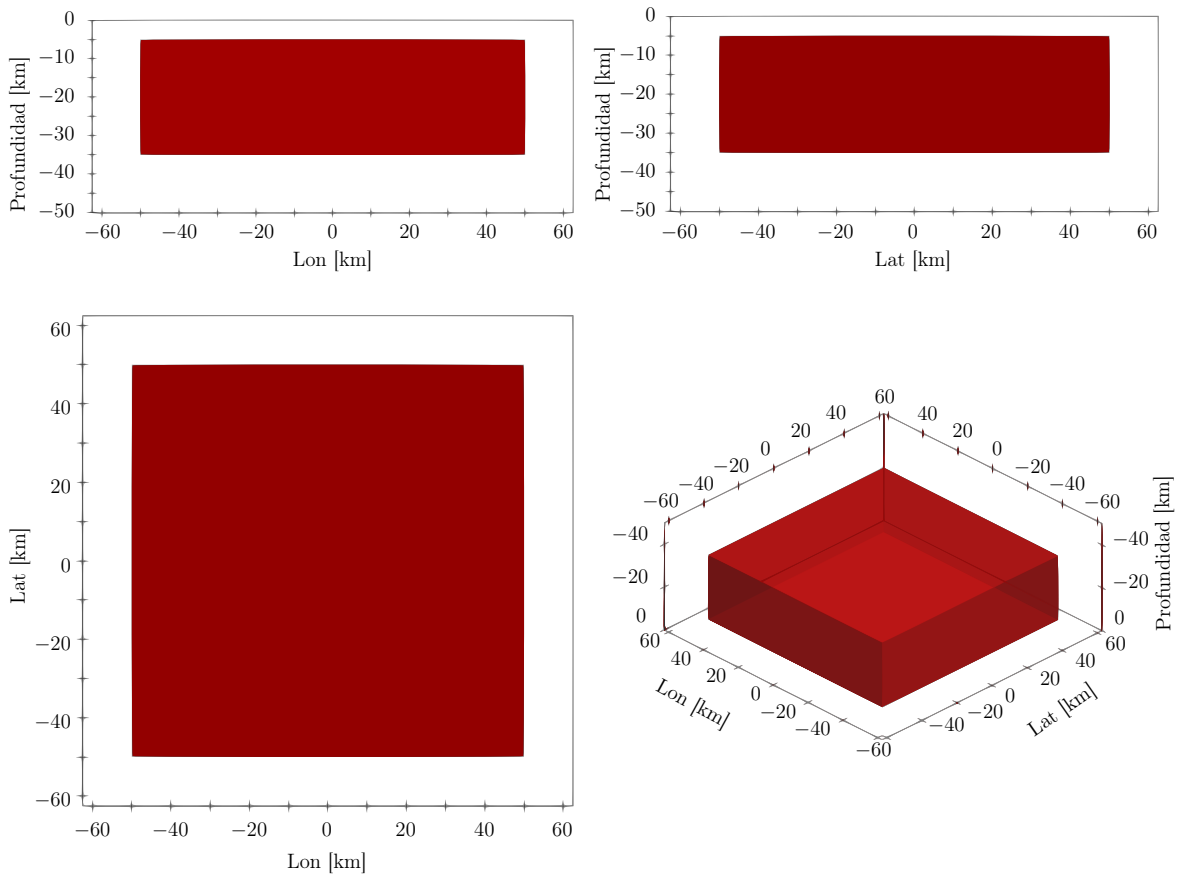


FIGURA 3.2: Diferentes perspectivas de visualización del modelo MC: (a) Perspectiva ZX; (b) Perspectiva ZY; (c) Perspectiva XY; (d) Perspectiva oblicua.

3.2.2 Modelo sintético MS

El segundo modelo implementado es conocido como MS, propuesto originalmente por Vera-Chávez (2015) y adaptado más recientemente por Negrete-Juárez (2022). La particularidad de este modelo radica en que ofrece una respuesta del campo potencial tanto en superficie como en profundidad. Debido a su distribución geométrica, la respuesta superficial tiende a eclipsar la respuesta en profundidad, lo que dificulta su interpretación. En la tabla (3.2) se presentan los parámetros y propiedades físicas utilizadas para la creación del modelo y el cálculo de la anomalía gravimétrica y magnética. Para su construcción, el espacio se discretizó en 20,000 prismas elementales ($20 \times 20 \times 50$ en las direcciones X, Y y Z, respectivamente). En la Figura (3.4) se ilustra el modelo desde diferentes ángulos.

Modelo	Cuerpo	$\Delta\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	$\Delta m \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$	$\mathbf{F_I}, \mathbf{F_D}$	$\mathbf{M_I}, \mathbf{M_D}$	Dimensiones $\mathbf{x,y,z}$ [km]	Profundidad [km]
MS	Prisma A	450	0.02	$90^\circ, 0^\circ$	$90^\circ, 0^\circ$	$3 \times 3 \times 6$	0.2 – 6.2
	Prisma B	450	0.02	$90^\circ, 0^\circ$	$90^\circ, 0^\circ$	$3 \times 3 \times 3$	3.2 – 6.2
	Prisma C	450	0.02	$90^\circ, 0^\circ$	$90^\circ, 0^\circ$	$3 \times 3 \times 6$	3.2 – 9.2

TABLA 3.2: Parámetros utilizados para la creación del modelo MS, así como de las propiedades físicas para el cálculo de la anomalía gravimétrica y magnética.

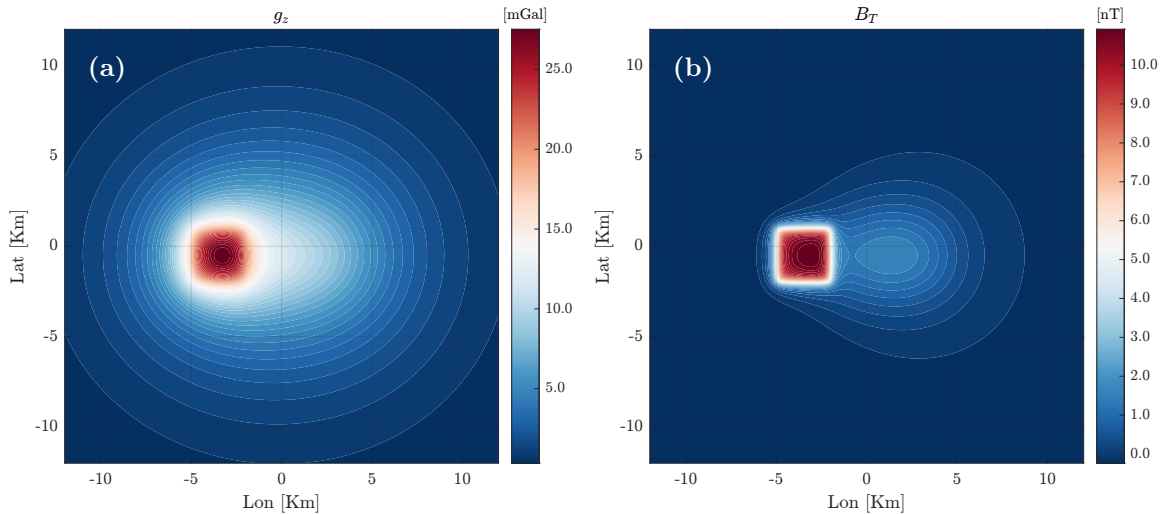


FIGURA 3.3: Modelo MS: (a) Respuesta gravimétrica; (b) Respuesta magnética.

En el plano de observación $z = 0$, se definió una malla regular de 122,500 puntos de adquisición (350×350 en las direcciones X y Y) en un área total de $576 \text{ [km}^2\text{]}$. El tiempo total de cálculo computacional fue de 153.25 [s] para la respuesta gravimétrica, mientras que para la respuesta magnética se presentó un tiempo de 174.68 [s]. El sistema de referencia utilizado consiste en orientar el eje X hacia el este, representando las coordenadas de longitud, mientras que el eje Y se orienta hacia el norte, simulando las coordenadas de latitud.

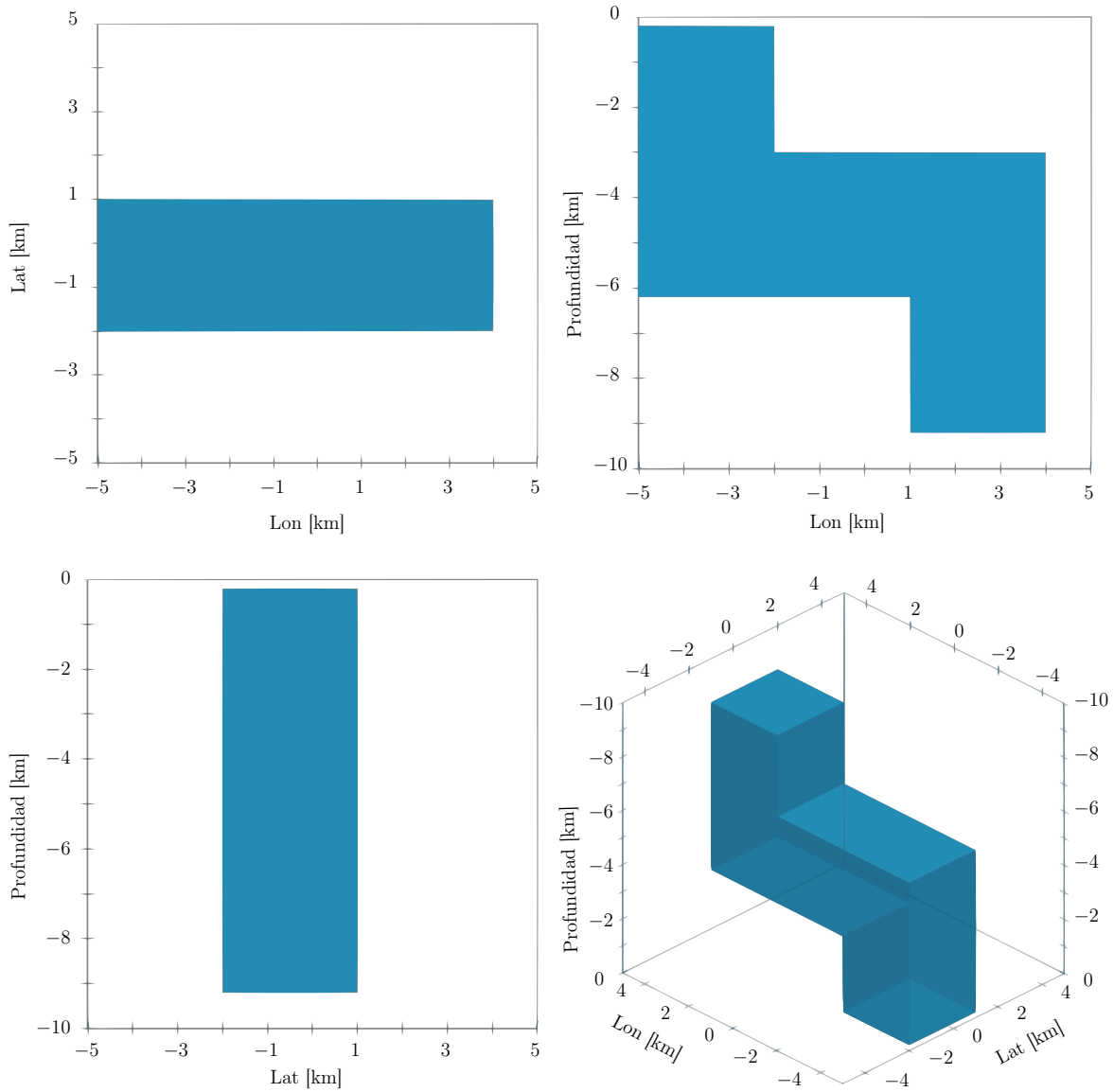


FIGURA 3.4: Diferentes perspectivas de visualización del modelo MS: (a) Perspectiva XY; (b) Perspectiva ZX; (c) Perspectiva ZY; (d) Perspectiva oblicua.

3.3 Aplicación de los operadores de realce de bordes

En la sección (2.5) se abordó la formulación teórica de los operadores de realce de bordes empleados en el desarrollo de este trabajo: amplitud del gradiente horizontal (HGA), ecuación (2.87); amplitud de la señal analítica (ASA), ecuación (2.88); ángulo de inclinación (Tilt), ecuación (2.89); ángulo de inclinación normalizado (TDX), ecuación (2.90); ángulo de inclinación extendido (ETA), ecuación (2.91); y normalización del tensor con la derivada vertical (Nz), ecuación (2.92).

Las figuras (3.5) y (3.6) muestran las respuestas de los diferentes operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía gravimétrica y magnética del modelo MC, respectivamente. De forma similar, las figuras (3.7) y (3.8) presentan las respuestas de los operadores aplicados al modelo MS, tanto para la anomalía gravimétrica como para la magnética.

Por la naturaleza del modelo MC, se obtiene una respuesta potencial muy acentuada. En consecuencia, al aplicar los operadores, se identifica claramente la ubicación de los bordes de la anomalía. Se observa que los operadores HGA, ASA, TDX y ETA resaltan los bordes asociados a valores altos, de acuerdo con las unidades del operador: $[m\text{ Gal}/km]$ y $[n\text{ T}/km]$ para los operadores HGA y ASA, según corresponda a una anomalía gravimétrica o magnética, y $\pi/2$ [rad] para los operadores de fase local. En el caso de los operadores Tilt y Nz, se obtienen valores positivos cuando se está sobre la anomalía. Para el operador Tilt, los valores son negativos fuera de la anomalía y cercanos a cero en los bordes. En cambio, el operador Nz presenta una mayor selectividad, ya que fuera de la anomalía sólo se obtienen valores iguales a cero radianes.

Para el modelo MS, debido a su complejidad, se evidencian las limitaciones de los operadores aplicados. Los operadores HGA y ASA sólo permiten detectar la parte somera de la anomalía, tanto en el caso de la anomalía gravimétrica como en la magnética. Por otro lado, los operadores de fase local logran detectar las estructuras más profundas, aunque con una deformación de los límites, que suelen adoptar una forma redondeada que amplía el área con respecto a la ubicación original de los bordes del modelo.

Un caso particular a analizar es el comportamiento de los operadores TDX y ETA para el modelo gravimétrico MS, mostrados en las figuras (3.7d) y (3.7e), respectivamente. En el caso del cuerpo somero (A), sus límites no se asocian a valores pico cercanos a $\pi/2$ [rad], sino a valores próximos a $\pi/4$ [rad] para el operador TDX y a $\pi/3$ [rad] para el operador ETA, lo que genera una sobrestimación respecto al valor real del modelo y a una errónea interpretación.

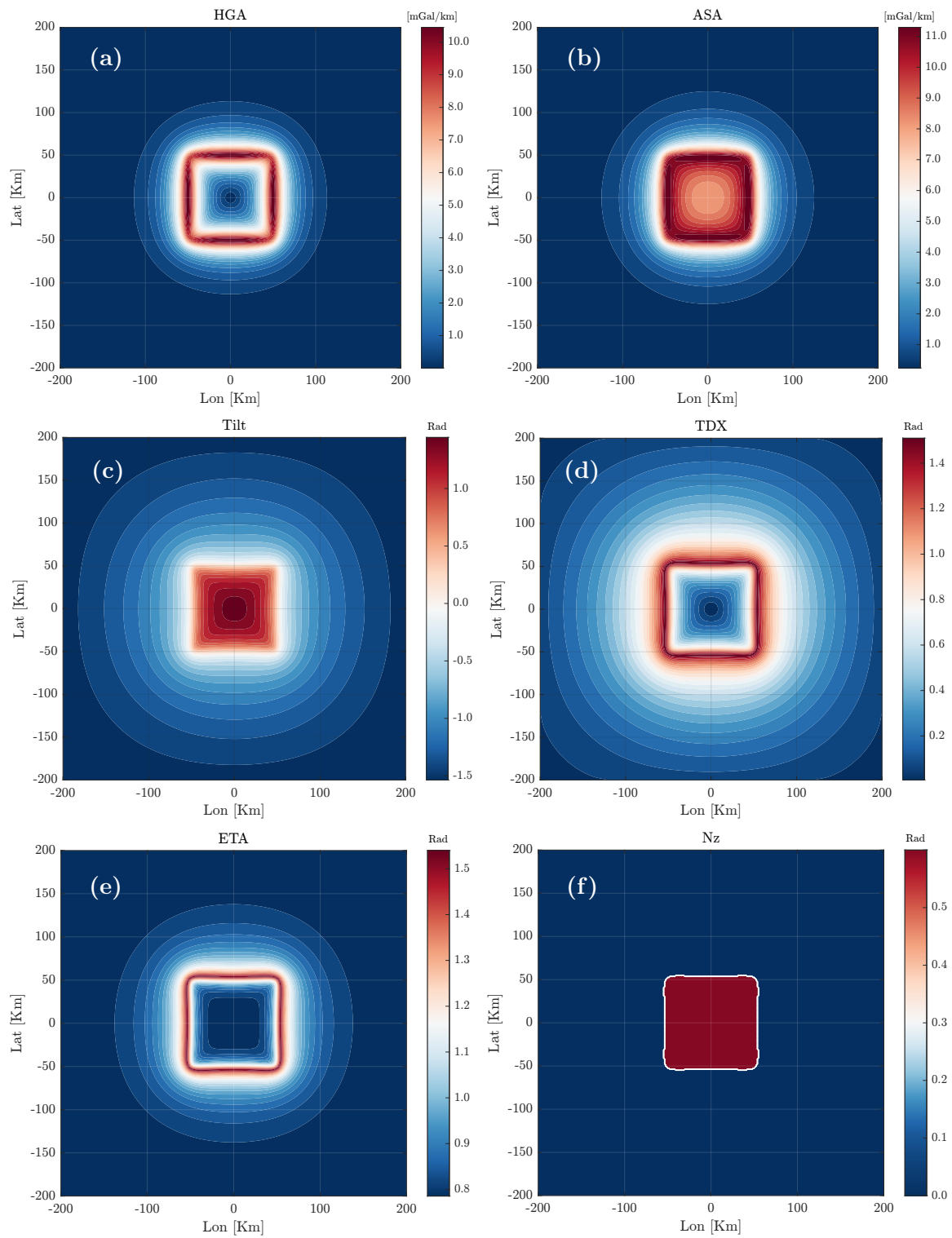


FIGURA 3.5: Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía gravimétrica del modelo MC: (a) HGA; (b) ASA; (c) Tilt; (d) TDX; (e) ETA; (f) Nz.

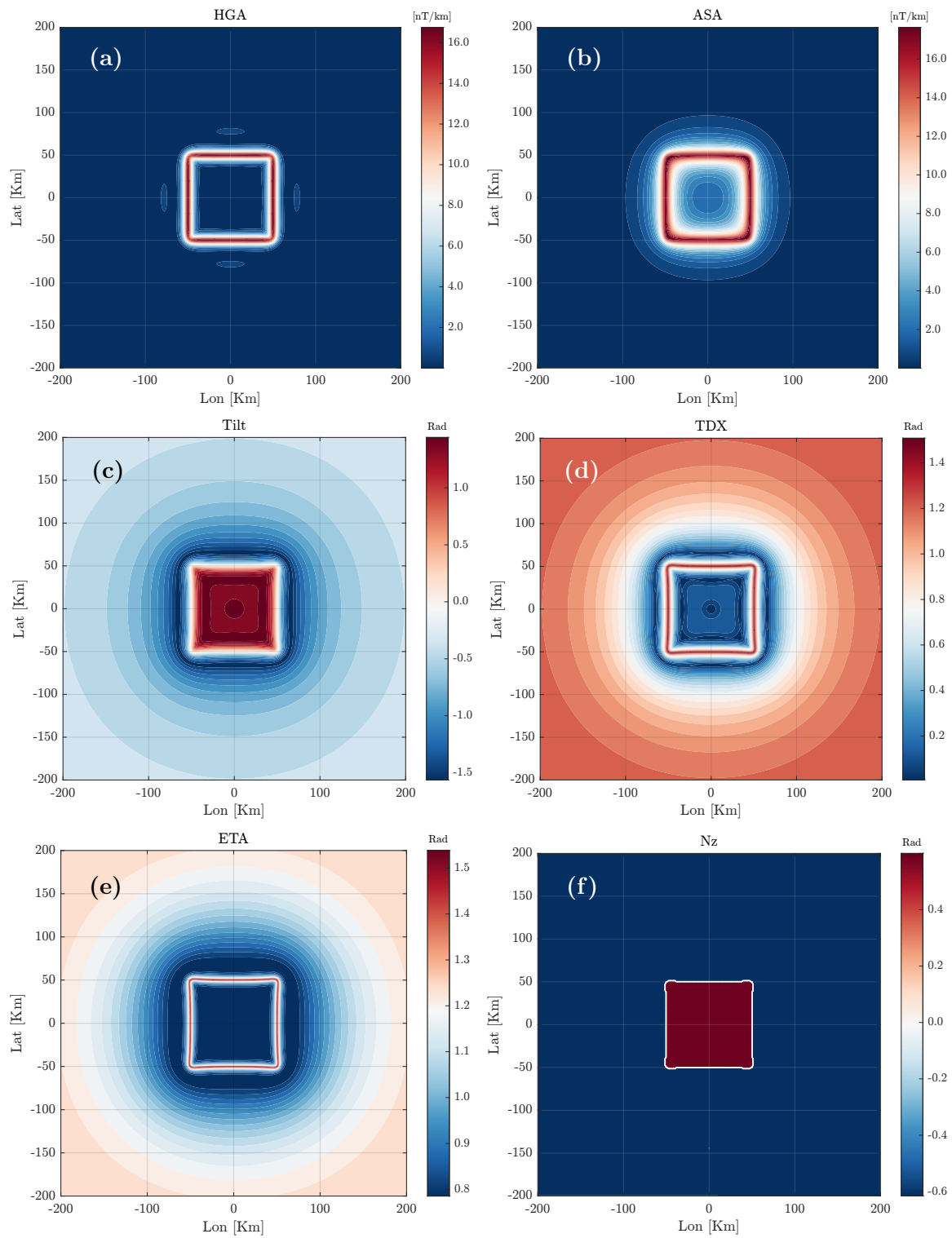


FIGURA 3.6: Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía magnética del modelo MC: (a) HGA; (b) ASA; (c) Tilt; (d) TDX; (e) ETA; (f) Nz.

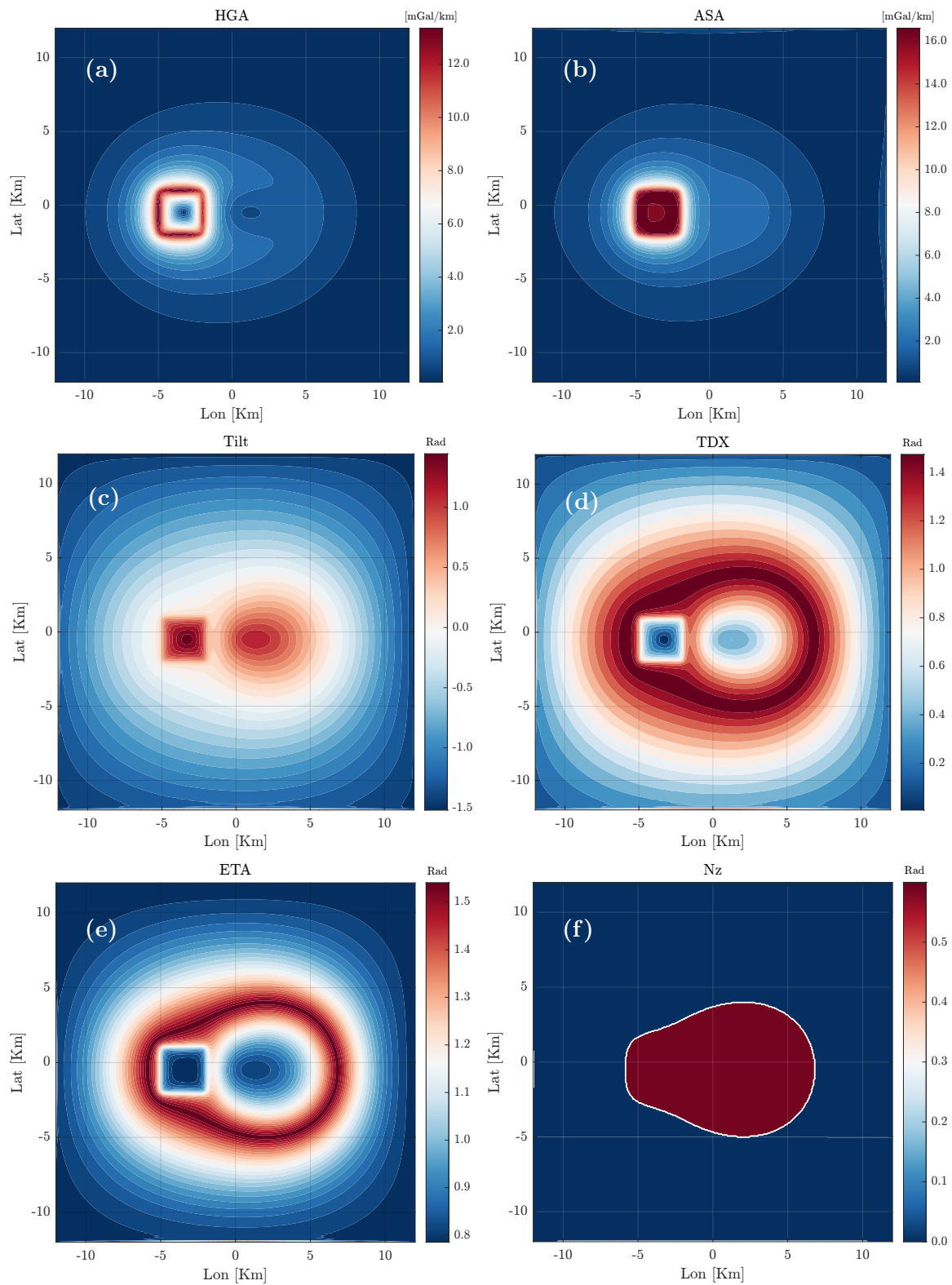


FIGURA 3.7: Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía gravimétrica del modelo MS: (a) HGA; (b) ASA; (c) Tilt; (d) TDX; (e) ETA; (f) Nz.

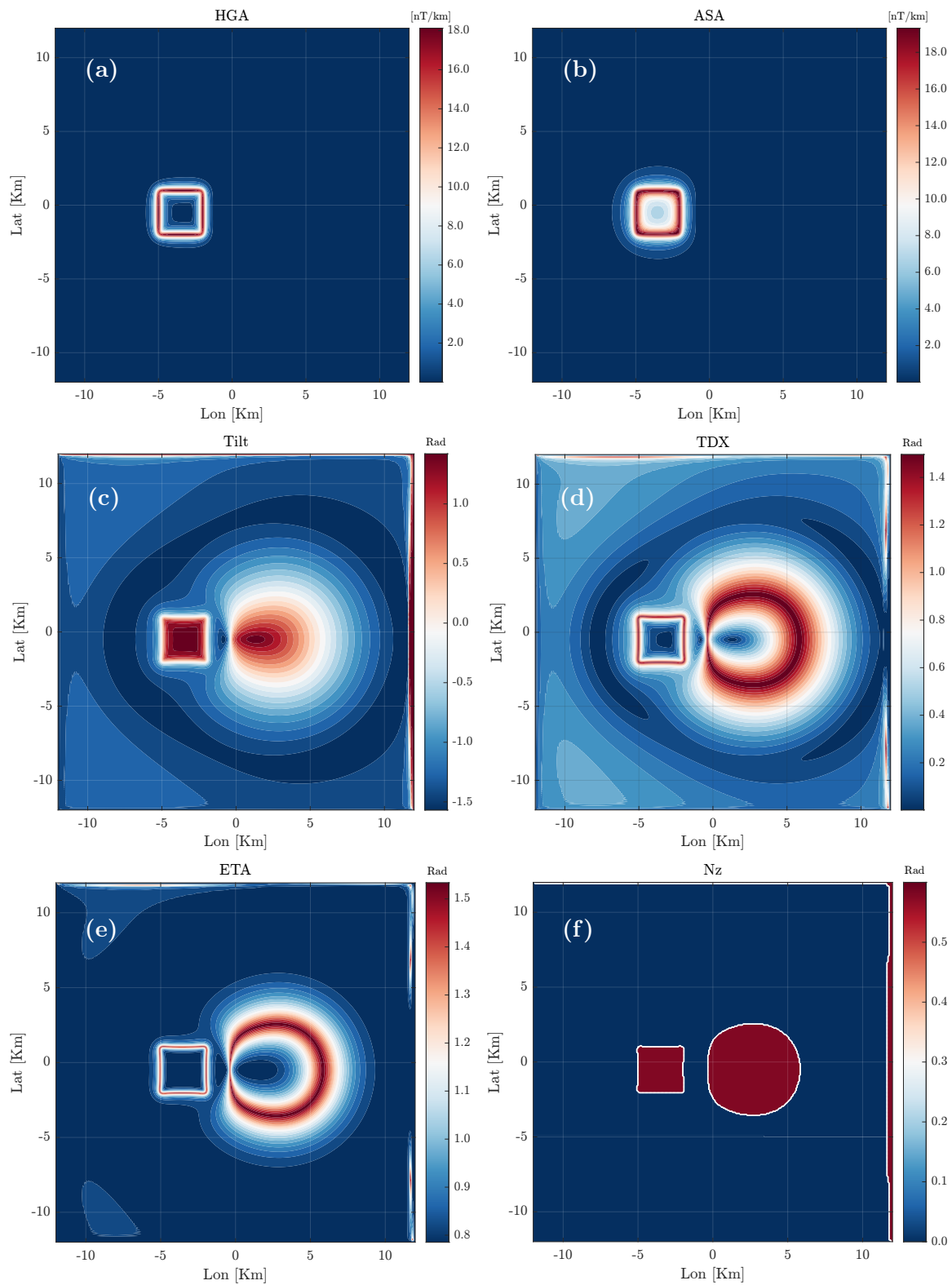


FIGURA 3.8: Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía magnética del modelo MS: (a) HGA; (b) ASA; (c) Tilt; (d) TDX; (e) ETA; (f) Nz.

3.4 Soluciones de la deconvolución de Euler (EULDPH)

Como se trató en la sección (2.6.1), la ecuación de deconvolución de Euler para una fuente potencial $F(x, y)$ medida en el punto de observación $P(x, y)$, considerando un índice estructural N , se expresa de la siguiente manera:

$$x' \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} + NB = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + NF. \quad (3.1)$$

En esta ecuación, las incógnitas son las posiciones de la fuente x', y', z' , así como el campo ambiental B . El sistema lineal de ecuaciones a resolver puede representarse de forma matricial como:

$$G_{ij}m_j = d_i, \quad (3.2)$$

donde:

- $d_i = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T$ son los datos observados.
- $m_j = [m_1, m_2, \dots, m_L]^T$ representa los parámetros del modelo.
- G_{ij} es un operador lineal de dimensión $N \times L$, conocido como kernel o matriz de sensibilidad (Nava-Flores, 2010).

Sustituyendo la ecuación de deconvolución de Euler (3.1) en el sistema lineal de ecuaciones (3.2), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} & N_1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} & N_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_v}{\partial x} & \frac{\partial F_v}{\partial y} & \frac{\partial F_v}{\partial z} & N_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + N_1 F_1 \\ x_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} + y_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + N_2 F_2 \\ \vdots \\ x_v \frac{\partial F_v}{\partial x} + y_v \frac{\partial F_v}{\partial y} + N_v F_v \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

donde v representa el tamaño de la ventana móvil en las direcciones x y y . Si $v = 4$, se obtiene un sistema determinado con igual número de ecuaciones e incógnitas. Sin embargo, si $v > 4$, el sistema se convierte en sobredeterminado, lo que es común usar en la mayoría de los casos. La solución del sistema mediante mínimos cuadrados es:

$$m_{est} = (G^T G)^{-1} G^T d, \quad (3.4)$$

donde m_{est} es el vector columna que contiene las soluciones estimadas para las posiciones en las coordenadas x' , y' , z' de la fuente, así como del campo ambiental B .

3.4.1 Selección de fuentes: Thompson

Los resultados de la ecuación (3.4), al proceder de un sistema sobredeterminado, se aplica un criterio de selección de fuentes. El criterio de selección propuesto por Thompson (1982) para la deconvolución de Euler se basa en la evaluación de la incertidumbre asociada a las estimaciones de profundidad. Al resolver el sistema sobredeterminado de ecuaciones mediante el método de mínimos cuadrados, se obtiene una estimación de la profundidad z' junto con su desviación estándar σ_z . Para aceptar una estimación, se emplea la siguiente desigualdad empírica:

$$TOL \leq \frac{z'}{N\sigma_z}, \quad (3.5)$$

donde:

- TOL es una tolerancia ajustada por el intérprete según la calidad de los datos.
- z' es la estimación de la profundidad.
- N es el índice estructural.
- σ_z es la desviación estándar de la profundidad estimada.

De acuerdo con Menke (2018), para cada observación se asocia un error de predicción como $e_i = d_i^{obs} - d_i^{pre}$. La solución con mejor ajuste corresponde a aquella cuyos parámetros del modelo conducen al menor error general E , definido como:

$$E = \sum_{i=1}^N e_i^2 = e^T e,$$

donde el error general se expresa como la suma de los cuadrados de los errores individuales, que, a su vez, puede representarse como el cuadrado de la longitud euclidiana del vector e .

Cuando los datos presentan una distribución caracterizada por una matriz de covarianza $[cov d]$, y bajo la suposición de que los datos no están correlacionados y tienen la misma varianza σ_d^2 , la matriz de covarianza para el ajuste por mínimos cuadrados se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$[cov m] = \sigma_d^2 [G^T G]^{-1}.$$

Para calcular la varianza σ_d^2 , una estimación razonable se define a través del error general dividido entre el número de errores individuales:

$$\sigma_d^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2.$$

De esta forma, la covarianza puede representarse como una matriz cuadrada de 4×4 , en la cual la incertidumbre asociada a las estimaciones de las fuentes en las coordenadas x , y y z se encuentra localizada en la diagonal principal, en las posiciones C_{xx} , C_{yy} y C_{zz} , respectivamente:

$$[cov\ m] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} & C_{xB} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} & C_{yB} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} & C_{zB} \\ C_{Bx} & C_{By} & C_{Bz} & C_{BB} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la desviación estándar de la estimación de profundidad σ_z se determina calculando la raíz cuadrada del tercer elemento de la diagonal principal de la matriz de covarianza (Beiki, 2010):

$$\sigma_z = \sqrt{[cov\ m(3, 3)]}.$$

De esta manera, el criterio de Thompson se encuentra directamente relacionado con la desviación estándar. Al incrementar la tolerancia, se obtienen estimaciones más restringidas, las cuales presentan una menor desviación estándar y, por lo tanto, mayor confiabilidad. En la práctica, por lo general, se utiliza una tolerancia más alta para determinar la ubicación superior de la anomalía, ya que las soluciones relacionadas a mayor profundidad se presenta una menor certeza y fiabilidad.

