UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

NOTAS PARA EL CURSO INTRODUCTORIO MATEMATICAS 0041

SEPTIMA PARTE: CALCULO INTEGRAL Y DIFERENCIAL

PROF. ARTURO DELGADO RODRIGUEZ

ENERO 1981
(3a. reimpresión)

15 en existencia

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

NOTAS PARA EL:

CURSO INTRODUCTORIO

MATEMATICAS-04

(SEPTIMA PARTE)

CALCULO INTEGRAL Y DIFERENCIAL

ABRIL DE 1974

ARTURO DELGADO R.

INTEGRACION:-

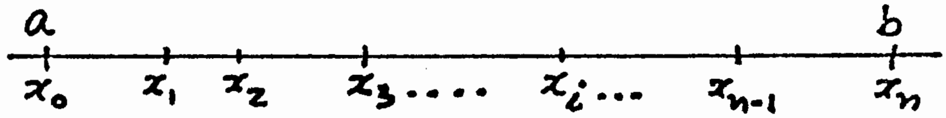
Definiciones preliminares:

a) Partición.- Un conjunto finito de números: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ Constituye una "partición" P del intervalo cerrado $[a, b] \in E'$, si se tiene que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Simbólicamente:

$$P = \{ x_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots n \} = \{ x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n \}$$



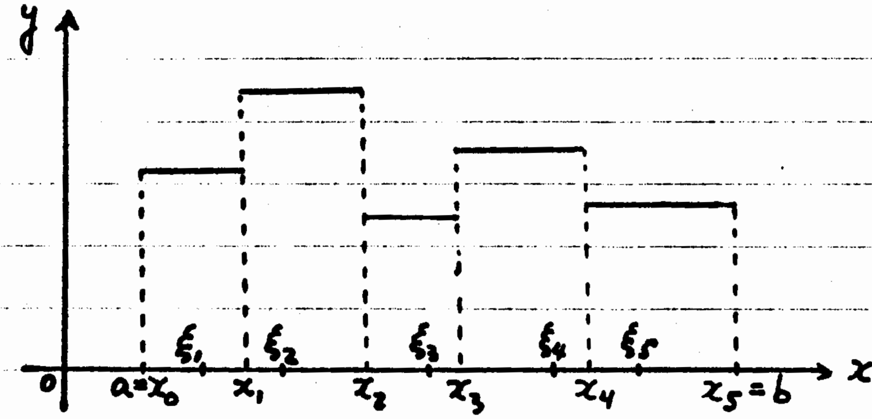
b) Norma de una partición.- Se define como la longitud del mayor subintervalo $x_i - x_{i-1}$ en la partición P.

$$|P| = Max \{ x_i - x_{i-1} \mid i \in N \}$$

c) función escalonada.- Una función: $f: [a, b] \to E'$ se denomina "función escalonada" si para alguna partición P de $[a, b]$, resulta $f(x)$ igual a una constante en cada subintervalo abierto (x_{i-1}, x_i) de P; esto es, existe un conjunto de n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $f(x) = c_i$ para toda $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i \in N$.

La función f debe estar definida en todos los puntos x_i que definen la partición P; sin embargo, la definición

Interpretación geométrica de la integral definida de la función escalonada $f(x)$.



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_5)(b-x_4)$$

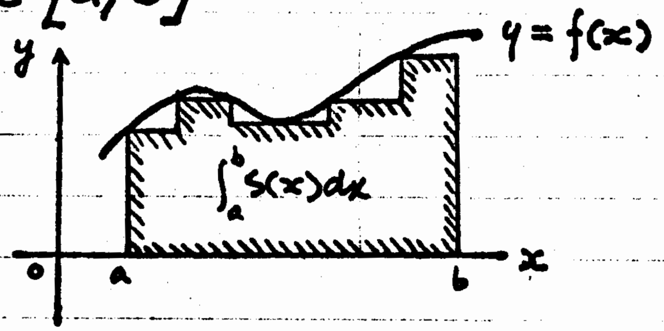
El segundo miembro de la ecuación anterior es numéricamente igual al área bajo la función escalonada $f(x)$.

Integral definida de una función $f(x)$ acotada cualquiera.

Sea $f:[a,b]\to E'$ una función acotada cualquiera.

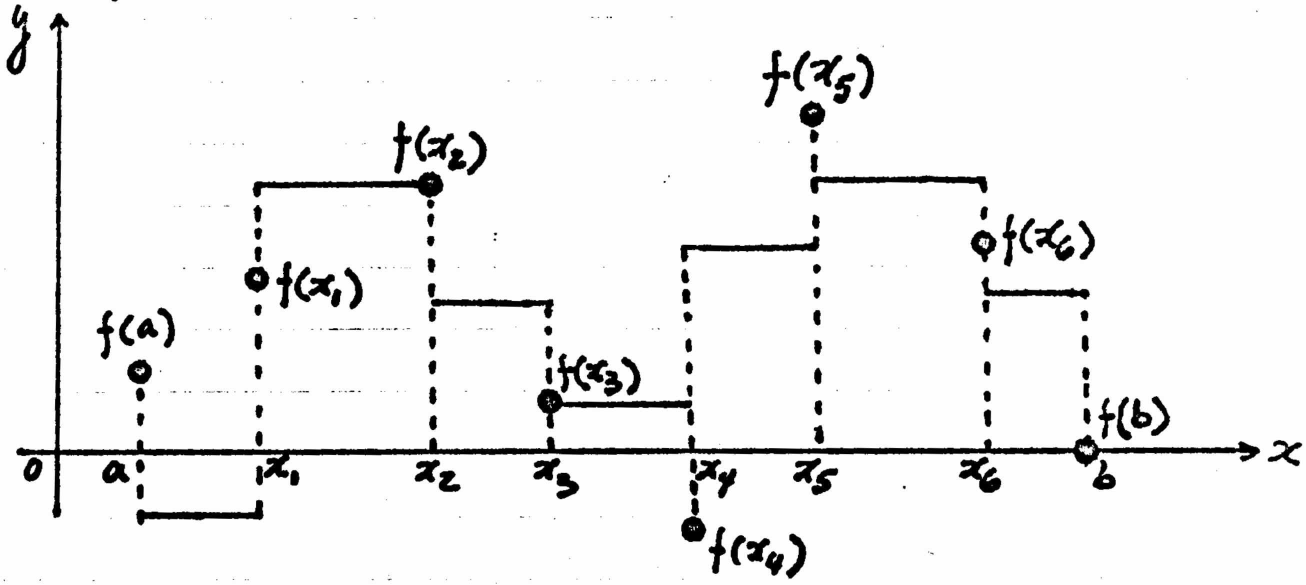
Definamos S_f como el conjunto de todas las funciones escalonadas:

$s:[a,b]\to E'$ tal que $s(x)\le f(x)$, para toda $x\in[a,b]$



no restringe en forma alguna el valor $f(x_i)$ en los extremos de los subintervalos.

Ejemplo:



d) Integral definida (ó de Riemann). Sea $f(x)$ una función escalonada, definida en el intervalo $[a, b]$; siendo P una partición de $[a,b]$. Si $f(x)$ toma los valores $f(\xi_i)$ en cada subintervalo (x_{i-1}, x_i); $x_{i-1} < \xi_i < x_i$

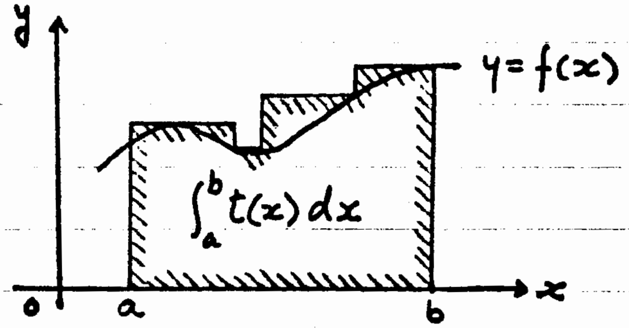
Se define como "Integral definida" de $f(x)$ en $[a, b]$ al número real:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Obsérvese que por ser $f(x)$ una función escalonada, la suma indicada en el segundo miembro es de un número finito de términos

Análogamente: Sea T_f el conjunto de todas las funciones escalonadas:

$t : [a, b] \to E'$ tal que $t(x) \geq f(x)$, para toda $x \in [a, b]$



Sean:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup.\left\{ \int_a^b s(x)\,dx \,\middle|\, s(x) \in S_f \right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf.\left\{ \int_a^b t(x)\,dx \,\middle|\, t(x) \in T_f \right\}$$

Si: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

La integral definida de $f(x)$ es, por definición:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Si se verifican las últimas ecuaciones, se dice que $\int_a^b f(x)\,dx$ "existe".

Observación 1) $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ <u>no</u> es en todos los casos igual á $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Ejemplo: Sea $f:[0,1]\to E'$; siendo:

$$f(x)=\begin{cases} 2, & \text{si } x\in Q \text{ (racionales)} \\ 1, & \text{si } x\in Q'=\{x \mid x\in R^{\#}, x\notin Q\} \end{cases}$$

Puesto que cualquier intervalo abierto contiene números racionales e irracionales,
$\Rightarrow$ $s(x)$ es cualquier función escalonada $\in S_f$
$\Rightarrow$ $s(x)\leq 1$ para toda $x\in[0,1]$.

Por otro lado, si $t(x)\in T_f \Rightarrow t(x)\geq 2$ para toda $x\in[0,1]$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^1} f(x)dx = 1 \quad ; \quad \overline{\int_0^1} f(x)dx = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^1} f(x)dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)dx$$

Es, sin embargo, factible demostrar que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{para toda}$$

función acotada $f:[a,b]\to E'$.

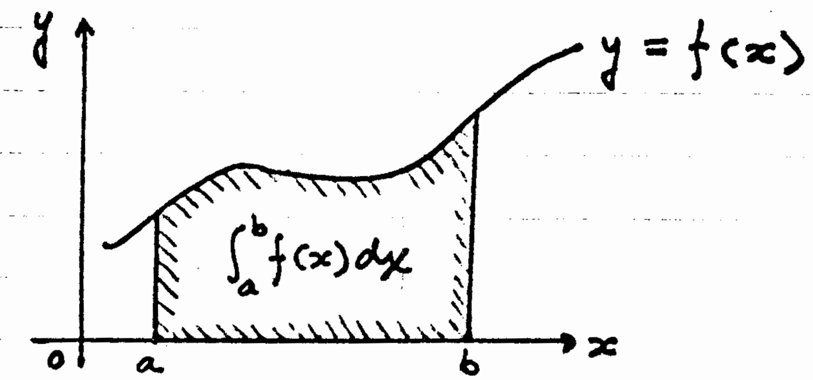
Tambien se demuestra que toda función escalonada es integrable.

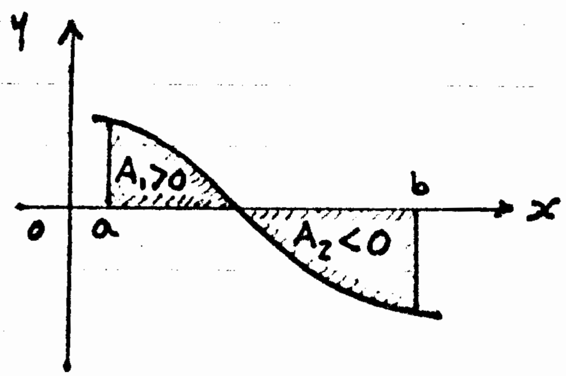
TEYCO

Observación 2) El valor de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no depende de la variable de integración x (x es un símbolo mudo); pudiéndose reemplazar por cualquier otro símbolo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(\theta)\,d\theta = \int_a^b f$$

Observación 3) Geométricamente $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el valor numérico del área bajo la curva $y=f(x)$, limitada por las líneas $y=0$; $x=a$; $x=b$

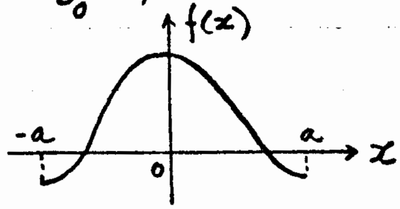




$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

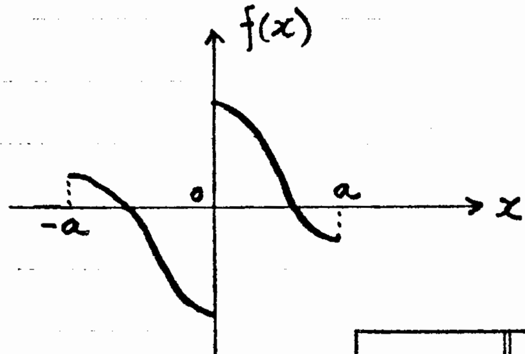
Observación 4) Si $f(x)$ es función par: $f(-x)=f(x)$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Si $f(x)$ es función impar: $f(-x)=-f(x) \Rightarrow$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



Si $f(x)=g(x)\,h(x)$

	$f(x)$	$g(x)$ PAR	$g(x)$ IMPAR
$h(x)$	PAR	PAR	IMPAR
$h(x)$	IMPAR	IMPAR	PAR

De la tabla anterior se deduce que la regla para multiplicar funciones es la misma que para el producto de los signos + y −: producto de funciones iguales es par; producto de funciones desiguales (una par y la otra impar) da una función impar.

La regla anterior puede, por inducción, hacerse extensiva al producto de cualquier número de funciones

$$\int_{-a}^{a} f_1(x) f_2(x)\cdots f_n(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a \underbrace{f_1(x) f_2(x)\cdots f_n(x)}_{par}\,dx \\ 0 \text{ si } f_1(x) f_2(x)\cdots f_n(x) \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplos: Calcular las siguientes integrales:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

Solución: $f(x) = \operatorname{sen} x$ es función impar $\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0$$

---

2) $\int_{-1}^{1} x^2 dx$

Solución: $f(x) = x^2$ es función par $\Rightarrow$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

---

3) $\int_{-2\pi}^{2\pi} x \cos x \, dx$

Solución: $g(x) = x$ (impar) ; $h(x) = \cos x$ (par) $\Rightarrow$

$x \cos x$ es función impar $\Rightarrow \int_{-2\pi}^{2\pi} x \cos x \, dx = 0$

---

4) $\int_{-b}^{b} e^{-x^2} \operatorname{sen} nx \, dx \quad ; \; n \in R^{\#}$

Solución: $g(x) = e^{-x^2}$ (par) ; $h(x) = \operatorname{sen} nx$ (impar)

$\Rightarrow e^{-x^2} \operatorname{sen} nx$ es función impar $\Rightarrow \int_{-b}^{b} e^{-x^2} \operatorname{sen} nx \, dx = 0$

---

5) $\int_{-a}^{a} x^3 \tanh^2 x \ln|x| \, dx$

Solución:

$f_1(x) = x^3$ (función impar)

$f_2(x) = \tanh^2 x$ (función par)

$f_3(x) = \ln|x|$ (función par)

$\Rightarrow x^3 \tanh^2 x \ln|x|$ es función impar

$$\therefore \int_{-a}^{a} x^3 \tanh^2 x \ln|x| \, dx = 0$$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \, dx$

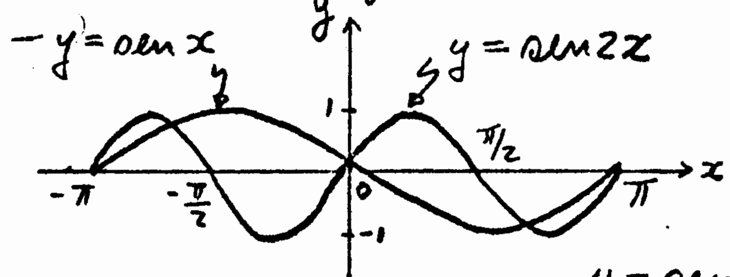
Solución:

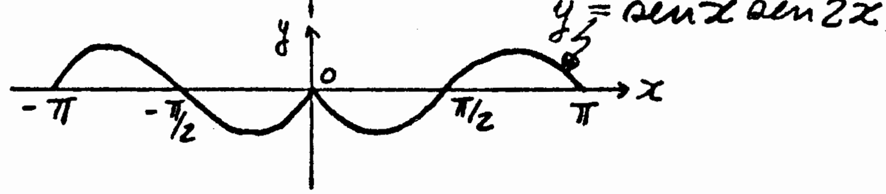
Aun cuando las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} 2x$ son ambas impares; siendo por lo tanto el producto de las funciones $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$ una función par; $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \, dx = 0$.