Otro factor que influye en la determinación de las soluciones es el tamaño de la ventana móvil. Según Reid et al. (1990), una ventana pequeña permite delinear fuentes poco profundas, como rocas volcánicas intrasedimentarias, mientras que una ventana más grande facilita la identificación de fuentes más profundas, como las asociadas al basamento o a la isoterma del punto de Curie.

Para la implementación computacional del proceso de deconvolución de Euler con criterio de Thompson, desarrollé una subrutina en lenguaje MATLAB[®] R2023a denominada **EULDPHT**. La función está diseñada para operar sobre dominios discretizados, obteniendo mayor estabilidad en los cálculos.

$$XYZB = EULDPHT(Data, xdata, ydata, Nx, Ny, dx, dy, X, Y, Tv, IE, TOL) \quad (3.6)$$

- Datos observados del campo potencial
 - Magnitud del campo potencial observado: $Data$ [mGal/nT]
 - Coordenadas en dirección X: $xdata$ [km]
 - Coordenadas en dirección Y: $ydata$ [km]
 - Número de observaciones en dirección X: Nx
 - Número de observaciones en dirección Y: Ny
 - Discretización en dirección X: dx
 - Discretización en dirección Y: dy
- Direcciones transformadas a un dominio estable (Enteros)
 - Discretización en dirección X: X
 - Discretización en dirección Y: Y
- Tamaño de la ventana de análisis: Tv
- Índice estructural: IE
- Tolerancia para aceptación de soluciones: TOL

De esta manera, se obtienen las estimaciones de las posibles fuentes del campo potencial en las coordenadas (x, y, z) , y el campo ambiental B . La función devuelve una matriz con 4 columnas, donde cada fila representa una solución espacial.

3.4.1.1 Pruebas en modelos sintéticos

El desarrollo del método de deconvolución de Euler fue realizado por Thompson (1982) para perfiles de datos magnéticos, y más tarde, Reid et al. (1990) propusieron una metodología para su implementación en datos de cuadrícula, facilitando su uso en mapas de interpretación. Para implementar la ecuación (3.1), se requiere información a priori, como el índice estructural, que describe la geometría de la fuente.

Como se planteó en la tabla (2.2), el índice estructural de una fuente gravimétrica que corresponde a un contacto es $N = -1$, mientras que para una fuente magnética es $N = 0$.

Estos valores se emplean en los modelos MC y MS, respectivamente, según la naturaleza de la fuente potencial analizada. En las figuras (3.9) y (3.12) se presentan los resultados de las profundidades estimadas por medio del método EULDPH, utilizando el criterio de Thompson, que por razones prácticas se denomina EULDPHT.

Modelo MC

Para el modelo MC, se convoluciona una ventana móvil de 15×15 elementos en el dominio de observación, obteniendo un total de 225 ecuaciones por ventana y un área de $293.877[\text{km}^2]$. En las figuras (3.9a - 3.9b) se presentan los resultados al aplicar EULDPHT para la fuente gravitacional, utilizando una tolerancia de $T = 50$.

- El histograma (3.10a) muestra que las estimaciones de profundidad para la fuente gravimétrica se encuentran en el rango $5.21[\text{km}] < z' < 21.23[\text{km}]$.
- Dado que la parte superior del modelo se localiza a $5[\text{km}]$ de profundidad y la parte inferior a $35[\text{km}]$, el 100 % de las soluciones se encuentran dentro del rango del modelo, aunque la profundidad superior se sobreestima en $0.21[\text{km}]$.
- En cuanto a las soluciones en planta, x' y y' , como se observa en la figura (3.9a) gran número de soluciones sobrestiman la ubicación original del modelo, lo que indica un desempeño limitado en este aspecto.

En las figuras (3.9c - 3.9d) se presentan los resultados al aplicar EULDPHT para la fuente magnética, utilizando una tolerancia de $T = 180$.

- El histograma (3.10b) indica que las estimaciones de profundidad para la fuente magnética se encuentran en el rango $4.45[\text{km}] < z' < 8.67[\text{km}]$.
- Dado que la parte superior del modelo se localiza a $5[\text{km}]$ de profundidad y la parte inferior a $35[\text{km}]$, el 98.67 % de las soluciones se encuentran dentro del rango del modelo, mientras que el 1.33 % se encuentran fuera de este. La profundidad superior se subestima en $0.55[\text{km}]$.
- En cuanto a las soluciones en planta, x' y y' , se observa una mayor concordancia con la ubicación original del modelo, lo que refleja un buen desempeño en este aspecto. Como se observa en la figura (3.9c), los límites del modelo están bien definidos por las soluciones en planta.

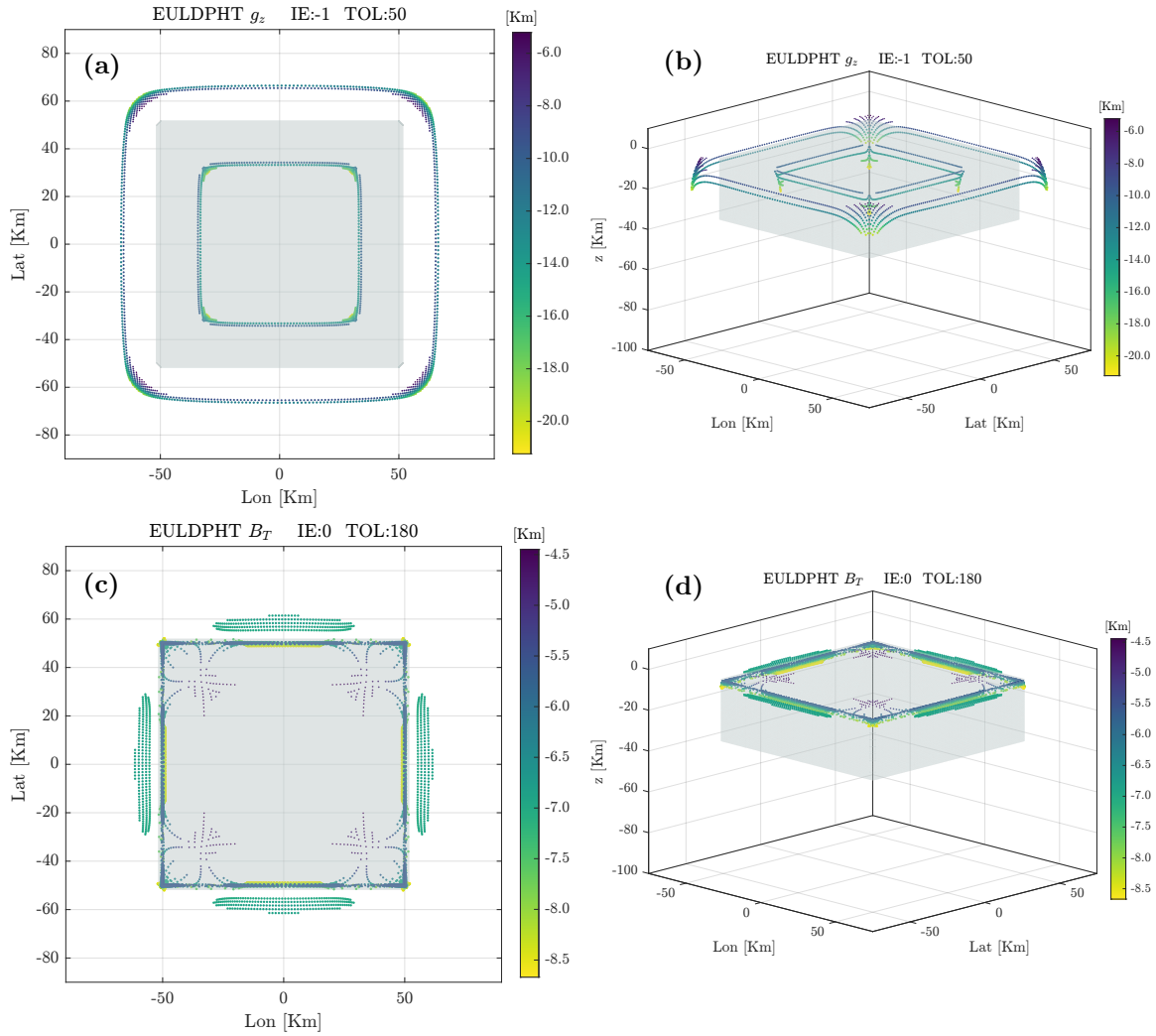


FIGURA 3.9: Profundidades obtenidas mediante el método EULDPHT para el modelo MC. (a)-(b) soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; (c)-(d) soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.

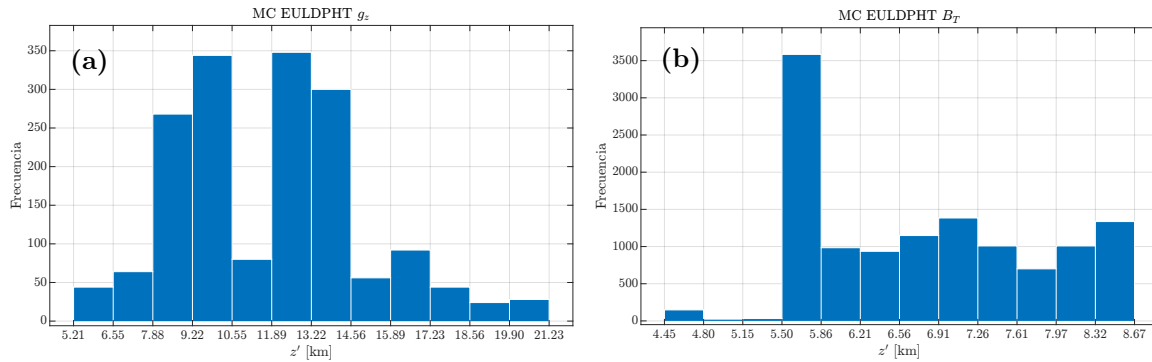


FIGURA 3.10: Histogramas de las profundidades estimadas mediante el método EULDPHT para el modelo MC. (a) fuente gravitacional; (b) fuente magnética.

Modelo MS

Para el modelo MS, se convoluciona una ventana móvil de 15×15 elementos en el dominio de observación, obteniendo un total de 225 ecuaciones por ventana y un área de $1.05[\text{km}^2]$. En las figuras (3.12a - 3.12b) se presentan los resultados al aplicar EULDPHT para la fuente gravitacional, utilizando una tolerancia de $T = 180$. Cabe destacar que el modelo MS presenta una mayor complejidad, ya que corresponde a la unión de tres prismas (Tabla 3.2).

- El histograma (3.11a) muestra que las estimaciones de profundidad para la fuente gravimétrica se encuentran en el rango $0.37[\text{km}] < z' < 8.46[\text{km}]$, con una mayor concentración de soluciones entre $0.37[\text{km}]$ - $1.04[\text{km}]$ de profundidad, las cuales pueden correlacionarse con el prisma somero A del modelo.
- Un segundo conjunto significativo de soluciones se encuentra entre $1.72[\text{km}]$ - $3.74[\text{km}]$ de profundidad, que puede asociarse con el prisma C.
- Dada la naturaleza compleja del modelo MS, resulta complicado establecer un rango único de profundidad aceptable para todas las soluciones. Sin embargo, se observa una sobreestimación en la parte superior del prisma A de $0.17[\text{km}]$, considerando que la parte superior del modelo se localiza a $0.2[\text{km}]$.
- Las soluciones correspondientes a la parte superior de los prismas más profundos, B y C, presentan una subestimación de $1.42[\text{km}]$.
- En cuanto a las soluciones en planta, x' y y' , la figura (3.12a) muestra una buena estimación respecto a la ubicación original del modelo, lo que indica un desempeño bueno en este aspecto.

En las figuras (3.12c - 3.12d) se presentan los resultados al aplicar EULDPHT para la fuente magnética, utilizando una tolerancia de $T = 60$.

- El histograma (3.11b) indica que las estimaciones de profundidad para la fuente magnética se encuentran en el rango $0.12[\text{km}] < z' < 2.34[\text{km}]$, con una mayor concentración de soluciones entre $0.12[\text{km}]$ - $0.31[\text{km}]$ de profundidad, las cuales pueden correlacionarse con el prisma somero A del modelo.
- El segundo conjunto significativo de soluciones se encuentra entre $1.41[\text{km}]$ - $1.78[\text{km}]$ de profundidad, que puede asociarse al prismas C.
- Dado que la parte superior del prisma A se localiza a $0.2[\text{km}]$, se observa una subestimación de la profundidad de $0.08[\text{km}]$.

- Las soluciones correspondientes a la parte superior del prisma C presentan una subestimación de 1.79[km].
- En cuanto a las soluciones en planta, x' y y' , la figura (3.12c) muestra, en general, una aceptable relación con la ubicación original del modelo. sin embargo, se identifican soluciones caóticas someras que reducen su desempeño.

Análisis sobre el desempeño de EUTDPHT

1. En fuentes gravitacionales, el método tiende a sobrestimar la ubicación superior de los modelos, aunque presenta una mejor capacidad para obtener soluciones a mayor profundidad.
2. En fuentes magnéticas, se observa una subestimación de la profundidad superior de los modelos y una limitada capacidad para obtener soluciones a mayor profundidad.
3. En cuanto a las soluciones en planta, el método muestra mejores resultados con fuentes magnéticas en comparación con fuentes gravimétricas.
4. Las soluciones en planta están estrechamente relacionadas con la selección adecuada del índice estructural (IE).
5. La tolerancia (TOL) es un valor no único que varía según la resolución de los datos y la naturaleza del campo potencial. Por lo general, se emplea una mayor tolerancia en fuentes magnéticas que en fuentes gravitacionales.

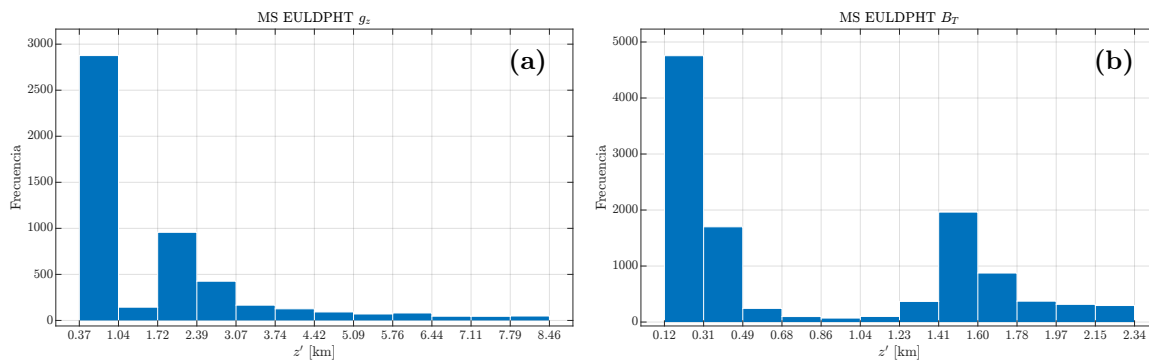


FIGURA 3.11: Histogramas de las profundidades estimadas mediante el método EULDPHT para el modelo MS. (a) fuente gravitacional; (b) fuente magnética.

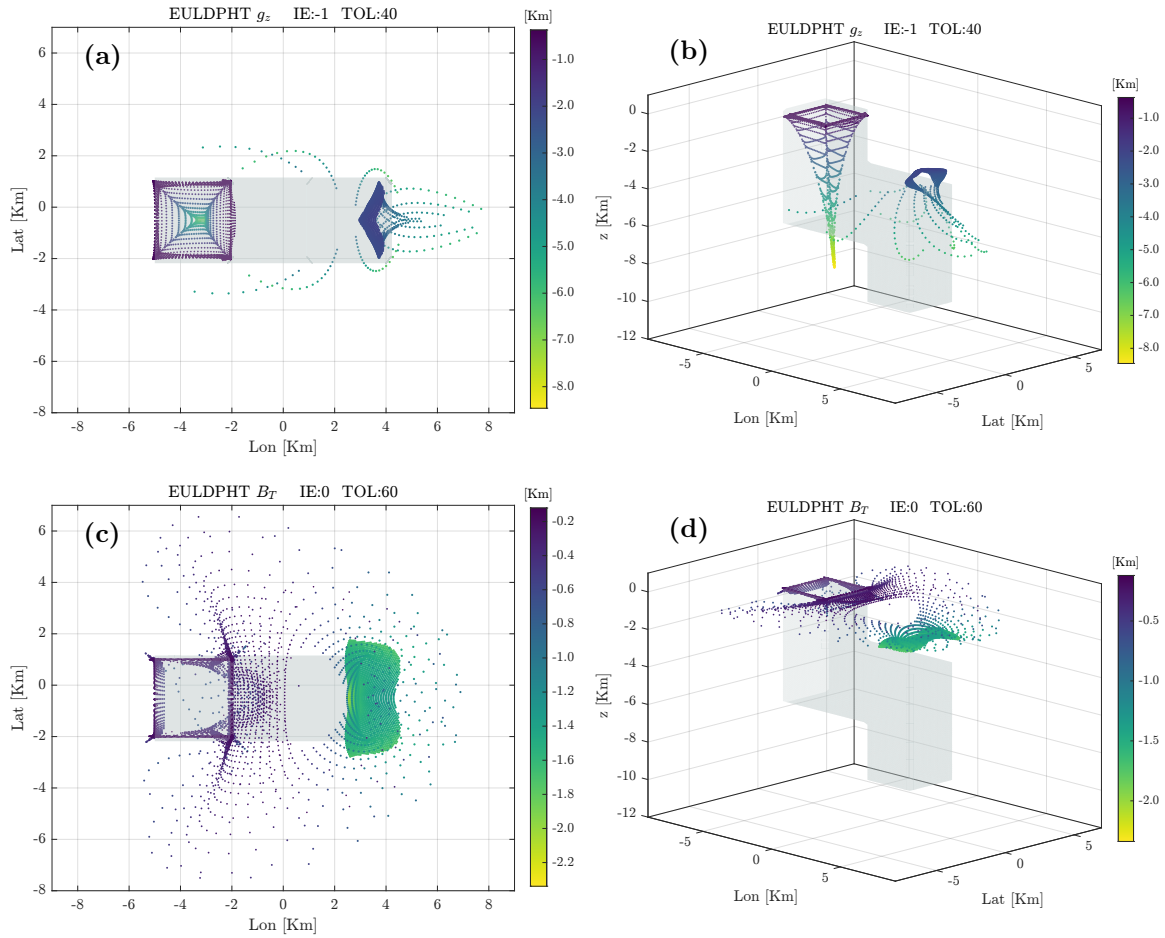


FIGURA 3.12: Profundidades obtenidas mediante el método EULDPHT para el modelo MS. (a)-(b) soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; (c)-(d) soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.

3.4.2 Selección de fuentes: Operadores de realce de bordes

Debido a la naturaleza sobredeterminada del método EULDPH, se pueden explorar otros criterios que permitan determinar la ubicación de la fuente potencial. En este contexto, los operadores de realce de bordes pueden actuar como un criterio alternativo para seleccionar las soluciones que mejor describen la geometría del modelo. Blakely y Simpson (1986) emplearon el gradiente horizontal de datos gravimétricos y magnéticos para identificar los valores máximos, los cuales se asocian a los bordes de la fuente. Por su parte, Salem et al. (2008) aplicaron el gradiente horizontal al ángulo de inclinación de datos magnéticos como criterio de selección de fuentes en su método de Euler-Tilt.

Como se indicó en la sección (2.5), los operadores se utilizan para caracterizar los límites laterales de las anomalías mediante la aplicación de gradientes horizontales y verticales a

datos de campos potenciales, ya sean gravitacionales o magnéticos. En este caso, se emplearon los operadores ASA, Tilt, TDX, ETA y Nz como criterios para la selección de fuentes. La implementación de estos operadores se realiza de la siguiente manera:

1. Se aplica el operador a los datos de fuente potencial, lo que permite determinar los límites de la fuente gravitacional o magnética. Además, se interpreta visualmente la geometría de la fuente.
2. Se determina el rango (R) que mejor describe los límites de la fuente. En el caso de los operadores que utilizan amplitudes de gradientes, como el operador ASA, se seleccionan los valores máximos o aquellos cercanos al valor pico. Las unidades correspondientes son [mGal/km] para fuentes gravitacionales y [nT/km] para fuentes magnéticas.
3. Para los operadores de fase local, cuyo dominio está restringido a [Rad], se eligen los valores que mejor representen los límites de las fuentes.
4. Se utiliza el operador como un criterio condicional en el tamaño de las ventanas empleadas en las deconvoluciones de Euler. Cada ventana se evalúa en función de si cumple con el rango previamente determinado.
5. Para evitar soluciones dispersas, se define un rango aceptable de desviación estándar.

Para la implementación computacional del proceso de deconvolución de Euler con operadores de realce de bordes, adapté la subrutina **EULDPHT**, creada en MATLAB[®], presentada en la sección (3.4.1), y desarrollé una nueva subrutina denominada **EULDPHO**. En esta versión, eliminé la variable de tolerancia (TOL) e incorporé las siguientes variables:

- Rango superior de aceptación: RS [rad]
- Rango inferior de aceptación: RI [rad]

3.4.2.1 Pruebas en modelos sintéticos

En ambos modelos, MC y MS, se utiliza el mismo tamaño de ventana móvil, de 15×15 elementos en el dominio de observación, lo que genera un total de 225 ecuaciones por ventana. En el caso del modelo MC, el área correspondiente es de 293.877 [km²], mientras que, para el modelo MS, el área es de 1.05 [km²] por ventana.

La tabla (3.3) presenta los parámetros utilizados y calculados en las deconvoluciones de Euler con operadores de realce de bordes como criterio de selección de fuentes. En ella se incluyen el operador implementado, el modelo considerado, el tipo de fuente, el rango (R)

seleccionado como criterio, los valores reales de profundidad de los modelos, las estimaciones de profundidad calculadas y una evaluación de la calidad de dichas estimaciones en planta. Para la evaluación en planta se consideran los siguientes criterios:

- Excelente: las estimaciones coinciden numéricamente con los límites reales del modelo y, además, representan adecuadamente su geometría. Esto incluye tanto las soluciones que describen toda la fuente como aquellas que definen únicamente sus límites.
- Bueno: más del 85 % de las soluciones coinciden con los límites reales y/o se encuentran contenidas dentro de ellos, representando correctamente la geometría de la fuente.
- Regular: las estimaciones no reproducen con precisión la forma de la fuente, pudiendo presentar sobreestimaciones o subestimaciones respecto a los límites reales del modelo, siempre que estas no superen $1/4$ del ancho total del modelo.
- Malo: las estimaciones no representan la geometría del modelo debido a sobreestimaciones o subestimaciones considerables. Esto impide que los límites de las soluciones describan la forma real del modelo; en estos casos, generalmente menos del 60 % de las estimaciones coinciden con el modelo real, y el resto de los valores están sobrestimados.

En las figuras (3.13) y (3.14) se presentan los resultados de las profundidades estimadas mediante el método EULDPH aquí propuesto, utilizando los diferentes operadores y considerando una fuente gravimétrica aplicada a los modelos MC y MS. Por otro lado, en las figuras (3.15) y (3.16) se muestran los resultados correspondientes a una fuente magnética.

TABLA 3.3: Soluciones de EULDPH utilizando los operadores de realce de bordes como criterio de selección de fuentes.

Operador	Modelo	Fuente	Rango	Cuerpo	Profundidad [km]		Planta
					z	z'	x', y'
ASA	MC	Grav	$> 10 \left[\frac{\text{mGal}}{\text{km}} \right]$	A	5 – 35	0.37 – 45.59	Regular
		Mag	$> 14 \left[\frac{\text{nT}}{\text{km}} \right]$	A	5 – 35	5.59 – 6.92	Excelente
	MS	Grav	$> 14 \left[\frac{\text{mGal}}{\text{km}} \right]$	A	0.2 – 6.2	0.40 – 8.46	Excelente
				C	3.2 – 9.2	NA	NA
		Mag	$> 14 \left[\frac{\text{nT}}{\text{km}} \right]$	A	0.2 – 6.2	0.15 – 0.22	Excelente

Operador	Modelo	Fuente	Rango	Cuerpo	Profundidad [km]		Planta
					z	z'	x', y'
				C	3.2 – 9.2	NA	NA
Tilt	MC	Grav	$> \pi/4$ [Rad]	A	5 – 35	1.55 – 103.71	Regular
		Mag		A	5 – 35	4.28 – 18.54	Excelente
	MS	Grav		A	0.2 – 6.2	0.37 – 8.46	Regular
				C	3.2 – 9.2	2.22 – 6.39	Malo
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.15 – 0.36	Bueno
				C	3.2 – 9.2	1.43 – 2.25	Bueno
TDX	MC	Grav	$> \pi/4$ [Rad]	A	5 – 35	0.02 – 45.88	Regular
		Mag		A	5 – 35	5.59 – 5.77	Excelente
	MS	Grav		A	0.2 – 6.2	0.26 – 11.37	Malo
				C	3.2 – 9.2	2.03 – 6.86	Malo
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.15 – 0.20	Excelente
				C	3.2 – 9.2	1.28 – 3.44	Regular
ETA	MC	Grav	$> \pi/3$ [Rad]	A	5 – 35	0.02 – 31.01	Regular
		Mag		A	5 – 35	5.59 – 5.77	Excelente
	MS	Grav		A	0.2 – 6.2	0.28 – 11.37	Malo
				C	3.2 – 9.2	1.98 – 6.86	Malo
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.15 – 0.43	Excelente
				C	3.2 – 9.2	1.24 – 3.34	Regular
Nz	MC	Grav	> 0 [Rad]	A	5 – 35	0.37 – 103.71	Regular
		Mag		A	5 – 35	4.28 – 18.54	Excelente
	MS	Grav		A	0.2 – 6.2	0.37 – 8.46	Regular
				C	3.2 – 9.2	1.96 – 6.39	Malo
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.14 – 0.84	Bueno
				C	3.2 – 9.2	1.24 – 2.25	Regular

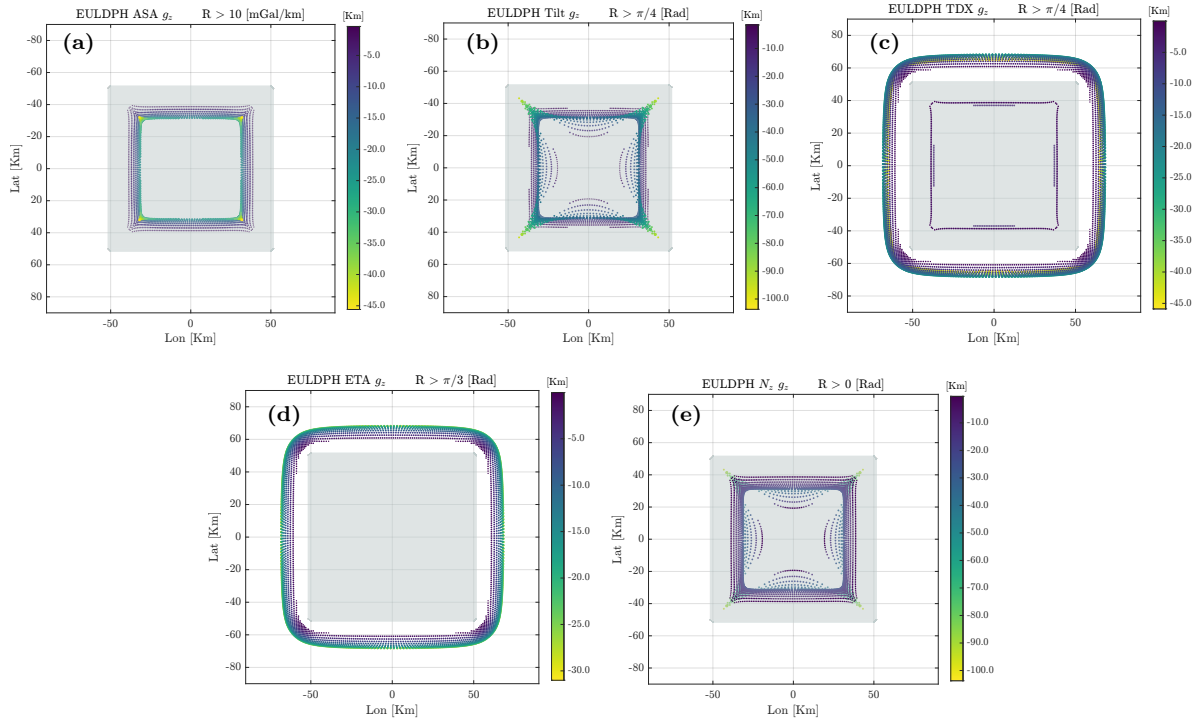


FIGURA 3.13: Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente gravitacional del modelo MC. (a) ASA; (b) Tilt; (c) TDX; (d) ETA; (e) Nz

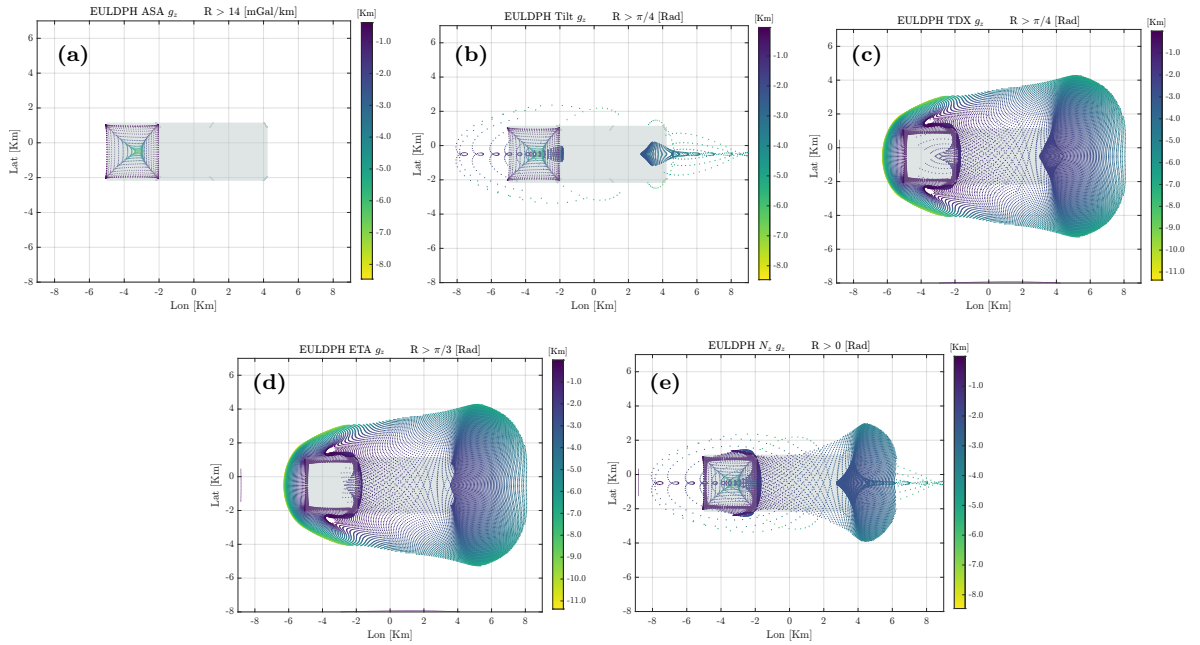


FIGURA 3.14: Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente gravitacional del modelo MS. (a) ASA; (b) Tilt; (c) TDX; (d) ETA; (e) Nz

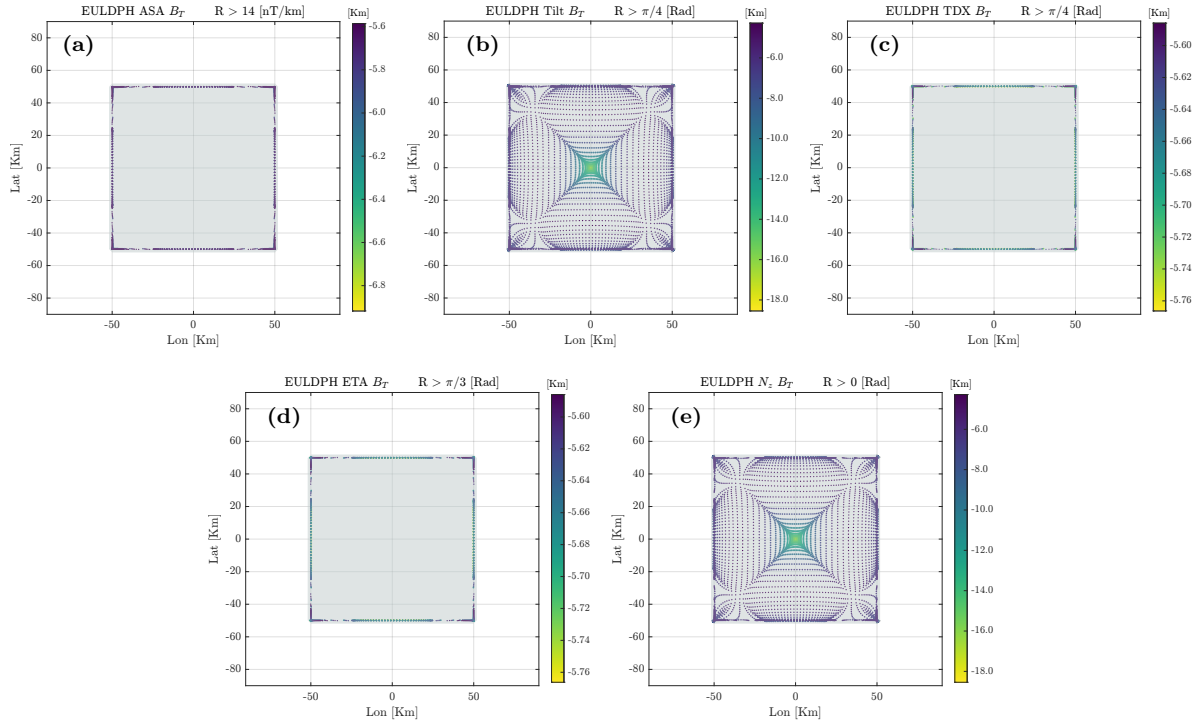


FIGURA 3.15: Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente magnética del modelo MC. (a) ASA; (b) Tilt; (c) TDX; (d) ETA; (e) Nz

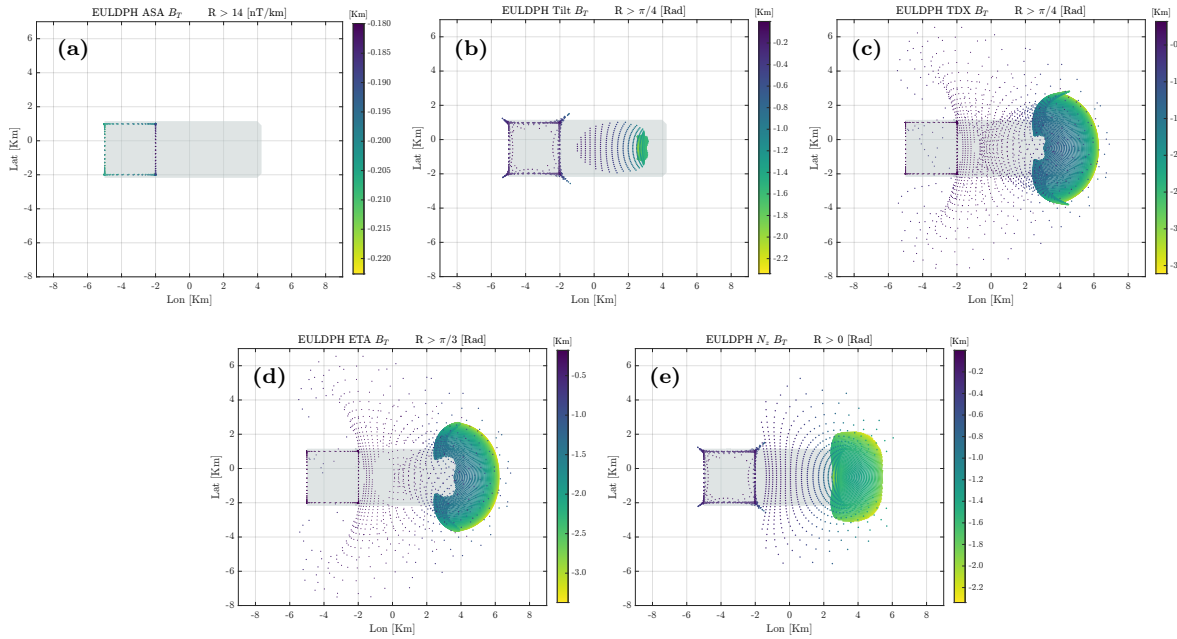


FIGURA 3.16: Profundidades estimadas mediante el método EULDPH utilizando diferentes operadores de realce de bordes como criterios para la selección de fuentes, aplicados a la fuente magnética del modelo MS. (a) ASA; (b) Tilt; (c) TDX; (d) ETA; (e) Nz

Análisis sobre el desempeño de EULDPH con operadores

- En el modelo MC, para el caso gravimétrico, todos los operadores generan estimaciones de profundidad superficial, con valores cercanos a cero, lo que representa una desviación significativa respecto al valor real de 5 [km]. En cuanto a la ubicación en planta, las estimaciones suelen ser de calidad regular, mostrando cierta dispersión respecto a la posición real de la fuente.
- En el modelo MC, para el caso magnético, las estimaciones de profundidad son muy cercanas al valor real. Los operadores Tilt y Nz tienden a subestimar las profundidades, obteniéndose un valor promedio de 4.28 [km], mientras que los operadores ASA, TDX y ETA sobrestiman las profundidades, alcanzando un valor de 5.59 [km]. En cuanto a las estimaciones en planta, la calidad es excelente. Los operadores ASA, TDX y ETA ofrecen soluciones que coincidiendo con los límites del cuerpo, mientras que los operadores Tilt y Nz presentan soluciones distribuidas directamente sobre el cuerpo.
- En el modelo MS, para el caso gravimétrico, todos los operadores tienden a sobrestimar ligeramente la profundidad del cuerpo somero (A). Los operadores TDX y ETA ofrecen estimaciones más cercanas al límite superior del cuerpo, en un rango de 0.26 a 0.28 [km], lo que indica una mayor precisión respecto al valor real. En contraste, los operadores ASA, Tilt y Nz presentan resultados más alejados, con estimaciones entre 0.37 y 0.40 [km]. Para el cuerpo profundo (C), todos los operadores suelen subestimar la profundidad, con una media de 1.15 [km] de diferencia, excepto el operador ASA, que no logra detectarlo. Las estimaciones en planta varían de regulares a malas, siendo ASA el único operador que ofrece resultados aceptables en este apartado.
- En el modelo MS, para el caso magnético, se observa que todos los operadores tienden a subestimar ligeramente la profundidad del cuerpo somero (A), con una estimación promedio de 0.15 [km]. En el caso del cuerpo profundo (C), todos los operadores subestiman con mayor medida la profundidad real, obteniéndose valores que varían entre 1.28 y 1.43 [km]. Respecto a las estimaciones en planta, la calidad es buena para el cuerpo somero (A), mientras que para el cuerpo profundo (C) las soluciones presentan mayor dispersión y son de calidad regular.
- Los operadores de fase local, como ETA y TDX, comparten características similares en la delimitación de las fuentes. Por ello, en algunos casos, las estimaciones de profundidad obtenidas son muy similares. La principal diferencia entre ambos radica en que el operador ETA incluye el gradiente vertical en su operación.