Lo anterior resulta porque la función $\operatorname{sen} 2x$ no conserva el mismo signo en cada semintervalo $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$; esto es:

$$\operatorname{sen} 2x \begin{cases} < 0 \text{ en } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ y en } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ > 0 \text{ en } \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ y en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hay ordenadas > 0 y > 0 en cada semintervalo, como se observa en la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$



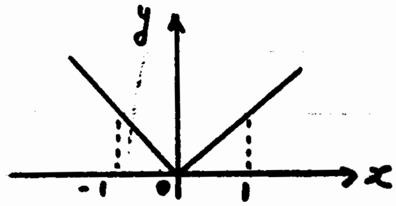


$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \, dx = 0$$

7) $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$

Solución: $f(x) = |x|$ es función par

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_{0}^{1} |x|\, dx$



$|x| = x$; si $x > 0$

$\Rightarrow \int_{0}^{1} |x|\, dx = \int_{0}^{1} x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1$

---

8) $\int_{-2}^{2} x|x|\, dx$

Solución: $g(x) = x$ (impar); $h(x) = |x|$ (par)

$\Rightarrow x|x|$ es función impar

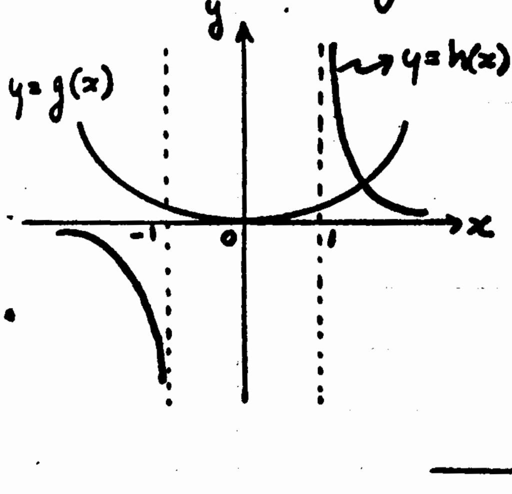
$\Rightarrow \int_{-2}^{2} x|x|\, dx = 0$

---

9) $\int_{-a}^{a} x^2 \operatorname{ctgh}^{-1} x\, dx \quad ; \quad a > 1$

Solución: $g(x) = x^2$ (par); $h(x) = \operatorname{ctgh}^{-1} x$ (impar);

pero: $h(x) = \operatorname{ctgh}^{-1} x$ <u>no</u> está definida para $-1 \leq x \leq 1$



$\Rightarrow \int_{-a}^{a} x^2 \operatorname{ctgh}^{-1} x\, dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx =$

$= 2\int_{0}^{1} x^2\, dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} x^2 \operatorname{ctgh}^{-1} x\, dx = \frac{2}{3}$; $a > 1$

Teorema I.- Es condición suficiente para que una función $f: [a,b] \to E'$ sea integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$, el que sea continua en $[a,b]$.

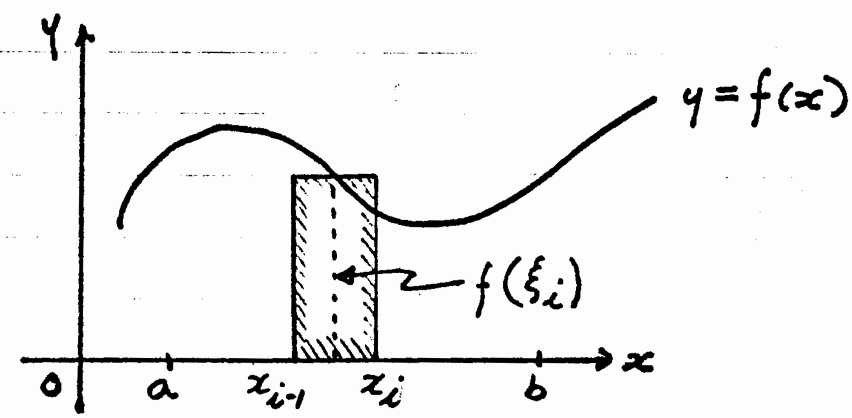
Teorema II.- Si f es una función continua en $[a,b]$, $\Rightarrow$ para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$ para toda partición P, cuya norma $|P| < \delta$; estando todas lás $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Este resultado puede tambien expresarse del siguiente modo:

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f$$

Geométricamente:



Ejemplo:

Calcular "geométricamente" el valor de:

$\int_1^3 x^2 dx$

Solución:

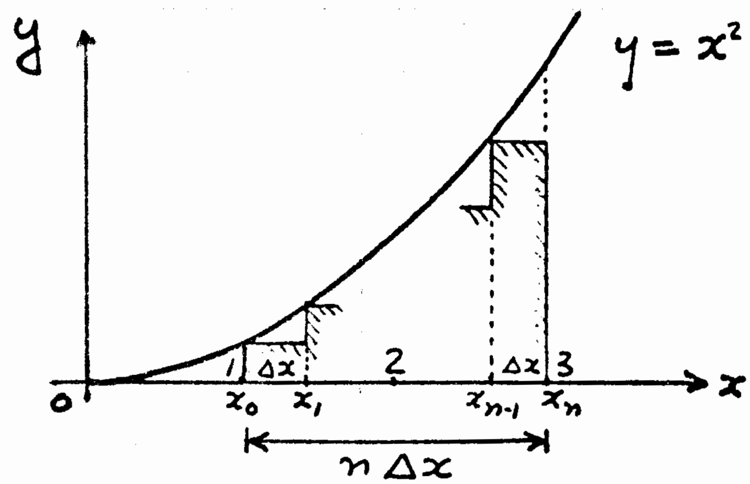
El intervalo es: $1 \leq x \leq 3$; siendo su longitud $3-1=2$

Escojamos P tal que el intervalo contenga n subintervalos iguales:

$$(x_i - x_{i-1}) = \Delta x = \frac{2}{n} = |P|$$

Para la partición elegida, tomemos los puntos ξ_i en el extremo izquierdo de cada subintervalo:

$$P = \{1,\ 1+\Delta x,\ 1+2\Delta x, \ldots, 1+n\Delta x\}$$



$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x = x_0^2\Delta x + x_1^2\Delta x + \ldots + x_{n-1}^2\Delta x =$$

$$= \left[1 + (1+\Delta x)^2 + (1+2\Delta x)^2 + \ldots + (1+n\Delta x)^2\right]\Delta x$$

$$= \left[n + 2(1+2+\ldots+n)\Delta x + (1^2+2^2+\ldots+n^2)\Delta x^2\right]\Delta x$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x = \left[n + n(n+1)\frac{2}{n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\frac{2}{n}\right)^2 \right]\frac{2}{n} =$$

$$= 2 + (n^2+n)\frac{4}{n^2} + \frac{1}{3}(2n^2+3n+1)\frac{4}{n^2} =$$

$$= 2 + \left(4 + \frac{4}{n}\right) + \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = M$$

$$\lim_{|P|\to 0} M = \lim_{n\to\infty} M = 2 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$

Propiedades básicas de la integral definida:

Sean f y g funciones continuas en $[A, B]$ teniéndose:

$$A \leq b < a \leq B$$

1.- $\displaystyle\int_a^a f = 0$; (por definición)

2.- $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$

3.- $\displaystyle\int_a^b c = c(b-a)$; c = constante

4.- $\displaystyle\int_a^b cf = c\int_a^b f$

5.- $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$; $c \in [A, B]$

6.- $\displaystyle\int_a^b [f \pm g] = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

7.- (de 4.- y 6.-) $\displaystyle\int_a^b [c_1 f \pm c_2 g] = c_1\int_a^b f \pm c_2\int_a^b g$;

(linealidad respecto al integrando), c_1 y c_2 constantes.

8.- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$; $c \in R^{\#}$

9.- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right)dx$; $c\in R^{\#}$, $c\neq 0$

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para toda $x\in[A,B] \Rightarrow$

10.- $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$

11.- $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$

Ejemplo 1) Demostrar, con base en las propiedades anteriores que:

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx$$

Solución: de 9.- $(c=-1)$

$$\int_0^1 x\,dx = -\int_0^{-1} (-x)\,dx$$

de 2.-

$$-\int_0^{-1} (-x)\,dx = \int_{-1}^0 (-x)\,dx$$

de 8.- $(c=1)$

$$\int_{-1}^0 (-x)\,dx = \int_0^1 -(x-1)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx \checkmark$$

TFYCO

2) Con base en el resultado del ejemplo 1), demostrar que:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Solución: $\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx$ ①

de 6.-

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x\,dx = 1 - \int_0^1 x\,dx \quad ②$$

de ① y ②,

$$2\int_0^1 x\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad ③ \quad \checkmark$$

---

3) Demostrar que: $\int_0^b \frac{a}{b} x\,dx = \frac{ab}{2}$

Solución: de 4.-

$$\int_0^b \frac{a}{b} x\,dx = \frac{a}{b}\int_0^b x\,dx$$

de 9.- $(c = 1/b)$

$$\frac{a}{b}\int_0^b x\,dx = \frac{a}{b}\, b \int_0^{b\frac{1}{b}} bx\,dx = a\int_0^1 bx\,dx$$

de 4.-

$$a\int_0^1 bx\,dx = ab\int_0^1 x\,dx$$

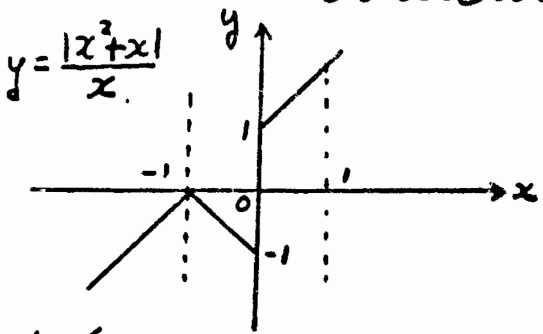
de ③: $ab\int_0^1 x\,dx = \frac{ab}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^b \frac{a}{b} x\,dx = \frac{ab}{2} \quad \checkmark$$

4) Empleando únicamente las propiedades básicas de la integral definida, y el resultado del problema 2) anterior, demostrar que:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{|x^2+x|}{x}\,dx = 1$$

Solución:



$$|x^2+x| = \begin{cases} x^2+x, & \text{si } x^2+x>0 \\ -x^2-x, & \text{si } x^2+x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x+1 \,; \text{ para } (x<-1) \cup (x>0) \\ y = -x-1 \,; \text{ para } -1<x<0 \end{cases}$$

de 6.-

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \frac{|x^2+x|}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} -(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (x+1)\,dx$$

de 2.-

$$I = -\int_{0}^{-1} -(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (x+1)\,dx$$

de 4.-

$$I = \int_{0}^{-1} (x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (x+1)\,dx$$

de 9.- $(c=-1)$

$$I = \frac{1}{-1}\int_{0}^{1} \left(\frac{x}{-1}+1\right) dx + \int_{0}^{1} (x+1)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{1} (-x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (x+1)\,dx$$

de 4.- : $I = \int_{0}^{1} (x-1)\,dx + \int_{0}^{1} (x+1)\,dx$

de 6.- : $I = \int_{0}^{1} [(x-1)+(x+1)]\,dx = \int_{0}^{1} 2x\,dx$

de 4.- : $I = 2\int_{0}^{1} x\,dx$

del problema 2) $\Rightarrow$ $I = 2\,\frac{1}{2} = 1$

Teorema del valor medio para integrales.-

Si f es una función continua en $[a,b]$, $\Rightarrow$ existe un número $c \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f = (b-a)\, f(c)$$

Demostración:

Dado que $f:[a,b] \to E'$ es, por hipótesis continua en el intervalo $a \leq x \leq b \Rightarrow f(x)$ tiene un valor mínimo m; así como un valor máximo $\in [a,b]$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

de 10.- $$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$$

de 3.- $$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

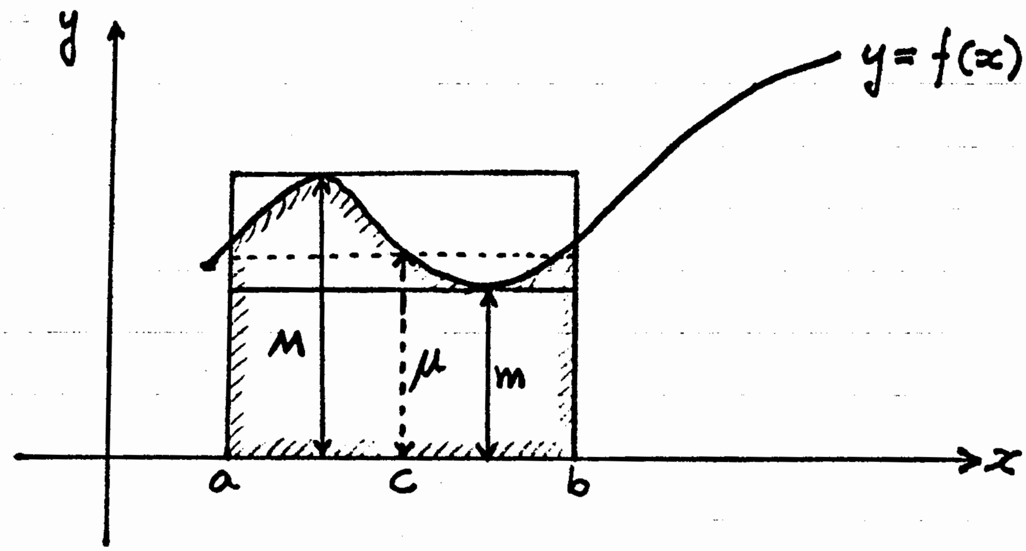
Sea $f(c) = \mu$; tal que $m < \mu < M$

$$\Rightarrow \quad \mu(b-a) \leq \int_a^b f \leq \mu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(b-a) = \int_a^b f$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f = (b-a)\, f(c) \checkmark \; ; \quad a < c < b$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales:-



Significa que es posible hallar una abscisa $x = c$ tal que el área:

$$\int_a^b f = (b-a) f(c)$$

de la figura:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Segundo teorema del valor medio para integrales:-

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a,b]$; $a<b$; siendo $g(x)\geq 0$ para toda $x\in[a,b]$.

Se afirma que existe una $c\in[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Demostración:

Sea la función:

$$G(t) = f(t)\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad ①$$

$$= \int_a^b [f(t)-f(x)]\,g(x)\,dx \quad ②$$

Debemos hacer ver que $G(t)=0$ para algún punto $t\in(a,b)$

Supongamos f tiene su valor mínimo en $[a,b]$ para la abscisa x_1 ; siendo x_2 el punto en que f toma su valor máximo en $[a,b]$

$\Rightarrow \quad G(x_1)\leq 0 \quad ; \quad G(x_2)\geq 0$

$\Rightarrow$ i) ó $G(x_1)<0$ y $G(x_2)>0$ ó

ii) ó alguna (ó ambas) son cero.

i) si: $G(x_1)<0$ y $G(x_2)>0 \Rightarrow G(c)=0$; $x_1<c<x_2$ (ó $x_1>c>x_2$), por el teorema del valor medio para integrales; ya que la continuidad de $f\in[a,b]$ $\Rightarrow$ que G es continua en $[a,b]$

Puesto que $x_1, x_2\in[a,b]$; $x_1\neq x_2 \Rightarrow c\in(a,b)$. ✓

21

ii) Si $G(x_1)=0$ ó $G(x_2)=0$. Supongamos, para concretar, que $G(x_2)=0$ (La demostración para el caso que $G(x_1)=0$ es análoga; basta hacer $f=-f$).

Dado que $[f(x_2)-f(x_1)]\,g(x)\geq 0$ para toda $x\in[a,b]$, si $G(x_2)=0 \Rightarrow$ que $[f(x_2)-f(x)]\,g(x)=0$ para toda $x\in[a,b]$; puesto que de (2):

$$G(x_2)=0=\int_a^b [f(x_2)-f(x)]\,g(x)\,dx$$

por hipótesis $g(x)\geq 0$; por ser $f(x_2)$ la ordenada máxima $f(x_2)-f(x)\geq 0$

Por ser $g(x)$ continua por hipótesis:

$[f(x_2)-f(x)]\,g(x)=0 \Rightarrow g(x)=0$ para toda $x\in(a,b)$ ó $f(x_2)-f(c)=0$ para alguna $c\in(a,b)$

La primera de estas posibilidades $\Rightarrow G(t)=0$ para toda $t\in[a,b]$; la segunda posibilidad $\Rightarrow G(c)=G(x_2)=0$; de modo que en cualquiera de los casos se verifica el teorema. ✓

DERIVADA:-

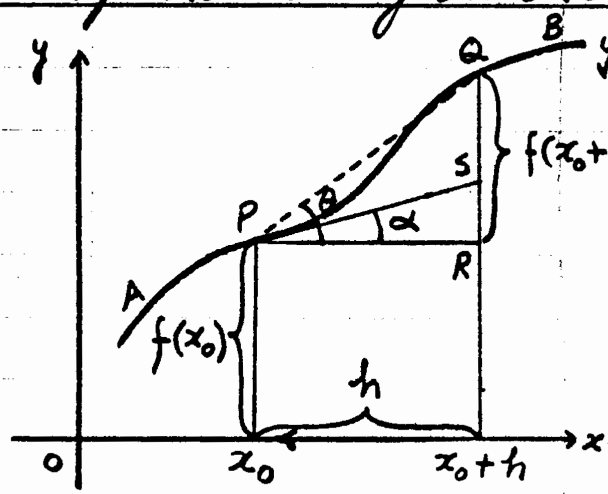
<u>Definición</u>: Sea $f: E^1 \to E^1$ cualquier función. Para cada punto $x_0 \in E^1$ se define como "derivada" de la función f en el punto x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ; si el límite existe.}$$

Si se hace $x = x_0 + h \Rightarrow$ si $x \to x_0$, $h \to 0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

<u>Interpretación geométrica de la derivada</u>:-



$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \operatorname{Tan} \theta$$

Si $h \to 0$, la secante $PQ \to$ a la Tangente PS a la curva en el punto P de abscisa x_0

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{Tan} \theta = \operatorname{Tan} \alpha$$

$\Rightarrow f'(x_0)$ es numéricamente igual a la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P, con el eje de las abscisas.