3.4.3 Selección de fuentes: Ángulo de inclinación modificado (TDXm)

De manera teórica, cada operador de realce de bordes puede implementarse como criterio de selección de fuentes. Sin embargo, debido a la gran variedad de operadores desarrollados, cada uno con sus respectivas ventajas y desventajas, y considerando el comportamiento previamente analizado, se busca emplear aquel que ofrezca las mejores estimaciones, tanto en profundidad como en planta, para su aplicación en la deconvolución de Euler, con el propósito de trabajar únicamente con un sólo operador. Para ello se debe contemplar lo siguiente:

- Aplicar un operador de fase local: este tipo de operador posee la capacidad de equilibrar las frecuencias cortas asociadas con anomalías profundas, a diferencia de los operadores basados únicamente en amplitudes, que se limitan a detectar anomalías someras.
- Evitar el uso de valores absolutos y garantizar un dominio en el rango $[-\pi/2, \pi/2]$: aunque los valores absolutos son útiles para normalizar operadores y resaltar los bordes de las anomalías, su uso como criterio puede resultar poco práctico, ya que pueden generar falsos positivos.
- Ofrecer valores contrastantes para definir claramente los límites de las anomalías: Esta característica facilita la interpretación de los resultados al trabajar con datos en formato de cuadrículas.
- Evitar operadores excesivamente restrictivos: es importante permitir la selección de soluciones según los objetivos específicos de cada estudio. Los operadores demasiado restrictivos podrían descartar un gran número de soluciones potencialmente útiles para el modelo.

Cumpliendo con las características mencionadas previamente, se opta por utilizar el operador TDX con una modificación: eliminar el valor absoluto del gradiente vertical. El operador modificado queda definido como:

$$TDX_m(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right). \quad (3.7)$$

Dado que el límite de la función arctan es:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x) = \pm \frac{\pi}{2},$$

se garantiza un dominio definido en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ radianes. Además, se asegura que, dentro de la fuente, el gradiente vertical es positivo, lo que genera valores positivos

del operador, mientras que fuera de la fuente los valores son negativos. Cuando el gradiente horizontal alcanza su valor máximo y el gradiente vertical es mínimo, el operador obtiene valores máximos tanto negativos como positivos que representan los límites, siendo $+\pi/2$ y $-\pi/2$. Esto no implica que existan dos límites, sino que las soluciones son simétricas: una está influenciada por el gradiente vertical positivo y otra por el gradiente vertical negativo.

En la figura (3.17) se presenta el operador TDX_m aplicado al modelo MC, tanto para la fuente gravimétrica como para la fuente magnética. De manera similar, en la figura (3.18) se muestra el operador aplicado al modelo MS, también considerando la fuente gravitacional y magnética.

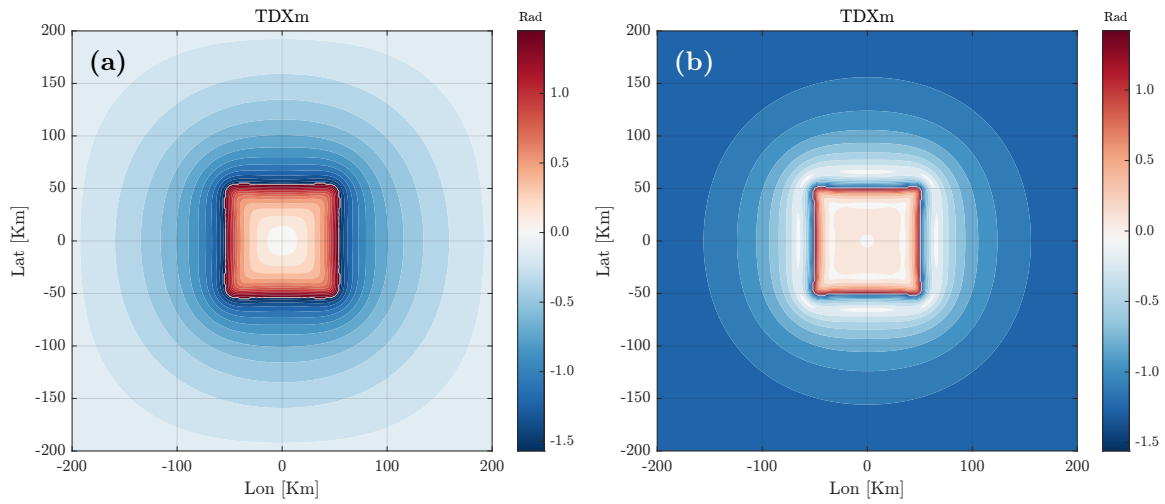


FIGURA 3.17: Operador TDX_m aplicado al modelo MC: (a) Fuente gravitacional; (b) Fuente magnética.

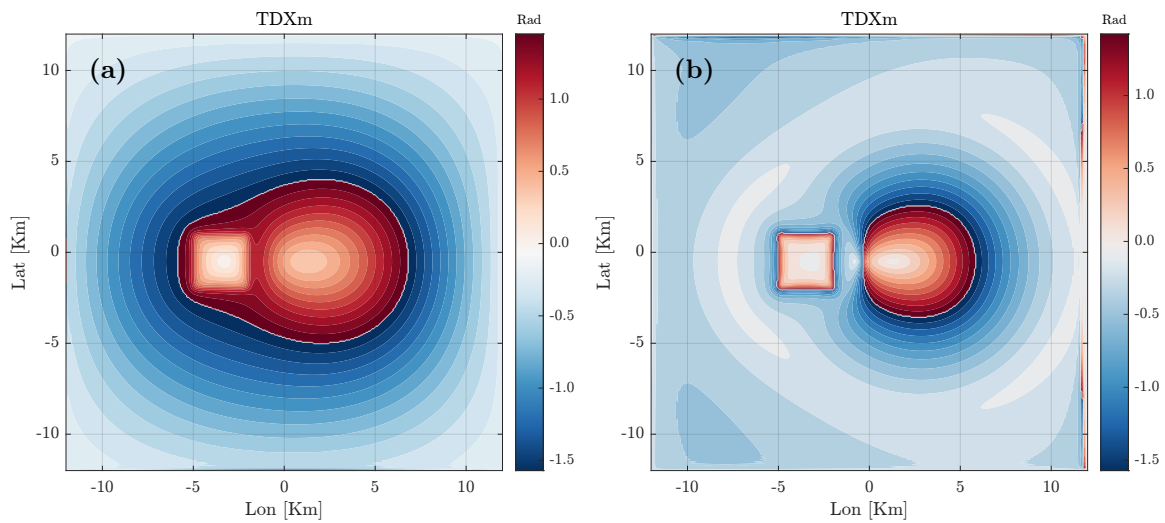


FIGURA 3.18: Operador TDX_m aplicado al modelo MS: (a) Fuente gravitacional; (b) Fuente magnética.

3.4.3.1 Pruebas en modelos sintéticos

Para las deconvoluciones de Euler, en ambos modelos, MC y MS, se utiliza el mismo tamaño de ventana móvil, de 15×15 elementos en el dominio de observación, lo que genera un total de 225 ecuaciones por ventana. En el caso del modelo MC, el área correspondiente es de 293.877 [km²], mientras que, para el modelo MS, el área es de 1.05 [km²] por ventana. En todas las pruebas, tanto para fuente gravitacional como magnética, se utiliza el operador TDX_m con un rango de aceptación de soluciones de $> \pi/4$, esto para delimitar los límites de la fuente.

La elección de usar $\pi/4$ se realiza por razones prácticas, ya que es el valor en el que, dentro del operador TDX_m , el gradiente horizontal y el gradiente vertical presentan la misma amplitud, y la razón del operador alcanza un valor de 1. Esto corresponde a:

$$\arctan(\pm 1) = \pm 45^\circ = \pm \frac{\pi}{4} [\text{Rad}],$$

lo que indica que las fuentes de la anomalía están orientadas de tal manera que las variaciones en las direcciones x y y son proporcionales a los cambios en la dirección z . Esta condición puede ser relevante para la identificación de bordes de cuerpos en la fuente potencial y podría señalar una posible transición entre las propiedades físicas del medio.

Operador	Modelo	Fuente	Rango	Cuerpo	Profundidad [km]		Planta
					z	z'	
TDX_m	MC	Grav	$> \pi/4$ [Rad]	A	5 – 35	0.37 – 7.12	Regular
		Mag		A	5 – 35	5.62 – 5.77	Excelente
	MS	Grav		A	0.2 – 6.2	0.35 – 2.68	Bueno
				C	3.2 – 9.2	2.12 – 4.89	Malo
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.18 – 0.26	Excelente
				C	3.2 – 9.2	1.34 – 2.33	Regular

TABLA 3.4: Soluciones de EULDPH utilizando el operador TDX_m como criterio de selección de fuentes.

La tabla (3.4) presenta los parámetros utilizados y calculados en las deconvoluciones de Euler con el operador TDX_m como criterio de selección de fuentes. En ella se incluyen el operador implementado, el modelo considerado, el tipo de fuente, el rango (R) seleccionado como criterio, los valores reales de profundidad de los modelos, las estimaciones de profundidad calculadas y una evaluación de la calidad de dichas estimaciones en planta.

De igual forma, las estimaciones de profundidad se pueden observar en la figura (3.19), donde el operador TDX_m se aplica al modelo MC tanto para la fuente gravitacional como para la magnética. Asimismo, en la figura (3.20) se presentan los resultados para el modelo MS.

Análisis sobre el desempeño de EULDPH con TDX_m

- Sólo en el modelo MC, para la fuente gravitacional, se obtienen estimaciones erróneas en la profundidad, siendo cercanos al plano de observación y están alejados del valor real de 5 [km]. Sin embargo, en la sección anterior ningún operador produjo buenos resultados en este caso, lo que sugiere que para mejorar la selección de fuentes es fundamental definir correctamente el índice estructural desde el inicio, ya que este parámetro influye en la geometría de las soluciones.
- En el modelo MC, para el caso magnético, se tiene una subestimación en la profundidad, obteniendo un valor de 5.62 [km]. En cuanto a soluciones en planta se tiene una excelente estimación.
- En el modelo MS, para el cuerpo somero (A), se presenta una sobrestimación de las profundidades en el caso gravimétrico y una ligera subestimación en el caso magnético, obteniéndose valores de profundidad de 0.35 y 0.18 [km], respectivamente. Para ambas fuentes potenciales, se observa una mayor dispersión y subestimación de las profundidades calculadas para el cuerpo profundo (C). En las estimaciones en planta, se obtiene una estimación excelente para el cuerpo somero (A), mientras que para el cuerpo profundo (C) la dispersión de la ubicación real es mayor.
- El operador TDX_m , además de su fácil interpretación al aplicarlo a los datos, proporciona una mejor selección de soluciones tanto en planta como en profundidad en comparación con otros operadores. Asimismo, permite elegir soluciones que correspondan a los límites del cuerpo o seleccionar aquellas que se encuentren sobre él.
- En el modelo MC, para la fuente gravitacional, se obtiene una mejor estimación de la profundidad utilizando el método convencional y aplicando Thompson como criterio de selección de fuentes, en comparación con el uso de operadores.

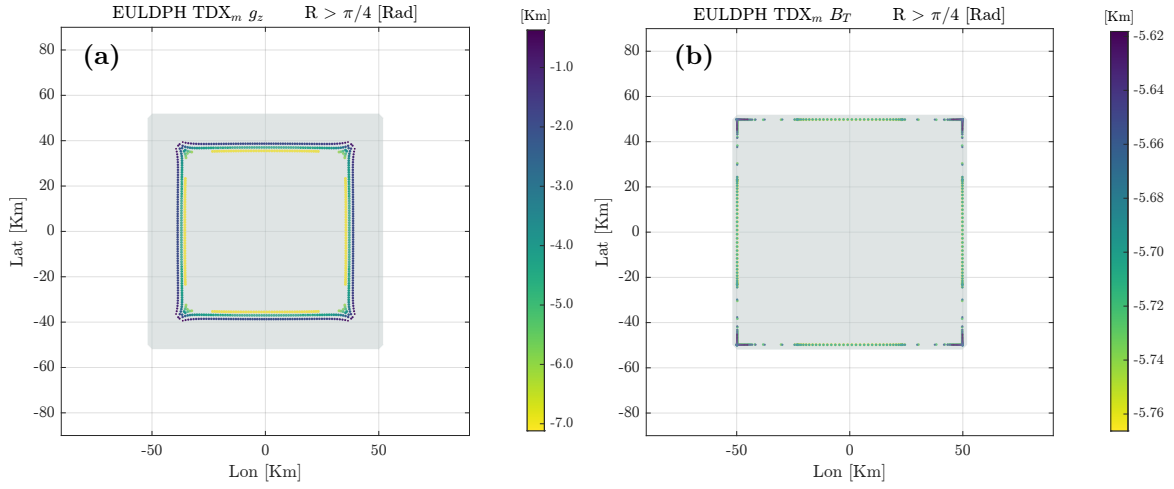


FIGURA 3.19: Estimaciones de profundidades mediante el método EULDPH y el operador TDX_m aplicado al modelo MC: (a) Fuente gravitacional; (b) Fuente magnética.

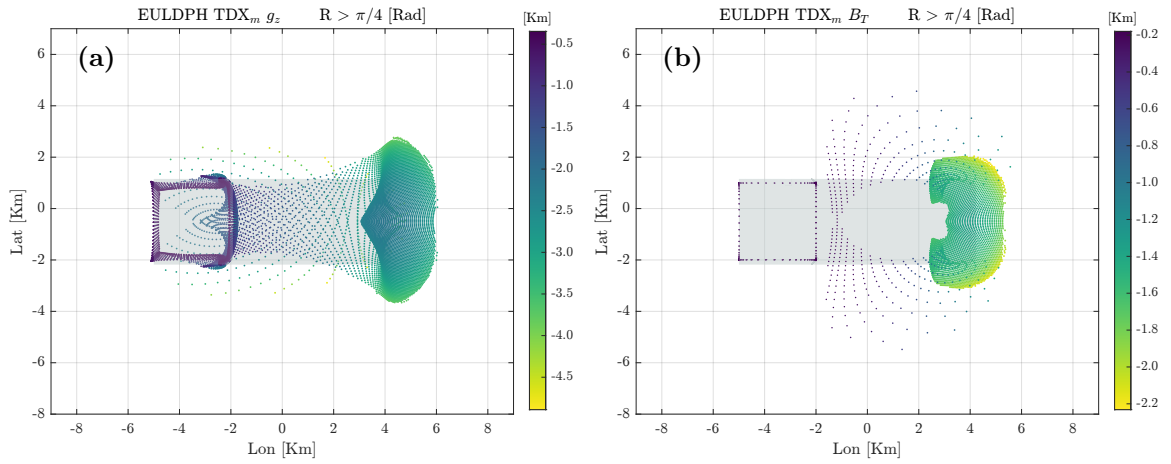


FIGURA 3.20: Estimaciones de profundidades mediante el método EULDPH y el operador TDX_m aplicado al modelo MS: (a) Fuente gravitacional; (b) Fuente magnética.

3.5 Soluciones de la deconvolución de Euler de fase local (EULD-W)

El desarrollo teórico sobre la deconvolución de Euler de fase local se presentó en la sección (2.7), donde se describen los siguientes métodos: deconvolución de Euler con ángulo de inclinación (EULD-Tilt), ecuación (2.114); deconvolución de Euler con ángulo de inclinación normalizado (EULD-TDX), ecuación (2.124); y deconvolución de Euler con ángulo de inclinación extendido (EULD-ETA), ecuación (2.134). En esta sección se presentan únicamente las soluciones de los diferentes métodos ya mencionados.

3.5.1 Pruebas en modelos sintéticos

Para la implementación computacional del proceso de deconvolución de Euler de fase local, adapté la subrutina **EULDPHT**, creada en MATLAB® y presentada en la sección (3.4.1), y desarrollé una nueva subrutina denominada **EULDW**, en la cual eliminé la variable del índice estructural (IE). Esta función devuelve una matriz con tres columnas, donde cada fila representa una solución espacial.

De igual forma, se emplean los modelos sintéticos MC y MS, tanto para fuentes gravitacionales y magnéticas. Se utiliza el mismo tamaño de ventana móvil, de 15×15 elementos en el dominio de observación, lo que genera un total de 225 ecuaciones por ventana. En el caso del modelo MC, el área correspondiente es de $293.877 \text{ [km}^2\text{]}$, mientras que, para el modelo MS, el área es de $1.05 \text{ [km}^2\text{]}$ por ventana. En todas las pruebas, el operador TDX_m se emplea como criterio para la selección de fuentes, estableciendo un rango de aceptación de soluciones de $R > \pi/12$ para el modelo MC y $0 < R \leq \pi/4$ para el modelo MS.

La tabla (3.5) presenta los parámetros utilizados y calculados por el método EULD-W. En ella se incluyen el operador implementado, el modelo considerado, el tipo de fuente, el rango (R) seleccionado como criterio, los valores reales de profundidad de los modelos, las estimaciones de profundidad calculadas y una evaluación de la calidad de dichas estimaciones en planta.

Las estimaciones calculadas mediante el método EULD-W para el modelo MC se presentan en la figura (3.21), mientras que las correspondientes al modelo MS se muestran en la figura (3.22), tanto para una fuente gravitacional como para una fuente magnética.

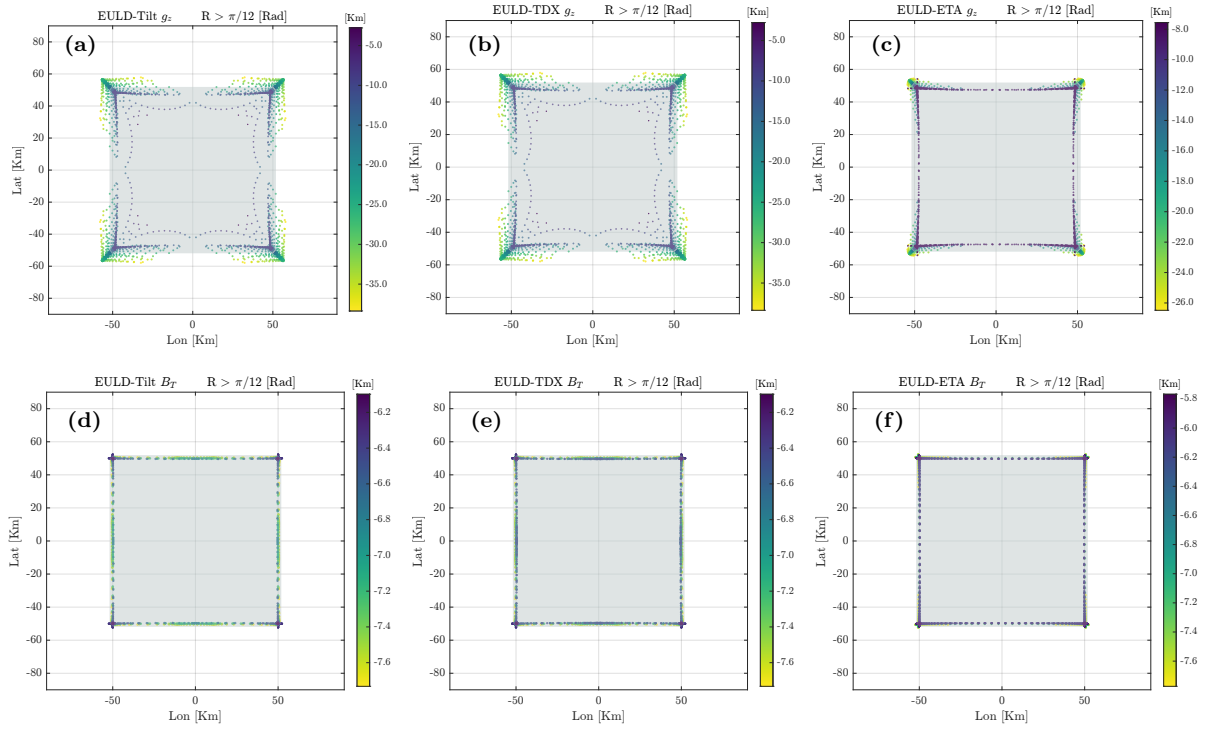


FIGURA 3.21: Estimaciones de profundidad y ubicación en planta para el modelo MC. Para una fuente gravitacional: (a) EULD-Tilt, (b) EULD-TDX y (c) EULD-ETA. Para una fuente magnética: (d) EULD-Tilt, (e) EULD-TDX y (f) EULD-ETA.

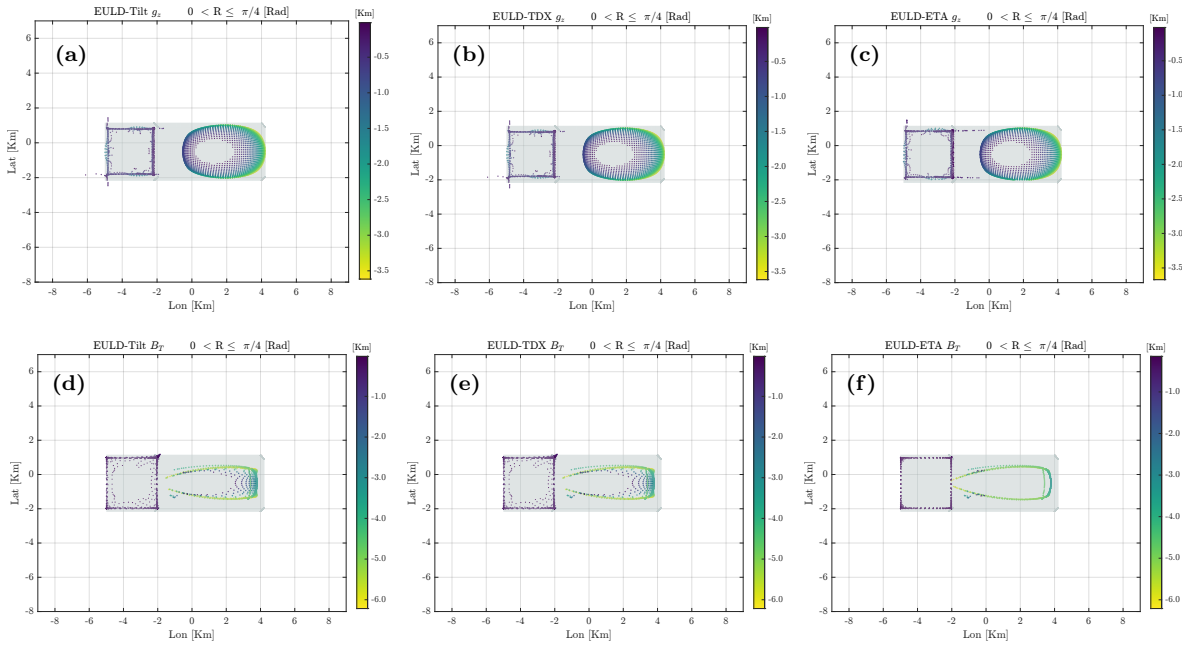


FIGURA 3.22: Estimaciones de profundidad y ubicación en planta para el modelo MS. Para una fuente gravitacional: (a) EULD-Tilt, (b) EULD-TDX y (c) EULD-ETA. Para una fuente magnética: (d) EULD-Tilt, (e) EULD-TDX y (f) EULD-ETA.

Método	Modelo	Fuente	Rango [Rad]	Cuerpo	Profundidad [km]		Planta
					z	z'	x', y'
EULD - Tilt	MC	Grav	$> \pi/12$	A	5 – 35	6.73 – 38.37	Bueno
		Mag	$> \pi/12$	A	5 – 35	6.10 – 7.73	Excelente
	MS	Grav	$0 < R \leq \pi/4$	A	0.2 – 6.2	0.15 – 1.65	Excelente
				C	3.2 – 9.2	0.08 – 3.62	Excelente
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.17 – 0.47	Excelente
				C	3.2 – 9.2	0.13 – 6.22	Regular
EULD - TDX	MC	Grav	$> \pi/12$	A	5 – 35	6.73 – 38.37	Bueno
		Mag	$> \pi/12$	A	5 – 35	6.10 – 7.73	Excelente
	MS	Grav	$0 < R \leq \pi/4$	A	0.2 – 6.2	0.15 – 1.65	Excelente
				C	3.2 – 9.2	0.08 – 3.62	Excelente
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.17 – 0.47	Excelente
				C	3.2 – 9.2	0.13 – 6.22	Regular
EULD - ETA	MC	Grav	$> \pi/12$	A	5 – 35	7.56 – 26.48	Excelente
		Mag	$> \pi/12$	A	5 – 35	5.77 – 7.77	Excelente
	MS	Grav	$0 < R \leq \pi/4$	A	0.2 – 6.2	0.12 – 1.71	Excelente
				C	3.2 – 9.2	0.10 – 3.67	Excelente
		Mag		A	0.2 – 6.2	0.15 – 0.39	Excelente
				C	3.2 – 9.2	3.30 – 5.24	Regular

TABLA 3.5: Estimaciones de profundidad y en planta utilizando el método EUL-W para los modelos MC y MS, aplicados a fuentes gravitacionales y magnéticas.

Análisis sobre el desempeño de EULD-W

- Las estimaciones obtenidas mediante los métodos EULD-Tilt y EULD-TDX son prácticamente idénticas para ambos modelos, MS y MC, así como para las fuentes gravitacionales y magnéticas. Esto ocurre porque los operadores Tilt y TDX presentan un comportamiento similar. La diferencia radica en que el operador TDX invierte la relación entre el gradiente vertical y la amplitud de los gradientes horizontales. Aunque este cálculo facilita la visualización de los límites al aplicarse en la definición de la deconvolución de Euler 3D, ambos operadores generan resultados equivalentes.

- En el modelo MC para el caso gravitacional, las estimaciones de profundidad obtenidas mediante el método EULD-W corrigen el error del método EULDPH-TDXm (figura 3.19a), el cual genera soluciones cercanas al plano de observación. Con EULD-W, las soluciones se encuentran en un rango de profundidad entre 6.73 y 7.56 [km], siendo el método EULD-ETA el que presenta la mayor sobrestimación respecto al valor real de 5 [km]. En cuanto a la ubicación en planta, el método EULD-W proporciona estimaciones considerablemente más precisas en comparación con los métodos EULDPHT y EULDPH-TDXm.
- En el modelo MC para el caso magnético, las estimaciones de profundidad obtenidas con los métodos EULD-Tilt y EULD-TDX presentan una sobrestimación de 1.10 [km] respecto al valor real de 5 [km]. Por su parte, el método EULD-ETE muestra una sobrestimación de 0.77 [km] respecto al mismo valor. Las estimaciones en planta son precisas en relación con la ubicación real del modelo.
- Para el modelo MS con una fuente gravitacional, el cuerpo somero (A) presenta estimaciones subestimadas en profundidad, con aproximadamente 50 [m] de diferencia respecto al valor real, y se tiene una excelente precisión en planta. Por otro lado, para el cuerpo profundo (C), las estimaciones de profundidad se encuentran cercanas al plano de observación, lo que genera una desviación significativa respecto al valor real de 3.2 [km]. No obstante, las estimaciones en planta para este cuerpo son muy precisas en comparación con los métodos EULDPHT y EULDPH-TDXm, que muestran una calidad de regular a mala.
- En el modelo MS para el caso magnético, se presenta una subestimación en la profundidad del cuerpo somero (A), con valores que oscilan entre 0.15 y 1.17 [km]. Para el cuerpo profundo (C), el método EULD-ETA es el único que proporciona estimaciones más próximas al valor real de 3.2 [km]. En cambio, los métodos EULD-Tilt y EULD-TDX muestran soluciones que abarcan desde el plano de observación hasta profundidades de 6.2 [km], lo que divergen significativamente respecto al valor real. Las estimaciones en planta presentan una calidad regular, con tendencia a la subestimación.
- De manera general, la calidad de las estimaciones en planta mejora al aplicar el método EULD-W, tanto para fuentes gravitacionales como magnéticas, en comparación con los métodos EULDPHT y EULDPH-TDXm.
- Las estimaciones en profundidad el método EULD-W tienden a presentar errores significativos en cuerpos ubicados a mayor profundidad, como ocurre con el cuerpo (C) del modelo MS.

3.6 Soluciones de la deconvolución de Euler - Ángulo de inclinación normalizado y corrección en profundidad (EULD-TDXz)

El desarrollo teórico del método EULD-TDX con corrección en profundidad se presentó en la sección (2.8), donde se propuso que, para recuperar información de fuentes profundas, es necesario reducir el grado de decaimiento del potencial. Las estimaciones en planta se obtienen mediante el método EULD-TDX (sección 2.7.2), y, a partir de dichas ubicaciones, la profundidad se estima resolviendo mediante el método EULDPH.

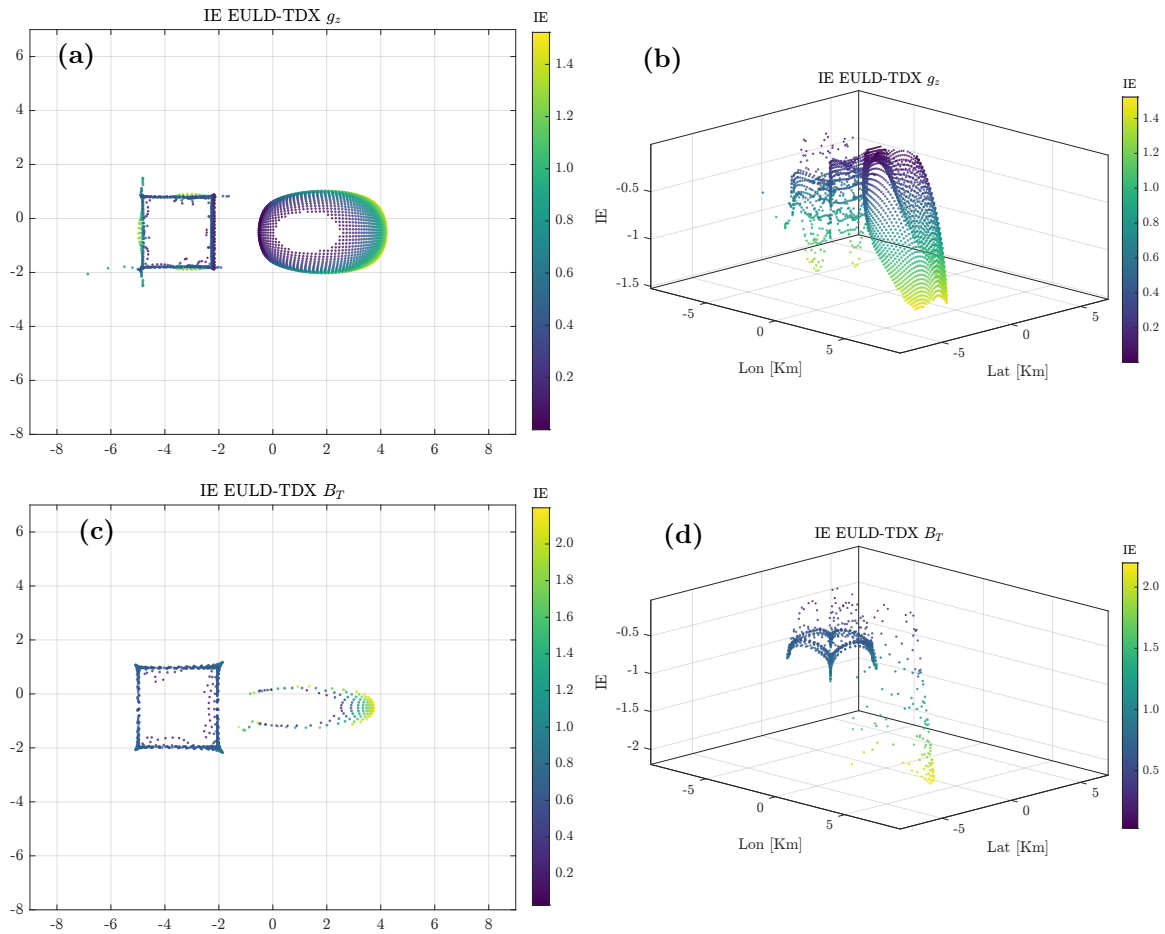
3.6.1 Pruebas en modelos sintéticos

Para la implementación computacional del proceso de deconvolución de Euler con corrección en profundidad, creé una subrutina en MATLAB®, denominada **EULDWz**. Esta subrutina permite realizar el cálculo descrito en la sección (2.8), en la cual se implementa el método EULD-TDX junto con EULDPH de manera simultánea.