Ejemplos: Encontrar el valor de la derivada de f en el punto indicado:

1) $f(x) = x^2 \quad ; \quad x_0 = 2$

Solución:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{1} = 4$$

$$\Rightarrow \quad f'(2) = 4$$

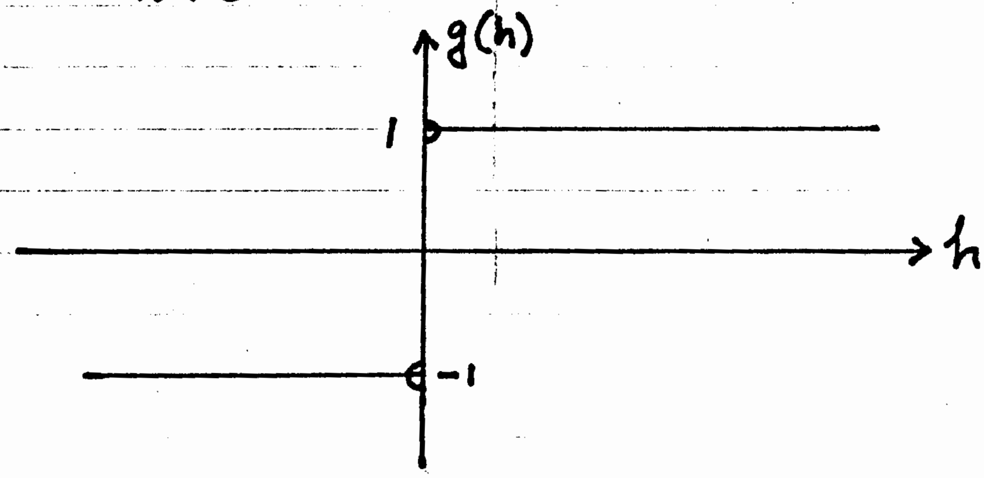
---

2) $f(x) = |x| \quad ; \quad x_0 = 0$

Solución:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$



$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe $\Rightarrow f'(0)$ no existe.

3) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad ; \quad x_0 = x$

1er método:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cos x \right] =$$

$$= \operatorname{sen} x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{1}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

2º método:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos(x + \frac{1}{2}h) \operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x + \tfrac{1}{2}h) \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x + \tfrac{1}{2}h) \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}$$

$$\text{si } h \to 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}h \to 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\frac{1}{2}h \to 0} \cos(x + \tfrac{1}{2}h) \underbrace{\lim_{\frac{1}{2}h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}}_{1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x$$

24

Teorema.- Si la función $f: E' \to E'$ es derivable en el punto $x = x_0 \Rightarrow f$ es continua en x_0.

Demostración:

Dado que, por hipotesis f es derivable en x_0

$$\Rightarrow f'(x_0) \text{ existe } \Rightarrow \text{ existe } \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = f'(x_0)\cdot 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] = 0 = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - \lim_{h\to 0} f(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad (1)$$

si $x = x_0 + h$; cuando $h \to 0 \Rightarrow x \to x_0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ ; \ (\text{de } (1))$$

pero la última ecuación corresponde a la definición de Continuidad en el punto x_0

$\Rightarrow$ Si f es derivable en el punto $x = x_0 \Rightarrow f$ es continua en el punto $x = x_0$ ✓

Obsérvese que la recíproca <u>no</u> es cierta: existen funciones continuas en un punto que no son derivables en ese punto.

La función $f(x) = |x|$ del ejemplo 2 anterior es continua en $x = 0$; pero $f'(0)$ <u>no</u> existe.

<u>Teorema de Rolle</u>.- Si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $f'(x)$ existe para toda x en (a,b)

ii) f es continua en los puntos $x=a$ y $x=b$

iii) $f(a)=f(b)$

Se afirma que existe un número $c\in(a,b)$ para el cual $f'(c)=0$

Demostración:

a) Si $f(x)=$ Constante, para toda $x\in(a,b) \Rightarrow$ $f'(x)=0$ para toda $x\in(a,b)$

b) Si $f(x)>f(a)$ para alguna $x\in(a,b)$, por las hipótesis i), ii) y el teorema anterior, $\Rightarrow f(x)$ es continua en $[a,b]$, $\Rightarrow$ existe un punto $v\in[a,b]$ para el cual $f(v)\geq f(x)$ para toda $x\in[a,b]$.

Puesto que de la hipótesis iii) $f(a)=f(b)$; no siendo $f(a)$ la ordenada máxima en $[a,b]$, $\Rightarrow v\in(a,b)$

Dado que, de la hipótesis i) $f'(v)$ existe:

$$f'(v)=\lim_{h\to 0}\frac{f(v+h)-f(v)}{h}$$

pero: $f(v+h)\leq f(v)$ para toda $v+h\in(a,b)$

$$\Rightarrow \frac{f(v+h)-f(v)}{h}=\begin{cases}\leq 0, & \text{si } h>0\\ \geq, & \text{si } h<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(v)=0$$

Weierstrass demostró que la siguiente función, siendo continua para toda x, no es derivable en ningún punto:

Sea $0<c<1$; siendo p un entero impar, tal que:

$$pc > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

Se define: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cos(\pi p^n x)$

Dado que la serie converge uniformemente $\Rightarrow f(x)$ es continua para toda x; pero se demuestra que no es derivable para ninguna x. (Principles of Mathematical Analysis; Walter Rudin, Mc. Graw Hill, 1953)(pag. 125)

R. C. Buck, en su libro "Advanced Calculus" (Mc. Graw Hill, 1965), página 191, muestra la manera de construir funciones continuas no-derivables.

Ejemplo: Empleando el teorema de Rolle, determinar el número de veces que se anula la derivada $f'(x)$ de la función:

$$f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-4)(x-7) \quad \in [0,10]$$

sin derivar $f(x)$.

Solución:

1º Obsérvese que $f(x)$ es un polinomio de 4º grado, $\Rightarrow f'(x)$ será polinomio de grado 3

2º $f(x) = 0 \in \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=4 \\ x=7 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Es aplicable el teorema de Rolle en: $\begin{cases} [1,2] \\ [2,4] \\ [4,7] \end{cases}$

De acuerdo con el teorema de Rolle, $f'(x)=0$ por lo menos en un punto de cada uno de los 3 subintervalos anteriores; pero por ser $f'(x)$ polinomio de 3^{er} grado $\Rightarrow f'(x)=0$ exactamente en 3 puntos $\in [0,10]$.

Se concluye que la función $f'(x)$ dada, se anula exactamente 3 veces; una vez en cada subintervalo: $[1,2]$, $[2,4]$, $[4,7]$

c) si $f(x) < f(a)$ para alguna $x \in (a,b)$.

Puesto que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, $\Rightarrow$ existe un punto $u \in [a,b]$ tal que $f(u) \leq f(x)$ para toda $x \in [a,b]$.

Dado que $f(a) = f(b)$; no siendo $f(a)$ el valor mínimo de $f(x)$ en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $u \in (a,b)$.

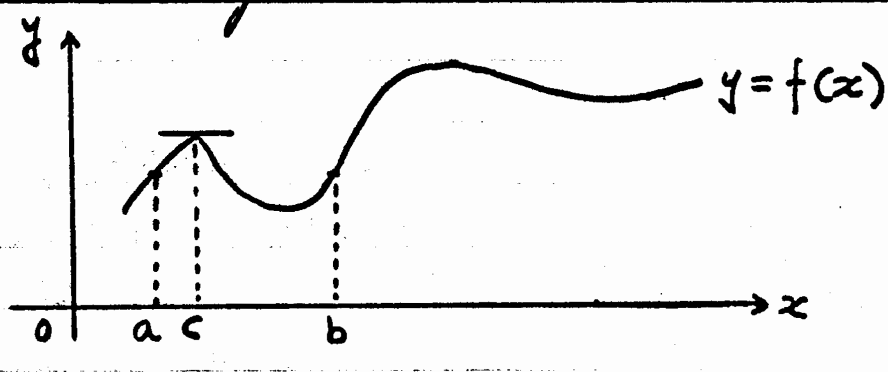
$$f'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h}.$$

pero: $f(u+h) \geq f(u)$ para toda $u+h \in (a,b)$

$$\Rightarrow \frac{f(u+h)-f(u)}{h} \begin{cases} \geq 0, & \text{si } h>0 \\ \leq 0, & \text{si } h<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(u) = 0$$ ✓

<u>Interpretación geométrica del teorema de Rolle.-</u>



La gráfica f^* de la función $y = f(x)$ tiene, por lo menos, un punto en el que la tangente a la curva $(f'(c)=0)$ es horizontal; $a<c<b$

TEYCO

Teorema del valor medio para derivadas:-

Si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $f'(x)$ existe para toda $x \in (a,b)$

ii) f es continua en los puntos $x=a$ y $x=b$

Se afirma que existe un número $c \in (a,b)$ para el cual:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Demostración:

Sea: $F(x) = [f(b)-f(a)]\cdot x - (b-a)\cdot f(x)$ ①

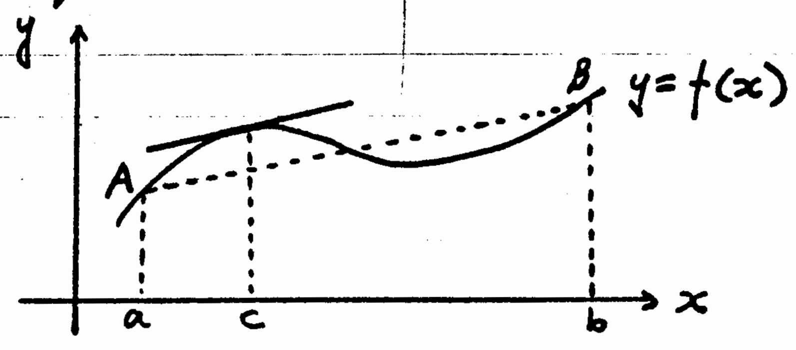
$\Rightarrow F'(x) = [f(b)-f(a)] - (b-a)\cdot f'(x)$ ②

Puesto que resulta de ① $F(a) = F(b)$, del teorema de Rolle: $c \in (a,b)$

$$F'(c) = 0 = [f(b)-f(a)] - (b-a)f'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \checkmark$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio para derivadas.



Existe, por lo menos, un punto c $(a<c<b)$ para el cual la pendiente de la Tangente es igual a la pendiente de la cuerda $\overline{AB}$.

Ejemplo.

1) Empleando el teorema del valor medio para derivadas, demostrar que $e^x > 1+x$; para toda $x \in R^\#$; $x \neq 0$.

Solución:

Sea $f(x) = e^x$

$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Haciendo $a=0$, $b=x$; $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(c) = e^c$

$\Rightarrow e^x - 1 = e^c x$; $0<c<x$

Debemos hacer ver que $e^c x > x$, puesto que entonces $e^x > 1+x$, para toda $x \neq 0$.

i) Si $x>0$; se tiene $0<c<x \Rightarrow e^c > 1 \Rightarrow e^c x > x$

$\Rightarrow e^x > 1+x$ ✓

ii) Si $x<0$; se tiene $x<c<0 \Rightarrow e^c < 1 \Rightarrow e^c x > x$

$\Rightarrow e^x > 1+x$ ✓

Obsérvese que no es necesario conocer el valor exacto de c; sólo es necesario que $0<c<x$

2) Demostrar que $\operatorname{sen} x \leq x$ para toda $x \in [0, \infty)$

Solución:

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$

Haciendo en $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$: $a=0$, $b=x$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = x f'(c) = x \cos c$; $0<c<x$

Debemos hacer ver que $x \cos c \leq x$; $x \geq 0$

i) si: $\cos c < 0 \Rightarrow x \cos c \leq x$

ii) si: $0 \leq \cos c < 1 \Rightarrow x \cos c \leq x$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x \leq x$ para toda $x \geq 0$

3) Hallar c, de modo que se verifique el teorema del valor medio para derivadas, si

$$f(x) = \ln x \quad ; \quad [1, e]$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c} \quad ①$$

del teorema: $f'(c) = \dfrac{\ln e - \ln 1}{e-1} = \dfrac{1}{e-1}$ ②

de ① y ② $\Rightarrow$ $c = e - 1$

4) Lo mismo que en 3), para:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad ; \quad [a, b]$$

Solución:

$$f'(x) = 2Ax + B$$

$$\Rightarrow f'(c) = 2Ac + B \quad ①$$

del teorema:

$$f'(c) = \frac{Ab^2 + Bb + C - Aa^2 - Ba - C}{b-a}$$

$$= \frac{A(b^2 - a^2) + B(b-a)}{b-a}$$

$$= A(a+b) + B \quad ②$$

① = ② $\Rightarrow$

$$2Ac + B = A(a+b) + B$$

$$\Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

Corolario I: Dada cualquier función $f:[a,b]\to E'$; $[a,b]\subset E'$; teniéndose que $f'(x)=0$ para toda $x\in[a,b]$, $\Rightarrow f(x)=c$ (constante).

Demostración: Sea x cualquier punto en $(a,b]$.
Por el teorema del valor medio para derivadas, existe un punto $\xi\in(a,x)$ tal que:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

pero, por hipótesis $f'(\xi)=0$

$\Rightarrow f(x)=f(a)=c$, para toda $x\in[a,b]$ ✓

Corolario II.- Sean $f:[a,b]\to E'$; $g:[a,b]\to E'$, dos funciones derivables cualesquiera, tales que: $f'(x)=g'(x)$ para toda $x\in[a,b]$, $\Rightarrow f(x)-g(x)=c$ (constante).

Demostración: Sea $h(x)=f(x)-g(x)$

$\Rightarrow h'(x)=f'(x)-g'(x)$;

pero por hipótesis: $f'(x)-g'(x)=0$

$\Rightarrow h'(x)=0$ para toda $x\in[a,b]$

Del corolario I

$h(x)=f(x)-g(x)=c$ ✓

<u>Generalización del teorema del valor medio para derivadas</u>:- Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en el intervalo abierto (a,b); siendo además continuas en los puntos $x=a$, $x=b$; si $g'(x)\neq 0$ para toda $x\in(a,b)$, se afirma que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad ; \quad a<c<b$$

Demostración:- Definamos la función $H(x)$:

$$H(x) = [f(b)-f(a)]\cdot g(x) - [g(b)-g(a)]\cdot f(x)$$

Donde $H'(x)$ existe, siendo:

$H'(x) = [f(b)-f(a)]\cdot g'(x) - [g(b)-g(a)]\cdot f'(x)$ para toda $x\in(a,b)$.

Puesto que por hipótesis $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x=a$, $x=b \Rightarrow H(x)$ es asimismo continua en $x=a$, $x=b$.

Observando que $H(a)=H(b)$; se deduce del teorema de Rolle que $H'(c)=0$; esto es:

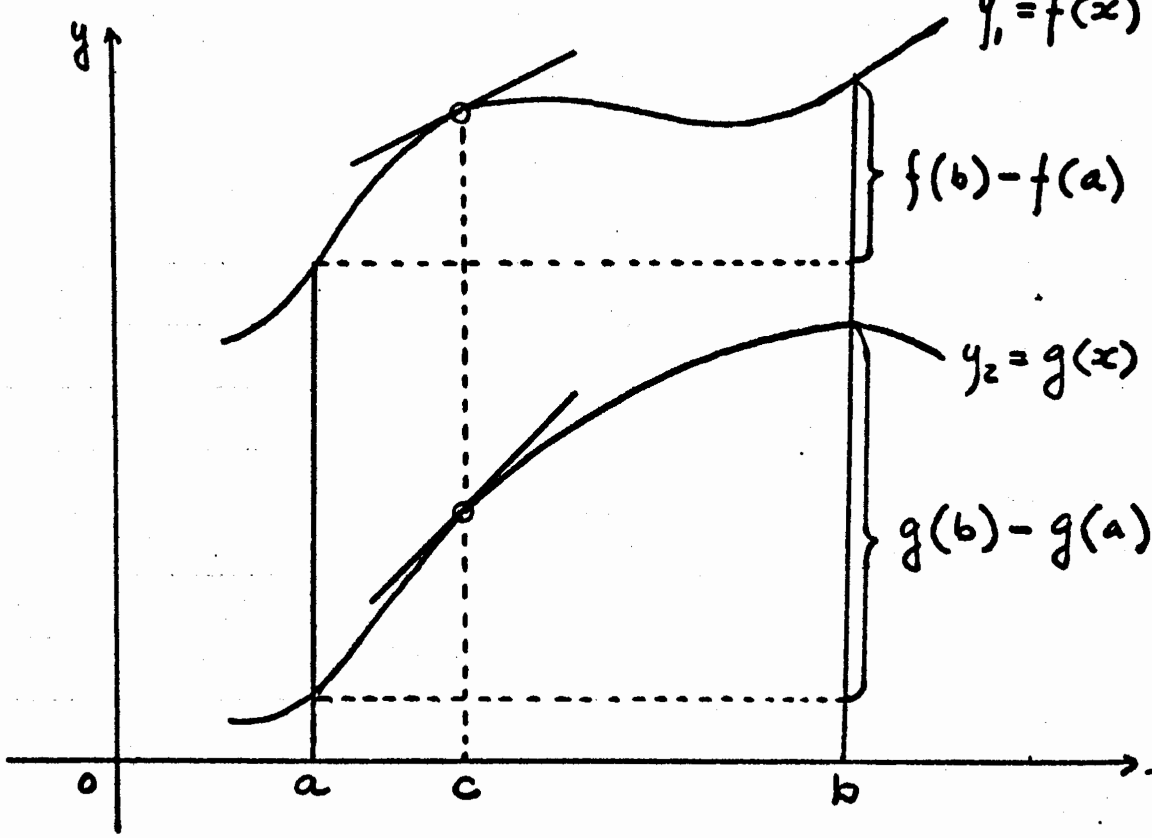
$$[f(b)-f(a)]\cdot g'(c) - [g(b)-g(a)]\cdot f'(c) = 0 \quad ①$$

Dado que, por hipótesis, $g'(x)\neq 0$, para toda $x\in(a,b)$, $\Rightarrow g(b)\neq g(a)$, pues si $g(b)=g(a)$, por el teorema de Rolle se tendría $g'(c)=0$ para $c\in(a,b)$, lo cual contradice la hipótesis.