Para el método de corrección en profundidad se emplea solo el modelo MS, tanto para la fuente gravitacional como para la magnética, con el objetivo de evaluar su eficacia en modelos que presentan un esnmacaramiento de la fuentes profundas debido a la influencia de fuentes someras muy acentuadas. Se utiliza el mismo tamaño de ventana móvil, de 15×15 elementos en el dominio de observación, lo que genera un total de 225 ecuaciones por ventana. El área correspondiente a cada ventana es de $1.05[\text{km}^2]$. En todas las pruebas, el operador TDX_m se aplica como criterio de selección de fuentes, estableciendo un rango de aceptación de soluciones de $0 < R \leq \pi/4$. Además, se consideran soluciones verdaderas aquellas cuyo valor de índice estructural calculado se encuentre en el rango de 0 a 2.2. Como criterio adicional, se realiza una agrupación de estimaciones en profundidad para evitar soluciones dispersas. Si el conjunto de soluciones agrupadas representa menos del 1 % del total, dichas soluciones se descartan por no ser representativas.

La tabla (3.6) presenta los parámetros utilizados y calculados por el método EULD-TDX con corrección en profundidad. En ella se incluyen el operador implementado, el modelo considerado, el tipo de fuente, el rango (R) seleccionado como criterio, los valores reales de profundidad de los modelos, las estimaciones de profundidad calculadas y una evaluación de la calidad de dichas estimaciones en planta.

Método	Modelo	Fuente	Rango [Rad]	Cuerpo	Profundidad [km]		Planta
					z	z'	x', y'
EULD-TDX	MS	Grav	$0 < R \leq \pi/4$	A	0.2 – 6.2	0.3 – 4.5	Excelente
				C	3.2 – 9.2	3.36 – 7.97	Excelente
		Mag	$0 < R \leq \pi/4$	A	0.2 – 6.2	0.18 – 0.53	Excelente
				C	3.2 – 9.2	2.5 – 5.0	Regular

TABLA 3.6: Soluciones de EULD-TDX con corrección en z , aplicado al modelo MS.**FIGURA 3.23:** Cálculo del índice estructural para el modelo MS: las figuras (a)-(b) muestran las soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; (c)-(d) soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.

La figura (3.23) muestra el cálculo del índice estructural mediante el método EULD-TDX, tanto para la fuente gravitacional como magnética. La figura (3.24) muestra las estimaciones de las correcciones en profundidad, en una vista tanto en planta como en perspectiva para la fuente gravitacional y magnética del modelo MS.

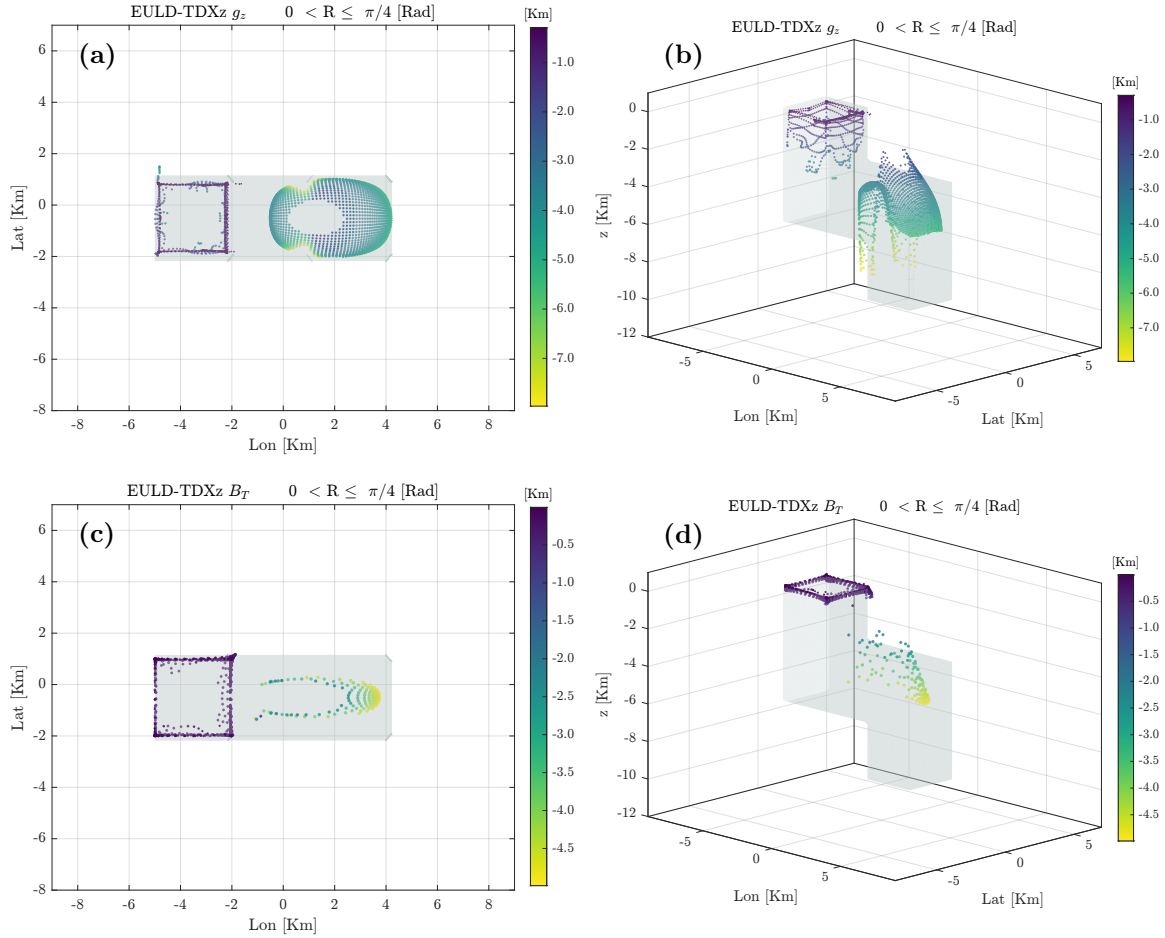
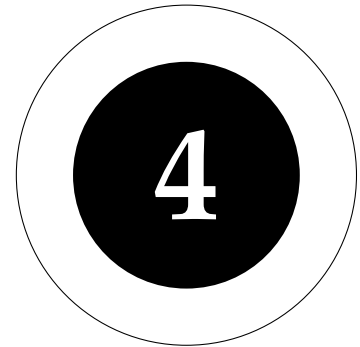


FIGURA 3.24: EULD-TDX con corrección en profundidad aplicado al modelo MS: (a)-(b) soluciones correspondientes a la fuente del campo gravitacional; (c)-(d) soluciones asociadas a la fuente del campo magnético.

Análisis sobre el desempeño de EULD-TDXz

- En el caso gravitacional, el cuerpo somero (A), presenta una sobrestimación en profundidad de aproximadamente 100 [m] respecto al valor real. Para el cuerpo profundo (C), las soluciones muestran una sobrestimación de 160 [m], lo que representa una diferencia mínima y una mejor aproximación en comparación con los métodos EULDPHT, EULDPH-TDXm y EULD-W.

- En el caso magnético, para el cuerpo somero (A) las estimaciones alcanzan una profundidad de 0.18 [km], con una subestimación de 20 [m] respecto al valor real. Para el cuerpo profundo (C), se observa una subestimación de 0.7 [km], lo que corrige el error del método EULD-TDX, que presenta valores cercanos al plano de observación. Además, las estimaciones obtenidas son más precisas que las de los métodos EDULDPHT y EULDPH-TDXm, los cuales muestran una mayor dispersión, con valores de 1.41 [km] y 1.34 [km], respectivamente.
- La corrección en profundidad muestra mejores resultados al aplicarse en el caso gravitacional, debido a que los datos del campo gravitacional presentan un menor grado de decaimiento en comparación con los datos magnéticos. No obstante, en el caso magnético, las estimaciones obtenidas tras aplicar la corrección se acercan más al valor real que los métodos anteriores.
- El cálculo del índice estructural mediante el método EULD-TDX, ecuación (2.137), no proporciona un valor único, como debería asignarse en la ecuación de deconvolución de Euler convencional, lo que afecta la homogeneidad del método. En este contexto, la variabilidad del índice estructural se atribuye a las variaciones locales de la fuente, reflejando un régimen más complejo y ajustándose mejor a la geometría estimada mediante los operadores de realce de bordes. Los valores obtenidos son más empíricos y representan características particulares del área estudiada.
- Como se observa en las soluciones de índice estructural, figura (3.23), se tiende a obtener valores bajos de dicho índice. Aunque teóricamente los índices estructurales altos describen mejor la geometría de las fuentes, Thompson (1982) demostró experimentalmente que en la práctica los valores bajos ofrecen una descripción más precisa de las fuentes, lo cual coincide con los resultados de este trabajo.
- Se observa en el modelo MS, que los índices estructurales más altos se asocian con estimaciones de mayor profundidad, mientras que los índices estructurales más bajos corresponden a estimaciones más someras.



CRÁTER CHICXULUB

El cráter Chicxulub es uno de los tres cráteres multianillos registrados en la historia geológica terrestre. Este impacto se asocia con cambios ambientales y climáticos a nivel global, además de marcar el límite entre el Cretácico y el Paleógeno (K/Pg). El cráter se encuentra sepultado bajo la Plataforma de Yucatán, a profundidades que varían entre 500 [m] y 1000 [m], cubierto por depósitos de calizas, dolomías y evaporitas (Guzmán-Hidalgo, 2024).

La hipótesis de la extinción masiva que señala el fin del Cretácico y el inicio del Paleógeno, atribuida al impacto de un meteorito, fue propuesta y sustentada por Alvarez et al. (1981). Quienes descubrieron sedimentos depositados en el límite K/Pg con un alto contenido de iridio, un elemento poco común en la superficie terrestre y asociado principalmente con materiales liberados por cuerpos extraterrestres, como cometas y asteroides.

En la década de 1940, se llevaron a cabo estudios gravimétricos en la península de Yucatán por parte de PEMEX. Los datos obtenidos revelaron un patrón concéntrico de anomalías gravimétricas que, junto con registros de pozos de los años 50, se asociaron inicialmente con posibles estructuras volcánicas. No obstante, no fue sino hasta 1978 cuando se realizaron nuevos estudios geofísicos mediante levantamientos magnéticos, que registraron anomalías magnetométricas coincidentes con las anomalías gravimétricas, con un diámetro aproximado de 180 [km]. Finalmente, en 1991, Hildebrand et al. (1991) realizaron estudios que permitieron correlacionar el cráter con el límite K/Pg. Posteriormente, se han desarrollado campañas

de perforación para obtener información sobre su estratigrafía, estructuras y los componentes de los sedimentos a diferentes profundidades. Algunos de estas campañas incluyen el International Ocean Discovery Program (IODP), proyectos de Petróleos Mexicanos (PEMEX), el programa de perforación de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), el Chicxulub Scientific Drilling Project (CSDP) y programas de perforación de la UNAM en colaboración con la Comisión Federal de Electricidad (CFE) (Feignon et al., 2021; Urrutia-Fucugauchi et al., 1996, 2004, 2011).

El cráter Chicxulub representa un factor clave para la comprensión de la teoría de los impactos y sus implicaciones en los efectos ambientales globales. Asimismo, su estudio es fundamental para entender las extinciones masivas en la historia geológica, así como los procesos evolutivos y su relación con la formación de depósitos de recursos naturales, como los hidrocarburos y minerales.

4.1 Localización del área de estudio

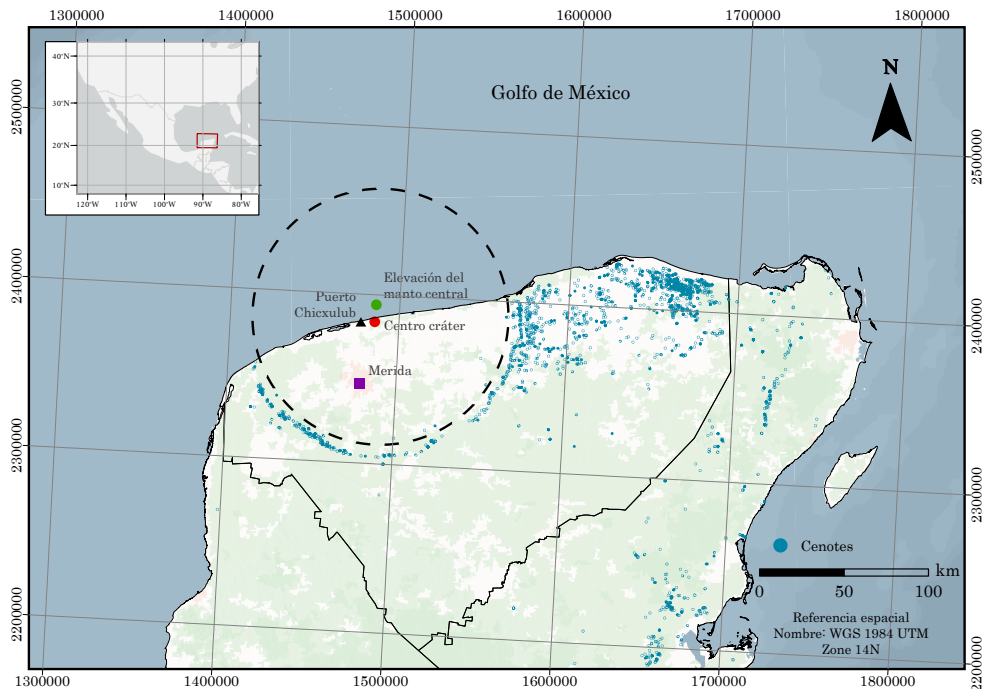


FIGURA 4.1: Ubicación del cráter Chicxulub y puntos de interés. El círculo negro punteado muestra la extensión del anillo interior del cráter, mientras que los puntos azules corresponden a la ubicación de los cenotes.

El cráter Chicxulub se localiza en la plataforma de Yucatán, con aproximadamente la mitad de su estructura en tierra, dentro del estado de Yucatán, y la otra mitad en el mar. Su extensión total es de ≈ 200 [km] en su anillo exterior, mientras que el anillo interior tiene un diámetro de ≈ 150 [km]. Su nombre se debe a la ubicación del puerto de Chicxulub, a 8 [km] del centro del cráter.

A partir del análisis de la anomalía gravimétrica de Bouguer y la implementación del operador amplitud del gradiente horizontal (HGA) de los datos, se determinó el centro geométrico del cráter, el cual se encuentra demarcado por un alto gradiente en las coordenadas 21.29° N, 89.53° W. Además de su relación geométrica con el anillo prominente de cenotes (Collins et al., 2020). Por otro lado, a partir de datos de velocidad sísmica 3D, se ha identificado que el levantamiento máximo del manto, ubicado debajo del cráter, se encuentra en 21.38° N, 89.52° W, aproximadamente a 10 [km] al noroeste del centro del cráter (Christeson et al., 2009) (Figura 4.1).

4.2 Morfología y geología

El estudio de la morfología de los cráteres de impacto se ha realizado a través de métodos de percepción remota en planetas como Marte, Venus y Mercurio, así como en satélites naturales como la Luna. Los dos tipos más grandes de estructuras de impacto conocidas son: los cráteres tipo PR (Peak Ring), en los cuales se distingue de manera clara el borde del cráter, una zona de terrazas, un canal anular y un PR que rodea una cuenca central; y las estructuras de impacto con múltiples anillos. Debido a la naturaleza dinámica y tectónica de la Tierra, es difícil que se preserve un registro geológico completo de impactos. Sudbury, en Canadá, y Vredefort, en Sudáfrica, son las únicas estructuras de impacto en la Tierra comparables con Chicxulub (Gulick et al., 2013).

El peak ring del Chicxulub presenta una geometría irregular y escarpada, y se encuentra a cientos de metros por encima del canal anular. En la parte oeste y noroeste, su elevación es de aproximadamente $0.4 - 0.6$ [km] sobre el suelo del cráter, mientras que en el lado este-noreste varía entre $0.2 - 0.3$ [km]. El peak ring es simétrico con respecto al centro del cráter, con un radio promedio de $39 - 40$ [km] (Gulick et al., 2008). A partir de modelos de velocidad de alta resolución, Morgan et al. (2011) interpreta la parte superior del peak ring como una capa de brechas de impacto altamente porosas. Sus profundidades varían entre 0.5 y 2.5 [km] con respecto a los depósitos K/Pg.

En el canal anular se han identificado sedimentos de impactitas, como brechas de impacto, brechas con material fundido y material eyectado de manera proximal. Los depósitos del

evento K/Pg dentro del canal anular presentan un espesor de aproximadamente 1 a 3 [km], mientras que en la cuenca central los sedimentos del evento K/Pg alcanzan hasta 4 [km] de espesor (Gulick et al., 2013).

De acuerdo con los estudios sísmicos levantados en 2005, se han identificado fallas anulares en el anillo interno que parecen correlacionarse con el anillo de cenotes de Yucatán, ubicados a una distancia radial de aproximadamente 70 [km] al oeste y 80 [km] al este. Las fallas radiales dentro del anillo externo varían en distancia entre 90 y 120 [km], aunque en algunas zonas pueden encontrarse hasta a 125 [km]. La profundidad de las fallas en los anillos varía según la región. En el oeste y noroeste, las fallas del anillo interior alcanzan profundidades entre 10 y 12 [km] hasta la corteza superior cristalina. Además, presentan un deslizamiento hacia una o dos capas subhorizontales (denominadas décollements) dentro de la corteza, originándose en la corteza superior y desplazándose hacia capas más profundas (Gulick et al., 2008, 2013). A lo largo de la mayoría de la distancia radial, la base de los sedimentos parece encontrarse entre 3 y 6 [km] (Christeson et al., 2001).

El basamento de Chicxulub, en las brechas y rocas de fusión de impacto, presenta una magnetización remanente hasta cuatro órdenes de magnitud mayor que las rocas cercanas a la superficie. Por lo tanto, los datos magnéticos pueden utilizarse para mapear estas litologías (Ortiz-Alemán & Urrutia-Fucugauchi, 2010; Urrutia-Fucugauchi et al., 1996).

4.3 Procesamiento de datos gravimétricos

Los datos de la anomalía gravimétrica de la zona de estudio incluyen datos terrestres para la anomalía de Bouguer y datos marinos para la anomalía de aire libre. Estos fueron adquiridos a través de diversas campañas de exploración realizadas por PEMEX, tanto en la década de 1940 como a mediados de la década de 1990. La mayoría de los datos marinos fueron obtenidos por la Universidad Estatal de Oregón en 1991. Se ajustó el nivel base para empalmar ambos conjuntos de datos, ya que la anomalía de aire libre es menor que la anomalía de Bouguer debido a la profundidad del mar (Ortiz-Alemán, 1999). Los datos gravimétricos utilizados en este trabajo fueron proporcionados por el Programa de Perforaciones en Océanos y Continentes (2024).

En la figura (4.2) se presenta la anomalía gravimétrica de Bouguer, la cual muestra valores mínimos de hasta -12 [mGal] y valores máximos de 39 [mGal]. Se observan patrones concéntricos que corresponden, en el centro, a la cuenca central, la cual presenta un valor máximo cercano a 10 [mGal] y un radio aproximado de 20 [km]. Esta cuenca está rodeada por un anillo simétrico concéntrico denominado peak ring, con un radio aproximado de 40 [km] y valores

negativos cercanos a -6 [mGal]. En la región noroeste, el peak ring se encuentra interrumpido por una anomalía de valores altos, asociada con el basamento preexistente al impacto. A continuación, se encuentra el canal anular, el cual posee una forma irregular. En el lado suroeste, este canal se define entre el peak ring y el anillo interior; sin embargo, la anomalía de Bouguer es interrumpida por un lineamiento con dirección noreste. El anillo interno se caracteriza por un aumento progresivo y rápido de valores negativos a positivos, y se observa una correlación con el anillo de cenotes, ubicado a una distancia de $70 - 80$ [km] del centro del cráter. En el presente mapa, no se contempla el anillo exterior el cual se encuentra a una distancia radial entre $90 - 120$ [km].

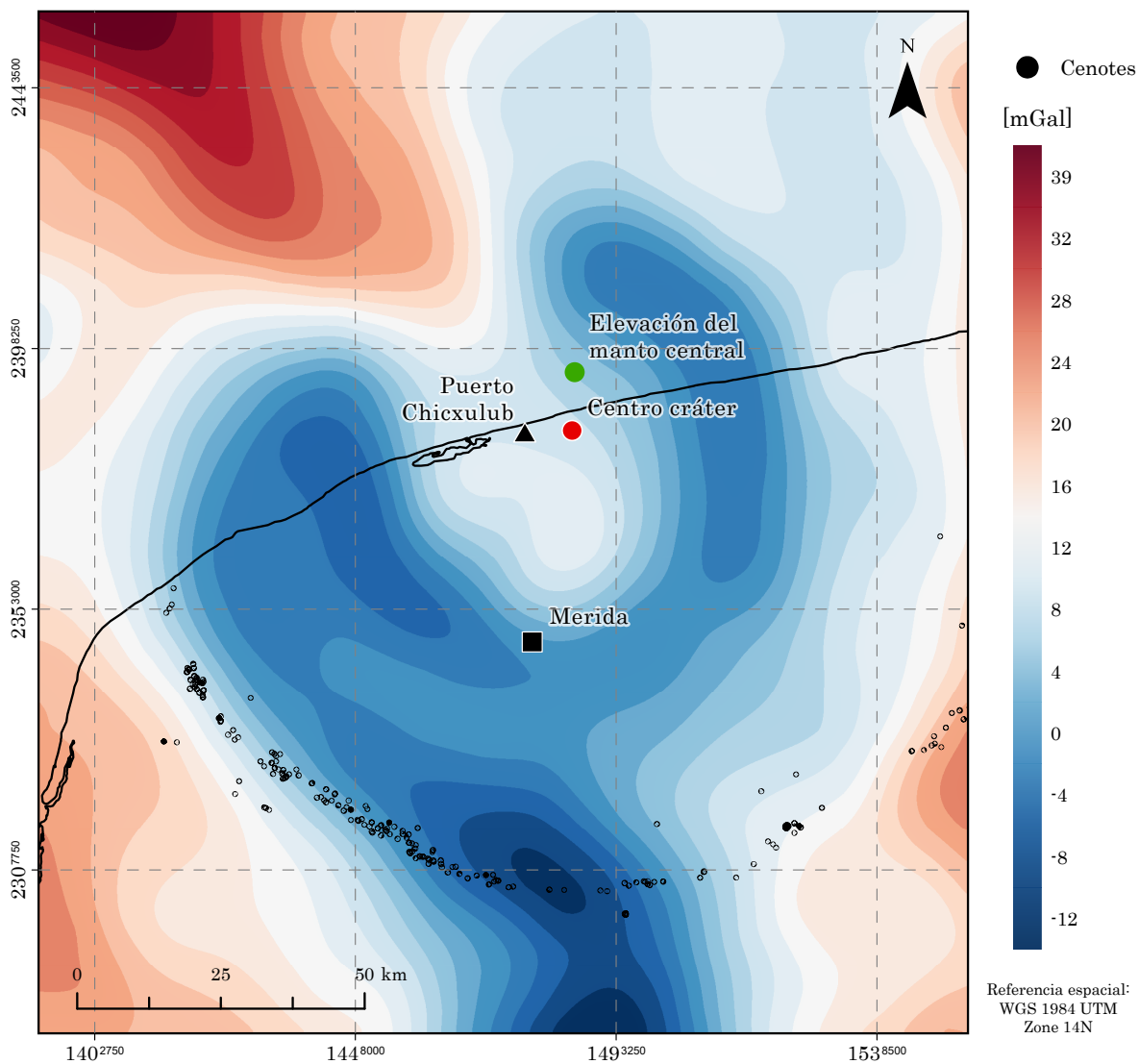


FIGURA 4.2: Anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub y ubicación de puntos de interés. La línea en negro representa el límite territorial.

4.3.1 Operadores de realce de bordes

En la figura (4.3) se muestran los operadores HGA, ASA, Tilt, TDXm, ETA y Nz aplicados a la anomalía gravimétrica de Bouguer. Para facilitar la ubicación espacial, se incluyen referencias: el triángulo negro señala el puerto de Chicxulub, el cuadrado negro la ciudad de Mérida, el círculo negro el centro del cráter y los puntos blancos los cenotes.

En la literatura, el operador HGA fue el primero aplicado a la anomalía de Bouguer del cráter Chicxulub por Hildebrand et al. (1995). Como se observa en la figura (4.3a), los valores máximos del gradiente representan las zonas con mayor contraste de densidad, permitiendo identificar anomalías concéntricas. La primera anomalía se encuentra a una distancia de 20 – 25 [km] desde el centro y puede estar relacionada con el levantamiento central del cráter. Otra anomalía, ubicada entre 40 – 45 [km] al noroeste, podría corresponder al peak ring. Finalmente, las anomalías concéntricas a 70 [km] en el suroeste y 80 [km] en el sureste se asocian con el anillo interior del cráter, el cual, en superficie, coincide con la ubicación del anillo de cenotes.

El operador ASA presenta los mismos patrones de anomalías concéntricas que el operador HGA. Sin embargo, al incluir el gradiente vertical en su cálculo, se define mejor la geometría de la fuente (figura 4.3b). Un ejemplo de esto es la anomalía concéntrica relacionada con el anillo interior en dirección sur, a 75 [km], la cual presenta una discontinuidad en todos los demás operadores, excepto en el operador ASA. Al noroeste, se observa una anomalía con dirección NW, partiendo de los 45 [km], que se asocia con la distancia del peak ring. Si bien este operador permite identificar anomalías a mayor profundidad, esto ocurre a costa de una posible sobrestimación de su ubicación real. Además, en los extremos de la malla se presentan los valores más altos del operador, aunque esto se debe al efecto de borde.

Las soluciones de los operadores Tilt, TDXm, ETA y Nz aplicados a la anomalía gravimétrica del cráter Chicxulub presentan valores similares, ya que todos son operadores de fase local. La diferencia entre ellos radica en la interpretación que se les da de acuerdo con su cálculo. En el caso del operador Tilt, figura (4.3c), este permite delimitar con mayor detalle las anomalías concéntricas del cráter, facilitando una mejor interpretación de las estructuras geológicas. Los valores negativos del operador Tilt se asocian con una menor densidad del material depositado en comparación con el entorno, mientras que los valores positivos corresponden a zonas donde la densidad es mayor en relación con las áreas adyacentes. Además, la transición entre valores negativos y positivos se asocia con la presencia de estructuras geológicas, como zonas de fallas y fracturamiento. En estos casos, los bordes de las estructuras aparecen con valores cercanos a cero, lo que indica su posible ubicación.

La relación entre el gradiente vertical y el gradiente horizontal en el operador Tilt provoca que los bordes de las estructuras geológicas a mayor profundidad sean más difusos. Esta limitación es corregida por el operador TDXm, como se observa en la figura (4.3d). En el operador TDXm, la transición entre valores máximos y mínimos, que corresponden a los bordes geológicos, es más abrupta, lo que permite definirlos con mayor precisión. En este caso, los valores cercanos a cero negativo corresponden a materiales de menor densidad, mientras que los valores cercanos a cero positivo se asocian con materiales más densos.

En el caso del operador Nz, figura (4.3f), sólo existen dos posibles soluciones para las anomalías gravimétricas del cráter: 0 [Rad], asociado a zonas con menor densidad de material, y 0.62 [Rad], correspondiente a zonas con mayor densidad de material depositado, no se presentan valores intermedios. Este operador facilita la interpretación al simplificar la variabilidad de los datos. Sin embargo, su naturaleza agresiva al homogeneizar los valores puede llevar a la eliminación de detalles importantes, lo que podría afectar la identificación de ciertas estructuras geológicas sutiles. Por ejemplo, el peak ring es muy marcado en la parte noreste del cráter, pero en la parte suroeste la anomalía no es tan evidente. Sin embargo, esta aún puede identificarse en los operadores HGA, Tilt, TDXm y ETA, mientras que el operador Nz elimina por completo esa posibilidad, dificultando su reconocimiento.

El operador ETA, figura (4.3e), al ser una relación entre la amplitud de la señal analítica y el valor absoluto del gradiente vertical, las anomalías sutiles se amplifican, por ejemplo la anomalía del peak ring al suroeste. Sin embargo, sólo caracteriza los bordes de las estructuras geológicas a través de los valores máximos del operador, ignorando las zonas adyacentes, independientemente de si presentan una respuesta gravimétrica positiva o negativa. Los valores obtenidos con este operador son muy similares a los de los operadores Tilt y TDXm.

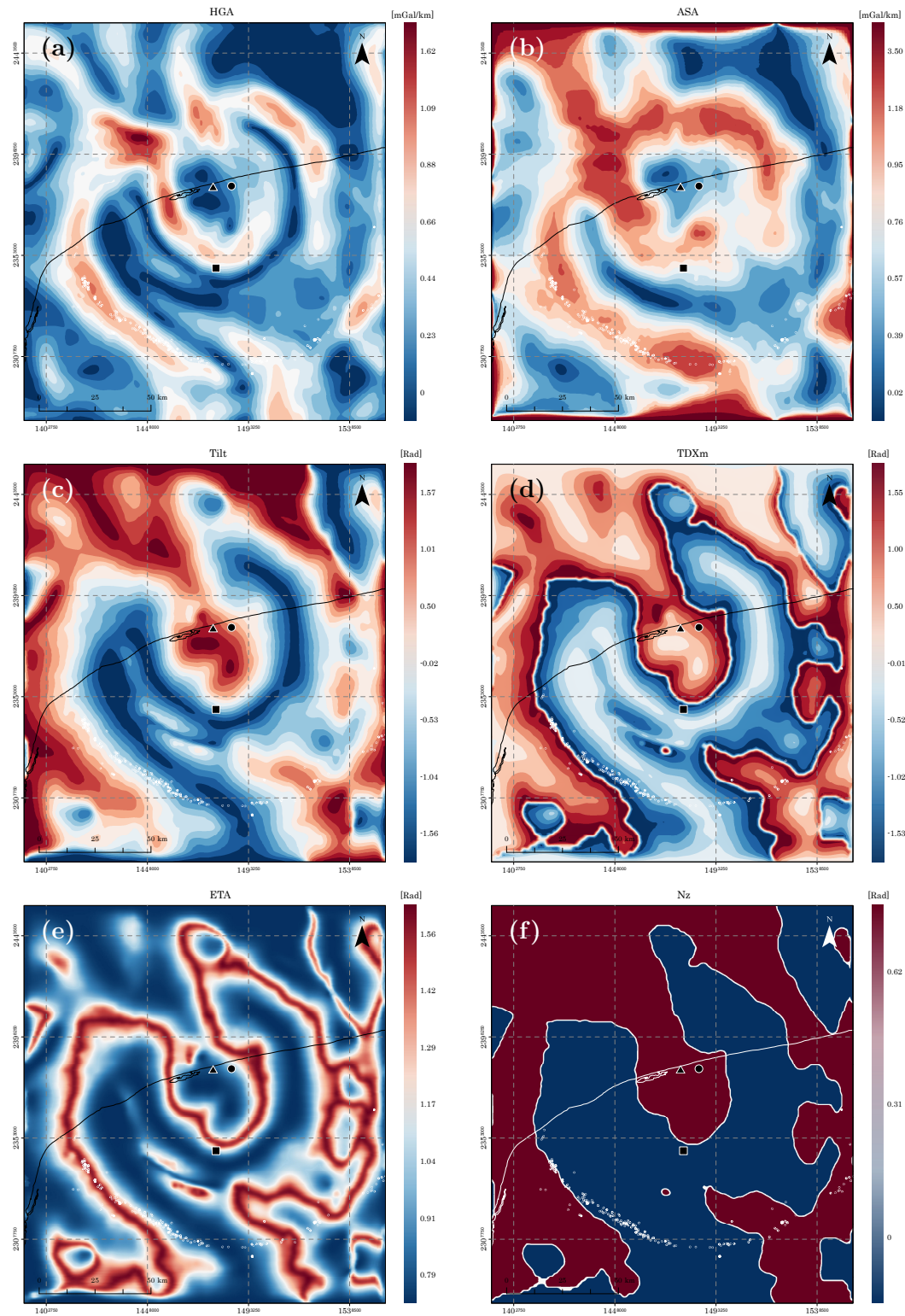


FIGURA 4.3: Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: (a) HGA; (b) ASA; (c) Tilt; (d) TDXm; (e) ETA; (f) Nz.

4.3.2 Deconvolución de Euler 3D

Los operadores de realce de bordes, como se ha discutido anteriormente, son una herramienta eficaz para caracterizar las zonas con mayor contraste de densidad, las cuales pueden estar asociadas a cambios litológicos, fallas y zonas de fracturamiento. Sin embargo, una de sus limitaciones es que sólo proporcionan información en planta, desconociendo la ubicación en profundidad de las anomalías. Por otro lado, las deconvoluciones de Euler 3D permiten determinar la profundidad de las anomalías, lo que facilita una caracterización más detallada de las estructuras geológicas.

La implementación de las deconvoluciones de Euler 3D se realizó en MATLAB[®] R2023a, desarrollando algoritmos específicos para el procesamiento de los datos gravimétricos y magnéticos basándose en las subrutinas **EULDPHT**, **EULDW** y **EULDWz**. Los cálculos fueron ejecutados en un equipo con procesador Intel[®] Core[™] i9-13900KF y 64 GB de memoria RAM.