De ahí que la ecuación ① puede escribirse del modo siguiente:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad ② \quad ; \quad a<c<b$$

Interpretación geométrica de la generalización del teorema del valor medio para derivadas.-



Obsérvese que la condición $g'(x) \neq 0$ del teorema, exige que la función $g(x)$ sea monótona $\in (a,b)$:

$$\left.\begin{array}{ll} & g(x_1) < g(x_2),\ \text{si}\ x_1 < x_2 \\ \text{ó}: & g(x_1) > g(x_2),\ \text{si}\ x_1 > x_2 \end{array}\right\} x_1, x_2 \in (a,b)$$

ó sea, $g(x)$ debe ser una función estrictamente creciente ó decreciente en (a,b).

No es necesario que la función $f(x)$ cumpla este requisito.

36

Si $g(x) = x$, $\Rightarrow g'(x) = 1$; $g(b) - g(a) = b - a$; que substituidos en ②, nos dan como caso particular, el teorema del valor medio para derivadas que dedujimos anteriormente:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La fórmula ② permite demostrar la regla de L'Hôpital. En efecto:

Si $b = x$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \quad ; \quad a < c < x$$

i) Si $f(a) = g(a) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

observando que si $x \to a \Rightarrow c \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

puesto que c es un punto variable:

$$\lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \checkmark$$

---

ii) Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \infty$

Sea $a < x_0 < x < x_1 < b$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \quad ; \quad x < c < x_1$$

$$\therefore \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

Supongamos que $\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right)\left(\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}\right) + L\left(\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}\right) \quad (1)$$

puede hacerse $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon$, con tal x_1 esté lo suficientemente cerca de x_0.

Si se considera x_1 fijo,

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0+} \left(\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}\right) = 1 \; ; \text{ ya que } \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = \infty$$

de (1) $\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ✓

En forma semejante se demuestran los casos en que: $\begin{cases} x\to x_0- \\ x\to x_0 \\ x\to\infty \\ x\to -\infty \end{cases}$

Derivadas de órdenes superiores:

Puesto que la derivada f' de una función f es otra función; si aplicamos a la función f' la definición de derivada, obtenemos una función f''; que es la derivada de la derivada de f.

Esto es, si $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$.

Continuando el proceso, puede obtenerse (si existe) la derivada de orden n; la cual podemos representar del siguiente modo:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad ; \quad n \in N.$$

Ejemplo: 1) Sea $y = x^m$. Hallar $y^{(n)}$

Solución:

$$y = x^m$$
$$y' = m x^{m-1}$$
$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

Si $m \in N$, resultan nulas todas las derivadas de orden superior á m.

Si $n = m \Rightarrow y^{(m)} = m(m-1)\ldots 2\cdot 1 = m!$

---

2) Hallar $y^{(n)}$, si $y = xe^x$

Solución: $y = xe^x$

$$y' = xe^x + e^x$$
$$y'' = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$$
$$y^{(n)} = xe^x + ne^x$$

Regla de Leibnitz para el cálculo de la derivada de orden n de una función que es el producto de dos funciones:-

Sean las funciones: $u=u(x)$; $v=v(x)$; siendo: $y=u\cdot v$. Calculemos las 3 primeras derivadas y'; y''; y''':

$$y' = u'v + uv' \quad ①$$

$$y'' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'') = u''v + 2u'v' + uv'' \quad ②$$

$$y''' = (u'''v + u''v') + (2u''v' + 2u'v'') + (u'v'' + uv''') =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \quad ③$$

El último resultado, junto con los otros dos, sugiere una analogía con el desarrollo del binomio $(u+v)^n$: para $n=2$ y $n=3$:

$$(u+v)^2 = u^2v^0 + 2uv + u^0v^2 \quad ④$$

$$(u+v)^3 = u^3v^0 + 3u^2v + 3uv^2 + u^0v^3 \quad ⑤$$

si se consideran los exponentes como orden derivación, y se conviene que $\frac{d^0y}{dx^0} = y^0 = y$, se puede establecer la analogía entre ② y ④; ③ y ⑤; obteniéndose al generalizar el resultado anterior, la fórmula de Leibnitz:

⑥ $$y^{(n)} = (u+v)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} +$$

$$+ \dots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

Que es análoga a la fórmula para el desarrollo del binomio de Newton; donde se convierten los exponentes en números naturales, que corresponden al orden de derivación. Asimismo, se conviene que:

$u^{(0)} = u$; $v^{(0)} = v$.

Demostración de la fórmula ⑥:

Si (n) es un número natural, la demostración puede efectuarse mediante inducción matemática:

1º) para $n=1$:

$$y' = (u+v)^{(1)} = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)} = u'v + uv'$$

lo cual concuerda con la ecuación ①

2º) Supongamos que la fórmula es válida para $n=k$.

$$(u+v)^{(k)} = u^{(k)}v^{(0)} + ku^{(k-1)}v^{(1)} + \frac{k(k-1)}{2!}u^{(k-2)}v^{(2)} + \\ + \dots + ku^{(1)}v^{(k-1)} + u^{(0)}v^{k} \quad ⑦$$

Para obtener la fórmula para $k+1$, podemos derivar ambos miembros de ⑦, y si la fórmula ⑥ es válida para toda $n \in \mathbb{N}$, el resultado que se obtenga de derivar el 2º miembro de ⑦ debe coincidir con lo que resulta de hacer $n=k+1$ en ⑥:

Derivando ambos miembros de ⑦:

$$(u+v)^{(k+1)} = \left[u^{(k+1)}v^{(0)} + u^{(k)}v^{(1)}\right] + \left[ku^{(k)}v^{(1)} + ku^{(k-1)}v^{(2)}\right] + \\ + \left[\frac{k(k-1)}{2!}u^{(k-1)}v^{(2)} + \frac{k(k-1)}{2!}u^{(k-2)}v^{(3)}\right] + \dots\dots\dots + \\ + \left[ku^{(2)}v^{(k-1)} + ku^{(1)}v^{(k)}\right] + \left[u^{(1)}v^{(k)} + u^{(0)}v^{(k+1)}\right]$$

Agrupando los términos: 2º con 3º; 4º con 5º; .....:

$$(u+v)^{(k+1)} = u^{(k+1)}v^{(0)} + (k+1)u^{(k)}v^{(1)} + \frac{(k+1)k}{2!}u^{(k-1)}v^{(2)} + \\ + \frac{(k+1)k(k-1)}{3!}u^{(k-2)}v^{(3)} + \dots + (k+1)u^{(1)}v^{(k)} + u^{(0)}v^{(k+1)}$$ ✓

con lo cual se completa la demostración.

Ejemplos: - Calcular $y^{(n)}$:

1) $y = x e^x$.

Solución:

$u = x$; $V = e^x$

Observando que:

$u^{(0)} = x$; $u^{(1)} = 1$; $u^{(n)} = 0$, para toda $n \geq 2$

$V^{(n)} = e^x$ para toda $n \in N$.

$$\Rightarrow y^{(n)} = (x + e^x)^n = \underline{n e^x + x e^x} = (n+x)e^x$$

2) $y = x^2 \cos 2x$

Solución:

$u = x^2$; $V = \cos 2x$

$u^{(0)} = x^2$; $u^{(1)} = 2x$; $u^{(2)} = 2$; $u^{(3)} = 0$

$$\Rightarrow y^{(n)} = (x^2 + \cos 2x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} V^{(n-k)} =$$

$$= x^2 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + n x 2^n \cos\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) -$$

$$- n(n-1) 2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

3) $y = \frac{x^2}{e^{2x}}$

Solución: $u = x^2$; $V = e^{-2x}$

$u^{(n)} = 0$ para toda $n \geq 3$

$V^{(0)} = e^{-2x}$; $V^{(1)} = -2e^{-2x}$, $V^{(2)} = (-2)^2 e^{-2x}$ . . . .

$V^{(n)} = (-2)^n e^{-2x} = (-1)^n 2^n e^{-2x}$

$$y^{(n)} = e^{-2x}\left[(-1)^n 2^n x^2 + n(-1)^{n-1} 2^{n-1} 2x + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} 2^{n-2} 2\right]$$

$$= 2^{n-1} e^{-2x}\left[(-1)^n 2x^2 + (-1)^{n-1} 2nx + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2}\right]$$

TEYCO

Aplicación de la regla de Leibnitz para el Cálculo de $y^{(n)}(0)$:

4) Si: $y = \tan x$; Calcular : $y^{(n)}(0)$

Solución:

Puesto que las funciones sen y tan son funciones impares, así resulta que sus derivadas de orden par son funciones impares. Observando que toda función impar tiene valor nulo en el origen, se tiene:

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \operatorname{sen} x = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \cos x = (-1)^n, \text{ si } x=0$$

Sea: $y_0^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} \tan x$, si $x = 0$

$$\Rightarrow \quad y_0 \cos x = \operatorname{sen} x \quad ; (x=0)$$

Aplicando la regla de Leibnitz á: $y_0 \cos x$.

$$\Rightarrow \quad (-1)^n = \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \operatorname{sen} x = \sum_{s=0}^{n} y_0^{(2s+1)} (-1)^{n-s} \binom{2n+1}{2s+1}$$

pero: $y^{(2s)} = 0$

$$\Rightarrow \quad 1 = \sum_{s=0}^{n} y_0^{(2s+1)} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1}$$

Haciendo sucesivamente $n = 0, 1, 2, \ldots$ obtenemos ecuaciones que permiten calcular $y_0^{(1)}, y_0^{(3)}, y_0^{(5)} \ldots\ldots$; por ejemplo: si $n = 1 \Rightarrow$

$$1 = y_0^{(1)} \binom{3}{1} - y_0^{(3)} \binom{3}{3} = 3y_0^{(1)} - y_0^{(3)}$$

$\Rightarrow y_0^{(3)} = 3y_0^{(1)} - 1$; pero $y^{(1)} = \sec^2 x \Rightarrow y_0^{(1)} = 1$

$\therefore \quad y_0^{(3)} = 3 - 1 = 2.$

Asimismo puede comprobarse que:

$y_0^{(5)} = 16$; $y_0^{(7)} = 272$; etc.

5) Si: $y = \operatorname{sen}^{-1} x$; calcular $y^{(n)}(0) = y_0^{(n)}$

Solución:

si: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{sen}^{-1} x < \frac{\pi}{2}$:

$$y^{(1)} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y_0^{(1)} = 1$$

puesto que: $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} y^{(1)} = 1$; derivando resulta:

$$-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} y^{(1)} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} y^{(2)} = 0$$

$$\therefore \ (1-x^2)\, y^{(2)} = x\, y^{(1)} \quad ①$$

$$\Rightarrow y_0^{(2)} = 0 \quad ②$$

Aplicando la regla de Leibnitz a ① para obtener la derivada de orden $n-1$

$$(uv)^{(n-1)} = u v^{(n-1)} + (n-1) u^{(1)} v^{(n-2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} u^{(2)} v^{(n-3)} + \dots + u^{(n-1)} v$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\, y^{(n+1)} + (n-1)(-2x)\, y^{(n)} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} 2\, y^{(n-1)} =$$

$$= x\, y^{(n)} + (n-1)\, y^{(n-1)}$$

para $x=0$:

$$y_0^{(n+1)} - (n-1)(n-2)\, y_0^{(n-1)} = (n-1)\, y_0^{(n-1)}$$

resultando la fórmula de recurrencia:

$$y_0^{(n+1)} = (n-1)^2\, y_0^{(n-1)}$$

para $n=1$, $y_0^{(2)} = 0$ (de ②) $\Rightarrow$ todas las derivadas de orden par se anulan para $x=0$.

para $n=0$, $y_0^{(1)} = 1$; $n=2$, $y_0^{(3)} = 1^2$;
$n=4$, $y_0^{(5)} = 3^2 \cdot 1^2$; $n=6$, $y_0^{(7)} = 5^2 3^2 1^2 \dots$

en general, para $n =$ par:

$$\underline{y_0^{(n+1)} = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (n-1)^2}$$

44

<u>Integral indefinida</u>.- Sea $f:[a,b]\to E'$ una función integrable en cualquier subintervalo cerrado de $[a,b]$.

Si el límite superior de la integral definida es variable; la integral que resulta se denomina "integral indefinida" de f; siendo la integral indefinida una función de dicho límite variable:

$$\phi(x)=\int_a^x f(u)\,du=\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f$$

<u>Primer teorema fundamental del cálculo</u>.-

Si $f:[a,b]\to E'$ es una función continua en $[a,b]$; siendo $\phi(x)=\int_a^x f(u)\,du$, se afirma:

$$\frac{d}{dx}\phi(x)=\phi'(x)=f(x)$$

Demostración:

$$\phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

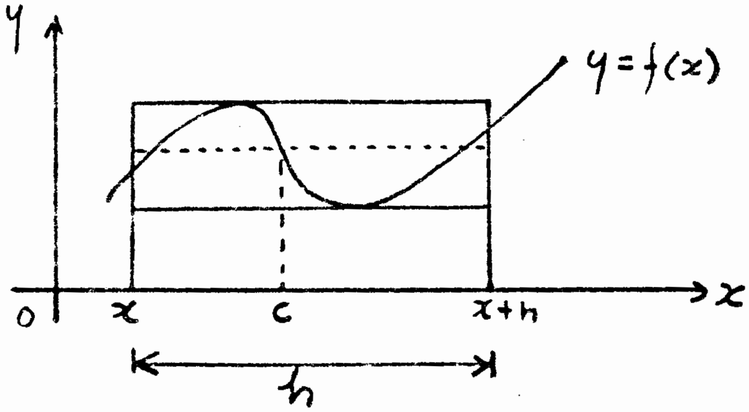
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(u)\,du-\int_a^x f(u)\,du}{h} \quad (1)$$

pero:

$$\int_a^{x+h}f-\int_a^x f=-\int_{x+h}^a f-\int_a^x f=-\int_{x+h}^x f=\int_x^{x+h}f$$

Del teorema del valor medio para integrales:

$$\int_x^{x+h} f = (x+h-x)f(c) \quad ② ; \quad x < c < x+h$$



② en ①

$$\phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c)$$

observamos de la figura: si $h \to 0 \Rightarrow c \to x$

$$\phi'(x) = \lim_{c \to x} f(c) \quad ③$$

Dado que, por hipótesis, f es continua $\Rightarrow$

$$\lim_{c \to x} f(c) = f(x) \quad ④$$

de ③ y ④:

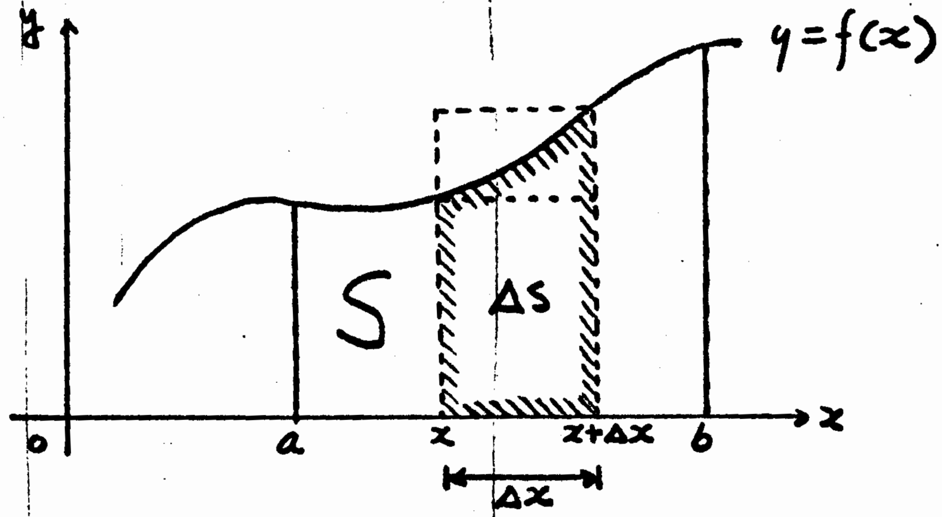
$$\phi'(x) = f(x)$$

La derivada de la integral indefinida es igual al integrando de la misma integral:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x)\,dx = f(x)$$

Interpretación geométrica del primer teorema fundamental del cálculo:

Sea $h = \Delta x$



S = área bajo la curva $y=f(x)$ entre las abscisas $x=a$, $x=x$

ΔS = área bajo la curva $y=f(x)$ entre las abscisas $x=x$, $x=x+\Delta x$

$$\Rightarrow \quad S = \int_a^x f(x)\,dx \quad ①$$

De la figura se observa que:

$$f(x)\Delta x \leq \Delta S \leq f(x+\Delta x)\Delta x$$

dividiendo entre Δx; tomando luego el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq \frac{dS}{dx} \leq f(x) \quad ②$$

de ① y ②

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x) \quad ✓$$

<u>Antiderivadas</u> (ó primitivas).- Dadas dos funciones $F:[a,b] \to E'$; $f:[a,b] \to E'$; se dice que F es la "antiderivada" de f, si se verifica lo siguiente:

$$F'(x) = f(x) \text{ para toda } x \in [a,b]$$

Del Corolario II expuesto anteriormente, se deduce lo siguiente:

Si $F:[a,b] \to E'$ y $G:[a,b] \to E'$ son ambas antiderivadas de $f:[a,b] \to E'$ entonces:

$$F(x) - G(x) = c \quad ; \; c = \text{constante, para toda } x \in [a,b]$$

$\Rightarrow$ si $F(x)$ es antiderivada de $f(x)$ entonces $F(x)+c$ es tambien antiderivada de $f(x)$

En efecto:

Sea $F(x) - G(x) = c$

$$\Rightarrow \quad F(x) + c = G(x)$$

$$F'(x) + 0 = G'(x) = f(x) \quad \text{(por hipótesis)}$$

$\Rightarrow$ $F(x)+c$ es <u>antiderivada</u> de $f(x)$ ✓

$\Rightarrow$ Todas las antiderivadas de $f(x)$ están representadas por:

$$F(x) + c \qquad (c = \text{constante})$$

para toda $x \in [a,b]$

Segundo teorema fundamental del cálculo:

Si $f:[a,b]\to E'$ es continua en $[a,b]$; siendo $F:[a,b]\to E'$ cualquier antiderivada de f, se afirma que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

Demostración:

Dado que $F(x)$ es antiderivada de $f(x)$, por hipótesis, se tiene que:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)+C, \text{ para toda } x\in[a,b]$$

haciendo el límite superior de la integral $x=a$:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 = F(a)+C$$

$$\Rightarrow \quad -C = F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^x f(u)\,du = F(x)-F(a)$$

Si se hace ahora el límite superior de la integral $x=b$:

$$\int_a^b f(u)\,du = F(b)-F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \checkmark$$

Derivadas laterales y derivadas infinitas:-

Puesto que, por definición, la derivada de una función en un punto, es un límite; para que la derivada exista, debe tenerse:

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Aun cuando estos límites laterales no sean iguales, podemos pensar en la existencia de la derivada, definida como un límite lateral. De manera análoga se conciben derivadas en los puntos extremos de un intervalo.

Definición: Sea $f:[a,b] \to E'$, continua en el punto $x_0 \in [a,b]$. Se dice que f tiene derivada por la derecha en x_0, si:

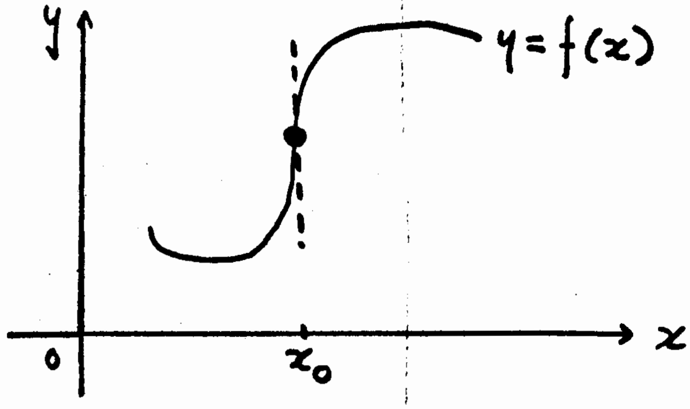
$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}$ existe y es finito, ó si es $\pm\infty$

De modo semejante se define la derivada por la izquierda en x_0: $f'_-(x_0)$

Si x_0 es un punto interior del intervalo, se dice que $f'(x_0) = +\infty$, si las dos derivadas laterales (por la izquierda y por la derecha) son ambas iguales á $+\infty$.

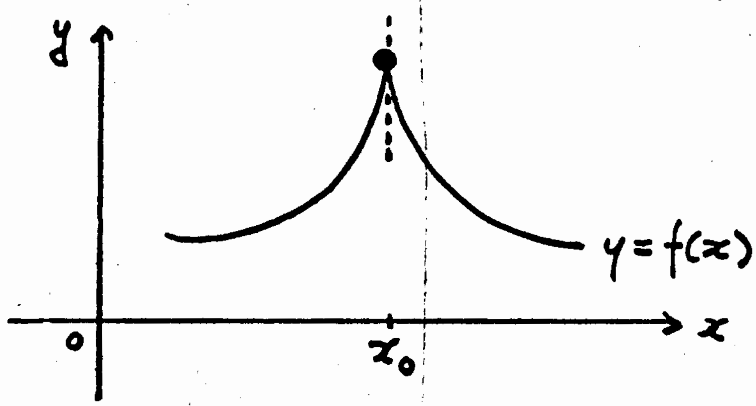
Ejemplos:

a)



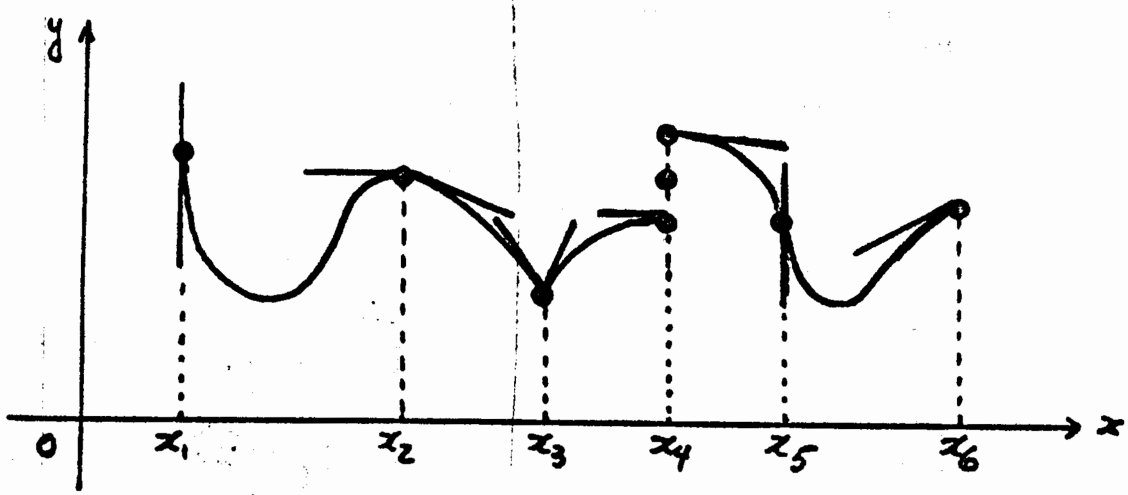
$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty \Rightarrow f'(x_0) = +\infty$$

b)



$$f'_-(x_0) = +\infty \; ; \; f'_+(x_0) = -\infty \Rightarrow f'(x_0) \text{ \underline{no} existe}$$

c)



De la figura c) se observan los siguientes resultados:

$$f'_+(x_1) = -\infty$$

$$f'_-(x_2) = 0 \quad ; \quad f'_+(x_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x_2) \text{ no existe.}$$

$$f'_-(x_3) = -\frac{3}{2} \quad ; \quad f'_+(x_3) = 2 \Rightarrow f'(x_3) \text{ no existe.}$$

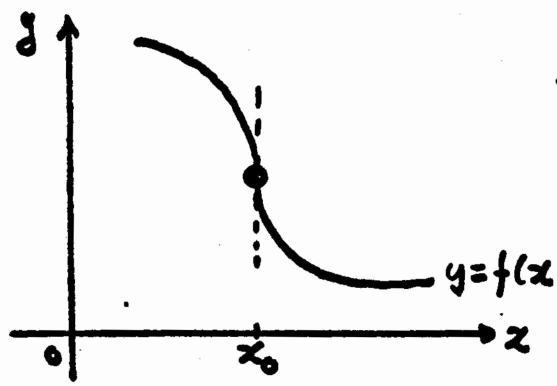
$f'_-(x_4) = f'_+(x_4)$; pero $\lim_{x \to x_4} f(x)$ no existe ; $f'(x_4)$ no existe.

$$f'_-(x_5) = f'_+(x_5) = -\infty \Rightarrow f'(x_5) = -\infty$$

$$f'_-(x_6) = \frac{1}{2}$$

---

d)



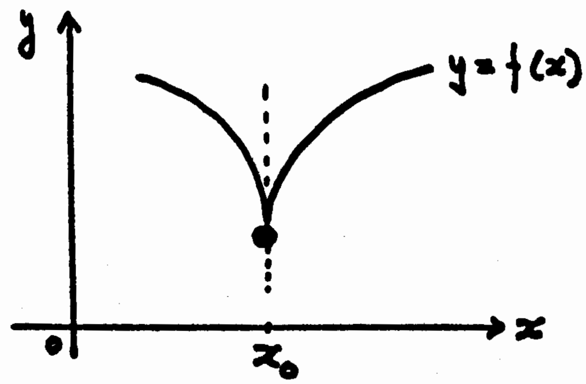
$f'_-(x_0) = -\infty$

$f'_+(x_0) = -\infty$

$\Rightarrow f'(x_0) = -\infty$

---

e)



$f'_-(x_0) = -\infty$

$f'_+(x_0) = +\infty$

$\Rightarrow f'(x_0)$ no existe.

f) Trazando la gráfica de la siguiente función:

$$y = 2x - 1 + |x| + |x-1| \quad (1)$$

Determinar en qué puntos no existe $y' = f'(x)$

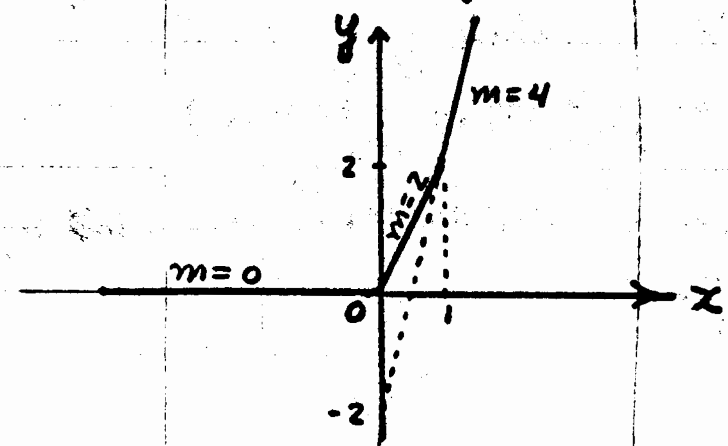
Solución: Por estar la x á la primera potencia, la ecuación (1) representa una línea quebrada.

i) si $x<0$; $y = 2x - 1 - x - x + 1 = 0$

de (1): si $x=0$; $y=0$

ii) si $x=1$; $y = 2x - 1 + 1 = 2x$

iii) si $x>1$; $y = 2x - 1 + x + x - 1 = 4x - 2$



$\left.\begin{matrix} f'(0) \\ f'(1) \end{matrix}\right\}$ no existen

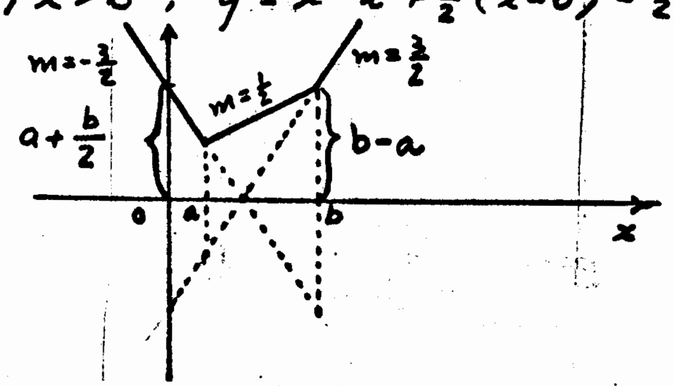
g) Lo mismo que el problema f) para:

$$y = |x-a| + \frac{1}{2}|x-b| \quad ; \quad a<b$$

i) $x<a$; $y = -x + a + \frac{1}{2}(-x+b) = -\frac{3}{2}x + a + \frac{b}{2}$; $x=0 \Rightarrow y = a + \frac{b}{2}$

ii) $x=a$; $y = \frac{1}{2}(b-a)$; $x=b \Rightarrow y = b-a$

iii) $x>b$; $y = x - a + \frac{1}{2}(x-b) = \frac{3}{2}x - (a + \frac{1}{2}b)$



$\left.\begin{matrix} f'(a) \\ f'(b) \end{matrix}\right\}$ no existen

Derivada de la composición de funciones.- Derivación en cadena:

Sean $f: E' \to E'$; $g: E' \to E'$ dos funciones derivables, definidas del siguiente modo:

$$u = f(x) \quad ; \quad y = g(u)$$

Haciendo la composición se obtiene:

$$y = g(u) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

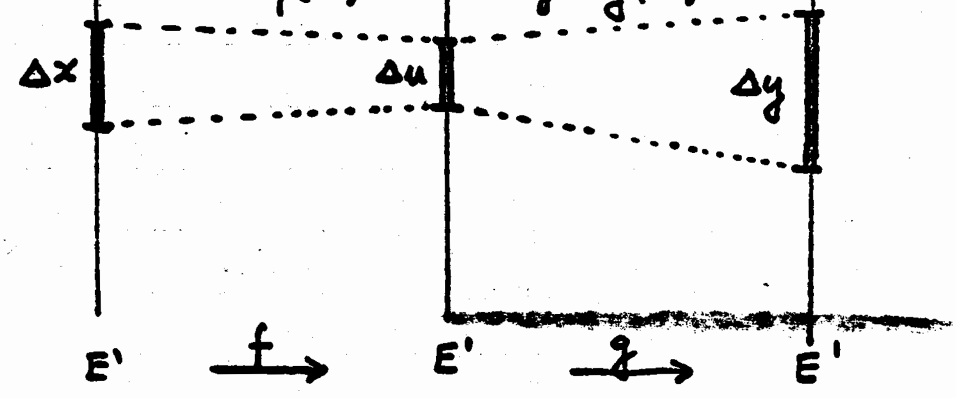
Teorema:- Dadas las funciones f, g que se definen antes, se afirma que:

$$\frac{d}{dx}\Big((g \circ f)(x)\Big) = \frac{d}{du}\, g(u) \cdot \frac{d}{dx}\, f(x)$$

ó lo que es lo mismo (en notación de Leibnitz):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Demostración: Consideremos el incremento Δx de x, con los correspondientes incrementos Δu, Δy de u y de y respectivamente:



Se consideran dos casos:

a) si $\Delta u \neq 0$; $\Delta x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

puesto que si $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \checkmark$$

b) si $\Delta u = 0$, cuando $\Delta x \neq 0$

Definamos la función h de la variable Δu:

$$h(\Delta u) = \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} - \dfrac{dy}{du} \; ; \text{ si } \Delta u \neq 0 \\ 0 \; , \text{ si } \Delta u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Obsérvese que ahora resulta válida la ecuación: $\Delta y = \frac{dy}{du} \Delta u + (h(\Delta u))\Delta u$

independientemente de que Δu sea, ó no, cero.