Siguiendo la metodología empleada en el capítulo anterior, se realiza el análisis de la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub. En el plano de observación $z = 0$, se tiene una malla regular de 62,500 puntos de adquisición (250×250 en las direcciones X y Y), el área total de estudio corresponde a 28274.34 [km²]. Para todos los casos se utiliza un tamaño de ventana móvil de 11×11 elementos en el dominio de observación, lo que genera un total de 121 ecuaciones por ventana. El área correspondiente a cada ventana es de 54.73 [km²]. En términos de desempeño computacional, el tiempo de ejecución registrado para el método EULDPHT fue de 3.87 [s], para el método EULD-TDX fue de 1.77 [s] y para el método EULD-TDXz fue de 2.15 [s].

EULDPHT

En el caso de las deconvoluciones de Euler 3D convencionales, se utiliza un índice estructural (IE) de -1, el cual es el valor asignado para contactos verticales en el análisis gravimétrico. Para el criterio de selección de fuentes de Thompson, se emplean dos valores de tolerancia (TOL): 10 y 20, con el propósito de contrastar los resultados y evaluar las soluciones.

En las soluciones del método EULDPHT, al incrementar la tolerancia, se obtiene una mayor certeza en la precisión de las soluciones; sin embargo, esto conlleva la pérdida de múltiples soluciones que pueden contribuir a la delimitación y mejora del análisis geológico. La diferencia entre las soluciones con una tolerancia de 10 (TOL:10), representadas en la figura (4.4a), y aquellas con una tolerancia de 20 (TOL:20), figura (4.4b), radica en la cantidad y distribución de las soluciones. Con una tolerancia menor, se obtiene un mayor número de soluciones,

tanto en regiones someras como en profundidad, presentando una mayor dispersión espacial. Además, las soluciones incluyen tanto anomalías gravimétricas positivas como negativas.

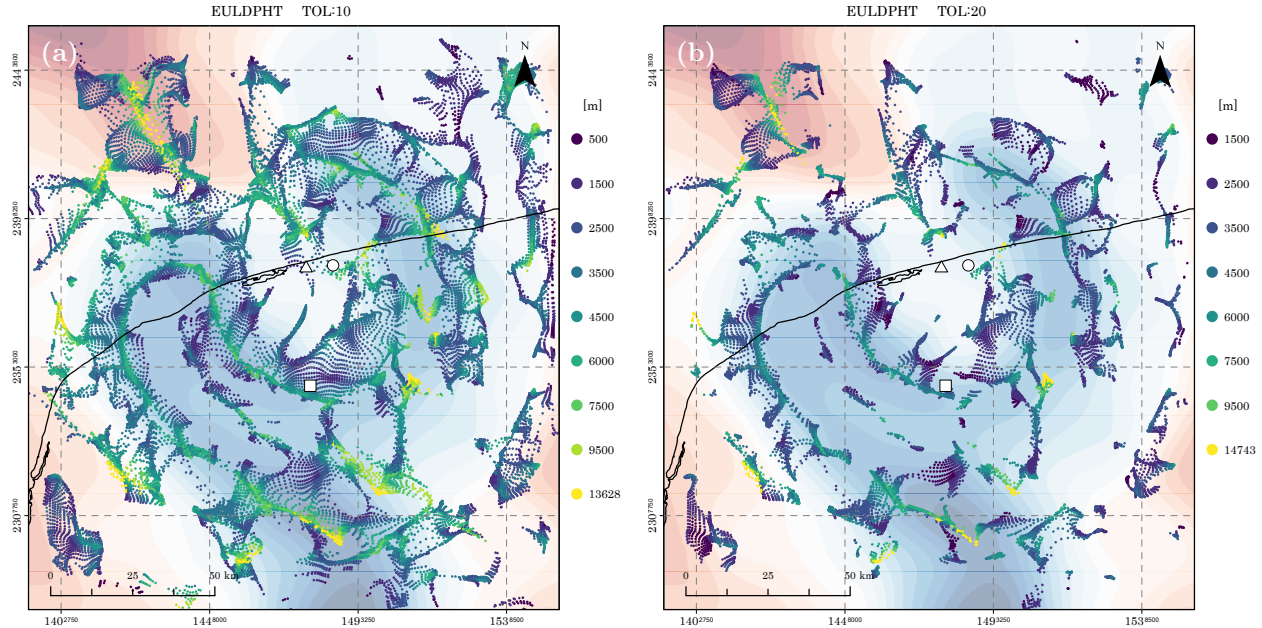


FIGURA 4.4: Soluciones del método EULDPHT para la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: (a) TOL:10; (b) TOL:20.

En lo que respecta a TOL:10, se observa que, a lo largo de los principales lineamientos del cráter, las soluciones se encuentran a mayor profundidad. El anillo más interno, correspondiente a la cuenca central del cráter, se identifica al suroeste y sur del centro del cráter, con profundidades que oscilan entre 1.5[km], una mayor concentración de soluciones entre 3.5 – 6.0[km] y un menor número de soluciones que alcanzan hasta los 8.0[km]. Hacia el este las profundidades máximas son menores, de 6.0[km] y el noroeste el lineamiento no es continuo y tiende a desaparecer. Respecto a las soluciones dentro de la cuenca central, las profundidades presentan una menor variabilidad, iniciando en aproximadamente 0.85[km], con una mayor concentración de soluciones entre 1.6 – 4.8[km], teniendo un pico en 2.9[km].

En el peak ring, como era de esperarse, al noreste se observa un mejor lineamiento. Las soluciones oscilan en torno a 2.0[km], con una mayor concentración entre 2.8 – 6.2[km], alcanzando un pico en 4.0[km] y profundidades máximas de 10.5[km]. Hacia el este y sureste, el lineamiento se pierde y se recupera al sur y suroeste, donde las soluciones son más someras, oscilando en torno a 0.5[km], con una mayor concentración entre 1.2 – 4.2[km] y profundidades máximas de 6.9[km]. Dentro del peak ring, al noreste las profundidades oscilan entre 0.85 – 3.0[km], al sureste las profundidades se encuentran en un rango similar, entre 1.0 – 3.0[km] y al suroeste, se observa un rango más reducido, de 0.5 – 1.6[km], lo que indica que en esta

región las soluciones son predominantemente más someras en comparación con las demás áreas del peak ring.

Una de las estructuras más evidentes es el anillo interno, el cual se encuentra bien definido en la parte suroeste y sur del cráter, siendo menos evidente hacia el sureste, con límites poco definidos. Las profundidades del anillo interno al suroeste oscilan entre 2.0[km], con un mayor número de soluciones entre 3.5 – 6.8[km] y profundidades máximas de hasta 7.5[km]. Hacia el sur del anillo interno, siguiendo el lineamiento, las soluciones son más profundas en comparación con las anteriores. La mayor concentración de soluciones se encuentra entre 4.0 – 8.5[km], con un pico en 6.0[km] y profundidades máximas con menor numero de soluciones de hasta 13.2[km]. Estas soluciones se asocian con la anomalía observada en la misma ubicación que en el operador ASA, y que no se puede observar en los demás operadores.

Fuera de la anomalía negativa del cráter, al noroeste, correspondiente a la anomalía positiva gravimétrica y remarcada con el operador ASA (F1), se encuentran soluciones profundas de hasta 12.5[km]. De igual forma, al suroeste, a una distancia radial de 90[km], a unos 20[km] del anillo interno, se tienen lineamientos (F2) con soluciones profundas de hasta 13.6[km].

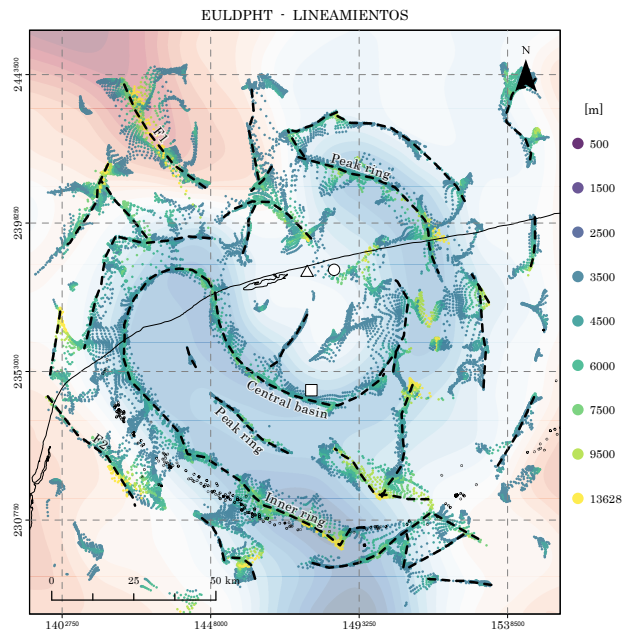


FIGURA 4.5: Principales lineamientos definidos por las profundidades estimadas mediante el método EULDPHT en la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub.

En relación con TOL:20, al realizar el mismo análisis de las soluciones y lineamientos que en el caso TOL:10, se siguen respetando, en general, las mismas profundidades y distribuciones. La diferencia radica principalmente en que las soluciones someras se ven afectadas; la profundidad mínima en toda el área de estudio es de 0.95[km], por lo que zonas como la cuenca

central y el área dentro del peak ring se ven impactadas. Además, los lineamientos presentan una mayor discontinuidad. Para análisis de EULDPHT con tolerancias mayores a 20, las soluciones y lineamientos son tan dispersos que no se reconocen las principales características geológicas de la anomalía.

De acuerdo con las soluciones de TOL:10 y TOL:20, he mapeado los principales lineamientos gravimétricos del cráter Chicxulub, tomando como referencia profundidades mayores a 2.5[km], como se observa en la figura (4.5).

EULD-TDX

Para el método EULD-TDX, el cual, a diferencia del método EULDPHT, no requiere información a priori sobre la geometría de la fuente (IE). Para el criterio de selección de fuentes, se emplea el operador TDXm con un rango (R) de aceptación de soluciones mayor a $\pi/12$ [Rad] para delimitar anomalías positivas, mientras que, para delimitar fuentes negativas, se utiliza un rango de aceptación menor a $-\pi/12$ [Rad].

Las soluciones del método EULD-TDX, a diferencia del método tradicional EULDPHT, no dependen del índice estructural. En este caso, las derivadas del operador TDX se emplean para el cálculo de las soluciones. Al eliminar el índice estructural, el criterio de selección de fuentes de Thompson deja de ser aplicable, por lo que se desarrolla un método alternativo que sigue la misma línea de análisis, basado en el operador TDXm. La selección de fuentes se realiza en dos categorías: la respuesta positiva del operador, que corresponde a las áreas adyacentes al cráter, como se observa en la figura (4.6a), y la respuesta negativa, asociada al cráter Chicxulub, como se muestra en la figura (4.6b).

En lo que respecta las anomalías negativas, correspondientes al cráter, se observa que, a lo largo de los principales lineamientos, las soluciones están mejor definidas y presentan menor dispersión en comparación con el método EULDPHT. El anillo más interno, correspondiente a la cuenca central del cráter, se identifica en los sectores suroeste, sur y este del centro del cráter, con profundidades oscilan desde 1.0[km], una mayor concentración de soluciones entre 4.5 – 11.0[km], y un menor número de soluciones que alcanzan hasta los 14.6[km]. Hacia el noroeste, el lineamiento es menos profundo, con la mayor cantidad de soluciones concentradas entre 1.0 – 3.5[km] y profundidades máximas de 6.5[km]. En cuanto a las soluciones dentro de la cuenca central, que corresponden a la anomalía positiva, la mayor concentración de soluciones se encuentra en el rango de 0.3 – 2.5[km], con profundidades máximas de hasta 3.5[km].

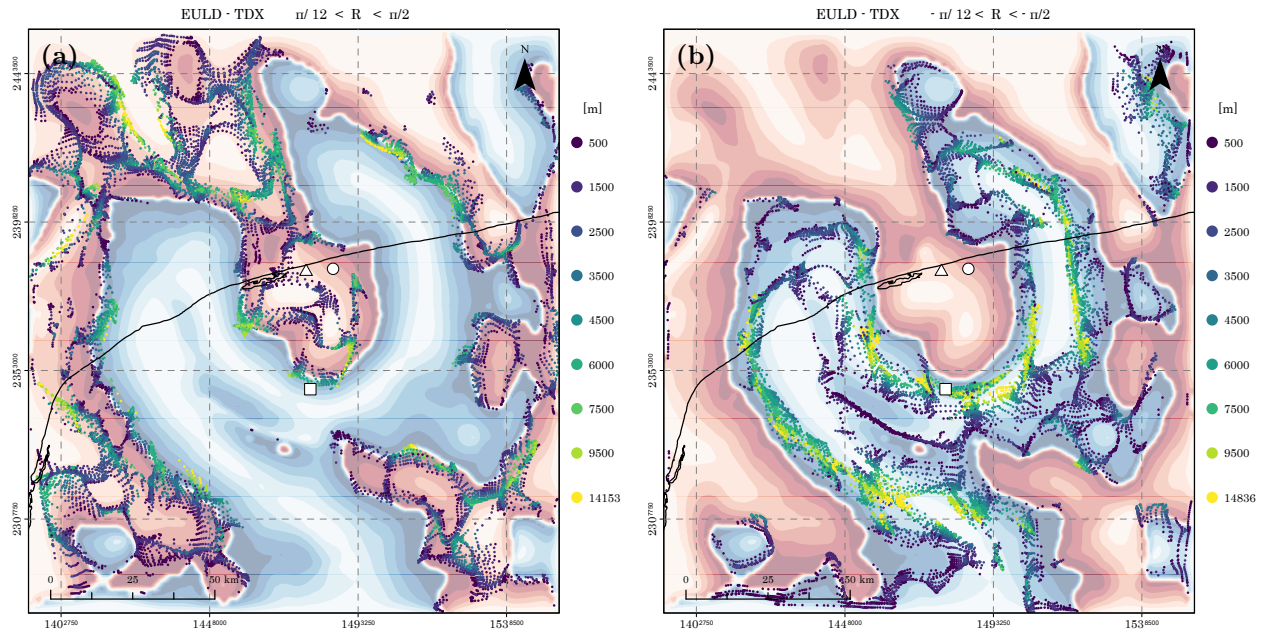


FIGURA 4.6: Soluciones del método EULD-TDX para la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: (a) $\pi/12 < R < \pi/2$; (b) $-\pi/12 < R < -\pi/2$. De fondo del operador TDXm.

Los lineamientos del peak ring al noreste y al este presentan profundidades a partir de 0.5[km], con una mayor concentración de soluciones entre 4.0 – 8.0[km] y profundidades máximas, con un menor número de soluciones, de hasta 11.5[km]. Hacia el este y sureste, el lineamiento es más visible en comparación con el método EULDPHT, mostrando soluciones más someras desde 0.5[km], con una mayor concentración entre 0.7 – 3.0[km] y un menor número de soluciones que alcanzan hasta 5.5[km]. En la dirección sureste y sur, las profundidades son mayores, partiendo de 2.0[km], con una mayor concentración de soluciones entre 4.0 – 9.5[km] y una menor cantidad que alcanza hasta 13.2[km]. Hacia el sur y suroeste, las soluciones son más someras en general, con una mayor concentración desde el plano de observación hasta 1.0[km], y profundidades máximas de 3.5[km]. No es posible determinar las profundidades dentro del peak ring, ya que, al tratarse de anomalías sutiles con bajo contraste, el método EULD-TDX no logra caracterizar estas zonas, dado que se enfoca en la caracterización de los bordes con mayor contraste.

Las profundidades obtenidas para el anillo interno en la parte suroeste y sur oscilan a partir de 3.0[km], con una mayor concentración de soluciones entre 4.0 – 9.0[km], alcanzando un pico en 6.0[km]. Las profundidades máximas, con un menor número de soluciones, llegan hasta 14.8[km], siendo estas las más profundas del análisis. Hacia el sureste, el lineamiento del anillo deja de ser evidente en la anomalía negativa del operador; sin embargo, al evaluar las soluciones en la anomalía positiva, se recupera información. En este caso, las soluciones co-

mienzan a partir de 2.0[km], con una mayor concentración entre 3.0–7.0[km] y profundidades máximas de hasta 9.0[km].

Fuera de la anomalía negativa del cráter, los lineamientos más importantes (F1) se reflejan al noroeste, en dirección NW con soluciones a partir de 1.0[km] con una concentración de soluciones entre 3.0–9.0[km], con un pico de solución en 6.0[km] y soluciones profundas de hasta 12.0[km]. Al suroeste, a una distancia radial de 90[km], el lineamiento (F2) es menos evidente, con una concentración de soluciones entre 2.0–4.8[km] y profundidades máximas de hasta 9.0[km].

De acuerdo con las soluciones del lado positivo y del negativo del operador TDXm para el cráter Chicxulub, se mapeo los principales lineamientos gravimétricos, tomando como referencia profundidades mayores a 2.5[km], como se observa en la figura (4.7). En este caso, los lineamientos presentan una continuidad más clara, sin interrupciones abruptas como en el método EULDPHT. Además, se logra una mejor delimitación de estructuras ubicadas a mayor profundidad. No obstante, un inconveniente del método es la presencia de soluciones someras muy cercanas al plano de observación, indicando que el método tiene complicaciones al estimar fuentes superficiales.

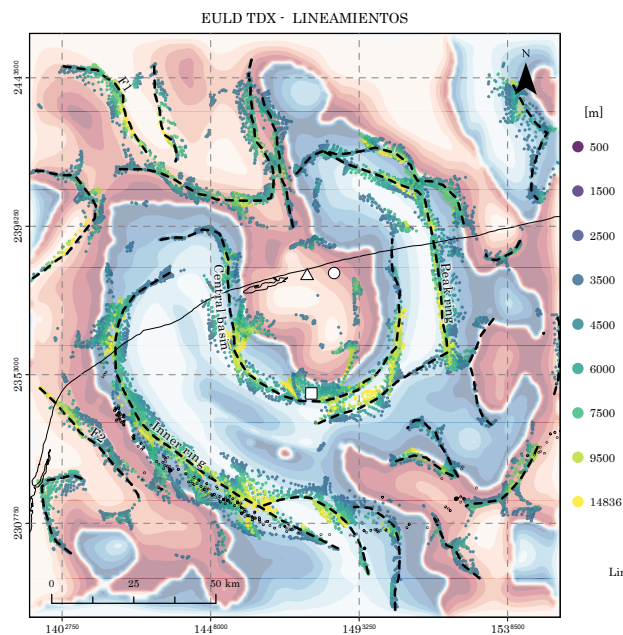


FIGURA 4.7: Principales lineamientos definidos por las profundidades estimadas mediante el método EULD-TDX en la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter.

EULD-TDX con corrección en profundidad

Implementé una corrección en profundidad para el método EULD-TDX, la cual consiste en calcular inicialmente la ubicación de las soluciones en planta mediante este método y, posteriormente, ajustar la profundidad reduciendo el decaimiento del campo gravitacional a través del método EULDPH. Dado que el método EULDPH requiere información a priori sobre la geometría de la fuente, es necesario calcular el índice estructural (IE) de las fuentes gravitacionales del cráter. Como criterio de selección de fuentes, se emplea el operador TDXm, utilizando un rango de aceptación (R) mayor a $\pi/12$ [Rad] para delimitar anomalías positivas y un rango menor a $-\pi/12$ [Rad] para fuentes negativas.

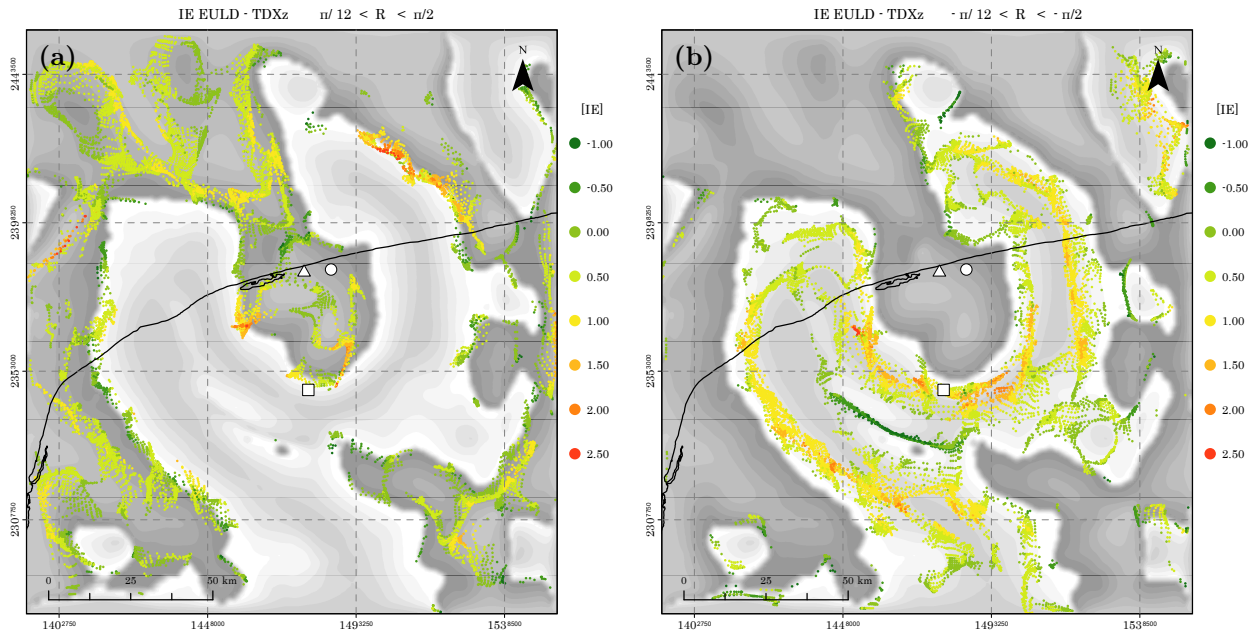


FIGURA 4.8: Índice estructural para las soluciones de EULD-TDX de la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: (a) $\pi/12 < R < \pi/2$; (b) $-\pi/12 < R < -\pi/2$. De fondo del operador TDXm.

Las estimaciones del índice estructural para la anomalía positiva en áreas adyacentes al cráter se observan en la figura (4.8a), mientras que para la anomalía negativa, correspondiente al cráter, se presentan en la figura (4.8b). Asimismo, se tiene control sobre la selección de los valores del índice estructural que son aceptados, funcionando también como un criterio de selección de fuentes. En este caso, se consideran valores dentro del rango de -1.5 a 2.5 . Los valores más negativos suelen estar asociados a anomalías ubicadas a profundidades someras. Por ejemplo, el lineamiento del peak ring en la parte sur-suroeste presenta valores entre -1.0 y cercanos a cero negativo. En contraste, los valores positivos superiores a 1.5 corresponden generalmente a anomalías ubicadas a mayor profundidad.

Una vez evaluado el comportamiento geométrico de las fuentes, se procede a realizar la corrección en profundidad. En la figura (4.9a) se presentan las estimaciones corregidas de la anomalía positiva, mientras que en la figura (4.9b) se muestran las estimaciones corregidas de la anomalía negativa del cráter. En general, se observa una reducción en la cantidad de soluciones someras, mientras que los lineamientos a mayor profundidad se destacan con mayor claridad, que corresponden a los lineamientos principales del cráter.

Dado que las soluciones en planta provienen del método EULD-TDX, la corrección en profundidad no altera su ubicación en planta, sino únicamente las estimaciones de profundidad. Para evitar la dispersión de datos, se determina la profundidad en el que se agrupa el 95 % del total de soluciones, el cual corresponde a 25.0[km]. Esto sugiere que las profundidades estimadas son mayores tras aplicar la corrección que en el método EULDPHT y EULD-TDX.

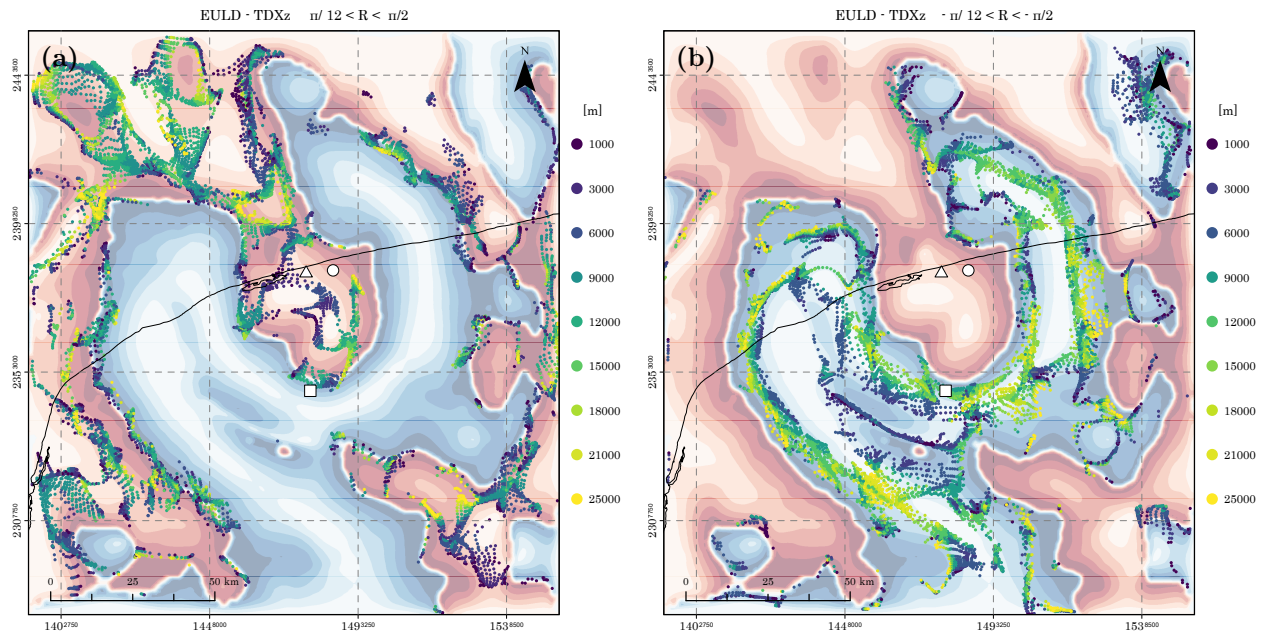


FIGURA 4.9: Corrección en profundidad para soluciones de EULD-TDX de la anomalía gravimétrica de Bouguer del cráter Chicxulub: (a) $\pi/12 < R < \pi/2$; (b) $-\pi/12 < R < -\pi/2$. De fondo del operador TDXm.

Las profundidades estimadas en el anillo correspondiente a la cuenca central, en las regiones suroeste, sur y este del centro del cráter, inician en 3.5[km], con una mayor concentración de soluciones entre 7.0 – 17.0[km], y profundidades máximas de hasta 23.0[km]. Dentro de la cuenca central, las profundidades comienzan en 0.5[km], con una mayor concentración de soluciones entre 1.5 – 4.5[km], y profundidades máximas de 7.0[km].

Respecto a los lineamientos del peak ring, al noreste y al este se presentan profundidades a partir de 4.0[km], con una concentración de soluciones entre 7.0 – 15.0[km], y en menor

medida, profundidades de hasta 20.0[km]. Hacia el este y el sur, la distribución de las profundidades se mantiene, observándose valores iniciales a partir de 1.0[km]. En la zona suroeste, donde el peak ring presenta valores más someros, las profundidades inician en 0.5[km], con una mayor concentración de soluciones hasta los 5.0[km] y, en menor medida, de hasta 7.5[km].

En el anillo interno, hacia el suroeste las profundidades tienen una mayor concentración de soluciones entre 5.5 – 14.0[km], hacia el sur las profundidades son mayores, las soluciones se concentran a partir de 7.0 – 22.0[km], con un valores pico en 18.0[km]. El lineamiento hacia el sureste presente menor profundidad en comparación, las soluciones se concentran entre 2.5 – 9.0[km].

En cuanto a las anomalías fuera del cráter, el lineamiento (F1), ubicado al noroeste del cráter, presenta estimaciones donde las profundidades aumentan en su entorno, lo que resulta en un caso de interés. La mayor concentración de soluciones se encuentra entre 6.0 – 14.0[km], con estimaciones máximas de hasta 18.0[km]. Por otro lado, el lineamiento (F2), al ser analizado con este método, muestra una mayor dispersión de soluciones en profundidad, lo que impide realizar un análisis concluyente.

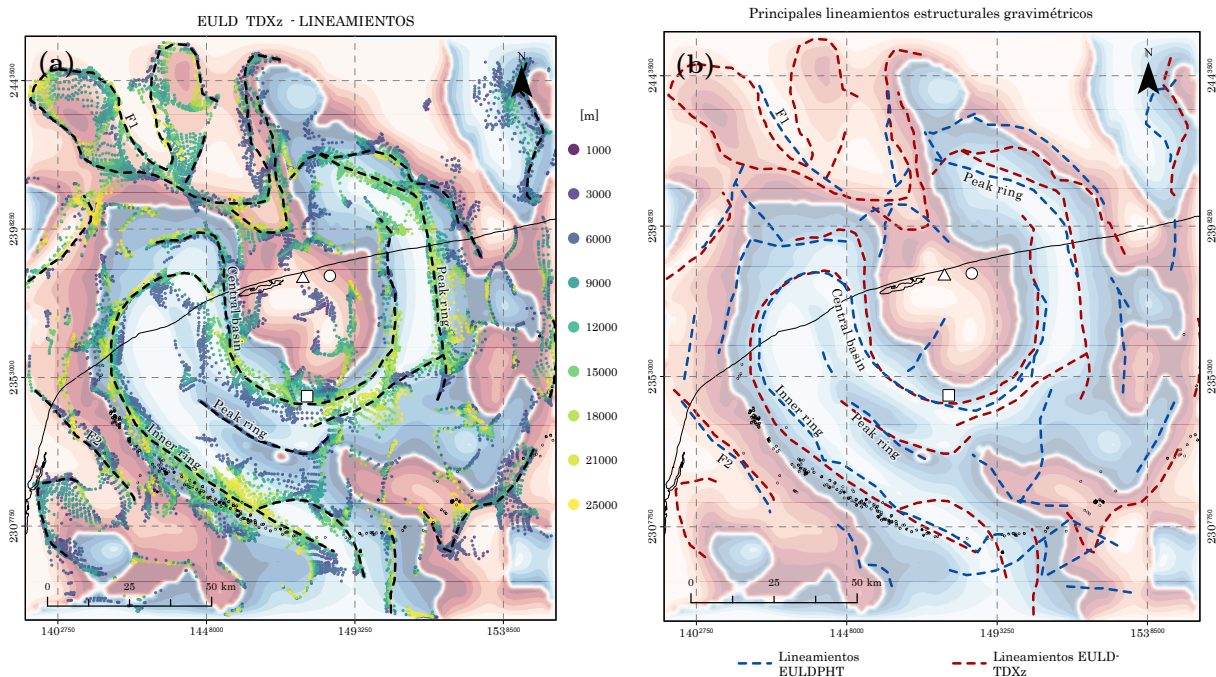


FIGURA 4.10: (a) Lineamientos identificados con EULD-TDXz. (b) Integración de los lineamientos de los métodos EULDPHT y EULD-TDXz.

De acuerdo con las estimaciones obtenidas mediante el método EULD-TDXz, he mapeado los principales lineamientos gravimétricos, considerando profundidades superiores a 2.5 [km], como se muestra en la figura (4.10a). En general, las estimaciones son más profundas que las

obtenidas con los métodos EULDPHT y EULD-TDX, permitiendo identificar lineamientos que anteriormente no eran visibles y mejorando la continuidad de los mismos. No obstante, una limitación del método es su susceptibilidad a generar valores dispersos en ciertos casos. La corrección en profundidad es altamente sensible al índice estructural calculado previamente, lo cual se debe a la no homogeneidad del medio. En la figura (4.10b) se presenta un mapa en el que se integran los principales lineamientos gravimétricos obtenidos mediante los métodos EULDPHT y EULD-TDX.

El levantamiento de la cuenca central, de acuerdo con diferentes modelos de inversión como los utilizados por Pilkington et al. (1994) y Hildebrand et al. (1998), mediante datos gravimétricos y sísmicos, se encuentra a una profundidad de 3.0 [km], con un truncamiento a los 8.0 [km] debido a la falta de restricciones. En investigaciones más recientes, como en el caso de Vermeesch et al. (2009), al realizar una inversión conjunta de gravedad y tiempo de viaje, se ubica la cima a 3.0 [km], con una profundidad que se extiende hasta los 15 [km]. Por su parte, Ortiz-Aleman et al. (2021), a través de la propagación de ondas sísmicas acústicas de gran escala y modelado gravimétrico, estima una profundidad de 3.5 [km], que se extiende hasta los 20 [km]. En este trabajo, mediante el método EULD-TDXz, el anillo correspondiente a la cuenca central presenta profundidades iniciales de 3.5 [km], con una concentración de soluciones entre 7.0 y 17.0 [km], y profundidades máximas de hasta 20 [km], lo que demuestra que se obtiene una buena estimación en profundidad de esta estructura.

Estudios geofísicos previos han demostrado que las rocas que conforman el peak ring presentan propiedades físicas contrastantes respecto al basamento cortical regional, con velocidades sísmicas de onda P relativamente bajas, del orden de 3.9 a 4.5 [km/s], y densidades reducidas entre 2.2 y 2.3 [g/cm³], en comparación con los valores típicos del basamento no afectado, que exhibe velocidades superiores a 5.6 [km/s] y densidades mayores a 2.7 [g/cm³]. Estas características se han atribuido al alto grado de fracturación, colapso estructural y a la posible presencia de brechas o fundidos recompactados generados por el impacto, lo cual dificulta su identificación directa mediante métodos gravimétricos tradicionales debido a la baja respuesta anómala asociada (Morgan et al., 2011; Morgan et al., 2016).

En este trabajo, se identificó un sistema de fallas concéntricas de gran desplazamiento que coincide espacialmente con el borde del peak ring. Este sistema se interpreta como la transición estructural entre el peak ring y una unidad inferior compuesta por bloques colapsados (*slump blocks*), previamente caracterizada en estudios sísmicos por la presencia de un reflector inclinado hacia el centro del cráter (Gulick et al., 2008, 2013; Morgan et al., 2000; Morgan et al., 2016). Los resultados permiten estimar que dichas fallas alcanzan profundidades variables según la asimetría del cráter, con valores de entre 4.0 y 15 km en sectores más profundos, y hasta 7.0 km en regiones menos profundas.

4.4 Procesamiento de datos magnéticos

Los datos aeromagnéticos del cráter Chicxulub consisten en una cuadrícula con una separación de 6.0 km entre líneas de vuelo y líneas de enlace perpendiculares, volando a una altitud de 450 m. Al ser continuas las líneas de adquisición, se logra obtener datos de alta densidad. Los datos magnéticos utilizados en este trabajo fueron proporcionados por el Programa de Perforaciones en Océanos y Continentes (2024). Para atenuar el ruido de altas frecuencias proveniente de anomalías superficiales o de posible ruido instrumental, se realiza una continuación ascendente de 5.0 km, como se muestra en la figura (4.11a).