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} (h(\Delta u)) \right]$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} h(\Delta u)$$

pero de (1): $\lim_{\Delta x \to 0} h(\Delta u) = \begin{cases} \dfrac{dy}{du} - \dfrac{dy}{du} = 0 ; \text{ si } \Delta u \neq 0 \\ 0, \text{ si } \Delta u = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \checkmark$$

Ejemplo: 1) Calcular:

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^3 6x + \tan(x^5+3x)\right]^9 = f'(x)$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^3 6x + \tan(x^5+3x)\right]^9 =$$

$$= 9\left[\operatorname{sen}^3 6x + \tan(x^5+3x)\right]^8 \left(\frac{d}{dx}\left\{\operatorname{sen}^3 6x + \tan(x^5+3x)\right\}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\operatorname{sen}^3 6x + \tan(x^5+3x)\right\} = (3\operatorname{sen}^2 6x)6\cos 6x + (5x^4+3)\sec^2(x^5+3x)$$

$$= 18\operatorname{sen}^2 6x \cos 6x + (5x^4+3)\sec^2(x^5+3x)$$

$$f'(x) = 9\left[\operatorname{sen}^3 6x + \tan(x^5+3x)\right]^8 \left\{18\operatorname{sen}^2 6x \cos 6x + (5x^4+3)\sec^2(x^5+3x)\right\}$$

---

2) Si $f(x) = (x+e^{2x})^8$; calcular $f'(x)$

Solución:

$$f'(x) = 8(x+e^{2x})^7(1+2e^{2x})$$

---

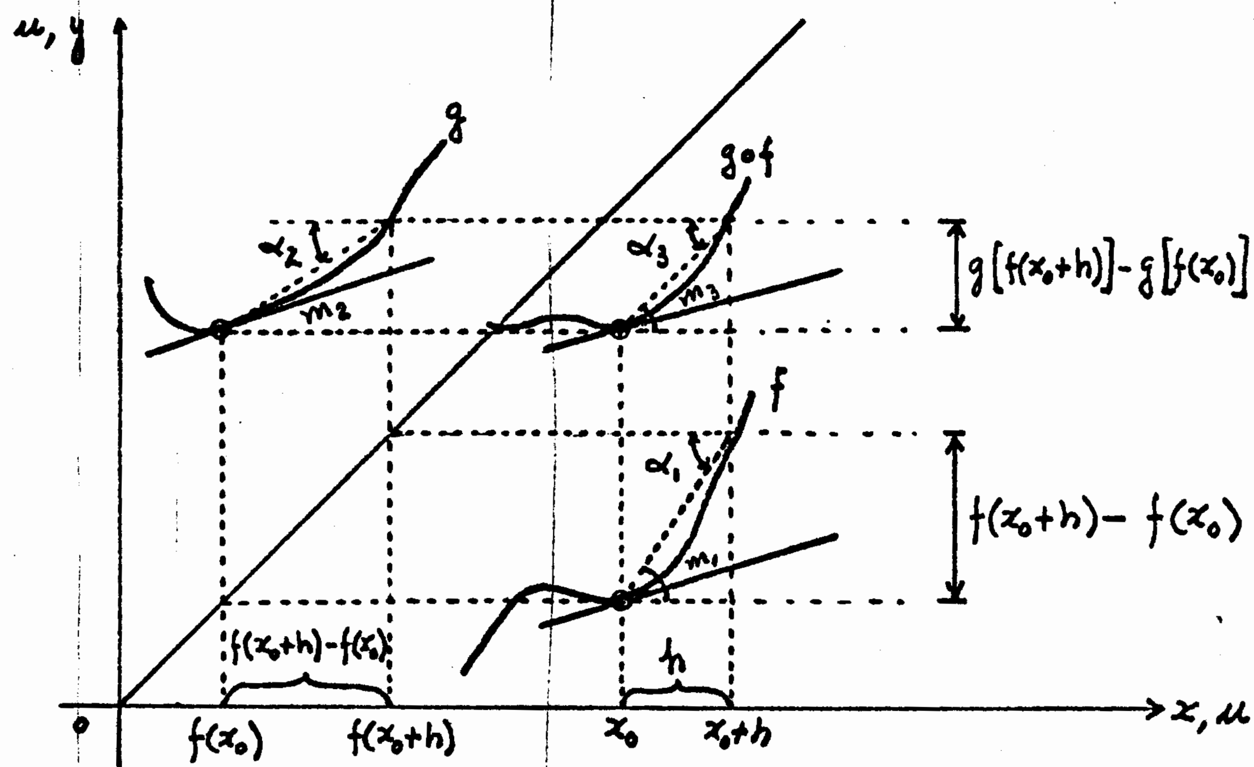
3) $f(x) = 2\sqrt{x}\operatorname{sen}^2\sqrt{x}$; calcular $f'(x)$

Solución:

$$f'(x) = 2\sqrt{x}\left(2\operatorname{sen}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}^2\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \operatorname{sen} 2\sqrt{x} + \frac{\operatorname{sen}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Construcción gráfica de la derivada de la composición de dos funciones.



$$\tan\alpha_1 = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad ; \quad m_1 = f'(x_0) = \left(\frac{du}{dx}\right)_0$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{g[f(x_0+h)]-g[f(x_0)]}{f(x_0+h)-f(x_0)} \quad ; \quad m_2 = g'[f(x_0)] = \left(\frac{dy}{du}\right)_0$$

$$\tan\alpha_3 = \frac{g[f(x_0+h)]-g[f(x_0)]}{h} \quad ; \quad m_3 = \frac{d}{dx}[(g\circ f)(x_0)] = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

$$\tan\alpha_3 = \tan\alpha_1 \tan\alpha_2 \quad ; \quad m_3 = m_1 m_2$$

en general:

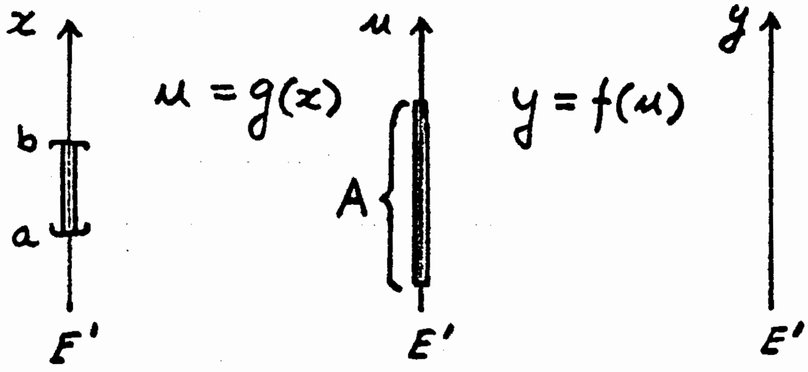
$$m_3 = \frac{d}{du}g(u)\cdot\frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

57

Cambio de variable de integración:-

Sean: $g:[a,b]\to A$; donde $A\subset E'$; $f:A\to E'$ $\Rightarrow$ la composición $f\circ g:[a,b]\to E'$ está bien definida:



Teorema:- Dadas las funciones g, f que se acaban de definir ; siendo f continua en A; teniéndose que $g'(x)$ existe y es continua para toda $x\in[a,b]$, entonces:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b (f\circ g)(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Demostración:

Observación: Se puede demostrar que la imagen de un intervalo es a su vez un intervalo $\Rightarrow (g(a), g(b))\in A$ (todos los puntos entre $g(a)$ y $g(b)$ pertenecen al conjunto A).

Sea:
$$\phi(u) = \int_{g(a)}^{u} f(t)\,dt \qquad (1)$$

$$\psi(x) = \int_a^x (f\circ g)(t)\cdot g'(t)\,dt \qquad (2)$$

Hagamos $u = g(x)$ en ①:

$$\Rightarrow \quad \phi[g(x)] = \int_{g(a)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

Derivando en cadena, y aplicando el primer teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx}\phi[g(x)] = \frac{d}{du}\phi(u)\cdot\frac{d}{dx}g(x) \text{ ; pero de ①:}$$

$$\frac{d}{dx}(\phi\circ g)(x) = f(u)\cdot g'(x) =$$

$$= f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$= (f\circ g)(x)\cdot g'(x) \quad ③$$

Observando que $\frac{d}{dx}\Psi(x)$ en ② nos da precisamente ③; y sabiendo que dos funciones, con la misma derivada, difieren en una constante:

$$(\phi\circ g)(x) - \Psi(x) = C$$

para $x = a$; de ① y ②:

$$(\phi\circ g)(a) - \Psi(a) = C = \int_{g(a)}^{g(a)} f(t)\,dt - \int_a^a (f\circ g)(t)\,g'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad C = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\phi\cdot g)(x) = \Psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{g(a)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^x (f\circ g)(t)\,g'(t)\,dt$$

si $x = b$

$$\Rightarrow \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b (f\circ g)(x)\cdot g'(x)\,dx \quad ✓$$

Ejemplos: 1) Calcular $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

Solución:

haciendo: $u = x - \frac{1}{2} \Rightarrow du = dx$

$\Rightarrow$ si $x = -1$; $u = -\frac{3}{2}$

si $x = 1$; $u = \frac{1}{2}$

$$\therefore \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{25/4 - (x-\frac{1}{2})^2}} =$$

$$= \int_{-3/2}^{1/2} \frac{du}{\sqrt{25/4 - u_2}} = \operatorname{Sen}^{-1} \frac{u}{5/2} \Big]_{-3/2}^{1/2} =$$

$$= \operatorname{Sen}^{-1} 0.2 + \operatorname{sen}^{-1} 0.6 \doteq 0.85 \text{ rad.} \doteq 48°42'$$

2) Calcular: $I = \int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

haciendo $\ln x = y \Rightarrow \frac{dx}{x} = dy$

$\Rightarrow$ si $x = e$; $y = 1$

si $x = e^2$; $y = 2$

$$\therefore \int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \int_{1}^{2} \frac{dy}{y^3} = \frac{y^{-2}}{-2} \Big]_{1}^{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{8}$$

Observación importante: Al considerar cualquier cambio de variable, debe tenerse cuidado de que se cumplan todas las hipótesis del teorema, a fin de evitar resultados erróneos, como sucede en los siguientes ejemplos:

1) $I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u \Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$

si se hace $u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow$ si $u=-1 \Rightarrow x=-1$; $u=1 \Rightarrow x=1$

$du = d(x^{-1}) = -x^{2} dx$

$\Rightarrow I_1 = -\int_{-1}^{1} \frac{\frac{dx}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{\pi}{2} = -I_1 \quad (?)$

La razón de este resultado equivocado es que el cambio de variable $u = g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pero para $x = 0 \in [-1,1]$, $g'(x)$ no existe, lo cual contradice la hipótesis del teorema.

---

2) $I_2 = \int_{-1}^{1} du = 2$ ①

si se hace: $u = x^{3/2} \Rightarrow x = u^{2/3} \therefore u=-1 \Rightarrow x=1$; $u=1 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow I_2 = \int_{1}^{1} \frac{3}{2} x^{1/2} dx = 0 \neq 2$; (ya que: $\int_a^b = 0$, si $a=b$)

La anomalía se debe a que $(f \circ g)x$ no está definida $\in [-1,1]$ pues $f(u) = 1$ de ① para toda $x \in [-1,1]$; $g(x) = x^{3/2} \Rightarrow (f \circ g)x = f[g(x)] = f(x^{3/2}) \in R^{\#}$ pero $(f \circ g)x$ para $x=-1 \Rightarrow (f \circ g)(-1) = f[(-1)^{3/2}]$ no existe.

El problema se subsana como sigue: $[-1,1] = [-1,0) \cup [0,1]$; en $[-1,0)$ sea $u = -x^{3/2}$; para $[0,1]$ puede hacerse: $u = x^{3/2}$:

$\therefore \quad I_2 = \int_{-1}^{0} -\frac{3}{2} x^{1/2} dx + \int_{0}^{1} \frac{3}{2} x^{1/2} dx$; de propiedades 2 y 9 ($c=-1$)

$I_2 = \int_0^1 \frac{3}{2} x^{1/2} dx + \int_0^1 \frac{3}{2} x^{1/2} dx = 3\int_0^1 x^{1/2} dx = 2x^{3/2}\Big]_0^1 = 2$ ✓

61

Diferenciales.- Sea la función $f:(a,b)\to E'$; donde $(a,b)\subset E'$; siendo f derivable en todos los puntos del intervalo (a,b)

Dado que:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)\doteq\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

siendo el error ε:

$$\varepsilon=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$$

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x)=(f'(x)+\varepsilon)\cdot h \qquad (1)$$

Se define como "diferencial" de $f = df$:

$$df = h\,f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right]=f'(x)-f'(x)$$

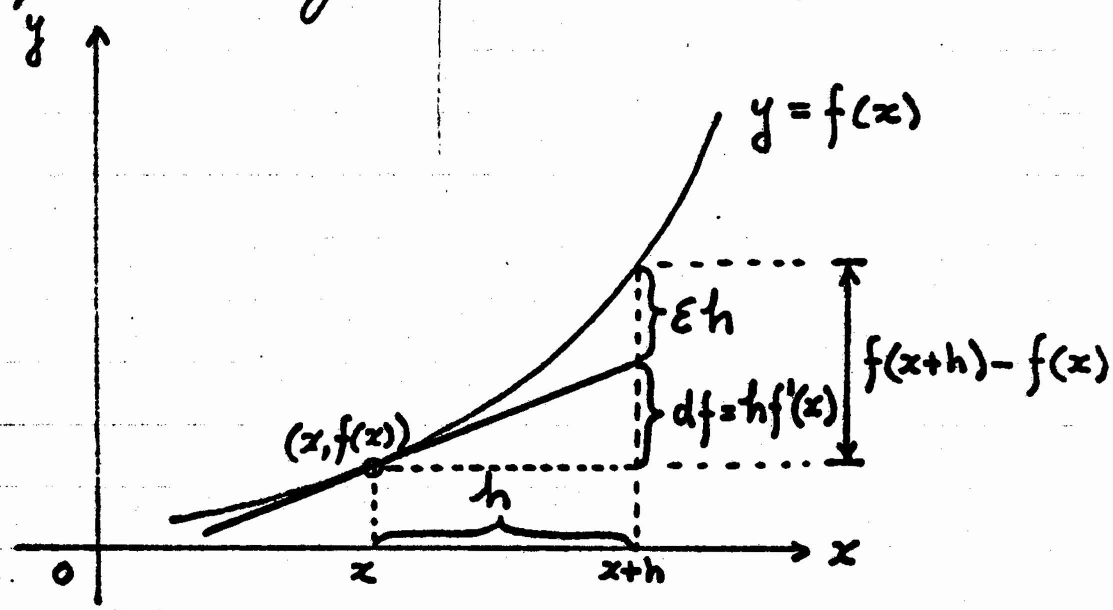
$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\varepsilon=0.$; por lo tanto, de (1):

$$f(x+h)-f(x)=(f'(x)+\varepsilon)\cdot h\doteq h\,f'(x)=df$$

$$\Rightarrow\quad df\doteq f(x+h)-f(x)$$

$\Rightarrow df$ nos da un valor aproximado del incremento de la función, para h pequeña.

Interpretación geométrica de df:



Ejemplo: 1) Mediante la noción de diferencial, hallar un valor aproximado de $\ln 1.12$

Solución:

Haciendo $y = \ln x$

$$\Rightarrow y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - y \quad ①$$

pero: $\Delta y \doteq dy = \Delta x f'(x)$ ②

de ① y ②

$$\ln(x + \Delta x) \doteq y + \Delta x f'(x) = y + \Delta x \frac{1}{x}$$

puesto que $\ln 1 = 0$; si $x = 1 \Rightarrow \Delta x = 0.12$

$$\ln 1.12 \doteq 0 + 0.12 \frac{1}{1} = 0.12$$

$$\Rightarrow \ln 1.12 \doteq 0.12$$

(las tablas dan: $\ln 1.12 = 0.11333$)

2) Empleando diferenciales, hallar un valor aproximado de $\sqrt[3]{25}$

Solución:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f(x) = y$$

$$y + \Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x} - y$$

pero $\Delta y \doteq dy = \Delta x f'(x)$

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \doteq y + \Delta x \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

si $x = 27$; $\Delta x = -2 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{27}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{27-2} \doteq \sqrt[3]{27} + \frac{(-2)}{27} = 3 - \frac{2}{27}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{25} \doteq 3 - \frac{2}{27}$$

---

3) Calcular, empleando diferenciales, un valor aproximado de $\operatorname{sen} 31°$

Solución: $y = \operatorname{sen} x$

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x+\Delta x) - y$$

$$\operatorname{Sen}(x+\Delta x) \doteq \operatorname{sen} x + \Delta x(+\cos x)$$

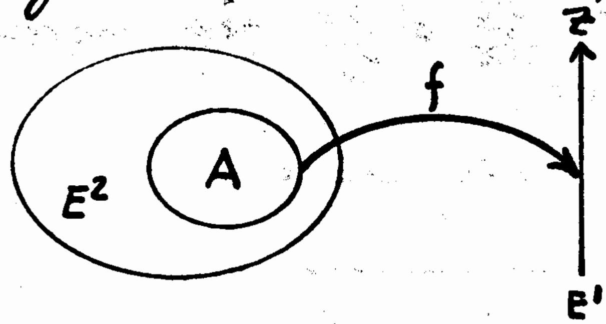
si $x = 30° \Rightarrow \operatorname{sen} 30° = 1/2$; $\cos 30° = \sqrt{3}/2$; $\Delta x = \pi/180$

$$\operatorname{Sen} 31° \doteq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0.5 + 0.01512$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sen} 31 \doteq 0.51512$$

(las tablas dan el valor: $\operatorname{sen} 31° = 0.5150$)

Derivadas parciales.- Sea A un subconjunto abierto de E^2. Definamos una función $f: A \to E^1$ del siguiente modo: $z = f(x, y)$



Si x se mantiene constante, variando entonces sólo y, se define como derivada "parcial" $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

De modo semejante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Otras notaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x = f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = Z_x$$

Ejemplo: Sea $z = f(x, y) = x^2 y + 3y^2 + 7$; Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$:

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 0 + 0 = 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 6y + 0 = x^2 + 6y$$

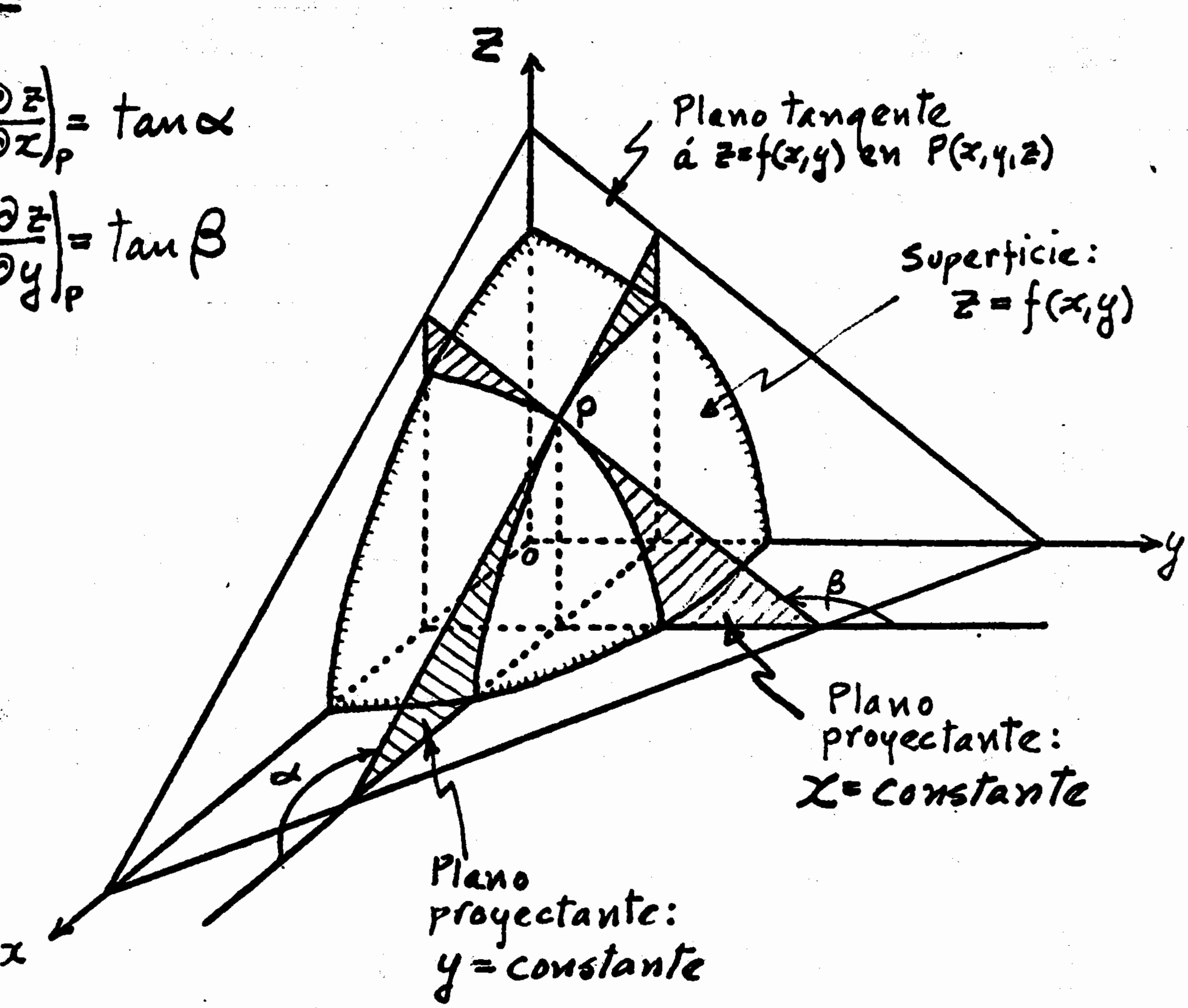
Observación: Aun cuando la derivada ordinaria de $f: E' \to E'$ puede considerarse como el cociente de dos diferenciales: $\frac{dy}{dx} = dy \div dx$; las derivadas "parciales" $\frac{\partial z}{\partial x}$ ó $\frac{\partial z}{\partial y}$ no deben considerarse como cocientes.

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} \neq \frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{(en general)}$$

Interpretación geométrica de la derivada parcial.-

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \tan\alpha$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \tan\beta$$



Derivada parcial de una función de n variables independientes.- Sea A un subconjunto abierto de E^n. Definamos una función $f: A \to E^1$ del siguiente modo: $u = f\underbrace{(x, y, \dots, w)}_{n \text{ variables}}$

Si se mantienen constantes todas, excepto una de las variables independientes; digamos x, resulta u sólo función de x; de ahí que podemos calcular la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, \dots, w) - f(x, y, \dots w)}{h}$$

De manera análoga se definen:

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots, \frac{\partial u}{\partial w}$$

Ejemplo: Sea $u = f(x, y, z) = e^{xyz} + xy \operatorname{sen} z^2$

Calcular: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz e^{xyz} + y \operatorname{sen} z^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz e^{xyz} + x \operatorname{sen} z^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy e^{xyz} + 2xyz \cos z^2$$

Derivadas parciales de orden superior:-

Sea la función f definida como $z = f(x,y)$.

Dado que al derivar f parcialmente resulta la derivada parcial una función de las mismas variables independientes x, y, ésta es a su vez suceptible de volverse a derivar parcialmente:

$$\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(x+h,y) - f_x(x,y)}{h} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

análogamente:

$$\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(x,y+k) - f_x(x,y)}{k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

que recibe el nombre de segunda parcial mixta de z.

De modo semejante se obtienen $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

otras notaciones: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = Z_{xx}$

Observación:- Si $f(x,y)$ tiene derivadas f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}, todas continuas en el punto (x_0, y_0), puede demostrarse que:

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

De ahí que para derivadas parciales de orden superior, no influye el orden en que se efectue la derivación parcial, la derivada parcial mixta que se obtiene es la misma

Ejemplo: Calcular todas las derivadas parciales de orden tres, de la función $u=xy^2e^z$

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2e^z \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y}=2xye^z \ ; \ \frac{\partial u}{\partial z}=xy^2e^z=\frac{\partial^n u}{\partial z^n}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2ye^z ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x\partial z^n} \ ; \ \frac{\partial^{n+1} u}{\partial y\partial z^n}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2xe^z$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0 \ ; \ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}=2e^z \ ; \frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x} \ ; \frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}=0 \ ; \ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$f_{xyz}=f_{xzy}=f_{yxz}=f_{yzx}=f_{zxy}=f_{zyx}=2ye^z$$

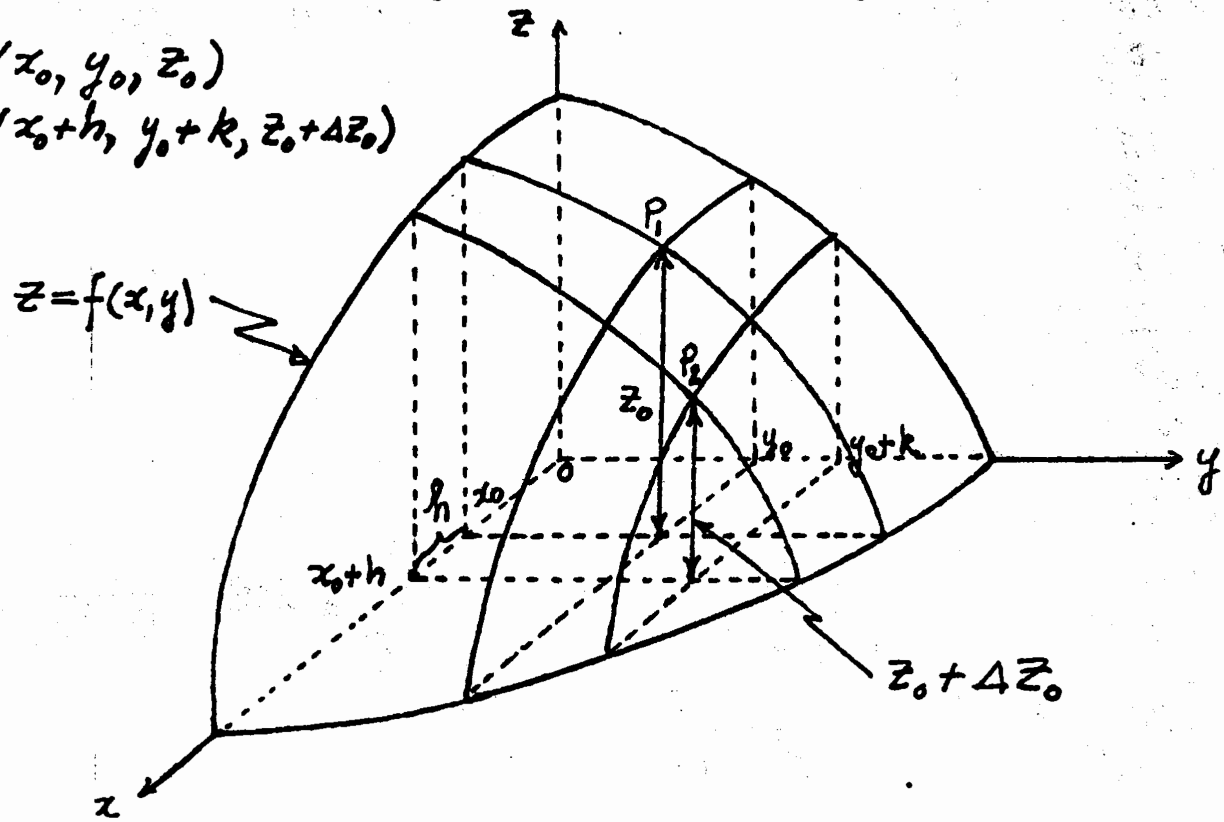
<u>Diferencial total</u>: El propósito es hallar un valor aproximado del incremento Δz de la función $z=f(x,y)$; siendo $f: A \to E^1$; $A \subset E^2$.

Supóngase que las derivadas parciales f_x y f_y son ambas continuas en el punto (x_0, y_0) (A es un subconjunto abierto)

Sea $z_0 + \Delta z_0 = f(x_0+h, y_0+k)$

$$\Rightarrow \Delta z_0 = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \quad (1)$$

$P_1(x_0, y_0, z_0)$
$P_2(x_0+h, y_0+k, z_0+\Delta z_0)$



Sumemos y restemos $f(x_0, y_0+k)$ al segundo miembro de (1):

$$\Delta z_0 = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) \quad (2)$$

Mantengamos k constante, y apliquemos el teorema del valor medio para derivadas a la función $f(x, y_0+k)$ de la variable x, para obtener un número real v, $(x_0 < v < x_0+h)$, tal que:

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}=f_x(v,y_0+k) \quad (3)$$

Análogamente, apliquemos el teorema del valor medio para derivadas a la función $f(x_0,y)$ de la variable y, para obtener un número real w, $(y_0 < w < y_0+k)$, tal que

$$\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}=f_y(x_0,w) \quad (4)$$

multiplicando (3) por h; (4) por k; substituyendo en (2):

$$\Delta z_0 = f_x(v,y_0+k)\cdot h + f_y(x_0,w)\cdot k \quad (5)$$

$$\text{haciendo}\begin{cases} \varepsilon_1 = f_x(v,y_0+k)-f_x(x_0,y_0) \\ \varepsilon_2 = f_y(x_0,w)-f_y(x_0,y_0)\end{cases} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(v,y_0+k) = f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1 \\ f_y(x_0,w) = f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2\end{cases} \quad (7)$$

(7) en (5):

$$\Delta z_0 = [f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1]\cdot h + [f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2]\cdot k \quad (8)$$

Dado que, por hipótesis f_x y f_y son continuas en (x_0,y_0), de (6) resulta:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f_x(v,y_0+k)-f_x(x_0,y_0)] = f_x(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)=0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f_y(x_0,w)-f_y(x_0,y_0)] = f_y(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)=0$$

ya que, se tiene: $x_0 < v < x_0+h$; $y_0 < w < y_0+k$

si $(h,k)\to(0,0) \Rightarrow v\to x_0$; $w\to y_0$

Por lo anterior, de ⑧:

$$\Delta z_0 \doteq f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\cdot k \quad ⑨$$

siendo la ecuación ⑨ exacta en el límite, cuando $(h,k)\to(0,0)$.

Si se hacen: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x_0,y_0)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x_0,y_0)$;
$h = dx$; $k = dy$; $dz = \Delta z_0$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

dz se denomina diferencial "total" de z

Observación: 1.- La diferencial total dz tiene la misma forma ya sea que x, y, z sean variables independientes, ó que sean dependientes de alguna otra variable t.

2.- Si $f: B\to E'$; $B\subset E^n$; siendo:
$u = f\underbrace{(x, y, \ldots, w)}_{n \text{ variables}}$; la diferencial total du es:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial w}dw$$

(B es un subconjunto abierto)

Derivación parcial en cadena:- Sea $z=f(x,y)$ una función continua, con primeras derivadas parciales continuas, siendo $x=x(u,v)$; $y=y(u,v)$, supongamos que existen $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

Se demostrará que:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Demostración:

$$z = f(x,y) = f[x(u,v), y(u,v)]$$

Calculemos el incremento Δx de la función $x(u,v)$, al incrementar sólo la variable u

$$\Delta x = x(u+\Delta u, v) - x(u,v)$$

de modo análogo:

$$\Delta y = y(u+\Delta u, v) - y(u,v)$$

pero:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

haciendo en (8) $h=\Delta x$, $k=\Delta y$:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta u} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta u} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (10)$$

dado que:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{\partial x}{\partial u} \; ; \; \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\partial y}{\partial u}$$

Si $\Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$

substituyendo en (10)

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad (11) \checkmark$$

de manera semejante resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \quad (12) \checkmark$$

De la fórmula (11) (ó (12)) puede justificarse la afirmación anterior donde se advirtió que la derivada parcial no es un cociente.

Si fuera cociente:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\cancel{\partial x}}\frac{\cancel{\partial x}}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\cancel{\partial y}}{\cancel{\partial u}} = 2\frac{\partial f}{\partial u}$$

$\Rightarrow 1 = 2 \Rightarrow$ por no ser cocientes, no es admisible la cancelación anterior.

Derivada de una función implícita.-

Sea $f(x,y)=0$; siendo $y=\varphi(x)$

$$\Rightarrow f[x,\varphi(x)] = 0$$

$$\Rightarrow df = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Ejemplos: 1) Dada la función $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ calcular $\frac{dy}{dx}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{2}{3}y^{-1/3}}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

(obsérvese que no es necesario despejar la y)

2) Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x^3+y^3+z^3+3xyz=8$

Solución:

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+3xy\frac{\partial z}{\partial x}+3yz=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2+yz}{xy+z^2}$$

$$3y_2+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+3xy\frac{\partial z}{\partial y}+3xz=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2+xz}{xy+z^2}$$

La derivación en cadena puede generalizarse para cualquier número de variables independientes; por ejemplo: Sea $w = f(x,y,z)$; siendo: $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$; $z = z(u,v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Si $s = f(x,y,u,v)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$; $u = u(t)$; $v = v(t)$:

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt}$; puesto que $s = f[x(t), y(t), u(t), v(t)] = s(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Ejemplo: La base B de un trapecio incrementa su longitud a razón de $2^{cm}/seg$; en tanto que la base b decrece a razón de $1^{cm}/seg$; la altura h aumenta $3^{cm}/seg$. Determinar la rapidez con la cual varía el área A cuando: B = 50 cm., b = 30 cm, h = 10 cm.

Solución: $A = \frac{1}{2}(B+b)h$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dt} + \frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$= \left(\frac{1}{2}h\right)(2) + \left(\frac{1}{2}h\right)(-1) + \frac{1}{2}(B+b)(3)$$

$$= 10 - 5 + 120 = 125\ ^{cm^2}/seg.$$

Ejemplos: 1) Dada la función $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ calcular $\frac{dy}{dx}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{2}{3}y^{-1/3}}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

(obsérvese que no es necesario despejar la y)

---

2) Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x^3+y^3+z^3+3xyz=8$

Solución:

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+3xy\frac{\partial z}{\partial x}+3yz=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2+yz}{xy+z^2}$$

$$3y_2+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+3xy\frac{\partial z}{\partial y}+3xz=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2+xz}{xy+z^2}$$

La derivación en cadena puede generalizarse para cualquier número de variables independientes; por ejemplo: Sea $w = f(x,y,z)$; siendo: $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$; $z = z(u,v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Si $s = f(x,y,u,v)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$; $u = u(t)$; $v = v(t)$:

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{df}{dt}$; puesto que $s = f[x(t), y(t), u(t), v(t)] = s(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Ejemplo: La base B de un trapecio incrementa su longitud a razón de 2 cm/seg ; en tanto que la base b decrece a razón de 1 cm/seg ; la altura h aumenta 3 cm/seg. Determinar la rapidez con la cual varía el área A cuando: $B = 50$ cm., $b = 30$ cm, $h = 10$ cm.