Para la reducción al polo de los datos magnéticos, figura (4.11b), se utilizan los valores propuestos por Pilkington et al. (1994), con una inclinación y declinación del campo ambiental de 52° y 2° , respectivamente, valores que reflejan la dirección del campo en la Península de Yucatán. Para considerar la magnetización remanente de la roca fuente, se toma en cuenta la posición paleogeográfica de Yucatán durante el límite K/Pg, al momento del impacto. Utilizando el paleopolo norteamericano estimado para esa época, se obtiene una inclinación de magnetización de -41° y una declinación de 163°E (equivalente a -17° respecto al norte geográfico). Los datos paleomagnéticos obtenidos en la perforación del pozo Y-6, de acuerdo con Sharpton et al. (1992), reportan una inclinación promedio de -43° . Sin embargo, para hacer efectiva la reducción al polo, se opta por invertir el signo de la magnetización remanente, utilizando $+41^\circ$, lo cual permite reposicionar correctamente las anomalías sobre sus fuentes y eliminar las firmas dipolares características de campos oblicuos o invertidos.

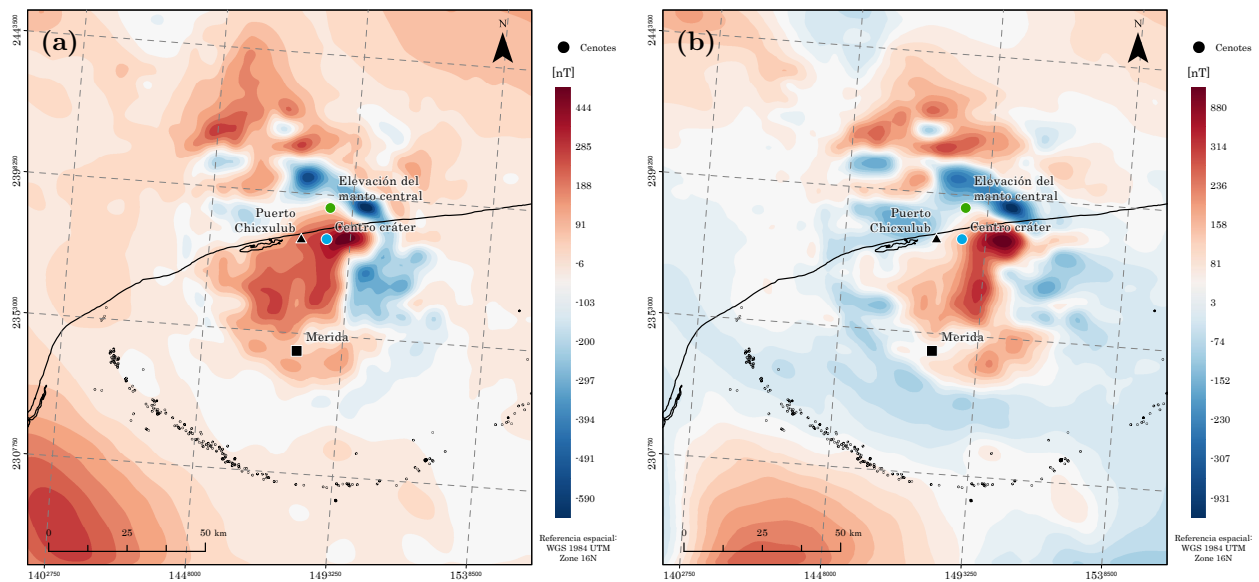


FIGURA 4.11: (a) Anomalia magnética de campo total con continuación ascendente de 5.0[km]; (b) Reducción al polo de la anomalía magnética.

Se tienen tres patrones concéntricos anómalos en la anomalía del campo total que se asocian a la geometría del cráter. El sector central, de < 20 [km] de radio, presenta anomalías de gran amplitud producto de la combinación del material fundido y de brechas ricas en fundido. Estas anomalías tienen valores desde -930 [nT] hasta 800 [nT], con una clara mezcla de señales positivas y negativas. En la región media, de aproximadamente $20 - 40$ [km] de radio, se observan anomalías de onda corta y alta amplitud, así como un ligero alargamiento en dirección NNO-SSE. El sector exterior, de aproximadamente $45 - 90$ [km] de radio, se caracteriza por presentar anomalías de onda corta de baja amplitud; se asocian a la geometría dentro del anillo interior, donde se marca la extensión de las rocas fundidas y de brechas ricas en fundido, presentando una distribución irregular. Para una distancia radial > 90 [km] hacia el suroeste, se identifican anomalías de onda larga con valores positivos, asociados con anomalías regionales (Pilkington et al., 1994; Rebolledo-Vieyra et al., 2010).

4.4.1 Operadores de realce de bordes

En la figura (4.12) se presentan los operadores de realce de bordes HGA, ASA, Tilt, TDXm, ETA y Nz aplicados a los datos de la anomalía magnética reducida al polo del cráter Chicxulub. Para facilitar la ubicación espacial, se incluyen puntos de referencia: el triángulo negro indica la ubicación del puerto de Chicxulub, el cuadrado negro corresponde a la ciudad de Mérida, Yucatán, el cinturón de círculos corresponden a los cenotes.

El operador HGA, figura (4.12a), y el operador ASA, figura (4.12b), presentan resultados similares. En este caso, el operador ASA delimita de mejor manera las zonas donde se encuentran las fuentes con mayor contraste de susceptibilidad magnética, como áreas con material fundido y el levantamiento estructural central (central uplift) del cráter, resaltando además posibles anomalías ubicadas a mayor profundidad. Estas anomalías se presentan a una distancia radial de 50 [km] respecto al centro del cráter. La anomalía más prominente del operador ASA se localiza justo en los valores máximos y mínimos de la anomalía magnética, presenta una dirección NNO-SSE, con una longitud de 50 [km] y valores mayores a 100 [nT/km]. Este operador sólo considera la amplitud total de los gradientes, por lo tanto, no distingue entre anomalías positivas o negativas. Esto dificulta la interpretación si se desea hacer una distinción de las anomalías según su magnetización remanente, polaridad o litología mixta, por lo que puede sobre-resaltar cuerpos menores o profundos si su gradiente es fuerte, aunque la señal sea débil.

Los operadores de fase, como en el caso del operador Tilt, figura (4.12c), el operador TDXm, figura (4.12d) y el operador Nz, figura (4.12f) se tiene una respuesta muy similar, al normalizar la señal presenta mejores resultados en detectar anomalías débiles y puede ayudar a delimitar y definir de mejor manera continuidades estructurales. En este caso calcula cambios graduales

o bruscos de la pendiente del campo magnético, los valores positivos indican que se está sobre una fuente magnética, y los valores negativos es que se está alejado de una fuente. Los operadores muestran anomalías en la cuenca central y anomalías concéntricas que van más allá de 50 [km]. Una anomalía importante resaltada es al suroeste, relacionada a anomalía regional que se encuentra a más de 90 [km]

Si se toma en cuenta la extensión de las anomalías delimitadas por el operador ASA, estas coinciden con patrones anómalos de distribución circular identificados mediante operadores de fase. Esta correspondencia radial se manifiesta en el sector oeste a 50 [km], extendiéndose hacia el norte y noreste a 35 [km], hacia el este con una interrupción, y continuando hacia el sur a 40 [km] y al suroeste a 50 [km].

Estas anomalías pueden correlacionarse con la ubicación del peak ring, así como con los lineamientos definidos a partir del procesamiento gravimétrico, los cuales también se asocian con dicha estructura, lo que demuestra que es posible observar la continuidad de las anomalías independientemente de su amplitud. De este modo, el seguimiento de los gradientes del campo magnético permite relacionar tanto anomalías intensas como aquellas de baja amplitud con los mismos patrones estructurales.

Los bordes de las anomalías se marcan de manera más clara en los operadores TDXm y Nz, en cambio el operador Tilt presentan bordes un poco más difusos. Para el caso del operador ETA, figura (4.12e), sólo delimita los bordes de las anomalías, sin distinción si se está sobre una fuente o no, en este caso la anomalía magnética del cráter al ser muy compleja puede ser confusa su interpretación con este operador.

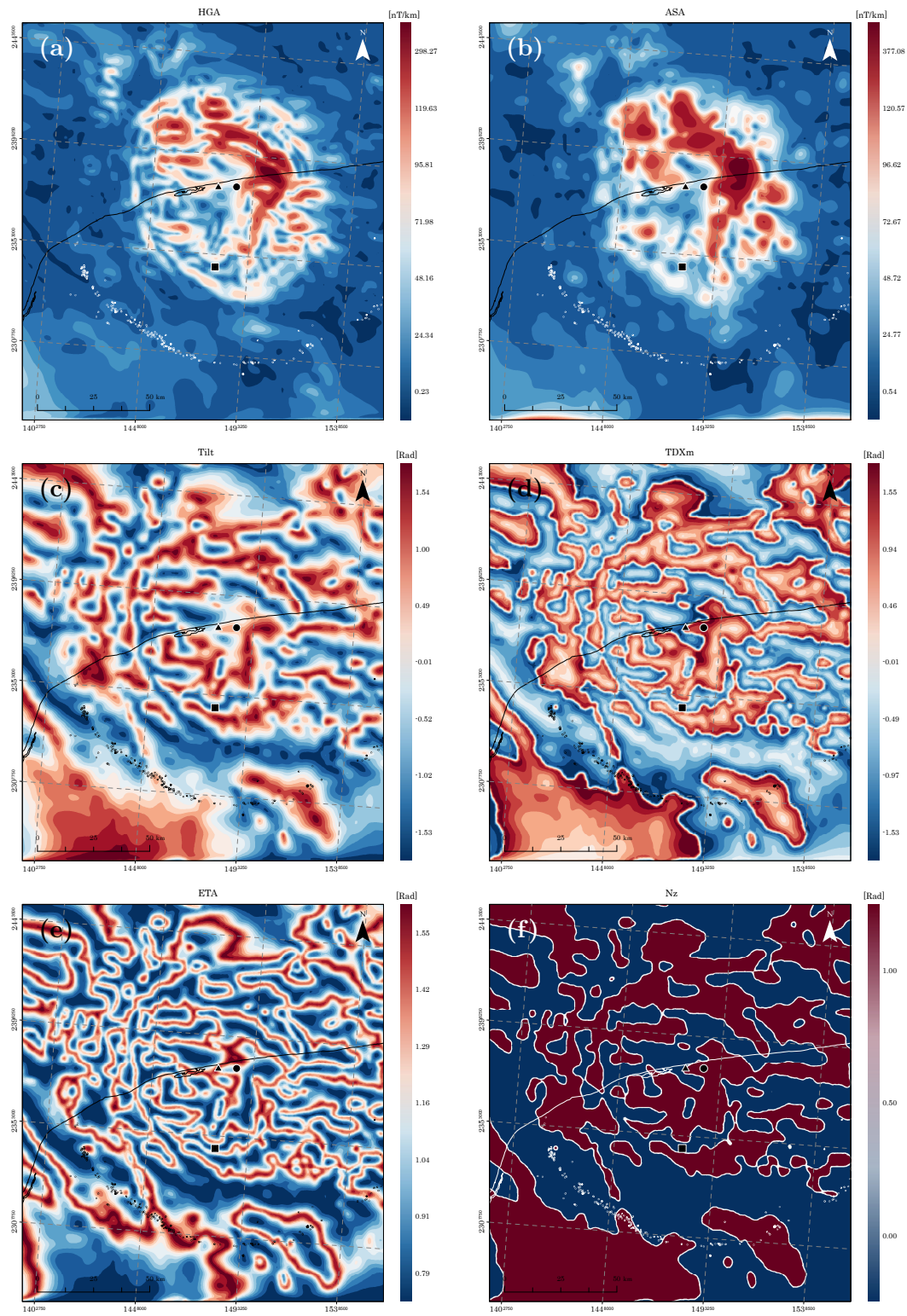


FIGURA 4.12: Operadores de realce de bordes aplicados a la anomalía magnética del cráter Chicxulub: (a) HGA; (b) ASA; (c) Tilt; (d) TDXm; (e) ETA; (f) Nz.

4.4.2 Deconvolución de Euler 3D

Las deconvoluciones de Euler 3D permiten determinar la profundidad de las anomalías magnéticas, lo que facilita una caracterización más detallada de las estructuras geológicas. Siguiendo la metodología empleada en el capítulo anterior, se realiza el análisis de la anomalía magnética del cráter Chicxulub reducida al polo. En el plano de observación $z = 0$, se tiene una malla regular de 62,500 puntos de adquisición (250×250 en las direcciones X y Y), el área total de estudio corresponde a 28274.34 [km²]. Para todos los casos se utiliza un tamaño de ventana móvil de 11×11 elementos en el dominio de observación, lo que genera un total de 121 ecuaciones por ventana. El área correspondiente a cada ventana es de 54.73 [km²]. En términos de desempeño computacional, el tiempo de ejecución registrado para el método EULDPHT fue de 3.57 [s], para el método EULD-TDX fue de 1.21 [s] y para el método EULD-TDXz fue de 2.39 [s].

Al existir una gran cantidad de fuentes magnéticas en el cráter y en zonas adyacentes, producto de la caótica distribución de la roca tras el impacto, se obtienen soluciones de deconvoluciones de Euler 3D en gran parte de la malla. Por lo tanto, para delimitar las soluciones exclusivas del cráter, se considera la extensión radial de las anomalías obtenidas mediante el operador ASA, la cual es de aproximadamente 50 [km].

EULDPHT

En el caso de las deconvoluciones de Euler 3D convencionales, se utiliza un índice estructural (IE) de 0, el cual es el valor asignado para contactos verticales en el análisis magnético. Para el criterio de selección de fuentes de Thompson, se emplea una tolerancia (TOL): 80, como se muestra en la figura (4.13a).

Para la extensión completa del área de estudio, se obtiene una gran cantidad de soluciones de EULDPHT, tanto para anomalías positivas como negativas del campo magnético. Se observa que las soluciones más someras se concentran en el centro de la malla, correspondiente al cráter, mientras que las soluciones a mayor profundidad se localizan hacia el suroeste, asociadas a una anomalía regional con profundidades de hasta 12 [km], y de forma similar hacia el norte y noroeste.

Delimitando las soluciones de EULDPHT a la extensión definida por los resultados del operador ASA, como se muestra en la figura (4.13b), se obtiene una interpretación más precisa del comportamiento espacial de las fuentes magnéticas en el cráter. Las soluciones más someras se localizan a profundidades de hasta 500 [m], con una mayor densidad entre 1.0 y 4.5 [km], y una menor presencia en el intervalo de 6.0 a 10 [km]. En la región central del cráter, dentro

de un radio de 10 [km], se observa una concentración destacada de soluciones entre 2.0 y 2.8 [km].

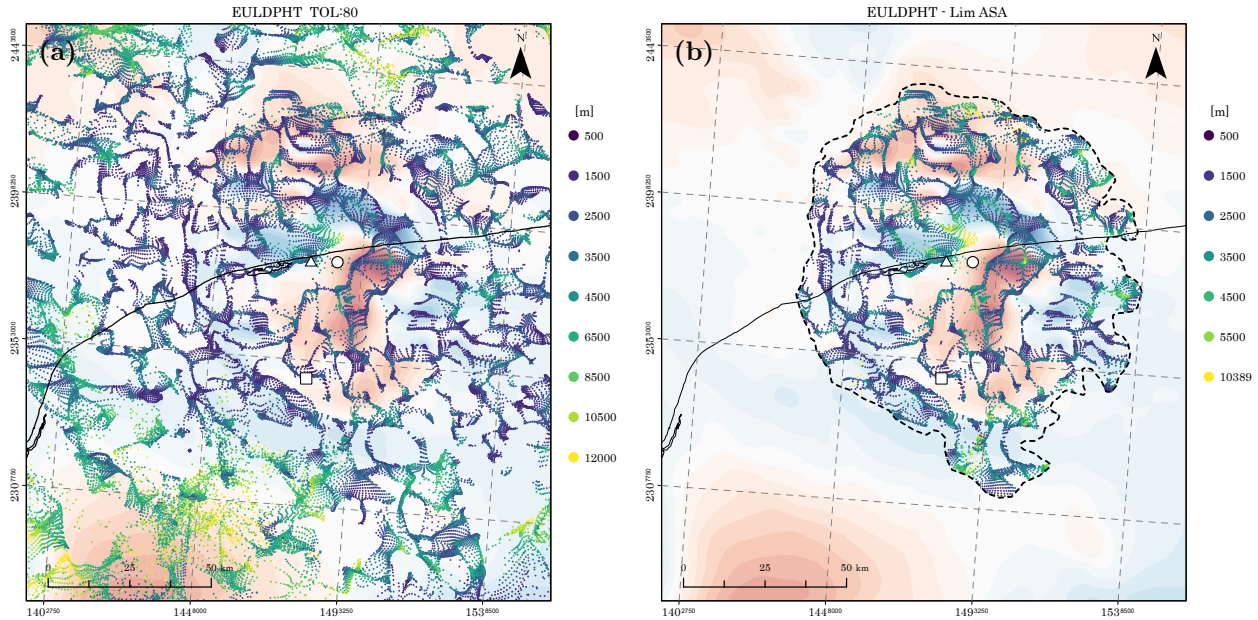


FIGURA 4.13: Soluciones del método EULDPHT TOL:80 para la anomalía magnética del cráter Chicxulub: (a) Extensión completa; (b) Extensión ASA.

EULD-TDX

Se utiliza el método EULD-TDX, el cual, a diferencia del método EULDPHT, no requiere información a priori sobre la geometría de la fuente, específicamente del índice estructural (IE). Para el criterio de selección de fuentes, se emplea el operador TDXm con un rango (R) de aceptación de soluciones entre $\pi/12$ [Rad] $< R < 0$ [Rad] con el fin de evaluar sólo los valores positivos del operador, que se asocian a las fuentes magnéticas.

En la figura (4.14a) se muestran las soluciones en toda el área de análisis. Como es de esperarse, las ubicaciones de las soluciones se concentran en los valores positivos del operador TDXm. A diferencia del método EULDPHT, en la zona del cráter se observan soluciones a mayores profundidades, con una mayor variabilidad asociada a anomalías individuales. En cuanto a la anomalía regional al suroeste del cráter, se identifican profundidades mucho menores, que oscilan entre el plano de observación y 4.0 [km].

Las soluciones centradas en el cráter, como se observa en la figura (4.14b), se distribuyen mayormente desde el plano de observación hasta una profundidad de 6.5 [km], mientras que

las soluciones más profundas, de hasta 12 [km], son menos frecuentes. Una diferencia notable entre los métodos es la ubicación de las soluciones profundas: en el caso de EULDPHT, estas se agrupan cerca del centro del cráter, mientras que en EULD-TDX, la concentración principal se localiza hacia el este del cráter.

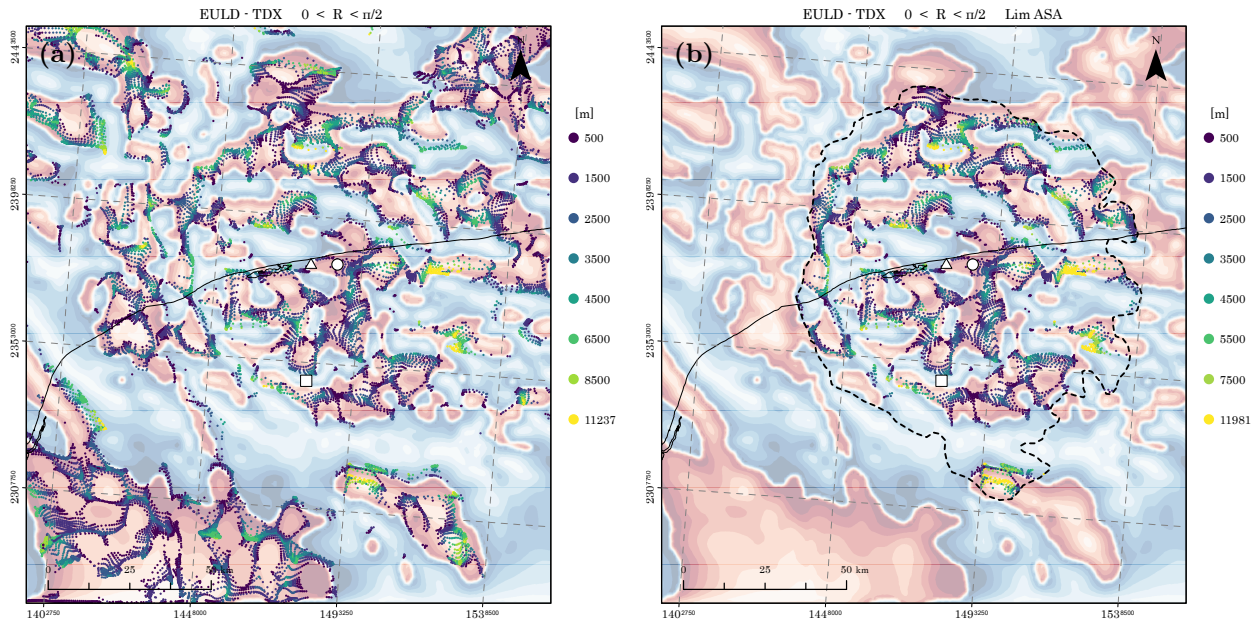


FIGURA 4.14: Soluciones del método EULD-TDX para la anomalía magnética del cráter Chicxulub: (a) Extensión completa; (b) Extensión ASA.

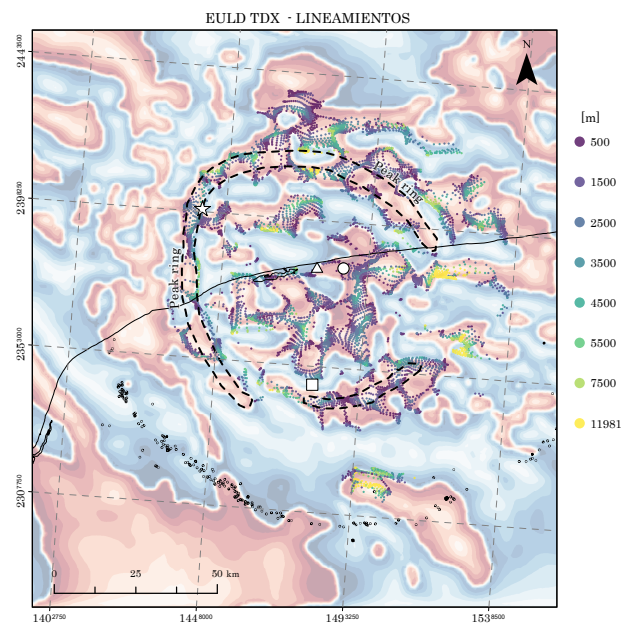


FIGURA 4.15: Lineamientos definidos mediante los operadores de realce de bordes y estimaciones del método EULD-TDX en la anomalía magnética del cráter.

En la figura (4.15) se mapeo los posibles lineamientos concéntricos relacionados con la ubicación del peak ring, así como las profundidades obtenidas mediante el método EULD-TDX asociadas a dichas fuentes. En este caso, se incluye con una estrella la ubicación de la expedición IODP 364, la cual consistió en la recolección de muestras y el registro de pozos en el peak ring del cráter Chicxulub. Como se observa, esta se encuentra dentro de la anomalía concéntrica previamente descrita.

EULD-TDX con corrección en profundidad

Para la corrección en profundidad, tanto en el cálculo de las posiciones en planta mediante el método EULD-TDX como en la estimación del índice estructural, se emplea el operador TDXm como criterio de selección de fuentes, utilizando un rango de aceptación (R) entre $\pi/12$ [rad] y 0 [rad].

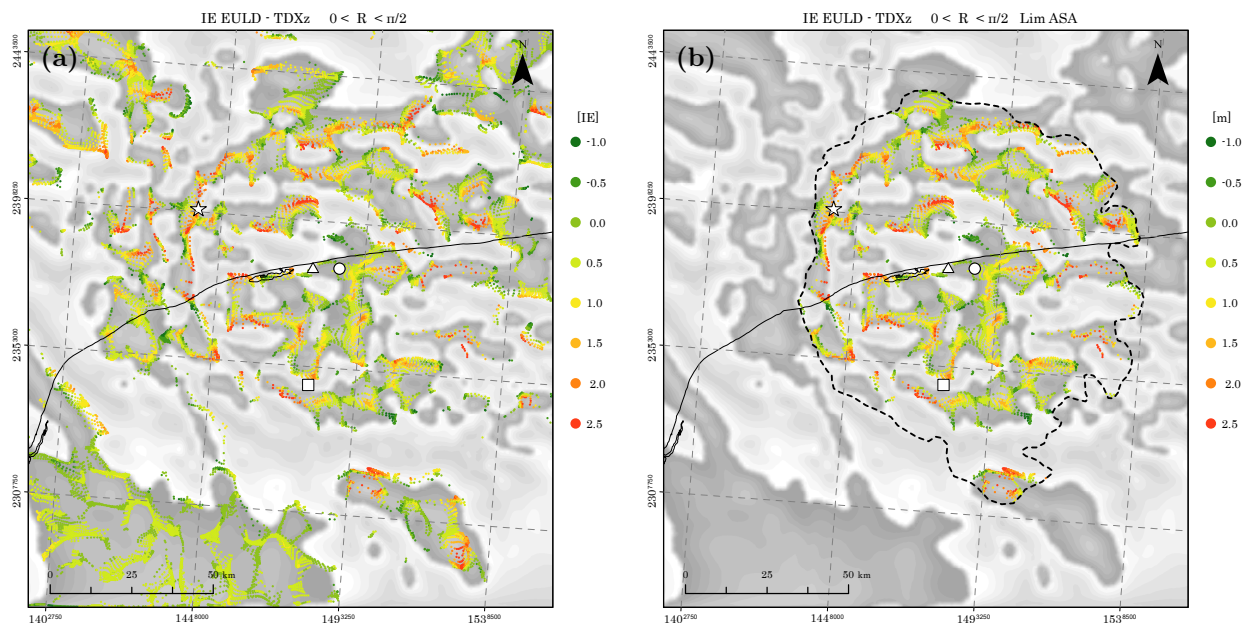


FIGURA 4.16: Estimaciones del índice estructural para la anomalía magnética del cráter Chicxulub: (a) Extensión completa; (b) Extensión ASA.

Las estimaciones del índice estructural se presentan en la figura (4.16). Los valores aceptados del índice estructural se encuentran en el rango de -1.5 a 2.5 . Al igual que en el procesamiento gravimétrico, los valores más negativos suelen estar asociados a anomalías ubicadas a profundidades someras, mientras que los valores positivos superiores a 1.5 corresponden, en general, a anomalías situadas a mayor profundidad. Sin embargo, en el procesamiento magnético, esta relación entre índice estructural y profundidad se observa con mayor claridad

dentro del cráter. En otras zonas, como en la anomalía regional al suroeste, no se identifican índices estructurales elevados, los valores se mantienen entre 0.0 y 0.5.

Una vez evaluado el comportamiento geométrico de las fuentes, se procede a realizar la corrección en profundidad. Para evitar la dispersión de datos, se determina la profundidad dentro de la cual se agrupa el 95 % del total de soluciones, la cual corresponde a 16.0 [km]. En toda el área de estudio, como se muestra en la figura (4.17a), se presentan las estimaciones corregidas de la anomalía. En general, se observa una disminución en la cantidad de soluciones someras cercanas al plano de observación. Por ejemplo, en la anomalía regional al suroeste se obtienen estimaciones profundas de hasta 16.0 [km], lo cual también ocurre en las anomalías ubicadas al noroeste y noreste, donde anteriormente el método EULD-TDX no era capaz de estimar esas profundidades.

En el caso de las estimaciones dentro del cráter, figura (4.17b), se identifican concentraciones de soluciones en el rango de 0.6 a 8.0 [km], y en menor cantidad, soluciones que alcanzan profundidades de hasta 15.6 [km]. Particularmente en el centro del cráter, se observa una agrupación de soluciones entre 3.5 y 5.5 [km], con algunas más profundas que alcanzan los 9.0 [km]. Un aspecto interesante es que en esta zona también se localizan las soluciones más profundas del área de análisis, con valores de hasta 15.6 [km]. Por otro lado, la anomalía al sur presenta, en todos los métodos analizados -EULDPHT, EULD-TDX y EULD-TDXz-, estimaciones de profundidad relativamente altas, concentradas entre 5.0 y 9.0 [km].

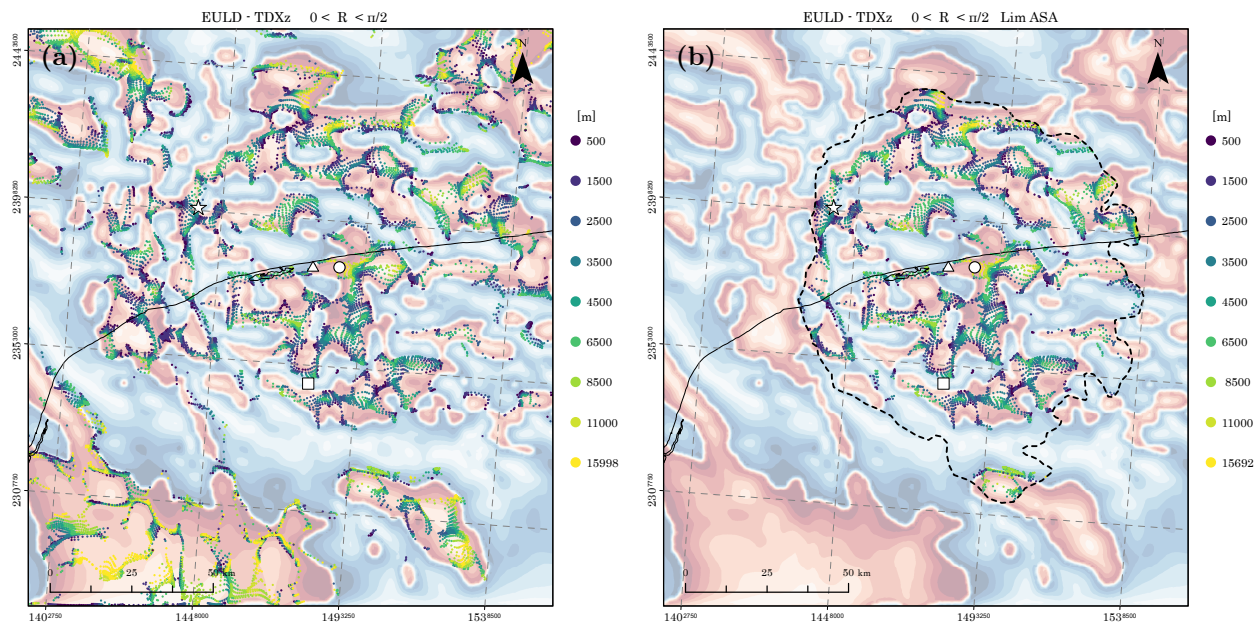


FIGURA 4.17: Correcciones en profundidad para soluciones de EULD-TDX de la anomalía magnética del cráter Chicxulub: (a) Extensión completa; (b) Extensión ASA.

En la figura (4.18) se presenta la integración de los lineamientos del procesamiento de los datos gravimétricos y magnéticos. Como se puede observar, el lineamiento del peak ring se complementa; en el caso gravimétrico, no se presenta una continuación del lineamiento en el lado noroeste, ya que este se encuentra encubierto por una anomalía regional. En cambio, en el caso magnético, se observa la continuación del lineamiento. No se mapean más lineamientos, debido a la gran cantidad de posibles fuentes magnéticas. En este contexto, el lineamiento de la cuenca central del procesamiento gravimétrico contiene las fuentes magnéticas asociadas a dicha estructura.

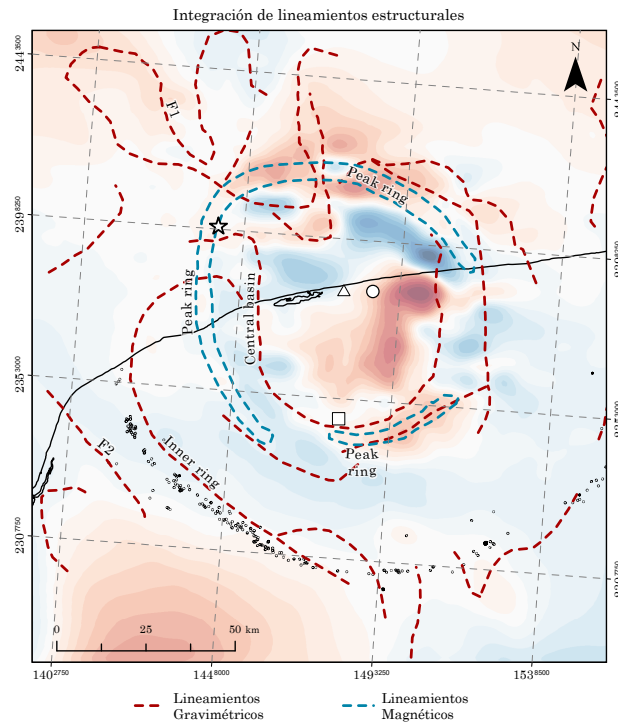
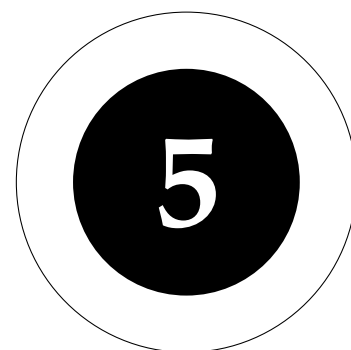


FIGURA 4.18: Integración de los lineamientos obtenidos mediante el procesamiento gravimétrico y magnético con los operadores de realce de bordes y la deconvolución de Euler 3D. De fondo la anomalía magnética del cráter.

De acuerdo con algunos modelos magnéticos realizados, en la cuenca central las fuentes magnéticas debidas al levantamiento central se encuentran a partir de la superficie a una profundidad de 2.5 [km], según Rebolledo-Vieyra et al. (2010); en el caso de Ortiz-Alemán y Urrutia-Fucugauchi (2010), la profundidad de dichas fuentes se encuentra a 3.5 [km]; y para el modelo de Pilkington y Hildebrand (2000), las fuentes de longitud de onda corta se localizan a una profundidad de 2.0 [km], mientras que las fuentes más profundas, de longitud de onda larga, se encuentran a 5.0 [km]. En este caso, las profundidades en el centro del cráter obtenidas mediante el método EULD-TDXz presentan una mayor concentración entre 3.5 y 5.5 [km].