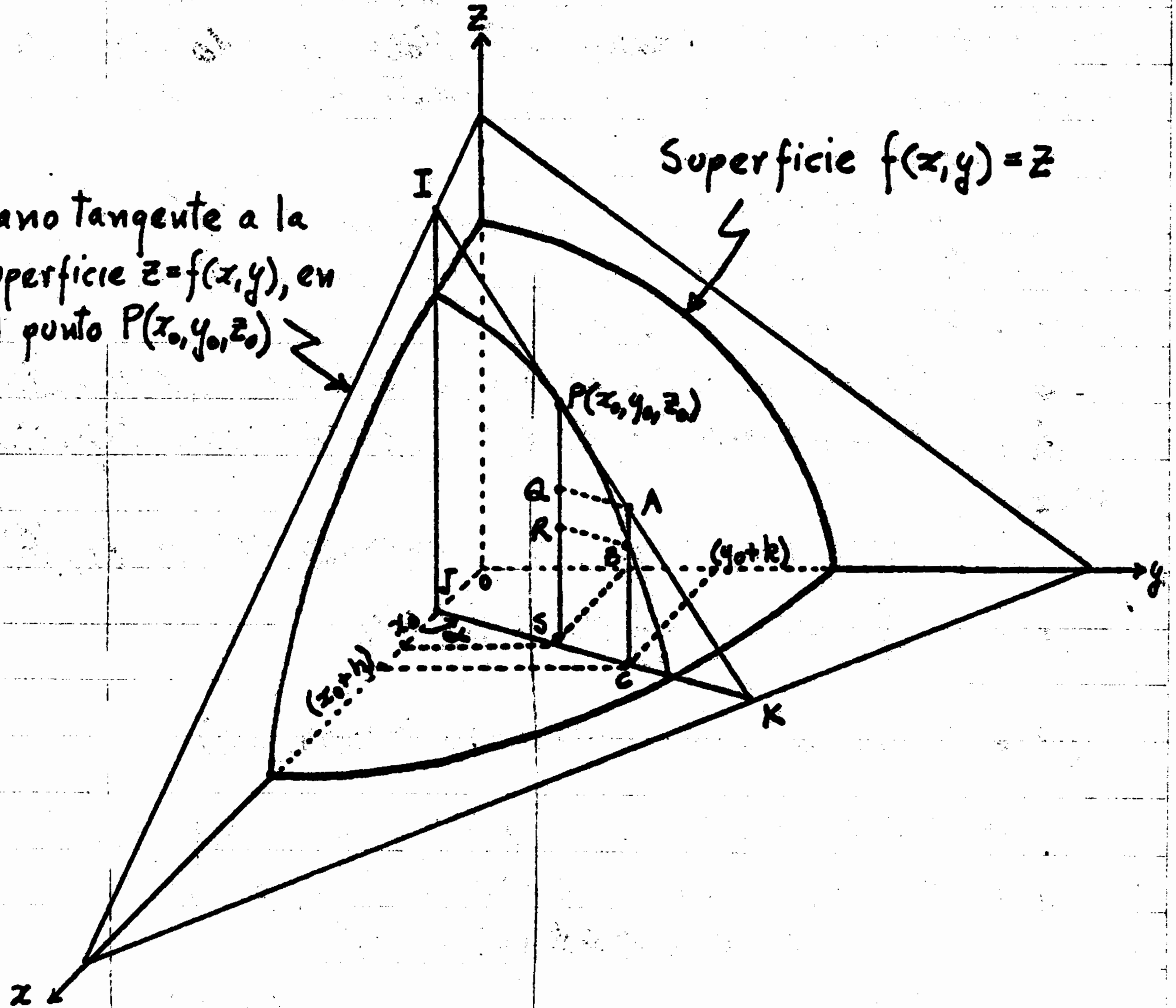
Solución : $A = \frac{1}{2}(B+b)h$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dt} + \frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

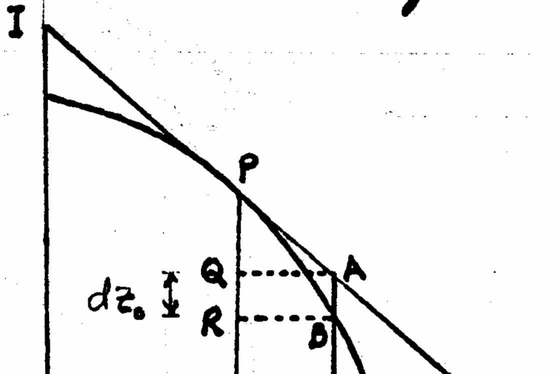
$$= \left(\tfrac{1}{2}h\right)(2) + \left(\tfrac{1}{2}h\right)(-1) + \tfrac{1}{2}(B+b)(3)$$

$$= 10 - 5 + 120 = 125 \text{ cm}^2/\text{seg.}$$

Interpretación geométrica de la diferencial total:



Abatiendo el plano proyectante IJK, de modo que coincida con el plano del papel:



$$z_0 = \overline{PS} = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta z_0 = \overline{BC} - \overline{PS} = \overline{PR} =$$

$$= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$$

$$dz_0 = \overline{AB} = \overline{QR}$$

$$\Delta z_0 - dz_0 = \overline{PR} - \overline{QR} = \overline{PQ}$$

si $C \to S \Rightarrow$

$\overline{PQ} \to 0$; $\overline{QR} \to \overline{PR}$

77

Ejemplo: 1) Un prisma rectangular, de aristas a, b, c ; siendo $a=5m$; $b=4m$; $c=12m$. se fabrica erróneamente, de modo que las medidas exactas son: $a=5.002\ m$; $b=4.001m$; $c=12.003\ m$. Calcular:

i) Un valor aproximado del error que se comete al calcular el volumen V como $V=5\times4\times12=240\ m^3$

ii) El valor exacto del error en volumen: ΔV

iii) representar el error en forma esquemática.

i) $V=xyz=abc$; $da=0.002$; $db=0.001$; $dc=0.003$

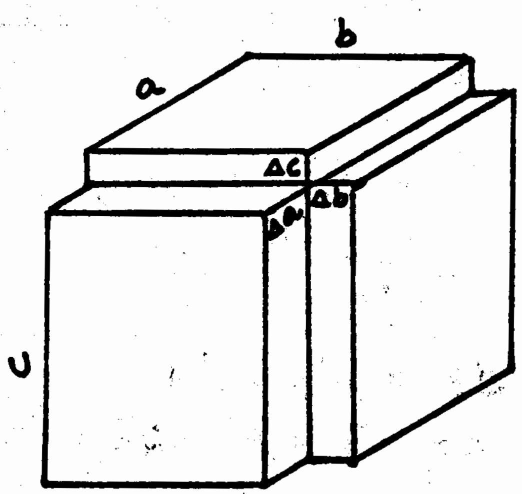
$$dV=\frac{\partial V}{\partial a}da+\frac{\partial V}{\partial b}db+\frac{\partial V}{\partial c}dc$$

$$dV=0.002(bc)+0.001(ac)+0.003(ab)$$

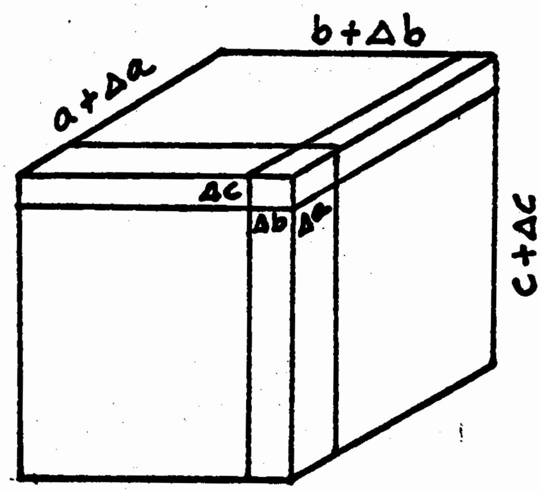
$$=0.096+0.060+0.060=0.216\ m^3$$

ii) $\Delta V=(a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c)-abc$
$=0.216\,063\,006\ m^3$

$V+dV$:



$V+\Delta V$:



$$\Delta V-dV=a\Delta b\Delta c+b\Delta a\Delta c+c\Delta a\Delta b+\Delta a\Delta b\Delta c$$

2) Hallar un valor aproximado de $\sqrt{5.98^2 + 8.01^2}$

Solución:

Sea $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Se busca: $f(5.98, 8.01)$

Considerando que $f(6,8) = 10$

$$\Delta z = f(6-0.02, 8+0.01) - f(6,8)$$

$$\Rightarrow h = -0.02 \; ; \; k = 0.01 \; ; \; x_0 = 6 \; ; \; y_0 = 8$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Delta z \doteq df = \frac{6}{10}(-0.02) + \frac{8}{10}(0.01) = -0.004$$

$$\Rightarrow \sqrt{5.98^2 + 8.01^2} \doteq 10 - 0.004 = 9.996$$

(el valor exacto, con 7 cifras decimales es: 9.9959992...)

---

3) Si $z = f(x,y)$; siendo $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$,
Determinar la diferencial total $dz = F(x,y)$

Solución:

$$z = f(x,y) = f[x(u,v), y(u,v)] = g(u,v)$$

$$\Rightarrow dz = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (1)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

79

Mediante las fórmulas para derivar en cadena se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Substituyendo estos valores en ①:

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

$$\Rightarrow \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Con lo cual queda comprobado que dz tiene la misma forma, ya sean x, y variables independientes, ó sean funciones de otras variables.

Derivación bajo el signo de integración:

Teorema: Sea:

$$\phi(\alpha) = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

siendo $u_1(\alpha)$, $u_2(\alpha)$ funciones derivables en un intervalo cerrado $[a,b]$; $f(x,\alpha)$, $f_\alpha(x,\alpha)$ son funciones continuas en la región del plano x,α definida por $u_1 \leq x \leq u_2$, $a \leq \alpha \leq b$.

Se verifica:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx - f(u_1,\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + f(u_2,\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} \quad (1)$$

La ecuación (1) se conoce como regla de Leibnitz.

Demostración.-

$$\phi(\alpha) = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

$$\Delta\phi = \phi(\alpha+\Delta\alpha) - \phi(\alpha)$$

$$= \int_{u_1(\alpha+\Delta\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u_1(\alpha}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \quad (2)$$

La primera integral de (2) puede escribirse:

$$\int_{u_1(\alpha+\Delta\alpha)}^{u_1(\alpha)} + \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} + \int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} \quad (3)$$

Por tener los mismos límites, pueden combinarse la última integral de (2) con la 2ª de (3)

Substituyendo en (2):

$$\Delta\phi = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx + \int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u_1(\alpha)}^{u_1(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

aplicando el teorema del valor medio para integrales:

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx = \Delta\alpha \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\xi)\,dx \quad (4)$$

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_1(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)[u_1(\alpha+\Delta\alpha)-u_1(\alpha)] \quad (5)$$

$$\int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)[u_2(\alpha+\Delta\alpha)-u_2(\alpha)] \quad (6)$$

donde
$$\begin{cases} \alpha < \xi < \alpha+\Delta\alpha \\ u_1(\alpha) < \xi_1 < u_1(\alpha+\Delta\alpha) \\ u_2(\alpha) < \xi_2 < u_2(\alpha+\Delta\alpha) \end{cases}$$

Substituyendo, y dividiendo entre $\Delta\alpha$:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\alpha} = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\xi)\,dx + f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_2}{\Delta\alpha} - f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_1}{\Delta\alpha}$$

tomando el límite cuando $\Delta\alpha \to 0$; ($f_\alpha(x,\alpha)$ continua)

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\alpha)\,dx + f[u_2(\alpha),\alpha]\frac{du_2}{d\alpha} - f[u_1(\alpha),\alpha]\frac{du_1}{d\alpha}$$

ó sea:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx - f(u_1,\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + f(u_2,\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} \quad \checkmark$$

Si $u_1 = c_1$; $u_2 = c_2$ = constantes:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{c_1}^{c_2} f(x,\alpha)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$$

Ejemplos:

1) Calcular $\frac{d\phi}{d\alpha}$, si: $\phi(\alpha) = \int_{-\alpha^2}^{2\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx$

Solución:

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{-\alpha^2}^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx - e^{-\frac{(-\alpha^2)^2}{\alpha^2}}(2\alpha) + e^{-\frac{(2\alpha)^2}{\alpha^2}}(2)$$

$$= \int_{-\alpha^2}^{2\alpha} \frac{2x^2}{\alpha^3} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx + 2\alpha e^{-\alpha^2} + 2e^{-4}$$

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^3}\int_{-\alpha^2}^{2\alpha} 2x^2 e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx + 2\alpha e^{-\alpha^2} + 2e^{-4}$$

---

2) Sabiendo que $\int_0^b \cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha b$

Demostrar que: $\int_0^b x^2\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha^3}(\alpha^2 b^2 \operatorname{sen}\alpha b + 2\alpha b\cos\alpha b - 2\operatorname{sen}\alpha b)$

Solución

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^b \cos\alpha x\,dx = \int_0^b x\operatorname{sen}\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha^2}(\operatorname{sen}\alpha b - \alpha b\cos\alpha b)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_0^b \cos\alpha x\,dx = \frac{d}{dx}\int_0^b x\operatorname{sen}\alpha x\,dx = \int_0^b x^2\cos\alpha x\,dx =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha^2}(\operatorname{sen}\alpha b - \alpha b\cos\alpha b)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha^3}(\alpha^2 b^2\operatorname{sen}\alpha b + 2\alpha b\cos\alpha b - 2\operatorname{sen}\alpha b) \checkmark$$

Nota: Si $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$, la regla de Leibnitz sólo es aplicable si $\int_a^\infty f_\alpha(x,\alpha)\,dx$ converge uniformemente.

3) Calcular $F(t)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos tx\,dx$ (1)

Solución:

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen} tx\,dx\cdot x$$

integrando por partes: $u=\operatorname{sen} tx$; $dv = xe^{-x^2}dx$

$$F'(t)=\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\operatorname{sen} tx\right]_0^\infty-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}t\cos tx\,dx$$

$$= 0 - \frac{t}{2}F(t)$$

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{t}{2}F$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{F} = -\frac{t}{2}dt$$

$$\int\frac{dF(t)}{F(t)} = -\frac{1}{2}\int t\,dt$$

$$\ln F(t) = -\frac{t^2}{4}+c_1$$

haciendo $c_1=-\ln C$

$$\ln C\,F(t) = -\frac{t^2}{4} \Rightarrow C\,F(t) = e^{-\frac{t^2}{4}} \quad (2)$$

$F(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ (de (1)) ; $F(0)=\frac{1}{C}$ (de (2))

pero: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Integral de Gauss)

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos tx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}$$

4) Calcular la integral: $u = \int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$

Solución:

Introduciendo el parámetro α:

$$u(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx \quad ①$$

$$u'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx$$

haciendo $z^2 = \alpha x^2 \Rightarrow dx = \frac{dz}{\sqrt{\alpha}}$

$$u'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ;\ (\text{integral de Gauss})$$

$$d\,u(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow u(\alpha) = \sqrt{\pi\alpha} + C \quad ②$$

de ①: $u(0) = 0$; de ② $u(0) = C \Rightarrow C = 0$

haciendo $\alpha = 1$, de ① y ②

$$u = \int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

---

5) Calcular la integral: $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$

Solución:

Introduciendo el parámetro α:

$$\phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,dx \quad ① \ ;\ \alpha > 0$$

Puesto que $f(x,\alpha) = \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}$; $0 < x < 1$;
$f(0,\alpha) = 0$; $f(1,\alpha) = \alpha \Rightarrow f(x,\alpha)$ es continua

para x y para α en los intervalos $0 \leq x \leq 1$; y para toda $0 < \alpha < \infty$, $\Rightarrow$ podemos aplicar la regla de Leibnitz.

$$\phi'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{\ln x}\, dx$$

$$\phi'(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

integrando ahora con respecto á α:

$$\phi(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \ln(\alpha+1) + C \quad (2)$$

de (1) : $\phi(0) = 0$; de (2) : $\phi(0) = C \Rightarrow C = 0$

$$\therefore \quad \phi(\alpha) = \ln(\alpha+1)$$

haciendo $\alpha = 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$$

Algunos libros de referencia:

1.- "Fundamental concepts of analysis"
A. H. Smith, W. A. Albrecht.
(Edit. Prentice Hall) 1966

2.- "Introduction to analysis" Vol. I
N. B. Haaser, J. P. La Salle, J. A. Sullivan.
(Edit. Blaisdell) 1959

3.- "A programed course in calculus" (Vols. I al V)
(18 autores)
(Edit. W. A. Benjamin, Inc.) 1968

4.- "Advanced calculus"
(R. C. Buck)
(Edit. Mc. Graw-Hill) 1965

5.- "Calculus" Vol I
T. M. Apostol
(Edit. Blaisdell) 1962

6.- "Introducción al cálculo".
C. Imaz
(Edit. Trillas) 1970

7.- "Advanced calculus"
M. R. Spiegel
(Edit. Schaum) 1963