Para el caso de las fuentes someras, los modelos de Pilkington et al. (1994) las posicionan a una profundidad de 1.1 a 1.5 [km], y en el caso de Rebolledo-Vieyra et al. (2010), a partir de los 1.0 [km]. En este escenario, es más complicado discernir con precisión y diferenciar anomalías; sólo se pueden identificar con mayor exactitud aquellas que generan una contribución magnética significativa, o bien obtener un promedio de las estimaciones de todas las contribuciones magnéticas. Las profundidades promedio de las fuentes magnéticas, a partir del espectro de potencia según Rebolledo-Vieyra et al. (2010), se ubican entre 1.0 y 6.0 [km]; en el caso de Ortiz-Alemán y Urrutia-Fucugauchi (2010) a partir de una inversión magnética, entre 2.0 y 8.0 [km]. Para este trabajo, se tiene una estimación general entre 0.6 y 8.0 [km]. Para las estimaciones calculadas a mayor profundidad que se encuentran fuera del rango general, pero presentan un agrupamiento, se interpreta como un indicio de la influencia de fuentes a mayores profundidades. Sin embargo, para este método resulta más complicado determinar con precisión su profundidad exacta; únicamente se puede inferir la tendencia y la posible ubicación espacial de dichas fuentes.

De igual manera queda demostrado que el uso de los detectores de bordes como herramienta complementaria a la deconvolución de Euler resulta de gran utilidad para delimitar las fuentes en planta, ya que permite mapear lineamientos que no pueden observarse únicamente con la anomalía magnética. En este caso, se logra delimitar tanto las fuentes magnéticas asociadas a la cuenca central como los lineamientos del peak ring.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se cumplieron satisfactoriamente los objetivos planteados en el presente trabajo, al lograr determinar la ubicación en planta y en profundidad de las fuentes gravitacionales y magnéticas asociadas a estructuras geológicas, mediante la implementación conjunta de algoritmos semiautomáticos de deconvolución de Euler 3D y operadores de realce de bordes.

En primer lugar, los modelos sintéticos MC, figura (3.2), y MS, figura (3.4), permitieron evaluar en un entorno controlado la eficacia de distintos operadores. Identifiqué que los operadores de fase, especialmente el operador TDXm, figuras (3.17-3.18), proporcionan una caracterización más precisa de las fuentes en planta, facilitando la delimitación de los bordes de las anomalías. Asimismo al comparar operadores de fase y amplitud, observé que su uso combinado mejora la capacidad de discernimiento de estructuras complejas.

Respecto a la deconvolución de Euler 3D, la modificación del algoritmo tradicional (EULDPH) mediante la incorporación de operadores de realce de borde como función de entrada (EULD-W) resultó en una mejora significativa en la estimación en planta, tabla (3.5), reduciendo tanto las sobrestimaciones como las subestimaciones frecuentes del método convencional. Esta mejora permite una determinación más precisa de la ubicación de las fuentes geológicas. No obstante, identifiqué una limitación en la capacidad de penetración del método, especialmente para anomalías profundas, como es el caso del modelo MS, figura (3.22). Para abordar esta deficiencia, implementé una corrección en profundidad (EULD-TDXz), que permitió obtener

estimaciones más confiables al reducir el efecto del decaimiento del campo potencial. Esta mejora se verificó tanto en modelos sintéticos como en los datos reales del cráter Chicxulub.

Pese a los avances logrados, identifiqué que el método EULD-TDXz presenta una sensibilidad significativa a los valores del índice estructural empleados para evaluar la geometría de las anomalías, lo que genera soluciones dispersas en profundidad, en particular en las estimaciones más someras o más profundas, figura (3.23). Si bien este efecto puede atenuarse mediante la agrupación estadística de las soluciones con mayor coherencia espacial, aún se desconoce en qué medida esta dispersión afecta la precisión de las estimaciones y cuáles podrían ser sus implicaciones en la interpretación geológica.

Otra de las limitantes observadas en los métodos EULD-TDX y EULD-TDXz es su dependencia del cálculo de derivadas de orden superior, lo que los vuelve particularmente sensibles a señales de alta frecuencia. Esta característica puede introducir inestabilidad o generar soluciones espurias, especialmente en presencia de ruido. Por ello, se recomienda aplicar técnicas de filtrado adecuadas, como el uso de filtros pasa bajas o la continuación ascendente, seleccionando el que mejor se adapte a las características del estudio y al tipo de fuente geológica analizada.

Finalmente, elaboré un mapa de los principales lineamientos del cráter Chicxulub, y una mejor estimación de las profundidades de las fuentes, figura (4.18), integrando información de los datos gravimétrico y aeromagnéticos. Esta caracterización representa una mejora en la interpretación geofísica de la zona en comparación con los métodos convencionales, gracias al uso combinado de la deconvolución de Euler y los operadores de realce de bordes. Las estimaciones obtenidas fueron validadas con estudios previos realizados en el cráter mediante técnicas sísmicas, gravitacionales, magnéticas y perforaciones de pozos, así como mediante modelado e inversión geofísica.

Líneas futuras de trabajo

1. En este trabajo, la resolución de los sistemas lineales se realizó mediante el método de mínimos cuadrados. No obstante, si se continúa con el enfoque de un índice estructural adaptativo, una alternativa recomendable sería reformular la deconvolución de Euler con corrección en profundidad como un problema no lineal, utilizando una función objetivo compuesta. Esta formulación permitiría incorporar términos de regularización y aplicar algoritmos de optimización global, como métodos heurísticos, para mejorar la estabilidad y precisión de las soluciones, especialmente en presencia de geometrías complejas o datos ruidosos.
2. Realizar pruebas usando métodos más estables para el cálculo de la componente vertical del campo potencial, como el método β -VDR, desarrollado por Oliveira y Pham (2022), con el fin de mejorar las estimaciones en profundidad y reducir el efecto del decaimiento del campo.
3. Considerando que la deconvolución de Euler constituyen un sistema sobredeterminado que genera un alto número de soluciones, se propone la implementación de funciones de probabilidad para agrupar dichas soluciones y generar modelos pseudo-2D o pseudo-3D, que permitan representar con mayor certeza las zonas de mayor probabilidad de ocurrencia de fuentes geológicas.
4. En el caso particular del cráter Chicxulub, experimentar con derivadas polares para evaluar su desempeño ante anomalías de geometría concéntrica, características de esta estructura de impacto.

REFERENCIAS

- Abdelrahman, K., Pham, L. T., Oliveira, S. P., Duong, V.-H., Duy, T. K., Gomez-Ortiz, D., Fnais, M. S., & Eldosouky, A. M. (2024). *Reliable Tilt-depth estimates based on the stable computation of the tilt angle using robust vertical derivatives*. Scientific Reports, *14*(1). doi:10.1038/s41598-024-57314-5.
- Alamdar, K., Kamkare-Rouhani, A., & Ansari, A. H. (2014). *Interpretation of the magnetic data from anomaly 2c of Soork iron ore using the combination of the Euler deconvolution and TDX filter*. Arabian Journal of Geosciences, *8*(8), 6021-6035. doi:10.1007/s12517-014-1590-9.
- Alatorre-Zamora, M., Rosas-Elguera, J., Pérez-Rodríguez, G., & Campos-Enrique, J. (2012). *Contribución de la deconvolución de Euler y la señal analítica 3D al análisis de riesgos por fallas en el graben de valle de Balderas*. e-Gnosis, *10*, 1-31.
- Alatorre-Zamora, M. A., Campos-Enriquez, J. O., Fregoso, E., Belmonte-Jiménez, S. I., Chávez-Segura, R., & Gaona-Mota, M. (2020). *Basement faults deduction at a dumpsite using advanced analysis of gravity and magnetic anomalies*. Near Surface Geophysics, *18*(3), 307-331. doi:10.1002/nsg.12093.
- Alvarez, L., Alvarez, W., Asaro, F., & Michel, H. (1981). *Extraterrestrial cause for the Cretaceous-Tertiary extinction: Experiment and theory*. Science, *208*(4448), 241-271. doi:10.1126/science.208.4448.1095.
- Barbosa, V. C. F., Silva, J. B. C., & Medeiros, W. E. (1999). *Stability analysis and improvement of structural index estimation in Euler deconvolution*. Geophysics, *64*(1), 48-60. doi:10.1190/1.1444529.
- Barnett, C. T. (1976). *Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body*. Geophysics, *41*(6), 1353-1364. doi:10.1190/1.1440685.

-
- Beiki, M. (2010). *Analytic signals of gravity gradient tensor and their application to estimate source location*. *Geophysics*, 75(6), I59-I74. doi:10.1190/1.3493639.
- Bhattacharyya, B. K. (1964). *Magnetic anomalies due to prism-shaped bodies with arbitrary polarization*. *Geophysics*, 29(4), 517-531. doi:10.1190/1.1439386.
- Bhattacharyya, B. K. (1965). *Two-dimensional harmonic analysis a tool for magnetic interpretation*. *Geophysics*, 30(5), 829-857. doi:10.1190/1.1439658.
- Blakely, R. J. (1995). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511549816.
- Blakely, R. J., & Simpson, R. W. (1986). *Approximating edges of source bodies from magnetic or gravity anomalies*. *Geophysics*, 51(7), 1494-1498. doi:10.1190/1.1442197.
- Cardús, J. O. (1988). *El Geomagnetismo: ciencia en progreso*. Publ. Obs. Ebro, Miscelánea, (37), 1-54.
- Carrillo, A., González, K., & Mendoza, O. (2021). *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*. Facultad de Ciencias, UNAM. <https://sites.google.com/ciencias.unam.mx/acl/en-desarrollo>
- Chaves, E. W. V. (2013). *Notes on continuum mechanics*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CINME).
- Chávez, R., Cámara, M., Tejero, A., Barba, L., & Manzanilla, L. (2001). *Site Characterization by Geophysical Methods in The Archaeological Zone of Teotihuacan, Mexico*. *Journal of Archaeological Science*, 28(12), 1265-1276. doi:10.1006/jasc.2000.0627.
- Chen, Q., Dong, Y., Tan, X., Wang, J., Huang, X., & Chen, H. (2021). *Applying the Tilt-depth and Tilt-Euler techniques of gravity data to decipher the basement depth in Sichuan Basin, China*. *Acta Geophysica*, 69(6), 2173-2186. doi:10.1007/s11600-021-00680-9.
- Chen, Q., Dong, Y., Tan, X., Yan, S., Chen, H., Wang, J., Wang, J., Huang, Z., & Xu, H. (2022). *Application of extended tilt angle and its 3D Euler deconvolution to gravity data from the Longmenshan thrust belt and adjacent areas*. *Journal of Applied Geophysics*, 206, 104769. doi:10.1016/j.jappgeo.2022.104769.
- Christeson, G. L., Collins, G. S., Morgan, J. V., Gulick, S. P., Barton, P. J., & Warner, M. R. (2009). *Mantle deformation beneath the Chicxulub impact crater*. *Earth and Planetary Science Letters*, 284(1-2), 249-257. doi:10.1016/j.epsl.2009.04.033.

- Christeson, G. L., Nakamura, Y., Buffler, R. T., Morgan, J., & Warner, M. (2001). *Deep crustal structure of the Chicxulub impact crater*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, *106*(B10), 21751-21769. doi:10.1029/2001JB000337.
- Coggon, J. (1976). *Magnetic and gravity anomalies of polyhedra*. Geos exploration, *14*(2), 93-105. doi:10.1016/0016-7142(76)90003-X.
- Collins, G. S., Patel, N., Davison, T. M., Rae, A. S. P., Morgan, J. V., Gulick, S. P. S., Christeson, G. L., Chenot, E., Claeys, P., Cockell, C. S., Coolen, M. J. L., Ferrière, L., Gebhardt, C., Goto, K., Jones, H., Kring, D. A., Lofi, J., Lowery, C. M., Ocampo-Torres, R., ... Bralower, T. J. (2020). *A steeply-inclined trajectory for the Chicxulub impact*. Nature Communications, *11*(1). doi:10.1038/s41467-020-15269-x.
- Cooper, G., & Cowan, D. (2006). *Enhancing potential field data using filters based on the local phase*. Computers & Geosciences, *32*(10), 1585-1591. doi:10.1016/j.cageo.2006.02.016.
- Cordell, L. (1979). *Gravimetric expression of graben faulting in Santa Fe country and the Espanola Basin, New Mexico*. doi:10.56577/FFC-30.59.
- Debeglia, N., & Corpel, J. (1997). *Automatic 3-D interpretation of potential field data using analytic signal derivatives*. Geophysics, *62*(1), 87-96. doi:10.1190/1.1444149.
- Dole, W., & Jordan, N. (1978). *Slope mapping*. AAPG Bulletin, *62*(12), 2427-2440.
- ESRI. (2024). ArcGIS Pro[®], version 3.3 [Redlands, California, United States]. <https://www.esri.com/en-us/arcgis/products/arcgis-pro/overview>
- Euler, L., & Aycok, A. (2019). Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. <https://arxiv.org/abs/1905.10438>
- Feignon, J.-G., de Graaff, S. J., Ferrière, L., Kaskes, P., Déhais, T., Goderis, S., Claeys, P., & Koeberl, C. (2021). *Chicxulub impact structure, IODP-ICDP Expedition 364 drill core: Geochemistry of the granite basement*. Meteoritics & Planetary Science, *56*(7), 1243-1273. doi:10.1111/maps.13705.
- Florio, G., Fedi, M., & Pasteka, R. (2006). *On the application of Euler deconvolution to the analytic signal*. Geophysics, *71*(6), L87-L93. doi:10.1190/1.2360204.
- Fregoso, E., Gallardo, L. A., & García-Abdeslem, J. (2015). *Structural joint inversion coupled with Euler deconvolution of isolated gravity and magnetic anomalies*. Geophysics, *80*(2), G67-G79. doi:10.1190/GEO2014-0194.1.
- Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to electrodynamics* (4. ed., international ed.). Pearson.

- Gulick, S., Barton, P. J., Christeson, G. L., Morgan, J. V., McDonald, M., Mendoza-Cervantes, K., Pearson, Z. F., Surendra, A., Urrutia-Fucugauchi, J., Vermeesch, P. M., & Warner, M. R. (2008). *Importance of pre-impact crustal structure for the asymmetry of the Chicxulub impact crater*. *Nature Geoscience*, 1(2), 131-135. doi:10.1038/ngeo103.
- Gulick, S., Christeson, G., Barton, P., Grieve, R., Morgan, J., & Urrutia-Fucugauchi, J. (2013). *Geophysical Characterization of the Chicxulub impact crater*. *Reviews of Geophysics*, 51(1), 31-52. doi:10.1002/rog.20007.
- Guzmán-Hidalgo, E. (2024). *Estudio Sismico-Estratigráfico de las Secuencias Carbonatadas del Cráter Chicxulub y la Plataforma de Yucatán del Cretácico/Paleógeno* [Tesis de doctorado]. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Hansen, R. O., Pawlowski, R. S., & Wang, X. (1987). *Joint use of analytic signal and amplitude of horizontal gradient maxima for three-dimensional gravity data interpretation*, 100-102. doi:10.1190/1.1823777.
- Hildebrand, A. R., Pilkington, M., Connors, M., Ortiz-Aleman, C., & Chavez, R. E. (1995). *Size and structure of the Chicxulub crater revealed by horizontal gravity gradients and cenotes*. *Nature*, 376(6539), 415-417. doi:10.1038/376415a0.
- Hildebrand, A. R., Pilkington, M., Ortiz-Aleman, C., Chavez, R. E., Urrutia-Fucugauchi, J., Connors, M., Graniel-Castro, E., Camara-Zi, A., Halpenny, J. F., & Niehaus, D. (1998). *Mapping Chicxulub crater structure with gravity and seismic reflection data*. Geological Society, London, Special Publications, 140(1), 155-176. doi:10.1144/GSL.SP.1998.140.01.12.
- Hildebrand, A. R., Penfield, G. T., Kring, D. A., Pilkington, M., Camargo Z., A., Jacobsen, S. B., & Boynton, W. V. (1991). *Chicxulub Crater: A possible Cretaceous/Tertiary boundary impact crater on the Yucatán Peninsula, Mexico*. *Geology*, 19(9), 867. doi:10.1130/0091-7613(1991)019<0867:CCAPCT>2.3.CO;2.
- Hinze, W. J. (2013). *Gravity and Magnetic Exploration: Principles, Practices, and Applications* (A. H. Saad & R. R. B. V. Frese, Eds.). Cambridge University Press.
- Holstein, H. (2002). *Gravimagnetic similarity in anomaly formulas for uniform polyhedra*. *Geophysics*, 67(4), 1126-1133. doi:10.1190/1.1500373.
- Huang, L., Zhang, H., Sekelani, S., & Wu, Z. (2019). *An improved Tilt-Euler deconvolution and its application on a Fe-polymetallic deposit*. *Ore Geology Reviews*, 114, 103114. doi:10.1016/j.oregeorev.2019.103114.

- Inkscape Project. (2023). Inkscape[®], version 1.3.2 [Open source vector graphics editor]. <https://inkscape.org/>
- Kaufman, A. A. (1992). *Geophysical Field Theory and Method: Gravitational, Electric, and Magnetic Fields* (A. A. Kaufman, Ed.). Elsevier. doi:10.1016/S0074-6142(09)60115-7.
- Kaufman, A. A. (1994). *Geophysical Field Theory and Method, Part B. Electromagnetic Fields I* (A. A. Kaufman, Ed.). Academic Press.
- Kitware Inc. (2023). ParaView[®], Versión 5.11 [Clifton Park, NY, EE. UU.]. <https://www.paraview.org/>
- Lara, R., Chávez, Z., & Castañeda, L. (2019). *El método de diferencias finitas. Teoría y Práctica*. Trujillo-Perú.
- Li, G., Liu, S., Shi, K., & Hu, X. (2023). *Normalized Edge Detectors Using Full Gradient Tensors of Potential Field*. Pure and Applied Geophysics, 180(6), 2327-2349. doi:10.1007/s00024-023-03274-2.
- Li, X. (2006). *Understanding 3D analytic signal amplitude*. Geophysics, 71(2), L13-L16. doi:10.1190/1.2184367.
- Lindner, A. (2018). *A complete course on theoretical physics: From classical mechanics to advanced quantum statistics* (D. Strauch, Ed.) [The original, German edition was published in 2011 under the title "Grundkurs Theoretische Physik". - Impressum]. Springer. doi:10.1007/978-3-030-04360-5.
- López-Loera, H., Urrutia-Fucugauchi, J., Rosas-Elguera, J., Torres-Gaytán, D. E., Goguitchaichvili, A., & González-Piña, J. M. (2022). *Aeromagnetic anomalies and magnetic domains of the Jalisco Block, western Mexico*. Journal of South American Earth Sciences, 114, 103679. doi:10.1016/j.jsames.2021.103679.
- Ma, G. (2014). *The application of extended Euler deconvolution method in the interpretation of potential field data*. Journal of Applied Geophysics, 107, 188-194. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.jappgeo.2014.06.002.
- Ma, G., Huang, D., & Liu, C. (2013). *Application of balanced edge detection filters to estimate the location parameters of the causative sources using potential field data*. Journal of Applied Geophysics, 99, 18-23. doi:10.1016/j.jappgeo.2013.09.009.
- Marsden, J. E. (1991). *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana.

- Mendes, B. D. L., Kontny, A., Poelchau, M., Fischer, L. A., Gaus, K., Dudzisz, K., Kuipers, B. W., & Dekkers, M. J. (2023). *Peak-ring magnetism: Rock and mineral magnetic properties of the Chicxulub impact crater*. Geological Society of America Bulletin. doi:10.1130/B36547.1.
- Menke, W. (2018). *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory* (Fourth edition). Academic Press, an imprint of Elsevier.
- Mickus, K. L., & Hinojosa, J. H. (2001). *The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: a Fourier transform technique*. Journal of Applied Geophysics, 46(3), 159-174. doi:10.1016/S0926-9851(01)00031-3.
- Miller, H. G., & Singh, V. (1994). *Potential field tilt: a new concept for location of potential field sources*. Journal of Applied Geophysics, 32(2-3), 213-217. doi:10.1016/0926-9851(94)90022-1.
- Mohammadi, N., Motavalli-Anbaran, S.-H., & Ebrahimzadeh Ardestani, V. (2021). *Improved 3D Cauchy-type Integral for Faster and More Accurate Forward Modeling of Gravity Data Caused by Basement Relief*. Pure and Applied Geophysics, 178(1), 79-90. doi:10.1007/s00024-020-02635-5.
- Morgan, J. V., Warner, M. R., Collins, G. S., Grieve, R. A. F., Christeson, G. L., Gulick, S. P. S., & Barton, P. J. (2011). *Full waveform tomographic images of the peak ring at the Chicxulub impact crater*. Journal of Geophysical Research, 116(B6). doi:10.1029/2010JB008015.
- Morgan, J. V., Warner, M. R., Collins, G. S., Melosh, H. J., & Christeson, G. L. (2000). *Peak-ring formation in large impact craters: geophysical constraints from Chicxulub*. Earth and Planetary Science Letters, 183(3-4), 347-354. doi:10.1016/S0012-821X(00)00307-1.
- Morgan, J. V., Gulick, S. P. S., Bralower, T., Chenot, E., Christeson, G., Claeys, P., Cockell, C., Collins, G. S., Coolen, M. J. L., Ferrière, L., Gebhardt, C., Goto, K., Jones, H., Kring, D. A., Le Ber, E., Lofi, J., Long, X., Lowery, C., Mellett, C., ... Zylberman, W. (2016). *The formation of peak rings in large impact craters*. Science, 354(6314), 878-882. doi:10.1126/science.aah6561.
- Nabighian, M. N. (1972). *The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: its properties and use for automated anomaly interpretation*. Geophysics, 37(3), 507-517. doi:10.1190/1.1440276.

- Nabighian, M. N. (1984). *Toward a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transforms: Fundamental relations*. Geophysics, *49*(6), 780-786. doi:10.1190/1.1441706.
- Nabighian, M. N., & Hansen, R. O. (2001). *Unification of Euler and Werner deconvolution in three dimensions via the generalized Hilbert transform*. Geophysics, *66*(6), 1805-1810. doi:10.1190/1.1487122.
- Nava-Flores, M. (2010). *Modelado por métodos potenciales de estructuras salinas inferidas por sismología de reflexión* [Tesis de maestría]. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Negrete-Juárez, R. (2022). *Inversión por recristalización simulada del campo vectorial-tensorial gravitacional para la exploración de yacimientos subsalinos*. [Tesis de Licenciatura]. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Oliveira, S. P., & Pham, L. T. (2022). *A Stable Finite Difference Method Based on Upward Continuation to Evaluate Vertical Derivatives of Potential Field Data*. Pure and Applied Geophysics, *179*(12), 4555-4566. doi:10.1007/s00024-022-03164-z.
- Ortiz-Aleman, C., Martin, R., Urrutia-Fucugauchi, J., del Castillo, M. O., & Nava-Flores, M. (2021). *Imaging the Chicxulub Central Crater Zone from Large-Scale Seismic Acoustic Wave Propagation and Gravity Modeling*. Pure and Applied Geophysics, *178*(1), 55-77. doi:10.1007/s00024-020-02638-2.
- Ortiz-Alemán, C. (1999). *Modelación geofísica de estructuras complejas* [Tesis de doctorado]. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Ortiz-Alemán, C., Nava-Flores, M., Urrutia-Fucugauchi, J. H., Ortiz-Aguilar, S., Orozco-del-Castillo, M. G., & López-Juárez, S. (2025). *Detection of Sedimentary Basins and Karstic Faults in the Yucatán Peninsula by Gravity Inversion and Euler Deconvolution*. Earth, *6*(2). doi:10.3390/earth6020042.
- Ortiz-Alemán, C., & Urrutia-Fucugauchi, J. (2010). *Aeromagnetic anomaly modeling of central zone structure and magnetic sources in the Chicxulub crater*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, *179*(3-4), 127-138. doi:10.1016/j.pepi.2010.01.007.
- Payá Albert, R. (2010). *Apuntes de Fundamentos Matemáticos I* [Universidad de Granada.]. <https://www.ugr.es/~rpaya/cursosanteriores.htm>
- Pengfei, L., Tianyou, L., Peimin, Z., Yushan, Y., Qiaoli, Z., & Henglei., Z. (2017). *Tilt-Depth Method for Gravity Exploration and Its High Order Generation*[J]. Geomatics

- and Information Science of Wuhan University, *49*(9), 1236-1242. doi:10.13203/j.whugis20160054.
- Pham, L. T., Oliveira, S. P., Abdelrahman, K., Gomez-Ortiz, D., Nguyen, D. V., Vo, Q. T., & Eldosouky, A. M. (2024). *Selection of Euler deconvolution solutions using the enhanced horizontal gradient and stable vertical differentiation*. Open Geosciences, *16*(1). doi:10.1515/geo-2022-0637.
- Pilkington, M., & Hildebrand, A. R. (2000). *Three-dimensional magnetic imaging of the Chicxulub Crater*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, *105*(B10), 23479-23491. doi:10.1029/2000JB900222.
- Pilkington, M., Hildebrand, A. R., & Ortiz-Aleman, C. (1994). *Gravity and magnetic field modeling and structure of the Chicxulub Crater, Mexico*. Journal of Geophysical Research: Planets, *99*(E6), 13147-13162. doi:10.1029/94JE01089.
- Plouff, D. (1976). *Gravity and magnetic field of polygonal prisms and application to magnetic corrections*. Geophysics, *41*(4), 727-741. doi:10.1190/1.1440645.
- Programa de Perforaciones en Océanos y Continentes. (2024). Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México [México. Contacto: juf@geofisica.unam.mx].
- Rebolledo-Vieyra, M., Urrutia-Fucugauchi, J., & Lopez-Loera, H. (2010). *Aeromagnetic anomalies and structural model of the Chicxulub multiring impact crater, Yucatan, Mexico*. Revista Mexicana de Ciencias Geológicas, *27*(1), 185-195. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_isoref&pid=S1026-87742010000100016&lng=es&tlng=en
- Reid, A. B., Allsop, J. M., Granser, H., Millett, A. J., & Somerton, I. W. (1990). *Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution*. Geophysics, *55*(1), 80-91. doi:<https://doi.org/10.1190/1.1442774>.
- Roest, W. R., Verhoef, J., & Pilkington, M. (1992). *Magnetic interpretation using the 3-D analytic signal*. Geophysics, *57*(1), 116-125. doi:10.1190/1.1443174.
- Roy, I. G. (2023). *Hundred years of geophysics (1834–1933)*. Indian Journal of History of Science, *58*(1), 64-73. doi:10.1007/s43539-022-00069-7.
- Roy, K. (2008). *Potential Theory in Applied Geophysics* (1.^a ed.). Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-72334-9.
- Salam, M. A. (2014). *Electromagnetic Field Theories for Engineering*. Springer. doi:10.1007/978-981-4585-66-8.

- Salem, A., Ravat, D., Smith, R., & Ushijima, K. (2005). *Interpretation of magnetic data using an enhanced local wavenumber (ELW) method*. Geophysics, 70(2), L7-L12. doi:<https://doi.org/10.1190/1.1884828>.
- Salem, A., Williams, S., Fairhead, D., Smith, R., & Ravat, D. (2008). *Interpretation of magnetic data using tilt-angle derivatives*. Geophysics, 73(1), L1-L10. doi:10.1190/1.2799992.
- Salem, A., Williams, S., Fairhead, J. D., Ravat, D., & Smith, R. (2007). *Tilt-depth method: A simple depth estimation method using first-order magnetic derivatives*. The Leading Edge, 26(12), 1502-1505. doi:10.1190/1.2821934.
- Sharpton, V. L., Brent Dalrymple, G., Marín, L. E., Ryder, G., Schuraytz, B. C., & Urrutia-Fucugauchi, J. (1992). *New links between the Chicxulub impact structure and the Cretaceous/Tertiary boundary*. Nature, 359(6398), 819-821. doi:10.1038/359819a0.
- Smith, R. S., & Salem, A. (2005). *Imaging depth, structure, and susceptibility from magnetic data: The advanced source-parameter imaging method*. Geophysics, 70(4), L31-L38. doi:10.1190/1.1990219.
- Stavrev, P., & Reid, A. (2007). *Degrees of homogeneity of potential fields and structural indices of Euler deconvolution*. Geophysics, 72(1), L1-L12. doi:10.1190/1.2400010.
- Talwani, M., & Ewing, M. (1960). *Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape*. Geophysics, 25(1), 203-225. doi:10.1190/1.1438687.
- The MathWorks, Inc. (2023a). MATLAB[®], version R2023a [Natick, Massachusetts, United States]. <https://la.mathworks.com/products/matlab.html>
- The MathWorks, Inc. (2023b). Parallel Computing Toolbox[™], version R2023a [Natick, Massachusetts, United States]. <https://la.mathworks.com/products/parallel-computing.html>
- Thompson, D. T. (1982). *EULDPH: A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data*. Geophysics, 47(1), 31-37. doi:10.1190/1.1441278.
- Torres-Acosta, J. A., Urrutia-Fucugauchi, J., & Araujo-Mendieta, J. (2024). *Análisis de registros geofísicos y propiedades petrofísicas de la secuencia del anillo de picos del cráter Chicxulub*. Revista Mexicana de Ciencias Geológicas, 41(2), 163-178. doi:10.22201/cgeo.20072902e.2024.2.1779.
- Urrutia-Fucugauchi, J., Arellano-Catalán, O., Pérez-Cruz, L., & Romero-Galindo, I. A. (2022). *Chicxulub Crater Joint Gravity and Magnetic Anomaly Analysis: Structure, Asymme-*

- tries, Impact Trajectory and Target Structures*. Pure and Applied Geophysics, 179(8), 2735-2756. doi:10.1007/s00024-022-03074-0.
- Urrutia-Fucugauchi, J., Camargo-Zanoguera, A., Pérez-Cruz, L., & Pérez-Cruz, G. (2011). *The Chicxulub multi-ring impact crater, Yucatan carbonate platform, Gulf of Mexico*. Geofísica Internacional, 50(1). doi:10.22201/igeof.00167169p.2011.50.1.125.
- Urrutia-Fucugauchi, J., Marin, L., & Trejo-Garcia, A. (1996). *UNAM Scientific Drilling Program of Chicxulub Impact Structure-Evidence for a 300 kilometer crater diameter*. Geophysical Research Letters, 23(13), 1565-1568. doi:10.1029/96GL01566.
- Urrutia-Fucugauchi, J., Morgan, J., Stöffler, D., & Claeys, P. (2004). *The Chicxulub Scientific Drilling Project (CSDP)*. Meteoritics & Planetary Science, 39(6), 787-790.
- Vera-Chávez, N. (2015). *Inversión tridimensional de métodos potenciales en estructuras salinas del Golfo de México* [Tesis de licenciatura]. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Vermeesch, P. M., Morgan, J. V., Christeson, G. L., Barton, P. J., & Surendra, A. (2009). *Three-dimensional joint inversion of traveltime and gravity data across the Chicxulub impact crater*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 114(B2). doi:10.1029/2008JB005776.
- Wang, X., Liu, J., Li, J., & Chen, H. (2023). *Fast 3D gravity and magnetic modelling using midpoint quadrature and 2D FFT*. Scientific Reports, 13(1). doi:10.1038/s41598-023-36525-2.
- Werner, S. (1953). *Interpretation of magnetic anomalies at sheet-like bodies*. Sveriges Geologiska Undersökning, Series C, Årsbok, 6, 413-449.
- Wijns, C., Perez, C., & Kowalczyk, P. (2005). *Theta map: Edge detection in magnetic data*. Geophysics, 70(4), L39-L43. doi:10.1190/1.1988184.
- Yoan-Pérez, F. (2020). *Modelación y análisis Geofísico 3D del régimen hidrotectónico de la Cuenca Villa Hidalgo, San Luis Potosí, México* [Tesis de doctorado]. Instituto Potosino De Investigación Científica y Tecnológica.
- Zapotitla-Román, J. (2016). *Integración de métodos potenciales por deconvolución de Euler y propagación elástica 3D para la exploración de yacimientos subsalinos* [Tesis de maestría]. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Ždanov, M. S. (2015). *Inverse theory and applications in geophysics* (Second edition). Elsevier.

-
- Zhong, Y., Ren, Z., Chen, C., Chen, H., Yang, Z., & Guo, Z. (2019). *A new method for gravity modeling using tesseroids and 2D Gauss-Legendre quadrature rule*. Journal of Applied Geophysics, *164*, 53-64. doi:10.1016/j.jappgeo.2019.03.003.
- Zhou, W.-Y., Ma, G.-Q., Hou, Z.-L., Qin, P.-B., & Meng, Z.-H. (2017). *The study on the joint Euler deconvolution method of full tensor gravity data*. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), *60*(12), 4855-4865. doi:10.6038/cjg20171225.

ANEXO

A.1 Definiciones de cálculo vectorial

A continuación se presentan las definiciones de los principales operadores del cálculo vectorial utilizados en esta tesis. Las expresiones corresponden a formulaciones comunes en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Espacio	Operador Nabla ∇	Gradiente ∇f
$\mathbb{R}^2$	$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$	$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$
$\mathbb{R}^3$	$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$	$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$

TABLA 5.1: Operador nabra y gradiente en distintos espacios (Payá Albert, 2010).

Operador	Definición analítica	Definición por límite
Divergencia $\nabla \cdot \vec{F}$	$\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ $\mathbb{R}^3$: $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$
Rotacional $\nabla \times \vec{F}$	Sólo en $\mathbb{R}^3$: $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$	$\nabla \times \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$

TABLA 5.2: Definiciones de la divergencia y el rotacional, expresadas de forma analítica (Marsden, 1991) y mediante su formulación en términos de límite (Kaufman, 1992).

A.2 Operadores para el realce de anomalías en métodos potenciales

La investigación bibliográfica para la documentación de los diferentes operadores existentes se encuentra publicado en la gaceta Chicxulub V6-4/2023 del Instituto de Investigación Científica y Estudios Avanzados Chicxulub (IICEAC).

Operadores para el realce de anomalías en métodos potenciales

| Israel Fernández Martínez

Keywords: Edge detection, potential field, step, derivate

Resumen

Los métodos geofísicos, tales como la gravimetría y la magnetometría basados en fuentes de campo potencial, hacen uso de operadores para el realce y el mejoramiento de anomalías producidas por el contraste entre las propiedades físicas del medio. Los operadores proveen información de estructuras geológicas, contactos, ángulos de inclinación, direcciones preferenciales, entre otras características del medio. En el actual trabajo se hace una recopilación de los diferentes operadores desarrollados a lo largo de los años y se presenta el fundamento matemático. De igual forma se plantean operadores de otras ramas como en el análisis de imágenes digitales, sísmica y geología aplicados al realce de anomalías potenciales.

1. Introducción

Las anomalías magnéticas y gravimétricas contienen información que permiten caracterizar la profundidad de las fuentes que las generan, así como sus límites laterales, el objetivo se enfoca en reducir la incertidumbre al interpretar el resultado de los operadores aplicados debido que no siempre concuerdan los límites y profundidades obtenidos con los cuerpos reales.

A lo largo del tiempo se han propuesto diferente tipos de operadores, muchos de ellos son modificaciones que intentan mejorar los límites de los cuerpos, cada operador tiene sus ventajas y limitaciones, algunos pueden caracterizar de mejor manera cuerpos someros y otros delimitan mejor estructuras a profundidad. Los operadores se pueden usar para el procesamiento de perfiles y cuadrículas,

transformando los datos potenciales a mapas. Para la elaboración del presente trabajo se utilizaron derivadas verticales y horizontales definidas por diferencias finitas y espectrales para la determinación de las componentes tensoriales, señal analítica, gradiente horizontal, entre otras.

2. Conceptos Matemáticos Previos

2.1. Derivadas Direccionales

En campos potenciales se utilizan las derivadas direccionales para el análisis de los datos; la derivada vertical ayuda a la caracterización de fuentes a profundidad y las derivadas horizontales delimitan los bordes de los cuerpos. Las derivadas se pueden calcular de dos maneras: de forma espacial con diferencias finitas y en el dominio del número de onda con la transformada de Fourier.

Una diferencia finita es una aproximación mediante la serie de Taylor truncada en su segunda componente. Una función $F(x)$ se puede aproximar por la derecha o por la izquierda a través de dicha serie definiendo las diferencias finitas progresivas (ecuación 1 y 2) y regresivas (ecuación 3 y 4) respectivamente. Las diferencias finitas regresivas se expresan como:

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{F(x_i, y_j) - F(x_i, y_{j-1})}{\Delta y}, \quad (2)$$

de igual forma se obtienen las diferencias finitas progresivas:

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_{i+1}, y_j) - F(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{F(x_i, y_{j+1}) - F(x_i, y_{j-1})}{2\Delta y}. \quad (4)$$

La combinación de las ecuaciones anteriores resulta en el concepto de diferencias finitas centradas con un orden mayor de aproximación:

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_{i+1}, y_j) - F(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial F(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{F(x_i, y_{j+1}) - F(x_i, y_{j-1})}{2\Delta y}. \quad (6)$$

La derivada vertical se obtiene dado que el campo potencial F es armónico, por lo tanto satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial z^2} = 0, \quad (7)$$

por lo tanto la segunda derivada vertical se puede despejar de la ecuación (7) usando las derivadas horizontales:

$$\frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(x_i, y_j)}{\partial y^2}. \quad (8)$$

La derivada vertical se puede calcular en el dominio del número de onda aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier:

$$\frac{\partial^n F(x_i, y_j)}{\partial z^n} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right)^n \mathcal{F} \{F\} \right\}, \quad (9)$$

donde $\mathcal{F}\{\}$ es la transformada de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ es la transformada de Fourier inversa, k_x y k_y representan el número de onda en la dirección x y y .

2.2. Campo Tensorial

El campo potencial F contiene tres componentes vectoriales (f_x, f_y, f_z), al aplicar el gradiente a cada componente vectorial se deriva el campo tensorial Γ , Blakely (1996):

$$\Gamma = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

3. Filtros Detectores de Bordes

3.1. Amplitud del Gradiente Horizontal

El operador HGA, es uno de los filtros más conocidos el cual hace uso de las derivadas horizontales de la anomalía. Fue propuesta y aplicada por Cordell and Grauch (1985) a mapas de datos aeromagnéticos. La limitante del HGA es la dificultad en la detección de bordes difusos en la presencia de anomalías adyacentes:

$$HGA = \sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2}. \quad (11)$$

3.2. Amplitud de la Señal Analítica

Nabighian (1972) introdujo la Amplitud de la Señal Analítica (ASA) para el análisis de cuerpos magnéticos, Roest et al. (1992) lo aplicaron como un filtro detector de bordes utilizando la componente vertical del campo vectorial:

$$|ASA| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial z} \right)^2}, \quad (12)$$

de igual forma se puede calcular la Amplitud de la Señal Analítica a partir de las componentes horizontales f_x y f_y como lo propusieron Debgilia and Corpel (1997):

$$ASAx = \sqrt{\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} \right)^2}, \quad (13)$$

$$ASAy = \sqrt{\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial z} \right)^2}. \quad (14)$$

3.3. Función Edge-Detector (ED)

Beiki (2010) calculó la razón de cambio vertical de la Amplitud de la Señal Analítica $ASAx$ y $ASAy$ e hizo un análogo a la Amplitud del Gradiente Horizontal obteniendo la función Edge-Detector:

$$ED = \sqrt{\left(\frac{\partial ASAx}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial ASAy}{\partial z} \right)^2}. \quad (15)$$

3.4. Eigenvalores

Los *eigenvalores* se obtienen a través de la matriz hessiana, igual llamada matriz de curvatura, Hansen and Deridder (2006) la definieron como:

$$\Gamma_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Al construir la ecuación característica homogénea a partir de la matriz hessiana (ecuación 16) se obtienen los *eigenvalores* λ_1 y λ_2 . Los *eigenvalores* en términos de las componentes tensoriales se expresan:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \sqrt{\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial f_x}{\partial y} \right)^2} \right], \quad (17)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} - \sqrt{\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial f_x}{\partial y} \right)^2} \right]. \quad (18)$$

El producto de los *eigenvalores* resulta en el determinante de la matriz de curvatura:

$$\det(\Gamma_c) = \lambda_1 \lambda_2. \quad (19)$$

Zhou et al. (2013) propusieron reescalar las componentes del *eigenvalor* λ_1 respecto al valor del campo vectorial observado, obteniendo el operador IE:

$$IE = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_x}{\partial x} f_z + \frac{\partial f_y}{\partial y} f_z + \sqrt{\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} f_z - \frac{\partial f_y}{\partial y} f_z \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial f_x}{\partial y} f_z \right)^2} \right]. \quad (20)$$

3.5. Laplaciano

El Laplaciano es un filtro detector de bordes que hace uso de la convolución en el dominio espacial del campo vectorial f_z con una matriz que describe la razón de cambio en dirección x y y . La matriz se puede describir con coeficiente de diferente peso de los cuales los más utilizados son $k = -4$ y $k = -8$, Zhang et al. (2019):

$$LP1 = f_z * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$LP2 = f_z * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

3.6. TDR

Verduzco et al. (2004) introdujeron el primer filtro basado en la fase para regular la amplitud de diferentes anomalías en un mismo plano de observación. El filtro balancea de manera eficiente las amplitudes del campo f_z con respecto a su razón de cambio en las direcciones x y y , lo que permite resaltar anomalías profundas de baja amplitud:

$$TDR = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f_z}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2}} \right), \quad (23)$$

de igual forma es posible obtener otros dos operadores en función de los ángulos de inclinación normalizando las derivadas horizontales:

$$TDRx = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f_z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2}} \right), \quad (24)$$

$$TDRey = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f_z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2}} \right). \quad (25)$$

3.7. THDR

Verduzco et al. (2004) sugirieron usar las derivadas horizontales del ángulo de inclinación TDR para crear un nuevo detector de bordes. El objetivo del THDR es resaltar los límites o contactos de cuerpos someros y profundos obtenidos del TDR:

$$THDR = \sqrt{\left(\frac{\partial TDR}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial TDR}{\partial y} \right)^2}. \quad (26)$$

3.8. DTD

Se puede modificar el TDR de la ecuación (23) para resaltar tendencias y lineamientos en una dirección determinada. El detector de bordes DTD propuesto por Stewart and Miller (2018) está dado por:

$$DTD = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f_z}{\partial z}}{\left| \sin \theta \frac{\partial f_z}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial f_z}{\partial y} \right|} \right), \quad (27)$$

en donde θ es la dirección de cálculo en grados desde el norte.

3.9. Etilt

Arisoy and Dikmen (2013) propusieron el detector de bordes Etilt. Tiene como finalidad balancear la señal y poder observar anomalías sutiles, se obtiene a través de la razón de la derivada vertical con la derivada horizontal total:

$$Etilt = \tan^{-1} \left(k \frac{\frac{\partial f_z}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2}} \right), \quad (28)$$

donde:

$$k = \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

a diferencia del TDR, el operador Etill incluye un factor k de corrección dimensional. Δx y Δy son las discretizaciones en las direcciones x y y respectivamente. El factor k escala el TDR de acuerdo a la discretización espacial.

3.10. ETHDR

A partir del Etilt se obtiene un detector de bordes aplicando un gradiente horizontal total dando como resultado el operador ETHDR:

$$ETHDR = \sqrt{\left(\frac{\partial Etilt}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Etilt}{\partial y}\right)^2}, \quad (29)$$

3.11. PHI

Oruç (2011) aplicó al gradiente vertical la técnica del ángulo de inclinación. Se le define usualmente como la magnitud del gradiente horizontal y se obtiene a través del segundo gradiente vertical:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2}\right)^2}} \right), \quad (30)$$

este operador disminuye la interferencia del campo potencial entre cuerpos adyacentes logrando una mejor ubicación de los límites de las estructuras, además de resaltar cuerpos a profundidad. Los valores máximos representan el centro geométrico de los cuerpos y valores cercanos a $\frac{\pi}{2}$ rad muestran los límites.

3.12. THETA

Wijns et al. (2005) sugirieron normalizar la amplitud del gradiente horizontal respecto a la señal analítica. THETA introduce un control de ganancia resaltando las señales de baja amplitud. Los valores cercanos a $\frac{\pi}{2}$ rad muestran el centro geométrico y los valores mínimos, 0 rad, encierran las estructuras y define sus límites, tienden a ser más anchos los límites a mayor profundidad:

$$Theta = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)^2}} \right). \quad (31)$$

3.13. TDX

Cooper and Cowan (2006) utilizaron el valor absoluto del gradiente vertical para normalizar la amplitud del gradiente horizontal. Los valores máximos, cercanos a $\frac{\pi}{2}$ rad, encierran las estructuras y acota los límites, los valores cercanos a cero rad muestran el centro geométrico de los cuerpos.

$$TDX_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2}}{\left| \frac{\partial f_z}{\partial z} \right|} \right), \quad (32)$$

Ma et al. (2016) propusieron el TDX mejorado, utilizando las derivadas de segundo orden aplicadas a las componentes vectoriales que construyen el TDX_1 . El operador, al

estar en función de una segunda derivada, resalta los puntos de inflexión del decaimiento del campo asociados a los límites de los cuerpos. Los valores cercanos a $\frac{\pi}{2}$ además de encerrar las estructuras ofrece una mejor estimación de los límites de los cuerpos en comparación del operador TDX_1 , los valores cercanos a 0 rad muestran el centro geométrico de las estructuras:

$$TDX_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z \partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z \partial y}\right)^2}}{\left|\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right|} \right). \quad (33)$$

3.14. *impTDX*

En cuerpos profundos el filtro TDX_1 tiende a resaltar límites más anchos de la realidad. Ibraheem et al. (2023) propusieron un filtro mejorado del TDX usando la función tangente hiperbólica:

$$\text{impTDX}_1 = \tanh \left(M \frac{\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial TDX_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial TDX_1}{\partial y}\right)^2}} \right), \quad (34)$$

donde $\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}$ es la segunda derivada vertical normalizada y M es el valor promedio de la intensidad del campo potencial del área de estudio. El operador al usar la función tangente hiperbólica acota los valores de las anomalías entre menos uno y uno, los valores máximos representan las ubicaciones de las estructuras así como sus límites, de igual forma puede resaltar cuerpos a profundidad.

Usar la derivada vertical de segundo orden provoca ruido en los datos, por lo que se puede emplear las derivadas horizontales de segundo orden utilizando la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \right), \quad (35)$$

reescribiendo el operador:

$$\text{impTDX}_2 = \tanh \left(\frac{-M \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial TDX_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial TDX_1}{\partial y}\right)^2}} \right), \quad (36)$$

de igual forma el detector impTDX_2 se puede expresar a través de la función exponencial:

$$\text{impTDX}_2 = \frac{e^{\left(-2M \frac{\left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial TDX_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial TDX_1}{\partial y}\right)^2}} \right)} - 1}{e^{\left(-2M \frac{\left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial TDX_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial TDX_1}{\partial y}\right)^2}} \right)} + 1}.$$

3.15. *THDR impTDX*

A partir del filtro impTDX se puede obtener el gradiente horizontal total y tener un nuevo operador que muestra solo los límites de los cuerpos:

$$THDR\text{impTDX} = \sqrt{\left(\frac{\partial \text{impTDX}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \text{impTDX}}{\partial y} \right)^2}. \quad (37)$$

3.16. *FSTE*

El filtro de detección de borde escalonada de primer orden $FSTE_1$ se calcula a partir de las derivadas de segundo orden del campo potencial, propuesta por Ma et al. (2016). El $FSTE_1$ es la razón del gradiente horizontal total con la derivada vertical de segundo orden por medio de la ecuación de Laplace (35):

$$FSTE_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2}}{k \cdot \left| \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \right|} \right). \quad (38)$$

Para el $FSTE_2$ se obtiene la parte real de la razón del gradiente vertical de segundo orden y el gradiente horizontal total:

$$FSTE_2 = \Re \left[\cos^{-1} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right| \cdot k}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2}} \right) \right], \quad (39)$$

en donde k es una constante tanto para $FSTE_1$ como para $FSTE_2$. La k más óptima está dada por:

$$k = \frac{\max \left| \frac{\partial f_z}{\partial z} \right|}{\max \left| \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right|},$$

los valores máximos, $\frac{\pi}{2}$ rad, de $SSTE_1$ y $SSTE_2$ encierran las estructuras y da una estimación de los límites en cambio valores cercanos a cero rad muestran el centro geométrico de los cuerpos. Para límites adyacentes la respuesta del operador puede generar valores que se pueden interpretar como estructuras por lo que se debe tener cuidado al utilizarlo.

3.17. SSTE

De igual forma Ma et al. (2016) usaron la razón entre la derivada horizontal de segundo orden con la derivada horizontal de tercer orden para el realce de bordes de fuentes potenciales, se le denomina filtro de detección de borde escalonado de segundo orden y está dado por:

$$SSTE_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)\right)^2} \cdot p}{\left|\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right|} \right), \quad (40)$$

$$SSTE_{r2} = \Re \left[\cos^{-1} \left(\frac{\left|\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)\right)^2} \cdot p} \right) \right], \quad (41)$$

$$SSTE_{i2} = \Im \left[\cos^{-1} \left(\frac{\left|\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)\right)^2} \cdot p} \right) \right], \quad (42)$$

en donde p es una constante para $SSTE_1$, $SSTE_{r2}$ y $SSTE_{i2}$. Un valor óptimo de p está cerca de la siguiente relación:

$$p = \frac{\text{mean} \left| \frac{\partial f_z}{\partial z} \right|}{\text{max} \left| \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right|}.$$

El operador $SSTE_1$ muestra solo los límites de las estructuras, para cuerpos someros los límites calculados tiene una buena estimación mientras que en cuerpos a profundidad son más anchos de los reales.

En el caso del operador $SSTE_{r2}$ al utilizar la función arcocose tiene a resaltar los máximos y mínimos de los puntos de inflexión de decaimiento del potencial con valores cercanos a $\frac{\pi}{2}$ rad, cuando el decaimiento del potencial no es muy prominente se representa con cero rad. Los límites de las estructuras son puntos de inflexión máximos del decaimiento del campo por lo que se visualiza con valores próximos a $\frac{\pi}{2}$ que encierra la estructura pero al tener puntos de inflexión mínimos con valores igual cercanos a $\frac{\pi}{2}$ puede provocar una confusión al interpretar los límites. En el caso del $SSTE_{i2}$ es similar el comportamiento pero con valores complejos.

3.18. HTA

Para el filtro HTA Cooper and Cowan (2006) sugirieron usar la tangente hiperbólica del ángulo de inclinación TDR. Al tener valores complejos se puede calcular la parte real e imaginaria:

$$HTAr = \Re \left[\tanh^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f_z}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2}} \right) \right], \quad (43)$$

$$HTAi = \Im \left[\tanh^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f_z}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)^2}} \right) \right], \quad (44)$$

en el caso del operador $HTAr$ los valores máximos representan los límites de los cuerpos y para el operador $HTAi$ los valores con $\frac{\pi}{2}$ rad son las fuentes potenciales.

3.19. TAHG

Propuesto por Ferreira et al. (2013) el filtro TAHG normaliza el gradiente vertical del operador HGA con la Amplitud del Gradiente Horizontal de HGA para delimitar los bordes laterales de estructuras:

$$TAHG = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial HGA}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial HGA}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial HGA}{\partial y}\right)^2}} \right), \quad (45)$$

los valores máximos, $\frac{\pi}{2}$ rad, representan los límites y encierran al cuerpo, el operador TAHG tiene dificultades para delimitar estructuras de bajas frecuencias si se encuentran adyacentes.

3.20. EHGA

Un filtro similar al TAHG es el $EHGA_0$ definido por Pham et al. (2022) que usa la relación de la derivada del gradiente horizontal y la función arcsine:

$$EHGA_0 = \sin^{-1} \left(\frac{\frac{\partial HGA}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial HGA}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial HGA}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial HGA}{\partial z}\right)^2}} \right). \quad (46)$$

Pham et al. (2022) propusieron un filtro EHGA modificado que delimita mejor los bordes que los filtros THAG y $EHGA_0$, están definidos por:

$$EHGA_{r1} = \Re \left[\sin^{-1} \left(p \left(\frac{\frac{\partial HGA}{\partial z}}{ASA_{HGA}} - 1 \right) + 1 \right) \right], \quad (47)$$

$$EHGA_{i1} = \Im \left[\sin^{-1} \left(p \left(\frac{\frac{\partial HGA}{\partial z}}{ASA_{HGA}} - 1 \right) + 1 \right) \right], \quad (48)$$

donde ASA_{HGA} es la señal analítica de la amplitud del gradiente horizontal:

$$ASA_{HGA} = \sqrt{\left(\frac{\partial HGA}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial HGA}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial HGA}{\partial z}\right)^2}, \quad (49)$$

p es una constante positiva definida por el intérprete, cuando $p = 1$ el filtro $EHGA_{r1}$ es igual al operador $EHGA_0$.

El filtro $EHGA_{r1}$ muestra solo los límites de los cuerpos con valores cercanos a $\frac{\pi}{2}$ rad y presenta dificultades en visualizar cuerpos adyacentes de bajas frecuencias. Cuando la constante p es pequeña los límites del operador son más anchos y cuando la constante es más grande los límites se acotan de una mejor manera pero se puede perder información. En el caso de operador $EHGA_{i1}$ es similar el comportamiento a $EHGA_{r1}$ pero con valores complejos además de que los mínimos son quienes delimitan y encierran a las estructuras.

3.21. Filtro Logístico

Pham et al. (2018) utilizaron la función logística como detector de bordes, la cual está definida por:

$$L = \frac{1}{1 + e^{-R_{ASA}}}, \quad (50)$$

donde R_{ASA} es la relación entre el gradiente vertical y el gradiente horizontal total de la señal analítica.

$$R_{ASA} = \frac{\frac{\partial ASA}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial ASA}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial ASA}{\partial y}\right)^2}}. \quad (51)$$

Las estructuras se muestran con valores máximos, cercanos a 1, mientras que los límites de estos dependen de las frecuencias. Para estructuras de alta frecuencia los límites son definidos, en el caso de estructuras adyacentes de baja frecuencia los límites son difusos así como su centro geométrico.

3.22. Filtro Logístico Modificado

Pham et al. (2018) utilizaron el filtro logístico y lo mejoraron agregándole una constante k positiva y menor a 1:

$$L_k = \frac{1}{k + e^{-R_{ASA}}}, \quad (52)$$

si $k=1$ entonces el operador $L_k=L$.

En el filtro logístico modificado (L_k) entre menor sea la constante k los límites de las estructuras se acotan de una mejor manera pero se sigue teniendo el mismo problema con estructuras de baja frecuencia que el filtro logístico (L).

3.23. IL

Para hacer el realce de bordes más efectivo Pham et al. (2020) usaron el filtro logístico modificado implementando el HGA:

$$IL = \frac{1}{1 + e^{[-p(R_{HGA}-1)+1]}}, \quad (53)$$

donde R_{HGA} es la relación del gradiente vertical entre la amplitud del gradiente horizontal de HGA:

$$R_{HGA} = \frac{\frac{\partial HGA}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial HGA}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial HGA}{\partial y}\right)^2}}, \quad (54)$$

y p es una constante positiva definida por el intérprete.

Los límites de estructuras se representan con valores mínimos, cercanos a 0, entre mayor sea la constante p el operador IL puede acotarlos de una mejor manera, a diferencia del filtro logístico (L) y filtro logístico modificado (L_k) el operador IL corrige los problemas con frecuencias bajas.

3.24. *FSED*

El operador detector rápido de bordes está basado en sigmoides, es una técnica empleada por Oksum et al. (2021), la cual es la relación de la amplitud del gradiente horizontal:

$$FSED = \frac{R_{HGA} - 1}{1 + |R_{HGA}|}. \quad (55)$$

Valores máximos, cercanos a 1, representan los límites de las estructuras, el operador tiene problemas al visualizar cuerpos adyacentes a bajas frecuencias.

3.25. *STDR*

Nasuti et al. (2019) propusieron un filtro que combina números complejos, la fase, el ángulo y su relación entre la segunda derivada vertical con el módulo del gradiente horizontal, con la finalidad de tener un filtro que pueda diferenciar entre cuerpos adyacentes:

$$STDR = \tan^{-1} \left(M \frac{\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial HGA}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial HGA}{\partial y}\right)^2}} \right), \quad (56)$$

donde M es un número escalar adimensional que lo define el intérprete. M puede definirse esencialmente como la magnitud de la intensidad magnética total promedio o el valor de la gravedad absoluta de la región.

El operador $STDR$ acota de manera acertada los límites de las estructuras tanto de bajas y altas frecuencias representado con valores máximos, cercanos a $\frac{\pi}{2}$ rad, y no tiene problema en diferenciar cuerpos adyacentes.

3.26. *THD STDR*

A partir del detector de bordes $STDR$ se puede operar el gradiente horizontal total y obtener un nuevo filtro:

$$THDSTDR = \sqrt{\left(\frac{\partial STDR}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial STDR}{\partial y}\right)^2}. \quad (57)$$

El operador $THD STDR$ muestra solo los límites de las estructuras con valores cercanos al máximo.

3.27. *NSTD*

Cooper and Cowan (2008) propusieron un detector de bordes usando desviación estándar. Se calcula la desviación estándar de un conjunto de datos de la anomalía a partir de una ventana móvil, es una medida simple de variabilidad local. El filtro normaliza la desviación estándar del gradiente vertical:

$$NSTD = \frac{\sigma\left(\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)}{\sigma\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \sigma\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right) + \sigma\left(\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)}. \quad (58)$$

El $NSTD$ reduce el ruido y revela regiones de límites estructurales, al usar una ventana móvil hay pérdida de información en los bordes, los valores máximos corresponden a los límites de los cuerpos.

3.28. *Señal Analítica Balanceada*

Cooper (2009) definió una señal analítica balanceada, la cual es una cantidad compleja en donde las amplitudes están dadas por $|ASA|$ (ecuación 12). Para mejorar el realce de anomalías de menor amplitud, se calculó una señal analítica aplicando la transformada de Hilbert, tanto en dirección H_x y H_y de la amplitud de la señal analítica AS :

$$ASAB = \frac{|ASA|}{k + \sqrt{\left((H_x(|ASA|))^2 + (H_y(|ASA|))^2 + |ASA|^2\right)}}, \quad (59)$$

en donde k controla la eficiencia del detector de bordes.

Cuando k es pequeña el equilibrio aumentará dando como resultado la visualización de cuerpos de amplitudes bajas, el inconveniente es que los límites se representaran más anchos.

3.29. Profile Curvature

La curvatura es un atributo muy útil que se puede aplicar a datos potenciales. La curvatura en dirección del gradiente refleja el cambio de la pendiente. En este caso se utiliza la curvatura propuesta por Mitášová and Hofierka (1993):

$$K_s = \frac{\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} \frac{\partial f_z}{\partial x} \frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2}{p \sqrt{q^3}}, \quad (60)$$

en donde:

$$p = \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2 \quad (61)$$

y $q = p + 1$. La ecuación para la curvatura K_s en un punto dado se calcula como la curvatura de la sección del plano normal en una dirección del gradiente.

De igual forma se puede calcular la curvatura tangencial K_t por:

$$K_t = \frac{\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} \frac{\partial f_z}{\partial x} \frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2}{p \sqrt{q}} \quad (62)$$

Las ecuaciones (60) y (62) son apropiadas para el cálculo de curvaturas con pendientes mayores a $\gamma_{min} > 0$, donde $\gamma = \arctan \sqrt{p}$.

3.30. Shape Index

Li (2015) analizó atributos de la curvatura de superficies potenciales como funciones de gravedad o magnéticas:

$$SI = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2}}{\sqrt{4 \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2}}} \right) \quad (63)$$

El operador SI muestra los cuerpos y sus límites con valores mínimos, resalta anomalías de baja amplitud de una manera óptima así como con cuerpos adyacentes.

3.31. Tangencial

El concepto de vectores unitarios de forma ortonormal se puede aplicar a los datos potenciales como el atributo tangencial:

$$\vec{T} = \frac{\frac{\partial f_z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_z}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial z} \right)^2}} \quad (64)$$

4. Atributos sísmicos instantáneos aplicados a datos potenciales

Para el análisis de atributos sísmicos instantáneos se usaron las ecuaciones propuestas por Khan and Akhter (2016) y se modificó para datos potenciales.

Para realzar algunas estructuras geológicas se ha implementado el análisis de las trazas sísmicas complejas, el cual sentó las bases de los atributos sísmicos. Se han desarrollado y clasificado varios atributos de diferente manera como pre-stack, post-stack, instantáneos, tiempo, amplitud, frecuencia, atenuación y entre otros Brown (1996).

Se utiliza la transformada de Hilbert para el análisis de señales digitales, en este caso se usan datos potenciales. En general se presenta como una convolución entre una señal real $f(t)$ y $\frac{1}{\pi t}$ tales como:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} * f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (65)$$

en donde $h(t)$ es la transformada de Hilbert, donde la parte imaginaria es una versión de la parte real de los datos originales con un cambio en la fase de 90° . Se puede obtener la señal analítica, usando la parte real, que son los datos originales, y la parte imaginaria, que contiene la transformada de Hilbert, Claerbout (1985):

$$F(t) = f(t) + ih(t) \quad (66)$$

Los atributos instantáneos se obtienen del análisis de una señal compleja como la obtenida en la transformada de Hilbert Taner et al. (1979), en este caso se aplicaron en datos potenciales f_z :

$$F_z = f_z + ih_z. \quad (67)$$

4.1. Amplitud Instantánea

Representa la energía total de la parte compleja independientemente de la fase, se calcula como el modulo de la traza compleja White (1991):

$$A = \sqrt{f_z^2 + ih_z^2} = |F_z|. \quad (68)$$

4.2. Bandwidth Instantáneo

Cohen and Lee (1990) definieron el bandwidth instantáneo para atributos sísmicos. Es una medida estadística de la wavelet y se relaciona con varias condiciones físicas. Se obtiene a través de las componentes horizontales del gradiente de la amplitud instantánea:

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln(A) \right|, \quad (69)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln(A) \right|, \quad (70)$$

de igual forma se pueden sumar los valores de las componentes horizontales:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln(A) \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln(A) \right|. \quad (71)$$

4.3. Factor de calidad instantáneo

Primero se debe obtener la fase instantánea, la información de la fase es independiente de las amplitudes:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{ih_z}{f_z} \right),$$

La derivada de la fase instantánea es la frecuencia angular instantánea. Como son datos potenciales se derivan en dirección x y y obteniendo:

$$\omega_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{y} \quad \omega_y = \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

entonces la frecuencia instantánea está dada por las componentes horizontales del gradiente de la fase:

$$v = \frac{\omega_x}{2\pi} + \frac{\omega_y}{2\pi},$$

el factor de calidad instantáneo está dado por la frecuencia instantánea y el bandwidth instantáneo:

$$q_x = \frac{v}{2\sigma_x} \quad (72)$$

$$q_y = \frac{v}{2\sigma_y} \quad (73)$$

y sumando las componentes horizontales obtenemos el factor de calidad instantáneo del campo potencial:

$$q = \frac{v}{2\sigma_x} + \frac{v}{2\sigma_y}. \quad (74)$$

4.4. Amplitud de Aceleración

Se le denomina como la segunda derivada envolvente y está dada por:

$$A_c = \frac{\partial^2 \ln(A)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln(A)}{\partial y^2}. \quad (75)$$

5. Conclusiones

La amplia variedad de operadores hace muy difícil poder comparar las ventajas y desventajas que se tiene uno de otro. Un mismo filtro a través de los años ha sufrido varias redefiniciones matemáticas para mejorar las estimaciones de los límites de los cuerpos, unos con mejores resultados que otros.

Los primeros operadores más simples, como la amplitud del gradiente horizontal (HGA) y la señal analítica (|ASA|), delimitan muy bien los cuerpos pero solo a poca profundidad y altas amplitudes, posteriormente se introdujeron los operadores que implementan el uso de la fase y el ángulo de inclinación para el realce de anomalías a profundidad, aunque perdiendo definición en los límites de los cuerpos y presentando una forma redondeada. De igual forma se han estado desarrollando operadores que utilizan la definición de curvatura y sus variantes aplicados a anomalías de campos potenciales.

En la mayoría de los operadores se tiene una buena respuesta y estimación de anomalías que se encuentran a poca profundidad. Varios filtros pierden información conforme la anomalía se encuentre a más profundidad (o es una fuente potencial débil, de baja amplitud) distorsionando la forma de sus límites, algunos operadores tienden a delimitar un área similar a la fuente, otros ofrecen un área

progresivamente mayor a medida que la fuente se hace más profunda y otros operadores por el contrario tienden a presentar un área menor. Los resultados en cuerpos simples y/o aislados son los de mejor estimación pero se tiene problemas en cuerpos estructuralmente complejos porque se genera mucho ruido e interferencia llegando a ser inútiles algunos casos.

Referencias

- Arisoy, M.ö., Dikmen, Ü., 2013. Edge detection of magnetic sources using enhanced total horizontal derivative of the tilt angle geliştirilmiş eğim açısı toplam yatay türevi ile manyetik kaynakların sınırlarının belirlenmesi. *Yerbilimleri/Earth Sciences* 34.
- Beiki, M., 2010. Analytic signals of gravity gradient tensor and their application to estimate source location. *Geophysics* 75, 161.
- Blakely, R.J., 1996. Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge university press.
- Brown, A.R., 1996. Seismic attributes and their classification. *The leading edge* 15, 1090–1090.
- Claerbout, J., 1985. Fundamentals of geophysical data processing with applications to petroleum prospecting, department of geophysics.
- Cohen, L., Lee, C., 1990. Instantaneous bandwidth for signals and spectrogram, in: *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE*. pp. 2451–2454.
- Cooper, G., 2009. Balancing images of potential-field data. *Geophysics* 74, L17–L20.
- Cooper, G., Cowan, D., 2006. Enhancing potential field data using filters based on the local phase. *Computers & Geosciences* 32, 1585–1591.
- Cooper, G., Cowan, D.R., 2008. Edge enhancement of potential-field data using normalized statistics. *Geophysics* 73, H1–H2.
- Cordell, L., Grauch, V., 1985. Mapping basement magnetization zones from aeromagnetic data in the san juan basin, new mexico, in: *The utility of regional gravity and magnetic anomaly maps*. Society of Exploration Geophysicists, pp. 191–192.
- Debeglia, N., Corpeil, J., 1997. Automatic 3-d interpretation of potential field data using analytic signal derivatives. *Geophysics* 62, 88.
- Ferreira, F.J., de Souza, J., de B. e S. Bongiolo, A., de Castro, L.G., 2013. Enhancement of the total horizontal gradient of magnetic anomalies using the tilt angle. *Geophysics* 78, J33–J41.
- Hansen, R., Deridder, E., 2006. Linear feature analysis for aeromagnetic data. *Geophysics* 71, L62.
- Ibraheem, I.M., Tezkan, B., Ghazala, H., Othman, A.A., 2023. A new edge enhancement filter for the interpretation of magnetic field data. *Pure and Applied Geophysics*, 1–4.
- Khan, K.A., Akhter, G., 2016. Review of instantaneous, wavelet, and weighted seismic attributes along with a computational library. *Arabian Journal of Geosciences* 9, 2–4.
- Li, X., 2015. Curvature of a geometric surface and curvature of gravity and magnetic anomalies. *Geophysics* 80, G15–G26.
- Ma, G., Huang, D., Liu, C., 2016. Step-edge detection filters for the interpretation of potential field data. *Pure and Applied Geophysics* 173, 795–803.
- Mitášová, H., Hofierka, J., 1993. Interpolation by regularized spline with tension: II. application to terrain modeling and surface geometry analysis. *Mathematical geology* 25, 657–669.
- Nabighian, M.N., 1972. The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: its properties and use for automated anomaly interpretation. *Geophysics* 37, 507–517.
- Nasuti, Y., Nasuti, A., Moghadas, D., 2019. Stdr: a novel approach for enhancing and edge detection of potential field data. *Pure and Applied Geophysics* 176, 827–841.
- Oksum, E., Le, D., Vu, M., Nguyen, T., Pham, L., 2021. A novel approach based on the fast sigmoid function for interpretation of potential field data. *Bull. Geophys. Oceanogr* 62, 543–556.

- Oruç, B., 2011. Edge detection and depth estimation using a tilt angle map from gravity gradient data of the Kozaklı-central anatolia region, Turkey. *Pure and applied geophysics* 168, 1770.
- Pham, L.T., Eldosouky, A.M., Oksum, E., Saada, S.A., 2022. A new high resolution filter for source edge detection of potential field data. *Geocarto International* 37, 3051–3068.
- Pham, L.T., Oksum, E., Do, T.D., Huy, M., 2018. New method for edges detection of magnetic sources using logistic function. *Geofizicheskiy Zhurnal* 40, 128,129.
- Pham, L.T., Van Vu, T., Le Thi, S., Trinh, P.T., 2020. Enhancement of potential field source boundaries using an improved logistic filter. *Pure and Applied Geophysics* 177, 5237–5249.
- Roest, W.R., Verhoef, J., Pilkington, M., 1992. Magnetic interpretation using the 3-d analytic signal. *Geophysics* 57, 117.
- Stewart, I.C., Miller, D.T., 2018. Directional tilt derivatives to enhance structural trends in aeromagnetic grids. *Journal of Applied Geophysics* 159, 553–563.
- Taner, M.T., Koehler, F., Sheriff, R., 1979. Complex seismic trace analysis. *Geophysics* 44, 1042–1043.
- Verduzco, B., Fairhead, J.D., Green, C.M., MacKenzie, C., 2004. New insights into magnetic derivatives for structural mapping. *The leading edge* 23, 116–119.
- White, R.E., 1991. Properties of instantaneous seismic attributes. *The Leading Edge* 10, 26–28.
- Wijns, C., Perez, C., Kowalczyk, P., 2005. Theta map: Edge detection in magnetic data. *Geophysics* 70, L39–L43.
- Zhang, C., Zhang, B., Li, G., Lin, L., Zhang, C., Wang, F., 2019. A preprocessing algorithm based on heterogeneity detection for transmitted tissue image. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking* 2019, 3.
- Zhou, W., Du, X., Li, J., 2013. The limitation of curvature gravity gradient tensor for edge detection and a method for overcoming it. *Journal of Applied Geophysics* 98, 239–240.

